

Universidade Federal de São Carlos  
Programa de Pós-Graduação em Física

FASES GEOMÉTRICAS E INVARIANTES DINÂMICOS EM  
MECÂNICA QUÂNTICA

Eduardo Inácio Duzzioni

Tese apresentada à Universidade Federal de  
São Carlos, Programa de Pós-Graduação em  
Física, como requisito parcial à obtenção do  
título de doutor em Física, sob orientação do  
Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa.

São Carlos  
Maio - 2007

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

D988fg

Duzzioni, Eduardo Inácio.

Fases geométricas e invariantes dinâmicos em mecânica quântica / Eduardo Inácio Duzzioni. -- São Carlos : UFSCar, 2008.

125 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2007.

1. Fases quânticas geométricas. 2. Mecânica quântica. 3. Invariantes dinâmicos. I. Título.

CDD: 530.1 (20<sup>a</sup>)

**EDUARDO INACIO DUZZIONI**

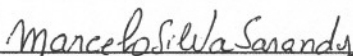
*Tese de Doutorado submetida à  
Coordenação do Programa de Pós-  
Graduação em Física da  
Universidade Federal de São  
Carlos, como requisito parcial  
para a obtenção do título de  
Doutor em Física.*

**Aprovado em: 16/05/2007**

**Banca Examinadora**



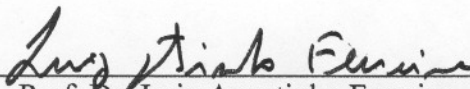
Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa (Orientador)  
*Universidade Federal de São Carlos – DF/UFSCar*



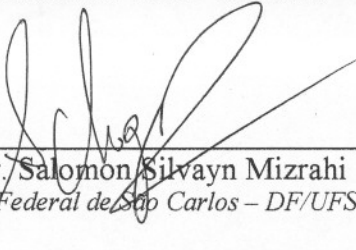
Prof. Dr. Marcelo Silva Sarandy  
*Universidade Federal Fluminense – EEIMVR/UFF*



Prof. Dr. Antônio Vidiella Barranco  
*Universidade de Campinas – IF/UNICAMP*



Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira  
*Universidade de São Paulo – IFSC/USP*



Prof. Dr. Salomon Silvayn Mizrahi  
*Universidade Federal de São Carlos – DF/UFSCar*

À minha filha Duda, à minha esposa Lê e  
aos meus pais Sirlei e Nilton.

À Deus.

À Universidade Federal de São Carlos.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES  
e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq,  
pelo apoio financeiro necessário mas não suficiente.

Ao meu orientador Miled Hassan Youssef Moussa.

Um agradecimento em especial ao Denilson e à Rita, as pessoas  
que ajudaram a mim e a minha família desde a nossa chegada à São Carlos.

Ao professor Celso Jorge Villas-Bôas, companheiro de congressos,  
pelo apoio e amizade.

Ao Professor Salomon S. Mizrahi pelo aprendizado e pelas discussões sobre Física.

Aos amigos Liliana, Carol e Augusto pelo apoio e companhia durante os  
solitários fins de semana em São Carlos.

Ao professor Roberto M. Serra pela motivação e empolgação.

Ao professor Marcelo S. Sarandy pelas discussões sobre fases geométricas.

Aos companheiros e ex-companheiros de sala, Wellington Gáelas, Clodoaldo C. Rulli,  
Alexandre Cacheffo, Helena C. Braga e Fábio P. dos Reis,  
que me aturaram ao longo dos anos de doutoramento.

Aos colegas do grupo de Óptica Quântica: Fabiano O. Prado,  
Lucas C. Céleri, Ricardo L. Rodrigues, Alexandre Dodonov, Alexandre C.  
Yoshida, Mickel A. de Ponte, Alcenísio J. de Jesus Silva, Simone F.  
Souza, Micheline B. Reno e Tiago, que puderam me proporcionar interessantes  
discussões sobre os mais variados assuntos.

Aos colegas que fiz ao longo do doutorado, tais como Gilberto A. Prativiera,  
Luiz Gustavo E. Arruda, Antônio S. M. Castro, Norton G. de Almeida e Mauro Andreatta.

Ao colega Hélio Tsuzuki pelo auxílio com os gráficos do Gnuplot.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta pesquisa.

Aos meus irmãos e irmãs, Renata, Fernando, Daniela, Marcelo  
e Rodrigo, por formarem a família que me deu a base para chegar até aqui.

Não poderia deixar de agradecer aos meus pais, Sirlei e Nilton, exemplos de muita luta e perseverança, pelo apoio recebido em todos os aspectos.

E às minhas duas companheiras inseparáveis e amadas, Maria Eduarda e Alexandra, que sem dúvida nenhuma, sem elas eu não estaria em São Carlos. Peço mil desculpas por tê-las feito abandonar os amigos, familiares e a maravilhosa cidade de Florianópolis para me seguirem.

---

# Resumo

O crescente interesse pelo estudo das fases geométricas (motivado principalmente pela possibilidade de se realizar computação quântica geométrica robusta a alguns tipos de erros) e a busca por técnicas capazes de resolver problemas com dependência temporal em Mecânica Quântica, são os tópicos abordados nesta tese.

*i)* Levando em conta a tecnologia atualmente disponível, apresenta-se um esquema para controlar e medir fases geométricas não-adiabáticas em eletrodinâmica quântica em cavidades. Dentro deste contexto, é possível gerar estados de superposição do modo da cavidade que adquirem fases relativas de caráter puramente geométrico, denominados estados geométricos do tipo *gato de Schrödinger*.

*ii)* Em se tratando de dois condensados de Bose-Einstein interagentes na aproximação de dois modos, modelados por um hamiltoniano cujos parâmetros são dependentes do tempo, analisa-se a fase geométrica não-adiabática e não-cíclica adquirida pelo vetor de estado do sistema. Para isto, obtêm-se soluções analíticas da equação de Schrödinger em diferentes regimes de parâmetros. Conexões entre as constantes de movimento obtidas para cada solução e as fases geométricas são estabelecidas. Também são estudados os efeitos da temporalidade dos parâmetros sobre a fase geométrica, bem como sobre a troca de população e fase relativa entre as componentes condensadas.

*iii)* Partindo apenas da condição de transporte paralelo, define-se uma expressão geral para a fase geométrica adquirida pelos estados da base de um sistema. A fase obtida gera observáveis invariantes de gauge e aplica-se a um cenário geral de evoluções adiabáticas ou não-adiabáticas, cíclicas ou não-cíclicas e transicionais ou não-transicionais de estados puros ou mistos do sistema, recuperando vários resultados presentes na literatura.

*iv)* Apresenta-se por fim, em paralelo à considerações sobre a técnica dos invariantes dinâmicos, um método alternativo para a obtenção do operador densidade de sistemas de dois níveis. Resultados preliminares apontam que este método pode ser estendido para o tratamento de sistemas de dois níveis dissipativos, além de sistemas de dois níveis interagentes, tais como cadeias de spins  $1/2$ .

# Abstract

The increasing interest to understand the geometric phases (mainly due to the possibility to achieve geometric quantum computation robust against some kind of errors) and the search for new techniques to solve time-dependent problems in Quantum Mechanics, are the topics approached in this thesis.

*i)* Within nowadays technology, it is presented a scheme to control and measure the nonadiabatic geometric phases in cavity quantum electrodynamics. In this context, it is possible to generate superposition states of the cavity mode which acquire relative phases of purely geometric character, termed the geometric *Schrödinger cat*-like states.

*ii)* For two interacting Bose-Einstein condensates in the two-mode approximation, modeled by a Hamiltonian whose parameters are time dependent, the nonadiabatic and noncyclic geometric phase acquired by the state of the system is analyzed. For this purpose, analytical solutions of the Schrödinger equation are obtained in different regimes of parameters. Connections between the constants of motion associated to each solution and the geometric phases are established. The effects of the time-dependent parameters on the geometric phase as well as the population imbalance and relative phase between the two condensed components are analyzed.

*iii)* Starting only from the parallel transport condition, it is presented a general definition of the geometric phase acquired by the basis states of a system. The defined phase generates gauge invariant observables which apply to a general scenario of adiabatic or nonadiabatic, cyclic or noncyclic, and transitional or nontransitional evolutions of pure or mixed states of the system. Several results presented in the literature are recovered.

*iv)* Finally, together with some considerations about the dynamical invariant technique, it is presented an alternative method to obtain the density operator of two level systems. Preliminary results show that this method can be extended to dissipative as well as interacting two level systems, such as spins-1/2 chains.



# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2 Fases geométricas e os invariantes dinâmicos</b>	<b>17</b>
2.1 Fases geométricas . . . . .	17
2.2 Teoria dos invariantes dinâmicos . . . . .	23
2.2.1 Autoestados não-degenerados . . . . .	25
2.2.2 Autoestados degenerados . . . . .	27
<b>3 Fase geométrica induzida pelo “efeito Stark”</b>	<b>29</b>
3.1 Dinâmica do sistema e fases geométricas . . . . .	30
3.2 Interpretação da fase geométrica . . . . .	34
3.3 Proposta para a implementação experimental . . . . .	36
3.3.1 Fontes de imperfeições experimentais . . . . .	38
3.4 Estados geométricos do tipo <i>gato de Schrödinger</i> . . . . .	39
<b>4 Fases geométricas em CBE acoplados</b>	<b>41</b>
4.1 O hamiltoniano de dois modos DT . . . . .	43
4.2 Dinâmica de CBE acoplados a partir de estados de Bloch iniciais . . . . .	49
4.3 Fases geométricas adquiridas pelos EB . . . . .	51
4.4 Fase geométrica não-adiabática e dinâmica de pseudospin em CBE acoplados . . . . .	53

4.4.1	Solução para $r$ constante . . . . .	54
4.4.2	Solução ressonante . . . . .	57
4.4.3	Solução não-ressonante . . . . .	63
4.4.4	Efeitos da dependência temporal sobre a fase geométrica . . . . .	66
4.5	Fases geométricas e o efeito Josephson externo . . . . .	68
4.5.1	Poço-duplo simétrico . . . . .	69
4.5.2	Poço-duplo assimétrico . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Construção geral da fase geométrica</b>	<b>71</b>
5.1	Considerações gerais sobre a fase geométrica . . . . .	72
5.1.1	Condição de transporte paralelo . . . . .	72
5.1.2	Trajetórias abertas . . . . .	77
5.1.3	Invariância de gauge . . . . .	80
5.2	Fases geométricas via invariantes dinâmicos . . . . .	81
5.2.1	Invariantes dinâmicos em sistemas abertos . . . . .	81
5.2.2	Dinâmica livre de dissipação - caso degenerado . . . . .	85
5.2.3	Dinâmica livre de dissipação - caso não-degenerado . . . . .	86
5.3	Aplicação - Fase geométrica de um sistema de dois níveis . . . . .	87
5.3.1	Caso dissipativo - $\gamma \neq 0$ . . . . .	87
5.3.2	Caso não-dissipativo - $\gamma = 0$ . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Considerações sobre a teoria dos invariantes e o operador densidade para sistema de dois níveis</b>	<b>94</b>
6.1	Determinando o operador invariante . . . . .	95
6.2	Operador densidade para sistemas de dois níveis - O método . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>106</b>
<b>A</b>	<b>Engenharia de interações</b>	<b>108</b>
<b>B</b>	<b>Soluções analíticas das equações características (4.11)</b>	<b>112</b>
B.1	Processo ressonante - $\Delta_R(t) = \omega(t)$ . . . . .	112

---

B.2	Processo não-ressonante - $\Delta_R(t) = \omega(t) - \varpi$ . . . . .	113
B.3	Solução para $r$ constante . . . . .	114

# Lista de Figuras

3.1	Trajетórias seguidas pelas amplitudes $\alpha_g(t)$ e $\alpha_e(t)$ dos estados coerentes no espaço de fase durante intervalo $\chi t \in [0, \pi]$ . . . . .	35
3.2	Trajетórias seguidas pelas amplitudes dos estados do campo $ \alpha_\ell(t)\rangle$ associados a cada nível atômico $g$ e $e$ , no hiperbolóide de <i>Poincaré</i> durante um período de evolução (considerando um referencial girante com frequência $\nu$ ). . . . .	36
3.3	Arranjo experimental em EQC para a implementação de uma evolução em que as fases adquiridas são puramente geométricas e para a medida da fase geométrica não-adiabática. . . . .	37
4.1	Evolução do valor absoluto da fase geométrica $ \phi_G(t) $ <i>versus</i> $\tau = \omega_{a0}t$ , para $r$ constante, com $\omega_{a0} = 2\omega_{b0} = 62, 5\pi$ Hz. . . . .	55
4.2	Evolução dos vetores de Bloch para a solução com $r$ constante durante o intervalo de tempo $\tau = 4\pi$ . Os vetores cinza e preto correspondem as condições iniciais $(r_0, \phi_0) = (\pi/2, 0)$ e $(\pi/2, 1, 0)$ , respectivamente, com $\omega_{a0} = 2\omega_{b0} = 62, 5\pi$ Hz e $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$ . . . . .	56
4.3	Espaço de fase $r(t) \times [\phi(t) - \delta(t)]$ obtido como projeção da superfície que decorre da constante de movimento $\mathcal{C} = \sin[r(t)] \cos[\phi(t) - \delta(t)]$ para a solução ressonante. . . . .	57
4.4	Evolução da fase geométrica $\phi_G(t)$ <i>versus</i> $\tau = g_0t$ , para a solução ressonante, com $\Delta_R = 0$ e $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = \tilde{g} = 0$ . . . . .	59
4.5	Evolução dos vetores de Bloch para a solução ressonante durante o intervalo de tempo $\tau = \pi$ . Os vetores preto e cinza correspondem as condições iniciais $(\pi, \pi/2)$ e $(\pi/3, 0)$ , com $\Delta_R = 0$ e $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = \tilde{g} = 0$ . . . . .	60

- 4.6 Evolução da fase geométrica  $\phi_G(t)$  *versus*  $\tau = g_0 t$ , para a solução ressonante com  $\Delta_R \neq 0$  e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = \tilde{g} = 0$ . . . . . 61
- 4.7 Evolução dos vetores de Bloch para a solução ressonante durante o intervalo de tempo  $\tau = \pi$ . Os vetores preto e cinza correspondem as condições iniciais  $(\pi, \pi/2)$  e  $(\pi/3, 0)$ , com  $\Delta_R \neq 0$  e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = \tilde{g} = 0$ . . . . . 62
- 4.8 Espaço de fase  $r(t) \times [\phi(t) - \delta(t)]$  obtido como projeção da superfície que decorre da constante de movimento  $\mathcal{C} = \eta \sin [r(t)] \cos [\phi(t) - \delta(t)] - \cos [r(t)]$  para a solução não-ressonante. . . . . 64
- 4.9 Evolução da fase geométrica  $\phi_G(t)$  *versus*  $\tau = g_0 t$  para a solução não-ressonante. Todas as curvas partem da mesma condição inicial  $(\pi/3, 0)$ , com  $\omega_{a0} = 2\omega_{b0} = g_0/10$  e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$ , para diferentes valores de  $\eta$ . . . . . 65
- 4.10 Evolução dos vetores de Bloch para a solução não-ressonante durante o intervalo de tempo  $\tau \simeq 9\pi/10$ . Os vetores preto e cinza, correspondendo a  $\eta = 0, 1$  e  $\eta = 2$ , respectivamente, partem do mesmo ponto  $(\pi/3, 0)$  com  $\omega_{a0} = 2\omega_{b0} = g_0/10$  e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$ . . . . . 66
- 4.11 Evolução da fase geométrica  $\phi_G(\tau)$  *versus*  $\tau = g_0 t$  para as soluções ressonantes e não-ressonantes com a condição inicial  $(\pi/3, 0)$ . . . . . 68

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo da dinâmica dos sistemas Físicos, ou seja, a maneira como estes evoluem com o passar do tempo, é fundamental para se fazer qualquer previsão, determinística ou probabilística, do seu comportamento em tempos futuros. Portanto, desenvolver técnicas que permitam resolver as equações que descrevem tal dinâmica é extremamente importante. Em particular, obter a evolução de sistemas onde seus parâmetros podem ser alterados ao longo de suas trajetórias, problemas com dependência temporal explícita, é uma tarefa consideravelmente mais complicada.

Provavelmente, um dos primeiros questionamentos sobre problemas com dependência temporal no contexto da Teoria Quântica, foi feito durante a Primeira Conferência de Solvay em 1911[1]. Com a finalidade de entender melhor o processo de quantização da energia introduzido por M. Planck, como um ato de “desespero” para explicar o espectro de emissão da radiação de corpo negro, procurava-se análogos mecânicos ao oscilador harmônico quântico, cuja energia *era* dada por  $E = nh\nu$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), onde  $\nu$  é a frequência de oscilação e  $h$  a constante de Planck. Tendo um pêndulo como exemplo, G. Lorentz fez o seguinte questionamento a A. Einstein<sup>1</sup> — *O que acontecerá com o pêndulo se o seu comprimento variar? Uma vez que a sua frequência mudará, a regra de quantização de Planck será violada?* A. Einstein resolveu parcialmente a questão da seguinte maneira — *Quando o comprimento do pêndulo é variado continuamente e de*

---

<sup>1</sup>Para contar o acontecimento, o autor se deu a liberdade de utilizar as suas próprias palavras ao invés daquelas utilizadas pelos protagonistas da história.

---

*maneira infinitamente lenta, a sua energia de oscilação permanece  $h\nu$ , se inicialmente esta for igual a  $h\nu$ , ou seja, a sua energia mudará proporcionalmente a  $\nu$ .* Então, pode-se dizer que Lorentz e Einstein encontraram uma primeira versão de um processo adiabático na Antiga Teoria Quântica, ou seja, um processo onde o número quântico  $n$  não é alterado durante toda a evolução do sistema, caracterizando um caso particular de um “*invariante adiabático*”.

Casos gerais de *invariantes adiabáticos* foram introduzidos e estudados anteriormente por L. Boltzmann, em 1866, com o intuito de deduzir a segunda lei da termodinâmica a partir de princípios da mecânica. Em sua dedução, um estado do sistema mecânico era caracterizado por um conjunto de parâmetros  $\{R_i\}$ , sendo que após uma dada evolução periódica com frequência  $\nu$ , se o sistema não absorvesse nem liberasse calor com a variação dos parâmetros  $R_i$ , o processo era denominado adiabático. A quantidade conservada  $I$  neste sistema era a razão entre a energia cinética média e a frequência  $\nu$ . No começo de 1913, P. Ehrenfest [2] introduziu o termo “invariante adiabático” para tais quantidades conservadas e generalizou a regra de quantização para qualquer movimento periódico, mesmo antes de N. Bohr tê-la utilizado para estudar a quantização das órbitas circulares do átomo de hidrogênio. Este conjunto de fatos levaram Ehrenfest a formular a hipótese adiabática [3], a qual afirma que “*qualquer estado que se transforma adiabaticamente nos parâmetros do sistema, retorna novamente a um estado definido com os mesmos números quânticos*”. A primeira demonstração da hipótese adiabática de Ehrenfest, que hoje é conhecida como *teorema adiabático*, foi feita em 1928 por M. Born e V. Fock [4] para estados não-degenerados de um sistema mecânico quântico. Uma prova matemática formal desta foi apresentada em 1950 por T. Kato [5].

Passado mais de meio século, quando se pensava que o problema sobre as evoluções adiabáticas estivesse solucionado, em 1984, M. V. Berry mostrou que um estado evoluindo adiabaticamente adquire uma fase de caráter geométrico que retém memória da sua trajetória durante a sua evolução no espaço de Hilbert [6], além da fase dinâmica já presente na versão do teorema adiabático de Born e Fock<sup>2</sup>. Intitulada posteriormente como *fase*

---

<sup>2</sup>Born e Fock “demonstraram” que para uma *evolução não-cíclica* a fase de caráter geométrico poderia ser redefinida como pertencendo a função de onda inicial. Isto justifica o fato de que embora esta fase já

---

*de Berry*, esta fase registrou a sua importância para a Física desde a sua origem, mostrando por exemplo, que a fase de Aharonov-Bohm [7] possui um caráter puramente geométrico. Alguns outros exemplos de fases geométricas<sup>3</sup> foram descobertos antes de 1984 em diferentes contextos da Física [9], tais como por Pancharatnam (1956) no estudo das fases clássicas adquiridas pelas mudanças de polarização da luz [10]; por Herzberg e Longuet-Higgins (1963) no estudo de moléculas poliatômicas para hamiltonianos reais [11]; por Stone (1976) também no estudo de moléculas poliatômicas, mas para hamiltonianos complexos [12]; e por Mead e Truhlar (1979) com a introdução de um potencial de gauge externo para tratar o problema já estudado por Herzberg e Longuet-Higgins, e Stone [13]. Porém, somente após a introdução das idéias provenientes da geometria e da topologia é que a comunidade científica estava preparada para compreender as fases geométricas [9].

Consecutivamente ao surgimento da fase de Berry, seguiram-se intensos esforços para remover a condição de adiabaticidade utilizada por Berry em sua demonstração [9]. Dentre as várias propostas, destaca-se o uso da *teoria dos invariantes dinâmicos* como um caminho alternativo [14]. Embora o conceito de quantidade invariante tenha sido introduzido na Teoria Quântica por Ehrenfest em 1913, considerando evoluções adiabáticas, este somente pôde ser generalizado para evoluções não-adiabáticas em 1967 por H. R. Lewis [15]. Contudo, foi em 1969 que Lewis e Riesenfeld [14] apresentaram uma metodologia de como aplicar esta teoria para encontrar soluções da equação de Schrödinger com hamiltonianos dependentes do tempo (DT). Um pouco mais tarde, em 1978, Dodonov e Man'ko [16] estenderam a aplicação desta técnica para qualquer equação de movimento em Mecânica Quântica.

Neste novo cenário, a fase geométrica é adquirida pelos autoestados do operador invariante, que é uma quantidade explicitamente DT e cujo valor médio é constante. Diferentemente da solução obtida por Berry, nesta teoria não é necessário impor qualquer restrição sobre a dinâmica do sistema, sendo que no limite adiabático, a fase geométrica de Lewis e estivesse presente na sua versão do teorema adiabático, pensava-se que esta não era importante.

---

<sup>3</sup>Entende-se como fase geométrica toda generalização da fase de Berry, incluindo ela própria, que dependa somente da trajetória percorrida pelo vetor de estado no espaço de parâmetros do sistema [6], ou no espaço projetivo do espaço de Hilbert [8].



---

Riesenfeld recupera a fase de Berry. Mesmo que desde a construção da teoria dos invariantes, a fase geométrica cíclica estivesse presente na fase temporal de Lewis e Riesenfeld, a sua relevância só foi notada por Morales [17] em 1988, e de forma independente por Mizrahi [18] em 1989, seguindo-se por outros autores [19, 20, 21].

Tendo como motivação o crescente interesse pelo estudo das fases geométricas nos últimos anos e a busca por técnicas capazes de resolver problemas com dependência temporal em Mecânica Quântica, serão abordados nesta tese os temas *fases geométricas e teoria dos invariantes dinâmicos*, bem como a conexão entre os mesmos. O texto a seguir está dividido da seguinte maneira: no capítulo 2, será introduzida a fase de Berry, prosseguindo-se com uma revisão da literatura sobre algumas definições e aplicações de fases geométricas. O desenvolvimento da teoria dos invariantes dinâmicos como originalmente apresentada por Lewis e Riesenfeld também será elucidado. Ao fim deste capítulo, algumas definições de fases geométricas originárias desta teoria serão explicitadas.

Uma proposta para controlar e medir fases geométricas não-adiabáticas no contexto da eletrodinâmica quântica em cavidades será formulada no capítulo 3. Através de evoluções em que o estado do sistema adquire somente fases geométricas, também será mostrado que é possível gerar estados geométricos do tipo *gato de Schrödinger*.

No capítulo 4, será feito um estudo da fase geométrica não-adiabática e não-cíclica adquirida pelo vetor de estado de um condensado de Bose-Einstein (CBE) com duas componentes. Neste contexto, procurar-se-á estabelecer uma conexão entre as fases geométricas e as constantes de movimento do sistema. Estas últimas são obtidas através de soluções analíticas de equações diferenciais acopladas dos parâmetros que compõem o operador de evolução. Seguem ainda, discussões sobre os efeitos da temporalidade dos parâmetros do hamiltoniano nas fases geométricas, bem como na troca de população e fase relativa entre os dois CBE acoplados.

Apresentar-se-á no capítulo 5, uma generalização das fases geométricas para evoluções não-adiabáticas e não-cíclicas adquiridas pelos estados da base de um sistema que pode evoluir unitariamente ou não-unitariamente.

No capítulo 6, explorar-se-á algumas peculiaridades da teoria dos invariantes dinâmicos, onde são feitas considerações sobre a indeterminação dos coeficientes do operador

invariante no instante inicial. Baseando-se nesta premissa, será proposta uma teoria alternativa para encontrar o operador densidade de sistemas de dois níveis, sem a necessidade do operador invariante. Por fim, as conclusões e perspectivas deste trabalho serão apresentadas no capítulo 7.

# Capítulo 2

## Fases geométricas e os invariantes dinâmicos

Para contextualizar a discussão sobre fases geométricas e invariantes dinâmicos, primeiramente será feita uma revisão de cada um destes tópicos, onde procurar-se-á estabelecer uma conexão entre os mesmos. Ao final do capítulo será apresentada uma breve discussão sobre as fases geométricas obtidas para estados puros via teoria dos invariantes.

### 2.1 Fases geométricas

Talvez uma das maneiras mais simples de se introduzir o conceito de fases geométricas, seja através do exemplo paradigmático de uma partícula de spin  $1/2$  imersa em um campo magnético que varia lentamente quando comparado com a frequência de Larmor do sistema. Para obter o estado do sistema em um dado tempo  $t$ , será introduzido o teorema adiabático de acordo com a Ref. [22], o qual declara o seguinte: “*Se um sistema quântico descrito por um hamiltoniano  $DH$  não-degenerado, estiver inicialmente no  $n$ -ésimo autoestado de  $\mathbf{H}(0)$  (hamiltoniano no tempo  $t = 0$ ), e se  $\mathbf{H}(t)$  evoluir de forma suficientemente lenta, então, o estado do sistema no tempo  $t$  permanecerá no  $n$ -ésimo autoestado de  $\mathbf{H}(t)$  a menos de um fator de fase multiplicativo.*” Este enunciado pode ser

representado matematicamente da seguinte maneira ( $\hbar = 1$ ):

$$\left| \frac{\langle n; t | \frac{d}{dt} | m; t \rangle}{E_m(t) - E_n(t)} \right| \ll 1; \quad m \neq n \text{ e } t \in [0, T], \quad (2.1)$$

onde  $|n; t\rangle$  e  $|m; t\rangle$  são autoestados instantâneos ortonormais de  $\mathbf{H}(t)$  com autovalores  $E_n(t)$  e  $E_m(t)$ , respectivamente, e  $T$  é o tempo total de evolução do sistema. Portanto, *de acordo com esta versão do teorema adiabático*, se  $|\Psi(0)\rangle = |n; 0\rangle$ , então, o estado do sistema no tempo  $t$  será escrito como

$$|\Psi(t)\rangle = \exp[i\beta_n(t)] |n; t\rangle, \quad (2.2)$$

com  $\beta_n(t) = -\int_0^t E_n(t') dt'$  denominada *fase dinâmica*. A grande contribuição de M. V. Berry [6] foi perceber que após uma evolução cíclica, o sistema adquire uma fase adicional  $\gamma_n(T)$ , além de  $\beta_n(T)$ , dada por,

$$\gamma_n(T) = \int_0^T dt \langle n; t | i \frac{d}{dt} | n; t \rangle = i \oint_C d\vec{R} \cdot \langle n; \vec{R} | \nabla_{\vec{R}} | n; \vec{R} \rangle, \quad (2.3)$$

sendo que  $\vec{R} = \vec{R}(t)$  representa um vetor no espaço de parâmetros que constitui o hamiltoniano, e  $C$  é o circuito fechado percorrido pelo vetor  $\vec{R}$ . O caráter geométrico da fase de Berry reside no fato desta ser adquirida devido à curvatura do espaço de parâmetros, a qual é verificada através do transporte paralelo do estado  $|n; \vec{R}\rangle$ , e depende somente do circuito  $C$ . A condição de transporte paralelo sobre a evolução de um vetor normalizado  $|n; t\rangle$  é satisfeita quando<sup>1</sup>

$$\langle n; t | \frac{d}{dt} | n; t \rangle = 0. \quad (2.4)$$

Outra propriedade da fase  $\gamma_n(\vec{R})$  é a sua invariância de gauge, o que significa dizer que não é possível removê-la através da simples adição de um fator de fase  $\delta(\vec{R})$  ao estado. Para verificar tal propriedade, basta substituir  $|n; \vec{R}\rangle$  por  $|n; \vec{R}\rangle' = e^{i\delta(\vec{R})} |n; \vec{R}\rangle$  na Eq. (2.3), obtendo-se o seguinte resultado para a fase transformada  $\gamma_n'(\vec{R}(T)) = \gamma_n(\vec{R}(T)) -$

<sup>1</sup>A definição usual de transporte paralelo considera  $\langle n; t | \frac{d}{dt} | n; t \rangle = 0$ , uma vez que o vetor  $|n; t\rangle$  é transportado paralelamente a ele mesmo no intervalo entre  $t$  e  $t + dt$ . Contudo, na Ref. [8] é apresentada uma definição de transporte paralelo generalizada,  $\langle n; t | \frac{d}{dt} | m; t \rangle = 0$ , onde  $n$  pode ser diferente de  $m$ , em geral.

$[\delta(\vec{R}(T)) - \delta(\vec{R}(0))]$ . Como a função  $\delta(\vec{R})$  é unicamente determinada para cada  $\vec{R}(t)$ , conclui-se que  $\gamma'_n(\vec{R}(T)) = \gamma_n(\vec{R}(T))$ . Por último, é possível verificar que a fase de Berry é independente da velocidade com que a trajetória é percorrida (dentro da evolução adiabática), uma vez que qualquer transformação monotonicamente diferenciável,  $t \rightarrow s(t)$ , torna a Eq. (2.3) invariante, isto é,  $\gamma_n(t) \rightarrow \gamma_n(s(t))$  [23].

*Exemplo* - Uma partícula de spin 1/2 imersa em um campo magnético esfericamente simétrico que oscila com frequência  $\omega$  em torno do eixo  $z$ , pode ser descrita pelo seguinte hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(t) &= \vec{R}(t) \cdot \vec{\sigma} \\ &= \omega_0 [\sigma_x \sin \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0) + \sigma_y \sin \theta_0 \sin(\omega t + \phi_0) + \sigma_z \cos \theta_0], \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $\omega_0 = -\gamma B/2$ , sendo  $\gamma$  o fator giromagnético da partícula,  $\sigma_i$  ( $i = x, y, z$ ) as matrizes de Pauli e  $B$  a intensidade do campo que está inicialmente orientado na direção definida pelos ângulos polar  $\theta_0$  e azimutal  $\phi_0$  [24]. Os autovetores de  $\mathbf{H}(t)$  são obtidos de maneira direta,

$$|+; t\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0/2) \exp[-i(\omega t + \phi_0)] \\ \sin(\theta_0/2) \end{pmatrix}, \quad (2.6a)$$

$$|-; t\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_0/2) \\ \cos(\theta_0/2) \exp[i(\omega t + \phi_0)] \end{pmatrix}, \quad (2.6b)$$

juntamente com os seus respectivos autovalores

$$E_{\pm} = \pm\omega_0, \quad (2.7)$$

os quais permitem encontrar através da Eq. (2.1) as limitações impostas pela condição adiabática, ou seja, que  $|\omega \sin \theta_0 / \omega_0| \ll 1$  para qualquer  $\theta_0 \in [0, \pi]$ . Então, utilizando-se as Eqs. (2.3) e (2.6), obtém-se as fases de Berry adquiridas pelos autoestados  $|\pm; t\rangle$  após o período  $T = 2\pi/\omega$

$$\gamma_{\pm}(C) = \pm\pi(1 - \cos \theta_0). \quad (2.8)$$

Lembrando que os ângulos sólidos englobados pelas trajetórias descritas pelos autoestados  $|\pm; t\rangle$ , a partir da origem do sistema de coordenadas, são dados por

$$\Omega_{\pm} = \pm 2\pi(1 - \cos \theta_0), \quad (2.9)$$

pode-se reescrever as fases de Berry como  $\gamma_{\pm}(C) = \pm |\Omega_{\pm}|/2$ . Desta última expressão, conclui-se que a fase de Berry depende somente da área descrita pelo vetor  $\vec{R}(t)$  no espaço de parâmetros, onde os fatores  $\pm 1/2$  surgem das projeções de spin.

Com a introdução da fase de Berry e um exemplo de sua aplicação, pôde-se ter uma noção mais clara do seu caráter geométrico e das suas limitações. Contudo, para ter conhecimento das suas contribuições para a Física, será feita uma pequena revisão da literatura, a qual segue abaixo.

Após a descoberta de Berry [9], a intensa investigação teórica sobre fases geométricas associadas à evolução de estados puros, teve como um dos seus precursores Barry Simon, que já tendo o conhecimento do trabalho de Berry mesmo antes da sua publicação, forneceu em 1983 uma interpretação matemática desta fase no contexto da geometria diferencial, conectando-a com a teoria dos *fiber bundles* [25]. Em 1984, Wilczek e Zee generalizaram este conceito para fases não-abelianas (não-comutativas) associadas às evoluções cíclicas e adiabáticas de autoestados degenerados em energia [26]. Já Aharonov e Anandan, obtiveram em 1987 uma expressão para a fase geométrica cíclica e não-adiabática adquirida por uma solução da equação de Schrödinger [27]. Em seguida, em 1988, Samuel e Bhandari através das idéias de Pancharatnam, mostraram que as fases geométricas surgem mesmo em evoluções não-cíclicas e não-unitárias [28]. Morales [17] e Mizrahi [18], em 1988 e 1989, respectivamente, mostraram que é possível obter fases geométricas associadas às evoluções cíclicas e não-adiabáticas dos autoestados de uma quantidade conservada no tempo, o operador invariante de Lewis e Riesenfeld [14]. Através de uma abordagem cinemática, Aitchison e Wanelik [29] em 1992 e Mukunda e Simon [30] em 1993, apresentaram uma definição geral para as fases geométricas adquiridas em evoluções não-cíclicas e não-adiabáticas. Para finalizar esta breve revisão sobre fases geométricas adquiridas por estados puros, é importante citar o trabalho apresentado por Manini e Pistolesi em 2000 [31], que introduziram o conceito de fase geométrica não-diagonal. Neste contexto, a fase geométrica é definida como sendo a fase que o estado  $|\psi_m(\vec{s}_f)\rangle$  adquiriu com relação ao estado  $|\psi_k(\vec{s}_i)\rangle$ , onde  $\vec{s}$  variou de  $\vec{s}_i$  a  $\vec{s}_f$ , com  $k \neq m$ .

Em se tratando de evoluções de estados mistos, um primeiro estudo foi apresentado por Uhlmann em 1986 [32, 33, 34], que através de uma abordagem puramente matemática,

definiu a condição de transporte paralelo e a fase geométrica para operadores densidade. Recentemente, em 2002, Sjöqvist e colaboradores desenvolveram um método operacional, utilizando interferometria, para obter a fase geométrica adquirida por um operador densidade que evolui unitariamente [35, 36, 37]. A extensão do trabalho de Manini e Pistolesi, por Filipp e Sjöqvist em 2003, gerou uma definição de fases geométricas não-diagonais para estados mistos [38, 39]. Ainda neste mesmo ano, tendo como base a Ref. [35], De Faria e colaboradores [40], e consecutivamente, Ericsson e colaboradores [41], estenderam o conceito de fases geométricas para sistemas sob a ação do meio ambiente, através de mapas completamente positivos para evoluções não-unitárias do operador densidade.

Contudo, o estudo das fases geométricas para evoluções não-unitárias começou bem antes. No fim da década de 80, Garrison e Wright [42] e no início da década de 90, Dattoli e colaboradores [43], abordaram este assunto via equação de Schrödinger com hamiltonianos não-hermitianos. Várias técnicas foram empregadas para resolver tal problema, como por exemplo: abordagens via equações mestras, as quais foram utilizadas por vários autores [44, 45, 46, 47, 48, 49]; o método dos saltos quânticos, utilizado primeiramente por Carollo e colaboradores em 2003 [50], e posteriormente por Fuentes-Guridi e colaboradores em 2005 [51]; a técnica de purificação de estados, utilizada por Tong e colaboradores em 2004 [52, 53, 54]; e a compreensão das fases geométricas como distribuições, por Marzlin e colaboradores também em 2004 [55]. Todavia, uma descrição genuína das fases geométricas para evoluções adiabáticas em sistemas abertos foi construída por Sarandy e Lidar na Ref. [56], uma vez que para tratar o mesmo problema nas versões anteriores, não se tomou o devido cuidado em estender o teorema adiabático quando o reservatório está presente. Zelando por uma aproximação adiabática correta em sistemas abertos, Thunström e colaboradores [57] definiram fases geométricas para este tipo de evolução, porém, utilizaram a base de autoestados do hamiltoniano para expandir o operador densidade, ao invés da base de Jordan do superoperador dinâmico, como considerado anteriormente [56].

Paralelamente ao desenvolvimento e a compreensão das abordagens conferidas às fases geométricas, associadas aos mais variados tipos de evoluções a que um sistema físico está sujeito, o importante papel desempenhado por tais fases em algumas áreas da Física, e até

da Química, vem sendo consolidado ao longo dos anos. Alguns destes exemplos ocorrem em sistemas moleculares, cuja relevância data mesmo antes da descoberta de Berry (ver introdução), e em sistemas da matéria condensada. Neste último, as aplicações vão desde a identificação de fases geométricas na função de onda de Bloch, as quais podem afetar a dinâmica de elétrons em metais e semicondutores, até suas implicações na teoria do efeito Hall quântico [58]. Recentes trabalhos têm demonstrado que também é possível obter informações adicionais sobre o sistema físico através da sua correspondente fase geométrica. Na Ref. [59], Fuentes-Guridi e colaboradores mostraram que o vácuo quântico é capaz de induzir fases geométricas, assinalando a natureza clássica ou quântica do campo de radiação quando interagindo com um sistema de dois níveis. Uma proposta para medi-la foi apresentada na Ref. [60]. Serra e colaboradores, em um modelo do tipo Jaynes-Cummings, mostraram como simular o comportamento aniônico e como transmutar a estatística do sistema átomo-campo via fase geométrica adiabática [61]. Já na Ref. [62], Carollo e Pachos mostraram que é possível detectar regiões de criticalidade através da fase de Berry. A demonstração matemática da conexão geral entre a fase de Berry e transições de fase quânticas foi feita por Hamma na Ref. [63].

Mas talvez, dentre todas as contribuições oriundas da descoberta da fase geométrica, uma das mais significantes seja a possibilidade de se realizar computação quântica robusta a erros com esta fase. Em 1999, Zanardi e Rasetti [64] propuseram a realização de operações lógicas quânticas através de fases geométricas não-abelianas dentro de subespaços degenerados [26]. Designada por *computação quântica holonômica*<sup>2</sup>, esta imediatamente adquiriu vários adeptos, resultando em uma série de propostas teóricas para a sua implementação [65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74]. Algumas das motivações que levaram à computação quântica geométrica ou holonômica são [75]: *i*) dentro de um subespaço degenerado em energia a fase dinâmica é a mesma para todos os estados, portanto, a fase dinâmica é fatorável. No caso das auto-energias serem nulas, não há fases dinâmicas, o que implica que estas não introduzirão erros no sistema; *ii*) não há emissão espontânea de um estado para outro; e *iii*) a fase adquirida pelos autoestados depende da área en-

---

<sup>2</sup>A computação quântica holonômica também engloba a realização de computação quântica através de fases abelianas.



globada pela trajetória no espaço de parâmetros, a qual é robusta a erros aleatórios, como demonstrado por De Chiara e Palma em 2003 [76].

Como é possível observar, a compreensão das fases geométricas adquiridas em evoluções não-unitárias não é apenas uma questão de completeza (para se ter uma definição mais geral possível), mas tem uma forte motivação para verificar se é possível realizar computação quântica robusta a decoerência e a dissipação. Seguindo esta direção, na Ref. [50], Carollo e colaboradores mostraram que a fase geométrica adquirida por uma partícula de spin 1/2 não é afetada pelo reservatório de fase, mas sim por emissão espontânea. Ao contrário da referência anterior, Tong e colaboradores [52, 53], concluíram que a fase geométrica é afetada por um banho de fase. Já na Ref. [56], Sarandy e Lidar obtiveram que a fase geométrica não é afetada por nenhum dos dois tipos de reservatórios. Embora o resultado obtido por Sarandy seja válido para uma evolução adiabática, condição ausente nas Refs. [50, 52, 53], os resultados são nitidamente diferentes. Portanto, tentar compatibilizar todas as definições de fases geométricas presentes na literatura é uma tarefa fundamental para que todos falem a mesma linguagem.

Indubitavelmente, o experimento é o único árbitro capaz de resolver a dissensão referente as várias definições de fases geométricas em sistemas abertos. A comprovação experimental é um combustível para qualquer teoria, e não foi diferente com as fases geométricas. Estas fases foram medidas em vários contextos experimentais, tais como em sistemas ópticos [77, 78, 79], interferometria de nêutrons [80, 81], em ressonância magnética nuclear [82, 83, 84, 85], interferometria atômica [86] e em nanocircuitos supercondutores [87]. Resta ainda, a realização de experimentos capazes de decidir questões como aquela apresentada anteriormente.

## 2.2 Teoria dos invariantes dinâmicos

No mesmo espírito das quantidades conservadas em Mecânica Clássica [88] — que afirma que uma quantidade  $I(q, p; t)$  é dita conservada quando

$$\frac{dI}{dt} \equiv \frac{\partial I}{\partial t} + [I, H]_{qp} = 0, \quad (2.10)$$

onde  $[I, H]_{qp} = \frac{\partial I}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}$  é o parêntese de Poisson,  $q$  e  $p$  são variáveis canonicamente conjugadas e  $H$  a hamiltoniana do sistema — foi introduzida a teoria das quantidades conservadas na Mecânica Quântica [15]. Porém, nesta última, é necessário fazer a substituição  $[I, H]_{qp} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [\mathbf{I}, \mathbf{H}] = \frac{i}{\hbar} (\mathbf{I}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{I})$ , sendo que agora,  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{H}$  são operadores que atuam no espaço de Hilbert do sistema, e  $\hbar$  a constante de Planck. Portanto, a quantização da Eq. (2.10) leva à seguinte expressão ( $\hbar = 1$ )

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} + i[\mathbf{H}(t), \mathbf{I}(t)] = 0. \quad (2.11)$$

Para obter a expressão (2.11), primeiramente Lewis encontrou o invariante associado a um oscilador harmônico clássico com frequência DT [15]. Este mesmo problema foi considerado por Kruskal em 1962 em um trabalho mais geral, cujo ponto de partida era um conjunto de  $N$  equações diferenciais acopladas [89]. No caso em que estas equações eram obtidas a partir de sistemas hamiltonianos clássicos, Kruskal utilizava o conceito de invariante adiabático  $I = \oint pdq$  para resolver tal sistema de equações. O que Lewis fez, foi encontrar um invariante não-adiabático para este mesmo problema, e através da regra de quantização

$$[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = i, \quad (2.12)$$

verificou que a equação que tal invariante deveria obedecer era a Eq. (2.11). Embora conhecida, esta metodologia apresentava uma grande dificuldade para ser colocada em prática, pois não se sabia como encontrar o invariante quântico associado ao sistema em questão. Após o trabalho de Lewis e Riesenfeld [14], onde foram apresentados os operadores invariantes associados a um oscilador harmônico e a uma partícula carregada sujeita a ação de um campo eletromagnético, ambos DT, esta teoria passou a ser amplamente utilizada no contexto da Mecânica Quântica para encontrar a solução da equação de Schrödinger com hamiltonianos DT

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \mathbf{H}(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (2.13)$$

De acordo com o método dos invariantes quânticos, o operador hermitiano  $\mathbf{I}(t)$ , chamado de *operador invariante*, possui um conjunto completo de autoestados

$$\mathbf{I}(t) |\lambda, a; t\rangle = I_\lambda |\lambda, a; t\rangle, \quad (2.14a)$$

$$\langle \lambda', a'; t | \lambda, a; t \rangle = \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{a'a}, \quad (2.14b)$$

sendo que  $I_\lambda$  são seus autovalores e o índice  $a = 1, \dots, N_\lambda$  descreve o grau de degenerescência do estado  $|\lambda, a; t\rangle$ . Algumas propriedades provenientes das Eqs. (2.11) e (2.14) serão úteis para encontrar a solução da equação de Schrödinger. Para obtê-las, deriva-se a Eq. (2.14a) com relação ao tempo e multiplica-se o lado direito da Eq. (2.11) por  $|\lambda, a; t\rangle$

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} |\lambda, a; t\rangle + \mathbf{I}(t) \frac{d}{dt} |\lambda, a; t\rangle = \frac{dI_\lambda}{dt} |\lambda, a; t\rangle + I_\lambda \frac{d|\lambda, a; t\rangle}{dt}, \quad (2.15a)$$

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} |\lambda, a; t\rangle = i\mathbf{I}(t)\mathbf{H}(t) |\lambda, a; t\rangle - i\mathbf{H}(t)\mathbf{I}(t) |\lambda, a; t\rangle. \quad (2.15b)$$

Multiplicando as duas equações acima, à esquerda, por  $\langle\lambda', a'; t|$  e utilizando as Eqs. (2.14), obtém-se a seguinte relação

$$i\frac{dI_\lambda}{dt} \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{a'a} = (I_{\lambda'} - I_\lambda) \langle\lambda', a'; t| \left[ i\frac{d}{dt} - \mathbf{H}(t) \right] |\lambda, a; t\rangle. \quad (2.16)$$

Através da Eq. (2.16), pode-se concluir que se  $\lambda = \lambda'$  e  $a = a'$ ,  $I_\lambda$  é constante no tempo para quaisquer  $\lambda$  e  $a$ . Por outro lado, se  $\lambda \neq \lambda'$ , tem-se que

$$\langle\lambda', a'; t| \left[ i\frac{d}{dt} - \mathbf{H}(t) \right] |\lambda, a; t\rangle = 0. \quad (2.17)$$

Então, expandindo a solução da equação de Schrödinger (2.13) na base de autoestados de  $\mathbf{I}(t)$ ,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\lambda, a} c_\lambda^a(t) |\lambda, a; t\rangle, \quad (2.18)$$

tal que  $\sum_{\lambda, a} |c_\lambda^a(t)|^2 = 1$ , encontra-se a equação para os coeficientes  $c_\lambda^a(t)$

$$i\dot{c}_{\lambda'}^{a'}(t) + \sum_{\lambda, a} c_\lambda^a(t) \left[ \langle\lambda', a'; t| i\frac{d}{dt} |\lambda, a; t\rangle - \langle\lambda', a'; t| \mathbf{H}(t) |\lambda, a; t\rangle \right] = 0, \quad (2.19)$$

onde esta última pode ser simplificada utilizando-se a Eq. (2.17), resultando em

$$i\dot{c}_{\lambda'}^{a'}(t) + \sum_a c_{\lambda'}^a(t) \left[ \langle\lambda', a'; t| i\frac{d}{dt} |\lambda', a; t\rangle - \langle\lambda', a'; t| \mathbf{H}(t) |\lambda', a; t\rangle \right] = 0. \quad (2.20)$$

A análise da equação acima pode ser dividida nos casos em que os autoestados do operador invariante são degenerados e não-degenerados.

### 2.2.1 Autoestados não-degenerados

No caso em que os autoestados do invariante são não-degenerados, a Eq. (2.20) pode ser facilmente integrada

$$c_\lambda(t) = c_\lambda(0) \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \left[ \langle \lambda; \tau | i \frac{d}{d\tau} | \lambda; \tau \rangle - \langle \lambda; \tau | \mathbf{H}(\tau) | \lambda; \tau \rangle \right] \right\}, \quad (2.21)$$

com a *fase geométrica cíclica e não-adiabática* dada por

$$\phi_\lambda^G(t) = \int_0^t d\tau \langle \lambda; \tau | i \frac{d}{d\tau} | \lambda; \tau \rangle, \quad (2.22)$$

e a *fase dinâmica* por

$$\phi_\lambda^D(t) = - \int_0^t d\tau \langle \lambda; \tau | \mathbf{H}(\tau) | \lambda; \tau \rangle. \quad (2.23)$$

É importante salientar que se inicialmente o estado do sistema for preparado em um autoestado do invariante  $|\Psi(0)\rangle = |\lambda'; 0\rangle$ ,  $c_\lambda(0) = \delta_{\lambda\lambda'}$ , este não transicionará para qualquer outro autoestado. Este comportamento lembra a hipótese adiabática de Ehrenfest [3], embora neste caso não seja necessário impor qualquer restrição sobre a dinâmica do sistema, como feito no teorema adiabático [22]. Diante deste fato, alguns autores definiram esta fase como sendo não-adiabática [17, 18, 19].

O estudo das fases geométricas via teoria dos invariantes permite compreendê-las mais profundamente, pois através desta abordagem é fácil perceber que mesmo para hamiltonianos independentes do tempo, a fase geométrica associada aos autoestados do operador invariante pode estar presente [18], uma característica que não está contida na descrição feita por Berry [6]. Contudo, na fase de Aharonov e Anandan [27], a qual é calculada para a solução da equação de Schrödinger (2.13), esta propriedade está presente, porém, de modo muito mais natural, visto que para  $|\Psi(t)\rangle$  não depender do tempo é necessário que  $\mathbf{H}(t) = 0$ , para qualquer tempo. A fase de Berry ainda pode ser vista como um caso particular da Eq. (2.22) no limite adiabático, que de acordo com a teoria dos invariantes é equivalente a fazer [18]

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} = -i [\mathbf{H}(t), \mathbf{I}(t)] \simeq 0. \quad (2.24)$$

Desta aproximação, conclui-se que  $\mathbf{H}(t)$  e  $\mathbf{I}(t)$  admitem o mesmo conjunto de autoestados, e portanto, a solução (2.18) se reduz àquela da Eq. (2.13) no limite adiabático. Nesta

aproximação, a energia é interpretada como uma quantidade aproximadamente conservada.

### 2.2.2 Autoestados degenerados

No caso em que os autoestados do invariante são degenerados, a Eq. (2.20) pode ser formalmente integrada, levando ao seguinte resultado

$$\vec{c}_\lambda(t) = \mathbf{T} \exp \left\{ i \int_0^t d\tau [\mathbf{A}_\lambda(\tau) + \mathbf{H}_\lambda(\tau)] \right\} \vec{c}_\lambda(0), \quad (2.25)$$

onde  $\mathbf{T}$  é o operador de ordenamento temporal,

$$\mathbf{A}_\lambda(t) = \begin{pmatrix} \langle \lambda, 1; t | i \frac{d}{dt} | \lambda, 1; t \rangle & \dots & \langle \lambda, 1; t | i \frac{d}{dt} | \lambda, N_\lambda; t \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \lambda, N_\lambda; t | i \frac{d}{dt} | \lambda, 1; t \rangle & \dots & \langle \lambda, N_\lambda; t | i \frac{d}{dt} | \lambda, N_\lambda; t \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{H}_\lambda(t) = - \begin{pmatrix} \langle \lambda, 1; t | \mathbf{H}(t) | \lambda, 1; t \rangle & \dots & \langle \lambda, 1; t | \mathbf{H}(t) | \lambda, N_\lambda; t \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \lambda, N_\lambda; t | \mathbf{H}(t) | \lambda, 1; t \rangle & \dots & \langle \lambda, N_\lambda; t | \mathbf{H}(t) | \lambda, N_\lambda; t \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

e

$$\vec{c}_\lambda^\dagger(t) = \left( c_\lambda^{*1}(t), \dots, c_\lambda^{*N_\lambda}(t) \right), \quad (2.28)$$

com  $c_\lambda^a(t) = \langle \lambda, a; t | \Psi(t) \rangle$ .

Em 1992, Kwon e colaboradores [20] obtiveram a expressão (2.25), mas não apontaram nada com relação as fases geométrica e dinâmica. Em 1998, Mostafazadeh [90] supôs que  $\mathbf{A}_\lambda(t)$  e  $\mathbf{H}_\lambda(t)$  comutassem, levando à fase dinâmica<sup>3</sup>

$$\mathbf{U}_\lambda^{din}(t) = \mathbf{T} \exp \left[ i \int_0^t d\tau \mathbf{H}_\lambda(\tau) \right], \quad (2.29)$$

e à fase geométrica cíclica, não-adiabática e não-abeliana,

$$\mathbf{U}_\lambda^{geom}(t) = \mathbf{T} \exp \left[ i \int_0^t d\tau \mathbf{A}_\lambda(\tau) \right]. \quad (2.30)$$

Como será visto mais tarde, a expressão (2.30) possui todas as propriedades que uma boa definição de fase geométrica precisa ter. Devido ao caráter expositivo deste capítulo,

<sup>3</sup>Daqui em diante abusar-se-á da linguagem quando houver referência às fases geométrica e dinâmica, como definido nas Eqs. (2.29) e (2.30), em contraste com aquelas definidas em (2.22) e (2.23).

as discussões sobre a validade das considerações feitas para se obter as Eqs. (2.29) e (2.30), serão feitas na subseção 5.2.2 do capítulo 5.

Novamente, tomando-se o limite adiabático (2.24) dentro de um subespaço degenerado rotulado por  $\lambda$ , recupera-se a fase geométrica cíclica e não-abeliana proposta por Wilczek e Zee [26]. Nesta situação, a fase dinâmica torna-se abeliana,  $\mathbf{U}_\lambda^{din}(t) = \mathbf{I}_\lambda \exp \left[ i \int_0^t E_\lambda(\tau) d\tau \right]$ , onde  $E_\lambda(t)$  é a autoenergia associada ao autoestado  $|\lambda, a; t\rangle$  do hamiltoniano e  $\mathbf{I}_\lambda$  é a matriz identidade de ordem  $N_\lambda \times N_\lambda$ .

Como conclusão desta introdução às fases geométricas e à sua conexão com a teoria dos invariantes dinâmicos, percebe-se que a utilização das fases geométricas via teoria dos invariantes é vantajosa no caso não-degenerado, uma vez que a evolução do sistema pode ser não-adiabática e a fase tem caráter abeliano. Contudo, no caso degenerado, o caráter não-abeliano da fase dinâmica (2.29) torna complicado o uso da fase geométrica (2.30) na Eq. (2.25), pois, em geral,  $\mathbf{A}_\lambda(t)$  e  $\mathbf{H}_\lambda(t)$  não comutam. Portanto, a abordagem originalmente feita por Wilczek e Zee [26], que considera evoluções adiabáticas, mostra-se mais interessante. Neste caso, a Eq.(2.25) para evoluções cíclicas e adiabáticas de estados degenerados reduz-se à

$$\vec{\mathbf{c}}_\lambda(t) = e^{-i \int_0^t E_\lambda(\tau) d\tau} \mathbf{T} \exp \left[ i \int_0^t d\tau \mathbf{A}_\lambda(\tau) \right] \vec{\mathbf{c}}_\lambda(0). \quad (2.31)$$

# Capítulo 3

## Fase geométrica induzida pelo “efeito Stark”

Recentes avanços no contexto da Eletrodinâmica Quântica em Cavidades (EQC) têm permitido realizar importantes experimentos para testar os fundamentos da Teoria Quântica, destacando-se as medidas das oscilações de Rabi quânticas [91], a realização de portas lógicas quânticas [92], medidas não-destrutivas de um único fóton [93], a geração de estados do tipo EPR atômicos [94], do tipo GHZ [95] e de estados mesoscópicos do tipo *gato de Schrödinger* [96].

Considerando a tecnologia atualmente disponível em EQC [97] e o fato de que há poucas propostas para utilizar e/ou medir fases geométricas neste cenário<sup>1</sup> [60, 98], dedicar-se-á este capítulo para descrever uma proposta que permitirá controlar e medir fases geométricas não-adiabáticas em EQC [99]. Nesta abordagem, considera-se a interação dispersiva de um átomo de dois níveis com um modo do campo de radiação quantizado sujeito a um processo de amplificação linear DT. O fator de fase de caráter geométrico adquirido pelo estado do sistema, que depende do estado atômico, surge da amplificação linear. Este efeito se deve aos distintos deslocamentos introduzidos na frequência do campo pelos diferentes estados atômicos (uma contrapartida do efeito Stark, cujo efeito é o deslocamento dos níveis atômicos), e pode ser medido em um experimento de inter-

---

<sup>1</sup>Não é do conhecimento do autor, até o presente momento, outras referências na literatura, além de [60] e [98], cujo intuito seja utilizar e/ou medir fases geométricas em EQC.

ferometria. Matematicamente, este fenômeno é interpretado como uma consequência dos diferentes mapas projetivos associados à dinâmica do campo correspondente a cada estado atômico.

### 3.1 Dinâmica do sistema e fases geométricas

O sistema físico em questão é constituído por um “átomo de dois níveis”, com frequência de transição entre os estados fundamental  $|g\rangle$  e excitado  $|e\rangle$  igual a  $\omega_0$ , interagindo com um modo do campo de radiação caracterizado pela frequência  $\nu$ , sendo que este último está sujeito a um processo de amplificação linear. O hamiltoniano que descreve este processo é escrito como [100]

$$\mathbf{H}(t) = \nu \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{\omega_0}{2} \boldsymbol{\sigma}_z + g (\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_- + \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_+) + f(t) \mathbf{a}^\dagger + f^*(t) \mathbf{a}, \quad (3.1)$$

onde  $g$  é o acoplamento dipolar entre o átomo e o campo,  $\boldsymbol{\sigma}_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|$  e  $\boldsymbol{\sigma}_+ = (\boldsymbol{\sigma}_-)^\dagger = |e\rangle \langle g|$  são os operadores de pseudospin de Pauli,  $\mathbf{a}^\dagger$  ( $\mathbf{a}$ ) é o operador de criação (destruição) do campo e  $f(t)$  é a amplitude complexa da amplificação linear DT. Na situação em que a frequência modo do campo está suficientemente dessintonizada da frequência de transição atômica, o hamiltoniano efetivo que descreve a interação dispersiva é dado por

$$\mathbf{H}_{ef}(t) = \nu \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{\omega_0}{2} \boldsymbol{\sigma}_z + \chi \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_z + \chi \boldsymbol{\sigma}_{ee} + f(t) \mathbf{a}^\dagger + f^*(t) \mathbf{a}, \quad (3.2)$$

tal que  $\chi = g^2/\Delta$  é a constante de acoplamento efetiva dispersiva,  $\Delta = \omega_0 - \nu$  é a dessintonia entre as frequências do campo e da transição atômica, e  $\boldsymbol{\sigma}_{ee} = |e\rangle \langle e|$ . Assumindo que a função  $f(t)$  tenha a forma  $f(t) = \kappa e^{-i\omega_c t}$ , a aproximação feita na passagem da Eq. (3.1) para (3.2) será válida desde que as seguintes condições sejam satisfeitas  $|g| \sqrt{\bar{n}}$ ,  $|\kappa| \sqrt{\bar{n}} \ll |\Delta|$  e  $\omega_c \ll \kappa \sqrt{\bar{n}}$ , onde  $\bar{n}$  é o número médio de fótons na cavidade, e  $\kappa$  e  $\omega_c$  são a intensidade e a frequência do bombeio linear, respectivamente. Esta demonstração está feita no apêndice A.

O vetor de estado  $|\Psi(t)\rangle$ , que é solução da equação de Schrödinger associada ao hamiltoniano (3.2), pode ser escrito como [101]

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\omega_0 t/2} |g\rangle |\Phi_g(t)\rangle + e^{-i(\omega_0/2 + \chi)t} |e\rangle |\Phi_e(t)\rangle, \quad (3.3)$$



sendo que  $|\Phi_\ell(t)\rangle = \langle \ell | \Psi(t) \rangle$  ( $\ell = e, g$ ) se refere somente ao estado do modo do campo. Usando a relação de ortogonalidade dos estados atômicos em  $|\Psi(t)\rangle$ , obtêm-se as seguintes equações de Schrödinger DT desacopladas para os estados do campo

$$i \frac{d}{dt} |\Phi_\ell(t)\rangle = \mathbf{H}_\ell(t) |\Phi_\ell(t)\rangle, \quad (3.4)$$

onde

$$\mathbf{H}_\ell(t) = \varpi_\ell \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + f(t) \mathbf{a}^\dagger + f^*(t) \mathbf{a}, \quad (3.5)$$

com  $\varpi_e = \nu + \chi$  e  $\varpi_g = \nu - \chi$ . Agora, o problema se reduziu ao de um oscilador harmônico com frequência  $\varpi_\ell$  sujeito a amplificação linear DT  $f(t)$ . Para resolver exatamente a equação de Schrödinger com o hamiltoniano (3.5), será utilizada a técnica dos invariantes dinâmicos desenvolvida na seção 2.2. Este problema já foi resolvido nas Refs. [101, 102, 103], sendo que o invariante  $\mathbf{I}_\ell(t)$  associado ao hamiltoniano (3.5) é dado por [102]

$$\mathbf{I}_\ell(t) = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} - \alpha_\ell(t) \mathbf{a}^\dagger - \alpha_\ell^*(t) \mathbf{a} + \beta_\ell(t). \quad (3.6)$$

Para encontrar os coeficientes  $\alpha_\ell(t)$  e  $\beta_\ell(t)$ , deve-se substituir as Eqs. (3.5) e (3.6) na Eq. (2.11), que resultará nas equações acopladas

$$\dot{\alpha}_\ell(t) = -i\varpi_\ell \alpha_\ell(t) - if(t), \quad (3.7a)$$

$$\dot{\beta}_\ell(t) = i\alpha_\ell(t) f^*(t) - i\alpha_\ell^*(t) f(t). \quad (3.7b)$$

A solução deste sistema de equações é direta, e fornece as seguintes expressões

$$\alpha_\ell(t) = \alpha_\ell(0) e^{-i\varpi_\ell t} - ie^{-i\varpi_\ell t} \int_0^t e^{i\varpi_\ell t'} f(t') dt', \quad (3.8a)$$

$$C_\ell = \beta_\ell(t) - |\alpha_\ell(t)|^2, \quad (3.8b)$$

onde  $C_\ell$  é uma constante.

Diagonalizar  $\mathbf{I}_\ell(t)$  neste caso é uma tarefa consideravelmente simples. Para isso, basta lembrar que o invariante pode ser escrito como  $\mathbf{I}_\ell(t) = \mathbf{D}[\alpha_\ell(t)] [\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \beta_\ell(t) - |\alpha_\ell(t)|^2] \times \mathbf{D}^\dagger[\alpha_\ell(t)]$ , implicando que os seus autovalores e autovetores são dados, respectivamente, por

$$I_{m,\ell} = m + C_\ell, \quad (3.9a)$$

$$|m, t\rangle_\ell = \widehat{\mathbf{D}}[\alpha_\ell(t)] |m\rangle, \quad (3.9b)$$

tal que  $\mathbf{D}[\alpha_\ell(t)] = \exp[\alpha_\ell(t)\mathbf{a}^\dagger - \alpha_\ell^*(t)\mathbf{a}]$  é o operador de deslocamento [100] e  $|m\rangle = (\mathbf{a}^\dagger)^m |0\rangle / \sqrt{m!}$  o estado de número na base de Fock.

A solução da Eq. (3.4) somente estará completa após avaliar as fases (2.22) e (2.23). Então, utilizando as Eqs. (3.9b) e (3.8a), e que  $\alpha_\ell(0) = |\alpha_\ell(0)|e^{i\mu_\ell}$ , obtém-se as expressões para as fases  $\phi_{m,\ell}^G(t)$  e  $\phi_{m,\ell}^D(t)$

$$\begin{aligned} \phi_{m,\ell}^G(t) = & \left[ \varpi_\ell |\alpha_\ell(0)|^2 + \frac{2\kappa\varpi_\ell |\alpha_\ell(0)| \cos \mu_\ell}{\varpi_\ell - \omega_c} + \frac{\kappa^2 (\varpi_\ell + \omega_c)}{(\varpi_\ell - \omega_c)^2} \right] t \\ & - \frac{\kappa (\varpi_\ell + \omega_c)}{(\varpi_\ell - \omega_c)^2} \left\{ \left[ |\alpha_\ell(0)| \cos \mu_\ell + \frac{\kappa}{(\varpi_\ell - \omega_c)} \right] \sin [(\varpi_\ell - \omega_c) t] \right. \\ & \left. + |\alpha_\ell(0)| \sin \mu_\ell \{1 - \cos [(\varpi_\ell - \omega_c) t]\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

e

$$\begin{aligned} \phi_{m,\ell}^D(t) = & \left[ -\varpi_\ell m - \varpi_\ell |\alpha_\ell(0)|^2 - \frac{2\kappa\varpi_\ell |\alpha_\ell(0)| \cos \mu_\ell}{\varpi_\ell - \omega_c} - \frac{2\kappa^2\omega_c}{(\varpi_\ell - \omega_c)^2} \right] t \\ & + \frac{2\kappa\omega_c}{(\varpi_\ell - \omega_c)^2} \left\{ \left[ |\alpha_\ell(0)| \cos \mu_\ell + \frac{\kappa}{(\varpi_\ell - \omega_c)} \right] \sin [(\varpi_\ell - \omega_c) t] \right. \\ & \left. + |\alpha_\ell(0)| \sin \mu_\ell \{1 - \cos [(\varpi_\ell - \omega_c) t]\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Portanto, a solução da Eq. (3.4) é dada por

$$|\Phi_\ell(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,\ell}(0) e^{i[\phi_{m,\ell}^G(t) + \phi_{m,\ell}^D(t)]} \mathbf{D}[\alpha_\ell(t)] |m\rangle, \quad (3.12)$$

com os coeficientes  $c_{m,\ell}(0)$  sendo determinados pelo estado inicial do sistema.

Como o tipo de interação entre o átomo e o campo descrita no hamiltoniano (3.2) não é capaz de realizar transições atômicas, o operador invariante  $\mathbf{I}^{Total}(t)$  total relacionado a este hamiltoniano é

$$\mathbf{I}^{Total}(t) = \sum_{\ell=g,e} \mathbf{I}_\ell(t) \otimes |\ell\rangle \langle \ell|, \quad (3.13)$$

cujos autoestados são

$$|m, t\rangle_\ell^{Total} = \mathbf{D}[\alpha_\ell(t)] |\ell\rangle |m\rangle. \quad (3.14)$$

Então, as fases que aparecerão no vetor de estado do sistema (3.3), a menos das fases dinâmicas  $\omega_0 t/2$  e  $(\omega_0/2 + \chi)t$  já presentes, referem-se aos autoestados da Eq. (3.14), que são as mesmas presentes nas Eqs. (3.10) e (3.11).

Uma possibilidade para se medir fases geométricas, é considerar um arranjo experimental onde determinados tempos de interação entre o átomo e o campo resultem em uma fase dinâmica que seja múltiplo inteiro de  $2\pi$ , enquanto que a fase geométrica não satisfaça esta condição. Porém, no presente caso, é possível obter uma evolução onde a fase dinâmica é fatorada, ou seja, uma evolução em que o estado do sistema adquire somente fases geométricas para qualquer tempo. Para que isto ocorra, é necessário que inicialmente o estado do campo de radiação esteja no vácuo,  $\alpha_\ell(0) = 0$ , e que a dependência temporal da amplificação linear seja ressonante com a frequência do campo  $\omega_c = \nu$ . Nesta situação, as amplitudes dos estados coerentes  $\alpha_\ell(t)$ , serão dadas por

$$\alpha_{(g)}(t) = \pm \frac{\kappa}{\chi} e^{-i\nu t} (1 - e^{\pm i\chi t}), \quad (3.15)$$

e as expressões para as fases (3.10) e (3.11) por

$$\phi_{(g)}^G(t) = (2\nu \mp \chi) \left( \frac{\kappa}{\chi} \right)^2 \left[ t - \frac{\sin(\chi t)}{\chi} \right], \quad (3.16)$$

e

$$\phi_{m,(e)}^D(t) = -m(\nu \mp \chi)t - 2\nu \left( \frac{\kappa}{\chi} \right)^2 \left[ t - \frac{\sin(\chi t)}{\chi} \right]. \quad (3.17)$$

Embora a Eq. (3.17) mostre que as fases dinâmicas  $\phi_{m,g}^D(t)$  e  $\phi_{m,e}^D(t)$  sejam nitidamente diferentes, devido ao fato de inicialmente o estado do campo estar no vácuo, conclui-se através das expressões (3.12) e (3.3) em  $t = 0$ , que o único coeficiente que contribuirá para este estado é o  $c_{0,\ell}(0)$  ( $m = 0$ ). Portanto, as fases dinâmicas associadas aos estados atômicos  $g$  e  $e$  serão iguais e permanecerão fatoradas durante toda a evolução.

Suponha que o átomo seja inicialmente preparado em um estado de superposição geral  $|\Psi_A(0)\rangle = c_g^0 |g\rangle + c_e^0 |e\rangle$ , tal que  $|c_g^0|^2 + |c_e^0|^2 = 1$ , e o campo na cavidade no estado de vácuo. Quando o átomo interagir dispersivamente com o modo do campo, de acordo com o hamiltoniano (3.2), o estado do sistema conjunto será descrito por

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\phi^D(t)} \left[ C_g(t) e^{i\phi_g^G(t)} |\alpha_g(t)\rangle |g\rangle + C_e(t) e^{i\phi_e^G(t)} |\alpha_e(t)\rangle |e\rangle \right], \quad (3.18)$$

onde  $C_g(t) = c_g^0 e^{i\omega_0 t/2}$ ,  $C_e(t) = c_e^0 e^{-i(\omega_0/2 + \chi)t}$ ,  $\phi^D(t) = \phi_{0,g}^D(t) = \phi_{0,e}^D(t)$  é fase dinâmica global e,  $\phi_g^G(t)$  e  $\phi_e^G(t)$  são as fases geométricas associadas aos autoestados do operador

invariante para evoluções cíclicas. É importante notar que o fato da evolução ser puramente geométrica é independente do seu caráter cíclico, e que as fases geométricas (3.16) são válidas somente para evoluções cíclicas. No caso em que a evolução é não-cíclica, precisa-se levar em conta a de fase relativa entre os estados inicial e final, adquirida pela trajetória aberta. Em outras palavras, é necessário adicionar o termo  $\arg(\langle \lambda; 0 | \lambda; \tau \rangle)$  na Eq. (2.22), isto é,

$$\phi_\lambda^G(t) = \arg(\langle \lambda; 0 | \lambda; t \rangle) + \int_0^t d\tau \langle \lambda; \tau | i \frac{d}{d\tau} | \lambda; \tau \rangle. \quad (3.19)$$

## 3.2 Interpretação da fase geométrica

Ao contrário de um sistema de dois níveis que pode ser representado na esfera de Bloch, no presente contexto, a representação da fase geométrica adquirida pela evolução do estado (3.14) pode ser compreendida suprimindo-se os graus de liberdade atômicos e fazendo uso do espaço de fase do modo do campo na cavidade. Nesta perspectiva, a dependência da fase geométrica (3.16) com relação aos estados atômicos pode ser visualizada como um mapa projetivo  $\Gamma_\ell$  do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_\ell$  no espaço projetivo  $\mathcal{P}_\ell$  [ $\Gamma_\ell : \mathcal{H}_\ell \rightarrow \mathcal{P}_\ell$  ( $\ell = e, g$ )] [27, 8]. De fato, o hamiltoniano (3.5) é diferente para cada subespaço fermiônico.

Na Fig. 3.1, são apresentadas as trajetórias espiraladas típicas descritas pelos estados coerentes  $|\alpha_\ell(t)\rangle$ , associados aos estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , durante meio período de evolução ( $\chi t \in [0, \pi]$ ) no espaço de fase  $\text{Re}\{(\chi/\kappa)\alpha_\ell(t)\} \times \text{Im}\{(\chi/\kappa)\alpha_\ell(t)\}$ . Nesta figura, pode-se ver que a trajetória descrita pelo estado  $|\alpha_e(t)\rangle$  realiza meia volta a mais comparada com aquela descrita pelo estado  $|\alpha_g(t)\rangle$ . Isto ocorre devido aos diferentes sinais na Eq. (3.15), que surgiram como consequência dos distintos deslocamentos na frequência do hamiltoniano efetivo (3.5). Em resumo, com os diferentes deslocamentos na frequência do modo do campo, as trajetórias associadas aos respectivos estados atômicos no espaço de fase, diferem por uma volta em torno da origem durante um período de evolução  $T = 2\pi/\chi$ .

Ao invés de interpretar estes resultados como devidos aos diferentes mapas projetivos do espaço de Hilbert, pode-se interpretá-los como consequência das trajetórias realizadas em dois espaços de parâmetros distintos, cada qual associado aos níveis atômicos  $g$  e  $e$ . Seguindo a descrição apresentada na Ref. [104], o operador invariante  $\mathbf{I}_\ell(t)$  pode ser

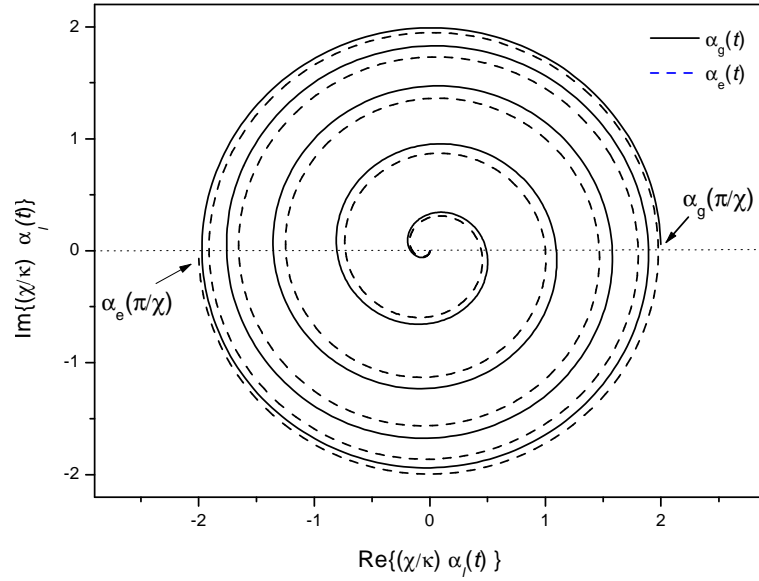


Figura 3.1: Trajetórias seguidas pelas amplitudes  $\alpha_g(t)$  e  $\alpha_e(t)$  dos estados coerentes no espaço de fase durante intervalo  $\chi t \in [0, \pi]$ .

descrito de maneira equivalente no espaço de parâmetros  $\{\text{Re } \alpha_\ell, \text{Im } \alpha_\ell, \beta_\ell\}$ ,

$$\mathbf{I}_\ell(\alpha_\ell, \alpha_\ell^*, \beta_\ell) = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} - \alpha_\ell \mathbf{a}^\dagger - \alpha_\ell^* \mathbf{a} + \beta_\ell. \quad (3.20)$$

Devido a lei de conservação  $C_\ell = \beta_\ell(t) - |\alpha_\ell(t)|^2$  descrita na Eq. (3.8b), pode-se representar os estados  $|\alpha_\ell(t)\rangle$  através dos seus espaços de parâmetros, ou seja, na superfície de um hiperbolóide, o *hiperbolóide de Poincaré* [105]. Na Fig. 3.2 visualiza-se as trajetórias dos estados  $|\alpha_\ell(t)\rangle$  associados a cada nível atômico  $\ell$  sobre a superfície do hiperbolóide. A equação que define o hiperbolóide é dada por  $0 = \left[\sqrt{\beta_\ell(t)}\right]^2 - [\text{Re } \alpha_\ell(t)]^2 - [\text{Im } \alpha_\ell(t)]^2$ , onde foi escolhido  $C_\ell = 0$ . Nesta figura vê-se claramente que há duas diferentes trajetórias associados aos diferentes estados atômicos  $|\ell\rangle$ , introduzindo o efeito mostrado na Eq. (3.16). A fase geométrica neste caso pode ser entendida como o ângulo sólido compreendido por cada trajetória a partir da origem do sistema de coordenadas.

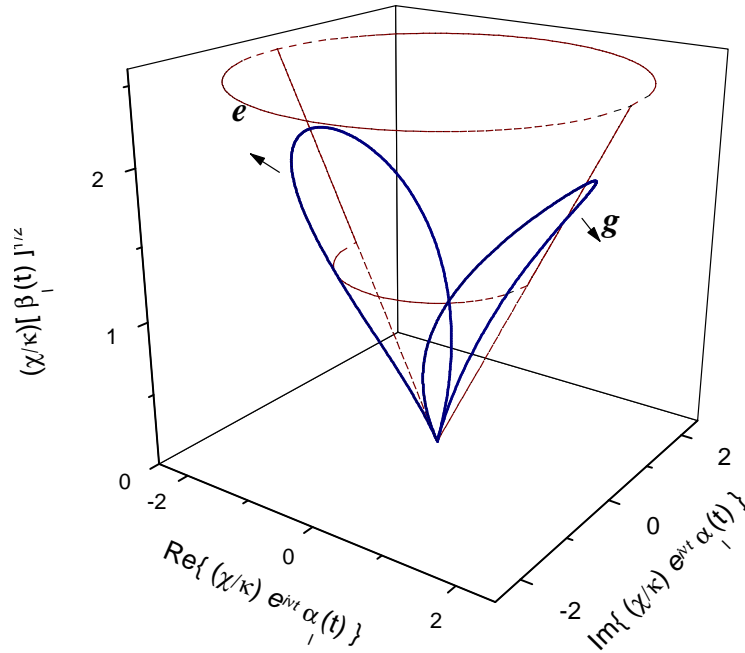


Figura 3.2: Trajetórias seguidas pelas amplitudes dos estados do campo  $|\alpha_\ell(t)\rangle$  associados a cada nível atômico  $g$  e  $e$ , no hiperbolóide de *Poincaré* durante um período de evolução (considerando um referencial girante com frequência  $\nu$ ).

### 3.3 Proposta para a implementação experimental

Para tornar clara a possibilidade de se realizar experimentalmente uma evolução em que a fase adquirida pelo modo do campo da cavidade seja puramente geométrica, e conseqüentemente, medir a fase geométrica não-adiabática, propõe-se o esquema do arranjo experimental na Fig. 3.3 [97, 106].

Do lado esquerdo da Fig. 3.3 está representado o forno, de onde saem os átomos que terão as suas velocidades selecionadas por campos clássicos, os quais não estão descritos na figura, para posteriormente atravessarem a zona de excitação, onde são preparados os estados atômicos de Rydberg. Em seguida, os átomos passam pela zona de Ramsey  $R1$ , onde seus estados são submetidos a rotações convenientes, para posteriormente penetrarem na cavidade supercondutora  $C$  com alto fator de qualidade ( $Q_{\text{cav}} \simeq 10^8$ ). O campo quântico dentro da cavidade é submetido a um processo de amplificação linear através do gerador de microondas inferior. Para que seja gerado o fenômeno de interferência, os

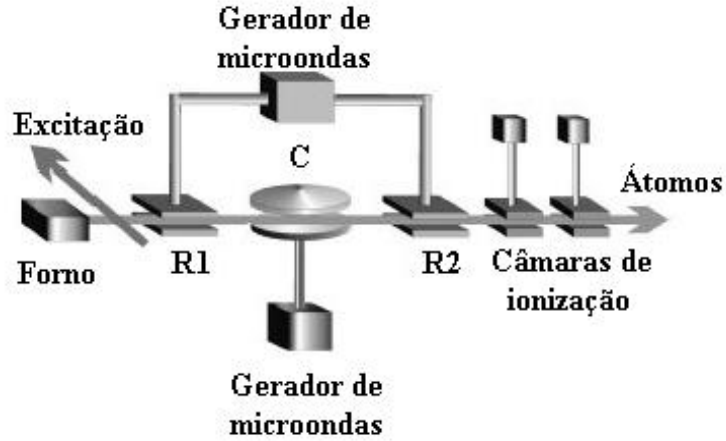


Figura 3.3: Arranjo experimental em EQC para a implementação de uma evolução em que as fases adquiridas são puramente geométricas e para a medida da fase geométrica não-adiabática.

átomos atravessam a zona de Ramsey  $R2$  e são detectados pelas câmaras de ionização, que informarão qual o estado atômico projetado.

Supondo que os átomos de Rydberg ao deixarem a zona de excitação no estado fundamental  $|g\rangle$ , recebam um pulso  $\pi/2$  na zona de Ramsey  $R1$ , gerando o estado de superposição com  $c_g^0 = c_e^0 = 1/\sqrt{2}$ . Assume-se que o gerador de microondas é ligado (desligado) subitamente no instante em que os átomos entram (deixam) a região da cavidade, tal que  $f(t) = 0$  quando os átomos estão fora da cavidade. Se o tempo de interação entre o átomo e o modo da cavidade for ajustado de forma que  $\chi T = 2\pi$ , o estado evoluído do sistema na representação de interação adquire, a menos de um fator de fase global, a seguinte forma

$$|\Psi_I(T)\rangle = \left( |g\rangle + e^{i[\phi_e^G(T) - \phi_g^G(T)]} |e\rangle \right) |0\rangle / \sqrt{2}. \quad (3.21)$$

Na zona de Ramsey  $R2$  um pulso  $\pi/2$  é novamente aplicado aos estados atômicos, de modo que  $|g\rangle \rightarrow (|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$  e  $|e\rangle \rightarrow (|e\rangle - |g\rangle)/\sqrt{2}$ . Finalmente, o experimento é repetido para diferentes valores de  $\kappa$  de forma a se obter as franjas de Ramsey. Desta maneira, pode-se medir os estados atômicos nas câmaras de ionização, tal que a inversão atômica, isto é, a diferença entre as probabilidades de detecção dos estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ ,

torna-se

$$W_{eg}(\kappa) = \cos [\phi_e^G(2\pi/\chi) - \phi_g^G(2\pi/\chi)] = \cos \left( 4\pi \frac{\kappa^2}{\chi^2} \right). \quad (3.22)$$

Note que na presente proposta, o padrão de interferência ou franjas de Ramsey depende somente da intensidade  $\kappa$  do campo de amplificação linear, visto que o acoplamento dispersivo átomo-campo  $\chi$  é mantido fixo. Embora  $\chi = g^2/\Delta$  possa variar, o seu controle é mais complicado, pois é necessário fazer  $\Delta = \omega_0 - \nu$  variar, o que significa mudar  $\omega_0$  ou  $\nu$ , ou ambos. Em geral, para as medidas de inversão atômica, varia-se o tempo de interação átomo-campo [97], ou seja, muda-se a velocidade com que os átomos atravessam o arranjo de Ramsey. Uma consequência disto, é a necessidade de se reprogramar as zonas de Ramsey  $R1$  e  $R2$  de forma a manter os pulsos  $\pi/2$  aqui necessários. Por outro lado, se for mudada apenas a intensidade do campo de amplificação, estes problemas adicionais não existirão.

Nos experimentos em EQC na região de microondas, as frequências típicas são da ordem de  $\chi \sim 10^4\text{Hz}$  e  $\nu \sim 10^{10}\text{Hz}$  [97]. Desta forma, é possível realizar uma evolução cíclica, como mostrado na Fig. 3.2, assumindo um tempo de interação  $T \sim 10^{-4}s$ . Este tempo é muito menor que o tempo de vida do fóton na cavidade, que é da ordem de  $10^{-3}s$  para cavidades abertas e  $10^{-1}s$  para cavidades fechadas. Portanto, os mecanismos de dissipação não desempenham um papel preponderante, razão pela qual não foram levados em conta.

### 3.3.1 Fontes de imperfeições experimentais

Para obter um argumento de  $2\pi$  no cosseno da Eq. (3.22) é necessário que  $\kappa = \chi/\sqrt{2}$ , onde  $\kappa \sim 10^4\text{Hz}$ , de acordo com os parâmetros acima. Nesta situação, a amplitude máxima do estado coerente gerado no modo da cavidade ocorre na metade do período  $T_{1/2} = \pi/\chi$ , com  $|\alpha_e(T_{1/2})|_{\max} = |\alpha_g(T_{1/2})|_{\max} = |2\kappa/\chi| = \sqrt{2}$ . Então, o campo na cavidade tem no máximo dois fótons durante todo o tempo de interação. Este baixo número de fótons na cavidade assegura um tempo maior de coerência do modo do campo, uma vez que o seu tempo de coerência é inversamente proporcional a sua amplitude [100].

Uma outra fonte de erro vem da sincronização imperfeita entre o ligar (desligar) do campo de bombeio e o instante em que os átomos entram (deixam) na (a) cavidade, devido



ao espalhamento no perfil de velocidades do feixe atômico. A incerteza nas velocidades dos átomos nos experimentos típicos de EQC é da ordem de 1% [106]. Considerando velocidades da ordem de  $v \sim 500 \text{ m/s}$  e lembrando que a largura da intensidade do campo no centro da cavidade é  $w \sim 6 \text{ mm}$ , conclui-se que a flutuação no tempo em que os átomos entram ou deixam a cavidade é da ordem de  $\delta t \sim 10^{-6} \text{ s}$ . Na situação em que os átomos entram adiantados na cavidade, a única mudança que ocorrerá será sobre o tempo de interação, que será diminuído por  $\delta t$ . Então, a correção de primeira ordem para a Eq. (3.22) é dada por

$$W_{eg}^{adrian}(\kappa) \approx \cos \left[ 4\pi \frac{\kappa^2}{\chi^2} - 2\kappa^2 (\delta t)^2 \right]. \quad (3.23)$$

Neste caso, a correção será da ordem de  $2\kappa^2 (\delta t)^2 \sim 10^{-4}$ , que é desprezível. Na situação oposta, em que os átomos entram atrasados na cavidade, estes perceberão que o campo ali presente não é o vácuo, mas sim um estado coerente de baixíssima amplitude,  $|\Psi(0)\rangle_{campo} = |\alpha_\ell(\delta t)\rangle$ , onde  $|\alpha_\ell(\delta t)| \sim \kappa\delta t$ . Refazendo os cálculos com este novo estado do campo em  $t = 0$ , obtém-se a correção em primeira ordem para a Eq. (3.22) como

$$W_{eg}^{atras}(\kappa) \approx \cos \left[ 4\pi \frac{\kappa^2}{\chi^2} - \kappa^2 \chi (\delta t)^3 \right], \quad (3.24)$$

onde  $\kappa^2 \chi (\delta t)^3 \sim 10^{-6}$ . Portanto, os efeitos de sincronização podem ser desconsiderados, uma vez que são muito pequenos.

### 3.4 Estados geométricos do tipo *gato de Schrödinger*

Entende-se por *estados geométricos*, aqueles obtidos a partir de evoluções em que as fases adquiridas possuem caráter puramente geométrico. Nestas evoluções, as fases adquiridas são devidas somente a curvatura do espaço de parâmetros do sistema. O dispositivo interferométrico mostrado na Fig. 3.3 também pode ser utilizado para preparar estados geométricos do tipo *gato de Schrödinger*. Para isso, basta que o tempo de interação átomo-campo seja  $\chi T = \pi$ , gerando o seguinte estado

$$|\Psi_I(t)\rangle = \frac{1}{2} \left[ \left( |2\kappa/\chi\rangle + e^{2\pi i(\kappa/\chi)^2} |-2\kappa/\chi\rangle \right) |g\rangle + \left( |2\kappa/\chi\rangle - e^{2\pi i(\kappa/\chi)^2} |-2\kappa/\chi\rangle \right) |e\rangle \right], \quad (3.25)$$

a menos de um fator de fase global. O estado do tipo *gato de Schrödinger* a ser obtido na cavidade, dependerá da medição do estado atômico. No caso do átomo ser detectado no estado  $g$ , o estado do campo terá paridade  $+$ , e se for detectado no  $e$ , terá paridade  $-$ . Note que a fase relativa entre os estados da superposição é de caráter geométrico ( $[\phi_e^G(2\pi/\chi) - \phi_g^G(2\pi/\chi)]/2 = 2\pi(\kappa/\chi)^2$ ). A representação destes estados no espaço de fase pode ser visualizada na Fig. 3.1. Exatamente no fim das trajetórias percorridas pelas linhas sólida e tracejada, estão localizados os centros das gaussianas que descrevem os estados  $|\alpha_g(\pi/\chi)\rangle$  e  $|\alpha_e(\pi/\chi)\rangle$ . Neste instante de tempo, estes estados estão diametralmente opostos, como indicado pelos sinais  $\pm$  em  $|2\kappa/\chi\rangle$ .

## Capítulo 4

# Fases geométricas em CBE acoplados

Nos últimos anos, conceitos que estavam restritos a fundamentação de Mecânica Quântica têm sido consideravelmente ampliados para os diferentes domínios da Física. O desenvolvimento de técnicas experimentais para a manipulação da interação entre radiação e matéria tem permitido construir amostras atômicas macroscópicas, tornando possível a verificação de alguns conceitos fundamentais nestas escalas [107, 108, 109, 110]. Vários experimentos em CBE têm contribuído para aprofundar o conhecimento da natureza dos sistemas quânticos macroscópicos.

Em particular, a criação de CBE com duas componentes aprisionadas em armadilhas magneto-ópticas, permitiram a construção do *acoplamento Josephson* para átomos. A primeira realização experimental envolvendo a interação de mais de uma espécie condensada foi realizada por Myatt e colaboradores em 1997 utilizando átomos de rubídio [111]. Neste experimento, onde as componentes condensadas diferem apenas por níveis atômicos hiperfinos, ficou claro o importante papel desempenhado pelas colisões entre espécies diferentes (*interespécies*), afetando drasticamente a função de onda de cada espécie condensada [112]. A realização do efeito Josephson neste tipo de sistema, conhecido como *efeito Josephson interno* [113], ocorre através de uma transição Raman induzida por dois lasers que transferem átomos de uma espécie para outra [111, 114]. As interações átomo-átomo enriqueceram a dinâmica da fase relativa entre os dois condensados acoplados [115, 116] e a dinâmica das oscilações de Rabi [117].

Ao contrário do efeito Josephson interno, onde as diferentes componentes conden-

---

sadas se sobrepõem espacialmente, no *efeito Josephson externo* [113], os condensados são distinguíveis espacialmente. A primeira realização experimental deste efeito foi feita por Andrews e colaboradores [118] também em 1997, utilizando átomos de sódio. Neste caso, primeiramente foi gerado o condensado para posteriormente colocá-lo em um poço de potencial duplo. Devido ao fato de os condensados estarem espacialmente separados, as colisões interespecies não desempenham um papel tão relevante como no efeito Josephson interno. Mas as colisões *intraespecies* (mesma espécie), podem gerar fenômenos bastante interessantes, como o *auto-aprisionamento* [119, 120, 121]. Em geral, este fenômeno é atribuído exclusivamente aos efeitos não-lineares do sistema, que neste caso, são as colisões. Contudo, recentemente, Salgueiro e colaboradores contestaram a origem do auto-aprisionamento [122]. Os autores afirmam que a origem deste fenômeno não está nos termos “não-lineares”, mas sim no tempo de tunelamento, controlado pela diferença entre as auto-energias do sistema. Portanto, pequenas diferenças entre as auto-energias representam longos tempos de tunelamento, indicando que a população média em cada poço de potencial é aproximadamente constante para escalas de tempo muito menores que o tempo de tunelamento. A demonstração experimental do auto-aprisionamento foi feita por Albiez e colaboradores em 2005 [123].

As descrições teóricas dos efeitos Josephson externo e interno, foram apresentadas primeiramente por Milburn e colaboradores em 1997 [124] e por Cirac e colaboradores em 1998 [125], respectivamente. Estes problemas foram abordados na *aproximação de dois modos*, que consiste em desprezar as populações de ambas as espécies atômicas que se encontram em estados excitados. Após o tratamento consideravelmente simples dado aos referidos problemas, iniciou-se uma intensa investigação teórica buscando estudar os seus vários aspectos, tais como a evolução temporal da troca de população entre os condensados [119, 120, 126], a dinâmica de emaranhamento [127, 128], a conexão deste último com transições de fase quânticas [129], o controle e a detecção de superposições de estados macroscópicos [125, 130, 131], o estudo de fase de Berry [132, 133], e os efeitos da variação temporal dos parâmetros do hamiltoniano na dinâmica do sistema [134, 135].

É importante salientar que a análise do efeito Josephson no modelo de dois modos, que em alguns casos é exatamente solúvel, fornece informações que seriam difíceis de

serem obtidas através de um tratamento completo da teoria dos CBE [113]. Motivados por este fato, neste capítulo, estudar-se-á o efeito da temporalidade dos parâmetros do hamiltoniano sobre a fase geométrica adquirida pelo vetor de estado dos dois CBE acoplados [136]. Serão apresentadas soluções analíticas da equação de Schrödinger que levam em conta a possibilidade de variar a frequência do potencial de aprisionamento das duas componentes, assim como a frequência de Rabi e os comprimentos de espalhamento. Tais soluções analíticas são dependentes da existência de constantes de movimento, as quais têm forte conexão com a fase geométrica adquirida.

Neste mesmo sistema físico, abordagens similares para estudar a fase de Berry foram empregadas por Fuentes-Guridi e colaboradores em 2002 [132] e por Chen e colaboradores em 2004 [133], sendo que em seus tratamentos, a temporalidade está presente somente na frequência do campo laser, que varia de maneira adiabática. Em 2005, Balakrishnan e Mehta [137], no contexto do efeito Josephson externo e com os parâmetros do hamiltoniano mantidos constantes, estudaram a fase geométrica não-adiabática adquirida pela função de onda dos condensados.

O desenvolvimento apresentado a seguir tem a vantagem de conferir uma liberdade muito maior para se variar os parâmetros do hamiltoniano. Partindo de estados de Bloch iniciais, será demonstrado que a sua evolução, visualizada como um vetor na esfera de Bloch, pode ser usada para controlar a fase geométrica do vetor de estado dos condensados acoplados. Este tratamento também permite analisar a troca de população e a fase relativa entre os condensados, as quais são obtidas através dos ângulos polar e azimutal do vetor de Bloch, respectivamente.

## 4.1 O hamiltoniano de dois modos DT

Na aproximação de dois modos, onde os operadores dos campos quânticos  $\Psi_a = \Phi_a(\mathbf{r}, t)\mathbf{a}$  e  $\Psi_b = \Phi_b(\mathbf{r}, t)\mathbf{b}$  estão restritos aos seus estados fundamentais  $\Phi_\ell(\mathbf{r}, t)$  ( $\ell = a, b$ )

[125], os CBE acoplados são descritos pelo hamiltoniano DT

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(t) = & \sum_{\ell=a,b} [\omega_{\ell}(t) \ell^{\dagger} \ell + \gamma_{\ell}(t) \ell^{\dagger} \ell^{\dagger} \ell \ell] + \gamma_{ab}(t) \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} \mathbf{b}^{\dagger} \mathbf{b} \\ & - g(t) (e^{-i\delta(t)} \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{b} + e^{i\delta(t)} \mathbf{a} \mathbf{b}^{\dagger}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são operadores bosônicos de aniquilação associados à condensação nos níveis hiperfinos  $|2, 1\rangle$  e  $|1, -1\rangle$ , respectivamente [125, 130, 138]. A fase  $\delta(t)$  está associada à dessintonia  $\Delta_R(t)$  da transição Raman ressonante entre os níveis  $|2, 1\rangle \leftrightarrow |1, -1\rangle$ , podendo ser uma função DT através da variação da frequência e da fase do campo laser, de acordo com a expressão

$$\delta(t) = \int_{t_0}^t \Delta_R(\tau) d\tau + \delta_0. \quad (4.2)$$

As frequências DT da armadilha  $\omega_{\ell}(t)$ , dos parâmetros de colisões intraespécies  $\gamma_{\ell}(t)$  e interespcies  $\gamma_{ab}(t)$ , e a frequência de Rabi  $g(t)$ , decorrem de

$$\omega_{\ell}(t) = \int d^3\mathbf{r} \Phi_{\ell}^*(\mathbf{r}, t) \left[ -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V_{\ell}(\mathbf{r}, t) \right] \Phi_{\ell}(\mathbf{r}, t), \quad (4.3a)$$

$$\gamma_{\ell}(t) = \frac{4\pi A_{\ell}(t)}{2m} \int d^3\mathbf{r} |\Phi_{\ell}(\mathbf{r}, t)|^4, \quad (4.3b)$$

$$\gamma_{ab}(t) = \frac{4\pi A_{ab}(t)}{m} \int d^3\mathbf{r} |\Phi_a(\mathbf{r}, t) \Phi_b(\mathbf{r}, t)|^2, \quad (4.3c)$$

$$g(t) = \frac{\Omega(t)}{2} \int d^3\mathbf{r} \Phi_a^*(\mathbf{r}, t) \Phi_b(\mathbf{r}, t), \quad (4.3d)$$

onde  $m$  é a massa atômica. A dependência temporal do potencial da armadilha  $V_{\ell}(\mathbf{r}, t)$  é gerada através da variação adiabática do campo magnético de aprisionamento. É necessário que a variação deste campo seja adiabática para garantir a validade da aproximação de dois modos, caso contrário será possível excitar outros modos condensados. Os comprimentos de espalhamento DT  $A_{ab}(t)$  e  $A_{\ell}(t)$ , podem ser realizados via ressonância de Feshbach, pelo ajuste de campos magnéticos [139, 140]. A dependência temporal na frequência de Rabi  $\Omega(t)$  pode ser controlada pela variação da amplitude dos campos de bombeio, juntamente com o momento de dipolo elétrico [113]. Em geral,  $g(t)$  é uma função complexa, pois a integral em (4.3d) pode ser complexa, dependendo de  $\Phi_{\ell}(\mathbf{r}, t)$ , ou devido a  $\Omega(t)$ , com esta última sendo dada por

$$\Omega(t) = \frac{\Omega_{-1 \rightarrow 0} \Omega_{0 \rightarrow 1}}{\Delta_{Int}}. \quad (4.4)$$

$\Omega_{-1 \rightarrow 0}$  e  $\Omega_{0 \rightarrow 1}$  são as frequências de Rabi para as transições dipolares entre os estados hiperfinos  $|1, -1\rangle \rightarrow |2, 0\rangle$  e  $|2, 0\rangle \rightarrow |2, 1\rangle$ , respectivamente, e  $\Delta_{Int}$  é o resultado da dessintonia entre cada transição dipolar com o estado intermediário  $|2, 0\rangle$ . No primeiro pulso laser,  $|1, -1\rangle \rightarrow |2, 0\rangle$ , é aplicado um campo na frequência de microondas, enquanto que a segunda transição é realizada com rádio frequência [141].

Exceto pelo acoplamento do tipo Josephson, os estados de Fock são autoestados do hamiltoniano (4.1). Então, para remover este termo da expressão (4.1), será aplicada sobre a equação de Schrödinger a transformação unitária

$$\mathbf{V}(t) = \exp \left\{ \frac{r(t)}{2} [e^{i\phi(t)} \mathbf{a}\mathbf{b}^\dagger - e^{-i\phi(t)} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}] \right\}, \quad (4.5)$$

cujos efeitos sobre os operadores bosônicos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  dá-se da seguinte maneira

$$\mathbf{V}^\dagger(t) \mathbf{a} \mathbf{V}(t) = \cos[r(t)] \mathbf{a} + e^{-i\phi(t)} \sin[r(t)] \mathbf{b}, \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{V}^\dagger(t) \mathbf{b} \mathbf{V}(t) = \cos[r(t)] \mathbf{b} - e^{i\phi(t)} \sin[r(t)] \mathbf{a}. \quad (4.6b)$$

Para que a equação de Schrödinger se mantenha invariante pela atuação da transformação  $\mathbf{V}(t)$ , o hamiltoniano  $\mathbf{H}(t)$  deve se transformar como

$$\mathcal{H}(t) = \mathbf{V}^\dagger(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{V}(t) - i \mathbf{V}^\dagger(t) \dot{\mathbf{V}}(t) = \sum_{\ell=a,b} \tilde{\omega}_\ell(t) \mathbf{n}_\ell + \mathcal{H}_{el}(t) + \mathcal{H}_{inel}(t), \quad (4.7)$$

e o vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$  de acordo com  $|\psi(t)\rangle_V = \mathbf{V}^\dagger(t) |\psi(t)\rangle$ . O primeiro termo do lado direito da Eq. (4.7) é o operador número  $\mathbf{n}_\ell = \ell^\dagger \ell$  associado a cada modo condensado com frequência efetiva

$$\tilde{\omega}_\ell(t) = \omega_\ell(t) + (2\delta_{\ell b} - 1) g(t) \cos[\phi(t) - \delta(t)] \tan[r(t)/2], \quad (4.8)$$

e os outros termos são

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{el}(t) = & \left\{ \gamma_a(t) \cos^2[r(t)/2] + \gamma_b(t) \sin^2[r(t)/2] - \frac{\Lambda(t)}{4} \sin^2[r(t)] \right\} (\mathbf{a}^\dagger)^2 \mathbf{a}^2 \\ & + \left\{ \gamma_a(t) \sin^2[r(t)/2] + \gamma_b(t) \cos^2[r(t)/2] - \frac{\Lambda(t)}{4} \sin^2[r(t)] \right\} (\mathbf{b}^\dagger)^2 \mathbf{b}^2 \\ & + \{ \gamma_{ab}(t) + \Lambda(t) \sin^2[r(t)] \} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{inel}(t) = & \left\{ \frac{[\gamma_b(t) - \gamma_a(t)]}{2} \sin[r(t)] - \frac{\Lambda(t)}{4} \sin[2r(t)] \right\} e^{-i\phi(t)} (\mathbf{a}^\dagger)^2 \mathbf{a} \mathbf{b} \\ & + \left\{ \frac{[\gamma_b(t) - \gamma_a(t)]}{2} \sin[r(t)] + \frac{\Lambda(t)}{4} \sin[2r(t)] \right\} e^{-i\phi(t)} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}^2 \\ & + \frac{\Lambda(t)}{4} \sin^2[r(t)] (e^{-i\phi(t)} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b})^2 + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

com  $\mathcal{H}_{el}(t)$  ( $\mathcal{H}_{inel}(t)$ ) descrevendo as colisões elásticas (inelásticas) no sistema de coordenadas transformado por  $\mathbf{V}(t)$  e  $\Lambda(t) = \gamma_a(t) + \gamma_b(t) - \gamma_{ab}(t)$ .

A forma do hamiltoniano (4.7) somente pode ser obtida se for exigido que os termos proporcionais a  $\mathbf{a} \mathbf{b}^\dagger$  e  $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}$ , após a transformação unitária, sejam nulos. Como resultado desta imposição, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas para os parâmetros  $r(t)$  e  $\phi(t)$

$$\dot{r}(t) = 2g(t) \sin[\phi(t) - \delta(t)], \quad (4.11a)$$

$$\dot{\phi}(t) = \omega(t) + 2g(t) \cot[r(t)] \cos[\phi(t) - \delta(t)], \quad (4.11b)$$

onde

$$\omega(t) = \omega_a(t) - \omega_b(t). \quad (4.12)$$

Na expressão (4.12),  $\omega(t)$  representa a *freqüência efetiva* ou *relativa* do sistema composto pelos dois modos condensados, e desempenha um papel importante na solução das equações (4.11). No apêndice B, são apresentadas soluções analíticas para o sistema de equações acima. Estas soluções estão divididas em soluções nos regimes ressonante e não-ressonante, as quais são definidas comparando-se a freqüência efetiva  $\omega(t)$  com a dessintonia  $\Delta_R(t)$  entre os campos lasers e a transição Raman. No regime ressonante, onde  $\Delta_R(t) = \omega(t)$ , a dessintonia da transição Raman deve ser igual a freqüência efetiva dos dois modos condensados. De outra maneira, ter-se-á o regime não-ressonante, onde  $\Delta_R(t) = \omega(t) - \varpi$ , com  $\varpi$  sendo uma constante não-nula.

Equações diferenciais similares às Eqs. (4.11) foram obtidas por Smerzi e colaboradores [119, 120] em um tratamento semi-clássico para o problema do duplo-poço utilizando a equação de Gross-Pitaevskii. Naquele caso, os parâmetros do hamiltoniano foram mantidos constantes no tempo. Já Chen e colaboradores [133], em uma abordagem totalmente



quântica na aproximação de dois modos, similar a que é aqui apresentada, permitiram que somente o parâmetro  $\delta(t)$  variasse no tempo de forma adiabática.

Após os experimentos realizados por Hall e colaboradores com átomos de  $^{87}\text{Rb}$  [111, 112], onde os comprimentos de espalhamento satisfazem a relação  $A_a : A_{ab} : A_b = 1,03 : 1 : 0,97$ , uma série de trabalhos direcionaram suas atenções para este caso particular [121, 128, 132, 133, 142, 143]. Em 2001, Schumayer e Apagyi mostraram que a equação de Gross-Pitaevskii na aproximação de dois modos é exatamente integrável desde que a relação entre os comprimentos de espalhamento acima seja obedecida [143]. Na situação em que a relação acima é aproximadamente satisfeita  $A_a : A_{ab} : A_b \simeq 1 : 1 : 1$ , e conseqüentemente  $\gamma_a \simeq \gamma_{ab}/2 \simeq \gamma_b$  (assumindo funções gaussianas espaciais, conforme descritas na Eq. (4.34)), a integrabilidade deste sistema torna-se mais fácil [121, 128, 133]. Entretanto, se a proporção  $1,03 : 1 : 0,97$  for quebrada, o sistema não é mais exatamente integrável, mas admite soluções analíticas aproximadas, como mostrado nas Refs. [132, 133].

A abordagem que será apresentada aqui, consiste em encontrar as soluções das equações características (4.11) que tornarão desprezíveis as contribuições das colisões inelásticas  $\mathcal{H}_{inel}(t)$  quando comparadas com as colisões elásticas  $\mathcal{H}_{el}(t)$ . Isto será feito através da substituição das soluções obtidas no apêndice B para  $r(t)$  e  $\phi(t)$  nas expressões (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10), para posteriormente, fazer a aproximação de ondas girantes. A motivação para se fazer tal aproximação reside no fato de se poder tratar situações que vão além da relação entre os comprimentos de espalhamento apresentada no caso exatamente integrável.

Para realizar a aproximação de ondas girantes neste sistema, primeiramente deve-se ir para a representação de interação através da transformação unitária  $\mathbf{U}_0(t) = \exp \left[ -i \int_0^t d\tau \times \mathcal{H}_0(\tau) \right]$ , com  $\mathcal{H}_0(\tau)$  descrevendo a parte livre do hamiltoniano (4.7)

$$\mathcal{H}_0(t) = \sum_{\ell=a,b} \tilde{\omega}_\ell(t) \mathbf{n}_\ell. \quad (4.13)$$

O hamiltoniano transformado pode ser escrito como

$$\mathcal{H}_{int}(t) = \mathcal{H}_{el}(t) + \mathcal{H}_{inel}^{int}(t), \quad (4.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{inel}^{int}(t) = & \left\{ \frac{[\gamma_b(t) - \gamma_a(t)]}{2} \sin[r(t)] - \frac{\Lambda(t)}{4} \sin[2r(t)] \right\} e^{-i\Sigma(t)} (\mathbf{a}^\dagger)^2 \mathbf{a} \mathbf{b} \\ & + \left\{ \frac{[\gamma_b(t) - \gamma_a(t)]}{2} \sin[r(t)] + \frac{\Lambda(t)}{4} \sin[2r(t)] \right\} e^{-i\Sigma(t)} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}^2 \\ & + \frac{\Lambda(t)}{4} \sin^2[r(t)] (e^{-i\Sigma(t)} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b})^2 + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (4.15)$$

A comparação entre  $\mathcal{H}_{el}(t)$  e  $\mathcal{H}_{inel}^{int}(t)$  deve levar em conta não somente as funções que multiplicam os operadores em (4.9) e em (4.15), mas também os valores esperados destes operadores. Como exemplo, tome a comparação entre os termos

$$A_1(t) = \left\{ \gamma_a(t) \cos^2[r(t)/2] + \gamma_b(t) \sin^2[r(t)/2] - \frac{\Lambda(t)}{4} \sin^2[r(t)] \right\} \langle (\mathbf{a}^\dagger)^2 \mathbf{a}^2(t) \rangle, \quad (4.16)$$

da Eq. (4.9), e

$$A_2(t) = \frac{\Lambda(t)}{4} \sin^2[r(t)] \langle (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b})^2(t) \rangle e^{-i2\Sigma(t)}, \quad (4.17)$$

da Eq. (4.15), onde  $\langle \cdot \rangle$  significa o valor esperado do operador que está simbolizado pelo ponto. Neste caso, a contribuição da colisão inelástica (4.17) somente será desprezível comparada com a colisão elástica (4.16), quando  $\left| \frac{1}{T} \int_0^T d\tau A_1(t) \right| \gg \left| \frac{1}{T} \int_0^T d\tau A_2(t) \right|$ . Portanto, para que  $\mathcal{H}_{inel}^{int}(t)$  não contribua efetivamente para a dinâmica do sistema, é necessário que cada termo da Eq. (4.15) satisfaça a condição anterior com relação a todos os termos de  $\mathcal{H}_{el}(t)$ , Eq. (4.9). Um dos requisitos para que isto ocorra, é que a função  $\exp[-i\Sigma(t)] = \exp\left\{-2i \int_0^t d\tau g(\tau) \cos[\phi(\tau) - \delta(\tau)] \csc[r(\tau)]\right\}$  da Eq. (4.15), oscile muito mais que os coeficientes que a multiplicam, garantindo que as médias temporais destes termos sejam desprezíveis. Mas, há duas considerações importantes relacionadas às médias temporais. Na primeira delas, considerou-se o período do sistema igual a 100 *ms*, que é da ordem dos tempos de coerência alcançados experimentalmente [111, 112, 115, 116]. A outra consideração diz respeito aos valores esperados dos operadores do tipo  $\langle (\mathbf{a}^\dagger)^2 \mathbf{a}^2(t) \rangle$ . Note que para poder efetuar o cálculo deste valor esperado é necessário conhecer o estado do sistema no tempo  $t$ , ou seja, precisa-se ter a solução da equação de Schrödinger. Obviamente que este procedimento é inviável, e para contorná-lo será suposto que os operadores

bosônicos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sejam substituídos por amplitudes complexas de igual intensidade, uma vez que ambos são igualmente prováveis. Em todas as aproximações a seguir, obteve-se que as médias temporais das funções provenientes da parte inelástica são pelo menos duas ordens de grandezas menores do que aquelas provenientes da parte elástica. Portanto, dentro do limite de validade da aproximação de ondas girantes, o hamiltoniano efetivo é dado por

$$\mathcal{H}_{ef}(t) \simeq \sum_{\ell=a,b} \tilde{\omega}_{\ell}(\tau) \mathbf{n}_{\ell} + \mathcal{H}_{el}(\tau), \quad (4.18)$$

com o correspondente operador de evolução associado

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \exp\left(-i \int_{t_0}^t \mathcal{H}_{ef}(\tau) d\tau\right). \quad (4.19)$$

Conseqüentemente, dado um estado inicial  $|\psi(t_0)\rangle$ , este evoluirá de acordo com o hamiltoniano (4.1) da seguinte maneira

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{V}(t) \mathcal{U}(t, t_0) \mathbf{V}^{\dagger}(t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (4.20)$$

## 4.2 Dinâmica de CBE acoplados a partir de estados de Bloch iniciais

Seguindo Arecchi e colaboradores [144] e Dowling e colaboradores [145], os *estados de Bloch* (EB), também chamados de *estados coerentes atômicos*, escritos na base dos estados de Dicke  $|j, m\rangle$ , onde  $j = N/2$  e  $|m| \leq j$  (com  $m \in \mathbb{Z}$ ), são obtidos através de uma rotação específica do estado de referência  $|j, j\rangle$ ,

$$|\alpha, \beta\rangle = e^{\frac{\alpha}{2}} (e^{i\beta \mathbf{J}_-} - e^{-i\beta \mathbf{J}_+}) |j, j\rangle. \quad (4.21)$$

$N$  é o número de partículas condensadas,  $\mathbf{J}_+$ ,  $\mathbf{J}_-$  (juntamente com  $\mathbf{J}_z$ ), são os geradores da álgebra  $su(2)$ , e  $(\alpha, \beta)$  são os ângulos polares e azimutal, respectivamente, definidos na esfera de Bloch. A relação de incerteza de Heisenberg para o momento angular utilizando os EB se reduz a

$$\langle(\Delta \mathbf{J}_{x'})^2\rangle \langle(\Delta \mathbf{J}_{y'})^2\rangle = \frac{1}{4} |\langle \mathbf{J}_{z'} \rangle|^2, \quad (4.22)$$

com os valores esperados calculados no sistema de coordenadas rodado,  $(x', y', z')$ , onde  $z'$  está em um eixo na direção  $(\alpha, \beta)$  que atravessa o centro da esfera. O vetor de Bloch  $\hat{n}$  é definido como um vetor unitário no eixo  $z'$ , isto é,

$$\hat{n} = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha). \quad (4.23)$$

Usando as relações de Schwinger

$$\mathbf{J}_x = \frac{1}{2} (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} + \mathbf{a} \mathbf{b}^\dagger), \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{J}_y = \frac{1}{2i} (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} - \mathbf{a} \mathbf{b}^\dagger), \quad (4.24b)$$

$$\mathbf{J}_z = \frac{1}{2} (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} - \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}), \quad (4.24c)$$

com  $\mathbf{J}_\pm = \mathbf{J}_x \pm i\mathbf{J}_y$  e a base de estados  $\{|j, m\rangle = |N/2, (N_a - N_b)/2\rangle\} \equiv \{|N_a, N_b\rangle\}$ , onde  $N_a$  e  $N_b$  ( $N = N_a + N_b$ ) referem-se ao número de átomos em cada condensado, tal que  $|j, j\rangle \iff |N, 0\rangle$ , pode-se verificar que os EB podem ser definidos através dos operadores bosônicos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  como

$$|\alpha, \beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathbf{a}^\dagger + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\beta} \mathbf{b}^\dagger \right]^N |0, 0\rangle. \quad (4.25)$$

Este estado possui uma fase relativa  $\beta$  bem definida entre os dois modos bosônicos.

Através das relações (4.24) é evidente que a transformação unitária  $\mathbf{V}(t)$ , Eq. (4.5), é exatamente o operador de rotação  $e^{\frac{\alpha}{2}(e^{i\beta}\mathbf{J}_- - e^{-i\beta}\mathbf{J}_+)}$ , desde que  $r(t) = \alpha$  e  $\phi(t) = \beta$ . Desta maneira, dado um estado de Bloch inicial, cuja preparação dá-se pela aplicação de um pulso laser sobre os átomos condensados inicialmente em uma única espécie [112, 115, 116],  $|\psi(t_0)\rangle = |\alpha_0, \beta_0\rangle = \mathbf{V}(\alpha_0, \beta_0) |N, 0\rangle$ , os parâmetros da transformação unitária no tempo  $t_0$  serão dados por  $r_0 = \alpha_0$  e  $\phi_0 = \beta_0$ . Portanto, através da Eq. (4.20), verifica-se que o estado do sistema no tempo  $t$  também é um estado de Bloch

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{e^{-iN\varphi_N(t)}}{\sqrt{N!}} \left[ \cos\left(\frac{r(t)}{2}\right) \mathbf{a}^\dagger + \sin\left(\frac{r(t)}{2}\right) e^{i\phi(t)} \mathbf{b}^\dagger \right]^N |0, 0\rangle \\ &= e^{-iN\varphi_N(t)} |r(t), \phi(t)\rangle, \end{aligned} \quad (4.26)$$

a menos do fator de fase global  $e^{-iN\varphi_N(t)}$ , onde

$$\begin{aligned} \varphi_N(t) = \int_{t_0}^t d\tau \left\{ \tilde{\omega}_a(\tau) + (N-1) \left[ \gamma_a(\tau) \cos^2 [r(\tau)/2] \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_b(\tau) \sin^2 [r(\tau)/2] - \frac{\Lambda(\tau)}{4} \sin^2 [r(\tau)] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

A fase relativa entre os condensados  $\phi(t)$  está associada com os valores esperados dos operadores  $\langle \mathbf{J}_x(t) \rangle = N \sin [r(t)] \cos [\phi(t)] / 2$  e  $\langle \mathbf{J}_y(t) \rangle = N \sin [r(t)] \sin [\phi(t)] / 2$ , enquanto que  $r(t)$  se conecta com a média da diferença de população,  $\Delta N(t) = \langle \mathbf{N}_a - \mathbf{N}_b \rangle = 2 \langle \mathbf{J}_z(t) \rangle$ , através da relação

$$\Delta N(t) = N \cos [r(t)]. \quad (4.28)$$

Note que os parâmetros das colisões estão restritos ao fator de fase global  $e^{-iN\varphi_N(t)}$ , tornando-se irrelevantes para a análise das fases geométricas adquiridas pelo vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$ . Por outro lado, as colisões poderiam se tornar importantes se fossem considerados outros estados iniciais, como por exemplo, produtos de estados coerentes de Glauber  $|\psi(t_0)\rangle = |\alpha_a\rangle \otimes |\alpha_b\rangle$  ao invés de EB [128].

### 4.3 Fases geométricas adquiridas pelos EB

Para estudar a evolução da fase geométrica adquirida pelo estado dos dois modos condensados, será utilizada a abordagem cinemática desenvolvida por Mukunda e Simon [30], onde a fase geométrica  $\phi_G$  é obtida como a diferença entre a *fase total*

$$\phi_T(t) = \arg(\langle \psi(t_0) | \psi(t) \rangle), \quad (4.29)$$

e a *fase dinâmica*

$$\phi_D(t) = -i \int_{t_0}^t d\tau \langle \psi(\tau) | \frac{d}{d\tau} | \psi(\tau) \rangle, \quad (4.30)$$

resultando em

$$\phi_G(t) = \arg(\langle \psi(t_0) | \psi(t) \rangle) + i \int_{t_0}^t d\tau \langle \psi(\tau) | \frac{d}{d\tau} | \psi(\tau) \rangle. \quad (4.31)$$

Esta é uma abordagem alternativa àquela desenvolvida por Simon [25] para tratar evoluções não-cíclicas, que afirma que quando a trajetória é aberta, é necessário completar o caminho entre os pontos inicial e final com a geodésica mais curta. Então, substituindo a Eq.

(4.26) nas Eqs. (4.29), (4.30) e (4.31), obtém-se as expressões para  $\phi_G(t)$  e  $\phi_D(t)$  como funções dos parâmetros do sistema,

$$\begin{aligned} \phi_G(t) = & N \arg\{\cos(r_0/2) \cos[r(t)/2] + e^{i[\phi(t)-\phi_0]} \sin(r_0/2) \sin[r(t)/2]\} \\ & - \frac{N}{2} \int_{t_0}^t d\tau \dot{\phi}(\tau) \{1 - \cos[r(\tau)]\}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

e

$$\phi_D(t) = -N [\varphi_N(t) - \varphi_N(t_0)] + \frac{N}{2} \int_{t_0}^t d\tau \dot{\phi}(\tau) \{1 - \cos[r(\tau)]\}, \quad (4.33)$$

onde  $\varphi_N(t)$  foi apresentada na Eq. (4.27). Na Ref. [137], Balakrishnan e Mehta também obtiveram a expressão (4.32), mas para a fase geométrica adquirida pela função de onda de um CBE em um poço-duplo, através da equação de Gross-Pitaevskii na aproximação de dois modos.

A evolução temporal do estado em (4.26) pode ser seguida na superfície da esfera de Bloch através do vetor  $\hat{n}(t) = (\sin[r(t)] \cos[\phi(t)], \sin[r(t)] \sin[\phi(t)], \cos[r(t)])$  para as diferentes soluções de  $r(t)$  e  $\phi(t)$  apresentadas no apêndice B. Para seguir tal evolução, e conseqüentemente analisar a fase geométrica  $\phi_G(t)$ , é necessário estimar as integrais nas Eqs. (4.3). Isto é, os valores das frequências da armadilha, do acoplamento Josephson e das taxas de colisões intraespécies e interespcies. Como a aproximação de dois modos é válida somente para baixas densidades da nuvem condensada [124], o potencial de aprisionamento sentido por cada espécie é praticamente harmônico, sendo que a distribuição espaço-temporal para cada modo condensado  $\Phi_\ell(\mathbf{r}, t)$ , pode ser descrita em uma primeira aproximação por funções gaussianas estacionárias [125, 146]

$$\Phi_\ell(\mathbf{r}) = \left( \frac{1}{2\pi r_{0\ell}^2} \right)^{3/4} e^{-\mathbf{r}^2/4r_{0\ell}^2}, \quad (4.34)$$

onde  $r_{0\ell} = 1/\sqrt{2m\omega_\ell}$ , refere-se a incerteza na posição do estado fundamental de cada oscilador harmônico [124]. De acordo com a aproximação feita na Eq. (4.34), as integrais

em (4.3) são imediatamente estimadas, resultando em

$$\omega_\ell(t) = \omega_\ell(t), \quad (4.35a)$$

$$\gamma_\ell(t) = \frac{1}{(8\pi r_{0\ell}^2)^{3/2}} \frac{2\pi A_\ell(t)}{m}, \quad (4.35b)$$

$$\gamma_{ab}(t) = \frac{1}{(8\pi r_{0\ell}^2)^{3/2}} \frac{4\pi A_{ab}(t)}{m}, \quad (4.35c)$$

$$g(t) = \frac{\Omega(t)}{2}. \quad (4.35d)$$

Os valores experimentais típicos utilizados em átomos de  $^{87}\text{Rb}$  [112, 123, 147] são:  $m = 1,4 \times 10^{-25}$  Kg,  $\omega_\ell \sim 10^{1-2}$  Hz,  $A_\ell \sim 5$  nm e  $\Omega \sim 10^3$  Hz. Para se ter idéia de como é a dinâmica de pseudospin quando os parâmetros do hamiltoniano são DT, considerar-se-á que as frequências da armadilha e de Rabi sejam funções harmônicas que oscilam em torno dos valores experimentais típicos,

$$\omega_\ell(t) = \omega_{\ell 0} + \tilde{\omega}_\ell \sin(\chi_\ell t + \xi_\ell), \quad (4.36a)$$

$$g(t) = g_0 + \tilde{g} \sin(\mu t), \quad (4.36b)$$

onde os parâmetros  $\omega_{\ell 0}$ ,  $\tilde{\omega}_\ell$ ,  $\chi_\ell$ ,  $\xi_\ell$ ,  $g_0$ ,  $\tilde{g}$  e  $\mu$  são constantes. Desde que as colisões elásticas contribuem somente para o fator de fase global, será assumido que estas também são constantes no tempo.

## 4.4 Fase geométrica não-adiabática e dinâmica de pseudospin em CBE acoplados

Nesta seção será apresentado um estudo detalhado da fase geométrica adquirida pelo vetor de estado dos dois modos condensados. Para isto, será plotada a evolução temporal da fase geométrica (4.32) e analisado o seu comportamento através da evolução do vetor de Bloch (um mapa da evolução do vetor de estado dos CBE na esfera de Bloch). Este procedimento permitirá a visualização e um melhor entendimento do conceito de fases geométricas para trajetórias abertas introduzido por Samuel e Bhandari [28]. Em particular, estar-se-á interessado na dependência da fase geométrica em relação às constantes de movimento oriundas das soluções das equações características (4.11) e também

em relação à dependência temporal dos parâmetros do hamiltoniano. Para a análise que será desenvolvida a seguir, os parâmetros  $N = 1$ ,  $\delta_0 = 0$  e  $g_0 = 625\pi$  Hz permanecerão inalterados.

#### 4.4.1 Solução para $r$ constante

Antes de analisar as fases geométricas para as soluções ressonante e não-ressonante, é instrutivo estudar um caso mais simples, onde o parâmetro  $r$  é mantido constante e  $\phi(t)$  obedece a Eq. (B.10) (desde que  $g = 0$ ). Neste caso, a expressão para a fase geométrica oriunda da Eq. (4.32), torna-se

$$\phi_G(t) = N \left\{ \arg \left\{ \cos^2(r_0/2) + e^{-i[\phi(t)-\phi_0]} \sin^2(r_0/2) \right\} - \frac{(1 - \cos r_0)}{2} [\phi(t) - \phi_0] \right\}. \quad (4.37)$$

Na Fig. 4.1, o valor absoluto de  $\phi_G(t)$  é plotado contra o parâmetro adimensional  $\tau = \omega_{a0}t$ , assumindo os seguintes valores para as frequências das armadilhas,  $\omega_{a0} = 2\omega_{b0} = 62,5\pi$  Hz. Para  $r_0 = \pi/2$ , que significa que o vetor de Bloch se movimenta sobre o plano equatorial, e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$ , a fase geométrica evolui aos saltos, como indicado pela linha sólida mais espessa. Estes saltos ocorrem toda vez que a fase relativa ( $\phi(t)$ ) entre os vetores de Bloch final e inicial é igual a  $(2n + 1)\pi$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . A origem das descontinuidades reside no fato de haver um número infinito de geodésicas de comprimentos mínimos conectando as extremidades dos vetores, tornando portanto, a fase geométrica indefinida [23]. Por outro lado, observa-se que antes do salto em que  $\phi_G(\tau) = \pi$ , ou seja, para  $\tau < 2\pi$ , a fase geométrica permanece nula, pois a geodésica de menor comprimento que conecta as extremidades é a própria trajetória do vetor de Bloch. Assim que o vetor de Bloch adquire fase relativa maior que  $\pi$ , a geodésica de menor comprimento que conecta as extremidades completa uma volta sobre o equador, fazendo com que a fase geométrica adquirida seja proporcional a  $nN\pi$ , onde  $n$ , como definido acima, é o número de voltas em torno do eixo  $z$  da esfera.

A mesma interpretação dada acima para a fase geométrica é válida para as outras duas curvas obtidas para  $r_0 = \pi/2, 1$ , exceto que as descontinuidades são substituídas por curvas



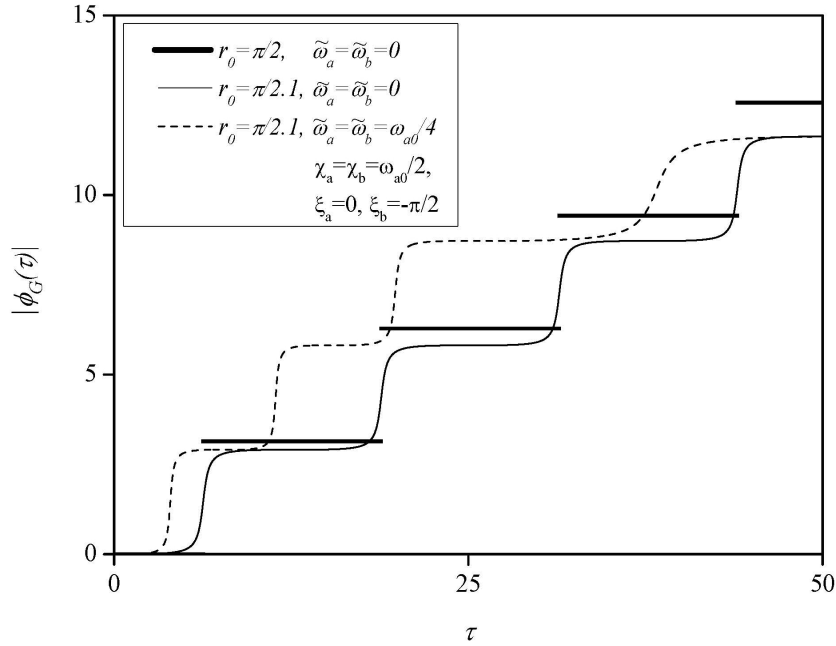


Figura 4.1: Evolução do valor absoluto da fase geométrica  $|\phi_G(t)|$  versus  $\tau = \omega_{a0}t$ , para  $r$  constante, com  $\omega_{a0} = 2\omega_{b0} = 62,5\pi$  Hz.

altamente inclinadas em torno dos pontos onde  $\phi = (2n + 1)\pi$ . A linha sólida, obtida para  $r_0 = \pi/2, 1$  e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$ , mostra que os incrementos da fase geométrica são menores, mas apresentam a mesma taxa de variação se comparados com o caso  $r_0 = \pi/2$ . Quando as frequências da armadilha são funções oscilantes, com  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = \omega_{a0}/4$ ,  $\chi_a = \chi_b = \omega_{a0}/2$ ,  $\xi_a = 0$  e  $\xi_b = -\pi/2$ , a dependência temporal mostrada pela linha tracejada, resulta na oscilação dos intervalos entre os incrementos da fase geométrica. Portanto, o efeito decorrente da dependência temporal dos parâmetros do hamiltoniano é atrasar ou avançar a seqüência de incrementos da fase relativa  $\phi$ , e conseqüentemente, da fase geométrica.

Para compreender melhor a discussão acima sobre fases geométricas adquiridas em trajetórias abertas, na Fig. 4.2 é plotada a evolução dos vetores de Bloch durante o mesmo intervalo de tempo,  $\tau = 4\pi$ , com  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$ . Os vetores em preto e cinza indicam as posições inicial e final dos vetores de Bloch, para os casos  $r_0 = \pi/2, 1$  (curva sólida) e  $r_0 = \pi/2$  (curva tracejada), respectivamente, após uma volta completa na esfera, de

acordo com as orientações dadas pelas setas. Evidentemente, a fase geométrica adquirida durante a evolução do vetor de Bloch no caso  $r_0 = \pi/2, 1$  (ângulo sólido compreendido pelo semi-hemisfério acima da circunferência sólida), é menor que para o caso  $r_0 = \pi/2$  (ângulo sólido correspondente ao hemisfério norte, que é igual a  $2\pi$ ).

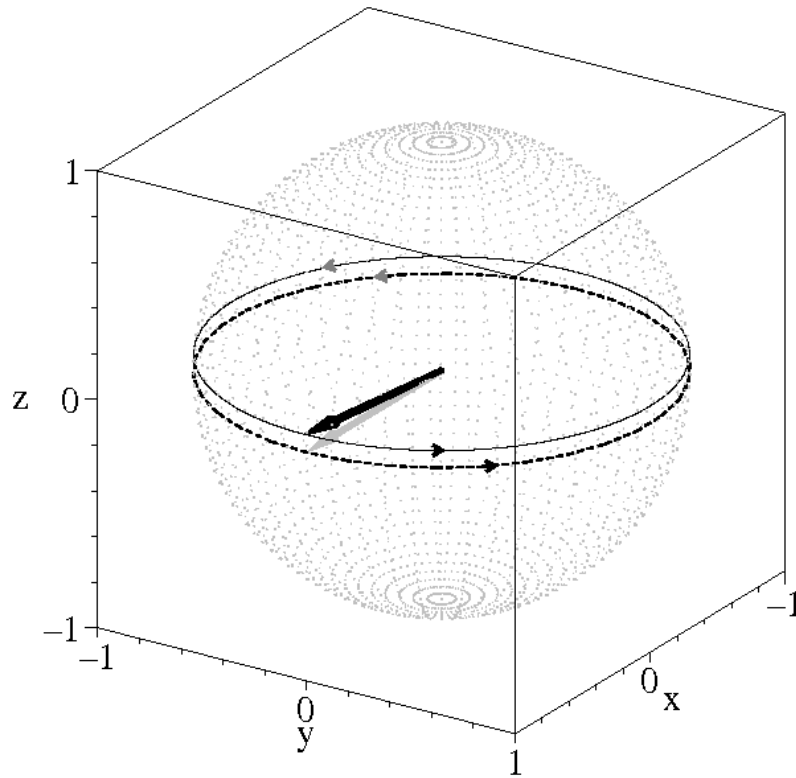


Figura 4.2: Evolução dos vetores de Bloch para a solução com  $r$  constante durante o intervalo de tempo  $\tau = 4\pi$ . Os vetores cinza e preto correspondem as condições iniciais  $(r_0, \phi_0) = (\pi/2, 0)$  e  $(\pi/2, 1, 0)$ , respectivamente, com  $\omega_{a0} = 2\omega_{b0} = 62,5\pi$  Hz e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$ .

A solução com  $r$  constante significa que a diferença de população  $\Delta N$  permanece constante, contudo a fase relativa  $\phi(t)$ , outro parâmetro examinado pelos experimentadores e necessário para definir completamente o EB, é uma função linear do tempo quando  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$ , ou uma função oscilante quando  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = \omega_{a0}/4$ . Note que as evoluções da diferença de população e da fase relativa podem ser seguidas através da projeção da trajetória do vetor de Bloch sobre o eixo  $z$  e sobre o plano  $x-y$ , respectivamente.

### 4.4.2 Solução ressonante

Como indicado no apêndice B, através da constante de movimento

$$\mathcal{C} = \sin [r(t)] \cos [\phi(t) - \delta(t)], \quad (4.38)$$

obtém-se a solução das equações características (4.11) no regime ressonante, onde  $\Delta_R(t) = \omega(t)$ . Todas as possíveis trajetórias no espaço de fase  $r(t) \times [\phi(t) - \delta(t)]$ , estão restritas às curvas de nível obtidas como projeção da superfície plotada na Fig. 4.3, a qual segue da constante  $\mathcal{C}$ .

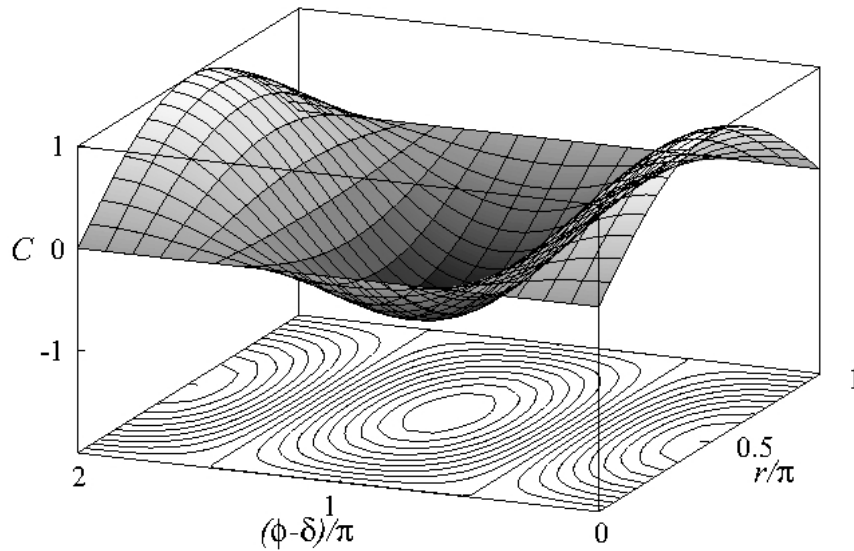


Figura 4.3: Espaço de fase  $r(t) \times [\phi(t) - \delta(t)]$  obtido como projeção da superfície que decorre da constante de movimento  $\mathcal{C} = \sin [r(t)] \cos [\phi(t) - \delta(t)]$  para a solução ressonante.

Para compreender melhor a fase geométrica adquirida pelo vetor de estado  $|\Psi(t)\rangle$ , de acordo com a solução ressonante (B.4), serão considerados dois casos diferentes: o primeiro, em que  $\Delta_R = 0$ , e o segundo, em que  $\Delta_R \neq 0$ . Em ambos os casos será analisada

a dependência da fase geométrica com relação a constante  $\mathcal{C}$ , através da expressão

$$\begin{aligned} \phi_G(t) = N \arg \{ & \cos(r_0/2) \cos[r(t)/2] + e^{-i[\phi(t)-\phi_0]} \sin(r_0/2) \sin[r(t)/2] \} \\ & - \frac{N}{2} \int_{t_0}^t dt' \left\{ \omega(t') \{1 - \cos[r(t')]\} + \frac{2\mathcal{C}g(t') \cos[r(t')]}{1 + \cos[r(t')]} \right\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

#### Caso em que $\Delta_R = 0$

Na Fig. 4.4 é plotada a evolução da fase geométrica contra o parâmetro adimensional  $\tau = g_0 t$ , considerando  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = \tilde{g} = 0$ . A linha sólida espessa sobre o eixo das abscissas corresponde a escolha  $r_0 = \pi$  e  $\phi_0 = \pi/2$ , levando à constante de movimento  $\mathcal{C} = 0$ . Neste caso, a fase geométrica é nula ou indefinida, como indicado pelos círculos abertos. Note que para  $r_0 = \pi$  obtém-se em  $t = 0$  uma equação indeterminada (B.4b) para  $\phi(t)$ . Para contornar este problema, será imposto sobre a Eq. (B.3) o vínculo  $\phi(t) - \delta(t) = (2n+1)\pi/2$  para qualquer intervalo de tempo, que permitirá determinar  $\phi(t)$  independentemente da Eq. (B.4b). Como  $\Delta_R = 0$ , segue de (4.2) que  $\delta(t) = \delta_0$ , implicando em  $\phi(t) = \delta_0 + (2n+1)\pi/2$ . Portanto, a fase geométrica neste caso,  $\mathcal{C} = \Delta_R = 0$ , simplifica-se para  $\phi_G(t) = N \arg \{ \cos[(r(t) - r_0)/2] \}$ , e conseqüentemente, será nula quando  $|r(t) - r_0| < \pi$  e indefinida quando  $|r(t) - r_0| = \pi$ . Ainda na Fig. 4.4, as linhas sólida fina e tracejada, associadas aos pares  $(r_0, \phi_0) = (\pi/5, \pi/4)$  e  $(\pi/4, 3\pi/10)$ , respectivamente, correspondem a mesma constante  $\mathcal{C} \simeq 0,41$ . Estas curvas exibem comportamento similar devido ao fato de que, com a mesma constante  $\mathcal{C}$ , apresentam a mesma trajetória no espaço de fase da Fig. 4.3, exceto por estarem partindo de condições iniciais diferentes. As linhas pontilhada e ponto-tracejada, associadas aos pares  $(\pi/3, 0)$  e  $(\pi/3, \pi)$ , correspondendo às constantes  $\mathcal{C} \simeq 0,87$  e  $\mathcal{C} \simeq -0,87$ , respectivamente, são simétricas com relação ao eixo das abscissas  $\tau$ . Tal propriedade de simetria por reflexão da fase geométrica ( $\phi_G \rightarrow -\phi_G$ ), é conseqüência da mudança  $\phi_0 \rightarrow \phi_0 \pm \pi$ , o que implica em  $\mathcal{C} \rightarrow -\mathcal{C}$ .

É importante notar que quanto maior o valor absoluto de  $\mathcal{C}$ , menor é a fase geométrica adquirida e *vice-versa*. Embora aqui não seja apresentada nenhuma demonstração formal deste fato, esta propriedade pode ser melhor entendida se a fase geométrica for associada a área descrita na superfície da Fig. 4.3. Através desta figura, percebe-se que as trajetórias cíclicas com caminhos maiores estão localizadas próximas a  $|\mathcal{C}| = 0$ , e as com caminhos

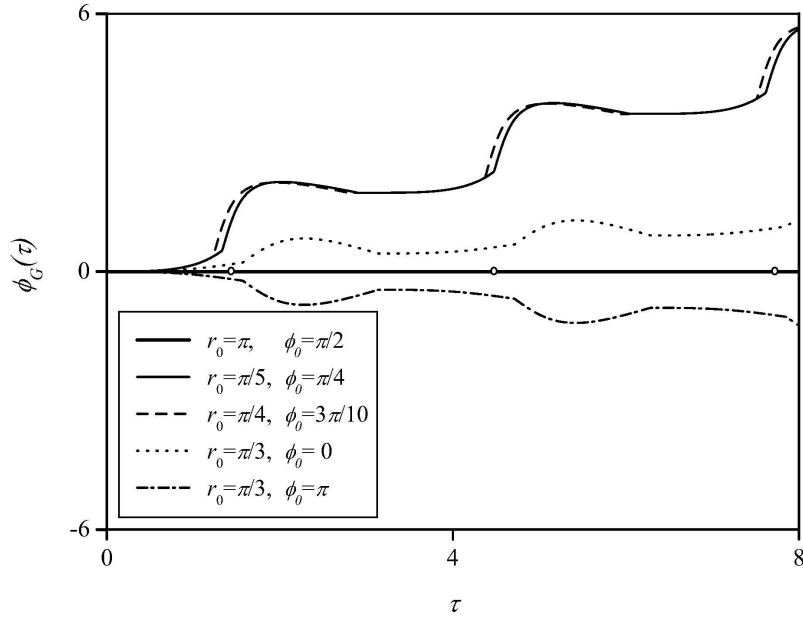


Figura 4.4: Evolução da fase geométrica  $\phi_G(t)$  versus  $\tau = g_0 t$ , para a solução ressonante, com  $\Delta_R = 0$  e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = \tilde{g} = 0$ .

menores próximas a  $|\mathcal{C}| = 1$ .

Na Fig. 4.5 são plotadas as evoluções dos vetores de Bloch provenientes da solução ressonante com as condições iniciais  $(\pi, \pi/2)$  e  $(\pi/3, 0)$ , correspondendo as constantes  $\mathcal{C} = 0$  e  $\mathcal{C} \simeq 0,87$ , cujas posições inicial e final são representadas pelo vetores preto e cinza, respectivamente. De modo análogo à Fig. 4.2, considerou-se a evolução de ambos os vetores durante o mesmo intervalo de tempo  $\tau = \pi$ . Através da trajetória da linha sólida descrita pelo vetor preto, a qual oscila entre os pólos norte e sul, pode-se concluir que a fase geométrica é nula durante toda a evolução temporal, exceto quando o vetor alcança o pólo norte, onde a fase geométrica torna-se indeterminada. Esta indeterminação ocorre pelos mesmos motivos que aqueles apresentados nas Fig. 4.1 e 4.2. Como a trajetória do vetor cinza não está restrita a um meridiano, a fase geométrica é evidentemente não-nula, sendo proporcional ao ângulo sólido englobado pela trajetória a partir da origem do sistema de coordenadas.

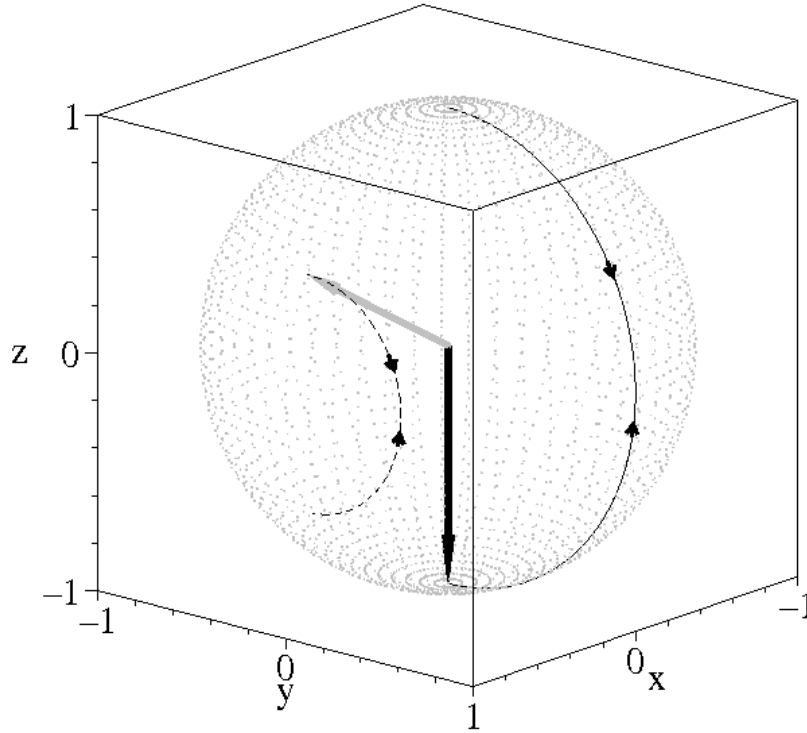


Figura 4.5: Evolução dos vetores de Bloch para a solução ressonante durante o intervalo de tempo  $\tau = \pi$ . Os vetores preto e cinza correspondem as condições iniciais  $(\pi, \pi/2)$  e  $(\pi/3, 0)$ , com  $\Delta_R = 0$  e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = \tilde{g} = 0$ .

#### Caso em que $\Delta_R \neq 0$

Como se está interessado na dependência da fase geométrica com relação a constante  $\mathcal{C}$ , e agora também com relação a frequência efetiva dos dois modos condensados  $\omega(t) = \Delta_R(t)$ , todos os parâmetros do hamiltoniano serão considerados independentes do tempo,  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = \tilde{g} = 0$ , exceto  $\delta(t) = \delta_0 + \int_{t_0}^t \omega(t') dt'$ , que é consequência de  $\Delta_R(t) \neq 0$ , de acordo com a Eq. (4.2). Na Fig. 4.6, a fase geométrica é plotada contra o parâmetro  $\tau = g_0 t$  para diferentes condições iniciais  $(r_0, \phi_0)$  e frequências efetivas  $\Delta_R$ . Como indicado pela linha sólida espessa, cuja condição inicial  $(\pi, \pi/2)$  corresponde a constante  $\mathcal{C} = 0$ , além de  $\omega_a = 2\omega_b = g_0/10$ , a fase geométrica não é mais nula, diferentemente do caso em que  $\Delta_R = 0$ . A descontinuidade exibida por esta curva segue da função  $\arg$  presente na Eq. (4.39), sendo que esta ocorrerá toda vez que  $\tau_n = [(2n - 1) \pi g_0] / 2\omega$ , com  $n \in \mathbb{N}_+$ .

De acordo com as linhas sólida fina e tracejada, a propriedade de simetria por reflexão da fase geométrica com relação ao eixo das abscissas também ocorre neste caso, porém, é necessário efetuar não somente a troca  $\phi_0 \rightarrow \phi_0 \pm \pi$ , mas também  $\omega \rightarrow -\omega$ . De fato, a linha sólida fina corresponde a condição inicial  $(\pi/3, 0)$  com  $\mathcal{C} \simeq 0,87$  e  $\omega_a = 2\omega_b = g_0/10$ , enquanto que a linha tracejada corresponde a  $(\pi/3, \pi)$ , com  $\mathcal{C} \simeq -0,87$  e  $\omega_b = 2\omega_a = g_0/10$ . Quando a troca  $\phi_0 \rightarrow \phi_0 \pm \pi$  não é seguida pela troca  $\omega \rightarrow -\omega$ , tal propriedade de simetria não é satisfeita, como indicado pela linha pontilhada. Esta curva corresponde à condição inicial  $(\pi/3, \pi)$  com  $\mathcal{C} \simeq -0,87$  e  $\omega_a = 2\omega_b = g_0/10$ .

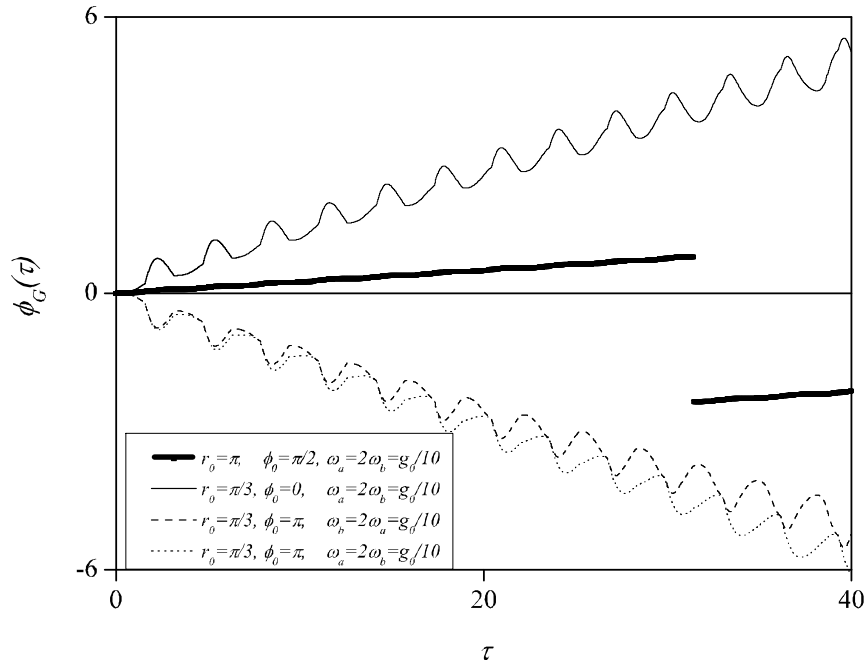


Figura 4.6: Evolução da fase geométrica  $\phi_G(t)$  versus  $\tau = g_0 t$ , para a solução ressonante com  $\Delta_R \neq 0$  e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = \tilde{g} = 0$ .

Para visualizar melhor a aquisição da fase geométrica para esta solução, retornar-se-á ao gráfico das evoluções dos vetores de Bloch. Como pode ser observado na Fig. 4.7, a trajetória sólida descrita pelo vetor associado à constante  $\mathcal{C} = 0$ , cujas posições inicial e final são coincidentes e estão indicadas pelo vetor preto, leva a um ângulo sólido

finito. Conseqüentemente, a fase geométrica será finita durante o tempo de evolução  $\tau = \pi$ , considerado para a evolução de ambos os vetores. O controle do ângulo sólido pode ser realizado através do parâmetro  $\Delta_R$ , de modo que quanto maior  $\Delta_R$ , maior é o ângulo sólido e vice-versa. Este tipo de controle foi demonstrado experimentalmente através da evolução do vetor de polarização de um fóton utilizando um interferômetro de Mach-Zehnder [79]. A evolução do vetor cinza, associada à constante  $\mathcal{C} \simeq 0,87$ , exibe a trajetória tracejada onde as posições inicial e final são levemente diferentes. Conforme ocorre a evolução do vetor de Bloch, tal trajetória leva a uma fase geométrica que excede em muito pouco aquela do caso em que  $\Delta_R = 0$ , como indicado nas Fig. 4.4 e 4.6.

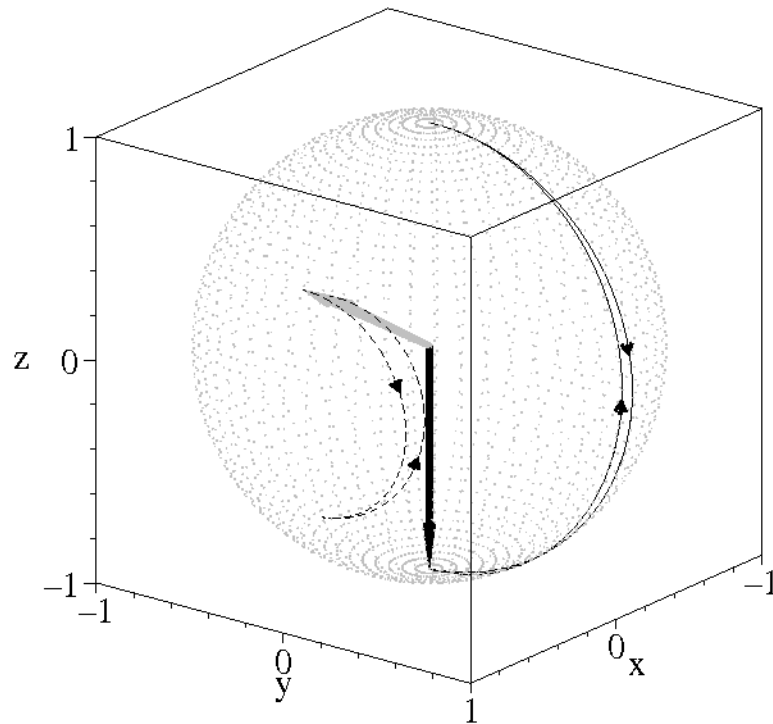


Figura 4.7: Evolução dos vetores de Bloch para a solução ressonante durante o intervalo de tempo  $\tau = \pi$ . Os vetores preto e cinza correspondem as condições iniciais  $(\pi, \pi/2)$  e  $(\pi/3, 0)$ , com  $\Delta_R \neq 0$  e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = \tilde{g} = 0$ .

A diferença de população  $\Delta N(t)$  para os casos  $\Delta_R = 0$  e  $\Delta_R \neq 0$  é uma função oscilante no tempo, que depende exclusivamente da frequência de Rabi  $g(t)$ . Esta característica, permite fazer uma conexão direta entre a dinâmica da inversão de população de um sistema



de dois níveis e a dinâmica de dois CBE acoplados. De fato, quando o hamiltoniano (4.1) é escrito em função dos operadores de quasi-spin (4.24), obtém-se, a menos dos termos de colisão, o hamiltoniano que descreve uma partícula de spin  $J$  imersa em um campo magnético que varia no tempo. Como para o estado inicial considerado verificou-se que as colisões não desempenham um papel importante na dinâmica deste sistema, o que efetivamente se tem é uma partícula de spin  $J$  imersa em um campo magnético DT, de modo análogo ao hamiltoniano (2.5). Por outro lado, a fase relativa  $\phi(t)$  depende também da dessintonia  $\delta(t)$ , além de  $g(t)$ , como mostrado pelas Eqs. (B.4).

### 4.4.3 Solução não-ressonante

De acordo com o apêndice B, para se obter a solução não-ressonante (B.8), primeiro é necessário encontrar a constante de movimento do sistema

$$\mathcal{C} = \eta \sin [r(t)] \cos [\phi(t) - \delta(t)] - \cos [r(t)], \quad (4.40)$$

a qual é obtida da imposição de que a frequência de Rabi  $g(t) = g_0$  seja constante no tempo. Nesta solução, a dessintonia  $\Delta_R(t) = \omega(t) - \varpi$  é controlada por  $\varpi$ , além de  $\omega(t)$ . Assim como no caso ressonante, todas as trajetórias possíveis para  $r(t)$  e  $\phi(t)$  estão restritas às curvas de nível da superfície da Fig. 4.8, obtidas de (4.40) com  $\eta = 2g_0/\varpi = 2$ . Quando  $\eta \gg 1$  verifica-se que a constante  $\mathcal{C}$  se reduz àquela da solução ressonante (4.38), a menos do fator multiplicativo  $\eta$ , e conseqüentemente, a superfície apresentada na Fig. 4.8, se reduz àquela da Fig. 4.3. No entanto, quando  $\eta \ll 1$  obtém-se um valor aproximadamente constante para  $r$ , significando que praticamente não há troca de população entre os modos condensados. Diferentemente da solução para  $r$  constante, vide Eqs. (B.9a) e (B.10), obtida com o desligamento do campo laser ( $g = 0$ ), aqui é possível manter o laser ligado, porém, exigindo-se que a dessintonia  $\varpi$  satisfaça a condição  $g_0 \ll \varpi$ .

O efeito de  $\eta$  sobre a fase geométrica na solução não-ressonante,

$$\begin{aligned} \phi_G(t) = N \arg \{ & \cos (r_0/2) \cos [r(t)/2] + e^{-i[\phi(t)-\phi_0]} \sin (r_0/2) \sin [r(t)/2] \} \\ & - \frac{N}{2} \int_{t_0}^t dt' \left\{ \omega(t') \{1 - \cos [r(t')]\} + \varpi \cos [r(t')] \frac{\mathcal{C} + \cos [r(t')]}{1 + \cos [r(t')]} \right\}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

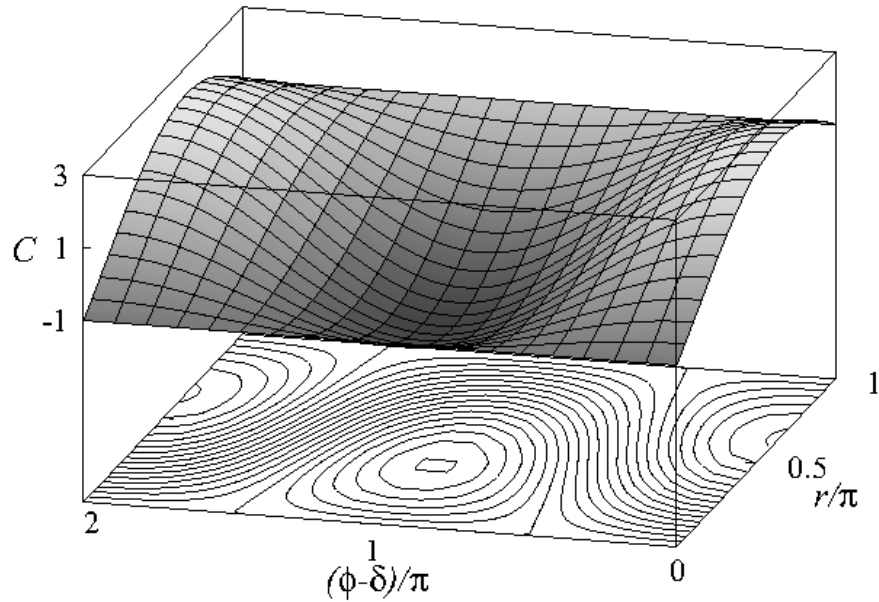


Figura 4.8: Espaço de fase  $r(t) \times [\phi(t) - \delta(t)]$  obtido como projeção da superfície que decorre da constante de movimento  $\mathcal{C} = \eta \sin [r(t)] \cos [\phi(t) - \delta(t)] - \cos [r(t)]$  para a solução não-ressonante.

pode ser visualizado através da Fig. 4.9, onde é plotada a evolução de  $\phi_G(\tau)$  contra  $\tau = g_0 t$  para diferentes valores de  $\eta$ . Todas as curvas desta figura partem do mesmo ponto  $(\pi/3, 0)$ , com  $\omega_{a0} = 2\omega_{b0} = g_0/10$  e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$ . A linha pontilhada segue do caso em que  $\eta = 40$  ( $\eta \gg 1$ ), indicando um comportamento similar ao caso ressonante, descrito pela linha sólida fina da Fig. (4.6). Para  $\eta = 0, 1$ , a linha sólida fina mostra que a fase geométrica é uma função altamente oscilante, um comportamento que é melhor visualizado através da evolução do correspondente vetor na esfera de Bloch, Fig. 4.10. Quando  $\varpi = g_0$  ( $\eta = 2$ ), a fase geométrica mostra descontinuidades, como indicado pela linha sólida espessa, o que vem a ser uma assinatura da fase geométrica na solução não-ressonante. A propriedade de simetria por reflexão com relação ao eixo das abscissas exibida pela fase geométrica na solução ressonante também está presente na solução não-ressonante. Porém, além das mudanças anteriores  $\phi_0 \rightarrow \phi_0 \pm \pi$  e  $\omega \rightarrow -\omega$ , é necessário que  $\eta \rightarrow -\eta$ .

Na Fig. 4.10, é possível observar a evolução dos vetores de Bloch durante o intervalo

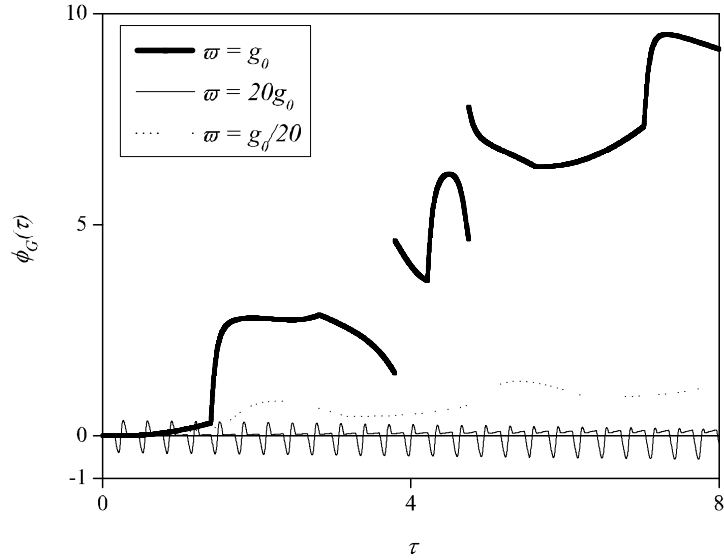


Figura 4.9: Evolução da fase geométrica  $\phi_G(t)$  versus  $\tau = g_0 t$  para a solução não-ressonante. Todas as curvas partem da mesma condição inicial  $(\pi/3, 0)$ , com  $\omega_{a0} = 2\omega_{b0} = g_0/10$  e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$ , para diferentes valores de  $\eta$ .

de tempo  $\tau \simeq 9\pi/10$ , para os casos onde  $\eta = 0, 1$  e  $\eta = 2$ , ambos partindo do mesmo ponto inicial  $(\pi/3, 0)$ . O vetor preto, com  $\eta = 0, 1$ , apresenta um comportamento limitado ao hemisfério norte da esfera, descrevendo uma trajetória (linha sólida) que exhibe movimentos para cima e para baixo, os quais são responsáveis pelas oscilações da fase geométrica mostrada na Fig. 4.9. O vetor cinza, com  $\eta = 2$ , por sua vez, apresenta uma trajetória (linha tracejada) bastante complicada, descendo ao hemisfério sul e voltando ao hemisfério norte.

Além de depender da frequência de Rabi, como no caso ressonante, a diferença de população para a solução não-ressonante também depende da dessintonia  $\varpi$ . Isto é natural, uma vez que quanto maior a dessintonia  $\varpi$  da transição Raman ressonante, menor é a taxa de transferência de átomos de uma espécie para outra. No limite em que  $|\varpi| \gg g_0$ , ou seja,  $|\eta| \ll 1$ , obtém-se uma interação dispersiva entre os dois modos condensados, de forma análoga a interação dispersiva entre o átomo e o campo na cavidade, obtido na Eq. (3.2). Uma característica interessante desta solução, é que a média temporal da diferença

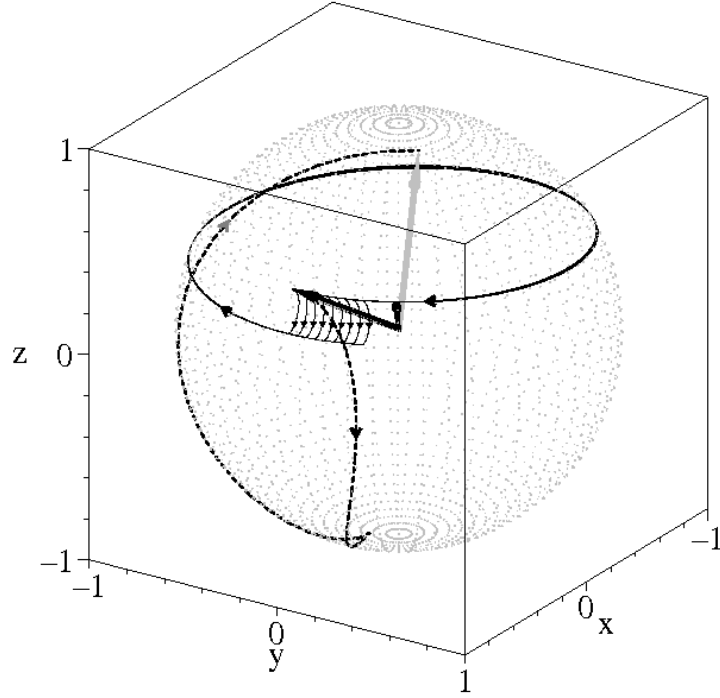


Figura 4.10: Evolução dos vetores de Bloch para a solução não-ressonante durante o intervalo de tempo  $\tau \simeq 9\pi/10$ . Os vetores preto e cinza, correspondendo a  $\eta = 0, 1$  e  $\eta = 2$ , respectivamente, partem do mesmo ponto  $(\pi/3, 0)$  com  $\omega_{a0} = 2\omega_{b0} = g_0/10$  e  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$ .

de população  $\langle \Delta N(t) \rangle$  é controlada pelas constantes  $\mathcal{C}$  e  $\eta$ . Mesmo na situação em que as armadilhas são simétricas, ou seja,  $\omega_{a0} = \omega_{b0}$ , é possível ter uma diferença de população média não-nula entre os condensados. Este efeito é análogo ao auto-aprisionamento, citado anteriormente. Porém, agora, é exclusivamente dependente do campo laser externo. Por outro lado, quando  $\mathcal{C} = 0$ , esta média é necessariamente nula, como pode ser compreendido através da Eq. (B.8a). A fase relativa, além de depender de  $\mathcal{C}$  e  $\eta$ , depende também de  $\delta(t)$ .

#### 4.4.4 Efeitos da dependência temporal sobre a fase geométrica

Na Fig. 4.11, onde é plotado  $\phi_G(\tau)$  contra  $\tau = g_0 t$ , analisa-se o comportamento da fase geométrica quando as frequências da armadilha e de Rabi são funções harmônicas DT,

como descrito pelas Eqs. (4.36). As condições iniciais  $(r_0, \phi_0) = (\pi/3, 0)$  são as mesmas para todas as curvas. Começando a análise pela solução ressonante com  $\Delta_R = 0$  ( $\omega_a = \omega_b$ ), obtém-se a curva pontilhada para os parâmetros  $\omega_{a0} = \omega_{b0} = g_0/10$ ,  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$  e  $\tilde{g} = \mu = g_0$ . Comparando-se esta curva com a curva pontilhada da Fig. 4.4, observa-se que estas são semelhantes, mas com a taxa de crescimento da fase geométrica na Fig. 4.11 sendo modulada pela dependência temporal da frequência de Rabi. A linha sólida fina corresponde à solução ressonante com  $\Delta_R \neq 0$ , onde os seguintes parâmetros  $\omega_{a0} = 2\omega_{b0} = g_0/10$ ,  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$  e  $\tilde{g} = \mu = g_0$  foram considerados. Esta curva deve ser comparada com a linha sólida fina presente na Fig. 4.6, mostrando novamente que a taxa de crescimento de  $\phi_G(t)$  pode ser controlada através da frequência de Rabi DT. A linha tracejada, que também corresponde ao caso  $\Delta_R \neq 0$ , mas com  $\omega_{a0} = 2\omega_{b0} = g_0$ ,  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = 0$  e  $\tilde{g} = \mu = g_0$ , mostra que a taxa de crescimento da fase geométrica pode ser controlada através da manipulação das frequências da armadilha. Comparando as linhas sólida fina e tracejada da Fig. (4.11), observa-se novamente o importante papel desempenhado pelas frequências da armadilha, uma vez que estas duas curvas diferem apenas por tais frequências. Por último, a linha sólida espessa, que corresponde à solução não-ressonante com  $\omega_{a0} = 2\omega_{b0} = g_0$ ,  $\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_b = \chi_a = \chi_b = g_0/2$ ,  $\xi_a = 0$ ,  $\xi_b = -\pi/2$ ,  $\tilde{g} = 0$ , e  $\varpi = g_0$ , deve ser comparada com a linha sólida espessa da Fig. 4.9, indicando mais uma vez a importância das frequências da armadilha no comportamento da fase geométrica.

Embora não tenha sido explorado o efeito da dependência temporal dos parâmetros do hamiltoniano (4.1) em relação a diferença de população e a fase relativa entre os condensados, é possível fazer algumas observações gerais: ao contrário da fase geométrica, a diferença de população entre os condensados não é dependente das frequências da armadilha. Para verificar isto, basta substituir as expressões (B.4a) e (B.8a) em (4.28). Por outro lado, assim como a fase geométrica, a fase relativa é fortemente dependente das frequências da armadilha.

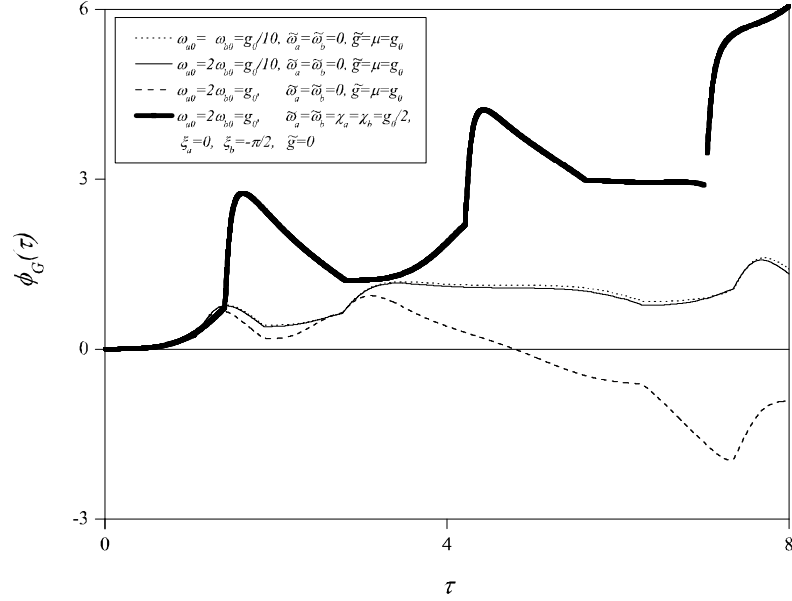


Figura 4.11: Evolução da fase geométrica  $\phi_G(\tau)$  versus  $\tau = g_0 t$  para as soluções ressonantes e não-ressonantes com a condição inicial  $(\pi/3, 0)$ .

## 4.5 Fases geométricas e o efeito Josephson externo

Nesta seção, os dois modos condensados são analisados de uma perspectiva diferente, como uma única espécie aprisionada em um potencial de poço-duplo simétrico ou assimétrico [118, 123]. Agora, o campo do laser presente no efeito Josephson interno é substituído pela taxa de tunelamento entre os poços, o que significa  $\Delta_R = 0$ , e conseqüentemente  $\delta = 0$ . Além do mais, no efeito Josephson externo a taxa de colisão interespecie corresponde a uma contribuição de segunda ordem comparada com as taxas de colisões intraespécies, portanto,  $\gamma_{ab} \simeq 0$  [124].

O hamiltoniano (4.1) aplicado a esta nova situação física, pode ser escrito como [124]

$$\mathbf{H}_{EJE}(t) = \sum_{\ell=a,b} [\omega_\ell(t) \ell^\dagger \ell + \gamma_\ell(t) \ell^\dagger \ell^\dagger \ell \ell] - g(t) (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} + \mathbf{a} \mathbf{b}^\dagger). \quad (4.42)$$

Embora, a condição experimental seja totalmente diferente nos efeitos Josephson interno e externo, todo o procedimento matemático utilizado anteriormente para resolver a equação

de Schrödinger com o hamiltoniano (4.1) será útil para resolvê-la com o hamiltoniano (4.42), desde que seja tomado  $\Delta_R = \delta = \gamma_{ab} = 0$  no primeiro caso. Naturalmente, haverá algumas diferenças entre estes dois sistemas físicos, e uma delas está na aproximação de ondas girantes. Pôde-se verificar através dos cálculos numéricos, que o número de situações em que a aproximação de ondas girantes é válida no efeito Josephson externo, é menor que no efeito Josephson interno. Porém, todas as soluções para o problema do poço-duplo apresentadas a seguir, satisfazem a aproximação de ondas girantes. Uma outra diferença está nas soluções das equações diferenciais acopladas, pois agora,  $\Delta_R = 0$ . Sendo assim, as soluções ressonante e não-ressonante são mapeadas nos casos em que os poços são simétricos,  $\omega = 0$  e  $\gamma_a(t) = \gamma_b(t)$ , e assimétricos,  $\omega = \varpi \neq 0$  e  $\gamma_a(t) \neq \gamma_b(t)$ , respectivamente.

A dependência temporal introduzida nos parâmetros do hamiltoniano deste sistema físico, pode ser realizada através da variação da altura da barreira que separa os dois condensados. Este procedimento afetará não somente a taxa de tunelamento entre as partes condensadas, mas também as frequências da armadilha e as taxas de colisões, uma vez que as densidades dos modos condensados serão alteradas. Um resultado interessante, que é efeito da variação temporal dos parâmetros do hamiltoniano, foi obtido por Salmond e colaboradores em 2002 [135]. Estudando a dinâmica deste sistema, eles mostraram que a variação temporal da altura da barreira pode levá-lo a um comportamento caótico no limite semi-clássico.

### 4.5.1 Poço-duplo simétrico

Da discussão acima, verifica-se que as soluções para  $r(t)$  e  $\phi(t)$  na situação em que os poços são simétricos são dadas pelas Eqs. (B.4), com a seguinte constante de movimento  $\mathcal{C} = \sin[r(t)] \cos[\phi(t)]$ . Similarmente ao efeito Josephson interno, todas as possíveis trajetórias para  $r(t)$  e  $\phi(t)$  seguem das curvas de nível da superfície plotada na Fig. 4.3, com  $\delta = 0$ . Estas mesmas curvas de nível foram obtidas através de métodos numéricos por Balakrishnan e Mehta [137].

Na situação em que a altura da barreira que separa os dois condensados é mantida fixa, e considerando estados de Bloch iniciais, as fases geométricas adquiridas pelo vetor de

estado dos CBE acoplados estão representadas na Fig. 4.4. Pode-se visualizar algumas de suas evoluções na esfera de Bloch através das trajetórias descritas na Fig. 4.5. Contudo, quando a altura da barreira oscila no tempo, na aproximação em que somente  $g(t)$  varia, mantendo  $\omega_\ell$  e  $\gamma_\ell$  fixos, a fase geométrica adquirida é descrita pela curva pontilhada da Fig. 4.11. É importante observar que a taxa de tunelamento DT,  $g(t)$ , é realizada através da modulação das amplitudes de dois campos clássicos contrapropagantes, os quais formam a barreira que separa os dois condensados.

### 4.5.2 Poço-duplo assimétrico

As soluções das equações características (4.11) para o caso em que os poços são assimétricos, seguem das Eqs. (B.8) com  $\Delta_R = 0$ . A consequência desta imposição sobre  $\Delta_R$  faz com que  $\delta(t) = \delta_0 = 0$  e que a frequência efetiva seja constante,  $\omega = \varpi$ . Como observado no apêndice B, esta solução é válida desde que a frequência de Rabi seja constante no tempo,  $g(t) = g_0$ . Neste caso,  $\eta$  será substituído por  $\tilde{\eta} = 2g_0/\omega$ , acarretando na seguinte constante de movimento  $\mathcal{C} = \tilde{\eta} \cos[\phi(t)] \sin[r(t)] - \cos[r(t)]$ . O espaço de fase  $r(t) \times \phi(t)$  é o mesmo da Fig. 4.8 com  $\delta = 0$ , cujas curvas de nível indicam todas as trajetórias possíveis para  $r(t)$  e  $\phi(t)$ . Estas curvas de nível também foram obtidas através de métodos numéricos por Balakrishnan e Mehta [137]. Como um exemplo da fase geométrica adquirida pela evolução do vetor de estado dos CBE em um poço-duplo assimétrico, tome a curva pontilhada da Fig. 4.9, que corresponde ao caso em que  $\omega = \varpi = g_0/20$ . (As outras curvas presentes na Fig. 4.9 não satisfazem a condição  $\omega = \varpi$ .) A trajetória do vetor de Bloch associada a correspondente fase geométrica, quando  $\omega = g_0/20$ , é aproximadamente descrita pela curva tracejada na Fig. 4.7. De acordo com a discussão feita na subseção 4.4.3, esta aproximação é válida quando  $|\eta| \gg 1$ , e neste caso  $\eta = 40$ . Portanto, nesta situação, a solução não-ressonante pode ser aproximada pela solução ressonante.



## Capítulo 5

# Construção geral da fase geométrica

Com a revisão bibliográfica apresentada no capítulo 2, é possível perceber que existem várias definições de fases geométricas, sendo que cada uma delas se aplica a situações particulares, a depender do tipo de evolução a que o estado do sistema está sujeito. Por exemplo, a fase de Berry é definida para evoluções cíclicas e adiabáticas dos autoestados do hamiltoniano [6]; a fase de Aharonov e Anandan foi construída para evoluções cíclicas e não-adiabáticas das soluções da equação de Schrödinger [27]; já a fase geométrica de Lewis e Riesenfeld, aplica-se às evoluções cíclicas e não-adiabáticas dos autoestados do operador invariante [17, 18], etc. Portanto, existem várias definições de fases geométricas na literatura, e até onde se tem conhecimento, não há uma definição geral da qual se possa obter todos os casos particulares. Este capítulo, destina-se justamente a cobrir tal tópico. Obter-se-á uma expressão para a fase geométrica adquirida pelos estados da base de um sistema que pode evoluir unitariamente ou não-unitariamente, adiabaticamente ou não-adiabaticamente e de maneira cíclica ou não-cíclica.

A teoria dos invariantes dinâmicos, também introduzida no capítulo 2, será de fundamental importância, pois a base de autoestados do operador invariante é naturalmente DT. Esta teoria também pode ser estendida para o caso onde a evolução do sistema é não-unitária. Como já mencionado, esta extensão foi feita por Dodonov e Man'ko em 1978 [16], sendo possível levar em conta os efeitos do reservatório na dinâmica do sistema. Nesta abordagem, os autoestados do invariante carregam informações sobre as perdas, podendo afetar a fase geométrica. Como exemplo, será calculada a fase geométrica de um

sistema de dois níveis sujeito a decaimento espontâneo.

## 5.1 Considerações gerais sobre a fase geométrica

Para calcular as fases geométricas adquiridas pelos estados de uma base ortonormal qualquer  $\{|\lambda, a; t\rangle\}$ , que carrega informação sobre o estado do sistema e sua evolução, é necessário relembrar dois conceitos importantes, o de *fase relativa* entre dois vetores e o de *transporte paralelo* de um vetor ou de um subespaço vetorial<sup>1</sup>.

De acordo com a expressão (4.29), a fase relativa entre os vetores inicial  $|\lambda, a; 0\rangle$  e final  $|\lambda, a; t\rangle$ , é dada por

$$\phi_{\lambda,a}^R(t) = \arg \{ \langle \lambda, a; 0 | \lambda, a; t \rangle \}. \quad (5.1)$$

Suponha agora, que o estado  $|\lambda, a; t\rangle$  seja transportado paralelamente durante o intervalo de tempo de 0 a  $t$ , então, a fase adquirida como resultado desta evolução

$$\phi_{\lambda,a}^G(t) = \arg \{ \langle \lambda, a; 0 | \lambda, a; t \rangle_{\parallel} \}, \quad (5.2)$$

será de natureza puramente geométrica, onde o símbolo  $\parallel$  indica que o estado  $|\lambda, a; t\rangle$  foi transportado paralelamente ao longo de sua evolução.

A próxima tarefa será encontrar o operador de evolução responsável pelo transporte paralelo dos vetores da base, além da matriz de *overlap*, que diz respeito à fase relativa entre os vetores quando a trajetória é aberta. Para que a fase geométrica obtida seja uma quantidade física, é necessário que no caso mais geral esta se transforme covariantemente e que seus observáveis sejam quantidades invariantes de gauge [104], como será mostrado a seguir.

### 5.1.1 Condição de transporte paralelo

De acordo com a Eq. (2.4), o vetor  $|\lambda, a; t\rangle_{\parallel}$  será transportado paralelamente quando obedecer a equação

$$\parallel \langle \lambda, a; t | d | \lambda, a; t \rangle_{\parallel} = 0, \quad (5.3)$$

---

<sup>1</sup>Embora muito interessante, esta tese não tem a intenção de explorar os conceitos a seguir do ponto de vista da geometria diferencial. A Ref. [58] é um bom texto sobre este assunto.

com

$$|\lambda, a; t\rangle_{\parallel} = \mathbf{V}_{\parallel}(t) |\lambda, a; 0\rangle. \quad (5.4)$$

O operador  $\mathbf{V}_{\parallel}(t)$  é responsável pelo transporte paralelo dos estados da base e admite a seguinte representação

$$\mathbf{V}_{\parallel}(t) = \sum_{\lambda, \lambda'} \sum_{a, a'} [V_{\parallel}(t)]_{\lambda\lambda'}^{aa'} |\lambda, a; t\rangle \langle \lambda', a'; 0|, \quad (5.5)$$

tal que  $\mathbf{V}_{\parallel}(0) \equiv \mathbf{1}$ . Substituindo a Eq. (5.5) na Eq. (5.4), e esta última em (5.3), obtém-se

$$\sum_{\lambda'} \sum_{a'} \left\{ \left\{ [V_{\parallel}(t)]_{\lambda'\lambda}^{a'a} \right\}^* \left[ \dot{V}_{\parallel}(t) \right]_{\lambda'\lambda}^{a'a} - i \sum_{\nu} \sum_c \left\{ [V_{\parallel}(t)]_{\nu\lambda}^{ca} \right\}^* [A(t)]_{\nu\lambda'}^{ca'} [V_{\parallel}(t)]_{\lambda'\lambda}^{a'a} \right\} = 0, \quad (5.6)$$

onde

$$[A(t)]_{\nu\lambda'}^{ca'} = \langle \nu, c; t | i \frac{d}{dt} | \lambda', a'; t \rangle, \quad (5.7)$$

é denominada *conexão* [58]. Como a Eq. (5.6) é válida para qualquer estado da base  $|\lambda, a; 0\rangle$ , esta pode ser reescrita na forma matricial,

$$\mathbf{V}_{\parallel}^{\dagger}(t) \dot{\mathbf{V}}_{\parallel}(t) - i \mathbf{V}_{\parallel}^{\dagger}(t) \mathbf{A}(t) \mathbf{V}_{\parallel}(t) = 0, \quad (5.8)$$

cujas solução formal é dada por

$$\mathbf{V}_{\parallel}(t) = \mathbf{T} \left\{ \exp \left[ i \int_0^t d\tau \mathbf{A}(\tau) \right] \right\}, \quad (5.9)$$

sendo que  $\mathbf{T}$  é o operador de ordenamento temporal e a matriz  $\mathbf{A}(t)$  é a *conexão não-abeliana*, formada pelos coeficientes da Eq. (5.7). Devido ao fato de  $\mathbf{A}(t)$  ser hermitiana,  $\mathbf{V}_{\parallel}(t)$  é unitário, isto é,  $\mathbf{V}_{\parallel}^{\dagger}(t) = \mathbf{V}_{\parallel}^{-1}(t)$ . Portanto, o operador de evolução  $\mathbf{V}_{\parallel}(t)$  é a *fase geométrica cíclica não-Abeliana*. A fase geométrica obtida em (5.9) é válida somente para evoluções cíclicas, sendo que para evoluções não-cíclicas é necessário adicionar o termo responsável pela fase relativa entre os vetores da base.

É importante notar que a expressão (5.9) leva em conta a possibilidade de haver transições entre os estados com  $\lambda \neq \lambda'$ , como se observa da Eq. (5.7), além do grau de liberdade introduzido pela degenerescência. A evolução descrita por  $\mathbf{V}_{\parallel}(t)$  é a mais geral possível e engloba várias situações, como por exemplo, quando os autoestados degenerados do hamiltoniano evoluem não-adiabaticamente de acordo com a equação de Schrödinger. A Eq. (5.5) ainda admite três formas particulares:

A) a primeira delas

$$\mathbf{V}_\parallel^A(t) = \sum_\lambda [V_\parallel^A(t)]_\lambda |\lambda; t\rangle \langle \lambda; 0|, \quad (5.10)$$

descreve *evoluções que não realizam transições entre os estados da base*, podendo ser uma evolução *adiabática* ou *não-adiabática de estados não-degenerados*. Um exemplo de evolução adiabática descrita pelo operador (5.10), é a dos autoestados não-degenerados do hamiltoniano apresentada por Berry em 1984 [6]. Já uma *evolução não-adiabática e não-transicional*, é obtida via teoria dos invariantes dinâmicos [14], como pode ser visto pela solução da equação de Schrödinger (2.18) com os coeficientes dados pela Eq. (2.21). Note que existe diferença entre *evolução adiabática* e a *evolução não-transicional* apresentada aqui. Na primeira delas, a base de estados é construída a partir dos autoestados do gerador da evolução [148], enquanto que na segunda, é construída a partir dos autoestados do operador invariante sem a presença do reservatório.

Os coeficientes  $[V_\parallel^A(t)]_\lambda$  obtidos a partir da solução da Eq. (5.8) podem ser vistos como um caso particular da Eq. (5.9) em que a conexão  $\mathbf{A}(t)$  é unidimensional, isto é,

$$[V_\parallel^A(t)]_\lambda = \exp \left[ i \int_0^t d\tau \langle \lambda; \tau | i \frac{d}{d\tau} | \lambda; \tau \rangle \right], \quad (5.11)$$

e fornecem exatamente a expressão da fase de Berry [6] e da fase geométrica cíclica de Lewis e Riesenfeld [17, 18].

Após a obtenção do operador de evolução (5.10), com os coeficientes dados pela Eq. (5.11), é possível entender porque sistemas físicos diferentes podem fornecer a mesma fase geométrica. Tome como exemplo o caso considerado por Berry de uma partícula de spin 1/2 em um campo magnético dependente do tempo, cujos hamiltoniano, autoestados e fases geométricas são descritos pelas Eqs. (2.5), (2.6a), (2.6b) e (2.8), respectivamente. Abordando um problema similar, mas com o hamiltoniano dado apenas por  $\mathbf{H}_{inv} = \omega_0 \boldsymbol{\sigma}_z / 2$ , e considerando evoluções cíclicas e não-adiabáticas dos autoestados do operador invariante, Mizrahi [18] mostrou que a fase geométrica é a mesma obtida por Berry. Tal coincidência reside no fato de que os autoestados do operador invariante são os mesmos das Eqs. (2.6a) e (2.6b) com  $\omega = \omega_0$ . Então, para evoluções cíclicas, embora com períodos diferentes, em ambos os casos os vetores de estado percorrem o mesmo ângulo sólido. Fazendo outra comparação, agora entre a fase geométrica obtida por Mizrahi [18] e por Aharonov

e Anandan [27], conclui-se que estas são idênticas. Desta vez, a razão para a igualdade entre os resultados está no fato de que os autoestados do operador invariante são soluções da equação de Schrödinger a menos uma fase temporal [14]. Como a fase geométrica é invariante de gauge (ver discussão abaixo da Eq. (2.4)), o resultado de Aharonov e Anandan fornece a mesma fase geométrica obtida via teoria dos invariantes.

*B)* a segunda forma particular do operador de evolução  $\mathbf{V}_{\parallel}(t)$ ,

$$\mathbf{V}_{\parallel}^B(t) = \sum_{\lambda} \sum_{a,a'} [V_{\parallel}^B(t)]_{\lambda}^{aa'} |\lambda, a; t\rangle \langle \lambda, a'; 0|, \quad (5.12)$$

considera que há transições apenas dentro do subespaço degenerado  $\lambda$  e pode contemplar tanto *evoluções adiabáticas* quanto *não-adiabáticas*. A matriz formada pelos coeficientes  $[V_{\parallel}^B(t)]_{\lambda}^{aa'}$ , é dada por

$$[\mathbf{V}_{\parallel}^B(t)]_{\lambda} = \mathbf{T} \left\{ \exp \left[ i \int_0^t d\tau \mathbf{A}_{\lambda}(\tau) \right] \right\}, \quad (5.13)$$

onde as entradas da matriz  $\mathbf{A}_{\lambda}(t)$  são

$$[A(t)]_{\lambda}^{aa'} = \langle \lambda, a; t | i \frac{d}{dt} | \lambda, a'; t \rangle. \quad (5.14)$$

Um exemplo de evolução adiabática descrita pelo operador (5.12), ocorre quando os autoestados degenerados do hamiltoniano evoluem de maneira cíclica e adiabática, recuperando através da expressão (5.13) a fase não-abeliana de Wilczek e Zee [26]. No caso em que os estados  $|\lambda, a; t\rangle$  são os autoestados degenerados do operador invariante, a evolução cíclica pode ser não-adiabática, levando ao resultado obtido na Ref. [90], como mostrado na Eq. (2.30).

*C)* a terceira e última forma particular do operador de evolução  $\mathbf{V}_{\parallel}(t)$ ,

$$[\mathbf{V}_{\parallel}^C(t)] = \sum_{\lambda, \lambda'} [V_{\parallel}^C(t)]_{\lambda\lambda'} |\lambda; t\rangle \langle \lambda'; 0|, \quad (5.15)$$

descreve *evoluções não-adiabáticas* em que há transições entre os estados não-degenerados da base  $\{|\lambda; t\rangle\}$ . Então, através da solução da Eq. (5.8), os coeficientes de  $\mathbf{V}_{\parallel}^C(t)$  podem ser escritos na forma matricial

$$\mathbf{V}_{\parallel}^C(t) = \mathbf{T} \left\{ \exp \left[ i \int_0^t d\tau \mathbf{A}_C(\tau) \right] \right\}, \quad (5.16)$$

com as entradas da conexão não-abeliana dadas por  $[\mathbf{A}_C(t)]_{\lambda\lambda'} = \langle \lambda; t | i \frac{d}{dt} | \lambda'; t \rangle$ .

A realização deste tipo de evolução, por exemplo, pode ser feita através da solução não-adiabática da equação de Schrödinger quando escrita em uma base qualquer de estados ortonormais, isto é,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda}(t) |\lambda; t\rangle, \quad (5.17)$$

tal que  $\sum_{\lambda} |c_{\lambda}(t)|^2 = 1$ . Substituindo a Eq. (5.17) em (2.13), obtém-se a equação para os coeficientes  $c_{\lambda}(t)$ ,

$$i\dot{c}_{\lambda} + \sum_{\mu} c_{\mu}(t) \left[ \langle \lambda; t | i \frac{d}{dt} | \mu; t \rangle - \langle \lambda; t | \mathbf{H}(t) | \mu; t \rangle \right] = 0, \quad (5.18)$$

cuja solução formal pode ser escrita da seguinte maneira

$$\vec{c}(t) = \mathbf{T} \exp \left\{ i \int_0^t d\tau [\mathbf{A}(\tau) + \mathbf{E}(\tau)] \right\} \vec{c}(0), \quad (5.19)$$

onde os coeficientes do vetor  $[\vec{c}(t)]^{\dagger} = (c_1^*(t), \dots, c_N^*(t))$  são dados por  $c_{\mu}(t) = \langle \mu; t | \Psi(t) \rangle$ , e os coeficientes das matrizes hermitianas  $\mathbf{A}(t)$  e  $\mathbf{E}(t)$  por  $[A(t)]_{\lambda\mu} = \langle \lambda; t | i \frac{d}{dt} | \mu; t \rangle$  e  $[E(t)]_{\lambda\mu} = -\langle \lambda; t | \mathbf{H}(t) | \mu; t \rangle$ , respectivamente.

Com o propósito de obter uma fase geométrica não-abeliana e não-adiabática, em 1988 Anandan [8] percorreu o mesmo caminho das Eqs. (5.17) à (5.19), exigindo, por fim, que  $\mathbf{A}(t)$  e  $\mathbf{E}(t)$  comutassem. Como em geral, tal propriedade não é satisfeita, obter uma definição de fase geométrica a partir das equações de movimento das amplitudes de probabilidades, quando estas estão acopladas, pode não ser possível, o que justifica as definições introduzidas neste capítulo.

Na página 138 da Ref. [58], a expressão (5.19) também é deduzida, mas com os estados  $|\lambda; t\rangle$  sendo interpretados como soluções da equação de Schrödinger. Nesta referência, as fases dinâmica e geométrica são definidas, respectivamente, por

$$\mathbf{U}^{din}(t) \equiv \mathbf{T} \left[ e^{i \int_0^t d\tau \mathbf{E}(\tau)} \right], \quad (5.20)$$

e

$$\mathbf{U}^{geom}(t) \equiv \mathbf{T} \left[ e^{i \int_0^t d\tau \mathbf{A}(\tau)} \right], \quad (5.21)$$

baseando-se apenas na extensão destas fases para o caso abeliano. Mesmo que as expressões (5.16) e (5.21) coincidam, através da dedução da fase geométrica cíclica da Eq.

(5.16), é possível identificar a fase geométrica associada a uma determinada evolução sem a necessidade de fazer suposições adicionais, tais como a comutação das matrizes  $\mathbf{A}(t)$  e  $\mathbf{E}(t)$ , ou impondo qualquer definição extra de fase.

De acordo com a Eq. (5.19), é muito difícil ter uma evolução onde haja apenas a fase geométrica, ou até mesmo, separar as contribuições provenientes das fases dinâmica e geométrica. Uma possibilidade para se tentar reescrever a Eq. (5.19) como um produto de exponenciais das Eqs. (5.20) e (5.21) é através da fórmula de Trotter [149]. Contudo, em geral não se pode garantir que seja possível realizar tal tarefa; deve-se analisar caso a caso. Todas as considerações feitas acima, também se aplicam à Eq. (2.25) no contexto dos autoestados degenerados do operador invariante e às equações que dela decorrem.

Portanto, em uma evolução não-adiabática de estados transicionais não-degenerados, a fase geométrica cíclica e não-abeliana é dada pela Eq. (5.16), mesmo que via equações de movimento seja impossível isolar a sua contribuição.

### 5.1.2 Trajetórias abertas

Até aqui, apenas as evoluções cíclicas foram contempladas pela expressão da fase geométrica (5.9). Para levar em conta a fase relativa entre os estados da base quando a trajetória é não-cíclica, deve-se recorrer novamente a Eq. (5.2), a qual fornece a fase geométrica obtida durante a evolução do vetor  $|\lambda, a; 0\rangle$  para  $|\lambda, a; t\rangle_{\parallel}$ . Esta expressão ainda pode ser generalizada para o caso em que se deseja calcular a fase relativa entre dois vetores quaisquer da base, de forma que

$$[\phi^G(t)]_{\lambda', \lambda}^{a' a} = \arg \left\{ \langle \lambda', a'; 0 | \lambda, a; t \rangle_{\parallel} \right\}. \quad (5.22)$$

Substituindo as Eqs. (5.4) e (5.5) em (5.22), obtém-se

$$[\phi^G(t)]_{\lambda', \lambda}^{a' a} = \arg \left\{ \sum_{\nu} \sum_c \langle \lambda', a'; 0 | \nu, c; t \rangle [V_{\parallel}(t)]_{\nu \lambda}^{ca} \right\}. \quad (5.23)$$

Reescrevendo o argumento da Eq. (5.23) na forma matricial

$$\sum_{\nu} \sum_c \langle \lambda', a'; 0 | \nu, c; t \rangle [V_{\parallel}(t)]_{\nu \lambda}^{ca} = [\mathbf{W}(0, t) \mathbf{V}_{\parallel}(t)]_{\lambda', \lambda}^{a' a}, \quad (5.24)$$

onde  $\mathbf{W}(0, t)$  é a *matriz de overlap* composta pelos coeficientes

$$W_{\lambda', \lambda}^{a' a}(0, t) = \langle \lambda', a'; 0 | \lambda, a; t \rangle, \quad (5.25)$$

e  $\mathbf{V}_{\parallel}(t)$  é dado pela Eq. (5.9), é possível obter o operador  $\mathcal{O}(t)$  responsável por uma evolução não-cíclica onde os estados da base são transportados paralelamente

$$\mathcal{O}(t) = \mathbf{W}(0, t)\mathbf{V}_{\parallel}(t). \quad (5.26)$$

No caso em que os coeficientes da matriz  $\mathbf{W}(0, t)$  são construídos a partir de um *subespaço completo*, isto é,

$$\sum_{\lambda} \sum_a |\lambda, a; t\rangle \langle \lambda, a; t| = \mathbf{1}, \quad (5.27)$$

o operador  $\mathcal{O}(t)$  torna-se a *fase geométrica não-cíclica e não-abeliana* adquirida em uma evolução geral dos estados da base. Este cuidado com relação a completude do subespaço é necessário, pois a matriz de *overlap* será unitária somente quando a base for completa. Todavia, como observado por Kult e colaboradores [150], quando esta matriz estiver restrita a um subespaço incompleto, ou seja, onde a condição (5.27) não for mais satisfeita, deve-se *decompô-la na forma polar* e tomar apenas a sua parte unitária. A decomposição polar de uma matriz  $\mathbf{B}$  qualquer consiste em escrevê-la na forma

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (5.28)$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma *matriz hermitiana* e  $\mathbf{U}$  uma *matriz unitária*. Este procedimento baseia-se na decomposição polar de um número complexo  $z = |z|e^{i\varphi}$ , cuja conexão com a Eq. (5.28) é estabelecida ao lembrar que  $\det \mathbf{R} = |\mathbf{z}| \geq 0$  e  $\det \mathbf{U} = e^{i\varphi}$ . Então, o determinante da Eq. (5.28) leva à

$$\det \mathbf{B} = |z| e^{i\varphi}. \quad (5.29)$$

Note que a informação referente a fase está somente na matriz  $\mathbf{U}$ , a qual substituirá  $\mathbf{W}$  na expressão (5.26) quando o subespaço a ser transportado for incompleto. Porém, para poder escrever  $\mathbf{U}$  como  $\mathbf{U} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}$ , é necessário que  $\det \mathbf{R} > 0$ , ou em outras palavras, que  $\mathbf{R}$  seja uma *matriz positiva definida*. No caso em que a matriz  $\mathbf{R}$  é *positiva semi-definida* ( $\det \mathbf{R} \geq 0$ ), deve-se utilizar a *pseudoinversa de Moore-Penrose*, que consiste em



tomar apenas os autovalores não-nulos de  $\mathbf{R}$  [150]. Portanto, a fase geométrica não-cíclica e não-abeliana adquirida pela evolução de um subespaço, é dada por

$$\mathcal{O}_g(t) = \mathbf{U}(0, t)\mathbf{V}_{\parallel}(t), \quad (5.30)$$

onde  $\mathbf{U}(0, t)$  é a parte unitária da matriz de *overlap*  $\mathbf{W}(0, t)$ , que recupera a expressão (5.26) quando  $\mathbf{W}^\dagger(0, t) = \mathbf{W}^{-1}(0, t)$ .

Após a consideração de que vetores da base podem percorrer trajetórias abertas, as situações particulares em que as evoluções são descritas pelos operadores  $\mathbf{V}_{\parallel}^A(t)$ ,  $\mathbf{V}_{\parallel}^B(t)$  e  $\mathbf{V}_{\parallel}^C(t)$ , devem fornecer novas expressões para as fases geométricas. No caso em que a evolução é efetuada pelo operador  $\mathbf{V}_{\parallel}^A(t)$ , a fase geométrica não-cíclica torna-se

$$[O_g^A(t)]_\lambda = \arg \left\{ \langle \lambda; 0 | \lambda; t \rangle \exp \left[ - \int_0^t d\tau \langle \lambda; \tau | \frac{d}{d\tau} | \lambda; \tau \rangle \right] \right\}, \quad (5.31)$$

recuperando os resultados obtidos por de Polavieja e Sjöqvist [23], para evoluções adiabáticas dos autoestados não-degenerados do hamiltoniano, e por Mostafazadeh [104], para evoluções não-adiabáticas dos autoestados não-degenerados do operador invariante.

Se os estados da base evoluírem de acordo com  $\mathbf{V}_{\parallel}^B(t)$ , vide Eq. (5.12), a Eq. (5.30) descreverá a fase geométrica não-cíclica e não-abeliana dentro do subespaço degenerado  $\lambda$ , com a matriz  $\mathbf{U}_\lambda(0, t)$  restrita apenas a este subespaço e a matriz  $[\mathbf{V}_{\parallel}^B(t)]_\lambda$  dada pela Eq. (5.13). Neste caso, os resultados apresentados por Kult e colaboradores [150], no contexto de evoluções adiabáticas dos autoestados degenerados do hamiltoniano, e por Mostafazadeh [104], no contexto dos autoestados degenerados do operador invariante, são reobtidos.

Contudo, no caso da evolução ser realizada pelo operador  $\mathbf{V}_{\parallel}^C(t)$ , ver Eq. (5.15), a fase geométrica será dada pela Eq. (5.30) com a matriz  $\mathbf{U}(0, t)$  construída pelos estados não-degenerados  $\{|\lambda; t\rangle\}$  e  $\mathbf{V}_{\parallel}^C(t)$  sendo dado pela Eq. (5.16). Até onde se tem conhecimento, este resultado para a fase geométrica não-adiabática, não-cíclica e não-abeliana de estados não-degenerados, descrita por

$$\mathcal{O}_g^C(t) = \mathbf{U}^C(0, t)\mathbf{V}_{\parallel}^C(t), \quad (5.32)$$

não tem precedentes na literatura.

Com a introdução da matriz  $\mathbf{W}(0, t)$ , cujos coeficientes são dados pela Eq. (5.25), uma importante discussão sobre a condição de transporte paralelo precisa ser retomada. Lembrando, primeiramente, que para um vetor de estado normalizado  $|\Psi(t)\rangle$  ser transportado paralelamente, é necessário que a equação abaixo seja satisfeita para qualquer intervalo de tempo infinitesimal  $\delta t$  [75],

$$\langle \Psi(t) | \Psi(t + \delta t) \rangle = 1 + \langle \Psi(t) | \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle \delta t + O[(\delta t)^2] \simeq 1. \quad (5.33)$$

A solução desta equação remete às Eqs. (2.4) e (5.3), que foram utilizadas anteriormente como condição de transporte paralelo de um estado. A interpretação da Eq. (5.33) afirma que  $|\Psi(t + \delta t)\rangle$  não adquire fases extras com relação a  $|\Psi(t)\rangle$  ao evoluir de  $t$  para  $t + \delta t$ , no limite de  $\delta t \rightarrow 0$ . Transpondo a Eq. (5.33) para a condição de transporte paralelo de um subespaço, obtém-se

$$\mathbf{W}(t, t + \delta t) \simeq \mathbf{1}, \quad (5.34)$$

que significa que os referenciais nos instantes de tempo  $t$  e em  $t + \delta t$  devem estar alinhados. Para que a Eq. (5.34) seja satisfeita, é necessário que

$$A_{\lambda, \lambda'}^{a, a'}(t) = \langle \lambda, a; t | \frac{d}{dt} |\lambda', a'; t\rangle = 0, \quad (5.35)$$

ao invés da condição usual  $A_{\lambda, \lambda}(t) = 0$ , restrita ao transporte paralelo do vetor  $|\lambda; t\rangle$ . A generalização da condição de transporte paralelo de um subespaço dada pela Eq. (5.35) já foi obtida nas Refs. [8] e [150].

### 5.1.3 Invariância de gauge

Suponha que uma transformação unitária  $\mathbf{M}(t)$  seja aplicada aos estados da base  $\{|\lambda, a; t\rangle\}$ , levando-os aos novos estados

$$|\lambda, a; t\rangle' = \sum_{\nu} \sum_b [M(t)]_{\nu, \lambda}^{b, a} |\nu, b; t\rangle. \quad (5.36)$$

Substituindo  $|\lambda, a; t\rangle$  por  $|\lambda, a; t\rangle'$  nas Eqs. (5.5) e (5.25), obtém-se, respectivamente,

$$\mathbf{V}'_{\parallel}(t) = \mathbf{M}^{\dagger}(t) \mathbf{V}_{\parallel}(t) \mathbf{M}(0), \quad (5.37)$$

desde que

$$\mathbf{A}'(t) = \mathbf{M}^\dagger(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{M}(t) + i\mathbf{M}^\dagger(t)\dot{\mathbf{M}}(t), \quad (5.38)$$

e

$$\mathbf{U}'(t) = \mathbf{M}^\dagger(0)\mathbf{U}(t)\mathbf{M}(t). \quad (5.39)$$

Portanto, a fase geométrica não-abeliana e não-cíclica se transforma covariantemente [104]

$$\mathcal{O}'_g(t) = \mathbf{M}^\dagger(0)\mathcal{O}_g(t)\mathbf{M}(0), \quad (5.40)$$

cujos traço e autovalores são quantidades invariantes de gauge.

## 5.2 Fases geométricas via invariantes dinâmicos

O desenvolvimento anterior permitiu obter uma definição geral para a fase geométrica adquirida pela evolução de um subespaço, expresso em uma base qualquer de estados ortormais, inclusive quando a trajetória percorrida é aberta. Nesta seção, estes resultados serão contextualizados de acordo com a teoria dos invariantes dinâmicos e serão confrontados com as fases geométricas obtidas através das equações de movimento das amplitudes de probabilidades. Pretende-se com isso, demonstrar que a expressão geral para a fase geométrica, (5.26), recupera vários resultados presentes na literatura, obtidos através das equações de movimento das amplitudes de probabilidades.

### 5.2.1 Invariantes dinâmicos em sistemas abertos

A generalização do conceito de quantidade invariante para qualquer tipo de evolução a que um sistema físico está sujeito [16], decorre da definição

$$\frac{d\langle \mathbf{I}(t) \rangle}{dt} \equiv 0, \quad (5.41)$$

onde  $\langle \mathbf{I}(t) \rangle = \text{Tr} [\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\rho}(t)]$  é o valor esperado do operador  $\mathbf{I}(t)$  e  $\boldsymbol{\rho}(t)$  é o estado do sistema. A verificação de que a Eq. (5.41) leva à equação que descreve a dinâmica do operador invariante (2.11) é direta. Substituindo  $\langle \mathbf{I}(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \mathbf{I}(t) | \Psi(t) \rangle$  na Eq. (5.41) e utilizando a Eq. (2.13), obtém-se

$$\frac{d\langle \mathbf{I}(t) \rangle}{dt} = \langle \Psi(t) | \left\{ \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} + i[\mathbf{H}(t), \mathbf{I}(t)] \right\} | \Psi(t) \rangle = 0. \quad (5.42)$$

Como a Eq. (5.42) deve ser satisfeita para qualquer solução da equação de Schrödinger, o termo entre chaves deve ser nulo, que é exatamente a Eq. (2.11).

Considerando que a dinâmica do sistema seja governada por uma equação mestra na forma de Lindblad [151]

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i [\mathbf{H}(t), \rho(t)] + \sum_{i,j} \gamma_{ij}(t) \left[ 2\Gamma_i \rho(t) \Gamma_j^\dagger - \rho(t) \Gamma_j^\dagger \Gamma_i - \Gamma_j^\dagger \Gamma_i \rho(t) \right], \quad (5.43)$$

onde  $\mathbf{H}(t)$  é o hamiltoniano do sistema,  $\gamma_{ij}(t)$  são as frequências que decorrem do acoplamento entre o sistema e o reservatório, e  $\Gamma_i$  são os operadores de Lindblad originados pela ação do reservatório, chega-se através das Eqs. (5.41) e (5.43) à equação que descreve a evolução do operador invariante

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} = -i [\mathbf{H}(t), \mathbf{I}(t)] - \sum_{i,j} \gamma_{ij}(t) \left[ 2\Gamma_j^\dagger \mathbf{I}(t) \Gamma_i - \mathbf{I}(t) \Gamma_j^\dagger \Gamma_i - \Gamma_j^\dagger \Gamma_i \mathbf{I}(t) \right]. \quad (5.44)$$

É importante notar que a aplicação deste método não está restrita apenas à equação de movimento para o operador densidade reduzido do sistema na forma de Lindblad, sendo válida para qualquer equação mestra sem convolução. Um exemplo particular da Eq. (5.43) ocorre quando  $\gamma_{ij}(t) = 0$ , levando à equação de Liouville-von Neumann

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i [\mathbf{H}(t), \rho(t)], \quad (5.45)$$

cujos operadores invariantes podem ser obtidos como um caso particular da Eq. (5.44), resultando novamente na Eq. (2.11). Portanto, as equações de Schrödinger e de Liouville-von Neumann admitem o mesmo conjunto de operadores invariantes.

De acordo com a teoria dos invariantes dinâmicos, para encontrar a solução da Eq. (5.43), deve-se primeiramente expandir  $\rho(t)$  na base dos autoestados de  $\mathbf{I}(t)$ , sendo que este último é solução da Eq. (5.44),

$$\rho(t) = \sum_{\lambda, \lambda'} \sum_{a, a'} [c(t)]_{\lambda, \lambda'}^{a, a'} |\lambda, a; t\rangle \langle \lambda', a'; t|, \quad (5.46)$$

onde  $[c(t)]_{\lambda, \lambda'}^{a, a'} = \langle \lambda, a; t | \rho(t) | \lambda', a'; t \rangle$  satisfaz a condição de normalização  $\sum_{\lambda} \sum_a [c(t)]_{\lambda, \lambda}^{a, a} = 1$ . Substituindo (5.46) em (5.43), obtém-se a equação para as amplitudes de probabili-

dades

$$\begin{aligned}
\left[\dot{c}(t)\right]_{\mu,\mu'}^{b,b'} &= i \sum_{\lambda} \sum_a \left\{ [H(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a} + [A(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a} + i [D(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a} \right\} [c(t)]_{\lambda,\mu'}^{a,b'} \\
&\quad - i \sum_{\lambda} \sum_a [c(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a} \left\{ [H(t)]_{\lambda,\mu'}^{a,b'} + [A(t)]_{\lambda,\mu'}^{a,b'} - i [D(t)]_{\lambda,\mu'}^{a,b'} \right\} \\
&\quad + 2 \sum_{i,j} \gamma_{ij}(t) \sum_{\lambda,\lambda'} \sum_{a,a'} [\Lambda(t)]_{\mu,\lambda;i}^{b,a} [c(t)]_{\lambda,\lambda'}^{a,a'} [\Lambda^*(t)]_{\mu',\lambda';j}^{b',a'}, \tag{5.47}
\end{aligned}$$

com os coeficientes  $[H(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a} = -\langle \mu, b; t | \mathbf{H}(t) | \lambda, a; t \rangle$ ,  $[D(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a} = \sum_{i,j} \gamma_{ij}(t) \langle \mu, b; t | \mathbf{\Gamma}_j^\dagger \mathbf{\Gamma}_i \times | \lambda, a; t \rangle$ ,  $[\Lambda(t)]_{\mu,\lambda;i}^{b,a} = \langle \mu, b; t | \mathbf{\Gamma}_i | \lambda, a; t \rangle$  e  $[A(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a}$  dado pela Eq. (5.7). A solução formal da Eq. (5.47) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}(t) &= \mathbf{T} \exp \left\{ i \int_0^t d\tau [\mathbf{H}(\tau) + \mathbf{A}(\tau) + i\mathbf{D}(\tau)] (\bullet) + 2 \sum_{i,j} \int_0^t d\tau \gamma_{ij}(\tau) \mathbf{\Lambda}_i(\tau) (\bullet) \mathbf{\Lambda}_j^\dagger(\tau) \right. \\
&\quad \left. - i \int_0^t d\tau (\bullet) [\mathbf{H}(\tau) + \mathbf{A}(\tau) - i\mathbf{D}(\tau)] \right\} \mathbf{c}(0), \tag{5.48}
\end{aligned}$$

sendo que os pontos indicam a posição de atuação dos operadores e  $\mathbf{c}(t)$ ,  $\mathbf{H}(t)$ ,  $\mathbf{D}(t)$ ,  $\mathbf{\Lambda}_i(t)$  e  $\mathbf{A}(t)$  são matrizes compostas pelos coeficientes definidos acima. Na seção 2.2 do capítulo 2, foi deduzida a relação auxiliar (2.16) para simplificar as equações das amplitudes de probabilidades (2.19). Seguindo os mesmos passos, mas lembrando que a equação que rege a evolução do operador invariante é a (5.44), chega-se à seguinte equação

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{dI_\lambda(t)}{dt} \right] \delta_{\mu\lambda} \delta_{ab} - i [I_\lambda(t) - I_\mu(t)] \left\{ [A(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a} + [H(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a} \right\} \\
&= \sum_{i,j} \sum_{\nu} \sum_c \gamma_{ij}(t) [I_\lambda(t) + I_\mu(t) - 2I_\nu(t)] [\Lambda^*(t)]_{\nu,\mu;j}^{c,b} [\Lambda(t)]_{\nu,\lambda;i}^{c,a}. \tag{5.49}
\end{aligned}$$

A relação auxiliar (5.49) é útil para mostrar que quando  $\mu = \lambda$  e  $a = b$ ,

$$\frac{dI_\lambda(t)}{dt} = 2 \sum_{i,j} \sum_{\nu} \sum_c \gamma_{ij}(t) [I_\lambda(t) - I_\nu(t)] [\Lambda^*(t)]_{\nu,\lambda;j}^{c,a} [\Lambda(t)]_{\nu,\lambda;i}^{c,a}, \tag{5.50}$$

de forma que os autovalores do operador invariante não são mais constantes no tempo, um efeito devido somente à presença do reservatório. Quando  $\mu \neq \lambda$  e  $a$  e  $b$  quaisquer, obtém-se a expressão

$$\begin{aligned}
&-i [I_\lambda(t) - I_\mu(t)] \left\{ [A(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a} + [H(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a} \right\} \\
&= \sum_{i,j} \sum_{\nu} \sum_c \gamma_{ij}(t) [I_\lambda(t) + I_\mu(t) - 2I_\nu(t)] [\Lambda^*(t)]_{\nu,\mu;j}^{c,b} [\Lambda(t)]_{\nu,\lambda;i}^{c,a}, \tag{5.51}
\end{aligned}$$

a qual, na situação particular em que  $\gamma_{ij}(t) = 0$ , simplifica a Eq. (5.47), desacoplando as equações de movimento das amplitudes de probabilidade, à semelhança da Eq. (2.20) nos índices subscritos. Nota-se a partir desta equação que no caso degenerado as amplitudes de probabilidade permanecem acopladas dentro de cada subespaço degenerado.

Como pode ser visto abaixo, após a introdução dos efeitos do reservatório na evolução do sistema, a substituição da Eq. (5.51) em (5.47) leva ao conjunto de equações acopladas,

$$[\dot{c}(t)]_{\mu,\mu'}^{b,b'} = [\mathcal{R}(t)]_{\mu,\mu'}^{b,b'} + [\mathcal{S}(t)]_{\mu,\mu'}^{b,b'} + [\mathcal{T}(t)]_{\mu,\mu'}^{b,b'}, \quad (5.52)$$

com

$$\begin{aligned} [\mathcal{R}(t)]_{\mu,\mu'}^{b,b'} = & i \sum_a \left\{ \left\{ [H(t)]_{\mu,\mu}^{b,a} + [A(t)]_{\mu,\mu}^{b,a} + i [D(t)]_{\mu,\mu}^{b,a} \right\} [c(t)]_{\mu,\mu'}^{a,b'} \right. \\ & \left. - [c(t)]_{\mu,\mu'}^{b,a} \left\{ [H(t)]_{\mu',\mu'}^{a,b'} + [A(t)]_{\mu',\mu'}^{a,b'} + i [D(t)]_{\mu',\mu'}^{a,b'} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}(t)]_{\mu,\mu'}^{b,b'} = & 2 \sum_{i,j} \gamma_{ij}(t) \sum_{a,a'} \left\{ [\Lambda(t)]_{\mu,\mu;i}^{b,a} [c(t)]_{\mu,\mu'}^{a,a'} (t) [\Lambda^*(t)]_{\mu',\mu';j}^{b',a'} \right. \\ & + \sum_{\lambda(\neq\mu)} [\Lambda(t)]_{\mu,\lambda;i}^{b,a} [c(t)]_{\lambda,\mu'}^{a,a'} [\Lambda^*(t)]_{\mu',\mu';j}^{b',a'} + \sum_{\lambda(\neq\mu')} [\Lambda(t)]_{\mu,\mu;i}^{b,a} [c(t)]_{\mu,\lambda}^{a,a'} [\Lambda^*(t)]_{\mu',\lambda;j}^{b',a'} \\ & \left. + \sum_{\lambda(\neq\mu),\lambda'(\neq\mu')} [\Lambda(t)]_{\mu,\lambda;i}^{b,a} [c(t)]_{\lambda,\lambda'}^{a,a'} [\Lambda^*(t)]_{\mu',\lambda';j}^{b',a'} \right\}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}(t)]_{\mu,\mu'}^{b,b'} = & -2 \sum_{i,j} \gamma_{ij}(t) \sum_{\lambda'} \sum_{a,a'} \left\{ \sum_{\lambda(\neq\mu)} \left[ \frac{I_\lambda(t) - I_{\lambda'}(t)}{I_\lambda(t) - I_\mu(t)} \right] [\Lambda^*(t)]_{\lambda',\mu;j}^{a',b} [\Lambda(t)]_{\lambda',\lambda;i}^{a',a} [c(t)]_{\lambda,\mu'}^{a,b'} \right. \\ & \left. + \sum_{\lambda(\neq\mu')} \left[ \frac{I_\lambda(t) - I_{\lambda'}(t)}{I_\lambda(t) - I_{\mu'}(t)} \right] [c(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a} [\Lambda^*(t)]_{\lambda',\lambda;j}^{a',a} [\Lambda(t)]_{\lambda',\mu';i}^{a',b'} \right\}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Diferentemente do procedimento original utilizado por Berry [6], no contexto de evoluções cíclicas e adiabáticas de estados puros, não é claro como extrair a fase geométrica através da dinâmica das amplitudes de probabilidades (Eq. (5.52)) que descreve a evolução não-adiabática de um sistema aberto. Algumas exceções, reportadas nas Refs. [56, 57], correspondem ao caso particular em que o sistema aberto evolui adiabaticamente.

Seguindo a discussão presente no final do item *C*) da subseção 5.1.1 deste capítulo, esta é uma razão pela qual se procurou por uma definição formal, como apresentada na Eq. (5.30), ao invés de tentar obtê-la das equações das amplitudes de probabilidades.

Antes de efetuar a comparação entre as fases geométricas (5.30) e aquela que surge das equações de movimento das amplitudes de probabilidades, é importante lembrar que por estar se tratando dos coeficientes de um operador densidade  $[c(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a}$ , é conveniente analisar a fase geométrica adquirida pelo elemento  $\rho_{\lambda,\lambda'}^{a,a'}(t) = |\lambda, a; t\rangle \langle \lambda', a'; t|$ , a qual será definida por

$$[\phi^G(t)]_{\lambda,\lambda'}^{a,a'} \equiv \arg \{ \langle \lambda, a; 0 | \mathcal{O}_g(t) | \lambda, a; 0 \rangle \langle \lambda', a'; 0 | \mathcal{O}_g^\dagger(t) | \lambda', a'; 0 \rangle \}. \quad (5.56)$$

A fase geométrica em (5.56) é uma quantidade invariante de gauge. Para verificar isto, basta lembrar que os estados da base se transformam de acordo com a Eq. (5.36) e que  $\mathcal{O}_g(t)$  se transforma de acordo com a Eq. (5.40), levando à  $\{[\phi^G(t)]_{\lambda,\lambda'}^{a,a'}\}' = [\phi^G(t)]_{\lambda,\lambda'}^{a,a'}$ .

## 5.2.2 Dinâmica livre de dissipação - caso degenerado

No caso em que os efeitos do reservatório com relação ao sistema são desconsiderados,  $\gamma_{ij}(t) = 0$ , a equação auxiliar (5.51) fornece uma relação bastante simples para  $\lambda \neq \mu$

$$[A(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a} + [H(t)]_{\mu,\lambda}^{b,a} = 0. \quad (5.57)$$

Após substituí-la na Eq. (5.47),

$$\begin{aligned} \left[ \dot{c}(t) \right]_{\mu,\mu'}^{b,b'}(t) = i \sum_a \left\{ \left\{ [H(t)]_{\mu,\mu}^{b,a} + [A(t)]_{\mu,\mu}^{b,a} \right\} [c(t)]_{\mu,\mu'}^{a,b'}(t) \right. \\ \left. - [c(t)]_{\mu,\mu'}^{b,a}(t) \left\{ [H(t)]_{\mu',\mu'}^{a,b'} + [A(t)]_{\mu',\mu'}^{a,b'} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

obtém-se a seguinte solução

$$\mathbf{c}_{\mu,\mu'}(t) = \left\{ \mathbf{T} e^{i \int_0^t d\tau [\mathbf{H}_{\mu,\mu}(\tau) + \mathbf{A}_{\mu,\mu}(\tau)]} \right\} \mathbf{c}_{\mu,\mu'}(0) \left\{ \mathbf{T} e^{-i \int_0^t d\tau [\mathbf{H}_{\mu',\mu'}(\tau) + \mathbf{A}_{\mu',\mu'}(\tau)]} \right\}, \quad (5.59)$$

onde  $\mathbf{c}_{\mu,\mu'}(t)$  é uma matriz de dimensão  $N_\mu \times N_{\mu'}$ , tal que  $N_\mu(N_{\mu'})$  é a dimensão do subespaço degenerado  $\mu(\mu')$ , e as matrizes  $\mathbf{H}_{\mu,\mu}(t)$  e  $\mathbf{A}_{\mu,\mu}(t)$  atuam somente dentro destes subespaços.

De acordo com este tipo de evolução, a fase geométrica não-cíclica descrita em (5.30) é dada por

$$\mathcal{O}_g^\mu(t) = \mathbf{U}_\mu^B(0, t) [\mathbf{V}_\mu^B(t)]_\mu, \quad (5.60)$$

sendo  $[\mathbf{V}_\mu^B(t)]_\mu$  descrito pela Eq. (5.13) e  $\mathbf{U}_\mu^B(0, t)$  a parte unitária da matriz de *overlap* formada somente pelos estados degenerados. Quando a evolução é cíclica, a Eq. (5.60) se reduz à

$$\mathcal{O}_g^\mu(t) = [\mathbf{V}_\mu^B(t)]_\mu = \mathbf{T} \left[ e^{i \int_0^t d\tau \mathbf{A}_\mu(\tau)} \right], \quad (5.61)$$

onde  $\mathbf{A}_\mu(\tau)$  é o mesmo  $\mathbf{A}_{\mu\mu}(\tau)$  da Eq. (5.59). No contexto da teoria dos invariantes, Mostafazadeh [104] obteve a Eq. (5.60) com a matriz  $\mathbf{U}_\mu^B(0, t)$  substituída por  $\mathbf{W}_\mu^B(0, t)$ , ou seja, com os elementos da matriz de *overlap* dados pela Eq. (5.26). Este resultado foi obtido apenas através da construção de quantidades invariantes de gauge. Contudo, é importante salientar que não basta que a fase geométrica seja invariante de gauge, é necessário também que esta seja uma matriz unitária, de modo a carregar informações relativas somente às fases, ver Eqs. (5.28) e (5.29). Logo, o resultado apresentado na Eq. (5.60), para este caso particular, corrige esta falha na Ref. [104].

Na situação particular em que a evolução é cíclica, Mostafazadeh obteve exatamente a Eq. (5.61) [90]. Os seus resultados foram obtidos seguindo o caminho das equações das amplitudes de probabilidades através da solução da equação de Schrödinger, juntamente com a hipótese de que  $[\mathbf{H}_{\mu\mu}(t), \mathbf{A}_{\mu\mu}(t)] = 0$ , obtendo as fases não-abelianas dinâmica e geométrica das Eqs. (2.29) e (2.30), respectivamente.

No caso em que a evolução torna-se adiabática, vide Eq. (2.24), os resultados obtidos na subseção 2.2.2 do capítulo 2 são recuperados.

### 5.2.3 Dinâmica livre de dissipação - caso não-degenerado

Para tratar o caso não-degenerado, basta omitir os índices superiores dos coeficientes  $[c(t)]_{\mu,\mu'}^{a,b'} \rightarrow [c(t)]_{\mu,\mu'}$  na Eq. (5.58), cuja solução pode ser escrita como

$$[c(t)]_{\mu,\mu'} = [c(0)]_{\mu,\mu'} \exp \left\{ i \int_0^t d\tau [\Delta H_{\mu,\mu'}(\tau) + \Delta A_{\mu,\mu'}(\tau)] \right\}, \quad (5.62)$$

com  $[\Delta H(t)]_{\mu,\mu'} = [H(t)]_{\mu,\mu} - [H(t)]_{\mu',\mu'}$  e  $[\Delta A(t)]_{\mu,\mu'} = [A(t)]_{\mu,\mu} - [A(t)]_{\mu',\mu'}$ , tal que as fases geométrica e dinâmica se reduzem às expressões abelianas (2.22) e (2.23), respecti-



vamente. As fases associadas ao elemento  $\rho_{\mu,\mu'}(t)$  são simplesmente a diferença entre as fases geométrica e dinâmica adquiridas por cada estado  $|\mu; t\rangle$  e  $|\mu'; t\rangle$ . Esta propriedade de subtração das fases ocorre devido ao caráter não-transicional da solução. Comparando a fase geométrica obtida através das equações das amplitudes de probabilidades com àquela da Eq. (5.56) para evoluções cíclicas, percebe-se que são idênticas, uma vez que o operador de evolução para evoluções não-transicionais é dado pela Eq. (5.10) com os coeficientes da Eq. (5.11). Evidentemente, no caso em que a evolução torna-se adiabática, os resultados obtidos na subseção 2.2.1 do capítulo 2 são resgatados.

## 5.3 Aplicação - Fase geométrica de um sistema de dois níveis

Para exemplificar a técnica desenvolvida na seção 5.1, e visando compreender melhor o papel que a dissipação desempenha na evolução da fase geométrica, calcular-se-á a fase geométrica adquirida pelos autoestados não-degenerados de um sistema de dois níveis sob a ação do reservatório a temperatura zero. Também será estudado o caso em que o sistema evolui não-adiabaticamente sem a presença do reservatório.

### 5.3.1 Caso dissipativo - $\gamma \neq 0$

O sistema de dois níveis é caracterizado pela frequência de transição  $\omega_0$  entre os estados fundamental  $g$  e excitado  $e$ , onde este último está sujeito a decaimento espontâneo. A dinâmica deste sistema é descrita pela solução da Eq. (5.43) com  $\mathbf{H}(t) = \omega_0 \boldsymbol{\sigma}_z / 2$ ,  $\gamma_{11} = \frac{\gamma}{2}$  e  $\boldsymbol{\Gamma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_-$ . Para aplicar a técnica dos invariantes dinâmicos em sistemas abertos, será suposto a forma mais geral possível em duas dimensões para o operador invariante

$$\mathbf{I}(t) = \sum_{\alpha,\beta=g,e} \chi_{\alpha\beta}(t) \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}, \quad (5.63)$$

onde  $\sigma_{\alpha\beta} = |\alpha\rangle\langle\beta|$  e as equações para os coeficientes  $\chi_{\alpha\beta}(t)$  são obtidas após substituir a Eq. (5.63) na Eq. (5.44)

$$\dot{\chi}_{gg}(t) = 0, \quad (5.64a)$$

$$\dot{\chi}_{ee}(t) = \gamma [\chi_{ee}(t) - \chi_{gg}(t)], \quad (5.64b)$$

$$\dot{\chi}_{eg}(t) = (-i\omega_0 + \gamma/2) \chi_{eg}(t), \quad (5.64c)$$

$$\dot{\chi}_{ge}(t) = (i\omega_0 + \gamma/2) \chi_{ge}(t). \quad (5.64d)$$

O sistema de equações (5.64) é facilmente integrável

$$\chi_{gg}(t) = \chi_{gg}(0), \quad (5.65a)$$

$$\chi_{ee}(t) = \chi_{gg}(0) + \Delta\chi e^{\gamma t}, \quad (5.65b)$$

$$\chi_{eg}(t) = \chi_{eg}(0) e^{(-i\omega_0 + \gamma/2)t}, \quad (5.65c)$$

$$\chi_{ge}(t) = \chi_{ge}(0) e^{(i\omega_0 + \gamma/2)t}, \quad (5.65d)$$

com  $\Delta\chi = \chi_{ee}(0) - \chi_{gg}(0)$ . Uma vez que os coeficientes do operador invariante são dados pela Eq. (5.65), decorrem os seus autovalores

$$I_{\pm}(t) = \frac{2\chi_{gg}(0) + \Delta\chi e^{\gamma t} \pm e^{\gamma t/2} \varepsilon(t)}{2}, \quad (5.66)$$

e autovetores

$$|+; t\rangle = N(t) [f(t) |g\rangle + \chi_{eg}(0) e^{-i\omega_0 t} |e\rangle], \quad (5.67a)$$

$$|-; t\rangle = N(t) [\chi_{eg}^*(0) e^{i\omega_0 t} |g\rangle - f(t) |e\rangle], \quad (5.67b)$$

onde

$$\varepsilon(t) = \sqrt{(\Delta\chi)^2 e^{\gamma t} + 4 |\chi_{eg}(0)|^2}, \quad (5.68a)$$

$$f(t) = [-\Delta\chi e^{\gamma t/2} + \varepsilon(t)] / 2, \quad (5.68b)$$

$$N(t) = 1/\sqrt{\varepsilon(t)f(t)}. \quad (5.68c)$$

Tendo em mãos os autovetores, é possível calcular a fase geométrica adquirida pelo transporte paralelo do subespaço formado pelos autoestados  $|\pm; t\rangle$ .

A evolução deste sistema de dois níveis gera transições entre os estados não-degenerados  $|+; t\rangle$  e  $| -; t\rangle$ . Portanto, para o cálculo da fase geométrica não-abeliana, não-cíclica e não-adiabática, deve-se utilizar a expressão (5.30) com  $\mathbf{V}_n(t) = \mathbf{V}_n^C(t)$  descrito pela Eq. (5.16). Neste ponto, é conveniente parametrizar as variáveis  $\chi_{\alpha\beta}(0)$  em função das coordenadas esféricas  $r_0$ ,  $\theta_0$  e  $\phi_0$

$$\chi_{gg}(0) = -r_0 \cos \theta_0, \quad (5.69a)$$

$$\chi_{ee}(0) = r_0 \cos \theta_0, \quad (5.69b)$$

$$\chi_{eg}(0) = r_0 \sin \theta_0 e^{-i\phi_0}, \quad (5.69c)$$

$$\chi_{ge}(0) = r_0 \sin \theta_0 e^{i\phi_0}. \quad (5.69d)$$

O parâmetro  $r_0$  é o raio da esfera, tal que  $0 \leq r_0 \leq 1$ , seguido pelos ângulos polar  $0 \leq \theta_0 \leq \pi$  e azimutal  $0 \leq \phi_0 < 2\pi$ . Estes três parâmetros são suficientes para descrever todos os estados normalizados no espaço de Hilbert bidimensional, de modo que qualquer estado pode ser representado por um ponto na superfície  $r_0 = 1$  (estado puro) ou no interior  $r_0 < 1$  (estado misto) da esfera de Bloch [149]. A parametrização feita em (5.69) pode causar estranheza, pois o número de parâmetros do operador invariante em  $t = 0$  é quatro, enquanto que as coordenadas esféricas são três. Contudo, das Eqs. (5.46) e (5.47), percebe-se que as informações relevantes para o estado do sistema  $\rho(t)$ , são os autoestados do operador invariante, os quais dependem somente dos parâmetros  $\Delta\chi$ ,  $\chi_{eg}(0)$  e  $\chi_{eg}^*(0)$ . Então, de acordo com a Eq. (5.69), os autoestados em (5.67) podem ser reescritos como

$$|+; t\rangle = N(t) [f(t) |g\rangle + r_0 \sin \theta_0 e^{-i(\omega_0 t + \phi_0)} |e\rangle], \quad (5.70a)$$

$$|-; t\rangle = N(t) [r_0 \sin \theta_0 e^{i(\omega_0 t + \phi_0)} |g\rangle - f(t) |e\rangle], \quad (5.70b)$$

onde

$$\varepsilon(t) = 2r_0 \sqrt{\cos^2 \theta_0 e^{\gamma t} + \sin^2 \theta_0}, \quad (5.71a)$$

$$f(t) = -r_0 \cos \theta_0 e^{\gamma t/2} + \varepsilon(t)/2. \quad (5.71b)$$

A partir dos estados em (5.70), calcula-se a conexão não-abeliana  $\mathbf{A}_C(t)$

$$\mathbf{A}_C(t) = \begin{pmatrix} A_D(t) & A_{ND}^*(t) \\ A_{ND}(t) & -A_D(t) \end{pmatrix}, \quad (5.72)$$

onde  $A_D(t) = N^2(t)r_0^2\omega_0 \sin^2 \theta_0$  e  $A_{ND}(t) = N^2(t)r_0 \sin \theta_0 \left[ -\omega_0 f(t) + i\dot{f}(t) \right] e^{-i(\omega_0 t + \phi_0)}$ , a qual pode ser expressa em função das matrizes de Pauli da seguinte maneira

$$\mathbf{A}_C(t) = A_D(t)\boldsymbol{\sigma}_z + A_{ND}^*(t)\boldsymbol{\sigma}_+ + A_{ND}(t)\boldsymbol{\sigma}_-. \quad (5.73)$$

Para encontrar o operador de evolução  $\mathbf{V}_{\parallel}^C(t)$ , é preciso resolver a equação

$$\dot{\mathbf{V}}_{\parallel}^C(t) = i\mathbf{A}_C(t)\mathbf{V}_{\parallel}^C(t), \quad (5.74)$$

sendo que para isso será utilizado o mesmo procedimento da seção 4.1 do capítulo 4 com a transformação unitária

$$\mathbf{R}(t) = \exp \left\{ \frac{\eta(t)}{2} [e^{-i\zeta(t)} \boldsymbol{\sigma}_- - e^{i\zeta(t)} \boldsymbol{\sigma}_+] \right\}, \quad (5.75)$$

similar àquela da Eq. (4.5), desde que os operadores bosônicos sejam mapeados nos operadores de quasi-spin através das relações de Schwinger (4.24). A forma da Eq. (5.74) permanece invariante pela atuação da transformação  $\mathbf{R}(t)$ , contanto que os operadores  $\mathbf{A}_C(t)$  e  $\mathbf{V}_{\parallel}^C(t)$  se transformem como

$$\overline{\mathbf{A}}_C(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{A}_C(t)\mathbf{R}^\dagger(t) - i\mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{R}}^\dagger(t), \quad (5.76a)$$

$$\overline{\mathbf{V}}_{\parallel}^C(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{V}_{\parallel}^C(t). \quad (5.76b)$$

O efeito da transformação unitária sobre as matrizes de Pauli, gera as combinações de operadores:

$$\mathbf{R}(t)\boldsymbol{\sigma}_z\mathbf{R}^\dagger(t) = \cos[\eta(t)]\boldsymbol{\sigma}_z + \sin[\eta(t)]e^{i\zeta(t)}\boldsymbol{\sigma}_+ + \sin[\eta(t)]e^{-i\zeta(t)}\boldsymbol{\sigma}_-, \quad (5.77a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t)\boldsymbol{\sigma}_+\mathbf{R}^\dagger(t) &= -\frac{\sin[\eta(t)]}{2}e^{-i\zeta(t)}\boldsymbol{\sigma}_z + \cos^2[\eta(t)/2]\boldsymbol{\sigma}_+ \\ &\quad + \sin^2[\eta(t)/2]e^{-2i\zeta(t)}\boldsymbol{\sigma}_-, \end{aligned} \quad (5.77b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t)\boldsymbol{\sigma}_-\mathbf{R}^\dagger(t) &= -\frac{\sin[\eta(t)]}{2}e^{i\zeta(t)}\boldsymbol{\sigma}_z - \sin^2[\eta(t)/2]e^{2i\zeta(t)}\boldsymbol{\sigma}_+ \\ &\quad + \cos^2[\eta(t)/2]\boldsymbol{\sigma}_-, \end{aligned} \quad (5.77c)$$

$$\begin{aligned} i\mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{R}}^\dagger(t) &= \dot{\zeta}(t)\sin^2[\eta(t)/2]\boldsymbol{\sigma}_z - \frac{1}{2}\left\{i\dot{\eta}(t) - \dot{\zeta}(t)\sin[\eta(t)]\right\}e^{i\zeta(t)}\boldsymbol{\sigma}_+ \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{-i\dot{\eta}(t) - \dot{\zeta}(t)\sin[\eta(t)]\right\}e^{-i\zeta(t)}\boldsymbol{\sigma}_-. \end{aligned} \quad (5.77d)$$

Exigindo que os termos que multiplicam  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$  em  $\overline{\mathbf{A}}_C(t)$  sejam nulos, obtém-se

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}}_C(t) = & \left\{ N^2(t)r_0^2\omega_0 \sin^2 \theta_0 \cos [\eta(t)] + \dot{\zeta}(t) \sin^2 [\eta(t)/2] - N^2(t)r_0 \sin \theta_0 \sin [\eta(t)] \right. \\ & \left. \times \left\{ -\omega_0 f(t) \cos [\Theta(t)] + \dot{f}(t) \sin [\Theta(t)] \right\} \right\} \sigma_z, \end{aligned} \quad (5.78)$$

onde os parâmetros  $\eta(t)$  e  $\zeta(t)$  são soluções das equações diferenciais acopladas

$$\dot{\eta}(t) = 2r_0 N^2(t) \sin \theta_0 \left\{ \omega_0 f(t) \sin [\Theta(t)] + \dot{f}(t) \cos [\Theta(t)] \right\}, \quad (5.79a)$$

$$\dot{\zeta}(t) = 2r_0 N^2(t) \sin \theta_0 \left\{ \omega_0 r_0 \sin \theta_0 + \cot [\eta(t)] \left\{ -\omega_0 f(t) \cos [\Theta(t)] + \dot{f}(t) \sin [\Theta(t)] \right\} \right\}, \quad (5.79b)$$

com  $\Theta(t) = \omega_0 t + \phi_0 - \zeta(t)$ .

Devido à introdução da dissipação, as equações diferenciais (5.79) tornam-se consideravelmente mais complicadas que as (4.11), de modo que para conseguir resolvê-las, será imposto que  $\dot{\eta}(t) \simeq 0$ , resultando em

$$\zeta(t) \simeq \omega_0 t + \phi_0 + \arctan \left[ \frac{\dot{f}(t)}{\omega_0 f(t)} \right]. \quad (5.80)$$

Assumindo que o acoplamento sistema-reservatório seja fraco,  $\gamma/\omega_0 \ll 1$ , e que o tempo de evolução seja aproximadamente  $t \simeq 2\pi/\omega_0$ , obtém-se que  $f(t) \simeq r_0(1 - \cos \theta_0)(1 - \cos \theta_0 \times \gamma t/2)$ . Substituindo  $f(t)$  em (5.80) e usando o fato de que  $\arctan(x) \simeq x$  para  $x \ll 1$ , tem-se a seguinte expressão para  $\zeta(t)$

$$\zeta(t) \simeq \omega_0 t + \phi_0 - \frac{\gamma \cos \theta_0}{\omega_0} \frac{\cos \theta_0}{2}, \quad (5.81)$$

onde o último termo à direita da equação acima representa a correção de primeira ordem proveniente dos efeitos do reservatório. Para escrever  $\eta(t)$  em função dos parâmetros do sistema, deve-se substituir a Eq. (5.81) e a expressão

$$N^2(t) \simeq \left\{ 2r_0^2 [(1 - \cos \theta_0) + h(\theta_0)\gamma t] \right\}^{-1}, \quad (5.82)$$

onde  $h(\theta_0) = -\cos \theta_0 (1 - \cos \theta_0 + \cos^2 \theta_0/2)$  na Eq. (5.79), obtendo

$$\eta(t) \simeq \operatorname{arccot} \left\{ \cot \theta_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{(2 - \cos \theta_0)}{(1 - \cos \theta_0)} \gamma t \right] \right\}. \quad (5.83)$$

Portanto, dentro das aproximações feitas acima, os parâmetros da transformação unitária  $\mathbf{R}(t)$  são descritos pelas Eqs. (5.81) e (5.83), com  $\pi/7 \lesssim \theta_0 \lesssim \pi$ . Esta limitação na variação do ângulo polar  $\theta_0$  é necessária para garantir que  $\dot{\eta}(t) \simeq 0$ .

Resta ainda avaliar a matriz de *overlap*  $\mathbf{U}(0, t)$ , que neste caso é igual a  $\mathbf{W}(0, t)$ , uma vez que o subespaço evoluído  $\{|\pm; t\rangle\}$  é completo. A matriz de *overlap* é formada pelos elementos da Eq. (5.25)

$$\mathbf{U}(0, t) = \begin{pmatrix} U_D(t) & -U_{ND}^*(t) \\ U_{ND}(t) & U_D^*(t) \end{pmatrix}, \quad (5.84)$$

onde  $U_D(t) = N(t) \sin(\theta_0/2) [f(t) + 2r_0 \cos^2(\theta_0/2) e^{-i\omega_0 t}]$  e  $U_{ND}(t) = N(t) e^{-i\phi_0} \cos(\theta_0/2) \times [f(t) - 2r_0 \sin^2(\theta_0/2) e^{-i\omega_0 t}]$ . Com o resultado acima, a fase geométrica não-abeliana, não-cíclica e não-adiabática pode ser escrita como

$$\mathcal{O}_g(t) = \mathbf{U}(t, 0) \mathbf{R}^\dagger(t) e^{i\Omega(t)\sigma_z} \mathbf{R}(0), \quad (5.85)$$

tal que, a expressão geral para  $\Omega(t)$  é dada por

$$\begin{aligned} \Omega(t) = \int_0^t d\tau \left\{ r_0^2 \omega_0 \sin^2 \theta_0 N^2(\tau) \cos[\eta(\tau)] + \frac{\dot{\zeta}(\tau)}{2} \{1 - \cos[\eta(\tau)]\} \right. \\ \left. + r_0 \sin \theta_0 N^2(\tau) \sin[\eta(\tau)] \left\{ -\omega_0 f(\tau) \cos[\Theta(\tau)] + \dot{f}(\tau) \sin[\Theta(\tau)] \right\} \right\}, \quad (5.86) \end{aligned}$$

e as matrizes  $\mathbf{R}(t)$  e  $\mathbf{U}(t, 0)$  são dadas pelas Eqs. (5.75) e (5.84), respectivamente. Neste exemplo em particular, a Eq. (5.86) torna-se

$$\Omega(t) = \omega_0 t \left[ 1 + \frac{\gamma s(\theta_0) t}{2} \right], \quad (5.87)$$

onde  $s(\theta_0) = -\cos \theta_0 (1/2 - \cos \theta_0 + 3 \cos^2 \theta_0 / 8) / (1 - \cos \theta_0)$ .

### 5.3.2 Caso não-dissipativo - $\gamma = 0$

No caso particular em que  $\gamma = 0$ , os autoestados em (5.70) recuperam aqueles da Eq. (2.6) com  $\omega = \omega_0$ . Seguindo a Eq. (5.62), a evolução é não-transicional e a fase geométrica é dada pela expressão (5.31). Se o período de evolução for  $2\pi/\omega_0$ , como no caso dissipativo, as fases geométricas adquiridas pelos estados  $|\pm; t\rangle$  tornam-se cíclicas,

sendo dadas apenas pela integral dos elementos diagonais da conexão não-abeliana da Eq. (5.72)

$$[O_g^A(2\pi/\omega_0)]_{\pm} = \mp \int_0^{t=2\pi/\omega_0} d\tau A_D(\tau) = \mp \pi(1 + \cos \theta_0). \quad (5.88)$$

A menos dos fatores de fase  $\pm 2\pi$ , as fases geométricas cíclicas e não-adiabáticas em (5.88) são as mesmas obtidas na Eq. (2.8), as quais foram obtidas para evoluções adiabáticas dos autoestados do hamiltoniano. Então, as fases geométricas associadas aos elementos do operador densidade são  $[\phi^G(2\pi/\omega_0)]_{+,-} = -[\phi^G(2\pi/\omega_0)]_{-,+} = -2\pi \cos \theta_0$  e  $[\phi^G(2\pi/\omega_0)]_{+,+} = [\phi^G(2\pi/\omega_0)]_{-,-} = 0$ . Este último resultado era esperado e já foi obtido na Ref. [56].

## Capítulo 6

# Considerações sobre a teoria dos invariantes e o operador densidade para sistema de dois níveis

A teoria dos invariantes dinâmicos foi amplamente utilizada ao longo dos capítulos 2, 3 e 5 desta tese. A sua aplicação não se restringe apenas aos exemplos aqui citados; existe um grande número de aplicações que vão desde sistemas atômicos [152, 153] à sistemas da óptica quântica [99, 101, 103, 154, 155].

Para introduzir os objetivos deste capítulo, primeiramente, será retomado o exemplo parcialmente desenvolvido no capítulo anterior: o de um sistema de dois níveis sujeito a decaimento espontâneo. Mostrar-se-á que é possível utilizar a teoria de invariantes, seguindo a sua prescrição original [14], para encontrar o estado do sistema no tempo  $t$ , mesmo estando este sujeito aos efeitos do reservatório. Com isso, pretende-se evidenciar um problema peculiar à teoria dos invariantes, que diz respeito a indeterminação das condições iniciais dos coeficientes do operador invariante. Esta indeterminação é automaticamente transferida aos observáveis físicos, que dependem dos coeficientes acima mencionados. Tal problema foi contornado de forma satisfatória para as situações físicas abordadas nesta tese, bem como em outros sistemas físicos abordados [18, 99, 101, 103, 153]. Contudo, nem todas as situações físicas permitem que este problema seja contornado de forma satisfatória, como será mostrado adiante.



Existe uma maneira diferente de utilizar a teoria dos invariantes que também contorna o problema apresentado anteriormente [154, 155]. Todavia, esta metodologia é bem desenvolvida apenas para os casos em que o sistema é descrito por hamiltonianos quadráticos compostos por operadores do campo de radiação. Esclarecendo, por fim, os objetivos deste capítulo, pretende-se transpor o obstáculo da indeterminação dos coeficientes do operador invariante para o caso específico de sistemas de dois níveis. Será apresentada uma técnica para a obtenção do operador densidade destes sistemas que dispensa o uso dos invariantes e supera o problema relacionado à previsão dos observáveis físicos.

## 6.1 Determinando o operador invariante

Como pôde ser visto na seção 2.2 do capítulo 2, a primeira vez em que Lewis utilizou o operador invariante não-adiabático no contexto da Mecânica Quântica [15], foi através da quantização de uma quantidade conservada no tempo, obtida a partir das equações clássicas de movimento. Isto demonstra a dificuldade em se obter um operador invariante associado ao hamiltoniano do sistema. Tal empecilho ainda persiste nos casos em que o hamiltoniano não apresenta simetrias [154], porém, nas situações em que este pode ser escrito como [18, 21, 154, 155]

$$\mathbf{H}(t) = \sum_{i=1}^{N \leq M} h_i(t) \mathbf{O}_i, \quad (6.1)$$

onde  $\mathbf{O}_i$  são os geradores de uma álgebra de Lie arbitrária definida por

$$[\mathbf{O}_i, \mathbf{O}_j] = \sum_{k=1}^M C_{ij}^k \mathbf{O}_k, \quad (6.2)$$

com  $C_{ij}^k$  sendo a constante de estrutura ( $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ ), o operador invariante admite a seguinte forma

$$\mathbf{I}(t) = \sum_{i=1}^M g_i(t) \mathbf{O}_i. \quad (6.3)$$

Substituindo as Eqs. (6.1) e (6.3) na Eq. (2.11), e utilizando a Eq. (6.2), obtém-se as equações diferenciais de primeira ordem para os coeficientes do invariante

$$\dot{g}_k(t) + i \sum_{i=1}^{N \leq M} \sum_{j=1}^M h_i(t) g_j(t) C_{ij}^k = 0, \quad k = 1 \dots M. \quad (6.4)$$

Sendo assim, o operador  $\mathbf{I}(t)$  na Eq. (6.3) será um invariante do sistema desde que o conjunto de equações diferenciais acopladas tenha solução. A determinação dos coeficientes  $g_k(t)$  depende de suas especificações no tempo inicial. Contudo, não há uma regra geral de como escolhê-los em  $t = 0$ . Em algumas situações, como tratadas nesta tese, em que não são considerados os efeitos da dissipação na dinâmica do sistema, é possível supor a forma dos coeficientes  $g_k(0)$ , pois a identificação destes com o estado inicial é direta. Por exemplo, no capítulo 3, os coeficientes  $\alpha_\ell(0)$  do operador invariante da Eq. (3.6) foram escolhidos iguais a zero, uma vez que o estado inicial do campo na cavidade é o vácuo. Já na Ref. [18], onde é considerada a evolução de uma partícula de spin  $1/2$ , sabe-se que a quantidade conservada é o raio da esfera de Bloch. Então, por analogia, pode-se inferir que os coeficientes do invariante em  $t = 0$  são os valores esperados das matrizes de Pauli no estado inicial do sistema. Isto justifica a parametrização dos coeficientes do operador invariante utilizada na seção 5.3 do capítulo 5, uma vez que para  $\gamma = 0$ , os resultados da Ref. [18] são recuperados.

Para tornar claro como surge o problema da indeterminação dos coeficientes do operador invariante, dar-se-á continuidade ao exemplo iniciado na seção 5.3 do capítulo 5. Embora este problema seja simples e possa ser resolvido por outros métodos, será útil para os propósitos deste capítulo.

### Sistema de dois níveis sujeito a decaimento espontâneo

De acordo com a teoria dos invariantes, resolver a Eq. (5.43) é equivalente a resolver a Eq. (5.47), sendo que nesta última é necessário avaliar os elementos das matrizes  $\mathbf{H}(t)$ ,  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{D}(t)$  e  $\mathbf{\Lambda}_i(t)$ . O cálculo de tais elementos de matriz é feito através dos autoestados  $|+; t\rangle$  e  $|-; t\rangle$  presentes na Eq. (5.67), resultando no seguinte conjunto de equações diferenciais acopladas

$$\begin{aligned}
\dot{c}_{++}(t) &= -\gamma |\chi_{eg}(0)|^4 N^4(t) c_{++}(t) \\
&\quad + \chi_{eg}(0) N^2(t) e^{-i\omega_0 t} \left[ \frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} - \gamma N^2(t) f^3(t) \right] c_{+-}(t) \\
&\quad + \chi_{eg}^*(0) N^2(t) e^{i\omega_0 t} \left[ \frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} - \gamma N^2(t) f^3(t) \right] c_{-+}(t) \\
&\quad + \gamma N^4(t) f^4(t) c_{--}(t),
\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
\dot{c}_{+-}(t) &= \chi_{eg}^*(0) N^2(t) e^{i\omega_0 t} \left[ -\frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} + \gamma N^2(t) |\chi_{eg}(0)|^2 f(t) \right] c_{++}(t) \\
&\quad + \left[ i\omega_0 - \frac{\gamma}{2} - \gamma |\chi_{eg}(0)|^2 N^4(t) f^2(t) \right] c_{+-}(t) \\
&\quad - \gamma [\chi_{eg}^*(0)]^2 N^4(t) f^2(t) e^{2i\omega_0 t} c_{-+}(t) \\
&\quad + \chi_{eg}^*(0) N^2(t) e^{i\omega_0 t} \left[ \frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} + \gamma N^2(t) f^3(t) \right] c_{--}(t),
\end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
\dot{c}_{-+}(t) &= \chi_{eg}(0) N^2(t) e^{-i\omega_0 t} \left[ -\frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} + \gamma N^2(t) |\chi_{eg}(0)|^2 f(t) \right] c_{++}(t) \\
&\quad - \gamma [\chi_{eg}(0)]^2 N^4(t) f^2(t) e^{-2i\omega_0 t} c_{+-}(t) \\
&\quad + \left[ -i\omega_0 - \frac{\gamma}{2} - \gamma |\chi_{eg}(0)|^2 N^4(t) f^2(t) \right] c_{-+}(t) \\
&\quad + \chi_{eg}(0) N^2(t) e^{-i\omega_0 t} \left[ \frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} + \gamma N^2(t) f^3(t) \right] c_{--}(t),
\end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}
\dot{c}_{--}(t) &= \gamma |\chi_{eg}(0)|^4 N^4(t) c_{++}(t) \\
&\quad - \chi_{eg}(0) N^2(t) e^{-i\omega_0 t} \left[ \frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} - \gamma N^2(t) f^3(t) \right] c_{+-}(t) \\
&\quad - \chi_{eg}^*(0) N^2(t) e^{i\omega_0 t} \left[ \frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} - \gamma N^2(t) f^3(t) \right] c_{-+}(t) \\
&\quad - \gamma N^4(t) f^4(t) c_{--}(t),
\end{aligned} \tag{6.8}$$

onde  $f(t)$  e  $N(t)$  são dados pela Eq. (5.68). Após a análise das expressões

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} - \gamma N^2(t) f^3(t) = 0, \tag{6.9a}$$

$$-\frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} + \gamma N^2(t) |\chi_{eg}(0)|^2 f(t) = 2 \left[ -\frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} \right], \tag{6.9b}$$

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} + \gamma N^2(t) f^3(t) = 2 \left[ \frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} \right], \tag{6.9c}$$

as Eqs. (6.5) até (6.8) podem ser simplificadas, do que se obtém

$$\dot{c}_{++}(t) = -\gamma |\chi_{eg}(0)|^4 N^4(t) c_{++}(t) + \gamma N^4(t) f^4(t) c_{--}(t), \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_{+-}(t) &= 2\chi_{eg}^*(0) N^2(t) e^{i\omega_0 t} \left[ -\frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} \right] c_{++}(t) \\ &+ \left[ i\omega_0 - \frac{\gamma}{2} - \gamma |\chi_{eg}(0)|^2 N^4(t) f^2(t) \right] c_{+-}(t) \\ &- \gamma [\chi_{eg}^*(0)]^2 N^4(t) f^2(t) e^{2i\omega_0 t} c_{-+}(t) \\ &+ 2\chi_{eg}^*(0) N^2(t) e^{i\omega_0 t} \left[ \frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} \right] c_{--}(t), \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_{-+}(t) &= 2\chi_{eg}(0) N^2(t) e^{-i\omega_0 t} \left[ -\frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} \right] c_{++}(t) \\ &- \gamma [\chi_{eg}(0)]^2 N^4(t) f^2(t) e^{-2i\omega_0 t} c_{+-}(t) \\ &+ \left[ -i\omega_0 - \frac{\gamma}{2} - \gamma |\chi_{eg}(0)|^2 N^4(t) f^2(t) \right] c_{-+}(t) \\ &+ 2\chi_{eg}(0) N^2(t) e^{-i\omega_0 t} \left[ \frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma f(t)}{2} \right] c_{--}(t), \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\dot{c}_{--}(t) = \gamma |\chi_{eg}(0)|^4 N^4(t) c_{++}(t) - \gamma N^4(t) f^4(t) c_{--}(t). \quad (6.13)$$

Através da soma das Eqs. (6.10) e (6.13), conclui-se que

$$c_{++}(t) + c_{--}(t) = 1, \quad (6.14)$$

onde também foi utilizada a condição de normalização do operador densidade em (5.46) com  $\{|\lambda, a; t\rangle\} \equiv \{|+; t\rangle, |-; t\rangle\}$ . Subtraindo a Eq. (6.12) multiplicada por  $\chi_{eg}^*(0) e^{i\omega_0 t}$  da Eq. (6.11) multiplicada por  $\chi_{eg}(0) e^{-i\omega_0 t}$ , obtém-se

$$\left[ \dot{c}_{+-}(t) + \left( -i\omega_0 + \frac{\gamma}{2} \right) c_{+-}(t) \right] \chi_{eg}(0) e^{-i\omega_0 t} = \left[ \dot{c}_{-+}(t) + \left( i\omega_0 + \frac{\gamma}{2} \right) c_{-+}(t) \right] \chi_{eg}^*(0) e^{i\omega_0 t}, \quad (6.15)$$

cujas soluções são dadas por

$$c_{+-}(t) = c_{+-}(0) e^{(i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})t}, \quad (6.16a)$$

$$c_{-+}(t) = c_{-+}(0) e^{(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})t}. \quad (6.16b)$$

Utilizando a relação (6.14) na Eq. (6.10), chega-se à expressão para o coeficiente  $c_{++}(t)$ :

$$\begin{aligned} c_{++}(t) &= \exp \left\{ -\gamma t + 2\gamma |\chi_{eg}(0)|^2 A(t) \right\} \left\{ c_{++}(0) \right. \\ &\left. + \gamma \int_0^t d\tau N^4(\tau) f^4(\tau) \exp \left\{ \gamma\tau - 2\gamma |\chi_{eg}(0)|^2 A(\tau) \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

com

$$A(t) = \int_0^t d\tau N^4(\tau) f^2(\tau). \quad (6.18)$$

Para resolver a integral (6.18) serão utilizadas duas mudanças de variáveis, sendo que a primeira delas,  $x = e^{\gamma t/2}$ , leva à integral

$$A(t) = \frac{\gamma}{2} \int_1^{e^{\gamma t/2}} dx \frac{\left[ -x\Delta\chi + \sqrt{x^2 (\Delta\chi)^2 + 4 |\chi_{eg}(0)|^2} \right]^2}{x \left[ x^2 (\Delta\chi)^2 + 4 |\chi_{eg}(0)|^2 - x\Delta\chi \sqrt{x^2 (\Delta\chi)^2 + 4 |\chi_{eg}(0)|^2} \right]}, \quad (6.19)$$

enquanto que com a segunda mudança de variáveis,  $\tan \xi = x\Delta\chi/2 |\chi_{eg}(0)|^2$ , obtém-se

$$A(t) = \frac{1}{2\gamma |\chi_{eg}(0)|^2} \int_{\arctan(\Delta\chi/2 |\chi_{eg}(0)|^2)}^{\arctan(e^{\gamma t/2} \Delta\chi/2 |\chi_{eg}(0)|^2)} d\xi \cot \xi. \quad (6.20)$$

A integral em (6.20) é resolvida de maneira simples, fornecendo o resultado

$$A(t) = \frac{-1}{4\gamma |\chi_{eg}(0)|^2} \ln \left[ \frac{\varepsilon^2(t) e^{-\gamma t}}{\varepsilon^2(0)} \right], \quad (6.21)$$

onde  $\varepsilon(t)$  está descrito na Eq. (5.68a). Tendo obtido a forma explícita para a função  $A(t)$  na Eq. (6.21), deve-se substituí-la na integral da Eq. (6.17), a qual é resolvida aplicando-se as duas mudanças de variáveis utilizadas anteriormente, resultando na expressão para o coeficiente  $c_{++}(t)$ :

$$c_{++}(t) = c_{++}(0) e^{-\gamma t/2} \frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(t)} + 2 e^{-\gamma t/2} \frac{|\chi_{eg}(0)|^2}{\Delta\chi} \left\{ \frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(t) [\Delta\chi + \varepsilon(0)]} - \frac{1}{\Delta\chi \gamma^{t/2} + \varepsilon(t)} \right\}. \quad (6.22)$$

Portanto, os coeficientes  $c_{ij}(t)$  que compõem o operador densidade estão determinados, a menos de suas condições iniciais, pelas Eqs. (6.14), (6.16a), (6.16b) e (6.22).

Para tentar encontrar os coeficientes  $c_{ij}(0)$ , tal que  $i, j = \{+, -\}$ , partir-se-á do estado normalizado mais geral em duas dimensões

$$\boldsymbol{\rho}(0) = \frac{1}{2} [\mathbf{1} + \vec{r}_0 \cdot \vec{\sigma}], \quad (6.23)$$

sendo  $\vec{r}_0 = r_0 (\sin \theta_0 \cos \phi_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0, \cos \theta_0)$  o vetor de Bloch, com as coordenadas esféricas  $r_0$ ,  $\theta_0$  e  $\phi_0$ , e  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ . Confrontando o estado do sistema no instante inicial escrito na base de autoestados do operador invariante com àquele da Eq. (6.23),

$$\boldsymbol{\rho}(0) = \sum_{i,j=+,-} c_{i,j}(0) |i; 0\rangle \langle j; 0|, \quad (6.24)$$

obtém-se que as amplitudes de probabilidade  $c_{i,j}(0)$  são dadas por

$$c_{++}(0) = \frac{1}{2} + \frac{r_0}{2\varepsilon(0)} \left\{ \Delta\chi \cos \theta_0 + \sin \theta_0 [\chi_{eg}(0) e^{i\phi_0} + \chi_{eg}^*(0) e^{-i\phi_0}] \right\}, \quad (6.25)$$

$$c_{+-}(0) = -\frac{r_0}{\varepsilon(0)f(0)} \left\{ \cos \theta_0 f(0) \chi_{eg}^*(0) + \frac{\sin \theta_0}{2} [f^2(0) e^{i\phi_0} - [\chi_{eg}^*(0)]^2 e^{-i\phi_0}] \right\}, \quad (6.26)$$

$$c_{-+}(0) = -\frac{r_0}{\varepsilon(0)f(0)} \left\{ \cos \theta_0 f(0) \chi_{eg}(0) + \frac{\sin \theta_0}{2} [f^2(0) e^{-i\phi_0} - [\chi_{eg}(0)]^2 e^{i\phi_0}] \right\}, \quad (6.27)$$

$$c_{--}(0) = \frac{1}{2} - \frac{r_0}{2\varepsilon(0)} \left\{ \Delta\chi \cos \theta_0 + \sin \theta_0 [\chi_{eg}(0) e^{i\phi_0} + \chi_{eg}^*(0) e^{-i\phi_0}] \right\}. \quad (6.28)$$

Como pode ser visto das expressões para os coeficientes  $c_{i,j}(t)$ , não é possível determinar completamente o estado do sistema no tempo  $t$ , a menos que sejam conhecidos os coeficientes que compõem o operador invariante em  $t = 0$ , isto é,  $\chi_{eg}(0)$  e  $\Delta\chi = \chi_{ee}(0) - \chi_{gg}(0)$ . Poder-se-ia pensar que o vínculo imposto pela Eq. (5.41) é suficiente para determinar tais constantes; contudo, através da expressão

$$\langle \mathbf{I}(t) \rangle = \frac{\chi_{ee}(0) + \chi_{gg}(0)}{2} + \frac{r_0 \cos \theta_0}{2} \left[ \frac{\chi_{ee}(0) - \chi_{gg}(0)}{2} \right] + \frac{r_0 \sin \theta_0}{2} [\chi_{eg}(0) e^{i\phi_0} + \chi_{eg}^*(0) e^{-i\phi_0}], \quad (6.29)$$

conclui-se que o valor médio do operador invariante no tempo  $t$  permanece igual a  $\langle \mathbf{I}(0) \rangle$  para qualquer instante de tempo, independentemente do valor das constantes  $\chi_{ij}(0)$ , com  $i, j = \{g, e\}$ . Uma outra maneira de tentar determinar  $\chi_{eg}(0)$  e  $\Delta\chi$ , é através da comparação entre os valores médios dos operadores  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  avaliados com os operadores densidades das Eq. (6.23) e (6.24). Calculando-se os valores médios com o estado da Eq. (6.23), obtém-se exatamente as componentes do vetor de Bloch  $\vec{r}_0$ . Este resultado é também obtido com o estado (6.24), independentemente da escolha dos parâmetros do invariante.

A conseqüência imediata da arbitrariedade dos coeficientes do operador invariante no instante inicial, tem implicação direta na previsão dos observáveis físicos. Para se certificar deste fato, suponha que se esteja interessado em medir a troca de população entre os estados do sistema de dois níveis. A grandeza física a ser observada é o valor

esperado do operador  $\sigma_z$ , o qual, de acordo com a teoria dos invariantes, é dado por

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z(t) \rangle &= \frac{\Delta\chi}{\varepsilon^2(t)} \left\{ \varepsilon(0) + \Delta\chi r_0 \cos \theta_0 + 2 |\chi_{eg}(0)| r_0 \sin \theta_0 \cos \left\{ \phi_0 + \arg [\chi_{eg}(0)] \right\} \right\} \\ &+ \frac{2r_0 |\chi_{eg}(0)| e^{-\gamma t/2}}{\varepsilon(0)\varepsilon(t)} \left\{ 2 |\chi_{eg}(0)| \cos \theta_0 - \Delta\chi \sin \theta_0 \cos \left\{ \phi_0 + \arg [\chi_{eg}(0)] \right\} \right\} \\ &- \frac{\Delta\chi}{\Delta\chi + \varepsilon(0)} - \frac{(\Delta\chi)^2 \varepsilon(0) e^{\gamma t}}{[\Delta\chi + \varepsilon(0)] \varepsilon^2(t)}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Então, para comparar o valor esperado teórico com o resultado experimental, é necessário ajustar os parâmetros  $\chi_{eg}(0)$  e  $\Delta\chi$  de modo a descrever a curva experimental, um procedimento que quando utilizado em sistemas mais complexos, pode não ser uma tarefa simples. Através da expressão (6.30), também é possível se certificar da afirmação anterior (a de que a comparação entre os valores esperados obtidos através dos operadores densidade (6.23) e (6.24), não é capaz de fixar os coeficientes  $\chi_{ij}(0)$ ), verificando-se que a expressão  $\langle \sigma_z(0) \rangle = r_0 \cos \theta_0$  iguala-se à componente  $z$  do vetor de Bloch  $\vec{r}_0$ .

## 6.2 Operador densidade para sistemas de dois níveis - O método

De acordo com a seção anterior, a teoria dos invariantes dinâmicos de Lewis e Riesenfeld apresenta o problema relacionado às previsões dos valores esperados das grandezas físicas. Para solucionar este problema, será apresentado um método alternativo, sem a necessidade do operador invariante. Devido ao fato destes estudos serem preliminares, o método será comprovado apenas para sistemas de dois níveis que evoluem unitariamente de acordo com a equação de Liouville-von Neumann, embora acredite-se que este possa ser estendido para situações mais gerais.

Relembrando a equação que rege a dinâmica do operador invariante,

$$i \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} = [\mathbf{H}(t), \mathbf{I}(t)],$$

e a equação de descreve a dinâmica unitária de um sistema,

$$i \frac{d\rho(t)}{dt} = [\mathbf{H}(t), \rho(t)],$$

nota-se que as evoluções de ambos os operadores,  $\mathbf{I}(t)$  e  $\boldsymbol{\rho}(t)$ , dão-se através do mesmo operador  $\mathbf{U}(t)$ , isto é,

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{I}(0)\mathbf{U}^\dagger(t), \quad (6.31)$$

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{U}(t)\boldsymbol{\rho}(0)\mathbf{U}^\dagger(t), \quad (6.32)$$

sendo que estes diferem apenas pela condição inicial. O problema mencionado na seção anterior, reside no fato de não se ter uma regra para fixar o operador invariante  $\mathbf{I}(0)$ . Embora pareça que o operador  $\mathbf{U}(t)$  não dependa da forma de  $\mathbf{I}(0)$ , tal dependência existe na abordagem originalmente feita por Lewis e Riesenfeld [14], conforme mostra o exemplo da seção anterior. A semelhança entre as dinâmicas do operador invariante e do estado do sistema, indica que  $\boldsymbol{\rho}(t)$  também é um operador invariante. Para se certificar disto, basta substituí-lo na Eq. (5.41), que leva à seguinte quantidade conservada  $\text{tr}[\boldsymbol{\rho}^2(t)] = \text{tr}[\boldsymbol{\rho}^2(0)] \leq 1$ , ou seja, a pureza do estado mantém-se no tempo.

Ao invés de utilizar o operador invariante  $\mathbf{I}(t)$  para encontrar os seus autoestados e posteriormente escrever a solução da equação de Schrödinger ou de Liouville-von Neumann nesta base, será utilizado diretamente o operador densidade  $\boldsymbol{\rho}(t)$ . Este procedimento evita a indeterminação dos coeficientes apresentada na teoria dos invariantes, uma vez que  $\boldsymbol{\rho}(0)$  é unicamente determinado. A maneira de construir o operador densidade dar-se-á de modo análogo à construção do operador invariante na Eq. (6.3). Contudo, para garantir que  $\text{tr}[\boldsymbol{\rho}(t)] = 1$ , deve-se sempre acrescentar a identidade do espaço de Hilbert em questão à álgebra de operadores quando esta não a contém. É importante notar que a forma do operador invariante suposto em (6.3) é uma combinação linear dos operadores da álgebra. Portanto, qualquer operador densidade poderá ser escrito desta forma? A resposta é não. Apenas algumas classes de sistemas enquadram-se nesta categoria. Para tornar mais clara esta observação, suponha que o sistema físico seja um sistema de dois níveis, com o hamiltoniano descrito por uma combinação linear das matrizes de Pauli,

$$\mathbf{H}(t) = \vec{\omega}(t) \cdot \vec{\sigma}, \quad (6.33)$$

onde o vetor  $\vec{\omega}(t)$  é dado por  $\vec{\omega}(t) = (\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t))$ . O operador que descreverá a evolução definida por  $\mathbf{H}(t)$ , pode ser escrito como

$$\mathbf{U}(t, 0) = \mathbf{T} \left[ e^{-i \int_0^t d\tau \mathbf{H}(\tau)} \right]. \quad (6.34)$$



Expandindo o lado direito da equação acima e utilizando a propriedade [24]

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \mathbf{1}(\vec{a} \cdot \vec{b}) + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \quad (6.35)$$

conclui-se que  $\mathbf{U}(t, 0)$  será uma combinação linear das matrizes de Pauli mais a identidade. Portanto, qualquer operador densidade evoluindo unitariamente que representa um sistema de dois níveis pode ser escrito como uma combinação linear das matrizes de Pauli.

As vantagens deste método são: o estado do sistema é apresentado na forma operacional, ou seja, não há a necessidade de resolver novamente a equação de movimento para diferentes condições iniciais; não é necessário encontrar os autovalores e os autovetores como na teoria dos invariantes dinâmicos; e por fim,  $\rho(0)$  é unicamente determinado.

Para exemplificar a aplicação deste método, tome novamente o sistema de dois níveis evoluindo de acordo com o hamiltoniano da Eq. (2.5)

$$\mathbf{H}(t) = \omega_0 [\sigma_x \sin \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0) + \sigma_y \sin \theta_0 \sin(\omega t + \phi_0) + \sigma_z \cos \theta_0],$$

cujo operador densidade será suposto como uma combinação linear das matrizes de Pauli mais a identidade,

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(t) \sigma_i, \quad (6.36)$$

onde  $\alpha_i(t)$  são coeficientes reais e os índices 1, 2, 3 e 4 indicam, respectivamente, as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  do operador de Pauli  $\vec{\sigma}$  e a identidade  $\mathbf{1}$ . Uma vez que as matrizes de Pauli possuem traço nulo, a adição da identidade é fundamental para garantir que  $\text{tr}[\rho(t)] = 1$ . Esta condição automaticamente fixa o coeficiente  $\alpha_4(t) = 1/2$ .

Substituindo o hamiltoniano (2.5) e a Eq. (6.36) em (5.45), obtém-se o sistema de equações diferenciais acopladas

$$\dot{\alpha}_x(t) = 2\omega_0 [\sin \theta_0 \sin(\omega t + \phi_0) \alpha_z(t) - \cos \theta_0 \alpha_y(t)], \quad (6.37a)$$

$$\dot{\alpha}_y(t) = 2\omega_0 [-\sin \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0) \alpha_z(t) + \cos \theta_0 \alpha_x(t)], \quad (6.37b)$$

$$\dot{\alpha}_z(t) = 2\omega_0 \sin \theta_0 [\cos(\omega t + \phi_0) \alpha_y(t) - \sin(\omega t + \phi_0) \alpha_x(t)], \quad (6.37c)$$

tal que a solução é dada por

$$\alpha_x(t) = \left[ \frac{\cos(\omega t + \phi_0)}{\cos \phi_0} \right]^{\frac{2\omega_0 \cos \theta_0}{\omega}} \left\{ \alpha_x(0) + \int_0^t dt' \left[ \frac{\cos(\omega t' + \phi_0)}{\cos \phi_0} \right]^{\frac{-2\omega_0 \cos \theta_0}{\omega}} \right. \\ \left. \times \left[ \frac{r_0 \cos \theta_0 \nu \sin(\nu t' + \theta_0)}{2 \sin \theta_0 \cos(\omega t' + \phi_0)} + r_0 \sin \theta_0 \omega_0 \sin(\omega t' + \phi_0) \cos(\nu t' + \theta_0) \right] \right\}, \quad (6.38a)$$

$$\alpha_y(t) = \left[ \frac{\sin(\omega t + \phi_0)}{\sin \phi_0} \right]^{\frac{2\omega_0 \cos \theta_0}{\omega}} \left\{ \alpha_y(0) + \int_0^t dt' \left[ \frac{\sin(\omega t' + \phi_0)}{\sin \phi_0} \right]^{\frac{-2\omega_0 \cos \theta_0}{\omega}} \right. \\ \left. \times \left[ \frac{r_0 \cos \theta_0 \nu \sin(\nu t' + \theta_0)}{2 \sin \theta_0 \sin(\omega t' + \phi_0)} - r_0 \sin \theta_0 \omega_0 \cos(\omega t' + \phi_0) \cos(\nu t' + \theta_0) \right] \right\}, \quad (6.38b)$$

$$\alpha_z(t) = \alpha_z(0) \cos(\nu t + \delta), \quad (6.38c)$$

sendo que  $\nu = \sqrt{4\omega_0^2 + \omega^2 - 4\omega_0\omega \cos \theta_0}$ .

A determinação das constantes  $\alpha_x(0)$ ,  $\alpha_y(0)$  e  $\alpha_z(0)$  dependem do estado inicial do sistema  $\rho(0)$ . Utilizando a expressão geral para o estado inicial do sistema bidimensional descrito na Eq. (6.23), conclui-se que  $\alpha_x(0) = r_0 \sin \theta_0 \cos \phi_0/2$ ,  $\alpha_y(0) = r_0 \sin \theta_0 \sin \phi_0/2$ ,  $\alpha_z(0) = r_0 \cos \theta_0/2$  e  $\delta = \theta_0$ . Portanto, o estado do sistema em um tempo  $t$  qualquer pode ser escrito como

$$\rho(t) = \frac{1}{2} [\mathbf{1} + \vec{r}(t) \cdot \vec{\sigma}], \quad (6.39)$$

onde  $\vec{r}(t)$  é o vetor de Bloch

$$\vec{r}(t) = 2(\alpha_x(t), \alpha_y(t), \alpha_z(t)). \quad (6.40)$$

Embora o exemplo apresentado acima seja simples e possa ser resolvido utilizando outras técnicas matemáticas, o seu papel aqui é meramente ilustrativo, sendo suficiente para mostrar o funcionamento do método proposto. Note que qualquer sistema de dois níveis representado pelos operadores de Pauli, admite um operador densidade da forma (6.36), mesmo que seja levado em conta a ação do reservatório. Portanto, como desenvolvimento futuro, pretende-se estender o método acima proposto para o tratamento de sistemas de dois níveis dissipativos e mesmo sistemas de dois níveis interagentes. De fato, outros sistemas físicos que podem ser abordados pelo método aqui apresentado, são as cadeias de spins interagentes. Por exemplo, o hamiltoniano que descreve um sistema de  $N$  spins 1/2 interagentes sob a ação de um campo magnético externo dependente do tempo,

é descrito por

$$\mathbf{H}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\omega}_i(t) \cdot \vec{\sigma}_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \sum_{k,l=1}^3 \gamma_{ij}^{kl}(t) \sigma_i^k \sigma_j^l, \quad (6.41)$$

com os índices inferiores ( $i = \{1, \dots, N\}$ ) contando a posição da partícula na cadeia de spins e os índices superiores denotando as componentes das matrizes de Pauli. Se o sistema evoluir unitariamente, o operador de evolução será dado pela expressão (6.34) com o hamiltoniano da Eq. (6.41). Utilizando a propriedade (6.35) após a expansão do operador de evolução, obtém-se que o operador densidade em qualquer tempo  $t$  será da forma

$$\rho(t) = \mathcal{N} \sum_{k,l=1}^4 \rho_{1,2,\dots,N}^{i_1 i_2, \dots, i_N}(t) \sigma_1^{i_1} \sigma_2^{i_2} \dots \sigma_N^{i_N}, \quad (6.42)$$

sendo que as equações diferenciais que descrevem os coeficientes  $\rho_{1,2,\dots,N}^{i_1 i_2, \dots, i_N}(t)$ , serão obtidas após a substituição da Eq. (6.42) na equação de Liouville-von Neumann e  $\mathcal{N}$  é a constante de normalização do estado. Com este método, transformou-se as equações para operadores em equações para funções, além de apresentar as vantagens citadas anteriormente. Obviamente, o sucesso da aplicação do método para este exemplo dependerá da solução das equações diferenciais, as quais serão acopladas. É importante notar que a forma do operador densidade descrito na Eq. (6.42) é a mais geral e cobre todo o espaço de Hilbert acessível para este sistema físico. Então, se os efeitos da dissipação forem levados em conta, o operador densidade suposto preservará a mesma forma, porém, com os coeficientes determinados a partir de uma equação mestra, como mostrado na Eq. (5.43).

# Capítulo 7

## Conclusões e perspectivas

Este trabalho foi iniciado com a proposição, no capítulo 3, de um esquema para controlar e medir fases geométricas não-adiabáticas em EQC, levando em conta a tecnologia atualmente disponível. Apresentou-se uma maneira de gerar evoluções em que as fases adquiridas são puramente geométricas, através da interação dispersiva de um sistema de dois níveis com um campo quântico de radiação. A origem das fases geométricas adquiridas pelos autoestados do operador invariante está nos diferentes mapas projetivos associados aos estados atômicos  $g$  e  $e$ . Também foi mostrado que é possível gerar estados do tipo *gato de Schrödinger*, onde as fases adquiridas são de origem geométrica somente. Acredita-se que este trabalho possa ser melhorado através da inserção dos efeitos da dissipação no campo da cavidade, para testar a robustez da fase geométrica e dos estados do tipo *gato de Schrödinger* de caráter geométrico.

No capítulo 4, foi mostrado como resolver a equação de Schrödinger analiticamente para o hamiltoniano DT de dois CBE interagentes na aproximação de dois modos. Através das constantes de movimento encontradas nos regimes ressonante e não-ressonante, foi possível obter todas as soluções para  $r(t)$  e  $\phi(t)$ , como mostradas nas Fig. (4.3) e (4.8). Verificou-se que as fases geométricas dependem fortemente de tais constantes de movimento, além da maneira como os parâmetros do hamiltoniano variam no tempo. A depender de suas intensidades, as frequências da armadilha desempenham papéis tão importantes quanto o da frequência de Rabi do sistema sobre a evolução temporal da fase geométrica. Embora o hamiltoniano de dois CBE interagentes na aproximação de dois

---

modos já tenha sido bastante explorado na literatura, com a ferramenta desenvolvida nesta tese, será possível investigar a dependência da fase geométrica com relação a outros estados iniciais do sistema, inclusive o papel desempenhado pelas colisões, e estudar o comportamento do emaranhamento entre os dois modos condensados em função dos parâmetros do hamiltoniano dependentes do tempo. Um outro ponto importante a ser investigado é a conexão entre fases geométricas e as constantes de movimento de um dado sistema. Acredita-se que é possível obter a fase geométrica para qualquer sistema, tendo-se apenas a métrica do espaço de parâmetros e a constante de movimento.

Com o intuito de obter uma expressão geral para a fase geométrica adquirida pelos estados da base de um sistema físico, foi apresentada no capítulo 5 uma definição de fase geométrica partindo apenas da condição de transporte paralelo. Tal fase, que é aplicável em um cenário geral de evoluções adiabáticas ou não-adiabáticas, cíclicas ou não-cíclicas e transicionais ou não-transicionais de estados puros ou mistos, transforma-se covariante-mente; portanto, seus observáveis são quantidades invariantes de gauge. Embora as suas aplicações tenham sido contextualizadas de acordo com a teoria dos invariantes, o formalismo desenvolvido é geral e é aplicável para qualquer base de estados dependentes do tempo. Esta definição recupera vários resultados presentes na literatura.

No capítulo 6, mostrou-se que de acordo com a prescrição original da teoria dos invariantes, não existe uma regra para determinar os coeficientes do operador invariante no instante inicial. As conseqüências deste fato recaem sobre a indeterminação dos valores esperados dos operadores do sistema. Contudo, para situações simples, é possível identificar tais coeficientes através do estado inicial do sistema, validando a aplicação de tal teoria ao longo desta tese. Tendo este fato como motivação, foi apresentado um método alternativo para resolver as equações de movimento do estado do sistema, o qual se aplica a sistemas de dois níveis evoluindo unitariamente. Tal método também pode ser estendido para evoluções não-unitárias e para  $N$  sistemas de dois níveis interagentes. Como perspectiva, pretende-se também estudar a possibilidade de aplicação do método para sistemas interagentes em espaços de Hilbert de dimensão finita qualquer.

# Apêndice A

## Engenharia de interações

Neste apêndice, procurar-se-á pelas condições em que o hamiltoniano (3.1)

$$\mathbf{H}(t) = \nu \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{\omega_0}{2} \boldsymbol{\sigma}_z + g (\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_- + \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_+) + f(t) \mathbf{a}^\dagger + f^*(t) \mathbf{a}, \quad (\text{A.1})$$

pode ser efetivamente descrito pelo hamiltoniano (3.2)

$$\mathbf{H}_{ef}(t) \approx \nu \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{\omega_0}{2} \boldsymbol{\sigma}_z + \chi \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_z + \chi \boldsymbol{\sigma}_{ee} + f(t) \mathbf{a}^\dagger + f^*(t) \mathbf{a}. \quad (\text{A.2})$$

Para realizar esta tarefa, será utilizado um método desenvolvido por Prado [156] para obter hamiltonianos efetivos a partir de hamiltonianos que contenham partes fortemente oscilantes e partes fracamente oscilantes ou não-oscilantes. Esta técnica consiste em uma extensão do método desenvolvido por James [157] para obter hamiltonianos efetivos a partir de hamiltonianos com termos altamente oscilantes. A justificativa para se obter hamiltonianos efetivos reside no fato de que muitas vezes, resolver a equação de Schrödinger com hamiltonianos que fazem uma descrição completa do sistema é muito complicado, exigindo cálculos numéricos consideráveis. Por outro lado, para certos regimes de parâmetros é possível descrever a dinâmica do mesmo sistema físico de forma analítica, com muito boa aproximação. Pode-se resumir esta metodologia da seguinte maneira:

Considere um sistema físico que evolui de acordo com a equação de Schrödinger, escrita na representação de interação,

$$i \frac{d}{dt} |\Psi_I(t)\rangle = \mathbf{H}_I(t) |\Psi_I(t)\rangle, \quad (\text{A.3})$$

sendo que  $\mathbf{H}_I(t)$  é composto por uma parte altamente oscilante  $\mathbf{H}_I^O(t)$  e por outra fracamente oscilante ou não-oscilante  $\mathbf{H}_I^N(t)$ . A parte fortemente oscilante pode ser escrita como

$$\mathbf{H}_I^O(t) = g_1 \left( e^{i\Delta_1 t} \mathbf{O}_1 + e^{-i\Delta_1 t} \mathbf{O}_1^\dagger \right), \quad (\text{A.4})$$

tal que  $|g_1| \langle \mathbf{O}_1 \rangle \ll |\Delta_1|$ , e a parte fracamente oscilante como

$$\mathbf{H}_I^N(t) = g_2 \left( e^{i\Delta_2 t} \mathbf{O}_2 + e^{-i\Delta_2 t} \mathbf{O}_2^\dagger \right), \quad (\text{A.5})$$

onde  $|g_2| \langle \mathbf{O}_2 \rangle \gg |\Delta_2|$ . Os operadores  $\mathbf{O}_1$  e  $\mathbf{O}_2$  compõem  $\mathbf{H}_I^O(t)$  e  $\mathbf{H}_I^N(t)$ , respectivamente, e o símbolo  $\langle \cdot \rangle$  indica o valor esperador de um dado operador.

O primeiro passo consiste em integrar a Eq. (A.3), de forma a obter

$$|\Psi_I(t)\rangle = |\Psi_I(0)\rangle - i \int_0^t dt' [\mathbf{H}_I^O(t') + \mathbf{H}_I^N(t')] |\Psi_I(t')\rangle. \quad (\text{A.6})$$

Substituindo a Eq. (A.6) na parte fortemente oscilante do hamiltoniano da Eq. (A.3), obtém-se

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\Psi_I(t)\rangle &= \underbrace{\mathbf{H}_I^O(t) |\Psi_I(0)\rangle}_{\text{I}} - \underbrace{i \mathbf{H}_I^O(t) \int_0^t dt' \mathbf{H}_I^O(t') |\Psi_I(t')\rangle}_{\text{II}} \\ &\quad - \underbrace{i \mathbf{H}_I^O(t) \int_0^t dt' \mathbf{H}_I^N(t') |\Psi_I(t')\rangle}_{\text{III}} + \underbrace{\mathbf{H}_I^N(t) |\Psi_I(t)\rangle}_{\text{IV}}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Para analisar cada termo da expressão acima, é necessário fazer algumas considerações gerais: primeiro, o tempo de evolução do sistema, determinado por  $|\Psi_I(t)\rangle$ , será da ordem de  $T \sim 1/|g|$ , onde  $|g| = \min\{|\langle \mathbf{O}_1 \rangle g_1|, |\langle \mathbf{O}_2 \rangle g_2|\}$ ; segundo,  $|\Delta_1|$  é a maior frequência do sistema, tal que as relações a seguir são satisfeitas  $|\Delta_1| \gg |\langle \mathbf{O}_1 \rangle g_1|, |\langle \mathbf{O}_1 \rangle g_1 \Delta_2|, |\langle \mathbf{O}_2 \rangle g_2| \gg |\Delta_2|$  e  $|g_1 \langle \mathbf{O}_1 \rangle / \Delta_1| \ll |\langle \mathbf{O}_2 \rangle g_2 / \Delta_2|$ ; e terceiro, os termos **I**, **II** e **III** serão comparados com o  $\mathbf{H}_I^N(t)$ , uma vez que se está interessado na sua contribuição para o hamiltoniano efetivo total.

O termo **I** pode ser reescrito como  $[\mathbf{H}_I^O(t) e^{\pm i[\langle \mathbf{O}_1 \rangle |g_1|, \langle \mathbf{O}_2 \rangle |g_2|]t}] e^{\mp i[\langle \mathbf{O}_1 \rangle |g_1|, \langle \mathbf{O}_2 \rangle |g_2|]t}$ , onde a exponencial mais à direita faz o papel de  $|\Psi_I(t)\rangle$  da expressão **IV**. Como  $\mathbf{H}_I^O(t)$  oscila com a frequência  $\Delta_1$ , segue que  $\mathbf{H}_I^O(t) e^{\pm i[\langle \mathbf{O}_1 \rangle |g_1|, \langle \mathbf{O}_2 \rangle |g_2|]t} \sim \mathbf{H}_I^O(t)$ . Após efetuar a média

temporal no período  $T$ , a contribuição de  $\mathbf{H}_I^O(t)$  será da ordem de  $\langle \mathbf{O}_1 \rangle |g_1| / |\Delta_1|$ , enquanto que a contribuição de  $\mathbf{H}_I^N(t)$  será da ordem de  $\langle \mathbf{O}_2 \rangle g_2 / \Delta_2$ . Portanto, o primeiro termo não será relevante para o hamiltoniano efetivo total.

No termo **II**, o vetor de estado  $|\Psi_I(t')\rangle$  oscila na escala de tempo  $T$ , permitindo que seja retirado da integral no tempo  $t$ , uma vez que a sua oscilação é muito menor que a de  $\mathbf{H}_I^O(t)$  ( $t_{H_I^O} \sim 1/|\Delta_1|$ ). Então, a contribuição do segundo termo para o hamiltoniano efetivo total será dada pelos termos fracamente oscilantes de  $\mathbf{H}_{ef}^O(t) = -i\mathbf{H}_I^O(t) \int_0^t dt' \mathbf{H}_I^O(t')$ , isto é,  $\mathbf{H}_{ef}^O(t) \simeq \frac{g_1^2}{\Delta_1} (\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_1^\dagger - \mathbf{O}_1^\dagger \mathbf{O}_1)$ . Deve-se escolher adequadamente os parâmetros  $g_1$  e  $\Delta_1$  de modo a satisfazer as relações acima e para que  $\left| \frac{g_1^2}{\Delta_1} \langle \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_1^\dagger \rangle \right|$  seja pelo menos da ordem dos termos em  $\mathbf{H}_I^N(t)$ .

Já no termo **III**,  $\mathbf{H}_I^N(t')$  oscila muito pouco na escala de tempo de  $|\Psi_I(t)\rangle$ , então, este também poderá ser retirado da integral. Como a integral de  $|\Psi_I(t')\rangle$  contribuirá com termos da ordem da unidade, pode-se reescrever **III** como  $[\mathbf{H}_I^O(t) \mathbf{H}_I^N(t) e^{\pm i[\langle \mathbf{O}_1 \rangle |g_1|, \langle \mathbf{O}_2 \rangle |g_2|]t}] \times e^{\mp i[\langle \mathbf{O}_1 \rangle |g_1|, \langle \mathbf{O}_2 \rangle |g_2|]t}$ , onde foi utilizado o mesmo raciocínio da análise do termo **I**. Lembrando que  $\mathbf{H}_I^O(t)$  oscila com a maior frequência do sistema,  $\mathbf{H}_I^O(t) \mathbf{H}_I^N(t) e^{\pm i[\langle \mathbf{O}_1 \rangle |g_1|, \langle \mathbf{O}_2 \rangle |g_2|]t}$  pode ser aproximado por  $\mathbf{H}_I^O(t) \mathbf{H}_I^N(t)$ , cuja média temporal contribuirá com com frequências efetivas da ordem de  $|\langle \mathbf{O}_1 \rangle \langle \mathbf{O}_2 \rangle g_1 g_2 / \Delta_1|$ . Desde que  $|\Delta_1| \gg |\langle \mathbf{O}_1 \rangle g_1 \Delta_2|$ , o termo **III** pode ser desprezado quando comparado com  $\mathbf{H}_I^N(t)$ . Em particular, na situação de interesse apresentada abaixo,  $\Delta_2 = 0$ .

Portanto, o hamiltoniano efetivo pode ser descrito por

$$\mathbf{H}_{ef}(t) \approx \frac{g_1^2}{\Delta_1} (\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_1^\dagger - \mathbf{O}_1^\dagger \mathbf{O}_1) + \mathbf{H}_I^N(t). \quad (\text{A.8})$$

Para aplicar esta metodologia ao hamiltoniano de interesse, Eq. (3.1), primeiro deve-se escrevê-lo na representação de interação

$$\mathbf{H}_I(t) = g (e^{-i\Delta t} \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_- + e^{i\Delta t} \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_+) + \kappa (e^{-i\delta t} \mathbf{a}^\dagger + e^{i\delta t} \mathbf{a}), \quad (\text{A.9})$$

onde  $\Delta = \omega_0 - \nu$  e  $\delta = \omega_c - \nu$ . As partes fortemente oscilante e fracamente oscilante ou não-oscilante são identificadas por

$$\mathbf{H}_I^O(t) = g (e^{-i\Delta t} \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_- + e^{i\Delta t} \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_+), \quad (\text{A.10a})$$

$$\mathbf{H}_I^N(t) = \kappa (e^{-i\delta t} \mathbf{a}^\dagger + e^{i\delta t} \mathbf{a}). \quad (\text{A.10b})$$



Supondo que o modo do campo e o átomo não troquem fótons efetivamente, ou seja, que estes interajam dispersivamente, é necessário que  $|\Delta| \gg \sqrt{\bar{n}}|g|$ , onde  $\sqrt{\bar{n}} \propto \langle \mathbf{a} \rangle$ , com  $\bar{n}$  sendo o número médio de fótons na cavidade e  $\langle \mathbf{a} \rangle$  a amplitude de tal campo [100]. Então, de acordo com estas considerações, juntamente com  $\mathbf{O}_1 = \mathbf{a}\sigma_+$  e  $\mathbf{O}_2 = \mathbf{a}$ , obtém-se o seguinte hamiltoniano efetivo

$$\mathbf{H}_{ef}(t) \approx \chi \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \sigma_z + \chi \sigma_{ee} + \kappa (e^{-i\delta t} \mathbf{a}^\dagger + e^{i\delta t} \mathbf{a}), \quad (\text{A.11})$$

onde  $\chi = g^2/\Delta$ . A amplitude do bombeio  $\kappa$  não pode ser muito intensa; deve ser tal que  $\sqrt{\bar{n}}|\kappa| \ll |\Delta|$ , caso contrário a aproximação acima deixará de valer. Logo, o hamiltoniano efetivo (A.11) na representação de Schrödinger será dado por

$$\mathbf{H}_{ef}(t) \approx \nu \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \chi \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \sigma_z + \chi \sigma_{ee} + \kappa (e^{-i\omega_c t} \mathbf{a}^\dagger + e^{i\omega_c t} \mathbf{a}), \quad (\text{A.12})$$

com  $|\Delta| \gg \sqrt{\bar{n}}|g|$ ,  $\sqrt{\bar{n}}|\kappa|$  e  $\sqrt{\bar{n}}|\kappa| \gg \omega_c$ .

Note que é possível supor outros regimes de parâmetros para obter hamiltonianos efetivos diferentes. Contudo, não se está interessado em explorar este assunto por hora.

# Apêndice B

## Soluções analíticas das equações características (4.11)

Algumas soluções específicas das equações características (4.11) serão apresentadas neste apêndice. Para um tratamento mais detalhado ver as Refs. [101, 103]. Dois diferentes regimes de aplicação dos campos lasers são investigados, o regime ressonante e o não-ressonante. Estes são definidos comparando-se a frequência efetiva dos dois modos condensados  $\omega(t)$ , com a dessintonia entre a transição Raman e as frequências dos campos externos,  $\Delta_R(t)$ . Como mencionado na seção 4.1 do capítulo 4, no regime ressonante tem-se  $\Delta_R(t) = \omega(t)$ , e no regime não-ressonante  $\Delta_R(t) = \omega(t) - \varpi$ , com  $\varpi$  sendo uma constante.

### B.1 Processo ressonante - $\Delta_R(t) = \omega(t)$

Definindo  $\chi(t) \equiv \phi(t) - \delta(t)$ , as equações características (4.11) tornam-se

$$\dot{r}(t) = 2g(t) \sin [\chi(t)], \quad (\text{B.1a})$$

$$\dot{\chi}(t) = \omega(t) - \Delta_R(t) + 2g(t) \cos [\chi(t)] \cot [r(t)]. \quad (\text{B.1b})$$

No regime ressonante, a divisão da Eq. (B.1a) pela Eq. (B.1b) leva à seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dr}{d\chi} = \tan \chi \tan r, \quad (\text{B.2})$$

cuja solução é a constante de movimento

$$\sin [r(t)] \cos [\phi(t) - \delta(t)] = \mathcal{C}, \quad (\text{B.3})$$

a qual depende dos valores iniciais  $r_0$ ,  $\phi_0$  e  $\delta_0$ . Substituindo (B.3) em (B.1), obtém-se as soluções para  $r(t)$  e  $\phi(t)$  como

$$\cos [r(t)] = \sqrt{1 - \mathcal{C}^2} \sin \left[ u(t, t_0) + \arcsin \left( \frac{\cos r_0}{\sqrt{1 - \mathcal{C}^2}} \right) \right], \quad (\text{B.4a})$$

$$\phi(t) = \delta(t) + \arccos \left\{ \frac{\mathcal{C}}{\sin [r(t)]} \right\}, \quad (\text{B.4b})$$

com

$$u(t, t_0) = -2 \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau. \quad (\text{B.5})$$

## **B.2 Processo não-ressonante - $\Delta_R(t) = \omega(t) - \varpi$**

Considerando o regime não-ressonante, as Eqs. (B.1) podem novamente ser resolvidas por quadratura, desde que a frequência de Rabi  $g(t) = g_0$  seja constante no tempo. Da divisão da Eq. (B.1a) pela Eq. (B.1b), obtém-se a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dr}{d\chi} = \frac{2g_0 \sin \chi}{\varpi + 2g_0 \cos \chi \cot r}. \quad (\text{B.6})$$

Embora esta equação seja um pouco mais difícil de ser integrada que a anterior (B.2), a sua solução leva a outra constante de movimento

$$\eta \cos [\phi(t) - \delta(t)] \sin [r(t)] - \cos [r(t)] = \mathcal{C}, \quad (\text{B.7})$$

onde  $\eta = 2g_0/\varpi$  e  $\mathcal{C}$  é determinada pelas condições iniciais  $r_0$ ,  $\phi_0$  e  $\delta_0$ . Através da substituição da Eq. (B.7) na Eq. (B.1), chega-se à seguinte solução não-ressonante

$$\begin{aligned} \cos [r(t)] = & \frac{\eta \sqrt{1 + \eta^2 - \mathcal{C}^2}}{1 + \eta^2} \sin \left\{ -\varpi \sqrt{1 + \eta^2} (t - t_0) \right. \\ & \left. + \arcsin \left[ \frac{(1 + \eta^2) \cos r_0 + \mathcal{C}}{\eta \sqrt{1 + \eta^2 - \mathcal{C}^2}} \right] \right\} - \frac{\mathcal{C}}{1 + \eta^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.8a})$$

$$\phi(t) = \delta(t) + \arccos \left\{ \frac{\mathcal{C} + \cos [r(t)]}{\eta \sin [r(t)]} \right\}. \quad (\text{B.8b})$$

### B.3 Solução para $r$ constante

Outra solução possível para  $r(t)$  e  $\phi(t)$  surge quando se impõe que  $r(t)$  permaneça constante no tempo. Através da solução

$$r(t) = r_0, \quad (\text{B.9a})$$

$$\phi(t) = \delta(t) + n\pi = \phi_0 + \int_{t_0}^t d\tau [\omega(\tau) + 2(-)^n g(\tau) \cot(r_0)], \quad (\text{B.9b})$$

com  $r_0 \neq \{0, \pi\}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , o vetor de estado adquire somente fase relativa  $\phi(t)$ . A solução para  $\phi(t)$  pode ainda ser simplificada notando que a implementação física deste regime impõe necessariamente,  $g(t) = 0$ . De fato, para que a diferença de população seja constante, o que significa manter  $r$  constante no tempo de acordo com a Eq. (4.28), a frequência de Rabi deve ser nula. Portanto, a Eq. (B.9b) simplifica-se para

$$\phi(t) = \phi_0 + \int_{t_0}^t d\tau \omega(\tau). \quad (\text{B.10})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] VINITSKII, S. I.; DERBOV, V. L.; DUBOVIK, V. N.; MARKOVISKI, B. L.; STEPANOVSKII, Y. P. **Sov. Phys. Usp.**, v. 33, p. 403, 1990.
- [2] EHRENFEST, P. **Proc. Amst. Acad.**, v. 16, p. 591, 1913.
- [3] EHRENFEST, P. **Proc. Amst. Acad.**, v. 19, p. 576, 1916.
- [4] BORN, M.; FOCK, V. **Z. Phys.**, v. 51, p. 165, 1928.
- [5] KATO, T. **J. Phys. Soc. Jpn.**, v. 5, p. 435, 1950.
- [6] BERRY, M. V. **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 392, p. 45, 1984.
- [7] AHARONOV, Y.; BOHM, D. **Phys. Rev.**, v. 115, p. 485, 1959.
- [8] ANANDAN, J. **Phys. Lett. A**, v. 133, p. 171, 1988. Neste referência há uma breve discussão sobre a equivalência entre o espaço de parâmetros, utilizado por Berry, e espaço projetivo do espaço de Hilbert, o qual é formado por todos os estados físicos do sistema, ou seja, estados definidos a menos de uma fase global.
- [9] SHAPERRE, A.; WILCZEK, F. **Geometric phases in physics**, Singapore: World Scientific, 1989.
- [10] PANCHARATNAM, S. **Proc. Ind. Acad. Sci. A**, v. 44, p. 247, 1956.
- [11] HERZBERG, G.; LONGUET-HIGGINS, H. C. **Disc. Farad. Soc.**, v. 35, p. 77, 1963.
- [12] STONE, A. J. **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 351, p. 141, 1976.

- [13] MEAD, C. A.; TRUHLAR, D. G. **J. Chem. Phys.**, v. 70, p. 2284, 1979.
- [14] LEWIS, H. R.; RIESENFELD, W. B. **J. Math. Phys.**, v. 10, p. 1458, 1969.
- [15] LEWIS, H. R. **Phys. Rev. Lett.**, v. 18, p. 510, 1967.
- [16] DODONOV, V. V.; MAN'KO, V. I. **Physica A**, v. 94, p. 403, 1978.
- [17] MORALES, D. A. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 21, p. L889, 1988.
- [18] MIZRAHI, S. S. **Phys. Lett. A**, v. 138, p. 465, 1989.
- [19] GAO, X-C.; XU, J-B.; QIAN, T-Z. **Phys. Rev. A**, v. 44, p. 7016, 1991.
- [20] KWON, O.; AHN, C.; KIM, Y. **Phys. Rev. A**, v. 46, p. 5354, 1992.
- [21] MONTEOLIVA, D. B.; KORSCH, H. J.; NUNESZ, J. A. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 27, p. 6897, 1994.
- [22] MESSIAH, A. **Quantum Mechanics**, v. 2, New York: John Wiley & Sons, 1961.
- [23] POLAVIEJA, G. G.; SJÖQVIST, E. **Am. J. Phys.**, v. 66, p. 431, 1998.
- [24] SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**, Revised Edition, Massachusetts: Addison-Wesley, 1994.
- [25] SIMON, B. **Phys. Rev. Lett.**, v. 51, p. 2167, 1983.
- [26] WILCZEK, F.; ZEE, A. **Phys. Rev. Lett.**, v. 52, p. 2111, 1984.
- [27] AHARONOV, Y.; ANANDAN, J. **Phys. Rev. Lett.**, v. 58, p. 1593, 1987.
- [28] SAMUEL, J.; BHANDARI, R., **Phys. Rev. Lett.**, v. 60, p. 2339, 1988.
- [29] AITCHISON, I. J. R.; WANELIK, K. **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 439, p. 25, 1992.
- [30] MUKUNDA, N.; SIMON, R. **Ann. Phys.**, v. 228, p. 205, 1993.
- [31] MANINI, N.; PISTOLESI, F. **Phys. Rev. Lett.**, v. 85, p. 3067, 2000.
- [32] UHLMANN, A. **Rep. Math. Phys.**, v. 24, p. 229, 1986.

- [33] UHLMANN, A. **Lett. Math. Phys.**, v. 21, p. 229, 1991.
- [34] UHLMANN, A. **Rep. Math. Phys.**, v. 36, p. 461, 1995.
- [35] SJÖQVIST, E.; PATI, A. K.; EKERT, A.; ANANDAN, J.; ERICSSON, M.; OI, D. K. L.; VEDRAL, V. **Phys. Rev. Lett.**, v. 85, p. 2845, 2000.
- [36] ANANDAN, J.; SJÖQVIST, E.; PATI, A. K.; EKERT, A.; ERICSSON, M.; OI, D. K. L.; VEDRAL, V. **Phys. Rev. Lett.**, v. 89, p. 268902, 2002.
- [37] BHANDARI, R. **Phys. Rev. Lett.**, v. 89, p. 268901, 2002.
- [38] FILIPP, S.; SJÖQVIST, E. **Phys. Rev. Lett.**, v. 90, p. 050403, 2003.
- [39] FILIPP, S.; SJÖQVIST, E. **Phys. Rev. A**, v. 68, p. 042112, 2003.
- [40] DE FARIA, J. G. P.; PIZA, A. F. R. T.; NEMES, M. C. **Europhys. Lett.**, v. 62, p. 782, 2003.
- [41] ERICSSON, M.; SJÖQVIST, E.; BRÄNNLUND, J.; OI, D. K. L.; PATI, A. K. **Phys. Rev. A**, v. 67, p. 020101(R), 2003.
- [42] GARRISON, J. C.; WRIGHT, E. M. **Phys. Lett. A**, v. 128, p. 177, 1988.
- [43] DATTOLI, G.; MIGNANI, R.; TORRE, A. **J. Phys. A**, v. 23, p. 5795, 1990.
- [44] ELLINAS, D.; BARNETT, S. M.; DUPERTUIS, M. A. **Phys. Rev. A**, v. 39, p. 3228, 1989.
- [45] GAMLIEL, D.; FREED, J. H. **Phys. Rev. A**, v. 39, p. 3238, 1989.
- [46] ROMERO, K. M. F.; PINTO, A. C. A.; THOMAZ, M. T. **Physica A**, v. 307, p. 142, 2002;
- [47] KAMLEITNER, I.; CRESSER, J. D.; SANDERS, B. C. **Phys. Rev. A**, v. 70, p. 044103, 2004.
- [48] WHITNEY, R. S.; GEFEN, Y. **Phys. Rev. Lett.**, v. 90, p. 190402, 2003.

- [49] WHITNEY, R. S.; MAKHLIN, Y.; SHNIRMAN, A.; GEFEN, Y. **Phys. Rev. Lett.**, v. 94, p. 070407, 2005.
- [50] CAROLLO, A.; FUENTES-GURIDI, I.; SANTOS, M. F.; VEDRAL, V. **Phys. Rev. Lett.**, v. 90, p. 160402, 2003.
- [51] FUENTES-GURIDI, I.; GIRELLI, F.; LIVINE, E. **Phys. Rev. Lett.**, v. 94, p. 020503, 2005.
- [52] TONG, D. M.; SJÖQVIST, E.; KWEK, L. C.; OH, C. H. **Phys. Rev. Lett.**, v. 93, p. 080405, 2004.
- [53] TONG, D. M.; SJÖQVIST, E.; KWEK, L. C.; OH, C. H. **Phys. Rev. Lett.**, v. 95, p. 249902(E), 2005.
- [54] REZAKHANI, A. T.; ZANARDI, P. **Phys. Rev. A**, v. 73, p. 012107, 2006.
- [55] MARZLIN, K. P.; GHOSE, S.; SANDERS, B. C. **Phys. Rev. Lett.**, v. 93, p. 260402, 2004.
- [56] SARANDY, M. S.; LIDAR, D. A. **Phys. Rev. A**, v. 73, p. 062101, 2006.
- [57] THUNSTRÖM, P.; ÅBERG, J.; SJÖQVIST, E. **Phys. Rev. A**, v. 72, p. 022328, 2005.
- [58] BOHM, A.; MOSTAFAZADEH, A.; KOIZUNI, H.; NIU, Q.; ZWANZIGER, J. **The geometric phase in quantum systems: Foundations, mathematical concepts, and applications in molecular and condensed matter physics**, Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [59] FUENTES-GURIDI, I.; CAROLLO, A.; BOSE, S.; VEDRAL, V. **Phys. Rev. Lett.**, v. 89, p. 220404, 2002.
- [60] CAROLLO, A.; SANTOS, M. F.; VEDRAL, V. **Phys. Rev. A**, v. 67, p. 063804, 2003.



- [61] SERRA, R. M.; CAROLLO, A.; SANTOS, M. F.; VEDRAL, V. **Phys. Rev. A**, v. 70, p. 044102, 2004.
- [62] CAROLLO, A.; PACHOS, J. K. **Phys. Rev. Lett.**, v. 95, p. 157203, 2005.
- [63] HAMMA, A. <http://lanl.arxiv.org/abs/quant-ph/0602091>, 2006.
- [64] ZANARDI, P.; RASETTI, M. **Phys. Lett. A**, v. 264, p. 94, 1999.
- [65] PACHOS, J.; ZANARDI, P.; RASETTI, M. **Phys. Rev. A**, v. 61, p. 010305(R), 1999.
- [66] PACHOS, J.; CHOUNTASIS, S. **Phys. Rev. A**, v. 62, p. 052318, 2000.
- [67] EKERT, A.; ERICSSON, M.; HAYDEN, P.; INAMORI, H.; JONES, J. A.; OI, D. K. L.; VEDRAL, V. **J. Mod. Opt.**, v. 47, p. 2501, 2000.
- [68] DUAN, L. M.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. **Science**, v. 292, p. 1695, 2001.
- [69] RECATI, A.; CALARCO, T.; ZANARDI, P.; CIRAC, J. I., ZOLLER, P. **Phys. Rev. A**, v. 66, p. 032309, 2002.
- [70] MARGOLIN, A. E.; STRAZHEV, V. I.; TREGUBOVICH, A. Y. **Phys. Lett. A**, v. 303, p. 131, 2002.
- [71] SOLINAS, P.; ZANARDI, P.; ZANGHI, N.; ROSSI, F. **Phys. Rev. A**, v. 67, p. 052309, 2003.
- [72] MARGOLIN, A. E.; STRAZHEV, V. I.; TREGUBOVICH, A. Y. **Phys. Lett. A**, v. 312, p. 296, 2003.
- [73] GARCIA-RIPOLL, J. J.; ZOLLER, P.; CIRAC, J. I. **Phys. Rev. Lett.**, v. 91, p. 157901, 2003.
- [74] CEN, L. X.; ZANARDI, P. **Phys. Rev. A**, v. 70, p. 052323, 2004.
- [75] CAROLLO, A.; VEDRAL, V. **LANL archive e-print quant-ph/0504205**, 2005.
- [76] DE CHIARA, G.; PALMA, G. **Phys. Rev. Lett.**, v. 91, p. 090404, 2003.

- [77] TOMITA, A.; CHIAO, R. Y. **Phys. Rev. Lett.**, v. 57, p. 937, 1986.
- [78] KWIAT, P. G.; CHIAO, R. Y. **Phys. Rev. Lett.**, v. 66, p. 588, 1991.
- [79] ERICSSON, M.; ACHILLES, D.; BARREIRO, J. T.; BRANNING, D.; PETERS, N. A.; KWIAT, P. G. **Phys. Rev. Lett.**, v. 94, p. 050401, 2005.
- [80] BITTER, T.; DUBBERS, D. **Phys. Rev. Lett.**, v. 59, p. 251, 1987.
- [81] WAGH, A. G.; RAKHECHA, V. C.; SUMMAHAMMER, J.; BADUREK, G.; WEINFURTER, H.; ALLMAN, B. E.; KAISER, H.; HAMACHER, K.; JACOBSON, D. L.; WERNER, S. A. **Phys. Rev. Lett.**, v. 78, p. 755, 1997.
- [82] SUTTER, D.; MULLER, K. T.; PINES, A. **Phys. Rev. Lett.**, v. 60, p. 1218, 1988.
- [83] SIMON, R.; KIMBLE, H. J.; SUDARSHAN, E. C. **Phys. Rev. Lett.**, v. 61, p. 19, 1988.
- [84] JONES, J. A.; VEDRAL, V.; EKERT, A.; CASTAGNOLI, G. **Nature**, v. 403, p. 869, 1999.
- [85] DU, J.; ZOU, P.; SHI, M.; KWEK, L. C.; PAN, J. W.; OH, C. H.; EKERT, A.; OI, D. K. L.; ERICSSON, M. **Phys. Rev. Lett.**, v. 91, p. 100403, 2003.
- [86] WEBB, C. L.; GODUN, R. M.; SUMMY, G. S.; OBERTHALER, M. K.; FEATONBY, P. D.; FOOT, C. J.; BURNETT, K. **Phys. Rev. A**, v. 60, p. 1783(R), 1999.
- [87] FALCI, G.; FAZIO, R.; PALMA, G. M.; SIEWERT, J.; VEDRAL, V. **Nature**, v. 407, p. 355, 2000.
- [88] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO, J. L. **Classical Mechanics**, 3<sup>rd</sup> ed., New York: Addison Wesley, 2000.
- [89] KRUSKAL, M. **J. Math. Phys.**, v. 3, p. 806, 1962.
- [90] MOSTAFAZADEH, A. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 31, p. 9975, 1998.

- [91] BRUNE, M.; SCHMIDT-KALER, F.; MAALI, A.; DREYER, J.; HAGLEY, E.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. **Phys. Rev. Lett.**, v. 76, p. 1800, 1996.
- [92] RAUSCHENBEUTEL, A.; NOGUES, G.; OSNAGHI, S.; BERTET, P.; BRUNE, M.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. **Phys. Rev. Lett.**, v. 83, p. 5166, 1999.
- [93] NOGUES, G.; RAUSCHENBEUTEL, A.; OSNAGHI, S.; BRUNE, M.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. **Nature**, v. 400, p.239, 1999.
- [94] HAGLEY, E.; MAÎTRE, X.; NOGUES, G.; WUNDERLICH, C.; BRUNE, M.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. **Phys. Rev. Lett.**, v. 79, p. 1, 1997.
- [95] RAUSCHENBEUTEL, A.; NOGUES, G.; OSNAGHI, S.; BERTET, P.; BRUNE, M.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. **Science**, v. 288, p. 2024, 2000.
- [96] BRUNE, M.; HAGLEY, E.; DREYER, J.; MAÎTRE, X.; MAALI, A.; WUNDERLICH, C.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. **Phys. Rev. Lett.**, v. 77, p. 4887, 1996.
- [97] RAIMOND, J. M.; BRUNE, M.; HAROCHE, S. **Rev. Mod. Phys.**, v. 73, p. 565, 2001.
- [98] FENG, X. L.; WANG, Z.; WU, C.; KWEK, L. C.; OH, C. H. **LANL archive e-print quant-ph/0606098**, 2006.
- [99] DUZZIONI, E. I.; VILLAS-BÔAS, C. J.; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y.; SERRA, R. M. **Europhys. Lett.**, v. 72, p. 21, 2005.
- [100] SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. **Quantum Optics**, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [101] VILLAS-BÔAS, C. J.; DE PAULA, F. R.; SERRA, R. M.; MOUSSA, M. H. Y. **Phys. Rev. A**, v. 68, p. 053808, 2003.
- [102] PURI, R. R.; LAWANDE, S. V. **Phys. Lett. A**, v. 70, p. 69, 1979.

- [103] MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y.; BASEIA, B. **Int. J. Mod. Phys. B**, v. 8, p. 1563, 1994.
- [104] MOSTAFAZADEH, A. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 32, p. 8157, 1999.
- [105] BEN-ARYEH, Y. **J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.**, v. 6, p. R1, 2004.
- [106] LUTTERBACH, L. G.; DAVIDOVICH, L. **Phys. Rev. A**, v. 61, p. 023813, 2000.
- [107] HALD, J.; SORENSEN, J. L.; SCHORI, C.; POLZIK, E. S. **Phys. Rev. Lett.**, v. 83, p. 1319, 1999.
- [108] GEREMIA, J. M.; STOCKTON, J. K.; MABUCHI, H. **Science**, v. 304, p. 270, 2004.
- [109] KORBICZ, J. K.; CIRAC, J. I.; LEWENSTEIN, M. **Phys. Rev. Lett.**, v. 95, p. 120502, 2005.
- [110] KORBICZ, J. K.; CIRAC, J. I.; LEWENSTEIN, M. **Phys. Rev. Lett.**, v. 95, p. 259901(E), 2005.
- [111] MYATT, C. J.; BURT, E. A.; GHRIST, R. W.; CORNELL, E. A.; WIEMAN, C. E. **Phys. Rev. Lett.**, v. 78, p. 586, 1997.
- [112] HALL, D. S.; MATTHEWS, M. R.; ENSHER, J. R.; WIEMAN, C. E.; CORNELL, E. A. **Phys. Rev. Lett.**, v. 81, p. 1539, 1998.
- [113] LEGGETT, A. J. **Rev. Mod. Phys.**, v. 73, p. 307, 2001.
- [114] MATTHEWS, M. R.; HALL, D. S.; JIN, D. S.; ENSHER, J. R.; WIEMAN, C. E.; CORNELL, E. A.; DALFOVO, F.; MINNITI, C.; STRINGARI, S. **Phys. Rev. Lett.**, v. 81, p. 243, 1998.
- [115] HALL, D. S.; MATTHEWS, M. R.; WIEMAN, C. E.; CORNELL, E. A. **Phys. Rev. Lett.**, v. 81, p. 1543, 1998.
- [116] HALL, D. S.; MATTHEWS, M. R.; WIEMAN, C. E.; CORNELL, E. A. **Phys. Rev. Lett.**, v. 81, p. 4532(E), 1998.

- [117] MATTHEWS, M. R.; ANDERSON, B. P.; HALJAN, P. C.; HALL, D. S.; HOLLAND, M. J.; WILLIAMS, J. E.; WIEMAN, C. E.; CORNELL, E. A. **Phys. Rev. Lett.**, v. 83, p. 3358, 1999.
- [118] ANDREWS, M. R.; TOWNSEND, C. G.; MIESNER, H. J.; DURFEE, D. S.; KURN, D. M.; KETTERLE, W. **Science**, v. 275, p. 637, 1997.
- [119] SMERZI, A.; FANTONI, S.; GIOVANAZZI, S.; SHENOY, S. R. **Phys. Rev. Lett.**, v. 79, p. 4950, 1997.
- [120] RAGHAVAN, S.; SMERZI, A.; FANTONI, S.; SHENOY, S. R. **Phys. Rev. A**, v. 59, p. 620, 1999.
- [121] KUANG, L. M.; OUYANG, Z. W. **Phys. Rev. A**, v. 61, p. 023604, 2000.
- [122] SALGUEIRO, A. N.; PIZA, A. F. R. T.; LEMOS, G. B.; DRUMOND, R.; NEMES, M. C.; WEIDEMUELLER, M. **LANL archive e-print quant-ph/0608222**, 2006.
- [123] ALBIEZ, M.; GATI, R.; FOLLING, J.; HUNSMANN, S.; CRISTIANI, M.; OBERTHALER, M. K. **Phys. Rev. Lett.**, v. 95, p. 010402, 2005.
- [124] MILBURN, G. J.; CORNEY, J.; WRIGHT, E. M.; WALLS, D. F. **Phys. Rev. A**, v. 55, p. 4318, 1997.
- [125] CIRAC, J. I.; LEWENSTEIN, M.; MOLMER, K.; ZOLLER, P. **Phys. Rev. A**, v. 57, p. 1208, 1998.
- [126] TONEL, A. P.; LINKS, J.; FOESTER, A. J. **Phys. A**, v. 38, p. 1235, 2005.
- [127] HINES, A. P.; MCKENZIE, R. H.; MILBURN, G. J. **Phys. Rev. A**, v. 67, p. 013609, 2003.
- [128] SANZ, L.; ANGELO, R. M.; FURUYA, K. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 36, p. 9737, 2003.
- [129] PAN, F.; DRAAYER, J. P. **Phys. Lett. A**, v. 339, p. 403, 2005.
- [130] GORDON, D.; SAVAGE, C. M. **Phys. Rev. A**, v. 59, p. 4623, 1999.

- [131] DUNNINGHAN, J. A.; BURNETT, K. **J. Mod. Opt.**, v. 48, p. 1837, 2001.
- [132] FUENTES-GURIDI, I.; PACHOS, J.; BOSE, S.; VEDRAL, V.; CHOI, S. **Phys. Rev. A**, v. 66, p. 022102, 2002.
- [133] CHEN, Z. D.; LIANG, J. Q.; SHEN, S. Q.; XIE, W. F. **Phys. Rev. A**, v. 69, p. 023611, 2004.
- [134] ADHIKARI, S. K. **Phys. Rev. A**, v. 63, p. 056704, 2001.
- [135] SALMOND, G. L.; HOLMES, C. A.; MILBURN, G. J. **Phys. Rev. A**, v. 65, p. 033623, 2002.
- [136] DUZZIONI, E. I.; SANZ, L.; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. **Phys. Rev. A**, v. 75, p. 032113, 2007.
- [137] BALAKRISHNAN, R.; MEHTA, M. **Eur. Phys. J. D**, v. 33, p. 437, 2005.
- [138] VILLAIN, P.; LEWENSTEIN, M. **Phys. Rev. A**, v. 59, p. 2250, 1999.
- [139] VOGELS, J. M.; TSAI, C. C.; FREELAND, R. S.; KOKKELMANS, S. J. J. M. F.; VERHAAR, B. J.; HEIZEN, D. J. **Phys. Rev. A**, v. 56, p. 1067(R), 1997.
- [140] BURKE, J. P.; BONH, J. L.; ESRY, B. D.; GREENE, C. H. **Phys. Rev. Lett.**, v. 80, p. 2097, 1998.
- [141] MATTHEWS, M. R. **Two-Component Bose-Einstein Condensation**. 147 f. Tese (Tese de doutorado em Física) - Faculty of the Graduate School, University of Colorado, Bolder, 1999.
- [142] SANZ, L.; MOUSSA, M. H. Y.; FURUYA, K. **Ann. Phys.**, v. 321, p. 1206, 2006.
- [143] SHUMAYER, D.; APAGYI, B. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 34, p. 4969, 2001.
- [144] ARECCHI, F. T.; COURTENS, E.; GILMORE, R.; THOMAS, H. **Phys. Rev. A**, v. 6, p. 2211, 1972.

- [145] DOWLING, J. P.; AGARWAL, G. S.; SCHLEICH, W. P. **Phys. Rev. A**, v. 49, p. 4101, 1994.
- [146] BAYM, G.; PETHICK, C. J. **Phys. Rev. Lett.**, v. 76, p. 6, 1996.
- [147] GORDON, D.; SAVAGE, C. M. **Phys. Rev. A**, v. 58, p. 1440, 1998.
- [148] SARANDY, M. S.; LIDAR, D. A. **Phys. Rev. A**, v. 71, p. 012331, 2005.
- [149] NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information**, Cambridge: University Press, 2000.
- [150] KULT, D.; ÅBERG, J.; SJÖQVIST, E. **Phys. Rev. A**, v. 74, p. 022106, 2006.
- [151] LINDBLAD, G. **Commun. Math. Phys.**, v. 48, p. 119, 1976.
- [152] LENDI, K. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 27, p. 609, 1994.
- [153] MIZRAHI, S. S. **Phys. Lett. A**, v. 144, p. 282, 1990.
- [154] MARKOV, M. A. **Invariants and the evolution of nonstationary quantum systems**, Proceedings of the Lebedev Physics Institute of the Academy of Sciences of the USSR, New York: Nova Science Publishers, 1989.
- [155] DODONOV, V. V.; MAN'KO, V. I. **Theory of Nonclassical States of Light**, New York: Taylor & Francis, 2003.
- [156] PRADO, F. O. Comunicações privadas.
- [157] JAMES, D. F. V. **Fortschr. Phys.**, v. 48, p. 823, 2000.