UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

MARCOS HIROTA MAGALHÃES

PRODUÇÃO DE SENTIDOS E DE SIGNIFICADOS DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO SOBRE O CONCEITO DE VOLUME E CAPACIDADE DE PRISMAS

São Carlos
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

PRODUÇÃO DE SENTIDOS E DE SIGNIFICADOS DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO SOBRE O CONCEITO DE VOLUME E CAPACIDADE DE PRISMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre, sob orientação da Professora Doutora Maria do Carmo de Sousa.

São Carlos
2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

M188ps

Magalhães, Marcos Hirota.

Produção de sentidos e de significados de estudantes do ensino médio sobre o conceito de volume e capacidade de prismas / Marcos Hirota Magalhães. -- São Carlos : UFSCar, 2014.

121 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Geometria. 2. Prismas. 3. Atividade orientadora de ensino. I. Título.

CDD: 516 (20ª)

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Maria do Carmo de Sousa
UFSCar - orientadora

Esther P. de A. Prado

Profa. Dra. Esther Pacheco de Almeida
USP

Profa. Dra. Wania Tedeschi
UFSCar

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus, que nos colocou neste caminho, dando a força e dedicação necessária para o término do trabalho.

Aos meus pais, Marie Hirota Magalhães e Plinio Magalhães Junior, que conseguiram nos educar, com base no trabalho, ética, humildade, perseverança e amor. Obrigado pelos exemplos que nos acompanham na vida.

À Marina, minha irmã, que, mesmo de longe, sempre foi um exemplo. Sempre que estava ao seu alcance, colaborou de forma direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

À Larissa, pessoa fundamental na nossa vida. Obrigado por ser parceira nos momentos difíceis, dando a força necessária para a continuação e término da pesquisa, com compreensão, incentivo e dedicação, sempre lembrando das obrigações quando não queríamos mais terminá-las. Obrigado por estar ao nosso lado na realização de mais um objetivo da nossa caminhada.

À professora Maria do Carmo de Sousa, pela paciência, dedicação, tempo e conhecimento, pois foram fundamentais para a realização do trabalho. Obrigado pela sua contribuição em nossa vida, tanto para formação acadêmica, quanto para a prática docente, fazendo aliar os fundamentos teóricos com a prática docente.

Aos integrantes do Grupo Observatório da Educação (CAPES/INEP), de 2011, pelas valiosas contribuições durante o ano.

Ao Colégio onde foi feita a pesquisa, incentivando a melhora na educação por meio de projetos diferenciados.

Aos estudantes da terceira série do ensino médio de 2013, pela participação na dissertação, fazendo sua parte, com muito louvor.

À CAPES e ao INEP, pelo financiamento através do Programa Observatório da Educação.

Aos colegas do PPGECE, que nos acompanharam nos estudos.

Ao Júnior, da Secretaria, que sempre ajudou a resolver nossos problemas concernentes ao mestrado.

A Maria Elizabeth Magalhães pela revisão do texto.

E a todos que participaram direta ou indiretamente na realização desse sonho e que, por algum motivo, não tiveram seus nomes aqui registrados.

RESUMO

O objetivo desta investigação é analisar a produção de sentidos e de significados produzidos por estudantes do Ensino Médio quando vivenciam atividades de ensino sobre o conceito de Volume de Prisma. As atividades foram organizadas pelo professor e consideram os conteúdos de composição e decomposição de figuras. Durante o desenvolvimento das atividades foram utilizados materiais manipuláveis, como, por exemplo, o material dourado. Além disso, prismas de acrílicos também foram utilizados para que os estudantes pudessem manipular e calcular os respectivos volumes. A pesquisa é qualitativa e pode ser caracterizada como Estudo de Caso. A questão que norteia o estudo é: quais são os sentidos e os significados que podem ser produzidos por estudantes do Ensino Médio ao vivenciarem atividades de ensino enquanto estudam o conceito de Volume de Primas? A pesquisa foi realizada numa escola particular de São Carlos-SP, onde as aulas foram filmadas e, após o desenvolvimento das atividades, a narrativa e a escrita dos estudantes foram analisadas com base nas interações que ocorreram na sala de aula e na mediação do professor. Os estudantes realizaram três atividades em treze horas-aula, as quais foram divididas, didaticamente, para serem analisadas, na forma de episódios de ensino. As informações obtidas possibilitaram o entendimento do que se interpretou como a produção de sentidos e de significados feitas pelos estudantes. Os resultados sugerem que a produção de sentidos e de significados explicitadas pelos estudantes estão relacionadas à habilidade da visualização espacial do prisma e de seus elementos constitutivos, tais como: medida, dimensão, composição e decomposição, área e perímetro.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Volume de prisma. Atividade orientadora de ensino.

ABSTRACT

The objective of this research is to analyze the production of feelings and meanings that high-school students experience when enrolled in activities related to the concept of the Prisma Volume. The activities were organized by the teacher and considered the contents of composition and decomposition of figures. During the development of the manipulatives activities, for example, the golden material was used. Acrylic prisms were also used so that students could manipulate and calculate their volumes. The research is qualitative and can be characterized as a Case Study. The question guiding this study is: what are the feelings and the meanings that can be produced by high-school students when they experience educational activities while studying the concept of Materials Volume? The survey was conducted in a private school in São Carlos-SP, where classes were filmed and, after the development of activities, an analysis of their speeches and writings was held based on the interactions within the classroom with the teacher’s mediation. Students performed three activities in thirteen classes, which were divided didactically, to be analyzed in the form of teaching episodes. Thus, information that enabled the understanding of what is interpreted to be the production of feelings and meanings made by students were pooled. Results suggest that the production of feelings and meanings explicited by the students are related to the skill of spatial visualization of the prism and its constituent elements, such as: measurement, size, composition area and perimeter.

Keywords: Teaching Geometry. Prism Volume. Guiding teaching activity.

LISTA DE FIGURAS

TABELAS

QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A presente dissertação está organizada em seis capítulos.

No segundo capítulo, apresenta-se parte da trajetória acadêmica/profissional do candidato, bem como a problemática da investigação e as justificativas para a escolha do tema.

No terceiro capítulo, apresentam-se os fundamentos teóricos e metodológicos sobre o tema de *atividade orientadora de ensino*, a partir dos estudos de Moura (1996), além do trabalho sugerido por Lima (2001) sobre coleções de livros didáticos para o Ensino Médio. Ainda, descreve-se um breve histórico sobre o conceito de volume, especialmente no que diz respeito à composição e à decomposição de figuras, bem como as ideias contidas nos documentos oficiais *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio* (PCNEM) e *Proposta Curricular para o ensino de Matemática*. Estes documentos foram elaborados pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo em 2008 e versam sobre o ensino do conceito de Volume.

A Metodologia do estudo é apresentada no capítulo quatro. Aqui, apresentam-se tanto as justificativas e motivações da proposta de uma pesquisa qualitativa e caracterizada como estudo de caso, quanto o contexto e os sujeitos que participaram da investigação. Neste capítulo, as atividades de ensino desenvolvidas em sala de aula também são descritas e detalhadas.

No quinto capítulo, realiza-se a análise dos dados construídos com os estudantes e se apresentam os resultados e as respostas dadas por eles durante o desenvolvimento das atividades.

No sexto capítulo, apresentam-se a discussão dos resultados e as considerações finais da investigação.

2. A ESCOLHA DO TEMA DE PESQUISA

Este capítulo visa apresentar os motivos que nos levaram a escolher o tema da pesquisa: ensino do conceito de volume, a partir de Atividades de Ensino (MOURA, 2000).

Inicialmente, apresenta-se uma síntese da trajetória do candidato durante a transição entre estudante do Ensino Médio para a escolha pela Licenciatura, seguida da carreira como professor de matemática. Explicitar esta trajetória é fundamental para justificar a escolha do tema, que teve como base a própria experiência do candidato.

2.1. A oção pelo curso de Licenciatura

Quando cursava a terceira série do Ensino Médio, o candidato deparou-se com a seguinte pergunta: qual será a escolha da profissão? A docência, naquele momento, não foi a primeira opção.

A primeira opção foi a graduação em Engenharia, curso pelo qual não obteve aprovação nos vestibulares. Nem ao final da terceira série, nem ao término do cursinho, no ano seguinte. Em 2002, opta-se por cursar Engenharia da Computação numa faculdade particular de São José dos Campos.

O fato de estar cursando uma faculdade na cidade de nascimento era frustrante uma vez que continuava morando e vivenciando a rotina de sempre.

Seguindo o incentivo de cursar uma universidade pública, o candidato inscreveu-se para o curso de matemática na UFSCar, única universidade com as inscrições ainda abertas. A escolha pela matemática ocorreu por ser a base para que qualquer segmento das Ciências Exatas.

Em 2003, após aprovação no vestibular, não houve a necessidade de escolhe entre bacharelado ou licenciatura. Dessa forma, decidiu por cursar conjuntamente as duas. No entanto, o curso de bacharelado em matemática revelou-se um curso muito abstrato, com inúmeras demonstrações. Assim, optou por cursar primeiramente a licenciatura para ter uma profissão.

Logo no segundo período, na primeira disciplina relacionada à prática docente, chamada Didática Geral, cujo objetivo é situar e compreender o papel da didática na atuação do licenciado, e compreender a importância do plano de ensino e da articulação entre seus componentes (objetivos, conteúdos, procedimentos e avaliação) para o desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem. Devido à imaturidade para cursar tal disciplina, hoje, observa-se que não houve aprendizagem significativa, pois tudo que foi apresentado parecia não ter uma motivação. Além disso, as matérias relacionadas ao departamento de Matemática exigiam muita dedicação pela complexidade das avaliações.

Atualmente, a grade curricular da licenciatura da UFSCar foi alterada, com o acréscimo de disciplinas, como dois estágios supervisionados, que permitem um maior tempo do licenciando na escola. Na grade curricular de 2003 havia somente dois estágios supervisionados e hoje, existe o Programa de Iniciação à Docência – PIBID, cujo objetivo é desenvolver, de forma compartilhada e colaborativa, atividades que auxiliem na formação inicial dos licenciandos e na formação continuada dos professores da Educação Básica. Sendo assim, cada subprojeto participante desenvolve atividades, tanto no âmbito específico de sua área, como também, em atividades interdisciplinares, permitindo a reflexão coletiva em sua área das diferentes abordagens da prática docente.

Há de se considerar ainda, o Programa Observatório da Educação (OBEDUC), em que os graduandos dividem experiências com professores doutores, mestrandos e mestres da Educação Básica da rede pública.

Infelizmente, não houve aproveitamento relevante das poucas disciplinas da licenciatura oferecidas pelo curso, e, depois de formado, trabalhando numa escola, percebeu-se que era necessário voltar a estudar. Para haver aprendizagem, é necessário tempo para a pesquisa e fundamentação da aula. Devido aos baixos salários, os professores necessitam trabalhar em várias escolas, lecionando conteúdos diferentes e ficam sem tempo para refletir sobre sua prática docente. Esse é o caso em questão. Atualmente, o candidato leciona em quatro escolas particulares, totalizando 41 aulas semanais.

Vale ressaltar que, durante o terceiro ano de curso de Licenciatura em Matemática, o candidato foi monitor em um cursinho pré-vestibular na cidade de São Carlos, desempenhando a função de esclarecer dúvidas dos estudantes sobre exercícios do material adotado, além de ministrar aulas extra de revisão de conteúdos dados pela escola. Esta experiência foi a porta de entrada para o caminho da docência.

Diferentemente de uma sala de aula, na monitoria o responsável senta-se ao lado do estudante para ajudá-los em suas dúvidas. Os alunos possuíam dificuldades, com manipulações algébricas tais como produtos notáveis, fatoração, potenciação e radiciação. A tentativa era participar dos exercícios com os alunos, explicando passo a passo. Na Geometria Espacial, por outro lado, os alunos apresentavam dificuldades de visualização dos objetos tridimensionais, das diagonais e das faces, além da dificuldade em desenhar as figuras tridimensionais. Esses aspectos dificultavam a resolução dos exercícios e a compreensão da álgebra relacionada às fórmulas dadas.

No entanto, os estudantes mostravam que tinham facilidade na comunicação entre eles, na troca de informações e validações de argumentos, como por exemplo com as fórmulas necessárias e com os métodos utilizados para a resolução de problemas.

Simultaneamente à monitoria, o candidato cursava uma disciplina da graduação relacionada ao tema: Geometria Espacial e Descritiva.

Durante as aulas da universidade, mesmo os alunos do ensino superior tinham dificuldades em visualizar e utilizar técnicas da matemática superior, da mesma forma que, os estudantes da monitoria na matemática do ensino médio. Por outro lado, ao estudar em grupo interagindo com os colegas de curso, o sucesso na compreensão dos conceitos aumentava, e consequentemente alcançava-se sucesso em resolver os problemas propostos pela disciplina.

2.2. Entrada na docência

Em 2007, inicia-se a atuação como professor no cursinho comunitário, em São Carlos. A proposta era lecionar duas aulas semanais gratuitas de Matemática, para pessoas carentes que gostariam de ingressar numa Universidade.

Numa turma menor, de 12 alunos, observou-se que a aula tradicional não atendia toda demanda da turma.

A referência a uma aula tradicional traduz-se nos estudos de Skovsmose (2000). Segundo o pesquisador, a educação matemática tradicional enquadra-se no paradigma do exercício. Assim, a aula tradicional dá-se da seguinte forma: o professor discute algumas ideias e ensina algumas técnicas que os estudantes utilizarão em exercícios posteriores. Neste modo de ensinar matemática, não há espaços para questionamentos ou participação dos estudantes. Neste contexto, adota-se um livro didático que corrobora com as aulas e essa escolha é realizada por uma autoridade externa à sala de aula, priorizando somente uma solução correta.

A consequência desse tipo de ensino é, segundo D'Ambrósio (1989, p.15),

> Primeiro, os alunos passam a acreditar que a aprendizagem de matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor. Segundo, os alunos acham que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, do qual não se duvida ou questiona, nem mesmo nos preocupamos em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios.

A partir dos estudos de Skovsmose (2000) e D'Ambrósio (1989), pode-se dizer que boa parte das aulas ministradas na universidade e, consequentemente, nas escolas de Educação Básica priorizam o paradigma do exercício. Dessa forma, vários licenciandos entram na sala de aula acreditando que ensinar matemática significa dar muitos exercícios para que os estudantes possam decorar e aplicar as fórmulas.

Como professor de um cursinho comunitário, o candidato constatava diariamente que alguns alunos estavam voltando a estudar e tinham muitas dificuldades na aritmética e na álgebra. Tais dificuldades estavam atreladas às operações básicas, tais como, números inteiros e frações. Apesar de não resolverem exercícios sozinhos em sala, quando tinham auxílio nas técnicas utilizadas pela aritmética e álgebra, percebia-se que aumentava a capacidade de compreender a resolução do problema no seu contexto geral.

Sem experiência em sala de aula, faltavam estratégias para trabalhar com uma turma com deficiências tão afloradas, que eram sobrepostas apenas quando havia o trabalho coletivo. A única estratégia conhecida naquele momento era a do paradigma do exercício, ou seja, todas as turmas eram tratadas de forma equivalente, sem uma diferenciação baseada nas dificuldades e desafios de cada turma.

Ao lecionar Geometria Espacial, havia o hábito de planejar aulas expositivas que priorizavam as fórmulas de cálculo de área e volume. Em seguida, resolviam-se alguns exemplos e uma lista de exercícios de vestibulares era passada para resolução. O índice de sucesso era baixo e a insatisfação dos alunos alta. No entanto, sem o conhecimento de estratégias mais individualizadas, continuava-se aplicando o pagadigma do exercício. Assim, não havia questionamentos do tipo *como alunos que estavam anos sem estudar conseguiriam visualizar um poliedro tridimensional, desenhado num quadro bidimensional e ainda fazer as relações utilizando diagonais e triângulos retângulos?*

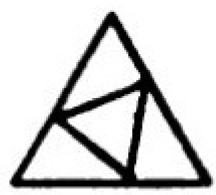
Ainda durante o ano de 2007, o candidato foi promovido a professor do semiextensivo do cursinho particular, onde temos diferenciações de turmas, dependendo do curso almejado pelo estudante ou pela data em que o curso iniciou-se. O semiextensivo inicia-se no segundo semestre com uma revisão dos tópicos do ensino médio para os processos seletivos das universidades brasileiras.

Nesse cursinho pré-vestibular, a disciplina de Matemática é dividida em três frentes: Álgebra, Geometria e de Trigonometria. A única frente disponível era a Geometria.

Percebeu-se que, durante as aulas de Geometria Plana, os alunos entendiam mais as regras, pois decoravam a fórmula com mais facilidade para utilizarem na resolução dos problemas. No início das atividades em aulas sobre Geometria Espacial, percebeu-se que os alunos tinham dificuldade de enxergar as figuras relativas à Geometria Plana, no ambiente tridimensional.

Em relação ao pensamento geométrico, Lorenzato (1995) coloca a seguinte questão: quantos triângulos o leitor consegue observar na figura abaixo?

Figura 1: Ilustração do pensamento geométrico



Fonte: LORENZATO, 1995, p. 5

Ao analisar a questão, não há como negar que, mesmo o leitor que parece dominar os conceitos relacionados à aritmética e a álgebra, necessitará do pensamento geométrico para observar que há cinco triângulos na figura acima.

Ainda sobre o pensamento geométrico, Lorenzato (1995) afirma que a geometria exige uma maneira especifica de raciocinar, exigindo percepção geométrica, raciocínio geométrico e lingaguem geométrica.

Dessa forma, o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes é um forte argumento para se defender o ensino de geometria nas escolas através da visualização, pois sem essa característica o aprendizado torna-se mais difícil e os estudantes terão maior dificuldade em resolver as situações da vida que forem geometrizadas.

Em relação à falta de visualização espacial, Pavanello (1993, p.16) afirma que é recorrente do abandono da Geometria no Brasil:

> …o abandono na geometria e o foco na álgebra podem estar prejudicando a formação dos alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários para a resolução de problemas matemáticos. …E como consequência, o trabalho com a álgebra pode acostumar o indivíduo a operar sem questionamento sobre regras pré-estabelecidas.

O resultado da resolução de problemas sem questionamento sobre regras pré-estabelecidas resume-se aos alunos não conseguirem perceber que o conhecimento adquirido num determinado contexto pode ser utilizado em outra situação.

Como trabalhava num curso pré-vestibular, o candidato constatou que, apesar dos alunos já terem se formado no Ensino Médio e saberem as fórmulas de área e volume, quando era necessário uma delas para a resolução de problemas, havia dificuldades na escolha de qual utilizar. Um exemplo disto é que, embora o aluno soubesse calcular a área de um retângulo, ele não conseguia visualizar todos os retângulos que compõem um prisma reto retângulo.

No ano seguinte à formatura no curso de Licenciatura, o candidato conseguiu um emprego como professor da oficina de aprendizagem de matemática para o Ensino Fundamental II, de um colégio particular de São Carlos. A oficina tinha como objetivo identificar e recuperar, em período oposto as aula regulares, as deficiências de aprendizagem em anos anteriores.

Por exemplo, um aluno do sétimo ano com dificuldades em realizar adição e subtração com números racionais. Observando o aluno, o professor percebeu que as dificuldades não eram os números racionais e suas propriedades (e.g., dizima periódica, troca de sinais, etc), mas sim o cálculo do MMC e as operações básicas com frações, os quais são ensinados no sexto ano. Este aluno era convocado, pelo professor, a frequentar a oficina de aprendizagem e retomar o conteúdo de MMC e de operações básicas com frações.

Houve uma grande diferença ao trabalhar com alunos mais novos, e foi nesse momento que começaram as dificuldades em relação à metodologia de ensino. Como a única estratégia continuava sendo o paradigma do exercício, o aluno continuava numa situação de não aprendizado e consequente dificuldade.

Como o trabalho era no Ensino Fundamental II, começamos a pesquisar atividades relacionadas a jogos e ao lúdico e se decidiu trabalhar com os alunos na sala de informática. Foi nesse ponto que, apesar de ter estudado as disciplinas de metodologia de ensino na universidade, percebeu-se que havia outras estratégias para ensinar e eprender matemática, diferentemente do paradigma dos exercício. Mesmo assim, o candidato não obtinha sucesso em abandonar o paradigma do exercício.

Em 2010, o candidato foi contratado como professor do ensino médio por outra escola particular de São Carlos que possui uma proposta de não ser excessivamente tradicional em seus aspectos de organização empresarial e tampouco uma escola meramente treinadora de alunos para o vestibular. Possui, também, a proposta de formar jovens que tenham condições de pesquisar e de discutir seu posicionamento perante a vida, onde ao entrar numa universidade ou mercado de trabalho, tenham uma visão “aberta” do mundo.

Nessa escola, havia as reuniões semanais, em que as disciplinas se dividiam em três grandes áreas: Linguagens, Humanidades e Ciências Naturais. A matemática entrava na área de Ciências Naturais. Interessantemente, os professores estudavam como fazer a interdisciplinaridade entre as quatro disciplinas das Ciências Naturais (Matemática, Física, Química e Biologia) e realizava uma avaliação de área em todo ensino médio de forma global. Essa avaliação era feita a cada bimestre com 20 questões-testes feitas em duplas. As duplas respondem simultaneamente as questões, levantando uma placa com a alternativa correta. No quadro, colocam-se os nomes das duplas e os números das questões, e os acertos são apontados com um X. Apesar de a escola incentivar esse tipo de estratégia a eficiência ainda era baixa.

Há uma particularidade nesse colégio: os professores seguem com a turma durante os três anos do ensino médio e não há mais de um professor por disciplina. Logo, temos liberdade de escolher o conteúdo de cada ano ou ajustar no decorrer do curso. Tivemos oportunidade de trabalhar com duas turmas nessa escola.

Na primeira turma, logo no início da primeira série do ensino médio, percebeu-se que ao ensinar da maneira que se havia aprendido matemática, ou seja, por meio do paradigma do exercício, não se alcançava sucesso com toda a turma, e apenas a minoria conseguia aprender. A responsabilidade pelo fracasso era atribuída apenas aos alunos.

Nesse contexto, percebeu-se que os alunos estavam direcionados a aprender a resolver exercícios e não os conceitos fundamentais. Surgiu o questionamento pessoal: afinal de contas, qual era a finalidade daquilo?

Assim, para que novos paradigmas de aprendizado pudessem ser incorporados à vida diária desses alunos através de uma melhoria da prática docente, decidiu-se retornar à Universidade e investigar mais a fundo outras possibilidades.

2.3. A entrada na pesquisa

Em 2012, o candidato torna-se aluno regular do mestrado profissional de Ensino de Ciências da UFSCar, com o convite de integrar um projeto do Observatório da Educação (OBEDUC) intitulado: “Produtos educacionais no Mestrado Profissional em Ensino de Física e Matemática: itinerários de desenvolvimento, implementação e avaliação, com base na rede de pesquisa participante Escola-Universidade”. Esse projeto visou a caracterização, desenvolvimento e implementação de “produtos educacionais”, articulando a formação de mestrandos, professores e licenciados das áreas de Matemática e Física, numa rede investigativa participante situada tanto em escolas de São Carlos quanto na Universidade (Graduação e Pós-Graduação).

Durante o desenvolvimento do projeto, trabalhou-se e se participou de discussões com licenciandos, mestrandos e professores doutores na área de

Educação. Voltou-se a estudar textos teóricos sobre Educação Matemática, com o objetivo de promover reflexões sobre a prática escolar dos docentes, de forma que os participantes pudessem analisar as dificuldades em praticar diferentes metodologias de ensino.

Com a experiência adquirida, a teoria começou a fazer sentido e, na busca de um tema para a dissertação, decidiu-se pela Geometria Espacial deviso à necessidade de lecionar esse tema para a turma do colégio filiado à USP.

Dessa forma, ao participar do OBEDUC e ao desenvolver a dissertação, estudamos autores como Pavanello (1993) e Lorenzato (1995), que afirmam em seus estudos que as dificuldades dos alunos em Geometria vêm do abandono do ensino de Geometria no Brasil. Isso se deve ao Movimento da Matemática Moderna (MMM), cuja proposta é a de algebrizar a geometria no lugar do ensino geométrico marcantemente lógico-dedutivo, com demonstrações. A proposta do MMM não prosperou no Brasil, mas criou lacunas nas práticas pedagógicas, que perduram até hoje.

Lorenzato (1995, p.4) também afirma que a exagerada importância dada ao livro didático, além da má formação dos professores nessa área, é uma das causas do abandono do ensino da geometria. Segundo o autor,

> …em muitos deles (livros didáticos) a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligada de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico.

Com relação aos livros didáticos, Lima (2001) relata que a Geometria Espacial é tratada de modo insatisfatório, sendo o estudo de áreas e volumes predominantemente aritmético e não se preocupa na construção de seus conceitos. É feita uma breve apresentação da fórmula seguida de exemplos e exercícios.

A ausência do ensino de Geometria no Brasil traz consequências. Pavanello (1993) e Lorenzato (1995) afirmam em seus estudos que a ausência do ensino de geometria dificultará o pensamento necessário para a resolução de problemas matemáticos e de outras áreas.

Lorenzato (1995, p.6) relata ainda que

> …aprendizagem geométrica é necessária ao desenvolvimento da criança, pois inúmeras situações escolares requerem percepção espacial, tanto em

> Matemática (por exemplo: algoritmos, medições, valor posicional, séries, sequências, etc) como na Leitura e Escrita.

Outra dificuldade que a falta de ensino de Geometria Espacial pode promover está relacionada à visualização espacial. Segundo Kaleff (2003, p.15)

> …diversas pesquisas em Educação Matemática apontaram para a importância de se incentivar nos meios educacionais o desenvolvimento pelo educando da habilidade de visualizar tantos objetos do mundo real, quanto em nível mais avançado, conceitos, processos e fenômenos matemáticos. Para alguns pesquisadores, esta habilidade é tão ou mais importante do que a de calcular numericamente e a de simbolizar algebricamente.

Para melhorar a visualização, Kaleff (2003) sugere a utilização de materiais manipuláveis de baixo custo para a realização das atividades propostas pela autora que privilegiem a visualização geométrica.

A partir do estudo das dificuldades dos alunos no aprendizado da Geometria Espacial, e o prisma sendo o primeiro poliedro estudado nesse tópico, surgiu a questão norteadora da pesquisa: quais são os sentidos e os significados produzidos por alunos do Ensino Médio ao vivenciarem atividades de ensino sobre o conceito de Volume de Prisma?

Algumas questões surgem a partir da pergunta principal:

a) A construção produz uma melhor visualização por parte dos alunos, utilizando-se material manipulável? Os alunos conseguem desenhar um prisma em seu caderno? Podem ter melhor visualização das diagonais do prisma e de suas faces?

b) Analisando diferentes prismas de acrílico, os alunos conseguem calcular sua capacidade?

Ao fazer essas perguntas, percebeu-se que, de alguma forma, o caminho da dissertação divergia totalmente do paradigma do exercício, no qual se baseava todo o planejamento de aulas. Com a experiência e a entrada na pesquisa, observou-se que, apesar de o aluno conseguir resolver os exercícios, tavez ele não consiga aprender o conceito. Analisando as três questões de pesquisa, observa-se que esse trabalho não foca nos resultados do problema, e sim na produção dos sentidos e dos significados explicitados pelos alunos durante a sua resolução. Ou seja, busca-se alterar o foco das aulas e da análise sobre o que ocorre na sala de aula, enquanto propondo diferentes atividades.

No próximo capítulo, apresentaremos os fundamentos teóricos dos seguintes conceitos: 1) Produção de sentidos e de significados; 2) Atividade Orientadora de Ensino (AOE) (MOURA, 1996); 3) Volume e capacidade, fundamentos em uma perspectiva histórica; e 4) volume e capacidade, tendo como base as propostas curriculares.

A perspectiva histórico-cultural norteou a escolha, a organização e a análise dos sentidos e dos significados explicitados pelos estudantes ao vivenciarem as atividades de ensino sobre o conceito de volume.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, apresentamos os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa. Primeiramente, apresentaremos as ideias centrais do que vem a ser o conceito de produção de sentidos e de significados que estamos utilizando nesta dissertação.

Assim, tomamos como base os estudos de Nehring et al. (2010), Machado (1998), Moyses (2001), Oliveira (2004) e Pais (2006), nos quais são trabalhados a comunicação com a linguagem matemática assim como a definição de sentidos e de significados, que serão utilizados na análise das falas dos estudantes *a posteriori*.

Em seguida, apresentaremos as ideias centrais do que vem a ser Atividade Orientadora de Ensino (AOE) para Moura (1996).

Para que se possa compreender melhor a organização que fizemos, em relação às atividades de ensino de volume e capacidade, será apresentado um breve histórico sobre tal conceito, considerando-se que o estudo de volume dos sólidos, segundo Brolezzi e Druck (2002), se encontra em obras egípcias de 3500 anos atrás.

É aprsentado também nesse capitulo, as ideias contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2000), utilizados como referência no âmbito federal, e a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática, elaborada pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008), utilizada no estado de São Paulo. As atividades de ensino proposta na pesquisa não desconsideram tais documentos.

Ao organizar as atividades, consideramos as dificuldades e as facilidades que os estudantes têm em relação à geometria.

Com relação às dificuldades dos estudantes no âmbito da geometria, vale a pena relembrar o que já foi dito anteriormente sobre o que Pavanello (1993) e Lorenzato (1995) afirmam em seus estudos a respeito de o ensino de Geometria estar abandonado no Brasil. O ensino de matemática na Educação Básica considera, predominantemente, a Aritmética e a Álgebra.

Quando se apresentam os conceitos relacionados à geometria espacial, constata-se, na sala de aula, a dificuldade dos estudantes quanto à visualização das figuras espaciais.

Segundo Kaleff (2003), a visualização é uma habilidade de importância fundamental. Ao visualizar objetos geométricos, o estudante passa a ter controle sobre o conjunto das operações mentais básicas exigidas no trato da Geometria.

Corrobora com esta ideia o casal holandês Van Hiele que criaram níveis de hierarquia para desenvolver o raciocínio em geometria (pensamento geométrico). O primeiro nível, dos cinco propostos pelos Van Hiele, foi à visualização.

Segue abaixo os cinco níveis propostos pelos Van Hiele.

Quadro 1: Níveis de Van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico

Niveis de Van Hiele	Características	Exemplos
Básico: reconhecimento	Identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas, com base em sua aparência global.	Classificação de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
Nível 1: Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades: 4 lados, 4 ângulos retos, lados iguais, lados opostos paralelos.
Nível 2 : Síntese ou Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra: argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição do quadrado pelas propriedades mínimas: 4 lados iguais e 4 ângulos retos. O retângulo é um paralelogramo, pois também possui os lados opostos paralelos
Nível 3: Dedução	Domínio do processo dedutivo e de demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
Nível 4: Rigor	Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma Geometria finita.

Fonte: NASSER et al (2000, p.5)

3.1. Produção de sentidos e de significados

Conjuntos, funções, matrizes são exemplos de comunicação matemática entre alunos e professores que se estabelece com base em representações. Estas representações permitem o acesso a objetos matemáticos, tais como: conceito, propriedades, estruturas e relações, o que possibilita a comunicação de ideias matemáticas entre o professor e o aluno.

Como exemplo de objeto matemático e, consequentemente, objeto de ensino da matemática, pode-se citar a geometria. De modo geral, a geometria, tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, é ensinada de modo algébrico, com resoluções através de fórmulas matemáticas, sem a preocupação com o pensamento geométrico.

Pavanello (1993, p.16), ao abordar esse tema, afirma que

> "a ausência do ensino de geometria e a ênfase no da álgebra pode estar prejudicando a formação dos alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários a resolução de problemas".

No entanto, se a linguagem geométrica caminhar atrelada com a linguagem algébrica, pode-se afirmar que Geometria dará sustentação à metodologia do ensino da Aritmética e da Álgebra. Segundo Thom[1] apud Miguel et al. (1992, p.51)

> "[...] a geometria é um intermediário natural e possivelmente insubstituível entre a língua e o formalismo matemático, no qual cada objeto é reduzido a um símbolo e o grupo de equivalências é reduzido à identidade do símbolo escrito consigo mesmo. Deste ponto de vista, o estágio do pensamento geométrico pode ser um estágio impossível de omitir no desenvolvimento normal da atividade racional do homem."

No caso da Geometria, o pensamento geométrico parece estar sendo prejudicado, já que a ênfase dada na Geometria é a utilização de fórmulas algébricas, para cálculos de área e volume. No caso específico de Volume, há lacunas entre as relações das unidades de medidas de volume e das unidades de medida de capacidade, o que causa confusão quando o aluno relaciona as unidades de medidas utilizadas em sala de aula e em seu cotidiano, ocasionando também a

[1] THOM, R. **Modern Mathematics: an Educational and Philosophic Error?** In: American Scientist, vol. 59, nov-dez. 1971, p.695-699.

confusão da diferença do conceito entre volume e capacidade. Um exemplo disto é que, após os cálculos, o aluno encontra o volume do prisma reto como sendo $192\sqrt{3}\ cm^3$. O questionamento é: o aluno saberia dizer se esse valor caberia numa garrafa de água descartável de 1,5 litro? Qual a diferença entre as unidades de medidas de volume e as de capacidade e quais são suas relações?

Como descrito no tópico anterior, a maioria dos livros didáticos ainda se fundamenta no paradigma do exercício. Nesse contexto, o estudante, apesar de saber as fórmulas para cálculo de área e volume, quando é colocado frente a um problema que não foi posto como exemplo, apresenta dificuldade de visualizar qual relação utilizar.

Outro exemplo disso é perguntar para os estudantes quantos litros de água eu conseguiria colocar em uma caixa em forma de cubo com aresta de 1 metro. Não foram poucas vezes em que a resposta que obtive foi 1 litro, uma vez que os estudantes calcularam como produto das três dimensões do cubo. Concordamos com Pavanello (1993) e Lorenzato (1995), que afirmam que a falta do desenvolvimento do pensamento geométrico afeta a resolução de problemas matemáticos.

Além da falta do desenvolvimento do pensamento geométrico, a linguagem utilizada também pode afetar a resolução de problemas matemáticos. O aluno pode até saber o significado de algumas palavras já utilizadas previamente em anos anteriores, tais como área e perímetro, mas não conseguem dar sentido à essas palavras dentro de uma resolução de problemas.

Nesse sentido, segundo Nehring et al. (2010, p.1),

> No contexto escolar, muitas vezes, pode ocorrer um tensionamento entre as várias linguagens adquiridas pelo uso e pela diversidade cultural, as quais possibilitam a produção de diferentes sentidos, não só entre docentes e alunos, mas também entre os próprios alunos. A significação de cada enunciado é determinada na interação com múltiplas vozes, seja perguntando, respondendo, repetindo, discordando, na busca da validação de argumentos.

Como a proposta da pesquisa envolve a organização das Atividades orientadoras de Ensino (AOE), ou seja, tem como objetivo convidar os estudantes a resolverem situações diversas que considerem aspectos que vão do coletivo para o individual, a interação entre os alunos é essencial, o que pode demandar o tensionamento, pois cada um quer explicitar e validar seus conhecimentos adquiridos ou pré-adquiridos com seus colegas. Essa interação retira a responsabilidade do professor de ser o único transmissor de conhecimento na sala de aula, tornando-o mediador dos tensionamentos que ocorrem durante as interações entre os alunos. O incentivo à interação difere do ensino tradicional, já que o compartilhamento de conhecimento é visto como “cola”.

É necessário saber a distinção que pode existir entre esses dois conceitos: sentidos e significados.

Segundo Oliveira (2004, p.50-51),

> O significado constitui um núcleo relativamente estável de compreensão da palavra, compartilhado por todas as pessoas que a utilizam. Já o sentido refere-se ao significado da palavra para cada indivíduo composto por relações que dizem respeito ao contexto do uso da palavra e às vivências afetivas do indivíduo. O sentido da palavra liga seu significado objetivo ao contexto e aos motivos afetivos e pessoais e relaciona-se com o fato de que a experiência individual é sempre mais complexa do que a generalização contida nos signos.

Na pesquisa, buscamos organizar atividades de ensino que favoreça a comunicação entre os estudantes, validando seus significados e discutindo os sentidos desses mesmos significados na resolução dos problemas propostos.

Concordo com Moysés (2001) quando diz que compartilhar os significados é fundamental para que haja compreensão nas relações interpessoais e que a comunicação se estabelece pela linguagem a partir da produção de sentidos e negociação de significados.

Esse compartilhamento vai ao encontro da proposta das AOE, considerando-se que a solução da situação-problema deve ser realizada no coletivo, onde ocorre o compartilhamento de ações por meio das relações entre os estudantes. (MOURA, 2010)

As estratégias metodológicas para que ocorra o aprendizado da significação das palavras dos demais símbolos, no contexto de educação matemática, segundo Pais (2006, p.75) envolvem:

> Explorar a diferença entre o significado matemático dos termos e o sentido subjetivo que podem assumir no contexto da linguagem cotidiana, visando

> ao desenvolvimento de uma linguagem mais próxima da ciência e da percepção de quando um aluno associa a um termo um sentido diferente daquele previsto no contexto da matemática. Para isso ser possível, é necessário que o professor "enxergue" o aluno, que permita e possibilite que ele se expresse de forma gestual, oral e escrita, mas que considere suas manifestações discursivas.

Temos, segundo Machado (1993, p.33), que a linguagem matemática não é materna. O autor afirma em seus estudos que:

> "O par língua/Matemática compõe uma linguagem mista, imprescindível para o ensino e com as características de um degrau necessário para alcançar-se as linguagens específicas das disciplinas particulares".

A significação de seus conceitos fundamenta-se no seu uso. Algumas palavras, por exemplo, como volume, números irracionais, área superficial e unidades de medidas de volume possuem um significado matemático diferente daquele usado no cotidiano. O significado dessas palavras está relacionada à elaboração de seus conceitos e suas representações.

Segundo Nehring et al. (2010, p.10),

> O professor de Matemática precisa recontextualizar todo o conteúdo, criando uma situação capaz de possibilitar ao aluno um processo de conceituação, para propiciar um trabalho de interpretação e significação, criando, através e com a linguagem, caminhos para atingir um nível superior de generalização, de sistematização e formalização, que configuram os conceitos matemáticos.

A partir destes pressupostos, a busca de uma alternativa ao paradigma do exercicio, foram organizados atividades de ensino para que os alunos pudessem explicitar os sentidos e os significados que estavam dando aos conteúdos que estavam aprendendo, relacionados a volume e capacidade. No individual, analisando as respostas das atividades propostas, no coletivo, analisando as falas dos estudantes durante as discussões.

Mas, afinal, o que vem a ser Atividade Orientadora de Ensino (AOE)?

3.2. Atividade Orientadora de Ensino: Pressupostos teóricos

A perspectiva teórica que fundamenta a pesquisa considera os estudos de Moura (1996) sobre as AOE.

Segundo Moura et al. (2010), o lugar mais sociável para o aluno é a escola e a aprendizagem ocorre do coletivo para o individual. Dessa forma, a escola torna-se o ambiente propício para novas experiências pedagógicas para a solução de um problema comum.

Moura et al. (2010) destaca ainda que temos duas atividades a serem estudadas: a atividade de estudo (aluno) e a atividade de ensino (professor).

Nesse sentido, a atividade de aprendizagem está relacionada ao aluno ter a apropriação teórica da realidade que o cerca, através das tarefas de estudo, ações e sua autoavaliação. A atividade de ensino do professor é a mediação desse processo. Segundo Moura et al (2010, p.210)

> Assim, pois, o conteúdo principal da atividade de estudo é a assimilação dos procedimentos generalizados de ação na esfera dos conceitos científicos e mudanças qualitativas no desenvolvimento psíquico da criança, que ocorrem sobre esta base.

Para que ocorra a apropriação teórica da realidade (atividade de estudo), é necessário um ambiente desencadeador de aprendizagem. Segundo Moura e Lanner de Moura (1998, p. 12-14),

> o jogo com propósito pedagógico pode ser um importante aliado no ensino, já que preserva o caráter de problema. [...] O que devemos considerar é a possibilidade do jogo colocar a criança diante de uma situação-problema semelhante à vivenciada pelo homem ao lidar com conceitos matemáticos. [...] A problematização de situações emergentes do cotidiano possibilita a prática educativa de colocar a criança diante da necessidade de vivenciar solução de problemas significativos para ela. [...] É a história virtual do conceito porque coloca a criança diante de uma situação- problema semelhante àquela vivida pelo o homem (no sentido genérico).

Esse ambiente desencadeador de aprendizagem, como por exemplo, aulas ministradas no Ensino Médio, jogos, história virtual e problematização de situações emergentes, podem ser organizadas pelo professor com o objetivo de o aluno entrar em atividade de estudo, formulando soluções que, para sua resolução, seja necessário o conhecimento do conceito.

Assim, segundo Moura (2010), a AOE, como mediação, é instrumento do professor para realizar e compreender seu objeto de estudo: o processo de ensino de conceitos. E é instrumento do estudante, que, por meio dela, pode apropriar-se de conhecimentos teóricos. Dessa forma, profissionais pesquisadores podem usar sua estrutura para identificar motivos, necessidades, ações desencadeadas e sentidos atribuídos pelos sujeitos no processo de ensino.

No caso específico desta pesquisa, para a organização das atividades, foi consultada Lanner de Moura et al. (S/D), para que pudéssemos pensar sobre o ambiente desencadeador de atividade. Nestas atividades, a autora utiliza o tijolo, como unidade de medida. De acordo com Lanner de Moura et al. (S/D), a partir da criação do tijolo e de suas composições, é possível a construção de prismas, objeto de estudo desta dissertação.

A ideia de composição e decomposição de figuras tridimensionais, proposta pela mesma autora, também é encontrada, tanto em BRASIL (2000), quanto nos cadernos distribuídos nas escolas por SÃO PAULO (2008), bem como nos estudos de Kaleff (2003).

Para a formulação das atividades, além dos estudos de Lanner de Moura (S/D), foram priorizados o nível básico de visualização (reconhecimento) e o primeiro nível que é a análise propostos por Van Hiele.

Há várias semelhanças entre o modelo de Van Hiele e a AOE, já que os dois buscam a formalização de conceitos. De acordo com Kaleff (2003, p.14):

> ...a visualização, a análise e a ordenação informal (síntese) das propriedades geométricas relativas a conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito.

Para Van Hiele, o objetivo do modelo é ajudar o estudante a ter *insight*, que viria a ser o desempenho do estudante numa situação não usual, o desenvolvimento adequado das ações requeridas pela situação e o desenvolvimento de um método que resolva a situação. Para isso, o estudante necessita entender o que estão fazendo, por que estão fazendo e quando devem fazer para resolver o problema.

Essas ideias vão ao encontro dos conceitos da AOE, que objetiva criar no aluno a necessidade da resolução do problema. Ao resolvê-lo, o estudante necessita analisar e compreender o contexto para encontrar sua solução.

No entanto, as soluções que poderão ser encontradas pelos estudantes, especialmente em relação aos problemas que envolvem o conceito de volume, foram construídas historicamente, pelas diversas civilizações, conforme indicam os estudos de Caraça (1989), Brolezzi (2002), Brolezzi e Druck (2002), Silva (2004), Silva (2005), Lima (2006) e Rodrigues (2011).

Assim, vale a pena analisar alguns elementos da História da Matemática que fundamentam o conceito de volume.

3.3. Breve histórico sobre o conceito de volume e capacidade

Ao estudar, do ponto de vista da História da Matemática, o conceito de volume, há de se considerar, para além da visualização dos objetos tridimensionais, dentre eles os prismas, o principal elemento constitutivo desse conceito: a medida.

A metrologia, ciência que agrupa conhecimentos sobre a arte de medir e interpretar a medições realizadas, segundo Rodrigues (2011), é constante ao longo da História da Matemática. Desde o mundo antigo, até os dias de hoje, a ideia de medida se desenvolve, ou devido à necessidade humana, como, por exemplo, a agricultura, economia e engenharia, ou devido à necessidade da própria matemática.

Corrobora com essa ideia Silva (2004), que afirma em seu livro que não basta conhecer os instrumentos e as técnicas de medição para realizar uma boa medida; é necessário também levar em conta a finalidade da medição.

Essa finalidade é explicitada em seu conteúdo social, compartilhando nosso sentimento de igualdade, organizando a distribuição dos bens sociais, bem como padronizando a produção de nossos bens materiais. (SILVA, 2004)

Vale a pena ressaltar que medir é comparar e, segundo Caraça (1989), para a realização da medida, há três aspectos a serem considerados: a escolha da unidade, a comparação do que queremos medir com a unidade, e a expressão dessa comparação por um número.

Já a Estereometria – estudo de cálculo de volume de sólidos –, conforme relatam autores como Brolezzi (2002) e Brolezzi e Druck (2002), aparece em obras egípcias de 3500 anos atrás. Diversos matemáticos a estudaram, tais como Platão (427-347 a.C), Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C) e Leonardo Da Vinci (1452-1519).

Segundo Silva (2005), Arquimedes de Siracusa, comparando e aproximando áreas e volumes, aprimorou um método, atribuído a Eudoxo (408-355 a.C), o chamado método da Exaustão. Arquimedes utilizou o método da Exaustão para provar resultados obtidos por outro método, o do Equilíbrio, utilizado por ele para o cálculo de áreas e volumes de figuras geométricas. A ideia do método do Equilíbrio de Arquimedes consistia em utilizar uma alavanca para colocar em equilíbrio uma figura de área ou volume conhecido com outra que se deseje conhecer.

Ao aplicar o método de Eudoxo, Arquimedes conseguiu, entre outras coisas, determinar o volume da esfera em relação ao volume do cilindro e ao volume do cone.

Mas de onde vem a nossa necessidade de calcular volumes e capacidades? De onde vem o interesse em conhecer "quanto espaço" um objeto ocupa ou "quanto espaço" um recipiente pode comportar?

Rodrigues (2011) reporta que esse interesse remonta à época em que o homem começou a transportar e armazenar coisas. O problema de medir quantas colheitas agrícolas um armazém poderia conter é um exemplo do interesse do homem em calcular volumes.

Mas qual a diferença existente entre volume e capacidade?

O significado de medir volume, segundo Brollezzi e Druck (2002) e Lanner de Moura et al. (S/D), é atribuir um valor numérico à "quantidade de espaço" ocupada por qualquer coisa, em comparação com uma unidade de volume pré-estabelecida. Já a capacidade de algum recipiente, conforme Imennes (2002), em seu dicionário matemático, é a medida do volume interno deste. Então considero que o significado de medir volume pode ter diferentes sentidos, sendo um deles a capacidade.

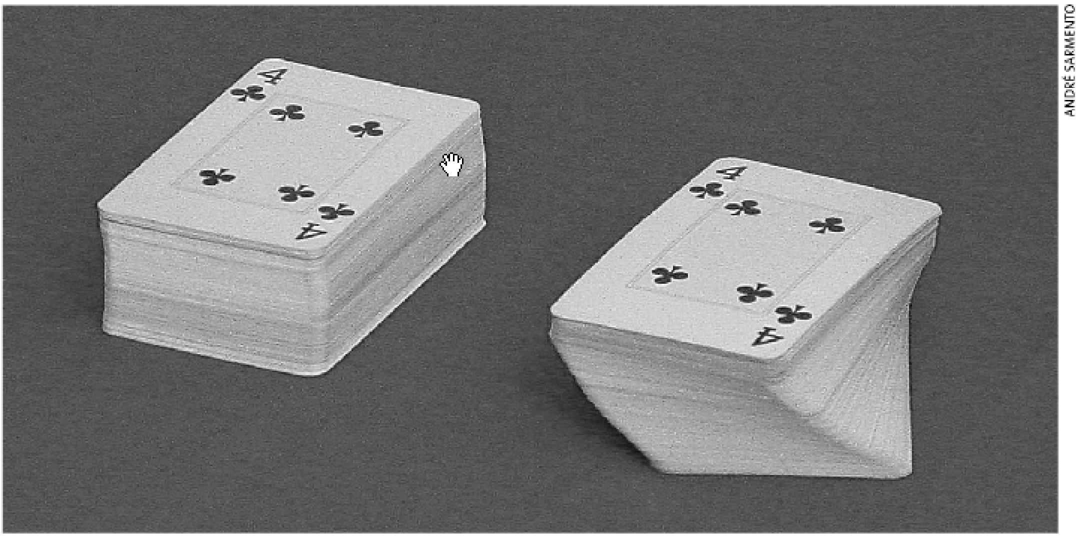
Além de Arquimedes de Siracusa, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) foi figura importante em cálculos de volume. Ele foi um padre jesuíta italiano que se interessou pela Matemática, em especial pelas secções cônicas, tendo se tornado discípulo de Galileu. Ele fundamentou, em 1635, uma ideia para tratar áreas e volumes, conhecido como Princípio de Cavalieri.

O Princípio de Cavalieri diz, segundo Brolezzi (2002, p. 49),

> 1. Se os segmentos determinados pela intersecção de qualquer reta perpendicular a uma direção fixa com duas figuras planas tiverem sempre o mesmo comprimento, então, as superfícies têm a mesma área. 2. Se a áreas das secções por qualquer plano perpendicular a uma direção fixa de dois sólidos forem iguais, então, os sólidos têm volumes iguais.

O Princípio de Cavalieri aplicado a volumes é de fácil entendimento. Por exemplo, em duas pilhas de baralho com o mesmo número de cartas. Se uma pilha está totalmente em pé e, na outra, há um rotacionamento das cartas para obter outro formato, a quantidade de cartas não se altera. Para Cavalieri, o formato não é importante desde que as áreas sejam iguais.

Figura 2: ilustração do princípio de Cavalieri



Fonte: BROLEZZI, 2002, p. 50

Assim, para calcular o volume do sólido, basta verificar se qualquer plano paralelo à base, ao cortá-lo, gera uma figura plana com área igual à de outra, obtida pelo mesmo procedimento de outro sólido, cujo volume seja conhecido. (BROLEZZI, 2002)

Assim como Arquimedes, Cavalieri, em seu livro "Geometria dos Indivisíveis", no qual está descrito seu princípio, exerceu forte influência em Leibniz. Mesmo Newton, o outro criador do cálculo, apesar das críticas em relação aos indivisíveis, em alguns de seus trabalhos, utilizou-se da terminologia introduzida por Cavalieri. (BROLEZZI, 2002)

Para justificar as fórmulas para volumes e áreas dos corpos sólidos, pode-se, segundo Lima (2006), utilizar uma abordagem mais intuitiva, tal como a apresentação do Princípio de Cavalieri na forma de postulado (apesar de saber que é um teorema), o que permite uma simplificação notável nos argumentos que conduzem as fórmulas clássicas de volume.

Esta ideia intuitiva foi utilizada para a formulação das atividades de ensino na presente investigação, na qual o estudante, mediante a manipulação de material concreto, conseguisse desenvolver a visualização espacial.

Apesar de Silva (2004), em seu livro o volume e capacidade serem tratados como sinonimos, Lanner de Moura (S/D) afirma que volume é a quantidade de espaço ocupado por um determinado objeto e capacidade é a quantidade de espaço ocupado em seu interior.

Mas, como o conceito de volume é apresentado aos estudantes em propostas curriculares e, consequentemente, nos livros didáticos?

No próximo tópico, tentaremos responder esta pergunta.

3.4. Os conceitos de volume e capacidade em propostas curriculares e nos livros didáticos

Para responder a pergunta acima, foi consultado os parâmetros currilares, BRASIL (2000) e SÃO PAULO (2008), e Lima (2001) que em seus estudos analisou doze coleções de livros didáticos.

3.4.1. Nos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio (PCNEM)

Ao analisar a história dos conceitos de volume e de capacidade, constata-se que a medida é o principal elemento constitutivo desses conceitos. Ou seja, é a comparação entre o que queremos medir com uma unidade pré-estabelecida (CARAÇA, 1989).

Dessa forma, como foi organizado atividades de ensino, inicialmente, sentimos a necessidade de analisar como tais elementos se apresentam em propostas curriculares e, consequentemente, em livros didáticos e apostilas, uma vez que tanto os professores quanto os estudantes fazem uso desse tipo de material didático nas aulas de matemática.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000), por exemplo, na área Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias (2000), a Biologia, a Física, a Química e a Matemática integram a mesma área de conhecimento, que têm em comum a investigação da natureza e do desenvolvimento tecnológico, compartilhando linguagens para a representação e sistematização do conhecimento de fenômenos ou processos naturais e tecnológicos.

As três grandes competências, que são metas a serem perseguidas durante essa etapa da escolaridade básica pela área de conhecimento, segundo BRASIL (2000, p.113) são,

> • representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento; • investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências; • contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

Para alcançar o desenvolvimento das competências almejadas, a Matemática foi sistematizada em três eixos ou temas estruturadores, para serem desenvolvidos nas três séries do ensino médio: 1) Álgebra: números e funções; 2) Geometria e medidas; e 3) Análise de dados.

No segundo eixo, os BRASIL (2000, p. 123) indicam que,

> A Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. No ensino médio, trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Para o desenvolvimento desse tema, são propostas quatro unidades temáticas: geometria plana, espacial, métrica e analítica.

No caso desta dissertação, abordamos a geometria espacial e métrica.

Vale a pena ressaltar que BRASIL (2000, p.125) indica que a Geometria Espacial é composta por elementos dos poliedros e seus elementos, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

Dessa forma, as habilidades indicadas estão associadas a:

> Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções. Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos. Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade. Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.

Com relação à geometria métrica, há indicação de que ela é composta por áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado BRASIL (2000, p.125) indica as habilidades são definidas como,

> Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos. Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos. Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.

Em BRASIL (2000), o conceito de medida é apresentado como comparação a uma unidade pré-estabelecida, no caso, o Sistema Métrico Decimal, conforme afirma Caraça (1989).

3.4.2. Na proposta curricular da secretaria de educação do estado de São Paulo

Com relação à proposta curricular da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP, 2008), a Matemática é abordada como uma área de conhecimento específica, separada das Ciências da Natureza e das Linguagens.

Segundo a SEE-SP (2008), destacam-se três razões principais para tal fato. Em primeiro lugar, porque uma parte da especificidade da Matemática se enfraquece quando agregada no grupo de linguagens ou no grupo de ciências. Em segundo lugar, porque a incorporação da Matemática à área de Ciências pode distorcer o fato de que é Matemática. E, em terceiro lugar, porque o tratamento da Matemática como matéria específica pode facilitar a incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos de que dispomos para o tratamento de dados e informações.

Vale ressaltar que a junção da Matemática com a área das Ciências teve o efeito de minimizar o risco de que o conteúdo matemático fosse concebido como um fim em si mesmo, enfatizando sua condição instrumental. (SÃO PAULO, 2006)

Mas, mesmo havendo essa diferença, as duas propostas se assemelham no que diz respeito aos eixos norteadores.

Com base nas ideias gerais para a formulação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), são consideradas competências básicas a serem desenvolvidas pelo educando ao longo da escola básica. Para a formulação das competências, são considerados os três eixos norteadores. Segundo SÃO PAULO (2008, p.42),

.

> - O eixo expressão/compreensão: a capacidade de expressão do eu, por meio das diversas linguagens, e a capacidade de compreensão do outro, do não-eu, do que me complementa, o que inclui desde a leitura de um texto até a compreensão de fenômenos históricos, sociais, econômicos, naturais etc. - O eixo argumentação/decisão: a capacidade de argumentação, de análise e de articulação das informações e relações disponíveis, tendo em vista a construção de consensos e a viabilização da comunicação, da ação comum, além da capacidade de decisão, de elaboração de sínteses dos resultados, tendo em vista a proposição e a realização da ação efetiva. - O eixo contextualização/abstração: a capacidade de contextualização, de enraizamento dos conteúdos estudados na realidade imediata, nos universos de significações – sobretudo no mundo do trabalho – e a capacidade de abstração, de imaginação, de consideração de novas perspectivas, de potencialidades no que ainda não existe.

SÃO PAULO (2008) tem como referência o desenvolvimento de habilidades e competências, tendo colocado a aprendizagem como centro da atividade escolar. Sendo assim, o professor caracteriza-se como um profissional da aprendizagem e não tanto do ensino, isto é, ele apresenta e explica conteúdos, organiza situações para aprendizagem de conceitos, métodos, formas de agir e de pensar. Em suma, promove conhecimentos que possam ser mobilizados em competências e habilidades, as quais, por sua vez, instrumentalizam os alunos para enfrentar os problemas do mundo real.

Se a Educação Básica é para a vida, a quantidade e a qualidade do conhecimento têm que ser determinadas por sua relevância para a vida do educando, além dos limites da escola. Portanto, as competências são guias eficazes para educar para a vida.

Segundo SÃO PAULO (2008, p.13),

> Um currículo que promove competências tem o compromisso de articular as disciplinas e as atividades escolares com aquilo que se espera que os alunos aprendam ao longo dos anos. Logo, a atuação do professor, os conteúdos, as metodologias disciplinares e a aprendizagem requerida dos alunos são aspectos indissociáveis: compõem um sistema ou rede cujas partes têm características e funções específicas que se complementam para formar um todo, sempre maior do que elas. Maior porque se compromete em formar crianças e jovens para que se tornem adultos preparados para exercer suas responsabilidades (trabalho, família, autonomia etc.) e para atuar em uma sociedade que muito precisa deles.

As competências abordadas são, segundo SÃO PAULO (2008, p.43-44),

> - a Competência I a capacidade de expressão em diferentes linguagens, incluídas a língua materna, a Matemática, as artes, entre outras; - a Competência II a capacidade de compreensão de fenômenos, que incluem desde a leitura de um texto até a “leitura” do mundo; - a Competência III a capacidade de contextualizar, de enfrentar situações-problema, ficando implícita a valorização da imaginação, da necessária abstração quando se criam novos contextos; - a Competência IV a capacidade de argumentar de modo consistente, desenvolver o pensamento critico; e a Competência V a capacidade de decidir, após as análises argumentativas, e elaborar propostas de intervenção solidária na realidade.

É apresentado abaixo um quadro de conteúdos por série do quarto bimestre para as três séries finais do Ensino Médio. Segundo o quadro a seguir, a Geometria Métrica e Espacial é lecionada no quarto bimestre da segunda série do Ensino Médio.

Figura 3: conteúdos por série e por bimestre

Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Médio

	1ª Série	2ª Série	3ª Série
4º Bimestre	**Geometria-Trigonometria** • Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. • Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies. • Resolução de triângulos não retângulos: lei dos senos e lei dos co-senos.	**Geometria métrica espacial** • Elementos de geometria de posição. • Poliedros, prismas e pirâmides. • Cilindros, cones e esferas.	**Estatística** • Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos. • Medidas de tendência central: média, mediana e moda. • Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão. • Elementos de amostragem.

Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.59

Com base na proposta de SÃO PAULO (2008), que mostra um quadro de conteúdos por série e por bimestre, foram elaborados por SÃO PAULO (2008), tanto cadernos para o aluno como cadernos para orientação do professor, com o conteúdo a ser lecionado referente à série e ao bimestre que o aluno se encontra.

Em cada caderno, o conteúdo a ser lecionado no bimestre é dividido em quatro situações de aprendizagens. A situação de aprendizagem define:

a) Objetivo: o que se espera que o aluno aprenda;

b) Tempo previsto;

c) Conteúdos;

d) Estratégias: qual estratégia utilizada pelo professor para alcançar os objetivos de aprendizagem. Por exemplo: exercícios, pesquisa, apresentação em Power Point, entrevistas, relatórios, etc.

No caso da Geometria Espacial, os cadernos sugerem que o estudo do quarto bimestre com as situações de aprendizagens tenha como objetivo a conceituação do prisma, suas relações métricas e o cálculo de seu volume, iniciando a abordagem das figuras espaciais, conforme mostra o quadro abaixo.

Figura 4: Situações de Aprendizagem: caderno do professor

SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 1
PRISMA: UMA FORMA DE OCUPAR O ESPAÇO

Tempo previsto: 1 semana

Conteúdos e temas: prismas; identificação, noções e fatos essenciais; relações métricas, áreas e volume.

Competências e habilidades: capacidade de reconhecer e nomear um prisma; relacionar elementos geométricos e algébricos; capacidade de visualização de figuras espaciais no plano; capacidade de síntese; generalização de fatos obtidos de forma concreta.

Estratégias: manipulação de sólidos geométricos; identificação dos seus elementos essenciais e suas relações métricas; leitura e interpretação de enunciados e dados; representação plana e planificação de prismas; resolução de situações-problema; trabalhos em grupo.

Recursos: uso de materiais concretos, como embalagens e sólidos construídos a partir de sua planificação.

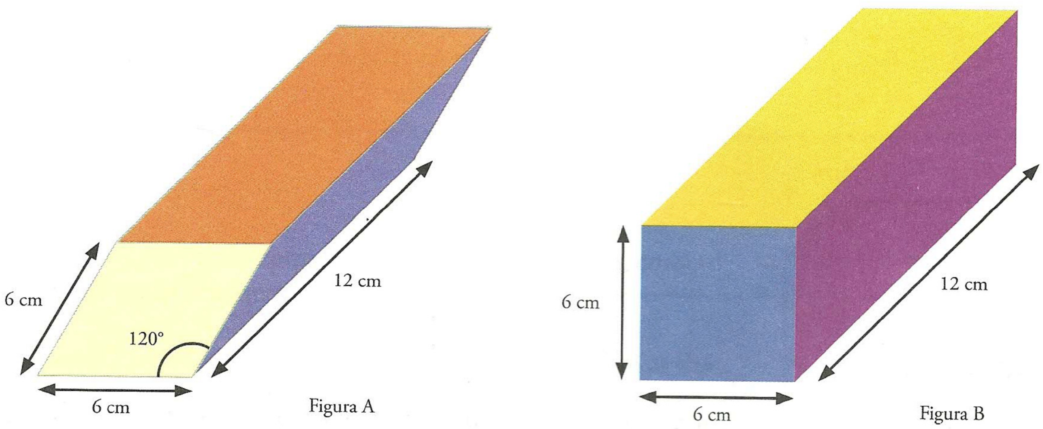
Fonte: Caderno do professor, SÃO PAULO, 2008, p.11

A seguir, a primeira situação de aprendizagem proposta para o estudo da área total do prisma reto e do prisma oblíquo.

Figura 5: situação de aprendizagem 1: caderno do aluno

Atividade 1

Para o empacotamento de presentes, uma loja dispõe de dois tipos de embalagem de papelão: uma no formato de um paralelepípedo oblíquo (Figura A), outra no formato de um paralelepípedo reto-retângulo (Figura B). Considerando os valores indicados nas figuras a seguir, calcule qual das duas formas geométricas exigirá menos papelão para ser confeccionada.



Fonte: Caderno do aluno, SÃO PAULO, 2008, p.3

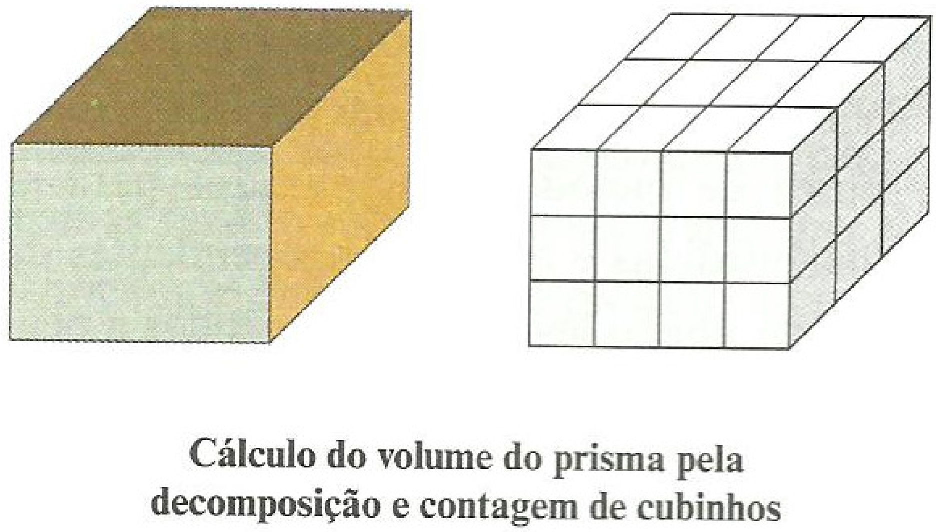
Observando a situação de aprendizagem proposta, a visualização é uma competência a ser trabalhada. Mas com o problema proposto não conseguimos visualizar todas as faces da caixa. No caderno do professor é orientada a utilização de materiais do cotidiano dos alunos que remetem ao formato de um prisma, tal como caixa de fósforos, embalagem de pizza e caixas de sapato, e que fosse discutido, com os alunos, as bases poligonais dos objetos, faces laterais e nomenclatura do prisma.

Concorda-se com essa abordagem de utilização de material manipulável e discussão em coletivo proposto por SÃO PAULO (2008), mas discorda-se do tempo previsto para a aplicação da situação de aprendizagem para o desenvolvimento das habilidades propostas, que são todos os níveis para o desenvolvimento do pensamento geométrico proposto por Van Hiele.

A avaliação de cada nível se torna difícil já que é transmitido aos alunos o conteúdo em uma semana sem uma verificação de aprendizado em cada um dos níveis.

Nos cadernos do professor (SÃO PAULO, 2008), quando se inicia o conceito de volume, a capacidade é tratada como volume interno do objeto, e orienta-se ao professor abordar inicialmente o conceito tomando um paralelepípedo reto e determinar quantos cubinhos de aresta de uma unidade de comprimento cabem no sólido inicial. Isto quer dizer que decompomos o prisma inicial em diversos cubinhos de uma unidade.

Figura 6: Composição e decomposição do prisma em cubinhos

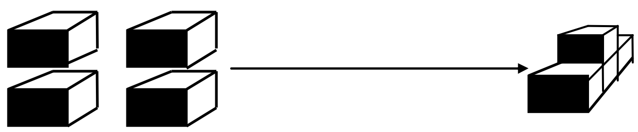


Fonte: Caderno do professor, SÃO PAULO, 2008, p. 17

Já na perspectiva de Lanner de Moura et al. (S/D), o que muda é o componente que envolve elementos da história da matemática. Em sua pesquisa, os autores se preocupam em chamar a atenção dos estudantes de que a criação do tijolo permitiu com que o homem criasse a composição homogênea, que é a combinação de vários elementos iguais que resulta em diferentes qualidades.

Assim, juntando-se quatro tijolos, por exemplo, o estudante observará que estes ocupam uma quantidade de espaço de quatro tijolos, que é definida como volume. Neste caso, a unidade de medida utilizada é o tijolo.

Figura 7: composição dos tijolos



Fonte: Lanner de Moura et al, S/D, p. 44

Vale a pena ressaltar que, na nossa pesquisa, durante o desenvolvimento das atividades em sala de aula, para a representação do tijolo, foi utilizado o material dourado, que tem como unidade de medida um cubo. Prismas de acrílico, para os alunos calcularem o sua capacidade, também foram utilizadas.

O material dourado é um material estruturado, composto por 611 peças. As peças são divididas em 500 cubos pequenos, 100 prismas (cada prisma é formado por 10 cubos pequenos), 10 placas centenas (cada placa centena é formada por 100 cubos pequenos) e 1 cubo maior, que é formado por 1000 cubos pequenos, conforme indica a figura abaixo.

Figura 8: material dourado

Fonte: Internet. Disponível em: http://asteriomatematica.blogspot.com.br/2014/01/maria-montessori-material-dourado.html

3.4.3. Nos livros didáticos

Lima (2001), ao estudá-los, seleciona doze coleções para o ensino médio, apontando diversos problemas, principalmente no que diz respeito a áreas e volumes.

De modo geral, a principal crítica que o autor faz se refere ao excesso de tratamento algébrico nas atividades propostas.

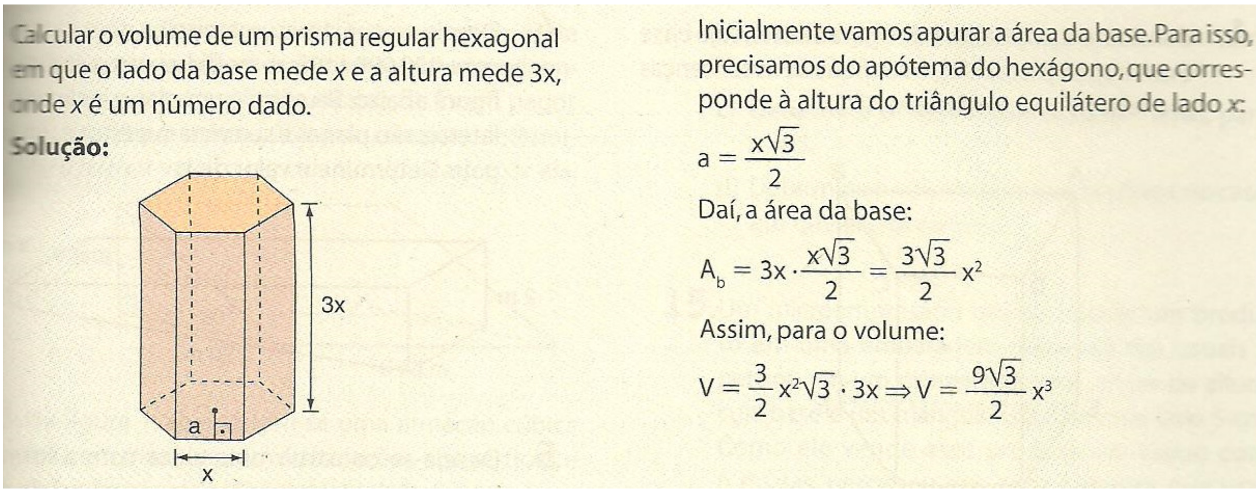
Somente a manipulação algébrica parece deixar o leitor prejudicado, sem mobilidade para pensar ou usar a criatividade. Essa falta de mobilização pode prejudicar a formação de professores e, consequentemente, a apreensão do conteúdo pelos estudantes, pois os livros didáticos podem constituir o aprendizado do próprio professor, que transmitirá o conhecimento aos alunos, com base no livro didático.

Lima (2001) levou em conta a adequação dos livros didáticos às três componentes básicos do ensino: Conceituação, Manipulação e Aplicação. Segundo Lima (2001, p. 1),

> A **Conceituação** compreende a formulação de definições, o enunciado de proposições, o estabelecimento de conexões entre diversos conceitos, bem como a interpretação e a reformulação dos mesmos sob diferentes aspectos. A **Manipulação**, de caráter essencialmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino da Matemática assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a Música. A habilidade no manuseio de equações, fórmulas, operações e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, sem perder tempo e energia com detalhes. A **Aplicação** é o emprego de noções e teorias da Matemática em situações que vão de problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis provenientes de outras áreas, quer científicas quer tecnológicas. Ela é a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e tão necessário.

Segue abaixo um exemplo de exercício de Iezzi et al. (2011), o primeiro exemplo sobre volume de prismas sendo resolvido por meio de fórmulas e manipulações algébricas.

Figura 9: exemplo de exercício do livro didático



Calcular o volume de um prisma regular hexagonal em que o lado da base mede *x* e a altura mede 3x, onde *x* é um número dado.

Solução:

Inicialmente vamos apurar a área da base. Para isso, precisamos do apótema do hexágono, que corresponde à altura do triângulo equilátero de lado *x*:

$$a = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Daí, a área da base:

$$A_b = 3x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

Assim, para o volume:

$$V = \frac{3}{2}x^2\sqrt{3} \cdot 3x \Rightarrow V = \frac{9\sqrt{3}}{2}x^3$$

Fonte: Iezzi et al (2011), p.405

Observando o exemplo proposto pelo autor, observa-se que para resolvê-lo não é necessário ter um pensamento geométrico desenvolvido, mas técnicas algébricas e de fórmulas prontas. O foco desta pesquisa é uma abordagem alternativa, apresentada pelo Iezzi et al (2011), buscando a aprendizagem do conceito de volume e capacidade de prisma, de forma intuitiva evitando a utilização de fórmulas prontas.

A seguir, será apresentado as atividades que foram organizadas e desenvolvidas em sala de aula. A principal característica da pesquisa são os instrumentos utilizados para a construção e a análise dos dados.

4. METODOLOGIA DA PESQUISA

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), há três tendências metodológicas da pesquisa educacional: a empírico-analítica, a fenomenológica-hermenêutica e a histórico-dialética.

A empírico-analítica, Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 63) afirmam que

> O processo de produção de conhecimentos, nessa abordagem, orienta-se pela aplicação do método científico, o qual, de modo geral, compreende as fases de formulação de um problema, levantamento de hipóteses, testagem dos pressupostos, confirmação ou refutação das hipóteses e conclusões.

A pesquisa educacional, por essa abordagem, procura encontrar explicações causais ou correlacionais para os problemas e fenômenos, cuja finalidade seria a de conhecer para melhor controlar ou melhorar.(FIORENTINI E LORENZATO, 2006).

Já a fenomenológica-hermenêutica, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 65),

> Essa abordagem fundamenta-se filosoficamente na fenomenologia e no processo hermenêutico de interpretação. Parte do pressuposto de que a solução dos problemas educacionais passa primeiramente pela busca de interpretação e compreensão dos significados atribuídos pelos envolvidos (os sujeitos que experienciam o fenômeno). Isso pode acontecer por meio de um processo de investigação que consiste em desvendar mecanismos e significados ocultos, atigindo, assim, a essência dos fenômenos.

Nesta abordagem o sujeito ocupa lugar de destaque, sendo ele o responsável por interpretar os fenômenos e os discursos.(FIORENTINI E LORENZATO, 2006).

Por último, tem-se a histórica-dialética que, conforme Fiorentini e Lorenzato (2006, p.66),

> Essa abordagem vê a ciência como uma categoria histórica – um fenômeno em contínuo de vir inserido no movimento das transformações sociais. Ou seja, a história (a dinâmica das ações e ideias) é o eixo da compreensão e da explicação científica, e tem na prática seu fundamento epistomológico.

É necessário, portanto, além de desvendar o “conflito das interpretações”, também desvendar o “conflito de interesses”, visando à emancipação dos sujeitos.

Assim, esta investigação tem aproximações com a tendência empírico-analítca, já que analisamos as falas e as escritas dos estudantes (dados empíricos) e fizemos as análises delas, com base na teoria estudada (Analítico).

Além disso, a investigação é qualitativa e está caracterizada como estudo de caso, uma vez que a pesquisa foi realizada com somente uma sala de aula. A mesma é composta por quatorze alunos, um grupo heterogêneo, pois alguns alunos estão na escola desde a primeira série do Ensino Médio e outros que entraram no decorrer dos três anos. As especificidades da escola e dos sujeitos serão caracterizadas no segundo tópico deste capítulo.

Segundo Bogdan e Bilken (1994, p. 47-51), a pesquisa qualitativa possui cinco características.

> 1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal [...] 2. A investigação qualitativa é descritiva. [...] 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. [...] 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. [...] 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Escolhemos a abordagem qualitativa, pois a pesquisa considera as características descritas acima.

A fonte direta da construção dos dados é a escola, pois, como professor da turma, acompanhamos todo o processo da pesquisa.

Como os dados foram construídos na forma de palavras, acompanhando o processo através das transcrições das falas dos estudantes durante a realização da atividade, a investigação torna-se descritiva.

A investigação tem abordagem qualitativa, pois, durante a análise das transcrições das falas dos estudantes, analisamos o processo de negociação de sentidos e de significados feitos por eles, não nos restringindo a verificar somente o resultado final das atividades.

A pesquisa não possui como objetivo confirmar hipóteses previamente construídas, mas sim analisar as produções de sentidos e de significados feitas pelos estudantes, enquanto vivenciaram as atividades de ensino.

E, por último, foi analisada a produção de sentidos e de significados que os mesmos deram aos conteúdos estudados, importância vital para estudos qualitativos, conforme indicam os autores.

É estudo de caso porque, segundo Gil (2002) consiste no estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento.

Ainda sobre o estudo de caso, Fiorentini e Lorenzato (2006, p.110) afirmam que

> o caso não significa apenas uma pessoa ou uma escola". Pode ser qualquer "sistema delimitado" que apresenta algumas características singulares e que fazem por merecer um investimento investigativo especial por parte do pesquisador. Nesse sentido, o caso pode ser uma instituição, um programa, uma comunidade, uma associação, uma experiência, um grupo de professores de uma escola, uma classe de alunos ou até mesmo um aluno diferente dos demais que apresenta características peculiares.

Em contrapartida, também existe a dificuldade de generalização. Gil (2002, p. 55) afirma ainda que

> A análise de um único ou de poucos casos de fato fornece uma base muito frágil para a generalização. No entanto, os propósitos do estudo de caso não são os de proporcionar o conhecimento preciso das características de uma população, mas sim o de proporcionar uma visão global do problema ou de identificar possíveis fatores que o influenciam ou são por ele influenciados.

O caso será realiazado na terceira série do Ensino Médio e o objeto de estudo são as produções de sentidos e de significados explicitados pelos estudantes enquanto vivenciam atividades de ensino sobre volume de prisma. A natureza da investigação é qualitativa, pois busca retratar a realidade de forma profunda e mais complexa possível, enfatizando a interpretação ou análise do objeto estudado, no contexto onde ele se encontra.

A análise foi feita por meio de vídeo e áudios gravados, sendo estes recortados através de nove episódios de ensino.

Segundo Carvalho (1996, p. 6):

> Chamamos de episódio de ensino aquele momento em que fica evidente a situação que queremos investigar. Essa situação, que se relaciona com as perguntas do pesquisador, pode ser, por exemplo, a dos alunos levantando hipóteses num problema aberto, as falas dos alunos após uma pergunta desestruturadora, a discussão de um texto teórico, os tipos de perguntas que os professores fazem para o seus alunos, os momentos das discussões em grupo onde os alunos discutem suas concepções, ou o conjunto de ações que desencadeia os processos de busca da resposta do problema a ser pesquisado.

O eixo de análise da pesquisa é a produção de sentidos e de significados explicitados pelos estudantes.

Vale a pena ressaltar que este capítulo está dividido em tópicos: caracterização da escola; caracterização dos sujeitos; e organização das atividades de ensino sobre volume.

4.1. Caracterização da escola

A pesquisa foi realizada numa escola particular, que possui somente o Ensino Médio, localizada em São Carlos – SP. A escola não possui fins lucrativos, visando oferecer um ensino de qualidade a preços acessíveis a uma grande parcela da comunidade são-carlense.

A proposta da escola que além de oferecer à formação do aluno para o vestibular, também busca, através de projetos: tal como feira de ciências, sarau, palco livre, entre outras, a formação do aluno além da sala de aula.

A instituição atende alunos vindos de escolas públicas e particulares. A mensalidade não é alta, comparada a outras escolas particulares de São Carlos, e é oferecido desconto para os alunos vindos de escola pública. Além do Ensino Médio, possui curso pré-vestibular, diurno e noturno, e curso de idiomas.

Com relação à infraestrutura, conta com uma pequena biblioteca, uma sala de estudos, laboratório de química e fisica, sala dos professores, cozinha, secretaria, sala de coordenação/direção e sala de vídeo, não possuindo, porém, sala de informática ou quadra poliesportiva. Os poucos computadores que a escola possui são doações.

A Escola utiliza o livro didático cujo volume é único com os conteúdos a serem abordados durante todo o Ensino Médio. Em relação à Geometria, o livro, antes de iniciar o estudo da Geometria Espacial, exibe inúmeras definições, postulados e teoremas. Após os exemplos resolvidos, exercícios são resolvidos. O livro não foge ao paradigma do exercício, já apresentado anteriormente.

Apesar disso, a utilização de livro didático permite maior autonomia ao professor para transitar pelos conteúdos do ensino médio, diferentemente do material apostilado, no qual o conteúdo é dividido em tópicos lecionados em cada aula.

A filosofia de ensino da instituição é diferente de outras escolas já trabalhadas. A diferença é o acompanhamento do professor com a mesma turma durante todo o Ensino Médio. Para exemplificar, quando termina a primeira série, o professor não leciona novamente outra primeira série, mas sim passa para a segunda série com o mesmo grupo de alunos. Outro professor assume a primeira série e assim por diante até o encerramento do ciclo.

Além disso, o coordenador, nas reuniões de área, incentiva os professores a buscar novas estratégias em sala de aula, que fujam do paradigma do exercício. Nós, professores da área de Matematica, tínhamos dificuldade em sair de tal paradigma, pois nos preocupávamos com o resultado final e não pelo processo de aprendizagem. Como a pesquisa tem como objetivo uma abordagem alternativa ao ensino tradicional, escolhemos essa escola para a realização da pesquisa.

No item seguinte, serão caracterizados os sujeitos da pesquisa.

4.2. Caracterização dos sujeitos

A sala de aula escolhida foi a da terceira série do ensino médio, que possui quatorze alunos, sendo três meninos e onze meninas. Como acompanhamos a turma desde a primeira série, vale um breve histórico da mesma.

Na primeira série, o grupo iniciou com dezoito alunos vindos das mais variadas escolas: públicas ou particulares. Logo pudemos perceber, pela fala dos estudantes, a diferença socioeconômica que havia entre eles, mas não causava problemas, mas os relacionamentos fora dela, muitas vezes refletiam em discussões dentro da sala de aula.

Ao final da primeira série, houveram duas reprovações, mas na segunda série, entraram mais quatro alunos. O grupo formado contava com vinte alunos, mostrando mais amadurecimento do que no ano anterior, pois já conseguiam ter um bom convívio social e até trabalhar juntos, mesmo com a sala dividida em grupos distintos de amizades. Apesar de não termos problemas durante as aulas, houveram quatro reprovações no ano.

Na terceira série, saíram seis alunos e, somando às quatro reprovações do ano anterior, dez deixaram essa turma. No início do ano letivo, entraram quatro alunos, formando uma equipe de quatorze alunos, que participaram da pesquisa.

Para desenvolver as atividades foi formado quatro grupos de três e um de quatro integrantes. No decorrer das atividades, devido às faltas de alguns estudantes, os membros dos grupos podiam mudar de um para outro grupo mantendo o equilíbrio entre eles. Para a denominação dos estudantes, foram consideradas as iniciais de seus nomes (nome e sobrenome), e, em alguns casos, alguma letra para que se diferenciasse dos outros alunos. Ressaltamos que o professor será denominado Professor, mas que, em algumas falas dos estudantes, poderá surgir o nome Kito, também se referindo ao professor-pesquisador, já que este é o apelido utilizado pelos alunos. Segue quadro que indica a síntese dos grupos:

Tabela 1: grupos e seus integrantes

GRUPOS	INTEGRANTES
1	A, M, J
2	B, LT, N
3	I, P, Z, R, LM
4	L, E, T

4.3. A organização das atividades de ensino sobre volume e capacidade

Para a organização das atividades as fontes foram: 1) Os documentos oficiais: PCNEM (BRASIL, 2000) e Proposta Curricular do Estado de São Paulo

(SÃO PAULO, 2008), tanto o caderno do aluno quanto o caderno do professor; 2) A análise dos livros didáticos; 3) O texto de Lanner de Moura et al. (S/D), sobre a quantificação do espaço. Foram realizadas três atividades com os alunos.

Um estudo teórico e a organização das atividades de ensino não garantem o resultado pretendido da pesquisa. Desse modo, se fez necessário analisar as falas dos estudantes, buscando compreender também o ambiente, o contexto em que estavam inseridos: a sala de aula.

As atividades foram desenvolvidas em treze horas-aula, divididas em sete dias, conforme mostra o quadro abaixo.

Tabela 2: organização das atividades em seus respectivos dias de aplicação

DATA	OCORRIDO	OBJETIVO
25/09/13	Desenvolvimento da Atividade 1: Construção do tanque	Construir o tanque utilizando material dourado, assim como desenhar uma figura tridimensional. Obter a diferença entre o conceito de volume e capacidade.
26/09/13	Discussão com os alunos sobre os resultados da Atividade 1	Discutir as relações obtidas durante a primeira atividade, assim como a inserção da nomenclatura prisma e a generalização da fórmula para o cálculo de volume.
02/10/13	Desenvolvimento da Atividade 2: Cálculo das diagonais.	Reconstruir o tanque proposto na atividade anterior, e encontrar as diagonais das faces do prisma e a diagonal do prisma. Relacionar as unidades de medidas de capacidade e volume
03/10/13	Discussão dos resultados da Atividade 2: Cálculo das diagonais.	Discutir com os estudantes sobre o desenvolvimento da atividade, e quais foram às relações utilizadas para os cálculos das diagonais.
08/10/13	Desenvolvimento da Atividade 3: Capacidade dos sólidos de acrílicos	Calcular a capacidade de quatro prismas de acrílico, utilizando as relações das atividades anteriores.
09/10/13	Término do desenvolvimento da Atividade 3: Capacidade dos sólidos de acrílicos	Calcular a capacidade do prisma pentagonal reto, do bloco recortado, prisma obliquo regular e prisma hexagonal reto.
10/10/13	Verificação dos resultados obtidos pelos estudantes comparados ao volume real dos sólidos, calculados através de uma pipeta.	Comparar os resultados obtidos nos cálculos dos estudantes, com a capacidade real dos prismas, que é encontrado ao encher os primas com água para depois ser colocado numa pipeta cuja capacidade é de um litro.

Os nove episódios de ensino selecionados estão relacionados às seguintes aulas: Atividade 1: construção do tanque; Atividade 2: Cálculo das diagonais e Atividade 3: Capacidade dos sólidos de acrílicos.

As atividades organizadas e desenvolvidas se basearam nas ideias de Lanner de Moura et al (S/D). Vale a pena ressaltar que, estas ideias composição e decomposição de figuras, também estão indicadas nos PCNEM e nos cadernos da SEE-SP.

Segundo Brolezzi e Druck (2002), Lima (2007) e Lanner de Moura et al (S/D), consideram em seus estudos que as atividades de composição e decomposição de figuras são, quase sempre, requeridas na resolução de problemas geométricos e são de fundamental importância na questões cognitivas da aprendizagem matemática desenvolvendo o pensamento geométrico, melhorando, também a visualização.

Para Lanner de Moura et al (S/D, p.19),

> No ensino da geometria tradicional existe o hábito de partir dos objetos geométricos considerados mais elementares e ficar durante muito tempo, a listar nomes, propriedades e relações entre esses objetos. Para muitos alunos a geometria não passa de pontos, retas, posições relativas das retas, ângulos, tipos de ângulos, triângulos, quadriláteros e etc..

Uma abordagem alternativa é a formulação de atividades que possibilitem a realização de descobertas, intuitivamente e com a utilização de materiais manipuláveis que colaboram na visualização, necessária para entender, compreender e apreciar o mundo intrinsecamente geométrico. Essa abordagem alternativa está baseada em dois pilares: a experiência matemática e a reflexão sobre essas experiências.

Neste sentido, a proposta da Lanner de Moura et al (S/D) vai de encontro com as AOE, onde o protagonista da aprendizagem é o estudante, realizando descobertas e utilizando seu conhecimento prévio na resolução das atividades.

Para Lanner de Moura et al (S/D, p.19), “O desenvolvimento do sentido espacial na criança é conseguido através de exercícios que solicitem a visualização, o desenho e a comparação de formas e diferentes posições”.

Para alcançar esse desenvolvimento, foi recorrido à utilização de material manipulável, que segundo Nacarato (2005), materiais manipulativos no ensino da geometria podem facilitar a visualização.

Sobre a visualização, segundo Nacarato e Passos (2003, p.78),

> A visualização pode ser considerada como habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não esta ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis.

Para Kaleff (2003, p.15), destaca-se a importância da visualização,

> ... esta habilidade (visualização), é tão ou mais importante do que a de calcular numericamente e a de simbolizar algebricamente. Além disso, os educadores matemáticos começaram a tomar consciência da importância assumida pelo entendimento das informações visuais em geral, tanto para a formação matemática do educando quanto para sua educação global.

O desenvolvimento do pensamento geométrico progride de acordo com uma hierarquia de níveis. Segundo Lanner de Moura et al (S/D, p. 19),

> ...primeiro os alunos aprendem a reconhecer as formas globalmente e só depois, analisam as propriedades relevantes de cada uma. Mais tarde, apercebem-se das relações entre as formas e fazem deduções simples.

Corrobora com a hierarquia de níveis o casal Van Hiele, que em seus trabalhos afirmam que a visualização, o reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global, é o primeiro nível para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Observa-se que apesar de ter o significado das figuras geométricas, os alunos não conseguem dar sentido as mesmas quando inseridas num contexto de resolução de problemas.

Foram filmadas treze horas de aula para uma análise posterior que levou em conta a fala e as expressões dos estudantes enquanto desenvolviam as atividades 1, 2 e 3. A análise foi feita a partir da divisão das atividades de ensino em episódios de ensino que serão explicados posteriormente.

Para a transcrição do vídeo, foram selecionados trechos mais significativos de acordo com o que se queria analisar na pesquisa: as falas dos estudantes quando discutiam os problemas propostos na atividade de ensino 1, 2 e 3 e nas discussões dos resultados obtidos.

4.3.1. Atividade 1: Construção do tanque

Foi utilizado a abordagem alternativa proposta por Lanner de Moura et al (S/D), onde o estudante terá construído com material manipulável, uma representação para gerar uma imagem mental, para depois verificar propriedades que podem ser aplicadas, através de sua experiência prévia.

Sobre a representação de uma imagem mental, Kaleff (2003, p. 17), afirma que

> Devemos estar atentos para o fato de que, no caso de o aluno necessitar visualizar um objeto geométrico, como por exemplo um poliedro, um modelo concreto desse objeto construído de madeira, papel-cartão ou outro material pode servir de representação para gerar uma imagem mental. Esta primeira imagem inicia um processo de raciocínio visual no qual, dependendo das características do objeto, o aluno recorre a habilidade da visualização para executar diferentes processos mentais, gerando outras imagens mentais ou representações do objeto. Essas representações podem ser expressadas através de um desenho ou de outro modelo concreto do objeto geométrico em questão.

Segue a atividade proposta por Lanner de Moura et al (S/D, p. 45)

Figura 10: atividade proposta por Lanner de Moura et al

Atividade: Sólidos

1) Construa, com os seus tijolos, um tanque que tenha 6 tijolos de comprimento, 5 de largura e 3 de altura. Lembre-se que o fundo do tanque é feito com uma camada de tijolos. Em seguida responda as questões abaixo:

a) Se completássemos totalmente o espaço interior com tijolos, quantos deles teríamos no total? Calcule o total de tijolos fazendo apenas cálculos.

b) Qual o cálculo que você fez?

c) Quantos tijolos de água poderíamos colocar no interior deste tanque?

d) Qual o cálculo que você fez?

e) Qual a diferença deste cálculo em relação ao anterior?

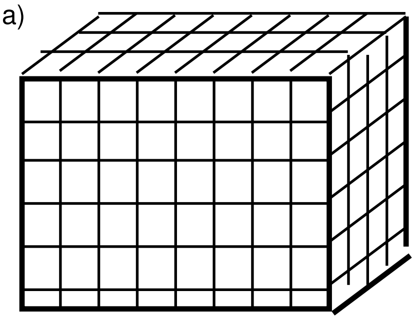
f) Nos cálculos anteriores utilizamos como unidade de medida o tijolo; e se utilizássemos como unidade de medida apenas o comprimento da aresta do tijolo: Quantos tijolos teríamos no total, se completássemos o interior do tanque com tijolos?

g) E quantos tijolos de água caberiam no tanque?

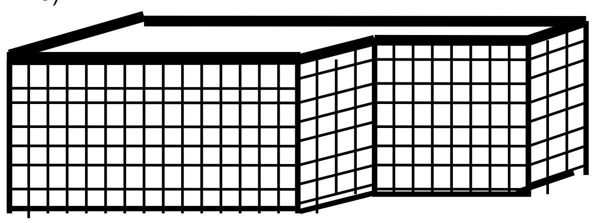
h) Qual é a diferença entre os cálculos feitos com esta nova unidade de medida e a anterior?

i) Nas figuras abaixo temos os desenhos das construções de dois tanques. Calcule, para cada caso, os comprimentos das suas arestas e o volume da água que os mesmos comportam tendo como unidade de medida o tijolo.

a)



b)



Fonte: LANNER DE MOURA ET AL, S/D, p. 45

Os autores da atividade acima, trabalham com a ideia de volume do tanque e a capacidade do mesmo. O volume é a "quantidade de espaço" que o tanque ocupa e sua capacidade é a "quantidade de espaço" que pode ser ocupada no interior do tanque.

Para desenvolver esta primeira etapa, foram feita algumas alterações, nas dimensões do tanque, e inserida a nomenclatura volume e capacidade. Já para desenvolver a segunda, foi utilizado o mesmo tanque para melhorar a visualização das diagonais. E por último, foi proposto o cálculo do volume dos prismas de acrílico. O objetivo foi convidar os estudantes a fazer uso do raciocínio feito nas etapas anteriores. As atividades serão mostradas no terceiro tópico deste capitulo.

Foi substituído o tijolo de barro pelo cubo unidade do material dourado. Ao propor a atividade com este material, foi feito o convite aos alunos a diferenciar o conceito de volume e capacidade, já que as paredes do tanque possuem dimensões, diferentes das abordagens estudadas nos parâmetros (BRASIL, SÃO PAULO, 2000, 2008) e dos livros didáticos, nos quais não se diferenciam tais conceitos.

A seguir, descreveremos a atividade que foi proposta aos estudantes.

Figura 11: atividade 1: volume e capacidade do tanque

Construção, com o material dourado, de um tanque de 22 tijolos de comprimento, por 12 tijolos de largura e 10 tijolos de altura.
Responda as questões abaixo.
a) Desenhe o tanque na folha.
b) Se completássemos o espaço interior com tijolos, quantos tijolos teriam no total? Indique o raciocínio utilizado.
c) Considerando que pudéssemos por "tijolos de água" no interior desse tanque, quanto tijolos de água caberiam no interior do tanque? Indique o raciocínio utilizado.
d) Qual é a diferença dos raciocínios utilizados nas questões anteriores.
e) Determine a capacidade do tanque
f) Determine o volume do tanque.
g) Nos cálculos anteriores utilizamos unidade de medida o tijolo. E se utilizássemos como unidade de medida apenas o comprimento da aresta do tijolo: Quantos tijolos teriam no total, se completássemos o interior do tanque com tijolos? E quantos tijolos de água?

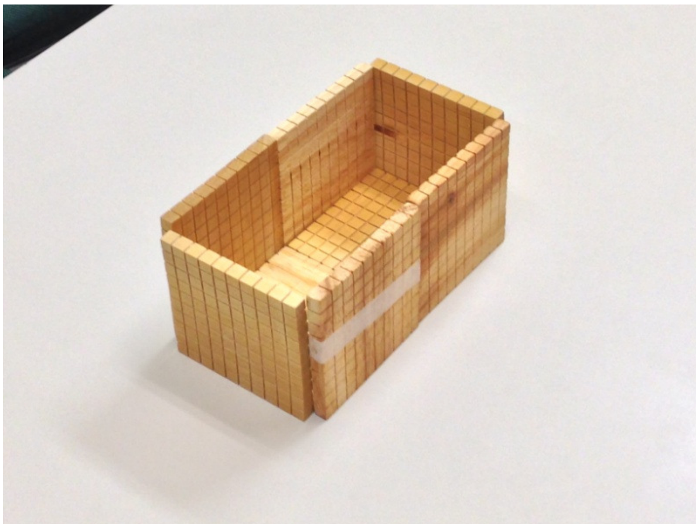
Fonte: próprio autor.

A mudança das dimensões do tanque em relação à atividade inicial proposta pela autora, foi devido à alteração da unidade de medida: do tijolo de barro ao cubo unidade do material dourado. Se fossem utilizadas as mesmas dimensões, o tanque formado seria muito pequeno para a resolução das atividades.

Primeiramente, os estudantes foram convidados a construír um tanque, utilizando o material dourado. Houveram algumas perguntas que tinham como objetivo relacionar a diferença entre volume e capacidade, uma dificuldade recorrente dos estudantes que estudam volume de poliedros.

O objetivo da atividade era a construção do tanque, através do qual o aluno teria a visualização das suas três dimensões: comprimento, largura e altura. Durante a construção, buscamos colocar as dimensões de tal maneira que os alunos utilizassem as placas centenas do material dourado, para fazer a base e as faces do tanque. O mesmo, idealiados pelo professor-pesquisador, ficaria como na figura abaixo.

Figura 12: tanque montado



Fonte: próprio autor.

Depois da construção, os alunos deveriam responder as questões seguintes. A questão (a) era para desenhar o tanque na folha resposta. O objetivo era que os alunos conseguissem colocar as três dimensões (largura, comprimento e altura) visíveis na resposta. Com isso, o aluno pode relacionar o desenho com a figura real, fazendo comparações e visualizando faces que ficam escondidas quando desenhados no plano.

Com relação ao desenho, foi considerado as indicações de Kallef (2003, p.51) que relata,

> "…várias pesquisas em Educação Matemática, nas quais contatou-se que atividades de desenho, aliadas a tarefas de manseio de cubos, auxiliam o desenvolvimento do raciocínio espacial e, em particular, o entendimento das convenções de desenho e das representações gráficas das figuras espaciais."

Na questão (b): ”se completássemos o espaço interior com tijolos, quantos tijolos teriam no total?”. O objetivo era que o aluno calculasse o volume do tanque, na unidade de medida do cubo unitário. Já na questão (c): ”Considerando que pudéssemos por tijolos de água no interior desse tanque, quantos tijolos de água caberiam no interior do tanque?” Foi abordado a capacidade do tanque, indicada na unidade de medida de tijolos de água.

Na questão (d): “qual a diferença dos raciocínios utilizados nas questões anteriores”. Tinha como objetivo analisar o sentido e o significado dado pelo aluno ao perceber a diferença do cálculo de volume e o cálculo de capacidade atingindo o conceito de diferença entre as duas medidas.

Nas questões (e) e (f), que foi inserido a nomenclatura de volume e capacidade. O foco era que o aluno conseguisse relacionar as atividades anteriores com essa nomenclatura, na qual é utilizada no cotididano dos alunos.

Já na questão (g), que foi solicitado aos alunos que fosse suposto que as faces do tanque não tivessem dimensão, sendo que o volume e a capacidade teriam valores iguais.

Segundo Lima (2001, p.466), em sua análise sobre os livros didáticos,

> “Há uma grande pressa de passar do desordenado tratamento da geometria de posição para o estudo de áreas e volumes, predominantemente aritmético. O volume do sólido nunca é definido, nem sequer intuitivamente. A fórmula do volume do bloco retangular é “deduzida” a partir de um exemplo onde as arestas têm medidas inteiras. As demais baseiam-se em argumentos mal explicados e omissões de pontos essenciais.”

As questões da atividade 1 foram organizadas para ser uma alternativa ao livros didáticos, pois não são atividades predominantemente aritméticas, focando na aprendizagem do conceito de volume e capacidade.

4.3.2. Atividade 2: Cálculo das diagonais

Para a formulação desta atividade, foram elaborado questões com o objetivo de que, com a ajuda do material manipulável, os estudantes conseguissem visualizar e identificar figuras planas, assim como suas propriedades, dentro de um contexto de composição de figuras planas que forma um objeto tridimensional. Será introduzida a relação entre a unidade de medida de volume e de capacidade.

Segundo Kaleff (2003, p. 16), sobre a importância fundamental da visualização no contexto geométrico,

> "...identificar uma determinada figura plana, isolando-a dos demais elementos do desenho; reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou imagem mental) são independentes de características físicas, como tamanho, cor e textura,..."

Para a realização da atividade, os estudantes deveriam construir o tanque da atividade anterior para servir de modelo de material manipulável, para que calculassem o comprimento da diagonal do prisma, assim como o cálculo do comprimento das diagonais das faces, utilizando, como unidade de medida, o cubo unidade do material dourado.

Para isso, o estudante necessitaria visualizar e identificar as figuras planas que compõem o tanque, quadrados e retângulos e assim, identificar as diagonais relacionando com o Teorema de Pitágoras. Para calcular o comprimento surgiram os números irracionais, quando calculado com o Teorema citado. Ao se comparar os dois resultados obtidos, esperava-se que conseguissem produzir sentidos e significados sobre o conceito de número irracional, uma vez que o resultado esperado não era um número "exato", pertencente ao conjunto dos números naturais.

Convidamos os alunos a pensarem sobre a relação entre a unidade de medida de volume, centímetro cúbico,' e unidade de capacidade, o Litro, conhecida do cotidiano dos estudantes.

Segue abaixo a atividade 2:

Figura 13: atividade 2

01 Reconstrua o tanque da atividade anterior, com 22 tijolos de comprimento, por 12 tijolos de largura e 10 tijolos de altura.

Suponha que cada aresta do tijolo tenha 1 centímetro. Calcule quantos Litros cabem nesse tanque. Permitido uso de internet para pesquisa.

02. Escolha uma dobra superior do tanque.
Calcule, na unidade de medida de tijolo, a distância da dobra escolhida das 4 dobras inferiores do tanque.

Fonte: próprio autor.

4.3.3. Atividade 3: Capacidade dos sólidos de acrilico

Para a formulação desta atividade, foi buscado retomar o conhecimento adquirido nas anteriores para aplicá-las em objetos reais. Para isso, foram apresentados quatro sólidos geométricos de acrílico, que são mostrados a seguir. As atividades foram elaboradas pelo profesor-pesquisador, com a fundamentação teórica nos estudos de Lanner de Moura (S/D) e Kaleff (2003).

Segundo Kaleff (2003, p.17), sobre a utilização de diversos modelos concretos,

> ...a utilização de diversos modelos concretos que representam uma mesma ideia geométrica pode auxiliar o aluno a reconhecer que algumas propriedades do objeto transcendem suas propriedades materiais como tamanho, cor e textura e, portanto, pertencem ao mundo ideal da geometria.

Os diversos modelos apresentados são prismas que remetem à mesma ideia geométrica, utilizada nas atividades anteriores para o cálculo de volume.

Seguem abaixo os poliedros de acrílico apresentados aos alunos:

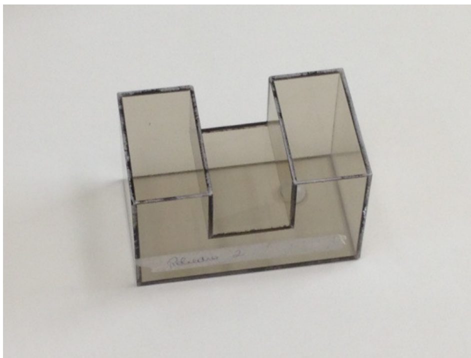
Poliedro 1: Prisma pentagonal reto

Figura 14: prisma pentagonal reto

Fonte: próprio autor.

Poliedro 2: Bloco recortado

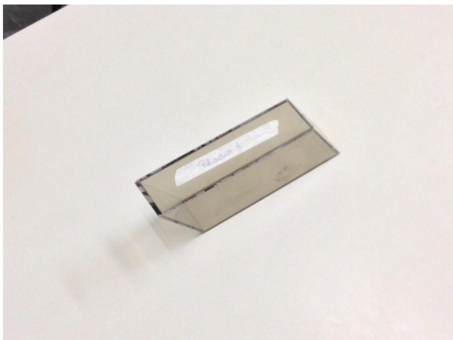
Figura 15: bloco recortado



Fonte: próprio autor.

Poliedro 3: Prisma Oblíquo retangular.

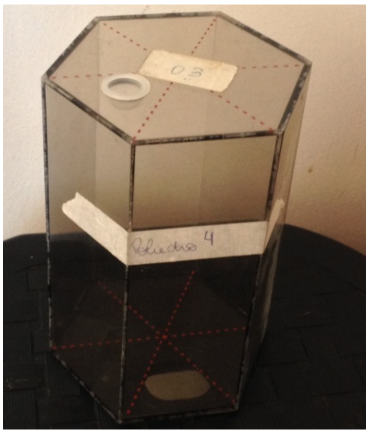
Figura 16: prisma oblíquo retangular



Fonte: próprio autor.

Poliedro 4: Prisma hexagonal reto

Figura 17: prisma hexagonal reto



Fonte: próprio autor.

Como na construção do tanque, foi calculado o volume e a capacidade de um paralelepípedo reto retângulo. Escolheu-se alguns sólidos muito comuns em exercícios de livros didáticos, tal como, o prisma pentagonal reto, o bloco recortado e o prisma hexagonal reto. O prisma obliquo retangular, cuja relação não se altera para o cálculo do volume, devido ao Princípio de Cavalieri, conforme apontado no capítulo anterior.

Cada grupo desenvolveu a atividade com um sólido, e respondeu às questões propostas pelo professor. Terminado o trabalho com aquele sólido, houve uma troca dos mesmos pelos grupos, até que todos os grupos tivessem trabalhado com todos os sólidos.

Para os sólidos propostos, os alunos fizeram os respectivos desenhos na folha, e discutiram quantos Litros achavam que o sólido tinha de capacidade. Após a discussão, os estudantes, utilizando uma régua, determinariam o comprimento da largura, comprimento e altura, e assim calculariam o volume do prisma.

A transformação de unidades aqui se fez necessária novamente. Foi solicitado que utilizassem aproximações de duas casas decimais para os números irracionais.

Depois do cálculo feito, de forma individual, foi sugerido a socialização e a discussão dos resultados, visando um consenso registrando o volume dos sólidos, calculado pela sala inteira. Em seguida, foi indicado que fizessem a comparação com os resultados obtidos, ao encher os sólidos de água, transpondo seu líquido para uma pipeta.

Segue, abaixo, a Atividade 3 proposta aos estudantes.

Figura 18: atividade 3

POLIEDRO 1

01. Faça do desenho do poliedro 1. Indicando as medidas observadas.

02. Quantos litros de água, com aproximação de duas casas decimais, o grupo acredita que cabe no poliedro em questão.

03. Calcule, com cálculos, quantos litros de água , com aproximação de 2 casas decimais. Deixe os cálculos

POLIEDRO 2

04.Faça do desenho do poliedro 2. Indicando as medidas observadas.

05. Quantos litros de água, com aproximação de duas casas decimais, o grupo acredita que cabe no poliedro em questão.

06. Calcule quantos litros de água , com aproximação de 2 casas decimais. Deixe o cálculos

POLIEDRO 3

07.Faça do desenho do poliedro 3. Indicando as medidas observadas.

08. Quantos litros de água, com aproximação de duas casas decimais, o grupo acredita que cabe no poliedro em questão.

09. Calcule quantos litros de água , com aproximação de 2 casas decimais. Deixe o cálculos

POLIEDRO 4

10.Faça do desenho do poliedro 4. Indicando as medidas observadas.

11. Quantos litros de água, com aproximação de duas casas decimais, o grupo acredita que cabe no poliedro em questão.

12. Calcule quantos litros de água , com aproximação de 2 casas decimais. Deixe o cálculos.

Fonte: próprio autor.

Após esta experiência, foi transcrito e analisado as falas que surgiram durante as interações dos estudantes, as quais foram mediadas pelo professor, a partir de várias questões, conforme indica o próximo capítulo.

5. A PRODUÇÕES DE SENTIDOS E DE SIGNIFICADOS EXPLICITADAS PELOS ESTUDANTES

Este capítulo tem por objetivo analisar a produção de sentidos e de significados, explicitada pelos estudantes enquanto vivenciavam as atividades de ensino organizadas pelo professor-pesquisador.

As aulas foram gravadas em vídeo, assim como as falas dos estudantes, como já foi descrito no capítulo anterior. Para analisá-las, foram utilizados os estudos de Carvalho (1996), uma vez que o referido autor sugere que, para maior aprofundamento da análise, as aulas sejam divididas em episódios de ensino.

5.1 Sentidos e significados referentes à Atividade 1: Construção do tanque

Foram divididas em três episódios de ensino: 1) a construção do tanque; 2) o desenho do tanque; e 3) as relações entre a capacidade e o volume, pois são três momentos que evidenciam as interações entre os estudantes.

5.1.1. Episódio 1: Construção do tanque

Como apresentado no tópico 4.3, foi utilizado material dourado como material manipulável para trabalhar composição e decomposição dos sólidos geométricos; no caso desta pesquisa, o prisma.

Ao formular a construção, acreditamos que os alunos achariam essa atividade muito fácil, já que um tanque é conhecido no cotidiano dos alunos. A expectativa era a de que, os alunos logo fizessem relações, utilizando as placas centenas para construir as faces e a base do tanque. Mas não foi trivial assim.

Isso talvez aconteça com muitos colegas docentes que, ao preparar uma aula, acreditam que os alunos farão relações automáticas, como fazem os professores especialistas na disciplina. Os alunos não relacionam automaticamente e mesmo que os professores se motivem a buscar alternativas, são impossibilitados devido à quantidade de conteúdo a lecionar durante o ano letivo, ou ainda, necessitam manter o cronograma do material didático adotado pela escola.

Concordo com Lanner de Moura e Sousa (2005) de que, ao ensinarmos álgebra simbólica (as fórmulas), esquece-se da álgebra retórica (sem letras, somente palavras) e da álgebra figurada (desenhos). Apesar de os aspectos da criação dos conceitos da álgebra serem históricos, eles não são lineares e levaram muito tempo para se difundir no mundo moderno, passando por Diofanto e Viete até os dias atuais.

Conforme relatam Lanner de Moura e Sousa (2005, p.34-35),

> Apresentamos aos estudantes a variável-letra e queremos insistentemente que eles entendam o pensamento algébrico.
> Os alunos, nesse contexto, aprendem a fazer manipulações algébricas que, por sua vez, não têm nada a ver com a palavra e a figuras estudadas em outras áreas do conhecimento. Os elementos perceptíveis contidos na variável-letra, as letras do alfabeto, parecem falar por si.

As propostas presentes nos Parâmetros Curriculares (BRASIL, SÃO PAULO, 2000, 2008) estudados, assim como, nos livros didáticos, no contexto de volume na Geometria Espacial, apresenta-se a fórmula literal generalizada, para depois realizar manipulações algébricas através de exemplos resolvidos, não atribuindo a importância necessária para a formação conceitual do Volume.

Após a apresentação do material dourado, os alunos puderam escolher qualquer peça para a construção do tanque, excluindo o cubo maior que representa 1000 cubos unitários.

Analisando o vídeo e o áudio, foi percebido que os Grupos 1 e 3 analisaram o problema e discutiram sua resolução, enquanto que, no grupo 2, os integrantes começaram a construção individualmente. O Grupo 4 demorou um pouco mais para entender como colocar as dimensões do tanque.

Quando os alunos foram liberados para pegar as peças para a construção do tanque, o Grupo 3 pegou todas as peças possíveis. Confira abaixo a articulação do grupo no início da montagem. Após lerem o enunciado do problema,

Estudante Z:- Com 22 tijolos de comprimento,
Estudante P:- 22
Estudante I:- Pera aí. Tô contando aqui.
Estudante Z:- 2, 4, 6, 8, 10.
Estudante I:- Quanto tem aqui?
Estudante Z:- 20,22, 22 de comprimento, 12 de largura.
Estudante P:- Acho mais fácil fazer com esse aqui não é? Ó que vai ficar assim ó
Estudante Z:- 12 de largura, 12 de largura e 10 de altura. É isso ó.
Estudante I:- Não, tira esse negócinho daí ó. Agora sim.
Estudante Z:- Isso. Se bem que o tanque tem que ser fechado, né?
Estudante I:- O que é aquilo que a P. está fazendo?
Estudante P:- Mesma coisa.
Estudante Z:- É, só que…
Estudante P:- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 de largura.
Estudante Z:- Tem 20.
Estudante P:- São quantos de largura?
Estudante Z:- 12
Estudante P:- De largura
Estudante Z:- 12
Estudante P:- Ah é, são 12, 22 é de comprimento quer dizer. Então aqui ó tem 22 de comprimento.
Estudante Z:- Tem 12 de largura agora.
Estudante P:- Tem 22 de comprimento…
Estudante I: - Cadê o 12 de largura?
Estudante Z:- Isso aqui.
Estudante I:- Ah, pode crê.
Estudante Z:- 10, 11, coloca mais um aqui.
Estudante I:- Não, este vai ser da altura. Coloca os 10 de altura aí.
Estudante P:- Ah é.
Estudante Z:- Pode crê. Isso.
Estudante I:- Huhuhuuu.
Estudante Z:- Pronto. Agora cobre tudo aqui.
Estudante P:- É isso?
Estudante I:- Aí você vai ter que colocar 2 desses negocinhos compridos. Não, 4 na verdade.
Estudante P:- Então, mas será que é isso?
Estudante I:- Entendeu? Tira mais um aí do lado.
Estudante Z:- Não tira. Só tira desse lado aí.
Estudante I:- Faz a lateral com isso.
Estudante P:- Mas pera aí pessoal, será que é isso? É né?
Estudante I:- É isso.
Estudante Z:- Só que aqui não sai inteiro, tem que fazer com o pequinininho. Você não tá falando para tirar um daqui e colocar um desse?
Estudante I:- Não…
Estudante R:- É só empurrar mais um quadradinho, não é?
Estudante P:- Pera aí gente.
Estudante I:- Assim P. , quer ver....Isso, isso. Deixa só esse pequenininho aqui, tira essa aqui daqui, esse aqui, esse aqui, põe mais um aqui. Entendeu?
Estudante Z:- Coloca um desse aqui do lado, isso, pronto, agora pega aqueles grandão não tem?
Estudante I:- Agora vocês têm…
Estudante P:- Tem que fazer isso em todas as pontas.
.

Após toda essa argumentação por parte dos alunos, chegaram à seguinte construção:

Figura 19: construção inicial do Grupo 3

Fonte: próprio autor.

Toda a discussão acima foi para conseguir compor os 22 cubos de comprimento e os 12 cubos de largura. O objetivo era a utilização das duas placas de uma centena, para formar a base, mais uma unidade de cada lado das placas, que serviriam de alicerce para as faces laterais e, consequentemente, a altura.

A dificuldade encontrada pelo grupo foi de inserir a altura do tanque, sem alterar as dimensões da base. Este fato pode estar ocorrendo porque, segundo Kaleff (2003, p.17),

> "...no caso de o aluno necessitar visualizar um objeto geométrico, como por exemplo um poliedro, um modelo concreto desse objeto construído em madeira, papel cartão ou outro material pode servir de representação para gerar uma imagem mental."

Os alunos não conseguiam visualizar o objeto de estudo como um todo, faltando subsídios para relacionar mentalmente o tanque, proposto na atividade, com o objeto real. Indicavam, individualmente, os sentidos que davam às partes do objeto estudado. Refletindo sobre a dificuldade destes alunos na construção, para uma posterior aplicação, a troca da palavra "tanque" pela palavra "caixa" talvez melhorasse a formação da imagem mental, já que existem diversos formatos de tanque, diferentemente de caixa, que está mais inserida no cotidiano dos alunos.

Apesar disso, deram significado à palavra tanque, pois, no grupo, os estudantes relacionavam que o mesmo é fechado nas laterais, mas não conseguiram explicitar os sentidos, consequentemente, os significados que davam ao utilizar as placas das centenas para formar as laterais. Segundo Nehering et al.

(2010), para produzir sentido, é necessário que se façam relações com o contexto utilizado, assim como suas experiências prévias.

Debate parecido com o anterior ocorreu no Grupo 1, que ocasionou na mesma dificuldade: a inserção da altura. O resultado obtido se assemelha ao do Grupo 3, como observamos na figura a seguir.

Figura 20: construção inicial do Grupo 1

Fonte: próprio autor.

Cada estudante do Grupo 2 iniciou a construção, individualmente, não havendo discussão coletiva por parte dos integrantes. Ou seja, cada estudante procurava explicitar o sentido que estava dando à atividade, conforme mostra a figura abaixo.

Figura 21: construção inicial do Grupo 2

Fonte: próprio autor.

De maneira parecida, o Grupo 4 iniciou a montagem.

Figura 22: construção inicial do Grupo 4

Fonte: próprio autor.

Nota-se que, tanto os estudantes que compõem o Grupo 2, quanto os do Grupo 4, iniciam a construção somente pelos contornos, não se preocupando com o preenchimento da base. Como não houve discussão entre os integrantes, parece que não conseguiram visualizar o que deveria ser construído, buscando inicialmente, introduzir as dimensões de comprimento e largura.

Há como inferir que não produziram significado ao que estavam fazendo, uma vez que Nehring et al. (2010) afirmam que a significação do enunciado ocorre com uma discussão prévia determinada pelas múltiplas vozes dos estudantes, buscando validações de argumentos. Não havendo discussão prévia, os estudantes não conseguiram explicitar os sentidos e significados atribuídos a leitura do problema não gerando a imagem mental para a construção do tanque, observada nos grupos acima citados.

O Grupo 3, após lerem o problema, começaram a discutir sobre a atividade. Encontraram uma maneira de inserir a altura sem mudar as dimensões da base. Levaram aproximadamente dez minutos para terminar. A construção apresentada, ao término da discussão, segue abaixo.

Figura 23: construção final do Grupo 3

Fonte: próprio autor.

Ao me mostrarem a construção, indagaram:

Estudantes P e I:- É isso, Kito? Professor:- Ahhhhh.... O que vocês acham? Estudante Z:- É né. Estudante P:- É, não é? Professor:- Quanto que tem a base? – ao ver que estava correto, continuei: Professor:- Agora pode continuar a responder o questionário

Nesse momento, o Grupo 3 disse em voz alta que a atividade seguinte seria desenhar o tanque. Quando os outros grupos escutaram que o Grupo 3 havia terminado, disfarçadamente, pelo menos um integrante dos outros grupos olhou para a montagem do grupo 3.

Analisando os diálogos dos alunos, foi percebido que o grupo 1 terminou no mesmo momento, conferindo a construção com a do Grupo 3.

O Grupo 2, em que só faltavam as paredes do tanque para terminar, ao observar o Grupo 1, terminou rapidamente sua montagem.

Já no Grupo 4, as alunas observaram a montagem do grupo 3, como na conversa a seguir.

Estudante L:- Como é que tá os dos outros? Estudante T:- Não tem que ver os dos outros, tem que ver o nosso. Estudante L:- Mas ele falou que tem que olhar os dos outros também. Estudante Depois de E. olhar para a montagem do grupo 3. Estudante E:- Já sei como é que é. Colocar dez e dez aqui ó. Estudante L:- Com aquele lá? Estudante E:- Tenta. Em vez desse. Estudante T: Ô saco! Estudante E:- Faz assim ó, você não está escutando, põe esses dois desse lado e a gente monta aqui os dez. Então passa esses daqui para lá... Estudante L:- Daí coloca esse pau aqui ó. Estudante E:- Mas daí não vai ficar doze. Estudante L:- É doze? Estudante E:- 22 de... É....12 de largura, por isso que ele tem que ficar.

As integrantes do Grupo 4 ainda discutiam como ser inserida a altura, mas já com a base preenchida, só faltando as paredes do tanque. Ainda demoraram um pouco mais do que os demais grupos para terminarem as respectivas construções.

Analisando o vídeo, estranhamos a princípio a “cola” do grupo 4, mas observamos, através das filmagens e do áudio que, ao verificar as montagens dos outros grupos, foram desencadeadas discussões entre os integrantes, diferentemente do início da construção, o que nos leva a perceber que não somos os únicos desencadeadores de aprendizagem, mas sim todos os presentes na sala de aula.

Não há como negar que a produção de sentidos e de significados é feita de forma coletiva, muitas vezes sem a necessidade da explicação do professor. Segundo Vigotski (2001), a apropriação de conceitos e de significados, chamada internalização, ocorre da atividade coletiva para individual. Sendo assim, o aluno, “ao colar”, também estará produzindo sentidos e significados sobre os conteúdos matemáticos.

Durante a análise do vídeo, foi percebido que o Grupo 2 somente resolveu preencher a base depois de olhar o Grupo 1. Esse olhar não foi explícito, mas sim, discreto e rápido, com a intenção de ninguém perceber a “cola”.

O aluno R, pertencente ao Grupo 3, nunca conseguiu desenvolver seu conhecimento na Matemática, devido à dificuldade em operações básicas, tais como, adição e multiplicação. Sempre tivemos dificuldade em avaliar seu desenvolvimento, já que, em qualquer avaliação, era preciso a utilização das operações básicas.

Apesar disso, durante a análise, foi observado que o estudante R estava envolvido na atividade junto aos colegas, tendo sido ele o construtor do tanque. Esse envolvimento mostrou a produção de sentidos e de significados deste aluno, em relação à visualização e propriedades das figuras planas existentes, pois para esta realização estudante R deveria entender as ideias que vinham dos colegas para resolver o problema.

Esse envolvimento, que não ocorria durante as aulas foi uma surpresa, já que buscávamos, desde o início da primeira série, atividades que conseguissem atingir o estudante R para seu desenvolvimento.

5.1.2. Episodio 2: Construção do tanque

Logo após o término da construção, os estudantes do Grupo 3 começaram a ler o restante das questões. Segue abaixo a articulação do Grupo 3 para a realização do desenho.

> Estudante P e Z juntas:- Desenhe o tanque na folha.
> Risos de todos os integrantes do Grupo 3.
> Estudante Z:- Nossa mano, é tipo aquelas coisas do CDCC.
> Estudante R:- Três D, essas coisas assim?
> …
> Estudante Z:- Mas como eu vou desenhar isso?
> Professor:- Esse que é o lance para você conseguir visualizar, quando eu desenhar na lousa, você saber que é um tanque desse. Pensem em perspectiva gente, pensem em perspectiva.
> Estudante Z:- Mas é só fazer um quadrado. Faz isso ao contrário ó.
> Estudante I:- Faz um retângulo.
> Estudante R:- Gente, como eu vou desenhar isso?
> Estudante Z: Ó faz assim ó, ixi, não sei. Pera aí, eu vou estar olhando de que jeito?
> O grupo fica em silêncio durante alguns minutos, desenhando e conversando banalidades.
> Estudante Z:- Não é um negócio mais ou menos assim? Tem um troço errado aqui, mas é mais ou menos assim.
> Estudante P:- Vai riscando aí, e vê se sai alguma coisa.
> …
> Estudante R para Estudante P:- Você acha que parece um pouco? Achei que está torto, você não acha que está torto?
>
> Estudante P não responde, pois está concentrada no seu desenho.
> Estudante P:- Kito, você quer que o desenho seja tipo transparente?
> Professor:- Eu só quero saber se você consegue desenhar o tanque. Só não precisa fazer os quadradinhos.
> Estudante P:- Eu nem pretendia fazer isso.
> Nesse momento, Z termina um esboço e mostra ao grupo.
> Estudante Z:- É mais ou menos isso galera, só não sei desenhar a parte de trás. Como desenha a parte de trás? A gente olha assim?

Algo interessante acontece na socialização. Ao terminar o esboço, a estudante Z ajuda o estudante R, para que ele também tenha a oportunidade de explicitar suas idéias, indicando qual o sentido que está dando ao seu desenho. Isso ocorre na continuação da discussão do grupo.

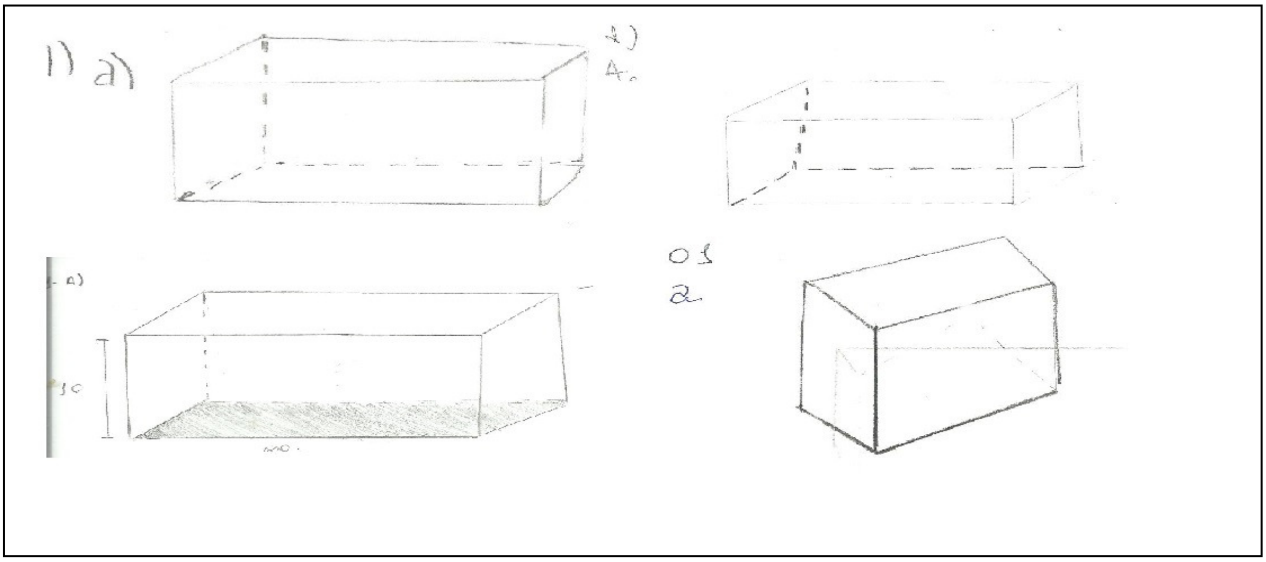
Estudante R:- É só fazer este traço assim? É que esse traço aqui precisa ser mais para frente né?
Estudante Z:- É que esse traço aqui precisa encontrar com esse traço aqui ó. Então apaga isso, primeiro faz esse traço reto, até encaixar com esse, e daqui você puxa esse. Entendeu?
Estudante R:- Entendi.
Depois de tentar desenhar, o estudante R comenta.
Estudante R:- Ah...Deu errado.
Estudante Z:- Lógico que deu errado, por isso eu falei para você apagar.
Estudante R:- Vou apagar.
Estudante Z:- Ó vai ficar assim ó, não parece mais simétrico?
Estudante D:- Ou Z, faz esse desenho para mim.
Estudante Z:- Faz assim ó, pega esse daqui aqui e liga até algum ponto aqui reto. Liga até aqui mais ou menos, desenha até aqui.
Estudante R:- Para ligar…
Estudante Z:- Isso.
Estudante R:- Pronto.
Estudante Z:- Agora, você esse daqui aqui e liga um ponto reto para cortar aqui. Faz tracejadinho. Isso. É que está torto seu desenho, você viu?
Estudante R:- Uhum.
Estudante Z:- Aí você puxa isso aqui. Entendeu? É porque se ficar certo, fica meio que simétrico, entendeu? Só que aqui você fez isso daqui, muito pequeno, e muito largão.
Estudante R:- Vou apagar então.
Neste momento o estudante I, interfere na conversa.
Estudante I:- Não precisa ser igualzinho não.
Estudante Z:- Não, não, é que ele estava perguntando como é que faz…
Estudante R:- Ah, não precisa ser igualzinho?

O estudante I mostra seu desenho para o estudante R, e a estudante Z, utilizando o desenho já feito, explica fazendo a relação entre o desenho e o tanque, mostrando as bases e as faces. Depois da explicação de Z, o estudante R apagou o desenho e o refez.

Enquanto acontecia essa discussão, a estudante P e o estudante I terminaram a parte de trás do desenho, complementando o que a estudante Z havia feito. Assim, todos terminaram o desenho, como mostra a figura abaixo.

GRUPO 3

Figura 24: desenhos do Grupo 3



Fonte: próprio autor.

Analisando os desenhos do Grupo 3, foi obervado que a orientação da estudante Z foi de grande valia para R. Em primeiro lugar que, apesar dos pedidos do estudante R para que Z fizesse o desenho para ele, ela não o fez. Tentou explicar as relações entre o desenho e o tanque, fazendo com que R desenhasse. Essa socialização foi positiva para R, já que, como relatado anteriormente, possui dificuldade na disciplina de Matemática e sempre procurava copiar as atividades em vez de fazê-las.

Durante a realização do desenho, sua participação ficou mais explícita, pois tinha necessidade da resolução individual e não no grupo. Procurou o caminho mais curto, que era algum integrante desenhar por ele, mas foi sem sucesso. Apesar da tentativa de apagar o desenho anterior, conseguimos ver os contornos feitos anteriormente pelo estudante R, ainda que seu desenho localizado no canto superior direito da figura acima, tenha revelado a produção de sentidos e significados por parte do estudante R, já que o desenho final ficou próximo da realidade de um tanque.

Há de se considerar que, ao que tudo indica, as produções de sentidos e de significados dos estudantes, nesse momento, estão relacionadas à visualização, uma vez que o estudante R, auxiliado pelo tanque feito com material manipulável e o desenho feito da estudante Z, pode ter gerado uma imagem mental, conforme indica os estudos de Kaleff (2003), iniciando um processo de raciocínio visual o qual representou por meio do desenho.

Dessa forma, há de se concordar com Kaleff (2003) quando afirma que o que pode ter ocorrido nesse momento foram passos preparatórios para a formalização do conceito, uma vez que o estudante conseguiu alcançar os níveis de visualização, análise e a organização informal, observados na discussão acima e também pelo desenho feito pelo estudante.

Vale a pena ressaltar ainda que o CDCC, sigla mencionada pela estudante Z no terceiro parágrafo no início da discussão, é o Centro de Divulgação Científica e Cultural (CDCC), vinculado à Universidade de São Paulo (USP), cujo objetivo principal é o estabelecimento de vínculo entre a Universidade e a Comunidade, facilitando o acesso da população aos meios e aos resultados da produção científica e cultural da Universidade.

Para tanto, promove e orienta atividades que visam despertar nos cidadãos, em especial nos jovens, o interesse pela ciência e pela cultura, além de colaborar na formação dos estudantes de Licenciatura em Ciências Exatas do Campus da USP de São Carlos, repassando a eles a experiência que surge da execução de seus projetos.

Aos professores do ensino fundamental e médio, o CDCC oferece cursos e orientação específica nas áreas de química, física, matemática, biologia, educação ambiental e astronomia, o que possibilita a atualização de seus conhecimentos, uma vez que torna disponíveis materiais instrucionais, equipamentos e a capacidade científica e tecnológica da Universidade de São Paulo. Assim os professores tem a oportunidade de realizar pesquisas para o desenvolvimento e aplicação de métodos alternativos de ensino.

Os Grupos foram terminando a montagem do tanque e começaram a desenhá-lo. A princípio ocorreu uma discussão entre os alunos do Grupo 2, que indicou as dúvidas que os estudantes têm ao tentar colocar uma figura tridimensional no papel.

> Estudante N:- Por que você está fazendo dois quadradinhos LT?
> Estudante LT:- Só para saber o tamanho do desenho.
> Estudante N:- Tipo isso?

Estudante LT e Estudante B olham para o desenho e não falam nada. Estava desenhado como se o observador estivesse em cima do tanque. Logo, só tinha desenhado um retângulo.

A resposta da estudante N não estava errada, já que a questão pedia que se desenhasse o tanque na folha e, se todos olhassem o tanque de cima, veriam que o desenho havia sido feito por ela.

Diante dessa situação, foi explicado para a turma inteira que, o desenho teria de ser de forma que as três dimensões ficassem visíveis. Para isso, foi esclarecido que era necessário olhar para o tanque um pouco de lado e assim, observar as três dimensões do desenho.

Depois da orientação para que o desenho tivesse as três dimensões visíveis, os estudantes dos Grupos 1 e 2 se movimentaram para conseguir enxergar melhor o tanque para desenhá-lo.

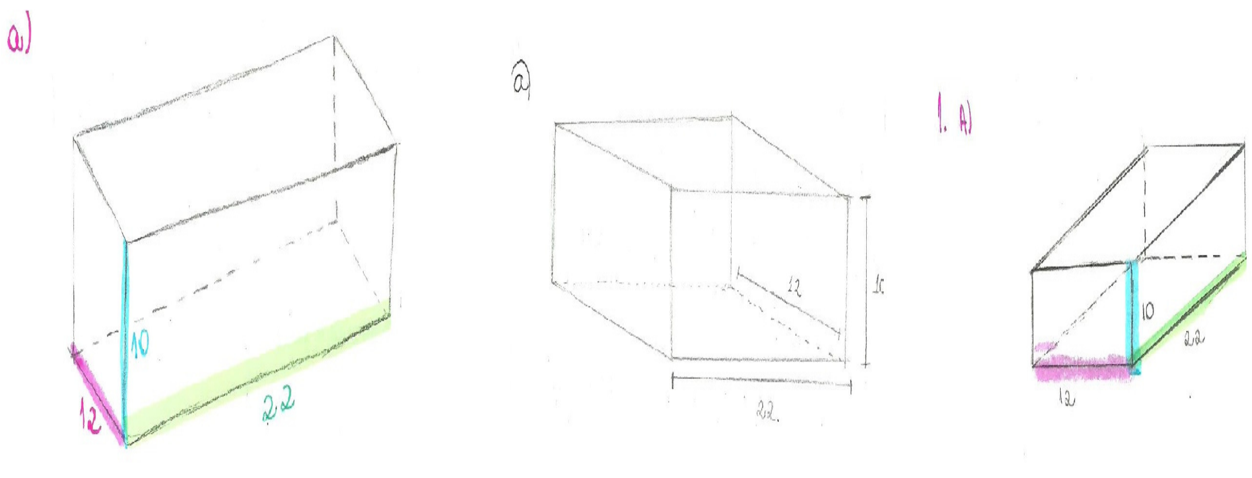
No Grupo 1, a integrante J terminou o desenho rapidamente e começou a discutir com os colegas, questionando se seu desenho estava certo ou não.

Estudante J:- Kito, vem dar uma olhada....
Estou ocupado com outro grupo e J questiona seus colegas.
Estudante J:- Parece um tanque isso?
Estudante A:- Parecendo um quadrado.
Estudante J:- É, mas um cubo não é desse jeito né gente. Dá para perceber nitidamente
Estudante A:- Mas não parece um retângulo.
A aluna J observa o desenho por alguns minutos.
Estudante J:- Ah...
Estudante M:- Ah gente, fazer esses trecos não é comigo viu.
Estudante J:- É que vocês não estão olhando direito entendeu?
Estudante A:- J, não parece o negócio que a gente fez.
Estudante A e M:- Risos.
Estudante J mostra o desenho para B, integrante do outro grupo.
Estudante J:- Parece?
Estudante B:- É...
Estudante A:- É?
Estudante J:- Viu, ele tem outra perspectiva.
Estudante LT:- Deixa eu ver.
Estudante J mostra o desenho para LT.
Estudante LT:- Tá certo.
Estudante J:- Tem que pegar daqui pra cá tá, tem que pegar daqui pra cá.
Estudante M:- Nossa! A J fez o desenho rapidinho.
Estudante J:- Ô Kito! Dá uma olhada no desenho. Fala o que você acha.
Professor:- Ficou bom até.

Depois da noss aprovação no desenho da estudante J, as outras integrantes do grupo, apesar de no primeiro momento não acharem que estava certo, interagiram com J para uma explicação e assim terminar o desenho, seguindo o padrão da estudante J. Seguem abaixo os desenhos do Grupo 1.

GRUPO 1

Figura 25: desenhos do Grupo 1



Fonte: próprio autor.

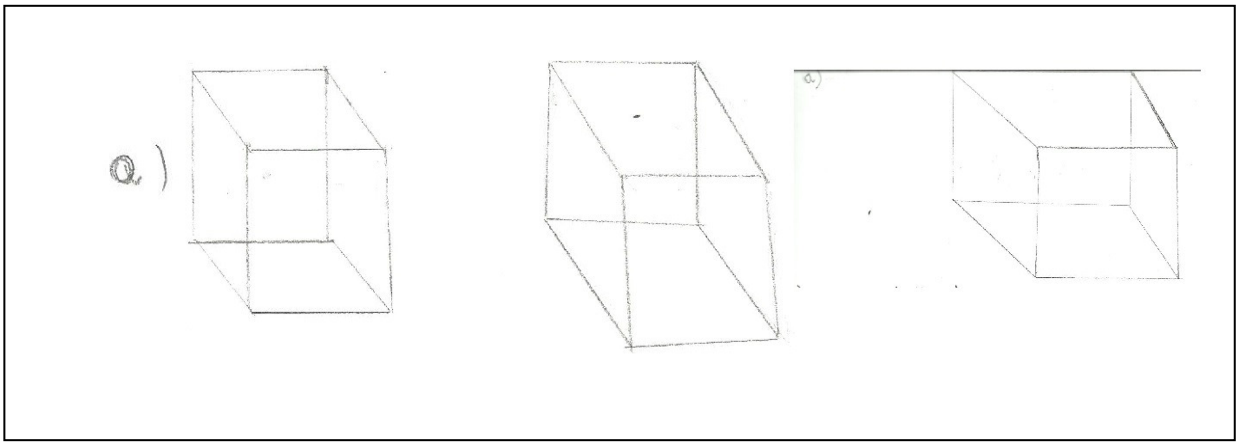
Os desenhos do Grupo 1 parecem indicar que os alunos representam o que não se pode ver na figura, através da linha pontilhada. Essa representação mostra como a visualização espacial faz parte do grupo, abstraindo-se a parte que não se pode enxergar do desenho.

Vale a pena ressaltar que, após a mediação com o Grupo 2 transcrita acima, relacionando o tanque com o cubo, todos os desenhos se parecem muito com um cubo. Somente a estudante LT (desenho central a seguir) conseguiu relacionar o cubo com o objeto do contexto do problema, indo além, e teve confiança nos seus argumentos para expor aos seus colegas.

Os sentidos e os significados produzidos por ela podem ser analisados a partir dos estudos Moysés (2001), afirmando em seus estudos que a comunicação se estabelece pela linguagem a partir de produção de sentidos e negociação de significados.

Seguem abaixo os desenhos do Grupo 2.

Figura 26: desenhos do Grupo 2



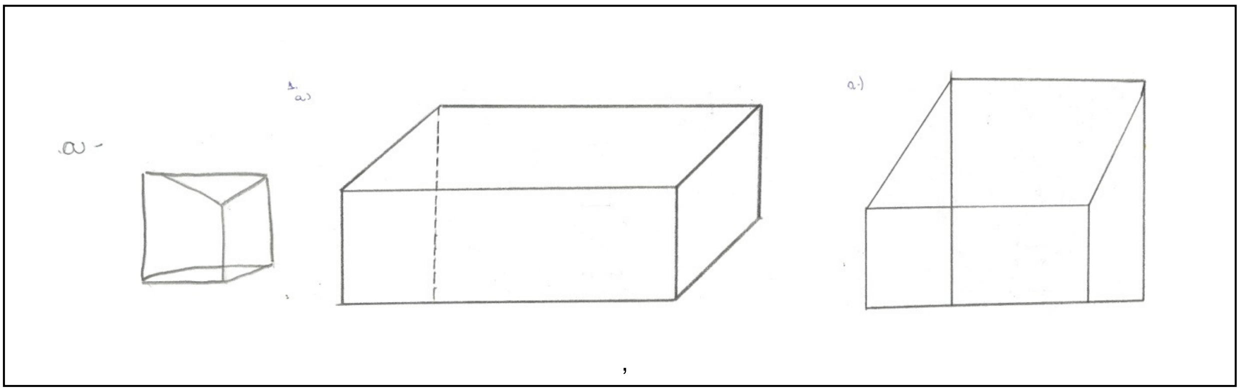
Fonte: próprio autor.

O Grupo 4 nos chamou para analisar os desenhos feitos pelas estudantes. O desenho mostrado não possuía os lados opostos paralelos.

Professor:- Mas pera lá, tá tortinho aqui e precisa ser paralelo. Entendeu?
Estudante E:- Mas tá torto.
Estudantes T e L:- Risos
Professor:- Esse é o problema E.

Seguem abaixo os desenhos do Grupo 4.

Figura 27: desenhos do grupo 4



Fonte: próprio autor.

No primeiro desenho, as bases são triangulares e não retangulares. No segundo, houve somente um problema relacionado com a parte obscura do desenho, tendo sido desenhado somente o contorno da altura sem contornar a base. O terceiro é da aluna E, cuja fala foi transcrita acima. Apesar da mediação feita pelo professor, não houve alteração no desenho.

As dúvidas que os estudantes apresentaram, quando se considera a análise e a ordenação, nos mostraram a necessidade de orientar melhor, para que conseguissem visualizar as propriedades dos objetos, fazendo as relações necessárias, explicitando, dessa forma, suas produções de sentidos e de significados relacionados à representação do objeto.

Sobre o papel do professor quando está desenvolvendo atividades de ensino com os estudantes, Moura et al. (2010, p. 216) afirmam em seus estudos que

> ...a atuação do professor é fundamental ao mediar a relação dos estudantes com o objeto do conhecimento, orientando e organizando o ensino. As ações do professor na organização do ensino devem criar, no estudante, a necessidade do conceito, fazendo coincidir os motivos da atividade com o objeto de estudo. O professor, como aquele que concretiza objetivos sociais objetivados no currículo escolar, organiza o ensino: define ações, elege instrumentos e avalia o processo de ensino e aprendizagem.

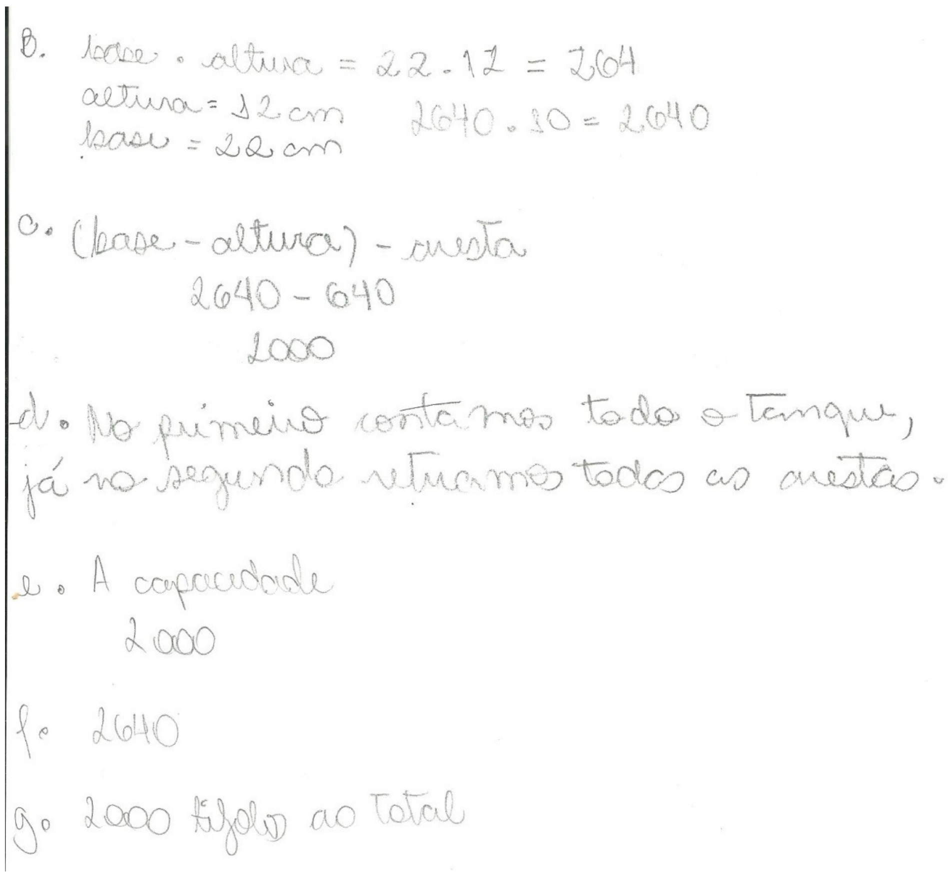
Percebemos que, quando o professor não consegue organizar o ensino de tal maneira que o estudante tenha necessidade do conceito, as atividades não produzem sentido nem significado para os alunos, já que os poliedros desenhados não representam o poliedro real construído pelos alunos.

5.1.3. Episódio 3: Diferença entre volume e capacidade

Após a construção e o desenho do tanque contruido com material dourado, o restante da atividade tinha como objetivo convidar alunos estudantes a indicar os sentidos e os significados que estavam dando para a diferença entre capacidade de um sólido geométrico e seu volume.

O Grupo 3, que estava realizando as atividades rapidamente, foi o primeiro grupo a realizar articulações para responder as atividades. Seguem abaixo as respostas da estudante Z, idênticas às dos outros estudantes do grupo.

Figura 28: término da atividade de Grupo 3


b. base . altura = 22 . 12 = 264
altura = 12 cm   2640 . 10 = 2640
base = 22 cm

c. (base - altura) - aresta
2640 - 640
2000

d. No primeiro contamos todo o Tanque, já no segundo retiramos todas as arestas.

e. A capacidade
2000

f. 2640

g. 2000 tijolo ao Total

Fonte: próprio autor.

Como o Grupo 3 estavam obtendo produções de sentidos e de significados, foram analisadas as discussões dos alunos para a resolução das atividades.

Logo no início, os alunos discutem como calcular o item (b).

Estudante I: Você viu o que está falando na (b)? Estudante Z:- Altura mais comprimento. Quanto é 10 vezes 22? Estudante I:- Kito, é só fazer 10 vezes 22? 220? Professor:- Discuta com o seu grupo antes. Nesse momento as estudantes P e Z repondem. Estudante P e Estudante Z juntas:- É base vezes altura. Não é? Professor:- Pensem na solução, discuta com o grupo e indique a resposta na folha. Não ficarei respondendo assim.

Depois disso, os alunos começaram a discutir.

Estudante I:- Acho que é, porque é a área. Estudante Z:- É não é? A área é base vezes altura. Estudante P:- Menos esse negócio aí. Estudante Z:- Menos o quê? Estudante I:- O perímetro. Não é? A estudante Z fica pensando, enquanto o estudante I pergunta a estudante P. Estudante I:- Ou P. Base vezes altura menos o perímetro? Estudante P:- Por que o perímetro? Estudante I:- Perímetro não é a soma de tudo isso aqui ó? 22 mais 10 mais 12 – O estudante I aponta as paredes do tanque. Estudante Z:- É a soma dos lados. Mas você não precisa saber disso agora. Estudante P:- É. Estudante I:- Mais ele que saber o que tem lá dentro. Entendeu? Estudante Z:- Ah! Depois. Estudante P:- Agora ele quer saber tudo. Estudante I: Tudo junto? Estudante Z:- Não!! É!! Se completássemos o espaço interior com tijolos, quantos tijolos teríamos no total? Tá vendo? É base vezes altura porque pega tudo. I:- É base vezes altura. Entendi.

Analisando essa fala do Grupo 3, foi percebido que os estudantes tentavam, a partir dos sentidos individuais, dar significados para os conceitos de perímetro e área. Houve muita discussão sobre estas temáticas, pois o estudante I queria, inicialmente, retirar o perímetro da área da base.

Essa dúvida é resolvida no grupo com a releitura do enunciado. Dá para inferir que, nesse momento, ou seja, durante as discussões, os estudantes apresentaram os sentidos individuais que davam aos conceitos.

A produção de significado ocorreu no momento em que parecem ter chegado a um consenso sobre o que seria perímetro e o que seria volume. A fala do estudante I sintetiza o ocorrido, uma vez que, segundo ele, não havia necessidade de retirar a base e as faces do tanque.

Ao analisar a discussão do grupo, remeto-me a Nehring et al, (2010), que afirmam em seus estudos que no contexto escolar pode ocorrer um tensionamento entre várias linguagens, possibilitando a produção de diferentes sentidos, não só entre docentes e alunos, mas também entre os próprios alunos. É a partir desse momento que os significados aparecem. Isso não quer dizer que os significados produzidos pelos estudantes são os mesmos apresentados nos livros didáticos ou ainda os defendidos pelo professor.

Realçamos que os alunos mostraram que sabiam o que era perímetro e perceberam que, nesse contexto, o conceito não precisaria ser utilizado.

Essa confusão entre perímetro e área é histórica. Baltar[2] apud Henriques (2011), ao estudar a aquisição da relação entre comprimento e área na escola, relata as dificuldades dos estudantes dos anos finais da educação básica. Primeiramente, em reconhecer as medidas de uma figura como um de seus elementos constituintes e, em segundo, em distinguir as medidas de área e de perímetro.

Neste episódio, foi evidenciado o fato de que os aspectos da aprendizagem de diferentes elementos de medida (comprimento, área, etc.) são específicos e diversos entre si; assim, a ideia de área de uma figura plana não é sempre reconhecida como uma característica de tal figura.

---

2 BALTAR, P.M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège.** Tese de Doutorado, 1996. Universite de Grenoble I (Scientifique Et Medicale - Joseph Fourier), U.GRENOBLE I*, França.

Surge outra dúvida no decorrer da discussão.

Estudante Z:- Não é base vezes altura divido por dois?
Estudante I:- Ô Kito. Não é base vezes altura divido por dois?
Estudante I:- Acho que não é. Cento e dez? Não é.
Estudante Z:- Não. Pera. Olha. Não. É base vezes altura.
Estudante Z para estudante P.
Estudante Z:- Quanto deu seu (b) aí?
Estudante I:- A base vale quanto?
Estudante P:- A base é 22. Bê maior vezes bê menor.
Estudante Z:- A base não. É. A base vale 22. E a largura é 12.
Estudante P:- Não, a altura.
Estudante O- Estudante I apontando para o tanque.
Estudante I:- É isso vezes isso. A largura vezes a altura. A largura é a base, não é? Aqui embaixo.
Estudante Z:- ÉÉÉ!!!
Estudante P:- Pera aí Z.
Estudante I:- Pode crê velho!
Estudante P:- A base é 120 não é?
Estudante Z:- É base vezes altura.
Estudante P:- É.

Em seguida, os alunos começam a realizar os cálculos.

Estudante Z:- Agora a (c).
Estudante P:- A altura é 10 não é? É 1200? É isso?
Estudante Z:- Não! Ó, a altura a gente sabe que é 10. A base é 12. Porque a base é isso não é? A base para mim é 22.
Estudante P:- Por que 22?
Estudante Z:- Não, não, a base é isso, então é 12.
Estudante P:- Gente, a base não é 12.
Estudante Z:- Não? A base é o quê?
Estudante P:- A base vai ser… Ele quer saber o número de tijolos que, tipo, fosse inteiro de tijolo, tá ligado?
Estudante I:- É 22.
Estudante P:- Então não é 22, a base vai ser, gente, a base vai ser comprimento vezes a largura.
Estudante Z:- Então qual o comprimento? Então comprimento, a base.
P:- É o comprimento vezes a largura.
Estudante Z:- É, e ele quer saber a base. E a gente não sabe a base.
Estudante P:- A gente tem que fazer 22 vezes 12. Que é o comprimento vezes a largura. Tudo isso vezes 10. Que vai dar o resultado.

Após essa discussão, os alunos fizeram os cálculos para a obtenção do total de tijolos. A estudante P. fez 22 vezes 12 igual a 264, corretamente. Mas ao fazer 264 vezes 10, obteve, erroneamente, 2604. O estudante I chegou em 1200 tijolos como resultado. Então, o estudante I, intrigado, me questiona:

> Estudante I:- Será que é isso mesmo P ? Ô Kito. Chega aí. Primeiro: a área do retângulo é base vezes altura não é?
> Professor:- É.
> Estudante I:- Segundo. A base dele vai ser 22?
> Professor:- Ué, mas vocês não montaram não? Quanto que era a base?
> Estudante I:- 22
> Professor:- Então quanto que é? 22 tijolos.

Vale a pena destacar que não interferimos respondendo a questão, mesmo percebendo que o estudante I estava falando do comprimento, ddeixamos que eles chegassem num consenso.

Continuando.

> Estudante I:- Está vendo P.?
> Estudante P:- I., mas ele quer saber quantos quadradinhos têm ao todo, como se tudo fosse um bloco de tijolo.
> Estudante I:- Você faz 10 vezes 22 dá 220 que é a área. Você não precisa fazer mais nada, é só isso.
> Como a discussão ficou acalorada, interferi:
> Professor:- Cada um tem sua folha por isso. Respondam o que acharem que é correto.
> A estudante P. retoma o enunciado do problema.
> Estudante P:- Se completássemos o espaço interior com tijolos, quantos tijolos seriam necessários…
> Estudante Z:- Então, interior seria a base que é 220. Só que daí a gente conta a parte de fora. Porque é para contar tudo, contando até aqui em cima.
> Estudante P:- 2640 tijolos.
> Estudante Z:- É isso mesmo?
> Estudante P:- Eu acho que é. Base vezes altura vai dar isso.
> Estudante Z:- Não, mas eu tô falando…
> Nesse momento o estudante I interrompe:
> Estudante I:- Sabe qual é outro esquema? Não tem a parte de cima.
> Estudante Z:- Mas tem que ter a parte de cima.
> Estudante I:- Aí tem que fazer menos o total da parte de cima.
> Estudante P:- Não, mas vai ter a parte de cima. Imagina você completando tudo de tijolo.
> Estudante I:- Até em boca? Ah! Pode crê! Se for até a boca vai ter ….
> A estudante Z interrompe:
> Estudante Z:- Vai ter 2640 tijolos.
> Estudante P:- Entendeu?
> Z:- Ah!! Está certo.
> Estudante P:- É tipo você fazer assim. Contar quantos quadradinhos vai ter aqui e multiplicar por 10 que é a altura. São dez vezes isso aqui. Entendeu?
> Estudante Z:- Pode crê! Está certo. Cada uma altura tem xis quadradinhos.
> Estudante P:- Imagina dez disso aqui um em cima do outro. É isso que ele quer saber, quantos quadradinhos têm ao todo.
> Estudante Z:- Que é igual a quanto?
> Estudante P:- 2640.

Analisando essa discussão, observa-se claramente a construção do conhecimento no coletivo. O conhecimento que possuem e que adquiriram em diversos momentos, quando se explicita é essencial para que ocorra a aprendizagem. Os estudantes foram dando sentidos para a resolução da atividade, relacionados a conhecimentos que já tinham adquirido.

Nessa perspectiva, Coll[3] apud Darsie (1996, p. 49-50),

> A construção do conhecimento na escola supõe assim o verdadeiro processo de elaboração, no sentido que o aluno seleciona e organiza as informações que lhe chegam por diferentes canais, o professor entre outros, estabelecendo relações entre elas. Nesta seleção e organização da informação e no estabelecimento de relações há um elemento que ocupa um lugar privilegiado: o conhecimento prévio pertinente que possui o aluno no momento de iniciar a atividade.

O conhecimento dos estudantes sobre área, perímetro e volume é explicitado durante o desenvolvimento da atividade. Apesar do perímetro não ser necessário na atividade, houve a ideia de utilizá-lo. Embora a ideia de base seja muito utilizada em aulas de geometria, os alunos tiveram dificuldades em trabalhar com ela. Confundiram a base como sendo uma medida linear e não o produto do comprimento com a altura. Uma estudante tinha esse conhecimento e explicou rapidamente para os demais integrantes do grupo.

Os estudantes do Grupo 3 estavam discutindo a questão (c), quando surgiu uma ideia interessante, que pode ser constatada na transcrição abaixo.

Estudante P:- Ué, mas o que será que vai mudar utilizando tijolinhos de água? Estudante Z:- Não muda nada, é a mesma coisa. É como que isso aqui fosse tijolinho de água. Estudante P:- É, mas, não vai mudar nada. Estudante Z:- Não, ó, é o volume.

Nesse momento, o estudante I indica o sentido que está dando a atividade:

[3] COLL, C. **Um marco de referência psicológico para la educación escolar: la concepción construtivista del aprendizaje y de la ensenanza.** In: COLL, C et al. Desarrollo psicológico y educación, II. Madrid: Alianza Editorial, 1990, p. 438-452.

Estudante I:- Ou, vocês estão ligados naquele dois tijolos, aquele grandão, inteiro? Cada um tem quantos naquele? 1000. Cada um tem 1000.
Estudante P:- 1000 o quê? Tem 1000 o quê?
Estudante I:- O grandão, tá ligado o quadradão? Então cada um tem 1000.
Estudante Z:- Porque eleva ao cubo.
Estudante I:- Agora tem que fazer desses aqui.
Estudante P:- Porque cada um tem 1000? Eu ainda não estou entendendo.
Estudante Z:- Porque volume eu sei que a gente eleva ao cubo. Tridimensional.
Estudante I:- Então vai ser 2000 mais…
Estudante A estudante Z interrompe:
Estudante Z:- A gente quer achar tudo, quantos tijolos a gente tivesse se fosse tudo água entendeu? Só que a diferença de ser água você tem que ter o volume.
Estudante I:- Ô Kito. Posso pegar aquele grandão?
Professor:- Qual?
Estudante I:- Aquele lá de 1000.

Entrega-se um cubo de milhar do material dourado. Ao receber, o estudante I me indaga:

Estudante I:- Aqui tem 1000 quadradinhos não tem?
Professor:- Não esquece que há quadradinhos por dentro também.
Estudante I:- É então.
Minha observação gera uma discussão no grupo para verificar quantos quadradinhos possuia o cubo maior.
Estudante Z:- Soma por fora e por dentro.
Estudante P:- Por fora ele tem 1000.
Estudante I:- Não, por fora ele tem 6000. 600 quero dizer. 100 aqui, 100 aqui, nos seis lados há 100.
Estudante P:- Ah, está certo. Deixa eu ver. Imagina um desse. Tem outro? Ô Kito, tem outro desse?
Professor:- Tem.
Estudante P:- Me empresta aí.

O tanque estava desmontado. Os estudantes uniram os dois cubos de milhar, um do lado do outro, e reconstruíram o tanque em volta dos dois cubos e calcularam o total de tijolos obtidos no item anterior. Isso causou um grande desconforto no grupo, já que o item (d), pergunta a diferença entre os raciocínios utilizados. Os alunos questionaram:

Estudante P:- E se não teve diferença entre os raciocínios utilizados?
Professor:- Se não teve diferença escreve: não teve diferença.
Estudante P:- Risos. Pensei que não pudesse escrever isso. Mas a diferença foi que um a gente fez o desenho e na outra foi que a gente fez conta.

O grupo continuou resolvendo o restante da atividade e, ao chegar nos itens (e) e (f), cujas perguntas são sobre capacidade e outra sobre volume, respectivamente, começam a perceber a diferença existente. Vale a pena ressaltar que o princípio do conceito de capacidade foi dado pelo estudante R, já relatado como aluno com muita dificuldade na disciplina de matemática.

Estudante Z:- Determine a capacidade do tanque. O que é capacidade do tanque?
Estudante R:- Não é o tanto que suporta de quadradinhos?
Estudante P:- É, acho que a capacidade do tanque a gente tem que subtrair o que tem fora.

Os alunos, após a mediação, conseguem compreender a diferença entre o volume e a capacidade, conforme indicam os autores Lanner de Moura et al. (S/D), considerando-se que a capacidade é a quantidade interna que o tanque suporta, enquanto o volume é o espaço total que pode ser ocupado pelo objeto. Realizaram os cálculos retirando somente as paredes do tanque, esquecendo-se da base. O resultado encontrado foi 2000 tijolos.

Depois de encontrado o valor pelos cálculos, o estudante I começa:

Estudante I:- Cara, era muito óbvio. Sabe por quê? Porque a gente tinha o tijolão e a gente fez isso com o tijolão. A gente colocou os dois tijolão e só contornou.
Estudante Z:- Putz, e a gente ainda contou os quadradinhos.

Quando estava sendo analisada as respostas dos estudantes, ficamos chateados pelo fato de a resposta do Grupo 3 estar errada. Durante o processo, havíamos percebido a participação com atenção nos sentidos que explicitavam e esperavámos que a resposta em relação ao cálculo, estivesse correta. Analisando as falas dos estudantes, percebe-se que eles produziram sentidos e significados no que diz respeito à diferença entre volume e capacidade, relacionando o cubo de milhar do material dourado, que não poderia ser utilizado.

Com isso, os estudantes conseguiram relacionar o cubo de milhar com a capacidade do tanque. Houve a explicitação do significado, o qual teve origem a partir dos sentidos individuais. Pode-se afirmar, a partir dos estudos de Madruga[4] apud Darsie (1996, p. 49), que

> Aprendizagem significativa se distingue por duas características, a primeira é que seu conteúdo pode relacionar-se de um modo substantivo, não arbitrário, ao pé da letra, com os conhecimentos prévios dos alunos, e em segundo é que este há de adotar uma atitude favorável para tal tarefa, dotando de significado próprio os conteúdos que assimila.

Para Darsie (1996), aprender um conteúdo implica atribuir-lhe um significado construindo um modelo mental do mesmo. Esse episódio lembra de uma vivência da orientadora como professora da educação básica. O tema da aula seguinte era fuso esférico, e a orientadora pediu que os alunos trouxessem uma mexirica para a aula seguinte. Utilizando a analogia entre o fuso esférico e o gomo da mexerica, a professora conseguiu que os alunos obtivessem uma aprendizagem significativa. Fato comprovado anos depois, quando num encontro casual com um aluno, ele recordou exatamente dessa analogia e da fórmula do volume da esfera.

Pode-se inferir ainda que, durante a Atividade 1, os alunos desenvolveram a visualização espacial, compondo os cubos do material dourado como unidade de medida. Concordo com Passos (2000, p.81), quando afirma em seus estudos que

> Os diferentes tipos de visualização que os estudantes necessitam, tanto em contextos matemáticos, quanto em outros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais, de visualizar informação espacial e quantitativa e interpretar visualmente informação que lhe seja apresentada, de rever e analisar situações anteriores com objetos manipuláveis.

Observou-se que, com o material manipulável, os alunos tem visualização melhor para que possam explicitar os sentidos e os significados que dão aos objetos, manipulando o material dourado, compondo e decompondo o tanque proposto na atividade.

---

[4] MADRUGA, J. A. G. **Aprendizaje por descubrimiento frente a aprendizaje por recepción: La teoria del aprendizaje verbal significativo**. In: COLL, C et al. Desarrollo psicológico y educación, II. Madrid: Alianza Editorial, 1990, p. 81-89.

Analisando a atividade de forma geral, é entendido que foi possível promover momentos em sala de aula em que os estudantes pudessem explicitar as suas dúvidas e os sentidos e significados que vão dando aos conteúdos matemáticos, enquanto estudam. Ou seja, parece que os estudantes se envolveram com as atividades de ensino, uma vez que, segundo Moura (2000, p. 35)

> A atividade é do sujeito, é problema, desencadeia uma busca de solução, permite um avanço do conhecimento desse sujeito por meio do processo de análise e síntese e lhe permite desenvolver a capacidade de lidar com outros conhecimentos a partir dos conhecimentos que vai adquirindo à medida que desenvolve a sua capacidade de resolver problemas. A atividade é desse modo um elemento de formação do aluno e do professor

Durante a análise do movimento ocorrido em sala de aula, foi percebido também que o conhecimento prévio do aluno parece ser essencial para o desenvolvimento da atividade orientadora de ensino.

Segundo Driver[5] apud Darsie (1996, p. 50), “O que aprende chega à classe com ideias prévias que necessitam ser levadas em conta, posto que influem nos significados que se constroem nas situações de aprendizagem”.

Na aula seguinte, antes da atividade 2, foi devolvido as atividades realizadas para os alunos para que pudéssemos ser discutidas as questões das aula anterior. Para a discussão da diferença entre a capacidade e o volume do tanque, foi colocado os dois cubos de milhar dentro do tanque, mostrando para os estudantes que uma linha dos cubos ficava “para fora” do tanque, como segue na transcrição abaixo.

[5] DRIVER, R. **Um enfoque construtivista para el desarrollo del currículo em ciências**. Ensenanza de las ciências, v.6, n.2 , p.109-120, 1988.

Professor:- Colocamos o cubo grandão dentro do tanque, e verificamos que há um transbordamento, pois temos uma parte do cubo grande que fica para fora do tanque.
Estudante I:- Ahhhhhh!!!! Tem que retirar!!!!
Professor:- Quanto que transbordou?
Estudante T:- Uma linha só!
Professor:- E quantos tijolinhos possui essa linha?
Estudante B:- Cem, mas como são dois cubão, então são duzentos tijolinhos.
Estudante N:- Ahhhhhhh!!! Entendi!!
Estudante I:- Não acredito que a gente não viu isso!!! O resultado é 1800!!!
Professor:- De muitos grupos deu 2000 tijolinhos.
Estudante M:- Ahhh!!! A gente subtraiu a quantidade errada de cubos A!
Professor:- Então a capacidade do tanque é de 1800 tijolinhos. Quem chegou em 2000 tijolinhos, não subtraiu a base do tanque.
Estudante Z:- Pode crê!!!
Professor:- E o volume do tanque?
Estudante I:- 2640 tijolinhos.
Professor:- Então turma, qual a diferença entre capacidade e volume?
Estudante B:- A capacidade é o que cabe dentro e o volume é o espaço que ele ocupa.

Como exemplo, foi mostrado um paralelepípedo maciço e perguntado qual era a capacidade daquele poliedro.

Professor:- Qual é a capacidade disto aqui?
Estudante B:- Não tem capacidade.
Professor:- Por quê?
Estudante I:- Porque não tem como colocar nada dentro.
Professor:- Então quando não tem como colocar nada dentro, não possui capacidade, mas possui o volume, que é quantidade de espaço que ele ocupa. A medida de capacidade que você pode encher é a medida utilizada em nosso cotidiano. Quais são as medidas de capacidade?
Silêncio.
Professor:- Quando vocês pegam um suco, quanto tem o suco?
Estudante L:- 250 ml.
Professor:- É um exemplo de medida de capacidade. Mas na nossa geometria espacial utilizamos muito centímetros cúbicos, metros cúbicos, que são unidades de medida de volume, que é a quantidade de espaço ocupado pelo objeto. Multiplicando as dimensões teremos centímetro por centímetro por centímetro, chegando a centímetros cúbicos. Quando falamos de capacidade, temos litros, decilitro, mililitros, e assim por diante.
Estudante L:- Ah! Entendi!
Professor: - O que acontece quando a gente elimina a linha de dentro?
Estudante B:- Quando a gente elimina a aresta de dentro do tijolo, a gente vai ter que a capacidade vai ser igual ao volume?
Professor:- Isso!!!

Analisando a discussão, foi percebido a produção de sentidos e de significados por partes dos alunos, já que, segundo Moysés (2001), compartilhar os significados é fundamental para que haja compreensão das relações interpessoais, estabelecendo-se a comunicação através da linguagem a partir da produção de sentidos e negociação de significados.

5.2. Produção de sentidos e de significados sobre o cálculo de diagonais

Foi dividida esta atividade em dois episódios de ensino: 4) Cálculo da capacidade do tanque, em litros; e 5) Cálculo das medidas das diagonais das faces laterais do tanque, assim como o cálculo da medida da diagonal do tanque.

Vale a pena inferir que, nessa atividade, houveram problemas na gravação dos áudios dos Grupos 2, 3 e 4. No Grupo 3, a bateria do celular que estava gravando o áudio acabou logo no início da atividade, sem que os alunos percebessem, e, nos Grupos 2 e 4, a gravação não ficou nítida para que fosse possivel a transcrição. Algumas falas foram transcritas por meio do vídeo gravado

Houve também, duas faltas nessa atividade: a estudante P do Grupo 3, tendo sido substituída pela estudante LM, faltante na atividade 1; e a estudante J do Grupo 1.

5.2.1. Episódio 4: Cálculo da capacidade do tanque

Solicitou-se novamente, que os alunos reconstruíssem o tanque para a realização da atividade 2. A questão, como mostrada no tópico 4.3, era o cálculo da capacidade do tanque em litros.

També foi pedido aos alunos que considerassem a aresta do tijolo medindo um centímetro. Foi permitida a utilização da internet ou do celular para a pesquisa da transformação de unidade.

As integrantes do Grupo 1 iniciaram a discussão para a resolução do problema proposto.

Estudante A:- Então vai ser 22 centímetros de comprimento, 10 de altura... Estudante M:- Não é mais fácil fazer assim? A gente tem o total de tijolos em centímetros, consequentemente a gente tem o total em centímetros, não é? Estudante A:- É. Estudante M:- Que um tijolo é um centímetro, então a gente só passa essa quantidade para litros. Estudante A:- Difícil Estudante M:- Então, não precisa fazer o desenho. Estudante A:- Eu só fiz para ilustrar. Para tirar da minha mente.

Após o debate inicial, as estudantes calcularam a capacidade do tanque em centímetros, encontrando o valor de 1800 tijolos; consequentemente, 1800 centímetros cúbicos. Os estudantes não encontraram este valor na atividade 1, porém, após a discussão feita antes da atividade 2, os mesmos produziram sentidos e significados, evidenciados na obtenção correta da capacidade do tanque.

A discussão entre os estudantes continua.

Estudante A:- Como passar de centímetro para centímetro cúbico?
Estudante M:- Litro cúbico, não é?
Estudante A:- É litro?
Estudante M:- É. Procura conversão de unidades aí.
Estudante A:- Será que tem?

Nesse momento, os estudantes vão pesquisar a transformação de unidades.

Estudante A:- Será que é só isso?
Estudante M:- Acho que sim. Olha, mas a gente achou em centímetros né?
Estudante A:- É.
Estudante M:- Agora temos que passar para litros ainda.
Estudante A:- Tem que fazer a conversão.

As estudantes tiveram dificuldades na pesquisa; então, perguntaram a estudante N, do Grupo 2.

Estudante M:- N., vocês acharam como que passa?
Estudante N:- Um litro é.... Um centímetro cúbico é igual a 0,001 litros.
Estudante A:- Mas precisamos transformar o centímetro para centímetro cúbico primeiro. Porque isto aqui está em centímetro e precisamos passar para centímetro cúbico.
Estudante M:- Aqui ó, centímetro para centímetros cúbicos.
Estudante A:- Dá centilitros. Nossa!!!

As estudantes demoram um tempo procurando a transformação de centímetros para centímetros cúbicos. Não obtiveram a resposta na pesquisa, o que fez com que elas desconfiassem que houvesse algo errado, perguntando a outros grupos.

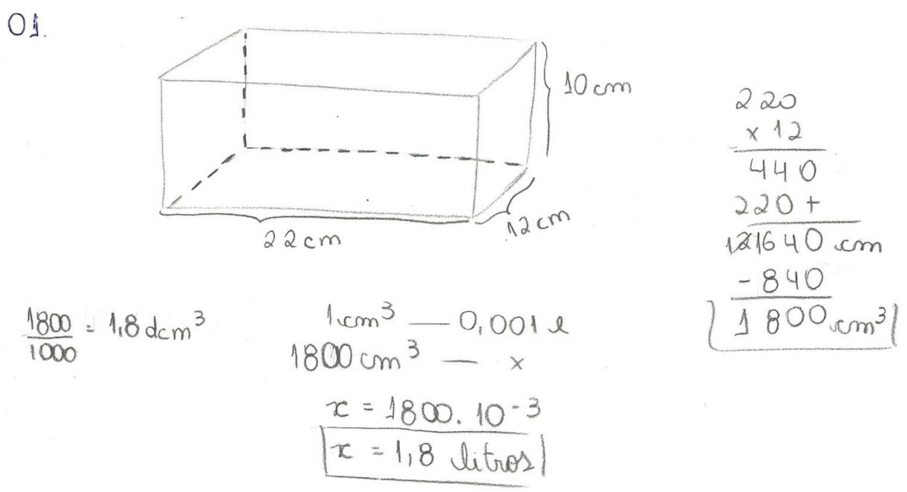
Depois dessa discussão entre os grupos, os alunos do Grupo 1 chegam ao resultado esperado de 1,8 litros.

Estudante M:- Tem certeza A., de que precisa passar aqui primeiro para centímetro cúbico? Ou é só elevar isto aqui ao cubo? Estudante A:- Eu acho que não. Estudante M:- Vamos perguntar para quem já conseguiu, que está difícil. Ô LM, como é que passa de centímetros para centímetros cúbicos? Estudante LM:- Como assim? Ao achar os 1800 eles já estão em centímetros cúbicos porque você esta multiplicando centímetro vezes centímetro vezes centímetro que dá centímetros cúbicos. Daí você faz uma regra de três e acha a quantidade em litros. Estudante M:- Valeu. Estudante A:- Deu quanto o deles? Estudante M:- 1,8 litros.

Analisando esta conversa, concordo com Moura (2010), quando afirma em seus estudos que a solução da situação-problema é realizada no coletivo, havendo compartilhamento das ações para essa resolução. Consideramos que foi o que ocorreu neste episodio.

Nessa atividade, o compartilhamento ficou bastante evidente, pois houve troca de informações e resoluções, entre todos os grupos, negociando significados e produzindo sentidos e, assim, todos encontraram a solução como mostrada abaixo.

Figura 29: cálculo do Grupo 1 da capacidade de tanque em litros



Fonte: próprio autor.

5.2.2. Episódio 5: Cálculo das diagonais

Após o término da primeira questão, os estudantes foram resolver o restante da atividade.

> Estudante A:- O que é esse negócio de dobra?
> Estudante M:- Não sei. Ô Kito, o que é esse negócio de dobra aqui?
> Professor:- Escolham uma dobrinha superior, vamos supor que vocês escolham essa dobrinha, eu quero a distância, na unidade de medida de tijolo, daqui até aqui, imaginando uma linha passando por dentro, daqui até aqui e daqui até aqui.

Nesse momento, foi feita a mediação para que os alunos entendessem o significado de dobra, que era o vértice do prisma, e visualizassem as diagonais das faces do tanque, assim como, a diagonal, para que conseguissem a produção de sentidos, visualizando triângulos retângulos e consequentemente, a utilização do teorema de Pitágoras para obter as diagonais.

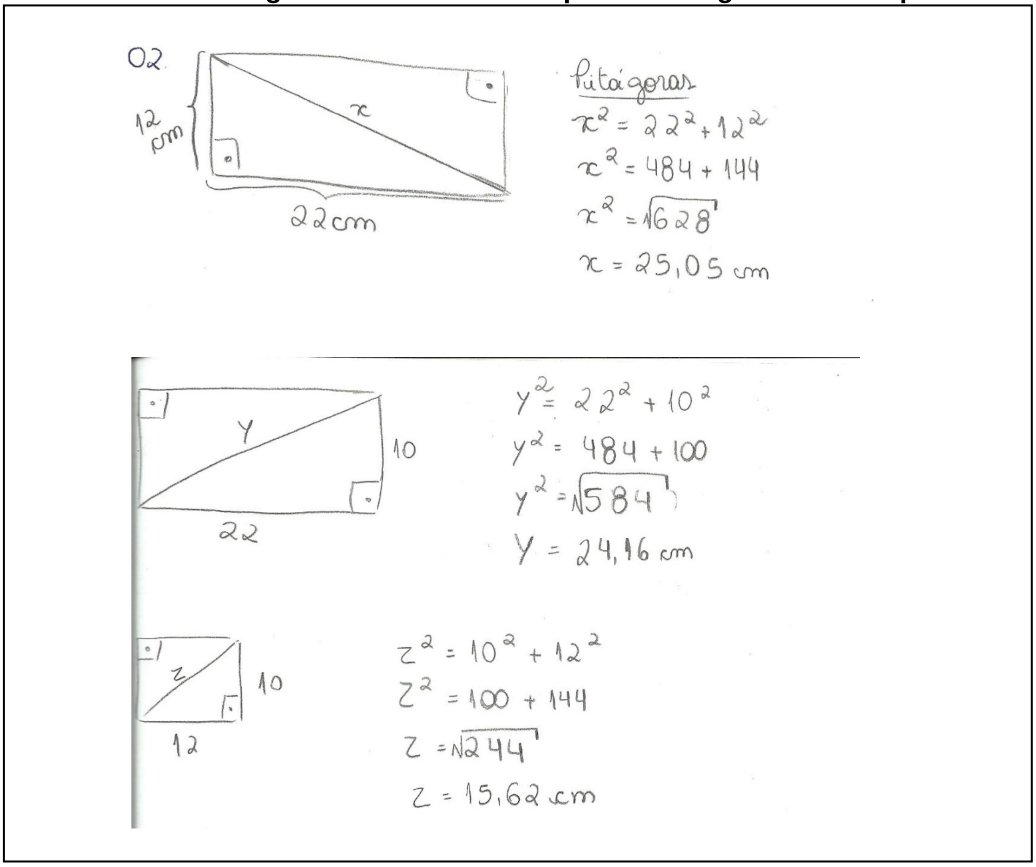
> Estudante M:- O que a gente vai achar primeiro com Pitágoras?
> Estudante A:- A hipotenusa.
> Estudante M:- Ah!
> ...
> Estudante A:- Aí vai fazer dez por doze também?
> Estudante M:- Acho que sim. Então vão ser três Pitágoras que a gente tem que fazer.
> Estudante A:- Tem que dar quatro, já que a base tem quatro dobras.
> Estudante M:- Qual seria a quarta?
> Estudante A:- Será que daqui desta ponta até aqui?
> Estudante M:- Eu acho que sim, a gente já fez as outras. Já fez né, com dez e vinte e dois?
> Estudante A:- Com dez e vinte e dois, vinte dois e doze.
> Estudante M:- É.
> Estudante M:- Chama ele aí. Senão a gente vai ficar tentando, tentando.
> Estudante A:- Ô Kito. A primeira diagonal vai ser essa aqui, vinte e dois com dez?
> Professor:- Isso.
> Estudante A:- Depois vinte dois e doze, aí doze e dez não é? Depois vai ser essa daqui?
> Professor:- Isso. Essa daí é a mais difícil.
> Estudante M:- Qual é que vai ser a quarta?
> Professor:- Pegando este vértice aqui para não se perder, ligamos ele com este vértice.
> Estudante A:- Esse do fundo?
> Professor:- Isso. Esse do fundo, que é a mais difícil de ver.

Para melhorar a visualização dos estudantes, foi utilizado de duas réguas para serem as diagonais. Uma a diagonal do tanque, e a outra para ser a diagonal da base, e assim elas visualizarem o triângulo formado, junto com a altura do tanque.

Professor:- Conseguem visualizar o triângulo? Retângulo? Estudantes M e A:- Uhum. Professor:- Então o que vocês precisam achar do triângulo retângulo? Estudante A:- A hipotenusa. Professor:- Quais que são os catetos? Professor:- A altura do tanque, e a diagonal da base, são os catetos. Está vendo a diagonal da base? Estudante A:- Mas a gente já fez. A diagonal da base é do vinte e dois por dez. Professor:- Isso meninas. Podem terminar de calcular.

Após a mediação, os estudantes encontram a diagonal do tanque, como se verifica na resolução abaixo.

Figura 30: cálculo do Grupo 1 das diagonais do tanque



Fonte: próprio autor.

Essa resolução foi acompanhada pelos estudantes, mas somente o Grupo 1 produziu sentido e significado a partir da visualização geométrica, ao verificar a diagonal do prisma. Os mesmos necessitaram da mediação, como transcrita acima, mas os outros grupos não visualizaram deixando a resposta em branco. Para uma posterior aplicação da atividade, a utilização de um barbante unindo os vértices do prisma, facilitaria a visualização da diagonal.

Na discussão feita após a atividade, foi montado novamente o tanque para que os estudantes conseguissem visualizar a diagonal do prisma, utilizando duas réguas. Foi solicitado, então, para que eles calculassem a diagonal restante.

5.3. Produção de sentidos e de significados sobre o cálculo da capacidade dos sólidos de acrílico

Como essa atividade envolvia o cálculo da capacidade de quatro poliedros, dividiu-se os estudantes em quatro grupos. A atividade desenvolveu-se durante duas aulas, em dias distintos. O estudante R do Grupo 3 foi para o Grupo 4, e a estudante LM continuou no Grupo 3. Os demais estudantes mantiveram-se nos seus respectivos grupos.

Cada grupo iria desenvolver a atividade com o poliedro durante trinta minutos cada um. Após esse tempo, haveria a troca de poliedros pelos grupos, até que todos os grupos trabalhassem com todos os poliedros. A medição das dimensões dos respectivos, foi feita com régua.

Evidencia-se que foram transcritas as falas dos estudantes que mostram a produção de sentidos e significados durante a atividade de ensino. Infelizmente, a gravação do áudio do Grupo 4 não ficou boa, não permitindo a transcrição das falas; somente a análise pela atividade entregue. Em relação às outras gravações, tivemos problemas em relação ao Grupo 1, em que a mesma ficou cortada. Em oposição a isso, os áudios dos Grupos 2 e 3 ficaram melhor para a transcrição.

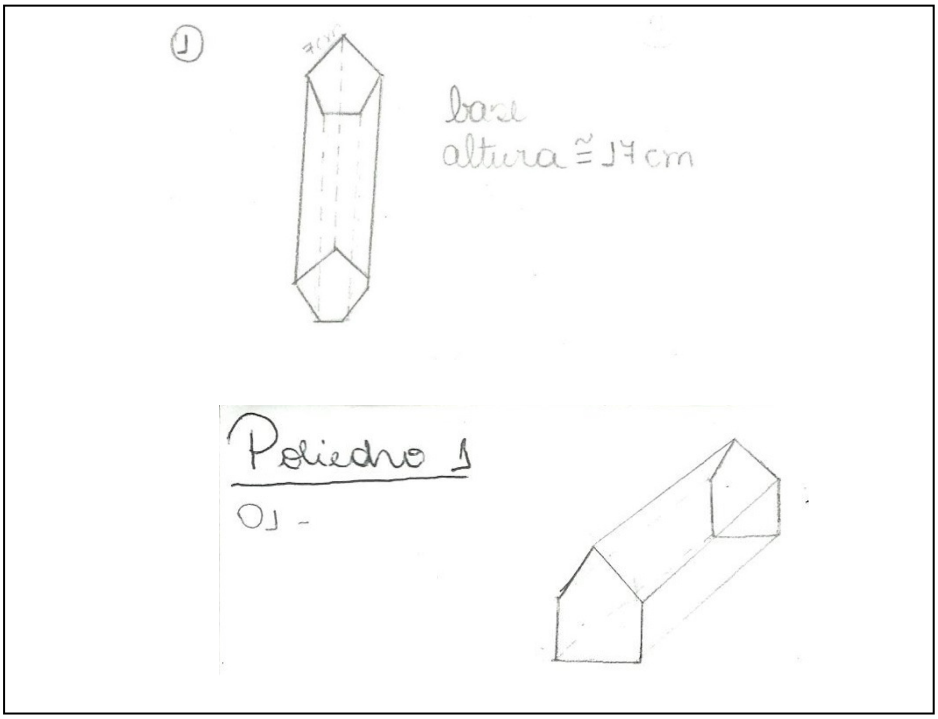
A atividade foi dividida em quatro episódios de ensino: 6) Poliedro 1 - Prisma pentagonal reto; 7) Poliedro 2 – Bloco recortado; 8) Poliedro 3 – Prisma oblíquo quadrangular; e 9) Poliedro 4 – Prisma hexagonal reto.

5.3.1. Episódio 6: Poliedro 1 – Prisma Pentagonal Reto

O Grupo 2 foi o primeiro grupo a trabalhar com o poliedro 1. Ao se deparar com esse poliedro, o grupo inicia o desenvolvimento pelo desenho do poliedro 1. Ao analisar os desenhos, percebe-se que as duas estudantes, LT e N, desenham o mesmo prisma por perspectivas diferentes. A primeira pelo prisma com a base pentagonal para baixo e a segunda, pelo o prisma “deitado”.

Seguem abaixo, os desenhos de LT e N, respectivamente.

Figura 31: desenho do Grupo 2 do prisma pentagonal reto



Fonte: próprio autor.

Ao analisar os desenhos, foi percebido que o significado adquirido é o mesmo, mas a produção de sentidos é diferente, já que, segundo Oliveira (2004), o sentido é composto pela experiência individual, que, nesse caso, é a facilidade de cada estudante ao desenhar.

Para o cálculo da base, que é um pentágono regular, a ideia inicial é decompor o pentágono em figuras conhecidas.

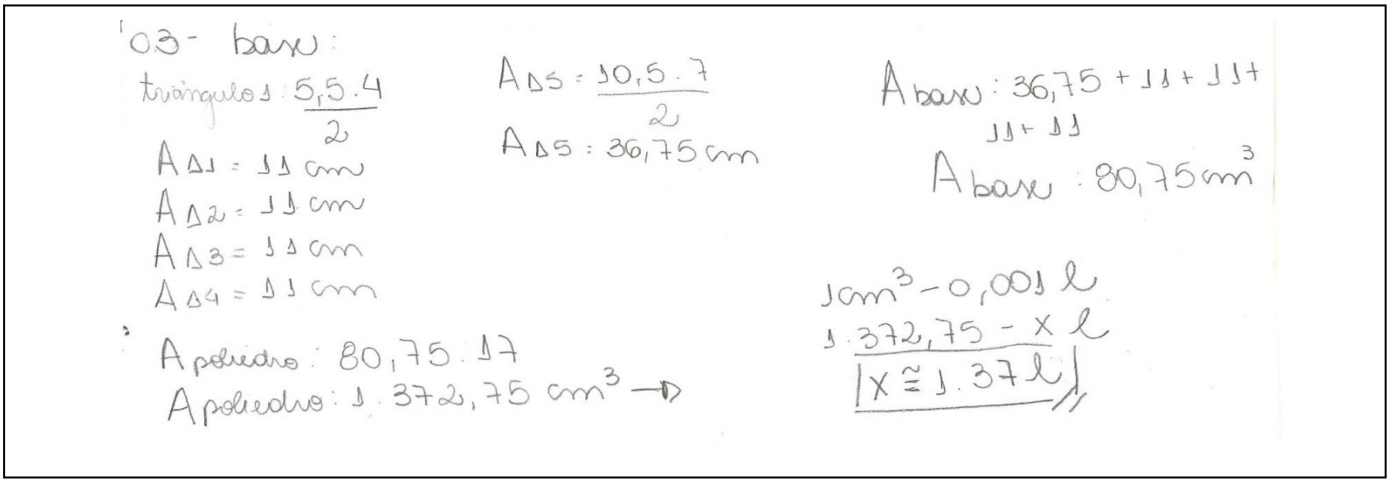
Estudante B:- Se dividirmos aqui, teremos um triângulo com dois lados iguais? Vocês não lembram não? Estudante N:- Lembro. É o isósceles. Estudante LT:- Equilátero. É o equilátero. Estudante N:- Ô Kito, o triângulo com dois lados iguais é o isósceles? Professor:- Isso. Estudante LT:- E qual é o equilátero? Estudante N:- É o triângulo que possui os três lados iguais. Estudante LT:- Ah! Lembrei. Estudante N:- Então eu posso pegar uma régua, quanto tem aqui, aqui, aqui e aqui. Calculo essa área aqui... Professor:- Mas como se calcula a área essa área? Estudante N:- Área do triângulo. Base vezes altura divide por dois. Professor:- Isso. Estudante N para Estudante LT:- Entendeu o que eu disse? A gente vai dividir na base para a gente conseguir achar, entendeu? Lembra o que ele falou? Para a gente dividir em figuras que a gente conhece? Pronto. Estudante LT:- Que no caso seriam triângulos.

Analisando a transcrição do Grupo 2, foi percebido que o conhecimento prévio dos alunos é essencial para iniciar a resolução do problema. Este conhecimento discutido entre o grupo e o professor, busca, segundo Nehring et al, (2001), a validação de seus argumentos, negociando significados e produzindo sentidos com os estudantes.

Vale a pena evidenciar que a decomposição do pentágono feita pelos estudantes em cinco triângulos não é uma resolução usual, vista nos livros didáticos, mostrando que, ao se propor uma atividade em que o estudante é protagonista, as resoluções das atividades podem ser criativas, coisa que não acontece quando utiliza-se a estratégia do paradigma do exercício.

Segue abaixo a resolução da estudante N, cujas respostas seguem a mesma linha de raciocionio dos outros dois integrantes do Grupo 2.

Figura 32: cálculo do Grupo 2 da capacidade do prisma pentagonal reto



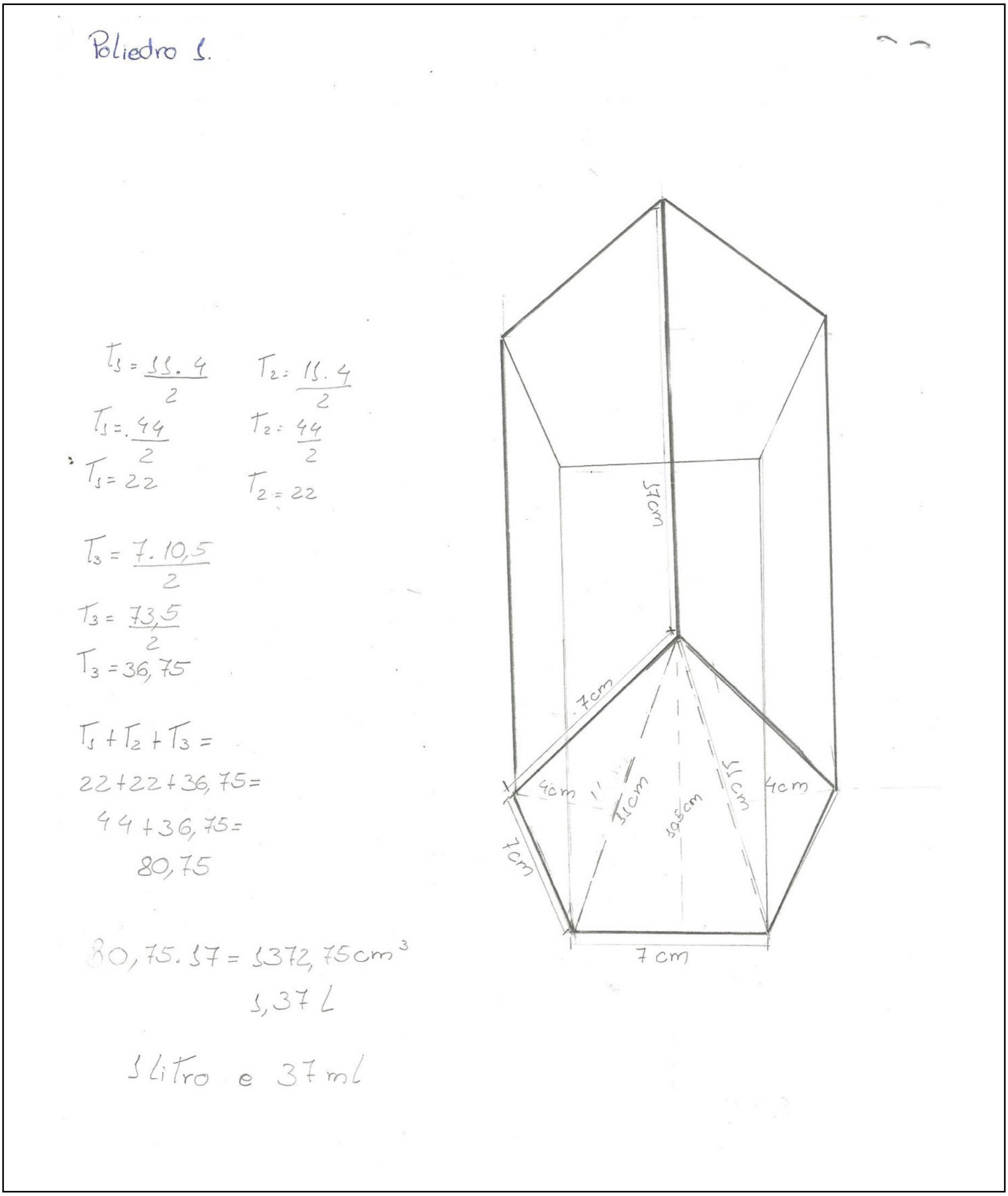
Fonte: próprio autor.

Já o Grupo 3 utilizou-se do mesmo raciocínio do Grupo 2, devido ao compartilhamento dos sentidos e significados. A atividade possuía essa proposta, uma vez que, segundo Moura et al (2010), a intenção do professor, quando convida os estudantes a pensar sobre conceitos, é encontrar a solução do problema de forma coletiva, foi o que aconteceu.

Apesar do compartilhamento, o sentido produzido, coletivamente, pelo Grupo 3 foi diferente, já que eles perceberam que não havia necessidade da divisão em cinco triângulos, mas sim, em três apenas.

Seguem abaixo a resolução e desenho da estudante P, que são iguais aos dos demais integrantes do grupo.

Figura 33: resolução do Grupo 3 da atividade do prisma pentagonal reto

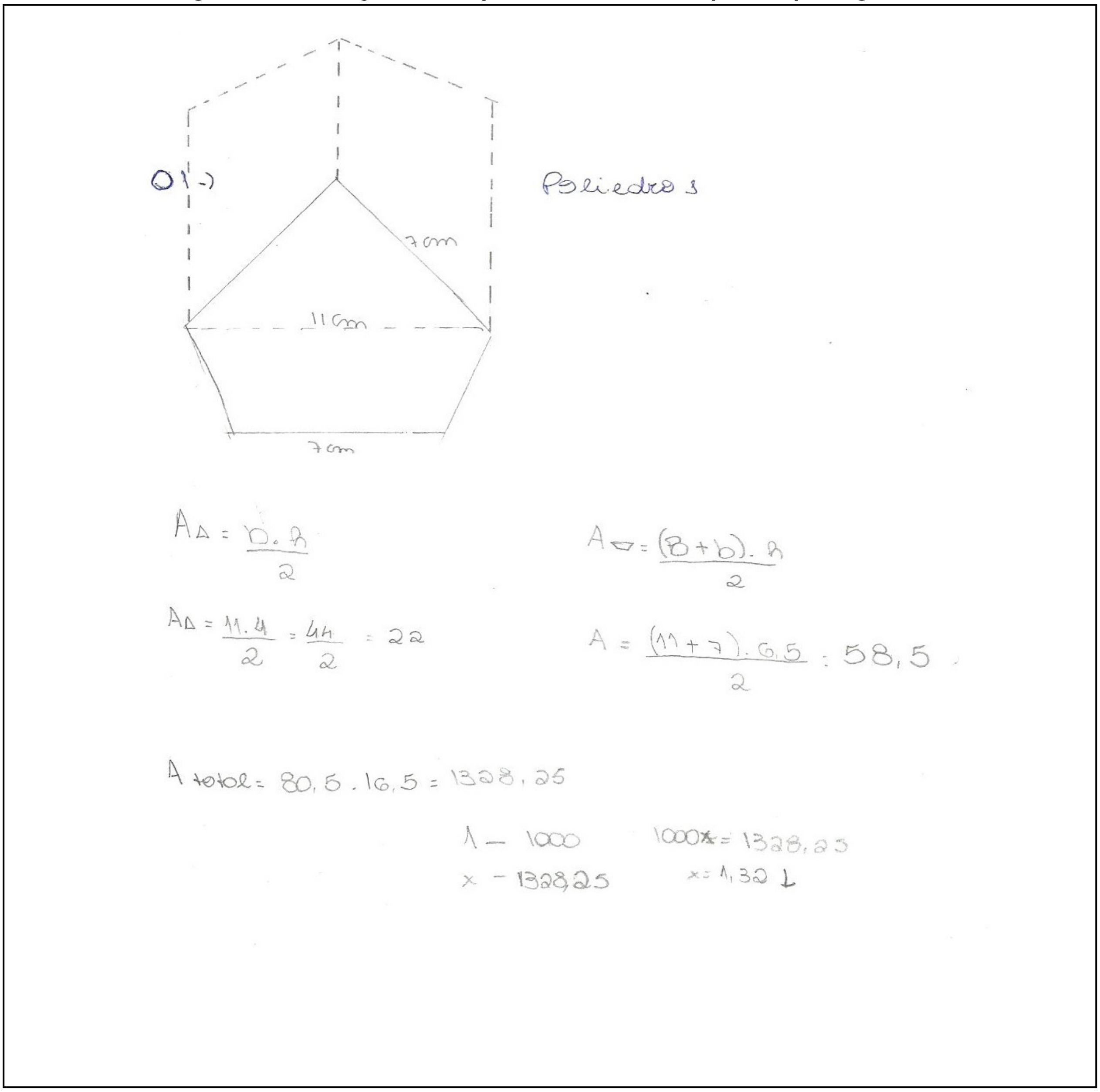


Fonte: próprio autor.

O Grupo 4, por sua vez, utilizou-se de uma outra estratégia. Em vez de decompor o pentágono em triângulos, os estudantes decompuseram a figura em um triângulo e um trapézio, cuja soma das áreas totalizariam a área do pentágono. Para relembrar o cálculo da área do trapézio, pesquisaram nos livros didáticos disponíveis na biblioteca da escola.

Seguem abaixo o desenho e a resolução da estudante L, do Grupo 4.

Figura 34: resolução do Grupo 4 da atividade do prisma pentagonal reto



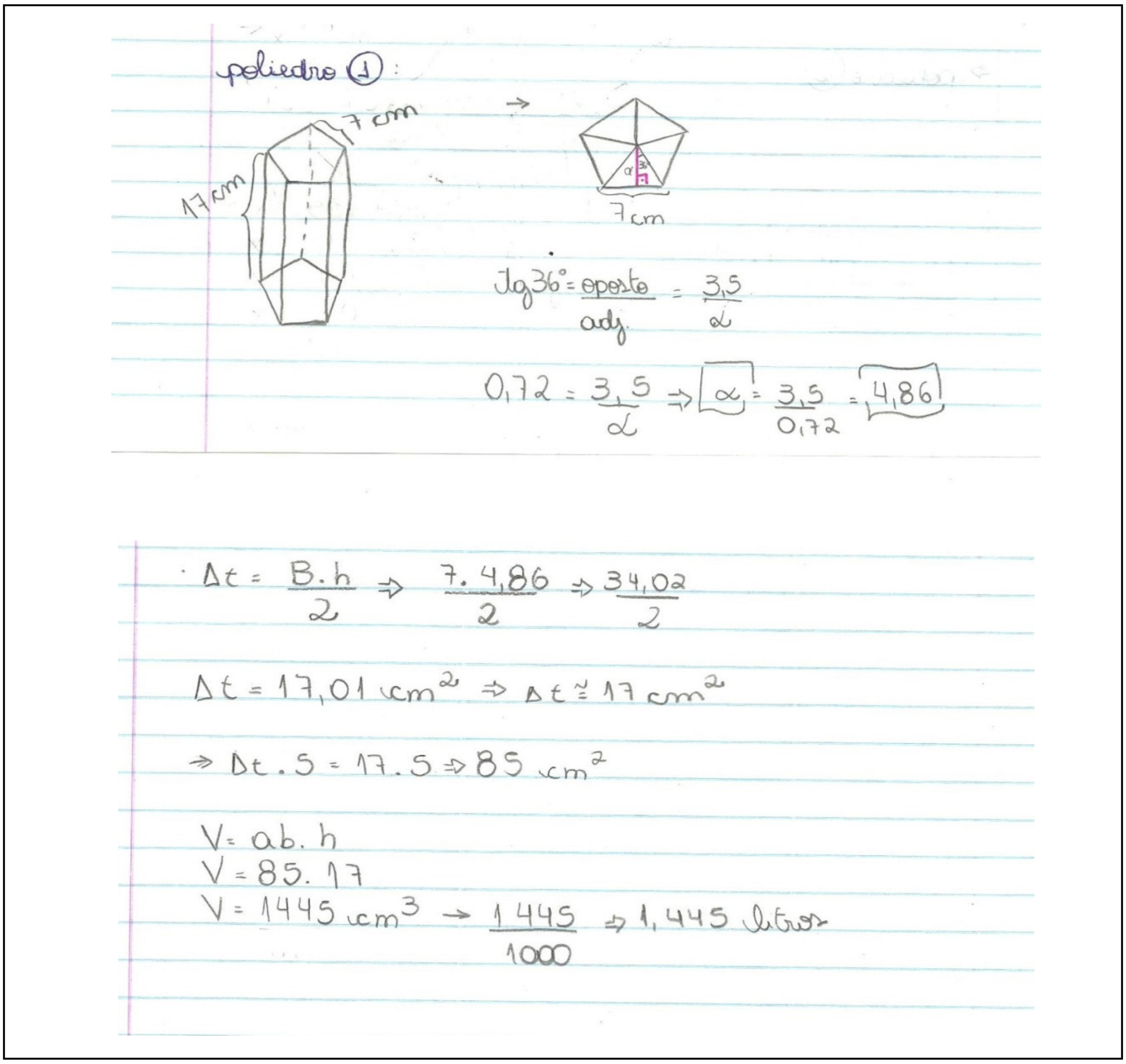
Fonte: próprio autor.

Por fim, o Grupo 1 utilizou-se de um outro caminho. Os estudantes consideraram o pentágono inscrito numa circunferência, unindo os vértices ao centro da mesma, obtendo cinco triângulos isósceles congruentes. Calcularam a altura do triângulo isósceles, utilizando trigonometria e a propriedade das cevianas dos triângulos isósceles que se coincidem, sendo a altura igual à bissetriz, que é igual à mediana.

Ao calcularem a área de um do triângulo, multiplicaram por cinco, obtendo o valor da área do pentágono.

Seguem abaixo o desenho e a resolução realizada pela estudante A.

Figura 35: resolução do Grupo 1 da atividade do prisma pentagonal reto



Fonte: próprio autor.

Analisando a resolução da atividade envolvendo o poliedro 1, foi observado que, mesmo permitindo a socialização dos resultados, os quatro grupos calcularam a área da base de maneiras diferentes, mostrando que, segundo Moura (2001), é preciso muito mais do que informar. Repetir e aplicar conceitos em exercícios para dar subjetividade à aprendizagem matemática. É preciso se destituir do formalismo, do rigor da linguagem, da rigidez das regras e deixar que as crianças e os jovens se sintam desafiados a resolver problemas.

5.3.2. Episódio 7: Poliedro 2 – Bloco Recortado

O primeiro grupo a trabalhar com bloco recortado foi o Grupo 3. Ao pegar o poliedro, inicia-se a resolução da atividade pelo desenho. Nesse momento, os alunos realizam o desenho em silêncio, voltando a discutir somente depois do desenho pronto.

P:- Olha o jeito que o meu saiu.
Z:- Ficou da hora, olha só o dela que diferente que ficou.
LM:- É que cada um tem uma visão né?
P:- É, pode crê.

Depois de finalizado, os estudantes começaram a medir com a régua as dimensões do prisma, iniciando assim, a discussão para o cálculo da capacidade do prisma. A ideia inicial foi a decomposição do prisma reto vazado em seis prismas menores.

I:- A gente tem que achar o que?
Z:- O volume.
I:- Vamos achar primeiro o valor aqui de dentro.
Z:- Vamos achar o volume de cada um desse, multiplica por três e quanto de volume tem esse aí soma dos dois.
I:- Isso. Esse esquema mesmo.
Z:- Mas ó Kito, a gente tá pensando assim ó. A gente calcula a área daqui, daí a gente multiplica por 3, depois a gente calcula a área daqui e soma os dois.
Professor:- Você vai calcular a área do que? Disso aqui? A área do quadrado? Mas você sabe se é igual?
P:- A gente mediu com a régua.
Professor:- Esse aqui vale quanto?
LM:- Vale quatro e meio.
Professor:- E isso aqui tudo?
LM:- Nove.
Professor:- É metade, então beleza.
Z:- Então a gente multiplica por três, pega todos, aí soma.
Professor:- Pode ser, mas não tem três, tem um, dois, três, quatro, cinco. Vocês têm que multiplicar por cinco.
Z:- É verdade! Não precisa nem somar nada.

As estudantes LM e Z tiveram a ideia de dividir o prisma reto vazado em seis prismas menores do mesmo tamanho, comprovado pela medição com régua, calculando um e multiplicando por cinco, já que o prisma é vazado em um desses seis prismas menores.

Enquanto as estudantes LM e Z realizam os cálculos, a estudante P, que estava analisando o prisma reto vazado, percebe algo.

> P:- Gente, vocês viram que tem uma bordinha?
> Z:- Não, não, não, não.
> LM:- Mas é aproximadamente.
> Z:- Se tiver que tirar um centímetro da borda.
> LM:- A borda não tem nem um centímetro.
> I:- Desconsidera.
> LM:- É desconsidera.

Verificando esta transcrição, foi percebido que os estudantes produziram significados, mas não sentidos, pois não relacionaram a borda do prisma com a parede de tijolos, realizado na Atividade 1. Colaborou para isso o instrumento de medida utilizado, que não era o ideal para medir pequenas distâncias, como no caso das bordas.

Em relação à transformação de unidades, os estudantes do grupo conseguiram se lembrar da transformação.

> LM:- Como é que passa centímetros cúbicos para litros?
> I:- Divide por mil.
> LM:- Divide por mil?
> P:- É.

A atividade 2 foi realizada na semana anterior e que produziu tanto sentido quanto significado, já que os estudantes conseguiram relacionar a atividade anterior e aplicá-la na resolução de outra atividade. Isso ocorre, conforme relatam Nehring et al. (2010), ao recontextualizar o conteúdo, uma vez que, neste contexto, foi criada uma situação capaz de possibilitar ao aluno o processo de conceituação.

Depois que as estudantes LM e Z terminaram os cálculos, a estudante P começa a realizar a sua atividade e pede ajuda ao grupo.

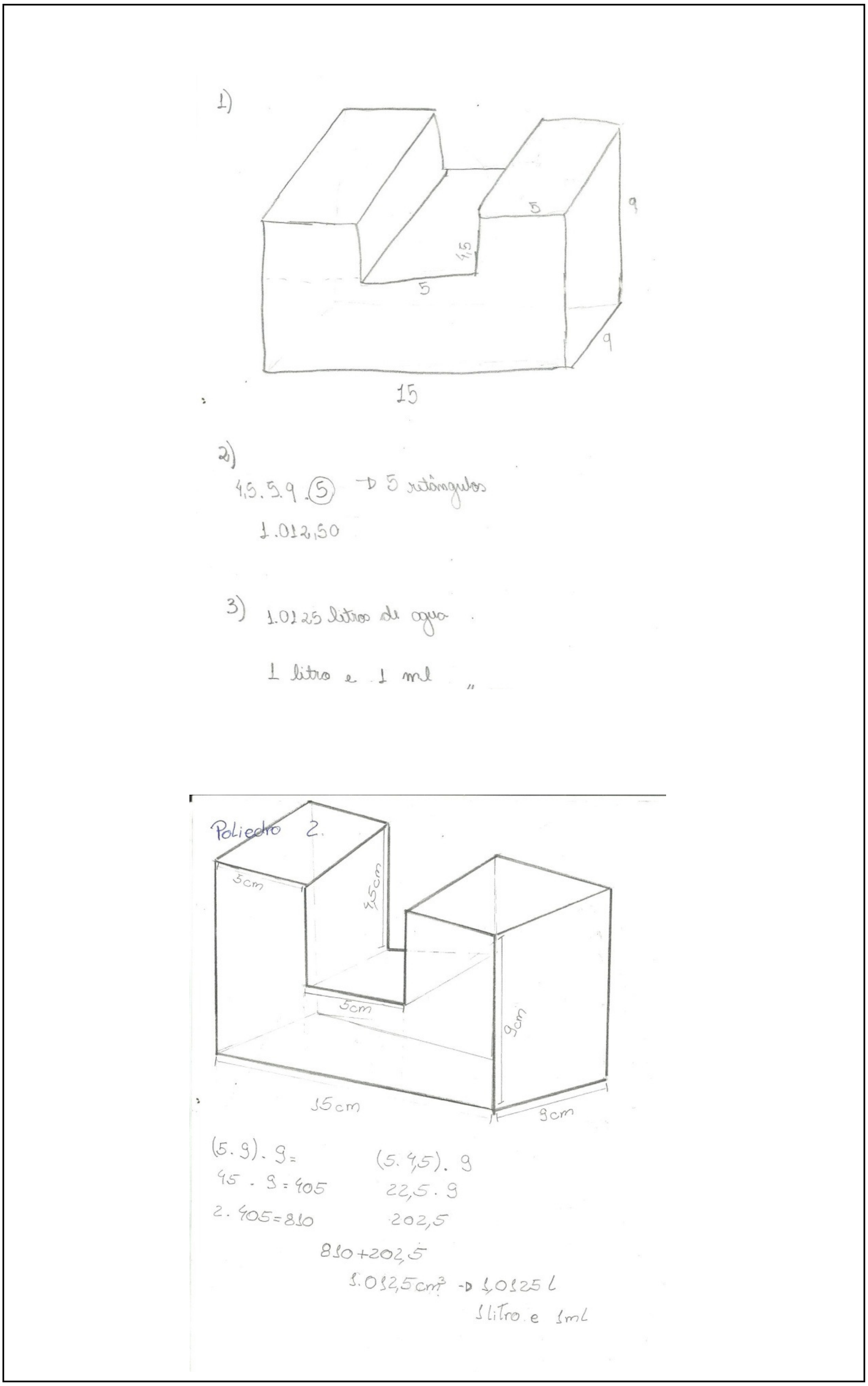
P:- Para achar a área é base maior mais base menor vezes altura dividido por dois. Z:- Não, essa área e do, é do,... I:- Acho que é do trapézio. Z:- Isso é do trapézio, aqui é só base vezes altura. Aí no triângulo é base vezes altura dividido por dois. Mas nesse caso é só base vezes altura. P:- Mas vocês fizeram nove vezes nove? LM:- Não, fizemos quinze vezes nove vezes cinco. P:- Como assim? Z:- O professor tinha dito que a gente acha a área do retângulo e multiplica por cinco, porque tem seis retângulos olha. LM:- Tem cinco retângulos. Z:- Não, tem seis. Três em cima e três em baixo. LM:- Mas tem que multiplicar por cinco. Z:- Sim, mas esse que não tem a gente conta como um. LM:- Não meu, um, dois, três, quatro e cinco. Vai multiplicar por seis para depois tirar um? Pra que? É só multiplicar por cinco Z:- Então, seria seis, mas um a gente já está contando, por isso é por cinco. Eu não estou falando para multiplicar por seis, somente que tudo tem seis. LM:- Tudo aqui sim, mas é só multiplicar por cinco. Z:- Entendi. LM:- É porque não vai ter como ter água aqui, já que não tem nada. Z:- Entendi.

Apesar da explicação das colegas de grupo, a estudante P percebe que, em vez de dividir em seis prismas menores, poderá dividir em somente dois maiores e, em seguida, calcular o volume embaixo da parte vazada, totalizando também a capacidade do prisma, como mostra a transcrição abaixo.

A discussão estendeu-se por mais alguns instantes, até que o resultado obtido foi o mesmo. Seguem abaixo o desenho e a resolução das estudantes LM e P, respectivamente.

P:- Para achar o volume disso aqui só gente. Só disto.
Neste momento a estudante P está apontando para uma das colunas do prisma reto vazado.
LM:- Quinze vezes nove vezes nove.
P:- Não, só disto aqui.
Z:- Você faz base vezes altura vezes comprimento.
LM:- É que daí dá um desse.
P:- É. Então é isso vezes isso vezes isso?
LM:- É. Não.
P:- Não é isso vezes isso vezes isso? Está muito estranho isso. Porque eu quero calcular até o final.
LM:- Mas para ficar vezes cinco, não pode ir até o final.
I:- Está dando raiva.
LM:- Então, é cinco vezes quatro e meio vezes nove na verdade.
P:- Mas eu quero achar até o final aqui.
LM:- Não, mas daí a gente não vai poder multiplicar por cinco.
Z:- Esses aqui não têm o mesmo comprimento? Quanto que é? Quatro e meio.
LM:- É cinco.
Z:- É cinco, tudo dá quinze, então divide por três, a base aqui vai ser cinco, daí a altura a gente sabe que é nove, então vezes nove, daí a gente...
LM:- Não!!! É só isso.
Z:- Tá, mas ela quer calcular tudo. Então dá quarenta e cinco centímetros quadrados.
LM:- Ah, eu vou deixar assim. Isso vezes isso vezes isso e multiplicar por cinco.
Z:- Só que em vez de ficar nove vai ficar quatro e meio.
P:- Não gente, mas eu to querendo achar de um inteiro assim ó.
Z:- Nove, que é tudo isso, vezes cinco, que é a base.
P:- Mas e o fundo aqui ó?
LM- É nove.
P:- Nove vezes cinco vezes nove.
Z:- Nossa, está cada um resolvendo de um jeito.
P:- Então vamos calcular diferente e ver se bate o resultado. É melhor.
Z:- Demorô. Vamos calcular de dois jeitos diferentes.

Figura 36: resolução do Grupo 3 da atividade do bloco recortado

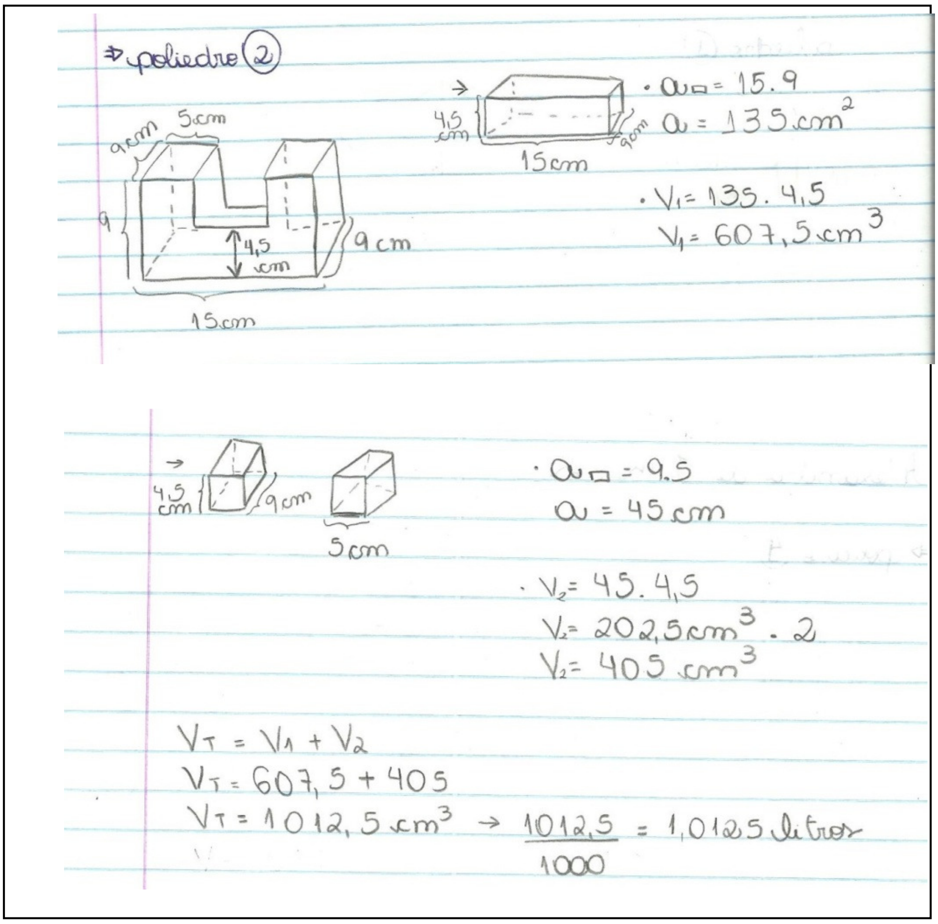


Fonte: próprio autor.

Analisando a discussão acima, concordo com Moysés (2001), que afirma em seus estudos que a atividade em grupo proporciona a situação de colaboração mútua, cada aluno podendo ocupar, em diferentes momentos, o papel do aluno ou de professor. Ou seja, aqui, os sentidos individuais se manifestam no grupo, promovendo a explicitação dos significados que o grupo tem sobre determinada atividade.

Nessa atividade, o Grupo 1 produziu um sentido diferente em relação ao grupo 3, uma vez que o primeiro grupo calculou o volume do prisma como se este não fosse vazado e depois subtraiu o volume da parte vazada. Segue abaixo a resolução feita pelo Grupo 1.

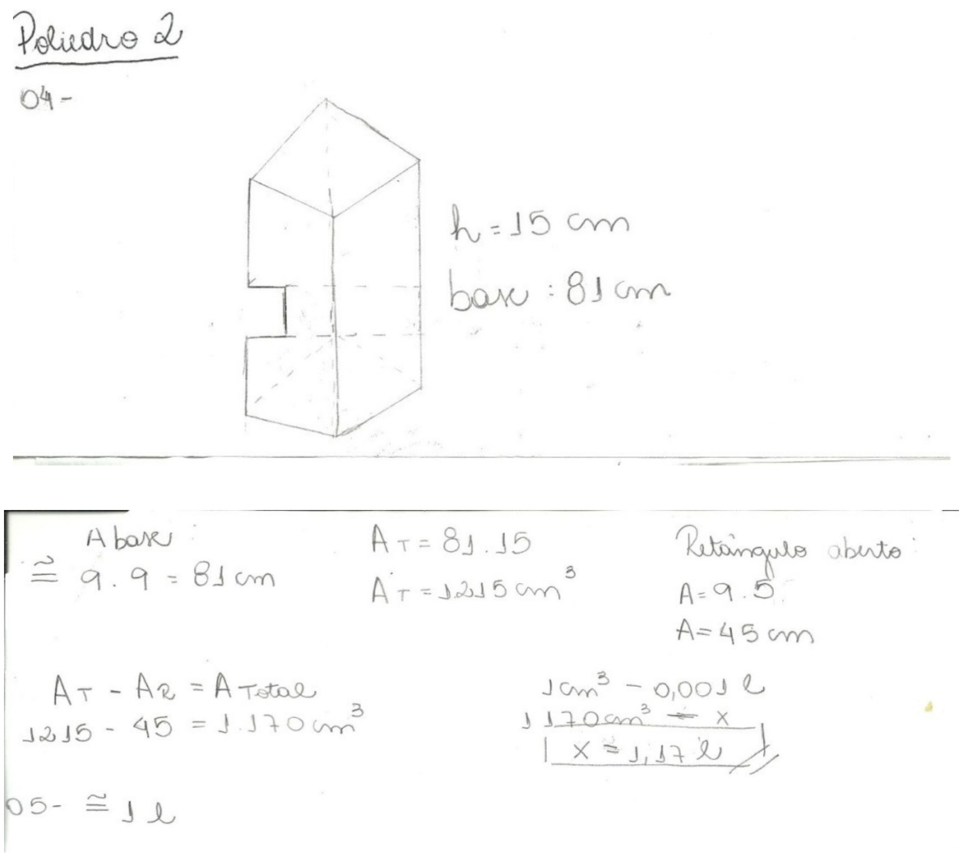
Figura 37: resolução do Grupo 1 da atividade do bloco recortado



Fonte: próprio autor.

O Grupo 2 teve a mesma produção de sentido do Grupo 1. Apesar de resolverem da mesma maneira, o Grupo 2 esqueceu-se de calcular o volume da parte vazada, calculando somente a área da base. Segue abaixo a resolução feita pelo Grupo 2.

Figura 38: resolução do Grupo 2 da atividade do bloco recortado

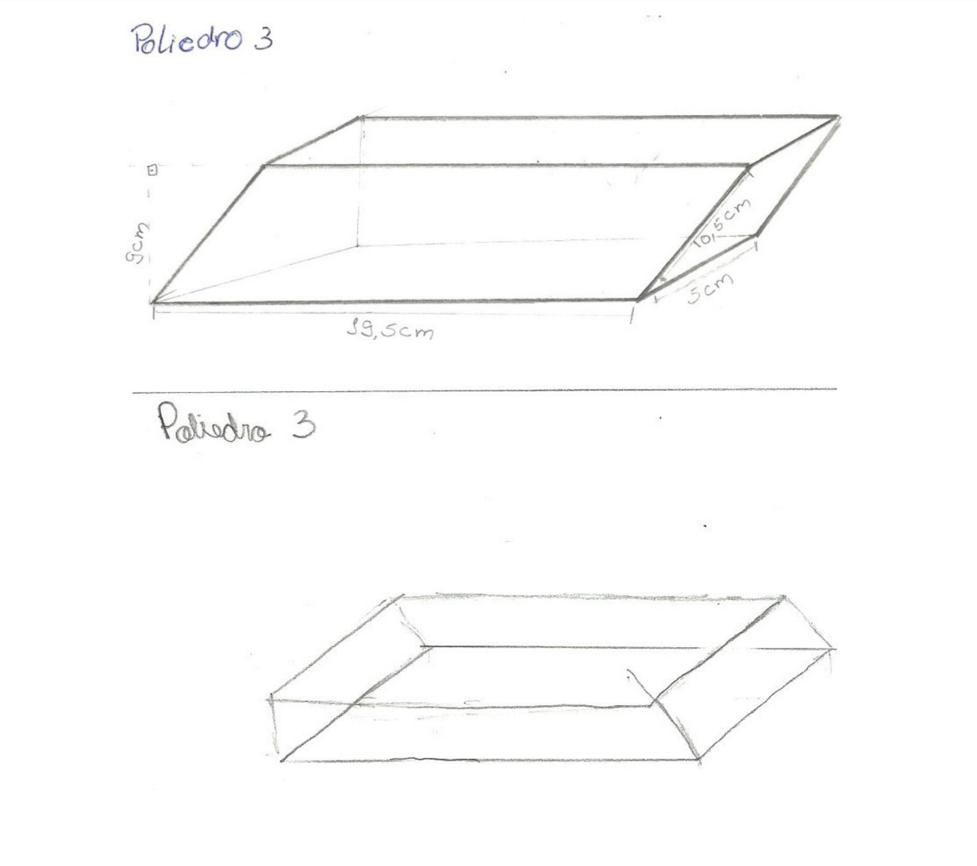


Fonte: próprio autor.

5.3.3. Episódio 8: Poliedro 3 – Prisma Oblíquo Quadrangular

Após receberem o prisma oblíquo, os estudantes do Grupo 3 iniciam novamente pelo desenho. Seguem abaixo os prismas desenhados, respectivamente, pela estudante P e pela estudante LM.

Figura 39: desenho do Grupo 3 do prisma oblíquo quadrangular



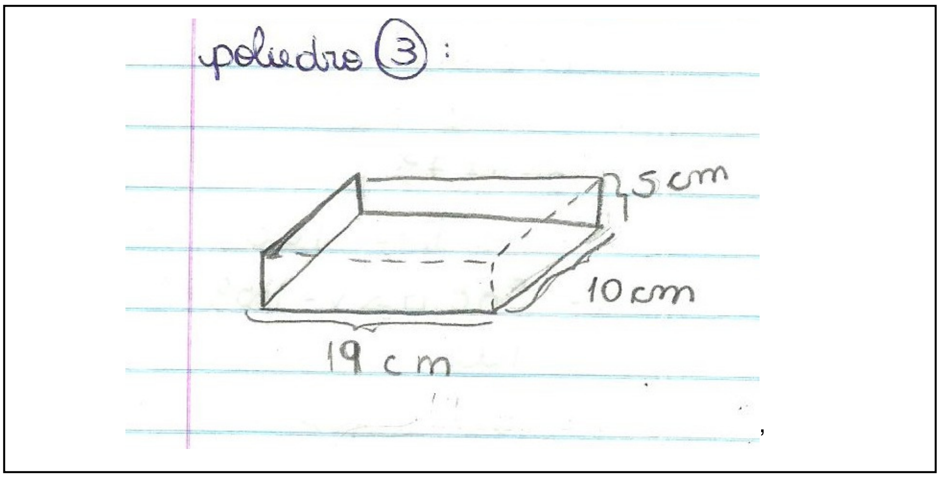
Fonte: próprio autor.

O desenho das duas estudantes do Grupo 3, foi percebido a dificuldade em transpor o objeto real para a folha de papel. A estudante P foi a única do grupo que produziu sentidos e significados sobre a representação do prisma em forma de desenho que, de acordo com Kaleff (2003), a estudante recorreu à habilidade de visualização, gerando representações do objeto através do raciocínio visual, o que originou a imagem mental.

Diferentemente dos outros prismas da atividade, que são retos, o prisma oblíquo causou dificuldade na visualização e em sua decomposição em figuras conhecidas. Com relação à visualização e representação, a produção de sentidos e significados do Grupo 1 foi igual a da estudante LM do Grupo 3.

Segue abaixo a representação do prisma oblíquo do Grupo 1.

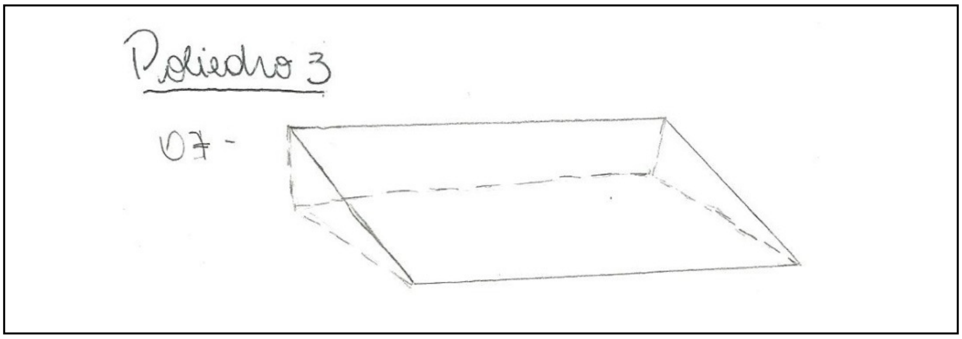
Figura 40: desenho do Grupo 1 do prisma oblíquo quadrangular



Fonte: próprio autor.

Já o Grupo 2 não conseguiu gerar a imagem mental correta do prisma oblíquo para representá-lo no papel, como se pode observar no desenho abaixo.

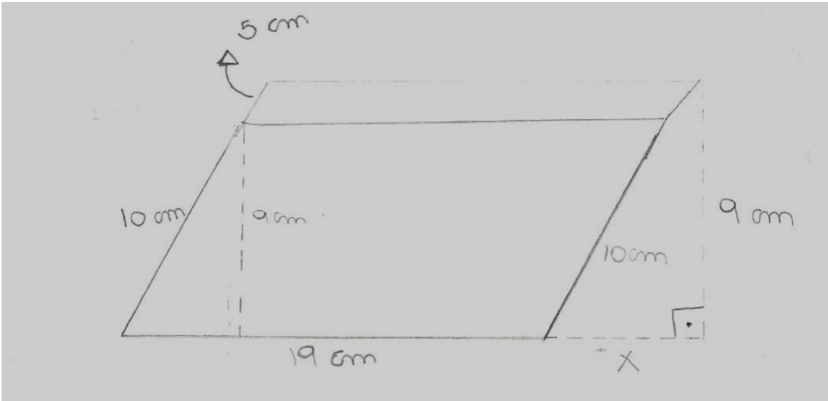
Figura 41: desenho do Grupo 2 do prisma oblíquo quadrangular



Fonte: próprio autor.

A imagem gerada foi de um prisma triangular, e não quadrangular, como o proposto. No Grupo 4, a dificuldade em visualizar e representar o objeto em três dimensões ficou evidente, pois o grupo representou somente o paralelogramo, mas não soube representar a profundidade.

Figura 42: desenho do Grupo 4 do prisma oblíquo quadrangular



Fonte: próprio autor.

Através das representações mostradas, concordo com Pavanello (1993), que afirma em seus estudos o abandono do ensino da geometria, considerando-se que o ensino de matemática vem se focando somente na álgebra e na aritmética, prejudicando a formação dos estudantes, uma vez que os priva da possibilidade de pensarem sobre as várias formas de resolver problemas. Os mesmos se acostumam à execução mecânica de operações, determinadas por um sistema de leis formais que indicam o que se pode fazer em determinada situação, não havendo questionamento sobre as regras pré-estabelecidas.

Quando se deparam com um objeto que foge às determinadas regras, os alunos mostram dificuldade em explicitar os sentidos e os significados que estão dando às atividades propostas, representando-os na folha de papel, assim como no que diz respeito aos cálculos.

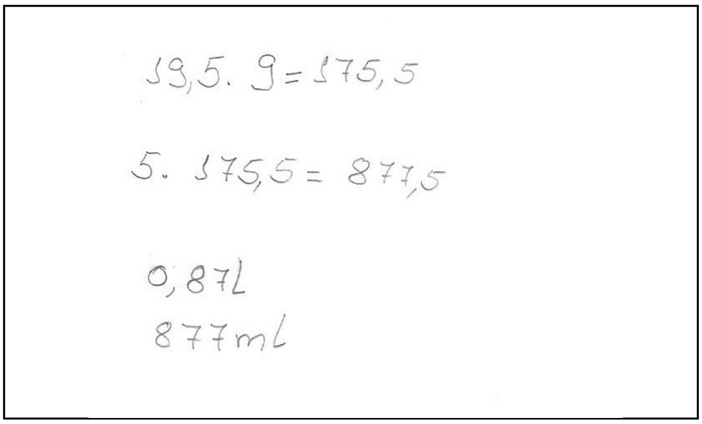
Concordo com Nacarato (2004), que afirma em seus estudos que a utilização do material manipulável pode possibilitar diferentes rotações, ampliando o repertório de representações.

Retornamos para o Grupo 3, que, após a elaboração do desenho, começam a discussão de como calcular a capacidade do prisma oblíquo. Inicialmente estavam resolvendo como trabalhar com o paralelogramo.

> P:- E se a gente fizer assim, achar esse triângulo depois esse?
> I:- Não é um quadrado isso daí?
> P:- Onde é um quadrado?
> I:- É um retângulo na verdade. Ô Kito, não é um retângulo isso?
> Professor:- O retângulo possui ângulos retos, esse daí possui ângulos retos?
> I:- Ah não tem.
> P:- Vamos traçar isso aqui.
> I:- Para achar um triângulo retângulo?
> P:- Não sei se é retângulo, mas é um triângulo.
> I:- Mas se a gente traçar aqui a gente acha um trapézio. Hum, não acha não.
> P;- Pera aí. Mas para calcular o volume não é área da base vezes a altura?
> I:- É.
> P:- Então por que a gente está mexendo nisso aqui? É só achar a área do retângulo, que é base vezes altura, depois multiplicarmos pela altura disso aqui. Será que é só isso?
> I:- O que?
> P:- É só achar o valor disso, multiplicar por isso e depois por isso? É o que está escrito no livro aí.
> I:- Tira aqui e tira aqui.
> P:- Que tira aqui meu. I olha meu desenho, é só fazer base vezes altura e depois multiplicar por essa distância aqui. O quê você está querendo complicar meu filho?
> I:- É o resultado disso aqui por isso vezes a altura?
> P:- É.
> I:- Nossa, que de boa.

Segue abaixo a resolução do Grupo 3.

Figura 43: resolução do Grupo 3 da capacidade do prisma oblíquo quadrangular


19,5 . 9 = 175,5

5 . 175,5 = 877,5

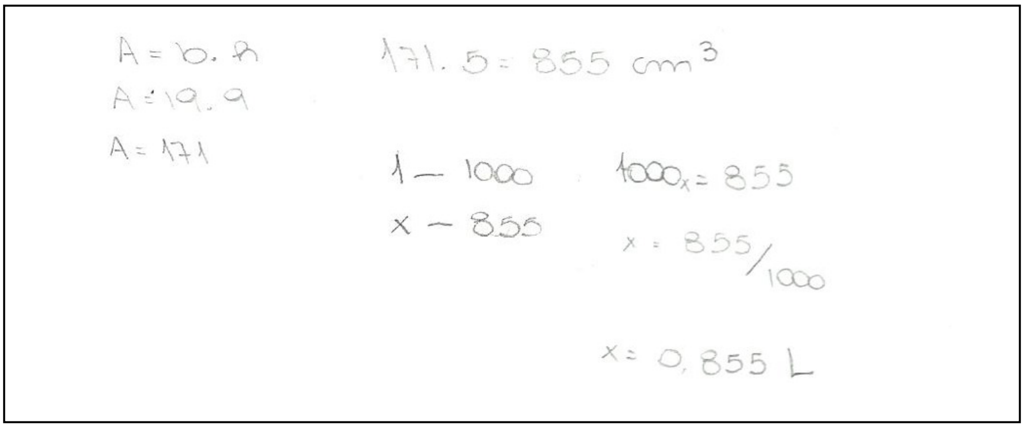
0,87L
877ml

Fonte: próprio autor.

Se fosse necessário atribuir nota à atividade, seria conveniente retirar algum ponto, pelo fato de que a resposta 0,87 litros ser diferente de 877 mililitros. Mas como teve acompanhamento das discussões feitas pelos estudantes, conseguimos compreender os sentidos e os significados que obtiveram, já que, para relembrar os cálculos das áreas, fizeram pesquisas, para poder fazer relações com o problema proposto. Analisando as transcrições, foi visto que não necessitaria retirar nenhum ponto, uma vez que os estudantes conseguiram atingir os objetivos propostos nessa atividade.

Já os estudantes do Grupo 4 explicitaram sentidos e significados diferentes em relação ao Grupo 3, deixando o paralelogramo como base. Isso difere da representação apresentada acima. Apesar da falta de profundidade do desenho, as integrantes do Grupo 4 utilizaram-se do próprio poliedro de acrílico para conseguir calcular a capacidade do prisma oblíquo, conforme resolução mostrada a seguir.

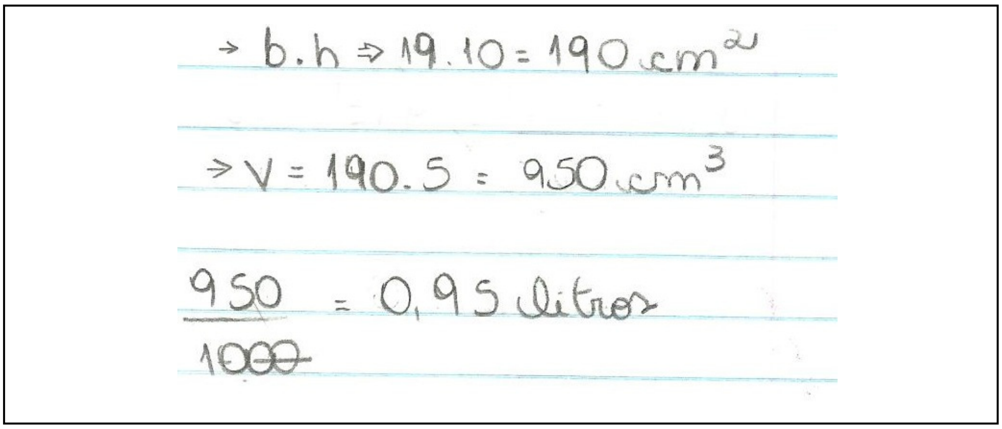
Figura 44: resolução do Grupo 4 da capacidade do prisma oblíquo quadrangular



Fonte: próprio autor.

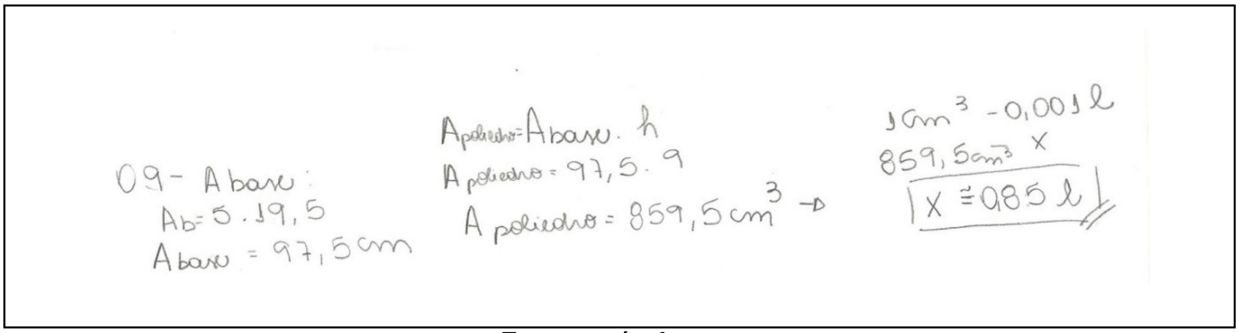
De alguma forma, os sentidos e significados dos outros dois grupos, 1 e 2, em relação ao cálculo do volume e da capacidade com o uso de fórmulas, se aproximam daqueles produzidos pelo Grupo 3. Abaixo a resolução dos Grupos 1 e 2, respectivamente.

Figura 45: resolução do grupo 1 da capacidade do prisma oblíquo quadrangular



Fonte: próprio autor.

Figura 46: resolução do Grupo 2 da capacidade do prisma oblíquo quadrangular

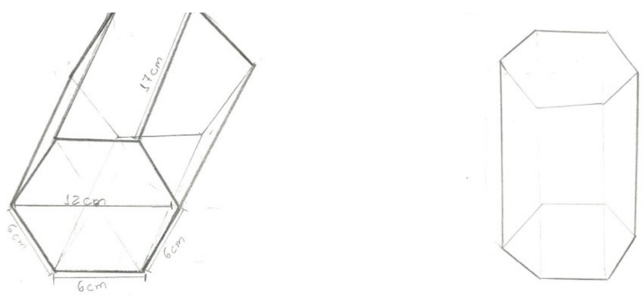


Fonte: próprio autor.

5.3.4. Episódio 9: Poliedro 4 – Prisma Hexagonal Reto

Ao receber o prisma, o Grupo 3 inicia, individualmente, a realização do desenho. Seguem abaixo os desenhos feitos pelos estudantes P e I, respectivamente, do Grupo 3.

Figura 47: desenho do Grupo 3 do prisma hexagonal reto



Fonte: próprio autor.

Novamente, a explicitação dos sentidos feitos em relação à visualização mostra se diferenciar de estudante para estudante. A estudante P, por exemplo, desenha o prisma com a face lateral para baixo, enquanto o estudante I desenha com a base para baixo.

Após a confecção do desenho, o grupo inicia a articulação para calcular quantos litros o prisma hexagonal tem de capacidade. Novamente, o grupo procura decompor o hexágono em figuras que possuem relações para o cálculo da área.

I:- Se a gente cortar aqui vira dois trapézios não vira?
P:- É, mas eu acho mais fácil calcular triângulos.
Z:- É, ó. Divide aqui, deixa um retângulo e faz dois triângulos.
I:- Como?
Z:- Ó, traça aqui no meio, fica um retângulo, certo? Daí você faz a área do retângulo, depois somamos com as áreas dos dois triângulos.
I:- Mas a gente vai precisar fazer um monte de conta. Cortando aqui no meio, é só calcular a área dos dois trapézios. Base vezes altura.
Z:- Não, trapézio é base menor mais base maior vezes altura dividido por dois. Mas do jeito que eu falei também só vai precisar de duas áreas: a área do retângulo e a área do triângulo.
I:- Ahhhh, eu prefiro a do trapézio.
P:- Vamos cada um fazer de um jeito, depois a gente confere as contas.

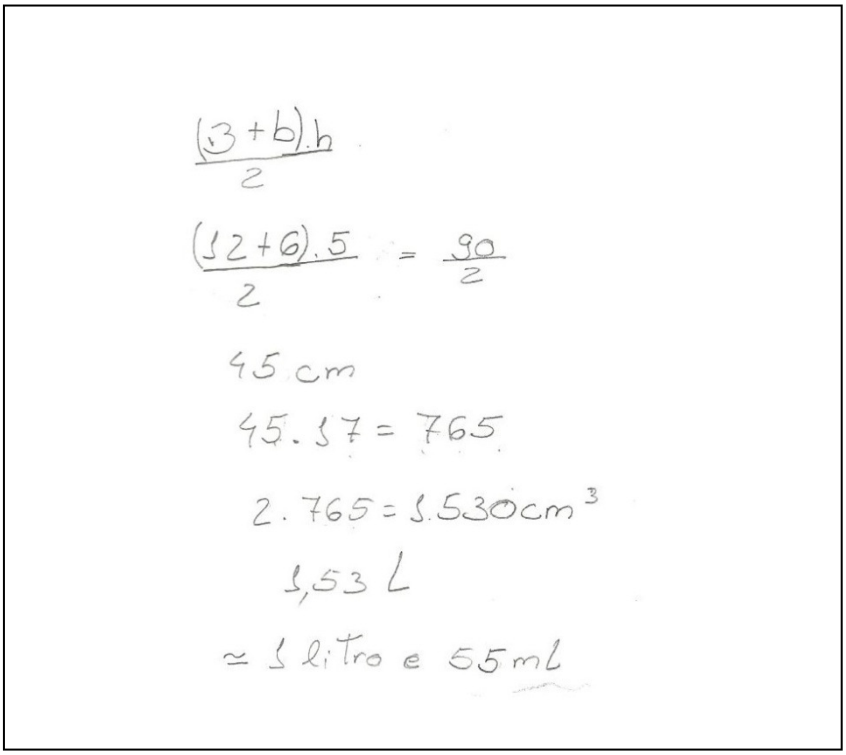
Com o decorrer dos cálculos, a estudante Z conclui que o jeito proposto pelo estudante I realmente é mais fácil e assim, também resolve dessa maneira.

Após os cálculos, os estudantes buscam o Grupo 1, que já havia realizado a atividade com esse poliedro, para a validação de seus argumentos.

P:- Pergunta lá para as meninas quanto deram o delas.
I:- Mas pode?
P:- Claro que pode, lembra que o Kito falou que pode socializar? Vai lá I, perguntar para elas e vê se deu a mesma coisa que o nosso.
Z:- Se elas falarem que não é isso, eu vou falar que elas estão erradas.
LM:- Por quê? O nosso pode estar certo.
Z:- Então, se elas falarem que não é isso, o delas está errado.
P:- Quanto deu o delas I?
I:- Elas fizeram diferente, dividiram em triângulos.
Z:- Nossa veio, elas dividiram tudo em triângulos. Hardcore hein, fazer tudo em triângulos.
P:- Mas quanto deu a resposta?
I:- Um vírgula seis litros.
Z:- Um vírgula seis e um vírgula cinquenta e três é tudo a mesma coisa, está no erro.
P:- Na hora de aproximar, dá na mesma.
LM:- Próximo poliedro!!!

Segue abaixo a resolução feita pela estudante P, igual a dos outros integrantes do grupo 3.

Figura 48: resolução do Grupo 3 da capacidade do prisma hexagonal reto



Fonte: próprio autor.

Ao analisar as falas e as escritas dos estudantes, concordo com Moura et al, (2001), que afirmam que tornando os estudantes protagonistas da construção do seu próprio conhecimento, produzindo sentidos e significados, visualizando os trapézios, assim como suas propriedades, está se aguçando as suas criatividades para resoluções próprias, de forma que não reproduzam apenas exemplos feitos pelo professor anteriormente.

A divisão do hexágono regular em dois trapézios congruentes não é uma resolução usual proposta nos livros didáticos. Nos mesmos, o enunciado indica as medidas que serão necessárias na resolução do problema, limitando o estudante a utilizar somente o que foi dado, não permitindo fazer medições, já que a figura dada é fora de escala. Aqui, os significados apresentados pelos autores dos livros didáticos se diferenciam daqueles explicitados pelos estudantes.

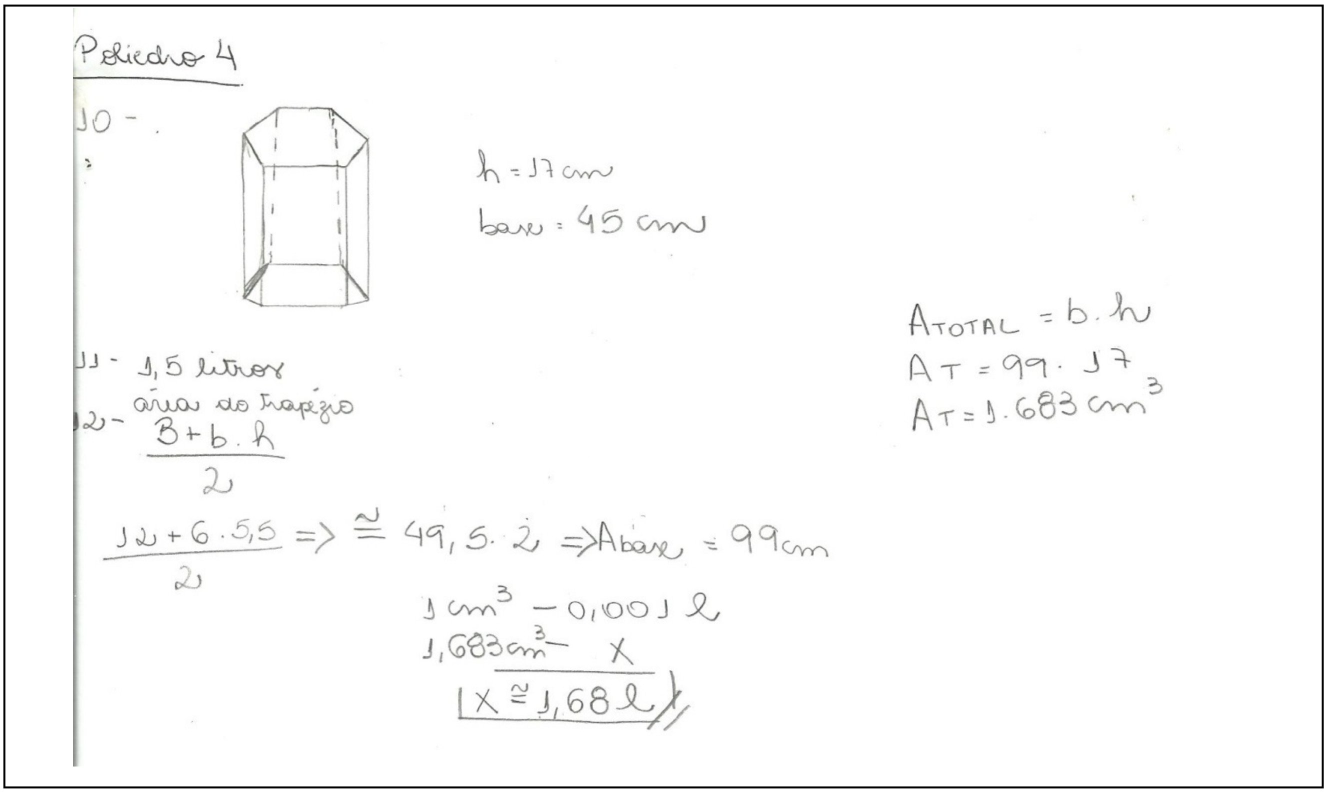
Com o material manipulável, abre-se um leque de possibilidades para que os alunos atuem de forma criativa, e já podem ser medidos todos os elementos do prisma trabalhado. Sobre esse assunto, Moysés (2001) afirma que toda atividade criativa surge de experiências prévias, vividas pelo estudante, remodeladas para lidar com um novo problema. No contexto do problema do prisma hexagonal reto, os estudantes visualizaram que conseguiriam dividi-lo em dois trapézios, cuja área eles já sabiam calcular.

Corroboram aqui Moura et al (2001) que, ao oferecer a oportunidade de os estudantes medirem, experimentarem e discutirem sobre conceitos. Eles estarão em atividade de estudo, objetivo das AOE.

Apesar de não ser uma resolução muito utilizada em livros didáticos, os estudantes acompanharam o raciocínio do Grupo 3, dos Grupos 2 e 4, diferenciando-se somente pelas dimensões encontradas através das medições com régua.

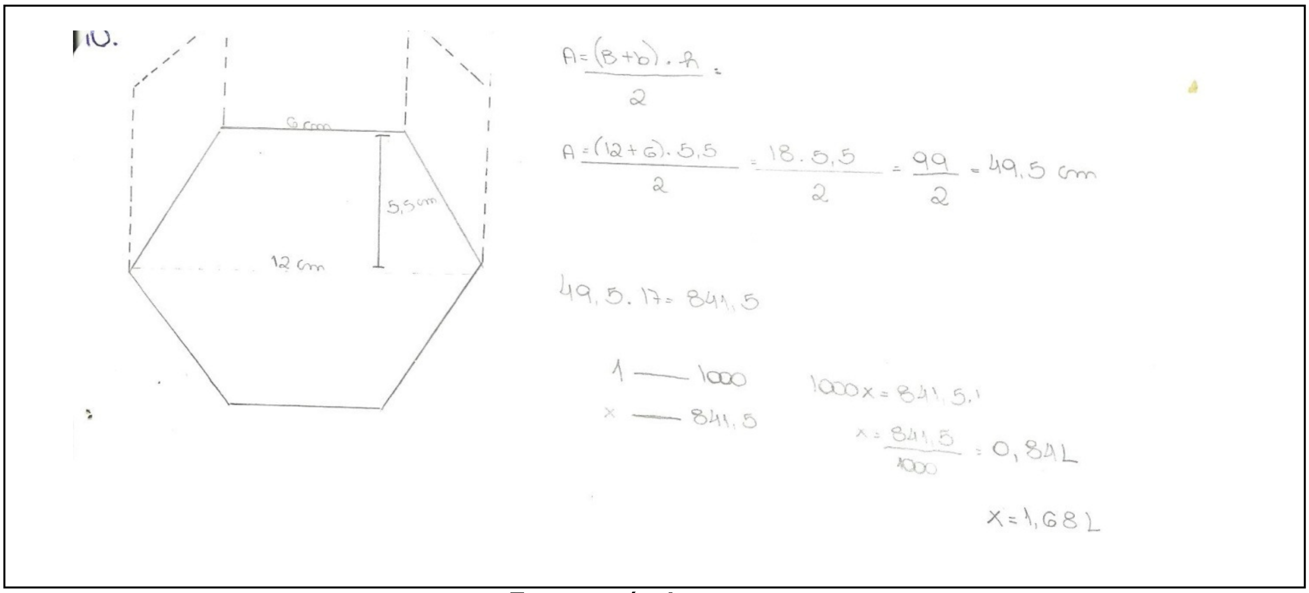
Segue abaixo a resolução da estudante N, do Grupo 2, e da estudante L, do Grupo 4, respectivamente.

Figura 49: resolução do Grupo 2 da atividade do prisma hexagonal reto



Fonte: próprio autor.

Figura 50: resolução do Grupo 4 da atividade do prisma hexagonal reto

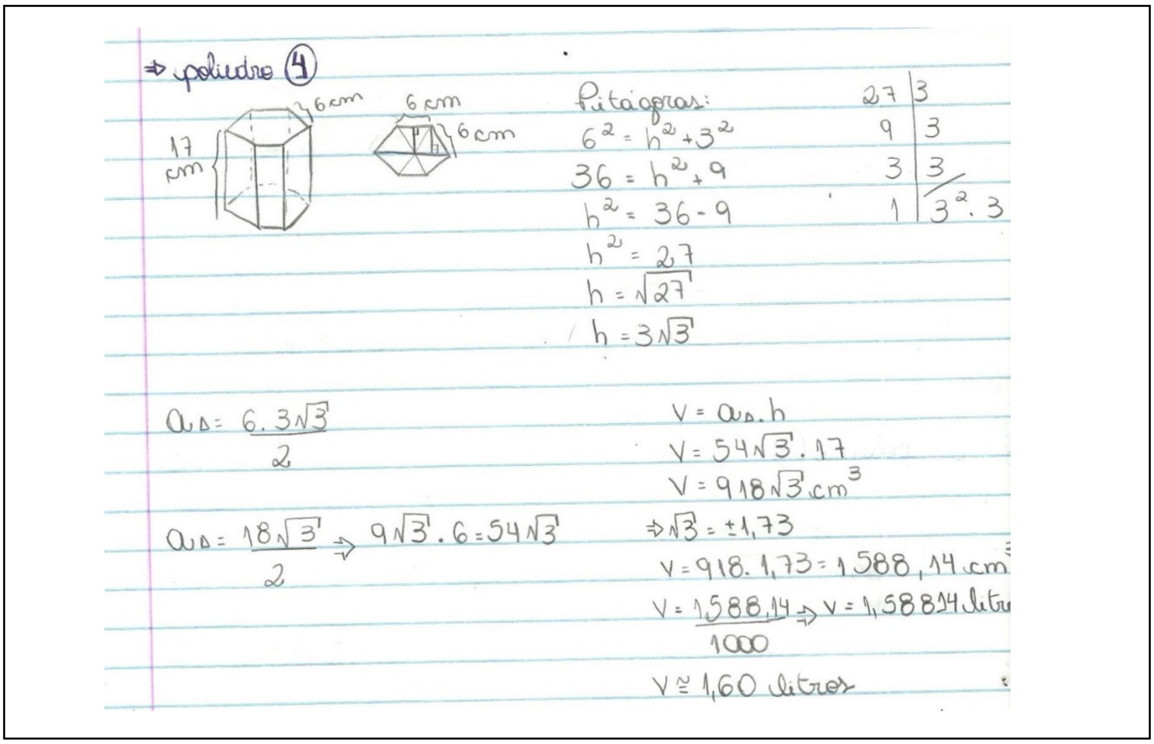


Fonte: próprio autor.

A resolução usual apresentada nos livros didáticos foi apresentada pelo Grupo 1, que decompôs o hexágono regular em seis triângulos equiláteros congruentes.

Segue abaixo a resolução da estudante A, igual à dos demais estudantes do grupo.

Figura 51: resolução do Grupo 1 da atividade do prisma hexagonal reto



Fonte: próprio autor.

É possível perceber que os resultados são próximos, pois os erros acontecem devido ao instrumento de medida utilizado; então, novamente, pode-se observar duas resoluções diferentes, mas com resultados muito próximos.

Após os cálculos dos volumes de todos os poliedros, os estudantes foram convidados a conferir os resultados no pátio, colocando água dentro deles, para depois observarem a capacidade de cada poliedro, utilizando uma pipeta.

Todas as medidas foram conferidas. Utilizou-se a pipeta. Os resultados diferenciaram-se, o que gerou uma decepção generalizada. Com isso, ao voltar para sala, indagamos, como segue na transcrição abaixo.

> Professor:- Vocês consideraram as bordas dos poliedros?
> Turma interia:- Sim.
> Professor:- Mas não vimos, na primeira atividade, se queremos calcular a capacidade de um tanque, não podemos considerar a espessura da parede, já que ali não irá entrar nenhum líquido?
> Estudante P: - Putz pode crê, nem me toquei.
> Estudante I:- Ahhh! Verdade.
> Estudante A:- Mas era só uns milímetros.
> Professor:- Sim, mas já dá uma diferença no resultado final. Outra coisa, quando vocês calculavam, em algum momento deu número com raiz?
> Estudante Z:- Sim, várias vezes.
> Professor:- Então, e para calcular vocês utilizaram aproximações, dadas pela calculadora?
> Estudante Z:- Sim.
> Professor:- Então, como vocês utilizaram aproximações também dará diferença no resultado final.
> Estudande I:- Putz, que trampo.
> Professor:- Sim I, mas isso fez que ocorresse a evolução dos instrumentos de medida muito mais precisos que a régua que vocês utilizaram, assim como a necessidade da criação do Sistema Métrico Decimal, para a padronização das unidades de medidas, assim como a dificuldade de trabalhar com números irracionais, que necessitamos aproximar ocasionando erros no resultado final.
> Estudante M:- Da hora ein. Nem imaginava isso.

Analisando a discussão acima, foi observado que os estudantes criaram expectativa de resultado certo. Isso se deve ao desafio que foi proposto aos estudantes, que deveriam calcular a capacidade dos sólidos de acrílico. Caso acertassem, ganhariam um prêmio de formatura do professor paraninfo, no caso, o próprio autor da pesquisa.

Depois dessa discussão, foi explicado que a minha preocupação maior não era o resultado final e sim o aprendizado durante o processo. Ao serem questionados se aprovavam o processo, os estudantes responderam afirmativamente, pois, segundo eles, ao realizar as atividades, as aulas se tornaram mais dinâmicas do que as tradicionais aulas com giz e lousa.

Isso nos fez refletir, se as atividades de ensino organizadas e desenvolvidas nessa investigação se caracterizaram como Atividade Orientadora de Ensino.

Para a investigação, foi feita uma organização do ensino intencionalmente para a apropriação do conceito de volume, incluindo-se, aí, o de capacidade.

A partir dessa organização, foi feito um desafio para os estudantes a calcularem a capacidade dos sólidos de acrílico. Mas, para a realização dos cálculos, os estudantes deveriam concluir todas as atividades anteriores. Esse desafio criou a necessidade do coletivo para resolver todas as atividades propostas.

Durante o desenvolvimento das atividades de ensino, além de mediador durante esse processo, também entramos em atividade de aprendizagem, lidando melhor com situações que ocorreram durante a aula, nos desprendendo de ser o único a transmitir o conhecimento.

Em relação aos estudantes, arriscamos ao afirmar que eles entraram em atividade de aprendizagem, já que, pela experiência, lecionando durante os três anos do ensino médio, vimos, através do vídeo e do áudio gravado, o envolvimento dos alunos durante a realização das atividades. As discussões para a validação dos argumentos mostraram que o estudante vem com conhecimento prévio relacionado às suas experiências anteriores.

A partir do que foi relatado acima, concluímos que conseguimos promover momentos em que pudemos estar em atividade. Temos ciência, que foi promovido momentos que podem ser chamados de Atividades Orientadoras de Ensino. Segundo Moura (1996, p.32),

> A atividade de ensino que respeita os diferentes níveis dos indivíduos e que define os diferentes níveis de ensino e que define um objetivo de formação como problema coletivo é o que chamamos de Atividade Orientadora de Ensino. Ela orienta o conjunto de ações em sala de aula a partir de objetivos, conteúdos e estratégias de ensino negociado e definido por um projeto pedagógico.

A seguir, as considerações finais.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos no presente trabalho analisar a produção de sentidos e de significados dos alunos do Ensino Médio enquanto vivenciam atividades de ensino sobre o conceito de volume do prisma.

Consideramos que, para uma abordagem conceitual, seguindo os pressupostos teóricos apresentados no Capítulo 3, as atividades de ensino deveriam envolver a composição e a decomposição de figuras geométricas, com a utilização de material manipulável, para que houvesse melhoria no desenvolvimento da habilidade de visualização espacial, causa de muitas dificuldades dos estudantes quando estudam a Geometria Espacial.

Ao mesmo tempo, as atividades poderiam fazer com que os estudantes explicitassem as facilidades que possuem em relação aos conceitos matemáticos, especialmente no que diz respeito ao cálculo de volume e capacidade.

Certamente, não foram esgotados todos os aspectos necessários para sanar todas as dificuldades no ensino da matemática, mas hoje acreditamos que o estudo teórico educacional pode trazer resultados positivos na aprendizagem dos alunos.

Hoje, concluímos que nem sempre tivemos esta postura. O mestrado profissional nos proporcionou novamente voltar à teoria educacional, para que conseguíssemos relacionar aspectos teóricos no contexto da sala de aula.

Organizar atividades de ensino, fundamentadas teoricamente, foi um trabalho árduo, levando-se em conta que, juntamente com o mestrado profissional, lecionava 38 horas-aula semanais, com diferentes conteúdos e diferentes turmas.

Esta experiência nos mostrou que não há tempo hábil para a realização dessa fundamentação teórica para todos os nossos alunos. Pelo menos, não da maneira em que a estrutura escolar hoje se encontra, pois se fosse realizado o mesmo trabalho de fundamentação teórica, na busca de autores que trabalham com a mesma temática nas seis séries diferentes, seria uma tarefa impossível. Portanto, para a melhoria da prática docente, faz-se necessária uma reflexão sobre essa prática, pois a presente investigação levou mais de um ano para analisar um mês de atividades.

Talvez, nós professores, devêssemos aprender a adaptar as teorias educacionais para esta estrutura, ou seja, aprender de uma vez por todas que o estudante é o protagonista dos processos que envolvem a aprendizagem, retirando a responsabilidade de o professor ser o único transmissor de conhecimento.

Ao convidar o estudante a ser protagonista, com atividades realizadas no coletivo, foi percebido que as interações ocorridas entre eles podem promover a explicitação e a produção de sentidos e significados sobre os conteúdos matemáticos, tais como, a diferença entre perímetro e área. Muitas vezes não são os sentidos e significados objetivados no início do processo, mas pode-se transformar a maneira de pensar do estudante, para perceber a importância do conhecimento, para viver e desempenhar sua função de cidadão na sociedade.

A pesquisa torna-se importante, pois as atividades de ensino não são estáticas, estando em constantes adaptações e mudanças, tornando necessária a prática reflexiva desta atividade, considerando-se o contexto e os conhecimentos dos estudantes tornando a aprendizagem mais significativa para os estudantes e para o professor.

Em relação à pergunta de pesquisa, podemos afirmar que a produção de sentidos e de significados explicitada pelos estudantes ao vivenciarem atividades de ensino sobre o conceito de volume de prisma vai além do próprio conceito, abrangendo o sistema métrico decimal, área e perímetro de figuras planas, instrumentos de medidas, relações entre as unidades de medidas, de capacidade e números irracionais. Isso ficou evidente quando os estudantes calcularam a capacidade dos prismas de acrílico.

Com relação à visualização, foi obervado que, sem o material manipulável, o desenvolvimento do processo geométrico fica comprometido e, consequentemente, a produção de sentidos e de significados se resumirá ao uso de fórmulas. Vale a pena ressaltar que, pelo menos nas escolas em que trabalhamos, nunca houve sólidos geométricos para a utilização em sala de aula. Por isso, foi feita a opção pela utilização do material dourado para representar o processo de composição e decomposição de figuras geometricas.

A utilização do material manipulável mostrou-se interessante para auxiliar a formação de conjecturas entre os estudantes, assim como melhorar a visualização espacial, indo ao encontro dos referenciais teóricos apresentados no Capítulo 3. Considera-se que, no ensino de Geometria Espacial, a utilização de materiais manipuláveis torna-se importante para o desenvolvimento de competências propostas pelos Parâmetros Curriculares adotados, tanto no âmbito federal, quanto no estadual.

A Educação Matemática é um desafio. Podemos nos manter estáticos ou experimentar novas alternativas para minimizar os inúmeros reflexos negativos que pairam com insistência sobre o Ensino de Matemática, mais especificamente sobre o ensino de Geometria nas escolas. Este trabalho pode ser um ponto de partida para aqueles que querem iniciar ou ampliar suas estratégias no ensino de Geometria Espacial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação matemática:** uma introdução à teoria e aos métodos**.** Lisboa: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BROLEZZI, A.C. Princípio de Cavalieri e o cálculo de volume. In: CERRI, C. **Matemática**. São Paulo: Fundação Vanzolini, 2002. p. 49-58.

BROLEZZI, A.C; DRUCK, I.D.F. Áreas, semelhanças e volumes e o método da exaustão. In: CERRI, C. **Matemática**. São Paulo: Fundação Vanzolini, 2002. p. 33-44.

CARAÇA, B. de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matematica**. 9. ed. Lisboa: Livraria de Sá da Costa Editora, 1989.

CARVALHO , A.M.P. O uso do vídeo na tomada de dados: pesquisando o desenvolvimento do ensino em sala de aula**. Pró-Posições**, v. 7, n.1, p. 5-13, 1996

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**, v. 2, n.2, p. 15-19, 1989.

DARSIE, M.M.P. A avaliação e a aprendizagem. **Cadernos de pesquisa**, n.99, p. 47-59, 1996.

FIORENTINI, D. ; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores).

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4.ed. São Paulo: Atlas, 2002.

HENRIQUES, M.D. **Um Estudo sobre a produção de significados de estudantes do ensino fundamental para área e perímetro.** 2011. 218 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

IEZZI, G. et al. **Matemática:** volume único**.** 5.ed. São Paulo: Atual, 2011.

IMENES, L. M.; Lellis, M. **Matemática para todos**: 7ª série. São Paulo: Ed. Scipione, 2002.

KALEFF, A.M.; REI, D.M; HENRIQUES, A.S.; FIGUEIREDO, L.G. O desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O modelo de Van Hiele**.** **Bolema**, n.10, p.21-30, 1994.

KALEFF, Ana Maria. **Vendo e entendendo poliedros:** do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. 2.ed. Niterói: EDUFF, 2003.

LANNER DE MOURA, A. R. et al. **A quantificação do espaço.** s.d. p.19-49. Apostila elaborada tendo como referências os textos de Luciano Castro Lima; Mário Takazaki ; Roberto P. Moisés. (Mimeo).

LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M.C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes**. Zetetiké** (UNICAMP), v.13, n.24, p.11-45, 2005.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino.** 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria.** 4.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E.L. **Exame de textos:** análise de livros de matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**, v. 4, p.3-13, 1995.

MACHADO, N. J. Interdisciplinaridade e matemática. **Pró-posições**, v. 4, n. 1, 1993.

MENDES, A.F. **Da resolução de quebra-cabeças em sala de aula à aplicabilidade no cotidiano de uma marmoraria: o que os estudantes do 9º ano do ensino fundamental falam e escrevem sobre o conceito de área.** Dissertação de mestrado – Departamento de Matemática, 114 p. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? **Pró-posições**, v. 3, n. 1, 1992.

MOURA, M. O. de; LANNER de MOURA, A. R. **Escola:** um espaço cultural. Matemática na educação infantil: conhecer, (re)criar - um modo de lidar com as dimensões do mundo**.** São Paulo: Diadema/SECEL, 1998.

MOURA, M. O. et al. A atividade orientadora de ensino como unidade entre o ensino e aprendizagem**.** In: MOURA, M. O. (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber Livro, 2010.

MOURA, M.O. A atividade de ensino como unidade formadora**. Bolema**, v. 2, n. 12, 1996.

MOURA, Manoel. **O educador matemático na coletividade de formação: uma experiência com a escola pública.** Tese (Livre Docência em Metodologia do Ensino de Matemática) – Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

MOYSES, L. **Aplicações de Vygostky à educação matemática**. 3.ed. Campinas, SP: Papirus. 2001.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C.L. B. **A geometria nas séries iniciais:** uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e das formações de professores. São Carlos: EdUFSCar, 2003. 151 p.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, v.9, 2005. Disponível em: <http://sbempaulista.org.br/RevEdMatVol9.pdf> Acesso em: 2014-03-02.

NASSER, L. et al. **Geometria segundo a Teoria de Van Hiele.** 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/ UFRJ - Projeto fundão, 2000.

NEHRING, C.M.; POZZOBON, M.C.; BATTISTI, I.K. O conceito de Medidas de Superfície - na aboirdagem histórico-cultural e nos registros de representação. **Revista Ibero-americana de Educação**, n.54/2, p. 1-15, 2010.

OLIVEIRA, M.K. **Vygotsky:** aprendizado e desenvolvimento - um processo sócio-histórico. 4.ed. São Paulo. Editora Scipione. 2004.

PAIS, L.C. **Ensinar e aprender matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PASSOS, C.L. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula.** 2000. 348 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação, Campinas, 2000

PAVAVELLO, R. N. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**. Zetetiké**, v. 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

RODRIGUES, W.P. **Uma abordagem conceitual de volumes no ensino médio.** 2011. 86 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2011.

SÃO PAULO. Secretaria Estadual de Educação. **Proposta Curricular de Matemática**. São Paulo: SEE, 2008.

SILVA, A.P.D. **Arquimedes e o volume da esfera**. Belo Horizonte: UFMG, 2005.

SILVA, I. **História dos pesos e medidas.** São Carlos: EdUFSCar, 2004. 208 p.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema,** n. 14, p. 66-91, 2000.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.