

VERIFICAÇÃO DA PERFORMANCE DE MODELOS
APARCH ASSIMÉTRICOS APLICADOS A DADOS
FINANCEIROS

Daniela Caetano de Souza Gasparini

VERIFICAÇÃO DA PERFORMANCE DE MODELOS APARCH ASSIMÉTRICOS APLICADOS A DADOS FINANCEIROS

Daniela Caetano de Souza Gasparini

Orientador: Luís A. Milan

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de São Carlos - PPGEs/UFSCar, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

UFSCar - São Carlos-SP

Abril de 2013

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

G249vp

Gasparini, Daniela Caetano de Souza.

Verificação da performance de modelos APARCH
assimétricos aplicados a dados financeiros / Daniela
Caetano de Souza Gasparini. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
79 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2013.

1. Estatística. 2. SW-GARCH. 3. SW-APARCH. 4.
Distribuição Laplace assimétrica. I. Título.

CDD: 519.5 (20^a)



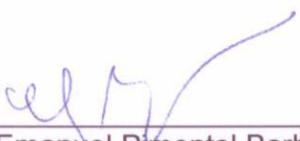
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Estatística
Via Washington Luís, Km 235 - C.P.676 - CGC 45358058/0001-40
FONE: (016) 3351-8292 – Email: ppgest@ufscar.br
13565-905 - SÃO CARLOS-SP - BRASIL

FOLHA DE APROVAÇÃO

Aluno(a) : Daniela Caetano de Souza Gasparini

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA E APROVADA EM 01/04/2013
PELA COMISSÃO JULGADORA:

Presidente 
Prof. Dr. Luis A. Milan (DEs-UFSCar/Orientador)

1º Examinador 
Prof. Dr. Emanuel Pimentel Barbosa (UNICAMP)

2º Examinador 
Profa. Dra. Maria Aparecida de Paiva Franco (DEs-UFSCar)

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre me apoiaram e acreditaram em mim.

Agradecimentos

À Deus que me deu a vida e sempre me dá forças para continuar lutando pelos meus ideais.

À minha família, em especial aos meus pais, Nivaldo e Maria de Lourdes, pelo apoio, confiança, amor e por ensinar-me a persistir nos meus objetivos.

Aos velhos amigos, em especial ao Cleison, pela compreensão da minha ausência durante mais essa jornada na minha vida.

Aos colegas do curso de Mestrado e Doutorado pela ajuda quando as dúvidas surgiram. Em especial à Flávia, Rosineide, Walkiria e Cíntia, pela verdadeira amizade, tornando de alguma forma esses anos mais fáceis.

Ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos pela oportunidade de poder concluir o curso de Mestrado em Estatística.

Aos professores do Departamento que ministraram aula em nosso curso e a outros que de alguma forma contribuíram com a realização e melhoria deste trabalho.

Em especial, agradeço ao professor Luís A. Milan pela orientação, ideias, sugestões, amizade e conversas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro concedido.

A todos que de alguma forma contribuíram para mais essa vitória.

Resumo

A volatilidade dos ativos financeiros se altera ao longo do tempo, sinalizando a especificação de mudança de regime para modelos de volatilidade. Além disso, a presença de assimetria nos retornos do mercado financeiro tem sido reconhecida na literatura financeira das últimas décadas. Neste trabalho, apresentamos alguns modelos heterocedásticos com mudança de regime, considerando que a componente do erro desses modelos segue distribuição Laplace assimétrica, bem como o processo de estimação de seus parâmetros via máxima verossimilhança e métodos bayesianos.

Palavras-chave: *SW-GARCH, SW-APARCH, distribuição Laplace assimétrica.*

Abstract

The volatility of financial assets changes over time, indicating the specification of regime change in volatility models. Furthermore, the presence of asymmetry in the returns of the financial market has been recognized in the financial literature of recent decades. In this paper, we present some heteroscedastic models with regime change, considering that the error component of these models follows Skew Laplace distribution, as well as the process of estimating its parameters via maximum likelihood and Bayesian methods.

Keywords: *SW-GARCH, SW-APARCH, Skew Laplace.*

Sumário

| | |
|---|------------|
| Lista de Figuras | ii |
| Lista de Tabelas | iii |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 Séries financeiras | 4 |
| 2.1 Fatos estilizados | 4 |
| 3 Modelos heterocedásticos | 7 |
| 3.1 Modelos da família ARCH | 7 |
| 3.1.1 ARCH | 8 |
| 3.1.2 GARCH | 8 |
| 3.1.3 APARCH | 9 |
| 3.2 Estimação | 10 |
| 3.2.1 Distribuição Laplace assimétrica | 11 |
| 3.2.2 Algoritmo BHHH | 13 |
| 4 Modelos com mudança de regime | 17 |
| 4.1 SW-GARCH | 18 |
| 4.2 SW-APARCH | 19 |
| 4.3 Estimação | 19 |
| 4.4 Algoritmo | 22 |
| 5 Abordagem Bayesiana para modelos com mudança de regime | 24 |
| 5.1 Simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov | 25 |
| 5.1.1 Algoritmo Gibbs <i>Sampling</i> | 25 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.1.2 | Algoritmo Metropolis-Hastings | 26 |
| 5.2 | Estimação | 27 |
| 5.2.1 | MCMC em Modelos SW-GARCH | 29 |
| 5.2.2 | MCMC em Modelos SW-APARCH | 32 |
| 5.3 | Algoritmo | 33 |
| 6 | Estudo de simulação | 35 |
| 6.1 | SW-GARCH | 36 |
| 6.2 | SW-APARCH | 38 |
| 6.3 | Discussão | 40 |
| 7 | Aplicações a dados reais | 42 |
| 7.1 | Dados | 42 |
| 7.2 | Resultados | 44 |
| 7.2.1 | SW-GARCH | 46 |
| 7.2.2 | SW-APARCH | 49 |
| 7.3 | Discussão | 52 |
| 8 | Considerações finais | 54 |
| | Referências Bibliográficas | 56 |
| | Apêndices | 61 |
| A | Algoritmos | 61 |
| A.1 | Gerando uma série SW(2)-GARCH(1,1) | 61 |
| A.2 | Gerando uma série SW(2)-APARCH(1,1) | 62 |
| A.3 | Algoritmo SW(2)-APARCH(1,1) - Clássico | 62 |
| A.4 | Algoritmo SW(2)-APARCH(1,1) - Bayesiano | 68 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Série do Índice BOVESPA. | 6 |
| 5.1 | Curvas da densidade da distribuição Beta para alguns valores de a e b. . . | 31 |
| 6.1 | Gráfico da série SW(2)-GARCH(1,1) simulada. | 37 |
| 6.2 | Gráfico da série SW(2)-APARCH(1,1) simulada. | 39 |
| 7.1 | Gráficos da série original, do retorno e da autocorrelação dos retornos dos preços das ações ITUB3.SA. | 43 |
| 7.2 | Gráficos da série original, do retorno e da autocorrelação dos retornos dos preços das ações IBOVESPA. | 44 |
| 7.3 | Gráfico do retorno dos preços das ações ITUB3.SA com a variável de estado S_t do modelo SW(2)-GARCH(1,1). | 48 |
| 7.4 | Gráfico do retorno dos preços das ações IBOVESPA com a variável de estado S_t do modelo SW(2)-GARCH(1,1). | 49 |
| 7.5 | Gráfico do retorno dos preços das ações ITUB3.SA com a variável de estado S_t do modelo SW(2)-APARCH(1,1). | 51 |
| 7.6 | Gráfico do retorno dos preços das ações IBOVESPA com a variável de estado S_t do modelo SW(2)-APARCH(1,1). | 52 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Estatísticas do retorno dos preços das ações IBOVESPA. | 5 |
| 6.1 | Parâmetros verdadeiros do modelo SW(2)-GARCH(1,1) | 36 |
| 6.2 | Parâmetros estimados do modelo SW(2)-GARCH(1,1) bayesiano | 38 |
| 6.3 | Parâmetros verdadeiros do modelo SW(2)-APARCH(1,1) | 38 |
| 6.4 | Parâmetros estimados do modelo SW(2)-APARCH(1,1) bayesiano | 40 |
| 7.1 | Valores de AIC e BIC dos modelos para a série de retorno ITUB3.SA. | 45 |
| 7.2 | Valores de AIC e BIC dos modelos para a série de retorno IBOVESPA. | 46 |
| 7.3 | Parâmetros estimados da série de retorno ITUB3.SA | 47 |
| 7.4 | Parâmetros estimados da série de retorno IBOVESPA | 47 |
| 7.5 | Critérios de adequabilidade do modelo SW(2)-GARCH(1,1) | 47 |
| 7.6 | Parâmetros estimados da série de retorno ITUB3.SA | 50 |
| 7.7 | Parâmetros estimados da série de retorno IBOVESPA | 50 |
| 7.8 | Critérios de adequabilidade do modelo SW(2)-APARCH(1,1) | 51 |

Capítulo 1

Introdução

A maioria das séries econômicas e financeiras caracterizam-se pela não estacionariedade, principalmente, por apresentarem movimentos de baixa e elevada volatilidade¹, dificultando a previsão do seu comportamento futuro. A volatilidade constitui uma característica fundamental nas aplicações em Economia e Finanças, como, por exemplo, a análise das taxas de retorno² dos ativos financeiros³, a gestão de risco⁴, a análise das taxas de câmbio⁵, etc. Daí o interesse em encontrar modelos de volatilidade, para serem utilizados na modelagem e previsão da volatilidade de séries financeiras.

Wurtz *et al.* (2009) consideram que o número de modelos GARCH é grande, mas que os mais influentes foram os primeiros. Além do modelo ARCH padrão, introduzido por Engle (1982), e do GARCH de Bollerslev (1986), há também a classe mais geral de modelos ARCH de ‘potência assimétrica’, chamada APARCH, que foi introduzida por Ding, Granger e Engle (1993). Estes, por sua vez, incluem como caso especial o modelo

¹Volatilidade, na área financeira, é uma medida de dispersão dos retornos de um título ou índice de mercado. Quanto mais o preço de uma ação varia num período curto de tempo, maior o risco de se ganhar ou perder dinheiro negociando esta ação.

²Taxa de retorno é uma ‘comissão’ que as instituições financeiras cobram e repassam às revendas que conseguem fechar o contrato de financiamento com o cliente.

³Ativo é um termo básico utilizado para expressar o conjunto de bens, valores, créditos, direitos e afins que forma o patrimônio de uma pessoa, singular ou coletiva, num determinado momento, avaliado pelos respectivos custos.

⁴Gestão de risco é o processo de planejar, organizar, dirigir e controlar os recursos humanos e materiais de uma organização para minimizar os efeitos dos riscos sobre essa organização.

⁵A taxa de câmbio é o custo de uma moeda em relação a outra, dividindo-se em taxa de venda e taxa de compra.

TS-GARCH de Taylor (1986) e Schwert (1990), o modelo GJR-GARCH de Glosten, Jagannathan e Runkle (1993), o modelo T-ARCH de Zakoian (1994), o modelo N-ARCH de Higgins e Bera (1992), e o modelo Log-ARCH de Geweke (1986) e Pentula (1986).

Além disso, a presença de assimetria nos retornos do mercado financeiro, especialmente retornos de ações, tem sido reconhecida na literatura financeira das últimas décadas, mas poucas tentativas para modelar foram feitas. Captar assimetria condicional em retornos financeiros é importante por algumas razões como, por exemplo, o fato da assimetria não modelada poder afetar inferências sobre outros parâmetros do modelo e, portanto, levar a conclusões enganosas (Lanne & Saikkonen, 2004).

Ozun & Cifter (2007) aplicaram o modelo GARCH com os resíduos seguindo distribuição normal e t-Student assimétrica, e o modelo GJR-GARCH com mistura de normais assimétricas para prever retornos diários da Bolsa Istanbul Exchange. Kim (2008), em sua tese também utilizou o modelo GARCH com distribuição t-Student assimétrica para estudar os retornos de ações norte-americanas. Jayakumar & Kuttykrishnan (2005) propuseram um modelo com a distribuição Laplace assimétrica que pode ser usado para modelar dados financeiros e, em seguida, Trindade *et. al* (2010) aplicaram esta mesma distribuição ao modelo GARCH em um estudo de simulação.

A volatilidade dos ativos financeiros se altera ao longo do tempo, em diferentes momentos o mercado apresenta níveis de variabilidade diferentes, correspondendo a diferentes regimes para a volatilidade condicional ⁶ ao longo do tempo, de tal forma que sinaliza a especificação de mudança de regime para modelos de volatilidade.

Os modelos de série temporal com mudança de regime markoviana (Markov Switch) é uma abordagem que modela a série temporal, em que sua mudança de comportamento corresponde a transição de regime implícito à observação como uma variável aleatória não observada, seguindo um processo de Markov. Comumente conhecidos por SW ou MS, os modelos com mudança de regime markoviana são bastante flexíveis para grande extensão de modelos e são sensíveis levando em consideração a ocorrência de eventos não usuais de curta duração e todos os seus parâmetros são dependentes dos dados (Hamilton, 1994).

Para o sucesso da aplicação de modelos com mudança de regime markoviana, é crucial ter estimadores confiáveis dos parâmetros. Em econometria, o modo habitual para obter estimativas dos parâmetros é escolher a abordagem de máxima verossimilhança

⁶A Heterocedasticidade ocorre quando a variância muda ao longo do tempo.

(ML). No entanto, descobriu-se que esta abordagem torna-se computacionalmente inviável para estes modelos (Henneke *et al.*, 2011).

Motivados pelo interesse em encontrar um modelo que forneça um bom ajuste a dados de séries de retornos financeiros e dando continuidade as dissertações de Amorim (2005) e de Macerau (2012), este trabalho segue a estrutura descrita abaixo.

Começaremos esta dissertação com uma breve apresentação das características das séries financeiras (Capítulo 2).

No Capítulo 3, apresentamos os modelos ARCH, GARCH e APARCH e o processo de estimação de seus parâmetros via método de máxima verossimilhança, considerando a distribuição Laplace assimétrica.

O Capítulo 4 traz os conceitos de probabilidade filtrada e suavizada, a descrição do modelo SW-GARCH, bem como sua extensão para o modelo SW-APARCH. Em seguida, apresentamos o processo de estimação via método de máxima verossimilhança e o algoritmo utilizado na implementação dos modelos tratados neste capítulo. Já no Capítulo 5, descrevemos o processo de estimação seguindo a abordagem bayesiana, o que permite a aplicação de métodos Markov Chain Monte Carlo (MCMC), que são ferramentas poderosas para o cálculo numérico de integrais.

No Capítulo 6, é apresentado um estudo de simulação dos modelos abordados, com o intuito de exemplificar os conceitos e validar os algoritmos desenvolvidos. No Capítulo 7 são apresentadas as aplicações com dados reais do banco Itaú Unibanco (ITUB3.SA) e do Índice BOVESPA (IBOVESPA). Finalmente, no Capítulo 8, descrevemos as considerações finais deste trabalho e propostas para a continuidade desta pesquisa.

Capítulo 2

Séries financeiras

As séries financeiras podem apresentar uma alta volatilidade além de geralmente não serem estacionárias na média, fazendo-se necessário o uso do chamado retorno.

Seja P_t o preço da ação no tempo t , o retorno é dado pelo logaritmo da razão entre o preço atual e o anterior, ou seja,

$$y_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right).$$

A característica de interesse nestas séries de retornos é a sua volatilidade, a qual está diretamente associada à variabilidade dos preços de uma determinada ação. Então, se os preços variam muito, diz-se que a ação é muito volátil. Outra característica interessante é que os retornos financeiros raramente apresentam tendências e sazonalidades, além de, em geral, serem não correlacionados, apresentando agrupamentos de volatilidades ao longo do tempo, bem como geralmente não possuindo uma distribuição incondicional normal.

Essas e outras características são exemplificados a seguir.

2.1 Fatos estilizados

Os fatos estilizados são regularidades estatísticas observadas em um grande número de séries financeiras de retornos. Pode-se resumir os principais fatos estilizados em estacionariedade, fraca dependência linear e dependência não linear, caudas pesadas da distribuição ou excesso de curtose e comportamento heterocedástico condicional, este reúne

características como aglomerados de volatilidade e efeito alavanca ¹.

Considerando os preços diários das ações do Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA), no período de 13/03/2002 a 12/03/2012, retirados do *site* <www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoEvolucaoDiaria.aspx?Indice=Ibovespa>, vamos analisar as principais características das séries financeiras.

A primeira característica das series financeiras comum a esta é uma média de retornos diários positiva normalmente próxima de zero, conforme a Tabela 2.1. Observando ainda a Tabela 2.1, temos a presença de assimetria e que o excesso de curtose da serie em análise é de mais de 1.5. Esta característica é muito comum para as series financeiras que são em sua maioria leptocúrticas.

Tabela 2.1: Estatísticas do retorno dos preços das ações IBOVESPA.

| Média | Mediana | Desvio padrão | Assimetria | Curtose | 1º quartil | 3º quartil |
|--------|---------|---------------|------------|---------|------------|------------|
| 0.0006 | 0.0014 | 0.0190 | -0.1241 | 4.5858 | -0.0092 | 0.0114 |

Na Figura 2.1 (a) temos a série dos preços diários das ações do IBOVESPA, que é visivelmente não estacionária. Na Figura 2.1 (b) temos o retorno desta série, no qual notamos os aglomerados de volatilidade. Na Figura 2.1 (c) temos o histograma dos retornos, com densidade empírica ajustada, facilitando a percepção das caudas pesadas. E na Figura 2.1 (d) temos um gráfico QxQ, em que os quantis empíricos dos dados são plotados contra os quantis da normal padrão. Se os dados fossem normalmente distribuídos, os pontos estariam sobre a reta, o que não ocorre.

¹O efeito alavanca aponta para o efeito do comportamento dos choques. Choques negativos afetam a volatilidade condicional em maior magnitude que os choques positivos.

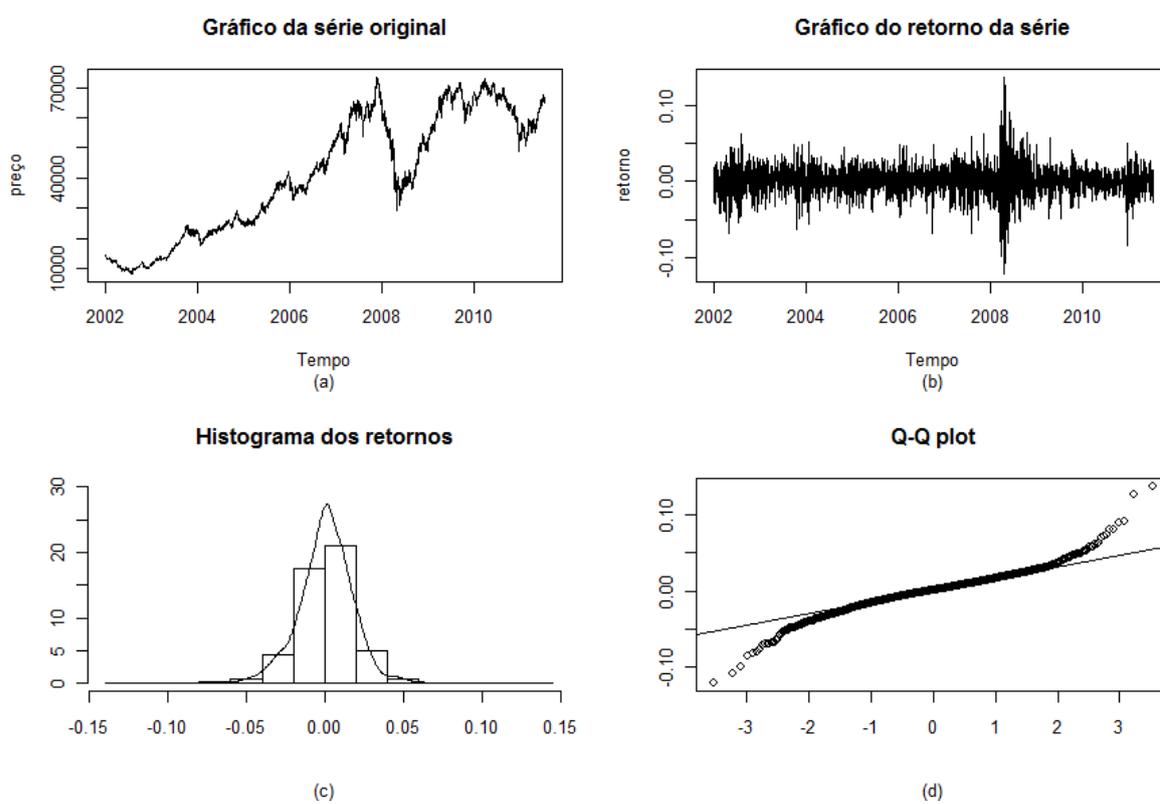


Figura 2.1: Série do Índice BOVESPA.

Capítulo 3

Modelos heterocedásticos

Se a variância de um conjunto de dados permanece constante ao longo do tempo, a série é considerada homocedástica. Contudo, se a variância de uma série flutua ao longo do tempo, ela é dita heteroscedástica.

Um modelo que incorpore a possibilidade da variância do erro não ser constante tem por objetivo capturar a evolução desta variância ao longo do tempo, o que é feito de modos distintos pelos vários modelos de volatilidade existentes.

Este capítulo apresenta alguns modelos heterocedásticos e o processo de estimação de seus parâmetros via método de máxima verossimilhança, considerando a distribuição Laplace assimétrica.

3.1 Modelos da família ARCH

Os modelos da família ARCH são modelos não lineares utilizados na determinação da volatilidade de séries temporais, principalmente financeiras, nas quais modelos lineares se provaram incompletos em função da incapacidade de explicar algumas características destas séries (Engle, 1982).

Nesta seção, descrevemos os modelos ARCH, GARCH e APARCH, bem como seus casos particulares, sendo estes alguns dos modelos mais aplicados em séries de retorno de ações.

3.1.1 ARCH

Os modelos autoregressivos de variância condicional, ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*), desenvolvidos por Engle (1982) são projetados para capturar o agrupamento de volatilidade e correlação. Nestes modelos, a variância condicional no tempo t depende do quadrado dos erros anteriores.

Dada uma série de dados y_t , o modelo ARCH(p) pode ser descrito como

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + z_t \\ z_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, \quad \epsilon_t \sim D(0, 1) \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i z_{t-i}^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que μ é a média do processo y_t e $D(0, 1)$ é a distribuição dos erros, com média zero e variância unitária.

A média do processo y_t pode ser modelada por um modelo ARMA(p,q) ou simplesmente por um valor médio constante ao longo do tempo. Para garantir que a variância condicional seja positiva, $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, p$) e, para que o modelo tenha covariância estacionária, $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$.

Na prática, observa-se a exigência de muitos parâmetros para o ajustamento correto dos modelos ARCH(p). Na tentativa de solucionar essa questão, Bollerslev (1986) expandiu o trabalho original de Engle.

3.1.2 GARCH

Uma importante extensão do modelo ARCH é a sua versão generalizada proposta por Bollerslev (1986), denominada GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*). Neste modelo, a função linear da variância condicional, h_t , inclui também variâncias passadas. Portanto, sendo o retorno o log da proporção de lucro (ou perda) sobre um investimento em relação à quantidade de capital investido, a volatilidade dos retornos depende dos quadrados dos erros anteriores e também da própria variância em momentos anteriores.

Assim, o modelo GARCH(p,q) pode ser descrito como

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \quad (3.2)$$

em que $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, e $q > 0$ é a ordem da dependência da variância atual com a variância passada, sendo os coeficientes $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q$.

Segundo Bollerslev (1986), para que esse modelo tenha covariância estacionária e, portanto, variância incondicional ou uma tendência de convergência, os coeficientes das ordens p e q devem satisfazer a condição

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1.$$

O modelo GARCH é um importante avanço na modelagem da volatilidade. O modelo leva em consideração três importantes características de séries temporais proeminentemente financeiras: o excesso de curtose, descritas por distribuições de probabilidade mais pontiagudas que uma Normal Padronizada, o agrupamento da volatilidade (*Cluster*) e a alavancagem ou efeito *leverage* (Bollerslev, 1986).

Apesar do modelo GARCH(1,1) ser a versão mais simples e mais utilizada em séries financeiras, Bollerslev & Wooldridge (1992) citam que o comportamento dessas séries também tem sido bem captado pelos modelos GARCH(1,2) ou GARCH(2,1).

Segundo Morettin (2004), uma desvantagem, tanto do modelo ARCH quanto do GARCH, é que ele trata retornos positivos e negativos de forma similar, já que quadrados dos retornos entram na fórmula da volatilidade. Contudo, sabe-se que, na prática a volatilidade reage de modo diferente a retornos positivos e negativos, uma vez que os negativos são seguidos por maiores aumentos de volatilidade do que os positivos.

3.1.3 APARCH

A equação da variância do modelo APARCH(p,q) (*Asymmetric Power ARCH*) de Ding, Granger e Engle (1993) pode ser escrita como

$$h_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|z_{t-i}| - \gamma_i z_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^\delta, \quad (3.3)$$

em que

$$\alpha_0 > 0, \delta > 0,$$

$\alpha_i \geq 0$, $-1 < \gamma_i < 1$ reflete o efeito de alavanca (*leverage*), $i = 1, \dots, p$
e $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q$.

Além disso, uma solução estacionária existe se $\sum_{i=1}^p \alpha_i(1 + \gamma_i^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ (Li, 2012).

Este modelo adiciona a flexibilidade de um expoente variando com um coeficiente de assimetria para levar o efeito alavanca em conta.

Segundo Wurtz *et al.* (2009), a família de modelos APARCH inclui os modelos ARCH e GARCH, além de cinco outras extensões ARCH como casos especiais:

- Modelo ARCH de Engle, quando $\delta = 2$, $\gamma_i = 0$ e $\beta_j = 0$.
- Modelo GARCH de Bollerslev, quando $\delta = 2$ e $\gamma_i = 0$.
- Modelo TS-GARCH de Taylor e Schwert, quando $\delta = 1$ e $\gamma_i = 0$.
- Modelo GJR-GARCH de Glosten, Jagannathan e Runkle, quando $\delta = 2$.
- Modelo T-ARCH de Zakoian, quando $\delta = 1$.
- Modelo N-ARCH de Higgins e Bera, quando $\gamma_i = 0$ e $\beta_j = 0$.
- Modelo Log-ARCH de Geweke e Pentula, quando $\delta \rightarrow 0$.

3.2 Estimação

Seja $\mathbf{y} = \{y_t; t = 1, \dots, T\}$ uma série de retornos, com $\mu = 0$. Por (3.1), temos que $\epsilon_t = y_t/\sqrt{h_t}$ e, portanto, podemos escrever a função densidade de probabilidade condicional de y_t em função da função densidade de probabilidade de ϵ_t . Logo,

$$f(y_t) = \frac{1}{\sqrt{h_t}} f_{\epsilon_t} \left(\frac{y_t}{\sqrt{h_t}} \right), \quad (3.4)$$

sendo f_{ϵ_t} a função densidade de probabilidade de ϵ_t .

Nesta seção, descrevemos em detalhes o processo de estimação via maximização da função de verossimilhança para os modelos GARCH(1,1) e APARCH(1,1) com distribuição Laplace assimétrica.

3.2.1 Distribuição Laplace assimétrica

Um método para transformar uma distribuição simétrica em assimétrica é proposto por Fernández *et al.*, (1995). Os autores consideram uma função densidade de probabilidade $f(\cdot)$ de uma distribuição unimodal e simétrica com relação a 0 (zero), ou seja, que a $f(x) = f(|x|)$. Em seguida a distribuição assimétrica é indexada por um escalar $\lambda > 0$ (Macerau, 2012).

A função densidade desta nova distribuição é dada por

$$f_X(x; \lambda) = \frac{2}{\lambda + \frac{1}{\lambda}} \begin{cases} f(\lambda x), & \text{para } x < 0, \\ f\left(\frac{x}{\lambda}\right), & \text{para } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

em que λ é o parâmetro de assimetria e $f_X(x)$ é a densidade de uma distribuição simétrica.

Assim, considerando a função densidade da distribuição Laplace dada por

$$f_X(x; \xi, \omega) = \frac{\sqrt{2}}{\omega} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\omega}(x - \xi)\right), & \text{para } x \geq \xi, \\ \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega}(x - \xi)\right), & \text{para } x < \xi; \end{cases} \quad (3.6)$$

a distribuição Laplace assimétrica é uma distribuição de probabilidade contínua com três parâmetros (ξ, ω, λ) e sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x; \xi, \omega, \lambda) = \frac{\sqrt{2}}{\omega} \frac{\lambda}{(1 + \lambda^2)} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}\lambda}{\omega}(x - \xi)\right), & \text{para } x \geq \xi, \\ \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega\lambda}(x - \xi)\right), & \text{para } x < \xi, \end{cases} \quad (3.7)$$

sendo ξ o parâmetro de locação ($\xi \in (-\infty, +\infty)$), ω o parâmetro de escala ($\omega > 0$) e λ o parâmetro de assimetria ($\lambda > 0$). A notação utilizada para essa distribuição é $AL(\xi, \omega, \lambda)$.

A distribuição Laplace assimétrica é obtida por meio da conversão de uma distribuição simétrica de Laplace em uma função densidade assimétrica, como descrito em Kotz *et al.* (2001). A distribuição simétrica de Laplace ou distribuição Exponencial dupla, é um caso particular da distribuição assimétrica de Laplace quando $\lambda = 1$.

Medidas características da distribuição assimétrica de Laplace

Suponha X uma variável aleatória com distribuição $AL(\xi, \omega, \lambda)$, a esperança de X é dada por

$$E[X] = \xi + \frac{\omega}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \right), \quad (3.8)$$

a variância de X é

$$\text{Var}[X] = \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2 \right), \quad (3.9)$$

e

$$\gamma_1 = 2 \frac{1/\lambda^3 - \lambda^3}{(1/\lambda^2 + \lambda^2)^{3/2}}, \quad \gamma_2 = 6 - \frac{12}{(1/\lambda^2 + \lambda^2)^2} \quad (3.10)$$

são os coeficientes de assimetria e curtose, respectivamente.

Conforme Kozubowski & Podgórski (1999), existem as seguintes relações entre os parâmetros

$$\frac{1}{\lambda} - \lambda = \frac{\xi}{\omega}, \quad \frac{1}{\lambda} + \lambda = \sqrt{4 + \left(\frac{\xi}{\omega} \right)^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2 = 2 + \left(\frac{\xi}{\omega} \right)^2. \quad (3.11)$$

De (3.4) e (3.11), temos que $\xi = 0$ e $\omega = h_t^{1/2}$ e, portanto,

$$f_{y_t}(y_t; h_t, \lambda) = \frac{\sqrt{2}}{h_t^{1/2}} \frac{\lambda}{(1 + \lambda^2)} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}\lambda}{h_t^{1/2}} y_t\right), & \text{para } y_t \geq 0, \\ \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{\lambda h_t^{1/2}} y_t\right), & \text{para } y_t < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Então, a distribuição dos erros é dada por

$$f_{\epsilon_t}(\epsilon_t; \lambda) = \sqrt{2} \frac{\lambda}{(1 + \lambda^2)} \begin{cases} \exp(-\sqrt{2}\lambda\epsilon_t), & \text{para } \epsilon_t \geq 0, \\ \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{\lambda}\epsilon_t\right), & \text{para } \epsilon_t < 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Sabemos que o método de estimação por máxima verossimilhança consiste em encontrar o valor $\hat{\omega}$ que torne máxima a função de verossimilhança, sendo $\hat{\omega}$ as estimativas de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros da distribuição em estudo, no caso do modelo GARCH(1,1), $\omega = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1; \lambda)$. Assim, para encontrar esse estimador aplicamos o logaritmo na função de verossimilhança e igualamos sua derivada em relação ao parâmetro de interesse a zero.

O logaritmo da função de verossimilhança para a distribuição assimétrica de Laplace, neste caso é

$$l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t) = \log(\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\log(h_t) + \log\left(\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right) + \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}\lambda}{h_t^{1/2}}y_t, & \text{para } y_t \geq 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{\lambda h_t^{1/2}}y_t, & \text{para } y_t < 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Seja θ o vetor com os parâmetros da variância condicional h_t . As derivadas de primeira ordem com respeito a estes parâmetros, são da forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2h_t} \left(\frac{\partial h_t}{\partial \theta} \right) + \begin{cases} \frac{\sqrt{2}\lambda}{2h_t^{3/2}}y_t \left(\frac{\partial h_t}{\partial \theta} \right) & , \text{ para } y_t \geq 0, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\lambda h_t^{3/2}}y_t \left(\frac{\partial h_t}{\partial \theta} \right) & , \text{ para } y_t < 0, \end{cases} \\ &= -\frac{1}{2h_t} \left(\frac{\partial h_t}{\partial \theta} \right) \times \begin{cases} \left[1 - \frac{\sqrt{2}\lambda}{h_t^{1/2}}y_t \right] & , \text{ para } y_t \geq 0, \\ \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{\lambda h_t^{1/2}}y_t \right] & , \text{ para } y_t < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

E, em relação ao parâmetro de assimetria λ , temos

$$\frac{\partial l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \lambda} = \frac{(1 - \lambda^2)}{\lambda(1 + \lambda^2)} - \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{h_t^{1/2}}y_t & , \text{ para } y_t \geq 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{\lambda^2 h_t^{1/2}}y_t & , \text{ para } y_t < 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Como este modelo é complexo, torna-se necessário utilizar procedimentos numéricos para a obtenção da solução do sistema acima.

3.2.2 Algoritmo BHHH

Berndt, Hall, Hall e Hausman (1974), desenvolveram um método iterativo para encontrar as estimativas de máxima verossimilhança desses parâmetros. O algoritmo BHHH pode ser descrito por

$$\omega^{(k+1)} = \omega^{(k)} + \tau^{(k)} \left(\sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \omega \partial \omega'} \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^T \frac{\partial l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \omega} \right) \quad (3.17)$$

em que $\tau^{(k)}$ é uma variável que determina o tamanho do salto na k-ésima iteração e esta variável é escolhida de forma a maximizar a função de verossimilhança.

Seja $V(\boldsymbol{\omega})$ uma função contínua e diferenciável e $\Upsilon(\boldsymbol{\omega}, \tau)$ sendo

$$\Upsilon(\boldsymbol{\omega}, \tau) = \frac{V(\boldsymbol{\omega} + \tau d) - V(\boldsymbol{\omega})}{\tau d' g} \quad (3.18)$$

com $d = Q.g$, $g = \frac{\partial V(\boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\omega}}$ e Q a inversa da matriz de segundas derivadas de $V(\boldsymbol{\omega})$.

A variável τ tem um valor que satisfaz a condição

$$\phi \leq \Upsilon(\boldsymbol{\omega}, \tau) \leq 1 - \phi, \quad (3.19)$$

sendo ϕ uma constante no intervalo $(0, 0.5)$.

Assim, as derivadas de segunda ordem com respeito aos parâmetros associados a h_t , seguem da forma, se $y_t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} &= \frac{1}{2h_t^2} \left(\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right) \left(\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \left[1 - \frac{\sqrt{2}\lambda}{h_t^{1/2}} y_t \right] - \frac{1}{2h_t} \left(\frac{\partial^2 h_t}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \right) \left[1 - \frac{\sqrt{2}\lambda}{h_t^{1/2}} y_t \right] \\ &\quad - \frac{1}{2h_t} \left(\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \left[\frac{\sqrt{2}\lambda}{2h_t^{3/2}} y_t \right] \left(\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

e se $y_t < 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} &= \frac{1}{2h_t^2} \left(\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right) \left(\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{\lambda h_t^{1/2}} y_t \right] - \frac{1}{2h_t} \left(\frac{\partial^2 h_t}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \right) \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{\lambda h_t^{1/2}} y_t \right] \\ &\quad - \frac{1}{2h_t} \left(\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \left[-\frac{\sqrt{2}}{2\lambda h_t^{3/2}} y_t \right] \left(\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Já, em relação a λ ,

$$\frac{\partial^2 l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \lambda^2} = \frac{(\lambda^4 - 4\lambda^2 - 1)}{\lambda^2(1 + \lambda^2)^2} + \begin{cases} 0 & , \text{ para } y_t \geq 0, \\ \frac{2\sqrt{2}}{\lambda^3 h_t^{1/2}} y_t & , \text{ para } y_t < 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Fazendo as derivadas parciais em λ e $\boldsymbol{\theta}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \lambda \partial \boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial^2 l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \lambda} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2h_t^{3/2}} y_t \left(\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \times \begin{cases} 1 & , \text{ para } y_t \geq 0, \\ \frac{1}{\lambda^2} & , \text{ para } y_t < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como a matriz formada pelas derivadas de segunda ordem pode não ser positiva definida, e portanto não inversível, ela é substituída pela matriz de informação de Fisher, I , dada por

$$I(\boldsymbol{\omega}) = -E \left[\frac{\partial^2 l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \boldsymbol{\omega} \partial \boldsymbol{\omega}'} \right].$$

Como $E(y_t) = 0$, de (3.20) a (3.23), temos que

$$\frac{\partial^2 l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} = \frac{1}{2h_t} \left(\frac{\partial^2 h_t}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \right) - \frac{1}{2h_t^2} \left(\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right) \left(\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right), \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2 l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \lambda^2} = \frac{-(\lambda^4 - 4\lambda^2 - 1)}{\lambda^2(1 + \lambda^2)^2} \quad (3.25)$$

e

$$\frac{\partial^2 l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \lambda \partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial^2 l_{y_t}(h_t, \lambda; y_t)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \lambda} = 0. \quad (3.26)$$

As derivadas de h_t em relação a cada parâmetro de $\boldsymbol{\theta}$ são um processo recursivo, já que dependem de suas respectivas derivadas no instante $t - i$.

Considerando o modelo GARCH(1,1), em que $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} &= 1 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_0}, & \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} &= z_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_1}, & \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} &= h_{t-1} + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta_1}, \\
\frac{\partial^2 h_t}{\partial \alpha_0^2} &= \beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}}{\partial \alpha_0^2}, & \frac{\partial^2 h_t}{\partial \alpha_1^2} &= \beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}}{\partial \alpha_1^2}, & \frac{\partial^2 h_t}{\partial \beta_1^2} &= 2 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta_1} + \beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}}{\partial \beta_1^2}, \\
\frac{\partial^2 h_t}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1} &= \frac{\partial^2 h_t}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_0} = \beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1}, & \frac{\partial^2 h_t}{\partial \alpha_0 \partial \beta_1} &= \frac{\partial^2 h_t}{\partial \beta_1 \partial \alpha_0} = \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_0} + \beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}}{\partial \alpha_0 \partial \beta_1} \quad \text{e} \\
\frac{\partial^2 h_t}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1} &= \frac{\partial^2 h_t}{\partial \beta_1 \partial \alpha_1} = \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_1} + \beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Tomando agora o modelo APARCH(1,1) com $\delta = 2$, $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, os termos que sofrem alguma alteração são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha_1} &= (|z_{t-1}| - \gamma_1 z_{t-1})^2 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}^2}{\partial \alpha_1}, & \frac{\partial h_t^2}{\partial \gamma_1} &= 2\alpha_1 (\gamma_1 z_{t-1}^2 + |z_{t-1}| z_{t-1}) + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}^2}{\partial \gamma_1}, \\
\frac{\partial^2 h_t^2}{\partial \gamma_1^2} &= 2\alpha_1 z_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}^2}{\partial \gamma_1^2}, & \frac{\partial^2 h_t^2}{\partial \gamma_1 \partial \beta_1} &= \frac{\partial^2 h_t^2}{\partial \beta_1 \partial \gamma_1} = \frac{\partial h_{t-1}^2}{\partial \gamma_1} + \beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}^2}{\partial \gamma_1 \partial \beta_1}, \\
\frac{\partial^2 h_t^2}{\partial \alpha_1 \partial \gamma_1} &= \frac{\partial^2 h_t^2}{\partial \gamma_1 \partial \alpha_1} = 2 (\gamma_1 z_{t-1}^2 + |z_{t-1}| z_{t-1}) + \beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}^2}{\partial \alpha_1 \partial \gamma_1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 h_t^2}{\partial \alpha_0 \partial \gamma_1} = \frac{\partial^2 h_t^2}{\partial \gamma_1 \partial \alpha_0} = \beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}^2}{\partial \alpha_0 \partial \gamma_1}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Os demais modelos também seguem o processo de estimação descrito acima, com mudança apenas nas derivadas de h_t com respeito a seus respectivos parâmetros.

Além disso, o pacote ‘fgarch’ do *software* R, ajusta todos os modelos descritos na seção anterior considerando as distribuições normal, t-Student e generalizada do erro¹, bem como suas respectivas versões assimétricas, segundo o método de Fernandez & Steel (1998). E, segundo o resultado de Trindade *et al.* (2010) a distribuição generalizada do erro com parâmetro de forma igual a 1, coincide com a distribuição Laplace.

¹Também conhecida por Exponencial Potência, a distribuição generalizada do erro tem densidade definida por

$$f_X(x; \mu, \sigma, \rho) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{[2\rho^{1/\rho} \Gamma(1 + 1/\rho)]} \exp\left(-\frac{1}{\rho} \left|\frac{x - \mu}{\sigma}\right|^\rho\right)$$

sendo μ o parâmetro de localização, σ o parâmetro de escala e ρ o parâmetro de forma.

Capítulo 4

Modelos com mudança de regime

Muitas das séries econômicas apresentam variações consideráveis na variância do processo ao longo do tempo.

Hamilton (1989) mostrou que a série do PIB norte americano pode ser dividida em dois períodos distintos; o primeiro onde a série está em alta constante, determinando um período em que o retorno apresenta baixa variabilidade e o segundo onde a série está em baixa, determinando um período de alta variabilidade na série do retorno.

Considerando a idéia de mudança de regime na variância da série com a utilização de um processo markoviano de primeira ordem, Cai (1994) apresentou uma nova abordagem para modelar, de forma mais realista, a variabilidade das séries temporais financeiras. Seu modelo combina o modelo ARCH desenvolvido por Engle (1982) e o modelo Markov-switching proposto por Hamilton (1989), introduzindo a mudança de regime no termo constante da variância condicional (SW-ARCH aditivo).

Em seguida, Hamilton & Susmel (1994) apresentaram uma classe de modelos Markov-switching ARCH, que considera a mudança de regime através de uma variável de escala, a qual multiplica a variância condicional (SW-ARCH multiplicativo), e concluíram que as inovações fundamentais são melhores descritas como provenientes de uma distribuição t-Student com baixos graus de liberdade do que por uma distribuição Normal.

Dueker (1997) descreveu o modelo SW-GARCH utilizando o processo desenvolvido por Kim(1994), o qual torna o procedimento de estimação via função de máxima verossimilhança viável, e considera que os resíduos do modelo seguem as distribuições Normal e t-Student.

Neste capítulo, descrevemos os modelos SW-GARCH e SW-APARCH. E, con-

siderando a distribuição Laplace assimétrica para a componente do erro de cada modelo, apresentamos o processo de estimação dos parâmetros e o algoritmo utilizado para isso.

4.1 SW-GARCH

Levando em conta o modelo de Cai (1994), o modelo auto-regressivo heterocedástico generalizado com mudança de regime SW(N)-GARCH(p,q) aditivo, para uma série $Y_t = y_t$, $t = 1, \dots, T$ e $N = 2$ (Dueker, 1997) é dado por

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + z_t \\ z_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, \quad \epsilon_t \sim D(0, 1) \\ h_t &= \alpha_{00} + \alpha_{01} S_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \end{aligned} \tag{4.1}$$

sendo

N o numero de regimes; μ o valor esperado do processo y_t ;

ϵ_t uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas;

S_t a variável estado que assume valores (0 ou 1).

Esse modelo segue as seguintes restrições que garantem a validade do modelo: $\alpha_{00} > 0$ e $\alpha_{01} > 0$, $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$.

A variável estado S_t , com $N = 2$ estados, segue um processo de mudança de regime markoviano de primeira ordem com as probabilidades de transição dadas por

$$P(S_t = 0 | S_{t-1} = 0) = p_{00} \quad e \quad P(S_t = 1 | S_{t-1} = 1) = p_{11}.$$

Lembramos que um processo de Markov é um processo estocástico em que a probabilidade de o sistema estar no estado i no período $(t + 1)$ depende somente do estado em que o sistema está no período t . Alguns conceitos importantes desse tipo de processo serão mencionados na seção sobre estimação.

4.2 SW-APARCH

Dado o modelo SW(N)-GARCH(p,q) descrito na seção anterior, propomos, a seguir, o modelo SW(N)-APARCH(p,q).

Considerando, então, os modelos (3.3) e (4.1) temos

$$h_t^\delta = \alpha_{00} + \alpha_{01}S_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|z_{t-i}| - \gamma_i z_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^\delta. \quad (4.2)$$

A fim de facilitar os cálculos, sob abordagem clássica consideramos o parâmetro δ fixo, $\delta = 2$, tendo assim o modelo GJR-GARCH.

Assim, este modelo é escrito na forma

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + z_t \\ z_t &= \epsilon_t h_t, \quad \epsilon_t \sim D(0, 1) \\ h_t^2 &= \alpha_{00} + \alpha_{01}S_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|z_{t-i}| - \gamma_i z_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

As restrições que garantem a convergência deste modelo são: $\alpha_{00} > 0$ e $\alpha_{01} > 0$, $-1 \leq \gamma_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^p \alpha_i (1 + \gamma_i^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$, $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$ e $0 \leq p_{ij} \leq 1$.

4.3 Estimação

Nesta seção apresentamos o algoritmo desenvolvido por Kim(1994) que estima a probabilidade de $S_t = j$, para $j = 1, \dots, N$. Esse algoritmo viabiliza o processo de estimação, dos modelos com mudança de regime, via logaritmo da função de verossimilhança.

Primeiramente, vamos retomar alguns aspectos importantes sobre cadeias de Markov.

Seja S_t uma variável aleatória que assume os valores inteiros em $\{1, 2, \dots, N\}$, sendo N o número total de regimes ou estados. A probabilidade do regime S_t assumir um particular valor j depende somente do regime mais recente S_{t-1} . Essa probabilidade é conhecida como probabilidade de transição, em que p_{ij} representa a probabilidade de mudança do estado i para o estado j , e $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$.

A matriz \mathbf{P} , chamada de matriz de transição, contém as probabilidades de transição e é expressa por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}.$$

Considere, então, a probabilidade de estar no regime j no instante t dado $Y = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_1)$ e o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\omega}$, $P(S_t = j|Y_t; \boldsymbol{\omega})$. Esta probabilidade pode ser calculada de duas maneiras. A probabilidade filtrada que é obtida a partir das informações presentes até o instante t e a probabilidade suavizada que é obtida a partir das informações obtidas até o instante T , ou seja, com todos os dados possíveis (Amorim, 2005).

Sendo assim, as probabilidades filtradas $\xi_{t|t} = P(S_t = j|Y_t; \boldsymbol{\omega})$, são obtidas através da iteração do seguinte par de equações

$$\hat{\xi}_{t|t} = \frac{\hat{\xi}_{t|t-1}(\times)\eta_t}{\mathbf{1}'(\hat{\xi}_{t|t-1}(\times)\eta_t)}, \quad (4.4)$$

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = \mathbf{P}\hat{\xi}_{t|t}, \quad (4.5)$$

em que \mathbf{P} representa a matriz de transição com dimensão $(N \times N)$, $\mathbf{1}'$ é um vetor com dimensão $(N \times 1)$ de valores unitários, (\times) denota a multiplicação elemento a elemento¹ e η_t representa um vetor com dimensão $(N \times 1)$, sendo o k -ésimo elemento a função de densidade condicional da observação y_t para o k -ésimo estado (detalhes em Daouk & Guo, 2004).

No caso da distribuição Laplace assimétrica e $N = 2$ estados, o vetor η_t é dado por

¹Ex.: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\mathbf{A}(\times)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 16 \times 8 & 4 \times 2 \\ 5 \times 5 & 12 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 & 8 \\ 25 & 36 \end{bmatrix}.$$

$$\eta_t = \begin{pmatrix} \eta_t(1) \\ \eta_t(2) \end{pmatrix}$$

sendo

$$\eta_t(k) = \frac{\sqrt{2}}{h_t(k)^{1/2}} \frac{\lambda}{(1 + \lambda^2)} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}\lambda}{h_t(k)^{1/2}} y_t\right), & \text{para } y_t \geq 0, \\ \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{\lambda h_t(k)^{1/2}} y_t\right), & \text{para } y_t < 0. \end{cases}$$

Na iteração das equações (4.4) e (4.5) e no cálculo das probabilidades filtradas para $t = 1, 2, \dots, T$, Hamilton & Susmel (1994) sugerem o valor inicial de $\xi_{1|0} = 1/N$.

As probabilidades suavizadas $\xi_{t|T} = P(S_t = j | Y_T; \boldsymbol{\omega})$, são obtidas pelo algoritmo desenvolvido por Kim (1994), dado por

$$\hat{\xi}_{t|T} = \hat{\xi}_{t|t}(\times) \{ \mathbf{P}' \cdot [\hat{\xi}_{t+1|T}(\div) \hat{\xi}_{t+1|t}] \} \quad (4.6)$$

em que sinal (\div) representa a divisão termo a termo ² e a probabilidade suavizada é calculada de $t = T, \dots, 1$, iniciando com valor de $\hat{\xi}_{T|T}$ obtido por (4.4) com $t = T$.

Além das probabilidades filtradas e suavizadas, que determinam a probabilidade do estado S_t no instante t , temos a necessidade de estimar as probabilidades de transição da cadeia de Markov em estudo.

Hamilton (1990) apresenta o estimador de máxima verossimilhança para as probabilidades de transição em função da probabilidade suavizada dado por

$$\hat{p}_{jj} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} P(S_t = j, S_{t+1} = j | Y_T; \hat{\boldsymbol{\omega}})}{\sum_{t=1}^{T-1} P(S_t = j | Y_T; \hat{\boldsymbol{\omega}})}. \quad (4.7)$$

²Ex.: Considere \mathbf{A} e \mathbf{B} do exemplo anterior. Então,

$$\mathbf{A}(\div)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 16 \div 8 & 4 \div 2 \\ 5 \div 5 & 12 \div 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Com isso, o processo de estimação do vetor ω segue um processo semelhante ao descrito na Seção 3.2. O diferencial é o surgimento dos parâmetros α_{0k} , para $k = 1, \dots, N$.

Ressaltamos que os detalhes do cálculo das probabilidades filtradas, suavizadas e de transição são encontrados em Amorim (2005).

4.4 Algoritmo

Os modelos SW-GARCH e SW-APARCH foram implementados na linguagem **R**, considerando as etapas apresentadas por Amorim (2005).

Dada a série z_t para $t = 1, \dots, T$, o processo de implementação segue os seguintes passos:

Passo 1: Calcular os valores de z_t^2 e h_t para $t \geq 0$, pela variância do processo;

Passo 2: Determinar os valores iniciais dos parâmetros de interesse de cada modelo, ω ;

Passo 3: Determinar os valores iniciais para as probabilidades de transição p_{11} e p_{22} ;

Passo 4: Calcular a probabilidade filtrada dada pela equação (4.5), para toda a série utilizando o vetor de parâmetros $\omega^{(i)}$ e as probabilidades de transição no instante i ;

Passo 5: Calcular a probabilidade suavizada, dada pela equação (4.6), para toda a série;

Passo 6: Atualizar as probabilidades de transição pela equação (4.7);

Passo 7: Calcular h_t para $t = 1, \dots, T$, baseado no vetor de parâmetros $\omega^{(i)}$;

Passo 8: Calcular os vetores com as derivadas de primeira ordem, em relação ao vetor ω ;

Passo 9: Calcular a matriz Hessiana, com as segundas derivadas em relação ao vetor ω ;

Passo 10: Gerar um candidato $\tau^{(i)}$ pelos critérios apresentados em (3.18) e (3.19);

Passo 11: Obter o valor de $\omega^{(i+1)}$, via algoritmo BHHH, dado por (3.17).

Repetimos os passos de **4** a **11** até que um critério de convergência ou um número máximo de iterações pré estabelecidos sejam atingidos.

Na implementação do algoritmo para estimação dos parâmetros de cada modelo, o critério de convergência adotado foi o do erro menor que 10^{-9} , sendo o erro dado por

$$\text{ERRO}_{(i)} = \sum_{k=1}^K \left(\omega_k^{(i+1)} - \omega_k^{(i)} \right)^2,$$

em que K é o número de parâmetros do vetor $\boldsymbol{\omega}$ e i é a i -ésima iteração. Logo, se o erro for menor que 10^{-9} , dizemos que o algoritmo convergiu.

Capítulo 5

Abordagem Bayesiana para modelos com mudança de regime

Na literatura, verificamos que alguns autores que atuam na área encontram dificuldades no processo de estimação via maximização da função de verossimilhança dos modelos GARCH com mudança de regime. Esta dificuldade está relacionada à estrutura do modelo GARCH, visto que a variância condicional depende de todo o passado das variáveis estado (Amorim, 2005).

Considerando um modelo com mudança de regime, para N estados e T observações, temos N^T sequências diferentes de S_t para avaliar e maximizar a função de verossimilhança. Na prática isso muitas vezes é inviável.

A inferência bayesiana em modelos ARCH foi implementada usando a técnica de amostragem proposta por Geweke (1989) e, mais recentemente, usando os métodos Markov Chain Monte Carlo (MCMC), apresentados em Bauwens & Lubrano (1998), Kim *et. al* (1998), Nakatsuma (2000), Vrontos *et. al* (2000) e Mitsui & Watanabe (2003).

Das & Yoo (2004) apresentam uma análise bayesiana para o modelo GARCH aditivo com mudança de regime. Segundo os autores, na inferência bayesiana, a variável estado S_t é tratada como uma variável aleatória e a função de verossimilhança é construída assumindo conhecida a sequência de estados S_t .

Neste capítulo apresentamos o processo de estimação via abordagem bayesiana dos modelos SW-GARCH e SW-APARCH, descrevendo os métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC).

5.1 Simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov

Na abordagem Bayesiana antes de qualquer dado ser coletado deve-se assumir uma distribuição de probabilidade para os parâmetros desconhecidos do modelo, a qual deve representar toda informação existente sobre estes parâmetros, a distribuição *a priori*. Após os dados serem observados, a informação disponível é combinada, através do Teorema de Bayes, com a informação proveniente dos dados, que é representada pela função de verossimilhança associada à amostra observada. O que resulta na distribuição *a posteriori*, que contém toda informação após os dados terem sido observados (Torman & Vigo, 2007).

Em muitos problemas pode ser difícil obter analiticamente a distribuição *a posteriori* dos parâmetros. Uma maneira de resolver isso é por meio dos métodos MCMC (do inglês, Markov Chain Monte Carlo) que são métodos de simulação estocástica baseados em cadeias de Markov.

Em um processo de cadeias de Markov os pontos são gerados em sequência e cada novo ponto gerado depende apenas do ponto anterior. O objetivo de um método MCMC é gerar um conjunto de pontos para uma certa distribuição de probabilidades. Os algoritmos de Gibbs *Sampling* e de Metropolis-Hastings são dois métodos para gerar amostras que serão utilizados neste trabalho.

5.1.1 Algoritmo Gibbs *Sampling*

O algoritmo Gibbs *Sampling* (Geman & Geman, 1984) é aplicável quando a distribuição conjunta não é conhecida explicitamente ou é difícil de ser obtida analiticamente, mas a distribuição condicional de cada variável é conhecida e é fácil de se simular.

Considere o vetor aleatório $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ com distribuições condicionais completas, $\pi_i(\omega_i) = \pi(\omega_i | \omega_{-i})$, $i = 1, \dots, k$. O algoritmo é da forma

1. Especifique um valor inicial $\boldsymbol{\omega}^{(0)}$ e inicialize o contador de iterações $j = 1$;

2. Obtenha um novo valor $\omega^{(j)}$ através de sucessivas gerações de valores

$$\begin{aligned}\omega_1^{(j)} &\sim \pi\left(\omega_1|\omega_2^{(j-1)}, \omega_3^{(j-1)}, \dots, \omega_k^{(j-1)}\right) \\ \omega_2^{(j)} &\sim \pi\left(\omega_2|\omega_1^{(j)}, \omega_3^{(j-1)}, \dots, \omega_k^{(j-1)}\right) \\ &\vdots \\ \omega_k^{(j)} &\sim \pi\left(\omega_k|\omega_1^{(j)}, \omega_2^{(j)}, \dots, \omega_{k-1}^{(j)}\right);\end{aligned}$$

3. Incremente o contador de j para $j + 1$ e volte ao passo 2 até obter convergência.

À medida que o número de interações aumenta, a cadeia se aproxima da sua condição de equilíbrio. Após a convergência, os valores resultantes formam uma amostra de $\pi(\omega)$.

5.1.2 Algoritmo Metropolis-Hastings

Os algoritmos Metropolis-Hastings (Metropolis *et. al* (1953) e Hastings (1970)) usam a ideia de que um valor é gerado de uma distribuição auxiliar e aceito com uma dada probabilidade. Este mecanismo de correção garante a convergência da cadeia para a distribuição de equilíbrio, que neste caso é a distribuição *a posteriori*.

Este algoritmo é muito utilizado por ser pouco restritivo com relação a distribuição *a posteriori*. Pois para o seu uso, é suficiente e necessário ter apenas a distribuição *a posteriori* a menos de uma constante de proporcionalidade e escolher uma distribuição proposta adequada.

Suponha que a cadeia esteja no estado ω e que o valor de ω' seja gerado de uma distribuição proposta $q(\cdot|\omega)$. Esta distribuição pode depender do estado atual da cadeia, como por exemplo, $q(\cdot|\omega)$ poderia ser uma distribuição normal centrada em ω . Então, o novo valor ω' é aceito com probabilidade

$$\alpha(\omega, \omega') = \min\left(1, \frac{\pi(\omega')q(\omega|\omega')}{\pi(\omega)q(\omega'|\omega)}\right), \quad (5.1)$$

sendo π a distribuição a ser simulada.

Assim, o algoritmo Metropolis-Hastings (MH) pode ser especificado pelos seguintes passos:

1. Especifique um valor inicial $\omega^{(0)}$ e inicialize o contador de iterações $j = 1$;
2. Gere um novo valor ω' da distribuição $q(\cdot|\omega)$;
3. Calcule a probabilidade de aceitação $\alpha(\omega, \omega')$ e gere um valor u de $U \sim U(0, 1)$;
4. Se $u \leq \alpha$, então aceite o novo valor e faça $\omega^{(j+1)} = \omega'$, caso contrário rejeite e faça $\omega^{(j+1)} = \omega$;
5. Incremente o contador de j para $j + 1$ e volte ao passo 2.

A distribuição geradora de candidatos deve ser escolhida com cuidado para agilizar a convergência do algoritmo MCMC.

5.2 Estimação

Considerando os modelos SW-GARCH e SW-APARCH apresentados no Capítulo 4, vamos construir a distribuição *a posteriori* via regra de Bayes. A densidade *a posteriori* é

$$\begin{aligned} P(\omega, S|Y) &\propto P(\omega, S)P(Y|\omega, S) \\ &\propto P(\omega)P(S|\omega)P(Y|\omega, S). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Seja $P(\omega)$ a densidade *a priori* para os parâmetros. Sob a hipótese de independência temos que

$$\begin{aligned} P(\omega) &= P(\theta)P(\lambda)P(p_{00})P(p_{11}) \\ &= P(\theta)N(\mu_\lambda, \sigma_\lambda)I_{(\lambda>0)}Beta(u_{00}, u_{01})Beta(u_{11}, u_{10}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

sendo θ o vetor de parâmetros de cada modelo (SW-GARCH ou SW-APARCH), $N(\cdot)$ e $Beta(\cdot)$ as funções densidade normal e beta, respectivamente, μ_λ , σ_λ , u_{00} , u_{01} , u_{11} e u_{10} são os hiperparâmetros das distribuições *a priori* e $I_{(\cdot)}$ é a função indicadora¹.

O segundo termo de (5.2), $P(S|\omega)$, é a densidade *a priori* S_t , dependendo apenas das probabilidades de transição, p_{00} e p_{11} , e seguindo um processo markoviano de primeira ordem,

¹Função indicadora de um conjunto é a função que indica se o elemento pertence ao conjunto, assumindo neste caso o valor 1, e 0 em caso contrário.

$$\begin{aligned}
P(S|\boldsymbol{\omega}) &= P(S|p_{00}, p_{11}) \\
&= \prod_{t=1}^{T-1} P(S_{t+1}|S_t, p_{00}, p_{11}) \\
&= p_{00}^{n_{00}} p_{01}^{n_{01}} p_{11}^{n_{11}} p_{10}^{n_{10}} \\
&= p_{00}^{n_{00}} (1 - p_{00})^{n_{01}} p_{11}^{n_{11}} (1 - p_{11})^{n_{10}},
\end{aligned} \tag{5.4}$$

em que n_{ij} refere-se ao número de transições do estado i para o estado j .

O último termo de (5.2), $P(Y|\boldsymbol{\omega}, S)$, é a função de verossimilhança dos dados, no nosso caso dada por

$$\begin{aligned}
P(Y|\boldsymbol{\omega}, S) &= \prod_{t=1}^T P(y_t|Y_{t-1}, S_t, \dots, S_1, \boldsymbol{\omega}) \\
&= \prod_{t=1}^T \frac{\sqrt{2}}{h_t^{1/2}} \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}\lambda}{h_t^{1/2}} y_t\right), & \text{para } y_t \geq 0, \\ \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{\lambda h_t^{1/2}} y_t\right), & \text{para } y_t < 0. \end{cases} \tag{5.5}
\end{aligned}$$

A função densidade marginal *a posteriori* de um parâmetro do vetor θ e da variável estado S_t podem ser obtidas a partir da distribuição conjunta via processo de integração. Quando a integração analítica não é viável, é usual recorrer a métodos de simulação estocástica como Gibbs *Sampling* e Metropolis-Hastings.

Sendo a distribuição *a posteriori* conhecida, vamos simular a variável S .

Pelo sistema de movimento único proposto por Carlin *et. al* (1992), a distribuição a posteriori condicional de S_t é derivada da Equação (5.2) da forma

$$\begin{aligned}
P(S_t|S_{\neq t}, Y, \boldsymbol{\omega}) &\propto P(S|\boldsymbol{\omega})P(Y|S, \boldsymbol{\omega}) \\
&\propto P(S_{t+1}|S_t, \boldsymbol{\omega})P(S_t|S_{t-1}, \boldsymbol{\omega}) \\
&\quad P(y_t|Y_{t-1}, S_t, \dots, S_1, \boldsymbol{\omega}) \dots P(y_T|Y_{t-1}, S_T, \dots, S_1, \boldsymbol{\omega}) \\
&\propto P(S_{t+1}|S_t, \boldsymbol{\omega})P(S_t|S_{t-1}, \boldsymbol{\omega}) \\
&\quad \prod_{s=t}^T \frac{\sqrt{2}}{h_s^{1/2}} \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}\lambda}{h_s^{1/2}} y_s\right), & \text{para } y_s \geq 0, \\ \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{\lambda h_s^{1/2}} y_s\right), & \text{para } y_s < 0. \end{cases} \tag{5.6}
\end{aligned}$$

Calculamos a probabilidade $P(S_t = 0|S_{\neq t}, Y, \boldsymbol{\omega})$ e simulamos um valor u de U com distribuição uniforme $(0, 1)$. Se u for menor que essa probabilidade, então $S_t = 0$, caso

contrário $S_t = 1$.

Tendo S , precisamos gerar agora as probabilidades de transição p_{ij} . A distribuição condicional de p_{00} é dada por

$$\begin{aligned} P(p_{00}|Y, S, \boldsymbol{\omega}_{-p_{00}}) &\propto P(p_{00})P(S|p_{00}) \\ &\propto p_{00}^{u_{00}-1}(1-p_{00})^{u_{01}-1}p_{00}^{n_{00}}(1-p_{00})^{n_{01}} \\ &\propto p_{00}^{n_{00}+u_{00}-1}(1-p_{00})^{n_{01}+u_{01}-1}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Portanto, p_{00} tem distribuição beta, $p_{00}|S \sim \text{Beta}(u_{00} + n_{00}, u_{01} + n_{01})$. Neste caso, geramos p_{00} por *Gibbs Sampling*.

A probabilidade de transição p_{11} é gerada de maneira similar a p_{00} . Geramos, p_{11} da distribuição beta, $p_{11}|S \sim \text{Beta}(u_{11} + n_{11}, u_{10} + n_{10})$ ².

Com isso, conseguimos gerar $\boldsymbol{\theta}$ e λ . Pelo algoritmo MH, uma forma de gerar candidatos é via passeio aleatório (Chib & Greenberg, 1995), que foi utilizado para λ . Neste caso fazemos $\lambda' = \lambda^{(j)} + \eta$, em que η tem distribuição com média zero e variância σ_η^2 , sendo esta variância escolhida de forma a controlar a proporção de aceitação. O vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ de cada modelo aqui considerado será gerado de modos distintos, a fim de garantir suas respectivas restrições.

5.2.1 MCMC em Modelos SW-GARCH

Como vimos anteriormente, o volatilidade do moledo SW(2)-GARCH(p,q) é dada por

$$h_t = \alpha_{00} + \alpha_{01}S_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}. \quad (5.8)$$

²Para maiores números de regime, $N > 2$, (5.4) se tornaria

$$P(S|\boldsymbol{\omega}) = p_{00}^{n_{00}} p_{01}^{n_{01}} \dots p_{0N}^{n_{0N}} p_{10}^{n_{10}} \dots p_{1N}^{n_{1N}} \dots p_{NN}^{n_{NN}}.$$

Para cada linha da matriz \mathbf{P} , $p_n = (p_{n,0}, p_{n,1}, \dots, p_{n,N})$, ter distribuição Dirichlet. Uma distribuição *a priori* seria assim uma distribuição Dirichlet com hiperparâmetros $\nu_n = (\nu_{n,0}, \nu_{n,1}, \dots, \nu_{n,N})$. E a distribuição *a posteriori* é então uma distribuição Dirichlet com parâmetros $\nu_{i,j} + \eta_{i,j}$ (detalhes em Henneke *et. al* (2011)).

E suas restrições são $\alpha_{00} > 0$ e $\alpha_{01} > 0$, $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$.

Neste trabalho, consideramos o modelo SW(2)-GARCH(1,1). Logo, $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_1, \beta_1)$ e , utilizando as distribuições *a priori* propostas em Ardia (2006), temos

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\theta}) &= P(\alpha_{00})P(\alpha_{01})P(\alpha_1)P(\beta_1) \\ &= N(\mu_{\alpha_{00}}, \sigma_{\alpha_{00}}^2)I_{(\alpha_{00}>0)}N(\mu_{\alpha_{01}}, \sigma_{\alpha_{01}}^2)I_{(\alpha_{01}>0)} \\ &\quad N(\mu_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_1}^2)I_{(\alpha_1 \geq 0)}N(\mu_{\beta_1}, \sigma_{\beta_1}^2)I_{(\beta_1 \geq 0)}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

sendo $I_{(\cdot)}$ a função indicadora e, portanto, a densidade normal $N(\cdot)$ é truncada nos limites de $I_{(\cdot)}$.

Utilizando o algoritmo MH com passeio aleatório geramos candidatos para α_{00} e α_{01} , de modo semelhante ao descrito para λ .

Já no caso de α_1 e β_1 , devemos satisfazer a restrição $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Para isto, inicialmente optamos por gerar os candidatos seguindo distribuição uniforme com parâmetros zero e $1 - s$, ou seja, $\alpha'_1 \sim U(0, 1 - \beta_1)$ e $\beta'_1 \sim U(0, 1 - \alpha_1)$. Porém, a taxa de rejeição foi muito alta, em torno de 0.95 para cada parâmetro.

Com isto, decidimos propor a distribuição Beta como geradora de candidatos para estes dois parâmetros. Esta distribuição está definida no intervalo $(0, 1)$ e seus parâmetros (a, b) definem sua forma (Figura 5.1). Se $a = b$, a distribuição é simétrica em torno de 0.5, se $a > b$, a assimetria é negativa (ou a esquerda) e no caso de $a < b$, sua assimetria é positiva (ou a direita).

Definição 5.1. *Uma variável aleatória X tem distribuição Beta(a, b) se*

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad (5.10)$$

sendo Γ a função gama.

A esperança, a variância e a moda são dadas por

$$E[X] = \frac{a}{a+b}, \quad Var[X] = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2} \quad e \quad Moda[X] = \frac{a-1}{a+b-2}, \quad (5.11)$$

respectivamente.

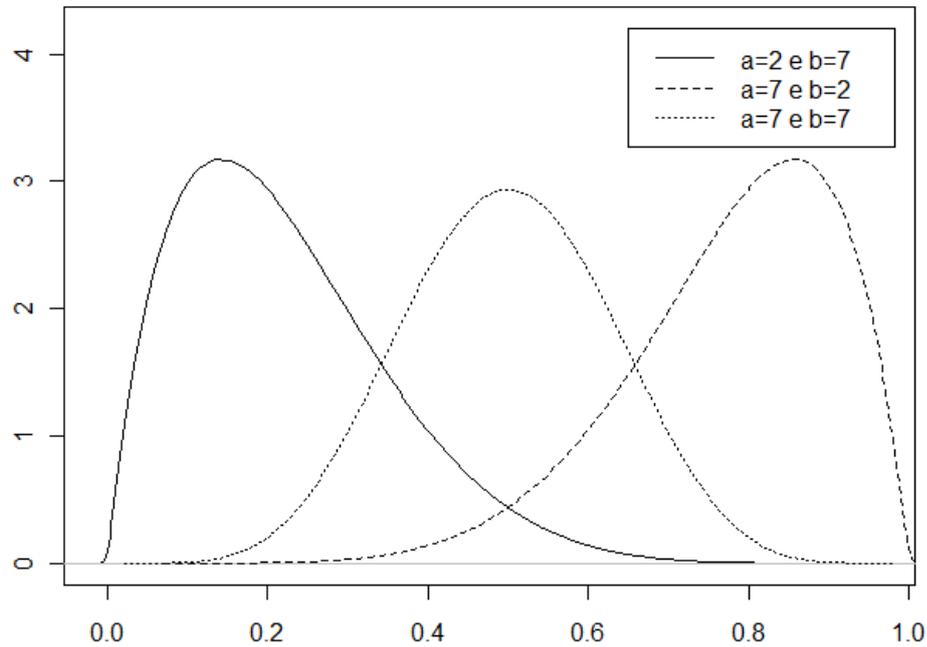


Figura 5.1: Curvas da densidade da distribuição Beta para alguns valores de a e b .

Para o parâmetro α_1 , por exemplo, queremos que o $\alpha_1^{(j)}$ se aproxime da moda da distribuição Beta. Neste caso, fazemos a seguinte relação

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(j)} &= \frac{a-1}{a+b-2} \\ \alpha_1^{(j)}(a+b-2) &= a-1 \\ 1 + \alpha_1^{(j)}(b-2) &= a(1 - \alpha_1^{(j)}) \\ a &= \frac{1 + \alpha_1^{(j)}(b-2)}{1 - \alpha_1^{(j)}}.\end{aligned}$$

Assim, para garantir a restrição $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, truncamos esta distribuição Beta (chamamos de BetaT) e fazemos $\alpha_1^{(j)} \sim \text{BetaT}(a, b, t)$, com $a = \frac{1 + \alpha_1^{(j)}(b-2)}{1 - \alpha_1^{(j)}}$, b escolhido de forma a controlar o nível de aceitação e $t = 1 - \beta_1$, sendo então, a densidade da distribuição geradora de candidatos dada por

$$f(\alpha_1^{(j)}) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \alpha_1'^{a-1} (1 - \alpha_1')^{b-1} \frac{1}{P(Y < t)} \quad (5.12)$$

em que $Y \sim \text{Beta}(a, b)$.

Desta forma, a probabilidade de aceitação do MH é dada por

$$\alpha(\alpha_1, \alpha'_1) = \min \left(1, \frac{P(\alpha'_1)f(\alpha_1)}{P(\alpha_1)f(\alpha'_1)} \right).$$

Para o parâmetro β_1 , β'_1 é gerado de maneira similar a α'_1 . Geramos $\beta'_1 \sim \text{BetaT}(a^*, b^*, t^*)$, com $a^* = \frac{1+\beta_1^{(j)}(b^*-2)}{1-\beta_1^{(j)}}$, b^* escolhido também de forma a controlar o nível de aceitação e $t^* = 1 - \alpha_1$.

5.2.2 MCMC em Modelos SW-APARCH

No Capítulo 4, a equação da volatilidade do modelo SW(2)-APARCH(p,q) foi expressa por

$$h_t^\delta = \alpha_{00} + \alpha_{01}S_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i(|z_{t-i}| - \gamma_i z_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^\delta, \quad (5.13)$$

com $\alpha_{00} > 0$ e $\alpha_{01} > 0$, $\delta > 0$, $-1 \leq \gamma_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^p \alpha_i(1 + \gamma_i^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$.

Considerando o modelo SW(2)-APARCH(1,1), temos $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_1, \beta_1, \delta, \gamma_1)$ e

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\theta}) &= P(\alpha_{00})P(\alpha_{01})P(\alpha_1)P(\beta_1)P(\delta)P(\gamma_1) \\ &= N(\mu_{\alpha_{00}}, \sigma_{\alpha_{00}}^2)I_{(\alpha_{00}>0)}N(\mu_{\alpha_{01}}, \sigma_{\alpha_{01}}^2)I_{(\alpha_{01}>0)} \\ &\quad N(\mu_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_1}^2)I_{(\alpha_1 \geq 0)}N(\mu_{\beta_1}, \sigma_{\beta_1}^2)I_{(\beta_1 \geq 0)} \\ &\quad N(\mu_{\delta}, \sigma_{\delta}^2)I_{(\delta>0)}N(\mu_{\gamma_1}, \sigma_{\gamma_1}^2)I_{(-1 \leq \gamma_1 \leq 1)}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

sendo a densidade normal $N(\cdot)$ truncada nos limites de $I_{(\cdot)}$.

Neste modelo, também utilizamos o passeio aleatório para gerar os candidatos de α_{00} , α_{01} e δ , como descrito anteriormente.

Os demais parâmetros (α_1 , β_1 e γ_1) estão relacionados com a restrição $\alpha_1(1 + \gamma_1^2) + \beta_1 < 1$. Seguindo a mesma ideia proposta para α_1 e β_1 do modelo SW(2)-GARCH(1,1),

fazemos, por exemplo,

$$\begin{aligned}\gamma_1^{(j)} &= \frac{a' - 1}{a' + b' - 2} \\ \gamma_1^{(j)}(a' + b' - 2) &= a' - 1 \\ 1 + \gamma_1^{(j)}(b' - 2) &= a'(1 - \gamma_1^{(j)}) \\ a' &= \frac{1 + \gamma_1^{(j)}(b' - 2)}{1 - \gamma_1^{(j)}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha_1(1 + \gamma_1^2) + \beta_1 &< 1 \\ \alpha_1(1 + \gamma_1^2) &< 1 - \beta_1 \\ 1 + \gamma_1^2 &< \frac{1 - \beta_1}{\alpha_1} \\ \gamma_1^2 &< \frac{1 - \beta_1}{\alpha_1} - 1 \\ \gamma_1 &< \left[\frac{1 - \beta_1}{\alpha_1} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Tendo assim,

$$\alpha'_1 \sim \text{BetaT}(a, b, t^\alpha), \quad \beta'_1 \sim \text{BetaT}(a^*, b^*, t^\beta) \quad \text{e} \quad \gamma'_1 \sim \text{BetaT}(a', b', t^\gamma),$$

sendo $t^\alpha = \frac{1 - \beta_1}{1 + \gamma_1^2}$, $t^\beta = 1 - \alpha_1(1 + \gamma_1^2)$, $t^\gamma = \left[\frac{1 - \beta_1}{\alpha_1} - 1 \right]^{1/2}$, $a' = \frac{1 + \gamma_1^{(j)}(b' - 2)}{1 - \gamma_1^{(j)}}$ e b' escolhido de forma a controlar o nível de aceitação.

5.3 Algoritmo

Seguindo a estrutura apresentada por Das & Yoo (2004), dividimos o vetor $\boldsymbol{\omega}$ em três categorias

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_1 &= (p_{00}, p_{11}) \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\omega}_3 &= \lambda\end{aligned}$$

A seguir, temos os passos de cada etapa do algoritmo MCMC para estimação dos parâmetros do modelo de mudança de regime aditivo.

Passo 1: Gere S_t , $t = 1, \dots, T$, de $P(S_t | S_{\neq t}, Y, \boldsymbol{\omega})$ pelo procedimento de movimento único proposto por Carlin *et. al* (1992);

Passo 2: Gere ω_1 de $P(\omega_1|S) \sim Beta$;

Passo 3: Gere ω_2 de $P(\omega_2|S, Y, \omega_3)$ pelo algoritmo MH;

Passo 4: Gere ω_3 de $P(\omega_3|S, Y, \omega_2)$ pelo algoritmo MH.

Uma questão relevante é como os valores iniciais influenciam no comportamento da cadeia. Conforme o número de iterações aumenta, a cadeia gradualmente esquece os valores iniciais e converge para uma distribuição de equilíbrio. Assim, em aplicações práticas é comum que as iterações iniciais sejam descartadas, como se formassem uma amostra de aquecimento.

Capítulo 6

Estudo de simulação

Neste capítulo, apresentamos um estudo de simulação dos modelos SW-GARCH e SW-APARCH aditivos, com o objetivo de exemplificar os conceitos descritos nos capítulos anteriores e validar os algoritmos desenvolvidos.

Para isso, utilizamos o *software* **R** para gerar duas séries, cada uma seguindo a estrutura de seu respectivo modelo, com $T = 2500$ observações.

Para gerarmos os dados aleatórios com distribuição Laplace assimétrica para as componentes do erro de cada série, utilizamos uma função criada por T. W. Yee, baseada em Kotz (2001), implementada na *library* VGAM do *software* **R**.

Além disso, geramos os valores da variável estado S_t considerando a distribuição Binomial, cujo parâmetro é dado pelas probabilidades de transição, $p_{00} = 0.994$ e $p_{11} = 0.992$. Assim, o estado S_t segue um processo markoviano de primeira ordem com matriz de probabilidade de transição **P** igual a

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.994 & 0.006 \\ 0.008 & 0.992 \end{bmatrix}.$$

As séries simuladas apresentaram 1232 valores no estado $S_t = 1$ e 1268 valores no estado $S_t = 0$.

Tendo uma série, queremos estimar seus parâmetros. Para isto, primeiramente desenvolvemos o algoritmo descrito no Capítulo 4. Porém, a convergência do método não foi alcançada.

Assim, seguimos nosso trabalho desenvolvendo o algoritmo para estimação dos parâmetros via abordagem bayesiana, apresentado no Capítulo 5.

Consideramos os parâmetros das distribuições *a priori* sendo $\mu_{\alpha_{00}} = \mu_{\alpha_{01}} = \mu_{\alpha_1} = \mu_{\beta_1} = \mu_{\gamma_1} = \mu_{\delta} = 0$ e $\sigma_{\alpha_{00}}^2 = \sigma_{\alpha_{01}}^2 = \sigma_{\alpha_1}^2 = \sigma_{\beta_1}^2 = \sigma_{\gamma_1}^2 = \sigma_{\delta}^2 = 100$, obtendo prioris com informação vaga em quase todo espaço paramétrico. Já para o parâmetro de assimetria λ , fizemos $\mu_{\lambda} = 0$ e $\sigma_{\lambda}^2 = 0.064$, como apresentado em Fioruci *et al.* (2012).

No ajuste dos modelos geramos 32000 iterações por MCMC e descartamos as 2000 primeiras iterações como período de aquecimento (*burn in*). Da amostra restante foram selecionados um valor a cada 10 gerados para diminuir o número de repetições devido ao processo de aceitação/rejeição. Isto resultou em uma amostra de 3000 observações para cada parâmetro de cada modelo.

Além disso, a taxa de rejeição foi controlada para que ficasse em torno de 75% e utilizamos o critério de Geweke (1992) para verificar a convergência de cada parâmetro. De acordo com este critério, há indícios que houve convergência nas simulações se o módulo do seu valor for menor que 1.96 para cada parâmetro estimado. A taxa de rejeição e o critério de Geweke estão implementados na *library* MCMCpack do *software* **R**.

Nas próximas seções apresentamos os resultados obtidos para estimação dos parâmetros dos modelos SW-GARCH e SW-APARCH.

6.1 SW-GARCH

Nesta seção, geramos uma série com estrutura de um modelo SW(2)-GARCH(1,1), cujos valores dos parâmetros estão apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Parâmetros verdadeiros do modelo SW(2)-GARCH(1,1)

| α_{00} | α_{01} | α_1 | β_1 | λ |
|---------------|---------------|------------|-----------|-----------|
| 0.05 | 0.1 | 0.08 | 0.2 | 0.7 |

Desta forma, os dados seguem a estrutura

$$\begin{aligned}
 y_t &= \mu + z_t \\
 z_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t} \\
 h_t &= 0.05 + 0.1S_t + 0.08z_{t-1}^2 + 0.2h_{t-1},
 \end{aligned}$$

em que ϵ_t segue a distribuição Laplace assimétrica com média zero, variância unitária e assimetria 0.7, e y_t tem distribuição Laplace assimétrica com média zero, variância condicional h_t e assimetria 0.7.

A Figura 6.1 mostra o gráfico da série SW(2)-GARCH(1,1) simulada com uma linha tracejada que indica o estado S_t a cada instante t .

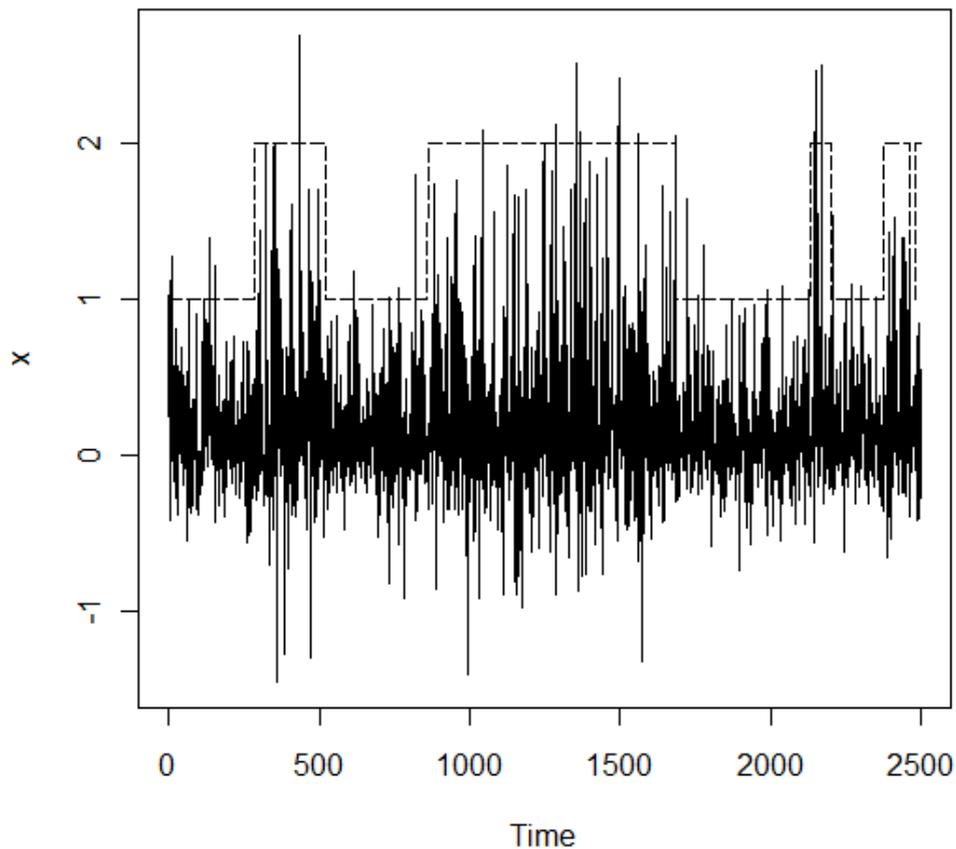


Figura 6.1: Gráfico da série SW(2)-GARCH(1,1) simulada.

Podemos observar que a série apresenta média estacionária em zero e heterocedasticidade, com momentos em que a variação dos dados é maior do que em outros períodos,

havendo assim, 7 mudanças de regime na mesma série.

A Tabela 6.2 nos mostra as estimativas dos parâmetros do modelo SW(2)-GARCH(1,1) bayesiano. Notamos que os valores estimados não estão distantes dos valores reais dos parâmetros. Além disso, o intervalo de credibilidade de cada parâmetro contém seu verdadeiro valor, tendo um desvio-padrão pequeno.

Tabela 6.2: Parâmetros estimados do modelo SW(2)-GARCH(1,1) bayesiano

| Parâmetros | Estimativa | D.P | LI | LS |
|---------------|------------|--------|--------|--------|
| α_{00} | 0.0499 | 0.0084 | 0.0350 | 0.0641 |
| α_{01} | 0.1548 | 0.0992 | 0.0147 | 0.3723 |
| α_1 | 0.1278 | 0.0476 | 0.0758 | 0.2077 |
| β_1 | 0.3054 | 0.0959 | 0.1531 | 0.4944 |
| λ | 0.6951 | 0.0096 | 0.6788 | 0.7109 |
| p_{00} | 0.9935 | 0.0282 | 0.9384 | 0.9993 |
| p_{11} | 0.9005 | 0.0363 | 0.8175 | 0.9648 |

Os valores z do critério de convergência de Geweke para cada parâmetro foram $z_{\alpha_{00}} = 1.4644$, $z_{\alpha_{01}} = -1.5445$, $z_{\alpha_1} = 0.1385$, $z_{\beta_1} = -1.5235$ e $z_{\lambda} = -1.1981$, o que nos indica que há indícios de convergência do algoritmo.

6.2 SW-APARCH

Nesta seção geramos uma série com estrutura de um modelo SW(2)-APARCH(1,1), cujos valores dos parâmetros são apresentados na Tabela 6.3.

Tabela 6.3: Parâmetros verdadeiros do modelo SW(2)-APARCH(1,1)

| α_{00} | α_{01} | α_1 | β_1 | γ_1 | δ | λ |
|---------------|---------------|------------|-----------|------------|----------|-----------|
| 0.05 | 0.2 | 0.1 | 0.06 | 0.3 | 2 | 0.7 |

Assim, os dados seguem a estrutura

$$\begin{aligned}
 y_t &= \mu + z_t \\
 z_t &= \epsilon_t h_t \\
 h_t^2 &= 0.05 + 0.2S_t + 0.1(|z_{t-1}| - 0.3z_{t-1})^2 + 0.06h_{t-1}^2,
 \end{aligned}$$

em que ϵ_t segue distribuição Laplace assimétrica com média zero, variância unitária e assimetria 0.7, e y_t tem distribuição Laplace assimétrica com média zero, variância condicional h_t^2 e assimetria 0.7.

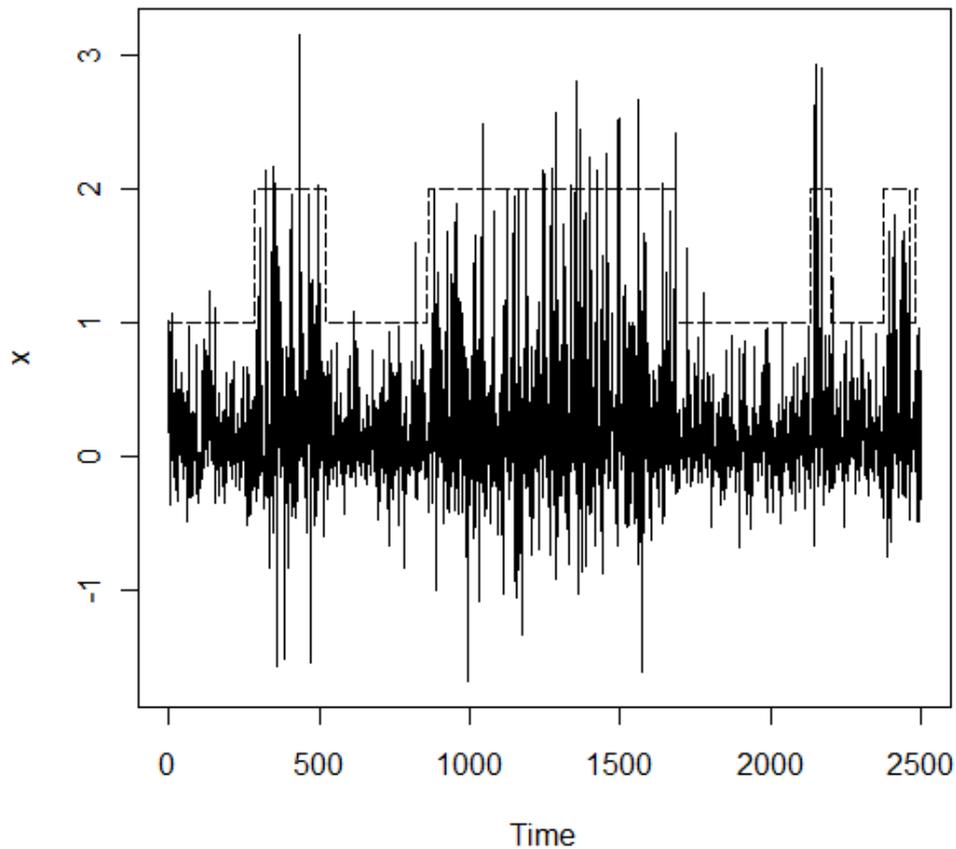


Figura 6.2: Gráfico da série SW(2)-APARCH(1,1) simulada.

Na Figura 6.2 vemos o gráfico da série SW(2)-APARCH(1,1) simulada em que a linha tracejada indica o estado S_t , a cada instante t . Notamos que esta série tem um comportamento bastante similar ao da série anterior, SW(2)-GARCH(1,1). Pequenas

diferenças podem ser percebidas nos picos das duas séries aqui simuladas, os quais apresentam valores maiores para o SW(2)-GARCH(1,1).

A Tabela 6.4 nos mostra as estimativas dos parâmetros do modelo SW(2)-APARCH(1,1) bayesiano. Assim como para o modelo anterior, aqui também notamos que os valores estimados não estão distantes dos valores reais dos parâmetros e o intervalo de credibilidade de cada parâmetro contém seu verdadeiro valor.

Tabela 6.4: Parâmetros estimados do modelo SW(2)-APARCH(1,1) bayesiano

| Parâmetros | Estimativa | D.P | LI | LS |
|---------------|------------|--------|--------|--------|
| α_{00} | 0.0278 | 0.0119 | 0.0040 | 0.0516 |
| α_{01} | 1.3537 | 0.9750 | 0.0721 | 2.8929 |
| α_1 | 0.5699 | 0.2008 | 0.1683 | 0.9715 |
| β_1 | 0.0352 | 0.0150 | 0.0051 | 0.0652 |
| γ_1 | 0.2572 | 0.0414 | 0.1744 | 0.3400 |
| δ | 1.6181 | 0.3072 | 1.0037 | 2.2325 |
| λ | 0.6949 | 0.0123 | 0.6701 | 0.7200 |
| p_{00} | 0.9980 | 0.0027 | 0.9960 | 0.9994 |
| p_{11} | 0.8999 | 0.0299 | 0.8358 | 0.9503 |

Os valores z do critério de convergência de Geweke para cada parâmetro foram $z_{\alpha_{00}} = 1.8743$, $z_{\alpha_{01}} = -1.9578$, $z_{\alpha_1} = -0.7916$, $z_{\beta_1} = 0.1882$, $z_{\gamma_1} = 0.2598$, $z_{\delta} = -0.6531$ e $z_{\lambda} = -0.3039$, o que nos indica que há indícios de convergência do algoritmo.

6.3 Discussão

Após gerarmos duas séries, uma seguindo estrutura SW(2)-GARCH(1,1) e outra SW(2)-APARCH(1,1), estávamos interessados na estimação dos parâmetros destes modelos.

Assim, desenvolvemos o algoritmo descrito no Capítulo 4 (Seção 4.4). Consideramos como valores iniciais para os parâmetros e probabilidades de transição diferentes números, inclusive os verdadeiros, aqueles com os quais as séries foram geradas.

Contudo, a convergência do método de estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança não foi alcançada. Tivemos dificuldades na obtenção de τ , descrito no Capítulo 3 (Seção 3.2), necessário no desenvolvimento do algoritmo BHHH.

Seguindo a metodologia apresentada no Capítulo 5, foi possível obter a convergência do algoritmo proposto sob abordagem bayesiana para ambos os modelos.

O tempo computacional para a realização das 32000 iterações em uma amostra de 2500 observações simuladas, foi de cerca de 24 horas. Isto pode ser justificado pela complexidade e restrições dos modelos. Nas primeiras iterações, houve uma pequena demora na geração de candidatos dos parâmetros no algoritmo MH que satisfizessem suas respectivas restrições.

Apesar disso, as simulações realizadas nos retornou resultados satisfatórios. As estimativas dos parâmetros de cada modelo foram próximas dos valores reais e, utilizando o critério de Geweke, podemos verificar que a convergência realmente foi alcançada.

Capítulo 7

Aplicações a dados reais

Neste capítulo são apresentadas duas aplicações com conjuntos de dados reais das ações do banco Itaú Unibanco e do Índice BOVESPA.

Com o intuito de verificar a adequabilidade da distribuição Laplace assimétrica aos dados, primeiramente realizamos uma breve comparação de alguns modelos heterocedásticos, considerando as distribuições Normal, t-Student e Laplace, e suas respectivas versões assimétricas. Em seguida, aplicamos o conceito de mudança de regime aos modelos que apresentaram melhor ajuste aos dados.

7.1 Dados

Os dados analisados referem-se aos preços de fechamento diários das ações do banco Itaú Unibanco (ITUB3.SA) e do Índice BOVESPA (IBOVESPA), no período de 13/03/2002 a 12/03/2012, o que resultou em 2480 observações. Estes dados foram retirados dos *sites* <economia.uol.com.br/cotacoes/bolsas.jhtm> e <www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoEvolucaoDiaria.aspx?Indice=Ibovespa>, respectivamente, com acesso em 13/03/2012.

Para obtermos a estacionariedade na média, calculamos o retorno da série dado pelo logaritmo da razão entre o dia atual e o anterior, ou seja,

$$y_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$$

sendo P_t o preço da ação no tempo t .

As Figuras 7.1 e 7.2 mostram as séries dos preços e retornos e os gráficos de autocorrelação dos retornos das ações ITUB3.SA e IBOVESPA, respectivamente.

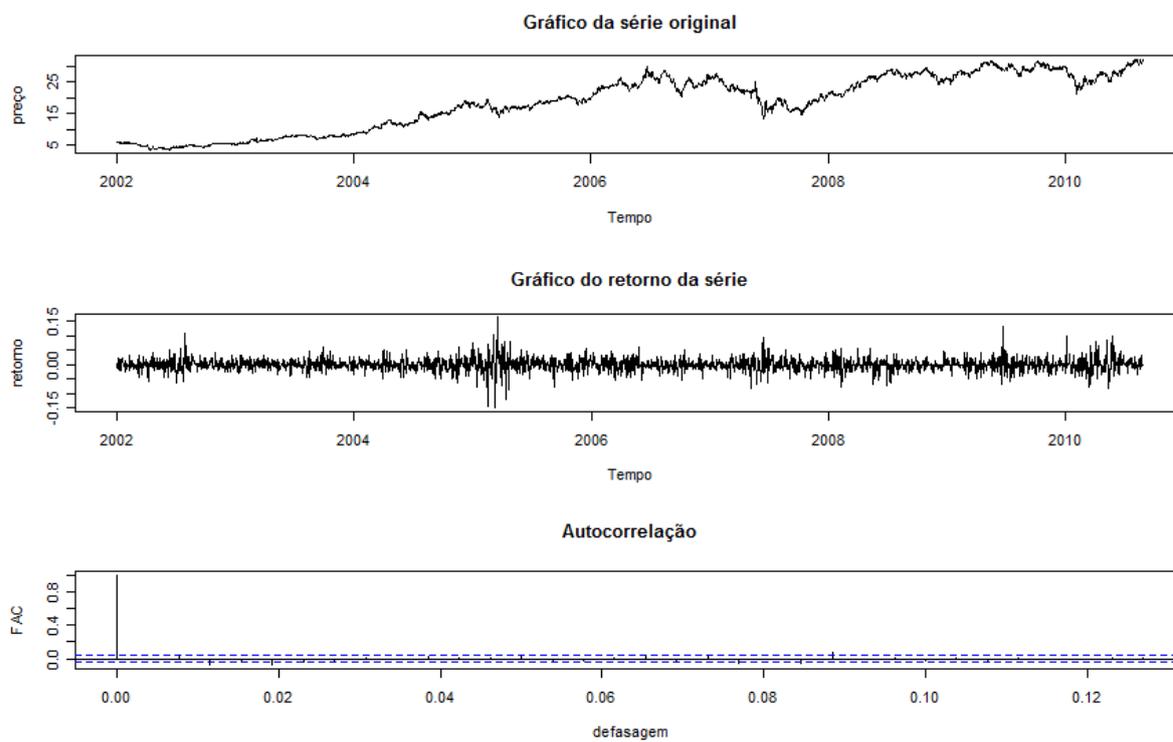


Figura 7.1: Gráficos da série original, do retorno e da autocorrelação dos retornos dos preços das ações ITUB3.SA.

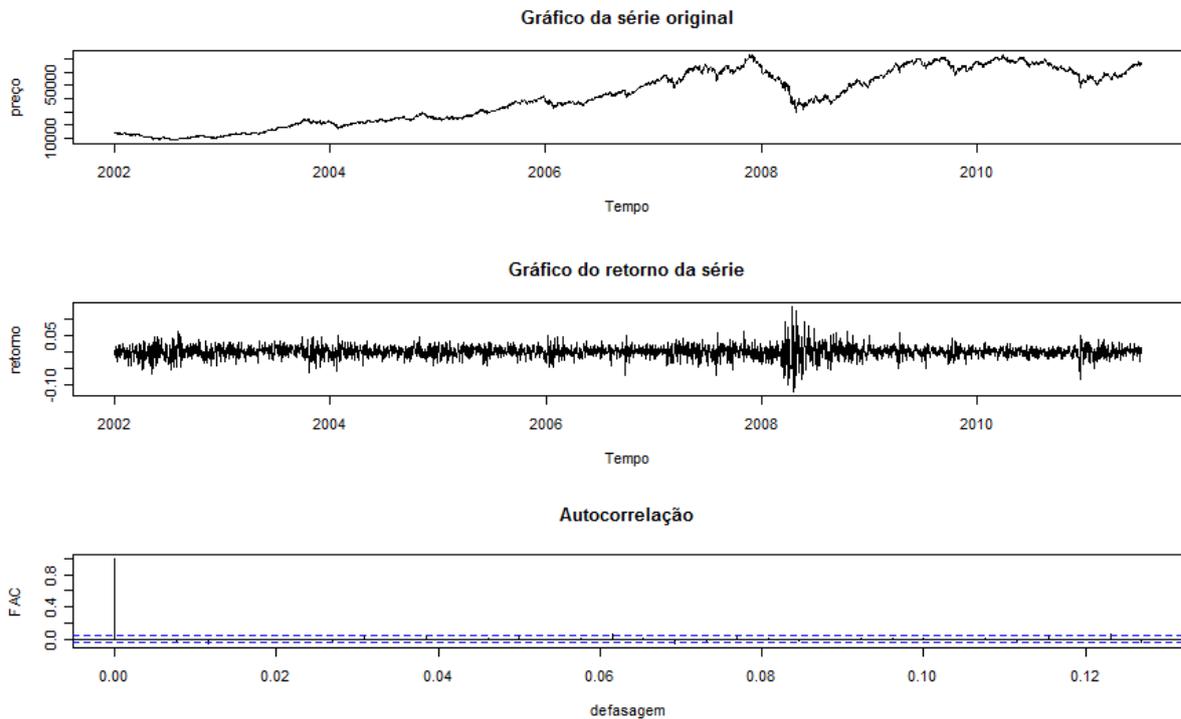


Figura 7.2: Gráficos da série original, do retorno e da autocorrelação dos retornos dos preços das ações IBOVESPA.

7.2 Resultados

Utilizando o pacote ‘fgarch’ do *software* R, ajustamos os modelos ARCH, GARCH e APARCH descritos no Capítulo 3. Este aplicativo ajusta estes modelos considerando as distribuições normal, t-Student e generalizada do erro, bem como suas respectivas versões assimétricas, segundo o método de Fernandez & Steel (1998).

Como também estamos interessados na distribuição Laplace, usamos o resultado de Trindade *et. al* (2010) em que a distribuição generalizada do erro com parâmetro de forma igual a 1, coincide com a distribuição Laplace.

Comparamos os modelos utilizando os critérios de informação de Akaike (AIC) e o bayesiano de Schwarz (BIC), em que, para ambos, o modelo com menor critério é considerado o modelo com melhor ajuste.

As Tabelas 7.1 e 7.2 apresentam os valores do AIC e BIC para cada modelo ajustado, sendo eles os modelos ARCH(1), GARCH(1,1), APARCH(1,1) e GJR-GARCH(1,1).

Tabela 7.1: Valores de AIC e BIC dos modelos para a série de retorno ITUB3.SA.

| Modelo | Medida | Distribuição | | | | | |
|-----------------|--------|--------------|-------------|---------|---------|----------------|----------------|
| | | Normal | Normal Ass. | t | t Ass. | Laplace | Laplace Ass. |
| ARCH(1) | AIC | -4.7943 | -4.7938 | -4.9305 | -4.9297 | -4.9696 | -4.9697 |
| | BIC | -4.7866 | -4.7837 | -4.9203 | -4.9169 | -4.9595 | -4.9570 |
| GARCH(1,1) | AIC | -4.9265 | -4.9262 | -4.9844 | -4.9842 | -5.0221 | -5.0231 |
| | BIC | -4.9163 | -4.9135 | -4.9717 | -4.9690 | -5.0094 | -5.0078 |
| APARCH(1,1) | AIC | -4.9304 | -4.9310 | -4.9855 | -4.9857 | -5.0219 | -5.0235 |
| | BIC | -4.9152 | -4.9132 | -4.9677 | -4.9654 | -5.0042 | -5.0032 |
| GJR-GARCH(1,1)* | AIC | -4.9309 | -4.9311 | -4.9861 | -4.9864 | -5.0224 | -5.0240 |
| | BIC | -4.9182 | -4.9159 | -4.9709 | -4.9686 | -5.0072 | -5.0062 |

* O modelo GJR-GARCH(1,1) é o modelo APARCH(1,1) com $\delta = 2$.

Como podemos observar, as diferenças entre os indicadores são pequenas, mesmo assim alguns resultados são consistentes entre os modelos.

Considerando o critério AIC para os resultados relativos a ITUB3.SA na Tabela 7.1, notamos que consistentemente a distribuição Laplace assimétrica é a que melhor modela os dados nos vários modelos considerados. Já o critério BIC aponta consistentemente a distribuição Laplace como melhor.

Na seleção do melhor modelo, o critério AIC aponta para o GJR-GARCH(1,1) com distribuição Laplace assimétrica, AIC=-5.0240, e o critério BIC aponta para o modelo GARCH(1,1) com distribuição Laplace, BIC=-5.0094.

Os resultados relativos ao índice IBOVESPA são apresentados na Tabela 7.2. Observamos que ambos os critérios selecionam o mesmo modelo como o melhor, sendo a distribuição t assimétrica a mais adequada. A única exceção é o modelo APARCH, em que a distribuição Laplace assimétrica é apontada como a melhor. O modelo GJR-GARCH(1,1) com distribuição t assimétrica é o melhor entre os modelos aqui considerados, tendo AIC=-5.3470 e BIC=-5.3306. Vale notar que a diferença para este modelo com distribuição t assimétrica e Laplace assimétrica é mínima, apenas um décimo de milésimo em ambos os casos (AIC e BIC), o que permitiria considerá-los praticamente equivalentes.

Tabela 7.2: Valores de AIC e BIC dos modelos para a série de retorno IBOVESPA.

| Modelo | Medida | Distribuição | | | | | |
|-----------------|--------|--------------|-------------|---------|----------------|---------|--------------|
| | | Normal | Normal Ass. | t | t Ass. | Laplace | Laplace Ass. |
| ARCH(1) | AIC | -5.1312 | -5.1387 | -5.2215 | -5.2249 | -5.2144 | -5.2177 |
| | BIC | -5.1241 | -5.1293 | -5.2121 | -5.2132 | -5.2050 | -5.2059 |
| GARCH(1,1) | AIC | -5.3120 | -5.3209 | -5.3266 | -5.3325 | -5.3262 | -5.3324 |
| | BIC | -5.3026 | -5.3092 | -5.3149 | -5.3184 | -5.3145 | -5.3183 |
| APARCH(1,1) | AIC | -5.3270 | -5.3356 | -5.3379 | -5.3442 | -5.3375 | -5.3443 |
| | BIC | -5.3129 | -5.3192 | -5.3215 | -5.3254 | -5.3210 | -5.3256 |
| GJR-GARCH(1,1)* | AIC | -5.3302 | -5.3384 | -5.3404 | -5.3470 | -5.3401 | -5.3469 |
| | BIC | -5.3185 | -5.3244 | -5.3263 | -5.3306 | -5.3260 | -5.3305 |

* O modelo GJR-GARCH(1,1) é o modelo APARCH(1,1) com $\delta = 2$.

Com base nos resultados acima, ajustamos os modelos SW(2)-GARCH(1,1) e SW(2)-APARCH(1,1) via abordagem bayesiana, ambos tendo o erro seguindo distribuição Laplace assimétrica. Os resultados são apresentados a seguir.

7.2.1 SW-GARCH

Considerando a metodologia bayesiana descrita no Capítulo 5, um modelo SW(2)-GARCH(1,1) foi ajustado para cada série de retorno aqui analisadas (ITUB3.SA e IBOVESPA).

Para isto, realizamos 32000 iterações por MCMC e descartamos as 2000 primeiras iterações (*burn in*) seguindo um salto $K = 30$, o que nos resultou em uma amostra de 1000 observações para cada parâmetro de cada modelo. Além disso, verificamos a convergência do algoritmo utilizando o teste de Geweke (1992).

As Tabelas 7.3 e 7.4 mostram as estimativas dos parâmetros obtidos no ajuste do modelo para as duas séries, além de seus respectivos desvios-padrões e intervalos de credibilidade.

Tabela 7.3: Parâmetros estimados da série de retorno ITUB3.SA

| Parâmetros | Estimativa | D.P | LI | LS |
|---------------|------------|------------|--------|--------|
| α_{00} | 0.0003 | 7.7972e-05 | 0.0002 | 0.0005 |
| α_{01} | 1.1188 | 0.8000 | 0.1036 | 3.1087 |
| α_1 | 0.2265 | 0.0529 | 0.1028 | 0.3257 |
| β_1 | 0.1708 | 0.0998 | 0.0048 | 0.3133 |
| λ | 0.9758 | 0.0141 | 0.9483 | 1.0040 |
| p_{00} | 0.9978 | 0.0012 | 0.9956 | 0.9993 |
| p_{11} | 0.9002 | 0.0297 | 0.8352 | 0.9507 |

Tabela 7.4: Parâmetros estimados da série de retorno IBOVESPA

| Parâmetros | Estimativa | D.P | LI | LS |
|---------------|------------|------------|---------|---------|
| α_{00} | 0.00023 | 0.4193e-05 | 0.00022 | 0.00023 |
| α_{01} | 0.4771 | 0.2297 | 0.0711 | 0.8255 |
| α_1 | 0.1815 | 0.0332 | 0.1210 | 0.2485 |
| β_1 | 0.2686 | 0.0301 | 0.2094 | 0.3239 |
| λ | 0.9361 | 0.0132 | 0.9091 | 0.9627 |
| p_{00} | 0.9980 | 0.0010 | 0.9960 | 0.9994 |
| p_{11} | 0.9001 | 0.0297 | 0.8348 | 0.9501 |

Na Tabela 7.5 temos os critérios de seleção de modelos AIC e BIC. Observamos que, em relação aos modelos sem mudança de regime analisados anteriormente, o modelo SW(2)-GARCH(1,1) não é o mais adequado para ambas as séries.

Tabela 7.5: Critérios de adequabilidade do modelo SW(2)-GARCH(1,1)

| Série | AIC | BIC |
|----------|---------|---------|
| ITUB3.SA | -4.2796 | -4.2669 |
| IBOVESPA | -4.5136 | -4.5019 |

As Figuras 7.3 e 7.4 mostram os gráficos do retorno dos preços das ações ITUB3.SA

e IBOVESPA, respectivamente, com uma linha tracejada que indica o estado S_t do modelo SW(2)-GARCH(1,1). Observamos que o modelo ajustado detectou várias mudanças de estado em ambas as séries.

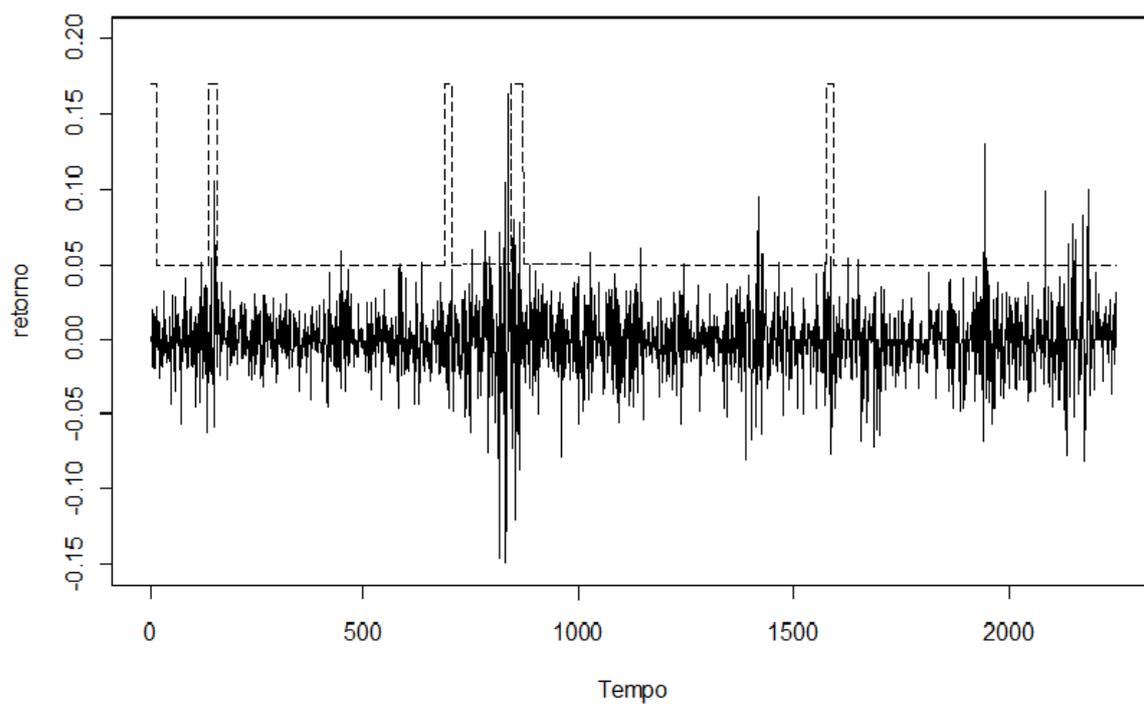


Figura 7.3: Gráfico do retorno dos preços das ações ITUB3.SA com a variável de estado S_t do modelo SW(2)-GARCH(1,1).

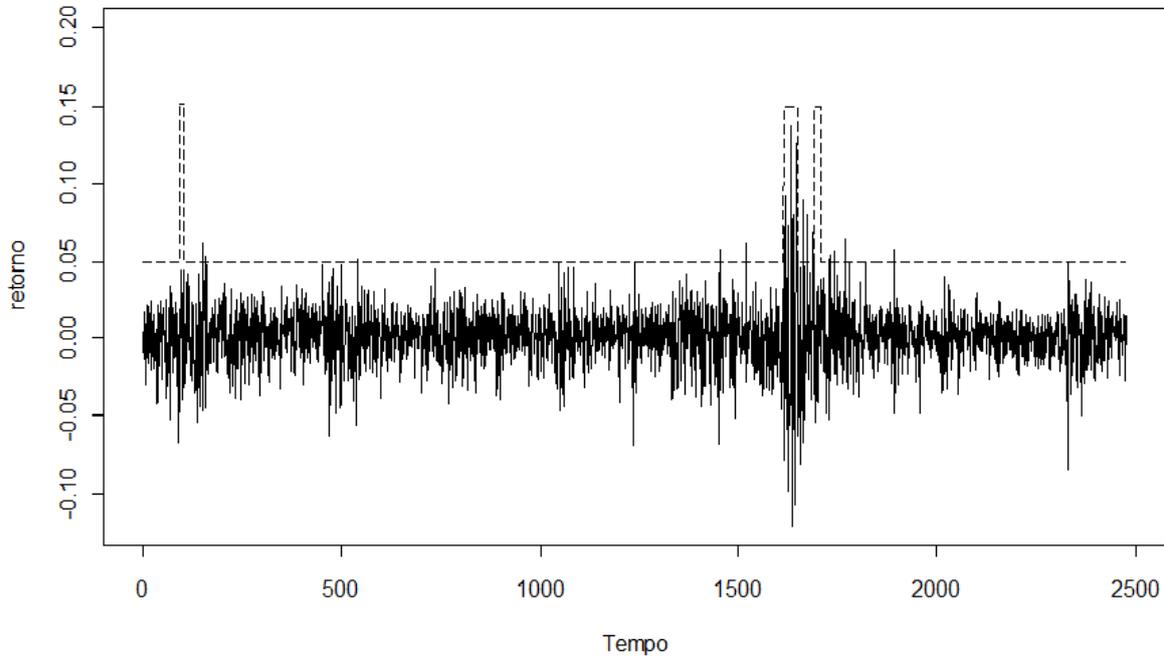


Figura 7.4: Gráfico do retorno dos preços das ações IBOVESPA com a variável de estado S_t do modelo SW(2)-GARCH(1,1).

7.2.2 SW-APARCH

As Tabelas 7.6 e 7.7 apresentam as estimativas dos parâmetros obtidos no ajuste do modelo SW(2)-APARCH(1,1) para as séries de retorno ITUB3.SA e IBOVESPA, respectivamente. Para o ajuste deste modelo sobre abordagem bayesiana, geramos 22000 iterações por MCMC e descartamos as 2000 primeiras iterações seguindo um salto de $K = 20$ o que resultou em uma amostra de 1.000 observações.

Tabela 7.6: Parâmetros estimados da série de retorno ITUB3.SA

| Parâmetros | Estimativa | D.P | LI | LS |
|---------------|------------|------------|------------|------------|
| α_{00} | 8.8877e-06 | 6.8362e-06 | 4.9373e-06 | 2.2531e-05 |
| α_{01} | 0.7139 | 0.3412 | 0.0919 | 1.2723 |
| α_1 | 0.9931 | 0.0055 | 0.9786 | 0.9992 |
| β_1 | 1.6434e-05 | 2.0802e-05 | 9.6395e-07 | 6.6422e-05 |
| γ_1 | 0.0347 | 0.0192 | 0.0033 | 0.0742 |
| δ | 1.3814 | 0.0034 | 1.3745 | 1.3879 |
| λ | 0.9649 | 0.0158 | 0.9317 | 0.9948 |
| p_{00} | 0.9978 | 0.0013 | 0.9957 | 0.9993 |
| p_{11} | 0.8999 | 0.0300 | 0.8334 | 0.9505 |

Tabela 7.7: Parâmetros estimados da série de retorno IBOVESPA

| Parâmetros | Estimativa | D.P | LI | LS |
|---------------|------------|------------|------------|------------|
| α_{00} | 1.8106e-05 | 8.0549e-06 | 8.8000e-06 | 2.2144e-05 |
| α_{01} | 1.6473 | 0.9926 | 0.0951 | 3.4534 |
| α_1 | 0.9629 | 0.0186 | 0.9175 | 0.9871 |
| β_1 | 0.0002 | 0.0002 | 4.3292e-06 | 0.0007 |
| γ_1 | 0.1332 | 0.0271 | 0.0834 | 0.1873 |
| δ | 1.3636 | 0.0039 | 1.3559 | 1.3712 |
| λ | 0.8724 | 0.0156 | 0.8421 | 0.9021 |
| p_{00} | 0.9980 | 0.0011 | 0.9960 | 0.9993 |
| p_{11} | 0.8999 | 0.0298 | 0.8339 | 0.9508 |

Pela Tabela 7.8, notamos que, de todos os modelos analisados para ambas as séries, o modelo SW(2)-APARCH(1,1) é o modelo considerado o melhor pelos critérios AIC e BIC.

Tabela 7.8: Critérios de adequabilidade do modelo SW(2)-APARCH(1,1)

| Série | AIC | BIC |
|----------|---------|---------|
| ITUB3.SA | -6.0255 | -6.0077 |
| IBOVESPA | -5.4355 | -5.4191 |

As Figuras 7.5 e 7.6 mostram os gráficos do retorno dos preços das ações ITUB3.SA e IBOVESPA, respectivamente, com uma linha tracejada que indica o estado S_t do modelo SW(2)-APARCH(1,1). Notamos que o modelo ajustado conseguiu detectar as mudanças de estado mais evidentes em ambas as séries.

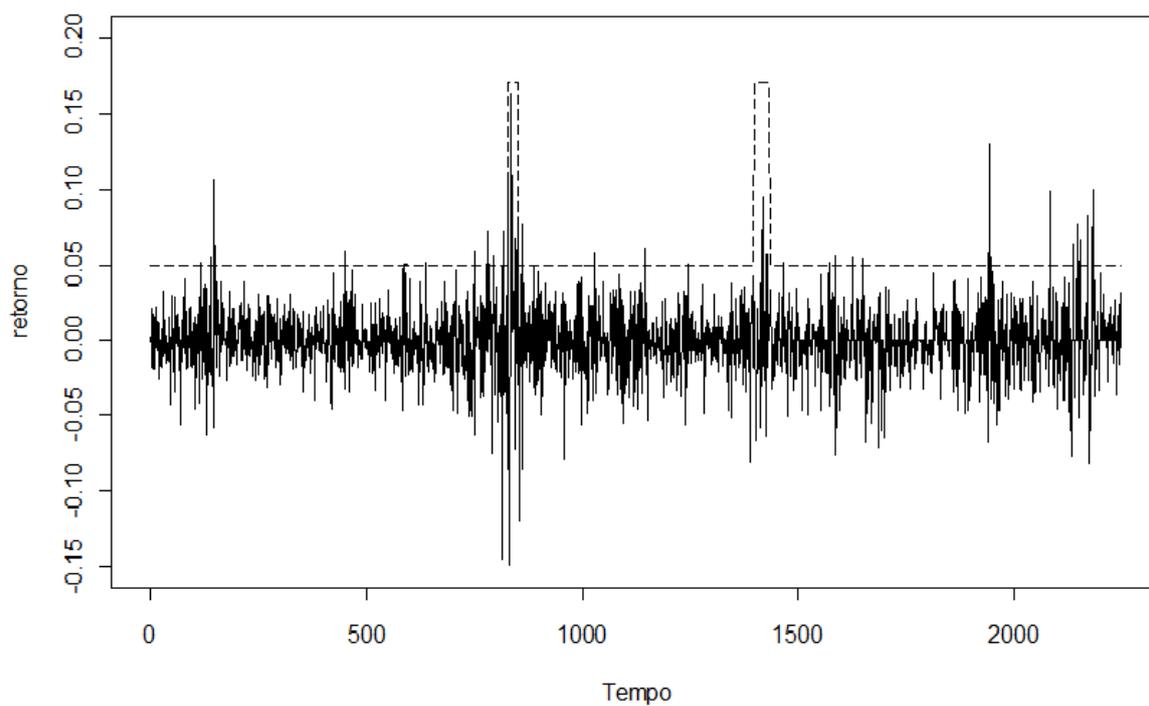


Figura 7.5: Gráfico do retorno dos preços das ações ITUB3.SA com a variável de estado S_t do modelo SW(2)-APARCH(1,1).

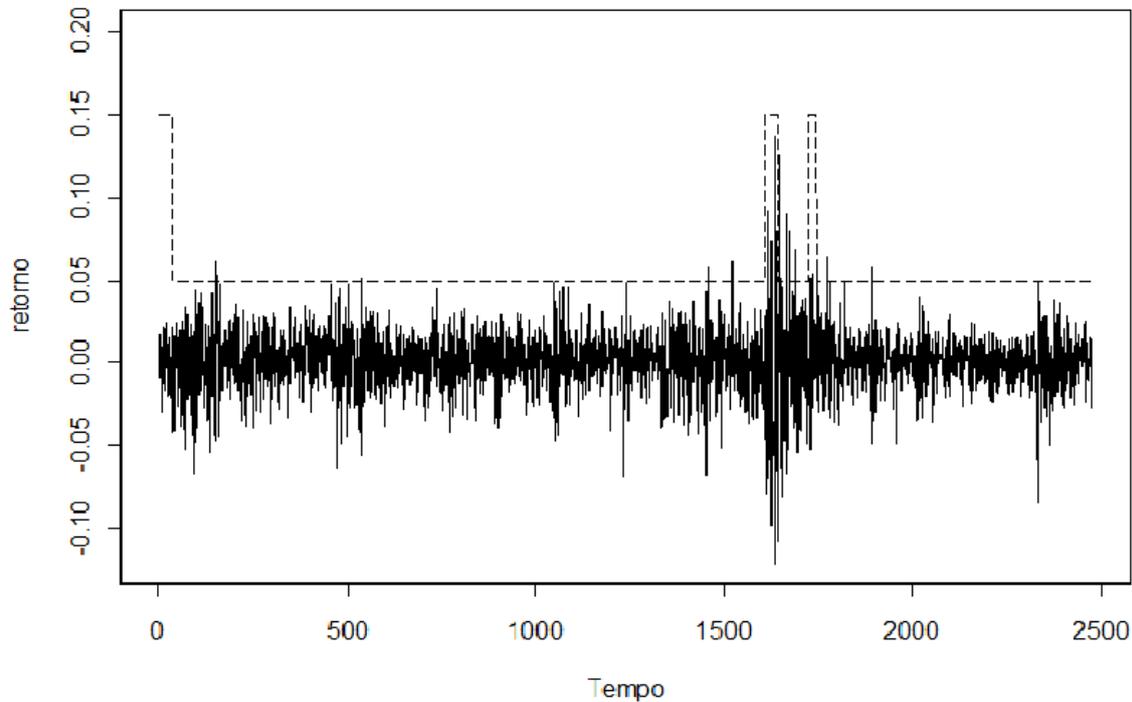


Figura 7.6: Gráfico do retorno dos preços das ações IBOVESPA com a variável de estado S_t do modelo SW(2)-APARCH(1,1).

7.3 Discussão

Analisando os retornos dos preços diários das ações do banco Itaú Unibanco (ITUB3.SA) e do Índice BOVESPA (IBOVESPA), notamos alguns picos na variação da série.

Na série do retorno dos preços das ações ITUB3.SA estes picos são observados com mais evidência em meados de 2005, ano em que o banco estabeleceu contratos de parceria com bancos estrangeiros, e de 2010, quando teve o maior lucro da história dos bancos brasileiros, segundo a consultoria Economática. Já a série do retorno dos preços das ações IBOVESPA apresentou um nítido distúrbio na variância no ano de 2008, ano esse de turbulência para a bolsa paulista devido à crise financeira internacional.

Ajustando os modelos heterocedásticos a estas séries, observamos que, comparando

todos os modelos, o modelo GJR-GARCH(1,1) com distribuição Laplace assimétrica é predominantemente o melhor modelo, ou quando não é, perde por diferenças mínimas para o modelo considerado melhor, que nesse caso costuma ser o GARCH(1,1).

Visto isto, inicialmente tentamos ajustar os modelos SW(2)-GARCH(1,1) e SW(2)-APARCH(1,1) via método de máxima verossimilhança, porém tivemos dificuldades de convergência no desenvolvimento do algoritmo proposto no Capítulo 4. Assim, seguimos nosso trabalho ajustando estes dois modelos sob metodologia bayesiana.

Desenvolvendo o algoritmo apresentado no Capítulo 5, obtivemos resultados que indicam que, tanto para a série de retorno do banco Itaú Unibanco (ITUB3.SA) quanto para a série do Índice BOVESPA (IBOVESPA), o modelo SW(2)-APARCH(1,1) com o erro seguindo distribuição Laplace assimétrica é o modelo mais adequado.

Capítulo 8

Considerações finais

As séries financeiras geralmente caracterizam-se pela não estacionariedade, principalmente, por apresentarem momentos de baixa e elevada volatilidade. Este fato gera diferentes regimes para a volatilidade condicional ao longo do tempo. Outra característica desse tipo de série temporal é a presença de assimetria, a qual vem sendo considerada recentemente.

Um dos objetivos deste trabalho é mostrar a adequabilidade (ou não) da distribuição Laplace assimétrica aos erros de alguns modelos heterocedásticos. Dentre as distribuições Normal, t-Student, Laplace e suas respectivas versões assimétricas, a distribuição Laplace assimétrica foi a que melhor se adequou à maioria dos modelos ajustados aos dados financeiros aqui considerados e, quando não foi, perdeu por diferenças mínimas para a distribuição considerada melhor, que foi a Laplace e t-Student assimétrica.

Além disso, neste trabalho descrevemos o conceito de mudança de regime. Com a introdução deste conceito e a inclusão de uma variável estado, S_t , aumenta a complexidade no processo de estimação dos modelos da "família ARCH"(Amorim, 2005).

No desenvolvimento do algoritmo para ajuste dos modelos SW-GARCH e SW-APARCH, sob abordagem clássica, tivemos algumas dificuldades de convergência em virtude da complexidade do processo de estimação, conduzido através de máxima verossimilhança.

Seguindo este trabalho, utilizando a abordagem bayesiana foi possível alcançar a convergência do método. Embora o tempo computacional gasto na realização do algoritmo MCMC não seja pequeno, com o estudo de simulação podemos perceber que as estimativas obtidas para os parâmetros são satisfatórias, uma vez que elas estão próximas de seus

verdadeiros valores.

Já na análise dos dados reais vimos que, comparando os modelos heterocedásticos com os modelos heterocedásticos com mudança de regime, o modelo SW(2)-APARCH(1,1) apresentou melhor adequabilidade, segundo os critérios AIC e BIC. Notamos também que a distribuição Laplace assimétrica apresenta bom desempenho na modelagem de dados financeiros.

Como propostas para trabalhos futuros, seria interessante estudar o comportamento dos modelos aqui apresentados em previsões. Além de analisar a ordem destes modelos, verificando assim, qual realmente é o modelo mais adequado a séries com as características presentes em dados financeiros.

Referências Bibliográficas

- [1] Amorim, E. H. (2005). Comparação de desempenho de modelos auto-regressivos heterocedásticos aplicados a séries financeiras. *Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de São Carlos*.
- [2] Ardia, D. (2006). Bayesian estimation of the GARCH(1,1) model with normal innovations. *Student*, **5(3-4)**, 283-298.
- [3] Bauwens, L. & Lubrano, M. (1998). Bayesian inference on GARCH models using the Gibbs sampler. *Econometrics Journal*, **1**, c23-c46.
- [4] Berndt, E.K.; Hall, B.; Hall, R. & Hausman, J.A. (1974). Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models. *Annals of Economic and Social Measurement*, **3**, 653-665.
- [5] Bollerslev, T. (1986). Generalised Autoregressive Conditional Heterocedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- [6] Bollerslev, T. & Wooldridge, J. M. (1992). Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-Varying Covariances. *Econometric Reviews*, **11**, 143-172.
- [7] Cai, J. (1994). A Markov Model of Switching-Regime ARCH. *Journal of Business and Economic statistics*, **12**, 309-316.
- [8] Carlin, G.N.; Polson, P.B & Stoffer, S.D. (1992). A Monte Carlo approach to non-normal and nonlinear state-space modeling. *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 493-500.
- [9] Chib, S & Greenber, E. (1995). Understanding the Metropolis Hastings algorithm. *The American Statistician*, **49**, 327-335.

- [10] Daouk, H & Guo, J. Q. (2004). Switching asymmetric GARCH and options on a volatility index. *Journal of Futures Markets*, **24**, 251-282.
- [11] Das, D. & Yoo, B.H (2004). A Bayesian MCMC algorithm for markov switching GARCH models. Department of Economics, Rutgers University. New Brunswick, NJ.
- [12] Ding, Z.; Granger, C. W. J. & Engle, R. F. (1993). A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83-106.
- [13] Dueker, M.J. (1997). Markov switching in GARCH processes and mean reverting stock-market volatility. *Journal of Business & Economic Statistics*, **15**, 26-34.
- [14] Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with estimate of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, **50**, 987-1001.
- [15] Fernández, C.; Osiewalski, J. & Steel, M. F. J. (1995). Modeling and Inference With v -Spherical Distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **90**, 1331-1340.
- [16] Fernández, C. & Steel, M. F. J. (1998). On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness. *Journal of the American Statistical Association*, **93**(441), 359-371.
- [17] Fioruci, J.A.; Ehlers, R.S. & Andrade, M.G. (2012). Bayesian Multivariate GARCH Models with Dynamic Correlations and Asymmetric Error Distributions. Relatório Técnico 87, Universidade de São Paulo.
- [18] Geman, S. & Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **12**, 609-628.
- [19] Geweke, J. (1986). Modelling the Persistence of Conditional Variances: A Comment. *Econometric Review*, **5**, 57-61.
- [20] Geweke, J. (1989). Exact predictive density for linear models with ARCH disturbances. *Journal of Econometrics*, **40**, 63-86.
- [21] Geweke, J. (1992). Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments. *Bayesian Statistics*, **4**, 625-631.

- [22] Glosten, L. Jagannathan, R. Runkle, D. (1993). On the Relation Between Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *Journal of Finance*, **48**, 1779-1801.
- [23] Hamilton, J.D. (1989). A new approach to the economic analysis with of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, **57**, 375-380.
- [24] Hamilton, J.D. (1990). Analysis of time series subject to changes in regime. *Journal of econometrics*, **45**, 39-70.
- [25] Hamilton, J.D. (1994). *Time Series analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [26] Hamilton, J.D. & Susmel, R. (1994). Autoregressive conditonal heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of Econometrics*, **64**, 307-333.
- [27] Hastings, W.K. (1970). Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications. *Biometrika*, **57**, 97-109.
- [28] Henneke, J. S.; Rachev, S. T.; Fabozzi, F. J. & Nikolov, M. (2011). MCMC-based estimation of Markov Switching ARMA-GARCH models. *Applied Economics*, **43**, 259-271.
- [29] Higgins, M.L. & Bera, A.K. (1992). A Class of Nonlinear Arch Models International. *Economic Review*, **33**, 137-158.
- [30] Jayakumar, K. & Kuttykrishnan, A. P. (2005). A Time-Series Model Using Asymmetric Laplace Distribution. *Statistics & Probability Letters*, **77**, 1636-1640.
- [31] Kim, S.; Shephard, N. & Chib, S. (1998). Stochastic volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models. *Review of Economic Studies*, **65**, 361-393.
- [32] Kim, C. J. (1994). Dynamic linear models with Markov-switching. *Journal of Econometrics*, **8**, 225-235.
- [33] Kim, Young-II (2008). Essays on Volatility Risk, Asset Returns and Consumption-Based Asset Pricing. *PhD thesis at Ohio State University*.

- [34] Kotz, S.; Kozubowski, T. J. & Podgórski, K. (2001). *The Laplace distribution and generalizations. A revisit with applications to Communications, Economics, Engineering and Finance*. Birkhäuser.
- [35] Kozubowski, T.J. & Podgórski, K. (1999). A class of asymmetric distributions, *Actuarial Research Clearing House*, **1**, 113-134.
- [36] Lanne, M. & Saikkonen, P. (2004). A Skewed GARCH-in-Mean Model: An Application to U.S. Stock Returns. *Conference Paper 469, Econometric Society 2004 North American Summer Meetings*.
- [37] Li, Y. (2012). Estimating and forecasting APARCH-Skew-t models by wavelet support vector machines. *Working Papers, Lund University, Department of Economics*
- [38] Macerau, W. M. O. (2012). Métodos Estatísticos Aplicados a dados de expressão gênica. *Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de São Carlos*.
- [39] Mitsui, H. & Watanabe, T. (2003). Bayesian analysis of GARCH option pricing models. *The Journal of the Japan Statistical Society*, **33**, 307-324
- [40] Morettin, P. A. (2004). *Econometria Financeira; Um Curso em Séries Temporais Financeiras*. Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, USP.
- [41] Metropolis, N.; Rosenbluth, A.W.; Rosenbluth, M.N.; Teller, A.H. & Teller, E. (1953). Equations of State Calculations by Fast Computing Machines. *Journal of Chemical Physics*, **21**, 1087-1092.
- [42] Nakatsuma, T. (2000). Bayesian analysis of ARMA-GARCH models: A Markov Chain sampling approach. *Journal of Econometrics*, **95**, 57-69.
- [43] Ozun, A. & Cifter, A. (2007). Nonlinear Combination of Financial Forecast with Genetic Algorithm. *MPRA 2488, University Library of Munich, Germany*.
- [44] Pentula, S. (1986). Modelling the Persistence of Conditional Variances: A Comment. *Econometric Review*, **5**, 71-74.

- [45] R Development Core Team (2011). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.
- [46] Schwert, W. (1990). Stock Volatility and the Crash of '87. *Review of Financial Studies*, **3**, 77-102.
- [47] Taylor, S. (1986). *Modelling Financial Time Series*. Wiley, New York.
- [48] Torman, V. B. L. & Vigo, A. (2007). Comparação via simulação dos estimadores clássicos e Bayesianos no modelo de coeficientes aleatórios para dados longitudinais. *Dissertação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul*.
- [49] Trindade, A. A.; Zhu, Y. & Andrews, B. (2010). Time Series Models With Asymmetric Laplace Innovations. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 1317-1333.
- [50] Vrontos, I. D.; Dellaportas, P. & Politis, D. (2000). Full Bayesian inference for GARCH and EGARCH models. *Journal of Business and Economic Statistics*, **18**, 187-198.
- [51] Zakoian, J.M. (1994). Threshold Heteroskedasticity Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **15**, 931-955.
- [52] Wurtz, D.; Chalabi, Y. & Luksan, Y. (2009). Parameter Estimation of ARMA Models with GARCH/APARCH Errors. An R and SPlus Software Implementation. (*Technical report*).

Apêndice A

Algoritmos

Nesta seção apresentamos os programas implementados em linguagem **R** para o ajuste dos modelos apresentados neste trabalho.

A.1 Gerando uma série SW(2)-GARCH(1,1)

```
library(VGAM)

N <- 3000
p <- c(0.005,0.10,0.08,0.065,0.7)
e <- ralap(N, kappa=p[5])
# gerando valores ocultos da série St
St <- rbinom(1,1,0.5)
pp11 <- 0.994
pp22 <- 0.992
for (i in 2:N)
{if (St[i-1]==0) St[i]<- rbinom(1,1,(1-pp11))
else St[i]<- rbinom(1,1,pp22) }
c(sum(St==0),sum(St==1)) # Validação da Sequencia
ht <- z <- abs(ralap(1,0,1, kappa=p[5]))
for (i in 2:N)
{ ht[i] <- p[1]+p[2]*St[i]+p[3]*z[i-1]^2+p[4]*ht[i-1]
z[i] <- e[i]*sqrt(ht[i]) }
x=z
plot.ts(x)
points(St+0.5,type='l',lty=5)
```

A.2 Gerando uma série SW(2)-APARCH(1,1)

```

library(VGAM)

N <- 3000
p <- c(0.0006,0.005,0.1,0.06,0.65,0.7)
e <- ralap(N, kappa=p[6])
# gerando valores ocultos da série St
St <- rbinom(1,1,0.5)
pp11 <- 0.994
pp22 <- 0.992
for (i in 2:N)
{if (St[i-1]==0) St[i]<- rbinom(1,1,(1-pp11))
else St[i]<- rbinom(1,1,pp22) }
c(sum(St==0),sum(St==1)) # Validação da Sequencia
ht <- z <- abs(ralap(1,0,1, kappa=p[6]))
for (i in 2:N)
{ ht[i] <- p[1]+p[2]*St[i]+p[3]*(abs(z[i-1])-p[5]*z[i-1])^2+p[4]*ht[i-1]
z[i] <- e[i]*sqrt(ht[i]) }
x=z
plot.ts(x)
points(St+0.5,type='l',lty=5)

```

A.3 Algoritmo SW(2)-APARCH(1,1) - Clássico

```

## ALGORITMO ##
z<-x
N<-length(z)
## PASSO 1:valores iniciais da serie ##
ZT2 <- c(sum(z^2)/N,z^2) # Vetor inicial de Zt^2
HT <- HT1 <- HT0 <-sum(z^2)/N # Valor inicial de Ht
## PASSO 2: chutes iniciais ##
Theta <- c(0.001,0.01,0.01,0.01,0.01,0.5)
cont <- 0 # contador
pre <- 0.00000001 # precisão
ERRO <- 1
## Passo 3: Probabilidades de transição ##
p11 <- 0.98 # chute inicial
p22 <- 0.95

```

```

#
while (ERRO > pre)
{
# Gerando valores ocultos iniciais da série St inicial
ST <- numeric(N+1)
ST[1] <- rbinom(1,1,0.5)
for (i in 2:(N+1))
{if (ST[i-1]==0) ST[i]<- rbinom(1,1,(1-p11))
else ST[i]<- rbinom(1,1,p22) }
#inicio <- sum(ifelse(ST==St,1,0))/N
## Passo 4: Probabilidades filtradas ##
y=z
for ( i in 2:(N+1)){
HT1[i] <- Theta[1]+Theta[2]+Theta[3]*(abs(z[i-1])-Theta[5]*z[i-1])^2
+Theta[4]*HT1[i-1]
HT0[i] <- Theta[1]+Theta[3]*(abs(z[i-1])-Theta[5]*z[i-1])^2+Theta[4]*HT0[i-1] }
p11 <- p11;p22 <- p22
P <- matrix(c(p11,(1-p22),(1-p11),p22),2,2)
Nt <- matrix(0,2,N)
#F = E(t/t-1)
F <- matrix(0,2,N)
# Chute inicial para F
f <- matrix(c(0.5,0.5),2,1)
#W = E(t/t)
W <- matrix(0,2,N)
for (i in 1:N) {
F[,i] <- f
Nt[1,i] <- dalap(y[i],0,sqrt(HT0[i]),kappa=Theta[6])
Nt[2,i] <- dalap(y[i],0,sqrt(HT1[i]),kappa=Theta[6])
W[1,i] <- (F[1,i]*Nt[1,i]) / ( F[1,i]*Nt[1,i] + F[2,i]*Nt[2,i] )
W[2,i] <- (F[2,i]*Nt[2,i]) / ( F[1,i]*Nt[1,i] + F[2,i]*Nt[2,i] )
f <- P%*%W[,i] }
## Passo 5: Probabilidades suavizadas ##
EE <- matrix(0,2,N)
EE[,N] <- W[,N]
ee <- matrix(W[,N],2,1)
for (i in 1:(N-1))
{ EE[,N-i] <- W[,N-i]*(t(P)%*(ee/F[,N+1-i]))
ee <- matrix(EE[,N-i],2,1) }

```

```

## Passo 6: Atualizar transição ##
a <- matrix(0,2,N-2)
for (i in 3:N) {
a[1,i-2] <- (EE[1,i]/F[1,i])*p11*W[1,i-1]
a[2,i-2] <- (EE[2,i]/F[2,i])*p22*W[2,i-1] }
prob11 <- sum(a[1,])/ sum(EE[1,2:N])
p11 <- prob11
prob22 <- sum(a[2,])/ sum(EE[2,2:N])
p22 <- prob22

## Passo 7: var condicional com parametros iniciais ##
for ( i in 2:(N+1))
{ HT[i] <- Theta[1]+Theta[2]*ST[i]+Theta[3]*(abs(z[i-1])-Theta[5]*z[i-1])^2
+Theta[4]*HT[i-1] }

## Calculo do termo recursivo ##
Ralpha0 <- R2alpha0 <- Ralpha01 <- R2alpha01 <- 1
Ralpha1 <- Rbeta1 <- R2alpha1 <- R2beta1 <- sum(z^2)/N
Rgama <- Ralpha1gama <- R2gama <- sum(z^2)/N
Ralpha0alpha1 <- Ralpha0alpha01 <- Ralpha0beta1 <- 1
Ralpha1alpha01 <- Ralpha1beta1 <- Ralpha01beta1 <- 1
Ralpha0gama <- Ralpha01gama <- Rgambeta1 <- 1
for (i in 2:(N+1))
{ Ralpha0[i] <- 1 + Theta[4]*(Ralpha0[i-1])
Ralpha01[i] <- ST[i] + Theta[4]*(Ralpha01[i-1])
Ralpha1[i] <- (abs(z[i-1])-Theta[5]*z[i-1])^2 + Theta[4]*(Ralpha1[i-1])
Rbeta1[i] <- HT[i-1] + Theta[4]*(Rbeta1[i-1])
Rgama[i] <- 2*Theta[3]*(ZT2[i-1]*Theta[5]-abs(z[i-1])*z[i-1])
+ Theta[4]*(Rgama[i-1])
R2gama[i] <- 2*Theta[3]*ZT2[i-1]+ Theta[4]*(R2gama[i-1])
R2alpha0[i] <- Theta[4]*(R2alpha0[i-1])
R2alpha01[i] <- Theta[4]*(R2alpha01[i-1])
R2alpha1[i] <- Theta[4]*(R2alpha1[i-1])
R2beta1[i] <- 2*Rbeta1[i-1]+Theta[4]*(R2beta1[i-1])
Ralpha0alpha1[i] <- Theta[4]*(Ralpha0alpha1[i-1])
Ralpha0alpha01[i] <- Theta[4]*(Ralpha0alpha01[i-1])
Ralpha0gama[i] <- Theta[4]*(Ralpha0gama[i-1])
Ralpha0beta1[i] <- Ralpha0[i-1]+Theta[4]*(Ralpha0beta1[i-1])
Ralpha01gama[i] <- Theta[4]*(Ralpha01gama[i-1])
Ralpha1gama[i] <- 2*(ZT2[i-1]*Theta[5]-abs(z[i-1])*z[i-1])
+ Theta[4]*(Ralpha1gama[i-1])

```

```

Ralpha1alpha0[i] <- Theta[4]*(Ralpha1alpha0[i-1])
Ralpha1beta1[i] <- Ralpha1[i-1]+Theta[4]*(Ralpha1beta1[i-1])
Ralpha0beta1[i] <- Ralpha0[i-1]+Theta[4]*(Ralpha0beta1[i-1])
Rgamabeta1[i] <- Rgama[i-1]+Theta[4]*(Rgamabeta1[i-1]) }
ZT2 <- ZT2[1:N+1];HT <- HT[1:N+1];Ralpha0 <- Ralpha0[1:N+1]
Ralpha01 <- Ralpha01[1:N+1];Ralpha1 <- Ralpha1[1:N+1];Rbeta1 <- Rbeta1[1:N+1]
R2alpha0 <- R2alpha0[1:N+1]; R2alpha01 <- R2alpha01[1:N+1]
R2alpha1 <- R2alpha1[1:N+1]; R2beta1 <- R2beta1[1:N+1]
Ralpha0alpha1 <- Ralpha0alpha1[1:N+1]; Ralpha0alpha01 <- Ralpha0alpha01[1:N+1]
Ralpha0beta1 <- Ralpha0beta1[1:N+1]
Ralpha1alpha01 <- Ralpha1alpha01[1:N+1]; Ralpha1beta1 <- Ralpha1beta1[1:N+1]
Ralpha0beta1 <- Ralpha0beta1[1:N+1]
Rgama <- Rgama[1:N+1];Ralphagama <- Ralpha1gama[1:N+1];R2gama <- R2gama[1:N+1]
Ralpha0gama <- Ralpha0gama[1:N+1];Ralpha01gama <- Ralpha01gama[1:N+1]
Rgamabeta1 <- Rgamabeta1[1:N+1]
## PASSO 8 e 9: calculo das derivadas ##
## vetores da 1° derivada
D1alpha0 <- 0 ; D1alpha01 <- 0 ; D1alpha1 <- 0; D1beta1 <- 0
D1ass <- 0; D1gama <- 0
## vetores da 2° derivada
D2alpha0 <- 0 ; D2alpha01 <- 0 ; D2alpha1 <- 0 ;D2beta1 <- 0
D2ass <- 0; D2gama <- 0
D2alpha0alpha1 <- 0 ; D2alpha0alpha01 <- 0 ; D2alpha0beta1 <- 0
D2alpha1alpha01 <- 0 ; D2alpha1beta1 <- 0; D2alpha01beta1 <- 0
D2alpha0gama <- 0 ; D2alpha01gama <- 0; D2alpha1gama <- 0; D2gamabeta1 <- 0
for(i in 1:N){
if(z[i]<0){D1alpha0[i] <- -(1/(2*HT[i]))*Ralpha0[i]*
(1+sqrt(2)*z[i]/(Theta[6]*sqrt(HT[i])))
D1alpha01[i] <- -(1/(2*HT[i]))*Ralpha01[i]*(1+sqrt(2)*z[i]/(Theta[6]*sqrt(HT[i])))
D1alpha1[i] <- -(1/(2*HT[i]))*Ralpha1[i]*(1+sqrt(2)*z[i]/(Theta[6]*sqrt(HT[i])))
D1beta1[i] <- -(1/(2*HT[i]))*Rbeta1[i]*(1+sqrt(2)*z[i]/(Theta[6]*sqrt(HT[i])))
D1gama[i] <- -(1/(2*HT[i]))*Rgama[i]*(1+sqrt(2)*z[i]/(Theta[6]*sqrt(HT[i])))
D1ass[i] <- (1-Theta[6]^4)/(Theta[6]*(1+Theta[6]^2))
-sqrt(2)*z[i]/(Theta[6]^2*sqrt(HT[i]))}
else{D1alpha0[i] <- -(1/(2*HT[i]))*Ralpha0[i]*(1-sqrt(2)*Theta[6]*z[i]/sqrt(HT[i]))
D1alpha01[i] <- -(1/(2*HT[i]))*Ralpha01[i]*(1-sqrt(2)*Theta[6]*z[i]/sqrt(HT[i]))
D1alpha1[i] <- -(1/(2*HT[i]))*Ralpha1[i]*(1-sqrt(2)*Theta[6]*z[i]/sqrt(HT[i]))
D1beta1[i] <- -(1/(2*HT[i]))*Rbeta1[i]*(1-sqrt(2)*Theta[6]*z[i]/sqrt(HT[i]))
D1gama[i] <- -(1/(2*HT[i]))*Rgama[i]*(1-sqrt(2)*Theta[6]*z[i]/sqrt(HT[i]))

```

```

D1ass[i] <- (1-Theta[6]^4)/(Theta[6]*(1+Theta[6]^2))-sqrt(2)*z[i]/sqrt(HT[i])}
D2alpha0[i] <- (1/(2*HT[i]))*(R2alpha0[i]-(1/HT[i])*Ralpha0[i]^2)
D2alpha01[i] <- (1/(2*HT[i]))*(R2alpha01[i]-(1/HT[i])*Ralpha01[i]^2)
D2alpha1[i] <- (1/(2*HT[i]))*(R2alpha1[i]-(1/HT[i])*Ralpha1[i]^2)
D2beta1[i] <- (1/(2*HT[i]))*(R2beta1[i]-(1/HT[i])*Rbeta1[i]^2)
D2gama[i] <- (1/(2*HT[i]))*(R2gama[i]-(1/HT[i])*Rgama[i]^2)
D2ass[i] <- -(Theta[6]^4-4*Theta[6]^2-1)/(Theta[6]^2*(1+Theta[6]^2)^2)
D2alpha0alpha01[i] <- (1/(2*HT[i]))*(Ralpha0alpha01[i]-(1/HT[i])*
Ralpha0[i]*Ralpha01[i])
D2alpha0alpha1[i] <- (1/(2*HT[i]))*(Ralpha0alpha1[i]-(1/HT[i])*
Ralpha0[i]*Ralpha1[i])
D2alpha0beta1[i] <- (1/(2*HT[i]))*(Ralpha0beta1[i]-(1/HT[i])*Ralpha0[i]*Rbeta1[i])
D2alpha1alpha01[i] <- (1/(2*HT[i]))*(Ralpha1alpha01[i]-(1/HT[i])*
Ralpha01[i]*Ralpha1[i])
D2alpha1beta1[i] <- (1/(2*HT[i]))*(Ralpha1beta1[i]-(1/HT[i])*Rbeta1[i]*Ralpha1[i])
D2alpha01beta1[i] <- (1/(2*HT[i]))*(Ralpha01beta1[i]-(1/HT[i])*
Rbeta1[i]*Ralpha01[i])
D2alpha0gama[i] <- (1/(2*HT[i]))*(Ralpha0gama[i]-(1/HT[i])*Ralpha0[i]*Rgama[i])
D2alpha01gama[i] <- (1/(2*HT[i]))*(Ralpha01gama[i]-(1/HT[i])*Ralpha01[i]*Rgama[i])
D2alpha1gama[i] <- (1/(2*HT[i]))*(Ralpha1gama[i]-(1/HT[i])*Rgama[i]*Ralpha1[i])
D2gamabeta1[i] <- (1/(2*HT[i]))*(Rgamabeta1[i]-(1/HT[i])*Rbeta1[i]*Rgama[i])
}
## PASSO 10 e 11: algoritmo BHHH ##
## gerando matrizes para rodar algoritmo BHHH
M <- c(sum(D1alpha0),sum(D1alpha01),sum(D1alpha1),sum(D1beta1),
sum(D1gama),sum(D1ass))
V <- matrix(0,6,6)
V[1,1] <- sum(D2alpha0)
V[2,2] <- sum(D2alpha01)
V[3,3] <- sum(D2alpha1)
V[4,4] <- sum(D2beta1)
V[5,5] <- sum(D2gama)
V[6,6] <- sum(D2ass)
V[1,2] <- V[2,1] <- sum(D2alpha0alpha01)
V[1,3] <- V[3,1] <- sum(D2alpha0alpha1)
V[1,4] <- V[4,1] <- sum(D2alpha0beta1)
V[1,5] <- V[5,1] <- sum(D2alpha0gama)
V[1,6] <- V[6,1] <- 0
V[2,3] <- V[3,2] <- sum(D2alpha1alpha01)

```

```

V[2,4] <- V[4,2] <- sum(D2alpha01beta1)
V[2,5] <- V[5,2] <- sum(D2alpha01gama)
V[2,6] <- V[6,2] <- 0
V[3,4] <- V[4,3] <- sum(D2alpha1beta1)
V[3,5] <- V[5,3] <- sum(D2alpha01gama)
V[3,6] <- V[6,3] <- 0
V[4,5] <- V[5,4] <- sum(D2gamabeta1)
V[4,6] <- V[6,4] <- 0
V[5,6] <- V[6,5] <- 0

## Calculando Tau para realizar BHHH ##
HA <- 0.0001;gama <- 0; conttest <- 0
while ( !(gama < (1-HA)) | !(gama > HA) )
{
# função com theta atual
ll <- numeric()
for(i in 1:N){
if(z[i]<0){ ll[i] <-(-1/2)*log(HT[i])+log(Theta[6]/(1+Theta[6]^2))
+sqrt(2)*(z[i])/(Theta[6]*sqrt(HT[i]))}
else{ll[i] <-(-1/2)*log(HT[i])+log(Theta[6]/(1+Theta[6]^2))
-sqrt(2)*Theta[6]*(z[i])/(sqrt(HT[i]))}
}
VX <- sum(ll)
tau <- runif(1,0.001,0.08)
# Novo theta baseado no tau
thetatest <- Theta + (tau)*solve(V)%*%M
# calculando HTtest com thetatest
ZT2 <- z^2
HTtest <- sum(z^2)/N
for ( i in 2:(N+1))
{HTtest[i]<-thetatest[1]+thetatest[2]*ST[i]+thetatest[3]*(abs(z[i-1])
-thetatest[5]*z[i-1])^2+thetatest[4]*HTtest[i-1]}
HTtest <- HTtest[1:N+1]
#ZT2 <- ZT2[1:N+1]
llt <- numeric()
for(i in 1:N){
if(z[i]<0){ llt[i] <-(-1/2)*log(HTtest[i])+log(thetatest[6]/(1+thetatest[6]^2))
+sqrt(2)*(z[i])/(thetatest[6]*sqrt(HTtest[i]))}
else{llt[i] <-(-1/2)*log(HTtest[i])+log(thetatest[6]/(1+thetatest[6]^2))
-sqrt(2)*thetatest[6]*(z[i])/(sqrt(HTtest[i]))}
}

```

```

}
VXtest <- sum(llt)
gama <- (VXtest-VX)/(tau*(t(M)%*%solve(V)%*%M))
cat("\n gama ->", gama, "\n")
conttest <- conttest +1}
THETAN <- Theta +(tau)*solve(V)%*%M
ERRO <- sum((THETAN-Theta)^2)
Theta <- THETAN
cont <- cont+1
cat("\n Número de Iterações ->", cont, "\n")
cat("\n ERRO ->", ERRO, "\n")
}

```

A.4 Algoritmo SW(2)-APARCH(1,1) - Bayesiano

```

T <- length(z)
M <- 30000 # numero de iterações
m <- 2000 # burn in
alpha00 <- 0.01 # chute inicial para alpha00
alpha01 <- 0.01 # chute inicial para alpha01
alpha1 <- 0.01 # chute inicial para alpha1
beta1 <- 0.10 # chute inicial para beta1
gama <- 0.1 # chute inicial para gama
delta <- 1 # chute inicial para delta
lambda <- 0.1 # chute inicial para lambda
# Probabilidades de transição
PT <- matrix(0,M+m,2)
p00 <- 0.90 # chute inicial para p00
p11 <- 0.88 # chute inicial para p11
PT[1,1] <- p00
PT[1,2] <- p11
u00 <- 95 ;u01 <- 5
u11 <- 90 ;u10 <- 10 # chute inicial para parametros da dist beta
# Gerando valores ocultos iniciais da série St inicial
ST <- numeric(T)
ST[1] <- rbinom(1,1,0.5)
for (i in 2:T)
{if (ST[i-1]==0) ST[i]<- rbinom(1,1,(1-p00))

```

```

else ST[i]<- rbinom(1,1,p11) }
# Contadores
cont00 <- 0; cont01 <- 0
contD <- 0; contG <- 0
contA <- 0; contB <- 0
bt <- 6; bt1 <- 8; btg <- 6
THETA <- matrix(0,M+m,7)
#Matrix c/ parametros:coluna1=alpha0,coluna2=alpha01,coluna3=alpha1,coluna4=beta1
# coluna5=gama, coluna6=delta, coluna7=lambda e Linha representa iteração
THETA[1,1] <- alpha00; THETA[1,2] <- alpha01
THETA[1,3] <- alpha1; THETA[1,4] <- beta1
THETA[1,5] <- gama; THETA[1,6] <- delta
THETA[1,7] <- lambda
#####
for ( j in 1:(M+m-1))
{
#----- Gerando S -----#
# algoritmo baseado na prob P(St=0) (valores iniciais)
ST <- c(0,ST,0)
P10 <- 0;P20 <- 0
P11 <- 0;P21 <- 0
PP0 <- numeric(T);PP1 <- numeric(T)
PP0N <- 0;PP1N <- 0
P <- 0 # para prob de P(St=0|..)
log0 <- numeric(T);log1 <- numeric(T);log <- numeric(T)
ST0 <- 0;ST1 <- 0
for (i in 2:(T+1))
{
# Para ST=0
ifelse(ST[i+1]==0,P20<- PT[j,1], P20<- (1-PT[j,1]))
ifelse(ST[i-1]==0,P10<- PT[j,1], P10<- (1-PT[j,2]))
# Para ST=1
ifelse(ST[i+1]==1,P21<- PT[j,2], P21<- (1-PT[j,2]))
ifelse(ST[i-1]==1,P11<- PT[j,2], P11<- (1-PT[j,1]))
PP0[i-1] <- P10*P20
PP1[i-1] <- P11*P21
}
ST0 <- ST1 <- ST[0:T+1]
# ___ Calculando Para St=0 ___#

```

```

#ST0[i+1] <- 0
Z2 <- c((sum(z^2)/T),z^2); HT0 <- (sum(z^2)/T) #^(THETA[j,6]/2)
for ( k in 2:(T+1))
{ HT0[k] <- THETA[j,1] + THETA[j,3]*(abs(z[k-1])-THETA[j,5]*z[k-1])^THETA[j,6]
+THETA[j,4]*HT0[k-1] }
HT0 <- HT0[1:T+1] ;Z2 <- Z2[1:T+1]
l0 <- numeric()
for(k in 1:T){
if(z[k]<0){ l0[k] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT0[k])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
+sqrt(2)*z[k]/(THETA[j,7]*(HT0[k]^(THETA[j,6]/2)))}
else{l0[k] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT0[k])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))-
sqrt(2)*THETA[j,7]*z[k]/((HT0[k]^(THETA[j,6]/2)))}
}
# ___ Calculando Para St=1 ___#
#ST1[i+1] <- 1
Z2 <- c((sum(z^2)/T),z^2); HT1 <- (sum(z^2)/T)
for ( k in 2:(T+1)){ HT1[k] <- THETA[j,1] + THETA[j,2] +
THETA[j,3]*(abs(z[k-1])-THETA[j,5]*z[k-1])^THETA[j,6]+THETA[j,4]*HT1[k-1] }
HT1 <- HT1[1:T+1]; Z2 <- Z2[1:T+1]
l1 <- numeric()
for(k in 1:T){
if(z[k]<0){ l1[k] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT1[k])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
+sqrt(2)*z[k]/(THETA[j,7]*(HT1[k]^(THETA[j,6]/2)))}
else{l1[k] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT1[k])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))-
sqrt(2)*THETA[j,7]*z[k]/((HT1[k]^(THETA[j,6]/2)))}
}
for (i in 1:T)
{
log0[i] <- sum(l0[i:T])
log1[i] <- sum(l1[i:T])
log[i] <- log1[i] - log0[i]
PPON[i] <- PPO[i]*exp(0)
PP1N[i] <- PP1[i]*exp(log[i])
P[i] <- PPON[i]/(PPON[i] + PP1N[i])
}
ST <- ST[1:T+1]
U <- runif(T,0,1)
ST <- ifelse( U <= P, 0, 1 )
#nova <- sum(ifelse(ST==ST,1,0))/T

```

```

#--- Gerando P00 e P11 ----#
n00 <- n01 <- n11 <- n10 <- 0
for (i in 1:(T-1))
{
if(ST[i]==1 & ST[i+1]==1) n11 <- n11+1
if(ST[i]==1 & ST[i+1]==0) n10 <- n10+1
if(ST[i]==0 & ST[i+1]==0) n00 <- n00+1
if(ST[i]==0 & ST[i+1]==1) n01 <- n01+1
}
PT[j+1,1] <- rbeta(1,u00+n00,u01+n01)
PT[j+1,2] <- rbeta(1,u11+n11,u10+n10)
#----- GERANDO ( ALPHA00 ) -----#
Z2 <- c((sum(z^2)/T),z^2); ST <- c(0,ST); HT <- (sum(z^2)/T)
for ( i in 2:(T+1)){ HT[i] <- THETA[j,1]+THETA[j,2]*ST[i]+
THETA[j,3]*(abs(z[i-1])-THETA[j,5]*z[i-1])^THETA[j,6]+THETA[j,4]*HT[i-1] }
HT <- HT[1:T+1]
# Gerando candidato alpha00 #
Calpha00 <- 0
while(Calpha00 <= 0){
Calpha00 <-THETA[j,1]+rnorm(1,0,0.05)
cont00 <- cont00+1} #THETA[j,1]+rnorm(1,md,sd)}
# Calculando HTtemp com candidatos #
HTtemp <- (sum(z^2)/T) ; ST <- c(0,ST)
for ( i in 2:(T+1)){ HTtemp[i] <- Calpha00+THETA[j,2]*ST[i]+
THETA[j,3]*(abs(z[i-1])-THETA[j,5]*z[i-1])^THETA[j,6]+THETA[j,4]*HTtemp[i-1] }
HTtemp <- HTtemp[1:T+1];
# Log da Densidade a Posteriori #
l10 <- numeric()
for(i in 1:T){
if(z[i]<0){ l10[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
+sqrt(2)*z[i]/(THETA[j,7]*(HT[i]^(THETA[j,6]/2)))}
else{l10[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))-
sqrt(2)*THETA[j,7]*z[i]/((HT[i]^(THETA[j,6]/2)))}
}
Lpos <- sum(l10)
# Log da Densidade a Posteriori temp com candidatos #
lltemp0 <- numeric()
for(i in 1:T){ if(z[i]<0){ lltemp0[i] <- (-THETA[j,6]/2)*log(HTtemp[i])+
log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))

```

```

+sqrt(2)*z[i]/(THETA[j,7]*(HTtemp[i]^(THETA[j,6]/2)))}
else{lltemp0[i] <- (-THETA[j,6]/2)*log(HTtemp[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
-sqrt(2)*THETA[j,7]*z[i]/((HTtemp[i]^(THETA[j,6]/2)))}
}
Lpostemp <- sum(lltemp0)
#Prioris
pi00<-dnorm(THETA[j,1],0,100)
pitemp00<-dnorm(Calpha00,0,100)
# Prob. aceitação
U <- runif(1,0,1)
PALPHAO <- min(1,(pitemp00/pi00)*exp(Lpostemp - Lpos))
if (U <= PALPHAO){ THETA[j+1,1] <- Calpha00
} else THETA[j+1,1] <- THETA[j,1]
#
#----- GERANDO ( ALPHA01 ) -----#
Z2 <- c((sum(z^2)/T),z^2); HT <- (sum(z^2)/T) ; ST <- c(0,ST)
for ( i in 2:(T+1)){ HT[i] <- THETA[j+1,1]+THETA[j,2]*ST[i]+
THETA[j,3]*(abs(z[i-1])-THETA[j,5]*z[i-1])^THETA[j,6]+THETA[j,4]*HT[i-1] }
HT <- HT[1:T+1]
# Gerando candidato alpha01 #
Calpha01 <- 0
while(Calpha01 <= 0){
Calpha01 <- THETA[j,2]+rnorm(1,0,0.05)
cont01 <- cont01+1 }
# Calculando HTtemp com candidatos #
HT0temp <- (sum(z^2)/T) ; ST <- c(0,ST)
for ( i in 2:(T+1)){ HT0temp[i] <- THETA[j+1,1]+Calpha01*ST[i]+
THETA[j,3]*(abs(z[i-1])-THETA[j,5]*z[i-1])^THETA[j,6]+THETA[j,4]*HT0temp[i-1] }
HT0temp <- HT0temp[1:T+1];
# Log da Densidade a Posteriori #
ll01 <- numeric()
for(i in 1:T){
if(z[i]<0){ ll01[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
+sqrt(2)*z[i]/(THETA[j,7]*(HT[i]^(THETA[j,6]/2)))}
else{ll01[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))-
sqrt(2)*THETA[j,7]*z[i]/((HT[i]^(THETA[j,6]/2)))}
}
Lpos0 <- sum(ll01)
# Log da Densidade a Posteriori temp com candidatos #

```

```

lltemp01 <- numeric()
for(i in 1:T){ if(z[i]<0){ lltemp01[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT0temp[i])+
log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))+
sqrt(2)*z[i]/(THETA[j,7]*(HT0temp[i]^(THETA[j,6]/2)))}
else{lltemp01[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT0temp[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
-sqrt(2)*THETA[j,7]*z[i]/((HT0temp[i]^(THETA[j,6]/2)))}
}
Lpostemp0 <- sum(lltemp01)
#Prioris
pi01<-dnorm(THETA[j,2],0,100)
pitemp01<-dnorm(Calpha01,0,100)
# Prob. aceitação
U <- runif(1,0,1)
PALPHA01 <- min(1,(pitemp01/pi01)*exp(Lpostemp0 - Lpos0))
if (U <= PALPHA01){ THETA[j+1,2] <- Calpha01
} else THETA[j+1,2] <- THETA[j,2]
#
#----- GERANDO ( ALPHA1 ) -----#
Z2 <- c((sum(z^2)/T),z^2); HT <- (sum(z^2)/T) ; ST <- c(0,ST)
for ( i in 2:(T+1)){ HT[i] <- THETA[j+1,1]+THETA[j+1,2]*ST[i]+
THETA[j,3]*(abs(z[i-1])-THETA[j,5]*z[i-1])^THETA[j,6]+THETA[j,4]*HT[i-1] }
HT <- HT[1:T+1]
# Gerando candidato alpha1 #
at <- (1+THETA[j,3]*(bt-2))/(1-THETA[j,3])
Calpha1 <- 1
while(Calpha1>((1-THETA[j,4])/(1+THETA[j,5]^2))){
Calpha1 <- rbeta(1,at,bt)
contA <- contA +1}
# Calculando HTtemp com candidatos #
HT1temp <- (sum(z^2)/T) ; ST <- c(0,ST)
for ( i in 2:(T+1)){ HT1temp[i] <- THETA[j+1,1]+THETA[j+1,2]*ST[i]+
Calpha1*(abs(z[i-1])-THETA[j,5]*z[i-1])^THETA[j,6]+THETA[j,4]*HT1temp[i-1] }
HT1temp <- HT1temp[1:T+1];
# Log da Densidade a Posteriori #
ll1 <- numeric()
for(i in 1:T){
if(z[i]<0){ ll1[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
+sqrt(2)*z[i]/(THETA[j,7]*(HT[i]^(THETA[j,6]/2)))}
else{ll1[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))-

```

```

sqrt(2)*THETA[j,7]*z[i]/((HT[i]^(THETA[j,6]/2))))}
}
Lpos1 <- sum(ll1)
#
atCa <- (1+Calpha1*(bt-2))/(1-Calpha1)
qA <- dbeta(THETA[j,3],atCa,bt)
# Log da Densidade a Posteriori temp com candidatos #
lltemp1 <- numeric()
for(i in 1:T){ if(z[i]<0){ lltemp1[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT1temp[i])+
log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))+
sqrt(2)*z[i]/(THETA[j,7]*(HT1temp[i]^(THETA[j,6]/2))))}
else{lltemp1[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT1temp[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
-sqrt(2)*THETA[j,7]*z[i]/((HT1temp[i]^(THETA[j,6]/2))))}
}
Lpostemp1 <- sum(lltemp1)
#Prioris
piA<-dnorm(THETA[j,3],0,100)
pitempA<-dnorm(Calpha1,0,100)
#
qCa <- dbeta(Calpha1,at,bt)
# Prob. aceitação
U <- runif(1,0,1)
PALPHA1 <- min(1,(pitempA/piA)*exp(Lpostemp1 - Lpos1)*(qA/qCa))
if (U <= PALPHA1){ THETA[j+1,3] <- Calpha1
} else THETA[j+1,3] <- THETA[j,3]
#
#----- GERANDO ( BETA1 ) -----#
Z2 <- c((sum(z^2)/T),z^2); HT <- (sum(z^2)/T) ; ST <- c(0,ST)
for ( i in 2:(T+1)){ HT[i] <- THETA[j+1,1]+THETA[j+1,2]*ST[i]+
THETA[j+1,3]*(abs(z[i-1])-THETA[j,5]*z[i-1])^THETA[j,6]+THETA[j,4]*HT[i-1] }
HT <- HT[1:T+1]
# Gerando candidato beta1 #
at1 <- (1+THETA[j,4]*(bt1-2))/(1-THETA[j,4])
Cbeta1 <- 1
while(Cbeta1>(1-THETA[j+1,3]*(1+THETA[j,5]^2))){
Cbeta1 <- rbeta(1,at1,bt1)
contB <- contB +1}
# Calculando HTtemp com candidatos #
HT2temp <- (sum(z^2)/T) ; ST <- c(0,ST)

```

```

for ( i in 2:(T+1)){ HT2temp[i] <- THETA[j+1,1]+THETA[j+1,2]*ST[i]+
THETA[j+1,3]*(abs(z[i-1])-THETA[j,5]*z[i-1])^THETA[j,6]+Cbeta1*HT2temp[i-1] }
HT2temp <- HT2temp[1:T+1];
# Log da Densidade a Posteriori #
ll2 <- numeric()
for(i in 1:T){
if(z[i]<0){ ll2[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
+sqrt(2)*z[i]/(THETA[j,7]*(HT[i]^(THETA[j,6]/2)))}
else{ll2[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))-
sqrt(2)*THETA[j,7]*z[i]/((HT[i]^(THETA[j,6]/2)))}
}
Lpos2 <- sum(ll2)
#
atCb <- (1+Cbeta1*(bt1-2))/(1-Cbeta1)
qB <- dbeta(THETA[j,4],atCb,bt1)
# Log da Densidade a Posteriori temp com candidatos #
lltemp2 <- numeric()
for(i in 1:T){ if(z[i]<0){ lltemp2[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT2temp[i])+
log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))+
sqrt(2)*z[i]/(THETA[j,7]*(HT2temp[i]^(THETA[j,6]/2)))}
else{lltemp2[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT2temp[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))-
-sqrt(2)*THETA[j,7]*z[i]/((HT2temp[i]^(THETA[j,6]/2)))}
}
Lpostemp2 <- sum(lltemp2)
#Prioris
piB<-dnorm(THETA[j,4],0,100)
pitempB<-dnorm(Cbeta1,0,100)
#
qCb <- dbeta(Cbeta1,at1,bt1)
# Prob. aceitação
U <- runif(1,0,1)
PBETA1 <- min(1,(pitempB/piB)*exp(Lpostemp2 - Lpos2)*(qB/qCb))
if (U <= PBETA1){ THETA[j+1,4] <- Cbeta1
} else THETA[j+1,4] <- THETA[j,4]
#
#----- GERANDO ( GAMA ) -----#
Z2 <- c((sum(z^2)/T),z^2); HT <- (sum(z^2)/T) ; ST <- c(0,ST)
for ( i in 2:(T+1)){ HT[i] <- THETA[j+1,1]+THETA[j+1,2]*ST[i]+
THETA[j+1,3]*(abs(z[i-1])-THETA[j,5]*z[i-1])^THETA[j,6]+THETA[j+1,4]*HT[i-1] }

```

```

HT <- HT[1:T+1]
# Gerando candidato gama #
atg <- (1+THETA[j,5]*(btg-2))/(1-THETA[j,5])
Cgama <- 2
while(Cgama>(sqrt((1-THETA[j+1,4]-THETA[j+1,3])/THETA[j+1,3]))) {
Cgama <- rbeta(1,atg,btg)
contG <- contG +1}
# Calculando HTtemp com candidatos #
HT3temp <- (sum(z^2)/T); ST <- c(0,ST)
for ( i in 2:(T+1)){ HT3temp[i] <- THETA[j+1,1]+THETA[j+1,2]*ST[i]+
THETA[j+1,3]*(abs(z[i-1])-Cgama*z[i-1])^THETA[j,6]+THETA[j+1,4]*HT3temp[i-1] }
HT3temp <- HT3temp[1:T+1];
# Log da Densidade a Posteriori #
l13 <- numeric()
for(i in 1:T){
if(z[i]<0){ l13[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
+sqrt(2)*z[i]/(THETA[j,7]*(HT[i]^(THETA[j,6]/2)))}
else{l13[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))-
sqrt(2)*THETA[j,7]*z[i]/((HT[i]^(THETA[j,6]/2)))}
}
Lpos3 <- sum(l13)
#
atCg <- (1+Cgama*(btg-2))/(1-Cgama)
qG <- dbeta(THETA[j,5],atCg,btg)
# Log da Densidade a Posteriori temp com candidatos #
lltemp3 <- numeric()
for(i in 1:T){ if(z[i]<0){ lltemp3[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT3temp[i])+
log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))+
sqrt(2)*z[i]/(THETA[j,7]*(HT3temp[i]^(THETA[j,6]/2)))}
else{lltemp3[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT3temp[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
-sqrt(2)*THETA[j,7]*z[i]/((HT3temp[i]^(THETA[j,6]/2)))}
}
Lpostemp3 <- sum(lltemp3)
#Prioris
piG<-dnorm(THETA[j,5],0,100)
pitempG<-dnorm(Cgama,0,100)
#
qCg <- dbeta(Cgama,atg,btg)
# Prob. aceitação

```

```

U <- runif(1,0,1)
PGAMA <- min(1,(pitempG/piG)*exp(Lpostemp3 - Lpos3)*(qG/qCg))
if (U <= PGAMA){ THETA[j+1,5] <- Cgama
} else THETA[j+1,5] <- THETA[j,5]
#
#----- GERANDO ( DELTA ) -----#
Z2 <- c((sum(z^2)/T),z^2); HT <- (sum(z^2)/T) ; ST <- c(0,ST)
for ( i in 2:(T+1))
{ HT[i] <- THETA[j+1,1]+THETA[j+1,2]*ST[i]+THETA[j+1,3]*(abs(z[i-1]))-
THETA[j+1,5]*z[i-1])^THETA[j,6]+THETA[j+1,4]*HT[i-1] }
HT <- HT[1:T+1]
# Gerando candidato delta #
Cdelta <- 0
while(Cdelta<=0){
Cdelta <- THETA[j,6]+rnorm(1,0,0.07)
contD <- contD+1}
# Calculando HTtemp com candidatos #
HT4temp <- (sum(z^2)/T) ; ST <- c(0,ST)
for ( i in 2:(T+1))
{ HT4temp[i] <- THETA[j+1,1]+THETA[j+1,2]*ST[i]+THETA[j+1,3]*(abs(z[i-1]))-
THETA[j+1,5]*z[i-1])^Cdelta+THETA[j+1,4]*HT4temp[i-1] }
HT4temp <- HT4temp[1:T+1];
# Log da Densidade a Posteriori #
l14 <- numeric()
for(i in 1:T){
if(z[i]<0){ l14[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
+sqrt(2)*z[i]/(THETA[j,7]*(HT[i]^(THETA[j,6]/2)))}
else{l14[i] <-(-THETA[j,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))-
sqrt(2)*THETA[j,7]*z[i]/((HT[i]^(THETA[j,6]/2)))}
}
Lpos4 <- sum(l14)
# Log da Densidade a Posteriori temp com candidatos #
lltemp4 <- numeric()
for(i in 1:T){ if(z[i]<0){ lltemp4[i] <-(-Cdelta/2)*log(HT4temp[i])+
log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))+
sqrt(2)*z[i]/(THETA[j,7]*(HT4temp[i]^(Cdelta/2)))}
else{lltemp4[i] <-(-Cdelta/2)*log(HT4temp[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
-sqrt(2)*THETA[j,7]*z[i]/((HT4temp[i]^(Cdelta/2)))}
}
}

```

```

Lpostemp4 <- sum(lltemp4)
#Prioris
piD<-dnorm(THETA[j,6],0,100)
pitempD<-dnorm(Cdelta,0,100)
# Prob. aceitação
U <- runif(1,0,1)
PDELTA <- min(1,(pitempD/piD)*exp(Lpostemp4 - Lpos4))
if (U <= PDELTA){ THETA[j+1,6] <- Cdelta
} else THETA[j+1,6] <- THETA[j,6]
#
#----- GERANDO ( LAMBDA ) -----#
Z2 <- c((sum(z^2)/T),z^2); HT <- (sum(z^2)/T); ST <- c(0,ST)
for ( i in 2:(T+1))
{ HT[i] <- THETA[j+1,1]+THETA[j+1,2]*ST[i]+THETA[j+1,3]*(abs(z[i-1]))-
THETA[j+1,5]*z[i-1])^THETA[j+1,6]+THETA[j+1,4]*HT[i-1] }
HT <- HT[1:T+1]
# Gerando candidato lambda #
Clambda <- 0
while(Clambda<=0){
Clambda <- THETA[j,7]+rnorm(1,0,0.05) }
#{ Clambda <- runif(1,0,1) }
# Log da Densidade a Posteriori #
lla <- numeric()
for(i in 1:T){
if(z[i]<0){ lla[i] <-(-THETA[j+1,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))
+sqrt(2)*z[i]/(THETA[j,7]*(HT[i]^(THETA[j+1,6]/2)))}
else{lla[i] <-(-THETA[j+1,6]/2)*log(HT[i])+log(THETA[j,7]/(1+THETA[j,7]^2))-
sqrt(2)*THETA[j,7]*z[i]/((HT[i]^(THETA[j+1,6]/2)))}
}
LposA <- sum(lla)
# Log da Densidade a Posteriori temp com candidatos #
lltempa <- numeric()
for(i in 1:T){
if(z[i]<0){ lltempa[i] <-(-THETA[j+1,6]/2)*log(HT[i])+log(Clambda/(1+Clambda^2))
+sqrt(2)*z[i]/(Clambda*(HT[i]^(THETA[j+1,6]/2)))}
else{lltempa[i] <-(-THETA[j+1,6]/2)*log(HT[i])+log(Clambda/(1+Clambda^2))-
sqrt(2)*Clambda*z[i]/((HT[i]^(THETA[j+1,6]/2)))}
}
LpostempA <- sum(lltempa)

```

```
#Prioris
piL<-dnorm(THETA[j,7],0,0.064)
pitempL<-dnorm(Clambda,0,0.064)
# Prob. aceitação
U <- runif(1,0,1)
PLAMBDA <- min(1,(pitempL/piL)*exp(LpostempA - LposA))
if (U <= PLAMBDA)
{ THETA[j+1,7] <- Clambda} else
{ THETA[j+1,7] <- THETA[j,7]}
}
```