UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO

EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

Marcos Vinicius Ferreira Fernandes

MÉTODOS HISTÓRICOS UTILIZADOS PARA A RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

São Carlos

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

Marcos Vinicius Ferreira Fernandes

MÉTODOS HISTÓRICOS UTILIZADOS PARA A RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas à Universidade Federal de São Carlos, UFSCar, sob orientação do Professor Doutor João Carlos Vieira Sampaio.

São Carlos

2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

F363mh

Fernandes, Marcos Vinicius Ferreira.
Métodos históricos utilizados para a resolução de uma equação do segundo grau / Marcos Vinicius Ferreira Fernandes. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
109 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Matemática - história. 2. Equações de segundo grau. 3. Matemática - ensino. 4. Prática docente. I. Título.

CDD: 510.9 (20ª)

Banca Examinadora

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
DM–UFSCar

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
IGCE–UNESP

Prof. Dr. Renato José de Moura
DM–UFSCar

Dedicatória

À minha esposa Tahila por toda a paciência e dedicação em todos os momentos. À minha família que sempre incentivou para que eu concluísse este projeto e aos verdadeiros amigos que compreenderam minha ausência em alguns momentos.

AGRADECIMENTOS

À Tahila, minha esposa, companheira amada, que nunca me deixou desanimar quando algum obstáculo aparecia. Obrigado, principalmente, por sempre me lembrar de que eu era capaz de chegar a este momento.

Ao meu orientador Professor Doutor João Carlos Vieira Sampaio por ter me mostrado o rumo a seguir quando eu parecia estar perdido. Obrigado por não ter desistido desse meu sonho.

Aos professores deste Mestrado Profissional, em especial, a Salvador, Malagutti, Paterlini e Yuriko, a quem tive o prazer de reencontrar e cujos ensinamentos serão sempre lembrados.

Aos meus pais que sempre me incentivaram e mostraram que não há outro caminho senão o estudo. Agradeço pelas oportunidades dadas e orientações, que tanto persistem que hoje luto para que meus alunos sigam sempre por este caminho.

Aos meus sogros que embarcaram nessa sem terem muitas escolhas, mas que sempre me incentivaram e ajudaram, principalmente, contribuindo com um ambiente propício para tal jornada.

Aos meus irmãos que de longe sempre me cobraram e cada um a sua maneira, uns xingando, outros tirando sarro, mas sabendo que esse era o caminho a ser seguido.

Aos colegas de curso que sempre me ajudaram e eram mais um motivo para enfrentar três horas de viagem semanal. Obrigado pelas horas de estudos, companhia nos cafés, etc.

E agradeço a Deus, pois sei que quando as linhas ficavam muito tortas era Ele que intercedia.

Resumo

Neste trabalho procuramos responder ao questionamento: Os métodos que grandes Matemáticos usaram no decorrer de quase 4 mil anos de história podem auxiliar no aprendizado?

Com alguns anos de experiência no ensino de equações do 2º grau, percebemos que assim que os alunos aprendem a popularmente conhecida fórmula de Bháskara, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, qualquer outro esforço no sentido de justificar ou discutir uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, é feito em vão.

Nossa intenção neste trabalho é usar a História da Matemática para trazer uma perspectiva diferente para a resolução de equações do segundo grau. Não é nosso intuito analisar o quanto os alunos aprendem deste conteúdo, apenas nos propusemos a alimentar a teoria com formas de resolução corretas utilizadas no decorrer da história e que para alguns povos ou eras podem ter sido as únicas conhecidas.

A interpretação geométrica da resolução da equação $x^2 + 10x = 39$ feita por Al-Khwarizmi foi uma das Atividades aplicadas em uma turma de licenciatura plena em Matemática assim como outras cinco Folhas de Atividades, incluindo uma resolução adaptada do método da Soma e da Diferença compartilhado entre Diofanto de Alexandria e o povo da antiga Babilônia.

A metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia Didática que nos orientou na confecção de uma sequência didática para a aplicação e uma reformulação após a análise a posteriori no sentido de produzir um material didático mais significativo para o aprendizado.

Palavras-chaves: história da matemática; equação do segundo grau; Al-Khwarizmi; ensino de matemática.

ABSTRACT

In this work we attempt to answer the question: Can the methods that great mathematicians have used for almost 4 thousand years of history be helpful in the learning process?

With a few years of experience in 2nd degree equations, we realize that as soon as the students learn the popular and well-known Bháskara formula, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, any other effort in the sense of justifying or discussing the equation of the form $ax^2 + bx + c = 0$, is in vain.

Our intention in this work is to use History of Mathematics to bring a different perspective to a resolution of second degree equations. It is not our aim to analyze how much the students know about this content, we have merely proposed to fuel the theory with correct forms of resolution used over the history and that for some peoples or ages could have been the only known ones.

The geometric interpretation of the resolution of the equation $x^2 + 10x = 39$ done by Al-Khwarizmi was one of the Activities applied in an undergraduate group in Mathematics as well as other five Sheets of Activities, including an adapted resolution of the method of Sum and Difference shared among Diofanto of Alexandria and the people of the ancient Babylon.

The methodology of research used was the Didactic Engineering that oriented us in the tailoring of a didactical sequence to the application and reformulation after the analysis a posteriori in the sense of producing a didactical material more meaningful to the learning process.

Keywords: history of mathematics; second degree equation; Al-Khwarizmi; mathematics teaching.

Índice de Figuras

SUMÁRIO

Introdução

A História da Matemática quando aplicada no Ensino Fundamental e no Ensino Médio nos dá uma oportunidade de trabalharmos de forma mais branda um conteúdo complexo ou muito conceitual, além de despertar a curiosidade ou aguçar aquela vontade do desafio que por muitas vezes é perdida no decorrer do ensino da disciplina.

Neste trabalho procuramos responder ao seguinte questionamento: Os métodos que grandes Matemáticos usaram no decorrer de quase quatro mil anos de História podem auxiliar no aprendizado?

O estudo e aplicações das formas geométricas, muitas vezes, têm o papel de dar notoriedade à álgebra. Como exemplo, no ensino de produtos notáveis, provamos a validade da identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ com a soma de áreas de dois quadrados e dois retângulos, assim como em algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, dentre outros.

Neste trabalho unimos formas de resolução de equações do segundo grau utilizando métodos históricos aplicados por matemáticos como Al-Khwarizmi e Diofanto com argumentos geométricos e algébricos. Tentamos ir além de mostrar como era feito às suas épocas, enfatizando que a forma como é geralmente ensinada a resolução da equação do 2º grau, a popularmente conhecida fórmula de Bháskara, pode ser enriquecida, e esperamos que melhor compreendida, levando o aluno a raciocinar que em uma simples equação deste tipo pode estar escondida um Universo de interpretações e fazê-lo concluir que as resoluções são, de certa forma, análogas.

Esta dissertação foi dividida em seis capítulos e segue uma breve descrição do conteúdo de cada um deles.

No primeiro capítulo falamos sobre a história das equações de segundo grau, deixando claro que Bháskara é um dos personagens, mas que houve diversas interpretações, inclusive antes dele, e que podem ser igualmente valiosas se bem apreciadas num contexto escolar.

No segundo capítulo fazemos uma discussão pedagógica sobre as orientações seguidas por este trabalho discutindo brevemente alguns conceitos da Engenharia Didática que nos ajudaram a montar uma sequência didática utilizada nas Folhas de Atividades.

No terceiro capítulo discutimos três métodos históricos para a resolução de equações de segundo grau, além de outros dois que criamos baseados neles. Fazemos a generalização dos métodos, além de demonstrações geométricas e/ou algébricas.

No quarto capítulo relatamos como foi a aplicação das seis Folhas de Atividades nos dois dias além do contexto da turma escolhida.

No quinto capítulo fazemos uma análise das Folhas de Atividades levando em consideração as dificuldades, percepções da aplicação e a produção do conhecimento gerada a partir de nossa proposta.

No sexto capítulo discutimos nossas considerações finais.

No Apêndice A estão as seis Folhas de Atividades tais como foram aplicadas e no B, nosso produto final.

Esperamos com este trabalho cumprir uma das principais motivações proposta no início deste Mestrado Profissional: montar um material que pudesse contribuir no ensino como um todo e especificamente no conteúdo equações de segundo grau, certos que a experiência adquirida ao longo da elaboração, discussão e aplicação dessa pesquisa bastante contribuiu para o nosso aperfeiçoamento como profissional da educação.

Capítulo 1

Uma história das equações do 2º grau

A História e o desenvolvimento das ciências não se deram de maneira linear, de forma que aquilo que sabemos e tomamos como verdadeiro é um apanhado de informações fragmentadas que com esforços de inúmeros matemáticos, além de outros profissionais como historiadores e arqueólogos, podem ser contadas e tidas como verídicas até que se provem o contrário.

Logo, falar da História da Matemática é andar por um terreno formado ao longo de muitos anos com contribuições vindas de povos que não temos a certeza do tipo de contato que tiveram, ou até mesmo se houve algum, mas que influenciaram seus sucessores seja com suas obras ou com a chama que acenderam ao fazerem ou responderem questionamentos.

A História das equações de 2º grau não foge a esta regra. Quando perguntamos em uma sala de ensino médio como se resolve uma equação destas, fatalmente ouvimos sobre a popularmente conhecida Fórmula de Bháskara. Mas vemos que na história, muitos povos as resolviam antes mesmo de Bháskara e indícios mostram que alguns utilizavam uma fórmula equivalente ou até a própria, mas não recebem o mérito por isso. Mais uma das facetas da História das Ciências.

Nossa motivação para escrever tal dissertação começa com Al-Khwarizmi e sua forma de resolver equações com justificativa geométrica, o que nos dá a oportunidade de discutir um sentido para a raiz encontrada da equação: a descoberta do lado do quadrado.

Ao se aprofundar em seu trabalho, vimos que sua Matemática pode ter alguma herança daquela desenvolvida pelos Babilônios que viveram pelo menos um milênio e meio antes dele. E que estes, provavelmente, também influenciaram Diofanto, uma vez que tinham em comum a resolução com o método da Soma e da Diferença, método que nos inspirou a resolver as equações de segundo grau que os tipos de Al-Khwarizmi não eram capazes pelo não uso de números negativos.

Então o que nos propusemos a fazer é discutir estes métodos de resolução da equação de segundo grau, tentando dar mais sentido e auxiliar seja no entendimento ou na motivação do estudo deste assunto. Mas antes, vamos falar um pouco sobre as contribuições citadas.

1.1 Babilônios

Os antigos Babilônios (ou Babilônicos) que habitaram a Mesopotâmia, hoje sul do Iraque, por volta de 2000 a 1600 a.C., resolviam equações de segundo grau sem terem uma álgebra definida. No tablete BM 13901 da coleção British Museum, um dos seus problemas é traduzido usualmente da seguinte maneira:

“Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual o lado?”

Solução:

1. tome 1
2. fracione 1 tomando a metade (=0,30)
3. multiplique 0,30 por 0,30 (=0,15)
4. some 0,15 a 0,45 (=1)
5. 1 é a raiz quadrada de 1
6. subtraia os 0,30 de 1
7. 0,30 é o lado do quadrado

Como utilizavam o sistema posicional sexagesimal, 0,45 correspondia a $\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$. Em notação moderna a equação seria $x^2+x=3/4$ e a resolução seria o que chamamos hoje de completamento de quadrados. Esta solução nos leva a acreditar que os Babilônios possuíam uma álgebra bem definida.

Neste trabalho não pretendemos discutir a respeito da Matemática Babilônia ser algébrica ou geométrica, fato este apontado por Carvalho e Roque (2012, p. 20), pois este não é o nosso intuito.

É fato que era um povo com uma boa habilidade aritmética mostrada em seus tabletes parcialmente conservados e que utilizavam um método para a resolução da equação de segundo grau e não uma fórmula.

Uma nova tradução proposta por Carvalho e Roque (2012, p. 21), dá ênfase à solução geométrica para equações da forma $ax^2+bx=c$:

“A superfície e a minha confrontação acumulei: obtive 0,45.”

Solução:

1. 1 é projeção

2. quebre 1 na metade (obtendo 0,30) e retenha 0,30, obtendo 0,15
3. agregue 0,15 a 0,45
4. 1 é o lado igual
5. retire do interior de 1 os 0,30 que você reteve
6. 0,30 é a confrontação

Esta interpretação é análoga à que Al-Khwarizmi sugeriu e discutimos mais adiante na seção 3.1 ($x^2 + bx = c$). Portanto, o completamento de quadrados já era utilizado há mais de três mil anos atrás para resolver problemas que, hoje, escreveríamos na forma de uma equação de segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$.

1.2 Diofanto de Alexandria

Em seu livro, *Aritmética*, Diofanto de Alexandria deu uma contribuição importante para o que chamamos hoje de incógnita. O valor desconhecido de um problema era designado como arithme, de onde vem o nome aritmética. Devido a isto e mais algumas "designações abreviadas" que introduziu em sua obra é que muitos o consideram o pai da álgebra.

Diofanto mostrou-se diferente de seus antecessores em alguns aspectos. Um deles é que muitos de seus problemas não eram acompanhados de soluções geométricas e outro, é que operava com quantidades desconhecidas, os "arithmes", da mesma forma que com as quantidades conhecidas, os números. O que hoje chamamos de termos semelhantes ao ensinarmos expressões algébricas.

Também se mostra diferente dos demais citados neste trabalho por sua habilidade e conhecimento de números negativos. Uma tradução de Carvalho e Roque (2012, p. 134) para uma definição contida no trabalho de Diofanto:

> "Se um problema leva a uma equação na qual quaisquer termos são iguais aos mesmos termos mas têm coeficientes distintos, temos que retirar os semelhantes dos semelhantes em ambos os lados, até que obtenhamos um termo igual a um termo. Mas, se existe de um lado, ou em ambos, algum termo negativo, o termo deficiente deve ser adicionado a ambos os lados até que os termos nos dois lados sejam positivos. Em seguida, retiramos semelhantes de semelhantes até que reste um termo em cada lado."

Em sua obra, Diofanto propõe o seguinte problema:

"Encontrar dois números cuja soma é 20 e o produto é 96". A resolução que utilizava é o que chamamos nesta dissertação de método da Soma e da Diferença.

> Este tipo de procedimento será comum até que o simbolismo algébrico se encontre desenvolvido: chegar a resultados gerais com um caso específico, bem representativo da situação geral. (Carvalho e Roque, 2012, p. 132)

Tal tipo de exercício pode ser resolvido com um sistema de equações que culminará na resolução de uma equação do segundo grau. Usamos este exemplo em nossa Folha de Atividade 6 para introduzir uma forma de resolver uma equação da forma $x^2+bx+c=0$, independentemente dos valores de b e c.

> É notável a falta de métodos gerais e a aplicação repetida de artifícios engenhosos ideados para as necessidades de cada problema específico. Diofanto só admitia respostas entre os números racionais positivos e, na maioria dos casos, satisfazia-se com uma resposta apenas do problema. (EVES, 2004, p. 207)

Na seção 3.5 discutimos esta forma de resolução em detalhes para o caso geral.

1.3 – Al-Khwarizmi

Al-Khwarizmi em seu livro, *Al-Kitāb al-muẖtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala*, expôs sua resolução da equação $x^2+10x=39$:

> *"Você divide o número de raízes por dois, o que, no caso presente, fornece cinco. Isso você multiplica por si mesmo; o produto é vinte e cinco. Some isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito, e subtraia disso a metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três. Essa é a raiz do quadrado que você procurava; o próprio quadrado é nove".* (Tradução livre de Katz, 1998, p. 245).

A interpretação geométrica desta solução é dada na Folha de Atividade 1.

De acordo com Katz (1998), Al-Khwarizmi destacou seis tipos de equações que podem ser escritas usando os três tipos de valores: os quadrados (do desconhecido, da própria raiz da equação), a raiz do quadrado (o desconhecido em si, a raiz da equação) e os números absolutos. As equações são:

1. Quadrados iguais a raízes ($ax^2=bx$)
2. Quadrados igual ao número ($ax^2=c$)
3. Raízes iguais a números ($bx=c$)
4. Quadrados e raízes iguais a números ($ax^2+bx=c$)

5. Quadrados e números iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$)

6. Raízes e números iguais a quadrados ($bx + c = ax^2$)

A razão para dividir nestes seis casos é que os matemáticos islâmicos não lidavam com números negativos, então os coeficientes a, b e c eram sempre positivos assim como as raízes das equações. Nesta dissertação, tratamos as equações com esta restrição, inclusive por se tratarem de explanações geométricas, tal como Al-Khwarizmi o fez. A exceção é a do último método, com inspiração na álgebra de Diofanto, que não tinha esta limitação.

Para Al-Khwarizmi a forma que utilizamos hoje, $ax^2 + bx + c = 0$, não faria sentido uma vez que os coeficientes sendo positivos as raízes não poderiam ser. O que é facilmente compreendido, em seu contexto geométrico, como a soma de áreas poderia ser nula?

Para Katz (1998), o livro de Al-Khwarizmi, *Livro Consensado sobre o Cálculo da al-Jabr e al-muqabala*, devia ser um manual para resolver equações e o termo condensado sugere que havia outros textos mais detalhados dos procedimentos algébricos na época.

> O termo al-jabr pode ser traduzido como "restauração" e refere-se à operação de "transposição" subtraída uma quantidade de um dos lados de uma equação para o outro lado, onde torna-se uma quantidade adicional. A palavra al-muqabala pode ser traduzido como "comparar" e refere-se à redução de um termo positivo subtraindo quantidades iguais de ambos os lados da equação. Assim, a conversão de $3x + 2 = 4 - 2x$ a $5x + 2 = 4$ é um exemplo de al-jabr, e a conversão deste último para $5x = 2$ é um exemplo da Al-muqabala (tradução livre de Katz, 1998, p. 244).

Desta forma, ao invés de trabalhar com quadrados (ax^2) seguiremos Al-Khwarizmi que justificava que bastava dividir toda sentença por a e usarmos quadrado (x^2) apenas.

Em seu livro, Al-Khwarizmi, além de resolver as seis formas de maneira retórica, ou seja, sem usar símbolos, apenas com palavras, apresentou soluções geométricas detalhadas. Seus métodos de resolução podem ter sido inspirados na interpretação de números por segmentos, introduzida por Euclides em sua obra, *Os Elementos*.

1.4 – Bháskara

O matemático indiano Bháskara a quem inevitavelmente citamos quando trabalhamos no ensino de equações do segundo grau, viveu no século XII e as resolvia por meio de palavras, segue um exemplo apresentado por Carvalho e Roque (2012, p.154):

> "Seja uma igualdade contendo a quantidade desconhecida, seu quadrado, etc. Se temos os quadrados da quantidade desconhecida, etc., em um dos membros, multiplicamos os dois membros por um fator conveniente e somamos o que é necessário para que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz; igualando em seguida esta raiz à do membro das quantidades conhecidas, obtemos o valor da quantidade desconhecida."

Este é o que chamamos de método de completamento de quadrados. Bháskara o denominava de "eliminação do termo médio".

Nesta época, os enunciados eram apresentados na forma de versos, dentre eles, um dos mais conhecidos é:

"De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?"

Uma possível interpretação e solução pelo método de Bháskara para tal exercício seria:

Suponha que o número de abelhas seja $2x^2$, a raiz da metade seria x e os oito nonos do todo $\frac{8}{9}\cdot 2x^2 = \frac{16}{9}x^2$. Mais 2 abelhas que não estão juntas das demais somadas a estas dão o total, $2x^2$. Então $x + \frac{16}{9}x^2 + 2 = 2x^2$.

Sua resolução parte de equações da forma $ax^2 \pm bx = c$, então a equação seria equivalente a $2x^2 - 9x = 18$. Quando diz "multiplicando por um fator conveniente" quer dizer por um número k tal que $k \cdot 2x^2$ seja um quadrado perfeito, no caso um fator conveniente seria o 8.

A equação seria $16x^2 - 72x = 144$.

"Somamos o que é necessário para que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz", ou seja, somamos a quantidade necessária para que o membro do lado esquerdo da equação seja um trinômio quadrado perfeito. Tal número seria o 81.

Então $16x^2 - 72x + 81 = 144 + 81 \Rightarrow (4x-9)^2 = 225 \Rightarrow 4x - 9 = 15$.

Portanto $x = 6$ e o número de abelhas é $2 \cdot 6^2 = 72$.

Logo percebemos que a solução dada por ele em nada se assemelha à fórmula que hoje conhecemos como se fosse de Bháskara. Claro que é possível generalizar este método e deduzir a fórmula, mas como mostramos no capítulo 3, todos os métodos discutidos neste trabalho são equivalentes à conhecida fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Para elucidar e convencer aos alunos da validade de tal algoritmo, um artifício geométrico seria de grande valia e é justamente isso que propomos em nossas Atividades.

Capítulo 2

Discussão Pedagógica

2.1 – Engenharia Didática

Nesta pesquisa utilizamos uma sequência didática elaborada conforme as etapas da Engenharia Didática que é uma forma de sistematizar a aplicação de um determinado método na pesquisa. A teoria da Engenharia Didática pode ser pensada como um referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na união de dois conhecimentos: o prático e o teórico.

A metodologia da Engenharia Didática, segundo Artigue (1995), inclui quatro fases:

1ª) Análises prévias;

Nesta fase são delimitadas as variáveis de controle, as quais permitem conhecer o assunto que se pretende experimentar. Fundamentamos uma proposta de mudança para uma intervenção no ensino usual com o objetivo da melhoria do ensino.

Segundo Almouloud (2008) devem ser analisados: a epistemologia dos conteúdos, o ensino usual e seus efeitos, as dificuldades do aprendizado, os fatores da construção das atividades e os objetivos da pesquisa.

2ª) Construção e análise a priori;

Nesta fase, elabora-se o plano de ação, descrevem-se as escolhas efetuadas e também cada uma das atividades propostas. Em nosso caso, escolhemos a elaboração de seis Folhas de Atividades, descritas no próximo capítulo, que contemplassem formas históricas de resolução de equações de segundo grau, acreditando que podem mudar o ensino habitual deste conteúdo.

3ª) Aplicação de uma sequência didática;

Nesta fase, é o momento de colocar na prática as atividades elaboradas e devemos seguir ao máximo aquilo que foi previamente estabelecido na segunda fase afim de que a comparação com as hipóteses iniciais seja fiel. Caso seja necessário mudar o plano de ações, deve-se fazer uma complementação na análise a priori.

4ª) Análise a posteriori e validação.

Na última fase, analisamos todo o material produzido pelos alunos na aplicação das atividades além das anotações feitas durante a aplicação de nossa sequência e fazemos a validação do método comparando o resultado com as expectativas traçadas.

No decorrer da dissertação essas fases são apresentadas com mais detalhes.

2.2 – Análises prévias

Conversando com colegas professores vemos que há uma tentativa de justificar a popularmente conhecida fórmula de Bháskara partindo de quadrados perfeitos ou até mesmo com completamento de quadrados principalmente devido à apostila utilizada pelas escolas estaduais fazê-lo dessa forma.

Dentre os materiais que tivemos contato, nota-se que o completamento de quadrados é quase que sempre o primeiro método, mas aos poucos desestimulado, talvez pela dificuldade de entendimento dos produtos notáveis $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ e $(a+b)\cdot(a-b)$. Desta forma, assim que é apresentada a fórmula resolutiva esta aparenta ser a única existente, ou seja, quaisquer outras formas ficam fadadas ao esquecimento.

A seguir segue um trecho extraído dos Parâmetros Curriculares Nacionais para a Educação Básica (1998, p. 117):

> É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-lo simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades.

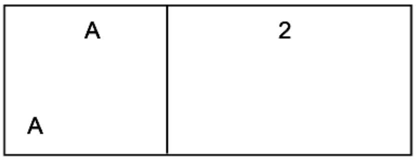
As abordagens históricas privilegiam justamente o estudo de situações e que, de forma bem conduzida, pode levar a investigação de padrões, além de favorecer a criação de uma linguagem algébrica a partir de uma situação concreta.

Outro trecho dos PCNs (1998, p. 121):

> Convém também salientar que a "visualização" de expressões algébricas, por meio do cálculo de áreas e perímetros de retângulos, é um recurso que facilita a aprendizagem de noções algébricas, como:

Figura 1

Exemplo:



1°) Cálculo da área do retângulo pela multiplicação das dimensões do retângulo: a e a+2: a.(a + 2).

Obtendo-se assim a.(a + 2) = a² + 2a.

2°) Cálculo da área do retângulo pela soma das áreas das figuras que o compõem, o quadrado e o retângulo menor: a² + 2a.

Soma de áreas – Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p. 121)

Por exemplo, no estudo de equações do segundo grau vemos uma grande falta de compreensão quanto ao discriminante, popularmente conhecido por delta, Δ. No estudo geométrico há uma possibilidade de mostrar o significado quando $\Delta < 0$ e não há soluções reais, assim como no caso $\Delta = 0$ e a solução é única.

Portanto acreditamos na necessidade de complementar o ensino de equações do segundo grau e montamos a sequência didática mostrada e comentada nesta dissertação com este intuito.

2.3 – Construção e Análises a priori

Após muitos encontros e discussões sobre os parâmetros que seriam utilizados em nossa sequência, decidimos por seis Folhas de Atividades com os métodos históricos, descritos em detalhes no capítulo 3.

As nossas metas eram:

a) Apresentar os métodos: pela nossa experiência de sala de aula e livros didáticos que analisamos, dentre os cinco métodos apenas o primeiro acreditávamos que fosse conhecido por parte dos alunos.

b) Verificar o entendimento: montamos as atividades de forma cuidadosa para que houvesse um aprendizado em cada método, uma produção de conhecimento e não simplesmente uma compreensão superficial a ponto de terem capacidade de resolver os exercícios.

Dentre outros conteúdos matemáticos, acreditamos que nossa sequência didática possa contribuir no ensino das seguintes áreas: manipulação algébrica, produtos notáveis, área de quadrados e retângulos, soma e diferença de áreas, radiciação de termos algébricos, interpretação da solução de um problema e transformações geométricas rígidas.

2.4 – As Folhas de Atividades

As folhas de 2 a 6 mesclam exemplos resolvidos, com textos detalhando as passagens, as transformações algébricas sofridas na equação e a justificativa geométrica quando cabível. Procuramos ser minuciosos a fim de obter maior independência dos estudantes em relação ao professor esperando torná-los participantes ativos no processo de aprendizagem.

Folha de Atividade 1: traz nove equações do segundo grau para que podem ser resolvidas de forma livre. A ideia é verificar se há um método que os alunos têm preferência.

Folha de Atividade 2: traz um exemplo resolvido de equações do tipo $x^2 + bx = c$ com uma adaptação do método de Al-Khwarizmi e três exercícios que devem ser resolvidos seguindo o exemplo para verificar a compreensão do método.

Folha de Atividade 3: traz um exemplo resolvido de equações do tipo $x^2 + c = bx$ com uma adaptação de Al-Khwarizmi e Ibn Turk e três exercícios que devem ser resolvidos seguindo o exemplo para verificar a compreensão do método.

Folha de Atividade 4: traz um exemplo resolvido de equações do tipo $bx + c = x^2$ com um método que foi desenvolvido especificamente para este caso e três exercícios que devem ser resolvidos seguindo o exemplo para verificar a compreensão do método.

Folha de Atividade 5: traz um exemplo resolvido de equações do tipo $x^2 - bx = c$ com um método que foi desenvolvido especificamente para este caso e três exercícios que devem ser resolvidos seguindo o exemplo para verificar a compreensão do método.

Folha de Atividade 6: apresenta o método da Soma e da Diferença utilizado por Diofanto e traz um exemplo resolvido de equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$

com uma adaptação deste método além de três exercícios que devem ser resolvidos seguindo o exemplo para verificar a compreensão do método.

Capítulo 3

Descrição dos métodos utilizados

Os métodos descritos a seguir, são reinterpretações daqueles utilizados por Al-Khwarizmi e, o último, uma aplicação do método da Soma e da Diferença utilizado por Diofanto em seu trabalho na resolução das equações do segundo grau.

Em nossas Folhas de Atividades usamos exemplos para introduzir os métodos, mas neste capítulo cumprimos a necessidade de generalizá-los, além de compararmos com a Fórmula de Bháskara que, nos atrevemos em dizer, mais do que ser o preferido por nossos alunos, aparenta ser o único.

3.1 – $x^2 + bx = c$, sendo $b, c \in \mathbb{R}_+^*$

Dentre as quatro formas de equações do segundo grau descritas por Al-Khwarizmi, esta, quadrado mais raízes igual a número, é a que tem mais fácil aceitação, pois envolve uma decomposição de um retângulo em dois (em seu livro Al-Khwarizmi o decompôs em quatro) e a soma destes a um quadrado, ou seja, tarefas de simples execução e fácil visualização.

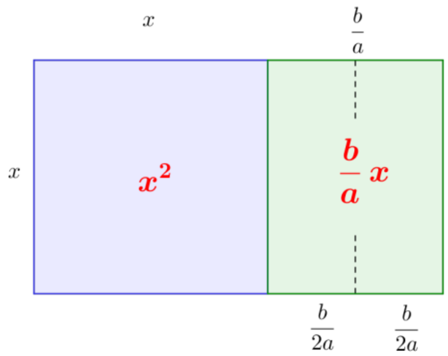
Tal como fez Al-Khwarizmi em seu livro, intuímos o método com o exemplo $x^2 + 10x = 39$ sem nos preocuparmos com a generalização e devido à expectativa da dificuldade em dividir números ímpares por dois, propositalmente, trabalhamos primeiro com números pares para que este não fosse mais um empecilho a um método diferente.

3.1.1 – Generalizando o método

Suponha dada a equação $ax^2 + bx = c$, sendo a, b e c números reais e positivos (apesar de não trabalhar com números negativos, Al-Khwarizmi mostra em seu livro que não tinha problemas em trabalhar com números racionais da forma $p \pm \sqrt{q}$, sendo p e q números racionais).

Dividindo a equação por a obtemos $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$, interpretamos geometricamente como um quadrado de lado x e um retângulo de lados $\frac{b}{a}$ e x. Dividimos o retângulo em dois, um de lado $\frac{b}{2a}$ e outro de lado x conforme a figura 2. A abreviação "Res.", nesta e demais figuras, substitui a palavra "Resolvendo".

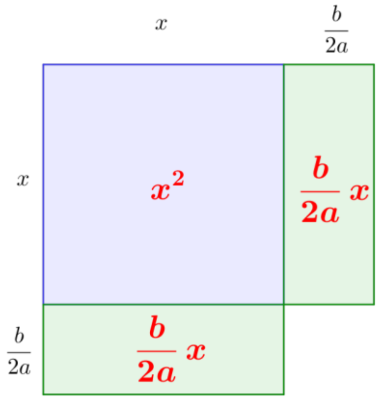
Figura 2



Res. $ax^2 + bx = c$ – Criação do autor

Fazemos uma transformação geométrica com um destes retângulos produzindo um polígono que, para ser um quadrado de lados $x + \frac{b}{2a}$, falta apenas um quadrado de lados $\frac{b}{2a}$, conforme a figura 3.

Figura 3

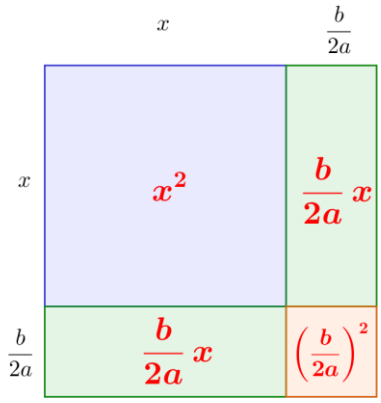


Res. $ax^2 + bx = c$ – Criação do autor

Até este momento as transformações geométricas foram feitas sem inclusão ou perda, ou seja, as figuras são equivalentes em área.

Algebricamente, se $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a}$ então $x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{b}{2a}x=\frac{c}{a}$. Incluindo o quadrado de lado $\frac{b}{2a}$ e área $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ alteramos a área e fazemos o balanceamento na equação, $x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}$.

Figura 4



Res. $ax^2+bx=c$ – Criação do autor

Como o lado do quadrado é $x+\frac{b}{2a}$ tem área $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, figura 4. Consequentemente a equação é equivalente a $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}$, ou seja, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2+4ac}{4a^2}$.

Aplicando uma raiz quadrada em ambos os lados da equação $\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2+4ac}{4a^2}}$, ou seja, $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$.

E, finalmente, $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2+4ac}}{2a} \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$.

Observação 1: Como a,b e c são números reais e positivos b^2+4ac é um número real e positivo, a equação $ax^2+bx=c$ sempre terá soluções reais.

Observação 2: Aparentemente, no discriminante $\Delta = b^2 + 4ac$ há uma diferença entre esta fórmula e a conhecida fórmula de Bháskara, mas na verdade a forma das equações é que são distintas, uma é $ax^2 + bx = c$ e a outra, $ax^2 + bx + c = 0$. Ou seja, a forma $ax^2 + bx = c$ que resolvemos é do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ com c negativo. Portanto as fórmulas são equivalentes.

3.2 – $x^2 + c = bx$, sendo $b, c \in \mathbb{R}_+^*$

Esta forma tem uma justificativa geométrica mais trabalhosa e com um agravante: há mais de uma possibilidade, na verdade três, além daquela que não apresenta solução real, então quatro. Al-Khwarizmi também a discutiu de forma retórica, apresentou uma solução geométrica, mas apesar de citar que há outras possibilidades, não o fez em seu trabalho.

> O texto de Al-Khwarizmi contém a palavra "condensado" no título, o que sugere que existiam outros livros que deram uma discussão mais detalhada dos procedimentos algébricos e suas justificativas geométricas. Existe, no entanto, apenas um fragmento da existência de tal obra, a seção “Necessidades Lógicas em Equações Mistas” do trabalho Kitab al-jabr wa'l muqabala de Abd al-Hamid ibn Wasi ibn Turk al-Jili, um contemporâneo de Al-Khwarizmi sobre quem se sabe muito pouco. As fontes ainda divergem quanto a saber se ibn Turk era do Irã, Afeganistão ou da Síria. De qualquer forma, o capítulo existente do livro de ibn Turk lida com equações do segundo grau dos tipos 1, 4, 5 e 6 de Al-Khwarizmi e inclui uma descrição geométrica muito mais detalhada do método de solução que é encontrado na obra de Al-Khwarizmi. Em particular, no caso do tipo 5, ibn Turk deu versões geométricas para todos os casos possíveis. (Tradução livre de Katz, p. 247)

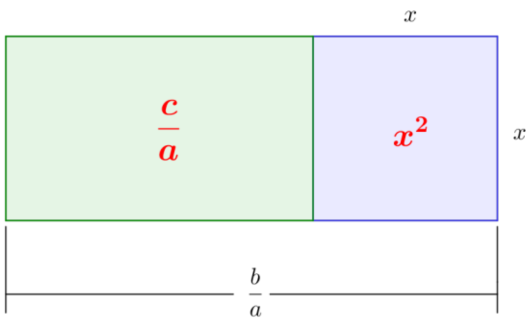
De acordo com Katz, Al-Khwarizmi em seu trabalho notou que havia outra solução (positiva), mas em seus exemplos mostrava apenas uma, aquela que exemplificamos na Folha de Atividade 3.

3.2.1 – Generalizando o método – Tipo 1

Suponha dada a equação $ax^2 + c = bx$, sendo a, b e c números reais e positivos.

Dividindo a equação por a obtemos $x^2+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}x$; para interpretarmo-la geometricamente tomamos um quadrado de lado x e um retângulo de área $\frac{c}{a}$, sendo um de seus lados x também. Assumimos que o outro lado do retângulo formado por estas duas figuras é $\frac{b}{a}$ e que x é menor do que a metade de $\frac{b}{a}$, figura 5, os outros casos serão considerados nas seções seguintes.

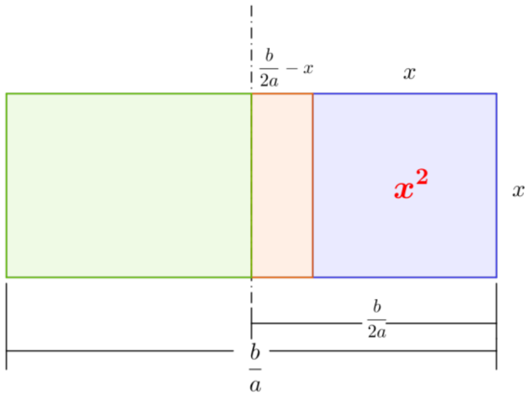
Figura 5



Res. $ax^2+c=bx$ – Criação do autor

Desta forma, $x^2+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}x$. Traçamos a mediatriz do lado $\frac{b}{a}$ dividindo o retângulo em dois, figura 6.

Figura 6

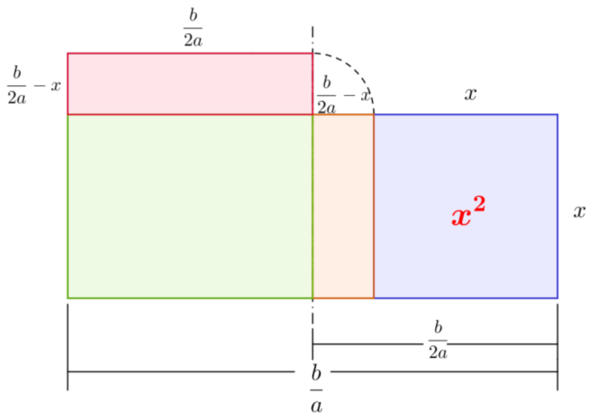


Res. $ax^2+c=bx$ – Criação do autor

A figura fica dividida em um retângulo de lados $\frac{b}{2a}$ e x, um quadrado de lado x e outro retângulo de lados $\frac{b}{2a}-x$ e x.

Tomamos a medida $\frac{b}{2a} - x$ e traçamos o retângulo de lados $\frac{b}{2a} - x$ e $\frac{b}{2a}$, figura 7.

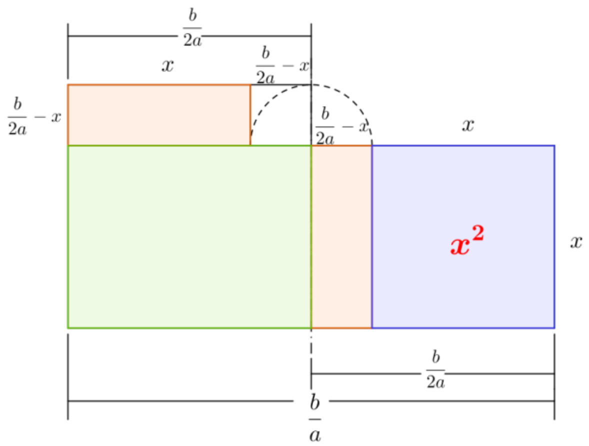
Figura 7



Res. $ax^2 + c = bx$ – Criação do autor

Novamente tomamos a medida $\frac{b}{2a} - x$ e traçamos o quadrado de lado $\frac{b}{2a} - x$. Os dois retângulos destacados têm mesma área, pois ambos têm lados $\frac{b}{2a} - x$ e x, figura 8.

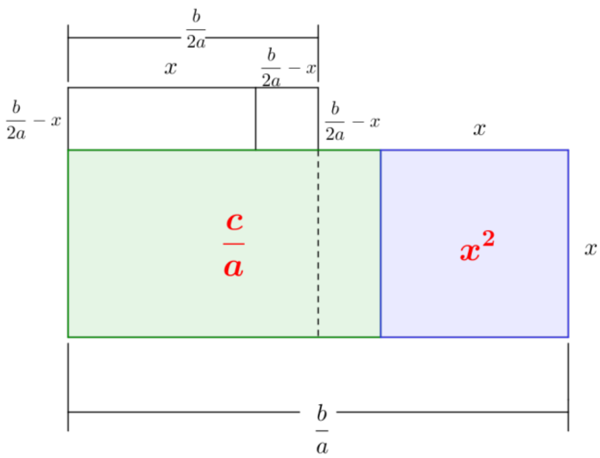
Figura 8



Res. $ax^2 + c = bx$ – Criação do autor

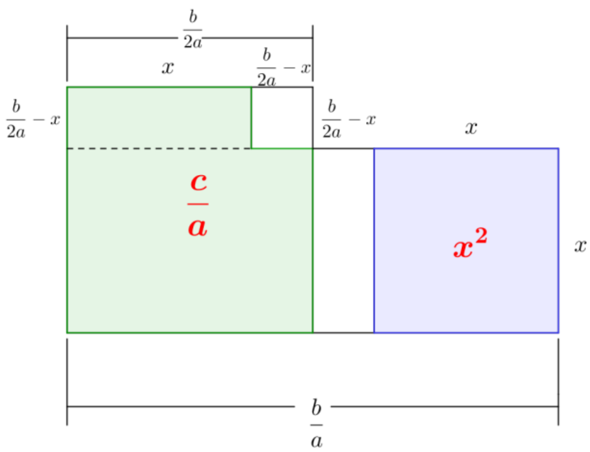
Desta forma o retângulo da Figura 9 tem a mesma área $\frac{c}{a}$ da poligonal da Figura 10.

Figura 9



Res. $ax^2 + c = bx$ – Criação do autor

Figura 10



Res. $ax^2 + c = bx$ – Criação do autor

Note que $x + \left(\frac{b}{2a} - x\right) = \frac{b}{2a}$. Então o quadrado de lado $\frac{b}{2a} - x$ tem área igual a do quadrado de lado $\frac{b}{2a}$ menos a área da região poligonal $\frac{c}{a}$.

Logo $\left(\frac{b}{2a} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$, ou seja, $\left(\frac{b}{2a} - x\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Aplicando-se a raiz quadrada em ambos os membros da equação, obtemos $\sqrt{\left(\frac{b}{2a} - x\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, isto é, $\frac{b}{2a} - x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

E, finalmente, $x = \frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ nos dá $x = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Observação 1: Como a, b e c são números reais e positivos $b^2 - 4ac$ pode ser negativo, ou seja, a equação $ax^2 + c = bx$ nem sempre terá soluções reais.

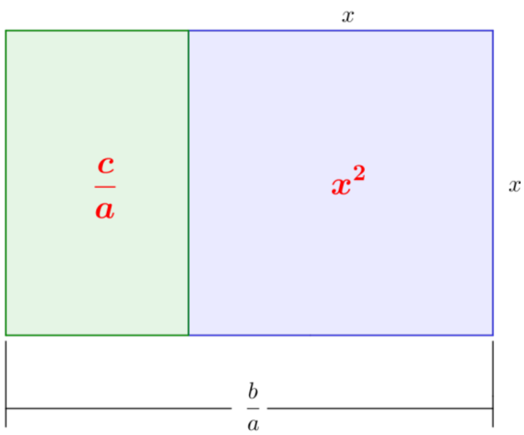
Observação 2: Novamente aparentemente há uma diferença entre esta fórmula e a conhecida fórmula de Bháskara, mas na verdade as formas das equações é que são distintas, uma é $ax^2 + c = bx$ e a outra, $ax^2 + bx + c = 0$. Ou seja, a forma $ax^2 + c = bx$ que resolvemos é do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ com b negativo. Portanto as fórmulas são equivalentes.

3.2.2 – Generalizando o método – Tipo 2

Suponha dada a equação $ax^2 + c = bx$, sendo a, b e c números reais e positivos.

Dividindo a equação por a obtemos $x^2 + \frac{c}{a} = \frac{b}{a}x$. Para interpretarmos geometricamente tomamos um quadrado de lado x e um retângulo de área $\frac{c}{a}$ sendo um de seus lados x também. Assumimos que o outro lado do retângulo formado por estas duas figuras é $\frac{b}{a}$ e que x é maior do que a metade de $\frac{b}{a}$, figura 11.

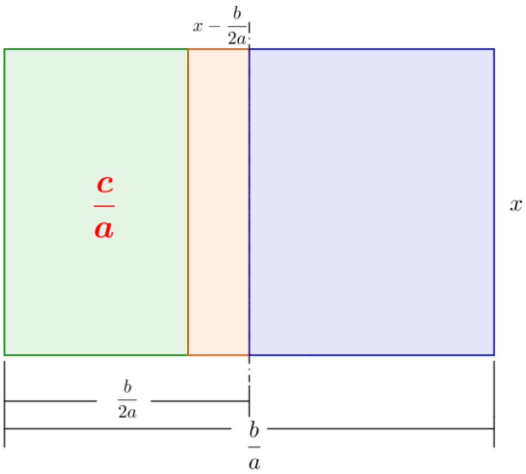
Figura 11



Res. $ax^2 + c = bx$ – Criação do autor

Desta forma, $x^2+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}x$. Traçamos a mediatriz do lado $\frac{b}{a}$ dividindo o retângulo em dois, figura 12.

Figura 12

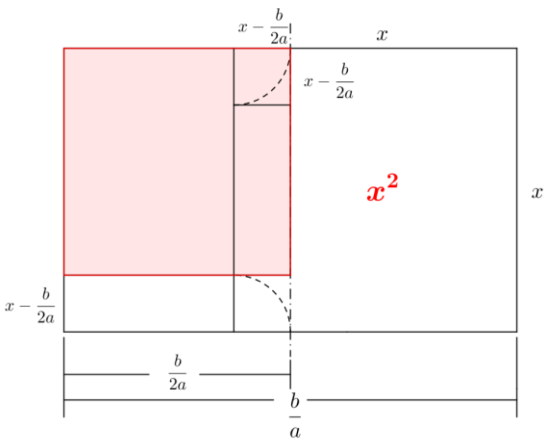


Res. $ax^2+c=bx$ – Criação do autor

A figura fica dividida em um retângulo de lados $\frac{b}{2a}$ e x, outro de lados $x-\frac{b}{2a}$ e x e um terceiro de lados $\frac{b}{2a}-\left(x-\frac{b}{2a}\right)=\frac{b}{a}-x$ e x, figura 12.

Tomamos a medida $x-\frac{b}{2a}$ duas vezes. Determinamos dois novos retângulos e um quadrado de lado $\frac{b}{2a}$, figura 13.

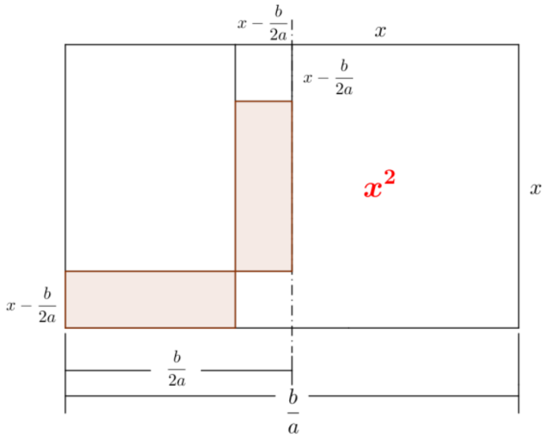
Figura 13



Res. $ax^2+c=bx$ – Criação do autor

Um dos retângulos tem lados $x - \frac{b}{2a}$ e $\frac{b}{a} - x$ enquanto o outro, $x - \frac{b}{2a}$ e $x - 2 \cdot \left(x - \frac{b}{2a} \right) = \frac{b}{a} - x$. Ou seja, os retângulos destacados têm mesma área, figura 14.

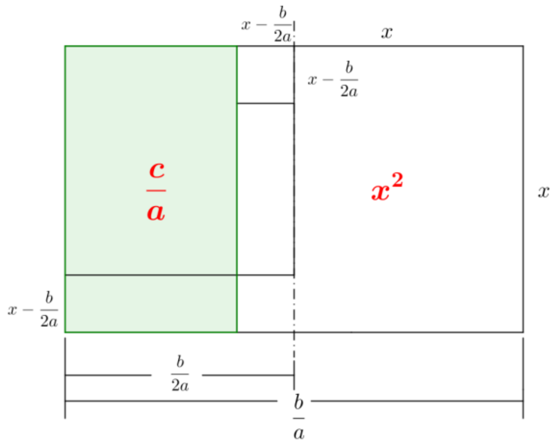
Figura 14



Res. $ax^2 + c = bx$ – Criação do autor

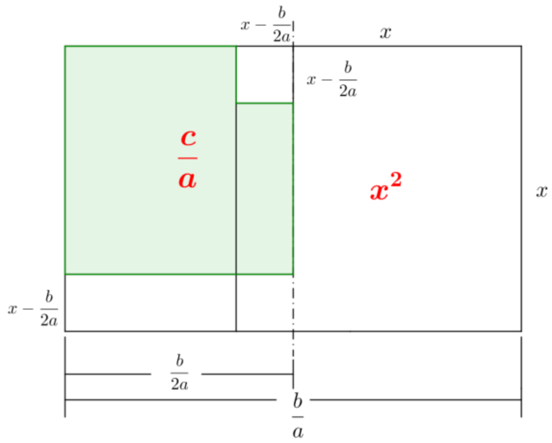
Desta forma o retângulo da figura 15 tem a mesma área $\frac{c}{a}$ da poligonal da figura 16.

Figura 15



Res. $ax^2 + c = bx$ – Criação do autor

Figura 16



Res. $ax^2+c=bx$ – Criação do autor

Note que $x-\left(x-\frac{b}{2a}\right)=\frac{b}{2a}$ então o quadrado de lado $x-\frac{b}{2a}$ tem área igual à do quadrado de lado $\frac{b}{2a}$, subtraída a área da poligonal $\frac{c}{a}$, figura 16.

Logo $\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$, ou seja, $\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Tirando-se a raiz quadrada de ambos os lados da equação, temos $\sqrt{\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$, ou seja, $x-\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

E, finalmente, $x=\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, isto é, $x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

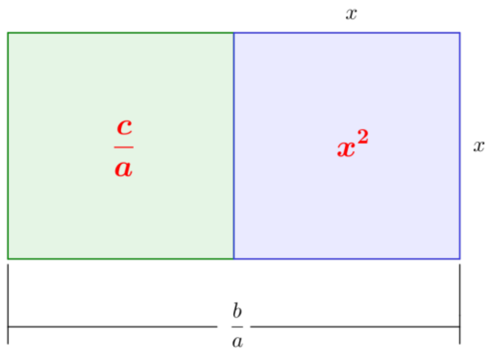
Observação: Não destacamos nas generalizações, mas o caso que não apresenta soluções reais ocorre quando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}<0$, que equivale a $\Delta=b^2-4ac<0$.

3.2.3 – Generalizando o método – Tipo 3

Suponha dada a equação $ax^2+c=bx$, sendo a,b e c números reais e positivos.

Dividindo a equação por a obtemos $x^2+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}x$. Para a interpretarmos geometricamente tomamos um quadrado de lado x e um retângulo de área $\frac{c}{a}$ sendo um de seus lados x também. Assumimos que o outro lado do retângulo formado por estas duas figuras é $\frac{b}{a}$ e que x é igual à metade de $\frac{b}{a}$, figura 17.

Figura 17



Res. $ax^2+c=bx$ – Criação do autor

Desta forma, $x^2+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}x$ e sendo um dos lados o dobro do outro, temos um retângulo formado por dois quadrados logo $x=\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{c}{a}}$ é a raiz da equação.

Observação: Para um quadrado de lado $\frac{b}{2a}$ e área $\frac{c}{a}$ temos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{c}{a}\Leftrightarrow\frac{b^2}{4a^2}=\frac{c}{a}\Leftrightarrow b^2=4ac$, ou seja, $\Delta=b^2-4ac=0$.

3.3 – $bx+c=x^2$, sendo $b,c\in\mathbb{R}_+^*$

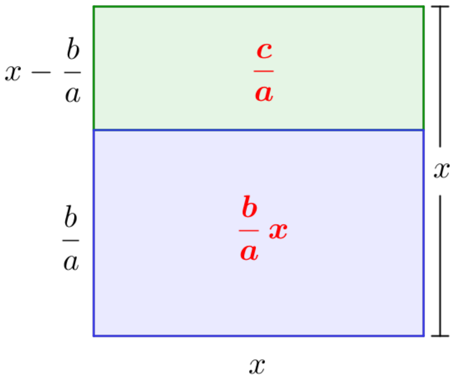
Esta forma, apesar de Katz ter afirmado que Ibn Turk, contemporâneo de Al-Khwarizmi, publicou em seu trabalho uma solução com justificativa geométrica, não conseguimos encontrá-la. Foi então que montamos uma sequência com certa semelhança com as anteriormente citadas como formas de Al-Khwarizmi. Na Folha de Atividade 4 a apresentamos com a equação $x^2=8x+20$.

3.3.1 – Generalizando o método

Suponha dada a equação $ax^2 = bx + c$, sendo a, b e c números reais e positivos.

Dividindo a equação por a obtemos $x^2 = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, para a interpretarmos geometricamente essa equação tomamos um quadrado de lado x e o dividimos em dois retângulos, sendo os lados $\frac{b}{a}$ e x e, respectivamente, o outro de área $\frac{c}{a}$, figura 18.

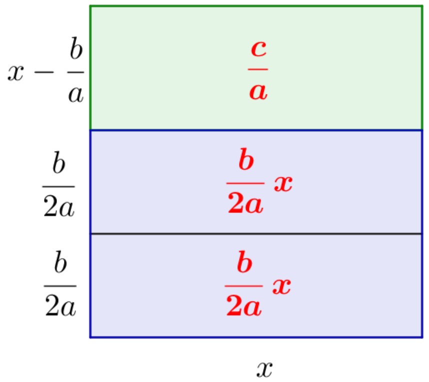
Figura 18



Res. $ax^2 = bx + c$ – Criação do autor

Dividimos o retângulo de área $\frac{b}{a}x$ em dois de mesma área e lados $\frac{b}{2a}$ e x, figura 19.

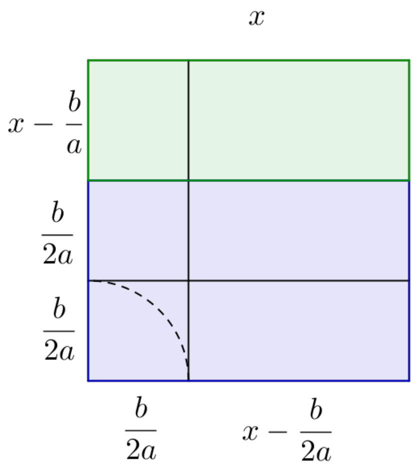
Figura 19



Res. $ax^2 = bx + c$ – Criação do autor

Tomamos a medida $\frac{b}{2a}$ e dividimos o lado de medida x em dois de medidas $\frac{b}{2a}$ e $x-\frac{b}{2a}$, figura 20.

Figura 20

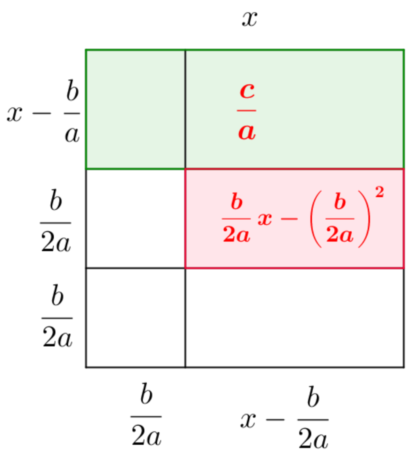


Res. $ax^2 = bx + c$ – Criação do autor

O quadrado de lado x fica decomposto em seis retângulos (figura 20) sendo dois quadrados de lado $\frac{b}{2a}$, um retângulo de lados $\frac{b}{2a}$ e $x-\frac{b}{a}$, dois retângulos de lados $x-\frac{b}{2a}$ e $\frac{b}{2a}$ e, o último, um retângulo de lados $x-\frac{b}{2a}$ e $x-\frac{b}{a}$.

Os retângulos em destaque na figura 21 tem áreas $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{2a}x-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

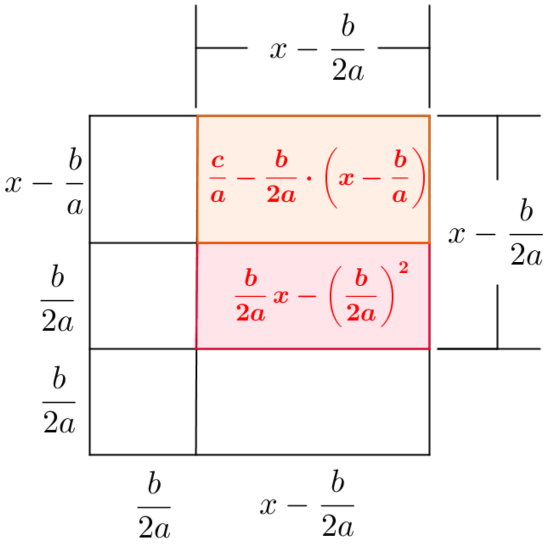
Figura 21



Res. $ax^2 = bx + c$ – Criação do autor

Logo o quadrado de lado $x-\dfrac{b}{2a}$ é composto por dois retângulos de áreas $\dfrac{c}{a}-\dfrac{b}{2a}\cdot\left(x-\dfrac{b}{2a}\right)$ e $\dfrac{b}{2a}x-\dfrac{b^2}{4a^2}$, figura 22.

Figura 22



Res. $ax^2=bx+c$ – Criação do autor

Então

$$\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{c}{a}-\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{2a^2}\right)+\left(\frac{b}{2a}x-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

e simplificando obtemos

$$\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\text{, ou seja, }\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2+4ac}{4a^2}.$$

Tomando-se a raiz quadrada de ambos os lados da equação,

$$\sqrt{\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2+4ac}{4a^2}}\text{ ou, equivalentemente, }x-\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2+4ac}}{2a}.$$

Finalmente, $x=\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$, ou seja, $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$.

Observação 1: Como a, b e c são números reais e positivos b^2+4ac é um número real e positivo, ou seja, a equação $ax^2=bx+c$ sempre terá soluções reais.

Além disso, $0<4ac \Rightarrow b^2<b^2+4ac \Rightarrow b<\sqrt{b^2+4ac} \Rightarrow \dfrac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}<0$, ou seja, uma de suas raízes é negativa o que implica que sua raiz positiva satisfaz $x>\dfrac{b}{a}$ daí o desenho.

Observação 2: Aparentemente há uma diferença entre esta fórmula e a conhecida fórmula de Bháskara no discriminante, $\Delta=b^2+4ac$, mas na verdade as formas das equações é que são distintas, uma é $ax^2=bx+c$ e a outra, $ax^2+bx+c=0$. Ou seja, a forma $ax^2=bx+c$ que resolvemos é do tipo $ax^2+bx+c=0$ com b e c negativos. Portanto as fórmulas são equivalentes.

3.4 – $x^2-bx=c$, sendo $b,c\in\mathbb{R}_+^*$

Al-Khwarizmi não resolveu esta forma e nem sequer a colocou como uma dentre os seus seis tipos, afinal, $-b$ indicaria um número negativo. Mas interpretando $-bx$ como uma retirada do quadrado de lado x e esta diferença tendo como resultado um número positivo c, podemos fazer uma justificativa geométrica, apesar de ser notório desta vez, que não é para quaisquer valores de b que esta forma tem solução.

Na Folha de Atividade 5 a apresentamos com a equação $x^2=8x+20$.

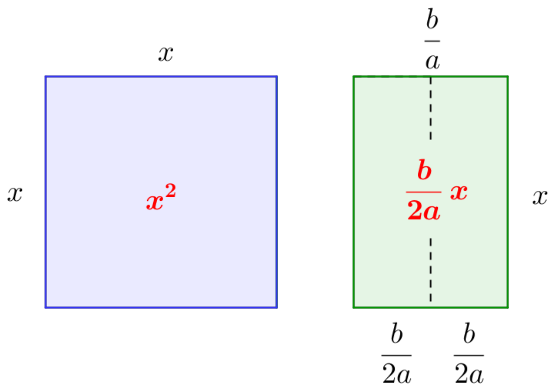
3.4.1 – Generalizando o método

Suponha dada a equação $ax^2-bx=c$, sendo a,b e c números reais e positivos.

Dividindo a equação por a obtemos $x^2-\dfrac{b}{a}x=\dfrac{c}{a}$, geometricamente interpretamos um quadrado de lado x e um retângulo de lados $\dfrac{b}{a}$ e x, que dividimos em dois de lados $\dfrac{b}{2a}$ e x, figura 23.

Observe que como $\frac{c}{a} > 0$ então $x^2 - \frac{b}{a}x > 0 \Rightarrow x^2 > \frac{b}{a}x$ e como $x > 0$, pois é lado de um quadrado, $x > \frac{b}{a}$.

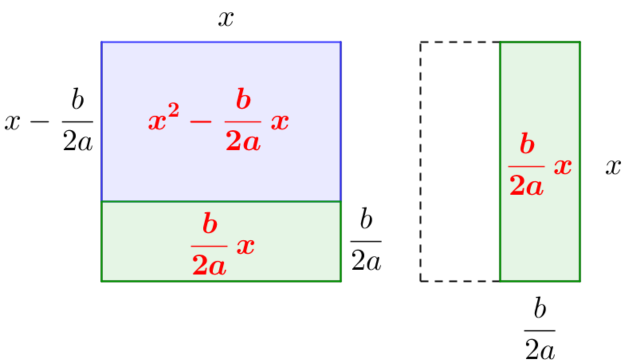
Figura 23



Res. $ax^2 - bx = c$ – Criação do autor

Retiramos um dos retângulos do quadrado, figura 24.

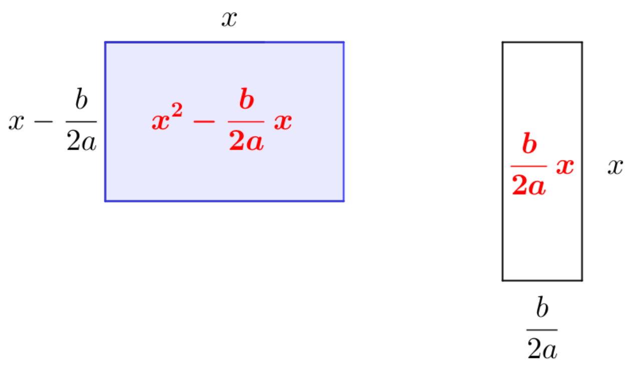
Figura 24



Res. $ax^2 - bx = c$ – Criação do autor

Ficamos com um retângulo de lados $x - \frac{b}{2a}$ e x, além de outro de lados $\frac{b}{2a}$ e x, figura 25.

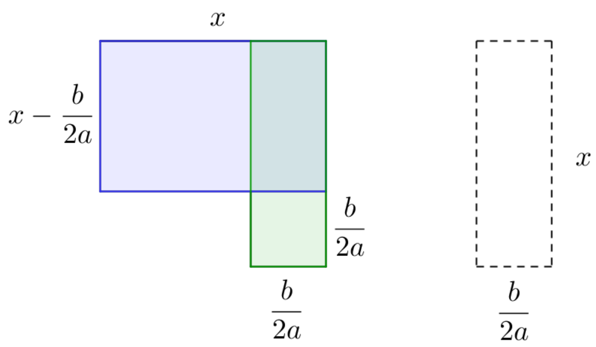
Figura 25



Res. $ax^2 - bx = c$ – Criação do autor

Para a retirada do segundo retângulo é necessário fazer antes uma inclusão, um acréscimo, de um quadrado de lado $\frac{b}{2a}$, figura 26.

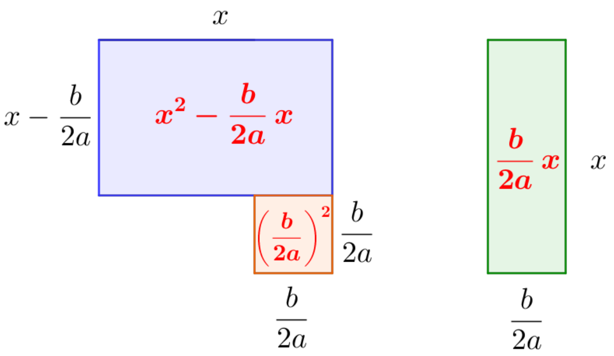
Figura 26



Res. $ax^2 - bx = c$ – Criação do autor

Algebricamente, se $x^2 - \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$ então $\left(x^2 - \frac{b}{2a}x\right) - \frac{b}{2a}x = \frac{c}{a}$. Incluindo o quadrado de lado $\frac{b}{2a}$ e área $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ alteramos a área e fazemos o balanceamento na equação, $\left(x^2 - \frac{b}{2a}x\right) - \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

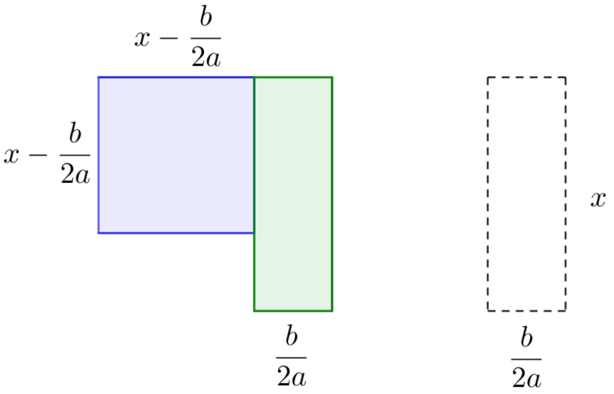
Figura 27



Res. $ax^2 - bx = c$ – Criação do autor

Enfim retiramos o segundo retângulo, figura 28.

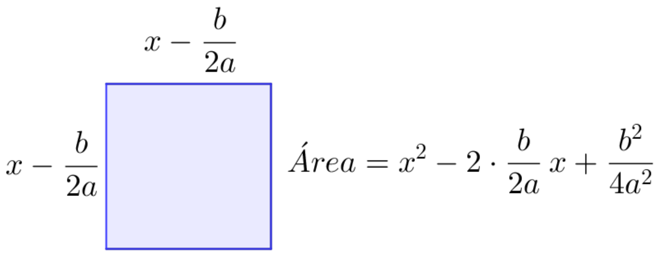
Figura 28



Res. $ax^2 - bx = c$ – Criação do autor

Ficamos com um quadrado de lado $x - \dfrac{b}{2a}$ e área $\dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}$, pois $x^2 - 2 \cdot \dfrac{b}{2a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} = \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a} \Rightarrow \left(x - \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 + 4ac}{4a^2}$, figura 29.

Figura 29



Res. $ax^2 - bx = c$ – Criação do autor

Tomando-se a raiz quadrada de ambos os lados da equação,

$$\sqrt{\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}}, \text{ ou seja, } x - \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

E, finalmente, $x = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$, isto é, $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

Observação 1: Como a, b e c são números reais e positivos $b^2 + 4ac$ é um número real e positivo, ou seja, a equação $ax^2 - bx = c$ sempre terá soluções reais.

Observação 2: Aparentemente há uma diferença entre esta fórmula e a conhecida fórmula de Bháskara no discriminante $\Delta = b^2 + 4ac$, mas na verdade a forma das equações é que são distintas, uma é $ax^2 - bx = c$ e a outra, $ax^2 + bx + c = 0$. Ou seja, a forma $ax^2 - bx = c$ que resolvemos é do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ com b e c negativo. Portanto as fórmulas são equivalentes.

3.5 – $x^2 + bx + c = 0$, sendo $b, c \in \mathbb{R}$

Apresentamos esta última forma para solucionar equações que tenham coeficientes negativos assim como raízes negativas, apesar de Diofanto, na maioria das vezes, se contentar apenas com uma solução positiva.

Introduzimos o método da Soma e da Diferença, com o exemplo do livro de Diofanto, de “encontrar dois números cuja soma é 20 e o produto é 96”, além do exemplo “encontrar dois números cuja diferença é 8 e o produto é 48”.

Utilizamos este método, que também fora usado pelos Babilônios, para resolver equações do segundo grau. Mas não podemos afirmar com exatidão se foi utilizado desta forma na História, apenas vimos uma oportunidade de expandir o leque de aplicações de métodos históricos, além, é claro, de reverenciar as habilidades destes notáveis personagens.

3.5.1 – Generalizando o método

a) Soma e Produto dados – Encontrar dois números cuja soma é S e o produto é P.

Sejam x_1 e x_2 tais números, logo $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \cdot x_2 = P \end{cases}$

Chamando $x_1 = \dfrac{S}{2} + k$ então $\left(\dfrac{S}{2} + k\right) + x_2 = S \Rightarrow x_2 = \dfrac{S}{2} - k$.

Como $x_1 \cdot x_2 = P$ então $\left(\dfrac{S}{2} + k\right) \cdot \left(\dfrac{S}{2} - k\right) = P$, ou seja, $\dfrac{S^2}{4} - k^2 = P$.

De $\dfrac{S^2}{4} - P = k^2$, supondo $k \geq 0$ (como Diofanto), obtemos $k = \sqrt{\dfrac{S^2}{4} - P}$.

Portanto os números são $x_1 = \dfrac{S}{2} + \sqrt{\dfrac{S^2}{4} - P}$ e $x_2 = \dfrac{S}{2} - \sqrt{\dfrac{S^2}{4} - P}$.

b) Diferença e Produto dados – Encontrar dois números cuja diferença é D e o produto é P.

Sejam x_1 e x_2 tais números logo $\begin{cases} x_1 - x_2 = D \\ x_1 \cdot x_2 = P \end{cases}$

Chamando $x_1 = k + \dfrac{D}{2}$ então $\left(k + \dfrac{D}{2}\right) - x_2 = D$, ou seja, $x_2 = k - \dfrac{D}{2}$

Como $x_1 \cdot x_2 = P$ então $\left(k + \dfrac{D}{2}\right) \cdot \left(k - \dfrac{D}{2}\right) = P$ nos dá $k^2 - \dfrac{D^2}{4} = P$, isto é, $k^2 = P + \dfrac{D^2}{4}$. Assumindo $k \geq 0$, obtemos $k = \sqrt{P + \dfrac{D^2}{4}}$

Portanto os números procurados são $x_1 = \sqrt{P + \dfrac{D^2}{4}} + \dfrac{D}{2}$ e $x_2 = \sqrt{P + \dfrac{D^2}{4}} - \dfrac{D}{2}$.

c) Aplicando os métodos descritos acima na resolução de equações do tipo $ax^2+bx+c=0$.

Suponha dada a equação $ax^2+bx+c=0$, sendo a,b e c números reais e a não nulo.

Dividindo a equação por a obtemos $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ e subtraindo $\frac{c}{a}$ em ambos os lados da sentença $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$, colocamos x em evidência $x\left(x+\frac{b}{a}\right)=-\frac{c}{a}$.

Seja $y=x+\frac{b}{a}$, logo $y-x=\frac{b}{a}$ e $x\cdot y=-\frac{c}{a}$, e então para obtermos uma raiz da equação $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ é suficiente buscarmos dois números y e x cuja diferença é $\frac{b}{a}$ e cujo produto é $-\frac{c}{a}$. O valor de y obtido é apenas um valor auxiliar ao método, sendo desprezado ao final, pois procuramos o valor de x.

Sejam x_1 e x_2 tais números, logo $\begin{cases} y-x=\frac{b}{a} \\ y\cdot x=-\frac{c}{a} \end{cases}$

Chamando $y=k+\frac{b}{2a}$ então $\left(k+\frac{b}{2a}\right)-x=\frac{b}{a}\Rightarrow x=k-\frac{b}{2a}$.

Como $y\cdot x=\frac{c}{a}$ então $\left(k+\frac{b}{2a}\right)\cdot\left(k-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{c}{a}\Leftrightarrow k^2-\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}$

$$\Leftrightarrow k^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Portanto as raízes da equação são $x=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}$, ou seja, dadas por $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Capítulo 4

A Aplicação e suas Considerações

As seis Folhas de Atividades (que compõem o Apêndice A) foram divididas em dois dias de aplicação com duas aulas de cinquenta minutos para cada dia. A orientação para ambos os dias foi a mesma: poderiam discutir em grupos de três ou quatro integrantes, mas a entrega seria individual. Avisamos que os textos tinham sido cuidadosamente elaborados para que fossem auto interpretativos, ou seja, a nossa intenção era intervir o mínimo possível em seus trabalhos.

4.1 – A escolha da Turma

Escolhemos aplicar as Folhas de Atividades na turma de quinto semestre na disciplina de História de Matemática do curso de Matemática com ênfase em Informática – Licenciatura Plena, da Faculdade de Educação São Luís na cidade de Jaboticabal no Estado de São Paulo.

A maioria dos vinte e dois alunos são moradores da região e ainda que sejam graduandos, por volta de 80% já lecionam na rede estadual de ensino como professores eventuais, alguns como substitutos temporários e dois com aulas livres a eles atribuídas.

Muitos deles lecionam no Ensino Fundamental ciclo 2, onde o conteúdo Equação do Segundo Grau é ensinado, mais precisamente no 9º ano. Em alguns outros sistemas apostilados aparecem no 8º ano e até mesmo no 7º ano.

Nossa escolha em aplicar para graduandos e futuros professores baseou-se, dentre outras coisas, em ter um público mais crítico por já terem conhecimento sobre o assunto e por poderem ser multiplicadores desses métodos que acreditamos que possam contribuir na formação do aluno, além do simples fato de aprenderem a resolver tais equações.

4.2 – 1º dia (07/06/2013) – Aplicação das Atividades 1, 2 e 3

Apresentamos as Atividades deixando claro que trabalharíamos formas de resolução de equações do segundo grau com métodos históricos e, por isso, as raízes negativas (em alguns casos a segunda positiva também) poderiam ser "descartadas" ou simplesmente não eram encontradas.

Avisamos que as folhas seriam entregues uma após o término da outra por se tratarem de formas distintas e que eles deveriam concluir as três atividades neste dia.

a) Folha de Atividade 1

Por se tratar apenas da resolução de nove equações de segundo grau de forma livre, alguns alunos comentaram que esta Atividade era bastante tranquila.

Poucos discutiram sobre a resolução, percebemos apenas a conferência dos resultados.

b) Folha de Atividade 2

Já no início perceberam que era mais trabalhosa que a anterior. Perguntaram se era necessário fazer os desenhos e se com régua. Foram orientados que tal como descrito no enunciado do exercício era para seguir a resolução proposta pelo exemplo, ou seja, fazer as justificativas geométricas, mas da forma que achassem mais conveniente.

Ficaram com dúvidas, no terceiro item, sobre como trabalhar com a metade do 7 (7/2 ou 3,5) e no momento de acrescentar o quadrado de lado 3,5 e área 12,25. Sentimos que ficaram receosos por não ser tão prático quanto com números inteiros.

c) Folha de Atividade 3

Questionaram sobre encontrar apenas uma das soluções positivas. Pudemos perceber que a dificuldade era apenas em resolver o primeiro item, os demais itens seguiram sem problemas.

Uns dois ou três alunos mais copiaram do que deram suas contribuições ao grupo que estavam.

O final desta atividade foi um pouco corrido pois devido a morarem em outras cidades dependem de ônibus para sua locomoção e sendo sexta-feira, os colegas do transporte ficam apressando para irem embora mais cedo.

4.3 – 2º dia (21/06/2013) – Aplicação das Atividades 4, 5 e 6

Reforçamos as observações dadas no primeiro dia de aplicação que poderiam discutir em grupo, mas com entrega individual e que nossa intenção era não intervir no desenvolvimento das atividades. Duas das atividades ainda eram geométricas, portanto seria necessário desenhar e tínhamos o problema das raízes negativas para as mesmas.

Tal como no outro dia deveria ser entregue nesta data.

a) Folha de Atividade 4

Pudemos perceber o esforço conjunto dos grupos e os individuais. Assim como no primeiro dia de aplicação, tiveram maior dificuldade em trabalhar com números não inteiros. Perceberam que a sequência geométrica seria a mesma então iniciaram fazendo todos os desenhos para depois pensarem nas expressões que iriam usar.

b) Folha de Atividade 5

Desde o início acharam esta atividade mais difícil de compreender o exemplo, mas o desenvolvimento ocorreu semelhante ao da atividade anterior.

Argumentaram que uma vez que os desenhos eram iguais se poderiam fazê-lo uma vez apenas e tirarem fotocópias.

Pudemos notar alguns alunos querendo entender realmente as formas de resolução apesar de uma minoria de três ou quatro que aparentemente só copiavam.

c) Folha de Atividade 6

Reclamaram da ausência da resolução geométrica e acharam mais difícil de compreender que as demais. Sentimos mais insegurança, provavelmente, pela falta do apelo geométrico.

Estranharam a solução negativa do primeiro item (colocado de forma proposital) que não poderia ter aparecido nas atividades anteriores.

A presença de $2x^2$ incomodou, não sabiam o que fazer, pois dentre todas as vinte e quatro equações propostas nas seis atividades, esta era a única em que o coeficiente de x^2 era diferente de 1.

Capítulo 5

Análise a posteriori e Conclusão

Em geral, os alunos responderam muito bem às Folhas de Atividades. Neste capítulo mostraremos algumas dessas respostas a fim de analisar o quanto foi produtivo a sequência didática, além de propor correções e sugestões.

5.1 – Folha de Atividade 1

A Folha de Atividade 1, como já descrito no capítulo anterior, possuía 9 equações do segundo grau com uma proposta de resolução livre. A nossa expectativa foi confirmada, pois todos os alunos aplicaram a Fórmula de Bháskara. As equações foram divididas em três grupos, sendo o primeiro grupo apresentado na forma $x^2 + bx = c$, o segundo grupo na forma $x^2 + c = bx$ e o terceiro na forma $x^2 = bx + c$ fazendo referência aos tipos de Al-Khwarizmi e os métodos das Folhas subsequentes. O enunciado do exercício e o primeiro grupo eram

Resolva as equações de 2º grau a seguir no Universo dos Reais:

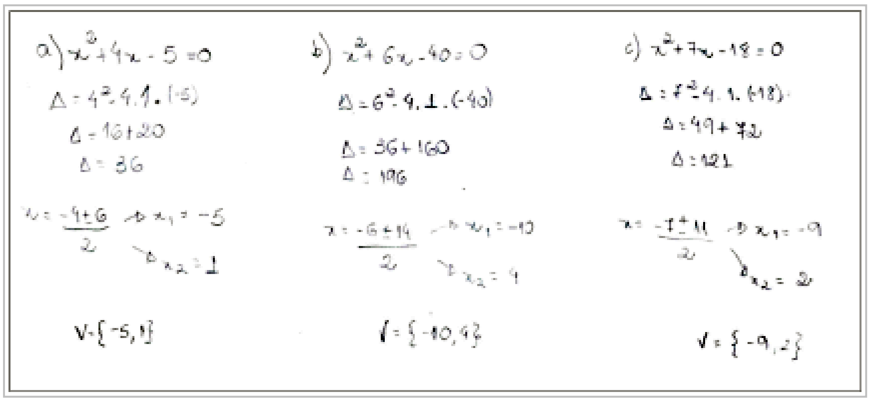
a) $x^2 + 4x = 5$

b) $x^2 + 6x = 40$

c) $x^2 + 7x = 18$

Segue uma das respostas apresentadas.

Figura 30



Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

O segundo grupo

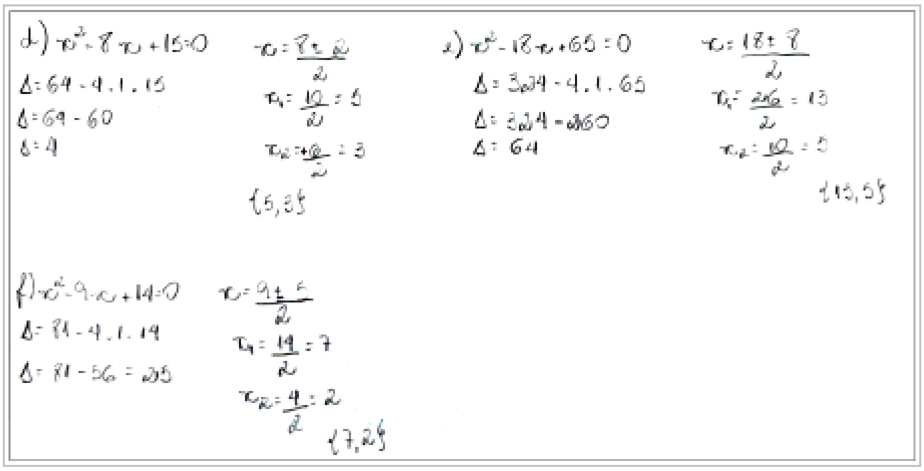
d) $x^2 + 15 = 8x$

e) $x^2 + 65 = 18x$

f) $x^2 + 14 = 9x$

Segue uma das respostas apresentadas.

Figura 31



Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

E o terceiro grupo

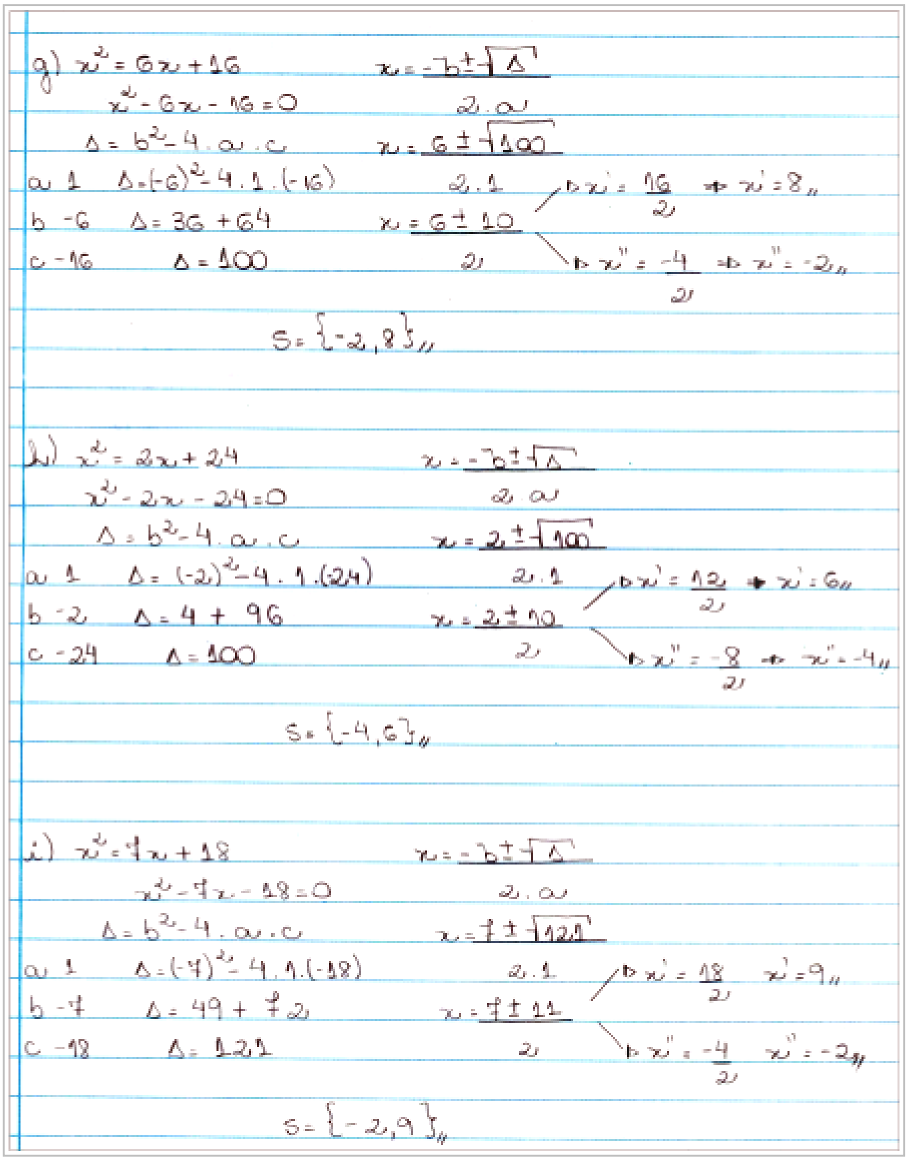
g) $x^2 = 6x + 16$

h) $x^2 = 2x + 24$

i) $x^2 = 7x + 18$

Segue uma das respostas apresentadas.

Figura 32



g) $x^2 = 6x + 16$

$x^2 - 6x - 16 = 0$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

a 1 $\quad \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)$

b −6 $\quad \Delta = 36 + 64$

c −16 $\quad \Delta = 100$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1}$

$x = \frac{6 \pm 10}{2}$

$\to x' = \frac{16}{2} \to x' = 8$

$\to x'' = \frac{-4}{2} \to x'' = -2$

$S = \{-2, 8\}$

h) $x^2 = 2x + 24$

$x^2 - 2x - 24 = 0$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

a 1 $\quad \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)$

b −2 $\quad \Delta = 4 + 96$

c −24 $\quad \Delta = 100$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \, a}$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1}$

$x = \frac{2 \pm 10}{2}$

$\to x' = \frac{12}{2} \to x' = 6$

$\to x'' = \frac{-8}{2} \to x'' = -4$

$S = \{-4, 6\}$

i) $x^2 = 7x + 18$

$x^2 - 7x - 18 = 0$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

a 1 $\quad \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)$

b −7 $\quad \Delta = 49 + 72$

c −18 $\quad \Delta = 121$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 1}$

$x = \frac{7 \pm 11}{2}$

$\to x' = \frac{18}{2} \quad x' = 9$

$\to x'' = \frac{-4}{2} \quad x'' = -2$

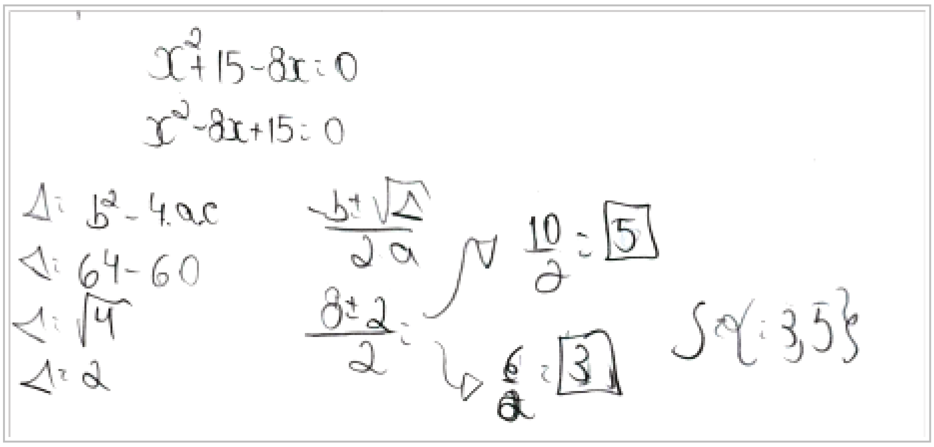
$S = \{-2, 9\}$

Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Duas outras respostas nos chamaram a atenção.

A primeira delas

Figura 33



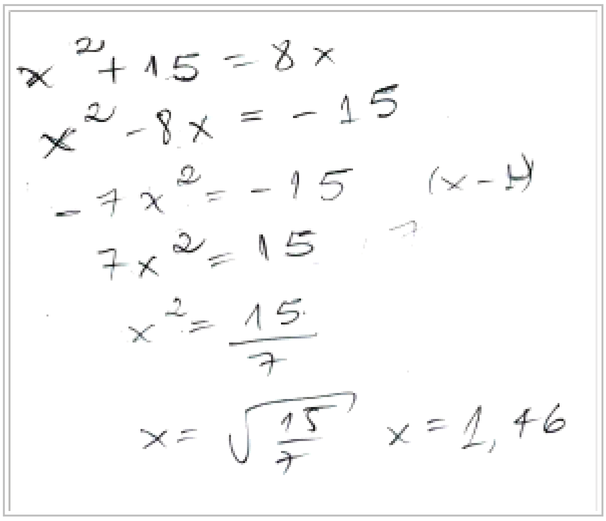
Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Esse é o item d) $x^2+15=8x$, o que nos chama a atenção é referente ao discriminante, primeiro ele é 4 e depois é $\sqrt{4}$, entendemos que a falta de precisão do algoritmo não resultou em erro na resposta final mas nos vem à tona: o importante é a resposta, o desenvolvimento ou os dois?

Acreditamos ser necessária uma correção neste momento, pois há alguma orientação errada uma vez que o mesmo erro ocorreu na resolução das noves equações.

E a segunda delas

Figura 34



Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Este erro já tem maior prioridade de ação, pois somou termos não semelhantes, descartou apenas uma solução e aproximou a raiz quadrada.

Esta Folha de Atividade cumpriu o objetivo proposto a ela, além de ratificar que a aplicação da Fórmula de Bháskara não foi um problema. Mas acreditamos que um quarto grupo de equações contendo formas não completas do trinômio como $x^2 - 8x = 0$ e $2x^2 = 8$, poderiam ser úteis para testar a unanimidade da fórmula.

5.2 – Folha de Atividade 2

Esta folha descreve a resolução de Al-Khwarizmi para a equação $x^2 + 10x = 39$ e propõe o seguinte exercício

Resolva as equações a seguir utilizando o método de Al-Khwarizmi descrito acima fazendo a interpretação geométrica de cada resolução:

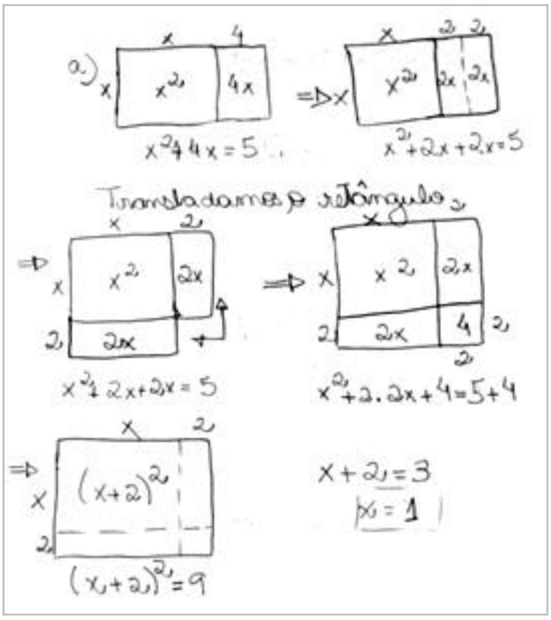
a) $x^2 + 4x = 5$

b) $x^2 + 6x = 40$

c) $x^2 + 7x = 18$

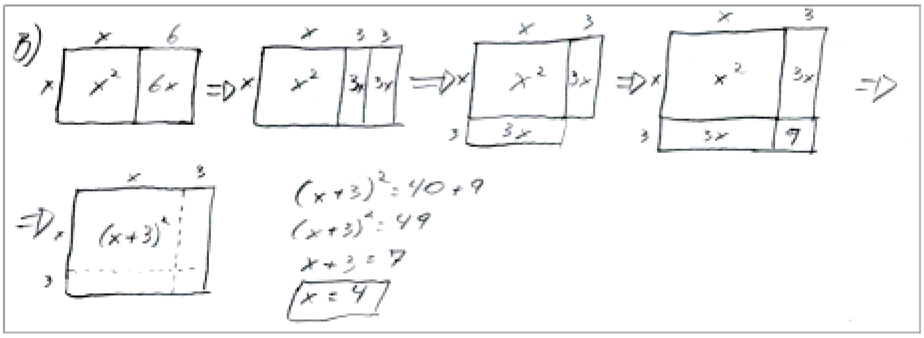
Seguem respostas apresentadas aos itens a), b) e c) de diferentes autores.

Figura 35



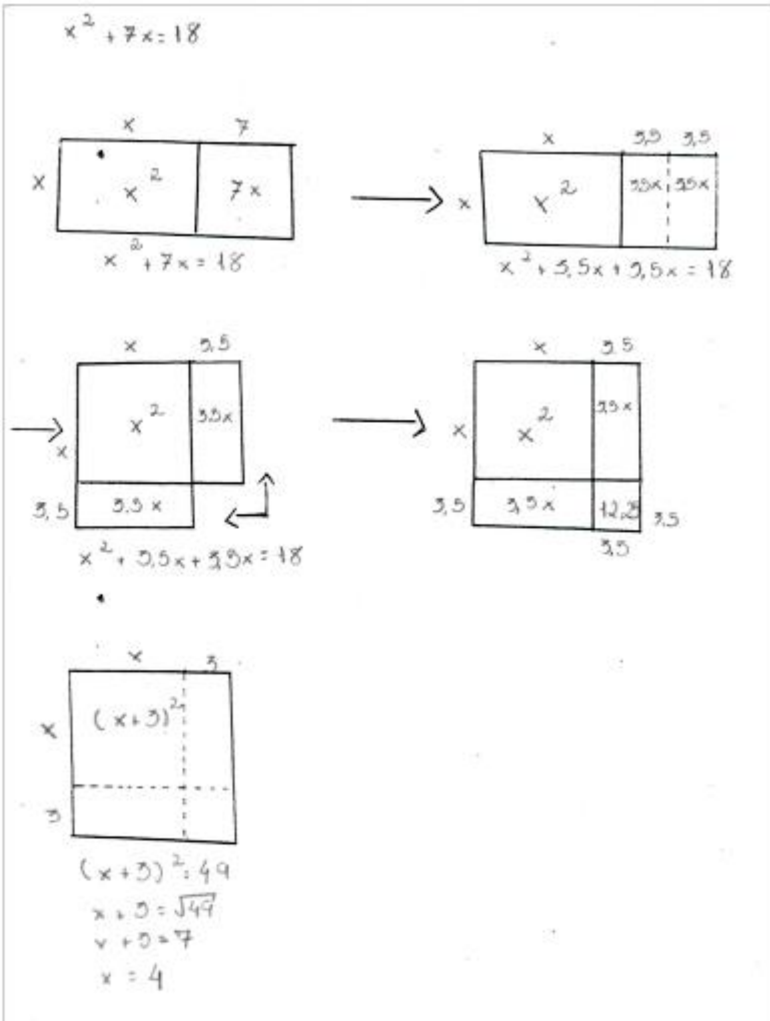
Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Figura 36



Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Figura 37



Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Percebemos a compreensão do método e a correta aplicação nos dois primeiros itens, mas nos chamou a atenção do terceiro exemplo pois efetuou a divisão por dois do número ímpar 7 corretamente e de repente o que era $3,5$, virou 3.

Acreditamos que esta atividade tenha cumprido a missão de apresentar o método, mas esperávamos que na conclusão algébrica alguns levantassem a questão da segunda raiz para, por exemplo, a equação $(x+3)^2 = 49$. Ainda que esta fosse negativa e posteriormente descartada por ser uma solução geométrica.

A seguinte questão poderia complementar a Folha de Atividade:

"A solução geométrica das equações apresentaram apenas uma solução para cada, como poderíamos encontrar a segunda solução?"

5.3 – Folha de Atividade 3

Esta folha descreve a resolução de Al-Khwarizmi para a equação $x^2 + 24 = 10x$ e propõe o seguinte exercício

Resolva as equações a seguir utilizando o método de Al-Khwarizmi descrito acima fazendo a interpretação geométrica de cada resolução:

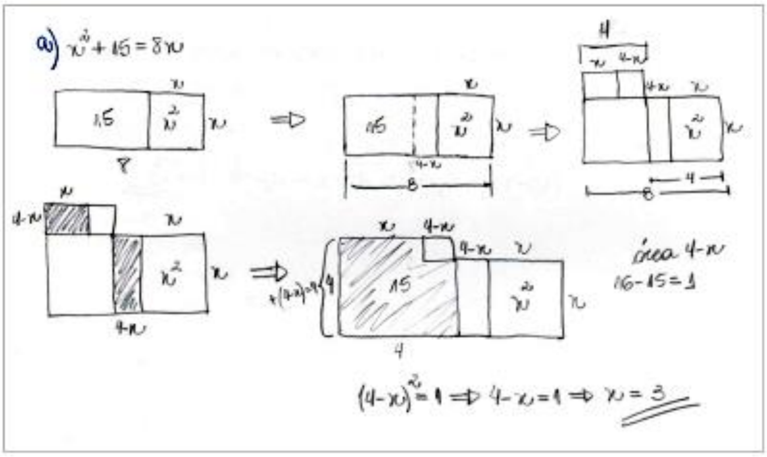
a) $x^2 + 15 = 8x$

b) $x^2 + 65 = 18x$

c) $x^2 + 14 = 9x$

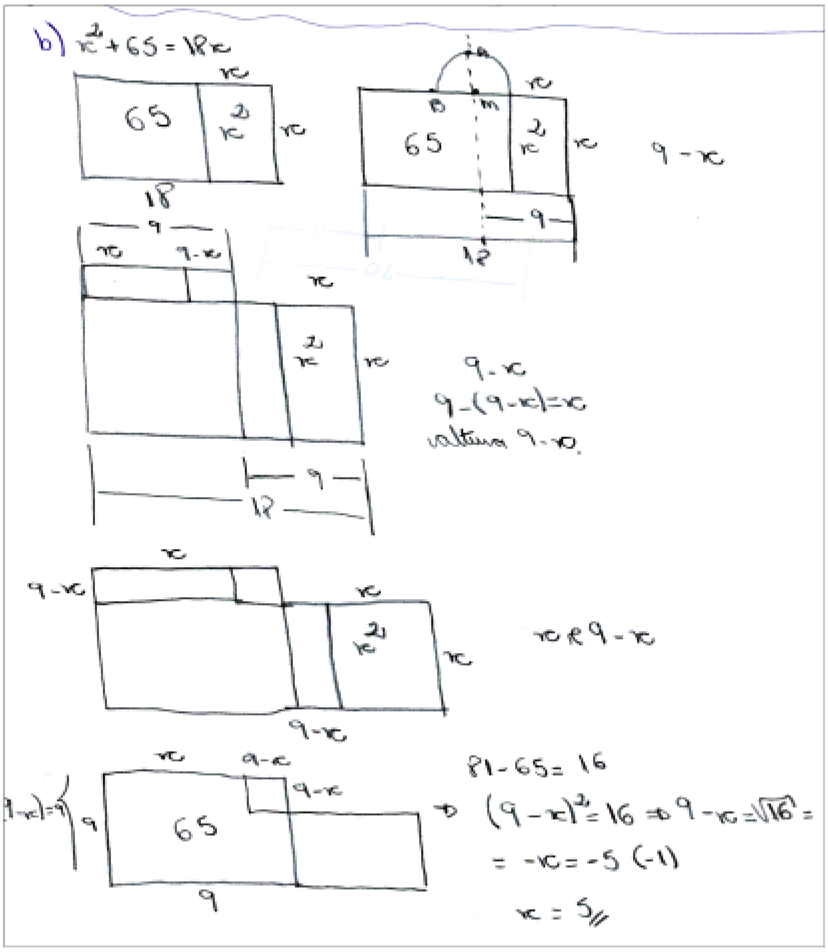
Seguem respostas apresentadas aos itens a), b) e c) de diferentes autores.

Figura 38



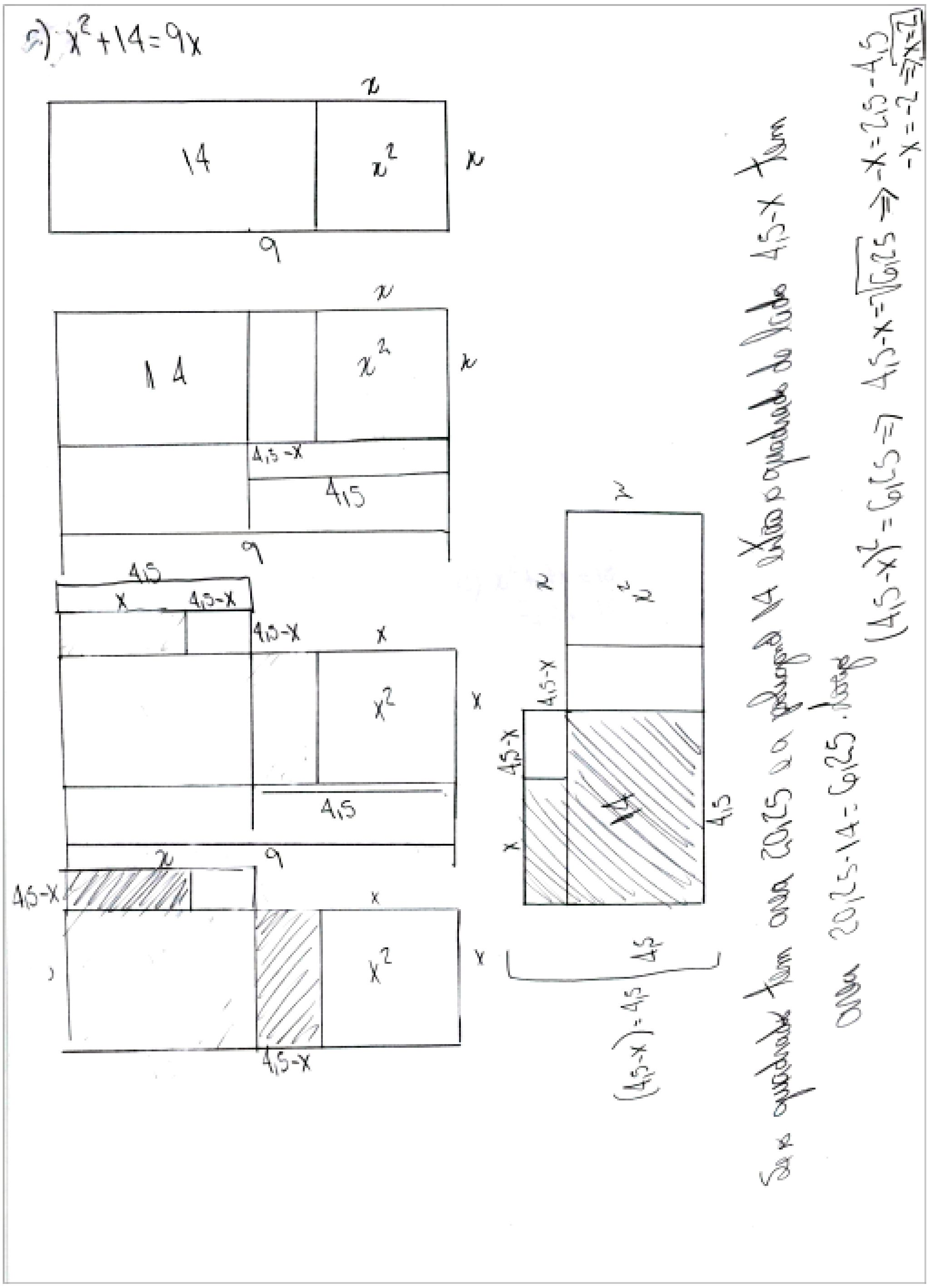
Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Figura 39



Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Figura 40



Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Novamente ninguém notou que apenas uma das soluções foi encontrada e, desta vez, temos o agravante que a segunda solução também é positiva. Caso trabalhassem de forma correta algebricamente teriam encontrado a solução que falta, por exemplo, a equação $(4,5-x)^2 = 6,25$ é equivalente a $4,5-x=\pm 2,5$ cujas soluções são 2 e 7.

A pergunta proposta para a Folha de Atividade 2 também seria um bom complemento a esta, aliada à inclusão de uma equação com um trinômio quadrado perfeito, como em $x^2+9=6x$, e um caso em que não houvesse raízes reais, como em $x^2+6=4x$. Acreditamos que estes dois casos poderiam intensificar o sentido do discriminante ser nulo ou negativo uma vez que a construção geométrica determinaria, respectivamente, um retângulo de "área zero" em um e no outro de "área negativa". Mas, provavelmente, a sua interpretação geométrica necessite de cuidados e intervenção do aplicador da Atividade.

5.4 – Folha de Atividade 4

Esta folha descreve uma resolução geométrica para a equação $x^2 = 8x+20$ e propõe o seguinte exercício

Resolva as equações a seguir utilizando o método descrito acima fazendo a interpretação geométrica de cada resolução:

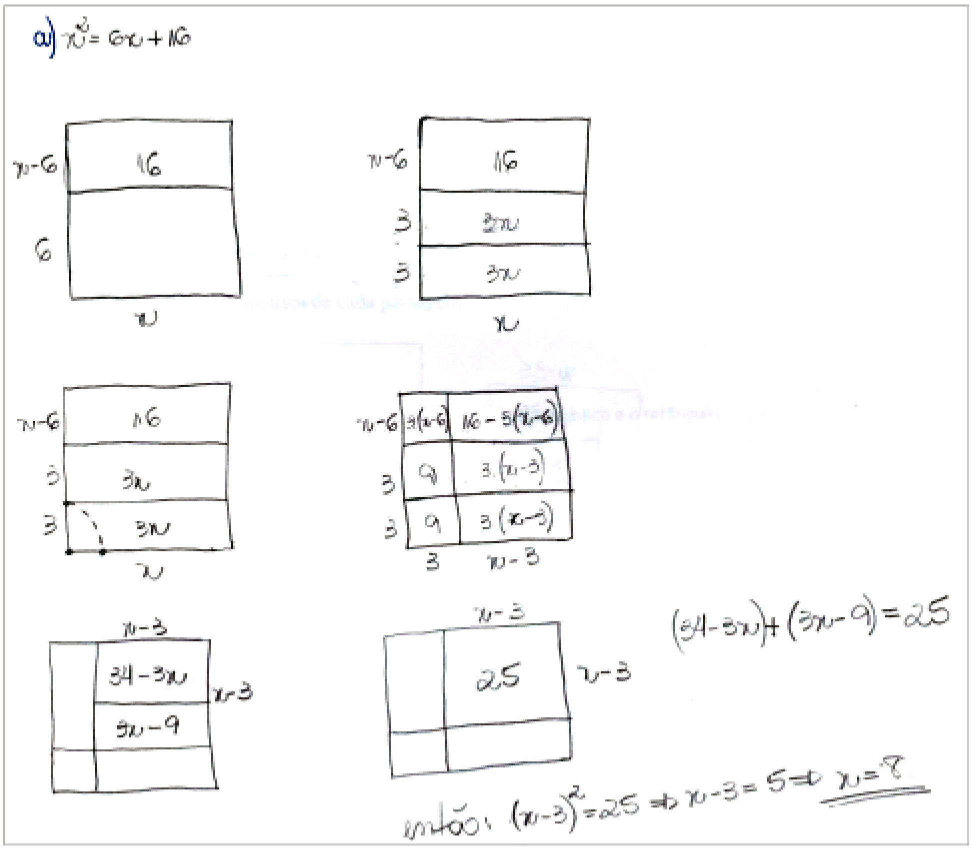
a) $x^2 = 6x+16$

b) $x^2 = 2x+24$

c) $x^2 = 7x+18$

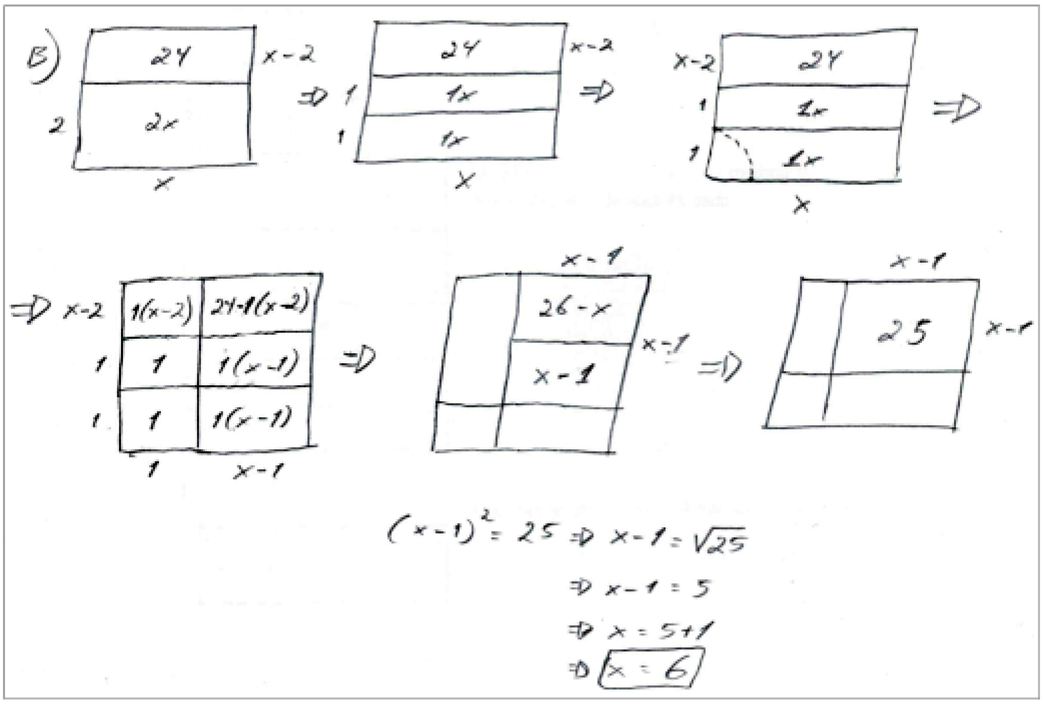
Seguem respostas apresentadas aos itens a), b) e c) de diferentes autores.

Figura 41



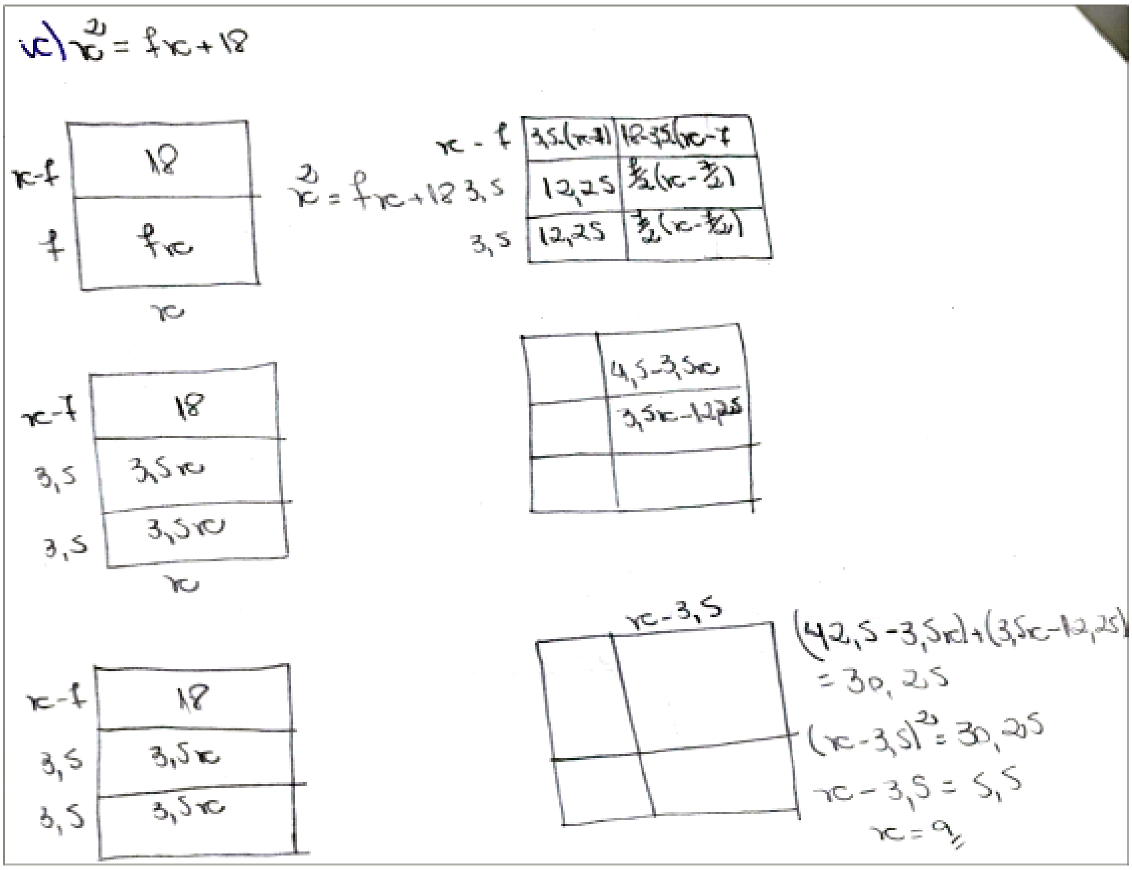
Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Figura 42



Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Figura 43



Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

As soluções desta Folha de Atividade foram bastante semelhantes e corretas. Então acreditamos que o método e os exercícios estavam bem dimensionados. Neste caso o discriminante será sempre positivo, portanto a equação sempre admitirá duas soluções e a segunda raiz poderia ter sido descoberta algebricamente.

5.5 – Folha de Atividade 5

Esta folha descreve uma resolução geométrica para a equação $x^2 - 10x = 39$ e propõe o seguinte exercício

Resolva as equações a seguir utilizando o método descrito acima fazendo a interpretação geométrica de cada resolução:

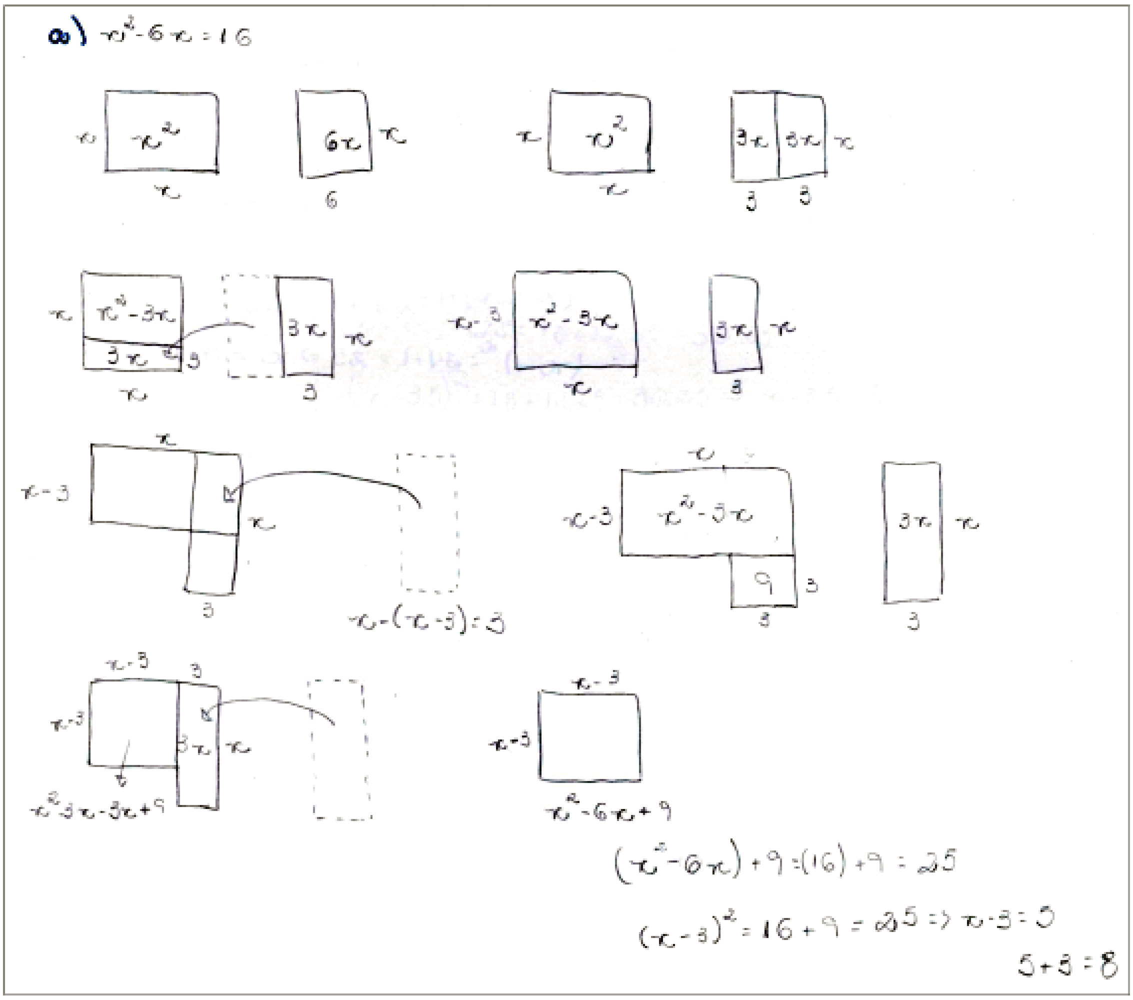
a) $x^2 - 6x = 16$

b) $x^2 - 2x = 24$

c) $x^2 - 7x = 18$

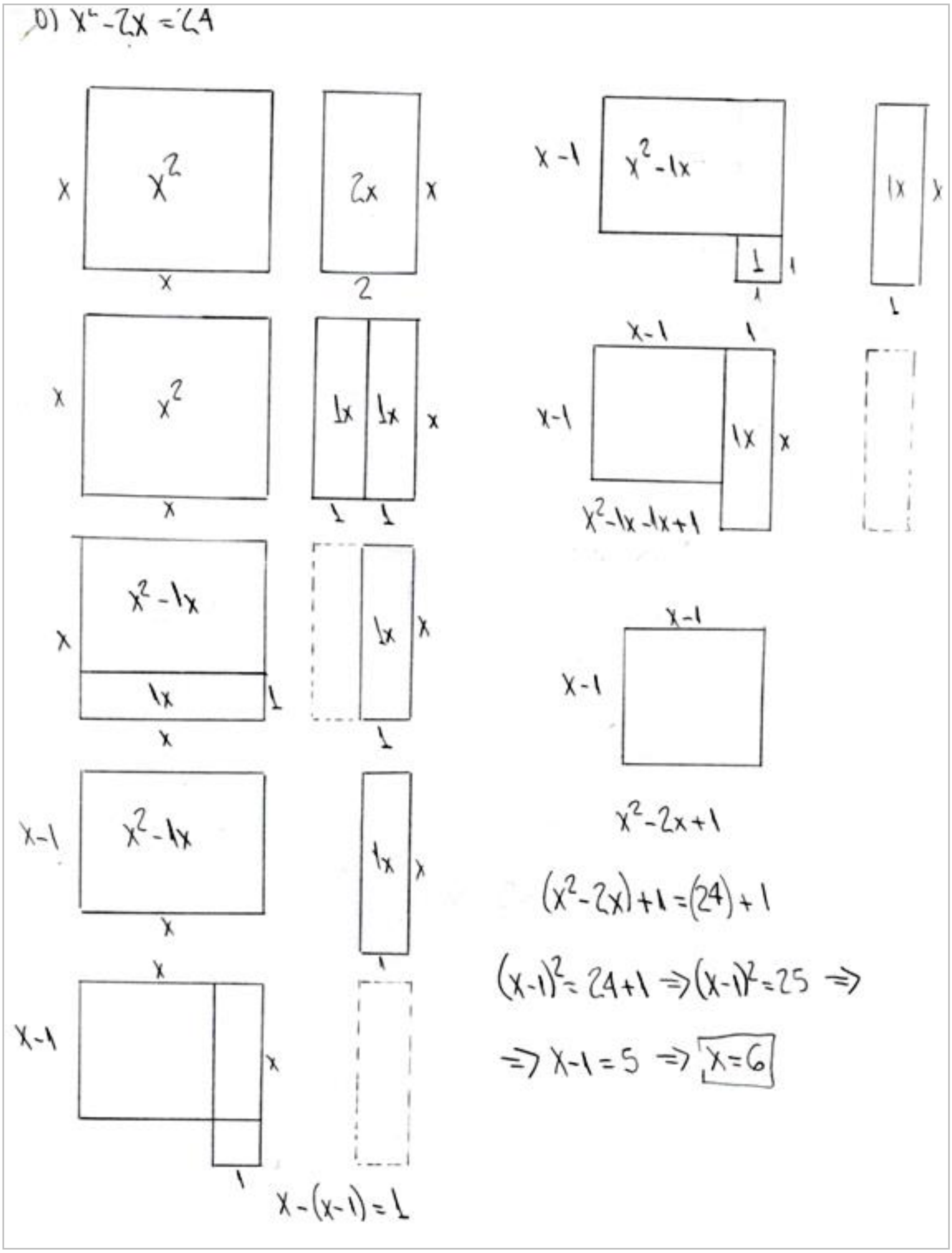
Seguem respostas apresentadas aos itens a), b) e c) de diferentes autores.

Figura 44



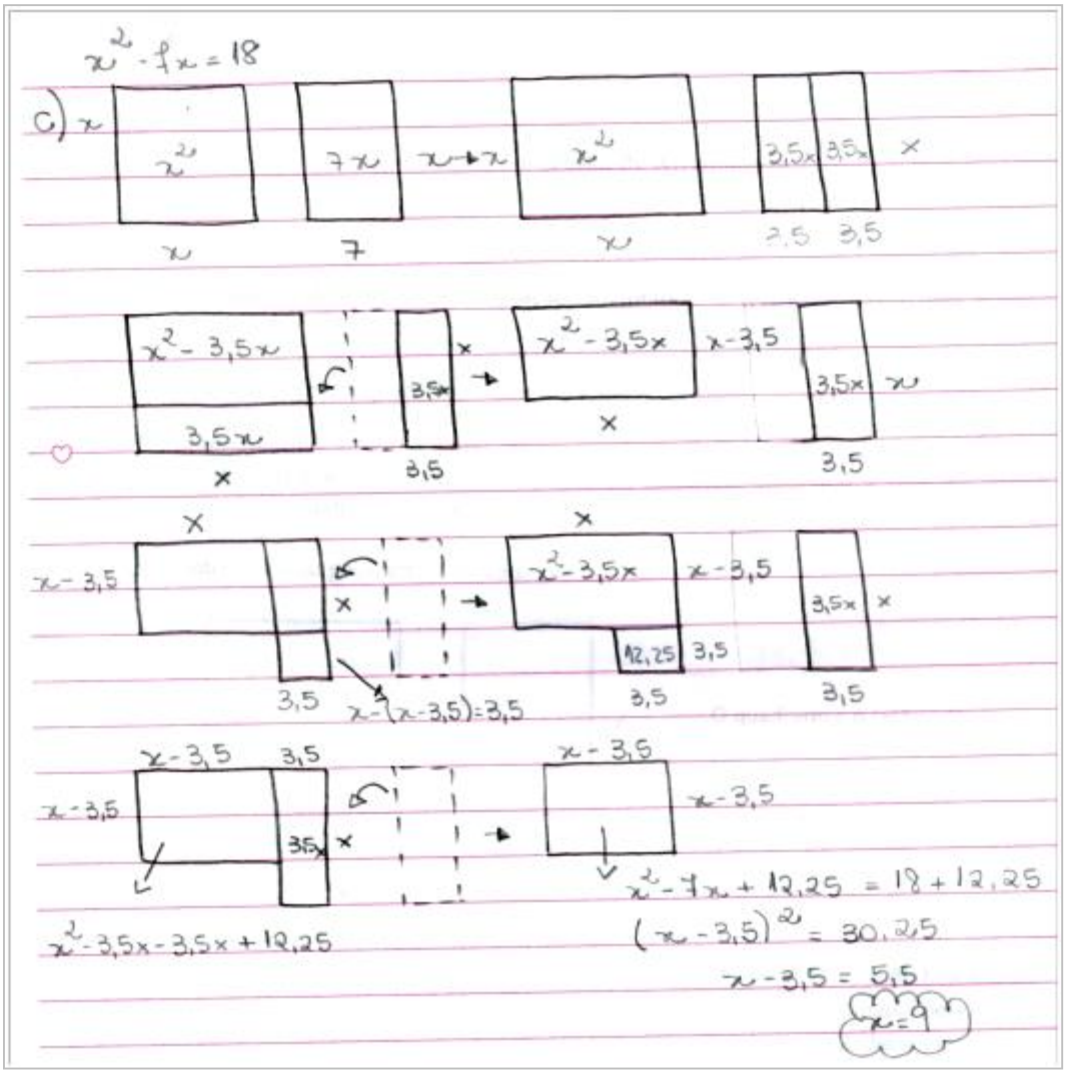
Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Figura 45



Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Figura 46



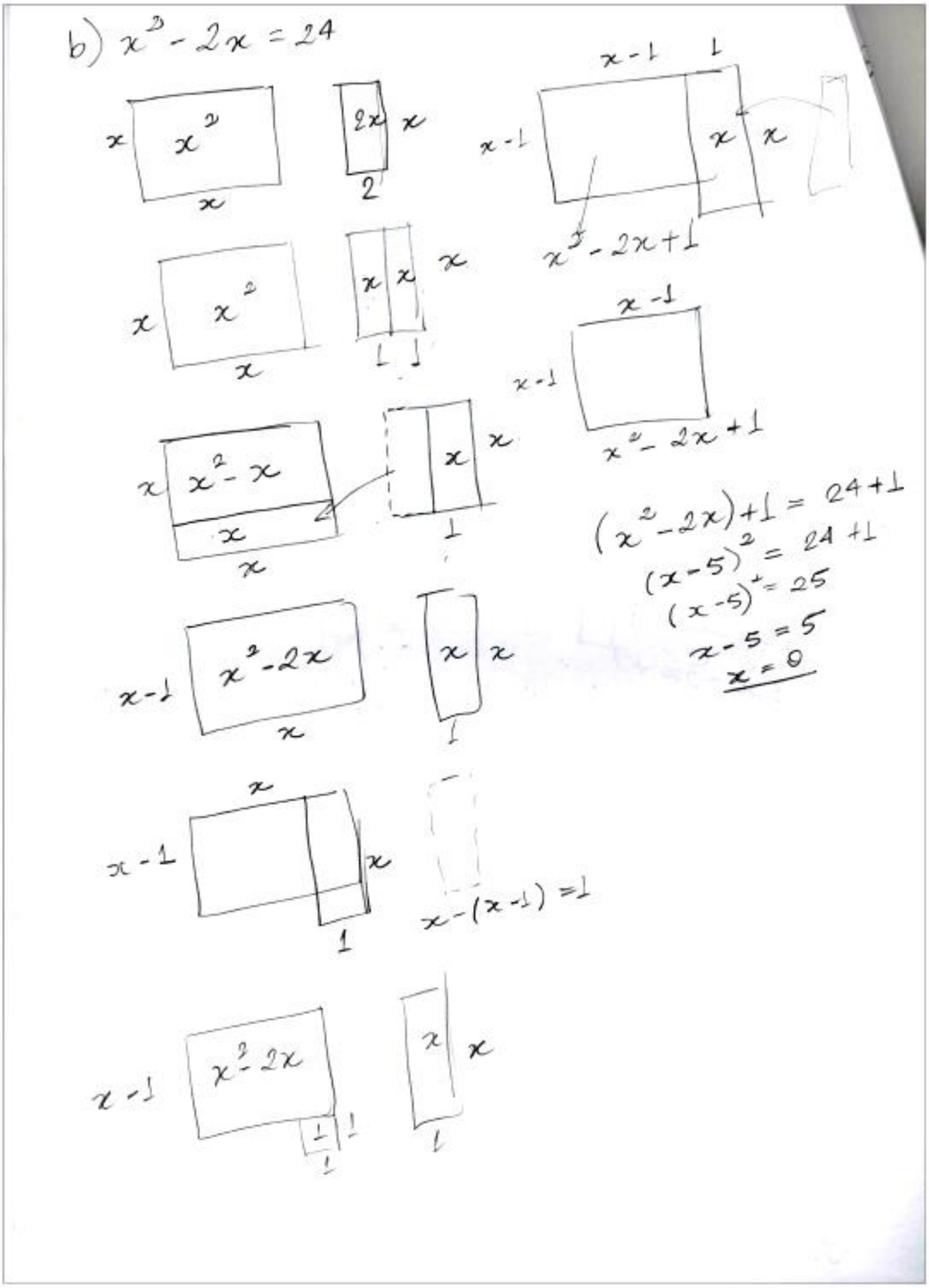
Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

A forma $x^2 - bx = c$ estudada nesta Folha de Atividade é equivalente a da folha anterior $x^2 = bx + c$. A interpretação deste método é semelhante ao de Al-Khwarizmi apresentada na Folha de Atividade 1, mas ao invés de somarmos dois retângulos, fazemos a retirada.

Concluímos que o entendimento foi satisfatório e que a atividade cumpriu o objetivo de ensinar o método. Fica apenas a mesma ressalva da ausência da segunda solução (algébrica).

Apenas uma conclusão nos chamou a atenção

Figura 47



Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Ainda que tenha sido uma simples desatenção, a falta de interpretação do que representa a solução $x = 0$ nos levar a pensar que, neste caso, o significado geométrico não supriu o problema do automatismo gerado pelo uso de fórmulas.

5.6 – Folha de Atividade 6

Diferentemente das demais esta Folha de Atividade, ensina o método da Soma e da Diferença com um exemplo para cada, começando pelo descrito por Diofanto em seu livro: “determinar dois números cuja soma seja 20 e o produto 96”.

Além de estudar uma bela metodologia histórica, a utilizamos para resolver equações da forma $ax^2+bx+c=0$, o que não deixa de ser uma novidade em relação às demais a possibilidade de coeficientes negativos assim como as soluções.

A Folha propõe o seguinte exercício

Resolva as equações a seguir utilizando o método descrito acima fazendo a interpretação algébrica de cada resolução:

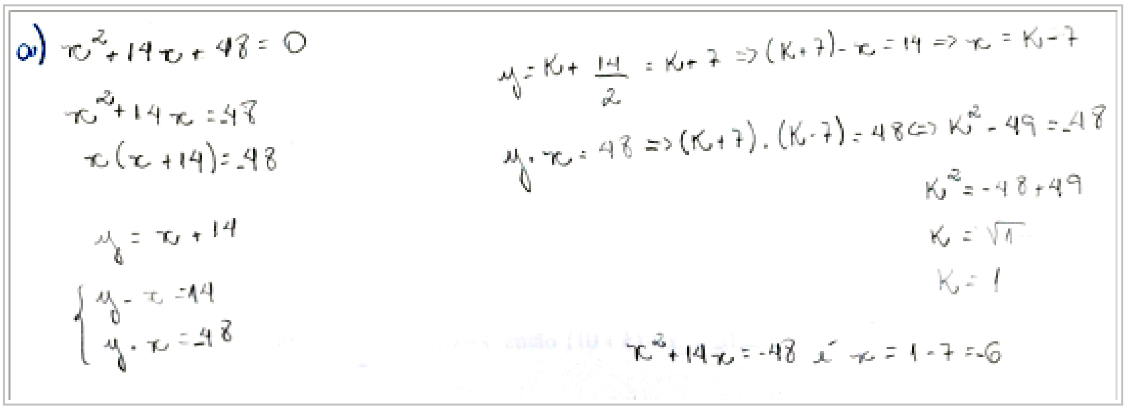
a) $x^2+14x+48=0$

b) $x^2-5x-14=0$

c) $2x^2+4x-\frac{5}{2}=0$

Seguem respostas apresentadas aos itens a), b) e c) de diferentes autores.

Figura 48



a) $x^2+14x+48=0$

$x^2+14x=-48$

$x(x+14)=-48$

$y=x+14$

$\begin{cases} y-x=14 \\ y\cdot x=-48 \end{cases}$

$y=K+\frac{14}{2}=K+7 \Rightarrow (K+7)-x=14 \Rightarrow x=K-7$

$y\cdot x=48 \Rightarrow (K+7).(K-7)=48 \Leftrightarrow K^2-49=-48$

$K^2=-48+49$

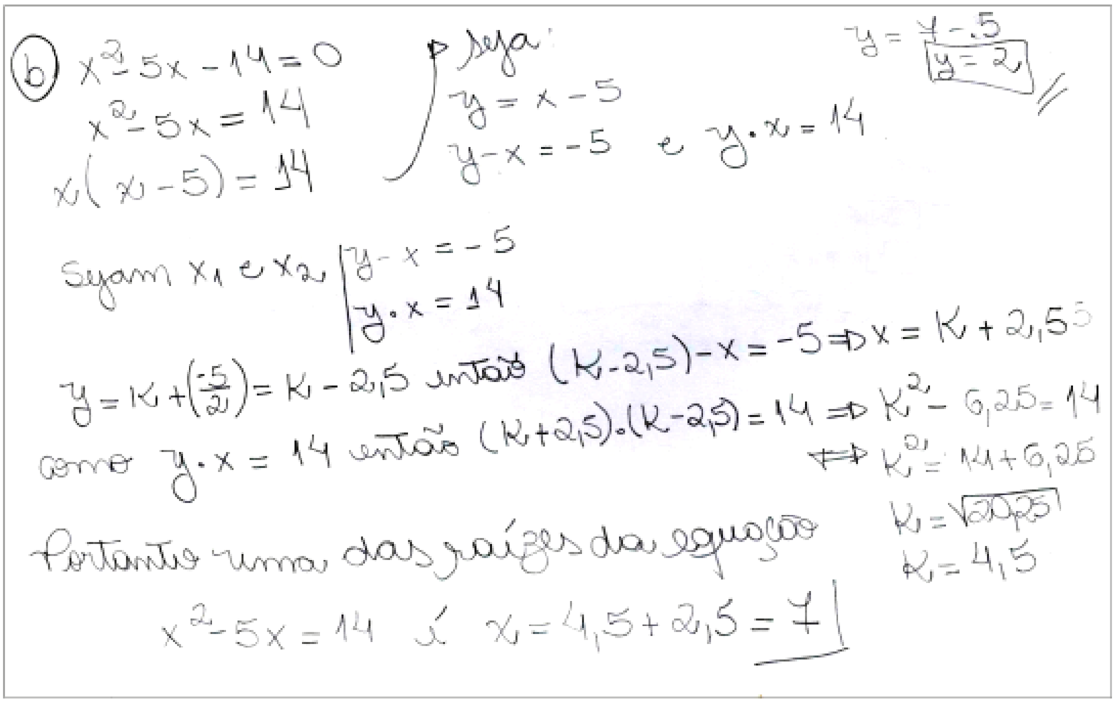
$K=\sqrt{1}$

$K=1$

$x^2+14x=-48$ é $x=1-7=-6$

Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Figura 49



(b) $x^2 - 5x - 14 = 0$

$x^2 - 5x = 14$

$x(x-5) = 14$

Seja:

$y = x - 5$

$y - x = -5$ e $y \cdot x = 14$

$-y = y - 5$

$\boxed{y = 2}$

Sejam x_1 e x_2 $\begin{cases} y - x = -5 \\ y \cdot x = 14 \end{cases}$

$y = k + \left(\frac{-5}{2}\right) = k - 2{,}5$ então $(k - 2{,}5) - x = -5 \Rightarrow x = k + 2{,}5$

como $y \cdot x = 14$ então $(k + 2{,}5) \cdot (k - 2{,}5) = 14 \Rightarrow k^2 - 6{,}25 = 14$

$\Rightarrow k^2 = 14 + 6{,}25$

$k = \sqrt{20{,}25}$

$k = 4{,}5$

Portanto uma das raízes da equação $x^2 - 5x = 14$ é $x = 4{,}5 + 2{,}5 = 7$

Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Figura 50

c) $2x^2+4x-\frac{5}{2}=0$

$2x^2+4x=\frac{5}{2}$

$2x(x+2)=\frac{5}{2}$

$x\cdot(x+2)=\frac{5}{4}$

$y=x+2$

$y-x=2$ e $y\cdot x=\frac{5}{2}$

$\begin{cases} y-x=2 \\ y\cdot x=\frac{5}{4} \end{cases}$

$y-\frac{1}{2}=2$

$y=2+\frac{1}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$

$y=K+\frac{2}{2}=K+1$ então $(K+1)-x=2 \Rightarrow x=K-1$

Como $y\cdot x=\frac{5}{4}$ então $(K+1)\cdot(K-1)=\frac{5}{4}$

$K^2-1=\frac{5}{2}$

$K^2=\frac{5}{4}+1$

$K^2=\frac{5+4}{4}=\frac{9}{4}$

$K=\sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow K=\frac{3}{2}$

∴ uma das raízes da equação $2x^2+4x-\frac{5}{2}=0$ é $x=\frac{3}{2}-1$

$x=\frac{3-2}{2}$

$x=\frac{1}{2}$ //

Digitalização de Atividade desenvolvida por estudante

Nesta folha, achamos que a falta da segunda solução seria notada, pois a solução é estritamente algébrica, além de termos escolhido o primeiro exercício com resposta negativa, ou seja, tais números não seriam problema desta vez.

Acreditamos que a explicação é devido a seguirem a risca o exemplo apresentado. Colocamos desta forma por haver indícios que para Diofanto apenas uma solução bastava, ou seja, quisemos ser precisos com a história, mas determinamos respostas incompletas. Propomos uma reformulação no exemplo resolvido para tentar resolver este problema.

O último exemplo apresentou coeficiente de x^2 diferente de 1, além de um coeficiente não ser inteiro, mas, apesar das reclamações no momento da aplicação, não constatamos problemas nas respostas apresentadas.

5.7 – Conclusão das Folhas de Atividades

Consideramos acertada nossa escolha pela confecção de Folhas de Atividades, orientada pela Engenharia Didática que nos possibilitou uma análise detalhada da produção do conhecimento desde o momento da preparação, a escolha da turma em que seria aplicada, a forma de aplicação e observação até a apreciação das respostas apresentadas.

Nossas análises e sugestões discutidas neste capítulo determinaram uma reformulação em nosso produto didático que apresentamos no Apêndice B, além de uma certeza que o tempo de aplicação deve ser ampliado. Sugerimos duas aulas de 50 minutos para cada Folha de Atividade.

Capítulo 6

Considerações Finais

Acreditamos que um conteúdo matemático não possa ter sua importância minimizada pelo descobrimento de uma fórmula resolutiva, principalmente por existirem outras formas fascinantes que podem agregar um nível maior de conhecimento, o que diretamente leva a uma autonomia frente a situações diversas.

Analisando o projeto como um todo, podemos dizer que em sua maioria ele foi bem sucedido e alcançou o objetivo que traçamos. Os alunos que experimentaram os métodos históricos propostos mostraram uma boa compreensão e execução, além de demonstrarem interesse em levar em suas salas de aulas.

Apesar da ausência de soluções negativas quando fazemos a interpretação geométrica, este pode ser um fator interessante a ser discutido, pois não é rara a necessidade de julgarmos em uma resolução matemática a validade da resposta em situações-problemas.

Certos que o mestrado profissional mudou a nossa dinâmica de trabalho, assim como, a produção e análise dessa dissertação, esperamos que essas Folhas de Atividades possam ajudar outros colegas a tornar o aprendizado de equações do segundo grau mais interessante e significativo.

Concluímos respondendo à pergunta levantada na introdução: os métodos utilizados por grandes matemáticos ao longo da história podem e devem ser inseridos em nosso cronograma de ensino, pois, como nossa pesquisa constatou, leva o aluno a refletir sobre diferentes formas de resolução e suas interpretações em cada contexto.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANEd. **Revista eletrônica da Educação Matemática.** Santa Catarina, v. 3, n. 6, 2008. p. 62-77. Disponível em: <http://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62> Acesso em: 01 set. 2013

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches em Didactique des Mathématiques.** Paris, v. 9, n. 3, 1988. p. 281-308.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Brasília, v. 3, 1998, 148p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> Acesso em: 01 set. 2013

CARVALHO, J. B. P. F.; ROQUE, T. M. **Tópicos de História da Matemática.** 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática v. 1, 2012. 466p.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 4. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. 844p.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics**: An Introduction. 2. ed. New York: ADDISON-WESLEY, 1998. 864p.

WAERDEN, B. L. van der **A History of Algebra**: From Al-Khwarizmi to Emmy Noether. 1. ed. GERMANY: SPRINGER-VERLAG, 1985. 271p.

Apêndice A

Folhas de Atividades aplicadas

Problemas relacionados à História das Equações de 2º grau

Professor: Marcos Vinicius Ferreira Fernandes Faculdade de Educação São Luís

Folha de Atividade 1

Resolva as equações de 2º grau a seguir no Universo dos Reais:

a) $x^2+4x=5$
b) $x^2+6x=40$
c) $x^2+7x=18$

a), b) e c): Quadrado e raiz igual a número Uma raiz positiva r e uma negativa s tal que $\|r\|<\|s\|$

d) $x^2+15=8x$

e) $x^2+65=18x$

f) $x^2+14=9x$

d), e) e f):
Quadrado e número igual a raiz
Duas raízes positivas

g) $x^2 = 6x + 16$

h) $x^2 = 2x + 24$

i) $x^2 = 7x + 18$

g), h) e i):
Quadrado igual a raiz e número
Uma raiz positiva r e uma negativa s tal que $|r| > |s|$

Problemas relacionados à História das Equações de 2º grau

Professor: Marcos Vinicius Ferreira Fernandes Faculdade de Educação São Luís

Folha de Atividade 2

Resolução utilizando o método descrito por Al-Khwarizmi para equações do tipo $x^2 + bx = c$:

Vamos resolver a equação $x^2 + 10x = 39$.

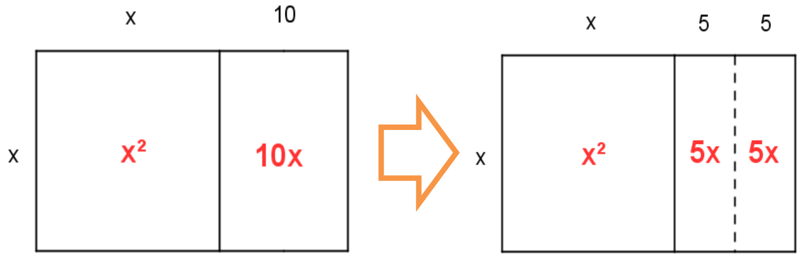
A solução de Al-Khwarizmi em seu livro é a seguinte:

"Você divide o número de raízes por dois, o que, no caso presente, fornece cinco. Isso você multiplica por si mesmo; o produto é vinte e cinco.

Some isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito, e subtraia disso a metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três.

Essa é a raiz do quadrado que você procurava; o próprio quadrado é nove."

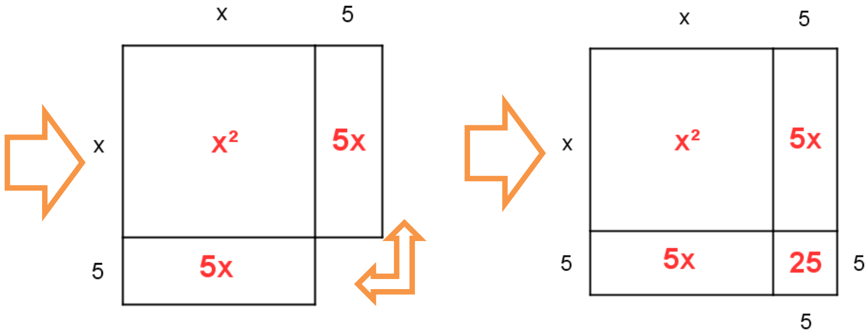
A interpretação geométrica de cada passagem



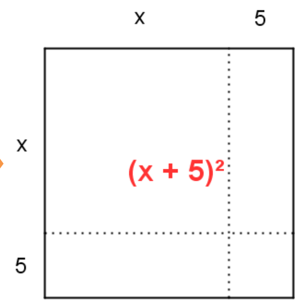
$x^2 + 10x = 39$ $x^2 + 5x + 5x = 39$

"você divide o número de raízes por dois, o que, no caso presente, fornece cinco."

Transladamos o retângulo



"Isso você multiplica por si mesmo; o produto é vinte e cinco. Some isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro."



$(x+5)^2=64$

$x+5=8$

E, finalmente

$x=3$

"Agora, tome a raiz disso, que é oito, e subtraia disso a metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três. Essa é a raiz do quadrado que você procurava; o próprio quadrado é nove."

Resolva as equações a seguir utilizando o método de Al-Khwarizmi descrito acima fazendo a interpretação geométrica de cada resolução:

a) $x^2+4x=5$

b) $x^2+6x=40$

c) $x^2+7x=18$

Problemas relacionados à História das Equações de 2º grau

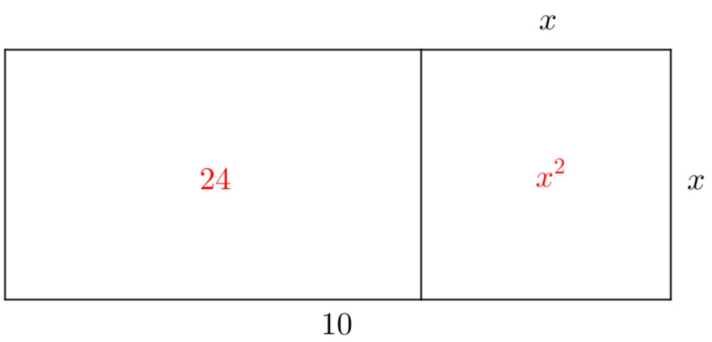
Professor: Marcos Vinicius Ferreira Fernandes		Faculdade de Educação São Luís

Folha de Atividade 3

Resolução utilizando um método de Al-Khwarizmi para equações do tipo $x^2 + c = bx$.

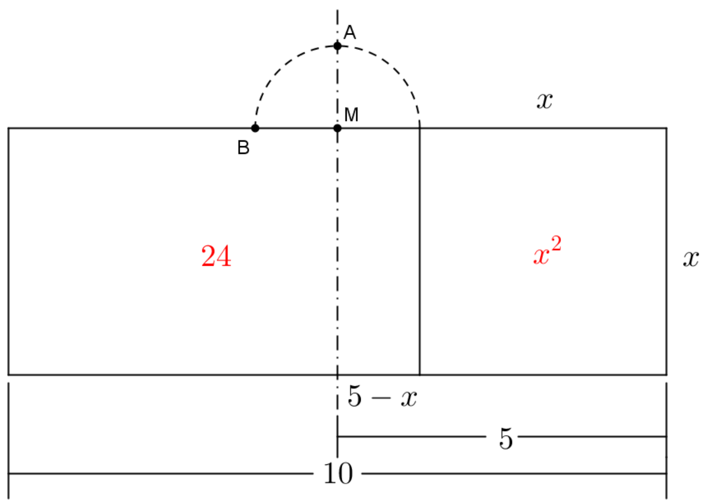
Vamos resolver a equação $x^2 + 24 = 10x$.

A interpretação geométrica de cada passagem

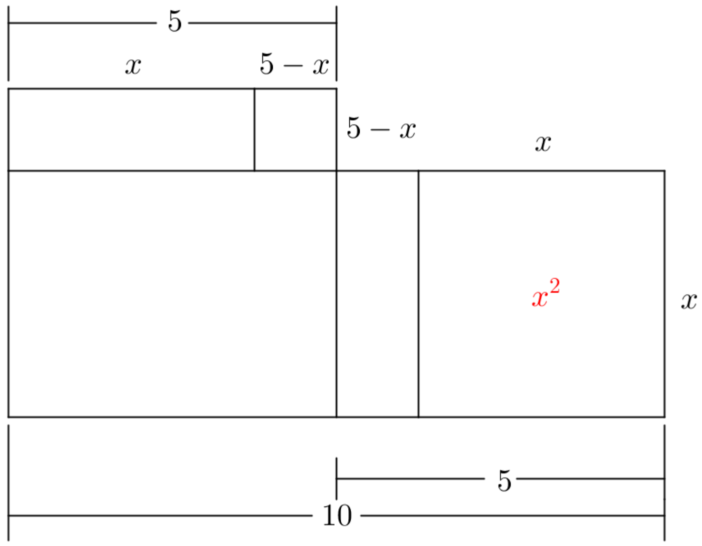


Um quadrado de lado x, área x², e um retângulo de área 24, juntos formam um retângulo de lados 10 e x, logo área 10x.

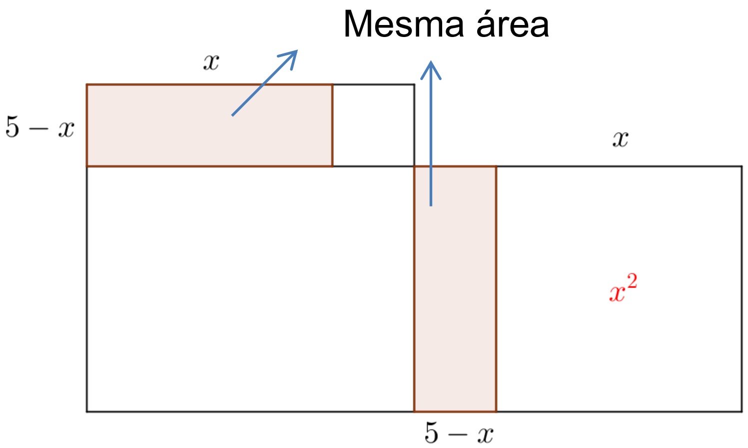
Então $x^2 + 24 = 10x$.



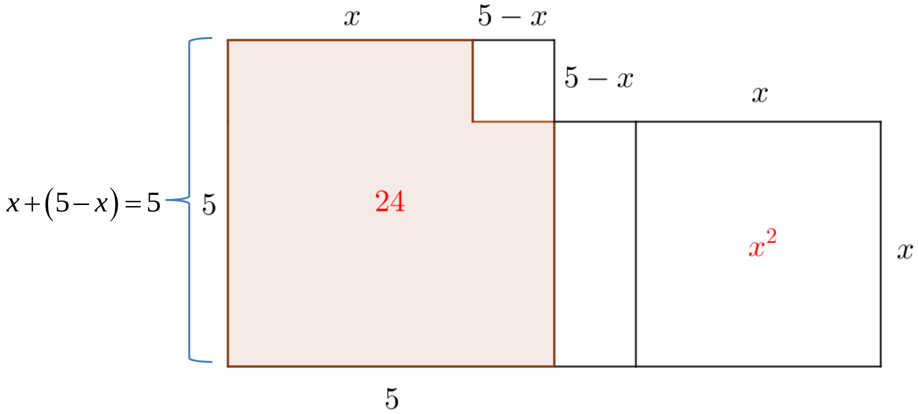
Dividimos a base ao meio, em duas de 5, e transportamos a medida 5 – x pelo ponto médio da base de cima.



Construímos o retângulo de base 5 e altura 5 – x (do transporte) composto por um quadrado de lado 5 – x e um retângulo de base 5 – (5 – x) = x e altura 5 – x.



Como os retângulos têm as mesmas dimensões, x e 5 – x, então são equivalentes em área.



Formamos um quadrado de lado 5 composto por uma poligonal de área 24 e um quadrado de lado 5 – x.

Se o quadrado tem área 25 e a poligonal área 24, então o quadrado de lado 5 – x tem área 25 – 24 = 1. Logo

$$(5-x)^2 = 1 \Rightarrow 5 - x = \sqrt{1} \Rightarrow x = 4$$

Resolva as equações a seguir utilizando o método de Al-Khwarizmi descrito acima fazendo a interpretação geométrica de cada resolução:

a) $x^2 + 15 = 8x$

b) $x^2 + 65 = 18x$

c) $x^2 + 14 = 9x$

Problemas relacionados à História das Equações de 2º grau

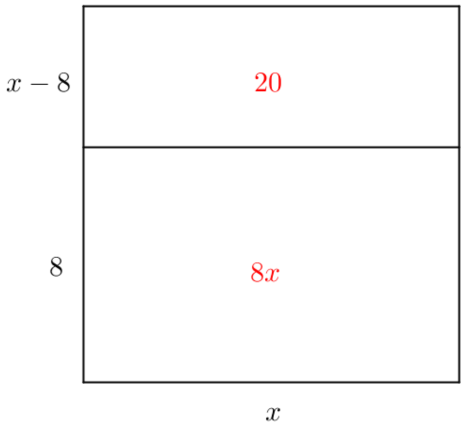
Professor: Marcos Vinicius Ferreira Fernandes Faculdade de Educação São Luís

Folha de Atividade 4

Resolução de equações do tipo $x^2 = bx + c$.

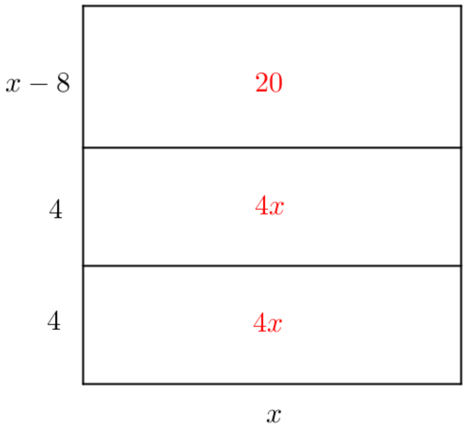
Vamos resolver a equação $x^2 = 8x + 20$.

A interpretação geométrica de cada passagem

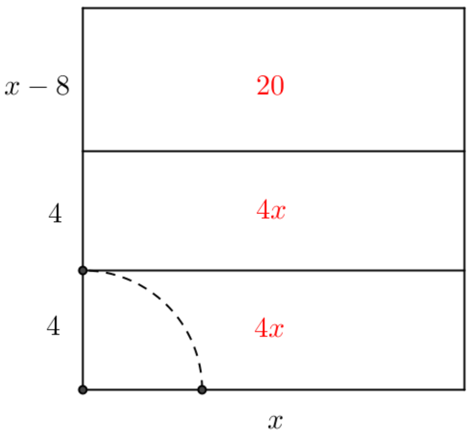


Um quadrado de lado x, área x², composto por dois retângulos de áreas 8x e 20.

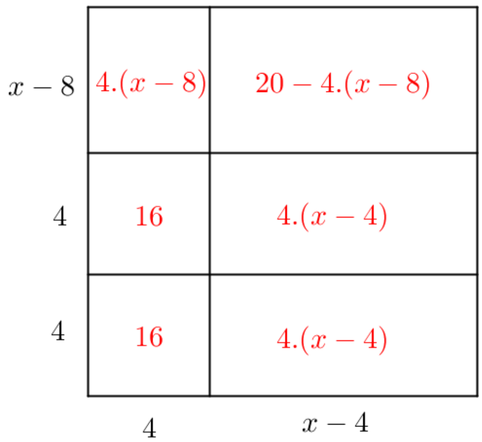
Então $x^2 = 8x + 20$.



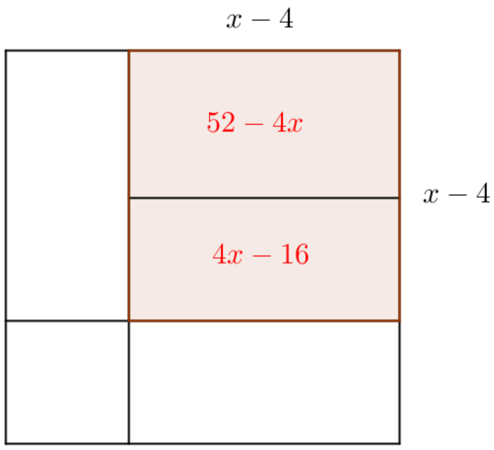
Dividimos ao meio o lado de medida 8, determinando dois retângulos de área 4x cada.



Transportamos a medida 4 por um dos vértices da base.

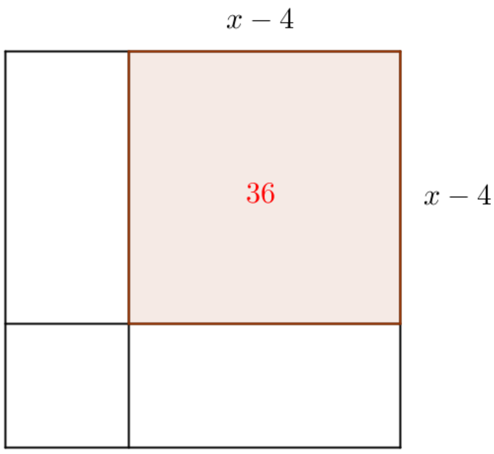


Traçamos uma perpendicular à base dividindo cada retângulo em dois. O quadrado de lado x fica decomposto em seis retângulos sendo 2 quadrados de lado 4, um retângulo de lados 4 e x – 8, dois retângulos de lados x – 4 e 4 e o último de área 20 – 4.(x – 8).



Os retângulos destacados tem a mesma base, x – 4, e alturas 4 e x – 8.

Como 4 + (x – 8) = x – 4 então, juntos, os retângulos formam um quadrado de lado x – 4.



A área deste quadrado de lado x – 4 é

(52 – 4x) + (4x – 16) = 36. Logo

$$(x-4)^2 = 36 \Rightarrow x-4 = \sqrt{36} \Rightarrow x = 10$$

Resolva as equações a seguir utilizando o método descrito acima fazendo a interpretação geométrica de cada resolução:

a) $x^2 = 6x + 16$
b) $x^2 = 2x + 24$
c) $x^2 = 7x + 18$

Problemas relacionados à História das Equações de 2º grau

Professor: Marcos Vinicius Ferreira Fernandes Faculdade de Educação São Luís

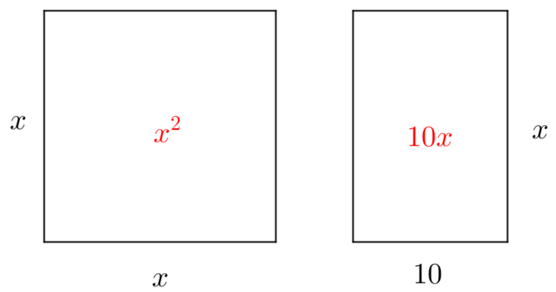
Folha de Atividade 5

Resolução utilizando uma adaptação do método de Al-Khwarizmi para equações do tipo $x^2 - bx = c$.

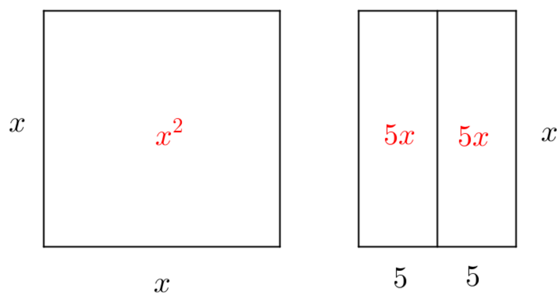
Vamos resolver a equação $x^2 - 10x = 39$.

Interpretaremos x^2 como a área de um quadrado de lado x, 10x como a área de um retângulo de lados 10 e x; $x^2 - 10x$ como a área do quadrado subtraída a área do retângulo e 39 o resultado dessa diferença entre as áreas.

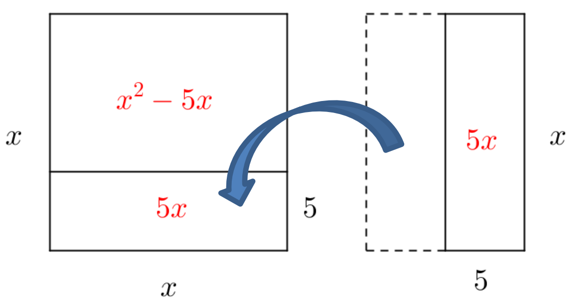
A interpretação geométrica de cada passagem



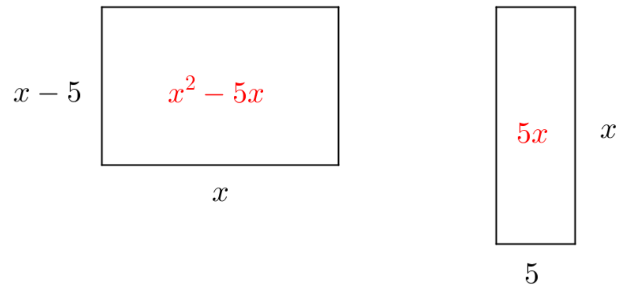
O quadrado e o retângulo.

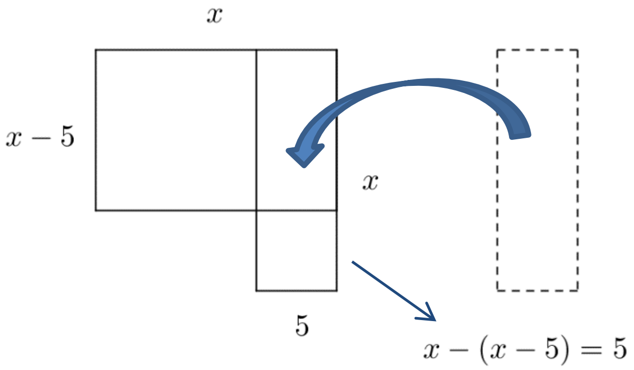


Tal como feito por Al- Khwarizmi , dividimos o retângulo pela base numérica por 2, determinando dois retângulos de área 5x cada.

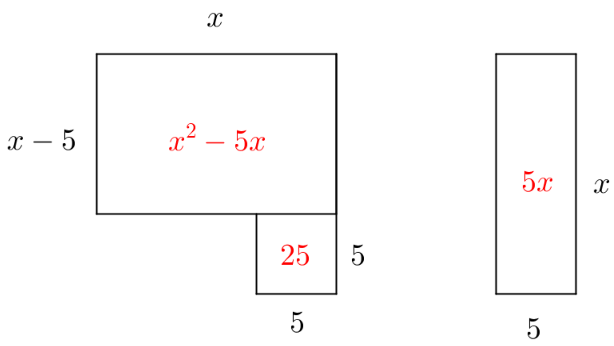


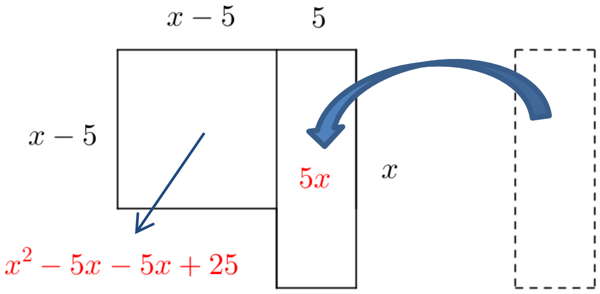
A retirada de um retângulo, de lados 5 e x, do quadrado de área x^2.



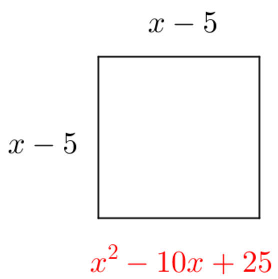


Para retirar o segundo retângulo será necessário fazer uma inclusão de um retângulo de lado 5 e outro lado x – (x – 5) = 5, ou seja de um quadrado.





Enfim retiramos o retângulo de área 5x do poligonal de área (x²-5x)+25.



$(x^2-10x)+25=(39)+25$ como o quadrado tem lado x – 5 então $(x-5)^2=39+25$ logo $(x-5)^2=64 \Rightarrow x-5=8$

E finalmente, $x=13$.

Resolva as equações a seguir utilizando o método descrito acima fazendo a interpretação geométrica de cada resolução:

a) $x^2 - 6x = 16$
b) $x^2 - 2x = 24$
c) $x^2 - 7x = 18$

Problemas relacionados à História das Equações de 2º grau

Professor: Marcos Vinicius Ferreira Fernandes Faculdade de Educação São Luís

Folha de Atividade 6

Exercício do tipo: encontrar dois números cuja soma é S e o produto é P.

1) Encontrar dois números cuja soma é 20 e o produto é 96.

Sejam x_1 e x_2 tais números logo $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 20 \\ x_1 \cdot x_2 = 96 \end{array} \right.$

Chamando $x_1 = \dfrac{20}{2} + k = 10 + k$ então $(10+k) + x_2 = 20 \Rightarrow x_2 = 10 - k$.

Como $x_1 \cdot x_2 = 96$ então $(10+k)\cdot(10-k) = 96 \Leftrightarrow 100 - k^2 = 96$

$$\Leftrightarrow 100 - 96 = k^2$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{4} = 2$$

Portanto os números são $x_1 = 10 + 2 = 12$ e $x_2 = 10 - 2 = 8$.

2) Encontrar dois números cuja diferença é 8 e o produto 48.

Sejam x_1 e x_2 tais números logo $\left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 8 \\ x_1 \cdot x_2 = 48 \end{array} \right.$

Chamando $x_1 = k + \dfrac{8}{2} = k + 4$ então $(k+4) - x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = k - 4$.

Como $x_1 \cdot x_2 = 48$ então $(k+4)\cdot(k-4) = 48 \Leftrightarrow k^2 - 16 = 48$

$$\Leftrightarrow k^2 = 48 + 16$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{64} = 8$$

Portanto os números são $x_1 = 8 + 4 = 12$ e $x_2 = 8 - 4 = 4$.

Resolvendo equações do 2º grau utilizando o método de Diofanto:

1) $x^2+6x=16 \Leftrightarrow x(x+6)=16$. Seja $y=x+6$ logo $y-x=6$ e $x\cdot y=16$ então para obtermos uma raiz da equação $x^2+6x=16$ é suficiente buscarmos dois números y e x cuja diferença é 6 e cujo produto é 16. O valor de y obtido é apenas um valor auxiliar ao método, sendo desprezado ao final, pois procuramos o valor de x.

Sejam x_1 e x_2 tais números logo $\left|\begin{array}{l} y-x=6 \\ y\cdot x=16 \end{array}\right.$

Chamando $y=k+\dfrac{6}{2}=k+3$ então $(k+3)-x=6 \Rightarrow x=k-3$.

Como $y\cdot x=16$ então $(k+3)\cdot(k-3)=16 \Leftrightarrow k^2-9=16$

$$\Leftrightarrow k^2=16+9$$

$$\Rightarrow k=\sqrt{25}=5$$

Portanto uma das raízes da equação $x^2+6x=16$ é $x=5-3=2$.

2) $x^2-x=20 \Leftrightarrow x(x-1)=20$. Seja $y=x-1$ logo $x-y=1$ e $x\cdot y=20$ então para obtermos uma raiz da equação $x^2-x=20$ é suficiente buscarmos dois números y e x cuja diferença é 1 e o produto é 20. O valor de y obtido é apenas um valor auxiliar ao método, sendo desprezado ao final, pois procuramos o valor de x.

Sejam y e x tais números logo $\left|\begin{array}{l} x-y=1 \\ y\cdot x=20 \end{array}\right.$

Chamando $x=k+\dfrac{1}{2}$ então $\left(k+\dfrac{1}{2}\right)-y=1 \Rightarrow y=k-\dfrac{1}{2}$.

Como $x\cdot y=20$ então $\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(k-\dfrac{1}{2}\right)=20 \Leftrightarrow k^2-\dfrac{1}{4}=20$

$$\Leftrightarrow k^2=20+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow k=\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}$$

Portanto uma das raízes da equação $x^2-x=20$ é $x=\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{2}=5$.

Resolva as equações a seguir utilizando o método descrito acima fazendo a interpretação algébrica de cada resolução:

a) $x^2 + 14x + 48 = 0$
b) $x^2 - 5x - 14 = 0$
c) $2x^2 + 4x - \frac{5}{2} = 0$

Apêndice B

Folhas de Atividades – produto final

Problemas relacionados à História das Equações de 2º grau

Professor: Marcos Vinicius Ferreira Fernandes Faculdade de Educação São Luís

Folha de Atividade 1

Resolva as equações de 2º grau a seguir no Universo dos Reais:

a) $x^2 + 4x = 5$

b) $x^2 + 6x = 40$

c) $x^2 + 7x = 18$

a), b) e c): Quadrado e raízes igual a número Uma raiz positiva r e uma negativa s tal que |r|<|s|

d) $x^2 + 15 = 8x$

e) $x^2 + 65 = 18x$

f) $x^2 + 14 = 9x$

g) $x^2 + 9 = 6x$

h) $x^2 + 6 = 4x$

d), e) e f):
Quadrado e número igual a raízes
Duas raízes positivas

i) $x^2 = 6x + 16$

j) $x^2 = 2x + 24$

k) $x^2 = 7x + 18$

i), j) e k): Quadrado igual a raízes e número Uma raiz positiva r e uma negativa s tal que $\|r\|>\|s\|$

l) $x^2 - 8x = 0$

m) $2x^2 = 8$

n) $x(x-8) = 2(x-8)$

Problemas relacionados à História das Equações de 2º grau

Professor: Marcos Vinicius Ferreira Fernandes Faculdade de Educação São Luís

Folha de Atividade 2

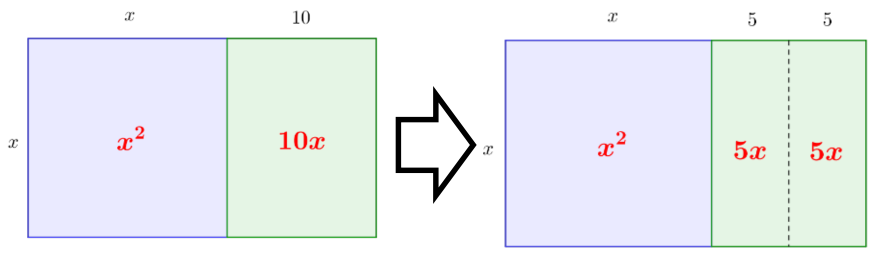
Resolução utilizando o método descrito por Al-Khwarizmi para equações do tipo $x^2 + bx = c$:

Vamos resolver a equação $x^2 + 10x = 39$.

A solução de Al-Khwarizmi em seu livro é a seguinte:

"Você divide o número de raízes por dois, o que, no caso presente, fornece cinco. Isso você multiplica por si mesmo; o produto é vinte e cinco.
Some isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito, e subtraia disso a metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três.
Essa é a raiz do quadrado que você procurava; o próprio quadrado é nove."

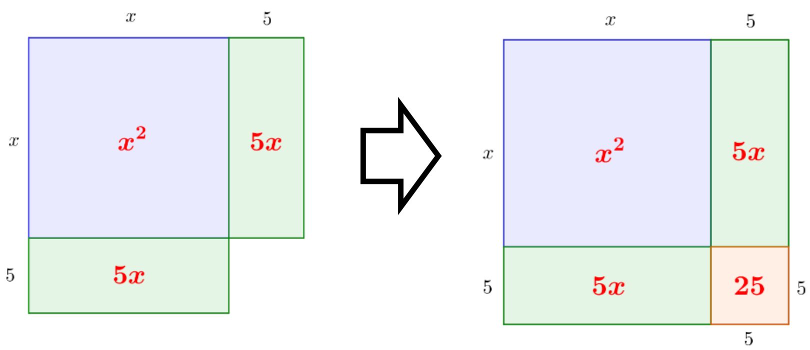
A interpretação geométrica de cada passagem



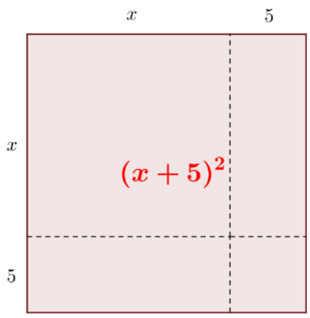
"você divide o número de raízes por dois, o que, no caso presente, fornece cinco."

$x^2 + 10x = 39$ $x^2 + 5x + 5x = 39$

Transladamos o retângulo



"Isso você multiplica por si mesmo; o produto é vinte e cinco. Some isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro."



$(x+5)^2 = 64$

$x+5=8$

E, finalmente

$x=3$

“Agora, tome a raiz disso, que é oito, e subtraia disso a metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três. Essa é a raiz do quadrado que você procurava; o próprio quadrado é nove.”

Resolva as equações a seguir utilizando o método de Al-Khwarizmi descrito acima, fazendo a interpretação geométrica de cada resolução:

a) $x^2+4x=5$

b) $x^2+6x=40$

c) $x^2+7x=18$

Lembrando que a equação $x^2=4$ tem 2 e -2 como respostas, encontre a segunda solução das equações do exercício anterior.

Problemas relacionados à História das Equações de 2º grau

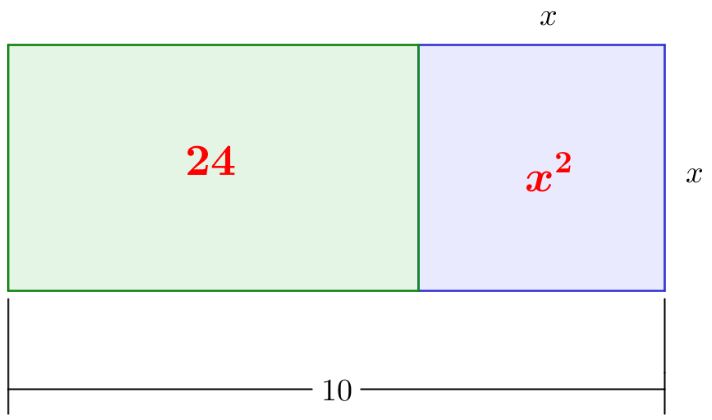
Professor: Marcos Vinicius Ferreira Fernandes Faculdade de Educação São Luís

Folha de Atividade 3

Resolução utilizando um método de Al-Khwarizmi para equações do tipo $x^2 + c = bx$.

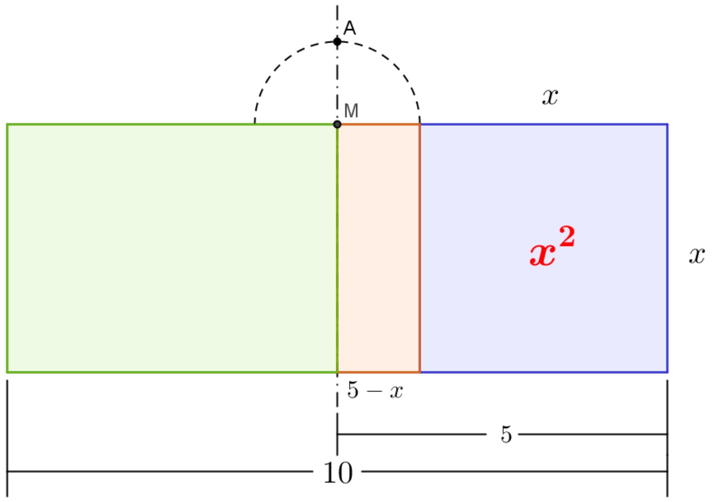
Vamos resolver a equação $x^2 + 24 = 10x$.

A interpretação geométrica de cada passagem

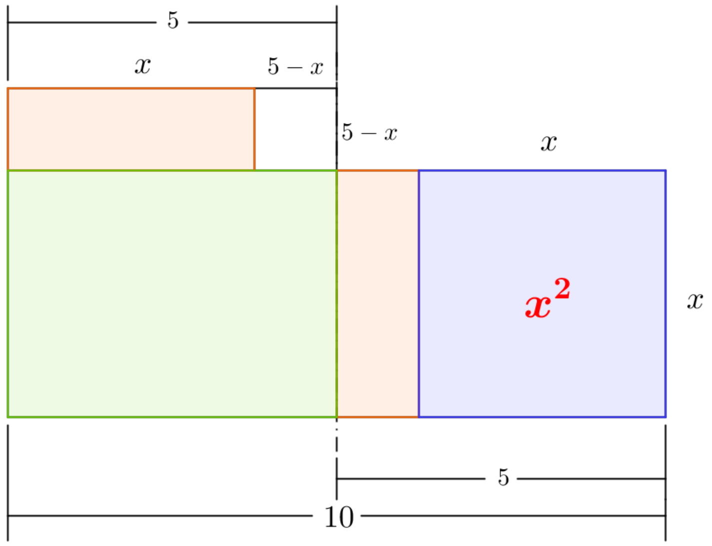


Um quadrado de lado x, área x^2, e um retângulo de área 24, juntos formam um retângulo de lados 10 e x, logo área $10x$.

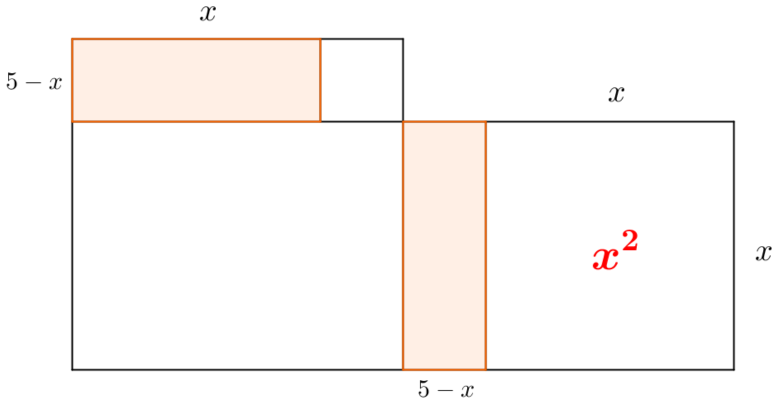
Então $x^2 + 24 = 10x$.



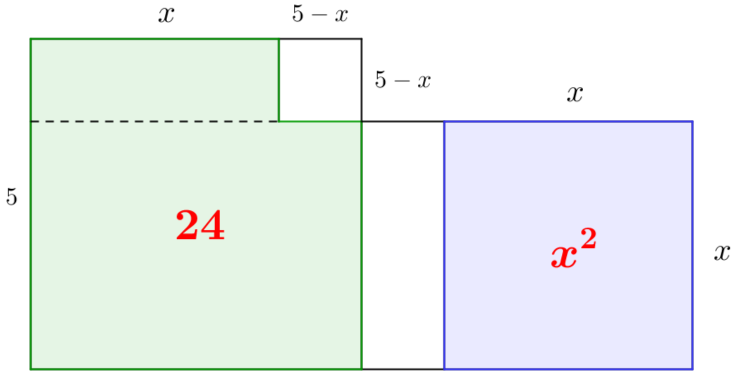
Dividimos a base ao meio, em duas de 5, e transportamos a medida $5 - x$ pelo ponto médio da base de cima.



Construímos o retângulo de base 5 e altura $5-x$ (do transporte) composto por um quadrado de lado $5-x$ e um retângulo de base 5 – $(5-x) = x$ e altura $5-x$.



Como os retângulos têm as mesmas dimensões, x e $5-x$, então são equivalentes em área.



Formamos um quadrado de lado 5 composto por uma poligonal de área 24 e um quadrado de lado $5-x$.

Se o quadrado tem área 25 e a poligonal área 24, então o quadrado de lado $5-x$ tem área 25 – 24 = 1. Logo

$$(5-x)^2 = 1 \Rightarrow 5-x = \sqrt{1} \Rightarrow x = 4$$

Resolva as equações a seguir utilizando o método de Al-Khwarizmi descrito acima fazendo a interpretação geométrica de cada resolução:

a) $x^2 + 15 = 8x$

b) $x^2 + 65 = 18x$

c) $x^2 + 14 = 9x$

Lembrando que a equação $x^2 = 4$ tem 2 e -2 como respostas, encontre a segunda solução das equações do exercício anterior.

Apresente a interpretação geométrica das equações a seguir e as resolva:

a) $x^2 + 9 = 6x$

b) $x^2 + 6 = 4x$

Problemas relacionados à História das Equações de 2º grau

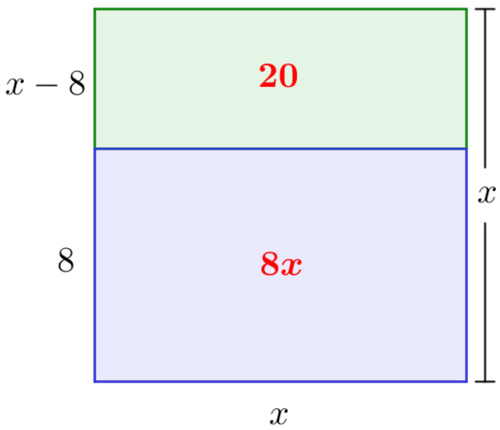
Professor: Marcos Vinicius Ferreira Fernandes Faculdade de Educação São Luís

Folha de Atividade 4

Resolução de equações do tipo $x^2 = bx + c$.

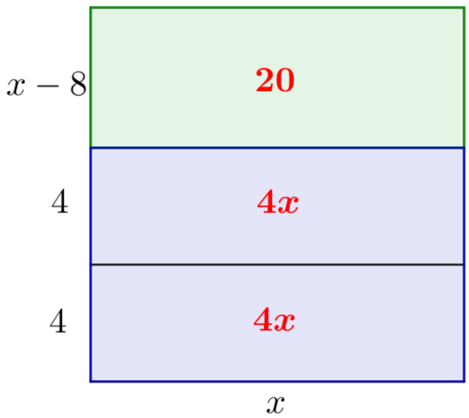
Vamos resolver a equação $x^2 = 8x + 20$.

A interpretação geométrica de cada passagem

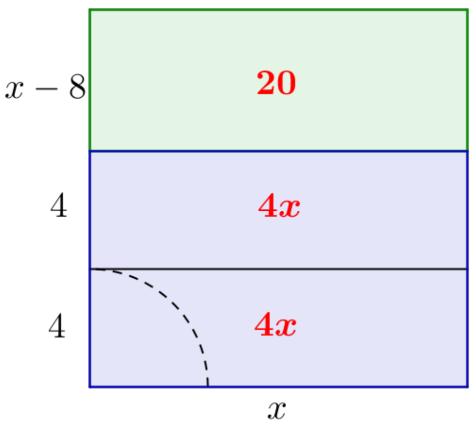


Um quadrado de lado x, área x^2, composto por dois retângulos de áreas $8x$ e 20.

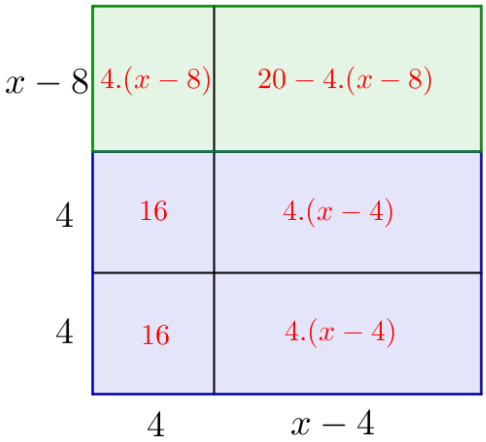
Então $x^2 = 8x + 20$.



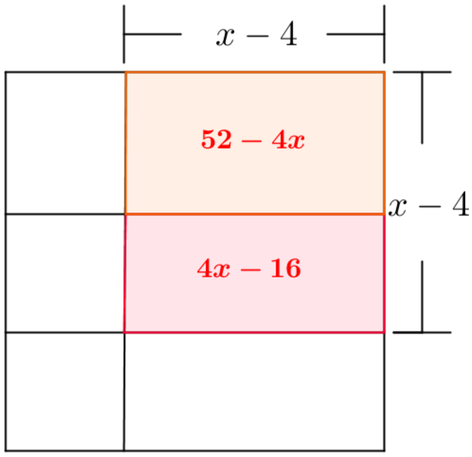
Dividimos ao meio o lado de medida 8, determinando dois retângulos de área $4x$ cada.



Transportamos a medida 4 por um dos vértices da base.

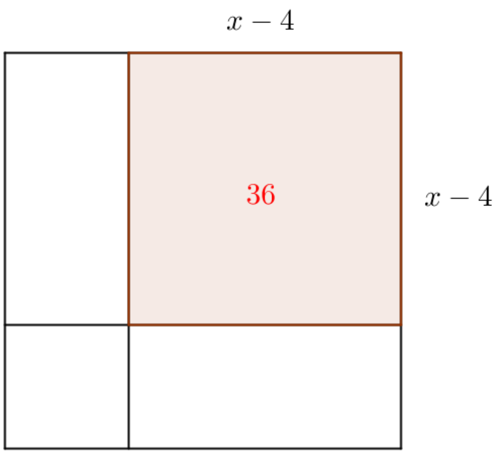


Traçamos uma perpendicular à base dividindo cada retângulo em dois. O quadrado de lado x fica decomposto em seis retângulos sendo 2 quadrados de lado 4, um retângulo de lados 4 e $x-8$, dois retângulos de lados $x-4$ e 4 e o último de área $20-4\cdot(x-8)$.



Os retângulos destacados tem a mesma base, x – 4, e alturas 4 e $x-8$.

Como $4+(x-8)=x-4$ então, juntos, os retângulos formam um quadrado de lado $x-4$.



A área deste quadrado de lado $x-4$ é $(52-4x)+(4x-36)=36$. Logo

$$(x-4)^2=36 \Rightarrow x-4=\sqrt{36} \Rightarrow x=10$$

Resolva as equações a seguir utilizando o método descrito acima fazendo a interpretação geométrica de cada resolução:

a) $x^2 = 6x + 16$
b) $x^2 = 2x + 24$
c) $x^2 = 7x + 18$

Lembrando que a equação $x^2 = 4$ tem 2 e -2 como respostas, encontre a segunda solução das equações do exercício anterior.

Problemas relacionados à História das Equações de 2º grau

Professor: Marcos Vinicius Ferreira Fernandes Faculdade de Educação São Luís

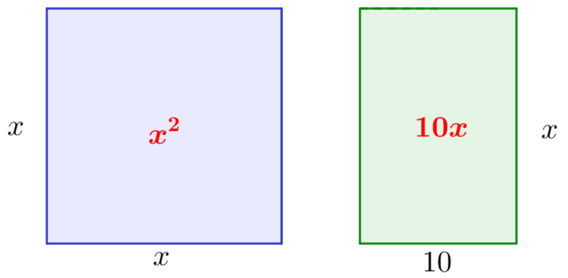
Folha de Atividade 5

Resolução utilizando uma adaptação do método de Al-Khwarizmi para equações do tipo $x^2 - bx = c$.

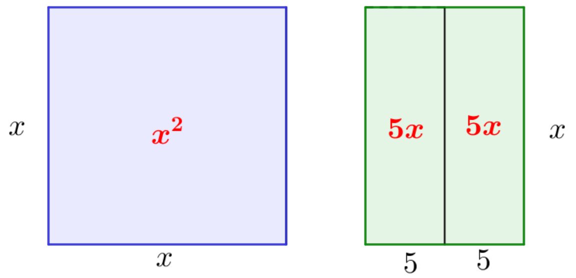
Vamos resolver a equação $x^2 - 10x = 39$.

Interpretaremos x^2 como a área de um quadrado de lado x, 10x como a área de um retângulo de lados 10 e x; $x^2 - 10x$ como a área do quadrado subtraída a área do retângulo e 39 o resultado dessa diferença entre as áreas.

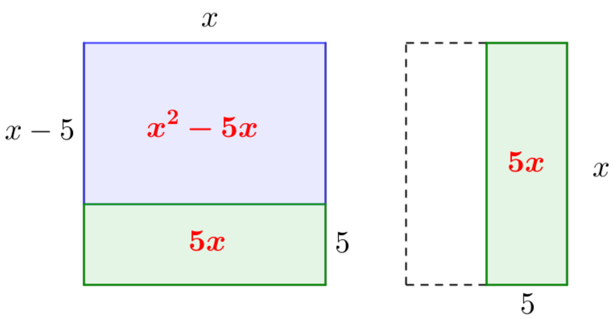
A interpretação geométrica de cada passagem



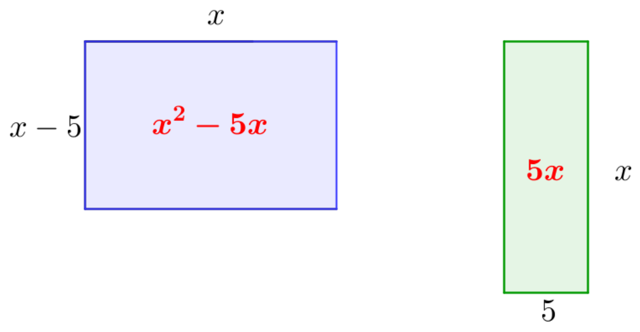
O quadrado e o retângulo.

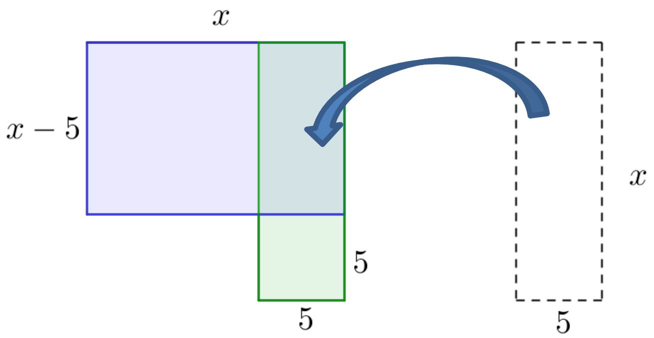


Tal como feito por Al- Khwarizmi, dividimos o retângulo pela base numérica por 2, determinando dois retângulos de área 5x cada.

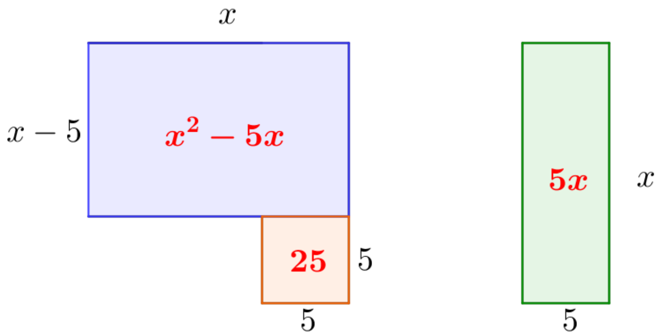


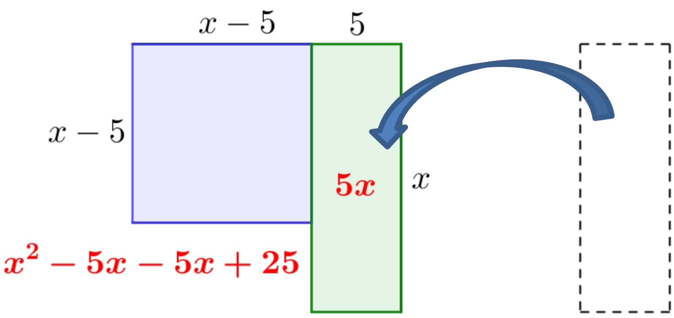
A retirada de um retângulo, de lados 5 e x, do quadrado de área x^2.



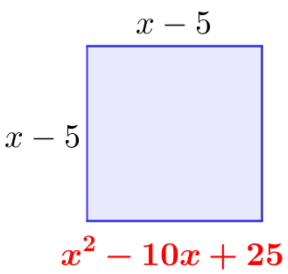


Para retirar o segundo retângulo será necessário fazer uma inclusão de um retângulo de lado 5 e outro lado x – (x – 5) = 5, ou seja, de um quadrado.





Enfim retiramos o retângulo de área 5x do poligonal de área (x^2 – 5x) + 25.



$(x^2-10x)+25=(39)+25$ como o quadrado tem lado $x-5$ então $(x-5)^2=39+25$ logo $(x-5)^2=64 \Rightarrow x-5=8$

E finalmente, $x=13$.

Resolva as equações a seguir utilizando o método descrito acima fazendo a interpretação geométrica de cada resolução:

a) $x^2 - 6x = 16$
b) $x^2 - 2x = 24$
c) $x^2 - 7x = 18$

Lembrando que a equação $x^2 = 4$ tem 2 e -2 como respostas, encontre a segunda solução das equações do exercício anterior.

Problemas relacionados à História das Equações de 2º grau

Professor: Marcos Vinicius Ferreira Fernandes Faculdade de Educação São Luís

Folha de Atividade 6

Exercício do tipo: encontrar dois números cuja soma é S e o produto é P.

1) Encontrar dois números cuja soma é 20 e o produto é 96.

Sejam x_1 e x_2 tais números, logo $\begin{cases} x_1 + x_2 = 20 \\ x_1 \cdot x_2 = 96 \end{cases}$

Chamando $x_1 = \frac{20}{2} + k = 10 + k$ então $(10+k) + x_2 = 20 \Rightarrow x_2 = 10 - k$.

Como $x_1 \cdot x_2 = 96$ então $(10+k)\cdot(10-k) = 96 \Leftrightarrow 100 - k^2 = 96$

$$\Leftrightarrow 100 - 96 = k^2$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{4} = 2$$

Portanto os números são $x_1 = 10 + 2 = 12$ e $x_2 = 10 - 2 = 8$.

2) Encontrar dois números cuja diferença é 8 e o produto 48.

Sejam x_1 e x_2 tais números logo $\begin{cases} x_1 - x_2 = 8 \\ x_1 \cdot x_2 = 48 \end{cases}$

Chamando $x_1 = k + \frac{8}{2} = k + 4$ então $(k+4) - x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = k - 4$.

Como $x_1 \cdot x_2 = 48$ então $(k+4)\cdot(k-4) = 48 \Leftrightarrow k^2 - 16 = 48$

$$\Leftrightarrow k^2 = 48 + 16$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{64} = 8$$

Portanto os números são $x_1 = 8 + 4 = 12$ e $x_2 = 8 - 4 = 4$.

Resolvendo equações do 2º grau utilizando o método de Diofanto:

1) $x^2+6x=16 \Leftrightarrow x(x+6)=16$. Seja $y=x+6$ logo $y-x=6$ e $x\cdot y=16$ então para obtermos uma raiz da equação $x^2+6x=16$ é suficiente buscarmos dois números y e x cuja diferença é 6 e cujo produto é 16. O valor de y obtido é apenas um valor auxiliar ao método, sendo desprezado ao final, pois procuramos o valor de x.

Sejam x_1 e x_2 tais números logo $\begin{cases} y-x=6 \\ y\cdot x=16 \end{cases}$

Chamando $y=k+\dfrac{6}{2}=k+3$ então $(k+3)-x=6 \Rightarrow x=k-3$.

Como $y\cdot x=16$ então $(k+3)\cdot(k-3)=16 \Leftrightarrow k^2-9=16$

$$\Leftrightarrow k^2=16+9$$

$$\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{25}=\pm 5$$

Portanto uma das raízes da equação $x^2+6x=16$ é $x=5-3=2$ e a outra, $x=-5-3=-8$.

2) $x^2-x=20 \Leftrightarrow x(x-1)=20$. Seja $y=x-1$ logo $x-y=1$ e $x\cdot y=20$ então para obtermos uma raiz da equação $x^2-x=20$ é suficiente buscarmos dois números y e x cuja diferença é 1 e o produto é 20. O valor de y obtido é apenas um valor auxiliar ao método, sendo desprezado ao final, pois procuramos o valor de x.

Sejam y e x tais números, logo $\begin{cases} x-y=1 \\ y\cdot x=20 \end{cases}$

Chamando $x=k+\dfrac{1}{2}$ então $\left(k+\dfrac{1}{2}\right)-y=1 \Rightarrow y=k-\dfrac{1}{2}$.

Como $x\cdot y=20$ então $\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(k-\dfrac{1}{2}\right)=20 \Leftrightarrow k^2-\dfrac{1}{4}=20$

$$\Leftrightarrow k^2=20+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{\frac{81}{4}}=\pm\frac{9}{2}$$

Portanto uma das raízes da equação $x^2-x=20$ é $x=\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{2}=5$ e a outra, $x=-\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{2}=-4$.

Resolva as equações a seguir utilizando o método descrito acima fazendo a interpretação algébrica de cada resolução:

a) $x^2 + 14x + 48 = 0$

b) $x^2 - 5x - 14 = 0$

c) $2x^2 + 4x - \frac{5}{2} = 0$