

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

Abordagem Estatística em Modelos para Séries Temporais
de Contagem

Breno Silveira de Andrade

Orientador: Prof. Dr^o Marinho Gomes de Andrade Filho

São Carlos/SP

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

Abordagem Estatística em Modelos para Séries Temporais de Contagem

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos - DEs/UFSCar, para obtenção do Título de Mestre em Estatística

São Carlos/SP

2013

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

A553ae Andrade, Breno Silveira de.
Abordagem estatística em modelos para séries temporais
de contagem / Breno Silveira de Andrade. -- São Carlos :
UFSCar, 2013.
135 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2013.

1. Análise de séries temporais. 2. Inferência bayesiana. 3.
Modelos estatísticos. 4. Modelos GARMA. I. Título.

CDD: 519.55 (20ª)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Estatística

Via Washington Luís, Km 235 - C.P.676 - CGC 45358058/0001-40

FONE: (016) 3351-8292 – Email: ppgest@ufscar.br

13565-905 - SÃO CARLOS-SP - BRASIL

FOLHA DE APROVAÇÃO

Aluno(a) : Breno Silveira de Andrade

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA E APROVADA EM 06/05/2013

PELA COMISSÃO JULGADORA:

Presidente

Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho (ICMC-USP/Orientador)

1º Examinador

Prof. Dr. Márcio Luis Lanfredi Viola (DEs-UFSCar)

2º Examinador

Prof. Dr. Ricardo Sandes Ehlers (ICMC-USP)

Agradecimentos

A Deus e Nossa Senhora Aparecida por não cessarem de interceder por mim. Aos meus pais, Marta e Luís, e meus irmãos, Bruna e André. Acredito que o sucesso só acontece se é acompanhado de muita dedicação e perseverança. Uma base forte e segura é a chave para se manter focado, minha família é sem dúvida a minha base. Ao meu professor orientador Prof. Dr^o Marinho Gomes de Andrade Filho, pela orientação e dedicação. Por acreditar neste trabalho. Obrigado pela compreensão e conselhos, que, com certeza, me ajudaram e continuarão me ajudando no futuro. A minha namorada, amiga e companheira Ana, que está e sempre esteve ao meu lado. Nunca faltou incentivo por parte dela, sempre acreditando no meu potencial e aguentando momentos de ansiedade e insegurança. A todos os meu amigos. Da pós graduação: Marcelo, Jonatas, Paulo, Tiago e Alexandre. Do time de voleibol UFSCAR: “Bravin” (Tiago), “Carlão” (Carlos), “Ganso” (Vinicius), “Lê” (Leandro), “Frei” (Victor), “Doug”(Heitor), “Mato Grosso” (Gustavo). Os meus irmãos que moraram comigo em São José do Rio Preto na Republica JAnelas: “Pinda”(Leandro), “Xupeta”(Rodolfo), “Mig”(Miguel), “Virso” (Emerson), “Farofa”(Bruno), “Xiu”(Filipe), “Cabeça”(Paulo), “Panda”(Luís Fernando), “Giba”(Gilberto), “Frota”(Rafael), “Brunão”(Bruno), “Tanabi”(Fernando), “Porva”(Edilberto) e Renan. Aos meus amigos de Franca Gabriel e “Batata”(Rafael) e meus amigos de Bebedouro “Vinny”(Vinicius) e “Tavin”(Otávio). Aos meus companheiros que jogaram comigo no time de voleibol UNESP Rio Preto: Pedro, Péricle, Raduan, Plinio, Fernando, “Frances”(Vinicius). Aos meus amigos da graduação “Super”(Renato), “Sapo”(Caio) e “Marcão”(Marcos). Aos meus amigos da

Republica “Os Bartira”, e muitos outros que estiveram comigo. Em especial ao meu amigo e parceiro de moradia, Eder, sua ajuda foi imprescindível na conclusão deste trabalho. Aos meus avós: Wilson, e minha avó Sidney. E em especial a memória do meu avô Luizão ele foi, e sempre será uma inspiração para mim. A todos os professores e funcionários do departamento de estatística da UFSCAR, que direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho. A CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação estudou-se os modelos INGARCH , GLARMA e GARMA para modelar séries temporais de dados de contagem com as distribuições condicionais de Poisson e Binomial Negativa. A principal finalidade foi analisar no contexto clássico e bayesiano, a adequabilidade e qualidade de ajuste dos modelos em questão, assim como a construção de intervalos de credibilidade dos parâmetros para cada modelo testado. Para a abordagem Bayesiana foram consideradas priori conjugada ,satisfazendo as condições de cada modelo em questão, obtendo assim uma distribuição a posteriori. A abordagem proposta apresenta também o cálculo de critérios de seleção de modelos como o (EBIC), (DIC) e densidade condicional preditiva ordenada (CPO) para os caso Bayesiano e (BIC) para a abordagem clássica. Com um estudo de simulação foi possível verificar a consistência dos estimadores de máxima verossimilhança (clássicos) além disso foi usado critérios de seleção clássicos e Bayesianos para a seleção da ordem de cada um dos modelos. Uma análise de um conjunto de dados reais foi realizada , sendo uma série do número de transações financeiras realizadas em 30 minutos respectiva os mes de novembro de 2011. Estes resultados apresentam que tanto o estudo clássico, quanto o bayesiano, são capazes de descrever bem o comportamento da série e foram eficientes na escolha da ordem do mesmo.

Palavras-chave: *Modelo INGARCH. Modelo GLARMA. Modelo GARMA. Distribuição de Poisson. Distribuição Binomial Negativa. Inferência Clássica. Inferência Bayesiana.*

Abstract

In this work, it was studied the models *INGARCH*, *GLARMA* and *GARMA* to model count time series data with Poisson and Negative Binomial discrete conditional distributions. The main goal was analyze in classic and bayesian approach, the adequability and goodness of fit of these models, also the contruction of credibility intervals about each parameter. To the Bayesian study, was cosiderated a joint prior distribution that satisfied the conditions of each model and got a posterior distribution. This aproach presents too some criterion selection like (EBIC), (DIC) and ordenaded predictive conditional density (CPO) for Bayesian cases and (BIC) for classic cases. A simulation study was done to check the maximum likelihood estimator consistency in classic approach and has used criterion selection classic and Bayesian to choose the order of each model. An Analysis has made in a real data set realized as final stage as, these data consist the number of financial transactions in 30 minutes. These results have made in a classical and Bayesian approach, and discribed the data characteristic.

Palavras-chave: *INGARCH Model. GLARMA Model. GARMA Model. Poisson Distribution. Negative Binomial Distribution. Classic Inference. Bayesian Inference.*

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Preliminares	1
1.2	Organização dos capítulos	3
2	Processos lineares estacionários	5
2.1	Modelos ARMA	5
3	Modelos para séries temporais de contagem	10
3.1	Modelos lineares generalizados	10
3.2	Modelo Autorregressivo e Médias Moveis Generalizado (GARMA) .	12
3.2.1	GARMA Poisson	14
3.2.2	GARMA Binomial negativo	15
3.3	Modelo Autorregressivo e Médias Moveis Linear Generalizado(GLARMA)	16
3.3.1	GLARMA Poisson	20
3.3.2	GLARMA binomial negativa	22
3.4	Modelo INGARCH	24
3.4.1	INGARCH Poisson	26
3.4.2	INGARCH Binomial Negativa	28
3.5	Seleção de modelos	32
3.6	Bootstrap	33

4	Inferência Bayesiana para séries temporais de contagem	35
4.1	Visão Geral	35
4.2	Distribuições a Priori	37
4.2.1	Priori não informativa	37
4.2.2	Priori informativa	38
4.3	Abordagem bayesiana nos modelos propostos	39
4.3.1	ARMA Generalizado (GARMA)	39
4.3.2	ARMA Linear Generalizado (GLARMA)	41
4.3.3	GARCH Inteiro Generalizado	44
4.4	Métodos MCMC	48
4.5	Convergência do Algoritmo	50
4.6	Previsões para os modelos de séries temporais de contagem	51
4.7	Métodos de seleção bayesianos	52
4.7.1	EBIC	52
4.7.2	DIC	53
4.7.3	Densidade Condicional Preditiva Ordenada (CPO)	54
5	Aplicação com dados simulados	57
5.1	ARMA Generalizado (GARMA)	58
5.1.1	Poisson	58
5.1.2	binomial negativa	64
5.2	ARMA Linear Generalizado (GLARMA)	70
5.2.1	Poisson	70
5.2.2	binomial negativa	77
5.3	Integer GARCH (INGARCH)	83
5.3.1	Modelo de Poisson	83
5.3.2	Binomial negativa	89

<i>SUMÁRIO</i>	iii
6 Aplicação com dados reais	96
6.1 Número de transações financeiras realizadas em 30 minutos	96
6.1.1 Modelo GARMA	98
6.1.2 Modelo GLARMA	102
6.1.3 Modelo INGARCH	103
7 Considerações finais	108
Referências Bibliográficas	110
A Geradora de candidatos	113
B Simulações com séries de tamanho 200 e 1000 modelo INGARCH	116
C Simulações com séries de tamanho 200 e 1000 modelo GLARMA	123
D Simulações com séries de tamanho 200 e 1000 modelo GARMA	129

Capítulo 1

Introdução

1.1 Preliminares

A análise de séries temporais é uma área da estatística dedicada ao estudo de observações que apresentam dependência no tempo. Uma série temporal pode ser definida como um conjunto de observações de uma variável, dispostas sequencialmente no tempo. Esses tipos de dados surgem nas mais variadas áreas de aplicação, como sistemas de seguro, indústrias, economia, medicina, epidemiologia, filas, comunicação, confiabilidade, fenômenos meteorológicos, entre outros.

O interesse nesse tipo de dados iniciou-se com a necessidade de entender o comportamento de alguns fenômenos, tais como o número de casos de Poliomelite nos Estados Unidos, inicialmente introduzido por Zeger (1988). A partir desse estudo, surgiram novas séries como o número de internações por asma, relacionadas à falta de chuva em Sidney, discutido por Davis (2000); e também, mais recentemente, outro conjunto de dados trabalhado por Frey (2009), que consiste na classificação de icebergs de acordo com a porção de seu volume que se encontra submerso.

Box e Jenkins, em seu livro *Time Series Analysis, 1970*, foram pioneiros na criação de modelos para tratar séries temporais. Neste tipo de abordagem podemos destacar os modelos autorregressivos e de médias móveis (ARMA), sempre que nos deparamos com uma série temporal estacionária. A utilização destes modelos torna-se mais adequada quando a série tem distribuição de probabilidade conjunta gaussiana, porém no estudo de séries de contagem é necessário considerar uma distribuição de probabilidade adequada para séries discretas, existindo uma metodologia distinta da abordada em Box *et al.* (2008).

Uma extensão dos Modelos Lineares Generalizados (GLM), inicialmente introduzidos por Nelder e Wedderburn (1972), foi proposta por Benjamin (2003) e pode ser usada na modelagem de tais séries temporais, proporcionando uma gama de opções na escolha da distribuição ideal. Uma vez que temos em mãos uma série temporal de contagem, uma distribuição de probabilidade conjunta discreta é necessária para um bom ajuste dos dados. Neste trabalho demos ênfase a distribuição de Poisson e a distribuição Binomial Negativa.

Dentre as possíveis extensões dos modelos lineares generalizados para tratar séries temporais, podemos destacar algumas como SAM, em que Zeger (1988) estendeu o modelo de regressão de Poisson, multiplicando um erro serialmente correlacionado, e também o modelo INGARCH proposto por Ferland *et al.* (2004), em que a esperança condicional é escrita como um modelo GARCH proposto por Bollerslev (1988), garantindo assim, um valor sempre positivo para a média. Outro modelo importante é o modelo GLARMA proposto por Davis *et al.* (2003) que considera uma função de ligação compatível com a distribuição de interesse, e tal função aplicada à esperança condicional, é um processo de médias móveis dirigido por um ruído dado pela diferença de Martingale . Além desses modelos, pode-

se citar também o modelo GARMA proposto por Benjamin *et al.* (2003), que é uma extensão dos modelos ARMA, que permite modelar séries temporais com distribuição na família exponencial e que tem o modelo ARMA para séries temporais com distribuição gaussiana como caso particular .

Fica evidente a existência de inúmeras maneiras de tratar uma série temporal de contagem, muitos modelos foram propostos para esse fim, neste trabalho serão abordados os modelos GARMA, GLARMA e INGARCH. Além disso é importante encontrar o modelo mais adequado para cada conjunto de dados, para que ajustes mais precisos sejam feitos. Nesta dissertação serão consideradas as abordagens clássica (baseadas no método de máxima verossimilhança) e bayesiana, a fim de selecionar e ajustar o modelo mais adequado. Será utilizado o critério de seleção *Bayesian Information Criterion* (BIC) Schwarz (1978), para modelos clássicos e os critérios bayesianos *Expected Bayesian Information Criterion* (EBIC) proposto por Carlin & Louis (2000), *Deviance Information Criterion* (DIC) trabalhado por Spiegelhalter *et al.* (2002), e a densidade condicional preditiva ordenada (CPO), proposta por Gelfand *et al.* (1992).

1.2 Organização dos capítulos

Nesta dissertação os capítulos estão divididos da seguinte forma; no Capítulo 2 será explicado processos lineares estacionários dando ênfase ao modelo ARMA, proposto por Box e Jenkins, citando suas principais características e aplicabilidade.

O Capítulo 3, traz, inicialmente, uma breve revisão dos Modelos Lineares Generalizados (MLG) de McCullagh e Nelder (1989), pois o enfoque desta dissertação será dado aos modelos que são extensões dos MLG. Serão explicados os mode-

los GARMA, o modelo GLARMA e, por fim, o modelo INGARCH. Tais modelos podem incorporar inúmeras distribuições condicionais, porém, neste trabalho, descreveremos cada um dos modelos acima com as distribuições de Poisson e Binomial Negativa, juntamente com o método de máxima verossimilhança e os respectivos algoritmos para a estimação clássica.

O Capítulo 4, aborda o método de inferência Bayesiana, aplicado aos modelos, GARMA, GLARMA e INGARCH. A maior parte da contribuição no trabalho encontra-se neste Capítulo. A abordagem Bayesiana tanto para os modelos GLARMA quanto para os modelos INGARCH foi introduzida aqui. São descritas as densidades a priori usadas, e as densidades a posteriori obtidas, juntamente com o método usado para inferir sobre estas posteriori. E por fim, será dada uma breve explicação sobre critérios de seleção clássicos e bayesianos, que são usados na seleção dos modelos.

No Capítulo 5 é explorado um estudo de simulação com objetivo de testar os métodos de ajuste dos modelos em questão, verificar propriedades e o desempenho dos critérios de seleção. Serão consideradas as técnicas clássicas e bayesianas.

Uma aplicação com dados reais será descrita no Capítulo 6, em que a série utilizada consiste no número de transações financeiras realizadas em 30 minutos, sendo que estes dados são respectivos ao mês de novembro de 2011.

Por fim segue a conclusão do trabalho no Capítulo 7, e a bibliografia utilizada.

Capítulo 2

Processos lineares estacionários

Neste capítulo será introduzida uma ideia sobre processos lineares estacionários, especificamente, o modelo ARMA proposto por Box *et al.* (2008).

2.1 Modelos ARMA

Uma série temporal pode ser definida como um conjunto de observações de uma variável dipostas sequencialmente no tempo, em outras palavras, uma sequência de variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade, indexada pelo tempo. Na natureza encontra-se inúmeros fenômenos que podem ser estudados através de análise de séries temporais. Tais fenômenos podem produzir respostas pertencentes à reta toda ou apenas à parte dela. Box e Jenkins propuseram os primeiros modelos de séries temporais, os modelos ARMA, dando o primeiro e importante passo para a análise dessas séries.

Uma das suposições mais frequentes que se faz a respeito de uma série temporal é a de que ela é estacionária, ou seja, a série reflete alguma forma de equilíbrio estável. Todavia, a maior parte das séries que encontramos na prática apresentam

alguma forma de não-estacionariedade.

Um processo estocástico $\{Y_t\}$, para todo $t > 0$, é estacionário no sentido forte (ou estritamente estacionário) se:

$$F_{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}}(y_1, \dots, y_n) = F_{Y_{t_1+\tau}, \dots, Y_{t_n+\tau}}(y_1, \dots, y_n), \quad (2.1)$$

para quaisquer Y_1, \dots, Y_n reais e para quaisquer $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n, n \geq 1$. Ou seja, um processo estocástico é estacionário no sentido forte se a sua função de distribuição conjunta permanece a mesma sob translações do tempo.

A estacionariedade no sentido forte é, em geral, de difícil verificação. Uma forma menos restrita é a estacionariedade fraca, a qual ocorre quando

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= \mu = \text{constante} \\ \text{Var}(Y_t) &= \sigma^2 = \text{constante} \\ \text{Cov}(Y_t, Y_{t+k}) &= \gamma(k) \end{aligned}$$

em que $\gamma(k)$ é uma função que só depende de k para todo $t \geq 0$ e $k \in \mathbb{R}$. A estacionariedade em seu sentido fraco não implica na estacionariedade forte, ao menos que a série tenha distribuição conjunta gaussiana (Brockwell and Davis, 2002).

Teorema de Wald: Qualquer processo estocástico $\{Y_t\}$ de média zero e estacionário no sentido fraco, pode ser representado da forma

$$Y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad (2.2)$$

sendo $\{\psi_j\}, j \in N$ uma sequência de constantes e $\psi_0 = 1$ e $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. O termo a_t é um ruído como será definido a seguir.

Outro elemento importante quando se trata de séries temporais é o ruído branco, que será aqui denotado por $a_t, t = 1, 2, \dots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância constante σ_a^2 . Considerando o teorema proposto por Wald é possível escrever a série $\{Y_t\}$ com a seguinte representação:

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad (2.3)$$

para todo $t \geq 0$, em que $\{a_t\}$ é um processo com $E(a_t) = 0$, $Var(a_t) = \sigma_a^2$ e $E(a_t a_{t+k}) = 0$, se $k \neq 0$, e ψ_j é uma sequência de constantes tais que $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

Podemos ainda reescrever a equação (2.3) em termos do operador de retrocesso B , ou seja, $Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B_j a_t$ (Brockwell and Davis, 2002). Segue um importante teorema, através do qual foi possível determinar a estacionariedade da série, e escrever modelos com um número plausível de parâmetros.

Além disso, pode-se dizer que $E(Y_t) = \mu$ se $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, e podemos afirmar que um processo linear dado pela equação 2.2 é estacionário no sentido fraco se as raízes do polinômio $\psi(B) = 0$ estão dentro ou sobre o círculo de raio unitário. Em todo caso se $\{a_t\}$ são ruídos com distribuição $N(0, \sigma_a^2)$, as raízes de $\psi(B) = 0$ garantem estacionariedade no sentido forte para o processo.

Após a formalização de alguns conceitos, o modelo ARMA será introduzido. Considere $\{Y_t\}, t = 1, \dots, n$ uma série temporal. $\{Y_t\}$ é um modelo $ARMA(p, q)$,

se $\{Y_t\}$ é estacionário para todo t , de maneira geral

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p} = c + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.4)$$

em que c é uma constante, $a_t \sim N(0, \sigma^2)$ e os polinômios $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são, respectivamente, o polinômio autoregressivo p e de médias móveis q dados por $\phi(B) = \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ e $\theta(B) = \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$.

Estacionariedade para o modelo ARMA

O uso da constante c nos modelos ARMA pode ser suprimido sem perda de generalidade, dessa forma pode-se considerar o seguinte processo:

Seja $\{Y_t\}$ um processo $ARMA(p, q)$. $\{Y_t\}$ é estacionário se existem constantes ψ_j com $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ e

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j} \quad (2.5)$$

Em que $\psi(B) = \theta(B)\phi^{-1}(B)$, para todo t . Essa condição é equivalente a $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p \neq 0$ para todo $|B| < 1$

Invertibilidade para o modelo ARMA

Seja $\{Y_t\}$ um processo $ARMA(p, q)$. $\{Y_t\}$ é invertível se existem constantes π_j com $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ e

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j a_{t-j} \quad (2.6)$$

$\pi(B) = \phi(B)\theta^{-1}(B)$, para todo t . Essa condição é equivalente a $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_p B^p \neq 0$ para todo $|B| < 1$

Do exposto acima, conclui-se que o processo $ARMA(p, q)$ será estacionário se as raízes do polinômio autoregressivo $\phi(B) = 0$ estiverem fora do círculo de raio unitário, e será invertível se as raízes do polinômio de médias móveis $\pi(B) = 0$ estiverem também fora do círculo de raio unitário.

Estes modelos foram muito importantes para a análise de séries temporais, e apesar de muitas extensões destes modelos, eles ainda mostram-se muito úteis na modelagem de séries temporais estacionárias, principalmente quando considera-se que Y_t pode assumir qualquer valor real. No entanto neste trabalho o enfoque está em séries temporais de contagem, ou seja, séries que somente assumem valores naturais, dessa forma serão trabalhados modelos que são adequados para esse tipo de dados, o modelo GARMA que é uma extensão do modelo ARMA segue no próximo Capítulo juntamente com o modelo GLARMA e o modelo INGARCH.

Capítulo 3

Modelos para séries temporais de contagem

Neste capítulo serão descritos os modelos usados neste trabalho. Será feita uma breve introdução aos modelos lineares generalizados (MLG), seguidos dos modelos GARMA, INGARCH e GLARMA.

3.1 Modelos lineares generalizados

Em 1972, uma extensão dos modelos gaussianos foi proposta por Nelder e Wedderburn, o que foi motivado pela existência de muitos dados que não seguem distribuição normal. Uma opção para a modelagem com outras distribuições da família exponencial era necessária, uma vez que isso também tornaria mais flexível a relação entre preditor linear η e a média da distribuição μ , que no caso gaussiano é a identidade. O uso desta extensão para séries temporais pode ser feita

Suponha que Y_t tenha distribuição condicional $f(y_t|F_{t-1})$ na família exponencial, denotada por

$$f(y_t|F_{t-1}) = \exp\left(\frac{y_t\theta - b(\theta)}{\varphi} + d(y_t, \varphi)\right), \quad (3.1)$$

em que θ e φ são parâmetros canônico e de escala, F_{t-1} representa toda a informação que se tem até o tempo $t-1$ e, além disso, b e d são funções específicas. Uma vez que a distribuição já está escrita na forma da família exponencial, mostra-se que a média e a variância de Y_t são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} E(Y_t|F_{t-1}) : \mu_t &= b'(\theta) \\ \text{Var}(Y_t|F_{t-1}) &= \varphi b''(\theta) = \varphi\nu(\mu). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Denomina-se a segunda derivada da função $b(\cdot)$ como função de variância, denotada por $\nu(\cdot)$.

Um modelo linear generalizado (MLG) envolve três componentes:

Componente aleatório: É representado por um conjunto de variáveis aleatórias pertencentes a uma mesma distribuição, que faça parte da família exponencial, com média $E(Y_t) = \mu_t$, $t = 1, \dots, n$. Para uma série temporal vamos considerar que as distribuições condicionais pertencem a família exponencial com média condicional $E(Y_t|F_{t-1}) = \mu_t$, $t = 1, 2, \dots, n$.

Componente sistemático: As variáveis explicativas x_1, \dots, x_p e o vetor de covariáveis β fornecem o preditor linear $\eta = X'\beta$. No caso de séries temporais considera-se o preditor linear dado por:

$$\eta_t = X'\beta + \tau_t, \text{ cujos detalhes serão mostrados na construção do modelo GARMA.}$$

Função de ligação: É uma função $g(\cdot)$ que relaciona o componente aleatório ao componente sistemático, ou seja, a média ao preditor linear, $g(\mu_t) = \eta_t$.

3.2 Modelo Autorregressivo e Médias Moveis Generalizado (GARMA)

Seja $\{Y_t\}$ uma série temporal e $F_{t-1} = (x_1, \dots, x_{t-1}, y_1, \dots, y_{t-1}, \mu_1, \dots, \mu_{t-1})$, sendo que Y_t tem distribuição na família exponencial dada por:

$$f(y_t|F_{t-1}) = \exp\left(\frac{y_t\theta_t - b(\theta_t)}{\varphi} + d(y_t, \varphi)\right), \quad (3.3)$$

em que θ_t e φ são parâmetros canônico e de escala. Além disso, $b(\cdot)$ e $d(\cdot)$ são funções específicas.

Como em modelos lineares generalizados (MLG), μ_t (média) está relacionada a η_t um preditor linear, logo

$$\begin{aligned} g(\mu_t) &= \eta_t = X'\beta + \tau_t \\ \tau_t &= \sum_{j=1}^p \phi A(y_{t-j}, x_{t-j}, \beta) + \sum_{j=1}^q \theta M(y_{t-j}, \mu_{t-j}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo que A e M são funções representando os termos autoregressivos e de médias móveis.

Na prática o preditor linear em (3.4) pode ser reescrito em uma forma mais simples dada por

$$\eta_t = x'_t \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j \{g(y_{t-j}) - x'_t \beta\} + \sum_{j=1}^q \theta_j \{g(y_{t-j}) - \eta_{t-j}\}. \quad (3.5)$$

O modelo GARMA(p,q) é definido por uma componente aleatória dada por (3.3) e uma componente sistemática ou preditor linear dada pela equação (3.5).

Estimação nos modelos GARMA

Considere as observações $F_{t-1} = y_1, \dots, y_{t-1}$ da série temporal $\{Y_t\}$ tal que satisfaça as condições do modelo GARMA descritas em (3.3) e (3.4). O vetor de parâmetros do modelo é $\gamma' = (\beta', \phi', \alpha')$, em que $\beta = (\beta_0 \dots \beta_m)'$, $\phi = (\phi_1 \dots \phi_p)'$ e $\theta = (\theta_1 \dots \theta_q)'$. Para estimar estes parâmetros considera-se a função de verossimilhança aproximada condicionada nas r primeiras observações $F_r = \{y_1 \dots y_r\}$ em que $r = \max(p, q)$.

$$\begin{aligned} L_a(\beta, \phi, \alpha | F_t) &\propto \prod_{t=r+1}^n f(y_t | H_t) \\ &\propto \prod_{t=r+1}^n \exp \left\{ \frac{y_t g(\mu_t) - b(g^{-1}(\mu_t))}{\varphi} + c(y_t, \varphi) \right\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que $g(\mu_t)$ é a função de ligação, dada por

$$g(\mu_t) = x'_t \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j \{g(y_{t-j}^*) - x'_{t-j} \beta\} + \sum_{j=1}^q \alpha_j \{g(y_{t-j}^*) - g(\mu_{t-j})\}. \quad (3.7)$$

Para todo $t = r + 1, \dots, n$, em que $y_{t-j}^* = \max(y_{t-j}, c)$, $0 < c < 1$, e a função log-verossimilhança é dada por

$$l_a = c \cdot \frac{1}{\varphi} \sum_{t=r+1}^n [y_t g(\mu_t) - b(g^{-1}(\mu_t))] + \sum_{t=r+1}^n c(y_t, \varphi). \quad (3.8)$$

Em que c é uma constante, a seguir são descritos alguns exemplos de modelos GARMA.

3.2.1 GARMA Poisson

Supondo que $Y_t|F_{t-1}$ possui distribuição de Poisson com parâmetro μ_t , então

$$f(y_t|F_{t-1}) = \frac{\exp(-\mu_t)\mu_t^{y_t}}{y_t!}, t = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

que pode ser reescrita como

$$f(y_t|F_{t-1}) = \exp\{y_t \log(\mu_t) - \mu_t - \log(y_t!)\}. \quad (3.10)$$

Note que $\varphi = 1$ e $\theta_t = \log(\mu_t)$. Logo, segue que $\mu_t = \exp(\theta_t)$. Reescrevendo a expressão 3.10 tem-se:

$$f(y_t|F_{t-1}) = \exp\{y_t\theta_t - \exp(\theta_t) - \log(y_t!)\}, \quad (3.11)$$

desta forma $Y_t|F_{t-1}$ pertence a família exponencial com $\varphi = 1$, $\theta_t = \log(\mu_t)$, $b(\theta_t) = \exp(\theta_t)$ e $c(y_t, \varphi) = -\log(y_t!)$. Além disso, $\nu(\mu_t) = \mu_t$.

Para este modelo a função de ligação é a função logaritimica, pois a mesma fornece valores não negativos para $\mu_t = g^{-1}(\eta_t)$ não importando os valores atribuídos a η . Assim o preditor linear fica:

$$\log(\mu_t) = x' \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j \{\log y_{t-j}^* - x'_{t-j} \beta_j\} + \sum_{j=1}^q \theta_j \log \left(\frac{y_{t-j}^*}{\mu_{t-j}} \right). \quad (3.12)$$

com $y_{t-j}^* = \max(y_{t-j}, c)$, $0 < c < 1$. E sem perda de generalidade, podemos desconsiderar as variáveis x_t , pois são variáveis exógenas ao processo e dessa forma

obtem-se a seguinte equação

$$\log(\mu_t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \phi_j \{\log y_{t-j}^*\} + \sum_{j=1}^q \theta_j \log \left(\frac{y_{t-j}^*}{\mu_{t-j}} \right), \quad (3.13)$$

definindo assim o modelo poisson GARMA. Pode-se observar que a média e a variância no modelo GARMA Poisson são iguais, o que torna o modelo menos adequado quando tem-se o objetivo de modelar uma série com dados super dispersos. Neste caso um modelo mais adequado para esse tipo de dados é o modelo GARMA binomial negativo, que é abordado na seção 3.2.2.

3.2.2 GARMA Binomial negativo

No modelo binomial negativo GARMA consideramos a distribuição de probabilidade condicional como sendo binomial negativa, ou seja $y_t | F_{t-1} \sim BN(k, p_t)$

$$f(Y_t | F_{t-1}) = \frac{\Gamma(k + y_t)}{\Gamma(y_t + 1)\Gamma(k)} p_t^k (1 - p_t)^{y_t}, y_t = 0, 1, \dots \quad (3.14)$$

como $\mu_t = \frac{k(1-p_t)}{p_t}$, então $p_t = \frac{k}{\mu_t + k}$ e assim reescrevendo a equação (3.14) tem-se:

$$f(y_t | F_{t-1}) = \exp \left(k \log \left\{ \frac{k}{\mu_t + k} \right\} + y_t \log \left\{ \frac{\mu_t}{\mu_t + k} \right\} + \log \left\{ \frac{\Gamma(k + y_t)}{\Gamma(y_t + 1)\Gamma(k)} \right\} \right), \quad (3.15)$$

que pertence a família exponencial com:

$$\theta_t = \log \left\{ \frac{\mu_t}{\mu_t + k} \right\}, b(\theta) = -k \log \left\{ \frac{k}{\mu_t + k} \right\}, c(y_t, \varphi) = \log \left\{ \frac{\Gamma(k + y_t)}{\Gamma(y_t + 1)\Gamma(k)} \right\} \text{ e } \varphi = 1.$$

Além disso

$$\mu_t = \frac{k \exp(\theta_t)}{1 - \exp(\theta_t)}; \nu(\mu_t) = \frac{-\mu_t}{k} (k + \mu_t) \quad (3.16)$$

Como p_t representa uma probabilidade é evidente que deve estar entre 0 e 1. Dessa forma, como $p_t = \frac{k}{\mu_t + k}$ e k é um número positivo, da mesma forma que no GARMA Poisson, a função de ligação logaritmica será usada como segue

$$\log(\mu_t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \phi_j \{\log y_{t-j}^*\} + \sum_{j=1}^q \theta_j \log \left(\frac{y_{t-j}^*}{\mu_{t-j}} \right), \quad (3.17)$$

com $y_{t-j}^* = \max(y_{t-j}, c)$, $0 < c < 1$. Assim basta reescrever p_t em função de μ_t , portanto com as equações (3.17) e (3.15) fica definido o modelo binomial negativo GARMA.

Para determinar os estimadores de máxima verossimilhança é necessário maximizar a função de verossimilhança (3.15). Observe que tanto a função de verossimilhança da Poisson quanto a função de verossimilhança da binomial negativa não possuem forma fechada, de modo que um método de otimização numérica será usado para maximizar tais funções. Uma abordagem Bayesiana dos modelos GARMA será apresentada no capítulo 4.

3.3 Modelo Autorregressivo e Médias Moveis Linear Generalizado (GLARMA)

Cox (1981) abordou duas classes de modelos para analisar séries temporais, cujas distribuições de probabilidades condicionais não são gaussianas. Essas classes são *parameter driven* e *observation driven*. Na classe de *observation driven*, a partir da média do modelo, incorpora-se valores defasados das contagens observadas introduzindo assim a estrutura de dependência. No caso da classe *parameter driven* a função de média condicional é conduzida por um processo latente.

3.3. MODELO AUTORREGRESSIVO E MÉDIAS MOVEIS LINEAR GENERALIZADO (GLARMA)

Os modelos GLARMA (Davis 2003) se adequam à classe de *observation driven*, e este é uma extensão da estrutura usual de MLG (Nelder 1972), permitindo a correlação serial entre as observações e desta forma como uma função linear das observações passadas obter o logaritmo natural da média condicional do processo.

Seja $\{Y_t\}$ uma série de contagem e F_{t-1} o filtro gerado por $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$, tal que

$$Y_t | F_{t-1} \sim Q(\mu_t | F_{t-1}), \quad (3.18)$$

em que $Q(\cdot)$ é uma distribuição de probabilidade. Neste trabalho serão usadas as distribuições de Poisson e binomial negativa. É necessário adequar a média μ_t a uma função de ligação coerente a fim de garantir valores positivos. Seja $\log(\mu_t)$ um processo de médias móveis dirigido por um ruído da diferença de Martingale sobre os dados.

$$\omega_t = \log(\mu_t) = \beta X' + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j e_{t-j}, \quad (3.19)$$

em que

$$e_t = \frac{(y_t - \mu_t)}{\mu_t^\lambda}, \quad (3.20)$$

com $\lambda \in (0, 1]$, γ um vetor de parâmetros. Além disso $\beta X'$ pode ser um vetor de covariáveis ou uma constante.

Dessa forma o processo ω_t possui uma única distribuição estacionária e ergótica, dirigida por um ruído que é uma sequência da diferença de Martingale gerada pelo conjunto de dados observado. Segundo Davis (2000) pode-se especificar o termo média móvel infinito neste modelo por um número finito de parâmetros.

$$\gamma(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j B^j = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} - 1 \quad (3.21)$$

em que $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são

$$\begin{aligned} \phi(B) &= 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p, \\ \theta(B) &= 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q. \end{aligned} \quad (3.22)$$

ou seja, são os respectivos polinômios autorregressivos e de médias móveis do processo ARMA, cada um possuindo seus zeros fora do círculo de raio unitário, e γ é o vetor de parâmetros. Reescreve-se o processo 3.21 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} z_t &= \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i e_{t-i}. \\ z_t &= \hat{U}_t \end{aligned} \quad (3.23)$$

Da igualdade mostrada acima tem-se

$$\gamma(B)\phi(B) = \theta(B). \quad (3.24)$$

Seja $U_t \sim ARMA(p, q)$, isto é,

$$U_t - \phi_1 U_{t-1} - \dots - \phi_p U_{t-p} = e_t + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_q e_{t-q}, \quad (3.25)$$

e seja $\hat{U}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i e_{t-i}$. Escrevendo U_t como MA(∞), tem-se

3.3. MODELO AUTORREGRESSIVO E MÉDIAS MOVEIS LINEAR GENERALIZADO (GLARMA)

$$U_t = e_t + \gamma_1 e_{t-1} + \gamma_2 e_{t-2} + \dots = e_t + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j e_{t-j} = \gamma(B)e_t. \quad (3.26)$$

Note que $U_t = \hat{U}_t + e_t$. Além disso, $\hat{U}_t = z_t$, obtem-se

$$U_{t-1} = \hat{U}_{t-1} + e_{t-1} \rightarrow U_{t-1} = z_{t-1} + e_{t-1}. \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.26), tem-se

$$\hat{U}_t = z_t = \sum_{i=1}^p \phi_i U_{t-i} + \sum_{j=1}^p \theta_j e_{t-j}, \quad (3.28)$$

que equivale a

$$\hat{U}_t = \sum_{i=1}^p \phi_i (z_{t-i} + e_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \theta_j e_{t-j}. \quad (3.29)$$

Propriedades do modelo

Seja $X_t^T \beta = \beta$, podemos ainda reescrever $\mu_t = \exp(\omega_t)$, logo substituindo nas equações (3.19) e (3.20), tem-se

$$\omega_t = \beta + \theta(y_{t-1} - \exp(\omega_{t-1})) \exp(-\lambda \omega_{t-1}). \quad (3.30)$$

A partir da expressão (3.30) encontrada é possível obter a esperança e variância de ω_t , que são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
E(\omega_t) &= E[E(\omega_t|\omega_{t-1})] = \beta, \\
Var(\omega_t) &= Var[E(\omega_t|\omega_{t-1})] + E[Var(\omega_t|\omega_{t-1})] = \theta^2 E[\exp(1 - 2\lambda)\omega_{t-1}].
\end{aligned}$$

Note que a variância de ω_t depende de λ . Dessa forma, obtém-se os seguintes valores da variância para cada λ fixado:

- Se $\lambda = 0.5$, $Var(\omega_t) = \theta^2$,
- Se $\lambda = 1$, $Var(\omega_t) = \theta^2 E(\exp(-\omega_{t-1})) \geq \theta^2 \exp(-\beta)$.

Portanto Davis (2000) concluiu as seguintes condições para os valores de λ :

- Para $\lambda = 1$, o valor da $Var(\omega_t)$ depende de ω_{t-1} ,
- Para $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$, existe uma distribuição estacionária,
- Para $\lambda < \frac{1}{2}$, a existência da estacionariedade não está estabelecida ainda.

3.3.1 GLARMA Poisson

Seja uma série temporal de contagem dada por Y_t , dada da seguinte forma:

$$Y_t | F_{t-1} \sim Poisson(\mu_t), \quad (3.31)$$

sendo F_{t-1} o filtro gerado por $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$, μ_t a média do processo que pode ser escrita como

$$\mu_t = \exp\left(\beta + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i e_{t-i}\right), \quad (3.32)$$

em que

$$e_t = \frac{(y_t - \mu_t)}{\mu_t^\lambda}. \quad (3.33)$$

A função de probabilidades condicional de Y_t possui a forma

$$P(Y_t = y_t | F_{t-1}) = \frac{\exp(-\mu_t)(\mu_t)^{y_t}}{y_t!}, \quad (3.34)$$

para $y_t = 0, 1, \dots$. É importante observar que a média condicional do processo é igual a variância condicional que é igual a μ_t . Tem-se então a seguinte função de verossimilhança para o modelo.

Função de Verossimilhança

Seja $\Theta' = (\beta', \phi', \theta')$. O objetivo é determinar os estimadores de máxima verossimilhança do modelo, logo é necessário maximizar a função de verossimilhança. Como foi observado anteriormente os valores que maximizam a verossimilhança são os mesmos que maximizam o logaritmo da verossimilhança. Portanto seja $l(\Theta | F_{t-1})$ o logaritmo da verossimilhança dado por:

$$l(\Theta | F_{t-1}) = \sum_{t=1}^n (y_t \omega_t(\Theta) - \exp(\omega_t(\Theta)) - \log(Y_t!)), \quad (3.35)$$

em que $\omega_t(\Theta) = \log(\mu_t)$. A primeira derivada de $l(\Theta)$ em relação a Θ é dada por

$$\frac{\partial l}{\partial \Theta} = \sum_{t=1}^n (y_t - \mu_t) \frac{\partial \omega_t}{\partial \Theta} = \sum_{t=1}^n e_t \mu_t^\lambda \frac{\partial \omega_t}{\partial \Theta} \quad (3.36)$$

A segunda derivada de $l(\Theta)$ em relação a Θ segue abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l}{\partial \Theta \partial \Theta'} &= \sum_{t=1}^n (y_t - \mu_t) \frac{\partial^2 \omega_t}{\partial \Theta \partial \Theta'} - \mu_t \frac{\partial \omega_t}{\partial \Theta} \frac{\partial \omega_t}{\partial \Theta'} \\
&= \sum_{t=1}^n e_t \mu_t^\lambda \frac{\partial^2 \omega_t}{\partial \Theta \partial \Theta'} - \mu_t \frac{\partial \omega_t}{\partial \Theta} \frac{\partial \omega_t}{\partial \Theta'}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Nesta subsecção foi descrito o modelo GLARMA Poisson. Mostrou-se algumas características do modelo, assim como sua função de verossimilhança. Como foi observado inicialmente, neste trabalho serão usadas as funções de probabilidade Poisson e binomial negativa para cada um dos modelos. Segue então na próxima seção a descrição do modelo GLARMA binomial negativo.

3.3.2 GLARMA binomial negativa

No modelo GLARMA binomial negativo considera-se a distribuição de probabilidade condicional da série como binomial negativa, ou seja, seja $\{Y_t\}$ uma série temporal de contagem, tal que

$$Y_t | F_{t-1} \sim BN(k, p_t). \tag{3.38}$$

A função de probabilidades de $Y_t | F_{t-1}$ é

$$f(Y_t | F_{t-1}) = \frac{\Gamma(k + y_t)}{\Gamma(y_t + 1)\Gamma(k)} p_t^k (1 - p_t)^{y_t}, y_t = 0, 1, \dots, \tag{3.39}$$

em que k é um número positivo, e p_t é uma probabilidade, descrita por

$$p_t = \frac{k}{\mu_t + k}. \tag{3.40}$$

Analogamente ao modelo GLARMA Poisson, descreve-se μ_t como

3.3. MODELO AUTORREGRESSIVO E MÉDIAS MOVEIS LINEAR GENERALIZADO (GLARMA)

$$\mu_t = \exp \left(\beta + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i e_{t-i} \right), \quad (3.41)$$

em que $e_t = \frac{(y_t - \mu_t)}{\mu_t^\lambda}$. Dessa forma substituindo $p_t = \frac{k}{\mu_t + k}$, obtém-se a seguinte função de verossimilhança para o modelo GLARMA binomial negativo

$$f(y_t | F_{t-1}) = \exp \left(k \log \left\{ \frac{k}{\mu_t + k} \right\} + y_t \log \left\{ \frac{\mu_t}{\mu_t + k} \right\} + \log \left\{ \frac{\Gamma(k + y_t)}{\Gamma(y_t + 1)\Gamma(k)} \right\} \right)$$

Uma vez obtido o logaritmo da função de verossimilhança maximiza-se esta equação a fim de obter os estimadores de máxima verossimilhança. Observe que que não é possível encontrar estes valores analiticamente, logo um método de otimização numérica deve ser usado.

Uma abordagem bayesiana foi realizada nestes modelos, a fim de utilizar métodos de seleção de modelos bayesianos para escolher a ordem do modelo, informação importante quando se trata de análise de uma série temporal real. Mais detalhes seguem no Capítulo 4. Uma questão que surge naturalmente quando se pensa na utilização dos modelos GARMA e GLARMA, é, como escolher entre os dois modelos. Como foi observado na seção 3.2 para a utilização do modelo GARMA é necessário substituir todos os valores que assumem 0 na série por uma constante, já o modelo GLARMA não necessita dessa mudança, em contrapartida o modelo GLARMA é um caso particular do modelo GARMA (Benjamin 2003) com uma função de ligação específica, esta condição torna os modelos GLARMA menos abrangentes que os modelos GARMA. Uma vez conhecida as vantagens e desvantagens de cada um dos modelos cabe ao pesquisador selecionar de que forma ele prefere a modelagem.

3.4 Modelo INGARCH

Nesta seção será descrito o modelo INGARCH. É importante observar que o modelo INGARCH é uma extensão do modelo GARCH, pois possui as mesmas características do modelos proposto por Bollerslev (1988), ou seja, é necessário atribuir restrições aos parâmetros a fim de garantir que a esperança incondicional do modelo seja finita. Embora sejam todos para dados de contagem, os modelos INGARCH aparecem em contexto bem diferente dos modelos GARMA e GLARMA, pois não possuem uma função de ligação que garanta que a média condicional assuma apenas valores plausíveis dessa forma restrições são necessárias para garantir valores positivos para essa média condicional e também para garantir estacionariedade, por outro lado, apesar dos modelos INGARCH gozarem das mesmas características dos modelos GARCH, os modelos são diferentes, dessa forma primeiramente será introduzido o modelo GARCH.

Modelo Autorregressivo Generalizado Condicionalmente Heterocedástico (GARCH)

Seja $\{Y_t\}$ uma série temporal descrita da seguinte forma:

$$Y_t = e_t, \text{ em que } E(e_t) = 0, \text{ } Var(e_t) = h_t \text{ e } E(e_t e_{t+k}) = 0.$$

Nota-se que a variância condicional de e_t muda com o tempo, ou seja, precisa-se de um modelo que se adeque a essa variância.

Considere $e_t = \sqrt{h_t} a_t$ em que $a_t \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned}
e_t &= \sqrt{h_t} a_t \\
h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

considera-se o processo ν_t da seguinte forma: $\nu_t = e_t^2 - h_t$

$$\begin{aligned}
e_t^2 = h_t + \nu_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j (e_{t-j}^2 - \nu_{t-j}) \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \nu_{t-j} + \nu_t.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Portanto o processo e_t^2 é escrito como um ARMA($\max(p, q), q$). Note que tal processo é estacionário se e somente se: $E(e_t^2) = E(e_{t-1}^2) = \dots = E(e_{t-p}^2)$. Portanto como e_t^2 é um processo ARMA, sua esperança incondicional é descrita da seguinte forma:

$$E(e_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - (\sum_{i=0}^p \alpha_i + \sum_{j=0}^q \beta_j)}. \tag{3.44}$$

Como $E(e_t) = 0$, pois $e_t = \sqrt{h_t} a_t$ e $E(a_t) = 0$, Então e_t tem variância finita $E(e_t^2)$ se e somente se algumas restrições forem satisfeitas. São elas $\alpha_0 > 0$ e $\sum_{i=0}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$.

Integer GARCH (INGARCH)

Como o interesse neste estudo está em séries temporais de contagem, o modelo Interger GARCH (INGARCH) deve ser utilizado, e este pode ser escrito a partir de Y_t uma série de contagem, tem-se que:

$$\begin{cases} Y_t|F_{t-1} \sim Q(\mu_t); t \geq 0 \\ \mu_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \mu_{t-j}, \end{cases}$$

em que Q é uma distribuição de probabilidade para dados discretos, além disso

$\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, $p \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q$, $q \geq 0$ e F_{t-1} que representa toda a informação que se tem até o tempo $t-1$ pode-se denotar também como filtro gerado por $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$. Logo,

$$\mu_t = E(Y_t|F_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \mu_{t-j}. \quad (3.45)$$

De maneira semelhante ao modelo GARCH é possível determinar a esperança e variância incondicional do modelo INGARCH, o cálculo dessas medidas descritivas incondicionais é feito pois pode ser uma maneira de realizar previsões para um tempo futuro e são dados e como pode-se observar para garantir estacionariedade da série, é necessário que essas medidas sejam finitas e dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= \frac{\alpha_0}{1 - (\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j)} \\ Var(Y_t) &= \frac{\mu(1 - (\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j)^2) + \sum_{i=1}^p \alpha_i}{1 - (\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j)^2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Segue o modelo INGARCH com a distribuição de probabilidades Poisson.

3.4.1 INGARCH Poisson

Seja uma série temporal de contagem $\{Y_t\}$, tal que

$$Y_t|F_{t-1} \sim \text{Poisson}(\mu_t), \quad (3.47)$$

no qual a média condicional μ_t do processo é dada por

$$\mu_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \mu_{t-j}, \quad (3.48)$$

sendo $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q, p \geq 1, q \geq 0$.

A função de probabilidades condicional de $\{Y_t\}$ possui a seguinte forma

$$P(Y_t = y_t|F_{t-1}) = \frac{\exp(-\mu_t)(\mu_t)^{y_t}}{y_t!}, \quad (3.49)$$

para $y_t = 0, 1, \dots$. É importante observar que a média do processo é igual a variância que é igual a μ_t . Tem-se então a seguinte função de verossimilhança para o modelo:

$$L(\Theta|F_{t-1}) = \prod_{t=\max(p,q)}^n \frac{\exp(-\mu_t)\mu_t^{y_t}}{y_t!}, \quad (3.50)$$

em que $\Theta = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)'$. Segue o log da função de verossimilhança

$$l(\Theta|F_{t-1}) = \log(L(\Theta|F_{t-1})) = \sum_{t=1}^n y_t \log(\mu_t) - \mu_t - \log(y_t!). \quad (3.51)$$

Como o interesse é em encontrar Θ que maximize (3.50), de maneira análoga esse mesmo Θ maximizará (3.51). Portanto deriva-se o logaritmo da função de verossimilhança na tentativa de encontrar propriedades assintóticas do estimador, neste caso o estimador de máxima verossimilhança será denotado por Θ_0 .

A primeira derivada de $l(\Theta|F_{t-1})$ em relação a $\alpha_i, i = 1, \dots, p$, é dada por

$$\frac{\partial l(\Theta|F_{t-1})}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \mu_t}{\partial \alpha_i} \left(\frac{y_t}{\mu_t} - 1 \right). \quad (3.52)$$

A segunda derivada em relação a α_i , $i = 1, \dots, p$, e β_j , $j = 1, \dots, q$, é

$$\frac{\partial^2 l(\Theta|F_{t-1})}{\partial \alpha_i \partial \beta_j} = \frac{\partial^2 \mu_t}{\partial \alpha_i \partial \beta_j} \left(\frac{y_t}{\mu_t} - 1 \right) - \frac{y_t}{\mu_t^2} \frac{\partial \mu_t}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \mu_t}{\partial \beta_j}. \quad (3.53)$$

A derivada da média μ_t em relação a α_0 é

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial \alpha_0} = 1 + \sum_{j=1}^q \beta_j \frac{\partial \mu_{t-j}}{\partial \alpha_0}. \quad (3.54)$$

Além disso, a derivada da média μ_t em relação a α_i , $i = 1, \dots, p$ é

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial \alpha_i} = y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \frac{\partial \mu_{t-j}}{\partial \alpha_i}. \quad (3.55)$$

Por fim tem-se a derivada da média μ_t em relação a β_j , $j = 1, \dots, q$, é

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial \beta_j} = \mu_{t-j} + \sum_{k=1}^p \beta_k \frac{\partial \mu_{t-k}}{\partial \beta_j}. \quad (3.56)$$

Assim como no modelo GARCH para o modelo INGARCH quando o tamanho da série é suficientemente grande, a distribuição do estimador de máxima verossimilhança Θ_0 pode ser aproximada por $\hat{\Theta} \sim N(\Theta_0, H(\Theta_0^{-1}))$, em que $H(\Theta_0^{-1})$ é a matriz de informação no ponto Θ_0 Ferland (2004). Desta forma fica definido o modelo INGARCH com a distribuição de probabilidades de Poisson, segue agora cálculos semelhantes, para o modelo INGARCH com a distribuição de probabilidades binomial negativa.

3.4.2 INGARCH Binomial Negativa

Seja uma série temporal de contagem $\{Y_t\}$, tal que

$$Y_t|F_{t-1} \sim NB(k, p_t), \quad (3.57)$$

sendo k é um número positivo, e p_t satisfaz

$$\frac{k(1-p_t)}{p_t} = \mu_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \mu_{t-j}, \quad (3.58)$$

no qual $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q$, $p \geq 1$, $q \geq 0$.

O modelo acima é denotado NBINGARCH(p,q), e notamos que a função de probabilidades condicional de $\{Y_t\}$ possui a seguinte forma:

$$P(Y_t = y_t|F_{t-1}) = \frac{\Gamma(k + y_t - 1)}{\Gamma(y_t)\Gamma(k - 1)} p_t^k (1 - p_t)^{y_t}, \quad (3.59)$$

para $y_t = 0, 1, \dots$, sendo

$$p_t = \frac{k}{k + \mu_t} \quad q_t = 1 - p_t = \frac{\mu_t}{k + \mu_t}. \quad (3.60)$$

A média e a variância condicional de Y_t são dadas, respectivamente, por

$$E(Y_t|F_{t-1}) = \frac{k(1-p_t)}{p_t} = \mu_t, \quad (3.61)$$

e

$$Var(Y_t|F_{t-1}) = \frac{k(1-p_t)}{p_t^2} = \mu_t(1 + \mu_t), \quad (3.62)$$

Como é verificado por Zhu (2009), $Var(Y_t|F_{t-1}) > E(Y_t|F_{t-1})$. Nota-se que essa característica da função de probabilidade binomial negativa torna os modelos adequados quando têm-se dados super dispersos, o que também foi observado por Zhu (2009). Essa característica da distribuição de probabilidades binomial negativa também é verificada nos modelos GARMA e GLARMA.

Função de Verossimilhança

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\begin{aligned} l(\Theta|F_{t-1}) &= k \sum_{t=1}^n \log(p_t) + \sum_{t=1}^n y_t \log(1 - p_t) + \log \left[\prod_{t=1}^n \frac{\Gamma(k + y_t - 1)}{\Gamma(y_t)\Gamma(k - 1)} \right] \quad (3.63) \\ &= \sum_{t=1}^n y_t \log \mu_t - \sum_{t=1}^n (y_t + k) \log(1 + \mu_t) + \log \left[\prod_{t=1}^n \frac{\Gamma(k + y_t - 1)}{\Gamma(y_t)\Gamma(k - 1)} \right] \end{aligned}$$

A primeira derivada de $l(\Theta|F_{t-1})$ em relação a α_i , $i = 1, \dots, p$, é

$$\frac{\partial l(\Theta|F_{t-1})}{\partial \alpha_i} = \left(\frac{Y_t}{\mu_t} - \frac{k + Y_t}{1 + \mu_t} \right) \frac{\partial \mu_t}{\partial \alpha_i}. \quad (3.64)$$

Enquanto que a segunda derivada de $l(\Theta|F_{t-1})$ em relação a α_i , $i = 1, \dots, p$ e β_j , $j = 1, \dots, q$ é dada por

$$\frac{\partial^2 l(\Theta|F_{t-1})}{\partial \alpha_i \partial \beta_j} = \left(\frac{Y_t}{\mu_t} - \frac{k + Y_t}{1 + \mu_t} \right) \frac{\partial^2 \mu_t}{\partial \alpha_i \partial \beta_j} - \left(\frac{Y_t}{\mu_t^2} - \frac{k + Y_t}{(1 + \mu_t)^2} \right) \frac{\partial \mu_t}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \mu_t}{\partial \beta_j}. \quad (3.65)$$

Para $i, j = 0, 1, \dots, p + q$, tem-se a derivada da média μ_t em relação a cada um dos parâmetros de interesse, α_0 , α_i , $i = 1, \dots, p$ e β_j , $j = 1, \dots, q$, que seguem na equação a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_t}{\partial \alpha_0} &= 1 + \sum_{k=1}^q \beta_k \frac{\partial \mu_{t-k}}{\partial \alpha_0}. \\ \frac{\partial \mu_t}{\partial \alpha_i} &= y_{t-i} + \sum_{k=1}^q \beta_k \frac{\partial \mu_{t-k}}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, \dots, p. \\ \frac{\partial \mu_t}{\partial \beta_j} &= y_{t-j} + \sum_{k=1}^q \beta_k \frac{\partial \mu_{t-k}}{\partial \beta_j}, \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Dada a segunda derivada de $l(\Theta|F_{t-1})$ obtida acima, tem-se agora o cálculo da esperança dessa derivada, como segue abaixo:

$$\begin{aligned}
E \left[\frac{\partial^2 l(\Theta|F_{t-1})}{\partial \alpha_i \partial \beta_j} \middle| F_{t-1} \right] &= \left(\frac{E(Y_t|F_{t-1})}{\mu_t} - \frac{k + E(Y_t|F_{t-1})}{1 + \mu_t} \right) \frac{\partial^2 \mu_t}{\partial \alpha_i \partial \beta_j} \\
&- \left(\frac{E(Y_t|F_{t-1})}{\mu_t^2} - \frac{k + E(Y_t|F_{t-1})}{(1 + \mu_t)^2} \right) \frac{\partial \mu_t \partial \mu_t}{\partial \alpha_i \partial \beta_j} \\
&= -k \left(\frac{1}{\mu_t} - \frac{1}{1 + \mu_t} \right) \frac{\partial \mu_t \partial \mu_t}{\partial \alpha_i \partial \beta_j}. \tag{3.67}
\end{aligned}$$

De forma análoga pode-se obter a seguinte derivada de $l(\Theta)$ em relação aos parâmetros α_i , $i = 1, \dots, p$ e β_j , $j = 1, \dots, q$:

$$\begin{aligned}
E \left[\frac{\partial l(\Theta|F_{t-1})}{\partial \alpha_i} \frac{\partial l(\Theta|F_{t-1})}{\partial \beta_j} \middle| F_{t-1} \right] &= E \left[\left(\frac{Y_t}{\mu_t} - \frac{k + Y_t}{1 + \mu_t} \right)^2 \middle| F_{t-1} \right] \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_i} \frac{\partial l_t}{\partial \beta_j} \\
&= \frac{E((Y_t - k\mu_t)^2 | F_{t-1})}{\mu_t^2 (1 + \mu_t)^2} \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_i} \frac{\partial l_t}{\partial \beta_j} \\
&= \frac{k\mu_t(1 + \mu_t)}{\mu_t^2 (1 + \mu_t)^2} \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_i} \frac{\partial l_t}{\partial \beta_j} \\
&= k \left(\frac{1}{\mu_t} - \frac{1}{1 + \mu_t} \right) \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_i} \frac{\partial l_t}{\partial \beta_j}. \tag{3.68}
\end{aligned}$$

Então das equações (3.66) e (3.67) obtém-se a igualdade da matriz de informação

$$-E \left[\frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \middle| F_{t-1} \right] = E \left[\frac{\partial l_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial l_t}{\partial \theta_j} \middle| F_{t-1} \right]. \tag{3.69}$$

A utilização deste modelo é uma alternativa para o ajuste em séries temporais de contagem. Uma característica a ser destacada é a ausência de uma função de

ligação logarítmica na média. Deste fato torna-se importante serem satisfeitas as restrições do modelo, para garantir uma média positiva. Observe que para ambos os modelos, binomial negativo e Poisson, é obrigatório um valor da média positivo. Uma alternativa é proposta no trabalho, agregando como informação a priori tais restrições, utilizando assim inferência Bayesiana para a estimação, o Capítulo 4, tratará com detalhes essa abordagem.

3.5 Seleção de modelos

Na literatura existem muitas metodologias criadas para verificar quão adequado é um modelo. Entretanto como afirma Box (1976) “ Todos os modelos são errados, porém alguns são úteis ” , é evidente que busca-se um modelo “menos errado”, e existem algumas maneiras de encontrá-lo.

Na abordagem clássica dentre os critérios mais conhecidos e utilizados estão o AIC(Akaike information criterion) e BIC(Bayesian information criterion).

Akaike (1974) concluiu que o viés é dado assintoticamente por d , em que d é o número de parâmetros a serem estimados no modelo e definiu seu critério de informação como:

$$AIC = -2l(\hat{\theta}) + 2d. \quad (3.70)$$

Em que $l(\theta)$ denota o máximo da função de log-verossimilhança. O critério BIC, proposto por Schwarz(1978), penaliza o modelo a ser escolhido mais severamente que o AIC e é definido por:

$$BIC = -2l(\hat{\theta}) + d \log(n). \quad (3.71)$$

Sendo n o número de observações da série. O modelo selecionado é aquele com menor AIC e BIC.

Quando o enfoque está em uma abordagem bayesiana, outros critérios de seleção devem ser utilizados, visto que atualiza-se a verossimilhança com a informação a priori. Dentre esses critérios para seleção de modelos bayesianos tem-se DIC(Deviance information criterion), proposto por Spiegelhalter et al. (2002), EBIC(Expected bayesian information criterion), proposto por Calvin e Louis (2001) e também o CPO(Conditional predictive ordinate), proposto por Gelfand et al. (1992), que serão abordados no próximo capítulo.

3.6 Bootstrap

O método de simulação Bootstrap foi originalmente proposto por Bradley Efron em um influente artigo publicado no *Annals of Statistics*, em 1979. Este método de simulação se baseia na construção de distribuições amostrais por reamostragem, e é muito utilizado para estimar intervalos de confiança. O método de Bootstrap também pode ser utilizado, por exemplo, para estimar o viés e a variância de estimadores ou de testes de hipóteses calibrados. O método tem por base a idéia de que o pesquisador pode tratar sua amostra como se ela fosse a população que deu origem aos dados e usar amostragem com reposição da amostra original para gerar pseudoamostras. A partir destas pseudo-amostras, é possível estimar características da população, tais como média, variância, percentis, etc. Vários esquemas diferentes de simulação Bootstrap têm sido propostos na literatura e muitos deles apresentam bom desempenho em uma ampla variedade de situações.

Uma das formas de se obter amostras Bootstrap é o método não-paramétrico.

Neste caso, cada amostra de tamanho n é obtida amostrando, com reposição, os dados originais, onde a estimação dos parâmetros é realizada para cada amostra, sendo este processo repetido B vezes. Na simulação não-paramétrica os dados não são gerados da distribuição de probabilidade dos dados, como no caso paramétrico.

Por exemplo, seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ uma amostra contendo n observações. Constrói-se então, B amostras $X^{*(1)}, \dots, X^{*(B)}$ independentes, onde cada amostra é obtida a partir da reamostragem da amostra finita inicial $x = (x_1, \dots, x_n)$. Para cada uma das $X^{*(1)}, \dots, X^{*(B)}$ amostras, estima-se os parâmetros de interesse.

Capítulo 4

Inferência Bayesiana para séries temporais de contagem

Neste capítulo o enfoque é na inferência Bayesiana. Serão apresentados conceitos sobre o assunto, e a forma que a inferência Bayesiana foi realizada em cada um dos modelos propostos neste trabalho.

4.1 Visão Geral

Diferentemente da inferência clássica, que extrai dos dados toda a informação necessária sobre o parâmetro de interesse, a inferência Bayesiana considera também informação subjetiva sobre o parâmetro através de uma distribuição a priori. Dessa forma por meio do Teorema de Bayes, constrói-se uma distribuição a posteriori em função dos dados (função verossimilhança) e da distribuição a priori, podendo ser informativa ou não (Paulino et al., 2003).

Seja um parâmetro de interesse θ . Para inferir sobre tal, expressa-se toda a incerteza sobre ele com uma distribuição a priori $\pi(\Theta)$ e através da coleta dos dados,

agrega-se mais informação. Considerando-se a variável aleatória $X = (x_1, \dots, x_n)$ distribuição $\pi(X|\Theta)$, a partir do teorema de Bayes constrói-se a distribuição a posteriori da seguinte forma

$$\pi(\theta|X) = \frac{\pi(\theta, X)}{\pi(X)} = \frac{\pi(X|\theta)\pi(\theta)}{\pi(X)} = \frac{\pi(X|\theta)\pi(\theta)}{\int \pi(X|\theta)\pi(\theta)d\theta}. \quad (4.1)$$

Note que o denominador da última igualdade é um número, logo pode ser retirado como uma constante. É importante enfatizar que para cada valor de X , $\pi(X|\theta)$ fornece a verossimilhança dos possíveis valores de θ , portanto $L(\theta|X)$, o que nos leva a concluir que

$$\pi(\theta|X) \propto \pi(X|\theta)\pi(\theta). \quad (4.2)$$

A distribuição a posteriori é o elemento chave de toda análise Bayesiana dos dados, pois através dela encontra-se: média, mediana, moda, percentis, e se for de interesse do pesquisador, pode-se encontrar a distribuição marginal de um determinado parâmetro, integrando a densidade posteriori em relação aos demais parâmetros. Graças ao avanço computacional a inferência bayesiana vem crescendo muito, pois é necessário o cálculo de diversas integrais para tal abordagem, e algoritmos computacionais vem ajudando estes cálculos.

Usando a distribuição a posteriori pode-se dar ao pesquisador possíveis valores para o parâmetro de interesse, podendo ser a média, mediana e moda da distribuição marginal do respectivo parâmetro. A escolha da melhor medida descritiva é feita usando o risco de Bayes. Caso o interesse seja minimizar a função de perda quadrática, a média será o estimador a posteriori. Porém, se a função de perda for a absoluta, o estimador é a mediana. Em todo caso, se a função de perda for a 0-1, toma-se a moda pois esta minimiza o risco de bayes. (Paulino et al., 2003).

Uma alternativa é entregar ao pesquisador um resumo descritivo para cada parâmetro de interesse, juntamente com seus gráficos. Dessa forma, a seleção da melhor estimativa torna-se mais palpável.

4.2 Distribuições a Priori

A utilização de informação a priori na inferência Bayesiana requer a especificação de uma distribuição a priori para os parâmetros de interesse. Esta distribuição deve representar (probabilisticamente) o conhecimento sobre tal parâmetro antes da realização do experimento. Nesta seção serão comentadas algumas maneiras de encontrar priori. (Ehlers, 2007).

4.2.1 Priori não informativa

Em muitos casos, o pesquisador não possui conhecimento prévio sobre o evento, contudo tem interesse em uma análise Bayesiana sobre o problema. Nestes casos o indicado é o uso de uma priori não informativa, ou de variância alta, o que reflete na análise que a informação deve ser predominada pelos dados (Jeffreys, 1998)

Priori Uniforme: A primeira idéia de não informação na priori é pensar em todos os possíveis valores do parâmetros igualmente prováveis, ou seja

$$\pi(\theta) \propto \text{constante} \quad (4.3)$$

em que θ é o parâmetro de interesse e está variando em um subconjunto da reta. Deve-se atentar-se ao intervalo de variação do parâmetro, caso seja ilimitado tem-se $\int \pi(\theta)d\theta = \infty$. Caso for feito o uso de uma priori imprópria, deve-se verificar

se a posteriori encontrada é própria.

Priori de Jeffreys: Jeffreys (1961), propôs uma alternativa para prioris vagas, que possuía a propriedade de transformações um a um, ou seja, invariância. Mas que exigia o cálculo da informação de Fisher. Então seja x um valor do vetor de observações X com função de densidade de probabilidade $\pi(x|\theta)$, a informação de Fisher é dada por:

$$I(\theta) = -E \left(\frac{\partial^2 \log \pi(X|\Theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right). \quad (4.4)$$

Uma vez conhecendo a informação de fisher, podemos calcular a priori de Jeffreys, que é

$$\pi(\theta) \propto |\det\{I(\Theta)\}|^{1/2}. \quad (4.5)$$

4.2.2 Priori informativa

Quando o pesquisador possui algum conhecimento prévio sobre o parâmetro θ de interesse, tal informação pode ser incorporada no modelo através de uma priori informativa, ou seja, define-se em uma família paramétrica de densidades. Como trata-se dessa informação com uma densidade paramétrica, novos parâmetros vão surgir, os quais são denominados hiperparâmetros, para distingui-los do parâmetro de interesse θ . Além disso, pode-se usar o conceito de priori hierárquica, que define novas prioris para os hiperparâmetros, porém não trataremos esse conceito neste trabalho.

Outra maneira importante de usar prioris informativas é através de prioris conjugadas. Neste caso se a verossimilhança pertence a uma distribuição P , a

priori a uma distribuição P' , e ao calcular a posteriori verifica-se que esta pertence a P' , determina-se P' como priori conjugada. Este método é interessante, pois facilita muito na obtenção da posteriori, porém nem sempre uma priori conjugada representa bem a informação prévia do pesquisador. Na literatura já encontram-se muitas famílias conjugadas pré definidas, como Poisson e gama, binomial e beta, entre outras, para maiores informações ver Ehlers (2007).

4.3 Abordagem bayesiana nos modelos propostos

4.3.1 ARMA Generalizado (GARMA)

Assim como no modelo GLARMA, a função de ligação logarítmica está presente no cálculo da média, logo os parâmetros α_0 , α_1 e β_1 podem assumir qualquer valor. Portanto, não há necessidade de distribuições a priori que trazem informação, optando, assim, pelo uso de densidades Gaussianas com a variância alta, de modo que os dados prevaleçam na estimação. Dessa forma para o modelo GARMA(1,1) tem-se as seguintes densidades a priori:

$$\alpha_0 \sim N(\mu_0, \sigma_0) \Rightarrow f_{\alpha_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\alpha_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right)^2\right), \quad (4.6)$$

$$\alpha_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1) \Rightarrow f_{\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\alpha_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right), \quad (4.7)$$

$$\beta_1 \sim N(\mu_2, \sigma_2) \Rightarrow f_{\beta_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\beta_1 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right). \quad (4.8)$$

Dessa forma resta determinar a função de verossimilhança para cada um dos modelos propostos para obter suas distribuições a posteriori.

GARMA Poisson

Seja $\{Y_t\}$ uma série temporal, tal que $Y_t \sim \text{Poisson}(\mu_t)$, sendo μ_t a média do processo. A verossimilhança condicional é dada por

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 | Y) = \prod_{i=2}^n \frac{\exp(-\mu_i) \mu_i^{y_i}}{y_i!} \quad (4.9)$$

Como descrito no Capítulo 3, pode-se reescrever o modelo (4.9) substituindo μ_i por $\exp(\alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{i-1}) + \beta_1 \log(\frac{y_{i-1}}{\mu_{i-1}}))$, que são conhecidos no tempo t , obtendo assim a seguinte função de verossimilhança

$$\begin{aligned} L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 | Y) &\propto \exp \left[\sum_{i=2}^n \left(y_i \left\{ \alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{i-1}) + \beta_1 \log \left(\frac{y_{i-1}}{\mu_{i-1}} \right) \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \exp \left\{ \alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{i-1}) + \beta_1 \log \left(\frac{y_{i-1}}{\mu_{i-1}} \right) \right\} \right) \right]. \quad (4.10) \end{aligned}$$

A densidade a posteriori do modelo GARMA Poisson é

$$\begin{aligned} \pi(Y | \alpha_0, \alpha_1, \beta_1) &\propto \exp \left[\frac{-1}{2} \left(\left(\frac{\alpha_0 - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{\beta_1 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right) \right. \\ &\quad + \sum_{i=2}^n \left(y_i \left\{ \alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{i-1}) + \beta_1 \log \left(\frac{y_{i-1}}{\mu_{i-1}} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \left. - \exp \left\{ \alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{i-1}) + \beta_1 \log \left(\frac{y_{i-1}}{\mu_{i-1}} \right) \right\} \right) \right]. \quad (4.11) \end{aligned}$$

GARMA Binomial Negativa

Seja $\{Y_t\}$ uma série temporal, tal que $Y_t \sim \text{BN}(k, p_t)$ sendo p_t uma probabilidade e k um valor positivo. A verossimilhança condicional é

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1|Y) = \prod_{i=2}^n \frac{\Gamma(k + y_i)}{\Gamma(y_i + 1)\Gamma(k)} p_i^k (1 - p_i)^{y_i} \quad (4.12)$$

Assim como no modelo GARMA Poisson tem-se $\mu_i = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{i-1}) + \beta_1 \log(\frac{y_{i-1}}{\mu_{i-1}}))$. Além disso pode-se substituir $\mu_i = \frac{k(1-p_i)}{p_i} \Rightarrow p_i = \frac{k}{k+\mu_i}$ e, dessa forma, obtém-se a seguinte função de verossimilhança

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1|Y) \propto \exp \left(\sum_{i=2}^n \left\{ k \log \left(\frac{k}{k + \exp(\alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{i-1}) + \beta_1 \log(\frac{y_{i-1}}{\mu_{i-1}}))} \right) + y_i \log \left(\frac{\exp(\alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{i-1}) + \beta_1 \log(\frac{y_{i-1}}{\mu_{i-1}}))}{k + \exp(\alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{i-1}) + \beta_1 \log(\frac{y_{i-1}}{\mu_{i-1}}))} \right) \right\} \right). \quad (4.13)$$

Assim pode-se determinar a densidade a posteriori do modelo GARMA binomial negativa:

$$\begin{aligned} \pi(Y|\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) &\propto \exp \left[\frac{-1}{2} \left(\left(\frac{\alpha_0 - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_1 - \mu_1}{\sigma_0 1} \right)^2 + \left(\frac{\beta_1 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right) \right. \\ &+ \sum_{i=2}^n \left\{ k \log \left(\frac{k}{k + \exp(\alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{i-1}) + \beta_1 \log(\frac{y_{i-1}}{\mu_{i-1}}))} \right) \right. \\ &\left. \left. + y_i \log \left(\frac{\exp(\alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{i-1}) + \beta_1 \log(\frac{y_{i-1}}{\mu_{i-1}}))}{k + \exp(\alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{i-1}) + \beta_1 \log(\frac{y_{i-1}}{\mu_{i-1}}))} \right) \right\} \right]. \quad (4.14) \end{aligned}$$

4.3.2 ARMA Linear Generalizado (GLARMA)

Como observado anteriormente, no modelo GLARMA a função de ligação logarítmica está presente no cálculo da média, logo os parâmetros α e β podem assumir qualquer valor. Portanto, não há necessidade de distribuições a priori que trazem informação, optando assim pelo uso de densidades Gaussianas com a variância

alta, de modo que os dados prevaleçam na estimação. Dessa forma, para o modelo GLARMA(1,1) tem-se as seguintes densidades a priori:

$$\alpha \sim N(\mu_0, \sigma_0) \Rightarrow f_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\alpha - \mu_0}{\sigma_0}\right)^2\right), \quad (4.15)$$

$$\beta \sim N(\mu_1, \sigma_1) \Rightarrow f_\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\beta - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right). \quad (4.16)$$

Dessa forma resta determinar a função de verossimilhança para cada um dos modelos propostos a fim de obter suas distribuições a posteriori.

GLARMA Poisson

Seja $\{Y_t\}$ uma série temporal, tal que $Y_t \sim \text{Poisson}(\mu_t)$, sendo μ_t a média do processo. A verossimilhança condicional é dada por

$$L(\alpha, \beta|Y) = \prod_{i=2}^n \frac{\exp(-\mu_i) \mu_i^{y_i}}{y_i!}, \quad (4.17)$$

No caso em que $\beta = 0$, pode-se reescrever o modelo substituindo μ_i por $\exp(\alpha(\mu_{i-1} + e_{i-1}) + \beta e_{i-1})$, que no tempo t são conhecidos.

$$L(\alpha, \beta|Y) \propto \exp\left[\sum_{i=2}^n (y_i(\alpha(\mu_{i-1} + e_{i-1}) + \beta e_{i-1}) - \exp(\alpha(\mu_{i-1} + e_{i-1}) + \beta e_{i-1}))\right]. \quad (4.18)$$

Dessa forma, obtém-se a seguinte distribuição a posteriori para o modelo GLARMA Poisson:

$$\begin{aligned} \pi(Y|\alpha, \beta) &\propto \exp \left[\frac{-1}{2} \left(\left(\frac{\alpha - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 + \left(\frac{\beta - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^n (y_i(\alpha(\mu_{i-1} + e_{i-1}) + \beta e_{i-1}) - \exp(\alpha(\mu_{i-1} + e_{i-1}) + \beta e_{i-1})) \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Segue agora o modelo GLARMA binomial negativo

GLARMA Binomial Negativa

Seja $\{Y_t\}$ uma série temporal, tal que $Y_t \sim BN(k, p_t)$ sendo p_t uma probabilidade e k um valor positivo. A verossimilhança condicional  

$$L(\alpha, \beta|Y) = \prod_{i=2}^n \frac{\Gamma(k + y_i)}{\Gamma(y_i + 1)\Gamma(k)} p_i^k (1 - p_i)^{y_i}. \quad (4.20)$$

Como descrito anteriormente pode-se reescrever o modelo da seguinte forma $\mu_i = \frac{r(1-p_i)}{p_i} \Rightarrow p_i = \frac{r}{r+\mu_i}$ e substituindo $\mu_i = \exp(\alpha(\mu_{i-1} + e_{i-1}) + \beta e_{i-1})$. Logo,

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta|Y) &\propto \exp \left(\sum_{i=2}^n \left\{ k \log \left(\frac{k}{k + \exp(\alpha(\mu_{i-1} + e_{i-1}) + \beta e_{i-1})} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + y_i \log \left(\frac{\exp(\alpha(\mu_{i-1} + e_{i-1}) + \beta e_{i-1})}{k + \exp(\alpha(\mu_{i-1} + e_{i-1}) + \beta e_{i-1})} \right) \right\} \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dessa forma obtém-se a seguinte distribui o a posteriori para o modelo GLARMA binomial negativa:

$$\begin{aligned}
\pi(Y|\alpha, \beta) \propto & \exp \left[\frac{-1}{2} \left(\left(\frac{\alpha - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 + \left(\frac{\beta - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right) \right. \\
& + \sum_{i=2}^n \left\{ k \log \left(\frac{k}{k + \exp(\alpha(\mu_{i-1} + e_{i-1}) + \beta e_{i-1})} \right) \right. \\
& \left. \left. + y_i \log \left(\frac{\exp(\alpha(\mu_{i-1} + e_{i-1}) + \beta e_{i-1})}{k + \exp(\alpha(\mu_{i-1} + e_{i-1}) + \beta e_{i-1})} \right) \right\} \right]. \quad (4.22)
\end{aligned}$$

4.3.3 GARCH Inteiro Generalizado

Neste modelo tanto com a distribuição Poisson quanto com a binomial negativa foram adequadas às restrições dos parâmetros nas distribuições a priori. A média μ_t neste modelo é escrita como $\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \mu_{t-j}$, daí segue que $\alpha_0 > 0$, $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. No caso em que $p=q=1$, tem-se que:

$$\alpha_0 > 0 \Rightarrow \phi = \log(\alpha_0) \Rightarrow \alpha_0 = \exp(\phi), \quad (4.23)$$

Será feita uma transformação de variável, de tal forma que cada uma das transformadas ϕ , γ e θ seguem distribuições normais com médias μ_0, μ_1 e μ_2 , respectivamente, e variância σ_0^2 , σ_1^2 e σ_2^2 respectivamente. Assim, a densidade de ϕ é dada por

$$\phi \sim N(\mu_0, \sigma_0) \Rightarrow f_{\alpha_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp \left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\log(\alpha_0) - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 \right) |J|, \quad (4.24)$$

e que $|J| = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_0} \Rightarrow |J| = \frac{1}{\alpha_0}$. Portanto

$$\pi(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp \left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\log(\alpha_0) - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 \right). \quad (4.25)$$

Em relação a α_1 , atribui-se a restrição de que ele assume valores entre $(0, 1)$.

Logo, realizando uma transformação de variável reescreve-se α_1 em função de γ da seguinte forma:

$$0 < \alpha_1 < 1 \Rightarrow \gamma = \log \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\exp(\gamma)}{1 + \exp(\gamma)}, \quad (4.26)$$

obtendo, dessa forma, a seguinte densidade de γ :

$$\gamma \sim N(\mu_1, \sigma_1) \Rightarrow f_{\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp \left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\log \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right) |J|, \quad (4.27)$$

em que $|J| = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1} \Rightarrow |J| = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_1^2}$. Portanto:

$$\pi(\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_1^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp \left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\log \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right). \quad (4.28)$$

Por fim, analogamente a α_1 considera-se que β_1 assume valores entre $(0, 1)$. Portanto, escrevendo β_1 em função de θ , obtém-se:

$$0 < \beta_1 < 1 \Rightarrow \theta = \log \left(\frac{\beta_1}{1 - \beta_1} \right) \Rightarrow \beta_1 = \frac{\exp(\theta)}{1 + \exp(\theta)}. \quad (4.29)$$

Dessa forma, segue que θ possui a seguinte densidade:

$$\theta \sim N(\mu_2, \sigma_2) \Rightarrow f_{\beta_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp \left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\log \left(\frac{\beta_1}{1 - \beta_1} \right) - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right) |J|, \quad (4.30)$$

em que $|J| = \frac{\partial \theta}{\partial \beta_1} \Rightarrow |J| = \frac{1}{\beta_1 - \beta_1^2}$. Portanto

$$\pi(\beta_1) = \frac{1}{\beta_1 - \beta_1^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\log\left(\frac{\beta_1}{1-\beta_1}\right) - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right) \quad (4.31)$$

Note que a restrição $\alpha + \beta < 1$ não foi incluída na priori, esta restrição deve ser verificada a posteriori. A seguir serão descritas as distribuições a posteriori, obtidas utilizando as densidades a priori definidas acima e através das distribuições Poisson e binomial negativa.

INGARCH Poisson

Seja $\{Y_t\}$ uma série temporal, tal que $Y_t \sim \text{Poisson}(\mu_t)$ sendo μ_t a média do processo. A verossimilhança condicional é

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 | Y) = \prod_{i=2}^n \frac{\exp(-\mu_i) \mu_i^{y_i}}{y_i!} \quad (4.32)$$

Substituindo μ_t como foi definido no modelo INGARCH, tem-se, $\mu_i = \alpha_0 + \alpha_1 y_{i-1} + \beta_1 \mu_{i-1}$. Dessa forma, a função de verossimilhança é reescrita como

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 | Y) \propto \exp\left[\sum_{i=2}^n (y_i \log(\alpha_0 + \alpha_1 y_{i-1} + \beta_1 \mu_{i-1}) - \alpha_0 - \alpha_1 y_{i-1} - \beta_1 \mu_{i-1})\right] \quad (4.33)$$

Assim, obtém-se a seguinte distribuição a posteriori para o modelo INGARCH Poisson:

$$\begin{aligned} \pi(Y | \alpha_0, \alpha_1, \beta_1) &\propto \left(\frac{1}{\alpha_0}\right) \left(\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_1^2}\right) \left(\frac{1}{\beta_1 - \beta_1^2}\right)^x \\ &\exp\left(\sum_{i=2}^n (y_i \log(\alpha_0 + \alpha_1 y_{i-1} + \beta_1 \mu_{i-1}) - (\alpha_0 + \alpha_1 y_{i-1} + \beta_1 \mu_{i-1}))\right) \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\log(\alpha_0) - \mu_0}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{\log\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right) - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\log\left(\frac{\beta_1}{1-\beta_1}\right) - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

INGARCH Binomial Negativa

Seja $\{Y_t\}$ uma série temporal, tal que $Y_t \sim BN(k, p_t)$ sendo p_t uma probabilidade e k um valor positivo. A verossimilhança condicional é

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 | Y) = \prod_{i=2}^n \frac{\Gamma(k + y_i)}{\Gamma(y_i + 1)\Gamma(k)} p_i^k (1 - p_i)^{y_i}. \quad (4.35)$$

Como descrito anteriormente, no modelo INGARCH reescreve-se a média do processo como $\mu_i = \alpha_0 + \alpha_1 y_{i-1} + \beta_1 \mu_{i-1}$, e, substituindo $\mu_i = \frac{k(1-p_i)}{p_i} \Rightarrow p_i = \frac{k}{k+\mu_i}$, a função de verossimilhança do modelo INGARCH binomial negativa é

$$\begin{aligned} L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 | Y) \propto \exp \left(\sum_{i=2}^n \left[k \log \left(\frac{k}{k + \alpha_0 + \alpha_1 y_{i-1} + \beta_1 \mu_{i-1}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + y_i \log \left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1 y_{i-1} + \beta_1 \mu_{i-1}}{k + \alpha_0 + \alpha_1 y_{i-1} + \beta_1 \mu_{i-1}} \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Dessa forma, obtém-se a seguinte distribuição a posteriori para o modelo INGARCH binomial negativa:

$$\begin{aligned} \pi(Y | \alpha_0, \alpha_1, \beta_1) \propto & \left(\frac{1}{\alpha_0} \right) \left(\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_1^2} \right) \left(\frac{1}{\beta_1 - \beta_1^2} \right) \times \\ & \exp \left(\sum_{i=2}^n \left\{ k \log \left(\frac{k}{k + \alpha_0 + \alpha_1 y_{i-1} + \beta_1 \mu_{i-1}} \right) + y_i \log \left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1 y_{i-1} + \beta_1 \mu_{i-1}}{k + \alpha_0 + \alpha_1 y_{i-1} + \beta_1 \mu_{i-1}} \right) \right\} \right) \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\log(\alpha_0) - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 + \left(\frac{\log\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right) - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{\log\left(\frac{\beta_1}{1-\beta_1}\right) - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Nesta seção foram descritas as funções de verossimilhança e densidades a posteriori de cada um dos modelos propostos neste trabalho. O intuito é encontrar

as densidades a posteriori da cada um dos modelos em questão. Para a estimação Bayesiana será necessária a utilização de um método MCMC, a fim de gerar valores dos parâmetros para cada uma das distribuições a posteriori. Uma vez que esta estimação é realizada métodos de seleção de modelos serão usados para a escolha do melhor modelo. Na próxima seção serão descritos os métodos MCMC e abordados os critérios de seleção de modelos.

4.4 Métodos MCMC

Os métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov(MCMC) são alternativas aos métodos não iterativos em problemas complexos. A idéia é simular uma cadeia de markov irredutível, aperiódica e cuja distribuição de equilíbrio seja a distribuição de interesse $\pi(\theta|X)$. Os algoritmos Metropolis-Hastings e Gibbs Sampling são os métodos de geração mais utilizados:

Metropolis-Hastings

O algoritmo de Metropolis-Hastings é o resultado da proposta de Metropolis *et al.* (1953) e da melhora sugerida por Hastings (1970). Este método de geração só é indicado quando a expressão da distribuição de interesse não é conhecida e os outros métodos de geração considerados exatos não satisfazem algumas hipóteses.

Seja uma distribuição de equilíbrio $\pi(\theta)$, esta pode ser a densidade a posteriori. A idéia central do algoritmo é a construção de uma cadeia, cujos valores são amostras da distribuição $\pi(\theta)$. A geração de um possível valor de θ é feita a partir de uma distribuição diferente da $\pi(\theta)$, mas este valor é aceito para a cadeia com uma certa probabilidade; caso a cadeia convirja, o sistema de correção (onde o valor é aceito ou não) é o que garante que a distribuição de equilíbrio $\pi(\theta)$ seja a

distribuição limite.

Com um pouco mais de formalidade reescreve-se a idéia do algoritmo. Suponha que a cadeia esteja na posição θ^j e um valor θ^{j+1} foi gerado da distribuição $q(.|\theta)$. Observe que a geração do θ^{j+1} pode depender do estado da cadeia j . Um exemplo simples desse fato é quando utiliza-se como geradora de candidato o chamado passeio aleatório. O valor θ^{j+1} é aceito com probabilidade

$$\alpha(\theta^j, \theta^{j+1}) = \min \left(1, \frac{\pi(\theta^{j+1})q(\theta^j|\theta^{j+1})}{\pi(\theta^j)q(\theta^{j+1}|\theta^j)} \right). \quad (4.38)$$

observe que $\pi(\cdot)$ é a distribuição de equilíbrio. Seguem os passos do algoritmo:

1. iniciar o contador de iterações da cadeia $k = 1$ e atribuir um valor para θ^1 ;
2. gerar um candidato a θ^{k+1} de distribuição $q(\cdot)$;
3. calcular a probabilidade de aceitação $\alpha(\theta^k, \theta^{k+1})$ como descrito acima;
4. gerar um valor u da distribuição $U(0, 1)$;
5. se o valor u for menor que $\alpha(\theta^k, \theta^{k+1})$ então o candidato θ^{k+1} entra na cadeia na posição $k + 1$ caso contrario, o valor θ^{k+1} da cadeia é o mesmo que em θ^k e mude o contador para $k + 1$
6. repetir passos 2 a 5

Além do método introduzido por Hastings (1970) uma outra alternativa é o amostrador de Gibbs, O algoritmo de simulação proposto define uma cadeia de Markov que, sob condições muito gerais, tem como distribuição limite a distribuição conjunta que se pretende simular Gelfand e Smith (1990). Neste trabalho apenas o algoritmo de Metropolis-Hastings foi utilizado.

4.5 Convergência do Algoritmo

A medida que o número de iterações aumenta, espera-se que o algoritmo entre na zona de convergência e permaneça dentro. Existem alguns métodos para verificar essa permanência:

1. Gráfico da sequência
2. Superposição de histogramas
3. Superposição de densidades estimadas
4. Superposição de funções distribuições acumuladas empíricas
5. Gráfico quantil-quantil

Outra maneira muito usada é o valor de Geweke introduzido por Geweke (1992), que é um método numérico para análise da convergência. Para sua realização deve-se inicialmente descartar o “burn-in”, que se trata de um aquecimento da cadeia, com propósito de retirar a influência do chute inicial. Após esse descarte separa-se 10 por cento do início da cadeia e 50 por cento do final, esta diferença é importante pois espera-se que o final da cadeia tenha mais chance de estar em convergência, então realiza-se um teste de comparação de médias, definido da seguinte forma:

$$g = \frac{\bar{X}_a - \bar{X}_b}{\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{n_a} - \frac{\sigma_b^2}{n_b}}}. \quad (4.39)$$

Em geral conclui-se em convergência se g está entre $[-2,2]$.

4.6 Previsões para os modelos de séries temporais de contagem

Muitos estudos envolvendo séries temporais têm como objetivo fazer previsões, prever valores futuros da série com base em valores passados da mesma, ou seja, uma das formas de utilização de um modelo ajustado é para prever um valor Y_{t+h} , $h > 1$. Supondo que as observações $\dots, Y_{t-2}, Y_{t-1}, Y_t$ são conhecidas.

O método de previsão abordado nesta dissertação foi o método de previsão Naive, uma referência comum encontrada na literatura (Lawrence *et al*, 2000), que se baseia no conceito de que a melhor previsão para o instante seguinte será o valor observado no instante atual, isto é, se um valor da série estiver em uma tendência alta, a previsão é de que ele continuará em alta e vice-versa. A previsão do Naive é definida por

$$\hat{Y}_{t+h} = Y_t$$

em que \hat{Y}_{t+h} é a previsão feita para h passos a frente e Y_t é o valor observado no instante t .

Como são conhecidas todas as componentes dos preditores lineares dos modelos GARMA, GLARMA e INGARCH, a previsão é feita de maneira simplificada usando o preditor, ou seja, a previsão h passos à frente para cada um dos modelos é dada por

GARMA

$$\hat{\mu}_{t+h} = \exp \left[\hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j \log(y_{t+h-j}^*) + \sum_{j=1}^q \hat{\beta}_j \log \left(\frac{y_{t+h-j}^*}{\mu_{t+h-j}} \right) \right].$$

GLARMA

$$\hat{\mu}_{t+h} = \exp \left[\sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j (\mu_{t+h-j} + e_{t+h-j}) + \sum_{j=1}^q \hat{\beta}_j e_{t+h-j} \right].$$

INGARCH

$$\hat{\mu}_{t+h} = \left[\hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j y_{t+h-j} + \sum_{j=1}^q \hat{\beta}_j \mu_{t+h-j} \right].$$

Faz-se uso de algumas técnicas para avaliar a qualidade dos valores previstos, ou seja, é preciso verificar se estes valores previstos estão coerentes com o conjunto de dados. Neste trabalho serão usados 2 critérios o erro quadrático médio (EQM) e o mean absolute percentile error (MAPE) dados respectivamente por

$$EQM = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{\mu}_t - Y_t)^2$$

$$MAPE = \frac{100\%}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{Y_t - \hat{\mu}_t}{Y_t} \right|$$

4.7 Métodos de seleção bayesianos

Serão apresentados os métodos de seleção bayesianos utilizados neste trabalho.

4.7.1 EBIC

O critério de informação Bayesiana (ou Information Criterion, BIC) é um critério de seleção de modelo proposto por Schwarz (1978) e modificado por Carlin e Louis (2000) para ser utilizado no contexto da inferência Bayesiana levando em conta a densidade a posteriori dos parâmetros do modelo ajustado. Este critério, denotado por EBIC = $E(BIC)$, faz uma ponderação entre o valor esperado, a posteriori,

do máximo da função log-verossimilhança e o número de parâmetros do modelo ajustado. Considera-se como o modelo que melhor se ajusta, aquele que apresenta o menor valor do *EBIC* dado por:

$$EBIC = -2E\{l_a(\Theta|F_n)\} + (p + q) \log(n). \quad (4.40)$$

em que $E\{l_a(\Theta)\}$ é o valor esperado, tomado com relação à densidade a posteriori, da máxima log-verossimilhança e n é o tamanho da série usada no ajuste do modelo em questão.

4.7.2 DIC

O critério desvio(ou Deviance Information Criterion, DIC) é muito usado no método Bayesiano de seleção de modelos quando se dispõe de amostras geradas da distribuição a posteriori dos parâmetros dos modelos. O critério DIC, introduzido por Spiegelhalter *et al.* (2002), é definido a partir da função D , dada por:

$$D(\theta) = -2l_a(\Theta). \quad (4.41)$$

O desvio, DIC, é dado por

$$DIC = 2\bar{D} - \hat{D}, \quad (4.42)$$

em que $\bar{D} = E\{D(\Theta)\}$ é a média a posteriori de D e \hat{D} é o valor de D calculado com valores médios a posteriori do parâmetro θ . Ambos \bar{D} e \hat{D} são calculados com a amostra $\gamma^j = \Theta^j$ gerada da densidade a posteriori como:

$$\bar{D} = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^Q D(\gamma^j),$$

$$\hat{D} = -2l_a(\hat{\gamma}).$$

Em que

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^Q \gamma^j.$$

Valores menores para DIC indicam os melhores modelos, inclusive podendo assumir valores negativos.

4.7.3 Densidade Condicional Preditiva Ordenada (CPO)

A densidade condicional ordenada(CPO), foi inicialmente proposta por Geisser e Eddy (1979) e foi discutida em Gelfand *et al.* (1992). Para calcular esta densidade preditiva ordenada associada a um valor da série y_t , denotada por CPO_t , considera-se a densidade a posteriori $\pi(\theta|F_{t-1})$, para o modelo de interesse, condicionada na informações disponíveis até o tempo t , denotada aqui por:

$$F_{t-1} = \{x_{t-1}, \dots, x_1, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \mu_{t-1}, \mu_{t-2}, \dots, \mu_1\}.$$

Além disso, a densidade da observação y_t , que é denotada por $f(y_t|\theta, F_{t-1})$, logo

$$CPO_t = \int f(y_t|\theta, F_{t-1})\pi(\theta|F_{t-1})\partial\theta, \quad (4.43)$$

podendo ser reescrita da seguinte forma

$$CPO_t = \int f(y_t|\theta, F_{t-1}) \left\{ \frac{L_a(\theta|F_{t-1})\pi_0(\theta)}{\int L_a(\theta|F_{t-1})\pi_0(\theta)\partial\theta} \right\} \partial\theta, \quad (4.44)$$

sabendo-se que $f(y_t|\theta, H_t)L_a(\theta|F_{t-1}) = L_a(\theta|F_t)$, em que

$$F_t = \{x_t, \dots, x_1, y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \mu_t, \mu_{t-1}, \dots, \mu_1\}.$$

Pode-se ainda reescrever CPO_t como

$$\begin{aligned} CPO_t &= \int \frac{L_a(\theta|F_t)\pi_0(\theta)}{\int \frac{1}{f(y_t|\theta, F_{t-1})} L_a(\theta|F_t)\pi_0(\theta) \partial\theta} \partial\theta \\ &= \int \frac{L_a(\theta|F_t)\pi_0(\theta) \partial\theta}{\int \frac{1}{f(y_t|\theta, F_{t-1})} L_a(\theta|F_t)\pi_0(\theta) \partial\theta}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Em Gelfand *et al.* (1992) é mostrado que após alguma algebra:

$$CPO_t = \left\{ \int \frac{1}{f(y_t|\theta, F_{t-1})} \pi(\theta|F_t) \partial\theta \right\}^{-1}. \quad (4.46)$$

Portanto a densidade preditiva ordenada, CPO_t , pode ser estimada usando-se uma amostra $\{\theta^i, i = 1, \dots, Q\}$, gerada com algoritmo MCMC, da densidade a posteriori $\pi(\theta|F_t)$. O estimador de Monte Carlo da CPO_t é dado por:

$$C\hat{P}O_t = \left\{ \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^Q \frac{1}{f(y_t|\theta^{(j)}, F_{t-1})} \right\}^{-1}. \quad (4.47)$$

As estimativas do $C\hat{P}O_t$, para $t = r + 1, \dots, n$, podem ser usadas para selecionar o melhor modelo, neste caso que se ajusta a uma série de contagem. O modelo selecionado é aquele que apresentar maior valor do $C\hat{P}O = \prod_{t=r+1}^n C\hat{P}O_t$. Costuma-se utilizar o critério definido por $\log(C\hat{P}O) = \sum_{t=r+1}^n \log(C\hat{P}O_t)$.

Neste capítulo o objetivo foi abordar cada um dos modelos de maneira clássica e Bayesiana, além de explicar como serão feitas as estimações em cada um dos casos. No próximo capítulo um estudo de simulação é proposto para verificar as adequabilidade de cada um dos modelos com as distriuições Poisson e binomial

negativa para o caso clássico. Também serão utilizados os métodos de seleção abordados neste capítulo, na escolha das ordens dos modelos simulados, tanto na abordagem clássica quanto na abordagem Bayesiana.

Capítulo 5

Aplicação com dados simulados

Neste Capítulo será conduzido um estudo de simulação para cada um dos modelos propostos. Os modelos INGARCH(p,q), GLARMA(p,q) e GARMA(p,q), em que $p=\{1, 2\}$ e $q=\{1, 2\}$ serão abordados considerando a distribuição de Poisson e binomial negativa. Tal estudo é recomendado na tentativa de verificar propriedades do método de estimação e identificação de cada um dos modelos, e para a programação foi utilizado o software livre R development Core Team(2010).

No estudo de simulação foi verificada a consistência dos estimadores clássicos. Para isso foram geradas 5000 séries e calculados o vício, probabilidade de cobertura, limites superiores e inferiores, dentre outras métricas, cujos valores médios são apresentados nas tabelas a seguir. No corpo principal deste trabalho serão apresentadas apenas os resultados obtidos com as séries geradas de tamanho 500 apesar de que foram geradas também séries de tamanho 200 e 1000, cujos resultados se encontram nos apêndices. Para os modelos com a distribuição binomial negativa, o valor k foi fixado em 30.

Um estudo de simulação para a seleção de ordem também foi realizado. Neste

estudo foram geradas 500 séries e, após o ajuste de modelos com diferentes ordens, foi considerado o menor valor do BIC. Na abordagem Bayesiana foi considerado o método MCMC, Metropolis-Hastings para a obtenção das densidades a posteriori dos parâmetros. Além disso, foram utilizadas, na abordagem Bayesiana os critérios EBIC, DIC e CPO para seleção das ordens dos modelos. Na abordagem bayesiana foi utilizado um período de aquecimento da cadeia "burn-in" de 1000 com 1000 replicações e saltos de 10, para cada uma das séries geradas, em um total de 180 séries.

5.1 ARMA Generalizado (GARMA)

O estudo de simulação se divide em 3 etapas para cada um dos modelos, serão apresentadas uma tabela com os resultados obtidos pelas replicações do estimador de máxima verossimilhança, seguidas dos resultados obtidos pelo critério de seleção clássico, e a terceira tabela traz os resultados dos critérios de seleção Bayesianos.

5.1.1 Poisson

GARMA(1,1)

Tabela 5.1: Poisson GARMA(1,1) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	1.00	1.0187	0.0109		
α_1	0.30	0.2901	0.0054		
β_1	0.25	0.2404	0.0056		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.8144	1.2230	0.0795	0.9596	0.9599
α_1	0.1456	0.4344	0.0565	0.9636	0.9581
β_1	0.0944	0.3864	0.0582	0.9808	0.9529

Pela a Tabela 5.1 nota-se que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, os intervalos de confiança contêm os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana respectivamente.

Tabela 5.2: Seleção da ordem do modelo Poisson GARMA(1,1) com a abordagem clássica

Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.5840	0.2040	0.1940	0.0180
500	0.7200	0.1380	0.1400	0.0020
1000	0.7891	0.0990	0.1119	0.0000

Observando a Tabela 5.2 nota-se bons indícios para o modelo correto, através da abordagem clássica.

Os critérios Bayesianos também apresentam maiores porcentagens em favor do modelo correto, como pode-se notar pela Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Seleção da ordem do modelo Poisson GARMA(1,1) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.6756	0.2162	0.1081	0.0000
500	0.8148	0.0370	0.1481	0.0000
1000	0.8620	0.0110	0.1090	0.0000
DIC				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.7000	0.1700	0.1300	0.0000
500	0.7037	0.1481	0.1481	0.0000
1000	0.8108	0.1081	0.0810	0.0000
CPO				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.3783	0.2972	0.2432	0.0810
500	0.4074	0.3703	0.1111	0.1111
1000	0.4600	0.2900	0.1800	0.0700

GARMA(1,2)

Como nos resultados anteriores, a Tabela 5.4 mostra que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana respectivamente.

Tabela 5.4: Poisson GARMA(1,2) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	1.00	1.0239	0.0193		
α_1	0.30	0.2912	0.0092		
β_1	0.40	0.3762	0.0087		
β_2	0.25	0.2247	0.0036		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.7534	1.2944	0.1096	0.9979	0.9564
α_1	0.1047	0.4778	0.0770	1.0090	0.9488
β_1	0.1948	0.5575	0.0798	1.0658	0.9278
β_2	0.1065	0.3429	0.1344	1.1433	0.9194

Observando a Tabela 5.5 nota-se bons indícios para o modelo correto, através da abordagem clássica.

Tabela 5.5: Seleção da ordem do modelo Poisson GARMA(1,2) com a abordagem clássica

Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.0000	0.9780	0.0020	0.0200
500	0.0000	0.9820	0.0000	0.0180
1000	0.0000	0.9960	0.0000	0.0040

Os critérios bayesianos selecionaram o melhor modelo nos métodos EBIC e CPO, porém o critério DIC não selecionou o modelo correto, como é possível observar na Tabela 5.6.

Tabela 5.6: Seleção da ordem do modelo Poisson GARMA(1,2) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.2868	0.6924	0.0208	0.0000
500	0.0408	0.9387	0.0204	0.0000
1000	0.0194	0.9806	0.0000	0.0000
DIC				
Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.7708	0.1666	0.0625	0.0000
500	0.6395	0.3604	0.0000	0.0000
1000	0.1225	0.8775	0.0000	0.0000
CPO				
Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.3096	0.3806	0.3032	0.0064
500	0.3953	0.4302	0.1279	0.0465
1000	0.2240	0.5235	0.2288	0.0237

GARMA(2,1)

Como observado anteriormente, a Tabela 5.7 mostra que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana respectivamente.

Observando a Tabela 5.8 nota-se bons indícios para o modelo correto, através da abordagem clássica.

Os critérios bayesianos selecionaram o melhor modelo nos métodos EBIC e CPO, porém o critério DIC não selecionou o modelo correto, como é possível observar pela Tabela 5.9.

Tabela 5.7: Poisson GARMA(2,1) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	0.50	0.5364	0.0105
α_1	0.30	0.3499	0.0234
α_2	0.40	0.3597	0.0112
β_1	0.25	0.1988	0.0251

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.3391	0.7338	0.0804	1.0017	0.9554
α_1	0.0630	0.6369	0.1242	1.0586	0.9334
α_2	0.1310	0.5285	0.0979	1.2101	0.9184
β_1	0.0286	0.4663	0.1387	1.1213	0.9074

Tabela 5.8: Seleção da ordem do modelo Poisson GARMA(2,1) com a abordagem clássica

Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.0060	0.1260	0.8640	0.0040
500	0.0080	0.0860	0.8980	0.0080
1000	0.0020	0.0700	0.9260	0.0020

Tabela 5.9: Seleção da ordem do modelo Poisson GARMA(2,1) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.1818	0.2170	0.6012	0.0000
500	0.0555	0.2777	0.6668	0.0000
1000	0.0252	0.2689	0.7059	0.0000
DIC				
Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.9230	0.0096	0.0674	0.0000
500	0.8333	0.0555	0.1112	0.0000
1000	0.8108	0.0411	0.1481	0.0000
CPO				
Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.2500	0.2403	0.3076	0.2019
500	0.1777	0.2222	0.3777	0.2222
1000	0.1666	0.2037	0.4335	0.1962

GARMA(2,2)

Como observado anteriormente, a Tabela 5.10 mostra que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana respectivamente.

Tabela 5.10: Poisson GARMA(2,2) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5453	0.0080		
α_1	0.30	0.2864	0.0068		
α_2	0.40	0.3579	0.0061		
β_1	0.25	0.2268	0.0063		
β_2	0.35	0.3258	0.0030		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.4302	0.7807	0.1104	1.1775	0.8966
α_1	0.1263	0.4466	0.0661	1.0064	0.9342
α_2	0.2062	0.5096	0.0684	1.1180	0.9318
β_1	0.0728	0.3808	0.0647	1.0347	0.9484
β_2	0.2187	0.4328	0.1264	1.1744	0.9138

Observando a Tabela 5.11 nota-se bons indícios para o modelo correto, através da abordagem clássica.

Tabela 5.11: Seleção da ordem do modelo Poisson GARMA(2,2) com a abordagem clássica

Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.0000	0.0000	0.0800	0.9200
500	0.0000	0.0000	0.0470	0.9530
1000	0.0000	0.0000	0.0280	0.9720

O critério bayesiano EBIC selecionou o melhor modelo, porém os critérios DIC e CPO não selecionaram o modelo correto, como é possível observar na Tabela

5.12.

Tabela 5.12: Seleção de modelo Bayesiana Poisson GARMA(2,2)

EBIC				
Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.0000	0.1444	0.1666	0.6888
500	0.0000	0.0777	0.0055	0.9166
1000	0.0000	0.0220	0.0055	0.9725
DIC				
Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.0000	0.0055	0.9722	0.0222
500	0.0000	0.0333	0.6944	0.2722
1000	0.0000	0.0200	0.5400	0.4400
CPO				
Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.1000	0.0833	0.6166	0.2000
500	0.0111	0.0333	0.6344	0.3212
1000	0.0000	0.0266	0.6266	0.3466

5.1.2 binomial negativa

GARMA(1,1)

Assim como com a distribuição de Poisson, é possível observar pela Tabela 5.13 que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, os intervalos de confiança contêm os valores reais, e as probabilidades de cobertura estão próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana, respectivamente.

Observando a Tabela 5.14 nota-se bons indícios para o modelo correto, através da abordagem clássica.

Os critérios Bayesianos também apresentam maiores porcentagens em favor do modelo correto, como pode-se notar pela Tabela 5.15.

Tabela 5.13: Binomial Negativa GARMA(1,1) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	0.80	0.8472	0.0075
α_1	0.50	0.4746	0.0028
β_1	0.30	0.2881	0.0032

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.6769	1.0175	0.0734	1.0623	0.9478
α_1	0.3700	0.5791	0.0447	1.0578	0.9434
β_1	0.1761	0.4001	0.0455	1.0041	0.9496

Tabela 5.14: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GARMA(1,1) com a abordagem clássica

Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.5690	0.2120	0.2040	0.0150
500	0.7055	0.1660	0.1240	0.0065
1000	0.8070	0.0940	0.0950	0.0050

Tabela 5.15: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GARMA(1,1) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.7346	0.2040	0.0612	0.0000
500	0.7777	0.1666	0.0555	0.0000
1000	0.8142	0.1547	0.0310	0.0000

DIC				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.6111	0.2222	0.1666	0.0000
500	0.7000	0.2300	0.0700	0.0000
1000	0.7959	0.1224	0.0816	0.0000

CPO				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.8775	0.0816	0.0204	0.0204
500	0.8571	0.1428	0.0000	0.0000
1000	0.8888	0.1112	0.0000	0.0000

GARMA(1,2)

Como nos modelos anteriores observa-se pela Tabela 5.16 que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana respectivamente.

Tabela 5.16: Binomial Negativa GARMA(1,2) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	1.00	1.0445	0.0209		
α_1	0.30	0.2785	0.0100		
β_1	0.40	0.3841	0.0096		
β_2	0.25	0.2290	0.0039		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.7635	1.3256	0.1139	0.9940	0.9552
α_1	0.0837	0.4733	0.0782	0.9811	0.9542
β_1	0.1944	0.5739	0.0780	1.0021	0.9411
β_2	0.1066	0.3514	0.1419	1.0685	0.9382

Observando a Tabela 5.17 nota-se bons indícios para o modelo correto, através da abordagem clássica.

Tabela 5.17: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GARMA(1,2) com a abordagem clássica

Tamanho	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.0020	0.9600	0.0020	0.0360
500	0.0000	0.9800	0.0060	0.0140
1000	0.0000	0.9920	0.0000	0.0080

Os critérios Bayesianos selecionaram o melhor modelo nos métodos EBIC e CPO, porém o critério DIC não selecionou o modelo correto, como é possível observar pela Tabela 5.18.

Tabela 5.18: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GARMA(1,2) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.0000	0.8928	0.0000	0.1072
500	0.0000	0.9345	0.0000	0.0655
1000	0.0000	0.9830	0.0000	0.0169
DIC				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.7272	0.2728	0.0000	0.0000
500	0.6440	0.3559	0.0000	0.0000
1000	0.6145	0.3855	0.0000	0.0000
CPO				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.3214	0.3571	0.1428	0.1785
500	0.1830	0.3813	0.1567	0.2790
1000	0.1694	0.4559	0.1694	0.2050

GARMA(2,1)

Como nos modelos anteriores observa-se pela Tabela 5.19 que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana respectivamente.

Observando a Tabela 5.20 nota-se bons indícios para o modelo correto, através da abordagem clássica.

O critério Bayesiano EBIC selecionou o melhor modelo, porém os critérios DIC e CPO não selecionaram o modelo correto, como é possível observar pela Tabela 5.21.

Tabela 5.19: Binomial Negativa GARMA(2,1) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	0.55	0.5506	0.0111
α_1	0.30	0.3325	0.0246
α_2	0.40	0.3787	0.0115
β_1	0.20	0.1848	0.0267

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.3467	0.7545	0.0899	1.0723	0.9363
α_1	0.0367	0.6284	0.1282	1.0534	0.9280
α_2	0.1364	0.5409	0.0967	1.0783	0.9251
β_1	0.0240	0.4936	0.1408	1.1048	0.9176

Tabela 5.20: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GARMA(2,1) com a abordagem clássica

Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.0200	0.2100	0.7700	0.0000
500	0.0193	0.1782	0.8023	0.0000
1000	0.0048	0.1502	0.8450	0.0000

Tabela 5.21: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GARMA(2,1) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.1320	0.3018	0.5662	0.0000
500	0.0000	0.3333	0.6666	0.0000
1000	0.0000	0.2914	0.7086	0.0000
DIC				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.6666	0.0000	0.0000	0.3333
500	0.7547	0.0377	0.0188	0.1886
1000	0.8301	0.0188	0.0377	0.1132
CPO				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.1666	0.0000	0.5000	0.3334
500	0.3207	0.3018	0.2264	0.1509
1000	0.3207	0.1586	0.2564	0.2641

GARMA(2,2)

Como nos modelos anteriores observa-se pela Tabela 5.22 que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana, respectivamente.

Tabela 5.22: Binomial Negativa GARMA(2,2) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	0.65	0.6719	0.0092
α_1	0.30	0.2933	0.0064
α_2	0.40	0.3713	0.0057
β_1	0.25	0.2274	0.0060
β_2	0.35	0.3223	0.0028

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.4840	0.8599	0.0896	1.1711	0.9274
α_1	0.1377	0.4488	0.0623	0.9825	0.9422
α_2	0.2236	0.5189	0.0623	1.0538	0.9442
β_1	0.0773	0.3776	0.0627	1.0253	0.9522
β_2	0.2174	0.4272	0.1255	1.2002	0.9074

Observando a Tabela 5.23 nota-se bons indícios para o modelo correto, através da abordagem clássica.

Tabela 5.23: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GARMA(2,2) com a abordagem clássica

Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.0000	0.1960	0.0608	0.7432
500	0.0000	0.1470	0.0400	0.8130
1000	0.0000	0.1260	0.0150	0.8590

O critério Bayesiano EBIC selecionou o melhor modelo, porém os critérios DIC e CPO não selecionaram o modelo correto, como é possível observar pela Tabela

5.24.

Tabela 5.24: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GARMA(2,2) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.0000	0.3556	0.0333	0.6111
500	0.0000	0.1723	0.0166	0.8111
1000	0.0000	0.1384	0.0000	0.8616
DIC				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.0000	0.0000	0.7611	0.2388
500	0.0000	0.0000	0.6833	0.3166
1000	0.0000	0.0000	0.5724	0.4276
CPO				
Tamanho/Modelo	GARMA(1,1)	GARMA(1,2)	GARMA(2,1)	GARMA(2,2)
200	0.0000	0.0833	0.3000	0.6166
500	0.0000	0.0444	0.3112	0.6444
1000	0.0000	0.0332	0.2947	0.6721

5.2 ARMA Linear Generalizado (GLARMA)

No modelo GLARMA não são necessárias restrições aos parâmetros devido a presença da função de ligação logarítmica. Dessa forma os intervalos de confiança foram contruídos através de uma distribuição normal com média no valor estimado, e variância como o inverso da matriz hessiana.

5.2.1 Poisson

GLARMA(1,1)

Observa-se pela Tabela 5.25 que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana, respectivamente.

Tabela 5.25: Poisson GLARMA(1,1) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α	0.25	0.2489	0.0001
β	-0.40	-0.4025	0.0010

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α	0.2251	0.2727	0.0097	1.0015	0.9456
β	-0.4659	-0.3390	0.0260	1.0076	0.9416

Pode-se concluir pela Tabela 5.26 bons indícios a partir de probabilidades em favor do modelo correto, através da abordagem clássica.

Tabela 5.26: Seleção da ordem do modelo Poisson GLARMA(1,1) com a abordagem clássica

Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.9580	0.0000	0.0000	0.0420
500	0.9780	0.0000	0.0000	0.0220
1000	0.9880	0.0000	0.0000	0.0120

Os critérios Bayesianos também apresentam maiores porcentagens em favor do modelo correto, como pode-se notar pela Tabela 5.27.

Tabela 5.27: Seleção da ordem do modelo Poisson GLARMA(1,1) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.6250	0.0416	0.1666	0.1666
500	0.8000	0.0000	0.2000	0.0000
1000	0.8580	0.0000	0.1420	0.0000
DIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.7800	0.0400	0.1800	0.0000
500	0.8333	0.0416	0.1250	0.0000
1000	0.8717	0.0203	0.1080	0.0000
CPO				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.3750	0.3333	0.2083	0.0833
500	0.4000	0.2000	0.2000	0.2000
1000	0.5500	0.1500	0.2000	0.1000

GLARMA(1,2)

Observa-se pela Tabela 5.28 que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana, respectivamente.

Tabela 5.28: Poisson GLARMA(1,2) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	0.25	0.2482	0.0001		
β	-0.30	-0.3011	0.0012		
β_1	-0.25	-0.2554	0.0014		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α	0.2321	0.2643	0.0068	1.0539	0.9352
β	-0.3706	-0.2316	0.0285	1.0156	0.9450
β_1	-0.3312	-0.1797	0.0320	1.0463	0.9364

Pode-se concluir pela Tabela 5.29 bons indícios para o modelo correto, através

da abordagem clássica.

Tabela 5.29: Seleção da ordem do modelo Poisson GLARMA(1,2) com a abordagem clássica

Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.9520	0.0480	0.0000
500	0.0000	0.9660	0.0340	0.0000
1000	0.0040	0.9680	0.0280	0.0000

Os critérios Bayesianos também apresentam maiores porcentagens em favor do modelo correto, como pode-se notar pela Tabela 5.30.

Tabela 5.30: Seleção da ordem do modelo Poisson GLARMA(1,2) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.7155	0.2845	0.0000
500	0.0000	0.7878	0.2122	0.0000
1000	0.0000	0.9083	0.0917	0.0000
DIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.5000	0.5000	0.0000
500	0.0000	0.5730	0.4270	0.0000
1000	0.0000	0.6133	0.3867	0.0000
CPO				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.4545	0.1515	0.3939
500	0.0000	0.5152	0.1318	0.3530
1000	0.0000	0.5410	0.1390	0.3200

GLARMA(2,1)

Observa-se pela Tabela 5.31 que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as

probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e bayesiana respectivamente.

Tabela 5.31: Poisson GLARMA(2,1) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	0.30	0.2944	0.0015		
α_1	-0.25	-0.2476	0.0016		
β	-0.40	-0.4009	0.0020		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α	0.2185	0.3703	0.0301	0.9851	0.9518
α_1	-0.3261	-0.1692	0.0317	0.9916	0.9512
β	-0.4899	-0.3120	0.0366	1.0075	0.9428

Pode-se concluir pela Tabela 5.32 boas porcentagens em favor do modelo correto, através da abordagem clássica.

Tabela 5.32: Seleção da ordem do modelo Poisson GLARMA(2,1) com a abordagem clássica

Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.0000	0.9780	0.0220
500	0.0000	0.0000	0.9820	0.0180
1000	0.0000	0.0000	0.9870	0.0130

Os critérios Bayesianos também apresentam maiores porcentagens em favor do modelo correto, como pode-se notar pela Tabela 5.33.

Tabela 5.33: Seleção da ordem do modelo Poisson GLARMA(2,1) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.3902	0.5853	0.0243
500	0.0000	0.1666	0.8000	0.0334
1000	0.0000	0.1333	0.8664	0.0000
DIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.3585	0.5926	0.0487
500	0.0000	0.1875	0.7500	0.0625
1000	0.0000	0.1270	0.8130	0.0600
CPO				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.3170	0.4878	0.1951
500	0.0000	0.3750	0.6250	0.0000
1000	0.0000	0.2666	0.7334	0.0000

GLARMA(2,2)

Observa-se pela Tabela 5.34 como nas anteriores que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana, respectivamente.

Pode-se concluir pela Tabela 5.35 bons indícios para o modelo correto, através da abordagem clássica.

Os critérios Bayesianos também apresentam maiores porcentagens em favor do modelo correto, como pode-se notar pela Tabela 5.36.

Tabela 5.34: Poisson GLARMA(2,2) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α	0.50	0.4743	0.0067
α_1	-0.70	-0.6752	0.0092
β	-0.45	-0.4254	0.0094
β_1	0.30	0.2711	0.0141

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α	0.3177	0.6309	0.0712	1.1554	0.9240
α_1	-0.8613	-0.4892	0.0820	1.1059	0.9316
β	-0.6119	-0.2389	0.0825	1.1100	0.9250
β_1	0.0408	0.5013	0.1016	1.0899	0.9234

Tabela 5.35: Seleção da ordem do modelo Poisson GLARMA(2,2) com a abordagem clássica

Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.0370	0.0090	0.9540
500	0.0000	0.0200	0.0160	0.9640
1000	0.0000	0.0120	0.0100	0.9780

Tabela 5.36: Seleção da ordem do modelo Poisson GLARMA(2,2) com a abordagem Bayesiana

EBIC				
Tamanho/Modelo	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.1222	0.2222	0.6555
500	0.0000	0.0648	0.1720	0.7632
1000	0.0000	0.0000	0.1428	0.8572
DIC				
Tamanho/Modelo	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.2812	0.3021	0.4166
500	0.0000	0.2742	0.2713	0.4545
1000	0.0000	0.2612	0.2610	0.4777
CPO				
Tamanho/Modelo	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.2142	0.3571	0.4285
500	0.0000	0.2222	0.3333	0.4445
1000	0.0000	0.1684	0.3124	0.5192

5.2.2 binomial negativa

GLARMA(1,1)

Observa-se pela Tabela 5.37 como nas anteriores que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana, respectivamente.

Tabela 5.37: Binomial Negativa GLARMA(1,1) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α	-0.40	-0.4084	0.0068
β	0.25	0.2574	0.0098

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α	-0.5700	-0.2468	0.0662	1.0055	0.9513
β	0.0643	0.4505	0.0782	1.0017	0.9492

Analisando a Tabela 5.38 nota-se bons indícios para o modelo correto, através da abordagem clássica.

Tabela 5.38: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GLARMA(1,1) com a abordagem clássica

Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.9780	0.0080	0.0060	0.0080
500	0.9940	0.0040	0.0020	0.0000
1000	0.9970	0.0020	0.0010	0.0000

Os critérios Bayesianos também apresentam maiores porcentagens em favor do modelo correto, como pode-se notar pela Tabela 5.39.

Tabela 5.39: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GLARMA(1,1) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.7142	0.1428	0.0913	0.0517
500	0.8450	0.0720	0.0662	0.0168
1000	0.9473	0.0350	0.0175	0.0000
DIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.8271	0.0830	0.0899	0.0000
500	0.8450	0.0720	0.0662	0.0168
1000	0.9425	0.0275	0.0300	0.0000
CPO				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.5358	0.1357	0.1428	0.1857
500	0.6230	0.1120	0.1344	0.1306
1000	0.7414	0.0922	0.1005	0.0656

GLARMA(1,2)

Observa-se pela Tabela 5.40 como nas anteriores que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana, respectivamente.

Tabela 5.40: Binomial Negativa GLARMA(1,2) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	-0.40	-0.3984	0.0036		
β	0.20	0.1996	0.0060		
β_1	-0.30	-0.2996	0.0032		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α	-0.5157	-0.2810	0.0474	0.9920	0.9438
β	0.0475	0.3517	0.0620	1.0056	0.9454
β_1	-0.4116	-0.1876	0.0458	1.0033	0.9442

Analisando a Tabela 5.41 nota-se bons indícios para o modelo correto, através da abordagem clássica.

Tabela 5.41: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GLARMA(1,2) com a abordagem clássica

Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.8380	0.1520	0.0100
500	0.0000	0.8550	0.1450	0.0000
1000	0.0000	0.8760	0.1240	0.0000

Os critérios Bayesianos também apresentam maiores porcentagens em favor do modelo correto, como pode-se notar pela Tabela 5.42.

Tabela 5.42: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GLARMA(1,2) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.3160	0.6840	0.0000	0.0000
500	0.2200	0.7800	0.0000	0.0000
1000	0.1670	0.8330	0.0000	0.0000
DIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.4033	0.5320	0.0650	0.0000
500	0.2762	0.5877	0.1361	0.0000
1000	0.2521	0.6030	0.1449	0.0000
CPO				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.3406	0.3096	0.0464	0.3032
500	0.3212	0.3330	0.0573	0.2885
1000	0.3110	0.3810	0.0580	0.2500

GLARMA(2,1)

Observa-se pela Tabela 5.43, como nas anteriores que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana, respectivamente.

Tabela 5.43: Binomial Negativa GLARMA(2,1) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α	0.25	0.2399	0.0024
α_1	-0.30	-0.2933	0.0021
β	-0.25	-0.2450	0.0038

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α	0.1429	0.3369	0.0406	1.0382	0.9466
α_1	-0.3832	-0.2034	0.0370	1.0141	0.9433
β	-0.3654	-0.1247	0.0487	0.9983	0.9494

Analisando a Tabela 5.44 nota-se bons indícios para o modelo correto, através da abordagem clássica.

Tabela 5.44: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GLARMA(2,1) com a abordagem clássica

Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.0380	0.9520	0.0100
500	0.0000	0.0160	0.9680	0.0160
1000	0.0000	0.0100	0.9780	0.0120

Os critérios Bayesianos também apresentam maiores porcentagens em favor do modelo correto, como pode-se notar pela Tabela 5.45.

Tabela 5.45: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GLARMA(2,1) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.1320	0.3018	0.5660	0.0000
500	0.1200	0.2133	0.6664	0.0000
1000	0.0970	0.1540	0.7490	0.0000
DIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0377	0.7547	0.1886	0.0188
500	0.0000	0.5720	0.4280	0.0000
1000	0.0000	0.4670	0.5330	0.0000
CPO				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.1509	0.2264	0.3207	0.3018
500	0.1666	0.1010	0.5000	0.2315
1000	0.1442	0.1327	0.5341	0.1890

GLARMA(2,2)

Observa-se pela Tabela 5.46, como nas anteriores que as médias estimadas estão próximas dos valores reais usados na simulação, intervalos de confiança contendo os valores reais, e as probabilidades de cobertura próximas de 95%. Seguem os resultados para seleção das ordens do modelo, pelas abordagens clássica e Bayesiana, respectivamente.

Analisando a Tabela 5.47 nota-se bons indícios para o modelo correto, através da abordagem clássica.

Os critérios Bayesianos também apresentam maiores porcentagens em favor do modelo correto, como pode-se notar pela Tabela 5.48.

Tabela 5.46: Binomial Negativa GLARMA(2,2) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α	0.50	0.4759	0.0069
α_1	-0.70	-0.6782	0.0095
β	-0.45	-0.4277	0.0097
β_1	0.30	0.2802	0.0145

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α	0.3165	0.6353	0.0703	1.0959	0.9324
α_1	-0.8675	-0.4888	0.0815	1.0615	0.9414
β	-0.6168	-0.2385	0.0834	1.0848	0.9304
β_1	0.0468	0.5136	0.1004	1.0492	0.9350

Tabela 5.47: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GLARMA(2,2) com a abordagem clássica

Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.0000	0.0600	0.9400
500	0.0000	0.0000	0.0260	0.9740
1000	0.0000	0.0000	0.0100	0.9900

Tabela 5.48: Seleção da ordem do modelo binomial negativo GLARMA(2,2) com a abordagem bayesianos

EBIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.0700	0.2157	0.7143
500	0.0000	0.0531	0.1033	0.8436
1000	0.0000	0.0192	0.0769	0.9038
DIC				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.0322	0.5812	0.3866
500	0.0000	0.0000	0.5925	0.4074
1000	0.0000	0.0000	0.4480	0.5520
CPO				
Tamanho	GLARMA(1,1)	GLARMA(1,2)	GLARMA(2,1)	GLARMA(2,2)
200	0.0000	0.0384	0.4423	0.5192
500	0.0000	0.0405	0.3355	0.6240
1000	0.0000	0.0113	0.2110	0.7777

5.3 Integer GARCH (INGARCH)

Como foi observado no Capítulo 3, existem restrições para os parâmetros no modelo INGARCH que são $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i + \beta_j < 1$ com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$. Logo as estimativas obtidas devem respeitar tais restrições e, portanto, para garantir intervalos de confiança plausíveis no modelo INGARCH foi feito um Bootstrap não paramétrico como foi comentado no Capítulo 4, a probabilidade de cobertura foi fixada em 95%.

5.3.1 Modelo de Poisson

INGARCH(1,1)

Tabela 5.49: Poisson INGARCH(1,1) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.60	0.6156	0.0168		
α_1	0.40	0.4139	0.0021		
β_1	0.30	0.2736	0.0074		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.3931	0.8984	0.1017	1.0010	0.9500
α_1	0.3224	0.5040	0.0388	1.0482	0.9500
β_1	0.0973	0.4417	0.0708	1.0362	0.9500

Observa-se analisando a Tabela 5.49 que os valores médios obtidos estão próximos dos valores reais, com uma variância pequena, e pode-se notar também que os limitantes inferiores e superiores respeitam as restrições de cada um dos parâmetros. Segue agora os resultados obtidos na seleção de modelos, considerando as abordagens clássica e Bayesina respectivamente.

Na Tabela 5.50 observa-se boas porcentagens na escolha do modelo correto que no caso, é o INGARCH(1,1), utilizando a abordagem clássica.

Tabela 5.50: Seleção da ordem do modelo Poisson INGARCH(1,1) com a abordagem clássica

Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.7240	0.1200	0.1460	0.0100
500	0.8280	0.0920	0.0760	0.0040
1000	0.8560	0.0760	0.0620	0.0060

Tabela 5.51: Seleção da ordem do modelo Poisson INGARCH(1,1) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.8800	0.1200	0.0000	0.0000
500	0.9334	0.0666	0.0000	0.0000
1000	0.9890	0.0110	0.0000	0.0000
DIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.4666	0.2000	0.0666	0.2666
500	0.5600	0.0800	0.1600	0.2000
1000	0.6630	0.0670	0.1200	0.1500
CPO				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.4000	0.2800	0.1200	0.2000
500	0.6666	0.1802	0.0866	0.0666
1000	0.7280	0.1340	0.0810	0.0570

Na Tabela 5.51 nota-se também porcentagens indicando a escolha do modelo INGARCH(1,1) que é o modelo correto, quando os critérios de seleção Bayesianos são utilizados.

INGARCH(1,2)

Observa-se analisando a Tabela 5.52, assim como no caso anterior, os valores médios obtidos estão próximos dos valores reais, com uma variância pequena, e pode-se notar também que os limitantes inferiores e superiores respeitam as restrições de cada um dos parâmetros, segue agora os resultados obtidos na seleção

da ordem dos modelos com as abordagens clássica e Bayesiana respectivamente.

Tabela 5.52: Poisson INGARCH(1,2) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	0.50	0.5409	0.0580
α_1	0.30	0.2415	0.0020
β_1	0.25	0.2437	0.0530
β_2	0.30	0.2735	0.0432

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.2221	1.0144	0.1569	0.8496	0.9500
α_1	0.1272	0.3144	0.0890	1.1573	0.9500
β_1	0.0156	0.5788	0.1259	0.6634	0.9500
β_2	0.0215	0.5678	0.1377	0.7158	0.9500

Pela Tabela 5.53 observa-se boas porcentagens na escolha da ordem do modelo correto utilizando a abordagem clássica.

Tabela 5.53: Seleção da ordem do modelo Poisson INGARCH(1,2) com a abordagem clássica

Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0000	0.7660	0.2140	0.0200
500	0.0000	0.8180	0.1800	0.0020
1000	0.0000	0.8480	0.1520	0.0000

Na Tabela 5.54 nota-se também porcentagens indicando a escolha do modelo INGARCH(1,2) que é o modelo correto, quando os critérios de seleção Bayesianos são utilizados.

Tabela 5.54: Seleção da ordem do modelo Poisson INGARCH(1,2) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.4270	0.5760	0.0000	0.0000
500	0.2120	0.7880	0.0000	0.0000
1000	0.1500	0.8500	0.0000	0.0000
DIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.3000	0.4000	0.3000	0.0000
500	0.3500	0.5000	0.1000	0.0500
1000	0.2420	0.6510	0.0880	0.0190
CPO				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.1000	0.5000	0.1000	0.3000
500	0.1120	0.6250	0.0400	0.2230
1000	0.0800	0.6700	0.0300	0.1200

INGARCH(2,1)

Analisando a Tabela 5.55, pode-se observar assim como nos casos anteriores, os valores médios obtidos estão próximos dos valores reais, conhecidos, com uma variância pequena, e pode-se notar também que os limitantes inferiores e superiores respeitam as restrições de cada um dos parâmetros, segue agora os resultados obtidos na seleção das ordens dos modelos com as abordagens clássica e Bayesiana, respectivamente.

Pela Tabela 5.56 observa-se boas porcentagens na escolha da ordem do modelo correto utilizando a abordagem clássica.

Na Tabela 5.57 nota-se também porcentagens indicando a escolha do modelo correto para os critérios de seleção Bayesianos.

Tabela 5.55: Poisson INGARCH(2,1) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	0.50	0.4870	0.0211
α_1	0.25	0.2639	0.0022
α_2	0.20	0.1830	0.0064
β_1	0.25	0.2596	0.0226

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.2613	0.7470	0.1011	0.8607	0.9500
α_1	0.1740	0.3573	0.0386	1.0231	0.9500
α_2	0.0370	0.3160	0.0587	0.9133	0.9500
β_1	0.0303	0.5125	0.1031	0.8397	0.9500

Tabela 5.56: Seleção da ordem do modelo Poisson INGARCH(2,1) com a abordagem clássica

Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0200	0.1600	0.8060	0.0140
500	0.0140	0.0980	0.8700	0.0180
1000	0.0160	0.0860	0.8960	0.0020

Tabela 5.57: Seleção da ordem do modelo Poisson INGARCH(2,1) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.4634	0.0000	0.5365	0.0000
500	0.1270	0.0000	0.8730	0.0000
1000	0.0600	0.0000	0.9400	0.0000
DIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0100	0.6800	0.3000	0.0100
500	0.0487	0.4390	0.4878	0.0243
1000	0.0330	0.3110	0.5360	0.1200
CPO				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.1463	0.0731	0.46341	0.3170
500	0.1490	0.0550	0.5440	0.2520
1000	0.1133	0.0986	0.5811	0.2070

INGARCH(2,2)

Analisando a Tabela 5.58 pode-se observar, assim como nos casos anteriores, os valores médios obtidos estão próximos dos valores reais, conhecidos, com uma

variância pequena, e pode-se notar também que os limitantes inferiores e superiores respeitam as restrições de cada um dos parâmetros, segue agora os resultados obtidos na seleção das ordens dos modelos com abordagens clássica e Bayesiana, respectivamente.

Tabela 5.58: Poisson INGARCH(2,2) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	0.50	0.5289	0.0320
α_1	0.25	0.2436	0.0021
α_2	0.20	0.2205	0.0092
β_1	0.25	0.2287	0.1075
β_2	0.15	0.1620	0.0476

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.2855	0.8829	0.1195	0.8637	0.9500
α_1	0.1577	0.3312	0.0350	0.9586	0.9500
α_2	0.0926	0.3312	0.0517	0.6640	0.9500
β_1	0.0092	0.4920	0.1203	0.4327	0.9500
β_2	0.0075	0.3648	0.1196	0.4531	0.9500

Pela Tabela 5.59 observa-se boas porcentagens na escolha do modelo correto utilizando a abordagem clássica.

Tabela 5.59: Seleção da ordem do modelo Poisson INGARCH(2,2) com a abordagem clássica

Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0181	0.2181	0.0000	0.7636
500	0.0098	0.1568	0.0000	0.8333
1000	0.0194	0.1256	0.0000	0.8549

Pela Tabela 5.60 nota-se também porcentagens indicando a escolha do modelo correto com os critérios de seleção Bayesianos.

Tabela 5.60: Seleção da ordem do modelo Poisson INGARCH(2,2) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0000	0.3100	0.0200	0.6700
500	0.0000	0.2318	0.0144	0.7536
1000	0.0000	0.1111	0.0138	0.8751
DIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0144	0.4492	0.0579	0.4782
500	0.0138	0.3472	0.0416	0.5972
1000	0.0206	0.3220	0.0340	0.6234
CPO				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0434	0.4057	0.0724	0.4782
500	0.0000	0.3377	0.0883	0.5740
1000	0.0000	0.1666	0.1666	0.6668

5.3.2 Binomial negativa

INGARCH(1,1)

Assim como na distribuição Poisson, nota-se pela Tabela 5.61 que os valores médios obtidos estão próximos dos valores reais, com uma variância pequena, e pode-se notar também que os limitantes inferiores e superiores respeitam as restrições de cada um dos parâmetros. Segue agora os resultados obtidos na seleção da ordem dos modelos com a abordagem clássica e Bayesiana respectivamente.

Note pela Tabela 5.62 percentagens favoráveis em favor do modelo correto que é o INGARCH(1,1), para o método de seleção clássico.

Pela Tabela 5.63 nota-se também percentagens maiores indicando a escolha do modelo correto para os critérios de seleção Bayesianos.

Tabela 5.61: Binomial Negativa INGARCH(1,1) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	0.60	0.6351	0.0169
α_1	0.45	0.4251	0.0022
β_1	0.25	0.2425	0.0077

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.4130	0.9058	0.1033	1.0184	0.9500
α_1	0.3302	0.5186	0.0430	1.1367	0.9500
β_1	0.0744	0.4114	0.0833	1.1806	0.9500

Tabela 5.62: Seleção da ordem do modelo binomial negativo INGARCH(1,1) com a abordagem clássica

Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.7720	0.0000	0.2100	0.0180
500	0.8300	0.0000	0.1645	0.0055
1000	0.8740	0.0000	0.1180	0.0110

Tabela 5.63: Seleção da ordem do modelo binomial negativo INGARCH(1,1) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.7844	0.0930	0.1226	0.0000
500	0.8461	0.0769	0.0769	0.0000
1000	0.8910	0.0550	0.0540	0.0000
DIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.6153	0.0769	0.2307	0.0769
500	0.7142	0.0000	0.1428	0.1428
1000	0.7440	0.0000	0.1420	0.1140
CPO				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.4285	0.1428	0.1428	0.2857
500	0.5714	0.1428	0.2857	0.0000
1000	0.6245	0.1422	0.2333	0.0000

INGARCH(1,2)

Observa-se na Tabela 5.64 que os valores médios obtidos estão próximos dos valores reais, com uma variância pequena, e pode-se notar também que os limitantes inferiores e superiores respeitam as restrições de cada um dos parâmetros, segue agora os resultados obtidos na seleção da ordem do modelo com as abordagens clássica e Bayesiana respectivamente.

Tabela 5.64: Binomial Negativa INGARCH(1,2) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	0.50	0.5882	0.0394
α_1	0.30	0.3082	0.0020
β_1	0.25	0.2490	0.0288
β_2	0.30	0.2781	0.0215

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.2918	1.0550	0.1575	1.0910	0.9500
α_1	0.2256	0.3904	0.0344	0.9555	0.9500
β_1	0.0248	0.5363	0.1125	0.8089	0.9500
β_2	0.0364	0.5012	0.1226	0.8413	0.9500

Note pela Tabela 5.65 porcentagens favoráveis em favor do modelo correto, para o método de seleção clássico.

Tabela 5.65: Seleção da ordem do modelo binomial negativo INGARCH(1,2) com a abordagem clássica

Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0000	0.8160	0.1840	0.0000
500	0.0000	0.8420	0.1580	0.0000
1000	0.0000	0.8830	0.1170	0.0000

Pela Tabela 5.66 nota-se também porcentagens maiores indicando a escolha do modelo correto para os critérios de seleção Bayesianos.

Tabela 5.66: Seleção da ordem do modelo binomial negativo INGARCH(1,2) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.3333	0.6666	0.0000	0.0000
500	0.2105	0.7368	0.0526	0.0000
1000	0.1796	0.7941	0.0263	0.0000
DIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.3606	0.4754	0.1119	0.0519
500	0.3333	0.5000	0.1667	0.0000
1000	0.3210	0.5263	0.1527	0.0000
CPO				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.1666	0.3334	0.3333	0.1666
500	0.0000	0.5264	0.4736	0.0000
1000	0.0000	0.5837	0.4163	0.0000

INGARCH(2,1)

Pela Tabela 5.67 observa-se que os valores médios obtidos estão próximos dos valores reais, com uma variância pequena, e pode-se notar também que os limites inferiores e superiores respeitam as restrições de cada um dos parâmetros, segue agora os resultados obtidos na seleção das ordens dos modelos obtidas com as abordagens clássica e Bayesiana, respectivamente.

Observe que pela Tabela 5.68 porcentagens favoráveis em favor do modelo correto, para o método de seleção clássico.

Pelos resultados obtidos na Tabela 5.69 nota-se também porcentagens maiores indicando a escolha do modelo correto para os critérios de seleção Bayesianos.

Tabela 5.67: Binomial Negativa INGARCH(2,1) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	0.50	0.5268	0.0200
α_1	0.15	0.1639	0.0021
α_2	0.25	0.2770	0.0039
β_1	0.30	0.3158	0.0118

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.2986	0.8450	0.1082	0.9952	0.9500
α_1	0.0753	0.2559	0.0481	1.2724	0.9500
α_2	0.1496	0.3882	0.0542	1.0608	0.9500
β_1	0.1042	0.5157	0.0841	0.9674	0.9500

Tabela 5.68: Seleção da ordem do modelo binomial negativo INGARCH(2,1) com a abordagem clássica

Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0000	0.0200	0.9320	0.0480
500	0.0000	0.0120	0.9550	0.0330
1000	0.0000	0.0070	0.9640	0.0290

Tabela 5.69: Seleção da ordem do modelo binomial negativo INGARCH(2,1) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0470	0.0000	0.9530	0.0000
500	0.0204	0.0000	0.9795	0.0000
1000	0.0110	0.0000	0.9890	0.0000
DIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.3333	0.3333	0.3334	0.0000
500	0.0102	0.6326	0.3571	0.0000
1000	0.0000	0.5800	0.4200	0.0000
CPO				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0000	0.0000	0.3333	0.6667
500	0.0000	0.0000	0.5612	0.4387
1000	0.0000	0.0000	0.6140	0.3860

INGARCH(2,2)

Analisando Tabela 5.70 observa-se que os valores médios obtidos estão próximos dos valores reais, com uma variância pequena, e pode-se notar também que os limitantes inferiores e superiores respeitam as restrições de cada um dos parâmetros, segue agora os resultados obtidos na seleção das ordens dos modelos com as abordagens clássica e Bayesiana, respectivamente.

Tabela 5.70: Binomial Negativa INGARCH(2,2) Série tamanho 500

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	0.50	0.5606	0.0290
α_1	0.15	0.1648	0.0021
α_2	0.30	0.2775	0.0046
β_1	0.25	0.2159	0.0589
β_2	0.15	0.1417	0.0319

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\frac{EQM}{Var}}$	Cobertura
α_0	0.3078	0.9249	0.1270	0.9873	0.9500
α_1	0.0769	0.2496	0.0459	1.2241	0.9500
α_2	0.1670	0.3772	0.0489	0.8883	0.9500
β_1	0.0145	0.4644	0.1021	0.5130	0.9500
β_2	0.0067	0.3498	0.1121	0.5252	0.9500

É possível observar pela Tabela 5.71 que as porcentagens estão favoráveis em favor do modelo correto, para o método de seleção clássico.

Tabela 5.71: Seleção da ordem do modelo binomial negativo INGARCH(2,2) com a abordagem clássica

Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0961	0.0000	0.3076	0.5961
500	0.0361	0.0000	0.3253	0.6385
1000	0.0119	0.0000	0.3095	0.6785

Pelos resultados obtidos na Tabela 5.72 nota-se também porcentagens maiores indicando a escolha do modelo correto para os critérios de seleção Bayesianos. Os

Tabela 5.72: Seleção da ordem do modelo binomial negativo INGARCH(2,2) com a abordagem bayesiana

EBIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0270	0.0270	0.3513	0.5945
500	0.0000	0.0000	0.3750	0.6250
1000	0.0000	0.0000	0.3219	0.6781
DIC				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0000	0.2500	0.2500	0.5000
500	0.0270	0.0810	0.3243	0.5675
1000	0.0940	0.0620	0.2810	0.5630
CPO				
Tamanho	INGARCH(1,1)	INGARCH(1,2)	INGARCH(2,1)	INGARCH(2,2)
200	0.0000	0.1250	0.2500	0.6250
500	0.0000	0.0270	0.3513	0.6216
1000	0.0000	0.0000	0.3667	0.6333

resultados de simulação para o modelo INGARCH com as distribuições Poisson e binomial negativa foram satisfatórios, como era esperado.

Neste capítulo foram apresentados os resultados do estudo de simulação realizado utilizando os modelos GARMA, GLARMA e INGARCH nos quais observou-se bons ajustes. Alguns dos critérios de seleção Bayesianos não tiveram desempenho muito satisfatório, porém a grande maioria do estudo correspondeu com as expectativas verificou-se também que a medida que o tamanho da série é aumentado os critérios de seleção fornecem melhores resultados. No próximo Capítulo serão apresentados os resultados no estudo do conjunto de dados reais.

Capítulo 6

Aplicação com dados reais

Neste capítulo segue uma aplicação com um conjunto de dados reais para ilustrar o uso dos modelos abordados durante este texto. O propósito geral deste capítulo é mostrar a viabilidade dos modelos GARMA, GLARMA e INGARCH na modelagem de séries temporais reais usando as abordagens clássica e Bayesiana.

6.1 Número de transações financeiras realizadas em 30 minutos

As Bolsas de Valores, que existem em praticamente todos os países do Mundo Capitalista, são instrumentos que podem contribuir para o crescimento das empresas e alavancar a Economia.

O conjunto de dados modelado neste Capítulo refere-se ao número de transações financeiras em 30 minutos. Coletada no mês de Novembro de 2011, e contabilizado durante o funcionamento da bolsa. Para a modelagem cada observação foi dividida por 100, pois os valores originais são de ordem elevada o que compromete a estimação. Em todo caso esse procedimento pode ser realizado sem prejudicar os

6.1. NÚMERO DE TRANSAÇÕES FINANCEIRAS REALIZADAS EM 30 MINUTOS 97

resultados. Para maiores informações, visitar o site: www.bmfbovespa.com.br.

Figura 6.1: Gráfico da série do número de transações em 30 minutos em novembro de 2011

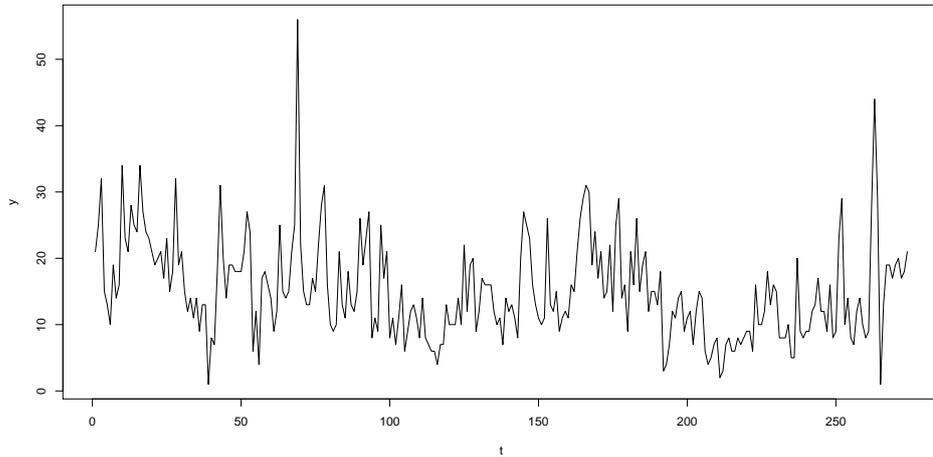
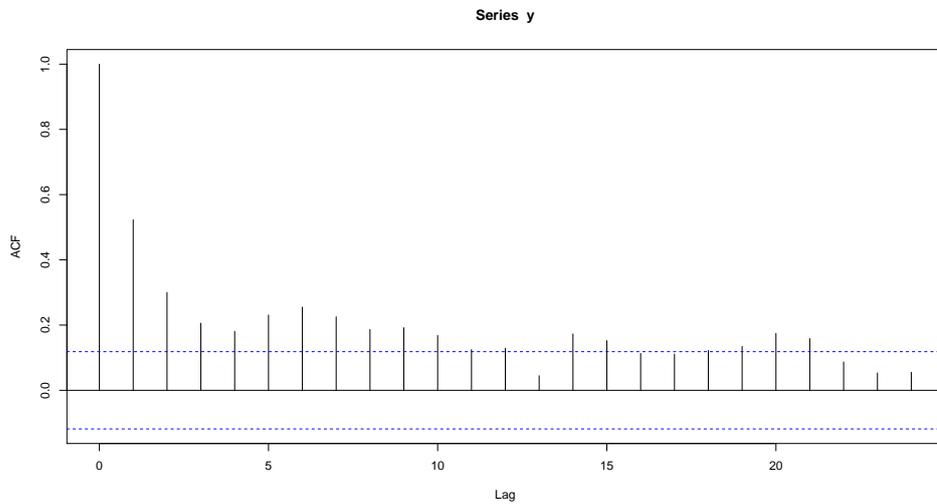
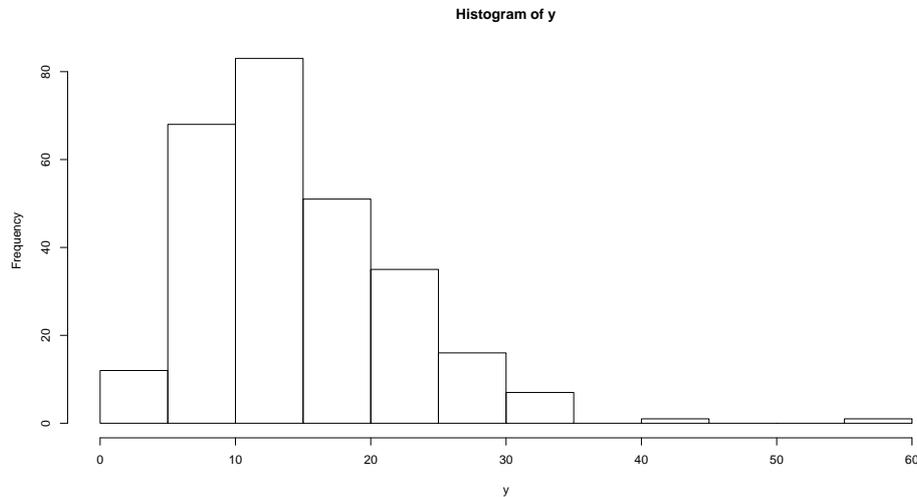


Figura 6.2: Função de autocorrelação da série de número de transações em 30 minutos em novembro de 2011



Como pode-se observar pelas Figuras 6.1 , 6.2 e 6.3 a série do números de transações financeiras em 30 minutos no mês de novembro de 2011 não parece se adequar a distribuição Gaussiana e as observações apresentam autocorrelação. Logo

Figura 6.3: Histograma da série de número de transações em 30 minutos em novembro de 2011



serão ajustados os modelos GARMA, GLARMA e INGARCH com as distribuições de Poisson e binomial negativa utilizando as abordagens clássica e Bayesiana, e a escolha do melhor modelo para descrever os dados será feita através dos critérios de seleção abordados na dissertação.

6.1.1 Modelo GARMA

Para o modelo GARMA serão utilizadas as abordagens clássica e Bayesiana.

Abordagem clássica

Pela Tabela 6.1 o modelo que possui o menor valor do critério de seleção clássico BIC é o modelo GARMA(2,1) com a distribuição binomial negativa. Na Tabela 6.2 tem-se as estimativas de máxima verossimilhança (EMV), desvio padrão (DP) e o intervalo de confiança de 95% para os parâmetros do modelo.

Com as estimativas obtidas, é possível calcular a previsão para valores futuros. Para isto, foram retiradas as 9 últimas observações da série original e foram previs-

6.1. NÚMERO DE TRANSAÇÕES FINANCEIRAS REALIZADAS EM 30 MINUTOS99

Tabela 6.1: Seleção de modelo clássica GARMA

Modelo	BIC
Poisson(1,1)	1902.446
Poisson(2,1)	1890.668
Poisson(1,2)	1898.497
Poisson(2,2)	1892.451
Binomial negativa(1,1)	1569.843
Binomial negativa(2,1)	1562.907
Binomial negativa(1,2)	1564.126
Binomial negativa(2,2)	1665.681

Tabela 6.2: Estimativas clássicas para o modelo GARMA(2,1) binomial negativa

Parâmetro	EMV	DP	IC _{95%}
α_0	1.5271	0.1915	[1.1514, 1.9028]
α_1	0.2894	0.0989	[0.0953, 0.4835]
α_2	0.1604	0.0565	[0.0494, 0.2714]
β_1	0.1699	0.0091	[0.0066, 0.3464]

tos esses valores, os quais são mostrados na tabela 6.3 juntamente com os valores reais.

Uma vez obtidas as previsões, as métricas \sqrt{EQM} e do MAPE são calculadas, com valores de 3.2050 e 18.96% respectivamente, que indicam que as previsões foram razoáveis para os valores selecionados.

Tabela 6.3: Previsões para o modelo GARMA(2,1) binomial negativa abordagem clássica

Tempo	Observado	Previsto
30 minutos	13	5
60 minutos	19	12
90 minutos	19	18
120 minutos	17	18
150 minutos	19	17
180 minutos	20	17
210 minutos	17	18
240 minutos	18	17
270 minutos	21	17

Abordagem Bayesiana

Segue agora os resultados dos critérios Bayesianos para a seleção de modelos para a série de números de transações financeiras em 30 minutos.

Tabela 6.4: Seleção de modelo Bayesiana GARMA

Modelo	DIC	EBIC	CPO
Poisson(1,1)	2.2060	1906.502	-942.318
Poisson(2,1)	2.5095	1895.596	-939.363
Poisson(1,2)	2.4810	1903.451	-939.605
Poisson(2,2)	2.5229	1919.233	-954.608
Binomial negativa(1,1)	2.5215	1573.929	-881.321
Binomial negativa(2,1)	2.2790	1567.861	-878.424
Binomial negativa(1,2)	2.3046	1573.221	-880.062
Binomial negativa(2,2)	2.9762	1571.967	-882.244

Como pode-se observar pela tabela 6.4, o modelo que os critérios Bayesianos apontam como melhor é o mesmo que o critério clássico apontou. A Tabela 6.5 mostra as estimativas Bayesianas para o modelo GARMA(2,1) binomial negativa, com a média a posteriori, o desvio padrão, e o intervalo de credibilidade.

6.1. NÚMERO DE TRANSAÇÕES FINANCEIRAS REALIZADAS EM 30 MINUTOS 101

Tabela 6.5: Estimativas Bayesianas para o modelo GARMA(2,1) binomial negativa

Parâmetro	Média	DP	IC _{95%}
α_0	1.5699	0.1388	[1.3345, 1.8546]
α_1	0.2773	0.0631	[0.1169, 0.3684]
α_2	0.1569	0.0439	[0.0781, 0.2642]
β_1	0.1791	0.0564	[0.0863, 0.3050]

Com as estimativas obtidas, assim como na abordagem clássica é possível calcular a previsão para valores futuros. Para isto, foram retiradas as 9 últimas observações da série original e foram previstos esses valores, os quais são mostrados na tabela 6.6 juntamente com os valores reais.

Tabela 6.6: Previsões para o modelo GARMA(2,1) binomial negativa abordagem Bayesiana

Tempo	Observado	Previsto
30 minutos	13	5
60 minutos	19	12
90 minutos	19	18
120 minutos	17	17
150 minutos	19	17
180 minutos	20	17
210 minutos	17	18
240 minutos	18	17
270 minutos	21	17

Uma vez obtidas as previsões, as métricas \sqrt{EQM} e do MAPE são calculadas, com valores de 3.1804 e 18.81% respectivamente, que indicam que as previsões foram razoáveis para os valores selecionados.

6.1.2 Modelo GLARMA

Para o modelo GLARMA o algoritmo de otimização não convergiu, logo não foi possível obter as estimativas clássicas para o modelo. Seguem apenas os resultados obtidos pela abordagem Bayesiana.

Abordagem Bayesiana

Segue agora os resultados dos critérios Bayesianos para a seleção de modelos para a série de números de transações financeiras em 30 minutos.

Tabela 6.7: Seleção de modelo Bayesiana GLARMA

Modelo	DIC	EBIC	CPO
Poisson(1,1)	2.5744	7047.195	-962.946
Poisson(2,1)	2.3064	6849.381	-979.044
Poisson(1,2)	2.2819	6680.301	-950.842
Poisson(2,2)	2.8049	6918.028	-974.628
Binomial negativa(1,1)	1.2276	5794.960	-898.745
Binomial negativa(2,1)	1.0227	5659.153	-905.8192
Binomial negativa(1,2)	0.9652	5426.153	-880.325
Binomial negativa(2,2)	1.0325	5749.038	-909.468

Como pode-se observar pela Tabela 6.7 o modelo que os critérios Bayesianos é o modelo GLARMA(1,2) binomial negativa. A Tabela 6.8 mostra as estimativas Bayesianas para o modelo, com a média a posteriori, o desvio padrão e o intervalo de credibilidade.

Note que o modelo não possui α_0 . Na estimação este parâmetro não foi significativo, então foi utilizado o modelo que não considera o parâmetro α_0 .

Com as estimativas obtidas, é possível calcular a previsão para valores futuros. foram retiradas as 9 últimas observações da série original e foram previstos esses valores, os quais são mostrados na tabela 6.9 juntamente com os valores reais.

6.1. NÚMERO DE TRANSAÇÕES FINANCEIRAS REALIZADAS EM 30 MINUTOS¹⁰³

Tabela 6.8: Estimativas Bayesianas para o modelo GLARMA(1,2) binomial negativa

Parâmetro	Média	DP	IC _{95%}
α_1	0.0028	0.0001	[0.0025, 0.0032]
β_1	0.2335	0.0034	[0.2293, 0.2369]
β_2	0.1344	0.0023	[0.1306, 0.1379]

Tabela 6.9: Previsões para o modelo GLARMA(1,2) binomial negativa abordagem Bayesiana

Tempo	Observado	Previsto
30 minutos	13	2
60 minutos	19	7
90 minutos	19	6
120 minutos	17	4
150 minutos	19	8
180 minutos	20	6
210 minutos	17	5
240 minutos	18	6
270 minutos	21	6

Uma vez obtidas as previsões, as métricas \sqrt{EQM} e do MAPE são calculadas, com valores de 12.3626 e 69.02% respectivamente, que indicam que as previsões não foram boas para os valores selecionados.

6.1.3 Modelo INGARCH

Para o modelo INGARCH serão utilizadas as abordagens clássica e Bayesiana.

Abordagem clássica

Segue os resultados obtidos pelo critério de seleção clássico BIC, o menor valor desse critério dá início do melhor modelo.

Tabela 6.10: Seleção de modelo clássica INGARCH

Modelo	BIC
Poisson(1,1)	1896.616
Poisson(2,1)	1890.541
Poisson(1,2)	1887.4934
Poisson(2,2)	1890.191
Binomial negativa(1,1)	1671.264
Binomial negativa(2,1)	1665.190
Binomial negativa(1,2)	1661.320
Binomial negativa(2,2)	1664.215

Pela Tabela 6.10 o modelo que possui o menor valor do critério de seleção clássico BIC é o modelo INGARCH(1,2) com a distribuição binomial negativa. Na Tabela 6.11 tem-se as estimativas de máxima verossimilhança (EMV), o desvio padrão (DP) e o intervalo de confiança de 95% para os parâmetros do modelo.

Tabela 6.11: Estimativas clássicas para o modelo INGARCH(1,2) binomial negativa

Parâmetro	EMV	DP	IC _{95%}
α_0	2.8445	0.8634	[1.8054, 3.6286]
α_1	0.2432	0.0412	[0.1663, 0.3164]
β_1	0.4115	0.2202	[0.1049, 0.6234]
β_2	0.1928	0.2158	[0.0003, 0.4288]

Com as estimativas obtidas, pode-se calcular a previsão para valores futuros. Para isto foram retiradas as 9 últimas observações da série original e foram previstos esses valores, os quais são mostrados na tabela 6.12 juntamente com os valores reais.

Uma vez obtidas as previsões, as métricas \sqrt{EQM} e do MAPE são calculadas, com valores de 1.6893 e 9.98% respectivamente, que indicam boas previsões para os valores selecionados.

6.1. NÚMERO DE TRANSAÇÕES FINANCEIRAS REALIZADAS EM 30 MINUTOS¹⁰⁵

Tabela 6.12: Previsões para o modelo INGARCH(1,2) binomial negativa abordagem clássica

Tempo	Observado	Previsto
30 minutos	13	17
60 minutos	19	17
90 minutos	19	18
120 minutos	17	18
150 minutos	19	18
180 minutos	20	18
210 minutos	17	19
240 minutos	18	18
270 minutos	21	18

Abordagem Bayesiana

Tabela 6.13: Seleção de modelo Bayesiana INGARCH

Modelo	DIC	EBIC	CPO
Poisson(1,1)	1.2810	1955.927	-963.389
Poisson(2,1)	1.0910	1981.655	-981.637
Poisson(1,2)	0.9934	1903.416	-947.476
Poisson(2,2)	1.7057	1943.762	-966.358
Binomial negativa(1,1)	1.4375	1722.240	-926.094
Binomial negativa(2,1)	1.0086	1731.055	-927.469
Binomial negativa(1,2)	0.9375	1691.492	-893.899
Binomial negativa(2,2)	1.1343	1746.262	-950.531

Como pode-se observar pela Tabela 6.13, o modelo que os critérios Bayesianos apontam como melhor é o mesmo que o critério clássico apontou. A Tabela 6.15 mostra as estimativas Bayesianas para o modelo INGARCH(1,2) binomial negativa, com a média a posteriori, o desvio padrão, e o intervalo de credibilidade.

Com as estimativas obtidas, assim como na abordagem clássica, pode-se calcular a previsão para valores futuros. Para isto foram retiradas as 9 últimas obser-

Tabela 6.14: Estimativas Bayesianas para o modelo INGARCH(1,2) binomial negativa

Parâmetro	Média	DP	IC _{95%}
α_0	2.4009	0.4484	[1.5544, 3.3523]
α_1	0.2894	0.0122	[0.2642, 0.3104]
β_1	0.3875	0.0679	[0.2549, 0.5399]
β_2	0.1593	0.0786	[0.0067, 0.2791]

vações da série original e foram previstos esses valores, os quais são mostrados na Tabela 6.15 juntamente com os valores reais.

Tabela 6.15: Previsões para o modelo INGARCH(1,2) binomial negativa abordagem Bayesiana

Tempo	Observado	Previsto
30 minutos	13	15
60 minutos	19	16
90 minutos	19	16
120 minutos	17	17
150 minutos	19	16
180 minutos	20	17
210 minutos	17	17
240 minutos	18	17
270 minutos	21	17

Uma vez obtidas as previsões, as métricas \sqrt{EQM} e do MAPE são calculadas, com valores de 2.2037 e 11.94% respectivamente, que indicam boas previsões para os valores selecionados.

Como pode-se observar os 3 modelos INGARCH, GLARMA e GARMA foram ajustados com o conjunto de dados número de transações financeiras em 30 minutos, pode-se observar também que pelos critérios EQM e MAPE que as previsões

*6.1. NÚMERO DE TRANSAÇÕES FINANCEIRAS REALIZADAS EM 30 MINUTOS*¹⁰⁷

que erraram menos foram as feitas pelo modelo INGARCH para este conjunto de dados. Outro fato a se destacar é que as estimativas clássicas e Bayesianas forneceram valores próximos. No próximo Capítulo serão explicadas quais as conclusões obtidas no trabalho.

Capítulo 7

Considerações finais

Neste trabalho foi proposta uma abordagem clássica e bayesiana para o ajuste dos modelos INGARCH, GLARMA e GARMA para séries de dados de contagem, considerando as distribuições Poisson e binomial negativa. Foi considerado o BIC como critério de seleção de modelos na abordagem clássica, e os critérios EBIC, DIC e CPO na abordagem Bayesiana.

Foram realizados estudos com séries simuladas para verificar a adequabilidade dos modelos e o desempenho nos critérios considerados para a escolha da ordem de cada um dos modelos citados, e também para a escolha do melhor modelo (Poisson ou binomial negativo) para modelar uma série de dados de contagem. Este estudo revelou que a maioria dos critérios apresentaram bom desempenho na seleção da ordem, alguns critérios de seleção Bayesianos não selecionaram o modelo correto, em contrapartida o critério de seleção BIC obteve bom desempenho.

As abordagens propostas neste trabalho foram aplicadas na análise de uma série real, que é o número de transações financeiras em 30 minutos, coletadas no mês de novembro de 2011, e as observações foram divididas por 100. Os modelos

INGARCH(1,2), GLARMA(1,2) e GARMA(2,1) todos com a distribuição binomial negativa, foram os modelos que melhor se ajustaram a esse conjunto de dados.

Por fim, concluí-se que estes modelos que, usualmente, são usados para séries relacionadas a área da saúde, portaram-se bem modelando uma série de contagem financeira. Além disso os critérios propostos mostraram-se adequados para a seleção do melhor modelo que se ajusta a uma série de contagem.

Referências Bibliográficas

- [1] Benjamin, M. A., R. A. & Stasinopoulos, D. M. (2003). Generalized autoregressive moving average models. *Journal of the American Statistical Association*, **98**, 214-223.
- [2] Box, G., Jenkins, G. & Reinsel, G. (2008). *Time series Analysis: forecasting and control*. John Wiley, fourth edition.
- [3] Brockwell, P. & Davis, R. (2009). *Time series: theory and methods*. Springer Verlag. ISBN 1441903194
- [4] Carlin, B. P. & Louis, T. A. (2000). *Bayes and Empirical Bayes methods for data analysis*. Chapman and Hall/CRC Press, USA, second edition.
- [5] Chib, S. & Greenberg, E. (1995). Understanding the metropolis-hastings algorithm *American Statistician*, pages 327-335.
- [6] Cox, D. R. (1981). Statistical analysis of time series: Some recent developments. *Scandinavian Journal of Statistics*, **8**, 93-115.
- [7] Davis, R. A. & Dunsmuir, W. T. & Streett, S. B. (2003). Observation-driven models for Poisson counts, *Biometrika*, 90(4), 777-790.
- [8] Davis, R. A. & Dunsmuir, W. T. & Wang, Y. (2000). On autocorrelation in a Poisson regression model. *Biometrika*, **87**, 491-505.

- [9] DiCiccio, T. J. & Efron, B. (1996). Bootstrap confidence intervals. *Statistical Science*, **11**(3), 189-228.
- [10] Ehlers, R. (2007). Introdução a Inferência Bayesiana. *Notas de aula, disponível em <http://www2.icmc.usp.br/~ehlers/bayes>. Acesso em Julho, 2012.*
- [11] Ferland, R., Latour, A. and Oraichi, D. (2004). Integer-valued GARCH process *Journal of time series analysis Vol. 27, No. 6* 0143-9782/06/06 923942.
- [12] Gelfand, A. E., Dey, D. K. & Chang, H. (1992). *Bayesian Statistics*, volume 4, chapter Model determination using predictive distributions with implementation via sampling-based methods, pages 147-167. Oxford University Press, Oxford, UK.
- [13] Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications, *Biometrika*, 57, pages 97-109.
- [14] Jung, R. C., Kukuk, M. & Liesenfeld, R. (2006). Time series of count data: Modeling, estimation and diagnostics. *Comput. Stat. Data Anal.* **51**, 2350-2364.
- [15] Kedem, B. & Fokianos, K. (2002). *Regression Models for Time Series Analysis*. John Wiley & Sons, New Jersey, USA.
- [16] Li, W. K. L. (1994). Time series model based on generalized linear models: Some further results. *Biometrics*, **50**, 506-511.
- [17] McCullagh, P. & Nelder, J. A. (1989) *Generalized Linear Models*. Chapman and Hall, London, 2nd.
- [18] Nelder, J. A. & Wedderburn, R. W. (1972). Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society Series A*, **135**(3), 370-384.

- [19] R Development Core Team. (2010). *R: A language and Environment for Statistical Computing*. R foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.
- [20] Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, **6**(2), 461-464.
- [21] Spiegelhalter, D. J., Best, N. G., Carlin, B. P. & Van der Linde, A. (2002). Bayesian measures of model complexity and fit. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, **64**(4), 583-639.
- [22] Zeger, S. L. (1988). A regression model for time series of counts. *Biometrika*, **75**(4), 621-629.
- [23] Zhu, F. (2010). A negative binomial integer-valued GARCH model. *Journal of Time Series Analysis*, **32**, 5467.

Apêndice A

Geradora de candidatos

Como descrito anteriormente verifica-se que as distribuições a posteriori do INGARCH Poisson e INGARCH Binomial Negativa, não possuem condicionais conhecidas, ou seja, será necessário o uso do método Metrópolis Hastings, porém como foi mostrado no início do capítulo os parâmetros possuem restrições, portanto não podem assumir qualquer valor, o que dificulta o uso do passeio aleatório como gerador de candidatos pois poucos valores gerados serão aceitos.

Segundo as transformações feitas, todas as novas variáveis possuem distribuição normal, o que implica que a geradora também será normal. Agora é necessário definir a média e variância dessa geradora. Como média dessa geradora usa-se o $\max(L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1|Y))$, que é a moda da distribuição a posteriori, portanto o valor mais provável que ela deverá assumir, para obtê-lo basta derivar a função a fim de encontrar o máximo, que no caso é análogo a determinar o estimador de máxima verossimilhança de cada um dos parâmetros de interesse. Agora para determinar a variância dessa geradora de candidatos, tem-se que

A matriz hessiana de $\hat{\theta}$, em que θ é o vetor de parâmetros, é dada por $H(\hat{\theta}) =$

$\frac{\partial^2 l(Y|\theta)}{\partial \theta^2}$, logo $var(\hat{\theta}) = -EH^{-1}$, e tem-se a seguinte transformação $\gamma = \psi(\theta) \Rightarrow \theta = \psi^{-1}(\gamma)$, logo

$$H(\gamma) = \frac{\partial^2(l(Y|\theta))}{\partial \gamma^2}, \quad (\text{A.1})$$

lembrando que $l(Y|\theta) = \log(L(Y|\theta))$, define-se agora $D = \frac{\partial(l(Y|\theta))}{\partial \theta} \frac{\partial \psi(\gamma)}{\partial \gamma}$, daí tem-se

$$H(\gamma) = \frac{\partial D}{\partial \gamma} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial l(Y|\theta)}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi(\gamma)}{\partial \gamma} \right), \quad (\text{A.2})$$

aplicando a regra do produto tem-se

$$H(\gamma) = \frac{\partial^2 l(Y|\theta)}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \psi(\gamma)}{\partial \gamma} \right)^2 + \frac{\partial l(Y|\theta)}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \psi(\gamma)}{\partial \gamma^2}. \quad (\text{A.3})$$

Observe que o valor do segundo termo desta equação é 0, pois está esta aplicada no ponto onde a verossimilhança é máxima, dessa forma a equação fica descrita como:

$$\begin{aligned} H(\hat{\gamma}) &= \frac{\partial^2 l(Y|\theta)}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \psi(\gamma)}{\partial \gamma} \right)^2 \\ &\Rightarrow H(\hat{\theta}) \left(\frac{\partial \psi(\hat{\gamma})}{\partial \hat{\gamma}} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Logo $var(\hat{\gamma}) = (H(\hat{\gamma}))^{-1}$.

No caso do INGARCH(1,1), $\alpha_0 = \exp(\phi) \Rightarrow \hat{\phi} = \log(\hat{\alpha}_0)$.

$$G_\phi = N(\hat{\phi}, [H(\hat{\alpha}_0) \exp(2\hat{\phi})]^{-1}). \quad (\text{A.5})$$

$$\alpha_1 = \frac{\exp(\gamma)}{1+\exp(\gamma)} \Rightarrow \hat{\gamma} = \log\left(\frac{\hat{\alpha}_1}{1-\hat{\alpha}_1}\right).$$

$$G_\gamma = N(\hat{\gamma}, [H(\hat{\alpha}_1) \frac{\exp(2\hat{\gamma})}{(1 + \exp \hat{\gamma})^4}]^{-1}). \quad (\text{A.6})$$

$$\beta_1 = \frac{\exp(\theta)}{1+\exp(\theta)} \Rightarrow \hat{\theta} = \log\left(\frac{\hat{\beta}_1}{1-\hat{\beta}_1}\right).$$

$$G_\theta = N(\hat{\theta}, [H(\hat{\beta}_1) \frac{\exp(2\hat{\theta})}{(1 + \exp \hat{\theta})^4}]^{-1}). \quad (\text{A.7})$$

Depois de encontrado o gerador aplica-se ψ^{-1} para encontrar o valor do parâmetro de interesse.

Apêndice B

Simulações com séries de tamanho 200 e 1000 modelo INGARCH

Tabela B.1: Poisson INGARCH(1,1) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	0.60	0.6407	0.0484
α_1	0.40	0.4069	0.0054
β_1	0.30	0.2667	0.0205

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.3183	1.0563	0.1542	0.8909	0.9500
α_1	0.2667	0.5521	0.0579	0.9909	0.9500
β_1	0.0392	0.5201	0.1047	0.8988	0.9500

Tabela B.2: Poisson INGARCH(1,1) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.60	0.6045	0.0080		
α_1	0.40	0.4139	0.0010		
β_1	0.30	0.2798	0.0036		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.4488	0.7917	0.0688	0.9770	0.9500
α_1	0.3502	0.4779	0.0283	1.0805	0.9500
β_1	0.1619	0.3933	0.0491	1.0230	0.9500

Tabela B.3: Poisson INGARCH(1,2) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5239	0.1358		
α_1	0.30	0.2142	0.0051		
β_1	0.25	0.2408	0.1139		
β_2	0.30	0.2837	0.0875		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.1342	1.0946	0.1992	0.6826	0.9500
α_1	0.0890	0.3479	0.0924	1.5067	0.9500
β_1	0.0117	0.6231	0.1410	0.5052	0.9500
β_2	0.0168	0.6467	0.1535	0.5842	0.9500

Tabela B.4: Poisson INGARCH(1,2) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5327	0.0257		
α_1	0.30	0.2612	0.0010		
β_1	0.25	0.2455	0.0264		
β_2	0.30	0.2753	0.0218		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.2856	0.8881	0.1183	0.9764	0.9500
α_1	0.1796	0.2928	0.0888	1.1413	0.9500
β_1	0.0243	0.5331	0.1093	0.8219	0.9500
β_2	0.0342	0.5142	0.1200	0.8599	0.9500

Tabela B.5: Poisson INGARCH(2,1) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.4896	0.0517		
α_1	0.25	0.2497	0.0057		
α_2	0.20	0.1828	0.0144		
β_1	0.25	0.2718	0.0507		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.1983	0.8509	0.1366	0.7461	0.9500
α_1	0.1084	0.3942	0.0583	0.9580	0.9500
α_2	0.0181	0.3562	0.0740	0.7542	0.9500
β_1	0.0171	0.5911	0.1280	0.6972	0.9500

Tabela B.6: Poisson INGARCH(2,1) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.4831	0.0100		
α_1	0.25	0.2660	0.0011		
α_2	0.20	0.1836	0.0032		
β_1	0.25	0.2586	0.0111		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.3091	0.6858	0.0778	0.9665	0.9500
α_1	0.2009	0.3315	0.0298	1.1095	0.9500
α_2	0.0669	0.2863	0.0461	1.0261	0.9500
β_1	0.0617	0.4557	0.0812	0.9603	0.9500

Tabela B.7: Poisson INGARCH(2,2) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5727	0.0869		
α_1	0.25	0.2281	0.0054		
α_2	0.20	0.2276	0.0162		
β_1	0.25	0.2027	0.1480		
β_2	0.15	0.1668	0.0719		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.2133	1.1422	0.1871	0.8439	0.9500
α_1	0.0869	0.3737	0.0602	1.0217	0.9500
α_2	0.0468	0.3858	0.0723	0.6976	0.9500
β_1	0.0085	0.5160	0.1265	0.3871	0.9500
β_2	0.0070	0.4366	0.1171	0.4391	0.9500

Tabela B.8: Poisson INGARCH(2,2) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5042	0.0180		
α_1	0.25	0.2502	0.0010		
α_2	0.20	0.2102	0.0080		
β_1	0.25	0.2223	0.0948		
β_2	0.15	0.1627	0.0396		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.3169	0.7350	0.0849	0.8059	0.9500
α_1	0.1851	0.3099	0.0251	0.9715	0.9500
α_2	0.1010	0.2969	0.0423	0.5721	0.9500
β_1	0.0111	0.4913	0.1170	0.4484	0.9500
β_2	0.0102	0.3422	0.1225	0.4673	0.9500

Tabela B.9: Binomial Negativa INGARCH(1,1) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.60	0.6501	0.0469		
α_1	0.45	0.4186	0.0056		
β_1	0.25	0.2404	0.0206		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.3211	1.0438	0.1516	0.8865	0.9500
α_1	0.2682	0.5616	0.0621	1.0298	0.9500
β_1	0.0267	0.4983	0.1140	0.9644	0.9500

Tabela B.10: Binomial Negativa INGARCH(1,1) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.60	0.6277	0.0080		
α_1	0.45	0.4273	0.0011		
β_1	0.25	0.2445	0.0037		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.4630	0.8147	0.0727	1.0405	0.9500
α_1	0.3620	0.4914	0.0351	1.2906	0.9500
β_1	0.1217	0.3651	0.0673	1.3475	0.9500

Tabela B.11: Binomial Negativa INGARCH(1,2) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.6777	0.1395		
α_1	0.30	0.3113	0.0053		
β_1	0.25	0.2402	0.0710		
β_2	0.30	0.2596	0.0511		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.2374	1.4388	0.2587	0.9554	0.9500
α_1	0.1817	0.4434	0.0547	0.9409	0.9500
β_1	0.0130	0.5774	0.1306	0.5896	0.9500
β_2	0.0150	0.5470	0.1424	0.6663	0.9500

Tabela B.12: Binomial Negativa INGARCH(1,2) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5397	0.0160		
α_1	0.30	0.3063	0.0009		
β_1	0.25	0.2548	0.0138		
β_2	0.30	0.2877	0.0105		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.3378	0.8302	0.1006	1.0489	0.9500
α_1	0.2449	0.3663	0.0254	1.0124	0.9500
β_1	0.0560	0.4938	0.0907	0.9672	0.9500
β_2	0.0814	0.4679	0.1008	0.9671	0.9500

Tabela B.13: Binomial Negativa INGARCH(2,1) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5510	0.0598		
α_1	0.15	0.1587	0.0054		
α_2	0.25	0.2717	0.0099		
β_1	0.30	0.3149	0.0319		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.2128	1.0248	0.1650	0.8743	0.9500
α_1	0.0280	0.3014	0.0665	1.1001	0.9500
α_2	0.0762	0.4365	0.0752	0.9358	0.9500
β_1	0.0402	0.6129	0.1213	0.8376	0.9500

Tabela B.14: Binomial Negativa INGARCH(2,1) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5090	0.0091		
α_1	0.15	0.1648	0.0010		
α_2	0.25	0.2778	0.0019		
β_1	0.30	0.3221	0.0056		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.3430	0.7179	0.0752	1.0039	0.9500
α_1	0.1015	0.2293	0.0399	1.4689	0.9500
α_2	0.1894	0.3605	0.0426	1.1714	0.9500
β_1	0.1697	0.4674	0.0626	1.0405	0.9500

Tabela B.15: Binomial Negativa INGARCH(2,2) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5871	0.0885		
α_1	0.15	0.1499	0.0054		
α_2	0.30	0.2831	0.0102		
β_1	0.25	0.2000	0.1186		
β_2	0.15	0.1588	0.0666		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.2288	1.1274	0.1837	0.8258	0.9500
α_1	0.0271	0.2847	0.0678	1.1203	0.9500
α_2	0.1284	0.4258	0.0664	0.8161	0.9500
β_1	0.0103	0.4975	0.1101	0.3875	0.9500
β_2	0.0076	0.4199	0.1120	0.4395	0.9500

Tabela B.16: Binomial Negativa INGARCH(2,2) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5420	0.0128		
α_1	0.15	0.1682	0.0010		
α_2	0.30	0.2746	0.0022		
β_1	0.25	0.2285	0.0298		
β_2	0.15	0.1351	0.0163		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.3562	0.7788	0.0905	1.0314	0.9500
α_1	0.1037	0.2295	0.0372	1.3845	0.9500
α_2	0.1895	0.3496	0.0386	0.9956	0.9500
β_1	0.0270	0.4428	0.0949	0.6688	0.9500
β_2	0.0070	0.3076	0.1109	0.6542	0.9500

Apêndice C

Simulações com séries de tamanho 200 e 1000 modelo GLARMA

Tabela C.1: Poisson GLARMA(1,1) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α	0.25	0.2471	0.0003
β	-0.40	-0.4082	0.0027

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α	0.2093	0.2850	0.0157	1.0221	0.9410
β	-0.5101	-0.3062	0.0424	1.0158	0.9348

Tabela C.2: Poisson GLARMA(1,1) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α	0.30	0.2496	0.0001
β	0.25	-0.4015	0.0005

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α	0.2329	0.2664	0.0068	1.0086	0.9458
β	-0.4461	-0.3568	0.0180	0.9890	0.9490

Tabela C.3: Poisson GLARMA(1,2) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	0.25	0.2413	0.0019		
β	-0.30	-0.3082	0.0037		
β_1	-0.25	-0.2594	0.0021		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α	0.2267	0.2747	0.0100	1.0599	0.9292
β	-0.3798	-0.2422	0.0383	1.0303	0.9321
β_1	-0.3530	-0.1814	0.0422	1.0612	0.9304

Tabela C.4: Poisson GLARMA(1,2) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	0.25	0.2493	0.0001		
β	-0.30	-0.3018	0.0006		
β_1	-0.25	-0.2512	0.0007		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α	0.2380	0.2607	0.0047	1.0249	0.9448
β	-0.3508	-0.2528	0.0202	1.0130	0.9454
β_1	-0.3045	-0.1980	0.0216	0.9931	0.9524

Tabela C.5: Poisson GLARMA(2,1) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	0.30	0.2905	0.0038		
α_1	-0.25	-0.2460	0.0040		
β	-0.40	-0.4027	0.0055		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α	0.1693	0.4117	0.0485	0.9862	0.9546
α_1	-0.3705	-0.1215	0.0497	0.9816	0.9502
β	-0.5463	-0.2590	0.0596	1.0159	0.9340

Tabela C.6: Poisson GLARMA(2,1) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	0.30	0.2979	0.0007		
α_1	-0.25	-0.2489	0.0007		
β	-0.40	-0.3999	0.0010		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α	0.2445	0.3513	0.0215	0.9909	0.9508
α_1	-0.3043	-0.1936	0.0222	0.9880	0.9506
β	-0.4623	-0.3375	0.0255	1.0080	0.9424

Tabela C.7: Poisson GLARMA(2,2) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	0.50	0.4327	0.0185		
α_1	-0.70	-0.6394	0.0247		
β	-0.45	-0.3891	0.0244		
β_1	0.30	0.2336	0.0354		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α	0.1821	0.6833	0.1354	1.3708	0.8792
α_1	-0.9376	-0.3413	0.1515	1.2907	0.8910
β	-0.6829	-0.0953	0.1535	1.3020	0.8704
β_1	0.0253	0.5926	0.1848	1.2650	0.8678

Tabela C.8: Poisson GLARMA(2,2) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	0.50	0.4868	0.0031		
α_1	-0.70	-0.6865	0.0044		
β	-0.45	-0.4371	0.0044		
β_1	0.30	0.2834	0.0069		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α	0.3781	0.5955	0.0461	1.0441	0.9426
α_1	-0.8160	-0.5570	0.0542	1.0362	0.9434
β	-0.5673	-0.3069	0.0541	1.0212	0.9472
β_1	0.1214	0.4455	0.0679	1.0281	0.9374

Tabela C.9: Binomial Negativa GLARMA(1,1) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	-0.40	-0.4135	0.0178		
β	0.25	0.2586	0.0255		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α	-0.6704	-0.1567	0.1047	1.0059	0.9468
β	0.0205	0.5677	0.1269	1.0184	0.9451

Tabela C.10: Binomial Negativa GLARMA(1,1) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	-0.40	-0.4035	0.0033		
β	0.25	0.2535	0.0048		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α	-0.5171	-0.2899	0.0459	1.0014	0.9518
β	0.1180	0.3891	0.0548	0.9943	0.9538

Tabela C.11: Binomial Negativa GLARMA(1,2) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	-0.40	-0.4021	0.0092		
β	0.20	0.2026	0.0154		
β_1	-0.30	-0.3042	0.0086		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α	-0.5873	-0.2168	0.0785	1.0342	0.9303
β	0.0391	0.4444	0.1006	1.0227	0.9432
β_1	-0.4854	-0.1229	0.0757	1.0316	0.9438

Tabela C.12: Binomial Negativa GLARMA(1,2) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	-0.40	-0.3997	0.0018		
β	0.20	0.2022	0.0030		
β_1	-0.30	-0.2978	0.0016		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α	-0.4833	-0.3162	0.0341	1.0022	0.9458
β	0.0945	0.3099	0.0439	1.0099	0.9496
β_1	-0.3762	-0.2193	0.0320	1.0062	0.9468

Tabela C.13: Binomial Negativa GLARMA(2,1) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	0.25	0.2359	0.0064		
α_1	-0.30	-0.2944	0.0053		
β	-0.25	-0.2480	0.0101		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α	0.0813	0.3905	0.0634	1.0086	0.9486
α_1	-0.4372	-0.1516	0.0590	1.0138	0.9464
β	-0.4421	-0.0539	0.0801	1.0056	0.9401

Tabela C.14: Binomial Negativa GLARMA(2,1) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	0.25	0.2425	0.0012		
α_1	-0.30	-0.2942	0.0010		
β	-0.25	-0.2451	0.0018		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α	0.1742	0.3108	0.0284	1.0296	0.9482
α_1	-0.3575	-0.2308	0.0265	1.0291	0.9398
β	-0.3295	-0.1607	0.0346	1.0176	0.9492

Tabela C.15: Binomial Negativa GLARMA(2,2) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	0.50	0.4338	0.0194		
α_1	-0.70	-0.6371	0.0256		
β	-0.45	-0.3901	0.0256		
β_1	0.30	0.2350	0.0366		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α	0.1772	0.6904	0.1340	1.3189	0.8820
α_1	-0.9404	-0.3338	0.1503	1.2380	0.9016
β	-0.6899	-0.0903	0.1504	1.2515	0.8796
β_1	0.0191	0.5993	0.1810	1.2064	0.8752

Tabela C.16: Binomial Negativa GLARMA(2,2) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α	0.50	0.4886	0.0032		
α_1	-0.70	-0.6894	0.0045		
β	-0.45	-0.4404	0.0046		
β_1	0.30	0.2924	0.0070		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α	0.3781	0.5991	0.0464	1.0321	0.9468
α_1	-0.8210	-0.5579	0.0542	1.0113	0.9494
β	-0.5725	-0.3083	0.0561	1.0416	0.9451
β_1	0.1281	0.4567	0.0680	1.0161	0.9442

Apêndice D

Simulações com séries de tamanho 200 e 1000 modelo GARMA

Tabela D.1: Poisson GARMA(1,1) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	1.00	1.0057	0.0262		
α_1	0.30	0.2968	0.0132		
β_1	0.25	0.2250	0.0138		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.6909	1.3205	0.1223	0.9471	0.9569
α_1	0.0733	0.5203	0.0879	0.9558	0.9513
β_1	0.0020	0.4522	0.0916	0.9867	0.9483

Tabela D.2: Poisson GARMA(1,1) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	1.00	1.0233	0.0055
α_1	0.30	0.2873	0.0027
β_1	0.25	0.2436	0.0028

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.8771	1.1694	0.0592	0.9813	0.9537
α_1	0.1841	0.3906	0.0413	0.9901	0.9529
β_1	0.1392	0.3479	0.0417	0.9877	0.9533

Tabela D.3: Poisson GARMA(1,2) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	1.00	0.9724	0.0431
α_1	0.30	0.3245	0.0209
β_1	0.40	0.3366	0.0205
β_2	0.25	0.1976	0.0090

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.5733	1.3715	0.1620	0.9804	0.9346
α_1	0.0473	0.6017	0.1166	1.0119	0.9238
β_1	0.0635	0.6097	0.1295	1.1353	0.8962
β_2	0.0140	0.3812	0.1362	1.2188	0.9012

Tabela D.4: Poisson GARMA(1,2) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
α_0	1.00	1.0467	0.0101
α_1	0.30	0.2769	0.0048
β_1	0.40	0.3919	0.0045
β_2	0.25	0.2361	0.0018

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.8496	1.2438	0.0855	1.0696	0.9428
α_1	0.1414	0.4123	0.0571	1.0385	0.9492
β_1	0.2609	0.5229	0.0549	1.0203	0.9452
β_2	0.1519	0.3203	0.1428	1.0728	0.9401

Tabela D.5: Poisson GARMA(2,1) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5568	0.0179		
α_1	0.30	0.3518	0.0213		
α_2	0.40	0.3261	0.0202		
β_1	0.25	0.1737	0.0284		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.3307	0.7418	0.0874	1.0893	0.9173
α_1	0.0412	0.6441	0.1315	0.0598	0.9242
α_2	0.1259	0.5303	0.0994	1.2563	0.9016
β_1	0.0204	0.4697	0.1491	1.1541	0.8936

Tabela D.6: Poisson GARMA(2,1) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5502	0.0055		
α_1	0.30	0.3186	0.0118		
α_2	0.40	0.3542	0.0055		
β_1	0.25	0.2035	0.0131		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.4059	0.6946	0.0691	1.1697	0.9114
α_1	0.1102	0.5270	0.0880	1.0341	0.9396
α_2	0.2113	0.4970	0.0687	1.1903	0.9236
β_1	0.0162	0.4232	0.0984	1.0938	0.9242

Tabela D.7: Poisson GARMA(2,2) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5979	0.0197		
α_1	0.30	0.2972	0.0204		
α_2	0.40	0.3443	0.0179		
β_1	0.25	0.2067	0.0185		
β_2	0.35	0.3082	0.0080		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.3247	0.8712	0.1237	1.1308	0.9454
α_1	0.0285	0.5660	0.1159	1.0754	0.9183
α_2	0.0912	0.5974	0.1120	1.1285	0.9288
β_1	0.0494	0.4630	0.1122	1.1012	0.9292
β_2	0.1350	0.4813	0.1615	1.2221	0.8918

Tabela D.8: Poisson GARMA(2,2) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.50	0.5219	0.0060		
α_1	0.30	0.3834	0.0223		
α_2	0.40	0.3795	0.0147		
β_1	0.25	0.2657	0.0216		
β_2	0.35	0.1956	0.0022		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.4710	0.7729	0.1254	1.0746	0.9138
α_1	0.1028	0.6641	0.1191	1.0221	0.9116
α_2	0.2297	0.5226	0.1022	1.0936	0.9206
β_1	0.0101	0.5416	0.1160	1.0364	0.9311
β_2	0.1031	0.2882	0.1300	0.9741	0.9552

Tabela D.9: Binomial Negativa GARMA(1,1) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.80	0.8384	0.0185		
α_1	0.50	0.4781	0.0070		
β_1	0.30	0.2764	0.0081		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.5726	1.1041	0.1005	0.9363	0.9676
α_1	0.3143	0.6419	0.0639	0.9633	0.9632
β_1	0.1007	0.4521	0.0726	1.0158	0.9432

Tabela D.10: Binomial Negativa GARMA(1,1) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.80	0.8412	0.0038		
α_1	0.50	0.4733	0.0014		
β_1	0.30	0.2931	0.0016		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.7300	0.9724	0.0626	1.0560	0.9346
α_1	0.3990	0.5475	0.0362	1.0953	0.9334
β_1	0.2136	0.3725	0.0315	0.9803	0.9551

Tabela D.11: Binomial Negativa GARMA(1,2) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	1.00	0.8992	0.0477		
α_1	0.30	0.3058	0.0235		
β_1	0.40	0.3511	0.0230		
β_2	0.25	0.2059	0.0098		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.5808	1.4176	0.1626	0.9564	0.9451
α_1	0.0131	0.5984	0.1172	0.9819	0.9354
β_1	0.0630	0.6391	0.1290	1.0832	0.9094
β_2	0.0153	0.3964	0.1478	1.1360	0.9172

Tabela D.12: Binomial Negativa GARMA(1,2) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	1.00	1.0617	0.0108		
α_1	0.30	0.2679	0.0051		
β_1	0.40	0.3973	0.0048		
β_2	0.25	0.2387	0.0019		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.8587	1.2646	0.0928	1.1267	0.9286
α_1	0.1278	0.4081	0.0607	1.0723	0.9388
β_1	0.2613	0.5332	0.0553	0.9988	0.9482
β_2	0.1518	0.3256	0.1481	1.0279	0.9463

Tabela D.13: Binomial Negativa GARMA(2,1) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.55	0.5291	0.0213		
α_1	0.30	0.3464	0.0117		
α_2	0.40	0.3577	0.0180		
β_1	0.20	0.1712	0.0326		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.3221	0.7703	0.0969	1.0788	0.9213
α_1	0.0262	0.6297	0.1333	1.0714	0.9244
α_2	0.1172	0.5535	0.0898	1.0903	0.9190
β_1	0.0103	0.5211	0.1512	1.1099	0.9037

Tabela D.14: Binomial Negativa GARMA(2,1) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.55	0.5584	0.0058		
α_1	0.30	0.3132	0.0126		
α_2	0.40	0.3850	0.0058		
β_1	0.20	0.2066	0.0141		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.4101	0.7066	0.0739	1.2060	0.9076
α_1	0.0976	0.5287	0.0875	0.9917	0.9414
α_2	0.2086	0.5013	0.0678	1.1472	0.9314
β_1	0.0112	0.4343	0.0974	1.0479	0.9336

Tabela D.15: Binomial Negativa GARMA(2,2) Série tamanho 200

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.65	0.6555	0.0222		
α_1	0.30	0.3103	0.0195		
α_2	0.40	0.3568	0.0171		
β_1	0.25	0.1980	0.0177		
β_2	0.35	0.2978	0.0075		
Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{(\frac{EQM}{Var})}$	Cobertura
α_0	0.3654	0.9456	0.1123	0.9779	0.9660
α_1	0.0483	0.5723	0.1113	1.0965	0.9248
α_2	0.1099	0.6037	0.1080	1.1292	0.9352
β_1	0.0523	0.4484	0.1104	1.1337	0.9341
β_2	0.1301	0.4655	0.1657	1.3022	0.8948

Tabela D.16: Binomial Negativa GARMA(2,2) Série tamanho 1000

Parâmetro	Valor real	Média	Variância		
α_0	0.65	0.6781	0.0047		
α_1	0.30	0.2867	0.0030		
α_2	0.40	0.3769	0.0027		
β_1	0.25	0.2390	0.0028		
β_2	0.35	0.3314	0.0014		

Parâmetro	L. Inferior	L. Superior	Vício	$\sqrt{\left(\frac{EQM}{Var}\right)}$	Cobertura
α_0	0.5437	0.8125	0.0829	1.4462	0.8466
α_1	0.1796	0.3939	0.0442	1.0008	0.9426
α_2	0.2750	0.4788	0.0440	1.0648	0.9460
β_1	0.1349	0.3432	0.0416	0.9810	0.9574
β_2	0.2577	0.4050	0.1113	1.1629	0.9146