UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

GISELE APARECIDA MASSUELA GERDENITS

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO: UMA PROPOSTA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS

Sorocaba

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO: UMA PROPOSTA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS

GISELE APARECIDA MASSUELA GERDENITS

ORIENTADORA: PROF. DRA. MAGDA DA SILVA PEIXOTO

Sorocaba

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO: UMA PROPOSTA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, sob orientação da Professora Doutora Magda da Silva Peixoto.

Sorocaba
2014

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

	Gerdenits, Gisele Aparecida Massuela.
G366rc	Raciocínio combinatório : uma proposta para professores de matemática do ensino fundamental – anos finais / Gisele Aparecida Massuela Gerdenits. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
	169 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.
	1. Análise combinatória. 2. Raciocínio. 3. Princípio multiplicativo. 4. Diagrama de árvore. 5. Enumeração das possibilidades. 6. Materiais manipulativos. I. Título.
	CDD: 511.6 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a defesa de dissertação de Mestre Profissional em Ensino de Ciências Exatas do candidato Gisele Aparecida Massuela Gerdenits, realizada em 10/11/2014:

Magda Peixoto

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
UFSCar

Wladimir Seixas

Prof. Dr. Wladimir Seixas
UFSCar

Marta Cilene Gadotti

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Unesp

Aos meus pais, Dolores e Claudinei, que sempre estiveram presentes nas alegrias, nas tristezas e principalmente nas dificuldades, com amor incondicional, me incentivando e me apoiando em todos os momentos. São meus exemplos de vida, de coragem, fé e amor. Sem eles não seria possível chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por minha vida, por minha família, pelos meus amigos, pela proteção e por ter me iluminado em todos os momentos de dificuldade.

Aos meus pais Dolores e Claudinei, por terem me concedido a vida, pelo amor incondicional, pela dedicação, pelo apoio, pela confiança, por me mostrarem o valor do estudo e por entenderem a minha ausência em diversos momentos. Esta conquista também é de vocês.

Ao meu irmão Marco, pela amizade, pela ajuda, pelo apoio e compreensão.

Ao meu marido Fábio pela paciência nos momentos de desespero, pela compreensão, pelo apoio, carinho e amor.

Ao meu amado filho Giovanni, pelo amor e carinho, meu pedido de desculpas pelos dias e noites de estudos.

À minha orientadora Professora Doutora Magda da Silva Peixoto pelos ensinamentos e orientações que, com sua paciência, dedicação, companheirismo e amizade me conduziram nessa pesquisa.

A todos meus queridos amigos e familiares de quem, nos últimos anos, me ausentei de seus convívios para desenvolver esta pesquisa.

A todos os professores do programa de mestrado que me acompanharam nessa caminhada e contribuíram para meu aprendizado e também para a árdua tarefa de ser educadora o meu muito obrigado.

Aos meus amigos Sara, Adriane e Luiz Rodolfo pela parceria, pelos momentos bons, pelas discussões e reflexões que compartilhamos durante esta caminhada.

A todos os colegas de curso que foram muito importantes durante minha caminhada, cada um a sua maneira, nos momentos de estudo, discussões e brincadeiras.

À equipe gestora da Escola Estadual Professor Lauro Sanchez, especialmente a Marli e Janete, pela confiança, pelo apoio e por ter permitido a realização desse trabalho.

Aos meus queridos alunos, pelo carinho, pela admiração e por participarem com empenho no desenvolvimento das atividades dessa pesquisa.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pela bolsa concedida, que permitiu a realização deste sonho.

Agradeço a todos que, em algum momento, passaram por minha vida e contribuíram com suas experiências para o resultado desta pesquisa.

“Mesmo quando tudo
parece desabar,
cabe a mim decidir
entre rir ou chorar,
ir ou ficar,
desistir ou lutar;
porque descobri,
no caminho incerto
da vida, que o mais
importante é o decidir.”
Cora Coralina

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo principal a confecção de material manipulável para trabalhar sequências de atividades introduzindo de maneira intuitiva e natural a noção de Análise Combinatória no Ensino Fundamental – Anos Finais sem a utilização de fórmulas, incentivando o uso do Princípio Multiplicativo, do diagrama de árvore e da enumeração das possibilidades como uma ferramenta importante para a resolução de vários problemas. Iniciamos a pesquisa fazendo uma descrição dos documentos curriculares vigentes na Secretaria da Educação do Estado de São de São Paulo, seguida por um panorama histórico e fundamentação teórica. A pesquisa foi desenvolvida com a aplicação de três atividades com alunos da 5ª série/6º ano a 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Pública Estadual da cidade de Sorocaba/SP. Essas atividades foram elaboradas com o objetivo de constatar as dificuldades dos alunos no desenvolvimento de problemas que envolvam o raciocínio combinatório e propor materiais manipulativos, de baixo custo, que auxiliem na construção e compreensão desse conteúdo, considerados de difícil entendimento por grande parte de alunos e professores. Esses materiais manipulativos representam o produto final dessa pesquisa e espera-se que os professores o utilizem em suas salas de aulas para tornar suas aulas mais ricas e dinâmicas despertando o interesse dos alunos.

Palavra-chaves: Raciocínio Combinatório. Princípio Multiplicativo. Diagrama de Árvore. Enumeração das Possibilidades. Materiais Manipulativos.

ABSTRACT

This research has as main objective making a manipulative material to work sequences of activities by introducing the notion of Combinatorial Analysis in an intuitive and natural way in elementary school – final years. Without using formulas, it presents an encouragement to use the Multiplicative Principle, tree diagram and list of possibilities as an important tool for solving various problems. We started the research making a description of the current curriculum documents in the Department of Education of the State of São Paulo, followed by historical overview and theoretical foundation. The survey was developed with the implementation of three activities with students from the 5th grade - 6 year to 8th grade - 9th year of elementary school in a Public State School in the city of Sorocaba/SP. These activities were designed to find out the students' difficulties in the development of problems involving Combinatorial reasoning and to propose manipulative materials at low cost and to help in the construction and understanding of that content, since a big part of students and teachers consider it difficult to understand. These manipulative materials represent the final product of this research and it is hoped that teachers use them in their classrooms to make their classes more dynamic, rich and arousing the interest of the students.

Keywords: Logical Thinking. Multiplicative Principle. Tree Diagram. List the Possibilities. Manipulative Materials.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Quando cursei o início do Ensino Fundamental, na época chamado de Ensino Primário, tinha muita dificuldade no entendimento da Matemática, mas quando entrei no Ginásio encontrei uma professora de Matemática que na minha opinião, foi extremamente competente e decisiva na minha vida profissional, pois trabalhava os conteúdos matemáticos através do lúdico, de materiais manipuláveis e jogos e a partir daí, decidi ser professora de Matemática, cursando a Licenciatura alguns anos depois.

Cursando a faculdade comecei a ministrar aulas como estudante para as 5ª e 6ª séries, hoje do Ensino Fundamental, e sempre percebi as dificuldades que os alunos possuem em relação a essa disciplina. Então, sempre busquei diferentes metodologias que facilitassem o entendimento dos conteúdos matemáticos.

Quando me formei, comecei a ministrar aulas no Ensino Médio e percebi que minha formação acadêmica tinha deixado grandes lacunas, então passei a estudar muito os conteúdos que eu precisava ensinar, sempre preparei minhas aulas com exercícios e problemas.

Foi então que me deparei com a Análise Combinatória, um assunto desafiador, onde a beleza está no entendimento e na interpretação dos problemas. Muitos colegas, professores de Matemática, comentavam que não gostavam de Análise Combinatória, pois se sentiam despreparados para ensinar esse assunto, outros que a evitavam, pois a grade de conteúdos era grande e precisavam dar ênfase a outros conteúdos mais importantes.

Com o passar dos anos percebi que a grande maioria dos alunos no Ensino Médio, onde esse conteúdo é generalizado e formalizado, não tinha o conhecimento prévio necessário para a formalização desse conteúdo, onde o raciocínio e a interpretação são condições fundamentais para o desenvolvimento das habilidades e competências da Análise Combinatória.

Deste modo, quando comecei a cursar o Mestrado, decidi me dedicar ao ensino da Análise Combinatória e comecei pesquisando os trabalhos de comunicação científica e pôsteres da ANPEd (Associação Nacional de Pós Graduação em pesquisa em Educação) e ENEM (Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática), disponíveis no anexo D.

No desenvolvimento desse trabalho percebi que a produção de trabalhos científicos relacionados à Análise Combinatória é muito restrita. Há uma tendência ainda formalista no desenvolvimento da Análise Combinatória, pois os professores ainda utilizam o livro didático como principal ferramenta para a elaboração de suas aulas, pois estes se sentem inseguros, devido à deficiência em sua formação acadêmica, para desenvolver um ensino que proporcione aos alunos uma forma de utilizar o raciocínio combinatório na resolução de problemas reais.

Os livros didáticos por sua vez trazem uma quantidade pequena de problemas e em alguns casos não está contemplada a variabilidade de problemas que envolvem a combinatória e nem as habilidades necessárias, e dessa forma, não contribuindo para sistematização do ensino, é simplesmente a obtenção de resultados sem a construção de significados para os alunos.

Como mudanças rápidas vêm ocorrendo em nossa sociedade, devido ao desenvolvimento atual da Ciência e Tecnologia, tanto na vida cotidiana das pessoas, como no mercado de trabalho, temos a necessidade de "tratar" as informações que recebemos diariamente, desenvolvendo habilidades e competências para ler, interpretar, argumentar, analisar, estabelecer relações, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória.

> No ensino de matemática na Educação Básica, é considerado essencial para a formação do individuo o desenvolvimento de competências para a leitura, interpretação e análise de informações que o circundam e que circulam na mídia. A Estatística, a Probabilidade e a Combinatória, são vistas, nesse contexto, como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar o conhecimento matemático em questões do mundo real, quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações (COLODEL; PEREIRA e BRANDALISE, 2010, p. 2).

Nos documentos curriculares o Tratamento da Informação, onde está inserida a Análise Combinatória, deve ser trabalhado de forma articulada e integrada aos demais blocos de conteúdos, estabelecendo relações entre eles, e fazendo com que os alunos percebam que o conhecimento matemático não é fragmentado.

Portanto, a presente pesquisa tem como objetivo principal propor aos professores de Matemática uma sequência de atividades didáticas com materiais manipuláveis no intuito de introduzir de maneira intuitiva e natural a noção de Análise Combinatória no Ensino Fundamental – Anos Finais, sendo uma proposta importante para a resolução de vários problemas e preparando para a formalização no Ensino Médio.

Essa dissertação está organizada em quatro etapas:

Na primeira etapa são estudados os documentos curriculares vigentes que norteiam e orientam os planejamentos das escolas públicas do estado de São Paulo. Estes documentos, tanto para o Ensino Fundamental e Médio, foram estudados no intuito de conhecer os documentos curriculares vigentes de forma global, com o objetivo de conhecer e entender como a Análise Combinatória está inserida nos documentos e como deve ser trabalhada.

Apresentamos na segunda etapa, um panorama histórico e um referencial teórico para o professor se apoiar na elaboração de suas aulas. Definimos raciocínio combinatório como um tipo de pensamento que envolve contagem e discutimos sobre a importância da resolução de problemas para mobilizar conhecimentos e desenvolver diferentes estratégias de resolução.

A terceira etapa trás a caracterização da escola e das turmas em que foi desenvolvida a pesquisa e fazemos a descrição das atividades aplicadas e uma análise quantitativa dos resultados obtidos.

Na quarta etapa propomos atividades didáticas, utilizando para suas resoluções materiais manipuláveis, simples, de baixo custo e fácil confecção, com o objetivo de auxiliar e facilitar o trabalho do professor no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Finalizamos apresentando as considerações finais.

.

2. ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DOS DOCUMENTOS CURRICULARES OFICIAIS

Neste capítulo vamos abordar os principais documentos curriculares, utilizados pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, que tem a função de nortear e orientar os planejamentos curriculares realizados nas escolas públicas do Estado de São Paulo, levando em consideração a autonomia do Projeto Político Pedagógico das escolas buscando a melhoria da qualidade das aprendizagens dos alunos.

2.1. Parâmetros Curriculares Nacionais

Devido à necessidade de se construir uma Educação Básica voltada para a cidadania, não apenas garantindo a oferta de vagas, mas oferecendo um ensino de qualidade, com professores capazes de incorporar ao seu trabalho os avanços das pesquisas nas diferentes áreas de conhecimento, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) têm como finalidade apresentar linhas norteadoras para o Ensino Fundamental, como referência curricular nacional, onde se possa discutir e traduzir em propostas regionais nos diferentes estados e municípios brasileiros, respeitando as diversidades regionais, culturais e políticas, garantindo a todo aluno o direito de ter acesso aos conhecimentos indispensáveis para a construção de sua cidadania.

Os PCN (BRASIL, 1998) a intenção de ampliar e aprofundar debates educacionais, não envolvendo somente as escolas, mas também os pais, a comunidade, o governo e a sociedade dando origem a uma transformação positiva no sistema educacional brasileiro.

Conforme os fundamentos do currículo se tornam claros, é possível nortear a formação inicial e continuada de professores, fica implícito o tipo de formação que se pretende para o professor, como também a orientação e produção de materiais didáticos, que contribuam para a melhoria do Ensino Fundamental.

Os objetivos gerais do Ensino Fundamental constitui a referência principal para as definições de áreas e temas que indicam capacidades relativas aos aspectos cognitivo, afetivo, físico, ético, estético, de atuação e de inserção social, expressando a formação básica necessária para o exercício da cidadania e orientar a seleção de conteúdos.

A estrutura dos documentos das áreas para o Ensino Fundamental se inicia com a exposição da concepção de área, segue a definição dos objetivos gerais de cada área, que definem as capacidades que os alunos devem desenvolver ao longo da escolaridade obrigatória, explicitando a contribuição específica dos diferentes âmbitos do conhecimento, sempre respeitando a diversidade cultural e social para permitir a inclusão das características locais de cada região.

Os objetivos e conteúdos estão organizados em quatro ciclos, sendo que cada um corresponde a duas séries do Ensino Fundamental, visando evitar sua fragmentação em dimensões de tempo mais amplas e flexíveis, com o envolvimento de todos os professores, para que os alunos se apropriem do conhecimento.

Os PCN de Matemática são um referencial de orientação para a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiro tenha acesso a um conhecimento matemático que possibilite sua inserção, no mundo do trabalho, como cidadão, nas relações sociais e da cultura.

Segundo os PCN (BRASIL, 1998), a Matemática tem papel fundamental quando é valorizada pelo aluno como instrumento para compreender o mundo a sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito investigativo e o desenvolvimento da capacidade para a resolução de problemas.

A primeira parte do documento retrata uma breve análise dos movimentos de reorientação curricular e de alguns aspectos do ensino de Matemática no Brasil, apontando a necessidade de reverter o quadro em que a Matemática se encontra como forte filtro social na relação dos alunos concluírem ou não o Ensino Fundamental e a necessidade de proporcionar um ensino de Matemática de qualidade, contribuindo para a formação de indivíduos críticos e autônomos. Ressalta também a importância das conexões da Matemática com conteúdos relacionados aos Temas Transversais: Ética, Pluralidade Cultural, Orientação Sexual, Meio Ambiente, Saúde, Trabalho e Consumo.

Nos currículos de Matemática atuais, há um consenso para a seleção de conteúdos abordados no Ensino Fundamental, estes devem contemplar o estudo dos números e das operações (nos campos da Aritmética e da Álgebra), o estudo das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre todos os campos da Matemática e outros campos do conhecimento).

Os PCN (BRASIL, 1998) mostram a importância de acrescentar a esses conteúdos citados anteriormente, o estudo do Tratamento das Informações (no campo da Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade), devido às mudanças rápidas que ocorrem na sociedade contemporânea, ao desenvolvimento das Ciências e tecnologias, na vida cotidiana das pessoas e no mercado de trabalho, daí a necessidade de “tratar as informações” que recebemos diariamente, desenvolvendo habilidades e competências para ler, interpretar, argumentar, analisar, estabelecer relações, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e combinatória.

Em relação ao bloco Tratamento da Informação, esse documento enfoca sua importância em função de seu uso atual na sociedade. Integram esse bloco estudos relativos à Estatística e de Probabilidade, além dos problemas de contagem que envolvem o princípio multiplicativo, sem a manipulação de fórmulas.

O objetivo dos problemas de contagem é levar o aluno a compreender situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que permitam o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de diagramas, esquemas e tabelas sem a aplicação de fórmulas, desenvolvendo a criatividade para enfrentar problemas de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada motivando-o para a aprendizagem de Probabilidade e Estatística.

A segunda parte do documento apresenta os objetivos em termos das capacidades a serem desenvolvidas em cada ciclo, assim como os conteúdos para desenvolvê-las, também são apontadas algumas conexões entre os blocos de conteúdos, entre a Matemática e entre outras áreas do conhecimento. Também é discutida a especificidade do processo ensino-aprendizagem nos terceiros e quartos ciclos do ensino fundamental, levando em conta o desenvolvimento afetivo, social e cognitivo dos alunos, assim como a avaliação em suas dimensões processual e diagnóstica.

Algumas orientações didáticas relativas a conceitos e procedimentos matemáticos são discutidas na parte final do documento, visando à reflexão de como ensinar Matemática e como os alunos relacionam e constroem esses conhecimentos.

2.2. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio

Os PCNEM (BRASIL, 1999) estabelecem uma organização do ensino de Matemática para o Ensino Médio que contemple uma adequação para o desenvolvimento e promoção dos alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para sua inserção num mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos e onde a compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos é necessária para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

A Matemática no Ensino Médio tem um papel formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, contribuindo para o desenvolvimento de processos de pensamentos e a aquisição de atitudes, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas, o desenvolvimento da criatividade, promovendo hábitos de investigação e de outras capacidades pessoais.

No Ensino Médio o caráter instrumental da Matemática deve ser vista pelos alunos como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas em atividades profissionais ou em outras áreas do conhecimento.

É também no Ensino Médio que se funde a ideia de que no Ensino Fundamental os alunos se aproximaram de vários campos do conhecimento matemático e agora é o momento de utilizá-los, ampliá-los desenvolvendo a abstração, o raciocínio, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e interpretação de fatos matemáticos e da realidade.

Os objetivos para que o ensino da Matemática possa resultar em aprendizagem real e significativa para os alunos, segundo esse documento, implica em aplicar os conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas; analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade; desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, o espírito crítico e criativo; utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos; expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática; estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo; reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações; promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Em relação às aplicações de ideias de Probabilidade, Estatística e Combinatória, elas estão relacionadas à Matemática em questões do cotidiano, no mundo real onde houve um grande crescimento e se tornaram complexas, como as habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base em uma amostra de população. Dessa forma, percebemos que a Estatística, Probabilidade e Combinatória são instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Por isso, é importante uma cuidadosa abordagem desses conteúdos no Ensino Médio, ampliando as relações entre o aprendizado da Matemática e as demais áreas e ciências.

2.3. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais

Os PCN+ (BRASIL, 2002) foi dirigido aos professores, coordenadores ou dirigentes escolares do Ensino Médio e aos responsáveis pelas redes de Educação Básica e para formação permanente dos professores, onde se propôs discutir a direção do aprendizado nos diferentes contextos e condições de trabalhos das escolas brasileiras, levando em consideração as leis e diretrizes que direcionam a educação básica de forma a responder às transformações sociais e culturais da sociedade contemporânea.

Nesse documento as orientações educacionais tem em vista a escola em sua totalidade, procurando estabelecer um diálogo direto com professores e demais educadores que atuam na escola, reconhecendo seu papel central e insubstituível na condução e aperfeiçoamento da educação básica.

Buscando contribuir para a implementação das reformas educacionais os PCN+ (BRASIL, 2002) tem como objetivo central facilitar a organização do trabalho da escola articulando as competências gerais que se pretende promover com os conhecimentos disciplinares e apresenta um conjunto de sugestões de práticas educativas e de organização dos currículos que estabelece temas estruturadores do ensino disciplinar na área, propiciando um diálogo sobre o projeto pedagógico escolar e trazendo elementos para continuidade da formação profissional docente na escola.

Essa reformulação do Ensino Médio no Brasil, estabelecida pela lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) de 1996, regulamentada em 1998 pelas Diretrizes do Conselho Nacional de Educação e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, procurou atender a necessidade de atualização da educação brasileira para impulsionar uma democratização social e cultural, como para responder a desafios impostos por processos globais por conta da formação exigida de todos os participantes do sistema de produção e de serviços, assumindo a responsabilidade de completar a Educação Básica, preparando para a vida, qualificando para a cidadania e capacitando para o aprendizado permanente prosseguindo com os estudos ou no mundo do trabalho.

A intenção de completar a formação geral do estudante no Ensino Médio implica numa ação articulada no interior de cada uma das três áreas do conhecimento (Ciências da Natureza e Matemática, Ciências Humanas, Linguagens e Códigos) e no conjunto das áreas.

Num mundo como o atual, de rápidas transformações e de difíceis contradições, estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos, segundo os PCN+ (BRASIL, 2002) significam:

- Saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir;
- Enfrentar problemas de diferentes naturezas;
- Participar socialmente, de forma prática e solidária;
- Ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e,
- Especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado.

E ainda, uma formação dessa grandeza exige métodos de aprendizagem compatíveis e condições efetivas para que os alunos possam:

- Comunicar-se e argumentar;
- Defrontar-se com problemas, compreendê-los e enfrentá-los;
- Participar de um convívio social que lhes dê oportunidades de se realizarem como cidadãos;
- Fazer escolhas e proposições;
- Tomar gosto pelo conhecimento, aprender a aprender.

As características de nossa tradição escolar compartimentam disciplinas em ementas estanques, em atividades padronizadas, informações desprovidas de contexto, impondo ao conjunto de alunos uma atitude de passividade, tanto em função de métodos adotados quanto da configuração física dos espaços e das condições de aprendizado, refletindo a pouca participação dos estudantes, ou mesmo do professor, na definição das atividades formativas. Nesse contexto as perspectivas profissionais, sociais ou pessoais dos alunos não fazem parte das preocupações escolares; os problemas e desafios da comunidade, da cidade, do país ou do mundo recebem apenas atenção marginal no ensino médio, situação esta que precisaria ser reformulado.

De acordo com este documento:

> A falta de sintonia entre realidade escolar e necessidades formativas reflete-se nos projetos pedagógicos das escolas, frequentemente inadequados, raramente explicitados ou objeto de reflexão consciente da comunidade escolar. A reflexão sobre o projeto pedagógico permite que cada professor conheça as razões da opção por determinado conjunto de atividades, quais competências se busca desenvolver com elas e que prioridades norteiam o uso dos recursos materiais e a distribuição da carga horária. Permite, sobretudo, que o professor compreenda o sentido e a relevância de seu trabalho, em sua disciplina, para que as metas formativas gerais definidas para os alunos da escola sejam atingidas. Sem essa reflexão, pode faltar clareza sobre como conduzir o aprendizado de modo a promover, junto ao alunado, as qualificações humanas pretendidas pelo novo ensino médio (BRASIL, 2002, p. 9).

As transformações de qualidade que se procura promover na formação dos jovens convivem com mudanças quantitativas e qualitativas, decorrentes de processos sociais e culturais mais amplos, que precisam ser consideradas e compreendidas e a escola nem sempre consegue administrar, e nem sempre sabe como tratar. A escola percebe que seus currículos estritamente disciplinares, se revelam cada vez mais inadequados, pois os jovens de hoje procuram uma qualificação mais ampla para a vida, para o trabalho e para ter acesso ao ensino superior.

Assim, o grande desafio da escola atual é tornar-se capaz de promover a realização pessoal, a qualificação para um trabalho digno, para a participação social e política para uma cidadania plena da totalidade de seus estudantes.

Esse documento indica a necessidade de revisão do projeto político pedagógico das escolas, tendo em vista as mudanças e as necessidades da sociedade atual, tendo como ponto de partida a consciência da sociedade sobre a importância da educação. Outro ponto importante a ser ressaltado é a expectativa dos jovens de que os agentes do processo educacional são os professores, transmissores do conhecimento, enquanto os estudantes são meros receptores passivos e a escola se resume ao local em que essa transmissão ocorre. Tais expectativas equivocadas, somadas a um ensino descontextualizado, resulta em desinteresse e baixo desempenho, onde os professores são considerados fracos e desinteressados por parte dos alunos e pais, e os docentes pensam exatamente o mesmo em relação aos seus alunos gerando apatia, tensão, displicência ou violência onde se deveria ter aprendizado, interesse e respeito.

Segundo esse documento, a escola do Ensino Médio deve ser um projeto de realização humana, recíproca e dinâmica, de alunos e professores ativos e comprometidos, em que o aprendizado esteja próximo das questões reais, apresentadas pela vida comunitária ou pelas circunstâncias econômicas, sociais e ambientais, atentas às perspectivas de vida de seus participantes, ao desenvolvimento de suas competências gerais, de suas habilidades gerais e de suas preferências culturais.

Os objetivos da nova educação ressaltada por esse documento, enfoca a promoção de competências gerais, que articulem conhecimentos, sejam estes disciplinares ou não, onde essas competências dependem da compreensão de processos e do desenvolvimento de linguagens, a cargo das disciplinas que, por sua vez, devem ser tratadas como campos dinâmicos de conhecimentos de interesses, e não como listas de saberes oficiais.

Nas diretrizes e parâmetros que organizam o Ensino Médio, a Biologia, a Física, a Química e a Matemática integram uma mesma área do conhecimento, que tem como objetivo a investigação da natureza e dos desenvolvimentos tecnológicos, compartilham linguagens para a representação e sistematização de fenômenos ou processos naturais tecnológicos. Essas disciplinas compõe a cultura científica e tecnológica que é resultado e instrumento da evolução social e econômica, na atualidade e ao longo da história.

Os objetivos educacionais que organizam o aprendizado nas escolas do Ensino Médio em termos de conjuntos de competências na área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias são: **representação e comunicação**; **investigação e compreensão**; e **contextualização sócio-cultural**, objetivos que convergem com as áreas de linguagens e Códigos e Ciência Humanas, no que se refere ao desenvolvimento da representação, da informação e da comunicação de fenômenos e processos e ao apresentar as ciências e técnicas como construções históricas, com participação permanente no desenvolvimento social, econômico e cultural.

As competências gerais no aprendizado das Ciências da Natureza e da Matemática, que orientam o aprendizado no Ensino Médio, devem ser promovidas pelo conjunto das disciplinas dessa área, e elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante essa etapa da escolarização básica e complementar do ensino fundamental para todos os brasileiros:

- representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
- investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;

- contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

A escola tem como objetivo preparar o aluno para um aprendizado permanente e prepará-lo para a vida sendo necessário refletir sobre o significado dessas competências para decidir sobre as quais delas trabalhar, em que disciplina e de qual forma, ou seja, é necessário compreender a proposta, aproximando-a das ações e das possibilidades características dos afazeres escolares.

O desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos foram divididos em três temas estruturadores, desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do Ensino Médio: Álgebra: números e funções; Geometria e medidas; e Análise de dados.

Álgebra: números e funções apresenta grande importância enquanto linguagem, como na variedade de gráficos presentes diariamente nos jornais e como instrumentos de cálculos de natureza financeira e prática em geral. No Ensino Médio trata de números e variáveis de conjuntos infinitos e quase sempre contínuos, no sentido de serem completos.

Os conteúdos e habilidades propostos para as unidades temáticas a serem desenvolvidas são:

1. **Variação de grandezas**: noção de função; funções analíticas e não-analíticas; representação e análise gráfica; seqüências numéricas: progressões e noção de infinito; variações exponenciais ou logarítmicas; funções seno, cosseno e tangente; taxa de variação de grandezas.

- Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões dentro e fora da Matemática.
- Compreender o conceito de função, associando-o a exemplos da vida cotidiana.
- Associar diferentes funções a seus gráficos correspondentes.
- Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas.
- Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis.

2. **Trigonometria**: do triângulo retângulo; do triângulo qualquer; da primeira volta.

- Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.
- Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais.

Geometria e medidas: presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. No Ensino Médio, trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto.

Os conteúdos e habilidades propostos para as unidades temáticas a serem desenvolvidas são:

1. **Geometria plana**: semelhança e congruência; representações de figuras.

- Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.
- Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.
- Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.
- Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras.
- Fazer uso de escalas em representações planas.

2. **Geometria espacial**: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

- Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.
- Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

- Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.

3. **Métrica**: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.

- Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos.
- Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.
- Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.

4. **Geometria analítica**: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.

- Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.
- Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
- Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
- Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles.

Análise de dados: esse tema tem sido essencial em problemas sociais e econômico, como nas estatísticas relacionadas a saúde, populações, transportes, orçamentos e questões de mercado, tem como objetivo de estudo os conjuntos finitos de dados, que podem ser numéricos ou informações qualitativas, o que dá origem a procedimentos distintos daqueles dos demais temas, usa-se processos de contagem combinatórios, frequências e medidas estatísticas e probabilidades.

Os conteúdos e habilidades propostos para as unidades temáticas a serem desenvolvidas são:

1. **Estatística:** descrição de dados; representações gráficas; análise de dados: médias, moda e mediana, variância e desvio padrão.

- Identificar formas adequadas para descrever e representar dados numéricos e informações de natureza social, econômica, política, científico-tecnológica ou abstrata.
- Ler e interpretar dados e informações de caráter estatístico apresentados em diferentes linguagens e representações, na mídia ou em outros textos e meios de comunicação.

- Obter médias e avaliar desvios de conjuntos de dados ou informações de diferentes naturezas.
- Compreender e emitir juízos sobre informações estatísticas de natureza social, econômica, política ou científica apresentadas em textos, notícias, propagandas, censos, pesquisas e outros meios.

2. **Contagem:** princípio multiplicativo e problemas de contagem.

- Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
- Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
- Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.

3. **Probabilidade:** possibilidades; cálculo de probabilidades.

- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
- Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico.
- Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades.

Uma organização dos temas e suas unidades que corresponderia a essa visão, em uma situação de quatro aulas semanais, trabalhando concomitantemente os três temas estruturantes, é proposta no quadro abaixo.

Figura 1. Quadro de Temas estruturadores da Matemática por série do Ensino Médio

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Fonte: PCN+ (BRASIL, 2002, p. 128).

Essa distribuição de temas pode variar em função do número de aulas e do projeto da escola para aprofundamento de temas ou inclusão de outros.

A Matemática no Ensino Médio deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional.

2.4. Orientações Curriculares Para o Ensino Médio

As OCEM (BRASIL, 2006) foram elaboradas a partir de ampla discussão com equipes técnicas dos Sistemas Estaduais de Educação. Professores, e alunos da rede pública e representantes da comunidade acadêmica, com o objetivo de contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente.

A qualidade da escola é condição essencial de inclusão e democratização do acesso e de permanência na escola durante as três etapas da Educação Básica (educação infantil, ensino fundamental e médio), para isso foi elaborada a proposta do Fundeb (Fundo de

Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação). A Proposta de Emenda à Constituição (PEC) do Fundeb foi construída com a participação dos dirigentes das redes de ensino e de diversos segmentos da sociedade, todos com um único objetivo: o interesse pela educação pública de qualidade. O grande desafio atual é preparar o jovem para participar da sociedade atual com todas as suas complexidades e isso requer aprendizagem autônoma e continua ao longo da vida.

Os atuais marcos legais para a oferta do Ensino Médio, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (nº9394/96), representa um divisor na construção da identidade desse segmento de ensino, merecendo destaque dois aspectos:

- O primeiro diz respeito às finalidades atribuídas ao Ensino Médio: o aprimoramento do educando como ser humano, sua formação ética, desenvolvimento de sua autonomia intelectual e de seu pensamento crítico, sua preparação para o mundo do trabalho e o desenvolvimento de competências para continuar seu aprendizado. (Art. 35).
- O segundo propõe a organização curricular com os seguintes componentes: base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada que atenda a especificidades regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e do próprio aluno (Art. 26); planejamento e desenvolvimento orgânico do currículo, superando a organização por disciplinas estanques; integração e articulação dos conhecimentos em processo permanente de interdisciplinaridade e contextualização; proposta pedagógica elaborada e executada pelos estabelecimentos de ensino, respeitadas as normas comuns e as de seu sistema de ensino participação dos docentes na elaboração da proposta pedagógica do estabelecimento de ensino.

O grande avanço determinado por tais diretrizes consiste na possibilidade objetiva de pensar a escola a partir de sua realidade, privilegiando o trabalho coletivo e a organização curricular é contemplada como expressão de uma política cultural que envolve crenças, valores e o rompimento com práticas arraigadas.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96),

o Ensino Médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.

Esta proposta foi desenvolvida a partir da necessidade pela retomada da discussão dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999), no sentido de aprofundar a compreensão sobre aspectos que mereciam esclarecimentos e de apontar e desenvolver alternativas didático-pedagógicas para a organização do trabalho pedagógico, para atender às expectativas e necessidades dos professores e da escola na estruturação do currículo para o Ensino Médio.

Em relação à Matemática, segundo os OCEM (BRASIL, 2006) espera-se que ao final do Ensino Médio os alunos saibam resolver problemas do cotidiano, modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento, compreender a Matemática como uma ciência com características próprias e como um conhecimento social e historicamente construído, e sua importância no desenvolvimento científico e tecnológico, agregando valor formativo ao desenvolvimento do pensamento matemático.

Neste documento, os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos: ***Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade,*** esses conteúdos devem ser trabalhados de forma articulada.

No trabalho com ***Números e operações*** deve proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do cotidiano e as propriedades relativas às operações e ampliações dos campos numéricos. O estudo de ***Funções*** pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações, também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais, esbocem gráficos que representem essas relações e registrem os tipos de crescimento e decrescimento. O estudo da ***Geometria*** deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como ler mapas, orientar-se no espaço, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida e apreciar os teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos: a geometria que leva a trigonometria e a geometria que leva para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes.

No que diz respeito ao bloco de ***Análise de dados*** **e** ***Probabilidade*** é recomendado para toda a Educação Básica, principalmente para o Ensino Médio, devido à importância das ideias de incerteza e de probabilidade, relacionados aos fenômenos aleatórios presentes no mundo social e natural. Esse estudo possibilita a ampliação e formalização de conhecimentos sobre raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico, dando aos alunos uma visão da importância dos modelos probabilísticos do mundo atual e de ver esses modelos em ação.

O estudo da Combinatória e da Probabilidade é essencial para que os alunos adquiram conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas. A Combinatória tem relações estreitadas entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações de combinatória.

O diagrama de árvores é importante para elucidar a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, permitindo a visualização e a estrutura dos múltiplos passos do experimento.

Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, palavras estas que estão em nossas vidas cotidianas, principalmente na mídia. Outras ideias importantes incluem a compreensão da medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimular probabilidades. Nas situações e experiências aleatórias, os estudantes precisam associá-las a um conjunto de eventos elementares e representá-las de forma esquemática, precisam também dominar a linguagem dos eventos, levantar hipóteses de equiprobabilidade, associar a estatística dos resultados observados e a frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatística de tais frequências para estimular a probabilidade de um evento dado.

Esse documento discute questões metodológicas em relação ao ensino aprendizagem, onde se transfere para o aluno, em grande parte, a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, na medida em que o coloca como ator principal desse processo. A aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. Essa ideia reforça o fato que a aprendizagem ocorre quando o aluno confronta suas concepções, constroem os conceitos pretendidos pelo professor, cabendo a este o papel de mediador do conhecimento e ao aluno o construtor de seu próprio conhecimento matemático.

Outro ponto destacado por este documento é a diferença entre o contrato didático e o contrato pedagógico. O *contrato pedagógico* baseia-se essencialmente na relação professor-aluno, e suas cláusulas são negociadas entre eles se mantendo estáveis no tempo, sendo determinado o papel de cada um dos elementos envolvidos, não existem articulações com o objeto de ensino e aprendizagem.

O *contrato didático* representa o “motor” para a aprendizagem de certo conceito matemático, tem suas cláusulas implícitas, elas se tornam explícitas somente quando ocorre o rompimento do contrato por uma das partes (professor ou aluno) pode levar a criação de verdadeiros obstáculos à aprendizagem, ele precisa ser renegociado continuamente em função dos objetos matemáticos que estão em jogo no processo de aprendizagem.

Articulada ao conceito de contrato didático surge à ideia de *transposição didática* que é dividida em dois momentos: a *transposição didática externa* que se refere às transformações, as inclusões e as exclusões sofridas pelos objetos de conhecimento matemático, desde o momento de sua produção até o momento em que eles chegam à porta das escolas, se refere aos livros didáticos e pelas orientações curriculares e a *transposição didática interna* apresenta-se no interior da escola, em cada uma de nossas salas de aula, é o momento que cada professor transforma conteúdos em conhecimentos a serem ensinados, é o momento que se determina a qualidade da aprendizagem dos alunos.

O conceito de transposição didática aparece ligado à ideia de *contextualização,* pois é dessa forma que o aluno constrói conhecimento com significado, se identificando com as situações de aprendizagem apresentadas, dando sentido ao conhecimento matemático na escola.

Outro caminho para se trabalhar a Matemática na escola é a ideia de *modelagem matemática* que pode ser entendida como a habilidade de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

Articulada com a ideia de modelagem matemática tem-se a alternativa de trabalho com *projetos* que pode favorecer a criação de estratégias de organização dos conhecimentos escolares, ao integrar os diferentes saberes disciplinares. Os projetos devem ter como prioridade o estudo de um tema que seja interessante aos alunos, sob uma visão interdisciplinar, de forma que promova a interação social e a reflexão sobre problemas que fazem parte de sua realidade.

A utilização da *História da Matemática* também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos, desde que procurando recuperar o processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática, podendo também contribuir para que o professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que podem refletir históricas dificuldades presentes na construção do conhecimento matemático.

O uso da tecnologia de informação e comunicação está inserido no dia-a-dia da sociedade exigindo indivíduos com capacitação para bem usá-la e é um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática, sendo importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, a Matemática como ferramenta para entender a Tecnologia e esta como ferramenta para entender a Matemática.

2.5. Proposta Curricular do Estado de São Paulo

Em 2008, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, propôs um currículo básico para as escolas da Rede Estadual nos níveis de Ensino Fundamental e Ensino Médio, para apoiar o trabalho realizado nas escolas estaduais e contribuir para a melhoria da qualidade das aprendizagens dos alunos procurando também cumprir seu dever de garantir a todos uma base comum de conhecimentos e de competências e para que as escolas públicas do estado de São Paulo funcionem de fato como uma rede.

O objetivo é organizar o sistema educacional de São Paulo propondo uma ação integrada e articulada dando subsídios aos profissionais que integram a rede estadual, esse currículo está em constante evolução e aperfeiçoamento.

Este documento apresenta princípios orientadores do currículo para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo. A Proposta Curricular, ao priorizar a competência leitora e escritora define a escola como espaço de cultura e articulação de competências e de conteúdo disciplinares.

Os princípios centrais da Proposta Curricular são: a escola que aprende, pois parte do princípio que ninguém conhece tudo e de que o conhecimento coletivo é maior que a soma dos conhecimentos individuais, tornando-se ponto de partida para o trabalho colaborativo; o currículo como espaço de cultura, onde o conhecimento constitui-se como uma ferramenta para articular teoria e prática, o mundial e o local, o abstrato do físico; as competências como eixo de aprendizagem, onde o compromisso é articular as disciplinas e as atividades escolares com o que se espera que os alunos aprendam durante sua vida escolar; a prioridade da competência leitora e escritora, devido à centralidade da linguagem no desenvolvimento da criança e do adolescente onde será possível concretizar e constituir as demais competências, é o objetivo de aprendizagem de todas as disciplinas do currículo durante a educação básica; a articulação das competências para aprender, que foram formuladas no referencial teórico do

Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) como desdobramentos da competência leitora e escritora e a contextualização no mundo do trabalho, imprimindo sua importância e valorização e cultivando o respeito que lhe é devido na sociedade e ainda atribui sentido aos conhecimentos específicos das disciplinas que perpassa os conteúdos curriculares.

Os currículos escolares tem como seu eixo fundamental o par Matemática-Língua Materna, em todas as culturas e épocas. A Matemática é estudada pelas crianças e utilizada pelos adultos em suas ações como cidadãos, pessoas conscientes, autônomas, consumidoras ou não, pois todos lidam com números, formas, operações, medidas, leem textos, interpretam gráficos, vivenciam relações de ordem e equivalência, argumentam e tiram conclusões válidas.

Os conteúdos de Matemática são considerados um meio para o desenvolvimento de competências como: capacidade de expressão pessoal, de compreensão de fenômenos, de tomada de decisões conscientes e refletida, de argumentação consistente, de problematização e enraizamento dos conteúdos estudados em diferentes contextos e de imaginação de novas situações.

Nesta proposta, a transformação de informação em conhecimento é o foco principal que orienta as ações educativas. Informações estas que circulam de maneira desordenada e fragmentada, onde não basta reuni-las é preciso tratá-las de modo adequado, classificando esses temas como "Tratamento da Informação".

Tendo em vista a transformação da informação em conhecimento o Tratamento da Informação é a meta comum a todas as disciplinas escolares de todos os conteúdos a serem ensinados.

Os conteúdos de Matemática, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, abordam quatro grandes blocos temáticos, os três já contemplados em propostas anteriores: números, geometria, medidas e um quarto componente, o tratamento da informação, que se refere à representação de dados abrindo espaços para as incorporações das tecnologias no ensino.

No Ensino Fundamental o eixo denominado **Números** tem como objetivo a ampliação da ideia do campo numérico por meio de situações problemas significativas. O eixo **Geometria** tem como objetivo inicial o reconhecimento, representação e classificação das formas planas e espaciais e também as noções relativas a posição, localização de figuras, deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas. O eixo **Grandezas** e **Medidas** favorecem a transdisciplinaridade, pois suas conexões com os eixos números e geometria ocorrem quase que naturalmente, feitas através da contextualização e da resolução de problemas. E em relação ao eixo do **Tratamento da Informação** onde são exploradas as ideias básicas de estatística, como coletar e organizar dados em tabelas e gráficos e estabelecer relações entre acontecimentos, previsões, frequência de ocorrer um determinado acontecimento.

Os conteúdos disciplinares são meios para a formação dos alunos como cidadãos, o desenvolvimento das competências do eixo argumentação/decisão (capacidade de argumentação, de análise e de articulação de informações disponíveis, tendo em vista a viabilização da comunicação, da ação comum, a construção de consensos e a capacidade de elaboração de sínteses de leituras e argumentação, tendo em vista a tomada de decisões, a proposição e a realização de ações efetivas), é o espaço que privilegia o Tratamento da Informação de modo a estender para além, da organização e análise de dados, como normalmente é abordado no Ensino Fundamental.

Para o Ensino Médio pode compor esse bloco de conteúdos o planejamento de uma pesquisa estatística, a investigação de temas de estatística descritiva e de inferência, o uso de estratégias de contagem e o cálculo de probabilidades.

Dentro do Ensino Fundamental a Análise Combinatória é proposta de forma bastante restrita. No 6º ano, dentro do bloco números, é apresentada a habilidade da utilização de diagramas de árvores para resolver problemas simples de contagem e compreender a ideia do Princípio Multiplicativo de Contagem. No 8º ano aparece dentro do bloco Números, como Problemas de Contagem. No 9º ano aparece dentro do bloco geometria/números, com a habilidade de saber resolver problemas envolvendo processos de contagem (princípio multiplicativo).

No Ensino Médio a Análise Combinatória aparece na 2ª série, no bloco Números, com as habilidades de compreender os raciocínios combinatórios aditivos e multiplicativos na resolução de problemas de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento e saber calcular probabilidades de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas.

2.6. Currículo do Estado de São Paulo

O Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010) foi finalmente consolidado em 2010 e para o desenvolvimento da versão final para os Ensinos Fundamental e Médio, foi necessária a construção de textos na forma de proposta, já discutidas na seção anterior e de diálogos estabelecidos entre professores e especialistas para críticas e sugestões de complementação. Foi uma ação integrada e articulada, com foco definido, para organizar o sistema educacional de São Paulo, fornecendo subsídios para o aprimoramento dos profissionais da rede.

Esse processo partiu de duas iniciativas complementares, tomadas pela Secretaria da Educação, a primeira foi o levantamento de acervos documentais e técnicos pedagógicos existentes e a segunda deu início a um processo de consulta a escolas e professores para identificar, sistematizar e divulgar experiências práticas existentes nas escolas.

O Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010) continuará a ser permanentemente complementado com um conjunto de ações, de projetos e de documentos com orientações pedagógicas e de gestão para apoiar as equipes gestoras e os professores no que diz respeito à qualidade do ensino nas escolas estaduais.

A Secretaria da Educação procurou também cumprir seu dever de garantir a todos uma base comum de conhecimentos e competências para que as escolas estaduais funcionem como uma rede e enfoca como princípios orientadores do currículo uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo.

Esses documentos deram origem aos Cadernos do Professor, do Aluno e do Gestor, sendo referências essenciais para o estabelecimento das matrizes de avaliação do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), da construção das propostas pedagógicas das escolas, dos programas de reforço e recuperação e dos cursos de formação continuada da Escola de Formação de Professores, visando à busca da qualidade na educação estadual.

Como na Proposta Curricular do Estado de São Paulo, o Currículo do Estado de São Paulo tem como princípios centrais: a escola que aprende; o currículo como espaço de cultura; as competências como eixo de aprendizagem; a prioridade da competência leitora e escritora; a articulação das competências para aprender; e a contextualização no mundo do trabalho.

O Currículo discute sobre a possibilidade de a Matemática ter sido incluída na área de Linguagens e Códigos, uma vez que a com a língua materna, a Matemática compõe o par de sistemas simbólicos fundamentais para a representação da realidade, parar a expressão de si e compreensão do outro, para a leitura em sentido amplo, tanto nos textos quando no mundo dos fenômenos. Ou ainda, ter sido incluída na área de Ciências da Natureza, em decorrência de sua grande e histórica proximidade com a Física, desde as origens da ciência moderna, com Galileu, até Descartes, com seu sonho de expressão de todo conhecimento confiável na linguagem matemática, ou de Newton, onde ele traduzia matematicamente os fenômenos da natureza.

No final dessas discussões, prevaleceu, nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1998), a incorporação da Matemática pela área de Ciências da Natureza.

Nas propostas curriculares elaboradas a partir de 1984, no Estado de São Paulo, e agora substituídas, a Matemática era considerada uma área específica. Essas propostas buscavam uma aproximação entre os conteúdos escolares e o universo da cultura, passando pelas contextualizações e à busca de uma instrumentação crítica para o mundo do trabalho.

Esse novo Currículo se inspirou na proposta anterior, mantendo a Matemática como uma área específica, devido a três razões principais. A primeira, devido a Matemática apresentar um universo próprio muito rico de ideias e objetos específicos fundamentais para a expressão pessoal, a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações nos diversos contextos, como os números e as operações, as formas geométricas, as relações métricas e as relações entre eles.

Em segundo lugar é o fato de uma parte da especificidade da Matemática resulta esmaecida quando ela se agrega tanto às linguagens em sentido amplo quanto às ciências da natureza, a língua materna e a Matemática formam um par fundamental, mas é impossível reduzir uma a outra.

E a terceira razão para a apresentação da Matemática como área específica é a possibilidade de facilitar a incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos atualmente existentes para a representação de dados e o tratamento das informações disponíveis, na busca da transformação de informação em conhecimento.

> O objetivo principal de um currículo é mapear o vasto território do conhecimento, recobrindo-o por meio de disciplinas e articulando-as de tal modo que o mapa assim elaborado constitua um permanente convite a viagens, não representando apenas uma delimitação rígida de fronteiras entre os diversos territórios disciplinares (São PAULO, 2010, p. 29).

Os conteúdos devem ser organizados de modo a possibilitar a transformação do tratamento de dados em informações e o tratamento das informações para que sirvam de base para a construção do conhecimento, em busca do desenvolvimento das competências básicas para a sua formação pessoal.

> ...os adultos necessitam da Matemática em suas ações como consumidores, como cidadãos, como pessoas conscientes e autônomas. Todos lidam com números, medidas, formas, operações; todos leem e interpretam textos e gráficos, vivenciam relações de ordem e de equivalência; todos argumentam e tiram conclusões válidas a partir de proposições verdadeiras, fazem inferências plausíveis a partir de informações parciais ou incertas. Em outras palavras, a ninguém é permitido dispensar o conhecimento da Matemática sem abdicar de seu bem mais precioso: a consciência nas ações (SÃO PAULO, p. 29).

Assim, os currículos de Matemática, em parceria com a língua materna, deve constituir um recurso indispensável para uma expressão rica, uma compreensão abrangente, uma argumentação correta, um enfrentamento assertivo de situações-problema, uma contextualização significativa dos temas estudados.

De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo:

> Cada conteúdo pode ser explorado numa perspectiva histórica, embebido de cultura matemática que é fundamental para um bom desempenho do professor, mas deve trazer elementos que possibilitem uma abertura para o novo, que viabilizem uma ultrapassagem de situações já existentes quando isso se tornar necessário (SÃO PAULO, 2010, p. 33).

Foram desenvolvidos a partir das ideias gerais na formulação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), três pares complementares de competências a serem desenvolvidas pelos alunos ao longo da escolarização básica, que constituem três eixos norteadores da ação educacional:

- O eixo **expressão/compreensão**: a capacidade de expressão do eu, por meio das diversas linguagens, e a capacidade de compreensão do outro, do não eu, do que me complementa, o que inclui desde a leitura de um texto, de uma tabela, de um gráfico, até a compreensão de fenômenos históricos, sociais, econômicos, naturais etc.;
- O eixo **argumentação/decisão**: a capacidade de argumentação, de análise e de articulação das informações e relações disponíveis, tendo em vista a viabilização da comunicação, da ação comum, a construção de consensos e a capacidade de elaboração de sínteses de leituras e de argumentações, tendo em vista a tomada de decisões, a proposição e a realização de ações efetivas;

- O eixo **contextualização/abstração**: a capacidade de contextualização dos conteúdos estudados na escola, de enraizamento na realidade imediata, nos universos de significações, sobretudo no mundo do trabalho e, a capacidade de abstração, de imaginação, de consideração de novas perspectivas, de virtualidades, de potencialidades para se conceber o que ainda não existe.

Nesses três eixos a Matemática é facilmente reconhecida e fundamental. No eixo Expressão/Compreensão a Matemática compõe um par complementar como meio de expressão e de compreensão da realidade, números, formas e relações constituem instrumentos básicos dessa compreensão, desde a leitura de um texto ou a interpretação de um gráfico até a apreensão quantitativa das grandezas e relações presentes em fenômenos naturais ou econômicos, entre outros.

No eixo Argumentação/Decisão a Matemática é vista como instrumento para o desenvolvimento do raciocínio lógico, indutivo ou dedutivo e a capacidade de sintetizar, de tomar decisões a partir dos elementos disponíveis.

O terceiro eixo de Competências ressalta a Matemática como um meio adequado para se aprender a lidar com os elementos do par concreto/abstrato, e através dos objetos matemáticos para se compreender a permanente articulação entre as abstrações e a realidade concreta.

O foco principal que orienta as ações educacionais em todas as disciplinas no Currículo é a transformação de informação em conhecimento, devido à quantidade de informações que circulam com grande rapidez de modo desordenado e fragmentado e que devem ser tratadas de modo adequado.

O presente currículo ainda ressalta o fato de que todos os conteúdos estudados na escola básica e em todas as disciplinas podem ser classificados como “Tratamento da Informação”, onde a seleção e o mapeamento das informações relevantes devem ser articulados e interconectados de modo a produzir visões organizadas da realidade.

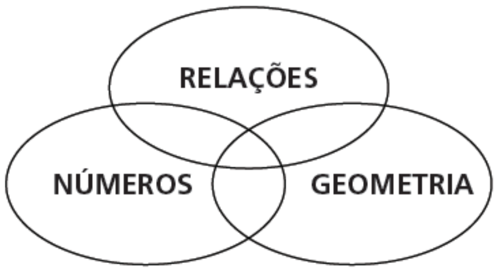
O Currículo do Estado de São Paulo de Matemática consiste na ampliação das práticas de gestão do conhecimento em sala de aula, apoiadas em Ideias Fundamentais da Matemática, são elas:

- Equivalência ou igualdade está presente nas classificações, nas sistematizações, na elaboração de sínteses, mas também quando se estuda frações, as equações, as áreas ou os volumes de figuras planas ou espaciais, entre outros temas.

- Ordenação tem nos números naturais sua referência básica, mas pode ser generalizada quando pensamos em hierarquias segundo outros critérios, como a ordem alfabética e também está associada a priorizações de diferentes tipos e à construção de algoritmos.
- Proporcionalidade se encontra no raciocínio analógico, nas razões e proporções, no estudo da semelhança de figuras, nas grandezas diretamente proporcionais, no estudo das funções de 1º grau, entre outros temas.
- Aproximações relacionadas a realização de cálculos aproximados, a Matemática não sobrevive nos contextos práticos, nos cálculos do dia a dia sem compreensão mais nítida da importância das aproximação.

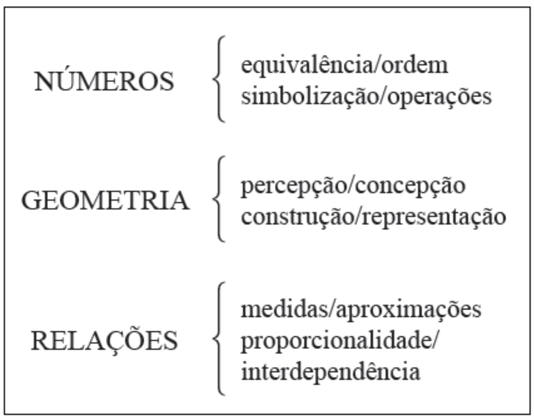
Diferentemente da Proposta Curricular do Estado de São Paulo que dividia em quatro blocos os conteúdos básicos de Matemática: **Números**, **Geometria**, **Grandezas** e **Medidas** e o **Tratamento da Informação,** o Currículo de Matemática consolidado em 2010, volta a organizar os conteúdos em três blocos de conteúdos básicos para a Matemática, tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio, são eles **NÚMEROS, GEOMETRIA E RELAÇÕES**.

Figura 2. Blocos de conteúdos básicos que compõe o currículo de Matemática



Fonte: Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010, p. 39)

Figura 3. Relação entre os blocos de conteúdos básicos e as Ideias Fundamentais da Matemática



Fonte: Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010, p. 39)

No currículo de Matemática os **NÚMEROS** envolvem as noções de contagem, medida e representação simbólica, tanto de grandezas efetivamente existentes quanto outras imaginadas a partir das primeiras, incluindo a representação algébrica das operações fundamentais sobre elas. Equivalência e ordem são duas ideias fundamentais que constituem a noção de número.

A **GEOMETRIA** refere-se à percepção de formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais; à construção e à representação de formas geométricas, existentes ou imaginadas, e à elaboração de concepções de espaço que sirvam de suporte para a compreensão do mundo físico que nos cerca.

As **RELAÇÕES** incluem a noção de medida, com a fecundidade e a riqueza da ideia de aproximação; as relações métricas em geral; e as relações de interdependência, como as de proporcionalidade ou as associadas à ideia de função.

Segundo o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010), os três blocos de conteúdos está presente direta ou indiretamente, na lista dos temas a serem ensinados em todas as séries/anos, tanto no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio e desempenham um papel importante na articulação entre os diversos conteúdos, favorecendo uma aproximação entre variados assuntos e sua apresentação de modo a favorecer uma espécie de "interdisciplinaridade interna" da própria Matemática.

As competências gerais, norteadoras do Currículo em todas as áreas, devem estar no foco das atenções, através das ideias fundamentais relacionadas com o conteúdo matemático presentes em todos os conteúdos como equivalência, ordem, proporcionalidade, medida, aproximação, problematização, otimização entre outras, que busca construir uma ponte que conduza dos conteúdos às competências pessoais como a capacidade de expressão; a capacidade de compreensão, a capacidade de argumentação; a capacidade propositiva; a capacidade de contextualizar e de abstrair.

O Currículo traz que o Tratamento da Informação agora não mais abordado como um bloco de conteúdos básicos, mas como um tema que perpassa por todos os blocos, pois todos os conteúdos estudados na Escola Básica tem o significado de um tratamento da informação, tendo em vista a construção do conhecimento. É importante ressaltar que esse tema estende-se para além das fronteiras da organização e análise de dados, como é abordado no Ensino Fundamental, abrangendo praticamente todos os temas apresentados na escola.

Em busca de uma visão crítica para o Tratamento da Informação, o desenvolvimento de competências relacionadas ao eixo argumentação/decisão é o espaço privilegiado para esse tema, tendo por objetivo à formação dos alunos como cidadãos e como pessoas.

Numa perspectiva curricular para o Ensino Básico, pode compor esse bloco de conteúdos o estudo das matrizes, amplamente usado na programação de computadores; o planejamento de uma pesquisa estatística que utilize técnicas de elaboração de questionários e amostragem; a investigação de temas de estatística descritiva e de inferência estatística; o estudo de estratégias de contagem e do cálculo de probabilidades etc.

2.7. Os Cadernos do Professor e do Aluno

Os Cadernos do Professor/Aluno foram criados pelo programa São Paulo Faz Escola e apresenta orientações didático-pedagógicas e traz como base o conteúdo do Currículo Oficial do Estado de São Paulo, que pode ser utilizado como complemento à Matriz Curricular.

As atividades propostas podem ser complementadas ou substituídas (desde que contemple as habilidades e competências daquele conteúdo) por outras, que julguem pertinentes ou necessárias, dependendo de seu planejamento ou da adequação da proposta de ensino à realidade da escola e dos alunos.

Os Cadernos têm como objetivo apoiar os professores no planejamento de suas aulas para explorarem em seus alunos as competências e habilidades necessárias à construção do saber e a apropriação dos conteúdos das disciplinas, permitindo uma avaliação constante, por parte dos professores, das práticas metodológicas em sala de aula, objetivando a diversificação do ensino e a melhoria da qualidade do ensino.

Os temas escolhidos para compor os conteúdos disciplinares não se afastam do que é usualmente ensinado nas escolas ou apresentados nos livros didáticos, o que diferencia é a abordagem, que busca evidenciar os princípios norteadores do currículo, as competências pessoais envolvidas, especialmente as relacionadas com a leitura e a escrita matemática, assim como os elementos culturais internos e externos à Matemática.

Esses Cadernos são dirigidos aos professores e aos alunos e estão organizados de forma articulada, propondo atividades para todas as aulas, em todas as séries/ano, por disciplinas e organizadas por bimestres.

Neles são apresentadas situações de aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos e a aprendizagem dos alunos, assim como as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos em cada conteúdo, além de orientações para a gestão da aprendizagem em sala de aula, avaliação e recuperação, métodos de estratégias de trabalho em sala de aula, sugestões de aulas, material complementar, projetos coletivos, atividades extraclasse e estudos interdisciplinares.

Em todos os cadernos, cada tema é apresentado de maneira significativa do ponto de vista de seu valor formativo e construir uma articulação entre os diversos temas, que se auxiliem mutuamente, propiciando a interação com outras disciplinas.

Os conteúdos de Matemática foram organizados por bimestres, em cada um deles há um ou dois temas dominantes, que servem de mote para o desenvolvimento dos demais. Os temas escolhidos também tem sua relevância para ilustrar possibilidades metodológicas alternativas ao trabalho tradicional dos conteúdos como: uma abordagem criativa, favorecer o uso da tecnologia, da modelagem matemática e do uso de materiais manipulativos.

Em todos os Cadernos, em cada bimestre, o tema principal está organizado em oito unidades, correspondentes, a aproximadamente oito semanas de trabalho letivo. Cabe ao professor explorar cada assunto com mais ou menos aprofundamento, ou mesmo deixar de tratar alguns dos subtemas, garantindo apenas uma visão geral da problemática do bimestre.

Em cada bimestre foram escolhidas quatro Situações de Aprendizagem que constituem quatro centros de interesse a serem desenvolvidos com os alunos. Para cada Situação de Aprendizagem é sugerida uma duração em semanas, mas o professor poderá redirecionar o tempo dedicado a cada uma das situações, levando em consideração seu interesse e o dos alunos.

São apresentados em cada Caderno, sempre que possível, materiais disponíveis como: textos, softwares, sites, vídeos, entre outros, em sintonia com a forma de abordagem proposta, que podem ser utilizados pelo professor para o enriquecimento das aulas. São apresentadas ainda, considerações sobre avaliação e recuperação, bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências enunciadas em cada volume.

O professor tem que ter em mente que a lista de conteúdos não é rígida e nem inflexível, pois o objetivo é propiciar uma articulação entre as inúmeras formas possíveis dos diversos temas, tendo em vista a busca de uma formação voltada para as competências pessoais uma abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, uma caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino de qualidade, mas também aprende com as circunstancias, fatores estes que fundamentam o presente Currículo.

Figura 4. Quadro de Conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental – Anos Finais

	5ª série/6º ano	6ª série/7º ano	7ª série/8º ano	8ª série/9º ano
Volume 1	NÚMEROS NATURAIS – Múltiplos e divisores. – Números primos. – Operações básicas. – Introdução às potências. FRAÇÕES – Representação. – Comparação e ordenação. – Operações. NÚMEROS DECIMAIS – Representação. – Transformação em fração decimal. – Operações. SISTEMAS DE MEDIDA – Comprimento, massa e capacidade. – Sistema métrico decimal.	NÚMEROS NATURAIS – Sistemas de numeração na Antiguidade. – O sistema posicional decimal. NÚMEROS INTEIROS – Representação. – Operações. NÚMEROS RACIONAIS – Representação fracionária e decimal. – Operações com decimais e frações. GEOMETRIA/MEDIDAS – Ângulos. – Polígonos. – Circunferência. – Simetrias. – Construções geométricas. – Poliedros.	NÚMEROS RACIONAIS – Transformação de decimais finitos em fração. – Dízimas periódicas e fração geratriz. POTENCIAÇÃO – Propriedades para expoentes inteiros. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO – A linguagem das potências. ÁLGEBRA – Equivalências e transformações de expressões algébricas. – Produtos notáveis. – Fatoração algébrica.	NÚMEROS REAIS – Conjuntos numéricos. – Números irracionais. – Potenciação e radiciação em IR. – Notação científica. ÁLGEBRA – Equações de 2º grau: resolução e problemas. – Noções básicas sobre função; a ideia de interdependência. – Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.
Volume 2	GEOMETRIA/MEDIDAS – Formas planas e espaciais. – Noção de perímetro e área de figuras planas. – Cálculo de área por composição e decomposição. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO – Leitura e construção de gráficos e tabelas. – Média aritmética. – Problemas de contagem.	NÚMEROS/ PROPORCIONALIDADE – Proporcionalidade direta e inversa. – Razões, proporções, porcentagem. – Razões constantes na geometria: π. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO – Gráficos de setores. – Noções de probabilidade. ÁLGEBRA – Uso de letras para representar um valor desconhecido. – Conceito de equação. – Resolução de equações. – Equações e problemas.	ÁLGEBRA/EQUAÇÕES – Equações de 1º grau. – Sistemas de equações e resolução de problemas. – Inequações de 1º grau. – Sistemas de coordenadas (plano cartesiano). GEOMETRIA/MEDIDAS – Teorema de Tales e Pitágoras: apresentação e aplicações. – Área de polígonos. – Volume do prisma.	GEOMETRIA/MEDIDAS – Proporcionalidade, noção de semelhança. – Relações métricas entre triângulos retângulos. – Razões trigonométricas. – O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. – Volume e área do cilindro. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO – Contagem indireta e probabilidade.

Fonte: Caderno do Professor Matemática-Anos Finais, Vol.1, 5ª série/6º ano (SÃO PAULO, 2014, p. 101).

2.7.1. Relações de Conteúdos e Habilidades de Matemática Relacionadas à Análise Combinatória

Neste tópico vamos apresentar as relações de conteúdos e habilidades propostos no Caderno do Professor relacionado à Análise Combinatória para o Ensino Fundamental – Anos Finais, objetivo dessa pesquisa.

Tabela 1. Quadro de conteúdos que envolvem Análise Combinatória na 5ª série / 6º ano do Ensino Fundamental.

5ª série / 6º ano do Ensino Fundamental – 4º Bimestre		
BLOCOS TEMÁTICOS	**CONTEÚDOS**	**HABILIDADES**
Números / Relações	Problemas de contagem	- Saber utilizar diagramas de árvores para resolver problemas simples de contagem. - Compreender a ideia do princípio multiplicativo da contagem.

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010, p.58).

Tabela 2. Quadro de conteúdos que envolvem Análise Combinatória na 7ª série / 8º ano do Ensino Fundamental

7ª série / 8º ano do Ensino Fundamental – 1º Bimestre		
BLOCOS TEMATICOS	**CONTEÚDOS**	**HABILIDADES**
Números	Problemas de contagem	- Compreender a utilidade do uso da linguagem das potências para representar números muito grandes e muito pequenos. - Conhecer as propriedades das potências e saber realizar de modo significativo as operações com potências (expoentes inteiros)

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010, p.61).

Tabela 3. Quadro de conteúdos que envolvem Análise Combinatória na 8ª série / 9º ano do Ensino Fundamental.

8ª série / 9º ano do Ensino Fundamental – 4º Bimestre		
BLOCOS TEMATICOS	**CONTEÚDOS**	**HABILIDADES**

Geometria/Números	Problemas de contagem	-Saber resolver problemas envolvendo processos de contagem – princípio multiplicativo.

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010, p.64).

Os conteúdos relacionados ao raciocínio combinatório estão explícitos em apenas três Cadernos, nos demais Cadernos eles devem aparecer articulados com os três blocos temáticos: Números, Geometria e Relação, onde segundo o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010), a lista de conteúdos deve propiciar uma articulação consistente, entre as inúmeras formas possíveis, dos diversos temas e a expectativa de todo ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra.

As habilidades apresentadas acima traduzem as ações que os alunos devem ser capazes de realizar, após serem apresentados aos conteúdos curriculares listados. E estas habilidades não deve ser um fim em si mesmo, mas indicadores de que a exploração das ideias fundamentais está sendo realizada de modo produtivo.

2.8. Situações de Aprendizagem Elaboradas no Caderno do Professor e do Aluno Relacionadas ao Raciocínio Combinatório no Ensino Fundamental – Anos Finais

Nesta seção vamos descrever todas as Situações de Aprendizagem e todas as atividades e suas respectivas soluções propostas no Caderno do Professor e do Aluno do Ensino Fundamental Anos Finais, que envolvem o raciocínio combinatório, problemas de contagem, árvore das possibilidades e o principio multiplicativo, conteúdos básicos para o inicio dos estudos e compreensão da Análise Combinatória.

2.8.1. Situações de Aprendizagem da 5ª série / 6º ano

- **Situação de Aprendizagem 1 – O Sistema de Numeração Decimal e Suas Operações (1º Bimestre)**

Segundo os Cadernos do Professor/Aluno, essa Situação de Aprendizagem trata o sistema de numeração decimal e as operações aritméticas com os números naturais. Inicialmente foi proposta uma atividade prática que envolve diferentes formas de contagem.

Dado certo número de objetos, os alunos deverão realizar contagens por meio de diferentes agrupamentos (quatro, seis, nove...). O objetivo é demonstrar que o sistema decimal se baseia em um tipo particular de agrupamento em que a contagem é feita por meio de “pacotes” de dez. A ideia principal é compreender algumas das principais características do nosso sistema de numeração: a contagem em agrupamentos de dez unidades e o valor posicional dos algarismos.

Nesse Caderno os Conteúdos e Temas abordados são: estrutura do sistema decimal; agrupamentos e contagens; valor posicional; operações básicas; operações inversas; cálculo mental. As Competências e Habilidades envolvidas são: saber efetuar contagens em bases diferentes da decimal; decompor um número natural nas unidades das diversas ordens; compreender os significados das operações básicas; resolver expressões numéricas respeitando a ordem das operações e os parênteses. Sugestões de estratégias: atividade prática de contagem em bases diferentes; resolução de problemas envolvendo as quatro operações básicas; sessões de cálculo mental e discussão de estratégias de operação; conhecer procedimentos de cálculo mental.

Problema 1. Um restaurante oferece no almoço 3 opções de salada e 5 opções de prato quente. De quantas maneiras diferentes podemos combinar as saladas e os pratos quentes nesse restaurante?

R.: A ideia de combinação é traduzida por uma multiplicação: 3 . 5 = 15. Logo, existem 15 combinações diferentes de saladas e pratos quentes.

- **Situação de Aprendizagem 2 – Explorando os Números Naturais (1º Bimestre)**

Nessa Situação de Aprendizagem as noções gerais sobre números naturais, ainda não formalizados dentro da Teoria dos Conjuntos, mas sim a exploração de ideias associadas a ele, como a contagem para representar determinada quantidade e a ordenação e identificação de elementos de um conjunto.

Nesse Caderno são abordados os Conteúdos e Temas: sequências numéricas aditivas e multiplicativas; múltiplos de um número natural; mínimo múltiplo comum; divisores e divisibilidade de um número natural; máximo divisor comum; números primos; decomposição em fatores primos; potenciação. As Competências e Habilidades desenvolvidas são: saber identificar o padrão de crescimento e decrescimento de uma sequência numérica; compreender a ideia de múltiplo comum entre dois ou mais números naturais; saber determinar os divisores de um número natural; resolver problemas envolvendo a ideia de mínimo múltiplo comum ou máximo divisor comum; saber identificar se um número é primo ou não; decompor um número em seus fatores primos. As Sugestões de estratégias são: atividades e exercícios envolvendo observação de regularidades em sequências numéricas, obtenção de múltiplos e divisores, obtenção de números primos e expressões numéricas envolvendo as cinco operações; resolução de problemas envolvendo a noção de mínimo múltiplo comum ou máximo divisor comum.

Problema 1. Todas as pessoas possuem antepassados, vivos ou mortos. Os nossos antepassados mais próximos são os nossos pais (pai e mãe). Em seguida, vêm os avós, dois por parte de pai e dois por parte de mãe, totalizando quatro antepassados. E assim por diante, a cada geração dobrando o número de antepassados.

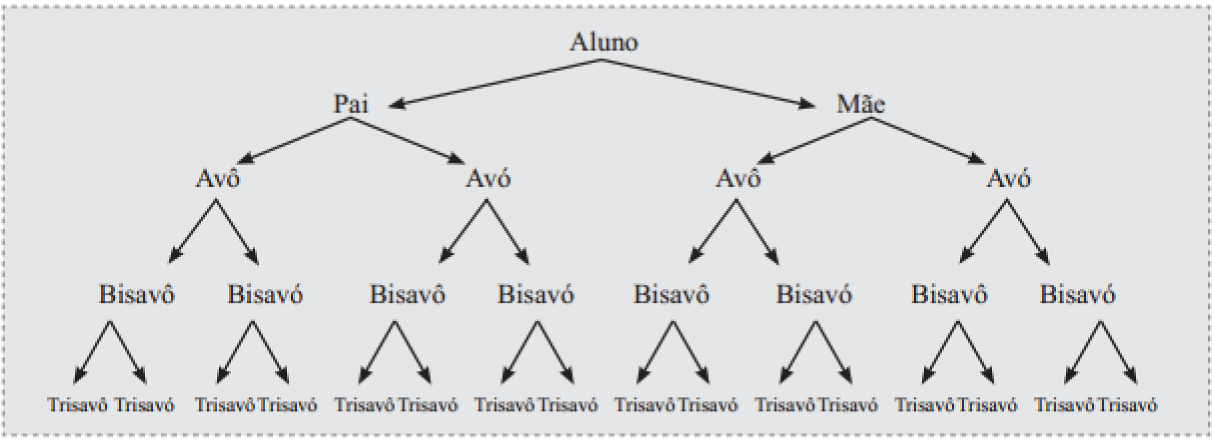
a) Como se chamam os pais dos bisavós? E os avós dos bisavós?

R.: Os pais dos meus bisavós são meus tataravós (ou trisavós), e os avós dos meus bisavós são meus tetravós.

b) Faça um diagrama para representar os seus antepassados até a quarta geração. (Observação: a primeira geração é a dos pais)

R.:

Figura 5. Diagrama de antepassados até a quarta geração



Fonte: Caderno do Professor Matemática 5ª série/6º ano (SÃO PAULO, 2014a, p. 36).

c) Escreva o número de pessoas em cada geração na forma de potência.

R.: 1ª geração de antepassados: os pais correspondem a $2^1 = 2$ *antepassados;*

2ª geração de antepassados: os avós são 2^2 *ou 4 antepassados;*

3ª geração de antepassados: os bisavós correspondem a 2^3*, ou seja, 8;*

4ª geração de antepassados: o número de trisavós será 2^4*, ou seja, 16 antepassados.*

d) Quantos antepassados uma pessoa tem na décima geração anterior?

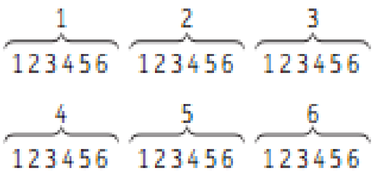
R.: Serão 2^{10}*, ou seja, 1024 antepassados na 10ª geração.*

e) Quantos são os trisavós dos seus tataravós?

R.: Admitindo-se que trisavó seja o mesmo que tataravó, os tataravós correspondem a quarta geração. São, portanto, $2^4 = 16$*. Cada tataravó terá 16 antecedentes. Portanto, o número total de tataravós dos seus tataravós será de 16 . 16 = 256.*

Problema 2. Quantos resultados diferentes podem-se obter no lançamento de 2 dados numerados de 1 a 6? E com 3 dados?(Dica: desenhe um diagrama e identifique que potência representa melhor essa situação).

R.: Um diagrama possível:



1º dado: $6^1 = 6$ *possibilidades*

2º dado: $6^2 = 36$ *possibilidades*

3º dado: $6^3 = 216$ *possibilidades*

Percebemos que nesse volume do Caderno do Aluno os conteúdos relacionados ao raciocínio combinatório não aparece citado nos quadros de conteúdos e habilidades de Matemática relacionadas à Análise Combinatória, pois as atividades que desenvolvem o raciocínio combinatório estão implícitas, como o trás o Currículo do Estado de São Paulo de Matemática (SÃO PAULO, 2010), quando diz que o Tratamento da Informação, no qual está inserido o raciocínio combinatório, tem que permear em todos os conteúdos da Matemática passando pelos três blocos temáticos: Números, Geometria e Relações.

- **Situações de Aprendizagem referentes ao 4º Bimestre**

O Caderno do Professor volume 4, da 5ª série / 6º ano, foi destinado totalmente para o Tratamento da Informação, antes considerado como um eixo temático de conteúdos e agora no currículo já consolidado como um conteúdo que abrange praticamente todos os temas da Matemática, onde procura desenvolver habilidades associadas à organização; leitura e interpretação de informações estatísticas; coleta; análise e apresentação de informações; construção e análise de tabelas e gráficos; cálculo e interpretação das principais medidas de centralidade e, por fim, problemas elementares de contagem.

Quando analisamos as Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor referente a esse bimestre, percebemos que não foi contemplado o conteúdo relacionado aos problemas elementares de contagem que envolvem as seguintes habilidades: utilizar diagramas de árvores para resolver problemas simples de contagem e compreender a ideia do princípio multiplicativo da contagem.

Como vimos os problemas de contagem, que constam na grade de conteúdos desse bimestre, não foram explorados e segundo o autor, essa opção de não explorar diretamente esse conteúdo não significa que esse tema seja menos importante ou que não deva ser proposto, mas apenas que suas escolhas foram condicionadas às possibilidades mais inovadoras de abordagem dos temas.

Nas considerações finais desse Caderno, o autor relata ainda que as quatro Situações de Aprendizagem propostas não esgotam as possibilidades de abordagem dos assuntos considerados e nem exploram diretamente todos aqueles listados na grade de conteúdos, cabendo ao professor elaborar atividades que explorem e complementem o desenvolvimento desse tema.

2.8.2. Situações de Aprendizagem da 7ª série / 8º ano

- **Situação de aprendizagem 4 – As Potências e a Memória do Computador (1º Bimestre)**

Esta Situação de Aprendizagem explora a relação entre o uso das potências e a memória do computador, termos como *bits*, *bytes*, *megabyte, gigabyte* e *terabyte*, de uso na informática, geram contexto e significado, pois se referem a unidades de memória dos computadores.

Neste volume do Caderno do Aluno/Professor são abordados os Conteúdo e Temas: potências e propriedades de potências. As Competências e Habilidades são: conhecer e operar com as propriedades das operações com potências de expoentes inteiros; reconhecer a potenciação em situações contextualizadas; transformação de unidades. As Sugestões de estratégias são: construção de tabelas e árvores de possibilidades; construção e análise de gráficos e tabelas e o uso da calculadora.

Problema 1. Complete a tabela a seguir com todas as configurações possíveis envolvendo quatro capacitores e depois responda:

Tabela 4. Bits, bytes e as potências de dois

Configuração dos capacitores	Estado: D – desligado L – ligado	Número binário (4 casas)	Letra
○○○○		0000	A
○○○○		0001	B
○○○○		0010	C
○○○○	D – D – L – L		D
○○○○		0100	E
○○○○		0101	F
○●●○			G
○○○○			H
○○○○		1000	I
○○○○	L – D – D – L		J
○○○○		1010	K
●○●●			L
○○○○		1100	M
○○○○		1101	N
○○○○	L – L – L – D		O
●●●●			P

Fonte: Caderno do Aluno Matemática 7ª série/8º ano (SÃO PAULO. 2014c, p. 34).

R.: A tabela preenchida ficará como indicado a seguir:

Tabela 5. Solução: bites, bytes e as potências de dois

Configuração dos capacitores	Estado: D – desligado L – ligado	Número binário (4 casas)	Letra
○○○○	D-D-D-D	0000	A
○○○●	D-D-D-L	0001	B
○○●○	D-D-L-D	0010	C
○○●●	D–D–L–L	0011	D
○●○○	D-L-D-D	0100	E
○●○●	D-L-D-L	0101	F
○●●○	D-L-L-D	0110	G
○●●●	D-L-L-L	0111	H
●○○○	L-D-D-D	1000	I
●○○●	L–D–D–L	1001	J
●○●○	L-D-L-D	1010	K
●○●●	L-D-L-L	1011	L
●●○○	L-L-D-D	1100	M
●●○●	L-L-D-L	1101	N
●●●○	L–L–L–D	1110	O
●●●●	L-L-L-L	1111	P

Fonte: Caderno do Professor Matemática 7ª série/8º ano (SÃO PAULO, 2014c, p. 39)

a) Se cada configuração corresponder a uma letra do alfabeto, qual a última letra que pode ser representada com quatro bits (em ordem alfabética)?

R.: Como podemos observar, a última letra do alfabeto que pode ser representada com 4 bits é a letra P. Daí para a frente temos de acrescentar outros bits.

b) Qual é a letra associada ao número binário 0111?

R.: Sendo assim, concluímos que a letra representada pelo número binário 0111 é a letra H.

Problema 2. Um byte é composto por 8 bits. Quantas informações podem ser armazenadas em um byte?

R.: $2^8 = 256$ *informações.*

Problema 3. Quantos bits seriam necessários para armazenar 1000 informações?

R.: Neste item, o aluno deve aplicar não só o raciocínio inverso, como trabalhar com a estimativa. Seriam necessários ao menos 10 bits, pois $2^9 = 512$ *e* $2^{10} = 1024$*.*

Problema 4: Usando Potências para contagem

Suponha que você tenha em seu estojo: um lápis, uma borracha e uma caneta. De quantas maneiras diferentes você poderá selecionar elementos dessa lista? Repare que para responder a esta questão, você pode pensar em utilizar conjuntos de um só elemento, dois elementos e três elementos. Coloque esses objetos em uma tabela:

Tabela 6. Usando potências para contagem

Lápis	Borracha	Caneta

Fonte: Caderno do Aluno Matemática 7ª série/8º ano (SÃO PAULO, 2014c, p. 40)

Estabeleça então a seguinte regra: o número 1 colocado na casa abaixo do objeto significará que ele foi selecionado; caso contrário, será colocado o zero. Assim a tabela numerada com 111 significará que você escolheu os três objetos, enquanto a disposição 101 significa que foram escolhidos o lápis e a caneta. Dessa forma, cada casa em que se escreve o ou 1 representará uma única maneira de selecionar os objetos. Com base nas ideias desenvolvidas sobre bits, responda à pergunta feita. Atenção: a tabela com 000 deve ser excluída, uma vez que mostraria que não foi feita nenhuma escolha.

R.: $2^3 - 1 = 7$.

Tabela 7. Solução: Usando potências para contagem

Lápis	Borracha	Caneta
1	0	0
0	1	0
0	0	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Fonte: Caderno do Professor Matemática 7ª série/8º ano (SÃO PAULO, 2014c, p. 41)

Problema 5. Agora, aplique o mesmo raciocínio para 5 objetos.

R.: $2^5 - 1 = 31$.

Podemos observar nessas atividades propostas pelo Caderno do Professor/Aluno, que mesmo sendo citada como sugestões de estratégias para a resolução dos problemas propostos: a utilização da construção de tabelas e árvore de possibilidades, esse conteúdo foi tratado superficialmente não contemplando o desenvolvimento do raciocínio combinatório, tema este inserido no Tratamento da Informação e que deveria ser tratados permeando os três blocos de conteúdos da Matemática: Números, Geometria e Relações.

2.8.3. Situações de Aprendizagem da 8ª série / 9º ano

- **Situações de Aprendizagem referente ao 4º Bimestre da 8ª série / 9º ano**

Os conteúdos centrais desse volume são: os cálculos métricos envolvendo o círculo e o cilindro, a medida do perímetro, da área e do volume de figuras circulares está diretamente ligada ao número π.

Na Situação de Aprendizagem 4, onde foi destacado o desenvolvimento de Problemas de Contagem e Introdução à Probabilidade, trata da relação entre Geometria e o cálculo de probabilidade. Ampliando o conceito de Probabilidade para espaços amostrais contínuos, apresentando algumas situações que envolvem a determinação da probabilidade por meio da comparação entre as áreas de figuras geométricas, em geral, circulares e não explora o desenvolvimento de problemas de contagem e nem o principio multiplicativo como citado no quadro conteúdos que envolvem Análise Combinatória na 8ª série / 9º ano do Ensino Fundamental.

Nesse capítulo apresentamos um estudo dos documentos curriculares oficiais vigentes no Estado de São Paulo, pontuando o estudo do raciocínio combinatório nas diferentes séries do Ensino Fundamental Anos Finais.

No próximo capítulo é feito uma revisão do processo histórico de Analise Combinatória, pois é elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos, como coloca os OCEM (BRASIL, 2006).

3. HISTÓRIA, DEFINIÇÕES E CONCEITOS BÁSICOS

Este capítulo apresenta conceitos básicos da Análise Combinatória e exemplos de problemas, por meio de uma revisão bibliográfica, e um panorama histórico onde o professor possa ter um material teórico, para se apoiar na elaboração de suas aulas, lembrando que o foco da pesquisa é na utilização da Análise Combinatória, para o Ensino Fundamental – Anos Finais, sem o uso de fórmulas e utilizando o Principio Multiplicativo, mas o professor deve ter o domínio de todo conteúdo a ser trabalhado.

A História da Matemática é um recurso didático com várias possibilidades para desenvolver diversos conceitos e esclarecendo ideias que estão sendo construídas pelo aluno, sugerindo caminhos de abordagens diferentes e delineando os objetivos que se pretende alcançar com eles, contribuindo para a constituição de um olhar mais critico sobre os objetos de conhecimento, sem mencionar sua importância para a formação e consequente preparo do professor (BRASIL, 1998, p. 42).

3.1. Um Pouco de História

Este breve estudo histórico foi construído a partir das leituras dos PCN (BRASIL, 1998) e dos seguintes autores: Boyer (1974), Eves (2004), Morgado (1991), Sabo (2010) e Souza (2010).

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), a História da Matemática oferece uma importante contribuição ao processo ensino e aprendizagem ao mostrá-la como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, assim o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas, nesse sentido a História da Matemática é um instrumento de resgate da própria identidade cultural.

O início do desenvolvimento da matemática, ainda na pré-história começou devido às necessidades do homem de contar juntamente com desenvolvimento da escrita. A evolução da matemática até como a conhecemos hoje se deu através do desenvolvimento das técnicas de agricultura, de pecuária, de divisão de terras, da observação dos astros e da evolução do ser humano.

A Matemática se originou como parte da vida diária do homem e é provável que a persistência da raça humana tenha relação com o desenvolvimento de conceitos matemáticos.

O conceito de número e o processo de contar se desenvolveram antes dos primeiros registros históricos, evidências arqueológicas mostram que o homem há uns 50000 anos já era capaz de contar.

Nas épocas mais primitivas a espécie humana possuía algum senso numérico como acrescentar ou retirar alguns objetos de uma coleção pequena e com a evolução gradual da sociedade, ocorreram as contagens simples como por exemplo a quantidade de membros que faziam parte de sua tribo, tornava-se necessário saber se seu rebanho de carneiros ou de cabras estava diminuindo, verificar a disposição de armas, as reservas alimentares e ainda no final das expedições militares se o efetivo de soldados estava completo ou não, assim a invenção dos números ocorreu devido as preocupações de ordem prática e utilitária.

A maneira mais antiga de contar se baseou em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca, que confere a possibilidade de comparar com facilidade duas coleções de objetos, da mesma natureza ou não, sem ter que recorrer à contagem abstrata. Por exemplo, para a contagem de carneiros podia associar cada um deles a uma pedra ou a ranhuras no barro, entalhes num pedaço de madeira ou fazendo nós numa corda. Depois de algum tempo, um arranjo de sons vocais se desenvolveu para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno e, mais tarde ainda, com o desenvolvimento da escrita, foram surgindo arranjos de símbolos para representar esses números.

Figura 6. Osso de Ishango, datado de cerca de 5000 a.C.

Fonte: Eves, H., 2004, p. 26

Mas alguns problemas no seu dia-a-dia não eram solucionados quando envolviam grandes quantidades, então surgiu a necessidade de outro método de contagem, que não fosse simplesmente a enumeração de objetos contados um a um, mas sim a noção de agrupamentos de objetos de um conjunto.

Segundo Morgado (1991, p. 17):

> ... a procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas tem seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é “contar”, ou seja enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendida pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem.

No Egito, um curioso problema encontrado no famoso Papiro de Rhind, o de número 79, talvez seja o mais antigo registro de um problema ligado à Análise Combinatória, datado aproximadamente em 1650 a.C., apresenta o seguinte conjunto de dados (EVES, 2004, p. 75):

BENS	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2401
Hectare de grãos	16807
TOTAL	19607

Foram reconhecidos os números como as cinco primeiras potências de 7, juntamente com sua soma, entendido inicialmente como uma notação simbólica usada pelo escriba. Mais tarde, em 1907, ocorreu uma relação entre esse e outro popular problema da Idade Média, apresentado no famoso Liber abaci (1202) de Leonardo Fibonacci, que é enunciado assim: “Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?”

Uma versão posterior e mais familiar do mesmo problema nos versos infantis ingleses assim enunciado: “ A caminho de St. Ives, encontrei um homem com sete esposas, cada esposa tinha sete sacos, cada saco tinha sete gatas, cada gata tinha sete filhotes, Entre filhotes, gatas, sacos e esposas, quantos iam a caminho de St. Ives?”

Em ambos os problemas utilizam para a resolução o princípio multiplicativo como técnica de contagem.

Provavelmente o trabalho mais antigo relacionado à sistematização do processo de contagem, seja o livro chinês I – King ou o livro das permutações (1182 – 1135 a.C.).

Na Grécia antiga, sabe-se que Chrsippus, por volta de 207 a.C., encontrou o número de combinações de dez axiomas, chegando a mais que 1000000.

Os escritores romanos, tendo pouco interesse na Matemática teórica, apenas no aspecto prático, não se atentaram a teoria das combinações, com a exceção de Boethius, por volta de 510, que deu uma regra para calcular as combinações de *n* elementos tomados dois a dois, que poderia ser expresso por $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Da Matemática hindu, destacamos Bhaskara (1114 – 1185), conhecido como o criador da fórmula de resolução das equações do 2º grau, forneceu regras para o cálculo de arranjos, com ou sem repetições, e combinações sem repetição. Referiu-se duas vezes a esse assunto em sua obra “Lilavati”, onde também deu regras para as permutações com ou sem repetição.

No início da Era Cristã, a relação entre a matemática e a ciência mística dos hebreus, denominada Cabala, levou à crença do misticismo dos agrupamentos e estudos entre permutações e combinações. O trabalho místico de Sefer Jezira (Livro da Criação), escrito algum tempo antes do século oito, calculava os vários caminhos que as 22 letras do alfabeto hebreu podiam ser arranjadas, pois se acreditava que as combinações dessas letras tinham poderes mágicos.

Na idade média, Rabbi ben Ezra (1090 – 1167), usou permutações e combinações com aplicações na astronomia.

No poema conhecido como “De Vetula”, escrito em 1250 por um eclesiástico francês chamado Richarde de Fournival, apresenta uma discussão de cálculos de combinações referentes ao lançamento de três dados

Levi bem Gerson (1288 – 1344), nasceu e trabalhou no sul da França, tentou demonstrar o 5º postulado de Euclides, em sua obra Maassei Choscheb (Trabalho de Cálculo), deu as regras para a permutação e combinação de *n* elementos tomados *k* a *k.*

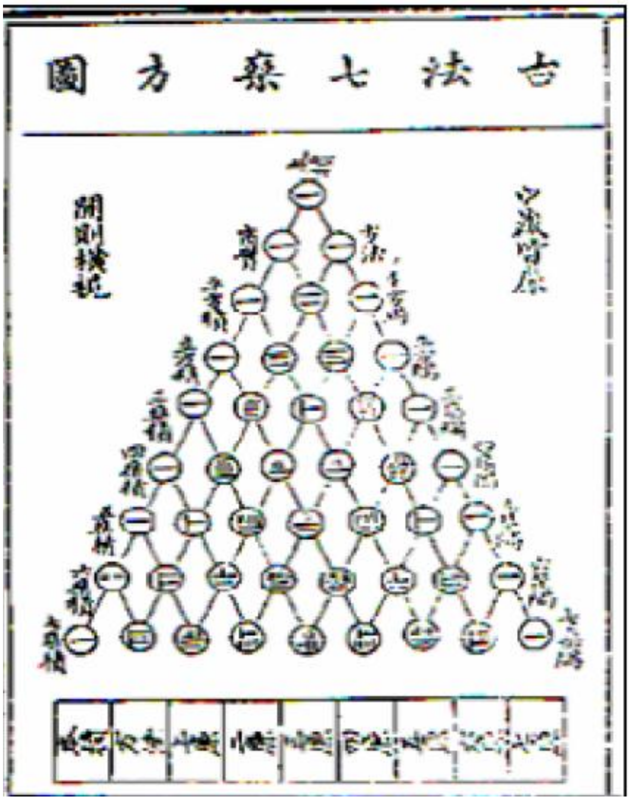
Outro francês Nicole Oresme (1323 – 1382), escreveu em 1360, o trabalho “Tratactus de figuratione potentiorum et mensurarum difforitatum” , onde ele apresenta a soma dos números que representam as combinações de seis elementos tomados 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4 e 5 a 5.

Luca Pacioli (1455 – 1514) apresenta o número de permutações de qualquer quantidade de pessoas sentadas ao redor de uma mesa, numa obra impressa chamada “Summa de Arithimetica, Geometria, proportione et proportionalita”. Esse assunto foi abordado por W. Buckley em 1540, na Inglaterra, que mostrou casos especiais de combinações.

No Ocidente, o alemão Petrus Apianus (1495 – 1552) apresenta a primeira apresentação do Triângulo de Pascal na página de rosto de um livro de aritmética comercial.

Niccolò Fontana Tartaglia (1499 -1559) foi o primeiro a utilizar noções de Análise Combinatória em jogos de dados e relacionou o triângulo de Pascal com as potências de ($x + y$) e Pascal, em 1654 publicou um tratado mostrando como utilizá-los para achar os coeficientes do desenvolvimento de $(a + b)^n$. Pascal não foi o primeiro a estudar o triângulo aritmético, o desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados de Análise Combinatória, o caso n = 2 pode ser encontrado no Elementos de Euclides, por volta de 300 a.C., Esse triângulo também já era conhecido por Chu Shih – Chieh, na China, por volta de 1300, e antes disso pelos hindus e árabes.

Figura 7. Triângulo Chu Shih-Chieh



Fonte: EVES, H, 2004, p. 250

O matemático árabe Al-Karaji, fim do século X, conhecia a lei de formação dos elementos do triângulo de Pascal, que depois, no Ocidente recebeu o nome de Relação de Stifel: $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$. O nome coeficiente binomial foi introduzido por Michael Stifel por volta de 1550, que mostrou como calcular $(1 + x)^n$ a partir do desenvolvimento de $(1 + x)^{n-1}$.

Blaise Pascal (1623 – 1662), não foi o primeiro a estudar o triângulo aritmético, mas foi o primeiro a estudar suas propriedades e analisar as relações e aplicações das disposições dos números com as combinações e utilizá-los nas resoluções de problemas de probabilidade, devido isso o triângulo aritmético ficou conhecido como o Triângulo de Pascal.

Jaime Bernoulli (1654 – 1705) usou a interpretação de Pascal para desenvolver $(x + y)^n$, a segunda parte do livro "Ars Conjectandi" publicado em 1713, foi dedicada à teoria da Análise Combinatória como a conhecemos hoje.

De acordo co Morgado et. al. (1991, p. 4), Isaac Newton (1646 – 1727) mostrou como calcular diretamente $(1 + x)^n$ sem antes calcular $(1 + x)^{n-1}$, mostrando que cada coeficiente pode ser determinado, usando o anterior, pela fórmula: $\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}$.

Ainda segundo Morgado et. al. (1991, p. 4), a Teoria das Probabilidades se originou com Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665), onde um cavalheiro chamado Chevalier de Méré discutiu em cartas com Pascal problemas relativos à probabilidade de ganhar certos jogos de cartas, assim tendo despertado seu interesse, Pascal se correspondeu com Fermat sobre o que atualmente chamamos de probabilidades finitas.

Encontramos uma referência na "Divina Comédia" de Dante Alighieri (1625 – 1321) sobre probabilidades em jogos de azar. O desenvolvimento da Análise Combinatória ocorreu em grande parte devido à necessidade de resolver problemas de contagem originados na Teoria das Probabilidades (MORGADO, et. al., 1991, p. 5).

O livro "De Ludo Aleae" foi à primeira obra conhecida em que estudam as probabilidades escrita por Jerônimo Cardano, publicada em 1663, esse livro pode ser descrito como um manual para jogadores, com descrição de jogos e preocupações que se dever ter em relação a adversários trapaceiros, restando uma parte pequena para a discussão às probabilidades, onde ele mostra entre outras coisas, de quantas maneiras podemos obter um numero, lançando dois dados.

Em 1606, Johannes Kepler (1571 – 1630), publicou um livro onde fez observações sobre probabilidades, onde estuda diferentes opiniões sobre o aparecimento de uma estrela brilhante em 1604. Galileu (1564 – 1642) também se preocupou com as probabilidades estudando jogos de dados para responder a pergunta de um amigo.

Segundo Morgado (1191, p. 6), a teoria das probabilidades só começa a se desenvolver realmente a partir dos trabalhos de Pascal, que estudou o triângulo aritmético e o aplicou ao estudo de jogos de cartas. A utilidade das teorias das Probabilidades logo foi percebida como para o estudo de taxas de mortalidade, prêmios de seguros, importante instrumento de observação social.

Leonard Euler (1707 – 1783) também contribuiu para o desenvolvimento da Análise Combinatória motivado pelo Problema das Sete Pontes de Königsberg, um teorema no campo da Teoria dos Grafos, parte importante da combinatória e também desenvolveu a técnica das funções geradoras, utilizadas para atacar o problema das partições de um inteiro.

O inglês Frank P. Ramsey (1903 – 1930) elaborou uma teoria que garante a existência de certas configurações, onde se entende por configuração qualquer conjunto formado por pontos, linhas e planos. O Teorema de Ramsey afirma que, se tivermos no plano, um conjunto de seis ou mais pontos, onde não haja três pontos colineares, e se unirmos, todos os pontos dois a dois, usando duas cores distintas para traçar os segmentos de reta que unirão os pontos, então forçosamente teremos formado um triângulo cujos lados são todos da mesma cor.

> A partir de meados do século XVIII, a Análise combinatória passou a ser utilizada em vários ramos da Matemática como Estatística, Álgebra, Probabilidade, Lógica, etc., e em outras áreas do conhecimento humano com Biologia Molecular, Programação de Computadores, Economia, Teoria da Programação para o Bom Funcionamento da Empresa, etc (SOUZA, 2010, p. 69).

Os anagramas assunto abordado em Análise Combinatória, nos quais são formados por diferentes disposições das letras de uma palavra, formando outras palavras com ou sem significado, foram amplamente utilizados durantes as guerras e trocas de regimes políticos no decorrer da história e também por cientistas para se comunicarem com segurança, pois outros estudiosos poderiam se apossar de suas ideias e de seus trabalhos.

De acordo com Morgado et. al. (1991), a Análise Combinatória tem tido um crescimento considerável devido ao desenvolvimento e a importância dada aos problemas relacionados à enumeração, como o armazenamento de informações em bancos de dados, as pesquisas operacionais e a problemas que podem ser modelados empregando a teoria dos grafos.

3.2. Raciocínio Combinatório

Entendemos como raciocínio combinatório um tipo de pensamento que envolve contagem, contagem esta que vai além da enumeração de elementos de um conjunto, para passar à contagem de grupos de objetos, ou seja, de subconjuntos, tendo como base o raciocínio multiplicativo.

No ensino da Análise Combinatória é comum os alunos utilizarem fórmulas de forma mecânica para a resolução de problemas, não há significado, portanto a aprendizagem fica comprometida. É necessária uma prática que favoreça ao aluno entender o procedimento adotado, propiciando significado, partindo de conhecimentos prévios tanto escolares como extraescolares, nas quais esse raciocínio se faz necessário.

Segundo Vernaud (MAGINA, 2005) em sua Teoria dos Campos Conceituais, o conhecimento não surge simplesmente sem nenhuma razão, não surge por geração espontânea, o conhecimento emerge a partir da ação do sujeito sobre a situação, e essa ação precisa de uma reflexão para que não se torne apenas uma competência adquirida, mas que se direcione na formação e desenvolvimento do conceito.

Segundo Magina (2005), é forte a influência da Teoria de Piagetiana, pois Jean Piaget foi orientador de Vernaud em seu doutorado. A diferença entre o que os dois defendem é que para Piaget a ação é sobre o objeto e para Vernaud a ação é sobre a situação. Do ponto de vista psíquico- pedagógico Vernaud diz que o conhecimento é fruto da maturação do indivíduo, de sua experiência e de sua aprendizagem, ou seja, o ser humano passa por períodos maturacional, o que ocorre também com as estruturas cognitivas, responsáveis pela evolução do pensamento mais complexo.

Vernaud afirma ainda, que para um conceito torna-se significativo para um sujeito é necessário interagir com ele através de uma variedade de situações, uma única situação envolve vários conceitos, assim o aluno se torna sujeito de sua aprendizagem sendo necessário uma interação entre o sujeito e o meio ao redor.

> Um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de problemas ou situações cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros (MAGINA, 2005).

Os conceitos desenvolvidos por uma criança são inseridos em campos conceituais que segundo Vernaud podem ser definidos como a interação complexa de entre um conjunto interligado de conceitos e um conjunto de situações de utilização desses conceitos, o domínio dessas situações exige o desenvolvimento de uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas que se apresentam conectadas. Por exemplo as estruturas multiplicavas, operações de multiplicação e divisão, devem ser estudadas dentro de um campo conceitual

No que diz respeito às estruturas multiplicativas, definidas como um conjunto de problemas ou situações, cuja análise requer vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais estão conectados uns com outros.

No artigo de Pessoa e Borba (2009), foram considerados quatro tipos de problemas de agrupamentos simples sem repetição como característicos do raciocínio combinatório estudados na Educação Básica. São eles: produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação, os quais podem ser solucionados através do Principio Fundamental da Contagem.

No produto cartesiano a natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado, o que caracteriza estes problemas é que dois ou mais conjuntos disjuntos são combinados para formarem um terceiro conjunto. Por exemplo: Numa festa temos 3 meninos e quatro meninas, se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

Em relação à permutação a ordem dos elementos gera novas possibilidade, todos os elementos são usados em diferentes ordens, tenha sentido ou não, para formar novas possibilidades. Por exemplo: quantos são os anagramas da palavra UFSCAR?

No arranjo a ordem dos elementos gera novas possibilidades, o que os caracteriza é que alguns subconjuntos de um conjunto são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Diferentemente do que ocorre na combinação onde a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Sturn (1999) em sua pesquisa propôs uma abordagem alternativa pelo fato de priorizar o pensamento combinatório ao invés de dar ênfase nas fórmulas para identificar as possibilidades e limites ao ensino-aprendizagem da Análise Combinatória. Um dos resultados importantes apontados pelo pesquisador é que o principio multiplicativo como estratégia de resolução propiciou que os conceitos de arranjo e de permutação fossem aprendidos de forma natural na resolução dos exercícios.

3.3. A Importância da Resolução de Problemas no Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório

Através da resolução de problemas o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos tem situações desafiadoras para resolver e são motivados para desenvolver diferentes estratégias de resolução, mobilizando conhecimentos e desenvolvendo a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance, ampliando seus conhecimentos acerca de procedimentos matemáticos e ampliando sua visão de mundo e sua autoconfiança.

No Ensino Fundamental, a resolução de problemas de contagem capacita o aluno a agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizar esses agrupamentos e aperfeiçoar a maneira de contar esses agrupamentos desenvolvendo o raciocínio combinatório.

Com a compreensão do raciocínio combinatório o aluno poderá desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar os desafios dos problemas de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada, promovendo a aprendizagem da probabilidade e da estatística.

Segundo Pessoa, Borba (2009), trabalhar na escola com problemas combinatórios é relevante para que surjam e se transformem esquemas e relações de caráter combinatório, uma das dimensões que condiciona o aparecimento da lógica das proposições, e enfoca que a criança, segundo Piaget, na fase das operações concretas é capaz de trabalhar com situações conhecidas e quando entra para a fase das operações formais ela passa a ser capaz de trabalhar com situações hipotéticas, dessa forma o raciocínio combinatório é evidência de pensamento operatório formal, onde os adolescentes são capazes de desenvolver procedimentos sistemáticos de enumeração e de contagem combinatória.

A exploração da resolução de problemas de contagem leva o aluno a compreender o principio multiplicativo e torna seu ensino mais eficiente desenvolvendo a organização de dados em tabelas, gráficos e diagramas, a classificação de eventos segundo um ou mais critérios úteis em todos os campos do conhecimento.

Segundo a opinião de Morgado et al (1991, p. 2).:

> ...a solução de um problema combinatório exige a quase sempre a engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita, sendo esse um dos encantos dessa parte da Matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade e compreensão para sua solução.

Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto, não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido, é necessário desenvolver habilidades que permitam provar resultados e comparar diferentes caminhos de solução. Estimular o aluno a questionar e analisar o problema e sua resposta, a formular novos problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos que admitem diferentes respostas propicia o desenvolvimento do ensino-aprendizagem para a construção do conhecimento significativo.

3.4. Análise Combinatória

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições (HAZZAN, 2004, p. 1). Sendo necessário o desenvolvimento desses métodos nos casos onde o número de elementos é muito grande, não sendo possível a contagem um a um.

Os problemas de contagem são formados por basicamente dois tipos de agrupamentos: um em que se leva em conta a ordem dos elementos dentro do conjunto e outro, onde a ordem dos elementos não é importante.

O termo "Análise Combinatória", apesar de usado na Matemática ensinada no Ensino Médio para designar problemas de contagem, traz consigo algo além das situações dessa natureza. A Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas (MORGADO, 1991, p. 2).

Os problemas de contagem constituem uma parte dos tipos de problemas discutidos por esse ramo da Matemática, e frequentemente são de dois tipos: 1º demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições e 2º contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas (MORGADO, 1991, p. 2).

A Análise Combinatória trata outros tipos de problemas e dispõe de outras técnicas para solucioná-los, como o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey.

Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, as soluções quase sempre exigem criatividade e engenhosidade, o que os torna por vezes difíceis, mas ao mesmo tempo encantador.

Neste estudo “problemas de contagem” será restrita aos problemas de arranjos, permutações com e sem repetições e combinações simples, pois nosso foco são os alunos do Ensino Fundamental Anos Finais, e queremos desenvolver o hábito nos alunos da interpretação e compreensão dos problemas utilizando técnicas que não envolvam o uso de fórmulas.

Este estudo teórico foi construído a partir das leituras dos seguintes autores: Santos et. al. (1998), Dante (2003), Machado (1986) e Hazzan (2004).

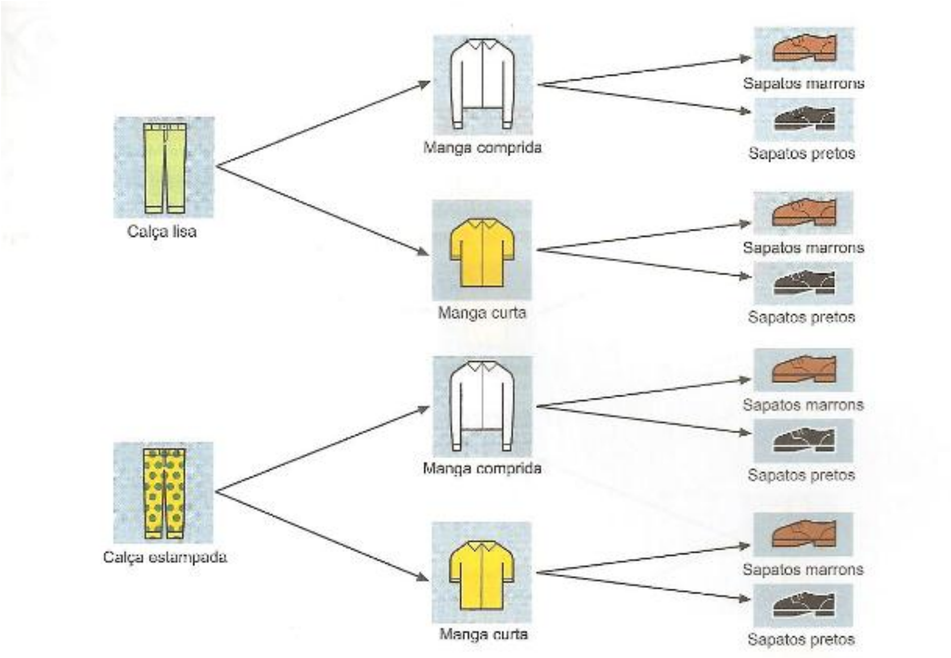
3.4.1. Árvore das Possibilidades

A árvore das possibilidades ou o diagrama de árvore é uma técnica motivadora que tem como objetivo sistematizar e compreender o Princípio Fundamental da Contagem é uma técnica limitada para problemas que apresentam um número elevado de possibilidades de resposta.

Usamos o diagrama de árvore para representar uma situação onde se aplica o princípio multiplicativo.

Problema 1. Temos dois tipos de calça: lisa e estampada; dois tipos de blusa: de manga comprida e de manga curta; e dois pares de sapato: um marrom e um preto. Vamos escolher uma calça, uma blusa e um par de sapatos. Quantas escolhas diferentes podemos fazer?

Figura 8. Diagrama de árvore



Fonte: Gestar II Matemática (Brasil, 2008, p. 27).

R.: A possibilidade "calça lisa, blusa de manga comprida e sapatos pretos" é representada por um caminho no diagrama. A possibilidade "calça lisa, blusa de manga comprida e sapatos marrons" é representada por outro caminho. Portanto podemos fazer 8 escolhas diferentes.

As representações gráficas são uma forma poderosa de aguçar o nosso senso de como as possibilidades se multiplicam quando consideramos um ou vários fatores a mais. A visualização é sempre uma forma de desenvolver as nossas intuições sobre conceitos matemáticos.

Percebemos no diagrama de árvore que cada possibilidade é formada por um caminho diferente, ou seja, por um conjunto de segmentos que combinam possibilidades.

O Princípio Fundamental da Contagem pode ser entendido como um aprimoramento da construção da árvore de possibilidades, mostrando-se como um meio facilitador na resolução de problemas que apresentam um número elevado de soluções (SABO, 2010).

3.4.2. Princípio Aditivo

Definição: Se A e B são dois conjuntos disjuntos (A ∩ B = ∅) com, respectivamente, *p* e *q* elementos, então A ∪ B possui $p + q$ elementos.

O Princípio Aditivo pode ser estendido para um número finito qualquer de conjuntos.

Extensão do princípio aditivo: Se A_1, A_2, ..., A_n são conjuntos, disjuntos 2 a 2, e se A_i possui a_i elementos, então a união $\cup_{i=1}^{n} A_i$ possui $\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos.

Problema 2. Suponha que tenham entrado em cartas 3 filmes e 2 peças de teatro e que André tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento. Quantos são os programas que André pode fazer no sábado?

R.: Como André tem dinheiro para assistir apenas a 1 evento, então ou ele assiste ao filme 1 ou ao filme 2 ou ao filme 3 ou à peça 1 ou à peça 2. Portanto, André tem ao todo 5 opções diferentes de programas para o sábado.

Problema 3. Márcia vai há uma confeitaria onde há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Márcia só possa tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Márcia pode fazer?

R.: Márcia só poderá escolher um sabor de picolé dentre os 5 sabores disponíveis ou um tipo de salgado dentre os 3 disponíveis. Portanto, Márcia poderá fazer 8 pedidos.

3.4.3. Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio Multiplicativo é o elemento fundamental do pensamento combinatório e das atividades que envolvem problemas de contagem e, consequentemente, das construções cognitivas posteriores, como os arranjos, permutações e combinações, para Dornelas (2004, p. 10):

> O seu desconhecimento ou a sua abordagem superficial trará dificuldades cognitivas importantes na sua aplicabilidade, no processo de resolução de problemas, como também na sua não mobilização em situações possíveis e necessárias. Sua utilização de forma errônea ou incompleta ou o seu desconhecimento trarão ou reforçarão obstáculos no discernimento cognitivo dos demais temas – como Arranjos e Combinações – causando, no aluno

> incapacidades que refletirão na impossibilidade de, por exemplo, identificar quando a ordem em que os elementos estão dispostos num agrupamento, irá (caso dos arranjos) ou não (caso das combinações) influir no total de agrupamentos (subconjuntos) possíveis de um dado conjunto.

É um instrumento de alto valor pedagógico, ajudando os alunos na compreensão e acompanhamentos didático-pedagógicos em sala de aula para estabelecer correlações e conexões com os conceitos básicos de combinatória. Sua aprendizagem significativa envolve uma mudança de atitudes e orientações didáticas que propiciem aos alunos um entendimento mais consistente e substancial, que contribua a motivar alunos e professores a trabalharem temas ligados à Análise Combinatória de forma mais natural, objetiva e produtiva.

Definição: Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m\ .\ n$. Em linguagem de conjuntos, se A é um conjunto com m elementos e B é um conjunto de n elementos, então o conjunto A x B (lê-se A cartesiano B) dos pares ordenados (a,b), tais que a pertence a A e b pertence B, tem cardinalidade $m\ .\ n$ (Princípio Fundamental da Contagem).

Problema 4. Carol vai viajar para a praia. Na mala, colocou 3 bermudas, 4 blusas, um par de tênis e um par de sandálias. De quantas maneiras distintas Carol poderá se vestir usando uma bermuda, uma blusa e um par de calçados?

> *R.: Carol poderá escolher uma das* ***3*** *bermudas que levou, uma das* ***4*** *blusas e um dos* ***2*** *pares de calçados, então Carol poderá se vestir de* ***3.4.2 = 24*** *maneiras diferentes.*

Problema 5. Uma sorveteria oferece uma taça de sorvete que pode vir coberto com calda de chocolate ou de morango ou de caramelo. Se o sorvete pode ser escolhido entre 10 sabores diferentes, quantas são as opções para um cliente escolher a taça com cobertura?

> *R.: O cliente poderá escolher um sorvete entre* ***10*** *sabores e uma cobertura entre* ***3*** *caldas, portanto o cliente terá* ***10.3 = 30*** *possibilidades.*

3.4.4. Aplicações dos Princípios Aditivo e Multiplicativo

Problema 6. Um amigo mostrou-me 5 livros diferentes de matemática, 7 livros diferentes de física e 10 livros diferentes de química e pediu-me para escolher 2 livros com a condição de que eles não fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-los?

R.: Eu posso fazer as seguintes escolhas:
(a) matemática e física: 5 . 7 = 35 maneiras.
(b) matemática e química: 5 . 10 = 50 maneiras.
(c) física e química: 7 . 10 = 70 maneiras.
Como as minhas escolhas só podem ocorrer dentre uma das possibilidades (a), (b) ou (c), então 35 + 50 + 70 = 155 é o número de maneiras de fazer estas escolhas.

Problema 7. Há 12 moças e 10 rapazes, onde 5 deles (3 moças e 2 rapazes) são irmãos e os restantes não possuem parentesco. Quantos são os casamentos possíveis?

R.: Considerando as moças (3) que possuem irmãos (2), há: 3 . 8 = 24 casamentos possíveis.
Considerando as moças (9) que não possuem irmãos, há: 9 . 10 = 90 casamentos possíveis. Portanto há 24 + 90 = 114 casamentos possíveis.

O Princípio Multiplicativo também pode ser estendido para um número finito qualquer de conjuntos.
Extensão do Princípio Multiplicativo: Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para i = 1, 2, 3, ..., n, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão, de m_1 . m_2 ... m_n maneiras diferentes. Em linguagem de conjuntos, se o conjunto A_i tem cardinalidade m_i, para i = 1, 2, ..., n, então o produto cartesiano A_1 x A_2 x ... x A_n = $\{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i$, para i = 1, 2, ..., n$\}$ tem cardinalidade $m_1 . m_2 ... m_n$.

3.4.5. Permutações Simples

Definição: Uma *permutação* de ***n*** objetos distintos é qualquer agrupamento simples dos n objetos, assim:

$$P_n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = n!.$$

Definimos $P_0 = 0! = 1$.

Esses agrupamentos ordenados diferem pela ordem de seus elementos.

Problema 8. Considerando os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números de 2 algarismos distintos podem ser formados?

R.: Os números de 2 algarismos tem o algarismo das unidades e o algarismo das dezenas. Podemos dizer então que existem 2 posições para serem preenchidas, digamos P_1 e P_2. A posição P_1 pode ser preenchida de 5 maneiras diferentes, restando, portanto, 4 dígitos que podem ocupar a posição P_2. Então há 5 . 4 = 20 maneiras diferentes das posições P_1 e P_2 há 20 números de 2 algarismos distintos que podem ser formados com 5 dígitos disponíveis.

Problema 9. De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares para tirar uma foto?

R.: Como o banco possui 5 lugares, consideremos L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 como os 5 diferentes, restando 4 pessoas que podem ocupar o lugar L_2, e restando 3 pessoas que podem ocupar o lugar L_3, restando 2 pessoas que podem ocupar o lugar L_4 e finalmente restando 1 pessoa para ocupar o lugar L_5. Então há 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120 maneiras diferentes essa família pode sentar nesse banco para tirar a foto.

Problema 10. De quantas maneiras 12 moças e 12 rapazes podem formar pares para um dança?

R.: A primeira moça tem 12 possibilidades para escolher seu par. A segunda moça tem 11 possibilidades; a terceira moça tem 10 possibilidades e assim sucessivamente de modo que, podemos concluir que a décima moça terá 1 possibilidade de escolha. Portanto, pelo princípio multiplicativo que há 12 . 11 . 10 . 9 ... 1 = 12! maneiras desses pares serem formados.

3.4.6. Permutação com Repetição

Quando temos *n* elementos dos quais n_1 são repetidos de um tipo, n_2 são repetidos de outro tipo, n_3 são repetidos de outro tipo e assim por diante, o número de permutações que podemos formar é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} \quad \text{onde} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_K = n$$

Problema 11. *Quantos* são os anagramas da palavra ARARA?

*R.: Podemos observar nesse exemplo que a letra **A** repete 3 vezes e a letra **R** repete 2 vezes, num total de 5 letras. Pela fórmula de permutação com repetição temos:* $P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!2!} = \frac{5.4}{2} = 10$ *anagramas da palavra ARARA.*

Sem o uso de fórmulas devemos descrever todos os anagramas possíveis da palavra ARARA, são eles: AAARR, AARAR, ARAAR, RAAAR, AARRA, ARARA, RAARA, ARRAA, RARAA, RRAAA.

3.4.7. Arranjos Simples

Definição: Arranjo simples de *n* elementos tomados *p* a *p*, onde $n \geq 1$ e *p* é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de *p* elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos *p* elementos que compõem cada grupo. Notação $A_{n,p}$ (lê-se: arranjo de *n* elementos tomados *p* a *p*).

Encontrando uma expressão matemática que caracterize $A_{n,p}$ usando o princípio multiplicativo, consideremos *n* elementos dos quais queremos tomar *p* elementos. Este problema equivale a termos *n* objetos com os quais queremos preencher *p* lugares.

$$\overline{\mathrm{L}_1}\ \overline{\mathrm{L}_2}\ \overline{\mathrm{L}_3} \cdots \overline{\mathrm{L}_\mathrm{p}}$$

O primeiro lugar pode ser preenchido de *n* maneiras diferentes. Tendo preenchido L_1, restam (*n* – 1) objetos e, portanto, o segundo lugar pode ser preenchido de (*n* – 1) maneiras diferentes. Após o preenchimento de L_2 há (*n* – 2) maneiras de se preencher L_3 e assim sucessivamente vamos preenchendo as posições de forma L_p terá (n – (p – 1)) maneiras diferentes de ser preenchido. Pelo princípio multiplicativo podemos dizer que as p posições podem ser preenchidas sucessivamente de $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))$ maneiras diferentes. Portanto $A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))$. Sabemos que uma igualdade não se altera se a multiplicarmos e dividirmos por um mesmo valor, então:

$$A_{n,p} = \frac{[n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))]\,[(n-p)(n-p-1)\ldots2\,.1]}{(n-p)(n-p-1)\ldots2\,.1}$$

podendo ser simplificada para:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Problema 12. Quantos números de dois algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 1, 2,3,4,5,6,7,8 e 9?

R.: Procuramos agrupamentos de 2 elementos em que a ordem é importante, pois, por exemplo, 12 ≠ 21. Temos 9 elementos para serem arranjados 2 a 2. Assim, temos que calcular: $A_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9.8.7!}{7!}$ *= 72. Portanto, existem 72 números distintos que podem ser escritos com os algarismos de 1 a 9.*

Vamos calcular agora através do princípio multiplicativo: para o algarismo das dezenas temos 9 opções e, para o algarismo das unidades, apenas 8 opções, pois não podemos repetir algarismos. Assim temos 9.8 = 72 possibilidades.

Problema 13. De quantas maneiras diferentes 5 meninos podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares?

R.: Estamos interessados nos agrupamentos ordenados de 3 elementos, retirados de 5 elementos, ou seja: $A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60$. *Portanto, há 60 maneiras possíveis.*

Agora, utilizando o princípio multiplicativo temos: para o primeiro lugar no banco é possível sentar um dos 5 meninos, restando para o segundo lugar 4 meninos e restando 3 meninos para o terceiro lugar. Assim, são 5.4.3 = 60 possibilidades.

3.4.8. Arranjos com Repetição

Definição: Seja N um conjunto com *n* elementos, isto é, N = {a_1, a_2, ..., a_n}. Chamamos *arranjo com repetição* dos *n* elementos, tomados *p* a *p*, toda *p-upla* ordenada formada com elementos de N não necessariamente distintos e indiquemos por $(AR)_{n,p}$ o números de arranjos com repetição de *n* elementos tomados *p* a *p.*

Cada *arranjo com repetição* é uma sequência de *p* elementos, onde cada elemento pertence a N. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de arranjos $(AR)_{n,p}$ será:

$$(AR)_{n,p} = n \,.\, n \,.\, \ldots \,.\, n = n^p \text{ , p vezes}$$

Notamos que se p = 1, $(AR)_{n,1}$ = n e a fórmula continua válida $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$.

Problema 14. Quantos números de três algarismos podem ser escritos com os algarismos 1, 3, 4, 5, 6, 8 e 9?

R.: Podemos observar que os números a serem formados com três algarismos não precisam ser necessariamente distintos, temos então um arranjo com repetição, onde iremos formar agrupamentos ordenados de 3 elementos retirados de 7 elementos. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos 7.7.7 = 343 números de três algarismos e pela fórmula de arranjo com repetição temos $(AR)_{7,3} = 7^3 = 343$.

3.4.9. Combinações Simples

Definição: Combinações simples de *n* elementos tomados *p* a *p*, onde $n \geq 1$ e *p*é um número natural tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de *p* desses *n* elementos. Notação $C_{n,p} = \binom{n}{p}$ (lê-se: combinação de *n* tomados *p* a *p*).

Vimos que o número de arranjos simples de *n* elementos tomados *p a p* é igual ao número de maneiras de preencher *p* lugares com *n* elementos disponíveis. Obtivemos $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ como sendo o número de agrupamentos que diferem entre si pela natureza e pela ordem de colocação dos elementos no agrupamento, isto é, importa quem participa e o lugar que ocupa.

Entretanto, quando consideramos combinações simples de *n* elementos tomados *p* a *p*, temos agrupamentos de *p* elementos, tomados dentre os *n* elementos disponíveis, que diferem entre si apenas pela natureza dos elementos, isto é, importa somente quem participa do grupo.

De uma maneira geral

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Desta última igualdade, podemos tomar $A_{n,p} = p!\,C_{n,p}$, isto é, o arranjo de *n* elementos tomados *p* a *p* pode ser calculado a partir de uma escolha de determinados objetos, considerando-se para cada escolha a permutação desses objetos.

Problema 15. De quantas maneiras diferentes um técnico pode escalar seu time de basquete tendo 12 atletas à sua disposição?

> *R.: Procuramos o número total de combinações de um conjunto de 12 elementos. A ordem não importa, cada combinação difere um do outro apenas pela natureza dos seus elementos. Assim, procuramos:* $C_{12,5} = \frac{A_{12,5}}{5!} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{5!7!} = \frac{12.11.10.9.8}{5.4.3.2.1} = 11.9.8 = 792.$ *Portanto, podemos formar 792 times de basquete diferentes com 12 atletas.*
> *Utilizando somente o raciocínio combinatório temos a seguinte resolução: são 5 jogadores a serem escolhidos entre 12, então teríamos 12 . 11. 10 . 9 . 8 = 95040 possibilidades se estivéssemos calculando um arranjo. Como é uma combinação, devemos dividir o resultado pelo fatorial dos elementos escolhidos, que foram 5 elementos:* $\frac{12.11.10.9.8}{5!} = 792$ *possibilidades.*

Podemos perceber nesse exemplo que o princípio multiplicativo leva em conta a ordem dos elementos do grupo formado, como é o caso das permutações e arranjos. Se essa ordem não importar, como é o caso das combinações, devemos excluir as repetições dividindo o resultado obtido no princípio multiplicativo, pelo número de permutações dos componentes do grupo. Dessa forma não precisaremos utilizar fórmulas, que sempre é um grande entrave no desenvolvimento desse conteúdo para os estudantes.

Problema 16. Quantos triângulos e quantos quadriláteros distintos podem ser traçados utilizando-se 14 pontos de um plano, não havendo 3 pontos alinhados?

R.: Como não há três pontos alinhados, devemos escolher 3 pontos dentre os 14 para traçarmos um triângulo. Desta forma, podemos traçar $C_{14,3} = \frac{14!}{3!(14-3)!} = \frac{14.13.12.11!}{3!11!} = \frac{14.13.12}{3.2.1} = 364$ *triângulos distintos.*

Para traçar os quadriláteros, devemos escolher 4 pontos dentre os 14 do plano, desta forma, podemos traçar $C_{14,4} = \frac{14!}{4!(14-4)!} = \frac{14.13.12.11.10!}{4!10!} = \frac{14.13.12.11}{4.3.2.1} = 1001$ *quadriláteros distintos.*

Neste capítulo fizemos uma revisão histórica e teórica para que o professor tenha em mãos um material completo no estudo da Análise Combinatória e que possa facilitar seus estudos para o planejamento e desenvolvimento de suas aulas.

O próximo capítulo traz a caracterização da escola e das turmas envolvidas nessa pesquisa e as atividades aplicadas em sala de aula, juntamente com uma análise quantitativa.

4. ATIVIDADES E RESULTADOS

Neste capítulo serão descritas as atividades diagnósticas desenvolvidas com turmas do Ensino Fundamental – Anos Finais aplicadas em 2013 e 2014 e a análise dos resultados, para apontar as dificuldades apresentadas pelos alunos e também a compreensão e aprendizagem do raciocínio combinatório nesse segmento de ensino.

Em 2013, uma atividade foi aplicada com três 9º anos/8ª séries e em 2014 outras duas atividades foram aplicadas, a primeira com uma 5ª série/6º ano, uma 6ª série/7º ano, uma 7ª série/8º ano e uma 8ª série/9º ano e a segunda com uma 7ª série/8º ano e uma 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental.

4.1. Caracterização da Escola e das Turmas

A presente pesquisa foi desenvolvida na Escola Estadual "Professor Lauro Sanchez", localizada na região norte da cidade de Sorocaba, parte periférica, integrante da Diretoria de Ensino de Sorocaba. O bairro é misto predominantemente comercial, composto também por pequenas e micro empresas de diversos segmentos, onde os moradores são de classe média-baixa. A maior parte de nossos alunos mora em bairros distantes, dependem de ônibus e trabalham na condição de estagiários e aprendizes.

A Escola funciona nos três turnos: manhã, tarde e noite, onde se desenvolve o Ensino Fundamental Anos Finais, Ensino Médio e a Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Possui atualmente 16 salas de aula, em plenas condições de funcionamento, além de uma sala de vídeo e palestras com equipamentos de áudio, vídeo e lousa digital, uma sala que é utilizada como laboratório de Física e Química e outra para as aulas de Arte, possui três quadras esportivas: uma coberta, outra descoberta e uma de areia que não é utilizada. Dispõe de uma ampla e bem estruturada biblioteca, com um grande número de obras disponíveis para uso dos alunos e de toda comunidade. Possui também uma sala de informática, equipada com 17 computadores, em perfeito funcionamento.

Esse ano a escola conta com 1300 alunos, 84 professores titulares de cargo e 45 entre OFAs e contratados. No Ensino Fundamental contamos com três salas de 5ª séries/ 6º anos; 5 salas de 6ª séries/7º anos; 6 salas de 7ª séries/ 8º anos; 5 salas de 8ª séries/9º anos; no Ensino Médio contamos com sete salas de 1º anos; 6 salas de 2º anos; 6 salas de 3º anos; uma sala de 1º ano, uma de 2º ano e uma de 3º ano do Ensino de Jovens e Adultos (EJA).

O Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo (IDESP) é o indicador que avalia a qualidade das escolas estaduais paulistas em cada ciclo escolar e permite fixar metas anuais para o aprimoramento da qualidade da educação no Estado. O IDESP e as metas fixadas norteiam o trabalho da equipe escolar na direção da melhoria do ensino e da gestão escolar.

Tabela 8. Análise do IDESP

	E. E. PROFESSOR LAURO SANCHEZ							
	IDESP 2010		IDESP 2011		IDESP 2012		IDESP 2013	
	EF	EM	EF	EM	EF	EM	EF	EM
ESCOLA	2.02	1.49	2.28	1.38	3.11	1.68	2.72	1.35
DIRETORIA	2.61	1.86	2.68	1.75	2.70	1.94	2.61	1.82
ESTADO	2.52	1.81	2.57	1.78	2.50	1.91	2.50	1.82

Fonte: IDESP

Tabela 9. Relação das Metas do IDESP

E. E. PROFESSOR LAURO SANCHEZ									
METAS 2010		METAS 2011		METAS 2012		METAS 2013		METAS 2014	
EF	EM	EF	EM	EF	EM	EF	EM	EF	EM
2.85	2.01	2.20	1.66	2.48	1.56	3.23	1.79	2.88	1.48

Fonte: IDESP

Como podemos observar nos quadros acima a escola em que desenvolvemos a pesquisa conseguiu cumprir as metas do IDESP nos quatro últimos anos analisados somente em 2011, apenas para o Ensino Fundamental e em 2012 para os Ensinos Fundamental e Médio.

O Projeto Político Pedagógico da E. E. Prof. Lauro Sanchez tem por objetivo a construção social do desenvolvimento de projetos que propiciem a participação do educando na formação de uma sociedade mais humana, voltada para a qualidade de vida e através dela a elevação da autoestima daqueles que nela se inserem.

Nesse intuito, procura reforçar processos de democratização e humanização para que penetrem e transformem os diferentes meios sociais em que se desenvolvem. Buscando assim, formar seres sensíveis capazes de identificar os problemas que os cercam e para encontrar soluções que propiciem a justiça e bem social de todos os indivíduos. Nossa escola tem como missão realçar os valores que acredita dar consistência ética ao exercício pleno da cidadania: a solidariedade, justiça, esperança, liberdade e capacidade crítica.

4.1.1. Caracterização das Turmas de 2013

Em 2013, a maioria dos alunos das três turmas participantes dessa pesquisa foi acompanhada pela pesquisadora na disciplina de Matemática por três anos, e no ano de 2013 contamos com a ajuda de um professor de apoio, que tem a função de auxiliar o professor titular da sala, ajudando os alunos que apresentam muita dificuldade e rendimento insatisfatório. Vamos identificar as turmas por A, B e C.

A maior parte dos alunos da turma A são disciplinados, de modo geral participativos e interessados, aproximadamente a metade da sala apresenta dificuldade com os conteúdos matemáticos, precisando de auxílio para desenvolver os mesmos, e aproximadamente um quarto desses alunos tem baixa assiduidade agravando suas dificuldades, pois não tem continuidade nos conteúdos.

O desenvolvimento das atividades durou duas aulas de 50 minutos cada, apresentaram dificuldade na interpretação dos problemas, não conseguiram organizar os esquemas de solução, reclamaram do grau de dificuldade dos problemas com poucas intervenções no decorrer das aulas.

A turma identificada como B, são alunos na sua maioria disciplinados, não muito participativos e com grandes dificuldades no desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, onde uma grande parte destes muito faltosos, comprometendo ainda mais o seu rendimento. Mas há uma pequena parte de aproximadamente 20%, que se sobressai aos demais, sendo estes muito capazes, participativos, críticos e que gostam de Matemática.

Essa turma utilizou quatro aulas de 50 minutos cada, duas aulas a mais que as outras duas turmas, para desenvolver as duas atividades propostas. Tiveram muita dificuldade na interpretação dos problemas, reclamaram muito do grau de dificuldade dos mesmos, alguns entregaram a folha de resposta em branco e com várias intervenções no decorrer das aulas.

A turma C, ao contrário das outras duas é uma classe dinâmica, são participativos e interessados, gostam muito das aulas de Matemática e tem rendimento excelente nessa disciplina. O grupo que possui dificuldade no entendimento dos conteúdos e precisa de auxílio para desenvolver as atividades é de aproximadamente 10%.

Essa turma utilizou duas aulas de 50 minutos cada, para desenvolver as duas atividades propostas. Apresentaram dificuldade na interpretação dos problemas, reclamaram muito do grau de dificuldade dos mesmos, alguns entregaram a folha de resposta em branco.

4.1.2. Caracterização das Turmas de 2014

Os alunos da 5ª série/6º ano são na sua maioria educados, produtivos, participativos e interessados, todos os professores elogiam muito essa turma. A pesquisadora não precisou intervir na resolução das atividades propostas e desenvolveram as atividades no tempo determinado.

Na 6ª série/7º ano os alunos são produtivos, questionadores e participativos, os professores gostam muito de trabalhar com eles. Desenvolveram as atividades com empenho no tempo estipulado e acharam os problemas simples.

A 7ª série/ 8º ano é uma sala participativa, são produtivos, agitados e compreendem com facilidade os conteúdos, essa turma resolveu as atividades proposta dentro do tempo estipulado, sem problemas maiores, acharam as atividades no geral fáceis.

Os alunos da 8ª série/9º ano são críticos, produtivos e inteligentes, mas tem um comportamento péssimo dando muito trabalho aos professores, e atrapalhando o desenvolvimento das atividades. Essa turma desenvolveu as atividades no tempo previsto, também acharam os problemas fáceis, não precisou da intervenção da pesquisadora.

4.2. Elaboração das Atividades

As atividades foram aplicadas para diagnosticar as dificuldades e defasagens dos alunos no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental.

Devido às poucas situações de aprendizagens que apareceram nos Cadernos do Professor/Aluno envolvendo o raciocínio combinatório e que não contemplava todas as habilidades e competências necessárias para o desenvolvimento desse tema, os problemas propostos nas atividades diagnósticas de 2013 e 2014 foram tirados de livros didáticos.

Segundo a pesquisa realizada por Pinheiro e Sá (2007) a ferramenta mais utilizada pelos professores na elaboração de suas aulas é o uso do livro didático, e por mais que alguns professores tenham apontado a utilização da resolução de problemas ou modelagem em suas aulas, ainda é muito forte a tendência formalista no ensino de Análise Combinatória.

Os professores precisam utilizar as habilidades do raciocínio combinatório na resolução de problemas reais, pois o aluno não consegue compreender informações sem significados para sua vida e as atividades desenvolvidas pelos livros didáticos devem abordar diferentes problemas e diferentes habilidades, propiciando e ampliando as competências relacionadas à combinatória.

Em 2013, as atividades foram aplicadas em três 9º anos/8 ªséries, com o objetivo de analisar as dificuldades apresentadas pelos alunos no desenvolvimento do raciocínio combinatório, bem como para nortear o aprimoramento e reflexão dessas atividades com o intuito de desenvolver materiais manipulativos que auxiliem no desenvolvimento e entendimento dos conceitos básicos da Análise Combinatória, para o Ensino Fundamental.

Esta atividade constava de seis problemas de contagem, que envolvem os conceitos básicos da Análise Combinatória, os alunos poderiam resolvê-los da forma que quisessem com a ajuda do Principio Multiplicativo, através de esquemas ou tabelas, da árvore das possibilidades ou ainda enumerando cada possibilidade.

Nossa expectativa era que os alunos fossem capazes de interpretar os problemas, diferenciando implicitamente os métodos de contagem como arranjo, permutação e combinações, sem o uso das fórmulas (que nessa série não é formalizada e nem generalizada), trabalhando apenas com o raciocínio combinatório.

As atividades foram elaboradas a partir de conteúdos estudados anteriormente em sala de aula. Pode-se dizer que a estrutura dos exercícios são considerados comuns em livros didáticos.

4.2.1. Atividades Aplicadas em 2013

A atividade proposta foi realizada por 71 alunos e contava com cinco problemas que poderiam ser resolvidos pelo Principio Multiplicativo e Aditivo, pela árvore das possibilidades, ou ainda, através da enumeração das possibilidades possíveis.

A seguir, pode-se observar as atividades aplicadas com algumas estratégias de resoluções utilizadas pelos alunos, ao resolverem os problemas propostos.

ATIVIDADE PROPOSTA

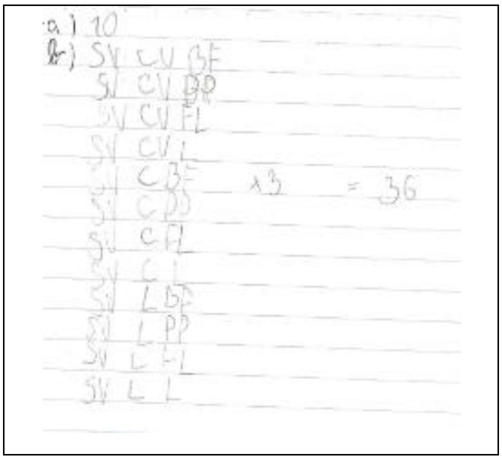
Problema 1. Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de saladas (salada verde, salada russa ou salpicão), sopas (caldo verde, canja ou de legumes) e pratos principais (bife com fritas, peixe com purê, frango com legumes ou lasanha).

a) De quantos modos se pode escolher um prato deste cardápio?

b) De quantos modos se pode escolher uma refeição completa, formada por uma salada, uma sopa, e um prato principal?

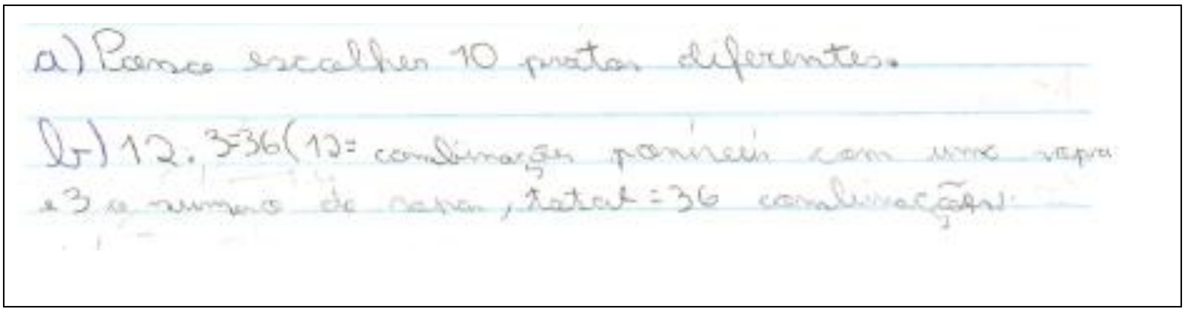
Algumas resoluções:

Figura 9. Resolução A



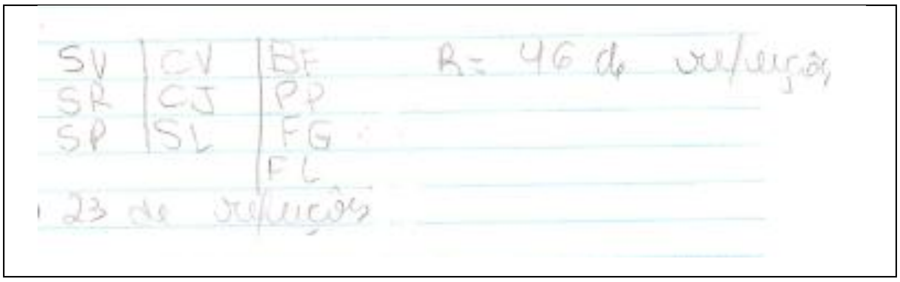
Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 10. Resolução B



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 11. Resolução C



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

As resoluções A e B estão corretas, na resolução A o aluno usou o diagrama de árvore e na resolução B o aluno resolveu através do Princípio Multiplicativo e na resolução C o aluno tentou fazer um diagrama e apenas utilizou os dados presentes no enunciado, mas não houve compreensão da situação proposta.

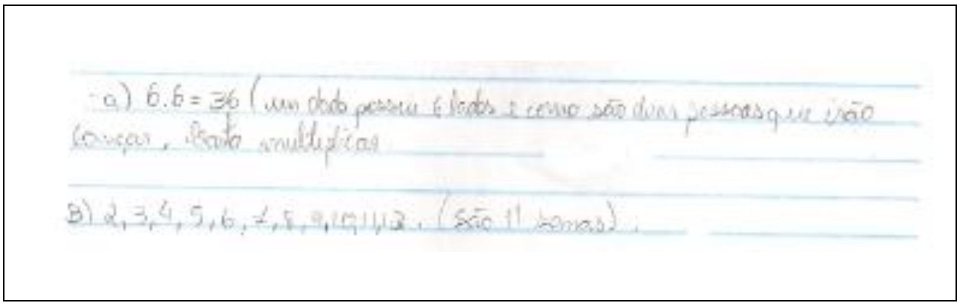
Nesse problema percebemos resoluções por meio dos princípios aditivo e multiplicativo. Os alunos poderiam fazer a resolução através de esquemas ou da árvore das possibilidades. Nessa questão 39% dos alunos que realizaram estas atividades deixaram este problema em branco, 45% dos alunos erraram esse problema onde 5,6% erraram com tentativa de resolução e 39,4% erraram a resposta sem tentativa de resolução e apenas 15,6 % dos alunos acertaram essa questão e destes apenas 4,3% acertaram resolvendo por meio da árvore das possibilidades e os outros 11,3% acertaram sem estratégia de resolução.

Problema 2. João e Isabel lançam cada um, um dado.

a) Quantas são as possíveis combinações de resultado?
b) Quantas são as possíveis somas que eles podem obter?

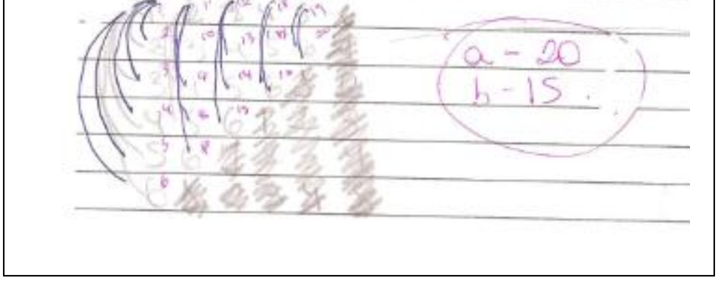
Algumas Resoluções:

Figura 12. Resolução A



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 13. Resolução B



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

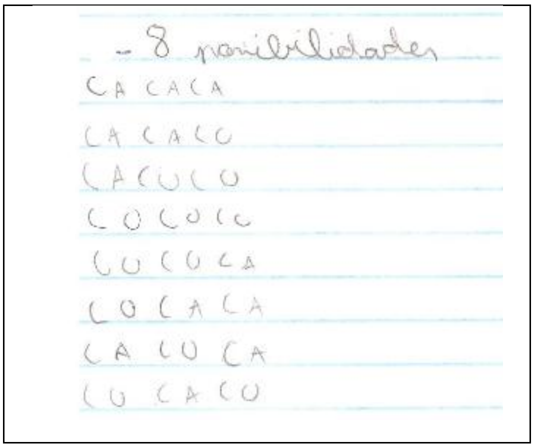
Na resolução A o aluno compreendeu a proposta do problema e o resolveu corretamente, porém na resolução B o aluno tentou construir um esquema para a resolução, mas não houve compreensão da proposta do problema.

Nesse problema o aluno precisa conhecer o dado de seis lados e por meio do principio multiplicativo ou da enumeração das possibilidades ele conseguiria responder a questão a e analisando a questão b, o aluno por meio do cálculo mental conseguiria encontrar as possíveis somas dos dois dados, 38% dos alunos deixaram em branco esse problema, 12,7% erraram as duas perguntas, 12,7% acertaram as duas perguntas e 36,6% acertaram apenas a pergunta a.

Problema 3. Jogamos uma moeda três vezes. Quantas sequências diferentes de cara e coroa podemos obter?

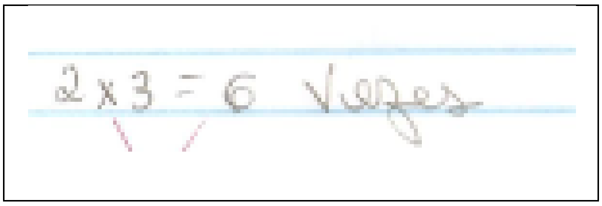
Algumas Resoluções:

Figura 14. Resolução A



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 15. Resolução B



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

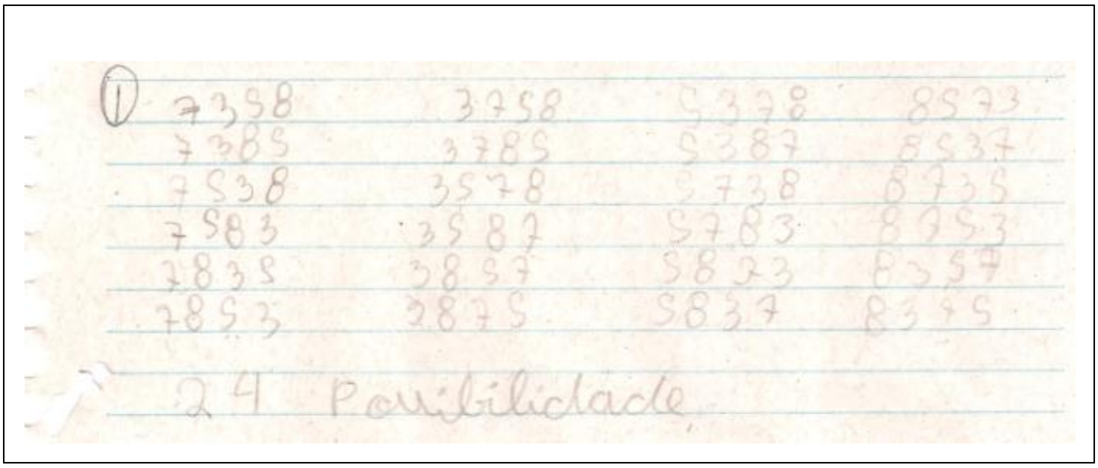
Por meio da enumeração de todas as possibilidades o aluno da Resolução A conseguiu resolver corretamente o problema proposto. A Resolução B está incorreta, o aluno tentou resolver pelo principio multiplicativo, essa operação feita não possui relação com a situação proposta.

Esse problema poderia ser resolvido por meio do Princípio Multiplicativo ou da enumeração das possibilidades, alguns alunos pegaram três moedas para tentar resolver o problema, em termos gerais 43,7% dos alunos deixaram o problema em branco, 22,5% erram o problema sem estratégia de resolução e 33,8% dos alunos acertaram esse problema, onde 5,6% acertaram enumerando as possibilidades e 28,2% acertaram sem estratégia de resolução.

Problema 4. Uma pessoa, ao abrir uma conta corrente em um banco, deve escolher uma senha composta por quatro algarismos sem repetição para utilizar o seu cartão. Se esta pessoa gosta dos algarismos 7, 3, 5, 8 e deseja dispor esses números em ordem para formar uma senha, pergunta-se: qual é o número total de senhas que podem ser formadas com esses algarismos.

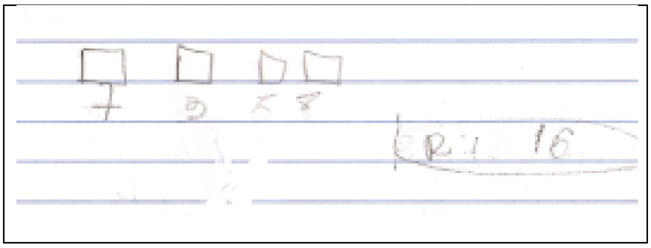
Algumas resoluções:

Figura 16. Resolução A



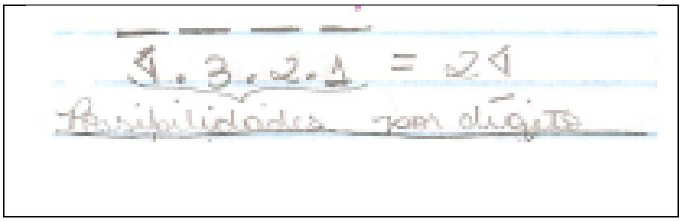
Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 17. Resolução B



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 18. Resolução C



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

A resolução A foi feita por meio da enumeração de todas as possibilidades, esse aluno compreendeu a proposta do problema, a resolução B como podemos observar está errada, essa resolução não possui relação direta com a proposta do problema e a resolução C também está correta e o aluno utilizou o principio multiplicativo para respondê-la.

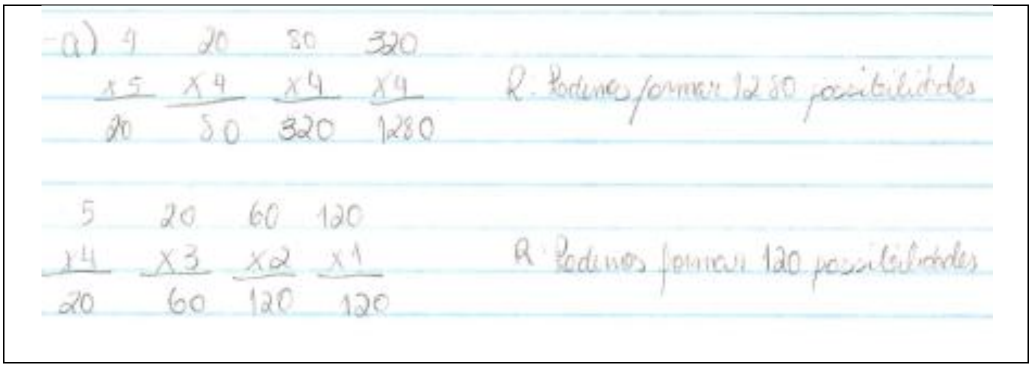
Esse problema envolve o conceito de arranjo simples, alguns alunos resolveram por meio do principio multiplicativo, outros por meio da enumeração de todas as possibilidades e outros organizando esquemas de resolução, 2,8% dos alunos deixaram o problema em branco, 61,9% acertaram o problema sendo 22,5% respostas certas sem estratégias de resolução e 39,4% acertaram desenvolvendo o problema através do diagrama de árvore, da enumeração de todas as possibilidades e do principio multiplicativo, 35,3% dos alunos erraram esse problema, sendo 17% erraram sem estratégias de resolução e 18,3% erraram com a estratégia de algum dos tipos de resolução já mencionados anteriormente.

Problema 5. Dóris dispõe de 5 cores diferentes de lápis: azul, verde, laranja, amarelo e vermelho. Ela quer pintar o desenho de uma bandeira de 5 listras horizontais.

a) De quantas maneiras Dóris poderá pintar a bandeira se as listras adjacentes não puderem ter a mesma cor?
b) De quantas maneiras Dóris poderá pintar a bandeira se quiser que todas as listras tenham cores diferentes?

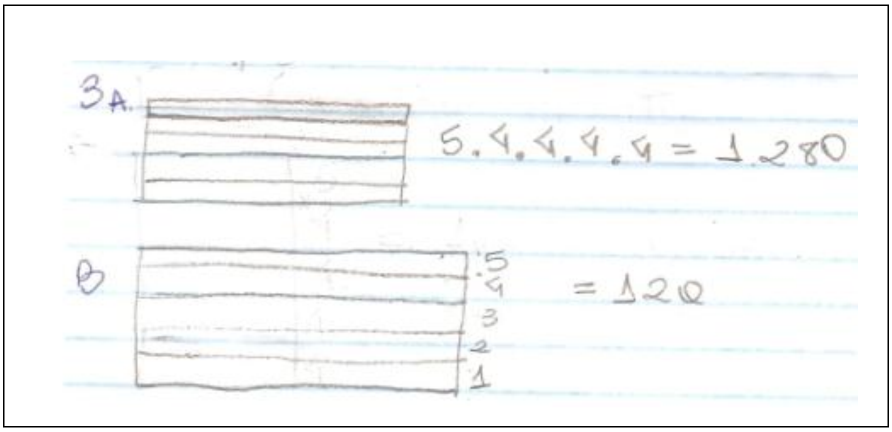
Algumas Resoluções:

Figura 19. Resolução A



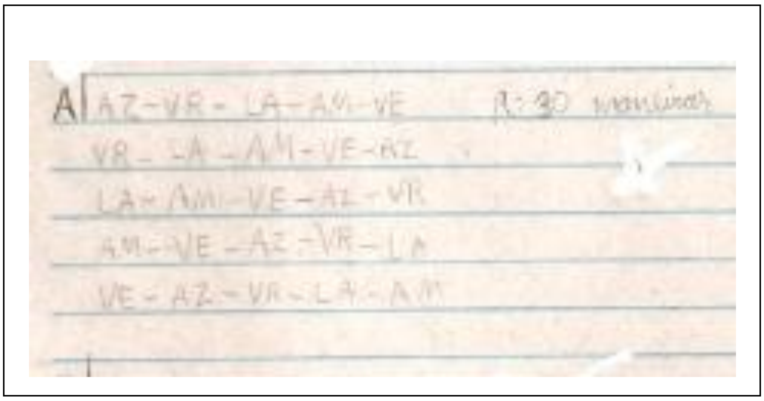
Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 20. Resolução B



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 21. Resolução C



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Nas resoluções A e B percebemos que os alunos utilizaram o Princípio Multiplicativo como estratégia de resolução e conseguiram compreender a proposta do problema; na resolução C o aluno tentou enumerar todas as possibilidades, este mesmo errando compreendeu a proposta do problema, porém esse método de resolução para esse problema é inviável, pois o número de possibilidades é elevado não conseguindo descrever todas elas.

Esse problema envolve o conceito de arranjo simples e arranjo com repetição, é um problema que poderia ser resolvido por meio do principio multiplicativo ou outro tipo de esquema, enumerar todas as possibilidades nesse caso é inviável, pois o número de possibilidades é grande. Nesse problema 31% dos alunos deixaram essa questão em branco, 31% erraram as duas perguntas do problema, 17% acertaram as duas perguntas do problema, 7% acertaram somente a pergunta a e 14% acertaram somente a pergunta b.

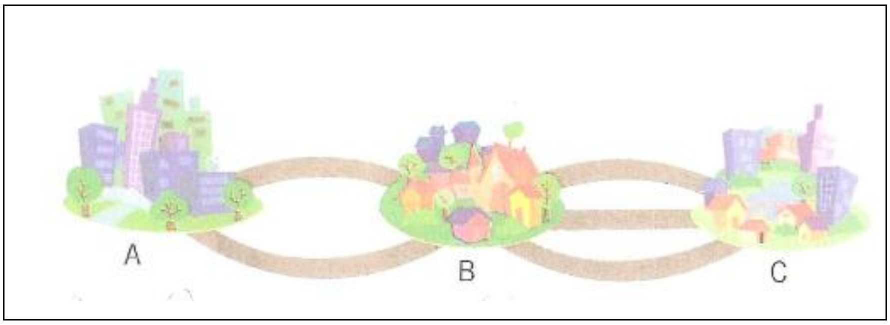
4.2.2. Atividades Aplicadas em 2014

Devido aos resultados das atividades aplicadas em 2014, aplicamos outras atividades com problemas sobre o raciocínio combinatório do Ensino Fundamental Anos Iniciais, problemas simples que desenvolvem a base do raciocínio combinatório, atividades consideradas mais atraentes devido aos desenhos e figuras. Essas atividades foram aplicadas em uma turma de 6º ano, 7º ano, 8º ano e 9º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, para que possamos detectar quais as dificuldades encontradas pelos alunos, assim como, os conceitos que eles não aprenderam ou não internalizaram, e tentar encontrar algumas soluções para que o professor possa desenvolver seu trabalho, nessa área, de forma mais simples utilizando recursos visuais e manipulativos.

- **PRIMEIRA ATIVIDADE**

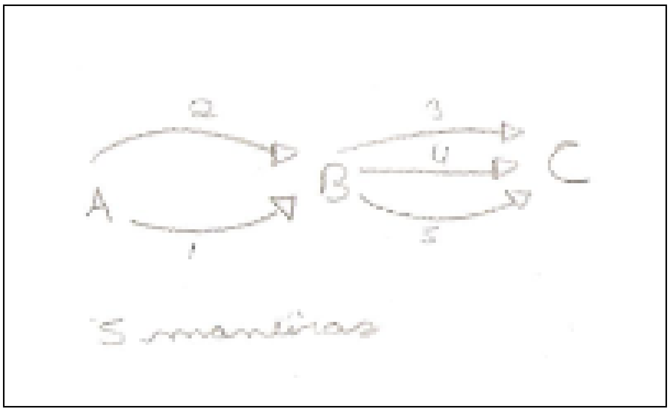
Problema 1. A família de Beto vai viajar da cidade **A** para a cidade **C,** passando pela cidade **B** para ver alguns parentes. Analise o desenho e responda: De quantas maneiras diferentes eles podem ir de **A** até **C**?

Figura 22. Caminhos diferentes



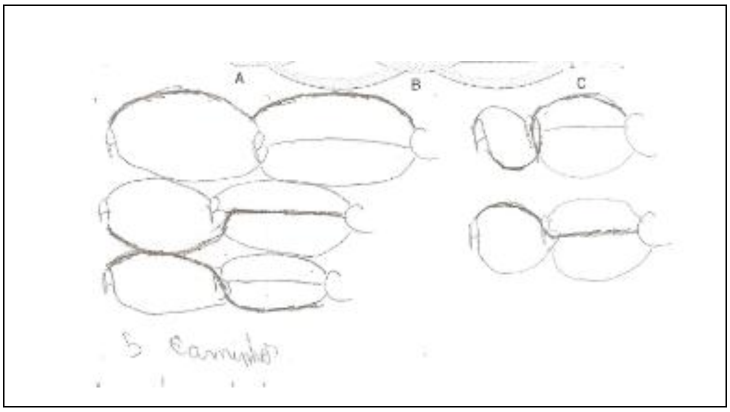
Fonte: DANTE, 2008, p. 135

Figura 23. Resolução A



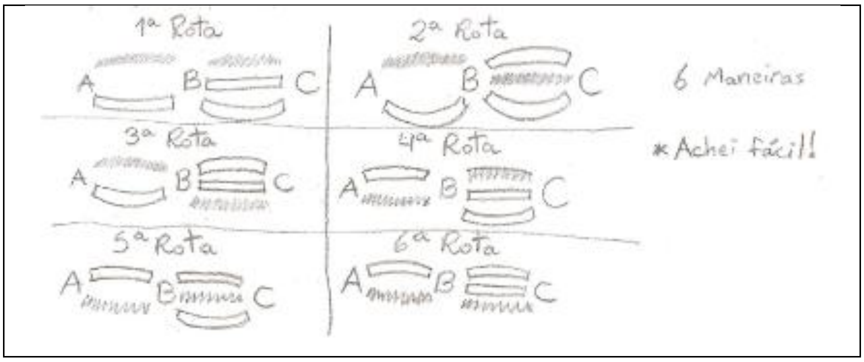
Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 24. Resolução B



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 25. Resolução C



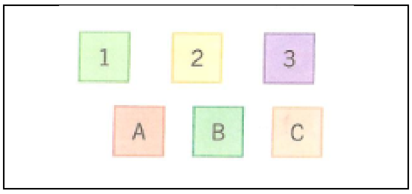
Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Percebemos nas resoluções A, B e C que os alunos tentaram criar uma estratégia de resolução enumerando todas as possibilidades e que o aluno A não compreendeu a proposta do problema apenas somando os dados do problema, os alunos B e C compreenderam a estratégia de resolução enumerando todas as possibilidades apesar do aluno B não ter conseguido listar todas elas.

Esse problema é simples e poderia ser resolvido enumerando todas as possibilidades ou por meio do Princípio Multiplicativo, 50% dos alunos acertaram a resolução do problema, 44,6% dos alunos erraram o problema e 5,4% dos alunos deixaram o problema em branco.

Problema 2. Paula está brincando com 6 fichas: três contêm um número e as outras três contêm uma letra. Ela quer formar pares de um número com uma letra, nessa ordem.

Figura 26. Fichas

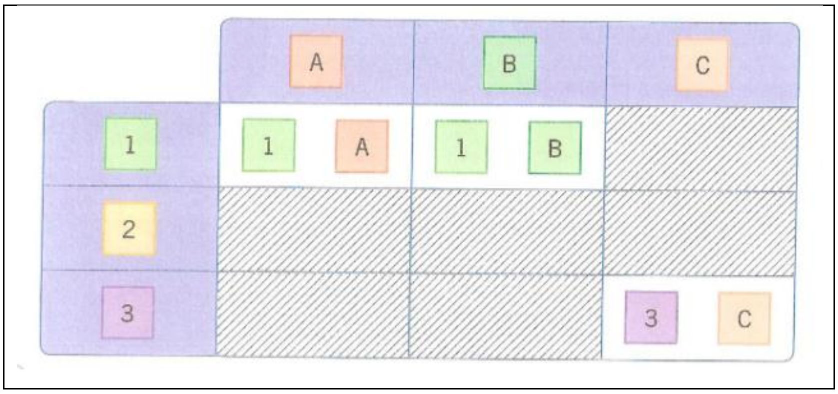


Fonte: DANTE, 2008, p. 135

a) Quantas possibilidades existem?

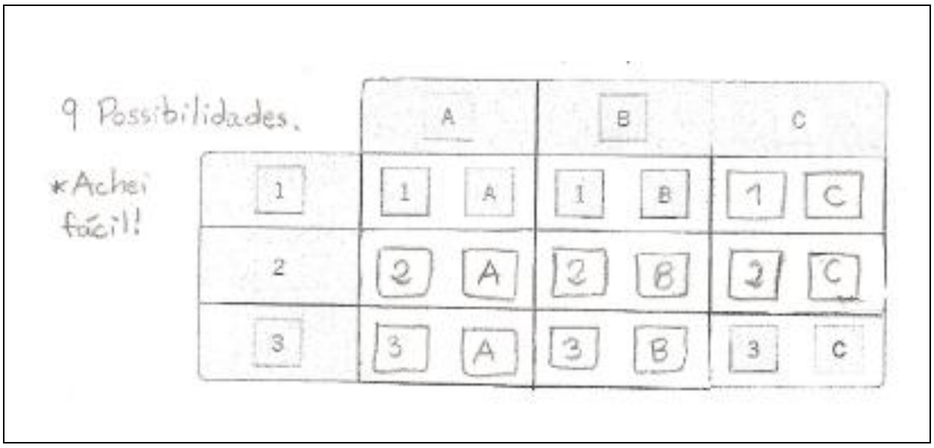
b) Complete a tabela e confira a resposta que você deu no item **a**.

Figura 27. Quadro para completar com as fichas



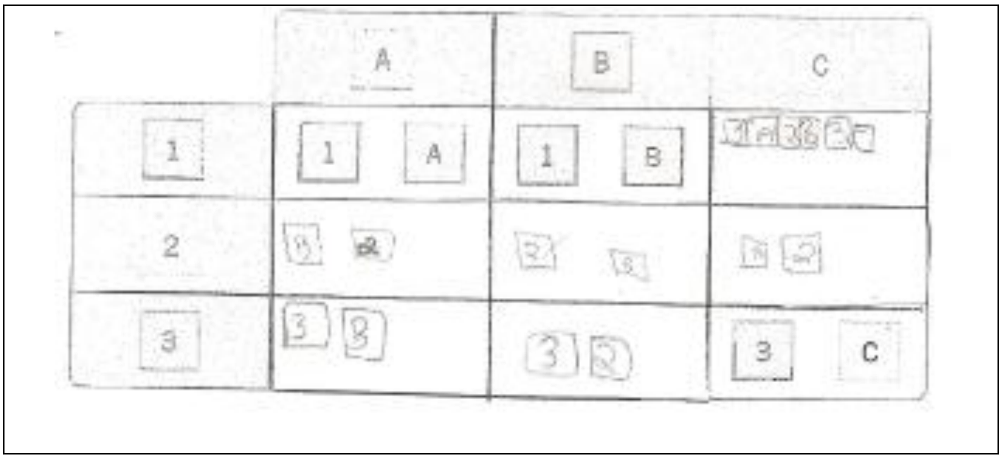
Fonte: DANTE, 2008, p. 135

Figura 28. Resolução A



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 29. Resolução B

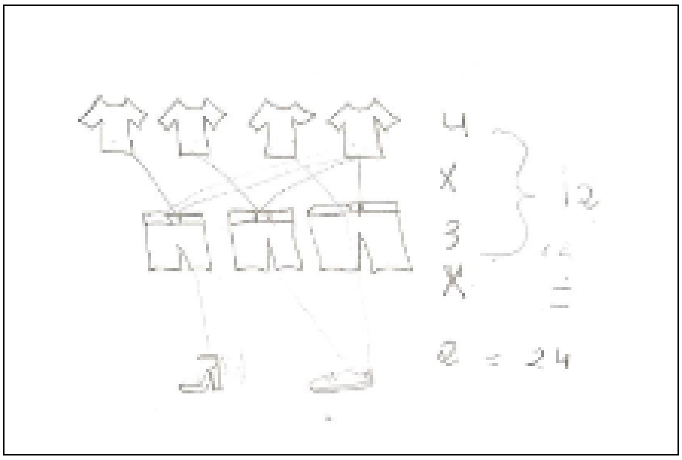


Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Esse problema possui resolução simples, o aluno precisava apenas ter completado a tabela e contado as possibilidades. Esperava-se uma porcentagem alta de acertos, 48,2% resolveram o problema corretamente, 40,2% dos alunos acertaram apenas uma das questões, 4,5% dos alunos erraram o problema e 8,1 % dos alunos deixaram o problema em branco.

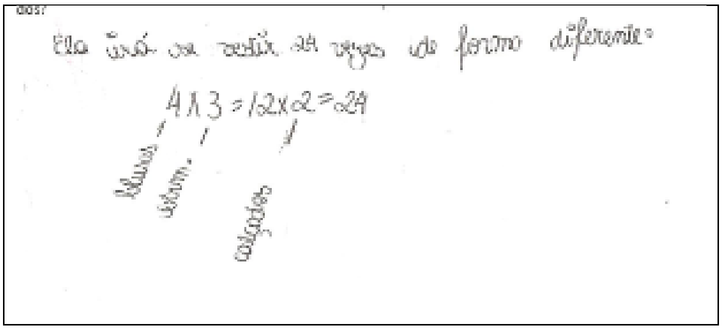
Problema 3. Carol vai viajar para a praia. Na mala colocou 3 bermudas, 4 blusas, um par de tênis e um par de sandálias. De quantas maneiras diferentes Carol poderá se vestir usando uma bermuda, uma blusa e um par de calçados.

Figura 30. Resolução A



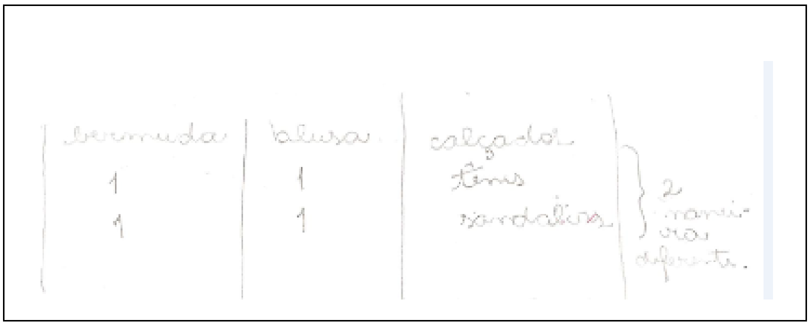
Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 31. Resolução B



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 32. Resolução C



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Esse é um problema convencional da Análise Combinatória. Inicia-se o estudo através do diagrama de árvore e os alunos percebem, com o decorrer das aulas, que é possível utilizar o Princípio Multiplicativo na resolução desses problemas sem a necessidade do diagrama de árvore. Percebemos na resolução A que o aluno conseguiu resolver pensando no diagrama de árvore e na resolução B o aluno já conseguiu resolver diretamente pelo Princípio

Multiplicativo, já na resolução C o aluno construiu um esquema para a resolução e não obteve êxito.

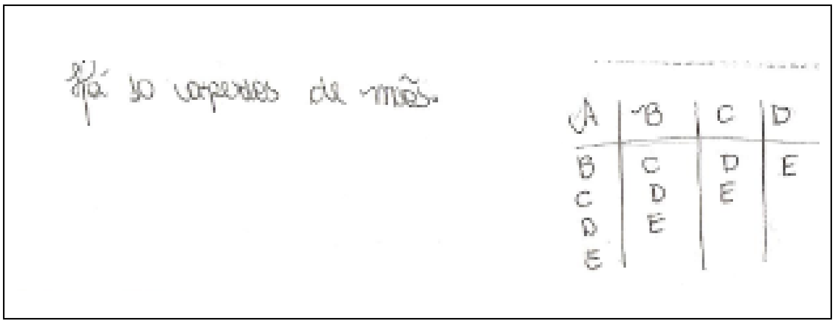
Esse problema mostra a defasagem dos alunos em relação a esses conceitos, pois 68,8% erraram o problema ou o deixaram em branco e apenas 31,2% acertaram o problema.

Problema 4. Numa reunião de equipe há 5 alunos. Se cada um trocar um aperto de mãos com todos os outros, quantos apertos de mãos serão ao todo?

Figura 33. Reunião

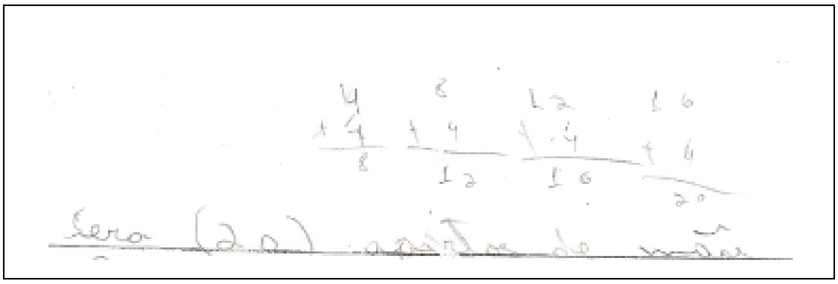
Fonte: DANTE, 2008, p. 135

Figura 34. Resolução A



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 35. Resolução B



Arquivo da Pesquisadora

Esse é um típico problema de combinação. Os alunos erraram esse tipo de problema, pois não perceberam que os elementos diferem entre si pela natureza e não pela ordem. A resolução A demonstra que o aluno compreendeu a proposta do problema e elaborou uma estratégia de resolução, enquanto que na resolução B o aluno não compreendeu a proposta do problema.

Os dados relacionados a esse problema mostra que 53,6% dos alunos compreenderam a proposta do problema e 46,4% dos alunos deixaram em branco ou erraram o problema.

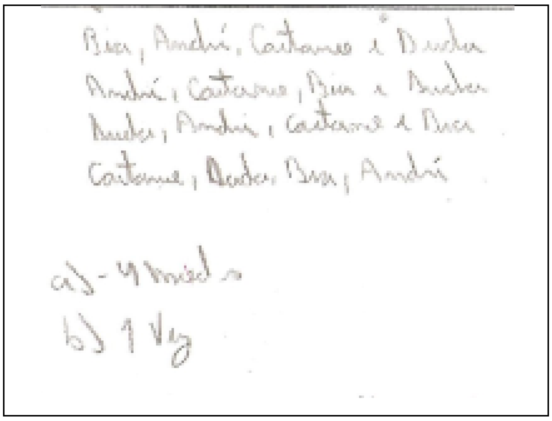
Problema 5. André, Bia, Caetano e Duda vão fazer uma fila para receber a merenda.

a) De quantos modos diferentes eles podem ocupar lugar nessa fila?
b) Em quantos desses modos Bia ocuparia
c) o primeiro lugar nessa fila?

Figura 36. Fila da Merenda

Fonte: CENTURIÓN, 2009, p. 10

Figura 37. Resolução A



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 38. Resolução B

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

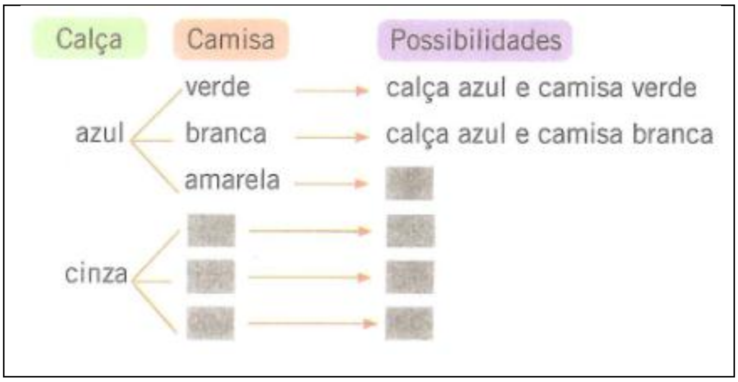
Esse problema envolve arranjo simples, o raciocínio desse problema difere do anterior pela natureza e ordem dos elementos, percebemos nas resoluções A e B que os alunos compreenderam a proposta do problema porém não conseguiram enumerar todas as possibilidades e consequentemente não conseguiram responder corretamente a pergunta b.

Esse problema foi considerado difícil por parte dos alunos, 75% erraram, 17% deixaram em branco, 5,3% acertaram somente uma das questões e apenas 2,75 dos alunos acertaram o problema.

2ª ATIVIDADE

Problema 1. Frederico tem duas calças, uma azul e uma cinza, e tem três camisas, uma verde, uma branca e uma amarela. Quantas são as possibilidades de ele escolher uma calça e uma camisa? Complete a **árvore das possibilidades** e depois responda a questão?

Figura 39. Árvore das possibilidades



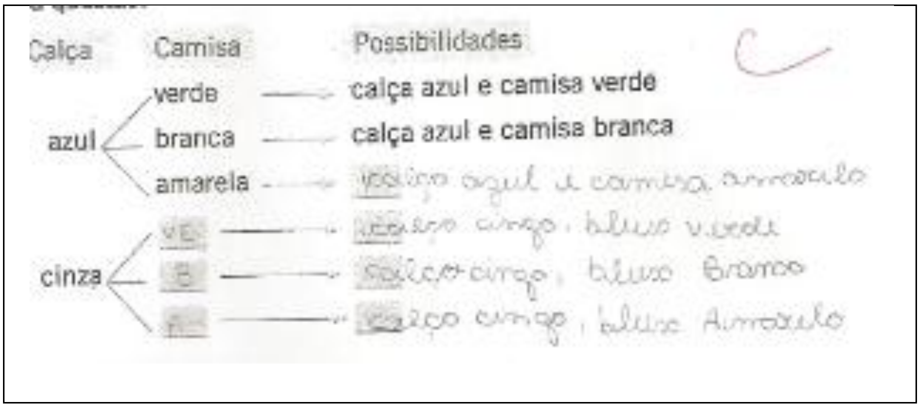
Fonte: DANTE, 2008, p. 190

Faça o que se pede:

a) Construa a árvore das possibilidades e responda: E se Frederico tivesse 2 calças, 2 camisas e 2 bonés, quantas seriam as escolhas possíveis de uma calça, uma camisa e um boné?

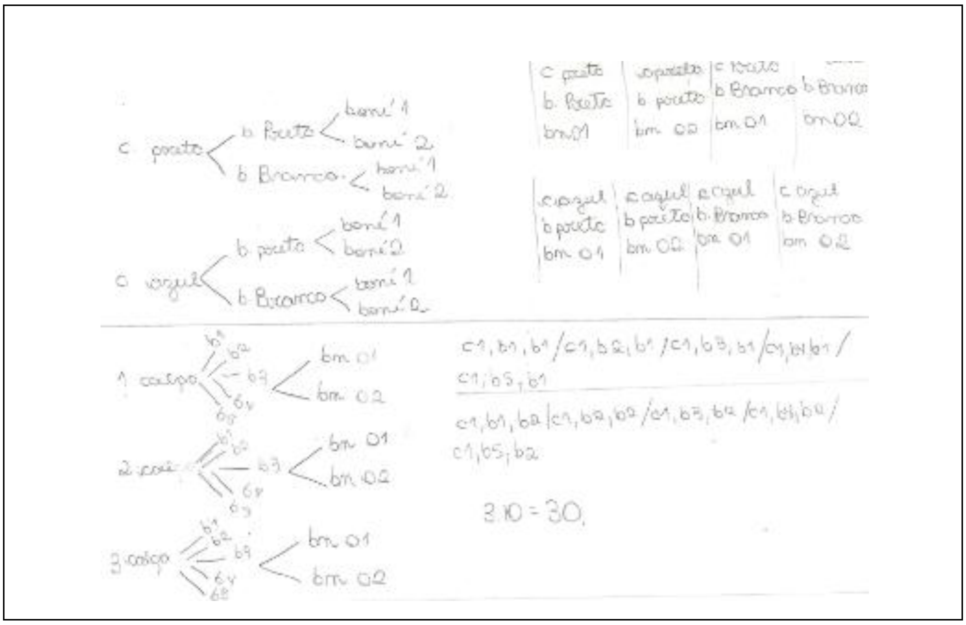
b) E se ele tivesse 3 calças, 5 camisas e 2 bonés, quantas seriam as escolhas possíveis de uma calça, uma camisa e um boné?

Figura 40. Resolução A



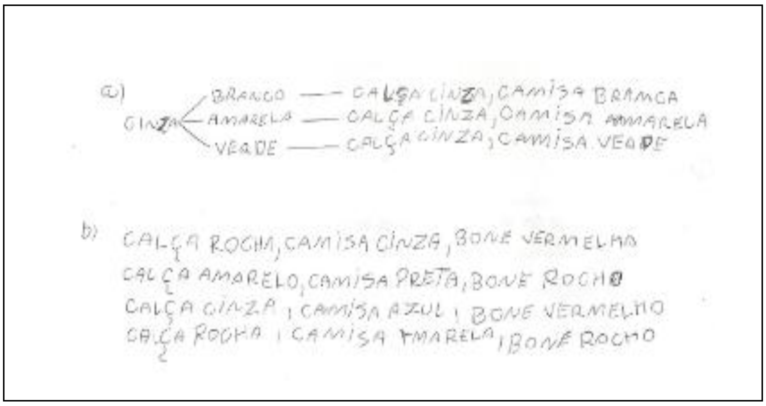
Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 41. Resolução B



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 42. Resolução C



Arquivo da Pesquisadora

Nesse problema os alunos conseguiram completar o quadro que pedia para completar o diagrama de árvore. Como vemos na resolução A, 89,5% dos alunos acertaram e 10,5% erraram esse item do problema.

Nas questões complementares do problema percebemos que a resolução A compreendeu a proposta do diagrama de árvore acertando as questões, enquanto a resolução B não compreendeu o diagrama de árvores e errou as questões complementares do problema.

Os dados obtidos nesse problema nos mostra que 54,4% dos alunos acertaram o problema, 21,1% acertaram somente uma das questões complementares, 24,5% dos alunos erraram o problema.

Problema 2. Juliana foi à sorveteria e pediu um sorvete com três bolas: morango, chocolate e flocos.

Figura 43. Sorvete

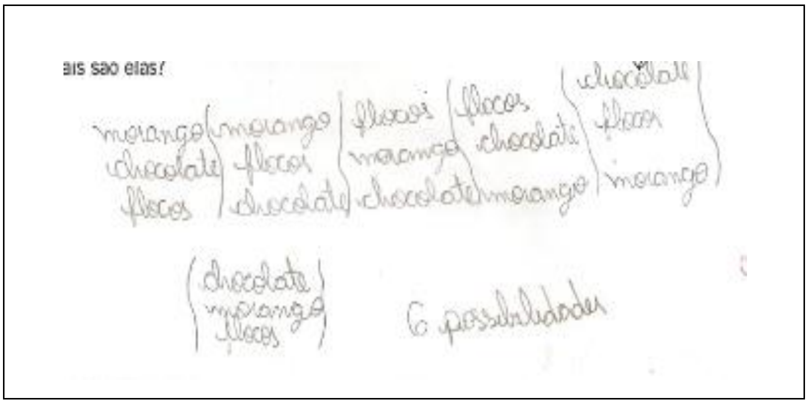
Fonte: DANTE, 2008, p. 190

Agora responda:

a) De quantas maneiras diferentes as bolas podem ser colocadas na casquinha?

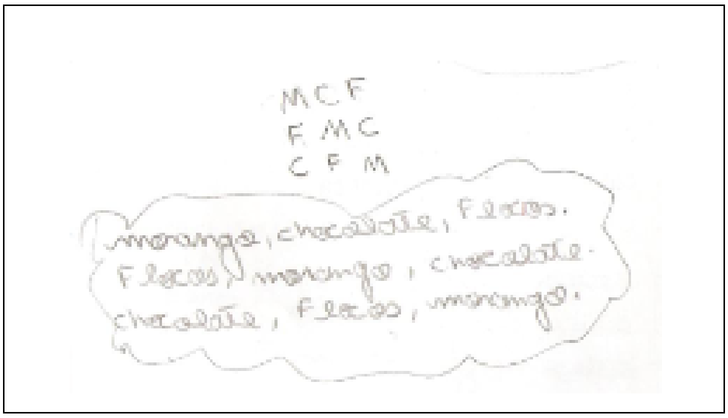
b) Quais são elas?

Figura 44. Resolução A



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 45. Resolução B



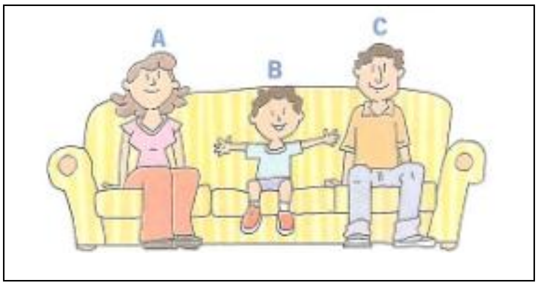
Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Esse problema envolve o conceito de arranjo simples onde a natureza e ordem são importantes. Na resolução A o aluno compreendeu a importância da natureza e da ordem na proposta do problema e na resolução B o aluno não conseguiu compreender esse conceito.

Os dados obtidos nesse problema nos mostra que 64,9% dos alunos acertaram o problema, 18% erraram e 3,5% deixaram o problema em branco.

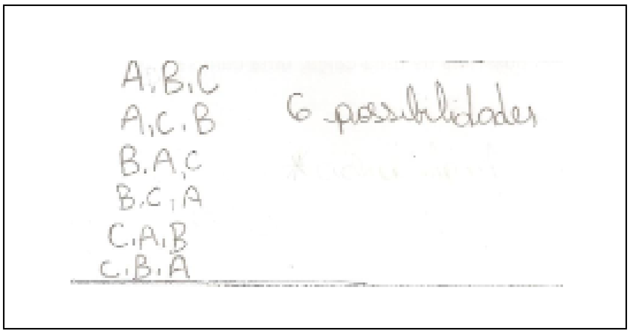
Problema 3. De quantas maneiras diferentes, em relação à ordem, 3 pessoas podem sentar num sofá de 3 lugares?

Figura 46. Pessoas sentadas no sofá



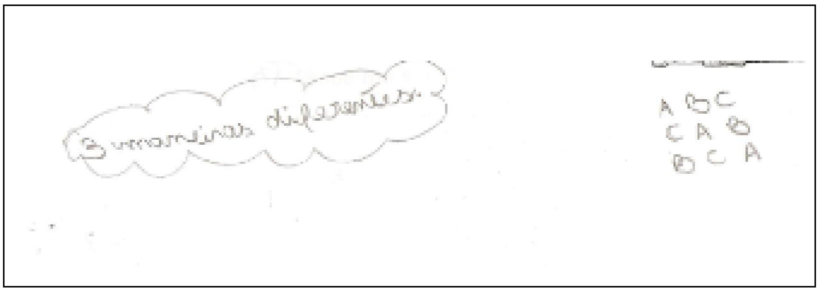
Fonte: DANTE, 2008, p. 81

Figura 47. Resolução A



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 48. Resolução B



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

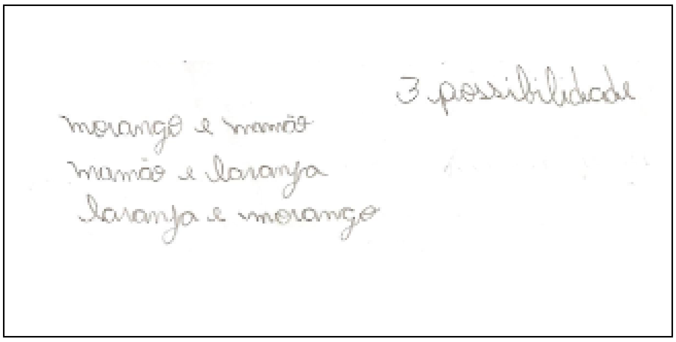
Como no problema anterior, esse problema envolve o conceito de arranjo simples onde a natureza e ordem são importantes, na resolução A o aluno compreendeu a importância da natureza e da ordem na proposta do problema e na resolução B o aluno não conseguiu compreender esse conceito.

O índice de acertos do problema 3 foi maior que o anterior 70,1% dos alunos acertaram e 29,9% erraram o problema.

Problema 4. Márcia quer fazer um suco com 2 frutas apenas. Ela tem 3 frutas: morango, mamão e laranja.

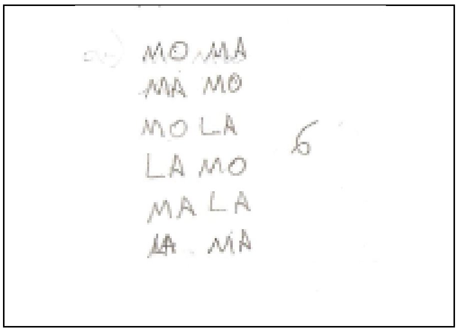
a) Quais são as possibilidades de combinar 2 frutas?
b) Quantas são essas possibilidades?

Figura 49. Resolução A



Fonte: Arquivo do Pesquisador

Figura 50. Resolução B



Fonte: Arquivo do Pesquisador

Esse problema envolve o conceito de combinação simples onde a natureza dos elementos é importante e não a ordem desses elementos, na resolução A o aluno compreendeu a importância da natureza e não da ordem, enquanto na resolução B o aluno considerou importante a ordem e não percebeu que o suco de morango e mamão é o mesmo suco de mamão e laranja.

Nesse problema 70,1% dos alunos acertaram e 29,9% erraram o problema.

4.3. Análise Quantitativa dos Resultados das Atividades

Nessa seção o objetivo é apresentar de forma concisa os resultados obtidos no desenvolvimento das atividades e já discutidos na seção anterior.

Optamos por categorizar as soluções dos alunos das atividades diagnósticas aplicadas da seguinte forma: soluções corretas com algum tipo de estratégia de resolução, respostas corretas sem estratégias de resolução, soluções erradas com algum tipo de estratégia de resolução, respostas erradas sem estratégias de resolução, problemas deixados em branco e em alguns problemas que possuem mais de uma pergunta foram apontadas apenas as respostas certas.

4.3.1.Atividade de 2013

Nesse conjunto de atividades participaram 71 alunos das 8ª séries/ 9º anos.

a) Problema 1

Tabela 10. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 1

Nº de alunos	Resultados	%
03	Acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	4,3
08	Acertaram o problema sem estratégia de resolução	11,3
04	Erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	5,6
28	Erraram o problema sem estratégia de resolução	39,4
28	Deixaram em branco	39

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Vemos dessa forma que 15,6% acertaram o problema, 45% erraram o problema e 39,4% deixaram o problema em branco.

b) Problema 2

Tabela 11. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 2

Nº de alunos	Resultados	%
04	Acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	5,7
05	Acertaram o problema sem estratégia de resolução	7

26	Acertaram apenas a letra *a* do problema	36,6
01	Erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	1,4
08	Erraram o problema sem estratégia de resolução	11,3
27	Deixaram em branco	38

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Dessa forma vemos que 12,7% dos alunos acertaram o problema, 36,6% acertaram apenas a letra a, 12,7% dos aluno erraram o problema e 38% deixaram o problema em branco.

c) Problema 3

Tabela 12. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 3

Nº de alunos	Resultados	%
04	Acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	5.6
20	Acertaram o problema sem estratégia de resolução	28,2
0	Erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	0
16	Erraram o problema sem estratégia de resolução	22,5
31	Deixaram em branco	43,7

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Neste problema vemos que 33,8% dos alunos acertaram o problema, 22,5% dos alunos erraram esse problema e 43,7% deixaram o problema em branco.

d) Problema 4

Tabela 13. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 4

Nº de alunos	Resultados	%
28	Acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	39,4
16	Acertaram o problema sem estratégia de resolução	22,5
13	Erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	18,3
12	Erraram o problema sem estratégia de resolução	17
02	Deixaram em branco	2,8

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Vemos que dessa forma 61,9% dos alunos acertaram o problema, 35,3% erraram o problema e 2,8% deixaram o problema em branco.

e) **Problema 5**

Tabela 14. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 5

Nº de alunos	Resultados	%
08	Acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	11,3
04	Acertaram o problema sem estratégia de resolução	5,6
03	Acertaram somente a letra *a* através de algum tipo de resolução	4,3
02	Acertaram somente a letra *a* colocando solução direta	2,8
10	Acertaram somente a letra *b* colocando solução direta	14
03	Erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	4.3
19	Erraram o problema sem estratégia de resolução	26,7
22	Deixaram em branco	31

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Vemos que 17% dos alunos acertaram o problema. 21% dos alunos acertaram apenas uma das questões, 31% erraram o problema e 31% deixaram o problema em branco.

4.3.2. 1ª Atividade de 2014

Nesse conjunto de atividades participaram 112 alunos que estudam entre a 5ª série/6º ano até a 8ª série/9º ano.

a) Problema 1

Tabela 15. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 1

Nº de alunos	Resultados	%
12	Acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	10,7
44	Acertaram o problema sem estratégia de resolução	39,3
30	Erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	26,8
20	Erraram o problema sem estratégia de resolução	17,8
06	Deixaram em branco	5,4

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Dessa forma vemos que 50% dos alunos acertaram o problema, 44,6% erraram o problema e 5,4% deixaram o problema em branco.

b) Problema 2

Tabela 16. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 2

Nº de alunos	Resultados	%
54	Acertaram o problema	48,2
03	Acertaram somente a questão *a*	2,7
42	Acertaram somente a questão *b*	37,5
05	Erraram o problema	4,5
08	Deixaram em branco	7,1

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

c) Problema 3

Tabela 17. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 3

Nº de alunos	Resultados	%
21	Acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	18,7
14	Acertaram o problema sem estratégia de resolução	12,5
32	Erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	28,6
36	Erraram o problema sem estratégia de resolução	32,1
09	Deixaram em branco	8,1

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Vemos dessa forma que 31,2% dos alunos acertaram o problema, 60,7% erraram o problema e 8,1% deixaram o problema em branco.

d) Problema 4

Tabela 18. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 4

Nº de alunos	Resultados	%
12	Acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	10,7
48	Acertaram o problema sem estratégia de resolução	42,9
11	Erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	9,8
40	Erraram o problema sem estratégia de resolução	35,7
01	Deixaram em branco	0,9

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Vemos dessa forma que 53,6% dos alunos acertaram o problema, 45,5% erraram o problema e 0,9% deixaram o problema em branco.

e) Problema 5

Tabela 19. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 5

Nº de alunos	Resultados	%
00	Acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	00
03	Acertaram o problema sem estratégia de resolução	2,7
06	Acertaram somente a questão *a*	5,3
24	Erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	21,4
60	Erraram o problema sem estratégia de resolução	53,6
19	Deixaram em branco	17

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Vemos dessa forma que 2,7% acertaram o problema, 5,3% acertaram somente uma das questões, 75% erraram o problema e 17% deixaram o problema em branco.

4.3.3. 2ª Atividade de 2014

Finalmente nesta última atividade participaram 57 alunos que estudam entre a 7ª série/8º ano e 8ª série/ 9º ano.

a) Problema 1

Tabela 20. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 1

Nº de alunos	Resultados	%
51	Completaram o diagrama de árvore corretamente	89,5
06	Completaram o diagrama de árvore de forma errada	10,5
31	Acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	54,4
07	Acertaram somente a questão *a*	12,3
05	Acertaram somente a questão *b*	8,8
14	Erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	24,5
00	Deixaram em branco	00

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Dessa forma vemos que 54,4% dos alunos acertaram o problema, 12% acertaram somente uma das questões e 24,5% erraram o problema.

b) Problema 2

Tabela 21. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 2

Nº de alunos	Resultados	%
37	Acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	64,9
00	Acertaram o problema sem estratégia de resolução	00
17	Erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	29,8
01	Erraram o problema sem estratégia de resolução	1,8
02	Deixaram em branco	3,5

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Dessa forma vemos que 64,9% dos alunos acertaram o problema, 18% erraram o problema e 3,5% deixaram o problema em branco.

c) Problema 3

Tabela 22. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 3

Nº de alunos	Resultados	%
32	Acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	56,1
08	Acertaram o problema sem estratégia de resolução	14
14	Erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	24,6
03	Erraram o problema sem estratégia de resolução	5,3
00	Deixaram em branco	00

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Vemos dessa forma que 70,1% dos alunos acertaram o problema e 29,9% erraram o problema.

d) Problema 4

Tabela 23. Dados dos Resultados Obtidos no Problema 4

Nº de alunos	Resultados	%
37	Acertaram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	70,1
18	Erraram o problema aplicando algum tipo de estratégia de resolução	29,9
02	Deixaram em branco	00

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Por meio da análise dos resultados percebemos que os alunos tiveram muita dificuldade em resolver os problemas da primeira atividade. São problemas convencionais da Análise Combinatória encontrados facilmente em livros didáticos, mas os alunos encontraram muita dificuldade em sua interpretação e os resultados são alarmantes, dos cinco problemas propostos, com a exceção do número 4, em relação ao total de alunos que participaram dessas atividades de 30% a 43% deixaram em branco, e com a exceção do problema número 2, a porcentagem de erros atingiu 45% no problema número 1; 22,5% no problema número 3; 35% no problema número 4 e 31% no problema número 5.

Devido aos resultados encontrados na primeira atividade foram propostas duas novas atividades com problemas que possuem ilustrações, figuras e diagramas, o que facilitou o entendimento e despertou o interesse dos alunos e os resultados obtidos foram melhores, a porcentagem de alunos que deixaram os problemas em branco caiu e não ultrapassou 8% exceto no problema número 5 da primeira atividade que a porcentagem atingiu 17%. Portanto, mais alunos tentaram resolver os problemas mesmo a solução estando errada.

Analisando a segunda atividade, no problema número 1, 50% dos alunos acertaram o problema e os outros 50% erram ou deixaram em branco; no problema número dois 11,5% dos alunos erraram completamente o problema ou deixaram em branco; no problema número três percebemos grande dificuldade em sua resolução pois apenas 31,2% dos alunos acertaram, enquanto 68,9% erraram ou deixaram em branco; o problema número quatro 53,6% acertaram enquanto 46,4% erraram ou deixaram em branco; e o problema número cinco percebemos também grande dificuldade na resolução pois 92% dos alunos erraram o problema ou deixaram em branco.

A terceira atividade teve resultados positivos, no problema número um a porcentagem de erro atingiu 24,5%; no problema número dois 64,9% acertaram o problema; nos problemas números três e quatro a porcentagem de acertos atingiu 70,1%.

Com base nesse estudo e levando em consideração a dificuldade dos alunos em trabalhar com a Análise Combinatória na resolução de problemas, apresentaremos no próximo capítulo uma proposta de atividades didáticas com materiais manipuláveis no intuito de auxiliar e facilitar o trabalho do professor no desenvolvimento da Análise Combinatória considerada de difícil entendimento por alunos e professores.

5. PROPOSTA PARA OS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Nesse capítulo apresentamos os materiais manipulativos desenvolvidos nessa pesquisa com o intuito de auxiliar o professor em sua prática docente visando contribuir para a aprendizagem do raciocínio combinatório, partindo de problemas convencionais e conceitos básicos como: diagrama de árvore, arranjos, permutações e combinações, tornando o estudo dessa área da Matemática mais atrativa e lúdica.

Participaram da atividade proposta com os materiais manipuláveis, 21 alunos da 7ª série/8ºano com o objetivo de constatar a viabilidade do material no desenvolvimento do raciocínio combinatório e estes alunos haviam participado das atividades anteriores. Essa turma foi escolhida, pois um de seus professores se encontrava em licença saúde, facilitando a entrada da pesquisadora nessas aulas, não atrapalhando assim as demais aulas.

A ideia inicial partiu da lembrança de bonecas de papel que trocavam de roupas.. As bonecas traziam em geral um conjunto de roupas, podendo ser trocadas e alternadas, entre saias, calças, blusas, sapatos, chapéus, bolsas e vestidos de baile. Partindo dessa ideia confeccionamos uma boneca e um boneco em E.V.A. com roupas e acessórios para trabalhar problemas convencionais para iniciar os estudos da Análise combinatória.

Para trabalhar com os anagramas e alguns problemas de arranjos que formam números com algarismos numéricos a pesquisadora utilizou o recurso do alfabeto móvel e números, muito usados por crianças na fase da alfabetização.

Como no desenvolvimento do raciocínio combinatório algum dos problemas convencionais utiliza-se de contar os modos que podemos nos servir em restaurantes, ou de quantas maneiras podemos escolher sabores de sorvetes ou escolher os recheios de um sanduiche, colocar crianças em fila ou ainda formar grupos com um número de crianças, foram confeccionados esses materiais em E.V.A. para que as crianças possam manipulá-los e perceber todas as possibilidades possíveis e enumerando as soluções dos problemas, facilitando o entendimento do raciocínio combinatório.

Esses materiais foram confeccionadas pela pesquisadora com a ajuda de duas professoras da escola em que ela atua, os materiais utilizados para a confecção são de baixo custo, necessitando apenas de folhas de várias cores de E.V.A., cola quente e velcro utilizados para costura. A ideia de confeccionar o sanduíche com os diversos recheios veio de uma amiga, Shirley Mayumi, que trabalha como coordenadora de Matemática no núcleo pedagógico de Sorocaba.

O professor poderá confeccionar outros tipos de roupas, lanches, comidas, saladas, recheios para os sanduiches, enfim, complementar esse material com outras situações problemas e criar outros tipos de materiais de acordo com as necessidades e dificuldades de cada turma em que vai trabalhar.

Figura 51. Boneco de E.V.A.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 52. Boneco de E.V.A. com uma das possibilidades de vestimenta

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 53. Boneca de E.V.A.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 54. Boneca de E.V.A. com uma das possibilidades de vestimenta

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 55. Alimentos em E.V.A.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 56. Sorvete em E.V.A.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 57. Crianças em E.V.A.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 58. Sanduiches e recheios de E.V.A.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 59. Alfabeto Móvel

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Figura 60. Numerais em E.V.A.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Esses materiais manipuláveis poderão ser utilizados por professores não só do Ensino Fundamental- Anos Finais, mas também por professores dos Anos Iniciais visto que o estudo desse conteúdo tem inicio nesse segmento de ensino, e também é um material de fácil confecção e baixo custo.

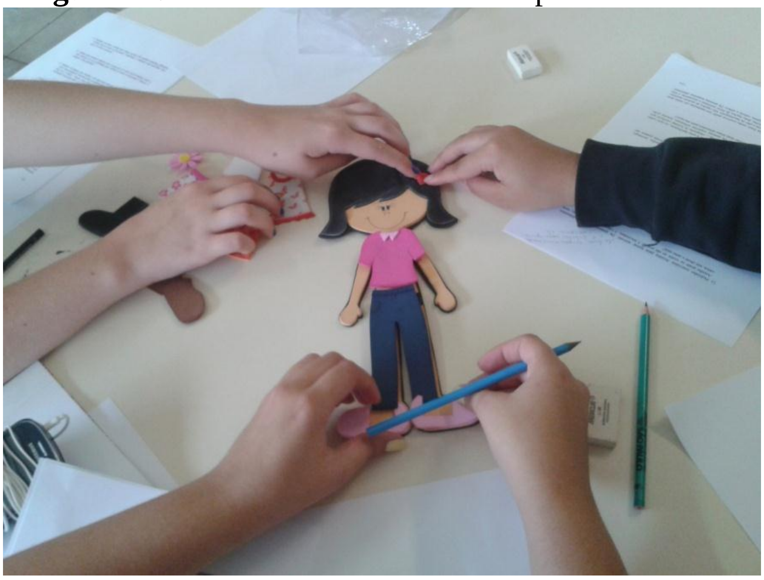
A seguir apresentamos uma proposta de uma sequência de problemas a orientar o professor no desenvolvimento dos estudos da Análise Combinatória em sala de aula. Essas atividades foram aplicadas neste ano, com alunos e professores da escola e a avaliação por parte de alunos e professores será apresentada em seguida.

A sequência de problemas a seguir foi realizada por alunos e professores da escola, utilizando os materiais manipuláveis construídos para auxiliar a resolução.

1) Pedrinho convidou Aninha para tomar sorvete e ela ficou muito animada, como toda menina não sabia com que roupa ir ao encontro. De quantas maneiras diferentes Aninha pode se vestir se ela possui 3 blusas, 3 calçados, duas presilhas e uma calça?

2) Aninha ainda continua indecisa com a roupa que vai vestir, ela só decidiu vestir a saia. Quantas são as possibilidades para Aninha se vestir se ela possui 3 blusas, 3 calçados e duas presilhas?

Figura 61. Atividades com os alunos – problemas 1 e 2



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

3) Pedrinho vai passear com Aninha e ele está muito nervoso, vamos ajudá-lo a se vestir? Encontre todas as combinações possíveis que Pedrinho pode fazer com 2 bonés, 3 blusas, uma calça, 2 bermudas e 3 pares de tênis? Qual combinação você gosta mais?

Figura 62. Atividades com os alunos – problema 3

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

4) Aninha e Pedrinho foram a sorveteria, Aninha pediu um sorvete com duas bolas, mas ficou indecisa entre os sabores que deveria escolher pois havia 4 sabores diferentes de sorvete: mamão papaya, chocolate, morango e abacaxi. De quantas maneiras diferentes Aninha pode fazer seu pedido?

5) Aninha e Pedrinho foram a sorveteria, Aninha pediu um sorvete com três bolas, mas ficou indecisa entre os sabores que deveria escolher, pois havia 8 sabores diferentes: mamão papaya, chocolate, uva, coco, yogurt, morango, abacaxi e pistache. De quantas maneiras diferentes Aninha pode fazer seu pedido?

6) Pedrinho já sabia os sabores do sorvete que ele queria, então pediu: morango, chocolate e uva. De quantas maneiras diferentes as bolas de sorvete podem ser colocadas na casquinha?

Figura 63. Atividades com os alunos – problemas 4, 5 e 6

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

7) No dia seguinte Pedrinho convidou Aninha para ir a uma lanchonete, os dois estão se divertindo muito juntos, até rolou um clima..., chegando lá Aninha verificou que havia 7 tipos de frutas para o suco. De quantas maneiras diferentes Aninha pode fazer seu pedido podendo escolher duas frutas diferentes para seu suco?

Figura 64. Atividades com os alunos – problema 7

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

8) Pedrinho estava com muita fome então resolveu pedir um sanduíche ele tinha duas opções de pães: pão de forma e pão de hambúrguer, três opções de recheio quentes: ovo frito, hambúrguer e salsicha, duas opções de frios: presunto e mussarela, e três opções de saladas: tomate, pepino, cebola e alface. De quantas maneiras diferentes Pedrinho poderá fazer seu sanduíche escolhendo um tipo de pão, um recheio quente, um tipo de frios e uma opção de salada?

9) Pedrinho ainda estava com fome resolveu pedir um lanche no pão de hambúrguer, agora ele deverá escolher quatro tipos de recheios entre: ovo frito, hambúrguer, mussarela, tomate e alface. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer seu pedido?

10) Pedrinho ainda estava com fome resolveu pedir outro lanche no pão de forma, agora ele deverá escolher quatro tipos de recheios entre: ovo frito, hambúrguer, salsicha, presunto, mussarela, tomate, pepino, cebola e alface. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer seu pedido?

Figura 65. Atividade com os alunos – problemas 8, 9 e 10

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

11) Aninha e Pedrinho começaram a namorar e para comemorar resolveram ir a um restaurante, chegando no restaurante verificaram que havia dois tipos de pratos quentes: macarrão e arroz com feijão, 4 tipos de misturas: bife, ovo frito, peixe e frango, 4 tipos de saladas: tomates, couve-flor, brócolis e alface e para a sobremesa 5 tipos de frutas: abacaxi, laranja, pera, uva e morango. De quantas maneiras diferentes eles podem fazer seu pedido escolhendo um prato quente, uma mistura, uma salada e uma fruta?

Figura 66. Atividades com os alunos – problema 11

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

12) Aninha e Pedrinho estão na escola com seus amigos, de quantas maneiras diferentes podemos colocar Aninha, Pedrinho, Eric e Júlia em fila?

13) Toda a turma está animada, pois as crianças terão que se dividir em grupos para fazer um trabalho que será apresentado na Feira de Ciências da escola, de quantas maneiras diferentes podemos formar com 4 crianças, grupos de dois alunos?

14) Agora a turma está na aula de Educação Física, e as crianças precisam se dividir em grupos, de quantas maneiras diferentes podemos formar com 9 crianças, grupos de três alunos?

Figura 67. Atividades com os alunos – problemas 12, 13 e 14

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

15) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra PAZ?

Figura 68. Atividades com os alunos – problema 15

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

16) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMOR?

17) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMOR que comecem com A?

18) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMOR que comecem com A e terminem com O?

Figura 69. Atividade com os alunos – problemas 16, 17 e 18

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

19) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, quantos números diferentes podemos formar:

a) Com dois algarismos sem repetição?

b) Com dois algarismos com repetição?

c) Com três algarismos sem repetição?

d) Com três algarismos com repetição?

e) Com quatro algarismos sem repetição?

f) Com quatro algarismos com repetição?

g) Com cinco algarismos sem repetição?

h) Com cinco algarismos com repetição?

Figura 70. Atividades com os alunos – problema 19

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Esses alunos encontraram maior facilidade na hora de resolver e desenvolver estratégias de resolução dos problemas de contagem propostos com o auxílio dos materiais manipuláveis, pois na opinião deles, ficou mais claro o entendimento, sendo possível perceber a diferença entre os problemas onde são importantes a ordem e a natureza dos elementos, ou seja, conseguiram entender a diferença entre arranjo ou permutação e combinação, algo considerado “muito difícil” em Análise Combinatória.

Os vinte e um alunos foram divididos em sete grupos de três, cada grupo tinha um conjunto de problemas para responder e manipular o material correspondente às questões (1º grupo boneco e boneca, 2º grupo o sanduiche, 3º grupo prato com os alimentos, 4º grupo sorvete, 5º frutas, 6º grupo crianças e 7º grupo alfabeto móvel e números), depois eles trocavam de questões e materiais até que todos tivessem contato com todos os problemas e materiais.

Abaixo vamos descrever alguns relatos dos alunos que participaram da atividade com o material manipulável:

Aluno A:

> Usando o material e podendo ver as opções ficou mais fácil de resolver, no começo com a primeira atividade sem o material, foi muito difícil para resolver, mas agora vimos como podemos colocar cada opção, ficou mais claro e simples de entender os problemas. (Fonte: Arquivo da Pesquisadora).

Aluno B:

> Gostei, pois ficou mais fácil para entender, com os bonecos, os sorvetes, as pessoas, da primeira vez que fiz não teve o material foi bem difícil. Agora está mais fácil, com o material ficou mais simples e fácil de entender os problemas. (Fonte: Arquivo da Pesquisadora).

Aluno C:

> É muito mais fácil e claro resolver os exercícios na prática usando os números, mexendo e modificando as roupas, nas outras atividades foi mais difícil raciocinar sem o material, mas agora foi muito mais simples e claro entender e resolver os problemas. (Fonte: Arquivo da Pesquisadora).

Constata-se que os alunos encontraram no material manipulável construído para auxiliar o desenvolvimento do raciocínio combinatório uma forma de facilitar e organizar as estratégias de resolução dos problemas de contagem.

Em relação aos professores a pesquisadora apresentou as atividades e os materiais manipuláveis em reuniões de ATPC (Atividades de Trabalho Pedagógico Coletivo) do Ensino Médio e do Ensino Fundamental, que ocorrem às segundas-feiras na escola pesquisada, para todos os professores de diferentes disciplinas. Participaram 44 professores e destes, 7 são professores de Matemática. Foi desenvolvido um problema de cada grupo de material para explicar a Análise Combinatória para o Ensino Fundamental. Os professores participaram ativamente, tiraram dúvidas e pediram para pegar o material e foi constatado que o material facilita o desenvolvimento dos problemas e os alunos conseguem construir o conhecimento da Análise Combinatória de forma lúdica e "palpável".

Abaixo serão descritos alguns relatos dos professores que participaram da apresentação:

Professor de Matemática:

> Acredito que o raciocínio combinatório como foi explanado pela pesquisadora, deixa bem claro a possibilidade real do aluno construir o seu aprendizado, inclusive dos conceitos básicos que norteiam a Análise Combinatória (Fonte: Arquivo da Pesquisadora).

Professor de Educação Física:

> A metodologia apresentada é inovadora, pois traz os elementos abstratos da Análise Combinatória para o concreto através de figuras coloridas em E.V.A. onde o aluno pode manuseá-la e enxergar as teorias de forma prática e lúdica, assim assimilando melhor o conteúdo proposto (Fonte: Arquivo da Pesquisadora).

Professora de Sociologia:

> Sou professora de Sociologia e a dificuldade com a área das exatas sempre esteve presente em minha vida escolar. Com a didática apresentada obtive certa clareza de assuntos matemáticos ainda pendentes em meu entendimento. Acredito que a forma lúdica de ilustrar a explicação matemática apresentada pela docente, torna clara a compreensão de muitos alunos, que assim como eu em meu passado escolar, tinham dificuldade em visualizar a matemática de forma palpável. A iniciativa de apresentar a didática para nós professores foi de grande importância para levantarmos também soluções lúdicas e divertidas a fim de auxiliar alunos que possuem dificuldade na aprendizagem (Fonte: Arquivo da Pesquisadora).

Professor de Geografia:

> Achei muito interessante a abordagem sobre Análise Combinatória, para o Ensino Fundamental de Matemática. A inserção do lúdico no ensino é muito bem vindo, tendo em vista a faixa etária dos alunos. Além disso, a pesquisadora trabalha com conceitos abstratos de uma maneira prática e "palpável", diminuindo as distâncias entre o aprender e o significar. Na relação ensino aprendizagem quando um significado, a aprendizagem é completa (Fonte: Arquivo da Pesquisadora).

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos que o estudo da Análise Combinatória sempre se mostrou um entrave aos alunos da escolarização básica, pois é considerado por grande parte de alunos e professores um conteúdo difícil de ser abordado em sala de aula, sendo trabalhada partindo de definições e fórmulas, transformando esse ensino num trabalho mecânico onde os alunos encontraram dificuldade em compreender e diferenciar os significados dos conceitos de permutação, arranjo e combinação.

Essa forma de tratamento em sala de aula deixa lacunas na aprendizagem. Propor outras metodologias, como os materiais manipuláveis desenvolvidos nessa pesquisa, desde o início do Ensino Fundamental, permite que o aluno construa significados desses conceitos promovendo sua aprendizagem. Nesse sentido, o papel do professor é fundamental, buscando estratégias e procedimentos para o desenvolvimento de conteúdos e conceitos de forma contextualizada e lúdica para que os alunos se apropriem do conhecimento e, mais tarde, possam desenvolver esses conceitos formalizando-os de forma significativa.

Nos documentos curriculares analisados o objetivo dos problemas de contagem no Ensino Fundamental é levar o aluno a compreender situações de contagem que envolvam diferentes tipos de agrupamentos, a compreensão do princípio multiplicativo, o desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de estratégias variadas, como a construção de diagramas, esquemas e tabelas sem a aplicação de fórmulas, desenvolvendo a criatividade para enfrentar problemas de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada motivando-o para a aprendizagem de probabilidade e estatística.

Também esses documentos ressaltam a importância desse tema em função de seu uso atual na sociedade e que o Tratamento da Informação deve ser trabalhado de forma articulada desde o início do Ensino Fundamental e integrada aos demais blocos temáticos, estabelecendo relações entre eles e fazendo com que os alunos percebam que o conhecimento Matemático não é fragmentado.

Nos Cadernos do Aluno/Professor elaborados pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo foi observado que na maioria das séries não são contemplados problemas que envolvam o raciocínio combinatório e nas poucas situações de aprendizagem que abordam esse tema, apareceram problemas de forma restrita e pouco explorados e não contemplam todos os tipos de problemas e nem as habilidades necessárias para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, as questões e suas propostas de resoluções não contribuem para a sistematização do ensino, é a simples obtenção de resultados sem a construção de significados para o aluno.

Vemos na História da Matemática um recurso didático com várias possibilidades para desenvolver diversos conceitos, esclarecendo ideias que estão sendo construídas pelo aluno, sugerindo caminhos de abordagens diferentes e delineando os objetivos que se pretende alcançar com eles, contribuindo para a constituição de um olhar mais critico sobre os objetos de conhecimento.

Na análise dos resultados percebemos que os alunos tiveram muitas dificuldades em realizar a primeira atividade aplicada em 2013, composta por problemas convencionais da Análise Combinatória encontrada em livros didáticos e sem ilustrações. Neste caso, os alunos apresentaram muita dificuldade na interpretação dos problemas e, principalmente, quando se deve levar em consideração a ordem dos elementos ou apenas a natureza dos elementos, esses conceitos não ficaram claros para eles.

No desenvolvimento das segunda e terceira atividades aplicadas em 2014, os alunos tiveram uma compreensão melhor no se refere à interpretação dos problemas. A maior parte desses problemas continha ilustrações, esquemas ou tabelas, para tentar facilitar a compreensão dos enunciados, os resultados foram melhores que os obtidos na primeira atividade, e mesmo assim percebemos uma defasagem muito grande no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Devido a esses resultados desenvolvemos e construímos materiais manipulativos, simples e de baixo custo confeccionados com E.V.A., para auxiliar o professor em sua prática docente, visando contribuir para a apropriação do raciocínio combinatório de maneira lúdica e atrativa, partindo de problemas convencionais para desenvolver conceitos básicos como o diagrama de árvore, o Princípio Fundamental da Contagem e a enumeração das possibilidades para a construção dos conceitos de permutações, arranjos e combinações.

Os alunos gostaram da proposta e constataram que ficou mais simples a compreensão dos problemas manipulando os materiais confeccionados. O entendimento ficou claro e compreenderam a construção do diagrama de árvore, o Principio Multiplicativo e a enumeração das possibilidades, e consequentemente compreenderam os conceitos e a diferença de permutação, arranjos e combinação.

O Princípio Multiplicativo é considerado tema fundamental do pensamento combinatório e das atividades de contagem, que devem ser explorados durante todo o Ensino

Fundamental e sua utilização errônea ou o seu desconhecimento trarão obstáculos na compreensão e formalização dos demais conceitos como permutação, arranjos e combinações.

Para um efetivo aprendizado é necessário trabalhar o raciocínio combinatório de forma mais natural, objetiva e produtiva promovendo um ambiente de discussão livre e aberta em sala de aula, onde professor deve desenvolver uma prática pedagógica que facilite ao aluno refletir, compreender, argumentar, despertar sua curiosidade, desenvolvendo nele a capacidade de criação de estratégias para a resolução de problemas, para o trabalho em equipe e ao desenvolvimento de sua autonomia.

Como trabalho futuro pretende-se desenvolver a mesma pesquisa voltada para o Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 2ª Ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica**. Gestar II. Matemática:** Caderno de Teoria e Prática 5 – TP5: diversidade cultural e meio ambiente: de estratégias de contagem às propriedades geométricas. Brasília: MEC/SEB, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica**. Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, vol. 2. Brasília: SEF/MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília: MEC, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **PCN + Ensino Médio:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

CENTURIÓN, M. R.; JAKUBOVIC, J. **Matemática na medida certa.** 8º ano, São Paulo: Ed. Scipione, 2009.

COLODEL, D. L.; PEREIRA, L. B. C.; BRANDALISE, M. A. T. Tratamento da informação na educação básica: investigando concepções e práticas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. **Anais**. Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador, p. 10.

DANTE, L. R. **Aprendendo sempre:** Matemática. 5º ano, São Paulo: Ed. Ática, 2008.

DANTE, L. R. **Matemática contexto e aplicações.** São Paulo: Ed. Ática, 2003, Vol. 2.

DORNELAS, A. C. B. Resolução de problemas em análise combinatória: um enfoque voltado para alunos e professores do ensino médio. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Salvador. **Anais.** Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, UFPE, Recife, p. 24.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. 3ª ed., Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar:** Combinatória/Probabilidade. 7ª ed, São Paulo: Editora Atual, 2004, vol. 5.

MACHADO, A. S. **Sistemas Lineares e Análise Combinatória.** São Paulo: Ed. Atual, 1986, (Coleção Temas e Metas).

MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** 9ª ed, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991, (Coleção do Professor de Matemática).

MORGADO, A. C. et al. **Matemática Discreta.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013, (Coleção PROFMAT).

MORO, M. L. F., SOARES, M. T. C., Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo, vol. 8, nº 1, 2006.< http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/543/431 >. Acesso em: 01/04/2012.

PEDROSA F., C. **Uma Experiência de Introdução do Raciocínio Combinatório com Alunos do Primeiro Ciclo do Ensino Fundamental (7 – 8 anos).** 2008. 231p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática). PUC – SP, 2008.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké**. vol. 17, nº 31, p. 105 – 150. Campinas, 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana.** Pernambuco, Vol. 1, nº 1, 2010.<http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/4>. Acesso em: 22/05/2012.

PINHEIRO, C. A. M.; SÁ, P. F. O ensino de análise combinatória: a prática pedagógica predominante segundo os docentes. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte. **Anais**. Encontro Nacional de Educação Matemática, 9, 2007, Belo Horizonte, p. 13.

SABO, R. D. **Saberes Docentes:** A Análise Combinatória no Ensino Médio. 2010. 208p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifica Universidade Católica, São Paulo, 2010.

SANTOS, J. A. O. et al. **Introdução à Análise Combinatória.** 2ª ed, Campinas: Editora da Unicamp, 1998.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor de Matemática:** 5ª série / 6º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: SEE, 2014a, v. 1.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor de Matemática:** 5ª série / 6º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: SEE, 2014b, v. 2.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor de Matemática:** 7ª série/ 8º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: SEE, 2014c, v. 1.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor de Matemática:** 8ª série/ 9º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: SEE, 2014d, v. 1.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor de Matemática:** 8ª série/ 9º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: SEE, 2014e, v. 2.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias. São Paulo: SEE, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo:** Matemática e suas Tecnologias. São Paulo: SEE, 2009.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **IDESP:** Índice de desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo. Programa de Qualidade da escola. São Paulo: SEE, 2010. <http://www.idesp.edunet.sp.gov.br>. Acesso em: 11/10/2014.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **IDESP:** Índice de desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo. Programa de Qualidade da escola. São Paulo: SEE, 2011. <http://www.idesp.edunet.sp.gov.br>. Acesso em: 11/10/2014.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **IDESP:** Índice de desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo. Programa de Qualidade da escola. São Paulo: SEE, 2013. <http://www.idesp.edunet.sp.gov.br>. Acesso em: 11/10/2014.

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no Ensino Médio Apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro: 2010, 343 p.

STURM, W. **As Possibilidades de um Ensino de Análise Combinatória sob uma Abordagem Alternativa.** 1999. 94p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Unicamp, Campinas, 1999.

ANEXO A. 1ª ATIVIDADEDE DE SONDAGEM APLICADA EM 2013

1ª ATIVIDADE DE DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO PARA O ENSINO FUNDAMENTAL - SONDAGEM – 2013.

NOME: ____N°_____ 9º______

DATA: ___________________________

1) Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de saladas (salada verde, salada russa ou salpicão), sopas (caldo verde, canja ou de legumes) e pratos principais (bife com fritas, peixe com purê, frango com legumes ou lasanha).

    a) De quantos modos se pode escolher um prato deste cardápio?
    b) De quantos modos se pode escolher uma refeição completa, formada por uma salada, uma sopa, e um prato principal?

2) João e Isabel lançam cada um, um dado.

    a) Quantas são as possíveis combinações de resultado?
    b) Quantas são as possíveis somas que eles podem obter?

3) Jogamos uma moeda três vezes. Quantas sequências diferentes de cara e coroa podemos obter?

4) Uma pessoa, ao abrir uma conta corrente em um banco, deve escolher uma senha composta por quatro algarismos sem repetição para utilizar o seu cartão. Se esta pessoa gosta dos algarismos 7, 3, 5, 8 e deseja colocá-los em uma certa ordem para formar a senha, pergunta-se: qual é o número total de senhas que podem ser formadas com esses algarismo

5) Dóris dispões de 5 cores diferentes de lápis: azul, verde, laranja, amarelo e vermelho. Ela quer pintar o desenho de uma bandeira de 5 listras horizontais.

ANEXO B. 1ª ATIVIDADE DE SONDAGEM APLICADA EM 2014

1ª ATIVIDADE DE DESENVOLVIMENTO DO RACÍOCINIO COMBINATÓRIO PARA O ENSINO FUNDAMENTAL - SONDAGEM – 2014.

NOME: ____N°_____ 9º______

DATA: _________________________

1. A família de Beto vai viajar da cidade **A** para a cidade **C,** passando pela cidade **B** para ver alguns parentes. Analise o desenho e responda: De quantas maneiras diferentes eles podem ir de **A** até **C**?

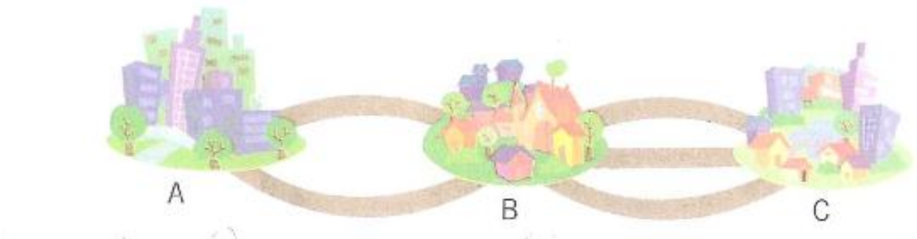


Figura 1. DANTE, 2008, p. 135

2. Paula está brincando com 6 fichas: três contêm um número e as outras três contêm uma letra. Ela quer formar pares de um número com uma letra, nessa ordem.

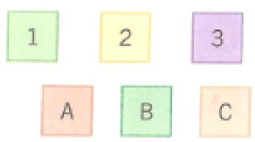


Figura 2. DANTE, 2008, p. 135

a) Quantas possibilidades existem?
b) Complete a tabela e confira a resposta que você deu no item **a**.

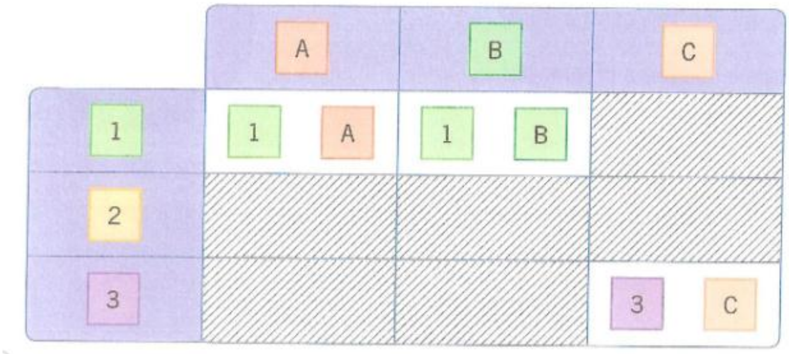


Figura 3. DANTE, 2008, p. 135

3. Carol vai viajar para a praia. Na mala colocou 3 bermudas, 4 blusas, um par de tênis e um par de sandálias. De quantas maneiras diferentes Carol poderá se vestir usando uma bermuda, uma blusa e um par de calçados?

4. Numa reunião de equipe há 5 alunos. Se cada um trocar um aperto de mãos com todos os outros, quantos apertos de mãos serão ao todo?

Figura 4. DANTE, 2008, p. 135

5. André, Bia, Caetano e Duda vão fazer uma fila para receber a merenda.

a) De quantos modos diferentes eles podem ocupar lugar nessa fila?

b) Em quantos desses modos Bia ocuparia o primeiro lugar nessa fila?

Figura 5. CENTURIÓN, 2009, p. 10

ANEXO C. 2ª ATIVIDADE DE SONDAGEM APLICADA EM 2014

2ª ATIVIDADE DE DESENVOLVIMENTO DO RACÍOCINIO COMBINATÓRIO PARA O ENSINO FUNDAMENTAL - SONDAGEM – 2014.

NOME: ____N°______ 9º _____

DATA: _________________________

1. Frederico tem duas calças, uma azul e uma cinza, e tem três camisas, uma verde, uma branca e uma amarela. Quantas são as possibilidades de ele escolher uma calça e uma camisa? Complete a **árvore das possibilidades** e depois responda a questão?

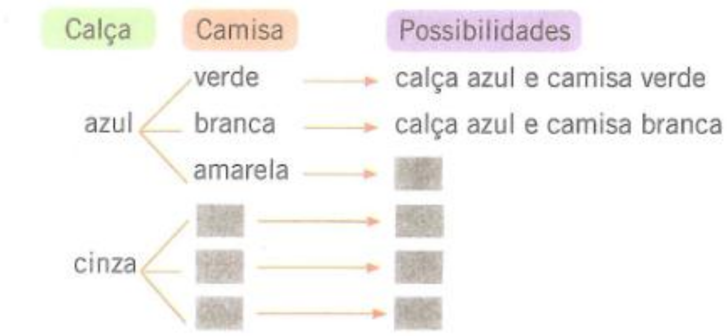


Figura 1. DANTE, 2008, p. 190

Faça o que se pede:

a) Construa a árvore das possibilidades e responda: E se Frederico tivesse 2 calças, 2 camisas e 2 bonés, quantas seriam as escolhas possíveis de uma calça, uma camisa e um boné?
b) E se ele tivesse 3 calças, 5 camisas e 2 bonés, quantas seriam as escolhas possíveis de uma calça, uma camisa e um boné?

2. Juliana foi à sorveteria e pediu um sorvete com três bolas: morango, chocolate e flocos.

Figura 2. DANTE, 2008, p. 190

Agora responda:

a) De quantas maneiras diferentes as bolas podem ser colocadas na casquinha?
b) Quais são elas?

3. De quantas maneiras diferentes, em relação à ordem, 3 pessoas podem sentar num sofá de 3 lugares?

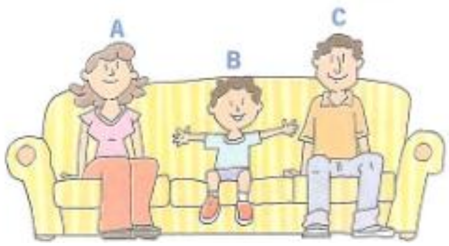


Figura 3. DANTE, 2008, p. 81

4. Márcia quer fazer um suco com 2 frutas apenas. Ela tem 3 frutas: morango, mamão e laranja.
   a) Quais são as possibilidades de combinar 2 frutas?
   b) Quantas são essas possibilidades?

ANEXO D. ANÁLISE DOS TRABALHOS APRESENTADOS NO ENEM E ANPEd RELACIONADOS À ANÁLISE COMBINATÓRIA.

1. INTRODUÇÃO

A presente pesquisa surge do processo avaliativo da disciplina de Fundamentos Metodológicos da Educação em Ciências e Matemática, ministrada pelo Prof. Dr. Paulo César Oliveira, no primeiro semestre de 2012, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade Federal de São Carlos – UFSCAR, onde os alunos do mestrado dessa disciplina foram responsáveis por fazer um levantamento quantitativo e qualitativo de trabalhos, relacionado-os com o objeto de estudo definido em seu projeto de pesquisa.

Esta pesquisa, de abordagem histórico-bibliográfica, teve como objeto de estudo os trabalhos de comunicação científica e os pôsteres do ENEM (Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática) dos anos de 2001, 2004, 2007 e 2010 e da ANPEd (Associação Nacional de Pós Graduação em Pesquisa de Educação) dos anos de 2000 a 2011, com o objetivo de analisar e identificar as atuais tendências didático-pedagógicas para o ensino da Análise Combinatória no Brasil. É importante ressaltar que utilizamos a concepção de tendências apontada por Fiorentini, que a considera como:

> Um saber funcional, isto é, uma modalidade de conhecimento, socialmente elaborada e partilhada, criada na prática pedagógica quotidiana e que se alimenta não só das teorias científicas (Psicologia, Antropologia, Sociologia, Filosofia, Matemática,...), mas também de grandes eixos culturais, de ideologias formalizadas, de pesquisas, de experiências de sala de aula e das comunicações quotidianas (FIORENTINI, 1995, P. 3).

As opções pelo ENEM e ANPEd deu-se pela discussão e circulação das produções acadêmicas da área. A ANPEd tem como finalidade o desenvolvimento e a consolidação da pós-graduação e da pesquisa na área de Educação no Brasil, sendo realizada anualmente e tem se projetado no país e fora dele, como um importante espaço de debate das questões científicas e políticas da área, constituindo-se em referência maior na produção e divulgação do conhecimento em Educação e o ENEM se caracteriza por uma programação de cunho científico e pedagógico, em que são apresentadas as novas produções do conhecimento na área, debatem-se grandes temas e são expostos problemas de pesquisa. São também divulgadas experiências e estudos na área da Educação Matemática, sendo realizado de três em três anos e é promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Mudanças rápidas vêm ocorrendo na sociedade contemporânea, devido ao desenvolvimento atual da ciência e tecnologia, tanto na vida cotidiana das pessoas, como no mercado de trabalho. Daí a necessidade das pessoas de “tratar” as informações que recebem diariamente, desenvolvendo habilidades e competências para ler, interpretar, argumentar, analisar, estabelecer relações, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória.

Segundo Colodel, Pereira e Brandalise:

> No ensino de matemática na Educação Básica, é considerado essencial para a formação do aluno o desenvolvimento de competências para a leitura, interpretação e análise de informações que o circundam e que circulam na mídia. A Estatística, a Probabilidade e a Combinatória, são vistas, nesse contexto, como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar o conhecimento matemático em questões do mundo real, quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações (COLODEL et al., 2010, p.2).

Tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio o tratamento e análise de dados é um dos temas estruturantes da Matemática, abordado no eixo “Tratamento da Informação”, que se baseia na interpretação e análise de dados através de gráficos e tabelas, na resolução de problemas de contagem, na utilização de medidas estatísticas e nos estudos de probabilidade e combinatória.

Portanto, o projeto de pesquisa a ser desenvolvido, que deu início a esta investigação tem como tema: O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório no Ensino Fundamental II e a questão norteadora desta investigação foram: Que tendências didático-pedagógicas se fazem presentes no Ensino de Análise Combinatória no Ensino Fundamental II e Ensino Médio tomando como referência os trabalhos de comunicação científica e pôsteres do ENEM, da ANPEd e os Documentos Curriculares Oficiais?

Ao nos referirmos a tendências didático-pedagógicas em Análise Combinatória, estamos entendendo-as como um modo de produzir conhecimentos em sala de aula e para a sala de aula.

Analisando a quantidade de trabalhos desenvolvidos pela ANPEd e ENEM, verificamos um pequeno percentual do total de trabalhos apresentados sobre o eixo “Tratamento da Informação”. Em relação à ANPEd, verificou-se um total de 206 trabalhos apresentados de 2000 a 2011, oito relacionados ao Tratamento da Informação que envolvem estatística, probabilidade e análise combinatória e um ao tema de Análise Combinatória, contemplado na presente investigação. Quanto aos trabalhos do ENEM, verificou-se um total de 1493 apresentados em 2001, 2004, 2007 e 2010, 59 relacionados ao Tratamento da Informação e 9 relacionado ao tema de Análise Combinatória no Ensino Fundamental II e Médio.

2. ANÁLISE QUANTITATIVA DOS TRABALHOS DA ANPEd E ENEM.

2.1. Análise Quantitativa dos Trabalhos da ANPEd de 2000 à 2011.

TRABALHOS APRESENTADOS NA ANPEd – GT 19 – ENTRE 2000 E 2011				
ANO	COMUNICAÇÃO CIENTIFICA	POSTER	TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO	ANÁLISE COMBINATÓRIA
2000	18	3	0	0
2001	13	2	2	1
2002	10	3	1	0
2003	11	1	1	0
2004	13	3	1	0
2005	20	4	0	0
2006	20	1	1	0
2007	15	0	0	0
2008	16	3	0	0
2009	10	5	1	0
2010	18	2	1	0
2011	15	0	0	0
TOTAL	179	27	8	1

TRABALHOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA APRESENTADOS NA ANPEd – GT 19 – ENTRE 2000 E 2011				
ANO	TIPO	TÍTULO	AUTOR	INSTITUTO
2001	COMUNICAÇÃO	PENSAMENTO	Janete Bolite	CEDERJ

	CIENTIFICA	COMBINATÓRIO: UMA ANÁLISE BASEADA NA ESTRATÉGIA ARGUMENTATIVA	Frant, Mônica Rabelo de Castro, Tânia Lima	

2.2. Análise Quantitativa dos Trabalhos Apresentados nos ENEM de 2001, 2004, 2007 e 2010.

ENEM – 2001

PUBLICAÇÕES	COMUNICAÇÃO CIENTIFICA	PÔSTERES	TOTAL
TOTAL	108	03	111
ENSINO SUPERIOR	43	00	43
EDUCAÇÃO BÁSICA	65	03	68
TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO	04	00	04
ANÁLISE COMBINATÓRIA	01	00	01

ENEM 2004

PUBLICAÇÕES	COMUNICAÇÃO CIENTIFICA	PÔSTERES	TOTAL
TOTAL	168	58	226
ENSINO SUPERIOR	101	29	130
EDUCAÇÃO BÁSICA	67	29	96
TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO	02	02	04
ANÁLISE COMBINATÓRIA	01	00	01

ENEM 2007

PUBLICAÇÕES	COMUNICAÇÃO CIENTIFICA	PÔSTERES	TOTAL
TOTAL	278	147	425
ENSINO SUPERIOR	39	16	55

EDUCAÇÃO BÁSICA	239	131	370
TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO	11	02	13
ANÁLISE COMBINATÓRIA	01	00	01

ENEM 2010

PUBLICAÇÕES	COMUNICAÇÃO CIENTIFICA	PÔSTERES	TOTAL
TOTAL	561	175	731
ENSINO SUPERIOR	101	20	121
EDUCAÇÃO BÁSICA	460	150	610
TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO	34	04	38
ANÁLISE COMBINATÓRIA	06	00	06

Quadro de Trabalhos que Abordam Análise Combinatória

ENEM	TIPO	TÍTULO	AUTOR	INSTITUIÇÃO
2001	COMUNICAÇÃO CIENTÍFICA	INVESTIGANDO OS FATORES QUE INFLUENCIAM O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO EM ADOLESCENTE DE 14 ANOS – 8ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL	Inês Esteves; Sandra Magina.	UNISANTA; PUC/SP
2004	COMUNICAÇÃO CIENTIFICA	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ENFOQUE VOLTADO	Augusto César Barbosa Dornelas.	UFRPE
		PARA ALUNOS E PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO.		

2007	COMUNICAÇÃO CIENTIFICA	O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: A PRÁTICA PEDAGÓGICA PREDOMINANTE SEGUNDO OS DOCENTES.	Carlos Alberto de Miranda Pinheiro; Pedro franco de Sá.	UEPA/UNAMA
2010	COMUNICAÇÃO CIENTIFICA	O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DO INÍCIO DO ENSINO FUNDAMENTAL AO TÉRMINO DO ENSINO MÉDIO.	Cristiane Pessoa; Rute Borba.	UFPE
2010	COMUNICAÇÃO CIENTIFICA	O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DE ALUNOS DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: DO INÍCIO DA ESCOLARIZAÇÃO ATÉ O ENSINO MÉDIO.	Rute Elizabete de Souza Rosa Borba; Rita de Cássia Gomes de Lima.	UFPE
2010	COMUNICAÇÃO CIENTIFICA	ANALISANDO QUESTÕES EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DE SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL. ACERCA DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO.	Ademilton Gleison de Albuquerque; José Valério Gomes da Silva.	UFPE

2010	COMUNICAÇÃO CIENTIFICA	ANÁLISE DAS HABILIDADES EM PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL.	José Ivanildo Felisberto de Carvalho.	UFPE
2010	COMUNICAÇÃO CIENTIFICA	TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: INVESTIGANDO CONCEPÇÕES E PRÁTICAS.	Débora Laranjeira Colodel; Luciana Boemer Cesar Pereira; Mary Ângela Teixeira Brandalise.	UEPG
2010	COMUNICAÇÃO CIENTIFICA	ANÁLISE DAS GRANDEZAS NUMÉRICAS ENVOLVIDAS EM QUESTÕES DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DE LIVROS DO 6 AO 9 ANO APROVADOS PELO PNDL.	Tâmara Marques da Silva Gomes; Viviane Trajano da Silva; Verônica Gitirana Ferreira	UFPE

3. ANÁLISE QUALITATIVA DOS TRABALHOS APRESENTADOS SOBRE A ANÁLISE COMBINATÓRIA NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO DOS ENCONTROS DA ANPEd e ENEM.

No levantamento feito dos trabalhos apresentados na ANPEd de 2000 a 2011 e nos ENEM de 2001, 2004, 2007 e 2010, encontramos vários trabalhos relacionados ao bloco Tratamento da Informação: estatística, probabilidade e combinatória, mas como já foi citado anteriormente o foco será voltado apenas para a Análise Combinatória nos Ensinos Fundamental e Médio.

Em relação aos trabalhos apresentados na ANPEd entre 2000 e 2011 encontramos apenas um artigo no ano de 2001 relacionado ao tema e segmento em estudo. Frant, Castro e Lima (2001) desenvolveram uma investigação sobre o papel da linguagem na produção de significados para objetos matemáticos e a introdução de atividades no terceiro ciclo do ensino fundamental envolvendo combinatória.

Segundo essas autoras, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) sugerem que o desenvolvimento dos pensamentos probabilísticos e combinatórios deva permear a escolaridade matemática desde os ciclos iniciais do ensino fundamental.

Elas definem como Modelo da Estratégia Argumentativa um modelo alternativo para análise do discurso em sala de aula, onde se busca a interpretação da produção de significados baseados nos argumentos utilizados ao invés das palavras. O contexto de uma enunciação é fundamental para sedimentar os acordos, que são as bases para a ação de argumentar. O processo de produção de significados para objetos matemáticos é similar ao processo de produção de significados para objetos do cotidiano, a linguagem do dia-a-dia é regida pelas relações dialógicas e ambíguas entre os indivíduos e suas regras de utilização são baseadas em práticas sociais que devem ser reveladas através da análise dos argumentos.

A análise de um episódio requer a recriação do contexto do enunciado, onde esse episódio é descrito através de um esquema, no qual está presente o argumento utilizado pelo orador, através de simples afirmações. Cada passo da argumentação se inicia com a identificação e a avaliação da regra de inferência que deu sustentação para a tese enunciada sendo que cada elemento está presente no esquema argumentativo e as interpretações são feitas baseadas neste esquema.

É importante entender o papel de cada afirmação dentro da argumentação para entendermos de que modo as intenções do falante determinam suas escolhas sobre as questões operacionais, através das quais a questão principal se efetiva.

Esta pesquisa se caracteriza por um estudo de caso e ocorreu com a observação de três alunos de uma turma de 6ª série/7ºano do ensino fundamental em Minas Gerais. Foram alunos voluntários que retornavam a escola num período diferente das aulas regulares.

A coleta de dados constou de trabalho de discussão em grupo, trabalhos escritos em sala de aula, entrevistas individuais e em grupo, vídeos e o diário de bordo da pesquisadora.

O conteúdo a ser pesquisado foi da área da Análise Combinatória e a atividade desenvolvida foi o clássico problema de apertos de mãos, que consta nos livros didáticos do ensino médio, e é importante ressaltar que o problema informa o resultado, 66 apertos de mão, ao invés de perguntar qual seria o total, problema que raramente é estudado no ensino fundamental.

Dado o problema: *Em uma reunião, algumas pessoas compareceram. Elas se cumprimentavam umas as outras apertando as mãos. Uma pessoa observa que no total foram 66 apertos de mãos. Quantas pessoas estavam nessa reunião?* Os alunos foram orientados que tudo que eles escrevessem, falassem ou desenhassem era importante e seguiram as seguintes instruções para guiar o trabalho: compartilhar sua idéias com o grupo; levantar questões sobre situação- problema; registrar inicialmente suas idéias o máximo possível da forma que as tinham e de forma que seus colegas e professores pudessem entendê-las.

O foco da análise recaiu sobre: reconstruir sequências coerentes de raciocínio, completar os implícitos na fala dos estudantes, identificar os significados produzidos, caracterizar os argumentos através de esquemas, interpretar esses esquemas.

Segundo as autoras, os alunos que participaram desta pesquisa, além de apresentar e compartilhar soluções identificaram padrões e regularidades, sugerindo revisões e modificando suas próprias interpretações. Num primeiro momento, os alunos justificaram suas respostas utilizando exemplos e analogias, num segundo momento, refinaram a linguagem e utilizaram representações simbólicas. A produção de conhecimento deve envolver este ir e vir entre construir e refinar estratégias.

Foi observado que os argumentos usados pelos alunos revelaram forte poder de persuasão, onde eles sentiram maior confiança em aceitar uma tese quando esses argumentos eram utilizados.

Para favorecer a aprendizagem é necessário promover um ambiente de discussão livre na sala de aula, onde o aluno possa falar matemática abertamente sem se sentir obrigado a usar símbolos e não terminar um problema quando encontrar uma resposta.

Em relação aos trabalhos apresentados no ENEM, houve um trabalho relacionado à Análise Combinatória em 2001, um trabalho em 2004, um em 2007 e seis trabalhos em 2010 que abordavam o tema Análise Combinatória no Ensino Fundamental e Ensino Médio.

No ENEM 2001 encontramos Esteves e Magina (2001) que investigaram a aquisição e desenvolvimento dos primeiros conceitos de análise combinatória em adolescentes de 14 anos, cursando a 8ª série, hoje 9º ano do Ensino Fundamental, devido a grandes dificuldades apresentadas pelos alunos e na formação de seu campo conceitual.

Segundo as autoras, pesquisas apontam que entre as dificuldades mais comuns estão a de interpretação e distinção entre arranjo e combinação, fazendo com que os alunos não consigam desenvolver o problema ou o desenvolvam de forma errada.

O foco da pesquisa foi concentrado sobre a formação do conceito ligado à operação de combinatória, portanto as autoras desenvolveram uma investigação da pré-concepção dos alunos sobre o tema, partindo daí foi elaborado uma sequência de ensino.

Foi elaborado um instrumento diagnóstico que foi aplicado em dois grupos, o primeiro foram alunos cursando a 8ª séries do Ensino Fundamental e o segundo grupo formado por alunos do 2º ano do Ensino Médio. Essa sequência de ensino foi preparada para ser aplicada em sete encontros de aproximadamente uma hora, fora do horário normal das aulas. Os alunos fora divididos em dupla e cada encontro correspondeu à resolução de uma ficha contendo diversas situações-problema envolvendo combinatória. No final do desenvolvimento da sequência didática foi aplicado novamente um instrumento diagnóstico para analisar o processo de aprendizagem dos alunos envolvidos na investigação.

O estudo foi baseado nas noções básicas de Didática da Matemática (transposição didática e contrato didático) e nas teorias dos campos conceituais, foram utilizadas também as noções de representações de Vernaud (1998) e Piaget (1978) e da zona de desenvolvimento proximal discutidas por Vygotsky (1993).

Segundo Esteves e Magina, o estudo da transposição didática permitiu escolher a abordagem utilizada para a sequência de ensino desenvolvida por elas, fizeram um estudo histórico (BOYER, 1974; EVES, 1995), procurando os métodos desenvolvidos para a resolução da análise combinatória, observaram livros didáticos da época e os PCN (1998) para comparar as abordagens através das categorias ela consideravam essenciais para o desenvolvimento do conteúdo e de uma sequencia didática a fim de desenvolver o conteúdo de análise combinatória de uma forma mais significativa.

Segundo Esteves e Magina (2001, p. 2):

> Tivemos a preocupação de trabalhar problemas que envolviam um mesmo tipo de raciocínio explorando situações variadas para que o objeto de estudo pudesse ser observado em situações diferenciadas e, a partir daí, encontrar invariantes, propriedades, deste objeto de estudo, utilizando vários conceitos de estreita conexão, e assim possibilitar que o aluno fizesse representações

> simbólicas (no sentido piagetiano) referentes a estas propriedades, formando o conceito em estudo.

Segundo as autoras, foi de grande benefício levar em consideração as propostas de Chevallard (1991) sobre a formalização do contrato didático, pois o relacionamento da pesquisadora com os alunos, os tipos de atividades propostas e o ambiente de trabalho foram alguns dos fatores que influenciaram no aprendizado.

A ideia da Zona de desenvolvimento proximal, que pressupõe que a experiência coletiva contribui para a individual, esteve presente durante toda a sequência realizada em duplas pelos alunos.

As autoras concluíram que trabalhar a análise combinatória a partir da resolução de problemas torna o ensino mais eficiente. Em relação aos erros dos alunos, elas destacam a interpretação errada do enunciado e à ordem dos elementos. E em relação ao uso de representações nem sempre os alunos conseguiram lançar mão de representações que deem conta de expressar a situação problema, em alguns momentos ela auxiliou o desenvolvimento dos problemas propostos e em outras gerou um interpretação errada, principalmente quando era grande o número de possibilidades a serem encontradas.

No que diz respeito ao ENEM (2004) ressaltamos que o trabalho de Dornelas (2004) retratou uma síntese de sua Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação no Ensino das Ciências, na área de Educação Matemática.

A pesquisa de campo foi dividida em duas fases. A primeira foi aplicada com alunos do 2ª série do Ensino Médio de duas escolas, uma pública e outra particular.

Foram aplicados dois questionários. No primeiro foi avaliado o nível de apropriação dos alunos relacionado a conceitos, vocabulário e aspectos relevantes ao estudo da Análise Combinatória e no segundo questionário, buscou-se avaliar a habilidade dos alunos em resolver quatro problemas básicos envolvendo o tema em questão.

Os resultados obtidos não foram diferentes do que temos em nossas aulas, elementos essenciais para a resolução de problemas são negligenciados tais como: raciocínio, estratégia e compreensão e segundo Dornelas (2004, p. 2):

> A “construção” mecânica de conteúdos leva os professores e alunos a abdicar da importância dos conceitos, definições, propriedades e princípios, se detendo nos simplifismos de algumas fórmulas que muitas vezes não se adequam à resolução porque o aluno não consegue discernir ao menos a que especificidade da análise combinatória o problema trata.

A presente pesquisa está sendo orientada no sentido de aprofundar o debate e promover uma abordagem quantitativa e qualitativamente didática do Princípio Multiplicativo como estratégia de resolução de problemas de Análise Combinatória, não só para simplificação de cálculos, mas também como elemento gerador de outros importantes conceitos relacionados ao desenvolvimento desse tema, como Arranjos, Permutações e Combinações.

O objetivo dessa pesquisa, segundo o autor (2004), é de minimizar os erros de compreensão, planejamento e execução de estratégias que possibilitem uma aprendizagem significativa, auxiliando os alunos na resolução de problemas de análise Combinatória.

Com a aplicação dos questionários e a análise dos dados o autor verificou que palavras chaves contidas nas respostas dos alunos fazem parte do vocabulário usado nos livros didáticos, os quais sendo apropriados pelos professores e democratizados com os alunos, quase sempre, levam a uma simplificação de conteúdos, levando-os a memorizar princípios básicos e aplicar fórmulas de forma mecânica a situações-problema, não havendo possibilidade de desenvolver estratégias de raciocínio para a construção e compreensão do conhecimento.

Outra observação feita pelo autor foi o equilíbrio entre os totais de acertos e erros com a aplicação de fórmulas específicas e um desequilíbrio voltado para erros em relação à utilização de diferentes estratégias ou algoritmos na resolução dos problemas apresentados, o que não nos deve levar a concluir que a utilização de fórmulas na resolução de problemas de Análise Combinatória seja mais produtiva, já que a quantidade de acertos utilizando outros métodos foi superior ao número de erros utilizando fórmulas.

A análise dos dados nos revela também que nas tentativas de resolução é enfatizada a utilização de algoritmos diversificados, além dos que são usados em análise combinatória, o que segundo Dornelas (2004), potencializa o aparecimento de novas estratégias que irão priorizar a diversidade de métodos que venham somar diferentes meios de obtenção de resultados satisfatórios, que vão além de usar fórmulas, as quais são necessárias mas não são suficientes na motivadora tarefa baseada na resolução de problemas.

Os erros que mais reforçam o desenvolvimento da pesquisa, e que segundo o autor (2004), bloqueiam a aprendizagem e criam novos obstáculos à sequência didática dos conteúdos de análise combinatória foram: o desconhecimento do Princípio Multiplicativo, também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem; o conhecimento do Princípio Multiplicativo, não havendo porém sua utilização em situações possíveis e adequadas ou mobilizando-o de forma errônea ou incompleta, sem atentar para o fato de que a ordem dos elementos nos agrupamentos a serem formados, poderá produzir agrupamentos distintos.

O Princípio Multiplicativo é o elemento fundamental do pensamento combinatório e das atividades que envolvem problemas de contagem, e consequentemente, das construções cognitivas posteriores, como os Arranjos, Permutações e Combinações, Dornelas acrescenta que:

> O seu desconhecimento ou a sua abordagem superficial trará dificuldades cognitivas importantes na sua aplicabilidade, no processo de resolução de problemas, como também na sua não mobilização em situações possíveis e necessárias. Sua utilização de forma errônea ou incompleta ou o seu desconhecimento trarão ou reforçarão obstáculos no discernimento cognitivo dos demais temas – como Arranjos e Combinações – causando, no aluno incapacidades que refletirão na impossibilidade de, por exemplo, identificar quando a ordem em que os elementos estão dispostos num agrupamento, irá (caso dos arranjos) ou não (caso das combinações) influir no total de agrupamentos (subconjuntos) possíveis de um dado conjunto (DORNELAS, 2004, p.10).

A segunda fase da pesquisa de campo teve como objetivo responder a seguinte pergunta: Quais as consequências pedagógicas verificadas nos resultados obtidos pelos alunos quando são submetidos a uma aprendizagem intensiva do Princípio Multiplicativo?

Foi selecionado um grupo de doze alunos da 2ª série do Ensino Médio da rede particular de ensino.

Com relação às perguntas que fazem parte da pesquisa, as respostas obtidas não diferiram das respostas obtidas pelos alunos da primeira fase da pesquisa de campo. É interessante ressaltar que em todas as respostas não houve resolução através de fórmulas, mas sim a utilização, mesmo de maneira incorreta, do Princípio Multiplicativo, o que segundo o autor, mostra a sua importância como sequência didática para o aprendizado de resolução de problemas vinculados à Análise Combinatória.

A pesquisa mostrou que ocorreu um aumento de 86,88%, uma substancial vantagem de aprendizado após o trabalho com o Princípio Multiplicativo, entre duas situações problemas propostas na pesquisa.

Esses dados mostram que o Princípio Multiplicativo é pré-condição para a resolução de problema que envolve a Análise Combinatória, como instrumento de alto valor pedagógico, ajudando os alunos na compreensão e acompanhamentos didático-pedagógicos em sala de aula para estabelecer correlações e conexões com os conceitos básicos de Arranjo, Permutação e Combinação.

Segundo o autor (2004), os resultados obtidos reforçaram a crença que a apreensão significativa do Princípio Multiplicativo depende de uma mudança de atitudes e orientações didáticas que propiciem aos alunos uma aprendizagem mais consistente e substancial, que contribua para motivar alunos e professores a trabalharem temas ligados à Análise Combinatória de forma mais natural, objetiva e produtiva.

Em relação ao ENEM 2007, Pinheiro e Sá (2007) desenvolveu sua pesquisa com a participação de 20 professores atuantes no Ensino Médio, nas escolas da região metropolitana de Belém do Pará (escolas públicas e particulares), com o objetivo de descrever a prática pedagógica predominante no ensino de Análise Combinatória.

Pinheiro e Sá (2007) acreditam que o Ensino da Análise Combinatória seja uma importante ferramenta que o cidadão inserido no mundo das informações, das novas tecnologias e do dia-a-dia das transações financeiras necessita para resolver problemas reais e que o ensino escolar está limitado no treinamento do uso de fórmulas e algoritmos não proporcionando aos alunos a derivação das fórmulas pelo uso da manipulação dos elementos.

Para o levantamento dos dados foi utilizado um questionário fechado, contendo perguntas sobre dados pessoais, formação acadêmica e procedimentos metodológicos desenvolvidos durante as aulas ministradas pelos professores, já citados acima. A avaliação do instrumento foi realizada por uma turma de estudantes do curso de especialização em Educação Matemática da Universidade do Estado do Pará, juntamente com o professor orientador.

Os autores realizaram um levantamento dos trabalhos no campo da Análise Combinatória, desenvolvidos no Brasil, nos quais foram apontadas as dificuldades desse ensino nas escolas. Dentre as dificuldades, foram destacadas as encontradas pelos professores ao ministrarem aulas desse conteúdo e em relação às dificuldades de aprendizagem foi destacada a falta de compreensão dos textos estruturais dos problemas e da diferença entre problemas de arranjo e combinação. Por outro lado, há alguns trabalhos que sinalizam propostas de Ensino de Análise Combinatória que venha minimizar ou superar algumas dessas dificuldades.

De acordo com a pesquisa realizada por Pinheiro e Sá (2007), a prática pedagógica predominante entre os 20 professores que participaram da pesquisa foi o uso do livro didático como principal ferramenta para a elaboração das aulas e por mais que alguns professores tenham apontado a utilização da resolução de problemas ou modelagem para o desenvolvimento das aulas, ainda está muito forte a tendência formalista do Ensino de Análise Combinatória.

Percebemos que, com a utilização do livro didático na preparação das aulas, há uma insegurança por parte dos professores no desenvolvimento de um ensino de combinatória que proporcione aos alunos uma forma de utilizar as habilidades do raciocínio combinatório na resolução de problemas reais.

Os autores citam que as dificuldades de aprendizagem não dependem apenas de uma comunidade científica, mas sim de todos que estão envolvidos no processo, principalmente os professores que se intitulam somente professores e não educadores, que são responsáveis pelos momentos de dificuldades que os alunos passam ao estar numa sala de aula recebendo informações sem significado e a não investigam o motivo pelo qual seu aluno não compreender o que lhe foi explicado. Segundo Pinheiro e Sá (2007, p.7) a escola se tornou o pior lugar para uma criança ou jovem buscar os saberes necessários para torná-lo um cidadão crítico , pois a escola não consegue, pelo menos, alcançar o chamado mundo das informações, que é mutável a cada segundo.

O aluno não consegue assimilar tanta informação sem significado para sua vida, e o professor conduzindo sua prática pedagógica através de: definições, teoremas e exercícios repetitivos, resulta num ambiente escolar que é um verdadeiro campo de batalha, cujo resultado é o aumento das dificuldades de aprendizagem em Matemática.

Em relação ao ENEM 2010 foram levantados sete trabalhos relacionado à Análise Combinatória. O primeiro deles, de Pessoa e Borba (2010), analisaram o desempenho de alunos em relação a compreensão sobre problemas que envolvem raciocínio combinatório e tinham como objetivos específicos: observar o desempenho de alunos lidando com os quatro *significados* de Combinatória dos problemas (*arranjo, permutação, combinação e produto cartesiano*); comparar desenhos ao longo dos níveis de escolaridade; identificar quais *invariantes* das situações investigadas são mais reconhecidas pelos alunos e quais estratégias – e *representações simbólicas* – são mais usualmente utilizadas.

Essa pesquisa foi realizada com 568 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio de quatro escolas, duas públicas e duas particulares de Pernambuco. Foi aplicada uma ficha individual contento oito problemas envolvendo o raciocínio combinatório (dois de cada tipo: *produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação)* e foi proposto aos alunos que eles resolvessem os problemas da forma que quisessem, através de desenhos, tabelas, gráficos, ou outras formas.

A questão central que mobilizou a pesquisa foi: como alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental aos anos finais do ensino Médio lidam com problemas combinatórios?

Pessoa e Borba (2010, p. 2), definiram o desenvolvimento de conceitos em campos conceituais, segundo a teoria de Vergnaud (1986),

> ...como a interação complexa entre um conjunto interligado de conceitos e um conjunto de situações de utilização desses conceitos. O domínio progressivo das situações, por parte do indivíduo, exige o concurso de uma variedade de conceitos, com suas variadas formas de representação simbólica e procedimentos que se apresentam estreitamente conectadas. Ainda para Vergnaud (1986) os conceitos envolvem um conjunto de situações problema, que lhes dão significado psicológico; um conjunto de invariantes, que são propriedades lógico-operatórias, as quais permitem generalização e transferência de aprendizagem; e um conjunto de símbolos utilizados na representação do conceito. Esses aspectos de cada conceito formam um tripé (significados, invariantes e representação) e estão intimamente interligados a outros conceitos, isto é, um conceito não se desenvolve isoladamente e sim, nas relações com outros conceitos, através dos diferentes tipos de problemas que utilizam vários contextos e simbolismos.

Pessoa e Borba (2010, p. 2) definem e conceituam a Análise Combinatória, como o campo do conhecimento que permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um. Assim entende-se o raciocínio combinatório como um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto. Na Combinatória contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, através de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de outra estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas, como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem.

Esse trabalho classificou os problemas que envolvem raciocínio combinatório em uma organização única, onde são considerados os quatro tipos de problemas (produto *cartesiano, arranjos, permutações e combinações*) como característicos do *pensamento combinatório,* contribuindo para a reflexão teórica da necessidade de se trabalhar este conjunto de problemas no ensino e aprendizagem da Combinatória no Ensino Básico.

De acordo com os resultados obtidos, nos diferentes níveis de escolarização, foram observadas diferenças significativas no desempenho dos alunos concluindo-se que há diferenças entre os três níveis de ensino, ou seja, os desempenhos do Ensino Fundamental II foram significantemente superiores aos desempenhos no Ensino Fundamental I e os desempenhos no Ensino Médio foram significantemente superiores aos do Ensino Fundamental II.

No Ensino Fundamental os alunos demonstraram interessantes estratégias de resolução e níveis de compreensão diferentes em relação aos problemas, apresentando algumas dificuldades em chegar ao número total de possibilidades, mesmo listando um bom número de casos possíveis. Portanto, há evidências de que a maturidade e/ou experiências escolares ou extraescolares tem influência nos desempenhos dos alunos, pois nos anos finais do Ensino Fundamental ocorreu uma melhora significativa sem a instrução escolar específica.

No Ensino Médio esperava-se um percentual maior de acertos, mas eles utilizaram as fórmulas de maneira inadequada, sendo visível que a formalização desse ensino não está ocorrendo de maneira adequada, já que o aluno não percebe a lógica implícita em cada significado estudado. Segundo Pessoa e Borba (2010, p. 6):

> Diante da necessidade de se desenvolver a compreensão dos diferentes tipos de problemas de Combinatória é importante que desde o Ensino Fundamental I sejam exploradas estratégias espontâneas para a resolução de situações que envolvam significados e invariantes diversos, estimulando os alunos ao uso de diferentes representações simbólicas (Vergnaud, 1986), considerando estes aspectos nos diferentes níveis de ensino e aprofundando-os à medida que se avança nos anos escolares.

Outro dado importante da pesquisa é em relação aos quatro tipos de problemas – *produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação* – que as autoras consideram característicos do pensamento combinatório, os problemas de *produto cartesiano* apresentaram o maior percentual de acertos nos três níveis de escolarização pesquisados e esse desempenho se deve por serem os únicos problemas combinatórios trabalhados desde cedo na escolarização básica, embora os PCN (1998) orientem que sejam trabalhados os problemas de arranjo, permutação e combinação desde os anos iniciais. Dos significados menos trabalhados no Ensino Fundamental, os problemas de *arranjo* são os que se apresentam como mais fáceis, devido ao desempenho dos alunos na pesquisa e os de *combinação* foram os que se apresentaram como os mais difíceis para os alunos, pois estes precisam perceber que a ordem dos elementos no conjunto não gera novas possibilidades.

Com a presente pesquisa, as autoras buscaram defender a tese de que o desenvolvimento do *raciocínio combinatório* ocorre em um longo período de tempo, influenciado por aspectos extraescolares, assim como também por vivências escolares, sejam elas relacionadas direta ou indiretamente às situações combinatórias. Este desenvolvimento é evidenciado desde os anos iniciais de escolarização, com estratégias que demonstram níveis de contextualizações que se modificam devidos às experiências adquiridas, no sentido de uma maior sistematização e formalização na compreensão dos diversos significados da Combinatória.

Na pesquisa de Borba e Lima (2010) analisou-se a compreensão de alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), em todos os níveis dessa modalidade de ensino, sobre problemas de estruturas multiplicativas, mais especificamente os que envolvem *raciocínio combinatório*, verificando estratégias de resolução de diferentes naturezas, comparando resultados obtidos por estudos anteriores no Ensino Fundamental e Médio sobre o conteúdo matemático, comparando os desempenhos em função das atividades profissionais exercidas pelos alunos do EJA e o desempenho em função da escolaridade.

Borba e Lima (2010) se fundamentaram na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986) como fundamentação teórica de sua pesquisa, tema este já comentado no trabalho anterior (PESSOA e BORBA, 2010).

Participaram da pesquisa 150 alunos de cinco escolas públicas em cinco módulos do EJA, quatro módulos para os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e uma turma de Mecânica do PROEJA (Programa Nacional de Integração da Educação Profissional de Jovens e Adultos), sendo 30 alunos em cada módulo. Foram resolvidos por esses alunos 16 questões multiplicativas e de *Combinatória* (duas questões para cada tipo de problema), e respondido um pequeno questionário para que se determinasse o perfil desses alunos.

Com os resultados obtidos na pesquisa, Borba e Lima (2010) perceberam que o gênero devido ao exercício profissional e os anos de escolarização, a série frequentada e o tipo de problema, influenciaram fortemente o desempenho dos alunos na compreensão do *raciocínio combinatório*.

Com esses resultados, os autores afirmam que a escola é essencial para o desenvolvimento do *raciocínio combinatório*, pois ela precisa reconhecer e buscar nos alunos conhecimentos anteriores, desenvolvidos a partir de atividades escolares anteriores ou extra-escolares, como os adquiridos no exercício profissional, para que possa auxiliá-los nos processos de sistematização, aprofundamento, ampliação e formalização de seus conhecimentos referentes à Combinatória.

Segundo Albuquerque e Silva (2010) seu estudo teve como objetivo analisar e classificar atividades propostas de *raciocínio combinatório* e a presença dos quatro tipos de problemas (produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação) em livros didáticos de

Matemática dos anos finais de Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2008.

Este trabalho surge do processo avaliativo de uma pesquisa coletiva desenvolvida por mestrandos da disciplina de Tópicos em Educação Estatística e Probabilidade do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnologia – EDUMATEC/CE/UFPE, ministrada pela Profª. Drª. Verônica Gitirana.

Várias pesquisas indicam que se o trabalho com o raciocínio combinatório começasse desde os anos iniciais do Ensino Fundamental de maneira não sistematizada simplificaria a abordagem no Ensino Médio, pois os alunos apresentam maiores dificuldades nos temas com os quais nunca tiveram contato nos anos iniciais da escolarização.

O conceito de Combinatória vem sendo apresentada de maneira mecânica e limitada nos Livros Didáticos, ao longo dos anos, o que tem promovido grande desinteresse e distanciamento por parte dos alunos e professores. Tais dificuldades têm gerado discussões no meio acadêmico, que podem caracterizar novas maneiras usadas para reformular o ensino de Matemática, como um todo, mais especificamente o de Combinatória (RUFFINO e SILVA, 2004).

A questão que mapeou esse estudo foi: Quais os tipos de problemas que envolvem raciocínio combinatório nos livros didáticos de matemática das séries finais do Ensino Fundamental aprovados no PNLD 2008 e como eles evoluem ao longo das coleções?

Neste artigo foi apresentada a análise de cinco coleções didáticas de matemática, foi feito um apanhado geral de todas as questões que envolvem *raciocínio combinatório*, destacando os tipos de problemas e explicitando como essa temática vem sendo delineada.

Segundo Albuquerque e Silva (2010, P. 5):

> De acordo com outros estudos, nota-se a importância da temática “raciocínio combinatório” onde são destacadas as dificuldades dos alunos ao resolverem problemas, a classificação dos tipos de problemas, estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas, a relação do raciocínio combinatório com outras áreas de conhecimento e a construção conceitual com a finalidade de subsidiar os autores de livros didáticos no que diz respeito ao capítulo de tratamento da informação e probabilidade.

Em relação às questões, as que envolvem *produto cartesiano* aparecem em três das cinco coleções analisadas, sendo que uma apresenta um número de questões maior que as outras quatro. *Arranjo* encontra-se quase que na totalidade das coleções, quatro das cinco analisadas, com número bem reduzido de questões. *Permutação* esse tipo de problema aparece em três coleções e apenas uma com o maior número de questões. *Combinação* se faz presente em todas as coleções analisadas e o maior número de questões aparece em apenas uma.

Em relação à evolução dos tipos de problemas ao longo dos volumes das cinco coleções, verificou-se a ausência de um tipo em apenas uma das coleções, especificamente no 8º ano, aparecem os quatro tipos de problemas presentes. Os problemas do tipo combinação aparecem em todos os volumes das coleções analisadas e no 8º ano das mesmas a média do número de atividades supera a soma dos outros três anos no que se refere a esse tipo de problema.

De acordo com a análise de Albuquerque e Silva (2010), não existe uma sequência de distribuição homogenia nos volumes de cada uma das cinco coleções analisadas e a quantidade de questões por volume é pequeno e em alguns casos os volumes não contemplam alguns tipos de problemas.

Carvalho (2010) neste artigo analisou as atividades de combinatórias propostas em cinco coleções de livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental aprovados pelo PNLD 2008 e identifica e classifica dentre essas atividades oito tipos de habilidades envolvidas e as correlaciona com os tipos de problemas de combinatória (produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação).

Este trabalho, como o anterior foi um recorte de uma pesquisa coletiva desenvolvida por mestrandos da disciplina de Tópicos em Educação Estatística e Probabilidade do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnologia (EDUMATEC/CE/UFPE), ministrada pela Profª. Drª. Verônica Gitirana e é justificada através das Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2006), segundo Carvalho:

> A importância que os temas vinculados ao Tratamento da Informação tem na construção do conhecimento dos estudantes é justificada nas propostas curriculares de matemática, a qual orienta o que os estudantes devem conhecer e as habilidades que devem desenvolver para o domínio necessário das competências estatísticas. A atual discussão sobre as orientações curriculares de matemática para o ensino básico considera que o estudo de temas como este na educação devem possibilitar uma formação matemática para que as pessoas percebam o mundo "estocastizado" em que vivem, ou seja, que considerem o movimento aleatório em que suas vidas estão inseridas, adquirindo habilidades para lidar com a incerteza, percebendo a probabilidade como um aspecto real, objetivo e fundamental para a leitura de sua realidade social (CARVALHO, 2010, p. 1).

E por Batanero, et al (1997), segundo Carvalho:

> No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais PCNs (1998) apresentam o bloco Tratamento da Informação, trabalhando os conteúdos de estatística, probabilidade e combinatória. Para os PCNs, os conteúdos selecionados possibilitam o desenvolvimento do pensamento e do raciocínio, nos quais envolvem fenômenos aleatórios, amostras, inferências e propiciam o aprendizado na divulgação de resultados por meio da linguagem estatística. Pretendemos aqui discutir especificamente sobre a Combinatória, na qual diversas pesquisas apontam para as dificuldades de ensino-aprendizagem deste conteúdo (CARVALHO, 2010, p. 2).

Fundamentação teórica da pesquisa desenvolvida por Carvalho:

> Quando falamos em habilidades, devemos lembrar que não podemos separá-las das ações, ressaltando a importância de dominar os conhecimentos. As competências pressupõem operações mentais, capacidades para usar as habilidades, emprego de atitudes, adequadas à realização de tarefas e conhecimentos. Desta forma as habilidades estão relacionadas ao saber fazer (PERRENOUD, 2000). Assim, identificar variáveis, relacionar informações, analisar situações-problema, compreender fenômenos, sintetizar, estimar e manipular são exemplos de habilidades. Nos livros didáticos, em Combinatória destacamos habilidades tais como, mapear todas as possibilidades, decidir a quantidade total, fazer cálculos de probabilidades, etc (CARVALHO, 2010, p. 2).

Segundo Carvalho (2010) as atividades trazidas pelos livros didáticos devem propiciar e ampliar os tipos de problemas abordados, para que o aluno entre em contato com esses problemas e desenvolva as respectivas habilidades relacionadas à combinatória.

O autor, em relação aos problemas, utiliza a classificação de Pessoa (2006) apresentando os quatro tipos de problemas de combinatória (*produto cartesiano*, *arranjo, permutação e combinação*) e identifica e classifica abaixo as habilidades encontradas nas atividades analisadas:

1. Mapear todas as possibilidades;
2. Decidir a quantidade total de possibilidades;
3. Decidir se um resultado é possível;
4. Mapear e decidir a quantidade total de possibilidades;
5. Modelagem de fórmula algébrica;
6. Calcular a quantidade total a partir de fórmula dada;
7. Fazer cálculos de probabilidade;
8. Identificar a posição de uma possibilidade no mapeamento.

Voltando aos tipos de problemas e relacionando-os as habilidades, o problema do tipo *produto cartesiano* engloba atividades envolvendo o princípio multiplicativo e os de produto cartesiano com restrição; os de *permutação* englobam atividades do tipo permutação simples, permutação com elementos repetidos e permutação com restrição; e os de *combinação* trazem atividades do tipo combinação simples, combinação com restrição e combinação com restrição e elementos repetidos. As habilidades estão vinculadas as características do problema e quanto maior o número de atividades diversificadas maior será as habilidades trabalhadas.

O autor relaciona como as habilidades requisitadas são trabalhadas nos quatro tipos de problemas de combinatória: “mapear todas as possibilidades” e “decidir a quantidade total de possibilidades” contemplam os quatro tipos de problemas; “identificar a posição de uma possibilidade no mapeamento” aparece nos problemas de *permutação*; “fazer cálculos de probabilidade” aparece nos problemas de *arranjo*; “calcular a quantidade total a partir de fórmula dada” é contemplada unicamente nos problemas de *combinação*.

Agora a análise das habilidades exploradas relacionadas com os volumes das coleções analisadas, apenas nos livros do 8º ano todas as habilidades são trabalhadas, a habilidade “mapear todas as possibilidades” é a única que aparece em todos os volumes e por fim, das cinco coleções analisadas apenas uma apresenta atividades desenvolvendo sete habilidades e as outras coleções não aparecem mais que quatro habilidades exploradas nas atividades propostas.

Com base nessa análise desenvolvida por Carvalho (2010), percebemos que as coleções matemáticas analisadas não contemplam uma diversidade de habilidades desenvolvidas nas atividades propostas, deixando de lado habilidades importantes para o desenvolvimento cognitivo dos alunos no raciocínio combinatório.

No que diz respeito ao bloco Tratamento da Informação Colodel, Pereira e Brandalise (2010) faz em um relato parcial de uma pesquisa de abordagem qualitativa de caráter bibliográfico e interpretativo em andamento, que tem por objetivo diagnosticar a percepção dos professores da educação Básica sobre concepções de ensino-aprendizagem e as práticas pedagógicas relativas ao conhecimento estatístico considerando o eixo do “Tratamento da Informação” proposto para o ensino da Matemática.

O referencial teórico partiu do levantamento bibliográfico da área escolhida, considerando os estudos já desenvolvidos na área da Educação Estatística e os documentos oficiais destinados ao ensino da Matemática na Educação Básica. A questão norteadora dessa pesquisa: *Quais concepções de ensino-aprendizagem têm os professores da Educação Básica quanto ao conhecimento estatístico e probabilístico e como estas se refletem nas suas* *práticas pedagógicas?* A metodologia adotada foi entrevista e grupo focal com os professores das escolas da rede estadual de ensino de um município paranaense.

Na sociedade contemporânea, com o desenvolvimento da ciência e da tecnologia, tanto no mercado de trabalho como na vida cotidiana das pessoas, mudanças vêm acontecendo de forma rápida e a cada dia aumenta a necessidade das pessoas refletirem sobre as informações que recebem para interpretar e analisar de forma crítica essas informações que chegam até elas e os conhecimentos relativos à Estatística, a Combinatória e a Probabilidade, tornam-se indispensáveis ao cidadão nos dias de hoje. Sendo assim cabe ao ensino da Matemática o compromisso de não só ensinar o domínio dos números, mas também a organização de dados e leitura de gráficos. E segundo Colodel, Pereira Brandalise (2010, p.3), tais conhecimentos, quando apreendidos pelos estudantes, contribuem para o desenvolvimento de competências e habilidades que possibilitam uma visão mais apurada sobre os fatos que ocorrem na sociedade atual, permitindo-lhes assim tirar suas próprias conclusões e tomar decisões de forma mais consciente e adequada, ao mesmo tempo em que exercem a cidadania de forma mais crítica e participativa.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) tem por objetivo nortear o trabalho do professor, sugerindo os conteúdos a serem abordados, os objetivos a serem alcançadas, as habilidades e competências a serem desenvolvidas, a metodologia e os critérios avaliativos a serem considerados pelo professor. Depende de o professor adaptar as proposições sugeridas nos PCN (1998) na sua realidade escolar, formando sujeitos capazes de resolver situações cotidianas, possibilitando o desenvolvendo intelectual e exercendo sua cidadania de forma crítica e participativa na sociedade.

Segundo os PCN (BRASIL, 1998, p. 27):

> Para que um cidadão seja capaz de tomar decisões diante de questões sociais, políticas e econômicas, é necessário que ele saiba ler e interpretar criticamente os dados e informações que recebe de diferentes fontes e contextos, pois “para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente, etc.

De modo geral o bloco “Tratamento da Informação” precisa possibilitar ao aluno formas particulares de pensamento e raciocínio estatístico, probabilístico e combinatório, visando resolver problemas de seu cotidiano e analisar de forma crítica os fatos que ocorrem na sociedade. O pensamento combinatório tem como objetivo levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos possibilitando o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 1999) no bloco Tratamento da Informação propõe que os alunos desenvolvam habilidades de representação e comunicação, que envolvam leituras, interpretação e produção de textos com características dessa área do conhecimento; investigação e compreensão de situações-problema com a utilização de conceitos e procedimentos; e de contextualização no âmbito sociocultural.

Outro documento oficial estudado por Colodel, Pereira e Brandalise (2010), foi as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE, 2008) do Estado do Paraná para o ensino da Matemática. Nele o bloco Tratamento da Informação é chamado de *Conteúdo Estruturante* e inclui noções de probabilidade, estatística, combinatória e matemática financeira. Neste mesmo documento para o Ensino Médio é enfatizado que a análise de dados é essencial para resolver problemas sociais e econômicos, fazendo leituras e interpretações de informações de caráter estatístico e que possa refletir criticamente sobre seus significados. Ainda esse documento enfatiza que o professor deve trabalhar de forma articulada com os demais blocos de conteúdos: números e álgebra, grandezas e medidas e geometria, estabelecendo relações entre eles e mostrando que o conhecimento não é fragmentado, mas sim articulado e integrado e que faz parte do seu cotidiano, da sua vivência e segundo Colodel, Pereira e Brandalise (2010, p. 6):

> Considerando-se, portanto, os dois documentos legais e os pressupostos nele estabelecidos para o Tratamento da Informação e, como as diretrizes deles emanadas vêm se materializando no contexto escolar, faz-se necessário, por um lado analisar as práticas pedagógicas que vem sendo desenvolvidas pelos docentes da Escola Básica e, por outro; desenvolver estudos que auxiliem o professor a explorar metodologias que incentivem a criatividade do aluno, desenvolvendo nele a capacidade de criação de estratégias para resolver problemas, argumentar, trabalhar em equipe e a desenvolver a autonomia.

As autoras afirmam que o professor deve desenvolver práticas que trabalhem dados envolvidos em rádios, jornais, revistas, internet, televisão, materiais manipuláveis como dados, moedas, jogos e outros, pesquisas que façam parte de sua realidade social, com temas que despertem a atenção dos alunos e contribuam para sua formação.

Elas construíram um roteiro de entrevista que envolveu doze professores da Educação Básica de diferentes escolas da rede estadual do município do Paraná, a análise não havia terminado no momento da apresentação desse artigo, mas os autores puderam perceber que os professores consideram importante trabalhar os conceitos propostos no Tratamento da

Informação, mas se sentem inseguros em trabalhá-los, alguns devido à deficiência em sua formação inicial ou por não saberem a forma como trabalhar esse conteúdo.

Os pesquisadores esperam ao final desse estudo contribuir para a formação dos professores de Matemática, tanto a inicial quanto à continuada, e para o desenvolvimento da Educação Estatística no meio acadêmico e educacional, instigando outros estudos e pesquisas sobre a Estatística, a Probabilidade e a Combinatória, para a Educação Básica.

Gomes, Silva e Ferreira (2010) procuraram neste artigo analisar qual a ordem de grandezas das atividades que envolvem o raciocínio combinatório conforme proposta de cinco das coleções de matemática do Ensino Fundamental II aprovadas pelo PNLD, e pretende verificar como as grandezas, enquanto quantidades de elementos dos conjuntos e enquanto resultados, estão sendo apresentadas.

Segundo as pesquisas de Pinheiro e Sá (2007) ainda é muito forte a tendência formalista onde o livro didático é utilizado como principal ferramenta para a elaboração das aulas de combinatória, devido a isso é necessário analisar e estruturar os conceitos referentes à combinatória nos livros didáticos aprovados pelo PNLD.

Segundo Morgado, Pitombeira de Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991), pode-se dizer que a análise combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas. Eles ainda destacam dois tipos de problemas frequentes em análise combinatória: determinar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições e contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito dado, também satisfazendo a certas condições.

Merayo (2001) pontua que a Análise Combinatória possui técnicas que possibilitam saber quantos objetos há em um conjunto sem contá-los, por não necessitar listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto. Pessoa e Borba (2009) destacaram em sua pesquisa que quando a grandeza numérica é menor, pode ser um facilitador na resolução dos problemas, pois perceberam que quando grandezas maiores estavam envolvidas só apareciam tentativas de resolução que não esgotavam todas as possibilidades.

Dentre as dezesseis coleções aprovadas pelo PNLD para as séries finais do Ensino Fundamental, foram escolhidas aleatoriamente cinco coleções, nestas foram encontradas cento e cinco questões relacionadas à combinatória, não necessariamente em capítulos de análise combinatória e probabilidade.

A autora observou em suas análise que nas cinco coleções de livros de Matemática foram encontrados problemas que abordam quatro técnicas da Combinatória (produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação) mas os problema que apareceram com maiores percentuais foram a Combinação e o Produto Cartesiano, sendo o Arranjo a que obteve os menores percentuais. Percebeu-se uma boa variação das representações simbólicas utilizadas, porém os autores dos livros não exploram as propriedades invariantes da combinatória, nem orientaram os professores em relação aos diferentes significados envolvidos em cada técnica, isso pode ser observado tanto no livro do aluno, quanto no manual do professor (GOMES, SILVA e FERREIRA, 2010). Dessa forma, assim como Barreto, Amaral e Borba, podemos concluir que para um trabalho mais efetivo em sala de aula, os livros didáticos deveriam orientar melhor os professores sobre diferentes aspectos da combinatória a serem considerados.

Em relação à ordem de grandeza dos conjuntos propostos nas questões e a ordem das grandezas dos resultados, segundo Gomes, Silva e Ferreira (2010, p. 25):

> Pode-se perceber que as questões de produto cartesiano e de combinação também apresentaram uma maior diversidade nas grandezas envolvidas, porém a maior parte das questões tem grandezas de menor ordem, no caso de 1-10 e a ordem de grandeza de 51-100 não foi identificada em nenhuma questão. Já se tratando dos volumes o maior quantitativo de questões foi encontrado nos volumes 6 e 8, sendo encontradas não necessariamente em capítulos destinados a combinatória e probabilidade, mas também capítulos como o de geometria, álgebra, dentre outros. No que se refere à ordem de grandeza dos resultados, verificou-se que foram encontradas questões com todas as ordens de grandeza estabelecidas e com uma diversidade maior do que as ordens de grandeza dos conjuntos, sendo o maior quantitativo de questões com grandeza de 21-50.

As autoras observam que a diversidade das ordens de grandeza tanto dos conjuntos quanto dos resultados pode não ser considerada significativa e as questões analisadas dão margem à simples obtenção do resultado sem a construção de um sentido para o aprendiz, pois as questões apresentadas nos livros didáticos analisados e suas respectivas formas de resolução não contribuem para a sistematização do raciocínio combinatório.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho de pesquisa o propósito era trazer as tendências didático-pedagógicas para o Ensino da Análise Combinatória segundo os levantamentos dos trabalhos apresentados pela ANPED, ENEM e os Documentos Curriculares. Percebemos que a produção de trabalhos em relação ao bloco “Tratamento da Informação” (variou entre 3% a

5%) e mais especificamente em Análise Combinatória para o Ensino Fundamental e Ensino Médio (variou entre 0,4% e 0,9%) é ainda restrita.

É discutido nos trabalhos analisados assim como nos documentos curriculares que o Tratamento da Informação deve ser trabalhado de forma articulada e integrada aos demais blocos de conteúdos, estabelecendo relações entre eles, e fazendo com que os alunos percebam que o conhecimento Matemático não é fragmentado.

Percebemos uma tendência ainda formalista no desenvolvimento da Análise Combinatória, pois os professores utilizam o livro didático como principal ferramenta para a elaboração de suas aulas, pois estes se sentem inseguros para desenvolver um ensino que proporcione aos alunos uma forma utilizar as habilidades do raciocínio combinatório na resolução de problemas reais.

Essa insegurança, em sua maioria ocorre pela deficiência na sua formação inicial como também por não saberem de que forma trabalhar com seus alunos o desenvolvimento desse conteúdo.

Nos trabalhos que abordaram o raciocínio combinatório em livros didáticos, foi observado que a quantidade de questões é pequena e em alguns casos não são contemplados todos os tipos de problemas e nem as habilidades necessárias para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, e as questões e suas propostas de resoluções não contribuem para a sistematização do ensino, é a simples obtenção de resultados sem a construção de significados para o aluno.

Para uma aprendizagem mais efetiva, os livros didáticos devem abordar diferentes problemas e de diferentes habilidades para desenvolver nos alunos as competências combinatórias.

Outra consideração presente nos trabalhos analisados é a utilização dos conhecimentos adquiridos pelos alunos, buscando formas de ampliar e aprofundar o raciocínio combinatório dos mesmos, para a compreensão da Matemática e outras áreas do conhecimento.

Outro ponto abordado são os avanços que ocorrem no desempenho dos alunos à medida que se avança os níveis de escolarização, com estratégias que demonstram os níveis de conceitualizações que se modificam através de vivências escolares ou extraescolares, influenciando direta ou indiretamente o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

O Princípio Multiplicativo foi tema abordado nas pesquisas analisadas sobre raciocínio combinatório, pois é considerado tema fundamental do pensamento combinatório e das atividades de contagem, que devem ser explorados no ensino fundamental e sua utilização de forma errônea ou o seu desconhecimento trarão obstáculos na compreensão dos demais temas como: arranjo, permutação e combinação.

Para um efetivo aprendizado do raciocínio combinatório o professor deve desenvolver uma prática pedagógica que facilite ao aluno refletir, compreender, argumentar, despertar sua criatividade, desenvolvendo nele a capacidade de criação de estratégias para a resolução de problemas, para o trabalho em equipe e ao desenvolvimento de sua autonomia.

É necessário trabalhar a análise combinatória de forma mais natural, objetiva e produtiva promovendo um ambiente de discussão livre e aberta em sala de aula.

5. REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, A. G.; SILVA J. V. G. Analisando questões em livros didáticos de séries finais do ensino fundamental, acerca do raciocínio combinatório. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. **Anais**. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador, p. 11.

ANDRADE, J. A. A.; NICARATO, A. M. **Tendências didáticas pedagógicas para o ensino de geometria.** Disponível em: <http://www.anped.org.br>. Acesso em: 09/04/2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica**. Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: SEF/MEC, 2006, v. 2.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática, Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio, Brasília: MEC, 1999.

BORBA, R. E.S.; LIMA R. C. G. O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos: do início da escolarização até o ensino médio. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. **Anais**. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador, p. 10.

CARVALHO, J. I. Análise das habilidades em problemas de combinatória nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. **Anais**. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador, P. 10.

COLODEL, D. L.; PEREIRA, L. B. C.; BRANDALISE, M. A. T. Tratamento da informação na educação básica: investigando concepções e práticas. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. **Anais**. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador, p. 10.

DORNELAS, A. C. B. Resolução de problemas em análise combinatória: um enfoque voltado para alunos e professores do ensino médio. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Salvador. **Anais**. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, UFPE, Recife, p. 24.

ESTEVE, I.; MAGINA, S. Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescente de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 7, 2001, Rio de Janeiro. **Anais**. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2001, UFRJ, Rio de Janeiro, p. 2.

FRANT, J. B.; CASTRO, M. R.; LIMA, T. Pensamento combinatório: uma análise baseada na estratégia argumentativa. In: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 24, 2001, Caxambu. **Anais**. ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 24, 2001, Caxambu, p. 12.

GOMES, T. M. da S.; SILVA, V. T.; FEREEIRA, V. G. Análise das grandezas numéricas envolvidas em questões de raciocínio combinatório de livros do 6 ao 9 ano aprovados pelo PNDL. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. **Anais**. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador, p. 12.

LOPES, C. A. E. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental:** uma análise curricular. Campinas: FE/UNICAMP, 1998. Dissertação de Mestrado, p. 125.

PESSOA, C.; BORBA R. O raciocínio combinatório do início do ensino fundamental ao término do ensino médio. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. **Anais**. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador, p. 12.

PINHEIRO, C. A. M.; SÁ, P. F. O ensino de análise combinatória: a prática pedagógica predominante segundo os docentes. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9, 2007, Belo Horizonte. **Anais**. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte, p. 13.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Proposta **Curricular do Estado de São Paulo:** Matemática e suas Tecnologias, São Paulo: SEE, 2009.

ANEXO E. TERMO DE CONSENTIMENTO

Eu, ____, portadora do RG nº ______________________, responsável pela instituição __________________________ aceito fazer parte, como instituição voluntária, do desenvolvimento da pesquisa, cujo título provisório "Raciocínio Combinatório: Uma Proposta Para Professores de Matemática do Ensino Fundamental – Anos Finais". Esta pesquisa é parte integrante para obtenção do título de Mestre, orientada pela Professora Doutora Magda da Silva Peixoto, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos.

Assinando este termo de consentimento, estou ciente de que, a pesquisadora Gisele Aparecida Massuela Gerdenits irá desenvolver sua pesquisa em Análise Combinatória com alunos de diferentes turmas e apresentará o produto final aos professores desta instituição. Tenho clareza que professores e estudantes envolvidos nesta pesquisa serão mantidos anonimato. Também sei que os resultados obtidos no âmbito desta instituição serão utilizados unicamente para fins de divulgação científica, preservando o anonimato já assinalado acima.

Assinatura: ____

Local e data.

ANEXO F. TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada provisoriamente: “Raciocínio Combinatório: Uma Proposta Para Professores de Matemática do Ensino Fundamental – Anos Finais”, desenvolvida por **Gisele Aparecida Massuela Gerdenits.**

Fui informado(a) que:

a) A pesquisa é orientada pela **Professora Doutora Magda da Silva Peixoto**, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário através do e-mail **magdapeixoto@yahoo.com.br;**

b) O uso das informações por mim fornecidas está submetido às normas éticas destinadas à pesquisa envolvendo seres humanos;

c) A minha colaboração se fará de forma anônima, por meio das respostas dadas nos instrumentos de pesquisa elaborados pelo pesquisador, a ser respondido a partir da assinatura desta autorização.

d) O acesso e a análise dos dados coletados se farão apenas pelo pesquisador e pela sua orientadora;

e) Posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem qualquer prejuízo, sofrer quaisquer sansões ou constrangimento.

Por fim, fui esclarecido(a) sobre os objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais é propor aos professores de Matemática uma sequência de atividades didáticas com materiais manipuláveis no intuito de introduzir de maneira intuitiva e natural a noção de Análise Combinatória no Ensino Fundamental – Anos Finais, sendo uma ferramenta importante para a resolução de vários problemas e preparando para a formalização no Ensino Médio.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa.

Atesto o recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre Esclarecido, conforme recomendações da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

Local e data

Assinatura do(a) participante:____

Assinatura do(a) pesquisador(a):____

Assinatura do(a) testemunha(a): ____