

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

# METODOLOGIA GRÁFICA PARA DADOS DE EVENTOS RECORRENTES VIA BOOTSTRAP

Oswaldo Anacleto Junior

Dissertação apresentada ao Departamento de  
de Estatística da Universidade Federal de São  
Carlos como parte dos requisitos necessários  
para obtenção do título de Mestre em Estatística

Orientador: Prof. Dr. Francisco Louzada-Neto

São Carlos  
2005

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

A532mg

Anacleto Junior, Osvaldo.

Metodologia gráfica para dados de eventos recorrentes  
via bootstrap / Osvaldo Anacleto Junior. -- São Carlos :  
UFSCar, 2007.

34 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São  
Carlos, 2005.

1. Estatística matemática. 2. Análise de sobrevivência  
(Biometria). 3. Análise de dados. 4. Bootstrap (Estatística).  
5. Confiabilidade. I. Título.

CDD: 519.5 (20<sup>a</sup>)

## Agradecimentos

A minha mãe, por não ter medido esforços para auxiliar na realização dos meus estudos.

Ao professor Dr. Francisco Louzada-Neto, pela amizade e ensinamentos.

Aos professores Dr. Jorge Alberto Achcar e Dr. Benedito Galvão Benze pelas sugestões dadas em meu exame de qualificação.

Aos Professores Dr. José Galvão Leite, Dr. Carlos Alberto Diniz, Dra. Teresa Cristina Dias e Dr. Luís Aparecido Milan pelo apoio e conselhos.

Aos amigos Thiago e Giba pelas inspiradoras discussões sobre Ciência, Cultura e Filosofia.

# *Resumo*

Experimentos com dados de eventos recorrentes fornecem informações sobre o número de eventos, o tempo até a ocorrência do evento e custos dos mesmos. Um exemplo consiste em dados relacionados à garantia de equipamentos manufaturados, onde o objetivo básico é estimar o custo médio acumulado e o número médio acumulado de eventos. Nelson (1995) propõe uma metodologia para obtenção de intervalos de confiança para o custo e o número médio acumulado de eventos baseada na teoria assintótica. Além desta metodologia, é possível obter intervalos de confiança via métodos computacionalmente intensivos, em particular, *bootstrap*. O objetivo deste trabalho é apresentar estes dois métodos, assim como realizar uma comparação dos mesmos a partir da verificação da probabilidade de cobertura e a influência do tamanho da amostra na precisão dos intervalos de confiança construídos a partir dos dois procedimentos apresentados. Dentre as vantagens da metodologia aqui apresentada, é a possibilidade de sua aplicação em diversas áreas do conhecimento, assim como sua facilidade de implementação computacional. Um exemplo, proveniente da área de engenharia, é apresentado.

**Palavras Chave:** eventos recorrentes, bootstrap, teoria assintótica, probabilidade de cobertura.

# *Abstract*

Experiments related to recurrent events provide information about the number of events, time to their occurrence and their costs. Nelson (1995) presents a methodology to obtain confidence intervals for the cost and the number of cumulative events. Apart from this, it is possible to construct confidence intervals via computer-intensive methods, where the bootstrap is a particular case. In this dissertation we present these two procedures and make a comparison, checking the coverage probability and the sample size influence in the precision of the intervals provided by the two methods. One of the advantages of the methodology presented in this dissertation is the possibility for its application in several areas and its easy computational implementation. An example from engineering illustrates the methodology.

**Keywords:** recurrent events, bootstrap, asymptotic theory, coverage probability.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Conceitos Básicos</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Conceitos Básicos . . . . .	3
1.2.1	Eventos Recorrentes . . . . .	3
1.2.2	Custos dos Eventos . . . . .	5
1.2.3	Censura . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Estimadores Pontuais do CMEA e NMEA</b>	<b>8</b>
2.1	Introdução . . . . .	8
2.2	Distribuição do Custo e do Número Acumulado de Eventos . . . . .	8
2.3	Estimando $C(t)$ e $M(t)$ . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Intervalos de Confiança para <math>C(t)</math></b>	<b>14</b>
3.1	Introdução . . . . .	14
3.2	Variância de $\hat{C}(t)$ e Intervalos de Confiança para CMEA via Teoria Assintótica . . . . .	14
3.3	A Técnica <i>Bootstrap</i> . . . . .	19
3.4	Intervalo de Confiança Percentil <i>Bootstrap</i> para CMEA . . . . .	20
3.5	Aplicação em Dados Reais . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Estudo de Simulação</b>	<b>23</b>

---

4.1	Introdução . . . . .	23
4.2	Especificações Gerais . . . . .	23
4.3	Probabilidades de Cobertura . . . . .	24
4.4	Apresentação dos Resultados . . . . .	25
4.4.1	Probabilidade de Cobertura dos Intervalos de Confiança para NMEA Obtidas via Teoria Assintótica . . . . .	25
4.4.2	Probabilidade de Cobertura dos Intervalos de Confiança para NMEA Obtidas via <i>Bootstrap</i> . . . . .	27
4.5	Amplitudes dos Intervalos . . . . .	29
4.5.1	Especificações Gerais . . . . .	29
4.5.2	Apresentação dos Resultados . . . . .	29
4.5.3	Amplitude média dos intervalos de confiança para NMEA: Amostras de Tamanho 30 . . . . .	30
4.5.4	Amplitude média dos intervalos de confiança para NMEA: Amostras de Tamanho 100 . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas Futuras</b>	<b>32</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>33</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>35</b>

# Capítulo 1

## Conceitos Básicos

### 1.1 Introdução

A análise de sobrevivência e confiabilidade é uma área da estatística referente à análise de dados relacionados ao tempo até a ocorrência de um determinado evento de interesse, a partir de um instante inicial pré-estabelecido. Esta área teve um grande desenvolvimento nos últimos anos, sendo que seus procedimentos são comumente aplicados em dados biomédicos e engenharia. Atualmente esses métodos vem sendo amplamente utilizados na área financeira, uma vez que os mesmos têm apresentado resultados bastante satisfatórios quando comparados com os procedimentos usualmente utilizados nesta área.

O evento de interesse depende do contexto em que a análise de sobrevivência e confiabilidade é utilizada: em medicina, este evento pode ser considerado como sendo o tempo decorrido até o óbito de um paciente, ou o tempo até a ocorrência de uma determinada doença; em engenharia, o evento a ser estudado pode ser o tempo até a falha de um produto manufaturado, máquina ou equipamento. E, na área financeira, um dos interesses é a análise do tempo até a deserção de clientes de uma determinada empresa.

Uma das particularidades desta área, que a diferencia dos outros procedimentos estatísticos existentes é que, dentro da estrutura dos dados relacionados ao tempo até um



evento de interesse, é levado em consideração a ocorrência de observações parciais ou incompletas das informações com respeito às unidades de uma amostra em estudo. Por exemplo, em um estudo sobre o tempo até a ocorrência de uma doença em um grupo de pacientes, existe a possibilidade de óbito de qualquer unidade da amostra dentro do período estudado. Sendo assim, caso exista algum óbito entre o grupo de pacientes, considera-se que houve a presença de uma censura, ou seja, não foi possível observar o evento de interesse em um determinado paciente, que no exemplo em questão trata-se do tempo até a ocorrência de uma doença em estudo. A presença de censuras nas unidades amostrais é tratada na Seção 1.2.3.

Outra particularidade da análise de sobrevivência e confiabilidade se refere ao fato de que existem situações onde o evento de interesse pode ocorrer várias vezes nas mesmas unidades amostrais. A título de ilustração, considere que o interesse seja o estudo do tempo até a ocorrência de uma determinada falha em uma amostra de televisores fabricados por uma empresa. Ao longo do tempo, é possível que cada um dos televisores tenha uma certa quantidade de falhas, sendo que, além do número de falhas, o pesquisador pode estar interessado no custo associado a cada falha ocorrida nestes aparelhos. Sendo assim, a estrutura dos dados deve levar em conta o número de falhas de cada televisor, assim como o custo associado a cada uma das falhas, além das possíveis censuras que podem ocorrer ao longo do tempo. Na literatura, dados deste tipo são chamados de dados de eventos recorrentes e são tratados com detalhes na Seção 1.2.1.

Tendo em vista essas estruturas de dados, um dos objetivos deste trabalho se refere à obtenção de estimativas pontuais e intervalares para o número médio de eventos acumulados por unidade (**NMEA**) e para o custo médio de eventos acumulados por unidade (**CMEA**), a partir da utilização de métodos não paramétricos. Um procedimento desenvolvido por Nelson (1988,1995), baseado na teoria assintótica usual, é apresentado. Além disso, uma nova metodologia para estimação intervalar é desenvolvida, baseada na técnica de reamostragem *bootstrap*. Sendo assim, o outro objetivo deste trabalho é verificar a acurácia destes intervalos de confiança e a influência do tamanho da amostra de unidades

em estudo, assim como uma comparação dos dois tipos de intervalos de confiança a serem apresentados, a partir de um estudo de simulação.

Dentre as vantagens da utilização dessa metodologia, além da facilidade de implementação computacional, pode-se citar a obtenção direta de intervalos de confiança para um conjunto de dados com recorrências do evento de interesse e presença de censuras, além das várias áreas de sua aplicação, como engenharia, medicina, sociologia, demografia, administração e finanças.

Os estimadores não-paramétricos do CMEA e NMEA são apresentados no Capítulo 2. A variância destes estimadores, assim como procedimentos para obtenção de intervalos de confiança são apresentados no Capítulo 3, sendo que neste capítulo também é apresentada uma aplicação dos procedimentos desenvolvidos em dados reais. A análise da eficiência e uma comparação dos procedimentos de estimação intervalar é apresentado no Capítulo 4. E, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões, assim como perspectivas futuras com relação ao desenvolvimento dos procedimentos aqui apresentados.

## 1.2 Conceitos Básicos

A análise de sobrevivência e confiabilidade se faz peculiar devido às características especiais, inerentes aos tipos de dados que são normalmente disponíveis para análise (Louzada-Neto, F.; Mazucheli, J.; Achcar, J.A., 2002).

Nesta Seção, são discutidas algumas das principais características dos dados de sobrevivência e confiabilidade, que estão diretamente ligadas a este trabalho: a presença de eventos recorrentes, censuras e os custos, que em muitas situações estão vinculados a cada recorrência do evento de interesse.

### 1.2.1 Eventos Recorrentes

Experimentos relacionados com dados de eventos recorrentes são comuns em análise de sobrevivência e confiabilidade, sendo que, neste tipo de experimento, a definição do evento

de interesse deve ser feita de forma clara e concisa. Como exemplo de experimentos com dados de eventos recorrentes podemos citar:

1. Uma empresa do ramo automobilístico está lançando um novo veículo no mercado e pretende negociá-lo com, no mínimo, um ano de garantia total. Para oferecer esta garantia ao consumidor, ela necessita de uma estimativa do número e custo médio acumulado de reparos deste veículo no período de um ano.

2. Uma cooperativa que oferece serviços hospitalares possui um grupo de pacientes que se submeteram a uma cirurgia, e tem-se o interesse em estimar o número de vezes que esses pacientes reutilizarão os serviços oferecidos pela cooperativa.

3. Uma administradora de cartões de crédito tem o interesse em estimar qual será o número de vezes que um grupo de clientes deixará de pagar a fatura, após um determinado tempo  $t$ .

4. Uma empresa prestadora de serviços oferece uma garantia de seis meses pelos serviços prestados e deseja expandir essa garantia para doze meses. Para isto, ela necessita de uma estimativa do número e custo médio de revisões de seus serviços em um ano.

Existem algumas situações onde não se sabe exatamente quais foram os tempos em que os eventos de interesse ocorreram nas unidades amostrais, sendo possível apenas observar intervalos de tempo, nos quais se sabe que os eventos ocorreram. É feita a suposição, neste trabalho, de que os tempos de recorrência de eventos são exatamente conhecidos.

Em experimentos com dados de eventos recorrentes existe um conjunto de variáveis que podem ser observado em cada unidade amostral tais como: número total de eventos em um determinado período de tempo, tempos de recorrência dos eventos, tempos entre os eventos, e, em muitas situações, o custo relacionado à cada recorrência. A Figura 1 ilustra as possíveis variáveis observáveis em um experimento na presença de três eventos recorrentes para uma unidade amostral (Louzada-Neto, F.; Mazucheli, J.; Achcar, J.A., 2002).

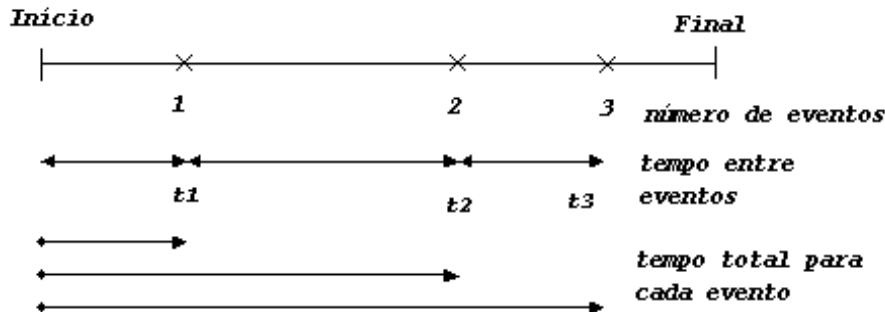


Figura 1. Variáveis observáveis em uma unidade amostral com três eventos recorrentes.

### 1.2.2 Custos dos Eventos

Muitas vezes, o interesse é a análise do custo relacionado a cada recorrência de um evento. Por exemplo, em estudos médicos, o pesquisador pode estar interessado no custo relacionado a cada episódio dos sintomas da doença manifestados em um paciente. Em engenharia, o interesse pode ser o custo relacionado a cada reparo efetuado em um equipamento.

Em estudos com uma ou mais unidades, os custos podem ou não ser iguais para cada recorrência do evento. Nenhuma consideração será feita sobre os valores de cada custo, não importando o processo de geração destes.

### 1.2.3 Censura

Em dados de análise de sobrevivência e confiabilidade, é usual a presença de observações parciais ou incompletas. Isso decorre do fato que o tempo até a ocorrência de um evento não é medido instantaneamente, sendo que valores grandes desta variável necessitam de mais tempo para serem observados. Logo, existe a possibilidade do evento de interesse não ocorrer até o final do estudo. Existe também a situação onde não é possível mais obter informações sobre uma determinada unidade amostral sem que o evento de interesse tenha

ocorrido. Por exemplo, em um estudo sobre o tempo até a ocorrência de uma doença em um grupo de pacientes, existe a possibilidade de óbito de qualquer unidade da amostra dentro do período estudado. Quando as informações relativas a uma ou mais unidades, por algum motivo, ficam inacessíveis, diz-se, em análise de sobrevivência e confiabilidade, que uma ou mais censuras ocorreram.

Em geral, as censuras podem ocorrer de várias formas, de acordo com diferentes mecanismos, dentre os quais pode-se citar: censuras do tipo I, censuras do tipo II e censuras aleatórias (Lawless, 1982). Por exemplo, em análise de sobrevivência, se o estudo termina em um instante pré-estabelecido e alguns dos tempos até a ocorrência de um evento não são observados para algumas unidades amostrais, têm-se a censura do tipo I. Caso o estudo termine após a ocorrência de uma determinada quantidade pré-estabelecida de censuras, dentre as unidades em estudo, têm-se a censura do tipo II. O tipo de censura aleatória é mais comum na prática médica. Isto acontece, por exemplo, quando um paciente é retirado no decorrer do estudo sem ter ocorrido a falha, ou então, se o paciente morrer por uma razão diferente da estudada.

Geralmente, as censuras de tipo I e aleatórias são observadas com maior frequência em estudos biomédicos, enquanto em experimentos industriais, as censuras do tipo II são predominantes. Além disso, as censuras podem ainda ser classificadas como: censura à direita, à esquerda e intervalar.

A censura à direita ocorre quando a unidade está em observação e, em algum tempo dentro do período de estudo, seja pela sua exclusão da mostra ou pelo final do estudo, as respectivas informações tornam-se inacessíveis após este tempo.

A censura à esquerda acontece na situação onde o evento de interesse já ocorreu quando uma unidade é incluída no grupo de unidades em estudo.

Em alguns estudos, as censuras à direita e à esquerda podem ocorrer simultaneamente e, neste caso, diz-se que os tempos de observação das unidades, por exemplo, tempos de vida, são duplamente censurados.

A censura intervalar é um tipo mais geral de censura que acontece quando se sabe

somente que a censura ocorreu dentro de um certo intervalo de tempo, digamos  $t$  e  $t'$ .

Para o emprego da metodologia apresentada, é suposto que os tempos de censura são exatamente conhecidos. Além disso, é feita a suposição de que esses tempos são independentes do número e do custo dos eventos acumulados e, ainda, distribuídos aleatoriamente nas unidades em estudo.

# Capítulo 2

## Estimadores Pontuais do CMEA e NMEA

### 2.1 Introdução

Neste Capítulo são apresentados os estimadores pontuais não paramétricos do CMEA e NMEA. Estes estimadores são baseados em uma representação esquemática das unidades da amostra, formulada a partir de intervalos de tempo construídos a partir de cada censura observada (Nelson, 1995).

### 2.2 Distribuição do Custo e do Número Acumulado de Eventos

Considere uma amostra de  $N$  unidades, sendo que cada unidade possui um histórico de recorrências de um determinado evento de interesse, juntamente com um custo associado

a cada recorrência. Como cada unidade possui um histórico diferente de recorrências, tem-se que em um particular tempo  $t$  cada unidade terá um valor diferente do custo total das recorrências acumuladas. Sendo assim, é conveniente supor uma distribuição para o custo acumulado dos eventos por unidade no tempo  $t$ . Logo, é possível considerar que existe uma média da distribuição do custo acumulado de recorrências em um tempo  $t$ , denominada  $C(t)$ .

A Figura 2 apresenta um exemplo de históricos de recorrências de unidades durante um certo período. Cada curva é referente ao histórico do valor do custo acumulado de eventos ao longo do tempo para cada unidade. O gráfico mostra curvas por motivos de conveniência, mas na verdade cada histórico de custos acumulados é constituído por uma função escada, onde os saltos são referentes aos custos das recorrências de cada unidade.

A curva mais escura na Figura 2 é a função que representa o custo médio acumulado de eventos no tempo  $t$ , denominada  $C(t)$ . Os pontos nos finais das curvas representam as censuras, e é assumido que os tempos de censura são independentes do custo e número de recorrências das unidades, o que é chamada de censura aleatória ou não informativa.



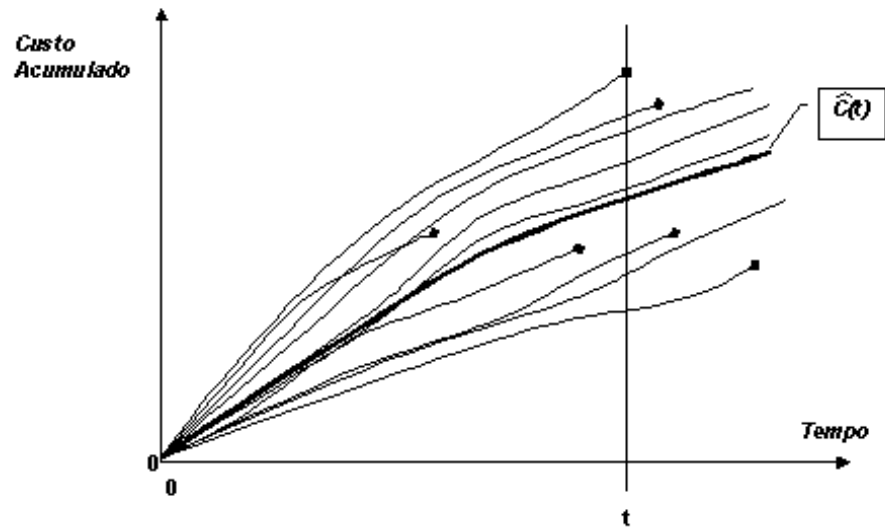


Figura 2. Histórico dos custos acumulados de uma amostra de  $N$  unidades.

Assim como ocorre com os custos, como cada unidade possui um histórico diferente de recorrências, tem-se que em um particular tempo  $t$  cada unidade também terá um valor diferente do número total das recorrências acumuladas no tempo  $t$ . Logo, também é possível considerar uma distribuição para o número médio de eventos acumulados por unidade no tempo  $t$ . A média dessa distribuição nesse tempo é representada por  $M(t)$ .

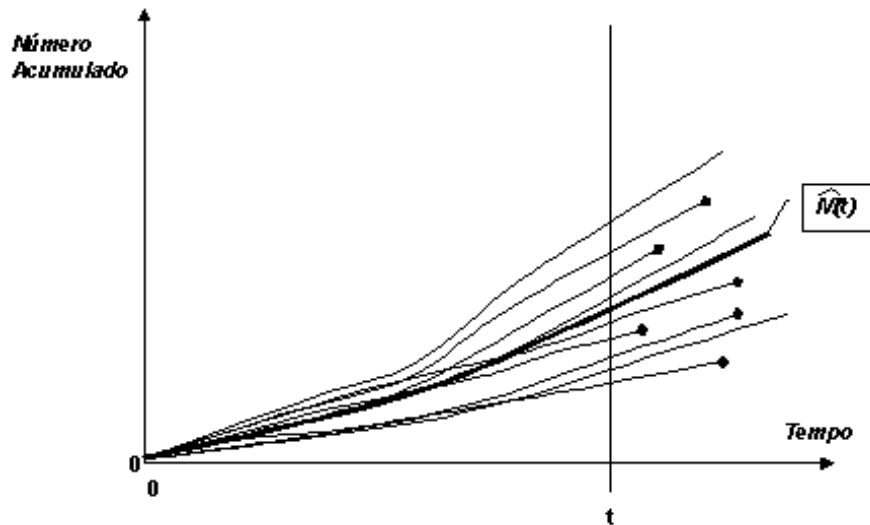


Figura 3. Histórico dos números acumulados de uma amostra de  $N$  unidades.

A Figura 3 ilustra possíveis comportamentos dos históricos de várias unidades. Cada linha representa o número de eventos acumulados em cada unidade com exceção da linha mais escura, que mostra um possível comportamento dos valores de  $M(t)$ . O ponto que finaliza algumas curvas, indica a idade de censura das respectivas unidades.

### 2.3 Estimando $C(t)$ e $M(t)$

O estimador não paramétrico para o Custo Médio de Eventos Acumulados ( $C(t)$ ), proposto por Nelson (1995), é similar ao proposto por Nelson (1982) para estimativa não-paramétrica da função de risco para dados não reparados. Para a obtenção desta estimativa, considere um experimento com  $N$  unidades, e cada uma destas unidades possuindo um histórico de eventos recorrentes durante um período de tempo até que uma censura ocorra. Estas unidades são classificadas em ordem crescente de acordo com o tempo de suas respectivas censuras e numeradas juntamente com os intervalos em ordem decrescente.

Considere também que o tempo total do experimento, desde o início do funcionamento de todas as unidades até o último tempo de censura seja dividido em  $N$  intervalos onde esses intervalos são determinados de acordo com os tempos de censura de cada uma das unidades. Seja  $Y_{ij}$  o custo total dos eventos da  $j$ -ésima unidade no  $i$ -ésimo intervalo. A representação esquemática das  $N$  unidades juntamente com os intervalos é apresentada na Figura 4.

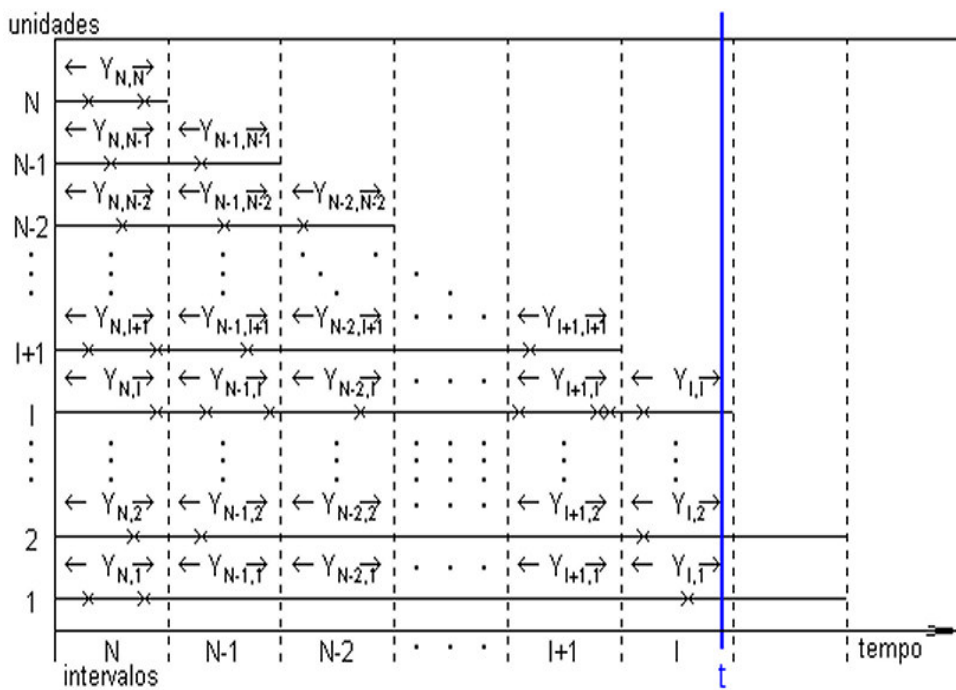


Figura 4 : Representação esquemática de N unidades

A partir da representação esquemática da Figura 4, o estimador para o Custo Médio de Eventos Acumulados em um tempo  $t$  no  $I$ -ésimo intervalo é dado por,



# Capítulo 3

## Intervalos de Confiança para $C(t)$

### 3.1 Introdução

Neste Capítulo, é apresentada a variância de  $\hat{C}(t)$  assim como procedimentos para a obtenção de intervalos de confiança para CMEA a partir de métodos via teoria assintótica e *bootstrap*. A metodologia apresentada neste capítulo é aplicada em dados reais.

### 3.2 Variância de $\hat{C}(t)$ e Intervalos de Confiança para CMEA via Teoria Assintótica

A partir da fórmula descrita em (2.1), e da propriedade da variância da soma de variáveis aleatórias, é possível obter a variância da estimativa do custo médio de eventos acumulados,



$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{(N-1)(N-2)} \sum_{n=1}^{N-2} V(Y_{N-1,n}, Y_{N-2,n}) \\
& + \frac{2}{(N-1)(N-3)} \sum_{n=1}^{N-3} V(Y_{N-1,n}, Y_{N-3,n}) \\
& + \frac{2}{(N-1)(N-4)} \sum_{n=1}^{N-4} V(Y_{N-1,n}, Y_{N-4,n}) \\
& \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
& + \frac{2}{(N-1)(I+1)} \sum_{n=1}^{I+1} V(Y_{N-1,n}, Y_{I+1,n}) \\
& + \frac{2}{(N-1)I} \sum_{n=1}^I V(Y_{N-1,n}, Y_{I,n}) \\
& \text{-----} \\
& \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
& \text{-----} \\
& \frac{2}{(I+1)I} \sum_{n=1}^I V(Y_{I+1,n}, Y_{I,n}).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Observe que o primeiro bloco de termos é formado pelas variâncias individuais de cada um dos  $Y_i$ 's de (2.1). O segundo bloco consiste das covariâncias entre os custos incrementais do intervalo  $N$  e os intervalos subsequentes  $N-1, N-2, \dots, I$ , o terceiro bloco consiste das covariâncias entre os custos incrementais do intervalo  $N-1$  e os intervalos subsequentes  $N-2, N-3, \dots, I$  e assim sucessivamente até o último bloco, que consiste das covariâncias entre os custos incrementais do intervalo  $I+1$  e os custos incrementais do intervalo  $I$  até o tempo de interesse  $t$ .

Considerando que a distribuição do custo incremental dos eventos das diferentes unidades é a mesma para cada intervalo considerado anteriormente, a fórmula da variância descrita em (3.1) pode ser simplificada considerando, em um determinado intervalo  $H$ , a variância de qualquer uma das unidades como  $V(Y_{Hn})$ ; logo, a variância total deste intervalo será dada por  $H * V(Y_{Hn})$ . A partir da igualdade da distribuição do custo incremental das unidades em um determinado intervalo também é possível concluir que a covariância entre os custos incrementais de dois intervalos quaisquer é a mesma para cada uma das unidades envolvidas. Sendo assim, considerando que a covariância entre os intervalos  $H$  e  $H + 1$  é dada por  $V(Y_{Hn}, Y_{H+1,n})$  para cada uma das unidades em estudo e que a variância de cada unidade em um determinado intervalo  $I$  é dada por  $V(Y_{In})$ , a fórmula da variância simplificada é dada por (Nelson, 1995),

$$\begin{aligned}
 V[C^*(t)] &= \frac{1}{N}V(Y_{Nn}) + \frac{1}{N-1}V(Y_{N-1,n}) + \frac{1}{N-2}V(Y_{N-2,n}) + \dots + \frac{1}{I}V(Y_{In}) \\
 &+ \frac{2}{N}[V(Y_{Nn}, Y_{N-1,n}) + V(Y_{Nn}, Y_{N-2,n}) + \dots + V(Y_{Nn}, Y_{I,n})] \\
 &+ \frac{2}{N-1}[V(Y_{N-1n}, Y_{N-2,n}) + \dots + V(Y_{N-1n}, Y_{I,n})] \\
 &+ \dots \\
 &+ \frac{2}{I+1}[V(Y_{I+1n}, Y_{I,n})]. \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Para a obtenção da estimativa da variância apresentada em (3.1), considere o custo incremental de  $I$



unidades em um determinado intervalo  $I$ . Como estes custos são uma amostra aleatória de uma mesma distribuição de custos incrementais para o intervalo considerado, a variância amostral obtida a partir desta amostra aleatória é um estimador não viciado da variância populacional  $V(Y_{In})$  dada por,

$$\hat{V}(Y_{In}) = \frac{1}{I-1} \sum_{n=1}^i (Y_{in} - \bar{Y}_{i.})^2. \quad (3.3)$$

onde  $\bar{Y}_{i.}$  é a média amostral dos custos incrementais no intervalo  $I$ .

Considerando dois intervalos  $I$  e  $J$ , a partir das amostras dos custos incrementais das unidades em estudo nestes dois intervalos, é possível determinar a covariância amostral dada por,

$$\hat{V}(Y_{IN}, Y_{IJ}) = +\frac{1}{J-1} \sum_{n=1}^J (Y_{in} - \bar{Y}_{i.})(Y_{jn} - \bar{Y}_{j.}). \quad (3.4)$$

$$J < I.$$

A partir disso, considerando a teoria assintótica usual (Lehmann, 1999), é possível construir um intervalo de confiança para CMEA em um determinado tempo  $t$  com um nível de significância  $\alpha$ , dado por,

$$\hat{C}(t) \pm K_{\alpha} * \{\hat{V}[\hat{C}(t)]\}^{1/2} \quad (3.5)$$

onde  $\hat{V}[\hat{C}(t)]$  é o estimador de (3.1) e  $K_{\alpha}$  é o quantil  $\alpha/2$  da distribuição normal padrão.

A utilização de intervalos de confiança baseados na teoria assintótica para o custo e número médio de eventos acumulados pode ser comprometida pelo tamanho da amostra em estudo, que deve ser suficientemente grande. Uma alternativa para a solução deste

problema é a utilização de métodos computacionalmente intensivos, como o *bootstrap* (Efron e Tibshirani, 1993).

### 3.3 A Técnica *Bootstrap*

Essa técnica de simulação foi proposta primeiramente por Efron (1979) e visa a obtenção de estimativas intervalares empíricas para os parâmetros de interesse por meio da reamostragem do conjunto de dados original. A idéia principal é tratar os dados (amostra original) como se eles fossem a população, e, sendo assim, retirar amostras com reposição da amostra original como se estivesse amostrando a população. Esse processo é repetido um grande número de vezes e, em cada reamostra, a quantidade de interesse é calculada.

Existem dois tipos básicos de *bootstrap*. O *bootstrap* paramétrico é construído de forma que as estimativas dos parâmetros de interesse são obtidas por meio do modelo ajustado, ou seja, as reamostras são geradas a partir do modelo ajustado com os valores dos parâmetros fixados nas estimativas obtidas na amostra original. Por outro lado, no *bootstrap* não paramétrico, as estimativas são baseadas em  $R$  reamostras com reposição obtidas da amostra original, sem a suposição de um modelo probabilístico para os dados.

Para a construção de intervalos de confiança *bootstrap*, considere  $\mu$  o parâmetro de interesse. Para cada reamostra é calculada a estimativa de  $\mu$ , e no final de  $R$  reamostragens são obtidos  $\hat{\mu}_1^* < \dots < \hat{\mu}_R^*$  valores das estimativas ordenadas. Utiliza-se então

$$\hat{\mu}_{L(R+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)}^* \text{ e } \hat{\mu}_{U(R+1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}^* \quad (3.6)$$

como sendo os limites inferiores e superiores do intervalo  $100(1 - \alpha)\%$  de confiança para  $\mu$ .

Dessa forma, usando (3.6) pode-se obter intervalos de confiança percentil bootstrap  $100(1 - \alpha)\%$  para o parâmetro de interesse. Intervalos de confiança percentil *bootstrap*

para os outros parâmetros de interesse podem ser obtidos de maneira análoga. A próxima seção apresenta um algoritmo para a obtenção do intervalo de confiança percentil *bootstrap* para o número e o custo médio de eventos acumulados.

### 3.4 Intervalo de Confiança Percentil *Bootstrap* para CMEA

Um algoritmo para a obtenção de um intervalo  $100(1 - \alpha)\%$  de confiança percentil *bootstrap* para o número e o custo médio de eventos acumulados é dado pelos seguintes passos:

*Passo 1:* A partir do conjunto de dados original, ou seja, a amostra de dados de eventos recorrentes em que foi baseada o cálculo de CMEA e NMEA, obter  $B$  amostras de sistemas com base em uma amostragem com reposição;

*Passo 2:* Para cada uma das  $B$  reamostras, calcular o custo e o número médio de eventos acumulados;

*Passo 3:* Baseado nas estimativas feitas a partir das reamostragens do conjunto de dados original, determinar os percentis  $\frac{\alpha}{2}$  e  $(1 - \frac{\alpha}{2})$  da distribuição empírica de cada tempo de recorrência obtida pelas  $B$  reamostras.

### 3.5 Aplicação em Dados Reais

A metodologia proposta foi aplicada em um conjunto de dados fornecido por Nelson (1995). Os dados correspondem a um conjunto de 41 motores, e cada um dos mesmos possui 16 válvulas que podem ser substituídas ao longo do tempo (tabela 1 – apêndice). O interesse é obter uma estimativa da taxa de substituição, verificando dessa forma se essa taxa diminui ou aumenta de acordo com o tempo de vida do motor (em dias).

As estimativas gráficas do número médio acumulado de reparos (substituições) via teoria assintótica e *bootstrap* são apresentados nas figuras 6 e 7. Para a obtenção da

estimativa foi utilizado o software estatístico SAS, e, na implementação do bootstrap, foram consideradas 399 reamostras para a construção do intervalo de confiança (Hall, 1986). Os valores de  $\widehat{M}(t)$  com os respectivos intervalos de confiança obtidos a partir dos dois métodos (com um coeficiente de confiança de 95%) são apresentados nas Tabelas 2 e 3 do Apêndice. A partir das tabelas, observa-se que os dois métodos fornecem estimativas intervalares similares para o número médio acumulado de reparos dos motores. Além disso, ambos os gráficos sugerem uma taxa de substituição constante ao longo do tempo, uma vez que a estimativa do número médio acumulado de substituições aumenta ao longo do tempo de uma forma aproximadamente linear.

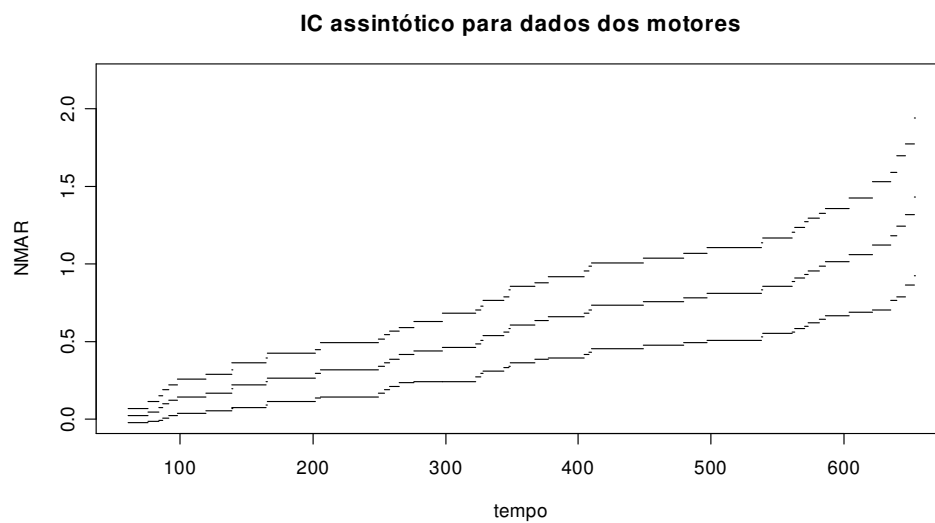


Figura 5. Intervalos de Confiança assintóticos (95%) para  $M(t)$ .

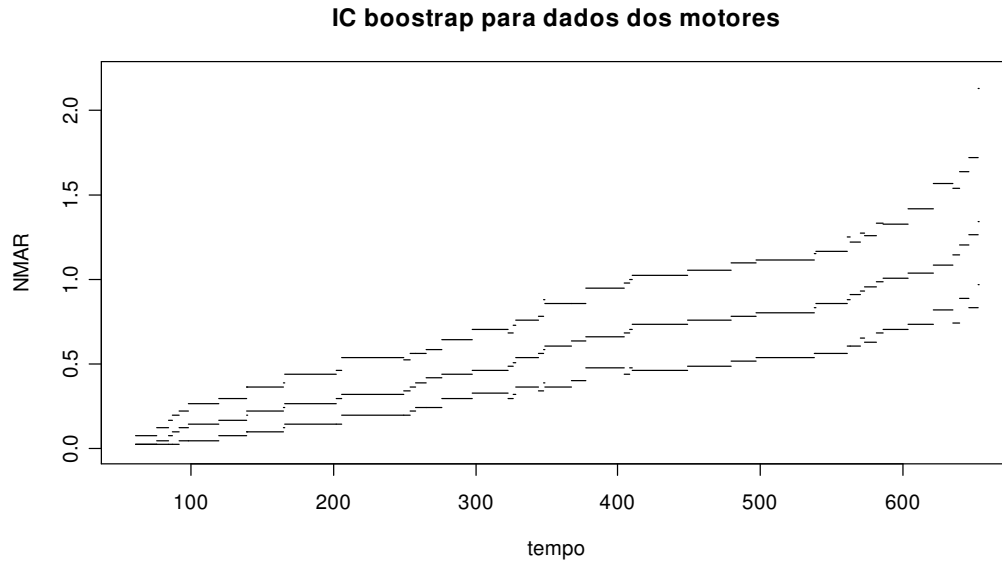


Figura 6. Intervalos de Confiança *bootstrap* (95%) para  $M(t)$ .

# Capítulo 4

## Estudo de Simulação

### 4.1 Introdução

Uma vez conhecidos os procedimentos de obtenção de intervalos de confiança para  $C(t)$  e  $M(t)$ , um interesse reside em verificar a eficiência destes procedimentos e fazer uma comparação dos mesmos.

Neste Capítulo são apresentados os resultados de um estudo de simulação para comparar os diferentes procedimentos de intervalos de confiança para  $M(t)$ , por meio do cálculo de suas probabilidades de cobertura e amplitudes médias, tendo como parâmetro de variação o tamanho da amostra de unidades.

### 4.2 Especificações Gerais

Os estudos de simulação foram realizados considerando 3 tamanhos de amostra: 30, 50 e 100 unidades. Os dados para a aplicação das metodologias em estudo foram gerados, para cada tamanho de amostra, a partir das seguintes especificações:

- Os números de eventos ocorridos em cada unidade foram gerados a partir de uma distribuição uniforme discreta com valor mínimo igual a 2 e máximo igual a 7.

- Os tempos de recorrências dos eventos foram gerados a partir de uma distribuição exponencial com média 1000. O último tempo gerado para as recorrências de eventos em cada unidade foi considerado como a idade de censura dessa unidade. Nenhum custo foi relacionado a cada idade de censura. Estes tempos foram gerados de forma que não houvessem tempos de recorrência iguais entre diferentes unidades (sem presença de empates).

### 4.3 Probabilidades de Cobertura

Para a determinação da probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança as seguintes etapas foram seguidas:

1. Uma amostra, definida como a amostra original, foi gerada conforme as especificações já comentadas na seção 4.2. Em seguida, foram obtidas as estimativas intervalares do NMEA em cada tempo de ocorrência dos eventos nas unidades da amostra.

2. Em seguida, foram geradas 499 amostras a partir das mesmas distribuições utilizadas para a geração da amostra original, e foram obtidas as estimativas para o número médio de eventos acumulados para cada uma destas amostras.

3. Para a verificação da probabilidade de cobertura dos intervalos, um problema que surge consiste no fato de que os tempos de ocorrência dos eventos destas 499 amostras são distintos entre si e também são distintos da amostra original, uma vez que todos estes tempos são gerados a partir de uma distribuição de probabilidade. Para a resolução deste problema, foram considerados quantis aproximados de 10, 25, 50, 75 e 90 dos tempos de recorrência de cada uma das amostras e a verificação da probabilidade de cobertura dos intervalos foram feitas a partir do comportamento das estimativas nos quantis especificados. Caso a estimativa da amostra original não estivesse contida no intervalo de confiança

da amostra gerada, era verificado se a estimativa original estava abaixo do limite inferior ou acima do limite superior do intervalo de confiança dos dados reamostrados. O número de vezes em que cada uma dessas situações ocorreu, foi anotado. Assim, baseando-se nas 499 amostras, foi calculada a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança para  $M(t)$ .

## 4.4 Apresentação dos Resultados

Os resultados das probabilidades de cobertura dos intervalos de confiança para **NMEA** são apresentados separadamente nas Tabelas 1 a 6, de acordo com os respectivos tamanhos amostrais e procedimentos utilizados para obtenção dos intervalos.

A primeira coluna de cada tabela apresenta os quantis, enquanto a segunda coluna mostra os respectivos tempos. A terceira coluna apresenta os valores de **NMEA** nos tempos dos quantis, as colunas 4 e 5 mostram os números de intervalos de confiança obtidos nas 499 amostras geradas e que não contém as estimativas obtidas em algum dos 5 quantis fixados na amostra original. A coluna 7 mostra as probabilidades de cobertura em cada tempo observado.

### 4.4.1 Probabilidade de Cobertura dos Intervalos de Confiança para NMEA Obtidas via Teoria Assintótica

As Tabelas 1, 2 e 3 apresentam os resultados para as probabilidades de cobertura dos intervalos de confiança obtidos via teoria assintótica para  $M(t)$  em situações envolvendo 30, 50 e 100 unidades.



Tabela 1. Probabilidade de Cobertura do IC assintótico para NMEA - 30 unidades

<i>Quantil</i>	<i>Tempo</i>	<i>NMEA</i>	<i>Abaixo L. I.</i>	<i>Acima L. S.</i>	<i>Total</i>	<i>Prob. Cob.</i>
10	76.66	0.33	0	0	0	100%
25	252.52	0.88	0	0	0	100%
50	499.72	1.83	0	4	4	99%
75	1026.00	2.82	1	20	21	95%
90	1536.73	3.54	7	28	34	91%

Tabela 2. Probabilidade de Cobertura do IC assintótico para NMEA - 50 unidades

<i>Quantil</i>	<i>Tempo</i>	<i>NMEA</i>	<i>Abaixo L. I.</i>	<i>Acima L. S.</i>	<i>Total</i>	<i>Prob. Cob.</i>
10	69.77	0.36	0	0	0	100%
25	236.88	0.91	0	0	0	100%
50	511.52	1.83	0	8	8	98%
75	906.38	2.79	1	16	17	96%
90	1396.61	3.46	6	19	25	94%

Tabela 3. Probabilidade de Cobertura do IC assintótico para NMEA - 100 unidades

<i>Quantil</i>	<i>Tempo</i>	<i>NMEA</i>	<i>Abaixo L. I.</i>	<i>Acima L. S.</i>	<i>Total</i>	<i>Prob. Cob.</i>
10	69.77	0.36	0	0	0	100%
25	201.72	0.90	0	1	1	100%
50	517.01	1.81	1	9	10	97%
75	882.93	2.76	2	11	13	97%
90	1435.97	3.40	15	8	23	94%

A partir dos resultados obtidos, e considerando que um intervalo de confiança de 99% para a proporção  $p$  é dado por  $(0.92 ; 0.98)$  quando  $\hat{p} = 0.95$  e o tamanho de amostra é 499, observa-se que a probabilidade de cobertura é superestimada ou subestimada em vários quantis. Este problema parece diminuir quando o tamanho da amostra aumenta. Também é verificado a partir das tabelas que os limites superiores são os mais problemáticos, visto que as estimativas da amostra original aparecem com mais frequência acima deste limite, quando não acontece a cobertura destas estimativas pelos intervalos.

#### 4.4.2 Probabilidade de Cobertura dos Intervalos de Confiança para NMEA Obtidas via *Bootstrap*

As Tabelas 4, 5 e 6 apresentam os resultados para as probabilidades de cobertura dos intervalos de confiança obtidos via *bootstrap* para  $M(t)$  em situações envolvendo 30, 50 e 100 unidades.

Tabela 4. Probabilidade de Cobertura do IC *bootstrap* - 30 unidades

<i>Quantil</i>	<i>Tempo</i>	<i>NMEA</i>	<i>Abaixo L. I.</i>	<i>Acima L. S.</i>	<i>Total</i>	<i>Prob. Cob.</i>
10	76.66	0.33	0	0	0	100%
25	252.52	0.88	0	0	0	100%
50	499.72	1.83	2	5	7	98%
75	1026.00	2.82	6	22	28	93%
90	1536.73	3.54	9	35	44	89%

Tabela 5. Probabilidade de Cobertura do IC *bootstrap* - 50 unidades

<i>Quantil</i>	<i>Tempo</i>	<i>NMEA</i>	<i>Abaixo L. I.</i>	<i>Acima L. S.</i>	<i>Total</i>	<i>Prob. Cob.</i>
10	69.77	0.36	0	0	0	100%
25	236.88	0.91	0	0	0	100%
50	511.52	1.83	0	7	7	98%
75	906.38	2.79	1	18	19	95%
90	1396.61	3.46	7	22	29	93%

Tabela 6. Probabilidade de Cobertura do IC *bootstrap* - 100 unidades

<i>Quantil</i>	<i>Tempo</i>	<i>NMEA</i>	<i>Abaixo L. I.</i>	<i>Acima L. S.</i>	<i>Total</i>	<i>Prob. Cob.</i>
10	69.77	0.36	0	0	0	100%
25	201.72	0.90	0	0	0	100%
50	517.01	1.81	1	8	9	98%
75	882.93	2.76	4	12	16	96%
90	1435.97	3.40	13	12	25	94%

A partir dos resultados obtidos, e considerando que um intervalo de confiança de 99% para a proporção  $p$  é dado por  $(0.92 ; 0.98)$  quando  $\hat{p} = 0.95$  e o tamanho de amostra é 499, observa-se que a probabilidade de cobertura dos intervalos *bootstrap* também é superestimada ou subestimada em vários quantis. Este problema parece diminuir quando o tamanho da amostra aumenta. Também é verificado a partir das tabelas que os limites superiores são os mais problemáticos, visto que as estimativas da amostra original aparecem com mais frequência acima deste limite, quando não acontece a cobertura destas estimativas pelos intervalos.

## 4.5 Amplitudes dos Intervalos

Além da verificação da probabilidade de cobertura, através do estudo de simulação foi analisado o comportamento das amplitudes dos dois tipos de intervalos de confiança propostos, com o objetivo de comparar a precisão das estimativas intervalares fornecidas via teoria assintótica e *bootstrap*.

### 4.5.1 Especificações Gerais

O estudo de simulação para a comparação das amplitudes dos intervalos foi realizado considerando 2 tamanhos de amostra: 30 e 100 unidades. Os dados para a aplicação das metodologias em estudo foram gerados, para cada tamanho de amostra, a partir das mesmas especificações utilizadas para geração dos dados para o cálculo da probabilidade de cobertura, apresentado na Seção anterior.

Para cada tamanho de amostra foram geradas 100 amostras e construídos os intervalos de confiança via teoria assintótica e *bootstrap*, e, a partir dos intervalos obtidos, foram calculadas as amplitudes médias dos intervalos em 5 quantis aproximados dos tempos de recorrência de cada uma das unidades amostrais.

### 4.5.2 Apresentação dos Resultados

As amplitudes médias dos intervalos de confiança para o **NMEA** são apresentadas nas Tabelas 7 e 8, de acordo com os respectivos tamanhos amostrais e procedimentos utilizados para obtenção dos intervalos.

A primeira coluna de cada tabela apresenta os quantis, enquanto a segunda coluna mostra os respectivos tempos. A terceira coluna apresenta a amplitude média dos intervalos obtidos via teoria assintótica e a quarta coluna apresenta a amplitude média dos intervalos de confiança *bootstrap*.

### 4.5.3 Amplitude média dos intervalos de confiança para NMEA: Amostras de Tamanho 30

A Tabela 7 apresenta as amplitudes médias dos intervalos de confiança obtidos via teoria assintótica e bootstrap para NMEA em situações envolvendo 30 unidades amostrais.

Tabela 7: Amplitude média dos intervalos para NMEA - 30 unidades

<i>Quantil</i>	<i>Tempo</i>	<i>Amplitude Média</i>	
		<i>IC assintótico</i>	<i>IC bootstrap</i>
10	76.12	0.40	0.38
25	215.73	0.64	0.61
50	506.56	0.88	0.85
75	957.69	1.08	1.03
90	1474.97	1.20	1.15

Na Tabela 7, verifica-se que as amplitudes médias dos intervalos de confiança assintótico e bootstrap são similares e assumem valores maiores nos quantis mais altos dos tempos de recorrência, uma vez que as unidades são censuradas ao longo do tempo de estudo. Ou seja, a medida que o tempo aumenta, perde-se informação sobre as unidades amostrais, tendo como consequência uma menor precisão nos intervalos de confiança para os maiores tempos de recorrência observados.

### 4.5.4 Amplitude média dos intervalos de confiança para NMEA: Amostras de Tamanho 100

A Tabela 8 apresenta as amplitudes médias dos intervalos de confiança obtidos via teoria assintótica e *bootstrap* para NMEA em situações envolvendo 100 unidades amostrais.

Tabela 8. Amplitude média dos intervalos para NMEA - 100 unidades

<i>Quantil</i>	<i>Tempo</i>	<i>Amplitude Média</i>	
		<i>IC assintótico</i>	<i>IC bootstrap</i>
10	80.62	0.23	0.22
25	216.95	0.35	0.35
50	505.69	0.49	0.48
75	959.20	0.59	0.59
90	1496.49	0.66	0.65

A partir da Tabela 8, verifica-se que as amplitudes médias dos intervalos de confiança assintótico e *bootstrap* são similares e assumem valores maiores nos quantis mais altos dos tempos de recorrência para amostras de tamanho 100. Também é observado que as amplitudes médias dos intervalos obtidos com as amostras de tamanho 100 são menores que as amplitudes médias dos intervalos obtidos com amostras de tamanho 30.

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste trabalho, foram procedimentos para obtenção de estimativas para o número médio de eventos acumulado por unidade (**NMEA**) e para o custo médio de eventos acumulados por unidade (**CMEA**), a partir da utilização de métodos não paramétricos em dados de eventos recorrentes. Foram apresentados também a metodologia desenvolvida por Nelson (1995) para a obtenção de estimativas baseada na teoria assintótica. Além disso, foi desenvolvido um novo procedimento, baseado na técnica de reamostragem *bootstrap*.

A partir do estudo de simulação realizado, foi verificado que os intervalos de confiança bootstrap fornecem uma boa estimativa para o NMEA, com a vantagem de que as estimativas intervalares obtidas por este método não são comprometidas nas situações em que o tamanho da amostra é pequeno ou moderado.

Um grande problema encontrado no estudo de simulação se refere ao grande esforço computacional para a obtenção da probabilidade de cobertura, devido à estrutura dos dados de eventos recorrentes. Em vista disso, um próximo passo no desenvolvimento deste trabalho é buscar formas de diminuir este esforço computacional e realizar um estudo mais detalhado, considerando outra distribuição para o tempo e o custo das recorrências nas amostras geradas, assim como outra distribuição para o número de recorrências por unidade amostral.

# Referências Bibliográficas

- [1] DAVISON, A.C. and HINKLEY, D.V. (1997). *Bootstrap Methods and Their Application*. Cambridge University Press.
- [2] EFRON, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 7, 1-26.
- [3] EFRON, B., & TIBSHIRANI, R. J. (1993). *An introduction to the bootstrap*. New York: Chapman & Hall.
- [4] HALL, P. (1986). *On the number of bootstrap simulations required to construct a confidence interval*. *Annals of Statistics*, 14, 1453–1462.
- [5] LAWLESS, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley and Sons, New York, New York.
- [6] LEHMANN, E. L. (1999). *Elements of Large-sample Theory*. New York Springer-Verlag, New York.
- [7] LOUZADA-NETO, F.; MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J.A. (2002). *Introdução à Análise de Sobrevida e Confiabilidade*. III Jornada Regional de Estatística.
- [8] NELSON, W. (1982). *Applied Life Data Analysis*. John Wiley and Sons, New York, NY.
- [9] NELSON, W. (1988). *Graphical Analysis of System Repair Data*. *Journal of Quality Technology*, 20, 24-35.



- 
- [10] NELSON, W. (1995). *Confidence Limits for Recurrence Data - Applied to Cost or Number of Product Repair*. Technometrics, 37, p.147-157.

# Apêndice

O conjunto de dados fornecido por Nelson (1995), assim como os intervalos de confiança obtidos via teoria assintótica e *bootstrap* são apresentados respectivamente nas tabelas 1A, 2A e 3A.

Tabela 1A: dados referentes aos 41 motores

unidade	tempo de recorrência	indicador de censura (0=censura)
1	761	0
2	759	0
3	98	1
3	667	0
4	326	1
4	653	1
4	653	1
4	667	0
5	665	0
6	84	1
6	667	0
7	87	1
7	663	0
8	646	1
8	653	0
9	92	1
9	653	0
10	651	0
11	258	1
11	328	1
11	377	1
11	621	1
11	650	0
12	61	1
12	539	1
12	648	0
13	254	1
13	276	1
13	298	1
13	640	1
13	644	0
14	76	1
14	538	1
14	642	0
15	635	1
15	641	0
16	349	1
16	404	1
16	561	1
16	649	0
17	631	0
18	596	0
19	120	1
19	479	1
19	614	0

Tabela 1A (cont.): dados referentes aos 41 motores

---

unidade	tempo de recorrência	indicador de censura (0=censura)
20	323	1
20	449	1
20	582	0
21	139	1
21	139	1
21	589	0
22	593	0
23	573	1
23	589	0
24	165	1
24	408	1
24	604	1
24	606	0
25	249	1
25	594	0
26	344	1
26	497	1
26	613	0
27	265	1
27	586	1
27	595	0
28	166	1
28	206	1
28	348	1
28	389	0
29	601	0
30	410	1
30	581	1
30	601	0
31	611	0
32	608	0
33	587	0
34	367	1
34	603	0
35	202	1
35	563	1
35	570	1
35	585	0
36	587	0
37	578	0
38	578	0
39	586	0
40	585	0
41	582	0

---

---

**Tabela 2A: IC assintótico para dados dos motores**

<b>tempo de recorrência</b>	<b>NMEA</b>	<b>IC 95 % (Limite Inferior)</b>	<b>IC 95 % (Limite Superior)</b>
61	0,0244	-0,0234	0,0722
76	0,0488	-0,0180	0,1155
84	0,0732	-0,0075	0,1539
87	0,0976	0,0056	0,1895
92	0,1220	0,0205	0,2234
98	0,1463	0,0368	0,2559
120	0,1707	0,0541	0,2873
139	0,1951	0,0723	0,3179
139	0,2195	0,0741	0,3649
165	0,2439	0,0943	0,3936
166	0,2683	0,1149	0,4217
202	0,2927	0,1359	0,4494
206	0,3171	0,1434	0,4908
249	0,3415	0,1655	0,5174
254	0,3659	0,1879	0,5438
258	0,3902	0,2107	0,5697
265	0,4146	0,2339	0,5954
276	0,4390	0,2448	0,6332
298	0,4634	0,2459	0,6809
323	0,4878	0,2700	0,7056
326	0,5122	0,2944	0,7300
328	0,5366	0,3086	0,7646
344	0,5610	0,3335	0,7885
348	0,5854	0,3388	0,8319

---

---

**Tabela 2A (cont.): IC assintótico para dados dos motores**

---

<b>tempo de recorrência</b>	<b>NMEA</b>	<b>IC 95 % (Limite Inferior)</b>	<b>IC 95 % (Limite Superior)</b>
349	0,6098	0,3641	0,8554
367	0,6341	0,3897	0,8786
377	0,6585	0,3969	0,9202
404	0,6835	0,4138	0,9533
408	0,7085	0,4311	0,9860
410	0,7335	0,4574	1,0096
449	0,7585	0,4754	1,0417
479	0,7835	0,4937	1,0734
497	0,8085	0,5123	1,1047
538	0,8335	0,5314	1,1357
539	0,8585	0,5507	1,1664
561	0,8835	0,5625	1,2045
563	0,9085	0,5826	1,2345
570	0,9335	0,5955	1,2716
573	0,9585	0,6232	1,2938
581	0,9849	0,6451	1,3246
586	1,0143	0,6692	1,3593
604	1,0597	0,6920	1,4275
621	1,1185	0,7048	1,5323
635	1,1810	0,7685	1,5936
640	1,2435	0,7911	1,6959
646	1,3205	0,8635	1,7774
653	1,4316	0,9232	1,9399
653	1,5427	0,9079	2,1774

---

---

**Tabela 3A: IC bootstrap para dados dos motores**

---

<b>tempo de recorrência</b>	<b>NMEA</b>	<b>IC 95 % (Limite Inferior)</b>	<b>IC 95 % (Limite Superior)</b>
61	0,0244	0,0244	0,0732
76	0,0244	0,0488	0,1220
84	0,0244	0,0732	0,1707
87	0,0244	0,0976	0,1951
92	0,0488	0,1220	0,2195
98	0,0488	0,1463	0,2683
120	0,0732	0,1707	0,2927
139	0,0976	0,1951	0,3659
139	0,0976	0,2195	0,3659
165	0,1220	0,2439	0,3902
166	0,1463	0,2683	0,4390
202	0,1463	0,2927	0,4634
206	0,1951	0,3171	0,5366
249	0,1951	0,3415	0,5244
254	0,2195	0,3659	0,5610
258	0,2439	0,3902	0,5610
265	0,2439	0,4146	0,5854
276	0,2927	0,4390	0,6463
298	0,3293	0,4634	0,7073
323	0,2927	0,4878	0,6829
326	0,3171	0,5122	0,7317
328	0,3659	0,5366	0,7561
344	0,3415	0,5610	0,7805
348	0,3902	0,5854	0,8780

---

---

**Tabela 3A (cont): IC bootstrap para dados dos motores**

---

<b>tempo de recorrência</b>	<b>NMEA</b>	<b>IC 95 % (Limite Inferior)</b>	<b>IC 95 % (Limite Superior)</b>
349	0,3659	0,6098	0,8537
367	0,4024	0,6341	0,8537
377	0,4756	0,6585	0,9512
404	0,4393	0,6829	0,9762
408	0,4756	0,7079	1,0019
410	0,4634	0,7329	1,0250
449	0,4893	0,7579	1,0513
479	0,5131	0,7829	1,0976
497	0,5375	0,8079	1,1153
538	0,5610	0,8329	1,1512
539	0,5610	0,8579	1,1662
561	0,6098	0,8829	1,2518
563	0,6098	0,9079	1,2229
570	0,6491	0,9329	1,2768
573	0,6276	0,9579	1,2580
581	0,6829	0,9829	1,3369
586	0,7082	1,0092	1,3272
604	0,7340	1,0387	1,4202
621	0,8170	1,0841	1,5715
635	0,7409	1,1429	1,5404
640	0,8840	1,2054	1,6409
646	0,8322	1,2679	1,7201
653	0,9702	1,3449	2,1313
653	0,9702	1,4560	2,1313

---