

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CONSTRUÇÃO CIVIL**

**“CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROJETO, CÁLCULO E DETALHAMENTO DE  
VIGAS PRÉ-FABRICADAS PROTENDIDAS COM ADERÊNCIA INICIAL EM  
PAVIMENTOS DE EDIFICAÇÕES”**

**THIAGO BINDILATTI INFORSATO**

**SÃO CARLOS**

**2009**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CONSTRUÇÃO CIVIL**

**“CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROJETO, CÁLCULO E DETALHAMENTO DE  
VIGAS PRÉ-FABRICADAS PROTENDIDAS COM ADERÊNCIA INICIAL EM  
PAVIMENTOS DE EDIFICAÇÕES”**

**THIAGO BINDILATTI INFORSATO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Construção Civil da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Construção Civil.

**Área de Concentração:** Sistemas Construtivos de Edificações.

**Orientador:** Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho.

**São Carlos**

**2009**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

I43cs

Inforsato, Thiago Bindilatti.

Considerações sobre o projeto, cálculo e detalhamento de vigas pré-fabricadas protendidas com aderência inicial em pavimentos de edificações / Thiago Bindilatti Inforsato. -- São Carlos : UFSCar, 2009.  
234 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Concreto protendido. 2. Concreto pré-moldado. 3. Projeto estrutural. 4. Detalhamento construtivo. 5. Pavimentos de edificações. I. Título.

CDD: 624.183412 (20<sup>a</sup>)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Departamento de Engenharia Civil

**Programa de Pós-Graduação em Construção Civil**

Via Washington Luís, Km 235 - CEP: 13.565-905 - São Carlos/SP/Brasil

Fone(16) 3351-8262- Ramal: 8262 - Fax (16) 3351-8262

Site: [www.ppgciv.ufscar.br](http://www.ppgciv.ufscar.br) Email: [ppgciv@power.ufscar.br](mailto:ppgciv@power.ufscar.br)

**“CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROJETO, CÁLCULO E DETALHAMENTO DE  
VIGAS PRÉ-FABRICADAS PROTENDIDAS COM ADERÊNCIA INICIAL EM  
PAVIMENTOS DE EDIFICAÇÕES”**

**THIAGO BINDILATTI INFORSATO**

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 30 de julho de 2009

Banca Examinadora constituída pelos membros:

---

**Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho**  
Departamento de Engenharia Civil / PPGCIV / UFSCar  
Orientador

---

**Prof. Dr. Reginaldo Carneiro da Silva**  
Departamento de Engenharia Civil / Universidade Federal de Viçosa  
Examinador Externo

---

**Prof. Dr. Rodrigo Gustavo Delalibera**  
Departamento de Engenharia Civil / Universidade Federal de Goiás  
Examinador Externo

*À meu pai Aparecido, à  
minha mãe Ivanira e à  
minha noiva Thais, dedico  
este trabalho, com todo  
amor e carinho.*

## AGRADECIMENTOS

---

A Deus, por ter me dado a oportunidade de vencer mais esta etapa em minha vida, sem a sua ajuda e presença, nada conseguiria fazer.

A minha noiva Thais, pela sua paciência nos momentos difíceis e a compreensão, entendo que estes sacrifícios valeram a pena, além de me apoiar com muito amor.

Aos meus pais Aparecido e Ivanira, que sempre me apoiaram e me deram suporte necessário para seguir o meu caminho.

Ao meu orientador e grande amigo Roberto Chust Carvalho, exemplo de profissional e de pessoa, pelo indispensável apoio e dedicação, durante esse período.

Aos professores Marcelo de Araújo Ferreira e Rodrigo Gustavo Delalibera, pelas suas preciosas sugestões e correções no exame de qualificação.

Aos professores Reginaldo Carneiro da Silva e Rodrigo Gustavo Delalibera, por terem participado do exame final, colaborando ainda mais para o aperfeiçoamento deste trabalho.

A todos os integrantes da CTC – Projetos e Consultorias, engenheiro Francisco, arquiteto Jorge, engenheiro Bernardus, estagiário em engenharia civil Henrique, pelas suas colaborações, incentivo e apoio.

A todos os amigos mestrando que iniciaram comigo no ano de 2007, o meu mais sincero carinho pelos momentos inesquecíveis que passamos juntos, em especial ao meu amigo Andrey.

## RESUMO

---

INFORSATO, T. B. **Considerações sobre o projeto, cálculo e detalhamento de vigas pré-fabricadas protendidas com aderência inicial em pavimentos de edificações.** 234f. Dissertação (Mestrado em construção civil) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos. 2009.

Este trabalho mostra um roteiro para determinar e detalhar as armaduras longitudinal e transversal de vigas pré-tracionadas com seção composta. Todos os procedimentos são feitos de maneira que atenda a todas as prescrições das normas NBR 6118:2003 e NBR 9062:2006. Apresentam-se como podem ser feitas as verificações do estado limite último assim como em serviço de fissuração e determinando se há necessidade do isolamento das cordoalhas. As perdas de protensão são consideradas levando-se em conta a idade dos concretos constituintes da seção na época em que cada etapa é executada e o procedimento de perdas progressivas. As hipóteses adotadas para o cálculo como seção composta e respectiva armadura de costura são detalhadas. Mostra-se como pode ser feito o detalhamento da armadura transversal com especial cuidado para a extremidade da peça onde é comum o uso de dente Gerber. Quatro exemplos numéricos são resolvidos mostrando como o roteiro recomendado permite ao projetista perceber logo a melhor solução, inclusive da necessidade do uso de protensão junto a borda superior. Pelos resultados obtidos nos exemplos percebe-se: a vantagem do uso da seção em forma de I; que a ligação semi-rígida tem pequena eficiência mesmo com grande quantidade de armadura negativa, devido a existência do dente Gerber; que considerando o efeito da protensão faz com que a armadura de cisalhamento necessária seja a mínima. Finalmente pode-se concluir que nos diversos exemplos a situação determinante para a obtenção da armadura longitudinal foi a em serviço com a descompressão.

*Palavras-chaves:* pré-tração; pré-moldado, projeto, detalhamento, pavimento de edificações.

## ABSTRACT

---

INFORSATO, T. B. **Considerations on the design, calculation and detailing of precast beams prestressing with pre-tensioning on buildings floors.** 234f. Dissertação (Mestrado em construção civil) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos. 2009.

This work shows a calculation sequence to determine and detail the longitudinal and transverse reinforcement of prestressed beams with pre-composed section. All procedures are done in a way that meets all the requirements of NBR6118: 2003 and 9062:2006 Code. It shows how the checks can be made of the ultimate state limit and the cracking service state and determining whether there is need for the isolation of the strand. The prestresses loss are considered taking into account the age of the constituents of the concrete section at the time when each step is performed and the procedure for progressive loss. The assumptions adopted for the calculation as composite section and the respective transverse reinforcement are detailing. It can be done as the detailing of transverse reinforcement with special care for the end of the piece where it is common the use of dapped-end. Four numerical examples are solved showing how the recommended calculation sequence allows the designer immediately realize the best solution, including the need for the use of prestressed strand along the top edge. The results obtained in the examples it can be seen: the advantage of using the section I-beam, the semi-rigid connection has a limited efficiency even with large amounts of negative reinforcement, because the existence of the dapped-end, that considering the effect of prestressing causes the shear reinforcement required is minimal. Finally we can conclude that in several instances the situation critical for obtaining the longitudinal reinforcement was in service with the decompression.

**Keywords:** *pre-tensioning, precast beam, design, detailing, floor buildings.*



# ÍNDICE

---

|   |            |
|---|------------|
| <i>RESUMO</i>                               | <i>i</i>   |
| <i>ABSTRACT</i>                             | <i>ii</i>  |
| <i>ÍNDICE</i>                               | <i>iii</i> |
| <i>LISTA DE FIGURAS</i>                     | <i>vi</i>  |
| <i>LISTA DE TABELAS</i>                     | <i>ix</i>  |
| <i>LISTA DE GRÁFICOS</i>                    | <i>xi</i>  |
| <b>1. INTRODUÇÃO</b>                        | <b>1</b>   |
| 1.1. USO DA PRÉ-TRAÇÃO EM VIGAS             | 2          |
| 1.2. OBJETIVO                               | 5          |
| 1.3. JUSTIFICATIVA                          | 5          |
| 1.4. MÉTODO                                 | 6          |
| 1.5. APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO            | 6          |
| <b>2. PROJETO</b>                           | <b>8</b>   |
| 2.1. INTRODUÇÃO                             | 8          |
| 2.2. SISTEMA ESTRUTURAL                     | 10         |
| 2.3. LANÇAMENTO DA ESTRUTURA                | 14         |
| <b>3. CÁLCULO DE CONSOLO E DENTE GERBER</b> | <b>22</b>  |
| 3.1. INTRODUÇÃO                             | 22         |
| 3.2. CONSIDERAÇÕES INICIAIS                 | 22         |
| 3.3. CONSOLO CURTO E CONSOLO MUITO CURTO    | 24         |
| 3.4. COMPORTAMENTO ESTRUTURAL               | 25         |
| 3.5. MECANISMO DE RUPTURA                   | 25         |
| 3.6. RECOMENDAÇÕES NBR 9062:2006            | 29         |
| <b>4. PERDAS DE PROTENSÃO</b>               | <b>37</b>  |
| 4.1. INTRODUÇÃO                             | 37         |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>4.2. PERDAS INICIAIS</b>   | <b>38</b> |
| 4.2.1. ACOMODAÇÃO DA ANCORAGEM  | 38        |
| 4.2.2. RELAXAÇÃO DA ARMADURA  | 38        |
| 4.2.3. DEFORMAÇÃO IMEDIATA DO CONCRETO  | 39        |
| <b>4.3. PERDAS AO LONGO DO TEMPO</b>  | <b>39</b> |
| 4.3.1. PERDA POR RETRAÇÃO DO CONCRETO   | 41        |
| 4.3.2. PERDA POR FLUÊNCIA DO CONCRETO   | 45        |
| 4.3.3. PERDA POR RELAXAÇÃO DA ARMADURA  | 50        |
| 4.3.4. PERDAS AO LONGO DO TEMPO CONSIDERANDO AS PERDAS<br>PROGRESSIVAS                      | 51        |
| <b>5. CÁLCULO DA ARMADURA LONGITUDINAL</b>  | <b>55</b> |
| <b>5.1. INTRODUÇÃO</b>  | <b>55</b> |
| <b>5.2. SEÇÃO COMPOSTA</b>  | <b>56</b> |
| <b>5.3. TENSÕES NA ARMADURA ATIVA</b>   | <b>58</b> |
| <b>5.4. CÁLCULO DA ARMADURA LONGITUDINAL EM VIGAS SOB<br/>FLEXÃO SIMPLES</b>                | <b>61</b> |
| 5.4.1. EQUACIONAMENTO   | 61        |
| <b>5.5. FÓRMULAS ADIMENSIONAIS E TABELA PARA<br/>DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES RETANGULARES</b> | <b>64</b> |
| <b>6. CÁLCULO DA ARMADURA TRANSVERSAL</b>   | <b>67</b> |
| <b>6.1. INTRODUÇÃO</b>  | <b>67</b> |
| <b>6.2. INCLINAÇÃO DA DIAGONAL DE COMPRESSÃO</b>  | <b>67</b> |
| <b>6.3. EXPRESSÕES A EMPREGAR O CÁLCULO E VERIFICAÇÃO DO<br/>CISALHAMENTO.</b>              | <b>70</b> |
| 6.3.1. VERIFICAÇÃO DA BIELA DE CONCRETO (MODELO II $\theta=30^\circ$ )                      | 70        |
| 6.3.2. CÁLCULO DA ARMADURA (MODELO I $\theta=45^\circ$ )                                    | 71        |
| 6.3.3. FORÇA CORTANTE RESISTIDA PARA UMA DETERMINADA<br>QUANTIDADE DE ARMADURA TRANSVERSAL  | 74        |
| 6.3.4. DESLOCAMENTO DO DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR (MODELO II<br>$\theta=30^\circ$ )         | 75        |
| <b>7. LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS</b>   | <b>77</b> |
| <b>7.1. INTRODUÇÃO</b>  | <b>77</b> |
| <b>7.2. LIGAÇÕES VIGA-PILAR</b>   | <b>77</b> |

|      |   |          |
|------|---|----------|
| 7.3. | FATOR DE RESTRIÇÃO À ROTAÇÃO _____  | 78       |
| 7.4. | CLASSIFICAÇÃO DAS LIGAÇÕES VIGA-PILAR _____                                   | 79       |
| 7.5. | DETERMINAÇÃO TEÓRICA DA RELAÇÃO MOMENTO-ROTAÇÃO.<br>82                        |          |
| 7.6. | MÉTODO BEAM-LINE _____  | 85       |
| 8.   | <b>EXEMPLOS NUMÉRICOS</b> _____   | 87       |
| 8.1. | EXEMPLO 01 _____  | 87       |
| 8.2. | EXEMPLO 02 _____  | 153      |
| 8.3. | EXEMPLO 03 _____  | 158      |
| 8.4. | EXEMPLO 04 _____  | 188      |
| 9.   | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES</b> _____                                 | 227      |
|      | 9.1. ROTEIRO DE DIMENSIONAMENTO E MODELOS DE CÁLCULO<br>APLICADOS 227         |          |
|      | 9.2. CONDIÇÕES DETERMINANTES PARA O CÁLCULO DA ARMADURA<br>LONGITUDINAL _____ | 228      |
|      | 9.3. INFLUÊNCIA DA CONSIDERAÇÃO DAS PERDAS DE PROTENSÃO<br>229                |          |
|      | 9.4. CISALHAMENTO _____   | 229      |
|      | 9.5. ESTADO LIMITE DE DEFORMAÇÃO _____  | 230      |
|      | 9.6. COMPARAÇÃO ENTRE AS DIVERSAS SOLUÇÕES _____                              | 230      |
|      | 9.7. SUGESTÕES _____  | 231      |
| 10.  | <b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> _____                                       | 232      |
|      | <b>ANEXO A</b> _____  | <b>I</b> |

## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| <i>Figura 1-1: Esquema de uma pista de protensão com aderência inicial [VERÍSSIMO 1998].</i>   | 3  |
| <i>Figura 1-2: Peças com aderência inicial com aderência em todo o comprimento (peça 1) e com trechos (s para uma armadura) sem aderência (peça 2).</i>  | 4  |
| <i>Figura 2-1: Estrutura em forma de esqueleto em concreto pré-moldado (Shimoneck).</i>  | 12 |
| <i>Figura 2-2: Estrutura aperticada em concreto pré-moldado com fechamento lateral em painéis (Shimoneck).</i>   | 13 |
| <i>Figura 2-3: Estrutura interna em forma de esqueleto e externa e painéis auto-portante.</i>  | 14 |
| <i>Figura 2-4: Seção transversal de laje alveolar de concreto protendido. Detalhe do rejuntamento entre dois painéis.</i>                                | 15 |
| <i>Figura 2-5: Recortes permitidos em laje alveolares desde que seja previsto reforço ou apoio.</i>  | 17 |
| <i>Figura 2-6: Paginação de laje alveolar.</i>   | 18 |
| <i>Figura 2-7: Perspectiva de uma laje duplo T.</i>  | 19 |
| <i>Figura 2-8: Paginação de laje alveolar formado pórticos em uma direção (medidas em mm).</i>   | 20 |
| <i>Figura 3-1: Ruptura por tração na flexão (MACHADO 1998).</i>  | 26 |
| <i>Figura 3-2: Ruptura por compressão na flexão (MACHADO 1998).</i>  | 26 |
| <i>Figura 3-3: Ruptura por fendilhamento diagonal (MACHADO 1998).</i>  | 27 |
| <i>Figura 3-4: Ruptura por cisalhamento (MACHADO 1998).</i>  | 27 |
| <i>Figura 3-5: Ruptura por fendilhamento da ancoragem (MACHADO 1998).</i>  | 28 |
| <i>Figura 3-6: Ruptura por esmagamento localizado do concreto sob placa de apoio (MACHADO 1998).</i>   | 28 |
| <i>Figura 3-7: Ruptura por insuficiência de altura na região da placa de apoio (MACHADO 1998).</i>   | 28 |
| <i>Figura 3-8: Armadura típica de um consolo curto [NBR 9062:2006].</i>  | 31 |
| <i>Figura 3-9: Detalhe do posicionamento do tirante ao longo da altura do consolo.</i>   | 32 |
| <i>Figura 3-10: Detalhe do posicionamento da armadura de costura [NBR 9062:2006].</i>  | 33 |
| <i>Figura 3-11: Detalhe sobre armadura de suspensão [NBR 9062:2006].</i>   | 34 |
| <i>Figura 3-12: Modelos em consolos tipo Gerber [NBR 9062:2006]</i>  | 35 |
| <i>Figura 3-13: Detalhe de armadura em consolo tipo Gerber [NBR 9062:2006].</i>  | 35 |
| <i>Figura 3-14: Detalhe da armadura em apoio sem recorte.</i>  | 36 |
| <i>Figura 4-1: Variação de <math>\beta_s(t)</math> (Figura A.3 NBR6118:2003).</i>  | 43 |
| <i>Figura 4-2: Variação de <math>\varepsilon_{cef}(t)</math>. (Figura A.1 NBR 6118:2003).</i>  | 48 |
| <i>Figura 4-3: Variação de <math>\beta_f(t)</math>. (Figura A.2 NBR 6118:2003).</i>  | 49 |
| <i>Figura 4-4: Conceito de prismas equivalentes em uma seção transversal plana (SILVA 2003).</i>   | 54 |
| <i>Figura 5-1: Seção transversal da viga pré-fabricada com as etapas seguidas para execução de uma estrutura com pórticos com ligações semi-rígidas.</i> | 57 |
| <i>Figura 5-2: Deformação da seção após protensão.</i>   | 59 |
| <i>Figura 5-3: Deformação da seção após peso próprio.</i>  | 59 |
| <i>Figura 5-4: Deformação da seção após peso próprio e protensão.</i>  | 59 |
| <i>Figura 5-5: Seção transversal no estados limites de descompressão e limite ultimo.</i>  | 60 |
| <i>Figura 5-6: Viga de seção retangular e diagramas de deformações e tensões na seção solicitada pelo momento de cálculo <math>M_d</math>.</i>           | 62 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 5-7: Relação entre a posição da linha neutra e a altura útil.   | 64  |
| Figura 6-1: Pontos para análise das tensões principais de uma viga, simplesmente apoiada sob carregamento uniforme.  | 68  |
| Figura 6-2: Cálculo das tensões principais nos pontos 1 e 2 usando o círculo de Mohr (Notar que para o caso do ponto 1 a aresta A fica representada pelo ponto no círculo de Mohr com coordenadas $\sigma$ e $-\tau$ para a aresta B a ordena 0 ( $\sigma_y = 0$ ) e $\tau$ , enquanto para o ponto 2 a aresta A fica representada pelo ponto no círculo de Mohr com coordenadas $\sigma = 0$ e $-\tau$ para a aresta B a ordena 0 ( $\sigma_y = 0$ ) e $\tau$ . | 68  |
| Figura 6-3: Estado plano de tensões e direções principais.   | 69  |
| Figura 6-4: $A_{sw}$ em um trecho $s$ da peça.   | 73  |
| Figura 7-1: Fator de restrição à rotação. (NBR 9062:2006).   | 79  |
| Figura 7-2: Classificação de ligações resistentes a flexão como rígidas, semi-rígidas ou articuladas, segundo o Manual de Ligações Estruturais da FIB (draft 2003).  | 80  |
| Figura 7-3: Ligação considerada como semi-rígida segundo o Manual de Ligações da FIB (draft 2003).   | 80  |
| Figura 7-4: Sistema de classificação para ligação semi-rígida em estruturas Pré-Moldadas [FERREIRA et al. (2002)].   | 81  |
| Figura 7-5: Relação momento-rotação na ligação viga-pilar (NBR 9062:2006).   | 83  |
| Figura 7-6: Regiões de distúrbio na extremidade de ligação viga-pilar. [FERREIRA et al. (2003)].   | 85  |
| Figura 7-7: Variações na consideração do comprimento de embutimento $l_e$ . [FERREIRA et al. (2003)].  | 85  |
| Figura 7-8: Retra Beam-Line com a curva Momento-rotação da ligação [FERREIRA (1999)].  | 86  |
| Figura 8-1: Planta do pavimento e elevação da viga VR01 (unidades em cm).  | 87  |
| Figura 8-2: Seções transversais da viga VR01 (unidades em cm).   | 88  |
| Figura 8-3: Esquema estrutural da laje e da viga VR01 (unidades em cm).  | 91  |
| Figura 8-4: Geometria do consolo para apoio da viga VR01 (unidades em cm).   | 92  |
| Figura 8-5: Cálculo de $bf$ da seção composta.   | 93  |
| Figura 8-6: Seção transversal composta com a redução da capa devido ao módulo de elasticidade dos concretos (unidades em cm).  | 94  |
| Figura 8-7: Posição do cabo representante (unidades em cm).  | 99  |
| Figura 8-8: Seção 01 e 02 para a determinação dos coeficientes de fluência e retração (unidades em cm).  | 102 |
| Figura 8-9: Esquema para o cálculo da força $F_t$ de tração na seção transversal.  | 116 |
| Figura 8-10: Seção transversal com a indicação das forças internas (unidades em cm).   | 123 |
| Figura 8-11: Variação linear do efeito da protensão na viga pré-moldada.   | 132 |
| Figura 8-12: Posicionamento das armaduras de cisalhamento.   | 137 |
| Figura 8-13: Modelo biela-tirante para consolo curto (Figura 7.6 NBR 9062:2006).   | 137 |
| Figura 8-14: Consolo e elastômero com medidas preliminares.  | 138 |
| Figura 8-15: Distancia $d'$ com tirante em duas camadas horizontais soldadas.  | 139 |
| Figura 8-16: Geometria para o dimensionamento do consolo (unidades em cm).   | 141 |
| Figura 8-17: Mecanismo para o cálculo da armadura do tirante.  | 143 |
| Figura 8-18: Geometria para o dimensionamento do dente Gerber (unidades em cm).  | 145 |
| Figura 8-19: Mecanismo para o cálculo da armadura do tirante.  | 147 |
| Figura 8-20: Forma da viga VR01, exemplo 01.   | 150 |

|   |     |
|---|-----|
| <i>Figura 8-21: Armação da viga VR01, exemplo 01.</i>   | 151 |
| <i>Figura 8-22: Forma e armação do consolo, exemplo 01.</i>   | 152 |
| <i>Figura 8-23: Características geométricas na região da ligação (unidades em mm).</i>                          | 153 |
| <i>Figura 8-24: Posicionamento da armadura de ligação.</i>  | 158 |
| <i>Figura 8-25: Interação Beam-line e rigidez secante.</i>  | 163 |
| <i>Figura 8-26: Esquema para o cálculo da força <math>F_t</math> de tração na seção transversal.</i>            | 173 |
| <i>Figura 8-27: Seção transversal com a indicação das forças internas (unidades em cm).</i>                     | 178 |
| <i>Figura 8-28: Forma da viga VR01, exemplo 03.</i>   | 186 |
| <i>Figura 8-29: Armação da viga VR01, exemplo 03.</i>   | 187 |
| <i>Figura 8-30: Seções transversais da viga VR01 (unidades em cm).</i>  | 188 |
| <i>Figura 8-31: Seção 01 e 02 para a determinação dos coeficientes de fluência e retração (unidades em cm).</i> | 194 |
| <i>Figura 8-32: Esquema para o cálculo da força <math>F_t</math> de tração na seção transversal.</i>            | 204 |
| <i>Figura 8-33: Seção transversal com a indicação das forças internas (unidades em cm).</i>                     | 210 |
| <i>Figura 8-34: Detalhe da armadura em consolo tipo Gerber (Figura 7.11 NBR 9062:2006).</i>                     | 218 |
| <i>Figura 8-35: Distância mínima para preenchimento do perfil I.</i>  | 219 |
| <i>Figura 8-36: Forma da viga VR01, exemplo 04.</i>   | 224 |
| <i>Figura 8-37: Armação da viga VR01, exemplo 04.</i>   | 225 |
| <i>Figura 8-38: Armação da viga VR01, exemplo 04.</i>   | 226 |
| <i>Figura 10-1: Tela do programa de cálculo dos coeficientes de fluência e retração.</i>                        | I   |
| <i>Figura 10-2: Tela do programa de cálculo dos coeficientes de fluência e retração.</i>                        | V   |

## LISTA DE TABELAS

|  |     |
|--|-----|
| <i>Tabela 4-1: Valores numéricos usuais para determinação da fluência e da retração (Tabela A.1 NBR 6118:2003).</i>  | 42  |
| <i>Tabela 4-2: Valores da fluência e retração em função da velocidade de endurecimento do cimento (Tabela A.2 NBR 6118:2003).</i>  | 45  |
| <i>Tabela 4-3: Valores característicos superiores da deformação específica de retração <math>\varepsilon_{cs}(t_{cs}, t_0)</math> e do coeficiente de fluência <math>\phi(t_{cs}, t_0)</math>. (Tabela 8.1 NBR 6118:2003).</i> | 46  |
| <i>Tabela 4-4: Valores de <math>\Psi_{1000}</math>, em porcentagem (Tabela NBR 6118:2003).</i>   | 51  |
| <i>Tabela 5-1: Tensão no aço <math>\sigma_{sd}</math> (MPa).</i>   | 61  |
| <i>Tabela 5-2: Valores para cálculo de armadura longitudinal de seções retangulares.</i>   | 66  |
| <i>Tabela 8-1: Seqüência de intervalos entre as etapas, ações atuantes, seções e perdas consideradas.</i>  | 89  |
| <i>Tabela 8-2: Intensidade de carregamento do peso próprio.</i>  | 92  |
| <i>Tabela 8-3: Intensidade de carregamento na laje.</i>  | 92  |
| <i>Tabela 8-4: Momentos máximos no meio do vão.</i>  | 93  |
| <i>Tabela 8-5: Características geométricas da seção pré-moldada.</i>   | 93  |
| <i>Tabela 8-6: Características geométricas da seção composta.</i>  | 95  |
| <i>Tabela 8-7: Idade do concreto para a seção 01 e 02.</i>   | 103 |
| <i>Tabela 8-8: Coeficientes de fluência para a seção 01, 02 e final.</i>   | 103 |
| <i>Tabela 8-9: Valores dos momentos fletores em vazio para décimo de vão.</i>  | 114 |
| <i>Tabela 8-10: Valores das tensões da borda inferior e superior em décimo de vão.</i>   | 115 |
| <i>Tabela 8-11: Valores dos momentos fletores seção composta para décimo de vão.</i>   | 117 |
| <i>Tabela 8-12: Resumo das deformações imediatas.</i>  | 129 |
| <i>Tabela 8-13: Coeficientes de fluência para a seção 01, 02 e final.</i>  | 130 |
| <i>Tabela 8-14: Resultado final da flecha no tempo infinito.</i>   | 130 |
| <i>Tabela 8-15: Carregamentos distribuídos na viga.</i>  | 138 |
| <i>Tabela 8-16: Momentos máximos no meio do vão.</i>   | 154 |
| <i>Tabela 8-17: Parâmetros necessários para determinação da inércia no estádio I homogeneizada.</i>  | 154 |
| <i>Tabela 8-18: Parâmetros determinados considerando a região da extremidade da viga.</i>  | 155 |
| <i>Tabela 8-19: Parâmetros necessários para determinação da inércia no estádio I homogeneizada como seção T.</i>   | 156 |
| <i>Tabela 8-20: Parâmetros necessários para determinação da inércia no estádio I homogeneizada.</i>  | 159 |
| <i>Tabela 8-21: Parâmetros determinados considerando a região da extremidade da viga.</i>  | 160 |
| <i>Tabela 8-22: Parâmetros necessários para determinação da inércia no estádio I homogeneizada como seção T.</i>   | 161 |
| <i>Tabela 8-23: Momentos máximos no meio do vão.</i>   | 164 |
| <i>Tabela 8-24: Valores dos momentos fletores em vazio para décimo de vão.</i>   | 171 |
| <i>Tabela 8-25: Valores das tensões da borda inferior e superior em décimo de vão.</i>   | 172 |
| <i>Tabela 8-26: Valores dos momentos fletores seção composta para décimo de vão.</i>   | 173 |

|  |     |
|--|-----|
| <i>Tabela 8-27: Resumo das deformações imediatas.</i> .....  | 184 |
| <i>Tabela 8-28: Coeficientes de fluência para a seção 01, 02 e final</i> .....                       | 185 |
| <i>Tabela 8-29: Resultado final da flecha no tempo infinito.</i> .....                               | 185 |
| <i>Tabela 8-30: Intensidade de carregamento do peso próprio.</i> .....                               | 188 |
| <i>Tabela 8-31: Intensidade de carregamento na laje</i> .....  | 188 |
| <i>Tabela 8-32: Momentos máximos no meio do vão.</i> .....   | 189 |
| <i>Tabela 8-33: Características geométricas da seção pré-moldada.</i> .....                          | 189 |
| <i>Tabela 8-34: Características geométricas da seção composta.</i> .....                             | 190 |
| <i>Tabela 8-35: Idade do concreto para a seção 01 e 02</i> .....                                     | 195 |
| <i>Tabela 8-36: Coeficientes de fluência para a seção 01, 02 e final</i> .....                       | 195 |
| <i>Tabela 8-37: Valores dos momentos fletores em vazio para décimo de vão.</i> .....                 | 202 |
| <i>Tabela 8-38: Valores das tensões da borda inferior e superior em décimo de vão.</i> .....         | 202 |
| <i>Tabela 8-39: Valores dos momentos fletores seção composta para décimo de vão.</i> .....           | 205 |
| <i>Tabela 8-40: Resumo das deformações imediatas</i> .....   | 216 |
| <i>Tabela 8-41: Coeficientes de fluência para a seção 01, 02 e final</i> .....                       | 217 |
| <i>Tabela 8-42: Resultado final da flecha no tempo infinito.</i> .....                               | 217 |
| <i>Tabela 9-1: Números de cabos necessários em função da estimativa da perda de protensão.</i> ..... | 229 |
| <i>Tabela 9-2: Características e resultados obtidos nos diversos exemplos numéricos.</i> .....       | 231 |



## LISTA DE GRÁFICOS

---

|  |     |
|--|-----|
| <i>Gráfico 8-1: Tensões na borda inferior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.</i>  | 119 |
| <i>Gráfico 8-2: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.</i>  | 119 |
| <i>Gráfico 8-3: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.</i>  | 121 |
| <i>Gráfico 8-4: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.</i>  | 121 |
| <i>Gráfico 8-5: Tensões na borda inferior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.</i>  | 175 |
| <i>Gráfico 8-6: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.</i>  | 175 |
| <i>Gráfico 8-7: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.</i>  | 177 |
| <i>Gráfico 8-8: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.</i>  | 177 |
| <i>Gráfico 8-9: Tensões na borda inferior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.</i>  | 207 |
| <i>Gráfico 8-10: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.</i> | 207 |
| <i>Gráfico 8-11: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.</i> | 209 |
| <i>Gráfico 8-12: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.</i> | 209 |

---

## 1. INTRODUÇÃO

---

Estruturas de pré-moldadas usando protensão estão cada vez mais sendo utilizadas no Brasil nas últimas décadas como sistema construtivo. Este fato pode ser comprovado pelo grande número de obras civis como silos e tanques, passando por viadutos e pontes e edifícios de concreto moldado no local e também pré-fabricado.

Nas estruturas de concreto pré-fabricado, destacam-se as vigas protendidas com aderência inicial, o uso deste elemento tem sido cada vez mais intenso, pois consegue aliar economia e velocidade de execução. É muito comum a produção desse elemento em grande quantidade, usando pista de protensão situadas em fábricas, este procedimento permite a reutilização de formas, automação, velocidade e simplicidade na montagem da armadura desses elementos, a mão de obra utilizada é reduzida e constituída de funcionários especializados que trabalham sobre condições climáticas favoráveis (barracões cobertos, etc.)

O grande controle de insumos utilizados (cimento, areia, pedra, aço, etc) permite além de uma boa qualidade de execução um processo rápido de fabricação que pode chegar a uma produção de 100 m lineares a cada três dias, o transporte e montagem desses elementos são técnicas já dominadas nas fábricas nacionais de forma que há uma tendência em emprego generalizado deste tipo de vigas nas estruturas pré-fabricadas.

Em elementos fletidos de concreto armado a armadura longitudinal é simplesmente colocada no interior do elemento, desta forma para que comece a trabalhar é necessário retirar o escoramento, mobilizando o concreto que ao se deformar mobiliza a armadura, pois os dois estão ligados por aderência. Por isso a armadura das estruturas de concreto armado é chamada de armadura passiva. Já no concreto protendido a armadura recebe uma tensão de tração antes que haja aderência com o concreto, por isso é denominada armadura ativa. Após a aderência com o concreto essa tensão de tração aplicada no aço transmite uma tensão normal ao plano longitudinal do elemento.

A norma NBR 6118:2003 trás como definição clássica de concreto protendido *“Aquele nos quais parte das armaduras é previamente alongada por equipamentos especiais de protensão com a finalidade de, em condições de serviço, impedir ou limitar a fissuração e os deslocamentos da estrutura e propiciar o melhor aproveitamento de aços de alta resistência no estado limite último (ELU)”*. Segundo HANAI (2005) pode ser encarada como

uma “*forma artificial de se criar reações permanentes às ações que sejam adversas ao uso de uma estrutura*”. Pode-se dizer ainda que protensão é um artifício que consiste em introduzir em uma estrutura um estado prévio de tensões capaz de melhorar sua resistência ou seu comportamento, sob diversas condições de cargas.

Historicamente Eugéne Freyssinet é considerado o criador do sistema de protensão no concreto, mas ele não foi o primeiro engenheiro a fazer estruturas de concreto protendido, o início pode ser considerado ao engenheiro americano P.A Jackson (1872), que patenteou um sistema de passar as hastes de laço de ferro através dos blocos e de apertá-los com porcas. Entretanto pode-se afirmar que Freyssinet usou a propriedade de protensão de maneira correta, logo após a Segunda Guerra Mundial, ele construiu seis pontes de concreto protendido sobre o rio Marne, a Pont de Luzancy.

Os estudos anteriores de Freyssinet esbarravam na impossibilidade de se garantir tensões de compressão permanente no concreto. Somente por volta de 1928, é que foi possível entender que seria necessário o uso de aços que permitiriam grandes deformações de estiramento, de sorte que mesmo perdessem parte do estiramento ao longo do tempo, ainda sim transferiram esforços de compressão para o concreto.

## **1.1. USO DA PRÉ-TRAÇÃO EM VIGAS**

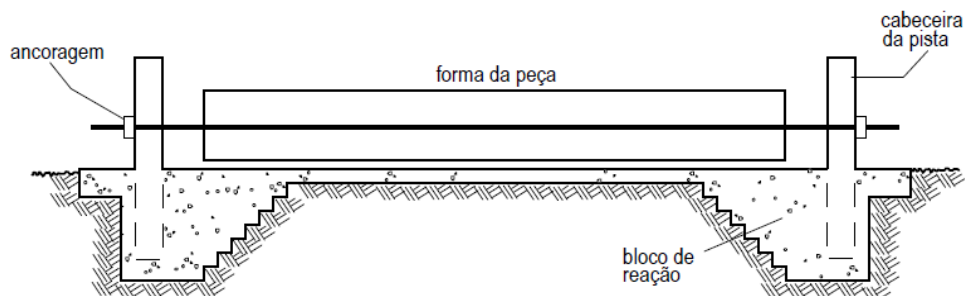
---

A definição de concreto protendido com aderência inicial dada pela A NBR 6118:2003 é: “*Concreto protendido em que o pré-alongamento da armadura ativa é feito utilizando-se apoios independentes do elemento estrutural, antes do lançamento do concreto, sendo a ligação da armadura de protensão com os referidos apoios desfeita após o endurecimento do concreto; a ancoragem no concreto realiza-se só por aderência*”.

A protensão com aderência inicial consiste basicamente no estiramento do cabo antes do contato com o concreto, este sistema é de grande utilização em fábricas do concreto pré-moldado.

A quantidade de equipamentos e materiais envolvidos no processo construtivos, bem como a necessidade de um concreto de melhor qualidade, motiva a construção de peças em um canteiro de obras apropriado, onde é possível executar as protensões e processar a cura do concreto em condições favoráveis com rigoroso controle tecnológico.

É utilizada uma pista, denominada pista de protensão, que em geral tem 100 a 200 m de comprimento. Na suas extremidades estão localizadas as cabeceiras onde em um dos lados é chamado de ancoragem morta, onde são fixados os cabos por meio de cunha e porta cunha, na outra extremidade os cabos são tracionados com macacos de protensão e ancorando com o mesmo sistema da cabeceira oposta. A Figura 1-1 apresenta um esquema típico de pista de protensão.



**Figura 1-1: Esquema de uma pista de protensão com aderência inicial [VERÍSSIMO 1998].**

Uma característica desse sistema é a utilização de cabos na posição reta, paralela a pista de protensão, com o auxílio de macacos hidráulicos, que se apóiam em blocos na cabeceira da pista. Após estiramento dos cabos e a concretagem, quando atingindo o  $f_{ck}$  informado pelo projetista, esses cabos são cortados ou desprotendidos aplicando assim efetivamente a protensão no elemento, que é dada apenas pelo atrito entre as cordoalhas e com concreto.

A utilização da protensão em pré-moldados, associada com concretos de alta resistência, traz uma séria de benefícios que são citadas por VERÍSSIMO E JUNIOR (1998):

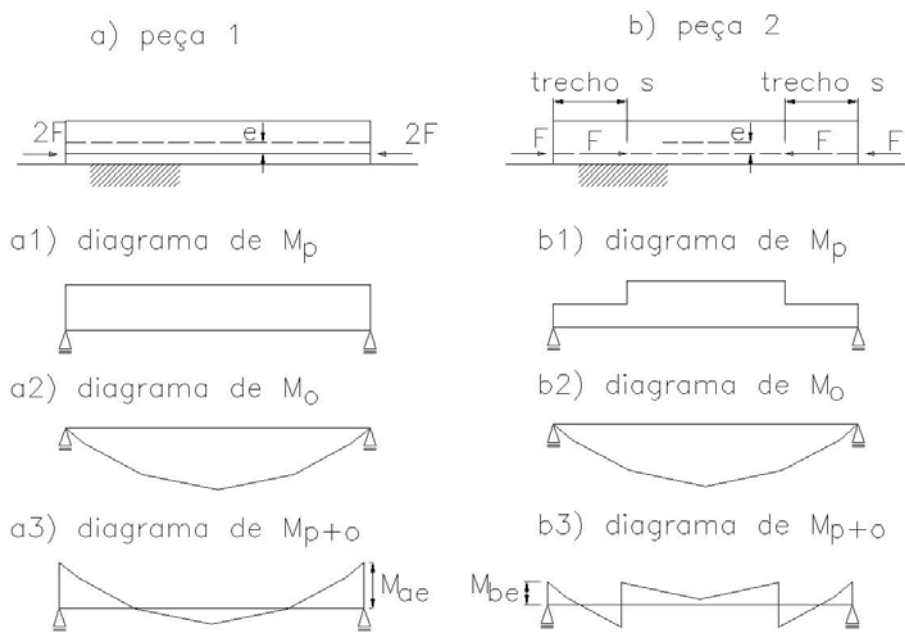
✓ A protensão permite que, no caso de peças fletidas, toda a seção da peça trabalhe sob compressão, de forma que o aproveitamento da capacidade resistente da seção é muito maior do que nas peças de concreto armado, esse fato associado ao  $f_{ck}$  alto permite produzir peças mais esbeltas, conseqüentemente mais leves, o que possibilita também grandes comprimentos para vencer grandes vãos;

✓ O concreto com  $f_{ck}$  alto atinge resistência suficiente para suportar a protensão logo nas primeiras idades, com pouco tempo de cura, acelerando o processo de produção nas fábricas;

✓ Concretos com  $f_{ck}$  alto sofrem menos retração, menos deformação, e como consequência apresentam menos fissuras que os concretos comuns;

✓ A força de protensão mantém as eventuais fissuras fechadas, garantindo uma melhor proteção das armaduras contra corrosão, no caso de uma solicitação incidental maior que a prevista no projeto, cessada a carga as fissuras formadas se fecham sob a ação da protensão.

Uma das características importantes da pré-tração é que a armadura longitudinal acaba se constituindo de cordoalhas retas, ou seja, paralelas a pista de protensão. Assim, se a armadura é calculada para evitar o momento no meio do vão da peça, isto implica que no apoio pode-se provocar uma tração desnecessária na borda superior da viga. Um exemplo deste é visto Figura 1-2. Ao se fazer a protensão de duas cordoalhas o momento atuante ao longo da peça (sem considerar perdas) é igual a  $M_p=2.F.e$  (ver Figura 1-2 a1,a2 e a3). Assim, se o meio do vão este momento combate o momento atuante na peça, no apoio (Figura 1-2 a3) provoca traço na borda superior. Uma forma de evitar isto, pode-se colocar, antes da concretagem, tubos de plástico (fazendo o papel de bainhas) envolvendo a armadura em um pequeno trecho (no caso o trecho  $s$  da Figura 1-2) em uma armadura, junto ao apoio, fazendo com que o momento de protensão fique com o aspecto apresentado em 1-2 b2, e o diagrama final apresente valores máximos de mesma ordem de grandeza tanto no meio do vão quanto no apoio ( $M_{be}$ ). É o que se designa por isolamento de cabos.



**Figura 1-2: Peças com aderência inicial com aderência em todo o comprimento (peça 1) e com trechos ( $s$  para uma armadura) sem aderência (peça 2).**

A possibilidade da ocorrência da tração na fibra superior da peça quando se faz a efetivação da protensão pode ocorrer neste sistema e, portanto torna-se indispensável fazer esta verificação no cálculo ou até projetor cabos de protensão junto a face superior da peça.

## **1.2. OBJETIVO**

---

Estabelecer conjunto de procedimentos visando concepção do sistema estrutural de vigas em concreto protendido com aderência inicial e seção composta e o dimensionamento, detalhamento das armaduras longitudinal e transversal.

## **1.3. JUSTIFICATIVA**

---

O grande aumento de fábricas que utilizam o sistema de protensão para confecção de seus elementos tem-se tornado cada vez mais evidente. Hoje o mercado exige obras cada vez mais limpas, racionalizada e com prazo de entrega o mais enxuto possível. Essas características são de grande aplicabilidade no sistema pré-fabricado.

Para agilidade e praticidade da obra, quanto mais padronizada e com menos elementos possíveis, a velocidade de montagem pode ser reduzida. Quando reduzimos os elementos, isto implica aumento do comprimento, mas que por sua vez no caso de vigas poderemos atingir vãos maiores, que é uma característica do sistema protendido. Essas peças conseqüentemente terão maiores volumes e peso para transporte e montagem necessitando de equipamentos específicos.

Na Europa o sistema de pré-fabricado é bastante utilizado, pois tem uma vantagem de inúmeros equipamentos para transporte e montagem disponíveis no mercado, além do seu custo/hora inferior comparado com o Brasil. Mas o agendamento com as empresas de locação esse problema pode ser minimizado.

Com a escassez de bibliografias disponíveis no mercado sobre o tema, pretende-se esclarecer as etapas envolvidas visando o dia-dia do engenheiro civil.

---

## 1.4. MÉTODO

---

Para atingir o objetivo desejado foram pesquisadas e reunidas informações sobre o tema, estudadas as teorias relacionadas e feito análises racionais e dedutivas. Através da resolução de exemplos práticos, consolidaram-se os conhecimentos necessários para um entendimento mais claro do assunto e facilitando a sua aplicação.

---

## 1.5. APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

---

A ordem e os conteúdos dos capítulos que constitui a presente dissertação versam sobre:

**Capítulo 1** – Introdução: Relata sobre os tipos de protensão, os objetivos da dissertação, e por ultimo a metodologia empregada.

**Capítulo 2** – Projeto: Apresentação dos sistemas estruturais utilizando o pré-fabricado, comentando sobre a concepção do projeto estrutural.

**Capítulo 3** – Cálculo de consolo e dente Gerber:: Apresenta as principais recomendações da NBR 9062:2006 para o dimensionamento de consolo e dente Gerber.

**Capítulo 4** – Perdas de protensão: Apresenta as principais perdas de protensão iniciais e ao longo do tempo e as perdas progressivas.

**Capítulo 5** – Cálculo da amadura longitudinal: Principais etapas para o dimensionamento da armadura longitudinal utilizando o sistema de protensão com aderência inicial.

**Capítulo 6** – Cálculo da amadura transversal: Utiliza-se o efeito da protensão para determinar a armadura transversal.

**Capítulo 7** – Ligação semi-rígida. Trata-se das definições e classificações de ligação entre viga e pilar.

**Capítulo 8** – Exemplos numéricos: No exemplo 01 é dimensionada uma viga bi-articulada de pavimento com protensão com aderência inicial comumente encontrada em edificações das escolas do FDE (Fundo para Desenvolvimento da Educação). Também se determina a ligação de apoio do dente Gerber e consolo. No exemplo 02 é calculado a

porcentagem de engastamento do exemplo 01 utilizando como armadura negativa de ligação  $3\phi 20\text{mm}$ . No exemplo 03 é calculada a viga do exemplo 01 com a armadura negativa de ligação  $5\phi 25\text{mm}$ , a partir da porcentagem de engastamento é determinada a armadura longitudinal. Para o exemplo 04 foi alterado o perfil do exemplo 01 de seção retangular para um perfil I e novamente calculando as armaduras longitudinais e transversais, além de todas as verificações no ELU e ELS.

**Capítulo 9** – Considerações finais e sugestões: São apresentadas algumas considerações gerais, cumprimento dos objetivos e sugestões para os trabalhos futuros.



---

## 2. PROJETO

---

Neste capítulo é apresentada algumas diretrizes para o lançamento de estrutura em concreto pré-moldado e alguns sistemas estruturais em estruturas pré-moldadas.

### 2.1. INTRODUÇÃO

---

Para um melhor aproveitamento do concreto pré-moldado os engenheiros devem considerar as possibilidades e as restrições que permitem a sua utilização, visando desde a produção, transporte e montagem dos elementos. É desejável estabelecer uma equipe de projetos compatibilizando todos os subsistemas envolvidos minimizando assim as possíveis interferências. Em fase de projetos os custos de uma revisão é muito menor comparado com o custo de um “retrabalho” na obra.

Entende-se por lançamento de uma estrutura a escolha dos diversos elementos que a compõem e a disposição deles em planta determinando assim vãos e dimensões dos elementos. Nas estruturas de concreto pré-moldado é sempre importante no lançamento analisar a possibilidade da padronização dos elementos já utilizados. Idealiza-se assim desde o começo o processo de produção em fabrica que quanto menos variedade existirem permite uma melhor produtividade.

No sistema tradicional o lançamento da estrutura é feito partir de um projeto básico de arquitetura e neste caso o arquiteto não se preocupa muito com o esquema estrutural ficando para análise do projetista estrutural a definição do mesmo. Já para o caso de pré-fabricado é desejável que a concepção do projeto inicial de arquitetura, já seja voltada para uma solução em pré-moldado aproveitando dessa maneira as vantagens oferecidas por esse sistema, como por exemplo, vencer grandes vãos. Mais detalhes sobre lançamento são apresentados no item 2.3.

Na estrutura pré-moldada como qualquer outra é importante atender as verificações de seguranças descrita na NBR 8681:2003 “Ações e segurança nas estruturas – Procedimento”. Atendendo as seguintes condições:

- ✓ **Estado limite de uma estrutura:** Estados a partir dos quais a estrutura apresenta desempenho inadequado às finalidades de construção.

✓ **Estado limite último (ELU):** Estados que, pela simples ocorrência, determinam a paralisação, no todo ou em parte, do uso da construção.

✓ **Estado limite de serviço (ELS):** Estados que, por sua ocorrência, repetição ou duração, causam efeitos estruturais que não respeitam as condições especificadas para o uso normal da construção, ou que são indícios de comprometimento da durabilidade da estrutura.

O Manual de Sistemas Pré-fabricado de Concreto (ACKER (2002)), destaca cinco princípios básicos de projeto:

✓ **Respeito à filosofia específica do projeto:** Utilizar um sistema de contraventamento próprio; utilizar grandes vãos; assegurar a integridade estrutural.

✓ **Usar soluções padronizadas sempre que possível:** Modulação de projeto; padronização de produtos entre fabricantes; padronização interna para detalhes construtivos e padronização de procedimentos para produção e ou montagem.

✓ **Os detalhes devem ser simples:** simplificar ao máximo os detalhes mas garantido a sua eficiência.

✓ **Considerar as tolerâncias dimensionais:** Possibilidade de tolerância de absorção nas ligações; necessidade de almofadas de apoio; conseqüências causadas por curvatura e diferenças em curvaturas; tolerância de movimentação, causada por retração, expansão térmica, etc.

✓ **Obter vantagem do processo de industrialização:** a pré-tração permite a produção de elementos em longas pistas de protensão; a padronização de componentes e de detalhes típicos garante a padronização do processo; a posição adequada dos detalhes; simplicidade na descrição do projeto ajuda a evitar erros; modificações imprevistas no projeto prejudicam o planejamento da produção.

Seguindo as mesmas características o *Precast Concrete Institute* (PCI) apresenta quinze recomendações gerais para um projeto em estrutura pré-moldada:

✓ Maximizar a repetição e a modulação de dimensões no layout da planta e nas dimensões dos elementos.

✓ Usar sempre que possível viga bi-articulada.

- ✓ Padronizar tamanhos e a localização das aberturas nos produtos.
- ✓ Utilizar elementos de tamanhos padronizados e disponíveis na região.
- ✓ Minimizar o número de elementos com diferentes tipos e tamanhos.
- ✓ Minimizar o número de configurações das armaduras em um mesmo tipo de elemento.
- ✓ Minimizar o número de diferentes tipos de ligações.
- ✓ Especificar os tipos de ligações que são preferidas pelos fabricantes locais.
- ✓ Considerar os tamanhos e pesos dos produtos para evitar custos excessivos associados com a produção, transporte e montagem de peças com excesso de peso e tamanho.
- ✓ Utilizar protensão nos elementos pré-moldados quando os vãos forem longos, quando a altura do elemento deve ser minimizada ou quando o maior grau de controle de fissuração for desejado.
- ✓ Evitar o projeto dos elementos e ligações que requerem habilidades de acabamento e tolerâncias próximas, que não são obtidas sob condições normais de operações de produção e montagem.
- ✓ Evitar especificar condições em excesso além do necessário para o projeto de concretagem, tensões permitidas, curvaturas permitidas, flechas, e cobertura da armadura, ligações embutidas e tipos de componentes na ligação.
- ✓ Utilizar painéis externos como elementos estruturais e/ou paredes de cisalhamento sempre que possível.
- ✓ Contatar produtores locais o mais rápido possível durante os estágios de desenvolvimento do projeto para assistência nas questões anteriores.
- ✓ Maximizar o uso de formas nos produtos arquitetônicos.

## **2.2. SISTEMA ESTRUTURAL**

---

Cada material ou sistema construtivo tem suas próprias características as quais, de forma maior ou menor influenciam o sistema estrutural, o comprimento do vão, a altura da

edificação, os sistemas de contraventamento, etc. Isso também ocorre no caso dos sistemas construtivos em concreto pré-moldado, não apenas em comparação com as estruturas de aço, de madeira e de alvenaria, mas também em relação ao concreto moldado no local. Teoricamente, todas as juntas e ligações entre os elementos pré-moldados deveriam ser executadas de modo que a estrutura pré-moldada tivesse novamente o mesmo conceito monolítico de uma estrutura moldada no local. Todavia, esta pode se tornar uma solução mais cara e trabalhosa, onde muitas das vantagens da pré-moldagem podem ser perdidas.

Para que todas as vantagens do concreto pré-moldado sejam potencializadas, a estrutura deve ser concebida de acordo com uma filosofia específica do projeto: grandes vãos, um conceito apropriado para estabilidade, detalhes simples, etc. Os projetistas devem, desde o início do projeto, considerar as possibilidades, as restrições e as vantagens do concreto pré-moldado, seu detalhamento, produção, transporte, montagem e os estados limites em serviço antes de finalizar um projeto de uma estrutura pré-moldada.

Segundo ACKER (2002) em estruturas pré-moldadas, aparentemente existem números de soluções técnicas para as suas construções, entretanto, todos esses fazem parte de um número limitado de sistemas estruturais básicos, onde os princípios de projetos são semelhantes. Os tipos mais comuns de sistemas estruturais de concreto pré-moldados são:

✓ Estruturas aporricadas, consistindo de pilares e vigas de fechamento, que são utilizadas para construções industriais, armazéns, construções comerciais, etc.

✓ Estruturas em esqueleto, consistindo de pilares, vigas e lajes, para edificações de alturas médias e baixas, e com um número pequeno de paredes de contraventamento para estruturas altas. As estruturas em esqueletos são utilizadas principalmente para construções de escritórios, escolas, hospitais, estacionamentos, etc.

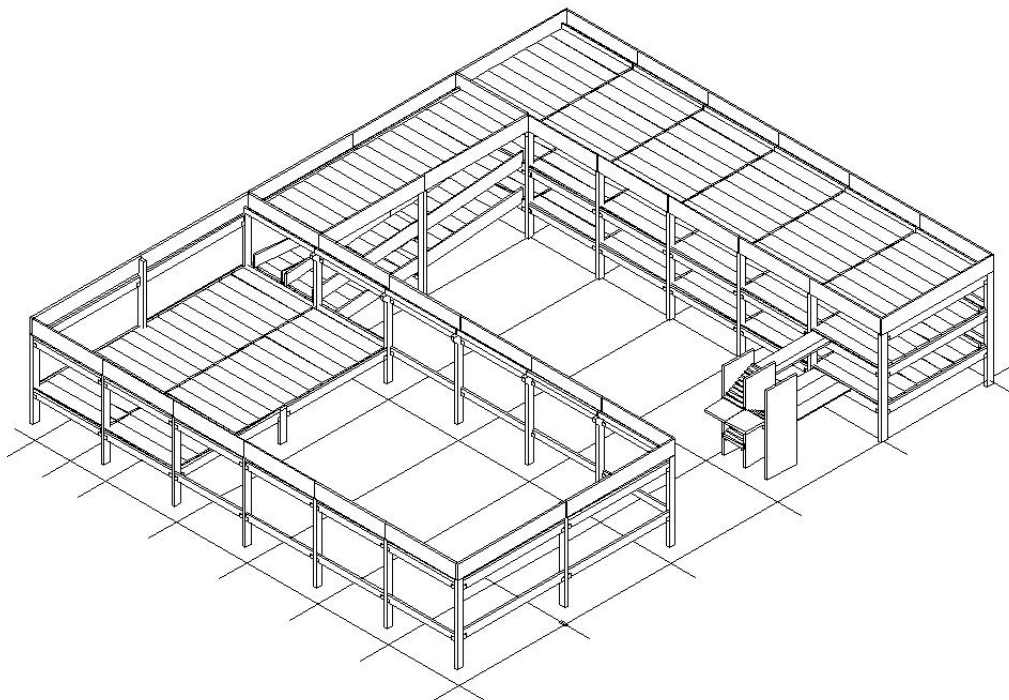
✓ Estruturas em painéis estruturais, consistindo de componentes de painéis portantes verticais e de painéis de lajes, as quais são usadas extensivamente para a construção de casas e apartamentos, hotéis, escolas, etc.

✓ Estruturas para pisos, consistindo de vários tipos de elementos de laje montados para formar uma estrutura do piso capaz de distribuir a carga concentrada e transferir as forças horizontais para os sistemas de contraventamento. Os pisos pré-moldados são muito usados em conjunto com todos os tipos de sistemas construtivos e materiais.

✓ Sistemas para fachadas, consistindo de painéis maciços ou painéis sanduíche, com ou sem função estrutural. Apresentam-se em todos os tipos de formato e execuções, desde o simples fechamento até os mais requintados painéis em concreto arquitetônico para escritórios e fachadas importantes.

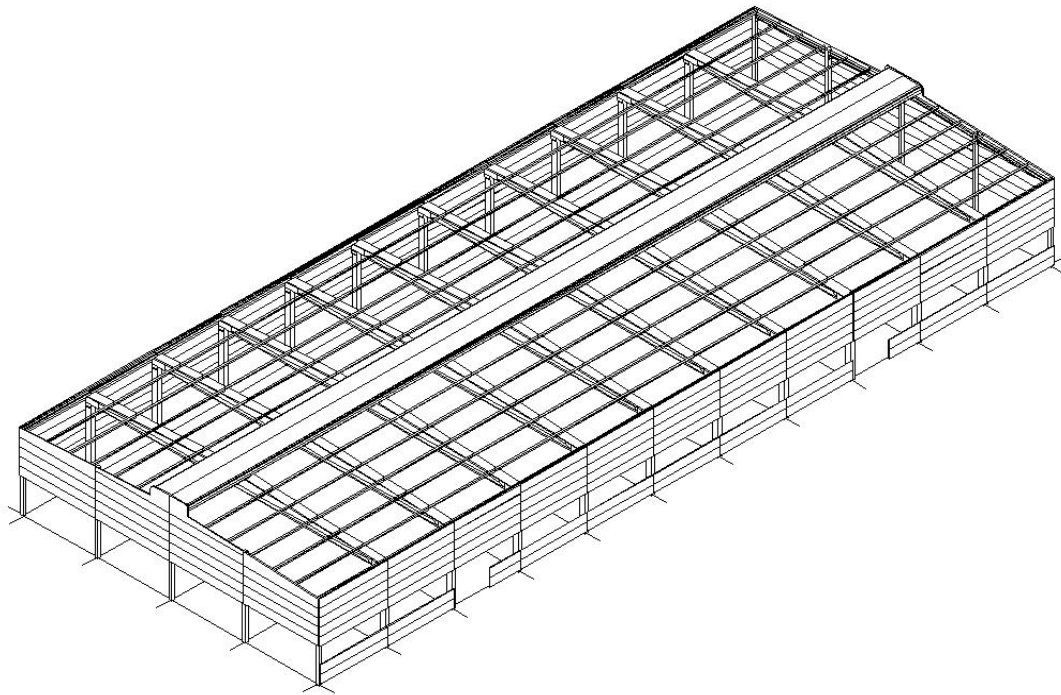
✓ Sistemas celulares, consistindo de células de concreto pré-moldado e, algumas vezes, utilizados para blocos de banheiros, cozinhas, garagens, etc

A Figura 2-1 mostra um sistema constituído de pilares e vigas de fechamento, que são utilizados para as construções industriais, armazéns, construções comerciais, escolas, etc.



**Figura 2-1: Estrutura em forma de esqueleto em concreto pré-moldado (Shimoneck).**

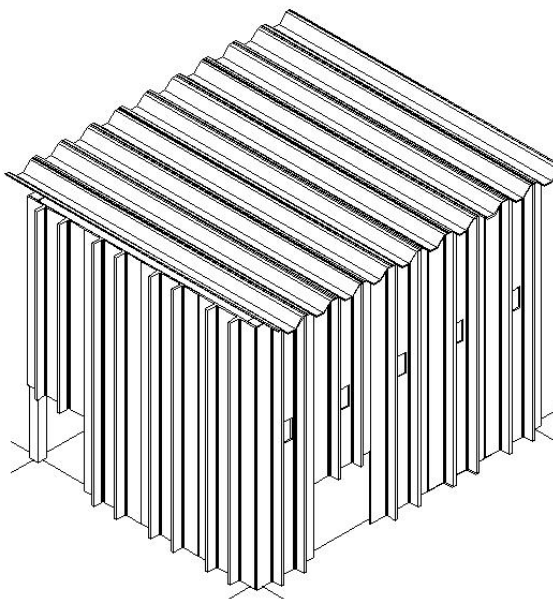
O sistema aporticado permite grande mobilidade da arquitetura tendo o seu espaço interno bastante amplo, esse sistema consiste em pilares e vigas lineares. Pode ser aplicado fechamento lateral em placas pré-moldadas, como mostra a Figura 2-2.



**Figura 2-2: Estrutura apertada em concreto pré-moldado com fechamento lateral em painéis (Shimoneck).**

Em relação a cobertura quando se utiliza telha *W* esse sistema é classificado como “pesado”, já na utilização de cobertura metálica esse sistema é chamado de “leve”. Em estrutura pré-moldada recebe bem esses dois tipos de cobertura cabendo uma análise específica para cada situação.

Outro sistema estrutural é quando se tem estrutura interna em esqueleto (pilares e vigas) e a parte o fechamento externo é feito com paredes auto-portante. Na Figura 2-3 esta apresentada uma edificação com fechamento em laje duplo T e a cobertura em telha *W*.



**Figura 2-3: Estrutura interna em forma de esqueleto e externa e painéis auto-portante.**

Existem também sistemas estruturais para edifícios de múltiplos pavimentos. Que pode ser usado paredes auto-potantes em suas fachadas, além da função arquitetônica essas paredes podem resistir tanto ao esforço vertical quanto ao horizontal.

### **2.3. LANÇAMENTO DA ESTRUTURA**

---

Para edificações usuais comerciais e residenciais as estruturas moldadas no local usando lajes maciças em concreto armado têm os vãos limitados principalmente pela sua capacidade resistente. Assim, lajes maciças com vãos superiores a 5m costumam consumir uma quantidade de concreto grande apesar da região comprimida da seção transversal (região acima da linha neutra). Assim os pavimentos moldados no local precisam nestas situações empregar sistemas de lajes nervuradas em concreto armado.

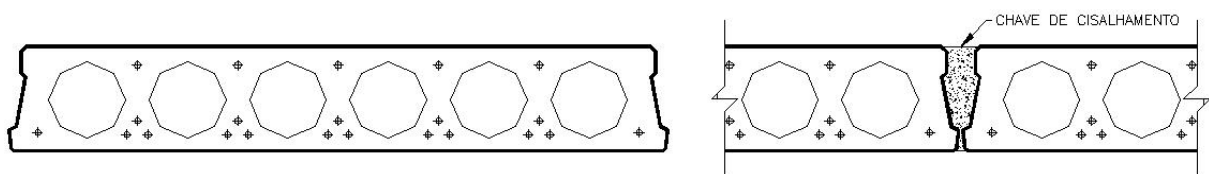
Com o avanço nos estudo das lajes e aprimoramento dos cálculos através de ensaios, esses vãos foram sendo aumentados como também a sobrecarga suportada. Assim, de acordo FILHO e CARVALHO (2006) para as lajes maciças, como já foi escrito, não é recomendado vão maiores do que 5m, já para as nervuradas treliçadas o vão pode variar de 5 e 7m, para as vigotas pré-moldadas que utilizam protensão o vão pode chegar por volta de 10m (Catálogos técnicos TATU). Nesse sistema citados a sobrecarga não elevada e dependendo do vão é necessária a utilização de escoras.

O sistema de lajes de piso com lajes alveolares é que teve um maior sucesso de mercado da construção civil. De fácil instalação, pode atingir grandes vãos, facilitando o layout e otimizando a estrutura, seja ela moldada no local, metálica ou de elementos reticulados de pré-fabricado.

A grande eficiência estrutural das lajes alveolares e consequentemente, seu menor custo, são alcançados quanto maior a padronização e racionalização do projeto. O processo de fabricação é totalmente industrializado, por isso qualquer intervenção manual, seja de recorte ou reforço dos alvéolos da laje eleva o seu custo, diminuindo sua característica industrial.

As lajes alveolares (que são pré-moldadas e protendidas) com altura de 20 cm podem vencer vãos de 4 a 12m com a sobrecarga variando de 3000 kg/m<sup>2</sup> a 150 kg/m<sup>2</sup> e a laje de 26,5 cm de pode vencer vãos de 5 a 14,5m com sobrecarga de 2600 kg/m<sup>2</sup> a 150 kg/m<sup>2</sup> (Manual MUNTE). A capacidade de suportar grandes sobrecargas e a não necessidade de utilização de escoramento são umas das suas principais características. As relações vão / altura desta laje é da ordem de 50. Os painéis têm dimensões de 1,20m ou 1,25m dependendo do fabricante. O transporte e montagem podem ser feitos de forma simples e rápida utilizando os equipamentos necessários como carretas e guindaste.

Percebe-se assim que a laje pré-fabricada permite em princípio o uso de maiores vãos que as lajes usuais moldadas no local. A Figura 2-4 apresenta um seção típica de laje alveolar.



**Figura 2-4: Seção transversal de laje alveolar de concreto protendido. Detalhe do rejuntamento entre dois painéis.**

O posicionamento das lajes alveolares é um dos aspectos importante para o lançamento de uma estrutura pré-moldada, pois garante a viabilidade econômica. A laje alveolar pode ser cortada longitudinalmente para corrigir a modulação, mas isto não é viável pela geração de entulhos na fábrica e um prejuízo para o empreendedor uma vez que no orçamento a laje é considerada inteiraça.



As lajes devem ser posicionadas lado a lado, caso a modulação da laje não esteja no módulo de 1,20 ou 1,25m dependendo do fabricante, o ideal seria apenas um o recorte de uma laje para acertar o módulo.

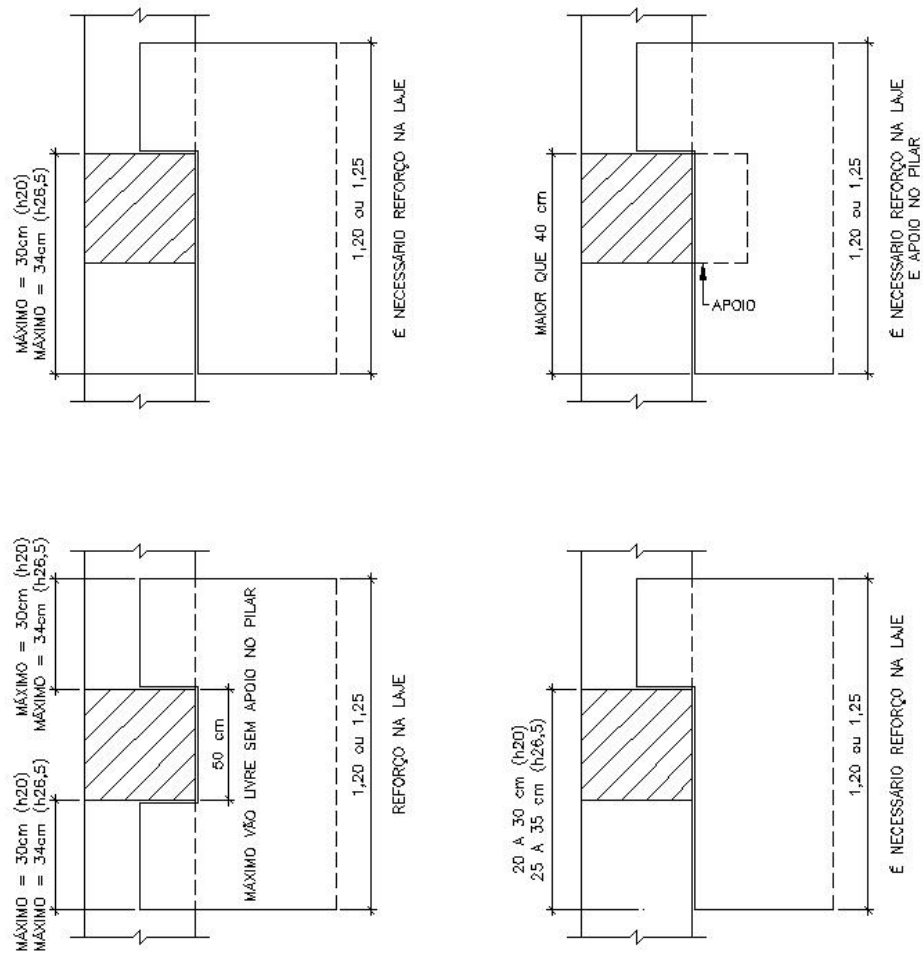
Até o largura (faixa) de 25 cm pode-se executar uma faixa de concretagem in-loco no momento da concretagem do capeamento. A faixa de 25 cm é determinada pela largura de 30 cm da tábua padrão (comumente encontradas em madeiras).

No processo executivo da laje alveolar já é considerado a folga para a montagem, portanto não se tem a necessidade de prever a folga em projeto. Nos recortes juntos aos pilares é necessária a previsão de 1 cm de folga. Quando se tem um recorte que não necessita de reforço sendo assim o mais simples e econômico, é recomendado que seja feito no alvéolo, que para a laje de 20 cm esse recorte é de 20 cm e para a laje de 26,5 cm esse recorte é de 25 cm.

Além das orientações citadas a cima, o Manual MUNTE traz mais algumas recomendações para a paginação de lajes alveolares:

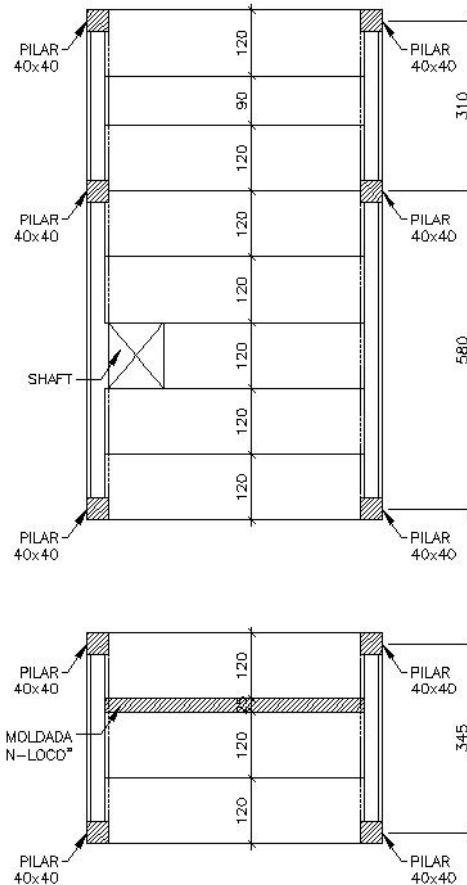
- ✓ A primeira laje deve estar encostada na fachada.
- ✓ Não é permitida a instalação lado a lado de lajes cortadas longitudinalmente
- ✓ Não é permitida a instalação de shafts ao lado de lajes cortadas longitudinalmente.
- ✓ Deve ser verificado o máximo recorte junto ao pilar.

O máximo recorte permitido na laje alveolar citado no ultimo item é limitação para que exista a necessidade ou não de um complemento para o apoio da laje. A Figura 2-5 apresenta esses limites para as lajes de 20 e 26,5 cm.



**Figura 2-5: Recortes permitidos em laje alveolares desde que seja previsto reforço ou apoio.**

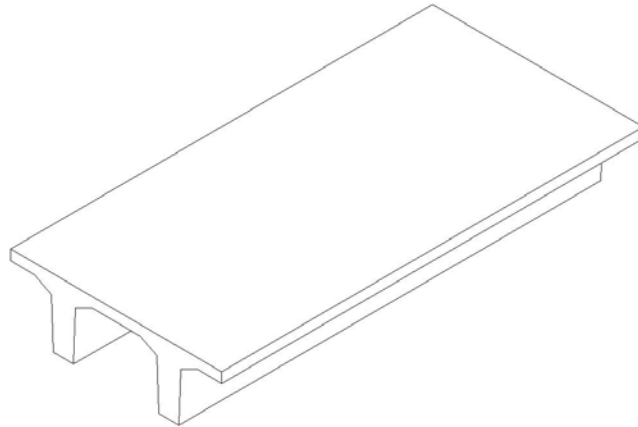
Outro aspecto que torna o posicionamento das lajes importante é que comparado com os outros elementos como viga e pilar a laje alveolar apresenta um menor custo. A Figura 2-6 mostra um exemplo de paginação de laje alveolar.



**Figura 2-6: Paginação de laje alveolar.**

A utilização da laje alveolar é feita normalmente com a colocação de uma capa de concreto moldada no local que permite uma solidarização da laje com as vigas e faz com que a viga que a recebe tenha um aumento de seção. Esse acréscimo é caracterizado como seção composta (mais detalhes sobre seção composta ver item 4.2).

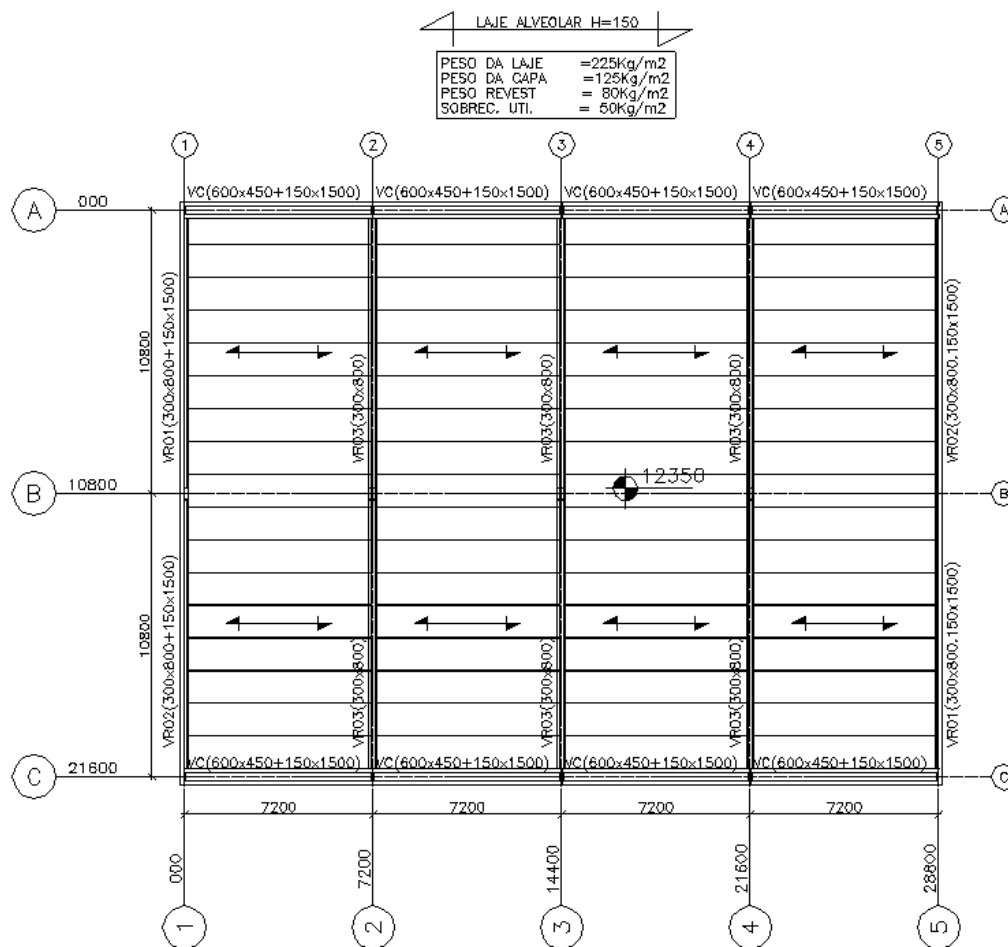
Outra laje que apresenta grande capacidade de suportar sobrecargas e vencer grandes vãos é a laje duplo T, mas esta em desuso por ter uma relação vão / altura no ordem 30 e como a sua parte inferior é no formato de duplo T, geralmente não é de grande aceitabilidade dos arquitetos recomendando assim a utilização de forros falsos acarretando assim custos extras. A Figura 2-7 mostra uma perspectiva de uma laje TT.



**Figura 2-7: Perspectiva de uma laje duplo T.**

Para o lançamento das vigas o módulo básico é de 3m para seu vão, para um melhor aproveitamento do transporte das peças não necessitando transporte especial é sugerido peças com o máximo de 12 metros de comprimento.

É comum em estruturas pré-moldadas lançamento das vigas somente em uma direção essa direção é perpendicular ao sentido da laje (vigas que apóiam as lajes), formando assim pórticos. A Figura 2-8 mostra a paginação de laje alveolar formando pórticos em só uma direção, esse conceito é de bastante aplicados nas escolas do FDE – Fundação de Desenvolvimento de Ensino. É importante observar principalmente em edifícios acima de 3 andares se essa estrutura esta sendo travada na outra direção, já que os pórticos estão sendo formados apenas por pilares e as lajes.



**Figura 2-8: Paginação de laje alveolar formado pórticos em uma direção (medidas em mm).**

Outra solução para o contraventamento da estrutura é a utilização de núcleos rígidos, caixa de escada e caixa de elevador e também a utilização de placas de fachada, ou mesmo pilar-parede.

O lançamento dos pilares está basicamente ligado ao lançamento dos outros dois elementos citados acima e com a disposição da arquitetura. Os seus eixos devem dispor em função da paginação das lajes. É comum uma dimensão do pilar seja a mesma utilizada para a largura da viga, facilitando assim a fabricação dos apoios das vigas como, por exemplo, os consolos.

No caso das seções dos pilares é comum tentar usar o formato quadrado que facilita o detalhamento, transporte e montagem. Quando a altura do prédio e os esforços laterais começam a ser significativas usa-se a seção retangular considerando que a dimensão com maior comprimento fique no sentido das vigas principais (de suporte das lajes) formando pórtico (pilares e vigas). Em algumas situações prevê-se um espaço vazio no interior do pilar que permite a passagem de instalações.

No caso das vigas costuma-se complementar a seção pré-fabricada com uma capa de concreto que trabalha como seção composta a partir do endurecimento do seu concreto. Assim, a viga, em geral, tem no início uma seção, chamada aqui de seção pré-fabricada e a partir de uma etapa da obra trabalha como composta. No caso da seção pré-moldada a melhor geometria pode ser obtida por meio do coeficiente de Guyon.

Segundo MADARÁS (1993) a seção ideal para o concreto protendido é aquela que para uma mesma área  $A$  tem-se o maior módulo de resistência  $W$ .

A seção retangular apresenta:

$A = b \cdot h$  e  $W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = \frac{1}{6} \cdot A \cdot h \rightarrow \frac{W}{A} = \frac{h}{6}$ , tanto para a tensão superior e também a inferior. Mas  $\frac{W}{A} = k$ , distância nuclear,  $k_{\text{sup}} = k_{\text{inf}}$ .

A seção ideal, mais eficiente, é aquela que apresenta  $\frac{k_{\text{sup}} + k_{\text{inf}}}{h}$  a maior possível (pois com a força de protensão, vai dar somente tensões de compressão).

Chama-se rendimento de uma seção a relação:

$\frac{k_{\text{sup}} + k_{\text{inf}}}{h} \rightarrow$  Rendimento  $R$ , assim:

$$R = \frac{k_{\text{sup}} + k_{\text{inf}}}{h} \leq 1, \text{ sendo } k_{\text{sup}} = \frac{W_{\text{sup}}}{A} \text{ e } k_{\text{inf}} = \frac{W_{\text{inf}}}{A}.$$

$$R = \frac{\frac{W_{\text{sup}}}{A} + \frac{W_{\text{inf}}}{A}}{h} = \frac{W_{\text{sup}} + W_{\text{inf}}}{A \cdot h} = \frac{I/y_s + I/y_i}{A \cdot h}$$

$$R = \frac{I \cdot y_i + I \cdot y_s}{y_s \cdot y_i \cdot A \cdot h} = \frac{I \cdot (y_i + y_s)}{y_s \cdot y_i \cdot A \cdot h} \rightarrow R = \frac{I}{A \cdot y_s \cdot y_i} \text{ (Rendimento de Guyon).}$$

Embora a seção I se apresenta mais vantajosa, sob o ponto de vista estrutural, que a retangular para edificações de escolas, ou mesmos centros comerciais o aspecto estético conta muito, Desta forma é muito comum que o projeto de arquitetura imponha a forma retangular como solução obrigatória.

---

### **3. CÁLCULO DE CONSOLO E DENTE GERBER**

---

Apresentam-se os principais mecanismos de ruptura dos consolos e as recomendações da NBR 9062:2006 e NRB 6118:2003 para o seu dimensionamento.

#### **3.1. INTRODUÇÃO**

---

Do ponto de vista do comportamento estrutural, o que diferencia a estrutura pré-moldada de uma estrutura moldada no local, basicamente são as ligações. Quando se deseja conhecer o comportamento de um sistema estrutural em pré-moldado é de extrema importância conhecer suas ligações.

Geralmente nas ligações é onde se tem comportamento complexo, pois tem-se concentrações de tensões que podem ou não mobilizar deslocamentos e esforços decorrentes dos elementos ligados por ela, definindo assim a distribuição dos esforços ao longo da estrutura. O êxito do desempenho de um sistema estrutural está relacionado com o desempenho das ligações.

Não existem ligações perfeitamente articuladas ou rígidas em estrutura, pois uma ligação rotulada pode possuir certa resistência à flexão e as ligações consideradas rígidas podem apresentar certa deformação à flexão e ao cisalhamento, sendo assim as ligações possuem certa deformabilidade, o que se denomina ligações semi-rígidas.

Os consolos têm grande aplicabilidade nas estruturas pré-moldadas, sendo classificados como consolos curtos e muito curtos, o que diferencia essa classificação é basicamente o mecanismo de ruptura observado nos ensaios.

Para um melhor entendimento nos modelos para o cálculo de consolo e dente Gerber, recomenda-se a bibliografia de SILVA E GIONGO (2000).

#### **3.2. CONSIDERAÇÕES INICIAIS**

---

As principais diferenças na análise da estrutura de concreto pré-moldado e moldado no local estão relacionadas com a presença de ligações e das situações transitórias que estarão submetidos os elementos pré-moldados.

De acordo com a dificuldade de execução, custo e comportamento estrutural, as ligações vigas-pilar podem ser realizadas de diferentes maneiras. Em relação aos pilares, as ligações viga-pilar pré-moldadas, de uma maneira geral, podem ser:

✓ Ligação da extremidade da viga ou ligação viga-pilar: ocorre quando o pilar é contínuo e os componentes são conectados a ele.

✓ Ligação de “topo”: ocorre quando o pilar é descontínuo, em termos construtivos, e os componentes horizontais são contínuos ou separados por ligação.

É necessário que todas as ligações atendam as condições de serviço e último. Para a fabricação de uma edificação pré-moldada a união dos elementos deve atender a estabilidade global da estrutura. Após a montagem, as ligações irão influenciar na composição do modelo estrutural, sendo suas características e comportamentos de fundamental importância para o desempenho da estrutura. Os projetistas devem compreender a influência das ligações no fluxo de forças horizontais e verticais ao longo da estrutura para que seja possível a elaboração de um projeto adequado, permitindo que a estrutura tenha um comportamento eficiente quando solicitada.

De acordo com o manual PCI (2001), os principais critérios de projeto para as ligações estruturais são: resistência, rigidez, ductilidade, resistência ao fogo, durabilidade e facilidade de construir (construtibilidade).

Segundo o manual FIB (2003), a filosofia de projeto para as ligações pré-moldadas deve levar em conta os requisitos do desempenho estrutural e o método construtivo. As práticas construtivas na fábrica influenciam o projeto de ligação. Assim, a filosofia de projeto depende de vários fatores:

✓ A estabilidade da estrutura. Estruturas apertadas não contraventadas e estruturas em esqueleto requerem fundações resistentes a flexão, o que não ocorre nos casos das estruturas contraventadas e estruturas em painéis estruturais nas duas direções.

✓ O arranjo estrutural do pórtico. O número e posições disponíveis para os pilares, paredes, núcleos e outros elementos de contraventamento podem determinar o projeto das ligações.

✓ A continuidade (flexão) nas extremidades de vigas e lajes. Elementos em balanço sempre requerem resistência à flexão nas ligações (ou de outro modo, continuidade



de vigas), o que não ocorre no caso das vigas simplesmente apoiadas. Estruturas não contraventadas, podem ser projetadas usando ligações rígidas (ou semi-rígidas).

- ✓ É importante prever a proteção contra fogo para apoios e armaduras.
- ✓ A aparência das ligações e minimização das regiões estruturais. As ligações escondidas (embutidas) devem ser projetadas dentro das dimensões dos elementos, enquanto que as ligações aparentes não precisam.
- ✓ A acessibilidade do canteiro pode influenciar o projeto estrutural e, portanto, influenciar o projeto de ligação.
- ✓ A escolha do método construtivo para execução das juntas, isto é: preenchimento com graute; uso de chumbadores; ligações por meio de solda; e o tipo de apoio a ser utilizado.
- ✓ A capacidade da fábrica para estocagem e movimentação interna.

A escolha do sistema da ligação deve ser compatível com o projeto do sistema estrutural, e consistente em toda a edificação. Em uma situação ideal somente uma tipologia de ligação deve ser usada em um edifício.

Para que seja garantida a segurança da ligação é importante que sua execução tenha cuidados, evitando possíveis falhas e um controle rígido de qualidade.

### **3.3. CONSOLO CURTO E CONSOLO MUITO CURTO**

---

A separação entre consolos curtos e consolos muito curtos é diferenciado principalmente pelo mecanismo de ruptura observado nos ensaios. Os principais modelos para análise do comportamento dos consolos são: biela e tirante e atrito-cisalhamento.

Tem-se como definição clássica o consolo curto de concreto armado é um elemento estrutural em balanço com carga vertical, eventualmente acompanhada de carga horizontal, geralmente quase concentrada, aplicada a uma distância de  $a$  da seção de engastamento tal que  $1/2 \leq a/d \leq 1$ , sendo  $d$  a altura útil. Os consolos muito curto tem  $a$  relação de  $a/d \leq 1/2$ .

---

### 3.4. COMPORTAMENTO ESTRUTURAL

---

Segundo MACHADO (1998), as hipóteses básicas da resistência dos materiais não se aplicam as vigas curtas de concreto armado, que são os consolos curtos, comprovado experimentalmente, portanto a verificação da capacidade resistente ou de dimensionamento de um consolo curto não pode ser feito por meio da análise de seções como nas vigas, pois não é válida a hipótese da manutenção das seções planas.

As regras de projeto de consolos curtos têm que levar em conta estudos experimentais específicos para esses elementos, analisados com um todo, identificando os locais, forma e mecanismo prováveis de ruptura.

### 3.5. MECANISMO DE RUPTURA

---

Segundo MACHADO (1998) os mecanismos de ruptura devem ser prevenidos no projeto através de uma formulação apropriada a ser empregada diretamente nos cálculos de verificação e dimensionamento.

1. *Ruptura por flexão*: consiste no esmagamento do concreto no canto inferior do consolo junto ao pilar, devido a forte compressão inclinada. O esmagamento do concreto pode ocorrer após o escoamento da armadura principal, ou antes, do escoamento.
2. *Ruptura por tração na flexão*: uma fissura principal de flexão, na seção de engastamento, tem a sua abertura progressivamente aumentada com o escoamento da armadura até a ruptura por compressão do concreto. Essa ruptura ocorre em peça com baixas taxas da armadura principal. O consolo sofre uma rotação em torno de algum eixo dentro do pilar junto ao engastamento e inferior do consolo (Figura 3-1).

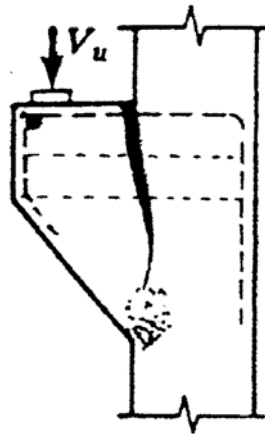


Figura 3-1: Ruptura por tração na flexão (MACHADO 1998).

3. *Ruptura por compressão na flexão*: algumas fissuras de flexão se abrem e antes de se atingir o escoamento da armadura principal e o aumento das aberturas das fissuras, ocorre o esmagamento do concreto. Esta ruptura ocorre com baixíssimas rotações do consolo (Figura 3-2).

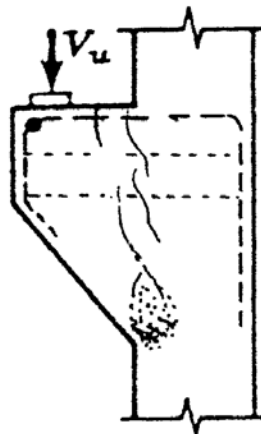


Figura 3-2: Ruptura por compressão na flexão (MACHADO 1998).

4. *Ruptura por fendilhamento diagonal (fendilhamento da biela)*: inicialmente desenvolve-se uma fissura típica de flexão e a seguir o fendilhamento inclinado da biela, seguido de uma ruptura *cisalhamento-compressão*. A trinca principal, que define a ruptura, ocorre ao longo de uma linha que se estende desde o canto da placa de apoio menos afastado do pilar até a junção da face inferior do consolo com a face de pilar (Figura 3-3).

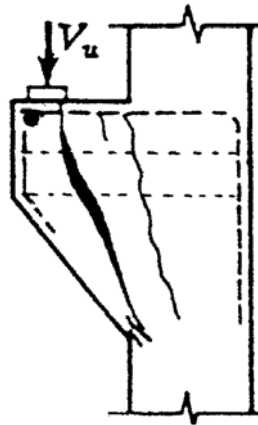


Figura 3-3: Ruptura por fendilhamento diagonal (MACHADO 1998).

5. *Ruptura por cisalhamento*: este tipo de ruptura é caracterizado pelo aparecimento de um conjunto de pequenas trincas ao longo do plano de interface entre o consolo e o pilar (engastamento). A ruptura final ocorre por cisalhamento ao longo desta placa “enfraquecido” e é típica para os consolos com valores baixos da relação  $a/d$  (consolos muito curtos)(Figura 3-4).

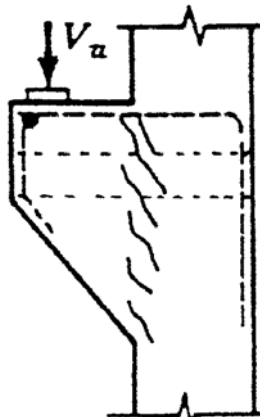


Figura 3-4: Ruptura por cisalhamento (MACHADO 1998).

6. *Ruptura por fendilhamento na ancoragem*: devida a ancoragem deficiente da armadura principal na extremidade do consolo, na região sob a placa de apoio. Exemplo: barras dobradas na vertical com grande curvatura, com a carga aplicada após a curva (Figura 3-5).

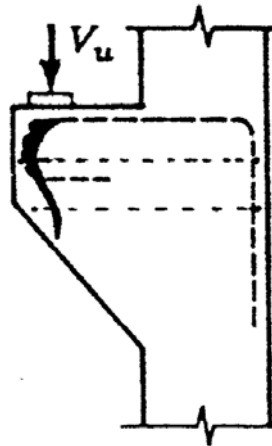


Figura 3-5: Ruptura por fendilhamento da ancoragem (MACHADO 1998).

7. Ruptura por esmagamento localizado do concreto sob placa de apoio, para tensões de contato elevadas (Figura 3-6).

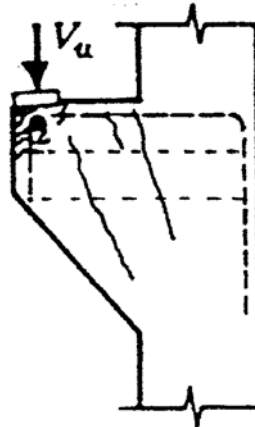


Figura 3-6: Ruptura por esmagamento localizado do concreto sob placa de apoio (MACHADO 1998).

8. Ruptura por insuficiência de altura na região da placa de apoio, em consolos com seção variável, especialmente os que são carregados também por força horizontais (Figura 3-7).

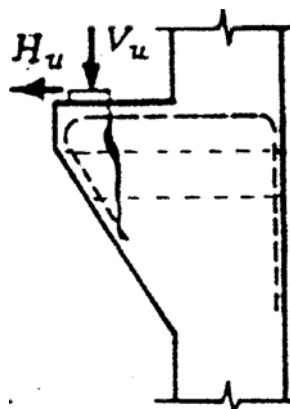


Figura 3-7: Ruptura por insuficiência de altura na região da placa de apoio (MACHADO 1998).

### 3.6. RECOMENDAÇÕES NBR 9062:2006

---

Esta é a norma brasileira de estruturas pré-moldadas, na qual se encontram recomendações e diretrizes exigíveis para projeto, execução e controle dos consolos curtos.

Como define a norma, consolo curto são elementos especiais de ligação que são utilizados para compor um conjunto estrutural a partir de seus elementos, com a finalidade de transmitir os esforços solicitantes, em todas as fases de utilização, dentro das condições de projeto, mantendo as condições de durabilidade ao longo da vida útil da estrutura.

Com relação aos critérios de segurança, os valores característicos, valores de cálculo, coeficientes de minoração e de majoração a serem adotados por meio de consolos de concreto, multiplicando-se o coeficiente de majoração por outro fator  $\gamma_n$  obtém-se para:

✓ Peças pré-fabricadas:

$\gamma_n=1,0$  quando a carga permanente for preponderante;

$\gamma_n=1,1$  em caso contrário.

✓ Peças pré-moldadas:

$\gamma_n = 1,1$  quando a carga permanente for preponderante;

$\gamma_n=1,2$  em caso contrário.

Um ponto muito importante a ser ressaltado, é a ocorrência de força horizontal nos consolos curtos. Essas forças quando aplicadas podem minorar significativamente a resistência dos consolos. Portanto, deve ser tomada atenção especial no cálculo dos consolos quando submetidos a essas forças, principalmente quando houver ação devida à variação volumétrica das estruturas ligadas ao consolo. A força horizontal  $H_d$  pode ser estimada quando houver ausência de impedimento ao movimento horizontal, através da força vertical  $V_d$  como segue:

✓  $H_d = 0,8 V_d$  para juntas a seco;

✓  $H_d = 0,5 V_d$  para elemento assentado com argamassa;

- ✓  $H_d = 0,16 V_d$  para almofadas revestidas de plástico politetrafluoretilene (PTFE);
- ✓  $H_d = 0,25 V_d$  para apoios realizados entre chapas metálicas não soldadas;
- ✓  $H_d = 0,4 V_d$  para apoios realizados entre concreto e chapas metálicas.
- ✓ Para a concretagem no local, ligação por meio de solda ou apoio com graute, é obrigatório o estudo detalhado do valor da força horizontal aplicada na ligação.

Para o cálculo dos consolos curtos existem algumas definições a serem seguidas, tais como:

- ✓ Para o intervalo  $0,5 < a/d < 1,0$ , são considerados consolos curtos e o dimensionamento se faz segundo o modelo matemático de uma treliça de duas barras, uma tracionada ou tirante e outra comprimida ou biela. Para o intervalo  $a/d < 0,5$ , são considerados consolos muito curtos e devem ser dimensionados através da modelagem matemática de atrito e cisalhamento. Já para intervalos  $a/d > 1,0$ , os elementos são considerados vigas em balanço, pois obedecem a hipótese de manutenção das seções planas;

- ✓ Despreza-se o eventual efeito favorável de cargas horizontais que comprimam o plano de ligação entre o consolo e o elemento de sustentação, e, além disso, considera-se que o efeito de cargas horizontais que tracionem o plano de ligação entre o consolo e o elemento de sustentação seja absorvido integralmente pelo tirante;

A Figura 3-8 apresenta as principais armaduras construtivas de consolo curto.

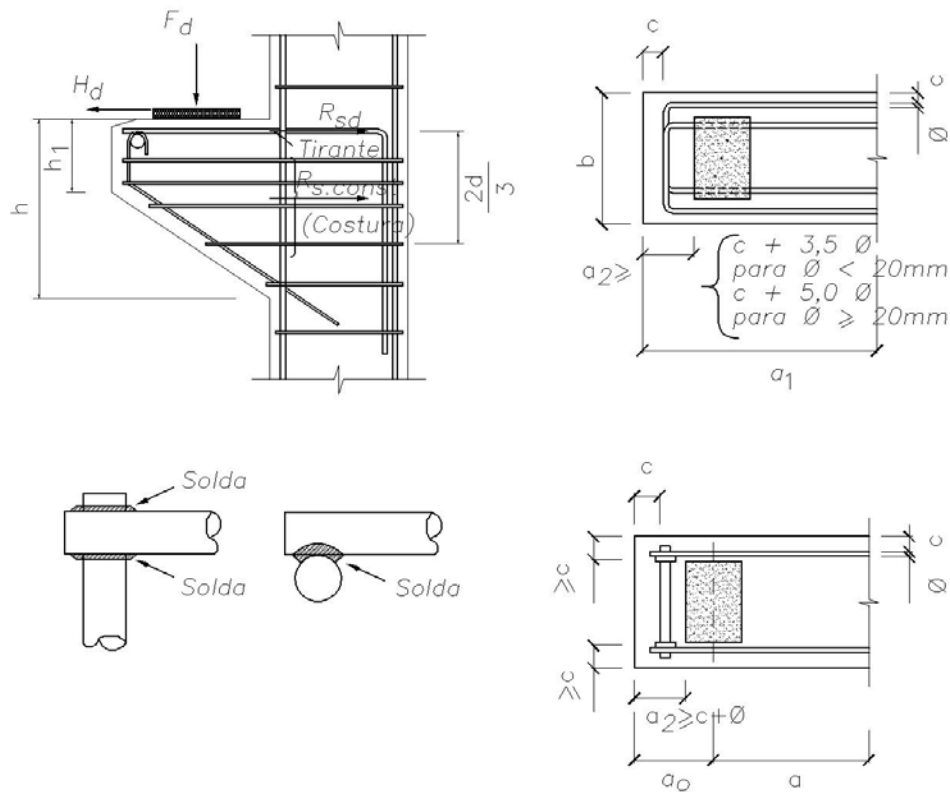


Figura 3-8: Armadura típica de um consolo curto [NBR 9062:2006].

A norma propõe também algumas recomendações para as disposições construtivas desses elementos. A altura da face externa  $h_1$  não deve ser menor que a metade da altura do consolo no engastamento ( $h$ ), assim:

$$h_1 \geq h/2 \quad (3.1)$$

À distância  $a_2$  da face externa da almofada de apoio (neoprene) à face externa do consolo é diferenciada pelos tipos de tirantes e diâmetros de barras utilizadas para composição da armadura, sendo:

- ✓ Para ancoragem por barra transversal soldada com mesmo diâmetro dos tirantes.

$$a_2 = c + \phi \quad (3.2)$$

- ✓ Para ancoragem por laço horizontal ou vertical ( $\phi < 20\text{mm}$ ):

$$\begin{aligned} a_2 &= c + 3,5 \cdot \phi, \text{ para } \phi < 20\text{mm} \\ a_2 &= c + 5,0 \cdot \phi, \text{ para } \phi \geq 20\text{mm} \end{aligned} \quad (3.3)$$



Para a armadura do tirante ancorado por alças horizontais, seguem as seguintes prescrições:

$$\phi \leq \begin{cases} 1/8 \text{ da menor dimensão do consolo na seção do engastamento} \\ 25 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\text{Espaçamento} \leq \begin{cases} 15 \cdot \phi \\ d \end{cases}$$

Para as armaduras do tirante ancorados por barra transversal soldada, segue as seguintes prescrições:

$$\phi \leq \begin{cases} 1/6 \text{ da menor dimensão do consolo na seção do engastamento} \\ 25 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\text{Espaçamento} \leq \begin{cases} 25 \cdot \phi \\ d \end{cases}$$

A solda deve seguir o disposto na NBR 6118:2003. Recomenda-se que para diâmetros de barras superiores a 20 mm, a solda deve ser realizada através de solda de topo com eletrodo. Em caso de barra tracionada e havendo preponderância de carga acidental, a resistência deve ser reduzida em 20%. Na Figura 3-8, mostra um exemplo deste tipo de solda.

Os aços utilizados para os tirantes, não devem ser aços encruados a frio e com teor de carbono maior que 0,55%. Além disso, os tirantes devem ser localizados no quinto da altura do consolo junto à borda tracionada do consolo, como mostra a Figura 3-9.

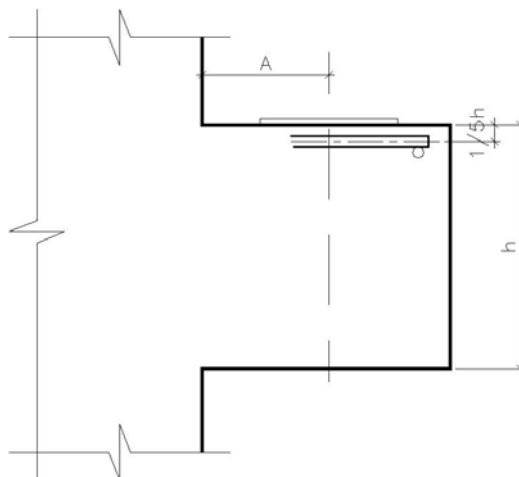


Figura 3-9: Detalhe do posicionamento do tirante ao longo da altura do consolo.

Para as armaduras de costura, segue as seguintes prescrições:

$$\phi \leq \left\{ \frac{1}{15} \right. \text{ da menor dimensão do consolo na seção do engastamento}$$

$$\text{Espaçamento} \leq \begin{cases} \frac{1}{5} \text{ da altura útil (d) no engastamento} \\ 20\text{cm} \\ \text{distância a} \end{cases}$$

Para consolos com  $d > 4(a + a_0)$ , substitui-se a armadura de costura por armadura de pele com taxa  $\rho = \frac{A_{s,\min}}{b \cdot d} \geq 0,002$  por face, como mostra a Figura 3-10.

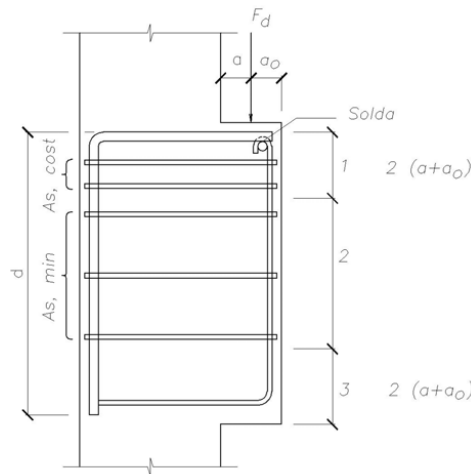


Figura 3-10: Detalhe do posicionamento da armadura de costura [NBR 9062:2006].

Para o tirante dos consolos curtos, a norma admite que a armadura total do tirante seja;

$$A_{s,tir} = A_{sv} + \frac{H_d}{f_{yd}} \quad (3.4)$$

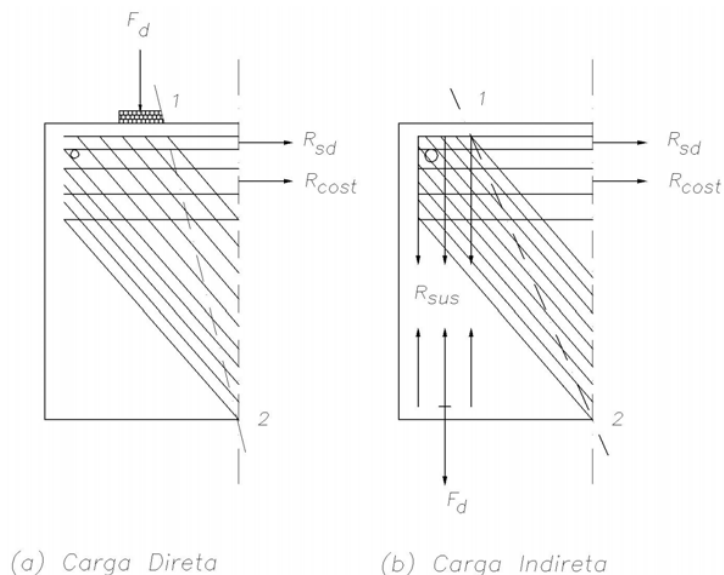
Onde:

$$A_{sv} = \left(0,1 + \frac{a}{d}\right) \cdot \frac{F_d}{f_{yd}} \quad (3.5)$$

Já a armadura de costura, é adequada distribuí-la em  $(2/3)d$ , adjacente ao tirante e não adotar  $f_{yd} > 435$  MPa. A armadura total deve ser:

$$(A_s / s)_{cost} \geq 0,4(A_{sv} / d) \quad (3.6)$$

Durante o dimensionamento do consolo, deve ser verificada a tensão da biela de compressão, que não pode ultrapassar  $f_{cd}$  para carga direta e  $0,85f_{cd}$  para carga indireta. A Figura 3-11 apresenta a duas situações de carregamentos (carga direta e carga indireta).



**Figura 3-11: Detalhe sobre armadura de suspensão [NBR 9062:2006].**

### Dente Gerber

Dentes de apoio são elementos de apoio na extremidade de vigas, placas ou painéis, cuja altura é menor que a altura do elemento a ser apoiado e que podem ser assemelhados a consolos. Para o dimensionamento permite-se assemelhar o dente de apoio a um consolo.

Para dentes de apoio assemelhados a consolos curtos com  $0,5 < a/d \leq 1,0$ , as dimensões e inclinação da biela de compressão são supostas variáveis e são determinadas segundo a Figura 3-12.

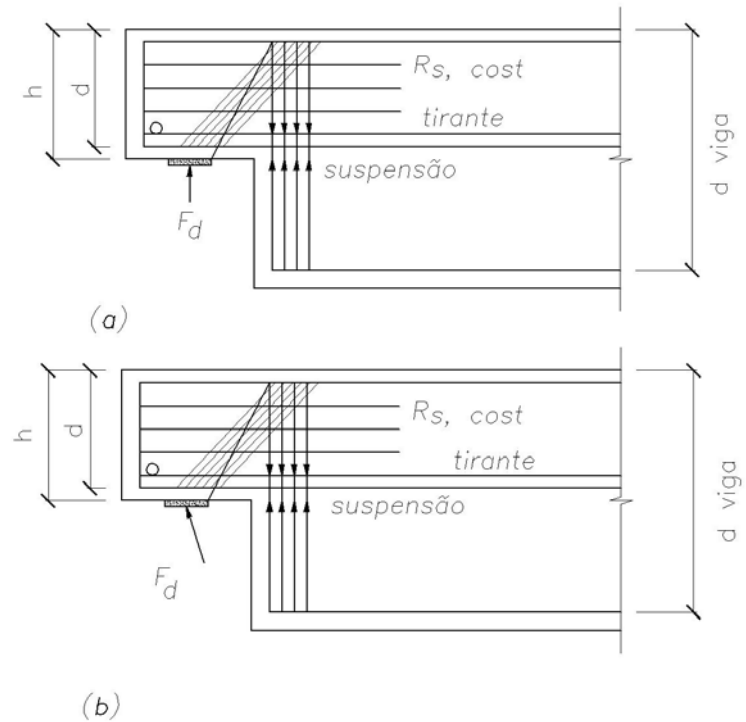


Figura 3-12: Modelos em consolos tipo Gerber [NBR 9062:2006]

O início da ancoragem do tirante na viga é suposto distante do primeiro estribo de  $(d_{vig} - d)$  aplicando-se o disposto na NBR 6118 para a condição de má aderência (ver Figura 3-13).

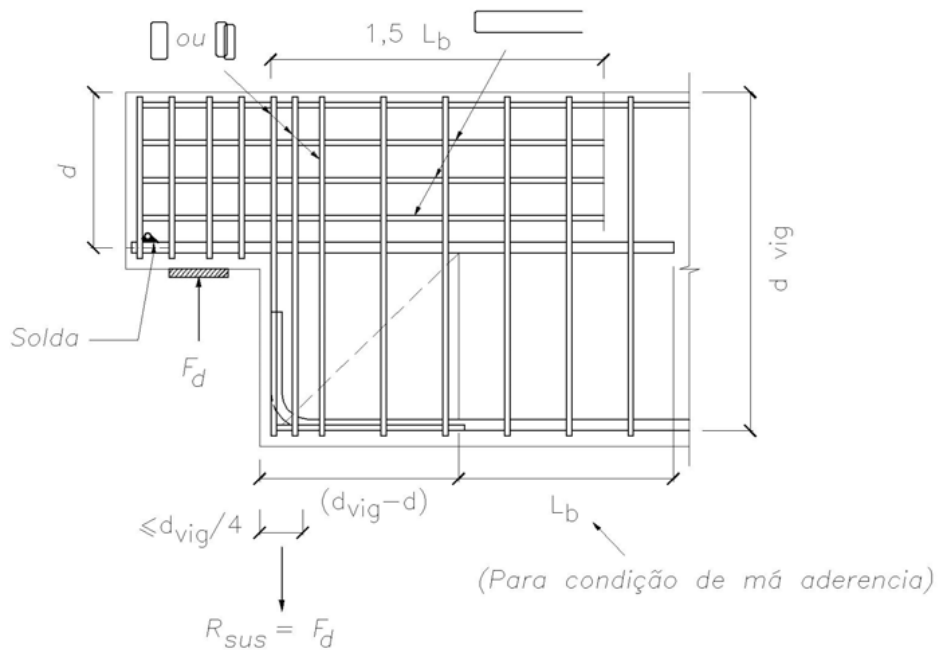


Figura 3-13: Detalhe de armadura em consolo tipo Gerber [NBR 9062:2006].

São sempre necessários estribos horizontais ancorados na face externa do dente e penetrando 1,5 vezes o comprimento de ancoragem no interior da viga. São necessários estribos verticais no dente (aplicam-se os mesmos valores estabelecidos para os consolos).

Ainda é importante destacar a armadura de suspensão, deve existir armadura de suspensão capaz de resistir à totalidade das cargas verticais aplicadas no dente ( $F_d$ ) com tensão  $f_{yd}$ . Esta tensão não pode superar a 435 MPa.

A armadura deve ser disposta concentrada na extremidade da viga adjacente ao dente de apoio, na forma de estribos fechados que envolvam a armadura longitudinal da viga, conforme Figura 3-13. Se forem utilizadas barras verticais adequadamente ancoradas nas suas extremidades e protegidas do risco de fendilhamento do concreto nas suas dobras, estas não podem absorver mais que  $0,4 F_d$ .

A tensão de compressão na biela não pode ultrapassar o disposto na NBR 6118:2003 para a verificação da compressão da diagonal do concreto, para inclinações da biela até  $45^\circ$ . Para maiores inclinações, o valor limite da tensão de compressão é de  $0,85 f_{cd}$ .

As ligações por meio de apoios nas extremidades sem recortes de vigas, na falta de cálculo mais rigoroso ou de comprovação experimental conclusiva, permitem-se calcular a armadura principal (tirante) do apoio nas extremidades de vigas pré-moldadas, obedecidas as disposições construtivas pertinentes, aos consolos, pela expressão:

$$A_{sd} = (F_d / 1,2 + H_d) / f_{yd} \quad (3.7)$$

Nas mesmas condições (ver Figura 3-14), permite-se determinar a armadura de costura horizontal e vertical, respectivamente  $A_{sh}$  e  $A_{sv}$ , pela expressão:

$$A_{sh} = A_{sv} = F_d / 8 f_{yd} \quad (3.8)$$

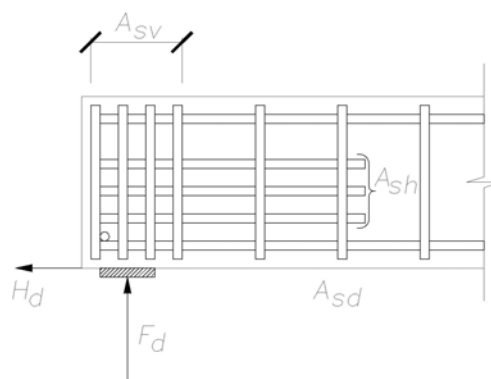


Figura 3-14: Detalhe da armadura em apoio sem recorte.

---

## 4. PERDAS DE PROTENSÃO

---

Neste capítulo o estudo das perdas é abordado visando demonstrar o efeito isolado de diversos fenômenos que afetam a protensão nas estruturas de concreto. A formulação apresentada segue a prescrição da norma brasileira NBR 6118:2003.

### 4.1. INTRODUÇÃO

---

A protensão introduz na peça uma força inicial  $N_p$  que está diretamente relacionada com o alongamento ocorrido na armadura ativa. O acionamento dos macacos, a liberação dos cabos e a transferência da força de protensão, entre outros fatores, originam uma série de efeitos que conduzem a uma diminuição da força de protensão. Dessa forma, têm-se as chamadas perdas de protensão.

Durante o cálculo de uma peça protendida, pode-se estimar as perdas de protensão. De posse dessa estimativa das perdas é possível determinar uma sobretensão que deve ser aplicada a peça, tal que, após as perdas, a força de protensão efetivamente atuante a força calculada, suficiente para neutralizar, em parte ou no todo, os esforços de tração provocados pelas cargas de utilização.

Dentre os diversos fatores que influenciam na força de protensão inicialmente aplicada, alguns são responsáveis por perdas de protensão iniciais e outros por perdas progressivas que se desenvolvem ao longo da vida útil da estrutura. Sob condições normais, as perdas tendem a se estabilizar depois de certo período.

Os fatores que provocam perdas iniciais, isto é, os que ocorrem durante a operação de protensão e após a transferência de protensão:

- ✓ Acomodação da ancoragem;
- ✓ Relaxação da armadura durante a cura do concreto;
- ✓ Deformação imediata do concreto (no instante da transferência de protensão);

Os fatores que provocam perdas progressivas, isto é, os que ocorrem ao longo do tempo, após os termino da operação de protensão, com o cabo já ancorado no concreto são:

- ✓ Retração do concreto;
- ✓ Fluência do concreto;
- ✓ Relaxação do aço de protensão.

## 4.2. PERDAS INICIAIS

---

As perdas iniciais de protensão como já descrito resultam: a) acomodação da ancoragem após a distensão da armadura de protensão, b) relaxação da armadura durante o período de cura do concreto e c) do encurtamento elástico da seção de concreto no ato de transferência da protensão. Nos subitens seguintes descreve-se o procedimento do cálculo das perdas iniciais.

### 4.2.1. ACOMODAÇÃO DA ANCORAGEM

---

Quando se efetiva a ancoragem de um cabo há sempre um pequeno retrocesso no cabo que estava esticado, provocando uma queda de tensão no mesmo. Como no caso da pré-tração a operação de estiramento do aço é feita antes da concretagem, todos os cabos estão submetidos a lei de Hooke e vale a expressão:

$$\Delta \ell = \frac{\Delta \sigma \cdot L}{E_p} \quad (4.1)$$

Com

$\Delta \ell$  - retrocesso da ancoragem

$\Delta \sigma$  - perda por deformação imediata do concreto

L – Comprimento da pista de protensão

$E_p$  – Módulo de elasticidade da cordoalha de protensão

### 4.2.2. RELAXAÇÃO DA ARMADURA

---

No caso de pré-tração entre o período do estiramento da armadura e a cura do concreto até que possa ser feita a transferência de protensão há uma perda de protensão devido a relaxação da armadura, cujo procedimento de cálculo e discutido no item 4.3.3.

### 4.2.3. DEFORMAÇÃO IMEDIATA DO CONCRETO

No caso da pré-tração os cabos são tencionados de uma só vez e aplicados simultaneamente na peça provocando uma perda que depende do momento de peso próprio  $M_{g1}$  e da relação  $\alpha = \frac{E_p}{E_c}$ . A expressão para o cálculo desta perda é dada por:

$$\Delta\sigma_p = \alpha \left( \frac{N_p}{A} + \frac{N_p \cdot e^2}{I} - \frac{M_{g1}e}{I} \right) \quad (4.2)$$

Com

$N_p$  : Força de protensão total atuando na peça.;

A: Área da seção transversal do concreto;

I: Inércia da seção transversal de concreto.

### 4.3. PERDAS AO LONGO DO TEMPO

As perdas progressivas decorrem da natureza intrínseca dos materiais aço e concreto e são em função de uma diminuição de volume de concreto, decorrente dos fenômenos de retração e deformação lenta. São devidas também à fluência do aço, à qual corresponde uma relaxação, isto é, perda de tensão.

A armadura de protensão adquire a maior parte de seu esforço a partir de seu estiramento que é mantido através da sua ancoragem à estrutura de concreto ou através a aderência à mesma (armadura/estrutura de concreto). Assim, se a estrutura de concreto se deforma (se encurta no caso), ao longo do tempo, parte do estiramento da armadura desaparecerá, ou seja, haverá uma perda de protensão da armadura. Estas perdas se dão, portanto, devido à retração e à fluência do concreto. Já quando a armadura é estirada e mantida desta forma há uma tendência da tensão da mesma diminuir com o tempo o que caracteriza a perda de tensão por relaxação do aço.

Conceituando de forma simplista a retração é a variação volumétrica que o concreto sofre depois de endurecido. Na verdade a retração começa ocorrer logo após o lançamento do concreto, porém para determinar a perda causada na armadura só interessa a



parte do fenômeno que ocorre depois da atuação da protensão. De uma maneira geral, a retração é função principalmente a saída da água que não reage com o cimento (água em excesso). Desta forma pode-se perceber que, além do tempo, as variáveis que interferirão no processo são a temperatura e umidade do ambiente, além da espessura da peça e a quantidade de água (em geral avaliada pela plasticidade do concreto). Lembrar que todo concreto é poroso, porém há também outras propriedades tais como a comunicação entre os poros que afetariam a questão da permeabilidade e, portanto, da saída da água. Assim, da forma como é definida a retração ela não depende da introdução de ações o fenômeno ocorre mesmo que o concreto esteja com estado de tensão nulo. Notar, porém, que a armadura existente na peça de concreto armado ou protendido impede a retração livre da peça embora na maioria das vezes este efeito seja desprezado. Assim, quando se considera a retração ocorrendo sem que haja impedimento às deformações provocadas diz-se tratar de retração livre e são estes valores que, em geral, as experiências apresentam chamando-se a atenção que, na prática, é praticamente impossível isto ocorrer.

A fluência, como a retração, depende também do movimento da água, só que associada a um carregamento aplicado. Assim, é influenciada por tensões capilares que ocorrem no interior da massa de concreto que é composto de material sólido, gasoso, líquido e gel. A não linearidade da relação tensão-deformação no concreto, especialmente a níveis de tensão maiores que 30 a 40% da tensão última, mostra claramente a contribuição das microfissuras da zona de transição à fluência. O aumento na deformação por fluência, que ocorre invariavelmente quando o concreto é exposto simultaneamente a condições de secagem, é causado por microfissuração adicional na zona de transição devida à retração por secagem.

A ocorrência de uma resposta elástica retardada no agregado é ainda outra causa da fluência no concreto. Uma vez que a pasta de cimento e o agregado estão aderidos, a tensão na primeira diminui gradualmente à medida que a carga é transferida para o último, que deforma elasticamente com o aumento da transferência de carga. Assim, a deformação elástica retardada no agregado contribui para a fluência total.

Assim como no caso da retração livre a fluência pura é aquela devida a uma ação introduzida no tempo  $t_0$  e mantida constante ao longo do tempo. Notar porém que a protensão devido à própria perda por fluência e à retração acaba diminuindo ao longo do tempo, assim a fluência em peças protendidas não é a pura embora os valores desta podem ser considerados

a favor da segurança, pois são maiores que a relativa à fluência não pura. Outro detalhe importante é que as ações que provocam a fluência tem caráter permanente, ou seja, as ações acidentais têm curta duração e não provocariam deformação ao longo do tempo.

Quando a armadura é estirada surge a tensão de protensão que com o tempo irá caindo pela propriedade da relaxação do material. Se o alongamento for mantido constante ter-se-á a relaxação pura que como no caso da fluência é maior da que ocorre com a variável. A perda por relaxação depende fundamentalmente da tensão em que está estirada a armadura, porém assim como no caso da fluência decresce devido às outras perdas e inclusive a própria. Sendo assim, na prática sempre haverá uma perda menor que a devida à relaxação pura.

Por último, como todas as perdas dependem de deformação do concreto e do aço a aderência entre eles tem muita importância e, por exemplo, no caso de cordoalhas engraxadas as perdas seriam calculadas para a seção da ancoragem e a favor da segurança consideradas a mesma para as demais seções.

Nos itens seguintes serão discriminadas as expressões que permitem calcular as perdas devidas à retração, fluência do concreto e a relaxação da armadura.

### 4.3.1. PERDA POR RETRAÇÃO DO CONCRETO

Imaginando inicialmente que se tem a retração livre e desta forma o encurtamento que o concreto de uma seção estudada será igual a  $\varepsilon_{c,c}(t_0, \infty)$  e que havendo a aderência entre o concreto e a armadura ( $\varepsilon_p = \varepsilon_{cs}(t, t_0)$ ) corresponderá a um encurtamento na armadura e assim uma perda de tensão dada por:

$$\Delta\sigma_{p,s}(t, t_0) = \varepsilon_{cs}(t, t_0) \cdot E_p \quad (4.3)$$

O valor da retração do concreto depende da umidade relativa do ambiente, da consistência do concreto no lançamento e da espessura fictícia da peça.

Entre os instantes  $t_0$  e  $t$ , a retração é dada pelos valores da expressão abaixo.

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cs\infty} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] \quad (4.4)$$

Onde:

$$\varepsilon_{cs\infty} = \varepsilon_{1s} \cdot \varepsilon_{2s}$$

$\varepsilon_{cs\infty}$  é o valor final da retração;

$\varepsilon_{1s}$  coeficiente que depende da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto (Tabela 4-1);

$\varepsilon_{2s}$  : coeficiente dependente da espessura fictícia da peça.

$$\varepsilon_{2s} = \frac{33 + 2h_{fic}}{20,8 + 3h_{fic}} \quad (4.5)$$

Onde;

$h_{fic}$ : espessura fictícia definida adiante e empregada nesta fórmula em centímetros;

$\beta_s(t)$  ou  $\beta_s(t_0)$ : coeficiente relativo á retração, no instante t ou  $t_0$  (Figura 4-1);

t: idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias (a idade fictícia será definida também);

$t_0$ : idade fictícia do concreto no instante em que o efeito da retração na peça começa a ser considerado, em dias.

**Tabela 4-1: Valores numéricos usuais para determinação da fluência e da retração (Tabela A.1 NBR 6118:2003).**

| Ambiente  | Umidade<br><i>U</i><br>% | Fluência<br>$\varphi_{1c}^{1) 3)}$              |       |         | Retração<br>$10^4 \varepsilon_{1s}^{2) 3)}$ |       |         | $\gamma^{4)}$ |
|---|--------------------------|---|-------|---------|---|-------|---------|---------------|
|   |                          | Abatimento de acordo com a ABNT NBR NM 67<br>cm |       |         |   |       |         |               |
|   |                          | 0 - 4   | 5 - 9 | 10 - 15 | 0 - 4                                       | 5 - 9 | 10 - 15 |               |
| Na água   | -                        | 0,6   | 0,8   | 1,0     | + 1,0                                       | + 1,0 | + 1,0   | 30,0          |
| Em ambiente muito úmido imediatamente acima da água | 90                       | 1,0   | 1,3   | 1,6     | - 1,0                                       | - 1,3 | - 1,6   | 5,0           |
| Ao ar livre, em geral                               | 70                       | 1,5   | 2,0   | 2,5     | - 2,5                                       | - 3,2 | - 4,0   | 1,5           |
| Em ambiente seco                                    | 40                       | 2,3   | 3,0   | 3,8     | - 4,0                                       | - 5,2 | - 6,5   | 1,0           |

<sup>1)</sup>  $\varphi_{1c} = 4,45 - 0,035U$  para abatimento no intervalo de 5 cm a 9 cm e  $U \leq 90\%$ .

<sup>2)</sup>  $10^4 \varepsilon_{1s} = - 6,16 - (U/484) + (U^2/1 590)$  para abatimentos de 5 cm a 9 cm e  $U \leq 90\%$ .

<sup>3)</sup> Os valores de  $\varphi_{1c}$  e  $\varepsilon_{1s}$  para  $U \leq 90\%$  e abatimento entre 0 cm e 4 cm são 25% menores e para abatimentos entre 10 cm e 15 cm são 25% maiores.

<sup>4)</sup>  $\gamma = 1 + \exp(-7,8 + 0,1 U)$  para  $U \leq 90\%$ .

NOTAS

1 Para efeito de cálculo, as mesmas expressões e os mesmos valores numéricos podem ser empregados no caso de tração.

2 Para o cálculo dos valores de fluência e retração, a consistência do concreto é aquela correspondente à obtida com o mesmo traço sem a adição de superplastificantes e superfluidificantes.

A espessura fictícia do elemento dada pela seguinte expressão:

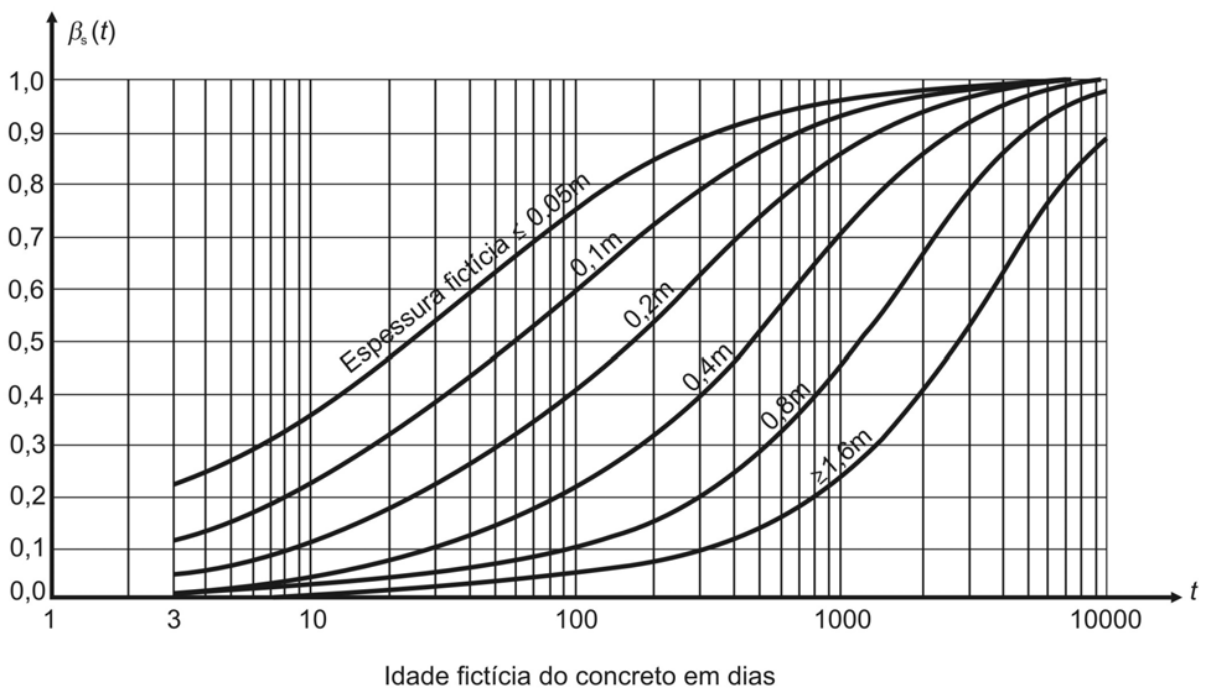
$$h_{fic} = \gamma \frac{2A_c}{u_{ar}} \quad (4.6)$$

Onde;

$\gamma$ : depende da umidade relativa do ambiente

$A_c$ : área da seção transversal da peça;

$u_{ar}$ : é a parte do perímetro externo da seção transversal em contato com o ar.



Idade fictícia do concreto em dias  
**Figura 4-1: Variação de  $\beta_s(t)$  (Figura A.3 NBR6118:2003).**

Os valores de  $\beta_s$  podem ser calculados de forma analítica pela expressão retirada da norma:

$$\beta_s(t) = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A\left(\frac{t}{100}\right)^2 + B\left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C\left(\frac{t}{100}\right)^2 + D\left(\frac{t}{100}\right) + E} \quad (4.7)$$

Onde;

$$A = 40;$$

$$B = 116h^3 - 282h^2 + 220h - 4,8;$$

$$C = 2,5h^3 - 8,8h + 40,7;$$

$$D = -75h^3 + 585h^2 + 496h - 6,8;$$

$$E = -169h^4 + 88h^3 + 584h^2 - 39h + 0,8$$

$h$  é a espessura fictícia em metros; para valores de  $h$  fora do intervalo ( $0,05 \leq h \leq 1,6$ ), adotam-se os extremos correspondentes;

$t$  é o tempo, em dias ( $t \geq 3$ )

Para cálculo dos diversos valores envolvidos é preciso considerar a idade fictícia  $\alpha$ ,  $t_{ef}$  em dias, quando o endurecimento se faz à temperatura ambiente de  $20^\circ\text{C}$  e, nos demais casos, quando não houver cura a vapor, a idade a considerar é a idade fictícia dada por:

$$t = \alpha \sum_i \frac{T_i + 10}{30} \Delta t_{ef,i} \quad (4.8)$$

Onde;

$t$  é a idade fictícia, em dias;

$\alpha$  é o coeficiente dependente da velocidade de endurecimento do cimento; na falta de dados experientais permite-se o emprego dos valores constantes (Tabela 4-2).

$T_i$  é a temperatura média diária do ambiente,  $T_i$ , pode ser admitida constantes.

$\Delta t_{et,i}$  é o período, em dias, durante o qual a temperatura média diária do ambiente,  $T_i$ , pode ser admitida constante.

**Tabela 4-2: Valores da fluência e retração em função da velocidade de endurecimento do cimento (Tabela A.2 NBR 6118:2003).**

| Cimento Portland (CP)   | $\alpha$ |          |
|---|----------|----------|
|   | Fluência | Retração |
| De endurecimento lento (CP III e CP IV, todas as classes de resistência)  | 1        | 1        |
| De endurecimento normal (CP I e CP II, todas as classes de resistência)   | 2        |          |
| De endurecimento rápido (CP V-ARI)  | 3        |          |
| Onde:<br>CP I e CP I-S - Cimento Portland comum;<br>CP II-E, CP II-F e CP II-Z - Cimento Portland composto;<br>CP III - Cimento Portland de alto forno;<br>CP IV - Cimento Portland pozolânico;<br>CP V-ARI - Cimento Portland de alta resistência inicial;<br>RS - Cimento Portland resistente a sulfatos (propriedade específica de alguns dos tipos de cimento citados). |          |          |

No caso de existir cura a vapor, o que é comum é fabricas de pré-moldado, em CARVALHO (2009), apresenta como pode ser calculada.

#### 4.3.2. PERDA POR FLUÊNCIA DO CONCRETO

Da mesma forma que o efeito da retração, supõe-se inicialmente que se tem fluência pura e desta forma o encurtamento do concreto de uma seção estudada será igual a  $\varepsilon_{c,c}(t_0, \infty)$  e que havendo a aderência entre o concreto e a armadura ( $\varepsilon_p = \varepsilon_{c,c}(t, t_0)$ ) corresponderá a um encurtamento na armadura e assim uma perda de tensão dada por:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{p,c}(t, t_0) &= \varepsilon_{c,c}(t, t_0).E_p, \text{ ou ainda;} \\ \Delta\sigma_{p,c}(t, t_0) &= \varepsilon_{c,0}\phi(t, t_0).E_p, \text{ e} \\ \Delta\sigma_{p,c}(t, t_0) &= \frac{\sigma_{cgp}}{E_c}\phi(t, t_0).E_p, \text{ com finalmente} \\ \Delta\sigma_{p,c}(t, t_0) &= \alpha_p \cdot \phi(t, t_0) \cdot \sigma_{cgp} \quad (4.9) \end{aligned}$$

A tensão  $\sigma_{cgp}$  é a tensão que ocorre no concreto no nível do centro de gravidade da armadura de protensão e devido a ação das cargas permanentes inclusive a protensão sendo dada pela expressão:

$$\sigma_{cgp} = \frac{N_p}{A_c} + \frac{N_p \cdot e^2}{I} - \frac{M_{g1} + M_{g2}}{I} e \quad (4.10)$$

Onde;

$N_p$ : força de protensão total;

I: inércia da seção transversal;

e: excentricidade dos cabos de protensão.

M<sub>g</sub>: carregamentos permanentes.

Em casos onde não é necessária grande precisão, os valores finais do coeficiente de fluência  $\phi(t_{\infty}, t_0)$  e da deformação específica de retração  $\epsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$  do concreto, submetido a tensões menores que 0,5 f<sub>c</sub> quando do primeiro carregamento, podem ser obtidos, por interpolação linear, a partir da Tabela 4-3.

**Tabela 4-3: Valores característicos superiores da deformação específica de retração  $\epsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$  e do coeficiente de fluência  $\phi(t_{\infty}, t_0)$ . (Tabela 8.1 NBR 6118:2003).**

| Umidade ambiente %                       |                        | 40 |             | 55          |             | 75          |    | 90 |    |
|--|------------------------|----|-------------|-------------|-------------|-------------|----|----|----|
| Espessura fictícia 2A <sub>c</sub> /u cm |                        | 20 | 60          | 20          | 60          | 20          | 60 | 20 | 60 |
| $\phi(t_{\infty}, t_0)$                  | t <sub>0</sub><br>dias | 5  | 4,4 3,9     | 3,8 3,3     | 3,0 2,6     | 2,3 2,1     |    |    |    |
|  |                        | 30 | 3,0 2,9     | 2,6 2,5     | 2,0 2,0     | 1,6 1,6     |    |    |    |
|  |                        | 60 | 3,0 2,6     | 2,2 2,2     | 1,7 1,8     | 1,4 1,4     |    |    |    |
| $\epsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$<br>‰    | dias                   | 5  | -0,44 -0,39 | -0,37 -0,33 | -0,23 -0,21 | -0,10 -0,09 |    |    |    |
|  |                        | 30 | -0,37 -0,38 | -0,31 -0,31 | -0,20 -0,20 | -0,09 -0,09 |    |    |    |
|  |                        | 60 | -0,32 -0,36 | -0,27 -0,30 | -0,17 -0,19 | -0,08 -0,09 |    |    |    |

O valor da fluência pode ser avaliado de forma mais precisa como está apresentado a seguir. A deformação por fluência do concreto ( $\epsilon_{cc}$ ) compõe-se de duas partes, uma rápida e outra lenta. A fluência rápida ( $\epsilon_{cca}$ ) é irreversível e ocorre durante as primeiras 24 horas após a aplicação da carga que a originou. A fluência lenta é por sua vez composta por duas outras parcelas: a deformação lenta irreversível ( $\epsilon_{ccf}$ ) e a deformação lenta reversível ( $\epsilon_{ccd}$ ).

$$\begin{aligned} \epsilon_{cc} &= \epsilon_{cca} + \epsilon_{ccf} + \epsilon_{ccd} \\ \epsilon_{cc,tot} &= \epsilon_c + \epsilon_{cc} + \epsilon_c(1 + \phi) \quad (4.11) \\ \phi &= \phi_a + \phi_f + \phi_d \end{aligned}$$

Onde;

$\varphi_a$  é o coeficiente de deformação rápida;

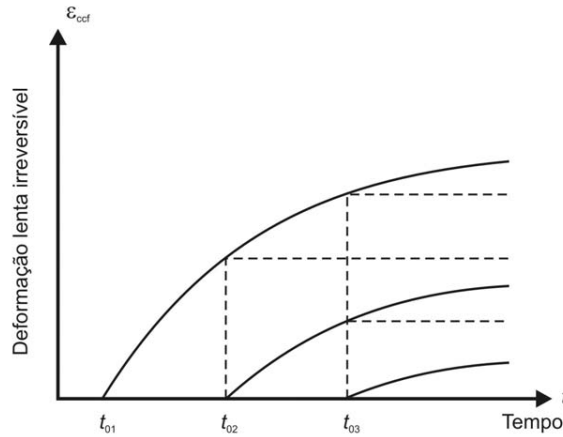
$\varphi_f$  é o coeficiente de deformação lenta irreversível;

$\varphi_d$  é o coeficiente de deformação lenta reversível.

Para o cálculo dos efeitos da fluência, quando as tensões no concreto são as de serviço, admitem-se as seguintes hipóteses:

- a) A deformação por fluência  $\varepsilon_{cc}$  varia linearmente com a tensão aplicada;
- b) Para acréscimos de tensão aplicados em instantes distintos, os respectivos efeitos de fluência se superpõem;
- c) A fluência rápida produz deformações constantes ao longo do tempo; os valores do coeficiente  $\varphi_a$  são função da relação entre a resistência do concreto no momento da aplicação da carga e a sua resistência final;
- d) O coeficiente de deformação lenta reversível  $\varphi_d$  depende apenas da duração do carregamento; o seu valor final e o seu desenvolvimento ao longo do tempo são independentes da idade do concreto no momento da aplicação da carga;
- e) O coeficiente de deformação lenta irreversível  $\varphi_f$  depende de:
  - umidade relativa do ambiente;
  - consistência do concreto no lançamento;
  - espessura fictícia da peça  $h_{fic}$ ;
  - idade  $t_0$  no instante da aplicação da carga;
  - idade fictícia do concreto no instante considerado ( $t$ ).
- f) Para o mesmo concreto, as curvas de deformação lenta irreversível em função do tempo, correspondentes a diferentes idades do concreto no momento do carregamento, são obtidas, umas em relação às outras, por deslocamento paralelo ao eixo das deformações conforme a Figura 5.2.





**Figura 4-2: Variação de  $\varepsilon_{ccf}(t)$ . (Figura A.1 NBR 6118:2003).**

Assim o valor de deformação específica total do concreto é dada:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varepsilon_{cca} + \varepsilon_{ccd} + \varepsilon_{ccf} = \frac{\sigma_c}{E_{c28}} \varphi(t, t_0) \quad (4.12)$$

Com  $E_{c28}$  calculado, para  $j = 28$  dias, pela expressão:  $E_{ci,28} = 5600 f_{ck}^{1/2}$ .

O coeficiente de fluência  $\varphi(t, t_0)$ , válido também para a tração é dado por:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_a + \varphi_{f\infty} [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{d\infty} \beta_d \quad (4.13)$$

Onde;

$t$  é a idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias;

$t_0$  é a idade fictícia do concreto aos ser feito o carregamento único, em dias;

$\varphi_a$  é o coeficiente de fluência rápida, determinado pela expressão;

$$\varphi_a = 0,8 \left[ 1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad (4.14)$$

Onde;

$\frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)}$  é a função do crescimento da resistência do concreto com a idade;

$\varphi_{f\infty} = \varphi_{1c} \cdot \varphi_{2c}$  é o valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível;

$\varphi_{1c}$  é o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente  $U$ , em porcentagem, e da consistência do concreto dado pela Tabela 4-2;

$\varphi_{2c}$  é o coeficiente dependente da espessura fictícia  $h_{fic}$  da peça.

$$\varphi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}} \quad (4.15)$$

Onde;

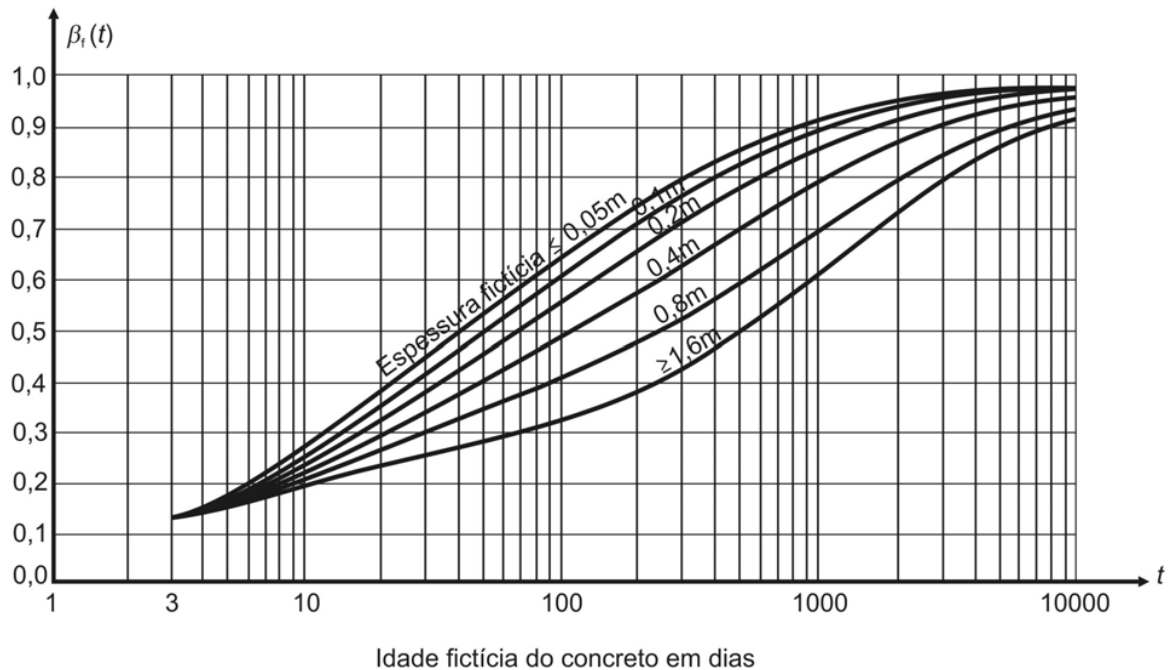
$h_{fic}$  é a espessura fictícia em centímetro;

$\beta_f(t)$  ou  $\beta_f(t_0)$  é o coeficiente relativo a deformação lenta irreversível, função da idade do concreto (Figura 4-3);

$\varphi_{d\infty}$  é o valor final do coeficiente de deformação lenta reversível que é considerado igual a 0,4;

$\beta_d(t)$  é o coeficiente relativo a deformação lenta reversível função do tempo  $(t-t_0)$  decorrido após o carregamento.

$$\beta_d(t) = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} \quad (4.16)$$



**Figura 4-3: Variação de  $\beta_f(t)$ . (Figura A.2 NBR 6118:2003).**

Os valores de  $\beta_f$  podem ser calculados de forma analítica pela expressão retirada da norma:

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D} \quad (4.17)$$

Onde;

$$A = 42h^3 - 350h^2 + 588h + 113;$$

$$B = 768h^3 - 3060h^2 + 3234h - 23;$$

$$C = -200h^3 + 13h^2 + 1090h + 183;$$

$$D = 7579h^3 - 31916h^2 + 35343h + 1931;$$

$h$  é a espessura fictícia em metros; para valores de  $h$  fora do intervalo ( $0,05 \leq h \leq 1,6$ ), adotam-se os extremos correspondentes;

$t$  é o tempo, em dias ( $t \geq 3$ )

### 4.3.3. PERDA POR RELAXAÇÃO DA ARMADURA

A intensidade da relaxação pura do aço (deformação constante) é determinada pelo coeficiente  $\psi(t, t_0)$  definido por:

$$\psi(t, t_0) = \Psi(t, t_0) = \frac{\Delta\sigma_{pr}(t, t_0)}{\sigma_{pi}} \quad (4.18)$$

Onde;

$\Delta\sigma_{pr}(t, t_0)$  é a perda de tensão por relaxação pura desde o instante  $t_0$  do estiramento até o instante  $t$  considerado.

$\sigma_{pi}$ : tensão da armadura de protensão no instante de seu estiramento

Os valores médios de relaxação, medidos após 1000 h à temperatura constante de 20°C para as perdas de tensão referidas a valores básicos da tensão inicial de 50% a 80% da resistência característica  $f_{ptk}$  ( $\Psi_{1000}$ ) estão reproduzidos na Tabela 4-4.

**Tabela 4-4: Valores de  $\Psi_{1000}$ , em porcentagem (Tabela NBR 6118:2003).**

| $\sigma_{po}$ | Cordoalhas |     | Fios |     | Barras |
|---------------|------------|-----|------|-----|--------|
|               | RN         | RB  | RN   | RB  |        |
| $0,5 f_{ptk}$ | 0          | 0   | 0    | 0   | 0      |
| $0,6 f_{ptk}$ | 3,5        | 1,3 | 2,5  | 1,0 | 1,5    |
| $0,7 f_{ptk}$ | 7,0        | 2,5 | 5,0  | 2,0 | 4,0    |
| $0,8 f_{ptk}$ | 12,0       | 3,5 | 8,5  | 3,0 | 7,0    |

Onde:  
RN é a relaxação normal;  
RB é a relaxação baixa.

Os valores correspondentes a tempos diferentes de 1000 h, sempre a 20°C, podem ser determinados a partir da seguinte expressão, onde o tempo deve ser expresso em dias:

$$\Psi(t, t_0) = \Psi_{1000} \left( \frac{t - t_0}{41,67} \right)^{0,15} \quad (4.19)$$

Para tensões inferiores a  $0,5 f_{ptk}$ , admite-se que não haja perda de tensão por relaxação.

Para tensões intermediárias entre os valores fixados na Tabela 4-4, pode ser feita interpolação linear.

Pode-se considerar que para o tempo infinito o valor de  $\psi(t, t_0)$  é dado por  $\psi(t_{\infty}, t_0) \approx 2,50 \Psi_{1000}$ .

#### **4.3.4. PERDAS AO LONGO DO TEMPO CONSIDERANDO AS PERDAS PROGRESSIVAS**

Os valores parciais e totais das perdas progressivas de protensão, decorrentes da retração e fluência do concreto e da relaxação do aço de protensão, devem ser determinados levando-se em conta a interação dessas causas, podendo ser utilizados os processos indicados em a, b e c. Nesses processos admite-se que exista aderência entre a armadura e o concreto e que a peça permaneça no estágio 1.

##### *a) Método simplificado para o caso de fases únicas de operação*

Este caso é aplicável quando são satisfeitas as condições seguintes:

✓ A concretagem da peça, bem como a protensão, são executadas cada uma delas em fases suficientemente próximas para que se desprezem os efeitos recíprocos de uma fase sobre a outra;

✓ Os cabos possuem entre si afastamentos suficientemente pequenos em relação à altura da seção da peça, de modo que seus efeitos possam ser supostos equivalentes ao de um único cabo, com seção transversal de área igual à soma das áreas das seções dos cabos componentes, situado na posição da resultante dos esforços neles atuantes (cabo resultante).

Nesse caso, admite-se que no tempo  $t$  as deformações progressivas do concreto e do aço de protensão, na posição do cabo resultante, sejam dadas por:

$$\Delta\sigma_p(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cs}(t, t_0)E_p - \alpha_p \sigma_{c,p0+g} \varphi(t, t_0) - \sigma_{cp0} \chi(t, t_0)}{\chi_p + \chi_c \alpha_p \eta \rho_p} \quad (4.20)$$

$$\Delta\varepsilon_{pt} = \frac{\sigma_{po}}{E_p} \chi(t, t_0) + \frac{\Delta\sigma_p(t, t_0)}{E_p} \chi_p \quad (4.21)$$

$$\Delta\varepsilon_{ct} = \frac{\sigma_{c,p0+g}}{E_{ci28}} \varphi(t, t_0) + \chi_c \frac{\Delta\sigma_c(t, t_0)}{E_{ci28}} + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \quad (4.22)$$

Onde;

$\varphi_{c,pog}$ : tensão no concreto devida à protensão e à carga permanente;

$\varphi(t, t_0)$ : coeficiente de fluência do concreto no instante  $t$  para protensão e carga permanente aplicadas no instante  $t_0$ ;

$\sigma_{po}$ : tensão na armadura ativa devida à protensão e à carga permanente mobilizada no instante  $t_0$ ;

$\chi(t, t_0)$ : coeficiente de fluência do aço =  $-\ln [1 - \psi(t, t_0)]$ ;

$\varepsilon_{cs}(t, t_0)$ : retração no instante  $t$ , descontada a retração ocorrida até o instante  $t_0$ ;

$\psi(t, t_0)$ : coeficiente de relaxação do aço no instante  $t$  para protensão e carga permanente mobilizada no instante  $t_0$ ;

$$\chi_c = 1 + 0,5 \varphi(t, t_0)$$

$$\chi_p = 1 + \chi(t, t_0)$$

$\Delta\sigma_c(t, t_0)$ : variação da tensão do concreto adjacente ao cabo resultante entre  $t_0$  e  $t$ ;

$\Delta\sigma_p(t, t_0)$ : variação da tensão no aço de protensão entre  $t_0$  e  $t$ ;

$\rho_p$ : taxa geométrica da armadura de protensão =  $A_p / A_c$ ;

$$\eta = 1 + e_p^2 \cdot A_c / I_c$$

$e_p$ : excentricidade do cabo resultante em relação ao baricentro da seção do concreto;

$A_p$ : área da seção transversal do cabo resultante;

$A_c$ : área da seção transversal do concreto;

$I_c$ : momento central de inércia na seção do concreto;

$$\alpha_p = \frac{E_p}{E_{ci28}}$$

#### b) Processo aproximado

Este processo substitui o anterior desde que satisfeitas as mesmas condições de aplicação e a retração não difira mais de 25% do valor de  $[-8 \times 10^{-5} \varphi(t_\infty, t_0)]$ .

Para os aços de relaxação normal (RN) (em porcentagem).

$$\frac{\Delta\sigma_p(t_\infty, t_0)}{\sigma_{p0}} = 18,1 + \frac{\alpha_p}{47} [\varphi(t_\infty, t_0)]^{1,57} (3 + \sigma_{c, po+g}) \quad (4.23)$$

Para os aços de relaxação baixa (RB) (em porcentagem)

$$\frac{\Delta\sigma_p(t_\infty, t_0)}{\sigma_{p0}} = 7,4 + \frac{\alpha_p}{18,7} [\varphi(t_\infty, t_0)]^{1,07} (3 + \sigma_{c, po+g}) \quad (4.24)$$

#### c) Método geral de cálculo

Quando as ações permanentes (carga permanente ou protensão) são aplicadas parceladamente em idades diferentes, é preciso considerar a fluência de cada uma das camadas de concreto e a relaxação de cada cabo, separadamente. Permitem-se as substituições das seções transversais compostas de diferentes camadas por prismas equivalentes que se

comportam como camadas discretas. Permite-se a consideração isolada da relaxação de cada cabo independentemente da aplicação posterior de outros esforços permanentes.

Em SILVA (2003), o método dos prismas equivalentes utiliza a propriedade que permite analisar uma seção sujeita à flexão composta substituindo-a por dois prismas posicionados nos seus pares de pontos conjugados. Dessa forma, a análise de seções do tipo apresentado na Figura 4-4 conduz a um sistema de equações lineares desacopladas entre si, facilitando a obtenção dos resultados finais. Para um melhor aprofundamento neste assunto, recomenda-se SILVA (2003).

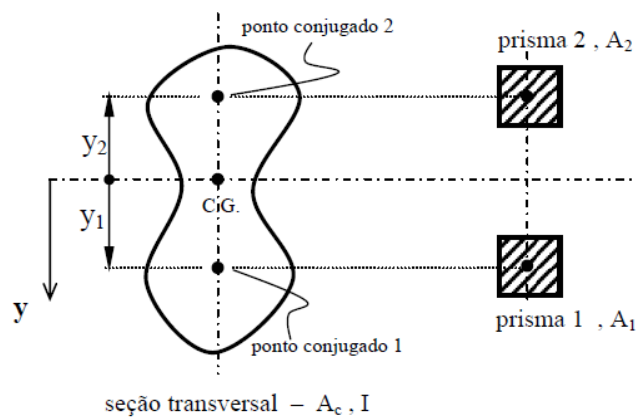


Figura 4-4: Conceito de prismas equivalentes em uma seção transversal plana (SILVA 2003).

---

## 5. CÁLCULO DA ARMADURA LONGITUDINAL

---

Este capítulo apresenta os critérios de cálculo da armadura longitudinal para se garantir a segurança tanto no estado limite último quanto de serviço.

### 5.1. INTRODUÇÃO

---

Quando se calcula uma peça de concreto armado ou protendido, deve-se garantir a segurança no estado limite último assim como verificar as condições de serviço então além das verificações no estado limite último é preciso verificar a estrutura em seu funcionamento, ou seja, em serviço ou uso.

Essas verificações correspondem aos estados limites de serviço de fissuração e deformação excessiva. Não basta uma estrutura ter segurança à ruptura é preciso que funcione adequadamente e que tenha durabilidade compatível ao que foi projetada.

A fissuração excessiva de uma peça em concreto protendido pode comprometer significativamente sua durabilidade. Embora não seja a única causa, ou condição necessária, pode-se dizer que, quando de sua ocorrência, há grande risco de haver uma degradação rápida do concreto superficial e da armadura. Outros fatores, como: porosidade do concreto, cobrimento insuficiente da armadura, presença de agentes agressivos etc., contribuem ou podem ser determinantes na durabilidade da estrutura. Examinados esses fatores, o projetista deve evitar que a peça sofra fissuração excessiva, devida à flexão, detalhando adequadamente a armadura na seção transversal e, se for o caso, aumentando a sua quantidade.

Assim, em relação à questão de fissuração, em geral, deseja-se evitar situações em que a fissuração do concreto possa causar uma diminuição na vida útil da estrutura. O uso de fator água cimento (A/C) adequado, resistência mínima do concreto e cobrimentos mínimos adequados para armadura também fazem parte das prescrições de se evitar a corrosão da armadura e, portanto a diminuição da vida útil da estrutura. Portanto, a adoção de resistência mínima de concreto, cobrimento mínimo para armadura e verificação de estados de fissuração se complementam dando condição, junto com as boas técnicas de confecção da estrutura, que haja garantia de uma vida útil mínima. A questão do estado limite de deformação excessivo está ligada realmente as questões de estética e funcionamento adequado.



Deformação excessiva em um piso pode ser uma questão estética para quem consegue perceber este defeito, mas pode ser no caso de piso industrial, uma impossibilidade de se montar máquinas que toleram um pequeno desnivelamento entre seus apoios. Também uma peça de telha W pode ao longo do tempo perder sua declividade de forma que acumule água. Finalmente, embora tenha se colocado como verificação dos estados limites de serviço, os estados limites podem também, no caso de concreto protendido os relativos a fissuração, serem usados como procedimentos de dimensionamento da armadura longitudinal.

Já o dimensionamento no estágio limite último de colapso em concreto protendido pouco difere do efetuado em peças de concreto armado. As hipóteses que uma seção transversal deve obedecer tanto em concreto armado quanto em protendido estão descritas no item 17.2.2 da norma NBR 6118:2003.

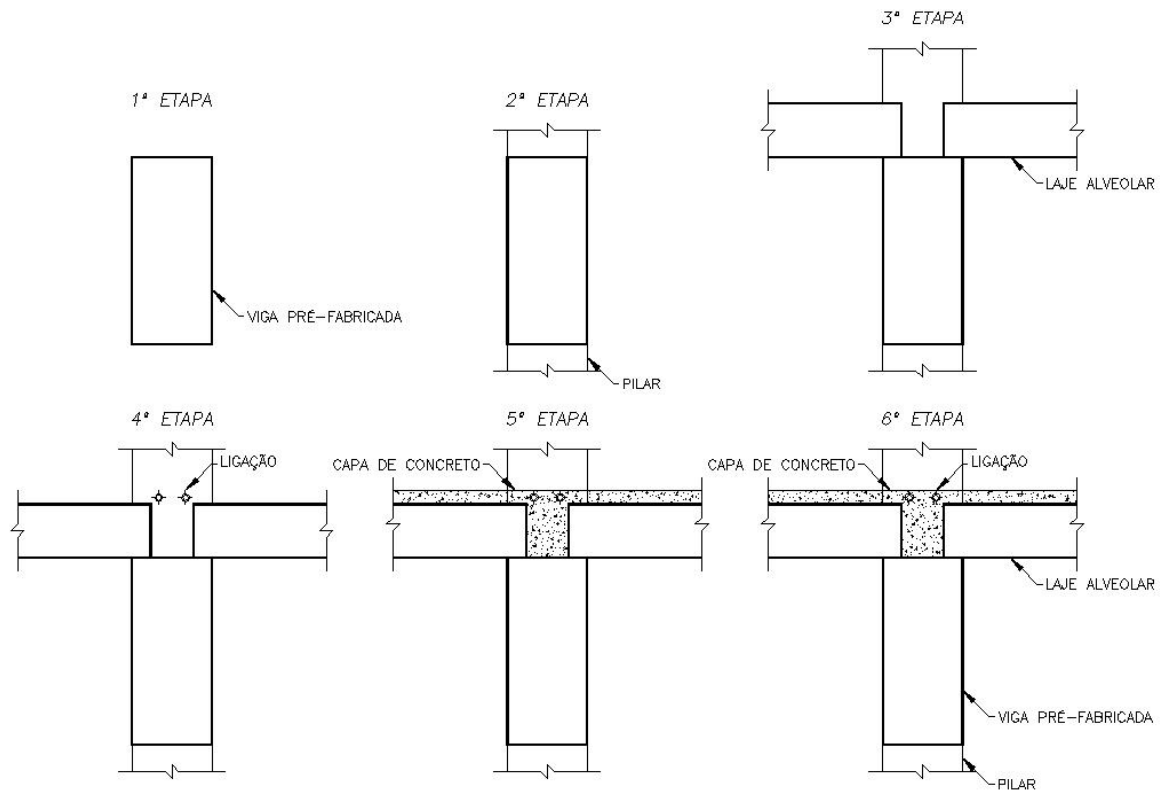
As estruturas em concreto protendido mais que as em concreto armado apresentam uma gama de soluções em maior número para um mesmo problema. Só o fato de se poderem mesclar as armaduras passivas e ativas já conduz a pelo menos duas famílias de soluções. O controle da fissuração do concreto através da introdução de esforços de compressão irá criar as diversas matrizes de soluções possíveis na família protendida com ou sem armadura passiva.

## 5.2. SEÇÃO COMPOSTA

---

Os elementos pré-fabricados apresentam fases distintas de características geométricas e de carregamentos. Quando o elemento pré-fabricado acaba de ser produzido em uma fábrica, por exemplo, a seção transversal ali apresentada é caracterizada como seção em vazio, ou seja, somente a seção do pré-moldado, já quando esta mesma viga é transportada e posicionada no seu lugar definitivo, onde receberá o carregamento de laje alveolar e esta laje posteriormente receberá uma capa de concreto, podemos dizer que esta nova seção transversal é chamada como seção composta.

Estas diferentes fases de carregamento e geometria das seções poderão ser consideradas no dimensionamento do pré-moldado. A Figura 5-1 apresenta as principais fases de uma viga com seção composta.



**Figura 5-1: Seção transversal da viga pré-fabricada com as etapas seguidas para execução de uma estrutura com pórticos com ligações semi-rígidas.**

A primeira etapa corresponde a seção da viga pré-moldada. A segunda refere-se ao transporte, posicionando a viga no seu lugar definitivo. A colocação das lajes alveolares corresponde a terceira etapa. A quarta etapa é o posicionamento das armaduras de ligação, o projetista define se existe a necessidade de concretagem da ligação neste momento ou somente na etapa seguinte (critérios de cálculo). A quinta etapa é a concretagem da capa, solidarizando a ligação. Por último a sexta etapa é a seção composta final.

O critério de cálculo citado acima referente a quarta etapa, é a definição do projetista se a capa de concreto entrará como carga, sendo estes esforços mobilizados pela armadura longitudinal e com o esquema estático bi-articulado. Caso opte pela concretagem da ligação, quando a carga da capa entrar este esforço será resistido pela armadura longitudinal e pela ligação.

Com a aplicação da capa de concreto além da formação da seção composta é possível que a laje seja calculada como continua para os carregamentos após o endurecimento da capa de concreto.

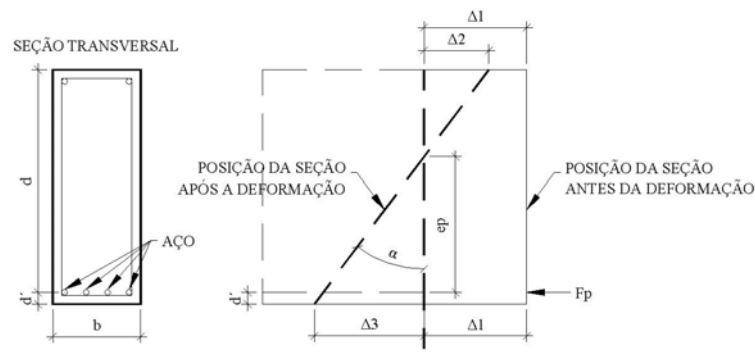
### 5.3. TENSÕES NA ARMADURA ATIVA

---

Como já enunciado toda estrutura, inclusive as de concreto protendido, precisam além de ser garantido ao colapso com uma margem de segurança, funcionar adequadamente em serviço (estados limites em serviço). Assim, para as peças fletidas em protendido é sempre possível resolver o problema de estados limites de duas maneiras. A primeira pressupõe que a condição de colapso é a que conduz à maior quantidade de armadura longitudinal e, desta forma, dimensiona-se, a armadura no estágio III e verifica-se a condição de fissuração com o número de cabos já determinado. No segundo raciocínio considera-se que a condição de utilização de fissuração é a mais desfavorável e através da limitação das tensões normais na seção transversal, determina-se o número de cabos necessários em serviço verificando-se, em seguida o estado limite último.

Considerando o primeiro caso, o problema que se deve resolver é o seguinte: Dada a seção transversal, a posição do centro de gravidade da armadura de protensão (quando não conhecido será arbitrado), as características dos materiais (aço e concreto), momentos atuantes, qual deve ser a seção de armadura longitudinal de protensão que satisfaça à ruptura. Considerando o esforço de protensão como interno, a questão pode ser tratada como de flexão simples e o efeito de protensão entra só no equilíbrio do momento fletor. Trata-se de um procedimento aproximado, porém adotado largamente na prática.

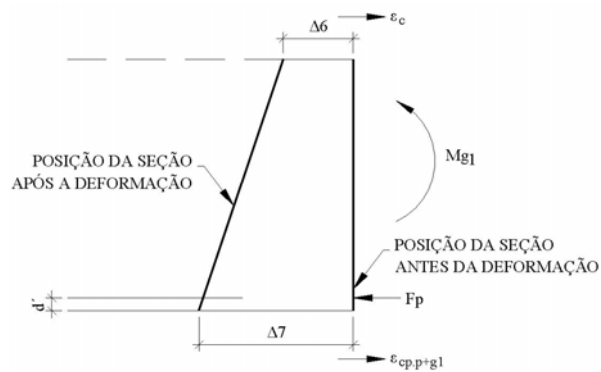
Para utilizar este procedimento é necessário conhecer o valor da tensão na armadura ( $\sigma_{pd}$ ) na configuração do estado limite último sendo necessário fazer uma análise cuidadosa do que ocorre. Imaginando uma seção transversal retangular como a apresentada na Figura 5-2 e considerando inicialmente o efeito apenas da força de protensão  $F_p$ . Nesta situação a seção transversal sofre dois efeitos: um encurtamento  $\Delta 1$  devido o efeito do normal  $F_p$  e uma rotação  $\alpha$ , devido força de protensão atuando com uma excentricidade de  $e_p$  que causará as deformações  $\Delta 2$  e  $\Delta 3$  (fibra superior e junto a armadura de protensão) (Figura 5-2) Devido a ação do peso próprio (Figura 5-3) haverá uma rotação  $\beta$  (contrária ao efeito da protensão) causando os deslocamentos  $\Delta 4$  e  $\Delta 5$ . Na Figura 5-3 os dois efeitos são considerados resultando nos deslocamentos  $\Delta 6$  e  $\Delta 7$  que corresponderão as deformações específicos  $\epsilon_c$  e  $\epsilon_{cp,p+gl}$ . Na figura em questão considerou-se que as deformações específicas são de encurtamentos, mas poderiam, por exemplo, na fibra superior ocorrer um pequeno alongamento sem que houvesse fissuração no concreto.



**Figura 5-2: Deformação da seção após protensão.**

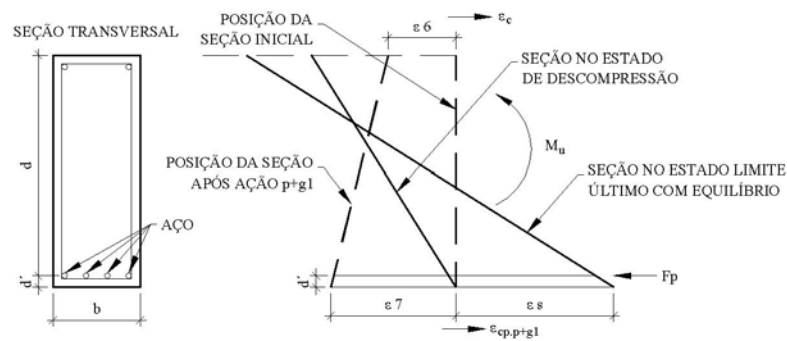


**Figura 5-3: Deformação da seção após peso próprio.**



**Figura 5-4: Deformação da seção após peso próprio e protensão.**

Após a execução da protensão e havendo igualdade entre deformação específica do concreto com o da armadura e considerando a atuação do momento último uma seção até encontrar uma situação de equilíbrio passará pelo o estado limite de descompressão (Figura 5-5) como sendo aquele em que um ou mais pontos a tensão no concreto é nula e no restante da seção não haverá tensão de tração.



**Figura 5-5: Seção transversal no estados limites de descompressão e limite ultimo.**

Assim a deformação que armadura sofrerá até chegar no estado limite último em equilíbrio será, neste caso, composta de três parcelas: a) a distensão provocado pelo macaco já descontadas todas as perdas ou não (o que for mais desfavorável), b) a movimentação do concreto (já aderente a armadura) até que a tensão na fibra inferior, próxima a armadura ativa (a menos da distância  $d'$  no mesmo nível da armadura) seja nula  $\varepsilon_7$  e 3) a deformação correspondente a  $\varepsilon_s$  necessária para haver equilíbrio.

Finalmente pode-se dizer que a tensão na armadura de protensão depende da efetivação da protensão (pré-alongamento)  $\varepsilon_p$ , a deformação para chegar-se ao estado de descompressão  $\varepsilon_7(\varepsilon_{cp,p+g1})$  e a deformação que ocorre depois desta que é designada aqui simplesmente por  $\varepsilon_s$ , que deve ser menor que 1% (evitar a deformação excessiva da armadura depois de estar em contato com o concreto ou aberturas de fissuras muito grandes).

O valor de  $\varepsilon_7$  pode ser obtido pela expressão:

$$\varepsilon_7 = \varepsilon_{cp,p+g1} = \left( \frac{N_p}{A_c} + \frac{N_p \cdot e_p^2}{I_c} - \frac{M_{g1} \cdot e_p}{I_c} \right) \cdot \frac{1}{E_c} \quad (5.1)$$

Onde:

$N_p$  é o esforço normal de protensão na seção

$M_{g1}$  – momento devido a ação do peso próprio na seção

$e_p$  – excentricidade da armadura ativa

$I_c, E_c$  – momentos de inércia da seção e módulo de elasticidade do concreto respectivamente.

Esta parcela de deformação será diferente se a protensão não for suficiente para mobilizar todo o peso próprio da viga, mas por ser pequena e não ter a quantidade final de cabos, costuma ser desprezada nos cálculos usuais.

Para trabalhar com os aços de protensão vamos usar os resultados da publicação de VASCONCELOS (1980) dada na Tabela 5-1.

Cabe ainda ressaltar que a segurança à ruína deve existir mesmo na consideração mais desfavorável e, portanto é preciso analisar a seção sob a ação do maior dos esforços atuantes e com a menor força de protensão, ou seja, após todas as perdas (no tempo “infinito”), não se esquecendo, porém, de verificar outras situações que não esta (situação em vazio, por exemplo).

**Tabela 5-1: Tensão no aço  $\sigma_{sd}$  (MPa).**

| $\varepsilon$ (‰) | 5,25 | 6,794 | 7,438 | 8,167 | 9,000 | 9,962 | 10,00 | 12,50 | 15,00 | 17,5 |
|-------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| CP175             | 1025 | 1264  | 1316  | 1344  | 1365  | 1368  | 1368  | 1378  | 1388  | 1397 |
| CP190             | 1025 | 1314  | 1411  | 1459  | 1482  | 1486  | 1486  | 1496  | 1507  | 1517 |

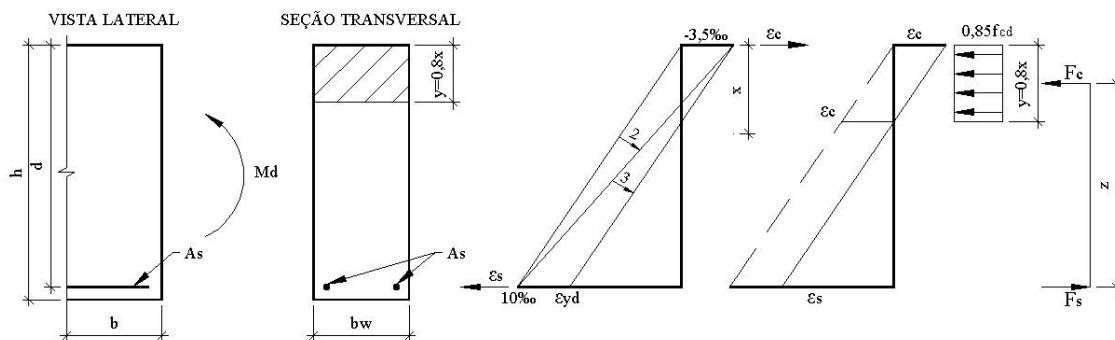
| $\varepsilon$ (‰) | 20,00 | 22,50 | 25,00 | 27,5 | 30,00 | 32,50 | 35,00 | 37,50 | 40,00 |
|-------------------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| CP175             | 1407  | 1416  | 1426  | 1436 | 1445  | 1455  | 1464  | 1474  | 1484  |
| CP190             | 1527  | 1538  | 1548  | 1559 | 1569  | 1579  | 1590  | 1600  | 1611  |

## 5.4. CÁLCULO DA ARMADURA LONGITUDINAL EM VIGAS SOB FLEXÃO SIMPLES

O cálculo da quantidade de armadura longitudinal de armaduras passivas ou ativas, para seções transversais retangulares, conhecidos a resistência do concreto ( $f_{ck}$ ), largura da seção ( $b_w$ ), altura útil ( $d$ ) e tipo de aço ( $f_{yd}$  e  $\varepsilon_{yd}$ ) é feito, de maneira simples, a partir do equilíbrio das forças atuantes na seção. Será estudada inicialmente a flexão normal pura e simples, que é representada pelos domínios 2, 3, 4 e 4a.

### 5.4.1. EQUACIONAMENTO

Seja o seguinte problema: conhecidos  $f_{ck}$ ,  $b_w$ ,  $d$ , tipo de aço ( $f_{yd}$  e  $\varepsilon_{yd}$ ) e  $M_d$  ( $M_d = 1,4 \cdot M$ ), determinar a área da armadura longitudinal necessária ( $A_s$ ) para que uma viga de concreto armado e seção transversal retangular resista ao momento de cálculo (Figura 5-6).



**Figura 5-6: Viga de seção retangular e diagramas de deformações e tensões na seção solicitada pelo momento de cálculo  $M_d$ .**

a) *Equilíbrio da seção:*

**Equilíbrio das forças atuantes normais a seção transversal:** como não há força normal externa, a força atuante no concreto ( $F_c$ ) deve ser igual a força atuante na armadura ( $F_s$ ).

$$\sum F = 0 \rightarrow F_s - F_c = 0 \rightarrow F_s = F_c \quad (5.2)$$

**Equilíbrio dos momentos:** o momento das forças internas em relação a qualquer ponto (no caso, em relação ao C.G. da armadura) deve ser igual ao momento externo de cálculo:

$$\sum M = M_d \rightarrow M_d = F_c \cdot z \quad (5.3)$$

De ( 5.2) e (5.3).

$$M_d = F_c \cdot z \quad (5.4)$$

b) *Posição da linha neutra (x):*

Conhecendo-se a posição da linha neutra é possível saber o domínio em que a peça está trabalhando e calcular a resultante das tensões de compressão no concreto ( $F_c$ ) e o braço de alavanca (z).

$$F_c = (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (0,8 \cdot x)$$

$$z = d - 0,4 \cdot x \quad (\text{braço de alavanca}).$$

Colocando  $F_c$  e  $z$  na equação (5.3), tem-se:

$$M_d = F_c \cdot z = (0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot 0,8 \cdot x) \cdot (d - 0,4 \cdot x) = b_w \cdot f_{cd} \cdot 0,68 \cdot x \cdot (d - 0,4 \cdot x)$$

ou ainda,

$$M_d = (0,68 \cdot x \cdot d - 0,272 \cdot x^2) \cdot b_w \cdot f_{cd} \quad (5.5)$$

Resolvendo a equação (5.5) obtém-se  $x$ , o qual define a posição da linha neutra, que é fundamental para a solução do problema proposto. Nota-se que a variação de  $x$  não é linear com o esforço solicitante  $M_d$ , mas segue um polinômio do segundo grau.

*c) Cálculo da área necessária de armadura ( $A_s$ )*

Com o valor de  $x$  determinado acima é possível encontrar  $A_s$ . A força na armadura ( $F_s$ ) vem do produto da área de aço ( $A_s$ ) pela tensão atuante no aço ( $f_s$ ).

Da equação (5.4) tem-se  $\frac{M_d}{z} = F_s = f_s \cdot A_s$  resultando

$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{pd}} \quad (5.6)$$

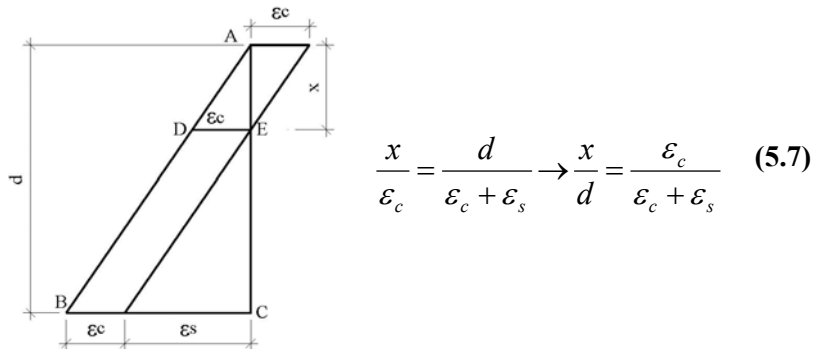
O valor de  $f_{pd}$  é obtido a partir de  $\varepsilon_t$  com  $\varepsilon_t = \varepsilon_p + \varepsilon_s + \varepsilon_7$ , sendo o valor de  $\varepsilon_7$  desprezado, pois este valor é pequeno para a se determiná-lo o valor é necessário conhecer a quantidade de cabos antes do dimensionamento. O valor de  $\varepsilon_p$  a ser empregado deverá ser o correspondente ao tempo infinito quando se tratar de combinação de todas as ações e no tempo zero quando se verificar o estado limite último logo após a protensão.

*d) Verificação do domínio em que a peça atingirá o estado limite último*

Obtido o valor de  $x$  que define a posição (altura) da linha neutra, é possível verificar em que domínio a peça atingirá o estado limite último que é muito importante para o caso de concreto armado, o caso de peças em concreto protendido interessa apenas para o cálculo do valor de  $\varepsilon_s$  de deformação que ocorre no aço de protensão após a neutralização. Na flexão simples, que é o que está aqui sendo considerados, os domínios possíveis são o 2, o 3 e o 4. No início do domínio 2 tem-se  $\varepsilon_c = 0$ , e no final do domínio 4 tem-se  $\varepsilon_s = 0$ , que são as piores situações que podem ocorrer. No primeiro caso o concreto não contribui na resistência e no segundo o aço de protensão trabalha apenas com o pré-alongamento.



**Relação entre deformações:** como as seções permanecem planas após a deformação, por semelhança dos triângulos **ABC** e **ADE** do diagrama de deformações (Figura 5-7) é possível obter a relação entre a posição da linha neutra (**x**) e a altura útil (**d**):



**Figura 5-7: Relação entre a posição da linha neutra e a altura útil.**

**Posição da linha neutra:** no limite do domínio 2 e em todo o 3 tem-se a deformação específica do concreto  $\varepsilon_c = 3,5\text{‰}$  (0,0035); colocando esse valor na equação (5.7) resulta:

$$\frac{x}{d} = \frac{0,0035}{0,0035 + \varepsilon_s}$$

Concluindo-se que para uma seção conhecida a posição da linha neutra depende apenas do tipo de aço.

## 5.5. FÓRMULAS ADIMENSIONAIS E TABELA PARA DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES RETANGULARES

Segundo CARVALHO *et al* (2007) sempre que possível é conveniente trabalhar com fórmulas adimensionais, pois isto facilita o emprego de diversos sistemas de unidades e permite a utilização de tabelas e gráficos de modo mais racional. Na forma adimensional, as equações ficam:

a) Equação de  $M_d$  (5.5)

Dividindo ambos os membros da equação de  $M_d$  (5.5) por  $b_w d^2 f_{cd}$  tem-se:

$$\frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{(0,68 \cdot x \cdot d - 0,272 \cdot x^2) \cdot b_w \cdot f_{cd}}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \left( 0,68 \cdot \frac{x}{d} - 0,272 \cdot \frac{x^2}{d^2} \right)$$

Chamando  $\frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = KMD$  e  $\frac{x}{d} = KX$  a equação acima fica:

$$KMD = 0,68 \cdot (KX) - 0,272 \cdot (KX)^2 \quad (5.8)$$

A equação (5.8) contém apenas termos adimensionais, e  $KX$  só pode variar de 0 a 1 ( $x = 0$  e  $x = d$ ):

$$x = 0 \text{ (início do domínio 2)} \rightarrow KX = \frac{x}{d} = 0 \rightarrow KMD = 0$$

$$x = d \text{ (fim do domínio 4)} \rightarrow KX = \frac{x}{d} = 1 \rightarrow KMD = 0,408$$

b) *Expressão que fornece o braço de alavanca  $z$  ( $z = d - 0,4 \cdot x$ )*

Dividindo os dois termos por  $d$  resulta:

$$\frac{z}{d} = \frac{d - 0,4 \cdot x}{d} = 1 - 0,4 \cdot \frac{x}{d}$$

Chamando  $\frac{z}{d} = KZ$  e lembrando que  $KX = \frac{x}{d}$ , da equação anterior obtém-se  $KZ$ :

$$KZ = 1 - 0,4 \cdot KX \quad (5.9)$$

c) *Expressão para o cálculo da armadura*

$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_s}$  e, como  $z = (KZ) \cdot d$ , resulta:

$$A_s = \frac{M_d}{(KZ) \cdot d \cdot f_s} \quad (5.10)$$

d) *Equação que relaciona as deformações com a altura da linha neutra (5.7)*

$\frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s}$  e, como  $\frac{x}{d} = KX$  resulta:

$$KX = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \quad (5.11)$$

Como **KX** só admite valores de 0 a 1, pode-se construir a Tabela 5-2 em que a cada **KX** arbitrado entre 0 e 1 corresponde: um valor de **KMD**, calculado pela equação (5.8); um valor de **KZ** calculado pela equação (5.9); obtem-se  $\epsilon_c$  (**EC**), o valor de  $\epsilon_s$  (**ES**) pela equação (5.11). É importante destacar que conhecido o par de deformações ( $\epsilon_c$  ;  $\epsilon_s$ ) conhece-se o domínio em que a peça está trabalhando. Na Tabela 5-2, por praticidade, foram dados valores a **KMD** e calculados os demais, mantidos os limites de validade para **KX**.

**Tabela 5-2: Valores para cálculo de armadura longitudinal de seções retangulares.**

| <b>KMD</b> | <b>KX</b> | <b>KZ</b> | <b>EC</b> | <b>ES</b> | <b>KMD</b> | <b>KX</b> | <b>KZ</b> | <b>EC</b> | <b>ES</b> |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0,0100     | 0,0148    | 0,9941    | 0,1502    | 10,0000   | 0,2050     | 0,3506    | 0,8597    | 3,5000    | 6,4814    |
| 0,0200     | 0,0298    | 0,9881    | 0,3068    | 10,0000   | 0,2100     | 0,3609    | 0,8556    | 3,5000    | 6,1971    |
| 0,0300     | 0,0449    | 0,9820    | 0,4704    | 10,0000   | 0,2150     | 0,3714    | 0,8515    | 3,5000    | 5,9255    |
| 0,0400     | 0,0603    | 0,9759    | 0,6414    | 10,0000   | 0,2200     | 0,3819    | 0,8473    | 3,5000    | 5,6658    |
| 0,0500     | 0,0758    | 0,9697    | 0,8205    | 10,0000   | 0,2250     | 0,3925    | 0,8430    | 3,5000    | 5,4170    |
| 0,0550     | 0,0836    | 0,9665    | 0,9133    | 10,0000   | 0,2300     | 0,4033    | 0,8387    | 3,5000    | 5,1785    |
| 0,0600     | 0,0916    | 0,9634    | 1,0083    | 10,0000   | 0,2350     | 0,4143    | 0,8343    | 3,5000    | 4,9496    |
| 0,0650     | 0,0995    | 0,9602    | 1,1056    | 10,0000   | 0,2400     | 0,4253    | 0,8299    | 3,5000    | 4,7297    |
| 0,0700     | 0,1076    | 0,9570    | 1,2054    | 10,0000   | 0,2450     | 0,4365    | 0,8254    | 3,5000    | 4,5181    |
| 0,0750     | 0,1156    | 0,9537    | 1,3077    | 10,0000   | 0,2500     | 0,4479    | 0,8208    | 3,5000    | 4,3144    |
| 0,0800     | 0,1238    | 0,9505    | 1,4126    | 10,0000   | 0,2550     | 0,4594    | 0,8162    | 3,5000    | 4,1181    |
| 0,0850     | 0,1320    | 0,9472    | 1,5203    | 10,0000   | 0,2600     | 0,4711    | 0,8115    | 3,5000    | 3,9287    |
| 0,0900     | 0,1403    | 0,9439    | 1,6308    | 10,0000   | 0,2650     | 0,4830    | 0,8068    | 3,5000    | 3,7459    |
| 0,0950     | 0,1485    | 0,9406    | 1,7444    | 10,0000   | 0,2700     | 0,4951    | 0,8020    | 3,5000    | 3,5691    |
| 0,1000     | 0,1569    | 0,9372    | 1,8611    | 10,0000   | 0,2750     | 0,5074    | 0,7970    | 3,5000    | 3,3981    |
| 0,1050     | 0,1654    | 0,9339    | 1,9810    | 10,0000   | 0,2800     | 0,5199    | 0,7921    | 3,5000    | 3,2324    |
| 0,1100     | 0,1739    | 0,9305    | 2,1044    | 10,0000   | 0,2850     | 0,5326    | 0,7870    | 3,5000    | 3,0719    |
| 0,1150     | 0,1824    | 0,9270    | 2,2314    | 10,0000   | 0,2900     | 0,5455    | 0,7818    | 3,5000    | 2,9162    |
| 0,1200     | 0,1911    | 0,9236    | 2,3621    | 10,0000   | 0,2950     | 0,5586    | 0,7765    | 3,5000    | 2,7649    |
| 0,1250     | 0,1998    | 0,9201    | 2,4967    | 10,0000   | 0,3000     | 0,5721    | 0,7712    | 3,5000    | 2,6179    |
| 0,1300     | 0,2086    | 0,9166    | 2,6355    | 10,0000   | 0,3050     | 0,5858    | 0,7657    | 3,5000    | 2,4748    |
| 0,1350     | 0,2175    | 0,9130    | 2,7786    | 10,0000   | 0,3100     | 0,5998    | 0,7601    | 3,5000    | 2,3355    |
| 0,1400     | 0,2264    | 0,9094    | 2,9263    | 10,0000   | 0,3150     | 0,6141    | 0,7544    | 3,5000    | 2,1997    |
| 0,1450     | 0,2354    | 0,9058    | 3,0787    | 10,0000   | 0,3200     | 0,6287    | 0,7485    | 3,5000    | 2,0672    |
| 0,1500     | 0,2445    | 0,9022    | 3,2363    | 10,0000   | 0,3300     | 0,6590    | 0,7364    | 3,5000    | 1,8100    |
| 0,1550     | 0,2536    | 0,8985    | 3,3391    | 10,0000   | 0,3400     | 0,6910    | 0,7236    | 3,5000    | 1,5652    |
| 0,1600     | 0,2630    | 0,8948    | 3,5000    | 9,8104    | 0,3500     | 0,7249    | 0,7100    | 3,5000    | 1,3283    |
| 0,1650     | 0,2723    | 0,8911    | 3,5000    | 9,3531    | 0,3600     | 0,7612    | 0,6955    | 3,5000    | 1,0983    |
| 0,1700     | 0,2818    | 0,8873    | 3,5000    | 8,9222    | 0,3700     | 0,8003    | 0,6799    | 3,5000    | 0,8732    |
| 0,1750     | 0,2913    | 0,8835    | 3,5000    | 8,5154    | 0,3800     | 0,8433    | 0,6627    | 3,5000    | 0,6506    |
| 0,1800     | 0,3009    | 0,8796    | 3,5000    | 8,3106    |            |           |           |           |           |
| 0,1850     | 0,3106    | 0,8757    | 3,5000    | 7,7662    |            |           |           |           |           |
| 0,1900     | 0,3205    | 0,8718    | 3,5000    | 7,4204    |            |           |           |           |           |
| 0,1950     | 0,3305    | 0,8678    | 3,5000    | 7,0919    |            |           |           |           |           |
| 0,2000     | 0,3405    | 0,8638    | 3,5000    | 6,7793    |            |           |           |           |           |

---

## 6. CÁLCULO DA ARMADURA TRANSVERSAL

---

Neste capítulo o estudo da armadura transversal é discutido considerando o efeito da protensão na viga pré-fabricada. A formulação apresentada segue a prescrição da norma brasileira NBR 6118:2003.

### 6.1. INTRODUÇÃO

---

O cisalhamento em peças protendidas pode ser analisado da mesma forma que em peças de concreto armado bastando considerar dois efeitos: a parcela de força normal que a protensão introduz e, quando os cabos são curvos, o efeito da força cortante oriunda da protensão. No caso da pré-tração basta considerar o efeito do normal, pois os cabos são retos. A norma NBR 6118:2003 prevê que o cálculo e verificações de cisalhamento podem ser feitas com analogia com modelos de treliça considerando duas situações, modelo tipo I e o modelo tipo II. No caso do modelo I a inclinação da biela é de 45° enquanto no modelo II pode variar de 30 a 45°. Desta forma é preciso antes de tudo definir qual o modelo é mais preciso para fazer as análises de peças protendida.

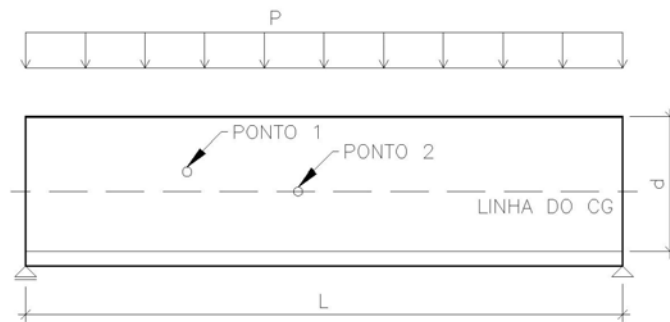
### 6.2. INCLINAÇÃO DA DIAGONAL DE COMPRESSÃO

---

Como mostrado em CARVALHO e FILHO (2007) pode-se fazer uma análise da fissuração provocada por tensões normal e tangencial na alma de uma viga de concreto usando os princípios da resistência dos materiais e considerando o círculo de Mohr.

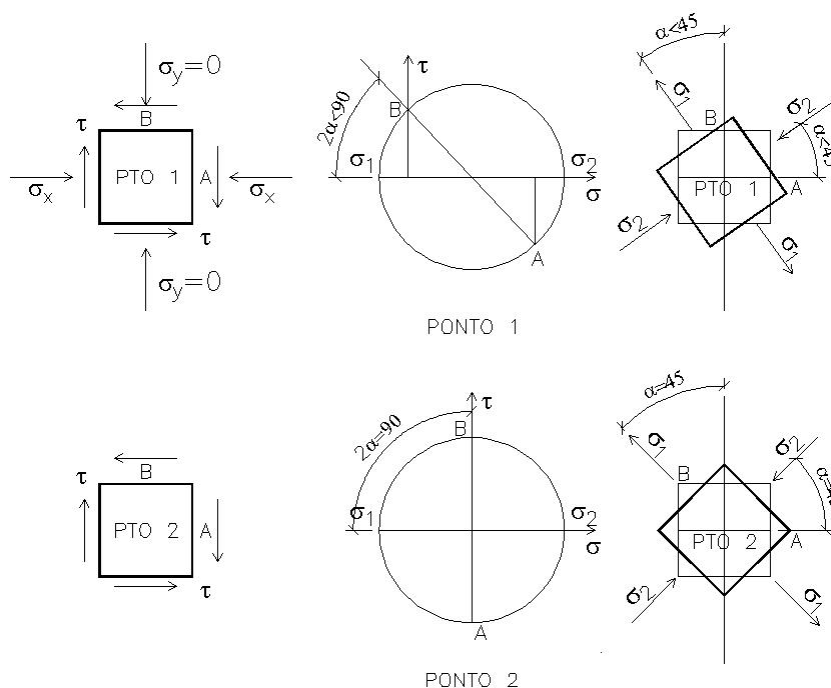
Seja uma viga fletida de concreto armado como a da Figura 6-1, pode-se calcular as tensões principais de tração e compressão ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  respectivamente) em pontos da alma em função do momento fletor e cortante atuante na seção. Lembra-se que em vigas é comum desprezar o valor da tensão vertical ( $\sigma_y$ ) que é considerada nula.

Imagina-se agora que se deseja obter as tensões principais em dois pontos: um na região comprimida (ponto 1), e outro na linha neutra (ponto 2).



**Figura 6-1: Pontos para análise das tensões principais de uma viga, simplesmente apoiada sob carregamento uniforme.**

Desses pontos retiram-se dois elementos infinitesimais, em que atuam tensões normais  $\sigma$  e tangenciais  $\tau$ ; pelo círculo de Mohr encontram-se as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  e suas inclinações em relação ao eixo da viga, ver Figura 6-2.



**Figura 6-2: Cálculo das tensões principais nos pontos 1 e 2 usando o círculo de Mohr (Notar que para o caso do ponto 1 a aresta A fica representada pelo ponto no círculo de Mohr com coordenadas  $\sigma$  e  $-\tau$  para a aresta B a ordenada 0 ( $\sigma_y = 0$ ) e  $\tau$ , enquanto para o ponto 2 a aresta A fica representada pelo ponto no círculo de Mohr com coordenadas  $\sigma=0$  e  $-\tau$  para a aresta B a ordenada 0 ( $\sigma_y = 0$ ) e  $\tau$ ).**

Como pode ser visto na Figura 6-2, para pontos situados no cg (pontos do tipo 2) só há tensão de cisalhamento e, portanto a tensão principal de tração ocorrerá a  $45^\circ$ . Já para os pontos do tipo 1, onde há compressão (abaixo da linha neutra seria tração), a tensão principal ocorrerá com um ângulo inferior a  $45^\circ$ . Isto já indica que a introdução da força de protensão que causará tensões normais de compressão ira afetar a inclinação da fissura, mesmo no cg da

viga. Observe-se que está aqui sendo usada a convenção, para concreto armado e protendido, em que as tensões de compressão são positivas e as de tração são negativas.

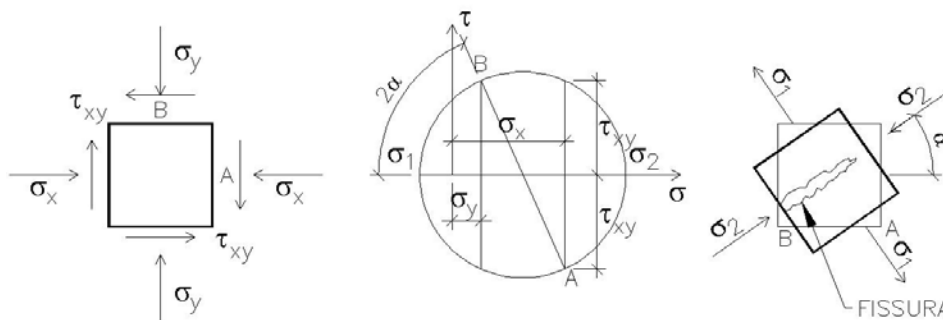
Para um estado duplo de tensões em vigas (Figura 6-3), segundo Mohr, as tensões principais podem ser determinadas analiticamente pelas expressões:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.1)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.2)$$

A direção  $\alpha$  (inclinação) de  $\sigma_1$  em relação ao eixo x é dada por:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (6.3)$$



**Figura 6-3: Estado plano de tensões e direções principais.**

Como em vigas pode-se fazer  $\sigma_y = 0$  (só existem valores de tensões normais verticais apreciáveis onde atuam cargas externas de alta intensidade), e também fazendo  $\tau_{xy} = \tau$ , as equações acima ficam:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (6.4)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (6.5)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau}{\sigma_x} \quad (6.6)$$

Na linha neutra e abaixo, o concreto não contribui na resistência às tensões normais de tração, que são equilibradas apenas pela armadura longitudinal, e portanto  $\sigma_x = 0$ , que nas equações anteriores resulta:

$$\sigma_1 = +\sqrt{\tau^2} = +\tau \quad \sigma_2 = -\sqrt{\tau^2} = -\tau \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \infty \rightarrow 2\alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Deste raciocínio anterior pode-se dizer que em vigas de concreto armado a fissura “potencial”, ou seja aquela em que se inicia fissuração do concreto devido a uma tração diagonal, deve ter uma inclinação de 45° e no caso de concreto protendido (o ponto analisado esta solicitado a tensão de cisalhamento e compressão devido a protensão) a fissura terá inclinação menor que 45°. Desta forma neste trabalho e a favor da segurança usa-se o modelo I para o cálculo da armadura transversal, mas considerando o efeito da descompressão na seção e para a verificação da biela usa-se o modelo II com ângulo da biela de 30°.

### **6.3. EXPRESSÕES A EMPREGAR O CÁLCULO E VERIFICAÇÃO DO CISALHAMENTO.**

---

Usando as publicações de CARVALHO (2007 e 2009) (onde são encontradas as deduções das expressões) e o texto da Norma NBR 6118:2003 pode-se montar o formulário:

#### **6.3.1. VERIFICAÇÃO DA BIELA DE CONCRETO (MODELO II $\theta=30^\circ$ )**

---

O valor limite do cortante é dado por:

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \quad (6.7)$$

Com:

$\alpha$ : inclinação com o eixo longitudinal da armadura transversal (no caso de estribos verticais  $\alpha=90^\circ$ )

$\theta$ : inclinação com o eixo longitudinal do eixo da biela de concreto (no caso em questão  $\theta=30^\circ$ )

Com:  $\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$  e com  $f_{ck}$  em MPa

Substituindo os valores dos ângulos chega-se a:

$$V_{rd} = 0,23 \cdot (\alpha_{v2} \cdot f_{cd}) \cdot b_w \cdot d \quad (6.8)$$

### 6.3.2. CÁLCULO DA ARMADURA (MODELO I $\theta=45^\circ$ )

O cálculo da armadura de uma seção pode ser feita através de:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (6.9)$$

Em que:

- $V_{Sd}$  – força cortante solicitante de cálculo, na seção;
- $V_{Rd3} = V_c + V_{sw}$ , é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal;
- $V_c$  – parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça;
- $V_{sw}$  – parcela de força cortante resistida pela armadura transversal, de acordo com os modelos I ou II.

Na região dos apoios, os cálculos devem considerar a força cortante agente na face dos mesmos, considerando as reduções prescritas no item 17.4.1.2.1 da norma para cargas próximas aos apoios.

As expressões anteriores possibilitam verificar, conhecida a taxa de armadura transversal, se o esforço em uma seção será ou não inferior ao permitido por norma, ou ao necessário para o funcionamento com segurança. Assim, bastará considerar, nas expressões anteriores, o sinal de igualdade para determinar, por exemplo, a armadura transversal em uma determinada seção. Essas verificações podem ser escritas, também, em termos de tensões.

Para o cálculo da armadura transversal, a parcela da força cortante ( $V_{sw}$ ) a ser absorvida pela armadura, a partir da equação (6.9), pode ser escrita por:

$$V_{sw} = V_{Rd3} - V_c \quad (6.10)$$

Sendo que a força cortante resistente de cálculo  $V_{Rd3}$  dever ser no mínimo igual à força cortante solicitante de cálculo  $V_{Sd}$  ( $V_{Rd3} = V_{Sd}$ ), e, assim,

$$V_{sw} = V_{Sd} - V_c \quad (6.11)$$

Portanto, a parcela da força cortante a ser resistida por armadura transversal é a diferença entre a força cortante solicitante de cálculo e a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça, ou seja, a parcela resistida pelo concreto



íntegro entre as fissuras. O valor de  $V_c$  é obtido para diversas situações de solicitações; no caso de flexão simples e flexo-tração com a linha neutra cortando a seção, vale:

$$V_c = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \quad (6.12)$$

Em que:

$$f_{ctd} = \frac{f_{ck,inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{1,4} \cdot f_{ck}^{2/3} = 0,15 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (\text{valor de cálculo da}$$

resistência à tração do concreto);

$d$  – altura útil da seção, igual à distância da borda comprimida ao centro de gravidade da armadura de tração;

$b_w$  – menor largura da seção, compreendida ao longo da altura útil  $d$ .

A força cortante resistida pela armadura transversal em certa seção é dada por:

$$V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha) \quad (6.13)$$

Em que:

- $s$  – espaçamento entre elementos da armadura transversal  $A_{sw}$ , medido segundo o eixo longitudinal da peça;
- $f_{ywd}$  – tensão na armadura transversal passiva, limitada ao valor  $f_{yd}$  no caso de estribos e a 70% desse valor no caso de barras dobradas, não se tomando, para ambos os casos, valores superiores a 435 MPa;
- $\alpha$  – ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, podendo-se tomar  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ .

No caso de estribos verticais, que é o usualmente empregado, a equação (6.13) torna-se:

$$V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \quad (6.14)$$

As expressões (6.11), (6.13), (6.14) podem ser escritas em termos de tensões e taxa de armadura transversal. Dividindo ambos os membros da equação (6.11) por  $b_w \cdot d$  resulta:

$$\frac{V_{sw}}{b_w \cdot d} = \frac{V_{Sd}}{b_w \cdot d} - \frac{V_c}{b_w \cdot d} \Rightarrow \tau_{sw} = \tau_{Sd} - \tau_c \quad (6.15)$$

A porcentagem volumétrica de armadura  $\rho_{sw,\alpha}$ , é definida pela expressão(6.16) observando-se que  $d = \ell \cdot \text{sen}\alpha$  (Ver Figura 6-4):

$$\rho_{sw,\alpha} = \frac{\text{volume de aco}}{\text{volume de concreto}} = \frac{\ell \cdot A_{sw}}{b_w \cdot d \cdot s} = \frac{\ell \cdot A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \ell \cdot \text{sen}\alpha} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen}\alpha} \quad (6.16)$$

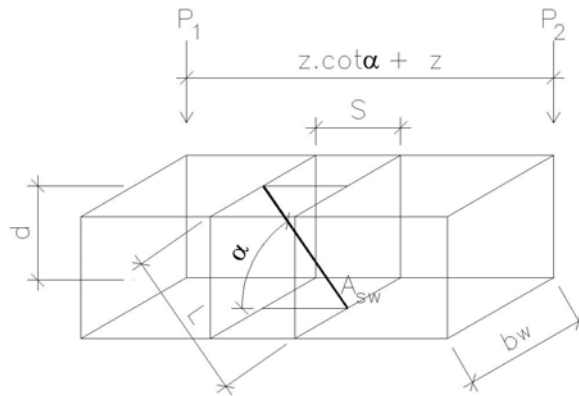


Figura 6-4:  $A_{sw}$  em um trecho s da peça.

Verifica-se que a porcentagem volumétrica é numericamente igual à porcentagem geométrica.

A expressão (6.13) pode ser colocada em função da taxa de armadura transversal  $\rho_{sw,\alpha}$  (ver equação (6.16)), dividindo os dois termos por  $(b_w \cdot d \cdot \text{sen}\alpha)$ :

$$\frac{V_{sw}}{b_w \cdot d \cdot \text{sen}\alpha} = \left( \frac{A_{sw}}{b_w \cdot d \cdot \text{sen}\alpha \cdot s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)$$

E assim:

$$\frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen}\alpha} = \frac{V_{sw}}{b_w \cdot d \cdot \text{sen}\alpha} \cdot \frac{1}{0,9 \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)}$$

Mas como  $\frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen}\alpha} = \rho_{sw,\alpha}$ , e  $\frac{V_{sw}}{b_w \cdot d} = \tau_{sw}$ , resulta:

$$\rho_{sw,\alpha} = \tau_{sw} \cdot \frac{1}{0,9 \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen}\alpha \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} \cdot \frac{1}{\text{sen}\alpha \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)} \quad (6.17)$$

No caso de estribos verticais ( $\alpha=90$ ) resulta:

$$\rho_{sw,90} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} \quad (6.18)$$

### 6.3.3. FORÇA CORTANTE RESISTIDA PARA UMA DETERMINADA QUANTIDADE DE ARMADURA TRANSVERSAL

Conhecida a quantidade de armadura transversal em uma viga (área  $A_{sw}$  e espaçamento  $s$ ) e a resistência característica do concreto à compressão, é possível encontrar a força cortante resistida pela viga. Das equações (6.11) e (6.13) é possível escrever, trocando  $V_{Sd}$  por  $V_{Rd}$ :

$$V_{Rd} - V_c = V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)$$

$$V_{Rd} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha) + V_c$$

Com  $V_c = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d$ , conforme equação (6.12), e dividindo os dois termos da equação acima por  $(b_w \cdot d \cdot \text{sen}\alpha)$  tem-se:

$$\frac{V_{Rd}}{b_w \cdot d \cdot \text{sen}\alpha} = \left( \frac{A_{sw}}{b_w \cdot d \cdot s \cdot \text{sen}\alpha} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha) + \frac{0,6 \cdot f_{ctd}}{\text{sen}\alpha}$$

Como  $\frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen}\alpha} = \rho_{sw,\alpha}$ :

$$\frac{V_{Rd}}{b_w \cdot d \cdot \text{sen}\alpha} = \rho_{sw,\alpha} \cdot 0,9 \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha) + \frac{0,6 \cdot f_{ctd}}{\text{sen}\alpha}$$

A força cortante resistente é encontrada dividindo a de cálculo pelo coeficiente 1,4:

$$V_R = \left[ \rho_{sw,\alpha} \cdot 0,9 \cdot f_{ywd} \cdot (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) + \frac{0,6 \cdot f_{ctd}}{\operatorname{sen}\alpha} \right] \cdot \frac{b_w \cdot d \cdot \operatorname{sen}\alpha}{1,4}$$

$$V_R = \frac{\rho_{sw,\alpha} \cdot f_{ywd} \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) + 1,11 \cdot 0,6 \cdot f_{ctd}}{1,11 \cdot 1,4} \cdot b_w \cdot d$$

Colocando  $f_{ctd} = 0,15 \cdot f_{ck}^{2/3}$ , tem-se:

$$V_R = 0,644 \cdot b_w \cdot d \cdot \left[ \rho_{sw,\alpha} \cdot f_{ywd} \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) + 0,10 \cdot f_{ck}^{2/3} \right] \quad (6.19)$$

Para  $f_{ywd}$  e  $f_{ck}$  em MPa,  $b_w$  e  $d$  em metros, resulta, finalmente, para  $V_R$  em kN:

$$V_R = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot \left[ \rho_{sw,\alpha} \cdot f_{ywd} \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) + 0,10 \cdot f_{ck}^{2/3} \right] \quad (6.20)$$

E, para estribos verticais:

$$V_R = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot \left[ \rho_{sw,90} \cdot f_{ywd} + 0,10 \cdot f_{ck}^{2/3} \right] \quad (6.21)$$

#### 6.3.4. DESLOCAMENTO DO DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR (MODELO II $\theta=30^\circ$ )

O deslocamento do diagrama de momentos fletores, de acordo com o modelo II, mantidas as mesmas condições estabelecidas para o modelo I, será (item 17.4.2.3c da norma):

$$a_\ell = 0,5 \cdot d \cdot (\cot\theta - \cot\alpha) \geq \begin{cases} 0,5 \cdot d & (\text{caso geral}) \\ 0,2 \cdot d & (\text{estribos inclinados a } 45^\circ) \end{cases} \quad (6.22)$$

Em que  $\theta$  é a inclinação das diagonais de compressão (bielas), variando entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$ .

Considerando novamente estribos verticais, resulta para  $a_\ell$ :

$$a_\ell = 0,5 \cdot d \cdot \cot \theta \geq 0,5 \cdot d \quad (6.23)$$

---

## 7. LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS

---

Nas estruturas pré-moldadas para que se obtenha uma eficiência maior quanto a resistência as esforços laterais costuma-se considerar dispositivos de ligações entre os elementos pré-fabricados (geralmente pilar-viga) que conferem aos elementos da estrutura uma capacidade de transmissão de momentos fletores. A este tipo de ligações denomina-se semi-rígidas, pois a mesma tem o comportamento intermediário entre a ligação que não impede rotação relativa (elementos pinados) e a de ligação rígida ou continua (ligações de estruturas moldadas no local). Neste capítulo procura-se mostrar como pode ser considerado no cálculo este tipo de ligação.

### 7.1. INTRODUÇÃO

---

Um das principais diferenças na análise das estruturas de concreto pré-moldado e moldado no local estão relacionadas com a presença de ligações e das situações transitórias que estarão submetidos os elementos pré-moldados.

Quando se diz que as ligações possuem um comportamento semi-rígido, tem-se em mente um comportamento intermediário, em termos de flexão entre as articulações e o engastamento perfeito, tendendo a aproximar de uma das duas situações em função da flexibilidade das ligações.

Segundo FERREIRA (1999), a considerações da deformabilidade das ligações nas extremidades dos elementos da estrutura, promove uma modificação na rigidez dos elementos, gerando uma redistribuição dos esforços e deslocamentos ao longo de toda a estrutura.

### 7.2. LIGAÇÕES VIGA-PILAR

---

Em CATOIA (2007), uma ligação deve possuir bom desempenho de resistência, rigidez e ductilidade. A resistência de uma ligação será determinada pela resistência de cada elemento que a compõe, a rigidez a flexão de uma ligação esta relacionada com o momento fletor resistido por ela e a rotação ocorrida entre a viga e o pilar.

Segundo HANAI (2005), a ductilidade está relacionada com a capacidade do material ou da estrutura de sofrer deformações plásticas significativas antes da ruptura. Quando o material ou a estrutura possui pouco ou nenhuma ductilidade, é qualificado como frágil.

Uma ligação deve ser responsável pela transferência de esforços e quando corresponder a uma ligação resistente a flexão pode auxiliar na estabilidade global da estrutura.

De acordo com a norma NBR 9062:2006, as ligações podem ser consideradas como dispositivos utilizados para compor um conjunto estrutural, sendo destinadas a transmitir os esforços solicitantes nas varias fases de utilização, considerando as condições de projeto e preservando as condições de durabilidade em toda a vida útil da estrutura.

A execução das ligações corresponde a uma das atividades mais difíceis e caras na produção de estruturas pré-moldadas. Dessa forma, a escolha da ligação afeta o tempo de execução da mesma e o custo da construção, pois as facilidades na execução das ligações permitem uma redução no tempo de utilização de equipamentos para a montagem e com isso, uma redução de custos.

As ligações dos elementos pré-moldados podem ser realizadas através de diferentes dispositivos mecânicos como: chumbadores, solda e transpasse de armadura com preenchimento de graute ou concreto.

Em FERREIRA (1999), as ligações correspondem a região de descontinuidade que podem ou não mobilizar deslocamentos e esforços proveniente dos elementos por elas ligados, permitindo um redistribuição desses esforços ao longo da estrutura, influenciando no comportamento da mesma. Como as ligações se encontram em regiões críticas é necessária a utilização de ligações resistentes e que possuam rigidez e ductilidade, de forma a aproximar as estruturas pré-moldadas de estrutura moldadas no local.

### **7.3. FATOR DE RESTRIÇÃO À ROTAÇÃO**

---

De acordo com a norma NBR 9062:2006, o fator de restrição à rotação  $\alpha_R$  define a rigidez relativa de cada ligação da extremidade do elemento conectado, sendo calculado da seguinte forma:

$$\alpha_R = \frac{1}{1 + \frac{3 \cdot (EI)_{\text{sec}}}{R_{\text{sec}} \cdot L_{\text{ef}}}} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad (7.1)$$

Onde:

$(EI)_{\text{sec}}$ : Rigidez secante da viga;

$L_{\text{ef}}$ : Vão efetivo entre apoios, distancia entre centros de giros nos apoios;

$R_{\text{sec}}$ : Rigidez secante ao momento fletor da ligação viga-pilar.

De acordo com a mesma norma, o fator de restrição à rotação pode ser interpretado como a relação da rotação  $\phi_1$  da extremidade do elemento em relação à rotação combinada  $\phi_2$  do elemento e da ligação devido ao momento da extremidade (Figura 7-1).

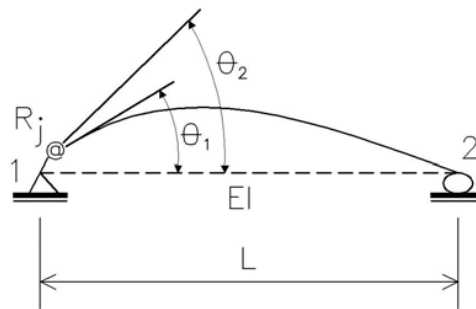


Figura 7-1: Fator de restrição à rotação. (NBR 9062:2006).

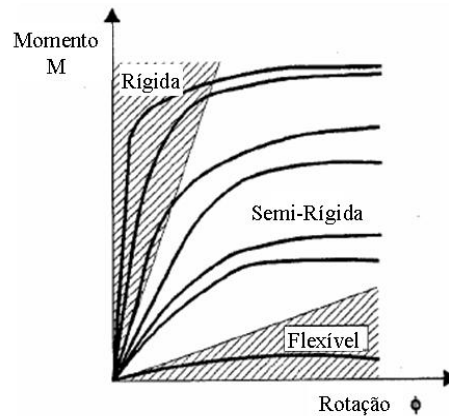
## 7.4. CLASSIFICAÇÃO DAS LIGAÇÕES VIGA-PILAR

De acordo com o Manual de Ligações Estruturais da FIB (draft 2003), as ligações em estruturas pré-moldadas de concreto podem ser classificadas de acordo com o grau de engastamento como: rígida, semi-rígidas ou articuladas, conforme pode ser observado na Figura 7-2. Tais ligações estão descritas a seguir:

- ✓ Ligação rígida: possui elevada capacidade de restringir as rotações relativas entre a viga e o pilar.
- ✓ Ligação articulada: corresponde aquela que não possui capacidade de restrição as rotações relativas entre a viga e o pilar.

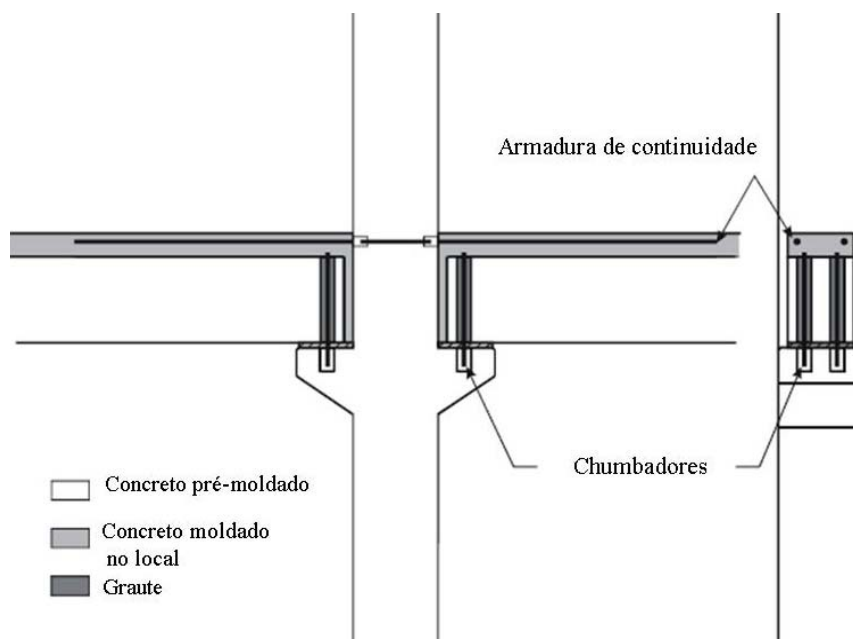


✓ Ligação semi-rígida: corresponde aquela que desempenha comportamento intermediário ao das ligações rígidas e articuladas, ou seja, uma ligação semi-rígida apresenta um engastamento parcial que pode estar próximo da situação engastada ou da situação articulada.



**Figura 7-2: Classificação de ligações resistentes a flexão como rígidas, semi-rígidas ou articuladas, segundo o Manual de Ligações Estruturais da FIB (draft 2003).**

Um exemplo de ligação semi-rígida corresponde a uma ligação com pino e armadura de continuidade passante no pilar contínuo, tendo o preenchimento de graute (argamassa que possui consistência fluida, dispensando o adensamento, atinge altas resistências iniciais e finais e apresenta expansão controlada) no local para a ligação negativa, que pode ser observada na Figura 7-3.



**Figura 7-3: Ligação considerada como semi-rígida segundo o Manual de Ligações da FIB (draft 2003).**

Segundo FERREIRA *et al.* (2002), foi proposta uma classificação para as ligações viga-pilar, com a identificação de cinco zonas, sendo as ligações semi-rígidas subdivididas em três zonas de projeto. As zonas identificadas por essa classificação correspondem a:

- ✓ Zona I: Ligação articulada com o fator de restrição  $0 < \alpha_R < 0,14$ .
- ✓ Zona II: Ligação semi-rígida com baixa resistência e fator de restrição  $0,14 < \alpha_R < 0,4$ .
- ✓ Zona II: Ligação semi-rígida com média resistência e fator de restrição  $0,4 < \alpha_R < 0,67$ .
- ✓ Zona II: Ligação semi-rígida com alta resistência e fator de restrição  $0,67 < \alpha_R < 0,9$
- ✓ Ligação rígida com fator de restrição  $\alpha_R > 0,9$ .

As zonas podem ser observadas Figura 7-4.

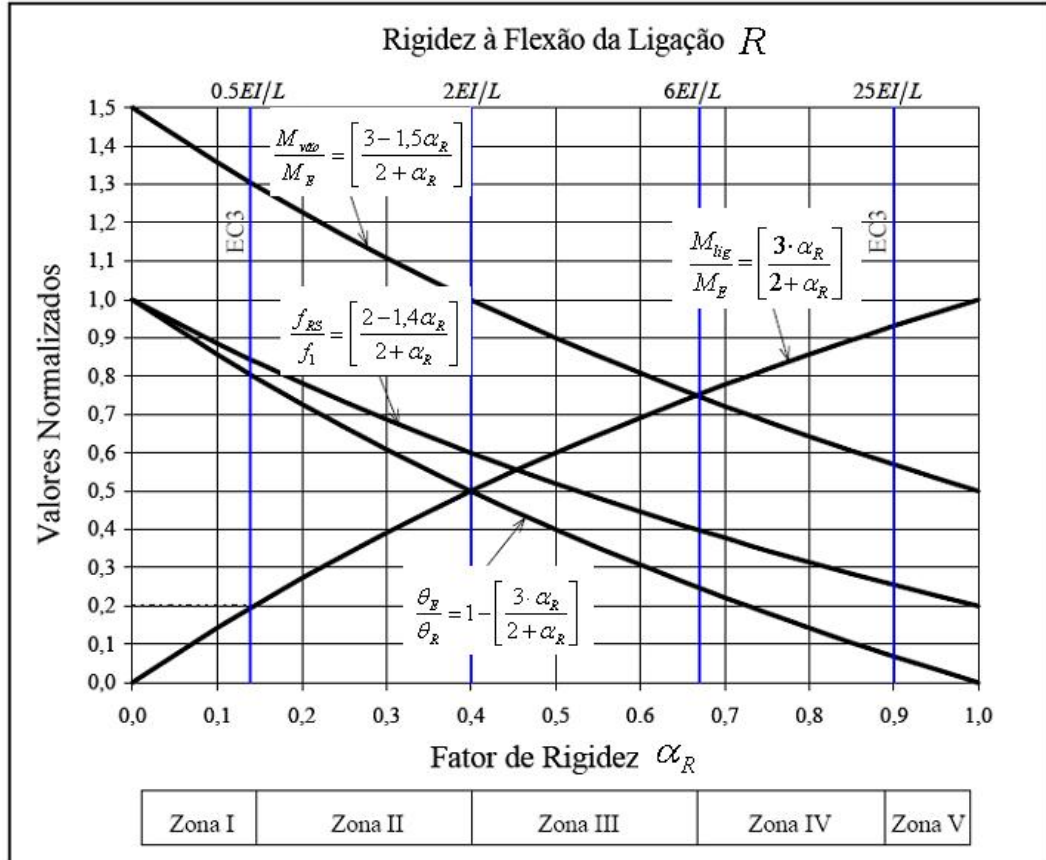


Figura 7-4: Sistema de classificação para ligação semi-rígida em estruturas Pré-Moldadas [FERREIRA *et al.* (2002)].

## 7.5. DETERMINAÇÃO TEÓRICA DA RELAÇÃO MOMENTO-ROTAÇÃO.

---

A rigidez de uma ligação esta relacionada com o momento fletor resistido por ela e a rotação relativa viga-pilar causada por esse momento. Dessa forma, a rigidez de uma ligação pode ser obtida pelo gradiente da curva momento-rotação.

Entretanto, para a obtenção da rigidez a flexão de ligação entre elementos pré-moldados é necessária a realização de ensaios experimentais, pois diferentemente das estruturas de concreto armado, o pré-moldado não possui modelos analíticos consagrados pela literatura para obtenção da relação momento-rotação nas ligações viga-pilar.

Devido a complexidade do comportamento da ligação, é difícil o desenvolvimento de equações que representem o comportamento semi-rígido das ligações pré-moldadas.

A rigidez secante de uma ligação correspondente a relação entre o momento fletor e a rotação relativa viga-pilar no início do escoamento da armadura de continuidade. Assim, a rigidez secante pode ser determinada através da seguinte expressão:

$$R_{\text{sec}} = \frac{M_{RC}}{\phi_c} \quad (7.2)$$

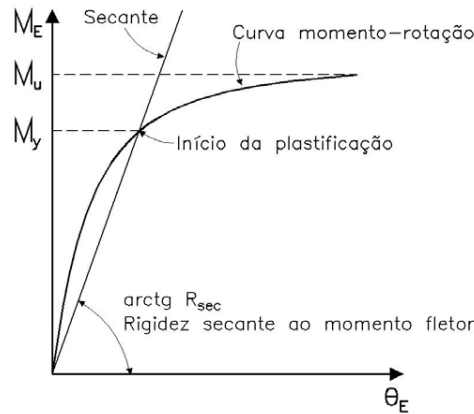
Onde:

$M_{RC}$ : momento resistente da ligação no limite do escoamento da armadura tracionada;

$\phi_c$ : rotação relativa viga-pilar devida ao momento  $M_{RC}$ ;

$R_{\text{sec}}$ : rigidez secante.

Com a curva momento-rotação pode-se determinar a rigidez de uma ligação. Através da obtenção do momento de escoamento da armadura ( $M_y = M_{RC}$ ), traça-se a reta secante a curva momento-rotação da ligação a origem do gráfico ao ponto correspondente ao  $M_y$ . Desde que  $M \leq M_y$ , a rigidez secante será a mínima rigidez possível no projeto para a ligação ao longo da vida útil da estrutura.



**Figura 7-5: Relação momento-rotação na ligação viga-pilar (NBR 9062:2006).**

Em geral, a relação momento-rotação em uma ligação viga-pilar em concreto pré-moldado apresenta um comportamento não linear, mesmo antes da primeira plastificação da ligação. Entretanto, a linearização da relação momento-rotação pode ser feita por meio da consideração da rigidez secante.

FERREIRA *et al.* (2002), propôs que a rigidez secante a flexão negativa, para as ligações com armadura de continuidade, pode ser obtida pela expressão:

$$R_{\text{sec}} = \frac{M_y}{\phi_C} = \left[ \frac{l_e}{0,9 \cdot E_s \cdot A_s \cdot d^2} + \frac{l_p}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right]^{-1} \quad (7.3)$$

Sendo:

$$M_y = 0,9 \cdot A_s \cdot f_{yk} \cdot d \quad \text{e} \quad \phi_C = \left[ \frac{M_y}{E_{cs} \cdot I_{II}} \cdot l_p + \frac{f_{yk}}{E_s \cdot d} \cdot l_e \right] \quad (7.4)$$

Onde:

$l_p$ : comprimento da região da ligação;

$l_e$ : comprimento de embutimento dentro do pilar;

$d$ : altura efetiva na extremidade da viga;

$E_s$ : módulo de elasticidade do aço;

III: momento de inércia da seção homogeneizada fissurada no estágio II;

$E_{cs}$ : módulo secante do concreto, equivalente a  $E_{cs} = 0,85 E_c$ ;

$A_s$ : área de armadura negativa passante no pilar.

De acordo com FERREIRA *et al.* (2003), a expressão geral que representa o desenvolvimento da relação momento-rotação para  $0 \leq M \leq M_y$ .

$$\phi = \left[ \left( \frac{M}{E_c \cdot I_{eq}} \right) \cdot l_p + \left( \frac{\sigma_s}{E_s \cdot d} \right) \cdot l_e \right] \cdot \left( \frac{M}{M_y} \right)^{0,5} \quad (7.5)$$

Onde:

$I_{eq}$  : corresponde ao momento de inércia equivalente da ligação, dado por:

$$I_{eq} = \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \cdot I_I + \left[ 1 + \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \quad (7.6)$$

Sendo:

$M_r$  : momento de fissuração;

$M_a$  : momento atuante;

$\sigma_s$  : corresponde a tensão na armadura obtida pela seguinte expressão:

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s \cdot z_{eq}} \quad (7.7)$$

Onde:

$$z_{eq} = d - \frac{1}{3} \cdot \left[ x_I \cdot \left[ 1 - \left( \frac{M}{M_y} \right)^{0,5} \right] + x_{II} \cdot \left( \frac{M}{M_y} \right)^{0,5} \right] \quad (7.8)$$

Sendo:

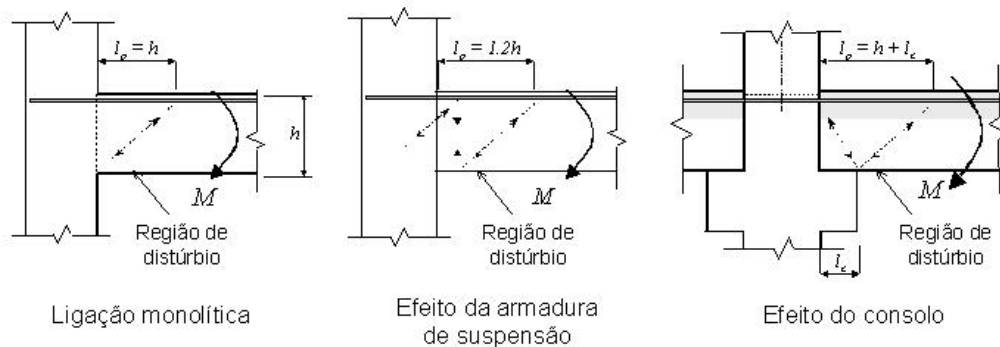
$x_I$  : posição da linha neutra no estádio I;

$x_{II}$  : posição da linha neutra no estádio II;

$z_{eq}$  : z intermediário entre o estádio I e II.

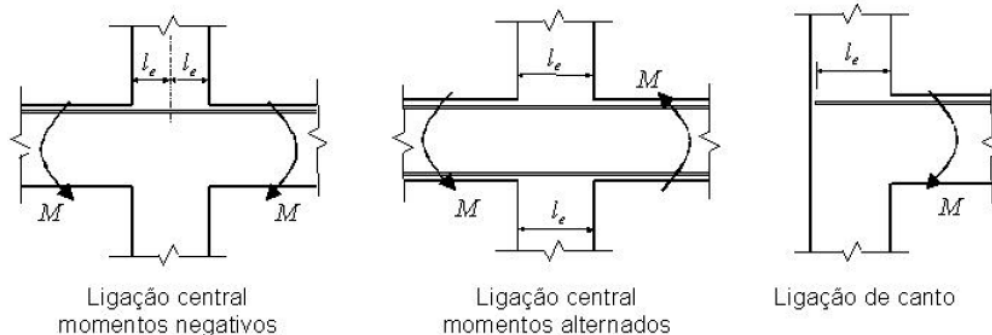
O comprimento  $l_p$  depende da altura da viga, da posição do centro de rotação na ligação e do caminho das forças internas na extremidade da viga (Figura 7-6). Para ligação

típicas o comprimento  $l_p$  pode ser obtido pelo comprimento do consolo somado a altura útil na extremidade da viga sobre o apoio.



**Figura 7-6: Regiões de distúrbio na extremidade de ligação viga-pilar. [FERREIRA *et al.* (2003)].**

A consideração do comprimento de embutimento  $l_e$  difere para pilares com ligação em apenas um lado e para pilares com ligações nos dois lados. Devido a este fator, em geral ligações viga-pilar centrais tendem a ser mais rígidas do que ligações viga-pilar de canto. Por outro lado, ligações centrais com momentos negativos em ambos os lados conduzem a uma rigidez maior do que ligações centrais com momentos reversos (negativo de um lado e positivo do outro) causados por ações laterais na estrutura. (Figura 7-7).



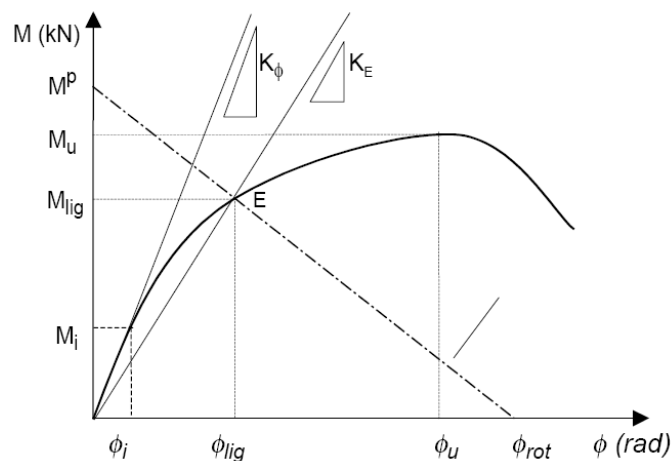
**Figura 7-7: Variações na consideração do comprimento de embutimento  $l_e$ . [FERREIRA *et al.* (2003)].**

## 7.6. MÉTODO BEAM-LINE

A reta determinada *Beam-Line*, é obtida através da determinação de dois pontos, que ligam as situações de engastamento perfeito e de articulação perfeita nas extremidades da viga.

A situação de engastamento perfeito corresponde aquela em que não há rotação na ligação com a extremidade da viga qualquer que seja o momento fletor resistido pela ligação. A situação de articulação perfeita corresponde aquela em que a ligação não é capaz de resistir aos momentos fletores ficando suscetível ao giro. A ligação semi-rígida por sua vez, possui um comportamento intermediário as ligações descritas, ao mesmo tempo em que resiste a uma parcela dos momentos fletores também permite certa rotação entre a viga e o pilar.

Assim, a reta *Beam-Line*, pode ser traçada através da união entre o ponto correspondente ao momento de engastamento perfeito ( $M^P$ ), na situação de engastamento perfeito e o ponto correspondente ao momento nulo, com a rotação de uma rótula perfeita ( $\phi_{rot}$ ), na situação de articulação perfeita. A determinação da reta *Beam-Line* pode ser observada na Figura 7-8.



**Figura 7-8: Reta Beam-Line com a curva Momento-rotação da ligação [FERREIRA (1999)].**

O ponto E da reta *Beam-Line* corresponde ao ponto onde existe a compatibilização entre o giro da extremidade da viga com o giro relativo entre a viga e o pilar. A ligação deve ser capaz de suportar pelo menos o momento correspondente ao ponto E indicado. Com a determinação da reta *Beam-Line* é possível identificar o local da ruptura, se a ruptura ocorreu na ligação ou na viga.

Se para uma determinada ligação viga-pilar semi-rígida for constatado que a ruptura da ligação ocorreu antes de alcançar o ponto E, pode-se dizer que a ruptura ocorreu na ligação e não na viga, caso contrário, sendo constatado que a ligação rompeu após ter alcançado ponto E, pode-se dizer que a ruptura ocorreu na viga.

## 8. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta uma série de exemplos em que trechos de projeto são feitos analiticamente e descritos para que fique claro ao leitor um possível procedimento ou roteiro de cálculo.

### 8.1. EXEMPLO 01

**Exemplo 7.1:** Calcular a viga VR01 da escola do tipo FDE – Fundação para o Desenvolvimento da Educação (Figura 8-1), considerando CAA II (protensão limitada).  
 Materiais: armadura ativa cordoalha de  $\Phi\frac{1}{2}$ ” ( $A_p = 0,987 \text{ cm}^2$ ) CP 190RB; armadura frouxa CA-50; concreto pré-moldado,  $f_{cjk}$ : 25MPa,  $f_{ck}$ : 40MPa; concreto moldado no local (capa),  $f_{ck}$ : 30MPa. Carregamentos:  $g_1$  – peso próprio  $25 \text{ kN/m}^3$ ;  $g_2$  – laje alveolar:  $2,25 \text{ kN/m}^2$  ( $h = 15 \text{ cm}$ );  $g_3$  – capa:  $25 \text{ kN/m}^3$  ( $h = 5 \text{ cm}$ );  $g_4$  – alvenaria:  $18 \text{ kN/m}^3$  ( $h = 2,20 \text{ m}$  e largura de  $15 \text{ cm}$ );  $g_5$  – revestimento:  $0,80 \text{ kN/m}^2$ ;  $q$  – acidental:  $3,00 \text{ kN/m}^2$ . Considerar a solução sem a continuidade da laje alveolar e da viga.

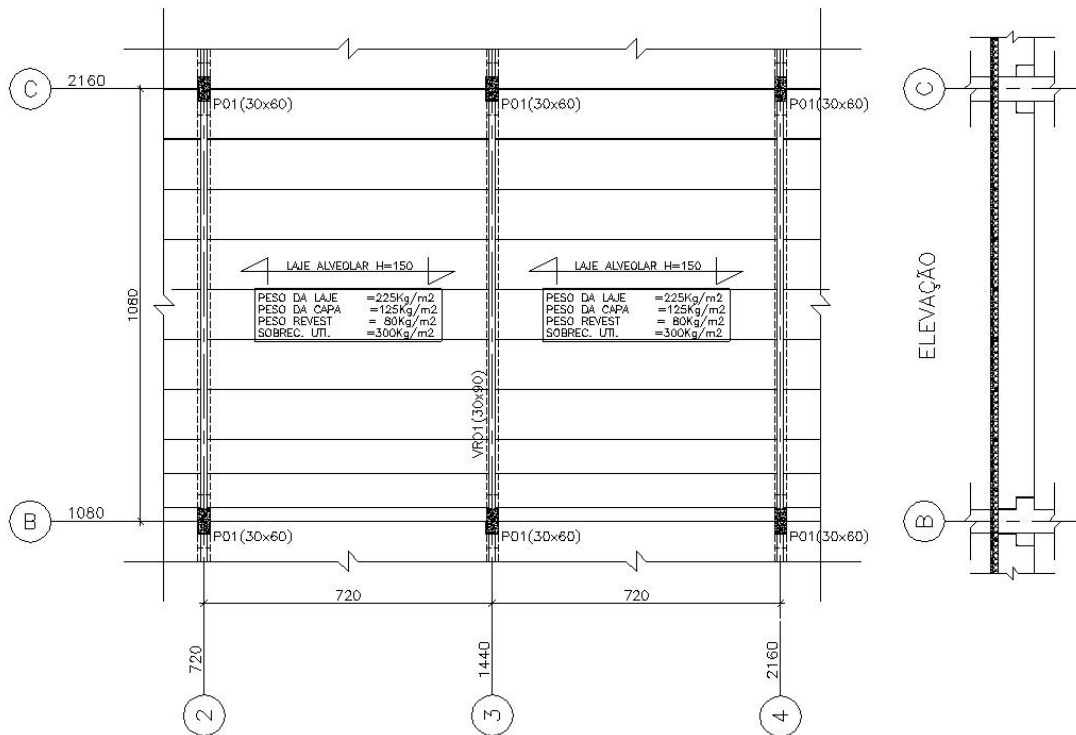
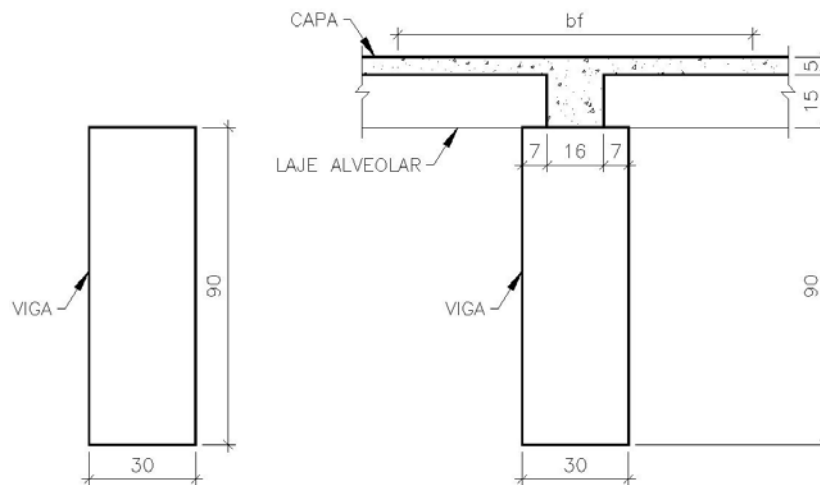


Figura 8-1: Planta do pavimento e elevação da viga VR01 (unidades em cm).






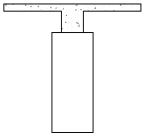
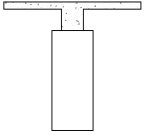
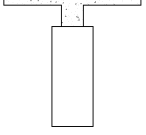
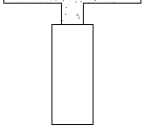
A Figura 8-2 mostra as duas seções transversais da viga VR01 a primeira constitui apenas do elemento pré-moldado e a segunda a seção composta devido a aplicação da capa de concreto.



**Figura 8-2: Seções transversais da viga VR01 (unidades em cm).**

Para a resolução é utilizada a seqüência dos intervalos entre as fases de carregamentos descritas na Tabela 8-1.

**Tabela 8-1: Seqüência de intervalos entre as etapas, ações atuantes, seções e perdas consideradas.**

| FASE | TEMPO                       | AÇÃO                      | SEÇÃO  | PERDAS  |
|------|-----------------------------|---------------------------|--|---|
| 1    | $t_0 = 0; t = 24$ horas     | $p$                       |   | Deformação ancoragem;<br>Relaxação da armadura;<br>Deformação imediata. |
| 2    | $t_0 = 1; t = \infty$ dias  | $p+g_1$                   |   | Retração;<br>Fluência do concreto;<br>Relaxação da armadura.            |
| 3    | $t_0 = 15; t = \infty$ dias | $p+g_1+g_2$               |   | Retração;<br>Fluência do concreto;<br>Relaxação da armadura.            |
| 4    | $t_0 = 30; t = \infty$ dias | $p+g_1+g_2+g_3$           |    | Retração;<br>Fluência do concreto;<br>Relaxação da armadura.            |
| 5    | $t_0 = 45; t = \infty$ dias | $p+g_1+g_2+g_3+g_4$       |  | Retração;<br>Fluência do concreto;<br>Relaxação da armadura.            |
| 6    | $t_0 = 60; t = \infty$ dias | $p+g_1+g_2+g_3+g_4+g_5$   |  | Retração;<br>Fluência do concreto;<br>Relaxação da armadura.            |
| 7    | $t_0 = 75; t = \infty$ dias | $p+g_1+g_2+g_3+g_4+g_5+q$ |  | Retração;<br>Fluência do concreto;<br>Relaxação da armadura.            |

### Roteiro de cálculo.

É proposto um roteiro para o dimensionamento de viga protendida com a aderência inicial, a seqüência das etapas são definidas abaixo. As tabelas citadas encontram-se na NBR 6118:2003. Considera-se tensão normal de tração com o sinal negativo.

1º Definição da classificação do ambiente em relação a sua agressividade de acordo com a *Tabela 6.1 – Classes de agressividade ambiental*.

2º Com a CAA definida através *Tabela 13.3 – Exigências de durabilidade relacionadas a fissuração e a proteção da armadura, em função das classes de agressividade ambiental* e o tipo de protensão defini-se qual o nível de protensão a ser aplicada. Para o caso

de pré-tração quando se tem CAA I deve-se verificar em serviço apenas a abertura de fissuras com limite  $w_k \leq 0,2$  mm para a combinação freqüente ( $\psi_1$ ), este tipo de protensão é classificada como parcial. Já para a CAA II a protensão é classificada como limitada, que em serviço deve atender o estado de formação de fissuras para a combinação freqüente ( $\psi_1$ ) com o limite de  $f_{ctk.inf} = \alpha \cdot 0,7 \cdot f_{ct,m}$  e o estado de descompressão cujo um ou mais ponto da seção transversal a tensão normal é nula ( $\sigma \geq 0$ ) não havendo tração no restante da seção, essa verificação é feita para combinação quase permanente ( $\psi_2$ ). Finalmente tem-se a protensão completa que é para a CAA III e IV que em serviço deve ser verificado o estado de formação de fissuras para a combinação rara, em que toda a carga acidental deve ser considerada com o limite de  $f_{ctk.inf} = 0,7 \cdot f_{ct,m}$  e o estado de descompressão  $\sigma \geq 0$  com a combinação freqüente ( $\psi_1$ ).

3º Os coeficientes  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são obtidos através da *Tabela 11.2 – Valores do coeficiente  $\gamma_{f2}$  classificados de acordo com a ocupação do edifício.*

4º Detalham-se os carregamentos atuantes no elemento e as suas datas respectivas de carregamento.

5º Estima-se uma perda de protensão e determina-se a armadura no tempo infinito através da verificação da fissuração para a borda inferior.

6º Verifica-se em vazio com a armadura encontrada no item 5º se a tensão na fibra superior esta dentro do limite. Caso o limite seja ultrapassado é possível a colocação de cordoalhas na fibra superior, limitando a tensão de tração na mesma.

7º Com esta armadura encontrada através da estimativa inicial, detalha-se os cabos na seção e calcula-se as perdas diferidas considerando as datas dos carregamentos determinadas no item 4.

8º Com a tensão final correta no cabo de protensão (tensão calculada considerando as perdas) verifica-se novamente a condição de fissuração no tempo infinito.

9º Com a armadura definida para o tempo infinito, verifica-se a peça em vazio (verificação de ruptura simplificada) e a necessidade de isolamento de cabos na borda inferior.

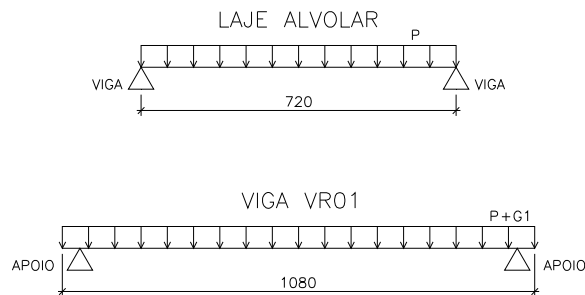
10° Verifica-se se a armadura dimensionada em serviço é suficiente para atender a condição do ELU. Caso não seja pode-se completar com armadura frouxa.

11° Verifica-se a deformação excessiva com o cálculo estimado das flechas.

### Resolução:

#### 1. Carregamentos:

É preciso determinar as ações que atuam na viga VR01. Considera-se que neste caso que as lajes a laje e a viga não são contínuas. Os esquemas estruturais tanto da laje alveolar quanto da viga estão na Figura 8-3.



**Figura 8-3: Esquema estrutural da laje e da viga VR01 (unidades em cm).**

Para se determinar o comprimento ( $l$ ) de face a face externa da viga é considerada a folga de 1 cm para cada lado. Sabendo a distância entre os eixos de pilar (1080 cm) e a dimensão do pilar (60 cm) tem-se:

$$l = 1080 - 2 \cdot (30 + 1) = 1018 \text{ cm} = 10,18 \text{ m}$$

O comprimento efetivo de cálculo ( $l_{ef}$ ) refere-se à distância entre chumbadores dos consolos, em geral quando se tem o consolo embutido a altura do consolo corresponde a metade da altura da viga, ou seja,  $\frac{h}{2} = 45 \text{ cm}$ . Para o dimensionamento do consolo é desejável que a inclinação da biela de compressão  $\theta$  esteja em torno de  $45^\circ$ , com isso adota-se para o comprimento do consolo a mesma distância determinada para a altura, ou seja, 45 cm.

Considerando-se que a posição do chumbador esteja no centro do consolo é possível determinar o vão efetivo de cálculo para o dimensionamento da viga. (ver Figura 8-4).

$$l_{ef} = 1018 - 2 \cdot (21,5) = 975 \text{ cm} = 9,75 \text{ m}$$

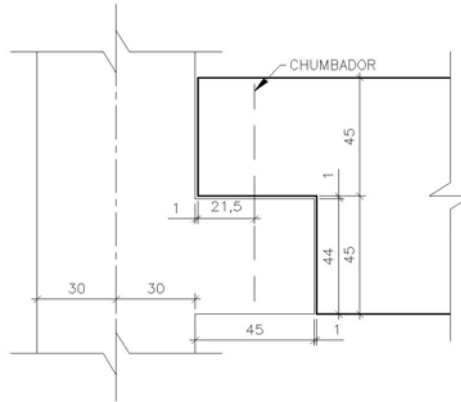


Figura 8-4: Geometria do consolo para apoio da viga VR01 (unidades em cm).

Cálculo da ação na viga devido ao peso próprio. (Tabela 8-2).

Tabela 8-2: Intensidade de carregamento do peso próprio.

| Descrição                     | Área (m <sup>2</sup> ) | $\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> ) | Intensidade (kN/m) |
|-------------------------------|------------------------|-------------------------------|--------------------|
| g <sub>1</sub> – Peso próprio | 0,30 x 0,90 = 0,27     | 25                            | 6,75               |
| g <sub>4</sub> – Alvenaria    | 0,15 x 2,20 = 0,33     | 18                            | 5,94               |

Determinação das contribuições de ações na viga devido às cargas na laje. (Tabela 8-3)

Tabela 8-3: Intensidade de carregamento na laje.

| Descrição                          | Intensidade (kN/m <sup>2</sup> ) | Vão de contribuição (m). | Ação na viga (kN/m). |
|------------------------------------|----------------------------------|--------------------------|----------------------|
| g <sub>2</sub> – Laje Alveolar     | 2,25                             | 7,20                     | 16,20                |
| g <sub>3</sub> – Capa (esp = 5 cm) | 0,05 x 25 = 1,25                 | 7,20                     | 9,00                 |
| g <sub>5</sub> – Revestimento      | 0,80                             | 7,20                     | 5,76                 |
| q – Acidental                      | 3,0                              | 7,20                     | 21,60                |

A Tabela 8-4 apresenta os diversos momentos fletores (neste caso o máximo na viga) que atuam no meio do vão, considerando a viga bi-apoiada, tem-se:

$$M = \frac{p \cdot l^2}{8}, \text{ onde:}$$

M – Momento solicitante;

p – ação atuante;

l – comprimento efetivo da viga (vão).

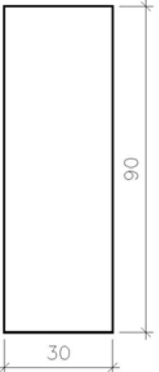
Tabela 8-4: Momentos máximos no meio do vão.

| Descrição                      | Intensidade (kN/m) | Vão (m) | Momento máximo (kN.m) |
|--------------------------------|--------------------|---------|-----------------------|
| g <sub>1</sub> – Peso próprio  | 6,75               | 9,75    | 80,21                 |
| g <sub>2</sub> – Laje Alveolar | 16,20              | 9,75    | 192,50                |
| g <sub>3</sub> – Capa          | 9,00               | 9,75    | 106,95                |
| g <sub>4</sub> – Alvenaria     | 5,94               | 9,75    | 70,58                 |
| g <sub>5</sub> – Revestimento  | 5,76               | 9,75    | 68,45                 |
| q – Acidental                  | 21,60              | 9,75    | 256,67                |

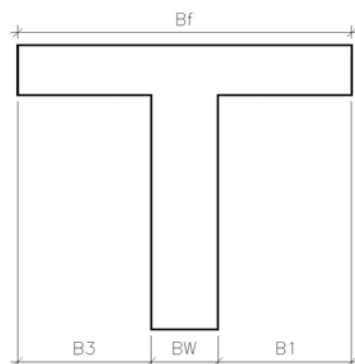
2. Características geométricas:

A Tabela 8-5 mostra as características geométricas da seção pré-moldada, conhecida também como seção em vazio.

Tabela 8-5: Características geométricas da seção pré-moldada.

| Seção  | Área (m <sup>2</sup> )                            | = 0,30 · 0,90 = 0,27   |
|--|---|--|
|  | y <sub>cg</sub> (m)                               | = $\frac{h}{2} = \frac{0,90}{2} = 0,45$  |
|  | I (m <sup>4</sup> )                               | = $\frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,30 \cdot 0,90^3}{12} = 1,82 \cdot 10^{-2}$   |
|  | W <sub>i</sub> = W <sub>s</sub> (m <sup>3</sup> ) | = $\frac{I}{y_{cg}} = \frac{b \cdot h^3}{12 \cdot \frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,30 \cdot 0,90^2}{6} = 4,05 \cdot 10^{-2}$ |

Para a seção composta deve-se calcular a largura colaborante *b<sub>f</sub>*. Que contribuiu na flexão. (Figura 8-5)



$$b_1 = \begin{cases} 0,5 \cdot b_2 \\ 0,1 \cdot a \end{cases}$$

$$b_3 = \begin{cases} b_4 \\ 0,1 \cdot a \end{cases}$$

*a* = *l* → Viga simplesmente apoiada

$$b_1 = b_3 = 0,10 \cdot 9,75 = 0,975 \text{ m}$$

$$b_f = b_w + b_1 + b_3 = 0,30 + 0,975 + 0,975 = 2,25 \text{ m}$$

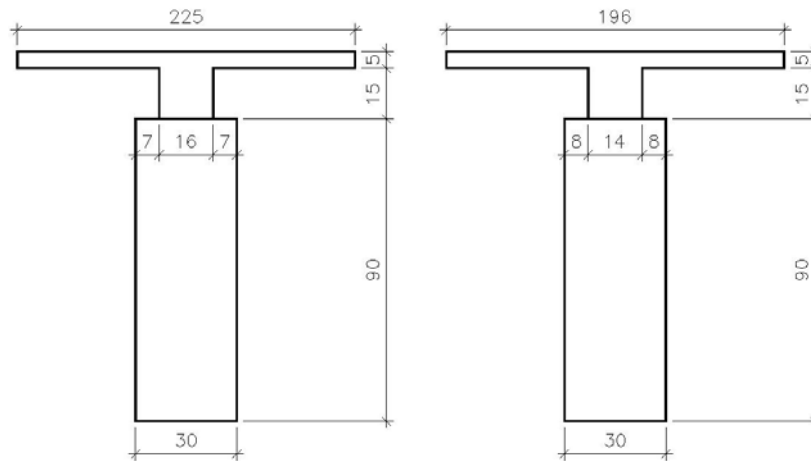
Figura 8-5: Cálculo de *b<sub>f</sub>* da seção composta.

Como tem-se resistências de concreto ( $f_{ck}$ ) diferentes entre a capa e o pré-moldado é proposto, uma redução de  $b_f$ , levando em consideração os módulos de elasticidade dos concretos. A Figura 8-6 mostra as seções sem considerar a redução da capa e considerando a redução da capa. Vale lembrar que tem-se o apoio de 7 cm de cada lado para a laje alveolar, esse espaço  $p$  também é reduzido.

$$r = \frac{E_{capa}}{E_{viga}} = \frac{0,85.5600\sqrt{30}}{0,85.5600\sqrt{40}} = 0,87$$

$$b_f = 0,87 \cdot 2,25 = 1,96 \text{ m}$$

$$p = 0,87 \cdot 0,16 \cong 0,14 \text{ m}$$



**Figura 8-6: Seção transversal composta com a redução da capa devido ao módulo de elasticidade dos concretos (unidades em cm).**

A Tabela 8-6 mostra o cálculo das características geométricas da seção composta final (redução da capa de concreto) em relação as origem das coordenadas  $xy$ .

Tabela 8-6: Características geométricas da seção composta.

|  |   |   |   |
|--|---|---|---|
|  | <b>Seção</b>                              | <b>Área (m<sup>2</sup>)</b>   | $= 0,30 \cdot 0,90 + 0,14 \cdot 0,15 + 1,96 \cdot 0,05 = 0,389$ |
|  | <b>y<sub>cg</sub> (m)</b>                 | $= \frac{\sum A_i \cdot y_{cg,i}}{\sum A_i} = \frac{0,30 \cdot 0,90 \cdot 0,45 + 0,14 \cdot 0,15 \cdot 0,975 + 1,96 \cdot 0,05 \cdot 1,075}{0,30 \cdot 0,90 + 0,14 \cdot 0,15 + 1,96 \cdot 0,05}$ $= \frac{\sum A_i \cdot y_{cg,i}}{\sum A_i} = 0,636$  |   |
|  | <b>I<sub>comp</sub> (m<sup>4</sup>)</b>   | $I_1 = \frac{0,30 \cdot 0,90^3}{12} + (0,636 - 0,45)^2 \cdot 0,30 \cdot 0,90 = 2,76 \cdot 10^{-2}$ $I_2 = \frac{0,14 \cdot 0,15^3}{12} + (0,636 - 0,975)^2 \cdot 0,14 \cdot 0,15 = 2,45 \cdot 10^{-3}$ $I_3 = \frac{1,96 \cdot 0,05^3}{12} + (0,636 - 1,075)^2 \cdot 1,96 \cdot 0,05 = 1,89 \cdot 10^{-2}$ $I_T = I_1 + I_2 + I_3 = 4,89 \cdot 10^{-2}$ |   |
|  | <b>y<sub>i</sub> = y<sub>cg</sub> (m)</b> | $= 0,636$   |   |
|  | <b>y<sub>s</sub> (m)</b>                  | $= h - y_i = 1,10 - 0,636 = 0,464$  |   |
|  | <b>W<sub>i,comp</sub> (m<sup>3</sup>)</b> | $= \frac{I}{y_i} = \frac{4,89 \cdot 10^{-2}}{0,636} = 7,69 \cdot 10^{-2}$   |   |
|  | <b>W<sub>s,comp</sub> (m<sup>3</sup>)</b> | $= \frac{I}{y_s} = \frac{4,89 \cdot 10^{-2}}{0,464} = 1,05 \cdot 10^{-1}$   |   |

### 3. Tipo de protensão

Aqui é interessante olhar a questão da classe de agressividade ambiental (CAA), segundo a tabela 13.3 da NBR 6118:2004 para o caso de pré-tração quando se tem CAA I deve-se verificar em serviço apenas a abertura de fissuras com limite  $w_k \leq 0,2$  mm para a combinação freqüente ( $\psi_1$ ), este tipo de protensão é classificada como parcial. Já para a CAA II a protensão é classificada como limitada, que em serviço deve atender o estado de formação de fissuras para a combinação freqüente ( $\psi_1$ ) com o limite de  $f_{ctk.inf} = 0,7 \cdot f_{ct,m}$  e o estado de descompressão cujo um ou mais pontos da sessão transversal a tensão normal é nula  $\sigma \geq 0$  não havendo tração no restante da seção, essa verificação é feita para combinação quase permanente ( $\psi_2$ ). Finalmente tem-se a protensão completa que é para a CAA III e IV que em serviço deve ser verificado o estado de formação de fissuras para a combinação rara, em que toda a carga acidental deve ser considerada com o limite de  $f_{ctk.inf} = 0,7 \cdot f_{ct,m}$  e o estado de descompressão  $\sigma \geq 0$  com a combinação freqüente ( $\psi_1$ ).



Lembrando que para o exemplo numérico tem-se a CCA II, portanto, protensão limitada, com isso verifica-se em serviço as seguintes condições:

ELS. – F → Estado limite de serviço para a formação de fissuras com a combinação freqüente ( $\psi_1$ ) e com o limite da resistência a tração de  $f_{ctk.inf} = 0,7 \cdot f_{ct,m} = 0,21 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2}$ .

ELS. – D → Estado limite de descompressão com a combinação quase permanente ( $\psi_2$ ) com o limite de tensão  $\sigma \geq 0$ .

Como se trata de um edifício público, para as verificações de serviço tem-se os coeficientes  $\psi_1=0,6$  (combinação freqüente) e  $\psi_2=0,4$  (combinação quase permanente).

#### 4. Tensão inicial nos cabos.

Na pré-tração os limites máximos para tensão inicial são:

$$\sigma_{pi} \leq \begin{cases} 0,77 f_{ptk} = 0,77 \cdot 1900 = 1463 \text{ MPa} \\ 0,85 f_{pyk} = 0,85 \cdot 1710 = 1453 \text{ MPa} \end{cases}$$

Considera-se assim o valor de  $\sigma_{pi} = 1453 \text{ MPa} = 145,30 \text{ kN/cm}^2$

#### 5. Estimativa do número de cabos no tempo infinito usando a consideração de fissuração.

Escolhe-se aqui a condição de verificação em serviço para se pré-dimensionar a área de aço  $A_p$ , para isso adota-se uma perda da ordem de 20% no tempo infinito.

$$\sigma_{p,t=\infty} = \sigma_{p,i} \cdot 0,80 = 145,3 \cdot 0,80 = 116,24 \text{ kN/cm}^2$$

Estado limite de formação de fissuras:

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_1 \cdot M_q}{W_{i,comp}} \geq f_{ctk.inf}$$

Onde:

$$f_{ctk.inf} = 0,21 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,21 \cdot \sqrt[3]{40^2} = 2,456 \text{ MPa} = 2456 \text{ kN / m}^2$$

Considerando o uso das unidades para as duas verificações em serviço:

Força de protensão em kN;

Área de aço de protensão em  $\text{cm}^2$ ;

Características geométricas de seção transversal em metro;

Tensões =  $\text{kN/m}^2$ ;

Momento fletor em  $\text{kN.m}$ .

$$\sigma_i = \frac{116,24 \cdot A_p}{0,27} + \frac{116,24 \cdot 0,40 A_p}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{7,69 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,6 \cdot 256,67}{7,69 \cdot 10^{-2}} \geq -2456$$

$$A_p \geq 6,80 \text{ cm}^2$$

Estado limite de descompressão:

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_2 \cdot M_q}{W_{i,comp}} \geq 0$$

$$\sigma_i = \frac{116,24 \cdot x A_p}{0,27} + \frac{116,24 \cdot 0,40 A_p}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{7,69 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,4 \cdot 256,67}{7,69 \cdot 10^{-2}} \geq 0$$

$$A_p \geq 7,93 \text{ cm}^2$$

Considerando cordoalha de 12,7 mm com uma seção média de  $0,987 \text{ cm}^2$  tem-se:

$$A_p = \frac{7,93}{0,987} = 8,03, \text{ considera-se o próximo valor par inteiro, portanto, tem-se 10}$$

cordoalhas de 12,7 mm com  $A_p=9,87 \text{ cm}^2$ . Sugere-se aqui um numero par de cordoalhas, pois nas vigas pré-moldada é de grande utilidade o uso de chumbadores nos apoios posicionados nos eixos das peças, sendo que uma cordoalha no eixo da peça poderia causar interferência.

## 6. Estimativa do numero de cabos no tempo zero (verificação de ruptura simplificada).

Com  $A_p$  calculado no tempo infinito pode-se verificar se a tensão de tração na fibra superior está dentro de limite. Segundo o item 17.2.4.3.2 na NBR 6118:2003, permite

que no ato da protensão que a tensão máxima de tração do concreto não deva ultrapassar 1,2 vez a resistência a tração  $f_{ct,m}$  correspondente ao valor  $f_{ckj}$  especificado.

A solução proposta é a verificação da tensão já supondo a utilização de cordoalhas na fibra superior ( $A_p'$ ). Devido os bancos de protensão das fabricas é recomendado que esta cordoalha na fibra superior não seja maior que dois  $\phi 12,7$  mm.

Da mesma maneira estimando uma perda inicial de 2,5%, tem-se:

$$\sigma_{p,t=0} = \sigma_{p,i} \cdot 0,975 = 145,30 \cdot 0,975 = 141,67 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

Com  $N_p = \sigma_p \cdot A_p$  tem-se:

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{\overbrace{\sigma_{p,t=0} \cdot A_p}^{\text{Cabo inferior}} - \frac{\sigma_{p,t=0} \cdot A_p \cdot e_p}{W_s}}{A} + \frac{\overbrace{\sigma_{p,t=0} \cdot A'_p}^{\text{Cabo superior}} + \frac{\sigma_{p,t=0} \cdot A'_p \cdot e'_p}{W_s}}{A} + \frac{M_{g1}}{W_s} \geq -1,2 \cdot f_{ct,m}$$

$$\sigma_{\text{sup}} = \sigma_{p,t=0} \cdot A_p \left( \frac{1}{A} - \frac{e_p}{W_s} \right) + \sigma_{p,t=0} \cdot A'_p \left( \frac{1}{A} + \frac{e'_p}{W_s} \right) + \frac{M_{g1}}{W_s} \geq -1,2 \cdot f_{ct,m}$$

Onde:

$$1,2 f_{ct,m} = 1,2 \cdot 0,3 \cdot \sqrt[3]{25^2} = 3,078 \text{ MPa} = 3078 \text{ kN/m}^2.$$

$$\sigma_{\text{sup}} = 141,67 \cdot 9,87 \left( \frac{1}{0,27} - \frac{0,40}{4,05 \cdot 10^{-2}} \right) + 141,67 \cdot A'_p \left( \frac{1}{0,27} + \frac{0,40}{4,05 \cdot 10^{-2}} \right) + \frac{80,21}{4,05 \cdot 10^{-2}} \geq -3078$$

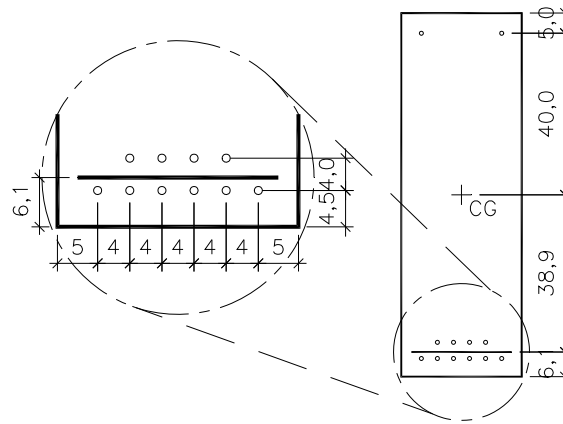
$$A'_p \geq 1,86 \text{ cm}^2, \text{ consideram-se duas cordoalhas de } \phi 12,7 \text{ mm com } A_p = 1,974 \text{ cm}^2.$$

### 7. Cabo representante para cálculo das perdas de protensão.

Como se tem uma estimativa de 10 cabos na fibra inferior será considerado 6 cabos na primeira camada a 4,5 cm da parte inferior da viga e a segunda camada a 8,5 cm com quatro cordoalhas, sendo então necessário determinar a posição do cabo representante, o cálculo abaixo esta cotado da face inferior da viga.

$$y_{cg,repres.} = \frac{\sum A_i \cdot y_{cg,i}}{\sum A_i} = \frac{6 \cdot 0,987 \cdot 4,50 + 4 \cdot 0,987 \cdot 8,50}{6 \cdot 0,987 + 4 \cdot 0,987} = 6,10 \text{ cm}$$

A Figura 8-7 mostra o posicionamento dos cabos que serão utilizados para os cálculos das perdas.



**Figura 8-7: Posição do cabo representante (unidades em cm).**

## 8. Cálculo das perdas de protensão.

Com o número e posição dos cabos definidos, calcula-se as perdas levando em consideração as fases distintas de carregamentos e considerando também a seção simples e a seção composta de concreto.

O cálculo das perdas de protensão está de acordo com as etapas apresentadas na Tabela 8-1, os momentos solicitantes máximos estão calculados na Tabela 8-4 e as propriedades geométricas das seções estão nas Tabela 8-5 e Tabela 8-6.

Neste caso é importante salientar que se tem o cuidado de realizar o cálculo das perdas para uma camada de cabo representante na fibra inferior e outra para a fibra superior separadamente.

Segundo Vasconcelos (1980) o erro que se comete em  $\Delta\sigma_p$  não se considerando a influência recíproca dos dois cabos representantes, atinge no máximo 8%, o que é perfeitamente aceitável em face da incerteza dos dados que conduzem à determinação dos valores de  $\epsilon_{cs,\infty}$  e  $\varphi_\infty$ .

*Perdas iniciais*

$$t = 1 \text{ dia}; t_0 = 0$$

$$\sigma_p = 145,30 \text{ kN/cm}^2$$

$$M_{g1} = 80,21 \text{ kN.m}$$

✓ **Deformação por ancoragem**

Considerando uma pista de protensão de comprimento  $l=100$  m e uma acomodação da cunha  $\Delta l$  de 0,6 cm tem-se:

$$\Delta l = \frac{\Delta \sigma_{ancor} \cdot l}{E_p}$$

$$\Delta \sigma_{ancor} = \frac{0,006 \cdot 2 \cdot 10^4}{100} = 1,20 \text{ kN/cm}^2$$

✓ **Relaxação da armadura**

Para o cálculo da perda por relaxação da armadura deve-se descontar a perda ocorrida pela ancoragem da armadura.

$$\sigma_{pi} = 145,30 - 1,20 = 144,10 \text{ kN/cm}^2$$

$$\Psi(t, t_0) = \frac{\Delta \sigma_{pr}}{\Delta \sigma_i}$$

$$\Psi(t, t_0) = \Psi_{1000} \left( \frac{t - t_0}{41,67} \right)^{0,15}$$

$$R = \frac{144,10}{190} = 0,76$$

Para cordoalha de baixa relaxação e com 76% da resistência a tração, na tabela 8.3 da norma NBR 6118:2004 calcula-se através de interpolação o valor para  $\Psi_{1000} = 3,10$  em porcentagem.

$$\Psi(1,0) = \Psi_{1000} \left( \frac{t - t_0}{41,67} \right)^{0,15} = 3,10 \left( \frac{1-0}{41,67} \right)^{0,15} = 1,772$$

$$\Delta \sigma_{pr} = \frac{1,772}{100} \cdot 144,10 = 2,55 \text{ kN/cm}^2$$

✓ **Perda por deformação imediata do concreto**

Como se tem o sistema de pré-tração com aderência inicial, isso implica que a tensão que atua na deformação imediata do concreto nesta fase é o valor inicial ( $\sigma_p$ )

descontadas as duas perdas calculadas anteriormente, pois no momento dos cortes dos cabos (ou desprotenção da pista) é que efetivamente a tensão das cordoalhas é transferida para a peça.. Neste caso consideram-se as perdas para os cabos junto a face superior e inferior separadamente.

$$A_p = 10 \cdot 0,987 = 9,870 \text{ cm}^2; e_p = 38,9 \text{ cm}$$

$$A'_p = 2 \cdot 0,987 = 1,974 \text{ cm}^2; e'_p = 40 \text{ cm}$$

$$\sigma_{pi} = \sigma_p - (\Delta\sigma_{acora} + \Delta\sigma_{pr}) = 145,30 - (1,20 + 2,55) = 141,5 \text{ kN / cm}^2$$

$$\Delta\sigma_{cg,inf} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,po+g,inf}$$

$$\Delta\sigma_{cg,sup} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,po+g,sup}$$

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A'_p \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 9,870 \cdot 141,55 + 1,974 \cdot 141,55 = 1676,48 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A'_p \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e'_p$$

$$M_p = 9,870 \cdot 141,55 \cdot 0,389 - 1,974 \cdot 141,55 \cdot 0,40 = 431,69 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{c,po+g,inf} = \frac{N_p}{A} + \left( \frac{M_p - M_{g1}}{I} \right) \cdot e_p$$

$$\sigma_{c,po+g,inf} = \frac{1676,48}{0,27} + \left( \frac{431,69 - 80,21}{1,82 \cdot 10^{-2}} \right) \cdot 0,389 = 13721,69 \text{ kN / m}^2$$

$$\sigma_{c,po+g,sup} = \frac{N_p}{A} + \left( \frac{-M_p + M_{g1}}{I} \right) \cdot e'_p$$

$$\sigma_{c,po+g,sup} = \frac{1676,48}{0,27} + \left( \frac{-431,69 + 80,21}{1,82 \cdot 10^{-2}} \right) \cdot 0,40 = -1515,73 \text{ kN / m}^2$$

$$\alpha_p = \frac{E_p}{E_{ci}} = \frac{200000}{28000} = 7,14$$

$$E_{ci} = 5600x\sqrt{f_{cj}} = 5600x\sqrt{25} = 28000 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{cg,inf} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,po+g,inf} = 7,14 \cdot 1,37 = 9,80 \text{ kN / cm}^2$$

$$\Delta\sigma_{cg,sup} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,po+g,sup} = 7,14 \cdot (-0,15) = -1,08 \text{ kN / cm}^2$$

Então, a tensão final considerando as perdas da primeira fase é:

$$\sigma_{p,\text{inf},1\text{ dia}} = \sigma_p - \Delta\sigma_{\text{ancor}} - \Delta\sigma_{pr} - \Delta\sigma_{\text{cg,inf}}$$

$$\sigma_{p,\text{inf},1\text{ dia}} = 145,30 - 1,20 - 2,55 - 9,80 = 131,75 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\sigma_{p,\text{sup},1\text{ dia}} = \sigma_p - \Delta\sigma_{\text{ancor}} - \Delta\sigma_{pr} - \Delta\sigma_{\text{cg,sup}}$$

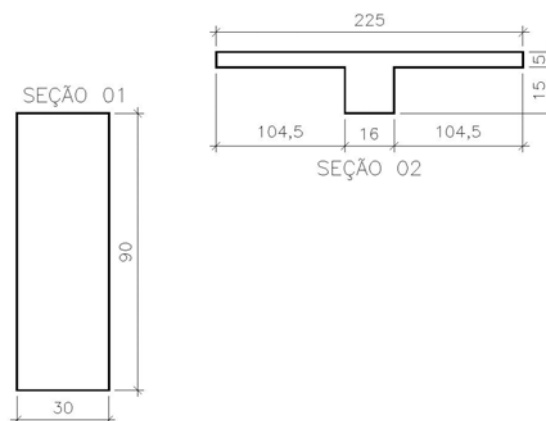
$$\sigma_{p,\text{sup},1\text{ dia}} = 145,30 - 1,20 - 2,55 - (-1,08) = 142,63 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

Até esse instante as perdas calculadas foram de 9,33% para os cabos na borda inferior e de 1,84% para os cabos da borda superior.

### Perdas diferidas

Para se determinar os coeficientes de fluência e retração é utilizada uma planilha feita pelo autor, no programa Excel. No anexo A deste trabalho estão inseridas as etapas de cálculo detalhadas passo a passo que foram consideradas. Para melhor clareza do leitor é mostrado os cálculos para duas situações. (dois tipos diferentes de concreto).

Como se tem dois tipos de concreto distintos, um com cimento tipo ARI para a seção pré-moldada e outro cimento tipo CII para a capa, é proposto a determinação de dois coeficientes de fluência, um para cada seção e o coeficiente de fluência final é a media ponderada das duas seções. A Figura 8-8 mostra as duas seções consideradas para a determinação do coeficiente de fluência.



**Figura 8-8: Seção 01 e 02 para a determinação dos coeficientes de fluência e retração (unidades em cm).**

Para a seção 01 o coeficiente de fluência é determinado com os seguintes dados: área de concreto  $A_c = 30 \times 90 = 2700 \text{ cm}^2$ , perímetro da seção em contato com o ar ( $U_{ar}$ ) =  $30 + 90 + 90 = 210 \text{ cm}$ , umidade relativa do ar em 70%, temperatura média 20°C, abatimento do concreto (slump) 9 cm e cimento tipo ARI.

Enquanto que para a seção 02 o coeficiente de fluência é determinado com os seguintes dados:  $A_c = 225 \times 5 + 15 \times 16 = 1365 \text{ cm}^2$ , perímetro da seção em contato com o ar ( $U_{ar}$ ) = 225 cm, umidade relativa do ar em 70%, temperatura média 20°C, abatimento do concreto (slump) 9 cm e cimento tipo CPII.

Os valores calculados para os coeficientes de fluência têm como  $t_0$  no instante do carregamento e  $t$  o infinito, considerado aqui como 10000 dias. A Tabela 8-7 apresenta as idades ( $t_0$ ) para as duas seções 01 e 02.

**Tabela 8-7: Idade do concreto para a seção 01 e 02**

| Ação                       | Idade ( $t_0$ ) do concreto da seção 01 | Idade ( $t_0$ ) do concreto da seção 02 |
|----------------------------|---|---|
| Protensão                  | 1                                       | --                                      |
| Peso próprio da viga       | 1                                       | --                                      |
| Peso próprio da laje       | 15                                      | --                                      |
| Execução da capa           | 30                                      | 1                                       |
| Execução da alvenaria      | 45                                      | 15                                      |
| Execução do revestimento   | 60                                      | 30                                      |
| Atuação da carga acidental | 75                                      | 45                                      |
| Perda de protensão         | 75                                      | 45                                      |

A Tabela 8-8 apresenta finalmente os valores dos coeficientes de fluência para a seção 01, seção 02 e o coeficiente final para o cálculo das perdas diferidas.

**Tabela 8-8: Coeficientes de fluência para a seção 01, 02 e final.**

| Ação                       | $t_0$ seção 01 | Coefficiente $\varphi$ seção 01 | $t_0$ seção 02 | Coefficiente $\varphi$ seção 02 | Coefficiente $\varphi$ final |
|----------------------------|----------------|---------------------------------|----------------|---------------------------------|------------------------------|
| Protensão                  | 1              | 3,304                           | --             | --                              | 3,304                        |
| Peso próprio da viga       | 1              | 3,304                           | --             | --                              | 3,304                        |
| Peso próprio da laje       | 15             | 2,225                           | --             | --                              | 2,225                        |
| Execução da capa           | 30             | 1,940                           | 1              | 3,783                           | 2,559                        |
| Execução da alvenaria      | 45             | 1,777                           | 15             | 2,539                           | 2,033                        |
| Execução do revestimento   | 60             | 1,660                           | 30             | 2,150                           | 1,825                        |
| Atuação da carga acidental | 75             | 1,568                           | 45             | 1,933                           | 1,691                        |
| Perda de protensão         | 75             | 1,568                           | 45             | 1,933                           | 1,691                        |

O coeficiente  $\varphi$  final é obtido pela média ponderada das áreas com os respectivos coeficientes de fluência.

$$\varphi_{final} = \frac{A_{01} \cdot \varphi_{01} + A_{02} \cdot \varphi_{02}}{A_{01} + A_{02}}$$



✓ **Perda por fluência**

A perda por fluência é calculada segundo a recomendação de NAWY (1996), considerando os carregamentos com suas respectivas datas de atuação (data real de carregamento).

$$\Delta\sigma_{p,c,inf} = \alpha_p \cdot \varphi_{(t,t_0)} \cdot \sigma_{c,p0+g,inf}, \text{ onde:}$$

$$\Delta\sigma_{p,c,sup} = \alpha_p \cdot \varphi_{(t,t_0)} \cdot \sigma_{c,p0+g,sup}$$

$$\Delta\sigma_{p,c,inf} = \alpha_p \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\left[ \frac{N_p}{A} + \left( \frac{+M_p - M_{g1}}{I} \right) \cdot e_p \right] \cdot \varphi_1 - \sum_{i=2}^3 \frac{M_{gi} \cdot e_p}{I} \cdot \varphi_i - \sum_{i=4}^5 \frac{M_{gi} \cdot e_{p,comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_i}^A} \\ \underbrace{-\psi_2 \frac{M_q \cdot e_{p,comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_q}_D \end{array} \right\}$$

$$\Delta\sigma_{p,c,sup} = \alpha_p \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\left[ \frac{N_p}{A} + \left( \frac{-M_p + M_{g1}}{I} \right) \cdot e_{p'} \right] \cdot \varphi_1 + \sum_{i=2}^3 \frac{M_{gi} \cdot e_{p'}}{I} \cdot \varphi_i + \sum_{i=4}^5 \frac{M_{gi} \cdot e_{p',comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_i}^{A'}} \\ \underbrace{+\psi_2 \frac{M_q \cdot e_{p',comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_q}_{D'} \end{array} \right\}$$

Para melhor clareza nos cálculos a expressão acima é escrita da seguinte maneira:

$$\Delta\sigma_{p,c,inf} = \alpha_p \{A - B - C - D\}$$

$$\Delta\sigma_{p,c,sup} = \alpha_p \{A' - B' - C' - D'\}$$

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 9,870 \cdot 131,75 + 1,974 \cdot 142,63 = 1581,92 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 9,870 \cdot 131,75 \cdot 0,389 - 1,974 \cdot 142,63 \cdot 0,40 = 393,22 \text{ kNm}$$

Com isso, tem-se:

$$A = \left[ \frac{N_p}{A} + \left( \frac{M_p - M_{g1}}{I} \right) \cdot e_p \right] \cdot \varphi_1 = \left[ \frac{1581,92}{0,27} + \left( \frac{393,22 - 80,21}{1,82 \cdot 10^{-2}} \right) \cdot 0,389 \right] \cdot 3,304 = 41462,30 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$B = \sum_{i=2}^3 \frac{M_{gi} \cdot e_p}{I} \cdot \varphi_i = \frac{(192,50 \cdot 2,225 + 106,95 \cdot 2,559) \cdot 0,389}{1,82 \cdot 10^{-2}} = 15004,23 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$C = \sum_{i=4}^5 \frac{M_{gi} \cdot e_{p,comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_i = \frac{(70,58 \cdot 2,033 + 68,45 \cdot 1,825) \cdot 0,575}{4,89 \cdot 10^{-2}} = 3156,16 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$D = \psi_2 \frac{M_q \cdot e_{p,comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_q = 0,4 \cdot \frac{256,67 \cdot 0,575}{4,89 \cdot 10^{-2}} \cdot 1,691 = 2041,44 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\alpha_p = \frac{E_p}{E_{ci}} = \frac{E_p}{5600 \cdot \sqrt{40}} \frac{200000}{35418} = 5,65$$

$$\Delta \sigma_{p,c,inf} = 5,65 \{41462,30 - 15004,23 - 3156,16 - 2041,44\} = 120121,66 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\Delta \sigma_{p,c,inf} = 12,01 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$A' = \left[ \frac{N_p}{A} + \left( \frac{-M_p + M_{g1}}{I} \right) \cdot e'_p \right] \cdot \varphi_1 = \left[ \frac{1581,92}{0,27} + \left( \frac{-393,22 + 80,21}{1,82 \cdot 10^{-2}} \right) \cdot 0,400 \right] \cdot 3,304 = -3371,33 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$B' = \sum_{i=2}^3 \frac{M_{gi} \cdot e'_p}{I} \cdot \varphi_i = \frac{(192,50 \cdot 2,225 + 106,95 \cdot 2,559) \cdot 0,400}{1,82 \cdot 10^{-2}} = 15428,52 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$C' = \sum_{i=4}^5 \frac{M_{gi} \cdot e'_{p,comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_i = \frac{(70,58 \cdot 2,033 + 68,45 \cdot 1,825) \cdot 0,214}{4,89 \cdot 10^{-2}} = 1174,64 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$D' = \psi_2 \frac{M_q \cdot e'_{p,comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_q = 0,4 \cdot \frac{256,67 \cdot 0,214}{4,89 \cdot 10^{-2}} \cdot 1,691 = 759,77 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\alpha_p = \frac{E_p}{E_{ci}} = \frac{E_p}{5600 \cdot \sqrt{40}} \frac{200000}{35418} = 5,65$$

$$\Delta\sigma_{p,c,\text{sup}} = 5,65\{-3371,33 - 15428,52 - 1174,64 - 759,77\} = 79052,54 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\Delta\sigma_{p,c,\text{sup}} = 7,90 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

### ✓ Perda por retração do concreto

Para a determinação do coeficiente de retração até a colocação da capa não há dúvida que a seção e geometria a considerar é a da viga pré-moldada. Quando se coloca a capa a geometria seria facilmente calculada, mas já teria dois concretos. Poderia-se neste caso determinar uma retração para a seção 01 e outra para a seção 02 (com perímetro só da parte de cima) e faria-se uma composição entre os dois coeficientes de retração. Contudo a parte superior poderá trabalhar como impermeabilizada. Como a protensão está praticamente atuando na seção 01, simplificarmente considera-se apenas a primeira seção para o cálculo do coeficiente de retração que deverá estar a favor da segurança.

O coeficiente de retração para a seção 01 é determinado com os seguintes dados: área de concreto  $A_c = 30 \times 90 = 2700 \text{ cm}^2$ , perímetro da seção em contato com o ar ( $U_{\text{ar}} = 30 + 90 + 90 = 210 \text{ cm}$ , umidade relativa do ar em 70%, temperatura média 20°C, abatimento do concreto (slump) 9 cm e cimento tipo ARI,  $t_0 = 1$  e  $t = 10000$  dias.

$$\varepsilon_{(10000,1)} = -2,60 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta\sigma_{p,s} = \varepsilon_{(t,t_0)} \cdot E_p = -2,60 \cdot 10^{-4} \cdot 2,0 \cdot 10^4 = -5,20 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

### ✓ Relaxação da armadura

$$\Delta\sigma_{p,r} = \sigma_{p0} \chi(t, t_0)$$

$$\chi(t_{\infty}, t_0) = -\ln[1 - \psi(t_{\infty}, t_0)]$$

$$\psi(t_{\infty}, t_0) = 2,50 \cdot \psi_{1000}$$

$$R_{\text{inf}} = \frac{131,75}{190} = 0,69$$

$$R_{\text{sup}} = \frac{142,63}{190} = 0,75$$

Para cordoalha de baixa relaxação e com 69% da resistência a tração, na tabela 8.3 da norma NBR 6118:2003 determina-se através de interpolação o valor para  $\Psi_{1000} = 2,38$  em porcentagem, e para 75% da resistência a tração tem-se  $\Psi_{1000} = 3,00$  em porcentagem.

$$\psi(\infty,1)_{\text{inf}} = 2,50 \cdot \psi_{1000} = 2,50 \cdot 2,38 = 5,95$$

$$\psi(\infty,1)_{\text{sup}} = 2,50 \cdot \psi_{1000} = 2,50 \cdot 3,00 = 7,50$$

$$\chi(\infty,1)_{\text{inf}} = -\ln[1 - \psi(\infty,1)_{\text{inf}}] = -\ln\left[1 - \frac{5,95}{100}\right] = 6,13 \cdot 10^{-2}$$

$$\chi(\infty,1)_{\text{sup}} = -\ln[1 - \psi(\infty,1)_{\text{sup}}] = -\ln\left[1 - \frac{7,50}{100}\right] = 7,80 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta\sigma_{p,r,\text{inf}} = \sigma_{p0,\text{inf}} \chi(\infty,1)_{\text{inf}} = 131,75 \cdot 6,13 \cdot 10^{-2} = 8,08 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\Delta\sigma_{p,r,\text{sup}} = \sigma_{p0,\text{sup}} \chi(\infty,1)_{\text{sup}} = 142,63 \cdot 7,80 \cdot 10^{-2} = 11,12 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

#### ✓ Simultaneidades das perdas

A equação para o cálculo das perdas é dada pela expressão abaixo. A parcela referente o numerador já foi calculada nas etapas anteriores, restando agora o cálculo do denominador.

$$\Delta\sigma_p(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cs}(t, t_0) E_p - \alpha_p \sigma_{c,p0+g} \varphi(t, t_0) - \sigma_{cp0} \chi(t, t_0)}{\chi_p + \chi_c \alpha_p \eta \rho_p}$$

$$\chi_{p,\text{inf}} = 1 + \chi(t_\infty, t_0)_{\text{inf}}$$

$$\chi_{p,\text{inf}} = 1 + 6,13 \cdot 10^{-2} = 1,06$$

$$\chi_{p,\text{sup}} = 1 + \chi(t_\infty, t_0)_{\text{sup}}$$

$$\chi_{p,\text{sup}} = 1 + 7,80 \cdot 10^{-2} = 1,08$$

$$\chi_c = 1 + 0,5 \cdot \varphi(t, t_0)$$

$$\chi_c = 1 + 0,5 \cdot 3,304 = 2,65$$

$$\eta_{\text{inf}} = 1 + e_p^2 \frac{A_c}{I_c}$$

$$\eta_{\text{inf}} = 1 + 0,389^2 \frac{0,27}{1,82 \cdot 10^{-2}} = 3,24$$

$$\eta_{\text{sup}} = 1 + e_p^2 \frac{A_c}{I_c}$$

$$\eta_{\text{sup}} = 1 + 0,40^2 \frac{0,27}{1,82 \cdot 10^{-2}} = 3,37$$

$$\rho_p = \frac{A_p}{A_c} = \frac{9,870 + 1,974}{2700} = 4,39 \cdot 10^{-3}$$

Com isso tem-se:

$$\Delta\sigma_p(\infty,1)_{\text{inf}} = \frac{-5,20 - 12,01 - 8,08}{1,06 + 2,65 \cdot 5,65 \cdot 3,24 \cdot 4,39 \cdot 10^{-3}} = -19,84 \text{ kN/cm}^2$$

$$\Delta\sigma_p(\infty,1)_{\text{sup}} = \frac{-5,20 - 7,90 - 11,12}{1,08 + 2,65 \cdot 5,65 \cdot 3,37 \cdot 4,39 \cdot 10^{-3}} = -18,88 \text{ kN/cm}^2$$

Então chega-se a tensão final nos cabos consideradas todas as perdas.

$$\sigma_{p,\text{inf},(\infty)} = \sigma_p - \Delta\sigma_{p,\text{inf}}$$

$$\sigma_{p,\text{inf},(\infty)} = 131,75 - 19,84 = 111,91 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{p,\text{sup},(\infty)} = \sigma_p - \Delta\sigma_{p,\text{sup}}$$

$$\sigma_{p,\text{sup},(\infty)} = 142,63 - 18,88 = 123,75 \text{ kN/cm}^2$$

Portanto chega-se a uma perda de 22,98% para os cabos da borda inferior e 14,85% para os cabos da borda superior, comparado com a tensão inicial  $\sigma_p$ .

## 9. Verificação da fissuração

Após os cálculos das perdas de protensão no tempo infinito, é possível fazer a verificações das tensões, lembrando que o tipo de protensão aplicada neste exemplo é a protensão limitada.

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 9,870 \cdot 111,91 + 1,974 \cdot 123,75 = 1348,83 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 9,870 \cdot 111,91 \cdot 0,389 - 1,974 \cdot 123,75 \cdot 0,40 = 331,96 \text{ kNm}$$

- ✓ Estado limite de formação de fissuras, combinação frequente ( $\psi_1 = 0,6$ ).

Limites:

Compressão →  $\sigma = 0,7 f_{ck} = 0,7 \times 40000 = 28000 \text{ kN/m}^2$ .

Tração →  $\sigma = 0,3 f_{ctk,inf} = 0,21 \times \sqrt[3]{40^2} = 2,456 \text{ MPa} = 2456 \text{ kN/m}^2$ .

$$-2456 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$$

### Borda inferior

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_1 \cdot M_q}{W_{i,comp}}$$

$$\sigma_i = \frac{1348,83}{0,27} + \frac{331,96}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{7,69 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,6 \cdot 256,67}{7,69 \cdot 10^{-2}} = 7,29 \text{ kN/m}^2$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}}$$

$$\sigma_i = \frac{1348,83}{0,27} + \frac{331,96}{4,05 \times 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \times 10^{-2}} - \frac{139,03}{7,69 \times 10^{-2}} = 2009 \text{ kN/m}^2$$

### Borda superior

Para se verificar a tensão na borda superior é necessário determinar a distancia  $y_{ts}$  na seção composta que seja a mesmo ponto de verificação da seção pré-moldada, ou seja, a distância do centro de gravidade até a borda superior da seção pré-moldada.

$$y_{ts} = h_{pré} - y_{gc,comp} = 0,90 - 0,636 = 0,264 \text{ m}$$

Com isso o modulo resistente é dado por:

$$W_{ts} = \frac{I_{comp}}{y_{ts}} = \frac{4,89 \cdot 10^{-2}}{0,264} = 1,85 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3$$

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_s} + \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{ts}} + \frac{\psi_1 \cdot M_q}{W_{ts}}$$

$$\sigma_s = \frac{1348,83}{0,27} - \frac{331,96}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{139,03}{1,85 \cdot 10^{-1}} + \frac{0,6 \cdot 256,67}{1,85 \cdot 10^{-1}} = 7757 \text{ kN/m}^2$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_s} + \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{ts}}$$

$$\sigma_s = \frac{1348,83}{0,27} - \frac{331,96}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{139,03}{1,85 \cdot 10^{-1}} = 6925 \text{ kN/m}^2$$

Como os valores máximos e mínimos estão dentro do limite a verificação do estado limite de formação de fissuras esta atendida.

- ✓ Estado limite de descompressão, combinação quase permanente ( $\psi_2 = 0,4$ ).

Limites:

$$\text{Compressão} \rightarrow \sigma = 0,7 f_{ck} = 0,7 \times 40000 = 28000 \text{ kN/m}^2.$$

$$\text{Tração} \rightarrow \sigma = 0$$

$$0 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$$

**Borda inferior**

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_2 \cdot M_q}{W_{i,comp}}$$

$$\sigma_i = \frac{1348,83}{0,27} + \frac{331,96}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{7,69 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,4 \cdot 256,67}{7,69 \cdot 10^{-2}} = 674 \text{ kN/m}^2$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}}$$

$$\sigma_i = \frac{1348,83}{0,27} + \frac{331,96}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{7,69 \cdot 10^{-2}} = 2009 \text{ kN/m}^2$$

### **Borda superior**

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_s} + \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{ts}} + \frac{\psi_2 x M_q}{W_{ts}}$$

$$\sigma_s = \frac{1348,83}{0,27} - \frac{331,96}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{139,03}{1,85 \cdot 10^{-1}} + \frac{0,4 \cdot 256,67}{1,85 \cdot 10^{-1}} = 7480 \text{ kN/m}^2$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_s} + \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{ts}}$$

$$\sigma_s = \frac{1348,83}{0,27} - \frac{331,96}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{139,03}{1,85 \cdot 10^{-1}} = 6925 \text{ kN/m}^2$$

Como os valores máximos e mínimos estão dentro do limite a verificação do estado limite de descompressão atendida.

No dimensionamento deste exemplo a solução inicialmente considerada atendeu as verificações em serviço, em geral a situação mais desfavorável é a tensão na borda inferior na verificação do estado limite de descompressão. Caso essa verificação não fosse atendida, existem basicamente duas novas soluções a serem aplicadas a primeira seria o aumento da armadura ativa na borda inferior e a segunda o aumento da altura da seção pré-moldada de concreto.



Quando se aumenta a armadura ativa na fibra inferior, é coerente imaginar que a tensão de tração na fibra superior também aumente, ou seja, como as peças protendidas sempre estão trabalhando dentro de limites não se deve apenas solucionar um problema sem verificar o que a nova solução acarretaria para as demais verificações do elemento.

Já a segunda solução apresentada pode ser não viável devido a concepção arquitetônica uma vez que já foi limitado o pé-direito do pavimento por exemplo.

Com as tensões verificadas, no momento do dimensionamento do estado limite ultimo se a armadura  $A_p$  calculada for maior que a armadura dimensionada para a verificação de fissuração, o que se pode fazer é substituir essa diferença de armadura equivalente por armadura frouxa, finalizando assim o dimensionamento da armadura longitudinal.

### 10. Comprimento de transferência da armadura ativa

Para cordoalhas de três e sete fios o comprimento de ancoragem básico é obtido por:

$$l_{bp} = \frac{7 \cdot \phi \cdot f_{pyd}}{36 \cdot f_{bpd}}, \text{ com } f_{bpd} \text{ deve ser calculado, considerando a idade do concreto}$$

na data de protensão para o cálculo do comprimento de transferência e aos 28 dias para o cálculo do comprimento de ancoragem.

O cálculo do comprimento necessário para transferir, por aderência, a totalidade da força de protensão ao fio, no interior da massa de concreto, deve simultaneamente considerar:

a) Se no ato da protensão, a liberação do dispositivo de tração é gradual. Nesse caso, o comprimento de transferência deve ser calculado para cordoalhas de três a sete fios por:

$$l_{bpt} = 0,5 \cdot l_{bp} \cdot \frac{\sigma_{pi}}{f_{pyd}}$$

b) Se no ato da protensão a liberação não é gradual. Nesse caso os valores calculados em a) devem ser multiplicados por 1,25. Sendo assim tem-se:

$$l_{bpt} = 0,5 \cdot \frac{7 \cdot \phi \cdot f_{pyd}}{36 \cdot f_{bpd}} \cdot \frac{\sigma_{pi}}{f_{pyd}} = \frac{3,5 \cdot \phi \cdot \sigma_{pi}}{36 \cdot f_{bpd}}$$

$$f_{bpd} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot f_{ctd}$$

$\eta_1 = 1,2$  cordoalhas de três e sete fios

$\eta_2 = 1,0$  situação de boa aderência

$$f_{ctd} = \frac{0,21 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2}}{1,4} = \frac{0,21 \cdot \sqrt[3]{25^2}}{1,4} = 1,2825 \text{ MPa} = 0,12825 \text{ kN/cm}^2$$

Lembrando que  $\sigma_{pi}$  no ato da protensão (após as perdas imediatas) é de 131,75 kN/cm<sup>2</sup> para as cordoalhas da borda inferior e de 142,63 kN/cm<sup>2</sup> para as cordoalhas da borda superior.

$$l_{bpt,inf} = \frac{3,5 \cdot \phi \cdot \sigma_{pi,inf}}{36 \cdot f_{bpd}} = \frac{3,5 \cdot 1,27 \cdot 131,75}{36 \cdot 0,1539} = 105,70 \text{ cm}$$

$$l_{bpt,sup} = \frac{3,5 \cdot \phi \cdot \sigma_{pi,sup}}{36 \cdot f_{bpd}} = \frac{3,5 \cdot 1,27 \cdot 142,63}{36 \cdot 0,1539} = 114,43 \text{ cm}$$

Como em geral nas fabricas de pré-moldado não se utiliza o sistema de desprotensão gradual, adota-se aqui o coeficiente de 1,25, portanto,  $l_{bpt,inf} \approx 132 \text{ cm}$  e  $l_{bpt,sup} \approx 143 \text{ cm}$ .

Em uma peça pré-fabricada também é importante saber a partir de distancia da extremidade da peça pode-se considerar o esforço de protensão atuando em toda a seção. A este comprimento dá-se o nome de distância de regularização ( $\ell_p$ ).

$$\ell_p = \sqrt{h^2 + (0,6 \cdot \ell_{bpt})^2} \geq \ell_{bpt}$$

$$\ell_{p,inf} = \sqrt{90^2 + (0,6 \cdot 132)^2} \approx 119 \text{ cm}$$

$$\ell_{p,sup} = \sqrt{90^2 + (0,6 \cdot 143)^2} \approx 124 \text{ cm}$$

, assim  $l_{p,inf} = l_{bpt,inf} = 132 \text{ cm}$  e  $l_{p,sup} = l_{bpt,sup}$

= 143 cm.

### 11. Verificação de ruptura no tempo zero (verificação de ruptura simplificada).

Nos cálculos das perdas de protensão a primeira fase (1 dia) corresponde ao momento de aplicação efetiva da protensão na viga pré-moldada, portanto, esta tensão na cordoalha que é utilizada para a verificação em vazio. Em vazio é a expressão dada para quando se tem no elemento pré-moldado a atuação somente do peso próprio e da protensão.

Todo o cálculo foi feito para os esforços máximos, ou seja, para a seção do meio do vão chamada aqui como seção S<sub>5</sub>, embora essa seção seja a mais desfavorável para as verificações em serviço e o estado limite ultimo, para a verificação em vazio essa seção esta contra a segurança, pois no meio do vão, o momento máximo do peso próprio alivia a tensão de tração na borda superior e simultaneamente alivia o excesso de compressão na borda inferior.

Para uma melhor análise é recomendado nesta etapa a verificação em décimo de vão, como o carregamento da protensão e do peso próprio do elemento pré-moldado. O momento em décimo de vão é determinado da seguinte maneira:

$$M_s = \frac{plx_s}{2} - \frac{px_s^2}{2}, \text{ com a variação de } s \text{ entre } 1 \text{ e } 5 \text{ e o carregamento de } p=6,75$$

kN/m. obteve-se os resultados apresentado na Tabela 8-9.

**Tabela 8-9: Valores dos momentos fletores em vazio para décimo de vão.**

| Seção                 | S <sub>1</sub> | S <sub>2</sub> | S <sub>3</sub> | S <sub>4</sub> | S <sub>5</sub> |
|-----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| M <sub>s</sub> (kN.m) | 28,88          | 51,53          | 67,38          | 77,00          | 80,21          |

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_p \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 9,870 \cdot 131,75 + 1,974 \cdot 142,63 = 1581,92 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_p \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_p$$

$$M_p = 9,870 \cdot 131,75 \cdot 0,389 - 1,974 \cdot 142,63 \cdot 0,40 = 393,22 \text{ kNm}$$

#### Borda inferior

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_s}{W_i}$$

**Borda superior**

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_s}{W_s}$$

A Tabela 8-10 apresenta os valores das tensões na borda inferior e superior variando o momento em décimo de vão apresentados na Tabela 8-9

**Tabela 8-10: Valores das tensões da borda inferior e superior em décimo de vão.**

| Seção                           | S <sub>1</sub> | S <sub>2</sub> | S <sub>3</sub> | S <sub>4</sub> | S <sub>5</sub> |
|---------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\sigma_i$ (kN/m <sup>2</sup> ) | 14855          | 14300          | 13904          | 13666          | 13587          |
| $\sigma_s$ (kN/m <sup>2</sup> ) | -3137          | -2582          | -2186          | -1948          | -1869          |

Os limites para este instante é:

$$\text{Compressão} \rightarrow \sigma = 0,7 f_{ckj} = 0,7 \times 25000 = 17500 \text{ kN/m}^2.$$

$$\text{Tração} \rightarrow \sigma = 1,2 \times 0,3 f_{ct,m} = 1,20 \times 0,3 \times \sqrt[3]{25^2} = 3,078 \text{ MPa} = 3078 \text{ kN/m}^2.$$

$$-3078 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 17500 \text{ kN/m}^2$$

O limite de tensão na borda inferior esta verificado em todas as seções, enquanto que a tensão na borda superior esta ultrapassando o limite entre as seções S<sub>1</sub> e S<sub>2</sub>, o que implica a necessidade de uma análise mais detalhada considerando o comprimento de transferência de protensão dos cabos.

Nesta etapa determina-se o momento mínimo necessário para que a tensão de tração fique abaixo do permitido.

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_s}{W_s} \geq 1,20 \cdot f_{ct,m}$$

$$\sigma_s = \frac{1581,92}{0,27} - \frac{393,22}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{M_{\min}}{4,05 \cdot 10^{-2}} \geq -3078 \text{ kN/m}^2$$

$$M_{\min} = 31,27 \text{ kN.m}$$

Com o valor do momento mínimo é possível determinar o comprimento necessário requerido, ou seja, região em que não pode atuar todo o esforço de protensão.

$$M_{\min} = \frac{plx_s}{2} - \frac{px_s^2}{2}$$

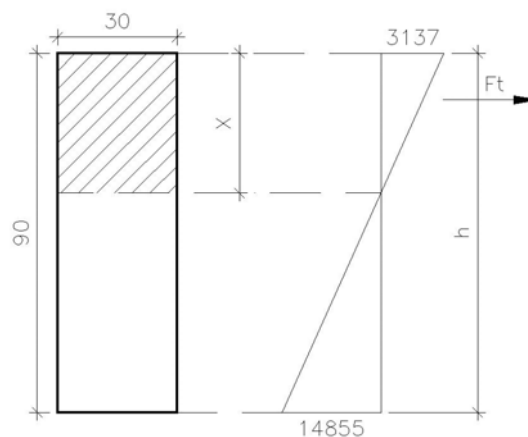
$$31,27 = \frac{6,75 \cdot 9,75x_s}{2} - \frac{6,75x_s^2}{2}$$

A expressão é uma equação de segundo grau, cuja solução tem duas raízes. Resolvendo a equação, tem-se  $x_1 = 1,06$  m que é a distância requerida.

Com o valor do comprimento requerido verifica-se se o mesmo é superior ao comprimento de transferência. Quando o comprimento requerido é inferior ao comprimento de transferência não é necessário isolar-se cabos. Caso contrário usa-se a expressão de tensão para calcular a quantidade de cabos a serem isolados considerando-se uma quantidade fixa de cabos superiores ou não..

Na situação em questão como o comprimento requerido (1,06 m) é inferior ao de transferência (1,32 m) não há necessidade de se isolar nenhum cabo.

Agora, porém é preciso calcular a armadura passiva que ira controlar a fissuração na borda superior. Como são conhecidas as tensões na borda inferior e superior pode-se obter a posição da linha neutra e assim calcular a resultante de tração na seção. A seção mais desfavorável para essa situação esta entre a seção  $S_1$  e  $S_2$ , a favor da segurança o dimensionamento é feito para a seção  $S_1$ .



**Figura 8-9: Esquema para o cálculo da força  $F_t$  de tração na seção transversal.**

$$\frac{x}{h} = \frac{\sigma_s}{\sigma_s + \sigma_i} \rightarrow x = \frac{3137}{3137 + 14855} \cdot 0,90 = 0,157 \text{ m}$$

O valor de força de tração, como pode se deduzir a partir da Figura 8-9 é dado por:

$$F_t = \sigma_s \cdot b \cdot \frac{x}{2} = 3137 \cdot 0,30 \cdot \frac{0,157}{2} = 73,88 \text{ kN}$$

A norma NBR 6118:2003 estabelece que a tensão da armadura neste caso seja de 25 kN/cm<sup>2</sup>.

$$A'_s = \frac{F_t}{25} = \frac{73,88}{25} = 2,96 \text{ cm}^2, \text{ não considerando a armadura de protensão pode-se}$$

adotar 4φ10 mm ( $A_s = 3,2 \text{ cm}^2$ ). Considerando a armadura de protensão tem-se cordoalha 2φ12,7 mm (1,974 cm<sup>2</sup>) e 2φ8 mm (1,0 cm<sup>2</sup>) de armadura passiva.

## 12. Verificação das tensões em décimo de vão no tempo infinito

Geralmente a verificação da tensão em décimo de vão é mais importante na situação em vazio, pois tem-se nesta fase toda a protensão atuante e apenas o carregamento do peso próprio, mas de qualquer maneira pode-se determinar o valor das tensão em décimo da vão para o tempo infinito, assim os resultados calculados podem apresentar com mais clareza o comportamento da viga pré-moldada.

Com os carregamentos apresentados nas Tabela 8-2 e Tabela 8-3 podem-se calcular os momentos em décimo de vão. Considerando os três primeiros carregamentos ( $g_1+g_2+g_3$ ) como  $p_1$  o terceiro e quarto ( $g_4+g_5$ ) como  $p_2$  e o sexto ( $q$ ) como  $p_3$ , é calculado os momentos fletores e apresentado na Tabela 8-11.

**Tabela 8-11: Valores dos momentos fletores seção composta para décimo de vão.**

|                             | S <sub>1</sub> | S <sub>2</sub> | S <sub>3</sub> | S <sub>4</sub> | S <sub>5</sub> |
|-----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>M<sub>1</sub> (kN.m)</b> | 136,88         | 242,98         | 318,91         | 364,47         | 379,66         |
| <b>M<sub>2</sub> (kN.m)</b> | 50,05          | 88,98          | 116,78         | 133,47         | 139,03         |
| <b>M<sub>3</sub> (kN.m)</b> | 92,40          | 164,27         | 215,60         | 246,40         | 256,67         |

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 9,870 \cdot 111,91 + 1,974 \cdot 123,75 = 1348,83 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 9,870 \cdot 111,91 \cdot 0,389 - 1,974 \cdot 123,75 \cdot 0,40 = 331,96 \text{ kNm}$$

$$A = 0,27 \text{ m}; W_i = W_s 4,05 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3; W_{i,comp} = 7,69 \cdot 10^{-2}; W_{ts} = 1,85 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3$$

- ✓ Estado limite de formação de fissuras, combinação freqüente ( $\psi_1 = 0,6$ ).

Limites:

Compressão  $\rightarrow \sigma = 0,7 f_{ck} = 0,7 \times 40000 = 28000 \text{ kN/m}^2$ .

Tração  $\rightarrow \sigma = 0,3 f_{ctk,inf} = 0,21 \times \sqrt[3]{40^2} = 2,456 \text{ MPa} = 2456 \text{ kN/m}^2$ .

$$-2456 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$$

### Borda inferior

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{1,s}}{W_i} - \frac{M_{2,s}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_1 \cdot M_{3,s}}{W_{i,comp}}$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{1,s}}{W_i} - \frac{M_{2,s}}{W_{i,comp}}$$

### Borda superior

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{1,s}}{W_s} + \frac{M_{2,s}}{W_{ts}} + \frac{\psi_1 \cdot M_{3,s}}{W_{ts}}$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{1,s}}{W_s} + \frac{M_2}{W_{ts}}$$

O Gráfico 8-1 apresenta os valores das tensões em décimo de vão da borda inferior para o estado limite de formação de fissuras (ELS-F).

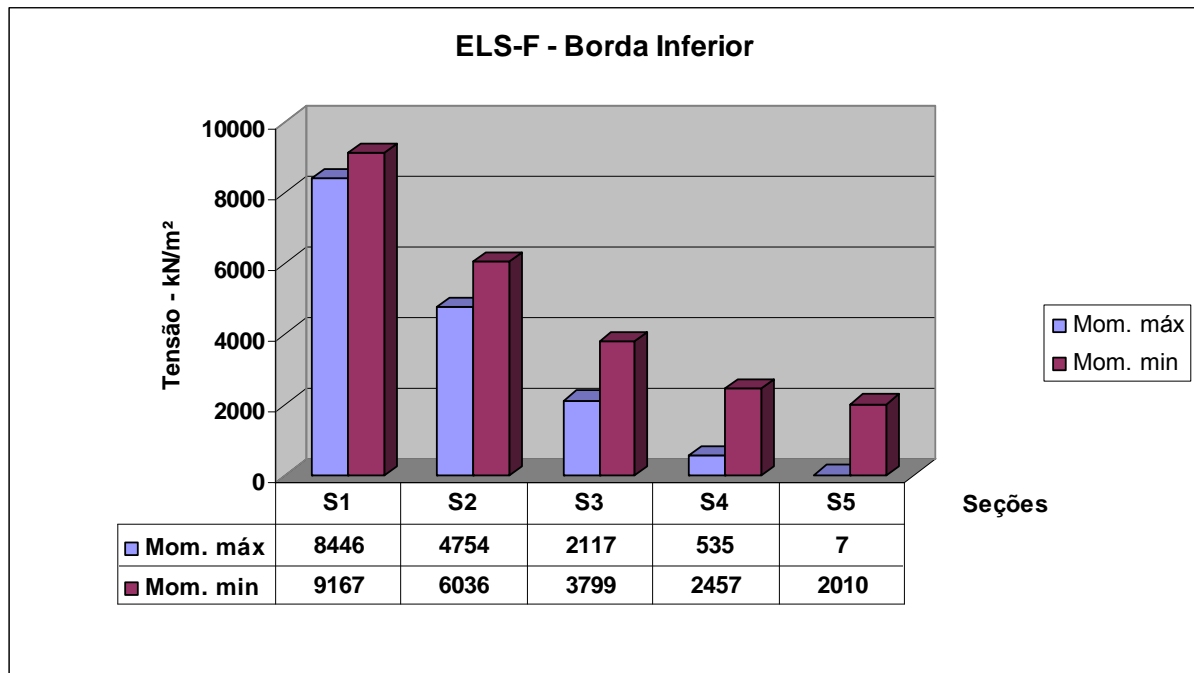


Gráfico 8-1: Tensões na borda inferior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.

O Gráfico 8-2 apresenta os valores das tensões em décimo de vão da borda inferior para o estado limite de formação de fissuras (ELS-F).

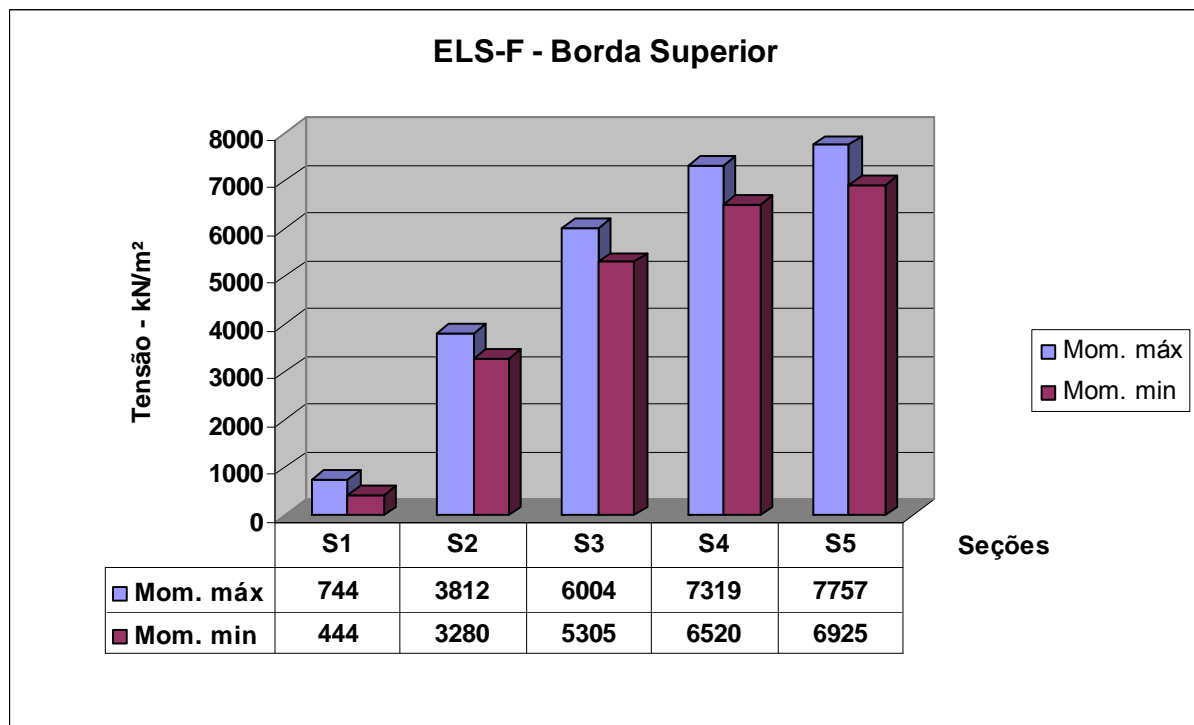


Gráfico 8-2: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.

Como os valores máximos e mínimos estão dentro do limite a verificação do estado limite de formação de fissuras esta atendida.



- ✓ Estado limite de descompressão, combinação quase permanente ( $\psi_2 = 0,4$ ).

Limites:

Compressão →  $\sigma = 0,7 f_{ck} = 0,7 \times 40000 = 28000 \text{ kN/m}^2$ .

Tração →  $\sigma = 0$

$$0 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$$

### Borda inferior

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{1,s}}{W_i} - \frac{M_{2,s}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_2 \cdot M_{3,s}}{W_{i,comp}}$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{1,s}}{W_i} - \frac{M_{2,s}}{W_{i,comp}}$$

### Borda superior

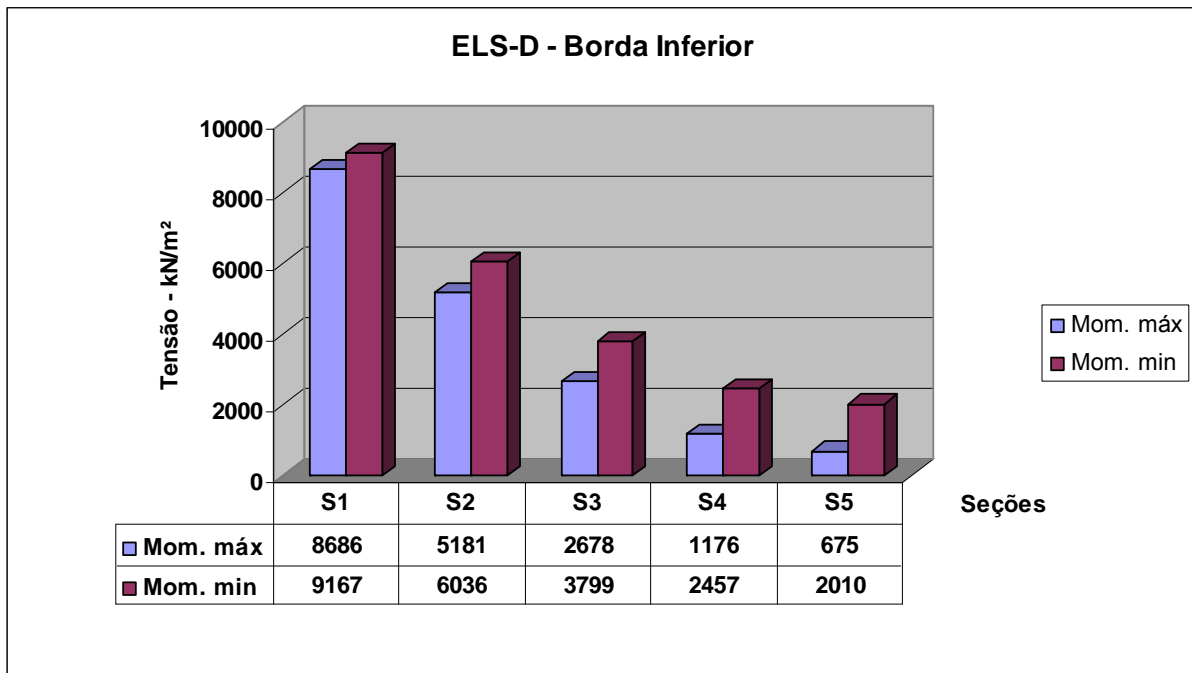
*Situação momento máximo.*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{1,s}}{W_s} + \frac{M_{2,s}}{W_{s,comp}} + \frac{\psi_2 \cdot M_{3,s}}{W_{s,comp}}$$

*Situação momento mínimo*

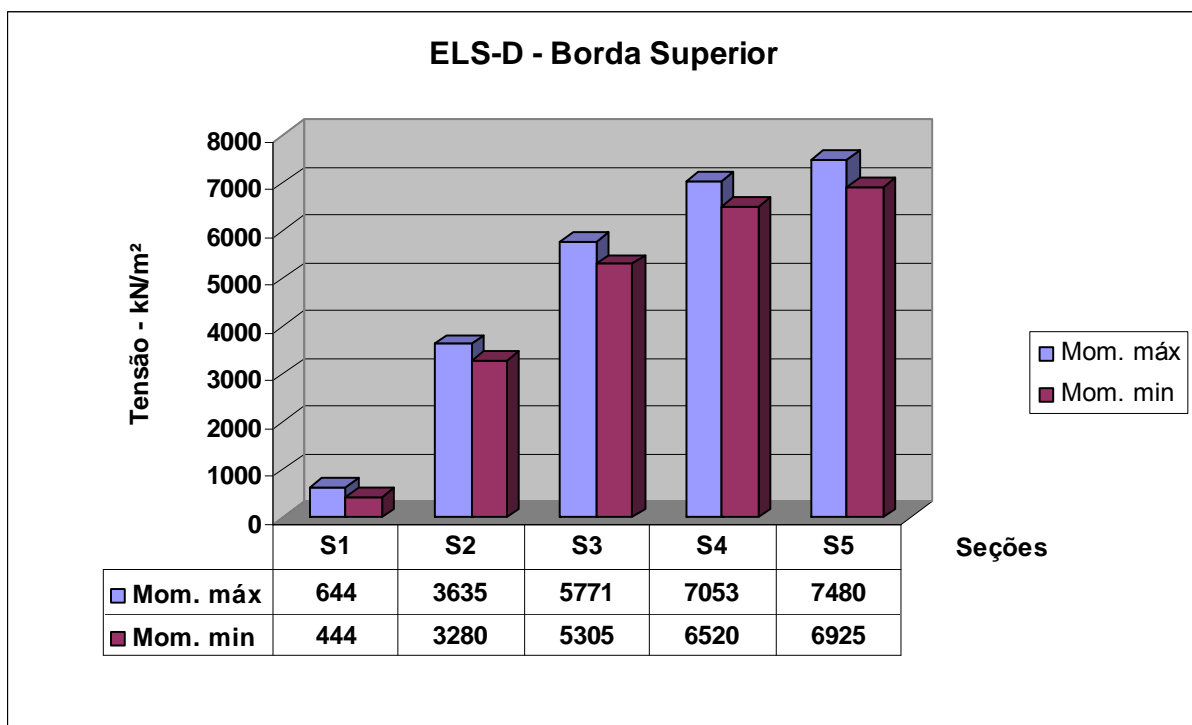
$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{1,s}}{W_s} + \frac{M_{2,s}}{W_{s,comp}}$$

O Gráfico 8-3 apresenta os valores das tensões em décimo de vão da borda inferior para o estado limite de descompressão (ELS-D).



**Gráfico 8-3: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.**

O Gráfico 8-3 apresenta os valores das tensões em décimo de vão da borda superior para o estado limite de descompressão (ELS-D).



**Gráfico 8-4: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.**

Como os valores máximos e mínimos estão dentro do limite a verificação do estado limite de formação de descompressão esta atendida.

### 13. Cálculo de $A_p$ no tempo infinito.

Considerando os coeficientes de 1,30 para os elementos pré-fabricados, tem-se:

$$M_d = 1,3 \cdot (M_{g1} + M_{g2}) + 1,4 \cdot (M_{g3} + M_{g4} + M_{g5} + M_q)$$

$$M_d = 1,3 \cdot (80,21 + 192,50) + 1,4 \cdot (106,95 + 70,58 + 68,45 + 256,67) = 1058,23 \text{ kN.m}$$

Supondo que a linha neutra esta passando na capa (seção retangular), de acordo com CARVALHO e FIGUEIREDO (2005) determinou-se o valor do KMD da seguinte maneira:

$$KMD = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{1058,23}{2,25 \cdot 1,039^2 \cdot \frac{30000}{1,4}} = 0,0203$$

Como o valor de KMD, e através da tabela 3.1 de CARVALHO e FIGUEIREDO (2005), obteve-se o valor de  $k_x$ ,  $k_z$  e  $\varepsilon_s$ .

$$k_x = 0,0304; k_z = 0,9879; \varepsilon_s = 10\text{‰}$$

Como o valor de  $k_x$  é possível verificar a posição da linha neutra.

$x = k_x \cdot d = 0,0304 \cdot 1,039 = 0,0316 \text{ m} = 3,16 \text{ cm} < h_f = 5 \text{ cm}$  (altura da capa). Portanto a hipótese adotada é válida, ou seja, a linha neutra esta na mesa e a seção é retangular.

Com a tensão no cabo no tempo infinito de  $\sigma_{p,\text{inf}} = 111,91 \text{ kN/cm}^2 = 1119,1 \text{ MPa}$  determina-se o pré-alongamento da armadura ativa de acordo com a Tabela 5-1, e o valor é de  $\varepsilon_p = 5,75\text{‰}$ . Com isso tem-se

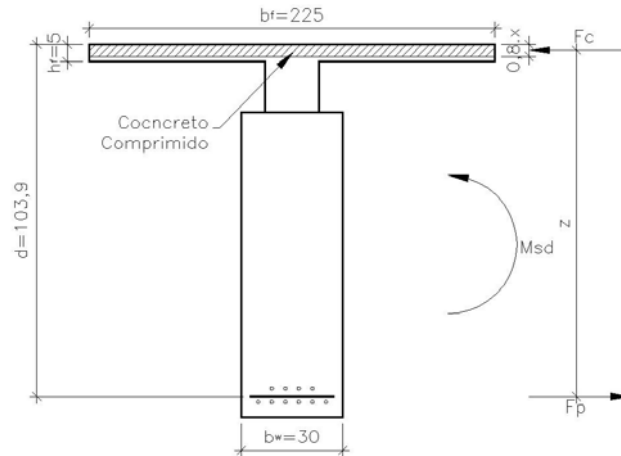
$\varepsilon_p = \varepsilon_s + \varepsilon_p = 10 + 5,75 = 15,75\text{‰}$ . Com  $\varepsilon_p$  na mesma Tabela 5-1 tem-se  $\sigma_{sd} = 1510,0 \text{ MPa}$ , com isso tem-se:

$$A_p = \frac{M_d}{k_z \cdot d \cdot \sigma_{sd}} = \frac{1058,23}{0,9879 \cdot 1,039 \cdot 1510} = 6,83 \text{ cm}^2$$

Como para a verificação da fissuração foram necessárias  $9,87 \text{ cm}^2$  de armadura ativa, que é maior do que a calculada para o estado limite último, isso implica que a verificação já esta atendida, sendo assim encerra-se o dimensionamento da armadura longitudinal atendendo todas as verificações recomendadas.

Outra maneira bastante comum na prática é conhecida a armadura longitudinal calcular o momento máximo resistente da seção.

Inicialmente determina-se a posição da linha neutra (LN) a partir do equilíbrio das forças atuantes na seção transversal (Figura 8-10).



**Figura 8-10: Seção transversal com a indicação das forças internas (unidades em cm).**

Como não há força externa e a força atuante no concreto ( $F_c$ ), deve ser igual a força atuante na armadura ( $F_t$ ).

$$F_c = F_t, \text{ ou seja, } (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) (0,8 \cdot x) = A_p \cdot f_{pd} \cdot$$

Para uma primeira tentativa impõe que a viga esta trabalhando no domínio 2 e que a posição da linha neutra esteja na altura da capa, assim a expressão da linha neutra é dado por:

$$x = \frac{A_p \cdot f_{pd}}{0,68 \cdot b_f \cdot f_{cd}}$$

A tensão no aço é determinada da mesma maneira apresentada anteriormente, portanto:

$$x = \frac{9,87 \cdot 150,1}{0,68 \cdot 2,25 \cdot \frac{30000}{1,4}} = 4,73 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 4,73 \text{ cm} < h_f, \text{ portanto a linha neutra}$$

esta passando pela capa.

Com a posição da linha neutra é possível identificar o domínio de deformação que esta situada a viga em estudo. Para que a viga se encontre no domínio 2 a posição da linha

neutra LN deve estar entre zero e um determinado valor obtido através das deformações do concreto e do aço.

$$x_2 = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \cdot d = \frac{3,5}{3,5 + 10} \cdot 1,039 = 0,2693 \text{ m} = 26,93 \text{ cm}$$

Como a posição da linha neutra esta a 4,73 cm pode-se dizer que a mesma encontra-se no domínio 2. Com o isso o momento resistente é dado por:

$$M_{rest} = F_c \cdot z = (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w)(0,8 \cdot x) \cdot (d - 0,4 \cdot x), \text{ assim tem-se:}$$

$$M_{rest} = \left(0,85 \cdot \frac{30000}{1,4}\right) \cdot 2,25 \cdot 0,8 \cdot 4,73 \cdot 10^{-2} (1,039 - 0,4 \cdot 4,73 \cdot 10^{-2}) = 1581 \text{ kN.m}$$

Como o momento atuante é menor que o momento resistente a armadura dimensionada para a fissuração é suficiente para atender o estado limite ultimo (ELU).

#### 14. Armadura de pele (na região tracionada).

Como a altura total da viga é maior que 60 cm, é necessária colocação em cada face, na região tracionada da viga, de uma armadura de pele.

$$A_{s,pele} = 0,10\% \cdot b_w \cdot h = \frac{0,10}{100} \cdot 30 \cdot 90 = 2,70 \text{ cm}^2 \quad (\text{em cada face, na região}$$

tracionada).

A armadura de pele é recomendada para evitar fissuras e, portanto, deveria ser empregada para a condição em serviço, porém, simplifcadamente será usada a condição de estado limite último. Lembrando que a linha neutra LN calculado no item anterior é de 26,93 cm, com isso tem-se:

$$h - x = 90 - 26,93 \text{ cm} = 63,07 \text{ cm}, \text{ portanto, a armadura de pele deve ser}$$

distribuída na região tracionada até uma altura aproximada de 63 cm.

#### 15. Estimativa de flecha

As flechas são calculadas para cada etapa, como o dimensionamento foi feito para protensão limitada implicando que para a combinação quase permanente com a verificação do estado limite de descompressão ( $\Psi_2 = 0,4$ ) não pode existir tração na peça, isso implica que até a ocorrência deste tipo de carregamento o momento de fissuração ( $M_r$ ) seria maior que o

momento atuante, sendo assim a viga trabalha no estágio I. Porém há de se considerar que eventualmente na vida da estrutura poderá ocorrer outras combinações de ações. Assim, poderia haver fissuração do concreto, por exemplo, para a combinação rara, porém como se trata de concreto protendido imagina-se que ao se verificar o estado de deformação para a combinação quase permanente basta verificar o nível de tensão nesta situação, pois mesmo que já tivesse ocorrido a fissuração do concreto devido a existência da protensão não haveria o efeito nocivo da mesma (fissuração).

Momento de fissuração é determinado para duas situações, a primeira é com a ação do peso próprio e a protensão após ocorrida as perdas imediatas e a segunda e no tempo infinito onde já decorreram todas as perdas devido a protensão e tem-se a seção composta.

*Momento de fissuração após as perdas imediatas*

$$M_r = \left( \alpha \cdot f_{ct} + \frac{N_p}{A} \right) \cdot w_i + M_p ; \text{ onde:}$$

$$\alpha = 1,2 \text{ para seção T ou duplo TT e } 1,5 \text{ para seção retangular}$$

$f_{ct}$  = é a resistência a tração do concreto, no caso de determinação do momento de fissuração para o estado limite de deformação excessiva  $f_{ct} = f_{ct,m}$ .

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 9,870 \cdot 131,75 + 1,974 \cdot 142,63 = 1577,97 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 9,870 \cdot 131,75 \cdot 0,389 - 1,974 \cdot 142,63 \cdot 0,40 = 393,22 \text{ kNm}$$

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{f_{ckj}^2} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{25^2} = 2,565 \text{ MPa} = 2565 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$M_r = \left( 1,5 \cdot 2565 + \frac{1577,97}{0,27} \right) \cdot 4,05 \times 10^{-2} + 393,22 = 785,74 \text{ kN.m}$$

Neste instante o momento atuante é devido ao peso próprio, com isso tem-se:

$$M_{g1} = \frac{p_1 \cdot l^2}{8} = \frac{6,75 \cdot 9,75^2}{8} = 80,21 \text{ kNm}, \text{ que é menor que o momento de}$$

fissuração.

*Momento de fissuração no tempo infinito*

$$M_r = \alpha \cdot f_{ct} \cdot w_{i,comp} + \frac{N_p}{A} \cdot w_i + M_p$$

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_p' \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 9,870 \cdot 111,91 + 1,974 \cdot 123,75 = 1348,83 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_p' \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_p'$$

$$M_p = 9,870 \cdot 111,91 \cdot 0,389 - 1,974 \cdot 123,75 \cdot 0,40 = 331,96 \text{ kNm}$$

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{40^2} = 3,509 \text{ MPa} = 3509 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$M_r = 1,2 \cdot 3509 \cdot 7,69 \cdot 10^{-2} + \frac{1348,83}{0,27} \cdot 4,05 \cdot 10^{-2} + 331,96 = 858,09 \text{ kN.m}$$

No tempo infinito o momento atuante para verificação de deformação excessiva é dado para a combinação quase permanente, como os valores dos carregamento dados na Tabela 8-4, tem-se:

$$M_{g1+g2+g3+g4+g5+\psi_2q} = \frac{p \cdot l^2}{8} = \frac{52,28 \cdot 9,75^2}{8} = 621,23 \text{ kNm}, \text{ que é menor que o}$$

momento de fissuração.

*Flechas devidas aos carregamentos  $g_1$  a  $g_5$  e  $q$ .*

→ **Fase 01: Peso próprio ( $g_1$ ).**

$$p = g_1 = 6,75 \text{ kN} / \text{m}$$

$$a_{g1} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 6,75 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 23,8 \cdot 10^6 \cdot 1,82 \cdot 10^{-2}} = 1,83 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,83 \text{ mm}$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{cj}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{25} = 23800 \text{ MPa}$$

→ **Fase 02: Peso próprio ( $g_1$ ) + Laje ( $g_2$ ).**

$$p = g_2 = 16,20 \text{ kN} / \text{m}$$

$$a_{g2} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 16,20 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 29,02 \cdot 10^6 \cdot 1,82 \cdot 10^{-2}} = 3,60 \cdot 10^{-3} m = 3,60 mm$$

Para a segunda fase com 15 dias o concreto tem resistência de  $\beta_1 \cdot f_{ck}$ .

$$\beta_1 = \exp\left\{s \left[1 - \left(\frac{28}{t}\right)^{1/2}\right]\right\} = \exp\left\{0,20 \left[1 - \left(\frac{28}{15}\right)^{1/2}\right]\right\} = 0,929$$

Onde:

$s = 0,20$  para concreto de cimento CPV-ARI.

Assim:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{\beta_1 f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{0,929 \cdot 40} = 29016 MPa$$

→ **Fase 03:** *Peso próprio ( $g_1$ ) + Laje ( $g_2$ ) + Capa ( $g_3$ ).*

$$p = g_3 = 9,00 kN/m$$

$$a_{g3} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 9,00 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 1,82 \cdot 10^{-2}} = 1,93 \cdot 10^{-3} m = 1,93 mm$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{40} = 30104 MPa$$

→ **Fase 04:** *Peso próprio ( $g_1$ ) + Laje ( $g_2$ ) + Capa ( $g_3$ ) + Alvenaria ( $g_4$ ).*

$$p = g_4 = 5,94 kN/m$$

$$a_{g4} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 5,94 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 4,89 \cdot 10^{-2}} = 4,75 \cdot 10^{-4} m = 0,48 mm$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{40} = 30104 MPa$$

→ **Fase 05:** *Peso próprio ( $g_1$ ) + Laje ( $g_2$ ) + Capa ( $g_3$ ) + Alvenaria ( $g_4$ ) + Revestimento ( $g_5$ ).*



$$p = g_5 = 5,76 \text{ kN} / m$$

$$a_{g_5} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 5,76 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 4,89 \cdot 10^{-2}} = 4,60 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,46 \text{ mm}$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{40} = 30104 \text{ MPa}$$

→ **Fase 06:** *Peso próprio (g<sub>1</sub>) + Laje (g<sub>2</sub>) + Capa (g<sub>3</sub>) + Alvenaria (g<sub>4</sub>) + Revestimento (g<sub>5</sub>) + Acidental (q).*

Considerando o coeficiente de ponderação  $\Psi_2 = 0,4$

$$p = q = 21,60 \text{ kN} / m$$

$$a_q = \frac{5 \cdot p \cdot \psi_2 \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 21,60 \cdot 0,4 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 4,89 \cdot 10^{-2}} = 6,90 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,69 \text{ mm}$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{40} = 30104 \text{ MPa}$$

*Contra flechas devidas momento de protensão*

Após 24 horas da fabricação da viga, a protensão foi aplicada com os cortes dos cabos e inicia-se também uma perda de protensão, com isso analisa-se a contra flecha e a sua diminuição da seguinte forma.

A tensão inicial do cabo é dada por:

$$\sigma_{pi} = \sigma_p - (\Delta\sigma_{acora} + \Delta\sigma_{pr}) = 145,3 - (1,20 + 2,55) = 141,55 \text{ MPa}$$

Com isso tem-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_p' \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 9,870 \cdot 141,55 + 1,974 \cdot 141,55 = 1676,52 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_p' \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_p'$$

$$M_p = 9,870 \cdot 141,55 \cdot 0,389 - 1,974 \cdot 141,55 \cdot 0,40 = 431,70 \text{ kNm}$$

$$a_p = \frac{M_p \cdot l^2}{8 \cdot E_c \cdot I} = \frac{431,70 \cdot 9,75^2}{8 \cdot 29,02 \cdot 10^6 \cdot 1,82 \cdot 10^{-2}} = 9,71 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 9,71 \text{ mm}$$

A perda de protensão também implica em uma perda da contra flecha.

$$M_{p,t=\infty} - M_{p,t=0} = \Delta M_p$$

$$\Delta a_p = \frac{\Delta M_p \cdot l^2}{8 \cdot E_c \cdot I}$$

Com a tensão no tempo infinito no cabo de protensão de  $\sigma_{pi,inf} = 111,91$  MPa e  $\sigma_{pi,sup} = 123,75$  MPa, tem-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 9,870 \cdot 111,91 + 1,974 \cdot 123,75 = 1348,83 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 9,870 \cdot 111,91 \cdot 0,389 - 1,974 \cdot 123,75 \cdot 0,40 = 331,96 \text{ kNm}$$

$$\Delta a_p = \frac{\Delta M_p \cdot l^2}{8 \cdot E_c \cdot I} = \frac{(431,70 - 331,96) \cdot 9,75^2}{8 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 1,82 \cdot 10^{-2}} = 2,16 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,16 \text{ mm}$$

A Tabela 8-12 apresenta o resumo das flechas imediatas.

**Tabela 8-12: Resumo das deformações imediatas.**

| Fase | Ação                       | Seção         | Flecha imediata (mm) |
|------|----------------------------|---------------|----------------------|
| 1    | Protensão                  | Pré-fabricada | -9,71                |
| 1    | Peso próprio da viga       | Pré-fabricada | 1,83                 |
| 2    | Peso próprio da laje       | Pré-fabricada | 3,60                 |
| 3    | Execução da capa           | Pré-fabricada | 1,93                 |
| 4    | Execução da alvenaria      | Composta      | 0,48                 |
| 5    | Execução do revestimento   | Composta      | 0,46                 |
| 6    | Atuação da carga acidental | Composta      | 0,69                 |
| 7    | Perda de protensão         | Pré-fabricada | 2,16                 |

*Valores do coeficiente de fluência.*

O coeficiente de fluência já foi determinado e apresentado na Tabela 8-8 para a determinação das perdas por fluência. A Tabela 8-13 reapresenta os valores dos coeficientes de fluência.

Tabela 8-13: Coeficientes de fluência para a seção 01, 02 e final.

| Ação                       | t <sub>0</sub><br>seção 01 | Coefficiente φ<br>seção 01 | t <sub>0</sub><br>seção 02 | Coefficiente<br>φ seção 02 | Coefficiente<br>φ final |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|
| Protensão                  | 1                          | 3,304                      | --                         | --                         | 3,304                   |
| Peso próprio da viga       | 1                          | 3,304                      | --                         | --                         | 3,304                   |
| Peso próprio da laje       | 15                         | 2,225                      | --                         | --                         | 2,225                   |
| Execução da capa           | 30                         | 1,940                      | 1                          | 3,783                      | 2,559                   |
| Execução da alvenaria      | 45                         | 1,777                      | 15                         | 2,539                      | 2,033                   |
| Execução do revestimento   | 60                         | 1,660                      | 30                         | 2,150                      | 1,825                   |
| Atuação da carga acidental | 75                         | 1,568                      | 45                         | 1,933                      | 1,691                   |
| Perda de protensão         | 75                         | 1,568                      | 45                         | 1,933                      | 1,691                   |

A Tabela 8-14 apresenta os valores finais das flechas considerando a protensão e os carregamentos.

Tabela 8-14: Resultado final da flecha no tempo infinito.

| Fase | Flecha<br>imediate | Coefficiente<br>φ <sub>final</sub> | Coefficiente<br>1+ φ <sub>final</sub> | Flecha<br>t <sub>∞</sub> | Soma   |
|------|--------------------|------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------|--------|
| 1    | -9,71              | 3,304                              | 4,304                                 | -41,79                   | -41,79 |
| 1    | 1,83               | 3,304                              | 4,304                                 | 7,88                     | -33,91 |
| 2    | 3,60               | 2,225                              | 3,225                                 | 11,61                    | -22,30 |
| 3    | 1,93               | 2,559                              | 3,559                                 | 6,87                     | -15,43 |
| 4    | 0,48               | 2,033                              | 3,033                                 | 1,46                     | -13,97 |
| 5    | 0,46               | 1,825                              | 2,825                                 | 1,30                     | -12,67 |
| 6    | 0,69               | 1,691                              | 2,691                                 | 1,86                     | -10,81 |
| 7    | 2,16               | 1,691/2=0,846                      | 1,846                                 | 3,99                     | -6,82  |

$$\text{Com limite de } l/250 = 9750/250 = 39,00 \text{ mm}$$

## 16. Armadura transversal

A protensão longitudinal introduz nas peças de concreto tensões de compressão que contribuem na redução das tensões principais de tração (que ficam mais inclinadas com relação ao eixo de peça), de modo que as fissuras de cisalhamento configuram-se com menor inclinação do que em caso de concreto armado.

Aplica-se o modelo de cálculo I para determinação da armadura transversal.

*Cálculo de  $V_{sd}$ .*

Prescrições da NBR 6118:2003, item 17.4.1.2.1, para o cálculo da armadura transversal no trecho junto ao apoio, no caso de apoio direto (carga e reação em faces opostas,

comprimindo-as). A força cortante oriunda de carga distribuída pode ser considerada, no trecho entre o apoio e a seção situada à distância de  $d/2$  da face de apoio, constante e igual à desta seção.

Para o cálculo das ações atuantes são considerados os carregamentos apresentados na Tabela 8-2 e Tabela 8-3.

$$V_{(x)} = \frac{p \cdot l}{2} - p \cdot x$$

$$V_1 = 1,3 \cdot \left( \frac{p_{g1+g2} \cdot l}{2} - p \cdot x \right) = 1,3 \cdot \left( \frac{22,95 \cdot 9,75}{2} - 22,95 \cdot 0,45 \right) = 132,14 \text{ kN}$$

$$V_2 = 1,4 \cdot \left( \frac{p_{g3+g4+g5+q} \cdot l}{2} - p \cdot x \right) = 1,4 \cdot \left( \frac{42,30 \cdot 9,75}{2} - 42,30 \cdot 0,45 \right) = 262,05 \text{ kN}$$

$$V_{sd} = V_1 + V_2 = 132,14 + 262,05 = 394,19 \text{ kN}$$

*Verificação do esmagamento da biela de concreto*

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (\cot \alpha + \cot \theta)$$

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot 0,84 \cdot \frac{40000}{1,4} \cdot 0,30 \cdot 0,839 \cdot \text{sen}^2 30 \cdot (\cot 90 + \cot 30) = 1410,8 \text{ kN}, \text{ com:}$$

$$\alpha_{v2} = \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) = \left( 1 - \frac{40}{250} \right) = 0,84$$

Portanto,  $V_{sd} \leq V_{Rd2}$ , e não há perigo de esmagamento do concreto das bielas.

*Cálculo de  $V_c$ .*

Para o cálculo da armadura transversal (em forma de estribos) usa-se o modelo I da NBR 6118:2003 na flexo-compressão e considera-se que a seção resistente seja a da viga pré-fabricada (retangular de 30x90 cm). Assim tem-se:

$$V_c = V_{c0} \left( 1 + \frac{M_0}{M_{sd, \text{máx}}} \right) \leq 2 \cdot V_{c0}, \text{ com}$$

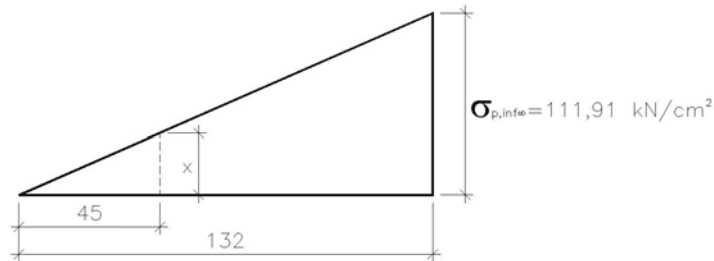
$$V_{c0} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d = 0,6 \cdot 1754 \cdot 0,30 \cdot 0,839 = 264,89 \text{ kN}$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}}{1,4} = 0,15 \cdot \sqrt[3]{40^2} = 1,754 \text{ MPa} = 1754 \text{ kN} / \text{m}^2$$

Considerando o efeito da protensão tem-se:

$$M_0 = (\gamma_p \cdot N_{p\infty} + \gamma_f \cdot N_{g+q}) \cdot \frac{w_i}{A} + \gamma_p \cdot \overbrace{N_{p\infty} \cdot e_p}^{M_p}$$

Como demonstrando no item anterior a protensão necessita de um comprimento de 132 cm para transferir a totalidade da carga de protensão na peça pré-fabricada, de acordo com a norma esse efeito varia linearmente, com isso através da Figura 8-11 pode-se calcular o valor da tensão na seção em análise (x = 45 cm).



**Figura 8-11: Variação linear do efeito da protensão na viga pré-moldada.**

$$\frac{x}{45} = \frac{111,91}{132} \rightarrow x = 38,15 \text{ kN} / \text{cm}^2, \text{ analogamente calcula-se a tensão na cordoalha}$$

da borda superior.

$$\frac{x}{45} = \frac{111,91}{143} \rightarrow x = 41,77 \text{ kN} / \text{cm}^2, \text{ finalmente considerando:}$$

$$N_p = \sigma_{p=\infty,inf} \cdot A_p + \sigma_{p=\infty,sup} \cdot A_p'$$

$$N_p = 38,15 \cdot 9,870 + 41,77 \cdot 1,974 = 458,99 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{p\infty,inf} \cdot e_p - A_p' \cdot \sigma_{p\infty,sup} \cdot e_p'$$

$$M_p = 9,870 \cdot 38,15 \cdot 0,389 - 1,974 \cdot 41,77 \cdot 0,40 = 113,42 \text{ kNm}$$

$$M_0 = (0,9 \cdot 458,99 + 0) \cdot \frac{4,05 \cdot 10^{-2}}{0,27} + 0,9 \cdot 113,42 = 152,90 \text{ kNm}$$

Cálculo de  $M_{sd,m\acute{a}x}$  na seção em análise:

$$M_{(x)} = \frac{p \cdot l \cdot x}{2} - \frac{p \cdot x^2}{2}$$

$$M_1 = 1,3 \cdot \left( \frac{P_{g1+g2} \cdot l \cdot x}{2} - \frac{P_{g1+g2} \cdot x^2}{2} \right)$$

$$M_1 = 1,3 \cdot \left( \frac{22,95 \cdot 9,75 \cdot 0,45}{2} - \frac{22,95 \cdot 0,45^2}{2} \right) = 62,45 \text{ kNm}$$

$$M_2 = 1,4 \cdot \left( \frac{P_{g3+g4+g5+q} \cdot l \cdot x}{2} - \frac{P_{g3+g4+g5+q} \cdot x^2}{2} \right)$$

$$M_2 = 1,4 \cdot \left( \frac{42,30 \cdot 9,75 \cdot 0,45}{2} - \frac{42,30 \cdot 0,45^2}{2} \right) = 123,91 \text{ kNm}$$

$$M_{sd,max} = M_1 + M_2 = 62,45 + 123,91 = 186,36 \text{ kNm}$$

$$V_c = 264,89 \left( 1 + \frac{152,90}{186,36} \right) = 482,22 \text{ kN} \leq 2 \cdot V_{c0}, \text{ portanto, } V_c = 482,22 \text{ kN}$$

#### *Cálculo da armadura transversal*

Para o cálculo da armadura transversal, a parcela da força cortante ( $V_{sw}$ ) a ser absorvida pela armadura, pode ser escrita por:

$V_{sw} = V_{Rd3} - V_c$ , sendo que a força cortante resistente de cálculo  $V_{Rd3}$  deve ser no mínimo igual a força cortante solicitante de cálculo  $V_{sd}$  ( $V_{Rd3} = V_{sd}$ ).

$V_{sw} = V_{Rd3} - V_c = V_{sd} - V_c = 394,19 - 482,22 = -88,03 \text{ kN}$  o sinal negativo significa que apenas o concreto é suficiente para resistir aos esforços de cisalhamento e, portanto, a armadura transversal será apenas construtiva, obedecendo aos valores mínimos indicados pela norma.

#### *Armadura mínima*

Para garantir ductilidade à ruína por cisalhamento a armadura transversal deve ser suficiente para suportar o esforço de tração resistido pelo concreto na alma, antes da formação de fissuras de cisalhamento.

Segundo o item 17.4.1.1.1 da NBR 6118:2003, a armadura transversal mínima deve ser constituída por estribos, com taxa geométrica:

$$\rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen} \alpha} \geq \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}}, \text{ ou seja,}$$

$$A_{sw} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \cdot b_w \cdot s \cdot \text{sen} \alpha, \text{ com:}$$

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,30 \cdot \sqrt[3]{40^2} = 3,509 \text{ MPa}$$

$$A_{sw} \geq 0,2 \cdot \frac{3,509}{500} \cdot 30 \cdot 100 \cdot \text{sen} 90 = 4,21 \text{ cm}^2 / \text{m}, \text{ considerando-se estribos com 4}$$

ramos de 6,3 mm, o espaçamento  $s$  é dado por:

$$s = \frac{A_{s\phi}}{A_{sw}} = \frac{4 \cdot 0,32}{4,21} = 0,30 \text{ m} = 30 \text{ cm}$$

O espaçamento máximo entre estribos, na direção longitudinal da viga. Deve ser suficiente para a passagem do vibrador, garantindo um bom adensamento.

Para que não ocorra ruptura por cisalhamento nas seções entre os estribos, o espaçamento máximo deve atender as seguintes condições:

$$V_{sd} \leq 0,67 \cdot V_{Rd2} \rightarrow s_{m\acute{a}x} = 0,6 \cdot d \leq 300 \text{ mm};$$

$$V_{sd} > 0,67 \cdot V_{Rd2} \rightarrow s_{m\acute{a}x} = 0,3 \cdot d \leq 200 \text{ mm};$$

Sendo assim, tem-se:

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} = \frac{394,19}{1631,02} = 0,24, \text{ portanto adota-se } \phi \text{ 6,3 mm com 4 ramos a cada 30 cm.}$$

### 17. Armadura necessária para ancoragem da diagonal de compressão

Força necessária para ancorar a diagonal de compressão em apoios extremos (considerando modelo II com  $\theta = 30^\circ$ ):

$$R_s = \left( \frac{a_l}{d} \right) \cdot V_{sd,m\acute{a}x}$$

$$\frac{a_l}{d} = 0,5 \cdot (\cot \theta - \cot \alpha) = 0,5 \cdot (\cot 30 - \cot 90) = 0,87$$

$$R_s = 0,87 \cdot 394,19 = 342,94 \text{ kN}$$

Considerando o efeito da normal de protensão ( $x=22,50$  cm) das cordoalhas na borda inferior ( $N_p=188,22$  kN)

$$A_{s,cal} = \frac{R_s}{f_{yd}} = \frac{342,94 - 188,22}{\frac{50}{1,15}} = 3,55 \text{ cm}^2 \rightarrow 2\phi 16 \text{ mm}$$

#### *Comprimento de ancoragem das barras no apoio*

Na ancoragem da armadura de tração nos apoios extremos com momentos negativos ou nulos, as barras dessas armaduras, no caso com ganchos semicirculares ( $r = 2,5 \phi$ , raio de curvatura interno do gancho de uma barra de diâmetro  $\phi$ ), deverão ser ancoradas a partir da face do apoio, com comprimentos iguais ou superiores ao maior dos seguintes valores:

$$l_{b,nec} = 0,7 \cdot l_b \cdot \frac{A_{s,calc}}{A_{s,ef}} = 0,7 \cdot 44,06 \cdot \frac{3,55}{A_{s,ef}} = 20,0 \rightarrow A_{s,ef} = 5,47 \text{ cm}^2$$

O valor de  $l_b$  é encontrado através da seguinte equação:

$$l_b = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}} = \frac{16}{4} \cdot \frac{500}{1,15 \cdot 3,947} = 440,62 \text{ mm} = 44,06 \text{ cm}$$

Sendo  $f_{bd}$ :

$$f_{bd} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot f_{ctd} = 2,25 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot 1,754 = 3,946 \text{ MPa}$$

$\eta_1 = 2,25$  (CA-50 para barra usual, nervurada, de alta aderência);

$\eta_2 = 1,0$  (situação de boa aderência);

$\eta_3 = 1,0$  ( $\phi = 20 \text{ mm} < 32 \text{ mm}$ )

$$f_{ctd} = \frac{0,21 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2}}{1,4} = 0,15 \cdot \sqrt[3]{40^2} = 1,754 \text{ MPa}$$



### 18. Seção composta

Segundo o item 6.3 da NBR 9062:2006 o cálculo deve levar em conta as tensões existentes na parte pré-moldada da peça antes do endurecimento do concreto aplicado na segunda etapa, as propriedades mecânicas do concreto pré-moldado e do concreto moldado posteriormente, a redistribuição de esforços decorrentes da retração e da fluência e a incidência dessas ações sobre o esforço de deslizamento das superfícies em contato.

Na falta de cálculo mais rigoroso, permite-se calcular a peça como composta, como peça monolítica se a tensão de aderência de cálculo  $\tau_{sd}$  satisfazer as seguintes condições:

$$\tau_{sd} \leq \beta_s \frac{f_{yd} \cdot A_s}{b \cdot s} + \beta_c \cdot f_{ctd} \leq 0,25 \cdot f_{cd}, \text{ onde:}$$

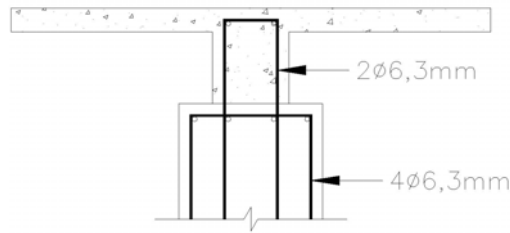
$$\tau_{sd} = \frac{F_{md}}{a_v \cdot b}, \text{ com } a_v \text{ a distância entre os pontos de momento nulo e máximo,}$$

respectivamente e  $b$  a largura da interface (0,16m ver Figura 8-6). Como se tem um sistema com a viga bi-apoiada  $a_v$  é dado por  $l/2$ , ou seja,  $a_v = \frac{l}{2} = \frac{9,75}{2} \approx 4,88 \text{ m}$ .

$$F_{md} = \frac{M_d}{kz \cdot d} = \frac{1058,23}{0,9879 \cdot 1,039} = 1030,98 \text{ kN}$$

$$\tau_{sd} = \frac{1030,98}{4,88 \cdot 0,16} = 1320,42 \text{ kN/m}^2$$

Considerando que a superfície de ligação seja intencionalmente rugosa com no mínimo 0,5 cm, a tabela 5 da NBR 9062:2006 fornece os valores de máximos  $\beta_s = 0,9$  e  $\beta_c = 0,6$ . Considerando a mesma armadura dimensionada para o cisalhamento, com apenas dois ramos de  $\phi$  6,3 mm (ver Figura 8-12) fazendo a ligação entre a viga de pré-moldada e a capa de concreto, tem-se:



**Figura 8-12: Posicionamento das armaduras de cisalhamento.**

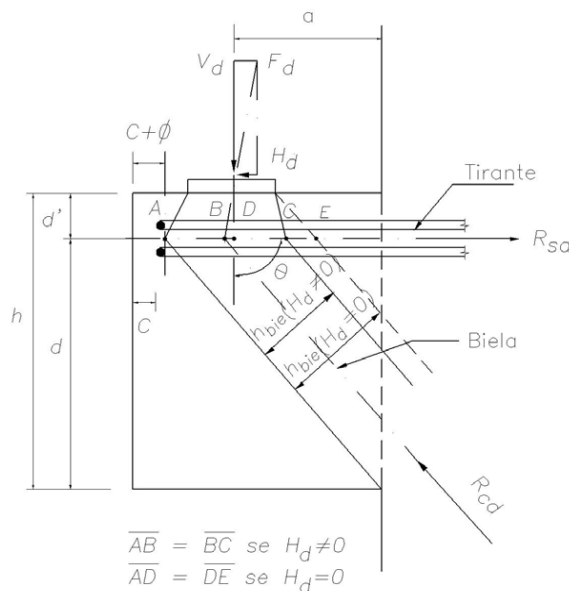
$$\tau_{sd} \leq \beta_s \frac{f_{yd} \cdot A_s}{b \cdot s} + \beta_c \cdot f_{ctd} \leq 0,25 \cdot f_{cd}$$

$$\tau_{sd} \leq 0,9 \frac{50 \cdot 2 \cdot 0,32}{1,15 \cdot 0,16 \cdot 0,30} + 0,60 \cdot 1754 = 1574,14 \text{ kN/m}^2 \leq 0,25 \frac{40000}{1,4} = 7142,86 \text{ kN/m}^2$$

Com estas verificações atendidas pode-se considerar com uma seção monolítica para o estado limite ultimo.

### 19. Dimensionamento do consolo

O dimensionamento do consolo e dente Gerber é desenvolvido de acordo como o modelo biela-tirante proposto pela NBR 9062:2006 (Figura 8-13).



**Figura 8-13: Modelo biela-tirante para consolo curto (Figura 7.6 NBR 9062:2006).**

Na Figura 8-14 apresentam-se as variáveis que estão calculadas nas etapas do dimensionamento.

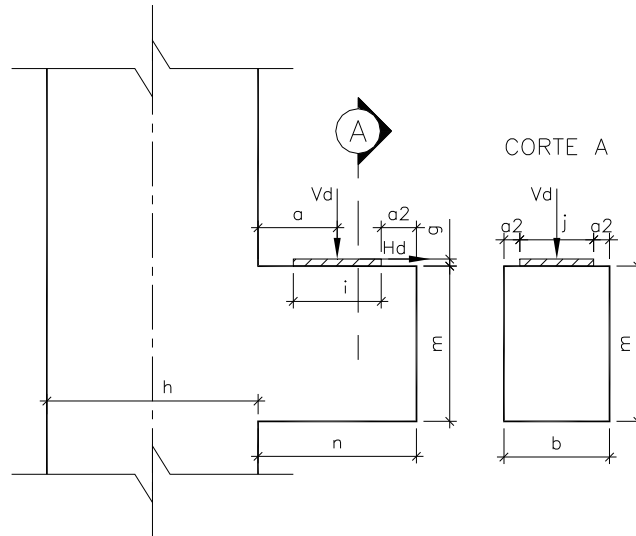


Figura 8-14: Consolo e elastômero com medidas preliminares.

**Ações atuantes**

A Tabela 8-15 apresenta as ações atuantes na viga para o carregamento da força vertical no consolo.

**Tabela 8-15: Carregamentos distribuídos na viga.**

| Descrição                      | Intensidade (kN/m) |
|--------------------------------|--------------------|
| g <sub>1</sub> – Peso próprio  | 6,75               |
| g <sub>2</sub> – Laje Alveolar | 16,20              |
| g <sub>3</sub> – Capa          | 9,00               |
| g <sub>4</sub> – Alvenaria     | 5,94               |
| g <sub>5</sub> – Revestimento  | 5,76               |
| q – Acidental                  | 21,60              |

**Reação no ELU.**

Os critérios adotados quanto a segurança em ligações por meio de consolos de concreto estabelecidos na NBR 6118:2004 e NBR 8681:2004 além dos usuais deve ser multiplicados pelo coeficiente de 1,1 segundo o item 7.3.1.1 da NBR 9062:2006 (elemento pré-moldado e a carga permanente é predominante).

$$V_d = 1,1 \cdot \frac{9,75}{2} (1,3 \cdot 22,95 + 1,4 \cdot 42,30) = 489,27 \text{ kN}$$

Devem ser adicionadas ao cálculo dos consolos as ações horizontais atuantes, ou as componentes horizontais de força provenientes de consolos inclinados, levando em conta a

rugosidade entre as superfícies de contato. Na falta de um cálculo rigoroso, permite-se adotar para as ações horizontais uma fração das ações verticais.

$$H_d = 0,16 \cdot V_d, \text{ para almofadas de elastômero.}$$

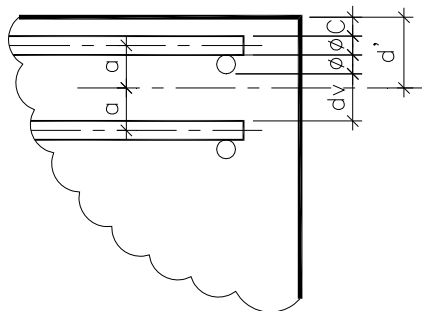
$$H_d = 0,16 \cdot 489,27 = 78,28 \text{ kN}$$

### Armadura do tirante

O tipo de armadura é horizontal com solda, com o diâmetro  $\phi = 2 \text{ cm}$  e com o cobrimento de 2 cm (menor possível). A partir dessa escolha pode-se determinar o valor de  $a_2$  (distância da face externa da almofada de apoio a face externa do consolo).

$$a_2 = c + \phi = 2 + 2 = 4 \text{ cm}$$

Uma vez atribuído o diâmetro da armadura do tirante, o cobrimento e atribuindo-se também o numero de camadas, pode-se determinar o valor de  $d'$  e conseqüentemente o valor de  $d$ . (Figura 8-15).



**Figura 8-15: Distancia  $d'$  com tirante em duas camadas horizontais soldadas.**

$$\text{Uma camada: } d' = c + \frac{\phi}{2}$$

$$\text{Duas camadas: } d' = c + \frac{3\phi}{2} + \frac{d_v}{2}$$

Onde;

$d_v$  = distancia mínima na vertical entre duas barras.

Considerando-se duas camadas e a distancia vertical ( $d_v$ ) entre as barras de 2 cm (1 diâmetro), tem-se:

$$d' = c + \frac{3\phi}{2} + \frac{d_v}{2} = 2 + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{2}{2} = 6 \text{ cm}$$

### Elastômero

Para se determinar a largura do elastômero ( $j$ ), é considerada a mesma distância  $a_2$  para cada lado, com isso tem-se:

$$j = b - 2a_2 = 30 - 2 \cdot 4 = 22 \text{ cm}$$

Onde;

$b$  – é a largura da viga.

$j$  – largura do elastômero.

A partir do valor de  $j$  e considerando um tensão admissível de 7 MPa para o elastômero (se fretado pode chegar a 11 MPa) obtém-se o comprimento mínimo do elastômero.

$$i_{min} = \frac{V}{j \cdot 0,7} = \frac{318,09}{22 \cdot 0,7} = 20,66 \text{ cm} , \text{ adota-se } i = 25 \text{ cm.}$$

Onde;

$V$  – é o valor da reação em serviço

$$V = 65,25 \cdot \frac{9,75}{2} = 318,09 \text{ kN}$$

### Geometria do consolo

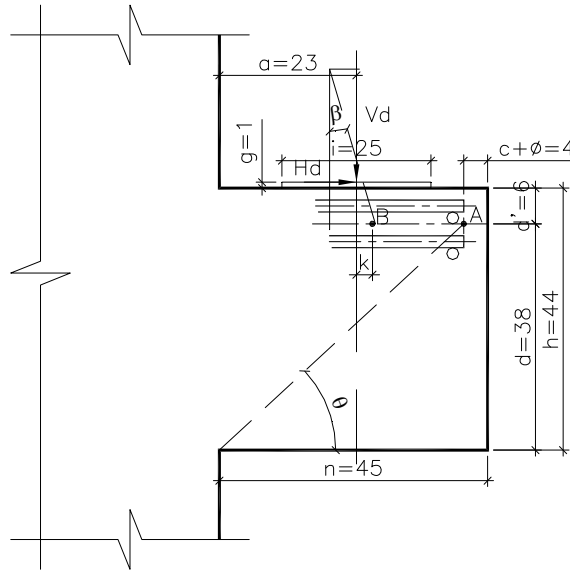
Após os valores determinados e calculados acima é possível estabelecer a geometria do consolo. Considerando a espessura do elastômero ( $g$ ) de 1 cm e com a altura da viga, pode-se determinar a altura ( $m$ ) do consolo.

$$m = \frac{h_{viga}}{2} - g = \frac{90}{2} - 1 = 44 \text{ cm}$$

À distância  $a$  (ponto de aplicação da carga até a face interna do consolo) é dada pela seguinte expressão:

$$a_{\max} = n - \left( \frac{i}{2} + a_2 \right) = 45 - \left( \frac{25}{2} + 4 \right) = 28,5 \text{ cm}, \text{ considera-se } a = 23 \text{ cm.}$$

A seguir na Figura 8-16 é apresentada a geometria do consolo utilizada para a sua classificação e dimensionamento das armaduras e a verificação de tensão de compressão da biela de concreto.



**Figura 8-16: Geometria para o dimensionamento do consolo (unidades em cm).**

Valor da relação  $a/d$ .

$$\frac{a}{d} = \frac{23}{38} = 0,61, \text{ classificado como consolo curto } (0,5 < a/d < 1).$$

Valor de  $k$ .

$$k = \text{tg}\beta \cdot (g + d') = 0,16 \cdot (1 + 6) = 1,12 \text{ cm}$$

Onde;

$$\text{tg}\beta = \frac{H_d}{V_d} = \frac{78,28}{489,27} = 0,16$$

Valor do segmento  $\overline{AB}$ .

$$\overline{AB} = n - (c + \phi + a + k) = 45 - (2 + 2 + 23 + 1,12) = 16,88 \text{ cm}$$

Como se tem  $H_d \neq 0$ , valor do comprimento da biela no plano horizontal do tirante é de:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = 2 \cdot 16,88 = 33,76 \text{ cm}$$

*Inclinação da biela*

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{d}{n - c + \phi} = \frac{38}{45 - 2 + 2} = 0,93 \rightarrow \theta = 42,85^\circ$$

*Tensão na biela (para consolo curto).*

$$\sigma_{c,biela} = \frac{V_d}{\operatorname{sen}^2 \theta (ACxj)} = \frac{489,27}{\operatorname{sen}^2 (42,85) \cdot 0,3376 \cdot 0,22} = 14243 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$f_{c,biela} = \frac{f_{ck}}{1,4} = \frac{40000}{1,4} = 28571 \text{ kN} / \text{m}^2$$

Como  $\sigma_{c,biela} < f_{c,biela}$ , a tensão de compressão na biela esta verificada.

Pode se observar uma diferença grande na tensão de cálculo com a máxima resistida, se ocorrer o colapso se dará possivelmente por escoamento da armadura do tirante.

Um valor mais conservador para verificar a tensão seria  $0,85f_{cd}$ , visto que há alguma fissuração no concreto a onde a biela se forma.

*Cálculo da armadura do tirante*

Para os consolos curtos, admite-se que a armadura total do tirante:

$$A_{s,tir} = A_{sv} + \frac{H_d}{f_{yd}}$$

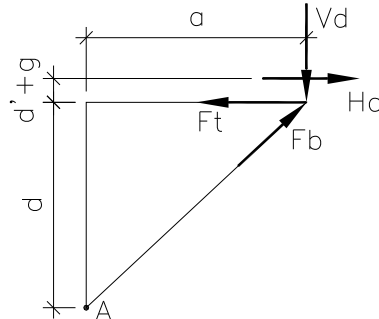
Onde;

$$A_{sv} = \left( 0,1 + \frac{a}{d} \right) \frac{V_d}{f_{yd}}$$

$$A_{s,tir} = \left( 0,1 + \frac{0,23}{0,38} \right) \cdot \frac{1,15 \cdot 489,27}{50} + \frac{1,15 \cdot 78,28}{50} = 9,74 \text{ cm}^2$$

Utiliza-se a primeira camada com  $\phi = 20$  mm e a segunda camada com  $\phi = 16$  mm ( $A_{s,tir} = 2 \times 3,15 + 2 \times 2,0 = 10,3 \text{ cm}^2$ ).

A Figura 8-17 apresenta o esquema mecanismo de biela e tirante, sendo possível determinar o valor da força no tirante através da somatória do momento em relação ao ponto A.



**Figura 8-17: Mecanismo para o cálculo da armadura do tirante.**

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -f_t \cdot d + V_d \cdot a + H_d (d + d' + g) = 0$$

$$A_s \cdot f_{yd} \cdot d = V_d \cdot a + H_d (d + d' + g)$$

$$A_{s,tir} = \frac{1}{f_{yd}} \left( \frac{a}{d} V_d + \frac{d + d' + g}{d} H_d \right)$$

$$A_{s,tir} = \frac{1,15}{50} \left( \frac{0,23}{0,38} \cdot 489,27 + \frac{0,38 + 0,06 + 0,01}{0,38} \cdot 78,28 \right) = 8,94 \text{ cm}^2$$

A armadura do tirante calculada com a primeira expressão apresenta pequena variação comparada com o valor calculado com o equilíbrio das forças.

#### *Cálculo da armadura de costura*

A armadura de costura deve ser distribuída em  $2/3d$  adjacentes ao tirante.

$$(A_s / s)_{cost} \geq 0,4 (A_{vs} / d)$$

Onde;

$$s = \frac{2}{3} d, \text{ portanto:}$$

$$A_{vs} = \left( 0,1 + \frac{0,23}{0,38} \right) \cdot \frac{1,15 \times 489,27}{50} = 7,93 \text{ cm}^2$$



$$(A_s / s)_{\text{cost}} \geq 0,4(A_{vs} / d) \rightarrow A_s \geq 0,4 \frac{2}{3} d(A_{vs} / d)$$

$$A_s \geq 0,4 \frac{2}{3} A_{vs} \rightarrow A_s \geq 0,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7,93 \geq 2,12 \text{ cm}^2$$

$A_s \geq 2,12 \text{ cm}^2$ , adotam-se ganchos horizontais com  $\phi 8.00 \text{ mm}$  com 2 ramos em 3 camadas na faixa de  $(2/3)d = 25,33 \text{ cm}$  a cada 8 cm.

Outra interpretação do texto da norma está em se considerar a armadura de costura como sendo 0,4 da do tirante e ainda que a mesma deva ser colocada ao longo do espaço de  $2/3$  de  $d$ . Desta forma resultaria no seguinte valor:

$$A_s \geq 0,4 A_{\text{tirante}} = 0,4 \cdot 7,93 = 3,17 \text{ cm}^2$$

Esta armadura estará distribuída em  $2/3$  de  $d$  desta forma tem-se

$$A_s / s = \frac{3,17}{\left(\frac{2}{3} \cdot 0,38\right)} = 12,51 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Resultando ao se usar estribos de 8 mm em um espaçamento de:

$$s = \frac{0,5 \cdot 2}{12,51} \approx 0,079 \text{ m}$$

Assim devem ser usados 5 estribos de  $\phi = 8 \text{ mm}$  a cada 7,5 cm.

#### *Armadura transversal*

Os estribos verticais são considerados os valores mínimos para vigas estabelecidos pela NBR 6118:2003.

$$\rho_{sw\alpha, \min} = 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} = \frac{A_s}{A_c}$$

Considerando que o concreto tenha  $f_{ck} = 40 \text{ MPa}$  e a armadura transversal seja composta somente por estribos verticais ( $\alpha = 90$ ) de aço CA-50 ( $f_{ywk} = 500 \text{ MPa}$ ) o valor da taxa geométrica mínima será:

$$\rho_{sw,90} = 0,2 \cdot \frac{0,3 \cdot \sqrt[3]{40^2}}{500} = 0,0014$$

$A_s = \rho_{sw,90} \cdot A_c = 0,0014 \cdot 30 \cdot 44 = 1,85 \text{ cm}^2$ , adotam-se estribos verticais com  $\phi$  6.3 mm com 2 ramos em 3 camadas, espaçados aproximadamente a cada 15 cm.

### 20. Dimensionamento dente Gerber

Permite-se assemelhar o dente de apoio a um consolo, sendo assim algumas características e hipóteses já foram determinadas com o desenvolvimento do cálculo do consolo. A Figura 8-18 apresenta a geometria do dente Gerber para o dimensionamento.

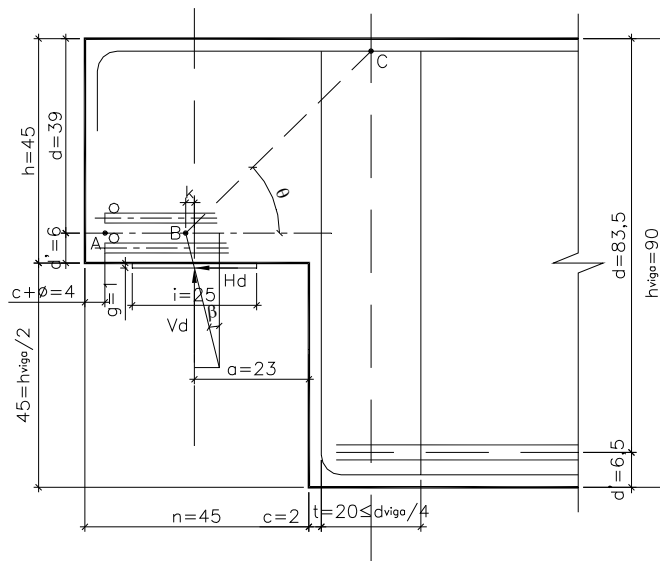


Figura 8-18: Geometria para o dimensionamento do dente Gerber (unidades em cm).

À distância  $a$  é definida pela expressão abaixo.

$$a_{dent} = n - a_{cons} + f = 45 - 23 + 1 = 23 \text{ cm}, \text{ onde:}$$

$f$  = folga entre o consolo e o dente Gerber.

Valor de  $t$  (definir)

O valor  $t$  é corresponde a  $\frac{1}{4}$  da altura útil da viga para a distribuição da armadura de suspensão.

$$t \leq \frac{d_{viga}}{4} \rightarrow t \leq \frac{83,9}{4} = 20,97 \text{ cm}, \text{ considera-se } t = 20 \text{ cm}.$$

Valor da relação  $a/d$

$$\frac{a}{d} = \frac{23}{39} = 0,59, \text{ classificado como consolo curto } (0,5 < a/d < 1).$$

Valor de  $k$  (o mesmo significado que o usado no consolo)

$$k = \operatorname{tg}\beta \cdot (g + d') = 0,16 \cdot (1 + 6) = 1,12 \text{ cm}$$

Onde;

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H_d}{V_d} = \frac{78,28}{489,27} = 0,16$$

Valor do segmento  $\overline{AB}$ .

$$\overline{AB} = n - (c + \phi + a + k) = 45 - (2 + 2 + 23 + 1,12) = 16,88 \text{ cm}$$

Como se tem  $H_d \neq 0$ , valor do comprimento da biela no plano horizontal do tirante é de:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = 2 \cdot 16,88 = 33,76 \text{ cm}$$

Inclinação da biela

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d - c}{k + a + c + \frac{t}{2}} = \frac{45 - 2}{1,22 + 23 + 2 + \frac{20}{2}} = 1,18 \rightarrow \theta = 49,89^\circ$$

Tensão na biela (para consolo curto).

$$\sigma_{c,biela} = \frac{V_d}{\operatorname{sen}^2\theta(ACxj)} = \frac{489,27}{\operatorname{sen}^2(49,89) \cdot 0,3376 \cdot 0,22} = 11262 \text{ kN/m}^2$$

Com a inclinação da biela é maior que  $45^\circ$  a tensão limite é  $0,85 f_{cd}$ .

$$f_{c,biela} = 0,85 \cdot \frac{f_{ck}}{1,4} = 0,85 \cdot \frac{40000}{1,4} = 24285 \text{ kN/m}^2$$

Como  $\sigma_{c,biela} < f_{c,biela}$ , a tensão de compressão na biela esta verificada.

Da mesma maneira para o cálculo do consolo pode se observar uma diferença grande na tensão de cálculo com a máxima resistida, se ocorrer o colapso se dará possivelmente por escoamento da armadura do tirante.

*Cálculo da armadura do tirante*

Para os consolos curtos, admite-se que a armadura total do tirante:

$$A_{s,tir} = A_{sv} + \frac{H_d}{f_{yd}}$$

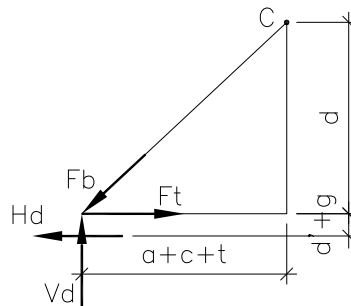
Onde;

$$A_{sv} = \left(0,1 + \frac{a}{d}\right) \frac{V_d}{f_{yd}}$$

$$A_{s,tir} = \left(0,1 + \frac{0,23}{0,39}\right) \cdot \frac{1,15 \cdot 489,27}{50} + \frac{1,15 \cdot 78,28}{50} = 9,56 \text{ cm}^2$$

Utiliza-se a primeira camada com  $\phi = 20 \text{ mm}$  e a segunda camada com  $\phi = 16 \text{ mm}$   
 ( $A_{s,tir} = 2 \times 3,15 + 2 \times 2,0 = 10,3 \text{ cm}^2$ )

A Figura 8-19 apresenta o esquema mecanismo de biela e tirante, sendo possível determinar o valor da força no tirante através da somatória do momento em relação ao ponto C.



**Figura 8-19: Mecanismo para o cálculo da armadura do tirante.**

$$\sum M_C = 0 \rightarrow -f_t \cdot d + V_d \cdot a + H_d \cdot (d + d' + g) = 0$$

$$A_s \cdot f_{yd} \cdot d = V_d \cdot (a + c + t) + H_d \cdot (d + d' + g)$$

$$A_{s,tir} = \frac{1}{f_{yd}} \left( \frac{a + c + t}{d} V_d + \frac{d + d' + g}{d} H_d \right)$$

$$A_{s,tir} = \frac{1,15}{50} \left( \frac{0,23 + 0,02 + 0,10}{0,39} \cdot 489,27 + \frac{0,39 + 0,06 + 0,01}{0,39} \cdot 78,28 \right) = 12,76 \text{ cm}^2$$

A armadura do tirante calculada com a primeira expressão apresenta uma variação considerável comparada com o valor calculado com o equilíbrio das forças. O que ocorreu

aqui é que se considerou o ponto C posicionado no centro da armadura de suspensão, enquanto a norma 9062:2006 o faz na face do dente.

#### *Cálculo da armadura de costura*

A armadura de costura deve ser distribuída em  $2/3d$  adjacentes ao tirante.

$$(A_s / s)_{\text{cost}} \geq 0,4(A_{vs} / d)$$

Onde;

$$s = \frac{2}{3}d, \text{ portanto:}$$

$$A_{vs} = \left(0,1 + \frac{0,23}{0,39}\right) \cdot \frac{1,15 \cdot 489,27}{50} = 7,76 \text{ cm}^2$$

$$(A_s / s)_{\text{cost}} \geq 0,4(A_{vs} / d) \rightarrow A_s \geq 0,4 \frac{2}{3}d(A_{vs} / d)$$

$$A_s \geq 0,4 \frac{2}{3}A_{vs} \rightarrow A_s \geq 0,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7,76 \geq 2,07 \text{ cm}^2$$

$A_s \geq 2,07 \text{ cm}^2$ , adotam-se estribos horizontais com  $\phi 8.00$  mm com 2 ramos em 3 camadas na faixa de  $(2/3)d = 25,33$  cm a cada 8 cm.

Outra interpretação do texto da norma está em se considerar a armadura de costura como sendo 0,4 da do tirante e ainda que a mesma deve ser colocada ao longo do espaço de  $2/3$  de  $d$ . Desta forma resultaria no seguinte valor:

$$A_s \geq 0,4A_{\text{tirante}} = 0,4 \cdot 7,76 = 3,10 \text{ cm}^2$$

Esta armadura estará distribuída em  $2/3$  de  $d$  desta forma tem-se:

$$A_s / s = \frac{3,10}{\left(\frac{2}{3} \cdot 0,38\right)} = 12,24 \text{ cm}^2 / m$$

Resultando ao se usar estribos de 8 mm em um espaçamento de:

$$s = \frac{0,5 \cdot 2}{12,79} \approx 0,082 \text{ m}$$

Assim devem ser usados 5 estribos de  $\phi = 8\text{mm}$  a cada 7,5 cm.

#### *Armadura transversal*

Os estribos verticais são considerados os valores mínimos para vigas estabelecidos pela NBR 6118:2004.

$$\rho_{sw\alpha, \min} = 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} = \frac{A_s}{A_c}$$

Considerando que o concreto tenha  $f_{ck} = 40\text{ MPa}$  e a armadura transversal seja composta somente por estribos verticais ( $\alpha = 90$ ) de aço CA-50 ( $f_{ywk} = 500\text{ MPa}$ ) o valor da taxa geométrica mínima será:

$$\rho_{sw,90} = 0,2 \cdot \frac{0,3 \cdot \sqrt[3]{40^2}}{500} = 0,0014$$

$A_s = \rho_{sw,90} \cdot A_c = 0,0014 \cdot 30 \cdot 45 = 1,89\text{ cm}^2$ , adotam-se estribos verticais com  $\phi 6.3\text{ mm}$  com 2 ramos em 3 camadas, espaçados aproximadamente a cada 15 cm.

#### *Armadura de suspensão*

Deve existir armadura de suspensão capaz de resistir a totalidade das cargas verticais aplicadas no dente Gerber com tensão  $f_{yd}$ .

$$A_{s,susp} = \frac{V_d}{f_{yd}} = \frac{1,15.489,27}{50} = 11,25\text{ cm}^2$$

Considerando-se um espaçamento de 5 cm entre as barras verticais em um total de 20 cm tem-se 5 arranjos e considerando 4 ramos, pode-se calcular o diâmetro mínimo da armadura.

$$\phi_{\min} \geq \frac{A_{s,susp}}{\text{barras verticais} \cdot \text{ramos}} = \frac{11,25}{5 \cdot 4} = 0,563\text{ cm}^2, \text{ adota-se } \phi 10\text{ mm}.$$

### **21. Detalhamento da viga pré-moldada e consolo.**

A Figura 8-20, Figura 8-21 e Figura 8-22 apresentam todo o detalhamento resultante dos cálculos apresentados anteriormente para o exemplo 01.

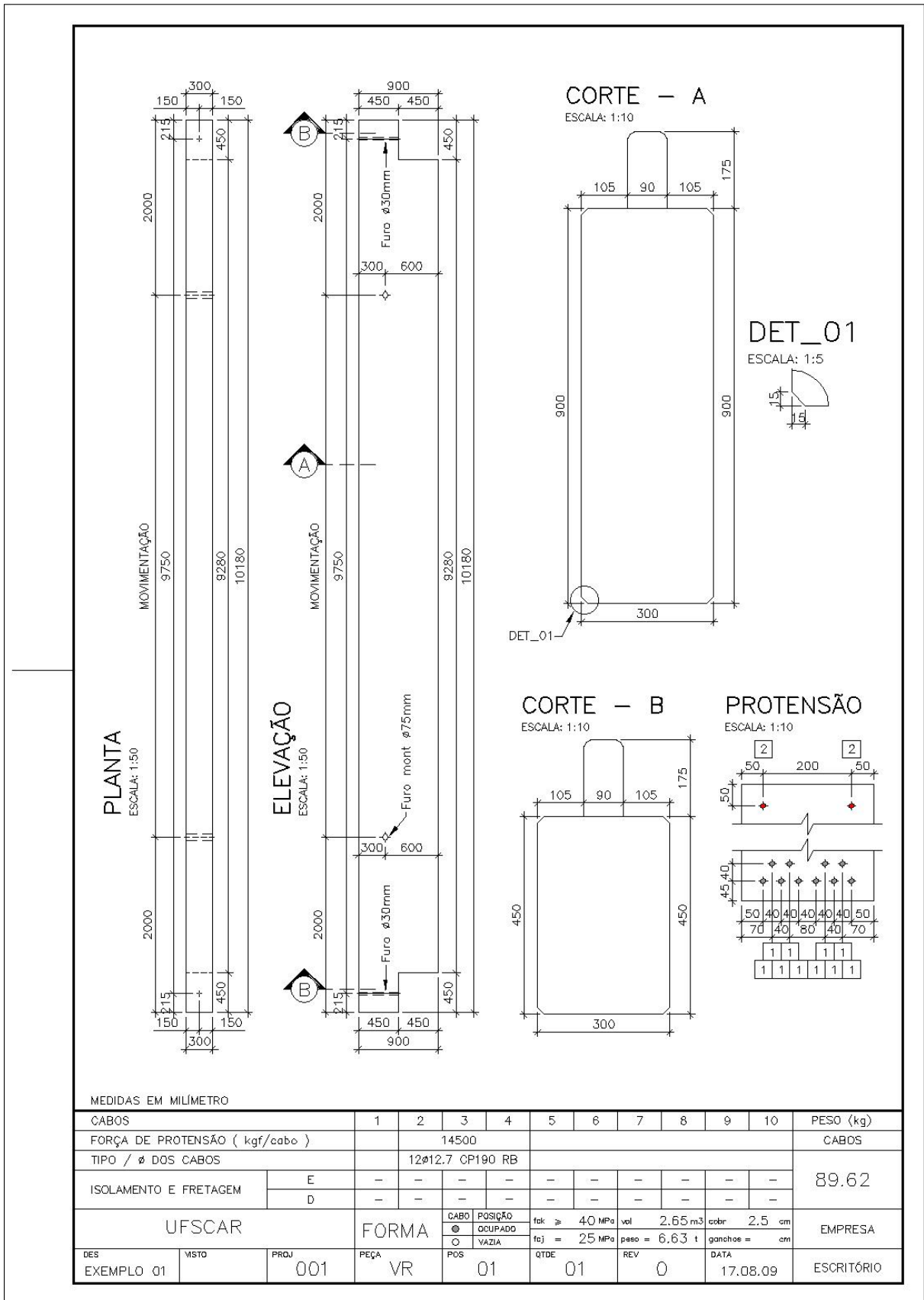


Figura 8-20: Forma da viga VR01, exemplo 01.

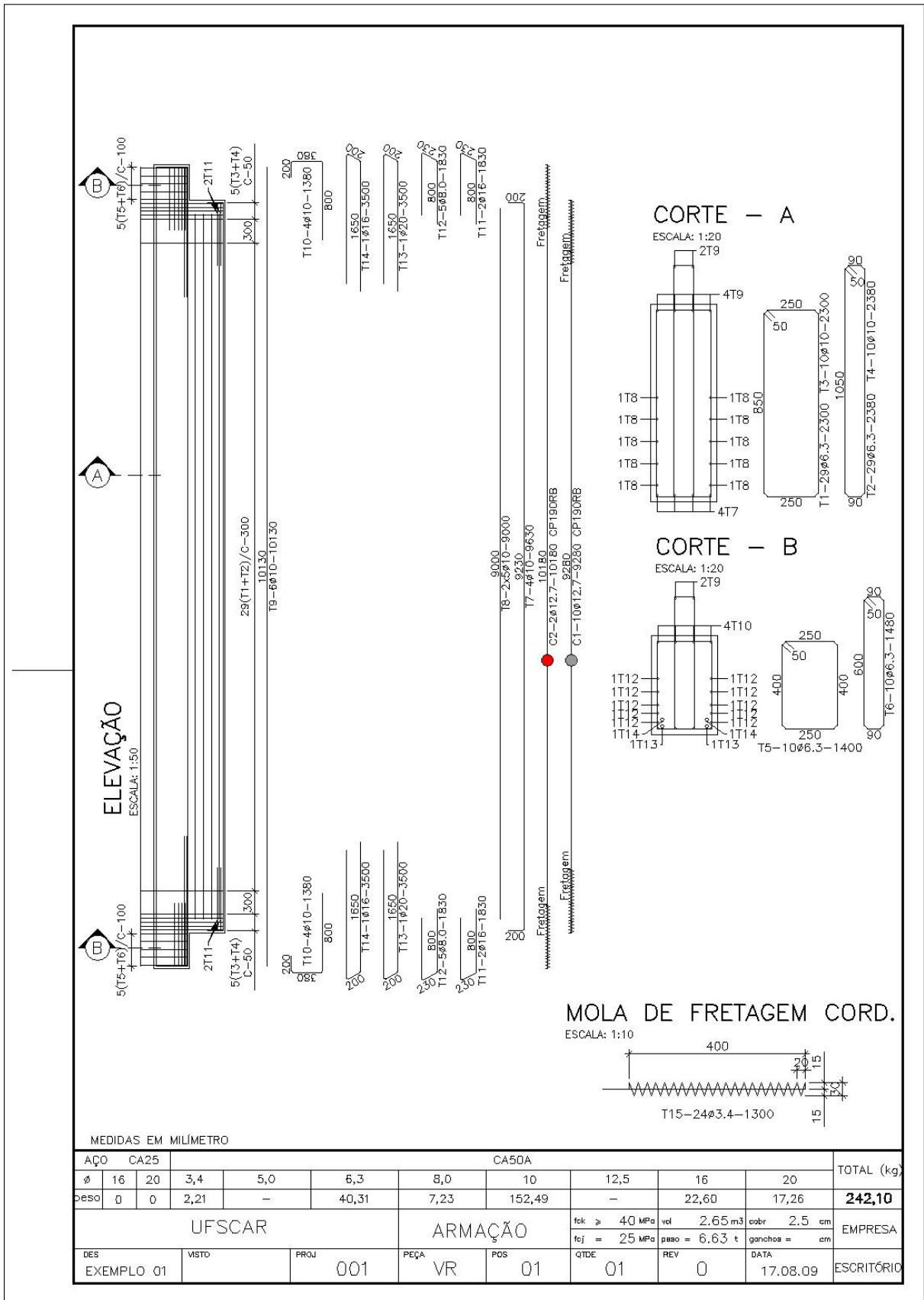


Figura 8-21: Armação da viga VR01, exemplo 01.



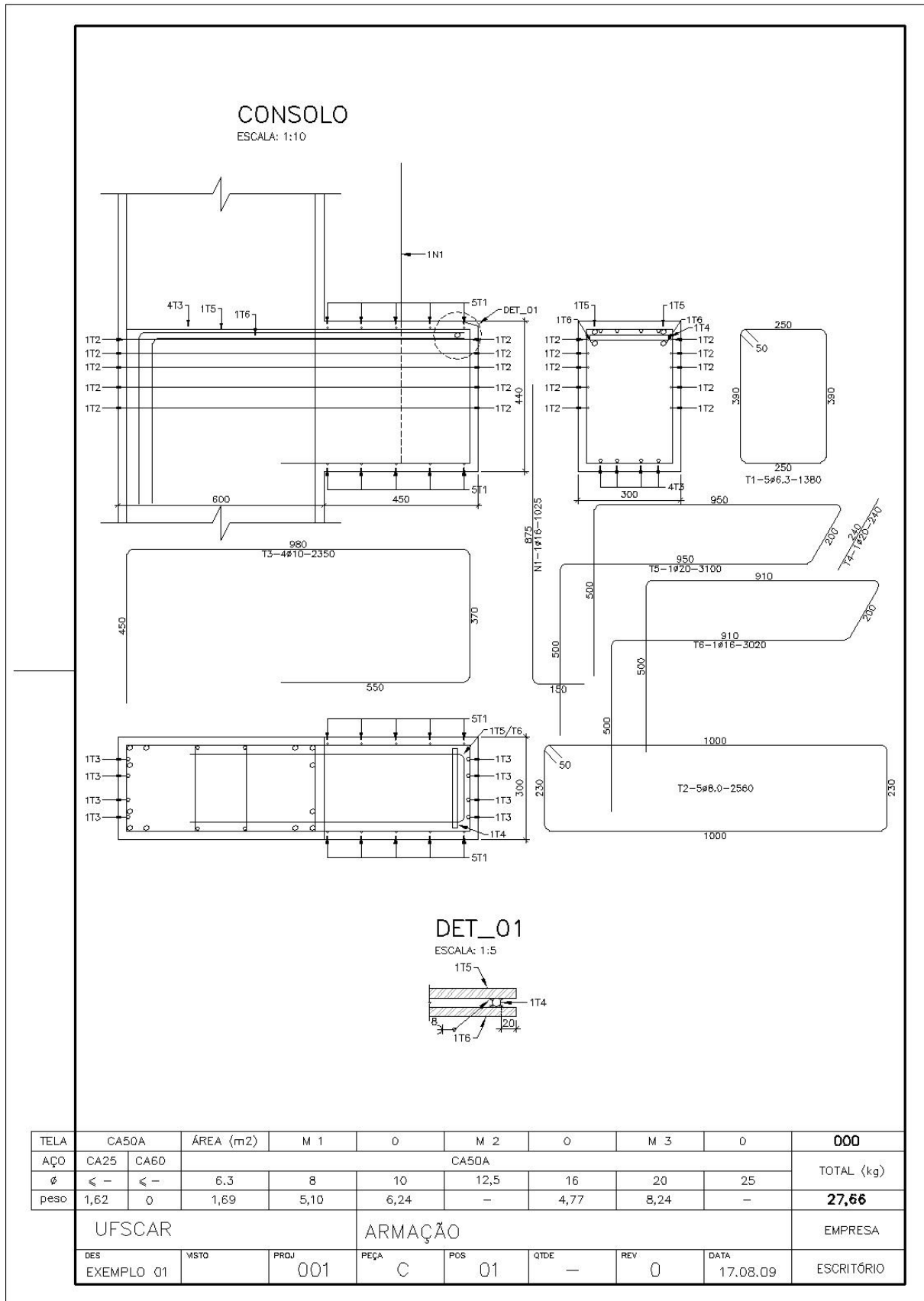


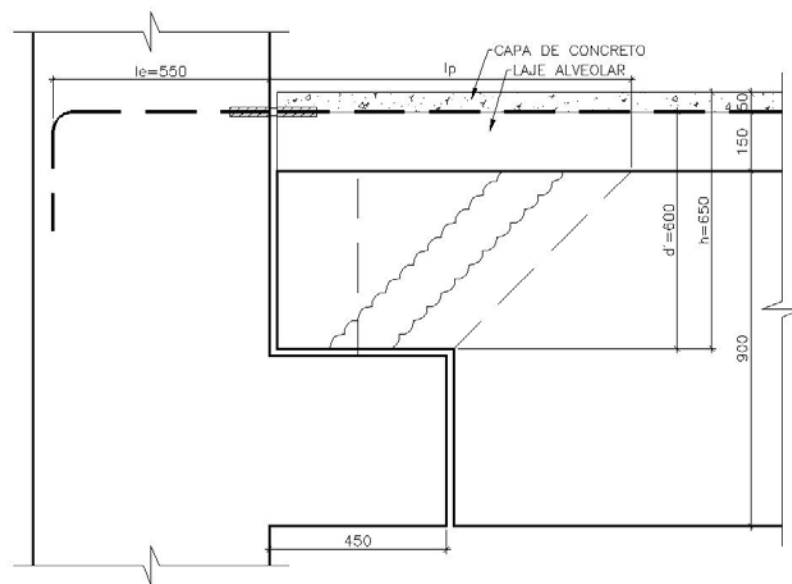
Figura 8-22: Forma e armação do consolo, exemplo 01.

## 8.2. EXEMPLO 02

**Exemplo 7.2:** Calcular a porcentagem de engastamento do exemplo 01 considerando como armadura de ligação  $3\phi 20$  mm. Discutir a possibilidade de redução da armadura longitudinal, decorrente da ligação semi-rígida.

### 1. Características geométricas da região da ligação

A Figura 8-23 apresenta as características geométricas da região da ligação.



**Figura 8-23:** Características geométricas na região da ligação (unidades em mm).

O comprimento da região da ligação  $l_p$  indicado na Figura 8-23 é determinado com a seguinte expressão:

$$l_p = h/2 + l_{cons}/2 = 90/2 + 45/2 = 67,5 \text{ cm}$$

### 2. Carregamentos atuantes

A ligação começa a funcionar depois do endurecimento da capa de concreto, sendo assim, somente as cargas atuantes após o capeamento poderá ser consideradas nos cálculos, a Tabela 8-16 apresenta as cargas e o momento máximo atuantes nesta fase.

Tabela 8-16: Momentos máximos no meio do vão.

| Descrição                     | Intensidade (kN/m) | Vão (m) | Momento máximo (kN.m) |
|-------------------------------|--------------------|---------|-----------------------|
| g <sub>4</sub> – Alvenaria    | 5,94               | 9,75    | 70,58                 |
| g <sub>5</sub> – Revestimento | 5,76               | 9,75    | 68,45                 |
| q – Acidental                 | 21,60              | 9,75    | 256,67                |

Para um carregamento total de 33,30 kN/m e um vão efetivo de 9,75 m, pode-se determinar o momento elástico da viga pré-moldada, determinando assim o momento negativo máximo, ou seja, momento de engastamento perfeito.

$$M_{ext} = \frac{p \cdot l^2}{12} = \frac{33,30 \cdot 9,75^2}{12} = 263,80 \text{ kN.m}$$

Para uma primeira tentativa, adota-se um fator de restrição ao giro ( $\alpha_R$ ) de 0,16 o que implica a 22% de engastamento. Sendo assim o momento na extremidade pode ser corrigido.

$$M_{ext} = M_{eng} \left( \frac{3 \cdot \alpha_R}{2 + \alpha_R} \right) = 263,80 \left( \frac{3 \cdot 0,16}{2 + 0,16} \right) = 58,62 \text{ kN.m}$$

### 3. Determinação do momento de fissuração para a região da ligação.

Determina-se o momento de fissuração considerando a região da ligação entre a viga e o pilar.

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y} = \frac{1,5 \cdot 2456 \cdot 10^{-4} \cdot 30 \cdot 65^3}{32,5 \cdot 12} = 7782,45 \text{ kN.cm} = 77,82 \text{ kN.m}$$

Como o momento de fissuração é maior que o momento atuante na extremidade da viga considerando 22% de engastamento a o momento equivalente corresponde ao momento de inércia no estágio I. A Tabela 8-17 mostra os dados necessários para a determinação do momento de inércia no estágio I considerando a presença de armadura.

Tabela 8-17: Parâmetros necessários para determinação da inércia no estágio I homogeneizada.

| b <sub>w</sub><br>(cm) | h<br>(cm) | d<br>(cm) | A <sub>s'</sub><br>(cm <sup>2</sup> ) | f <sub>ck</sub><br>(MPa) | E <sub>s</sub><br>(MPa) | α <sub>e</sub> |
|------------------------|-----------|-----------|---------------------------------------|--------------------------|-------------------------|----------------|
| 30                     | 65        | 60        | 9,45                                  | 40                       | 2,10.10 <sup>5</sup>    | 6,976          |

A relação entre os módulos de elasticidade do aço e o concreto:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} = \frac{210000}{0,85 \cdot 5600 \sqrt{40}} = 6,976$$

Área seção homogeneizada

$$A_h = b_w \cdot h + A_s \cdot (\alpha_e - 1) = 30 \cdot 65 + 9,45 \cdot (6,976 - 1) = 2006 \text{ cm}^2$$

Centro de gravidade

$$y_h = \frac{b_w \cdot \frac{h^2}{2} + A_s \cdot (\alpha_e - 1) \cdot d}{A_h} = \frac{30 \cdot \frac{65^2}{2} + 9,45 \cdot (6,976 - 1) \cdot 60}{2006} = 33,27 \text{ cm}$$

Momento de inércia a flexão

$$I_h = \frac{b_w \cdot h^3}{12} + b_w \cdot h \cdot \left( y_h - \frac{h}{2} \right)^2 + A_s \cdot (\alpha_e - 1) \cdot (y_h - d)^2$$

$$I_h = \frac{30 \cdot 65^3}{12} + 30 \cdot 65 \cdot \left( 33,27 - \frac{65}{2} \right)^2 + 9,45 \cdot (6,976 - 1) \cdot (33,27 - 60)^2 = 7,28 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

#### 4. Determinação do fator de restrição $\alpha_R$ considerando o E.L.U

Para a determinação do fator de restrição  $\alpha_R$  são necessários alguns parâmetros considerando a região da ligação. Estes parâmetros estão ilustrados na Tabela 8-18.

**Tabela 8-18: Parâmetros determinados considerando a região da extremidade da viga.**

| $I_{l, \text{ext}}$<br>(mm <sup>4</sup> ) | $l_p$<br>(mm) | $l_e$<br>(mm) | $E_s$<br>(kN/mm <sup>2</sup> ) | $A_s$<br>(cm <sup>2</sup> ) | $d$<br>(mm) | $E_{ct}$<br>(kN/mm <sup>2</sup> ) | $E_{cs}$<br>(kN/mm <sup>2</sup> ) | $L$<br>(mm) |
|---|---------------|---------------|--------------------------------|-----------------------------|-------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------|
| $7,28 \cdot 10^9$                         | 675           | 550           | 210                            | 9,45                        | 600         | 35,4                              | 30,1                              | 9750        |

Com estes parâmetros determina-se a rigidez secante da ligação utilizada para o cálculo de  $\alpha_R$ .

$$R_{\text{sec}} = \left[ \frac{l_e}{0,9 \cdot E_s \cdot A_s \cdot d^2} + \frac{l_p}{E_{cs} \cdot I_l} \right]^{-1} = \left[ \frac{550}{0,9 \cdot 210 \cdot 9,45 \cdot 10^2 \cdot 600^2} + \frac{675}{30,1 \cdot 7,28 \cdot 10^9} \right]^{-1} = 8,59 \cdot 10^7 \frac{\text{kN} \cdot \text{mm}}{\text{rad}}$$

Para a seção no meio do vão, como no exemplo 01 foi considerada o tipo de protensão como limitada e o sistema estático como bi-articulado, foi apresentado nos cálculos que o momento de fissuração não foi atingido, como neste exemplo tem-se uma pequena porcentagem de engastamento, isso reforça ainda mais que o momento atuante no meio do vão não atingirá o momento de fissuração, fazendo com que a viga trabalhe no estágio I.

Lembrando que no meio do vão tem-se com a contribuição da capa de concreto uma seção T. A Tabela 8-19 mostra os parâmetros considerados para o cálculo do momento de inércia homogeneizado como seção T.

**Tabela 8-19: Parâmetros necessários para determinação da inércia no estágio I homogeneizada como seção T.**

| $b_w$<br>(cm) | $h$<br>(cm) | $b_f$<br>(cm) | $h_f$<br>(cm) | $d$<br>(cm) | $A_p$<br>(cm <sup>2</sup> ) | $f_{ck}$<br>(MPa) | $E_p$<br>(MPa)    | $\alpha_e$ |
|---------------|-------------|---------------|---------------|-------------|-----------------------------|-------------------|-------------------|------------|
| 30            | 110         | 225           | 5             | 103,9       | 9,87                        | 40                | $2,00 \cdot 10^5$ | 6,643      |

A relação entre os módulos de elasticidade do aço e o concreto:

$$\alpha_e = \frac{E_p}{E_{cs}} = \frac{200000}{0,85 \cdot 5600 \sqrt{40}} = 6,643$$

*Área seção homogeneizada*

$$A_h = (b_f - b_w) \cdot h_f + b_w \cdot h + A_p \cdot (\alpha_e - 1)$$

$$A_h = (225 - 30) \cdot 5 + 30 \cdot 110 + 9,87 \cdot (6,643 - 1) = 4330 \text{ cm}^2$$

*Centro de gravidade*

$$y_h = \frac{(b_f - b_w) \cdot \left( \frac{h_f^2}{2} \right) + b_w \cdot \frac{h^2}{2} + A_p \cdot (\alpha_e - 1) \cdot d}{A_h}$$

$$y_h = \frac{(225 - 30) \cdot \left( \frac{5^2}{2} \right) + 30 \cdot \frac{110^2}{2} + 9,87 \cdot (6,643 - 1) \cdot 103,9}{4330} = 43,81 \text{ cm}$$

Momento de inércia a flexão

$$I_h = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot h^3}{12} + (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot \left(y_h - \frac{h_f}{2}\right)^2 + b_w \cdot h \cdot \left(y_h - \frac{h}{2}\right)^2 + A_p \cdot (\alpha_e - 1) \cdot (y_h - d)^2$$

$$I_h = \frac{(225 - 30) \cdot 5^3}{12} + \frac{30 \cdot 110^3}{12} + (225 - 30) \cdot 5 \cdot \left(43,81 - \frac{5}{2}\right)^2 + 30 \cdot 110 \cdot \left(43,81 - \frac{110}{2}\right)^2 + 9,87 \cdot (6,643 - 1) \cdot (43,81 - 103,9)^2 = 5,61 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

Com a determinação dos momentos inércia da extremidade e do meio do vão, calcula-se o momento de inércia equivalente da viga.

$$I_{eq,viga} = 0,3 \cdot I_{ext} + 0,7 \cdot I_{vão} = 0,3 \cdot 7,28 \cdot 10^9 + 0,7 \cdot 5,61 \cdot 10^{10} = 4,14 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4$$

Desta forma é possível a determinação do fator de restrição  $\alpha_R$  da seguinte maneira:

$$\alpha_R = \left[1 + \frac{3 \cdot (EI)_{sec}}{R_{sec} \cdot L}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{3 \cdot (35,4 \cdot 4,14 \cdot 10^{10})}{8,59 \cdot 10^7 \cdot 9,75 \cdot 10^3}\right]^{-1} \approx 0,16$$

O fator de restrição ao giro foi o mesmo arbitrado no início do exercício, consequentemente a porcentagem de engastamento (22%) é a mesma, com isso pode-se determinar o momento corrigido no meio do vão a partir do momento elástico da seguinte maneira:

$$M_{corr,vão} = M_{vão,elas} \cdot \left(\frac{6 - 3,0 \cdot \alpha_R}{2 + \alpha_R}\right) = \frac{p \cdot l^2}{24} \cdot \left(\frac{6 - 3,0 \cdot \alpha_R}{2 + \alpha_R}\right)$$

$$M_{corr,vão} = \frac{33,3 \cdot 9,75^2}{24} \cdot \left(\frac{6 - 3,0 \cdot 0,16}{2 + 0,16}\right) = 337,08 \text{ kN.m}$$

Para a situação bi-articulada o momento isostático é de 395,69 kN.m, o que mostra-se bem próximo do valor considerando a ligação com 3 $\phi$ 20 mm, o que provavelmente não teria grande significado de redução de armadura longitudinal da viga em estudo.

### 8.3. EXEMPLO 03

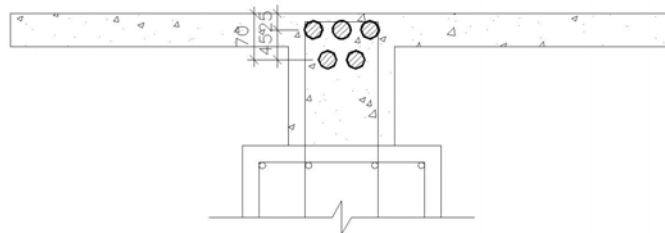
**Exemplo 7.3:** Calcular a armadura longitudinal e a deformação da viga do exemplo 01 considerando ligação semi-rígida. Esta ligação é feita com de  $5\phi 25$  mm. Considerando as mesmas características geométricas da região da ligação apresentadas no exemplo 02.

#### Resolução.

Para se iniciar o cálculo da armadura longitudinal deve-se primeiro determinar o quanto de redução do momento fletor no meio do vão é mobilizado através da armadura de ligação que esta sendo considerada. Com esta porcentagem de engastamento determinada é possível calcular o momento solicitando para o dimensionamento da armadura longitudinal da viga pré-moldada.

#### 1. Posicionamento da armadura de ligação.

A armadura de ligação esta posicionada em duas camadas (Figura 8-24). A primeira encontra-se a 2,5 cm da face superior da capa de concreto como a quantidade de 3 barras e a segunda camada está 7,0 cm.



**Figura 8-24: Posicionamento da armadura de ligação.**

Determina-se o centro de gravidade da armadura de ligação a partir da face superior da capa de concreto:

$$y_{cg,repres.} = \frac{\sum A_i \cdot y_{cg,i}}{\sum A_i} = \frac{3 \cdot 5,0 \cdot 2,5 + 2 \cdot 5,0 \cdot 7,0}{3 \cdot 5,0 + 2 \cdot 5,0} = 3,8 \text{ cm}$$

Para uma primeira tentativa, adota-se um fator de restrição ao giro ( $\alpha_R$ ) de 0,26 o que resulta aproximadamente 34% de engastamento. Sendo assim o momento na extremidade pode ser corrigido.

$$M_{ext} = M_{eng} \left( \frac{3 \cdot \alpha_R}{2 + \alpha_R} \right) = 263,80 \left( \frac{3 \cdot 0,26}{2 + 0,26} \right) = 91,05 \text{ kN.m}$$

## 2. Determinação do momento de fissuração para a região da ligação

Como o momento de fissuração calculado anteriormente é de 77,82 kN.m, que é maior que o momento atuante, deve-se calcular a inércia equivalente da extremidade, para isso são necessárias a inércia do estádio I e também do estádio II. A Tabela 8-20 mostra os dados necessários para a determinação do momento de inércia no estádio I e II.

**Tabela 8-20: Parâmetros necessários para determinação da inércia no estádio I homogeneizada.**

| $b_w$<br>(cm) | $h$<br>(cm) | $d$<br>(cm) | $A_s$<br>(cm <sup>2</sup> ) | $f_{ck}$<br>(MPa) | $E_s$<br>(MPa)    | $\alpha_e$ |
|---------------|-------------|-------------|-----------------------------|-------------------|-------------------|------------|
| 30            | 65          | 61,2        | 25,0                        | 40                | $2,10 \cdot 10^5$ | 6,976      |

A relação entre os módulos de elasticidade do aço e o concreto:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} = \frac{210000}{0,85 \cdot 5600 \sqrt{40}} = 6,976$$

*Área seção homogeneizada*

$$A_h = b_w \cdot h + A_s \cdot (\alpha_e - 1) = 30 \cdot 65 + 25 \cdot (6,976 - 1) = 2099 \text{ cm}^2$$

*Centro de gravidade*

$$y_h = \frac{b_w \cdot \frac{h^2}{2} + A_s \cdot (\alpha_e - 1) \cdot d}{A_h} = \frac{30 \cdot \frac{65^2}{2} + 25 \cdot (6,976 - 1) \cdot 61,2}{2099} = 34,54 \text{ cm}$$

*Momento de inércia a flexão*

$$I_h = \frac{b_w \cdot h^3}{12} + b_w \cdot h \cdot \left( y_h - \frac{h}{2} \right)^2 + A_s \cdot (\alpha_e - 1) \cdot (y_h - d)^2$$

$$I_h = \frac{30 \cdot 65^3}{12} + 30 \cdot 65 \cdot \left( 34,54 - \frac{65}{2} \right)^2 + 25 \cdot (6,976 - 1) \cdot (34,54 - 61,2)^2 = 8,01 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

Para o cálculo do momento de inércia no estádio II puro é necessário conhecer a posição  $x$  da linha neutra, obtida tornando o momento estático da seção homogeneizada igual a zero. O cálculo de  $x$  pode ser encontrado em CARVALHO (2007).



Posição da linha neutra.

$$a_1 = \frac{b_w}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}$$

$$a_2 = \alpha_e \cdot A_s = 6,976 \cdot 25 = 174,4 \text{ cm}^2$$

$$a_3 = -d \cdot \alpha_e \cdot A_s = -61,2 \cdot 6,976 \cdot 25 = -10673,3 \text{ cm}^3$$

$$x_{II} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4 \cdot a_1 \cdot a_3}}{2 \cdot a_1} = \frac{-174,4 \pm \sqrt{174,4^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-10673,3)}}{2 \cdot 15} = \begin{matrix} 21,49 \text{ cm} \\ -33,11 \text{ cm} \end{matrix}$$

A raiz que tem significado físico é  $x_{II} = 21,49 \text{ cm}$ . É possível, agora, calcular o momento de inércia da seção no estágio II puro.

$$I_{x,II0} = \frac{b_w \cdot x_{II}^3}{3} + \alpha_e \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2 = \frac{30 \cdot 21,49^3}{3} + 6,976 \cdot 25 \cdot (21,49 - 61,2)^2 = 3,74 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

Determina-se agora o momento de inércia equivalente da extremidade da viga.

$$I_m = \left( \frac{M_R}{M_a} \right)^3 \cdot I_I + \left[ 1 - \left( \frac{M_R}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II}$$

$$I_m = \left( \frac{77,82}{91,05} \right)^3 \cdot 8,01 \cdot 10^5 + \left[ 1 - \left( \frac{77,82}{91,05} \right)^3 \right] \cdot 3,74 \cdot 10^5 = 6,41 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

### 3. Determinação do fator de restrição $\alpha_R$ considerando o E.L.U

Para a determinação do fator de restrição  $\alpha_R$  são necessários alguns parâmetros considerando a região da ligação. Estes parâmetros estão ilustrados na Tabela 8-18.

**Tabela 8-21: Parâmetros determinados considerando a região da extremidade da viga.**

| $I_{II, \text{ext}}$<br>(mm <sup>4</sup> ) | $I_p$<br>(mm) | $I_e$<br>(mm) | $E_s$<br>(kN/mm <sup>2</sup> ) | $A_{s'}$<br>(cm <sup>2</sup> ) | $d$<br>(mm) | $E_{ct}$<br>(kN/mm <sup>2</sup> ) | $E_{cs}$<br>(kN/mm <sup>2</sup> ) | $L$<br>(mm) |
|--|---------------|---------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------|
| $6,41 \cdot 10^9$                          | 675           | 550           | 210                            | 25,0                           | 612         | 35,4                              | 30,1                              | 9750        |

Com estes parâmetros determina-se a rigidez secante da ligação utilizada para o cálculo de  $\alpha_R$ .

$$R_{\text{sec}} = \left[ \frac{l_e}{0,9 \cdot E_s \cdot A_s \cdot d^2} + \frac{l_p}{E_{cs} \cdot I_{II}} \right]^{-1} = \left[ \frac{550}{0,9 \cdot 210 \cdot 25 \cdot 10^2 \cdot 612^2} + \frac{675}{30,1 \cdot 6,41 \cdot 10^9} \right]^{-1} = 1,51 \cdot 10^8 \frac{kN \cdot mm}{rad}$$

Para a seção do meio do vão são feitas as mesmas considerações escritas anteriormente, ou seja, devido ao tipo de protensão escolhida impõe para a combinação quase permanente que a tensão de tração na borda inferior seja maior que zero o que para a condição de serviço não permite que o momento de fissuração seja atingido, com isso determina-se a inércia homogeneizada no estágio I considerando seção T. Já imaginado que a armadura da ligação possa ter uma boa contribuição de engastamento, é reduzido em uma cordoalha na armadura longitudinal. (Baseado no exemplo 01 que tem o esquema estático bi-articulado).

A Tabela 8-19 mostra os parâmetros considerados para o cálculo do momento de inércia homogeneizado como seção T.

**Tabela 8-22: Parâmetros necessários para determinação da inércia no estágio I homogeneizada como seção T.**

| $b_w$<br>(cm) | $h$<br>(cm) | $b_f$<br>(cm) | $h_f$<br>(cm) | $d$<br>(cm) | $A_p$<br>(cm <sup>2</sup> ) | $f_{ck}$<br>(MPa) | $E_p$<br>(MPa)    | $\alpha_e$ |
|---------------|-------------|---------------|---------------|-------------|-----------------------------|-------------------|-------------------|------------|
| 30            | 110         | 225           | 5             | 103,9       | 8,883                       | 40                | $2,00 \cdot 10^5$ | 6,643      |

A relação entre os módulos de elasticidade do aço e o concreto:

$$\alpha_e = \frac{E_p}{E_{cs}} = \frac{200000}{0,85 \cdot 5600 \sqrt{40}} = 6,643$$

*Área seção homogeneizada*

$$A_h = (b_f - b_w) \cdot h_f + b_w \cdot h + A_p \cdot (\alpha_e - 1)$$

$$A_h = (225 - 30) \cdot 5 + 30 \cdot 110 + 8,883 \cdot (6,643 - 1) = 4325 \text{ cm}^2$$

*Centro de gravidade*

$$y_h = \frac{(b_f - b_w) \cdot \left( \frac{h_f^2}{2} \right) + b_w \cdot \frac{h^2}{2} + A_p \cdot (\alpha_e - 1) \cdot d}{A_h}$$

$$y_h = \frac{(225 - 30) \cdot \left( \frac{5^2}{2} \right) + 30 \cdot \frac{110^2}{2} + 8,883 \cdot (6,643 - 1) \cdot 103,9}{4330} = 43,73 \text{ cm}$$

Momento de inércia a flexão

$$I_h = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot h^3}{12} + (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot \left(y_h - \frac{h_f}{2}\right)^2 + b_w \cdot h \cdot \left(y_h - \frac{h}{2}\right)^2 + A_p \cdot (\alpha_e - 1) \cdot (y_h - d)^2$$

$$I_h = \frac{(225 - 30) \cdot 5^3}{12} + \frac{30 \cdot 110^3}{12} + (225 - 30) \cdot 5 \cdot \left(43,73 - \frac{5}{2}\right)^2 + 30 \cdot 110 \cdot \left(43,73 - \frac{110}{2}\right)^2 + 8,883 \cdot (6,643 - 1) \cdot (43,73 - 103,9)^2 = 5,59 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

Com isso tem-se:

$$I_{eq,viga} = 0,3 \cdot I_{ext} + 0,7 \cdot I_{vão} = 0,3 \cdot 6,41 \cdot 10^9 + 0,7 \cdot 5,59 \cdot 10^{10} = 4,10 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4$$

Desta forma é possível a determinação do fator de restrição  $\alpha_R$  da seguinte maneira:

$$\alpha_R = \left[1 + \frac{3 \cdot (EI)_{sec}}{R_{sec} \cdot L}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{3 \cdot (35,4 \cdot 4,10 \cdot 10^{10})}{1,51 \cdot 10^8 \cdot 9,75 \cdot 10^3}\right]^{-1} \approx 0,25$$

A restrição os giro é praticamente a mesma considerada no início do exercício.

Com isso determinação a porcentagem de engastamento.

$$\frac{M_{ext}}{M_{eng}} = \left(\frac{3 \cdot \alpha_R}{2 + \alpha_R}\right) = \left(\frac{3 \cdot 0,25}{2 + 0,25}\right) = 33,3\%$$

Através deste engastamento é possível determinar o momento corrigido no meio do vão, cujo valor é utilizado para o dimensionamento da armadura longitudinal.

$$M_{corr,vão} = M_{vão,elas} \cdot \left(\frac{6 - 3,0 \cdot \alpha_R}{2 + \alpha_R}\right) = \frac{p \cdot l^2}{24} \cdot \left(\frac{6 - 3,0 \cdot \alpha_R}{2 + \alpha_R}\right)$$

$$M_{corr,vão} = \frac{p \cdot l^2}{24} \cdot \left(\frac{6 - 3,0 \cdot 0,25}{2 + 0,25}\right) = \frac{p \cdot l^2}{24} \cdot 2,33$$

#### 4. Ductilidade da ligação – método *Beam-Line*

Este critério serve somente para verificar a ductilidade da ligação, ou seja, se houver ruptura da viga que jamais aconteça na ligação, que por ser uma “região de descontinuidade” a ruptura seria frágil o que para concreto armado seria o mesmo que

trabalhar no domínio 4 e 5 dos domínios de deformação; e isso não é seguro pois a estrutura pode ruir sem aviso. Então, para garantir boa ductilidade, é bom que o momento de escoamento da ligação seja maior que o momento solicitante, em outras palavras a reta *Beam-Line* define uma região definida pelos pontos de momento de engastamento perfeito (giro zero) e rótula perfeita (momento zero) dentro da qual o momento de plastificação (escoamento da armadura negativa) não pode estar. Então, para se ter uma ligação com boa ductilidade, o momento de escoamento ( $M_y$ ) deve estar sempre acima da reta *beam-line*.

Segundo JEREMIAS (2007) a reta *beam-line* pode ser analisada com as variáveis.

Reta *Beam-Line*:

$$M_r = \frac{p \cdot l^2}{12} = \frac{33,3 \cdot 9,75^2}{12} = 263,79 \text{ kN.m}$$

$$\theta_{m\acute{a}x} = \frac{p \cdot l^3}{24 \cdot E_{cs} \cdot I_{II}} = \frac{33,3 \cdot 9,75^3}{24 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 6,41 \cdot 10^{-3}} = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Diagrama *Beam-Line* da rigidez secante:

$$M_y = 0,9 \cdot f_{yd} \cdot A_s \cdot d = 0,9 \cdot \frac{50}{1,15} \cdot 25,0 \cdot 0,612 = 598,69 \text{ kN.m}$$

$$\theta_y = \frac{M_y}{R_{sec}} = \frac{598,69}{1,51 \cdot 10^5} = 3,96 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

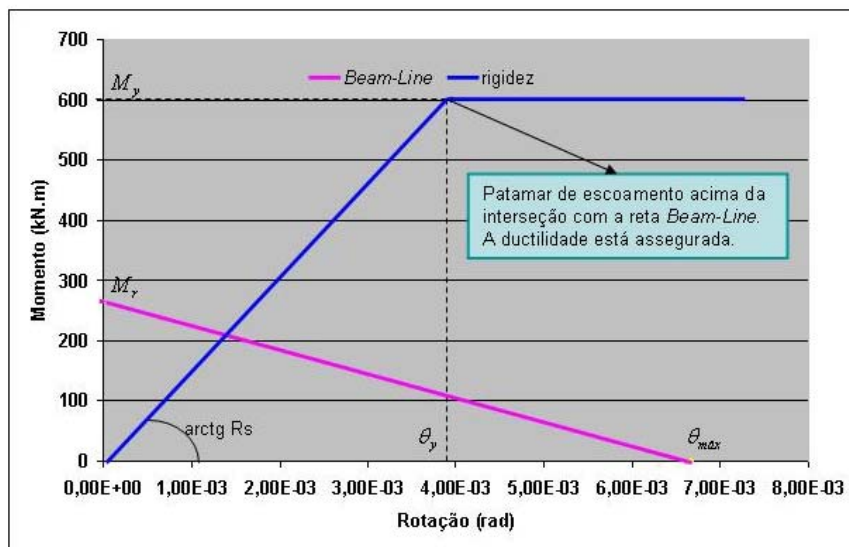


Figura 8-25: Interação *Beam-line* e rigidez secante.

## 5. Carregamentos

A Tabela 8-23 apresenta os diversos momentos fletores (neste caso o máximo na viga) que atuam no meio do vão, considerando a viga bi-apoiada, para os carregamentos  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$  e com ligação semi-rígida para os carregamentos  $g_4$ ,  $g_5$  e  $q$ .

$$M = \frac{p \cdot l^2}{8} \text{ (bi-apoiado) e } M = \frac{p \cdot l^2}{24} \cdot 2,33 \text{ (ligação semi-rígida), onde:}$$

$M$  – Momento solicitante;

$p$  – ação atuante;

$l$  – comprimento efetivo da viga (vão).

**Tabela 8-23: Momentos máximos no meio do vão.**

| Descrição             | Intensidade (kN/m) | Vão (m) | Momento máximo (kN.m) |
|-----------------------|--------------------|---------|-----------------------|
| $g_1$ – Peso próprio  | 6,75               | 9,75    | 80,21                 |
| $g_2$ – Laje Alveolar | 16,20              | 9,75    | 192,50                |
| $g_3$ – Capa          | 9,00               | 9,75    | 106,95                |
| $g_4$ – Alvenaria     | 5,94               | 9,75    | 54,82                 |
| $g_5$ – Revestimento  | 5,76               | 9,75    | 53,16                 |
| $q$ – Acidental       | 21,60              | 9,75    | 199,35                |

## 6. Estimativa do número de cabos no tempo infinito usando a consideração de fissuração.

Escolhe-se aqui a condição de verificação em serviço para se pré-dimensionar a área de aço  $A_p$ , para isso adota-se uma perda da ordem de 20% no tempo infinito.

$$\sigma_{p,t=\infty} = \sigma_{p,i} \cdot 0,80 = 145,3 \cdot 0,80 = 116,24 \text{ kN/cm}^2$$

Estado limite de formação de fissuras:

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g_1} + M_{g_2} + M_{g_3}}{W_i} - \frac{M_{g_4} + M_{g_5}}{W_{i,comp}} - \frac{\Psi_1 \cdot x M_q}{W_{i,comp}} \geq f_{ctk,inf}$$

Onde:

$$f_{ctk,inf} = 0,21 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,21 \cdot \sqrt[3]{40^2} = 2,456 \text{ MPa} = 2456 \text{ kN/m}^2$$

Considerando o uso das unidades para as duas verificações em serviço:

Força de protensão em kN;

Área de aço de protensão em cm<sup>2</sup>;

Características geométricas de seção transversal em metro;

Tensões = kN/m<sup>2</sup>;

Momento fletor em kN.m.

$$\sigma_i = \frac{116,24 \cdot A_p}{0,27} + \frac{116,24 \cdot 0,40 A_p}{4,05 \times 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \times 10^{-2}} - \frac{107,98}{7,69 \times 10^{-2}} - \frac{0,6 \cdot 199,35}{7,69 \times 10^{-2}} \geq -2456$$

$$A_p \geq 6,26 \text{ cm}^2$$

Estado limite de descompressão:

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}} - \frac{\Psi_2 \cdot x M_q}{W_{i,comp}} \geq 0$$

$$\sigma_i = \frac{116,24 \cdot x A_p}{0,27} + \frac{116,24 \cdot 0,40 A_p}{4,05 \times 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \times 10^{-2}} - \frac{107,98}{7,69 \times 10^{-2}} - \frac{0,4 \cdot 199,35}{7,69 \times 10^{-2}} \geq 0$$

$$A_p \geq 7,48 \text{ cm}^2$$

Considerando cordoalha de 12,7 mm com uma seção média de 0,987 cm<sup>2</sup> tem-se:

$$A_p = \frac{7,48}{0,987} = 7,57, \text{ considera-se o próximo valor par inteiro, portanto, tem-se 8}$$

cordoalhas de 12,7 mm com  $A_p=9,87 \text{ cm}^2$ . Como base na estimativa do número de cabos em vazio do exemplo 01 foram necessárias duas cordoalhas na fibra superior. Estas cordoalhas como se sabe provocam tensão de tração na borda inferior, com isso é conveniente partindo da experiência adquirida do exemplo 01, aumentar a cordoalha inicialmente estimada. Especialmente neste exemplo são utilizadas nove cordoalhas na fibra inferior, isto é possível desde que no detalhamento executivo da peça seja bem ilustrado o posicionamento do chumbador fora do eixo.

### 7. Estimativa do numero de cabos no tempo zero (verificação de ruptura simplificada).

Estimativa das cordoalhas na fibra superior, limitando a mesma em no máximo duas cordoalhas  $\phi 12,7$  mm.

Da mesma maneira estimando uma perda inicial de 2,5%, tem-se:

$$\sigma_{p,t=0} = \sigma_{p,i} \cdot 0,975 = 145,30 \cdot 0,975 = 141,67 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

Com  $N_p = \sigma_p \cdot A_p$  tem-se:

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{\overbrace{\sigma_{p,t=0} \cdot A_p}^{\text{Cabo inferior}} - \frac{\sigma_{p,t=0} \cdot A_p \cdot e_p}{W_s}}{A} + \frac{\overbrace{\sigma_{p,t=0} \cdot A'_p}^{\text{Cabo superior}} + \frac{\sigma_{p,t=0} \cdot A'_p \cdot e'_p}{W_s}}{A} + \frac{M_{g1}}{W_s} \geq -1,2 \cdot f_{ct,m}$$

$$\sigma_{\text{sup}} = \sigma_{p,t=0} \cdot A_p \left( \frac{1}{A} - \frac{e_p}{W_s} \right) + \sigma_{p,t=0} \cdot A'_p \left( \frac{1}{A} + \frac{e'_p}{W_s} \right) + \frac{M_{g1}}{W_s} \geq -1,2 \cdot f_{ct,m}$$

Onde:

$$1,2 f_{ct,m} = 1,2 \cdot 0,3 \cdot \sqrt[3]{25^2} = 3,078 \text{ MPa} = 3078 \text{ kN/m}^2.$$

$$\sigma_{\text{sup}} = 141,67 \cdot 8,883 \left( \frac{1}{0,27} - \frac{0,40}{4,05 \times 10^{-2}} \right) + 141,67 \cdot A'_p \left( \frac{1}{0,27} + \frac{0,40}{4,05 \times 10^{-2}} \right) + \frac{80,21}{4,05 \times 10^{-2}} \geq -3078$$

$$A'_p \geq 1,17 \text{ cm}^2, \text{ consideram-se duas cordoalhas de } \phi 12,7 \text{ mm com } A_p = 1,974 \text{ cm}^2.$$

### 8. Cabo representante para cálculo das perdas de protensão.

Como se tem uma estimativa de 9 cabos na fibra inferior será considerado 6 cabos na primeira camada a 4,5 cm da parte inferior da viga e a segunda camada a 8,5 cm com 3 cordoalhas, sendo então necessário determinar a posição do cabo representante, o cálculo abaixo esta cotado da face inferior da viga.

$$y_{cg,repres.} = \frac{\sum A_i \cdot y_{cg,i}}{\sum A_i} = \frac{6 \cdot 0,987 \cdot 4,5 + 3 \cdot 0,987 \cdot 8,5}{6 \cdot 0,987 + 3 \cdot 0,987} = 5,8 \text{ cm}$$

### 9. Cálculo das perdas de protensão.

As perdas de protensão são calculadas com as mesmas hipóteses explicitadas no exemplo 01, o que difere é apenas o número de cabos na borda inferior, que passa de dez cordoalhas para nove cordoalhas, alterando assim a posição do cabo representante.

#### *Perdas iniciais*

Nas perdas iniciais tem-se a consideração basicamente de três perdas, a primeira perda por deformação da ancoragem é a mesma determinada anteriormente, o mesmo se aplica para a relaxação da armadura. Essas duas perdas apresentam as mesmas características e variáveis consideradas para os dois exemplos, conseqüentemente os mesmo resultados.

$$t = 1 \text{ dia}; t_0 = 0$$

$$\sigma_p = 145,30 \text{ kN/cm}^2$$

$$M_{g1} = 80,21 \text{ kN.m}$$

#### ✓ **Perda por deformação imediata do concreto**

Para a perda por deformação imediata do concreto a mudança esta na seção de armadura na borda inferior juntamente com a sua excentricidade do cabo representante, a seguir é mostrado as seções de armadura utilizadas com suas respectivas excentricidades.

$$A_p = 9 \cdot 0,987 = 8,883 \text{ cm}^2; e_p = 39,2 \text{ cm}$$

$$A'_p = 2 \cdot 0,987 = 1,974 \text{ cm}^2; e'_p = 40 \text{ cm}$$

Efetuada os cálculos chega-se a uma tensão no centro de gravidade dos cabos de:

$$\Delta\sigma_{cg,inf} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,po+g,inf} = 7,14 \cdot 1,22 = 8,69 \text{ kN/cm}^2$$

$$\Delta\sigma_{cg,sup} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,po+g,sup} = 7,14 \cdot (-0,09) = -0,66 \text{ kN/cm}^2$$

Então, a tensão final considerando as perdas da primeira fase é:

$$\sigma_{p,inf,1 \text{ dia}} = \sigma_p - \Delta\sigma_{ancor} - \Delta\sigma_{pr} - \Delta\sigma_{cg,inf}$$

$$\sigma_{p,inf,1 \text{ dia}} = 145,30 - 1,20 - 2,55 - 8,69 = 132,86 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{p,sup,1 \text{ dia}} = \sigma_p - \Delta\sigma_{ancor} - \Delta\sigma_{pr} - \Delta\sigma_{cg,sup}$$

$$\sigma_{p,sup,1 \text{ dia}} = 145,30 - 1,20 - 2,55 - (-0,66) = 142,21 \text{ kN/cm}^2$$



Até esse instante as perdas calculadas foram de 8,56% para os cabos na borda inferior e de 2,13% para os cabos da borda superior.

### *Perdas diferidas*

Como as condições de carregamento e de geometria são as mesmas consideradas para o exemplo 01, aos coeficientes de fluência e retração são os mesmos. Com isso os procedimentos dos cálculos seguem os mesmos critérios, variando apenas a tensão inicial desta fase e a quantidade de armadura na borda inferior, como já foi citado, com isso tem-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 8,883 \cdot 132,86 + 1,974 \cdot 142,21 = 1460,87 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 8,883 \cdot 132,86 \cdot 0,392 - 1,974 \cdot 142,21 \cdot 0,40 = 350,34 \text{ kNm}$$

Efetuada os cálculos chega-se a um tensão de  $\sigma_{p\infty,inf} = 113,92 \text{ kN/cm}^2$  e  $\sigma_{p\infty,sup} = 122,59 \text{ kN/cm}^2$ , o que resulta a uma perda de 21,60% e para as cordoalhas da borda inferior e 15,65% para as cordoalhas da borda superior.

## **10. Verificação da fissuração**

Após os cálculos das perdas de protensão no tempo infinito, é possível fazer a verificações das tensões, lembrando que o tipo de protensão aplicada neste exemplo é a protensão limitada.

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 8,883 \cdot 113,92 + 1,974 \cdot 122,59 = 1253,96 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 8,883 \cdot 113,92 \cdot 0,392 - 1,974 \cdot 122,59 \cdot 0,40 = 299,90 \text{ kNm}$$

- ✓ Estado limite de formação de fissuras, combinação freqüente ( $\psi_1 = 0,6$ ).

Limites:

Compressão  $\rightarrow \sigma = 0,7 f_{ck} = 0,7 \times 40000 = 28000 \text{ kN/m}^2$ .

Tração  $\rightarrow \sigma = 0,3 f_{ctk,inf} = 0,21 \times \sqrt[3]{40^2} = 2,456 \text{ MPa} = 2456 \text{ kN/m}^2$ .

$$-2456 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$$

### Borda inferior

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_1 \cdot M_q}{W_{i,comp}}$$

$$\sigma_i = \frac{1253,96}{0,27} + \frac{299,90}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{107,98}{7,69 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,6 \cdot 199,35}{7,69 \cdot 10^{-2}} = -285 \text{ kN/m}^2$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}}$$

$$\sigma_i = \frac{1253,96}{0,27} + \frac{299,90}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{107,98}{7,69 \cdot 10^{-2}} = 1270 \text{ kN/m}^2$$

### Borda superior

Para se verificar a tensão na borda superior é necessário determinar a distancia  $y_{ts}$  na seção composta que seja a mesmo ponto de verificação da seção pré-moldada, ou seja, a distância do centro de gravidade até a borda superior da seção pré-moldada.

$$y_{ts} = h_{pré} - y_{gc,comp} = 0,90 - 0,636 = 0,264 \text{ m}$$

Com isso o modulo resistente é dado por:

$$W_{ts} = \frac{I_{comp}}{y_{ts}} = \frac{4,89 \cdot 10^{-2}}{0,264} = 1,85 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3$$

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_s} + \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{ts}} + \frac{\psi_1 \cdot M_q}{W_{ts}}$$

$$\sigma_s = \frac{1253,96}{0,27} - \frac{299,90}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{107,98}{1,85 \cdot 10^{-1}} + \frac{0,6 \cdot 199,35}{1,85 \cdot 10^{-1}} = 7844 \text{ kN/m}^2$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_s} + \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{ts}}$$

$$\sigma_s = \frac{1253,96}{0,27} - \frac{299,90}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{107,98}{1,85 \cdot 10^{-1}} = 7197 \text{ kN/m}^2$$

Como os valores máximos e mínimos estão dentro do limite a verificação do estado limite de formação de fissuras esta atendida.

- ✓ Estado limite de descompressão, combinação quase permanente ( $\psi_2 = 0,4$ ).

Limites:

Compressão →  $\sigma = 0,7 f_{ck} = 0,7 \times 40000 = 28000 \text{ kN/m}^2$ .

Tração →  $\sigma = 0$

$$0 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$$

**Borda inferior**

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_2 \cdot M_q}{W_{i,comp}}$$

$$\sigma_i = \frac{1253,96}{0,27} + \frac{299,90}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{107,98}{7,69 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,4 \cdot 199,35}{7,69 \cdot 10^{-2}} = 233 \text{ kN/m}^2$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}}$$

$$\sigma_i = \frac{1253,96}{0,27} + \frac{299,90}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} - \frac{107,98}{7,69 \cdot 10^{-2}} = 1270 \text{ kN/m}^2$$

**Borda superior**

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_s} + \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{ts}} + \frac{\psi_2 \cdot M_q}{W_{ts}}$$

$$\sigma_s = \frac{1253,96}{0,27} - \frac{299,90}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{107,98}{1,85 \cdot 10^{-1}} + \frac{0,4 \cdot 199,35}{1,85 \cdot 10^{-1}} = 7628 \text{ kN/m}^2$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_s} + \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{ts}}$$

$$\sigma_s = \frac{1253,96}{0,27} - \frac{299,90}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{379,66}{4,05 \cdot 10^{-2}} + \frac{107,98}{1,85 \cdot 10^{-1}} = 7197 \text{ kN/m}^2$$

Como os valores máximos e mínimos estão dentro do limite a verificação do estado limite de descompressão está atendida.

### 11. Verificação de ruptura no tempo zero (verificação de ruptura simplificada).

Determina-se o momento fletor devido ao peso próprio em décimo de vão, como a seção é a mesma do exemplo 01, os valores dos momentos fletores são os mesmos rerepresentados na Tabela 8-24.

**Tabela 8-24: Valores dos momentos fletores em vazio para décimo de vão.**

| Seção                 | S <sub>1</sub> | S <sub>2</sub> | S <sub>3</sub> | S <sub>4</sub> | S <sub>5</sub> |
|-----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| M <sub>s</sub> (kN.m) | 28,88          | 51,53          | 67,38          | 77,00          | 80,21          |

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 8,883 \cdot 132,86 + 1,974 \cdot 142,21 = 1460,92 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 8,883 \cdot 132,86 \cdot 0,392 - 1,974 \cdot 142,21 \cdot 0,40 = 350,35 \text{ kNm}$$

### Borda inferior

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_s}{W_i}$$

### Borda superior

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_s}{W_s}$$

A Tabela 8-25 apresenta os valores das tensões na borda inferior e superior variando o momento em décimo de vão apresentados na Tabela 8-24.

**Tabela 8-25: Valores das tensões da borda inferior e superior em décimo de vão.**

| Seção                           | S <sub>1</sub> | S <sub>2</sub> | S <sub>3</sub> | S <sub>4</sub> | S <sub>5</sub> |
|---------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\sigma_i$ (kN/m <sup>2</sup> ) | 13348          | 12794          | 12398          | 12160          | 12081          |
| $\sigma_s$ (kN/m <sup>2</sup> ) | -2527          | -1972          | -1576          | -1339          | -1259          |

Os limites para este instante é:

$$\text{Compressão} \rightarrow \sigma = 0,7 f_{ckj} = 0,7 \times 25000 = 17500 \text{ kN/m}^2.$$

$$\text{Tração} \rightarrow \sigma = 1,2 \times 0,3 f_{ct,m} = 1,20 \times 0,3 \times \sqrt[3]{25^2} = 3,078 \text{ MPa} = 3078 \text{ kN/m}^2.$$

$$-3078 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 17500 \text{ kN/m}^2$$

Os limites de tensões da borda inferior quanto à da borda superior dentro dos limites permitidos, porém é necessário dimensionar a armadura que ira controlar as fissuras de tração da borda superior. A Figura 8-26 apresenta a seção considerada para o dimensionamento

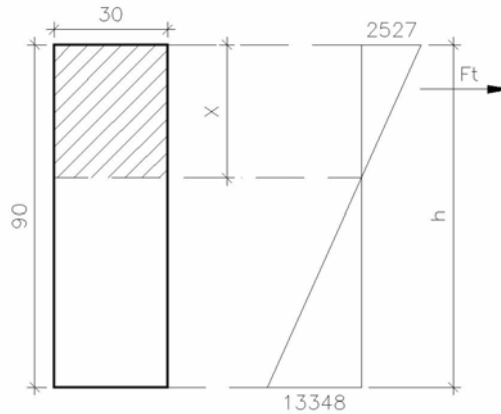


Figura 8-26: Esquema para o cálculo da força  $F_t$  de tração na seção transversal.

$$\frac{x}{h} = \frac{\sigma_s}{\sigma_s + \sigma_i} \rightarrow x = \frac{2527}{2527 + 13348} \cdot 0,90 = 0,143 \text{ m}$$

O valor de força de tração, como pode se deduzir a partir da Figura 8-9 é dado por:

$$F_t = \sigma_s \cdot b \cdot \frac{x}{2} = 2527 \cdot 0,30 \cdot \frac{0,143}{2} = 54,20 \text{ kN}$$

Com a tensão na armadura igual a  $25 \text{ kN/cm}^2$ .

$$A'_s = \frac{F_t}{25} = \frac{54,20}{25} = 2,17 \text{ cm}^2, \text{ não considerando a armadura de protensão pode-se}$$

adotar  $4\phi 10 \text{ mm}$  ( $A_s = 3,2 \text{ cm}^2$ ). Considerando a armadura tem-se cordoalha  $2\phi 12,7 \text{ mm}$  ( $1,974 \text{ cm}^2$ ) e  $2\phi 8 \text{ mm}$  ( $1,0 \text{ cm}^2$ ) de armadura passiva.

## 12. Verificação das tensões em décimo de vão no tempo infinito

Com os momentos fletores apresentados na Tabela 8-23 podem-se calcular os momentos em décimo de vão. Considerando os três primeiros carregamentos ( $g_1+g_2+g_3$ ) como  $p_1$  o terceiro e quarto ( $g_4+g_5$ ) como  $p_2$  e o sexto ( $q$ ) como  $p_3$ , são calculados os momentos fletores e apresentado na Tabela 8-11.

Tabela 8-26: Valores dos momentos fletores seção composta para décimo de vão.

|                             | S <sub>1</sub> | S <sub>2</sub> | S <sub>3</sub> | S <sub>4</sub> | S <sub>5</sub> |
|-----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>M<sub>1</sub> (kN.m)</b> | 136,88         | 242,98         | 318,91         | 364,47         | 379,66         |
| <b>M<sub>2</sub> (kN.m)</b> | 38,87          | 69,11          | 90,70          | 103,66         | 107,98         |
| <b>M<sub>3</sub> (kN.m)</b> | 71,76          | 127,58         | 167,45         | 191,37         | 199,35         |

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 8,883 \cdot 113,92 + 1,974 \cdot 122,59 = 1253,96 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 8,883 \cdot 113,92 \cdot 0,392 - 1,974 \cdot 122,59 \cdot 0,40 = 299,90 \text{ kNm}$$

$$A = 0,27 \text{ m}; W_i = W_s 4,05 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3; W_{i,comp} = 7,69 \cdot 10^{-2}; W_{ts} = 1,85 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3$$

- ✓ Estado limite de formação de fissuras, combinação freqüente ( $\psi_1 = 0,6$ ).

Limites:

Compressão  $\rightarrow \sigma = 0,7 f_{ck} = 0,7 \times 40000 = 28000 \text{ kN/m}^2$ .

Tração  $\rightarrow \sigma = 0,3 f_{ctk,inf} = 0,21 \times \sqrt[3]{40^2} = 2,456 \text{ MPa} = 2456 \text{ kN/m}^2$ .

$$-2456 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$$

### Borda inferior

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{1,s}}{W_i} - \frac{M_{2,s}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_1 \cdot M_{3,s}}{W_{i,comp}}$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{1,s}}{W_i} - \frac{M_{2,s}}{W_{i,comp}}$$

### Borda superior

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{1,s}}{W_s} + \frac{M_{2,s}}{W_{ts}} + \frac{\psi_1 \cdot M_{3,s}}{W_{ts}}$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{1,s}}{W_s} + \frac{M_2}{W_{ts}}$$

O Gráfico 8-5 apresenta os valores das tensões em décimo de vão da borda inferior para o estado limite de formação de fissuras (ELS-F).

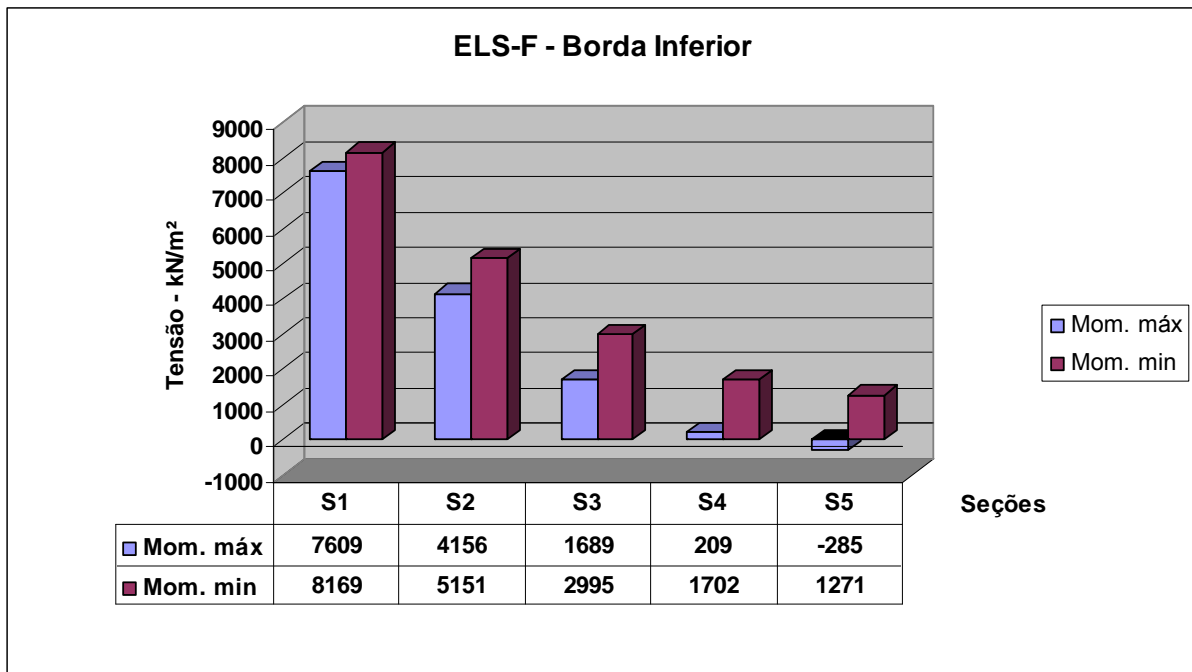


Gráfico 8-5: Tensões na borda inferior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.

O Gráfico 8-6 apresenta os valores das tensões em décimo de vão da borda inferior para o estado limite de formação de fissuras (ELS-F).

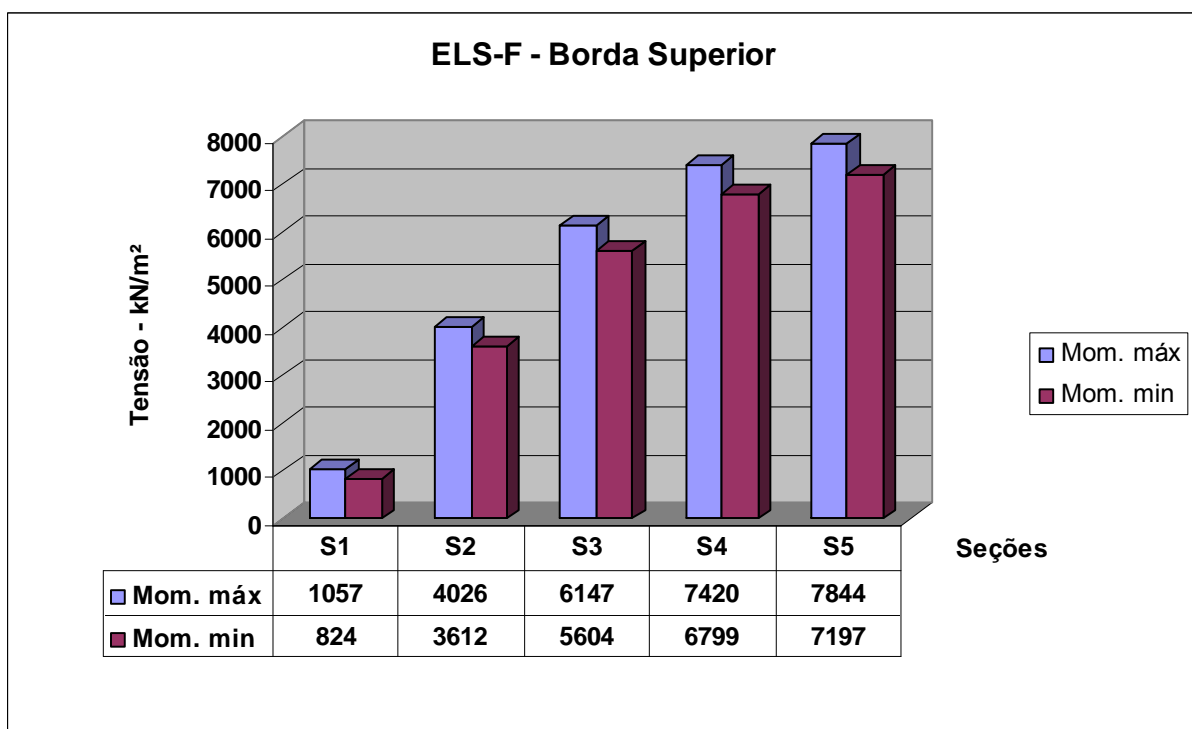


Gráfico 8-6: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.



Como os valores máximos e mínimos estão dentro do limite a verificação do estado limite de formação de fissuras esta atendida.

- ✓ Estado limite de descompressão, combinação quase permanente ( $\psi_2 = 0,4$ ).

Limites:

Compressão →  $\sigma = 0,7 f_{ck} = 0,7 \times 40000 = 28000 \text{ kN/m}^2$ .

Tração →  $\sigma = 0$

$$0 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$$

### Borda inferior

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{1,s}}{W_i} - \frac{M_{2,s}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_2 \cdot M_{3,s}}{W_{i,comp}}$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{1,s}}{W_i} - \frac{M_{2,s}}{W_{i,comp}}$$

### Borda superior

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{1,s}}{W_s} + \frac{M_{2,s}}{W_{s,comp}} + \frac{\psi_2 \cdot M_{3,s}}{W_{s,comp}}$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{1,s}}{W_s} + \frac{M_{2,s}}{W_{s,comp}}$$

O Gráfico 8-7 apresenta os valores das tensões em décimo de vão da borda inferior para o estado limite de descompressão (ELS-D).

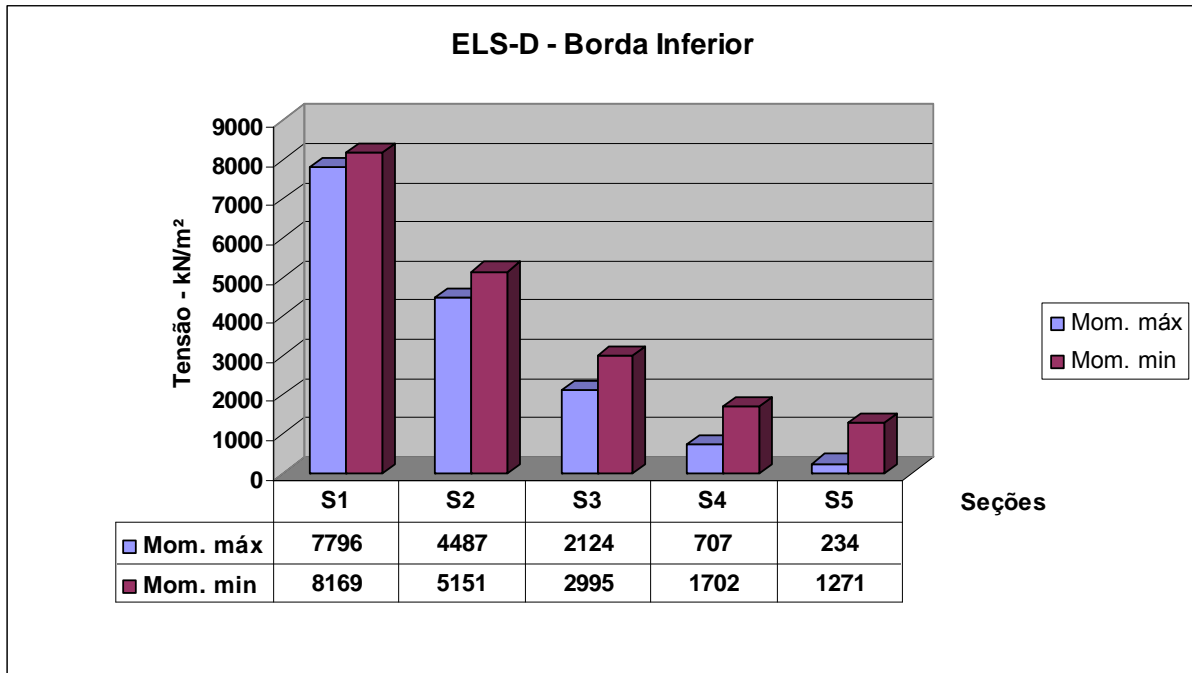


Gráfico 8-7: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.

O Gráfico 8-8 apresenta os valores das tensões em décimo de vão da borda superior para o estado limite de descompressão (ELS-D).

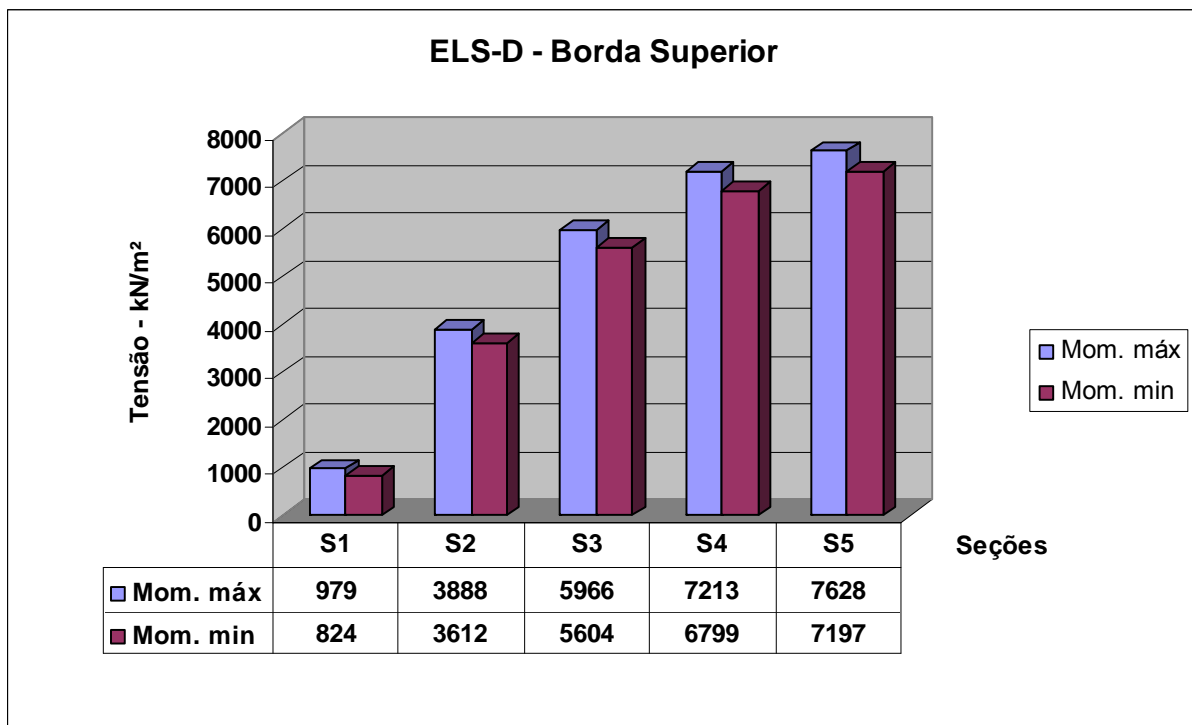


Gráfico 8-8: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.

Como os valores máximos e mínimos estão dentro do limite a verificação do estado limite de formação de descompressão esta atendida.

### 13. Cálculo de $A_p$ e no tempo infinito.

Considerando os coeficientes de 1,30 para os elementos pré-fabricados, tem-se:

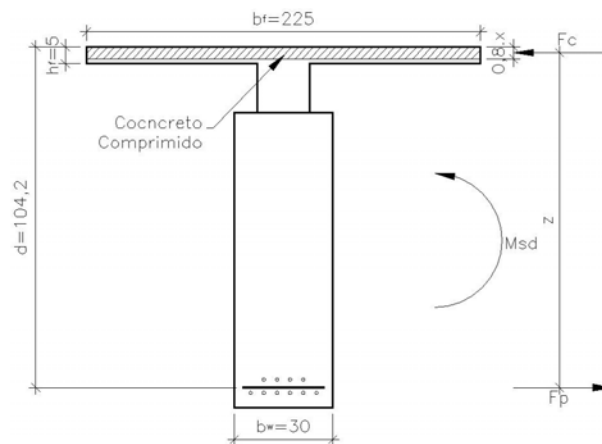
$$M_d = 1,3 \cdot (M_{g1} + M_{g2}) + 1,4 \cdot (M_{g3} + M_{g4} + M_{g5} + M_q)$$

$$M_d = 1,3 \cdot (80,21 + 192,50) + 1,4 \cdot (106,95 + 54,82 + 53,16 + 199,35) = 934,52 \text{ kN.m}$$

Com a tensão no cabo no tempo infinito de  $\sigma_{p,inf} = 113,91 \text{ kN/cm}^2 = 1139,1 \text{ MPa}$  determina-se o pré-alongamento da armadura ativa de acordo com a Tabela 5-1, e o valor é de  $\varepsilon_p = 5,86\%$ . Com isso tem-se

$\varepsilon_p = \varepsilon_s + \varepsilon_p = 10 + 5,86 = 15,86\%$ . Com  $\varepsilon_p$  na mesma Tabela 5-1 tem-se  $\sigma_{sd} = 1510,4 \text{ MPa}$ .

Conhecida a armadura longitudinal calcula-se o momento máximo resistente da seção. Determina-se a posição da linha neutra (LN) a partir do equilíbrio das forças atuantes na seção transversal (Figura 8-27).



**Figura 8-27: Seção transversal com a indicação das forças internas (unidades em cm).**

Como não há força externa e a força atuante no concreto ( $F_c$ ), deve ser igual a força atuante na armadura ( $F_t$ ).

$$F_c = F_t, \text{ ou seja, } (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) (0,8 \cdot x) = A_p \cdot f_{pd}$$

Para uma primeira tentativa impõe que a viga esta trabalhando no domínio 2 e que a posição da linha neutra esteja na altura da capa, assim a expressão da linha neutra é dado por:

$$x = \frac{A_p \cdot f_{pd}}{0,68 \cdot b_f \cdot f_{cd}} = \frac{8,883 \cdot 150,1}{0,68 \cdot 2,25 \cdot \frac{30000}{1,4}} = 4,07 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 4,07 \text{ cm} < h_f, \text{ portanto a}$$

linha neutra esta passando pela capa.

Com a posição da linha neutra é possível identificar o domínio de deformação que esta situada a viga em estudo. Para que a viga se encontre no domínio 2 a posição da linha neutra LN deve estar entre zero e um determinado valor obtido através das deformações do concreto e do aço.

$$x_2 = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \cdot d = \frac{3,5}{3,5 + 10} \cdot 1,042 = 0,2701 \text{ m} = 27,01 \text{ cm}$$

Como a posição da linha neutra esta a 4,07 cm pode-se dizer que a mesma encontra-se no domínio 2. Com o isso o momento resistente é dado por:

$$M_{rest} = F_c \cdot z = (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) (0,8 \cdot x) \cdot (d - 0,4 \cdot x), \text{ assim tem-se:}$$

$$M_{rest} = \left(0,85 \cdot \frac{30000}{1,4}\right) \cdot 2,25 \cdot 0,8 \cdot 4,07 \cdot 10^{-2} (1,042 - 0,4 \cdot 4,07 \cdot 10^{-2}) = 1369 \text{ kN.m}$$

Como o momento atuante é menor que o momento resistente a armadura dimensionada para a fissuração é suficiente para atender o estado limite ultimo (ELU), concluindo, portanto o dimensionamento e as verificações da armadura longitudinal.

#### 14. Armadura de pele (na região tracionada).

Como a altura total da viga é maior que 60 cm, é necessária colocação em cada face, na região tracionada da viga, de uma armadura de pele.

$$A_{s,pele} = 0,10\% \cdot b_w \cdot h = \frac{0,10}{100} \cdot 30 \cdot 90 = 2,70 \text{ cm}^2 \quad (\text{em cada face, na região}$$

tracionada).

A armadura de pele é recomendada para evitar fissuras e, portanto, deveria ser empregada para a condição em serviço, porém, simplificada será usada a condição de estado limite último. Lembrando que a linha neutra LN calculado no item anterior é de 27,01 cm, com isso tem-se:

$h - x = 90 - 27,01\text{cm} = 62,99\text{cm}$ , portanto, a armadura de pele deve ser distribuída na região tracionada até uma altura aproximada de 63 cm.

### 15. Estimativa de flecha

Momento de fissuração é determinado para duas situações, a primeira é com a ação do peso próprio e a protensão após ocorrida as perdas imediatas e a segunda e no tempo infinito onde já decorreram todas as perdas devido a protensão e tem-se a seção composta.

*Momento de fissuração após as perdas iniciais*

$$M_r = \left( \alpha \cdot f_{ct} + \frac{N_p}{A} \right) \cdot w_i + M_p ; \text{ onde:}$$

$\alpha = 1,2$  para seção T ou duplo TT e 1,5 para seção retangular

$f_{ct}$  = é a resistência a tração do concreto, no caso de determinação do momento de fissuração para mo estado limite de deformação excessiva  $f_{ct} = f_{ct,m}$ .

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_p' \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 8,883 \cdot 132,86 + 1,974 \cdot 142,21 = 1460,92 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_p' \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_p'$$

$$M_p = 8,883 \cdot 132,86 \cdot 0,392 - 1,974 \cdot 142,21 \cdot 0,40 = 350,35 \text{ kNm}$$

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{f_{ckj}^2} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{25^2} = 2,565 \text{ MPa} = 2565 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$M_r = \left( 1,5 \cdot 2565 + \frac{1460,92}{0,27} \right) \cdot 4,05 \cdot 10^{-2} + 350,35 = 725,91 \text{ kN.m}$$

Neste instante o momento atuante é devido ao peso próprio, com isso tem-se:

$$M_{g1} = \frac{p_1 \cdot l^2}{8} = \frac{6,75 \cdot 9,75^2}{8} = 80,21 \text{ kNm}, \text{ que é menor que o momento de}$$

fissuração.

*Momento de fissuração no tempo infinito*

$$M_r = \alpha \cdot f_{ct} \cdot w_{i,comp} + \frac{N_p}{A} \cdot w_i + M_p$$

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 8,883 \cdot 113,92 + 1,974 \cdot 122,59 = 1253,96 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 8,883 \cdot 113,92 \cdot 0,392 - 1,974 \cdot 122,59 \cdot 0,40 = 299,90 \text{ kNm}$$

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{40^2} = 3,509 \text{ MPa} = 3509 \text{ kN/m}^2$$

$$M_r = 1,2 \cdot 3509 \cdot 7,69 \cdot 10^{-2} + \frac{1253,96}{0,27} \cdot 4,05 \cdot 10^{-2} + 299,90 = 811,81 \text{ kN.m}$$

No tempo infinito o momento atuante para verificação de deformação excessiva é dado para a combinação quase permanente, como os valores dos carregamentos dados na Tabela 8-23, tem-se:

$$M_{g1+g2+g3+g4+g5+\psi_2q} = 567,08 \text{ kNm}, \text{ que é menor que o momento de fissuração.}$$

*Flechas devidas aos carregamentos  $g_1$  a  $g_5$  e  $q$ .*

→ **Fase 01: Peso próprio ( $g_1$ ).**

$$p = g_1 = 6,75 \text{ kN/m}$$

$$a_{g1} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 6,75 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 23,8 \cdot 10^6 \cdot 1,82 \cdot 10^{-2}} = 1,83 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,83 \text{ mm}$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{cj}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{25} = 23800 \text{ MPa}$$

→ **Fase 02: Peso próprio ( $g_1$ ) + Laje ( $g_2$ ).**

$$p = g_2 = 16,20 \text{ kN/m}$$

$$a_{g2} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 16,20 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 29,02 \cdot 10^6 \cdot 1,82 \cdot 10^{-2}} = 3,60 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3,60 \text{ mm}$$

Para a segunda fase com 15 dias o concreto tem resistência de  $\beta_1 \cdot f_{ck}$ .

$$\beta_1 = \exp\left\{s \left[1 - \left(\frac{28}{t}\right)^{1/2}\right]\right\} = \exp\left\{0,20 \left[1 - \left(\frac{28}{15}\right)^{1/2}\right]\right\} = 0,929$$

Onde:

$s = 0,20$  para concreto de cimento CPV-ARI.

Assim:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{\beta_1 f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{0,929 \cdot 40} = 29016 \text{ MPa}$$

→ **Fase 03:** *Peso próprio (g<sub>1</sub>) + Laje (g<sub>2</sub>) + Capa (g<sub>3</sub>).*

$$p = g_3 = 9,00 \text{ kN/m}$$

$$a_{g_3} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 9,00 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 1,82 \cdot 10^{-2}} = 1,93 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,93 \text{ mm}$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{40} = 30104 \text{ MPa}$$

A partir da fase 04 deve-se considerar a correção da flecha no meio do vão devido a restrição ao giro imposta pela armadura de ligação, esta correção é dada por:

$$\frac{a_g}{a_{g,lig}} = \left( \frac{2 - 1,4 \cdot \alpha_R}{2 + \alpha_R} \right) = \left( \frac{2 - 1,4 \cdot 0,25}{2 + 0,25} \right) = 0,73$$

→ **Fase 04:** *Peso próprio (g<sub>1</sub>) + Laje (g<sub>2</sub>) + Capa (g<sub>3</sub>) + Alvenaria (g<sub>4</sub>).*

$$p = g_4 = 5,94 \text{ kN/m}$$

$$a_{g_4} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} \cdot \left( \frac{a_g}{a_{g,lig}} \right) = \frac{5 \cdot 5,94 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 4,89 \cdot 10^{-2}} \cdot (0,73) = 3,48 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,35 \text{ mm}$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{40} = 30104 \text{ MPa}$$

→ **Fase 05:** *Peso próprio (g<sub>1</sub>) + Laje (g<sub>2</sub>) + Capa (g<sub>3</sub>) + Alvenaria (g<sub>4</sub>) + Revestimento (g<sub>5</sub>).*

$$p = g_5 = 5,76 \text{ kN/m}$$

$$a_{g5} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} \cdot \left( \frac{a_g}{a_{g,lig}} \right) = \frac{5 \cdot 5,76 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 4,89 \cdot 10^{-2}} \cdot (0,73) = 3,35 \cdot 10^{-4} m = 0,34 mm$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{40} = 30104 MPa$$

→ **Fase 06:** *Peso próprio (g<sub>1</sub>) + Laje (g<sub>2</sub>) + Capa (g<sub>3</sub>) + Alvenaria (g<sub>4</sub>) + Revestimento (g<sub>5</sub>) + Acidental (q).*

Considerando o coeficiente de ponderação  $\Psi_2 = 0,4$

$$p = q = 21,60 kN / m$$

$$a_q = \frac{5 \cdot p \cdot \psi_2 \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} \cdot \left( \frac{a_g}{a_{g,lig}} \right) = \frac{5 \cdot 21,60 \cdot 0,4 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 4,89 \cdot 10^{-2}} \cdot (0,73) = 5,04 \cdot 10^{-4} m = 0,50 mm$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{40} = 30104 MPa$$

*Contra flechas devidas momento de protensão*

Após 24 horas da fabricação da viga, a protensão foi aplicada com os cortes dos cabos e inicia-se também uma perda de protensão, com isso analisa-se a contra flecha e a sua diminuição da seguinte forma.

A tensão inicial do cabo é dada por:

$$\sigma_{pi} = \sigma_p - (\Delta\sigma_{acora} + \Delta\sigma_{pr}) = 145,3 - (1,20 + 2,55) = 141,55 MPa$$

Com isso tem-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 8,883 \cdot 141,55 + 1,974 \cdot 141,55 = 1536,81 kN$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 8,883 \cdot 141,55 \cdot 0,392 - 1,974 \cdot 141,55 \cdot 0,40 = 381,13 kNm$$



$$a_p = \frac{M_p \cdot l^2}{8 \cdot E_c \cdot I} = \frac{381,13 \cdot 9,75^2}{8 \cdot 29,02 \cdot 10^6 \cdot 1,82 \cdot 10^{-2}} = 8,57 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 8,57 \text{ mm}$$

A perda de protensão também implica em uma perda da contra flecha.

$$M_{p,t=\infty} - M_{p,t=0} = \Delta M_p$$

$$\Delta a_p = \frac{\Delta M_p \cdot l^2}{8 \cdot E_c \cdot I}$$

Com a tensão no tempo infinito no cabo de protensão de  $\sigma_{pi,inf} = 113,92$  MPa e  $\sigma_{pi,sup} = 122,59$  MPa, tem-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 8,883 \cdot 113,92 + 1,974 \cdot 122,59 = 1253,96 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 8,883 \cdot 113,92 \cdot 0,392 - 1,974 \cdot 122,59 \cdot 0,40 = 299,90 \text{ kNm}$$

$$\Delta a_p = \frac{\Delta M_p \cdot l^2}{8 \cdot E_c \cdot I} = \frac{(381,13 - 299,90) \cdot 9,75^2}{8 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 1,82 \cdot 10^{-2}} = 1,76 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,76 \text{ mm}$$

A Tabela 8-27 apresenta o resumo das flechas imediatas.

**Tabela 8-27: Resumo das deformações imediatas.**

| Fase | Ação                       | Seção         | Flecha imediata (mm) |
|------|----------------------------|---------------|----------------------|
| 1    | Protensão                  | Pré-fabricada | -8,57                |
| 1    | Peso próprio da viga       | Pré-fabricada | 1,83                 |
| 2    | Peso próprio da laje       | Pré-fabricada | 3,60                 |
| 3    | Execução da capa           | Pré-fabricada | 1,93                 |
| 4    | Execução da alvenaria      | Composta      | 0,35                 |
| 5    | Execução do revestimento   | Composta      | 0,34                 |
| 6    | Atuação da carga acidental | Composta      | 0,50                 |
| 7    | Perda de protensão         | Pré-fabricada | 1,76                 |

*Valores do coeficiente de fluência.*

O coeficiente de fluência já foi determinado e apresentado na Tabela 8-8 para a determinação das perdas por fluência. A Tabela 8-28 reapresenta os valores dos coeficientes de fluência.

Tabela 8-28: Coeficientes de fluência para a seção 01, 02 e final.

| Ação                       | t <sub>0</sub><br>seção 01 | Coefficiente φ<br>seção 01 | t <sub>0</sub><br>seção 02 | Coefficiente<br>φ seção 02 | Coefficiente<br>φ final |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|
| Protensão                  | 1                          | 3,304                      | --                         | --                         | 3,304                   |
| Peso próprio da viga       | 1                          | 3,304                      | --                         | --                         | 3,304                   |
| Peso próprio da laje       | 15                         | 2,225                      | --                         | --                         | 2,225                   |
| Execução da capa           | 30                         | 1,940                      | 1                          | 3,783                      | 2,559                   |
| Execução da alvenaria      | 45                         | 1,777                      | 15                         | 2,539                      | 2,033                   |
| Execução do revestimento   | 60                         | 1,660                      | 30                         | 2,150                      | 1,825                   |
| Atuação da carga acidental | 75                         | 1,568                      | 45                         | 1,933                      | 1,691                   |
| Perda de protensão         | 75                         | 1,568                      | 45                         | 1,933                      | 1,691                   |

A Tabela 8-29 apresenta os valores finais das flechas considerando a protensão e os carregamentos.

Tabela 8-29: Resultado final da flecha no tempo infinito.

| Fase | Flecha<br>imediate | Coefficiente<br>φ <sub>final</sub> | Coefficiente<br>1+ φ <sub>final</sub> | Flecha<br>t <sub>∞</sub> | Soma   |
|------|--------------------|------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------|--------|
| 1    | -8,57              | 3,304                              | 4,304                                 | -36,88                   | -36,88 |
| 1    | 1,83               | 3,304                              | 4,304                                 | 7,88                     | -29,00 |
| 2    | 3,60               | 2,225                              | 3,225                                 | 11,61                    | -17,39 |
| 3    | 1,93               | 2,559                              | 3,559                                 | 6,87                     | -10,52 |
| 4    | 0,35               | 2,033                              | 3,033                                 | 1,06                     | -9,46  |
| 5    | 0,34               | 1,825                              | 2,825                                 | 0,96                     | -8,50  |
| 6    | 0,50               | 1,691                              | 2,691                                 | 1,34                     | -7,16  |
| 7    | 1,76               | 1,691/2=0,846                      | 1,846                                 | 3,25                     | -3,91  |

Com limite de  $l/250 = 9750/250 = 39,00 \text{ mm}$

## 16. Detalhamento da viga pré-moldada.

A Figura 8-28 e a Figura 8-29 apresentam todo o detalhamento resultante dos cálculos apresentados anteriormente para o exemplo 03.

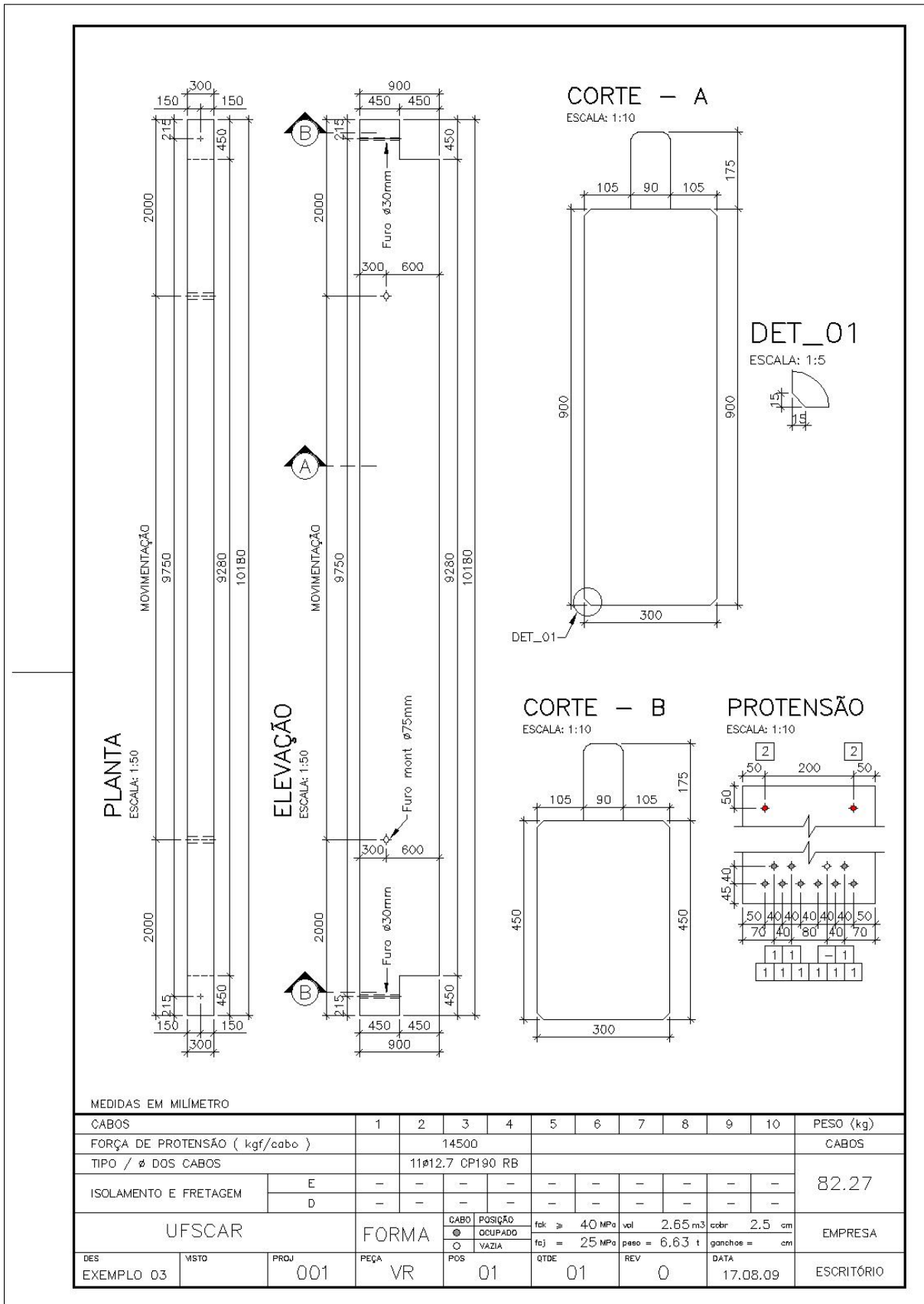


Figura 8-28: Forma da viga VR01, exemplo 03.

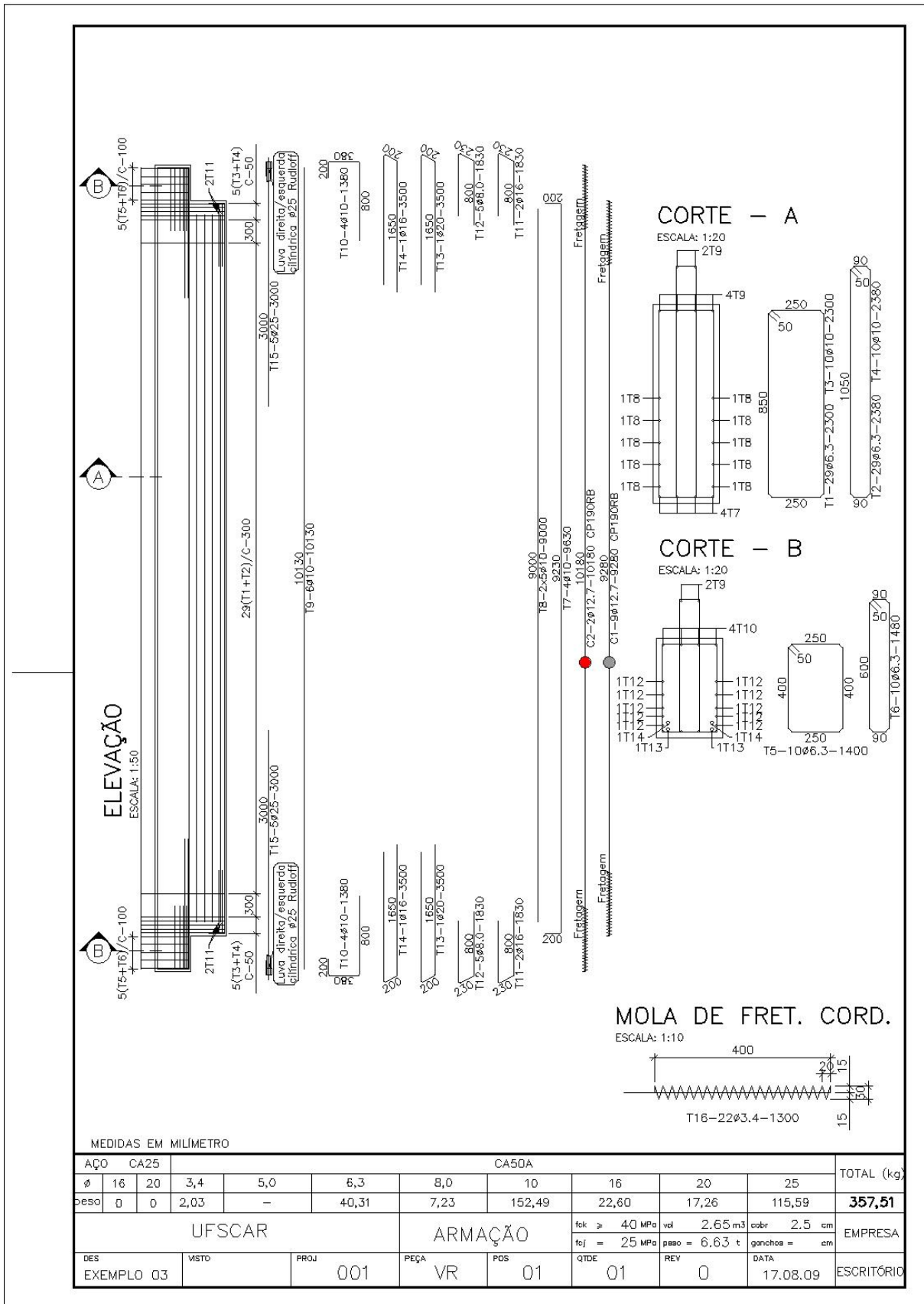


Figura 8-29: Armação da viga VR01, exemplo 03.

### 8.4. EXEMPLO 04

**Exemplo 7.4:** Calcular a viga VR01 do exemplo 01, considerando os mesmos carregamentos e as suas respectivas datas, porém a seção do elemento pré-moldado passa a ser um perfil I. A Figura 8-30 apresenta as duas seções transversais da viga VR01 a primeira constitui apenas do elemento pré-moldado e a segunda a seção composta devido a aplicação da capa de concreto.

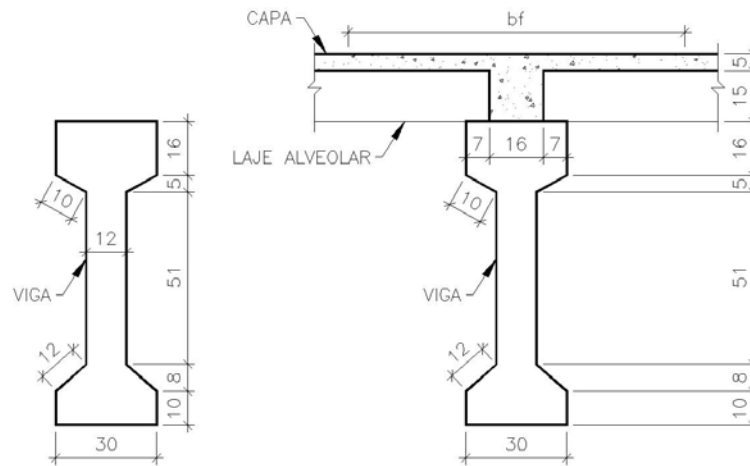


Figura 8-30: Seções transversais da viga VR01 (unidades em cm).

#### Resolução

##### 1. Carregamentos:

A Tabela 8-30 e Tabela 8-31 apresentam os carregamentos considerados, sendo que há mudança apenas no peso próprio da viga pré-moldada.

Tabela 8-30: Intensidade de carregamento do peso próprio.

| Descrição                     | Área (m <sup>2</sup> ) | $\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> ) | Intensidade (kN/m) |
|-------------------------------|------------------------|-------------------------------|--------------------|
| g <sub>1</sub> – Peso próprio | 0,1665                 | 25                            | 4,16               |
| g <sub>4</sub> – Alvenaria    | 0,15 x 2,20 = 0,33     | 18                            | 5,94               |

Tabela 8-31: Intensidade de carregamento na laje.

| Descrição                          | Intensidade (kN/m <sup>2</sup> ) | Vão de contribuição (m). | Ação na viga (kN/m). |
|------------------------------------|----------------------------------|--------------------------|----------------------|
| g <sub>2</sub> – Laje Alveolar     | 2,25                             | 7,20                     | 16,20                |
| g <sub>3</sub> – Capa (esp = 5 cm) | 0,05 x 25 = 1,25                 | 7,20                     | 9,00                 |
| g <sub>5</sub> – Revestimento      | 0,80                             | 7,20                     | 5,76                 |
| q – Acidental                      | 3,0                              | 7,20                     | 21,60                |

A Tabela 8-32 apresenta os diversos momentos fletores (neste caso o máximo na viga) que atuam no meio do vão, considerando a viga bi-apoiada, tem-se:

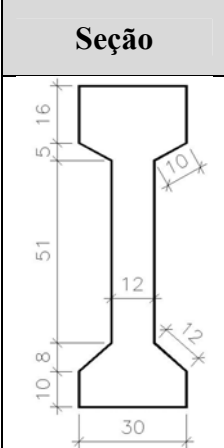
**Tabela 8-32: Momentos máximos no meio do vão.**

| Descrição             | Intensidade (kN/m) | Vão (m) | Momento máximo (kN.m) |
|-----------------------|--------------------|---------|-----------------------|
| $g_1$ – Peso próprio  | 4,16               | 9,75    | 49,43                 |
| $g_2$ – Laje Alveolar | 16,20              | 9,75    | 192,50                |
| $g_3$ – Capa          | 9,00               | 9,75    | 106,95                |
| $g_4$ – Alvenaria     | 5,94               | 9,75    | 70,58                 |
| $g_5$ – Revestimento  | 5,76               | 9,75    | 68,45                 |
| $q$ – Acidental       | 21,60              | 9,75    | 256,67                |

**2. Características geométricas:**

A Tabela 8-32 mostra as características geométricas da seção pré-moldada, conhecida também como seção em vazio..

**Tabela 8-33: Características geométricas da seção pré-moldada.**

| Seção   | Área                 | = 0,1665 m <sup>2</sup>                |
|---|----------------------|--|
|  | $y_{cg}$             | = 0,464 m                              |
|   | <b>I</b>             | = 1,52.10 <sup>-2</sup> m <sup>4</sup> |
|   | <b>W<sub>i</sub></b> | = 3,28.10 <sup>-2</sup> m <sup>3</sup> |
|   | <b>W<sub>s</sub></b> | = 3,49.10 <sup>-2</sup> m <sup>3</sup> |

A partir da mesma mesa colaborante  $b_f = 2,25$  m a Tabela 8-34 apresenta as características geométricas da seção composta, lembrando da redução de capa de concreto para considerar os módulos de elasticidade dos dois concretos.

**Tabela 8-34: Características geométricas da seção composta.**

| Seção | Área                | = 0,2855 m <sup>2</sup>                |
|-------|---------------------|--|
|       | y <sub>cg</sub>     | = 0,711 m                              |
|       | I <sub>comp</sub>   | = 3,99.10 <sup>-2</sup> m <sup>4</sup> |
|       | W <sub>i,comp</sub> | = 5,61.10 <sup>-2</sup> m <sup>3</sup> |
|       | W <sub>s,comp</sub> | = 1,03.10 <sup>-1</sup> m <sup>3</sup> |

**3. Tipo de protensão**

O tipo de protensão é mantido o mesmo, protensão limitada, com a tensão inicial no cabo de  $\sigma_{pi} = 1453 \text{ MPa} = 145,30 \text{ kN/cm}^2$ .

**4. Estimativa do número de cabos no tempo infinito usando a consideração de fissuração.**

Escolhe-se aqui a condição de verificação em serviço para se pré-dimensionar a área de aço A<sub>p</sub>, para isso adota-se uma perda da ordem de 20% no tempo infinito.

$$\sigma_{p,t=\infty} = \sigma_{p,i} \cdot 0,80 = 145,3 \cdot 0,80 = 116,24 \text{ kN/cm}^2$$

Estado limite de formação de fissuras:

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}} - \frac{\Psi_1 x M_q}{W_{i,comp}} \geq f_{ctk.inf}$$

Onde:

$$f_{ctk.inf} = 0,21 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,21 \cdot \sqrt[3]{40^2} = 2,456 \text{ MPa} = 2456 \text{ kN / m}^2$$

Considerando o uso das unidades para as duas verificações em serviço:

Força de protensão em kN;

Área de aço de protensão em  $\text{cm}^2$ ;

Características geométricas de seção transversal em metro;

Tensões =  $\text{kN/m}^2$ ;

Momento fletor em  $\text{kN.m}$ .

$$\sigma_i = \frac{116,24 \cdot A_p}{0,1665} + \frac{116,24 \cdot 0,40 A_p}{3,28 \cdot 10^{-2}} - \frac{348,88}{3,28 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{5,61 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,6 \cdot 256,67}{5,61 \cdot 10^{-2}} \geq -2456$$

$$A_p \geq 6,19 \text{ cm}^2$$

Estado limite de descompressão:

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}} - \frac{\Psi_2 x M_q}{W_{i,comp}} \geq 0$$

$$\sigma_i = \frac{116,24 \cdot A_p}{0,1665} + \frac{116,24 \cdot 0,40 \cdot A_p}{3,28 \cdot 10^{-2}} - \frac{348,88}{3,28 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{5,61 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,4 \cdot 256,67}{5,61 \cdot 10^{-2}} \geq 0$$

$$A_p \geq 6,90 \text{ cm}^2$$

Considerando cordoalha de 12,7 mm com uma seção média de  $0,987 \text{ cm}^2$  tem-se:

$$A_p = \frac{6,90}{0,987} = 6,99, \text{ considera-se 8 cordoalhas de 12,7 mm com } A_p = 7,896 \text{ cm}^2.$$

### 5. Estimativa do numero de cabos no tempo zero (verificação de ruptura simplificada).

Verifica-se a necessidade em vazios de cordoalhas na fibra superior, utilizando as cordoalhas estimadas no item anterior na borda inferior. Estimando uma perda inicial de 2,5%, tem-se:

$$\sigma_{p,t=0} = \sigma_{p,i} \cdot 0,975 = 145,30 \cdot 0,975 = 141,67 \text{ kN / cm}^2$$

Com  $N_p = \sigma_p \cdot A_p$  tem-se:



$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{\overbrace{\sigma_{p,t=0} \cdot A_p}}{\text{Cabo inferior}} - \frac{\overbrace{\sigma_{p,t=0} \cdot A_p \cdot e_p}}{W_s} + \frac{\overbrace{\sigma_{p,t=0} \cdot A'_p}}{\text{Cabo superior}} + \frac{\overbrace{\sigma_{p,t=0} \cdot A'_p \cdot e'_p}}{W_s} + \frac{M_{g1}}{W_s} \geq -1,2 \cdot f_{ct,m}$$

$$\sigma_{\text{sup}} = \sigma_{p,t=0} \cdot A_p \left( \frac{1}{A} - \frac{e_p}{W_s} \right) + \sigma_{p,t=0} \cdot A'_p \left( \frac{1}{A} + \frac{e'_p}{W_s} \right) + \frac{M_{g1}}{W_s} \geq -1,2 \cdot f_{ct,m}$$

Onde:

$$1,2 f_{ct,m} = 1,2 \cdot 0,3 \cdot \sqrt[3]{25^2} = 3,078 \text{ MPa} = 3078 \text{ kN/m}^2.$$

$$\sigma_{\text{sup}} = 141,67 \cdot 7,896 \left( \frac{1}{0,1665} - \frac{0,409}{3,49 \cdot 10^{-2}} \right) + 141,67 \cdot A'_p \left( \frac{1}{0,1665} + \frac{0,386}{3,49 \cdot 10^{-2}} \right) + \frac{49,43}{3,49 \cdot 10^{-2}} \geq -3078$$

$A'_p \geq 0,85 \text{ cm}^2$ , como se trata de uma estimativa adota-se duas cordoalhas de  $3\phi 4.0 \text{ mm}$   $A_p = 0,788 \text{ cm}^2$ .

## 6. Cabo representante para cálculo das perdas de protensão.

Como se tem uma estimativa de 8 cabos na fibra inferior é considerado 6 cabos na primeira camada a 4,5 cm da parte inferior da viga e a segunda camada a 8,5 cm com duas cordoalhas.

$$y_{cg,repres.} = \frac{\sum A_i \cdot y_{cg,i}}{\sum A_i} = \frac{6 \cdot 0,987 \cdot 4,5 + 2 \cdot 0,987 \cdot 8,5}{6 \cdot 0,987 + 2 \cdot 0,987} = 5,50 \text{ cm}$$

## 7. Cálculo das perdas de protensão.

As perdas de protensão são determinadas da mesma maneira dos exemplos anteriores, portanto são apresentados os cálculos das perdas de forma mais resumida ou apenas os resultados se os cálculos forem exatamente os mesmos.

*Perdas iniciais*

$$t = 1 \text{ dia}; t_0 = 0$$

$$\sigma_p = 145,30 \text{ kN/cm}^2$$

$$M_{g1} = 49,43 \text{ kN.m}$$

✓ **Deformação por ancoragem**

$$\Delta\sigma_{ancor} = \frac{0,006 \cdot 2 \cdot 10^4}{100} = 1,20 \text{ kN/cm}^2$$

✓ **Relaxação da armadura**

$$\Delta\sigma_{pr} = \frac{1,772}{100} \cdot 144,10 = 2,55 \text{ kN/cm}^2$$

✓ **Perda por deformação imediata do concreto**

As quantidades de armadura ativa para este perfil I na estimativa inicial foi menor, como os valores apresentados abaixo.

$$A_p = 8 \cdot 0,987 = 7,896 \text{ cm}^2; e_p = 40,9 \text{ cm}$$

$$A'_p = 2 \cdot 0,394 = 0,788 \text{ cm}^2; e'_p = 38,6 \text{ cm}$$

$$\sigma_{pi} = \sigma_p - (\Delta\sigma_{acora} + \Delta\sigma_{pr}) = 145,30 - (1,20 + 2,55) = 141,55 \text{ kN/cm}^2$$

$$\Delta\sigma_{cg,inf} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,po+g,inf}$$

$$\Delta\sigma_{cg,sup} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,po+g,sup}$$

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A'_p \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 7,896 \cdot 141,55 + 0,788 \cdot 141,55 = 1229,19 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A'_p \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e'_p$$

$$M_p = 7,896 \cdot 141,55 \cdot 0,409 - 0,788 \cdot 141,55 \cdot 0,386 = 414,07 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{c,po+g,inf} = \frac{N_p}{A} + \left( \frac{M_p - M_{g1}}{I} \right) \cdot e_p$$

$$\sigma_{c,po+g,inf} = \frac{1229,19}{0,1665} + \left( \frac{414,07 - 49,43}{1,52 \cdot 10^{-2}} \right) \cdot 0,409 = 17165,37 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{c,po+g,sup} = \frac{N_p}{A} + \left( \frac{-M_p + M_{g1}}{I} \right) \cdot e'_p$$

$$\sigma_{c,po+g,sup} = \frac{1229,19}{0,1665} + \left( \frac{-414,07 + 49,43}{1,52 \cdot 10^{-2}} \right) \cdot 0,386 = -1850,14 \text{ kN/m}^2$$

$$\alpha_p = \frac{E_p}{E_{ci}} = \frac{200000}{28000} = 7,14$$

$$E_{ci} = 5600 \times \sqrt{f_{cj}} = 5600 \times \sqrt{25} = 28000 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{cg,inf} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,po+g,inf} = 7,14 \cdot 1,72 = 12,26 \text{ kN/cm}^2$$

$$\Delta\sigma_{cg,sup} = \alpha_p \cdot \sigma_{c,po+g,sup} = 7,14 \cdot (-0,19) = -1,32 \text{ kN/cm}^2$$

Então, a tensão final considerando as perdas da primeira fase é:

$$\sigma_{p,inf,1 dia} = \sigma_p - \Delta\sigma_{ancor} - \Delta\sigma_{pr} - \Delta\sigma_{cg,inf}$$

$$\sigma_{p,inf,1 dia} = 145,30 - 1,20 - 2,55 - 12,26 = 129,29 \text{ kN/cm}^2$$

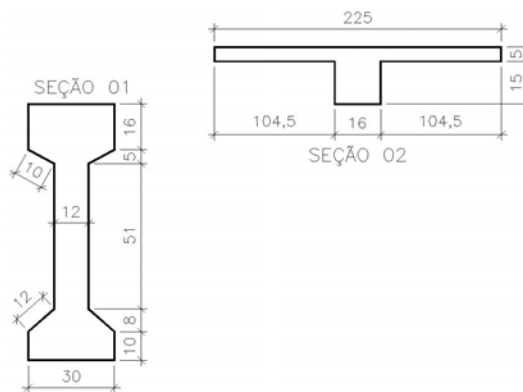
$$\sigma_{p,sup,1 dia} = \sigma_p - \Delta\sigma_{ancor} - \Delta\sigma_{pr} - \Delta\sigma_{cg,sup}$$

$$\sigma_{p,sup,1 dia} = 145,30 - 1,20 - 2,55 - (-1,32) = 142,87 \text{ kN/cm}^2$$

Até esse instante as perdas calculadas foram de 11,02% para os cabos na borda inferior e de 1,67% para os cabos da borda superior.

#### Perdas diferidas

A Figura 8-31 apresenta as duas seções que são consideradas para o cálculo dos coeficientes de fluência e retração.



**Figura 8-31: Seção 01 e 02 para a determinação dos coeficientes de fluência e retração (unidades em cm).**

Para a seção 01 o coeficiente de fluência é determinado com os seguintes dados: área de concreto  $A_c = 1665 \text{ cm}^2$ , perímetro da seção em contato com o ar ( $U_{ar}$ ) = 228 cm, umidade relativa do ar em 70%, temperatura média 20°C, abatimento do concreto (slump) 9 cm e cimento tipo ARI.

Enquanto que para a seção 02 o coeficiente de fluência é determinado como os seguintes dados:  $A_c = 1365 \text{ cm}^2$ , perímetro da seção em contato com o ar ( $U_{ar}$ ) = 225 cm, umidade relativa do ar em 70%, temperatura média 20°C, abatimento do concreto (slump) 9 cm e cimento tipo CPII.

Os valores calculados para os coeficientes de fluência têm como  $t_0$  no instante do carregamento e  $t$  o infinito, considerado aqui como 10000 dias. A Tabela 8-35 apresenta as idades ( $t_0$ ) para as duas seções 01 e 02.

**Tabela 8-35: Idade do concreto para a seção 01 e 02**

| Ação                       | Idade ( $t_0$ ) do concreto da seção 01 | Idade ( $t_0$ ) do concreto da seção 02 |
|----------------------------|---|---|
| Protensão                  | 1                                       | --                                      |
| Peso próprio da viga       | 1                                       | --                                      |
| Peso próprio da laje       | 15                                      | --                                      |
| Execução da capa           | 30                                      | 1                                       |
| Execução da alvenaria      | 45                                      | 15                                      |
| Execução do revestimento   | 60                                      | 30                                      |
| Atuação da carga acidental | 75                                      | 45                                      |
| Perda de protensão         | 75                                      | 45                                      |

A Tabela 8-36 apresenta finalmente os valores dos coeficientes de fluência para a seção 01, seção 02 e o coeficiente final para o cálculo das perdas diferidas.

**Tabela 8-36: Coeficientes de fluência para a seção 01, 02 e final.**

| Ação                       | $t_0$ seção 01 | Coeficiente $\varphi$ seção 01 | $t_0$ seção 02 | Coeficiente $\varphi$ seção 02 | Coeficiente $\varphi$ final |
|----------------------------|----------------|--------------------------------|----------------|--------------------------------|-----------------------------|
| Protensão                  | 1              | 3,573                          | --             | --                             | 3,573                       |
| Peso próprio da viga       | 1              | 3,573                          | --             | --                             | 3,573                       |
| Peso próprio da laje       | 15             | 2,295                          | --             | --                             | 2,295                       |
| Execução da capa           | 30             | 1,940                          | 1              | 3,783                          | 2,770                       |
| Execução da alvenaria      | 45             | 1,740                          | 15             | 2,539                          | 2,099                       |
| Execução do revestimento   | 60             | 1,600                          | 30             | 2,150                          | 1,848                       |
| Atuação da carga acidental | 75             | 1,492                          | 45             | 1,933                          | 1,690                       |
| Perda de protensão         | 75             | 1,492                          | 45             | 1,933                          | 1,690                       |

O coeficiente  $\varphi$  final é obtido pela média ponderada das áreas com os respectivos coeficientes de fluência.

$$\varphi_{final} = \frac{A_{01} \cdot \varphi_{01} + A_{02} \cdot \varphi_{02}}{A_{01} + A_{02}}$$

✓ **Perda por fluência**

$$\Delta\sigma_{p,c,inf} = \alpha_p \cdot \varphi_{(t,t_0)} \cdot \sigma_{c,p0+g,inf}, \text{ onde:}$$

$$\Delta\sigma_{p,c,sup} = \alpha_p \cdot \varphi_{(t,t_0)} \cdot \sigma_{c,p0+g,sup}$$

$$\Delta\sigma_{p,c,inf} = \alpha_p \left\{ \overbrace{\left[ \frac{N_p}{A} + \left( \frac{+M_p - M_{g1}}{I} \right) \cdot e_p \right] \cdot \varphi_1 - \sum_{i=2}^3 \frac{M_{gi} \cdot e_p}{I} \cdot \varphi_i - \sum_{i=4}^5 \frac{M_{gi} \cdot e_{p,comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_i}^A} - \overbrace{\frac{M_q \cdot e_{p,comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_q}^D \right\}$$

$$\Delta\sigma_{p,c,sup} = \alpha_p \left\{ \overbrace{\left[ \frac{N_p}{A} + \left( \frac{-M_p + M_{g1}}{I} \right) \cdot e_{p'} \right] \cdot \varphi_1 + \sum_{i=2}^3 \frac{M_{gi} \cdot e_{p'}}{I} \cdot \varphi_i + \sum_{i=4}^5 \frac{M_{gi} \cdot e_{p',comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_i}^{A'}} + \overbrace{\frac{M_q \cdot e_{p',comp}}{I_{comp}} \cdot \varphi_q}^{D'} \right\}$$

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 8,883 \cdot 129,29 + 0,788 \cdot 142,87 = 1133,46 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 8,883 \cdot 129,29 \cdot 0,409 - 0,788 \cdot 142,87 \cdot 0,386 = 374,08 \text{ kNm}$$

Com isso, tem-se:

$$\alpha_p = \frac{E_p}{E_{ci}} = \frac{E_p}{5600 \cdot \sqrt{40}} \frac{200000}{35418} = 5,65$$

$$\Delta\sigma_{p,c,inf} = 15,99 \text{ kN/cm}^2$$

$$\Delta\sigma_{p,c,sup} = 8,57 \text{ kN/cm}^2$$

✓ **Perda por retração do concreto**

O coeficiente de retração para a seção 01 é determinado com os seguintes dados: área de concreto  $A_c = 1665 \text{ cm}^2$ , perímetro da seção em contato com o ar ( $U_{ar}$ ) = 228 cm,

umidade relativa do ar em 70%, temperatura média 20°C, abatimento do concreto (slump) 9 cm e cimento tipo ARI,  $t_0 = 1$  e  $t = 10000$  dias.

$$\varepsilon_{(10000,1)} = -2,84 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta\sigma_{p,s} = \varepsilon_{(t,t_0)} \cdot E_p = -2,84 \cdot 10^{-4} \cdot 2,0 \cdot 10^4 = -5,68 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

✓ **Relaxação da armadura**

$$\Delta\sigma_{p,r} = \sigma_{p0} \chi(t, t_0)$$

$$\chi(t_\infty, t_0) = -\ln[1 - \psi(t_\infty, t_0)]$$

$$\psi(t_\infty, t_0) = 2,50 \cdot \psi_{1000}$$

$$R_{\text{inf}} = \frac{129,29}{190} = 0,68$$

$$R_{\text{sup}} = \frac{142,87}{190} = 0,75$$

Para cordoalha de baixa relaxação e com 69% da resistência a tração, na tabela 8.3 da norma NBR 6118:2004 determina-se através de interpolação o valor para  $\Psi_{1000} = 2,26$  em porcentagem, e para 75% da resistência a tração tem-se  $\Psi_{1000} = 3,00$  em porcentagem.

$$\psi(\infty, 1)_{\text{inf}} = 2,50 \cdot \psi_{1000} = 2,50 \cdot 2,26 = 5,65$$

$$\psi(\infty, 1)_{\text{sup}} = 2,50 \cdot \psi_{1000} = 2,50 \cdot 3,00 = 7,50$$

$$\chi(\infty, 1)_{\text{inf}} = -\ln[1 - \psi(\infty, 1)_{\text{inf}}] = -\ln\left[1 - \frac{5,65}{100}\right] = 5,82 \cdot 10^{-2}$$

$$\chi(\infty, 1)_{\text{sup}} = -\ln[1 - \psi(\infty, 1)_{\text{sup}}] = -\ln\left[1 - \frac{7,50}{100}\right] = 7,80 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta\sigma_{p,r,\text{inf}} = \sigma_{p0,\text{inf}} \chi(\infty, 1)_{\text{inf}} = 129,29 \cdot 5,82 \cdot 10^{-2} = 7,52 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\Delta\sigma_{p,r,\text{sup}} = \sigma_{p0,\text{sup}} \chi(\infty, 1)_{\text{sup}} = 142,87 \cdot 7,80 \cdot 10^{-2} = 11,14 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

✓ **Simultaneidades das perdas**

A equação para os cálculos das perdas é dada pela expressão abaixo. A parcela referente o numerador já foi calculada nas etapas anteriores, restando agora o cálculo do denominador.

$$\Delta\sigma_p(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cs}(t, t_0)E_p - \alpha_p\sigma_{c,p0+g}\varphi(t, t_0) - \sigma_{cp0}\chi(t, t_0)}{\chi_p + \chi_c\alpha_p\eta\rho_p}$$

$$\chi_{p,\text{inf}} = 1 + \chi(t_{\infty}, t_0)_{\text{inf}}$$

$$\chi_{p,\text{inf}} = 1 + 5,82 \cdot 10^{-2} = 1,06$$

$$\chi_{p,\text{sup}} = 1 + \chi(t_{\infty}, t_0)_{\text{sup}}$$

$$\chi_{p,\text{sup}} = 1 + 7,80 \cdot 10^{-2} = 1,08$$

$$\chi_c = 1 + 0,5 \cdot \varphi(t, t_0)$$

$$\chi_c = 1 + 0,5 \cdot 3,573 = 2,79$$

$$\eta_{\text{inf}} = 1 + e_p^2 \frac{A_c}{I_c}$$

$$\eta_{\text{inf}} = 1 + 0,409^2 \frac{0,1665}{1,52 \cdot 10^{-2}} = 2,83$$

$$\eta_{\text{sup}} = 1 + e_p^2 \frac{A_c}{I_c}$$

$$\eta_{\text{sup}} = 1 + 0,386^2 \frac{0,1665}{1,52 \cdot 10^{-2}} = 2,63$$

$$\rho_p = \frac{A_p}{A_c} = \frac{8,883 + 0,788}{1665} = 5,22 \cdot 10^{-3}$$

Com isso tem-se:

$$\Delta\sigma_p(\infty, 1)_{\text{inf}} = \frac{-5,68 - 15,99 - 7,52}{1,06 + 2,79 \cdot 5,65 \cdot 2,83 \cdot 5,22 \cdot 10^{-3}} = -22,61 \text{ kN/cm}^2$$

$$\Delta\sigma_p(\infty, 1)_{\text{sup}} = \frac{-5,68 - 8,57 - 11,14}{1,08 + 2,79 \cdot 5,65 \cdot 2,63 \cdot 5,22 \cdot 10^{-3}} = -19,92 \text{ kN/cm}^2$$

Então se chega à tensão final nos cabos considerando todas as perdas.

$$\sigma_{p,\text{inf},(\infty)} = \sigma_p - \Delta\sigma_{p,\text{inf}}$$

$$\sigma_{p,\text{inf},(\infty)} = 129,29 - 22,61 = 106,68 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{p,\text{sup},(\infty)} = \sigma_p - \Delta\sigma_{p,\text{sup}}$$

$$\sigma_{p,\text{sup},(\infty)} = 142,87 - 19,92 = 122,95 \text{ kN/cm}^2$$

Portanto chega-se a um perda de 26,58% para os cabos da borda inferior e 15,40% para os cabos da borda superior, comparado com a tensão inicial  $\sigma_{pi}$ .

## 8. Verificação da fissuração

Após os cálculos das perdas de protensão no tempo infinito, é possível fazer a verificações das tensões.

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_p' \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 7,896 \cdot 106,68 + 0,788 \cdot 122,95 = 939,21 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_p' \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_p'$$

$$M_p = 7,896 \cdot 106,68 \cdot 0,409 - 0,788 \cdot 122,95 \cdot 0,386 = 307,11 \text{ kNm}$$

- ✓ Estado limite de formação de fissuras, combinação freqüente ( $\psi_1 = 0,6$ ).

Limites:

Compressão →  $\sigma = 0,7 f_{ck} = 0,7 \times 40000 = 28000 \text{ kN/m}^2$ .

Tração →  $\sigma = 0,3 f_{ctk,inf} = 0,21 \times \sqrt[3]{40^2} = 2,456 \text{ MPa} = 2456 \text{ kN/m}^2$ .

$$-2456 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$$

### Borda inferior

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_1 \cdot M_q}{W_{i,comp}}$$

$$\sigma_i = \frac{939,21}{0,1665} + \frac{307,11}{3,28 \cdot 10^{-2}} - \frac{348,88}{3,28 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{5,61 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,6 \cdot 256,67}{5,61 \cdot 10^{-2}} = -855 \text{ kN/m}^2$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}}$$

$$\sigma_i = \frac{939,21}{0,1665} + \frac{307,11}{3,28 \cdot 10^{-2}} - \frac{348,88}{3,28 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{5,61 \cdot 10^{-2}} = 1889 \text{ kN/m}^2$$



**Borda superior**

Para se verificar a tensão na borda superior é necessário determinar a distancia  $y_{ts}$  na seção composta que seja a mesmo ponto de verificação da seção pré-moldada, ou seja, a distância do centro de gravidade até a borda superior da seção pré-moldada.

$$y_{ts} = h_{pré} - y_{gc,comp} = 0,90 - 0,711 = 0,189 \text{ m}$$

Com isso o módulo resistente é dado por:

$$W_{ts} = \frac{I_{comp}}{y_{ts}} = \frac{3,99 \cdot 10^{-2}}{0,189} = 2,11 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3$$

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_s} + \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{ts}} + \frac{\psi_1 \cdot M_q}{W_{ts}}$$

$$\sigma_s = \frac{939,21}{0,1665} - \frac{307,11}{3,94 \cdot 10^{-2}} + \frac{348,88}{3,94 \cdot 10^{-2}} + \frac{139,03}{2,11 \cdot 10^{-1}} + \frac{0,6 \cdot 256,67}{2,11 \cdot 10^{-1}} = 8226 \text{ kN/m}^2$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_s} + \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{ts}}$$

$$\sigma_s = \frac{939,21}{0,1665} - \frac{307,11}{3,94 \cdot 10^{-2}} + \frac{348,88}{3,94 \cdot 10^{-2}} + \frac{139,03}{2,11 \cdot 10^{-1}} = 7496 \text{ kN/m}^2$$

Como os valores máximos e mínimos estão dentro dos limites a verificações do estado limites de formação de fissuras está atendida.

- ✓ Estado limite de descompressão, combinação quase permanente ( $\psi_2 = 0,4$ ).

Limites:

Compressão →  $\sigma = 0,7 f_{ck} = 0,7 \times 40000 = 28000 \text{ kN/m}^2$ .

Tração →  $\sigma = 0$

$$0 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$$

**Borda inferior***Situação momento máximo.*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_2 x M_q}{W_{i,comp}}$$

$$\sigma_i = \frac{939,21}{0,1665} + \frac{307,11}{3,28 \cdot 10^{-2}} - \frac{348,88}{3,28 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{5,61 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,4 \cdot 256,67}{5,61 \cdot 10^{-2}} = 59 \text{ kN/m}^2$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_i} - \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{i,comp}}$$

$$\sigma_i = \frac{939,21}{0,1665} + \frac{307,11}{3,28 \cdot 10^{-2}} - \frac{348,88}{3,28 \cdot 10^{-2}} - \frac{139,03}{5,61 \cdot 10^{-2}} = 1889 \text{ kN/m}^2$$

**Borda superior***Situação momento máximo.*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_s} + \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{ts}} + \frac{\psi_2 x M_q}{W_{ts}}$$

$$\sigma_s = \frac{939,21}{0,1665} - \frac{307,11}{5,61 \cdot 10^{-2}} + \frac{348,88}{5,61 \cdot 10^{-2}} + \frac{139,03}{2,11 \cdot 10^{-1}} + \frac{0,4 \cdot 256,67}{2,11 \cdot 10^{-1}} = 7983 \text{ kN/m}^2$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{g1} + M_{g2} + M_{g3}}{W_s} + \frac{M_{g4} + M_{g5}}{W_{ts}}$$

$$\sigma_s = \frac{939,21}{0,1665} - \frac{307,11}{5,61 \cdot 10^{-2}} + \frac{348,88}{5,61 \cdot 10^{-2}} + \frac{139,03}{2,11 \cdot 10^{-1}} = 7496 \text{ kN/m}^2$$

Como os valores máximos e mínimos estão dentro do limite a verificação do estado limite de descompressão atendida.

### 9. Verificação de ruptura no tempo zero (verificação de ruptura simplificada).

Fazendo-se a análise em décimo de vão é possível determinar a necessidade ou não de isolamento de cabos na borda inferior. É necessário também verificar o comprimento de transferência de protensão da armadura ativa, este cálculo está demonstrado no dimensionamento da armadura transversal, os valores encontrados são de:  $l_{bpt,inf} = 130$  cm e  $l_{p,sup} = 119$  cm.

Sendo  $M_s = \frac{plx_s}{2} - \frac{px_s^2}{2}$ , com a variação de  $s$  entre 1 e 5 e o carregamento de  $p=4,16$  kN/m. obteve-se os resultados apresentados na Tabela 8-37.

**Tabela 8-37: Valores dos momentos fletores em vazio para décimo de vão.**

| Seção                 | S <sub>1</sub> | S <sub>2</sub> | S <sub>3</sub> | S <sub>4</sub> | S <sub>5</sub> |
|-----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| M <sub>s</sub> (kN.m) | 17,80          | 31,64          | 41,52          | 47,46          | 49,43          |

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_p \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 7,896 \cdot 129,29 + 0,788 \cdot 142,87 = 1133,46 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_p \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_p$$

$$M_p = 7,896 \cdot 129,99 \cdot 0,409 - 0,788 \cdot 142,87 \cdot 0,386 = 374,08 \text{ kNm}$$

#### Borda inferior

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_s}{W_i}$$

#### Borda superior

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_s}{W_s}$$

A Tabela 8-38 apresenta os valores das tensões na borda inferior e superior variando o momento em décimo de vão apresentados na Tabela 8-37.

**Tabela 8-38: Valores das tensões da borda inferior e superior em décimo de vão.**

| Seção                           | S <sub>1</sub> | S <sub>2</sub> | S <sub>3</sub> | S <sub>4</sub> | S <sub>5</sub> |
|---------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\sigma_i$ (kN/m <sup>2</sup> ) | 17670          | 17248          | 16946          | 16766          | 16705          |
| $\sigma_s$ (kN/m <sup>2</sup> ) | -3401          | -3055          | -2721          | -2551          | -2495          |

Os limites para este instante é:

$$\text{Compressão} \rightarrow \sigma = 0,7 f_{ckj} = 0,7 \times 25000 = 17500 \text{ kN/m}^2.$$

$$\text{Tração} \rightarrow \sigma = 1,2 \times 0,3 f_{ct,m} = 1,20 \times 0,3 \times \sqrt[3]{25^2} = 3,078 \text{ MPa} = 3078 \text{ kN/m}^2.$$

$$-3078 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 17500 \text{ kN/m}^2$$

A borda inferior na seção  $S_1$  esta com a tensão de compressão bem próxima ao do limite, por sua vez a tensão de tração na borda superior esta maior que a do limite do inicio da viga pré-moldada até aproximadamente a seção  $S_2$ . Para a borda inferior é necessário o isolamento de alguns cabos, diminuindo assim a tensão de tração da borda superior e conseqüentemente o alívio de compressão na borda inferior. Para se determinar o comprimento deste isolamento é calculado o momento mínimo necessário para que a tensão de tração fique abaixo do permitido.

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_s}{W_s} \geq 1,20 \cdot f_{ct,m}$$

$$\sigma_s = \frac{1133,46}{0,1665} - \frac{374,08}{3,49 \cdot 10^{-2}} + \frac{M_{\min}}{3,49 \cdot 10^{-2}} \geq -3078 \text{ kN/m}^2$$

$$M_{\min} = 29,07 \text{ kN.m}$$

Com o valor do momento mínimo é possível determinar o comprimento necessário requerido.

$$M_{\min} = \frac{plx_s}{2} - \frac{px_s^2}{2}$$

$$29,07 = \frac{4,16 \cdot 9,75x_s}{2} - \frac{4,16x_s^2}{2}$$

A raiz da equação do segundo grau de interesse é  $x_1 = 1,75 \text{ m}$  que é a distância requerida. Como a distância requerida é maior que o comprimento de regularização (1,30 m), isto implica da necessidade de isolar-se aproximadamente 0,45 m (comprimento requerido menos o comprimento de regularização). Calculado o valor do comprimento do isolamento é necessário determinar a quantidade de cabos a serem isolados, que pode ser feito fixando as duas cordoalhas do nível superior e com o limite de tração da borda superior. O momento fletor considerado para a situação mais desfavorável é o da seção  $S_1$ .

Considerando-se:

$$N_p = \sigma_{pi,inf} \cdot A_p + \sigma_{pi,sup} \cdot A_p'$$

$$N_p = 129,29 \cdot A_p + 142,87 \cdot 0,788 = 129,29 A_p + 112,58 \text{ kN}$$

$$M_p = \sigma_{pi,inf} \cdot A_p \cdot e_p - \sigma_{pi,sup} \cdot A_p' \cdot e_p'$$

$$M_p = 129,29 \cdot A_p \cdot 0,409 - 142,87 \cdot 0,788 \cdot 0,386 = 52,88 A_p - 43,46 \text{ kNm}$$

**Borda superior**

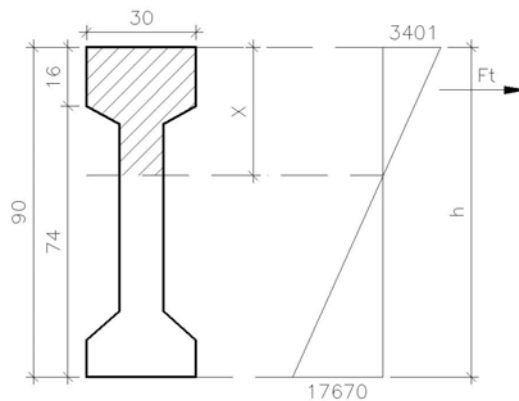
$$\sigma_{s,s} = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{s,1}}{W_s} \geq -3078 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\sigma_{s,s} = \frac{129,29 A_p + 112,58}{0,1665} - \left( \frac{52,88 A_p - 43,46}{3,49 \cdot 10^{-2}} \right) + \frac{17,80}{3,49 \cdot 10^{-2}} \geq -3078 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$A_p \leq 7,46 \text{ cm}^2$$

Para se evitar excentricidade de protensão nos isolamentos dos cabos é conveniente que os cabos sejam isolados de dois a dois, com isso isola-se duas cordoalhas da borda inferior com o comprimento de 0,45 m.

Agora, porém é preciso calcular a armadura passiva que ira controlar a fissuração na borda superior. A seção mais desfavorável para essa situação esta entre a seção S<sub>1</sub> e S<sub>2</sub>, a favor da segurança o dimensionamento é feito para a seção S<sub>1</sub>.



**Figura 8-32: Esquema para o cálculo da força Ft de tração na seção transversal.**

$$\frac{x}{h} = \frac{\sigma_s}{\sigma_s + \sigma_i} \rightarrow x = \frac{3401}{3401 + 17670} \cdot 0,90 = 0,145 \text{ m}, \text{ como a posição de } x \text{ é inferior a}$$

16 cm o valor de força de tração, como pode se deduzir a partir da Figura 8-32 é dado por:

$$F_t = \sigma_s \cdot b \cdot \frac{x}{2} = 3401 \cdot 0,30 \cdot \frac{0,145}{2} = 73,97 \text{ kN}$$

A norma NBR 6118:2003 estabelece que a tensão da armadura neste caso seja de 25 kN/cm<sup>2</sup>.

$$A'_s = \frac{F_t}{25} = \frac{73,97}{25} = 2,96 \text{ cm}^2, \text{ adota-se } 4\phi 10 \text{ mm } (A_s = 3,2 \text{ cm}^2)$$

### 10. Verificação das tensões em décimo de vão no tempo infinito

Com os carregamentos apresentados nas Tabela 8-30 e Tabela 8-31 pode-se calcular os momentos em décimo de vão. Considerando os três primeiros carregamentos ( $g_1+g_2+g_3$ ) como  $p_1$  o terceiro e quarto ( $g_4+g_5$ ) como  $p_2$  e o sexto ( $q$ ) como  $p_3$ , são calculados os momentos fletores e apresentado na Tabela 8-39.

**Tabela 8-39: Valores dos momentos fletores seção composta para décimo de vão.**

|                             | S <sub>1</sub> | S <sub>2</sub> | S <sub>3</sub> | S <sub>4</sub> | S <sub>5</sub> |
|-----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>M<sub>1</sub> (kN.m)</b> | 136,88         | 242,98         | 318,91         | 364,47         | 379,66         |
| <b>M<sub>2</sub> (kN.m)</b> | 50,05          | 88,98          | 116,78         | 133,47         | 139,03         |
| <b>M<sub>3</sub> (kN.m)</b> | 92,40          | 164,27         | 215,60         | 246,40         | 256,67         |

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 7,896 \cdot 106,68 + 0,788 \cdot 122,95 = 939,21 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 7,896 \cdot 106,68 \cdot 0,409 - 0,788 \cdot 122,95 \cdot 0,386 = 307,11 \text{ kNm}$$

$$A = 0,1665 \text{ m}; W_i = 3,28 \cdot 10^{-2}; W_s = 3,49 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3; W_{i,comp} = 5,61 \cdot 10^{-2}; W_{ts} = 2,11 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3$$

- ✓ Estado limite de formação de fissuras, combinação freqüente ( $\psi_1 = 0,6$ ).

Limites:

$$\text{Compressão} \rightarrow \sigma = 0,7 f_{ck} = 0,7 \times 40000 = 28000 \text{ kN/m}^2.$$

$$\text{Tração} \rightarrow \sigma = 0,3 f_{ctk,inf} = 0,21 \times \sqrt[3]{40^2} = 2,456 \text{ MPa} = 2456 \text{ kN/m}^2.$$

$$-2456 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$$

**Borda inferior***Situação momento máximo.*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{1,s}}{W_i} - \frac{M_{2,s}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_1 \cdot M_{3,s}}{W_{i,comp}}$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{1,s}}{W_i} - \frac{M_{2,s}}{W_{i,comp}}$$

**Borda superior***Situação momento máximo.*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{1,s}}{W_s} + \frac{M_{2,s}}{W_{ts}} + \frac{\psi_1 \cdot M_{3,s}}{W_{ts}}$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{1,s}}{W_s} + \frac{M_2}{W_{ts}}$$

O Gráfico 8-9 apresenta os valores das tensões em décimo de vão da borda inferior para o estado limite de formação de fissuras (ELS-F).

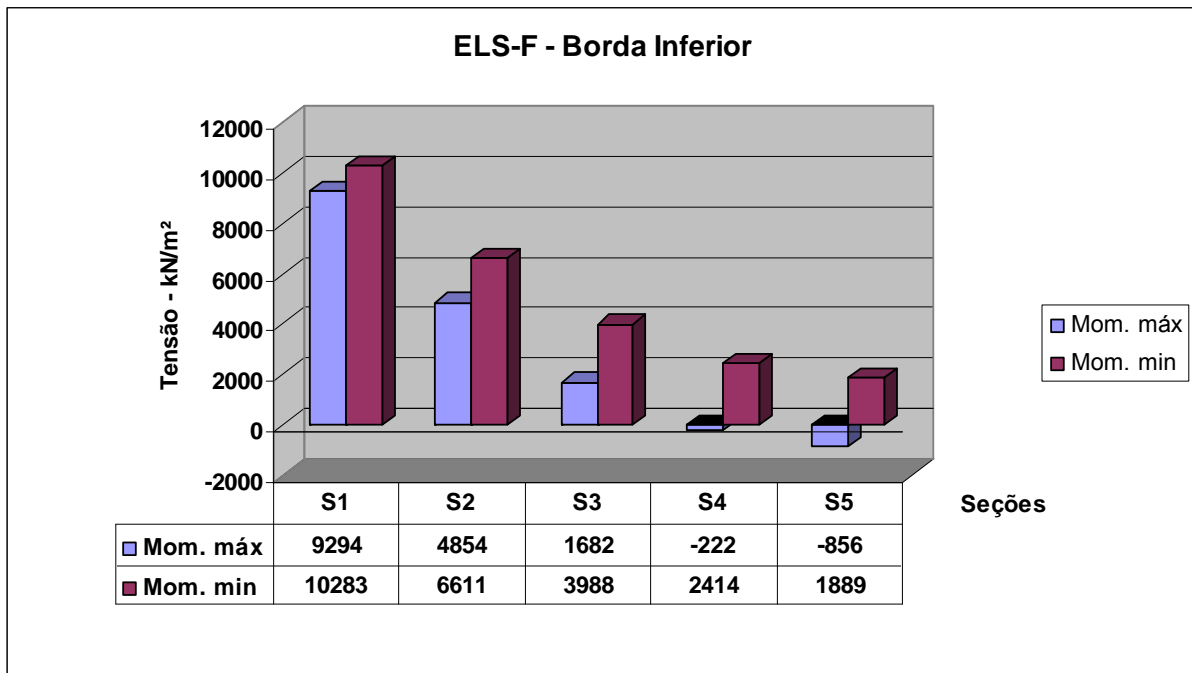


Gráfico 8-9: Tensões na borda inferior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.

O Gráfico 8-10 apresenta os valores das tensões em décimo de vão da borda inferior para o estado limite de formação de fissuras (ELS-F).

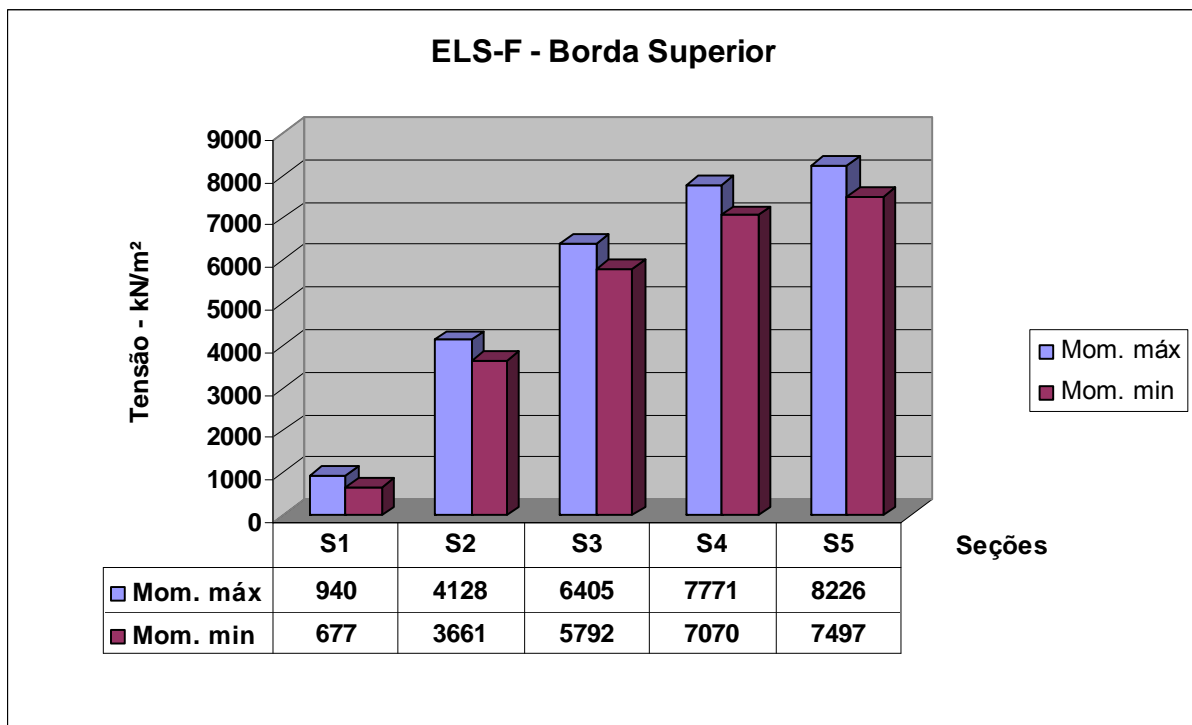


Gráfico 8-10: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.



Como os valores máximos e mínimos estão dentro do limite a verificação do estado limite de formação de fissuras esta atendida.

- ✓ Estado limite de descompressão, combinação quase permanente ( $\psi_2 = 0,4$ ).

Limites:

Compressão  $\rightarrow \sigma = 0,7 f_{ck} = 0,7 \times 40000 = 28000 \text{ kN/m}^2$ .

Tração  $\rightarrow \sigma = 0$

$$0 \text{ kN/m}^2 < \sigma < 28000 \text{ kN/m}^2$$

### Borda inferior

*Situação momento máximo.*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{1,s}}{W_i} - \frac{M_{2,s}}{W_{i,comp}} - \frac{\psi_2 \cdot M_{3,s}}{W_{i,comp}}$$

*Situação momento mínimo*

$$\sigma_i = \frac{N_p}{A} + \frac{M_p}{W_i} - \frac{M_{1,s}}{W_i} - \frac{M_{2,s}}{W_{i,comp}}$$

### Borda superior

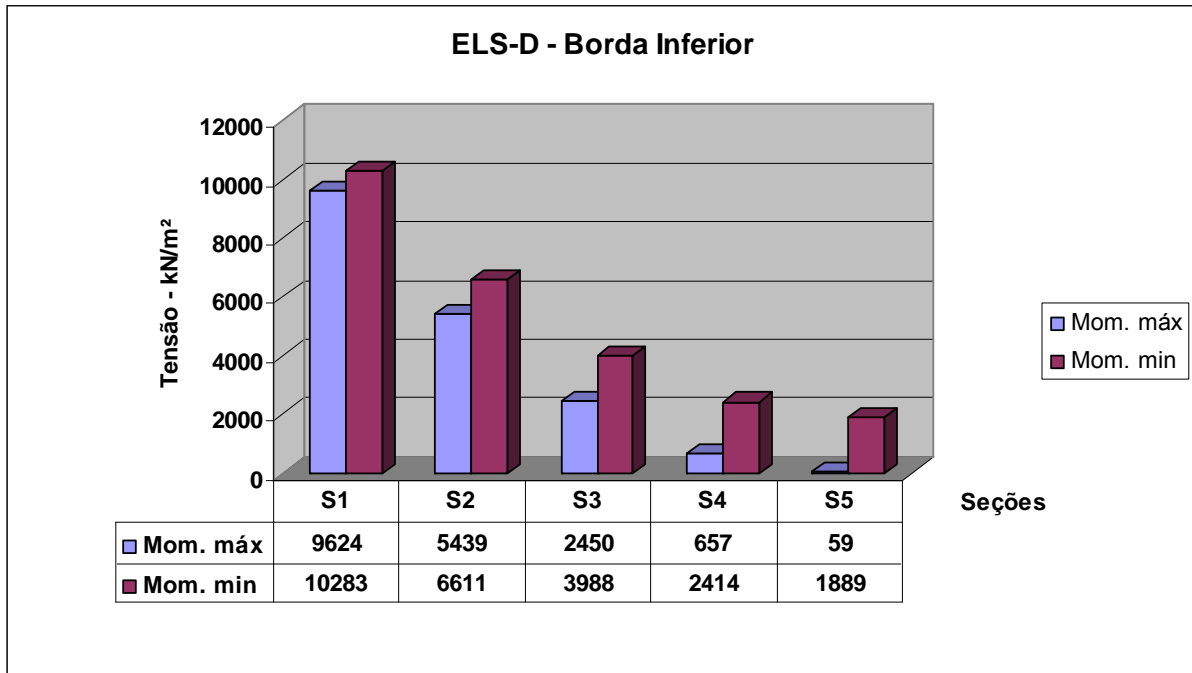
*Situação momento máximo.*

$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{1,s}}{W_s} + \frac{M_{2,s}}{W_{s,comp}} + \frac{\psi_2 \cdot M_{3,s}}{W_{s,comp}}$$

*Situação momento mínimo*

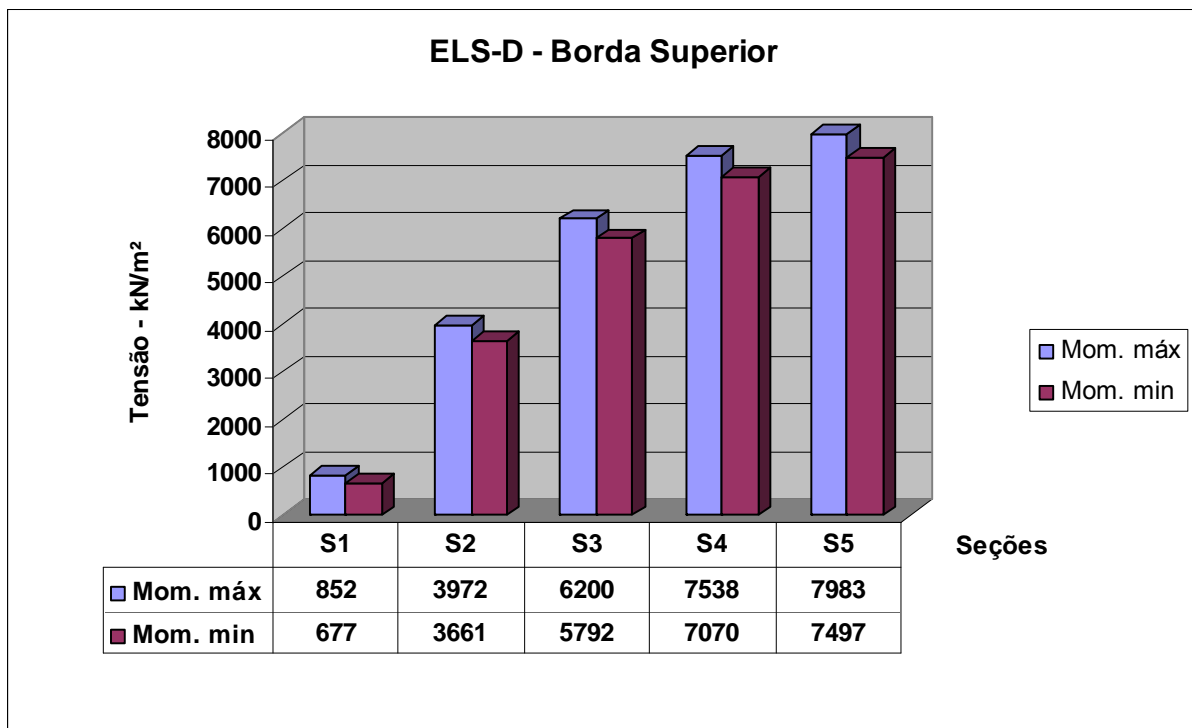
$$\sigma_s = \frac{N_p}{A} - \frac{M_p}{W_s} + \frac{M_{1,s}}{W_s} + \frac{M_{2,s}}{W_{s,comp}}$$

O Gráfico 8-11 apresenta os valores das tensões em décimo de vão da borda inferior para o estado limite de descompressão (ELS-D).



**Gráfico 8-11: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.**

O Gráfico 8-12 apresenta os valores das tensões em décimo de vão da borda superior para o estado limite de descompressão (ELS-D).



**Gráfico 8-12: Tensões na borda superior em décimo de vão como momentos máximos e mínimos.**

Como os valores máximos e mínimos estão dentro do limite a verificação do estado limite de descompressão esta atendido.

### 11. Cálculo de $A_p$ e no tempo infinito.

Considerando os coeficientes de 1,30 para os elementos pré-fabricados, tem-se:

$$M_d = 1,3 \cdot (M_{g1} + M_{g2}) + 1,4 \cdot (M_{g3} + M_{g4} + M_{g5} + M_q)$$

$$M_d = 1,3 \cdot (49,43 + 192,50) + 1,4 \cdot (106,95 + 70,58 + 68,45 + 256,67) = 1018,22 \text{ kN.m}$$

Com a tensão no cabo no tempo infinito de  $\sigma_{p,\text{inf}} = 106,68 \text{ kN/cm}^2 = 1066,8 \text{ MPa}$  determina-se o pré-alongamento da armadura ativa de acordo com a Tabela 5-1, e o valor é de  $\varepsilon_p = 5,47\%$ . Com isso tem-se

$\varepsilon_p = \varepsilon_s + \varepsilon_p = 10 + 5,47 = 15,47\%$ . Com  $\varepsilon_p$  na mesma Tabela 5-1 tem-se  $\sigma_{sd} = 1508,8 \text{ MPa}$ .

Conhecida a armadura longitudinal calcula-se o momento máximo resistente da seção. Determina-se a posição da linha neutra (LN) a partir do equilíbrio das forças atuantes na seção transversal (Figura 8-33).

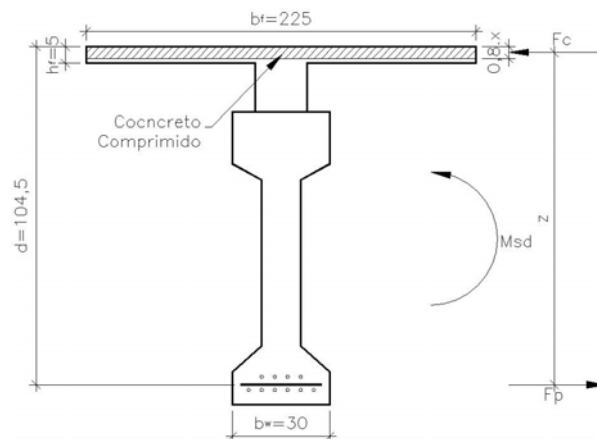


Figura 8-33: Seção transversal com a indicação das forças internas (unidades em cm).

Como não há força externa e a força atuante no concreto ( $F_c$ ), deve ser igual a força atuante na armadura ( $F_t$ ).

$$F_c = F_t, \text{ ou seja, } (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) (0,8 \cdot x) = A_p \cdot f_{pd}$$

Para uma primeira tentativa impõe que a viga esta trabalhando no domínio 2 e que a posição da linha neutra esteja na altura da capa, assim a expressão da linha neutra é dado por:

$$x = \frac{A_p \cdot f_{pd}}{0,68 \cdot b_f \cdot f_{cd}} = \frac{7,896 \cdot 150,1}{0,68 \cdot 2,25 \cdot \frac{30000}{1,4}} = 3,62 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 3,62 \text{ cm} < h_f, \text{ portanto a}$$

linha neutra esta passando pela capa.

Com a posição da linha neutra é possível identificar o domínio de deformação que esta situada a viga em estudo. Para que a viga se encontre no domínio 2 a posição da linha neutra LN deve estar entre zero e um determinado valor obtido através das deformações do concreto e do aço.

$$x_2 = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \cdot d = \frac{3,5}{3,5 + 10} \cdot 1,045 = 0,2709 \text{ m} = 27,09 \text{ cm}$$

Como a posição da linha neutra esta a 3,62 cm pode-se dizer que a mesma encontra-se no domínio 2. Com o isso o momento resistente é dado por:

$$M_{rest} = F_c \cdot z = (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w)(0,8 \cdot x) \cdot (d - 0,4 \cdot x), \text{ assim tem-se:}$$

$$M_{rest} = \left(0,85 \cdot \frac{30000}{1,4}\right) \cdot 2,25 \cdot 0,8 \cdot 3,62 \cdot 10^{-2} (1,045 - 0,4 \cdot 3,62 \cdot 10^{-2}) = 1223 \text{ kN.m}$$

Como o momento atuante é menor que o momento resistente a armadura dimensionada para a fissuração é suficiente para atender o estado limite ultimo (ELU), concluindo, portanto o dimensionamento e as verificações da armadura longitudinal.

## 12. Armadura de pele (na região tracionada).

Como a altura total da viga é maior que 60 cm, é necessária colocação em cada face, na região tracionada da viga, de uma armadura de pele.

$$A_{s,pele} = 0,10\% \cdot b_w \cdot h = \frac{0,10}{100} \cdot 12 \cdot 90 = 1,08 \text{ cm}^2 \quad (\text{em cada face, na região}$$

tracionada).

A armadura de pele é recomendada para evitar fissuras e, portanto, deveria ser empregada para a condição em serviço, porém, simplificadaamente será usada a condição de

estado limite último. Lembrando que a linha neutra LN calculado no item anterior é de 27,09 cm, com isso tem-se:

$h - x = 90 - 27,09\text{cm} = 62,91\text{cm}$ , portanto, a armadura de pele deve ser distribuída na região tracionada até uma altura aproximada de 63 cm.

### 13. Estimativa de flecha

Momento de fissuração é determinado para duas situações, a primeira é com a ação do peso próprio e a protensão depois de ocorrida as perdas imediatas e a segunda e no tempo infinito onde já decorreram todas as perdas devido a protensão e tem-se a seção composta.

*Momento de fissuração após as perdas imediatas*

$$M_r = \left( \alpha \cdot f_{ct} + \frac{N_p}{A} \right) \cdot w_i + M_p ; \text{ onde:}$$

$\alpha = 1,2$  para seção T ou duplo TT e 1,5 para seção retangular

$f_{ct}$  = é a resistência a tração do concreto, no caso de determinação do momento de fissuração para mo estado limite de deformação excessiva  $f_{ct} = f_{ct,m}$ .

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_p' \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 7,896 \cdot 129,29 + 0,788 \cdot 142,87 = 1133,46 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_p' \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_p'$$

$$M_p = 7,896 \cdot 129,99 \cdot 0,409 - 0,788 \cdot 142,87 \cdot 0,386 = 374,08 \text{ kNm}$$

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{f_{ckj}^2} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{25^2} = 2,565 \text{ MPa} = 2565 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$M_r = \left( 1,5 \cdot 2565 + \frac{1133,46}{0,1665} \right) \cdot 3,28 \cdot 10^{-2} + 374,08 = 723,54 \text{ kN.m}$$

Neste instante o momento atuante é devido ao peso próprio, com isso tem-se:

$$M_{g1} = \frac{p_1 \cdot l^2}{8} = \frac{4,16 \cdot 9,75^2}{8} = 49,43 \text{ kNm}, \text{ que é menor que o momento de}$$

fissuração.

*Momento de fissuração no tempo infinito*

$$M_r = \alpha \cdot f_{ct} \cdot w_{i,comp} + \frac{N_p}{A} \cdot w_i + M_p$$

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_p' \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 7,896 \cdot 106,68 + 0,788 \cdot 122,95 = 939,21 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_p' \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_p'$$

$$M_p = 7,896 \cdot 106,68 \cdot 0,409 - 0,788 \cdot 122,95 \cdot 0,386 = 307,11 \text{ kNm}$$

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{40^2} = 3,509 \text{ MPa} = 3509 \text{ kN/m}^2$$

$$M_r = 1,2 \cdot 3509 \cdot 5,61 \cdot 10^{-2} + \frac{939,21}{0,1665} \cdot 3,28 \cdot 10^{-2} + 307,11 = 728,35 \text{ kN.m}$$

No tempo infinito o momento atuante para verificação de deformação excessiva é dado para a combinação quase permanente, como os valores dos carregamentos dados na Tabela 8-23, tem-se:

$$M_{g1+g2+g3+g4+g5+\psi_2q} = 590,58 \text{ kNm}, \text{ que é menor que o momento de fissuração.}$$

*Flechas devidas aos carregamentos  $g_1$  a  $g_5$  e  $q$ .*

→ **Fase 01:** *Peso próprio ( $g_1$ ).*

$$p = g_1 = 4,16 \text{ kN/m}$$

$$a_{g1} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 4,16 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 23,8 \cdot 10^6 \cdot 1,52 \cdot 10^{-2}} = 1,35 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,35 \text{ mm}$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{cj}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{25} = 23800 \text{ MPa}$$

→ **Fase 02:** *Peso próprio ( $g_1$ ) + Laje ( $g_2$ ).*

$$p = g_2 = 16,20 \text{ kN/m}$$

$$a_{g2} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 16,20 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 29,02 \cdot 10^6 \cdot 1,52 \cdot 10^{-2}} = 4,32 \cdot 10^{-3} m = 4,32 mm$$

Para a segunda fase com 15 dias o concreto tem resistência de  $\beta_1 \cdot f_{ck}$ .

$$\beta_1 = \exp\left\{s \left[1 - \left(\frac{28}{t}\right)^{1/2}\right]\right\} = \exp\left\{0,20 \left[1 - \left(\frac{28}{15}\right)^{1/2}\right]\right\} = 0,929$$

Onde:

$s = 0,20$  para concreto de cimento CPV-ARI.

Assim:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{\beta_1 f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{0,929 \cdot 40} = 29016 MPa$$

→ **Fase 03:** *Peso próprio ( $g_1$ ) + Laje ( $g_2$ ) + Capa ( $g_3$ ).*

$$p = g_3 = 9,00 kN/m$$

$$a_{g3} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 9,00 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 1,52 \cdot 10^{-2}} = 2,31 \cdot 10^{-3} m = 2,31 mm$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{40} = 30104 MPa$$

→ **Fase 04:** *Peso próprio ( $g_1$ ) + Laje ( $g_2$ ) + Capa ( $g_3$ ) + Alvenaria ( $g_4$ ).*

$$p = g_4 = 5,94 kN/m$$

$$a_{g4} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 5,94 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 3,99 \cdot 10^{-2}} = 5,82 \cdot 10^{-4} m = 0,58 mm$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{40} = 30104 MPa$$

→ **Fase 05:** *Peso próprio ( $g_1$ ) + Laje ( $g_2$ ) + Capa ( $g_3$ ) + Alvenaria ( $g_4$ ) + Revestimento ( $g_5$ ).*

$$p = g_5 = 5,76 \text{ kN} / m$$

$$a_{g_5} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 5,76 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 3,99 \cdot 10^{-2}} = 5,64 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,56 \text{ mm}$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{40} = 30104 \text{ MPa}$$

→ **Fase 06:** *Peso próprio (g<sub>1</sub>) + Laje (g<sub>2</sub>) + Capa (g<sub>3</sub>) + Alvenaria (g<sub>4</sub>) + Revestimento (g<sub>5</sub>) + Acidental (q).*

Considerando o coeficiente de ponderação  $\psi_2 = 0,4$

$$p = q = 21,60 \text{ kN} / m$$

$$a_q = \frac{5 \cdot p \cdot \psi_2 \cdot l^4}{384 \cdot E_c \cdot I} = \frac{5 \cdot 21,60 \cdot 0,4 \cdot 9,75^4}{384 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 3,99 \cdot 10^{-2}} = 8,46 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,85 \text{ mm}$$

Onde:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{40} = 30104 \text{ MPa}$$

*Contra flechas devidas momento de protensão*

Após 24 horas da fabricação da viga, a protensão foi aplicada com os cortes dos cabos e inicia-se também uma perda de protensão, com isso analisa-se a contra flecha e a sua diminuição da seguinte forma.

A tensão inicial do cabo é dada por:

$$\sigma_{pi} = \sigma_p - (\Delta\sigma_{acora} + \Delta\sigma_{pr}) = 145,3 - (1,20 + 2,55) = 141,55 \text{ MPa}$$

Com isso tem-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 7,896 \cdot 141,55 + 0,788 \cdot 141,55 = 1229,22 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 7,896 \cdot 141,55 \cdot 0,409 - 0,788 \cdot 141,55 \cdot 0,386 = 414,08 \text{ kNm}$$



$$a_p = \frac{M_p \cdot l^2}{8 \cdot E_c \cdot I} = \frac{414,08 \cdot 9,75^2}{8 \cdot 29,02 \cdot 10^6 \cdot 1,52 \cdot 10^{-2}} = 1,11 \cdot 10^{-2} m = 11,15 mm$$

A perda de protensão também implica em uma perda da contra flecha.

$$M_{p,t=\infty} - M_{p,t=0} = \Delta M_p$$

$$\Delta a_p = \frac{\Delta M_p \cdot l^2}{8 \cdot E_c \cdot I}$$

Com a tensão no tempo infinito no cabo de protensão de  $\sigma_{pi,inf} = 106,98$  MPa e  $\sigma_{pi,sup} = 122,95$  MPa, tem-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 7,896 \cdot 106,68 + 0,788 \cdot 122,95 = 939,21 kN$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_{p'} \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_{p'}$$

$$M_p = 7,896 \cdot 106,68 \cdot 0,409 - 0,788 \cdot 122,95 \cdot 0,386 = 307,11 kNm$$

$$\Delta a_p = \frac{\Delta M_p \cdot l^2}{8 \cdot E_c \cdot I} = \frac{(414,08 - 307,11) \cdot 9,75^2}{8 \cdot 30,1 \cdot 10^6 \cdot 1,52 \cdot 10^{-2}} = 2,77 \cdot 10^{-3} m = 2,77 mm$$

A Tabela 8-40 apresenta o resumo das flechas imediatas.

**Tabela 8-40: Resumo das deformações imediatas**

| Fase | Ação                       | Seção         | Flecha imediata (mm) |
|------|----------------------------|---------------|----------------------|
| 1    | Protensão                  | Pré-fabricada | -11,15               |
| 1    | Peso próprio da viga       | Pré-fabricada | 1,35                 |
| 2    | Peso próprio da laje       | Pré-fabricada | 4,32                 |
| 3    | Execução da capa           | Pré-fabricada | 2,31                 |
| 4    | Execução da alvenaria      | Composta      | 0,58                 |
| 5    | Execução do revestimento   | Composta      | 0,56                 |
| 6    | Atuação da carga acidental | Composta      | 0,85                 |
| 7    | Perda de protensão         | Pré-fabricada | 2,77                 |

*Valores do coeficiente de fluência.*

O coeficiente de fluência já foram determinados e apresentados na Tabela 8-36 para a determinação das perdas por fluência. A Tabela 8-41 reapresenta os valores dos coeficientes de fluência.

Tabela 8-41: Coeficientes de fluência para a seção 01, 02 e final.

| Ação                       | t <sub>0</sub><br>seção 01 | Coefficiente φ<br>seção 01 | t <sub>0</sub><br>seção 02 | Coefficiente<br>φ seção 02 | Coefficiente<br>φ final |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|
| Protensão                  | 1                          | 3,573                      | --                         | --                         | 3,573                   |
| Peso próprio da viga       | 1                          | 3,573                      | --                         | --                         | 3,573                   |
| Peso próprio da laje       | 15                         | 2,295                      | --                         | --                         | 2,295                   |
| Execução da capa           | 30                         | 1,940                      | 1                          | 3,783                      | 2,770                   |
| Execução da alvenaria      | 45                         | 1,740                      | 15                         | 2,539                      | 2,099                   |
| Execução do revestimento   | 60                         | 1,600                      | 30                         | 2,150                      | 1,848                   |
| Atuação da carga acidental | 75                         | 1,492                      | 45                         | 1,933                      | 1,690                   |
| Perda de protensão         | 75                         | 1,492                      | 45                         | 1,933                      | 1,690                   |

A Tabela 8-42 apresenta os valores finais das flechas considerando a protensão e os carregamentos.

Tabela 8-42: Resultado final da flecha no tempo infinito.

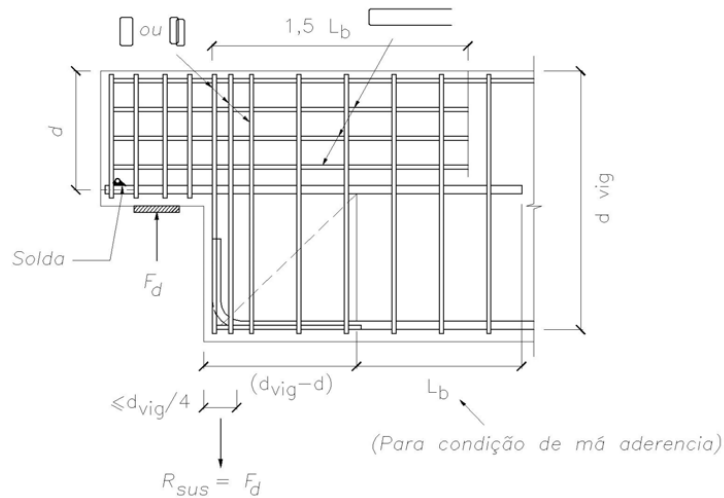
| Fase | Flecha<br>imediate | Coefficiente<br>φ <sub>final</sub> | Coefficiente<br>1+ φ <sub>final</sub> | Flecha<br>t <sub>∞</sub> | Soma   |
|------|--------------------|------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------|--------|
| 1    | -11,15             | 3,573                              | 4,573                                 | -50,98                   | -50,98 |
| 1    | 1,35               | 3,573                              | 4,573                                 | 6,17                     | -44,81 |
| 2    | 4,32               | 2,295                              | 3,295                                 | 14,23                    | -30,49 |
| 3    | 2,31               | 2,770                              | 3,770                                 | 8,70                     | -21,79 |
| 4    | 0,58               | 2,099                              | 3,099                                 | 1,80                     | -19,99 |
| 5    | 0,56               | 1,848                              | 2,848                                 | 1,00                     | -18,99 |
| 6    | 0,85               | 1,690                              | 2,690                                 | 2,29                     | -16,70 |
| 7    | 2,77               | 1,690/2=0,845                      | 1,845                                 | 5,11                     | -11,59 |

$$\text{Com limite de } l/250 = 9750/250 = 39,00 \text{ mm}$$

#### 14. Armadura transversal

Para a verificação do cisalhamento, é importante observar a extremidade da viga, como neste exemplo tem-se a ligação bi-articulada com a utilização de dente Gueber, a Figura 8-34 apresenta as recomendações das armaduras do Dente. Pode ser visto que para a ancoragem da armadura do tirante, é necessária uma distância mínima ( $l_{tir}$ ) de  $(d_{viga} - d) + l_b$ . Determinado e apresentado no exemplo 01 a armadura do tirante de diâmetro máximo é de 20 mm. O que se sugere aqui é o engrossamento da extremidade da viga, ou seja, fazer o preenchimento do perfil I para a seção retangular de 30 x 90 cm, o preenchimento faz-se necessário, pois com a seção da alma do perfil I com 12 cm não seria possível o

posicionamento da armadura do tirante e também a apoio da viga.. A distância do preenchimento deve ter no mínimo a distância calculada para  $l_{tir}$ .



**Figura 8-34: Detalhe da armadura em consolo tipo Gerber (Figura 7.11 NBR 9062:2006).**

*Comprimento da ancoragem reto básico ( $l_b$ ).*

O valor de  $l_b$  é encontrado através da seguinte equação:

$$l_b = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}} = \frac{20}{4} \cdot \frac{500}{1,15 \cdot 2,763} = 786,79 \text{ mm} = 78,7 \text{ cm}$$

Sendo  $f_{bd}$ :

$$f_{bd} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot f_{ctd} = 2,25 \cdot 0,7 \cdot 1,0 \cdot 1,754 = 2,763 \text{ MPa}$$

$\eta_1 = 2,25$  (CA-50 para barra usual, nervurada, de alta aderência);

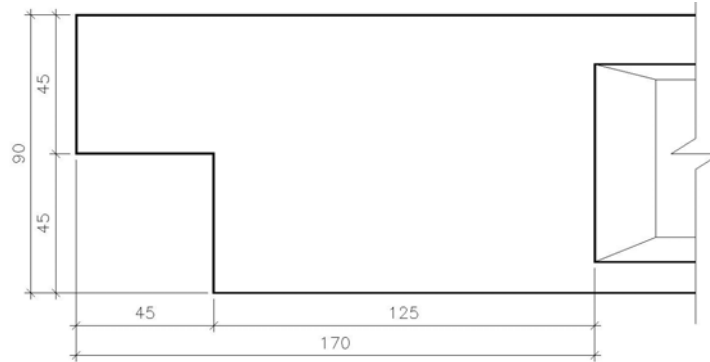
$\eta_2 = 0,7$  (situação de má aderência);

$\eta_3 = 1,0$  ( $\phi = 20 \text{ mm} < 32 \text{ mm}$ )

$$f_{ctd} = \frac{0,21 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2}}{1,4} = 0,15 \cdot \sqrt[3]{40^2} = 1,754 \text{ MPa}$$

$$l_{tir} = (d_{viga} - d) + l_b = 90 - 45 + 78,7 = 123,7 \text{ cm}, \quad \text{portando adota-se um}$$

preenchimento mínimo no perfil I 125 cm (Figura 8-35).



**Figura 8-35: Distância mínima para preenchimento do perfil I.**

Aplica-se o modelo de cálculo I para determinação da armadura transversal.

*Cálculo de  $V_{sd}$ .*

Primeiramente determina-se a armadura considerando  $b_w = 12$  cm a uma distância de 1,70 m do apoio, já se sabe que a armadura dimensionada no exemplo 01 a uma distância  $d/2$  para a seção 30 x 90 cm, é a armadura mínima.

Para o cálculo das ações atuantes são considerados os carregamentos apresentados na Tabela 8-30 e Tabela 8-31.

$$V_{(x)} = \frac{p \cdot l}{2} - p \cdot x$$

$$V_1 = 1,3 \cdot \left( \frac{p_{g1+g2} \cdot l}{2} - p \cdot x \right) = 1,3 \cdot \left( \frac{20,36 \cdot 9,75}{2} - 20,36 \cdot 1,70 \right) = 84,04 \text{ kN}$$

$$V_2 = 1,4 \cdot \left( \frac{p_{g3+g4+g5+q} \cdot l}{2} - p \cdot x \right) = 1,4 \cdot \left( \frac{42,30 \cdot 9,75}{2} - 42,30 \cdot 1,70 \right) = 188,03 \text{ kN}$$

$$V_{sd} = V_1 + V_2 = 84,04 + 188,03 = 272,07 \text{ kN}$$

*Verificação do esmagamento da biela de concreto*

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (\cot \alpha + \cot \theta)$$

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot 0,84 \cdot \frac{40000}{1,4} \cdot 0,12 \cdot 0,845 \cdot \text{sen}^2 30 \cdot (\cot 90 + \cot 30) = 569,04 \text{ kN}$$

Com:

$$\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) = \left(1 - \frac{40}{250}\right) = 0,84$$

Portanto,  $V_{sd} \leq V_{Rd2}$ , e não há perigo de esmagamento do concreto das bielas.

*Cálculo de  $V_c$ .*

Para o cálculo da armadura transversal (em forma de estribos) usa-se o modelo I da NBR 6118:2003 na flexo-compressão e considera-se que a seção resistente seja a da viga pré-fabricada (considerando a alma de 12 cm, com isso a seção considerada é retangular de 12x90 cm). Assim tem-se:

$$V_c = V_{c0} \left(1 + \frac{M_0}{M_{sd, \max}}\right) \leq 2 \cdot V_{c0}, \text{ com}$$

$$V_{c0} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d = 0,6 \cdot 1,754 \cdot 0,12 \cdot 0,845 = 106,72 \text{ kN}$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk, \inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}}{1,4} = 0,15 \cdot \sqrt[3]{40^2} = 1,754 \text{ MPa} = 1754 \text{ kN/m}^2$$

Considerando o efeito da protensão tem-se:

$$M_0 = (\gamma_p \cdot N_{p\infty} + \gamma_f \cdot N_{g+q}) \cdot \frac{w_i}{A} + \gamma_p \cdot \overbrace{N_{p\infty} \cdot e_p}^{M_p}$$

Para se considerar o efeito da protensão é necessário a determinação do comprimento de transferência e regularização do efeito da protensão. Lembrando que  $\sigma_{pi}$  no ato da protensão (após as perdas imediatas) é de 129,29 kN/cm<sup>2</sup> para as cordoalhas da borda inferior e de 142,87 kN/cm<sup>2</sup> para as cordoalhas da borda superior.

$$l_{bpt, \inf} = \frac{3,5 \cdot \phi \cdot \sigma_{pi, \inf}}{36 \cdot f_{bpd}} = \frac{3,5 \cdot 1,27 \cdot 129,29}{36 \cdot 0,1539} = 103,72 \text{ cm}$$

$$l_{bpt, \sup} = \frac{3,5 \cdot \phi \cdot \sigma_{pi, \sup}}{36 \cdot f_{bpd}} = \frac{3,5 \cdot 0,88 \cdot 142,87}{36 \cdot 0,1539} = 79,42 \text{ cm}$$

Como em geral nas fabricas de pré-moldado não se utiliza o sistema de desprotensão gradual, adota-se aqui o coeficiente de 1,25, portanto,  $l_{bpt,inf} \approx 130$  cm e  $l_{bpt,sup} \approx 91$  cm.

Em uma peça pré-fabricada também é importante saber a partir de distancia da extremidade da peça pode-se considerar o esforço de protensão atuando em toda a seção. A este comprimento dá-se o nome de distância de regularização ( $l_p$ ).

$$l_p = \sqrt{h^2 + (0,6 \cdot l_{bpt})^2} \geq l_{bpt}$$

$$l_{p,inf} = \sqrt{90^2 + (0,6 \cdot 130)^2} \approx 119 \text{ cm}$$

$$l_{p,sup} = \sqrt{90^2 + (0,6 \cdot 91)^2} \approx 105 \text{ cm}, \text{ assim } l_{p,inf} = l_{bpt,inf} = 130 \text{ cm e } l_{p,sup} = 119$$

cm.

Como a distância para a determinação do cisalhamento no perfil I é de 170 cm, isso implica a utilização de toda a parcela do efeito da protensão.

Considerando-se:

$$N_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} + A_p \cdot \sigma_{pi,sup}$$

$$N_p = 7,896 \cdot 129,29 + 0,788 \cdot 142,87 = 1133,46 \text{ kN}$$

$$M_p = A_p \cdot \sigma_{pi,inf} \cdot e_p - A_p \cdot \sigma_{pi,sup} \cdot e_p$$

$$M_p = 7,896 \cdot 129,99 \cdot 0,409 - 0,788 \cdot 142,87 \cdot 0,386 = 374,08 \text{ kNm}$$

$$M_0 = (0,9 \cdot 1133,46 + 0) \cdot \frac{3,28 \cdot 10^{-2}}{0,1665} + 0,9 \cdot 374,08 = 537,63 \text{ kNm}$$

Cálculo de  $M_{sd,máx}$  na seção em análise:

$$M_{(x)} = \frac{p \cdot l \cdot x}{2} - \frac{p \cdot x^2}{2}$$

$$M_1 = 1,3 \cdot \left( \frac{p_{g1+g2} \cdot l \cdot x}{2} - \frac{p_{g1+g2} \cdot x^2}{2} \right)$$

$$M_1 = 1,3 \cdot \left( \frac{20,36 \cdot 9,75 \cdot 1,70}{2} - \frac{20,36 \cdot 1,70^2}{2} \right) = 181,11 \text{ kNm}$$

$$M_2 = 1,4 \cdot \left( \frac{P_{g3+g4+g5+q} \cdot l \cdot x}{2} - \frac{P_{g3+g4+g5+q} \cdot x^2}{2} \right)$$

$$M_2 = 1,4 \cdot \left( \frac{42,30 \cdot 9,75 \cdot 1,70}{2} - \frac{42,30 \cdot 1,70^2}{2} \right) = 405,21 \text{ kNm}$$

$$M_{sd,max} = M_1 + M_2 = 181,11 + 405,21 = 586,32 \text{ kNm}$$

$$V_c = 106,72 \cdot \left( 1 + \frac{537,63}{582,36} \right) = 205,24 \text{ kN} \leq 2 \cdot V_{c0}, \text{ portanto, } V_c = 205,24 \text{ kN}$$

### *Cálculo da armadura transversal*

Para o cálculo da armadura transversal, a parcela da força cortante ( $V_{sw}$ ) a ser absorvida pela armadura, pode ser escrita por:

$V_{sw} = V_{Rd3} - V_c$ , sendo que a força cortante resistente de cálculo  $V_{Rd3}$  deve ser no mínimo igual a força cortante solicitante de cálculo  $V_{sd}$  ( $V_{Rd3} = V_{sd}$ ).

$$V_{sw} = V_{Rd3} - V_c = V_{sd} - V_c = 272,07 - 205,24 = 66,83 \text{ kN}$$

### *Armadura mínima*

Segundo o item 17.4.1.1.1 da NBR 6118:2003, a armadura transversal mínima deve ser constituída por estribos, com taxa geométrica:

$$\rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen} \alpha} \geq \frac{f_{ct,m}}{f_{yw}}, \text{ ou seja,}$$

$$A_{sw} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ct,m}}{f_{yw}} \cdot b_w \cdot s \cdot \text{sen} \alpha, \text{ com:}$$

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,30 \cdot \sqrt[3]{40^2} = 3,509 \text{ MPa}$$

$$A_{sw} \geq 0,2 \cdot \frac{3,509}{500} \cdot 12 \cdot 100 \cdot \text{sen} 90 = 1,68 \text{ cm}^2 / \text{m}, \text{ considerando-se estribos com 2}$$

ramos de 6,3 mm, o espaçamento  $s$  é dado por:

$$s = \frac{A_{s\phi}}{A_{sw}} = \frac{2 \cdot 0,32}{1,68} = 0,38 \text{ m} = 30 \text{ cm}$$

Para que não ocorra ruptura por cisalhamento nas seções entre os estribos, o espaçamento máximo deve atender as seguintes condições:

$$V_{sd} \leq 0,67 \cdot V_{Rd2} \rightarrow s_{m\acute{a}x} = 0,6 \cdot d \leq 300mm;$$

$$V_{sd} > 0,67 \cdot V_{Rd2} \rightarrow s_{m\acute{a}x} = 0,3 \cdot d \leq 200mm;$$

Sendo assim, tem-se:

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} = \frac{272,07}{569,04} = 0,48, \text{ portanto adota-se } \phi \text{ 6,3 mm com 2 ramos a cada 30 cm.}$$

Cálculo da força cortante resistida pela armadura mínima.

Segundo CARVALHO (2007) a força resistente, correspondente a armadura mínima é:

$$V_R = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot (\rho_{sw,90} \cdot f_{wd} + 0,10 \cdot f_{ck}^{2/3}), \text{ com:}$$

$$\rho_{sw,90} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen } \alpha} = \frac{2 \cdot 0,32}{12 \cdot 30 \cdot \text{sen } 90} = 1,77 \cdot 10^{-3}$$

$$V_R = 644 \cdot 0,12 \cdot 0,845 \cdot \left( 1,77 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{500}{1,15} + 0,10 \cdot 40^{2/3} \right) = 126,63 \text{ kN}$$

Como a força resistente com a armadura mínima é de 126,33 kN que é maior  $V_{sw} = 66,83 \text{ kN}$ , é necessário portanto para este exemplo a armadura mínima para as duas seções,  $4,21 \text{ cm}^2/\text{m}$  para a seção retangular e  $1,68 \text{ cm}^2/\text{m}$  para o perfil I.

### 15. Armadura necessária para ancoragem da diagonal de compressão

A armadura para ancoragem da diagonal de compressão é apresentada no exemplo 01, com uma pequena alteração do peso próprio da viga. Este valor de redução do peso próprio é insuficiente para alterar a quantidade de armadura necessária, sendo assim, pode-se utilizar a mesma armadura.

### 16. Detalhamento da viga pré-moldada.

A Figura 8-36, Figura 8-37 e Figura 8-38 apresentam todo o detalhamento resultante dos cálculos apresentados anteriormente para o exemplo 04.



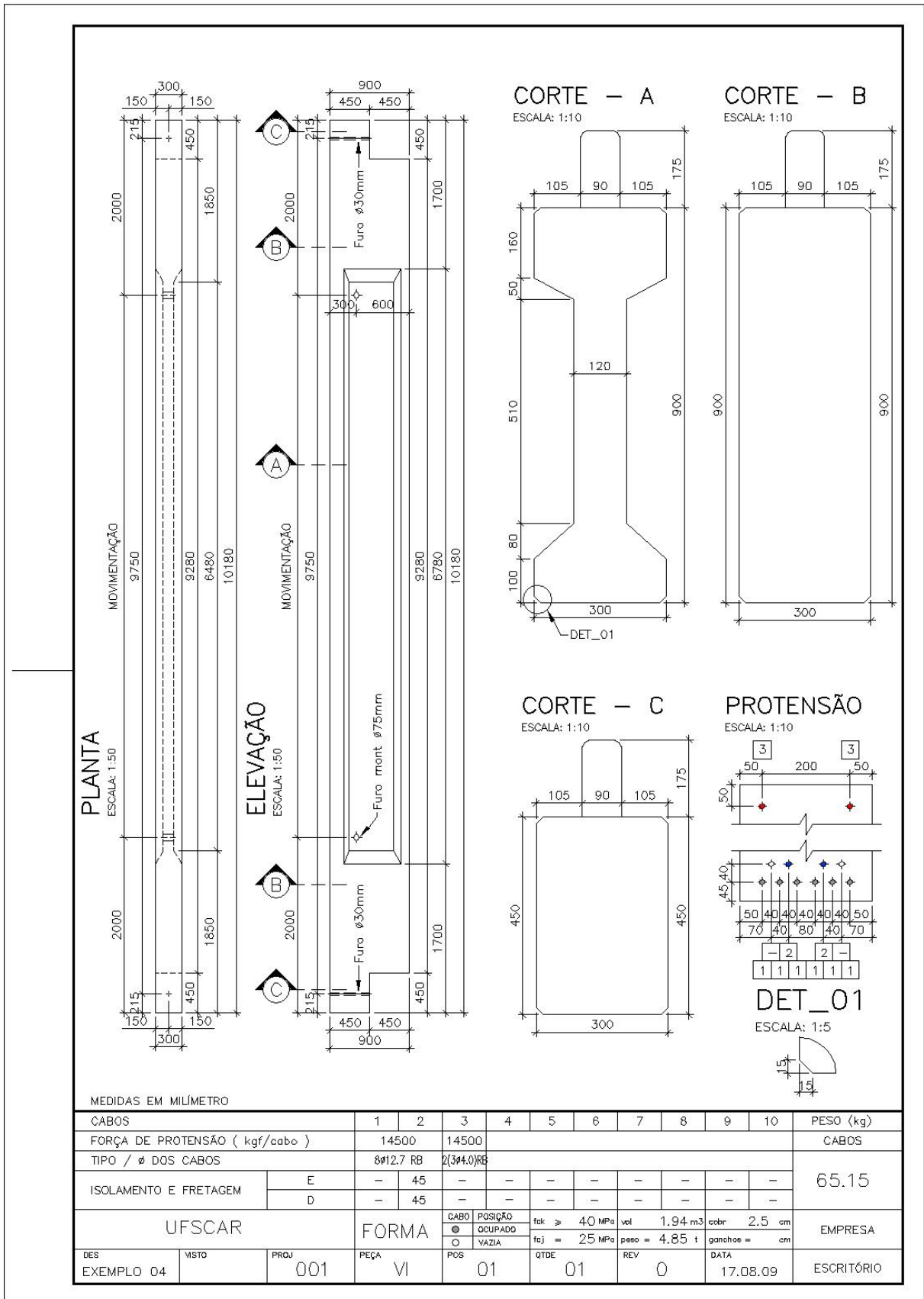


Figura 8-36: Forma da viga VR01, exemplo 04.

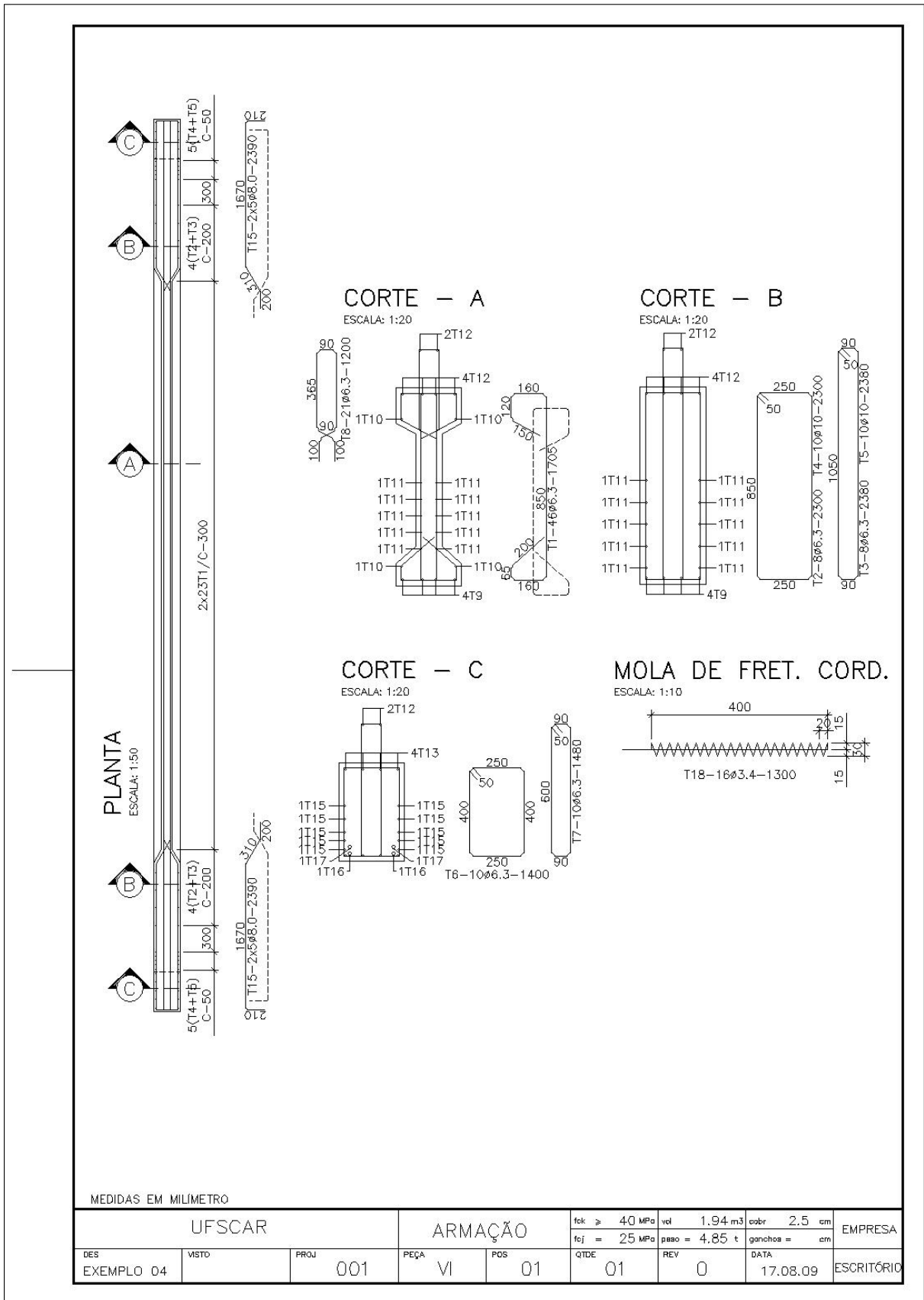


Figura 8-37: Armação da viga VR01, exemplo 04.

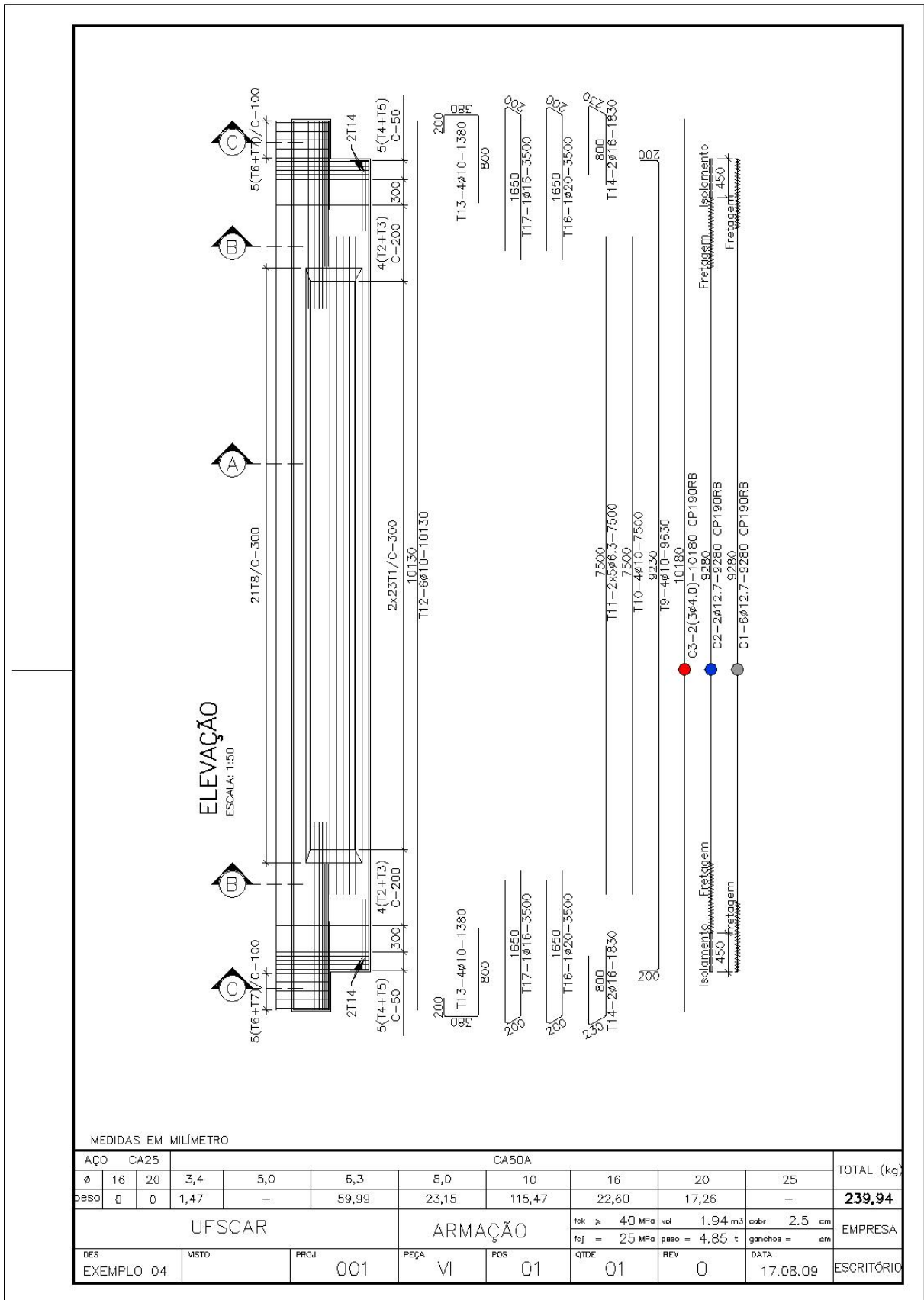


Figura 8-38: Armação da viga VR01, exemplo 04.

---

## 9. CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES

---

Para ficar mais fácil ao leitor acompanhar este capítulo separam-se as considerações e as sugestões por tema.

### 9.1. ROTEIRO DE DIMENSIONAMENTO E MODELOS DE CÁLCULO APLICADOS

---

O roteiro escolhido e detalhado neste trabalho para a determinação das armaduras e verificações pertinentes da viga permite claramente ao projetista entender o funcionamento da peça e detalhar tanto a armadura longitudinal quanto a transversal.

Fica bem claro que o projetista precisa dominar os conceitos da pré-tração de forma que consiga aplicar os modelos de cálculo mais adequados. Lembra-se que este dimensionamento corresponde a um cálculo de armadura longitudinal em que se determinam os esforços de protensão considerando as perdas progressivas. Assim, pode-se dizer que a precisão do dimensionamento obtido é bastante razoável. Nota-se também que há uma quantidade grande de verificações a serem feitas, mostrando a necessidade de se elaborar um programa ou uma planilha automática que permita ao projetista chegar rapidamente ao detalhamento final.

Chama-se atenção que foram utilizados diversos conceitos não previstos nas edições das normas brasileiras como, por exemplo, o efeito de seção composta pode ser usado integralmente na flexão e parcialmente no cisalhamento. Também por falta de indicação normativa preferiu-se usar uma combinação de modelo I e II para o cálculo no cisalhamento. Na medida em que forem desenvolvidos ensaios, estas hipóteses podem ser modificados e os procedimentos ajustados. No caso do modelo II a grande questão é qual o valor de  $\theta$  (inclinação da biela) que deve ser utilizada. No caso da seção composta haveria a necessidade fazer mais ensaios, para se conhecer melhor o comportamento próximo ao estado limite último de cisalhamento e flexão.

## 9.2. CONDIÇÕES DETERMINANTES PARA O CÁLCULO DA ARMADURA LONGITUDINAL

---

A condição determinante de projeto para o cálculo da armadura longitudinal para os exemplos 01, 03 e 04, foi a da verificação de fissuração no estado de descompressão. Fica claro também a necessidade da colocação de armadura de protensão junto a borda superior da seção inicial (viga na fábrica). Esta condição diz respeito à verificação de ruptura no estado em vazio.

Mesmo quando se resolveu a viga com uma seção de maior eficiência (Exemplo 04) em que se utilizou uma seção do tipo I, apesar de ter diminuída a armadura de protensão positiva ainda sim foi necessário usar a armadura de protensão na borda superior.

Para se determinar a melhor forma da seção transversal que resiste à flexão pode-se usar segundo MADARÁS (1993) o coeficiente de rendimento de Guyon que é dado pela expressão:

$$R = \frac{I}{A \cdot y_s \cdot y_i}$$

Aplicando esses coeficientes para a seção retangular (exemplo 01), chega-se a um rendimento de 0,33 enquanto que a seção I (exemplo 04) o rendimento é de 0,45. Indicando-se o índice deste coeficiente para escolher um tipo de seção sem precisar calcular a armadura longitudinal.

Estas duas situações descritas parecem ser típicas da pré-tração e acabam sendo recorrentes. Assim, aconselha-se usar o coeficiente de rendimento de Guyon como parâmetro definidor e a condição de fissuração ao estado de descompressão como a determinante da quantidade de armadura.

Essas sugestões se aplicam às condições ambientais de agressividade (CAA) II, III e IV em que são necessárias as verificações de tensões. Na CAA I em que exigiria apenas a protensão parcial a condição determinante para a determinação da armadura longitudinal passa a ser, possivelmente, a do estado limite ultimo na flexão.

### 9.3. INFLUÊNCIA DA CONSIDERAÇÃO DAS PERDAS DE PROTENSÃO

A discussão de se usar o cálculo das perdas de forma aproximada ou mais precisa está sempre presente no meio técnico e acadêmico. Nos exemplos resolvidos acredita-se que as perdas consideradas de maneira aproximada podem mascarar os resultados principalmente no que diz respeito às condições de fissuração. Para ilustrar este aspecto calculou-se com os dados constantes no exemplo 01 duas situações (estimativa 1 e estimativa 2) a quantidade de armadura longitudinal (considerando sempre dois cabos junto à fibra superior da pré-viga) usando como condição determinante o limite de descompressão na combinação quase permanente.

Os resultados obtidos estão indicados na Tabela 9-1, mostrando a grande variabilidade de solução. Assim, para uma estimativa com pequena perda (estimativa 1) o número de cabos é 30% inferior ao realmente necessário. Porém ao se fazer uma estimativa conservadora (estimativa 2) obtêm-se quantidade de cabos 20% superior ao valor necessário (a solução de 10 cabos), mostrando a importância da precisão do cálculo das perdas neste exemplo. Nota-se que na estimativa 2 ao verificar a seção em vazio o limite de tração seria ultrapassado requerendo ainda uma maior quantidade de cabos junto a borda superior.

**Tabela 9-1: Números de cabos necessários em função da estimativa da perda de protensão.**

|                            | <b>Perda cabo superior</b> | <b>Perda cabo inferior</b> | <b>Nº de cabos necessários</b> | <b>Nº. de cabos estimados / nº. de cabo calculado</b> |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------------------|---|
| <b>Estimativa 1</b>        | 10%                        | 15%                        | 7                              | 0,70  |
| <b>Estimativa 2</b>        | 20%                        | 30%                        | 12                             | 1,20  |
| <b>Situação de cálculo</b> | 15,45%                     | 22,98%                     | 10                             | 1,00  |

### 9.4. CISALHAMENTO

Destacam-se os procedimentos aqui usados no cálculo e detalhamento da armadura de cisalhamento em que procurou-se não fugir das características das peças protendidas, considerando que as bielas de concreto tem inclinação diferente de 45° e considerar o efeito benéfico da descompressão do concreto. Como indicação de projetos sugere-se o uso da região retangular da viga (seção pré-fabricada) para absorver o esforço

cortante. Com isso consegue um bom aproveitamento da seção e deixando a armadura de costura para fazer a ligação da capa com a viga pré-moldada melhorando o comportamento da flexão.

Desta forma foi necessário apenas o uso da armadura mínima na seção retangular principalmente por causa do efeito de descompressão. Em virtude do uso do dente Gerber, fez-se o engrossamento da viga I o que contribui bastante para o dimensionamento da armadura transversal.

## **9.5. ESTADO LIMITE DE DEFORMAÇÃO**

---

Nos exemplos estudados a situação de deformação excessiva não é limitante, desta forma o emprego da protensão não resultou em grande vantagem.

## **9.6. COMPARAÇÃO ENTRE AS DIVERSAS SOLUÇÕES**

---

Na prática do dimensionamento de vigas pré-fabricadas o projetista depara-se com duas soluções características que devem ser devidamente estudadas. A primeira diz respeito a questão das ligações, no trabalho em questão resolveu-se uma viga típica de edifício escolar considerando uma ligação do tipo articulado e outra em que é permitido uma continuidade mesmo que parcial (ligação semi-rígida), trata-se dos exemplos 01 e 03 respectivamente. Percebe-se pela Tabela 9-2 que não há ganho substancial em economia de armadura longitudinal, no caso apenas uma cordoalha é eliminado, cerca de 10%. Assim aparentemente não há vantagem de se fazer ligação semi-rígida, pois cabe ressaltar que na armadura negativa foi preciso usar 5 $\phi$ 25mm, isto se deve em grande parte pela geometria da extremidade da viga com dente Gerber. Talvez a única justificativa desta solução seria a melhoria da rigidez a ação lateral.

Outra variável importante como já ressaltando no início deste capítulo é a forma da seção e o exemplo 04 mostra claramente que já há uma economia maior de armadura quando se considera a forma da seção em I. Nesta situação há uma economia de 20% da armadura longitudinal.

**Tabela 9-2: Características e resultados obtidos nos diversos exemplos numéricos.**

| Ação              | Tipo                 | Seção      | $A_p$            | $A_{p'}$          | Perda cabos inferiores |        | Perda cabos superiores |        |
|-------------------|----------------------|------------|------------------|-------------------|------------------------|--------|------------------------|--------|
|                   |                      |            |                  |                   | Iniciais               | Total  | Iniciais               | Total  |
| <b>Exemplo 01</b> | Simplesmente apoiado | Retangular | 10 $\phi$ 12,7mm | 2 $\phi$ 12,7mm   | 9,33%                  | 22,98% | 1,84%                  | 14,85% |
| <b>Exemplo 03</b> | Contínua             | Retangular | 9 $\phi$ 12,7mm  | 2 $\phi$ 12,7mm   | 8,56%                  | 21,60% | 2,13%                  | 15,65% |
| <b>Exemplo 04</b> | Simplesmente apoiado | I          | 8 $\phi$ 12,7mm  | 2(3 $\phi$ 4,0mm) | 11,02%                 | 26,58% | 1,67%                  | 15,40% |

É importante frisar que a mudança da ligação ou mesmo da forma da seção influenciam nas perdas de protensão da armadura constituinte, como indica a Tabela 9-2.

Mostrou-se também dos exemplos que a consideração de continuidade, neste caso específico, em que se tem um dente Gerber acaba não melhorando muito o comportamento da viga, ou seja, não diminui sensivelmente a armadura de protensão da viga, pois o fator de restrição da ligação com cinco barras de diâmetro de 25 mm atingiu apenas 33,3% de engastamento, já com três barras de 20 mm a porcentagem de engastamento foi de 22%. Isto se dá devido a diminuição da altura da viga junto ao ponto (a região do dente).

## 9.7. SUGESTÕES

Sugere-se para trabalhos futuros que o roteiro de cálculo seja sistematizado através de planilha eletrônica ou melhor ainda através de um programa de computador que permita uma grande velocidade no cálculo, liberando mais tempo para o projetista analisar eventuais mudanças de projeto ou melhorias possíveis no detalhamento ou sistema estrutural..

Também ficam sugestões para o estudo do funcionamento da seção composta assim como uma proposta mais clara para o cálculo da armadura transversal.

Outro estudo esclarecedor que pode ser feito está no detalhamento deste sistema para as outras condições de agressividade.

Com um programa baseado neste roteiro é possível gerar diversas soluções para outros vãos ou mesmo outras alturas e com outras técnicas, tipo algoritmo genético maximizar a economia do sistema estrutural, que estará devidamente atendida ao fim dos procedimentos, pois o modelo é particularmente preciso.



---

## 10. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

ACKER. A. V. **Manual de Sistemas Pré-Fabricado de Concreto**. FIB-2002. Tradução Marcelo de A. Ferreira (ABCP-ABCIC-2004).

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9062**: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. Rio de Janeiro, 2006.

BUCHAIM, R. **Concreto protendido – Tração axial, flexão simples e força cortante**. Londrina: UEL: Universidade Estadual de Londrina, 2007. 226p.

CARVALHO, R. C; FILHO. J. R. F. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado. Segundo a NBR 6118:2003**. 3.ed. São Carlos. EDUFSCAR, 2007. 367 pág.

CARVALHO, R. C. **Concreto protendido**. Universidade Federal de São Carlos, 2009. Notas de aula.

CATOIA, B. **Comportamento de vigas protendidas pré-moldadas com ligações semi-rígidas**. São Carlos. 2007. 149f. Dissertação (Mestrado em Construção Civil). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos.

DEBS. M. K. E. **Concreto pré-moldado: Fundamentos e aplicações**. São Carlos: EESC: Departamento de Engenharia de Estruturas, 2000. 441 p.

FERREIRA, M.A. **Deformabilidade de ligação viga-pilar de concreto pré-moldado**. São Carlos. 232f. Tese (Doutorado em estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1999.

FERREIRA, M.A.; EL DEBS, M.K.; ELLIOTT, K.S. **Modelo Teórico para projeto de Ligações Semi-Rígidas em Estruturas de Concreto Pré-Moldado**. In: IBRACON. Anais do 44 Congresso Brasileiro do Concreto. Belo Horizonte, MG, 17 a 22 de Agosto, 2002.

FERREIRA, M.A.; EL DEBS, M.K.; ELLIOTT, K.S. **Determinação Teórico-Experimental da Relação Momento-Rotação e Ligações Viga-Pilar de Estruturas Pré-Moldadas de**

- Concreto.** In: V Simpósio EPUSP sobre estrutura de concreto. São Paulo, SP, 7 a 10 de Junho, 2003.
- FILHO, J. R. F. CARVALHO, R. C; **Pavimentos de edifícios com lajes maciças.** São Carlos. Departamento de Engenharia Civil. Apostilas, 2006. 39 pág.
- HANAI, J. B. **Fundamentos do Concreto Protendido.** São Carlos: EESC: Departamento de Engenharia de Estruturas, 2005. 116 p. Apostila.
- JEREMIAS JR., A. C. **Análise da estabilidade da estruturas pré-moldadas de concreto: influencia das ligações semi-rígidas.** São Carlos. 2007.193f. Dissertação (Mestrado em Construção Civil). Universidade Federal de São Carlos. 2007.
- FIB GUIDE TO GOOD PRATICE. **Structural Connections for Precast Concrete Buildings.** 2003. Commission C6. Prefabrication. Task Group 6.2: Connections.
- MACHADO, C.P. **Consolos curtos e muito curtos de concreto armado.** São Paulo, 1998. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- MADARÁS, E. **Curso de concreto protendido.** Apostila. Universidade Santa Cecília. Departamento de Engenharia Civil. Santos, 1993.
- MUNTE. **Manual Munte de Projetos Pré-fabricados.** 2. ed. São Paulo: Editora Pini. Ago/2007. 534 p.
- NAWY, E. G. P.E. **Prestressed concrete.** A Fundamental Approach – Second edition. Editora: Prentice Hall – New Jersyl, 1996.
- PCI DESING HANDBOOKS. **Precast and Prestressed Concrete.** Chicago. 6º edição. 2001. 736 p.
- SHIMONECK, J. Proprietário do escritório CTC – Projetos e Consultorias S/S. Arquiteto.
- SILVA, I. MARTINS. **Análise da redistribuição de esforços em vigas de concreto protendido com seções composta.** São Paulo, 2003. 72f. Dissertação (Mestre em engenharia). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo.
- SILVA, R. C; GIONGO, J. S. **Modelos de bielas e tirantes aplicados a estruturas de concreto armado.** Publicação EESC-USP. Escola de Engenharia de São Carlos. São Carlos, SP. 2000.

- 
- TATU. **Tatu Premoldados**. Catálogos técnicos disponíveis no site: <http://www.tatu.com.br/>.
- VASCONCELOS, A. C. **Manual prático para a correta utilização dos aços no concreto protendido em obediência as normas atualizadas**. Livros técnicos e científicos editoria S. A. Companhia Siderúrgica Belgo-Mineira. Belo Horizonte, 1980.
- VERÍSSIMO, G. S; JUNIOR, K. M. L. C. **Concreto protendido – perdas de protensão**. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, 1998. 39p. Apostila.
- VERÍSSIMO, G. S; JUNIOR, K. M. L. C. **Concreto protendido – fundamentos básicos**. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, 1998. 72p. Apostila.

## ANEXO A

### 1. Determinação do coeficiente de fluência e deformação do concreto por retração.

O cálculo do coeficiente de fluência e deformação do concreto por retração apresentados no capítulo 4 foram determinados através de uma planilha programada no Excel (Figura 10-1). Abaixo são apresentadas as etapas dos cálculos para a determinação dos coeficientes de fluência e retração, para a seção 01 com a idade  $t_0$  de 15 dias do exemplo numérico 01. As entradas no programa são apresentadas na figura abaixo.

|   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| <b>Dados</b>  |                                      |
| Area da seção de concreto $A_c$                     | 2700 cm <sup>2</sup>                 |
| Perímetro da seção em contato com o ar ( $U_{ar}$ ) | 210 cm                               |
| <b>Ambiente e material</b>                          |                                      |
| Umidade relativa do ar (U)                          | 70 %                                 |
| Temperatura média (T)                               | 20 graus C                           |
| Abatimento do concreto (slump)                      | 9 cm                                 |
| Tipo do cimento utilizado                           | 3 1 C-III e IV 2 C-I e II 3 C-PV-ARI |
| <b>Idade do concreto</b>                            |                                      |
| no início do período considerado ( $t_0$ )          | 15                                   |
| no final do período considerado (t)                 | 10000                                |
| <b>Resultados</b>                                   |                                      |
| Coeficiente de fluência $\Phi(t, t_0)$              | 2,225                                |
| Retração do concreto $\epsilon_{cs}(t, t_0)$        | -2,44E-04                            |

Figura 10-1: Tela do programa de cálculo dos coeficientes de fluência e retração.

#### *Deformação por retração do concreto*

O valor de  $\epsilon_{1s}$  para  $U \leq 90\%$  e abatimento entre 0 e 4 cm são 25% menores e para abatimento entre 10 cm e 15 cm são 25% maiores.

$$\epsilon_{1s} = \left( -6,16 - \frac{U}{484} + \frac{U^2}{1590} \right) \cdot 10^{-4} = \left( -6,16 - \frac{70}{484} + \frac{70^2}{1590} \right) \cdot 10^{-4} = 3,22 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Para } U \leq 90\% \rightarrow \gamma = 1 + e^{(-7,8+0,1 \cdot U)} = 1 + e^{(-7,8+0,1 \cdot 70)} = 1,45$$

Define-se espessura fictícia como o seguinte valor:

$$h_{fic} = \gamma \frac{2A_c}{u_{ar}} = 1,45 \frac{2 \cdot 2700}{210} = 37,28 \text{ cm} = 0,3728 \text{ m}$$

$$\varepsilon_{2s} = \frac{33 + 2 \cdot h_{fic}}{20,8 + 3 \cdot h_{fic}} = \frac{33 + 2 \cdot 37,28}{20,8 + 3 \cdot 37,28} = 0,811$$

$$\varepsilon_{cs\infty} = \varepsilon_{1s} \cdot \varepsilon_{2s} = 3,22 \cdot 10^{-4} \cdot 0,811 = 2,61 \cdot 10^{-4}$$

Com  $h = h_{fic} = 0,3728 \text{ m}$

$$A = 40;$$

$$B = 116h^3 - 282h^2 + 220h - 4,8 = 40,03;$$

$$C = 2,5h^3 - 8,8h + 40,7 = 37,55;$$

$$D = -75h^3 + 585h^2 + 496h - 6,8 = 255,42;$$

$$E = -169h^4 + 88h^3 + 584h^2 - 39h + 0,8 = 68,67.$$

Idade fictícia do concreto.

$$t_{0, fic} = \alpha \cdot \frac{T+10}{30} \cdot t_0 = 1 \frac{20+10}{30} \cdot 15 = 15 \text{ dias}$$

$$t_{f, fic} = \alpha \cdot \frac{T+10}{30} \cdot t_0 = 1 \frac{20+10}{30} \cdot 10000 = 10000 \text{ dias}$$

Sendo:

$$\beta_s(t) = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A\left(\frac{t}{100}\right)^2 + B\left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C\left(\frac{t}{100}\right)^2 + D\left(\frac{t}{100}\right) + E}, \text{ tem-se:}$$

$$\beta_s(t_{0, fic}) = \frac{\left(\frac{15}{100}\right)^3 + 40\left(\frac{15}{100}\right)^2 + 40,03\left(\frac{15}{100}\right)}{\left(\frac{15}{100}\right)^3 + 37,55\left(\frac{15}{100}\right)^2 + 255,42\left(\frac{15}{100}\right) + 68,67} = 0,0696$$

$$\beta_s(t_{f, fic}) = \frac{\left(\frac{10000}{100}\right)^3 + 40\left(\frac{10000}{100}\right)^2 + 40,03\left(\frac{10000}{100}\right)}{\left(\frac{10000}{100}\right)^3 + 37,55\left(\frac{10000}{100}\right)^2 + 255,42\left(\frac{10000}{100}\right) + 68,67} = 1,0000$$

A deformação do concreto por retração é dada pela expressão abaixo:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cs\infty} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)]$$

$$\varepsilon_{cs(10000, 15)} = 2,61 \cdot 10^{-4} [1,0000 - 0,0696] = 2,44 \cdot 10^{-4}$$

### Coeficiente de fluência

A idade fictícia do concreto depende do tipo de cimento, com o cimento ARI o coeficiente  $\alpha = 3$ .

$$t_{0, fic} = \alpha \cdot \frac{T+10}{30} \cdot t_0 = 3 \cdot \frac{20+10}{30} \cdot 15 = 45 \text{ dias}$$

$$t_{f, fic} = \alpha \cdot \frac{T+10}{30} \cdot t_0 = 3 \cdot \frac{20+10}{30} \cdot 10000 = 30000 \text{ dias}$$

O coeficiente  $\varphi_a$  é função da resistência do concreto no tempo infinito e do tempo  $t_0$ . Quando a verificação se faz na data  $t_0$  dias tem-se:

$$\beta_1 = \exp\left\{s \left[1 - \left(\frac{28}{t_0}\right)^{1/2}\right]\right\} = \exp\left\{0,20 \left[1 - \left(\frac{28}{15}\right)^{1/2}\right]\right\} = 0,9294, \text{ com:}$$

$s = 0,38$  para concreto de cimento CPIII e IV;

$s = 0,25$  para concreto de cimento CPI e II;

$s = 0,20$  para concreto de cimento CPV-ARI.

Se considerar o valor de  $t = \infty$  o valor  $t/\infty$  tenderá a zero e, portanto a expressão anterior fica:

$$\beta_1 = \exp\left\{s \left[1 - (0)^{1/2}\right]\right\} = \exp\{s\}, \text{ que resulta em:}$$

$$\text{CPIII e IV com } s = 0,38 \quad \beta_1 = \exp\{0,38\} = 1,4623$$

$$\text{CPI e II com } s = 0,25 \quad \beta_1 = \exp\{0,25\} = 1,2840$$

$$\text{CPV-ARI com } s = 0,20 \quad \beta_1 = \exp\{0,20\} = 1,2214$$

Com isso:

$$\varphi_a = 0,8 \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)}\right] = 0,8 \left[1 - \frac{0,9294}{1,2214}\right] = 0,1913$$

O valor de  $\varphi_{1s}$  para  $U \leq 90\%$  e abatimento entre 0 e 4 cm são 25% menores e para abatimento entre 10 cm e 15 cm são 25% maiores.

$$\varphi_{1c} = 4,45 - 0,035 \cdot U = 4,45 - 0,035 \cdot 70 = 2,00$$

$$\varphi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}} = \frac{42 + 37,28}{20 + 37,28} = 1,384$$

$$\varphi_{f\infty} = \varphi_{1c} \cdot \varphi_{2c} = 2,00 \cdot 1,384 = 2,768$$

$$\varphi_{d\infty} = 0,4$$

$$\beta_d = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} = \frac{30000 - 45 + 20}{30000 - 45 + 70} = 0,998$$

$$\text{Com } h = h_{fic} = 0,3728 \text{ m}$$

$$A = 42h^3 - 350h^2 + 588h + 113 = 285,70;$$

$$B = 768h^3 - 3060h^2 + 3234h - 23 = 797,00;$$

$$C = -200h^3 + 13h^2 + 1090h + 183 = 580,68;$$

$$D = 7579h^3 - 31916h^2 + 35343h + 1931 = 11062,17;$$

Sendo:

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D}, \text{ tem-se:}$$

$$\beta_f(t_{0, fic}) = \frac{45^2 + 285,70 \cdot 45 + 797,00}{45^2 + 580,68 \cdot 45 + 11062,17} = 0,3998$$

$$\beta_f(t_{f, fic}) = \frac{30000^2 + 285,70 \cdot 30000 + 797,00}{30000^2 + 580,68 \cdot 30000 + 11062,17} = 0,9903$$

O coeficiente de fluência do concreto é dada pela expressão abaixo:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_a + \varphi_{f\infty} [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{d\infty} \beta_d$$

$$\varphi_{(10000,15)} = 0,1913 + 2,768 [0,9903 - 0,3998] + 0,4 \cdot 0,998 = 2,225$$

Novamente são calculados os coeficientes de fluência e retração, mas desta vez para a seção 02, com o tipo de cimento CPII. Os dados de entrada do programa estão apresentados na Figura 10-2.

| Dados   |  |
|---|--|
| Area da seção de concreto $A_c$                     | 1365 cm <sup>2</sup>   |
| Perímetro da seção em contato com o ar ( $U_{ar}$ ) | 225 cm   |
| Ambiente e material                                 |  |
| Umidade relativa do ar (U)                          | 70 %   |
| Temperatura média (T)                               | 20 graus C   |
| Abatimento do concreto (slump)                      | 9 cm   |
| Tipo do cimento utilizado                           | 2 <sup>1</sup> CP III e IV 2 <sup>2</sup> CP I e II 3 <sup>3</sup> CPV-ARI |
| Idade do concreto                                   |  |
| no início do período considerado ( $t_0$ )          | 45   |
| no final do período considerado (t)                 | 10000  |
| Resultados  |  |
| Coefficiente de fluência $\Phi(t, t_0)$             | 1,933  |
| Retração do concreto $\epsilon_{cs}(t, t_0)$        | -2,07E-04  |

Figura 10-2: Tela do programa de cálculo dos coeficientes de fluência e retração.

#### Deformação por retração do concreto

O valor de  $\epsilon_{1s}$  para  $U \leq 90\%$  e abatimento entre 0 e 4 cm são 25% menores e para abatimento entre 10 cm e 15 cm são 25% maiores.

$$\epsilon_{1s} = \left( -6,16 - \frac{U}{484} + \frac{U^2}{1590} \right) \cdot 10^{-4} = \left( -6,16 - \frac{70}{484} + \frac{70^2}{1590} \right) \cdot 10^{-4} = 3,22 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Para } U \leq 90\% \rightarrow \gamma = 1 + e^{(-7,8+0,1U)} = 1 + e^{(-7,8+0,1 \cdot 70)} = 1,45$$

Defini-se espessura fictícia como o seguinte valor:

$$h_{fic} = \gamma \frac{2A_c}{u_{ar}} = 1,45 \frac{2 \cdot 1365}{225} = 17,58 \text{ cm} = 0,1758 \text{ m}$$

$$\epsilon_{2s} = \frac{33 + 2 \cdot h_{fic}}{20,8 + 3 \cdot h_{fic}} = \frac{33 + 2 \cdot 17,58}{20,8 + 3 \cdot 17,58} = 0,927$$

$$\epsilon_{cs\infty} = \epsilon_{1s} \cdot \epsilon_{2s} = 3,22 \cdot 10^{-4} \cdot 0,927 = 2,98 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Com } h = h_{fic} = 0,1758 \text{ m}$$



$$A = 40;$$

$$B = 116h^3 - 282h^2 + 220h - 4,8 = 25,80;$$

$$C = 2,5h^3 - 8,8h + 40,7 = 39,17;$$

$$D = -75h^3 + 585h^2 + 496h - 6,8 = 98,11;$$

$$E = -169h^4 + 88h^3 + 584h^2 - 39h + 0,8 = 12,32.$$

Idade fictícia do concreto.

$$t_{0, fic} = \alpha \cdot \frac{T+10}{30} \cdot t_0 = 1 \frac{20+10}{30} \cdot 45 = 45 \text{ dias}$$

$$t_{f, fic} = \alpha \cdot \frac{T+10}{30} \cdot t_0 = 1 \frac{20+10}{30} \cdot 10000 = 10000 \text{ dias}$$

Sendo:

$$\beta_s(t) = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A\left(\frac{t}{100}\right)^2 + B\left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C\left(\frac{t}{100}\right)^2 + D\left(\frac{t}{100}\right) + E}, \text{ tem-se:}$$

$$\beta_s(t_{0, fic}) = \frac{\left(\frac{45}{100}\right)^3 + 40\left(\frac{45}{100}\right)^2 + 25,80\left(\frac{45}{100}\right)}{\left(\frac{45}{100}\right)^3 + 39,17\left(\frac{45}{100}\right)^2 + 98,11\left(\frac{45}{100}\right) + 12,32} = 0,3070$$

$$\beta_s(t_{f, fic}) = \frac{\left(\frac{10000}{100}\right)^3 + 40\left(\frac{10000}{100}\right)^2 + 25,80\left(\frac{10000}{100}\right)}{\left(\frac{10000}{100}\right)^3 + 39,17\left(\frac{10000}{100}\right)^2 + 98,11\left(\frac{10000}{100}\right) + 12,32} = 1,0000$$

A deformação do concreto por retração é dada pela expressão abaixo:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{csoc} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)]$$

$$\varepsilon_{cs(10000,15)} = 2,98 \cdot 10^{-4} [1,0000 - 0,3070] = 2,07 \cdot 10^{-4}$$

*Coefficiente de fluência*

A idade fictícia do concreto depende do tipo de cimento, com o cimento CII o coeficiente  $\alpha = 2$ .

$$t_{0, fic} = \alpha \cdot \frac{T+10}{30} \cdot t_0 = 2 \cdot \frac{20+10}{30} \cdot 45 = 90 \text{ dias}$$

$$t_{f, fic} = \alpha \cdot \frac{T+10}{30} \cdot t_0 = 2 \cdot \frac{20+10}{30} \cdot 10000 = 20000 \text{ dias}$$

O coeficiente  $\varphi_a$  é função da resistência do concreto no tempo infinito e do tempo  $t_0$ . Quando a verificação se faz na data  $t_0$  dias tem-se:

$$\beta_1 = \exp\left\{s \left[1 - \left(\frac{28}{t_0}\right)^{1/2}\right]\right\} = \exp\left\{0,25 \left[1 - \left(\frac{28}{45}\right)^{1/2}\right]\right\} = 1,0542, \text{ com:}$$

$s = 0,38$  para concreto de cimento CPIII e IV;

$s = 0,25$  para concreto de cimento CPI e II;

$s = 0,20$  para concreto de cimento CPV-ARI.

Se considerar o valor de  $t = \infty$  o valor  $t/\infty$  tenderá a zero e, portanto a expressão anterior fica:

$$\beta_1 = \exp\left\{s \left[1 - (0)^{1/2}\right]\right\} = \exp\{s\}, \text{ que resulta em:}$$

$$\text{CPIII e IV com } s = 0,38 \quad \beta_1 = \exp\{0,38\} = 1,4623$$

$$\text{CPI e II com } s = 0,25 \quad \beta_1 = \exp\{0,25\} = 1,2840$$

$$\text{CPV-ARI com } s = 0,20 \quad \beta_1 = \exp\{0,20\} = 1,2214$$

Com isso:

$$\varphi_a = 0,8 \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)}\right] = 0,8 \left[1 - \frac{1,0542}{1,2840}\right] = 0,1431$$

O valor de  $\varphi_{1s}$  para  $U \leq 90\%$  e abatimento entre 0 e 4 cm são 25% menores e para abatimento entre 10 cm e 15 cm são 25% maiores.

$$\varphi_{1c} = 4,45 - 0,035 \cdot U = 4,45 - 0,035 \cdot 70 = 2,00$$

$$\varphi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}} = \frac{42 + 17,58}{20 + 17,58} = 1,585$$

$$\varphi_{f\infty} = \varphi_{1c} \cdot \varphi_{2c} = 2,00 \cdot 1,585 = 3,170$$

$$\varphi_{d\infty} = 0,4$$

$$\beta_d = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} = \frac{20000 - 90 + 20}{20000 - 90 + 70} = 0,997$$

$$\text{Com } h = h_{fic} = 0,1758 \text{ m}$$

$$A = 42h^3 - 350h^2 + 588h + 113 = 205,81;$$

$$B = 768h^3 - 3060h^2 + 3234h - 23 = 455,25;$$

$$C = -200h^3 + 13h^2 + 1090h + 183 = 373,99;$$

$$D = 7579h^3 - 31916h^2 + 35343h + 1931 = 7200,38;$$

Sendo:

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D}, \text{ tem-se:}$$

$$\beta_f(t_{0,fic}) = \frac{90^2 + 205,81 \cdot 90 + 455,25}{90^2 + 373,99 \cdot 90 + 7200,38} = 0,5531$$

$$\beta_f(t_{f,fic}) = \frac{30000^2 + 205,81 \cdot 30000 + 455,25}{30000^2 + 373,99 \cdot 30000 + 7200,38} = 0,9917$$

O coeficiente de fluência do concreto é dado pela expressão abaixo:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_a + \varphi_{f\infty} [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{d\infty} \beta_d$$

$$\varphi_{(10000,45)} = 0,1431 + 3,170[0,9917 - 0,5531] + 0,4 \cdot 0,997 = 1,933$$