UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

MIGUEL RODRIGO DE MEDEIROS

O ENSINO DE ÁREAS E VOLUMES COM O USO DE OBJETOS MANIPULATIVOS

Sorocaba
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

O ENSINO DE ÁREAS E VOLUMES COM O USO DE OBJETOS MANIPULATIVOS

Miguel Rodrigo de Medeiros

Orientador: Prof. Dr. Wladimir Seixas

Sorocaba
2013

O ENSINO DE ÁREAS E VOLUMES
COM O USO DE OBJETOS MANIPULATIVOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre sob orientação do Professor Doutor Wladimir Seixas.

Sorocaba

2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

M488ea

Medeiros, Miguel Rodrigo de.
O ensino de áreas e volumes com o uso de objetos manipulativos / Miguel Rodrigo de Medeiros. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
142 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Geometria. 2. Ciências exatas. 3. Currículo escolar. 4. São Paulo (Estado). I. Título.

CDD: 516 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Wladimir Seixas
DFQM – UFSCar - orientador

Prof. Dr. Henrique Lazari
IGCE – UNESP

Prof. Dr. Antonio Luis Venezuela
DFQM – UFSCar

Dedico este trabalho a toda a minha família, pelo incentivo e palavras de otimismo, especialmente a minha filha Clara Rafaela Silva Medeiros, a minha amada esposa Neusa da Silva Medeiros, pelo apoio durante tempo de dedicação ao mestrado e a minha mãe Anesia Maria dos Santos, que sempre esteve presente em minha vida escolar.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus e a Nossa Senhora de Aparecida pelas graças e benções recebidas diariamente.

Ao meu orientador Prof. Dr. Wladimir Seixas, pela paciência, confiança e orientações prestadas para a realização deste trabalho de pesquisa.

Ao corpo docente do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas da UFSCar, pela dedicação na ministração das disciplinas, que contribuíram para o meu amadurecimento acadêmico.

A minha filha Clara Rafaela, pela compreensão de muitas vezes ter deixado de brincar com ela.

À minha esposa Neusa pelo incentivo, apoio e compreensão.

À minha mãe Anesia, que sempre me incentivou na vida escolar, acreditando em minha capacidade.

Ao meu irmão Marcos, pelo apoio e amizade.

Aos colegas do mestrado, pela colaboração e companheirismo, que de certa forma contribuíram com este trabalho (Márcio, Kátia, Marcos, Taísa, Donizete, Dimitre, Juliana, Leila, Arquiteclínio, Fábio, Felipe, etc.)

Aos responsáveis pelo Programa Bolsa Mestrado da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro.

Não espere que façam por você
o que você pode fazer.
Antônio

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é analisar e avaliar as evoluções metodológicas propostas para o Ensino de Geometria, na Escola Pública do Estado de São Paulo no nível do Ensino Médio, nas últimas décadas. Elaboramos uma proposta de uma sequência didática utilizando objetos manipulativos, auxiliando o professor de matemática na construção dos conceitos de áreas e volumes.

Palavras-chaves: Ensino de Geometria. Áreas e Volumes. Objetos manipulativos. Currículo do Estado de São Paulo.

ABSTRACT

The objective of this research is to analyze and evaluate methodological developments proposed for the teaching of geometry, in public school in the State of São Paulo in the high school level in recent decades. We elaborate a proposal of a didactic sequence using manipulative objects, assisting the teacher of mathematics at the construction of concepts of areas and volumes.

Key-words: Teaching of geometry. Areas and Volumes. Manipulative objects. Curriculum of the State of São Paulo in Brazil.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Por que aprender Geometria? Na verdade, para justificar a necessidade de se ensinar Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem este conceito as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas. Além disso não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano.

Sem conhecer a Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das idéias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. “A Geometria está por toda parte”, sendo comum conseguir enxergá-la, mesmo não querendo. Lidamos em nosso cotidiano com as idéias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume)e simetria. Seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria.

Pesquisas psicológicas indicam que a aprendizagem geométrica é necessária ao desenvolvimento da criança pois inúmeras situações escolares requerem percepção espacial, tanto em Matemática (por exemplo: algoritmos, medições, valor posicional, séries, sequências...) como na Leitura e Escrita.

A Geometria é um excelente apoio as outras disciplinas. Por exemplo, como interpretar um mapa sem o auxílio da Geometria? E um gráfico estatístico? Como compreender conceitos de medida sem idéias geométricas? A história das civilizações está repleta de exemplos ilustrando o papel fundamental que a Geometria (que é carregada de imagens) teve na conquista de conhecimentos artísticos, científicos e, em especial, matemáticos.

A imagem desempenha importante papel na aprendizagem e é por isso que a apresentação de tabelas, fórmulas, enunciados, etc., sempre recebem uma interpretação mais fácil com o apoio geométrico.

A Geometria pode esclarecer situações abstratas, facilitando a comunicação da idéia matemática. Einstein tinha o hábito de geometrizar suas idéias. Ele dizia que facilitava a comunicação delas e a evolução de seu pensamento. Em 1921, ele escreveu: “Atribuo especial importância à visão que tenho da Geometria, porque sem ela eu não teria sido capaz de formular a teoria da relatividade”[1].

A Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui. Ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetivos e relações dela

[1] Conferência Geometria e Experiência proferida em 27 de janeiro de 1921 na Academia Prussiana de Ciências

correspondem aos das outras. Assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificadas pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz (LORENZATO, 1995, p. 5-7).

A presença da Matemática no currículo escolar costuma ser justificada por sua aplicabilidade social e pelo fato de seu domínio ser considerado indispensável para a "boa" sobrevivência do cidadão em dias atuais.

O conhecimento matemático, em particular o geométrico, possibilita a inserção e atuação do indivíduo na sociedade de diversas maneiras, como, por exemplo, na visão tridimensional de espaço, na atuação de diferentes profissionais (pedreiros, mestres de obras, arquitetos, engenheiros, agrônomos, biólogos, etc.) e no desenvolvimento das habilidades de raciocinar de maneira lógico-dedutível, de argumentar e de abstrair.

Apesar dessas constatações, o ensino da geometria foi sendo trocado pelo trabalho aritmético e algébrico em sala de aula. Assim, a Geometria foi deixada como último tema a ser trabalhado no ano letivo, alegando-se para isso a falta de tempo do professor e o fato de vários livros didáticos abordarem o tema somente em seus últimos capítulos. Diante dessa situação, surgiram as questões que norteiam essa pesquisa: "Como está sendo abordado o ensino da Geometria nas escolas públicas, agora com o novo Currículo do Estado de São Paulo?" e "De que maneira é possível uma abordagem significativa com o uso de objetos manipulativos o estudo de conteúdos de Geometria Espacial do Ensino Médio, mas precisamente o estudo de áreas e volume, com base no Currículo do Estado de São Paulo?"

Ao pesquisar trabalhos realizados por Pavanello (1989), Lorenzato (1995), Crowley (1994), dentre outros, revelaram que os principais fatores de não se ensinar geometria na escola era a falta de um currículo sequencial e a falta de habilidade do professor de matemática em diagnosticar o que seu aluno já sabe dos conceitos geométricos para assim saber o ponto do qual deve partir no processo de ensino e aprendizagem da área.

Desta forma, o Currículo do Estado de São Paulo traz que os grandes temas, "Números, Medidas e Geometria" tenham um tratamento simultâneo, em espiral, sempre que possível, em vez do estudo de uma sequência linear de assuntos, sem prejuízo de certos temas, como a Geometria, quase sempre deixada para o fim da programação letiva. Traz também que, no desenvolvimento dos temas sejam evidenciadas idéias fundamentais como, por exemplo, a de proporcionalidade, a qual aparece no desenvolvimento do tema Números (razões, proporções) e também em Geometria (semelhança de figuras). No entanto, acreditamos que o professor precisa de um apoio maior, além de mais sugestões nesse assunto.

O Currículo do Estado de São Paulo, para o Ensino Fundamental e Médio, apresenta os conteúdos de forma espiral. Mais do que isso, os conceitos geométricos são tomados como elos articuladores dos demais saberes matemáticos a serem trabalhados. Ao assim proceder, o objetivo é o de tornar a aprendizagem da geometria mais significativa aos alunos, favorecendo assim a interdisciplinaridade e a articulação entre os diversos conceitos matemáticos a serem trabalhados. Exemplo disto é o trabalho das primeiras noções de Geometria Analítica já nos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, onde a utilização de mapas e coordenadas são os precursores da introdução do conceito de Plano Cartesiano (8º e 9º anos), o qual, por sua vez, é pré-requisito para o ensino do conceito de função na 1ª série do Ensino Médio.

Assim, os objetivos desta pesquisa, em nível de Mestrado Profissionalizante, é de analisar e avaliar a evoluções metodológicas propostas para o Ensino de Geometria, na Escola Pública do Estado de São Paulo, em nível do Ensino Médio, nas últimas décadas e de propor uma sequência didática utilizando objetos manipulativos, auxiliando o professor de matemática na construção dos conceitos de áreas e volumes.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano [...]. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. (BRASIL, 2006, p. 75).

A transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial, é muitas vezes difícil para o aluno. Pois como habitantes de um mundo tridimensional, temos grande facilidade para lidar com o mundo bidimensional da Geometria Plana. Modelos concretos para os objetos com que lidamos na Geometria Plana são fáceis de construir e manipular, onde as superfícies sobre as quais escrevemos ou desenhamos são excelentes modelos para o plano da Geometria e permitem representar com fidelidade retas, polígonos, círculos e demais figuras planas. Desta maneira, podemos facilmente concretizar as noções abstratas da Geometria.

Quando passamos para o mundo tridimensional da Geometria Espacial passamos a enfrentar limitações de diversas ordens. Assim, recorremos as projeções bidimensionais dos objetos. No entanto, estas projeções distorcem ângulos, modificam comprimento e segmentos e não permitem distinguir pontos que estejam sobre a mesma linha de projeção.

Estas dificuldades são parte da razão pela qual a Geometria Espacial costuma ser introduzida de modo bem mais formal que a Geometria Plana. Sabemos que a geometria tem sido por séculos, um dos melhores exemplos de uma teoria matemática rigorosa, em que resultados (teoremas) são demonstrados utilizando argumentos lógicos, a partir de alguns fatos tomados como ponto de partida (postulados).

Esta dissertação está estruturada nos seguintes capítulos:

Capítulo 1: É realizado um breve levantamento histórico de como tem sido abordado o

Ensino de Geometria nas últimas décadas, abordando a influência do Movimento da Matemática Moderna. Em seguida, é feito um estudo panorâmico do Currículo do Estado de São Paulo, desde a idealização até a sua consolidação. Também apresentamos o Caderno do Professor de Matemática, volume 4 da 2ª série do Ensino Médio, realizando comentários sobre as situações de aprendizagem que compõem este caderno. O estudo do Currículo e do Caderno é considerado importante, uma vez que esses documentos trouxeram novas perspectivas à ação educativa, além de comporem a base deste trabalho de pesquisa.

Capítulo 2: Este capítulo é destinado ao referencial teórico matemático, trazendo como referencia o livro "Medidas e Formas em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança" de Elon Lages Lima (LIMA, 2009), realizando uma abordagem sobre áreas de diferentes figuras e volumes de diferentes objetos.

Capítulo 3: Apresentamos as Teorias da Educação, abordando a Resolução de Problemas tendo como referencial Polya (1978) e o Modelo de Van Haile (CROWLEY, 1994), junto com uma análise dos documentos oficiais, o Parâmetro Curricular Nacional (PCN) (BRASIL, 1998), o Parâmetro Curricular Nacional para Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 1999) e a Orientação Curricular do Ensino Médio (OCEM) (BRASIL, 2006).

Capítulo 4: Descrevemos as atividades aplicadas em sala de aula, a apresentação da escola e da turma, fornecendo diferentes situações manipulativas que abordam os conceitos de áreas e volume que podem ser utilizadas por outros profissionais.

Capítulo 5: Este capítulo é dedicado à análise das atividades e dos resultados obtidos. Apresentamos os relatos dos alunos e professores que fortaleceram a análise das atividades e dessa forma sustentam o uso dos objetos manipulativos.

Conclusão são apresentadas as considerações finais deste trabalho.

1 TRAJETÓRIA DO ENSINO DE GEOMETRIA

Segundo o que indica a maioria os escritores sobre a história da Matemática, a Geometria teve sua origem no Antigo Egito com a necessidade da demarcação de terras e do cálculo de áreas. Entretanto, a origem da Geometria data de muito antes dessa época, mesmo antes da escrita (3500 a.C.), e foi desenvolvida em virtude das necessidades cotidianas das comunidades antigas que no período Neolítico (Idade da Pedra) começaram a deixar a vida nômade, fixando-se em um lugar específico e vivendo do cultivo da terra.

A geometria utilizada pelo povo egípcio (por volta de 2500 a.C.) era experimental, mas tinha uma formalidade maior do que a dos povos mais antigos. Era usada para retratar a vida cotidiana e na criação artística. Os egípcios sabiam como descobrir a área de uma figura com lados retos dividindo-a em triângulos e isto talvez tenha contribuído para que muitos estudiosos datassem o início da Geometria a partir dessa civilização.

Com o desenvolvimento da Astronomia, a navegação expandiu-se, necessitando de outras formas de orientação. Surgiu a Cartografia, que se serve de conceitos geométricos (PAVANELLO, 1989).

Com as cheias do Nilo também era preciso fixar limites para as propriedades nas quais eram feitas as plantações. O conhecimento geométrico era muito importante para a demarcação das propriedades de modo a conservá-las em número de propriedades e com a mesma área. Para isso foram utilizados conceitos de reta, ângulos e figuras geométricas planas e realizados cálculos de áreas dessas figuras.

A construção civil expandiu-se paralelamente ao desenvolvimento da agricultura, para a armazenagem da produção agrícola foram necessários locais apropriados. Esses locais foram construídos com tijolos ou pedras e, para a construção, foram necessárias as idéias de ângulos reto, perpendiculares (utilização do fio de prumo), área e volume de figuras e sólidos, elaboração de desenhos em escala (PAVANELLO, 1989).

Entre as construções, as pirâmides talvez sejam as que mais demonstram o arsenal de conhecimento matemático e geométrico desenvolvido e empregado pelos egípcios. A civilização grega também se debruçou sobre o estudo da Geometria, foram os Gregos que deram o nome de Geometria (geo = terra; metria = medida) a este ramo da Matemática, as justificativas para aquilo que os egípcios conheciam empiricamente como Geometria foram dadas pelos gregos, que formalizaram esse conhecimento no tempo ocioso decorrente da vida junto à nobreza. Assim desenvolveu a estrutura teórica da Geometria a partir da geometria prática dos egípcios e de outros povos.

Com as grandes navegações dos séculos XIV, XV e XVI e, como consequência, o aumento das atividades comerciais e industriais e também, a invenção da imprensa em

1440, fez com que o estudo e o ensino da Matemática começassem a se desenvolver na Europa. Escolas práticas começaram a ministrar cursos de Aritmética Prática, Álgebra, Contabilidade, Navegação e Trigonometria. Era um estudo individualizado que ocorria no próprio local de trabalho do mestre, mas esta evolução não influenciou as instituições escolares tradicionais.

Segundo Miorim (1998, p. 37), foi Leonardo da Vinci (1452-1519) que percebendo o descompasso entre o desenvolvimento das novas ciências e o ensino ministrado nas escolas e universidades, "levantou-se em defesa de uma educação voltada para a realidade, mais ligada à experiência e à observação, preconizando que as Matemáticas deveriam desempenhar papel fundamental".

Outro ardoroso defensor dos estudos matemáticos foi Pierre de la Ramée (1515-1572), cuja obra, publicada em 1580, preocupava-se com as aplicações práticas da Matemática. O século XVII viu nascer à ciência moderna, pela combinação dos métodos experimentais e indutivos com a dedução Matemática, naquela época surgiram os conceitos de função e do Cálculo Infinitesimal. Se fosse necessário apontar o primeiro inventor do Cálculo, esse seria Isaac Newton (1642-1727), embora Gottfried W. Leibniz (1646-1716), um pouco depois, mas independente do primeiro, tenha chegado ao mesmo conceito (BOYER, 1974).

Mas não foi só a Matemática que sofreu transformações. Houve também avanços na maneira de ensinar e para isto quem mais contribuiu foi Jan Amos Comenius (1592-1671), considerado o "Pai da Didática", devido à obra cujo título é "Didactica Magna". Nela o autor forneceu os fundamentos para o desenvolvimento educacional dos séculos seguintes.

O século XVIII foi árido para o desenvolvimento da Matemática, mais foi o século de muitas conquistas para a humanidade. Ocorreram as Revoluções Francesas, Americana, Industrial e da Educação, sendo esta última provocada, principalmente, pelas idéias de Jean-Jacques Rousseau (1712-1778) e complementadas por Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1778). Esse seguidor das idéias de Rosseau propôs um ensino não repressivo, que acompanhasse o desenvolvimento da criança, que começasse com o concreto e fosse para o abstrato. Essas idéias tiveram grandes influencias no ensino da Matemática. Rousseau pregava que na formulação dos problemas pedagógicos fossem considerados os aspectos psicológicos e funcionais da criança. Ele propôs que o ensino da Matemática ocorresse somente quando fosse necessário ao desenvolvimento de outras atividades. Devido à Revolução Industrial, houve um grande deslocamento de pessoas para as cidades no século XIX. Com o desenvolvimento tecnológico, a máquina passou a ocupar o lugar do homem, a produção artesanal junto com o aprendizado prático, que era passado de geração a geração, diminuiu. Mas, estas máquinas necessitavam de pessoal mais capacitado para poder operá-las, e foi necessário introduzir novos elementos de escrita e matemática na nova educação. Apareceram assim novos tipos de escolas para as diversas camadas da população.

O acesso à educação universalizou-se com a ampliação do ensino às classes trabalhadoras. Na França, na Inglaterra e na Alemanha criaram-se escolas elementares, que se destinavam a tornar os trabalhadores mais eficientes, e que permitiam depois cursar escolas de ensino profissional.No entanto, não davam acesso aos cursos superiores. Para as classes sociais mais elevadas reservou-se outro tipo de formação, que privilegiava a cultura geral. No nível elementar, os alunos frequentavam classes preparatórias e depois continuavam seus estudos em escolas do tipo secundário, que tinham como base as humanidades clássicas.

Com o desenvolvimento das ciências, houve pressões para modernizar o currículo das escolas secundárias, mas a introdução das ciências modernas aconteceu de forma lenta, contudo fez repensar a importância do ensino da Matemática.

1.1 MATEMÁTICA MODERNA

No final do século XIX começaram, em diferentes países, movimentos de renovação no Ensino da Matemática. Segundo Miorim, esta renovação começou no final do século XIX e início do século XX, inicialmente na Inglaterra com John Perry (1850-1920), engenheiro e professor de Física, que ao sentir as dificuldades dos alunos pela falta de conhecimento da Matemática Moderna. Perry apresentou uma proposta de Matemática prática para engenheiros, onde apareciam estudos das fórmulas algébricas, o estudo de funções e gráficos, uma introdução às idéias do cálculo, a trigonometria numérica, trabalhos com geometria em três dimensões e vetores (MIORIM, 1998).

Na França foi apresentada uma proposta com os seguintes pontos:

(1) tornar o ensino mais simples e intuitivo;

(2) introduzir temas que pertenciam ao ensino superior, como por exemplo, o conceito de função, a representação gráfica e noções de cálculo infinitesimal; e

(3) fazer uma articulação entre temas geométricos e aritméticos.

Também na Itália e na Alemanha de forma independente surgiram movimentos de modernização da Matemática.

Em 1897 aconteceu o 1º Congresso Internacional de Matemática, em Zurique, e, a partir daí, aumentou o contato entre Matemáticos e Professores de diversos países. No 4º Congresso realizado em Roma, em 1908, foi criado uma Comissão Internacional para estudar questões relativas à Educação Matemática. No início foi recomendado que esse estudo fosse feito somente em escolas secundárias; mas, durante a primeira reunião, decidiu-se estudar o ensino em todos os níveis e tipos de escolas (MIORIM, 1998). Essa Comissão foi à responsável pelo Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática que orientou novas propostas para o ensino dessa disciplina, particularmente no nível secundário. Elas podem ser assim resumidas:

- flexibilizar os conteúdos escolares;
- dar mais importância à intuição das crianças;
- introduzir os conceitos de função e do cálculo diferencial e integral;
- valorizar as aplicações de Matemática para os estudantes de escolas de nível médio;
- perceber a importância da "fusão" dos conteúdos escolares.

A Matemática Moderna deveria ser viva com ênfase na atividade do aluno, mais divertida, alegre e criativa, opondo se a Matemática Tradicional, que estava centrada na memorização, na repetição exaustiva dos mesmos tipos de exercícios, com a obrigação de, muitas vezes se decorar tudo.

O Ensino da Matemática, nesse período, buscou através da linguagem da Teoria dos Conjuntos uma "unidade" na Matemática, a qual era acusada de ser ensinada como partes estanques, sendo dada uma maior ênfase aos fundamentos, aos conjuntos, às estruturas e aos morfismos. Procuraram-se fundamentos nos estudos da Psicologia elaborados por Piaget, buscando valorizar as etapas psicogenéticas, estabelecendo uma correspondência entre as estruturas mentais e as estruturas matemáticas.

As mudanças se sucederam cada vez mais rápidas, pois as teorias não paravam de evoluir. Foi nesse contexto de amplo movimento do ensino científico que surgiu na França, por exemplo, a Didática da Matemática rompendo com o ponto de vista que se subjazia às reformas.

1.1.1 A MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL

A Matemática Moderna atingiu a escola primária no Brasil por volta de 1964 através de cursos de atualização para professores primários promovidos pelo Grupo de Estudo do Ensino da Matemática, GEEM, fundado em outubro de 1961, por professores do Estado de São Paulo, tendo como principal representante Osvaldo Sangiorgi. Nessa época, em vários estados brasileiros, começam a ser organizados diferentes Grupos de Estudo com o objetivo de atualizar professores recém formados, bem como professores não graduados que ministravam aulas de Matemática. Fehr, registrou a seguinte nota:

> O Grupo de São Paulo, maior e melhor preparado, apresentou ao 4º Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática, que se realizou em Belém do Pará, em julho de 1962, sua primeira utilização da Matemática Moderna no ensino secundário (...) O climax veio durante o 5º Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática, em São José dos Campos (São Paulo), em janeiro de 1966, onde foram

> apresentados os objetivos já alcançados no país e sugestões metodológicas por parte dos professores estrangeiros e brasileiros (FEHR, 1969, p. 221-222).

Ainda um tanto nebulosa, no Brasil, a Matemática Moderna ancora primeiramente nos grandes centros do país e começa, nos anos 1960, a ser lentamente difundida nas escolas mais longínquas, a maioria delas recebendo-a de sobressalto, via livro didático. Carregada de simbolismos e enfatizando a precisão de uma nova linguagem, professores e alunos passam a conviver com a teoria dos conjuntos, com as noções de estrutura e de grupo.

Repleta de promessas de um ensino mais atraente e descomplicado em superação à rigorosa Matemática Tradicional, no entanto, a Matemática Moderna, chega ao Brasil carregada de formalismos como destaca Búrigo: “o caminho proposto para a compreensão era, basicamente, o da representação do pensamento, segundo as regras da formalização da matemática, como disciplina acadêmica” (BÚRIGO, 1990, p. 263).

A excessiva preocupação com a linguagem matemática e com a simbologia da teoria dos conjuntos deixou marcas profundas, ainda não desveladas, nas práticas pedagógicas daquele período. Ao tratar a matemática como algo neutro, destituída de história, desligada de seus processos de produção, sem nenhuma relação com o social e o político, o ensino de Matemática, nesse período, parece ter se descuidado da possibilidade crítica e criativa dos aprendizes. O moderno dessa matemática apresenta-se, para os alunos, mais como um conjunto de novos dispositivos e nomenclaturas descolados de sentidos e significados conceituais, uma disciplina abstrata e desligada da realidade.

Uma das evidências da presença da Matemática Moderna nas práticas escolares, pode ser encontrada nas provas do Exame de Admissão de 1964, aplicada no Colégio Santa Cruz, de São Paulo, na qual o termo “prova” é substituído por “teste” e cuja programação expressa a tendência em voga do estudo dirigido, com espaços definidos para o registro da resolução e da resposta. Com um número de quinze questões, a prova (ou “teste”) prioriza o sistema de medidas e as operações com a representação decimal de números racionais. O uso da palavra “sentença”, das asserções F (falso) e V (verdadeiro), além da diagramação do lugar das respostas, indica alterações na forma de propor as questões, introduzindo aspectos de uma nova linguagem matemática.

Outro modelo de prova de Matemática Moderna, aplicada pelo Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM), em 1965-1966 em Escolas Primárias de São Paulo, introduz uma extensa questão sobre conjuntos, o que evidencia o início, naquele momento, da adoção da Matemática Moderna na escola primária paulista. Entretanto, somente no final da década de 1960, precisamente em 1968, que a Escola Estadual de São Paulo passa a avaliar, de forma gradativa, o conhecimento da “nova linguagem matemática” dos candidatos a ingresso ao Ginásio. A prova era organizada em forma de teste (várias questões para assinalar X), e constava de doze questões, sendo duas delas utilizando nomenclatura da nova linguagem matemática (VALENTE, 2001):

"Questão VI: Escreva o conjunto dos meses do ano que começam com a letra "j"".

"Questão VII: Escreva o conjunto das frações ordinárias próprias cuja soma dos termos seja 8. Qual a intersecção desses conjuntos? Qual é o maior divisor comum de 24 e 30?"

Em 1969, último ano de realização de Exames de Admissão no Brasil, a prova de Matemática apresentou cinco questões relativas à Matemática Moderna, sendo duas sobre conjuntos e três usando o termo "sentença". Naquele ano, os problemas são apresentados em etapas resolutivas e os rascunhos mostram registros de resoluções que utilizam representações algébricas (uso de "quadradinhos" para incógnitas). Durante a década de 1960, da mesma forma que eram organizados grupos em diferentes estados para a difusão da nova matemática, programas de Matemática eram radicalmente reformulados, influenciados por diferentes correntes internacionais e a indústria de livros didáticos de matemática atingia seu momento áureo. Tratava-se de uma "revolução curricular", ainda controversa nos bastidores da comunidade acadêmica. O GEEM do Estado de São Paulo, coordenado pelo professor Oswaldo Sangiorgi, não só assume a liderança na difusão da nova linguagem modernizadora da matemática, mas vem "reforçar a difusão das idéias modernizadoras", especialmente, por meio de cursos e da "publicação dos primeiros livros didáticos de acordo com essa nova orientação (MIORIM, 1998, p. 114).

As novas orientações enfatizavam o uso de uma linguagem matemática precisa e de justificações rigorosas, uma linguagem matemática própria às estruturas mentais dos estudantes. G. Papy, educador matemático belga e um dos ilustres palestrantes do V Congresso, destacou a importância do ensino de Conjuntos aos alunos, enquanto necessidade de fundamentar a própria Matemática que eles deviam aprender.

Para Piaget, "mesmo no campo da Matemática, muitos fracassos escolares se devem àquela passagem muito rápida do qualitativo (lógico) para o quantitativo (numérico)" (PIAGET, 1984, p. 14). Referindo-se ao ensino da "Matemática Moderna" este renomado epistemólogo advertia, desde a década de 1950, que essa experiência poderia ser prejudicada pelo fato de que:

> ... embora seja "moderno" o conteúdo ensinado, a maneira de o apresentar permanece às vezes arcaica do ponto de vista psicológico, enquanto fundamentada na simples transmissão de conhecimentos, mesmo que se tente adotar (e bastante precocemente, do ponto de vista da maneira de raciocinar dos alunos) uma forma axiomática (...) Uma coisa porém é inventar na ação e assim aplicar praticamente certas operações; outra é tomar consciência das mesmas para delas extrair um conhecimento reflexivo e sobretudo teórico, de tal forma que nem os alunos nem os professores

> cheguem a suspeitar de que o conteúdo do ensino ministrado se pudesse apoiar em qualquer tipo de estruturas naturais (PIAGET, 1984, p. 16-17).

Como lembra Piaget, o princípio fundamental dos métodos ativos deve ser buscado na história das ciências. Assim, "compreender é inventar, ou reconstruir através da reinvenção". Falando a respeito de um ensino moderno e não tradicional da Matemática, o autor sugere aos professores:

> ... falar à criança na sua linguagem antes de lhe impor uma outra já pronta e por demais abstrata, e sobretudo levar a criança a reinventar aquilo que é capaz ao invés de se limitar a ouvir e repetir. O pedagogo-matemático Dienes desenvolveu esforços dignos de louvor nesse sentido, mas uma insuficiente informação psicológica torna por vezes um pouco otimista a sua interpretação do êxito de alguns "jogos" ou exercícios de sua invenção (PIAGET, 1984, p. 16-17).

Para além de toda a expectativa que se alastrou no Brasil, em torno da modernização do ensino da Matemática, com a criação em vários estados de Grupos de Estudos voltados para o estudo e difusão da Matemática Moderna, a nova abordagem passou a ser fortemente criticada no Brasil na década de 1970, momento em que ocorria o esvaziamento do movimento em outros países. Uma das mais acirradas críticas que também influenciou os educadores brasileiros encontra-se em Morris Kline, obra amplamente divulgada no Brasil e que apresenta argumentos incisivos contra as imperfeições de um ensino onde "os alunos absorvem uma porção de idéias complicadas, porém não aprendem a somar" (KLINE, 1976). Uma das críticas feitas pelo autor foi o negligenciamento que a Matemática Moderna faz em relação à motivação. Alegando que:

> despojar os conceitos de seu significado é conservar a casca e jogar fora o fruto (...) ao negligenciarem a motivação e aplicação, os pedagogos apresentaram o caule mas não a flor e assim deixaram de apresentar o verdadeiro valor da matemática, e assim, o autor vai tecendo críticas contundentes à forma (não ao conteúdo) como era trabalhada a matemática. (KLINE, 1976, p. 175-205).

Como lembra Valente:

> são conhecidas as origens do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Igualmente são conhecidos os termos do seu abandono oficial. Faltam-nos, ainda, investigações sobre o que ocorreu com a disciplina matemática durante este período (VALENTE, 2001, p. 250).

Segundo Pinto:

> Investigar a vida e morte desse movimento, que alterou a estrutura do ensino e da aprendizagem de Matemática é, portanto, de suma importância para a compreensão das práticas escolares atuais, e isso suscita pesquisas que desvelem novas evidências das formas como as idéias desse importante movimento foram incorporadas pelos agentes escolares, especialmente como deram significado à cultura docente (PINTO, 2005, p. 37).

Segundo Gouvêa:

> após a Matemática Moderna, os livros didáticos mostram que a maioria dos exercícios não parece se preocupar em despertar o raciocínio lógico. Parece que não se dá mais ênfase na capacidade de o estudante desenvolver sozinho um raciocínio, pois grande parte dos exercícios consistia em simples esquemas de completar espaços (GOUVÊA, 1998, p. 54).

O ensino da Geometria passou a ser abandonado pelos professores, os quais a planejam para o último bimestre do ano, pois ensinar e aprender Geometria por meio de espaços vetoriais ou por meio de transformações, como pregava a Matemática Moderna, era difícil tanto para professores, como para alunos. A Geometria, com o passar do tempo, foi sendo relegada ao último plano no currículo escolar do Ensino Fundamental. Sem saber “o que” e “como” ensinar, a maioria dos professores fugia do ensino dedutivo. Em face disso, começaram a surgir críticas referentes ao seu ensino por parte de psicólogos, pedagogos e matemáticos. Questionava-se a passividade dos alunos perante a Matemática, a aversão à formalização, consequentemente, aversão à dedução e à demonstração. Ser rigoroso passou a ser algo ultrapassado, chegando-se a afirmar que o rigor até dificultava a criatividade dos alunos (VALENTE, 2001; PINTO, 2005; GOUVÊA, 1998).

1.2 PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO - CURRÍCULO OFICIAL

Em 2007, a Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP) lançou um Programa denominado “São Paulo faz Escola”, com o objetivo de homogeneizar o currículo a ser trabalhado pelas escolas públicas da rede estadual, visando à melhoria da qualidade de ensino com o lançamento de dez metas para serem alcançadas até o ano de 2030. São elas (BONATELLI, 2013):

(1) Todos os alunos de oito anos plenamente alfabetizados.

(2) Redução de 50% das taxas de reprovação da oitava série.

(3) Redução de 50% das taxas de reprovação do Ensino Médio.

(4) Implantação de programas de recuperação de aprendizagem nas séries finais de todos os ciclos de aprendizagem (2ª, 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio).

(5) Aumento de 10% nos índices de desempenho do Ensino Fundamental e Médio nas avaliações nacionais e estaduais.

(6) Atendimento de 100% da demanda de jovens e adultos de Ensino Médio com currículo profissionalizante diversificado.

(7) Implantação do Ensino Fundamental de nove anos, com prioridade à municipalização das séries iniciais (1ª a 4ª séries).

(8) Programas de formação continuada e capacitação da equipe.

(9) Descentralização e/ou municipalização do programa de alimentação escolar nos 30 municípios ainda centralizados.

(10) Programa de obras e melhorias de infra-estrutura das escolas.

Neste sentido, propõe os conteúdos mínimos para serem trabalhados pelos professores com os alunos, tendo início a fase de implantação em 2008. Segundo Maria Inês Fini, assessora da Secretaria da Educação, a proposta curricular, hoje denominada como Currículo Oficial está estruturada pelos seguintes princípios (SÃO PAULO, 2008):

- Currículo é Cultura;
- Currículo referido às Competências;
- Currículo que tem como prioridade a competência leitora e escritora;
- Currículo que articula as competências para aprender;
- Currículo contextualizado no mundo do trabalho.

A organização curricular fornece as seguintes indicações (SÃO PAULO, 2008):

Documento 1: Base (apresenta os princípios e conceitos da Proposta);

Documento 2: Cadernos do Gestor (apresenta sugestões de organização do trabalho dos especialistas responsáveis pela gestão do currículo na escola; propostas de agenda, cronograma, atividades e organização de recursos para apoiar o trabalho do diretor, do professor coordenador da escola, do professor coordenador da oficina pedagógica e do supervisor de ensino);

Documento 3: Cadernos do Professor (propõe atividades docentes para todas as aulas, em todas as séries e disciplinas; organização bimestral com: indicação clara das competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos em cada tema ou tópico dos conteúdos, sugestões de aulas, de material complementar, propostas de avaliação, projetos de recuperação paralela).

Documento 4: Cadernos dos alunos (propõe atividades que estão articuladas com os cadernos dos professores).

Para cada modalidade escolar, o currículo foi estruturado da seguinte forma:

- No caso dos alunos do Ensino Fundamental I, foi instituído o "Programa Ler e Escrever" que também conta com uma diversidade de materiais distribuídos aos professores e aos alunos, além de um programa de formação para os gestores das escolas que devem orientar o trabalho dos professores em Trabalho Pedagógico Coletivo (TPC).

- Com relação ao Ensino Médio, em 2008 passou a existir a Diversidade de Apoio ao Currículo (DAC) e eram oferecidos cursos *online* aos professores de Português, Matemática e Geografia denominados de "Grandes Temas da Atualidade", além do Guia do Vestibular para os estudantes. Todos os professores podiam acessar esse curso que oferecia vídeoaulas específicas para cada tema.

- Além desse curso existia a "Rede Aprende com a Rede", também *online*, porém estendido a todas as disciplinas. Através de videoaulas, os professores podiam articular as idéias dos especialistas com os conteúdos curriculares a serem aplicados em sala de aula. A mediação desse curso cabia aos professores coordenadores das Oficinas Pedagógicas das Diretorias Regionais de Ensino e periodicamente eram realizados encontros organizados pela Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP), com esses profissionais para encaminhamentos dos trabalhos e acompanhamento do Currículo Oficial de São Paulo.

Com a organização de conteúdos a serem seguidos bimestralmente pelos professores, a proposta gerou polêmicas: muitos professores questionam a sua liberdade. Entretanto existe uma exigência por parte da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo em se trabalhar com esse currículo, visto que as avaliações serão aplicadas e os resultados qualitativos terão de melhorar.

Segundo Sacristán (2000) para implantar um currículo necessita-se que os professores estejam preparados para trabalhar com o mesmo, ou seja, de uma boa formação. Em 2008, em visitas a algumas unidades escolares Gimeno Sacristán pode perceber certas dificuldades dos docentes com relação a determinados conteúdos que precisavam desenvolver com seus alunos em sala de aula, nos apontando:

> ... Ao professor se propõem, hoje, conteúdos para desenvolver nos currículos muito diferentes dos que ele estudou, sem que compreenda o significado social, educativo e epistemológico das novas propostas frente às anteriores. As fontes da segurança profissional não podem vir de respostas fixas em situações volúveis. (SACRISTÁN, 2000, p.95).

Dourado e Paro fazem algumas considerações para uma política educacional ter eficácia em seu desenvolvimento:

> ...Trata-se na verdade de estar atento para as formas concretas que os determinantes sociais, políticos, econômicos, ideológicos, etc. assumem na realidade escolar. Sem ter presente uma adequada

> apreensão dessas manifestações concretas, os estudos que subsidiam propostas de políticas públicas em educação correm o risco de não se elevarem acima do senso comum, por lhes faltarem os elementos que lhes dariam sustentação e validade teórica.... (PARO; DOURADO, 2001, p.33).

Estão sendo desenvolvidas ações nas unidades escolares para alcançarem a média necessária nas avaliações, principalmente as que estão com baixos índices no IDESP. A Secretaria Estadual de Educação de SP tem realizado reuniões periódicas e solicitado questionários das unidades escolares para os supervisores de ensino ligados às diretorias regionais. Esses questionários traçam um perfil de funcionamento das escolas com relação ao trabalho dos gestores, educadores, discentes e recursos materiais.

No ano de 2009 foram solicitados planejamentos das unidades escolares e periodicamente realizadas reuniões com diretores e professores coordenadores para orientações acerca do Currículo proposto e acompanhamento das ações que vem sendo desenvolvidas pelas unidades escolares.

Nos Estados Unidos, por exemplo, é adotado o chamado *Curriculum Standard*, onde existe uma estrutura de conteúdos em que os professores devem aplicar testes padronizados. Esse processo de avaliação muito se assemelha ao de produtividade do sistema capitalista, no qual as empresas devem dar conta das metas a serem atingidas e no sistema educacional estas são justamente os índices a serem alcançadas, sob pena de perder financiamentos. A idéia de currículo desenvolvida na Proposta consiste na articulação do mesmo como espaço de cultura, ou seja, deve estar atrelado aos conhecimentos da humanidade. De acordo com a definição de Sacristán (2000):

> O currículo, em seu conteúdo e nas formas através das quais nos apresenta e se apresenta aos professores e aos alunos, é uma opção historicamente configurada, que está carregado, portanto, de valores e pressupostos que é preciso decifrar. Tarefa a cumprir tanto a partir de um nível de análise político-social quanto a partir do ponto de vista de sua instrumentalização "mais técnica", descobrindo os mecanismos que operam em seu desenvolvimento dentro dos campos escolares. (SACRISTÁN, 2000, p.17).

O preparo dos discentes para o mundo do trabalho não é, segundo a secretaria, característica da Lei 5692/1971, que descaracterizou a formação geral. A escola deve prepará-los para continuar aprendendo e se adaptarem às condições posteriores, o que não foge aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), nos quais se ressalta: "Essas novas relações entre conhecimento e trabalho exigem capacidade de iniciativa e inovação e, mais do que nunca, aprender a aprender" (BRASIL, 1998).

Com relação ao Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), item importante considerado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP) já que se trata de um instrumento de avaliação da qualidade educacional, houve reuniões articuladas entre a Coordenadoria de Estudos e Normas

Pedagógicas (CENP), as Diretorias Regionais de Ensino e as Unidades Escolares, onde foram estudadas as matrizes curriculares das avaliações externas além da realização de orientações sobre a aplicação da mesma aos discentes.

1.2.1 AVALIAÇÃO EXTERNA

A melhoria educacional é avaliada pelo Índice de Desenvolvimento Educacional do Estado de São Paulo (IDESP), que é um indicador de qualidade que permite às escolas obterem um diagnóstico sobre as potencialidades e fragilidades da aprendizagem educacional, e consequentemente traçar metas a serem atingidas para melhoria da aprendizagem.

O IDESP é calculado utilizando-se uma escala de 0 a 10, atribuído individualmente a cada unidade escolar. Considerando dois critérios:

Primeiro: Indicador de Desempenho (ID).

Medido pelos resultados do SARESP, onde é possível agrupá-los por quatro níveis de proficiência: Abaixo do Básico, Básico, Proficiente (adequado) e Avançado. O Indicador de Desempenho registra a defasagem da escola numa escala de zero a dez;

No Indicador de Desempenho são utilizadas algumas escalas de valores para se obter os níveis de proficiência, entre elas:

Tabela 1 – Indicador de desempenho - Língua Portuguesa (Resolução de 10 de março de 2009)

Nível	**Ensino Fundamental**		**Ensino Médio**
	4ª série	**8ª série**	**3ª série**
Abaixo do Básico	< 150	< 200	< 225
Básico	entre 150 e 200	entre 200 e 275	entre 225 e 300
Proficiente	entre 200 e 275	entre 275 e 325	entre 300 e 375
Avançado	> 275	> 325	> 375

Tabela 2 – Indicador de desempenho - Matemática (Resolução de 10 de março de 2009)

Nível	**Ensino Fundamental**		**Ensino Médio**
	4ª série	**8ª série**	**3ª série**
Abaixo do Básico	< 175	< 225	< 275
Básico	entre 175 e 225	entre 225 e 300	entre 275 e 350
Proficiente	entre 225 e 275	entre 300 e 350	entre 350 e 425
Avançado	> 275	> 350	> 425

Os níveis de proficiência apresentam os seguintes conceitos (Resolução de 10 de março de 2009):

Abaixo do básico: O aluno neste nível mostra desempenho equivalente a pelo menos um ano de atraso com relação ao aluno do nível Proficiente e seu conhecimento da competência medida é rudimentares.

Básico: Neste nível os alunos estão defasados em até seis meses em relação ao nível Proficiente e demonstram um domínio apenas parcial e inicial da competência.

Proficiente: O demonstra um sólido conhecimento dos conteúdos e habilidades esperados para alunos de seu estágio escolar.

Avançado: O aluno domina a competência de forma especialmente completa, sendo capazes de executar ações complexas que requerem a habilidade.

Segundo: Indicador de Fluxo (IF), equivale à taxa média de aprovação em cada ciclo educacional coletada pelo Censo Escolar.

O SARESP em 2007 passou por algumas reformulações tais como: avaliação das habilidades comuns ao Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB); comparação dos resultados ao SAEB e à Prova Brasil e na escala de proficiência do SAEB. Em 2008, a elaboração da avaliação foi feita a partir do currículo estabelecido e ficou estipulada avaliação anual em Língua Portuguesa e em Matemática, havendo alternância para as disciplinas das áreas de Ciências da Natureza e Ciências Humanas.

Com relação à metodologia e séries em que o SARESP é aplicado relata o seguinte:

> A avaliação da Educação Básica do Estado de São Paulo, denominada SARESP - Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, utiliza procedimentos metodológicos formais e científicos cada vez mais aprimorados para coletar e sistematizar dados e produzir informações sobre o desempenho dos alunos ao término das segundas, quartas, sextas e oitavas séries ou, no caso do ensino de nove anos, terceiros, quintos, sétimos e nonos anos do Ensino Fundamental, bem como do terceiro ano do Ensino Médio. (SÃO PAULO, 2009, p.7)

A formulação dessa matriz de referência para o SARESP foi lançada já na gestão de Paulo Renato Souza com a preocupação de articular o que estava sendo proposto no trabalho com as unidades escolares e o que seria avaliado nos índices de aprendizagem dos discentes pela aplicação do SARESP conforme apontado:

> No campo da Educação, é fundamental definir uma matriz de referência em situações de aprendizagem e ensino. Por esse intermédio pode-se avaliar, mesmo que de modo indireto e inferencial, a ocorrência de efetiva aprendizagem. Pode-se ainda, estabelecer correspondências entre uma situação (o ensino e a aprendizagem em sala de aula) e outra (o que é legítimo de ser avaliado em uma prova, por exemplo). Quanto ao instrumento de avaliação em si mesmo, pode-se comparar a matriz de referência proposta (em sua perspectiva geral) com as habilidades aferidas nesse instrumento específico. (SÃO PAULO, 2009, p.10-11).

Depois de conhecidos o Indicador de Desempenho (ID) e o Indicador de Fluxo (IF), calcula-se o IDESP da escola para cada componente curricular e cada série. São estabelecidas metas em longo prazo: até 2030, 90% dos alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental (1ª a 4ª séries); 80% dos alunos das séries finais do Ensino Fundamental (5ª a 8ª séries) e 60% dos alunos do Ensino Médio devem dominar completamente todas as competências e habilidades requeridas para a sua série. Além disso, as escolas devem atingir as seguintes metas:

- Ensino Fundamental I: maior ou igual a 7;
- Ensino Fundamental II: maior ou igual a 6;
- Ensino Médio: maior ou igual a 5;

Outra perspectiva da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo foi de corrigir o fluxo educacional. Através do IDESP, pode avaliar os índices de aprovação, reprovação e evasão das escolas. As que não conseguirem cumprir as metas sofrerão perdas de benefícios, inclusive de bônus dos professores. Essa reforma avalia todos os envolvidos com a educação, até mesmo os Dirigentes Regionais de Ensino. Esse sistema de avaliação é semelhante ao Programa Internacional de Avaliação Comparada (PISA) coordenado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), em que são avaliadas as habilidades desenvolvidas em Língua Portuguesa, Matemática e Ciências para alunos com a faixa etária de 15 anos de idade.

No Brasil, o PISA é coordenado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). O país aderiu desde 2000 a esse sistema de avaliação, que tem por objetivo avaliar os conhecimentos e habilidades necessárias para o enfrentamento dos desafios da sociedade moderna.

1.3 IDEALIZAÇÃO DO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE SÃO PAULO.

O significado da palavra currículo, segundo o dicionário Aurélio, é "as matérias constantes de um curso". D'Ambrósio define "Currículo como uma estratégia para a ação educativa" (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 68).

A Lei de Diretrizes e Bases que organiza a educação nacional, número 9.394 de 20 de dezembro de 1996, em seu Artigo 10º delegou aos estados autonomia para a elaboração de suas propostas. Entre as suas determinações pode ser destacado que:

> ... os estados incumbir-se-ão de elaborar e executar políticas e planos educacionais, em consonância com as diretrizes e planos nacionais de educação, integrando e coordenando as suas e a de seus municípios.

No Artigo 12º da mesma lei, temos que os estabelecimentos de ensino, respeitadas as normas comuns e as do seu sistema de ensino, terão a incumbência de elaborar e executar sua Proposta Pedagógica, entre outras decisões. A criação dessa lei relatada no artigo 12º foi um passo importante, porém essa tática descentralizada mostrou-se ineficiente ao longo do tempo.

Por esse motivo, foi proposta uma ação integrada e articulada, com o objetivo de organizar melhor o sistema educacional de São Paulo, a fim de dar subsídios aos profissíonais que integram a rede, com foco na qualidade, com uma base curricular comum para toda a rede de ensino estadual.

Neste sentido, em 2007, o Governo do Estado de São Paulo criou o Programa "São Paulo Faz Escola", desenvolvido pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo e tendo como responsáveis, a Secretária da Educação Profa. Maria Helena Guimarães de Castro e Maria Inês Fini na coordenação geral. Este programa teve por objetivo implementar um Currículo único para todas as mais de 5000 escolas da rede pública estadual, fornecendo um único material didático aos alunos e orientando os professores a seguirem um mesmo plano de aula.

Uma das primeiras ações para a elaboração da Proposta Curricular do Estado de São Paulo partiu de estudos dos resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Prova Brasil, do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que integram o Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE), e de outras avaliações realizadas em 2007. Em um segundo momento, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE - SP) pediu aos professores, coordenadores e diretores que enviassem relatos de boas experiências da aprendizagem na rede pública de ensino.

Assim, a nova Proposta Curricular nasceu atrelada ao Sistema de Avaliação do Estado - SARESP, que vinha sendo realizado desde 1996, mas que em 2007 e 2008 apresentou inovações, passando a ser base das ações de Gestão da Secretaria da Educação.

A Proposta Curricular buscou um currículo comprometido com o seu tempo, a altura dos desafios contemporâneos. O currículo como espaço de cultura e as competências como referência, priorizando a competência da leitura e da escrita.

Na busca de uma melhor adequação do Currículo, o Estado buscou cumprir seu dever de garantir a todos uma base comum de conhecimento e competências, para que as escolas funcionem de fato como uma rede. No documento base os princípios orientadores são de uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo. Aborda também algumas das principais características da sociedade do conhecimento e das pressões exercidas sobre os jovens cidadãos, propondo princípios orientadores para a prática educativa, a fim de que as escolas possam se tornar aptas a preparar seus alunos para esse novo tempo.

Neste sentido, define a escola como espaço de cultura e de articulação de competências e conteúdos disciplinares.

Também foi emitido um segundo documento de orientação para a Gestão do Currículo na escola, dirigido especialmente às unidades escolares e aos gestores que as lideram, servindo de apoio aos diretores, assistentes técnico-pedagógicos, professores, coordenadores e supervisores, com a finalidade específica de apoiar o gestor para que seja um líder e animador da implementação do Currículo nas escolas públicas estaduais de São Paulo.

Para completar a Proposta Curricular foi elaborado, por diversos especialistas das áreas do conhecimento, um conjunto de documentos dirigidos especialmente para os professores. Esses documentos foram chamados de Cadernos do Professor.

No início do ano de 2008 foi colocada em prática a nova proposta Curricular, para atender à necessidade de organização do ensino em todo o Estado. Assim, a Secretaria do Estado elaborou um material denominado “Jornal do Aluno” com orientações de estudos para toda a rede estadual paulista. Durante 42 dias, os alunos fizeram uso desse material com características interdisciplinares, como parte de uma recuperação pontual em Português e Matemática. Neste mesmo ano o Caderno do Professor foi distribuído para todo o corpo docente da rede pública de ensino. Foram quatro volumes no ano, um por bimestre. Para todas as disciplinas o material foi elaborado com sequência didática e sugestões de trabalho, nas quais o professor pôde se basear para que desenvolvesse o conteúdo previsto.

Em 2009, como parte do aperfeiçoamento e evolução da Proposta Curricular, foi desenvolvido um material complementar ao Caderno do Professor, o Caderno do aluno, específico por disciplinas e por bimestres e foram entregue aos estudantes de todas as séries. É um material que tem a referência pessoal do aluno. Nele, o aluno pode registrar anotações, resolver exercícios e desenvolver as habilidades do Currículo com coordenação e mediação do professor. No mesmo ano, de acordo com o site do Programa São Paulo Faz Escola, o SARESP foi elaborado com base na Proposta Curricular do Estado de São Paulo. A participação na avaliação foi recorde. Ao todo 77% do 2,5 milhões de alunos da rede pública estadual realizaram o exame onde escolas municipais e particulares também participaram.

Não podemos esquecer que apesar de o Currículo ter sido apresentado e discutido em toda a rede, ele está em constante evolução e aperfeiçoamento. Mais do que simples orientação, a elaboração da Proposta Curricular e de todo o material que integra tem um objetivo definido que é a qualidade da educação.

Ao ser aplicada a Proposta Curricular os professores nas escolas tiveram diversas posturas, onde alguns gostaram e outros não. A Secretaria de Educação de São Paulo considerou que foram bons os resultados da implantação da Proposta Curricular no Estado de São Paulo, avaliados pelo SARESP, pelas devolutivas do corpo docente das escolas e na voz da comunidade escolar. Em 2010, o Currículo da Rede Pública Estadual passou a ser consolidado.

1.3.1 CURRÍCULO CONSOLIDADO

O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo apresenta os novos encaminhamentos para a reestruturação dos sistemas educacionais da Rede Estadual de Ensino do Estado de São Paulo, representada pela Secretaria Estadual da Educação (SEE), que propôs em 2008, um currículo básico para as escolas da rede estadual nos níveis de Ensino Fundamental e Ensino Médio. O projeto da SEE pretendia apoiar o trabalho realizado nas escolas estaduais e contribuir para a melhoria da qualidade das aprendizagens dos alunos.

No Currículo são apresentados os princípios orientadores para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo. Contemplando algumas das principais características da sociedade do conhecimento, das pressões que o mundo globalizado exerce sobre os jovens cidadãos, propondo princípios orientadores para a prática educativa a fim de que as escolas possam preparar seus alunos para esse novo tempo. Nesse novo tempo estão presentes e em evidência as tecnologias de comunicação e informação. No Currículo do Estado de São Paulo essas tecnologias são apresentadas como possíveis articuladoras de princípios para um currículo comprometido com o tempo e com uma escola que também aprende.

> A tecnologia imprime um ritmo sem precedentes ao acúmulo de conhecimentos e gera profunda transformação quanto às formas de estrutura, organização e distribuição do conhecimento acumulado. Nesse contexto, a capacidade de aprender terá de ser trabalhada não apenas nos alunos, mas na própria escola, como instituição educativa. Isso muda rapidamente a concepção de escola, de instituição que ensina para instituição que também aprende a ensinar. Nessa escola, as interações entre os responsáveis pela aprendizagem dos alunos têm caráter de ações formadoras, mesmo que os envolvidos não se dêem conta disso (SÃO PAULO, 2010c, p.10).

Segundo o documento, esse novo ritmo gerado pela tecnologia revela a responsabilidade de toda a equipe escolar responsável pelo processo de ensino aprendizagem. Gestores como formadores de professores e a responsabilidade dos docentes, entre si e com o grupo gestor, na problematização.

Analisando o Currículo do Estado de São Paulo (2010) é possível perceber que essa concepção parte do princípio de que ninguém é detentor de um conhecimento absoluto e de que o conhecimento coletivo é maior que a soma dos conhecimentos individuais, além de ser qualitativamente diferente. O documento afirma que esse é o ponto de partida para o trabalho colaborativo, para a formação de uma "comunidade que aprende", a vantagem que permeia essa concepção é facilitada pela tecnologia que viabiliza a prática desse ideal.

Com a preocupação de viabilizar a gestão dos processos de interação na comunidade escolar visando à ação coletiva, o Caderno do Gestor é destinado aos professores coordenadores, diretores, professores coordenadores das oficinas pedagógicas e supervisores, O Caderno do Gestor continua como parte integrante do Currículo consolidado, não tratando da gestão curricular em geral, mas servindo como documento de apoio ao trabalho dos gestores.

Mantiveram-se os documentos dirigidos especialmente aos professores e aos alunos, o Caderno do Professor e o Caderno do Aluno, respectivamente organizados por disciplina/série (ano)/bimestre.

Nesses cadernos são apresentadas Situações de Aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos e na aprendizagem dos alunos. De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo:

> Esses conteúdos, habilidades e competências são organizadas por série/ano e acompanhados de orientações para a gestão da aprendizagem em sala de aula e para a avaliação e a recuperação. Oferecem também sugestões de métodos e estratégias de trabalho para as aulas, experimentações, projetos coletivos, atividades extraclasses e estudos interdisciplinares (SÃO PAULO, 2010c, p.8).

Os cadernos apresentam uma série de atividades que os alunos poderão realizar durante as aulas ou extraclasse. O material não irá interpor as estratégias preestabelecidas pelo professor, pois oferece uma facilidade na exploração dos conceitos que serão apreendidos nas atividades sugeridas. Segundo o documento, em hipótese alguma é sugerido aos professores o abandono do livro didático. Os alunos devem ser estimulados a ler todos os tipos de livros. O documento aponta que a leitura é fundamental para a construção de uma visão crítica da realidade e esta questão deve constituir uma preocupação constante por parte do professor.

No documento encontra-se a afirmação de que "um currículo que promove competências tem o compromisso de articular as disciplinas e as atividades escolares com aquilo que se espera que os alunos aprendam ao longo dos anos" (SÃO PAULO, 2010c, p. 12). Competências que caracterizam modos de ser, de relacionar e de interagir, que podem ser depreendidas das ações em contextos de problemas, de tarefas ou de atividades.

Nesse sentido, o documento aponta que a atuação do professor, os conteúdos, as metodologias disciplinares e a aprendizagem requerida dos alunos são aspectos indissociáveis. Assim, o Currículo se compromete em formar crianças e jovens para que se tornem adultos preparados para exercer suas responsabilidades (trabalho, família, autonomia, etc.) e para atuar em uma sociedade que depende deles, em sentido particular, contribuindo para determinar seu significado real.

O documento destaca que nessa relação currículo, professor, aluno, as novas tecnologias da informação promovem uma mudança na produção, na organização, no acesso e na disseminação do conhecimento, cabendo preparar o aluno para viver em uma sociedade em que a informação é disseminada em grande velocidade.

O currículo de São Paulo destaca que essa preparação não exige maior quantidade de ensino (ou de conteúdos), mas sim de melhor qualidade na aprendizagem. Busca formar pessoas flexíveis, suficientes para assumir diferentes papéis na sociedade, bem como adquirir novas habilidades, atitudes e valores, para que possam viver e conviver em uma sociedade em permanente processo de transformação.

No Currículo do Estado de São Paulo a matemática é apresentada como uma área específica de ensino, a “Matemática e suas Tecnologias”. A concepção dessa área do conhecimento dentro do Currículo não está vinculada à área das “Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias”, como é o caso de outros documentos oficiais como os PCN+ e OCEM.

Segundo o Currículo, três são as razões principais da opção pela constituição de uma área do conhecimento específica para a Matemática:

- Em primeiro lugar, a incorporação da Matemática tanto pela área de Ciências da Natureza quanto pela área de Linguagens e Códigos pode ocultar o fato de que, mesmo tendo as características de uma linguagem e sendo especialmente importante e adequada para a expressão científica, a Matemática apresenta um universo próprio muito rico de idéias e objetos específicos, como os números e as operações, as formas geométricas, as relações entre tais temas, sobretudo as métricas. Tais idéias e objetos são fundamentais para a expressão pessoal, a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos, incluindo-se as chamadas Ciências Humanas.

- A segunda razão é o fato de que uma parte importante da especificidade da Matemática resulta esmaecida quando ela se agrega tanto às linguagens em sentido amplo quanto às Ciências da Natureza. Sabemos que a Matemática compõe de forma complementar um par fundamental com a língua materna sendo impossível reduzir um dos sistemas simbólicos ao outro. Naturalmente, existem diferenças fundamentais entre os significados da precisão na Língua e na Matemática. Por exemplo os alunos devem ser conduzidos a apreciar a beleza presente tanto na exatidão dos cálculos quanto no rigor expressivo do êxito poético.

- A terceira razão para o tratamento da Matemática como área específica é a possibilidade de tal opção facilitar a incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos atualmente existentes para a representação de dados e o tratamento das informações disponíveis, na busca da transformação de informação em conhecimento.

Dentro dessa ótica, o Currículo de São Paulo pressupõe que o objetivo principal de um currículo é mapear o vasto território do conhecimento, recobrindo-o por meio de disciplinas e articulando as disciplinas de tal modo que o mapa assim elaborado constitua um permanente convite a "viagens", não representando apenas uma delimitação rígida de fronteiras entre os diversos territórios disciplinares.

Para que as "viagens na área do conhecimento na Matemática" não se percam em uma rede de informações dos conteúdos estudados na escola, priorizam-se três eixos complementares de competência a partir de idéias fundamentadas para o ENEM. São eles:

- O eixo expressão/compreensão: a capacidade de expressão do eu, por meio das diversas linguagens e a capacidade de compreensão do outro, do não eu, do que me complementa. Inclui desde a leitura de um texto, de uma tabela, de um gráfico, até a compreensão de fenômenos históricos, sociais, econômicos, naturais, etc.

- O eixo argumentação/decisão: a capacidade de argumentação, de análise e de articulação das informações e relações disponíveis, com vista à viabilização da comunicação, da ação comum, a construção de consensos e a capacidade de elaboração de sínteses de leituras e de argumentações. O objetivo é de fomentar a tomada de decisões, a proposição e a realização de ações efetivas.

- O eixo contextualização/abstração: a capacidade de contextualização dos conteúdos estudados na escola, de enraizamento na realidade imediata, no universo de significação, sobretudo no mundo da Matemática, e a capacidade de abstração, de imaginação, de consideração de novas perspectivas, de virtualidades, de potencialidades para se conceber o que ainda não existe.

Conforme o Currículo, as estratégias básicas para mobilizar os conteúdos com vista no desenvolvimento das competências são:

- Equivalência ou igualdade naquilo que vale estar presente nas classificações, nas sistematizações, na elaboração de sínteses, como também quando se estudam as frações, as equações, as áreas de figuras planas ou os volumes de figuras espaciais, entre muitos outros temas.

- Ordem, de organização sequencial, tem nos números naturais sua referência básica, mas pode ser generalizada quando se pensa em hierarquias segundo outros critérios, como a ordem alfabética.

- Proporcionalidade que se encontra presente tanto no raciocínio analógico como também em comparações: "O Sol está para o dia assim como a Lua está para noite".

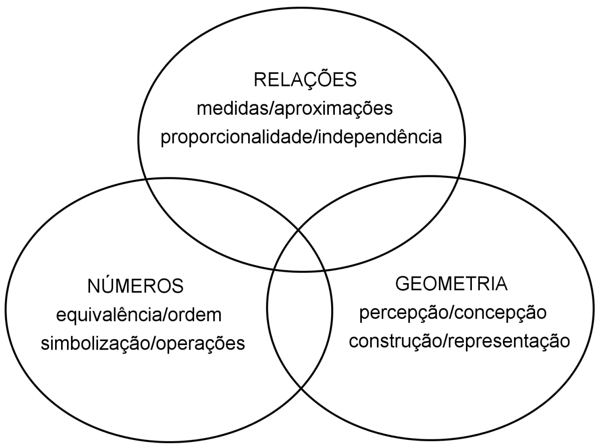
- Aproximação, a de realização de cálculos aproximados. Longe de ser o lugar por excelência da exatidão, da precisão absoluta, a Matemática não sobrevive nos contextos práticos, nos cálculos do dia a dia sem uma compreensão mais nítida da importância das aproximações.

O Currículo também relata que os conteúdos que devem ser estudados, sobretudo na área de Matemática, presentes em outros documentos, dão destaque a alguns temas que têm sido rotulados como "Tratamento da Informação" sendo: porcentagens, médias, tabelas, gráficos de diferentes tipos, etc.

O Currículo reconhece a importância de tais temas mas é necessário evidenciar o fato de que todos os conteúdos estudados na escola básica, em todas as disciplinas, podem ser classificados como "Tratamento da Informação", onde a meta comum de todas as disciplinas escolares é de "transformação da informação em conhecimento".

Os conteúdos disciplinares de Matemática, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, no Currículo do Estado de São Paulo de Matemática estão organizados em três grandes blocos temáticos: NÚMEROS, GEOMETRIA E RELAÇÕES. Vejamos cada um em detalhes.

Figura 1 – Blocos temáticos que compõem o currículo de Matemática.



Os NÚMEROS envolvem as noções de contagem, medida e representação simbólica, tanto de grandezas efetivamente existentes quanto de outras imaginadas a partir das primeiras, incluindo-se a representação algébrica das operações fundamentais sobre elas. Duas idéias fundamentais na constituição da noção de número são as de equivalência e de ordem.

A GEOMETRIA diz respeito diretamente à percepção de formas e de relações entre elementos de figuras planas e espaciais. A construção e a representação de formas geométricas, existentes ou imaginadas e a elaboração de concepções de espaço que sirvam de apoio para a compreensão do mundo físico que nos cerca.

As RELAÇÕES consideradas como um bloco temático inclui a noção de medida com a idéia de aproximação, as relações métricas em geral e as relações de interdependência, como as de proporcionalidade são associadas a idéias de função.

O Currículo apresenta algumas considerações orientadoras sobre o processo de ensino aprendizagem dos conteúdos básicos de Matemática. Para esta pesquisa o foco das considerações será direcionado ao ensino da Geometria.

De acordo com o Currículo, em Geometria no Ensino Fundamental, a preocupação inicial é o reconhecimento, a representação e a classificação das formas planas e espaciais, preferencialmente trabalhadas em contextos concretos com os alunos de 6º e 7º anos. Certa ênfase na construção de raciocínios lógicos, de deduções simples de resultados a partir de outros anteriormente conhecidos poderá ser a tônica dos trabalhos no 8º e 9º anos. Segundo o documento, é importante que se atente para a necessidade de incorporar a Geometria ao trabalho em todos os anos da grade escolar, cabendo ao professor a busca de um equilíbrio no tratamento dos conteúdos fundamentais nos diversos bimestres.

O Currículo traz que a Geometria deve ser tratada, ao longo de todas(os) as(os) séries(anos), em abordagem espiralada, o que significa dizer que grandes temas pode aparecer tanto no anos do Ensino Fundamental quanto nos anos do Ensino Médio, com uma observação na diferença no aprofundamento dado ao tema. Também traz que há um grande número de recursos tecnológicos que estão à disposição para o ensino de Matemática de uso geral, particularmente para a Geometria, onde o Currículo destaca os softwares para as construções em Geometria.

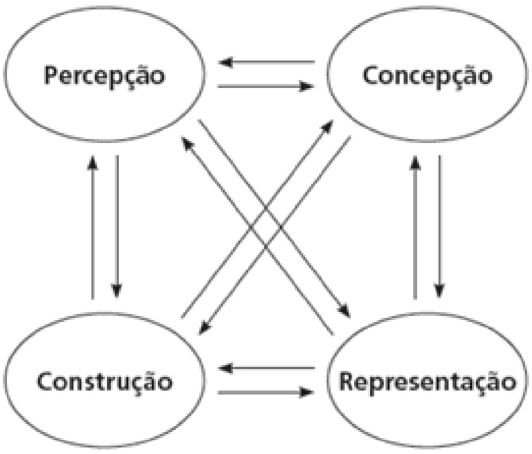
Nos Cadernos do Professor de Matemática são apresentados, sempre que possível, material disponível (textos, softwares, sites e vídeos, entre outros) em sintonia com a forma de abordagem do Currículo do Estado de São Paulo, que podem ser utilizados pelo professor para o enriquecimento de suas aulas. Neste material em cada bimestre, o tema principal foi dividido em oito unidades (a serem trabalhadas aproximadamente em oito semanas). Para a exploração dessas, unidades foram escolhidas, em cada bimestre, quatro Situações de Aprendizagem, que constituem quatro centros de interesse a serem desenvolvidos com os alunos.

Os ambientes informáticos como um meio para o processo de ensino e aprendizagem são bem vistos, pois os softwares de Geometria Dinâmica possibilitam fazer a articulação entre as quatro faces para conceber o conhecimento no ensino de Geometria. Tais faces são abordadas no Currículo do Estado de São Paulo como uma polarização entre as atividades preparatórias, isto é,

- Percepção à observação e à manipulação direta de objetos materiais. Caracterização das formas mais frequentes através de atividades empíricas.

- Construção de objetos em sentido físico, através de massas, varetas, ou papéis, por exemplo.
- Representação de objetos através de desenhos onde as propriedades costumam ser parcialmente concretizadas.
- Concepção: sistematização do conhecimento geométrico que se seguirá onde predominará as definições precisas, o enunciado cuidadoso das propriedades, o encadeamento de preposições nas demonstrações formais ou informais de certos resultados, que são os teoremas. (MACHADO, 2001, p.51 - 54).

Figura 2 – Faces do conhecimento geométrico (SÃO PAULO, 2010c, p. 42).



O Currículo de São Paulo apresenta as seguintes perspectivas:

- Continuamente percebemos, para construir ou quando construímos, para representar ou quando representamos; concebemos o que pretendemos construir com a mediação das representações ou construímos uma representação (como uma planta ou uma maquete) para facilitar a percepção. Mesmo as concepções mais inovadoras têm como referência percepções ou construções já realizadas, renovando seus pressupostos ou transcendendo seus limites.
- Alimentando-se mutuamente, percepções, construções, representações e concepções são como átomos em uma estrutura molecular, que não pode ser subdividida sem que se destruam as propriedades fundamentais da substância correspondente. Isoladamente, qualquer um dos átomos (faces) tem um significado muito restrito; a sua força está no mútuo apoio que essas ligações se propiciam. Portanto, em situações de ensino é muito importante a busca de uma alimentação mútua entre tais aspectos do conhecimento geométrico por meio de atividades integradoras (SÃO PAULO, 2010c, p. 42).

Em relação às tarefas específicas relacionadas com o conteúdo matemático o documento ressalta que devem ser apresentadas por idéias fundamentais presentes em todos os conteúdos: equivalência, ordem, proporcionalidade, medida, aproximação, problematização, otimização, entre outras, construindo uma ponte que conduza dos conteúdos às competências pessoais:

- Capacidade de expressão, que pode ser avaliada por meio da produção de registros, de relatórios, de trabalhos orais e/ou escritos.
- Capacidade de compreensão, de elaboração de resumos, de sínteses, de mapas, da explicação de algoritmos etc.;
- Capacidade de argumentação, de construção de análises, justificativas de procedimentos, demonstrações etc.;
- Capacidade propositiva, de ir além dos diagnósticos e intervir na realidade de modo responsável e solidário;
- Capacidade de contextualizar, de estabelecer relações entre os conceitos e teorias estudados e as situações que lhes dão vida e consistência;
- Capacidade de abstrair, de imaginar situações fictícias, de projetar situações ainda não existentes.

Na organização das grades curriculares (série/ano por bimestre) os conteúdos são associados às habilidades apresentando um quadro de conteúdos (série/ano por bimestre) para o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio. De acordo com o que é apresentado no Currículo, a lista de conteúdos não é rígida e inflexível. O que se pretende é propiciar uma articulação consistente entre as inúmeras formas possíveis de-se trabalhar os diversos temas,destacando dos objetos maiores que fundamentam o presente Currículo. Busca-se uma formação voltada para as competências pessoais, uma abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, uma caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

1.3.2 LISTA DE CONTEÚDOS E HABILIDADES DE MATEMÁTICA PARA O BLOCO TEMÁTICO GEOMETRIA

Apresentamos a seguir as relações de conteúdos, para o bloco temático Geometria.

5ª série/ 6º ano do Ensino Fundamental - 3º Bimestre

- Conteúdos: Geometria/Relações e Formas Geométricas: Formas Planas, Formas espaciais. Perímetro e área: Unidades de medida, perímetro de uma figura plana.

Cálculo de área por composição e decomposição. Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas.

- Habilidades: Saber identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos e por meio de suas representações em desenhos e em malhas. Saber planificar figuras espaciais e identificar figuras espaciais a partir de suas planificações. Compreender a noção de área e perímetro de uma figura, sabendo calcular por meio de recursos de contagem e de decomposição de figuras. Compreender a idéia de simetria, sabendo reconhecê-la em construções geométricas e artísticas, bem como utilizá-la em construções geométricas elementares.

6ª / 7º ano de Ensino Fundamental - 2º Bimestre

- Conteúdos - Geometria: Ângulos, Polígonos, Circunferência, Simetrias, Construções Geométricas e Poliedros.
- Habilidades: Compreender a idéia de medida de um ângulo (em graus), sabendo operar com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos. Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia. Saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de "n" lados. Saber aplicar os conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas. Saber identificar elementos dos poliedros e classificá-los seguindo diversos pontos de vista. Saber planificar e representar (em vistas) figuras espaciais.

7ª série / 8º ano do Ensino Fundamental - 4º Bimestre

- Conteúdos - Geometria: Teorema de Tales. Teorema de Pitágoras. Área de polígonos. Volume do prisma.
- Habilidades: Reconhecer e aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da idéia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos. Compreender o significado do Teorema de Pitágoras, utilizando na solução de problemas em diferentes contextos. Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares. Saber identificar prismas em diferentes contextos, bem como saber construí-los e calcular seus volumes.

8ª série/ 9º ano do Ensino Fundamental - 3º e 4º Bimestres

- Conteúdos: 3º Bimestre - Geometria/Relações: Proporcionalidade na Geometria: O conceito de semelhança, Semelhança de Triângulos, Razões trigonométricas.

  4º Bimestre - Geometria/Números: Corpos redondos: O número π, a circunferência, o círculo e suas partes, área do círculo. Volume e área do cilindro. Probabilidade: Problemas de contagem e introdução a probabilidade.

- Habilidades, 3º bimestre: Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes. Saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações problema envolvendo semelhança de triângulos. Compreender e saber aplicar as relações métricas dos triângulos retângulos, particularmente o teorema de Pitágoras, na resolução de problemas em diferentes contextos. Compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos.

  4º Bimestre: Conhecer a circunferência, seus principais elementos, suas características e suas partes. Compreender o significado do π, como uma razão e sua utilização no cálculo do perímetro e da área da circunferência. Saber calcular de modo compreensivo a área e o volume de um cilindro. Saber resolver problemas envolvendo processos de contagem e princípio multiplicativo. Saber resolver problemas que envolvam idéias simples sobre probabilidade.

1ª série do Ensino Médio - 4º Bimestre

- Conteúdos - Geometria/Relações: Trigonometria: Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies. Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.

- Habilidades: Saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos. Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. Saber construir polígonos regulares e reconhecer suas propriedades fundamentais. Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies. Saber inscrever e circunscrever polígonos regulares em circunferências dadas.

2ª série do Ensino Médio - 4º Bimestre

- Conteúdos: Geometria métrica espacial: Elementos de Geometria de posição. Poliedros, prismas e pirâmides. Cilindros, cones e esferas.

- Habilidades: Compreender os fatos fundamentais relativos ao modo geométrico de organização do conhecimento (conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas). Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma, o cilindro, a pirâmide, o cone e a esfera, utilizando-as em diferentes contextos. Compreender as propriedades da esfera e de suas partes, relacionando-as com os significados dos fusos horários, das latitudes e das longitudes terrestres.

3ª série do Ensino Médio - 1º Bimestre

- Conteúdos: Geometria analítica: Pontos (distância, ponto médio e alinhamento de três pontos). Reta (equação e estudo dos coeficientes, problemas lineares). Ponto e reta (distância). Circunferência (equação). Reta e circunferência (posições relativas). Cônicas (noções, equações, aplicações).

- Habilidades: Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações. Saber reconhecer à equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas. Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares. Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares. Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas.

De acordo com o exposto acima, as habilidade a serem demonstradas pelos alunos em cada tema, viabilizam uma explicação um pouco maior das relações existentes entre a lista de conteúdos apresentados para cada bimestre e as idéias fundamentais presentes neles. Tais habilidades traduzem de modo operacional as ações que os alunos devem ser capazes de realizar ao final de cada bimestre, após serem apresentados aos conteúdos curriculares listados (SÃO PAULO, 2010c).

O Currículo ainda destaca que é preciso estar atento ao fato de que tais habilidades também não são um fim em si mesmas, constituindo apenas indicadores de que a exploração das idéias fundamentais estariam sendo realizadas de modo fecundo.

1.4 CADERNO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Nesta seção procuramos apresentar uma breve visão geral do caderno do professor de Matemática, bem como a exploração das situações de aprendizagem do volume 4 da segunda série do Ensino Médio.

O Caderno do professor e do aluno são dirigidos especialmente ao professor e ao aluno respectivamente, apresentando Situações de Aprendizagem para orientar o trabalho no ensino dos conteúdos disciplinares específicos a aprendizagem dos alunos. Os cadernos são organizados por disciplinas, por séries (ano) e divididos por bimestres. Oferecendo orientações para o trabalho em sala de aula, para avaliação e a recuperação, além de sugestões de métodos e estratégias de trabalho, com experimentações, projetos coletivos, atividades extraclasse e estudos interdisciplinares.

Com essas informações destinadas aos professores, buscam apresentar cada tema de uma maneira especialmente significativa do ponto de vista de seu valor formativo, para construir uma articulação entre os diversos temas, de modo que se auxiliem mutuamente, ao mesmo tempo que propiciem interfaces amigáveis com as outras disciplinas.

Temos também que o Caderno do Aluno é uma "conversa" com o Caderno do Professor, e esse por sua vez é uma "conversa" como o Currículo que está a serviço do mesmo, com uma conversa para os professores.

Nos Cadernos em cada bimestre, o tema principal foi dividido em oito unidades, a serem trabalhadas em aproximadamente oito semanas. De acordo com o número de aulas disponíveis por semana, o professor poderá explorar cada assunto com maior ou menor aprofundamento e escolher uma escala adequada para o tratamento das unidades. Cada bimestre apresenta quatro situações de aprendizagem que sugere uma forma de abordagem do conteúdo, ajudando o professor em sua ação em sala de aula.

O Caderno (SÃO PAULO, 2010b) ressalta que é importante que o professor tente completar as oito unidades temáticas, pois, juntas elas compõem um panorama do conteúdo do bimestre, de tal forma que uma unidade contribui para a compreensão de outras.

Os temas que compõem o conteúdo disciplinar de cada bimestre, como é destacado nos Cadernos do Professor, não se afastam do que é ensinado em outros estabelecimentos de ensino particulares ou públicos, como também se assemelham ao conteúdo dos livros didáticos. As inovações se referem à forma da abordagem dos conteúdos ao longo de cada um dos bimestres, buscando evidenciar os princípios norteadores do Currículo Oficial do Estado de São Paulo, que estão ligados a contextualização dos conteúdos, as competências relacionadas com a leitura e a escrita Matemática, bem como os elementos culturais internos e externos à Matemática. Desta forma, permite que o professor possa agir de forma autônoma em relação aos conteúdos, favorecendo a mobilização dos conteúdos, as metodologias e os saberes próprios da Matemática, buscando o desenvolvimento das competências e habilidades que são necessárias para os alunos fazerem a leitura crítica do mundo, podendo assim inferir em questões e compartilhar idéias, fazendo parte da sociedade em que está inserido.

Nas primeiras páginas dos Cadernos do Ensino Fundamental II e Ensino Médio são apresentadas cartas redigidas pela Equipe da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo endereçadas aos professores, além do sumário que contém informações sobre a organização do material. São apresentados em todos os Cadernos do Professor:

- Uma ficha com o tema estruturador e os conteúdos que serão trabalhados durante cada bimestre.

- Orientações gerais sobre os Cadernos em cada bimestre: os temas escolhidos para compor o conteúdo disciplinar, as inovações pretendidas referentes à forma de abordagem, os princípios norteadores do processo de aprendizagem, com destaque na contextualização dos conteúdos, nas competências pessoais envolvidas, especialmente aquelas relacionadas à leitura e à escrita Matemática, bem como os elementos referentes à Matemática, os conteúdos básicos do bimestre, uma visão geral das quatro Situações de Aprendizagem e o que será tratado em cada uma delas.

- Considerações sobre a avaliação ao final das Situações de Aprendizagem com a expectativa de que os alunos tenham compreendido as principais características dos temas desenvolvidos em cada Situação de Aprendizagem, desenvolvendo as competências e habilidades exigidas durante o processo de ensino e aprendizagem. Os documentos ressaltam que a avaliação da aprendizagem dos alunos em relação aos conteúdos estudados poderá ser feita pela aplicação de atividades similares às propostas ao longo da Situação de Aprendizagem, como também através dos variados problemas apresentados nos livros didáticos, que devem ser usados para enriquecer o conteúdo trabalhado no caderno.

- Orientações para recuperação: a avaliação de aprendizagem deve ser um processo contínuo realizado ao longo de cada bimestre. Durante a realização das atividades o professor deve estar atento para eventuais dificuldades dos alunos e através dessa observação o professor pode propor, ao longo do processo, atividades de recuperação que ajudem o aluno a acompanhar melhor o curso e obter sucesso na realização das atividades.

- Indicações de recursos: para ampliar as perspectivas dos professores e dos alunos em relação à compreensão do tema faz indicações de livros, revistas, artigos, softwares e sites.

- Considerações finais: enfatiza-se as interrelações entre os diversos conteúdos/temas abordados em cada bimestre que foram contemplados nas propostas das Situações de Aprendizagem. Ressalta-se que, na medida do possível, os conteúdos devem ser trabalhados de maneira desafiadora sendo uma boa metodologia para isso o uso de situações problemas, contextualizadas com significado, e que exijam a reflexão crítica por parte do aluno. (Essas considerações finais não constam nos Cadernos do Professor do Ensino Fundamental II, no 7º ano volumes 3 e 4, 8º ano volumes 1 e 4 e 9º ano volumes 1 e 4. No Ensino Médio, cadernos do professor da 1ª série volume 4 e 2ª série volumes 2 e 4).

- Conteúdos de Matemática por série/bimestre do Ensino Fundamental e Ensino Médio: são apresentados em grades curriculares com os conteúdos de Matemática, de todas as séries do Ensino Fundamental e Médio, com um sombreado para destacar os conteúdos dos bimestres de todas as séries que diretamente estão relacionados com os conteúdos de outros (as) bimestres/séries.

Para uma maior clareza das múltiplas interrelações entre os diversos conteúdos que são trabalhados nos cadernos do Professor, a seguir, serão apresentadas as grades curriculares com os conteúdos de Matemática de todas as séries do Ensino Fundamental e Médio, com um sombreado para destacar os conteúdos dos bimestres que estão relacionados com os conteúdos de outros bimestres/séries do bloco temático de Geometria, o qual foi escolhido para fazer parte dessa pesquisa.

Figura 3 – Conteúdos de Matemática por série/bimestre do Ensino Fundamental (SÃO PAULO, 2010a, p. 48).

	5ª série	6ª série	7ª série	8ª série
1º bimestre	NÚMEROS NATURAIS - Múltiplos e divisores. - Números primos. - Operações. - Introdução às potências. FRAÇÕES - Representação. - Comparação e ordenação. - Operações.	NÚMEROS NATURAIS - Sistemas de numeração na Antiguidade. - O sistema posicional decimal. NÚMEROS INTEIROS - Representação. - Operações. NÚMEROS RACIONAIS - Representação fracionária e decimal. - Operações com decimais e frações.	NÚMEROS RACIONAIS - Transformação de decimais finitos em fração. - Dízimas periódicas e fração geratriz. POTENCIAÇÃO - Propriedades para expoentes inteiros. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - A linguagem das potências.	NÚMEROS REAIS - Conjuntos numéricos. - Números irracionais. - Potenciação e radiciação em IR. - Notação científica.
2º bimestre	NÚMEROS DECIMAIS - Representação. - Transformação em fração decimal. - Operações. SISTEMAS DE MEDIDAS - Comprimento, massa e capacidade. - Sistema métrico decimal.	GEOMETRIA/MEDIDAS - Ângulos. - Polígonos. - Circunferência. - Simetrias. - Construções geométricas. - Poliedros.	ÁLGEBRA - Equivalências e transformações de expressões algébricas. - Produtos notáveis. - Fatoração algébrica.	ÁLGEBRA - Equações de 2º grau: resolução e problemas. - Noções básicas sobre funções; a ideia de interdependência. - Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.
3º bimestre	GEOMETRIA/MEDIDAS - Formas planas e espaciais. - Noção de perímetro e área de figuras planas. - Cálculo de área por composição e decomposição.	NÚMEROS/ PROPORCIONALIDADE - Proporcionalidade direta e inversa. - Razões, proporções, porcentagem. - Razões constantes na geometria: π. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Gráficos de setores. - Noções de probabilidade.	ÁLGEBRA/EQUAÇÕES - Equações de 1º grau. - Sistemas de equações e resolução de problemas. - Inequações de 1º grau - Sistemas de coordenadas (plano cartesiano).	GEOMETRIA/MEDIDAS - Proporcionalidade, noção de semelhança. - Relações métricas em triângulos retângulos. - Razões trigonométricas.
4º bimestre	TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Leitura e construção de gráficos e tabelas. - Média aritmética. - Problemas de contagem.	ÁLGEBRA - Uso de letras para representar um valor desconhecido. - Conceito de equação. - Resolução de equações. - Equações e problemas.	GEOMETRIA/MEDIDAS - Teoremas de Tales e Pitágoras: apresentação e aplicações. - Área de polígonos. - Volume do prisma.	GEOMETRIA/MEDIDAS - O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. - Volume e área do cilindro. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Contagem indireta e probabilidade.

Figura 4 – Conteúdos de Matemática por série/bimestre do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2010b, p. 56).

	5ª série	6ª série	7ª série	8ª série
1º bimestre	NÚMEROS NATURAIS - Múltiplos e divisores. - Números primos. - Operações. - Introdução às potências. FRAÇÕES - Representação. - Comparação e ordenação. - Operações.	NÚMEROS NATURAIS - Sistemas de numeração na Antiguidade. - O sistema posicional decimal. NÚMEROS INTEIROS - Representação. - Operações. NÚMEROS RACIONAIS - Representação fracionária e decimal. - Operações com decimais e frações.	NÚMEROS RACIONAIS - Transformação de decimais finitos em fração. - Dízimas periódicas e fração geratriz. POTENCIAÇÃO - Propriedades para expoentes inteiros. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - A linguagem das potências.	NÚMEROS REAIS - Conjuntos numéricos. - Números irracionais. - Potenciação e radiciação em $\mathbb{R}$. - Notação científica.
2º bimestre	NÚMEROS DECIMAIS - Representação. - Transformação em fração decimal. - Operações. SISTEMAS DE MEDIDAS - Comprimento, massa e capacidade. - Sistema métrico decimal.	GEOMETRIA/MEDIDAS - Ângulos. - Polígonos. - Circunferência. - Simetrias. - Construções geométricas. - Poliedros.	ÁLGEBRA - Equivalências e transformações de expressões algébricas. - Produtos notáveis. - Fatoração algébrica.	ÁLGEBRA - Equações de 2º grau: resolução e problemas. - Noções básicas sobre funções; a ideia de interdependência. - Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.
3º bimestre	GEOMETRIA/MEDIDAS - Formas planas e espaciais. - Noção de perímetro e área de figuras planas. - Cálculo de área por composição e decomposição.	NÚMEROS/ PROPORCIONALIDADE - Proporcionalidade direta e inversa. - Razões, proporções, porcentagem. - Razões constantes na geometria: π. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Gráficos de setores. - Noções de probabilidade.	ÁLGEBRA/EQUAÇÕES - Equações de 1º grau. - Sistemas de equações e resolução de problemas. - Inequações de 1º grau - Sistemas de coordenadas (plano cartesiano).	GEOMETRIA/MEDIDAS - Proporcionalidade, noção de semelhança. - Relações métricas em triângulos retângulos. - Razões trigonométricas.
4º bimestre	TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Leitura e construção de gráficos e tabelas. - Média aritmética. - Problemas de contagem.	ÁLGEBRA - Uso de letras para representar um valor desconhecido. - Conceito de equação. - Resolução de equações. - Equações e problemas.	GEOMETRIA/MEDIDAS - Teoremas de Tales e Pitágoras: apresentação e aplicações. - Área de polígonos. - Volume do prisma.	GEOMETRIA/MEDIDAS - O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. - Volume e área do cilindro. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Contagem indireta e probabilidade.

1.4.1 CADERNO DO PROFESSOR DA SEGUNDA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Neste tópico, será feita a exploração das Situações de Aprendizagem presentes no volume 4 do Caderno do Professor da segunda série do Ensino Médio onde o foco da aprendizagem é a Geometria Espacial Métrica. Este volume apresenta a necessidade de relembrar algumas propriedades fundamentais das figuras planas, pois são elas que compõem as bases, as faces e as secções das figuras espaciais, dando uma evidencia e um tratamento especial a linguagem geométrica. Sabemos que uma das dificuldades que os alunos enfrentam no estudo da geometria espacial são a representação e a interpretação de figuras tridimensionais desenhadas no plano. Assim, o caderno do professor, no início de cada situação de aprendizagem, propõe atividades de manipulação e exploração dos sólidos geométricos. É possível também ao professor combinar esses exercícios com aqueles que já fazem parte de sua experiência no ensino desse tema.

A partir dos conhecimentos já adquiridos pelos alunos no Ensino Fundamental, como o prisma e alguns de seus fatos fundamentais, as situações de aprendizagem procuram consolidar esse conhecimento e elaborar um raciocínio que seja aplicado e ampliado à medida que avançamos no estudo dos outros sólidos, como o cilindro, a pirâmide e o cone.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) (BRASIL, 2006) destaca que o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, bem como saber usar diferentes unidades de medida. Possibilita também estudos sobre os teoremas e argumentações dedutivas, que nas OCEM são apresentados com dois aspectos. Primeiro, a Geometria que leva à Trigonometria e segundo, a Geometria para o cálculo de comprimento, áreas e volumes. Este último compondo o conteúdo básico do 4º bimestre da 2ª série do Ensino Médio.

De acordo com os PCN+ (BRASIL, 1999), o Ensino de Geometria no Ensino Fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas.

Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico é necessário que no Ensino Médio aconteça um aprofundamento dessas idéias. Assim, os alunos podem conhecer um sistema dedutivo para analisar o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares.

Ainda segundo as OCEM (BRASIL, 2006, p. 75-76):

> O trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado neta etapa de escolarização. Alguns conceitos estudados no ensino fundamental devem ser consolidados, como por exemplo, as idéias de congruência, semelhança e proporcionalidade, o Teorema de Tales e suas aplicações, as relações métricas e trigonométricas nos triângulos (retângulos e quaisquer) e o Teorema de Pitágoras.

As orientações contidas no Caderno do Professor destacam que os conteúdos são organizados em oito unidades de extensão aproximadamente iguais, que podem corresponder a oito semanas de trabalho letivo.

O Caderno do Professor destaca também que o professor explorará os conteúdos de acordo com o número de aulas disponíveis por semana, cada assunto com maior ou menor aprofundamento. O professor poderá escolher uma escala adequada para o tratamento dos conteúdos contidos no material para cada bimestre.

O Caderno do Professor apresenta quatro Situações de Aprendizagem, que de certa forma ilustram as abordagens dos conteúdos. O objetivo dessas ilustrações é propiciar ao professor instrumentos para a ação em sala de aula. Para a exploração dos conteúdos das Situações de Aprendizagens foi pensado alguns exemplos ilustrativos, que posteriormente serão complementados por exercícios exemplares que poderão servir de modelo para que o professor crie ou selecione os seus próprios exercícios em outras fontes de materiais didáticos ou paradidáticos.

As situações de aprendizagem são:

- Situação de aprendizagem 1- Prismas: Uma forma de ocupar o espaço.
- Situação de aprendizagem 2 - Cilindros: Uma mudança de base.
- Situação de aprendizagem 3 - O Movimento de ascensão: pirâmides e Cones.
- Situação de aprendizagem 4 - Esfera: Conhecendo a forma do mundo.

A seguir serão apresentadas as quatro Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor. No decorrer de cada apresentação serão realizadas algumas inferências consideradas significativas para o presente trabalho de pesquisa, que busca proporcionar um enriquecimento das Situações de Aprendizagem para o ensino dos conteúdos.

1.4.2 SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 1 – PRISMAS: UMA FORMA DE OCUPAR O ESPAÇO

Segundo o Caderno do Professor (2009), o objetivo principal desta Situação de Aprendizagem é consolidar os conhecimentos de identificação da forma de um prisma, a representação no plano, o reconhecimento de seus elementos (vértices, faces e arestas) e a construção de sua planificação, sistematizá-los e torná-los referência para a construção dos outros sólidos que serão estudados, como o cilindro, a pirâmide, o cone e a esfera.

O Caderno (SÃO PAULO, 2010b) apresenta que o prisma é um sólido geométrico muito presente no nosso dia a dia. A maioria das embalagens e dos objetos que utilizamos possui essa forma. Assim, o Caderno propõe ao professor utilizar uma série de objetos, como: caixa de fósforos, de sapatos, de perfumes, embalagens de pizza, entre outras e que discuta alguns fatos como:

- As bases dos prismas são polígonos de mesma forma e tamanho e suas faces laterais são paralelogramos;
- O nome do prisma é dado pela forma de sua base, podendo ser triangular, quadrangular, hexagonal, etc.;
- Se a aresta lateral for perpendicular às bases, o prisma é reto; caso contrário, é oblíquo;
- O paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos;
- Se todas as faces do paralelepípedo são retângulos, ele é chamado de paralelepípedo retângulo;

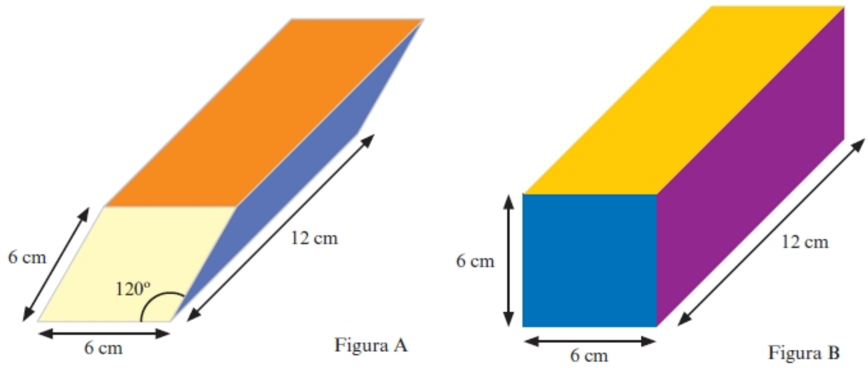
- Um prisma reto cuja base é um polígono regular chama-se prisma regular;
- Se o prisma tiver todas as faces quadradas, ele é um cubo, também chamado de hexaedro regular (do grego *hexa* - seis e *hedros* - apoiar-se, faces).

O objetivo das situações problemas apresentadas a seguir é explorar o cálculo de áreas e as relações métricas nos prismas em contextos que exijam análises e tomadas de decisões.

Atividade 1: Uma loja dispõe de dois tipos de embalagem de papelão: uma no formato de um paralelepípedo oblíquo (Figura 2.5 A), outra no de um paralelepípedo reto retângulo (Figura 2.5 B). Considerando os valores indicados nas figuras a seguir, calcule qual das duas formas geométricas exigirá menos papelão para ser confeccionada.

Resolução: São Paulo (2010b, p. 12).

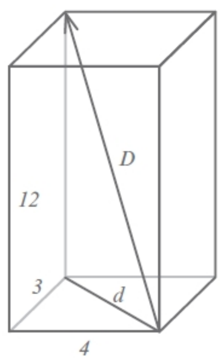
Figura 5 – São Paulo (2010b, p. 12).



Atividade 2: Uma caixa de lápis tem o formato de um paralelepípedo reto-retângulo com 3 cm de comprimento, 4 cm de profundidade e 12 cm de altura. Qual a medida do maior lápis que você pode guardar nessa caixa sem que a ponta fique para fora da borda? Ver figura 2.6.

Resolução: São Paulo (2010b, p. 13).

Figura 6 – São Paulo (2010b, p. 14).



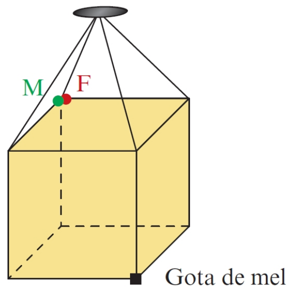
Atividade 3: Com base na atividade anterior, investigue a mesma situação para um porta-lápis nos seguintes formatos:

1. Prisma regular triangular de aresta da base 12 cm e altura 16 cm.
2. Prisma regular hexagonal, com aresta de base 6 cm e altura 8 cm.

Resolução: São Paulo (2010b, p. 14 - 15).

Atividade 4: A luminária de uma lanchonete tem a forma de um cubo. Contudo, ela só possui] faces laterais. As bases foram subtraídas para iluminar melhor o ambiente. Uma mosca e uma formiga estão sobre o mesmo vértice do cubo, como indicado na figura 2.7 pelas letras M (mosca) e F (formiga). No vértice oposto da outra base, está uma gota de mel, que interessa a ambos os insetos. A mosca tem a vantagem de ter asas e poder voar. A formiga só pode andar pela superfície e pelas arestas da luminária.

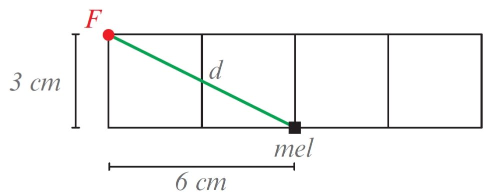
Figura 7 – São Paulo (2010b, p. 15).



Indique qual o menor percurso que cada inseto deve fazer para alcançar a gota de mel. Admitindo que a aresta da base da luminária meça 3 dm, qual o tamanho do percurso feito por cada inseto?

Resolução: Nesta atividade o professor poderá abordar o caminho que a mosca faria, sendo a diagonal do cubo ($3\sqrt{3} \cong 5,19$ dm), pensando na formiga o professor deve analisar diferentes casos, pois se ela andar pela diagonal de uma face e depois por uma aresta teria ($3\sqrt{2} + 3 \cong 7,24$ dm). Mas, se planificarmos a figura teria outra situação, vejamos:

Figura 8 – São Paulo (2010b, p. 16).



$3\sqrt{5} \cong 6,71$ dm, analisando os resultados, observamos que a formiga chegou depois, mas, um dos menores caminhos para ela chegar ao mel seria passando pelo ponto médio de uma aresta.

Podemos observar que com essas atividades o professor poderá trabalhar diferentes conceitos, entre eles o Teorema de Pitágoras. Essas situações exercitam a visualização e a interpretação.

Após essas atividades o caderno do professor apresenta informações sobre o cálculo do volume de prismas pela decomposição e contagem de cubinhos. Considerando um paralelepípedo reto podemos determinar quantos cubinhos de aresta de uma unidade de comprimento cabem no sólido. A quantidade de cubinhos no paralelepípedo reto é igual ao produto da área da base (que corresponde à quantidade de cubos apoiados na base) pela altura (que corresponde à quantidade de camadas de cubos que preenchem completamente o sólido).

Em seguida apresenta o Princípio de Cavalieri. Com o objetivo de caracterizar o volume do prisma como uma sobreposição de placas idênticas, o que será explorado nos cilindros e na comparação no volume de diferentes sólidos.

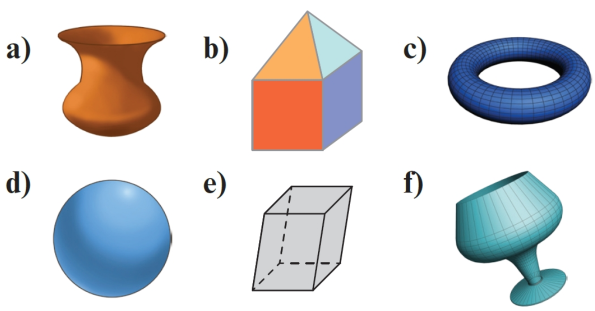
1.4.3 SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 2 – CILINDROS: UMA MUDANÇA DE BASE

Segundo os autores do Caderno do Professor, "os cilindros podem ser imaginados como uma generalização dos prismas, onde a base teve o número de lados sucessivamente aumentado, aproximando-se de um círculo". Desta forma, sugere que se recorra novamente às embalagens e estruturas do cotidiano para identificar esse formato.

O docente pode abordar o cilindro como um sólido de revolução, apresentando exemplos de como fazer essa representação e explorar o movimento de revolução. A seguir apresentamos uma das atividades do Caderno do Professor que explora o conceito já trabalhado em sala:

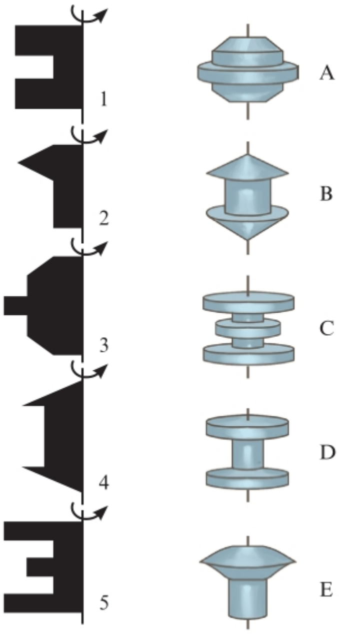
Atividade 1: Quais dos sólidos a seguir podem ser considerados sólidos de revolução?

Figura 9 – São Paulo (2010b, p. 22).



Atividade 2: Analisando a relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, temos que os sólidos de revolução resultam da rotação de figuras plana em torno de um eixo. O caderno apresenta duas colunas para serem feitas correspondências entre as figuras planas que girando em torno de uma haste indicada e os sólidos de revolução obtidos.

Figura 10 – São Paulo (2010b, p. 23).



Como sugestão para explorar o volume do cilindro, o Caderno do Professor traz o uso de um porta-CDs. De forma intuitiva pode-se considerar o cilindro como uma figura espacial formada pela sobreposição ou empilhamento em uma mesma direção, de círculos iguais. Trabalhando de forma análoga ao que foi explorado no volume do prisma, conclui-se que o volume de um cilindro é o produto da área da sua base pela altura. O professor pode aplicar o Princípio de Cavalieri. As atividades a seguir têm por objetivo explorar situações que envolvem área e volumes de cilindros, procurando ainda uma combinação entre conteúdos tratados em outros bimestres.

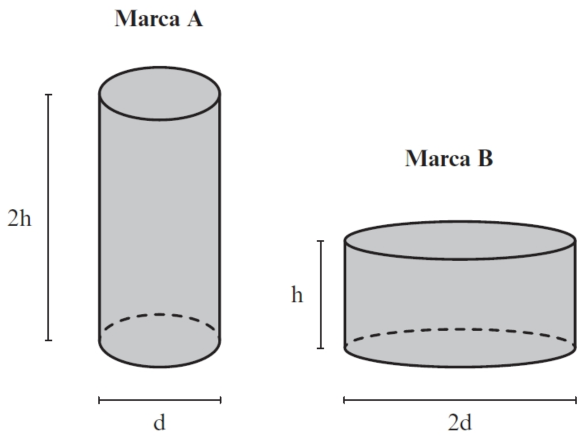
Atividade 3: Um consumidor encontrou duas marcas de seu interesse e observou os seguintes fatos:

(i) A embalagem da marca A possuía o dobro da altura da embalagem da marca B.

(ii) A embalagem da marca B possuía o dobro do diâmetro da embalagem da marca A.

Sabendo que a primeira custa R$ 2,30 e a segunda R$ 3,40, qual será a compra mais econômica?

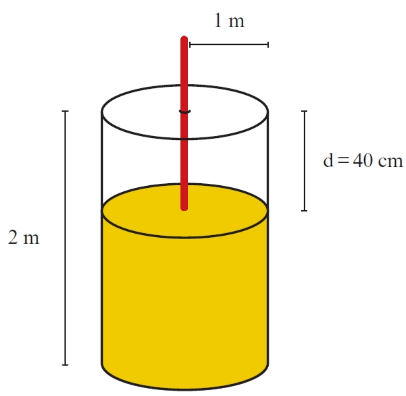
Figura 11 – São Paulo (2010b, p. 24).



Resolução: Realizando o cálculo temos que o volume da marca B tem o dobro do volume da marca A. Como o preço da marca A é maior que a metade do preço da marca B, é mais vantajoso comprar a marca B. Essa atividade tem o objetivo de explorar uma situação que envolve o cálculo do volume realizando uma combinação entre os conteúdos tratados em outros bimestres.

Atividade 4: Os reservatórios de gasolina dos postos geralmente são tanques no formato de um cilindro reto. Para avaliar o volume de combustível que ainda resta no cilindro enterrado no solo, o funcionário do posto utiliza uma régua que é colocada verticalmente na boca do tanque até atingir o nível do combustível. Ao retirar a régua do tanque, o funcionário lê a graduação e determina a altura do nível do combustível consumido. Admitindo que o tanque tenha sido enterrado no sentido vertical, como ilustra a figura, e que tenha raio da base $R = 1$ m e altura $H = 2$ m, qual é o volume de combustível do tanque quando a régua registra altura $d = 40$ cm?

Figura 12 – São Paulo (2010b, p. 25).



Realizando os cálculos temos que o volume de combustível do tanque é de aproximadamente $1,6\pi \cong 5,024m^3 \cong 5024$ litros.

Atividade 5: Com base na atividade anterior:

(a) Encontre a expressão que relaciona o volume V do combustível contido no tanque com a medida d da régua.

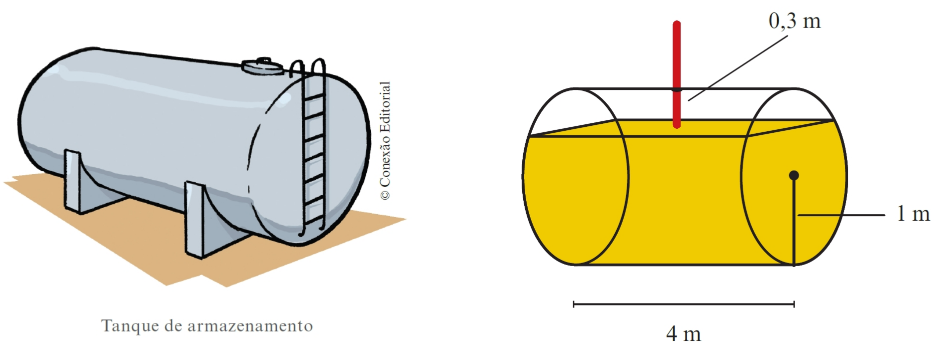
(b) Construa e analise o gráfico da função $V(d)$.

(c) É possível graduar uma régua para que sua leitura converta a medida em centímetros para o volume litros armazenados no tanque? Se afirmativo, explique como fazê-lo.

Na atividade seguine o Caderno do Professor traz uma situação semelhante à atividade 4, mas agora considerando o tanque (cilindro) na posição horizontal, que é como geralmente é encontrado nos postos de gasolina. Essa atividade vai exigir dos alunos alguns conhecimentos sobre fatos referentes ao círculo e sobre razões trigonométricas, sendo assim uma boa situação para o professor rever o conteúdo do 1º bimestre (funções trigonométricas) e iniciar a exploração de áreas de setores circulares, necessários na planificação do cone.

Atividade 6: Vamos agora, considerar um tanque de armazenamento de álcool com o mesmo formato indicado na atividade anterior. Contudo, agora ele está colocado na posição horizontal, como indica a figura 2.12 (a). Do mesmo modo, para medir a quantidade de álcool do tanque, utiliza-se uma régua e o procedimento é o mesmo da atividade anterior. Suponha que o tanque tenha o formato de um cilindro com 1 m de raio de base e 4 m de altura. Qual o volume de álcool consumido quando a régua registra a marca $d = 30$ cm?

Figura 13 – São Paulo (2010b, p. 26).



Resolução: Realizando os cálculos temos que o volume de álcool consumido foi de 1.140 litros.

O caderno também apresenta algumas considerações sobre a avaliação:

> Após as primeiras Situações de aprendizagem, a expectativa é que os alunos tenham adquirido um método de exploração de figuras no espaço com as características de prismas e cilindros. A seleção das atividades foi feita considerando-se um contexto e uma possibilidade de articulação com outros conceitos geométricos. O trabalho com o círculo e a circunferência, iniciado com os cilindros, aprofunda-se no estudo dos cones. Portanto, alguns aspectos tratados nesta Situação de Aprendizagem retornarão mais à frente, o que merecerá a atenção do professor (SÃO PAULO, 2010b, p. 31).

1.4.4 SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 3 – O MOVIMENTO DE ASCENSÃO: PIRÂMIDES E CONES

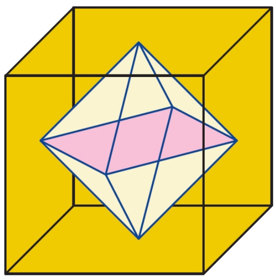
Para essa atividade o Caderno do Professor apresenta uma breve introdução histórica envolvendo conceito de ascensão e pirâmide. Nessa etapa, com os conhecimentos e métodos discutidos nas outras Situações de Aprendizagem, os alunos estão preparados para intuir muitas noções envolvidas no estudo das maravilhosas pirâmides. Desta forma, o trabalho com as embalagens e a confecção de pirâmides é um recurso ótimo para explorar a visualização e a manipulação dos sólidos.

Alguns fatos são semelhantes aos prismas: suas faces também são polígonos, seus nomes dependem do polígono que forma sua base e elas podem ser retas ou oblíquas, dependendo da posição entre a altura e a base. Vale destacar a diferença: a pirâmide é um sólido que se "afunila".

A seguir apresentamos algumas situações encontradas no Caderno do Professor.

Atividade 1: Dado um cubo, quando unimos , por segmentos e reta, os centros de suas faces obtém um novo poliedro: o octaedro regular. Ao proceder do mesmo modo com um octaedro, obtemos, no seu interior, um cubo. O octaedro regular e o cubo são chamados, em razão disso, de poliedros duais.

Figura 14 – São Paulo (2010b, p. 33).



A figura 14 representa o dual cubo-octaedro. O octaedro representado é uma figura espacial que pode ser obtida reunindo-se, pela base, duas pirâmides idênticas de base quadrada.

Todas as arestas desse octaedro têm o mesmo comprimento, logo suas faces são triângulos eqüiláteros. Considerando o octaedro regular de aresta 20 cm, determine:

(a) A altura das faces laterais do octaedro;

(b) A área da superfície do octaedro

(c) A altura do octaedro;

(d) A área da superfície do cubo.

Resolução:

(a) h = 10

(b) A = 1384 cm^2

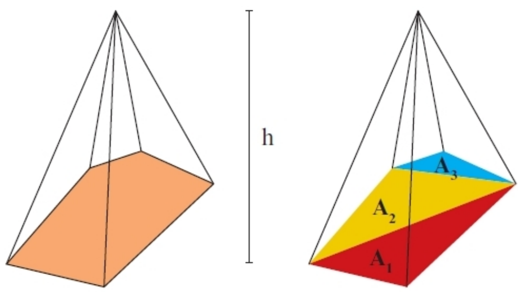
(c) H = 10

(d) A = 4800 cm^2

Como sugestão para iniciar o trabalho com o volume da pirâmide, o Caderno do Professor propõe uma pesquisa aos alunos: Como calcular o volume de uma pirâmide?

Após o debate das respostas encontradas o professor poderá partir para o trabalho em dupla usando pedras de sabão e estilete, para assim mostrar que o volume da pirâmide é 1/3 do volume de um prisma. (A sugestão e passo a passo estão na página 36 do referido caderno). Para o cálculo do volume de uma pirâmide cuja base não seja triangular, podemos mostrar que toda pirâmide pode ser decomposta em pirâmides de bases triangulares justapostas. Vejamos:

Figura 15 – São Paulo (2010b, p. 37).



$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}A_1 \,.\, H + \frac{1}{3}A_2 \,.\, H + \frac{1}{3}A_3 \,.\, H$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}H\,(A_1 + A_2 + A_3)$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \,.\, H$$

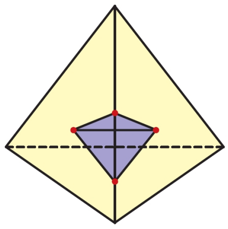
Atividade 2: Uma pirâmide de base triangular é um sólido de 4 faces, chamado de tetraedro. Um tetraedro regular (faces são triângulos equiláteros) tem área total igual a $8\sqrt{3}$ cm^2.

(a) Desenhe o tetraedro e o seu dual, ou seja, o poliedro cujos vértices são os centros das faces do poliedro dado.

(b) Encontre o volume do tetraedro maior.

Resolução: São Paulo (2010b, p. 37 - 38).

(a)



(b) $V = \dfrac{8}{3}$ cm^3

O trabalho feito com setores circulares que aparece na Situação de Aprendizagem 2 agora é aprofundado tratando as superfícies laterais dos cones circulares retos. Para a determinação do volume do cone é aplicado o Princípio de Cavalieri, compara entre o volume da pirâmide e do cone, de forma análoga ao que foi feito com a pirâmide e o prisma. Outra maneira apresentada pelo Caderno é imaginar pirâmides de mesma altura, inscrita no cone, com número de lados cada vez maiores, aproximando-se da área da base à área do círculo.

Atividade 3: Vamos construir setores circulares a partir de círculos de 10 cm de raio desenhados em uma folha de papel sulfite. Observe que, para cada setor, construímos também o setor do seu replementar, isto é, cuja soma é igual a 360º.

(a) 60º

(b) 120º

(c) 90º

(d) 270º

Terminada a construção, recorte os setores.

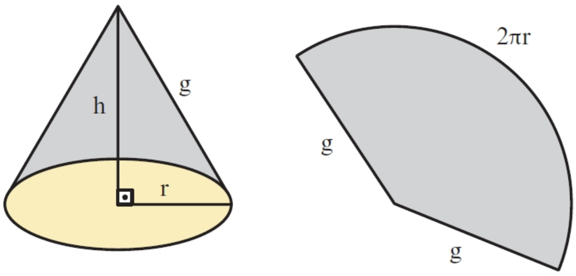
Atividade 4: Tomando os setores da atividade anterior, use fita adesiva para unir os raios, de modo a formar figuras parecidas com chapéus de festa de aniversário. Cada uma dessas figuras corresponde à superfície lateral de um cone, e os raios desses setores constituem a sua geratriz. Observando cada um dos modelos criados procure completar os dados da tabela a seguir:

Tabela 3 – São Paulo (2010b, p. 39).

Ângulo central α	Área do setor circular A	Raio da base r	Altura do cone h
60º			
90º			
120º			
270º			

Com a Atividade 4 o professor leva o aluno a investigar as relações entre geratriz, raio da base e o comprimento do setor circular. O cálculos são obtidos com o uso de proporcionalidade. Ao final da atividade o professor poderá pedir aos alunos que generalizem essa situação, obtendo:

Figura 16 – São Paulo (2010b, p. 40).



$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \begin{cases} r^2 = g^2 - h^2 \Rightarrow r = \sqrt{g^2 - h^2} \\ h^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2} \end{cases}$$

Ao final desta Situação de Aprendizagem, a expectativa é que os alunos tenham aprendido a observar figuras tridimensionais e abstrair delas seus elementos estruturais, como diagonais, alturas, arestas, vértices, geratrizes, etc. As formas estudadas e suas combinações fazem parte de muitas estruturas espaciais que observamos no nosso entorno. Caixas d'água, monumentos, embalagens e dados de jogos de tabuleiros são alguns exemplos disso. Também se espera, neste momento, que o aluno apresente domínio sobre as relações métricas aprendidas até aqui. Insistimos na necessidade de representação das situações apresentadas no problema como caminho para sua resolução. Em muitas das situações, foram necessárias aproximações e estimativas de valores, além do trabalho com várias unidades de medidas. A avaliação dos resultados é também um passo importante no processo de resolução da atividade.

1.4.5 SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 4 – ESFERA - CONHECENDO A FORMA DO MUNDO

Após as construções de formas geométricas básicas, os alunos agora estarão trabalhando com a esfera, explorando associações com o formato do nosso planeta, permitindo que temas como latitude, longitude e fusos horários, estudados geralmente na disciplina de Geografia, agora torna-se conceitos motivadores e significativos a nossa vida. Ao estudar a esfera podemos também fazer um paralelo entre a geometria euclidiana e a não euclidiana (esférica).

Como nas Situações de Aprendizagem anteriores é recomendado ao professor levar aos alunos objetos em forma de esfera para serem explorados em sala de aula. O Caderno do Professor pede que o professor instigue os alunos a criar uma definição para a esfera. Será possível fazê-la como o processo de sobreposição? E com o de revolução?

Desta forma o professor pode confeccionar um círculo de papelão e fixar, com fita adesiva, um barbante, passando por um diâmetro. Fazendo a figura girar em torno do barbante e desta forma estimular os alunos a observar o movimento de rotação do círculo em torno de um eixo gerando uma figura espacial, neste caso a esfera. O Caderno traz que uma esfera é o resultado da revolução de um circulo ou semicírculo em torno de um eixo que passa pelo seu diâmetro. A superfície esférica pode ser interpretada do mesmo modo que entendemos a circunferência: ela é o conjunto de todos os pontos do espaço equidistantes de um ponto fixo, chamado centro da esfera.

O Caderno (SÃO PAULO, 2010b) traz uma abordagem do trabalho com fusos horários e cunhas esféricas onde um fuso esférico é a superfície que se obtém quando giramos uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro em um ângulo de 0º a 360º. Cunha esférica é uma parte da esfera que se obtém ao girar um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro de um ângulo de 0º a 360º.

Atividade 1: Uma semicircunferência faz uma rotação de 30º em torno do eixo que passa sobre seu diâmetro. Qual fração o fuso representa em relação à superfície da esfera gerada pela rotação completa dessa semicircunferência?

Resolução: São Paulo (2010b, p. 45).

Atividade 2: Hemisfério (hemi significa ”meio”) ou semi esfera é cada uma das partes de uma esfera dividida por um plano que passa pelo seu centro.

(a) Qual é a porcentagem do volume do hemisfério em relação ao volume da esfera?

(b) Qual é a porcentagem de um quarto da superfície do hemisfério terrestre em relação à superfície do hemisfério terrestre em relação à superfície total da Terra?

Resolução: São Paulo (2010b, p. 45).

Atividade 3: Em 1884, 25 países estabeleceram uma divisão da superfície terrestre em 24 fusos de mesmo tamanho. A divisão tomou por base o movimento de rotação da Terra em torno de seu próprio eixo, isto é, um giro de 360º, que dura, aproximadamente, 24 horas.

(a) Encontre a medida do ângulo correspondente a cada fuso.

(b) Se cada fuso correspondente à uma hora, qual é a porcentagem da superfície terrestre correspondente a 6 horas?

Resolução: São Paulo (2010b, p. 45).

Atividade 4: Localize em um globo ou em um mapa a latitude e a longitude da sua cidade.

Resolução: São Paulo (2010b, p. 46).

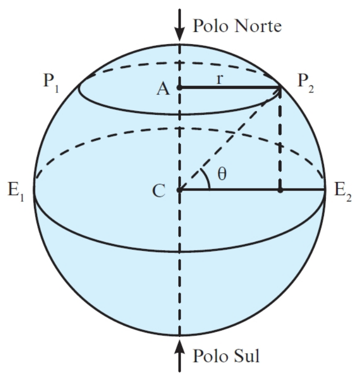
1.4.6 VOLUME DA ESFERA E ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

O Caderno do Professor traz a demonstração da expressão do volume da esfera, enfatizando que tal demonstração é rica por permitir a articulação de idéias como estimativas, inscrição e circunscrição de sólidos, seção de sólidos, comparação de volumes e a aplicação do Princípio de Cavalieri. Salienta também que a expressão é conseguida pela comparação entre o volume de três sólidos: um hemisfério de raio R, um cone e um cilindro de raio e altura R. A demonstração apresentada não é de fácil compreensão, cabendo ao professor tomar cuidado na apresentação aos alunos, pois o envolvimento visual e algébrico é de essencial para essa demonstração. Com dedicação chegamos à equação: $V_{\text{esfera}} = 4\pi R^3/3$ (a demonstração está em São Paulo (2010b, p. 47 - 48)). A equação área da superfície esférica é encontrada decompondo a esfera em pirâmides com vértices no seu centro. As bases das pirâmides compõem a superfície esférica. Mais uma vez, o par composição e decomposição são aplicadas e novas expressões são aprendidas das anteriores. A demonstração apresentada no Caderno do Professor é de fácil compreensão e logo chegamos à equação $S = 4\pi R^2$.

O Caderno segue com exemplos de atividades sobre o tema, salientando que o professor neste momento deve estar atento, verificando se os alunos entendem os enunciados, identificam os dados e o que se pede. Os alunos fazem uma ilustração para o apoio da compreensão do problema? Utilizam a unidade de medidas corretamente?

Atividade 5: Considerando a Terra uma esfera com raio de 6370 Km, encontre o que se pede:

Figura 17 – São Paulo (2010b, p. 51).



(a) O comprimento do Equador.

(b) O comprimento de um paralelo que passa pelos pontos P_1 e P_2, sendo sua latitude = 60°

Neste momento do processo de aprendizagem espacial métrica, a expectativa é que os problemas propostos tenham permitido um bom nível de discussão, em que os argumentos, as análises de situações, os levantamentos de hipóteses e as comparações das soluções tenham fortificado o grupo de alunos como um coletivo gerador de conhecimento.

A finalização com o estudo da esfera permite um apanhado geral sobre muitos fatos construídos durante o curso. Além disso, esta Situação de Aprendizagem é uma oportunidade de dar significados à forma de nosso planeta e de muitos conceitos a ele associados. Particularmente, o trabalho com as coordenadas geográficas abre a possibilidade de atividades transdisciplinares com a Geografia. O tratamento feito para o cálculo do volume e da área da superfície da esfera também merece destaque no curso.

2 CONTEÚDO MATEMÁTICO - ÁREAS E VOLUME

O Ensino Médio, de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/1996), não visa apenas dar continuidade e aprofundamento ao Ensino Fundamental e sim, formar cidadãos críticos; possibilitar a entrada no mercado de trabalho; autonomia; entre outros. A Matemática tem papel importante neste processo, pois desenvolve o pensar, o raciocínio, a visualização e representação e está presente no cotidiano. A Geometria é um dos tópicos da Matemática que é considerada essencial, básica para o conhecimento dessa área de ensino. Neste sentido,

> O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. (BRASIL, 2006, p.75).

Ainda de acordo com a referência, “as geometrias planas e espaciais devem ser estudadas com mais detalhes, com sistematizações, pois o aluno já tem maturidade matemática para compreender certos tipos de demonstrações."(BRASIL, 2006, p.76).

Dessa forma, é possível que o estudante do Ensino Médio reconheça e entenda as fórmulas de cálculos de volumes de sólidos, por exemplo, utilizando como ferramentas planificações, cortes planos, projeções e o Princípio de Cavalieri. Além disso, softwares de geometria dinâmica, como o Geogebra©, são indicados, pois auxiliam em um aspecto que às vezes não é tão explorado nas aulas de Matemática, a visualização.

O PCN+ também traz a Geometria como um dos temas estruturadores da Matemática, e que deve seguir alguns critérios como fazer com que os alunos entendam a geometria não só como um tópico de uma disciplina escolar, mas que tenha importância em suas vidas, na maneira de conhecer o mundo e fazer relações para que possam ser discutidas entre eles e o professor. Dentro deste tópico, existem quatro unidades que o professor pode trabalhar no Ensino Médio: a geometria plana, espacial, métrica e analítica.

Sobre a geometria plana e espacial, as Orientações Curriculares Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) ressalta a importância da utilização de formas geométricas para representar o mundo real através da visualização, para fazer relações entre figuras tanto planas quanto espaciais, fazer planificações, entre outros. Neste nível de aprendizagem, torna-se importante que o aluno desenvolva mais o lado dedutivo e passe a reconhecer qual a importância de axiomas e postulados na Geometria, mesmo não utilizando os diretamente, já que este requer um nível mais abstrato e avançado de conhecimento.

Os trabalhos com as geometrias plana e espacial são sugeridos para o 1º e 2º ano respectivamente. A geometria plana, através de semelhança, congruência e representações de figuras e a espacial com o estudo de poliedros, sólidos redondos, propriedades relativas à posição, inscrição e circunscrição de sólidos, áreas e volumes e estimativas. De acordo com os PCN+, fica claro que para ensinar Geometria, o professor deve conhecer os conceitos matemáticos, os passos que devem serem dados na apresentação do conteúdo e também na resolução de atividades. Por outro lado, o aluno deve compreender, fazer relações e aplicações do que aprendeu, tornando mais concreto o seu entendimento ao invés de decorar fórmulas e aplicá-las.

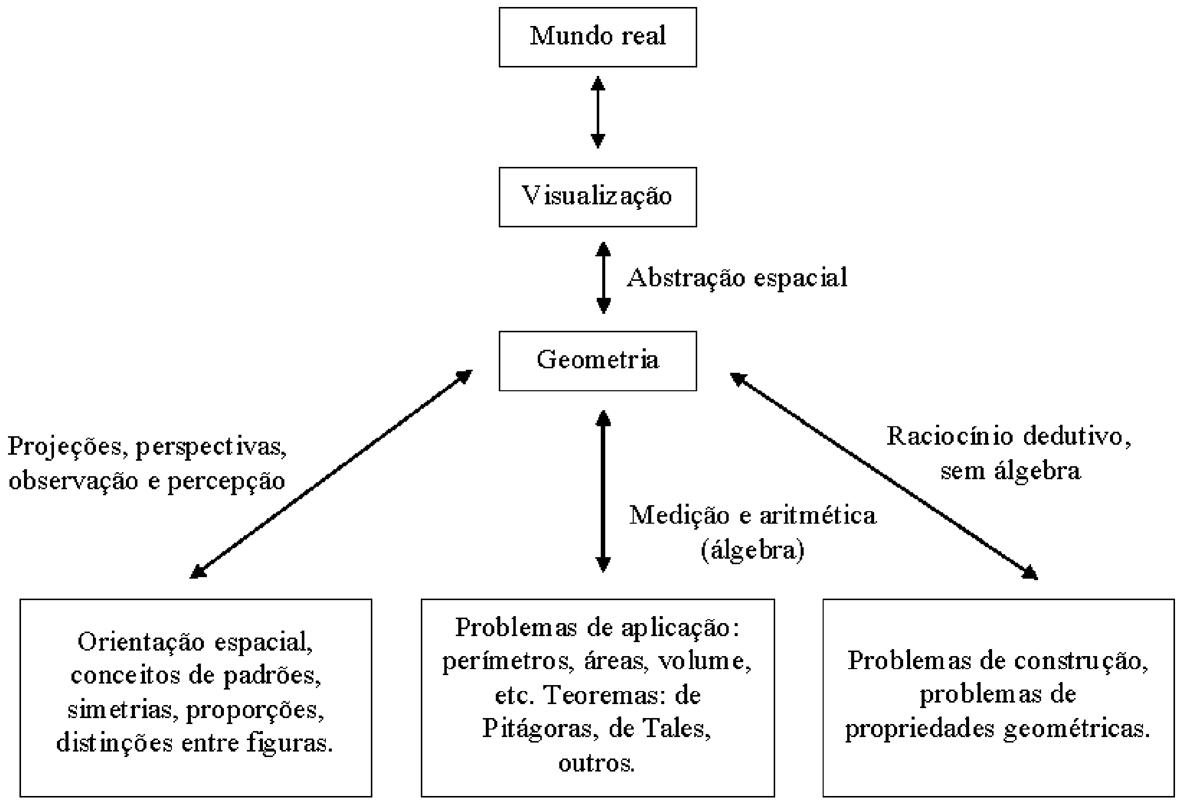
Outro fator importante no ensino da Geometria é a escolha da bibliografia a ser utilizada. O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), a partir do ano de 2004, começou a analisar e avaliar livros didáticos do Ensino Médio de todas as áreas, contando com a participação de docentes de todos os níveis de ensino. O PNLD 2012 é um guia que traz resenhas de 7 livros que foram selecionados para análise, apresentando uma pequena descrição da obra com relação aos capítulos, analisando a metodologia predominante, a análise das ilustrações presentes, entre outros fatores. Este material apresenta importantes aspectos de como a Geometria vem sendo apresentada. O tópico de Geometria presente em alguns livros didáticos apresenta o método axiomático estabelecendo de forma isolada, não o utilizando na resolução de exercícios; não estabelecendo assim uma relação entre os axiomas e teoremas com os exercícios propostos.

A quantidade e o modo de apresentação de figuras são comentados, tendo que em alguns livros a parte de visualização não é bem explorada, sem planificações, projeções, etc. Esse problema acontece com as situações de geometria espacial, que continuam a objetivar a resolução de exercícios apenas com aplicação de fórmulas, valorizando mais a parte algébrica, e deixando de lado as conexões com outras partes da Matemática, como exemplo, o estudo de funções.

A apresentação de recursos para ensinar geometria é escassa, tanto em materiais manipulativos para exploração do visual, quanto o uso de instrumentos como régua, compasso e esquadros, pois são utilizados de forma superficial ou nem mesmo são considerados nas propostas de alguns livros.

De acordo com Baldin (2009), o ensino da Geometria torna-se completo quando segue o seguinte princípio:

Figura 18 – Ensino da Geometria.



2.1 MEDIDAS E FORMA EM GEOMETRIA

Para essa pesquisa será apresentado o referencial teórico "Medidas e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança" de Elon Lages Lima. Esse material é destinado à formação de professores de Matemática, sendo um dos textos usados nos cursos de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio, um programa organizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA.

Esse livro possui quatro capítulos, sendo:

Capítulo 1: Trata de medida de um segmento de reta. Nele se mostra que o processo de comparar um segmento arbitrário com outro fixado como unidade conduz aos diversos tipos de números reais positivos: inteiros, racionais e irracionais. A noção de segmentos incomensuráveis é explicada e, no final uma breve nota histórica descreve como os matemáticos gregos enfrentaram a questão da incomensurabilidade.

Capítulo 2: Aborda a noção de área de uma figura plana. São deduzidas as fórmulas usuais para as áreas dos polígonos mais simples e é apresentada a definição geral de área de uma figura plana. Na dedução das fórmulas para as áreas do quadrado e do retângulo é feita uma distinção cuidadosa entre os casos em que os lados são comensuráveis ou incomensuráveis com a unidade de comprimento adotada. O capítulo termina com uma nota histórica, na qual se conta como as áreas são estudadas nos Elementos de Euclides. Como subproduto desse relato, é apresentada a demonstração dada por Euclides para o Teorema de Pitágoras e é esclarecida a razão da sua escolha do argumento, à luz da discussão feita no Capítulo 1.

Capítulo 3: Contém uma exposição da teoria da semelhança, que ocupa um lugar central na Geometria Euclidiana. A definição de semelhança é dada “Comme Il Faut", é desenvolvida de modo a conter a abordagem tradicional e é aplicada para dar uma dedução simples e conceitual da fórmula para a área do círculo. Mostra-se que o número π, definido como a área de um circulo de raio 1, é também a razão entre os comprimentos da circunferência e do seu diâmetro. No final do capítulo é feita uma crônica resumida sobre o número π.

Capítulo 4: Estudo dos volumes dos sólidos. É dada a definição geral de volume e são deduzidas as fórmulas para os volumes dos sólidos mais conhecidos. O principal instrumento de trabalho utilizado é o Princípio de Cavalieri, com o qual se obtém, de modo simples e elegante, os volumes dos sólidos que têm faces inclinadas, como prismas e pirâmides, ou sólidos “redondos", como cilindros, cones e esferas. O uso sistemático do Princípio de Cavalieri evita os argumentos tradicionais, que requerem explícitas passagens ao limite, mesmo para sólidos retilíneos, como pirâmides de bases poligonais. As área das superfícies do cilindro, do cone e da esfera são estudadas da forma clássica. O capítulo termina com um esboço histórico da evolução das idéias nele apresentadas, com destaque para as contribuições de Arquimedes e Cavalieri.

Como parte da pesquisa voltaremos o olhar para os capítulos 2 e 4.

2.1.1 ÁREAS

No capítulo 2 de Lima (2009) o autor apresenta que para medir a porção do plano ocupada por uma figura plana F, devemos comparar F com a unidade de área. O resultado dessa comparação será o número m, que deverá exprimir quantas vezes a figura F contém a unidade de área.

2.1.1.1 QUADRADO E RETÂNGULO

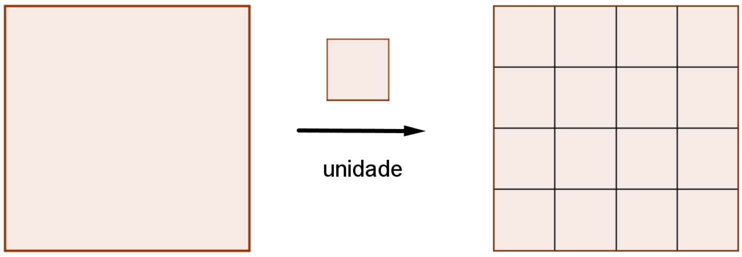
Seguindo para a definição de quadrado, afirma:

> ... quadrado é o quadrilátero que tem 4 lados iguais e os 4 ângulos reto. Convencionaremos tomar como unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ele será chamado o “quadrado unitário”.

A partir dessa definição o autor toma um quadrado Q cujo lado tem para medida o número inteiro n que pode ser decomposto, por meio de paralelas aos seus lados, em n quadrados justapostos, cada um deles com lado unitário e portanto com área 1. Segue que o quadrado Q deve ter área n^2.

De modo análogo, se o lado de um quadrado Q tem por medida $1/n$, onde n é inteiro, então o quadrado unitário se decompõe mediante paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos, todos congruentes a Q. Estes n^2 quadrados congruentes a Q compoem um quadrado de área 1. Segue que a área de Q deve satisfazer a condição n^2.

Figura 19 – Quadrado de lado 4, decomposto em $4^2 = 16$.



Mais geralmente, se o lado de um quadrado Q tem por medida o número racional m/n, então podemos decompor cada lado de Q em m segmentos, cada um dos quais tem comprimento $1/n$. Traçando paralelas aos lados de Q a partir dos pontos de divisão, obtemos uma decomposição de Q em m quadrados, cada um dos quais tem lado $1/n$. Portanto, a área de cada um desses quadrados menores é $1/n^2$. Segue se que a área e Q deve ser:

$$m^2(\frac{1}{n^2}) = \frac{m^2}{n^2},$$

ou seja,

$$\text{Área de } Q = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Podemos então concluir que a área de um quadrado Q cujo lado tem para medida um número racional $a = m/n$ é dada pela expressão:

$$\text{Área de } Q = a^2$$

O texto também analisa o caso onde existem quadrados cujos lados são incomensuráveis com o segmento unitário. "O lado de Q tem para medida o número irracional a". Dado qualquer número $b < a^2$, mostraremos que $b <$ Área de Q. Em seguida prova que $a < c^2$ implica Área de $Q < c$. Isso mostrará que a área de Q não pode ser um número b menor nem um número c maior do que a^2. Concluindo assim que a Área de $Q = a^2$. Assim, o autor segue para a demonstração:

Seja, pois b um número tal que $b < a^2$. Tomemos um número racional r, inferior a a, porém, tão próximo de a que se tenha $b^2 < r^2 < a^2$. (Basta tomar r, uma aproximação por falta de a, com erro inferior a $-\sqrt{b}$. Então $\sqrt{b} < r < a$ e portanto $b < r^2 < a^2$). No interior de Q, tomamos um quadrado Q' de lado r. Como r é racional, a área deste quadrado é r^2. Como Q' está contido no interior de Q, devemos ter área de $Q' <$ área de Q, ou seja $r^2 <$ área de Q. Mas sabemos que $b < r^2$. Conclusão: $b <$ área de Q. Assim, todo número real b, inferior a a^2, é também menor do que a área de Q. Da mesma maneira se prova que todo número real c, maior do que a^2, é maior do que a área de Q. Logo, a área de Q não pode ser menor nem maior do que a^2. Por exclusão, deve-se então ter área de $Q = a^2$.

Concluímos desta maneira, que a área de um quadrado Q, cujo lado mede a, deve ser expressa pela fórmula:

$$\text{Área de } Q = a^2 \text{ (onde } a \text{ é um número real qualquer)}$$

Olhando agora para o retângulo, o autor define: “retângulo é o quadrilátero que tem os quatro ângulos retos". Assim, se os lados de um retângulo R têm para medidas os números inteiros m e n, então, mediante paralelas aos lados, podemos decompor R em $m.n$ quadrados unitários, de modo que a Área de $R = m.n$.

Se os lados do retângulo R têm como medidas dois números racionais a e b, podemos escrever estes números como duas frações $a = p/q$ e $b = r/q$, com o mesmo denominador q. Dividindo cada lado de R em segmentos de comprimento $1/q$. O lado que mede a ficará decomposto em p segmentos justapostos, cada um deles medindo $1/q$. O lado que mede b ficará subdividido em r segmentos iguais, de comprimento $1/q$. Traçando paralelas aos lados a partir dos pontos de subdivisão, o retângulo R ficará subdividido em $p.r$ quadrados, cada um deles de lado $1/q$.

A área de cada um desses quadrados é $(1/q)^2 = 1/q^2$. Logo, a área de R deve ser igual a:

$$(p.r)\frac{1}{q^2} = \frac{pr}{q^2} = \frac{p}{q}.\frac{r}{q},$$

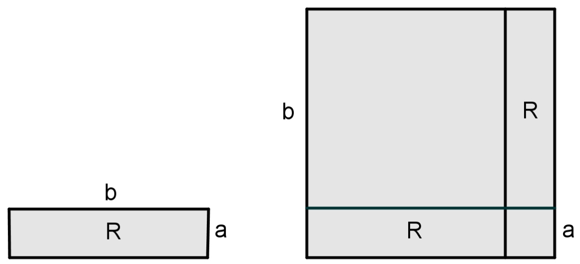
ou seja, a Área de $R = a.b$.

Temos assim que quando os lados de um retângulo R têm para medidas os números racionais a e b, a área de R é expressa pela fórmula:

Área de $R = ab$ (onde a e b são números racionais)

Para tratar o caso em que a e b não são ambos os números racionais, poderíamos usar o método usado para o quadrado (exaustão). Em vez disso, podemos usar um artifício simples e elegante, fazendo recair a área do retângulo na área do quadrado. Considere a figura 20:

Figura 20 – Quadrado Q de lado $a + b$.



Dado o retângulo R de base b e altura a. Construímos o quadrado Q de lado $a + b$, o qual contém 2 cópias de R e mais dois quadrados, um de lado a e outro de lado b. Como sabemos, área de $Q = (a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$.. Por outro lado, como os quadrados menores têm áreas iguais a^2 e b^2 respectivamente, temos:

$$\text{Área de } Q = a^2 + b^2 + 2(\text{área de R}).$$

Segue-se que área de $R = a.b$.

2.1.2 PARALELOGRAMO E TRIÂNGULO.

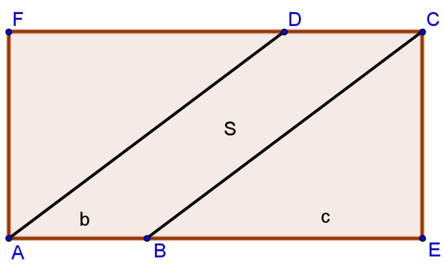
Segundo Lima (2009):

> Um paralelogramo é um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos. Quando se toma um dos lados do paralelogramo como base , chama-se de altura do paralelogramo a um segmento perpendicular que liga a base ao lado oposto (ou ao seu prolongamento).

A demonstração apresentada pelo autor é:

> Seja $ABCD$ um paralelogramo, cuja área S que queremos calcular, sabendo que sua base AB tem comprimento b e sua altura DE tem comprimento a.

Figura 21 – Paralelogramo $ABCD$.



O paralelogramo $ABCD$ está contido num retângulo de base $b + c$ e altura a. Como vimos a área desse retângulo é $(b + c)a = ba + ca$. Por outro lado, o retângulo é formado pelo paralelogramo dado mais dois triângulos que, juntos, formam um retângulo de área ca. Portanto $ba + ca = S + ca$, donde $S = ba$. A área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer uma de suas bases pelo comprimento da altura correspondente.

Em particular, vemos que o produto do comprimento de qualquer base de um paralelogramo pelo comprimento da altura correspondente é constante (não depende da base escolhida).

Vimos também que, dadas as retas paralelas r, s e o segmento AB sobre r, todos os paralelogramos $ABCD$, com C e D sobre a reta s, têm a mesma área. Dá área do paralelogramo, passa imediatamente para a área do triângulo, pois todo triângulo é a metade de um paralelogramo. Mais precisamente, dado um triângulo ABC, cuja área desejamos calcular, traçamos, pelos vértices C e B, respectivamente, paralelas aos lados AB e AC. Estas retas se encontram no ponto D e fornecem um paralelogramo $ABCD$. Tomemos a altura CE deste paralelogramo. Se $AB = b$ e $CE = a$, sabemos que a área de $ABCD = BA$. Ora, os triângulos ABC e BCD são congruentes (têm um lado comum compreendido entre dois ângulos iguais), logo têm a mesma área. Portanto, a Área de $ABCD = 2$ vezes (Área de ABC) e por conseguinte:

$$\text{Área de } ABC = \frac{1}{2}ba.$$

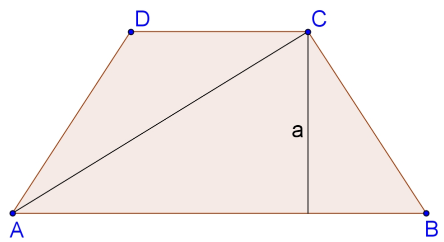
Isto se exprime dizendo que a área de um triângulo é a metade do produto de uma base pela altura correspondente.

2.1.2.1 TRAPÉZIO

Para um polígono qualquer, o processo de calcular sua área consiste em subdividi-lo em triângulos, paralelogramos ou quaisquer outras figuras cujas áreas sabemos calcular. A área do polígono procurada será a soma das áreas das figuras em que o decompusemos.

Por exemplo, o trapézio $ABCD$. Isto significa que AB e CD são paralelos. Escrevamos $AB = b_1$ e $CD = b_2$ e chamemos de a a distância entre as paralelas AB e CD, isto é, o comprimento de qualquer perpendicular ligando um ponto da reta AB a um ponto da reta CD.

Figura 22 – Trapézio $ABCD$.



A diagonal AC decompõe o trapézio nos triângulos ABC e ACD com bases b_1 e b_2 respectivamente, e mesma altura a. A área F_0 trapézio $ABCD$ é a soma das áreas desses dois triângulos, logo

$$\text{Área de } ABCD = \frac{(ab_1)}{2} + \frac{(ab_2)}{2} = \frac{(b_1 + b_2)}{2}a.$$

A área do trapézio é igual a semi soma das bases vezes a altura.

Partimos para a definição geral de área.

A cada polígono P podemos associar um número real não negativo, denominando área do polígono P com as seguintes propriedades:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.
2. Se P é um quadrado com lado unitário, então área de $P = 1$.
3. Se P pode ser decomposto como reunião de n polígonos $P_1, \ldots, P_n$, tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas de P_i, ou seja, Área de$P = \sum_{i=1}^{n} P_i$

Segue da propriedade (c) que se o polígono está contido no polígono Q então a área de P é menor do que a área de Q.

Observamos que as fórmulas para as áreas do quadrado, do retângulo, do paralelogramo, do triângulo e do trapézio foram todas deduzidas a partir das três propriedades.

Agora vamos definir a área de uma figura plana arbitrária, onde chamamos essa área de F. Sabemos que deve ser um número real não negativo que indicaremos com $a(F)$. Este número ficará determinado e conhecemos seus valores aproximados, por falta ou por excesso.

Os valores de $a(F)$ aproximados por falta são, por definição, as áreas dos polígonos P contidos em F. Os valores de $a(F)$ aproximados por excesso são as áreas dos polígonos P' que contém F. Por conseguinte, quaisquer que sejam os polígonos P (contidos em F) e P'(contendo F), o número $a(F)$ satisfaz as desigualdades:

$$A(P) \leq a(F) \leq a(P').$$

Consideramos agora os polígonos retangulares por serem mais fácil calcular a área. Um polígono retangular é a reunião de vários retângulos justapostos (isto é, dois desses retângulos têm em comum no máximo um lado). A área de um polígono retangular é a soma das áreas dos retângulos que o compõem. Sejam os polígonos retangulares contidos na figura F cuja área desejamos calcular. Em outras palavras, consideramos apenas valores aproximados para o número real $a(F)$.

Assim, a área da figura F será o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F. Isto significa que, para todo polígono retangular P, contido em F, tem-se :

$$A(P) \leq a(F).$$

Além disso, dado qualquer número $b < a(F)$, existe um polígono retangular P, contido em F, tal que:

$$B \leq a(P) \leq a(F).$$

Poderíamos, também, ter definido a área de F como o número real cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos retangulares que contém F.

2.1.3 RELAÇÃO ENTRE SEMELHANÇA E ÁREA

Resulta imediatamente da fórmula da área do retângulo que se multiplicarmos a base e a altura de um retângulo pelo mesmo número positivo r, a área desse retângulo fica multiplicada por r^2.

Teorema 2.1. *As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração. Seja $f : F \to F'$ uma semelhança de razão r entre as figuras F e F'. Afirmamos que a área de F' é igual a r^2 vezes a área de F. Como vimos anteriormente, isto é verdade quando F e F' são retângulos e portanto também quando F e F' são polígonos retangulares. Assim, todo polígono retangular P, contido em F, é transformado pela semelhança f num polígono retângulo P', contido em F', tal que a área de P' é igual a r^2 vezes a área de P. Reciprocamente, todo polígono retangular Q', contido em F', é transformado por f^{-1} num polígono retangular Q cuja área é $(1/r)^2$ vezes a área de Q'. Logo a área de Q' é r^2 vezes a área de Q. Assim, a área de F' é o número real cujas aproximações por falta são r^2 vezes as aproximações por falta da área de F. Desta maneira temos:

$$\text{Área de } F' = r^2 \times (\text{Área de } F)$$

$\square$

2.1.4 ÁREA DO CÍRCULO E SEU COMPRIMENTO.

Como dois círculos de mesmos raios são congruentes, e portanto têm a mesma área, a área de um círculo de raio r é uma função desse raio. Ora, um círculo de raio r é semelhante ao círculo de raio 1, sendo r a razão de semelhança. Segue que a área de um círculo de raio r é r^2 vezes a área do círculo de raio 1. Assim, indicando com a letra π

a área de um círculo de raio 1, segue que a área A de um círculo de raio r é dada pela fórmula:

$$A = \pi . r^2$$

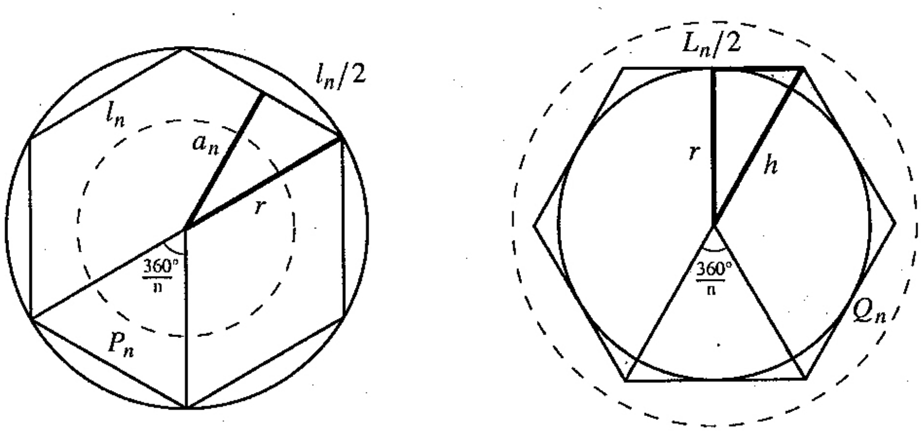
Podemos caracterizar a área de um círculo como o limite das áreas dos polígonos regulares nele inscritos (ou circunscritos) quando o número de lados cresce indefinidamente.

Lembremos que se chama regular um polígono convexo cujos lados e ângulos são todos iguais. Diz-se que um polígono está inscrito num círculo quando seus vértices estão sobre a circunferência e seus lados são cordas. O polígono diz-se circunscrito ao círculo quando seus lados são tangentes à circunferência.

Teorema 2.2. *A área do círculo é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos nele inscritos e cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos regulares a ele circunscritos.*

Demonstração. Indiquemos com P_n e Q_n os polígonos regulares de n lados, respectivamente inscritos e circunscritos ao círculo C de centro O e raio r. Evidentemente, a área de $P_n < \pi r^2 <$ área de Q_n. Ver figura 23.

Figura 23 – Lima (2009, p. 49).



Queremos provar que, considerado o número n de lados suficientemente grande, as áreas de P_n e Q_n podem tornar-se tão próximas de πr^2 quanto se desejar. Mais precisamente, se forem dados arbitrariamente, os números positivos α e β tais que $\alpha < \pi r^2 < \beta$. Provaremos que é possível achar n tal que

$$A < \text{Área de } P_n < \pi r^2 < \text{Área de } Q_n < \beta.$$

Observamos que o lado l_n do polígono P_n pode-se tornar tão pequeno quanto se deseje, bastando que o número n de lados seja suficientemente grande. Com efeito, os vértices de P_n dividem a circunferência em n arcos iguais e cada corda l_n é menor do que qualquer desses arcos. O raio r é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são $l_n/2$ e o apótema a_n de P_n. Logo $r < a_n < l_n/2$.

Dado o número tal que $\alpha < \pi r^2$ tomamos $s = \sqrt{\alpha/\pi}$. Então $\pi s^2 = \alpha$ e $s < r$. Portanto, o círculo C_s de centro O e raio s tem área α e está contido em C. Podemos tomar n tão grande que $l_n/2 < r - s$. Então,

$$R < a_n + \frac{l_n}{2} < a_n + r - s$$

onde $a_n > s$. De $s < a_n$ resulta que o círculo C_s está contido no polígono P_n. Logo, $\alpha =$ Área de $C_s <$ Área de P_n. Isto completa a prova de que as áreas dos polígonos regulares inscritos em C são aproximadamente por falta da área de C.

Considerando agora as áreas dos polígonos regulares circunscritos Q_n. Tanto P_n como Q_n acham-se decompostos em triângulos isósceles com vértices no centro O e bases iguais aos lados dos polígonos dados. Tanto para P_n como para Q_n, os ângulos dos vértices desses triângulos são iguais a $360^o/n$. Logo, os triângulos de P_n são semelhantes aos de Q_n sendo a razão de semelhança igual a r/a_n. Portanto, se denotarmos por L_n o lado de Q_n temos que $L_n = (r/a_n)l_n$. Assim $L_n < 2l_n$, pois o apótema é sempre maior do que a metade do raio. Da desigualdade $L_n < 2l_n$ resulta que, considerando n suficientemente grande, não apenas l_n como também L_n pode tornar-se tão pequeno quanto se queira.

Dado um número $\beta > \pi r^2$. Para determinarmos n tal que área de $Q_n < \beta$ escrevemos $t = \sqrt{\beta/\pi}$. Então, o circulo C_t de centro O e raio t tem área β e contém C pois $t > r$. Ora, $L_n/2$ e r são catetos de um triângulo retângulo cuja a hipotenusa h é a distância do centro O a um vértice de Q_n. Temos então $h < r + L_n/2$. Considerando n suficientemente grande, sabemos que é possível tornar $L_n/2 < t - r$ resultando $r + L_n/2 < t$. Logo $h < t$. Isto significa que área de $Q_n <$ área de $C_t = \beta$, como queríamos demonstrar. $\square$

2.1.5 COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Por definição temos que o comprimento da circunferência é o número real δC cujas aproximações por falta são os perímetros δP_n dos polígonos regulares P_n inscritos no circulo C e cujas aproximações por excesso são os perímetros δQ_n dos polígonos regulares Q_n circunscritos a C. Dessa definição temos $\delta P_n < \delta C < \delta Q_n$, para todo n

Teorema 2.3. *O comprimento de uma circunferência de raio r é igual a $2\pi r$*

Demonstração. Inicialmente mostraremos que o comprimento δC da circunferência de raio r não pode ser menor do que $2\pi r$. Com efeito, supondo por absurdo que fosse $\delta C < 2\pi r$. Isto resulta que $(\delta C/2)r < \pi r^2$. Pelo teorema 2.3 poderíamos obter um polígono regular P_n de n lados inscritos no circulo C tal que $\delta C.r/2 <$ área de P_n. Ora, a área do polígono P_n é a soma das áreas dos triângulos que o compõem, os quais têm o centro O como vértice e os lados de P_n como bases. Logo, essa área é igual a $\delta P_n a_n/2$ onde a_n é o apótema de P_n (altura dos triângulos). Assim, $\delta C.r/2 < \delta P_n.a_n/2$ e daí, $\delta C < \delta P_n.(a_n/r)$. Como $a_n/r < 1$, concluímos que $\delta C < \delta P_n$, o que é um absurdo. Portanto, não se pode ter $\delta C < 2\pi r$. $\square$

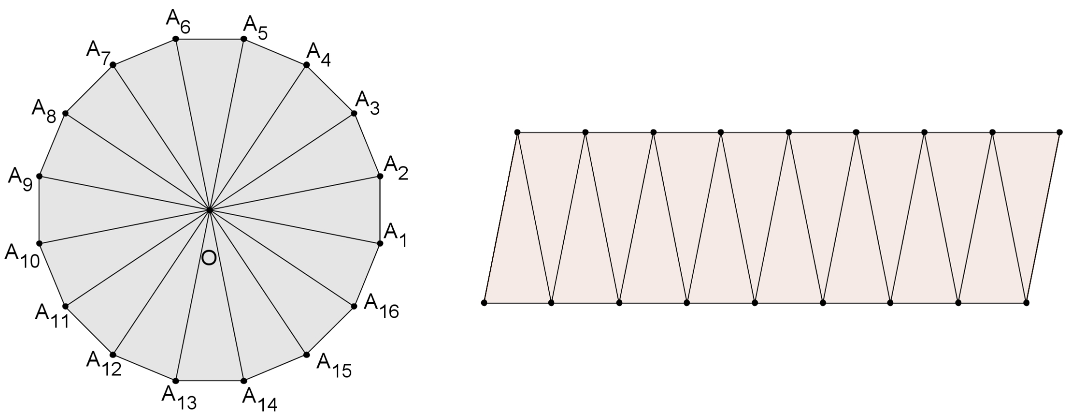
De maneira análoga, com polígonos circunscritos em vez de inscritos, concluiremos também que não pode ser $\delta C > 2\pi r$. Portanto, o comprimento da circunferência é $\delta C = 2\pi r$.

Assim o número π, que foi definido inicialmente como a área de um circulo de raio 1, satisfaz também a igualdade $\pi = \delta C/\delta r$, ou seja, é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

No teorema 2.3 a equação $\delta C = 2\pi r$ do comprimento da circunferência resulta da expressão πr^2 da área do circulo. Podemos inverter esse procedimento, onde uma forma experimental de chegar à expressão $\delta C r/2 (= \pi r^2)$, para a área do circulo a partir do conhecimento do comprimento $\delta C (= 2\pi r)$ da circunferência.

Consideremos a decomposição de um círculo em um número par (bastante grande) de setores e rearranjam-se esses setores na forma mostrada na figura 24.

Figura 24 – Polígono regular de 16 lados.



Nota-se que a figura obtida é aproximadamente um paralelogramo de base $\delta C/2$ e altura r cuja área mede $(\delta C/2)r$.

2.2 VOLUME

Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço ocupado por ele. Assim, para medir a grandeza volume devemos compará-la com uma unidade. O resultado dessa comparação será um número: a medida do volume.

É de costume tomar como unidade de volume o cubo de aresta medindo uma unidade de comprimento, o qual será denominado cubo unitário. Seu volume é por definição igual a um.

Usando novamente a idéia intuitiva, temos como exemplo, um sólido S cujo volume desejamos calcular. Este sólido pode ser feito de metal, plástico ou qualquer outro material impermeável. Mergulhando S num reservatório contendo uma quantidade conhecida de água, que o encha até as bordas, o volume S será igual ao volume do líquido transbordado e este poderá ser medido em outro reservatório com uma escala impressa em sua parede.

Esse processo prático de calcular volumes pode ser utilizado para casos simples, mas é inviável quando o objeto for muito grande ou muito pequeno. No entanto, esse método não permite realizar previsões como: qual seria o tamanho do raio de um reservatório cilíndrico para que este contenha x litros de água?

Precisamos desta forma, obter métodos para o cálculo indireto dos volumes. Um método sistemático que funcione para os casos gerais, sejam para volumes muito grandes ou muito pequenos.

2.2.1 VOLUME DE UM BLOCO RETANGULAR.

Um bloco retangular é um sólido limitado por seis retângulos que compõem suas faces. Os lados dos retângulos são chamados de arestas do bloco. O cubo é um caso particular de bloco retangular em que as arestas tem todas o mesmo comprimento. As seis faces do cubo são quadrados iguais.

Um cubo onde a aresta mede uma unidade de comprimento é chamado de cubo unitário, onde por definição seu volume é igual a 1. Se n é um número inteiro, um cubo C cuja aresta mede n unidades de comprimento pode ser decomposto em n^3 cubos unitários justapostos. Logo o volume de C é n^3.

Da mesma forma se decompomos cada aresta de um cubo unitário no mesmo número inteiro q de partes iguais, teremos assim que esse cubo unitário é decomposto em q^3 cubos justapostos, cada um com aresta $1/q$. Assim, um cubo de aresta medindo $1/q$ (q inteiro) tem volume igual a $1/q^3 = (1/q)^3$.

Dado um cubo C cuja aresta tem como medida um número racional p/q. Podemos decompor cada uma de suas arestas em p partes iguais, cada uma das quais tem comprimento $1/q$. Deste modo, o cubo C ficará decomposto em p^3 cubos justapostos, cada um dos quais tem aresta medindo $1/q$. O volume de cada cubo menor é $1/q^3$. O volume de C será dado por

$$p^3.\frac{1}{q^3} = \left(\frac{p}{q}\right)^3.$$

Chegamos assim ao resultado:

Teorema 2.4. *Se a aresta de um cubo C tem para medida um número racional α, então o volume de C será igual a α^3.*

Do ponto de vista prático, isso resolve o problema de calcular o volume de um cubo, pois não é possível através de medidas diretas, obter um número irracional como medida de uma aresta. Ninguém consegue através de instrumentos de medida, por mais sensível que ele seja, encontrar $\sqrt{2}$, ou π, como sendo medida de um segmento. O que conseguimos são aproximações como 1,414 ou 3,1459. Assim, sobre o ponto de vista teórico, como da Matemática Pura, os números irracionais ocorrem.

Perguntamos: qual seria o volume de um cubo C cuja aresta tem para medida um número irracional b? Afirmamos que, ainda neste caso, tem-se volume de $C = b^3$. Em consequência, a fórmula: Volume de $C =$ (aresta de $C)^3$ é absolutamente geral, válida para qualquer aresta de C com medida racional ou irracional.

Para a demonstração de que volume de $C = b^3$, mesmo quando b é irracional, utilizaremos o método da exaustão: primeiro mostraremos que se x é qualquer número menor do que b^3 então $x < \text{vol}(C)$. Depois mostraremos que se $y > b^3$ então $y > \text{vol}(C)$. Concluindo assim que $\text{vol}(C) = b^3$.

De fato, seja x um número tal que $x < b^3$. Podemos aproximar o número irracional b por um valor racional $r < b$, tão próximo de b tal que $x < r^3 < b^3$. Então o cubo C, cuja aresta tem medida r, contém um cubo D, cuja aresta tem para medida o número racional r. Segue que $\text{vol}(D) < \text{vol}(C)$. Sabemos que $\text{vol}(D) = r^3$, porque r é racional. Concluímos que $r^3 < \text{vol}(C)$ e, portanto, $x < \text{vol}(C)$.

De forma análoga, podemos mostrar que se y for um número maior do que b^3, então $y > \text{vol}(C)$.

2.2.2 BLOCO RETANGULAR.

Considerando B um bloco retangular cujas arestas tem como medida números racionais diferentes. Podemos sempre reduzir esses três números ao mesmo denominador e assim supor que tais medidas são a/q, b/q e c/q, onde a, b, c e q são números inteiros. Decompondo as três arestas do bloco B, respectivamente em a, b e c segmentos iguais, cada um deles de comprimento $1/q$. O bloco ficará então decomposto em abc cubos justapostos, cada um desses cubos tendo aresta $1/q$ e, portanto, volume $1/q^3$. Temos,

$$\text{vol}(B) = \frac{abc}{q^3} = \frac{a}{q}\frac{b}{q}\frac{c}{q}$$

Assim podemos enunciar:

Teorema 2.5. *Se um bloco retangular B tem arestas com medidas racionais a, b, c, seu volume será o produto dessas medidas, isto é, vol $(B) = abc$.*

Essa equação vale, para quaisquer que sejam as medidas de a, b e c, mesmo que elas sejam irracionais. A demonstração é feita através do método da exaustão, da mesma maneira como foi feito no caso do cubo.

Dado o bloco retangular B, com arestas medindo a, b e c. Suponhamos que o número x seja menor do que abc. Podemos encontrar números racionais $r < a$, $s < b$ e $t < c$ tão próximos de a, b e c respectivamente tais que $x < rst < abc$.

O bloco B contém um bloco menor C, cujas arestas medem r, s, e t. Logo vol (C) $<$ vol (B). No entanto, já vimos que vol $(C) = rst$. Logo, $x < rst =$ vol $(C) <$ vol (B), isto é, $x <$ vol (B). Analogamente se mostra que todo número $y > abc$ é maior do que volume de B. Portanto, vol $(B) = abc$.

2.3 PRINCÍPIO DE CAVALIERI.

Consideraremos um plano qualquer no espaço o qual chamaremos de plano horizontal. Todos os planos paralelos a ele serão também chamados planos horizontais.

Sejam A e B dois sólidos. Cada plano horizontal Π determina nos sólidos A e B, seções planas que indicaremos respectivamente com $\Pi \cap A$ e $\Pi \cap B$.

Temos assim o seguinte enunciado:

Teorema 2.6 (Princípio de Cavalieri)**.** *Sejam A e B dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas com áreas iguais então vol(A) = vol(B).*

Esse enunciado se torna plausível se observarmos o seguinte: duas fatias muito finas, de mesma altura, cujas bases têm a mesma área, têm aproximadamente o mesmo volume. Assim, os dois sólidos dados podem ser cortados através de planos horizontais em fatias finas com volumes aproximadamente iguais, sendo o volume de cada sólido a soma dos volumes dessas fatias. A aproximação entre os volumes das fatias pode tornar-se tão precisa quanto se deseje. Assim, vol(A) = vol(B).

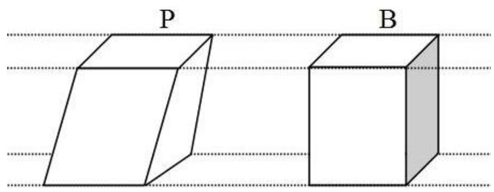
Reduzimos assim o cálculo de volume ao cálculo de áreas. Partimos para a seguinte definição:

Definição 2.1. *Um paralelepípedo é um sólido limitado por seis paralelogramos, os quais denominamos de faces. Estas faces agrupam-se em três pares, cada par de duas faces são paralelas, congruentes, e opostas. Quando se toma uma das faces do paralelepípedo como base, a altura correspondente é a distância entre esta face e sua oposta, ou seja é o comprimento da perpendicular baixada de um ponto da face oposta sobre o plano da base. As arestas de um paralelepípedo são os lados dos paralelogramos que constituem suas faces. Um paralelepípedo cujas faces são retângulos é um bloco retangular.*

Teorema 2.7. *O volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura referente a esta base.*

Demonstração. Consideremos uma das faces do paralelepípedo P como base. O plano que a contém será chamado plano horizontal. Sobre este plano, temos um retângulo cuja área a é igual à área do paralelogramo que serve de base ao paralelepípedo dado. Com altura h, igual à do paralelepípedo, construímos um bloco retangular B, que tem como base o retângulo recém obtido. Ver figura 25

Figura 25 – Volume do paralelepípedo.



Já sabemos que $\text{vol}(B) = ah$. Dado qualquer plano horizontal Π, a seção plana $\Pi \cap P$ é um paralelogramo congruente a base de P, enquanto $\Pi \cap B$ é um retângulo também congruente a base de B. Temos assim que $\Pi \cap P$ e $\Pi \cap B$ têm a mesma área, seja qual for o plano horizontal Π. Concluímos assim pelo Princípio de Cavalieri, que

$$\text{vol}(P) = \text{vol}(B) = ah.$$

□

2.3.1 CILINDRO

Vamos agora definir o que é um cilindro:

Definição 2.2. *Consideramos uma figura plana F, chamada de base do cilindro. O plano que contém F é denominado de plano horizontal. O cilindro fica determinado por sua base F e por um segmento de reta g, não paralelo ao plano horizontal, chamado geratriz do cilindro, do seguinte modo: para cada ponto de F levantamos um segmento de reta a paralelo e congruente a g. A reunião desses segmentos sobre todos os pontos de F é o cilindro C de base F e geratriz g.*

Teorema 2.8. *O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura em relação a esta base.*

Demonstração. AAnalogamente ao teorema anterior, seja um plano horizontal Π que contém F e um retângulo cuja área a seja igual a área de F. Construímos um bloco retangular B, que tem por base o retângulo obtido anteriormente e cuja altura h seja igual a altura do cilindro C. Qualquer que seja o plano horizontal Π, a seção $\Pi \cap C$ é uma figura plana congruente a F, enquanto $\Pi \cap B$ é um retângulo congruente a base de B. Segue que $\Pi \cap C$ e $\Pi \cap B$ possuem a mesma área. Pelo Princípio de Cavalieri, concluímos que:

$$\text{vol}(C) = \text{vol}(B) = ah.$$

□

A partir da definição de cilindro e do teorema 2.8 segue o caso particular da possibilidade de ser a base F um polígono. Quando isso acontecer, o sólido C ficará limitado por faces planas e o chamaremos de prisma. Podemos enunciar a seguinte definição:

Definição 2.3. *Prisma é um cilindro cujas bases são polígonos. Em particular, um paralelepípedo é um prisma sendo que qualquer de suas faces pode servir-lhe de base.*

2.4 VOLUME DE UM CONE.

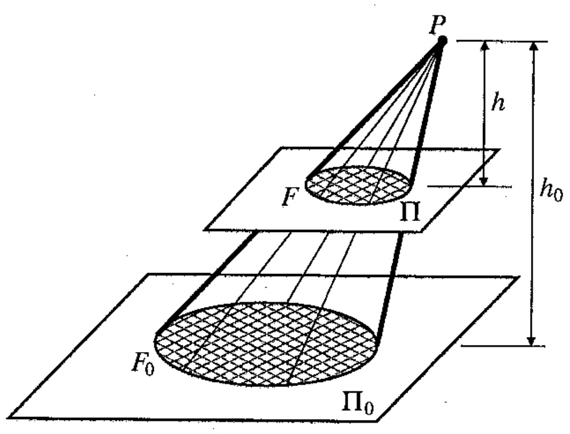
Definição 2.4. *Seja F uma figura plana e P um ponto situado fora do plano que contém F. Um cone K é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto P a todos os pontos de F.*

O plano que contém a base F do cone K será considerado horizontal. A distância do vértice P a este plano, ou seja, o comprimento da perpendicular baixada de P sobre o plano, chama-se altura do cone.

Lema 2.1. *Seja K um cone de vértice P, de altura h_0 e base F_0 situada no plano horizontal Π_0. Seja Π outro plano horizontal entre P e Π_0. Indiquemos com F a seção $\Pi \cap K$ e h a distância entre P e Π, isto é, a altura do cone de base F e vértice P. Tem-se a relação:*

$$\frac{\text{área}(F_0)}{\text{área}(F)} = \left(\frac{h_0}{h}\right)^2.$$

Figura 26 – Lima (2009, p. 72).



Demonstração. Basta observar que a correspondência $\delta : \Pi \to \Pi_0$, que associa a cada ponto X do plano Π o ponto $X' = \delta(X)$ de Π_0 obtido a partir da interseção da semi reta PX com o plano Π_0 é uma semelhança. Com fator de semelhança igual a h_0/h. □

Teorema 2.9. *Dois cones de mesma altura e bases com áreas iguais têm volumes iguais.*

Demonstração. Sejam K e L dois cones com a mesma altura h_0 e bases F_0 e G_0 de mesma área. Podemos supor que as bases F_0 e G_0 estão no mesmo plano Π_0 e que os vértices desses cones estão do mesmo lado de Π_0. Para todo plano horizontal Π, situado entre esses vértices e o plano Π_0, as seções $F = \Pi \cap K$ e $G = \Pi \cap L$ têm áreas iguais pois, segundo o lema 2.1 temos:

$$\frac{\text{área}(F_0)}{\text{área}(F)} = \frac{\text{área}(G_0)}{\text{área}(G)} = \left(\frac{h_0}{h}\right)^2.$$

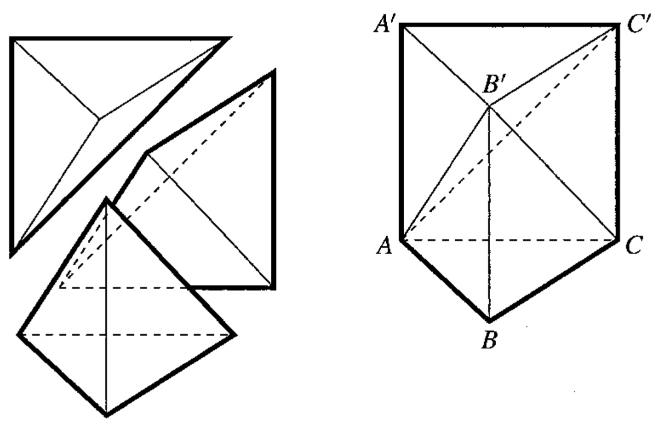
onde h é a distância do vértice P ao plano Π. Segue do Princípio de Cavalieri que vol(K) = vol(L). $\square$

Um cone cuja base é um polígono denominaremos de pirâmide. As faces laterais de uma pirâmide são triângulos. Uma pirâmide cuja base também é um triângulo chama-se de tetraedro.

Teorema 2.10. *O volume de um cone é igual a um terço do produto da altura pela área da base.*

Demonstração. O volume do cone dado é igual ao de uma pirâmide cuja base é um triângulo ABC com área igual a da base do cone e cujo vértice B' é tal que o segmento $B'B$ é perpendicular ao plano ABC e tem comprimento igual a altura do cone. Vamos provar que o volume da pirâmide $ABCB'$ é igual a um terço do produto da área da base ABC pela altura BB'.

Figura 27 – Lima (2009, p. 74).



Consideremos os segmentos AA' e CC', perpendiculares ao plano ABC e comprimentos iguais ao de BB'. Obtemos um prisma reto de bases ABC e $A'B'C'$. Como esses prismas possuem volume igual ao produto da área da base pela altura, basta mostrar que eles podem ser decompostos em três pirâmides, cada uma delas de volume igual ao da pirâmide $ABCB'$. Ora, as três pirâmides constituem a própria $ABCB'$, a pirâmide $A'B'C'A$ (com base congruente a base da primeira e com a mesma altura) e a pirâmide $ACC'B'$, cuja base ACC' é congruente a base $AA'C'$ da segunda e altura, a partir do vértice B', igual a altura da segunda pirâmide, $AA'C'B'$, a partir do mesmo vértice B'. Isso conclui a demonstração. □

Assim temos o seguinte:

Corolário 2.1. *O volume de um cone de altura h, cuja base é um círculo de raio R, é igual $1/3.\pi R^2 h$.*

2.5 VOLUME DA ESFERA.

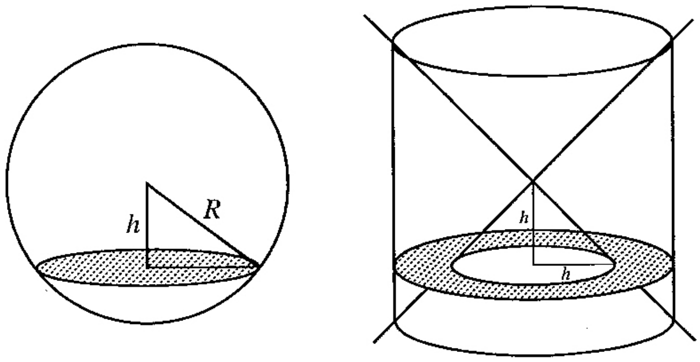
Definição 2.5. *A esfera de centro O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor do que ou igual a R.*

Em outras palavras, a esfera de centro O e raio R é a reunião de todos os segmentos de reta de origem em O e comprimento igual a R.

Teorema 2.11. *O volume de uma esfera de raio R é igual a $\dfrac{4\pi R^3}{3}$.*

Demonstração. Consideremos um cilindro reto cuja base é um círculo de raio R e cuja altura tem medida $2R$. Imaginemos que a esfera dada repouse sobre o plano horizontal no qual está contido a base do cilindro.

Figura 28 – Volume da esfera Lima (2009, p. 75).



Com vértice no ponto médio do segmento que liga os centros dos dois círculos básicos, (superior e inferior) do cilindro, construímos dois cones, interiores ao cilindro, com bases naqueles dois círculos que limitam o cilindro. Consideremos o sólido T limitado exteriormente pela superfície lateral do cilindro e, interiormente, pelos dois cones. O volume desse sólido T é igual a diferença entre o volume do cilindro $2\pi R^3$ e o volume dos dois cones $2\pi R^3/3$, ou seja:

$$\text{vol}(T) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

O teorema estará provado se o volume da esfera é igual ao volume T. Em virtude do Princípio de Cavalieri, é suficiente mostrar que a esfera S e o sólido T determinam seções $\Pi \cap S$ e $\Pi \cap T$, de igual área, em cada plano horizontal Π. Dado o plano Π, seja h sua distância ao centro da esfera ou seja, ao vértice comum dos dois cones. Então $\Pi \cap S$ é um círculo de raio $\sqrt{R^2 - h^2}$, enquanto $\Pi \cap T$ é uma coroa circular cujo raio externo é igual a R e raio interno igual a h. Segue que:

$$\text{área}(\pi \cap S) = \pi(R^2 - h^2),$$

e

$$\text{área}(\pi \cap T) = \pi(R^2 - h^2).$$

Concluindo assim a demonstração. □

2.5.1 ÁREA DO CILINDRO.

Considere um cilindro reto de altura h cujas bases são círculos de raio R. A superfície é formada por dois círculos de raio r mais a superfície lateral. Por sua vez, a superfície lateral é a reunião de todos segmentos de comprimento h, perpendiculares a base, levantados a partir dos pontos da circunferência básica. Cortando o cilindro ao longo de um desses segmentos, podemos desenrolar sua superfície lateral, sem alterar a área, de modo a obter um retângulo de base $2\pi R$ e altura h. Logo, a área da superfície lateral do cilindro é igual á área desse retângulo, valendo $2\pi Rh$. Assim temos que a área total do cilindro é

$$A_{\text{cilindro}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2.$$

2.5.2 ÁREA DO CONE

Considere o cone reto de altura h, com base num círculo de raio R. Sua superfície é formada pelo círculo básico mais a superfície lateral, que é a reunião de todos os segmentos de reta ligando o vértice do cone aos pontos da circunferência básica. Chamamos esses segmentos de geratriz do cone. Como o segmento de reta ligando o vértice do cone ao centro do círculo básico (eixo do cone) é perpendicular ao plano desse círculo, segue que $l = \sqrt{h^2 - R^2}$.

Ao cortarmos o cone ao longo de uma geratriz podemos aplicar sua superfície lateral sobre o plano sem alterar sua área. Obtemos então um setor de um círculo de raio l, o qual subtende um arco de circunferência de comprimento $2\pi R$. A área lateral A do cone é igual a área desse setor. Logo, a área A está para a área do círculo l, assim como o arco $2\pi R$ está para toda a circunferência $2\pi l$, ou seja,

$$\frac{A}{\pi l^2} = \frac{2\pi R}{2\pi l} = \frac{R}{l}$$

onde $A = \pi l R$.

2.5.3 ÁREA DA ESFERA.

A esfera não possui uma superfície "desenvolvível" como o cilindro e o cone, isto é, não é possível fazer cortes na esfera e depois aplicá-la sobre o plano, sem dobrar nem esticar.

Dado um número positivo h, consideremos outra esfera de mesmo centro O e raio $R + h$. A região compreendida entre essas duas esferas concêntricas é uma reunião de segmentos de reta de comprimento h (diferença entre os raios). Cada um desses segmentos é perpendicular a ambas as esferas. Logo, é intuitivo e aceitável que, para valores pequenos de h, o volume V dessa casca seja aproximadamente igual a $S \times h$, onde S é a área da esfera de raio R. Usando a equação do volume da esfera e usando o símbolo $\approx$ para significar "aproximadamente igual a" temos:

$$S \times h \approx V = \frac{4\pi}{3}(R + h)^3 - \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4}{3}\pi h(3R^2 + 3Rh + h^2).$$

Assim, para valores pequenos de h temos que

$$S = \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3Rh + h^2).$$

Supondo h pequeno, as parcelas $3Rh$ e h são insignificantes. Logo,

$$S = \frac{4}{3}\pi 3R^2 = 4\pi R^2.$$

Podemos então concluir que a área da superfície da esfera de raio R é igual a $4\pi R^2$. Esse raciocínio desenvolvido, não é uma demonstração mas apenas um argumento heurístico para obter a expressão $4\pi R^2$ para a área da esfera. (Maiores detalhes em como Arquimedes deduziu elementarmente a equação da área e do volume da esfera consulte (LIMA, 2009, p. 79-82).

3 TEORIAS DA EDUCAÇÃO: POLYA E VAN HIELE.

Para o referencial teórico iniciamos uma investigação nos sites de algumas universidades e no Google. O objetivo é o de selecionar trabalhos de pesquisas sobre o Currículo do Estado de São Paulo, o Ensino da Geometria com o uso de objetos manipulativos e o uso de tecnologia como recurso pedagógico, buscando aproximar da questão e do objetivo do presente trabalho de pesquisa. Os trabalhos selecionados foram aqueles que abordavam o Ensino da Geometria citados na bibliografia.

3.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O ensino da matemática no início do século XX era voltado para repetição, sendo a memorização considerada um aspecto importante: o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia. Ao chegar em casa repetia e treinava os exercícios feitos em sala de aula onde os conhecimentos do aluno eram medidos através de testes que ele repetia mesmo sem compreender o que o professor havia explicado (ONUCHIC, 1999).

Descartando esta forma de trabalho, a Matemática Moderna buscou desenvolver uma maior compreensão, influenciada por um movimento de renovação como comentado no capítulo 2. Naquela época começou a se falar em resolver problemas como um meio de aprender matemática. Entretanto, as investigações se sistematizaram sobre a resolução de problemas e suas implicações curriculares que tiveram início a partir da década de 1970.

Nos Estados Unidos, a resolução de problemas foi evidenciada pelo Conselho Nacional de Supervisores de Matemática (NCTM- Nacional Council of Teachers of Mathematics), ao sugerir uma série de recomendações para o progresso da matemática escolar, tendo em vista a habilidade básica que o aluno necessita desenvolver e que a escola deverá enfatizar.

A resolução de problemas constitui uma metodologia de trabalho emblemática para a comunidade da educação matemática em todo mundo sendo um trabalho educacional que temos que dedicar toda a nossa atenção.

Vários pensadores e pesquisadores estudaram ou têm estudado a atividade de resolver problemas.

> De que irei me ocupar no céu, durante toda a eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de matemática para resolver? (Augustin Louis Cauchy)

A "Resolução de Problemas" é um método capaz de desenvolver o raciocínio e motivar os alunos para o estudo da Matemática. Entretanto, em nossos livros didáticos e em nossas salas de aula, o que encontramos são infindáveis listas de "problemas", quase sempre similares e resolvíveis através de procedimentos rotineiros.

“Resultando que os nossos alunos não aprendem a raciocinar lógica e matematicamente e o que é pior, desenvolvem um sentimento negativo, ou mesmo de aversão, em relação à Matemática e ao seu estudo” (POMPEU JUNIOR, 2012).

Com o objetivo de reverter esse quadro, o professor pode propor problemas desafiadores que possam ser mais explorados e investigados pelos alunos do que simplesmente resolvidos por eles. Mas, como explorar e investigar um problema?

Segundo Pompeu Junior (2012), para explorar e investigar um problema devemos:

1. Procurar por suas diferentes soluções;

2. Analisá-lo sob diferentes perspectivas matemáticas;

3. Verificar se ele pode ser resolvido por diferentes estratégias (heurísticas).

No entanto, nem sempre isso é possível com qualquer problema e, nas primeiras experiências com os alunos, o professor deve conduzir o processo com um cuidado especial.

Segundo Polya (1978) em seu livro “A arte de resolver problemas”, ele indica que formas mecânicas e rotineiras de se desenvolver a aula podem diminuir o interesse dos estudantes pela Matemática e dessa forma dificultar o desenvolvimento intelectual mais amplo. George Polya (1897 - 1985) foi um dos matemáticos mais importantes do século XX. Nascido na Hungria, ele passou a maior parte do seu tempo pesquisando na Universidade de Stanford nos Estados Unidos devido à situação política da Europa na época da Segunda Guerra Mundial. Pesquisou em vários ramos da matemática, como Probabilidade e Equações Diferenciais Parciais. Sua maior contribuição, no entanto, está relacionada à heurística de Resolução de Problemas matemáticos, com várias publicações relacionadas ao assunto, em especial “How To Solve It” - que vendeu mais de um milhão de cópias - em 1957.

Polya considera a Matemática uma “Ciência Observacional” na qual a observação e a analogia desempenham um papel fundamental. Ele afirma também a semelhança do processo criativo na Matemática e nas ciências naturais. Sendo o primeiro matemático a apresentar uma heurística de resolução de problemas específica para a matemática. Polya é uma referência no assunto, uma vez que suas idéias representam uma grande inovação em relação às idéias de resolução de problemas existentes até então. Muitas de suas idéias nos dias atuais servem de alicerce para trabalhos de outros pesquisadores contemporâneos a ele como Schoenfeld e Thompson.

Para Polya

> Um professor de Matemática tem assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe os desenvolvimentos intelectuais dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade.

> Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhe o gosto pelo raciocínio independente proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo Polya (1978).

Observamos nas palavras de Polya que a adoção da resolução de problemas como metodologia pode proporcionar ao professor maiores possibilidades de incentivar seus estudantes a participarem de forma ativa no processo de aprendizagem. Quando os estudantes confrontam os conhecimentos que são abordados em sala de aula com informações que já possuem, conseguem atribuir significado à aprendizagem. Ele afirma:

> Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. (...) se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom “resolvedor de problemas”, tem que resolver problemas (POLYA, 1978, p. 3).

Polya em seu livro “A arte de resolver problemas”, descreve quatro fases no processo de resolução de problemas, sendo:

Compreender e desejar resolver o problema.

> O problema deve ser bem escolhido, nem muito fácil nem muito difícil, natural e interessante. As partes principais do problema devem estar em condições de serem identificadas, isto é, o que se solicita, os dados e as condicionantes. Se houver uma figura relacionada ao problema, essa deverá ser traçada e nela indicada a incógnita e os dados de maneira adequada (POMPEU JUNIOR, 2012).

ou seja:

- Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição?
- É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou excessiva? Ou contraditória?
- Desenha uma figura. Adapta uma notação adequada.
- Separa as diversas partes da condição. É possível definí-las de outro modo? Comentá-las?

Estabelecimento de um plano para a resolução do problema.

> É a etapa mais difícil na resolução de um problema. Ter um plano de resolução significa conhecer, pelo menos de um modo geral, quais os cálculos, quais as técnicas/algoritmos e quais os desenhos que devemos traçar para se obter o solicitado (a incógnita). Um plano pode surgir gradualmente ou

> repentinamente, a partir de uma "boa idéia". Aí entra nosso trabalho de professor. Discretamente, através de indagações e sugestões aos alunos, provocamos o surgimento de tal idéia. Podemos começar com perguntas do tipo: Vocês conhecem um problema semelhante? Um problema que tenha o mesmo tipo de incógnita? É possível utilizá-lo? Se isso não funcionar devemos reformular o problema buscando torná-lo mais simples e, se possível, ainda relacionado ao problema original (POMPEU JUNIOR, 2012).

Em outras palavras:

- Já viste este problema antes? Ou já viste o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?
- Conheces um problema relacionado? Ou um que seja útil aqui?
- Conheces um teorema que lhe poderia ser útil? Ou uma propriedade?
- Olha bem para a incógnita! Pensa num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.
- Eis um problema correlacionado e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?
- É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volta às definições.
- Se não puderes resolver o problema proposto, procura primeiro resolver algum problema correlacionado.
- É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Ou um que seja mais genérico? Ou um que seja mais específico? Ou um que lhe seja análogo?
- É possível resolver uma parte do problema? Mantém apenas uma parte da condição, deixa a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar?
- É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita?
- É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?
- Serviste-te de todos os dados? Utilizaste toda a condição?
- Tiveste em conta todas as noções essenciais que estão no problema?

Execução do plano de resolução do problema.

> Para se executar o plano traçado o que mais se precisa é de paciência. O plano proporciona apenas um roteiro geral. Agora necessitamos verificar se os detalhes (a incógnita, os dados, as condicionantes) e os diferentes "passos e etapas a serem dados" se inserem nesse roteiro, um após outro, até que tudo fique perfeitamente claro e não reste dúvidas de que um erro possa estar oculto. Cabe ao professor nessa fase, indagar dos alunos: Se é possível perceber claramente que o passo dado está correto? Se podemos demonstrar que esse passo está correto? É importante distinguir claramente a diferença entre "perceber" e "demonstrar" na Matemática" (POMPEU JUNIOR, 2012).

Em resumo, temos que ao executar o plano de resolução, verifica-se cada passo é possível e se está correto. É possível demonstrar que ele está correto?

Retrospecto da resolução do problema.

Ao se proceder com o retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, os alunos poderão consolidar seus conhecimentos e aperfeiçoarem suas capacidades em resolver problemas. O professor deve enfatizar aos alunos que nenhum problema se esgota e que sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento sempre será possível aperfeiçoar a compreensão da resolução.

Cabe também ao professor perguntar aos alunos: É possível verificar se o resultado está correto? É possível se chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o resultado, ou o método, em outro problema?

> Problemas interessantes para serem explorados e investigados matematicamente são chamados de problemas de processo, ou seja, aqueles problemas que não podem ser resolvidos apenas pelo uso de uma ou mais operações, mas requerem o uso de uma estratégia, de um plano, de resolução (POMPEU JUNIOR, 2012).

Tomando como base a Teoria de Resolução de Problemas de Polya, temos a seguir um problema que poderia ser aplicado em sala de aula.

> Para construir uma janela ornamental, um operário precisa de pedaços triangulares de vidro. Para isso, ele pretende aproveitar um pedaço de vidro retangular defeituoso que possui 10 bolhas de ar, sendo que: não há 3 bolhas alinhadas entre si, nem duas delas alinhadas com algum vértice do retângulo, ou uma delas alinhada com 2 vértices do retângulo. Para evitar bolhas de ar em seu projeto final, ele decidiu cortar os pedaços triangulares com os vértices coincidindo ou com uma bolha de ar ou com um dos cantos do vidro original. Quantos pedaços triangulares de vidro ele pode cortar?

Com essa atividade podemos desenvolver no aluno o senso de criatividade, de investigação, de desafio, motivando a busca pela resposta.

3.2 O MODELO DE VAN HIELE

O Modelo Van Hiele definido por Dina van Hiele Geldof e seu marido Pierre Marie van Hiele, tem por base as dificuldades apresentadas por seus alunos do curso secundário na Holanda e identifica o comportamento da aprendizagem como o nível de maturidade geométrica do aluno. Assim o modelo geométrico pode ser usado para orientar na formação e na avaliação das habilidades do aluno. A idéia principal do Modelo Van Hiele é que os alunos progridam de acordo com uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto aprendem geometria.

O Modelo concebe diversos níveis de aprendizagem geométrica (ou níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico) com as seguintes características (CROWLEY, 1994):

- No nível inicial (visualização), as figuras são avaliadas apenas pela sua aparência, a ele pertencem os alunos que só conseguem reconhecer ou reproduzir figuras (através das formas e não pelas propriedades);
- No nível seguinte (análise), os alunos conseguem perceber características das figuras e descrever algumas propriedades delas;
- No outro nível (dedução informal), as propriedades das figuras são ordenadas logicamente (dedução formal) e a construção das definições se baseia na percepção do necessário e do suficiente.

As demonstrações podem ser acompanhadas, memorizadas, mas dificilmente elaboradas, até o nível mais elevado (rigor), que é alcançado por poucos alunos, pois diz respeito aos aspectos abstratos formais da dedução. Segundo van Hiele, cada nível é caracterizado por relações entre os objetos de estudo e linguagem próprios (CROWLEY, 1994). Consequentemente não pode haver compreensão quando o curso é dado num nível mais elevado do que o atingido pelo aluno. Assim, as propriedades do Modelo servem aos educadores para orientar a tomada de decisões quanto aos ensinos (CROWLEY, 1994):

Sequencial: É uma fase sucessiva que cada aluno deve passar para se sair bem nos respectivos níveis passando pelas estratégias dos níveis anteriores.

Avançado: Van Hiele salientou que é possível ensinar a um aluno de talento habilidades que estejam acima de seu nível. Por exemplo: ensinar frações sem lhes dizer o que significa frações, (embora não saibam o que é frações), exemplo disso na geometria incluem a memorização, como: “um quadrado é um retângulo” essa situação é reduzida a um nível inferior e não há compreensão.

Intrínseco e Extrínseco: Os objetivos implícitos num nível tornam-se explícitos no nível seguinte.

Linguística: Algumas noções do conhecimento não constituem parte da linguagem do aluno pelo fato de que ele ainda não ter chegado a certo nível, por exemplo, um quadrado também é retângulo.

Uma combinação inadequada acontece quando o nível do professor está mais alto do que o do aluno uma vez que não será capaz de acompanhar o raciocínio que está sendo empregado.

Segundo Van Hiele são os seguintes níveis de aprendizagem da Geometria (CROWLEY, 1994):

Nível 1: Visualização - Os alunos compreendem as figuras globalmente, isto é, as figuras são entendidas pela sua aparência;

Nível 2: Análise - Os alunos entendem as figuras como o conjunto das suas propriedades;

Nível 3: Ordenação - Os alunos ordenam logicamente as propriedades das figuras;

Nível 4: Dedução - Os alunos entendem a Geometria como um sistema dedutivo;

Nível 5: Rigor - Os alunos estudam diversos sistemas axiomáticos para a Geometria.

A teoria de Van Hiele sugere que o pensamento geométrico evolui de modo lento, desde as formas iniciais de pensamento até as formas dedutivas finais onde a intuição e as deduções se articulam. As crianças começam por reconhecer as figuras e diferenciá-las pelo seu aspecto físico e só posteriormente o fazem pela análise das suas propriedades. Assim, é importante que ao nível do 1º ciclo se privilegie a abordagem intuitiva e experimental do conhecimento do espaço e do desenvolvimento das formas mais elementares de raciocínio geométrico em ligação com as propriedades fundamentais das figuras e das relações básicas entre elas.

No modelo de Van Hiele são os seguintes níveis de raciocínio (CROWLEY, 1994):

Nível 1: Visualização - Reconhece visualmente uma figura geométrica, tem condições de aprender o vocabulário geométrico e não reconhece ainda as propriedades de uma determinada figura.

Nível 2: Análise - Identifica as propriedades de uma determinada figura e não faz inclusão de classes.

Nível 3: Ordenação (Dedução Informal) - Já é capaz de fazer a inclusão de classes, acompanhar uma prova informal, mas não é capaz de construir uma outra.

Nível 4: Dedução Formal - É capaz de fazer provas formais e raciocina num contexto de um sistema matemático completo .

Nível 5: Rigor - É capaz de comparar sistemas baseados em diferentes axiomas É neste nível que as geometrias não-euclidianas são compreendidas.

Caracterizam as Fases de Aprendizagem (CROWLEY, 1994):

Fase 1: Informação - O professor e aluno dialogam sobre o material de estudo.

O professor deve perceber quais são os conhecimentos anteriores do aluno sobre o assunto a ser estudado.

Fase 2: Orientação dirigida - Os alunos exploram o tema de estudo através do material selecionado pelo professo. As atividades deverão proporcionar respostas especificas e objetivas.

Fase 3: Explicação - O papel do professor é o de observador.

Fase 4: Orientação livre - Tarefas constituídas de várias etapas, o que possibilita diversas respostas a fim de que o aluno ganhe experiências e autonomia.

Fase 5: Integração - O professor auxilia no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem apresentar novas e discordantes idéias.

Exemplo 3.1. Fases de aprendizagem para o conceito de retângulo:

Fase 1: Informação: O professor mostra aos alunos diversos retângulos e pergunta-lhes se são ou não retângulos. Os alunos são capazes de dizer se uma dada figura é ou não retângulo. As razões apresentadas serão apenas de percepção visual.

Fase 2: Orientação guiada: Realizam-se outras atividades sobre retângulos. Por exemplo, dobrar um retângulo segundo os seus eixos de simetria; desenhar um retângulo no geoplano que tenha as diagonais iguais, construir um maior e um menor.

Fase 3: Explicitação: As atividades anteriores são seguidas por uma discussão entre os alunos sobre o que descobriram.

Fase 4: Orientação livre: O professor coloca o problema de construir um retângulo a partir de dois triângulos.

Fase 5: Integração: Os alunos revêem e resumem o que aprenderam sobre as propriedades do retângulo. O professor ajuda a fazer a síntese.

Para ser adequado, isto é, para ter em conta o nível de pensamento dos alunos, o ensino da Geometria no 1º ciclo deve ter como preocupação ajudá-los a progredir do nível visual para o nível de análise. Assim, eles devem começar por identificar, manipular (construir, desenhar, pintar, etc.) e descrever figuras geométricas. Devem desenhar quadrados no geoplano e procurar retas paralelas ou retas perpendiculares. Atividades como o tangram, que permite a construção de figuras geométricas, enriquecem a capacidade de visualização e de identificação das propriedades das figuras, favorecendo o progresso na aprendizagem.

3.3 INFLUÊNCIA DO TRABALHO DE PIAGET NO MODELO DE VAN HIELE

O próprio Van Hiele diferencia a sua teoria a de Piaget, ressaltando que a psicologia de Piaget era de desenvolvimento e não de aprendizagem. No entanto, admite ter recebido algumas influencias após leituras de alguns textos piagetianos.

Piaget, na maioria de suas publicações, tratou do aspecto cognitivo, particularmente do desenvolvimento operatório. Seus primeiros trabalhos, enfatizam a importância das trocas inter individuais, no sentido de que é fundamental, desde a infância, o confronto de pontos de vista para elaboração do pensamento lógico.

É claro, que a figura do professor é indispensável nas orientações, principalmente com crianças em início de escolarização. A interação social com o adulto é indispensável para o desenvolvimento do pensamento e a intervenção é necessária porque, a partir dos estímulos provocados pelo professor, a criança será capaz de refletir sobre suas ações, explicar fatos observados e caminhar em direção da estruturação do conhecimento.

O trabalho de Van Hiele fundamenta-se na teoria de que o desenvolvimento mental está ligado às mudanças cognitivas dos alunos e em experiências educacionais e, esta baseada em três elementos: a influência da psicologia de Gestalt, uma forte base estruturalista e a preocupação com a didática matemática.

3.4 OS PCNEM

O enfoque dado à Geometria pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM evidencia sua contribuição para o desenvolvimento dos cidadãos através do desenvolvimento humano. Costa, Bermejo e Moraes (2009) reforçam essa idéia quando expressam:

> O estudo da Geometria Espacial é de suma importância para o desenvolvimento da capacidade de abstração, resolução de problemas práticos do quotidiano, estimar e comparar resultados, reconhecer propriedades das formas geométricas (COSTA; BERMEJO; MORAES, 2009, p. 1).

Além de afirmarem que as salas de aula ainda não retratam novos tempos no que tange ao Ensino de Geometria Espacial.

> (...) [A]o nos depararmos com a realidade em sala de aula, no ensino de Geometria Espacial, observamos que os discentes estão presos a fórmulas e em sua maioria não conseguem relacionar conceitos, identificar os elementos do sólido ou ainda estabelecer relação entre dois sólidos, isto se deve muitas vezes a deficiências de conceitos básicos da Geometria Plana e mesmo da Geometria Espacial (COSTA; BERMEJO; MORAES, 2009, p. 2).

As dificuldades que os alunos encontram em reconhecer as figuras geométricas (planas e tridimensionais) podem ocorrer como consequência da negligência dos próprios professores, que trazem deficiências em seu processo de formação. Essas deficiências podem estar relacionadas a vários fatores, entre os quais:

> Ausência de trabalho com a geometria de posição; ausência de trabalho com o Desenho Geométrico; desvalorização, por parte de muitos professores, das representações bidimensionais e tridimensionais de figuras geométricas, com a valorização da aprendizagem mecânica de conceitos e princípios geométricos; ausência de trabalho com a Geometria Espacial Métrica, em que os alunos são levados ao estudo dos poliedros e corpos redondos e têm a possibilidade de fazer suas representações planas (COSTA; BERMEJO; MORAES, 2009, p. 3-4).

Situar o estudo da geometria como um conteúdo de difícil compreensão corresponde com o pensamento de Vidaletti (2009) de que os alunos terminam o Ensino Médio sem ter uma base nesse conteúdo.

Ao definir o enfoque da pesquisa, podemos pontuar:

> A escolha em trabalhar com Geometria Espacial advém da constatação de que os alunos não aprendem esse conteúdo da forma como deveriam, chegando ao final do Ensino Médio sem ter tido a oportunidade de construir o seu conhecimento (VIDALETTI, 2009, p. 14).

Assim, uma aprendizagem significativa dos conceitos referentes a esse conteúdo deve permitir maior interação com os processos, assim como uma ligação entre os conhecimentos que os alunos já têm e o que desejam adquirir.

Aprender significa interiorizar ações e mudar comportamentos por meio de participação ativa dos educandos no processo de ensino-aprendizagem. Um estudo significativo, por exemplo, a respeito da Geometria Espacial, deve partir dos conhecimentos prévios, trazidos pelos alunos, nos anos anteriores, em disciplinas diferentes da Matemática. No entanto, nem sempre a postura pedagógica dos professores é condizente com esta exigência, especialmente porque a constatação de que os educandos têm muitas dificuldades, especialmente em relação à visualização da terceira dimensão das formas geométricas espaciais se transforma em certeza e nem sempre é trabalhada como deveria ser (VIDALETTI, 2009, p.13).

Se, por um lado, uma das dificuldades no aprendizado da geometria recai sobre as limitações de visualização, por outro, estudos mostram que a utilização de softwares possibilita, em parte, a superação desse limite. Richit, Tomkelski e Richit (2008) apresentam como superação da deficiência de visualização no estudo da Geometria Espacial a utilização de softwares.

Sabemos que muitos elementos e propriedades inerentes à Geometria Espacial deixam de ser compreendidos em função da abordagem desse conteúdo basear-se em representações estáticas, como aquelas usadas em livros didáticos. Essa deficiência da Geometria Espacial vem sendo gradativamente superada, à medida que softwares de Geometria Dinâmica são desenvolvidos e incorporados à prática de sala de aula (RICHIT; TOMKELSKI; RICHIT, 2008, p. 2).

Embora a presença do computador na prática de sala de aula através de softwares não seja capaz por si só de resolver o problema, não se pode negar que essas ferramentas podem colaborar significativamente com a aprendizagem dos alunos, dinamizando os processos árduos do ensino e tornando-os mais amenos. Silveira e Bisognin reforçam esse valor dos softwares no ensino de Geometria:

> A utilização do computador e dos softwares educacionais como recursos pedagógicos auxiliam os professores a tornar as aulas mais atraentes e resgatando o interesse do aluno pelo estudo da Matemática [...] A interface dinâmica, a interatividade que esses programas propiciam e os recursos de manipulação e movimento das figuras geométricas que se apresentam na tela do computador contribuem no desenvolvimento de habilidades em perceber diferentes representações de uma mesma figura (SILVEIRA; BISOGNIN, 2008, p. 1).

Os instrumentos advindos com o avanço das tecnologias devem ser filtrados pelos profissionais, evitando assim o crédito em excesso ou o total descaso em seu uso. Ambas as possibilidades podem representar prejuízos aos sistemas educacionais. Pautando-se pelo estudo da Geometria Espacial, percebe-se que as tecnologias muito podem contribuir em representações que favoreçam o entendimento de sólidos e suas propriedades. Os softwares permitem uma interação dinâmica, que se inicia com o desenho e se estende através das investigações desencadeadas pela sua movimentação.

Assim, os diversos recursos descobertos pelos alunos podem ser contemporâneos, embora os muitos aprendizados, em primeiro momento, sejam apenas uma apropriação do que a humanidade já conseguiu evoluir. Isso representa a base para que esses alunos possam contribuir com progressos ainda mais significativos em sua trajetória. Ao concluir o Ensino Médio, espera-se que os estudantes possam estar preparados para novas etapas, como a escolha profissional, e que o conhecimento adquirido não seja restrição aos próximos desafios.

Conforme se lê nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> As novas tecnologias da comunicação e da informação permeiam o cotidiano, independente do espaço físico, e criam necessidades de vida e convivência que precisam ser analisadas no espaço escolar. A televisão, o rádio, a informática, entre outras, fizeram com que os homens se aproximassem por imagens e sons de mundos antes inimagináveis. Descobertas humanas foram pensadas para o homem e assim devem ser entendidas. Os sistemas tecnológicos, na sociedade contemporânea, fazem parte do mundo produtivo e da prática social de todos os cidadãos, exercendo um poder de onipresença, uma vez que criam formas de organização e transformação de processos e procedimentos (BRASIL, 1999, p. 132).

3.5 ANÁLISE DOS DOCUMENTOS OFICIAIS PCN+ (2002) E OCEM (2006)

A intenção nesta etapa de trabalho é realizar uma síntese dos documentos oficiais PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006); e analisar como tais documentos apontam o Ensino da Matemática, em particular da Geometria, no contexto educacional da escola pública.

Em uma primeira análise dos documentos oficiais, verificamos que o objetivo desses materiais é contribuir para o sucesso da educação, estabelecer um diálogo na comunidade escolar e repensar sobre a prática do professor.

Esses documentos têm por premissa dar qualidade ao ensino básico, servindo como subsídio para as escolas, de tal maneira que as mesmas propiciem aos alunos condições indispensável para o enfrentamento das questões sociais do mundo moderno, de tal forma que os alunos se tornem cidadãos democratizados e culturais efetivamente.

Em uma análise particular dos PCN+ (BRASIL, 1999), as diretrizes e parâmetros que organizam o Ensino Médio mostram a Matemática integrando a mesma área do conhecimento que a Biologia, a Física e a Química. Essas disciplinas, de acordo com o documento, são ciências que têm em comum a investigação da natureza e dos desenvolvimentos tecnológicos, compartilham linguagens para a representação e sistematização do conhecimento de fenômenos ou processos naturais e tecnológicos, com a definição da área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. As disciplinas dessa área compõem a cultura científica e tecnológica, que, como toda cultura humana, é resultado e instrumento da evolução social e econômica, na atualidade e ao longo da história.

A Matemática segundo os PCN+ (BRASIL, 1999) tem apresentado um papel importante ao servir outras áreas do conhecimento para dar sentido e entendimento a alguns objetos de estudo, além de ter o seu significado em si mesmo dentro da sua área de concentração. Ela é presença certa e marcante na formação do aluno como cidadão, contribuindo para que este se torne uma pessoa consciente e autônoma, em uma sociedade capitalista e competitiva de um mundo globalizado.

> No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional (BRASIL, 1999, p. 108).

Machado (2001) se refere ao Ensino Médio e diz que é importante lembrar que, a área da ciência e tecnologia deve estar a serviço do ser humano. A educação não pode ter no centro de suas ações somente questões abalizadas no desevolvimento econômico. É necessário ter uma visão do cidadão como um todo, que será preparado de certa forma nesse nível de ensino para o mercado de trabalho, para dar continuidade aos estudos e para viver em sociedade.

Os PCN+ (BRASIL, 1999) destacam que o objetivo da escola é preparar o aluno para um aprendizado permanente e prepará-lo para a vida. E cada escola e grupo de professores devem propor um trabalho pedagógico que permita o desenvolvimento das competências almejadas.

Os PCN+ (BRASIL, 1999) também sinalizam a importância de se fazer uma análise dos recursos de ensino e dos métodos de abordagem para o desenvolvimento do conhecimento do aluno, o cuidado com o tempo de ensino e de aprendizagem e dos espaços para que isso ocorra. Para isso, os temas selecionados devem ter relevância científica e cultural. Isso significa que, além das justificativas relativas às aplicações e à linguagem, sua importância está em seu potencial explicativo, que permite ao aluno conhecer o mundo e desenvolver sentidos estéticos e éticos em relação a fatos e questões do mundo.

As Brasil (2006) é um documento criado pela Secretaria de Educação Básica, por intermédio do Departamento de Política do Ensino Médio, tem como meio a apresentação de um conjunto de reflexões que enriqueça a prática docente. A proposta inicial para a formação do documento foi desenvolvida a partir da necessidade expressa em encontros e debates com os gestores das Secretarias Estaduais de Educação e pesquisadores que discutiam questões relativas ao ensino de diferentes disciplinas.

O documento deixou claro que foram retomadas discussões sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, não só no sentido de aprofundar a compreensão sobre os pontos que mereciam esclarecimentos. As discussões tinham como diretriz apontar e desenvolver indicativos que pudessem oferecer alternativas didático-pedagógicas para a organização do trabalho pedagógico, a fim de atender às necessidades e às expectativas das escolas e dos professores na estruturação do Currículo para o Ensino Médio.

De acordo com Machado (2001, p.160):

> O objetivo da educação em todos os níveis é a construção da plena cidadania, entendida justamente como a elaboração de instrumentos de articulação entre projetos individuais e coletivos. A especificidade do ensino médio está associada à natureza dos instrumentos ou podem estar disponíveis

nessa faixa etária.

Neste sentido, as OCEM foram elaboradas para contribuir com a articulação entre a prática pedagógica docente e as disciplinas das áreas do conhecimento.

4 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E PRÁTICAS DE AULA

Neste capítulo serão apresentadas algumas atividades colocadas em práticas, apresentando as aulas e a expectativa do professor.

As aplicações das atividades foram feitas em duas turmas da 2ª série do Ensino Médio, em anos diferentes, sendo uma em 2011 e a outra em 2012. Buscou-se assim uma avaliação mais detalhada das atividades.

4.1 A ESCOLA E A TURMA

As atividades foram aplicadas na Escola Estadual "Professora Maria Aparecida Rechineli Modanezi", escola situada na periferia do município de Pilar do Sul, integrante da Diretoria de Ensino de Votorantim no estado de São Paulo. Com nove salas e 21 turmas (divididas em três períodos), a escola atende cerca de 700 alunos distribuídos em turmas que vão do 6º ano (5ª série) do Ensino Fundamental a 3ª série do Ensino Médio.

A escola consta com um quadro de 42 professores, dos quais destes 21 são efetivos, e com uma equipe de gestores integrados e colaborativos. A escola busca melhorar os índices do SARESP e IDESP, visto que a escola é assistida pela equipe de Professores Coordenadores da Oficina Pedagógica (PCOPs), recebendo o título de Escola Prioritária. Vejamos o seguintes quadros sobre o IDESP da escola

Figura 29 – IDESP - Ensino Fundamental da E.E. "Professora Maria Aparecida Rechineli Modanezi"

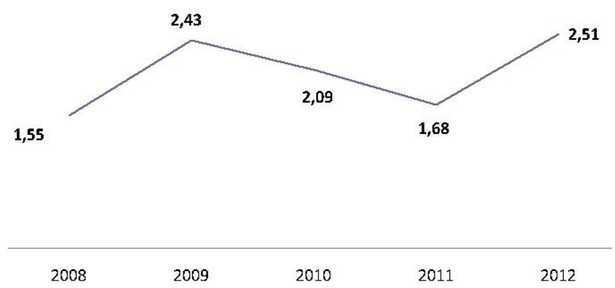
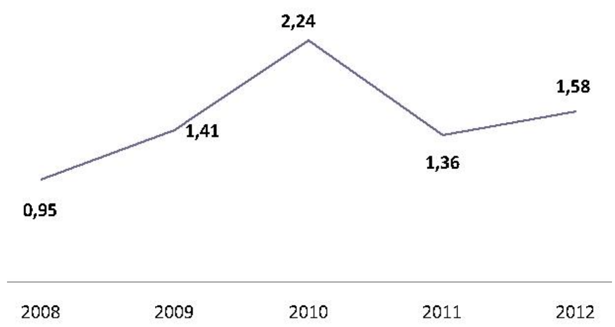


Figura 30 – IDESP - Ensino Médio da E.E. "Professora Maria Aparecida Rechineli Modanezi"



Com as informações sobre a escola, podemos ter uma base do ambiente desafiador ao docente. Assim, procuramos desenvolver o trabalho visando à eficaz aprendizagem dos alunos.

4.1.1 TURMA 2011

A turma 2011 era formada por alunos participativos e com gosto pela Matemática. Havia uma boa interação entre o professor e os alunos, em razão desta turma ter sido acompanhada pelo professor há dois anos, havendo assim uma continuidade no processo de ensino aprendizagem e dos conteúdos apresentados pelo Currículo Estadual. Essa turma serviu de observação e deu início aos estudos das atividades que serão descritas nesta pesquisa.

4.1.2 TURMA 2012

A turma 2012 contava com vinte e cinco alunos, sendo apenas quatro do sexo masculino. Esta turma apresentava um rendimento regular, pois não era muito participativa e apresentava pequenos deficits de aprendizagem tanto na álgebra como na geometria. Partes desses alunos participavam da Associação de Proteção ao Adolescente Pilarense - APROAPI, entidade que trabalha com menores carentes fornecendo formações diversificadas através de cursos, visando à inserção do menor no mercado de trabalho (Guarda Mirim).

4.2 RELATÓRIO DAS ATIVIDADES

As atividades aplicadas para a turma 2011 serviram como norteadoras para o aprimoramento e reflexão das mesmas atividades a serem aplicadas para a turma 2012. Relataremos com maior relevância as atividades aplicadas à turma 2012, pois como comentado anteriormente apresentavam maior defasagem.

4.2.1 ATIVIDADE 1 - SONDAGEM

Tema	Conhecendo melhor os alunos.
Objetivo Principal	Realizar uma sondagem dos conhecimentos já adquiridos pelos alunos quanto ao tema Geometria.
Objetivo Secundário	traçar um panorama dos alunos e criar um melhor direcionamento das novas atividades.
Tempo previsto	uma aula (50 minutos).
Material	Folha impressa.

Descrição da atividade: Cada aluno recebeu um questionário contendo conceitos e propriedades sobre as figuras planas, além do cálculo da área de algumas figuras. O questionário foi respondido individualmente, sem comentários do professor.

Os resultados apresentados, foram preocupantes. Os alunos mostraram insegurança e confusão entre os conceitos e as propriedades envolvidas nas diferentes questões.

Após análise dos resultados tomamos uma nova postura e partimos para o trabalho em sala de aula buscando abordar diferentes conceitos básicos da Geometria Plana e Espacial.

4.2.2 ATIVIDADE 2 - ESTUDANDO RETAS COM O USO DE BARBANTES

Tema	Estudo da reta no plano e suas posições relativas.
Objetivo Principal	Abordar as posições relativas de duas retas no plano e no espaço.
Objetivo Secundário	Através de objetos manipulativos levar os alunos a entenderem como podem se comportar duas retas ou mais no plano e no espaço.
Tempo previsto	duas aulas (100 minutos).
Material	Dois pedaços de barbante, sendo um com oito metros e outro com dois metros.

Descrição da atividade: Considerando o barbante como representação de uma reta, com a ajuda de dois alunos e tendo a lousa como um plano, fixamos nela o barbante maior. Com o barbante menor o professor foi criando situações que buscaram explorar a posição das retas no plano e os conceitos sobre as posições das retas: paralelas, coincidentes, concorrentes e perpendiculares.

Para instigar os alunos foi colocado um desafio: um dos alunos no canto da sala segurou juntas as pontas de dois barbantes e em outro canto, colocou-se o barbante separado, assim partiu-se para os questionamentos para os demais alunos da sala:

1. Esses barbantes representam retas paralelas?

   Muitos responderam de imediato que sim, pois tomou como base apenas um setor do barbante que visualmente aparentavam paralelos.

2. O que são retas paralelas?

   Alguns apresentaram o conceito de retas paralelas enfatizando que elas não se interceptavam.

3. As retas paralelas se encontram em algum ponto?

   As respostas apresentadas foram não. Neste ponto o professor verificou que os alunos haviam compreendido o conceito, mas visualmente ainda apresentavam dificuldades.

4. Assim verifiquem novamente o barbante!

   Os alunos verificaram que os barbantes se encontravam na mão do colega no canto da sala, e rapidamente mudaram de opinião. Assim, poderam vivenciar de forma concreta e visualizar o conceito de retas paralelas.

Ao abordar o conceito de retas concorrentes e depois o de retas perpendiculares, o professor procurou explorar e enfatizar a observação dos ângulos. Com o uso de um transferidor de madeira grande e com a ajuda de mais um aluno foi possível realizar as medidas em graus dos ângulos formados pelos barbantes, permitindo desta forma uma visualização e maior compreensão das propriedades envolvidas entre duas retas no plano.

Após esse trabalho o professor partiu à exploração das posições entre duas retas no espaço, abordando os conceitos de retas reversas e ortogonais, sempre enfatizando se haveria ponto de intersecção e a medida dos ângulos compreendidos entre as retas.

Ao abordar esses conceitos o aluno presenciou e visualizou no espaço o que estava ocorrendo, permitindo ao professor trabalhar na lousa com a nomenclatura e a representação das retas do espaço no plano.

Em continuidade a atividade, foi colocada em uma das carteiras a frente da sala, uma pilha com seis livros, representando um paralelepípedo, assim novas indagações deram início:

5. Que sólido essa pilha de livro representa?

   Alguns responderam “uma caixa”, “um tijolo”, até chegar ao nome paralelepípedo.

6. O porquê desse nome?

   Após algumas respostas um dos alunos apresentou que é devido aos “lados iguais serem paralelos”. O professor parabenizou pela observação e prosseguiu com as indagações.

7. O que seria face? Aresta? Vértice?

   Apresentaram: Faces: “são os lados”, Arestas - “são os pauzinhos”, Vértices - “são os cantos”.

8. Há aqui na sala outro objeto que possui o mesmo número de faces?

   Apresentaram o armário e a sala.

   Após cada questionamento o professor seguiu com a reflexão, sempre aproveitando as palavras dos alunos para chegar ao conceito “matemático”.

   Seguindo com a atividade foi proposto aos alunos que tomassem a pilha de livros como um paralelepípedo e por suas arestas passavam retas, representadas pelo barbante. Com a ajuda de alguns alunos foi possível realizar as seguintes observações:

9. Fixando uma das retas e nomeando-a de reta t e considerando outras retas representadas pelo barbante, qual posição essa nova reta está representando em relação à reta t?

Com esta atividade foi possível analisar a posição das outras retas contidas nas arestas do paralelepípedo em relação à reta t, fixada anteriormente.

Após essa exploração visual com os barbantes, partimos para o trabalho escrito, com o objetivo de avaliar os conceitos discutidos em sala de aula. Os conceitos e propriedades sobre retas paralelas, perpendiculares, coincidentes, concorrentes, reversas e ortogonais foram explorados.

Os resultados apresentados no trabalho escrito foram satisfatórios. Através da manipulação e da visualização dos conceitos os alunos mostraram que compreenderam as diferentes posições das retas e suas nomenclaturas.

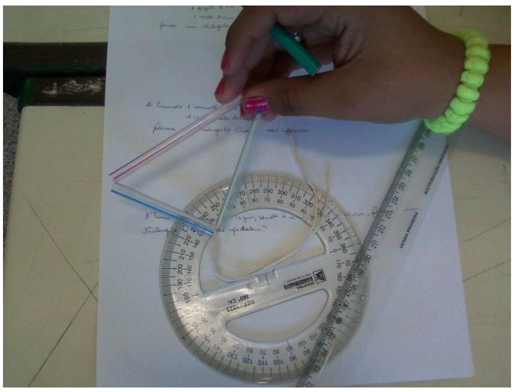
4.2.3 ATIVIDADE 3 - TRABALHANDO COM CANUDOS

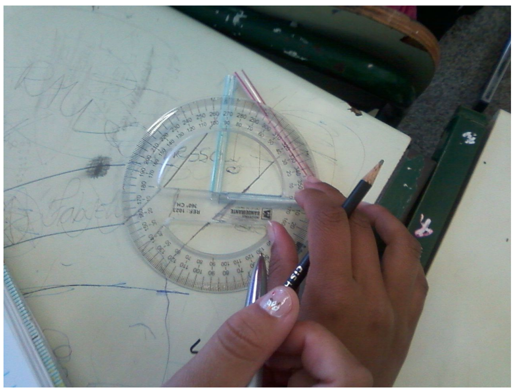
Tema	Trabalhando com figuras planas e suas propriedades.
Objetivo Principal	Explorar a nomenclatura das figuras planas quanto a seus lados e ângulos.
Objetivo Secundário	Buscar o trabalho coletivo e a troca de experiências.
Tempo previsto	duas aulas (100 minutos).
Material	Dez canudos de refrigerantes e um metro de barbante.

Descrição da atividade: Os alunos distribuídos em duplas receberam diversos canudos de diferentes cores e um barbante. Solicitamos que cortassem os canudos com medidas diferentes e montassem algumas figuras com o barbante passando pelo meio dos canudos.

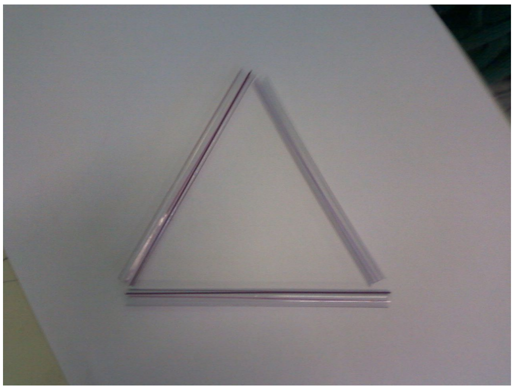
Partimos para as seguintes construções:

1. Unindo um canudo vermelho com 10 cm, um azul com 6 cm e um verde com 8 cm. Qual figura você formou? O que você percebe?

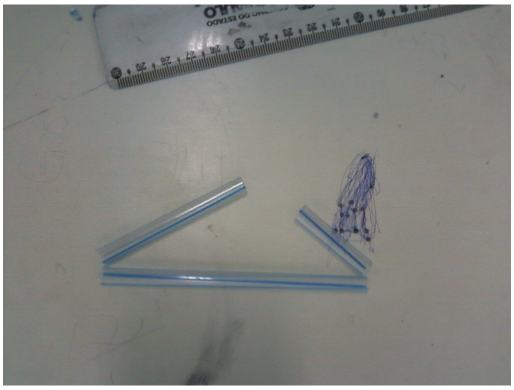
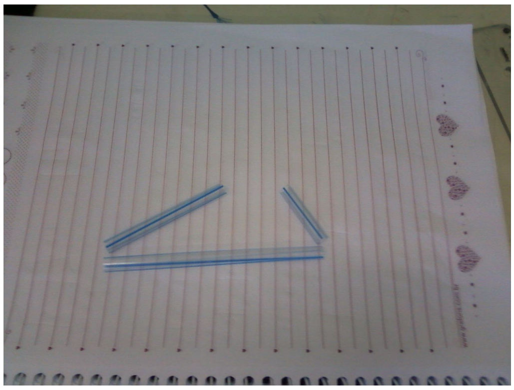




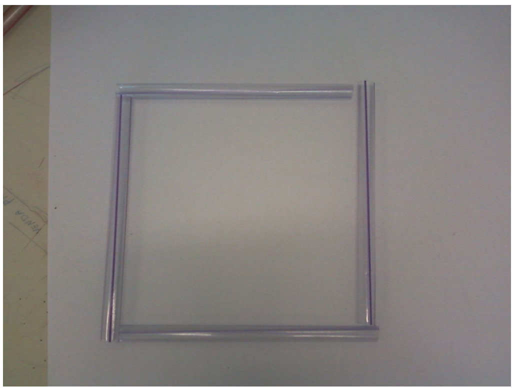
2. Unindo um canudo vermelho de 10 cm, dois roxos de 10 cm. O que você percebe? Quais medidas dos ângulos internos, qual(is) propriedade(s) você consegue conjecturar?




3. Unindo um canudo azul com 6 cm, outro azul com 3 cm e um terceiro também azul com 10 cm. O que você percebe? Qual observação você pode relatar?

4. Com os canudos roxos, todos com 10 cm, forme um quadrado. O que você pode relatar a respeito dos ângulos internos? Se alterar os ângulos internos, qual figura surgirá?

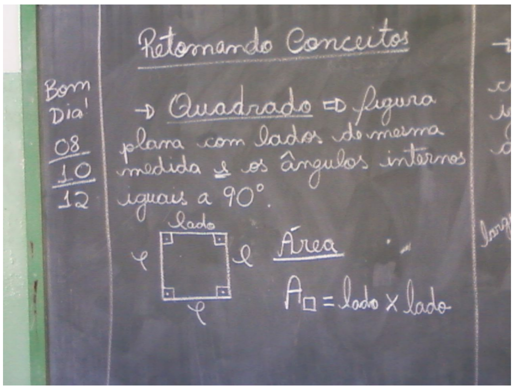


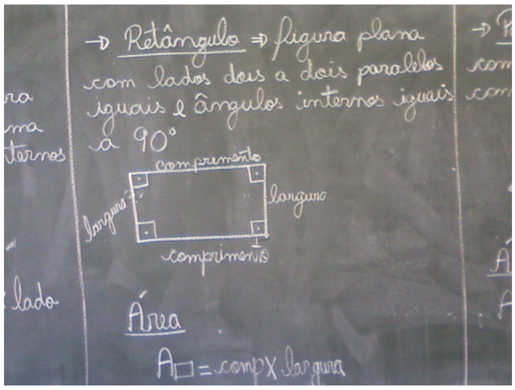
5. Usando dois canudos vermelhos com 12 cm cada e dois roxos de 10 cm cada, qual figura você consegue formar. Quais propriedades você pode relatar?

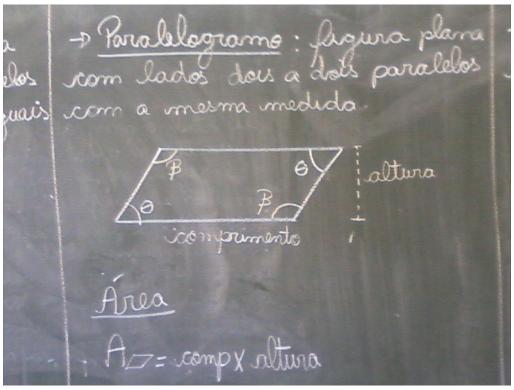
6. Usando quatro canudos com tamanhos diferentes, qual figura você consegue formar? Realize as medidas dos ângulos internos e relate suas observações. Qual o nome dessa figura?

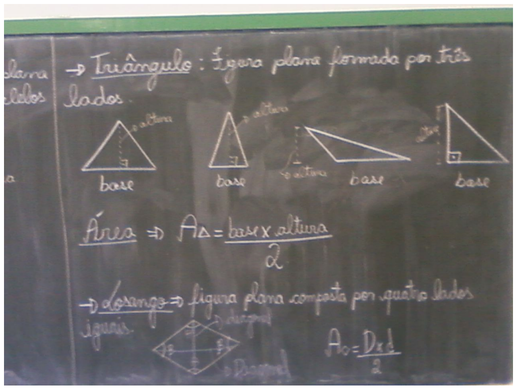
7. Relate o que você achou do trabalho de exploração das figuras usando canudos?

Durante esta sequência de atividades, o professor acompanhou os passos e sempre procurou responder as questões levantadas pelos alunos com outras questões, levando os alunos ao auto-questionamento. Após esse momento, partiu para um trabalho na lousa buscando a formalização dos conceitos e propriedades envolvidas nas figuras planas abordados com os canudos, abrindo a discussão de como será o cálculo de área de uma figura plana.





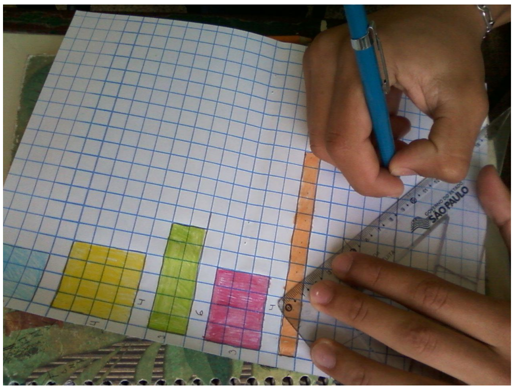


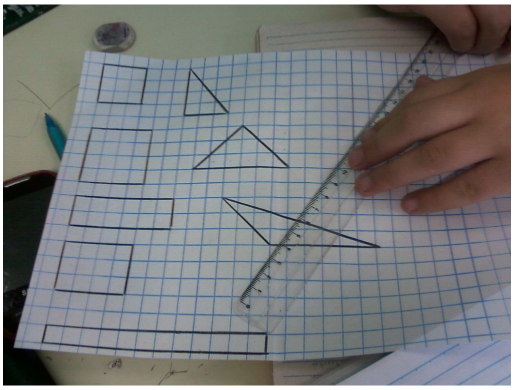


4.2.4 ATIVIDADE 4 - CALCULANDO ÁREA

Tema	Desenvolvendo o conceito de área e unidade quadrada.
Objetivo Principal	Explorar o cálculo de área do quadrado, retângulo e triângulo, buscando a formalização e demonstração?
Objetivo Secundário	Desenvolver a idéia de metro quadrado. Trabalhar com a diferença entre área e perímetro.
Tempo previsto	duas aulas (100 minutos).
Material	Papel quadriculado, régua e lápis de cor.

Descrição da atividade: Com o uso do papel quadriculado, o professor solicitou aos alunos que desenhassem diversas figuras, como retângulos, quadrados, triângulos e trapézios. Vejamos:





O professor solicitou aos alunos que calculassem a área das figuras desenhadas por eles, tomando como unidade de medida o quadradinho de 1 por 1 (unidade ao quadrado). Os alunos partiram para o cálculo da seguinte maneira:

Uns partiram para a contagem dos quadradinhos que compõem a figura, chegando a realizar conjecturas como:

- A área do quadrado é igual à quantidade de quadradinhos que compõem o lado vezes ele mesmo.

- A área do retângulo é igual ao número de quadradinhos que compõem seu lado maior vezes o número de quadradinhos que compõem seu lado menor.

  De forma intuitiva os alunos foram criando equações para o cálculo de figuras quadrangulares.

  O professor neste momento agia como instigador de situações, como por exemplo:

- Se o retângulo fosse o dobro do comprimento e o dobro da largura, qual seria a nova área?

- No caso do triângulo retângulo, qual seria sua área?

- Que conjecturas você pode apresentar?

- No caso do trapézio, como você faria para calcular a área dessa figura?

Desta forma, os alunos vivenciaram a construção das equações para o cálculo de área de diferentes figuras e através da decomposição de figuras foi possível compreender o cálculo de áreas de diferentes figuras, como por exemplo, o trapézio.

O professor partiu então para a formalização do conceito de unidade quadrada, explorando o conceito de metro quadrado. Permitindo que os próprios alunos apresentassem e explorassem o cálculo da área da sala de aula. Fazendo uso de uma trena fornecida pelo professor, foram realizadas as medidas das dimensões da sala, determinando sua área.

Isto permitiu ao professor explorar o conceito de perímetro, mostrando a diferença entre perímetro e área, confusão muito comum encontrada em nossos alunos tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio.

4.2.5 ATIVIDADE 5 - CÁLCULO DA ÁREA TOTAL DE UMA EMBALAGEM

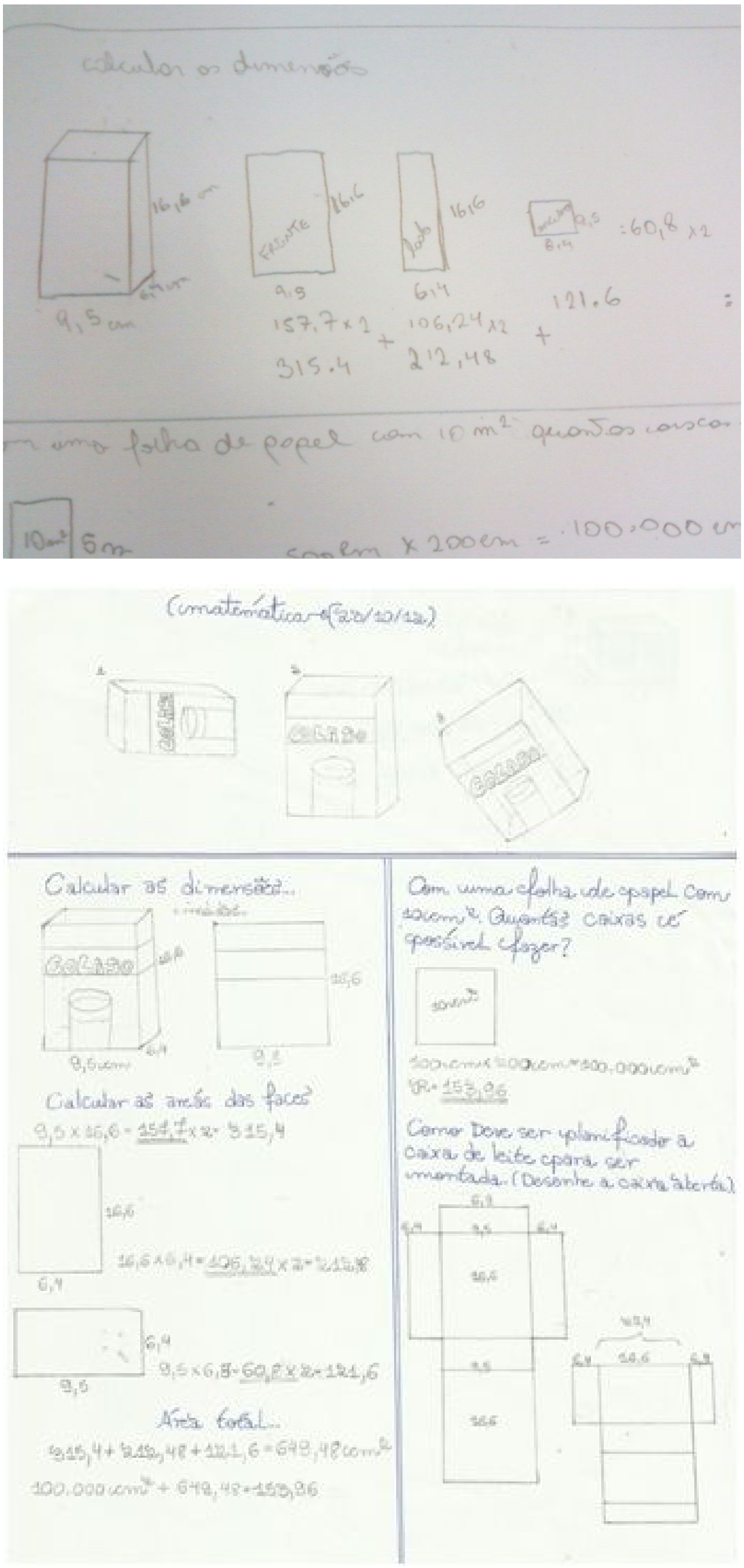
Tema	Desenvolver o conceito de área e unidade quadrada.
Objetivo Principal	Explorar o cálculo de área lateral e total de um paralelepípedo de base retangular e de base quadrada. Representar no plano uma figura tridimensional.
Objetivo Secundário	Compreender a necessidade do cálculo de área.
Tempo previsto	duas aulas (100 minutos).
Material	Embalagem de leite *Tetra Pak*, régua e caneta.

Descrição da atividade: O professor partiu para o trabalho com embalagens, buscando calcular a área total do material usado para a fabricação da mesma. O professor, junto com os alunos, quadriculou cada face das embalagens de leite *Tetra Pak* e da caixa de giz utilizando quadradinhos de um centímetro quadrado como mostra a figura 31

Figura 31 – Embalagens quadriculadas

Os alunos manipularam a embalagens, conferiram as medidas e partiram para o cálculo das áreas da base, das faces laterais e por fim a área total do papel usado para fabricar aquelas embalagens. Ver figura 32

Figura 32 – Transcrições dos alunos para as embalagens quadriculadas



Após esses cálculos o professor deixou como desafio para casa que tomassem outra embalagem também de um litro e calculassem a área total da embalagem. Na aula seguinte a maioria dos alunos apresentou à embalagem da bebida a base de soja, que possui a embalagem com base quadrada e mais alta em relação à embalagem de leite. Fez-se assim uma reflexão entre os alunos quanto ao formato e o valor encontrado. Vejamos:

Embalagem da bebida de soja: 7,2 cm comprimento, 7 cm largura e 20 cm de altura tendo área total de 668,8 cm^2.

Embalagem de leite: 9,5 cm comprimento, 6,4 cm de largura e 16,6 cm de altura tendo área total de 649,48 cm^2.

- Ambas tem um litro, mas a que tem base quase quadrada tem altura maior, e a que tem base retangular tem altura menor. A primeira embalagem usa mais papel do que a segunda embalagem. Por que as empresas não usam a segunda embalagem?

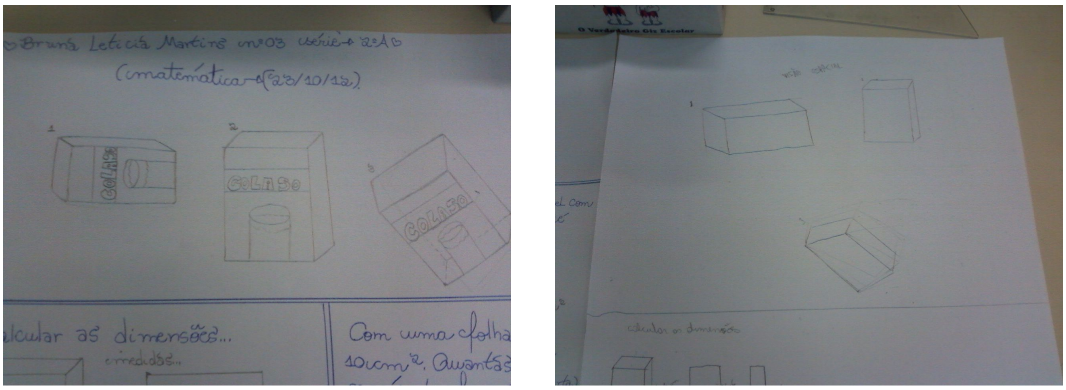
Após esse questionamento partimos para um debate sobre o armazenamento, sobre a facilidade para a dona de casa, sobre conceitos de logística, abrindo um leque de análises que junto com outras disciplinas poderia ser trabalhado na forma de projetos.

Em um segundo momento, o professor partiu para a representação no plano da embalagem tridimensional. Colocando a embalagem sobre a mesa pediu que os alunos desenhassem a embalagem como eles estavam vendo.

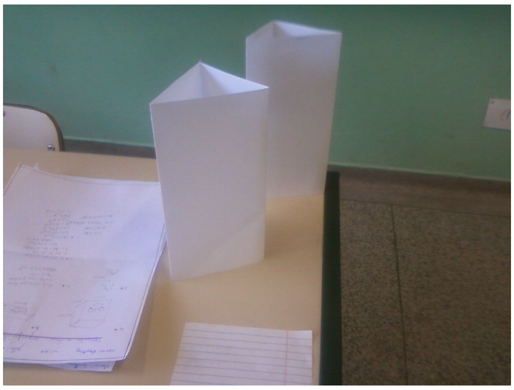
Após alguns minutos pediu para o aluno que estava à frente no canto direito da sala mostrar seu desenho a toda sala. O mesmo fez os alunos do centro e do lado esquerdo da sala. O que está diferente?

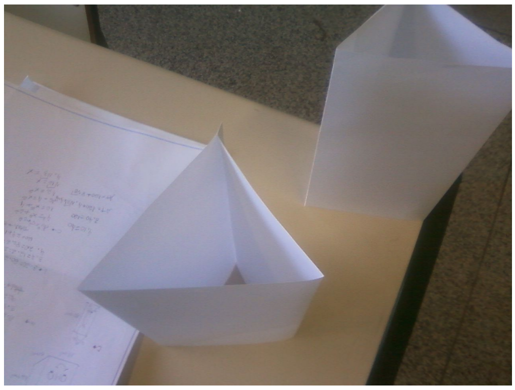
Os alunos afirmaram que o da direita e o da esquerda estavam "tortos". Após essa afirmação, o professor foi à lousa e explicou como poderia representar a embalagem. Inicialmente observou as arestas e as desenhou. Desta forma, foi explorando diferentes posições da embalagem permitindo com que os alunos criassem a visão tridimensional no plano. Na figura 33 mostramos algumas das análises.

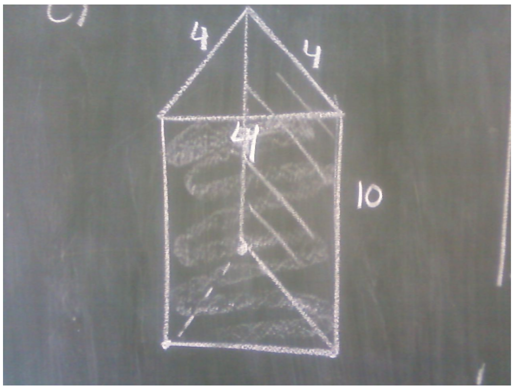
Figura 33 – Visão tridimensional - Análises dos alunos

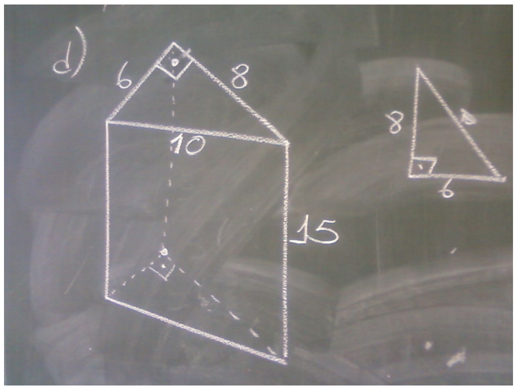


O professor trabalhou também com a representação de um prisma de base triangular. Com o uso de uma folha sulfite construiu a representação de um prisma com a base e a tampa abertas. Procedeu da mesma maneira descrita anteriormente.









O professor criou situações que estabelecessem medidas para as arestas do prisma e pediu aos alunos que calculassem a medida da área total do prisma. Os cálculos foram realizados satisfatoriamente pois eles calcularam por partes, exercitando assim a interpretação do desenho.

4.2.6 ATIVIDADE 6 - PRISMAS

Tema	Desenvolvendo o conceito de volume.
Objetivo Principal	Desenvolver o cálculo de volume do paralelepípedo e construir o entendimento sobre a equação para o cálculo do volume.
Objetivo Secundário	Com o uso de materiais manipulativos desenvolverem e compreender o cálculo do volume de sólidos.
Tempo previsto	três aulas (150 minutos).
Material	Folha com a planificação de um cubo, lápis de cor, tesoura e cola.

Descrição da atividade: O professor iniciou a atividade com o conceito de metro cúbico, questionando os alunos:

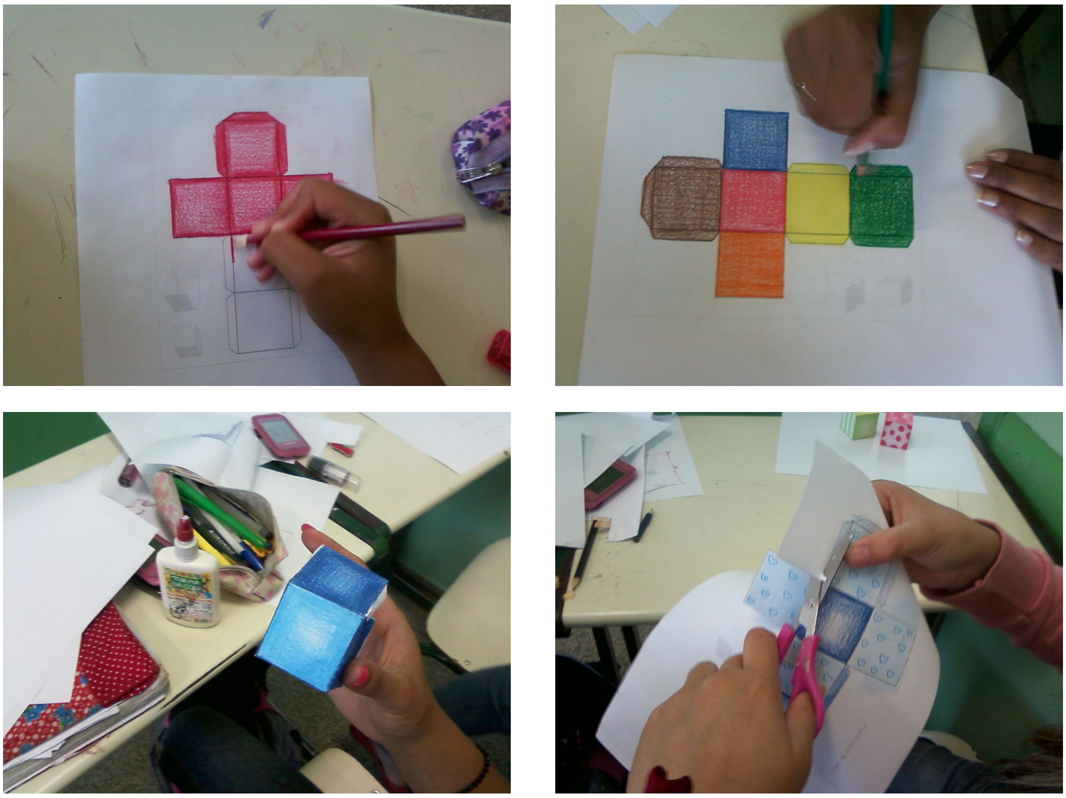
1. Vocês sabem o que é um metro cúbico?
2. Vocês conhecem situações que apresentam essa unidade de medida? Cite exemplos?

As respostas apresentadas não fugiram muito das apresentadas na Atividade 1 - Sondagem. O professor mostrou um cubo feito de cartolina, e explorando o número de faces, arestas e vértices, ficou bem claro que "um cubo possui seis faces regulares". O professor voltou a falar sobre a unidade de medida metro cubo, aplicando a idéia de que seria "uma caixa regular" onde a dimensão das arestas é de um metro.

Um dos alunos comentou que a conta de água de sua casa vem escrita que o consumo é de oito metros cúbicos e gostaria de saber o que isso significa. Este comentário permitiu ao professor explorar que em um recipiente de um metro cúbico cabem exatamente 1000 litros de água e que a conta de 8 m^3 equivale ao consumo de água de 8000 litros. Assim, foi possível escrever que 1 m^3 = 1000 litros.

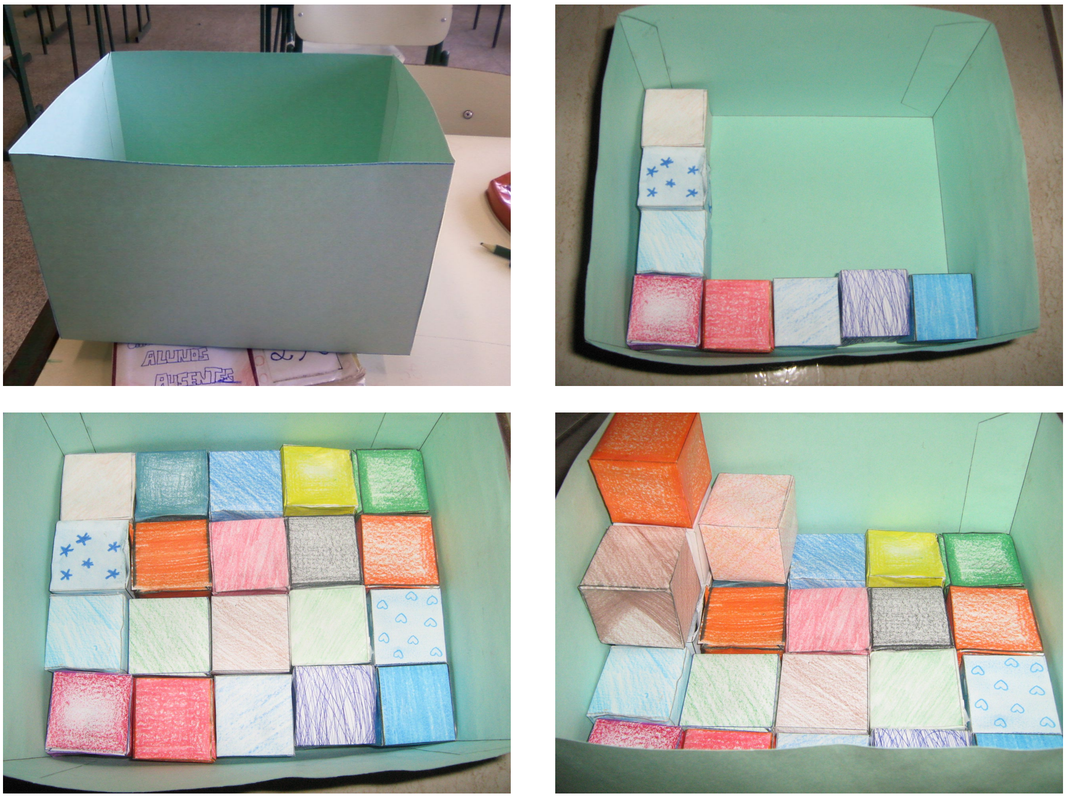
Após essa explanação partimos para a confecção de cubos de arestas medindo 4 cm. Cada aluno era responsável por construir cinco unidades, podendo variar nas cores. Conforme mostra a figura 34.

Figura 34 – Construção dos cubos.



Após essa construção o professor confeccionou um paralelogramo sem tampa de dimensões 20 cm de comprimento, por 16 cm de largura por 12 cm de altura afirmando para os alunos que dentro daquele paralelogramo (caixa) caberiam sessenta cubos. Muitos duvidaram. Após a confecção dos cubos um a um foram sendo colocados na caixa e ao completar a primeira camada couberam vinte cubos. Ver figura 35.

Figura 35 – Caixa e cubos.



Logo um dos alunos falou:

– Que legal professor, pois se cabem vinte cubos na primeira camada e a caixa tem doze centímetros de altura, logo caberiam três camadas iguais a primeira, tendo então sessenta cubos para completar a caixa.

Desta forma, o professor encaminhou a afirmação do aluno, dizendo o que ela estava fazendo era o cálculo do volume da caixa usando o cubo que construímos como unidade de medida e que dentro do paralelogramo cabem 60 unidades do cubo unitário.

Usando o paralelogramo construído o professor perguntou aos alunos:

– Se o cubo tomado como unidade de medida não fosse o de 4 cm de aresta e sim um com 1 cm de aresta, quantos cubos iguais caberiam dentro desse paralelogramo:

Todos os alunos estavam envolvidos com a atividade e logo um apresentou a seguinte resposta:

– Se na caixa cabem 60 cubos do de aresta 4 cm e cada um desses cabem $4 \times 4 \times 4 = 64$ cubos de aresta 1 cm, logo na caixa cabem $60 \times 64 = 3840$ cubos de 1 cm de aresta.

O professor parabenizou o aluno pelo raciocínio e pediu que explicasse para toda a sala suas conclusões. Desta forma, houve uma boa interação entre os colegas sobre esse raciocínio. Ao final, o professor interveio mostrando que esse cubo que tem como medida 1 cm de aresta é a unidade de medida padrão de volume, o cm^3.

Uma aluna concluiu usando o seguinte cálculo:

– Sabemos que a caixa tem 20 cm de comprimento, por 16 cm de largura e 12 cm de altura. Desta forma, usando a base temos 20 cm por 16 cm, se fossemos colocar uma camada de cubos com altura de 1 cm caberiam $20 \times 16 = 320$ cubos. Sabendo que a altura é 12 cm teríamos 12 camadas de 1 cm. Portanto, $320 \times 12 = 3840$ cubos. Como o professor falou, 3840 cm^3.

Usando esse pensamento, o professor partiu para a lousa buscando a forma algébrica para o cálculo do volume de um paralelepípedo. Assim,

$$\text{Volume} = \text{comprimento} \times \text{largura} \times \text{altura}$$

Ou ainda,

$$\text{Volume} = \text{Área da base} \times \text{altura}$$

Isto é,

$$V = A_{\text{base}} \times h \tag{4.1}$$

Por fim, o professor pediu aos alunos que calculassem o volume de outros paralelepípedos como por exemplos, as embalagens já vistas nas atividades anteriores. Propôs também que calculassem o volume do prisma de base triangular. Os alunos não apresentaram dificuldades para o cálculo e fizeram uso da equação 4.1.

4.2.7 ATIVIDADE 7 - CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

Tema	Redescobrindo o número π e o cálculo da área do círculo.
Objetivo Principal	Desenvolver o conceito de comprimento da circunferência e o cálculo da área do círculo.
Objetivo Secundário	Rever conceitos de número irracional e estabelecer relações entre o raio e o diâmetro de uma circunferência.
Tempo previsto	uma aula (50 minutos).
Material	Embalagens cilíndricas e objetos circulares.

Descrição da atividade: O professor iniciou esta atividade com um trabalho de revisão sobre o conceito do número π, do comprimento e da área de uma circunferência. O professor pediu para os alunos que trouxessem de casa objetos e embalagens circulares para tomar as medidas do comprimento das circunferências que elas formavam.

O professor preparou tabela 4 com a ajuda de alguns alunos.

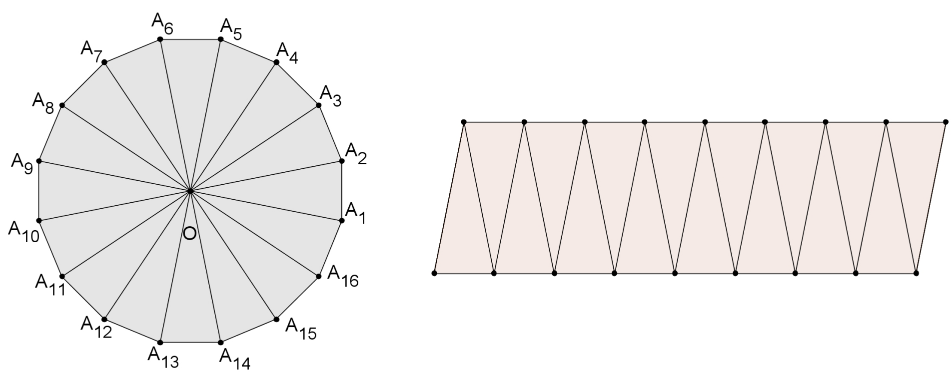
Tabela 4 – Medidas do comprimento das circunferências/diâmetro de vários objetos.

Objeto/Embalagem	**Comprimento da circunferência** (Co)	**Comprimento do diâmetro** (d)	Co/d
Lata e lixo	59,5 cm	19 cm	3,13
Achocolatado	37,3 cm	11,8 cm	3,16
Leite Condensado	20,5 cm	6,5 cm	3,15
Corretivo	6,5 cm	2 cm	3,25
Moeda de R$ 1,00	7 cm	2,2 cm	3,18

As medidas foram realizadas com ajuda de um barbante que era envolvido em torno da embalagem e depois esticado era medido com a régua. Buscou-se com a atividade mostrar que o número 3,14..., chamado de pi, e representado pela letra grega π, não é um número qualquer. Trata-se de um número irracional que como os outros está presente na natureza e que é facilmente observado em todas as circunferências. O professor foi à lousa e explorou os seguintes cálculos: $Co/d = \pi$. Temos que $Co = d\pi$, e como sabemos que $d = 2$ vezes o raio, temos $Co = 2r\pi$.

Após essa explanação o professor passou ao calculo da área do círculo. Desenhou na lousa um círculo e o dividiu em um número grande de partes, conforme mostra a figura 36 abaixo.

Figura 36 – Decomposição do círculo em partes



Com essa separação o professor propôs que se pode "abrir" o círculo e reagrupar as partes de outra maneira que a nova figura seja um paralelogramo de altura aproximadamente igual ao raio r e comprimento $2\pi r$. Temos:

$$A_o = (2\pi r r)/2 = \pi r^2$$

Como atividades para casa, o professor propôs: dado um cilindro com 20 cm de altura e 5 cm de raio qual seria a área total desse cilindro? Se este cilindro fosse feito com cartolina, qual a área de papel necessária para construí-lo com as dimensões citadas?

Na aula seguinte, o professor perguntou quem havia conseguido realizar a tarefa de casa. A grande maioria apresentou que não conseguiram pois para calcular a área lateral era difícil. Um aluno realizou o cálculo planificando o cilindro. O professor pediu que ele fosse à lousa e explanasse sua idéia. Ele explicou aos seus alunos como fez e os demais conseguiram compreender o raciocínio, cabendo ao professor fortalecer a situação. Foi um momento muito produtivo, pois o professor verificou que houve troca de informações e de compreensão entre os alunos. Um ajudava o outro a entender o que estava se passando.

4.2.8 ATIVIDADE 8 - CILINDRO

Tema	Volume de um cilindro.
Objetivo Principal	desenvolver o cálculo de volume do cilindro
Objetivo Secundário	com o uso de materiais manipulativos desenvolver e compreender o cálculo do volume do cilindro.
Tempo previsto	três aulas (150 minutos).
Material	Barbante, régua, EVA, compasso, tesoura, transferidor, canudo de refrigerante e alfinete.

Descrição da atividade: Iniciamos com a confecção de círculos em EVA com 10 cm de diâmetro de forma que pudéssemos colocar uns sobre o outro formando um cilindro. Com essa pilha de círculos o professor iniciou alguns questionamentos junto aos alunos, com o objetivo de que eles construíssem e compreendessem o cálculo do volume de um cilindro.

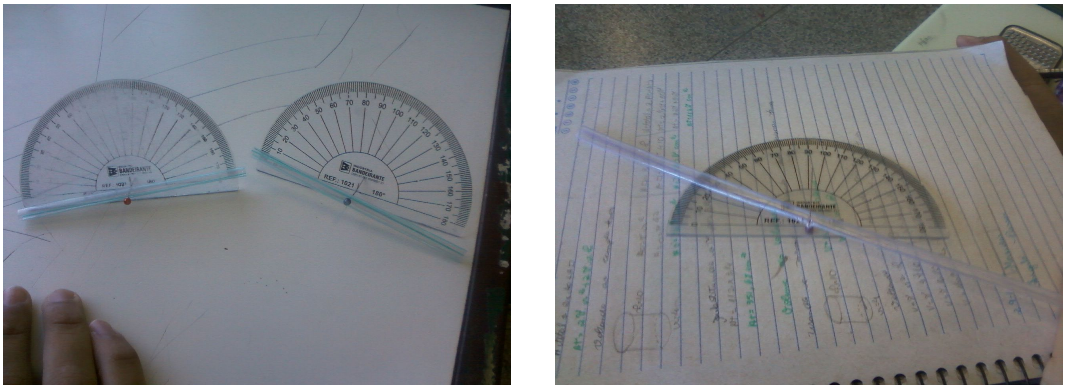
Muitos alunos partiram usando o raciocínio aplicado para o cálculo do volume do prisma chegando à conclusão que seria da mesma maneira, ou seja, calculando a área de um círculo e depois multiplicando pela altura do cilindro formado pelos círculos. O professor expos na lousa algumas situações que eles pudessem exercitar os cálculos.

Após essa fase, o professor perguntou aos alunos como poderíamos medir o volume da caixa d'água da escola que é da forma de um cilindro. Como poderíamos medir sua altura sem subir na caixa? Como calcularíamos seu raio?

As respostas foram várias, mas rapidamente um dos alunos apresentou que para medir seu raio bastava medir o comprimento da circunferência formada pela base da caixa d'água. Usando um barbante e medindo o comprimento desse barbante teríamos o comprimento da circunferência. Dividindo o valor encontrado por 2π? (aproximadamente 6,28) encontraríamos o valor do *raio*.

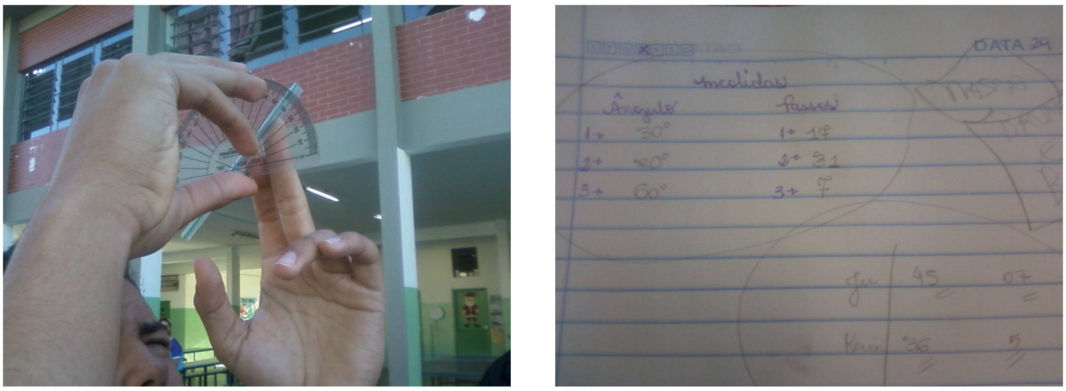
Para calcular a altura da caixa d'água o professor partiu para a lousa e com o uso da trigonometria mostrou que seria possível determinar sua altura. Para isso, teríamos que medir um ângulo em especial. O professor partiu para a atividade de construção de um teodolito usando transferidor, canudo de refrigerante e um alfinete. Conforme mostra a figura 37.

Figura 37 – Teodolito



Com ajuda da ponta seca do compasso podemos fazer um pequeno furo no centro do transferidor de maneira que passe um alfinete. Cortando um pedaço de 10 cm do canudo e furando-o no meio fixamos no transferidor. Mantendo o transferidor paralelamente ao chão e com certa distância do objeto ao ser observado, olhamos através do canudo até o topo do objeto observado. Em seguida anotamos o ângulo formado pelo canudo. Ver figura 38.

Figura 38 – Usando o teodolito



Para desenvolver essa atividade o professor e os alunos foram para o pátio da escola avistando assim a caixa d'água. Os alunos realizaram diversas medidas dos ângulos de observação e da distância horizontal entre eles e da caixa d'água, bem como o comprimento da circunferência da base usando o barbante. Após essa coleta de medidas voltaram para a sala de aula onde partiram para o trabalho na lousa representando geometricamente a situação vivenciada no pátio. Isto permitiu que o professor explorasse os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo. Os alunos em duplas realizaram os cálculos considerando as medidas tomadas por eles. Em cada caso obteve-se um valor. O professor sugeriu que realizassem a média aritmética com os valores encontrados obtendo desta forma uma boa aproximação para a altura da caixa d'água. Ocorreram alguns resultados com divergências entre as duplas decorrente de erros de medidas.

Um dos alunos apresentou a seguinte resposta:

– Professor, a caixa tem oito anéis de 6 palmos cada um. Medindo o meu palmo, que tem aproximadamente 21 cm, podemos concluir que cada anel tem 6×21 cm = 1,26 m. Desta forma, $1,26m \times 8$ anéis = 10,08 metros. O valor apresentado pelo aluno coincidiu com três grupos. A figura 39 mostra esta situação.

Figura 39 – Medindo a caixa d'água.

O professor realizou alguns comentários, comparando os resultados apresentados pelos alunos. Em seguida propôs aos alunos que teria outra maneira de encontrar a altura da caixa d'água, utilizando a sombra.

Quanto ao raio da caixa d' água, o comprimento da circunferência medida com o barbante foi de 5 metros. Os alunos realizaram o seguinte cálculo:

5 metros dividido por 6,28 são aproximadamente 0,79 metro de raio.

Desta forma, foi possível calcular o volume aproximado da caixa d'água obtendo o seguinte resultado:

$$V = A_{\text{base}} \times altura,$$

ou seja,

$$V = \pi r^2 h$$

onde h é a altura, substituindo os valores aproximados obtidos para o raio e altura temos:

$$V = \pi(0,79)^2 \times 10,08 = 19,7\text{m}^3 = 19700 \text{ litros}$$

Um dos alunos fez o seguinte questionamento:

– Se na escola tem em média 600 alunos e se cada um tomar um copo de 200 ml de água por dia, quanto tempo levaria para acabar essa água desconsiderando outro tipo de consumo?

Os alunos realizaram os cálculos chegando ao valor aproximado de 164 dias, ou seja, quase um ano letivo de aula pois este é composto de 200 dias. Outros pensamentos surgiram dando margem para várias reflexões.

4.2.9 ATIVIDADE 9 - ALTURA DE OBJETOS

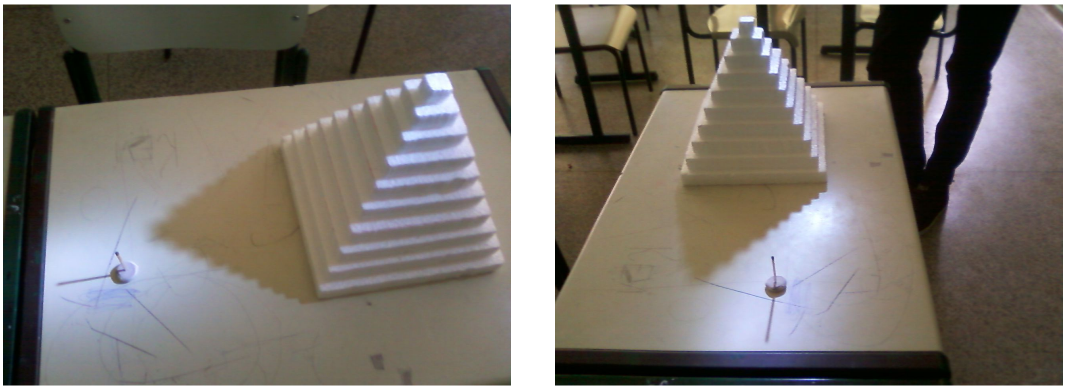
Tema	Altura da Pirâmide.
Objetivo Principal	Desenvolver o cálculo da altura de um objeto usando sua sombra.
Objetivo Secundário	Desenvolver o conceito de semelhança de triângulos.
Tempo previsto	duas aulas (100 minutos).
Material	Pirâmide confeccionada de isopor, lanterna, palito de fósforo e borracha escolar.

Descrição da atividade: O professor confeccionou com os alunos uma pirâmide de isopor composta de placas quadradas tamanhos decrescentes segundo a mesma razão. Ver figura 40.

Figura 40 – Confecção da prâmide

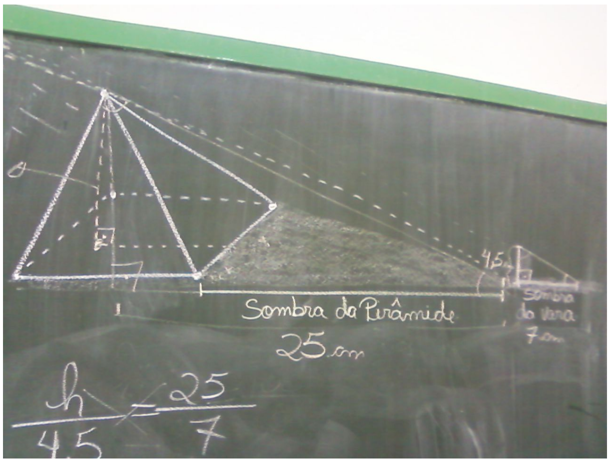
Fixou-se o palito de fósforo na borracha e com o uso da lanterna foi possível criar sombras tanto da pirâmide como do palito. Ver figura 41.

Figura 41 – Medindo a sombra



O professor junto com os alunos tomou as medidas das sombras e a altura do palito. O professor trabalhou na lousa a situação e através de semelhança de triângulos determinou a altura da pirâmide. Ver figura 42.

Figura 42 – Explorando a situação



Após ter desenvolvido esse raciocínio o professor junto com os alunos partiram para o pátio onde tomaram as medidas das sombras tanto da caixa d'água como de um aluno, de forma a explorar os conceitos trabalhados acima.

Com essas medidas voltaram à sala de aula e realizaram os cálculos verificando que o valor encontrado foi muito próximo ao encontrado na primeira experiência com o teodolito.

4.2.10 ATIVIDADE 10 - VOLUME DA PIRÂMIDE

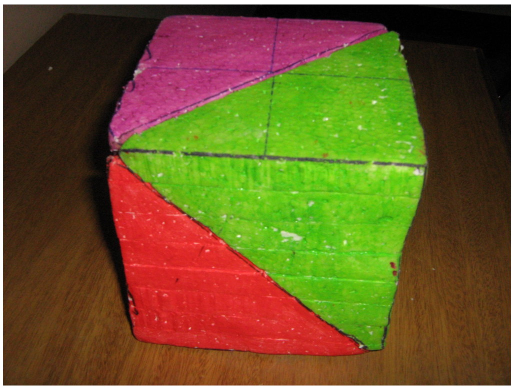
Tema	Volume da Pirâmide.
Objetivo Principal	Desenvolver o cálculo do volume da pirâmide.
Objetivo Secundário	Usando objetos manipulativos vivenciar e verificar a equação do volume da pirâmide.
Tempo previsto	duas aulas (100 minutos).
Material	Cubo decomposto em três pirâmides confeccionado de isopor.

Descrição da atividade: Esta atividade iniciou com a apresentação do cubo de aresta 12 cm. O professor pediu aos alunos que calculassem o seu volume.

Os alunos apresentaram o resultado $12 \times 12 \times 12 = 1728$ cm^3.

Em seguida, o professor dividiu o cubo em três partes congruentes, ou seja, em três pirâmides de base quadrada. Solicitou então que verificassem qual era a altura de cada pirâmide. Ver figura 43.

Figura 43 – Cubo decomposto em três pirâmides



O professor mostrou que as três pirâmides eram iguais. Assim, o volume de cada pirâmide era igual o volume do cubo dividido por três. Desta forma, teríamos 1728 cm^3 dividido por 3, obtendo 576 cm^3. Concluindo temos que o volume da pirâmide é igual à área da base vezes a altura dividido por três.

Após essa atividade o professor propôs aos alunos que realizassem alguns exercícios envolvendo o volume da pirâmide. Em uma das situações conhecida suas arestas, foi necessário calcular a altura da pirâmide. Uma das dificuldades apresentadas foi a visualização. A manipulação da pirâmide de isopor facilitou a visualização e consequentemente a compreensão e aplicação do Teorema de Pitágoras.

4.2.11 ATIVIDADE 11 - VOLUME DO CONE

Tema	Volume da Cone.
Objetivo Principal	Desenvolver o cálculo do volume do cone através de objetos manipulativos.
Objetivo Secundário	Vivenciar e verificar a equação do volume do cone.
Tempo previsto	duas aulas (100 minutos).
Material	Cone feito com embalagem de leite, embalagem de forma cilíndrica de tamanho médio (lata de pêssego em calda, molho de extrato de tomate, etc).

Descrição da atividade: Para essa atividade é necessário confeccionar um cone com o raio da base e altura iguais aos da embalagem cilíndrica.

A atividade consiste em encher o cone com água e colocar na embalagem cilíndrica, de forma a verificar que na embalagem cilíndrica cabem exatamente três volumes do cone. Conclui-se que o volume do cone é igual a terça parte do volume do cilindro.

Após esse trabalho experimental o professor foi para a lousa realizar a representação geométrica do cone e explorar as nomenclaturas como: geratriz, altura e raio. Seguiu-se a aplicação de situações de problemas diversificados envolvendo diversos sólidos.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

Este trabalho abordou o ensino de áreas e volume utilizando objetos manipulativos que facilitaram a visualização e a compreensão de diferentes conceitos da Geometria Plana e Espacial. Através da participação ativa, reflexiva e coletiva dos alunos foi possível levá-los a construir seus próprios conhecimentos.

Áreas e volumes são conteúdos nos quais os alunos apresentam dificuldades, pois muitos não conseguem realizar associações e articulações com situações do cotidiano. Também outra dificuldade é compreender e visualizar a representao de objetos espaciais no plano. Desta forma, este trabalho buscou estudar estes pontos e trazer situações manipulativas que estimulassem a visualização e a compreensão, permitindo realizar associações com o dia-a-dia do aluno.

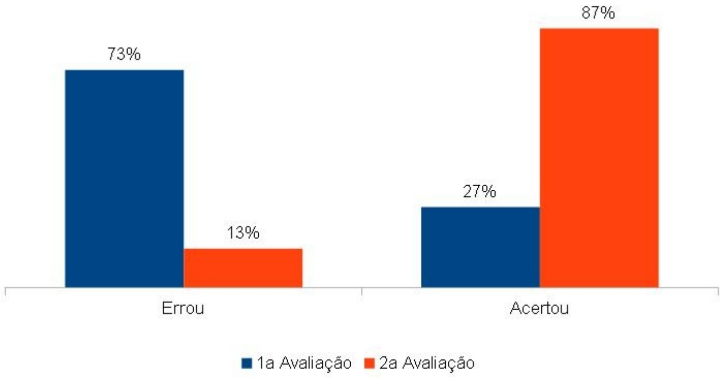
Após a aplicação da primeira avaliação de sondagem e da análise dos resultados já comentados anteriormente, tivemos um direcionamento nas atividades. Desta forma após os trabalhos de intervenções realizados foi aplicada uma nova avaliação, permitindo uma análise comparativa dos resultados.

Ao perguntarmos sobre o conceito de metro quadrado o percentual de acertos passou de 20% para 100. Quando perguntamos o que seria um quadrado, um retângulo, quais suas propriedades e como calcularíamos sua área, obtivemos na primeira pesquisa 7 de acertos contra 87 na segunda avaliação.

Os 13 que afirmaram não saber calcular a área são alunos que não estiveram presentes no dia em que trabalhamos as atividades envolvendo o cálculo de áreas usando o papel quadriculado. Também, podemos observar que a confusão existente entre área e perímetro, que alguns alunos apresentaram na primeira avaliação, deixou de existir. Isso se deve também aos comentários realizados nas atividades desenvolvidas em sala.

Ao trabalharmos com o conceito de triângulo, suas propriedades e sua área, os alunos apresentaram um crescimento nos acertos, tal crescimento pode ser observado no gráfico exibido na figura 44

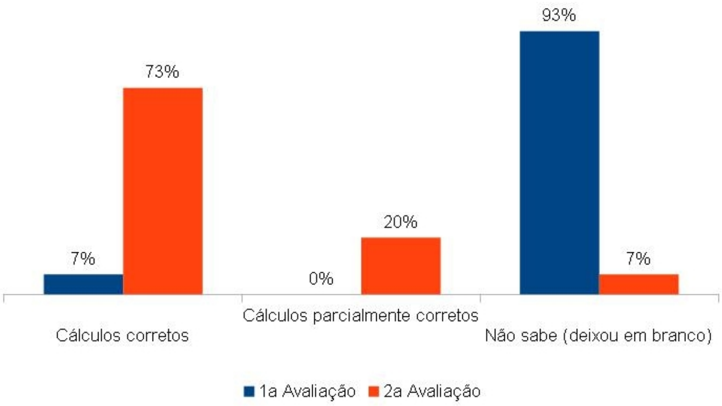
Figura 44 – Questão - Ordene os triângulos em ordem crescente conforme sua área.



Nas questões que abordavam conceitos envolvendo a circunferência, tanto o comprimento quanto a área, e o quociente do comprimento da circunferência pelo diâmetro, obtendo o número π, os resultados também foram satisfatórios. Percentualmente os alunos que não sabiam a respota passou de 93 para 13.

Quando apresentamos questões sobre volume, o rendimento apresentado foi positivo. O trabalho com o conceito de metro cúbico, buscando a contextualização, ficou mais agradável e prazeroso relacionando-o com situações encontradas no cotidiano. Também as atividades desenvolvidas para o cálculo do volume do prisma, da pirâmide, do cilindro e do cone, permitiram o entendimento dos conceitos envolvidos e facilitaram a resolução dos exercícios que envolviam estes conceitos. Ver figura 45

Figura 45 – Questão - Em um quintal retangular com 12 metros de comprimento por 6 metros de largura deseja-se construir uma piscina com 5 metros de comprimento, 3,5 metros de largura e 1 metro de profundidade. Qual o volume, em litros, desta piscina?



Como podemos verificar, as diferenças nos resultados foram significativas e o desempenho por parte dos alunos foi gratificante, pois através dos relatos apresentados pelos alunos podemos verificar segurança e compreensão do conteúdo.

Os alunos ausentes durante o desenvolvimento das atividades apresentaram a mesma insegurança e confusão presentes na primeira pesquisa. Desta forma, abriu-se um espaço para a reflexão junto aos alunos sobre a importância da presença e do envolvimento com as atividades escolares. Conseguimos construir uma base sólida para a aprendizagem.

Vejamos o relato de alunos quanto algumas atividades desenvolvidas:

Atividade 2: Estudando retas com o uso de barbantes

Figura 46 – Relatos a respeito do uso de barbante: primeiro aluno.

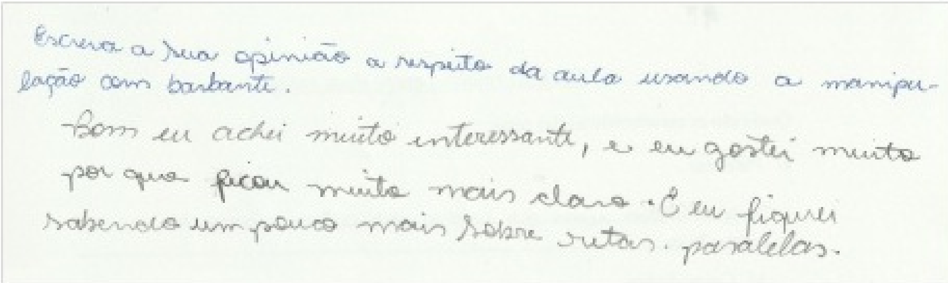

Escreva a sua opinião a respeito da aula usando a manipulação com barbante.
Bom eu achei muito interessante, e eu gostei muito por que ficou muito mais claro. E eu fiquei sabendo um pouco mais sobre retas paralelas.

Figura 47 – Relatos a respeito do uso de barbante: segundo aluno.

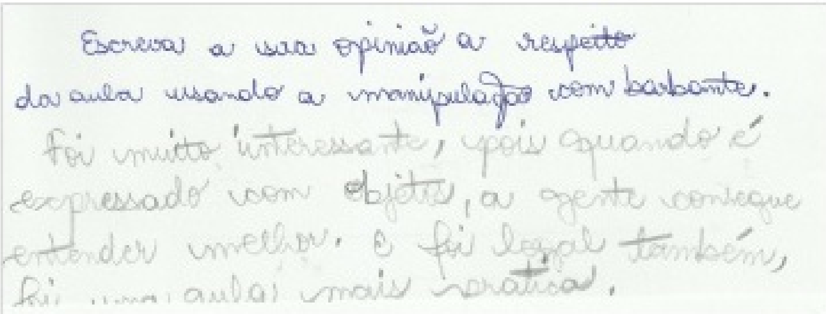

Escreva a sua opinião a respeito da aula usando a manipulação com barbante.
Foi muito interessante, pois quando é expressado com objetos, a gente consegue entender melhor. E foi legal também, foi uma aula mais prática.

Figura 48 – Relatos a respeito do uso de barbante: terceiro aluno.

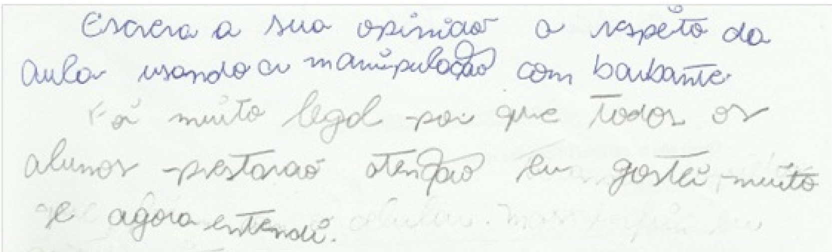

Escreva a sua opinião a respeito da aula usando a manipulação com barbante.
Foi muito legal por que todos os alunos prestarão atenção Eu gostei muito e agora entendi.

Figura 49 – Relatos a respeito do uso de barbante: quarto aluno.

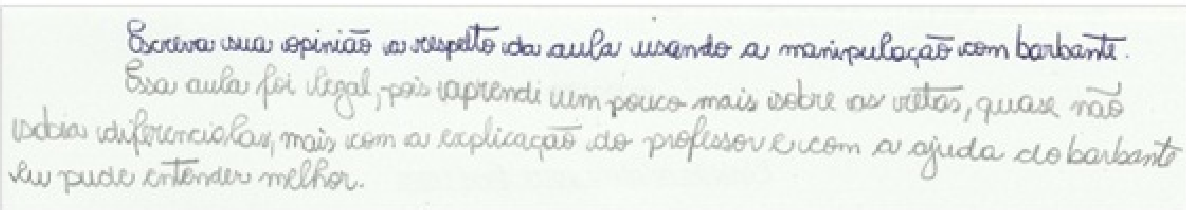
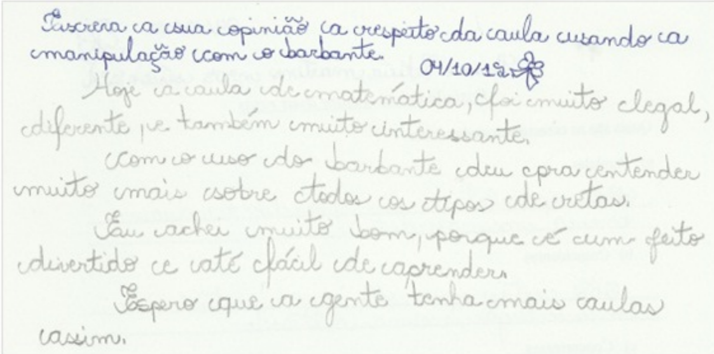

Escreva sua opinião a respeito da aula usando a manipulação com barbante.
Essa aula foi legal, pois aprendi um pouco mais sobre as retas, quase não sabia diferenciá-las, mais com a explicação do professor e com a ajuda do barbante eu pude entender melhor.

Figura 50 – Relatos a respeito do uso de barbante: quinto aluno.


Escreva a sua opinião a respeito da aula usando a manipulação com o barbante. 04/10/12

Hoje a aula de matemática, foi muito legal, diferente e também muito interessante.

Com o uso do barbante deu pra entender muito mais sobre todos os tipos de retas.

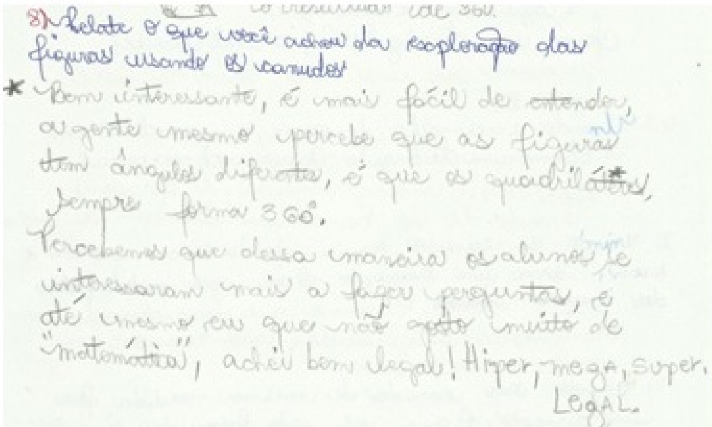
Eu achei muito bom, porque é um jeito divertido e até fácil de aprender.

Espero que a gente tenha mais aulas assim.

Analisando os relatos verificamos que o uso do barbante facilitou o entendimento sobre as posições relativas de duas retas. Também verificamos o maior envolvimento dos alunos, e de forma mais agradável foi possível proporcionar momentos de reflexão e de compreensão dos conceitos desenvolvidos.

Atividade 3: Trabalhando com Canudos.

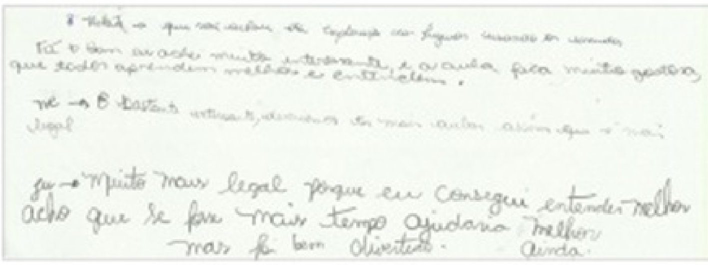
Figura 51 – Relatos explorando os canudos: primeiro aluno.


8) Relate o que você achou da exploração das figuras usando os canudos

Bem interessante, é mais fácil de ~~entender~~, a gente mesmo percebe que as figuras têm ângulos diferentes, e que os quadriláteros sempre forma 360°.

Percebemos que dessa maneira os alunos se interessaram mais a fazer perguntas, e até mesmo eu que não gosto muito de "matemática", achei bem legal! Hiper, mega, super, LEGAL.

Figura 52 – Relatos explorando os canudos: segundo aluno.


[illegible]

Muito mais legal porque eu consegui entender melhor acho que se fosse mais tempo ajudaria melhor ainda mas foi bem divertido.

Nesses relatos podemos verificar que os alunos se envolveram mais e despertaram a curiosidade. O espírito investigativo e manipulativo estava presente, permitindo desta forma medir e verificar propriedades referentes aos ângulos e aos lados.

Atividade 4: Calculando área.

Vejamos a atividade de um dos alunos:

Figura 53 – Explorando o papel quadriculado

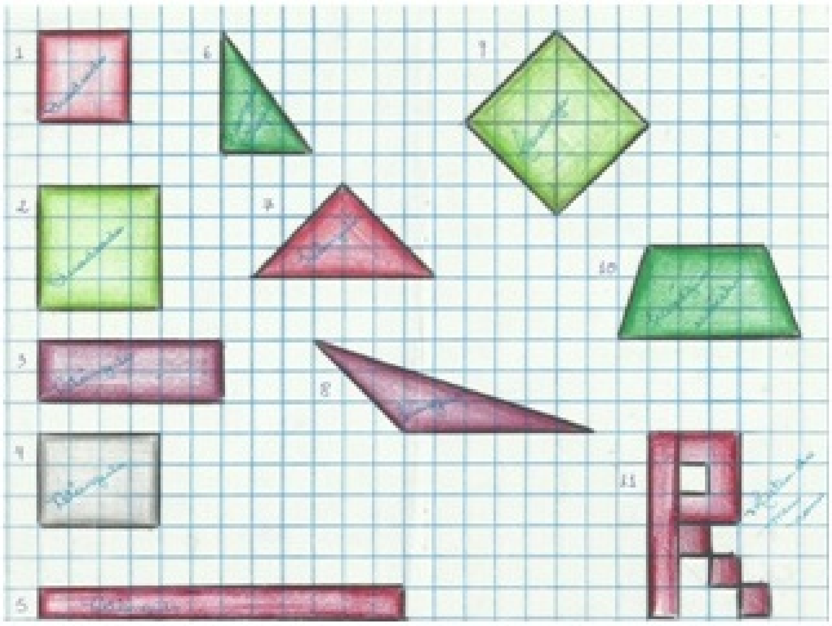
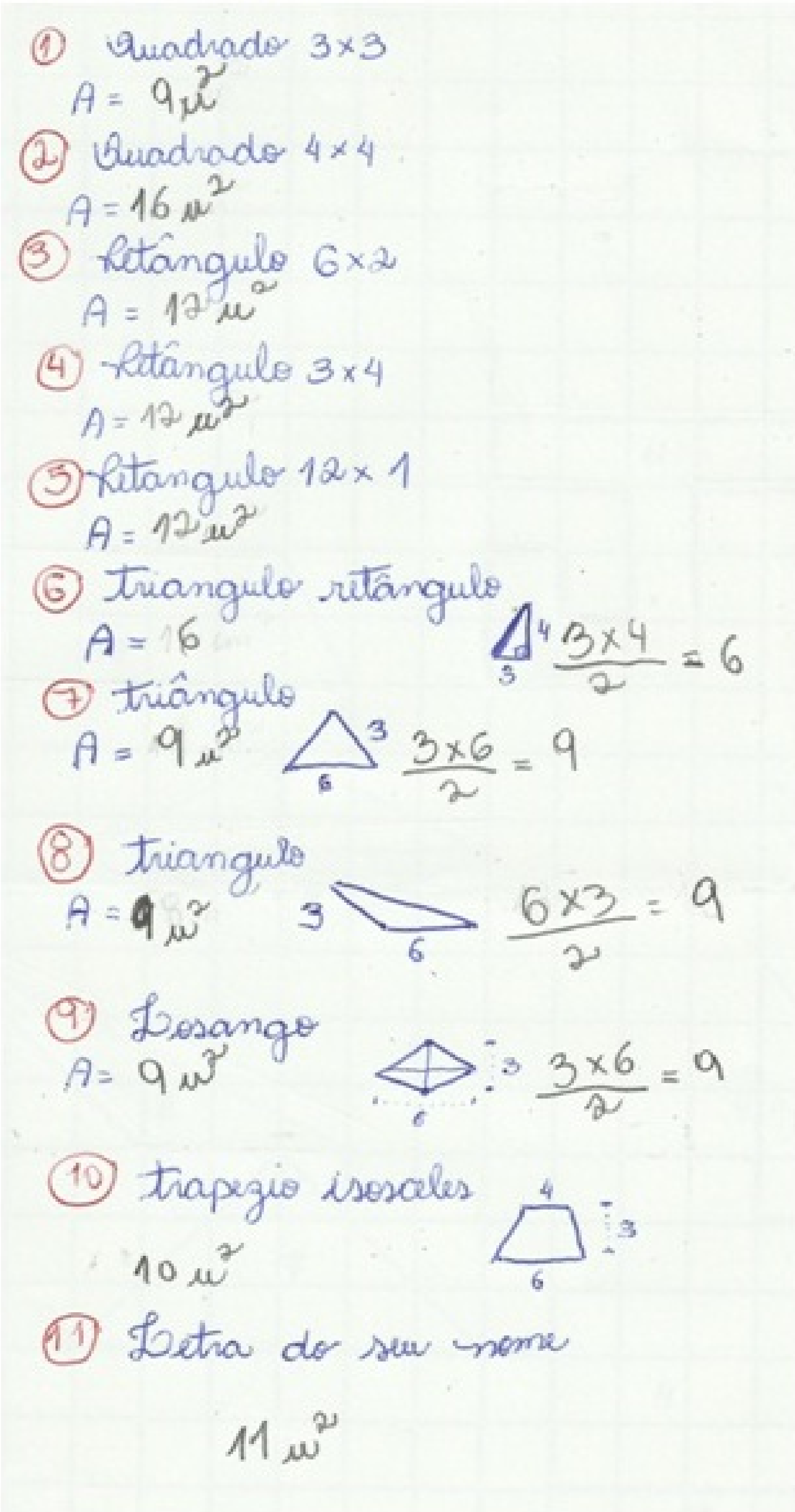


Figura 54 – Calculando área

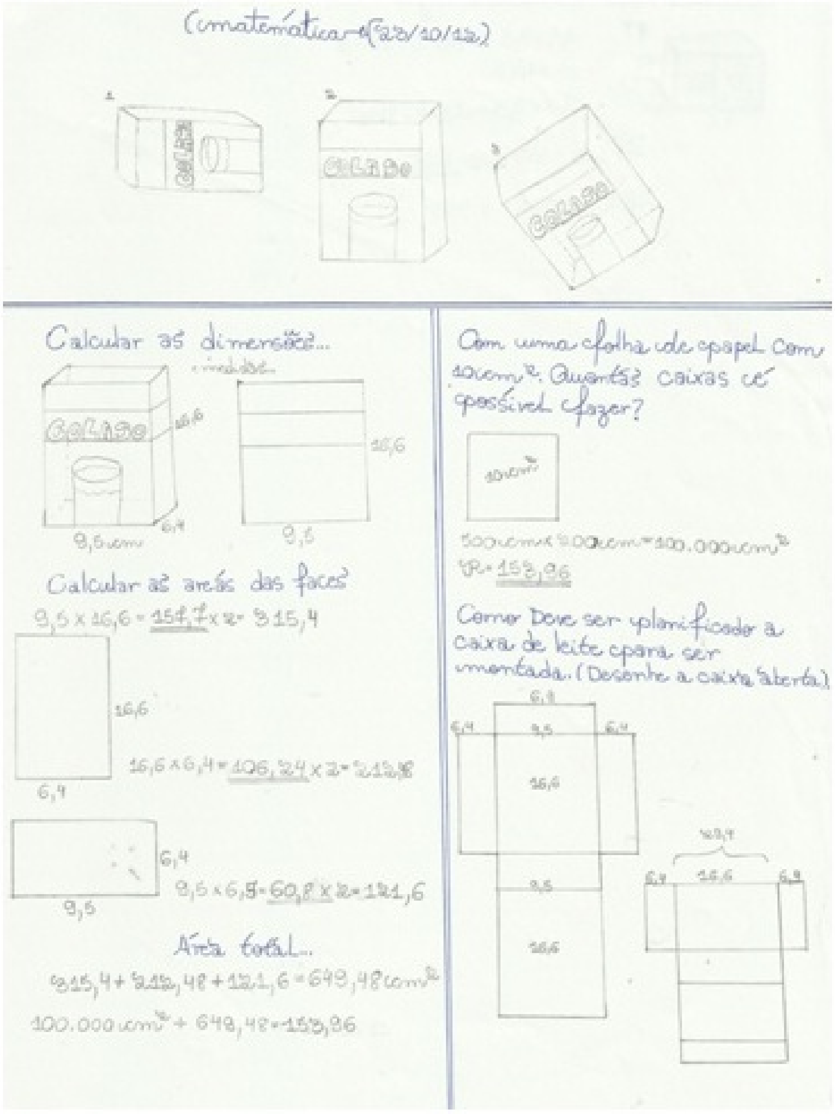


Nesta atividade o aluno desenvolveu o conceito de unidade quadrada e presenciou a construção de diferentes figuras associando equações que lhe facilitariam o cálculo. O aluno,a partir do concreto, construiu equações que eram mais significativas para ele.

Atividade 5: Cálculo total da área das embalagens

Vejamos a atividade de um dos alunos:

Figura 55 – Área total de uma embalagem *Tetra Pak*



A seguir os relatos apresentados pelos alunos quanto à atividade:

Figura 56 – Relatos sobre o uso da embalagem *Tetra Pak*: primeiro aluno.

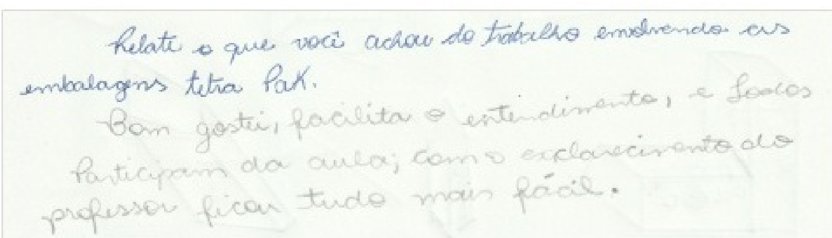


Figura 57 – Relatos sobre o uso da embalagem *Tetra Pak*: segundo aluno.

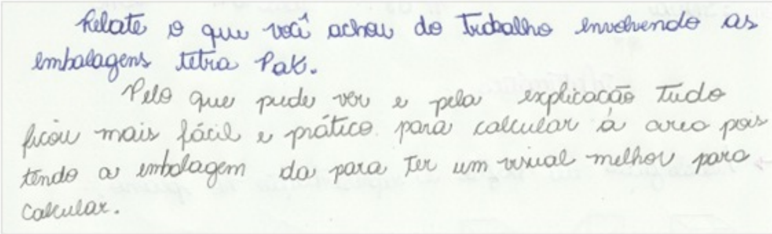

Relate o que você achou do Trabalho envolvendo as embalagens tetra Pak.
Pelo que pude ver e pela explicação Tudo ficou mais fácil e prático para calcular a area pois tendo a embalagem da para ter um visual melhor para calcular.

Figura 58 – Relatos sobre o uso da embalagem *Tetra Pak*: terceiro aluno.

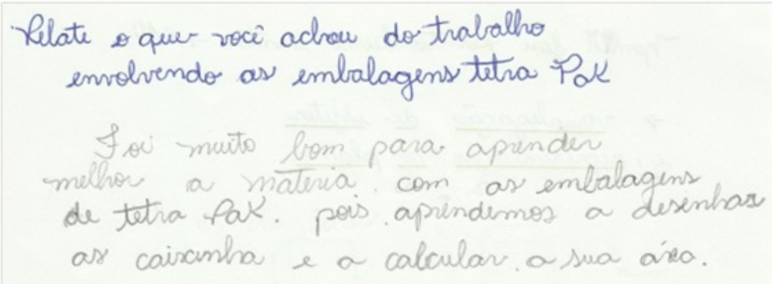
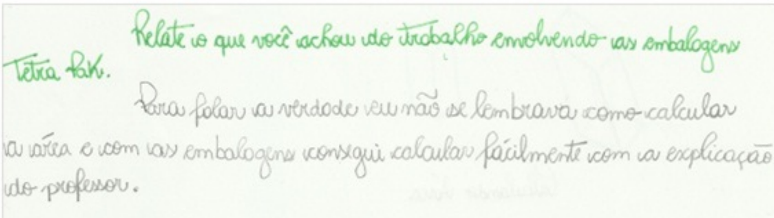
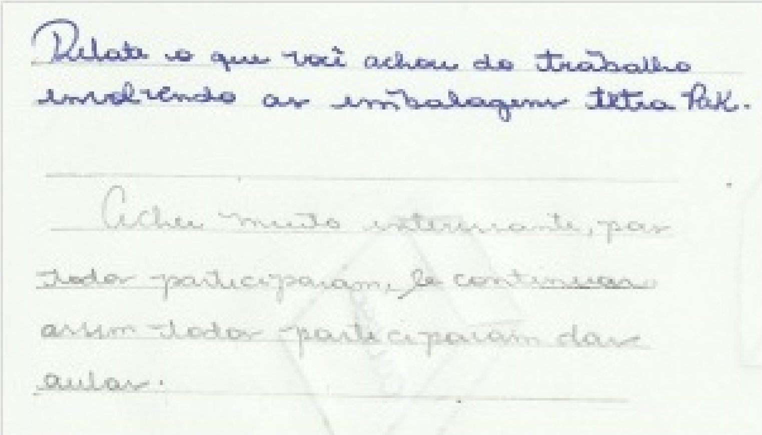

Relate o que você achou do trabalho envolvendo as embalagens tetra Pak
Foi muito bom para aprender melhor a materia com as embalagens de tetra Pak. pois aprendemos a desenhar as caixinha e a calcular a sua área.

Figura 59 – Relatos sobre o uso da embalagem *Tetra Pak*: quarto aluno.


Relate o que você achou do trabalho envolvendo as embalagens Tetra Pak.
Para falar a verdade eu não se lembrava como calcular a área e com as embalagens consegui calcular fácilmente com a explicação do professor.

Os relatos acima mostram que as atividades utilizando objetos manipulativos foram agradáveis e facilitadoras da aprendizagem. As dificuldades de compreensão sobre os conceitos e propriedades envolvendo retas, figuras e área, foram superadas. Neste trabalho obtivemos bons resultados, tanto no aspecto da aprendizagem como na participação e envolvimento por parte dos alunos. Isto foi relatado por uma das alunas.

Figura 60 – Relato sobre observação da aula

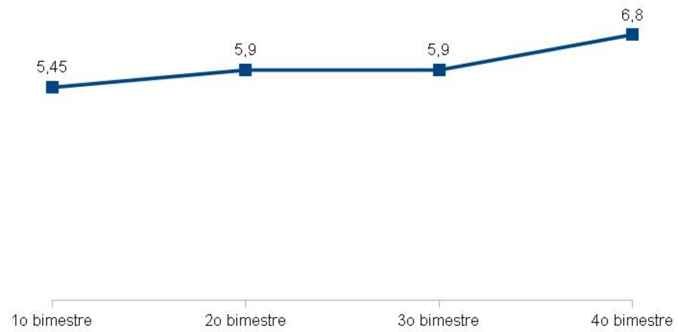


Relate o que você achou do trabalho envolvendo as embalagens tetra Pak.

Achei muito interessante, por todos participaram, e continuou assim todos participaram das aulas.

Outro indicador de bons resultados é o gráfico comparativo das médias bimestrais da sala. Ver figura 61

Figura 61 – Média da turma nas avaliações bimestrais.



Verificamos que houve um crescimento nas médias no quarto bimestre, quando foram desenvolvidas as atividades.

Enfatizamos também o ganho por parte do professor, pois o ato de analisar, rever as atividades e de se auto-avaliar, proporcionou um amadurecimento e crescimento na sua formação de professor. Ao estimular o aluno a construir seu conhecimento, desenvolver sua criatividade de investigação e de participação o professor mostrou que a matemática não é um decorar de equações e sim uma construção de entendimentos de diferentes conceitos formando uma rede de informações necessárias para o bom desenvolvimento da aprendizagem.

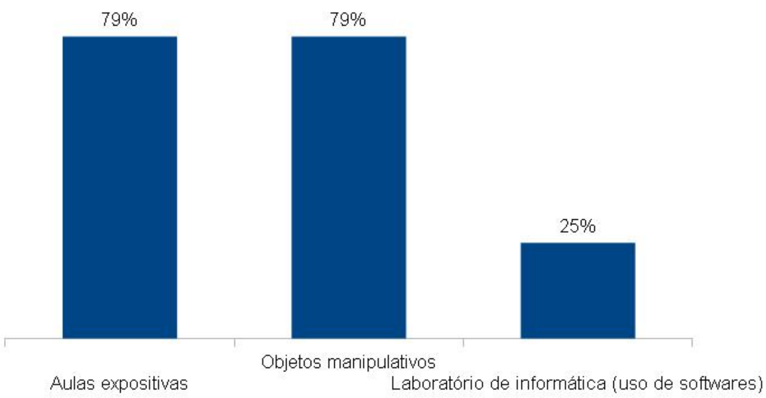
Como parte deste trabalho o professor partiu para uma pesquisa junto aos professores da rede pública sendo entrevistados 24 professores que ministram aulas de Matemática. Essa pesquisa foi aplicada em uma das Orientações Técnicas oferecidas pelos Professores

Coordenadores da Oficina Pedagógica (PCOP) da Diretoria de Ensino de Votorantim. A pesquisa buscou levantar vários pontos importantes quanto ao Ensino de Geometria.

Dos professores entrevistados temos que 29% estudaram em Instituições de Ensino Superior Pública e 92% cursaram o curso de Matemática. Quanto ao tempo que ministram aulas temos que 54% possuem mais de vinte anos, 33% entre dez e vinte anos e 13% com menos de dez anos de magistério.

Ao perguntar a importância do Ensino de Geometria no currículo escolar, verificamos que mais de 70% julgam que a Geometria é importante, pois permite interligar situações práticas do cotidiano com os conteúdos e explorar propriedades matemáticas de diferentes formas. Quando perguntado a respeito dos recursos pedagógicos mais utilizados tivemos as seguintes respostas como mostra a figura 62.

Figura 62 – Questão - Dos recursos pedagógicos, qual o procedimento que você mais utiliza para o ensino de Geometria?



Podemos notar que a aula expositiva e o trabalho com objetos manipulativos são os recursos mais utilizados, mas o uso do recurso tecnológico é muito pouco usado. Em análise e conversa com os entrevistados podemos verificar que os professores que utilizam os recursos tecnológicos são aqueles com menos de dez anos de magistério. Desta forma levantamos novas questões para um futuro trabalho: "Como está sendo o uso das tecnologias em sala de aula?" "Quais os anseios por parte dos professores, quanto o uso do computador?" "Como foi e está sendo a formação dos novos profissionais da educação quando pensamos em tecnologia em sala de aula?"

Ao perguntarmos sobre o desempenho dos alunos quando desenvolvido os conteúdos envolvendo área e volume, temos que os alunos apresentam desempenho médio. Os professores ao relacionarem os conteúdos com situações do cotidiano aumentam o interesse do aluno pelo assunto.

Pensando nas dificuldades mais comuns encontradas pelos alunos temos o seguinte resultado:

50% apresentaram dificuldades na visualização das figuras,

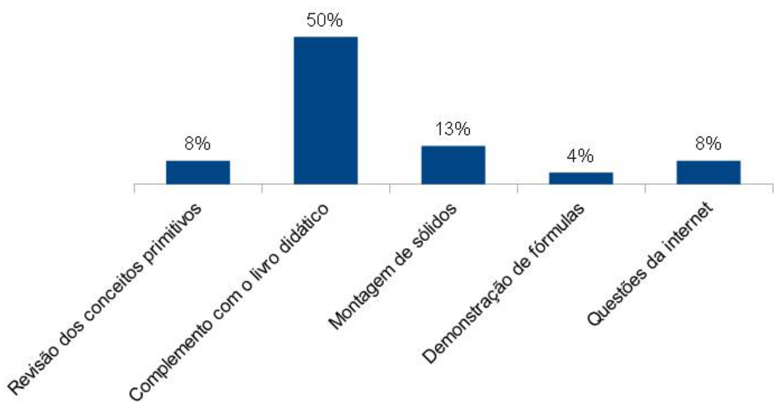
83% não conseguiam interpretar as informações contidas nos problemas,

88% não transcreviam as informações da linguagem verbal para a linguagem matemática e

50% apresentaram erros de cálculo.

Desta forma, a dificuldade em visualizar as figuras nos leva a enfatizar que o trabalho com os objetos manipulativos vem auxiliar e facilitar a visualização e interpretação da situação proposta, ajudando a combater as outras dificuldades apresentadas anteriormente. Pensando no Caderno do Aluno, 63% dos professores entrevistados acreditam que a abordagem dada aos conceitos de Geometria é regular e apenas 29% acreditam que é boa. Também 83% acreditam que os conteúdos são insuficientes, necessitando desta forma de complemento. A seguir apresentamos as ações tomadas pelo professores entrevistados para enriquecer as aulas.

Figura 63 – Questão - Como você faz para enriquecer as aulas?



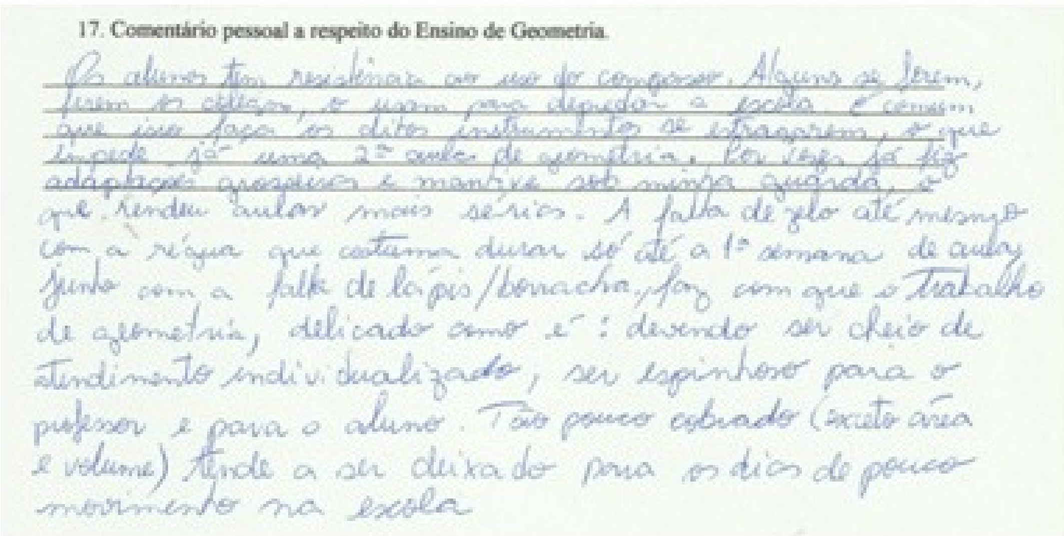
Analisando o gráfico da figura 63 observamos que 50% recorrem ao livro didático, onde muitas vezes se prendem as situações apresentadas no texto sem partir para novas situações. Podemos verificar que 50% usam bastante a aula expositiva com exploração de exercícios enquanto 46% apresentam médio uso.

Quanto aos materiais manipulativos temos que 79% fazem médio uso e apenas 8% bastante uso. Quanto ao uso de régua e compasso temos que 63% apresentam bastante uso. Ao perguntarmos sobre o uso dos softwares de Geometria vemos que 33% não usam, 42% pouco uso e 25% médio uso. Também temos que 58% não conhecem nenhum software para o ensino de áreas e volume.

Analisando as respostas apresentadas pelos professores vemos que o ensino de geometria ainda possui diversas restrições. Enquanto alguns gostam de ensinar geometria, outros apresentam inseguranças, podendo ser decorrentes da formação acadêmica, do cansaço do cotidiano, da falta de comprometimento dos alunos, etc. Desta forma, muitos ainda estão relegando o ensino de Geometria para o final do ano. Em razão da falta de tempo decorrente das dificuldades os professores acabam deixando o conteúdo de Geometria de lado ou o fazem superficialmente. Como apresentado na pesquisa, 83% dos entrevistados afirmam que as atividades apresentadas no Caderno do Aluno não são suficientes para desenvolver os conteúdos propostos. Assim, este trabalho vem a complementar as atividades do professor em sala de aula, quando aplicadas e exploradas retornaram bons resultados.

Outros dados que enriqueceram essa pesquisa foram os relatos realizados pelos professores quanto ao ensino de Geometria. Vamos ver alguns que nos trazem momentos de reflexão sobre a nossa prática profissional.

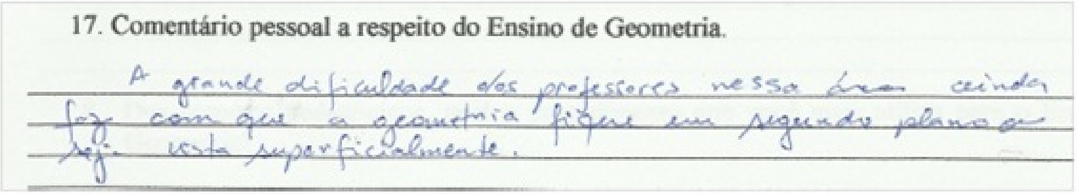
Figura 64 – Relato professor 1


17. Comentário pessoal a respeito do Ensino de Geometria.

Os alunos têm resistência ao uso do compasso. Alguns se ferem, ferem os colegas, e usam para depredar a escola. E com isso que isso faça os ditos instrumentos se estragarem, o que impede já uma 2ª aula de geometria. Por isso, só fiz adaptações grosseiras e mantive sob minha guarda, o que rendeu aulas mais sérias. A falta de zelo até mesmo com a régua que costuma durar só até a 1ª semana de aula junto com a falta de lápis/borracha, faz com que o trabalho de geometria, delicado como é: devendo ser cheio de atendimento individualizado, ser espinhoso para o professor e para o aluno. Tão pouco cobrado (exceto área e volume) tende a ser deixado para os dias de pouco movimento na escola

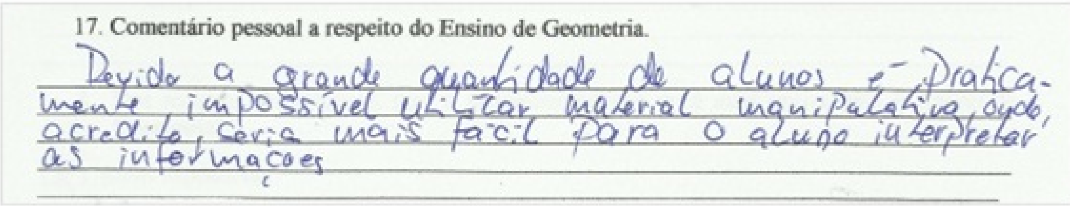
O relato dessa professora deixa claro a insegurança e a ausência de um contrato didático realizado com os alunos, onde o trabalho passa a ser cansativo e não prazeroso, como ela afirma "*... devendo ser cheio de atendimento individualizado, ser espinhoso para o professor e para o aluno. Tão pouco cobrado (exceto área e volume) tende a ser deixado para os dias de pouco movimento na escola*", esse comentário nos leva a refletir sobre como o trabalho com Geometria infelizmente por alguns professores está sendo deixado de lado, sendo tratado como um complemento, como algo que não tem tanta importância. O resultado disso temos alunos com sérios déficits de aprendizagem. Para reforçar o comentário acima vejamos os relatos de outros professores:

Figura 65 – Relato professor 2


17. Comentário pessoal a respeito do Ensino de Geometria.

A grande dificuldade dos professores nessa área ainda faz com que a geometria fique em segundo plano ou seja vista superficialmente.

Figura 66 – Relato professor 3

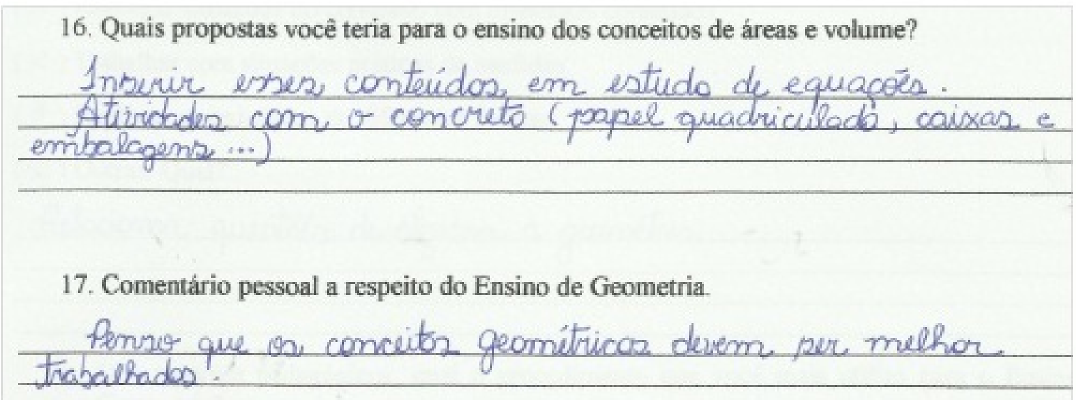

17. Comentário pessoal a respeito do Ensino de Geometria.

Devido a grande quantidade de alunos é praticamente impossível utilizar material manipulativo, onde, acredito, seria mais fácil para o aluno interpretar as informações

Este último professor relata que "*... devido a grande quantidade de alunos é praticamente impossível utilizar material manipulativo...*", mas ele próprio salienta "*... que seria mais fácil para o aluno interpretar as informações*". Assim, o nosso trabalho contrapõe em parte com esse professor, pois o uso dos materiais manipulativos facilitou muito a compreensão dos alunos, e facilitou o trabalho do professor, pois ele passou a ser um mediador da construção do conhecimento. Quanto ao número de alunos, sim há algumas restrições, mas com o uso de um contrato didático e com o diálogo é possível o trabalho com materiais manipulativos, pois os alunos passam a serem um agente ativo na aprendizagem e não passivo como um mero recebedor de informações.

Para reforçar o nosso trabalho temos o seguinte relato:

Figura 67 – Relato professor 4


16. Quais propostas você teria para o ensino dos conceitos de áreas e volume?

Inserir esses conteúdos em estudo de equações.
Atividades com o concreto (papel quadriculado, caixas e embalagens ...)

17. Comentário pessoal a respeito do Ensino de Geometria.

Penso que os conceitos geométricos devem ser melhor trabalhados!

Esse professor apresenta que uma das propostas para trabalhar com conceitos de área e volume seriam o uso de materiais concretos como o papel quadriculado, as caixas e embalagens, vindo dessa foram a fortalecer o nosso trabalho de pesquisa, pois o uso de objetos manipulativos como já foi comentado em outros capítulos, junto com a metodologia de resolução de problemas, vem a enriquecer as aulas, e de certa forma ajudar o trabalho do professor, e o mais importante, melhorar a qualidade do Ensino de Geometria.

CONCLUSÃO

Esta pesquisa analisou as Situações de Aprendizagem de Geometria, do 4º bimestre da segunda série do Ensino Médio, do Caderno do Professor de Matemática publicado pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo, a luz do Currículo de Matemática. Tem por premissa contribuir com o ensino da Matemática, em particular com o conteúdo de Geometria Espacial, e apresentar uma proposta para articular as situações encontradas no Caderno do Professor de Matemática, com o uso de objetos manipulativos.

O desenvolvimento do estudo do ensino de Áreas e Volume é o tema principal desta pesquisa. Este tema foi escolhido devido as dificuldade apresentadas pelos alunos na compreensão e assimilação dos conteúdos envolvendo o cálculo de áreas e volumes de diferentes formas planas e espaciais.

A hipótese de investigação que protagoniza esta pesquisa foi a de que o uso de objetos manipulativos, com o auxílio de embalagens e sólidos geométricos poderá favorecer as proposta de articulação das Situações de Aprendizagem do caderno do Professor, de forma simples e significativa. Surgiu a seguinte pergunta: "De que maneira é possível uma abordagem significativa com o uso de objetos manipulativos o estudo de conteúdos de Geometria Espacial do Ensino Médio, mas precisamente o estudo de áreas e volume, com base no Currículo do Estado de São Paulo?"

Ao aplicar a Avaliação de Sondagem aos alunos permitiu um direcionamento das atividades realizadas nesta pesquisa, pois através dos resultados foi possível identificar as maiores dificuldades da turma e sentir o grau de conhecimento sobre os assuntos referentes ao estudo da Geometria.

O trabalho de pesquisa após a analise dos PCN's, das OCEM, do Currículo do Estado, do Caderno do Professor e da pesquisa de diversos trabalhos de autores que estudam sobre o Ensino de Geometria, partimos para a elaboração e planejamento das intervenções em sala, levando em consideração o perfil, o aspecto pedagógico no qual se encontrava a sala.

Podemos salientar que a Geometria nesse nível de ensino possibilita o uso de materiais concretos, como caixas, embalagens e a construção de polígonos e poliedros e o manuseio de ferramentas (régua, compasso, transferidos, etc.). Desta forma, temos um espaço para a exploração que é a experimentação, onde os alunos irão fazer suas próprias descobertas e aprender com seus erros e suas correções ou por seus acertos. O manuseio favorece a percepção de propriedades de figuras geométricas e raciocínio indutivo sobre resultados geométricos, sendo apoio útil no entendimento de situações problemas.

As aulas visavam à aprendizagem por meio da participação ativa e coletiva do aluno, onde através das atividades experimentais e manipulativas apresentou resultados muitos satisfatórios, pois houve um maior interesse pelos temas, despertando a curiosidade, e mudanças no comportamento em sala de aula. O professor neste trabalho passou a ser o mediador do conhecimento, ajudando os alunos a construírem seus próprios.

A atividade de relatar o que o aluno achou das atividades foi muito importante, pois forneceu informações sobre o andamento da aprendizagem. Esta atividade deu indícios do grau de aprendizagem e assimilação do conhecimento pelo aluno, das dificuldades por eles apresentadas. Esse tipo de atividade pode ser até mesmo usado para conhecer melhor o aluno, pois podemos perceber as dificuldades de comunicação (leitura e escrita), que muitas vezes durante a aula passam despercebidos pelo professor.

Pensando agora no professor, a auto-avaliação e os relatos apresentados pelos alunos permitem que o professor possa identificar e criticar suas ações, falhas ou não, possibilitando rever sua prática, visando melhorar as aulas futuras, bem como focar em determinadas dificuldades identificadas em sala de aula. Dessa forma aprimorar-se como profissional, pois, as reflexões geradas nas atividades anteriores, o ajudaram a rever planejamentos de aulas futuras, melhorando assim cada vez mais seu trabalho.

O uso da metodologia de resolução de problemas vem como uma ferramenta de grande valia para o ensino da Geometria, pois como verificamos em nossas atividades os alunos seguiram as etapas propostas por Polya e os diferentes níveis de aprendizagem citados pelo modelo Van Hiele, verificando dessa forma uma aprendizagem eficaz.

Outra contribuição que esperamos oferecer com esse trabalho consiste no desenvolvimento de um olhar que busque além das avaliações de erros e acertos. A partir da identificação das causas que levaram ao erro podemos verificar que os alunos não sabiam distinguir diferenças entre as figuras e suas propriedades. Além disso, verificamos que o conceito de unidade ao quadrado e unidade ao cubo eram sem significados concretos. Desta forma, buscamos superar essas dificuldades e fornecer aos alunos uma aprendizagem mais significativa.

Pretendemos também com este trabalho que o professor tenha uma reflexão sobre sua classe focando no âmbito específico em que ela se encontra, na identificação de dificuldades e potenciais, ajudando na melhoria e preparo de suas aulas, assim como o progresso ocasionados pela pesquisa de sua própria prática docente.

Em nossa pesquisa trabalhamos sempre com um objetivo maior que era a participação do aluno na construção de seu próprio conhecimento. Durante os estudos tínhamos claro que deveríamos trabalhar nosso objetivo tendo como base o Currículo do Estado de São Paulo e a melhoria da prática docente tanto na sala de aula como fora dela. Buscamos então os estudos teóricos que nos ajudaram nessa missão e encontramos nossa base no Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, na Metodologia de Resolução de problemas, na

Metodologia de Van Hiele, e é claro, da nossa experiência didática que contribuiu para a adequação dessas metodologias para o âmbito educacional no qual estamos inseridos.

Conseguimos estabelecer resultados positivos evidenciados na pesquisa, que incluem um maior interesse dos alunos em sala de aula, mudança de postura na relação professor-aluno, menor índice de indisciplina, melhoria gradativa de notas, participação efetiva de alunos com maiores déficits de aprendizagem, maior confiança dos alunos em relação aos resultados obtidos por eles mesmos.

No geral encontramos uma melhora significativa na aprendizagem dos alunos e buscamos garantir a participação do aluno em sua aprendizagem, sempre propiciando a ele oportunidades de se expressar e socializar suas idéias em sala de aula. Esperamos que o trabalho venha ajudar professores e futuros docentes na melhoria da prática docente, sobretudo como auxiliar didático no uso do currículo do Estado de São Paulo, dando alternativas e complementos as atividades propostas, sempre com a intenção da melhoria educacional.

As mudanças e melhorias ligadas à interação e construção do conhecimento coletivo da classe estão relacionadas com a aprendizagem participativa baseada em indagações e explorações. O professor atento a esse fato encontrará melhores alternativas de inserção de seus alunos no ensino/aprendizagem colhendo os frutos em curtos e médios prazos. Na análise do Caderno do Professor podemos verificar que nas Situações de Aprendizagem fica nítida a forma de abordagem espiralada dos temas, como é proposto pelo Currículo de São Paulo, que pressupõe que os grandes temas devem ser tratados ao longo de todos os anos, observando que há diferença de tratamentos para cada ano de ensino. O Caderno do Professor e o Currículo salienta que cabe ao professor a busca de um equilíbrio no tratamento dos conteúdos fundamentais nos diversos bimestres durante o processo de ensino, permitindo assim a realizações de pontes e de complementações ou até mesmo de substituições das atividades, buscando a concretização da aprendizagem em cima do Currículo.

A forma como foram desenvolvidas as atividades nesse trabalho buscou alcançar um maior desempenho do raciocínio lógico e dedutivo. Resgatou os conhecimentos de Geometria oriundos do Ensino Fundamental. E buscou o aprofundamento das ideias desenvolvidas nos anos anteriores no sentido de estabelecer um sistema dedutivo e sinificativo nos diferentes conteúdos abordados.

Nas OCEM diretrizes que sinalizam para a maneira de desenvolvimento das atividades aplicadas no Caderno do Professor, temos:

> O trabalho de representar as diferentes figuras planas espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado nesta etapa de escolarização. Alguns conceitos estudados no ensino fundamenta devem ser consolidados, como por exemplo, as ideias de congruência, semelhança e proporcionalidade, o Teorema de Tales e suas aplicações, as relações métricas e trigonométricas

> nos triângulos (retângulos e quaisquer) e o Teorema de Pitágoras. No trabalho com as áreas das superfícies de sólidos, é importante recuperar os procedimentos para determinar a medida da área de alguns polígonos, facilitando a compreensão das áreas das superfícies de prismas e pirâmides. As expressões que permitem determinar a medida da área das superfícies do cilindro e do cone podem ser estabelecidas facilmente a partir de suas planificações (BRASIL, 2006, p. 75 - 76).

Para pesquisas futuras no ensino da Matemática sugere-se a abordagem dos conteúdos propostos agora com o uso das Tecnologias, mas precisamente com o software Geogebra, aplicados a professores da Educação Básica e com alunos do Ensino Médio.

Para finalizar podemos concluir que a Geometria nos últimos anos, tem sido abordada de maneira mais abrangente, pois a forma espiral proposta pelo Currículo da Secretária da Educação do Estado de São Paulo, explora este tema em diferentes contextos, permitindo realizar conexões em situações diversas do cotidiano. Neste sentido, esta pesquisa aborda os conceitos de áreas e volumes de maneira mais contextualizada, via situações problemas, estimulando o aluno a enunciar conjecturas e realizar reflexões sobre estes assuntos.

Concluímos também que ao trabalhar com objetos manipulativos seguido de reflexão o aluno consegue fazer conexões entre os conhecimentos já adquiridos e os novos, tendo assim uma aprendizagem mais satisfatória e completa.

REFERÊNCIAS

BALDIN, Y. Y. *Palestra "Ensino de Geometria e Construções Geométricas"*, arquivo em PowerPoint. 2009, ENCONTRO DOS PROFESSORES PREMIADOS DA OBMEP, IMPA, Rio de Janeiro, RJ.

BONATELLI, C. *As dez metas para a educação*. 2013. Disponível em: <http://www.usp.br/espacoaberto/arquivo/2007/espaco84out/ptcapa1.htm>. Acesso em: 10 de Julho de 2013.

BOYER, C. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio II (Ciência da natureza, matemática e tecnologia)*. Brasília, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (Secretaria de Educação Básica). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Volume 2*. Brasília, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (Secretaria de Educação Fundamental). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, 1998.

BÚRIGO, E. Z. Matemática moderna: progresso e democracia na visão de educadores brasileiros nos anos 60. *Teoria e Educação*, v. 2, p. 255–265, 1990.

COSTA, A. C.; BERMEJO, A. P. B.; MORAES, M. S. F. Análise do ensino de geometria espacial. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009. Ijuí. *Anais do ...* Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_49.pdf>. Acesso em: 10 de dezembro de 2013.

CROWLEY, M. L. O modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (orgs.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática - Da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996.

FEHR, H. F. Educação matemática nas américas. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA SOBRE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 1966, Lima. *Relatório da ...* São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969.

GOUVÊA, F. A. T. *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do Ensino Fundamental*. 1998. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

KLINE, M. *O fracasso da Matemática Moderna*. São Paulo: IBRASA, 1976.

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, Campinas, v. 4, 1995.

MACHADO, N. J. *Cidadania e Educação*. 3. ed. São Paulo: Escrituras, 2001.

MIORIM, M. A. *Introdução à História da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

ONUCHIC, L. R. *Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*. São Paulo: Editora Unesp, 1999. 199-218 p.

PARO, V.; DOURADO, L. *Políticas públicas e educação básica*. São Paulo: Xamã, 2001.

PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica*. 1989. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação, Campinas, 1989.

PIAGET, J. P. *Para onde vai a Educação*. 8. ed. Rio de Janeiro: José Olympio, 1984.

PINTO, N. B. Marcas históricas da matemática moderna no Brasil. *Revista Diálogo Educacional*, v. 5, n. 16, p. 25–38, set./dez. 2005.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978.

POMPEU JUNIOR, G. *Notas de aula da disciplina O Ensino de Ciências e Matemática através da Resolução de Problemas*. Sorocaba: [s.n.], 2012.

RICHIT, A.; TOMKELSKI, M. L.; RICHIT, A. Software wingeom e geometria espacial: explorando conceitos e propriedades. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 4., 2008. Rio de Janeiro. *Anais do ...* Disponível em: <http://limc.ufrj.br/htem4/papers/26.pdf>. Acesso em: 10 de dezembro de 2013.

SACRISTÁN, G. *O currículo uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Proposta curricular do Estado de São Paulo para o ensino de Matemática para o Ensino Fundamental Ciclo II e Ensino Médio*. São Paulo: SEE, 2008.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Matrizes de referência para a avaliação SARESP*. São Paulo: SEE, 2009.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Caderno do professor de Matemática da 5ª série do Ensino Fundamental*. São Paulo: SEE, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Caderno do professor de Matemática do 2º ano do Ensino Médio 4º bimestre de 2010*. São Paulo: SEE, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias*. São Paulo: SEE, 2010.

SILVEIRA, A. M.; BISOGNIN, E. O uso de programas computacionais como recurso auxiliar para o ensino de geometria espacial. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 4., 2008. Rio de Janeiro. *Anais do ...* Disponível em: <http://limc.ufrj.br/htem4/papers/26.pdf>. Acesso em: 10 de dezembro de 2013.

RICHIT, A.; TOMKELSKI, M. L.; RICHIT, A. Software wingeom e geometria espacial: explorando conceitos e propriedades. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 4., 2008. Rio de Janeiro. *Anais do ...* Disponível em: <http://limc.ufrj.br/htem4/papers/19.pdf>. Acesso em: 10 de dezembro de 2013.

VALENTE, W. R. *Os exames de Admissão ao Ginásio: 1931-1969*. PUC–SP. 2001. 3 CD-ROM.

VIDALETTI, V. B. B. *O ensino e aprendizagem da geometria espacial a partir da manipulação de sólidos*. Lajeado: UNIVATES, 2009.