

# Um enfoque Bayesiano do modelo de captura-recaptura na presença de covariáveis

Marcelo de Paula

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Ribeiro Diniz

Co-Orientador: Prof. Dr. José Galvão Leite

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos - DEs/UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística.

São Carlos

Fevereiro de 2006

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

P324eb

Paula, Marcelo de.

Um enfoque bayesiano do modelo de captura-recaptura na presença de covariáveis / Marcelo de Paula. -- São Carlos : UFSCar, 2006.

139 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2006.

1. Teoria bayesiana de decisão estatística. 2. Processo seqüencial de captura-recaptura. 3. Simulação. 4. Inferência bayesiana. I. Título.

CDD: 519.542 (20<sup>a</sup>)

\*\*\*\*\*

*"Parai de armazenar para vós tesouros na terra, onde a traça e a ferrugem consomem, e onde ladrões arrombam e furtam. Antes, armazenai para vós tesouros no céu, onde nem a traça nem a ferrugem consomem, e onde ladrões não arrombam nem furtam. Pois, onde estiver o teu tesouro, ali estará também o seu coração"*

*(Baseado no livro bíblico de Mateus Capítulo 6 versus 19-21)*

\*\*\*\*\*

*"Pois a sabedoria deste mundo é tolice perante Deus; porque está escrito: Ele apanha os sábios na sua própria astúcia"*

*(Baseado na primeira Epístola aos Coríntios Capítulo 3 versus 19)*

\*\*\*\*\*

*"Se voce tem uma maçã e eu tenho outra; e nós trocamos as maçãs, então cada um terá sua maçã. Mas se voce tem uma idéia e eu tenho outra, e nós as trocamos; então cada um terá duas idéias"*

*(George Bernard Shaw)*

\*\*\*\*\*

*"Não acredito em sucesso sem disciplina, dedicação, desprendimento e dor"*

*"Só é verdadeiramente feliz quem não tem medo do ridículo"*

*Marcelo de Paula (2006)*

\*\*\*\*\*

# *Agradecimentos*

*Agradeço,*

*à Deus que me protege, me guia em direção ao bem e que me abençoou com uma saúde excelente, alegria de viver e força de vontade.*

*ao meu pai José de Paula que jamais foi de encontro as minhas aspirações,*

*a minha mãe Antônia que me ajudou de forma incondicional,*

*ao meu irmão Márcio que sempre acreditou em minha capacidade e jamais duvidou dos meus sonhos, e que nunca exitou em me ajudar nos momentos de dificuldades financeiras,*

*ao meu irmão Luís Carlos pela compreensão, ajuda e paciência ao longo deste trabalho,*

*ao professor Dr. Carlos Alberto Ribeiro Diniz pela orientação e pelas idéias durante todo este trabalho.*

*ao professor Dr. José Galvão Leite pela co-orientação.*

*à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior) pela assistência financeira,*

*ao professor Dr. Jorge Alberto Achcar pelas correções em meu exame de qualificação,*

*ao professor Dr. Josmar Mazucheli por integrar a banca e pelas idéias sugeridas,*

*aos amigos Carla (Karlottinha), Fabíola (Biolinha), Erlandson (Mister), Josi (Josi-creide), Eloísa (Elouka), Daiane, Daniela, Glaucy (Glau-glau) e Tiago pela grande amizade nas horas alegres e difíceis,*

*ao meu primo Beto que tantas vezes me ajudou, quer com caronas, quer com incentivos nos meus momentos de desespero, e que me orientava a não desistir do curso.*

*a Dona Luíza pelos conselhos e sabedoria de vida que levarei pra sempre comigo.*

*aos colegas, professores e funcionários do Departamento de Estatística da UFSCar, pela grande amizade.*

# *Resumo*

Este trabalho tem como objetivo principal a inserção de covariáveis nas probabilidades de captura do método de captura-recaptura múltipla para população fechada. No caso de população animal, por exemplo, fatores como clima, época do ano, tamanho do animal, podem afetar a probabilidade de captura do animal. Revisamos os conceitos da metodologia, fazemos um breve estudo sobre a sensibilidade das estimativas *a posteriori* em relação a escolha dos hiperparâmetros, apresentamos uma reparametrização para a probabilidade de captura em situações específicas e, motivados nessa reparametrização, inserimos covariáveis no modelo proposto por Castledine (1981) por meio de métodos bayesianos. A análise bayesiana foi feita através de vários estudos de simulação estocástica via MCMC (Monte Carlo Markov Chain) com dados simulados e reais para obter os resultados *a posteriori* do tamanho populacional.

**Palavras-chave:** Captura-recaptura múltipla, população fechada, covariáveis, análise bayesiana, simulação estocástica.

# *Abstract*

This work has as main objective to insert covariates in the capture probability of the multiple capture-recapture method for closed animal population. Factors like climate, seasons of the year, animal size, could affect the animal capture probability. We revise the methodology concepts, we make a study about the *posteriori* parameters sensibility, we present new parameters for the capture probability in specific situations and we insert covariates in the model used by Castledine (1981) through bayesian methods. The bayesian analysis was made through several studies of stochastic simulation through MCMC (Monte Carlo Markov Chain) with simulated and real data to obtain the population size *posteriori* results.

**keywords:** Multiple capture-recapture, closed population, covariates, bayesian analysis, stochastic simulation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Método da captura-recaptura simples e múltipla</b>	<b>4</b>
2.1	Introdução . . . . .	4
2.2	Captura-recaptura simples . . . . .	4
2.3	Outros estimadores para captura-recaptura simples . . . . .	5
2.4	Captura-recaptura múltipla . . . . .	6
2.5	Algumas aplicações da captura-recaptura . . . . .	8
2.5.1	Estudos sociais e epidemiológicos . . . . .	8
2.5.2	Aplicações em oceanografia . . . . .	13
2.5.3	Aplicação em dinâmica de frota de veículos . . . . .	15
2.5.4	Modelagem de demografia de insetos . . . . .	15
2.5.5	Estimação da taxa de sobrevivência de aves marinhas pré-reprodutivas com maturidade tardia . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Método de captura-recaptura múltipla para uma população fechada</b>	<b>17</b>
3.1	Introdução . . . . .	17
3.2	Descrição do problema . . . . .	17
3.3	Modelo estatístico e a função de verossimilhança . . . . .	19
3.4	Estimativas de Máxima Verossimilhança . . . . .	22
3.4.1	Exemplos . . . . .	23
<b>4</b>	<b>O modelo Bayesiano de captura-recaptura</b>	<b>25</b>
4.1	Introdução . . . . .	25
4.2	Distribuições <i>a priori</i> dos parâmetros . . . . .	26

4.2.1	Critérios e metodologias abordadas por diferentes autores nos últimos anos . . . . .	26
4.3	Distribuição <i>a posteriori</i> . . . . .	29
4.3.1	Distribuições <i>a priori</i> não-informativas para o tamanho populacional . . . . .	30
4.3.2	Distribuição <i>a priori</i> informativa para o tamanho populacional . . . . .	33
4.3.3	Um caso especial: modelo hierárquico para a média da Poisson . . . . .	34
4.4	Estudos de Simulação Estocástica para o método de captura-recaptura com população fechada . . . . .	36
4.4.1	Um breve estudo da influência dos hiperparâmetros nas estimativas <i>a posteriori</i> . . . . .	36
4.4.2	Dados reais de captura-recaptura utilizado por Castledine (1981) . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Uma reparametrização para a probabilidade de captura</b>	<b>48</b>
5.1	Introdução . . . . .	48
5.2	Modelo estatístico e função de verossimilhança . . . . .	48
5.3	Distribuição <i>a posteriori</i> . . . . .	49
5.4	Estudo de simulação com a reparametrização da probabilidade de captura . . . . .	51
5.5	Aplicação com dados reais . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Inserção de Covariáveis na probabilidade de captura</b>	<b>62</b>
6.1	Introdução . . . . .	62
6.2	Modelo estatístico e função de verossimilhança . . . . .	62
6.3	Modelo com presença de uma covariável . . . . .	64
6.3.1	Resultados de simulação . . . . .	66
6.4	Modelo com presença de duas covariáveis . . . . .	76
6.4.1	Resultados de simulação . . . . .	79
6.4.2	O problema da não identificabilidade . . . . .	88
6.5	Modelo com presença de três covariáveis . . . . .	95
6.5.1	Resultados de simulação . . . . .	99
6.5.2	O problema da não identificabilidade . . . . .	108

---

<b>7</b>	<b>Discussão e considerações finais</b>	<b>116</b>
7.1	Introdução . . . . .	116
7.2	Sobre a sensibilidade das estimativas <i>a posteriori</i> dos parâmetros em relação a escolha dos hiperparâmetros . . . . .	117
7.3	Sobre a distribuição <i>a priori</i> informativa de Poisson para o tamanho populacional . . . . .	117
7.4	Sobre a reparametrização da probabilidade de captura . . . . .	118
7.5	Sobre o modelo na presença de covariáveis . . . . .	118
<b>8</b>	<b>Apêndices</b>	<b>119</b>
8.1	Introdução . . . . .	119
8.2	Alguns programas desenvolvidos no Software R . . . . .	119

# Capítulo 1

## Introdução

O método da captura-recaptura é utilizado na estimação do tamanho populacional. A proposta deste trabalho é reescrever as probabilidades de captura dos animais como uma função de covariáveis que podem denotar, por exemplo, o tamanho do animal, a temperatura, o clima do ambiente, etc. Tais fatores podem alterar as probabilidades de captura dos animais, tornando o modelo proposto por Castledine (1981) mais realístico.

Historicamente, Laplace (1786) utilizou o método de captura-recaptura para estimar o tamanho da população da França. Em ecologia, o primeiro pesquisador a empregar este método foi o dinamarquês Carl G. J. Petersen (1896) estudando o fluxo migratório de peixes no mar Báltico.

No século XX, um dos primeiros pesquisadores a utilizar o método de captura-recaptura foi Frederick Lincoln (1930) estimando o tamanho da população de patos selvagens da América do Norte. A partir da década de 50 outros pesquisadores publicaram vários trabalhos para estimar parâmetros populacionais por captura-marcação-recaptura, tais como Chapman (1954), Darroch (1958, 1959), Parker (1963), Jolly (1965, 1982), Burnham (1972), Burnham *et al.* (1979, 1987), Seber (1965, 1982, 1986, 1992), Cowan *et al.* (1986), Pollock (1974, 1991), Pollock *et al.* (1983, 1984), Bunge e Fitzpatrick (1993), Bell (1993), He *et al.* (2002), Wang (2002).

A abordagem bayesiana sobre problemas de captura-recaptura vem sendo amplamente utilizada, para citar alguns trabalhos, Hunter e Griffiths (1978), Castledine (1981), Smith (1988,1991), George e Robert (1992), Ananda (1997), Yoshida (1996), Yoshida *et al.* (1999), Leite *et al.* (2000), King *et al.* (2001).

A eficiência desta abordagem para a estimação de parâmetros populacionais é evidenciada principalmente quando o pesquisador dispõe de informações "*a priori*" a respeito destes parâmetros.

Nos últimos anos houve um grande progresso na área computacional com o surgimento de bons algoritmos, entre eles os algoritmos de *Gibbs Sampling* ("Amostrador de Gibbs", ver Geman e Geman (1984), Gelfand e Smith (1990), Casella *et al.* (1992), Smith *et al.* (1993), Gamerman (1996)) e o algoritmo de *Metropolis Hastings* (ver Metropolis *et al.* (1953), Hastings (1970), Chib *et al.* (1995)).

Tais algoritmos são métodos iterativos de simulação estocástica via **Monte Carlo Markov Chain (MCMC)** que se constituem numa aproximação numérica facilitando os cálculos dos modelos bayesianos de captura-recaptura. Neste trabalho, a convergência de tais algoritmos foi monitorada pelo pacote **CODA - Convergence Diagnostics and Output Analysis Software for Gibbs Sampling Output** (Best *et al.* 1995).

Implementamos o modelo proposto por Castledine (1981) inserindo covariáveis nas probabilidades de captura e analisamos seu efeito nas estimativas.

No Capítulo 2 discutiremos os conceitos e definições do método de captura-recaptura simples e múltipla. Introduziremos o modelo proposto por Castledine (1981) para populações fechadas.

No Capítulo 3 aprofundaremos no método de captura-recaptura múltipla para população fechada. Introduziremos o modelo estatístico, a função de verossimilhança bem como as estimativas de máxima verossimilhança para o modelo utilizado por Castledine (1981).

No Capítulo 4 daremos o enfoque bayesiano para o modelo de captura-recaptura proposto por Castledine (1981), discutiremos as distribuições *a priori* bem como os critérios e metodologias abordadas por diferentes autores nos últimos anos. Como preliminar deste estudo de simulação faremos uma breve análise da sensibilidade das estimativas *a posteriori* em relação a escolha dos hiperparâmetros. Também abordaremos uma estrutura hierárquica "*Poisson-Gama*"(ver George e Robert, 1992).

No Capítulo 5 apresentaremos uma reparametrização para a probabilidade de captura afim de verificar sua eficácia e vantagens em relação ao modelo original. Faremos um estudo amplo de simulação com diferentes probabilidades de capturas para comparar

os resultados entre o modelo original proposto por Castledine (1981) e o modelo com a probabilidade de captura reparametrizada.

No Capítulo 6 faremos a inserção de covariáveis nas probabilidades de captura, determinando o modelo estatístico e a função de verossimilhança. Abordaremos o problema da não-identificabilidade dos parâmetros, convergência e correlação entre os parâmetros.

No Capítulo 7 faremos a discussão e as considerações finais sobre este trabalho.

# Capítulo 2

## Método da captura-recaptura simples e múltipla

### 2.1 Introdução

O interesse em estimar o tamanho de populações surgiu em meados do século XVII, segundo White *et al.* (1982). Basicamente, existem três abordagens para a estimação do tamanho populacional, a partir de amostras obtidas pelo método de captura-recaptura: a primeira é a abordagem clássica (Otis *et al.* (1978), Engen (1978)), a segunda é a Bayesiana (Smith (1988), Mingoti (2000), Wang (2002), Madigan *et al.* (1997), Castledine (1981)) e a terceira é a relacionada com a aplicação de modelos log-lineares para tabelas de contingência incompletas (Coull *et al.* (1999), Comarck (1989), Bishop *et al.* (1975), Abeni (1994), Rivest *et al.* (2004)). Neste trabalho faremos o estudo com o enfoque baseado na abordagem bayesiana.

### 2.2 Captura-recaptura simples

Um estudo na área Ecológica, desenvolvido pelo biólogo dinamarquês Carl G. J. Petersen (1896), conhecido como "Método de Petersen", é o método de captura-recaptura mais simples para se estimar o tamanho de uma população.

O método de captura-recaptura simples (Método de Petersen) consiste primeiramente na seleção de uma amostra aleatória sem reposição de tamanho  $n_1$  da população.

Em seguida os animais capturados são marcados, devolvidos à população e após um certo período de tempo é selecionada uma segunda amostra aleatória sem reposição de tamanho  $n_2$  da população. Observando o número  $m$  de animais marcados na segunda amostra podemos obter uma estimativa  $\hat{N}$  para o tamanho populacional  $N$ , igualando as razões entre o número de animais marcados na população antes da seleção da segunda amostra e o tamanho da população,  $\frac{n_1}{N}$ , e entre o número de animais marcados na segunda amostra e o tamanho da segunda amostra,  $\frac{m}{n_2}$ . Então, da igualdade  $\frac{n_1}{N} = \frac{m}{n_2}$  segue que tal estimativa é dada por

$$\hat{N} = \frac{n_1 n_2}{m}. \quad (2.1)$$

Na literatura, o estimador  $\hat{N}$  é conhecido como estimador de Petersen de  $N$  (Seber, 1982). Tal metodologia já havia sido utilizada anteriormente por Laplace em 1786 para estimar o tamanho da população da França (Seber, 1982) e também por outros autores como Frederick Lincoln (1930), um dos primeiros pesquisadores, no século XX, a utilizar o método de captura-recaptura. Somente a partir dos anos 50 é que surgiram os modelos mais sofisticados e complexos que conhecemos atualmente. Contudo, quando não observarmos nenhum animal marcado durante o processo, ou seja, quando  $m$  assume o valor zero,  $\hat{N}$  é infinito. No entanto há outros estimadores que contornam esse problema conforme mostramos a seguir.

## 2.3 Outros estimadores para captura-recaptura simples

No caso de captura-recaptura em apenas dois estágios (simples), o estimador mais comum é o de Petersen (1896). Mas também podemos destacar mais dois estimadores muito importantes encontrados na literatura:

### (1). Estimador de Chapman (1951):

$$\hat{N} = \frac{(n_2 + 1)(n_1 + 1)}{(m + 1)} - 1. \quad (2.2)$$

### (2). Estimador de Bailey (1951):

$$\hat{N} = \frac{n_2(n_1 + 1)}{(m + 1)}. \quad (2.3)$$

Nos dois casos acima  $m$  representa o número observado de animais recapturados (marcados) entre as amostras  $n_1$  e  $n_2$  respectivamente. É fácil observar que à medida que o número de elementos novos cresce o valor de  $N$  estimado também cresce. Portanto, quanto maior o número de recapturados menor é a estimativa do valor real de  $N$ .

Podemos observar que, ao contrário do estimador de Petersen, o estimador de Chapman (1951) contorna o problema quando  $m$  assume valor zero, fornecendo estimativas finitas para  $N$ . Neste caso o valor máximo que  $\hat{N}$  assume é:

$$\hat{N} = [(n_2 + 1)(n_1 + 1) - 1] < \infty.$$

E no caso do estimador de Bailey (1951), o valor máximo que  $\hat{N}$  assume é:

$$\hat{N} = [n_2(n_1 + 1)] < \infty.$$

## 2.4 Captura-recaptura múltipla

O método de Petersen foi estendido por Schnabel (1938) para uma série de  $s$  amostras ( $s > 2$ ) cujos tamanhos são dados pelo vetor  $(n_1, n_2, \dots, n_s)$ . Neste caso, a estimativa de  $N$  é dada por:

$$\hat{N} = \frac{\sum_{j=2}^s n_j M_j}{\sum_{j=2}^s m_j}, \quad (2.4)$$

onde

$n_j$  : é o tamanho da  $j$ -ésima amostra,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

$m_j$  : é o número de elementos marcados na  $j$ -ésima amostra,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

$M_j$  : é o número de elementos marcados na população anterior a  $j$ -ésima amostra,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Podemos notar que para  $s = 2$ , o estimador dado em (2.4) se resume no estimador

de Petersen:

$$\hat{N} = \frac{n_2 M_2}{m_2} = \frac{n_2 n_1}{m_2}.$$

A literatura sugere uma variedade de modelos teóricos baseados em amostragem múltipla para a estimação do tamanho de uma população fechada.

Para Seber (1982), os mais robustos e proveitosos para a Ecologia são: o método original de Schnabel (1938), o método de regressão de Schumacher e Eschmeyer (1943) e o método de Darroch (1958).

Para o caso de captura-recaptura múltipla, podemos ter um único estágio de marcação (ver por exemplo Shimizu, 2002), ou seja, somente a primeira amostra de tamanho  $n_1$  é marcada, depois conta-se o número de animais marcados nas demais amostragens. Podemos notar que se tivermos somente duas épocas ( $n_1$  e  $n_2$ ) esse método se resume no método de captura-recaptura simples.

Temos também o método de captura-recaptura múltipla em que há vários estágios de marcação (ver por exemplo Castledine, 1981). O procedimento de amostragem envolve selecionar uma amostra aleatória de tamanho  $n_1$  de uma população de animais marcando-os e devolvendo-os à população. Após um certo período de tempo seleciona-se uma segunda amostra de tamanho  $n_2$  e conta-se o número de animais marcados e marca-se os animais não marcados, devolvendo-os à população. Após um certo período de tempo seleciona-se uma terceira amostra de tamanho  $n_3$  e conta-se o número de animais marcados, marca-se os animais não marcados e assim por diante. Esse processo é realizado  $s$  vezes ( $s > 2$ ). Quando temos  $s = 2$  épocas de amostragem, o método se reduz ao método de captura-recaptura simples.

As técnicas de captura-recaptura podem ser usadas para populações fechadas ou abertas. Uma *população fechada* é aquela que não muda seu tamanho durante o período de estudo, ou seja, aquela cujos efeitos de nascimento, mortalidade e migração não são considerados (Comack, 1992). Uma *população aberta* é aquela que durante a realização do experimento se altera em tamanho e em composição por ocorrência de nascimentos, mortes e migrações. Para o estudo de populações abertas, vários outros autores destacaram-se, entre os mais citados estão Jolly e Seber (1965), Pollock (1991) e Schwarz e Arnason (1996).

Para populações abertas é necessário incorporar no modelo parâmetros que descrevam os processos de nascimento, morte ou migração que podem ocorrer durante o período de coleta de dados. Alguns modelos para populações abertas são: Jolly-Seber que deriva de dois trabalhos publicados independentemente por Jolly (1965) e Seber (1965) e o modelo de Parker (1955). Não vamos entrar em detalhes em relação a estes modelos. Maiores detalhes podem ser obtidos em Abuabara e Petrere Jr. (1997).

Além da estimação pontual, é possível também construir-se intervalos de confiança para o valor verdadeiro de  $N$ . Uma forma simplista é aquela que utiliza a distribuição normal como uma aproximação para a construção dos intervalos de confiança. No entanto, metodologias mais precisas estão implementadas em softwares específicos para a estimação de tamanhos populacionais via modelos probabilísticos clássicos. Particularmente, o software **Capture** (Rexstad e Burnham, 1991; Otis *et al.*, 1978) tem sido muito utilizado por conter todos os estimadores usuais implementados para dois ou mais estágios de captura. Este software é de fácil utilização, funciona na forma de menu e está escrito na linguagem Fortran.

Há também um programa de Captura-Recaptura (Software) desenvolvido por Silva *et al.* (1998) do departamento de estatística da UFMG. Porém, todas as programações desenvolvidas para o estudo de simulação estocástica via **Monte Carlo Markov Chain (MCMC)** deste trabalho foram implementadas no Software **R** cuja convergência dos algoritmos *Gibbs Sampling* ("Amostrador de Gibbs") e Metropolis Hastings foi monitorada pelo pacote **CODA - Convergence Diagnostics and Output Analysis Software for Gibbs Sampling Output** (Best *et al.* 1995). Mais detalhes serão vistos no Capítulo 4 quando adotaremos o procedimento bayesiano para o modelo.

## 2.5 Algumas aplicações da captura-recaptura

### 2.5.1 Estudos sociais e epidemiológicos

A maior parte das aplicações do método de captura-recaptura diz respeito à inferência sobre populações animais (Seber (1986, 1992), Boswell *et al.* (1988), Chandrasekan *et al.* (1949), Pollock (1974, 1991), Pollock *et al.* (1983, 1984), Raftery *et al.* (1998), Beverton *et al.* (1957)). No entanto, mais recentemente, esta metodologia passou

a ser utilizada em estudos sociais e epidemiológicos com o objetivo de estimar tamanhos de populações humanas de difícil acesso. Algumas referências interessantes são Wittes (1974), Mastro *et al.* (1994), McKeganey *et al.* (1992), LaPorte *et al.* (1992, 1995), Bernillon *et al.* (2000), Ismail *et al.* (2000).

A utilização da metodologia de captura-recaptura para a implantação de sistemas rotineiros para a vigilância de doenças é certamente uma das aplicações mais interessantes da técnica, embora também seja a de mais difícil implementação. Para que um sistema possa ser implantado a um custo que viabilize a sua manutenção, é necessário que estejam disponíveis fontes de dados em saúde diversificadas que permitam cobrir diferentes segmentos da população. Estas fontes devem apresentar os seguintes atributos: possibilitar a captação e processamento ágil dos dados, contemplar informações sobre o nome e endereço de residência dos pacientes e apresentar informações válidas.

A utilização da metodologia de captura-recaptura no âmbito da epidemiologia ainda é bastante recente, e a maioria dos estudos citados a seguir aplicaram a metodologia para a avaliação da cobertura de sistemas de registros e refinamento das estimativas de incidência e prevalência de doenças em estudos pontuais. Uma das poucas experiências de aplicação da técnica para a vigilância rotineira de uma doença envolve o projeto mundial para a avaliação do *diabetes mellitus insulino-dependente* (Green *et al.* (1992), IWGDMF (1995b)). Papoz *et al.* (1996) alertam para a dificuldade da utilização desta metodologia em países em desenvolvimento em função da baixa disponibilidade de sistemas de informação em saúde.

Nos últimos anos, porém, pode ser observado um crescimento da difusão da tecnologia de informática em nosso país, o que tornou possível o acesso ágil a bases de dados com informações variadas e desagregadas sobre mortalidade, internações hospitalares, registro de nascidos vivos, entre outras. Tais bancos de dados representam fontes importantes que podem ser empregadas rotineiramente na vigilância de doenças.

A idéia de estimar o tamanho de uma população com uma determinada característica (por exemplo, presença de doença) no lugar de enumerar todos os indivíduos que a compõem, não é estranha aos epidemiologistas. Na realidade, a extrapolação de resultados para a população fundamentada na observação de uma amostra de indivíduos é amplamente empregada na pesquisa epidemiológica, sendo a base dos inquéritos epi-

demiológicos desenvolvidos para a estimativa da prevalência de doenças na população. LaPorte (1992) fez um estudo da incidência de infarto do miocárdio aplicando as técnicas de captura-recaptura, porém, LaPorte (1993, 1994) salienta que estes estudos são caros, demorados e cobrem áreas geográficas reduzidas, fazendo com que a sua aplicação para o planejamento e avaliação dos serviços e ações de Saúde Pública seja limitada.

Listas de doenças de notificação compulsória, estatísticas hospitalares e de outros serviços de saúde, registro de óbitos, entre outros, são fontes de dados sobre morbidade usualmente disponíveis. A utilização conjunta de duas ou mais destas fontes e a aplicação da metodologia de captura-recaptura são uma alternativa barata e efetiva para o monitoramento de doenças na população.

Nas aplicações em epidemiologia, cada lista (fonte de morbidade) é considerada uma amostra aleatória simples da população alvo (Wittes e Sidel, 1968). "Ser capturado por uma amostra" seria substituído por "estar registrado em uma lista" (IWGD MF, 1995a). Vários autores presentes na literatura apresentam trabalhos com o interesse em estimar o número de elementos não-observáveis em uma população ou, equivalentemente, estimar o tamanho populacional, utilizando múltiplas listas ou ocasiões amostrais com estrutura de dependência através de modelos log-lineares. Cada elemento da lista deve ser identificado univocamente ("marca") de maneira a permitir o conhecimento do número de indivíduos que aparece simultaneamente em mais de uma lista (relacionamento de registros). Este identificador geralmente é formado com base na combinação de dois ou mais atributos tais como: nome, sobrenome, data de nascimento, endereço, etc. Ao contrário do observado nas aplicações em Ecologia, não existe uma ordenação temporal das amostras (Hook (1992), Hook e Regal (1993, 1995)).

As aplicações da metodologia de captura-recaptura na área da epidemiologia envolvem a vigilância em Saúde Pública, a avaliação da cobertura de registros (por exemplo, registros de nascidos vivos), o refinamento de estimativas de incidência e prevalência e a derivação de valores plausíveis para os limites superior e inferior das estimativas, nas situações em que estimativas pontuais precisas não possam ser obtidas (Hook e Regal, 1995).

As limitações e as soluções propostas do método de captura-recaptura aplicado a epidemiologia pode ser vista em IWGD MF (1995a), Hook e Regal (1995), Hook *et al.*

(1980), LaPorte (1994), Camargo Jr. e Coeli (1998), White *et al.* (1982), Wittes *et al.* (1974), Fienberg (1972), Hilsenbeck *et al.* (1992), McGilchrist *et al.* (1996) e Robles *et al.* (1987).

A seguir abordamos brevemente algumas aplicações recentes do método de captura-recaptura em estudos sociais e epidemiológicos:

**Estudos populacionais:** Em alguns países o censo populacional, registros de nascimentos e de óbitos conseguem contar a maioria da população, mas não são completos. O método de captura-recaptura, por suas características, permite fazer estimativas mais precisas da população (Wolter (1991), Sekar e Deming (1949)).

**Incidência e prevalência de doenças comuns ou raras:** As estimativas de prevalência e incidência de doenças têm derivado da combinação de informações de várias fontes onde se somam os casos não duplicados. Quando a condição estudada tem alta prevalência na comunidade, a estimativa de prevalência é feita através de uma amostra aleatória (Almeida-Filho *et al.* 1992). A menos que a condição tenha realmente uma alta prevalência, o tamanho da amostra aleatória precisa ser proibitivamente grande o que torna o estudo caro, demorado e ineficaz por causa da proporção pequena de casos em relação aos não-casos. O método de captura e recaptura permite fazer estimativas corretas de incidência e prevalência, mesmo que sejam usados dados provenientes de fontes incompletas. Pode ser usado, portanto, em situações onde não é possível conhecer o número exato de casos. Uma grande variedade de doença tem sido estudada utilizando este método, por exemplo: estimativa da fidedignidade dos registros de casos de câncer (Robles *et al.* 1988), a incidência de infarto do miocárdio (LaPorte *et al.*, 1992), a prevalência de espinha bífida (Hook *et al.*, 1980) e "lábio leporino" (Chapman, 1983), incidência de doenças do tecido conjuntivo (McCarty, 1992 e 1993), a incidência de diabetes em crianças (WHO, 1990) e a incidência de rubéola congênita (Cochi *et al.*, 1989).

**Populações esquivas e difíceis de encontrar:** Algumas populações são difíceis de estudar pois não são encontradas nos serviços hospitalares, ou têm altas percentagens de migração, ou o comportamento a ser estudado é estigmatizado pela sociedade ou ilegal. Nestas, o método captura e recaptura tem sido usado com sucesso, por exemplo: o tamanho da população dos sem tetos em Londres (Fisher *et al.*, 1994); a prevalência de usuário de drogas endovenosas em Glasgow, Escócia (Frischer *et al.*, 1991); o número

de prostitutas que trabalham na rua, também em Glasgow (McKeganey *et al.*, 1992); e a prevalência de infecção HIV no Bronx, Nova Iorque (Drucker e Vermund, 1989). Os usuários de drogas injetáveis constituem um exemplo de uma população difícil de encontrar devido ao caráter ilegal de suas atividades. Um dos problemas encontrados nos levantamentos populacionais é a omissão de informação para a elaboração do diagnóstico, isto porque, o indivíduo nesta situação teme ser identificado e, com isso, sofrer algum tipo de punição devido a característica ilegal desta atividade. Nesta situação, o método de captura e recaptura pode ser útil, uma vez que ele permite a utilização de fontes de casos onde o problema da indentificação não exista. Frischer (1991) e Frischer *et al.* (1992) estudaram a prevalência de usuários de drogas injetáveis, utilizando três fontes: serviços de tratamento de drogados, registro de teste de HIV na Escócia e registro de pessoas apreendidas pela polícia por uso de drogas. Para manter o sigilo no estudo, os detalhes de identificação dos pacientes não foram registrados, mas foi construído um algoritmo com as iniciais do nome do paciente, data do nascimento, sexo e, também, a primeira parte do número do código de endereçamento postal.

**Técnicas de investigação clínica:** O método de captura e recaptura pode ser utilizado para estimar o volume e a sobrevivência de células vermelhas usando o rádio-isotopo para marcá-las (Internacional Committee for Standardization in Hematology, 1980) e, também, pode ser usado para estimar o número de falsos negativos em procedimentos de rastreamento médico (Goldberg e Wittes (1978), Goldberg *et al.* (1980)). Mais recente foi usado para analisar proteínas e DNA (Morrissey *et al.* (1989), Sidow (1992), Sidow *et al.* (1994)).

**Vigilância de doenças não transmissíveis em população idosa:** Sistemas de vigilância baseados na utilização do método de captura-recaptura representam uma alternativa potencial para o monitoramento de doenças não transmissíveis em nosso meio. As estatísticas sobre morbidade na população idosa brasileira são escassas, o que em parte é explicado pelo número reduzido de trabalhos científicos na área da Terceira Idade (Veras e Aves, 1995). Podemos destacar Travassos-Veras (1992), Yazaki e Saad (1990) e Panzram (1987).

## 2.5.2 Aplicações em oceanografia

Em oceanografia podemos destacar o estudo dos organismos marinhos por meio de pesquisas quantitativas orientadas para o estudo da população (distribuição, abundância etc.), como por exemplo a metodologia de estudo e coleta do nécton (originária do grego “nektós”, “que nada”), ou seja, estes organismos podem nadar com os próprios meios e com capacidade suficiente para torná-los independentes dos movimentos de água e aptos a realizarem migrações em larga escala, ou ainda amostragem dos Invertebrados Bentônicos Marinhos Móveis (ver Lincoln *et al.* (1979), Omori *et al.* (1984), Harris *et al.* (2000)). Comparando-se com o plâncton e o bentos, o nécton não constitui um grupo muito diverso e, considerando a totalidade dos organismos, corresponde a apenas cerca de 0,1% da biomassa viva nos oceanos.

Mas, devido ao tamanho e a visibilidade, o nécton se constitui no grupo mais familiar dentre os vários componentes da comunidade biológica marinha. Embora alguns mamíferos, répteis, aves e até alguns invertebrados (moluscos cefalópodes – lulas e sépias), sejam considerados nectônicos, os peixes constituem o grupo mais abundante e, portanto, são os mais estudados.

Em parte devido à exploração da pesca e à necessidade em se obter informações acerca dos estoques, vários métodos foram desenvolvidos desde o início do século passado, tanto para os estudos biológicos das espécies, como para estudos relacionados com a dinâmica de populações, identificação dos estoques, estimativa de abundância, etc. Essas pesquisas constituem vastos campos de estudo, com inúmeras metodologias de coleta e análise específicas (ver Gulland, 1973, 1975).

Nos estudos biológicos os seguintes aspectos são considerados: genética, sistemática, taxonomia, eletroforese, análise cromossômica, histologia, bioenergética, fisiologia, toxicologia aquática, reprodução, comportamento, autoecologia e ecologia de comunidades. Em termos de estudos ecológicos, podemos considerar a autoecologia que inclui a distribuição, abundância e migração das espécies, enquanto que a ecologia de comunidades inclui a diversidade, a interação entre as espécies e a análise da trama trófica.

Para os estudos relacionados com a dinâmica de população, são importantes os seguintes parâmetros: crescimento e determinação de idade, mortalidade (natural e por pesca) e recrutamento. Dinâmica de população pode ser definido como sendo o estudo de

uma população como uma unidade vivente, em termos de balanço do que entra e o que sai desta população. A entrada se dá através do crescimento somático e recrutamento de novos indivíduos para a população, enquanto que a saída se refere à perda devido a mortalidade que pode ser natural ou por pesca.

Outro dado importante a ser obtido é a estimativa de abundância ou biomassa da população. Essa estimativa é feita através de modelos matemáticos que requerem, além das informações sobre os processos biológicos, dados sobre o esforço de pesca e sobre o desembarque. Através deles pode-se fazer previsões sobre o desempenho da captura e o impacto de mudanças no esforço de pesca (no de barcos, tipo de redes, etc.) visando principalmente subsidiar as medidas de gerenciamento no sentido de conservar os estoques pesqueiros.

A abundância pode ser considerada em termos relativos ou absolutos. O índice de abundância relativa mais utilizada é a Captura Por Unidade de Esforço (CPUE). O princípio básico do uso desse índice é que as variações no CPUE refletem as variações na abundância no estoque de peixes. Através da observação das variações deste índice em diferentes profundidades, áreas ou épocas, pode-se inferir sobre as mudanças na abundância absoluta do estoque pesqueiro. A CPUE pode ser tomada de diversas formas, dependendo do tipo de pescaria e das espécies capturadas. Alguns exemplos são: peso ou número de indivíduos capturados por anzol por hora; por armadilha por dia; ou por hora de arrasto. A abundância absoluta refere-se ao número real de indivíduos do estoque. Na maioria dos casos este valor é estimado através de métodos de avaliação direta como o senso visual e, principalmente através de avaliação indireta.

Os principais métodos de avaliação indireta descritos são: Levantamento hidroacústico; Marcação e recaptura; Método de análise de dados estatísticos (captura e esforço); Estimativa do estoque desovante através do ictioplâncton; Método da área varrida (Técnica da pesca exploratória). As amostras de peixes para os estudos biológicos, assim como informações sobre a estatística de pesca são geralmente obtidas de duas formas: da pesca comercial (industrial ou artesanal) ou através de pesca experimental realizada por pesquisadores. O primeiro tipo apresenta como vantagem o baixo custo e a abundância de dados, porém as informações fornecidas pelos pescadores são, as vezes, pouco confiáveis. A amostragem a partir de pescas experimentais são confiáveis e existe a vantagem de

se poder coletar conjuntamente outros dados importantes para o estudo, como os dados hidrográficos.

Os dados mais importantes obtidos da pesca são os dados estatísticos de captura (quantidade, local, data etc.) e de esforço de pesca (tipo de aparelho, número de lances etc.), bem como os dados biológicos (frequência de comprimento, peso, idade etc.). As capturas são geralmente muito grandes para serem examinadas nas suas totalidades, de modo que é necessário separar alguns indivíduos para serem analisados, isto é, fazer subamostragens, o que exige um procedimento cuidadoso e adequado para assegurar uma amostra representativa.

### 2.5.3 Aplicação em dinâmica de frota de veículos

O método de captura-recaptura foi utilizado por Oliveira *et al.* (2004) para estimar a rotatividade (entrada e saída) da frota de veículos que estacionam no centro de Lavras-MG. O período estudado incluiu a última semana de agosto até a segunda semana de setembro de 2002, que coincidiu com as férias semestrais. Foram utilizados modelos generalizados Poisson (log-lineares), segundo apresentado por Cormack (1989). Tais modelos requerem registros de cada indivíduo e sua história de captura anterior, compondo grupos mutuamente exclusivos com a mesma história de captura. As placas dos veículos foram utilizadas em sua marcação. Não foi detectada qualquer fonte de interação significativa entre as recapturas, o que indica uma população fechada geográfica e demograficamente. Estimativas pontuais para o tamanho da frota apresentaram valor próximo de 6.000 veículos. No entanto, os intervalos de confiança foram muito amplos. Oliveira *et al.* (2004) sugeriram o uso de modelos mais parcimoniosos (de população fechada) resultando em estimativas mais precisas do tamanho da frota.

### 2.5.4 Modelagem de demografia de insetos

Tradicionalmente entomologistas usam o método *Jolly-Seber analytical method (JSAM)* para estimar os parâmetros demográficos pelo método de captura-recaptura, embora aproximações mais poderosas como os modelos lineares (CLM) tenham sido desenvolvidos e aplicados com sucesso em vertebrados.

Schtickzelle *et al.* (2003) usaram a metodologia de CLM para determinar os parâmetros demográficos da população adulta de Borboletas do Pântano de Fritillary (Lepidoptera Nymphalidae) e compararam com o método *Jolly-Seber analytical method (JSAM)*. Esta borboleta é umas espécies em extinção na Europa Ocidental porque seu hábitat é fortemente afetado pela mudança de paisagem. Schtickzelle *et al.* (2003) trabalharam parâmetros populacionais tais como taxa de recrutamento, sobrevivência, capturabilidade, sexo e tamanho da população. O estudo foi feito com dados reais de captura no período de onze anos (1992 à 2002).

Schtickzelle *et al.* (2003) mostraram que os modelos CLM são ferramentas mais poderosas pois permitem uma ótima exploração dos dados de captura-recaptura. Este método permite a identificação de variações padrão de parâmetros demográficos considerando características de vida e histórico de captura. Além disso dá estimativas mais precisas destes parâmetros populacionais e a análise da população se torna mais viável.

### **2.5.5 Estimação da taxa de sobrevivência de aves marinhas pré-reprodutivas com maturidade tardia**

Muitas espécies de aves marinhas exibem maturidade tardia e não regressam às suas colônias natais para reprodução até passar vários anos. Com frequência estudos são conduzidos em tais colônias utilizando o método de captura-recaptura. Porém, devido a ausência dessas aves que foram marcadas quando idade pré-adulta mas que não retornam às suas colônias por vários anos, os dados obtidos nestes grupos não se ajustam devidamente aos modelos existentes de captura-recaptura. Nichols *et al.* (1990) apresentam um método para estimar a taxa de sobrevivência de aves marinhas pré-reprodutivas que apresentam maturidade tardia baseados em dados obtidos de uma colônia de *Sterna dougallii* na ilha Falkner, Connecticut. Tal método ajusta bem os dados e enfatiza a importância de se ajustar o método de captura-recaptura às situações específicas.

# Capítulo 3

## Método de captura-recaptura múltipla para uma população fechada

### 3.1 Introdução

Conforme visto no capítulo anterior, temos algumas formas variadas para o método de captura-recaptura múltipla no que diz respeito aos estágios de marcação. Temos o método da captura-recaptura múltipla com um único estágio de marcação (ver por exemplo Shimizu (2002), Ananda (1997)) e com vários estágios de marcação (ver por exemplo Castledine (1981), Wang (2002)). Neste trabalho discutiremos somente o caso em que temos o número de estágios de marcação igual ao número de amostragens, isto é, para cada amostra aleatória sem reposição haverá um estágio de marcação conforme modelo utilizado por Castledine (1981).

### 3.2 Descrição do problema

A seguir mostraremos o problema da estimação do tamanho populacional pelo método de captura-recaptura múltipla. Esquemáticamente temos:

**Tabela (3.1).** Esquema do método de captura-recaptura múltipla.

População animal fechada	Amostragens (Épocas de Captura)				
	1	2	3	...	$s$
1	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	...	$p_{1s}$
2	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$	...	$p_{2s}$
3	$p_{31}$	$p_{32}$	$p_{33}$	...	$p_{3s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$N$	$p_{N1}$	$p_{N2}$	$p_{N3}$	...	$p_{Ns}$

(3.1)

Onde  $p_{ij}$  é a probabilidade do  $i$ -ésimo animal,  $i = 1, 2, \dots, N$ , ser capturado na  $j$ -ésima amostra ( $j$ -ésima época de captura  $j = 1, 2, \dots, s$ ). Porém, não podemos falar em " $i$ -ésimo" animal já que não sabemos qual o valor de  $N$  pois queremos estimá-lo. Podemos observar que trata-se de um problema em estimar  $Ns + 1$  parâmetros. Por exemplo, se supuzermos uma população de tamanho  $N = 5000$  e fizermos o estudo em  $s = 8$  épocas de captura, teremos 40000 parâmetros mais a estimação de  $N$ , isto é 40001 parâmetros a serem estimados.

### Casos particulares:

- 1º Caso:**  $p_{ij} = p_i$  : A probabilidade de captura varia de acordo com o animal independentemente da época de captura, isto é, fixado um animal, ele tem a mesma probabilidade de ser capturado em qualquer uma das épocas de captura.
- 2º Caso:**  $p_{ij} = p_j$  : A probabilidade de captura varia de acordo com a época de captura independentemente do animal, isto é, fixada uma época de captura, todos os animais tem a mesma probabilidade de serem capturados (ver Castledine, 1981).
- 3º Caso:**  $p_{ij} = p$  : Esse é o caso mais simples dentro do método de captura-recaptura múltipla. A probabilidade de captura é constante, isto é, a probabilidade de captura é a mesma para todos os animais e para todas as épocas de captura.

### 3.3 Modelo estatístico e a função de verossimilhança

Nesta seção construímos o modelo estatístico e determinaremos a função de verossimilhança para o método de captura-recaptura com  $s$  estágios de marcação ( $s \geq 2$ ) proposto por Castledine (1981).

Adotaremos

$N$  : tamanho desconhecido da população,

$s$  : número de amostras extraídas (conhecido na literatura por épocas de captura),

$p_j$  : probabilidade de qualquer animal ser capturado na  $j$ -ésima amostra,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

$\mathbf{p}$  : é o vetor de probabilidades de captura dado por  $(p_1, p_2, \dots, p_s)$ .

$n_j$  : número de animais na  $j$ -ésima amostra,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

$m_j$  : número de animais marcados na  $j$ -ésima amostra,  $j = 1, 2, \dots, s$ , e

$M_j$  : número de animais marcados na população imediatamente antes da  $j$ -ésima amostra,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Podemos notar então que o esquema de amostragem do método de captura-recaptura múltipla é detalhado pela Tabela (3.2):

<b>Tabela (3.2).</b> Esquema de amostragem.			
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$
1	$n_1$	$m_1 = 0$	$M_1 = 0$
2	$n_2$	$m_2$	$M_2 = M_1 + n_1 - m_1 = n_1$
3	$n_3$	$m_3$	$M_3 = M_2 + n_2 - m_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$j + 1$	$n_{j+1}$	$m_{j+1}$	$M_{j+1} = M_j + n_j - m_j$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s$	$n_s$	$m_s$	$M_s = M_{s-1} + n_{s-1} - m_{s-1}$

(3.2)

Vamos supor que as seguintes condições são verificadas:

1. a população é fechada;
2. o número de animais marcados na primeira amostra (primeira época de captura) é zero, isto é,  $m_1 = 0$ ;

3. há inicialmente  $M_1 = 0$  animais marcados na população, isto é, não houve nenhum estudo antecessor na referida população fechada. No caso em que já houve algum estudo anterior, supõe-se que os animais perderam as marcas ou são marcas diferentes das marcas do estudo atual e, portanto, são desconsideradas;
4. em uma dada amostra (época de captura), todos os animais têm a mesma probabilidade de ser capturado, desconsiderando o histórico de captura do animal (se ele já foi capturado anteriormente). Esse é o caso particular em que  $p_{ij} = p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , onde  $s$  ( $s \geq 2$ ) é o número de épocas de captura. Em outras palavras, probabilidade de captura varia de acordo com a época de captura independentemente do animal, isto é, dada uma época de captura fixada, todos os animais tem a mesma probabilidade de serem capturados;
5. os animais comportam-se independentemente;
6. as marcas não afetam a capturabilidade do animal;
7. os animais não perdem suas marcas no intervalo de tempo entre as amostras;
8. todas as marcas recuperadas a partir da segunda amostra são registradas;
9. há independência entre as capturas dos animais em uma dada amostragem;
10. também assumimos independência entre as épocas de amostragem;

Logo,

$$\begin{aligned} & P(n_1, m_1; n_2, m_2; \dots; n_s, m_s \mid \mathbf{p}, N) \\ &= P(n_1, m_1 \mid p_1, N) \prod_{j=2}^s P(n_j, m_j \mid n_1, m_1; n_2, m_2; \dots; n_{j-1}, m_{j-1}; \mathbf{p}, N) \end{aligned}$$

Como  $m_1 = 0$  temos

$$\begin{aligned} &= \binom{N}{n_1} p_1^{n_1} (1-p_1)^{N-n_1} \times \\ &\quad \times \prod_{j=2}^s \binom{N-M_j}{n_j-m_j} p_j^{n_j-m_j} (1-p_j)^{N-M_j-n_j+m_j} \binom{N}{m_j} p_j^{m_j} (1-p_j)^{M_j-m_j} \\ &= \binom{N}{n_1} p_1^{n_1} (1-p_1)^{N-n_1} \prod_{j=2}^s \binom{M_j}{m_j} \binom{N-M_j}{n_j-m_j} p_j^{n_j} (1-p_j)^{N-n_j} \\ &= \prod_{j=2}^s \binom{M_j}{m_j} \prod_{j=1}^s \binom{N-M_j}{n_j-m_j} p_j^{n_j} (1-p_j)^{N-n_j}, \end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^s \binom{N-M_j}{n_j-m_j} \\ &= \frac{N!}{(N-n_1)!n_1!} \times \frac{(N-M_2)!}{(N-M_2-n_2+m_2)!(n_2-m_2)!} \times \\ &\quad \times \frac{(N-M_3)!}{(N-M_3-n_3+m_3)!(n_3-m_3)!} \cdots \frac{(N-M_{s-1})!}{(N-M_{s-1}-n_{s-1}+m_{s-1})!(n_{s-1}-m_{s-1})!} \times \\ &\quad \times \frac{(N-M_s)!}{(N-M_s-n_s+m_s)!(n_s-m_s)!} \\ &= \left( \prod_{j=1}^s \frac{1}{(n_j-m_j)!} \right) \frac{N!}{(N-M_2)!} \times \frac{(N-M_2)!}{(N-M_3)!} \times \\ &\quad \times \frac{(N-M_3)!}{(N-M_4)!} \times \dots \times \frac{(N-M_{s-1})!}{(N-M_s)!} \times \frac{(N-M_s)!}{(N-r)!} \\ &= \left( \prod_{j=1}^s \frac{1}{(n_j-m_j)!} \right) \frac{N!}{(N-r)!}, \end{aligned}$$

$$\text{onde } r = n_1 + (n_2 - m_2) + (n_3 - m_3) + \dots + (n_s - m_s) = \sum_{j=1}^s n_j - \sum_{j=1}^s m_j,$$

temos

$$P(n_1, m_1; n_2, m_2; \dots; n_s, m_s \mid \mathbf{p}, N) = \frac{N!}{(N-r)!} \prod_{j=2}^s \binom{M_j}{m_j} \prod_{j=1}^s \frac{1}{(n_j - m_j)!} p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j}.$$

Assim, a função de verossimilhança é tal que

$$L(N, \mathbf{p} \mid D) = P(n_1, m_1; n_2, m_2; \dots; n_s, m_s \mid \mathbf{p}, N) \propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j}, \quad (3.3)$$

$$N \geq r, \text{ onde } r = \sum_{j=1}^s n_j - \sum_{j=1}^s m_j, \quad 0 \leq p_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Em particular, se  $p_j = p$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , então a função de verossimilhança dada em (3.3) é tal que

$$L(N, p \mid D) \propto \binom{N}{r} p^{\sum_{j=1}^s n_j} (1 - p)^{N - \sum_{j=1}^s n_j}, \quad N \geq r. \quad (3.4)$$

### 3.4 Estimativas de Máxima Verossimilhança

Nesta seção vamos apresentar as estimativas de máxima verossimilhança de  $N$  e  $\mathbf{p}$ , denotados por  $\hat{N}$  e  $\hat{\mathbf{p}}$  respectivamente. Tomando o logaritmo de  $L(N, \mathbf{p} \mid D)$ , temos

$$\begin{aligned} \ln L(N, \mathbf{p}) &= \ln \left[ \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j} \right] \\ &= \ln \binom{N}{r} + \ln \left[ \prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j} \right] \\ &= \ln \binom{N}{r} + \sum_{j=1}^s [n_j \ln p_j + (N - n_j) \ln (1 - p_j)], \end{aligned}$$

onde  $N \geq r$ ,  $0 < p_j < 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ . Logo,

$$\frac{\partial \ln L(N, \mathbf{p})}{\partial p_j} = \frac{n_j}{p_j} - \frac{N - n_j}{1 - p_j} = 0 \implies \frac{n_j}{p_j} = \frac{N - n_j}{1 - p_j} \implies \hat{p}_j = \frac{n_j}{\hat{N}}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Por outro lado, como  $\widehat{N}$  é aproximadamente igual a solução da equação  $L(N, \mathbf{p}) = L(N - 1, \mathbf{p})$ ,  $N \geq r + 1$ , temos

$$\begin{aligned} \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j} &= \binom{N - 1}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j - 1}, N \geq r + 1 \\ \implies \left( \frac{N}{N - r} \right) \prod_{j=1}^s (1 - p_j) &= 1, N \geq r + 1 \\ \implies \frac{N - r}{N} &= \prod_{j=1}^s (1 - p_j), N \geq r + 1 \\ \implies 1 - \frac{r}{N} &= \prod_{j=1}^s (1 - p_j), N \geq r + 1. \end{aligned}$$

Assim, a estimativa de máxima verossimilhança de  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$  é  $\widehat{\mathbf{p}} = (\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \dots, \widehat{p}_s)$  onde

$$\widehat{p}_j = \frac{n_j}{\widehat{N}}, j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.5)$$

E a estimativa de máxima verossimilhança de  $N$ ,  $\widehat{N}$ , é aproximadamente a solução da equação

$$1 - \frac{r}{N} = \prod_{j=1}^s (1 - p_j), N \geq r + 1. \quad (3.6)$$

### 3.4.1 Exemplos

A Tabela (3.7) mostra as estimativas de máxima verossimilhança para diferentes dados amostrais. Para o cálculo das E.M.V foi elaborado um algoritmo no Software R onde, através de iterações, o algoritmo pára no momento em que (3.6) e (3.5) são satisfeitos.

<b>Tabela (3.7).</b> E.MV. e estimativas <i>a posteriori</i> .			
$s$	$n_j$	$r$	$EMV$
2	$n_1 = 400$	900	2400
	$n_2 = 600$	980	12000
	$\sum n = 1000$	1000	$\infty$
3	$n_1 = 10$	80	80
	$n_2 = 50$	120	260
	$n_3 = 80$	130	520
	$\sum n = 140$	140	$\infty$
5	$n_1 = 260$	1200	1610
	$n_2 = 380$	1500	3120
	$n_3 = 500$	1800	12720
	$n_4 = 450$	1850	23630
	$n_5 = 320$	1900	143690
	$\sum n = 1910$	1910	$\infty$
7	$n_1 = 180$	1300	1400
	$n_2 = 290$	1700	2140
	$n_3 = 510$	2100	3480
	$n_4 = 550$	2600	8930
	$n_5 = 490$	2900	41080
	$n_6 = 360$	2950	93300
	$n_7 = 610$	2980	375280
	$\sum n = 2990$	2900	$\infty$

(3.7)

Observamos na Tabela (3.7) que as estimativas *a posteriori* de  $N$  são finitas com exceção onde temos  $s = 2$  e  $r = \sum_{j=1}^s n_j$ . Quando a estatística  $r$  está próxima  $\sum_{j=1}^s n_j$ , ou seja, quando  $\sum_{j=1}^s m_j \cong 0$ , temos um considerável aumento nas estimativas de máxima verossimilhança de  $N$ .

# Capítulo 4

## O modelo Bayesiano de captura-recaptura

### 4.1 Introdução

Sob o enfoque da inferência clássica, a estimativa do tamanho populacional pelo método de captura-recaptura não existe se não for observado nenhum animal marcado durante todo o processo de amostragem. Por exemplo, a estimativa obtida pelo estimador de Petersen dado em (2.1) não existe quando  $m = 0$ . Em contrapartida, o estimador de Bailey (1951) dado em (2.3) tende a zero quando  $m$  tende a zero. Neste capítulo a inferência sobre  $N$  será tratada sob o enfoque Bayesiano, ou seja, será utilizado o conhecimento *a priori* tanto do tamanho populacional  $N$ , como do vetor de probabilidades  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$  de captura dos animais, onde  $s$  ( $s \geq 2$ ) é o número de épocas de amostragens. Métodos bayesianos podem ser preferíveis uma vez que informações prévias do pesquisador são incorporadas ao modelo, melhorando assim as estimativas. Estas informações prévias são expressas através de distribuições *a priori* dos parâmetros do modelo e quando nenhuma informação for disponível podemos utilizar distribuições *a priori* não informativas para  $\mathbf{p}$  e para  $N$ .

## 4.2 Distribuições *a priori* dos parâmetros

O conhecimento sobre as densidades *a priori* dos parâmetros pode vir de diversas fontes.

- (a). Primeiro, podemos ter a informação direta sobre o tamanho da população através, por exemplo, de um exame mais detalhado realizado na mesma localização, ou o conhecimento do tamanho provável da população.
- (b). Segundo, podemos ter uma idéia dos valores prováveis das probabilidades de captura obtidos dos exames precedentes em espécies similares usando métodos similares da captura.
- (c). Terceiro, podemos ter o conhecimento dos parâmetros em exames precedentes dando a informação prévia sobre o tamanho populacional  $N$  ou do vetor de probabilidades  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ .

Em muitos casos práticos, nosso conhecimento *a priori* sobre  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$  é tal que  $p_i = p$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , ou seja, a probabilidade de um animal fixado ser capturado é igual para cada um dos  $s$  estágios de amostragem. Isto não será apropriado se, para cada amostra, for aplicado diferentes esforços em sua captura ou ainda quando tivermos covariáveis presentes na probabilidade de captura, como é o caso do Capítulo 6 deste trabalho.

### 4.2.1 Critérios e metodologias abordadas por diferentes autores nos últimos anos

As diferentes metodologias clássicas e bayesianas para estimar o tamanho populacional bem como os critérios utilizados para a escolha da distribuição *a priori* para o processo de captura-recaptura tem sido abordado nos trabalhos científicos por diversos autores, dentre eles podemos destacar:

Wang (2002) fez uma revisão ampla de vários modelos que considera a variação das probabilidades de capturas levando em conta a heterogeneidade das respostas do

animal, da época de captura e de ambos. Tal estudo de captura-recaptura foi feito em população fechada através da análise bayesiana.

Shimizu (2002) considerou o problema da estimação do tamanho populacional animal fechada por utilizar o método de captura-recaptura múltipla com um único estágio de marcação. Para alguns casos específicos, tal método é preferível ao método de captura-recaptura múltipla usual, como por exemplo situações onde os animais tem habitat de difícil acesso, ou quando se consome muito tempo em cada uma das épocas de amostragem (ver por exemplo Ananda (1997)).

Fienberg *et al.* (1999) apresentaram várias metodologias clássicas e bayesianas para estimar o tamanho de populações utilizando múltiplas listas (ocasiões amostrais) em modelos com estruturas log-lineares (Rash, 1960), considerando os efeitos dos elementos desta população e efeitos dessas listas. Também abordam ainda técnicas sob o ponto de vista dos modelos bayesianos hierárquicos via MCMC (simulações por Monte Carlo via Cadeias de Markov).

Madigan e York (1997) propuseram uma metodologia para a estimação do tamanho de uma população fechada administrando múltiplas amostras incompletas, permitindo uma variedade de estruturas de dependência para as médias dessas amostras e o uso de covariáveis no modelo (ver da Silva (1999), da Silva *et al.* (1999, 2000)).

Dupuis (1995) propôs um estimador bayesiano obtido via algoritmo Gibbs Sampling para a probabilidade de sobrevivência em populações abertas.

Garthwaite *et al.* (1995) sugeriram um critério para a escolha de uma distribuição *a priori* não-informativa para o modelo bayesiano baseados na idéia de que se conhece o tamanho das amostras.

George e Robert (1992) introduziram um procedimento usando o algoritmo Gibbs Sampling na obtenção das estimativas do modelo bayesiano para os modelos de captura-recaptura.

Smith (1991) abordou o uso de métodos como "empirical bayes" (obtenção dos hiperparâmetros da distribuição *a priori* através dos dados), fundamentado nas inferências sobre o tamanho populacional  $N$ .

Bolfarine *et al.* (1972) pesquisaram várias formas alternativas na obtenção das estimativas de  $N$  em amostras de populações fechadas, fundamentando-se na máxima

verossimilhança, verossimilhança perfilada e verossimilhança perfilada ajustada ortogonalmente.

Sanathanan (1972) sugeriu um modelo clássico baseado no **M.M.I.** (*Modelo Multinomial Incompleto*). Tal modelo clássico consiste na fatoração da função de máxima verossimilhança global em duas partes, sendo que uma delas é dependente exclusivamente de um dos parâmetros presentes no modelo facilitando assim a estimação deste e dos demais parâmetros de interesse posteriormente (para maiores detalhes ver Bolsoni, 2002). Em outros trabalhos, Sanathanan (1972, 1973) apresenta alguns modelos estatísticos que se aplicam ao problema dos scanners aplicando o modelo multinomial incompleto.

Castledine (1981) propôs um método bayesiano para a inferência do tamanho populacional  $N$  usando uma aproximação da distribuição *a posteriori*.

Durante todo este trabalho será considerado dois casos para a distribuição *a priori* da probabilidade de captura.

**Suposição 1.** A probabilidade de captura para um animal fixado é a mesma em cada amostra,  $p_j = p$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , o que implica que as amostras foram extraídas sob circunstâncias idênticas através de métodos muito bem controlados.

**Suposição 2.** A probabilidade de captura são independentes e identicamente distribuídas com uma distribuição conhecida, o que implica que temos uma boa idéia da distribuição amostral da probabilidade de captura.

É natural usar a distribuição *a priori* Beta para a probabilidade de captura, pois o suporte da distribuição de probabilidades está no intervalo  $[0, 1]$ . Um parâmetro  $\theta$  tem distribuição *a priori* Beta com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  se sua densidade é dada por:

$$\pi(\theta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}, \text{ com } 0 < \theta < 1, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (4.1)$$

$$\text{onde } B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \text{ e } \Gamma(\cdot) \text{ é a função Gama.}$$

Deste modo a distribuição *a priori* para a probabilidade de captura da *i*-ésima época é dada por:

$$\pi(p_j) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} p_j^{\alpha-1} (1-p_j)^{\beta-1}, \quad 0 < p_j < 1, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad \text{com}$$

$$E(p_j) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{e} \quad \text{VAR}(p_j) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Para o caso do tamanho populacional  $N$  podemos usar uma distribuição informativa de Poisson truncada em zero com parâmetro  $\lambda$  conhecido ( $\lambda > 0$ ). Se não for possível nenhuma informação prévia de  $N$ , podemos usar a distribuição não informativa de Jeffreys, isto é  $\pi(N) = N^{-1}$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , ou ainda  $\pi(N) = 1$ ,  $N = 1, 2, \dots$ .

Podemos ainda usar uma estrutura hierárquica para  $\pi(N)$ , por exemplo  $N$  tem distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda$ , que por sua vez tem distribuição Gama com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

### 4.3 Distribuição *a posteriori*

Supomos nesta Seção que as probabilidades de captura sejam, *a priori*, independentes e identicamente distribuídas com  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ , tendo distribuição Beta com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  conhecidos ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ) e que a distribuição *a priori* conjunta de  $N$  e  $\mathbf{p}$  é dada por:

$$\pi(N, \mathbf{p}) = \pi(N) \pi(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^s \frac{1}{B(\alpha, \beta)} p_j^{\alpha-1} (1-p_j)^{\beta-1} \pi(N). \quad (4.2)$$

Temos a função de verossimilhança dada por

$$L(N, \mathbf{p}) \propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1-p_j)^{N-n_j}. \quad (4.3)$$

Como a distribuição *a posteriori* conjunta é proporcional ao produto da distribuição *a priori* conjunta dada por (4.2) com a função de verossimilhança (4.3), então temos que a distribuição *a posteriori* conjunta de  $\mathbf{p}$  e  $N$  é descrita como

$$\pi(N, \mathbf{p} \mid D) \propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j + \alpha - 1} (1-p_j)^{N-n_j + \beta - 1} \pi(N), \quad N \geq r. \quad (4.4)$$

A distribuição *a posteriori* marginal de  $N$  pode então ser obtida integrando a distribuição *a posteriori* conjunta (4.4) em relação a  $p_1, p_2, \dots, p_s$ , isto é,

$$\begin{aligned} \pi(N \mid D) &= \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \pi(N, \mathbf{p} \mid D) dp_1 dp_2 \dots dp_s \\ &\propto \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j + \alpha - 1} (1 - p_j)^{N - n_j + \beta - 1} \pi(N) \\ &= \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s B(n_j + \alpha; N - n_j + \beta) \pi(N) \\ &= \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s \frac{\Gamma(n_j + \alpha) \Gamma(N - n_j + \beta)}{\Gamma(N + \alpha + \beta)} \pi(N). \end{aligned}$$

Deste modo obtemos a distribuição marginal de  $N$

$$\pi(N \mid D) \propto \frac{N!}{(N - r)!} \prod_{j=1}^s \frac{\Gamma(N - n_j + \beta)}{\Gamma(N + \alpha + \beta)} \pi(N), N \geq r. \quad (4.5)$$

Em particular, se  $\alpha$  e  $\beta$  forem inteiros positivos temos que (4.5) é dado por:

$$\pi(N \mid D) \propto \frac{N!}{(N - r)!} \prod_{j=1}^s \frac{(N - n_j + \beta - 1)!}{(N + \alpha + \beta - 1)!} \pi(N), N \geq r. \quad (4.6)$$

### 4.3.1 Distribuições *a priori* não-informativas para o tamanho populacional

A seguir determinaremos as distribuições condicionais através de diferentes distribuições *a priori* para o tamanho populacional. Todas as provas da obtenção destas distribuições condicionais bem como a prova de existência da distribuição *a posteriori* conjunta podem ser consultadas de forma mais completa em Zacharias (2000). Podemos observar a seguir que a distribuição condicional para o caso do tamanho populacional  $N$  é sempre uma distribuição binomial negativa.

**Teorema 4.3.1** *Se as distribuições a priori de  $p_j$ ,  $0 < p_j < 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  forem Beta com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e a distribuição a priori de  $N$  for não informativa do tipo*

$\pi(N) = 1, N = 1, 2, \dots$ , então

(1).

$$\pi(N | \mathbf{p}, D) = \binom{N}{r} \left(1 - \prod_{j=1}^s (1 - p_j)\right)^{r+1} \left(\prod_{j=1}^s (1 - p_j)\right)^{N-r}, N \geq r \quad (4.7)$$

(2).

$$\pi(\mathbf{p} | N, D) = \prod_{j=1}^s \frac{1}{\text{Beta}(n_j + \alpha, N - n_j + \beta)} p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j}, \quad (4.8)$$

$$0 < p_j < 1, j = 1, 2, \dots, s.$$

**Prova (1).** Sabemos que

$$\begin{aligned} \pi(N | \mathbf{p}, D) &= \frac{\pi(N, \mathbf{p}, D)}{\pi(\mathbf{p}, D)} = \frac{\pi(N, \mathbf{p} | D)}{\pi(\mathbf{p} | D)} = \frac{\pi(N, \mathbf{p} | D)}{\sum_{M \geq r} \pi(M, \mathbf{p} | D)} \\ &= \frac{\binom{N}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j}}{\sum_{M \geq r} \binom{M}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{M - n_j}} = \frac{\binom{N}{r} \left(\prod_{j=1}^s (1 - p_j)\right)^N}{\sum_{M \geq r} \binom{M}{r} \left(\prod_{j=1}^s (1 - p_j)\right)^M}, N \geq r. \end{aligned}$$

Fazendo  $j = M - r$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{M \geq r} \binom{M}{r} \left(\prod_{j=1}^s (1 - p_j)\right)^M &= \sum_{j \geq 0} \binom{r + j}{r} \left(\prod_{j=1}^s (1 - p_j)\right)^{r+j} \\ &= \left(\prod_{j=1}^s (1 - p_j)\right)^r \sum_{j \geq 0} \binom{-r - j}{r} \left(-\prod_{j=1}^s (1 - p_j)\right)^j \\ &= \left(\prod_{j=1}^s (1 - p_j)\right)^r \left(1 - \prod_{j=1}^s (1 - p_j)\right)^{-r-1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\pi(N | \mathbf{p}, D) = \binom{N}{r} \left(1 - \prod_{j=1}^s (1 - p_j)\right)^{r+1} \left(\prod_{j=1}^s (1 - p_j)\right)^{N-r}, N \geq r, \text{ o que prova o}$$

ítem (1).

**Prova (2).** Novamente

$$\begin{aligned}
\pi(\mathbf{p} \mid N, D) &= \frac{\pi(N, \mathbf{p}, D)}{\pi(N, D)} = \frac{\pi(N, \mathbf{p} \mid D)}{\pi(N \mid D)} \\
&= \frac{\pi(\mathbf{p} \mid N, D)}{\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \pi(N, \mathbf{p}, D) dp_1 dp_2 \dots dp_s} \\
&= \frac{\binom{N}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j}}{\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j} dp_1 dp_2 \dots dp_s} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j}}{\prod_{j=1}^s \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j} dp_j} = \frac{\prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j}}{\prod_{j=1}^s \text{Beta}(n_j + \alpha, N - n_j + \beta)},
\end{aligned}$$

o que implica em

$$\pi(\mathbf{p} \mid N, D) = \prod_{j=1}^s \frac{1}{\text{Beta}(n_j + \alpha, N - n_j + \beta)} p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j},$$

$0 < p_j < 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , provando o ítem (2).

Do teorema acima temos os seguintes corolários

**Corolário 4.3.2** *A distribuição de probabilidades condicional de  $N$ , dados  $\mathbf{p}$  e  $D$ , é igual a distribuição de probabilidades da variável aleatória  $X + r$ , onde  $X$  tem distribuição binomial negativa com parâmetros  $r + 1$  e  $1 - \prod_{j=1}^s (1 - p_j)$ , isto é,*

$$N - r \mid \mathbf{p}, D \sim BN \left( r + 1, 1 - \prod_{j=1}^s (1 - p_j) \right). \quad (4.9)$$

**Corolário 4.3.3** *A distribuição de probabilidades de  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ , dados  $N$  e  $D$ , é igual a distribuição de probabilidades do produto de  $s$  variáveis aleatórias independentes*

$X_1, X_2, \dots, X_s$ , onde  $X_j$  tem distribuição Beta com parâmetros  $n_j + \alpha$  e  $N - n_j + \beta$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , isto é,

$$\pi(\mathbf{p} | N, D) \propto \prod_{j=1}^s p_j^{n_j + \alpha - 1} (1 - p_j)^{N - n_j + \beta - 1}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.10)$$

Se as distribuições "a priori" de  $p_j$ ,  $0 < p_j < 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  forem Beta com parâmetros  $\alpha = 1$  e  $\beta = 1$  (não informativas) e a distribuição "a priori" de  $N$  for não informativa de Jeffreys  $\pi(N) = N^{-1}$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ , então teremos as seguintes distribuições condicionais:

$$N - r | \mathbf{p}, D \sim BN \left( r, 1 - \prod_{j=1}^s (1 - p_j) \right). \quad (4.11)$$

$$\pi(\mathbf{p} | N, D) \propto \prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.12)$$

### 4.3.2 Distribuição *a priori* informativa para o tamanho populacional

Vamos assumir agora que  $N$  tem distribuição *a priori* de Poisson truncada em zero com parâmetro  $\lambda$  conhecido,  $\lambda > 0$ , ou seja

$$\pi(N) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^N}{N!(1 - e^{-\lambda})}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Então da distribuição *a priori* dada em (4.1), da função de verossimilhança dada em (4.3) e da distribuição *a priori* dada em (4.13) temos que a distribuição *a posteriori* conjunta de  $\mathbf{p}$  e  $N$  é tal que

$$\pi(\mathbf{p}, N | D) \propto \frac{\lambda^N}{(N - r)!} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j + \alpha - 1} (1 - p_j)^{N - n_j + \beta - 1}, \quad (4.14)$$

$$0 < p_j < 1, \quad j = 1, \dots, s, \quad N \geq r.$$

De (4.14) temos que a distribuição *a posteriori* marginal de  $N$  é dada por

$$\pi(N | D) \propto \frac{\lambda^N}{(N-r)!} \prod_{j=1}^s \frac{\Gamma(N - n_j + \beta)}{\Gamma(N + \alpha + \beta)}, N \geq r. \quad (4.15)$$

$$0 < p < 1, N \geq r.$$

Da distribuição *a posteriori* conjunta dada em (4.14) temos as distribuições condicionais necessárias para o algoritmo *Gibbs Sampling*:

(a). A distribuição condicional de  $N - r$  dados  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$  e os dados é dada por:

$$N - r | \mathbf{p}, D \sim \text{Poisson} \left( \lambda \prod_{j=1}^s (1 - p_j) \right). \quad (4.16)$$

(b). A distribuição condicional de  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$  dados  $N$  e os dados é dada por:

$$\pi(\mathbf{p} | N, D) \propto \prod_{j=1}^s p_j^{n_j + \alpha - 1} (1 - p_j)^{N - n_j + \beta - 1}, j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.17)$$

### 4.3.3 Um caso especial: modelo hierárquico para a média da Poisson

Para a distribuição *a priori* do tamanho populacional  $N$  com uma estrutura hierárquica é usual o tipo "*Poisson-Gama*" (George e Robert, 1992). Para o primeiro estágio assumimos que, dado  $\lambda$ ,  $N$  tem uma distribuição *a priori* de Poisson  $\lambda$ , truncada em zero dada por:

$$\pi(N) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^N}{N!(1 - e^{-\lambda})}, N = 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

Para o segundo estágio assumimos que  $\lambda$  tem uma distribuição Gama com hiperparâmetros  $a$  e  $b$  conhecidos, dada por

$$\pi(\lambda) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} \exp\{-\lambda b\}, \text{ isto é,} \quad (4.19)$$

$$\pi(\lambda) \sim G(a, b) \implies E(\lambda) = \frac{a}{b} \text{ e } Var(\lambda) = \frac{a}{b^2}, a > 0, b > 0.$$

Em situações onde há poucas informações sobre  $\lambda$ , é necessária então uma distribuição *a priori* não-informativa. Sabemos que quando  $a \rightarrow 0$  e  $b \rightarrow 0$ , a distribuição *a priori* de  $\lambda$  satisfaz  $\pi(\lambda) \rightarrow \lambda^{-1}$  e a distribuição marginal *a priori* de  $N$  satisfaz  $\pi(N) \rightarrow N^{-1}$ . Na prática, quando não temos idéia sobre o valor de  $\lambda$  tomamos valores pequenos para os hiperparâmetros (por exemplo  $a = 0,0005$  e  $b = 0,0005$ ) tornando a distribuição Gama não informativa.

Então da distribuição *a priori* para  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$  dada em (4.1), da função de verossimilhança dada em (4.3) e da distribuição *a priori* dada em (4.18) e (4.19) temos que a distribuição *a posteriori* conjunta de  $\mathbf{p}$ ,  $N$  e  $\lambda$  é tal que:

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{p}, N, \lambda | D) &\propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j + \alpha - 1} (1 - p_j)^{N - n_j + \beta - 1} \\ &\quad \times \frac{e^{-\lambda} \lambda^N}{N!(1 - e^{-\lambda})} \times \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} \exp\{-\lambda b\}, \text{ isto é,} \\ \pi(\mathbf{p}, N, \lambda | D) &\propto \frac{\lambda^{N+a-1} e^{-\lambda(1+b)}}{(1 - e^{-\lambda})(N - r)!} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j + \alpha - 1} (1 - p_j)^{N - n_j + \beta - 1}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Da distribuição *a posteriori* conjunta (4.20) temos as distribuições condicionais necessárias para o algoritmo Gibbs Sampling dadas por:

(a). A distribuição condicional de  $N$  dados  $\lambda$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$  e os dados é dada por:

$$N - r | \mathbf{p}, \lambda, D \sim \text{Poisson} \left( \lambda \prod_{j=1}^s (1 - p_j) \right). \quad (4.21)$$

(b). A distribuição condicional de  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$  dados  $\lambda$ ,  $N$  e os dados é dada por:

$$\pi(\mathbf{p} | N, \lambda, D) \propto \prod_{j=1}^s p_j^{n_j + \alpha - 1} (1 - p_j)^{N - n_j + \beta - 1}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.22)$$

(c). A distribuição condicional de  $\lambda$  dados  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ ,  $N$  e os dados é dada por:

$$\lambda | N, \mathbf{p}, D \sim \text{Gama}(N + a, 1 + b). \quad (4.23)$$

## 4.4 Estudos de Simulação Estocástica para o método de captura-recaptura com população fechada

Nesta Seção estudaremos dois algoritmos utilizados para a implementação dos modelos Bayesianos apresentados nos capítulos anteriores, o amostrador de Gibbs e o algoritmo de Metropolis Hastings. Até pouco tempo atrás, muitos desses modelos exigiam o uso de métodos aproximados como o método de Laplace (ver Tierney e Kadane (1986), Tierney (1994)). Em tempos recentes, porém, não há mais o problema de resolução de integrais. O surgimento de novas técnicas de simulação, citadas acima, extremamente poderosas e ao mesmo tempo relativamente simples permitiram que a maioria dos problemas aplicados pudessem ser tratados através da abordagem bayesiana. Todas as programações desenvolvidas para o estudo de simulação estocástica via **Monte Carlo Markov Chain (MCMC)** deste trabalho foram implementadas no Software **R**, cuja convergência dos algoritmos *Gibbs Sampling* ("Amostrador de Gibbs") e Metropolis Hastings foi monitorada pelo pacote **CODA - Convergence Diagnostics and Output Analysis Software for Gibbs Sampling Output** (Best *et al.* 1995).

### 4.4.1 Um breve estudo da influência dos hiperparâmetros nas estimativas *a posteriori*

Com o objetivo de analisar a sensibilidade *a posteriori* dos parâmetros  $N$  e  $\mathbf{p}$  em relação a distribuição *a priori* das probabilidades de captura, foi realizado um estudo de simulação onde os hiperparâmetros  $(\alpha, \beta)$  da distribuição *a priori* Beta foram alterados de tal forma que obtivéssemos diferentes médias *a priori* para  $\mathbf{p}$  e verificássemos os resultados *a posteriori*. Utilizamos a distribuição *a priori* não informativa de Jeffreys  $((\pi) \propto N^{-1})$  para o tamanho populacional  $N$ .

Este estudo de simulação envolveu um esquema de amostragem com  $s = 6$  épocas de captura, supondo uma população de tamanho  $N = 1000$ . Foram considerados quatro casos de probabilidade de captura:  $\mathbf{p} = (0, 04; 0, 04; \dots; 0, 04)$ ,  $\mathbf{p} = (0, 08; 0, 08; \dots; 0, 08)$ ,  $\mathbf{p} = (0, 12; 0, 12; \dots; 0, 12)$  e  $\mathbf{p} = (0, 16; 0, 16; \dots; 0, 16)$ , onde obtivemos as estatísticas  $r = 209$ ,  $r = 407$ ,  $r = 551$  e  $r = 651$  respectivamente. Lembremos que a estatística  $r$  é dada

por  $r = \sum_{j=1}^s n_j - \sum_{j=1}^s m_j$ , ou seja, é o número de animais distintos marcados na população durante todo o processo de captura-recaptura.

Para cada caso e para cada par de valores arbitrários de  $\alpha$  e  $\beta$  da *priori* de  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$ , foi gerado uma cadeia de 30000 iterações descartando as primeiras 10000 como "*burn-in*" e considerando um salto de tamanho 10 resultando em uma amostra final de tamanho 2000 da distribuição *a posteriori* conjunta de  $N$  e  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_6)$ .

A Tabela (4.24) contém os dados amostrais gerados para os quatro casos considerados com  $s = 6$  épocas de captura.

Tabela (4.24). Dados amostrais para os casos considerados.									
1º Caso: $N = 1000, r = 209$ $p_j = 0,04, j = 1, 2, \dots, 6.$					2º Caso: $N = 1000, r = 407$ $p_j = 0,08, j = 1, 2, \dots, 6.$				
$j$	$p_j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$j$	$p_j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$
1	0,04	25	0	0	1	0,08	82	0	0
2	0,04	40	1	25	2	0,08	82	4	82
3	0,04	38	3	64	3	0,08	79	13	160
4	0,04	39	4	99	4	0,08	72	16	226
5	0,04	44	8	134	5	0,08	84	20	282
6	0,04	47	8	170	6	0,08	80	19	346
3º Caso: $N = 1000, r = 551$ $p_j = 0,12, j = 1, 2, \dots, 6.$					4º Caso: $N = 1000, r = 651$ $p_j = 0,16, j = 1, 2, \dots, 6.$				
$j$	$p_j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$j$	$p_j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$
1	0,12	132	0	0	1	0,16	177	0	0
2	0,12	121	12	132	2	0,16	160	22	177
3	0,12	106	28	241	3	0,16	140	47	315
4	0,12	124	31	319	4	0,16	163	57	408
5	0,12	125	49	412	5	0,16	159	86	514
6	0,12	124	61	488	6	0,16	147	83	587

(4.24)

Pela Tabela (4.24) podemos observar que, fixado o tamanho populacional  $N$ , a medida que aumentamos a probabilidade de captura, aumentamos os tamanhos das

amostras e, conseqüentemente, aumentamos o valor da estatística  $r$ . Veremos mais adiante que as estimativas *a posteriori* dos parâmetros são sempre satisfatórias (próximas dos verdadeiros valores) quando  $r \geq \frac{N}{2}$ . As Tabelas (4.25), (4.26), (4.27) e (4.28) mostram os resultados *a posteriori* para os quatro casos considerando diferentes médias *a priori* de  $p$ . O objetivo é verificar a sensibilidade das estimativas *a posteriori* em relação a escolha dos hiperparâmetros para cada um dos quatro casos considerados.

**Tabela (4.25).** Sensibilidade do modelo em relação a escolha dos hiperparâmetros.

**1º Caso:**  $N = 1000$ ,  $r = 209$  e  $p_j = 0,04$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$ .

Média <i>a priori</i> $p$			Média $p$ a <i>posteriori</i>	Intervalo de		Média $N$ a <i>posteriori</i>	Intervalo de	
$\alpha$	$\beta$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$		Cred.(95%) de $p$			Cred.(95%) de $N$	
1	99	0,01	0,0387	0,0251	0,0545	1030	718	1516
1	19	0,05	0,0442	0,0283	0,0625	914	635	1324
1	9	0,10	0,0448	0,0298	0,0619	900	639	1283
1	4	0,20	0,0450	0,0300	0,0632	894	629	1296
1	37/16	0,30	0,0454	0,0298	0,0635	888	627	1283
1	3/2	0,40	0,0453	0,0292	0,0631	892	629	1305
1	1	0,50	0,0454	0,0297	0,0631	890	633	1283
3/2	1	0,60	0,0461	0,0306	0,0636	876	622	1258
7/3	1	0,70	0,0475	0,0318	0,0650	850	613	1202
4	1	0,80	0,0502	0,0335	0,0685	808	584	1145
9	1	0,90	0,0582	0,0409	0,0775	710	529	955
19	1	0,95	0,0732	0,0538	0,0933	581	458	757
99	1	0,99	0,1677	0,1435	0,1927	314	279	356

(4.25)

Podemos notar pela Tabela (4.25) que as estimativas *a posteriori* foram satisfatórias apenas para as situações onde os hiperparâmetros nos fornecem médias *a priori* de  $p$  próximas do verdadeiro valor de  $p$ . São os casos onde usamos  $(\alpha = 1; \beta = 99)$  e  $(\alpha = 1; \beta = 19)$ .

Isto significa que as estimativas *a posteriori* são muito sensíveis em relação a

escolha dos hiperparâmetros. Por exemplo, para as três últimas *prioris* onde usamos  $(\alpha = 9; \beta = 1)$ ,  $(\alpha = 19; \beta = 1)$  e  $(\alpha = 99; \beta = 1)$  as estimativas *a posteriori* do tamanho populacional foram subestimadas e das probabilidades de captura foram superestimadas a ponto de saírem do intervalo (95%) de credibilidade. Este fato ocorre porque a probabilidade de captura é muito pequena resultando em uma estatística  $r$  pequena  $\left(\sum_{j=1}^s m_j \cong 0\right)$ .

Quando isso ocorre, a distribuição *a priori* acaba fornecendo mais informação para o modelo do que os próprios dados amostrais. Observaremos nas próximas Tabelas que essa sensibilidade diminui a medida que aumentamos a estatística  $r$ , ou seja, a medida que mais animais marcados são observados.

**Tabela (4.26).** Sensibilidade do modelo em relação a escolha dos hiperparâmetros.

2º Caso: $N = 1000$ , $r = 407$ e $p_j = 0,08$ , $j = 1, 2, \dots, 6$ .								
Média <i>a priori</i> $p$			Média $p$ a <i>posteriori</i>	Intervalo de		Média $N$ a <i>posteriori</i>	Intervalo de	
$\alpha$	$\beta$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$		Cred.(95%) de $p$			Cred.(95%) de $N$	
1	99	0,01	0,0612	0,0484	0,0744	1303	1078	1595
1	19	0,05	0,0654	0,0526	0,0798	1232	1021	1495
1	9	0,10	0,0658	0,0526	0,0799	1224	1016	1489
1	4	0,20	0,0664	0,0527	0,0809	1219	1012	1499
1	37/16	0,30	0,0665	0,0528	0,0807	1216	1009	1489
1	3/2	0,40	0,0663	0,0529	0,0810	1219	1007	1496
1	1	0,50	0,0665	0,0527	0,0810	1215	1002	1487
3/2	1	0,60	0,0668	0,0531	0,0813	1212	1000	1469
7/3	1	0,70	0,0674	0,0539	0,0813	1200	1000	1453
4	1	0,80	0,0686	0,0543	0,0833	1183	981	1439
9	1	0,90	0,0726	0,0582	0,0873	1127	944	1371
19	1	0,95	0,0802	0,0653	0,0956	1041	886	1240
99	1	0,99	0,1333	0,1163	0,1508	708	635	794

(4.26)

Pela Tabela (4.26) observamos que o modelo ainda é sensível a escolha dos hiperparâmetros. As estimativas *a posteriori* foram satisfatórias apenas para os casos onde usa-

mos os hiperparâmetros  $(\alpha = 7/3; \beta = 1)$ ,  $(\alpha = 4; \beta = 1)$ ,  $(\alpha = 9; \beta = 1)$  e  $(\alpha = 19; \beta = 1)$ . Isto significa que a distribuição *a priori* ainda fornece mais informações do que os dados amostrais.

**Tabela (4.27).** Sensibilidade do modelo em relação a escolha dos hiperparâmetros.

3º Caso: $N = 1000$ , $r = 551$ e $p_j = 0,12$ , $j = 1, 2, \dots, 6$ .								
Média <i>a priori</i> $p$			Média $p$ a	Intervalo de		Média $N$ a	Intervalo de	
$\alpha$	$\beta$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	<i>posteriori</i>	Cred.(95%) de $p$		<i>posteriori</i>	Cred.(95%) de $N$	
1	99	0,01	0,1094	0,0958	0,1240	1102	984	1237
1	19	0,05	0,1146	0,1006	0,1297	1067	958	1195
1	9	0,10	0,1151	0,1009	0,1302	1064	958	1190
1	4	0,20	0,1153	0,1013	0,1296	1062	953	1188
1	37/16	0,30	0,1155	0,1010	0,1300	1059	950	1187
1	3/2	0,40	0,1156	0,1007	0,1308	1060	952	1186
1	1	0,50	0,1156	0,1012	0,1301	1061	949	1182
3/2	1	0,60	0,1157	0,1021	0,1307	1059	957	1180
7/3	1	0,70	0,1162	0,1013	0,1315	1055	943	1189
4	1	0,80	0,1170	0,1025	0,1327	1050	945	1175
9	1	0,90	0,1195	0,1049	0,1347	1035	929	1158
19	1	0,95	0,1244	0,1095	0,1399	1006	911	1119
99	1	0,99	0,1599	0,1443	0,1759	851	787	920

(4.27)

Ao contrário dos casos anteriores, a Tabela (4.27) mostra que, com exceção da última *priori* usada  $(\alpha = 99; \beta = 1)$ , todas as estimativas *a posteriori* foram satisfatórias, tanto para o tamanho populacional quanto para as probabilidades de captura.

Isto significa que o modelo não é mais sensível em relação a escolha dos hiperparâmetros, ou seja, a informação contida nos dados *fala mais alto* do que a informação *a priori* de  $p$ . Este fato acontece sempre quando  $r \geq \frac{N}{2}$ . Notemos que para este caso estudado temos  $r = 551$  e  $N = 1000$ .

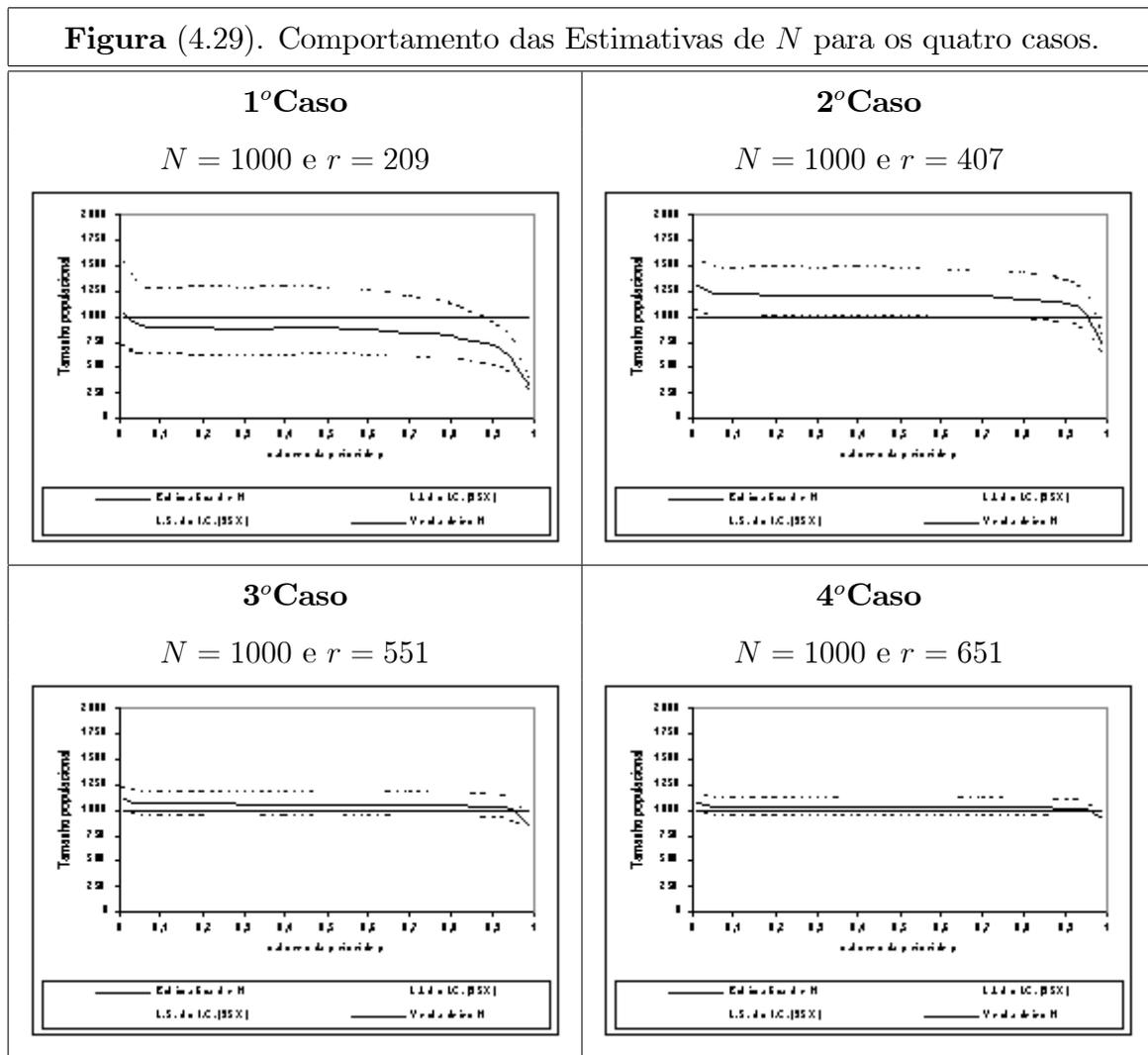
**Tabela (4.28).** Sensibilidade do modelo em relação a escolha dos hiperparâmetros.

4º Caso: $N = 1000$ , $r = 651$ e $p_j = 0,16$ , $j = 1, 2, \dots, 6$ .								
Média <i>a priori</i> $p$			Média $p$ a <i>posteriori</i>	Intervalo de		Média $N$ a <i>posteriori</i>	Intervalo de	
$\alpha$	$\beta$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$		Cred.(95%) de $p$			Cred.(95%) de $N$	
1	99	0,01	0,1465	0,1321	0,1611	1063	978	1150
1	19	0,05	0,1516	0,1366	0,1663	1039	963	1127
1	9	0,10	0,1521	0,1376	0,1666	1037	962	1125
1	4	0,20	0,1525	0,1376	0,1670	1036	959	1125
1	37/16	0,30	0,1526	0,1379	0,1679	1036	959	1127
1	3/2	0,40	0,1526	0,1380	0,1679	1036	960	1122
1	1	0,50	0,1527	0,1387	0,1678	1034	961	1116
3/2	1	0,60	0,1528	0,1376	0,1670	1035	961	1120
7/3	1	0,70	0,1532	0,1384	0,1681	1033	958	1124
4	1	0,80	0,1537	0,1395	0,1684	1030	956	1114
9	1	0,90	0,1557	0,1408	0,1706	1022	949	1104
19	1	0,95	0,1595	0,1443	0,1744	1007	935	1088
99	1	0,99	0,1870	0,1717	0,2025	916	861	977

(4.28)

Assim como o 3º Caso estudado na Tabela (4.27), a Tabela (4.28) mostra que, com exceção da última *priori* usada ( $\alpha = 99; \beta = 1$ ), todas as estimativas *a posteriori* foram satisfatórias, tanto para o tamanho populacional quanto para as probabilidades de captura. Novamente as estimativas *a posteriori* não são mais sensíveis em relação a escolha dos hiperparâmetros, ou seja, a informação contida nos dados *fala mais alto* do que a informação *a priori* de  $p$ . Notemos que para este caso estudado temos  $r = 651$  e  $N = 1000$ .

A Figura (4.29) mostra o comportamento das estimativas do tamanho populacional  $N$  para os quatro casos considerados.



(4.29)

#### 4.4.2 Dados reais de captura-recaptura utilizado por Castledine (1981)

Foi feito um estudo de simulação para estimar o número de peixes (Sunfish) capturados no Lago Gordy, Indiana (USA) em  $s = 14$  épocas de capturas (Gerking, 1953) onde podemos notar um grande número de ocasiões de amostragem e um pequeno número de unidades de captura observadas em cada ocasião amostral.

Os dados reais referentes a tal experimento foram abordados por vários autores, entre eles, Ricker (1958, 1975) ilustrando métodos clássicos frequentistas para estudos de captura-recaptura, e por Castledine (1981), Smith (1988) e Wang (2002) para ilustrar

métodos bayesianos. As mortes decorrentes do processo de amostragem foram ignoradas, caracterizando assim uma população fechada.

A Tabela (4.30) mostra os dados reais de captura-recaptura (Castledine, 1981).

<b>Tabela (4.30).</b> Dados reais de captura-recaptura.														
Peixes (Sunfish) capturados no Lago Gordy, Indiana (USA).														
$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$n_i$	10	27	17	7	1	5	6	15	9	18	16	5	7	19
$m_i$	0	0	0	0	0	0	2	1	5	5	4	2	2	3
$M_i$	0	10	37	54	61	62	67	71	85	89	102	114	117	122

(4.30)

Temos então a estatística  $r = \sum_{j=1}^{14} n_j - \sum_{j=1}^{14} m_j = 138$ .

Como o tamanho das amostras obtidas foram significativamente diferentes, assumimos que a probabilidade de captura é diferente para cada uma das  $s = 14$  épocas de captura.

Foi considerado uma distribuição *a priori* não informativa de Jeffreys  $\pi(N) \propto N^{-1}$ , para o tamanho populacional  $N$  e um produto de *prioris* não informativas  $Beta(1, 1)$  para o vetor de probabilidades  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{14})$ .

Foram geradas duas cadeias paralelas de 50000 iterações descartando as primeiras 10000 e considerando um salto de tamanho 10, construindo assim uma amostra final de tamanho 4000 da distribuição *a posteriori* conjunta de  $N$  e  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{14})$ . A Tabela (4.31) mostra os resumos *a posteriori* dos parâmetros.

**Tabela (4.31).** Resumos *a posteriori* dos parâmetros (Dados reais).

Parâmetro	Média	1ºQuartil	Mediana	3ºQuartil	Int. Cred(95%)	
$N$	331	299	324	354	254	438
$p_1$	0,0336	0,0256	0,0325	0,0401	0,0154	0,0573
$p_2$	0,0858	0,0725	0,0842	0,0972	0,0525	0,1283
$p_3$	0,0551	0,0450	0,0540	0,0642	0,0304	0,0880
$p_4$	0,0244	0,0179	0,0232	0,0299	0,0102	0,0462
$p_5$	0,0062	0,0029	0,0052	0,0084	0,0007	0,0173
$p_6$	0,0184	0,0128	0,0172	0,0230	0,0063	0,0374
$p_7$	0,0213	0,0155	0,0202	0,0261	0,0083	0,0413
$p_8$	0,0487	0,0393	0,0477	0,0572	0,0260	0,0777
$p_9$	0,0307	0,0233	0,0296	0,0370	0,0138	0,0550
$p_{10}$	0,0582	0,0477	0,0571	0,0677	0,0328	0,0912
$p_{11}$	0,0519	0,0422	0,0509	0,0602	0,0284	0,0837
$p_{12}$	0,0184	0,0127	0,0174	0,0232	0,0066	0,0372
$p_{13}$	0,0247	0,0180	0,0236	0,0302	0,0101	0,0459
$p_{14}$	0,0611	0,0508	0,0601	0,0708	0,0346	0,0967

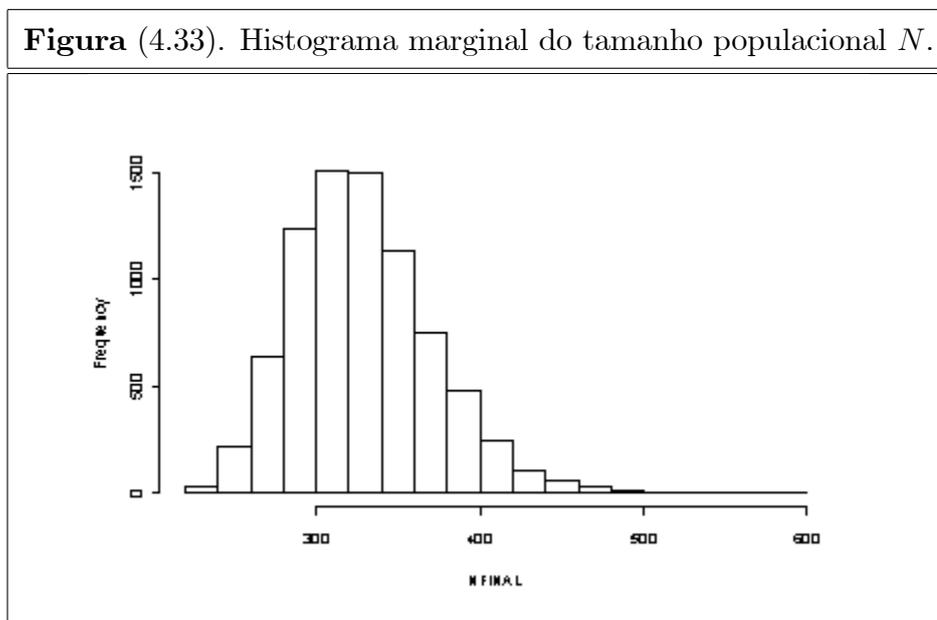
(4.31)

A Tabela (4.32) mostra o diagnóstico de convergência de Gelman e Rubin.

Tabela (4.32). Diagnóstico de convergência de Gelman e Rubin.					
Parâmetros	Est. Pontual	Q. 97,5%	Parâmetros	Est. Pontual	Q. 97,5%
$N$	1,00	1,01	$p8$	1,00	1,01
$p1$	1,00	1,00	$p9$	1,00	1,00
$p2$	1,00	1,00	$p10$	1,00	1,01
$p3$	1,00	1,00	$p11$	1,00	1,01
$p4$	1,00	1,00	$p12$	1,00	1,00
$p5$	1,00	1,00	$p13$	1,00	1,00
$p6$	1,00	1,00	$p14$	1,00	1,01
$p7$	1,00	1,00			

(4.32)

A Figura (4.33) o histograma marginal do tamanho populacional  $N$ .



(4.33)

### Considerando o modelo hierárquico para o tamanho populacional

Agora consideraremos o caso de probabilidades diferentes onde fizemos um estudo de simulação considerando um modelo hierárquico onde atribuímos uma distribuição *a priori* de Poisson de parâmetro  $\lambda$  para o tamanho populacional  $N$ . Para  $\lambda$  atribuímos

uma distribuição *a priori* não informativa Gama de parâmetros conhecidos  $a = 0,002$  e  $b = 0,002$ . Para o vetor de probabilidades de captura  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{14})$  atribuímos uma distribuição *a priori* não informativa Beta com parâmetros  $\alpha = 1$  e  $\beta = 1$ . Os resultados *a posteriori* estão a seguir.

Foram geradas duas cadeias paralelas de 70000 iterações descartando as primeiras 20000 e considerando um salto de tamanho 10, construindo assim uma amostra final de tamanho 5000 da distribuição *a posteriori* conjunta de  $N$ ,  $\lambda$  e  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{14})$ . A Tabela (4.34) mostra os resultados *a posteriori* das estimativas.

Tabela (4.34). Sumário <i>a posteriori</i> dos estimativas.			
Parâmetros	Média <i>a posteriori</i>	Intervalo Cred. (95%)	
$N$	327	253	428
$\lambda$	327	245	436
$p_1$	0,0341	0,0163	0,0589
$p_2$	0,0866	0,0527	0,1289
$p_3$	0,0554	0,0311	0,0870
$p_4$	0,0247	0,0104	0,0456
$p_5$	0,0062	0,0007	0,0179
$p_6$	0,0186	0,0067	0,0373
$p_7$	0,0215	0,0083	0,0406
$p_8$	0,0497	0,0264	0,0795
$p_9$	0,0306	0,0143	0,0545
$p_{10}$	0,0587	0,0327	0,0929
$p_{11}$	0,0527	0,0290	0,0844
$p_{12}$	0,0186	0,0066	0,0374
$p_{13}$	0,0247	0,0104	0,0460
$p_{14}$	0,0617	0,0350	0,0961

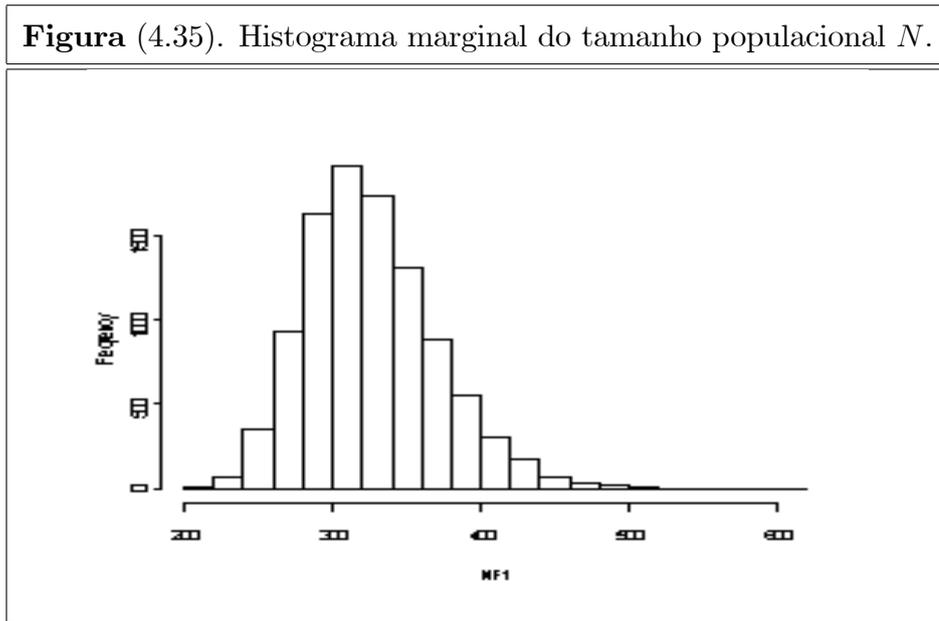
(4.34)

Podemos observar pela Tabela (4.34) que não há diferenças significativas nas estimativas em relação a Tabela (4.31).

Quando usamos uma estrutura hierárquica para o tamanho populacional  $N$ , a saber distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$  onde  $\lambda$  tem distribuição *a priori* Gama de

parâmetros  $(a, b)$  conhecidos ("Poisson-Gama", ver George e Robert (1992)) onde  $(a, b)$  são de tal sorte que Gama seja não informativa ( $a = 0,002$  e  $b = 0,002$  por exemplo), então temos estimativas equivalentes ao modelo com *priori* não informativa de Jeffreys para  $N$ .

A Figura (4.35) mostra o histograma marginal do tamanho populacional  $N$ .



(4.35)

# Capítulo 5

## Uma reparametrização para a probabilidade de captura

### 5.1 Introdução

Nesta Seção apresentaremos uma alternativa de reparametrização para o vetor de probabilidades de captura  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ , ( $s \geq 2$ ), no modelo usado por Castledine (1981), através de uma estrutura hierárquica. Faremos um estudo de simulação abordando o efeito desta reparametrização nas estimativas *a posteriori* dos parâmetros com diferentes probabilidades e verificaremos se há alguma vantagem em usá-la e em quais casos específicos.

### 5.2 Modelo estatístico e função de verossimilhança

Nesta Seção determinaremos a função de verossimilhança para o modelo utilizado por Castledine (1981) com probabilidades de captura reparametrizadas. Recordemos que a função de verossimilhança de  $N$  e  $\mathbf{p}$ ,  $L(N, \mathbf{p} | D)$  estudada no Capítulo 3 é dada por

$$L(N, \mathbf{p} | D) \propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j}. \quad (5.1)$$

Reescrevendo a probabilidade de captura como

$$p_j = \frac{\exp\{\eta_j\}}{1 + \exp\{\eta_j\}}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (5.2)$$

A motivação para essa reparametrização é o uso de um parâmetro que tenha seu espaço paramétrico na reta real, isto é, saímos da situação onde  $p$  tem seu espaço paramétrico no intervalo  $[0, 1]$  e adotamos  $\eta$  que tem seu espaço paramétrico na reta  $(-\infty < \eta < \infty)$ .

Temos a função de ligação

$$\log\left(\frac{p_j}{1-p_j}\right) = \eta_j, \quad -\infty < \eta_j < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Temos a função de verossimilhança reparametrizada como

$$L(N, \boldsymbol{\eta} | D) \propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s \frac{\exp\{n_j \eta_j\}}{[1 + \exp\{\eta_j\}]^N}. \quad (5.3)$$

### 5.3 Distribuição *a posteriori*

Para a implementação de um modelo bayesiano hierárquico adotaremos para o primeiro estágio as seguintes distribuições *a priori*:

$$\pi(N) \propto N^{-1}, \eta_j \sim N(\mu, \sigma^2), \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (5.4)$$

onde  $N(\mu, \sigma^2)$  denota uma distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Para o segundo estágio temos:

$$\mu \sim N(a, b^2), \sigma^2 \sim IG(c, d). \quad (5.5)$$

Com  $\mu$  e  $\sigma^2$  independentes onde  $N(a, b^2)$  denota uma distribuição normal com média  $a$  e variância  $b^2$  e  $IG(c, d)$  denota uma distribuição gama inversa com média  $\frac{d}{c-1}$  e variância  $\frac{d^2}{(c-1)^2(c-2)}$ ,  $c > 2$ . ( $a, b, c$  e  $d$  hiperparâmetros conhecidos).

Temos então a seguinte distribuição *a posteriori* conjunta de  $N, \boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s\}$ ,  $\mu, \sigma^2$ :

$$\begin{aligned} \pi(N, \boldsymbol{\eta}, \mu, \sigma^2 | D) &\propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s \frac{\exp\{n_j \eta_j\}}{[1 + \exp\{\eta_j\}]^N} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (\eta_j - \mu)^2\right\} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2b^2} (\mu - a)^2\right\} \times (\sigma^2)^{-(c+1)} \exp\left\{\frac{-d}{\sigma^2}\right\} \times \frac{1}{N}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

As distribuições condicionais necessárias para o algoritmo *Gibbs Sampling* (ver por exemplo, Geman e Geman, 1984 e Gelfand e Smith, 1990) conjuntamente com o algoritmo de *Metropolis Hastings* a partir de (5.6) são dadas a seguir.

- (1). A distribuição condicional de  $N - r$ , dados  $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s\}$ ,  $\mu$ ,  $\sigma^2$  e os dados é dada por

$$N - r | \boldsymbol{\eta}, \mu, \sigma^2, D \sim BN \left\{ r, 1 - \prod_{j=1}^s \left[ \frac{1}{1 + e^{\eta_j}} \right] \right\}. \quad (5.7)$$

- (2). A distribuição condicional  $\boldsymbol{\eta}$ , dados  $N$ ,  $\mu$ ,  $\sigma^2$  e os dados é dada por

$$\eta_j | N, \mu, \sigma^2, D \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (\eta_j - \mu)^2\right\} \times \frac{\exp\{n_j \eta_j\}}{[1 + \exp\{\eta_j\}]^N}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (5.8)$$

- (3). A distribuição condicional de  $\mu$ , dados  $N$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s\}$ ,  $\sigma^2$  e os dados é dada por

$$\mu | N, \boldsymbol{\eta}, \sigma^2, D \sim N \left( \frac{b^2 \sum_{j=1}^s \eta_j + \sigma^2 a}{sb^2 + \sigma^2}, \frac{sb^2 \sigma^2}{sb^2 + \sigma^2} \right). \quad (5.9)$$

- (4). A distribuição condicional de  $\sigma^2$ , dados  $N$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s\}$ ,  $\mu$  e os dados é dada por

$$\sigma^2 | N, \boldsymbol{\eta}, \mu, D \sim IG \left( \frac{s}{2} + c, \sum_{j=1}^s \frac{(\eta_j - \mu)^2}{2} + d \right). \quad (5.10)$$

## 5.4 Estudo de simulação com a reparametrização da probabilidade de captura

Com o objetivo de analisar e comparar a eficiência das estimativas *a posteriori* dos parâmetros  $N$  e  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$  através da reparametrização das probabilidades de captura, foi realizado um estudo de simulação com  $s = 6$  épocas de captura, supondo uma população de tamanho  $N = 5000$  considerando o modelo original utilizado por Castledine (1981) e considerando o modelo com a probabilidade reparametrizada.

Foram considerados 24 casos de probabilidades de captura. Como escrevemos  $p_j = \frac{\exp(\eta_j)}{1 + \exp(\eta_j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$ , temos então que para cada valor de  $p$  um valor de  $\eta$  e um valor da estatística  $r$ , como é apresentada na Tabela (5.11).

<b>Tabela (5.11).</b> Simulações com diferentes valores de $p$ .			
Tamanho populacional	Prob. Captura	Reparametrização	Estatística
$N$	$p$	$\eta$	$r$
5000	0,005	-5,2933	134
5000	0,01	-4,5951	275
5000	0,02	-3,8918	521
5000	0,03	-3,4761	874
5000	0,04	-3,1781	1124
5000	0,05	-2,9444	1336
5000	0,10	-2,1972	2319
5000	0,15	-1,7346	3111
5000	0,20	-1,3863	3626
5000	0,25	-1,0986	4145
5000	0,30	-0,8473	4343
5000	0,35	-0,6190	4556
5000	0,40	-0,4055	4713
5000	0,45	-0,2007	4907
5000	0,50	0	4969
5000	0,55	0,2007	4910
5000	0,60	0,4055	5000
5000	0,65	0,6190	5000
5000	0,70	0,8473	5000
5000	0,75	1,0986	5000
5000	0,80	1,3863	5000
5000	0,85	1,7346	5000
5000	0,90	2,1972	5000
5000	0,95	2,9444	5000

(5.11)

Lembremos que a estatística  $r$  é dada por  $r = \sum_{j=1}^s n_j - \sum_{j=1}^s m_j$ , ou seja, é o

número de animais distintos marcados na população durante todo o processo de captura-recaptura. Podemos observar pela Tabela (5.11) que  $\eta$  é simétrico em torno de zero e que a partir da probabilidade  $p = 0,60$  já houve a saturação da população, isto é, todos os animais foram marcados,  $r = \sum_{j=1}^s n_j - \sum_{j=1}^s m_j = N$ .

As tabelas (5.12) e (5.13) mostra os resultados *a posteriori* do tamanho populacional  $N$  e das probabilidades de captura segundo o modelo I e o modelo II a saber.

**Modelo I.** Modelo original de captura-recaptura múltipla utilizado por Castledine (1981) onde temos os parâmetros  $N$  e o vetor de probabilidades  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ . Utilizamos uma distribuição *a priori* não informativa para  $p_j \sim \text{Beta}(1, 1)$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , e Jeffreys ( $\pi(N) \propto N^{-1}$ ) para o tamanho populacional  $N$ .

**Modelo II.** Modelo de captura-recaptura utilizado por Castledine (1981) com reparametrização das probabilidades de captura. Neste modelo com estrutura hierárquica temos os parâmetros  $N$  e  $\eta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ . usamos a *a priori* de Jeffreys ( $\pi(N) \propto N^{-1}$ ) para o tamanho populacional  $N$  e uma distribuição *a priori* Normal com média centrada em zero e variância  $\sigma^2 = 1000$  para  $\eta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ . Para cada iteração das cadeias recuperamos os valores de  $p_j = \frac{\exp\{\eta_j\}}{1+\exp\{\eta_j\}}$  afim de compararmos as probabilidades de captura com o Modelo I.

Para cada um dos 24 casos considerados na Tabela (5.11) para o modelo I, foram geradas duas cadeias de 40000 iterações descartando as primeiras 20000 como "*burn-in*" e um salto de tamanho 20 resultando numa amostra final de tamanho 1000 de distribuição *a posteriori* conjunta. Para cada um dos 24 casos do modelo II foram geradas duas cadeias de 70000 iterações descartando as primeiras 20000 como "*burn-in*" e um salto de tamanho 50 resultando numa amostra final de tamanho 1000 da distribuição *a posteriori* conjunta.

As Tabelas (5.12) e (5.13) mostram os resumos *a posteriori* dos parâmetros dos modelos I e II respectivamente.

Tabela (5.12). Resumos <i>a posteriori</i> referentes ao modelo I.							
Prob.	$r$	$E(N   D)$	I.C.(95%) de $N$		$E(p   D)$	I.C.(95%) de $p$	
0,005	134	40075	2014	220930	0,0031	0,0001	0,0117
0,01	275	5487	2717	10602	0,0106	0,0047	0,0190
0,02	521	4571	3314	6379	0,0226	0,0157	0,0305
0,03	874	7330	5547	9704	0,0210	0,0155	0,0203
0,04	1124	5130	4332	6087	0,0391	0,0324	0,0464
0,05	1336	5233	4579	5963	0,0487	0,0422	0,0559
0,10	2319	4883	4614	5176	0,1038	0,0969	0,1108
0,15	3111	5049	4873	5229	0,1497	0,1430	0,1563
0,20	3626	5083	4958	5209	0,1966	0,1902	0,2034
0,25	4145	5003	4917	5091	0,2495	0,2430	0,2564
0,30	4343	5020	4956	5086	0,2983	0,2918	0,3047
0,35	4556	5032	4986	5080	0,3485	0,3422	0,3549
0,40	4713	5024	4991	5059	0,3988	0,3928	0,4053
0,45	4907	5021	4995	5048	0,4488	0,4428	0,4549
0,50	4969	5010	4992	5028	0,4996	0,4936	0,5057
0,55	4910	4987	4975	5001	0,5508	0,5449	0,5567
0,60	5000	4988	4980	4998	0,6007	0,5949	0,6061
0,65	5000	5009	5004	5016	0,6504	0,6449	0,6558
0,70	5000	5004	5000	5008	0,7000	0,6947	0,7052
0,75	5000	5001	5000	5004	0,7501	0,7453	0,7550
0,80	5000	5000	5000	5002	0,7986	0,7941	0,8030
0,85	5000	5000	5000	5001	0,8487	0,8447	0,8528
0,90	5000	5000	5000	5000	0,8985	0,8951	0,9019
0,95	5000	5000	5000	5000	0,9487	0,9461	0,9511

(5.12)

A Tabela (5.12) mostra que as estimativas *a posteriori* dos parâmetros  $N$  e  $p$  são satisfatórias quando  $p \geq 0,04$ . Nas situações onde  $p < 0,04$ , o tamanho populacional foi superestimado. Como já mencionado anteriormente, isso ocorre devido ao fato da

probabilidade de captura ser pequena resultando numa estatística  $r$  pequena, isto é, há falta de dados  $\left(\sum_{j=1}^s m_j \cong 0\right)$ .

**Tabela (5.13).** Resumos *a posteriori* referentes ao modelo II.

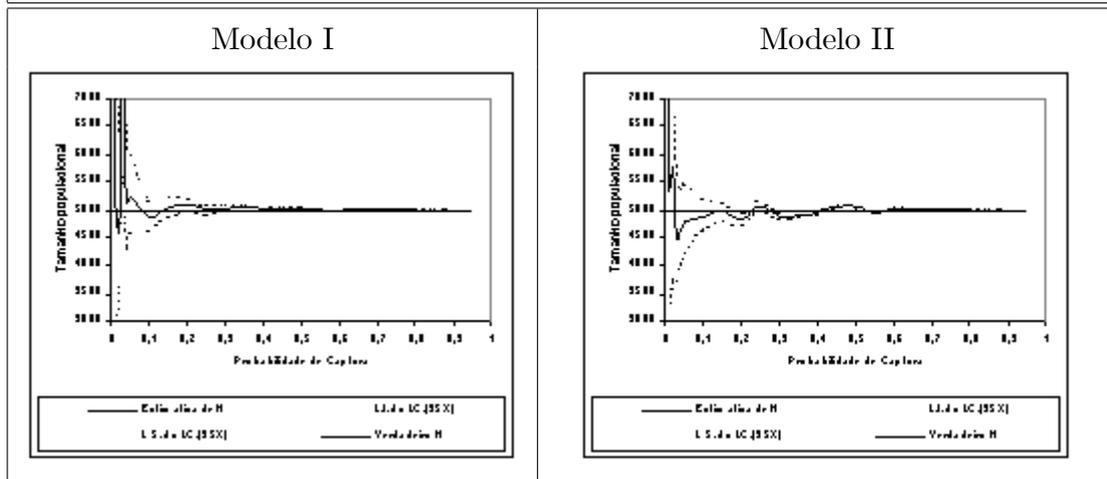
Prob	$r$	$E(N   D)$	I.C.(95%) de $N$		$E(\eta   D)$	I.C.(95%) de $\eta$		$\hat{p}$
0,005	134	136121	2009	478402	-6,3809	-9,8336	-4,4520	0,0032
0,01	275	5405	2544	11604	-4,7065	-5,5738	-3,9861	0,0097
0,02	521	5768	3757	8727	-3,8813	-4,3664	-3,4231	0,0208
0,03	874	4508	3713	5506	-3,3431	-3,6044	-3,0944	0,0344
0,04	1124	4611	3996	5386	-3,0779	-3,2927	-2,8656	0,0442
0,05	1336	4787	4225	5457	-3,0210	-3,2173	-2,8340	0,0467
0,10	2319	4886	4608	5212	-2,2651	-2,3838	-2,1432	0,0942
0,15	3111	4957	4782	5132	-1,7026	-1,7932	-1,6173	0,1542
0,20	3626	4835	4728	4947	-1,4155	-1,4868	-1,3375	0,1954
0,25	4145	5069	4983	5151	-1,1011	-1,1694	-1,0351	0,2496
0,30	4343	4894	4833	4954	-0,8787	-0,9392	-0,8147	0,2935
0,35	4556	4910	4868	4954	-0,6519	-0,7130	-0,5928	0,3426
0,40	4713	4933	4902	4968	-0,4414	-0,4963	-0,3869	0,3914
0,45	4907	5054	5028	5080	-0,2034	-0,2597	-0,1457	0,4493
0,50	4969	5053	5034	5072	-0,0072	-0,0615	0,0490	0,4982
0,55	4910	4948	4936	4961	0,2089	0,1543	0,2634	0,5520
0,60	5000	5022	5012	5032	0,4065	0,3508	0,4603	0,6002
0,65	5000	5010	5004	5017	0,6112	0,5519	0,6680	0,6112
0,70	5000	5004	5000	5004	0,8537	0,7945	0,9119	0,7013
0,75	5000	5001	5000	5004	1,1374	1,0685	1,2041	0,7572
0,80	5000	5000	5000	5002	1,3784	1,3098	1,4482	0,7987
0,85	5000	5000	5000	5001	1,7264	1,6510	1,8050	0,8489
0,90	5000	5000	5000	5000	2,1844	2,0908	2,2748	0,8988
0,95	5000	5000	5000	5000	2,9256	2,8033	3,0581	0,9490

(5.13)

De acordo com a Tabela (5.13) as estimativas *a posteriori* são satisfatórias quando  $p \geq 0,03$ . Notemos que o  $IC(95\%)$  de  $\eta$  contém o zero no intervalo quando  $p = 0,50$  pois  $\frac{\exp(0)}{1+\exp(0)} = 0,50$ .

A Figura (5.14) mostra graficamente o comportamento das estimativas do tamanho populacional  $N$  segundo ambos os modelos:

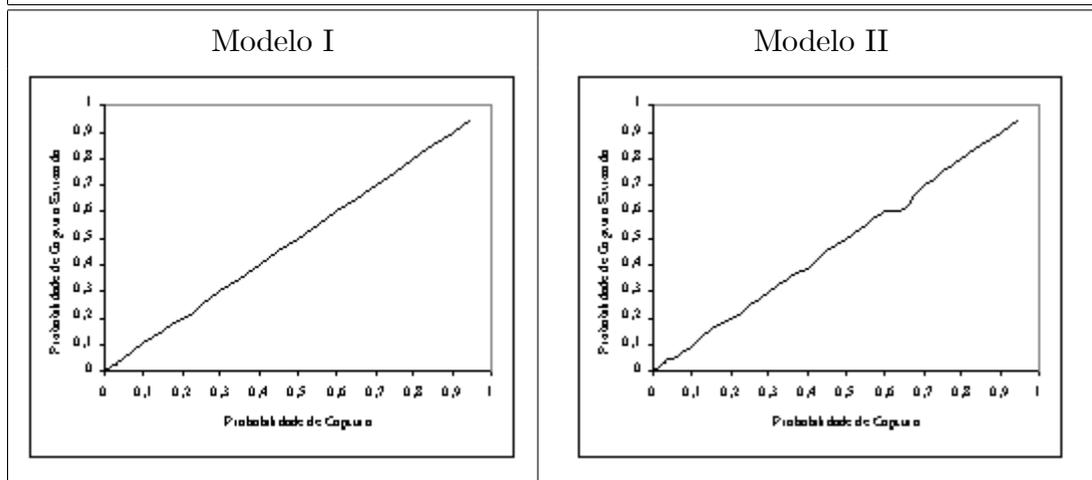
**Figura (5.14).** Comportamento das estimativas de  $N$  para ambos os modelos.



(5.14)

Podemos observar através da Figura (5.15) que com relação a probabilidade de captura, não há diferença entre o modelo I e o modelo II.

**Figura (5.15).** Comportamento das estimativas de  $p$  para ambos os modelos.



(5.15)

Quando temos um número muito pequeno de animais marcados observados, o

modelo reparametrizado fornece estimativas melhores para o tamanho populacional  $N$ . A medida que  $\sum_{j=1}^s m_j$  aumenta e, conseqüentemente,  $r$  também aumenta, então não há diferenças entre modelo I e o modelo II.

## 5.5 Aplicação com dados reais

Nesta Seção vamos aplicar o modelo bayesiano hierárquico com a reparametrização da probabilidade de captura estudada na Seção anterior aos dados reais de captura-recaptura, segundo a Tabela (5.16):

Tabela (5.16).Dados reais de captura-recaptura.														
Peixes (Sunfish) capturados no Lago Gordy, Indiana (USA).														
$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$n_i$	10	27	17	7	1	5	6	15	9	18	16	5	7	19
$m_i$	0	0	0	0	0	0	2	1	5	5	4	2	2	3
$M_i$	0	10	37	54	61	62	67	71	85	89	102	114	117	122

(5.16)

A análise foi feita considerando a situação onde as probabilidades de captura são iguais e a situação onde as probabilidades de captura são diferentes. Foram geradas 2 cadeias de 70000 iterações onde foram descartadas as 20000 primeiras iterações como "burn-in" e adotando um salto de tamanho 50 resultando numa amostra final de tamanho 1000 da distribuição *a posteriori* conjunta.

Adotamos as seguintes distribuições *a priori* não informativas

$$\begin{aligned}\pi(N) &\propto N^{-1}, N = 1, 2, \dots \\ \eta &\sim N(\mu, \sigma^2); \\ \mu &\sim N(0, 1000); \\ \sigma^2 &\sim 1/G(1, 1).\end{aligned}$$

### Considerando as probabilidades de capturas iguais

A Tabela (5.17) mostra as estimativas *a posteriori* dos parâmetros considerando

a situação onde as probabilidades de captura são iguais.

<b>Tabela (5.17).</b> Estimativas <i>a posteriori</i> dos parâmetros.			
Parâmetro	Média <i>a posteriori</i>	Intervalo Cred.(95%)	
$N$	477	343	681
$\eta$	-3,6798	-4,0770	-3,3188
$p$	0,0250	0,0167	0,0349

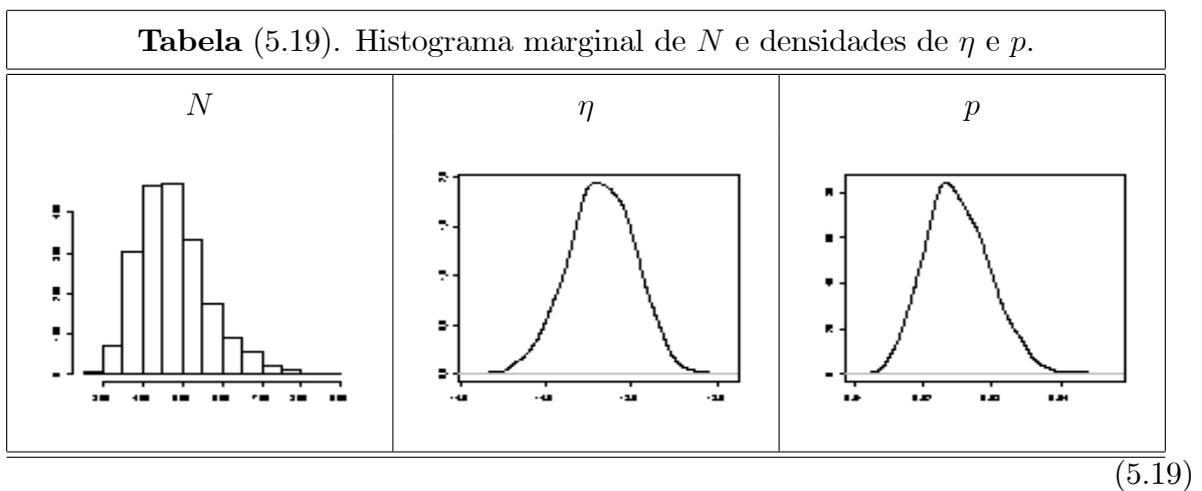
(5.17)

A Tabela (5.18) mostra o diagnóstico de convergência de Gelman e Rubin para as cadeias. Podemos observar a convergência do algoritmo *Gibbs Sampling* conjuntamente com o algoritmo de *Metropolis Hastings* utilizados para a obtenção das estimativas *a posteriori*.

<b>Tabela (5.18).</b> Diagnóstico de convergência de Gelman e Rubin.		
Parâmetro	Estimativa Pontual	Quantil de 97,5%
$N$	1,00	1,02
$\eta$	1,00	1,03
$p$	1,00	1,03

(5.18)

A Figura (5.19) mostra o histograma marginal do tamanho populacional  $N$  e as densidades de  $\eta$  e  $p$ .



### Considerando as probabilidades de capturas diferentes

A Tabela (5.20) mostra as estimativas *a posteriori* dos parâmetros considerando a situação onde as probabilidades de captura são diferentes.

<b>Tabela (5.20).</b> Estimativas <i>a posteriori</i> dos parâmetros.			
Parâmetro	Média <i>a posteriori</i>	Intervalo Cred.(95%)	
$N$	465	328	666
$\eta_1$	-3,8417	-4,5585	-3,1776
$\eta_2$	-2,8596	-3,4017	-2,3134
$\eta_3$	-3,3337	-3,9690	-2,7414
$\eta_4$	-4,1332	-4,9448	-3,4318
$\eta_5$	-5,0438	-6,3431	-4,0743
$\eta_6$	-4,3699	-5,2460	-3,5913
$\eta_7$	-4,2543	-5,1125	-3,5033
$\eta_8$	-3,4614	-4,1220	-2,8613
$\eta_9$	-3,9363	-4,6698	-3,2976
$\eta_{10}$	-3,2725	-3,8794	-2,7043
$\eta_{11}$	-3,4011	-4,0367	-2,8065
$\eta_{12}$	-4,3795	-5,2190	-3,6232
$\eta_{13}$	-4,1313	-4,9380	-3,4013
$\eta_{14}$	-3,2286	-3,8177	-2,6762

(5.20)

Notamos pela Tabela (5.20) que as estimativas *a posteriori* do tamanho populacional foi um pouco menor que a estimativa obtida considerando as probabilidade de captura iguais conforme Tabela (5.17). Com o objetivo de analisar as probabilidades de captura em função de  $\eta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , recuperamos os valores de  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , fazendo  $\hat{p}_j = \frac{\exp(\hat{\eta}_j)}{1 + \exp(\hat{\eta}_j)}$ .

A Tabela (5.21) mostra as estimativas *a posteriori* das probabilidades de captura em função de  $\eta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Tabela (5.21). Estimativas <i>a posteriori</i> das probabilidades.			
Parâmetro	Média <i>a posteriori</i>	Intervalo Cred.(95%)	
$p_1$	0,0223	0,0104	0,0400
$p_2$	0,0560	0,0322	0,0900
$p_3$	0,0359	0,0185	0,0606
$p_4$	0,0169	0,0071	0,0313
$p_5$	0,0074	0,0018	0,0167
$p_6$	0,0135	0,0052	0,0268
$p_7$	0,0151	0,0060	0,0292
$p_8$	0,0318	0,0160	0,0541
$p_9$	0,0203	0,0093	0,0357
$p_{10}$	0,0380	0,0202	0,0627
$p_{11}$	0,0337	0,0174	0,0570
$p_{12}$	0,0134	0,0054	0,0260
$p_{13}$	0,0169	0,0071	0,0323
$p_{14}$	0,0396	0,0215	0,0644

(5.21)

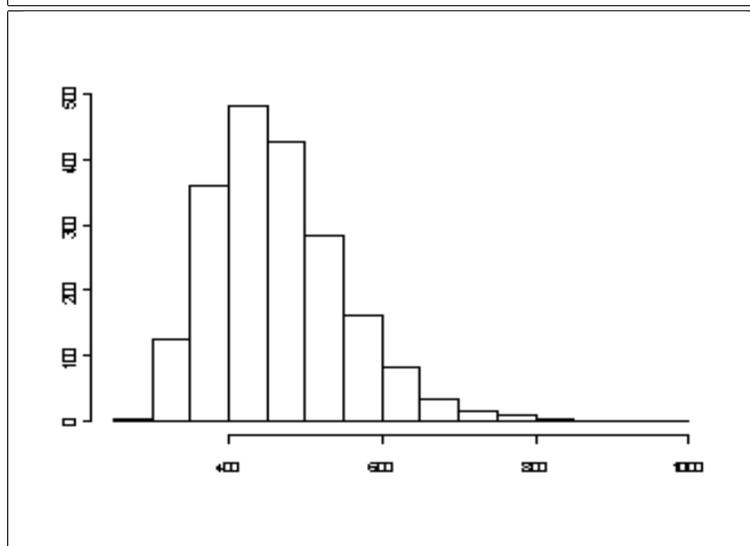
A Tabela (5.22) mostra o diagnóstico de convergência de Gelman e Rubin. Os valores obtidos confirmam a convergência dos algoritmos de *Gibbs Sampling* conjuntamente com o algoritmo de *Metropolis Hastings* utilizados para a obtenção das estimativas *a posteriori*.

A Figura (5.23) mostra o histograma marginal do tamanho populacional  $N$ .

**Tabela (5.22).** Diagnóstico de convergência de Gelman e Rubin.

Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%	Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%
$N$	1,00	1,02	$p_1$	1,00	1,00
$\eta_1$	1,00	1,00	$p_2$	1,00	1,01
$\eta_2$	1,00	1,01	$p_3$	1,00	1,01
$\eta_3$	1,00	1,01	$p_4$	1,01	1,05
$\eta_4$	1,01	1,04	$p_5$	1,00	1,01
$\eta_5$	1,00	1,00	$p_6$	1,00	1,01
$\eta_6$	1,00	1,01	$p_7$	1,00	1,00
$\eta_7$	1,00	1,00	$p_8$	1,01	1,03
$\eta_8$	1,01	1,03	$p_9$	1,00	1,00
$\eta_9$	1,00	1,00	$p_{10}$	1,00	1,00
$\eta_{10}$	1,00	1,00	$p_{11}$	1,00	1,00
$\eta_{11}$	1,00	1,00	$p_{12}$	1,00	1,00
$\eta_{12}$	1,00	1,00	$p_{13}$	1,00	1,01
$\eta_{13}$	1,00	1,00	$p_{14}$	1,00	1,01
$\eta_{14}$	1,00	1,01			

(5.22)

**Figura (5.23).** Histograma marginal de  $N$ .

(5.23)

# Capítulo 6

## Inserção de Covariáveis na probabilidade de captura

### 6.1 Introdução

Neste Capítulo inserimos covariáveis nas probabilidades de captura para tornar o modelo de captura-recaptura utilizado por Castledine (1981) mais realístico. Muitos autores vem demonstrando interesse neste aspecto, em especial, na análise bayesiana de modelos de captura-recaptura com variação das probabilidades de captura nas épocas de amostragem e nas diferentes respostas (reações) de cada animal (ver por exemplo Pollock (1974), Otis *et al.* (1978), Wang (2002)).

### 6.2 Modelo estatístico e função de verossimilhança

Nesta Seção determinaremos a função de verossimilhança para o modelo utilizado por Castledine (1981) com a presença de covariáveis, reescrevendo a probabilidade de captura como

$$p_i = \frac{\exp \{ \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi} \}}{1 + \exp \{ \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi} \}}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.1)$$

onde:

$p_i$  é a probabilidade do  $i$ -ésimo animal ser capturado em qualquer uma das  $s$

épocas de captura ( $s \geq 2$ ) e  $i = 1, 2, \dots, N$ .

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ , são os coeficientes associados as covariáveis  $x_1, x_2, \dots, x_p$  respectivamente.

Temos então a função de ligação

$$\log \left( \frac{p_i}{1 - p_i} \right) = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi}, \text{ com}$$

$$-\infty < (\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi}) < \infty, i = 1, 2, \dots, N.$$

Lembremos que a função de verossimilhança para o modelo de captura-recaptura utilizado por Castledine (1981) estudada no Capítulo 3 é dada por

$$L(N, \mathbf{p} | D) \propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j}. \quad (6.2)$$

Podemos observar que o modelo de captura-recaptura é dado em função das  $s$  épocas de captura ( $s \geq 2$ ), onde  $p_j$  é a probabilidade de qualquer animal ser capturado na  $j$ -ésima época de captura,  $j = 1, 2, \dots, s$ . Como estamos propondo a inserção de covariáveis associadas ao animal faremos

$$p_j = \frac{\exp \{ \beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2 + \dots + \beta_p \bar{x}_p \}}{1 + \exp \{ \beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2 + \dots + \beta_p \bar{x}_p \}}, j = 1, 2, \dots, s. \quad (6.3)$$

onde

$p_j$  : é a probabilidade de qualquer animal ser capturado na  $j$ -ésima época de captura,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

$\bar{x}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{1i}$  : é a média dos  $N$  valores da covariável  $x_1$  associada a população de tamanho  $N$ .

$\bar{x}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{2i}$  : é a média dos  $N$  valores da covariável  $x_2$  associada a população de tamanho  $N$ .

$\vdots$

$\bar{x}_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{pi}$  : é a média dos  $N$  valores da covariável  $x_p$  associada a população de tamanho  $N$ .

Então, aplicando (6.3) na função de verossimilhança dada em (6.2), temos a nova

função de verossimilhança para os parâmetros  $N, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  dada por

$$L(N, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p | D) \propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s \frac{(e^{\beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2 + \dots + \beta_p \bar{x}_p})^{n_j}}{(1 + e^{\beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2 + \dots + \beta_p \bar{x}_p})^N}. \quad (6.4)$$

### 6.3 Modelo com presença de uma covariável

Nesta Seção adotaremos o modelo Bayesiano hierárquico de captura-recaptura com presença de uma variável quantitativa. Adotaremos uma covariável quantitativa  $X$  denotando o tamanho (em unidades de comprimento) do animal. Logo, a função de verossimilhança é dada por

$$L(N, \beta_1 | D) \propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s \frac{(e^{\beta_{1j} \bar{x}_j})^{n_j}}{(1 + e^{\beta_{1j} \bar{x}_j})^N} \quad (6.5)$$

Onde

$\bar{x}_j$  : é a média dos tamanhos (em unidades de comprimento) dos animais capturados na  $j$ -ésima época,  $j = 1, 2, \dots, s$  e

$\beta_{1j}$  : é o coeficiente referente a  $j$ -ésima época associado a  $j$ -ésima média  $\bar{x}_j$  dos animais,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Adotaremos as seguintes distribuições *a priori* para o modelo Bayesiano hierárquico

$$\begin{aligned} \pi(N) &\propto N^{-1}, N = 1, 2, 3, \dots \\ \beta_{1j} &\sim N(\mu_\beta, \sigma_\beta^2), j = 1, 2, \dots, s. \\ \mu_\beta &\sim N(a, b) \\ \sigma_\beta^2 &\sim IG(c, d) \end{aligned} \quad (6.6)$$

com  $a, b, c, d$  hiperparâmetros conhecidos.

Logo, combinando a função de verossimilhança dada em (6.5) com as distribuições *a priori* dadas em (6.6), temos a seguinte distribuição *a posteriori* conjunta de  $N, \beta_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}), \mu_\beta, \sigma_\beta^2$  dado os dados

$$\begin{aligned} \pi(N, \beta_1, \mu_\beta, \sigma_\beta^2 | D) &\propto \\ &\binom{N}{r} \prod_{j=1}^s \frac{(e^{\beta_{1j}\bar{x}_j})^{n_j}}{(1 + e^{\beta_{1j}\bar{x}_j})^N} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\beta^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\beta^2} (\beta_{1j} - \mu_\beta)^2\right\} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp\left\{-\frac{1}{2b} (\mu_\beta - a)^2\right\} \times (\sigma_\beta^2)^{-(c+1)} \exp\left\{\frac{-d}{(\sigma_\beta^2)}\right\} \times \frac{1}{N}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

As distribuições condicionais necessárias para o algoritmo *Gibbs Sampling* e para o algoritmo de *Metropolis Hastings* a partir de (6.7) são dadas a seguir

- (1). A distribuição condicional de  $N - r$  dado  $\beta_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}$ ,  $\mu_\beta$ ,  $\sigma_\beta^2$  e os dados é dada por:

$$N - r | \beta_1, \mu_\beta, \sigma_\beta^2, D \sim BN\left(r, 1 - \prod_{j=1}^s \frac{1}{(1 + e^{\beta_{1j}\bar{x}_j})}\right). \quad (6.8)$$

- (2). A distribuição condicional de  $\beta_{1j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , dado  $N$ ,  $\mu_\beta$ ,  $\sigma_\beta^2$  e os dados é dada por:

$$\pi(\beta_{1j} | N, \mu_\beta, \sigma_\beta^2, D) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\beta^2} (\beta_{1j} - \mu_\beta)^2\right\} \times \frac{(e^{\beta_{1j}\bar{x}_j})^{n_j}}{(1 + e^{\beta_{1j}\bar{x}_j})^N}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (6.9)$$

- (3). A distribuição condicional de  $\mu_\beta$  dado  $N$ ,  $\beta_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}$ ,  $\sigma_\beta^2$  e os dados é dada por:

$$\mu_\beta | N, \beta_1, \sigma_\beta^2, D \sim N\left(\frac{b \sum_{j=1}^s \beta_{1j} + \sigma_\beta^2 a}{sb + \sigma_\beta^2}, \frac{\sigma_\beta^2 b}{sb + \sigma_\beta^2}\right). \quad (6.10)$$

- (4). A distribuição condicional de  $\sigma_\beta^2$  dado  $N$ ,  $\beta_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}$ ,  $\mu_\beta$  e os dados é dada por:

$$\sigma_{\beta}^2 \mid N, \beta_1, \mu_{\beta}, D \propto IG \left( \frac{s}{2} + c, \sum_{j=1}^s \frac{(\beta_{1j} - \mu_{\beta})^2}{2} + d \right). \quad (6.11)$$

### 6.3.1 Resultados de simulação

#### Procedimento para a geração dos dados populacionais

1. Foi gerado um valor da distribuição  $N(0, 1)$  para o parâmetro  $\beta_1$ . Como  $p = \frac{\exp\{\beta_1 \bar{x}\}}{1 + \exp\{\beta_1 \bar{x}\}}$ , sabemos que para  $-3 < \beta_1 \bar{x} < 3$  temos  $0,0474 < p < 0,9526$ . Então tomamos o cuidado de gerar um valor negativo de  $\beta_1$  para obtermos probabilidades de captura abaixo de  $p = 0,50$  e acima de  $p = 0,04$  apenas com o objetivo de não resultar em muitas épocas ou poucas épocas de captura. Com o valor gerado dividimos pela constante  $\bar{x}$ . O valor de  $\beta_1$  usado para esse estudo de simulação foi  $\beta_1 = -0,02746531$ .
2. Supondo uma população de tamanho  $N = 5000$ , foram então gerados 5000 valores de uma distribuição normal  $N(\mu, \sigma^2)$  com  $\mu$  e  $\sigma^2$  valores arbitrários, correspondentes ao tamanho (em unidades de comprimento) do animal.
3. Para cada animal temos então associado um tamanho (em unidades de comprimento), isto é, o  $i$ -ésimo animal ficou associado ao  $i$ -ésimo tamanho  $X$  gerado, onde  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .
4. Com o Beta gerado ( $\beta_1 = -0,02746531$ ) e com as 5000 observações de  $X$ , fizemos  $p_i = \frac{\exp\{\beta_1 x_i\}}{1 + \exp\{\beta_1 x_i\}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ . Então, para cada um dos 5000 animais temos associado um tamanho (em unidades de comprimento) e, conseqüentemente, uma probabilidade de captura. Esses valores foram "guardados"(geração da população) para dar início ao processo de amostragem, isto é, as épocas de captura.
5. Com as 5000 probabilidades da captura fizemos  $\bar{p} = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} p_i$ . Com o valor de  $\bar{p}$  demos início ao processo de amostragem com  $s = 6$  épocas de captura. Com os valores amostrais  $(n_1, n_2, \dots, n_6)$  e  $(m_1, m_2, \dots, m_6)$  obtivemos a estatística  $r = \sum_{j=1}^6 n_j - \sum_{j=1}^6 m_j$ .

6. Esse procedimento de geração dos dados foi feito considerando cada um dos casos abaixo.

**Caso I.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(40, 25)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso II.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(60, 100)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso III.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(80, 100)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso IV.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(100, 100)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso V.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(120, 100)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso VI.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(140, 100)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

A Tabela (6.12) mostra as populações geradas considerando os casos I, II e III. A Tabela (6.13) mostra as populações geradas considerando os casos IV, V e VI.

**Tabela (6.12).** Dados gerados para população considerando os Casos I, II e III.

Caso I			Caso II			Caso III		
$X \sim N(40, 25)$			$X \sim N(60, 100)$			$X \sim N(80, 100)$		
Animal	Tamanho	Prob.	Animal	Tamanho	Prob.	Animal	Tamanho	Prob.
$i$	(u.c)	Captura	$i$	(u.c)	Captura	$i$	(u.c)	Captura
1	40	0,2500	1	60	0,1614	1	80	0,1000
2	38	0,2604	2	58	0,1690	2	78	0,1051
3	26	0,3287	3	46	0,2204	3	66	0,1403
4	34	0,2822	4	54	0,1850	4	74	0,1158
5	43	0,2349	5	63	0,1505	5	83	0,0928
6	44	0,2300	6	64	0,1471	6	84	0,0905
7	28	0,3167	7	48	0,2111	7	68	0,1338
8	36	0,2712	8	56	0,1768	8	76	0,1103
9	24	0,3409	9	44	0,2300	9	64	0,1471
10	37	0,2658	10	57	0,1729	10	77	0,1077
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4991	45	0,2251	4991	65	0,1437	4991	85	0,0883
4992	45	0,2251	4992	65	0,1437	4992	85	0,0883
4993	32	0,2934	4993	52	0,1934	4993	72	0,1216
4994	28	0,3167	4994	48	0,2111	4994	68	0,1338
4995	35	0,2766	4995	55	0,1809	4995	82	0,1131
4996	28	0,3167	4996	48	0,2111	4996	102	0,1338
4997	42	0,2398	4997	62	0,1541	4997	82	0,0952
4998	62	0,1541	4998	82	0,0952	4998	102	0,0572
4999	44	0,2300	4999	64	0,1471	4999	84	0,0905
5000	40	0,2500	5000	60	0,1614	5000	80	0,0100

(6.12)

**Tabela (6.13).** Dados gerados para população considerando os Casos IV, V e VI.

Caso IV			Caso V			Caso VI		
$X \sim N(100, 100)$			$X \sim N(120, 100)$			$X \sim N(140, 100)$		
Animal	Tamanho	Prob.	Animal	Tamanho	Prob.	Animal	Tamanho	Prob.
$i$	(u.c)	Captura	$i$	(u.c)	Captura	$i$	(u.c)	Captura
1	100	0,0603	1	120	0,0357	1	150	0,0161
2	98	0,0635	2	118	0,0377	2	153	0,0149
3	86	0,0861	3	106	0,0516	3	145	0,0184
4	94	0,0703	4	114	0,0418	4	145	0,0182
5	103	0,0558	5	123	0,0330	5	136	0,0234
6	104	0,0544	6	124	0,0321	6	141	0,0206
7	88	0,0819	7	108	0,0490	7	137	0,0226
8	96	0,0668	8	116	0,0397	8	143	0,0196
9	84	0,0905	9	104	0,0544	9	150	0,0162
10	97	0,0651	10	117	0,0387	10	126	0,0305
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4991	105	0,0530	4991	125	0,0313	4991	153	0,0146
4992	105	0,0530	4992	125	0,0313	4992	142	0,0200
4993	92	0,0740	4993	112	0,0441	4993	136	0,0232
4994	88	0,0819	4994	108	0,0490	4994	132	0,0258
4995	95	0,0685	4995	115	0,0408	4995	154	0,0144
4996	88	0,0819	4996	108	0,0490	4996	134	0,0247
4997	102	0,0572	4997	122	0,0339	4997	139	0,0217
4998	122	0,0339	4998	142	0,0198	4998	122	0,0339
4999	104	0,0544	4999	124	0,0321	4999	127	0,0298
5000	100	0,0603	5000	120	0,0357	5000	146	0,0180

(6.13)

A Tabela (6.14) mostra os dados amostrais gerados a partir das populações consideradas segundo cada caso, adotando  $s = 6$  épocas de captura.

<b>Tabela (6.14).</b> Dados amostrais gerados a partir das populações consideradas.											
<b>Caso I</b>						<b>Caso II</b>					
$N = 5000$ e $r = 4051$						$N = 5000$ e $r = 3239$					
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{p}_j)$	$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	1278	0	0	37,57	0,2661	1	833	0	0	57,24	0,1753
2	1278	334	1278	37,39	0,2672	2	840	140	833	56,79	0,1770
3	1280	597	2222	37,75	0,2651	3	850	275	1533	57,85	0,1730
4	1260	772	2905	37,96	0,2643	4	819	362	2108	57,68	0,1741
5	1209	841	3393	37,56	0,2663	5	786	432	2565	57,70	0,1739
6	1254	964	3761	37,28	0,2676	6	815	495	2919	56,89	0,1768
<b>Caso III</b>						<b>Caso IV</b>					
$N = 5000$ e $r = 2333$						$N = 5000$ e $r = 1532$					
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{p}_j)$	$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	498	0	0	77,44	0,1092	1	280	0	0	97,44	0,0664
2	510	55	498	76,47	0,1121	2	313	26	280	96,10	0,0690
3	526	119	953	77,20	0,1100	3	327	46	567	97,28	0,0667
4	495	133	1360	77,67	0,1088	4	289	58	848	97,10	0,0670
5	483	180	1722	77,38	0,1096	5	284	59	1079	96,88	0,0673
6	516	208	2025	76,84	0,1109	6	309	81	1304	96,21	0,0683
<b>Caso V</b>						<b>Caso VI</b>					
$N = 5000$ e $r = 968$						$N = 5000$ e $r = 644$					
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{p}_j)$	$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	161	0	0	117,58	0,0396	1	118	0	0	136,18	0,0238
2	194	9	161	115,36	0,0422	2	128	2	118	137,51	0,0231
3	187	13	346	116,58	0,0405	3	105	5	244	138,28	0,0226
4	166	24	520	116,54	0,0405	4	123	6	344	136,64	0,0237
5	174	23	662	116,99	0,0400	5	98	8	461	136,77	0,0236
6	185	30	813	116,59	0,0402	6	110	17	551	137,90	0,0230

(6.14)

Adotaremos as seguintes distribuições *a priori* não informativas para o modelo bayesiano hierárquico

$$\begin{aligned}\pi(N) &\propto N^{-1}, N = 1, 2, \dots \\ \beta_{1j} &\sim N(\mu_{\beta_1}, \sigma_{\beta}^2), j = 1, 2, \dots, 6. \\ \mu_{\beta_1} &\sim N(0, 1000) \\ \sigma_{\beta}^2 &\sim 1/G(1, 1)\end{aligned}$$

Para cada caso considerado foram geradas duas cadeias de 100000 iterações descartando as primeiras 25000 iterações como "burn-in" e considerando um salto de tamanho 25 resultando numa amostra final de tamanho 3000 da distribuição *a posteriori* conjunta.

A Tabela (6.15) contém os valores populacionais do tamanho  $X$  (em unidades de comprimento) para cada caso considerado bem como os valores populacionais das probabilidades de captura em função da covariável  $X$ . Espera-se que os valores obtidos nas estimativas *a posteriori* tanto para a média dos tamanhos (em unidades de comprimento) de cada época bem como das probabilidades de captura de cada época em função de  $X$  estejam próximos dos valores populacionais da Tabela abaixo.

**Tabela (6.15).** Valores populacionais de  $X$  e das probabilidades em função de  $X$ .

Casos:	Coeficiente Gerado $\beta_1$	Média populacional dos tamanhos $\bar{x} = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} x_i$	Média populacional da prob. captura em função da covariável $X$ $\bar{p} = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} p_i$ , onde $p_i = \frac{\exp\{\beta_1 x_i\}}{1 + \exp\{\beta_1 x_i\}}$
Caso I	-0,02746531	39,96	0,2538
Caso II	-0,02746531	59,96	0,1651
Caso III	-0,02746531	79,96	0,1029
Caso IV	-0,02746531	99,96	0,0623
Caso V	-0,02746531	119,96	0,0370
Caso VI	-0,02746531	139,86	0,0218

(6.15)

Podemos notar na Tabela (6.15) a influência da covariável  $X$ , pois a medida que o tamanho do animal aumenta, a probabilidade de captura diminui, isto é, quanto maior

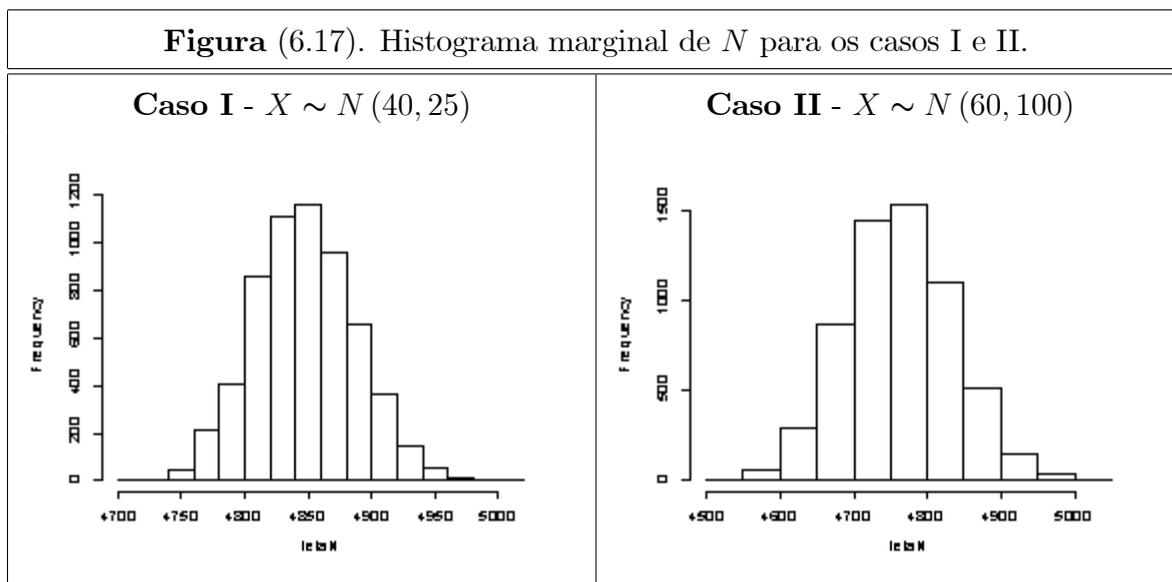
o animal menor é a sua capturabilidade.

As Tabelas (6.16), (6.18) e (6.20) mostram os resultados *a posteriori* para cada caso considerado. As estimativas de  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$  foram obtidas fazendo  $p_j = \frac{\exp\{\beta_{1j}\bar{x}_j\}}{1+\exp\{\beta_{1j}\bar{x}_j\}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ . Lembrando que o valor verdadeiro de  $\beta_1$  usado para gerar os dados foi  $\beta_1 = -0,02746531$  então podemos observar que para todos os seis casos considerados as estimativas de  $\beta_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s})$  foram satisfatórias.

Tabela (6.16). Resultados <i>a posteriori</i> para os casos I e II.							
Caso I - $X \sim N(40, 25)$				Caso II - $X \sim N(60, 100)$			
Parâmetro	Média	I.C. (95%)		Parâmetro	Média	I.C. (95%)	
$N$	4848	4771	5028	$N$	4763	4626	5010
$\beta_{11}$	-0,0274	-0,0292	-0,0255	$\beta_{11}$	-0,0271	-0,0286	-0,0256
$\beta_{12}$	-0,0274	-0,0292	-0,0256	$\beta_{12}$	-0,0272	-0,0286	-0,0257
$\beta_{13}$	-0,0272	-0,0290	-0,0254	$\beta_{13}$	-0,0264	-0,0278	-0,0250
$\beta_{14}$	-0,0276	-0,0294	-0,0257	$\beta_{14}$	-0,0272	-0,0287	-0,0258
$\beta_{15}$	-0,0293	-0,0311	-0,0275	$\beta_{15}$	-0,0281	-0,0295	-0,0267
$\beta_{16}$	-0,0282	-0,0300	-0,0265	$\beta_{16}$	-0,0277	-0,0292	-0,0263
$p_1$	0,2636	0,2505	0,2775	$p_1$	0,1750	0,1630	0,1876
$p_2$	0,2639	0,2509	0,2772	$p_2$	0,1763	0,1645	0,1886
$p_3$	0,2640	0,2509	0,2774	$p_3$	0,1784	0,1666	0,1908
$p_4$	0,2599	0,2470	0,2735	$p_4$	0,1721	0,1606	0,1843
$p_5$	0,2494	0,2371	0,2622	$p_5$	0,1652	0,1538	0,1767
$p_6$	0,2587	0,2461	0,2717	$p_6$	0,1712	0,1595	0,1833

(6.16)

A Figura (6.17) mostra o histograma marginal do tamanho populacional  $N$  para os casos I e II.

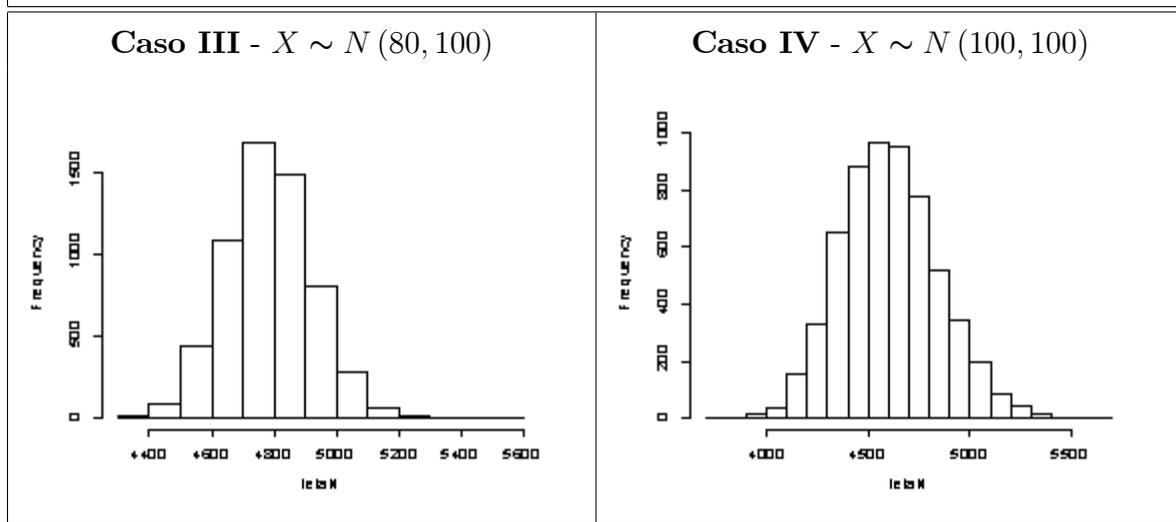


(6.17)

**Tabela (6.18).** Resultados *a posteriori* para os casos III e IV.

Caso III - $X \sim N(80, 100)$				Caso IV - $X \sim N(100, 100)$			
Parâmetro	Média	I.C. (95%)		Parâmetro	Média	I.C. (95%)	
$N$	4784	4522	5069	$N$	4607	4166	5108
$\beta_{11}$	-0,0278	-0,0293	-0,0263	$\beta_{11}$	-0,0281	-0,0297	-0,0264
$\beta_{12}$	-0,0278	-0,0292	-0,0263	$\beta_{12}$	-0,0272	-0,0289	-0,0256
$\beta_{13}$	-0,0271	-0,0286	-0,0256	$\beta_{13}$	-0,0264	-0,0281	-0,0248
$\beta_{14}$	-0,0278	-0,0293	-0,0263	$\beta_{14}$	-0,0278	-0,0295	-0,0262
$\beta_{15}$	-0,0283	-0,0297	-0,0268	$\beta_{15}$	-0,0281	-0,0298	-0,0265
$\beta_{16}$	-0,0275	-0,0290	-0,0261	$\beta_{16}$	-0,0274	-0,0290	-0,0258
$p_1$	0,1042	0,0940	0,1152	$p_1$	0,0610	0,0523	0,0707
$p_2$	0,1067	0,0966	0,1177	$p_2$	0,0681	0,0584	0,0785
$p_3$	0,1100	0,0993	0,1214	$p_3$	0,0712	0,0613	0,0823
$p_4$	0,1035	0,0934	0,1145	$p_4$	0,0630	0,0538	0,0729
$p_5$	0,1011	0,0912	0,1115	$p_5$	0,0619	0,0529	0,0714
$p_6$	0,1080	0,0975	0,1186	$p_6$	0,0673	0,0577	0,0774

(6.18)

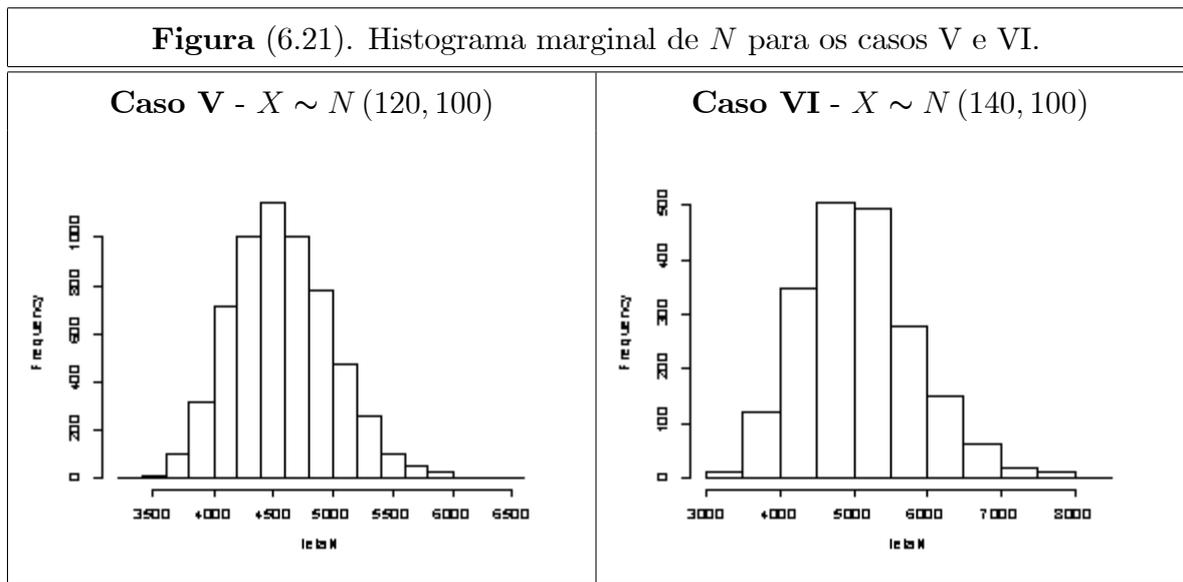
**Figura (6.19).** Histograma marginal de  $N$  para os casos III e IV.

(6.19)

**Tabela (6.20).** Resultados *a posteriori* para os casos V e VI.

<b>Caso V - <math>X \sim N(120, 100)</math></b>			<b>Caso VI - <math>X \sim N(140, 100)</math></b>				
Parâmetro	Média	I.C. (95%)		Parâmetro	Média	I.C. (95%)	
$N$	4579	3832	5492	$N$	5081	3728	6894
$\beta_{11}$	-0,0281	-0,0302	-0,0261	$\beta_{11}$	-0,0274	-0,0301	-0,0248
$\beta_{12}$	-0,0270	-0,0291	-0,0250	$\beta_{12}$	-0,0265	-0,0291	-0,0241
$\beta_{13}$	-0,0271	-0,0291	-0,0251	$\beta_{13}$	-0,0278	-0,0304	-0,0253
$\beta_{14}$	-0,0281	-0,0302	-0,0261	$\beta_{14}$	-0,0270	-0,0298	-0,0244
$\beta_{15}$	-0,0276	-0,0296	-0,0256	$\beta_{15}$	-0,0286	-0,0313	-0,0260
$\beta_{16}$	-0,0272	-0,0293	-0,0251	$\beta_{16}$	-0,0276	-0,0302	-0,0250
$p_1$	0,0355	0,0278	0,0443	$p_1$	0,0238	0,0164	-0,0331
$p_2$	0,0427	0,0337	0,0530	$p_2$	0,0257	0,0181	0,0353
$p_3$	0,0412	0,0325	0,0511	$p_3$	0,0212	0,0147	0,0294
$p_4$	0,0366	0,0288	0,0458	$p_4$	0,0247	0,0168	0,0343
$p_5$	0,0383	0,0302	0,0474	$p_5$	0,0198	0,0137	0,0276
$p_6$	0,0407	0,0319	0,0508	$p_6$	0,0222	0,0153	0,0309

(6.20)



(6.21)

A Tabela (6.22) mostra o diagnóstico de convergência de Gelman e Rubin para cada um dos casos considerados.

Os valores obtidos confirmam a convergência dos algoritmos de *Gibbs Sampling* conjuntamente com o algoritmo de Metropolis Hastings utilizados para a obtenção das estimativas *a posteriori*.

Tabela (6.22). Diagnóstico de convergência para os casos considerados.

Par.	Caso I		Caso II		Caso III		Caso IV		Caso V		Caso VI	
	Est.P	Q.97,5%	Est.P	Q.97,5%	Est.P	Q.97,5%	Est.P	Q.97,5%	Est.P	Q.97,5%	Est.P	Q.97,5%
$N$	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,02	1,00	1,00
$p_1$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,02	1,00	1,00
$p_2$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,01	1,00	1,02	1,00	1,00
$p_3$	1,00	1,02	1,00	1,01	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00
$p_4$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,02	1,00	1,00
$p_5$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,02	1,00	1,00
$p_6$	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,01	1,02	1,00	1,00
$\beta_1$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,03	1,00	1,00
$\beta_2$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,01	1,01	1,03	1,00	1,00
$\beta_3$	1,00	1,02	1,00	1,01	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00
$\beta_4$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00
$\beta_5$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,02	1,00	1,00
$\beta_6$	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,01	1,02	1,00	1,00

(6.22)

## 6.4 Modelo com presença de duas covariáveis

Nesta Seção adotaremos o modelo Bayesiano de captura-recaptura com presença de duas covariáveis quantitativas. Adotaremos  $X$  denotando o tamanho (em unidades de comprimento) do animal e  $Y$  denotando o peso (em unidades de peso) do animal. Logo, a função de verossimilhança é dada por

$$L(N, \beta_1, \beta_2 | D) \propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s \frac{\exp \{n_j (\beta_{1j} \bar{x}_j + \beta_{2j} \bar{y}_j)\}}{[1 + \exp \{\beta_{1j} \bar{x}_j + \beta_{2j} \bar{y}_j\}]^N}. \quad (6.23)$$

Onde

$\bar{x}_j$  : é a média dos tamanhos (em unidades de comprimento) dos animais capturados na  $j$ -ésima época,  $j = 1, 2, \dots, s$ ;

$\beta_{1j}$  : é o coeficiente referente a  $j$ -ésima época associado a  $j$ -ésima média  $\bar{x}_j$  dos animais,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

$\bar{y}_j$  : é a média dos pesos (em unidades de peso) dos animais capturados na  $j$ -ésima época,  $j = 1, 2, \dots, s$ ;

$\beta_{2j}$  : é o coeficiente referente a  $j$ -ésima época associado a  $j$ -ésima média  $\bar{y}_j$  dos animais,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Para o modelo Bayesiano hierárquico adotaremos as seguintes distribuições *a priori* não informativas

$$\begin{aligned}
 \pi(N) &\propto N^{-1}, N = 1, 2, \dots; \\
 \beta_{1j} &\sim N(\mu_{\beta_1}, \sigma_{\beta_1}^2), j = 1, 2, \dots, s; \\
 \beta_{2j} &\sim N(\mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_2}^2), j = 1, 2, \dots, s; \\
 \mu_{\beta_1} &\sim N(a, b); \\
 \mu_{\beta_2} &\sim N(c, d); \\
 \sigma_{\beta_1}^2 &\sim IG(e, f); \\
 \sigma_{\beta_2}^2 &\sim IG(g, h).
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

Com  $a, b, c, d, e, f, g$  e  $h$  hiperparâmetros conhecidos.

Combinando a função de verossimilhança dada em (6.23) com as distribuições *a priori* (6.24), temos a seguinte distribuição *a posteriori* conjunta de  $N, \boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}, \boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2$  dado os dados:

$$\begin{aligned}
 \pi(N, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2 | D) &\propto \\
 \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s \frac{(e^{\beta_{1j}\bar{x}_j + \beta_{2j}\bar{y}_j})^{n_j}}{(1 + e^{\beta_{1j}\bar{x}_j + \beta_{2j}\bar{y}_j})^N} &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\beta_1}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{\beta_1}^2} (\beta_{1j} - \mu_{\beta_1})^2\right\} \\
 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\beta_2}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{\beta_2}^2} (\beta_{2j} - \mu_{\beta_2})^2\right\} &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp\left\{-\frac{1}{2b} (\mu_{\beta_1} - a)^2\right\} \\
 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \exp\left\{-\frac{1}{2d} (\mu_{\beta_2} - c)^2\right\} &\times (\sigma_{\beta_1}^2)^{-(e+1)} \exp\left\{\frac{-f}{(\sigma_{\beta_1}^2)}\right\} \\
 \times (\sigma_{\beta_2}^2)^{-(g+1)} \exp\left\{\frac{-h}{(\sigma_{\beta_2}^2)}\right\} &\times \frac{1}{N}.
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

As distribuições condicionais necessárias para o algoritmo *Gibbs Sampling* e para o algoritmo de *Metropolis Hastings* a partir de (6.25) são dadas a seguir.

- (1). A distribuição condicional de  $N-r$  dados  $\boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}$ ,  $\mu_{\beta_1}$ ,  $\mu_{\beta_2}$ ,  $\sigma_{\beta_1}^2$ ,  $\sigma_{\beta_2}^2$  e os dados é dada por:

$$N-r \mid \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, D \sim BN \left( r, 1 - \prod_{j=1}^s \frac{1}{(1 + e^{\beta_{1j}\bar{x}_j + \beta_{2j}\bar{y}_j})} \right). \quad (6.26)$$

- (2). A distribuição condicional de  $\beta_{1j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  dados  $N$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}$ ,  $\mu_{\beta_1}$ ,  $\mu_{\beta_2}$ ,  $\sigma_{\beta_1}^2$ ,  $\sigma_{\beta_2}^2$  e os dados é dada por:

$$\begin{aligned} & \pi(\beta_{1j} \mid N, \boldsymbol{\beta}_2, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, D) \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\beta_1}^2} (\beta_{1j} - \mu_{\beta_1})^2 \right\} \times \frac{(e^{\beta_{1j}\bar{x}_j})^{n_j}}{(1 + e^{\beta_{1j}\bar{x}_j + \beta_{2j}\bar{y}_j})^N}, j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (6.27)$$

- (3). A distribuição condicional de  $\beta_{2j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  dados  $N$ ,  $\boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}$ ,  $\mu_{\beta_1}$ ,  $\mu_{\beta_2}$ ,  $\sigma_{\beta_1}^2$ ,  $\sigma_{\beta_2}^2$  e os dados é dada por:

$$\begin{aligned} & \pi(\beta_{2j} \mid N, \boldsymbol{\beta}_1, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, D) \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\beta_2}^2} (\beta_{2j} - \mu_{\beta_2})^2 \right\} \times \frac{(e^{\beta_{2j}\bar{y}_j})^{n_j}}{(1 + e^{\beta_{1j}\bar{x}_j + \beta_{2j}\bar{y}_j})^N}, j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (6.28)$$

- (4). A distribuição condicional de  $\mu_{\beta_1}$  dados  $N$ ,  $\boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}$ ,  $\mu_{\beta_2}$ ,  $\sigma_{\beta_1}^2$ ,  $\sigma_{\beta_2}^2$  e os dados é dada por:

$$\mu_{\beta_1} \mid N, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, D \sim N \left( \frac{b \sum_{j=1}^s \beta_{1j} + \sigma_{\beta_1}^2 a}{sb + \sigma_{\beta_1}^2}; \frac{\sigma_{\beta_1}^2 b}{sb + \sigma_{\beta_1}^2} \right). \quad (6.29)$$

- (5). A distribuição condicional de  $\mu_{\beta_2}$  dados  $N$ ,  $\boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}$ ,  $\mu_{\beta_1}$ ,  $\sigma_{\beta_1}^2$ ,  $\sigma_{\beta_2}^2$  e os dados é dada por:

$$\mu_{\beta_2} \mid N, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \mu_{\beta_1}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, D \sim N \left( \frac{d \sum_{j=1}^s \beta_{2j} + \sigma_{\beta_2}^2 c}{sd + \sigma_{\beta_2}^2}; \frac{\sigma_{\beta_2}^2 d}{sd + \sigma_{\beta_2}^2} \right). \quad (6.30)$$

- (6). A distribuição condicional de  $\sigma_{\beta_1}^2$  dados  $N$ ,  $\boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}$ ,  $\mu_{\beta_1}$ ,  $\mu_{\beta_2}$ ,  $\sigma_{\beta_2}^2$  e os dados é dada por:

$$\sigma_{\beta_1}^2 \mid N, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_2}^2, D \propto IG \left( \frac{s}{2} + e; \sum_{j=1}^s \frac{(\beta_{1j} - \mu_{\beta_1})^2}{2} + f \right). \quad (6.31)$$

- (7). A distribuição condicional de  $\sigma_{\beta_2}^2$  dados  $N$ ,  $\boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}$ ,  $\mu_{\beta_1}$ ,  $\mu_{\beta_2}$ ,  $\sigma_{\beta_1}^2$  e os dados é dada por:

$$\sigma_{\beta_2}^2 \mid N, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_1}^2, D \propto IG \left( \frac{s}{2} + g; \sum_{j=1}^s \frac{(\beta_{2j} - \mu_{\beta_2})^2}{2} + h \right). \quad (6.32)$$

### 6.4.1 Resultados de simulação

#### Procedimento para a geração dos dados populacionais

1. Foram gerados dois valores da distribuição  $N(0, 1)$  para o parâmetro  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Como  $p = \frac{\exp\{\beta_1 x + \beta_2 y\}}{1 + \exp\{\beta_1 x + \beta_2 y\}}$ , sabemos que para  $-3 < (\beta_1 x + \beta_2 y) < 3$  temos  $0,0474 < p < 0,9526$ . Então tomamos o cuidado de gerar um valor negativo de  $\beta_1$  e para  $\beta_2$  para obtermos probabilidades de captura abaixo de  $p = 0,50$  e acima de  $p = 0,04$  apenas com o objetivo de não resultar em muitas épocas ou poucas épocas de captura. Com os valores gerados de  $\beta_1$  e  $\beta_2$  dividimos pela constante  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  respectivamente. Os valores de  $\beta_1$  e de  $\beta_2$  usados para esse estudo de simulação foi  $\beta_1 = -0,01373265$  e  $\beta_2 = -0,02288775$ .

2. Supondo uma população de tamanho  $N = 5000$ , foram então gerados 5000 valores de uma distribuição normal  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  com  $\mu_1$  e  $\sigma_1^2$  valores arbitrários, correspondentes ao tamanho  $X$  (em unidades de comprimento) do animal.
3. Foram gerados 5000 valores de uma distribuição normal  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  com  $\mu_2$  e  $\sigma_2^2$  valores arbitrários, correspondentes ao peso  $Y$  (em unidades de peso) do animal.
4. Para cada animal temos então associado um tamanho (em unidades de comprimento) e um peso (em unidades de peso), isto é, o  $i$ -ésimo animal ficou associado ao  $i$ -ésimo tamanho  $X$  gerado e ao  $i$ -ésimo peso  $Y$  gerado, onde  $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ , e  $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  com  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .
5. Com os valores dos coeficientes Betas gerados ( $\beta_1 = -0,01373265$  e  $\beta_2 = -0,02288775$ ) e com as 5000 observações de  $X$  e 5000 observações de  $Y$ , fizemos  $p_i = \frac{\exp\{\beta_1 x_i + \beta_2 y_i\}}{1 + \exp\{\beta_1 x_i + \beta_2 y_i\}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ . Então, para cada um dos 5000 animais temos associado um tamanho (em unidades de comprimento), um peso (em unidades de peso) e, consequentemente, uma probabilidade de captura. Esses valores gerados foram *guardados* (população gerada) para dar início ao processo de amostragem, isto é, as épocas de captura.
6. Com as 5000 probabilidades da captura fizemos  $\bar{p} = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} p_i$ . Com o valor de  $\bar{p}$  demos início ao processo de amostragem com  $s = 4$  épocas de captura. Com os valores amostrais  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$  e  $(m_1, m_2, m_3, m_4)$  obtivemos a estatística  $r = \sum_{j=1}^4 n_j - \sum_{j=1}^4 m_j$ .
7. Esse procedimento de geração dos dados foi feito considerando cada um dos casos abaixo.

**Caso I.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(40, 25)$ , e peso  $Y_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(24, 16)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso II.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(60, 100)$ , e peso  $Y_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(36, 25)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso III.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(80, 100)$ , e peso  $Y_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(48, 100)$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso IV.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(100, 100)$ , e peso  $Y_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(60, 100)$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso V.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(120, 100)$ , e peso  $Y_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(72, 100)$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso VI.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(140, 100)$ , e peso  $Y_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(84, 100)$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

Os dados gerados para a obtenção das populações, considerando cada caso, encontram-se nas Tabelas (6.33), (6.34) e (6.35).

<b>Tabela (6.33).</b> Dados gerados para população considerando os Casos I e II.							
<b>Caso I</b>				<b>Caso II</b>			
$X$ : Tamanho		$X \sim N(40, 25)$		$X$ : Tamanho		$X \sim N(60, 100)$	
$Y$ : Peso		$Y \sim N(24, 16)$		$Y$ : Peso		$Y \sim N(36, 16)$	
i-ésimo animal	Tamanho (u.c)	Peso (u.p)	Probabilidade de Captura	i-ésimo animal	Tamanho (u.c)	Peso (u.p)	Probabilidade de Captura
1	40	24	0,2500	1	60	35	0,1645
2	26	14	0,3368	2	46	25	0,2308
3	43	27	0,2300	3	63	40	0,1442
4	28	16	0,3207	4	48	27	0,2180
5	24	14	0,3430	5	44	25	0,2357
6	51	32	0,1927	6	71	46	0,1163
7	38	25	0,2509	7	58	40	0,1529
8	47	28	0,2165	8	67	41	0,1349
9	30	18	0,3049	9	50	29	0,2058
10	49	30	0,2043	10	69	44	0,1241
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4991	40	26	0,2415	4991	60	41	0,1465
4992	42	27	0,2324	4992	62	41	0,1431
4993	35	24	0,2631	4993	55	40	0,1583
4994	49	29	0,2081	4994	69	40	0,1343
4995	41	28	0,2308	4995	61	46	0,1312
4996	50	27	0,2134	4996	70	33	0,1523
4997	23	12	0,3565	4997	43	22	0,2509
4998	28	13	0,3358	4998	48	20	0,2466
4999	54	34	0,1795	4999	74	48	0,1077
5000	40	28	0,2332	5000	60	45	0,1354

(6.33)

<b>Tabela (6.34).</b> Dados gerados para população considerando os Casos III e IV.							
<b>Caso III</b>				<b>Caso IV</b>			
$X$ : Tamanho		$X \sim N(80, 100)$		$X$ : Tamanho		$X \sim N(100, 100)$	
$Y$ : Peso		$Y \sim N(48, 100)$		$Y$ : Peso		$Y \sim N(60, 100)$	
i-ésimo animal	Tamanho (u.c)	Peso (u.p)	Probabilidade de Captura	i-ésimo animal	Tamanho (u.c)	Peso (u.p)	Probabilidade de Captura
1	80	46	0,1042	1	100	58	0,0629
2	66	34	0,1565	2	86	46	0,0968
3	83	54	0,0850	3	103	66	0,0509
4	68	37	0,1442	4	88	49	0,0887
5	64	36	0,1541	5	84	48	0,0952
6	91	62	0,0648	6	111	74	0,0385
7	78	57	0,0850	7	98	69	0,0509
8	87	53	0,0826	8	107	65	0,0494
9	70	40	0,1328	9	90	52	0,0812
10	89	58	0,0724	10	109	70	0,0431
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4991	80	58	0,0812	4991	100	70	0,0485
4992	82	56	0,0826	4992	102	68	0,0494
4993	75	59	0,0847	4993	95	71	0,0507
4994	89	50	0,0858	4994	109	62	0,0514
4995	81	67	0,0662	4995	101	79	0,0393
4996	90	37	0,1108	4996	110	49	0,0671
4997	63	29	0,1782	4997	83	41	0,1112
4998	68	23	0,1884	4998	88	35	0,1182
4999	94	64	0,0598	4999	114	76	0,0354
5000	80	66	0,0685	5000	100	78	0,0408

(6.34)

Tabela (6.35). Dados gerados para população considerando os Casos V e VI.							
Caso V				Caso VI			
$X$ : Tamanho		$X \sim N(120, 100)$		$X$ : Tamanho		$X \sim N(140, 100)$	
$Y$ : Peso		$Y \sim N(72, 100)$		$Y$ : Peso		$Y \sim N(84, 100)$	
i-ésimo animal	Tamanho (u.c)	Peso (u.p)	Probabilidade de Captura	i-ésimo animal	Tamanho (u.c)	Peso (u.p)	Probabilidade de Captura
1	120	70	0,0373	1	140	83	0,0214
2	106	58	0,0582	2	126	73	0,0323
3	123	78	0,0301	3	143	88	0,0184
4	108	61	0,0532	4	128	75	0,0301
5	104	60	0,0572	5	124	73	0,0331
6	131	86	0,0226	6	151	94	0,0144
7	118	81	0,0301	7	138	88	0,0197
8	127	77	0,0291	8	147	89	0,0170
9	110	64	0,0485	9	130	77	0,0280
10	129	82	0,0254	10	149	92	0,0155
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4991	120	82	0,0286	4991	140	89	0,0187
4992	122	80	0,0291	4992	142	89	0,0182
4993	115	83	0,0299	4993	135	88	0,0205
4994	129	74	0,0303	4994	149	88	0,0170
4995	121	91	0,0231	4995	141	94	0,0165
4996	130	61	0,0399	4996	150	81	0,0196
4997	103	53	0,0674	4997	123	70	0,0359
4998	108	47	0,0718	4998	128	68	0,0351
4999	134	88	0,0207	4999	154	96	0,0132
5000	120	90	0,0239	5000	140	93	0,0171

(6.35)

A Tabela (6.36) mostra as amostras geradas para os casos I, II e III considerando  $s = 4$  épocas de captura.

<b>Tabela (6.36). Amostras geradas para os casos I, II e III</b>						
<b>Caso I</b>						
$N = 5000$ e $r = 3380$						
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{y}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	1267	0	0	37,65	22,54	0,2658
2	1255	332	1267	37,49	22,42	0,2669
3	1243	552	2190	37,72	22,59	0,2656
4	1260	761	2881	38,03	22,77	0,2641
<b>Caso II</b>						
$N = 5000$ e $r = 2506$						
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{y}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	845	0	0	57,00	33,64	0,1784
2	813	136	845	56,97	33,65	0,1788
3	788	268	1522	57,67	34,26	0,1753
4	813	349	2042	57,91	34,38	0,1749
<b>Caso III</b>						
$N = 5000$ e $r = 1714$						
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{y}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	534	0	0	76,79	43,83	0,1179
2	516	69	534	76,85	43,64	0,1182
3	477	114	981	76,90	44,25	0,1170
4	514	144	1344	77,92	44,61	0,1151

(6.36)

A Tabela (6.37) mostra as amostras geradas para os casos IV, V e VI considerando  $s = 4$  épocas de captura.

**Tabela (6.37).** Amostras geradas para os casos IV, V e VI.

<b>Caso IV</b>						
$N = 5000$ e $r = 1112$						
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{y}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	324	0	0	96,65	55,90	0,0719
2	329	28	324	96,81	55,38	0,0723
3	280	44	625	97,16	56,42	0,0712
4	304	53	861	97,38	56,08	0,0712
<b>Caso V</b>						
$N = 5000$ e $r = 686$						
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{y}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	193	0	0	116,46	68,15	0,0430
2	177	5	193	117,55	68,10	0,0422
3	167	13	365	117,12	68,68	0,0424
4	185	18	519	117,45	67,97	0,0424
<b>Caso VI</b>						
$N = 5000$ e $r = 400$						
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{y}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	107	0	0	137,25	81,89	0,0237
2	98	2	107	138,36	82,22	0,0232
3	95	5	203	136,64	82,24	0,0238
4	115	8	293	137,49	81,62	0,0238

(6.37)

Para a obtenção das estimativas *a posteriori* dos parâmetros, adotaremos as seguintes distribuições *a priori* não informativas

$$\begin{aligned} \pi(N) &\propto N^{-1}, N = 1, 2, \dots \\ \beta_{1j} &\sim N(\mu_{\beta_1}, \sigma_{\beta_1}^2), j = 1, 2, 3, 4. \\ \beta_{2j} &\sim N(\mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_2}^2), j = 1, 2, 3, 4. \\ \mu_{\beta_1} &\sim N(0, 1000); \\ \mu_{\beta_2} &\sim N(0, 1000); \\ \sigma_{\beta_1}^2 &\sim 1/G(1, 1); \\ \sigma_{\beta_2}^2 &\sim 1/G(1, 1). \end{aligned}$$

Para cada caso considerado foram geradas duas cadeias de 70000 iterações descartando as primeiras 20000 iterações como "burn-in" e considerando um salto de tamanho 50 resultando numa amostra final de tamanho 1000 da distribuição *a posteriori* conjunta.

A Tabela (6.38) contém os valores populacionais do tamanho  $X$  (em unidades de comprimento) e os valores populacionais de  $Y$  (em unidades de peso) para cada caso considerado bem como os valores populacionais das probabilidades de captura em função das covariáveis  $X$  e  $Y$ .

Espera-se que os valores obtidos nas estimativas *a posteriori* tanto para a média dos tamanhos (em unidades de comprimento) e dos pesos (em unidades de peso) de cada época bem como das probabilidades de captura de cada época em função de  $X$  e  $Y$  estejam próximos dos valores populacionais da Tabela abaixo.

**Tabela (6.38).** Valores populacionais das probabilidades em função de  $X$  e  $Y$ .

Casos:	Coeficiente gerados		Média pop. dos tamanhos	Média pop. dos pesos	Média pop. da prob. em função de $X$ e $Y$
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5000} x_i}{5000}$	$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{5000} y_i}{5000}$	$\bar{p} = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} p_i$ , onde $p_i = \frac{\exp\{\beta_1 x_i + \beta_2 y_i\}}{1 + \exp\{\beta_1 x_i + \beta_2 y_i\}}$
Caso I	-0,0137	-0,0229	39,88	23,96	0,2540
Caso II	-0,0137	-0,0229	59,88	36,00	0,1656
Caso III	-0,0137	-0,0229	79,88	48,09	0,1046
Caso IV	-0,0137	-0,0229	99,88	60,09	0,0635
Caso V	-0,0137	-0,0229	119,88	72,09	0,0378
Caso VI	-0,0137	-0,0229	139,88	84,00	0,0219

(6.38)

Podemos notar na Tabela (6.38) a influência das covariáveis  $X$  e  $Y$ , pois a medida que o tamanho e o peso do animal aumenta, a probabilidade de captura diminui, isto é, quanto maior e mais pesado o animal menor é a sua capturabilidade.

#### 6.4.2 O problema da não identificabilidade

Os parâmetros (coeficientes)  $\beta_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14})$  e  $\beta_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}, \beta_{24})$  associados às covariáveis  $X$  e  $Y$  não atingem a convergência e são altamente correlacionados conforme mostra a Tabela (6.42). No entanto, quando fazemos  $\eta = \beta_1 \bar{x} + \beta_2 \bar{y}$  para cada uma das 70000 iterações das cadeias 1 e 2 então  $\eta$  atinge a convergência, então  $p = \frac{\exp(\beta_1 \bar{x} + \beta_2 \bar{y})}{1 + \exp(\beta_1 \bar{x} + \beta_2 \bar{y})} = \frac{\exp(\eta)}{1 + \exp(\eta)}$  também atinge a convergência juntamente com o tamanho populacional  $N$ .

Portanto, quando implementamos o modelo bayesiano de captura-recaptura com a inserção de covariáveis, não é possível determinar qual é a contribuição de cada covariável para a estimação do tamanho populacional  $N$ . O que é possível é determinar a contribuição da quantidade  $\eta = \beta_1 \bar{x} + \beta_2 \bar{y}$  no modelo.

**Observação:** Com relação ao algoritmo de *Gibbs Sampling* e *Metropolis Hastings*,

todos os estudos de simulação foram atribuídos valores iniciais ("chutes iniciais") diferentes e discrepantes para cada uma das cadeias e atribuímos sementes ("seeds") diferentes para as cadeias. Os coeficientes não atingem a convergência enquanto que o parâmetro  $\eta = \beta_1\bar{x} + \beta_2\bar{y}$  sempre atinge a convergência.

As Tabelas (6.39), (6.40) e (6.41) mostram as estimativas *a posteriori* para os seis casos considerados.

Tabela (6.39). Resultados <i>a posteriori</i> para os casos I e II.							
Caso I				Caso II			
X : Tamanho		$X \sim N(40, 25)$		X : Tamanho		$X \sim N(60, 100)$	
Y : Peso		$Y \sim N(24, 16)$		Y : Peso		$Y \sim N(36, 16)$	
Parâmetro	Média	I.C. (95%)		Parâmetro	Média	I.C. (95%)	
$N$	4821	4682	5061	$N$	4710	4461	5065
$\beta_{11}$	-0,0245	-0,0671	0,0091	$\beta_{11}$	-0,0114	-0,0445	0,0352
$\beta_{12}$	-0,0244	-0,0494	-0,0046	$\beta_{12}$	-0,0073	-0,0423	0,0387
$\beta_{13}$	-0,0129	-0,0338	0,0054	$\beta_{13}$	-0,0073	-0,0390	0,0326
$\beta_{14}$	-0,0145	-0,0426	0,0079	$\beta_{14}$	-0,0102	-0,0387	0,0275
$\beta_{21}$	-0,0048	-0,0617	0,0665	$\beta_{21}$	-0,0260	-0,1052	0,0294
$\beta_{22}$	-0,0058	-0,0389	0,0362	$\beta_{22}$	-0,0342	-0,1118	0,0250
$\beta_{23}$	-0,0253	-0,0564	0,0101	$\beta_{23}$	-0,0346	-0,1018	0,0188
$\beta_{24}$	-0,0215	-0,0596	0,0253	$\beta_{24}$	-0,0285	-0,0923	0,0195
$p_1$	0,2628	0,2485	0,2782	$p_1$	0,1794	0,1650	0,1948
$p_2$	0,2602	0,2462	0,2747	$p_2$	0,1725	0,1588	0,1870
$p_3$	0,2581	0,2432	0,2735	$p_3$	0,1675	0,1538	0,1825
$p_4$	0,2615	0,2475	0,2755	$p_4$	0,1725	0,1585	0,1867
$\eta_1$	-1,0317	-1,1067	-0,9533	$\eta_1$	-1,5215	-1,6218	-1,4194
$\eta_2$	-1,0450	-1,1190	-0,9709	$\eta_2$	-1,5691	-1,6670	-1,4693
$\eta_3$	-1,0565	-1,1351	-0,9767	$\eta_3$	-1,6042	-1,7053	-1,4997
$\eta_4$	-1,0387	-1,1119	-0,9669	$\eta_4$	-1,5686	-1,6698	-1,4716

(6.39)

Podemos observar que na Tabela (6.39) que apenas as estimativas do parâmetro  $N$  foram satisfatórias, enquanto que os parâmetros  $\beta_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14})$  e  $\beta_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}, \beta_{24})$  foram insatisfatórios devido ao problema de não-identificabilidade.

<b>Tabela (6.40).</b> Resultados <i>a posteriori</i> para os casos III e IV.						
<b>Caso III</b>				<b>Caso IV</b>		
$X$ : Tamanho		$X \sim N(80, 100)$		$X$ : Tamanho		$X \sim N(100, 100)$
$Y$ : Peso		$Y \sim N(48, 100)$		$Y$ : Peso		$Y \sim N(60, 100)$
Parâmetro	Média	I.C. (95%)		Parâmetro	Média	I.C. (95%)
$N$	4429	4051	5047	$N$	4412	3782 5164
$\beta_{11}$	0,0179	-0,0012	0,0367	$\beta_{11}$	0,0020	-0,0183 0,0215
$\beta_{12}$	0,0108	-0,0104	0,0282	$\beta_{12}$	0,0042	-0,0153 0,0257
$\beta_{13}$	0,0137	-0,0016	0,0326	$\beta_{13}$	0,0004	-0,0244 0,0194
$\beta_{14}$	0,0135	-0,0035	0,0294	$\beta_{14}$	-0,0028	-0,0243 0,0201
$\beta_{21}$	-0,0766	-0,1105	-0,0435	$\beta_{21}$	-0,0487	-0,0825 -0,0135
$\beta_{22}$	-0,0655	-0,0960	-0,0284	$\beta_{22}$	-0,0528	-0,0902 -0,0183
$\beta_{23}$	-0,0715	-0,1048	-0,0446	$\beta_{23}$	-0,0484	-0,0804 -0,0056
$\beta_{24}$	-0,0690	-0,0974	-0,0393	$\beta_{24}$	-0,0415	-0,0815 -0,0047
$p_1$	0,1210	0,1061	0,1362	$p_1$	0,0739	0,0607 0,0883
$p_2$	0,1169	0,1028	0,1317	$p_2$	0,0750	0,0617 0,0909
$p_3$	0,1081	0,0948	0,1219	$p_3$	0,0639	0,0518 0,0768
$p_4$	0,1164	0,1025	0,1302	$p_4$	0,0694	0,0565 0,0835
$\eta_1$	-1,9851	-2,1313	-1,8469	$\eta_1$	-2,5325	-2,7394 -2,3344
$\eta_2$	-2,0239	-2,1660	-1,8858	$\eta_2$	-2,5174	-2,7226 -2,3023
$\eta_3$	-2,1124	-2,2567	-1,9746	$\eta_3$	-2,6898	-2,9067 -2,4865
$\eta_4$	-2,0293	-2,1698	-1,8994	$\eta_4$	-2,6003	-2,8163 -2,3957

(6.40)

Considerando os casos III e IV novamente as estimativas do parâmetro  $N$  foram satisfatórias, enquanto que os parâmetros  $\beta_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14})$  e  $\beta_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}, \beta_{24})$  foram insatisfatórios devido ao problema de não-identificabilidade.

Tabela (6.41). Resultados <i>a posteriori</i> para os casos V e VI.							
Caso V				Caso VI			
X : Tamanho		$X \sim N(120, 100)$		X : Tamanho		$X \sim N(140, 100)$	
Y : Peso		$Y \sim N(72, 100)$		Y : Peso		$Y \sim N(84, 100)$	
Parâmetro	Média	I.C. (95%)		Parâmetro	Média	I.C. (95%)	
$N$	5386	3957	7393	$N$	4425	2610	7615
$\beta_{11}$	0,0183	-0,0145	0,0443	$\beta_{11}$	-0,0250	-0,0577	0,0024
$\beta_{12}$	0,0164	-0,0136	0,0417	$\beta_{12}$	-0,0253	-0,0575	0,0060
$\beta_{13}$	0,0167	-0,0137	0,0426	$\beta_{13}$	-0,0256	-0,0583	0,0036
$\beta_{14}$	0,0170	-0,0121	0,0428	$\beta_{14}$	-0,0250	-0,0570	0,0041
$\beta_{21}$	-0,0793	-0,1233	-0,0244	$\beta_{21}$	-0,0029	-0,0485	0,0500
$\beta_{22}$	-0,0777	-0,1215	-0,0258	$\beta_{22}$	-0,0031	-0,0546	0,0502
$\beta_{23}$	-0,0784	-0,1227	-0,0272	$\beta_{23}$	-0,0035	-0,0522	0,0490
$\beta_{24}$	-0,0783	-0,1227	-0,0268	$\beta_{24}$	-0,0019	-0,0506	0,0512
$p_1$	0,0369	0,0253	0,0506	$p_1$	0,0260	0,0140	0,0418
$p_2$	0,0339	0,0230	0,0461	$p_2$	0,0238	0,0120	0,0388
$p_3$	0,0319	0,0217	0,0436	$p_3$	0,0231	0,0122	0,0389
$p_4$	0,0353	0,0240	0,0498	$p_4$	0,0279	0,0145	0,0450
$\eta_1$	-3,2766	-3,6533	-2,9309	$\eta_1$	-3,6648	-4,2534	-3,1311
$\eta_2$	-3,3651	-3,7496	-3,0307	$\eta_2$	-3,7567	-4,4076	-3,2094
$\eta_3$	-3,4288	-3,8091	-3,0885	$\eta_3$	-3,7837	-4,3917	-3,2081
$\eta_4$	-3,3232	-3,7070	-2,9483	$\eta_4$	-3,5893	-4,2156	-3,0558

(6.41)

Considerando os casos V e VI novamente as estimativas do parâmetro  $N$  foram satisfatórias, enquanto que os parâmetros  $\beta_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14})$  e  $\beta_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}, \beta_{24})$  foram insatisfatórios devido ao problema de não-identificabilidade.

A Tabela (6.42) mostra os valores de correlação dois a dois parâmetros considerando cada caso.

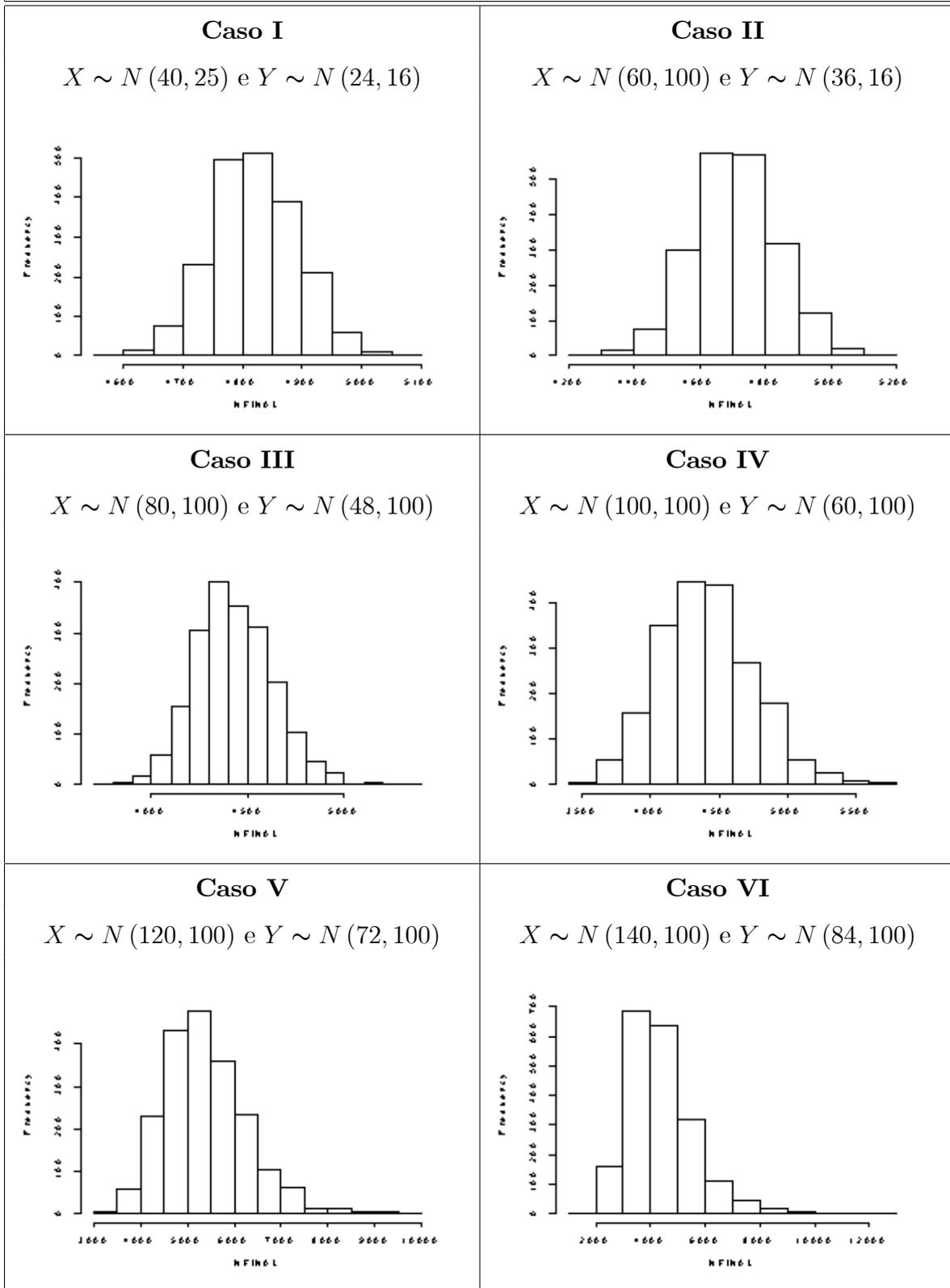
<b>Tabela (6.42).</b> Correlação dois a dois parâmetros considerando cada caso.						
<b>Correlação</b>	<b>Caso I</b>	<b>Caso II</b>	<b>Caso III</b>	<b>Caso IV</b>	<b>Caso V</b>	<b>Caso VI</b>
$Cor(N, \beta_{11})$	-0,0612	-0,0123	0,0371	0,0119	-0,1026	-0,1229
$Cor(N, \beta_{12})$	0,0065	-0,0463	-0,0298	-0,0508	-0,0901	-0,1310
$Cor(N, \beta_{13})$	-0,0337	0,0257	-0,0398	-0,0313	-0,0768	-0,1565
$Cor(N, \beta_{14})$	0,0099	-0,0393	-0,0359	-0,0260	-0,1065	-0,0963
$Cor(N, \beta_{21})$	0,0366	-0,0269	-0,1281	-0,1063	0,0106	-0,1095
$Cor(N, \beta_{22})$	-0,0577	-0,0044	-0,0856	-0,0334	0,0035	-0,0792
$Cor(N, \beta_{23})$	-0,0182	-0,0687	-0,0486	-0,0631	-0,0097	-0,0774
$Cor(N, \beta_{24})$	-0,0419	-0,0135	-0,0651	-0,0659	0,0104	-0,1156
$Cor(\beta_{11}, \beta_{21})$	-0,9988	-0,9980	-0,9927	-0,9931	-0,9948	-0,9674
$Cor(\beta_{12}, \beta_{22})$	-0,9944	-0,9967	-0,9876	-0,9948	-0,9954	-0,9730
$Cor(\beta_{13}, \beta_{23})$	-0,9954	-0,9978	-0,9927	-0,9926	-0,9953	-0,9665
$Cor(\beta_{14}, \beta_{24})$	-0,9982	-0,9964	-0,9904	-0,9932	-0,9942	-0,9735

(6.42)

Podemos observar pela Tabela (6.42) que as correlações que envolvem os parâmetros (coeficientes) e o tamanho populacional estão próximos de zero. Por outro lado, as correlações que envolvem somente os coeficientes estão altamente correlacionados negativamente com valores próximos de  $-1$ .

A Figura (6.43) mostra o histograma marginal do tamanho populacional  $N$  para cada um dos casos considerados.

**Figura (6.43).** Histograma marginal de  $N$  considerando cada caso.



(6.43)

A Tabela (6.44) mostra o diagnóstico de convergência de Gelman e Rubin dos parâmetros. Os valores obtidos confirmam a convergência dos algoritmos de *Gibbs Sampling* conjuntamente com o algoritmo de Metropolis Hastings utilizados para a obtenção das estimativas *a posteriori*.

<b>Tabela (6.44).</b> Diagnóstico de convergência para os casos considerados.								
<b>Caso I</b>			<b>Caso II</b>			<b>Caso III</b>		
Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%	Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%	Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%
$N$	1,00	1,00	$N$	1,00	1,00	$N$	1,00	1,00
$p_1$	1,00	1,01	$p_1$	1,00	1,01	$p_1$	1,00	1,01
$p_2$	1,00	1,00	$p_2$	1,00	1,00	$p_2$	1,01	1,01
$p_3$	1,00	1,00	$p_3$	1,00	1,02	$p_3$	1,00	1,00
$p_4$	1,00	1,01	$p_4$	1,00	1,00	$p_4$	1,00	1,00
$\eta_1$	1,00	1,01	$\eta_1$	1,00	1,01	$\eta_1$	1,00	1,01
$\eta_2$	1,00	1,00	$\eta_2$	1,00	1,00	$\eta_2$	1,01	1,01
$\eta_3$	1,00	1,00	$\eta_3$	1,00	1,02	$\eta_3$	1,00	1,00
$\eta_4$	1,00	1,01	$\eta_4$	1,00	1,00	$\eta_4$	1,00	1,00
<b>Caso IV</b>			<b>Caso V</b>			<b>Caso VI</b>		
Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%	Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%	Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%
$N$	1,00	1,01	$N$	1,00	1,01	$N$	1,01	1,01
$p_1$	1,00	1,00	$p_1$	1,00	1,00	$p_1$	1,00	1,01
$p_2$	1,00	1,00	$p_2$	1,00	1,00	$p_2$	1,00	1,01
$p_3$	1,00	1,01	$p_3$	1,00	1,02	$p_3$	1,01	1,02
$p_4$	1,00	1,01	$p_4$	1,01	1,03	$p_4$	1,00	1,00
$\eta_1$	1,00	1,00	$\eta_1$	1,00	1,00	$\eta_1$	1,00	1,01
$\eta_2$	1,00	1,00	$\eta_2$	1,00	1,00	$\eta_2$	1,00	1,01
$\eta_3$	1,00	1,01	$\eta_3$	1,00	1,01	$\eta_3$	1,01	1,01
$\eta_4$	1,00	1,01	$\eta_4$	1,01	1,03	$\eta_4$	1,00	1,00

(6.44)

## 6.5 Modelo com presença de três covariáveis

Nesta Seção adotaremos o modelo Bayesiano de captura-recaptura com presença de três covariáveis quantitativas. Adotaremos  $X$  denotando o tamanho (em unidades de comprimento) do animal,  $Y$  denotando o peso (em unidades de peso) do animal e  $Z$  denotando a idade (em unidades de tempo) do animal. Logo, a função de verossimilhança é dada por

$$L(N, \beta_1, \beta_2, \beta_3 | D) \propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^s \frac{\exp \{n_j (\beta_{1j} \bar{x}_j + \beta_{2j} \bar{y}_j + \beta_{3j} \bar{z}_j)\}}{[1 + \exp \{\beta_{1j} \bar{x}_j + \beta_{2j} \bar{y}_j + \beta_{3j} \bar{z}_j\}]^N}. \quad (6.45)$$

Onde

$\bar{x}_j$  : é a média dos tamanhos (em unidades de comprimento) dos animais capturados na  $j$ -ésima época,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

$\beta_{1j}$  : é o coeficiente referente a  $j$ -ésima época associado a  $j$ -ésima média  $\bar{x}_j$  dos animais,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

$\bar{y}_j$  : é a média dos pesos (em unidades de peso) dos animais capturados na  $j$ -ésima época,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

$\beta_{2j}$  : é o coeficiente referente a  $j$ -ésima época associado a  $j$ -ésima média  $\bar{y}_j$  dos animais,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

$\bar{z}_j$  : é a média das idades (em unidades de tempo) dos animais capturados na  $j$ -ésima época,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

$\beta_{3j}$  : é o coeficiente referente a  $j$ -ésima época associado a  $j$ -ésima média  $\bar{z}_j$  dos animais,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Para o modelo Bayesiano hierárquico adotaremos as seguintes distribuições *a priori*

$$\begin{aligned}
\pi(N) &\propto N^{-1}, \quad N = 1, 2, \dots; \\
\beta_{1j} &\sim N(\mu_{\beta_1}, \sigma_{\beta_1}^2), \quad j = 1, 2, \dots, s; \\
\beta_{2j} &\sim N(\mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_2}^2), \quad j = 1, 2, \dots, s; \\
\beta_{3j} &\sim N(\mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_3}^2), \quad j = 1, 2, \dots, s; \\
\mu_{\beta_1} &\sim N(a, b); \\
\mu_{\beta_2} &\sim N(c, d); \\
\mu_{\beta_3} &\sim N(e, f); \\
\sigma_{\beta_1}^2 &\sim IG(g, h); \\
\sigma_{\beta_2}^2 &\sim IG(i, j); \\
\sigma_{\beta_3}^2 &\sim IG(k, l).
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Com  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$  e  $l$  hiperparâmetros conhecidos.

Combinando a função de verossimilhança dada em (6.45) com as distribuições *a priori* (6.46), temos a seguinte distribuição *a posteriori* conjunta

$$\begin{aligned}
\pi(N, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2 \mid D) &\propto \tag{6.47} \\
\binom{N}{r} \prod_{j=1}^s \frac{(e^{\beta_{1j}\bar{x}_j + \beta_{2j}\bar{y}_j + \beta_{3j}\bar{z}_j})^{n_j}}{(1 + e^{\beta_{1j}\bar{x}_j + \beta_{2j}\bar{y}_j + \beta_{3j}\bar{z}_j})^N} &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\beta_1}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{\beta_1}^2} (\beta_{1j} - \mu_{\beta_1})^2\right\} \\
\times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\beta_2}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{\beta_2}^2} (\beta_{2j} - \mu_{\beta_2})^2\right\} &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\beta_3}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{\beta_3}^2} (\beta_{3j} - \mu_{\beta_3})^2\right\} \\
\times \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp\left\{-\frac{1}{2b} (\mu_{\beta_1} - a)^2\right\} &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \exp\left\{-\frac{1}{2d} (\mu_{\beta_2} - c)^2\right\} \\
\times \frac{1}{\sqrt{2\pi f}} \exp\left\{-\frac{1}{2f} (\mu_{\beta_3} - e)^2\right\} &\times (\sigma_{\beta_1}^2)^{-(g+1)} \exp\left\{\frac{-h}{(\sigma_{\beta_1}^2)}\right\} \\
\times (\sigma_{\beta_2}^2)^{-(i+1)} \exp\left\{\frac{-j}{(\sigma_{\beta_2}^2)}\right\} &\times (\sigma_{\beta_3}^2)^{-(k+1)} \exp\left\{\frac{-l}{(\sigma_{\beta_3}^2)}\right\} \times \frac{1}{N}.
\end{aligned}$$

As distribuições condicionais necessárias para o algoritmo *Gibbs Sampling* e para o algoritmo de *Metropolis Hastings* a partir de (6.47) são dadas a seguir.

- (1). A distribuição condicional de  $N-r$  dados  $\beta_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}$ ,  $\beta_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}$ ,  $\beta_3 = \{\beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \beta_{3s}\}$ ,  $\mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2$  e os dados é dada por:

$$N-r \mid \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2, D \sim BN \left( r, 1 - \prod_{j=1}^s \frac{1}{(1 + e^{\beta_{1j}\bar{x}_j + \beta_{2j}\bar{y}_j + \beta_{3j}\bar{z}_j})} \right). \quad (6.48)$$

(2). A distribuição condicional de  $\beta_{1j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  dados  $N$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_3 = \{\beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \beta_{3s}\}$ ,  $\mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2$  e os dados é dada por:

$$\pi(\beta_{1j} \mid N, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2, D) \propto \quad (6.49)$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\beta_1}^2} (\beta_{1j} - \mu_{\beta_1})^2 \right\} \times \frac{(e^{\beta_{1j}\bar{x}_j})^{n_j}}{(1 + e^{\beta_{1j}\bar{x}_j + \beta_{2j}\bar{y}_j + \beta_{3j}\bar{z}_j})^N}, j = 1, 2, \dots, s.$$

(3). A distribuição condicional de  $\beta_{2j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  dados  $N$ ,  $\boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_3 = \{\beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \beta_{3s}\}$ ,  $\mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2$  e os dados é dada por:

$$\pi(\beta_{2j} \mid N, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2, D) \propto \quad (6.50)$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\beta_2}^2} (\beta_{2j} - \mu_{\beta_2})^2 \right\} \times \frac{(e^{\beta_{2j}\bar{y}_j})^{n_j}}{(1 + e^{\beta_{1j}\bar{x}_j + \beta_{2j}\bar{y}_j + \beta_{3j}\bar{z}_j})^N}, j = 1, 2, \dots, s.$$

(4). A distribuição condicional de  $\beta_{3j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  dados  $N$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_3 = \{\beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \beta_{3s}\}$ ,  $\mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2$  e os dados é dada por:

$$\pi(\beta_{3j} \mid N, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2, D) \propto \quad (6.51)$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\beta_3}^2} (\beta_{3j} - \mu_{\beta_3})^2 \right\} \times \frac{(e^{\beta_{3j}\bar{z}_j})^{n_j}}{(1 + e^{\beta_{1j}\bar{x}_j + \beta_{2j}\bar{y}_j + \beta_{3j}\bar{z}_j})^N}, j = 1, 2, \dots, s.$$

(5). A distribuição condicional de  $\mu_{\beta_1}$  dados  $N$ ,  $\boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_3 = \{\beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \beta_{3s}\}$ ,  $\mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2$  e os dados é dada por:

$$\mu_{\beta_1} \mid N, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2, D \sim N \left( \frac{b \sum_{j=1}^s \beta_{1j} + \sigma_{\beta_1}^2 a}{sb + \sigma_{\beta_1}^2}, \frac{\sigma_{\beta_1}^2 b}{sb + \sigma_{\beta_1}^2} \right). \quad (6.52)$$

- (6). A distribuição condicional de  $\mu_{\beta_2}$  dados  $N, \boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}, \boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}, \boldsymbol{\beta}_3 = \{\beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \beta_{3s}\}, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2$  e os dados é dada por:

$$\mu_{\beta_2} \mid N, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2, D \sim N \left( \frac{d \sum_{j=1}^s \beta_{2j} + \sigma_{\beta_2}^2 c}{sd + \sigma_{\beta_2}^2}, \frac{\sigma_{\beta_2}^2 d}{sd + \sigma_{\beta_2}^2} \right). \quad (6.53)$$

- (7). A distribuição condicional de  $\mu_{\beta_3}$  dados  $N, \boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}, \boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}, \boldsymbol{\beta}_3 = \{\beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \beta_{3s}\}, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2$  e os dados é dada por:

$$\mu_{\beta_3} \mid N, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2, D \sim N \left( \frac{f \sum_{j=1}^s \beta_{3j} + \sigma_{\beta_3}^2 e}{sf + \sigma_{\beta_3}^2}, \frac{\sigma_{\beta_3}^2 f}{sf + \sigma_{\beta_3}^2} \right). \quad (6.54)$$

- (8). A distribuição condicional de  $\sigma_{\beta_1}^2$  dados  $N, \boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}, \boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}, \boldsymbol{\beta}_3 = \{\beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \beta_{3s}\}, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2$  e os dados é dada por:

$$\sigma_{\beta_1}^2 \mid N, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_2}^2, \sigma_{\beta_3}^2, D \sim IG \left( \frac{s}{2} + g, \sum_{j=1}^s \frac{(\beta_{1j} - \mu_{\beta_1})^2}{2} + h \right). \quad (6.55)$$

- (9). A distribuição condicional de  $\sigma_{\beta_2}^2$  dados  $N, \boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}, \boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}, \boldsymbol{\beta}_3 = \{\beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \beta_{3s}\}, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_3}^2$  e os dados é dada por:

$$\sigma_{\beta_2}^2 \mid N, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_3}^2, D \sim IG \left( \frac{s}{2} + i; \sum_{j=1}^s \frac{(\beta_{2j} - \mu_{\beta_2})^2}{2} + j \right). \quad (6.56)$$

(10). A distribuição condicional de  $\sigma_{\beta_3}^2$  dados  $N, \boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1s}\}, \boldsymbol{\beta}_2 = \{\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2s}\}, \boldsymbol{\beta}_3 = \{\beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \beta_{3s}\}, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2$  e os dados é dada por:

$$\sigma_{\beta_3}^2 \mid N, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2, D \sim IG \left( \frac{s}{2} + k; \sum_{j=1}^s \frac{(\beta_{3j} - \mu_{\beta_3})^2}{2} + l \right). \quad (6.57)$$

### 6.5.1 Resultados de simulação

#### Procedimento para a geração dos dados populacionais

1. Foram gerados dois valores da distribuição  $N(0, 1)$  para o parâmetro  $\beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$ . Como  $p = \frac{\exp\{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z\}}{1 + \exp\{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z\}}$ , sabemos que para  $-3 < (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z) < 3$  temos  $0,0474 < p < 0,9526$ . Então tomamos o cuidado de gerar um valor negativo para  $\beta_1, \beta_2$  e para  $\beta_3$  para obtermos probabilidades de captura abaixo de  $p = 0,50$  e acima de  $p = 0,04$  apenas com o objetivo de não resultar em muitas épocas ou poucas épocas de captura. Com os valores gerados de  $\beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$  dividimos pelas constantes  $\bar{x}, \bar{y}$  e  $\bar{z}$  respectivamente. Os valores de  $\beta_1, \beta_2$  e de  $\beta_3$  usados para esse estudo de simulação foi  $\beta_1 = -0,009155102, \beta_2 = -0,01525850$  e  $\beta_3 = -0,005721939$ .
2. Supondo uma população de tamanho  $N = 5000$ , foram então gerados 5000 valores de uma distribuição normal  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  com  $\mu_1$  e  $\sigma_1^2$  valores arbitrários, correspondentes ao tamanho  $X$  (em unidades de comprimento) do animal.
3. Foram gerados 5000 valores de uma distribuição normal  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  com  $\mu_2$  e  $\sigma_2^2$  valores arbitrários, correspondentes ao peso  $Y$  (em unidades de peso) do animal.
4. Foram gerados 5000 valores de uma distribuição normal  $N(\mu_3, \sigma_3^2)$  com  $\mu_3$  e  $\sigma_3^2$  valores arbitrários, correspondentes a idade  $Z$  (em unidades de tempo) do animal.

5. Para cada animal temos então associado um tamanho (em unidades de comprimento), um peso (em unidades de peso) e uma idade (em unidades de tempo), isto é, o *i*-ésimo animal ficou associado ao *i*-ésimo tamanho  $X$  gerado, ao *i*-ésimo peso  $Y$  gerado e a *i*-ésima idade  $Z$  gerada, onde  $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  e  $Z_i \sim N(\mu_3, \sigma_3^2)$  com  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .
6. Com os valores dos coeficientes Betas gerados ( $\beta_1 = -0,009155102$ ,  $\beta_2 = -0,01525850$  e  $\beta_3 = -0,005721939$ ), com as 5000 observações de  $X$ , com as 5000 observações de  $Y$  e com as 5000 observações de  $Z$ , fizemos  $p_i = \frac{\exp\{\beta_1 x_i + \beta_2 y_i + \beta_3 z_i\}}{1 + \exp\{\beta_1 x_i + \beta_2 y_i + \beta_3 z_i\}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ . Então, para cada um dos 5000 animais temos associado um tamanho (em unidades de comprimento), um peso (em unidades de peso), uma idade (em unidades de tempo) e, conseqüentemente, uma probabilidade de captura. Esse valores foram "guardados"(população gerada) para dar início ao processo de amostragem, isto é, as épocas de captura.
7. Com as 5000 probabilidades da captura fizemos  $\bar{p} = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} p_i$ . Com o valor de  $\bar{p}$  demos início ao processo de amostragem com  $s = 4$  épocas de captura. Com os valores amostrais  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$  e  $(m_1, m_2, m_3, m_4)$  obtivemos a estatística  $r = \sum_{j=1}^4 n_j - \sum_{j=1}^4 m_j$ .
8. Esse procedimento de geração dos dados foi feito considerando cada um dos casos abaixo.

**Caso I.** O *i*-ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(40, 25)$ , peso  $Y_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(24, 16)$ , e idade  $Z_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(64, 100)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso II.** O *i*-ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(60, 100)$ , peso  $Y_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(36, 25)$ , e idade  $Z_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(96, 100)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso III.** O *i*-ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(80, 100)$ , peso  $Y_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(48, 100)$ , e idade  $Z_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(128, 100)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso IV.** O *i*-ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(100, 100)$ , peso  $Y_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(60, 100)$ , e idade  $Z_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(160, 100)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso V.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(120, 100)$ , peso  $Y_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(72, 100)$ , e idade  $Z_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(192, 100)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

**Caso VI.** O  $i$ -ésimo animal tem tamanho  $X_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(140, 100)$ , peso  $Y_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(84, 100)$ , e idade  $Z_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(224, 100)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

As Tabelas (6.58), (6.59) e (6.60) mostram as populações geradas considerando cada caso.

<b>Tabela (6.58).</b> Dados gerados para população considerando os Casos I e II.									
<b>Caso I</b>					<b>Caso II</b>				
$X : \text{Tamanho} \quad X \sim N(40, 25)$					$X : \text{Tamanho} \quad X \sim N(60, 100)$				
$Y : \text{Peso} \quad Y \sim N(24, 16)$					$Y : \text{Peso} \quad Y \sim N(36, 16)$				
$Z : \text{Idade} \quad Z \sim N(64, 100)$					$Z : \text{Idade} \quad Z \sim N(96, 100)$				
Animal	Tamanho	Peso	Idade	Prob.	Animal	Tamanho	Peso	Idade	Prob.
i	(u.c)	(u.p)	(u.t)	Captura	i	(u.c)	(u.p)	(u.t)	Captura
1	40	24	61	0,2532	1	60	36	93	0,1637
2	37	23	61	0,2614	2	57	35	93	0,1697
3	34	20	51	0,2874	3	54	32	83	0,1888
4	39	26	67	0,2428	4	59	38	99	0,1562
5	39	25	65	0,2478	5	59	37	97	0,1598
6	40	22	62	0,2579	6	60	34	94	0,1672
7	45	28	72	0,2225	7	65	40	104	0,1418
8	29	16	41	0,3221	8	49	28	73	0,2153
9	34	20	53	0,2850	9	54	32	85	0,1871
10	36	21	56	0,2748	10	56	33	88	0,1795
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4991	29	17	46	0,3126	4991	49	29	78	0,2079
4992	37	24	62	0,2574	4992	57	36	94	0,1667
4993	44	26	66	0,2356	4993	64	38	98	0,1510
4994	45	26	71	0,2288	4994	65	38	103	0,1463
4995	42	28	71	0,2283	4995	62	40	103	0,1459
4996	37	21	54	0,2752	4996	57	33	86	0,1798
4997	41	26	66	0,2405	4997	61	38	98	0,1546
4998	46	23	67	0,2395	4998	66	35	99	0,1538
4999	42	27	74	0,2280	4999	62	39	106	0,1456
5000	35	18	54	0,2882	5000	55	30	86	0,1895

(6.58)

Tabela (6.59). Dados gerados para população considerando os Casos III e IV.									
Caso III					Caso IV				
$X : \text{Tamanho} \quad X \sim N(80, 100)$					$X : \text{Tamanho} \quad X \sim N(100, 100)$				
$Y : \text{Peso} \quad Y \sim N(48, 100)$					$Y : \text{Peso} \quad Y \sim N(60, 100)$				
$Z : \text{Idade} \quad Z \sim N(128, 100)$					$Z : \text{Idade} \quad Z \sim N(160, 100)$				
Animal	Tamanho	Peso	Idade	Prob.	Animal	Tamanho	Peso	Idade	Prob.
i	(u.c)	(u.p)	(u.t)	Captura	i	(u.c)	(u.p)	(u.t)	Captura
1	80	47	113	0,1095	1	100	58	144	0,0676
2	74	46	124	0,1102	2	94	59	157	0,0654
3	68	39	91	0,1495	3	88	49	121	0,0957
4	77	52	137	0,0926	4	97	69	174	0,0504
5	78	52	137	0,0918	5	98	6	174	0,0499
6	81	44	123	0,1075	6	101	51	150	0,0717
7	89	56	139	0,0784	7	109	70	173	0,0450
8	58	31	68	0,1989	8	78	40	97	0,1325
9	67	38	98	0,1475	9	87	48	128	0,0944
10	71	42	110	0,1278	10	91	54	142	0,0780
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4991	58	33	89	0,1760	4991	78	44	120	0,1118
4992	75	50	128	0,1014	4992	95	67	165	0,0554
4993	88	52	121	0,0918	4993	108	64	153	0,0550
4994	91	52	143	0,0798	4994	111	62	173	0,0496
4995	83	56	145	0,0799	4995	103	74	183	0,0423
4996	74	41	97	0,1349	4996	94	50	126	0,0875
4997	83	53	132	0,0892	4997	103	68	167	0,0500
4998	91	43	125	0,0993	4998	111	43	145	0,0757
4999	83	55	161	0,0744	4999	103	72	198	0,0401
5000	70	34	110	0,1432	5000	90	38	134	0,1024

(6.59)

<b>Tabela (6.60).</b> Dados gerados para população considerando os Casos V e VI.									
<b>Caso V</b>					<b>Caso VI</b>				
$X : \text{Tamanho} \quad X \sim N(120, 100)$					$X : \text{Tamanho} \quad X \sim N(140, 100)$				
$Y : \text{Peso} \quad Y \sim N(72, 100)$					$Y : \text{Peso} \quad Y \sim N(84, 100)$				
$Z : \text{Idade} \quad Z \sim N(192, 100)$					$Z : \text{Idade} \quad Z \sim N(224, 100)$				
Animal	Tamanho	Peso	Idade	Prob.	Animal	Tamanho	Peso	Idade	Prob.
i	(u.c)	(u.p)	(u.t)	Captura	i	(u.c)	(u.p)	(u.t)	Captura
1	120	72	189	0,0363	1	140	82	140	0,0236
2	114	69	184	0,0411	2	134	83	134	0,0228
3	108	64	169	0,0506	3	128	73	128	0,0341
4	117	72	191	0,0369	4	137	93	137	0,0174
5	118	73	192	0,0358	5	138	93	138	0,0172
6	121	71	192	0,0350	6	141	75	141	0,0251
7	129	78	206	0,0279	7	149	94	149	0,0155
8	98	57	151	0,0672	8	118	64	118	0,0484
9	107	63	169	0,0518	9	127	72	127	0,0336
10	111	66	176	0,0461	10	131	78	131	0,0274
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4991	98	58	156	0,0645	4991	118	68	118	0,0403
4992	115	71	187	0,0389	4992	135	91	135	0,0192
4993	128	77	201	0,0294	4993	148	88	148	0,0191
4994	131	78	209	0,0270	4994	151	86	151	0,0171
4995	123	76	200	0,0314	4995	143	98	143	0,0145
4996	114	67	177	0,0440	4996	134	74	134	0,0310
4997	123	75	197	0,0324	4997	143	92	143	0,0174
4998	131	74	203	0,0296	4998	151	67	151	0,0266
4999	123	76	204	0,0307	4999	143	96	143	0,0137
5000	110	63	174	0,0491	5000	130	62	130	0,0366

(6.60)

A Tabela (6.61) contém as amostras geradas para os casos I, II e III considerando  $s = 4$  épocas de captura.

<b>Tabela (6.61).</b> Amostras geradas para os casos I, II e III.							
<b>Caso I</b>							
$N = 5000$ e $r = 3467$							
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{y}_j)$	$(\bar{z}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	1321	0	0	39,28	23,48	62,79	0,2550
2	1296	332	1321	39,28	23,42	62,65	0,2553
3	1244	552	2285	39,35	23,41	62,84	0,2550
4	1224	734	2977	39,45	23,64	63,08	0,2540
<b>Caso II</b>							
$N = 5000$ e $r = 2582$							
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{y}_j)$	$(\bar{z}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	874	0	0	59,49	35,60	95,14	0,1648
2	821	144	874	59,29	35,45	94,70	0,1654
3	799	241	1551	59,27	35,36	94,72	0,1656
4	815	342	2109	59,42	35,57	94,95	0,1648
<b>Caso III</b>							
$N = 5000$ e $r = 1772$							
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{y}_j)$	$(\bar{z}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	547	0	0	77,62	46,30	123,50	0,1105
2	524	65	547	77,20	45,82	122,54	0,1117
3	485	101	1006	77,20	45,49	122,61	0,1124
4	531	149	1390	77,56	46,05	122,95	0,1113

(6.61)

A Tabela (6.62) contém as amostras geradas para os casos IV, V e VI considerando  $s = 4$  épocas de captura.

**Tabela (6.62).** Amostras geradas para os casos IV, V e VI.

<b>Caso IV</b>							
$N = 5000$ e $r = 1123$							
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{y}_j)$	$(\bar{z}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	321	0	0	97,59	57,32	154,66	0,0696
2	328	30	321	97,28	55,97	152,30	0,0713
3	273	38	619	97,16	54,53	150,82	0,0736
4	330	61	854	97,58	56,55	153,91	0,0705
<b>Caso V</b>							
$N = 5000$ e $r = 675$							
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{y}_j)$	$(\bar{z}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	200	0	0	117,03	70,27	187,36	0,0399
2	180	7	200	116,59	69,81	186,39	0,0406
3	137	7	373	117,85	70,20	188,16	0,0393
4	187	15	503	117,60	70,45	188,02	0,0396
<b>Caso VI</b>							
$N = 5000$ e $r = 411$							
$j$	$n_j$	$m_j$	$M_j$	$(\bar{x}_j)$	$(\bar{y}_j)$	$(\bar{z}_j)$	$(\bar{p}_j)$
1	129	0	0	137,17	81,03	218,02	0,0248
2	102	5	129	135,93	78,85	213,85	0,0265
3	86	5	226	138,20	77,98	215,64	0,0259
4	110	6	307	138,07	80,45	217,71	0,0249

(6.62)

Adotaremos as seguintes distribuições *a priori* não informativas para o modelo bayesiano hierárquico:

$$\begin{aligned} \pi(N) &\propto N^{-1}, N = 1, 2, \dots \\ \beta_{1j} &\sim N(\mu_{\beta_1}, \sigma_{\beta_1}^2), j = 1, 2, 3, 4. \\ \beta_{2j} &\sim N(\mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_2}^2), j = 1, 2, 3, 4. \\ \beta_{3j} &\sim N(\mu_{\beta_3}, \sigma_{\beta_3}^2), j = 1, 2, 3, 4. \\ \mu_{\beta_1} &\sim N(0, 1000) \\ \mu_{\beta_2} &\sim N(0, 1000) \\ \mu_{\beta_3} &\sim N(0, 1000) \\ \sigma_{\beta_1}^2 &\sim 1/G(1, 1) \\ \sigma_{\beta_2}^2 &\sim 1/G(1, 1) \\ \sigma_{\beta_3}^2 &\sim 1/G(1, 1) \end{aligned}$$

Para cada caso considerado foram geradas duas cadeias de 70000 iterações descartando as primeiras 20000 iterações como "burn-in" e considerando um salto de tamanho 50 resultando numa amostra final de tamanho 1000 da distribuição *a posteriori* conjunta.

A Tabela (6.63) contém os valores populacionais do tamanho  $X$  (em unidades de comprimento), os valores populacionais de  $Y$  (em unidades de peso) e os valores populacionais de  $Z$  (em unidades de tempo) para cada caso considerado bem como os valores populacionais das probabilidades de captura em função das covariáveis  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .

Espera-se que os valores obtidos nas estimativas *a posteriori* tanto para a média dos tamanhos (em unidades de comprimento), para a média dos pesos (em unidades de peso) e para a média das idades (em unidades de tempo) de cada época bem como das probabilidades de captura de cada época em função de  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  estejam próximos dos valores populacionais da Tabela abaixo.

Tabela (6.63). Valores populacionais das prob. em função de $X$ , $Y$ e $Z$ .							
Casos:	Coeficiente gerados			Média pop. tamanhos	Média pop. dos pesos	Média pop. das idades	$\bar{p}$
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5000} x_i}{5000}$	$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{5000} y_i}{5000}$	$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{5000} z_i}{5000}$	
I	-0,0092	-0,0153	-0,0057	39,92	23,92	63,87	0,2515
II	-0,0092	-0,0153	-0,0057	59,92	35,92	95,87	0,1627
III	-0,0092	-0,0153	-0,0057	79,83	47,80	127,78	0,1039
IV	-0,0092	-0,0153	-0,0057	99,83	59,72	159,70	0,0639
V	-0,0092	-0,0153	-0,0057	119,83	71,86	191,72	0,0372
VI	-0,0092	-0,0153	-0,0057	139,83	83,72	223,70	0,0224

(6.63)

Onde  $\bar{p}$  é a média populacional das probabilidades de captura, isto é,  $\bar{p} = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} p_i$  e  $p_i = \frac{\exp\{\beta_1 x_i + \beta_2 y_i + \beta_3 z_i\}}{1 + \exp\{\beta_1 x_i + \beta_2 y_i + \beta_3 z_i\}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5000$ .

Podemos notar na Tabela (6.63) a influência das covariáveis  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , pois a medida que o tamanho, o peso e a idade do animal aumenta, a probabilidade de captura diminui, isto é, quanto maior e mais pesado e quanto mais velho o animal menor é a sua capturabilidade.

### 6.5.2 O problema da não identificabilidade

A exemplo do que aconteceu com o modelo na presença de duas covariáveis, os parâmetros (coeficientes)  $\beta_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14})$ ,  $\beta_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}, \beta_{24})$  e  $\beta_3 = (\beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33}, \beta_{34})$  associados às covariáveis  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  não atingem a convergência e são altamente correlacionados conforme mostra a Tabela (6.67). No entanto, quando fazemos  $\eta = \beta_1 \bar{x} + \beta_2 \bar{y} + \beta_3 \bar{z}$  para cada uma das 70000 iterações das cadeias 1 e 2 então  $\eta$  atinge a convergência, então  $p = \frac{\exp(\beta_1 \bar{x} + \beta_2 \bar{y} + \beta_3 \bar{z})}{1 + \exp(\beta_1 \bar{x} + \beta_2 \bar{y} + \beta_3 \bar{z})} = \frac{\exp(\eta)}{1 + \exp(\eta)}$  também atinge a convergência juntamente com o tamanho populacional  $N$ .

Portanto, quando implementamos o modelo bayesiano de captura-recaptura com

a inserção de covariáveis, não é possível determinar qual é a contribuição de cada covariável para a estimação do tamanho populacional  $N$ . O que é possível é determinar a contribuição da quantidade  $\eta = \beta_1\bar{x} + \beta_2\bar{y} + \beta_3\bar{z}$  no modelo.

**Observação).** Com relação ao algoritmo de *Gibbs Sampling* e *Metropolis Hastings*, todos os estudos de simulação foram atribuídos valores iniciais ("chutes iniciais") diferentes e discrepantes para cada uma das cadeias e atribuímos sementes ("seeds") diferentes para as cadeias. Os coeficientes não atingem a convergência enquanto que o parâmetro  $\eta = \beta_1\bar{x} + \beta_2\bar{y} + \beta_3\bar{z}$  sempre atinge a convergência.

As Tabelas (6.64), (6.65) e (6.65) mostram os resultados *a posteriori* das estimativas para todos os seis casos considerados.

Tabela (6.64). Resultados <i>a posteriori</i> para os casos I e II.							
Caso I				Caso II			
$X$ : Tamanho		$X \sim N(40, 25)$		$X$ : Tamanho		$X \sim N(60, 100)$	
$Y$ : Peso		$Y \sim N(24, 16)$		$Y$ : Peso		$Y \sim N(36, 16)$	
$Z$ : Idade		$Z \sim N(64, 100)$		$Z$ : Idade		$Z \sim N(96, 100)$	
Parâmetro	Média	I.C. (95%)		Parâmetro	Média	I.C. (95%)	
$N$	5050	4907	5209	$N$	5054	4789	5331
$\beta_{11}$	0,0158	-0,0039	0,0411	$\beta_{11}$	-0,0264	-0,0431	-0,0061
$\beta_{12}$	-0,0104	-0,0631	0,0462	$\beta_{12}$	-0,0291	-0,0481	-0,0115
$\beta_{13}$	0,0054	-0,0390	0,0343	$\beta_{13}$	-0,0276	-0,0452	-0,0137
$\beta_{14}$	0,0054	-0,0528	0,0612	$\beta_{14}$	-0,0210	-0,0406	0,0059
$\beta_{21}$	-0,0405	-0,0720	-0,0146	$\beta_{21}$	0,0164	-0,0069	0,0410
$\beta_{22}$	-0,0406	-0,0722	-0,0147	$\beta_{22}$	0,0165	-0,0070	0,0412
$\beta_{23}$	-0,0406	-0,0723	-0,0147	$\beta_{23}$	0,0165	-0,0070	0,0413
$\beta_{24}$	-0,0402	-0,0716	-0,0146	$\beta_{24}$	0,0164	-0,0069	0,0410
$\beta_{31}$	-0,0113	-0,0223	-0,0015	$\beta_{31}$	-0,0061	-0,0212	0,0096
$\beta_{32}$	0,0047	-0,0278	0,0355	$\beta_{32}$	-0,0052	-0,0149	0,0044
$\beta_{33}$	-0,0060	-0,0273	0,0147	$\beta_{33}$	-0,0065	-0,0224	0,0054
$\beta_{34}$	-0,0064	-0,0328	0,0212	$\beta_{34}$	-0,0104	-0,0282	0,0006
$p_1$	0,2616	0,2468	0,2760	$p_1$	0,1731	0,1593	0,1868
$p_2$	0,2569	0,2422	0,2720	$p_2$	0,1627	0,1491	0,1768
$p_3$	0,2464	0,2320	0,2608	$p_3$	0,1584	0,1455	0,1718
$p_4$	0,2423	0,2285	0,2562	$p_4$	0,1613	0,1476	0,1754
$\eta_1$	-1,0379	-1,1160	-0,9643	$\eta_1$	-1,5645	-1,6638	-1,4707
$\eta_2$	-1,0627	-1,1409	-0,9847	$\eta_2$	-1,6394	-1,7415	-1,5385
$\eta_3$	-1,1181	-1,1972	-1,0419	$\eta_3$	-1,6713	-1,7707	-1,5727
$\eta_4$	-1,1404	-1,2166	-1,0657	$\eta_4$	-1,6496	-1,7539	-1,5476

(6.64)

Tabela (6.65). Resultados <i>a posteriori</i> para os casos III e IV.							
Caso III				Caso IV			
$X$ : Tamanho		$X \sim N(80, 100)$		$X$ : Tamanho		$X \sim N(100, 100)$	
$Y$ : Peso		$Y \sim N(48, 100)$		$Y$ : Peso		$Y \sim N(60, 100)$	
$Z$ : Idade		$Z \sim N(128, 100)$		$Z$ : Idade		$Z \sim N(160, 100)$	
Parâmetro	Média	I.C. (95%)		Parâmetro	Média	I.C. (95%)	
$N$	4823	4391	5318	$N$	4363	3728	5069
$\beta_{11}$	-0,0225	-0,0391	-0,0071	$\beta_{11}$	-0,0202	-0,0560	0,0093
$\beta_{12}$	-0,0223	-0,0385	-0,0108	$\beta_{12}$	-0,0230	-0,0552	0,0067
$\beta_{13}$	-0,0179	-0,0336	0,0002	$\beta_{13}$	-0,0216	-0,0478	0,0087
$\beta_{14}$	-0,0182	-0,0316	-0,0056	$\beta_{14}$	-0,0198	-0,0513	0,0079
$\beta_{21}$	-0,0020	-0,0297	0,0241	$\beta_{21}$	-0,0095	-0,0341	0,0168
$\beta_{22}$	-0,0020	-0,0300	0,0244	$\beta_{22}$	-0,0098	-0,0349	0,0172
$\beta_{23}$	-0,0021	-0,0303	0,0246	$\beta_{23}$	-0,0100	-0,0359	0,0176
$\beta_{24}$	-0,0020	-0,0299	0,0243	$\beta_{24}$	-0,0097	-0,0346	0,0170
$\beta_{31}$	-0,0018	-0,0164	0,0174	$\beta_{31}$	-0,0001	-0,0101	0,0137
$\beta_{32}$	-0,0024	-0,0158	0,0134	$\beta_{32}$	0,0018	-0,0094	0,0150
$\beta_{33}$	-0,0058	-0,0213	0,0119	$\beta_{33}$	-0,0004	-0,0113	0,0111
$\beta_{34}$	-0,0048	-0,0175	0,0122	$\beta_{34}$	-0,0001	-0,0090	0,0115
$p_1$	0,1137	0,1004	0,1281	$p_1$	0,0740	0,0606	0,0889
$p_2$	0,1089	0,0956	0,1236	$p_2$	0,0758	0,0623	0,0925
$p_3$	0,1008	0,0884	0,1141	$p_3$	0,0631	0,0514	0,0762
$p_4$	0,1104	0,0974	0,1250	$p_4$	0,0761	0,0623	0,0912
$\eta_1$	-2,0554	-2,1933	-1,9183	$\eta_1$	-2,5323	-2,7411	-2,3272
$\eta_2$	-2,1044	-2,2472	-1,9588	$\eta_2$	-2,5058	-2,7117	-2,2839
$\eta_3$	-2,1903	-2,3329	-2,0497	$\eta_3$	-2,7028	-2,9150	-2,4947
$\eta_4$	-2,0883	-2,2265	-1,9456	$\eta_4$	-2,5015	-2,7116	-2,2990

(6.65)

Tabela (6.66). Resultados <i>a posteriori</i> para os casos V e VI.							
Caso V				Caso VI			
X : Tamanho		$X \sim N(120, 100)$		X : Tamanho		$X \sim N(140, 100)$	
Y : Peso		$Y \sim N(72, 100)$		Y : Peso		$Y \sim N(84, 100)$	
Z : Idade		$Z \sim N(192, 100)$		Z : Idade		$Z \sim N(224, 100)$	
Parâmetro	Média	I.C. (95%)		Parâmetro	Média	I.C. (95%)	
$N$	6454	4531	9077	$N$	4454	2745	7481
$\beta_{11}$	-0,0178	-0,0587	0,0206	$\beta_{11}$	0,0111	-0,0367	0,0573
$\beta_{12}$	-0,0176	-0,0557	0,0188	$\beta_{12}$	0,0107	-0,0373	0,0599
$\beta_{13}$	-0,0187	-0,0571	0,0178	$\beta_{13}$	0,0102	-0,0376	0,0601
$\beta_{14}$	-0,0164	-0,0552	0,0205	$\beta_{14}$	0,0109	-0,0340	0,0601
$\beta_{21}$	-0,0136	-0,0291	0,0022	$\beta_{21}$	-0,0098	-0,0205	0,0028
$\beta_{22}$	-0,0137	-0,0293	0,0022	$\beta_{22}$	-0,0100	-0,0211	0,0028
$\beta_{23}$	-0,0136	-0,0291	0,0021	$\beta_{23}$	-0,0102	-0,0214	0,0028
$\beta_{24}$	-0,0136	-0,0290	0,0022	$\beta_{24}$	-0,0098	-0,0207	0,0028
$\beta_{31}$	-0,0021	-0,0308	0,0278	$\beta_{31}$	-0,0193	-0,0445	0,0085
$\beta_{32}$	-0,0028	-0,0291	0,0258	$\beta_{32}$	-0,0205	-0,0484	0,0081
$\beta_{33}$	-0,0034	-0,0294	0,0241	$\beta_{33}$	-0,0209	-0,0493	0,0083
$\beta_{34}$	-0,0032	-0,0301	0,0243	$\beta_{34}$	-0,0201	-0,0474	0,0068
$p_1$	0,0319	0,0215	0,0459	$p_1$	0,0309	0,0168	0,0479
$p_2$	0,0288	0,0191	0,0409	$p_2$	0,0244	0,0131	0,0392
$p_3$	0,0220	0,0145	0,0316	$p_3$	0,0206	0,0112	0,0332
$p_4$	0,0299	0,0199	0,0423	$p_4$	0,0264	0,0142	0,0416
$\eta_1$	-3,4302	-3,8193	-3,0352	$\eta_1$	-3,4802	-4,0722	-2,9901
$\eta_2$	-3,5381	-3,9393	-3,1560	$\eta_2$	-3,7231	-4,3251	-3,1980
$\eta_3$	-3,8134	-4,2190	-3,4222	$\eta_3$	-3,8960	-4,4794	-3,3719
$\eta_4$	-3,4994	-3,8962	-3,1193	$\eta_4$	-3,6457	-4,2425	-3,1369

(6.66)

A Tabela (6.67) mostra as correlações dois a dois parâmetros para todos os casos.

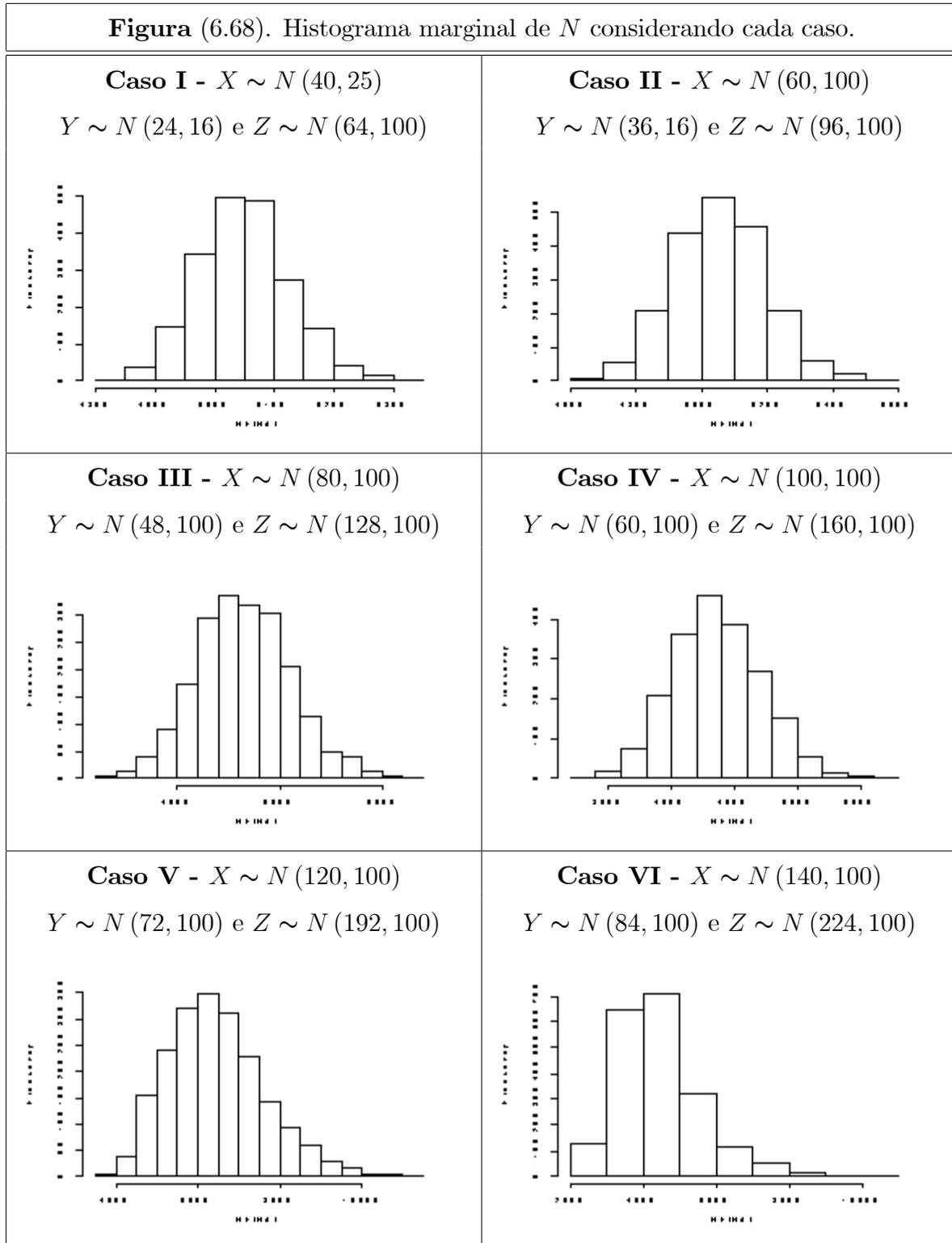
Tabela (6.67). Correlação dois a dois parâmetros considerando cada caso.

Correlação	Caso I	Caso II	Caso III	Caso IV	Caso V	Caso VI
$Cor(N, \beta_{11})$	-0,0492	-0,0249	-0,0298	-0,1253	-0,1421	-0,1048
$Cor(N, \beta_{12})$	-0,0286	-0,1282	-0,0306	-0,1280	-0,1590	-0,1037
$Cor(N, \beta_{13})$	0,0108	0,0185	-0,0884	-0,1117	-0,1265	-0,0912
$Cor(N, \beta_{14})$	-0,0449	-0,0834	-0,1292	-0,1316	-0,1587	-0,1194
$Cor(N, \beta_{21})$	0,0243	-0,0077	-0,0297	0,0515	0,0170	-0,0408
$Cor(N, \beta_{22})$	0,0241	-0,0087	-0,0307	0,0518	0,0172	-0,0414
$Cor(N, \beta_{23})$	0,0244	-0,0073	-0,0309	0,0517	0,0174	-0,0415
$Cor(N, \beta_{24})$	0,0242	-0,0068	-0,0300	0,0514	0,0172	-0,0421
$Cor(N, \beta_{31})$	-0,0081	-0,0230	-0,0327	0,0312	-0,0206	-0,0636
$Cor(N, \beta_{32})$	-0,0439	0,0383	-0,0413	0,0305	-0,0138	-0,0364
$Cor(N, \beta_{33})$	-0,0533	-0,0846	0,0206	0,0317	-0,0483	-0,0510
$Cor(N, \beta_{34})$	0,0054	-0,0079	0,0329	0,0462	-0,0171	-0,0233
$Cor(\beta_{11}, \beta_{21})$	-0,7692	0,5487	0,1735	-0,6754	0,3119	-0,6044
$Cor(\beta_{12}, \beta_{22})$	-0,5699	0,0191	0,1483	-0,6323	0,3840	-0,7121
$Cor(\beta_{13}, \beta_{23})$	0,2375	-0,3860	0,2869	-0,5988	0,1337	-0,6132
$Cor(\beta_{14}, \beta_{24})$	-0,5804	0,2956	0,1551	-0,6793	0,1449	-0,5777
$Cor(\beta_{11}, \beta_{31})$	-0,6699	-0,9422	-0,8973	-0,9426	-0,9592	-0,9681
$Cor(\beta_{12}, \beta_{32})$	-0,5487	-0,7942	-0,8703	-0,9335	-0,9587	-0,9793
$Cor(\beta_{13}, \beta_{33})$	-0,7926	-0,7919	-0,9173	-0,9558	-0,9475	-0,9768
$Cor(\beta_{14}, \beta_{34})$	-0,8452	-0,8235	-0,8438	-0,9493	-0,9479	-0,9775
$Cor(\beta_{21}, \beta_{31})$	0,0459	-0,7917	-0,5808	0,4078	-0,5220	0,4671
$Cor(\beta_{22}, \beta_{32})$	-0,3694	-0,6135	-0,6049	0,3300	-0,5833	0,6255
$Cor(\beta_{23}, \beta_{33})$	-0,7777	-0,2485	-0,6358	0,3509	-0,3888	0,5020
$Cor(\beta_{24}, \beta_{34})$	0,0584	-0,7763	-0,6498	0,4298	-0,4003	0,4653

(6.67)

Podemos observar através da Tabela (6.67) que as correlações que envolvem os parâmetros (coeficientes) e o tamanho populacional estão próximos de zero. Por outro

lado, as correlações que envolvem somente os coeficientes estão altamente correlacionados negativamente.



(6.68)

A Tabela (6.69) mostra o diagnóstico de convergência pelo critério de Gelman e Rubin para os seis casos considerados. Os valores obtidos confirmam a convergência dos algoritmos de *Gibbs Sampling* conjuntamente com o algoritmo de Metropolis Hastings utilizados para a obtenção das estimativas *a posteriori*.

<b>Tabela (6.69).</b> Diagnóstico de convergência para os casos considerados.								
<b>Caso I</b>			<b>Caso II</b>			<b>Caso III</b>		
Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%	Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%	Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%
$N$	1,00	1,00	$N$	1,01	1,03	$N$	1,00	1,01
$p_1$	1,00	1,00	$p_1$	1,01	1,04	$p_1$	1,00	1,00
$p_2$	1,00	1,00	$p_2$	1,00	1,02	$p_2$	1,00	1,00
$p_3$	1,00	1,00	$p_3$	1,00	1,01	$p_3$	1,00	1,00
$p_4$	1,00	1,01	$p_4$	1,00	1,00	$p_4$	1,00	1,00
$\eta_1$	1,00	1,00	$\eta_1$	1,01	1,04	$\eta_1$	1,00	1,00
$\eta_2$	1,00	1,00	$\eta_2$	1,00	1,02	$\eta_2$	1,00	1,00
$\eta_3$	1,00	1,00	$\eta_3$	1,00	1,01	$\eta_3$	1,00	1,00
$\eta_4$	1,00	1,01	$\eta_4$	1,00	1,00	$\eta_4$	1,00	1,00
<b>Caso IV</b>			<b>Caso V</b>			<b>Caso VI</b>		
Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%	Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%	Parâmetro	Est.P.	Q.97,5%
$N$	1,00	1,04	$N$	1,00	1,01	$N$	1,00	1,02
$p_1$	1,00	1,01	$p_1$	1,00	1,01	$p_1$	1,00	1,01
$p_2$	1,00	1,01	$p_2$	1,00	1,02	$p_2$	1,00	1,02
$p_3$	1,00	1,02	$p_3$	1,00	1,01	$p_3$	1,00	1,01
$p_4$	1,01	1,01	$p_4$	1,00	1,01	$p_4$	1,00	1,02
$\eta_1$	1,00	1,01	$\eta_1$	1,00	1,01	$\eta_1$	1,00	1,01
$\eta_2$	1,00	1,01	$\eta_2$	1,00	1,02	$\eta_2$	1,00	1,01
$\eta_3$	1,00	1,02	$\eta_3$	1,00	1,01	$\eta_3$	1,00	1,01
$\eta_4$	1,01	1,01	$\eta_4$	1,00	1,01	$\eta_4$	1,00	1,01

(6.69)

# Capítulo 7

## Discussão e considerações finais

### 7.1 Introdução

No Capítulo 2 deste trabalho discutimos os conceitos e definições do método de captura-recaptura simples e múltipla. Introduzimos o modelo proposto por Castledine (1981) para populações fechadas.

No Capítulo 3 nos aprofundamos no método de captura-recaptura múltipla para população fechada. Introduzimos o modelo estatístico, a função de verossimilhança bem como as estimativas de máxima verossimilhança para o modelo proposto por Castledine (1981).

No Capítulo 4 damos o enfoque bayesiano para o modelo, introduzimos a distribuição *a posteriori* para a inferência através de distribuições *a priori* informativas e não-informativas e também através de um modelo hierárquico para o tamanho populacional. Fizemos uma breve análise da sensibilidade *a posteriori* dos parâmetros, isto é, analisamos a sensibilidade das estimativas *a posteriori* em relação a escolha dos hiperparâmetros. Trabalhamos também com um exemplo de dados reais proposto por Castledine (1981).

No Capítulo 5 apresentamos uma reparametrização para a probabilidade de captura e verificamos sua eficácia e vantagens em relação ao modelo original. Fizemos um estudo amplo de simulação com diferentes probabilidades de capturas e comparamos os resultados entre o modelo original proposto por Castledine (1981) e o modelo onde a probabilidade de captura foi reparametrizada.

No Capítulo 6 fizemos a inserção de covariáveis na probabilidade de captura, determinando o modelo estatístico e a função de verossimilhança. Para a análise bayesiana introduzimos distribuições *a priori* não informativas no modelo hierárquico. Estudamos o modelo na presença de uma, duas e três covariáveis. Abordamos o problema da não-identificabilidade e correlação dos parâmetros.

## 7.2 Sobre a sensibilidade das estimativas *a posteriori* dos parâmetros em relação a escolha dos hiperparâmetros

Os estudos mostraram que quando a estatística  $r$  é pequena as estimativas tendem a ser muito sensíveis a distribuição *a priori*, ou seja, por falta de dados a distribuição *a priori* acaba *falando mais alto* que os dados amostrais. Por outro lado, quando a estatística  $r$  aumenta, a sensibilidade das estimativas *a posteriori* em relação a escolha dos hiperparâmetros diminui.

As simulações mostraram que quando a estatística  $r$  é igual ou maior que a metade do tamanho populacional  $N$  ( $r \geq \frac{N}{2}$ ) as estimativas de  $N$  e  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$  se estabilizam, isto é, as estatísticas são suficientes e os valores dos parâmetros se aproximam dos parâmetros reais. Por consequência os estudos de simulação mostraram que os resultados *a posteriori* dos parâmetros se mostraram pouco sensíveis a distribuição *a priori* quando a estatística  $r$  é grande.

## 7.3 Sobre a distribuição *a priori* informativa de Poisson para o tamanho populacional

Os estudos de simulação mostraram que quando usamos uma distribuição *a priori* informativa de Poisson para o tamanho populacional, devemos ter uma boa idéia do parâmetro lâmbda, caso contrário estaremos comprometendo as estimativas *a posteriori* dos parâmetros do modelo.

Quando utilizamos um modelo bayesiano hierárquico onde atribuímos uma dis-

tribuição Poisson de parâmetro  $\lambda$  para o tamanho populacional  $N$  e para  $\lambda$  atribuímos uma *priori* Gama com hiperparâmetros  $(\alpha, \beta)$  não informativa, as estimativas *a posteriori* não apresentam diferenças com relação ao modelo onde usamos Jeffreys  $\pi(N) \propto N^{-1}$ .

## 7.4 Sobre a reparametrização da probabilidade de captura

Podemos concluir que a reparametrização apresentada no Capítulo 5 se mostrou uma alternativa eficiente para o modelo de captura-recaptura onde as estimativas *a posteriori* não são boas por falta de dados, isto é, quando temos um número muito pequeno de animais marcados observados (valor pequeno da estatística  $r = \sum_{j=1}^s n_j - \sum_{j=1}^s m_j$  ou mesmo quando  $\sum_{j=1}^s m_j \cong 0$ ).

## 7.5 Sobre o modelo na presença de covariáveis

Tivemos problemas de não-identificabilidade dos parâmetros (coeficientes)  $\beta_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14})$ ,  $\beta_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}, \beta_{24})$  e  $\beta_3 = (\beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33}, \beta_{34})$  associados às covariáveis  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  que não atingem a convergência e são altamente correlacionados. No entanto, quando fazemos  $\eta = \beta_1 \bar{x} + \beta_2 \bar{y} + \beta_3 \bar{z}$  para cada uma das 70000 iterações das cadeias 1 e 2 então  $\eta$  atinge a convergência, então  $p = \frac{\exp(\beta_1 \bar{x} + \beta_2 \bar{y} + \beta_3 \bar{z})}{1 + \exp(\beta_1 \bar{x} + \beta_2 \bar{y} + \beta_3 \bar{z})} = \frac{\exp(\eta)}{1 + \exp(\eta)}$  também atinge a convergência juntamente com o tamanho populacional  $N$ . Com relação ao algoritmo de *Gibbs Sampling* e *Metropolis Hastings*, todos os estudos de simulação foram atribuídos valores iniciais ("chutes iniciais") diferentes e discrepantes para cada uma das cadeias e atribuímos sementes ("seeds") diferentes para as cadeias. Os coeficientes não atingem a convergência enquanto que a quantidade  $\eta = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi}$  sempre atinge a convergência, tanto para o modelo original como para o modelo com estrutura hierárquica. Portanto, quando implementamos o modelo bayesiano de captura-recaptura com a inserção de covariáveis, não é possível determinar qual é a contribuição de cada covariável para a estimação do tamanho populacional  $N$ . O que é possível é determinar a contribuição da quantidade  $\eta = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

# Capítulo 8

## Apêndices

### 8.1 Introdução

As programações desenvolvidas neste trabalho para o estudo de simulação estocástica via **Monte Carlo Markov Chain (MCMC)**, a saber os algoritmos de *Gibbs Sampling* ("Amostrador de Gibbs", ver Geman e Geman (1984) e Gelfand e Smith (1990), Casella *et al.* (1992), Smith *et al.* (1993), Gamerman (1996)) e o algoritmo de *Metropolis Hastings* (ver Metropolis *et al.* (1953), Hastings (1970), Chib *et al.* (1995)) deste trabalho foram implementadas no Software **R** cuja convergência dos algoritmos foi monitorada pelo pacote **CODA - Convergence Diagnostics and Output Analysis Software for Gibbs Sampling Output** (Best *et al.* 1995). A seguir apresentamos alguns programas específicos desenvolvidos para os exemplos simulados deste trabalho.

### 8.2 Alguns programas desenvolvidos no Software R

Programa desenvolvido no software **R** para o método de captura-recaptura múltipla com população fechada considerando probabilidades de captura iguais.

```
#####  
##### GERAÇÃO DOS DADOS  
N <- 800  
p <- 0.10
```

```

s <- 6
set.seed(10)
m <- n <- M <- numeric()
for(i in 2:s) {
m[1] <- 0
M[1] <- 0
n[1] <- rbinom(1, N, p)
n[i] <- rbinom(1, N, p)
m[i] <- rhyper(1, (M[i-1]+n[i-1]-m[i-1]),N-(M[i-1]+n[i-1]-m[i-1]), n[i])
for(i in 1:s) {
M[i] <- M[i-1]+n[i-1]-m[i-1]
}
}
#####
##### GIBBIS SAMPLING - CADEIA 1
N1 <- p1 <- x1 <- numeric()
p1[1] <- 0.0900
N1[1] <- 900
loop <- 20000
burnin <- 10000
salto <- 10
set.seed(10)
for(i in 2:loop){
x1[i] <- rbinom(1,r,((1-(1-p1[i-1])^s)))
p1[i] <- rBeta(1,(ne+alpha),(N1[i]*s-ne+Beta))
}

```

**Programa desenvolvido no software R para a situação onde fazemos a reparametrização das probabilidades de captura.**

```

#####
##### REPARAMETRIZAÇÃO DA PROBABILIDADE DE CAPTURA
N <- 2000

```

```

eta0 <- -2.4423
set.seed(2005)
s <- 6
for(i in 2:s) {
p[i] <- exp(eta0)/(1+exp(eta0))
m[1] <- 0
M[1] <- 0
n[1] <- rbinom(1, N, p[1])
n[i] <- rbinom(1, N, p[i])
m[i] <- rhyper(1, (M[i-1]+n[i-1]-m[i-1]),N-(M[i-1]+n[i-1]-m[i-1]), n[i])
for(i in 1:s) {
M[i] <- M[i-1]+n[i-1]-m[i-1]
}
}
a <- 0
b <- 1000
c <- 1
d <- 1
loop <- 70000
burnin <- 20000
salto <- 50
#####
##### CADEIA 1 - GIBBS E METROPOLIS
set.seed(10)
for(i in 2:loop) {
#####
tetaN1[i]<-(rbinom(1,r,(1-prod((1/(1+exp(eta1[i-1]))),(1/(1+exp(eta2[i-1]))),
(1/(1+exp(eta3[i-1]))),(1/(1+exp(eta4[i-1]))),(1/(1+exp(eta5[i-1]))),(1/(1+exp(eta6[i-1])))))))+r
#####
mi[i] <- rnorm(1,

```

```

((b*(eta1[i-1]+eta2[i-1]+eta3[i-1]+eta4[i-1]+eta5[i-1]+eta6[i-1])+(delta[i-1]*a))/((s*b)+delta[i-1])),
(sqrt((delta[i-1]*b)/((s*b)+delta[i-1])))
#####
delta[i] <- 1/rGama(1,((s/2)+c),
((((eta1[i-1]-mi[i])^2)/2)+(((eta2[i-1]-mi[i])^2)/2)+(((eta3[i-1]-mi[i])^2)/2)+
(((eta4[i-1]-mi[i])^2)/2)+(((eta5[i-1]-mi[i])^2)/2)+(((eta6[i-1]-mi[i])^2)/2)+d))
#####
eta1.teste <- rnorm(1,mi[i],sqrt(delta[i]))
A1 <- (eta1.teste*n1)-(tetaN1[i]*log(1+exp(eta1.teste)))
A2 <- (eta1[i-1]*n1)-(tetaN1[i]*log(1+exp(eta1[i-1])))
testeA <- exp(A1-A2)
u <- runif(1)
ifelse(u<min(1,testeA),eta1[i]<-eta1.teste,eta1[i]<-eta1[i-1])
#####
eta2.teste <- rnorm(1,mi[i],sqrt(delta[i]))
B1 <- (eta2.teste*n2)-(tetaN1[i]*log(1+exp(eta2.teste)))
B2 <- (eta2[i-1]*n2)-(tetaN1[i]*log(1+exp(eta2[i-1])))
testeB <- exp(B1-B2)
u <- runif(1)
ifelse(u<min(1,testeB),eta2[i]<-eta2.teste,eta2[i]<-eta2[i-1])
#####
eta3.teste <- rnorm(1,mi[i],sqrt(delta[i]))
C1 <- (eta3.teste*n3)-(tetaN1[i]*log(1+exp(eta3.teste)))
C2 <- (eta3[i-1]*n3)-(tetaN1[i]*log(1+exp(eta3[i-1])))
testeC <- exp(C1-C2)
u <- runif(1)
ifelse(u<min(1,testeC),eta3[i]<-eta3.teste,eta3[i]<-eta3[i-1])
#####
eta4.teste <- rnorm(1,mi[i],sqrt(delta[i]))
D1 <- (eta4.teste*n4)-(tetaN1[i]*log(1+exp(eta4.teste)))

```

```

D2 <- (eta4[i-1]*n4)-(tetaN1[i]*log(1+exp(eta4[i-1])))
testeD <- exp(D1-D2)
u <- runif(1)
ifelse(u<min(1,testeD),eta4[i]<-eta4.teste,eta4[i]<-eta4[i-1])
#####
eta5.teste <- rnorm(1,mi[i],sqrt(delta[i]))
E1 <- (eta5.teste*n5)-(tetaN1[i]*log(1+exp(eta5.teste)))
E2 <- (eta5[i-1]*n5)-(tetaN1[i]*log(1+exp(eta5[i-1])))
testeE <- exp(E1-E2)
u <- runif(1)
ifelse(u<min(1,testeE),eta5[i]<-eta5.teste,eta5[i]<-eta5[i-1])
#####
eta6.teste <- rnorm(1,mi[i],sqrt(delta[i]))
F1 <- (eta6.teste*n6)-(tetaN1[i]*log(1+exp(eta6.teste)))
F2 <- (eta6[i-1]*n6)-(tetaN1[i]*log(1+exp(eta6[i-1])))
testeF <- exp(F1-F2)
u<- runif(1)
ifelse(u<min(1,testeF),eta6[i]<-eta6.teste,eta6[i]<-eta6[i-1])
#####
}

```

# Referências Bibliográficas

- [1] ABENI, D. D., BRANCATO, G., PERUCCI, C. A.. *Capture-recapture to estimate the size of the population with human immunodeficiency virus type 1 infection*. **Epidemiology**, v.5, p.410-414, 1994.
- [2] ABUABARA, M. A. P., Jr., M. P. *Estimativas da abundância de populações animais. Introdução às técnicas de captura-recaptura*. Nupélia, UEM. Ed. EDUEM, 1997.
- [3] ALMEIDA-FILHO, N. *Estudo multicêntrico de morbidade psiquiátrica em áreas urbanas brasileiras (Brasília, São Paulo, Porto Alegre)*. **Rev. ABP-APAL**, v.14, p.93-104, 1992.
- [4] ANANDA, M. M. A. *Bayesian methods for mark-resighting surveys*. **Commun. Statist. - Theory Meth.**, v.26, p.685-697, 1997.
- [5] BAILEY, N. T. J.. *On estimating the size of mobile populations from recapture data*. **Biometrika**. v.38, p.293-306, 1951.
- [6] BARTKO J. J. *Approximating the negative binomial*. **Technometrics**, v.8, n.2, p.345-50, 1996.
- [7] BEDRICK, E. J., CHRISTENSEN, R., JOHNSON, W. *Bayesian binomial regression: predicting survival at a trauma center*. **Journal of the American Statistical Association**. v.51, n.3, p.211-18, 1997.
- [8] BELL, W. R.. *using information from demographic analysis in post-enumeration survey estimation*. **Journal of the American Statistical Association**. v.88, p.1106-1118, 1993.

- [9] BERNARDO, J. M. *Reference posterior distributions for bayesian inference (with discussion)*. **J. Royal Statist. Soc. Ser. B.**, v.41, p.113-47, 1979.
- [10] BERNILLON, P., LIEVRE, L., PILLONEL, J., LAPORTE, A., COSTAGLIOLA, D., THE CLINICAL EPIDEMIOLOGY GROUP FROM CISIH. *Record-linkage between two anonymous databases for a capture-recapture estimation of underreporting of Aids cases: France 1990-1993*. **International Journal of Epidemiology**. v.29, p.168-174, 2000.
- [11] BEST, N.; COWLES, M. K.; VINES, K. *CODA - Convergence Diagnosis and Output Analysis Software for Gibbs Sampling Output*. Version 0.4. **Biostatistics Unit MRC**, Cambridge, Inglaterra, 1995. (Relatório Técnico).
- [12] BEVERTON, R. J. H.; HOLT, S. J.. *On the Dynamics of Exploited Fish populations*. London: **Her Majesty's Stationery Office**, 1957.
- [13] BISHOP, Y. M. M., FIENBERG, S. E., HOLLAND, P. W.. *Discrete multivariate analysis: Theory and Practice*. Cambridge, Mass.. **MIT Press**, 1975.
- [14] BISHOP, Y. M. M., FIENBERG, S. E., HOLLAND, P. W.. *Discrete multivariate analysis*: London: **MIT Press**, 1998.
- [15] BOLFARINE, H., LEITE, J. G., RODRIGUES, J.. *On the estimation of the size of a finite closed population*. **Biom. J.** v.34, n.5, p.577-93, 1992.
- [16] BOLSONI, S. B. *Estimação dos parâmetros de uma população a partir de observações incompletas da distribuição multinomial*. **Dissertação de mestrado**, Universidade Federal de São Carlos, 2002.
- [17] BOSWELL, M. T., BURNHAM, K. P., PATIL, G. P.. *Role and use of composite sampling and capture-recapture sampling in ecological studies*. In **Handbook of Statistics 6: Sampling**, Ed. P. R. Krishnaiah and C. R. Rao, p.469-88, 1988.
- [18] BOX, G. E.; TIAO, G. C. *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. New York: Addison-Wesley, 1973.

- [19] BUNGE, J.; FITZPATRICK, M. *Estimating the number of species: a review*. **J. Amer. Statist. Assoc.**, v.88, n.421, p.364-73, 1993.
- [20] BURNHAM, K. P. *Estimation of population size in multiple capture-recapture studies when capture probabilities vary among animals*. **Ph.D. dissertation**. Oregon State University, Corvallis, Oregon, 1972.
- [21] BURNHAM, K. P., OVERTON, W. S.. *Robust Estimation of population Size when Capture Probabilities Vary Among Animals*. **Ecology**. v.60, p.927-36, 1979.
- [22] BURNHAM, K. P., ANDERSON, D. R., WHITE, G. C., BROWNIE, C. ANDE POLLOCK, K. H.. *Design and analysis methods for fish survival experiments based on release-recapture*. **American Fisheries Society**, Monograph 5. Wenatchee, Washington, 1987.
- [23] CAMARGO Jr., K.R., COELI, C. M.. *RecLink: Aplicativo para o relacionamento de banco de dados implementando o método "probabilistic record linkage"*. **In: IV Congresso Brasileiro de Epidemiologia. Resumos**. Rio de Janeiro: ABRASCO, p.162, 1998.
- [24] CASELLA, G.; GEORGE, E. I. *Explaining the Gibbs sampler*. **Am. Statist.**, v.46, p.167-74, 1992.
- [25] CASTLEDINE, B. A. *Bayesian analysis of multiple-recapture sampling for a closed population*. **Biometrika**, v.67, p.197-210, 1981.
- [26] CHANDRASEKAN, C., DEMMING, W.. *On a method for estimating birth and death rates and the extent of registration*. **J. Am. Statist. Assoc. (JASA)**, v.44, p.101-15, 1949.
- [27] CHAO, A., LEE, S. M., JENG, S. L.. *Estimating population size for capture-recapture data when capture probabilities vary by time and individual animal*. **Biometrics**. v.22, p.330-342, 1992.
- [28] CHAPMAN, D. G. *Some properties of the hypergeometric distribution with applications to zoological sample censuses*. **University of California Publ. Statist.**, v.1 p.131-60, 1951.

- [29] CHAPMAN, D. G. *The estimation of biological populations*. **Ann. Math. Statist.**, v.25, p.1-15, 1954.
- [30] CHAPMAN, C. J.. *Ethnic differences in the incidence of cleft lip and/or cleft palate in Auckland, 1960-1976*. **N. Z. Med. J.**, v.96, p.327-9, 1983.
- [31] CHIB, S., GREEMBERG, E.. *Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm*. **The Am. Statistician**, v.49, p.327-35, 1995.
- [32] COCHI, S. L.. et al.. *Congenital rubella syndrome in the United States in 1970-85*. **Am. J. Epidemiol.**, v.129, p.349-61, 1989.
- [33] COMACK, D. G.. *Internal estimation for mark-recapture studies of closed populations*. **Biometrics**, v.48, p.567-76, 1992.
- [34] CORMACK, R. M.. *Loglinear models for capture-recapture*. **Biometrics**. v.45, p.395-413, 1989.
- [35] COULL, B. A., AGRESTI, A. *The use of mixed logit models to reflect heterogeneity in capture-recapture studies*. **Biometrics**, v.55, p.294-301, 1999.
- [36] COWAN, C. D., MALEC, D.. *Capture-recapture models when both sources have clustered observations*. **J. Am. Statist. Assoc. (JASA)**, v.81, p.347-53, 1986.
- [37] DARROCH, J. N. *The multiple-recapture census. I: Estimation of a closed population*. **Biometrika**, v.45, p.343-59, 1958.
- [38] DARROCH, J. N. *The multiple-recapture census. II: Estimation when there is immigration or death*. **Biometrika**, v.46, p.336-51, 1959.
- [39] da SILVA, C. Q.. *Capture-recapture estimation of bowhead whale population size using photo-identification data*. **Doctoral Thesis**, Universtiy of Washington, Seatle, WA. i-x + 190pp, 1999.
- [40] da SILVA, C. Q., RODRIGUES, J., LEITE, J. G., MILAN, L. A.. *Bayesian analysis for estimating Bowhead whale population size using photo-identification*. **Technical Report: methods and Teory**. ISSN 0104-0499, DES/UFSCar, 2000.

- [41] da SILVA, C. Q., ZEH, J., MADINGAN, D., LAAKE, J., RUGH, D., BARAFF, L., KOSKI, W., MILLER, G.. *Capture-recapture estimation of bowhead whale population size using photo-identification data*. **J. Cetacean Res. Manage**, v.2(1), p.45-61, 1999.
- [42] DRUCKER, E., VERMUND, S. H.. *Estimating population prevalence of human immunodeficiency virus infection in urban areas with high rates of intravenous drug use: a model of the Bronx in 1988*. **Am. J. Epidemiol.**, v.130, p.133-42, 1989.
- [43] DUPUIS, J. A.. *Bayesian estimation of movement and survival probabilities from capture and recapture data*. **Biometrika**, v.82, n.4, p.761-72, 1995.
- [44] ENGEN, S.. *Stochastic abundance models*. New York: Chapman and Hall, 1978.
- [45] FIENBERG, S. E.,. *The multiple recapture census for closed populations and incomplete 2k contingency tables*. **Biometrika**, v.59, p.591-603, 1972.
- [46] FIENBERG, S. E., JOHNSON, M. S., JUNKER, B. W.. *Classical multilevel and Bayesian approaches to population size estimation using multiple lists*. **J. R. Statist. Soc. A.**, v.162, Part 3, p.383-405, 1999.
- [47] FISCHER, R. A.. *Statistical methods and Scientific Inference*. **Oliver E. Boyd**, Edinburgh, 1956.
- [48] FISHER, N.. *Estimating numbers of homeless and homeless mentally ill people in north east Westminster by using capture-recapture analysis*. **BMJ**, v.308, p.27-30, 1994.
- [49] FRISCHER, M.. *A new method of estimating prevalence of injecting drug use in an urban population: results from a Scottish city*. **Int. J. Epidemiol.**, v.20, p.997-1000, 1991.
- [50] FRISCHER, M.; LEYLAND, A.. *Reliability of population and prevalence estimates*. **Lancet**, p.339-995, 1992.
- [51] GAMERMAN, D. *Silmulação estocástica via cadeias de Markov*. IME-UFRJ, 1996.

- [52] GARTHWAITE, P. H., Yu, K., HOPE, P. B.. *Bayesian analysis of multiple-recapture model*. **Commun. Statist.-Theory and Meth.**, v.24, n.9, p.2229-247, 1995.
- [53] GELFAND, A. E., SMITH, A. F. M.. *Sampling based approaches to calculating marginal densities*. **J. Am. Statist. Assoc. (JASA)**, v.85, p.398-409, 1990.
- [54] GEMAN, S., GEMAN, D. *Stochastic relaxation Gibbs distributions and the bayesian restoration of images*. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**. v.6, p.721-41, 1984.
- [55] GELMAN, A., RUBIN, D.. *Inference from iterative simulation using multiple sequences*. **Statistical Science**, v.7, p.457-511, 1992a.
- [56] GEORGE, E. I., ROBERT, C. P.. *Capture-recapture estimation via Gibbs sampling*. **Biometrika**. v.79, n.4, p.677-83, 1992.
- [57] GERKING, S. D.. *Vital Statistics of the fish population of Gordy Lake, Indiana*. **Trans. Am. fisheries Soc.** v.82, p.48-67, 1953.
- [58] GOLDBERG, J. D., WITTES, J. T. *The estimation of false negatives in medical screening*. **Biometrics**, v.34, p.77-86, 1978.
- [59] GOLDBERG, J., GELFAND, H. M., LEVY, P. S., *Registry evaluation methods: A review and case study*. **Epidemiologic Reviews**, v.2, p.210-220, 1980.
- [60] GRAY, H. L., SCHUCANY, W. R.. *The generalized jackknife statistic*. Marcel Dekker New York, N.Y., 1972.
- [61] GREEN, A., GALE, E. A. M., PATTERSON, C. C.. *Incidence of childhood-onset insulin-dependent diabets mellitus: The Eurodiab Ace Study Group*. **Lancet**, v.339, p.905-909, 1992.
- [62] GULLAND, J.A.. *Manual of methods for Fish Stock Assessment, Part 1. Fish population analysis*. **FAO Manuals in Fish. Sci.**, No. 4. FAO, Roma. p.131.1973.

- [63] GULLAND, J.A. *Manual of Sampling and Statistical methods for Fisheries Biology, Part 1. Sampling methods.* **FAO Manuals in Fisheries Science** No. 3. FAO, Roma. p.87. 1975.
- [64] HARRIS, R.P., WIEBE, P.H., LENZ, J., SKJOLDAL, H.R., HUNTLEY, M.. *Zoo-plankton Methodology Manual.* **Academic press**, S. Diego, p.684, 2000.
- [65] HASTINGS, W. K.. *Monte Carlo Sampling methods using Markov Chains and Their Applications.* **Biometrika**, v.57, p.97-109, 1970.
- [66] He, W.; ANANDA, M. M. A. *Estimation of population size in closed animal populations from mark-resighting surveys.* **Applied Mathematics and Computations.** v.125, p.387-98, 2002.
- [67] HILSENBECK, S. G., KURUCZ, C., DUNCAN, R. C.. *Estimation of completeness and adjustment of age-specific and age-standardized incidence rates.* **Biometrics**, v.48, p.1249-262, 1992.
- [68] HOOK, E. B.. *Use of Bernoulli census and log-linear methods for estimating the prevalence of spina bifida in livebirths and the completeness of vital record reports in New York State.* **Am. J. Epidemiol.**, v.112, p.750-58, 1980.
- [69] HOOK, E. B. *The value of capture- recapture methods for even apparent exhaustive surveys.* **Am. J. Epidemiol.**, v.135, p.1060-67, 1992.
- [70] HOOK, E. B., REAGAL, R. R.. *Effect of variation in probability of ascertainment by sources (“variable catchability”) upon “capture-recapture” estimates of prevalence.* **American Journal of Epidemiology**, v.137, p.1148–66, 1993.
- [71] HOOK, E. B., REAGAL, R. R.. *Capture-recapture methods in epidemiology: methods and limitations.* **Epidemiologic Reviews**, v.17, p243–264, 1995.
- [72] HUNTER, A. J.; GRIFFITHS, H. J. *Bayesian approach to estimation of insect population size.* **Technometrics**, v.20, n.3, p.231-34, 1978.

- [73] IWGDMF (International Working Group for Disease Monitoring and Forecasting). *Capture-recapture and multiple-record systems estimation. I: History and theoretical development.* **American Journal of Epidemiology**, v.142, p.1047-58, 1995a.
- [74] IWGDMF (International Working Group for Disease Monitoring and Forecasting). *Capture-recapture and multiple-record systems estimation. II: Applications in human diseases.* **American Journal of Epidemiology**, v.142, p.1059-68, 1995b.
- [75] INTERNATIONAL COMMITTEE FOR STANDARDIZATION IN Hematology. *Recommended method for radioisotope red-cell survival studies.* **Br. J. Hematol.**, v.45, p.659-66, 1980.
- [76] ISMAIL, A. A., BEECHING, N. J., GILL, G. V., BELLIS, M. A.. *How many data sources are needed to determine diabetes prevalence by capture-recapture.* **International Journal of Epidemiology**. v.29, p.536-541, 2000.
- [77] JOLLY, G. M. *Explicit estimates from capture-recapture data with both death and immigration - stochastic model.* **Biometrika**, v.52, p.225-47, 1965.
- [78] JOLLY, G. M. *Mark-recapture models with parameters constant in time.* **Biometrics**, v.38, p.301-21, 1982.
- [79] KING, R., BROOKS, S. P.. *On the Bayesian analysis of population size.* **Biometrika**, v.88, p.317-36, 2001.
- [80] LAPLACE, P. S. *Sur les naissances, les mariages et les morts.* In: **Histoire de L'Académie Royale des Sciences**, Paris, p.693, 1783.
- [81] LAPORTE, R. E.. *Monitoring the incidence of myocardial infarction: applications of capture-recapture technology.* **Int. J. Epidemiol.**, v.21, p.258-62, 1992.
- [82] LAPORTE, R. E.. *How to improve monitoring and forecasting of disease patterns.* **BMJ**, v.307, p.1573-74, 1993.
- [83] LAPORTE, R. E.. *Assessing the human condition: capture-recapture techniques.* **BMJ**, v.308, p.5-6, 1994.

- [84] LAPORTE, R. E., McCARTY, D. J., TULL, E. S.. *Counting birds, bees, and NCDs*. **Lancet**, v.339, p.494-495, 1992.
- [85] LaPORTE, R. E., DEARWATER, S. R., CHANG, Y., AARON, D. J., ANDERSON, R. L.. *Efficiency and accuracy of disease monitoring systems: Application of capture-recapture methods to injury monitoring*. **American Journal of Epidemiology**, v.142, p.1069-77, 1995.
- [86] LEE, S. M., CHAO, A.. *Estimating population size via sample coverage for closed-recapture models*. **Biometrics**. v.50, p.88-97, 1994.
- [87] LEITE, J. G., RODRIGUES, J., MILAN, L. A.. *A Bayesian analysis for estimating the number of species in a population using nonhomogeneous Poisson process*. **Stat. and Prob. Lett.**, v.48, p.153-61, 2000.
- [88] LEITE, J. G., PEREIRA, C. A. B., OISHI, J.. *A note on the exact maximum likelihood estimation of the size of a finite and closed population*. **Biometrika**, v.75, p.178-80, 1986.
- [89] LINCOLN, F. C. *Calculating waterfowl abundance on the basis of banding returns*. **U.S. Dept. Agric. Circ.**, v.118, p.1-4, 1930.
- [90] LINCOLN, R. J., SHEALS, J.G. *Invertebrate animals - Collection and Preservation*. **Cambridge Univ. Press**, Cambridge. p.150, 1979.
- [91] McCARTY, D. J.. *The importance of incidence registries for connective tissue diseases*. **J. Rheumatol.**, v.19, p.1-6, 1992.
- [92] McCARTY, D. J.. *Ascertainment corrected rates: applications of capture-recapture methods*. **Int. J. Epidemiol.**, v.22, p.559-65, 1993.
- [93] MADIGAN, D., YORK, J. C. *Bayesian methods for estimation of the size of a close population*. **Biometrika**, v.84, p.19-31, 1997.
- [94] MASTRO, T. D., KITAYAPORN, D., WENIGER, B. G., VANICHSENI, S., LAOSUNTHOM, V., UNEKLABH, T., UNEKLABH, C., CHOOPANYA, K., LIMPAKARNJANARAT, K.. *Estimating the number of HIV - infected injection*

- drug users in Bangkok: a capture-recapture method.* **Am. J. Public Health.** v.84, p.1094-99, 1994.
- [95] MCGILCHRIST, C. A., McDONNELL, L. F., JORM, L. R., PATEL, M. S.. *Log-linear models using capture- recapture methods to estimate the size of a measles epidemic.* **Journal of Clinical Epidemiology**, v.49, p.293-296, 1996.
- [96] MCKEGANEY, N., BARNARD, M., LEYLAND, A., COOTE, I., FOLLET, E.. *Female streetworking prostitution and HIV infection in Glasgow.* **British Medical Journal.** v.305, p.801-804, 1992.
- [97] METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A. W., ROSENBLUTH, M. N., TELLER, A. H., TELLER, E.. *Equations of state calculations by fast computing machines.* **Journal of chemical physics.** v.21, p.1087-1091, 1953.
- [98] MINGOTI, S. A.. *A stepwise Bayesian estimator for the total number of distinct species in finite populations: sampling by elements.* **Journal of Applied Statistics.** v.275, p.651-70, 2000.
- [99] MORRISSEY, J. H., GREGORY, S. A., MACKMAN, N., EDGINGTON, T. S.. *Tissue factor gene organization and regulation.* **Oxford Surv. Euk. Genes.** v.6, p.67-84, 1989.
- [100] NICHOLS, J. D., SPENDELOW, J. A., HINES, J. E. *"Capture-recapture estimation of prebreeding survival rates for birds exhibiting delayed maturation".* **Journal Field Ornithol.** v.61, n.3, p.347-354, 1990.
- [101] OLIVEIRA, J. O., BUENO-FILHO, J. S. S.. *"Dinâmica da frota de veículos que estacionam no centro de Lavras, M.G."* **Revista Ciência e Agrotecnologia.** 2004.
- [102] OMORI, M., IKEDA, T.. *methods in Marine Zooplankton Ecology.* **John Wiley & Sons**, N.York. p.332, 1984.
- [103] OTIS D.L., BURNHAM, K.P., WHITE, G.C., ANDERSON, D.R.. *Statistical inference from capture data on closed animal populations.* **It Wildlife Monographs**, bf 62, p.1-135, 1978.

- [104] PANZRAM, G.. *Mortality and survival in type 2 (non-insulin-dependent) diabetes mellitus*. **Diabetologia**, v.30, p.123-31, 1987.
- [105] PAPOZ, L., BALKAU, B., LELLOUCH, L.. *Case counting in epidemiology: Limitations of methods based on multiple data sources*. **International Journal of Epidemiology**, v.25, p.474-78, 1996.
- [106] PARKER, R.A.. *A method for removing the effect of recruitment on Petersen-type population estimates*. **Journal Fish. Res. Bd. Canada**, v.12, p.447- 450, 1955.
- [107] PARKER, R. A. *On the estimation of population size, mortality and recruitment*. **Biometrics**, v.19, p.318-23, 1963.
- [108] PETERSEN, C. G. J. *The yearly immigration of young plaice into Limfjord from the German sea, etc, Rept*. **Danish Biol. Stn.**, v.6, p.1-48, 1896.
- [109] POLLOCK, K. H.. *The assumption of equal catchability of animals in tag-recapture experiments*. **Ph.D. diss.**, Cornell University, Ithaca, New York, 1974.
- [110] POLLOCK, K. H. *Modeling capture-recapture, and removal statistics for estimation of demographic parameters for fish and wildlife populations: Past, present, and future*. **J. Am. Statist. Assoc.**, v.86, p.225-38, 1991.
- [111] POLLOCK, K. H., AND OTTO. *Robust estimation of population size in closed animal populations from capture-recapture experiments*. **Biometrics**, v.39, p.1035-49, 1983.
- [112] POLLOCK, K. H., HINES, J. E., NICHOLS, J. D.. *The use of auxiliary variables in capture-recapture and removal experiments*. **Biometrics**, v.40, p.329-40, 1984.
- [113] QUENOUILLE, M. H.. *Notes on bias reduction*. **Biometrika**, v.43, p.353-60, 1956.
- [114] RAFTERY, A. E.. *Inference for the binomial  $N$  parameter: A hierarchical Bayes approach*. **Biometrika**, v.75, p.223-28, 1988.
- [115] RAFTERY, A. E., ZEH, J. E.. *Estimating bowheads whale population size an rate of increase from the 1993 census*. **J. Am. Statist. Assoc. (JASA)**, v.93, p.451-63, 1998.

- [116] RASH, G.. *Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests*. Nielsen and Lydiche, Copenhagen. 1960.
- [117] REXSTAD, E., BURNHAM, K.. *User's guide for interactive program capture*. Colorado Cooperative Fish & Wildlife Research Unit Colorado. State University Fort Collins, 1991.
- [118] RICKER, W. E.. *Handbook of Computations for Biological Statistics of Fish populations*. Bull. Fish. Bd. Canada, v.119, p.1-300, 1958.
- [119] RICKER, W. E.. *Computation and Interpretation of Biological Statistics of Fish population*. Ottawa: Dep. of the Environment, Fisheries and Marine Service, 1975.
- [120] RIVEST, L. P., DAIGLE, G. *Loglinear models for the robust design in mark-recapture experiments*. **Biometrics**, v.60, p.100-107, 2004.
- [121] ROBLES, S., MARRETT, L. D., CLARKE, E. A., RISCH, H. A.. *An application of capture-recapture methods to the estimating of completeness of cancer registration*. **Journal of Clinical Epidemiology**, v.4, p.495-501, 1988.
- [122] SANATHANAN, L. P.. *Estimating population size in the particle scanning. context*. Ph.D. dissertation, University of Chicago, 1969.
- [123] SANATHANAN, L. P.. *Estimating the size of a multinomial population*. **Annals of Mathematical Statistics.**, v.43, n°1, p.142-52, 1972a.
- [124] SANATHANAN, L. P.. *Model and estimation methods in visual scanning experiments*. **Technometrics.**, v.14, p.813-30, 1972b.
- [125] SANATHANAN, L. P.. *A comparison of some model in visual scanning experiments*. **Technometrics.**, v.15, p.67-78, 1973.
- [126] SANATHANAN, L. P.. *Estimating the size of truncated sample. Theory and methods section*. **J. Am. Statist. Assoc. (JASA)**, n.359, v.72, p.669-72, 1977.
- [127] SCHNABEL, Z. E.. *The estimation of the total fish population of a lake*. **Am. Math. Monthly**, v.45, p.348-52, 1938.

- [128] SHTICKZELLE, N., BAGUETTE, M., LE BOULENGÉ, É.. *Modélisation de la démographie chez les insectes à partir de données de capture-recapture : comparaison entre les modèles linéaires sous contraintes et la méthode analytique de Jolly-Seber*. **The Canadian Entomologist**. v.135, p.313-323, 2003.
- [129] SCHUMACHER, F. X., ESCHMEYER, R. W.. *The estimation of fish populations in lakes and ponds*. **J. Tennessee Acad. Sci.**, v.18, p.228-49, 1943.
- [130] SCHWARZ, C. J., ARNASON, A.N.. *A general methodology for the analysis of capture-recapture experiments in open populations*. **Biometrics**, v.52, p.860-73, 1996.
- [131] SEBER, G. A. F. *A note on the multiple recapture census*. **Biometrika**, v.52, p.249-59, 1965.
- [132] SEBER, G. A. F. *The estimation of animal abundance and related parameters*. **London: Charles Griffin and Company Ltd-1973**, v.4, p.130-31, 1982.
- [133] SEBER, G. A. F.. *A review of estimating animal abundance*. **Biometrics**, v.42, p.267-92, 1986.
- [134] SEBER, G. A. F.. *A review of estimating animal abundance II*. **Intern. Stat. Review**, v.602, p.129-166, 1992.
- [135] SEKAR, C. C., DEMING, W. E.. *On a method of estimating birth and death rates and the extent of registration*. **J. Am. Statist. Assoc. (JASA)**. v.44, p.101-15, 1949.
- [136] SHIMIZU, G. Y.. *Estimação do tamanho de uma população fechada: método de captura-recaptura com um único estágio de marcação*. **Dissertação de mestrado**, Universidade Federal de São Carlos, 2002.
- [137] SIDOW, A.. *Diversification of the "Wnt" gene family on the ancestral lineage of vertebrates*. **Proc. Natl. Acad. Sci. USA**. v.89, p.5098-5102, 1992.
- [138] SIDOW, A., THOMAS, W. K.. *A molecular evolutionary framework for eukaryotic model organisms*. **Curr. Biol**. v.4, p.596-603, 1994.

- [139] SILVA, R. C., MINGOTI, S. A.. *Programa Captura e Recaptura (Software)*. Departamento de Estatística da UFMG, 1998.
- [140] SMITH, A. F. M., ROBERTS, G. O.. *Bayesian Computation via the Gibbs Sampler and Related Markov Chain Monte Carlo methods*. **Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B.**, v.55, p.3-24, 1993.
- [141] SMITH, P. J.. *Bayesian methods for multiple capture-recapture surveys*. **Biometrics**, v.44, p.1177-189, 1988.
- [142] SMITH, P. J. *Bayesian analysis for a multiple capture-recapture model*. **Biometrika**, v.78, p.399-408, 1991.
- [143] TIERNEY, L., KADANE, J. B.. *Accurate Approximations for Posterior Moments and Marginal Densities*. **J. Am. Statist. Assoc. (JASA)**, v.81, p.82-6, 1986.
- [144] TIERNEY, L.. *Markov Chains for Exploring Posterior Distributions*. **Annals of Statistics**, v.22, p.1701-62, 1994.
- [145] TRAVASSOS-VERAS, C. M.. *Equity in the Use of Private Hospitals Contracted by a Compulsory Insurance Scheme in the City of Rio de Janeiro, Brazil, in 1986*. **Ph.D. Thesis**, London: Department of Public Administration, School of Economics and Political Science, 1992.
- [146] VERAS, R. P., ALVES, M. I. C.. *A população idosa no Brasil: Considerações acerca do uso de indicadores de saúde*. In: *Os Muitos Brasis: Saúde e População na Década de 80 (M. C. S. Minayo, org.)*, Editora Hucitec/Rio de Janeiro: **ABRASCO**, p.320-37, São Paulo, 1995.
- [147] WANG, X. *Bayesian Analysis of Capture-recapture Models*. **Ph.D. Dissertation**. University of Missouri, Columbia. 2002.
- [148] WHITE, G. C., ANDERSON, D. R., BURNHAM, K. P. & OTIS, D. L., *Capture-Recapture and Removal methods for Sampling Closed populations*. **Los Alamos National Laboratory**, New Mexico, 1982.

- [149] WHO (World Health Organization). *Diamond Project Group: Who multinomial project for childhood diabetes*. **Diabetes Care**, v.13, p.1062-8, 1990.
- [150] WHO (World Health Organization). *Directors of non-communicable disease collaborating Centers and Key Officials. Shanghai declaration on non-communicable diseases*. **BMJ**, p.306-588, 1993a.
- [151] WHO (World Health Organization). *Directors of World Health Organization non-communicable disease collaborating Centers and Key Officials, 1993 needed: Universal monitoring of all serious diseases of global importance*. **American Journal of Public-Health**, v.83, p.941-43, 1993b.
- [152] WITTES, J. T.. *Applications of a multinomial capture-recapture model to epidemiological data*. **J. Am. Statist. Assoc. (JASA)**, v.69, p.93-7, 1974.
- [153] WITTES, J. T., COLTON, T., SIDEL, V. W.. *Capture-recapture methods for assessing the completeness of case ascertainment when using multiple information sources*. **Journal of Chronic Diseases**, v.27, p.25-36, 1974.
- [154] WITTES, J. T., SIDEL, V. W.. *A generalization of the simple capture-recapture model with applications to epidemiological research*. **Journal of Chronic Diseases**, v.21, p.287-301, 1968.
- [155] WOLTER, K. M.. *Accounting for America's uncounted and miscounted*. **Science**, v.253, p.12-15, 1991.
- [156] YAZAKI, L. M., SAAD, P. M.. Mortalidade na população idosa. In: O idoso na Grande São Paulo (**Fundação Sistema Estadual de Análise de Dados, org.**), São Paulo, p.125-59, 1990.
- [157] YOSHIDA, O. S.. *Inferência Bayesiana do Número de Espécies de uma População*. **Dissertação (Dr.) IME-USP**, 1996.
- [158] YOSHIDA, O. S.; LEITE, J. G.; BOLFARINE, H. *Stochastic monotonicity properties of Bayes estimation of the population size for capture-recapture data*. **Statistics and probability Letters**. v.42, p.257-66, 1999.

- [159] ZACHARIAS, H. P.. *Aplicação do algoritmo Gibbs sampling no processo de captura-recaptura*. **Dissertação de mestrado**, Universidade Federal de São Carlos, 2000.
- [160] ZELLNER, A., MIN, C.. "*Gibbs Sampler Convergence Criteria*". **Journal of American Statistical Association**. v.90, p.921-927, 1995.
- [161] ZIPPIN, C.. *An evaluation of the removal methods of estimating animal populations*. **Biometrika** , v.12, p.163-69, 1956.
- [162] ZIPPIN, C.. *The removal method of population estimation*. **Journal of Wildlife Management**. v.2, p.282-90, 1958.