Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Estatística

O método de máxima L_q-verossimilhança em modelos com erros de medição

Jacqueline Cavalieri

São Carlos
Março/2012

Universidade Federal de São Carlos

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Departamento de Estatística

O método de máxima L_q-verossimilhança em modelos com erros de medição

Jacqueline Cavalieri

Orientador: Prof. Dr. Mário de Castro Andrade Filho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Estatística.

São Carlos

Março/2012

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

C376mm

Cavalieri, Jacqueline.
O método de máxima L_q-verossimilhança em modelos com erros de medição / Jacqueline Cavalieri. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
89 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Estatística. 2. Estimador de máxima verossimilhança. 3. Estimador de máxima L_q-verossimilhança. 4. Modelos com erros de medição. 5. Modelo estrutural. I. Título.

CDD: 519.5 (20ª)

Jacqueline Cavalieri

O método de máxima L*q*-verossimilhança em modelos com erros de medição

Dissertação apresentada á Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovada em 29 de fevereiro de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Presidente Mário de Castro Andrade Filho
Prof. Dr. Mário de Castro Andrade Filho (ICMC-USP/Orientador)

1º Examinador ______________________
Prof. Dr. Carlos Alberto Ribeiro Diniz (DEs-UFSCar)

2º Examinador ______________________
Profa. Dra. Reiko Aoki (ICMC-USP)

"Nem tudo que se enfrenta
pode ser modificado, mas
nada pode ser modificado
até que seja enfrentado. "
(Albert Einstein)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar forças para seguir em frente nos momentos difíceis.

Ao meu orientador Prof. Mário de Castro, pela dedicação, e principalmente pela orientação na elaboração e condução deste trabalho.

Aos meus pais Edisel e Adriana que foram os responsáveis pelas realizações em minha vida. Agradeço também todo o amor, carinho e compreensão compartilhados.

Ao meu namorado Renato pelo amor, apoio e conforto oferecido nas horas difíceis.

Aos familiares e amigos pela alegria e motivação.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Estatística da UFSCar que contribuíram para minha formação.

Aos amigos de pós-graduação, pela amizade, companheirismo e convivência.

Aos professores membros da banca do exame da qualificação, pelas sugestões.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro concedido para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho utilizaremos um novo estimador proposto por Ferrari & Yang (2010), denominado de estimador de máxima L_q-verossimilhança (EML$_q$V), na estimação dos parâmetros de modelos com erros de medição estruturais normais. O novo estimador é uma generalização do estimador de máxima verossimilhança (EMV) usual e sua construção baseia-se na comparação, utilizando divergência de Kullback-Leibler (KL), entre duas distribuições, a distribuição inalterada e a distribuição modificada pelo grau de distorção da função de verossimilhança (q). Conforme a escolha para q, a distribuição modificada poderá atenuar ou exaltar o papel das observações extremas, diferentemente do EMV usual que atribui os mesmos pesos a todas as observações. Na comparação entre as duas distribuições pela divergência de KL é inserida certa quantidade de viés no estimador resultante, que é controlada pelo parâmetro q. O aumento do viés do estimador ML$_q$V pode ser compensado com a redução de sua variância, pela escolha apropriada de q. O modelo estrutural possui a característica de ser inidentificável. Para torná-lo identificável faremos suposições sobre os parâmetros do modelo, analisando cinco casos de identificabilidade do modelo. A comparação entre os métodos ML$_q$V e MV na estimação dos parâmetros do modelo será baseada em resultados analíticos e em simulações, sendo calculadas medidas de desempenho global, viés, desvio padrão (DP), erro padrão estimado (EP), erro quadrático médio (EQM), probabilidade de cobertura e amplitude dos intervalos de confiança.

Palavras-Chave: Estimador de máxima verossimilhança, Estimador de máxima L_q-verossimilhança, Modelos com erros de medição, Modelo estrutural.

Abstract

In this work we consider a new estimator proposed by Ferrari & Yang (2010), called the maximum L_q-likelihood estimator (ML_qE), to estimate the parameters of the measurement error models, in particular, the structural model. The new estimator extends the classical maximum likelihood estimator (MLE) and its based on the minimization, by means of the Kullback-Leibler (KL) divergence, of the discrepancy between a distribuiton in a family and one that modifies the true distribution by the degree of distortion q. Depending on the choice of q, the transformed distribution can diminish or emphasize the role of extreme observations, unlike the ML method that equally weights each observation. For small and moderate sample sizes, the ML_qE can trade bias for precision, causing a reduction of the mean square error (MSE). The structural model has the characteristic of non-identifiability. For this reason, we must make assumptions on the parameters to overcome the non-identifiability. We perform a analytical study and a simulation study to compare ML_qE and MLE. To gauge performance of the estimators, we compute measures of overall performance, bias, standard deviation, standard error, MSE, probability of coverage and length of confidence intervals.

Keywords: Maximum likelihood estimator, Maximum L_q-likelihood estimator, Measurement error models, Structural models.

Sumário

1 Introdução 1

1.1 Conceitos básicos . . . 3

1.2 Organização dos capítulos . . . 6

2 Método, modelos e inferência 7

2.1 Método de máxima L_q-verossimilhança . . . 7

2.1.1 Relação entre método ML_qV e medidas de divergência . . . 7

2.1.2 Estimador de máxima L_q-verossimilhança . . . 11

2.1.3 Propriedades do EML_qV . . . 12

2.1.4 EML_qV aplicado à distribuição normal . . . 14

2.2 Modelo estrutural normal . . . 15

2.3 EMV e EML_qV dos parâmetros do modelo estrutural . . . 18

2.4 Matriz de covariâncias assintótica do EMV . . . 21

2.4.1 Caso de identificabilidade σ_u^2 conhecido . . . 22

2.4.2 Caso de identificabilidade σ_e^2 conhecido . . . 23

2.4.3 Caso de identificabilidade λ conhecido . . . 23

2.4.4 Caso de identificabilidade k_x conhecido . . . 24

2.4.5 Caso de identificabilidade α conhecido . . . 24

2.5 Matriz de covariâncias assintótica do EML_qV . . . 25

2.5.1 Caso de identificabilidade σ_u^2 conhecido . . . 26

2.5.2 Caso de identificabilidade σ_e^2 conhecido 27

2.5.3 Caso de identificabilidade λ conhecido 28

2.5.4 Caso de identificabilidade k_x conhecido 29

2.5.5 Caso de identificabilidade α conhecido 30

2.6 Escolha de q 31

2.6.1 Caso de identificabilidade σ_u^2 conhecido 32

2.6.2 Caso de identificabilidade σ_e^2 conhecido 34

2.6.3 Caso de identificabilidade λ conhecido 35

2.6.4 Caso de identificabilidade k_x conhecido 36

2.6.5 Caso de identificabilidade α conhecido 37

3 Simulações **38**

3.1 Caso de identificabilidade σ_u^2 conhecido 42

3.1.1 Cenário 1 42

3.1.2 Cenário 2 48

3.2 Caso de identificabilidade σ_e^2 conhecido 53

3.3 Caso de identificabilidade λ conhecido 59

3.4 Caso de identificabilidade k_x conhecido 64

3.5 Caso de identificabilidade α conhecido 69

4 Aplicação **75**

5 Conclusão e propostas de trabalhos futuros **78**

A Prova do Lema 2.1 **81**

B Derivadas para a obtenção da matriz de covariâncias assintótica do EMV e do EML$_q$V **82**

B.1 Derivadas comuns 82

B.2 Caso de identificabilidade λ conhecido 84

B.3 Caso de identificabilidade k_x conhecido 85

Referências **86**

Capítulo 1

Introdução

Nem todas as medidas realizadas no dia a dia são exatas. Com os avanços tecnológicos, os procedimentos de mensuração se tornaram mais precisos, mas ainda assim, são passíveis de erros. Esses erros podem acontecer devido à leitura incorreta nos instrumentos, no registro dos valores, na precisão dos instrumentos, nas condições ambientais, etc. Nas situações em que se deseja verificar a associação entre uma variável resposta e variáveis explicativas através de um modelo de regressão, os estimadores podem ser viesados se estas estiverem sujeitas a erros de medição. Situações deste tipo são comuns no cotidiano e, nestes casos, devem ser utilizados modelos de regressão que consideram os erros de medição, como exemplo, suponha que queremos medir o rendimento de determinado cereal e a quantidade de nitrogênio do solo (Fuller, 1987), ou então medir a pressão e volume de um gás durante sua expansão adiabática (Kendall & Stuart, 1979) ou ainda medir taxas de crime em uma cidade e renda média familiar (Cheng & Van Ness, 1999).

Modelos de regressão que consideram a presença de erros de medição nas variáveis resposta e explicativa serão os modelos abordados neste trabalho. Diversas terminologias são usadas para estes modelos, como por exemplo modelos com erros de medição, regressão com erros em x e y, modelos com erros nas variáveis, mínimos quadrados totais e mínimos quadrados bivariados. Conforme ressaltado por Sprent (1990), os primeiros estudos sobre estes modelos foram apresentados por Adcock em 1877. Referências, métodos e exemplos para esta literatura podem ser encontradas em Kelly (1984), Fuller (1987), Cheng & Van Ness (1994), Cheng & Van Ness (1999), Stefanski (2000), Carroll *et al.* (2006), Thompson & Carter (2007) e Buonaccorsi (2010). Estes modelos serão objeto de aplicação do estimador de máxima L_q-verossimilhança (EML$_q$V).

A definição, construção e exemplos sobre o método de estimação ML$_q$V são encontrados em Ferrari (2008), Ferrari & Paterlini (2010), Ferrari & Yang (2010), Matsuzoe & Ohara (2010), Qin & Priebe (2011), Ferrari & La Vecchia (2012) e Proietti & Luati (2012). Em Ferrari & Yang (2010) os autores discorrem sobre o novo estimador baseado na minimização da entropia de Tsallis-Havrda-Charvát (também chamada de entropia não extensiva ou q-entropia). A q-entropia vem sendo explorada em diversas áreas de aplicação. Segundo os autores, Tsallis e colegas estudaram o assunto em física, cujo trabalho é hoje visto como a generalização da teoria de Boltzmann-Gibbs. Mais recentemente a q-entropia aparece em áreas como finanças, biomedicina, ciências do ambiente e linguística. Em Ferrari & Yang (2010), os autores estudam a q-entropia sob a perspectiva estatística, analisando uma nova classe de estimadores baseados na função de q-entropia, os chamados estimadores de máxima L_q-verossimilhança. O novo método de estimação relaciona duas distribuições, uma inalterada e outra modificada pelo grau de distorção da função de verossimilhança (q). A distribuição modificada irá diminuir ou enfatizar o papel das observações extremas, conforme a escolha para q. A comparação entre as duas distribuições se dá pelo cálculo da divergência de KullbacK-Leibler (KL) e a relação entre divergência de KL e q-entropia será vista posteriormente. Observamos que o método de MV usual atribui pesos idênticos às observações, podendo tornar-se não robusto e desrespeitar propriedades como eficiência na presença de observações atípicas da amostra, segundo Ferrari & Paterlini (2010). No método de ML$_q$V, as equações de estimação podem ser vistas como uma versão ponderada do vetor escore, cujos pesos são proporcionais à potência $(1-q)$ da função densidade assumida.

Quando q é tomado fixo, o EML$_q$V pertence à classe de M-estimadores. Os M-estimadores, na teoria estatística robusta, foram inicialmente propostos em 1964 por Huber. São obtidos pela minimização de uma função objetivo, que é escolhida de maneira que seja pouco afetada por observações discordantes. Esta função deve satisfazer certas propriedades como, por exemplo, ser simétrica, crescente e diferenciável. Ferrari (2008) explica que, na presença de observações atípicas, o EML$_q$V pode conciliar robustez e eficiência, com ligeira perda desta última. A relação entre robustez e eficiência é controlada por q. O estudo de robustez na presença de observações atípicas não foi estudado neste trabalho.

Se escolhermos q de maneira cuidadosa, para tamanhos de amostra pequenos e moderados, torna-se possível diminuir o erro quadrático médio (EQM) dos estimadores dos parâmetros dos modelos estatísticos. Observa-se, no entanto, que esta afirmação não é uma regra geral. A redução do EQM torna-se possível para alguns estimadores dos parâmetros dos modelos, pois quando consideramos a divergência de KL entre a verdadeira função densidade e a sua versão modificada por q criamos uma certa quantidade de viés no estimador resultante, que pode ser controlada pelo grau de distorção q, conforme será discutido nos Capítulos 2 e 3. Dessa maneira, o EML$_q$V é viesado, porém, com a escolha apropriada de q, torna-se possível reduzir a variância do estimador, o que pode compensar o aumento do viés.

Em Ferrari & Yang (2010), os autores mostram que em distribuições como a normal multivariada e a exponencial, é possível verificar melhoras em termos de redução do EQM para estimadores de alguns parâmetros dos respectivos modelos. Os autores garantem também, utilizando teoria assintótica, a consistência e normalidade assintótica do EML$_q$V, portanto, os dois estimadores MV e ML$_q$V são assintoticamente equivalentes.

Neste trabalho propomos o estudo do novo estimador ML$_q$V no modelo com erros de medição estrutural normal. Estudaremos a influência do parâmetro de distorção q nos estimadores dos parâmetros do modelo estrutural segundo alguns casos de identificabilidade deste. O estudo será realizado com o intuito de comparar o comportamento do novo estimador ML$_q$V com o estimador usual de MV na estimação pontual e intervalar dos parâmetros do modelo.

1.1 Conceitos básicos

Nesta seção conceituamos modelos com erros de medição e apresentamos sua classificação. Modelos com erros nas variáveis são uma generalização de modelos de regressão usuais. Os modelos de regressão usuais com uma covariável são dados por

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

em que n é o número de observações, Y é a variável resposta, x é a covariável regressora, que pode ser fixa ou aleatória, α é o parâmetro de intercepto, β é o coeficiente de inclinação e ϵ é o erro aleatório, com média zero, variância finita e independente de x. Os parâmetros α e β podem ser estimados por métodos como mínimos quadrados, máxima verossimilhança, bayesianos ou por algum outro procedimento robusto.

O correspondente modelo de regressão simples com erros de medição assume que as variáveis x e y são relacionadas por

$$y_i = \alpha + \beta x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1}$$

porém x_i e y_i não são observadas diretamente, mas sim com os respectivos erros de medição u_i e e_i. Ou seja, observamos as variáveis

$$X_i = x_i + u_i \quad \text{e} \quad Y_i = y_i + e_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

em que x e os erros u e e são descorrelacionados,

$$E_{\boldsymbol{\theta}}(u_i) = E_{\boldsymbol{\theta}}(e_i) = 0, \quad Var_{\boldsymbol{\theta}}(u_i) = \sigma_u^2, \quad Var_{\boldsymbol{\theta}}(e_i) = \sigma_e^2, \quad \text{para todo } i,$$

$$Cov_{\boldsymbol{\theta}}(u_i, u_j) = Cov_{\boldsymbol{\theta}}(e_i, e_j) = 0, \quad \text{para todo } i \neq j \quad \text{e} \quad Cov_{\boldsymbol{\theta}}(u_i, e_j) = 0, \quad \text{para todo } i, j,$$

em que σ_u^2 e σ_e^2 são finitos e $\boldsymbol{\theta}$ denota o vetor de parâmetros do modelo.

Notamos que e pode incluir outras fontes de erro além do erro de medição, como o erro na equação. No entanto, neste caso não é possível estimar as variâncias de todos os componentes do erro. No presente trabalho lidamos apenas com o chamado modelo com erros de medição padrão, definido por (1.1) e (1.2), em que e é livre de erros na equação. Desta maneira u e e são chamados de erros de medição aditivos.

As suposições para o modelo com erros nas variáveis abordado neste trabalho podem ser resumidas em

$$\begin{aligned} &(u_i, e_i)^t \ \text{ e } \ x_j \ \text{ independentes } \ \text{e} \\ &(u_i, e_i)^t \overset{iid}{\sim} N_2\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_e^2 \end{bmatrix}\right), \quad i, j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Observamos que neste caso consideramos o modelo com erros de medição homoscedástico, pois as variâncias dos erros de medição σ_u^2 e σ_e^2 são iguais para todas as n observações. Advertimos também que a suposição de normalidade dos erros em (1.3) é importante para desdobramentos quanto à identificabilidade do modelo.

Na literatura, as variáveis x e y recebem o nome de variáveis latentes e de acordo com as suposições tomadas para a variável latente x, podemos classificar o modelo com erros de medição definido por (1.1) e (1.2) em modelo funcional aditivo, estrutural aditivo e ultraestrutural aditivo. No modelo funcional aditivo, x_i's são constantes para $i = 1, \ldots, n$. Se x_i's forem variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) e ainda independentes dos erros de medição teremos o modelo estrutural aditivo. Neste caso denotamos $E_{\boldsymbol{\theta}}(x_i) = \mu_x$ e $Var_{\boldsymbol{\theta}}(x_i) = \sigma_x^2$ para $i = 1, \ldots, n$. O modelo ultraestrutural aditivo assume que os x_i's são variáveis aleatórias independentes como no modelo estrutural mas não identicamente distribuídas, podendo assumir diferentes médias μ_{x_i} e variância comum σ_x^2 para $i = 1, \ldots, n$. Este último modelo é uma generalização dos demais, pois se $\mu_{x_1} = \cdots = \mu_{x_n} = \mu_x$, o modelo ultraestrutural se reduz ao modelo estrutural, e se $\sigma_x^2 = 0$, temos o modelo funcional.

Nos casos funcional e ultraestrutural, os parâmetros x_i e μ_{x_i} são chamados de incidentais e seu número aumenta com o tamanho da amostra.

Observamos que de (1.1)-(1.3) podemos reescrever o modelo de regressão como

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + (e_i - \beta u_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

no entanto, este não se trata de um modelo de regressão usual pois $Cov_{\boldsymbol{\theta}}(X_i, (e_i - \beta u_i)) = -\beta\sigma_u^2$ conforme visto em Kendall & Stuart (1979). Se tomarmos $\sigma_u^2 = 0$, obtemos o modelo de regressão usual.

Na tentativa de estimar os parâmetros do modelo com erros na variáveis surgem problemas ligados à consistência dos estimadores destes. Em modelos funcionais e ultraestruturais, devido à presença dos parâmetros incidentais, o EMV pode não existir, ou caso exista, pode não ser consistente. Nos modelos estruturais, os problemas de inconsistência ocorrem devido à falta de identificabilidade do modelo. Modelos inidentificáveis permitem que diferentes conjuntos de valores para os parâmetros originem a mesma distribuição para X e Y. Formalmente, se $\boldsymbol{Z}$ é um vetor aleatório cuja distribuição pertence à família $\mathcal{F} = \{F_\theta; \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$, então o parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ é identificável se, para quaisquer $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in \Theta$ com $F_{\boldsymbol{\theta}_1} = F_{\boldsymbol{\theta}_2}$, então $\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_2$. Para contornar estas dificuldades fazemos suposições adicionais sobre os parâmetros dos respectivos modelos. As suposições para o modelo estrutural, foco de interesse desta dissertação, são apresentadas na Seção 2.2.

Bolfarine *et al.* (1992) e Cheng & Van Ness (1999) citam que sob normalidade de e_i e u_i, uma condição necessária e suficiente para que não haja falta de identificabilidade com respeito aos parâmetros α e β é que a distribuição de x_i não seja normal. Existem também formas alternativas para contornar o problema de identificabilidade do modelo estrutural, como o uso de variáveis instrumentais ou de réplicas dos valores das variáveis. Estes temas não são tratados neste trabalho.

1.2 Organização dos capítulos

No Capítulo 1 oferecemos noções e uma pequena introdução sobre o estimador ML$_q$V. Abordamos também o modelo com erros nas variáveis, apresentando conceitos fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação.

No Capítulo 2 desenvolvemos os conceitos sobre medidas de divergência e entropia necessários para a estruturação do método de ML$_q$V e apresentamos a construção formal do novo método, bem como suas propriedades assintóticas e seu emprego em distribuições normais. Apresentamos também o modelo estrutural normal com suposições que o tornam identificável. Mostramos os estimadores de MV para os parâmetros do modelo e o processo de obtenção da matriz de covariâncias assintótica dos estimadores de MV e ML$_q$V segundo cada caso de identificabilidade do modelo. Neste capítulo também realizamos uma análise sobre os possíveis valores para q que beneficiam o estimador de ML$_q$V no sentido de diminuição de variância assintótica.

As simulações para a comparação dos métodos de estimação usual e de ML$_q$V são desenvolvidas no Capítulo 3. Também realizamos a estimação intervalar para os principais parâmetros do modelo segundo cada caso de identificabilidade, obtendo assim as amplitudes e probabilidades de cobertura para os IC's dos parâmetros.

No Capítulo 4 desenvolvemos uma aplicação com dados reais em que o número de observações é pequeno.

Por fim, as conclusões sobre as comparações do novo método ML$_q$V na estimação dos parâmetros do modelo com erros de medição estrutural normal em relação ao método de MV podem ser encontradas no Capítulo 5. Oferecemos ainda os Apêndices A e B com demonstrações de resultados usados no trabalho e derivações dos elementos da matriz de informação observada do modelo estrutural normal, respectivamente.

Capítulo 2

Método, modelos e inferência

2.1 Método de máxima L_q-verossimilhança

Antes de apresentarmos a construção matemática do método $\mathrm{ML}_q\mathrm{V}$, citaremos algumas medidas de divergência necessárias para a fundamentação deste.

2.1.1 Relação entre método $\mathrm{ML}_q\mathrm{V}$ e medidas de divergência

Segundo Ullah (1996) e Pardo (2006), o conceito de distância entre duas distribuições de probabilidades foi inicialmente introduzido por Mahalanobis em 1936 e, desde então, diversos tipos de medidas de distância surgiram na literatura estatística para refletir a noção de proximidade e afastamento entre duas distribuições. Estas medidas recebem o nome de medidas de divergência e possuem a característica de terem seus valores aumentados conforme acentua-se a distância entre duas distribuições de probabilidade. Testes estatísticos como o da razão de verossimilhanças, qui-quadrado, escore e de Wald podem ser definidos em termos de medidas de divergência. Em Basseville (2010) é possível encontrar uma generosa revisão bibliográfica sobre medidas de divergência. Aqui enunciamos apenas algumas delas.

Para definirmos as medidas de divergência, consideremos $\mathcal{F}_\Theta = \{F_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p\}$, $p \geq 1$ uma família de distribuições paramétricas com função densidade $f_{\boldsymbol{\theta}}$ e $\mathcal{G}$ a classe de todas as funções de distribuição G com função densidade g. O conjunto de possíveis valores assumidos por $f_{\boldsymbol{\theta}}$ e g é definido em $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$. Nas definições e cálculos desta seção, consideramos variáveis aleatórias contínuas, porém todas podem ser adaptadas para o caso discreto.

A medida de divergência de Kullback-Leibler (KL), também chamada de entropia relativa, entre duas funções densidade $f_{\boldsymbol{\theta}}$ e g será denotada por $D(f_{\boldsymbol{\theta}}||g)$ e é definida como

$$D(f_{\boldsymbol{\theta}}||g) = E_G\left(\log \frac{g(\boldsymbol{Z})}{f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z})}\right) = \int_{\mathcal{X}} g(\boldsymbol{z}) \log \frac{g(\boldsymbol{z})}{f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{z})} d\boldsymbol{z}. \tag{2.1}$$

Pardo (2006) classifica a divergência de KL como uma medida de "ϕ-divergência". O autor aborda também outra classe de medidas de divergência, as medidas de divergência baseadas na entropia, conceito proveniente da teoria da informação. A entropia pode ser definida como uma medida de incerteza associada a uma distribuição de probabilidade. A noção de entropia está ligada ao grau de desorganização existente na informação. A primeira medida de entropia foi proposta por Claude Shannon em 1948 e a definição de entropia de uma função densidade g é

$$H(g) = -E_G(\log g(\boldsymbol{Z})) = -\int_{\mathcal{X}} g(\boldsymbol{z}) \log g(\boldsymbol{z}) d\boldsymbol{z},$$

em que $\log g(\boldsymbol{z})$ é a quantidade de incerteza contida no valor $\boldsymbol{z}$. Assim, quanto menos informação, maior é a entropia.

A divergência de KL é relacionada à entropia de Shannon por

$$D(f_{\boldsymbol{\theta}}||g) = H(f_{\boldsymbol{\theta}}||g) - H(g),$$

em que $H(f_{\boldsymbol{\theta}}||g) = -E_G(\log f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z}))$ é chamada de entropia cruzada entre $f_{\boldsymbol{\theta}}$ e g. Note que minimizar $D(f_{\boldsymbol{\theta}}||g)$ em relação a Θ é equivalente a minimizar a entropia de Shannon $H(f_{\boldsymbol{\theta}}||g)$, pois $H(g)$ não depende de $\boldsymbol{\theta}$.

Observamos que se considerarmos os dados $\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n$ da função de distribuição $G \in \mathcal{G}$, podemos aproximar G por sua função de distribuição empírica G_n e minimizar $-E_{G_n}(\log f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z}))$. Caso $G = F_{\boldsymbol{t}} \in \mathcal{F}_\Theta$ (modelo corretamente especificado) para algum $\boldsymbol{t} \in \Theta$, a lei dos grandes números assegura que o mínimo da esperança é na verdade o EMV.

Outra medida de divergência, estudada por Havrda, Charvát e Tsallis em 1967, chamada de q-entropia ou entropia HCT ou ainda entropia não extensiva, é a medida utilizada na construção do método ML$_q$V. A q-entropia entre duas funções densidade é definida como

$$H_q(f_{\boldsymbol{\theta}}||g) = -E_G(L_q(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z}))) = -\int_{\mathcal{X}} g(\boldsymbol{z})L_q(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{z}))d\boldsymbol{z}, \tag{2.2}$$

em que

$$L_q(m) = \frac{m^{1-q}-1}{1-q} \tag{2.3}$$

é chamada de função L_q, com $q \in (-\infty, \infty) \setminus \{1\}$. Quando $q = 1$, L_q se torna indefinida e temos que $\log(\cdot) = \lim_{q\to 1} L_q(\cdot)$. Dessa maneira, se $q \to 1$, a q-entropia se reduz à entropia de Shannon.

Em seguida mostramos a relação de equivalência entre minimizar a divergência de KL definida em (2.1) e a q-entropia determinada em (2.2) entre duas funções densidade $f_{\boldsymbol{\theta}}$ e g. O novo método de estimação ML$_q$V se baseia na minimização da q-entropia. O método é simples pois dada uma amostra de um vetor com distribuição G, pela lei dos grandes números podemos substituir G pela função de distribuição empírica G_n em $H_q(f_{\boldsymbol{\theta}}||g)$ e nosso trabalho se resume em obter o estimador que minimiza $-n^{-1}\sum_{i=1}^{n} L_q(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z}_i))$. Este estimador é viesado sempre, mas o viés pode ser controlado por q, chamado de parâmetro de distorção.

Para mostrarmos a relação entre divergência de KL e q-entropia, tomamos a seguinte transformação de g,

$$g^{(r)}(\boldsymbol{z}) := \frac{g(\boldsymbol{z})^r}{\int_{\mathcal{X}} g(\boldsymbol{z})^r d\boldsymbol{z}}, \quad r > 0,$$

em que $g^{(r)}$ é chamada de distribuição ampliada. Consideremos agora a divergência de KL, $D(f_{\boldsymbol{\theta}}||f^{(r)}_{\boldsymbol{\theta}_0})$, entre $f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{z})$ e $f^{(r)}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{z})$, denotada por $D_r(\boldsymbol{\theta}||\boldsymbol{\theta}_0)$, em que $\boldsymbol{\theta}_0$ é o verdadeiro valor de $\boldsymbol{\theta}$,

$$D_r(\boldsymbol{\theta}||\boldsymbol{\theta}_0) = \int_{\mathcal{X}} f^{(r)}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{z}) \log \frac{f^{(r)}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{z})}{f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{z})} d\boldsymbol{z}.$$

Consideramos $\boldsymbol{\theta}^*$ o valor tal que $f_{\boldsymbol{\theta}^*}(\boldsymbol{z}) = f^{(1/q)}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{z})$, $q > 0$ e $\boldsymbol{\theta}^{**}$ tal que $f_{\boldsymbol{\theta}^{**}}(\boldsymbol{z}) = f^{(r)}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{z})$. Assumindo que podemos inverter a ordem entre a derivada e a integral, Ferrari & La Vecchia (2012) mostram que $\boldsymbol{\theta}^{**}$ minimiza $D_r(\boldsymbol{\theta}||\boldsymbol{\theta}_0)$ em relação a $\boldsymbol{\theta}$ e $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} H_q(f_{\boldsymbol{\theta}}||f_{\boldsymbol{\theta}_0})|_{\boldsymbol{\theta}^*} = 0$, em que $\nabla_{\boldsymbol{\theta}}$ é o operador de derivadas em relação a $\boldsymbol{\theta}$, e ainda, $\nabla^2_{\boldsymbol{\theta}} H_q(f_{\boldsymbol{\theta}}||f_{\boldsymbol{\theta}_0})|_{\boldsymbol{\theta}^*}$ é definida positiva, ou seja, $\boldsymbol{\theta}^*$ minimiza $H_q(f_{\boldsymbol{\theta}}||f_{\boldsymbol{\theta}_0})$. O parâmetro $\boldsymbol{\theta}^*$, responsável pela minimização da q-entropia, é chamado de parâmetro de substituição em Ferrari & Yang (2010).

Assim, minimizar $D_r(\boldsymbol{\theta}||\boldsymbol{\theta}_0)$ em relação a $\boldsymbol{\theta}$ é equivalente a minimizar $H_q(f_{\boldsymbol{\theta}}||f_{\boldsymbol{\theta}_0})$ em relação a $\boldsymbol{\theta}$ quando $q = 1/r$.

Discorremos agora, sobre os valores assumidos por q na distribuição ampliada $f^{(1/q)}$. Se

- $q < 1$, regiões com os maiores valores da função densidade f são enfatizadas, ou seja, a importância das caudas é diminuída e
- $q > 1$, regiões com os menores valores da função densidade f são enfatizadas, ou seja, a importância das caudas é aumentada.

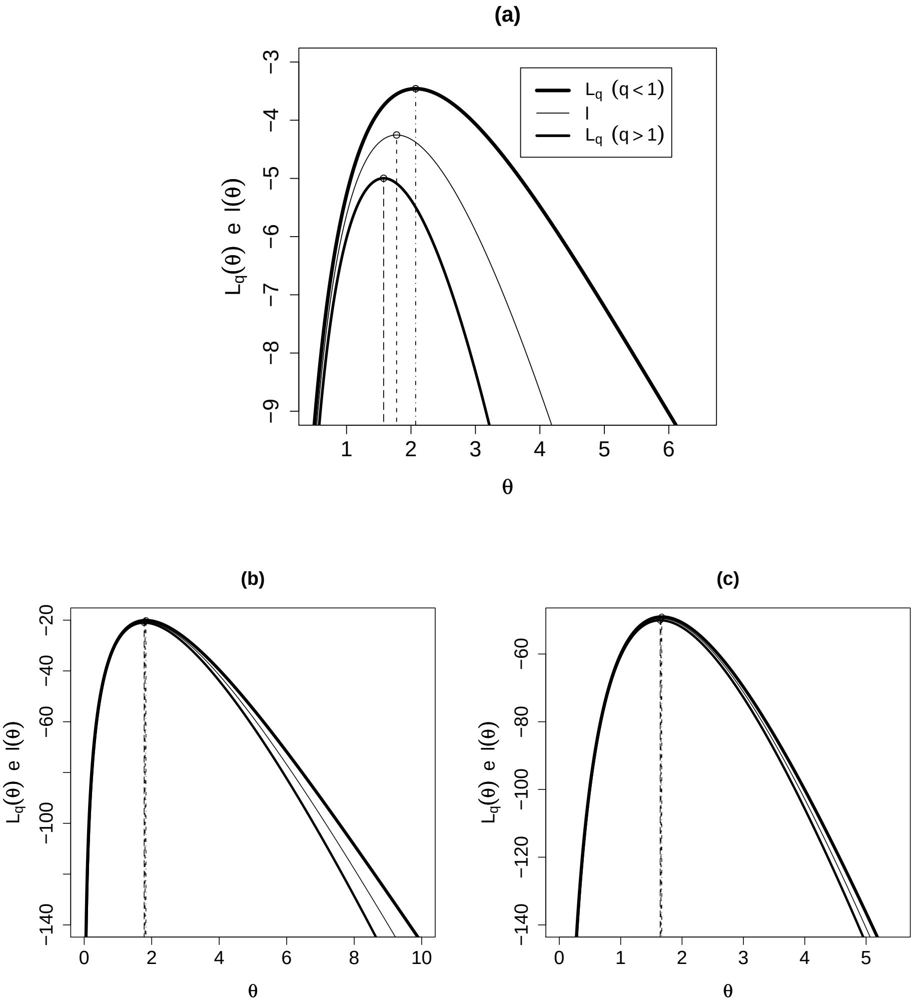

Figura 2.1: Funções log-verossimilhança (l) e L_q para θ com valor verdadeiro $\theta_0 = 2$, $q > 1$ e $q < 1$. As situações (a), (b) e (c) correspondem a $n = 10, 50$ e 100, respectivamente.

Para ilustrar o papel desempenhado pelo parâmetro de distorção na função L_q, tomamos como exemplo a distribuição exponencial com parâmetro θ. A Figura 2.1 mostra as funções log-verossimilhança e L_q com dois valores distintos de q, $q = 1 + 1/n$ e $q =$

$1-1/n$, em que n denota o tamanho da amostra. As situações (a), (b) e (c) representam os tamanhos de amostra $n = 10, 50$ e 100, respectivamente. O verdadeiro valor de θ é $\theta_0 = 2$ e as respectivas estimativas de MV e ML$_q$V estão assinaladas pelas retas pontilhadas. As escolhas para q possibilitam a análise da direção mais benéfica na estimação ML$_q$V, isto é, qual valor de q, $q > 1$ ou $q < 1$, produzirá estimadores de θ que melhor conciliam viés e variância, proporcionando ganhos em termos de EQM.

Pela Figura 2.1, observamos os comportamentos distintos da função L_q e da função log-verossimilhança quando consideramos tamanhos de amostra pequenos como $n = 10$. É importante comentar que o método ML$_q$V leva a estimadores viesados por construção. Apesar disso, pode ocorrer a diminuição da variância do estimador, compensando o aumento do viés, o que pode acarretar benefícios como diminuição do EQM do EML$_q$V. Visualizando a Figura 2.1, temos que a direção mais benéfica é $q > 1$, que leva a um estimador mais viesado, o que pode ser verificado pela reta pontilhada da respectiva curva L_q estar mais distante do valor verdadeiro θ_0, e com menor variância, o que pode ser notado pela menor abertura da curva L_q em relação aos estimadores ML$_q$V com $q < 1$ e MV. Para tamanhos maiores de amostra, as funções L_q e log-verossimilhança se aproximam, produzindo estimativas semelhantes.

Resultados analíticos de Ferrari & Yang (2010) mostram que a variância assintótica do EML$_q$V de θ é equivalente a do EMV em limite, porém pode ser menor se escolhermos q no intervalo $(1; 1,40)$.

2.1.2 Estimador de máxima L$_q$-verossimilhança

As considerações realizadas na Subseção 2.1.1 motivaram a construção de um novo método de estimação, o método de máxima L$_q$-verossimilhança. Consideremos $\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n$ uma amostra aleatória da distribuição $F_{\boldsymbol{\theta}_0} \in \mathcal{F}_\Theta$, com $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$ denotando o verdadeiro valor do parâmetro da distribuição. O estimador ML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}_0$ é definido por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_q = \underset{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}{\arg\max} \sum_{i=1}^{n} L_q\left(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z}_i)\right), \qquad q > 0, \tag{2.4}$$

em que a função L_q é dada em (2.3).

Se $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ existe e $q \to 1$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ se aproxima de $\arg\max_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} \sum_{i=1}^{n} \log f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z}_i)$, ou seja, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ é o estimador de MV para $\boldsymbol{\theta}_0$. Neste sentido, o EML$_q$V é uma extensão do estimador de

MV usual.

Definimos o vetor escore de MV como

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z}) = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \log f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z}) = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} l(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z}),$$

em que $l(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z})$ é a função log-verossimilhança e

$$\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z},q) = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} L_q\left(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z})\right) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z}) f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z})^{1-q}, \tag{2.5}$$

como o vetor escore ponderado.

As equações normais para obtenção do EML$_q$V são

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{U}_i^*(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z}_i,q) = \boldsymbol{0}. \tag{2.6}$$

As equações obtidas por (2.6) podem ser vistas como soluções de máxima verossimilhança ponderadas. Diferentes valores para q podem alternar o equilíbrio entre eficiência e robustez do estimador ML$_q$V, caracterizando o impacto de observações extremas. Se admitirmos q fixo, o EML$_q$V é um M-estimador. Nesta dissertação estudamos apenas o caso em que q depende do tamanho da amostra n e, para simplificação de notação, indicamos o parâmetro de distorção apenas como q, ao invés de q_n, adotando esta última notação apenas quando for necessário.

Ressaltamos por fim que a existência das soluções em (2.6) são garantidas segundo as condições de regularidade sobre $H_q(f_{\boldsymbol{\theta}}||f_{\boldsymbol{\theta}_0})$, como compacidade de Θ, unicidade de $\boldsymbol{\theta}^* \in \Theta$ e existência da função integrável $L_q(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{z}))$ para qualquer $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$.

2.1.3 Propriedades do EML$_q$V

Apresentamos aqui algumas propriedades assintóticas do novo estimador ML$_q$V. Nossa abordagem é restrita às distribuições da família exponencial, mas a generalização do conteúdo pode ser encontrada em Ferrari & Yang (2010). Denotamos o verdadeiro vetor de parâmetros da distribuição por $\boldsymbol{\theta}_0$ e consideramos q função do tamanho da amostra.

As distribuições pertencentes à família exponencial possuem a forma

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z}) = \exp\left(\boldsymbol{\eta}^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{Z}) - A(\boldsymbol{\eta})\right),$$

em que $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ é o vetor de parâmetros naturais, $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{Z})$ é o vetor composto pelas estatísticas suficientes $d_j(\boldsymbol{Z})$, para $j = 1, \ldots, p$ e $A(\boldsymbol{\eta}) = \log \int_{\mathcal{X}} e^{\boldsymbol{\eta}^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z})} d\boldsymbol{z}$. Os resultados apresentados nesta seção são verdadeiros para famílias exponenciais completas, quando $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\eta}$ possuem mesma dimensão p.

Impondo as condições

A.1 $q_n > 0$ é uma sequência tal que $q_n \to 1$ quando $n \to \infty$ e

A.2 o espaço paramétrico Θ é compacto e o parâmetro $\boldsymbol{\theta}_0$ é ponto interior de Θ,

podemos enunciar o Lema 2.1 e os Teoremas 2.1 e 2.2 relacionados à consistência e normalidade assintótica do EML$_q$V, respectivamente. Utilizamos a notação $E_{\boldsymbol{\theta}_0}$ para enfatizar a esperança tomada em relação à distribuição $F_{\boldsymbol{\theta}_0} \in \mathcal{F}_\Theta$ e não carregar a notação no Teorema 2.2. Todas as demonstrações, exceto a do Lema 2.1 encontram-se em Ferrari & Yang (2010).

Lema 2.1 Se $f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z})$ pertence à família exponencial, em que $\boldsymbol{\eta}$ é o vetor de parâmetros naturais, então o parâmetro natural de substituição é $\boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}_0/q$.

Este resultado está demonstrado no Apêndice A. Como estamos interessados em um estimador para $\boldsymbol{\eta}_0$, q deve convergir para 1.

Teorema 2.1 Sob as condições A.1 e A.2, com probabilidade convergindo para 1, o estimador de máxima L_q-verossimilhança tem solução única $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ que é obtido pela maximização da função de L_q-verossimilhança. Além disso, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q \xrightarrow{P} \boldsymbol{\theta}_0$, quando $n \to \infty$.

A demonstração segue da lei dos grandes números.

Teorema 2.2 Asseguradas as condições A.1 e A.2, temos

$$\sqrt{n}\boldsymbol{V}_q^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q - \boldsymbol{\theta}^*) \to N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_p), \quad \text{quando } n \to \infty,$$

em que $\boldsymbol{I}_p$ é matriz identidade de dimensão p, $\boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta}^*) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}^*)^{-1}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}^*)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}^*)^{-1}$ com

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}^*) = E_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{\theta}^*; \boldsymbol{Z}, q))^t(\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{\theta}^*; \boldsymbol{Z}, q)) \tag{2.7}$$

e

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}^*) = E_{\boldsymbol{\theta}_0}(\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{\theta}^*; \boldsymbol{Z}, q)). \tag{2.8}$$

Uma condição necessária e suficiente para a normalidade assintótica do estimador $\mathrm{ML}_q\mathrm{V}$ é que $\sqrt{n}(q-1) \to 0$.

Assim, pelos Teoremas 2.1 e 2.2, o estimador $\mathrm{ML}_q\mathrm{V}$ conserva as mesmas propriedades de consistência, de normalidade assintótica e de eficiência assintótica do estimador de MV usual.

Uma importante consideração é que quando conhecemos a expressão de $\boldsymbol{\theta}^*$, podemos corrigir o viés assintótico do estimador $\mathrm{ML}_q\mathrm{V}$ usando o estimador $q\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$, porém esta modificação pode aumentar a variância do $\mathrm{EML}_q\mathrm{V}$.

2.1.4 $\mathrm{EML}_q\mathrm{V}$ aplicado à distribuição normal

Nesta subseção desenvolvemos a teoria do método de estimação $\mathrm{ML}_q\mathrm{V}$ para a distribuição normal bivariada. As considerações realizadas aqui são utilizadas em resultados futuros quando lidamos com o modelo com erros de medição estrutural.

Considere uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição normal bivariada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$. Denotamos $\boldsymbol{\vartheta} = (\boldsymbol{\mu}^t, \mathrm{vech}^t\boldsymbol{\Sigma})^t = (\mu_1, \mu_2, \sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{22}^2)^t$ o vetor de parâmetros da distribuição. A vetorização vec : $\mathbb{R}^{k\times p} \mapsto \mathbb{R}^{kp}$ definida em Magnus & Neudecker (1999), transforma uma matriz $k \times p$ em um vetor coluna de dimensão kp, empilhando as colunas da matriz uma abaixo da outra. Para matrizes simétricas, a vetorização vech : $\mathbb{R}^{p\times p} \mapsto \mathbb{R}^{p(p+1)/2}$ transforma a matriz $p \times p$ em um vetor coluna de dimensão $p(p+1)/2$ empilhando as colunas da matriz e considerando os elementos abaixo ou acima da diagonal principal, inclusive os elementos pertencentes à diagonal principal.

Notamos que $\boldsymbol{\vartheta}^* = (\boldsymbol{\mu}^t, q\mathrm{vech}^t\boldsymbol{\Sigma})^t$. De fato, para a distribuição normal bivariada, o vetor de parâmetros naturais é

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{|\,\boldsymbol{\Sigma}\,|}\left(-\frac{\sigma_{22}^2}{2}, -\frac{\sigma_{11}^2}{2}, \mu_1\sigma_{22}^2 - \mu_2\sigma_{12}^2, \sigma_{12}^2, \mu_2\sigma_{11}^2 - \mu_1\sigma_{12}^2\right)^t,$$

associado ao vetor de estatísticas suficientes $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{d}(X,Y) = (X^2, Y^2, X, XY, Y)^t$. Assim, utilizando o Lema 2.1, $\boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}/q$ e então, sob parametrização usual, $\boldsymbol{\vartheta}^* =$

$(\boldsymbol{\mu}^t, q\text{vech}^t\boldsymbol{\Sigma})^t$. Dessa maneira, o componente de $\boldsymbol{\vartheta}^*$ relacionado à média não é influenciado pelo grau de distorção, somente o componente de $\boldsymbol{\vartheta}^*$ relacionado à variância será modificado por q. A matriz de covariâncias assintótica do EML$_q$V de $\boldsymbol{\vartheta}$ é dada por

$$\frac{1}{n}\boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\vartheta}^*) = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{(2-q)^4}{(3-2q)^2}\boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^t & \frac{4q^2[(3-2q)^2+1](2-q)^6}{[(2-q)^2+1]^2(3-2q)^3}[\boldsymbol{M}^t(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\boldsymbol{M}]^{-1} \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

em que "$\otimes$" denota o produto de Kronecker e $\boldsymbol{M}$ a matriz de duplicação definida em Magnus & Neudecker (1999). A matriz $\boldsymbol{M}$ tem dimensão $p^2 \times p(p+1)/2$ e é tal que $\boldsymbol{M}\text{vech}\boldsymbol{\Sigma} = \text{vec}\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^t$. Os cálculos para a obtenção de (2.9) podem ser encontrados em Ferrari & Yang (2010).

Por (2.9), podemos escolher valores para q que diminuam a variância do EML$_q$V de $\boldsymbol{\vartheta}$. Denotemos por w_1 e w_2 as expressões

$$w_1 = \frac{(2-q)^4}{(3-2q)^2} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{2q^2[(3-2q)^2+1](2-q)^6}{[(2-q)^2+1]^2(3-2q)^3}. \tag{2.10}$$

Comparando a matriz (2.9) com a matriz (2.11) de covariâncias assintótica do EMV de $\boldsymbol{\vartheta}$, encontrada em Magnus & Neudecker (1999),

$$\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^t & 2[\boldsymbol{M}^t(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\boldsymbol{M}]^{-1} \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

se tomarmos $q < 1$, teremos $w_2 < 1$, e então será possível reduzir a variância do EML$_q$V de vech$^t\boldsymbol{\Sigma}$. Quando $q = 1$, o EML$_q$V se reduz ao EMV.

2.2 Modelo estrutural normal

Modelos estruturais são um tipo de modelos com erros de medição conforme visto na Seção 1.1. No presente trabalho abordaremos os modelos estruturais normais. Estes modelos são definidos por (1.1)-(1.3) com $x_1, \ldots, x_n \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_x, \sigma_x^2)$. Denotando o vetor de variáveis observadas $\boldsymbol{Z}_i = (X_i, Y_i)^t$ e considerando $\boldsymbol{a} = (0, \alpha)^t$ e $\boldsymbol{b} = (1, \beta)^t$, temos

$$\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{a} + x_i\boldsymbol{b} + \begin{pmatrix} u_i \\ e_i \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$\boldsymbol{Z}_i \stackrel{iid}{\sim} N_2(\boldsymbol{a} + \mu_x\boldsymbol{b}, \boldsymbol{S}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.12}$$

em que

$$\boldsymbol{S} = \sigma_x^2 \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^t + \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 + \sigma_u^2 & \beta\sigma_x^2 \\ \beta\sigma_x^2 & \beta^2\sigma_x^2 + \sigma_e^2 \end{bmatrix},$$

com $\boldsymbol{\tau} = \text{diag}(\sigma_u^2, \sigma_e^2)$.

O determinante e a inversa de $\boldsymbol{S}$ são dados por

$$\mid \boldsymbol{S} \mid = \sigma_u^2 \sigma_e^2 c^{-1} \sigma_x^2 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{\tau}^{-1} - c\boldsymbol{\tau}^{-1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{\tau}^{-1}, \tag{2.13}$$

em que

$$c = \sigma_x^2 (1 + \sigma_x^2 \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{\tau}^{-1} \boldsymbol{b})^{-1}. \tag{2.14}$$

A função log-verossimilhança do modelo (2.12) é dada por

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{Z}) &= \sum_{i=1}^{n} l_i(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{Z}_i) \quad \text{e} \\ l_i(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{Z}_i) &= \text{const.} - \frac{1}{2} \log \mid \boldsymbol{S} \mid - \frac{1}{2} q_i, \end{aligned} \tag{2.15}$$

em que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= (\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2, \sigma_e^2)^t \text{ denota o vetor de parâmetros do modelo (2.12)}, \\ q_i &= (\boldsymbol{Z}_i - \boldsymbol{a} - \mu_x \boldsymbol{b})^t \boldsymbol{S}^{-1} (\boldsymbol{Z}_i - \boldsymbol{a} - \mu_x \boldsymbol{b}) = q_{i1} - c q_{i2}^2, \quad \text{com} \\ q_{i1} &= (\boldsymbol{Z}_i - \boldsymbol{a} - \mu_x \boldsymbol{b})^t \boldsymbol{\tau}^{-1} (\boldsymbol{Z}_i - \boldsymbol{a} - \mu_x \boldsymbol{b}) = \sigma_u^{-2} (X_i - \mu_x)^2 + \sigma_e^{-2} (Y_i - \alpha - \mu_x \beta)^2 \quad \text{e} \\ q_{i2} &= \sigma_u^{-2} (X_i - \mu_x) + \sigma_e^{-2} \beta (Y_i - \alpha - \mu_x \beta), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.16}$$

O modelo estrutural normal possui seis parâmetros $(\alpha, \beta, \sigma_e^2, \sigma_u^2, \mu_x, \sigma_x^2)$ e cinco estatísticas suficientes $(\bar{X}, \bar{Y}, S_{XY},\ S_{XX}, S_{YY})$, dadas por

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad S_{XX} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2,$$

$$S_{YY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 \quad \text{e} \quad S_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}).$$

Dessa maneira, não é possível determinar os valores dos parâmetros de maneira única e por isso este modelo é chamado de inidentificável. Para contornar a falta de identificabilidade do modelo, iremos acrescentar suposições para diminuir o número de parâmetros desconhecidos. Cheng & Van Ness (1997) listam as seguintes suposições:

(i) σ_u^2 é conhecida,

(ii) σ_e^2 é conhecida,

(iii) a razão entre as variâncias σ_e^2 e σ_u^2, $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$, é conhecida,

(iv) o fator de atenuação, coeficiente denotado por $k_x = \sigma_x^2/(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)$, é conhecido e

(v) o parâmetro de intercepto α é conhecido.

Nas condições enumeradas acima, não assumimos o conhecimento de β porque a estimação deste parâmetro é, geralmente, o principal objetivo em uma análise de regressão. O parâmetro μ_x é o único parâmetro identificável sem nenhuma suposição adicional, isto porque $\bar{X}$ é um estimador consistente para μ_x. O conhecimento do parâmetro σ_x^2 torna o modelo identificável, mas não é uma conjectura realista. A suposição (i) é bastante utilizada em modelos não lineares e modelos com erros na equação. Em situações cotidianas, é comum obtermos réplicas de X para estimar a variância σ_u^2. A suposição (ii) é menos utilizada e não garante a identificabilidade de modelos com erros na equação e de modelos com mais de uma variável explicativa. O modelo estrutural sob a suposição (iii) é o modelo mais estudado, possuindo inúmeros trabalhos científicos publicados a seu respeito. No caso (iv), o coeficiente k_x mede quanto da variabilidade de X é explicada pela variabilidade de x, segundo Bolfarine & Cordani (1993). Em áreas como psicologia e ciências sociais é possível conhecer previamente o valor de k_x associado a certas populações, quando o interesse é, por exemplo, o estudo de índices de inteligência. A suposição (v) não garante a identificabilidade do modelo normal com mais de uma variável explicativa. Há também uma outra suposição de identificabilidade que considera as variâncias σ_u^2 e σ_e^2 conhecidas. Neste caso, temos o que chamamos de modelo sobreidentificável, pois temos quatro parâmetros e cinco estatísticas suficientes. Esta suposição leva às estimativas obtidas em (iii) para α, β e μ_x. Este caso de identificabilidade não será abordado na dissertação, pois o modelo estrutural normal sob esta suposição pertence à família exponencial curvada e as propriedades do EML$_q$V da Subseção 2.1.3 não são válidas neste caso.

2.3 EMV e EML$_q$V dos parâmetros do modelo estrutural

Para a obtenção dos estimadores de MV para os parâmetros α, β, μ_x, σ_x^2, σ_u^2 e σ_e^2, usaremos a propriedade de invariância do estimador de MV. Da equação (2.12) temos

$$\begin{aligned} E_{\boldsymbol{\theta}}(X) &= E_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \mu_x, \\ E_{\boldsymbol{\theta}}(Y) &= E_{\boldsymbol{\theta}}(y) = \alpha + \beta\mu_x, \\ Var_{\boldsymbol{\theta}}(X) &= Var_{\boldsymbol{\theta}}(x) + \sigma_u^2 = \sigma = \sigma_x^2 + \sigma_u^2, \\ Var_{\boldsymbol{\theta}}(Y) &= Var_{\boldsymbol{\theta}}(y) + \sigma_e^2 = \beta^2\sigma_x^2 + \sigma_e^2 \quad \text{e} \\ Cov_{\boldsymbol{\theta}}(X,Y) &= Cov_{\boldsymbol{\theta}}(x,y) = \beta\sigma_x^2, \end{aligned} \tag{2.17}$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2, \sigma_e^2)^t$ denota o vetor de parâmetros do modelo (2.12).

Sabendo também que os estimadores de MV para $E_{\boldsymbol{\theta}}(X)$, $E_{\boldsymbol{\theta}}(Y)$, $Var_{\boldsymbol{\theta}}(X)$, $Var_{\boldsymbol{\theta}}(Y)$ e $Cov_{\boldsymbol{\theta}}(X,Y)$ são dados respectivamente por $\bar{X}$, $\bar{Y}$, S_{XX}, S_{YY} e S_{XY}, pela propriedade de invariância, obteríamos os estimadores $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}_x$, $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_u^2$ e $\hat{\sigma}_e^2$ se pudéssemos resolver unicamente as equações

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \hat{\mu}_x, \\ \bar{Y} &= \hat{\alpha} + \hat{\beta}\hat{\mu}_x, \\ S_{XX} &= \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_u^2, \\ S_{YY} &= \hat{\beta}^2\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_e^2 \quad \text{e} \\ S_{XY} &= \hat{\beta}\hat{\sigma}_x^2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Logicamente, como tratamos de um modelo inidentificável, com número de parâmetros desconhecidos maior que número de equações, torna-se impossível obter soluções únicas para (2.18), a não ser que assumamos uma das suposições de identificabilidade listadas na Seção 2.2.

Notamos que para os estimadores de MV serem válidos devemos assumir $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_u^2$

e $\hat{\sigma}_e^2$ não negativas. Com estas exigências, obtemos o seguinte conjunto de restrições

$$\begin{aligned} S_{XX} &\geq S_{XY}/\hat{\beta}, \\ S_{YY} &\geq \hat{\beta} S_{XY}, \\ S_{XX} &\geq \hat{\sigma}_u^2, \\ S_{YY} &\geq \hat{\sigma}_e^2 \text{ e} \\ \text{sinal}(S_{XY}) &= \text{sinal}(\hat{\beta}). \end{aligned}$$

O processo de obtenção dos estimadores de MV para cada caso de identificabilidade não será mostrado aqui, mas pode ser encontrado em Cheng & Van Ness (1999). Os estimadores de MV para os parâmetros do modelo estrutural normal são exibidos em forma de tabela e divididos segundo os casos de identificabilidade a seguir.

Tabela 2.1: Estimadores de MV para os parâmetros de modelos estruturais

Valor conhecido	Estimadores de MV
λ	$\hat{\alpha}_1$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\mu}_x$, $2\hat{\sigma}_{u,1}^2$, $\hat{\sigma}_{x,1}^2$
σ_u^2	$\hat{\alpha}_2$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\mu}_x$, $\hat{\sigma}_{e,1}^2$, $\hat{\sigma}_{x,2}^2$
σ_e^2	$\hat{\alpha}_3$, $\hat{\beta}_3$, $\hat{\mu}_x$, $\hat{\sigma}_{u,2}^2$, $\hat{\sigma}_{x,3}^2$
α	$\hat{\beta}_4$, $\hat{\mu}_x$, $\hat{\sigma}_{u,3}^2$, $\hat{\sigma}_{e,2}^2$, $\hat{\sigma}_{x,4}^2$
k_x	$\hat{\alpha}_4$, $\hat{\beta}_5$, $\hat{\mu}_x$, $\hat{\sigma}_{e,3}^2$, $\hat{\sigma}_{x,5}^2$

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}_j =& \bar{Y} - \hat{\beta}_j \bar{X}, \quad j = 1, 2, 3, 4,\\
\hat{\beta}_1 =& \frac{S_{YY} - \lambda S_{XX} + [(S_{YY} - \lambda S_{XX})^2 + 4\lambda S_{XY}^2]^{1/2}}{2S_{XY}}, \quad S_{XY} \neq 0,\\
\hat{\beta}_2 =& S_{XY}/(S_{XX} - \sigma_u^2), \quad \text{assumindo que} \quad S_{XX} > \sigma_u^2 \;\; \text{e} \;\; S_{YY} > \frac{S_{XY}^2}{S_{XX} - \sigma_u^2},\\
\hat{\beta}_3 =& \frac{S_{YY} - \sigma_e^2}{S_{XY}}, \quad \text{assumindo que} \quad S_{YY} > \sigma_e^2 \;\; \text{e} \;\; S_{XX} > \frac{S_{XY}^2}{S_{YY} - \sigma_e^2},\\
\hat{\beta}_4 =& (\bar{Y} - \alpha)/\bar{X}, \quad \text{assumindo que} \quad \bar{X} \neq 0,\\
\hat{\beta}_5 =& k_x^{-1} \frac{S_{XY}}{S_{XX}}, \quad \text{assumindo que} \quad S_{XX} \neq 0 \;\; \text{e} \;\; S_{YY} > k_x^{-1} \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}},\\
\hat{\mu}_x =& \bar{X},\\
\hat{\sigma}_{u,1}^2 =& \frac{S_{YY} - 2\hat{\beta}_1 S_{XY} + \hat{\beta}_1^2 S_{XX}}{2(\lambda + \hat{\beta}_1^2)},\\
\hat{\sigma}_{u,2}^2 =& S_{XX} - S_{XY}^2/(S_{YY} - \sigma_e^2),\\
\hat{\sigma}_{u,3}^2 =& S_{XX} - S_{XY}\bar{X}/(\bar{Y} - \alpha),\\
\hat{\sigma}_{e,1}^2 =& S_{YY} - S_{XY}^2/(S_{XX} - \sigma_u^2),\\
\hat{\sigma}_{e,2}^2 =& S_{YY} - S_{XY}(\bar{Y} - \alpha)/\bar{X},\\
\hat{\sigma}_{e,3}^2 =& S_{YY} - k_x^{-1} S_{XY}^2/S_{XX},\\
\hat{\sigma}_{x,1}^2 =& S_{XY}/\hat{\beta}_1, \quad \text{assumindo que} \quad \hat{\sigma}_{x,1}^2 \geq 0,\\
\hat{\sigma}_{x,2}^2 =& S_{XX} - \sigma_u^2, \quad \text{assumindo que} \quad \hat{\sigma}_{x,2}^2 \geq 0,\\
\hat{\sigma}_{x,3}^2 =& S_{XY}^2/(S_{YY} - \sigma_e^2), \quad \text{assumindo que} \quad \hat{\sigma}_{x,3}^2 \geq 0,\\
\hat{\sigma}_{x,4}^2 =& S_{XY}\bar{X}/(\bar{Y} - \alpha), \quad \text{assumindo que} \quad \hat{\sigma}_{x,4}^2 \geq 0 \;\; \text{e}\\
\hat{\sigma}_{x,5}^2 =& S_{XX} k_x.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Em Birch (1964) e Wang (2004) são mostrados resultados, para os casos de identificabilidade σ_u^2 conhecido e k_x conhecido, sobre os estimadores de MV em situações em que as condições dos estimadores dadas em (2.19) não são satisfeitas. Estes resultados garantem que as estimativas para as variâncias sejam sempre não negativas.

A notação utilizada para denotar os estimadores de MV para α, β, μ_x, σ_x^2, σ_u^2 e σ_e^2 será simplesmente $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}_x$, $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_u^2$ e $\hat{\sigma}_e^2$ em todos os casos de identificabilidade.

Os estimadores de ML$_q$V para os parâmetros do modelo estrutural normal com os casos de identificabilidade (i), (ii), (iii), (iv) e (v) listados na Seção 2.2 são obtidos de maneira numérica por (2.4), maximizando a função L_q dada em (2.3). No restante do trabalho denotaremos os estimadores de ML$_q$V para α, β, μ_x, σ_x^2, σ_u^2 e σ_e^2 como $\hat{\alpha}_q$, $\hat{\beta}_q$, $\hat{\mu}_{x,q}$, $\hat{\sigma}^2_{x,q}$, $\hat{\sigma}^2_{u,q}$ e $\hat{\sigma}^2_{e,q}$, respectivamente.

2.4 Matriz de covariâncias assintótica do EMV

Nesta seção são apresentados resultados de Cheng & Van Ness (1999) e Wang (2004) sobre a matriz de covariâncias assintótica dos estimadores de MV dos parâmetros do modelo estrutural normal segundo os casos de identificabilidade (i), (ii), (iii), (iv) e (v), listados na Seção 2.2, nas respectivas Subseções 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4 e 2.4.5. A matriz de covariâncias assintótica é necessária para a construção dos intervalos de confiança para os parâmetros do modelo. A estimação da matriz de covariâncias assintótica será efetuada de duas maneiras, utilizando a matriz de informação esperada e a matriz de informação observada. Consideremos $\boldsymbol{\theta}$ o vetor de parâmetros do modelo. Notamos que para cada caso de identificabilidade, $\boldsymbol{\theta}$ assume uma forma diferente.

O vetor escore para o modelo (2.12) é dado por

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{U}_i(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z}_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial l_i(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}},$$

em que l_i é dada em (2.15) e os elementos do vetor $\boldsymbol{U}_i$ são

$$U_{i\gamma} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \mid \boldsymbol{S} \mid}{\partial \gamma} - \frac{1}{2}\frac{\partial q_i}{\partial \gamma}, \tag{2.20}$$

com $\gamma = \alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2, \sigma_e^2$ e

$$\frac{\partial q_i}{\partial \gamma} = \frac{\partial q_{i1}}{\partial \gamma} - 2cq_{i2}\frac{\partial q_{i2}}{\partial \gamma} - q_{i2}^2\frac{\partial c}{\partial \gamma},$$

com q_i, q_{i1} e q_{i2} dados em (2.16), para $i = 1, \ldots, n$. As derivadas necessárias para a obtenção de (2.20) são dadas no Apêndice B.

A matriz de informação observada do modelo (2.12) será indicada por $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta})$ e é dada por

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{I}}_i(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 l_i(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^t}, \tag{2.21}$$

em que os elementos da matriz $\boldsymbol{\mathcal{I}}_i$ são

$$\mathcal{I}_{i\gamma\xi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log \mid \boldsymbol{S} \mid}{\partial \gamma \partial \xi} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q_i}{\partial \gamma \partial \xi} = -\frac{1}{2}(d_{\gamma\xi} + q_{i\gamma\xi}), \tag{2.22}$$

com $\gamma, \xi = \alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2, \sigma_e^2$ e

$$q_{i\gamma\xi} = \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial\gamma\partial\xi} - 2c\left(\frac{\partial q_{i2}}{\partial\gamma}\frac{\partial q_{i2}}{\partial\xi} + q_{i2}\frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\gamma\partial\xi}\right) - 2q_{i2}\left(\frac{\partial q_{i2}}{\partial\gamma}\frac{\partial c}{\partial\xi} + \frac{\partial q_{i2}}{\partial\xi}\frac{\partial c}{\partial\gamma}\right) - q_{i2}^2\frac{\partial^2 c}{\partial\gamma\partial\xi},$$

para $i = 1, \ldots, n$.

As derivações necessárias para a obtenção de $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta})$ encontram-se no Apêndice B.

A matriz de informação esperada é $E_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta}))$ e é obtida através de reparametrização da matriz de informação esperada do modelo normal bivariado com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\vartheta} = (\boldsymbol{\mu}^t, \text{vech}^t\boldsymbol{\Sigma})^t$. Os cálculos para a obtenção da matriz de informação esperada não são mostrados neste trabalho, mas são semelhantes à prática desenvolvida na Seção 2.5 para reparametrizar a matriz dada em (2.9). Estes cálculos podem ser encontrados em Hood *et al.* (1999), Wang (2004), Gillard & Iles (2006) e Gillard (2011). A matriz de covariâncias assintótica do EMV de $\boldsymbol{\theta}$ é

$$\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = E_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta}))^{-1}. \tag{2.23}$$

Um estimador para $\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{esp}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, obtido substituindo $\boldsymbol{\theta}$ por $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ em (2.23). Outro estimador, baseado na matriz de informação observada é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{obs}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}$.

2.4.1 Caso de identificabilidade σ_u^2 conhecido

Neste caso, $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_e^2)^t$ e a matriz de covariâncias assintótica de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dada em (2.23) é

$$\boldsymbol{\Gamma}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \kappa + \mu_x^2\psi_1 & -\mu_x\psi_1 & -\beta\sigma_u^2 & -\mu_x\rho_1\kappa^{-1}(\sigma_x^2+\sigma_u^2) & -\mu_x\rho_1 \\ & \psi_1 & 0 & \rho_1\kappa^{-1}(\sigma_x^2+\sigma_u^2) & \rho_1 \\ & & \sigma_x^2+\sigma_u^2 & 0 & 0 \\ & & & 2\sigma^2 & 2\beta^2\sigma_u^4 \\ & & & & 2\kappa^2 \end{bmatrix}, \tag{2.24}$$

em que σ^2 é dado em (2.17),

$$\kappa = \sigma_e^2 + \beta^2\sigma_u^2, \quad \psi_1 = \sigma_x^{-4}\left[\kappa(\sigma_x^2+\sigma_u^2) + \beta^2\sigma_u^4\right] \quad \text{e} \quad \rho_1 = -2\sigma_x^{-2}\beta\sigma_u^2\kappa. \tag{2.25}$$

O estimador para $\boldsymbol{\Gamma}_1$ baseado na matriz de informação esperada é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{1_{esp}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ e o estimador baseado na informação observada é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{1_{obs}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}$, em que $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta})$ é definida em (2.21) e a matriz $\boldsymbol{\mathcal{I}}_i$ é tal que

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}_i(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{i\alpha\alpha} & \mathcal{I}_{i\alpha\beta} & \mathcal{I}_{i\alpha\mu_x} & \mathcal{I}_{i\alpha\sigma_x^2} & \mathcal{I}_{i\alpha\sigma_e^2} \\ & \mathcal{I}_{i\beta\beta} & \mathcal{I}_{i\beta\mu_x} & \mathcal{I}_{i\beta\sigma_x^2} & \mathcal{I}_{i\beta\sigma_e^2} \\ & & \mathcal{I}_{i\mu_x\mu_x} & \mathcal{I}_{i\mu_x\sigma_x^2} & \mathcal{I}_{i\mu_x\sigma_e^2} \\ & & & \mathcal{I}_{i\sigma_x^2\sigma_x^2} & \mathcal{I}_{i\sigma_x^2\sigma_e^2} \\ & & & & \mathcal{I}_{i\sigma_e^2\sigma_e^2} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

cujos elementos são descritos no Apêndice B.

2.4.2 Caso de identificabilidade σ_e^2 conhecido

Nesta situação, o vetor de parâmetros da distribuição é $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2)^t$ e a matriz de covariâncias assintótica de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dada em (2.23) é

$$\boldsymbol{\Gamma}_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \kappa + \mu_x^2\psi_2 & -\mu_x\psi_2 & -\beta\sigma_u^2 & \mu_x(\rho_2 + 2\beta\sigma_u^2) & -\mu_x\rho_2 \\ & \psi_2 & 0 & -(\rho_2 + 2\beta\sigma_u^2) & \rho_2 \\ & & \sigma_x^2 + \sigma_u^2 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2}{\beta^4}[\beta^4(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)^2 + \kappa^2 - 2\beta^4\sigma_u^4] & -\frac{2\sigma_e^2}{\beta^4}(\kappa + 2\beta^2\sigma_u^2) \\ & & & & 2\beta^{-4}\kappa^2 \end{bmatrix}, \qquad (2.26)$$

em que κ é dado em (2.25),

$$\psi_2 = \sigma_x^{-4}\beta^{-2}\left[\kappa(\beta^2\sigma_x^2 + \sigma_e^2) + \sigma_e^4\right] \quad \text{e} \quad \rho_2 = 2\sigma_x^{-2}\beta^{-3}\sigma_e^2\kappa. \qquad (2.27)$$

O estimador para $\boldsymbol{\Gamma}_2$ baseado na matriz de informação esperada é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{2_{esp}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ e o estimador baseado na informação observada é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{2_{obs}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}$, em que $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta})$ é definida em (2.21) e os elementos da matriz $\boldsymbol{\mathcal{I}}_i$ em (2.22), cujas derivadas são encontradas no Apêndice B.

2.4.3 Caso de identificabilidade λ conhecido

Neste caso de identificabilidade, $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2)^t$. A matriz de covariâncias assintótica para os estimadores de MV de $\boldsymbol{\theta}$ dada em (2.23) é

$$\boldsymbol{\Gamma}_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \kappa + \mu_x^2\psi_3 & -\mu_x\psi_3 & -\beta\sigma_u^2 & \frac{2\mu_x\beta|\boldsymbol{S}|}{\sigma_x^2(\beta^2+\lambda)} & 0 \\ & \psi_3 & 0 & -\frac{2\beta|\boldsymbol{S}|}{\sigma_x^2(\beta^2+\lambda)} & 0 \\ & & \sigma_x^2 + \sigma_u^2 & 0 & 0 \\ & & & 2\sigma_x^4 + \frac{4|\boldsymbol{S}|}{\beta^2+\lambda} & -\frac{2\sigma_u^2\sigma_e^2}{\beta^2+\lambda} \\ & & & & 2\sigma_u^4 \end{bmatrix}, \qquad (2.28)$$

em que κ é dado em (2.25), $\mid \boldsymbol{S} \mid$ é dado em (2.13) e

$$\psi_3 = \sigma_x^{-4} \left[\kappa(\sigma_x^2 + \sigma_u^2) - \beta^2 \sigma_u^4 \right]. \tag{2.29}$$

Baseado na matriz de informação esperada, o estimador para $\boldsymbol{\Gamma}_3$ é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{3_{esp}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ e o estimador baseado na informação observada é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{3_{obs}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}$, em que $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta})$ é definida em (2.21) e os elementos da matriz $\boldsymbol{\mathcal{I}}_i$ em (2.22), cujas derivadas são encontradas no Apêndice B.

2.4.4 Caso de identificabilidade k_x conhecido

Nesta situação de identificabilidade, $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_e^2)^t$ e a matriz de covariâncias assintótica de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dada em (2.23) é

$$\boldsymbol{\Gamma}_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \kappa + \mu_x^2 \psi_3 & -\mu_x \psi_3 & -\beta \sigma_u^2 & 0 & \frac{2\beta\mu_x |\boldsymbol{S}|}{\sigma_x^2}(1-k_x) \\ & \psi_3 & 0 & 0 & -\frac{2\beta|\boldsymbol{S}|}{\sigma_x^2}(1-k_x) \\ & & \sigma_x^2 + \sigma_u^2 & 0 & 0 \\ & & & 2\sigma_x^4 & -2\beta^2\sigma_x^4(1-k_x) \\ & & & & \frac{2\psi_4}{(\sigma_x^2+\sigma_u^2)^2} \end{bmatrix}, \tag{2.30}$$

em que κ é dado em (2.25), ψ_3 em (2.29), $\mid \boldsymbol{S} \mid$ em (2.13) e

$$\psi_4 = \mid \boldsymbol{S} \mid^2 + 2 \mid \boldsymbol{S} \mid \beta^2 \sigma_u^4 + \beta^4 \sigma_u^4 \sigma_x^4. \tag{2.31}$$

O estimador para $\boldsymbol{\Gamma}_4$ baseado na matriz de informação esperada é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{4_{esp}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ e o estimador baseado na informação observada é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{4_{obs}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}$, em que $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta})$ é definida em (2.21) e os elementos da matriz $\boldsymbol{\mathcal{I}}_i$ em (2.22), cujas derivadas são encontradas no Apêndice B.

2.4.5 Caso de identificabilidade α conhecido

Neste caso, $\boldsymbol{\theta} = (\beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2, \sigma_e^2)^t$ e a matriz de covariâncias assintótica de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dada em (2.23) é

$$\boldsymbol{\Gamma}_5(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \frac{\kappa}{\mu_x^2} & \frac{-\beta\sigma_u^2}{\mu_x} & -\frac{\sigma_x^2}{\beta\mu_x^2}\kappa & \frac{\sigma_x^2}{\beta\mu_x^2}\kappa & -\frac{\beta\sigma_x^2}{\mu_x^2}\kappa \\ & \sigma_x^2 + \sigma_u^2 & \sigma_x^2\sigma_u^2/\mu_x & -\sigma_x^2\sigma_u^2/\mu_x & \beta^2\sigma_x^2\sigma_u^2/\mu_x \\ & & \frac{|\boldsymbol{S}|}{\beta^2} + \frac{\sigma_x^4}{\beta^2\mu_x^2}\kappa + 2\sigma_x^4 & -\frac{|\boldsymbol{S}|}{\beta^2} - \frac{\sigma_x^4}{\beta^2\mu_x^2}\kappa - 2\sigma_x^2\sigma_u^2 & - \mid \boldsymbol{S} \mid + \frac{\sigma_x^4}{\mu_x^2}\kappa + 2\sigma_x^2\sigma_e^2 \\ & & & \frac{|\boldsymbol{S}|}{\beta^2} + \frac{\sigma_x^4}{\beta^2\mu_x^2}\kappa + 2\sigma_u^4 & \mid \boldsymbol{S} \mid - \frac{\sigma_x^4}{\mu_x^2}\kappa - 2\beta^2\sigma_x^2\sigma_u^2 \\ & & & & \beta^2 \mid \boldsymbol{S} \mid + \frac{\beta^2\sigma_x^4}{\mu_x^2}\kappa + 2\sigma_e^4 \end{bmatrix}, \tag{2.32}$$

em que κ e $| \boldsymbol{S} |$ são dados, respectivamente, em (2.25) e (2.13).

Baseado na matriz de informação esperada, o estimador para $\boldsymbol{\Gamma}_5$ é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{5_{esp}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ e o estimador baseado na informação observada é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{5_{obs}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}$, em que $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta})$ é definida em (2.21) e os elementos da matriz $\boldsymbol{\mathcal{I}}_i$ em (2.22), cujas derivadas são encontradas no Apêndice B.

2.5 Matriz de covariâncias assintótica do EML$_q$V

Nesta seção calculamos a matriz de covariâncias assintótica do EML$_q$V dos parâmetros do modelo estrutural normal segundo os cinco casos de identificabilidade listados na Seção 2.2. As Subseções 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3, 2.5.4 e 2.5.5 apresentam respectivamente as matrizes de covariâncias segundo os casos de identificabilidade (i), (ii), (iii), (iv) e (v). Observamos, novamente, que $\boldsymbol{\theta}$ denota o vetor de parâmetros do modelo e difere em cada situação de identificabilidade. A matriz de covariâncias assintótica será útil na escolha do parâmetro de distorção q, além é claro, de ser necessária na construção dos intervalos de confiança para os parâmetros do modelo. A estimação da matriz será efetuada de duas formas, considerando o cálculo das matrizes $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{J}$, dadas em (2.7) e (2.8) no Teorema 2.2 e considerando um estimador para a esperança em (2.7) e (2.8).

De (2.5) temos que o vetor escore ponderado do modelo (2.12) é

$$\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{Z}, q) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{U}_i^*(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{Z}_i, q) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{U}_i(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{Z}_i, q) f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z}_i)^{1-q}$$

e do Teorema 2.2, a matriz de covariâncias assintótica do EML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$ é

$$\boldsymbol{\Gamma}_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \frac{1}{n}\boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta}^*) = \frac{1}{n}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}^*)^{-1}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}^*)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}^*)^{-1}, \tag{2.33}$$

em que $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{J}$ são definidos em (2.7) e (2.8), respectivamente. A expressão (2.33) é obtida a partir da matriz (2.9) da seguinte maneira. Consideramos uma transformação $\boldsymbol{h}$, um a um, tal que $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\vartheta})$, em que $\boldsymbol{\vartheta} = (\boldsymbol{\mu}^t, \text{vech}^t\boldsymbol{\Sigma})^t = (\mu_1, \mu_2, \sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{22}^2)^t$ é o vetor de parâmetros da distribuição normal bivariada. Obtemos a matriz $\boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta})$ pela reparametrização das matrizes $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\vartheta})$ e $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\vartheta})$, conforme explicado em Edwards (1972), ou seja,

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})^t\boldsymbol{J}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta})^{-1})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})^t\boldsymbol{K}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta})^{-1})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}),$$

em que os elementos da matriz jacobiana $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})$ são $\{r_{ij}\} = \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \theta_j}$, $i, j = 1, \ldots, 5$.

Assim,

$$\boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})^{-1} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta})^{-1})(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})^t)^{-1} \tag{2.34}$$

e, dessa forma, temos a expressão para a matriz (2.33).

Um estimador para $\boldsymbol{\Gamma}_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$ é

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{esp}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \frac{1}{n}\boldsymbol{V}_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q), \tag{2.35}$$

em que $\boldsymbol{V}_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$ é obtido substituindo $\boldsymbol{\theta}$ por $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ em (2.34).

Outro estimador é

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{obs}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)^{-1}\boldsymbol{K}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)\boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)^{-1}, \tag{2.36}$$

em que

$$\boldsymbol{K}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{K}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q), \quad \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q),$$

$$\boldsymbol{K}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \boldsymbol{U}_i^*(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q; \boldsymbol{Z}_i, q)(\boldsymbol{U}_i^*(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q; \boldsymbol{Z}_i, q))^t \quad \text{e} \quad \boldsymbol{J}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \nabla_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{U}_i^*(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q; \boldsymbol{Z}_i, q), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Os elementos da matriz $\boldsymbol{J}_i$ são dados por

$$\begin{aligned} J_{i\gamma\xi} &= \frac{\partial U_{i\xi}^*}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma}[U_{i\xi} f_i^{1-q}] \\ &= \frac{\partial U_{i\xi}}{\partial \gamma} f_i^{1-q} + (1-q) U_{i\xi} f_i^{-q} \frac{\partial f_i}{\partial \gamma} \\ &= \mathcal{I}_{i\gamma\xi} f_i^{1-q} + (1-q) U_{i\xi} f_i^{1-q} U_{i\gamma}, \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2.37}$$

com $\gamma, \xi = \alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2, \sigma_e^2$, f_i denotando $f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z}_i)$ e $U_{i\gamma}, U_{i\xi}$ e $\mathcal{I}_{i\gamma\xi}$ dados em (2.20) e (2.22).

2.5.1 Caso de identificabilidade σ_u^2 conhecido

Na situação em que σ_u^2 é conhecido, $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_e^2)^t$ é o vetor de parâmetros do modelo (2.12). A transformação bijetora $\boldsymbol{h}_1$ que relaciona $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{\vartheta})$ é tal que

$$(\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_e^2) = \left(\mu_2 - \frac{\mu_1\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}^2 - \sigma_u^2}, \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}^2 - \sigma_u^2}, \mu_1, \sigma_{11}^2 - \sigma_u^2, \sigma_{22}^2 - \frac{\sigma_{12}^4}{\sigma_{11}^2 - \sigma_u^2}\right)$$

e a transformação inversa $\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ é tal que

$$(\mu_1, \mu_2, \sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{22}^2) = (\mu_x, \alpha + \beta\mu_x, \sigma_x^2 + \sigma_u^2, \beta\sigma_x^2, \sigma_e^2 + \beta^2\sigma_x^2). \tag{2.38}$$

A matriz jacobiana $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})$ é dada por

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \mu_x & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 2\beta\sigma_x^2 & 0 & \beta^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, obtemos a matriz $\boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta})$ por (2.34) e a matriz de covariâncias assintótica de $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$, denotada por $\boldsymbol{\Gamma}_{q_1}$, é $\boldsymbol{\Gamma}_{q_1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta}^*)/n$, ou seja

$$\boldsymbol{\Gamma}_{q_1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} w_1\kappa + w_2\mu_x^2\psi_1 & -w_2\mu_x\psi_1 & -w_1\beta\sigma_u^2 & -w_2\mu_x\rho_1\kappa^{-1}(\sigma_x^2+\sigma_u^2) & -w_2\mu_x\rho_1 \\ & w_2\psi_1 & 0 & w_2\rho_1\kappa^{-1}(\sigma_x^2+\sigma_u^2) & w_2\rho_1 \\ & & w_1(\sigma_x^2+\sigma_u^2) & 0 & 0 \\ & & & 2w_2\sigma^2 & 2w_2\beta^2\sigma_u^4 \\ & & & & 2w_2\kappa^2 \end{bmatrix}, \qquad (2.39)$$

em que as expressões de κ, ψ_1, ρ_1 são dadas em (2.25), σ^2 em (2.17) e w_1 e w_2 em (2.10). Um estimador para $\boldsymbol{\Gamma}_{q_1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$ é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{1esp}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$, dado em (2.35). Outro estimador é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{1obs}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$, encontrado em (2.36), em que a matriz $\boldsymbol{J}_i$ é tal que

$$\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{\theta}^*) = \begin{bmatrix} J_{i\alpha\alpha} & J_{i\alpha\beta} & J_{i\alpha\mu_x} & J_{i\alpha\sigma_x^2} & J_{i\alpha\sigma_e^2} \\ & J_{i\beta\beta} & J_{i\beta\mu_x} & J_{i\beta\sigma_x^2} & J_{i\beta\sigma_e^2} \\ & & J_{i\mu_x\mu_x} & J_{i\mu_x\sigma_x^2} & J_{i\mu_x\sigma_e^2} \\ & & & J_{i\sigma_x^2\sigma_x^2} & J_{i\sigma_x^2\sigma_e^2} \\ & & & & J_{i\sigma_e^2\sigma_e^2} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

cujos elementos são descritos no Apêndice B.

2.5.2 Caso de identificabilidade σ_e^2 conhecido

Quando σ_e^2 é conhecido, $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2)^t$ é o vetor de parâmetros do modelo (2.12). Para a construção da matriz de covariâncias assintótica do EML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$ consideramos a transformação bijetora $\boldsymbol{h}_2$ que relaciona $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{\vartheta})$,

$$(\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2) = \left(\mu_2 - \mu_1\frac{\sigma_{22}^2 - \sigma_e^2}{\sigma_{12}^2}, \frac{\sigma_{22}^2 - \sigma_e^2}{\sigma_{12}^2}, \mu_1, \frac{\sigma_{12}^4}{\sigma_{22}^2 - \sigma_e^2}, \sigma_{11}^2 - \frac{\sigma_{12}^4}{\sigma_{22}^2 - \sigma_e^2}\right)$$

e a transformação inversa $\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ é dada em (2.38).

A matriz jacobiana $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})$ é tal que

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \mu_x & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sigma_x^2 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 2\beta\sigma_x^2 & 0 & \beta^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma obtemos a matriz $\boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta})$ por (2.34) e a matriz de covariâncias assintótica de $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$, denotada por $\boldsymbol{\Gamma}_{q_2}$, é $\boldsymbol{\Gamma}_{q_2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta}^*)/n$, ou seja

$$\boldsymbol{\Gamma}_{q_2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} w_1\kappa + w_2\mu_x^2\psi_2 & -w_2\mu_x\psi_2 & -w_1\beta\sigma_u^2 & w_2\mu_x(\rho_2 + 2\beta\sigma_u^2) & -w_2\mu_x\rho_2 \\ & w_2\psi_2 & 0 & -w_2(\rho_2 + 2\beta\sigma_u^2) & w_2\rho_2 \\ & & w_1(\sigma_x^2 + \sigma_u^2) & 0 & 0 \\ & & & \frac{2w_2}{\beta^4}[\beta^4(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)^2 + \kappa^2 - 2\beta^4\sigma_u^4] & -\frac{2w_2\sigma_e^2(\kappa+\beta^2\sigma_u^2)}{\beta^4} \\ & & & & \frac{2w_2\kappa^2}{\beta^4} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

em que κ é dado em (2.25), ψ_2 e ρ_2 em (2.27) e as expressões w_1 e w_2 em (2.10). Um estimador para $\boldsymbol{\Gamma}_{q_2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$ é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{2esp}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$, dado em (2.35). Por (2.36), obtemos o estimador $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{2obs}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$, em que os elementos da matriz $\boldsymbol{J}_i$ são dados em (2.37), cujas derivadas são encontradas no Apêndice B.

2.5.3 Caso de identificabilidade λ conhecido

Considerando $\lambda = \sigma_e^2/\sigma_u^2$ conhecido, $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2)^t$ é o vetor de parâmetros do modelo (2.12). Podemos construir a matriz de covariâncias assintótica do EML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$ considerando a transformação bijetora $\boldsymbol{h}_3$ que relaciona $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{h}_3(\boldsymbol{\vartheta})$,

$$(\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2) = \left(\mu_2 - \mu_1\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}^2 - \sigma_u^{2\prime}}, \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}^2 - \sigma_u^{2\prime}}, \mu_1, \sigma_1^2 - \sigma_u^{2\prime}, \sigma_u^{2\prime}\right),$$

em que $\sigma_u^{2\prime}$ é obtido solucionando a equação

$$\lambda\sigma_u^4 - \sigma_u^2(\sigma_{22}^2 + \lambda\sigma_{11}^2) + (\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 - \sigma_{12}^4) = 0,$$

ou seja, $\sigma_u^{2\prime} = \left[(\sigma_{22}^2 + \lambda\sigma_{11}^2) + \sqrt{(\lambda\sigma_{11}^2 - \sigma_{22}^2)^2 + 4\lambda\sigma_{12}^4}\right]/2\lambda$.

A transformação inversa $\boldsymbol{h}_3(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ é dada por

$$(\mu_1, \mu_2, \sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{22}^2) = (\mu_x, \alpha + \beta\mu_x, \sigma_x^2 + \sigma_u^2, \beta\sigma_x^2, \lambda\sigma_u^2 + \beta^2\sigma_x^2).$$

A matriz jacobiana $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})$ é tal que

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \mu_x & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sigma_x^2 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 2\beta\sigma_x^2 & 0 & \beta^2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Dessa forma obtemos a matriz $\boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta})$ por (2.34) e a matriz de covariâncias assintótica de $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$, denotada por $\boldsymbol{\Gamma}_{q_3}$, é $\boldsymbol{\Gamma}_{q_3}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta}^*)/n$, ou seja

$$\boldsymbol{\Gamma}_{q_3}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} w_1\kappa + w_2\mu_x^2\psi_3 & -w_2\mu_x\psi_3 & -w_1\beta\sigma_u^2 & \frac{2w_2\mu_x\beta|\boldsymbol{S}|}{\sigma_x^2(\beta^2+\lambda)} & 0 \\ & w_2\psi_3 & 0 & -\frac{2w_2\beta|\boldsymbol{S}|}{\sigma_x^2(\beta^2+\lambda)} & 0 \\ & & w_1(\sigma_x^2+\sigma_u^2) & 0 & 0 \\ & & & w_2\left(2\sigma_x^4 + \frac{4|\boldsymbol{S}|}{\beta^2+\lambda}\right) & -\frac{2w_2\sigma_u^2\sigma_e^2}{\beta^2+\lambda} \\ & & & & 2w_2\sigma_u^4 \end{bmatrix}, \tag{2.41}$$

em que κ, ψ_3 e $|\ \boldsymbol{S}\ |$ são dados em (2.25), (2.29) e (2.13), respectivamente, e as expressões w_1 e w_2 em (2.10). Temos que $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{3esp}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$ dado em (2.35) é um estimador para $\boldsymbol{\Gamma}_{q_3}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$ e por (2.36), obtemos o estimador $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{3obs}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$, em que os elementos da matriz $\boldsymbol{J}_i$ são dados em (2.37), cujas derivadas são encontradas no Apêndice B.

2.5.4 Caso de identificabilidade k_x conhecido

Ao considerarmos $k_x = \sigma_x^2/(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)$ conhecido, temos que $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_e^2)^t$ é o vetor de parâmetros do modelo (2.12). A transformação bijetora $\boldsymbol{h}_4$ que relaciona $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{h}_4(\boldsymbol{\vartheta})$ é tal que

$$(\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_e^2) = \left(\mu_2 - \frac{\mu_1\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}^2 k_x}, \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}^2 k_x}, \mu_1, \sigma_{11}^2 k_x, \sigma_{22}^2 - \frac{\sigma_{12}^4}{\sigma_{11}^2 k_x}\right)$$

e a transformação inversa $\boldsymbol{h}_4(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ é tal que

$$(\mu_1, \mu_2, \sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{22}^2) = \left(\mu_x, \alpha + \beta\mu_x, \frac{\sigma_x^2}{k_x}, \beta\sigma_x^2, \sigma_e^2 + \beta^2\sigma_x^2\right).$$

A matriz jacobiana $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})$ é dada por

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \mu_x & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_x} & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 2\beta\sigma_x^2 & 0 & \beta^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma obtemos a matriz $\boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta})$ por (2.34) e a matriz de covariâncias assintótica de $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$, denotada por $\boldsymbol{\Gamma}_{q_4}$, é $\boldsymbol{\Gamma}_{q_4}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta}^*)/n$, ou seja

$$\boldsymbol{\Gamma}_{q_4}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} w_1\kappa + w_2\mu_x^2\psi_3 & -w_2\mu_x\psi_3 & -w_1\beta\sigma_u^2 & 0 & \frac{2w_2\beta\mu_x|\boldsymbol{S}|}{\sigma_x^2}(1-k_x) \\ & w_2\psi_3 & 0 & 0 & -\frac{2w_2\beta|\boldsymbol{S}|}{\sigma_x^2}(1-k_x) \\ & & w_1(\sigma_x^2+\sigma_u^2) & 0 & 0 \\ & & & 2w_2\sigma_x^4 & -2w_2\beta^2\sigma_x^4(1-k_x) \\ & & & & \frac{2w_2\psi_4}{(\sigma_x^2+\sigma_u^2)^2} \end{bmatrix}, \tag{2.42}$$

em que κ, ψ_3, ψ_4 e $\mid \boldsymbol{S} \mid$ são dados em (2.25), (2.29), (2.31) e (2.13), respectivamente e as expressões w_1 e w_2 em (2.10). O estimador $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{4esp}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$ para $\boldsymbol{\Gamma}_{q_4}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$ é encontrado em (2.35) e o estimador $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{4obs}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$ é encontrado em (2.36), em que os elementos da matriz $\boldsymbol{J}_i$ são dados em (2.37), cujas derivadas são encontradas no Apêndice B.

2.5.5 Caso de identificabilidade α conhecido

Nesta situação de identificabilidade, $\boldsymbol{\theta} = (\beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2, \sigma_e^2)^t$ é o vetor de parâmetros do modelo (2.12). A transformação bijetora $\boldsymbol{h}_5$ que relaciona $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{h}_5(\boldsymbol{\vartheta})$ é tal que

$$(\beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2, \sigma_e^2) = \left(\frac{\mu_2-\alpha}{\mu_1}, \mu_1, \frac{\mu_1\sigma_{12}^2}{\mu_2-\alpha}, \sigma_{11}^2 - \frac{\mu_1\sigma_{12}^2}{\mu_2-\alpha}, \sigma_{22}^2 - \frac{\sigma_{12}^2(\mu_2-\alpha)}{\mu_1}\right)$$

e a transformação inversa $\boldsymbol{h}_5(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ é dada em (2.38).

A matriz jacobiana $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})$ é tal que

$$
\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_x & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \sigma_x^2 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 2\beta\sigma_x^2 & 0 & \beta^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Dessa forma obtemos a matriz $\boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta})$ por (2.34) e a matriz de covariâncias assintótica de $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$, denotada por $\boldsymbol{\Gamma}_{q_5}$, é $\boldsymbol{\Gamma}_{q_5}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \boldsymbol{V}_q(\boldsymbol{\theta}^*)/n$, ou seja

$$
\boldsymbol{\Gamma}_{q_5}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \frac{w_1\kappa}{\mu_x^2} & -\frac{w_1\beta\sigma_u^2}{\mu_x} & -\frac{w_1\sigma_x^2\kappa}{\beta\mu_x^2} & \frac{w_1\sigma_x^2\kappa}{\beta\mu_x^2} & -\frac{w_1\beta\sigma_x^2\kappa}{\mu_x^2} \\ & w_1(\sigma_x^2+\sigma_u^2) & \frac{w_1\sigma_x^2\sigma_u^2}{\mu_x} & -\frac{w_1\sigma_x^2\sigma_u^2}{\mu_x} & \frac{w_1\beta^2\sigma_x^2\sigma_u^2}{\mu_x} \\ & & \frac{w_1\sigma_x^4\kappa}{\beta^2\mu_x^2} + w_2 s_1 & -\frac{w_1\sigma_x^4\kappa}{\beta^2\mu_x^2} + w_2 s_2 & \frac{w_1\sigma_x^4\kappa}{\mu_x^2} + w_2(- \mid \boldsymbol{S} \mid + 2\sigma_x^2\sigma_e^2) \\ & & & \frac{w_1\sigma_x^4\kappa}{\beta^2\mu_x^2} + w_2\left(\frac{|\boldsymbol{S}|}{\beta^2} + 2\sigma_u^4\right) & -\frac{w_1\sigma_x^4\kappa}{\mu_x^2} - w_2(\mid \boldsymbol{S} \mid - 2\sigma_u^2\sigma_e^2) \\ & & & & \frac{w_1\beta^2\sigma_x^4\kappa}{\mu_x^2} + w_2(\beta^2 \mid \boldsymbol{S} \mid + 2\sigma_e^4) \end{bmatrix}, \tag{2.43}
$$

em que

$$
s_1 = \frac{\mid \boldsymbol{S} \mid}{\beta^2} + 2\sigma_x^4, \quad s_2 = -\frac{\mid \boldsymbol{S} \mid}{\beta^2} + 2\sigma_x^2\sigma_u^2, \tag{2.44}
$$

κ e $\mid \boldsymbol{S} \mid$ são dados, respectivamente, em (2.25) e (2.13) e as expressões w_1 e w_2 em (2.10). Um estimador para $\boldsymbol{\Gamma}_{q_5}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$ é $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{5esp}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$, dado em (2.35). Por (2.36), obtemos o estimador $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{5obs}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$, em que os elementos da matriz $\boldsymbol{J}_i$ são dados em (2.37), cujas derivadas são encontradas no Apêndice B.

2.6 Escolha de q

Nesta seção avaliamos, para cada caso de identificabilidade listado na Seção 2.2, a melhor escolha para o parâmetro de distorção q. Do Teorema 2.1, sabemos que o EML$_q$V converge para $\boldsymbol{\theta}^*$. Sabemos também, do Lema 2.1, que se a distribuição pertence à família exponencial, o vetor de parâmetros naturais de substituição é $\boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}_0/q$. Porém, q converge para 1 e o EML$_q$V torna-se não viesado assintoticamente, aproximando-se do EMV. Por meio do programa Maple (Monagan *et al.*, 2005), analisamos cada componente do parâmetro de substituição $\boldsymbol{\theta}^*$ em cada caso de identificabilidade para verificar quais componentes realmente sofrem influência de q. O procedimento utilizado para esta análise é explicado na Subseção 2.6.1. Na presente Seção 2.6 também procuramos valores de q

que reduzem as variâncias dos estimadores $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ em relação aos estimadores de MV de $\boldsymbol{\theta}$. As análises para as situações de identificabilidade (i), (ii), (iii), (iv) e (v) estão nas respectivas Subseções 2.6.1, 2.6.2, 2.6.3, 2.6.4 e 2.6.5.

2.6.1 Caso de identificabilidade σ_u^2 conhecido

Para verificar a influência do parâmetro de distorção q sobre $\boldsymbol{\theta}^*$, reparametrizamos o vetor $\boldsymbol{\theta}$ da distribuição (2.12) sob a forma natural, obtendo

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\mid \boldsymbol{S} \mid}\left(-\frac{\beta^2\sigma_x^2+\sigma_e^2}{2}, -\frac{\sigma_x^2+\sigma_u^2}{2}, \mu_x\sigma_e^2 - \alpha\beta\sigma_x^2, \beta\sigma_x^2, \alpha(\sigma_x^2+\sigma_u^2)+\beta\mu_x\sigma_u^2\right)^t, \tag{2.45}$$

em que $\mid \boldsymbol{S} \mid$ é encontrado em (2.13). O vetor $\boldsymbol{\eta}$ está relacionado ao vetor de estatísticas suficientes $\boldsymbol{d}(X,Y) = (X^2, Y^2, X, XY, Y)^t$. Designando a relação (2.45) por $\boldsymbol{\omega}_1$, isto é, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\theta})$, obtemos

$$\begin{aligned} &\alpha = \frac{\eta_3\eta_4\sigma_u^2 - 2\eta_1\eta_5\sigma_u^2 - \eta_5}{4\eta_1\eta_2\sigma_u^2 + 2\eta_2 - \eta_4^2\sigma_u^2}, \quad \beta = \frac{-\eta_4}{4\eta_1\eta_2\sigma_u^2 + 2\eta_2 - \eta_4^2\sigma_u^2}, \quad \mu_x = \frac{\eta_4\eta_5 - 2\eta_2\eta_3}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2}, \\ &\sigma_x^2 = -\frac{4\eta_1\eta_2\sigma_u^2 + 2\eta_2 - \eta_4^2\sigma_u^2}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2} \quad \text{e} \quad \sigma_e^2 = -\frac{2\eta_1\sigma_u^2 + 1}{4\eta_1\eta_2\sigma_u^2 + 2\eta_2 - \eta_4^2\sigma_u^2}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

fazendo $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\eta})^{-1}$ e η_j denotando os componentes de $\boldsymbol{\eta}$ para $j = 1, \ldots, 5$.

Utilizando o resultado do Lema 2.1, substituímos η_j por $\eta_j^* = \eta_j/q$, $j = 1, \ldots, 5$, e obtemos os parâmetros de substituição α^*, β^*, μ_x^*, σ_x^{2*} e σ_e^{2*}. Dessa maneira, temos

$$\begin{aligned} &\alpha^* = \frac{\eta_3\eta_4\sigma_u^2 - 2\eta_1\eta_5\sigma_u^2 - q\eta_5}{4\eta_1\eta_2\sigma_u^2 + 2q\eta_2 - \eta_4^2\sigma_u^2}, \quad \beta^* = \frac{-q\eta_4}{4\eta_1\eta_2\sigma_u^2 + 2q\eta_2 - \eta_4^2\sigma_u^2}, \quad \mu_x^* = \frac{\eta_4\eta_5 - 2\eta_2\eta_3}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2}, \\ &\sigma_x^{2*} = -\frac{4\eta_1\eta_2\sigma_u^2 + 2q\eta_2 - \eta_4^2\sigma_u^2}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2} \quad \text{e} \quad \sigma_e^{2*} = -\frac{q(2\eta_1\sigma_u^2 + q)}{4\eta_1\eta_2\sigma_u^2 + 2q\eta_2 - \eta_4^2\sigma_u^2}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Assim, de (2.46) e (2.47), o único EML$_q$V que não sofre influência de q quanto à média da distribuição assintótica é $\hat{\mu}_{x,q}$, pois $\mu_x^* = \mu_x$. Convém relembrar que, do Teorema 2.2, o EML$_q$V converge assintoticamente para $\boldsymbol{\theta}^*$.

É importante ressaltar que apesar de as expressões dadas em (2.46) e (2.47) serem diferentes, os respectivos valores de $\boldsymbol{\theta}^*$ e $\boldsymbol{\theta}$ podem ser semelhantes. Este comentário vale também para os outros casos de identificabilidade.

Com base nas expressões para as variâncias assintóticas de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ dadas respectivamente em (2.24) e (2.39), podemos escolher um valor para o parâmetro de distorção que diminua a variância do estimador ML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$ em relação ao estimador de MV.

Com o sistema Maple, buscamos os intervalos para q em que $0 < w_1 < 1$ e $0 < w_2 < 1$, com w_1 e w_2 dados em (2.10). Levando em conta que $q > 0$, para satisfazer $0 < w_1 < 1$, q deve pertencer à união de intervalos $(1,59; 2) \cup (2; 4,41)$ e para satisfazer $0 < w_2 < 1$, devemos ter $q \in (0,1)$. A Figura 2.2 ilustra o comportamento das expressões w_1 e w_2. É importante ressaltar que quando $q \in (1,59; 2) \cup (2; 4,41)$, $w_2 < 0$.

Como a variância de $\hat{\alpha}_q$ depende de w_1 e w_2 simultaneamente e os intervalos de q que minimizam w_1 e w_2 não coincidem em nenhum ponto, não podemos discorrer sobre o aumento ou a diminuição da variância de $\hat{\alpha}_q$ em relação à variância de $\hat{\alpha}$. Buscamos valores de q que satisfazem $0 < w_2 < 1$ para obtermos a redução da variância do EML$_q$V de β, σ_x^2 e σ_e^2.

Na análise da variância assintótica, também é importante enfatizar que, mesmo quando as expressões para as variâncias dos estimadores de MV e de ML$_q$V são diferentes, é possível que seus valores sejam semelhantes. Este comentário também se aplica aos outros casos de identificabilidade.

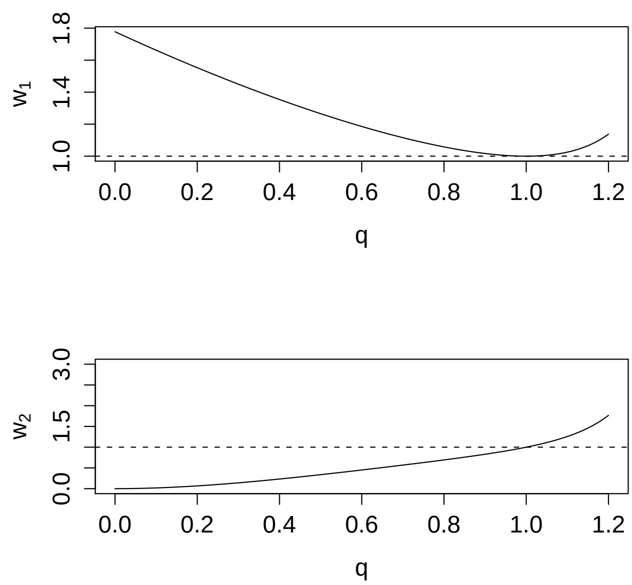

Figura 2.2: w_1 e w_2 em função de q.

Escolhemos $q = 1 - 1/n$ baseando-nos na Figura 2.2. Esta escolha garante a similaridade entre os estimadores ML$_q$V e MV conforme aumentamos o tamanho da amostra, pois $q \to 1$ quando $n \to \infty$, ou seja, o estimador ML$_q$V se reduz ao estimador de máxima verossimilhança neste caso. Esta escolha de q também satisfaz a condição para a normalidade assintótica do EML$_q$V encontrada no Teorema 2.2.

Esclarecemos que apesar de $\hat{\mu}_{x,q}$ não ser influenciado por q quanto à média da distribuição assintótica, sua variância assintótica é influenciada e, com esta escolha de q, teremos um aumento de variância do EML$_q$V em relação ao EMV.

2.6.2 Caso de identificabilidade σ_e^2 conhecido

Para verificar a influência de q sobre $\boldsymbol{\theta}^*$, procedemos de maneira similar ao exposto na Subseção 2.6.1, isto é, reparametrizamos $\boldsymbol{\theta}$ sob a forma natural, obtendo a relação (2.45), designada por $\boldsymbol{\omega}_2$. Assim, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\theta})$ e

$$\alpha = -\frac{2\eta_2\eta_3\sigma_e^2 + \eta_3 - \eta_4\eta_5\sigma_e^2}{\eta_4}, \quad \beta = -\frac{4\eta_1\eta_2\sigma_e^2 + 2\eta_1 - \eta_4^2\sigma_e^2}{\eta_4}, \quad \mu_x = -\frac{2\eta_2\eta_3 - \eta_4\eta_5}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2},$$
$$\sigma_x^2 = \frac{-\eta_4^2}{(4\eta_1\eta_2\sigma_e^2 + 2\eta_1 - \eta_4^2\sigma_e^2)(4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2)} \quad \text{e} \quad \sigma_u^2 = -\frac{2\eta_2\sigma_e^2 + 1}{4\eta_1\eta_2\sigma_e^2 + 2\eta_1 - \eta_4^2\sigma_e^2}, \tag{2.48}$$

são obtidos tomando $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\eta})^{-1}$, em que η_j denota os componentes de $\boldsymbol{\eta}$ para $j = 1, \ldots, 5$.

Pelo Lema 2.1, substituímos η_j por $\eta_j^* = \eta_j/q$, $j = 1, \ldots, 5$ e obtemos os parâmetros de substituição α^*, β^*, μ_x^*, σ_x^{2*} e σ_u^{2*}. Dessa maneira, temos

$$\alpha^* = -\frac{2\eta_2\eta_3\sigma_e^2 + q\eta_3 - \eta_4\eta_5\sigma_e^2}{q\eta_4}, \quad \beta^* = -\frac{4\eta_1\eta_2\sigma_e^2 + 2q\eta_1 - \eta_4^2\sigma_e^2}{q\eta_4}, \quad \mu_x^* = -\frac{2\eta_2\eta_3 - \eta_4\eta_5}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2},$$
$$\sigma_x^{2*} = \frac{-q^2\eta_4^2}{(4\eta_1\eta_2\sigma_e^2 + 2q\eta_1 - \eta_4^2\sigma_e^2)(4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2)} \quad \text{e} \quad \sigma_u^{2*} = -\frac{q(2\eta_2\sigma_e^2 + q)}{4\eta_1\eta_2\sigma_e^2 + 2q\eta_1 - \eta_4^2\sigma_e^2}. \tag{2.49}$$

Como na Subseção 2.6.1, de (2.48) e (2.49), o único EML$_q$V que não é influenciado por q quanto à média da distribuição assintótica é $\hat{\mu}_{x,q}$, pois $\mu_x^* = \mu_x$.

Baseando-nos nas expressões para as variâncias assintóticas de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ encontradas em (2.26) e (2.40), respectivamente, o valor escolhido para o parâmetro de distorção foi também $q = 1 - 1/n$. Neste caso também buscamos intervalos para q que satisfazem $0 < w_2 < 1$ para obtermos a redução da variância dos estimadores ML$_q$V de β, σ_x^2 e σ_u^2. Aqui também, a redução ou o aumento da variância de $\hat{\alpha}_q$ é indefinida pelo exposto na Subseção 2.6.1 e, em relação ao parâmetro μ_x, teremos um aumento de variância do EML$_q$V em relação ao EMV.

2.6.3 Caso de identificabilidade λ conhecido

Na verificação da influência de q sobre $\boldsymbol{\theta}^*$, reparametrizamos $\boldsymbol{\theta}$ sob a forma natural, obtendo a relação (2.45), designada por $\boldsymbol{\omega}_3$. Assim, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\theta})$ e considerando a relação inversa $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\eta})^{-1}$, temos

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{2\eta_2\eta_3\lambda\sigma_u^{2\prime\prime} + \eta_3 - \eta_4\eta_5\lambda\sigma_u^{2\prime\prime}}{\eta_4}, \quad \beta = \frac{2\eta_2\lambda\sigma_u^{2\prime\prime} + 1}{\eta_4\sigma_u^{2\prime\prime}}, \quad \mu_x = -\frac{\eta_4\eta_5 + 2\eta_2\eta_3}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2}, \\ \sigma_x^2 &= \frac{\eta_4^2(1 + 2\eta_2\lambda\sigma_u^{2\prime\prime} + 2\eta_1\sigma_u^{2\prime\prime})}{\lambda(4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2)(4\eta_2^2\lambda\sigma_u^{2\prime\prime} + 2\eta_2 + \eta_4^2\sigma_u^{2\prime\prime})} \quad \text{e} \quad \sigma_u^2 = \sigma_u^{2\prime\prime}, \end{aligned} \tag{2.50}$$

em que η_j denota os componentes de $\boldsymbol{\eta}$ para $j = 1, \ldots, 5$ e $\sigma_u^{2\prime\prime}$ é a raiz positiva de

$$\sigma_u^4\lambda(4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2) + 2\sigma_u^2(\eta_1 + \lambda\eta_2) + 1 = 0,$$

ou seja, $\sigma_u^{2\prime\prime} = \left[-(\eta_1 + \lambda\eta_2) + \sqrt{(\eta_1 - \lambda\eta_2)^2 + \eta_4^2\lambda}\right] / \lambda(4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2)$.

Substituímos η_j por $\eta_j^* = \eta_j/q$, $j = 1, \ldots, 5$ conforme o Lema 2.1 e obtemos os parâmetros α^*, β^*, μ_x^*, σ_x^{2*} e σ_u^{2*}:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= -\frac{2\eta_2\eta_3\lambda\sigma_u^{2\prime\prime} + \eta_3 - \eta_4\eta_5\lambda\sigma_u^{2\prime\prime}}{\eta_4}, \quad \beta^* = \frac{2\eta_2\lambda\sigma_u^{2\prime\prime} + 1}{\eta_4\sigma_u^{2\prime\prime}}, \quad \mu_x^* = -\frac{\eta_4\eta_5 + 2\eta_2\eta_3}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2}, \\ \sigma_x^{2*} &= \frac{q\eta_4^2(1 + 2\eta_2\lambda\sigma_u^{2\prime\prime} + 2\eta_1\sigma_u^{2\prime\prime})}{\lambda(4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2)(4\eta_2^2\lambda\sigma_u^{2\prime\prime} + 2\eta_2 + \eta_4^2\sigma_u^{2\prime\prime})} \quad \text{e} \quad \sigma_u^{2*} = q\sigma_u^{2\prime\prime}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

De (2.50) e (2.51), $\alpha^* = \alpha$, $\beta^* = \beta$, $\mu_x^* = \mu_x$, $\sigma_x^{2*} = q\sigma_x^2$ e $\sigma_u^{2*} = q\sigma_u^2$. Assim, os estimadores que são influenciados por q quanto à média da distribuição assintótica são $\hat{\sigma}_{x,q}^2$ e $\hat{\sigma}_{u,q}^2$.

Comparamos as matrizes de covariâncias assintóticas do EMV e do EML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$, encontradas em (2.28) e (2.41), respectivamente, para encontrar um valor ótimo para q que minimize a variância do EML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$ em relação ao do EMV. Buscamos valores de q que satisfazem $0 < w_2 < 1$ e, por isso, escolhemos $q = 1 - 1/n$. Com esta escolha de q, teremos redução das variâncias de $\hat{\beta}_q$, $\hat{\sigma}_{x,q}^2$ e $\hat{\sigma}_{u,q}^2$ e aumento da variância de $\hat{\mu}_{x,q}$ em relação aos EMV. Quanto ao parâmetro α, o comportamento da variância do EML$_q$V em comparação ao do EMV não pode ser determinado e a justificativa está na Subseção 2.6.1.

2.6.4 Caso de identificabilidade k_x conhecido

A influência de q sobre $\boldsymbol{\theta}^*$ é efetuada reparametrizando $\boldsymbol{\theta}$ sob a forma natural. Assim, designando por $\boldsymbol{\omega}_4$ a relação (2.45), ou seja $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\omega}_4(\boldsymbol{\theta})$, obtemos

$$\alpha = -\frac{-\eta_4^2\eta_5 + 4k_x\eta_1\eta_2\eta_5 + 2\eta_2\eta_3\eta_4 - 2k_x\eta_2\eta_3\eta_4}{2k_x\eta_2(4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2)}, \quad \beta = \frac{-\eta_4}{2k_x\eta_2}, \quad \mu_x = -\frac{-\eta_4\eta_5 + 2\eta_2\eta_3}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2},$$
$$\sigma_x^2 = \frac{-2k_x\eta_2}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2} \quad \text{e} \quad \sigma_e^2 = -\frac{-\eta_4^2 + 4k_x\eta_1\eta_2}{2k_x\eta_2(4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2)}, \tag{2.52}$$

pela relação inversa $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}_4(\boldsymbol{\eta})^{-1}$, em que η_j denota os componentes de $\boldsymbol{\eta}$ para $j = 1, \ldots, 5$.

Substituímos η_j por $\eta_j^* = \eta_j/q$, $j = 1, \ldots, 5$ conforme o Lema 2.1 e obtemos os parâmetros α^*, β^*, μ_x^*, σ_x^{2*} e σ_e^{2*}:

$$\alpha^* = -\frac{-\eta_4^2\eta_5 + 4k_x\eta_1\eta_2\eta_5 + 2\eta_2\eta_3\eta_4 - 2k_x\eta_2\eta_3\eta_4}{2k_x\eta_2(4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2)}, \quad \beta^* = \frac{-\eta_4}{2k_x\eta_2}, \quad \mu_x^* = -\frac{-\eta_4\eta_5 + 2\eta_2\eta_3}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2},$$
$$\sigma_x^{2*} = \frac{-2qk_x\eta_2}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2} \quad \text{e} \quad \sigma_e^{2*} = -\frac{q(-\eta_4^2 + 4k_x\eta_1\eta_2)}{2k_x\eta_2(4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2)}. \tag{2.53}$$

De (2.52) e (2.53), encontramos $\alpha^* = \alpha$, $\beta^* = \beta$, $\mu_x^* = \mu_x$, $\sigma_x^{2*} = q\sigma_x^2$ e $\sigma_e^{2*} = q\sigma_e^2$, ou seja, os estimadores ML$_q$V influenciados por q quanto à média da distribuição assintótica são $\hat{\sigma}_{x,q}^2$ e $\hat{\sigma}_{e,q}^2$.

Comparando as matrizes de covariâncias assintóticas (2.30) e (2.42) do EMV e do EML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$, respectivamente, podemos inferir sobre um valor para o parâmetro de distorção q que minimize a variância de $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ em relação à variância do EMV. Escolhemos $q = 1 - 1/n$ para satisfazer $0 < w_2 < 1$. Com este valor para q teremos redução da variância assintótica de $\hat{\beta}_q$, $\hat{\sigma}_{x,q}^2$ e $\hat{\sigma}_{e,q}^2$, e aumento da variância de $\hat{\mu}_{x,q}$ em relação aos estimadores de MV. Quanto ao parâmetro α, as reduções ou aumentos na variância assintótica do EML$_q$V não podem ser avaliadas, conforme explicado na Subseção 2.6.1.

2.6.5 Caso de identificabilidade α conhecido

Para verificar a influência de q sobre $\boldsymbol{\theta}^*$, reparametrizamos $\boldsymbol{\theta}$ sob a forma natural, obtendo a relação (2.45), designada por $\boldsymbol{\omega}_5$. Assim, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\omega}_5(\boldsymbol{\theta})$ e obtemos

$$\beta = \frac{4\alpha\eta_1\eta_2 - \alpha\eta_4^2 - \eta_3\eta_4 + 2\eta_1\eta_5}{-\eta_4\eta_5 + 2\eta_2\eta_3}, \quad \mu_x = -\frac{-\eta_4\eta_5 + 2\eta_2\eta_3}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2}, \quad \sigma_e^2 = -\frac{\eta_3 + \alpha\eta_4}{-\eta_4\eta_5 + 2\eta_2\eta_3},$$
$$\sigma_x^2 = \frac{\eta_4(-\eta_4\eta_5 + 2\eta_2\eta_3)}{(4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2)(4\alpha\eta_1\eta_2 - \alpha\eta_4^2 - \eta_3\eta_4 + 2\eta_1\eta_5)} \;\text{ e }\; \sigma_u^2 = -\frac{2\alpha\eta_2 + \eta_5}{4\alpha\eta_1\eta_2 - \alpha\eta_4^2 - \eta_3\eta_4 + 2\eta_1\eta_5}, \tag{2.54}$$

pela relação inversa $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}_5(\boldsymbol{\eta})^{-1}$, em que η_j denota os componentes de $\boldsymbol{\eta}$ para $j = 1, \ldots, 5$.

Pelo Lema 2.1, substituímos η_j por $\eta_j^* = \eta_j/q$, $j = 1, \ldots, 5$ e obtemos os parâmetros de substituição β^*, μ_x^*, σ_x^{2*}, σ_u^{2*} e σ_e^{2*}. Dessa maneira, temos

$$\beta^* = \frac{4\alpha\eta_1\eta_2 - \alpha\eta_4^2 - \eta_3\eta_4 + 2\eta_1\eta_5}{-\eta_4\eta_5 + 2\eta_2\eta_3}, \quad \mu_x^* = -\frac{-\eta_4\eta_5 + 2\eta_2\eta_3}{4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2}, \quad \sigma_e^{2*} = -\frac{q(\eta_3 + \alpha\eta_4)}{-\eta_4\eta_5 + 2\eta_2\eta_3},$$
$$\sigma_x^{2*} = \frac{q\eta_4(-\eta_4\eta_5 + 2\eta_2\eta_3)}{(4\eta_1\eta_2 - \eta_4^2)(4\alpha\eta_1\eta_2 - \alpha\eta_4^2 - \eta_3\eta_4 + 2\eta_1\eta_5)} \;\text{ e }\; \sigma_u^{2*} = -\frac{q(2\alpha\eta_2 + \eta_5)}{4\alpha\eta_1\eta_2 - \alpha\eta_4^2 - \eta_3\eta_4 + 2\eta_1\eta_5}. \tag{2.55}$$

Comparando (2.54) e (2.55), obtemos $\beta^* = \beta$, $\mu_x^* = \mu_x$, $\sigma_x^{2*} = q\sigma_x^2$, $\sigma_u^{2*} = q\sigma_u^2$ e $\sigma_e^{2*} = q\sigma_e^2$, ou seja, os estimadores ML$_q$V influenciados por q quanto à média da distribuição assintótica são $\hat{\sigma}_{x,q}^2$, $\hat{\sigma}_{u,q}^2$ e $\hat{\sigma}_{e,q}^2$.

Comparando as matrizes de covariâncias assintóticas do EMV e do EML$_q$V dadas em (2.32) e (2.43), respectivamente, com o intuito de encontrar um valor ótimo para q que reduza a variância do EML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$ em relação ao estimador de MV, verificamos que as variâncias assintóticas de $\hat{\sigma}_{x,q}^2$, $\hat{\sigma}_{u,q}^2$ e $\hat{\sigma}_{e,q}^2$ dependem de w_1 e w_2. Como não é possível encontrar q que satisfaça $0 < w_1 < 1$ e $0 < w_2 < 1$ simultaneamente, de acordo com a Figura 2.2, a redução ou aumento das variâncias assintóticas do EML$_q$V das variâncias é indeterminada, como explicado na Subseção 2.6.1. Voltamo-nos para $0 < w_2 < 1$, pois se tomássemos q de forma a satisfazer $0 < w_1 < 1$, teríamos $w_2 < 0$ o que poderia acarretar variâncias negativas para o EML$_q$V de σ_x^2, σ_u^2 e σ_e^2. Portanto, escolhemos $q = 1 - 1/n$ também neste caso de identificabilidade. Com este valor de q teremos um aumento das variâncias de $\hat{\beta}_q$ e de $\hat{\mu}_{x,q}$ se comparado ao EMV. Portanto, neste caso de identificabilidade, a utilização do método ML$_q$V não é recomendada para a obtenção de melhorias na estimação de β.

Capítulo 3

Simulações

As simulações desta dissertação têm o objetivo de analisar o comportamento dos estimadores de ML$_q$V e de MV em modelos estruturais normais segundo os casos de identificabilidade listados na Seção 2.2 para determinadas escolhas de $\boldsymbol{\theta}$. Na Subseção 3.1.2, o verdadeiro valor do vetor de parâmetros da distribuição dada em (2.12) foi escolhido com base em um exemplo de Fuller (1987). Nas outras subseções, os valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ foram escolhidos de maneira que obtivéssemos diferenças maiores entre $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\theta}^*$.

Geramos $B = 5000$ amostras da distribuição (2.12), calculamos as estimativas de MV e de ML$_q$V maximizando, respectivamente, as funções log-verossimilhança e L_q, dada em (2.3), do respectivo modelo com a função "optim" da linguagem R (R Development Core Team, 2011) considerando o método L-BFGS-B e o parâmetro de distorção $q = 1 - 1/n$. Apesar de possuirmos as expressões analíticas dos EMV, utilizamos o método L-BFGS-B para a maximização da função log-verossimilhança para permitir a estimação com restrições nas variâncias, para que estas fossem sempre não negativas. As estimativas para os parâmetros obtidas desta maneira são semelhantes àquelas obtidas utilizando os resultados de Birch (1964) e Wang (2004) comentados na Seção 2.3.

O método L-BFGS-B é um tipo de método quase Newton. Segundo Goulart (2005) e Nocedal & Wright (2006), métodos quase Newton diferem dos métodos de otimização Newton, pois com o método quase Newton obtemos apenas uma aproximação da inversa da matriz hessiana de uma função objetivo (que se deseja maximizar), ao invés da matriz exata. O método de otimização L-BFGS-B permite a imposição de restrições do tipo intervalo aos parâmetros, isto é, cada um pode ser delimitado com limites inferiores e superiores. Mais informações sobre o método podem ser vistas em Byrd *et al.* (1995).

Calculamos os estimadores $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{esp}}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{esp}$ da matriz de covariâncias assintótica dos estimadores de ML$_q$V e de MV de $\boldsymbol{\theta}$, respectivamente e também os estimadores $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{obs}}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{obs}$. Somente as estimativas de $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{esp}}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{esp}$ são mostradas nesta seção para que possamos comparar os resultados das simulações diretamente com os resultados analíticos desenvolvidos no Capítulo 2.

Os IC's foram construídos com coeficiente de confiança nominal de 95%. Observamos que, quanto à estimação intervalar, somente analisaremos os parâmetros de mais importância no modelo, ou seja, α e β.

Para a análise dos estimadores ML$_q$V e MV quanto à estimação pontual, utilizamos a norma euclidiana simulada, o viés simulado, o desvio padrão (DP), o erro padrão estimado (EP) e a raiz quadrada do EQM simulado. O desempenho dos estimadores quanto à estimação intervalar é avaliado utilizando a amplitude amostral e a probabilidade de cobertura dos IC's. A seguir, enunciamos estas medidas de desempenho, observando que utilizamos o EMV $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ nas expressões, mas estas também se aplicam ao EML$_q$V $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$.

A norma euclidiana simulada mede o desempenho global de um estimador e é dada por

$$\text{Norma} = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B}\left[\sum_{i=1}^{p}(\hat{\theta}_{ij} - \theta_{0_i})^2\right]^{1/2},$$

em que θ_{0_i} e $\hat{\theta}_{ij}$ denotam, respectivamente, o valor verdadeiro e a estimativa do i-ésimo componente de $\boldsymbol{\theta}$ na j-ésima amostra, para $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, B$ e p a dimensão de $\boldsymbol{\theta}$. O viés simulado do estimador é tal que

$$\text{Viés}(\hat{\theta}_i) = \theta_{0_i} - \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B}\hat{\theta}_{ij}.$$

O viés assintótico do EML$_q$V, nomenclatura adotada em Ferrari & Yang (2010), é definido como

$$\text{Viés}_{assint}(\hat{\theta}_i) = \theta_{0_i} - \theta_i^*,$$

em que θ_i^* é o i-ésimo componente do parâmetro de substituição θ^*. Esta medida é importante no estudo do sinal do viés simulado do EML$_q$V. A raiz quadrada do EQM simulado do estimador de cada componente θ_i de $\boldsymbol{\theta}$ é tal que

$$\sqrt{\text{EQM}(\hat{\theta}_i)} = \left[\frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B}(\hat{\theta}_{ij} - \theta_{0_i})^2\right]^{1/2}.$$

O desvio padrão de $\hat{\theta}_i$ é obtido por

$$\text{DP}(\hat{\theta}_i) = \left[\frac{1}{B-1}\sum_{j=1}^{B}\left(\hat{\theta}_{ij} - \overline{\hat{\theta}}_i\right)^2\right]^{1/2},$$

em que $\overline{\hat{\theta}}_i$ é a média dos B valores $\hat{\theta}_i$. O erro padrão estimado é a média dos desvios padrão assintóticos simulados obtidos das matrizes $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{esp}}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{esp}$ dos estimadores.

Os IC's são construídos por

$$\hat{\theta}_i \pm z_{\zeta/2}\ \hat{\sigma}_{\hat{\theta}_i}, \tag{3.1}$$

em que $\hat{\theta}_i$ é o estimador do parâmetro de interesse θ_i, $1-\zeta$ é o coeficiente de confiança do intervalo, z_v é o percentil $100(1-v)$ da distribuição normal padrão e $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}_i}$ é o estimador do erro padrão de $\hat{\theta}_i$.

A probabilidade de cobertura de um IC é a frequência relativa das vezes em que o intervalo estimado contém θ_{0_i}.

É importante notar que foram observados os seguintes comportamentos esperados dos estimadores MV e ML$_q$V, comuns a todas as tabelas deste capítulo:

- à medida que aumentamos o tamanho das amostras, as medidas simuladas obtidas, de norma, viés, DP, EP, raiz quadrada do EQM e amplitude, diminuem,
- com o aumento do tamanho da amostra, as probabilidades de cobertura dos IC's obtidos pelos métodos ML$_q$V e MV convergem para o coeficiente de confiança nominal e
- conforme aumentamos o valor de n, as diferenças entre as medidas simuladas obtidas pelos métodos ML$_q$V e MV, de norma, viés, DP, EP, raiz quadrada do EQM, amplitude e cobertura dos IC's se tornam pequenas, fato justificado pela escolha do parâmetro de distorção q que, assintoticamente, reduz o EML$_q$V ao EMV.

Pelo exposto acima, as análises realizadas nas seções deste capítulo focam, principalmente, o estudo de comparação dos estimadores ML$_q$V e MV considerando tamanhos de amostra pequenos, como $n = 10$.

As Figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 que representam graficamente as estimativas das funções densidade dos estimadores ML$_q$V e MV, não contemplam o parâmetro μ_x pois o EML$_q$V deste parâmetro não é influenciado por q quanto à média da distribuição assintótica, além de não representar um parâmetro de grande interesse no modelo.

Durante as simulações observamos que algumas amostras originaram estimativas de MV e ML$_q$V discrepantes para o parâmetros dos modelos estruturais, ocasionando valores incoerentes de EP para os estimadores ML$_q$V e MV. Para contornar este problema, o processo de simulação foi realizado da seguinte maneira: para cada amostra, calculamos as matrizes $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{obs}$ e $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{q_{obs}}$ dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$. Se não ocorrem problemas nesta etapa, provenientes da inversão da matriz de informação observada $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ e da matriz $\boldsymbol{J}$, dadas em (2.21) e (2.8), respectivamente, a amostra é aproveitada e é utilizada para o cálculo das matrizes $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{esp}$ e $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{q_{esp}}$ que serão empregadas no cálculo do EP, amplitude e cobertura dos IC's. Se houver problemas na inversão de $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ e $\boldsymbol{J}$, a amostra é descartada e novas amostras são geradas até que não ocorra o problema.

Problemas de convergência, de inversões de matrizes relacionados ao método de estimação de MV e discussões sobre o tamanho mínimo das amostras que impeçam tais problemas são relatados em outros trabalhos como Hood *et al.* (1999), de Castro *et al.* (2008) e Gillard (2011). Em Hood *et al.* (1999), por exemplo, são mostradas as médias das estimativas, do DP simulado e do EP estimado do EMV dos parâmetros dos modelos estruturais para os casos de identificabilidade σ_u^2 conhecido e σ_e^2 conhecido segundo variados tamanhos de amostra. O menor tamanho de amostra tomado como suficiente para que os resultados assintóticos fornecessem aproximações adequadas para a matriz de covariâncias assintótica foi $n = 20$. Os valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ foram tomados como $(\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2, \sigma_e^2) = (0, 1, 1, 2, 1, 1)$. Realizamos simulações com estes valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$, obtendo os mesmos comportamentos expostos no artigo sobre o EMV, de viés positivo ou negativo, da relação entre o DP e EP e da instabilidade do EMV para tamanhos de amostra menores que 20, como $n = 10$, para esta escolha de valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$, dada em Hood *et al.* (1999).

Em Ferrari & Yang (2010), análises empíricas mostraram que valores para o parâmetro de distorção q tal que $1/n <\mid 1-q \mid< 1/\sqrt{n}$, podem proporcionar redução do EQM do EML$_q$V em comparação ao EMV. Neste trabalho, realizamos algumas simulações neste sentido, por exemplo, tomando $q = 1 - 1/n^{2/3}$ no caso de identificabilidade σ_e^2

conhecido. Neste caso, os valores de EQM dos estimadores não foram expressivamente alterados pela nova escolha de q, ou seja, não houve melhoras notáveis em termos de redução de EQM.

3.1 Caso de identificabilidade σ_u^2 conhecido

3.1.1 Cenário 1

Neste caso de identificabilidade tomamos $\sigma_u^2 = 3$ e $\boldsymbol{\theta}_0 = (\alpha_0, \beta_0, \mu_{x_0}, \sigma_{x_0}^2, \sigma_{e_0}^2)^t = (17; 3; 1,2; 14; 4)^t$ como o verdadeiro valor do vetor de parâmetros. Durante o processo de simulação, para a totalização das $B = 5000$ amostras, para $n = 10$, $n = 50$ e $n = 100$, respectivamente, foram descartadas 417, 196 e 193 amostras no processo iterativo devido à falta de convergência do algoritmo e 11970, 3181 e 1771 amostras que ocasionaram problemas na inversão das matrizes de informação observada e em $\boldsymbol{J}$, dada em (2.8).

A Tabela 3.1 nos informa sobre a norma euclidiana de $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0$ para tamanhos de amostra variados. A razão entre a norma do EML$_q$V e do EMV é de 0,874 para $n = 10$ e de 0,987 para $n = 100$. Esta diferença mais acentuada para $n = 10$, reflete a influência de q no EML$_q$V, conforme esperado.

Tabela 3.1: Norma euclidiana simulada de $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0$ para os estimadores ML$_q$V e MV para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_u^2 = 3$ conhecido.

Tamanho de amostra	EML$_q$V	EMV
10	10,066	11,524
50	4,830	5,010
100	3,653	3,701

A Tabela 3.2 nos traz o viés simulado dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$. Esta tabela será analisada em conjunto com a Tabela 3.3, que resume os valores de $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}^*$ e os vieses simulados dos estimadores MV e ML$_q$V para $n = 10$, objetivando a melhor compreensão de análises para tamanhos de amostra pequenos. Os valores de $\boldsymbol{\theta}^*$ são obtidos substituindo

Tabela 3.2: Viés simulado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_u^2 = 3$ conhecido.

Tamanho de amostra	EML$_q$V α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2	EMV α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
10	-0,190	0,155	-0,016	1,051	-5,272	-0,265	0,217	-0,017	-0,159	-7,717
50	-0,039	0,035	-0,001	0,241	-1,621	-0,055	0,048	-0,001	-0,077	-2,223
100	-0,015	0,015	0,011	0,170	-0,771	-0,023	0,021	0,011	0,007	-1,075

Tabela 3.3: Valores de $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}^*$ e viés simulado dos estimadores MV e ML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$, para $n = 10$, com $\sigma_u^2 = 3$ conhecido.

Identificabilidade $\sigma_u^2 = 3$	Parâmetros α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
$\boldsymbol{\theta}_0$	17	3	1,2	14	4
$\boldsymbol{\theta}^*$	16,912	3,073	1,2	12,300	0,834
Viés($\widehat{\boldsymbol{\theta}}$)	-0,265	0,217	-0,017	-0,159	-7,717
Viés($\widehat{\boldsymbol{\theta}}_q$)	-0,190	0,155	-0,016	1,051	-5,272

os valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ em (2.45) e, em seguida, estes valores e o valor de q em (2.47).

Pela Tabela 3.2, o comportamento esperado da diminuição do valor absoluto do viés dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$ com o aumento de n só não é observado em relação a μ_x, de $n = 50$ para $n = 100$. A justificativa está relacionada à variância amostral, e ainda, estes valores são próximos de zero, não sendo expressivos. Observamos também que, em relação ao parâmetro μ_x, os estimadores de MV e ML$_q$V produzem valores praticamente idênticos para qualquer tamanho de amostra. Este fato está de acordo com os resultados analíticos obtidos na Subseção 2.6.1, em que é mostrado que o EML$_q$V de μ_x não deve ser influenciado por q quanto à média da distribuição assintótica.

Em relação aos parâmetros α e β, os valores dos parâmetros de substituição são próximos dos respectivos valores verdadeiros, para $n = 10$, conforme visto na Tabela 3.3, o que acarretou a também semelhança entre os vieses simulados dos estimadores ML$_q$V e MV para α e β. Em decorrência desta proximidade também observamos que os sinais dos vieses simulados de $\hat{\alpha}_q$ e $\hat{\beta}_q$ são distintos dos respectivos vieses assintóticos, sendo iguais aos sinais dos vieses simulados dos EMV. Em valor absoluto, os vieses de $\hat{\alpha}_q$, $\hat{\beta}_q$ são menores que os vieses dos EMV.

Analisando as variâncias σ_x^2 e σ_e^2, na Tabela 3.3, temos que, para $n = 10$, as diferenças entre os parâmetros de substituição e os respectivos valores verdadeiros são mais acentuadas, indicando, de maneira mais relevante, a influência de q no EML$_q$V destes parâmetros quanto à média da distribuição assintótica. Em valor absoluto, a princípio, os vieses do estimador ML$_q$V devem ser maiores que os vieses do EMV. Tal comportamento é verificado em relação a σ_x^2. Em relação a σ_e^2, o comportamento divergente é justificado pelo fato de a distribuição de $\hat{\sigma}_{e,q}^2$ ser assimétrica, conforme visualizado na Figura 3.1 e, nesta situação, a relação descrita não é válida, já que a média das estimativas do EML$_q$V de σ_e^2 é afastada de σ_e^{2*} e mais próxima de $\sigma_{e_0}^2$, neste caso. Quanto ao sinal do viés simulado, este concorda como o sinal do viés assintótico em relação a $\hat{\sigma}_{x,q}^2$, conforme esperado e, em relação a $\hat{\sigma}_{e,q}^2$, a justificativa para a discordância de sinal é a assimetria da distribuição do estimador.

As Tabelas 3.4 e 3.5 nos mostram o desvio padrão amostral e o erro padrão estimado dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$, respectivamente. O estudo de comparação das matrizes de covariâncias assintóticas, realizado na Subseção 2.6.1, determinou que as variâncias dos estimadores ML$_q$V de β, σ_x^2 e σ_e^2 são menores que as respectivas variâncias dos estimadores de MV com a escolha $q = 1 - 1/n$. Empiricamente, é possível notar a redução do EP destes estimadores em comparação aos EMV, para $n = 10$, conforme esperado. O DP simulado manteve o mesmo comportamento do EP estimado em relação a σ_x^2 e σ_e^2. Em relação a β, o DP simulado do EML$_q$V foi maior que do EMV, o que é explicado quando substituímos os valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ e de q nas expressões dos desvios padrão assintóticos dos estimadores ML$_q$V e MV, dados respectivamente em (2.24) e (2.39), obtemos os valores 0,507 e 0,557, para $n = 10$, que são valores próximos.

Em relação ao parâmetro α, substituindo os valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ e de q nas expressões dos desvios padrão assintóticos de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\alpha}_q$, obtemos os valores 1,883 e 1,877, respectivamente, para $n = 10$. Assim, o comportamento do EP simulado dos estimadores de α concorda com os resultados analíticos obtidos. O DP simulado de $\hat{\alpha}_q$, apesar de ser ligeiramente maior que do EMV possui valor próximo, o que se deve aos valores 1,883 e 1,877 serem também próximos.

Quanto ao parâmetro μ_x, seria esperado pequeno aumento da variância do EML$_q$V em relação ao EMV e observamos este fato atentando para o DP simulado, no entanto, considerando o EP estimado houve uma pequena redução, não expressiva, justificada pelos valores semelhantes, 1,304 e 1,315, obtidos pelas referidas substituições nas expressões dos desvios padrão assintóticos de $\hat{\mu}_x$ e de $\hat{\mu}_{x,q}$, respectivamente.

Observamos também que para $n = 100$, o DP e o EP dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$ coincidem, exceto em relação a σ_e^2, indicando neste caso, que o tamanho da amostra não é suficiente para a aproximação à matriz de covariâncias assintótica.

Tabela 3.4: DP dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_u^2 = 3$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
10	2,015	0,622	1,328	6,595	8,234	1,928	0,579	1,317	7,068	8,791
50	0,838	0,228	0,582	3,219	4,127	0,834	0,226	0,581	3,281	4,187
100	0,597	0,166	0,414	2,328	3,266	0,596	0,166	0,414	2,351	3,288

Tabela 3.5: EP estimado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$ baseados em $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q1esp}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{1esp}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_u^2 = 3$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
10	2,318	0,794	1,247	6,497	14,143	2,334	0,820	1,283	7,674	16,084
50	0,871	0,260	0,577	3,287	6,304	0,876	0,262	0,582	3,415	6,504
100	0,605	0,180	0,409	2,357	4,424	0,607	0,181	0,411	2,403	4,495

A Tabela 3.6 nos traz a raiz quadrada do EQM dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$. Para $n = 10$, a raiz quadrada do EQM de $\hat{\alpha}_q$ e $\hat{\beta}_q$ são maiores que de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, o que pode ser justificado pelo DP de o EML$_q$V destes serem maiores que os obtidos por MV. Assim, o EQM de $\hat{\alpha}_q$ e $\hat{\beta}_q$ são dominados pelo DP dos estimadores, pelo motivo comentado na análise da Tabela 3.3. A $\sqrt{\text{EQM}}$ de $\hat{\sigma}^2_{x,q}$ é menor que do EMV devido ao fato de o DP do respectivo estimador ML$_q$V ser menor que do EMV e a $\sqrt{\text{EQM}}$ de $\hat{\sigma}^2_{e,q}$ é menor que do EMV pois o viés em valor absoluto e o DP do EML$_q$V são menores que do EMV, para $n = 10$. O estimador $\hat{\mu}_{x,q}$ teve seu EQM pouco alterado por q para $n = 10$, fato justificado pela falta de influência de q na média da distribuição assintótica do EML$_q$V de μ_x e o pequeno aumento se deve ao DP do estimador.

Tabela 3.6: Raiz quadrada do EQM simulado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_u^2 = 3$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
10	2,024	0,641	1,328	6,678	9,777	1,946	0,618	1,317	7,070	11,697
50	0,839	0,231	0,582	3,228	4,434	0,836	0,231	0,581	3,282	4,740
100	0,597	0,167	0,414	2,335	3,356	0,596	0,167	0,414	2,351	3,460

A Figura 3.1 traz a função densidade dos estimadores ML$_q$V e MV para $n = 10$, representados por linha tracejada e cheia, respectivamente. Os estimadores de α, β, σ_x^2 e σ_e^2 são indicados em (a), (b), (c) e (d), respectivamente, os valores verdadeiros dos parâmetros estão assinalados por um círculo no eixo horizontal e os valores dos parâmetros de substituição por um símbolo x no respectivo eixo. Em relação a α e β, não conseguimos distinguir os estimadores apenas analisando a Figura 3.1. É possível notar que o EML$_q$V $\hat{\sigma}_{x,q}^2$ é mais viesado que o EMV. Pela Figura 3.1 (d), notamos a assimetria positiva da distribuição do EML$_q$V de σ_e^2 e ainda notamos que o valor de σ_e^{2*} está à esquerda de $\sigma_{e_0}^2$, dessa maneira, a média das estimativas de $\hat{\sigma}_{e,q}^2$ está distante do parâmetro de substituição e mais próxima do valor verdadeiro, acarretando um menor viés do EML$_q$V se comparado ao EMV, e ainda, a inversão de sinal entre o viés simulado e o viés assintótico de $\hat{\sigma}_{e,q}^2$, conforme comentado na análise da Tabela 3.3.

Tabela 3.7: Amplitude dos IC's para α e β baseados em $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q1esp}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{1_{esp}}$ para diferentes tamanhos de amostra, com coeficiente de confiança nominal de 95% e $\sigma_u^2 = 3$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V		EMV	
amostra	α	β	α	β
10	9,088	3,111	9,149	3,214
50	3,415	1,018	3,435	1,027
100	2,374	0,707	2,381	0,710

As Tabelas 3.7 e 3.8 dizem respeito, respectivamente, à amplitude e probabilidade de cobertura dos IC's para α e β segundo os estimadores de MV e ML$_q$V. Para $n =$

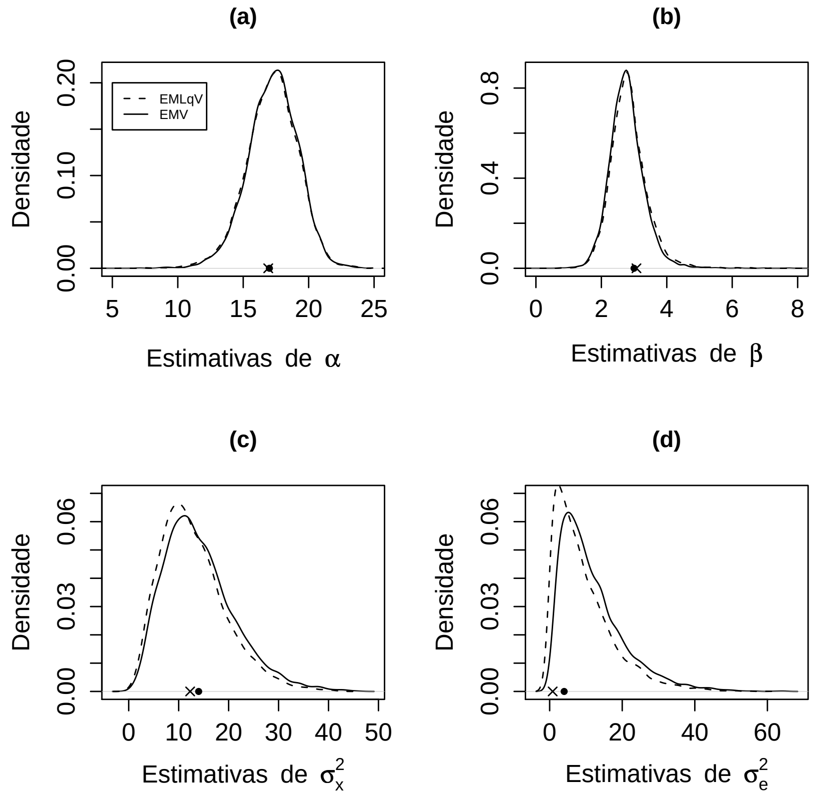

Figura 3.1: Estimativa da função densidade dos estimadores MV e ML$_q$V de α, β, σ_x^2 e σ_e^2 em (a), (b), (c) e (d), respectivamente, para $n = 10$ e $\sigma_u^2 = 3$ conhecido, em que o círculo e o símbolo x denotam $\boldsymbol{\theta}_0$ e $\boldsymbol{\theta}^*$, respectivamente.

Tabela 3.8: Probabilidade de cobertura dos IC's para α e β baseados em $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q1_{esp}}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{1_{esp}}$ para diferentes tamanhos de amostra, com coeficiente de confiança nominal de 95% e $\sigma_u^2 = 3$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V		EMV	
amostra	α	β	α	β
10	0,961	0,920	0,965	0,928
50	0,956	0,961	0,958	0,959
100	0,953	0,962	0,953	0,961

10, notamos que as amplitudes foram menores quando estimadas pelo método ML$_q$V, conforme esperado, já que os erros padrão estimados de $\hat{\alpha}_q$ e $\hat{\beta}_q$ são menores que os obtidos pelo método de MV. A cobertura obtida por ML$_q$V para o IC de α se aproxima mais do coeficiente de confiança nominal do que a cobertura obtida por MV, para $n = 10$. Já em relação ao IC de β, o método de MV obteve cobertura mais próxima do coeficiente de 95% do que o método de ML$_q$V. Notamos porém, que estes valores de cobertura obtidos por ambos os métodos são próximos.

3.1.2 Cenário 2

Neste caso de identificabilidade tomamos $\sigma_u^2 = 57$ e $\boldsymbol{\theta}_0 = (\alpha_0, \beta_0, \mu_{x_0}, \sigma_{x_0}^2, \sigma_{e_0}^2)^t = (65; 0,5; 70; 250; 43)^t$ como o verdadeiro valor do vetor de parâmetros, escolhidos com base em um exemplo de Fuller (1987). Para a totalização das $B = 5000$ amostras, em relação aos tamanhos de amostra $n = 10$, $n = 50$ e $n = 100$ foram descartadas 165, 113 e 89 amostras no processo iterativo, respectivamente, devido à falta de convergência do algoritmo. Para $n = 10$, descartamos 666 amostras que ocasionaram problemas na inversão das matrizes $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ e $\boldsymbol{J}$, dadas em (2.21) e (2.8), respectivamente, e para $n = 50$ e $n = 100$ nenhuma amostra foi descartada.

A Tabela 3.9 mostra a norma euclidiana de $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0$ para tamanhos de amostra variados. A razão entre as normas obtidas por ML$_q$V e MV são respectivamente 1,012 e 1,000 para $n = 10$ e $n = 100$. Dessa forma, a influência de q no EML$_q$V é mais acentuada considerando $n = 10$, conforme esperado.

Tabela 3.9: Norma euclidiana simulada de $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0$ para os estimadores ML$_q$V e MV para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_u^2 = 57$ conhecido.

Tamanho de amostra	EML$_q$V	EMV
10	112,786	111,455
50	51,291	51,260
100	37,049	37,038

As Tabelas 3.10 e 3.11 são analisadas conjuntamente. A Tabela 3.10 indica o viés simulado dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$ para variados tamanhos de amostra e a Tabela 3.11, o valor verdadeiro, $\boldsymbol{\theta}^*$ e os vieses simulados dos estimadores MV e ML$_q$V para $n = 10$. Esta tabela foi inserida no trabalho para facilitar as análises para tamanhos de amostra pequenos. Os valores de $\boldsymbol{\theta}^*$ são obtidos conforme explicado na Subseção 3.1.1.

Examinando a Tabela 3.10, em relação a μ_x, verificamos um ligeiro aumento dos vieses dos estimadores ML$_q$V e MV, de $n = 50$ para $n = 100$. Este aumento é justificado pela variância amostral dos estimadores conjuntamente com o fato de os vieses serem próximos de zero, não expressivos. Observamos também que, em relação aos parâmetros β e μ_x, os estimadores de MV e ML$_q$V produzem valores próximos de viés para qualquer tamanho de amostra. O comportamento de $\hat{\mu}_{x,q}$ está de acordo com os resultados analíticos obtidos na Subseção 2.6.1, em que é mostrado que o EML$_q$V de μ_x não deve ser influenciado por q quanto à média da distribuição assintótica. Em relação a β, o resultado é também esperado pois apesar de β^* ser escrito em função de q, a influência de q no EML$_q$V é pequena, conforme mostrado na Tabela 3.11, pois o valor de β^* é semelhante ao valor verdadeiro β_0.

Quanto aos parâmetros α, σ_x^2 e σ_e^2, notamos, pela Tabela 3.11, que as diferenças entre os valores dos parâmetros de substituição e os valores verdadeiros são mais acentuadas, especialmente em relação às variâncias, acarretando, em valor absoluto, um viés maior do EML$_q$V destes parâmetros em relação ao EMV, conforme esperado. Dessa maneira, é verificada a influência de q no EML$_q$V destes parâmetros.

Os sinais dos vieses simulados dos estimadores ML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$ concordam com os vieses assintóticos, conforme esperado.

Tabela 3.10: Viés simulado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_u^2 = 57$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
10	1,401	-0,020	0,022	21,928	12,016	1,348	-0,019	0,014	19,650	9,601
50	0,623	-0,009	0,004	5,518	2,866	0,683	-0,010	0,005	5,424	2,612
100	0,253	-0,003	0,025	3,414	1,350	0,283	-0,004	0,024	3,389	1,248

As Tabelas 3.12 e 3.13 indicam, respectivamente, o desvio padrão amostral e o erro padrão estimado dos estimadores de α, β, μ_x, σ_x^2 e σ_e^2. O estudo realizado na Subseção 2.6.1, da comparação das matrizes de covariâncias assintóticas, determinou a redução de variância do EML$_q$V de β, σ_x^2 e σ_e^2 em relação aos estimadores de MV com a escolha $q = 1 - 1/n$. Em relação ao parâmetro σ_e^2 é possível notar esta redução empiricamente

Tabela 3.11: Valores de $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}^*$ e viés simulado dos estimadores MV e ML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$, para $n = 10$, com $\sigma_u^2 = 57$ conhecido.

Identificabilidade	Parâmetros				
$\sigma_u^2 = 57$	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
$\boldsymbol{\theta}_0$	65	0,5	70	250	43
$\boldsymbol{\theta}^*$	64,090	0,513	70	219,300	37,238
Viés($\widehat{\boldsymbol{\theta}}$)	1,348	-0,019	0,014	19,650	9,601
Viés($\widehat{\boldsymbol{\theta}}_q$)	1,401	-0,020	0,022	21,928	12,016

observando tanto o DP simulado quanto o EP estimado. Em relação a β e σ_x^2, este comportamento é observado quando analisamos o EP estimado e, considerando o DP simulado de $\hat{\beta}_q$ e $\hat{\sigma}_{x,q}^2$, os valores são maiores porém próximos dos valores obtidos por MV, para $n = 10$.

Quanto ao parâmetro α, substituindo os valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ e de q nas expressões dos desvios padrão assintóticos de $\hat{\alpha}_q$ e $\hat{\alpha}$, dadas em (2.39) e (2.24), respectivamente, obtemos os respectivos valores 11,200 e 12,243, para $n = 10$. Assim é esperado redução do EP estimado do EML$_q$V em relação ao EMV, o que de fato aconteceu. Os DP simulados dos estimadores ML$_q$V e MV de α mantiveram-se próximos. Por fim, o DP simulado e o EP estimado de $\hat{\mu}_{x,q}$ são maiores que os obtidos por MV, conforme esperado.

Para $n = 100$, observamos que o DP e o EP dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$ coincidem, como esperado.

Tabela 3.12: DP dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_u^2 = 57$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
10	17,322	0,243	5,553	130,755	21,539	17,154	0,241	5,528	130,031	22,157
50	5,873	0,082	2,496	60,285	11,403	5,878	0,082	2,496	60,275	11,415
100	3,991	0,056	1,763	43,791	8,078	3,993	0,056	1,763	43,788	8,073

A Tabela 3.14 nos traz a raiz quadrada do EQM dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$. O valores do EQM obtidos pelo estimador ML$_q$V foram maiores que os obtidos pelo EMV em relação

Tabela 3.13: EP estimado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$ baseados em $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q1esp}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{1esp}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_u^2 = 57$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
10	16,383	0,231	5,248	116,128	20,266	17,360	0,245	5,229	128,507	23,274
50	5,539	0,078	2,444	59,124	10,838	5,658	0,079	2,444	60,315	11,115
100	3,897	0,055	1,738	42,510	7,880	3,939	0,055	1,738	42,937	7,977

a todos os parâmetros para $n = 10$, no entanto, em relação a β e μ_x os valores obtidos por ambos os métodos são próximos, o que é explicado pelos vieses dos estimadores ML$_q$V e MV destes parâmetros serem semelhantes. Em relação a α e σ_x^2 a $\sqrt{\text{EQM}}$ do EML$_q$V é maior que do EMV pelo fato de o viés e de o DP de $\hat{\alpha}_q$ e $\hat{\sigma}_{x,q}^2$ também o serem. Em relação a σ_e^2, a $\sqrt{\text{EQM}}$ do EML$_q$V é maior pois o viés de $\hat{\sigma}_{e,q}^2$ é maior que o viés de $\hat{\sigma}_e^2$.

Tabela 3.14: Raiz quadrada do EQM simulado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_u^2 = 57$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
10	17,379	0,244	5,553	132,581	24,664	17,207	0,242	5,528	131,507	24,148
50	5,906	0,083	2,496	60,537	11,758	5,918	0,083	2,496	60,519	11,710
100	3,999	0,056	1,764	43,924	8,190	4,003	0,056	1,763	43,919	8,169

A Figura 3.2 mostra a função densidade dos estimadores ML$_q$V e MV, indicados pelas linhas tracejada e cheia, respectivamente, para $n = 10$. Os valores verdadeiros e de substituição dos parâmetros são indicados, respectivamente, pelos círculos e pelos símbolos x, no eixo horizontal. Graficamente não é possível notar diferenças acentuadas entre os estimadores de α, β e σ_x^2. Em relação a σ_e^2, o comportamento do EML$_q$V e do EMV é um pouco diferenciado e conseguimos notar que o EML$_q$V é mais viesado que o EMV, refletindo o mesmo comportamento da Tabela 3.10. É possível observar também que os parâmetros de substituição de α e β são quase coincidentes com os valores verdadeiros destes parâmetros, diferentemente de σ_x^2 e σ_e^2.

As Tabelas 3.15 e 3.16 dizem respeito, respectivamente, à amplitude e probabilidade de cobertura dos IC's para α e β obtidos pelos métodos de MV e de ML$_q$V. Para $n = 10$, notamos que as amplitudes foram maiores quando estimadas pelo método de

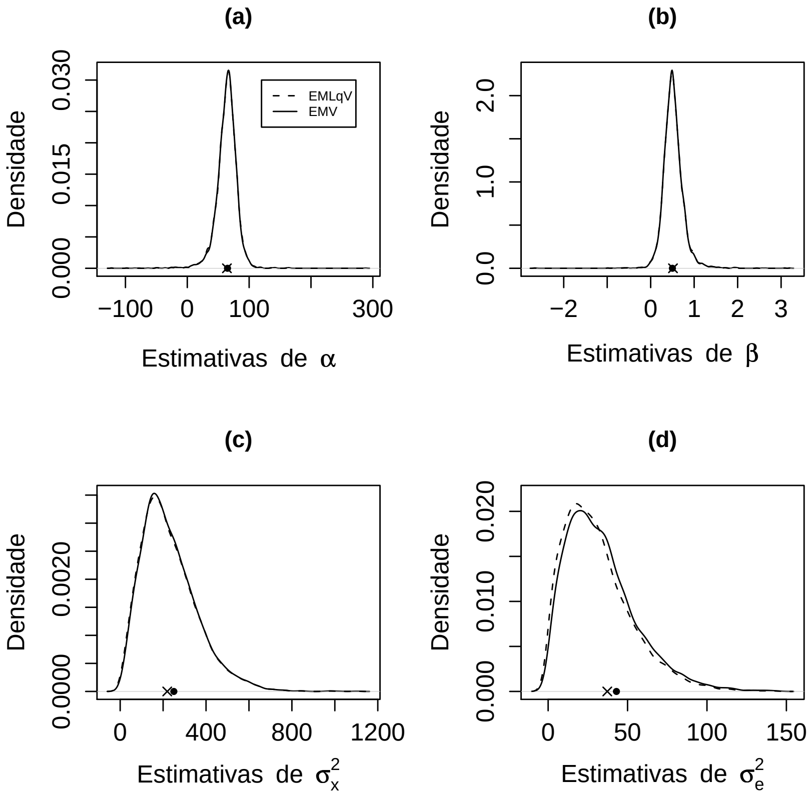

Figura 3.2: Estimativa da função densidade dos estimadores MV e ML$_q$V de α, β, σ_x^2 e σ_e^2 em (a), (b), (c) e (d), respectivamente, para $n = 10$ e $\sigma_u^2 = 57$ conhecido, em que o círculo e o símbolo x denotam $\boldsymbol{\theta}_0$ e $\boldsymbol{\theta}^*$, respectivamente.

Tabela 3.15: Amplitude dos IC's para α e β baseados em $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q_{1esp}}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{1_{esp}}$ para diferentes tamanhos de amostra, com coeficiente de confiança nominal de 95% e $\sigma_u^2 = 57$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V		EMV	
amostra	α	β	α	β
10	64,221	0,906	68,052	0,960
50	21,711	0,304	22,180	0,311
100	15,278	0,214	15,441	0,217

MV, o que está de acordo com os resultados da Tabela 3.13. O método de MV obteve coberturas para os IC's de α e β mais próximas do coeficiente de confiança nominal de 95% em comparação ao método de ML$_q$V, para $n = 10$.

Tabela 3.16: Probabilidade de cobertura dos IC's para α e β baseados em $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{q1esp}$ e $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{1esp}$ para diferentes tamanhos de amostra, com coeficiente de confiança nominal de 95% e $\sigma_u^2 = 57$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V		EMV	
amostra	α	β	α	β
10	0,914	0,914	0,937	0,938
50	0,942	0,942	0,946	0,947
100	0,948	0,946	0,950	0,949

3.2 Caso de identificabilidade σ_e^2 conhecido

Nesta seção assumimos $\sigma_e^2 = 1$ e $\boldsymbol{\theta}_0 = (\alpha_0, \beta_0, \mu_{x0}, \sigma^2_{x0}, \sigma^2_{u0})^t = (17; 1,1; 1,2;\ 4; 7)^t$ como o verdadeiro valor do vetor de parâmetros. Durante o processo de simulação, considerando os tamanhos de amostra $n = 10$, $n = 50$ e $n = 100$, para a totalização das 5000 amostras, descartamos 226, 178 e 144 amostras no processo iterativo, respectivamente, devido à falta de convergência do algoritmo. Para $n = 10$ também foi necessário descartar 292 amostras que originaram erros durante a inversão das matrizes dadas em (2.21) e (2.8) e, para os outros valores de n, não foi necessário nenhum descarte.

Tabela 3.17: Norma euclidiana simulada de $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0$ para os estimadores ML$_q$V e MV para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_e^2 = 1$ conhecido.

Tamanho de amostra	EML$_q$V	EMV
10	5,483	5,492
50	2,287	2,294
100	1,620	1,622

Na Tabela 3.17 são mostradas a norma euclidiana de $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0$ para vários tamanhos de amostra. Vemos que neste caso de identificabilidade, as normas obtidas por ambos os métodos de estimação estão próximas e a norma obtida por ML$_q$V permanece ligeiramente menor para todos os tamanhos de amostra. A razão entre as normas obtidas por ML$_q$V e MV é 0,998 para $n = 10$ e $0,999$ para $n = 100$, exprimindo a maior influência de q no EML$_q$V para $n = 10$, conforme esperado.

Na Tabela 3.18, é mostrado o viés simulado dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$. A Tabela 3.19, a ser analisada em conjunto com a Tabela 3.18, resume os valores de $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}^*$ e os vieses simulados dos estimadores MV e ML$_q$V para $n = 10$. Esta tabela foi incluída visando uma maior facilidade de interpretação dos dados para tamanhos de amostra pequenos. Os valores de $\boldsymbol{\theta}^*$ são obtidos substituindo os valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ em (2.45) e, em seguida, estes valores e o valor de q em (2.49).

Quanto ao comportamento esperado da diminuição dos valores simulados dos vieses com o aumento do tamanho das amostras, em relação a μ_x, ocorreu um aumento não expressivo dos vieses dos estimadores ML$_q$V e MV de $n = 50$ para $n = 100$, relacionado à variância amostral, mostrado na Tabela 3.18.

Na Subseção 2.6.2, foi mostrado que apenas o EML$_q$V do parâmetro μ_x não sofre influência do parâmetro de distorção quanto à média da distribuição assintótica. Este fato é confirmado empiricamente observando a Tabela 3.19, pois a diferença entre os vieses simulados obtidos por MV e ML$_q$V é mínima em relação a μ_x. Esta diferença também é pequena em relação a α e β, para $n = 10$, o que é explicado pela semelhança entre os valores de α^* e α_0, e entre os valores de β^* e β_0. Já em relação às variâncias σ_x^2 e σ_e^2, as diferenças entre os vieses são mais evidentes, confirmando a influência de q no EML$_q$V destes parâmetros, cuja sustentação teórica reside na diferença mais acentuada entre os valores verdadeiros e de substituição de σ_x^2 e σ_e^2.

Em valor absoluto, o viés obtido por ML$_q$V é ligeiramente menor que aquele obtido por MV em relação a α, β e σ_x^2, e ligeiramente maior em relação a σ_u^2. A justificativa para o viés de $\hat{\sigma}_{x,q}^2$ ser menor que do EMV é devida à assimetria da distribuição do EML$_q$V e a justificativa dada em relação a α e β é a proximidade entre os valores verdadeiros e de substituição. Estas justificativas também explicam a falta de correspondência entre os sinais dos vieses simulados e assintóticos de $\hat{\sigma}_{x,q}^2$, $\hat{\alpha}_q$ e $\hat{\beta}_q$, notando que em relação a $\hat{\sigma}_{u,q}^2$, a citada correspondência é verificada

As Tabelas 3.20 e 3.21 nos informam sobre o desvio padrão amostral e o erro padrão dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$, respectivamente. Do exposto na Subseção 2.6.2, da comparação das matrizes de covariâncias assintóticas dos estimadores ML$_q$V e MV, devemos

Tabela 3.18: Viés simulado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_e^2 = 1$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2
10	0,162	-0,115	0,006	-0,449	2,198	0,177	-0,128	0,004	-0,678	1,702
50	0,057	-0,046	0,001	-0,082	0,492	0,062	-0,051	0,000	-0,143	0,352
100	0,027	-0,022	0,005	-0,018	0,243	0,030	-0,024	0,005	-0,048	0,169

Tabela 3.19: Valores de $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}^*$ e viés simulado dos estimadores MV e ML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$, para $n = 10$, com $\sigma_e^2 = 1$ conhecido.

Identificabilidade	Parâmetros				
$\sigma_e^2 = 1$	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2
$\boldsymbol{\theta}_0$	17	1,1	1,2	4	7
$\boldsymbol{\theta}^*$	17,030	1,075	1,2	3,685	6,215
Viés($\widehat{\boldsymbol{\theta}}$)	0,177	-0,128	0,004	-0,678	1,702
Viés($\widehat{\boldsymbol{\theta}}_q$)	0,162	-0,115	0,006	-0,449	2,198

ter a redução da variância assintótica de $\hat{\beta}_q$, $\hat{\sigma}_{x,q}^2$ e $\hat{\sigma}_{u,q}^2$ em relação aos estimadores de MV, com a escolha $q = 1 - 1/n$. Esta redução é observada na Tabela 3.21, como esperado. Analisando o DP, notamos também que os valores simulados para as variâncias σ_x^2 e σ_u^2 seguem o comportamento desejado e, em relação a β, o DP simulado do EML$_q$V é ligeiramente maior que do EMV, porém os valores são próximos para $n = 10$.

Em relação a α, pelo procedimento de substituir os valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ e de q nas expressões dos desvios padrão assintóticos de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\alpha}_q$, encontradas, respectivamente, em (2.26) e (2.40), obtemos os valores 1,169 e 1,145, para $n = 10$, respectivamente. Estes valores são próximos, o que também acarretou que os valores simulados dos erros padrão estimados e dos desvios padrão dos estimadores ML$_q$V e MV de α também o fossem, para $n = 10$, notando que o EP estimado de $\hat{\alpha}_q$ é menor que de $\hat{\alpha}$, conforme esperado.

Em relação a μ_x, o EP estimado de $\hat{\mu}_{x,q}$ é ligeiramente menor que de $\hat{\mu}_x$. Esta ocorrência se deve ao fato de as quantias obtidas pelo processo de substituição dos valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ e de q nas expressões dos desvios padrão assintóticos de $\hat{\mu}_x$ e $\hat{\mu}_{x,q}$ serem próximas, 1,049 e 1,058, respectivamente, para $n = 10$. O DP segue o comportamento previsto analiticamente.

Para $n = 100$, o DP e o EP dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$ coincidem, conforme esperado.

Tabela 3.20: DP dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_e^2 = 1$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2
10	3,005	1,657	1,063	3,826	2,917	2,912	1,608	1,056	4,055	3,101
50	0,714	0,444	0,471	1,800	1,503	0,715	0,444	0,471	1,827	1,530
100	0,395	0,193	0,333	1,311	1,079	0,396	0,193	0,333	1,320	1,088

Tabela 3.21: EP estimado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$ baseados em $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q2esp}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{2esp}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_e^2 = 1$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2
10	3,117	1,881	0,944	3,351	2,578	3,133	1,890	0,972	3,858	2,974
50	0,599	0,306	0,458	1,741	1,454	0,608	0,313	0,462	1,803	1,509
100	0,383	0,182	0,327	1,260	1,067	0,386	0,184	0,329	1,283	1,087

A Tabela 3.22 traz os resultados da raiz quadrada do EQM dos estimadores de ML$_q$V e de MV de $\boldsymbol{\theta}$. As diferenças entre os valores obtidos por ambos os métodos são mais expressivas para tamanhos de amostra pequenos. Para $n = 10$, as menores diferenças são observadas em relação a μ_x e a justificativa é que $\hat{\mu}_{x,q}$ não é influenciado por q quanto à média da distribuição assintótica, como comentado na análise da Tabela 3.18. A $\sqrt{\text{EQM}}$ de $\hat{\alpha}_q$, $\hat{\beta}_q$ e $\hat{\sigma}_{u,q}^2$ são maiores que as obtidas por MV para $n = 10$. Em relação a α e β, este fato se deve ao EQM ser dominado pelo DP e ainda, o DP do EML$_q$V destes parâmetros serem maiores que o DP do EMV. Em relação a σ_u^2, a $\sqrt{\text{EQM}}$ do EML$_q$V é maior que a do EMV em decorrência de o viés de $\hat{\sigma}_{u,q}^2$ ser também maior que o obtido por MV. A $\sqrt{\text{EQM}}$ de $\hat{\sigma}_{x,q}^2$ é menor que aquela obtida por MV. A diferença mais acentuada entre os valores obtidos pelos métodos de estimação para $n = 10$ se dá em relação a σ_x^2 pelo fato de que tanto o valor absoluto do viés quanto o DP de $\hat{\sigma}_{x,q}^2$ são menores que de $\hat{\sigma}_x^2$.

A Figura 3.3 mostra a estimativa da função densidade dos estimadores ML$_q$V e

Tabela 3.22: Raiz quadrada do EQM simulado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\sigma_e^2 = 1$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2
10	3,009	1,661	1,063	3,852	3,652	2,918	1,613	1,056	4,111	3,537
50	0,716	0,446	0,471	1,802	1,581	0,718	0,447	0,471	1,833	1,570
100	0,396	0,194	0,333	1,311	1,106	0,397	0,195	0,333	1,321	1,101

MV, indicados pelas linhas tracejada e cheia, respectivamente, para $n = 10$. Os valores verdadeiros e de substituição dos parâmetros são indicados, respectivamente, pelos círculos e pelos símbolos x no eixo horizontal. Graficamente não é possível notar diferenças expressivas entre os estimadores de α, β e σ_x^2. Somente em relação a σ_u^2, é possível notar que o EML$_q$V é mais viesado que o EMV, expressando o mesmo comportamento da Tabela 3.18. Pela Figura 3.3 (c), é possível visualizar ainda, uma assimetria positiva da distribuição do EML$_q$V de σ_x^2, que leva à diminuição do viés do EML$_q$V em comparação ao EMV e à inversão de sinal entre o viés simulado e assintótico do EML$_q$V, pelo fato de σ_x^{2*} estar à direita de σ_{x0}^2 e de a média das estimativas de ML$_q$V mais próxima do valor verdadeiro que do parâmetro de substituição.

Tabela 3.23: Amplitude dos IC's para α e β baseados em $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q2esp}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{2_{esp}}$ para diferentes tamanhos de amostra, com coeficiente de confiança nominal de 95% e $\sigma_e^2 = 1$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V		EMV	
amostra	α	β	α	β
10	12,217	7,374	12,283	7,410
50	2,347	1,201	2,384	1,226
100	1,501	0,714	1,513	0,722

A amplitude e probabilidade de cobertura dos IC's para α e β segundo os métodos de MV e ML$_q$V são mostradas nas Tabelas 3.23 e 3.24. Para $n = 10$, as amplitudes foram maiores quando obtidas pelo método de MV, em concordância com os resultados obtidos na Tabela 3.21. Para $n = 10$, as coberturas obtidas para os IC's de α e β pelo método ML$_q$V estão mais distantes do coeficiente de confiança nominal de 95% do que as obtidas

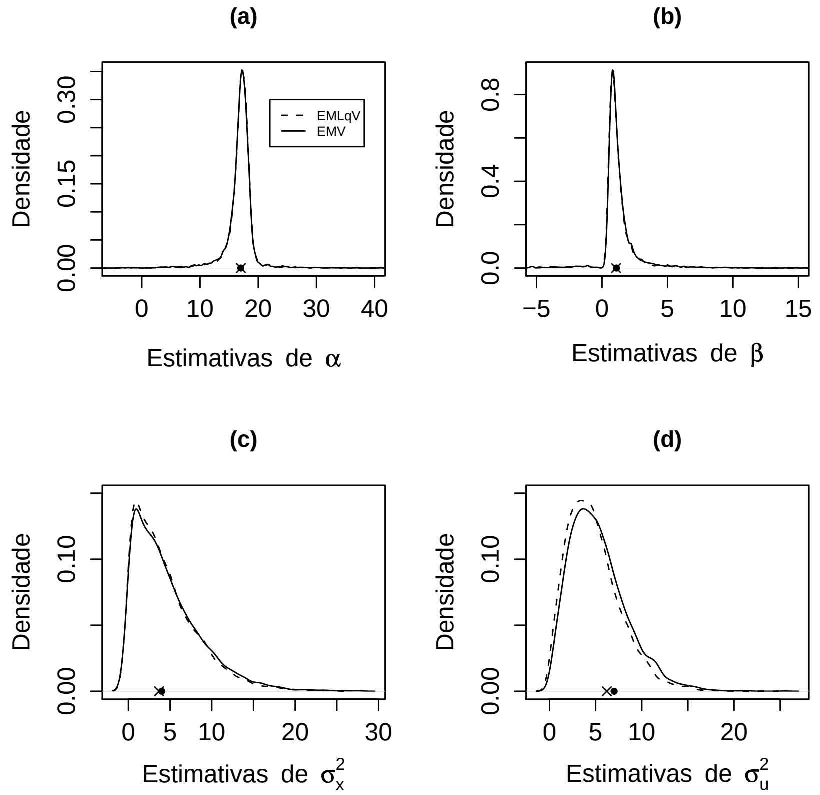

Figura 3.3: Estimativa da função densidade dos estimadores MV e ML$_q$V de α, β, σ_x^2 e σ_u^2 em (a), (b), (c) e (d), respectivamente, para $n = 10$ e $\sigma_e^2 = 1$ conhecido, em que o círculo e o símbolo x denotam $\boldsymbol{\theta}_0$ e $\boldsymbol{\theta}^*$, respectivamente.

Tabela 3.24: Probabilidade de cobertura dos IC's para α e β baseados em $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q2esp}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{2esp}$ para diferentes tamanhos de amostra, com coeficiente de confiança nominal de 95% e $\sigma_e^2 = 1$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V		EMV	
amostra	α	β	α	β
10	0,890	0,819	0,905	0,852
50	0,937	0,910	0,940	0,917
100	0,943	0,930	0,944	0,933

pelo método de MV, principalmente em relação ao IC de β.

3.3 Caso de identificabilidade λ conhecido

Nesta situação de identificabilidade, tomamos $\lambda = \sigma^2_{e0}/\sigma^2_{u0} = 1,2$ e $\boldsymbol{\theta}_0 = (\alpha_0, \beta_0, \mu_{x0}, \sigma^2_{x0}, \sigma^2_{u0})^t = (11; 1,1; 2,2; 20; 7)^t$ como o verdadeiro valor do vetor de parâmetros. Em decorrência da falta de convergência do algoritmo, descartamos 310, 182 e 158 amostras no processo iterativo considerando $n = 10$, $n = 50$ e $n = 100$, respectivamente, para a totalização das $B = 5000$ amostras. Para $n = 10$, também foi necessário descartar 4 amostras que ocasionaram problemas de inversão das matrizes (2.21) e (2.8) e, para outros tamanhos de amostra, não foi necessário realizar nenhum descarte.

A norma euclidiana de $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0$ para os estimadores de MV e de ML$_q$V é dada na Tabela 3.25. Para todos os tamanhos de amostra, esta medida de desempenho global é menor quando obtida pelo método de estimação de ML$_q$V e, quando $n = 10$, a diferença entre os valores obtidos por ambos os métodos é mais expressiva, já que a razão entre as normas obtidas por ML$_q$V e MV é 0,980 para $n = 10$ e 0,998 para $n = 100$, indicando a maior influência do parâmetro de distorção q considerando o tamanho de amostra $n = 10$, conforme esperado.

Tabela 3.25: Norma euclidiana simulada de $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0$ para os estimadores ML$_q$V e MV para diferentes tamanhos de amostra, com $\lambda = 1,2$ conhecido.

Tamanho de amostra	EML$_q$V	EMV
10	10,090	10,296
50	4,681	4,712
100	3,406	3,412

Tabela 3.26: Viés simulado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\lambda = 1,2$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ^2_x	σ^2_u	α	β	μ_x	σ^2_x	σ^2_u
10	0,215	-0,087	0,010	2,579	1,956	0,211	-0,083	0,007	1,225	1,550
50	0,032	-0,012	0,002	0,551	0,430	0,032	-0,012	0,002	0,184	0,305
100	0,015	-0,006	0,012	0,357	0,212	0,015	-0,006	0,012	0,171	0,145

Tabela 3.27: Valores de $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}^*$ e viés simulado dos estimadores MV e ML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$, para $n = 10$, com $\lambda = 1,2$ conhecido.

Identificabilidade	Parâmetros				
$\lambda = 1,2$	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2
$\boldsymbol{\theta}_0$	11	1,1	2,2	20	7
$\boldsymbol{\theta}^*$	11	1,1	2,2	18	6,300
Viés($\widehat{\boldsymbol{\theta}}$)	0,211	-0,083	0,007	1,225	1,550
Viés($\widehat{\boldsymbol{\theta}}_q$)	0,215	-0,087	0,010	2,579	1,956

A Tabela 3.26 revela o viés simulado dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$. Conjuntamente, será também analisada a Tabela 3.27, que sintetiza $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}^*$ e os vieses simulados dos estimadores MV e ML$_q$V para $n = 10$. Os valores de $\boldsymbol{\theta}^*$ são obtidos substituindo os valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ em (2.45) e, em seguida, estes valores e o valor de q em (2.51).

O comportamento esperado dos estimadores, de que conforme aumentamos n, os valores dos vieses obtidos por ML$_q$V e MV diminuem, não é observado em relação ao parâmetro μ_x, de $n = 50$ para $n = 100$. No entanto, este aumento não é expressivo, pois os valores são próximos de zero. A justificativa deste fato se deve à variação amostral. Na Subseção 2.6.3, foi mostrado que os estimadores ML$_q$V de α, β e μ_x não sofrem influência do parâmetro de distorção q quanto à média da distribuição assintótica e esta afirmação foi comprovada empiricamente, já que as diferenças entre os vieses obtidos por MV e ML$_q$V em relação a estes parâmetros são pequenas. Em relação a σ_x^2 e σ_u^2, para $n = 10$, estas diferenças são maiores, justificadas pelas diferenças consideráveis entre os parâmetros de substituição e os valores verdadeiros dados na Tabela 3.27. Assim, notamos a forte atuação de q no EML$_q$V de σ_x^2 e σ_u^2, o que provocou o aumento do viés do EML$_q$V em relação ao EMV, conforme esperado.

A análise do sinal do viés simulado do EML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$ nos mostra que em relação aos parâmetros α, β e μ_x, este sinal acompanha o viés simulado do EMV e, quanto às variâncias, esta relação é presente e ainda há conformidade como o sinal do viés assintótico do EML$_q$V.

As Tabelas 3.28 e 3.29 nos mostram os desvios padrão amostrais e os erros padrão estimados, respectivamente, dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$. Do estudo da comparação das matrizes de covariâncias assintóticas, realizada na Subseção 2.6.3, foi mostrado que as variâncias assintóticas de $\hat{\beta}_q$, $\hat{\sigma}^2_{x,q}$ e $\hat{\sigma}^2_{u,q}$ são menores que as variâncias assintóticas dos respectivos estimadores de MV, devido à escolha do parâmetro de distorção $q = 1 - 1/n$. Este fato é comprovado empiricamente observando a Tabela 3.29. A análise do DP simulado do EML$_q$V de σ^2_x e σ^2_u é a mesma do EP estimado. Em relação a β, apesar do ligeiro aumento do DP do EML$_q$V sobre o DP do EMV, os valores estão próximos.

Tabela 3.28: DP dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\lambda = 1,2$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ^2_x	σ^2_u	α	β	μ_x	σ^2_x	σ^2_u
10	2,662	0,839	1,661	10,522	2,543	2,619	0,809	1,651	11,347	2,729
50	0,682	0,149	0,739	5,189	1,348	0,682	0,149	0,739	5,286	1,373
100	0,475	0,105	0,523	3,814	0,965	0,475	0,104	0,523	3,847	0,974

Tabela 3.29: EP estimado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$ baseados em $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q3esp}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{3_{esp}}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\lambda = 1,2$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ^2_x	σ^2_u	α	β	μ_x	σ^2_x	σ^2_u
10	1,784	0,481	1,470	9,121	2,055	1,878	0,521	1,514	10,798	2,437
50	0,655	0,142	0,718	5,100	1,288	0,662	0,145	0,725	5,299	1,339
100	0,465	0,100	0,513	3,700	0,951	0,468	0,102	0,515	3,773	0,969

O DP simulado de $\hat{\mu}_{x,q}$ aumentou e o EP estimado diminuiu se comparado ao EMV. O comportamento do EP dos estimadores de μ_x é justificado pelos valores semelhantes, 1,643 e 1,657 obtidos a partir da substituição dos valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ e q nas expressões dos desvios padrão assintóticos de $\hat{\mu}_x$ e $\hat{\mu}_{x,q}$, encontradas em (2.28) e (2.41), respectivamente, para $n = 10$. Em relação a α, para $n = 10$, realizando as citadas substituições nas expressões dos desvios padrão assintóticos de $\hat{\alpha}_q$ e $\hat{\alpha}$, obtemos os respectivos valores 1,458 e 1,476. Dessa maneira, comparando os resultados empíricos para o EP dos estimadores de α com os valores encontrados analiticamente, vemos que os resultados das simulações são esperados.

O DP e o EP dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$ coincidem para $n = 100$, como esperado.

Tabela 3.30: Raiz quadrada do EQM simulado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\lambda = 1,2$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2
10	2,670	0,843	1,661	10,833	3,209	2,627	0,813	1,651	11,413	3,139
50	0,683	0,150	0,739	5,218	1,415	0,683	0,150	0,739	5,289	1,407
100	0,475	0,105	0,523	3,831	0,988	0,475	0,105	0,523	3,851	0,985

A raiz quadrada do EQM dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$ é dada na Tabela 3.30. Para $n = 10$, os valores da $\sqrt{\text{EQM}}$ de $\hat{\alpha}_q$, $\hat{\beta}_q$ e $\hat{\mu}_{x,q}$ são semelhantes aos valores obtidos por MV pois os vieses dos estimadores ML$_q$V e MV destes parâmetros são próximos. Dessa maneira, o pequeno aumento verificado no EQM do EML$_q$V destes parâmetros em relação ao EQM do EMV é explicado pelo DP amostral. A $\sqrt{\text{EQM}}$ de $\hat{\sigma}^2_{x,q}$ é menor que a obtida por MV devido ao DP do EML$_q$V ser menor que o DP do EMV e a $\sqrt{\text{EQM}}$ de $\hat{\sigma}^2_{u,q}$ é maior que a obtida por MV pois o viés de $\hat{\sigma}^2_{u,q}$ é maior que o obtido por MV.

Tabela 3.31: Amplitude dos IC's para α e β baseados em $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q3esp}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{3_{esp}}$ para diferentes tamanhos de amostra, com coeficiente de confiança nominal de 95% e $\lambda = 1,2$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V		EMV	
amostra	α	β	α	β
10	6,994	1,887	7,361	2,040
50	2,566	0,558	2,596	0,569
100	1,822	0,394	1,833	0,398

A Figura 3.4 mostra a estimativa da função densidade dos estimadores ML$_q$V e MV, indicados pelas linhas tracejada e cheia, respectivamente, para $n = 10$. Os valores verdadeiros e de substituição dos parâmetros são indicados pelos círculos e pelos símbolos x no eixo horizontal, respectivamente. Graficamente não é possível notar diferenças expressivas entre os estimadores de α e β. Quanto às variâncias σ_x^2 e σ_u^2, o comportamento dos estimadores ML$_q$V e MV diferem e, em relação ao viés, notamos que os estimadores ML$_q$V das variâncias são mais viesados que os estimadores de MV, revelando o mesmo comportamento da Tabela 3.26.

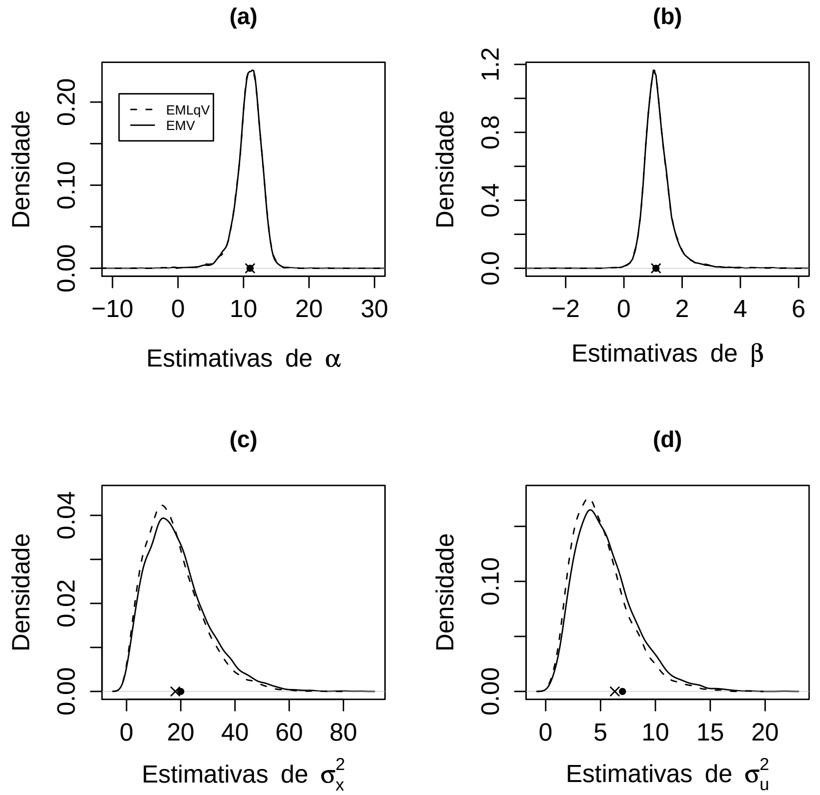

Figura 3.4: Estimativa da função densidade dos estimadores MV e ML$_q$V de α, β, σ_x^2 e σ_u^2 em (a), (b), (c) e (d), respectivamente, para $n = 10$ e $\lambda = 1,2$ conhecido, em que o círculo e o símbolo x denotam $\boldsymbol{\theta}_0$ e $\boldsymbol{\theta}^*$, respectivamente.

Tabela 3.32: Probabilidade de cobertura dos IC's para α e β baseados em $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q3_{esp}}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{3_{esp}}$ para diferentes tamanhos de amostra, com coeficiente de confiança nominal de 95% e $\lambda = 1,2$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V		EMV	
amostra	α	β	α	β
10	0,868	0,850	0,886	0,879
50	0,940	0,936	0,941	0,940
100	0,942	0,940	0,944	0,943

As Tabelas 3.31 e 3.32 mostram a amplitude e a probabilidade de cobertura dos IC's para α e β, respectivamente, segundo os métodos de MV e ML$_q$V. Quando $n = 10$, as amplitudes dos IC's para α e β obtidas por ML$_q$V são menores que as obtidas por MV. O fato de a amplitude obtida por ML$_q$V ser menor que a obtida por MV é esperado, já que os erros padrão estimados de $\hat{\alpha}_q$ e $\hat{\beta}_q$ são menores que os erros padrão dos estimadores de MV. Para $n = 10$, as coberturas obtidas por ML$_q$V para os IC's de α e β são mais distantes do coeficiente de confiança nominal de 95% do que as obtidas por MV, no entanto, os valores destas coberturas são próximas.

3.4 Caso de identificabilidade k_x conhecido

Neste caso de identificabilidade, tomamos $k_x = \sigma_x^2/(\sigma_x^2+\sigma_u^2) = 0,75$ e os seguintes valores verdadeiros para os parâmetros, $\boldsymbol{\theta}_0 = (\alpha_0, \beta_0, \mu_{x0}, \sigma_{x0}^2, \sigma_{e0}^2)^t = (17; 3,1; 2,2; 21; 9)^t$. Para a totalização da $B = 5000$ amostras, considerando os tamanhos de amostra $n = 10$, $n = 50$ e $n = 100$, respectivamente, descartamos 269, 175 e 161 amostras no processo iterativo devido à falta de convergência do algoritmo. Foi preciso também realizar o descarte de 5251, 2644 e 1751 amostras que não obtiveram sucesso na inversão das matrizes $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ e $\boldsymbol{J}$, dadas em (2.21) e (2.8), respectivamente, para $n = 10$, $n = 50$ e $n = 100$.

A norma euclidiana de $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0$ para os estimadores ML$_q$V e MV é dada na Tabela 3.33. A razão entre estas medidas obtidas por ML$_q$V e MV é 0,941 para $n = 10$ e 0,997 para $n = 100$. Dessa maneira, para tamanhos de amostra pequenos, a influência de q no método ML$_q$V é mais acentuada, conforme esperado. Notamos também que os valores da norma calculados por ML$_q$V são menores que os calculados por MV para todos os valores de n.

Tabela 3.33: Norma euclidiana simulada de $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0$ para os estimadores ML$_q$V e MV para diferentes tamanhos de amostra, com $k_x = 0,75$ conhecido.

Tamanho de amostra	EML$_q$V	EMV
10	22,979	24,410
50	11,381	11,554
100	8,462	8,487

A Tabela 3.34 indica os vieses simulados dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$ para diferentes valores de n. A Tabela 3.35 compreende os valores de $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}^*$ e os vieses simulados dos estimadores MV e ML$_q$V para $n = 10$. Estas duas tabelas são analisadas simultaneamente para a melhor compreensão dos dados. Os valores de $\boldsymbol{\theta}^*$ são obtidos substituindo os valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ em (2.45) e, em seguida, estes valores e o valor de q em (2.53).

Na Tabela 3.34, de $n = 50$ para $n = 100$, observamos um ligeiro aumento do valor absoluto dos vieses dos estimadores $\hat{\mu}_x$ e $\hat{\mu}_{x,q}$ em decorrência da variância amostral. Este aumento não é expressivo pois estes valores são próximos de zero. Os estimadores ML$_q$V e MV de α, β e μ_x possuem vieses semelhantes para todos os valores de n, inclusive para $n = 10$, indicando a não influência de q no EML$_q$V, conforme esperado dos resultados analíticos da Subseção 2.6.4. Já os estimadores ML$_q$V e MV de σ_x^2 e σ_e^2 diferem quanto aos vieses para $n = 10$, como observado na Tabela 3.35, e a sustentação teórica para este fato é devida à diferença mais expressiva entre os valores verdadeiros e de substituição.

Em valor absoluto, o viés de $\hat{\sigma}^2_{x,q}$ é maior que do EMV, como esperado. Em relação a σ_e^2, o viés do EML$_q$V é menor que do EMV, o que é devido à assimetria positiva da distribuição do EML$_q$V, observada na Figura 3.5 (d). No estudo do sinal do viés simulado do EML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$, temos que este segue o sinal do viés simulado do EMV, como esperado. Em relação às variâncias, além desta análise, verificamos também o viés assintótico do EML$_q$V. Quanto a $\hat{\sigma}^2_{x,q}$, existe correspondência entre o sinal do viés simulado e assintótico, já em relação a $\hat{\sigma}^2_{e,q}$, a falta de correspondência é devida à assimetria da distribuição deste estimador.

Tabela 3.34: Viés simulado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $k_x = 0,75$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
10	-0,622	0,281	-0,021	7,047	-17,564	-0,615	0,279	-0,020	5,960	-19,600
50	-0,175	0,077	0,007	2,041	-7,491	-0,174	0,077	0,007	1,677	-7,766
100	-0,097	0,041	0,008	1,216	-4,562	-0,095	0,040	0,008	1,018	-4,634

Os desvios padrão amostrais e os erros padrão dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$ são dados nas Tabelas 3.36 e 3.37, respectivamente. Foi mostrado na Subseção 2.6.4 que as variâncias assintóticas de $\hat{\beta}_q$, $\hat{\sigma}^2_{x,q}$ e $\hat{\sigma}^2_{e,q}$ são menores que que as respectivas variâncias dos estimadores de MV. Empiricamente é possível visualizar este comportamento na Tabela 3.37. Ana-

Tabela 3.35: Valores de $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}^*$ e viés simulado dos estimadores MV e ML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$, para $n = 10$, com $k_x = 0,75$ conhecido.

Identificabilidade	Parâmetros				
$k_x = 0,75$	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
$\boldsymbol{\theta}_0$	17	3,1	2,2	21	9
$\boldsymbol{\theta}^*$	17	3,1	2,2	18,900	8,100
Viés($\widehat{\boldsymbol{\theta}}$)	-0,615	0,279	-0,020	5,960	-19,600
Viés($\widehat{\boldsymbol{\theta}}_q$)	-0,622	0,281	-0,021	7,047	-17,564

lisando o DP, notamos que os estimadores de σ_x^2 e σ_e^2 seguem o mesmo comportamento verificado na análise do EP estimado, somente em relação a β, o DP simulado do respectivo EML$_q$V é ligeiramente maior que do EMV para $n = 10$, porém estes valores são próximos.

O EP estimado de $\hat{\mu}_{x,q}$ é ligeiramente menor que o obtido por MV, para $n = 10$, em contradição com os resultados da Subseção 2.6.4. A justificativa é devida às quantias próximas, 1,673 e 1,687, obtidas a partir da substituição dos valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ e q nas expressões dos desvios padrão assintóticos de $\hat{\mu}_x$ e $\hat{\mu}_{x,q}$, dadas, respectivamente, em (2.30) e (2.42), para $n = 10$. O DP simulado dos estimadores de μ_x segue o comportamento previsto pelos resultados analíticos.

As quantias obtidas com as referidas substituições nas expressões dos desvios padrão assintóticos de $\hat{\alpha}_q$ e $\hat{\alpha}$ são 3,045 e 3,075, respectivamente, para $n = 10$. Dessa maneira, os resultados das simulações obtidos são esperados pois o EP estimado de $\hat{\alpha}_q$ é menor que de $\hat{\alpha}$. A semelhança dos valores obtidos com as substituições ocasionou a também semelhança dos valores do DP simulado dos estimadores de α.

Observamos que o DP e o EP dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$ coincidem para $n = 100$, exceto em relação a σ_e^2, indicando neste caso, que o tamanho da amostra não é suficiente para a aproximação à matriz de covariâncias assintótica.

A raiz quadrada do EQM dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$ é dada na Tabela 3.38. Para $n = 10$, as maiores diferenças entre valores obtidos por ML$_q$V e MV são notadas em relação a σ_x^2 e σ_e^2, pelo fato de o estimador ML$_q$V destes parâmetros ser influenciado por q tanto quanto à média da distribuição assintótica quanto na variância assintótica.

Tabela 3.36: DP dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $k_x = 0,75$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
10	3,376	0,751	1,659	6,186	20,810	3,349	0,747	1,652	6,617	22,219
50	1,359	0,267	0,745	3,492	11,466	1,358	0,266	0,745	3,556	11,652
100	0,963	0,190	0,534	2,573	8,960	0,963	0,190	0,534	2,597	8,998

Tabela 3.37: EP estimado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$ baseados em $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q4esp}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{4esp}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $k_x = 0,75$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
10	3,130	0,691	1,342	5,684	28,828	3,292	0,758	1,382	6,726	34,116
50	1,383	0,287	0,708	3,718	16,709	1,399	0,292	0,715	3,865	17,363
100	0,976	0,200	0,513	2,770	12,218	0,982	0,202	0,515	2,826	12,458

A $\sqrt{\text{EQM}}$ de $\hat{\sigma}_{e,q}^2$ é menor que do EMV pois tanto o viés quanto o DP do EML$_q$V são menores que do EMV. Quanto a σ_x^2, o acréscimo de EQM do EML$_q$V se deve pelo viés de $\hat{\sigma}_{x,q}^2$ ser maior que do EMV. Em relação a α, β e μ_x, o exíguo aumento da $\sqrt{\text{EQM}}$ do EML$_q$V sobre o EMV se deve aos desvios padrão amostrais de $\hat{\alpha}_q$, $\hat{\beta}_q$ e $\hat{\mu}_{x,q}$ serem maiores que do EMV, para $n = 10$.

Tabela 3.38: Raiz quadrada do EQM simulado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $k_x = 0,75$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2	α	β	μ_x	σ_x^2	σ_e^2
10	3,433	0,802	1,659	9,377	27,231	3,405	0,797	1,652	8,906	29,629
50	1,370	0,277	0,745	4,045	13,696	1,369	0,277	0,745	3,932	14,003
100	0,968	0,194	0,534	2,846	10,054	0,968	0,194	0,534	2,789	10,121

A Figura 3.5 mostra a estimativa da função densidade dos estimadores ML$_q$V e MV, indicados pelas linhas tracejada e cheia, respectivamente, para α, β, σ_x^2 e σ_e^2 em (a), (b), (c) e (d), respectivamente, considerando $n = 10$. Os valores verdadeiros dos parâmetros são indicados pelos círculos no eixo horizontal. Os parâmetros de substituição são representados pelos símbolos x no respectivo eixo. Graficamente não é possível notar diferenças expressivas entre os estimadores de α e β. Quanto a σ_x^2 e σ_e^2, o comportamento dos estimadores ML$_q$V e MV diferem e é possível observar que o EML$_q$V de σ_x^2 é mais viesado e o EML$_q$V de σ_e^2 é menos viesado que os estimadores de MV, refletindo o mesmo comportamento da Tabela 3.34. Quanto ao estimador $\hat{\sigma}^2_{e,q}$, é necessário atentar para o fato de que a distribuição do estimador é assimétrica positivamente e o parâmetro de substituição está à esquerda de $\sigma^2_{e_0}$, desse modo, a média das estimativas do EML$_q$V está mais próxima do valor verdadeiro do parâmetro que de seu parâmetro de substituição, ocasionando menor viés do EML$_q$V em relação ao EMV e inversão de sinal entre o viés simulado e assintótico de $\hat{\sigma}^2_{e,q}$.

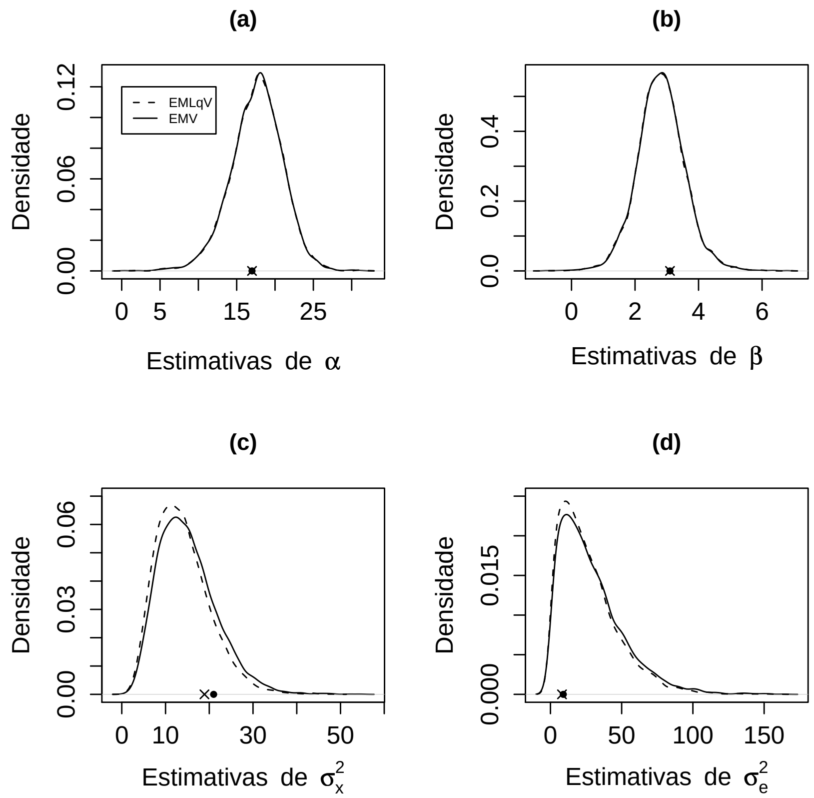

Figura 3.5: Estimativa da função densidade dos estimadores MV e ML$_q$V de α, β, σ_x^2 e σ_e^2 em (a), (b), (c) e (d), respectivamente, para $n = 10$ e $k_x = 0,75$ conhecido, em que o círculo e o símbolo x denotam $\boldsymbol{\theta}_0$ e $\boldsymbol{\theta}^*$, respectivamente.

As Tabelas 3.39 e 3.40 mostram a amplitude e a probabilidade de cobertura dos IC's para α e β, respectivamente, segundo os métodos de MV e ML$_q$V. Quando $n = 10$, as amplitudes dos IC's para α e β obtidas por ML$_q$V são menores que as obtidas por MV, o que é esperado, já que os EP de $\hat{\alpha}_q$ e $\hat{\beta}_q$ são menores que de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$. As coberturas obtidas

Tabela 3.39: Amplitude dos IC's para α e β baseados em $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{q4_{esp}}$ e $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{4_{esp}}$ para diferentes tamanhos de amostra, com coeficiente de confiança nominal de 95% e $k_x = 0,75$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V		EMV	
amostra	α	β	α	β
10	12,269	2,707	12,906	2,970
50	5,423	1,124	5,485	1,146
100	3,826	0,783	3,848	0,790

Tabela 3.40: Probabilidade de cobertura dos IC's para α e β baseados em $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{q4_{esp}}$ e $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{4_{esp}}$ para diferentes tamanhos de amostra, com coeficiente de confiança nominal de 95% e $k_x = 0,75$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V		EMV	
amostra	α	β	α	β
10	0,915	0,884	0,927	0,912
50	0,947	0,949	0,949	0,952
100	0,948	0,954	0,949	0,956

por MV para os IC's de α e β, para $n = 10$, são mais próximas do coeficiente de confiança nominal de 95% do que as coberturas obtidas por ML$_q$V, principalmente em relação a β.

3.5 Caso de identificabilidade α conhecido

Nesta situação de identificabilidade, consideramos $\alpha = 40$ e $\boldsymbol{\theta}_0 = (\beta_0, \mu_{x_0}, \sigma^2_{x_0}, \sigma^2_{u_0}, \sigma^2_{e_0})^t = (1,1; 1,2; 3; 5; 2)^t$ como o verdadeiro valor do vetor de parâmetros do modelo. Durante o processo de simulação, descartamos 330, 171 e 159 amostras no processo iterativo devido à falta de convergência do algoritmo, considerando os tamanhos de amostra $n = 10$, $n = 50$ e $n = 100$, respectivamente, para a totalização das $B = 5000$ amostras. Descartamos também 5098, 950 e 386 amostras que ocasionaram erros na inversão da matriz de informação observada, dada em (2.21) e na matriz $\boldsymbol{J}$, dada em (2.8).

A Tabela 3.41 nos informa sobre a norma euclidiana de $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0$ para tamanhos de amostra variados. Para n pequeno observamos que os valores obtidos pelos métodos de estimação diferem em maior valor que para n grande, já que a razão entre a norma do EML$_q$V e do EMV é de 0,976 para $n = 10$ e de 0,995 para $n = 100$. Este fato reflete a maior influência de q no EML$_q$V quando $n = 10$, conforme esperado.

Tabela 3.41: Norma euclidiana simulada de $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0$ para os estimadores ML$_q$V e MV para diferentes tamanhos de amostra, com $\alpha = 40$ conhecido.

Tamanho de amostra	EML$_q$V	EMV
10	3,794	3,889
50	2,142	2,162
100	1,575	1,582

Tabela 3.42: Viés simulado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\alpha = 40$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	σ_e^2	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	σ_e^2
10	0,034	-0,319	-0,424	1,392	-0,356	0,038	-0,318	-0,234	1,106	-0,532
50	0,028	-0,079	-0,112	0,528	-0,150	0,028	-0,079	-0,170	0,443	-0,190
100	0,001	-0,026	-0,021	0,240	-0,031	0,001	-0,026	-0,050	0,194	-0,051

Tabela 3.43: Valores de $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}^*$ e viés simulado dos estimadores MV e ML$_q$V de $\boldsymbol{\theta}$, para $n = 10$, com $\alpha = 40$ conhecido.

Identificabilidade	Parâmetros				
$\alpha = 40$	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	σ_e^2
$\boldsymbol{\theta}_0$	1,1	1,2	3	5	2
$\boldsymbol{\theta}^*$	1,1	1,2	2,700	4,500	1,800
Viés$(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$	0,038	-0,318	-0,234	1,106	-0,532
Viés$(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_q)$	0,034	-0,319	-0,424	1,392	-0,356

O viés simulado para variados tamanhos de amostra dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$ é dado na Tabela 3.42. Na Tabela 3.43, são indicados os valores de $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}^*$ e os vieses simulados dos estimadores MV e ML$_q$V para $n = 10$. Para facilitar o estudo do viés para tamanhos de amostra pequenos, estas tabelas são analisadas em conjunto.

Em concordância com os resultados obtidos na Subseção 2.6.5, os vieses dos estimadores de MV e de ML$_q$V de β e μ_x são semelhantes para quaisquer tamanhos de amostras, como observado na Tabela 3.42. Dessa maneira, somente os estimadores ML$_q$V das variâncias são influenciados por q quanto à média da distribuição assintótica, o que acarreta uma maior diferença entre os vieses obtidos por MV e ML$_q$V para as variâncias, considerando $n = 10$. Consultando a Tabela 3.43, em valor absoluto, os vieses de $\hat{\sigma}^2_{x,q}$ e de $\hat{\sigma}^2_{u,q}$ são maiores que os vieses dos EMV, como esperado, e em relação a σ^2_e, o viés do EML$_q$V é menor que do EMV, para $n = 10$. O comportamento notado em relação a σ^2_e não é discordante pois, apesar de σ^{2*}_e ser escrito em função de q, os valores verdadeiros e de substituição são próximos e ainda, a distribuição de $\hat{\sigma}^2_{e,q}$ é assimétrica positivamente.

Sobre o estudo do sinal dos vieses dos estimadores, notamos a identidade entre os vieses simulados dos estimadores ML$_q$V e MV, como esperado. Em relação às variâncias existe correspondência entre viés simulado e assintótico do estimador ML$_q$V de σ^2_u e quanto aos estimadores $\hat{\sigma}^2_{x,q}$ e $\hat{\sigma}^2_{e,q}$, a falta de correspondência é devida à assimetria das distribuições do EML$_q$V.

As Tabelas 3.44 e 3.45 indicam o desvio padrão e o erro padrão dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$, respectivamente. O estudo de comparação das matrizes de covariâncias assintóticas, realizado na Subseção 2.6.5, determinou o aumento da variância do EML$_q$V de β e μ_x com a escolha $q = 1 - 1/n$. Empiricamente, é possível notar este aumento em relação a β observando tanto o DP simulado como o EP estimado. Em relação a μ_x, o EP estimado do EML$_q$V é ligeiramente menor que do EMV devido às quantias próximas, 0,902 e 0,894, obtidas com a substituição dos valores verdadeiros de $\boldsymbol{\theta}$ e de q nas expressões dos desvios padrão assintóticos de $\hat{\mu}_{x,q}$ e $\hat{\mu}_x$, encontradas em (2.43) e (2.32), respectivamente, para $n = 10$. Analisando o DP simulado dos estimadores de μ_x, observamos o mesmo comportamento anunciado pelos resultados analíticos.

Os valores encontrados com as referidas substituições nas expressões dos desvios padrão assintóticos de $\hat{\sigma}^2_{x,q}$, $\hat{\sigma}^2_{u,q}$ e $\hat{\sigma}^2_{e,q}$ são 2,840; 3,274 e 3,207, respectivamente, para

$n = 10$. E em relação aos estimadores $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_u^2$ e $\hat{\sigma}_e^2$ obtivemos os respectivos valores 2,963; 3,461 e 3,320, para $n = 10$, com as citadas substituições. Notamos assim que os valores encontrados para o EML$_q$V são menores que os valores para o EMV e este comportamento é observado analisando tanto o EP estimado como o DP amostral dos estimadores.

Observamos também que para $n = 100$, o DP e o EP dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$ coincidem, conforme esperado.

Tabela 3.44: DP dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\alpha = 40$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	σ_e^2	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	σ_e^2
10	0,875	0,768	2,297	2,314	1,602	0,847	0,765	2,464	2,480	1,719
50	0,324	0,358	1,364	1,437	1,111	0,324	0,358	1,390	1,464	1,131
100	0,223	0,265	0,962	1,047	0,912	0,223	0,265	0,970	1,057	0,920

Tabela 3.45: EP estimado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$ baseados em $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{q5_{esp}}$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{5_{esp}}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\alpha = 40$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	σ_e^2	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	σ_e^2
10	1,230	0,771	2,674	3,029	2,531	1,137	0,794	3,109	3,529	2,924
50	0,360	0,388	1,395	1,572	1,449	0,363	0,391	1,441	1,626	1,497
100	0,250	0,278	0,954	1,099	1,064	0,251	0,280	0,971	1,119	1,082

A Tabela 3.46 nos traz a raiz quadrada do EQM dos estimadores de $\boldsymbol{\theta}$. Para $n = 10$, os valores para a raiz quadrada do EQM de $\hat{\beta}_q$ e $\hat{\mu}_{x,q}$ são semelhantes aos valores encontrados por MV, pois os estimadores ML$_q$V de β e μ_x não sofrem influência do parâmetro de distorção quanto à média da distribuição assintótica e o ligeiro acréscimo nos valores obtidos por ML$_q$V são justificados pelo acréscimo do DP de $\hat{\beta}_q$ e $\hat{\mu}_{x,q}$ em relação aos estimadores de MV. Para $n = 10$, a $\sqrt{\text{EQM}}$ de $\hat{\sigma}_{x,q}^2$ e de $\hat{\sigma}_{u,q}^2$ são menores que as obtidas por MV pois os desvios padrão amostrais dos estimadores de ML$_q$V destes parâmetros são menores que do EMV. Em relação a σ_e^2, para $n = 10$, a $\sqrt{\text{EQM}}$ do EML$_q$V é menor que do EMV pois tanto o valor absoluto do viés como o DP de $\hat{\sigma}_{e,q}^2$ são menores que de $\hat{\sigma}_e^2$.

A Figura 3.6 traz a função densidade dos estimadores ML$_q$V e MV para $n = 10$,

Tabela 3.46: Raiz quadrada do EQM simulado dos estimadores ML$_q$V e MV de $\boldsymbol{\theta}$, para diferentes tamanhos de amostra, com $\alpha = 40$ conhecido.

Tamanho de	EML$_q$V					EMV				
amostra	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	σ_e^2	β	μ_x	σ_x^2	σ_u^2	σ_e^2
10	0,875	0,832	2,336	2,700	1,641	0,848	0,829	2,475	2,715	1,799
50	0,325	0,367	1,369	1,531	1,121	0,325	0,367	1,401	1,529	1,147
100	0,223	0,266	0,962	1,075	0,912	0,223	0,266	0,971	1,074	0,922

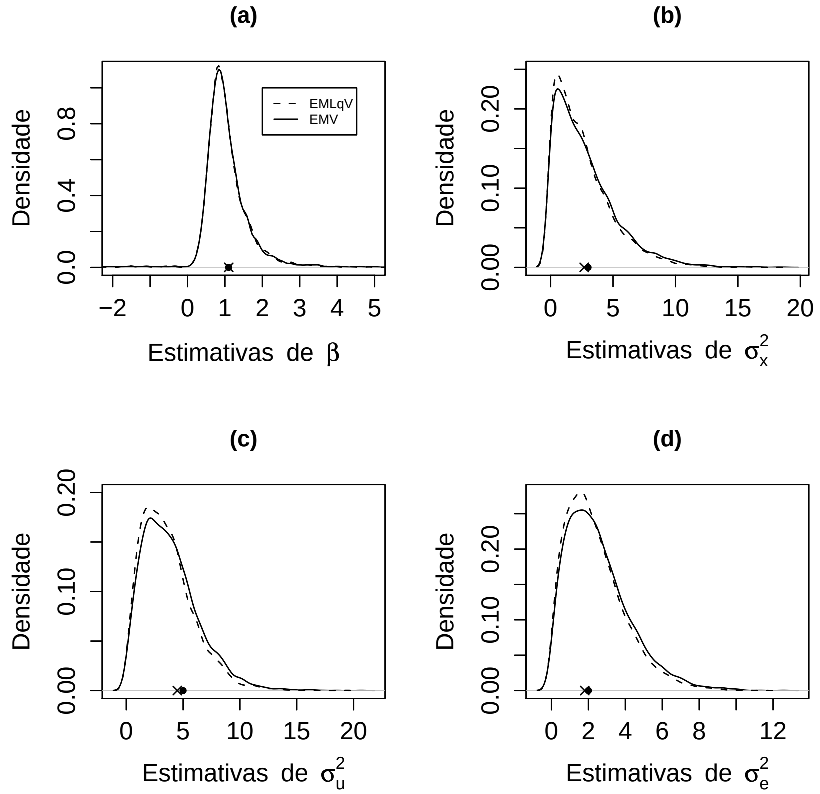

Figura 3.6: Estimativa da função densidade dos estimadores MV e ML$_q$V de β, σ_x^2, σ_u^2 e σ_e^2 em (a), (b), (c) e (d), respectivamente, para $n = 10$ e $\alpha = 40$ conhecido, em que o círculo e o símbolo x denotam $\boldsymbol{\theta}_0$ e $\boldsymbol{\theta}^*$, respectivamente.

representados por linha tracejada e cheia, respectivamente. Os estimadores de β, σ_x^2, σ_u^2 e σ_e^2 são indicados em (a), (b), (c) e (d), respectivamente e os valores verdadeiros dos parâmetros estão assinalados por um círculo no eixo horizontal. Os símbolos x no respectivo eixo representam os parâmetros de substituição. Em relação a β, o comportamento de ambos os estimadores são semelhantes graficamente. O comportamento do EML$_q$V das variâncias é um pouco diferenciado do EMV e, pela análise gráfica, é possível verificar que os estimadores ML$_q$V de σ_x^2 e σ_u^2 são mais viesados que os estimadores de MV e também que o estimador $\hat{\sigma}^2_{e,q}$ é menos viesado que o EMV, devido à assimetria de sua distribuição, revelando o mesmo comportamento da Tabela 3.42. Pelo fato de os parâmetros de substituição σ_x^{2*} e σ_e^{2*} estarem à esquerda dos respectivos valores verdadeiros e ainda pela assimetria positiva das distribuições dos estimadores ML$_q$V, os vieses simulados destes têm sinais contrários aos vieses assintóticos.

A Tabela 3.47 mostra a amplitude e a probabilidade de cobertura dos IC's de β segundo os estimadores de MV e ML$_q$V. Para $n = 10$, notamos que a amplitude foi maior quando estimada pelo método ML$_q$V, conforme esperado, já que o EP de $\hat{\beta}_q$ é maior que de MV. O método de MV obteve cobertura para o IC mais próxima do coeficiente de confiança nominal em comparação ao método de ML$_q$V, para $n = 10$.

Tabela 3.47: Amplitude e probabilidade de cobertura dos IC's para β baseados em $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{q5_{esp}}$ e $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{5_{esp}}$ para diferentes tamanhos de amostra, com coeficiente de confiança nominal de 95% e $\alpha = 40$ conhecido.

Tamanho de	Amplitude		Cobertura	
amostra	EML$_q$V	EMV	EML$_q$V	EMV
10	4,823	4,459	0,908	0,915
50	1,410	1,424	0,921	0,922
100	0,980	0,984	0,943	0,943

Capítulo 4

Aplicação

Neste capítulo aplicamos o método ML$_q$V a um conjunto de dados reais retirados de Fuller (1987). Consideramos um modelo de regressão estrutural em que a variável resposta Y indica o rendimento do milho e a covariável X indica a quantidade de nitrogênio do solo coletada em 11 locais distintos em Iowa, EUA. As unidades de medida de X e Y não foram informadas em (Fuller, 1987). Podemos considerar que a medição do nitrogênio do solo é efetuada com erros por dois motivos. Primeiramente, porque somente uma pequena amostra do solo é coletada para o experimento em cada um destes 11 locais e estas amostras são representativas de todo o solo de Iowa. O outro motivo está relacionado à análise laboratorial, que envolve erros. Os valores amostrados de X e Y encontram-se em Fuller (1987) e, segundo o autor, a variância relativa a estas duas fontes de erros foi estimada por meio de réplicas da covariável X como $\sigma_u^2 = 57$, a partir de 150 pares de amostras de X. Portanto, estamos considerando o modelo estrutural com situação de identificabilidade σ_u^2 conhecido e vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_e^2)^t$.

A Figura 4.1 ilustra o gráfico de dispersão entre X e Y e as retas de regressão estimadas considerando os métodos de MV e ML$_q$V em um modelo de regressão com erros nas variáveis com parâmetro de distorção $q = 1 - 1/n = 0,91$, em que $n = 11$. As estimativas de $\boldsymbol{\theta}$ segundo os métodos MV e ML$_q$V encontram-se na Tabela 4.1. Observamos que as estimativas de MV foram obtidas diretamente das expressões dadas em (2.19). Notamos que as estimativas dos parâmetros pelos dois métodos de estimação estão próximas, principalmente em relação ao parâmetro de inclinação. Este comportamento dos estimadores de β concorda com as simulações realizadas na Subseção 3.1.2. As similaridades nas estimativas de MV e ML$_q$V para os parâmetros α e β se refletem nas retas de regressão estimadas por ambos os métodos, quase coincidentes.

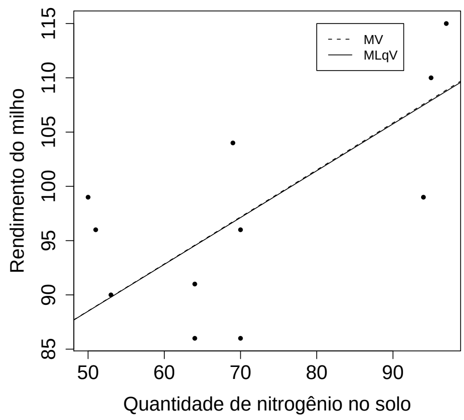

Figura 4.1: Gráfico de dispersão entre o rendimento do milho e a quantidade de nitrogênio no solo, com as retas de regressão estimadas pelos métodos de MV e de ML$_q$V.

Tabela 4.1: Estimativas MV e ML$_q$V para os parâmetros do modelo.

	Método de estimação	
Parâmetros	ML$_q$V	MV
α	66,924	66,861
β	0,431	0,433
μ_x	70,213	70,636
σ_x^2	220,119	220,140
σ_e^2	38,323	38,406

Tabela 4.2: IC's para α e β segundo os métodos MV e ML$_q$V com coeficiente de confiança nominal de 95%.

	Parâmetros	
Método	α	β
ML$_q$V	[45,905; 87,943]	[0,138; 0,725]
MV	[43,875; 89,846]	[0,113; 0,753]

Os IC's para α e β segundo os métodos MV e ML$_q$V foram calculados por (3.1) com coeficiente de confiança nominal de 95% e são mostrados na Tabela 4.2. Notamos que as amplitudes para os IC's de α e β obtidas por ML$_q$V são menores que as obtidas por MV, como nos resultados das simulações da Subseção 3.1.2. Observamos também que as simulações da referida subseção indicaram coberturas para os IC's de α e β menores que o coeficiente de confiança nominal de 95%, para $n = 10$. Os resultados dados na Tabela 3.16 indicam que as coberturas obtidas por MV para os IC's de α e β são próximas de 94% e as coberturas obtidas por ML$_q$V são próximas de 91%, para $n = 10$.

Capítulo 5

Conclusão e propostas de trabalhos futuros

O trabalho apresentado sobre estimação ML$_q$V cumpriu o objetivo de comparar o novo estimador com o estimador usual de MV quando aplicado a modelos com erros de medição. Observamos que as propriedades listadas no Capítulo 2, de influência do parâmetro de distorção q no EML$_q$V e de diminuição ou aumento da variância assintótica do EML$_q$V em relação ao EMV, foram observadas empiricamente nos resultados do Capítulo 3, a não ser por pequenas variações em relação ao DP e EP de alguns parâmetros, como μ_x. Outros comportamentos esperados e propriedades como a consistência do estimador, listados no início do Capítulo 3 também foram verificados.

Notamos que em todos os casos de identificabilidade, o estimador ML$_q$V de μ_x não sofre influência de q quanto à média da distribuição assintótica, o que se reflete na semelhança dos vieses simulados dos estimadores de ML$_q$V e de MV. Ainda, nos casos de identificabilidade σ_u^2 e σ_e^2 conhecidos, o EML$_q$V de μ_x é o único não influenciado por q quanto à média da distribuição assintótica, porém algumas escolhas para os verdadeiros valores dos parâmetros dos modelos podem ocasionar a não influência de q no EML$_q$V de outros parâmetros, o que pode ser comprovado calculando os valores de $\boldsymbol{\theta}^*$. Exemplo disto ocorre na Subseção 3.1.2 em relação a β. Nos casos de identificabilidade λ conhecido, k_x conhecido e α conhecido, somente os estimadores ML$_q$V das variâncias sofrem influência de q.

No estudo da comparação das matrizes de covariâncias assintóticas dos estimadores ML$_q$V e MV, o caso de identificabilidade α conhecido é o que apresenta resultados mais diferenciados dos demais casos. Nos primeiros quatro casos de identificabilidade listados nas Seções 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, as variâncias assintóticas dos estimadores ML$_q$V de β e das variâncias são inferiores às variâncias assintóticas dos estimadores de MV. No caso de identificabilidade α conhecido, a variância assintótica do EML$_q$V de β é superior à variância assintótica do EMV e, em relação às variâncias σ_x^2, σ_u^2 e σ_e^2, o aumento ou a diminuição das variâncias assintóticas do EML$_q$V em relação ao EMV é indefinido analiticamente, devido às expressões destas variâncias assintóticas serem funções de w_1 e de w_2, dadas em (2.10).

Quanto ao parâmetro de mais interesse na análise de regressão, β, sintetizamos suas propriedades para tamanhos de amostra pequenos, como $n = 10$. Em relação à influência de q em $\hat{\beta}_q$ quanto à média da distribuição assintótica, nos casos de identificabilidade σ_u^2 conhecido e σ_e^2 conhecido, $\hat{\beta}_q$ deve sofrer tal influência e, nos casos de identificabilidade λ conhecido, k_x conhecido e α conhecido, o EML$_q$V de β não deve sofrer esta influência. Nos casos de identificabilidade em que há a influência de q em $\hat{\beta}_q$, empiricamente, foi mostrado que esta influência não é intensa como aquela verificada nas variâncias, o que pode ser apurado pela comparação entre os valores de substituição e os valores verdadeiros dos parâmetros. A diferença entre estes valores é sempre menor em relação a β do que em relação às variâncias. Considerando as análises das matrizes de covariâncias assintóticas, pela escolha $q = 1 - 1/n$, as variâncias assintóticas de $\hat{\beta}_q$ são menores que as variâncias do EMV em todos os casos de identificabilidade, exceto no caso α conhecido, quando a situação se inverte. Tal propriedade foi comprovada na análise do erro padrão estimado e, consequentemente, na amplitude dos IC's para β. A conjugação entre viés simulado e DP amostral acarretou valores de EQM para o EML$_q$V de β semelhantes aos obtidos por MV em todos os casos de identificabilidade. Quanto à análise da cobertura dos IC's para β, em todos os casos de identificabilidade, a cobertura obtida por ML$_q$V foi mais distante do coeficiente de confiança nominal do que aquela obtida por MV, para $n = 10$.

Assim, em relação a β, o método ML$_q$V não traz vantagens expressivas em relação ao método usual de MV, não compensando sua utilização dada sua implementação mais elaborada. O método só traz melhorias na estimação das variâncias σ_x^2, σ_u^2 e σ_e^2 do modelo estrutural normal.

Como possível continuação do trabalho, propomos a comparação entre EML$_q$V e EMV aplicados a modelos estruturais heteroscedásticos bivariados com erro na equação em que as variâncias dos erros de medição são conhecidas. Estes modelos são definidos por

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \delta_i,$$

$$X_i = x_i + u_i \quad \text{e} \quad Y_i = y_i + e_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

em que δ_i denota o erro na equação e os demais parâmetros e variáveis são explicados na Seção 1.1. As suposições para o modelo são

$$(u_i, e_i)^t \text{ e } (\delta_j, x_j)^t \text{ são independentes}, \quad \delta_i \text{ e } x_j \text{ são independentes},$$

$$\delta_i \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma_{eq}^2), \quad (u_i, e_i)^t \overset{indep.}{\sim} N_2\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} \sigma_{ui}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{ei}^2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{e } \ x_i \overset{iid}{\sim} N(\mu_x, \sigma_x^2) \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

em que σ_{ui}^2 e σ_{ei}^2 são conhecidos e não negativos.

Estes modelos se diferenciam dos modelos homoscedásticos pelo fato de $(u_i, e_i)^t$ serem independentes mas não identicamente distribuídos, com média zero e diferentes variâncias σ_{ui}^2 e σ_{ei}^2, para $i = 1, \ldots, n$, respectivamente. Nestes modelos além de β, a variância do erro na equação também constitui parâmetro de interesse na estimação.

Outra linha de prosseguimento do trabalho é a comparação entre o EML$_q$V e EMV aplicados a modelos estruturais normais bivariados, definidos na Seção 2.2, com as variâncias dos erros de medição σ_u^2 e σ_e^2 conhecidas.

Outra forma de continuação do trabalho é a análise de conjuntos de dados reais sobre modelos com erros de medição estruturais a partir de reamostras bootstrap para a comparação dos métodos de estimação ML$_q$V e MV.

Apêndice A

Prova do Lema 2.1

Consideremos a parametrização de $f_{\boldsymbol{\theta}}$ sob a forma da família exponencial natural

$$f_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{Z}) = \exp\left(\boldsymbol{\eta}^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{Z}) - A(\boldsymbol{\eta})\right)$$

e seu vetor escore

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{Z}) - \nabla_{\boldsymbol{\eta}} A(\boldsymbol{\eta}).$$

É sabido que $E_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{Z})) = \boldsymbol{0}$, ou seja,

$$\int_{\mathcal{X}} (\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}) - \nabla_{\boldsymbol{\eta}} A(\boldsymbol{\eta})) \exp\left(\boldsymbol{\eta}^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}) - A(\boldsymbol{\eta})\right) d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}. \tag{A.1}$$

O vetor escore modificado é tal que

$$\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{Z}, q) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{Z}) f_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{Z})^{1-q} = (\boldsymbol{d}(\boldsymbol{Z}) - \nabla_{\boldsymbol{\eta}} A(\boldsymbol{\eta})) \left[\exp\left(\boldsymbol{\eta}^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{Z}) - A(\boldsymbol{\eta})\right)\right]^{1-q}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
E_{\boldsymbol{\eta}_0}(\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{Z}, q)) &= \int_{\mathcal{X}} \frac{(\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}) - \nabla_{\boldsymbol{\eta}} A(\boldsymbol{\eta})) \exp\left(\boldsymbol{\eta}^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}) - A(\boldsymbol{\eta})\right)}{\left[\exp\left(\boldsymbol{\eta}^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}) - A(\boldsymbol{\eta})\right)\right]^q} \exp\left(\boldsymbol{\eta}_0^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}) - A(\boldsymbol{\eta}_0)\right) d\boldsymbol{z} \\
&= \int_{\mathcal{X}} (\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}) - \nabla_{\boldsymbol{\eta}} A(\boldsymbol{\eta})) \exp\left(\boldsymbol{\eta}^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}) - A(\boldsymbol{\eta})\right) \frac{e^{\boldsymbol{\eta}_0^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z})} e^{-A(\boldsymbol{\eta}_0)}}{e^{q\boldsymbol{\eta}^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z})} e^{-qA(\boldsymbol{\eta})}} d\boldsymbol{z} \\
&= \frac{e^{-A(\boldsymbol{\eta}_0)}}{e^{-qA(\boldsymbol{\eta})}} \int_{\mathcal{X}} (\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}) - \nabla_{\boldsymbol{\eta}} A(\boldsymbol{\eta})) \exp\left(\boldsymbol{\eta}^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}) - A(\boldsymbol{\eta})\right) \frac{e^{\boldsymbol{\eta}_0^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z})}}{e^{q\boldsymbol{\eta}^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z})}} d\boldsymbol{z}.
\end{aligned}$$

Sabendo que a equação (A.1) é válida para todo $\boldsymbol{\eta} \in \Theta$ e igualando $E_{\boldsymbol{\eta}_0}(\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{Z}, q))$ a $\boldsymbol{0}$, com $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$, notamos que $e^{\boldsymbol{\eta}_0^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z})}/e^{q\boldsymbol{\eta}^t \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z})}|_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*}$ deve ser igual a 1, de modo que $\boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}_0/q$.

Apêndice B

Derivadas para a obtenção da matriz de covariâncias assintótica do EMV e do EML$_q$V

Observamos que as derivadas expostas em B.1 são relativas aos cinco casos de identificabilidade listados na Seção 2.2. No entanto, no caso de identificabilidade (iii), as derivadas em relação a σ_u^2 são dadas em B.2, e no caso de identificabilidade (iv), as derivadas em relação a σ_x^2 são dadas em B.3. Algumas das derivadas foram adaptadas de de Castro *et al.* (2008) e outras foram calculadas por meio do programa Maple.

B.1 Derivadas comuns

As derivadas do logaritmo de $|\,\boldsymbol{S}\,|$, dado em (2.13), em relação aos componentes de $\boldsymbol{\theta}$ são:

$$\frac{\partial \log|\,\boldsymbol{S}\,|}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \log|\,\boldsymbol{S}\,|}{\partial\beta} = 2c\sigma_e^{-2}\beta, \qquad \frac{\partial \log|\,\boldsymbol{S}\,|}{\partial\mu_x} = 0,$$
$$\frac{\partial \log|\,\boldsymbol{S}\,|}{\partial\sigma_x^2} = \sigma_x^{-2}(1 - c\sigma_x^{-2}), \quad \frac{\partial \log|\,\boldsymbol{S}\,|}{\partial\sigma_u^2} = \sigma_u^{-2}(1 - c\sigma_u^{-2}) \text{ e } \frac{\partial \log|\,\boldsymbol{S}\,|}{\partial\sigma_e^2} = \sigma_e^{-2}(1 - c\beta^2\sigma_e^{-2}).$$

As derivadas de q_{i1}, q_{i2} e c, dados em (2.16) e (2.14), respectivamente, em relação aos componentes de $\boldsymbol{\theta}$ são:

$$\frac{\partial q_{i1}}{\partial\alpha} = -2\sigma_e^{-2}(Y_i - \alpha - \beta\mu_x), \quad \frac{\partial q_{i1}}{\partial\beta} = \mu_x\frac{\partial q_{i1}}{\partial\alpha},$$

$$\frac{\partial q_{i1}}{\partial \mu_x} = -2\sigma_u^{-2}(X_i - \mu_x) - 2\beta\sigma_e^{-2}(Y_i - \alpha - \beta\mu_x), \quad \frac{\partial q_{i1}}{\partial \sigma_x^2} = 0, \quad \frac{\partial q_{i1}}{\partial \sigma_u^2} = -\sigma_u^{-4}(X_i - \mu_x)^2,$$

$$\frac{\partial q_{i1}}{\partial \sigma_e^2} = -\sigma_e^{-4}(Y_i - \alpha - \beta\mu_x)^2, \quad \frac{\partial q_{i2}}{\partial \alpha} = -\beta\sigma_e^{-2}, \quad \frac{\partial q_{i2}}{\partial \beta} = \sigma_e^{-2}(Y_i - \alpha - 2\beta\mu_x),$$

$$\frac{\partial q_{i2}}{\partial \mu_x} = -(\sigma_u^{-2} + \beta^2\sigma_e^{-2}), \quad \frac{\partial q_{i2}}{\partial \sigma_x^2} = 0, \quad \frac{\partial q_{i2}}{\partial \sigma_u^2} = -\sigma_u^{-4}(X_i - \mu_x),$$

$$\frac{\partial q_{i2}}{\partial \sigma_e^2} = -\beta\sigma_e^{-4}(Y_i - \alpha - \beta\mu_x), \quad \frac{\partial c}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \beta} = -2c^2\sigma_e^{-2}\beta, \quad \frac{\partial c}{\partial \mu_x} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \sigma_x^2} = c^2\sigma_x^{-4},$$

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma_u^2} = c^2\sigma_u^{-4} \quad \text{e} \quad \frac{\partial c}{\partial \sigma_e^2} = \beta^2 c^2\sigma_e^{-4}.$$

As derivadas de segunda ordem do logaritmo de $\mid \boldsymbol{S} \mid$ em relação aos componentes de $\boldsymbol{\theta}$ são:

$$d_{\alpha\alpha} = d_{\alpha\beta} = d_{\alpha\mu_x} = d_{\alpha\sigma_x^2} = d_{\alpha\sigma_u^2} = d_{\alpha\sigma_e^2} = d_{\beta\mu_x} = d_{\mu_x\mu_x} = d_{\mu_x\sigma_x^2} = d_{\mu_x\sigma_u^2} = d_{\mu_x\sigma_e^2} = 0,$$

$$d_{\beta\beta} = 2c(-2c\sigma_e^{-2}\beta^2 + 1)\sigma_e^{-2}, \quad d_{\beta\sigma_x^2} = 2c^2\sigma_x^{-4}\beta\sigma_e^{-2}, \quad d_{\beta\sigma_u^2} = 2c^2\sigma_u^{-4}\beta\sigma_e^{-2},$$

$$d_{\beta\sigma_e^2} = 2\beta c\sigma_e^{-4}(\beta^2 c\sigma_e^{-2} - 1), \quad d_{\sigma_x^2\sigma_x^2} = -\sigma_x^{-8}(\sigma_x^2 - c)^2, \quad d_{\sigma_x^2\sigma_u^2} = -c^2\sigma_u^{-4}\sigma_x^{-4},$$

$$d_{\sigma_x^2\sigma_e^2} = -\beta^2 c^2\sigma_e^{-4}\sigma_x^{-4}, \quad d_{\sigma_u^2\sigma_u^2} = \sigma_u^{-4}(2c\sigma_u^{-2} - c^2\sigma_u^{-4} - 1), \quad d_{\sigma_u^2\sigma_e^2} = -c^2\beta^2\sigma_u^{-4}\sigma_e^{-4}$$

$$\text{e} \quad d_{\sigma_e^2\sigma_e^2} = -\sigma_e^{-4}(\beta^2 c\sigma_e^{-2} - 1)^2.$$

As derivadas de segunda ordem de q_{i1}, q_{i2} e c em relação aos componentes de $\boldsymbol{\theta}$ são:

$$\frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \alpha^2} = 2\sigma_e^{-2}, \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \alpha \partial \beta} = 2\mu_x\sigma_e^{-2}, \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \alpha \partial \mu_x} = 2\beta\sigma_e^{-2}, \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \alpha \partial \sigma_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \alpha \partial \sigma_u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \alpha \partial \sigma_e^2} = 2\sigma_e^{-4}(Y_i - \alpha - \beta\mu_x), \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \beta^2} = 2\mu_x^2\sigma_e^{-2}, \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \beta \partial \mu_x} = -2\sigma_e^{-2}(Y_i - \alpha - 2\beta\mu_x),$$

$$\frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \beta \partial \sigma_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \beta \partial \sigma_u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \beta \partial \sigma_e^2} = 2\sigma_e^{-4}\mu_x(Y_i - \alpha - \beta\mu_x), \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \mu_x^2} = 2(\sigma_u^{-2} + \beta^2\sigma_e^{-2}),$$

$$\frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \mu_x \partial \sigma_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \mu_x \partial \sigma_u^2} = 2\sigma_u^{-4}(X_i - \mu_x), \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \mu_x \partial \sigma_e^2} = 2\sigma_e^{-4}\beta(Y_i - \alpha - \beta\mu_x), \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \sigma_x^4} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \sigma_x^2 \partial \sigma_u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \sigma_x^2 \partial \sigma_e^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \sigma_u^4} = 2\sigma_u^{-6}(X_i - \mu_x)^2, \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \sigma_u^2 \partial \sigma_e^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial \sigma_e^4} = 2\sigma_e^{-6}(Y_i - \alpha - \beta\mu_x)^2, \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial \alpha^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial \alpha \partial \beta} = -\sigma_e^{-2}, \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial \alpha \partial \mu_x} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial \alpha \partial \sigma_x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial \alpha \partial \sigma_u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial \alpha \partial \sigma_e^2} = \beta\sigma_e^{-4}, \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial \beta^2} = -2\mu_x\sigma_e^{-2}, \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial \beta \partial \mu_x} = -2\beta\sigma_e^{-2}, \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial \beta \partial \sigma_x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial \beta \partial \sigma_u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial \beta \partial \sigma_e^2} = -\sigma_e^{-4}(Y_i - \alpha - 2\beta\mu_x), \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial \mu_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial \mu_x \partial \sigma_x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\mu_x\partial\sigma_u^2}=\sigma_u^{-4},\quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\mu_x\partial\sigma_e^2}=\beta^2\sigma_e^{-4},\quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\sigma_x^4}=0,\quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\sigma_x^2\partial\sigma_u^2}=0,\quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\sigma_x^2\partial\sigma_e^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\sigma_u^4}=2\sigma_u^{-6}(X_i-\mu_x),\quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\sigma_u^2\partial\sigma_e^2}=0,\quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\sigma_e^4}=2\beta\sigma_e^{-6}(Y_i-\alpha-\beta\mu_x),\quad \frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}=\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\beta}=0,$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\mu_x}=\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\sigma_x^2}=\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\sigma_u^2}=\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\sigma_e^2}=0,\quad \frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}=-2c^2(\sigma_e^{-2}-4c\sigma_e^{-4}\beta^2),\quad \frac{\partial^2 c}{\partial\beta\partial\mu_x}=0,$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial\beta\partial\sigma_x^2}=-4c^3\sigma_x^{-4}\sigma_e^{-2}\beta,\quad \frac{\partial^2 c}{\partial\beta\partial\sigma_u^2}=-4c^3\beta\sigma_e^{-2}\sigma_u^{-4},\quad \frac{\partial^2 c}{\partial\beta\partial\sigma_e^2}=2\beta c^2\sigma_e^{-4}(1-2\beta^2c\sigma_e^{-2}),$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial\mu_x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 c}{\partial\mu_x\partial\sigma_x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 c}{\partial\mu_x\partial\sigma_u^2}=0,\quad \frac{\partial^2 c}{\partial\mu_x\partial\sigma_e^2}=0,\quad \frac{\partial^2 c}{\partial\sigma_x^4}=2c^2\sigma_x^{-6}(c\sigma_x^{-2}-1),$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma_x^2\partial\sigma_u^2}=2c^3\sigma_x^{-4}\sigma_u^{-4},\quad \frac{\partial^2 c}{\partial\sigma_x^2\partial\sigma_e^2}=2\beta^2\sigma_x^{-4}\sigma_e^{-4}c^3,\quad \frac{\partial^2 c}{\partial\sigma_u^4}=2c^2\sigma_u^{-6}(c\sigma_u^{-2}-1),$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma_u^2\partial\sigma_e^2}=2c^3\beta^2\sigma_u^{-4}\sigma_e^{-4}\quad\text{e}\quad \frac{\partial^2 c}{\partial\sigma_e^4}=2\beta^2c^2\sigma_e^{-6}(\beta^2c\sigma_e^{-2}-1).$$

B.2 Caso de identificabilidade λ conhecido

As derivadas em relação a σ_u^2 do logaritmo de $|\,\boldsymbol{S}\,|$, dado em (2.13), de q_{i1}, q_{i2} e c, dados em (2.16) e (2.14), respectivamente, são:

$$\frac{\partial\log|\,\boldsymbol{S}\,|}{\partial\sigma_u^2}=\frac{2}{\sigma_u^2}-\frac{c(\lambda+\beta^2)}{\lambda\sigma_u^4},\quad \frac{\partial q_{i1}}{\partial\sigma_u^2}=-\sigma_u^{-4}\left[(X_i-\mu_x)^2+\lambda^{-1}(Y_i-\alpha-\mu_x\beta)^2\right],$$

$$\frac{\partial q_{i2}}{\partial\sigma_u^2}=-\sigma_u^{-4}\left[(X_i-\mu_x)+\beta\lambda^{-1}(Y_i-\alpha-\mu_x\beta)\right]\quad\text{e}\quad \frac{\partial c}{\partial\sigma_u^2}=c^2\frac{(\lambda+\beta^2)}{\lambda\sigma_u^4}.$$

As derivadas de segunda ordem do logaritmo de $|\,\boldsymbol{S}\,|$ em relação aos componentes de $\boldsymbol{\theta}$ em que pelo menos um deles é σ_u^2 são:

$$d_{\alpha\sigma_u^2}=0,\quad d_{\beta\sigma_u^2}=-\frac{2\beta c}{\lambda\sigma_u^4}\left[1-\frac{c(\lambda+\beta^2)}{\lambda\sigma_u^2}\right],\quad d_{\mu_x\sigma_u^2}=0,$$

$$d_{\sigma_x^2\sigma_u^2}=-\frac{c^2(\lambda+\beta^2)}{\lambda\sigma_u^4\sigma_x^4}\quad\text{e}\quad d_{\sigma_u^2\sigma_u^2}=-\frac{2}{\sigma_u^4}-\frac{c(\lambda+\beta^2)}{\lambda\sigma_u^6}\left[\frac{c(\lambda+\beta^2)}{\lambda\sigma_u^2}-2\right].$$

As derivadas de segunda ordem de q_{i1}, q_{i2} e c em relação aos componentes de $\boldsymbol{\theta}$ em que pelo menos um deles é σ_u^2 são:

$$\frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial\alpha\partial\sigma_u^2}=2\sigma_u^{-4}\lambda^{-1}(Y_i-\alpha-\mu_x\beta),\quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial\beta\partial\sigma_u^2}=2\mu_x\sigma_u^{-4}\lambda^{-1}(Y_i-\alpha-\mu_x\beta),$$

$$\frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial\mu_x\partial\sigma_u^2}=2\sigma_u^{-4}\left[(X_i-\mu_x)+\beta\lambda^{-1}(Y_i-\alpha-\mu_x\beta)\right],\quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial\sigma_x^2\partial\sigma_u^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial\sigma_u^4} = 2\sigma_u^{-6}\left[(X_i-\mu_x)^2 + \lambda^{-1}(Y_i-\alpha-\mu_x\beta)^2\right], \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\alpha\partial\sigma_u^2} = \beta\sigma_u^{-4}\lambda^{-1},$$

$$\frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\beta\partial\sigma_u^2} = -\sigma_u^{-4}\lambda^{-1}(Y_i-\alpha-2\mu_x\beta), \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\mu_x\partial\sigma_u^2} = \sigma_u^{-4}(1+\beta^2\lambda^{-1}), \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\sigma_x^2\partial\sigma_u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\sigma_u^4} = 2\sigma_u^{-6}\left[(X_i-\mu_x) + \beta\lambda^{-1}(Y_i-\alpha-\mu_x\beta)\right], \quad \frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\sigma_u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial\beta\partial\sigma_u^2} = \frac{2\beta c^2}{\lambda\sigma_u^4}\left[1-\frac{2c(\lambda+\beta^2)}{\lambda\sigma_u^2}\right], \quad \frac{\partial^2 c}{\partial\mu_x\partial\sigma_u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial\sigma_x^2\partial\sigma_u^2} = \frac{2c^3(\lambda+\beta^2)}{\lambda\sigma_x^4\sigma_u^4}$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial^2 c}{\partial\sigma_u^4} = \frac{2c^2(\lambda+\beta^2)}{\lambda\sigma_u^6}\left[\frac{c(\lambda+\beta^2)}{\lambda\sigma_u^2}-1\right].$$

B.3 Caso de identificabilidade k_x conhecido

Considerando $k_{xx} = (1-k_x)/k_x$, temos que as derivadas em relação a σ_x^2 do logaritmo de $|\,\boldsymbol{S}\,|$, dado em (2.13), de q_{i1}, q_{i2} e c, dados em (2.16) e (2.14), respectivamente, são:

$$\frac{\partial\log|\,\boldsymbol{S}\,|}{\partial\sigma_x^2} = \frac{1}{\sigma_x^2}\left(1+\frac{c\beta^2}{\sigma_e^2}\right), \quad \frac{\partial q_{i1}}{\partial\sigma_x^2} = -\sigma_x^{-4}k_{xx}^{-1}(X_i-\mu_x)^2, \quad \frac{\partial q_{i2}}{\partial\sigma_x^2} = -\sigma_x^{-4}k_{xx}^{-1}(X_i-\mu_x)$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial c}{\partial\sigma_x^2} = \frac{c}{\sigma_x^2}\left(1-\frac{c\beta^2}{\sigma_e^2}\right)$$

As derivadas de segunda ordem do logaritmo de $|\,\boldsymbol{S}\,|$ em relação aos componentes de $\boldsymbol{\theta}$ em que pelo menos um deles é σ_x^2 são:

$$d_{\alpha\sigma_x^2} = 0, \quad d_{\beta\sigma_x^2} = \frac{2\beta c}{\sigma_x^2\sigma_e^2}\left(1-\frac{c\beta^2}{\sigma_e^2}\right), \quad d_{\mu_x\sigma_x^2} = 0, \quad d_{\sigma_x^2\sigma_x^2} = -\frac{1}{\sigma_x^4}\left(1+\frac{c^2\beta^4}{\sigma_e^4}\right)$$

$$\text{e} \quad d_{\sigma_x^2\sigma_e^2} = \frac{\beta^2 c}{\sigma_x^2\sigma_e^4}\left(\frac{c\beta^2}{\sigma_e^2}-1\right)$$

As derivadas de segunda ordem de q_{i1}, q_{i2} e c em relação aos componentes de $\boldsymbol{\theta}$ em que pelo menos um deles é σ_x^2 são:

$$\frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial\alpha\partial\sigma_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial\beta\partial\sigma_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial\mu_x\partial\sigma_x^2} = 2\sigma_x^{-4}k_{xx}^{-1}(X_i-\mu_x), \quad \frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial\sigma_x^4} = 2\sigma_x^{-6}k_{xx}^{-1}(X_i-\mu_x)^2,$$

$$\frac{\partial^2 q_{i1}}{\partial\sigma_x^2\partial\sigma_e^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\alpha\partial\sigma_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\beta\partial\sigma_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\mu_x\partial\sigma_x^2} = \sigma_x^{-4}k_{xx}^{-1},$$

$$\frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\sigma_x^4} = 2\sigma_x^{-6}k_{xx}^{-1}(X_i-\mu_x), \quad \frac{\partial^2 q_{i2}}{\partial\sigma_x^2\partial\sigma_e^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\sigma_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial\beta\partial\sigma_x^2} = -\frac{4\beta c^2}{\sigma_x^2\sigma_e^2}\left(1-\frac{c\beta^2}{\sigma_e^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial\mu_x\partial\sigma_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial\sigma_x^4} = -\frac{2c^2\beta^2}{\sigma_x^4\sigma_e^2}\left(1-\frac{c\beta^2}{\sigma_e^2}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 c}{\partial\sigma_x^2\partial\sigma_e^2} = \frac{2c^2\beta^2}{\sigma_x^2\sigma_e^4}\left(1-\frac{c\beta^2}{\sigma_e^2}\right).$$

Referências Bibliográficas

Basseville, M. Divergence measures for statistical data processing. Research Report PI-1961, IRISA, Campus de Beaulieu, 2010.

Birch, M. A note on the maximum likelihood estimation of a linear structural relationship. *Journal of the American Statistical Association*, 59:1175–1178, 1964.

Bolfarine, H. & Cordani, L. K. Estimation of a structural linear regression model with a known reability ratio. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 45:531–540, 1993.

Bolfarine, H., Rodrigues, J. & Cordani, L. K. *O Modelo de Regressão com Erros nas Variáveis*. 10º SINAPE, ABE, São Paulo, 1992.

Buonaccorsi, J. P. *Measurement Error: Models, Methods, and Applications*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2010.

Byrd, R. H., Lu, P., Nocedal, J. & Zhu, C. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16:1190–1208, 1995.

Carroll, R., Ruppert, D., Stefanski, L. A. & Crainiceanu, C. M. *Measurement Error in Nonlinear Models: A Modern Perspective*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2nd edition, 2006.

Cheng, C.-L. & Van Ness, J. On estimating linear relationships when both variables are subject to error. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 56: 167–183, 1994.

Cheng, C.-L. & Van Ness, J. Structural and functional models revisited. In *Recent advances in total least squares techniques and errors-in-variables modeling (Leuven, 1996)*, pages 37–50. SIAM, Philadelphia, PA, 1997.

Cheng, C.-L. & Van Ness, J. *Statistical Regression with Measurement Error*. Arnold, London, 1999.

de Castro, M., Bolfarine, H. & Galea, M. Hypothesis testing in an errors-in-variables model with heteroscedastic measurement errors. *Statistics in Medicine*, 27:5217–5234, 2008.

Edwards, A. W. F. *Likelihood*. Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

Ferrari, D. Parametric density estimation by minimizing nonextensive entropy. Working paper 016, University of Modena and Reggio E., Dept. of Economics, 2008. URL `http://ideas.repec.org/p/mod/recent/016.html`.

Ferrari, D. & La Vecchia, D. On robust estimation via pseudo-additive information. *Biometrika*, 99:238–244, 2012.

Ferrari, D. & Paterlini, S. Efficient and robust estimation for financial returns: an approach based on q-entropy. Working paper 623, University of Modena and Reggio E., Dept. of Economics, 2010.

Ferrari, D. & Yang, Y. Maximum L_q-likelihood estimation. *The Annals of Statistics*, 38: 753–783, 2010.

Fuller, W. A. *Measurement Error Models*. Wiley, New York, 1987.

Gillard, J. W. Asymptotic variance covariance matrices for the linear structural model. *Statistical Methodology*, 8:291–303, 2011.

Gillard, J. W. & Iles, T. C. Variance covariance matrices for linear regression with errors in both variables. Technical report, Cardiff University School of Mathematics, Senghenydd Road, 2006.

Goulart, E. S. *Matrizes Quase-Newton Esparsas para Problemas de Otimização Não Linear de Grande Porte*. Tese de doutorado, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2005.

Hood, K., Nix, B. A. J. & Iles, T. C. Asymptotic information and variance-covariance matrices for the linear structural model. *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)*, 48:477–493, 1999.

Kelly, G. The influence function in the errors in variables problem. *The Annals of Statistics*, 12:87–100, 1984.

Kendall, M. & Stuart, A. *The Advanced Theory of Statistics*, volume 2. Griffin, London, 4th edition, 1979.

Magnus, J. & Neudecker, H. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. Wiley series in probability and statistics. Wiley, New York, 2nd edition, 1999.

Matsuzoe, H. & Ohara, A. Geometry for q-exponential families. In *Proceedings of the 2nd International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields*, 2010.

Monagan, M. B., Geddes, K. O., Heal, K. M., Labahn, G., Vorkoetter, S. M., McCarron, J. & DeMarco, P. *Maple 10 Programming Guide*. Maplesoft, Waterloo ON, Canada, 2005.

Nocedal, J. & Wright, S. J. *Numerical Optimization*. Springer, New York, 2nd edition, 2006.

Pardo, L. *Statistical Inference Based on Divergence Measures*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

Proietti, T. & Luati, A. The exponential model for the spectrum of a time series: extensions and applications. Preliminary and incomplete, 2012. URL `http://www.rbnz.govt.nz/research/workshops/feb2012/4682258.pdf`.

Qin, Y. & Priebe, C. E. Maximum L_q-likelihood estimation via the expectation maximization algorithm: a robust estimation of mixture models. Submitted, 2011.

R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2011. URL `http://www.R-project.org`.

Sprent, P. Some history of functional and structural relationships. In *Statistical analysis of measurement error models and applications (Arcata, CA, 1989)*, volume 112 of *Contemp. Math.*, pages 3–15. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

Stefanski, L. A. Measurement error models. *Journal of the American Statistical Association*, 95:1353–1358, 2000.

Thompson, J. R. & Carter, R. L. An overview of normal theory structural measurement error models. *International Statistical Review*, 75:183–198, 2007.

Ullah, A. Entropy, divergence and distance measures with econometric applications. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 49:137–162, 1996.

Wang, G. *Some Bayesian Methods in the Estimation of Parameters in the Measurement Error Models and Crossover Trial*. Ph.d. thesis, University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio, 2004.