

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dinâmicas de Coerência e Decoerência de Estados  
em Redes de Osciladores Quânticos Dissipativos

Mickel Abreu de Ponte

Tese apresentada ao PPG-  
Física da UFSCar como parte  
dos requisitos para obtenção  
do grau de Doutor em Física

Orientador: Miled H. Y. Moussa

São Carlos, Junho de 2004

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

P813dc

Ponte, Mickel Abreu de.

Dinâmicas de coerência e decoerência de estados em  
redes de osciladores quânticos dissipativos / Mickel Abreu  
de Ponte. -- São Carlos : UFSCar, 2004.  
162 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,  
2004.

1. Mecânica quântica. 2. Decoerência. 3.  
Emaranhamento. 4. Dissipação de energia. 5. Transferência  
e recorrência de estados quânticos. 6. Redes de osciladores  
quânticos. I. Título.

CDD: 530.12 (20<sup>a</sup>)

## Agradecimentos

Em nossas vidas, caminhamos por entre pedras e obstáculos. Em certos momentos tropeçamos e caímos. Os amigos nos dão as mãos e avisa-nos que muitos tropeços ainda estão por vir, enquanto que os inimigos, dando as mãos, avisa-nos para desistir.

Existem muitos amigos que me ajudaram nesta exaustiva e difícil etapa de minha vida acadêmica. Infelizmente não dá para mencionar todos, mas à estes gostaria de dizer que por mais que a ajuda tenha sido por um detalhe pequeno, seu valor só é entendido quando faço uma analogia com as partículas fundamentais: sozinhas, isoladas, elas são apenas partes insignificantes, mas juntas, elas dão origem a muitas coisas importantes. Portanto, tenho que agradecer, e muito, a todas essas pequenas, mas importantes ajudas que vocês (aos que não pude me lembrar) me proporcionaram.

Agradeço a meus pais, Maria Dionisia de Abreu e Francisco Gonçalvez de Ponte, por terem me criado e educado de uma forma quase perfeita. Agradeço a meus irmãos, Frank Abreu de Ponte e, em especial, Lizabete Abreu de Ponte que tanto me ajudou e incentivou a fazer o curso de Física na UNESP-Rio Claro (1994-1997) e também durante o meu mestrado no IFT-UNESP (1998-1999) na “temível” cidade de São Paulo.

Agradeço aos meus ex-orientadores: a minha orientadora de graduação, Alice Kimie Miwa Libardi, por ter me ensinado a dar os primeiros passos como pesquisador e por ter me proporcionado uma experiência matemática muito proveitosa; a meu orientador de mestrado, Adriano Antônio Natale (que me perdoe pelo “Antônio”, pois não me esqueço que você não gosta desta parte de seu nome) por ter me ensinado e mostrado de fato quão arduo é a vida de um pesquisador.

Gostaria de agradecer neste parágrafo a meus amigos de graduação: Tânia Patricia Simões, Daniel Vidal Farfan, Alexandre Junqueira de Castro (“Verme”) e aos “Leandros”. Não posso esquecer dos meus amigos de mestrado: Arlene

Cristina Aguilar, Victor (“Santista”), Ricardo Bentin e Emerson Luna (o garotinho de “Princeton”). Em especial, devo agradecer aos meus amigos de Doutorado: Celso Jorge Villas-Boas, por discussões e varias ajudas importantes (este rapaz também me apoiou em momentos difíceis, quando estava quase para desistir; sua amizade foi muito importante), agradeço ao Roberto (“Serra”) por discussões e ajudas computacionais, ao Norton, que muito me ajudou com suas idéias e conhecimentos em física. Agradeço ao Fernando Rogério de Paula, meu companheiro de sala; grandes conversas e momentos que passamos.... Obrigado pelo seu companheirismo. Na nossa vida é muito importante sabermos que além de sermos profissionais, podemos contar com um grande amigo como você. A Patrícia Venturine, por sua ajuda e dicas importantes. A Verônica Carrasco (“Vero”), que de carrasco não tem nada. Sua amizade foi muito gratificante. Ao Armando, o motoqueiro, por nossas conversas e dicas profissionais.

Agradeço ao Alexandre “Colato”, por ajudar a rachar as despesas de casa e por suas piadas e momentos de descontração, valeu!!!

Agradeço também ao Marcos e Miled, por terem me ajudado a concluir os trabalhos e por suas dicas e conhecimentos na área, que tanto me ajudaram.

Não poderia esquecer do fato que durante meu Doutorado, encontrei uma pedra muito preciosa, uma pedra “hara”, que não tem valor no mercado, mas que dentro do meu coração, tem um valor inestimável. Agradeço a minha namorada Cintia Hara, que realmente me completa. Agradeço por seus lanchinhos, que me ajudaram (e me engordou uns quilinhos) a passar as noites trabalhando. Sua companhia e presença foram e serão muito importantes para mim. Ser um pesquisador em física necessita de muito equilíbrio, e você tem me dado este equilíbrio, “thanks a lot”.

Por fim, agradeço muito a FAPESP, por ter confiado e financiado o projeto e assim me ajudado a dar mais um passo adiante na vida.

A busca de um estudante em se aperfeiçoar:

Na viagem rumo ao pico da montanha,  
passamos por pedras e armadilhas,  
encontramos pessoas, muitas com manha,  
mas lembro que do alto, verei maravilhas...

também encontro pessoas que se tornam amigos,  
que enxergam além do trabalho,  
a necessidade de jogar baralho  
e compreender o amigo, não só os artigos.

Compreender o próximo, é mais que ensinar  
e vê-lo como pessoa, um ser humano  
e saber que temos defeitos, mas também virtudes  
e reprimir quando necessário, sem sermos rudes  
e apoiar sempre, até mesmo de modo insano.

Por fim, no alto da montanha conquistada, o que isto vai originar?

Mickel A. de Ponte (23/03/2004)

---

## Resumo

Nesta Tese abordamos as dinâmicas de coerência e decoerência de estados em redes de osciladores quânticos dissipativos. Por dinâmica de coerência referí-mo-nos aos processos de transferência e recorrência de estados entre os osciladores da rede, processos estes que se tornam cruciais para a compreensão da dinâmica de decoerência desses estados. Além do regime de acoplamento fraco entre os osciladores, no qual a dinâmica de dissipação é descrita pelos operadores de Liouville usuais,  $\mathcal{L}_\ell \rho_{1,\dots,N}$ , cada qual associado a um dos  $\ell = 1, \dots, N$  osciladores da rede, consideramos também o regime de acoplamento forte. Neste regime, canais de dissipação mistos, da forma  $\mathcal{L}_{mn} \rho_{1,\dots,N}$  ( $m \neq n = 1, \dots, N$ ), participam da dinâmica dissipativa e trazem consequências importantes para as dinâmicas de coerência e decoerência de estados. Tratando-se de uma rede com apenas dois osciladores dissipativos acoplados, reproduzimos neste sistema a fenomenologia da Transparência Eletromagneticamente Induzida ou do efeito Stark Dinâmico – típicos da interação radiação-matéria – considerando-se que um dos osciladores encontra-se submetido a um processo de amplificação linear ou paramétrico, respectivamente.

---

## Abstract

In this thesis we studied the coherence and decoherence dynamics of states in a network of dissipative quantum oscillators. The coherence dynamics refers to the swap and recurrence process of states between the oscillators composing the network. These processes become crucial to understand the decoherence dynamics of states in a network of dissipative quantum oscillators. Beyond the weak coupling regime between the oscillators, where the dissipative dynamics is ruled by the usual Liouville operators  $\mathcal{L}_\ell \rho_{1,\dots,N}$ , associated to each of the  $\ell = 1, \dots, N$  oscillators of the network, we also considered the strong coupling regime. In this regime, the dissipative dynamics is also ruled by cross-decay channels  $\mathcal{L}_{m,n} \rho_{1,\dots,N}$  ( $m \neq n = 1, \dots, N$ ) which leads to important consequences to the coherence and decoherence dynamics of quantum states of the network.

Considering a network with only two coupled dissipative oscillators, we reproduce in this system the phenomenology of the Eletromagneticaly Induced Transparency or the Dynamical Stark Effect – which are typical of the radiation-matter interaction – when one of the oscillators is submitted to linear or parametric amplification process, respectively.

“Em memória da minha super avó Isabel e de meu tio José”

Mickel A. Ponte.

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>1</b>
<b>1 Prólogo</b>	<b>4</b>
<b>2 Sistema de Dois Osciladores Dissipativos Acoplados</b>	<b>8</b>
2.1 Introdução . . . . .	8
2.2 Equação Mestra . . . . .	11
2.2.1 Regime de Acoplamento Fraco . . . . .	18
2.2.2 Regime de Acoplamento Forte . . . . .	19
2.3 Desdobramento das Taxas de Dissipação . . . . .	21
2.4 Densidades Espectrais dos Reservatórios . . . . .	23
2.4.1 Ruído Branco Markoviano . . . . .	23
2.4.2 Densidade Espectral Lorentziana . . . . .	24
2.4.3 Densidade Espectral Lorentziana Larga . . . . .	25
2.5 Equação de Fokker-Planck . . . . .	25
2.6 Dinâmicas de Recorrência e Transferência de Estados entre os Osciladores .	30
2.7 Decoerência . . . . .	38
2.7.1 Decoerência do Estado $ \psi_{12}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} ( \alpha\rangle \pm  -\alpha\rangle)_1 \otimes  \zeta\rangle_2$ . . . . .	38
2.7.2 Decoerência do Estado $ \varphi_{12}^{\pm}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} ( \alpha, -\alpha\rangle_{12} \pm  -\alpha, \alpha\rangle_{12})$ . . . . .	42
2.7.3 Decoerência do Estado $ \varphi_{12}^{\pm}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} ( \alpha, \alpha\rangle_{12} \pm  -\alpha, -\alpha\rangle_{12})$ . . . . .	43
2.7.4 Melhorando o Fator de Qualidade de um Sistema Dissipativo . . . . .	43
2.8 Excesso de Entropia . . . . .	46
2.9 Conclusão . . . . .	51

<b>3</b>	<b>Rede Simétrica de <math>N</math> Osciladores Dissipativos Acoplados</b>	<b>56</b>
3.1	Introdução . . . . .	56
3.2	Rede Simétrica . . . . .	58
3.3	Equação Mestra . . . . .	63
3.4	Desdobramento das Taxas de Dissipação . . . . .	65
3.5	Densidades Espectrais do Reservatório . . . . .	67
3.5.1	Ruído Branco Markoviano . . . . .	68
3.5.2	Densidade Espectral Lorentziana e Reservatório Bosônico . . . . .	70
3.6	Equação de Fokker-Planck . . . . .	71
3.7	Operador Densidade . . . . .	73
3.8	Decoerência . . . . .	74
3.9	Dinâmicas de Recorrência e Transferência de Estados . . . . .	79
3.10	Excesso de Entropia . . . . .	86
3.11	Conclusão . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Rede Central de <math>N</math> Osciladores Dissipativos Acoplados</b>	<b>99</b>
4.1	Introdução . . . . .	99
4.2	Rede Central . . . . .	100
4.3	Equação Mestra . . . . .	105
4.4	Desdobramento das Taxas de Dissipação . . . . .	107
4.5	Equação de Fokker-Planck . . . . .	109
4.6	Operador Densidade . . . . .	111
4.7	Decoerência . . . . .	113
4.8	Dinâmicas de Recorrência e Transferência de Estados . . . . .	117
4.9	Excesso de Entropia . . . . .	123
4.10	Conclusão . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Transparência Eletromagneticamente Induzida e Efeito Stark Dinâmico em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades</b>	<b>133</b>
5.1	Introdução . . . . .	133
5.2	Processos de Amplificação Linear e Paramétrica em um Sistema de Dois Osciladores Dissipativos Acoplados . . . . .	135

5.2.1	Amplificação Linear . . . . .	142
5.2.2	Amplificação Paramétrica . . . . .	143
5.3	Conclusão . . . . .	146
<b>6</b>	<b>Observações Finais</b>	<b>149</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>156</b>

# Capítulo 1

## Prólogo

O recente desenvolvimento de técnicas experimentais para a manipulação dos estados vibracionais de íons aprisionados [1], estados do campo de radiação em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (*EQC*) [2] e estados do campo de radiação propagante [3] tem possibilitado um intenso intercâmbio entre proposições teóricas e realizações experimentais que impõe desafios mútuos. Como resultado desse intercâmbio, a compreensão de fenômenos quânticos fundamentais (como a não-localidade e a superposição de estados) e sobretudo o domínio experimental de processos baseados nesses fenômenos (como o teletransporte [4, 5, 6, 7] e a engenharia de estados quânticos [8, 9, 10]), indicam o surgimento de uma nova tecnologia em computação [11, 12, 13, 14, 15, 16] e comunicação [17] centrada em operações lógicas quânticas. Estas operações lógicas exploram exatamente os fenômenos fundamentais da mecânica quântica (a superposição dos estados de um sistema de dois níveis define o quantum bit ou *qubit* enquanto que os processos não-locais correlacionam estes *qubit*) para o desenvolvimento de algoritmos computacionais sem precedentes no âmbito da lógica clássica ou convencional. Deve-se a P. Shor [16] o resultado crucial que alavanca este cenário: o desenvolvimento de um algoritmo quântico para a fatoração de um inteiro com  $n$  dígitos num intervalo de tempo (ou número de passos ou operações lógicas) que cresce numa escala menor que  $\mathcal{O}(n^3)$ , portanto, um crescimento polinomial do tempo em contraste com o superpolinomial dos algoritmos clássicos, da ordem  $\exp \left[ n^{1/3} (\log n)^{2/3} \right]$ .

As técnicas de preparação e detecção de estados não-clássicos (em especial nos sistemas quânticos acima mencionados) tem permitido não apenas a demonstração de operações

lógicas quânticas (em que os *qubits* compreendem estados vibracionais e eletrônicos de íons aprisionados [18]) ou a realização do processo de teletransporte de estados quânticos (estados de superposição do campo propagante [3]): a geração de estados do tipo “*gato de Schrödinger*”, como superposição de estados coerentes do campo de radiação em *EQC* [19] ou estados associados à localização espacial de um íon [20], tem motivado o crescente interesse em fundamentação da teoria quântica, em particular no que se refere ao processo de decoerência de estados quânticos e sua estreita ligação com o fenômeno da medida e colapso da função de onda [21, 22, 23, 24, 25].

Para além da proposta promissora de implementação de portas lógicas em cadeias lineares de íons aprisionados [11] (em que os estados eletrônicos do íon desempenham o papel dos *qubits* enquanto que estes correlacionam-se via movimento vibracional do centro-de-massa), outros sistemas quânticos sugeridos recentemente apresentam-se como potenciais candidatos para a viabilização de processadores lógicos. Dentre eles destacamos as Redes Ópticas [26, 27] em que o processo de interferência entre feixes de laser contrapropagantes induz um arranjo de potenciais microscópicos para o aprisionamento de átomos através do efeito Stark ac. As redes ópticas inauguram a possibilidade de simulação das interações spin-spin (similares àquelas características do ferromagnetismo e do antiferromagnetismo e exaustivamente estudadas na física da matéria condensada) através de átomos aprisionados [28]. A física de semicondutores tem sido considerada para a manipulação de spins nucleares que desempenhariam o papel dos *qubits* [13]. Esta manipulação dar-se-ia através de campos elétricos externos aos cristais de silício semicondutores (dopados com fósforo  $^{31}P$  – os *qubits*) e correntes de elétrons com spin polarizados seriam utilizadas para as medidas dos estados de spins nucleares. Dentre outros sistemas que se apresentam como potenciais candidatos à realização de circuitos quânticos (como a *EQC* [17] e a ressonância magnética nuclear [12]), cabe por fim ressaltar que elétrons sobre a superfície de um filme de Hélio (um sistema quase bidimensional que apresenta a maior mobilidade já alcançada em física da matéria condensada) podem ser utilizados como um conjunto de *qubits* interagentes [29]. Conjectura-se que tanto a manipulação individual desses *qubits* quanto a transferência de excitação entre os mesmos sejam possíveis por meio de micro eletrodos localizados sob o filme de Hélio.

Se, de um lado, uma variedade de sistemas físicos tem sido investigados e apresentam-

se como potenciais candidatos para a construção de processadores lógicos (no sentido de que a manipulação individual, a correlação e medição destes *qubits* apresentam-se viáveis) a realização prática desses dispositivos, contudo, esbarra no processo de decoerência quântica. O inevitável acoplamento dos sistemas quânticos com o meio ambiente transforma os estados puros em misturas estatísticas numa escala de tempo que é inversamente proporcional tanto ao parâmetro de acoplamento quanto a excitação quântica do estado original [23, 25, 30, 31] (do que se deduz que processos lógicos quânticos que requerem estados de superposição de um grande número de *qubits* torna-se praticamente proibitivo [32]). A realização do processamento lógico via algoritmos quânticos requer não somente que os sistemas quânticos envolvidos estejam praticamente isolados do meio ambiente, mas também que a realização desses cálculos ocorra, para que apresentem uma *fidelidade* considerável, num intervalo de tempo menor que a escala de tempo térmica  $\hbar/k_B T$  [33]. Outras fontes de ruído, além do acoplamento com o meio ambiente, decorrem das flutuações intrínsecas aos parâmetros de interação envolvidos nos processos quânticos. Por exemplo, a manipulação dos estados vibracionais e eletrônicos de íons aprisionados dá-se por meio de campos clássicos que apresentam flutuações tanto na intensidade quanto na fase [10, 34]. Portanto, a investigação das fontes de ruídos nos sistemas quânticos que se apresentam como candidatos á implementação de processadores lógicos faz-se de fundamental importância tecnológica, para além dos interesses associados com a teoria da medida quântica, por exemplo na investigação da transição do comportamento micro para o macroscópico via decoerência [21, 23].

Dentro das perspectivas acima delineadas, pretendemos nesta Tese estudar as dinâmicas de coerência e decoerência de estados preparados em uma rede de osciladores dissipativos acoplados segundo diferentes topologias. Temos por objetivo analisar como a dinâmica de estados em uma rede de osciladores dissipativos interagentes, que a princípio podem simular um circuito de processamento de informação quântica, pode afetar o processo de decoerência de estados. Em particular, pretendemos estimar os tempos de decoerência de estados particulares da rede em diferentes situações, a depender da intensidade do acoplamento entre os osciladores e das constantes de dissipação dos mesmos.

No *Capítulo 2* consideramos uma situação simplificada em que apenas 2 osciladores dissipativos acoplados são considerados. Analisamos as dinâmicas de coerência e decoerência

de estados nos regimes de acoplamento fraco e forte entre os osciladores. Caracterizamos o regime de acoplamento forte pelo fato que a evolução do operador densidade do sistema, neste regime, é governada não apenas pelos operadores de Liouville usuais, associados a cada oscilador, mas também por um canal de dissipação misto que conecta os processos de dissipação. Este canal misto apresenta implicações interessantes para as dinâmicas de coerência e decoerência de estados.

Nos *Capítulos 3* e *4*, amparados pelo conhecimento que adquirimos no *Capítulo 2*, consideramos redes com  $N$  osciladores dissipativos acoplados. No *Capítulo 3*, assumimos uma rede simétrica na qual todos os osciladores interagem entre si, enquanto que no *Capítulo 4* assumimos uma rede central em que apenas um dos osciladores – o oscilador central – acopla-se aos demais osciladores periféricos. Em ambas as redes tratamos o caso degenerado em que todos os osciladores possuem a mesma frequência natural e assumimos todos os acoplamentos com iguais intensidades. Um resultado central neste estudo de redes de  $N$  osciladores dissipativos acoplados é que o regime de acoplamento forte é caracterizado não apenas pela intensidade do acoplamento entre os osciladores, mas também pelo número de osciladores que compõem a rede. Dessa forma, tanto a intensidade do acoplamento como o número de osciladores da rede desempenham um papel relevante para a correção das dinâmicas de coerência e decoerência de estados da rede através dos canais de dissipação mistos.

No *Capítulo 5*, voltamos ao caso de uma rede com apenas 2 osciladores dissipativos acoplados, submetendo um desses osciladores a um processo de amplificação linear ou paramétrica. Reproduzimos neste sistema a fenomenologia de dois efeitos que têm suas origens na física da interação da radiação com a matéria: a transparência eletromagneticamente induzida (e, conseqüentemente, o efeito Autler-Townes) e o efeito Stark dinâmico. Com esta abordagem pretendemos transportar para o domínio da *EQC*, ou armadilhas iônicas (*AI*), efeitos típicos da física atômica – da excitação de amostras atômicas por feixes laser – com duplo objetivo: aprofundar a compreensão desses efeitos e procurar, por meio deles, implementar processos de chaveamento óptico em *EQC* ou *AI*.

Por fim, no *Capítulo 6* apresentamos as conclusões deste trabalho.

# Capítulo 2

## Sistema de Dois Osciladores Dissipativos Acoplados

### 2.1 Introdução

O processo de decoerência de estados quânticos consiste numa questão fundamental para a descrição de medidas quânticas [25, 35, 36]. Recentemente, presencia-se avanços experimentais no domínio da Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (*EQC*) e íons armadilhados que possibilita-nos investigar, com maiores detalhes, a decoerência de estados do campo de fótons [19] e fónons [37], permitindo, desta forma, um maior discernimento da fronteira entre as descrições clássica e quântica da natureza. Na Ref. [19] os autores mediram o tempo de decoerência de uma superposição de estados coerentes de um campo em uma cavidade e mostraram que o resultado está em total acordo com as previsões teóricas [30, 38]. Em íons armadilhados, o amortecimento observado das oscilações de Rabi motivou um grande número de trabalhos sobre as principais fontes de ruído que levam ao fenômeno da decoerência nestes sistemas [34, 39, 40, 41]. Tais realizações experimentais no domínio da interação radiação-matéria motivam um profundo diálogo entre a física teórica e experimental, possibilitando um domínio tal dos fenômenos quânticos fundamentais que propiciam um novo estágio da tecnologia de comunicação [17] e computação [11, 12, 13, 14, 15, 16].

A exploração da fronteira entre as descrições clássica e quântica da natureza [36] impulsionam a geração de estados de superposição de sistemas mesoscópicos, conhecidos

como estados de “*gato de Schrödinger*” [19, 37]. Tais superposições são irreversivelmente afetadas pelas suas vizinhanças, cujo efeito é destruir a probabilidade de interferência (coerência) e continuamente transformá-las em misturas estatísticas. Deste modo, o meio ambiente desempenha um papel importante no estabelecimento de uma correspondência direta entre as dinâmicas clássica e quântica.

A decoerência (e sua dependência com a amplitude do estado de superposição) é o principal obstáculo a ser superado para a implementação prática de um processador de informação baseado em portas lógicas quânticas [42, 43]. Desta forma, o sonho da comunicação e computação quânticas esbarra no pesadelo dos mecanismos de decoerência [44], devidos não somente a inevitável ação do meio ambiente, mas também às flutuações inerentes aos parâmetros de interação requeridos para a realização das operações lógicas [34, 39, 40]. Observe que a necessidade de grandes superposições de estados de bits quânticos (*qubits*), na implementação prática das operações lógicas, impõe o requerimento de que os sistemas quânticos sejam quase que totalmente isolados de seu meio ambiente e que os parâmetros de interação envolvidos sejam rigorosamente controlados. Por esta razão, as investigações das fontes de ruído em sistemas quânticos promissores é um passo essencialmente necessário para a construção de um processador lógico quântico. Em busca da solução para este problema, esforços tem sido direcionados para se descobrir mecanismos de controle da decoerência, seja pelo uso de pulsos de paridade [45], realimentação estroboscópica [46], engenharia de processos de amplificação [47] e até engenharia de reservatório [48, 49, 50]. Além disso, códigos quânticos de correção de erros foram propostos para a proteção de informação quântica de toda a espécie de erros, contanto que a taxa de erro esteja abaixo de um certo limiar [42, 51]. Uma visão geral da estratégia de prevenção de erros quânticos e uma discussão das combinações dessas estratégias que tem sido recentemente propostas na literatura é apresentada na Ref. [52]. Neste sentido, a principal preocupação deste *Capítulo* é analisar a dinâmica de coerência e os processos de decoerência em uma rede composta por dois osciladores dissipativos acoplados, que podem ser modos do campo em cavidades dissipativas [53, 54, 55], modos de fónons em íons armadilhados [1, 56], modos de fónons de elétrons em superfícies de Hélio líquido [29, 57, 58], etc.

Na tentativa de estender a análise do processo de decoerência a osciladores quântici-

cos interagentes acoplados a reservatórios distintos, deparamo-nos com o problema de derivar uma equação mestra para diferentes regimes de acoplamento entre os osciladores. Deixando de lado a dificuldade de se implementar intensidades de acoplamento arbitrárias entre os osciladores, no presente *Capítulo* analisamos não somente o regime de acoplamento fraco, mas também o regime de acoplamento forte, onde a intensidade do acoplamento entre os osciladores é da ordem das frequências típicas dos osciladores. Em ambos os regimes assumimos que a intensidade do acoplamento entre os osciladores é consideravelmente maior que as taxas de dissipação do sistema. Neste *Capítulo* apresentamos equações mestras derivadas para ambos os regimes de acoplamento fraco e forte entre os osciladores interagentes, o que leva a interessantes resultados com respeito às propriedades de coerência de estados do sistema conjunto e reduzido. Desta forma, este *Capítulo* constitui um passo adiante para um tratamento mais amplo do processo de decoerência em sistemas compostos, como analisaremos nos *Capítulos 3 e 4*.

Assumimos que no regime de acoplamento fraco a intensidade do acoplamento entre os osciladores, rotulado por  $\ell = 1, 2$ , é consideravelmente menor do que as frequências típicas de ambos os osciladores. Desta forma, a equação mestra resultante é como se os dois osciladores estivessem desacoplados e, portanto, um canal de dissipação, descrito pelo operador de Liouville  $\mathcal{L}_\ell \rho_{12}$ , pode simplesmente ser inserido na equação mestra para cada oscilador considerado. Neste caso, assumindo que ambos os osciladores possuem a mesma taxa de dissipação, o tempo de decoerência para cada oscilador não é afetado pela interação entre eles. Porém, quando os osciladores tem diferentes taxas de dissipação (modos do campo em cavidades com diferentes fatores de qualidade, por exemplo), observamos que o oscilador com fator de qualidade superior apresenta um fator de qualidade efetivo menor, enquanto que o oscilador de fator de qualidade inferior apresenta um fator de qualidade efetivo maior, um resultado que pode ser empregado para a proteção de estados quânticos.

No regime de acoplamento forte, observamos o surgimento de um canal de dissipação misto  $\mathcal{L}_{12} \rho_{12}$  além dos canais de dissipação individuais  $\mathcal{L}_\ell \rho_{12}$ . Este canal de dissipação misto afeta o processo de decoerência dos estados do sistema conjunto e dos sistemas reduzidos, com uma sensível dependência da densidade espectral dos reservatórios. De fato, no regime de acoplamento forte, as frequências dos modos normais são substancial-

mente deslocadas das frequências típicas dos osciladores, permitindo-nos explorar o perfil completo das densidades espectrais dos reservatórios. Mostramos como o processo de decoerência pode ser controlado pelo deslocamento das frequências dos modos normais para regiões de baixa densidade espectral dos reservatórios. Além das densidades espectrais, a competição entre os canais de dissipação usuais e misto ocasiona um acréscimo ou decréscimo no tempo de decoerência dos autoestados dos modos normais do sistema. Deste modo a derivação da equação mestra para sistemas fortemente interagentes é uma tarefa essencial no estudo da decoerência em redes quânticas [59, 60].

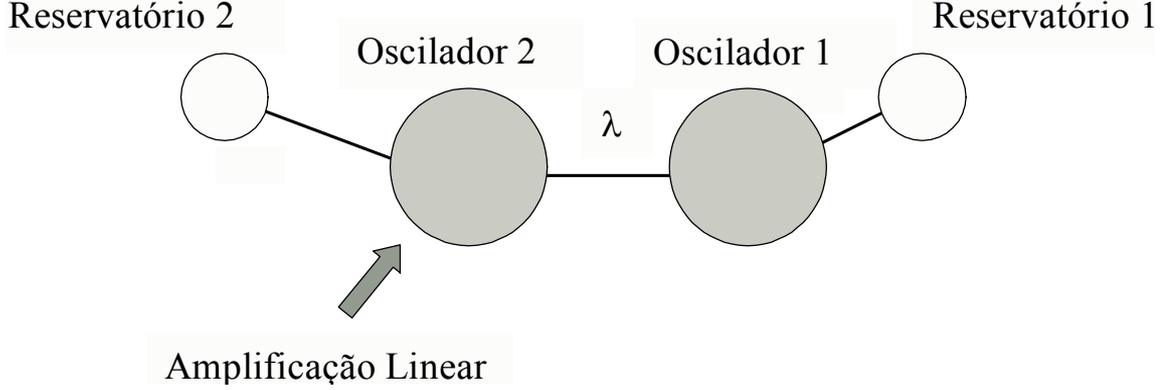
É importante mencionar alguns trabalhos anteriores que tratam de sistemas acoplados. Na Ref. [53] os autores descrevem uma proposta para se obter decoerência reversível de uma superposição mesoscópica de estados do campo em cavidades. Esta proposta é baseada na possibilidade de se realizar um acoplamento reversível entre duas cavidades de Fabry-Perot. Na Ref. [54], um modelo teórico da proposta experimental em [53] é apresentado levando-se em conta o inevitável acoplamento das cavidades com seus reservatórios quando a reversibilidade da perda de coerência é analisada. Um sistema de duas cavidades acopladas é também analisado em [55], onde somente uma das cavidades interage com o reservatório. Na Ref. [55], uma equação mestra é derivada no caso de cavidades fortemente acopladas e mostra-se que o termo de relaxação não é simplesmente descrito pelo operador de Liouville usual, obtido quando se despreza a interação entre as cavidades. Entre os objetivos deste *Capítulo*, pretendemos analisar, no contexto da *EQC*, o processo de decoerência reversível das Refs. [53, 54], onde duas cavidades dissipativas são consideradas, além de investigar o regime de acoplamento forte entre as cavidades, como feito em [55], na qual algumas propriedades notáveis de coerência aparecem. Portanto, a nossa principal preocupação neste *Capítulo* é analisar a dinâmica de coerência e o processo de decoerência em uma rede de dois osciladores dissipativos fortemente acoplados.

## 2.2 Equação Mestra

Nos sistemas físicos em que se considera osciladores quânticos acoplados, como por exemplo em modos do campo em cavidades acopladas, íons armadilhados ou elétrons em superfície de Hélio líquido, pode-se extrair resultados bem gerais. Desta forma, considere

um sistema de dois osciladores interagentes, estando um deles (digamos o oscilador 2) sob ação de uma amplificação linear, conforme ilustrado na *Fig.-2.1*. Como estamos interes-

Figura 2-1: Esquema mostrando dois osciladores dissipativos acoplados. Consideramos ainda que o oscilador 2 é submetido ao processo de amplificação linear.



sados em investigar diferentes regimes da intensidade do acoplamento entre os osciladores é necessário iniciarmos com um Hamiltoniano positivo definido. Isto garante que o espectro de energia do sistema possua um limite inferior, que é igual a zero na ausência da amplificação linear [61, 62]. O sistema Hamiltoniano é então descrito por (assumindo daqui por diante que  $\hbar = 1$ )

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{m=1}^2 \left[ \sum_{n=1(n \neq m)}^2 \omega_{m0} \left( a_m^\dagger + \frac{\lambda}{2\omega_{m0}} a_n^\dagger \right) \left( a_m + \frac{\lambda}{2\omega_{m0}} a_n \right) \right. \\
 & \left. + \sum_k \omega_{mk} \left( b_{mk}^\dagger + \frac{V_{mk}}{\omega_{mk}} a_m^\dagger \right) \left( b_{mk} + \frac{V_{mk}}{\omega_{mk}} a_m \right) \right] \\
 & + F \left( e^{i\nu t} + a_2^\dagger \right) \left( e^{-i\nu t} + a_2 \right), \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

onde  $a_m^\dagger$  ( $a_m$ ) é o operador de criação (aniquilação) para o modo do oscilador de frequência  $\omega_{m0}$ , ao passo que  $b_{mk}^\dagger$  ( $b_{mk}$ ) é o operador análogo para o  $k$ -ésimo modo do reservatório associado ao oscilador  $m$ , cuja frequência e intensidade do acoplamento são  $\omega_{mk}$  e  $V_{mk}$ , respectivamente. Por simplicidade assumiremos, neste *Capítulo*, que  $m, n$  assumem os valores 1 e 2. A intensidade do acoplamento entre os osciladores é  $\lambda$  e o campo de amplificação clássico, aplicado ao oscilador 2, tem intensidade  $F$  e frequência  $\nu$ .

Assumindo que o acoplamento entre os osciladores e seus respectivos reservatórios

satisfazem a condição  $\sum_k (V_{mk})^2 / \omega_{mk} \ll \omega_{m0}$  e deslocando a origem da escala de energia para  $F$ , obtemos da Eq.(2.1) o Hamiltoniano Efetivo  $H_{ef} = \sum_m H_m + H_I$ , dado por

$$H_m = \omega_m a_m^\dagger a_m + \sum_k \left[ \omega_{mk} b_{mk}^\dagger b_{mk} + V_{mk} \left( a_m^\dagger b_{mk} + a_m b_{mk}^\dagger \right) \right] + F \left( a_2^\dagger e^{-i\nu t} + a_2 e^{i\nu t} \right) \delta_{m2}, \quad (2.2a)$$

$$H_I = \lambda \left( a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2 \right). \quad (2.2b)$$

Observe que  $\omega_m$  está relacionado as frequências naturais  $\omega_{m0}$  pela relação

$$\omega_m = \omega_{m0} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{4\omega_{10}\omega_{20}} + \frac{F}{\omega_{20}} \delta_{m2} \right). \quad (2.3)$$

Quando consideramos o limite de acoplamento fraco entre os osciladores ( $\lambda/\omega_{m0} \ll 1$ ) junto com um processo de amplificação fraco ( $F/\omega_{20} \ll 1$ ), reobtemos as frequências naturais  $\omega_m = \omega_{m0}$ . Neste limite, podemos partir do Hamiltoniano  $H$  dado pelas Eqs.(2.2a) e (2.2b) em vez da Eq.(2.1). Visto que estamos assumindo acoplamento fraco entre os osciladores e seus reservatórios é desnecessário escrever estas interações na forma positivo definida, como feito na Eq.(2.1). No entanto, a forma positivo definida, para o acoplamento entre os osciladores, garante um espectro de energia com um limite inferior (igual a zero quando a amplificação linear é desligada) para qualquer valor da intensidade do acoplamento  $\lambda$ .

A dependência temporal do Hamiltoniano  $H_{ef}$  pode ser eliminada pela transformação unitária representada pelo operador

$$U(t) = \exp \left[ -i\nu t \sum_m \left( a_m^\dagger a_m + \sum_k b_{mk}^\dagger b_{mk} \right) \right]. \quad (2.4)$$

Portanto, o Hamiltoniano transformado independente do tempo é dado por

$$\mathcal{H} = U^\dagger(t) H U(t) + i \frac{dU^\dagger(t)}{dt} U(t) = \sum_m \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_I, \quad (2.5)$$

onde definimos

$$\mathcal{H}_m = \tilde{\omega}_m a_m^\dagger a_m + \sum_k \tilde{\omega}_{mk} b_{mk}^\dagger b_{mk} + \lambda (a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2), \quad (2.6a)$$

$$\mathcal{H}_I = \sum_k V_{mk} (a_m^\dagger b_{mk} + a_m b_{mk}^\dagger) + F (a_2^\dagger + a_2), \quad (2.6b)$$

e as freqüência deslocadas por

$$\tilde{\omega}_m = \omega_m - \nu, \quad (2.7a)$$

$$\tilde{\omega}_{mk} = \omega_{mk} - \nu. \quad (2.7b)$$

Daqui por diante consideraremos o caso específico em que temos  $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 \equiv \Omega$  (ou equivalentemente  $\omega_1 = \omega_2$ ). Note que esta igualdade relaciona as amplitudes do campo de bombeio com as freqüências naturais, na forma  $F = (\omega_{10} - \omega_{20}) [1 + \lambda^2 / (4\omega_{10}\omega_{20})]$ . Portanto, na ausência da amplificação linear, a condição  $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$  implica que  $\omega_{10} = \omega_{20}$ . Com a condição  $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$ , o Hamiltoniano da Eq.(2.6a) pode ser diagonalizado através da transformação canônica

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 + a_2), \quad (2.8a)$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 - a_2), \quad (2.8b)$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  satisfazem as mesmas relações de comutação que os operadores  $a_1$  e  $a_2$ :  $[A_i, A_j] = 0$  e  $[A_i, A_j^\dagger] = \delta_{ij}$ . O objetivo destes novos operadores é desacoplar a interação direta entre os osciladores 1 e 2, descrita por  $\lambda (a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2)$ . No entanto, esta transformação cria interações indiretas entre os osciladores 1 e 2 através de seus respectivos reservatórios, como descrito pelo Hamiltoniano  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_I$ , onde

$$\mathbf{H}_0 = \sum_m \left[ \Omega_m A_m^\dagger A_m - (-1)^m \frac{F}{\sqrt{2}} (A_m^\dagger + A_m) + \sum_k \tilde{\omega}_{mk} b_{mk}^\dagger b_{mk} \right], \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{H}_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,n,k} (-1)^{\delta_{n2}\delta_{m2}} V_{nk} (A_m^\dagger b_{nk} + A_m b_{nk}^\dagger), \quad (2.9b)$$

com as freqüências  $\Omega_m$  dadas por  $\Omega_m = \Omega - (-1)^m \lambda$ . Observe que sem o acoplamento

direto entre os osciladores 1 e 2, como modelado pelo Hamiltoniano  $\mathbf{H}$ , a derivação da equação mestra torna-se mais simples, seguindo o procedimento da referência [59].

A evolução da matriz densidade para os osciladores acoplados na representação de interação, até segunda ordem em teoria de perturbação, é dada por

$$\frac{d}{dt}\rho_{12}(t) = - \int_0^t dt' Tr_R [\mathbf{V}(t), [\mathbf{V}(t'), \rho_R(0) \otimes \rho_{12}(t)']], \quad (2.10)$$

onde  $\mathbf{V}(t) = \exp(i\mathbf{H}_0 t) \mathbf{H}_I \exp(-i\mathbf{H}_0 t)$ . Note que a matriz densidade na representação de interação,  $\rho_{12}(t)$ , segue do vetor de estado transformado por ambos os operadores unitários:  $U^\dagger(t)$  definido pela Eq.(2.4) e  $\exp(i\mathbf{H}_0 t)$ . Definindo o operador  $\mathcal{O}_m(t) = \sum_k V_{mk} b_{mk} \exp(i\tilde{\omega}_m t)/\sqrt{2}$  e assumindo que as frequências dos reservatórios estão muito próximas, de modo a permitir uma somatória contínua, verificamos que as integrais a serem resolvidas, aparecendo na Eq.(2.10), relacionam-se às funções de correlação nas formas

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt' \langle \mathcal{O}_\ell^\dagger(t) \mathcal{O}_\ell(t') \rangle \exp[-i(\Omega_m t + \Omega_n t')] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t dt' \int_0^\infty \frac{d\omega_{\ell k}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega_{\ell k'}}{2\pi} \sigma_\ell(\omega_{\ell k}) \sigma_\ell(\omega_{\ell k'}) V_\ell(\omega_{\ell k}) V_\ell(\omega_{\ell k'}) [\mathbf{N}_\ell(\omega_{\ell k}) + 1] \\ & \quad \times 2\pi \delta(\omega_{\ell k} - \omega_{\ell k'}) \exp\{-i[(\omega_{\ell k} - \nu + \Omega_m)t - (\omega_{\ell k'} - \nu - \Omega_n)t']\} \\ &= e^{-i(\Omega_m + \Omega_n)t} \int_0^\infty \frac{d\omega_{\ell k}}{4\pi} V_\ell^2(\omega_{\ell k}) \sigma_\ell^2(\omega_{\ell k}) (\mathbf{N}_\ell(\omega_{\ell k}) + 1) \\ & \quad \times \int_0^t dt' \exp[i(\omega_{\ell k} - \Omega_n - \nu)(t - t')], \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde assim como  $m$  e  $n$ , consideraremos neste *Capítulo* que  $\ell = 1, 2$ . A função  $\mathbf{N}_\ell(\omega_{\ell k})$  é definida por

$$\langle b_\ell^\dagger(\omega_{\ell k}) b_\ell(\omega_{\ell k'}) \rangle = 2\pi \mathbf{N}_\ell(\omega_{\ell k}) \delta(\omega_{\ell k} - \omega_{\ell k'}), \quad (2.12)$$

e  $\sigma_\ell(\omega_{\ell k})$  é a densidade de estados do reservatório  $\ell$ . Realizando as transformações de variáveis  $\tau = t - t'$  e  $\varepsilon = \omega_{\ell k} - \Omega_n - \nu$ , verificamos que a Eq.(2.11) pode ser escrita para

$n = 1$  e  $2$ , respectivamente, na forma

$$\begin{aligned}
& \int_0^t dt' \langle \mathcal{O}_\ell^\dagger(t) \mathcal{O}_\ell(t') \rangle \exp[-i(\Omega_m t + \Omega_1 t')] \\
= & \frac{1}{4} e^{-i(\Omega_m + \Omega_1)t} \int_0^\infty d\varepsilon V_\ell^2(\varepsilon + \omega_\ell^+) \sigma_\ell^2(\varepsilon + \omega_\ell^+) (\mathbf{N}_\ell(\varepsilon + \omega_\ell^+) + 1) \int_0^t d\tau e^{-i\varepsilon\tau},
\end{aligned} \tag{2.13a}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t dt' \langle \mathcal{O}_\ell^\dagger(t) \mathcal{O}_\ell(t') \rangle \exp[-i(\Omega_m t + \Omega_2 t')] \\
= & \frac{1}{4} e^{-i(\Omega_m + \Omega_2)t} \int_0^\infty d\varepsilon V_\ell^2(\varepsilon + \omega_\ell^-) \sigma_\ell^2(\varepsilon + \omega_\ell^-) (\mathbf{N}_\ell(\varepsilon + \omega_\ell^-) + 1) \int_0^t d\tau e^{-i\varepsilon\tau},
\end{aligned} \tag{2.13b}$$

onde observa-se que a frequência  $\omega_m$  foi dividida em duas frequências efetivas correspondentes aos modos normais dos osciladores acoplados (note que  $\omega_1 = \omega_2$ ):

$$\omega_\ell^\pm = \omega_\ell \pm \lambda. \tag{2.14}$$

Omitimos a contribuição do valor principal de Cauchy visto que este representa somente um pequeno deslocamento na frequência  $\omega_\ell^\pm$ . Note que o valor mínimo de  $\omega_\ell^-$  é  $F\omega_{10}/(\omega_{10} + \omega_{20})$ , que segue do caso em que  $\lambda = 2\omega_{20}$ .

A seguir discutimos ambos os regimes de acoplamento entre os osciladores acoplados: (i) o regime de acoplamento fraco, quando  $\lambda/\omega_{\ell 0} \ll 1$ , e (ii) o regime de acoplamento forte, quando  $\lambda/\omega_{\ell 0} \approx 1$ . Para o regime de acoplamento forte assumiremos a condição  $\lambda/\omega_{\ell 0} = 2$  afim de minimizarmos o modo normal  $\omega_\ell^-$ , que se torna zero quando a amplificação linear é desligada. Como usual, consideramos que  $V_\ell$ ,  $\sigma_\ell$  e  $\mathbf{N}_\ell$  sejam funções que variam lentamente em torno da frequência  $\omega_\ell^\pm$ , uma suposição que não se aplica à função  $\mathbf{N}_\ell(\omega_\ell^-) = [\exp(\omega_\ell^-/kT) - 1]^{-1}$  (considerando que o reservatório está em equilíbrio térmico à temperatura  $T$ ) no caso em que  $F = 0$  no regime de acoplamento forte, visto que neste caso  $\omega_\ell^- \approx 0$ . Porém, este regime (até para  $F = 0$ ) pode seguramente ser aplicado a um reservatório em zero absoluto, a situação em que analisamos neste *Capítulo*. Observe que na realidade  $\mathbf{N}_\ell(\omega_\ell^-) \approx 0$  quando o deslocamento na frequência  $\omega_\ell^-$ , vindo da contribuição do valor principal de Cauchy, torna-se suficientemente maior que  $KT$ . Note que as últimas integrais nas *Eqs. (2.13a)* e *(2.13b)* contribuem significativamente somente

quando  $|\varepsilon\tau| \lesssim 1$ , de modo que se estendermos o limite superior da integração para infinito, as expressões para as funções de correlação tornam-se

$$\int_0^t dt' \langle \mathcal{O}_\ell^\dagger(t) \mathcal{O}_\ell(t') \rangle \exp[-i(\Omega_m t + \Omega_1 t')] = \frac{\gamma_\ell(\omega_\ell^+)}{2} [\mathbf{N}_\ell(\omega_\ell^+) + 1] e^{-i(\Omega_m + \Omega_1)t}, \quad (2.15a)$$

$$\int_0^t dt' \langle \mathcal{O}_\ell^\dagger(t) \mathcal{O}_\ell(t') \rangle \exp[-i(\Omega_m t + \Omega_2 t')] = \frac{\gamma_\ell(\omega_\ell^-)}{2} [\mathbf{N}_\ell(\omega_\ell^-) + 1] e^{-i(\Omega_m + \Omega_2)t}, \quad (2.15b)$$

onde as taxas de dissipação  $\gamma_\ell(\omega_\ell^\pm)$  são definidas por

$$\gamma_\ell(\omega_\ell^\pm) = \frac{1}{2} V_\ell^2(\omega_\ell^\pm) \sigma_\ell^2(\omega_\ell^\pm) \int_{-\omega_\ell^\pm}^{\infty} d\varepsilon \delta(\varepsilon). \quad (2.16)$$

Definindo  $\Gamma_\ell = V_\ell^2(\omega_{\ell 0}) \sigma_\ell^2(\omega_{\ell 0})$  observa-se que no regime de acoplamento fraco, quando  $\omega_\ell^\pm \approx \omega_\ell \approx \omega_{\ell 0}$ , a *Eq.(2.16)* simplifica-se para

$$\gamma_\ell(\omega_{\ell 0}) \approx \frac{1}{2} V_\ell^2(\omega_{\ell 0}) \sigma_\ell^2(\omega_{\ell 0}) = \frac{\Gamma_\ell}{2}, \quad (2.17)$$

ao passo que no regime de acoplamento forte, quando  $\omega_\ell^+ \neq \omega_\ell^-$ , obtemos

$$\gamma_\ell(\omega_\ell^+) = \frac{1}{2} V_\ell^2(\omega_\ell^+) \sigma_\ell^2(\omega_\ell^+), \quad (2.18a)$$

$$\gamma_\ell(\omega_\ell^-) = \begin{cases} \frac{1}{4} V_\ell^2(\omega_\ell^-) \sigma_\ell^2(\omega_\ell^-) & \text{quando } F = 0 \\ \frac{1}{2} V_\ell^2(\omega_\ell^-) \sigma_\ell^2(\omega_\ell^-) & \text{quando } F \gtrsim \kappa, \end{cases} \quad (2.18b)$$

em que  $\kappa$  refere-se a largura da função de amortecimento, a ser definida na *Seção 2.3*, cujo valor máximo define a taxa de dissipação  $\gamma_\ell(\omega_\ell^\pm)$ .

Dos resultados acima, para as funções de correlação, observamos que a equação mestra para o regime de acoplamento forte inclui aquela para o regime de acoplamento fraco. De fato, com  $\gamma_\ell(\omega_\ell^\pm) \approx \Gamma_\ell/2$  e  $\mathbf{N}_\ell(\omega_\ell^\pm) \approx \mathbf{N}_\ell(\omega_{\ell 0})$  obtemos a equação mestra para o regime de acoplamento fraco daquela para o regime de acoplamento forte, descrita na representação

de Schrödinger via os operadores  $a_\ell$  e  $a_\ell^\dagger$ , na forma

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_{12}(t) = & \sum_\ell \left\{ i \left[ \rho_{12}(t), \Omega a_\ell^\dagger a_\ell + \lambda \sum_{m(\neq\ell)} a_\ell^\dagger a_m + F (a_2^\dagger + a_2) \delta_{\ell 2} \right] \right. \\
& + \frac{F}{2(\Omega^2 - \lambda^2)} \{ (\Omega \delta_{\ell 1} - \lambda \delta_{\ell 2}) [\gamma_\ell(\omega_\ell^-) - \gamma_\ell(\omega_\ell^+)] + (\Omega \delta_{\ell 2} - \lambda \delta_{\ell 1}) \\
& \times [2\gamma_\ell(\nu) - \gamma_\ell(\omega_\ell^-) - \gamma_\ell(\omega_\ell^+)] \} [\rho_{12}(t), a_\ell - a_\ell^\dagger] \\
& + \frac{1}{2} [\gamma_\ell(\omega_\ell^+) \mathbf{N}_\ell(\omega_\ell^+) + \gamma_\ell(\omega_\ell^-) \mathbf{N}_\ell(\omega_\ell^-)] \left( \left[ [a_\ell^\dagger, \rho_{12}(t)], a_\ell \right] + [a_\ell^\dagger, [\rho_{12}(t), a_\ell]] \right) \\
& + \frac{1}{2} [\gamma_\ell(\omega_\ell^+) + \gamma_\ell(\omega_\ell^-)] \left( [a_\ell \rho_{12}(t), a_\ell^\dagger] + [a_\ell, \rho_{12}(t) a_\ell^\dagger] \right) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m(\neq\ell)} [\gamma_\ell(\omega_\ell^+) - \gamma_\ell(\omega_\ell^-)] \left( [a_m \rho_{12}(t), a_\ell^\dagger] + [a_\ell, \rho_{12}(t) a_m^\dagger] \right) \\
& \left. + \frac{1}{2} [\gamma_\ell(\omega_\ell^+) \mathbf{N}_\ell(\omega_\ell^+) - \gamma_\ell(\omega_\ell^-) \mathbf{N}_\ell(\omega_\ell^-)] \left( \left[ [a_2^\dagger, \rho_{12}(t)], a_1 \right] + [a_1^\dagger, [\rho_{12}(t), a_2]] \right) \right\}. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

É importante observar que quando a amplificação linear é desligada, o segundo termo da Eq.(2.19) sob a somatória  $\ell$  desaparece. Por outro lado, se  $\Omega^2 - \lambda^2 = (\omega_\ell^- - \nu)(\omega_\ell^+ - \nu)$ , quando  $F \neq 0$  e  $\nu = \omega_\ell^\pm$ , este termo torna-se

$$\frac{F}{4\lambda} [\gamma_\ell(\omega_\ell^-) - \gamma_\ell(\omega_\ell^+)] (\delta_{\ell 2} \mp \delta_{\ell 1}) [\rho_{12}, a_\ell - a_\ell^\dagger]. \tag{2.20}$$

A seguir derivamos as equações mestras correspondentes aos regimes de acoplamento fraco e forte. Por simplicidade, definiremos  $\gamma_\ell(\omega_\ell^\pm) \equiv \gamma_\ell^\pm$  e assumiremos a condição de ressonância para a amplificação linear, isto é, tomaremos o caso  $\nu = \omega_{20}$ .

### 2.2.1 Regime de Acoplamento Fraco

No regime de acoplamento fraco, onde  $\omega_\ell^\pm \approx \omega_{\ell 0}$ , a condição de ressonância para a amplificação linear implica que  $\gamma_\ell(\nu) \approx \gamma_\ell^\pm \approx \Gamma_\ell/2$ , de modo que a equação mestra torna-se

$$\frac{d}{dt}\rho_{12}(t) = i [\rho_{12}(t), \mathbb{H}_0] + \sum_\ell \mathcal{L}_\ell \rho_{12}(t), \tag{2.21a}$$

onde definimos

$$\mathbb{H}_0 = \sum_{\ell} \left( \Omega a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell} + \lambda \sum_{m(\neq \ell)} a_{\ell}^{\dagger} a_m \right) + F \left( a_2^{\dagger} + a_2 \right). \quad (2.22)$$

O operador de Liouville  $\mathcal{L}_{\ell} \rho_{12}(t)$  é dado pela estrutura de operadores usual

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\ell} \rho_{12}(t) = & \frac{\Gamma_{\ell}}{2} \left\{ \mathbf{N}_{\ell}(\omega_{\ell 0}) \left( \left[ a_{\ell}^{\dagger} \rho_{12}, a_{\ell} \right] + \left[ a_{\ell}^{\dagger}, \rho_{12} a_{\ell} \right] \right) \right. \\ & \left. + (\mathbf{N}_{\ell}(\omega_{\ell 0}) + 1) \left( \left[ a_{\ell} \rho_{12}, a_{\ell}^{\dagger} \right] + \left[ a_{\ell}, \rho_{12} a_{\ell}^{\dagger} \right] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Verificamos que no regime de acoplamento fraco, assumindo que a amplificação linear é ressonante com o oscilador 2, a interação entre os modos do campo e o processo de amplificação aparecem somente no termo de von Neumann da equação mestra, não afetando portanto o mecanismo de dissipação dos osciladores individuais. Porém, quando a amplificação linear esta fora de ressonância com o oscilador 2, é necessário somarmos ao termo do operador de Liouville  $\mathcal{L}_{\ell} \rho_{12}(t)$  a correção dada por

$$\frac{F}{(\Omega^2 - \lambda^2)} (\Omega \delta_{\ell 2} - \lambda \delta_{\ell 1}) [\gamma_{\ell}(\nu) - \gamma_{\ell}(\omega_{\ell 0})] \left[ \rho_{12}, a_{\ell} - a_{\ell}^{\dagger} \right]. \quad (2.24)$$

Para um processo de amplificação forte ( $F/\omega_{20} \approx 1$ ), esta correção<sup>1</sup> torna-se  $F\Omega/(\Omega^2 - \lambda^2) \approx 1/2$  para o modo  $\ell = 2$ , sendo desprezível para o modo  $\ell = 1$ , visto que  $F\lambda/(\Omega^2 - \lambda^2) \ll 1$ .

## 2.2.2 Regime de Acoplamento Forte

Abaixo apresentamos a equação mestra para o regime de acoplamento forte considerando a situação geral em que a amplificação linear e a temperatura do reservatório estão presentes. Porém, como discutido acima, quando desligarmos a amplificação linear devemos considerar somente reservatórios em zero absoluto, de modo que os resultados sejam váli-

---

<sup>1</sup>Na realidade, como veremos no *Seção 2.4*, este termo de correção tem uma forte dependência com a densidade espectral do reservatório, sendo nulo para reservatórios com densidade espectral do tipo ruído branco Markoviano.

dos. Neste regime de acoplamento, onde  $\lambda/\omega_{\ell 0} \approx 1$ , a equação mestra é escrita na forma

$$\frac{d}{dt}\rho_{12}(t) = i[\rho_{12}(t), \mathbb{H}_0] + \sum_{\ell} \mathcal{L}'_{\ell}\rho_{12}(t) + \mathcal{L}_{12}\rho_{12}(t), \quad (2.25)$$

onde o operador de Liouville modificado é definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\ell}\rho_{12}(t) &= \frac{1}{2} [\gamma_{\ell}^+ \mathbf{N}_{\ell}(\omega_{\ell}^+) + \gamma_{\ell}^- \mathbf{N}_{\ell}(\omega_{\ell}^-)] \left( \left[ [a_{\ell}^{\dagger}, \rho_{12}(t)], a_{\ell} \right] + \left[ a_{\ell}^{\dagger}, [\rho_{12}(t), a_{\ell}] \right] \right) \\ &+ \frac{1}{2} (\gamma_{\ell}^+ - \gamma_{\ell}^-) \left( \left[ a_{\ell} \rho_{12}(t), a_{\ell}^{\dagger} \right] + \left[ a_{\ell}, \rho_{12}(t) a_{\ell}^{\dagger} \right] \right) \\ &+ \frac{F}{2(\Omega^2 - \lambda^2)} \{ (\Omega\delta_{\ell 1} - \lambda\delta_{\ell 2}) (\gamma_{\ell}^- - \gamma_{\ell}^+) + (\Omega\delta_{\ell 2} - \lambda\delta_{\ell 1}) \\ &\times [2\gamma_{\ell}(\omega_{20}) - \gamma_{\ell}^- - \gamma_{\ell}^+] \} \left[ \rho_{12}(t), a_{\ell} - a_{\ell}^{\dagger} \right], \end{aligned} \quad (2.26)$$

e sua correção, que representa um canal de dissipação misto, pelo operador de Liouville

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{12}\rho_{12}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\ell} \left\{ \sum_{m(\neq \ell)} (\gamma_{\ell}^+ - \gamma_{\ell}^-) \left( \left[ a_m \rho_{12}(t), a_{\ell}^{\dagger} \right] + \left[ a_{\ell}, \rho_{12}(t) a_m^{\dagger} \right] \right) \right. \\ &\left. + [\gamma_{\ell}^+ \mathbf{N}_{\ell}(\omega_{\ell}^+) - \gamma_{\ell}^- \mathbf{N}_{\ell}(\omega_{\ell}^-)] \left( \left[ [a_2^{\dagger}, \rho_{12}(t)], a_1 \right] + \left[ a_1^{\dagger}, [\rho_{12}(t), a_2] \right] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Verifica-se que para o regime de acoplamento fraco, quando  $\gamma_{\ell}^{\pm} \approx \Gamma_{\ell}/2$ , a Eq.(2.21a) é obtida da Eq.(2.25). Note que no regime de acoplamento forte entre os osciladores, o operador de Liouville para o canal de dissipação misto,  $\mathcal{L}_{12}\rho_{12}(t)$ , pode ser da mesma ordem de magnitude que os canais de dissipação independentes  $\mathcal{L}'_1\rho_{12}(t)$  e  $\mathcal{L}'_2\rho_{12}(t)$ . Neste regime, em contraste ao caso do acoplamento fraco, uma amplificação linear forte ( $F/\omega_{20} \approx 1$ ) modifica o operador de Liouville  $\mathcal{L}'_{\ell}\rho_{12}(t)$ , visto que  $|F\Omega/(\Omega^2 - \lambda^2)| \approx |F\lambda/(\Omega^2 - \lambda^2)| \approx 1$  na condição de ressonância. Observa-se também, no caso em que ambos os reservatórios estejam em zero absoluto, que o canal de dissipação misto é perdido quando  $\gamma_{\ell}^+ = \gamma_{\ell}^-$ , que pode ocorrer, como discutido na Seção 2.4, dependendo da densidade espectral dos reservatórios. Mais adiante, veremos que o canal de dissipação misto, representado pelo operador de Liouville da Eq.(2.27), leva a resultados interessantes com relação ao processo de decoerência para certos estados dos osciladores fortemente acoplados.

## 2.3 Desdobramento das Taxas de Dissipação

É interessante notar que a taxa de dissipação para o oscilador  $\ell$  (que no regime de acoplamento fraco é dada por  $\gamma_\ell(\omega_{\ell 0}) = \Gamma_\ell/2$ ) dividi-se em  $\gamma_\ell^+$  e  $\gamma_\ell^-$ . Para ilustrar este mecanismo, assumimos um acoplamento Lorentziano  $V_\ell$  entre o oscilador e seu reservatório, de modo que a função de amortecimento  $\Gamma_\ell(\chi)$ , centrada na frequência  $\chi_0$ , seja dada por

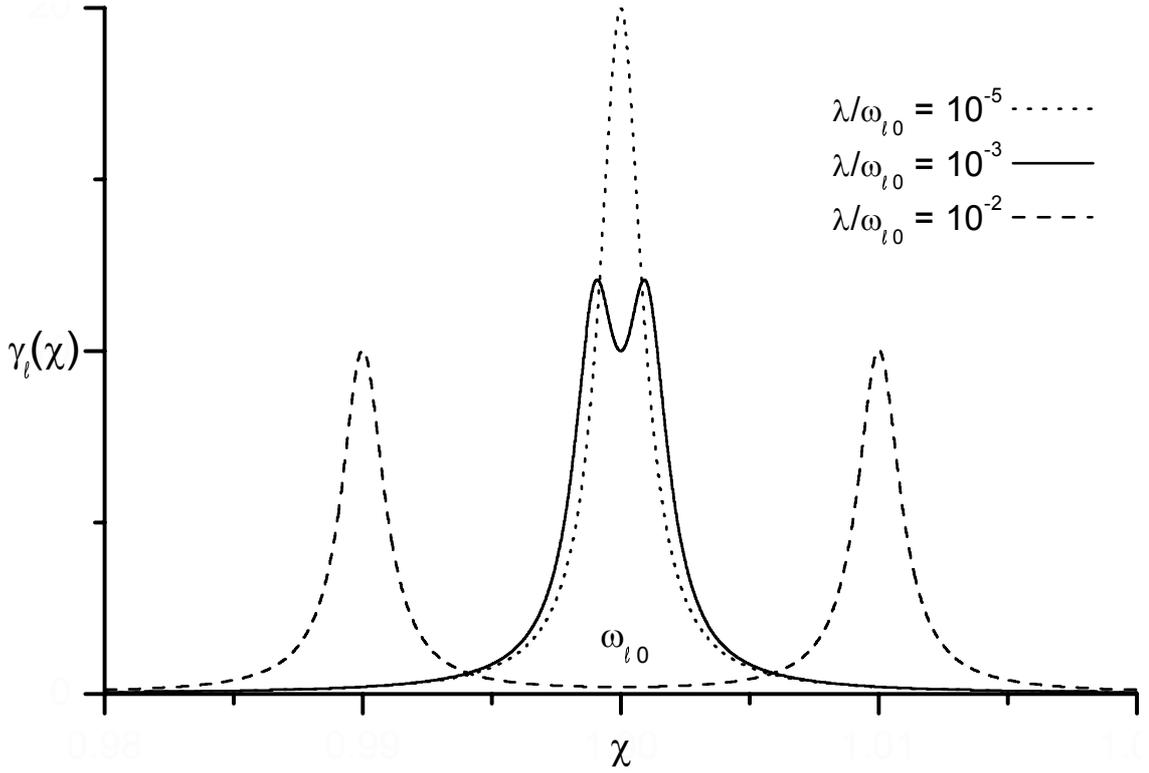
$$\Gamma_\ell(\chi) = \sigma_\ell^2 \frac{\kappa}{(\chi - \chi_0)^2 + \kappa^2}, \quad (2.28)$$

com o parâmetro  $\kappa$  descrevendo a largura da banda espectral em torno do modo de frequência  $\chi_0$ . Da *Eq.(2.28)* e lembrando que a partir da *Eq.(2.16)* a frequência  $\omega_\ell$  desdobrou-se em duas frequências, correspondendo aos modos normais do sistema  $\omega_\ell^\pm$ , obtemos a dupla função Lorentziana

$$\begin{aligned} \Gamma_\ell(\chi) &= \frac{\kappa\sigma_\ell^2}{2} \left( \frac{1}{(\chi - \omega_\ell^+)^2 + \kappa^2} + \frac{1}{(\chi - \omega_\ell^-)^2 + \kappa^2} \right) \\ &= \gamma_\ell(\omega_\ell^+) + \gamma_\ell(\omega_\ell^-), \end{aligned} \quad (2.29)$$

com máximos em  $\omega_\ell^\pm$ , como mostra a *Fig.-2.2*. De fato, da equação mestra (2.19), observamos que no regime de acoplamento fraco, quando  $\gamma_\ell(\omega_\ell^+) + \gamma_\ell(\omega_\ell^-) = \Gamma_\ell(\omega_{\ell 0}) \equiv \Gamma_\ell$  (visto que  $\gamma_\ell(\omega_\ell^+) = \gamma_\ell(\omega_\ell^-) = \Gamma_\ell/2$ ), obtemos o operador de Liouville esperado para dois osciladores dissipativos independentes. Observe que da *Eq.(2.29)* é imediatamente óbvio que no regime de acoplamento fraco, em que  $\omega_\ell^\pm \approx \omega_{\ell 0}$ , a função de amortecimento apresenta somente um pico, como mostra a linha pontilhada na *Fig.-2.2*. Neste regime, a taxa de dissipação, considerada como sendo o valor máximo da estreita função de amortecimento, isto é,  $\Gamma_\ell$  (para um pequeno valor de  $\kappa$ ), torna-se duas vezes o valor atribuído para  $\gamma_\ell(\omega_\ell^\pm)$ . À medida que  $\lambda = \pm(\omega_\ell^\pm - \omega_\ell)$  aumenta, a função de amortecimento divide-se em duas funções Lorentzianas, cujos picos possuem a metade do valor original  $\Gamma_\ell$ , como predito pela equação mestra (2.25) e mostrado pela linha sólida na *Fig.-2.2*. A linha tracejada mostra a situação onde os dois picos podem ser claramente distingüidos, estando a caminho do regime de acoplamento forte,  $\lambda/\omega_{\ell 0} \approx 1$ , onde o pico centrado sobre  $\omega_\ell^-$  desloca-se para um valor em torno de  $F\omega_{10}/(\omega_{10} + \omega_{20})$  e que pode ser tão pequeno quanto se queira, bastando apenas diminuirmos a amplitude da amplificação linear. Na

Figura 2-2: A função de amortecimento  $\gamma_\ell(\chi)$  é obtida assumindo um acoplamento Lorentziano  $V_\ell$  entre o oscilador  $\ell$  e seu respectivo reservatório. Observe que no regime de acoplamento fraco a função  $\gamma_\ell(\chi)$  esta centrada em torno de  $\omega_\ell$  (linha pontilhada). A medida que  $\lambda$  aumenta, a função de amortecimento desdobra-se em duas funções Lorentzianas cujos picos são metade do valor original  $\Gamma_\ell$  (linha sólida). A caminho do regime de acoplamento forte os dois picos tornam-se claramente distintos, como mostrado pela linha tracejada.



prática, o efeito do acoplamento forte entre os osciladores é essencialmente deslocar as frequências dos modos normais  $\omega_\ell^\pm$  para regiões longe da frequência natural do oscilador  $\omega_{\ell 0}$ , onde a densidade espectral do reservatório pode ser significativamente diferente daquela em torno de  $\omega_{\ell 0}$ . Por este motivo, a densidade espectral do reservatório  $\sigma_\ell(\omega_{\ell k})$  apresenta um papel crucial na dinâmica dissipativa dos osciladores acoplados, visto que a magnitude da taxa de dissipação  $\gamma_\ell(\omega_\ell)$  depende da densidade espectral do reservatório  $\sigma_\ell(\omega_\ell)$ . É deixado para a *Seção 2.4* a análise de reservatórios com diferentes densidades espectrais, a fim de ilustrar os interessantes efeitos que surgem no regime de acoplamento forte. Evidentemente, os sistemas físicos sob consideração e seus mecanismos dissipativos (isto é, a natureza do reservatório e sua densidade espectral) serão decisivos para nossa análise.

Finalmente, salientamos que osciladores acoplados clássicos também dão origem a desdobramentos dos modos e que em geral, diferentes taxas de dissipação estão associadas a cada um dos modos. Para íons armadilhados, o fato que o modo “estendido” é menos afetado pelo amortecimento do que o modo do centro de massa foi explicitamente demonstrado experimentalmente em [63].

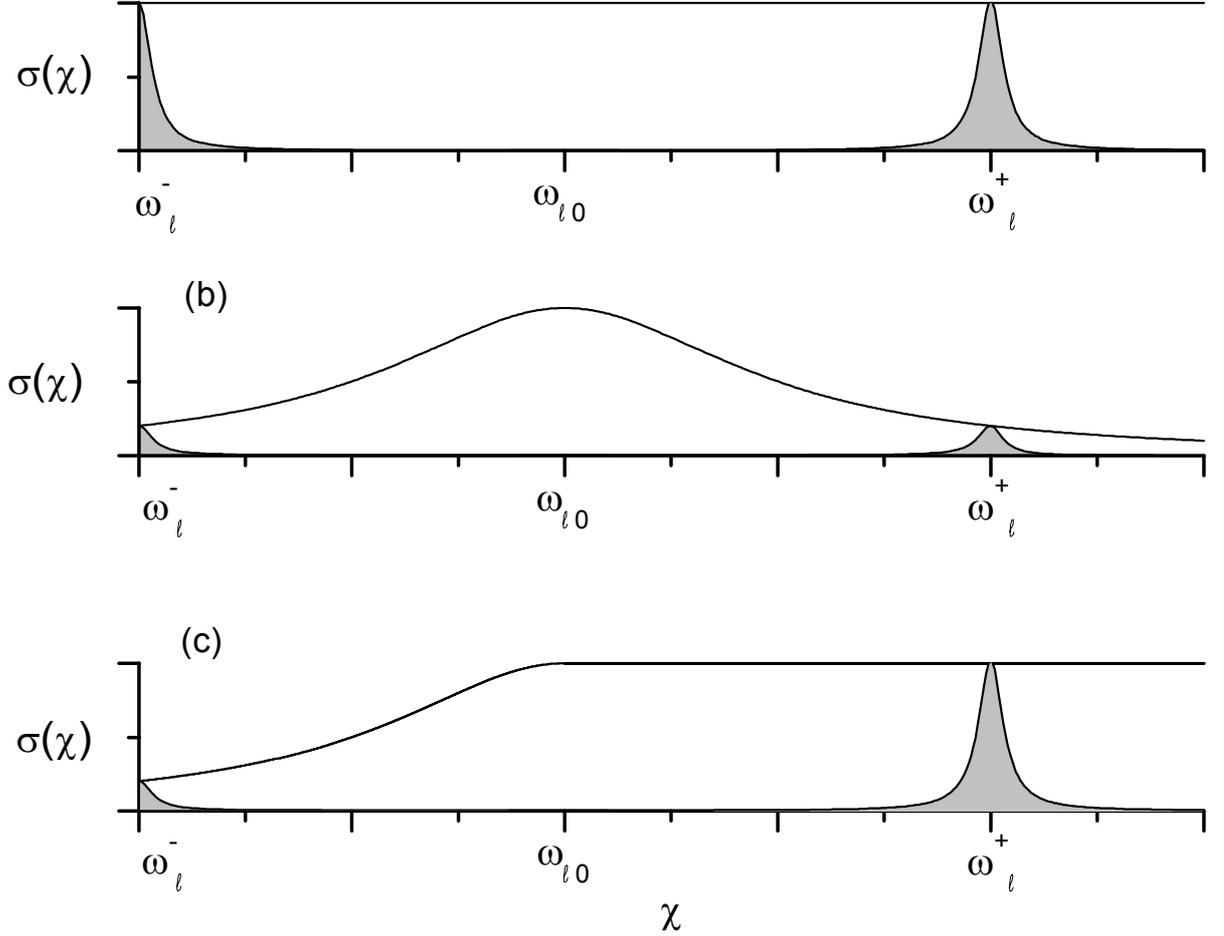
## 2.4 Densidades Espectrais dos Reservatórios

A princípio é possível que densidades espectrais específicas possam ser obtidas através da engenharia de reservatórios, um programa que tem recentemente atraído considerável atenção na tentativa de controlar o processo de decoerência de estados quânticos [48, 49, 50]. Desta forma, os resultados que apresentamos abaixo, que dependem crucialmente da densidade espectral dos reservatórios, podem proporcionar uma motivação para futuras propostas teóricas sobre engenharia de reservatórios. Para a análise dos modelos de densidade espectral apresentados abaixo, consideramos o regime de acoplamento forte e que o processo de amplificação, assim como a temperatura do reservatório, sejam nulos ( $F, T = 0$ ). É necessário recordarmos da definição  $\gamma_\ell(\omega_\ell^\pm) \equiv \gamma_\ell^\pm$ , em que o parâmetro  $\gamma_\ell^\pm$  depende da densidade espectral do reservatório em torno de  $\omega_\ell^\pm$ .

### 2.4.1 Ruído Branco Markoviano

O caso mais simples a ser analisado é o ruído branco Markoviano, em que a densidade espectral do reservatório é invariante sob translações no espaço das frequências, como ilustrado na *Fig.-2.3(a)*. Assumindo um acoplamento Lorentziano entre os osciladores e seus respectivos reservatórios, centrados em torno das frequências efetivas  $\omega_\ell^\pm$ , como na *Eq.(2.29)*, obtemos  $\gamma_\ell^- = \gamma_\ell^+ / 2 = \Gamma_\ell / 4$ . De fato, a frequência efetiva  $\omega_\ell^-$  desloca-se para um valor em torno de zero (quando  $F = 0$ ), e assim, o acoplamento sistema-reservatório  $\gamma_\ell^-$  torna-se a metade do valor  $\gamma_\ell^+ = \Gamma_\ell / 2$ , como pode imediatamente ser concluído das *Eqs.(2.18a)* e *(2.18b)*. Os acoplamentos sistema-reservatório em torno de  $\omega_\ell^\pm$  são representados por regiões sombreadas na *Fig.-2.3(a)*. Portanto, para reservatórios com densidade espectral do tipo ruído branco Markoviano, o acoplamento forte entre os osciladores aumenta o tempo de decoerência de um estado conjunto que seja autoestado

Figura 2-3: Modelos de densidade espectral do reservatório  $\sigma_\ell(\chi)$  para (a) ruído branco Markoviano, (b) uma densidade espectral Lorentziana e (c) uma densidade espectral Lorentziana larga. Os acoplamentos sistema-reservatório em torno de  $\omega_\ell^\pm$  são representados por regiões sombreadas.



do modo normal  $\omega_\ell^-$ , como será discutido posteriormente. A seguir, analisamos dois casos de ruído colorido não Markoviano, ainda assumindo que as funções  $V_\ell$ ,  $\sigma_\ell$  e  $\mathbf{N}_\ell$  variem lentamente em torno da frequência  $\omega_\ell^\pm$ , como discutido acima.

## 2.4.2 Densidade Espectral Lorentziana

Considere um reservatório com densidade espectral Lorentziana que vai a zero em ambas as frequências efetivas  $\omega_\ell^\pm$  (*Fig.-2.3(b)*). A implementação de um reservatório com densidade espectral de modo que  $\sigma_\ell(\omega_\ell^\pm) \approx 0$  deve resultar em uma função de amortecimento  $\gamma_\ell(\omega_\ell^\pm)$ , derivada de ambos os termos do lado direito da *Eq.(2.29)* (isto é,  $\kappa\sigma_\ell^2 / [(\chi - \omega_\ell^\pm)^2 + \kappa^2] \approx$

0), que não deve contribuir significativamente para o processo de relaxação. Portanto, para um tal acoplamento Lorentziano entre os modos dos campos e seus reservatórios, obtemos das *Eqs.(2.18a)* e *(2.18b)* as taxas  $\gamma_\ell^\pm \ll \Gamma_\ell$ , visto que ambas as frequências efetivas  $\omega_\ell^\pm$  deslocam-se para regiões onde as densidades espectrais do reservatório são consideravelmente menor que em torno de  $\omega_{\ell 0}$ . Em vista da dificuldade de se obter uma densidade espectral Lorentziana suficientemente pequena em torno de  $\omega_\ell^+$ , de modo que  $\sigma_\ell(\omega_\ell^+) \approx 0$ , voltamo-nos, a seguir, para um caso mais realista que chamamos de Densidade Espectral Lorentziana Larga.

### 2.4.3 Densidade Espectral Lorentziana Larga

Finalmente, considere uma densidade espectral Lorentziana Larga, que vai a zero na frequência efetiva  $\omega_\ell^-$ , alcança um patamar em torno de  $\omega_{\ell 0}$  e somente decai à zero para frequências muito distantes de  $\omega_\ell^+$ , como ilustrado na *Fig.-2.3(c)*. Diferentemente da densidade espectral Lorentziana, neste caso somente a função de amortecimento  $\gamma_\ell^-$ , derivada do segundo termo do lado direito da *Eq.(2.29)* (isto é,  $\kappa\sigma_\ell^2 / [(\chi - \omega_\ell^-)^2 + \kappa^2] \approx 0$ ), deixa de contribuir significativamente para o processo de relaxação; isto é,  $\gamma_\ell^- \ll \Gamma_\ell$ , visto que a ressonância em torno da frequência efetiva  $\omega_\ell^-$  pode ser desconsiderada. Somente o acoplamento sistema-reservatório em torno da frequência efetiva  $\omega_\ell^+$  contribui para o processo de relaxação dos osciladores ( $\gamma_\ell^+ = \Gamma_\ell/2$ ). Este modelo pode ser considerado como similar à dissipação sub-ohmica [25] e pode ser razoavelmente aplicado a uma variedade de densidades espectrais para reservatórios de fónons, onde o modelo de Debye se aplica muito bem no domínio de baixas frequências.

## 2.5 Equação de Fokker-Planck

Usando os procedimentos usuais, derivamos a versão “c-number” da equação mestra *(2.19)* para a representação  $P$  de Glauber-Sudarshan [38, 64], dada por

$$\frac{d}{dt}P(\{\eta_\ell\}, t) = \frac{1}{2} \sum_{m,n} \left[ \Pi_n + C_n(\{\eta_\ell\}) \frac{\partial}{\partial \eta_n} + D_{nm} \frac{\partial^2}{\partial \eta_n \partial \eta_m^*} + c.c. \right] P(\{\eta_\ell\}, t), \quad (2.30)$$

onde a função  $C_n(\{\eta_\ell\})$  e os elementos de matriz  $D_{nm}$  satisfazem as relações

$$C_n(\{\eta_\ell\}) = E_n + A_n\eta_n + B_n\eta_{n-(-1)^n}, \quad (2.31a)$$

$$D_{nn} = \gamma_n^+ \mathbf{N}_n(\omega_n^+) + \gamma_n^- \mathbf{N}_n(\omega_n^-), \quad (2.31b)$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \sum_n [\gamma_n^+ \mathbf{N}_n(\omega_n^+) - \gamma_n^- \mathbf{N}_n(\omega_n^-)], \quad (2.31c)$$

enquanto que os parâmetros  $\Pi_n$ ,  $A_n$ ,  $B_n$  e  $E_n$  são definidos por

$$\Pi_n = \frac{1}{2} (\gamma_n^+ + \gamma_n^-), \quad (2.32a)$$

$$A_n = \frac{1}{2} (\gamma_n^+ + \gamma_n^-) + i\Omega, \quad (2.32b)$$

$$B_n = \frac{1}{2} (\gamma_n^+ - \gamma_n^-) + i\lambda, \quad (2.32c)$$

$$E_n = iF\delta_{n2} - \frac{F}{2(\Omega^2 - \lambda^2)} [(\Omega\delta_{n2} - \lambda\delta_{n1})(2\gamma_n(\omega_{20}) - \gamma_n^- - \gamma_n^+) + (\Omega\delta_{n1} - \lambda\delta_{n2})(\gamma_n^- - \gamma_n^+)]. \quad (2.32d)$$

Note que o coeficiente de arrasto  $C_n(\{\eta_\ell\})$  é linearmente dependente de ambas as variáveis  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , enquanto que o coeficiente de difusão  $D_{mn}$  é constante, determinando um processo de *Orstein-Uhlenbeck* [65]. Apenas como uma observação, note que no caso extremo do regime de acoplamento fraco, onde  $\lambda \lesssim \Gamma_n$ , o coeficiente de arrasto  $C_n$  depende principalmente de  $\eta_n$  e o coeficiente de difusão é dado  $D_{mn} = \delta_{mn}D_{mm}$ , que é estritamente positivo. Neste caso particular, as dinâmicas de ambos os osciladores acoplados separam-se, pois o processo de dissipação atua antes que eles tenham tempo de interagir. Neste caso muito particular a equação de Fokker-Planck é dada por

$$\frac{d}{dt}P(\{\eta_\ell\}, t) = \frac{1}{2} \sum_n \left[ \Pi_n + C_n(\eta_n) \frac{\partial}{\partial \eta_n} + D_{nn} \frac{\partial^2}{\partial \eta_n \partial \eta_n^*} + c.c. \right] P(\{\eta_\ell\}, t), \quad (2.33)$$

e a solução geral é simplesmente a somatória das soluções independentes para cada modo.

### Solução da Equação de Fokker-Planck em Zero Absoluto

Até o final do presente *Capítulo* assumiremos ambos os reservatórios em zero absoluto, de modo que  $\mathbf{N}_\ell(\omega_\ell^\pm) = 0$ . Esta suposição é equivalente a tomarmos  $D_{mn} = 0$ , e assim a

equação de Fokker-Planck (2.30) reduz-se a uma simples equação de arrasto

$$\frac{d}{dt}P(\{\eta_\ell\}, t) = \sum_n \left[ \Pi_n + C_n(\{\eta_\ell\}) \frac{\partial}{\partial \eta_n} + c.c. \right] P(\{\eta_\ell\}, t). \quad (2.34)$$

Fazendo a substituição  $P(\{\eta_\ell\}, t) = \tilde{P}(\{\eta_\ell\}, t) \exp[2(\Pi_1 + \Pi_2)t]$ , simplificamos a Eq.(2.34) para a forma

$$\frac{d}{dt}\tilde{P}(\{\eta_\ell\}, t) = \sum_n \left( C_n(\{\eta_\ell\}) \frac{\partial}{\partial \eta_n} + c.c. \right) \tilde{P}(\{\eta_\ell\}, t). \quad (2.35)$$

Admitindo que a solução seja da forma  $\tilde{P}(\{\eta_\ell\}, t) = \tilde{P}(\{\eta_\ell(t)\})$ , verificamos que

$$\frac{d}{dt}\tilde{P}(\{\eta_\ell(t)\}) = \sum_n \left( \frac{\partial \eta_n(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta_n} + c.c. \right) \tilde{P}(\{\eta_\ell(t)\}). \quad (2.36)$$

Pela comparação entre as Eqs.(2.35) e (2.36) precisamos resolver o sistema de equações acopladas

$$\frac{\partial \eta_n(t)}{\partial t} = E_n + A_n \eta_n + B_n \eta_{n-(-1)^n}, \quad (2.37)$$

que leva a uma equação diferencial ordinária não homogênea na variável  $\eta_1(t)$ , dada por

$$\frac{\partial^2 \eta_1(t)}{\partial t^2} - (A_1 + A_2) \frac{\partial \eta_1(t)}{\partial t} + (A_1 A_2 - B_1 B_2) \eta_1(t) + E_1 A_2 - E_2 B_1 = 0. \quad (2.38)$$

A seguir, definimos os parâmetros (onde desconsideramos termos da ordem  $\mathbb{O}^2(\gamma_n^\pm/\lambda)$ )  $\Lambda = \sum_n (\gamma_n^+ + \gamma_n^-)/4 + i\Omega$ ,  $\Delta = \sum_n (-1)^{\delta_{n2}} (\gamma_n^+ + \gamma_n^-)/4$ ,  $\Phi = \sum_n (\gamma_n^+ - \gamma_n^-)/4$ ,  $\Theta =$

$\sum_n (-1)^{\delta_{n2}} (\gamma_n^+ - \gamma_n^-) / 4$  e as funções dependentes do tempo

$$\begin{aligned} \chi_{11}(t) &= \cosh(\Phi t) \left[ \cos(\lambda t) + \frac{\Delta}{\lambda} \operatorname{sen}(\lambda t) \right] \\ &\quad + i \operatorname{senh}(\Phi t) \left[ \operatorname{sen}(\lambda t) - \frac{\Delta}{\lambda} \cos(\lambda t) \right], \end{aligned} \quad (2.39a)$$

$$\begin{aligned} \chi_{12}(t) &= \operatorname{senh}(\Phi t) \cos(\lambda t) + \frac{\Theta}{\lambda} \cosh(\Phi t) \operatorname{sen}(\lambda t) \\ &\quad + i \left[ \cosh(\Phi t) \operatorname{sen}(\lambda t) - \frac{\Theta}{\lambda} \operatorname{senh}(\Phi t) \cos(\lambda t) \right], \end{aligned} \quad (2.39b)$$

$$\begin{aligned} \chi_{21}(t) &= \operatorname{senh}(\Phi t) \cos(\lambda t) - \frac{\Theta}{\lambda} \cosh(\Phi t) \operatorname{sen}(\lambda t) \\ &\quad + i \left[ \cosh(\Phi t) \operatorname{sen}(\lambda t) + \frac{\Theta}{\lambda} \operatorname{senh}(\Phi t) \cos(\lambda t) \right], \end{aligned} \quad (2.39c)$$

$$\begin{aligned} \chi_{22}(t) &= \cosh(\Phi t) \left[ \cos(\lambda t) - \frac{\Delta}{\lambda} \operatorname{sen}(\lambda t) \right] \\ &\quad + i \operatorname{senh}(\Phi t) \left[ \operatorname{sen}(\lambda t) + \frac{\Delta}{\lambda} \cos(\lambda t) \right]. \end{aligned} \quad (2.39d)$$

Definindo também os parâmetros

$$G_n = \frac{E_{n-(-1)^n} B_n - E_n A_{n-(-1)^n}}{A_1 A_2 - B_1 B_2}, \quad (2.40)$$

a solução do sistema de equações acopladas (2.37) pode finalmente ser escrita na forma compacta

$$\eta_m(t) = e^{\Lambda t} \sum_n (\eta_n^0 - G_n) \chi_{mn}(t) + G_m, \quad (2.41)$$

onde  $\eta_n^0$  indica  $\eta_n(t=0)$ . Da Eq.(2.41) segue que a equação de Fokker-Planck (2.34) possui a solução

$$P(\{\eta_\ell\}, t) = e^{2(\Pi_1 + \Pi_2)t} P(\{\eta_\ell\}, 0) |_{\eta_\ell \rightarrow \eta_\ell(t)}, \quad (2.42)$$

onde  $P(\{\eta_\ell\}, 0)$  é a função  $P(\{\eta_\ell\})$  para o estado inicial. A função  $P(\{\eta_\ell\}, t)$  é então obtida simplesmente substituindo  $\eta_\ell$  pelos parâmetros evoluídos temporalmente dados pela Eq.(2.41). Finalmente, a partir da Eq.(2.42) a dependência temporal do operador densidade, relacionado a Eq.(2.19), segue da integração

$$\rho_{12}(t) = \int d^2 \{\eta_n\} P(\{\eta_\ell\}, t) |\{\eta_\ell\}\rangle \langle \{\eta_\ell\}|. \quad (2.43)$$

## Estado Inicial dos Osciladores Acoplados

A seguir analisamos o operador densidade  $\rho_{12}(t)$  supondo que os modos 1 e 2 estejam preparados em uma superposição de estados coerentes da forma

$$|\varphi\rangle = \mathcal{N} \sum_{p=1}^J e^{i\delta_p} |\{\beta_n^p\}\rangle, \quad (2.44)$$

onde  $\mathcal{N}$  é o fator de normalização e o índice  $p$  representa os diferentes estados coerentes participantes da superposição. Das *Eqs. (2.43)* e *(2.44)* verifica-se que o operador densidade é dado por

$$\rho_{12}(t) = \mathcal{N}^2 \sum_{p,q=1}^J e^{\phi_{pq}(t)+i(p+q)} \prod_n \langle \beta_n^q | \beta_n^p \rangle^{1-\Upsilon_{nm}(t)} |\xi_n^p(t)\rangle \langle \xi_n^q(t)|, \quad (2.45)$$

onde (consideraremos neste *Capítulo* que  $p, q = 1, 2, \dots, J$ )

$$\begin{aligned} \phi_{pq}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{m,n(m \neq n)} [\beta_m^p (\beta_n^{*p} - \beta_n^{*q}) - \beta_n^{*q} (\beta_m^p - \beta_m^q)] \Upsilon_{nm}(t) \\ & + i \operatorname{Im} \left[ \sum_{m,n} (\beta_n^{*q} - \beta_n^{*p}) (\mu_{mn}^*(t) - \Upsilon_{nm}(t)) G_m \right]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Os estados dos osciladores evoluídos temporalmente são dados por

$$\xi_m^p(t) = \sum_n (\beta_n^p - G_n) \mu_{mn}(t) + G_m, \quad (2.47)$$

onde definimos as funções

$$\Upsilon_{mn}(t) = \sum_{\ell} \mu_{\ell m}^*(t) \mu_{\ell n}(t), \quad (2.48a)$$

$$\mu_{mn}(t) = e^{-\Lambda t} \chi_{mn}(-t). \quad (2.48b)$$

O operador densidade reduzido, associado a um dos osciladores, pode ser obtido facil-

mente da Eq.(2.45), sendo dado por

$$\rho_m(t) = \mathcal{N}^2 \sum_{p,q=1}^J e^{\theta_m^{pq}(t)+i(p+q)} \left( \prod_n \langle \beta_n^q | \beta_n^p \rangle^{1-|\mu_{mn}(t)|^2} \right) |\xi_m^p(t)\rangle \langle \xi_m^q(t)|, \quad (2.49)$$

com

$$\begin{aligned} \theta_\ell^{pq}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{m,n(m \neq n)} [\beta_m^p (\beta_n^{*p} - \beta_n^{*q}) - \beta_n^{*q} (\beta_m^p - \beta_m^q)] \mu_{\ell n}^*(t) \mu_{\ell m}(t) \\ & + i \operatorname{Im} \left[ \sum_n (\beta_n^{*q} - \beta_n^{*p}) \left( G_\ell - \sum_m \mu_{\ell m}(t) G_m \right) \mu_{\ell n}^*(t) \right]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

## 2.6 Dinâmicas de Recorrência e Transferência de Estados entre os Osciladores

Suponha que o estado conjunto, oscilador 1 e 2, esteja preparado no estado de superposição

$$|\psi_{12}\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\varsigma\rangle_2, \quad (2.51)$$

que representa um caso particular da Eq.(2.44), onde (com  $J = 2$ )  $\beta_1^1 = -\beta_1^2 = \alpha$  e  $\beta_2^1 = \beta_2^2 = \varsigma$ .

Em ambos os regimes de acoplamento, fraco e forte, analisamos, nesta *Subseção*, o efeito da dissipação sobre dois fenômenos: (i) a recorrência do estado do sistema conjunto e (ii) a transferência de estados entre os osciladores 1 e 2. Considerando a dinâmica de sistemas acoplados, governada pela equação de Fokker-Planck (2.34), calculamos (i) a probabilidade que cada sistema recorra a seu estado inicial e (ii) a probabilidade dos estados serem transferidos entre os osciladores 1 e 2, isto é, a probabilidade do oscilador 1 estar no estado inicial do oscilador 2, e vice-versa. A dinâmica de recorrência e transferência de estados é garantida para sistemas acoplados bipartidos [66]. Porém, para um grande sistema composto, as dinâmicas de recorrência e transferência dependem da sua topologia (isto é, da forma pela qual os osciladores são acoplados entre si) e também do arranjo das intensidades dos acoplamentos. Nos *Capítulos* 3 e 4, onde o presente sistema é generalizado para uma rede de  $N$  osciladores quânticos dissipativos interagentes,

a dependência das dinâmicas de transferência e recorrência com relação a topologia será discutida. No presente sistema, os dois osciladores estão acoplados por um Hamiltoniano bilinear que, em princípio, permite a transferência de estados entre os sistemas [67].

Considerando a superposição inicial dada pela Eq.(2.51), o estado conjunto evoluído temporalmente segue do operador densidade Eq.(2.45) posto na forma

$$\rho_{12}(t) = \mathcal{N}_{\pm}^2 \sum_{p,q=1}^J (\pm 1)^{1-\delta_{pq}} e^{i \text{Im}(\phi_{pq}(t))} \exp[-2|\alpha|^2(1 - \Upsilon_{11}(t))(1 - \delta_{pq})] |\{\xi_n^p(t)\}\rangle \langle\{\xi_n^q(t)\}|. \quad (2.52)$$

A probabilidade de recorrência é então calculada pela equação

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_R(t) &\equiv \text{Tr}[\rho_{12}(t)\rho_{12}(0)] \\ &= \mathcal{N}_{\pm}^4 \sum_{p,q=1}^J (\pm 1)^{1-\delta_{pq}} e^{i \text{Im}(\phi_{pq}(t))} \exp[-2|\alpha|^2(1 - \Upsilon_{11}(t))(1 - \delta_{pq})] \\ &\quad \times \langle \xi_1^q(t) | (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \langle \langle \alpha | \pm \langle -\alpha | | \xi_1^p(t) \rangle \langle \xi_2^q(t) | \varsigma \rangle_2 \langle \varsigma | \xi_2^p(t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.53)$$

De maneira análoga à probabilidade de recorrência, a probabilidade de transferência de estados é calculada permutando os rótulos dos estados iniciais dos campos, como definido em [67]:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_T(t) &\equiv \text{Tr} \left[ \rho_{12}(t) \rho_{12}(0) |_{1(2) \rightarrow 2(1)} \right] \\ &= \mathcal{N}_{\pm}^4 \sum_{p,q=1}^J (\pm 1)^{1-\delta_{pq}} e^{i \text{Im}(\phi_{pq}(t))} \exp[-2|\alpha|^2(1 - \Upsilon_{11}(t))(1 - \delta_{pq})] \\ &\quad \times \langle \xi_1^q(t) | \varsigma \rangle_2 \langle \varsigma | \xi_1^p(t) \rangle \langle \xi_2^q(t) | (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \langle \langle \alpha | \pm \langle -\alpha | | \xi_2^p(t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Na Fig.-2.4 mostramos o gráfico da probabilidade de transferência de estados  $\mathcal{P}_T(t)$  (linha pontilhada) e a probabilidade de recorrência  $\mathcal{P}_R(t)$  (linha sólida) em função de  $\lambda t$ , considerando  $\alpha = \varsigma = 1$  como parâmetros reais. Nas Figs.-2.4(a, b e c) desligamos a amplificação linear (de modo que  $\omega_{10} = \omega_{20}$  e o mínimo de  $\omega_{\ell}^-$ , ocorrendo para  $\lambda = 2\omega_{20}$ , torna-se zero) e assumimos a ausência de dissipação, de modo à tomarmos estas figuras como referência. Na Fig.-2.4(a) consideramos o regime de acoplamento fraco, assumindo  $\lambda/\omega_{10} = 2 \times 10^{-2}$  (usamos uma razão um tanto exagerada para poder visualizar melhor as fortes oscilações das probabilidades  $\mathcal{P}_R(t)$  e  $\mathcal{P}_T(t)$ ). Como pode ser deduzido da Eq.(2.54),

observamos que os modos transferem seus estados sempre que (linha pontilhada)

$$\lambda t_T = (2j + 1) \frac{\pi}{2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.55)$$

isto é, nos tempos de transferência  $t_T$ , o estado do oscilador 1 torna-se  $|\varsigma\rangle_1$ , enquanto que o estado do oscilador 2 torna-se a superposição  $(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_2$ . Da linha sólida e Eq.(2.53), observamos que o estado do sistema conjunto recorre sempre que

$$\lambda t_R = \pi j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

ou seja, no tempo de recorrência  $t_R$  o modo 1 (2) retorna a seu estado inicial  $(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  ( $|\varsigma\rangle_2$ ). Nesta figura, nota-se que a recorrência com probabilidade igual a unidade ocorre apenas nos múltiplos pares de  $\pi$ , isto é,  $\lambda t_R = 2\pi j$ . No entanto, em torno dos múltiplos ímpares de  $\pi$ , a probabilidade de recorrência torna-se próxima da unidade, o que justifica a expressão (2.56). É evidente que a forma da Fig.-2.4(a) é consequência principalmente do pequeno valor de  $\lambda$  (comparado a  $\Omega$ ) que define uma função envelope.

Na Fig.-2.4(b) um acoplamento “intermediário”  $\lambda/\omega_{10} = 1$  é assumido. Como pode ser observado, a dinâmica de recorrência permanece a mesma (linha sólida), enquanto que a dinâmica de transferência começa a ser afetada pela intensidade do acoplamento. Na Fig.-2.4(c) consideramos o regime de acoplamento forte quando  $\lambda/\omega_{10} = 2$  ( $\omega_{10} = \omega_{20}$ ), de modo que  $\Omega/\lambda = 1$  (note que  $\Omega/\lambda = \omega_{10}/\lambda + \lambda/4\omega_{20}$ ). Da mesma forma que na Fig.-2.4(a), na Fig.-2.4(c) o processo de recorrência permanece inalterado, ainda obedecendo a Eq.(2.56), de modo que o tempo de recorrência torna-se menor devido ao parâmetro de acoplamento forte  $\lambda$ . Porém, a dinâmica de transferência é perdida quase por completo, restando as oscilações que surgem devido a não ortogonalidade entre os estados  $(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  e  $|\varsigma\rangle_2$ .

Para entender o comportamento de  $\mathcal{P}_R(t)$  e  $\mathcal{P}_T(t)$  nas Figs.-2.4(b e c), note que na ausência de dissipação as probabilidades de recorrência e de transferência são calculadas pelas expressões  $\mathcal{P}_R(t) = |\langle \psi_{12}(t) | \psi_{12}(0) \rangle|^2$  e  $\mathcal{P}_T(t) = \left| \langle \psi_{12}(t) | \psi_{12}(0) |_{1(2) \rightarrow 2(1)} \rangle \right|^2$ , respec-

tivamente. Para  $\mathcal{P}_R(t)$ , a amplitude de probabilidade

$$\begin{aligned} \langle \psi_{12}(0) | \psi_{12}(t) \rangle &= \mathcal{N}_{\pm}^2 (\langle \alpha | \xi_1^1 \rangle \langle \varsigma | \xi_2^1 \rangle + \langle -\alpha | \xi_1^2 \rangle \langle \varsigma | \xi_2^2 \rangle \exp [2i\alpha G_2 \text{sen} (\lambda t)] \\ &\quad \pm \langle -\alpha | \xi_1^1 \rangle \langle \varsigma | \xi_2^1 \rangle \pm \langle \alpha | \xi_1^2 \rangle \langle \varsigma | \xi_2^2 \rangle \exp [2i\alpha G_2 \text{sen} (\lambda t)]), \end{aligned} \quad (2.57)$$

tende à unidade sob as condições  $\xi_2^p \rightarrow \varsigma$ ,  $\xi_1^1 \rightarrow \alpha(-\alpha)$  e  $\xi_1^2 \rightarrow -\alpha(\alpha)$ , que são satisfeitas sempre que  $\cos(\Omega t_R) \cos(\lambda t_R) = 1$ . Esta relação implica que

$$t_R = j \frac{\pi}{\lambda} = k \frac{\pi}{\Omega}, \quad (2.58)$$

onde  $j$  e  $k$  são inteiros, ambos sendo par ou ímpar. Na *Fig.-2.4(b)*, o acoplamento “intermediário”  $\lambda/\omega_{10} = 1$  implica que  $j = (4/5)k$ , de modo que o estado conjunto do sistema recorre sempre que

$$\lambda t_R = 8j\pi, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.59)$$

um resultado que explica o deslocamento na escala de tempo  $\lambda t$  observado na *Fig.-2.4(b)*.

Com respeito a probabilidade de transferência de estados  $\mathcal{P}_T(t)$ , obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_{12}(0) \Big|_{1(2) \rightarrow 2(1)} \Big| \psi_{12}(t) \right\rangle &= \mathcal{N}_{\pm}^2 (\langle \alpha | \xi_2^1 \rangle \langle \varsigma | \xi_1^1 \rangle + \langle -\alpha | \xi_2^2 \rangle \langle \varsigma | \xi_1^2 \rangle \exp [2i\alpha G_2 \text{sen} (\lambda t)] \\ &\quad \pm \langle -\alpha | \xi_1^1 \rangle \langle \varsigma | \xi_1^1 \rangle \pm \langle \alpha | \xi_2^2 \rangle \langle \varsigma | \xi_1^2 \rangle \exp [2i\alpha G_2 \text{sen} (\lambda t)]), \end{aligned} \quad (2.60)$$

que tende à unidade sempre que  $\xi_1^p \rightarrow \varsigma$ ,  $\xi_2^1 \rightarrow \alpha(-\alpha)$  e  $\xi_2^2 \rightarrow -\alpha(\alpha)$ . Estas condições são satisfeitas somente quando  $\text{sen}(\Omega t_T) \text{sen}(\lambda t_T) = -1$  e  $G_1, G_2 \approx 0$ . Para o caso especial  $F = 0$ , como na *Figs.-2.4(b e c)*, a condição  $G_1, G_2 \approx 0$  é automaticamente satisfeita (como pode ser deduzido da *Eq.(2.40)*) e os modos transferem seus estados sempre que

$$t_T = (2j - 1) \frac{\pi}{2\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2\Omega}, \quad (2.61)$$

com a condição adicional que  $\text{sen}[(j - 1/2)\pi] = -\text{sen}[(k + 1/2)\pi]$ . Portanto, os máximos da probabilidade de transferência são eliminados, como observado na *Fig.-2.4(b)* (para o acoplamento “intermediário”  $\lambda/\omega_{10} = 1$ ) devido ao fato que a relação  $2j - 1 =$

$4(2k + 1)/5$  (e assim  $\sin(\Omega t_T) \sin(\lambda t_T) = -1$ ) não pode ser satisfeita para qualquer par  $(j, k)$ . Porém, devido as oscilações de  $\mathcal{P}_T(t)$  dentro da função envelope definida por  $\lambda$  ( $= 4\Omega/5$ ) a vizinhança dos máximos ainda sobrevive. Diferentemente, na *Fig.-2.4(c)* (para o regime de acoplamento forte  $\Omega/\lambda = 1$ ), a relação  $\sin(\Omega t_T) \sin(\lambda t_T) = \sin^2(\lambda t_T) \neq -1$  implica que o único máximo da probabilidade de transferência é eliminado (visto que para  $\Omega/\lambda = 1$  não existem oscilações de  $\mathcal{P}_T(t)$ , mas apenas a da função envelope). De fato, como discutido abaixo, enquanto o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  é transferido para o oscilador 2, o estado coerente  $|\zeta\rangle_2$  não é transferido para o oscilador 1, embora ambos retornem a seus respectivos sistemas. Evidentemente, a diferença de fase entre o parâmetro de acoplamento  $\lambda$  e a frequência do campo deslocado  $\omega_\ell = \Omega$  (quando  $F = 0$ ), representado pela relação  $\sin(\Omega t_T) \sin(\lambda t_T) = \sin^2(\lambda t_T) \neq -1$ , é o responsável pelo resultado.

Na *Fig.-2.4(d)*, também com  $F = 0$  mas incluindo dissipação e considerando ambos os sistemas com a mesma taxa de dissipação  $\gamma_\ell^\pm = \Gamma/2$  (onde  $\Gamma/\omega_{10} = 2 \times 10^{-3}$  e  $\lambda/\omega_{10} = 2 \times 10^{-2}$  como no regime de acoplamento fraco) observa-se a relaxação de ambas as probabilidades  $\mathcal{P}_R(t)$  (linha sólida) e  $\mathcal{P}_T(t)$  (linha pontilhada), como esperado. Para comparar as probabilidades de relaxação  $\mathcal{P}_R(t)$  e  $\mathcal{P}_T(t)$  em ambos os regimes de acoplamento entre os osciladores, na *Fig.-2.4(e)* assumimos os parâmetros  $F = 0$ ,  $\gamma_\ell^+ = 2\gamma_\ell^- = \Gamma/4$  (para ruído branco Markoviano),  $\Gamma/\omega_{10} = 2 \times 10^{-3}$  e  $\lambda/\omega_{10} = 2$  (como no regime de acoplamento forte). Observamos, comparando as *Figs.-2.4(d e e)*, que no regime de acoplamento forte os campos recorrem mais frequentemente dentro do tempo de relaxação do que no regime de acoplamento fraco. Devido ao forte acoplamento, verifica-se pela *Fig.-2.4(e)* que a dinâmica de transferência é quase completamente perdida, como na *Fig.-2.4(c)*. Na *Fig.-2.4(e)*, uma linha traço-pontilhada é traçada em 1 afim de mostrar o lento decaimento de  $\mathcal{P}_R(t)$ .

Finalmente na *Fig.-2.4(f)*, desconsiderando novamente a dissipação mas ligando a amplificação linear e tomando  $F/\omega_{20} = 1$  (isto é,  $\omega_{10} = 2\omega_{20}$ ) e  $\lambda/\omega_{10} = 2 \times 10^{-2}$  (como no regime de acoplamento fraco), observamos uma redução da probabilidade de transferência comparado a probabilidade de recorrência. Este comportamento pode ser explicado pelo resultado

$$G_1 - G_2 = \frac{F}{\Omega - \lambda}, \quad (2.62)$$

Figura 2-4: Probabilidade de transferência  $P_T(t)$  e recorrência  $P_R(t)$  de estados como uma função de  $\lambda t$ , para o estado fatorado  $|\psi_{12}\rangle = \mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\eta\rangle_2$ , considerando  $\alpha = \eta = 1$  como parâmetros reais. Em (a), (b) e (c) a relaxação e o processo de amplificação linear são desconsiderados e assumimos regimes de (a) acoplamento fraco, (b) acoplamento intermediário e (c) acoplamento forte...

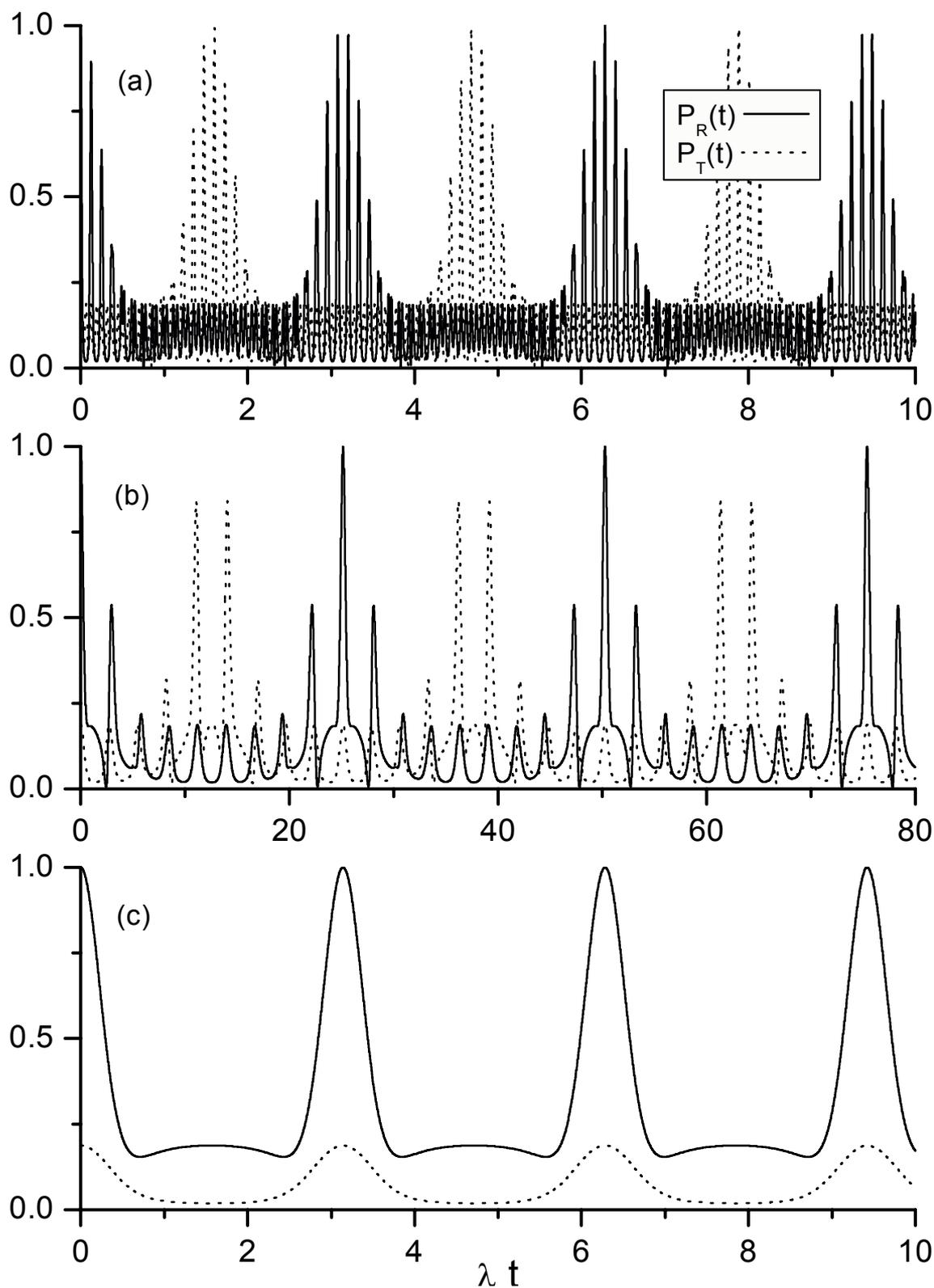
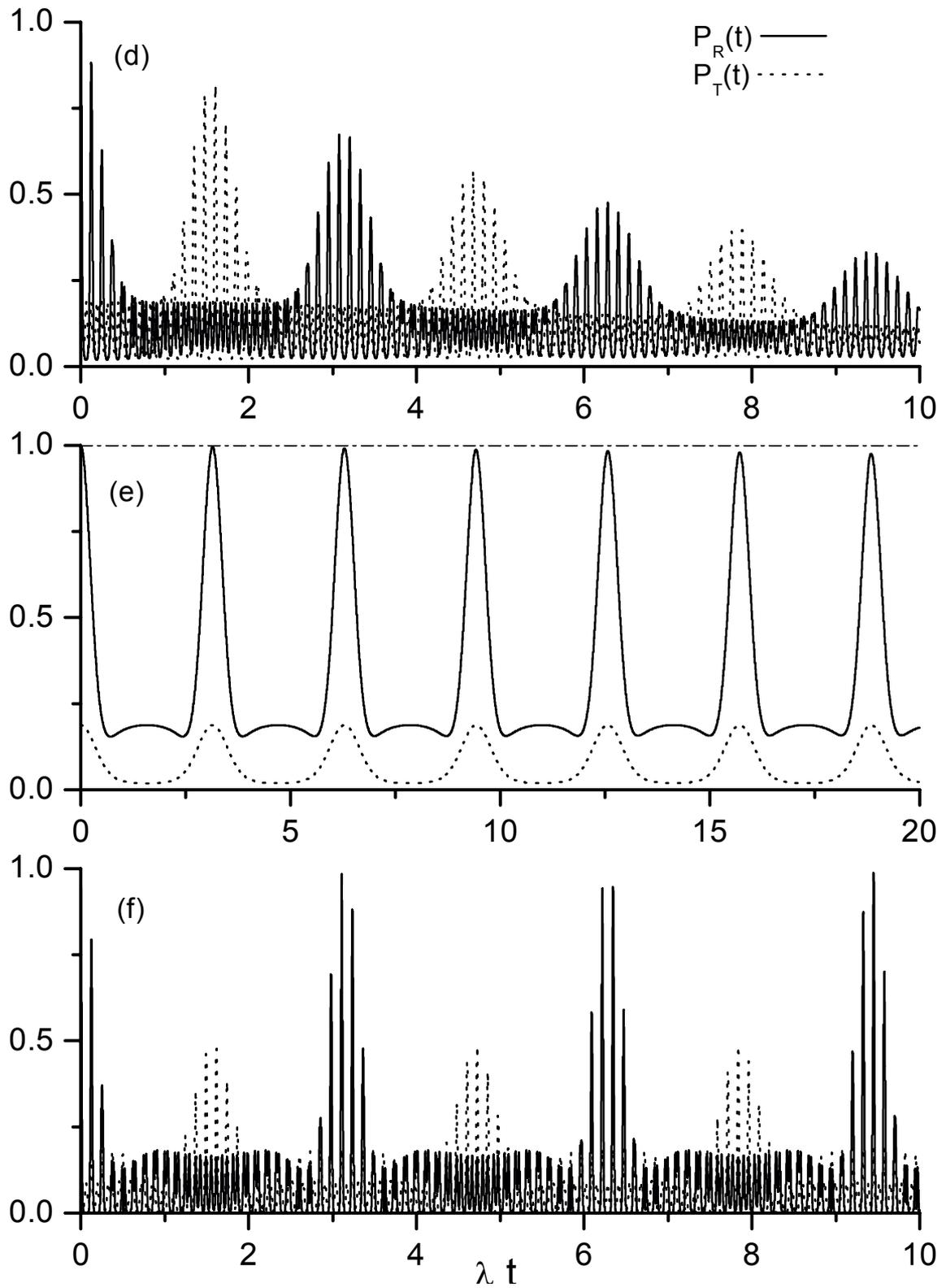


Figura 2-4: ... em (d) e (e) consideramos  $F = 0$  mas incluímos dissipação, considerando regime (d) de acoplamento fraco e (e) acoplamento forte. Finalmente, consideramos o processo de amplificação linear e dissipação em (f).



que torna-se  $1/2$  para os parâmetros considerados acima, impedindo que a probabilidade de transferência alcance a unidade, como requerido pelas condições  $\text{sen}(\Omega t_T) \text{sen}(\lambda t_T) = -1$  e  $G_1 - G_2 \approx 0$ . Assumimos nestas figuras a razão  $\nu/\omega_{10} = 10^{-2}$ , em vez da condição de ressonância  $\nu/\omega_{10} = 1/2$  adotado acima, afim de tornar claro o efeito da amplificação linear. Segue imediatamente da Eq.(2.60) que a probabilidade  $\mathcal{P}_T(t)$  é reduzida pelo fator  $\exp\{-2[F/(\Omega - \lambda)]^2\}$ , que explica o valor máximo em torno de  $1/2$  para a probabilidade  $P_T(t)$ . É útil notar que a expressão dada pela Eq.(2.62) não diverge para  $F \neq 0$ , visto que no caso em que  $\Omega = \lambda$ , sem dissipação, a Eq.(2.38) torna-se

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial \eta_1}{\partial t} - iF\lambda = 0, \quad (2.63)$$

cuja solução difere daquela levando à Eq.(2.62).

Pode ser argumentado que as dinâmicas de recorrência e transferência de estados sejam conseqüência do processo de transferência de energia entre os modos, que na presença da dissipação é severamente reduzido quando os dois modos tendem a alcançar a energia de equilíbrio com os reservatórios e a amplificação linear. Na verdade, recorrência e transferência de estados são propriedades da transferência de informação ao invés da transferência de energia entre os sistemas, embora essas quantidades estejam geralmente correlacionadas. Porém, pode ser mostrado [67] que para o acoplamento entre os modos selecionados acima, mesmo que cada modo seja mantido a energia constante, seus estados podem ser transferidos, mostrando a independência dos dois processos. Na presença do processo de relaxação, a informação transferida entre os modos é reduzida por causa da absorção da informação pelos reservatórios. Porém, quando os sistemas são fortemente interagentes, os estados do campo recorrem muitas vezes na escala de  $\lambda$  antes que a relaxação ocorra. Ainda que a recorrência dos estados não interfira no processo de relaxação do sistema, ele apresenta conseqüências notáveis na dinâmica do sistema em tempos curtos, tal como no fenômeno de decoerência que discutimos abaixo.

## 2.7 Decoerência

Até agora analisamos a dinâmica dos modos fortemente interagentes 1 e 2 para discutir os processos de transferência e recorrência de estados. Nesta *Seção*, considerando o regime de acoplamento forte, amplificação linear desligada ( $F = 0$ ) e reservatórios em zero absoluto ( $T = 0$ ), analisamos a dinâmica da decoerência do estado conjunto do sistema descrito pelo operador densidade  $\rho_{12}(t)$ . Analisamos também a decoerência dos estados dos sistemas individuais 1 e 2, descritos pelos operadores reduzidos  $\rho_1(t) = \text{Tr}_2 \rho_{12}(t)$  e  $\rho_2(t) = \text{Tr}_1 \rho_{12}(t)$ . Nesta *Seção* também consideraremos o caso de sistemas dissipativos idênticos,  $\gamma_\ell^\pm = \gamma^\pm$ . O caso de diferentes taxas de dissipação serão analisados na *Subseção 2.7.4*. A análise da decoerência é realizada considerando três diferentes estados conjuntos iniciais: primeiro, o estado não correlacionado dado pela *Eq.(2.51)* e, então, os autoestados correlacionados associados aos modos normais  $\omega_\ell^\pm$ . Derivado da *Eq.(2.44)* com  $\beta_1^1 = \beta_2^2 = \alpha$  e  $\beta_2^1 = \beta_1^2 = -\alpha$  obtemos o autoestado

$$|\varphi_{12}^-\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha, -\alpha\rangle_{12} \pm |-\alpha, \alpha\rangle_{12}), \quad (2.64)$$

associado ao modo normal  $\omega_\ell^-$ , e com  $\beta_1^1 = \beta_2^1 = \alpha$  e  $\beta_2^2 = \beta_1^2 = -\alpha$ , obtemos

$$|\varphi_{12}^+\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha, \alpha\rangle_{12} \pm |-\alpha, -\alpha\rangle_{12}), \quad (2.65)$$

que é o autoestado associado ao modo normal  $\omega_\ell^+$ .

### 2.7.1 Decoerência do Estado $|\psi_{12}\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |s\rangle_2$

A coerência de fase do estado conjunto da *Eq.(2.51)* é dado, essencialmente, pelo termo

$$\exp [-2 |\alpha|^2 (1 - \Upsilon_{11}(t))], \quad (2.66)$$

vindo dos coeficientes fora da diagonal do operador densidade da *Eq.(2.52)*. No regime de acoplamento forte o decaimento exponencial da *Eq.(2.66)*, calculado através das *Eqs.(2.39a)*-

(2.39d), reduz-se à forma

$$\exp \left[ -|\alpha|^2 \left( 2 - e^{-(\gamma_1^+ + \gamma_2^+)t} - e^{-(\gamma_1^- + \gamma_2^-)t} \right) \right]. \quad (2.67)$$

Assumindo sistemas dissipativos idênticos,  $\gamma_\ell^\pm = \gamma^\pm$ , a Eq.(2.67) simplifica-se na forma

$$\exp \left[ -|\alpha|^2 \left( 2 - e^{-2\gamma^+ t} - e^{-2\gamma^- t} \right) \right], \quad (2.68)$$

resultando em um tempo de decoerência para o sistema conjunto dado por

$$\tau_D = [2|\alpha|^2 (\gamma^+ + \gamma^-)]^{-1}. \quad (2.69)$$

No regime de acoplamento fraco, quando  $\gamma^\pm = \Gamma/2$ , o tempo de decoerência é idêntico ao caso de um modo isolado em um estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$ , que segue do decaimento exponencial

$$\exp [-2|\alpha|^2 (1 - e^{-\Gamma t})], \quad (2.70)$$

dado pela expressão bem conhecida  $\tau_D \approx \tau_R/2 |\alpha|^2 \equiv \mathcal{T}_D$ , onde  $\tau_R = \Gamma^{-1}$  entende-se pelo tempo de relaxação do sistema. Analisando o processo de decoerência à luz das densidades espectrais consideradas na Seção 2.4, observamos que para o ruído branco Markoviano ( $M$ ), onde  $\gamma^- = \gamma^+/2 = \Gamma/4$ , o tempo de decoerência calculado da Eq.(2.69) torna-se

$$\tau_D^M \approx 4\mathcal{T}_D/3. \quad (2.71)$$

Para a densidade espectral Lorentziana ( $L$ ), onde  $\gamma^\pm = \varepsilon^\pm \Gamma/2 \ll \Gamma$ , obtemos o resultado

$$\tau_D^L \approx 2\mathcal{T}_D / (\varepsilon^+ + \varepsilon^-), \quad (2.72)$$

que cresce a medida que a densidade espectral do reservatório decresce em torno dos modos normais  $\omega_\ell^\pm$ . Vale a pena salientar que no caso em que  $\varepsilon^+ = \varepsilon^-$  (isto é,  $\gamma^- = \gamma^+$ ) o canal de dissipação misto é nulo.

Finalmente, para uma densidade espectral Lorentziana larga ( $LL$ ), onde  $\gamma^- = \varepsilon^- \Gamma/2 \ll$

$\Gamma$  e  $\gamma^+ = \Gamma/2$ , obtemos da Eq.(2.69) o valor

$$\tau_D^{LL} \approx 2T_D. \quad (2.73)$$

Portanto, para sistemas fortemente acoplados, uma densidade espectral Lorentziana larga leva a um tempo de decoerência que é duas vezes maior que no regime de acoplamento fraco. O mecanismo por detrás do acréscimo do tempo de decoerência é que no regime de acoplamento forte (onde a frequência natural  $\omega_{\ell 0}$  do sistema desdobra-se nos modos normais  $\omega_{\ell}^{\pm} = \omega_{\ell} \pm \lambda$ ) a densidade espectral dos reservatórios apresenta um papel decisivo na taxa de dissipação, que também desdobra-se em duas funções Lorentzianas. Quando o modo normal  $\omega_{\ell}^{\pm}$  desloca-se para regiões onde a densidade espectral do reservatório é significativamente menor do que aquela em torno de  $\omega_{\ell 0}$ , a taxa de dissipação torna-se menor que seu valor no regime de acoplamento fraco. Além das densidades espectrais, a competição entre os canais de dissipação misto e usuais é a razão para o retardo que calculamos do processo de decoerência.

Ainda considerando o estado dado pela Eq.(2.51) e o regime de acoplamento forte, analisaremos agora os sistemas reduzidos, que obtidos da Eq.(2.49) podem ser escritos na forma

$$\rho_m(t) = \mathcal{N}_{\pm}^2 \sum_{p,q=1}^J (\pm 1)^{1-\delta_{pq}} e^{i \text{Im}(\theta_m^{pq}(t))} \left( \langle \beta_1^q | \beta_1^p \rangle^{1-|\mu_{m1}(t)|^2} \right) |\xi_m^p(t)\rangle \langle \xi_m^q(t)|, \quad (2.74)$$

onde

$$|\mu_{m1}(t)|^2 = e^{-(\gamma_1^+ + \gamma_2^+)t} + e^{-(\gamma_1^- + \gamma_2^-)t} + 2(-1)^{\delta_{m2}} \cos(2\lambda t) \exp[-(\gamma_1^+ + \gamma_2^+ + \gamma_1^- + \gamma_2^-)t/2]. \quad (2.75)$$

Observe que para sistemas idênticos,  $\gamma_{\ell}^{\pm} = \gamma^{\pm}$ , a decoerência do estado reduzido no oscilador 1 é dado pela exponencial

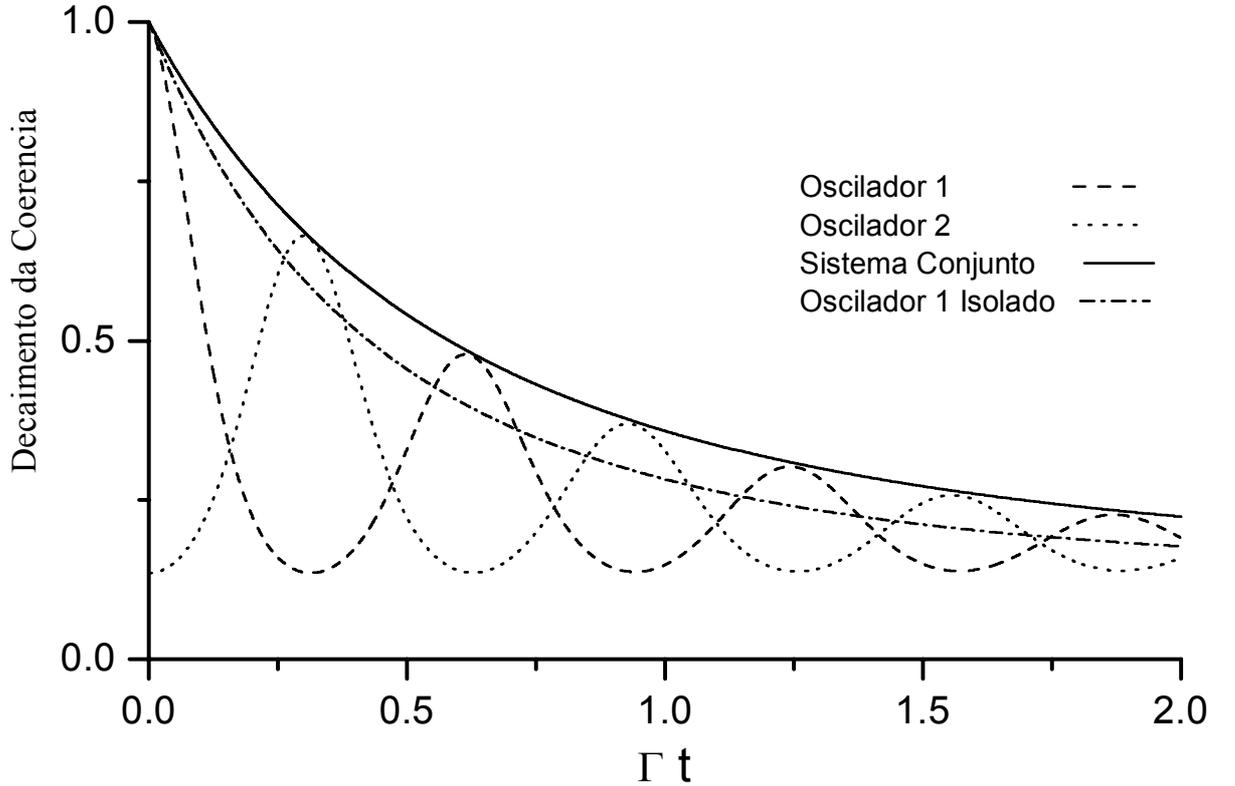
$$\exp \left\{ -2|\alpha|^2 \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( e^{-2\gamma^+ t} + e^{-2\gamma^- t} + 2 \cos(2\lambda t) e^{-(\gamma^+ + \gamma^-)t} \right) \right] \right\}, \quad (2.76)$$

enquanto que para o estado do oscilador 2 a decoerência segue da expressão

$$\exp \left\{ -2 |\alpha|^2 \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( e^{-2\gamma^+ t} + e^{-2\gamma^- t} + 2 \cos(2\lambda t + \pi) e^{-(\gamma^+ + \gamma^-) t} \right) \right] \right\}. \quad (2.77)$$

É fácil mostrar que as expressões nas *Eqs.(2.76)* e *(2.77)*, associadas aos tempos de decoerência dos estados dos sistemas 1 e 2, respectivamente, oscilam abaixo da curva para o decaimento da coerência do sistema conjunto dado pela *Eq.(2.68)*. Na *Fig.-2.5*, assumindo ruído branco Markoviano e utilizando a razão fictícia  $\lambda/\Gamma = 5$ , para tornar claro as oscilações, as linhas tracejadas e pontilhadas referem-se às dinâmicas de decoerência dos sistemas 1 e 2, ditadas pelas *Eqs.(2.76)* e *(2.77)*, respectivamente. A linha sólida repre-

Figura 2-5: Dinâmica de decoerência para o estado fatorado  $|\psi_{12}\rangle = \mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\eta\rangle_2$ , assumindo ambos os osciladores com o mesmo fator de amortecimento. Decaimento da coerência do oscilador 1, oscilador 2, sistema conjunto e um oscilador isolado com taxa de amortecimento  $\Gamma_1$ .



senta o decaimento da coerência derivado da *Eq.(2.68)* e a linha traço-pontilhada indica o decaimento da coerência para um modo isolado, calculado da *Eq.(2.70)*. Portanto, para o caso especial do estado inicialmente não emaranhado dado pela *Eq.(2.51)*, os tempos

de decoerência dos sistemas 1 e 2 coincidem com aquele do sistema conjunto.

### 2.7.2 Decoerência do Estado $|\varphi_{12}^{\pm}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} (|\alpha, -\alpha\rangle_{12} \pm |-\alpha, \alpha\rangle_{12})$

A seguir analisamos a dinâmica de decoerência do estado correlacionado dado pela Eq.(2.64) para o sistema conjunto. O processo de decoerência deste estado, no regime de acoplamento forte, é dado pelo decaimento exponencial

$$\exp \left[ -4 |\alpha|^2 \left( 1 - e^{-(\gamma_1^- + \gamma_2^-)t} \right) \right], \quad (2.78)$$

que leva em conta somente a taxa de dissipação do acoplamento sistema-reservatório em torno do modo normal  $\omega_{\ell}^-$ . É interessante identificar neste momento a contribuição do canal de dissipação misto ao processo de decoerência, que pode ser visto reescrevendo a Eq.(2.78) na forma

$$\exp \left[ -4 |\alpha|^2 \left( 1 - \exp \left[ - \sum_{\ell} (\gamma_{\ell}^+ + \gamma_{\ell}^-) t/2 \right] \exp \left[ \sum_{\ell} (\gamma_{\ell}^+ - \gamma_{\ell}^-) t/2 \right] \right) \right]. \quad (2.79)$$

Nesta expressão, o termo  $\exp [\sum_{\ell} (\gamma_{\ell}^+ - \gamma_{\ell}^-) t/2]$  decorre do canal de dissipação misto e é evidente que quando  $\sum_{\ell} (\gamma_{\ell}^+ - \gamma_{\ell}^-) > 0$ , sua contribuição torna o decaimento exponencial mais lento. Assumindo sistemas dissipativos idênticos,  $\gamma_{\ell}^- = \gamma^-$ , a equação Eq.(2.78) simplifica-se na forma

$$\exp \left[ -4 |\alpha|^2 \left( 1 - e^{-2\gamma^- t} \right) \right], \quad (2.80)$$

que leva ao tempo decoerência  $(8 |\alpha|^2 \gamma^-)^{-1}$ , que iguala  $\mathcal{T}_D/2$  no regime de acoplamento fraco, como se esperava. Porém, no regime de acoplamento forte, o tempo de decoerência torna-se  $\mathcal{T}_D$ , quando se considera ruído branco Markoviano, e é significativamente aumentado quando se considera ambas as densidades espectrais Lorentzianas ( $L$  e  $LL$ ), onde obtemos  $\mathcal{T}_D/2\varepsilon^-$ .

### 2.7.3 Decoerência do Estado $|\varphi_{12}^{\pm}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} (|\alpha, \alpha\rangle_{12} \pm |-\alpha, -\alpha\rangle_{12})$

O processo de decoerência do estado  $|\varphi_{12}^{\pm}\rangle$ , no regime de acoplamento forte, é dado pelo decaimento exponencial

$$\exp \left[ -4 |\alpha|^2 \left( 1 - e^{-(\gamma_1^+ + \gamma_2^+)t} \right) \right], \quad (2.81)$$

dependendo somente da taxa de dissipação do acoplamento sistema-reservatório em torno do modo normal  $\omega_{\ell}^+$ . Reescrevendo a Eq.(2.81) na forma

$$\exp \left[ -4 |\alpha|^2 \left( 1 - \exp \left[ - \sum_{\ell} (\gamma_{\ell}^+ + \gamma_{\ell}^-) t/2 \right] \exp \left[ - \sum_{\ell} (\gamma_{\ell}^+ - \gamma_{\ell}^-) t/2 \right] \right) \right], \quad (2.82)$$

identificamos o termo  $\exp \left[ - \sum_{\ell} (\gamma_{\ell}^+ - \gamma_{\ell}^-) t/2 \right]$  como vindo do canal de dissipação misto. É evidente que para  $\sum_{\ell} (\gamma_{\ell}^+ - \gamma_{\ell}^-) t/2 > 0$ , sua contribuição acelera o decaimento exponencial, de modo contrário ao que acontecia com o autoestado do modo normal  $\omega_{\ell}^-$ . Tomando  $\gamma_1^+ = \gamma_2^+$  a Eq.(2.81) simplifica-se, sendo dada por

$$\exp \left[ -4 |\alpha|^2 \left( 1 - e^{-2\gamma^+ t} \right) \right] \quad (2.83)$$

cujo tempo de decoerência  $(8 |\alpha|^2 \gamma^+)^{-1}$  torna-se  $\mathcal{T}_D/2$  para o regime de acoplamento fraco e também para ambas as densidades espectrais, ruído branco Markoviano e densidade espectral Lorentziana Larga, no regime de acoplamento forte. Para a densidade espectral Lorentziana, obtemos  $\mathcal{T}_D/2\varepsilon^+$ . Com base nos resultados acima, concluímos que além do tempo de decoerência depender crucialmente da densidade espectral do reservatório, o autoestado associado ao modo normal  $\omega_{\ell}^-$  é menos susceptível a decoerência que aquele associado com  $\omega_{\ell}^+$ .

### 2.7.4 Melhorando o Fator de Qualidade de um Sistema Dissipativo

Até agora analisamos apenas os casos em que ambos os sistemas apresentam as mesmas taxas de dissipação, isto é,  $\gamma_1^{\pm} = \gamma_2^{\pm}$ . Nesta *Subseção* portanto, analisaremos o processo de decoerência para estados dos osciladores com diferentes taxas de dissipação  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , notando um resultado central que se origina do efeito do acoplamento  $\lambda$  sobre os mecanismos

dissipativos. Assumimos que o estado do sistema conjunto é dado pela *Eq.(2.51)* e que o oscilador 2 tem um fator de qualidade melhor do que o oscilador 1 (isto é,  $\Gamma_1 = \Gamma \gg \Gamma_2$ ), onde se encontra a superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  que queremos proteger. A decoerência do estado 1, seguido da *Eq.(2.74)*, é então governada pelo decaimento exponencial

$$\exp \left\{ -2 |\alpha|^2 \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( e^{-\gamma^+ t} + e^{-\gamma^- t} + 2 \cos(2\lambda t) e^{-(\gamma^+ + \gamma^-)t/2} \right) \right] \right\}, \quad (2.84)$$

enquanto que o estado do campo 2, seguido da mesma *Eq.(2.74)*, é governado pela exponencial

$$\exp \left\{ -2 |\alpha|^2 \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( e^{-\gamma^+ t} + e^{-\gamma^- t} + 2 \cos(2\lambda t + \pi) e^{-(\gamma^+ + \gamma^-)t/2} \right) \right] \right\}. \quad (2.85)$$

O tempo de decoerência obtido das *Eqs.(2.84)* e *(2.85)* tem um limite superior dado pelo decaimento exponencial para o sistema conjunto

$$\exp \left[ -|\alpha|^2 \left( 2 - e^{-\gamma^+ t} - e^{-\gamma^- t} \right) \right], \quad (2.86)$$

que é derivado da *Eq.(2.67)*. Este decaimento exponencial leva a um tempo de decoerência dado por

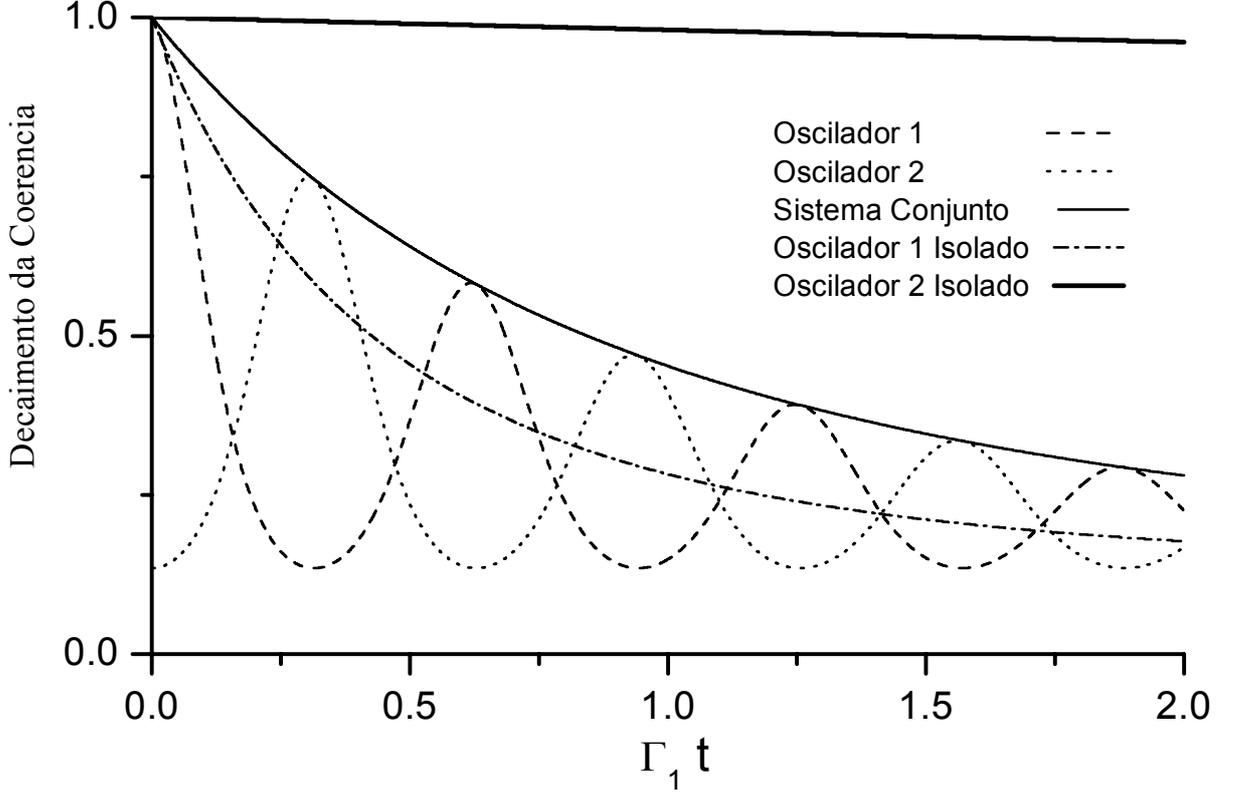
$$\tau_D = [|\alpha|^2 (\gamma^+ + \gamma^-)]^{-1}, \quad (2.87)$$

que é duas vezes o resultado encontrado na *Eq.(2.69)* para o caso de sistemas dissipativos idênticos ( $\gamma_\ell^\pm = \gamma^\pm$ ). Observe que este resultado é válido para qualquer que seja a densidade espectral do reservatório. Note que até no regime de acoplamento fraco, o tempo de decoerência de um sistema é melhorado quando este é acoplado a um outro sistema com um fator de qualidade melhor. Devemos salientar que esta conclusão é válida somente quando se considera  $\lambda \gg \gamma_\ell^\pm$ , situação que temos considerado para ambos regimes de acoplamento entre os osciladores. Evidentemente, quando  $\lambda \lesssim \gamma_\ell^\pm$ , de modo que as dinâmicas de transferência e recorrência de estados não ocorrem efetivamente antes do tempo de relaxação, o fator de qualidade de um sistema não pode ser melhorado acoplando este a um outro sistema com fator de qualidade superior.

Na *Fig.-2.6*, assumindo o regime de acoplamento fraco  $\gamma_\ell^\pm = \Gamma_\ell/2$ , considerando  $\Gamma_1/\Gamma_2 = 10^2$  e  $\lambda/\Gamma_1 = 5$  (uma razão escolhida para mostrar claramente a dinâmica

dissipativa), as linhas tracejada e pontilhada referem-se às dinâmicas de decoerência dos sistemas 1 e 2, derivadas das *Eqs.*(2.84) e (2.85), respectivamente. A linha sólida repre-

Figura 2-6: Dinâmica de decoerência para o estado fatorado  $|\psi_{12}\rangle = \mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\eta\rangle_2$ , assumindo que a taxa de amortecimento do oscilador 1 é maior que a do oscilador 2.



senta o decaimento da coerência para o sistema conjunto derivado da *Eq.*(2.86) e a linha traço-pontilhada indica o decaimento da coerência para o modo isolado 1, calculado da *Eq.*(2.70), onde o estado de superposição  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  é preparado. Porém, enquanto o sistema 1, de qualidade inferior, é efetivamente melhorado quando o acoplamos a um sistema 2, de qualidade superior, este último por sua vez, tem seu fator de qualidade efetivamente piorado. De fato a linha sólida espessa na *Fig.-2.6*, representando o processo de decoerência da superposição  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_2$ , preparada no sistema 2 isolado, de qualidade superior, apresenta um decaimento mais lento do que a linha sólida quando o sistema 2 está acoplado ao sistema 1, de qualidade inferior. Resumindo, em uma rede constituída de dois osciladores com diferentes fatores de qualidade, o oscilador de qualidade superior apresenta um taxa de dissipação maior, enquanto que o de qualidade inferior apresenta

uma taxa de dissipação menor.

Finalmente, notamos que o resultado acima pode ser teoricamente aplicado para proteger estados quânticos de superposição gerados via interação átomo-campo em cavidades abertas. Acoplando uma cavidade aberta de qualidade inferior, onde preparamos uma superposição quântica, a uma cavidade fechada de qualidade superior, podemos proteger a superposição através do acoplamento entre as cavidades e, mais adiante, em um tempo de recorrência apropriado, podemos recuperar aquele estado de superposição na cavidade aberta. O processo funciona como se o estado de superposição coerente original fosse protegido do mecanismo dissipativo pelas dinâmicas de recorrência e transferência de estados, semelhante a um sistema que é posto em contato com um reservatório de alta temperatura, mas é intermitentemente levado em contato com um reservatório de baixa temperatura. Se o intervalo entre os contatos com o reservatório de baixa temperatura é rápido o suficiente, o sistema levará mais tempo para relaxar à temperatura do reservatório de alta temperatura.

Na próxima *Seção* discutimos como o estado de superposição original pode ser recuperado no sistema de qualidade inferior após sua interação com o sistema de qualidade superior.

## 2.8 Excesso de Entropia

Para tornar claro o papel que o processo de transferência de estados desempenha na dinâmica de coerência, consideramos o estado de superposição da *Eq.(2.51)*,  $|\psi_{12}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\varsigma\rangle_2$  e apresentamos nos gráficos das *Figs.-2.7(a e b)*, as probabilidades

$$\mathcal{P}_{\ell}(t) = \langle \psi_m | \rho_{\ell}(t) | \psi_m \rangle, \quad (2.88)$$

de encontrar o estado de superposição  $|\psi_1\rangle = \mathcal{N}_{\pm} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  e o estado coerente  $|\psi_2\rangle = |\varsigma\rangle_2$  no oscilador  $\ell$ . Nessas figuras assumimos o regime de acoplamento forte ( $\lambda/\omega_{10} = 2$ ), sistemas dissipativos idênticos ( $\gamma_{\ell}^{\pm} = \gamma^{\pm}$ ) e ruído branco Markoviano ( $\gamma^+ = 2\gamma^- = \Gamma/2$ ). A razão  $\lambda/\Gamma = 20$  é posta em uma escala fictícia para uma melhor visualização das dinâmicas de recorrência e transferência de estados, visto que as fortes oscilações obtidas

Figura 2-7: Probabilidade  $\mathcal{P}_\ell(t) = \langle \psi_m | \rho_\ell(t) | \psi_m \rangle$ , de encontrar o estado de superposição  $|\psi_1\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  e o estado coerente  $|\psi_2\rangle = |\eta\rangle_2$  no oscilador  $\ell$ . Consideramos (a)  $\ell = 1$  e (b)  $\ell = 2$ . Nessas figuras o regime de acoplamento forte é assumido junto com sistemas dissipativos idênticos e ruído branco Markoviano.

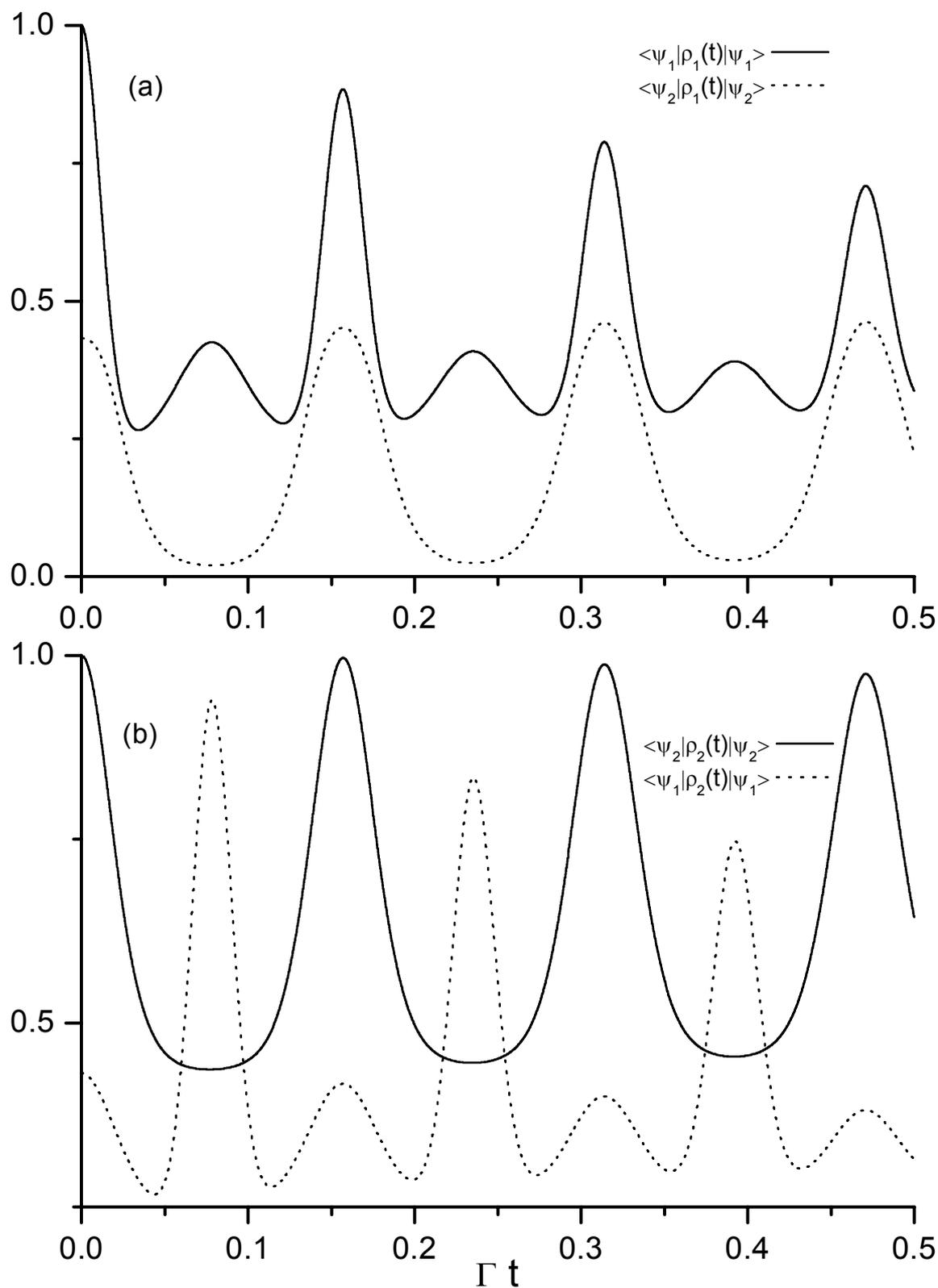
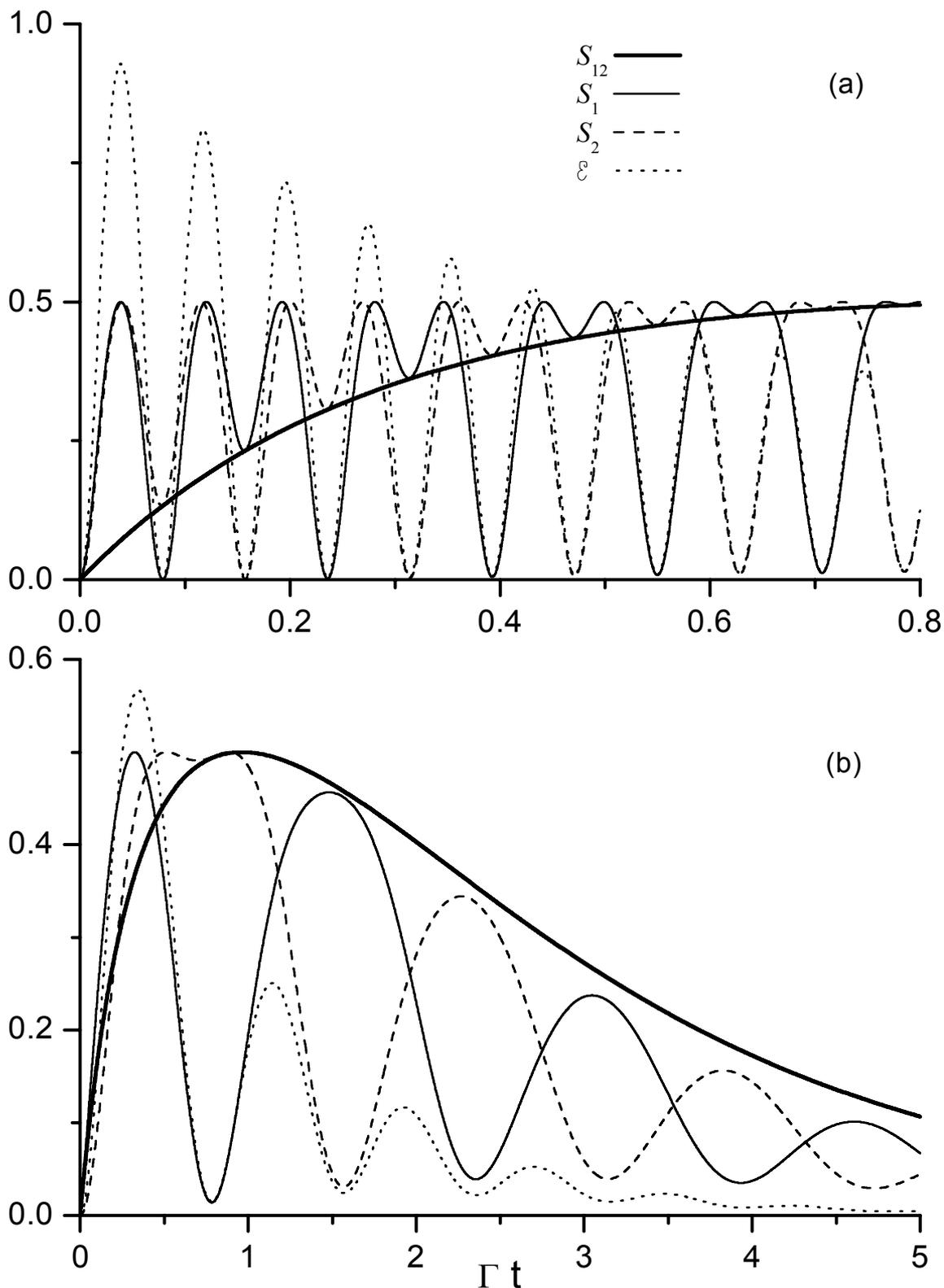


Figura 2-8: Entropia linear para o estado conjunto ( $\mathcal{S}_{12}(t) = 1 - \text{Tr} \rho_{12}^2(t)$ ), os estados reduzidos do oscilador 1 e 2 ( $\mathcal{S}_\ell(t) = 1 - \text{Tr} \rho_\ell^2(t)$ ) e o excesso de entropia. Em (a) as dinâmicas de transferência e recorrência são apresentadas até o entorno de um tempo de correlação  $\tau_C$  quando uma correlação permanente é desenvolvida entre os osciladores. Em (b) estamos preocupados com a relaxação da rede.



com valores realistas de  $\lambda$  borriariam as curvas devido a lenta dinâmica dissipativa.

Da linha sólida na *Fig.-2.7(a)*, observamos que a superposição  $|\psi_1\rangle$  recorre ao oscilador 1, apesar do processo dissipativo. Porém, o estado coerente  $|\zeta\rangle_2$  não é transferido para o oscilador 1, como indicado pela linha pontilhada. De fato, a transferência do estado coerente  $|\zeta\rangle_2$  para o oscilador 1 deve ser indicado pela ocorrência de máximos da linha pontilhada entre aqueles da linha sólida. Na *Fig.-2.7(b)* observamos que o estado coerente  $|\zeta\rangle_2$  recorre ao oscilador 2, como indicado pela linha sólida. Além disso, o estado  $|\psi_1\rangle$  também é transferido para o oscilador 2 (linha pontilhada), indicando que a superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$  é completamente transferida entre os sistemas, diferentemente do estado coerente que não é transferido para o oscilador 1. Portanto, da *Fig. 2.7(a)* concluímos que o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$ , preparado em um sistema de qualidade inferior, é protegido da decoerência através do acoplamento deste com um sistema de qualidade superior, que pode facilmente ser recuperado no sistema 1 desligando o acoplamento nos tempos de recorrência  $t_R = j\pi/\lambda$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . É claro que depois deste tempo, o estado de superposição estará no oscilador 1 com uma fidelidade menor do que a unidade devido ao processo dissipativo.

Nas *Figs.-2.8(a e b)* apresentamos os comportamentos da entropia linear para o estado conjunto da *Eq.(2.51)* ( $\mathcal{S}_{12}(t) = 1 - \text{Tr} \rho_{12}^2(t)$ ) e os estados reduzidos do oscilador 1 e 2 ( $\mathcal{S}_\ell(t) = 1 - \text{Tr} \rho_\ell^2(t)$ ). Nessas figuras empregamos os mesmos parâmetros considerados na *Fig.-2.7*, exceto que na *Fig.-2.8(b)* utilizamos a razão  $\lambda/\Gamma = 2$ , em vez de  $\lambda/\Gamma = 20$ , para mostrar claramente a dinâmica dissipativa. Na *Fig.-2.8(a)* analisamos as dinâmicas de recorrência e transferência de estados considerando a evolução temporal até aproximadamente o tempo de correlação  $\tau_C$ , definido como o tempo no qual o valor da entropia  $\mathcal{S}_1(t)$  ( $\mathcal{S}_2(t)$ ) eleva-se para o entorno de 0.01 nos tempos de transferência (recorrência). De fato, como mostrado na *Fig.-2.8(a)*, o mínimo da entropia  $\mathcal{S}_\ell(t)$  afasta-se de zero devido ao desenvolvimento de uma inevitável correlação entre os osciladores (devido ao canal de dissipação misto), que deste modo tornam-se permanentemente emaranhados. Este tempo de correlação, estimado como o tempo no qual o mínimo de  $\mathcal{S}_\ell(t)$  aproxima-se de 0.01, é dado por

$$\tau_C \approx \frac{1}{5|\alpha| |\sum_\ell (\gamma_\ell^+ - \gamma_\ell^-)|}. \quad (2.89)$$

Da Eq.(2.89) concluímos que para o regime de acoplamento fraco, onde  $\gamma_\ell^+ = \gamma_\ell^-$ , o tempo de correlação vai à infinito, isto é, a entropia  $\mathcal{S}_1(t)$  ( $\mathcal{S}_2(t)$ ) sempre retorna a zero nos tempos de transferência (recorrência). Portanto, no regime de acoplamento fraco, os osciladores não se correlacionam permanentemente (devido a ausência do canal de dissipação misto), visto que  $\mathcal{S}_1(t)$  ( $\mathcal{S}_2(t)$ ) sempre retorna a zero nos tempos de transferência (recorrência). Dessa forma, somos capazes de recuperar um estado de superposição em um oscilador de qualidade inferior acoplado-o a um outro de qualidade superior. Todavia, até mesmo no regime de acoplamento forte, a correlação desenvolvida entre os osciladores pode não afetar significativamente o processo de recuperação de um estado de superposição em um oscilador de qualidade inferior que se acopla a outro de qualidade superior. Visto que a razão  $\tau_C/\tau_D$  obedece a relação

$$\frac{\tau_C}{\tau_D} \approx \frac{|\alpha| \sum_\ell (\gamma_\ell^+ + \gamma_\ell^-)}{5 \left| \sum_\ell (\gamma_\ell^+ - \gamma_\ell^-) \right|}, \quad (2.90)$$

para  $\tau_C/\tau_D \gtrsim 1$  pode-se sempre recuperar o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$ , com uma fidelidade considerável, apesar do processo de correlação entre os osciladores.

A conclusão que se obtém da Fig.-2.8(a) é que a dinâmica de recorrência devido ao forte acoplamento entre os osciladores tende a restaurar a coerência dos estados iniciais, enquanto que a dinâmica dissipativa promove o processo de decoerência. Na Fig.-2.8(b) a entropia linear do sistema conjunto  $\mathcal{S}_{12}(t)$ , representado pela linha sólida espessa, parte de zero, atinge um máximo devido ao processo de decoerência e então retorna a zero, visto que no limite assintótico ambos os osciladores alcançam um estado puro: o vácuo ou algum estado coerente cuja excitação depende do parâmetro de amplificação  $F$ . Enquanto isso, como mostrado na Fig.-2.8(a), a entropia linear  $\mathcal{S}_\ell(t)$  do estado reduzido do oscilador  $\ell$  oscila entre zero e 0.5. A entropia linear  $\mathcal{S}_1(t)$  ( $\mathcal{S}_2(t)$ ), linha sólida (tracejada), torna-se zero quando o oscilador 1 (2) assume o estado  $|-\zeta\rangle_1$  ( $|\zeta\rangle_2$ ), como pode ser calculado pela Eq.(2.47). Ao mesmo tempo,  $\mathcal{S}_2(t)$  ( $\mathcal{S}_1(t)$ ) toca (por cima) na linha sólida representando a entropia linear para o estado conjunto do sistema  $\mathcal{S}_{12}(t)$ , indicando que a superposição  $|\psi_1\rangle$  foi transferida (recuperada) para o oscilador 2 (1) a caminho da decoerência. A correlação máxima entre os campos ocorre nos pontos onde as curvas de recorrência e transferência se cruzam, como mostrado pela linha pontilhada representando o excesso de

entropia, que é definida pela expressão

$$\mathcal{E}(t) \equiv \mathcal{S}_1(t) + \mathcal{S}_2(t) - \mathcal{S}_{12}(t). \quad (2.91)$$

Também observamos que o mínimo do excesso de entropia  $\mathcal{E}(t)$  afasta-se de zero, devido ao desenvolvimento de uma inevitável correlação entre os osciladores. Retornando à *Fig.-2.8(b)*, vemos que a correlação  $\mathcal{S}_{12}(t)$ , após alcançar seu máximo, decai exponencialmente como resultado da dissipação e do processo de amplificação linear, alcançando zero no limite assintótico, quando não existe nenhuma correlação entre os campos descrito pelos estados coerentes estacionários fatorados. Durante o decaimento da correlação  $\mathcal{S}_{12}(t)$ , a entropia linear  $\mathcal{S}_\ell(t)$  do estado reduzido do oscilador  $\ell$  não alcança o valor  $\mathcal{S}_{12}(t)$ , devido a correlação entre os sistemas 1 e 2 descrito pelo excesso de entropia  $\mathcal{E}(t)$ .

## 2.9 Conclusão

Apresentamos neste *Capítulo* um tratamento detalhado da dinâmica de coerência em uma rede composta por dois osciladores dissipativos acoplados. Primeiramente derivamos uma equação mestra para ambos os regimes de acoplamento fraco e forte entre os osciladores. No regime de acoplamento fraco o mecanismo dissipativo dos osciladores individuais não é significativamente afetado pela interação entre os mesmos, que aparece somente no termo de von Neumann da equação mestra. No entanto, no regime de acoplamento forte a evolução temporal do operador densidade do sistema conjunto é modificada pela inclusão de um canal de dissipação misto, representado pelo operador de Liouville  $\mathcal{L}_{12}\rho_{12}(t)$ , que responde pelo acoplamento forte entre os osciladores. O surgimento deste canal de dissipação misto leva a propriedades interessantes da dinâmica de coerência de osciladores fortemente acoplados.

Após o desenvolvimento matemático, analisamos as dinâmicas de recorrência e transferência de estados, isto é, a probabilidade de cada oscilador retornar a seu estado inicial e a probabilidade de transferência dos estados entre os osciladores, respectivamente. Em particular, analisamos esses processos para o caso em que ambos os osciladores, preparados no estado conjunto  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\eta\rangle_2$ , apresentam a mesma taxa de dissipação  $\Gamma$ .

No regime de acoplamento fraco os processos de recorrência e transferência de estados são completamente alcançados afora a relaxação dos estados do campo devido a dissipação. Porém, a caminho do regime de acoplamento forte, observa-se que o processo de recorrência permanece inalterado enquanto que a dinâmica de transferência é gradualmente perdida. No regime de acoplamento forte a dinâmica de transferência é completamente perdida devido a interferência destrutiva das fases entre o parâmetro de acoplamento  $\lambda$  e as frequências deslocadas dos campos  $\omega_\ell$ , como explicado na *Seção 2.6*. Evidentemente, no regime de acoplamento forte, antes que o processo de relaxação atue significativamente, os estados dos campos recorrem muito mais vezes do que no regime de acoplamento fraco.

A seguir, conhecendo a dinâmica de decoerência no regime de acoplamento fraco, governada pela equação mestra usual (2.21a), onde o operador de Liouville  $\mathcal{L}_\ell \rho_{12}(t)$  leva em conta os efeitos do reservatório sobre o oscilador  $\ell$ , voltamo-nos para o processo de decoerência no regime de acoplamento forte. Neste regime, as frequências dos modos normais do sistema acoplado ( $\omega_\ell^\pm = \omega_\ell \pm \lambda$ ) são fortemente deslocadas das frequências naturais dos osciladores  $\omega_{\ell 0}$ , sendo levadas para regiões do espaço das frequências dos reservatórios onde as densidades espectrais podem ser significativamente diferentes daquela em torno de  $\omega_{\ell 0}$ . Como as densidades espectrais dos reservatórios desempenham um papel importante neste regime, três diferentes funções espectrais foram consideradas para a nossa análise do processo de decoerência. Quando a frequência do modo normal  $\omega_\ell^-$  é deslocada para regiões em torno da origem do espaço das frequências, mesmo considerando o caso de ruído branco Markoviano, verificamos que a taxa de dissipação do oscilador  $\ell$ , em torno de  $\omega_\ell^-$ , torna-se metade de seu valor em torno de  $\omega_\ell^+$  (isto é,  $\gamma_\ell^- = \Gamma/4$ ). Quando consideramos, em vez disso, uma função espectral Lorentziana, que aproxima-se de zero em torno da origem do espaço das frequências do reservatório, a taxa de dissipação  $\gamma_\ell^-$  torna-se ainda menor, resultando em tempos de decoerência para estados do sistema conjunto e dos sistemas reduzidos significativamente maiores do que o resultado calculado para um único sistema dissipativo. Na *Seção 2.7* os tempos de decoerência para três diferentes estados do sistema composto são calculados, considerando as três funções espectrais distintas do reservatório, conforme a *Seção 2.4*. Afora a dependência do tempo de decoerência com relação as densidades espectrais dos reservatórios, salientamos que o decaimento da coerência dos autoestados do modo normal  $\omega_\ell^-$  torna-se menor do que

aquele para o autoestado do modo normal  $\omega_\ell^+$ .

Como discutido na *Seção 2.4*, afora a possibilidade de considerar sistemas físicos particulares com densidades espectrais dos reservatórios apropriadas, é possível que funções espectrais específicas possam ser implementadas através da engenharia de reservatórios. A difícil tarefa de implementação de interações fortes entre os osciladores, junto com a obtenção de funções espectrais específicas dos reservatórios, são os problemas mais sensíveis no processo proposto da realização física da rede de dois osciladores acoplados. Porém, esta proposta pode fornecer uma motivação para futuras investigações teóricas e experimentais. Em particular, a proposta pode ser aplicada para testar a aproximação de ruído branco Markoviano ou sondar as funções espectrais de reservatórios.

Quando se considera que os dois sistemas possuem diferentes taxas de dissipação  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  (com  $\lambda \gg \Gamma_1, \Gamma_2$ ), demonstramos que o acoplamento entre os sistemas, independentemente de sua intensidade, faz com que o sistema com fator de qualidade superior (inferior) torne-se efetivamente pior (melhor). Este resultado pode ser empregado para melhorar o fator de qualidade de uma cavidade, e deste modo proteger estados de superposição quânticos gerados, via interação átomo campo, em cavidades abertas com fator de qualidade inferior acopladas a cavidades fechadas com fator de qualidade superior. Evidentemente, este resultado aplica-se ao regime de acoplamento fraco dado que assumimos que a intensidade de acoplamento  $\lambda$  é significativamente maior do que as taxas de dissipação do sistema para ambos os regimes. De fato, quando consideramos  $\lambda \gg \Gamma_\ell$ , o aumento calculado do fator de qualidade de um sistema segue-se das dinâmicas de recorrência e transferência de estados que ocorrem muitas vezes antes do tempo de relaxação, protegendo um estado do campo originalmente preparado em um sistema de fator de qualidade inferior em um sistema de fator de qualidade superior.

Finalmente, desenvolvemos uma análise cuidadosa do excesso de entropia em uma rede de 2 osciladores. Supondo que o sistema conjunto seja preparado no estado fatorado  $|\psi_{12}\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\eta\rangle_2$ , observamos que no regime de acoplamento fraco as dinâmicas de recorrência e transferência de estados ocorrem de forma ininterrupta até a relaxação, isto é, o excesso de entropia sempre retorna a zero nos tempos de transferência e recorrência dos estados. Portanto, no regime de acoplamento fraco ambos os osciladores sempre desemaranhar-se-ão nos tempos de recorrência e transferência. Diferen-

temente, no regime de acoplamento forte uma correlação é desenvolvida entre os estados  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$  e  $|\eta\rangle$  de maneira que eles permanecem permanentemente emaranhados após um intervalo que denominamos tempo de correlação. Desta maneira, não podemos recuperar - com uma fidelidade igual a unidade - um estado de superposição  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$  preparado em um sistema de fator de qualidade inferior e protegido da decoerência através de um acoplamento forte deste sistema com um outro com fator de qualidade superior. Porém, podemos calcular a amplitude  $|\alpha|$  do campo inicial que torna o tempo de correlação maior do que o tempo de decoerência, permitindo a recuperação do estado de superposição  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$  com uma boa fidelidade.

Uma das principais restrições à realização da computação quântica é que mesmo se cada unidade lógica for levemente afetada pelo processo de decoerência, o acoplamento de um grande número de tais células lógicas, para implementações realistas como a fatoração de grandes números [16, 42], deve diminuir o tempo de decoerência de tal maneira que o processo de computação total torna-se seriamente comprometido [44]. No entanto, neste *Capítulo* mostramos que ao menos para dois sítios fortemente acoplados, o processo de decoerência não é governado simplesmente pela excitação do estado envolvido na operação lógica e pela taxa de dissipação das células lógicas. Em uma rede quântica fortemente interagente o processo de decoerência é retardado pelos canais de dissipação mistos que decorrem do acoplamento forte entre as células lógicas. Vale ressaltar que para um sistema de dois níveis, existe um efeito que explica este resultado. Este efeito é conhecido como monogamia de emaranhamento e é discutido por Koashi e Winter em um trabalho recente [68]. A idéia (em termos de qubits) é que um *qubit* que está emaranhado com outro, não pode ser completamente emaranhado com um terceiro. Quanto maior for o emaranhamento entre dois *qubits*, menor será o emaranhamento com um outro sistema, como por exemplo, um reservatório.

Desta forma, a discussão acerca de osciladores fortemente interagentes que apresentamos é central para o entendimento do processo de decoerência em uma rede quântica; especificamente, nossa conclusão é que o tempo de decoerência depende não somente da excitação do emaranhamento envolvido na operação lógica mas também da intensidade de acoplamento entre as unidades lógicas. Portanto a análise da dinâmica de uma rede composta por um número grande de osciladores faz-se necessária nos *Capítulos 3 e 4* desta

Tese.

# Capítulo 3

## Rede Simétrica de $N$ Osciladores Dissipativos Acoplados

### 3.1 Introdução

Desde a descoberta feita por Shor [16] de que o processamento de informação quântica proporciona um meio de fatorar números inteiros muito mais eficiente que a computação convencional, o tema de Redes Quânticas tem atraído considerável atenção na literatura. A contribuição de Shor faz com que uma variedade de fenômenos quânticos, de papel meramente teórico no contexto da fundamentação da mecânica quântica, possam ser utilizados na inauguração de uma possível nova tecnologia para comunicação [17] e computação [11, 12, 13, 14, 15, 16]. Além do caráter notável das superposições de estados quânticos, que trazem um ingrediente central para um processador de informação quântica – os bits quânticos – emaranhamento e não localidades também apresentam papéis importantes no emergente cenário da informação quântica. O fenômeno da interferência, característico de estados quânticos de superposição, permite que caminhos de computação paralelos possam somar-se ou cancelar-se mutuamente, dependendo de suas fases relativas [69]. Em um processador quântico, o emaranhamento e não localidade não só são indispensáveis para a correlação dos bits quânticos de entrada em uma porta lógica, como também permitem que bits quânticos sejam transmitidos de um nodo a outro da rede pelo teletransporte de estados [4, 7].

Enquanto que as superposições e emaranhamentos de estados quânticos compõem os

principais ingredientes para o processamento da informação quântica, um outro fenômeno quântico fundamental, o processo de decoerência [25, 36, 44], atua no sentido de destruir os bits quânticos e suas correlações. É geralmente aceito que o processo de decoerência é o principal fator a ser superado para o processamento massivo de informação. Como a decoerência decorre do inevitável acoplamento de sistemas quânticos com o meio ambiente, bem como das flutuações originárias das muitas interações necessárias para se manipular a informação quântica, torna-se extremamente difícil contornar este fenômeno. No entanto, como mencionado no *Capítulo* anterior, novas idéias tem sido sugeridas para tornar possível o controle do processo de decoerência de estados de superposição. O problema de encontrar códigos eficientes de correção de erros quânticos, similares àqueles do processamento de informação clássica, é o principal desafio da teoria de informação quântica atual [70]. Além disso, foram apresentadas propostas para a engenharia de reservatórios quânticos, onde interações adicionais com o sistema de interesse são empregadas no intuito de enfraquecer o inevitável acoplamento do sistema com o meio ambiente. O programa de engenharia de reservatórios quânticos tem atraído atenção especialmente no domínio de íons armadilhados [48, 49, 50] e, especificamente, apresentou-se um esquema para a engenharia de interações do tipo reservatório comprimido para a proteção de um sistema de dois níveis contra decoerência [71].

Paralelamente à recente realização experimental do algoritmo de fatoração quântica de Shor, usando ressonância magnética nuclear [15], houve, nos últimos anos, um crescente interesse pela dinâmica de coerência em uma rede quântica. Conforme esclarecemos no *Capítulo* anterior, para uma simples rede de dois osciladores acoplados, apresentou-se um modelo teórico [54] para uma proposta experimental anterior [53], onde o acoplamento dos osciladores com seus reservatórios são levados em conta quando a reversibilidade da perda de coerência é analisada. Um sistema de duas cavidades acopladas foi também analisado na Ref. [55], na qual se considera somente que uma das cavidades interage com o reservatório; uma equação mestra é derivada para o caso em que as cavidades são fortemente acopladas e mostrado que os termos de relaxação não são simplesmente os operadores de Liouville usuais, obtidos quando se despreza a interação entre as cavidades. Nesta Tese analisamos o processo de decoerência reversível, como analisado em [53, 54], mas considerando também o regime de acoplamento forte entre as cavidades, como em

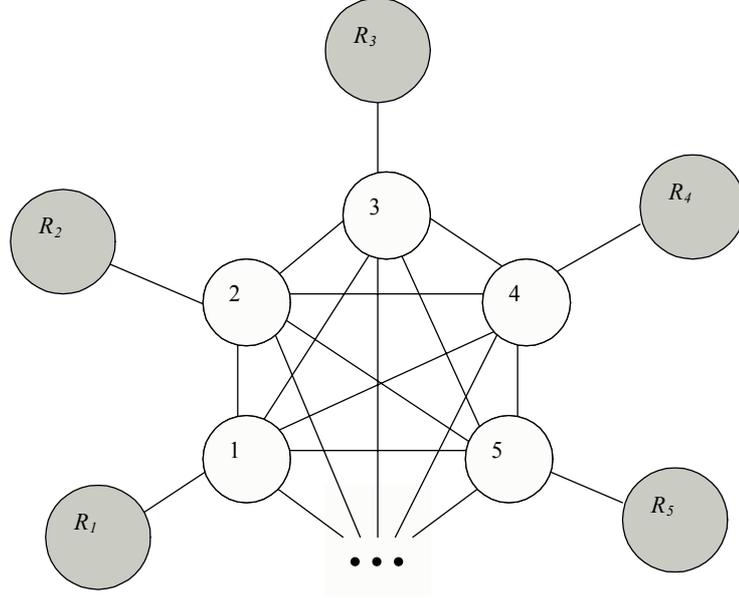
[55]. Um método para modelar a decoerência em um sistema quântico  $N$ -dimensional acoplado a um reservatório quântico  $N^2$ -dimensional, foi recentemente apresentado em [72].

Para um passo adiante rumo a processadores de informação quântica mais realistas, neste *Capítulo* estaremos interessados no fenômeno de não localidade e decoerência no contexto de uma rede de  $N$  osciladores dissipativos interagentes, considerando uma rede simétrica em que todos os osciladores interagem entre si como mostra a *Fig.-3.1*. No próximo *Capítulo* analisamos uma topologia diferente, que denominamos *Rede Central*, na qual somente o oscilador central interage com os demais  $N - 1$  osciladores periféricos. Note que para o caso de uma rede simétrica qualquer um dos  $N$  osciladores constituintes da rede pode ser o objeto de nossa análise, enquanto que para o caso da rede central estaremos interessados exatamente no oscilador central. Em ambas as topologias estaremos interessados na dinâmica de coerência e decoerência de estados quânticos conjuntos da rede e estados reduzidos de osciladores particulares. Especificamente, analisaremos o processo de decoerência, focalizando sobre um único oscilador, que além de interagir com seu reservatório, interage também com os demais  $N - 1$  osciladores acoplados mais seus respectivos reservatórios.

## 3.2 Rede Simétrica

Para uma rede composta por  $N$  osciladores, existem diversas maneiras pelas quais podemos acoplá-los. Neste *Capítulo* analisamos o caso de uma rede simétrica, onde todos os osciladores, com mesma frequência natural  $\omega_0$ , interagem entre si com a mesma constante de acoplamento  $\lambda$ , como mostra a *Fig.-3.1*. Também assumimos que as interações entre os osciladores, bem como aquelas entre os osciladores e seus reservatórios são descritas através da aproximação de onda girante. Como o regime de acoplamento forte será analisado, empregamos um Hamiltoniano positivo definido, conforme foi discutido no *Capítulo* anterior. Considere, daqui em diante, que os índices  $m$  e  $n$  rotulam os osciladores da rede,

Figura 3-1: Esquema de uma rede simétrica em que todos os osciladores ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) interagem entre si e com seus respectivos reservatórios  $R_m$ .



isto é, variam de 1 à  $N$ , e que o Hamiltoniano do sistema seja representado por

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{m,n(m \neq n)} \frac{\omega_0}{N-1} \left( a_m^\dagger + (N-1) \frac{\lambda}{2\omega_0} a_n^\dagger \right) \left( a_m + (N-1) \frac{\lambda}{2\omega_0} a_n \right) \\
 & + \sum_{m,k} \omega_{mk} \left( b_{mk}^\dagger + \frac{V_{mk}}{\omega_{mk}} a_m^\dagger \right) \left( b_{mk} + \frac{V_{mk}}{\omega_{mk}} a_m \right), \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

onde  $a_m^\dagger$  e  $a_m$  são, respectivamente, os operadores de criação e destruição dos osciladores ao passo que  $b_{mk}^\dagger$  e  $b_{mk}$  representam os operadores análogos para o  $k$ -ésimo modo do reservatório associado ao  $m$ -ésimo oscilador do sistema, cuja frequência e intensidade do acoplamento correspondente são  $\omega_{mk}$  e  $V_{mk}$ , respectivamente. Assumindo que o acoplamento entre os osciladores e seus respectivos reservatórios satisfazem a condição  $\sum_k (V_{mk})^2 / \omega_{mk} \ll$

$\omega_0$ , obtemos da Eq.(3.1) o Hamiltoniano  $H = H_0^S + H_0^R + V$ , onde

$$H_0^S = \tilde{\omega}_0 \sum_m a_m^\dagger a_m + \frac{\lambda}{2} \sum_{m,n(m \neq n)} (a_m^\dagger a_n + a_m a_n^\dagger), \quad (3.2a)$$

$$H_0^R = \sum_{m,k} \omega_{mk} b_{mk}^\dagger b_{mk}, \quad (3.2b)$$

$$V = \sum_{m,k} V_{mk} (a_m^\dagger b_{mk} + a_m b_{mk}^\dagger) \quad (3.2c)$$

e  $\tilde{\omega}_0$  está relacionado a frequência natural  $\omega_0$  pela relação

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 \left[ 1 + (N-1)^2 \frac{\lambda^2}{(2\omega_0)^2} \right]. \quad (3.3)$$

É importante notar, através da Eq.(3.3), que até mesmo no limite de acoplamento fraco ( $\lambda/\omega_0 \ll 1$ ) a frequência natural será apreciavelmente deslocada quando  $\lambda/(2\omega_0) \gtrsim 1/(N-1)$ . Portanto, sempre que  $\lambda/(2\omega_0) \gtrsim 1/(N-1)$  temos que partir de um Hamiltoniano positivo definido dado pela Eq.(3.1). Note que como estamos assumindo acoplamento fraco entre o sistema e seus reservatórios, como feito no *Capítulo* anterior, é desnecessário escrever essas interações na forma positivo definida, como realizado na Eq.(3.1). Porém, vale lembrar que a forma positivo definida para o acoplamento entre os osciladores do sistema garante que o espectro de energia possua um limite inferior para qualquer que seja o valor do acoplamento  $\lambda$ .

O Hamiltoniano  $H_0^S$  pode ser diagonalizado através das transformações canônicas

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n a_n, \quad (3.4a)$$

$$A_\ell = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell-1)}} \left( \sum_{j=1}^{\ell-1} a_j - (\ell-1)a_\ell \right), \quad (3.4b)$$

onde, daqui por diante,  $\ell = 2, 3, \dots, N$  e o operador  $A_m$  satisfaz as mesmas regras de comutação que  $a_m$ , isto é,  $[A_m, A_n] = 0$  e  $[A_m, A_n^\dagger] = \delta_{mn}$ . Estes novos operadores desacoplam as interações diretas entre os osciladores. Conseqüentemente, interações indiretas entre os osciladores serão criadas através de seus respectivos reservatórios, como

descrito pelo Hamiltoniano  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_I$ , com

$$\mathbf{H}_0 = \sum_m \left( \Omega_m A_m^\dagger A_m + \sum_k \omega_{mk} b_{mk}^\dagger b_{mk} \right), \quad (3.5a)$$

$$\mathbf{H}_I = \sum_{m,n,k} C_{mn} V_{nk} \left( A_m^\dagger b_{nk} + A_m b_{nk}^\dagger \right). \quad (3.5b)$$

As frequências deslocadas, correspondendo aos modos normais do sistema acoplado, são dadas por

$$\Omega_1 = \tilde{\omega}_0 + (N-1)\lambda, \quad (3.6a)$$

$$\Omega_\ell = \tilde{\omega}_0 - \lambda, \quad (3.6b)$$

enquanto que o coeficiente  $C_{mn}$  satisfaz as relações  $C_{1n} = 1/\sqrt{N}$ ,  $C_{\ell 1} = 1/\sqrt{\ell(\ell-1)}$ ,  $C_{\ell\ell} = -\sqrt{(\ell-1)/\ell}$ ,  $C_{\ell\ell'} = 0$  para  $\ell < \ell'$  e  $C_{\ell\ell'} = 1/\sqrt{(\ell-1)\ell}$  para  $\ell' < \ell < N$ . Assim como  $\ell$ , assumimos que  $\ell' = 2, \dots, N$ . Pelo Hamiltoniano da Eq.(3.5b), fica claro que os novos operadores  $A_m$  representam osciladores desacoplados que interagem, todavia, com os  $N$  reservatórios. Sem o acoplamento direto entre os osciladores, como modelado pelo Hamiltoniano  $\mathbf{H}$ , torna-se mais simples derivar a equação para a evolução da matriz densidade dos  $N$  osciladores acoplados,  $\rho_{1,\dots,N}(t)$ . Na representação de interação, considerando até segunda ordem de perturbação, verificamos que

$$\frac{d}{dt} \rho_{1,\dots,N}(t) = - \int_0^t dt' \text{Tr}_R \left[ \mathbf{V}(t), [\mathbf{V}(t'), \rho_R(0) \otimes \rho_{1,\dots,N}(t')] \right], \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{V}(t) = \exp(i\mathbf{H}_0 t) \mathbf{H}_I \exp(-i\mathbf{H}_0 t)$ . Definindo os operadores do reservatório  $\mathcal{O}_{mn}^\dagger(t) = \sum_k V_{nk} b_{nk}^\dagger \exp[i(\omega_{nk} - \Omega_m)t]$ , verificamos que  $\mathbf{V}(t) = \sum_{m,n} C_{mn} (A_m^\dagger \mathcal{O}_{mn} + A_m \mathcal{O}_{mn}^\dagger)$ . As integrais que aparecem na Eq.(3.7), relacionam-se as funções de correlação da forma

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt' \left\langle \mathcal{O}_{mn}(t) \mathcal{O}_{m'n'}^\dagger(t') \right\rangle \\ &= \sum_{k,k'} \int_0^t dt' V_{nk} V_{nk'} \left\langle b_{nk} b_{nk'}^\dagger \right\rangle \exp \left\{ -i [(\omega_{nk} - \Omega_m) t - (\omega_{nk'} - \Omega_{m'}) t'] \right\}, \quad (3.8) \end{aligned}$$

onde, como  $m$  e  $n$ , assumiremos daqui por diante que  $m'$  e  $n'$  variam de 1 à  $N$ . Assumindo que o espaçamento entre as frequências do reservatório seja suficientemente pequeno de

forma a permitir uma soma contínua e lembrando que a função  $\mathbf{N}_n(\omega_{nk})$  é definida por

$$\langle b_n^\dagger(\omega_{nk})b_n(\omega_{nk'}) \rangle = 2\pi\mathbf{N}_n(\omega_{nk})\delta(\omega_{nk} - \omega_{nk'}), \quad (3.9)$$

obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt' \langle \mathcal{O}_{mn}(t)\mathcal{O}_{m'n}^\dagger(t') \rangle \\ = & \int_0^t dt' \int_0^\infty \frac{d\omega_{nk}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega_{nk'}}{2\pi} \sigma_n(\omega_{nk}) \sigma_n(\omega_{nk'}) V_n(\omega_{nk}) V_n(\omega_{nk'}) \\ & \times [\mathbf{N}_n(\omega_{nk}) + 1] 2\pi\delta(\omega_{nk} - \omega_{nk'}) \exp\{-i[(\omega_{nk} - \Omega_m)t - (\omega_{nk'} - \Omega_{m'})t']\} \\ = & \exp[i(\Omega_m - \Omega_{m'})t] \int_0^t dt' \int_0^\infty \frac{d\omega_{nk}}{2\pi} [\sigma_n(\omega_{nk}) V_n(\omega_{nk})]^2 [\mathbf{N}_n(\omega_{nk}) + 1] \\ & \times \exp\{-i[(\omega_{nk} - \Omega_{m'})(t - t')]\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $\sigma_n(\omega_{nk})$  representa a densidade de estados do  $n$ -ésimo reservatório. Realizando a mudança de variáveis  $\tau = t - t'$  e  $\varepsilon = \omega_{nk} - \Omega_{m'}$ , verificamos que a Eq.(3.10) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \langle \mathcal{O}_{mn}(t)\mathcal{O}_{m'n}^\dagger(t') \rangle & = \exp[i(\Omega_m - \Omega_{m'})t] \int_{-\Omega_{m'}}^\infty \frac{d\varepsilon}{dt} [\sigma_n(\varepsilon + \Omega_{m'}) V_n(\varepsilon + \Omega_{m'})]^2 \\ & \times [\mathbf{N}_n(\varepsilon + \Omega_{m'}) + 1] \int_0^t d\tau e^{-i\varepsilon\tau}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Note que o valor mínimo do modo normal  $\Omega_\ell$  é dado por  $\Omega_\ell|_{\min} = \omega_0 N(N-2)/(N-1)^2$ , valor este que decorre de  $\lambda = 2\omega_0/(N-1)^2$ . Portanto, quando  $N \gg 1$ ,  $\Omega_\ell|_{\min} \approx \omega_0$ . No caso particular em que  $N = 2$ , analisado no *Capítulo* anterior, obtemos  $\lambda = 2\omega_0$ , de modo que  $\Omega_\ell|_{\min} \approx 0$ . A seguir, considerando o caso de  $N$  osciladores dissipativos acoplados, estaremos interessados na intensidade do acoplamento  $\lambda = 2\omega_0$ , de modo que  $\Omega_\ell = \omega_0 N(N-2)$  e  $\Omega_1 = \omega_0 N^2$ , ou seja, com  $N \gg 1$  ambos os modos normais, no entorno de  $N^2\omega_0$ , são deslocados para regiões distantes da frequência natural  $\omega_0$  dos osciladores.

Como usual, considere que  $V_n(\varepsilon + \Omega_m)$ ,  $\sigma_n(\varepsilon + \Omega_m)$  e  $\mathbf{N}_n(\varepsilon + \Omega_m)$  sejam funções que variam lentamente em torno da frequência  $\Omega_m$ . Observando que a última integral na Eq.(3.11) contribui significativamente somente quando  $|\varepsilon\tau| \lesssim 1$ , podemos estender o limite superior da integração temporal para infinito, de modo que a expressão para a

função de correlação torna-se

$$\int_0^t dt' \langle \mathcal{O}_{mn}(t) \mathcal{O}_{m'n}^\dagger(t') \rangle = \frac{N}{2} \gamma_n(\Omega_{m'}) [\mathbf{N}_n(\Omega_{m'}) + 1] \exp[i(\Omega_m - \Omega_{m'})t], \quad (3.12)$$

onde as taxas de dissipação são definidas pela equação

$$\gamma_n(\Omega_m) = \frac{1}{N} V_n^2(\Omega_m) \sigma_n^2(\Omega_m) \int_{-\Omega_m}^{\infty} d\varepsilon \delta(\varepsilon). \quad (3.13)$$

Para  $N = 2$  e  $\lambda = 2\omega_0$ , tal que  $\Omega_1 = 4\omega_0$  e  $\Omega_2|_{\min} \approx 0$ , como realizado no *Capítulo* anterior, obtemos

$$\gamma_n(\Omega_1) = \frac{1}{N} V_n^2(\Omega_1) \sigma_n^2(\Omega_1), \quad (3.14a)$$

$$\gamma_n(\Omega_2|_{\min}) = \frac{1}{N} V_n^2(\Omega_2|_{\min}) \sigma_n^2(\Omega_2|_{\min}). \quad (3.14b)$$

Para  $N > 2$ , independentemente do valor de  $\lambda > 0$ , obtemos

$$\gamma_n(\Omega_m) = \frac{1}{N} V_n^2(\Omega_m) \sigma_n^2(\Omega_m). \quad (3.15)$$

Definindo a taxa de dissipação por  $\Gamma_n \equiv V_n^2(\omega_0) \sigma_n^2(\omega_0)$ , obtemos da *Eq.(3.13)*, considerando o regime de acoplamento fraco, o resultado

$$\gamma_n(\omega_0) = \frac{1}{N} V_n^2(\Omega_m) \sigma_n^2(\Omega_m) = \frac{\Gamma_n}{N}. \quad (3.16)$$

### 3.3 Equação Mestra

Por simplicidade definiremos as expressões  $\gamma_n(\Omega_1) = \gamma_n^+$ ,  $\mathbf{N}_n(\Omega_1) = \mathbf{N}_n^+$ ,  $\gamma_n(\Omega_\ell) = \gamma_n^-$  e  $\mathbf{N}_n(\Omega_\ell) = \mathbf{N}_n^-$ . Usando as *Eqs.(3.4a)* e *(3.4b)* em conjunto com os coeficientes  $C_{mn}$ , obtemos a equação mestra, na representação de Schrödinger, para o sistema de  $N$  osciladores

acoplados

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_{1,\dots,N}(t) = & i \left[ \rho_{1,\dots,N}(t), \tilde{\omega}_0 \sum_m a_m^\dagger a_m + \frac{\lambda}{2} \sum_{m,n(m \neq n)} (a_m^\dagger a_n + a_m a_n^\dagger) \right] \\ & + \sum_m \mathcal{L}_m \rho_{1,\dots,N}(t) + \sum_{m,n(m \neq n)} \mathcal{L}_{mn} \rho_{1,\dots,N}(t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde os operadores de Liouville  $\mathcal{L}_m \rho_{1,\dots,N}(t)$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m \rho_{1,\dots,N}(t) = & \frac{1}{2} \{ [\gamma_m^+ + (N-1)\gamma_m^-] ([a_m \rho_{1,\dots,N}(t), a_m^\dagger] + [a_m, \rho_{1,\dots,N}(t) a_m^\dagger]) \\ & + [\gamma_m^+ \mathbf{N}_m^+ + (N-1)\gamma_m^- \mathbf{N}_m^-] \\ & \times ([a_m, \rho_{1,\dots,N}(t)], a_m^\dagger] + [a_m, [\rho_{1,\dots,N}(t), a_m^\dagger]]) \}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

ao passo que os canais de dissipação mistos são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mn} \rho_{1,\dots,N}(t) = & \frac{1}{2} \{ (\gamma_m^+ - \gamma_m^-) ([a_n \rho_{1,\dots,N}(t), a_m^\dagger] + [a_m, \rho_{1,\dots,N}(t) a_n^\dagger]) \\ & + (\gamma_m^+ \mathbf{N}_m^+ - \gamma_m^- \mathbf{N}_m^-) ([a_n, \rho_{1,\dots,N}(t)], a_m^\dagger] + [a_m, [\rho_{1,\dots,N}(t), a_n^\dagger]]) \}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A equação mestra (3.17) é uma forma geral válida para o regime de acoplamento forte. Evidentemente os canais de dissipação mistos  $\mathcal{L}_{mn} \rho_{1,\dots,N}(t)$ , associados ao acoplamento forte entre os sistemas, podem ser da mesma ordem de magnitude que os canais de dissipação diretos  $\mathcal{L}_m \rho_{1,\dots,N}(t)$ . No regime de acoplamento fraco, quando  $\gamma_m^\pm \approx \Gamma_m/2$  e  $\mathbf{N}_m^\pm \approx \mathbf{N}_m$ , os canais de dissipação mistos cancelam-se e a equação mestra Eq.(3.17) reduz-se a forma esperada para  $N$  osciladores dissipativos independentes, cujos operadores de Liouville simplificam-se para a estrutura bem conhecida

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_m \rho_{1,\dots,N}(t) = & \frac{\Gamma_m}{2} \{ ([a_m \rho_{1,\dots,N}(t), a_m^\dagger] + [a_m, \rho_{1,\dots,N}(t) a_m^\dagger]) \\ & + \mathbf{N}_m ([a_m, \rho_{1,\dots,N}(t)], a_m^\dagger] + [a_m, [\rho_{1,\dots,N}(t), a_m^\dagger]]) \}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Observe que para uma rede com um número grande de osciladores, os modos normais  $\Omega_1$  e  $\Omega_\ell$ , que dependem do fator  $N$ , podem ser deslocados para regiões distantes da frequência

natural  $\omega_0$  até mesmo para pequenos valores da intensidade de acoplamento  $\lambda$ . Este é uma característica central de uma rede com  $N \gg 1$ , visto que neste caso é necessário considerarmos sempre os canais de dissipação mistos, que decorrem dos diferentes valores para as taxas de dissipação  $\gamma_m^+$  e  $\gamma_m^-$ . Desta observação concluímos que em um processador lógico quântico realista, isto é, com  $N \gg 1$ , o número de nodos dissipativos tornar-se-á sempre uma preocupação - no que diz respeito a dinâmica de coerência e tempos de decoerência - até mesmo no caso de acoplamento fraco entre esses nodos.

### 3.4 Desdobramento das Taxas de Dissipação

Um ponto crucial a ser notado quando se deriva a equação mestra para o regime de acoplamento forte, é que a taxa de dissipação para cada oscilador  $\Gamma_m$  divide-se em dois diferentes valores  $\gamma_m^+$  e  $\gamma_m^-$ . De maneira análoga ao que realizamos no *Capítulo* anterior, para o caso  $N = 2$ , ilustraremos este mecanismo, que decorre do desdobramento da frequência deslocada  $\tilde{\omega}_0$  nos modos normais  $\Omega_1$  e  $\Omega_\ell$ , assumindo um acoplamento Lorentziano  $V_{mk}$  entre os sistemas e seus respectivos reservatórios, de modo que a função de amortecimento  $\Gamma_m(\chi)$ , centrada na frequência  $\chi_0$ , é dada por

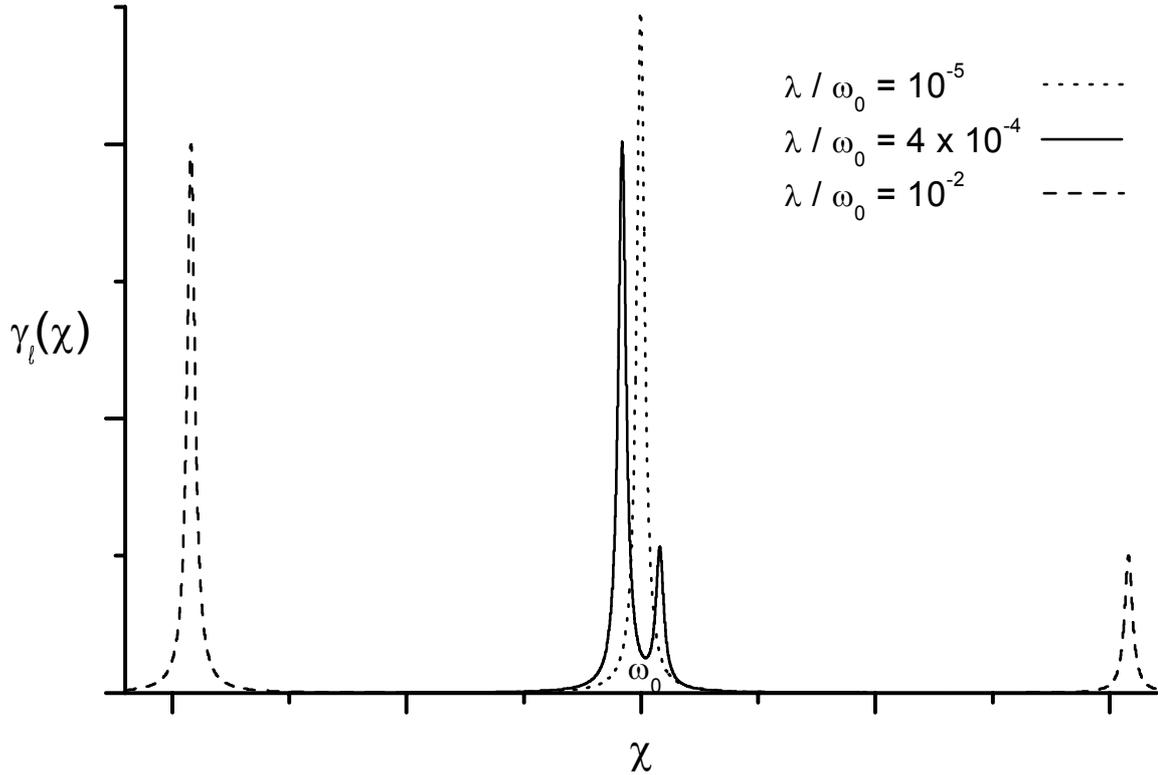
$$\Gamma_m(\chi) = \sigma_m^2 \frac{\kappa}{(\chi - \chi_0)^2 + \kappa^2}, \quad (3.21)$$

onde o parâmetro  $\kappa$  descreve a largura espectral em torno do modo de frequência  $\chi_0$ . Da *Eq.(3.21)* e lembrando que a frequência deslocada  $\tilde{\omega}_0$  divide-se em dois modos normais distintos  $\Omega_1$  e  $\Omega_\ell$ , obtém-se a função Lorentziana ilustrada na *Fig.-3.2* (para  $N = 5$ ), dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_m(\chi) &= \frac{\kappa \sigma_m^2}{N} \left( \frac{1}{(\chi - \Omega_1)^2 + \kappa^2} + \sum_{\ell} \frac{1}{(\chi - \Omega_\ell)^2 + \kappa^2} \right) \\ &= \gamma_m(\Omega_1) + \sum_{\ell} \gamma_m(\Omega_\ell), \end{aligned} \quad (3.22)$$

com máximos em  $\Omega_1$  e  $\Omega_\ell$ . Observamos que no regime de acoplamento fraco, quando  $\Omega_m \approx \omega_0$  e, portanto,  $\gamma_m(\omega_0) + \sum_{\ell} \gamma_m(\omega_0) = \Gamma_m$  (veja a *Eq.(3.16)*), obtém-se do operador geral de Liouville, *Eq.(3.18)*, a forma usual de Liouville para  $N$  osciladores dissi-

Figura 3-2: Função de amortecimento  $\gamma_\ell(\chi)$ , assumindo um acoplamento Lorentziano  $V_{mk}$  entre o oscilador  $m$  e seu respectivo reservatório. No regime de acoplamento fraco a função  $\gamma_m(\chi)$  esta centrada em torno de  $\omega_\ell$  (linha pontilhada). A medida que  $\lambda$  aumenta, a função de amortecimento desdobra-se em duas funções Lorentzianas cujos picos são  $1/N$  e  $(N - 1)/N$  vezes o valor original  $\Gamma_m(\omega_0)$  (linha sólida), onde  $N$  é o número de osciladores. Nesta figura  $\Gamma_m(\chi)$  representa uma rede com  $N = 5$ .



pativos independentes, Eq.(3.20). Além disso, é imediato da Eq.(3.22) que no regime de acoplamento fraco a função de amortecimento apresenta somente um pico, mostrado pela linha pontilhada na Fig.-3.2. Neste regime, a taxa de dissipação, que assumimos igual ao máximo de uma estreita função de amortecimento, isto é,  $\Gamma_m(\omega_0) = \Gamma_m$  (para um pequeno valor de  $\kappa$ ), torna-se  $N$  vezes maior que o valor designado para  $\gamma_m(\Omega_1)$  e  $\gamma_m(\Omega_\ell)$ . Porém, a medida que  $\lambda$  aumenta, a função de amortecimento divide-se em duas funções Lorentzianas, cujos picos são menores que o valor original  $\Gamma_m$ , como ditado pela equação mestra (3.17) e mostrado pela linha sólida na Fig.-3.2. A linha pontilhada mostra a situação em que os dois picos podem claramente ser distingüidos, estando a caminho do regime de acoplamento forte, quando  $\lambda/\omega_0 \approx 1$ . Para  $N \gg 1$  ambos os picos, centrados sobre  $\Omega_1$  e  $\Omega_\ell$ , deslocam-se para as vizinhanças do valor  $N^2\omega_0$  e dificilmente podem ser

distingüidos. Como discutido no *Capítulo* anterior, o efeito do acoplamento forte entre os sistemas é deslocar as frequências dos modos normais  $\Omega_1$  e  $\Omega_\ell$  para regiões muito distantes das frequências naturais do sistema  $\omega_0$ . Portanto, se as densidade espectrais dos reservatórios em torno das frequências dos modos normais são significativamente diferentes daquela em torno de  $\omega_0$ , a dinâmica de coerência do sistema pode ser significativamente modificada. Deste modo, as densidades espectrais dos reservatórios desempenham um papel crucial na dinâmica dissipativa de sistemas interagentes, visto que a magnitude da taxa de dissipação  $\gamma_m$  depende da densidade de estados do reservatório  $\sigma_m$ . Note que sistemas fracamente interagentes, mas com um grande número de osciladores, também tem suas dinâmicas afetadas pela densidade espectral do reservatório. Por esta razão, analisamos diferentes densidades espectrais do reservatório, conforme os modelos descritos na próxima *Seção*, afim de ilustrar as interessantes consequências que surgem devido ao regime de acoplamento forte.

Finalmente, notamos que o desdobramento da Lorentziana na *Eq.(3.21)* naquelas da *Eq.(3.22)* torna-se mais pronunciada quando  $\lambda$  e/ou  $N$  aumenta(m). Como explicado acima, um número grande de osciladores na rede também desloca os modos normais para regiões muito afastadas da frequência natural  $\omega_0$ . Em outras palavras, temos que aumentar o parâmetro  $\lambda N$ , através da intensidade do acoplamento e/ou do número de osciladores na rede, para permitir a exploração de diferentes regiões da densidade espectral do reservatório. Por este motivo chamaremos de regime de acoplamento forte os casos onde o parâmetro  $\lambda N$  é grande o suficiente para que os canais de dissipação mistos possam ser levados em conta.

### 3.5 Densidades Espectrais do Reservatório

Evidentemente, as densidades espectrais dos reservatórios dependem da natureza dos osciladores dissipativos acoplados sob consideração. Se considerarmos, por exemplo, elétrons armadilhados em potenciais harmônicos sobre superfícies de Hélio líquido, os reservatórios virão a ser essencialmente os fónons associados ao Hélio líquido [58]. Para este reservatório de fónons, o modelo de Debye, onde  $\sigma_m(\Omega_n) \sim \Omega_n^2$ , aplica-se muito bem para o domínio de baixas frequências, ao passo que a densidade espectral vai a zero para o domínio de

altas frequências. Neste caso, uma função Lorentziana pode seguramente ser usada para modelar as densidades espectrais dos reservatórios.

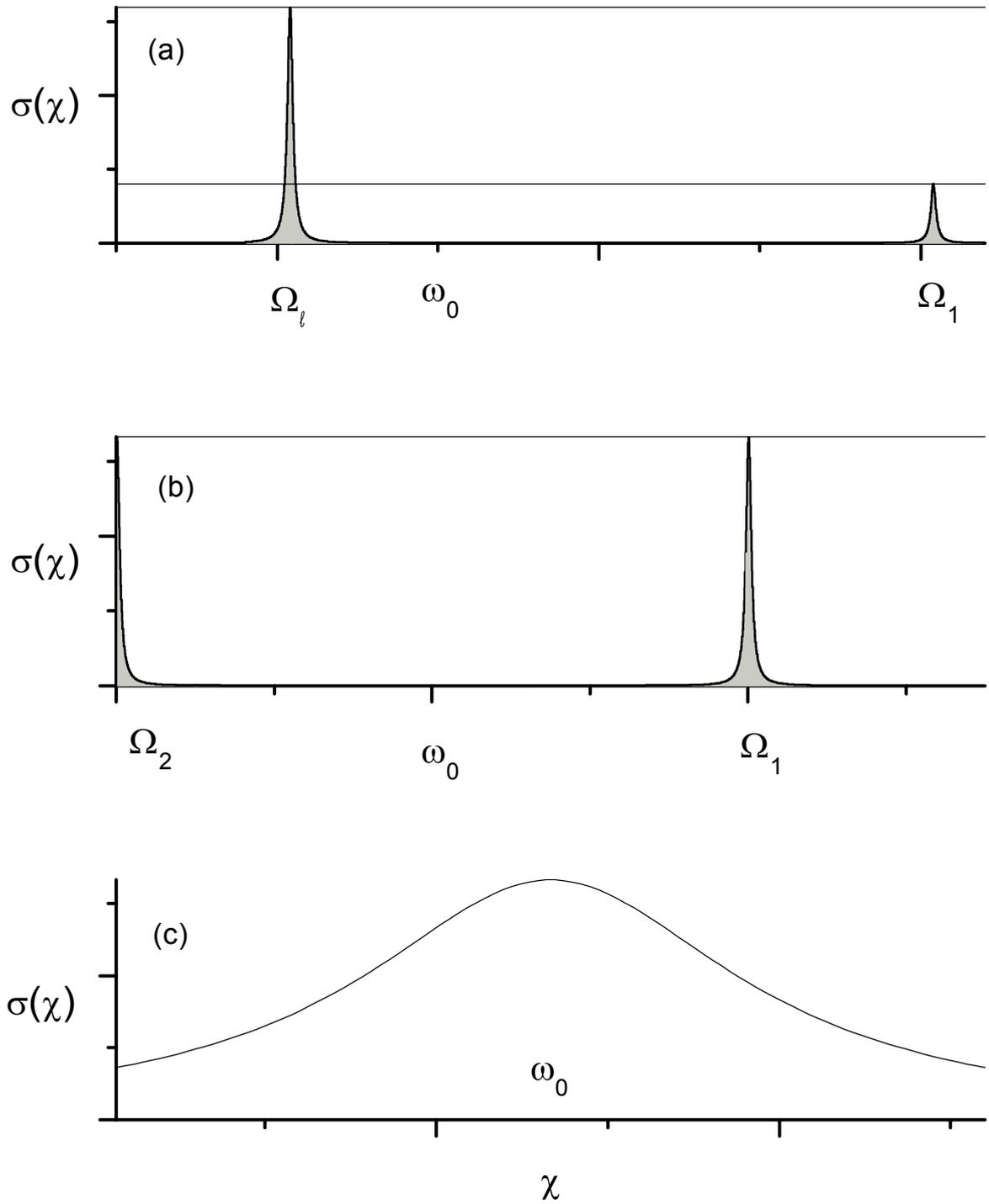
Independentemente da natureza física dos osciladores dissipativos, densidades espectrais específicas podem ser implementadas através da engenharia de reservatórios, um programa, como já salientado, que tem recentemente atraído considerável atenção para o controle do processo de decoerência de estados quânticos [48, 49, 50, 71]. Portanto, os resultados que são apresentados nos *Capítulos 2, 3 e 4*, que dependem fortemente das densidades espectrais dos reservatórios, podem fornecer uma motivação para futuras propostas teóricas em engenharia de reservatórios. Para esta discussão consideramos o regime de acoplamento forte e assumimos que as temperaturas dos reservatórios sejam nulas, lembrando, das definições  $\gamma_n(\Omega_1) = \gamma_n^+$  e  $\gamma_n(\Omega_\ell) = \gamma_n^-$ , que o parâmetro  $\gamma_n^\pm$  leva em conta a intensidade da interação sistema-reservatório em torno de  $\Omega_m$ , isto é,  $\gamma_n^\pm$  depende da densidade espectral do reservatório em torno das frequências dos modos normais  $\Omega_m$ .

### 3.5.1 Ruído Branco Markoviano

Faremos aqui uma adaptação, para o caso da rede simétrica de osciladores, da análise desenvolvida no *Capítulo* anterior em que uma densidade espectral do tipo ruído branco Markoviano é considerada, como novamente ilustra a *Fig.-3.3(a)*. Assumindo um acoplamento Lorentziano, centrado em torno das frequências dos modos-normais, entre os osciladores e seus respectivos reservatórios, como na *Eq.(3.22)*, obtemos exatamente os mesmos resultados do regime de acoplamento fraco, quando  $\gamma_m^\pm = \Gamma_m/N$  para  $N > 2$ . De fato, como a densidade espectral do reservatório é invariante sob translações no espaço das frequências, obtemos da *Eq.(3.15)* e da definição  $\Gamma_n \equiv V_n^2(\omega_0)\sigma_n^2(\omega_0)$ , a mesma taxa de dissipação do regime de acoplamento fraco  $\gamma_n(\Omega_m) = \Gamma_n/N$ . Deste modo, para  $N > 2$  e reservatório do tipo ruído branco Markoviano, o acoplamento forte entre os osciladores não afeta o tempo de decoerência de qualquer que seja o estado conjunto do sistema, quer seja um autoestado do modo normal  $\Omega_1$  ou de  $\Omega_\ell$ . O acoplamento sistema-reservatório em torno de  $\Omega_m$  é representado por regiões sombreadas na *Fig.-3.3(a)*.

Para o caso particular em que  $N = 2$  e  $\lambda = 2\omega_0$ , que implica em  $\Omega_2|_{\min} = \tilde{\omega}_0 - \lambda|_{\min} \approx 0$ , como discutido neste *Capítulo* (e verificado no *Capítulo 2*), obtém-se das *Eqs.(3.14a)* e *(3.14b)* o resultado  $\gamma_m^- = \gamma_m^+/2 = \Gamma_m/4$ . Como se mostra na *Fig.-3.3(b)*, o acoplamento

Figura 3-3: Densidades espectrais do reservatório  $\sigma_m(\chi)$  para (a) ruído branco Markoviano e (b) uma densidade espectral Lorentziana. Os acoplamentos sistema-reservatórios em torno dos modos normais  $\Omega_1$  e  $\Omega_\ell$  são representados pelas regiões sombreadas.



sistema-reservatório em torno de  $\Omega_2|_{\min} \approx 0$  é metade do valor em torno da frequência  $\Omega_1 = \tilde{\omega}_0 + \lambda$ . Portanto, o acoplamento forte entre os osciladores do sistema aumenta o tempo de decoerência de um estado conjunto que seja autoestado do modo normal  $\Omega_2 = \tilde{\omega}_0 - \lambda$ . A seguir, analisamos dois casos de ruído colorido não Markoviano, ainda assumindo que  $V_m$ ,  $\sigma_m$  e  $\mathbf{N}_m$  sejam funções que variam suavemente em torno da frequência  $\Omega_m$ .

### 3.5.2 Densidade Espectral Lorentziana e Reservatório Bosônico

Consideramos, em seguida, uma densidade espectral Lorentziana cujos valores para as regiões de baixa ( $\omega \ll \omega_0$ ) e alta ( $\omega \gg \omega_0$ ) frequência sejam consideravelmente menores que aquele em torno de  $\omega_0$ , como mostra a linha sólida da *Fig.-3.3(c)*. Assumindo  $N \gg 1$ , verificamos que ambos os modos normais  $\Omega_1$  e  $\Omega_\ell$  deslocam-se para regiões distantes de  $\omega_0$ , em torno de  $N^2\omega_0$ , e conseqüentemente  $\gamma_m^\pm < \Gamma_m/N$ . De fato, considerando  $\sigma_m(\Omega_1) = \epsilon^+\sigma_m(\omega_0)$  e  $\sigma_m(\Omega_\ell) = \epsilon^-\sigma_m(\omega_0)$ , onde  $\epsilon^\pm < 1$ , obtemos da *Eq.(3.15)* o resultado  $\gamma_m^\pm = \epsilon^\pm\Gamma_m/N$ . Portanto, a engenharia de uma tal densidade espectral tem por conseqüência uma função de amortecimento  $\gamma_m(\Omega_n)$ , proveniente de ambos os termos do lado direito da *Eq.(3.22)* (isto é,  $\kappa\sigma_\ell^2/[(\chi - \Omega_n)^2 + \kappa^2] \approx 0$ ), que não contribui significativamente com nenhum dos termos para o processo de relaxação.

Em vista da dificuldade de se obter uma densidade espectral Lorentziana de modo que  $\sigma_m(\Omega_n) = \epsilon\sigma_m(\omega_0)$ , retornamos ao caso mais realista em que um reservatório Bosônico possui uma densidade espectral que é dada pela função distribuição de Bose-Einstein. Para um reservatório Bosônico, como é descrito pela radiação cósmica de fundo, exigido em [22, 23] para explicar a transição quântica para a clássica, a densidade espectral é descrita pelo número médio de fótons térmicos  $\langle n \rangle_\omega = 1/[\exp(\omega/k_B T) - 1]$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann. Neste caso, assim como na densidade espectral Lorentziana considerada acima, também obtemos o resultado  $\gamma_m^\pm < \Gamma_m/N$  para  $N \gg 1$ .

### 3.6 Equação de Fokker-Planck

Usando os procedimentos convencionais, derivamos da equação mestra (3.17), a equação de Fokker-Planck para a função  $P$  de Glauber, dada por

$$\frac{d}{dt}P(\{\eta_n\}, t) = \sum_m \left( \Pi_m + C_m(\{\eta_n\}) \frac{\partial}{\partial \eta_m} + \sum_n D_{mn} \frac{\partial^2}{\partial \eta_m \partial \eta_n^*} + c.c. \right) P(\{\eta_n\}, t), \quad (3.23)$$

onde a função  $C_m(\{\eta_n\})$  e os elementos de matriz  $D_{mn}$  satisfazem as equações

$$C_m(\{\eta_n\}) = A_m \eta_m + B_m \sum_{n (n \neq m)} \eta_n, \quad (3.24a)$$

$$D_{mn} = \frac{1}{4} [\gamma_m^+ \mathbf{N}_m^+ + \gamma_n^+ \mathbf{N}_n^+ + (N\delta_{mn} - 1) (\gamma_m^- \mathbf{N}_m^- + \gamma_n^- \mathbf{N}_n^-)], \quad (3.24b)$$

enquanto que os parâmetros  $A_m$  e  $B_m$  são definidos por

$$A_m = \frac{1}{2} [\gamma_m^+ + (N-1)\gamma_m^-] + i\tilde{\omega}_0, \quad (3.25a)$$

$$B_m = \frac{1}{2} (\gamma_m^+ - \gamma_m^-) + i\lambda, \quad (3.25b)$$

com  $\Pi_m = \text{Re}(A_m)$ .

Quando consideramos que os reservatórios estão na temperatura zero absoluto, a equação de Fokker-Planck (FP) (3.23) reduz-se a uma simples equação de arrasto, dada por

$$\frac{d}{dt}P(\{\eta_n\}, t) = \sum_m \left( \Pi_m + C_m(\{\eta_n\}) \frac{\partial}{\partial \eta_m} + c.c. \right) P(\{\eta_n\}, t). \quad (3.26)$$

Fazendo a transformação  $P(\{\eta_n\}, t) = \tilde{P}(\{\eta_n\}, t) \exp(2 \sum_m \Pi_m t)$  e assumindo que a solução da Eq.(3.26) seja da forma  $\tilde{P}(\{\eta_n\}, t) = \tilde{P}(\{\eta_n(t)\})$ , verificamos que

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} = \sum_m \left( \frac{d\eta_m}{dt} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta_m} + c.c. \right) = \sum_m \left( C_m(\{\eta_n\}) \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta_m} + c.c. \right). \quad (3.27)$$

Temos, portanto, que resolver o sistema de equações acopladas

$$\frac{d\eta_m}{dt} = A_m \eta_m + B_m \sum_{n (n \neq m)} \eta_n, \quad (3.28)$$

o que é alcançado com a suposição de que  $\Gamma_\ell = \Gamma_2 \neq \Gamma_1$  (isto é,  $\gamma_\ell^\pm = \gamma_2^\pm \neq \gamma_1^\pm$ ), de modo que os parâmetros nas *Eqs. (3.25a)* e *(3.25b)*, para  $m \neq 1$ , simplificam-se para a forma

$$A_\ell = A_2 = \frac{1}{2} [\gamma_2^+ + (N-1)\gamma_2^-] + i\tilde{\omega}_0, \quad (3.29a)$$

$$B_\ell = B_2 = \frac{1}{2} (\gamma_2^+ - \gamma_2^-) + i\lambda. \quad (3.29b)$$

A solução do sistema *(3.28)*, até a ordem  $\mathcal{O}(\gamma_m/\lambda)$ , é dada por  $\eta_m(t) = e^{\Lambda t} \sum_n \chi_{mn}(t) \eta_n^0$ , onde denotamos  $\eta_n^0 = \eta_n(t=0)$  e definimos o parâmetro

$$\Lambda = [\gamma_1^+ + \gamma_2^- + (N-1)(\gamma_1^- + \gamma_2^+)]/4 + i[\tilde{\omega}_0 + (N-2)\lambda/2] \quad (3.30)$$

e as funções

$$\begin{aligned} \chi_{11}(t) = & \left( f_1(t) + \frac{2\Delta}{N\lambda} f_2(t) \right) g_1(t) - \frac{N-2}{N} f_1(t) g_2(t) \\ & + i \left[ \left( f_2(t) - \frac{2\Delta}{N\lambda} f_1(t) \right) g_2(t) - \frac{N-2}{N} f_2(t) g_1(t) \right], \end{aligned} \quad (3.31a)$$

$$\begin{aligned} \chi_{1\ell}(t) = & \frac{2}{N} \left[ \left( f_1(t) g_2(t) + \frac{\Theta_1}{\lambda} f_2(t) g_1(t) \right) \right. \\ & \left. + i \left( f_2(t) g_1(t) - \frac{\Theta_1}{\lambda} f_1(t) g_2(t) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.31b)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\ell 1}(t) = & \frac{2}{N} \left[ \left( f_1(t) g_2(t) + \frac{\Theta_2}{\lambda} f_2(t) g_1(t) \right) \right. \\ & \left. + i \left( f_2(t) g_1(t) - \frac{\Theta_2}{\lambda} f_1(t) g_2(t) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.31c)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\ell\ell}(t) = & \frac{1}{N-1} \left\{ \left( f_1(t) - \frac{2\Delta}{N\lambda} f_2(t) \right) g_1(t) + \frac{N-2}{N} f_1(t) g_2(t) \right. \\ & \left. + i \left[ \left( f_2(t) + \frac{2\Delta}{N\lambda} f_1(t) \right) g_2(t) + \frac{N-2}{N} f_2(t) g_1(t) \right] \right\} \\ & + \frac{(N-1)\delta_{\ell\ell} - 1}{N-1} \exp \left\{ \left[ N \frac{\gamma_2^-}{2} - \Lambda + i(\tilde{\omega}_0 - \lambda) \right] t \right\}. \end{aligned} \quad (3.31d)$$

As funções dependentes do tempo que aparecem nas *Eqs. (3.31a)-(3.31d)* são definidas pelas relações

$$f_1(t) = \cos(N\lambda t/2), \quad f_2(t) = \text{sen}(N\lambda t/2), \quad (3.32a)$$

$$g_1(t) = \cosh(\Phi t), \quad g_2(t) = \text{senh}(\Phi t), \quad (3.32b)$$

onde o argumento  $\Phi$ , os parâmetros  $\Theta_{1,2}$  e  $\Delta$  satisfazem as equações

$$\Phi = [\gamma_1^+ - \gamma_2^- - (N-1)(\gamma_1^- - \gamma_2^+)] / 4, \quad (3.33a)$$

$$\Theta_{\binom{1}{2}} = [\gamma_1^\mp - \gamma_2^\mp + (N-1)(\gamma_1^\pm - \gamma_2^\pm)] / 2N, \quad (3.33b)$$

$$\Delta = (N-1)(\gamma_1^+ - \gamma_2^+ + \gamma_1^- - \gamma_2^-) / 2N. \quad (3.33c)$$

Finalmente, a solução da equação de *FP* (3.26) é dada por

$$P(\{\eta_n\}, t) = \exp\{2[\Pi_1 + (N-1)\Pi_2]t\} P(\{\eta_n\}, t=0)|_{\eta_n \rightarrow \eta_n(t)}. \quad (3.34)$$

### 3.7 Operador Densidade

A seguir, lembrando que  $\gamma_\ell^\pm = \gamma_2^\pm \neq \gamma_1^\pm$ , obtemos o operador densidade  $\rho_{1,\dots,N}(t)$  supondo que os  $N$  osciladores estejam preparados em uma superposição de estados coerentes da forma

$$\begin{aligned} |\Psi_{1,\dots,N}\rangle &= \mathcal{N} (e^{i\delta_1} |\{\beta_m^1\}\rangle + e^{i\delta_2} |\{\beta_m^2\}\rangle + \dots + e^{i\delta_J} |\{\beta_m^J\}\rangle) \\ &\equiv \mathcal{N} \sum_{p=1}^J e^{i\delta_p} |\{\beta_m^p\}\rangle, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde  $\mathcal{N}$  é o fator de normalização,  $\delta_p$  indica uma fase associada a cada estado da superposição e o índice inferior (superior) associado ao estado coerente  $\beta$  refere-se aos  $N$  osciladores ( $J$  distintos estados da superposição). O operador densidade evoluído temporalmente para o estado inicial da Eq.(3.35) é dado por

$$\begin{aligned} \rho_{1,\dots,N}(t) &= \int P(\{\eta_n\}, t) |\{\eta_n\}\rangle \langle\{\eta_n\}| d^2\{\eta_n\} \\ &= \mathcal{N}^2 \sum_{p,q=1}^J e^{\phi_{pq}(t)+i(\delta_p-\delta_q)} \prod_m \langle\beta_m^q | \beta_m^p\rangle^{1-\Upsilon_{mm}} |\xi_m^p(t)\rangle \langle\xi_m^q(t)|, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde (utilizando daqui por diante  $p, q = 1, 2, \dots, J$ )

$$\phi_{pq}(t) = \frac{1}{2} \sum_{m,n(m \neq n)} [\beta_m^p (\beta_n^{*p} - \beta_n^{*q}) - \beta_n^{*q} (\beta_m^p - \beta_m^q)] \Upsilon_{nm}(t). \quad (3.37)$$

Os estados evoluídos dos osciladores satisfazem a equação

$$\xi_m^p(t) = \sum_n \mu_{mn}(t) \beta_n^p, \quad (3.38)$$

onde definimos

$$\Upsilon_{mn}(t) = \sum_{n'} \mu_{n'm}^*(t) \mu_{n'n}(t), \quad (3.39a)$$

$$\mu_{mn}(t) = e^{-\Lambda t} \chi_{mn}(-t). \quad (3.39b)$$

O operador densidade reduzido para o  $m$ -ésimo oscilador é obtido eliminando os graus de liberdade dos demais osciladores, isto é,  $\rho_m(t) = \text{Tr}_{n \neq m} \rho_{1, \dots, N}(t)$ , sendo dado por

$$\rho_m(t) = \mathcal{N}^2 \sum_{p,q} e^{\theta_m^{pq}(t) + i(\delta_p - \delta_q)} \left( \prod_n \langle \beta_n^q | \beta_n^p \rangle^{1 - |\mu_{mn}(t)|^2} \right) |\xi_m^p(t)\rangle \langle \xi_m^q(t)|, \quad (3.40)$$

em que

$$\theta_m^{pq}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n, n' (n \neq n')} [\beta_n^p (\beta_{n'}^{*p} - \beta_{n'}^{*q}) - \beta_{n'}^{*q} (\beta_n^p - \beta_n^q)] \mu_{mn'}^*(t) \mu_{mn}(t). \quad (3.41)$$

### 3.8 Decoerência

Tendo em mãos a evolução dinâmica através do operador densidade dos  $N$  osciladores acoplados, passaremos agora à estimativa dos tempos de decoerência para alguns estados particulares de uma rede; consideraremos dois casos: (i) todos os osciladores da rede possuem a mesma taxa de dissipação, isto é,  $\Gamma_m = \Gamma$ , e (ii) o oscilador 1 possui a taxa de dissipação  $\Gamma_1$  enquanto que os demais osciladores possuem a taxa de dissipação  $\Gamma_\ell = \Gamma_2$ .

(i) Partindo do caso  $\Gamma_m = \Gamma$ , estimamos o tempo de decoerência para o estado de superposição que corresponde a um caso particular do estado da Eq.(3.35):

$$|\psi_{1, \dots, N}\rangle = \mathcal{N}_\pm \left( \left| \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_R, \underbrace{-\alpha, \dots, -\alpha}_S, \underbrace{\eta, \dots, \eta}_{N-R-S} \right\rangle \pm \left| \underbrace{-\alpha, \dots, -\alpha}_R, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_S, \underbrace{\eta, \dots, \eta}_{N-R-S} \right\rangle \right), \quad (3.42)$$

onde  $R$  ( $S$ ) indica o número de osciladores no estado coerente  $\alpha$  ( $-\alpha$ ) no primeiro termo da superposição e  $-\alpha$  ( $\alpha$ ) no segundo termo da superposição. Os  $N - R - S$  osciladores

restantes estão no estado coerente  $\eta$ . Como estamos considerando uma rede simétrica onde todos os osciladores tem a mesma taxa de dissipação, nota-se que os osciladores são portanto indistinguíveis. Desta forma, se trocarmos os estados de qualquer par de osciladores  $m$  e  $n$  obtemos um estado que é completamente equivalente ao da Eq.(3.42). Observe também que quando  $R = 1$  e  $S = 0$ , obtemos da Eq.(3.42) a superposição

$$|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes \{|\eta_{\ell}\rangle\}, \quad (3.43)$$

onde um estado do tipo “*gato de Schrödinger*” é preparado no oscilador 1 enquanto que os  $N - 1$  osciladores restantes são preparados no estado coerente  $\eta$ .

O operador densidade do estado  $|\psi_{1,\dots,N}\rangle$  da Eq.(3.42), derivado da Eq.(3.36), é dado por

$$\begin{aligned} \rho_{1,\dots,N}(t) &= \mathcal{N}^2 \sum_{p,q=1}^2 (\pm)^{1-\delta_{pq}} \exp \left\{ -2|\alpha|^2 \left[ \left(1 - \Upsilon(t) + \tilde{\Upsilon}(t)\right) (R + S) - \tilde{\Upsilon}(t)(R - S)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. \times (1 - \delta_{pq}) + \phi_{pq}(t) \right\} |\{\xi_m^p(t)\}\rangle \langle \{\xi_m^q(t)\}|, \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde, como segue das Eqs.(3.37) e (3.39a), respectivamente,

$$\phi_{pq}(t) = 2i\tilde{\Upsilon}(t)(N - R - S) \operatorname{Im} \left( \eta \sum_{j=1}^{R+S} \beta_j^{*p} \right), \quad (3.45a)$$

$$\Upsilon(t) = \Upsilon_{mm}(t) = \frac{1}{N} \left[ e^{-N\gamma^+t} + (N - 1)e^{-N\gamma^-t} \right], \quad (3.45b)$$

$$\tilde{\Upsilon}(t) = \Upsilon_{mn(m \neq n)}(t) = \frac{1}{N} \left( e^{-N\gamma^+t} - e^{-N\gamma^-t} \right). \quad (3.45c)$$

Da Eq.(3.44) verificamos que o decaimento da coerência do estado de superposição Eq.(3.42) é dado pela exponencial

$$\exp \left\{ -2|\alpha|^2 \left[ \left(1 - e^{-N\gamma^-t}\right) (R + S) - \frac{1}{N} \left( e^{-N\gamma^+t} - e^{-N\gamma^-t} \right) (R - S)^2 \right] \right\}, \quad (3.46)$$

de modo que o tempo de decoerência obedece a equação

$$\tau_D |\psi_{1,\dots,N}\rangle = \frac{1}{2|\alpha|^2 [N(R + S)\gamma^- + (R - S)^2(\gamma^+ - \gamma^-)]}. \quad (3.47)$$

Note que quando  $R = N$  ( $S = 0$ ) ou  $S = N$  ( $R = 0$ ), levando à superposição  $|\phi_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_{\pm}(|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle \pm |-\alpha_1, \dots, -\alpha_N\rangle)$  (onde  $\alpha_m = \alpha$ ) que é autoestado do modo normal  $\Omega_1 = \tilde{\omega}_0 + (N - 1)\lambda$ , obtemos um resultado que depende somente da taxa de dissipação  $\gamma^+$ :

$$\tau_D|\phi_{1,\dots,N}\rangle = \frac{1}{2N^2|\alpha|^2\gamma^+}. \quad (3.48)$$

Por outro lado, quando  $R = S$ , o que corresponde a uma família de estados de superposição que são autoestados do modo normal  $\Omega_{\ell} = \tilde{\omega}_0 - \lambda$ :

$$|\tilde{\phi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} \left( \left| \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_S, \underbrace{-\alpha, \dots, -\alpha}_S, \underbrace{\eta, \dots, \eta}_{N-2S} \right\rangle \pm \left| \underbrace{-\alpha, \dots, -\alpha}_S, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_S, \underbrace{\eta, \dots, \eta}_{N-2S} \right\rangle \right),$$

obtemos um resultado que depende apenas da taxa de dissipação  $\gamma^-$ :

$$\tau_D|\tilde{\phi}_{1,\dots,N}\rangle = \frac{1}{2NS|\alpha|^2\gamma^-}. \quad (3.49)$$

Evidentemente, para  $S = 0$ , de modo que  $|\tilde{\phi}_{1,\dots,N}\rangle = |\eta, \dots, \eta\rangle$ , notamos, como era de se esperar para um reservatório em zero absoluto, que os estados coerentes perdem excitação sem sofrer o processo de decoerência. Finalmente, quando  $R = 1$  (0) e  $S = 0$  (1), levando ao estado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$ , obtemos o resultado

$$\tau_D|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \frac{1}{2|\alpha|^2[\gamma^+ + (N - 1)\gamma^-]}, \quad (3.50)$$

que leva, considerando  $N > 2$  e ruído branco Markoviano, de modo que  $\gamma^{\pm} = \Gamma/N$ , exatamente ao valor esperado para o tempo de decoerência do estado de superposição  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$  preparado em um único oscilador dissipativo:  $(2|\alpha|^2\Gamma)^{-1}$ .

A seguir, analisamos os resultados das *Eqs.(3.48)-(3.50)* considerando os modelos de densidades espectrais introduzidos na *Seção 3.5*. Primeiramente, observa-se que para  $N > 2$ , o ruído branco Markoviano leva aos mesmos resultados do regime de acoplamento fraco, visto que  $\gamma^{\pm} = \Gamma/N$ . Porém, para a situação especial em que  $N = 2$  obtemos diferentes resultados para o ruído branco Markoviano e o regime de acoplamento fraco, visto que no primeiro caso obtemos das *Eqs.(3.14a)* e *(3.14b)*  $\gamma^- = \gamma^+/2 = \Gamma/4$ , enquanto que no segundo continuamos com  $\gamma^{\pm} = \Gamma/N$ . Portanto, para o caso mais geral em que  $N > 2$ , obtemos para o ruído branco Markoviano ( $M$ ) bem como para o regime de

acoplamento fraco, onde  $\gamma^\pm = \Gamma/N$ , o tempo de decoerência para a superposição que é autoestado do modo normal  $\Omega_1$ , dado por

$$\tau_D^M |_{|\phi_{1,\dots,N}\rangle} = \frac{1}{2N |\alpha|^2 \Gamma}, \quad (3.51)$$

ao passo que para os autoestados do modo normal  $\Omega_\ell$  obtemos

$$\tau_D^M |_{|\tilde{\phi}_{1,\dots,N}\rangle} = \frac{1}{4S |\alpha|^2 \Gamma}. \quad (3.52)$$

Para o caso especial em que  $N = 2$ , ambos os resultados nas *Eqs.(3.51) e (3.52)* reduzem-se, no regime de acoplamento fraco, ao valor  $(4 |\alpha|^2 \Gamma)^{-1}$ , conforme analisado no *Capítulo 2*, correspondendo ao tempo de decoerência esperado para os estados emaranhados  $|\alpha, \alpha\rangle \pm |-\alpha, -\alpha\rangle$  e  $|\alpha, -\alpha\rangle \pm |-\alpha, \alpha\rangle$ , respectivamente. No regime de acoplamento forte, ainda obtemos, da *Eq.(3.48)*, o tempo de decoerência  $(4 |\alpha|^2 \Gamma)^{-1}$  para o autoestado do modo normal  $\Omega_1$ :  $|\alpha, \alpha\rangle \pm |-\alpha, -\alpha\rangle$ . Porém, da *Eq.(3.49)* obtemos o valor  $(2 |\alpha|^2 \Gamma)^{-1}$ , duas vezes maior que no regime de acoplamento fraco, para o tempo de decoerência do autoestado do modo normal  $\Omega_\ell$ :  $|\alpha, -\alpha\rangle \pm |-\alpha, \alpha\rangle$ . Ademais, os resultados no regime de acoplamento forte devem recuperar aqueles do regime de acoplamento fraco quando assumimos um reservatório com ruído branco Markoviano. Para o estado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$ , também obtemos o valor esperado do tempo de decoerência para o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ :

$$\tau_D^M |_{|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle} = \frac{1}{2 |\alpha|^2 \Gamma}. \quad (3.53)$$

Considerando uma densidade espectral Lorentziana ( $L$ ) (ou reservatório Bosônico), onde  $\gamma^\pm \ll \Gamma/N$ , e o caso onde  $N \gg 1$ , de modo que ambas as taxas de dissipação assumem praticamente o mesmo valor  $\gamma^\pm = \epsilon\Gamma/N$  com  $\epsilon < 1$ , todos os valores dos tempos de decoerência estimados nas *Eqs.(3.51)-(3.53)* são melhorados, sendo multiplicados por um fator  $1/\epsilon$ , isto é,  $\tau_D^L|_{\gamma^\pm} = \tau_D^M|_{\gamma^\pm}/\epsilon$  e  $\tau_D^L = \tau_D^M/\epsilon$ . Evidentemente, o valor do fator  $\epsilon$  depende do reservatório em questão.

(ii) Consideremos, agora, o caso em que o oscilador 1 tem taxa de dissipação  $\Gamma_1$ , enquanto todos os demais possuem uma taxa de dissipação  $\Gamma_2$ . Como estamos interessados em melhorar o tempo de decoerência de um estado preparado no oscilador 1, diminuindo

efetivamente a taxa de dissipação deste oscilador, assumiremos que  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$ . Para este caso analisaremos somente o estado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$ , cujo operador densidade é dado por

$$\tilde{\rho}_{1,\dots,N}(t) = \mathcal{N}_{\pm}^2 \sum_{p,q=1}^2 (\pm)^{1-\delta_{pq}} \exp[-2|\alpha|^2(1-\Upsilon_{11}(t))(1-\delta_{pq}) + \phi_{pq}(t)] |\{\xi_m^p(t)\}\rangle \langle\{\xi_m^q(t)\}|, \quad (3.54)$$

onde, como segue das *Eqs. (3.37)* e *(3.39a)*, respectivamente,

$$\phi_{pq}(t) = 2i(N-1)\Upsilon_{1\ell}(t) \text{Im}(\alpha\beta_1^{*p}), \quad (3.55a)$$

$$\Upsilon_{11}(t) = \frac{1}{N} [\exp\{-[\gamma_1^+ + (N-1)\gamma_2^+]t\} + (N-1)\exp\{-[\gamma_2^- + (N-1)\gamma_1^-]t\}], \quad (3.55b)$$

e

$$\Upsilon_{1\ell}(t) = \frac{1}{N} [\exp\{-[\gamma_1^+ + (N-1)\gamma_2^+]t\} - \exp\{-[\gamma_2^- + (N-1)\gamma_1^-]t\}]. \quad (3.56)$$

Portanto, o decaimento da coerência do estado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$ , no caso onde os  $N-1$  osciladores restantes tem a mesma taxa de dissipação  $\Gamma_2 \neq \Gamma_1$ , é dado por

$$\tau_D(N) = \frac{N}{2|\alpha|^2 [\gamma_1^+ + (N-1)(\gamma_2^+ + \gamma_2^-) + (N-1)^2\gamma_1^-]}. \quad (3.57)$$

No regime de acoplamento fraco, quando  $\gamma_m^{\pm} = \Gamma_m/N$ , o tempo de decoerência simplifica-se na forma

$$\tau_D^{fraco}(N) = \frac{N^2}{2|\alpha|^2 \{[1 + (N-1)^2]\Gamma_1 + 2(N-1)\Gamma_2\}}. \quad (3.58)$$

Para a situação em que  $N \gg 1$  a expressão *(3.58)*, no regime de acoplamento fraco, leva ao resultado bem conhecido do tempo de decoerência de um estado do tipo “*gato de Schrödinger*”,  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$ , preparado em uma única cavidade com o reservatório à zero absoluto:

$$\tau_D^{fraco}(N \gg 1) = \frac{1}{2|\alpha|^2 \Gamma_1}. \quad (3.59)$$

O valor máximo para o tempo de decoerência da *Eq. (3.58)* ocorre para o caso particular onde  $N = 2$ . Neste caso especial em que apenas um segundo oscilador é acoplado ao

oscilador 1, obtemos um tempo de decoerência que é duas vezes maior que o valor da Eq.(3.59):

$$\tau_D^{fraco}(N = 2) = \frac{1}{|\alpha|^2 \Gamma_1}. \quad (3.60)$$

Para o regime de acoplamento forte, o tempo de decoerência estimado na Eq.(3.57) leva exatamente ao resultado da Eq.(3.59) quando se considera  $N \gg 1$  e ruído branco Markoviano ( $\gamma_m^\pm = \Gamma_m/N$ ). Além disso, considerando ruído branco Markoviano para  $N = 2$  ( $\gamma_m^- = \Gamma_m/4$ ,  $\gamma_m^+ = \Gamma_m/2$ ), obtemos um resultado melhor que aquele da Eq.(3.60), dado por

$$\tau_D(N = 2) = \frac{4}{3} \frac{1}{|\alpha|^2 \Gamma_1}. \quad (3.61)$$

Para a densidade espectral Lorentziana (regime de acoplamento forte) com  $N \gg 1$ , de modo que  $\gamma_m^\pm = \epsilon \Gamma_m/N$ , o tempo calculado na Eq.(3.59) é melhorado para o valor

$$\tau_D^L(N \gg 1) = \frac{1}{2\epsilon |\alpha|^2 \Gamma_1}. \quad (3.62)$$

Finalmente, gostaríamos de salientar que os tempos de decoerência para estados quânticos preparados em uma rede simétrica, com  $N > 2$ , não dependem da intensidade de acoplamento  $\lambda$  quando consideramos reservatórios com densidades espectrais do tipo ruído branco Markoviano. De fato, para  $N > 2$  o modo normal  $\Omega_\ell = \tilde{\omega}_0 - \lambda$  nunca alcança o valor zero para ruído branco Markoviano.

### 3.9 Dinâmicas de Recorrência e Transferência de Estados

Nesta Seção também consideramos os casos em que (i) todos os osciladores da rede têm a mesma taxa de dissipação,  $\Gamma_m = \Gamma$ , e (ii) todos os osciladores, com exceção do oscilador 1, com a mesma taxa de dissipação  $\Gamma_\ell = \Gamma_2 \ll \Gamma_1$ . Analisamos o efeito da dissipação sobre dois fenômenos: a recorrência do estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  ao oscilador 1 e a transferência desta superposição a um dos  $N - 1$  osciladores restantes da rede. Esta análise pretende melhorar a nossa compreensão acerca do mecanismo de perda de coerência e, particularmente, da situação especial que surge das Eqs.(3.60) e (3.61)

para o tempo de decoerência do estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  preparado no oscilador 1, que é maximizado pelo acoplamento deste oscilador a um segundo oscilador 2, apenas, com melhor fator de qualidade  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$ . Considerando que a rede é preparada no estado de superposição da Eq.(3.43),  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_\ell\}\rangle$ , calculamos, no regime de acoplamento forte, a probabilidade que o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ , preparado no oscilador 1, recorra a este oscilador e a probabilidade de transferir-se a um oscilador particular entre os restantes  $N - 1$ , isto é, a probabilidade do estado  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  estar em um dado oscilador  $\ell$ . Lembre-se que as dinâmicas de recorrência e transferência de estados é garantida para sistemas acoplados bipartidos [66, 67]. No entanto, como veremos abaixo e no *Capítulo* seguinte, para um sistema composto por vários subsistemas, estas dinâmicas dependem da topologia da rede e também das diferentes intensidades dos acoplamentos entre os subsistemas, de modo que os autoestados coletivos do sistema tenham frequências comensuráveis.

No caso que estamos analisando, em que as intensidades dos acoplamentos entre os  $N$  osciladores são iguais, esperamos que a probabilidade de transferência do estado  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  para um oscilador particular  $\ell$  nunca atinja a unidade. De fato, existe  $N-1$  osciladores acoplados ao sistema 1 e, de alguma forma, a superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  é pulverizada nos  $N-1$  osciladores caracterizados pelo fator de amortecimento  $\Gamma_2$ . Evidentemente, esta expectativa aplica-se somente quando considera-se todos os acoplamentos com a mesma intensidade  $\lambda$ . Para uma rede onde os osciladores acoplam-se entre si com diferentes intensidades  $\lambda_m$  esta análise pode não estar correta. Ao menos neste caso esperamos que a probabilidade de transferência possa alcançar um valor próximo à unidade. Quando se considera o caso especial em que  $N = 2$ , a probabilidade de transferência de estados entre ambos os sistema, com taxas de dissipação  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , pode ser igual a unidade como mostramos abaixo. Neste caso, o estado de superposição do oscilador 1 pode ser protegido no oscilador 2 se este tiver uma taxa de dissipação  $\Gamma_2$  menor.

Os operadores densidade reduzidos para os osciladores 1 e  $\ell$ , considerando a superposição inicial  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$ , derivados da Eq.(3.40), são dados, respectivamente, por

$$\rho_1(t) = \mathcal{N}_\pm^2 \sum_{p,q=1}^2 (\pm)^{1-\delta_{pq}} \exp[-2|\alpha|^2 (1 - |\mu_{11}(t)|^2) (1 - \delta_{pq}) + \theta_1^{pq}(t)] |\xi_1^p(t)\rangle \langle \xi_1^q(t)| \quad (3.63)$$

e

$$\rho_\ell(t) = \mathcal{N}_\pm^2 \sum_{p,q=1}^2 (\pm)^{1-\delta_{pq}} \exp[-2|\alpha|^2(1-|\mu_{\ell 1}(t)|^2)(1-\delta_{pq}) + \theta_\ell^{pq}(t)] |\xi_\ell^p(t)\rangle \langle \xi_\ell^q(t)|, \quad (3.64)$$

onde  $\theta_m^{pq}(t)$  é dado por

$$\theta_m^{pq}(t) = 2i \operatorname{Im} \left( \eta \beta_1^{p*} \mu_{m1}^*(t) \sum_\ell \mu_{m\ell}(t) \right). \quad (3.65)$$

A probabilidade de recorrência, calculada através do operador densidade reduzido (3.63), é dada por

$$\begin{aligned} P_R(t) &\equiv \operatorname{Tr} [\rho_1(t) \rho_1(0)] \\ &= \sum_{p,q=1}^2 \mathcal{C}_{pq}^1(t) \langle \xi_1^q | (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \langle \langle \alpha | \pm \langle -\alpha | | \xi_1^p \rangle, \end{aligned} \quad (3.66)$$

com os coeficientes

$$\mathcal{C}_{pq}^1(t) = \mathcal{N}_\pm^4 (\pm)^{1-\delta_{pq}} \exp[-2|\alpha|^2(1-|\mu_{11}(t)|^2)(1-\delta_{pq}) + \theta_1^{pq}(t)]. \quad (3.67)$$

De forma análoga a probabilidade de recorrência, através do operador densidade reduzido  $\rho_\ell(t)$  obtemos a probabilidade de transferência

$$\begin{aligned} P_T(t) &\equiv \operatorname{Tr} [\rho_\ell(t) \rho_1(0)] \\ &= \sum_{p,q=1}^2 \mathcal{C}_{pq}^\ell(t) \langle \xi_\ell^q | (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \langle \langle \alpha | \pm \langle -\alpha | | \xi_\ell^p \rangle, \end{aligned} \quad (3.68)$$

com

$$\mathcal{C}_{pq}^\ell(t) = \mathcal{N}_\pm^4 (\pm)^{1-\delta_{pq}} \exp[-2|\alpha|^2(1-|\mu_{\ell 1}(t)|^2)(1-\delta_{pq}) + \theta_\ell^{pq}(t)]. \quad (3.69)$$

Nas *Figs. 3.4* e *3.5* analisamos as probabilidades de recorrência e transferência, respectivamente, considerando ruído branco Markoviano. Na *Fig.-3.4(a)*, assumindo que todos os osciladores possuem a mesma taxa de dissipação, isto é,  $\Gamma_m = \Gamma$ , traçamos o gráfico da probabilidade de recorrência  $P_R(t)$  versus  $\Gamma t$ , assumindo  $\alpha = \eta = 1$  como parâmetros

reais,  $\lambda/\omega_0 = 2$  e escolhemos uma razão fictícia  $\Gamma/\omega_0 = 1/2$  para mostrar claramente a dinâmica dissipativa (de outra forma, a frequência de recorrência faria da figura um borrão). As curvas na *Fig.-3.4(a)* referem-se aos valores  $N = 2, 3$  e  $10$ , representados pelas linhas tracejada, sólida e pontilhada, respectivamente. Observa-se que a probabilidade de recorrência  $P_R(t)$  decai exponencialmente devido ao processo de dissipação e que este decaimento é mais lento para o caso  $N = 2$  onde a intensidade do acoplamento faz com que um dos modos normais seja deslocado para zero e, conseqüentemente,  $\gamma^- = \gamma^+/2$ . Para  $N > 2$ , quando  $\gamma^- = \gamma^+$ , notamos que a probabilidade  $P_R(t)$  decai com a mesma taxa, independentemente do número de osciladores que compõem a rede, embora as oscilações se tornem maiores quando aumentamos  $N$ . O tempo de recorrência, que se torna menor com o aumento do número de osciladores da rede, é dado pela expressão

$$t_R = \frac{2j\pi}{N\lambda}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.70)$$

Portanto, note que a probabilidade de recorrência  $P_R(t)$  apresenta dois fatores importantes: sua frequência e taxa de dissipação. Deve-se salientar que no regime de acoplamento fraco obtemos um comportamento similar para a probabilidade de recorrência. Além disso, note que em uma escala realista onde  $\lambda/\Gamma \approx 10^7$  (veja o detalhe na *Fig.-3.4(a)*), a probabilidade  $P_R(t)$  retorna próximo da unidade muitas vezes antes que o processo de relaxação torne-se efetivo.

Na *Fig.-3.4(b)*, considerando que o oscilador 1 possui uma taxa de dissipação  $\Gamma_1$  enquanto que todos os demais possuem taxas de dissipação  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$ , também traçamos o gráfico da probabilidade de recorrência  $P_R(t)$ , agora, contra o tempo escalado  $\Gamma_1 t$ , tomando  $\alpha = \eta = 1$  como parâmetros reais,  $\lambda/\omega_0 = 2$  e as razões fictícias  $\Gamma_1/\omega_0 = 1/2$  e  $\Gamma_2/\omega_0 = 10^{-2}/2$ . Como na *Fig.-3.4(a)*, as curvas para  $N = 2, 3$  e  $10$  são, respectivamente, representadas por linhas tracejada, sólida e pontilhada. Também observamos as características apontadas na *Fig.-3.4(a)*: a frequência e a taxa de decaimento da probabilidade  $P_R(t)$ . Porém, para o caso  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$ , a taxa de dissipação aumenta, de forma similar a frequência, quando  $N$  aumenta. Uma outra diferença entre as *Figs.-3.4(a e b)* é que a taxa de decaimento para  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$  é menor que para o caso  $\Gamma_2 = \Gamma_1$ , independentemente do valor  $N$ . Visto que a taxa de dissipação torna-se menor, o tempo de decoerência para o

caso  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$  torna-se maior, como calculado na Eq.(3.58). A diferença entre os tempos de decoerência em ambos os casos é maximizado à um fator 2 quando  $N = 2$  e tende a zero quando  $N \gg 1$ , como confirmado pelo tempo de decoerência na Eq.(3.58).

Na Fig.-3.5(a), considerando o caso  $\Gamma_m = \Gamma$ , traçamos o gráfico da probabilidade de transferência de estados  $P_T(t)$  para os mesmos parâmetros da Fig.-3.4(a), considerando novamente  $N = 2$  (linha tracejada), 3 (linha sólida) e 10 (linha pontilhada). Como esperado, para  $N = 2$  o estado de superposição preparado no oscilador 1 passa para o oscilador 2 antes de recorrer ao seu sistema original, e a probabilidade  $P_T(t)$  decai a partir da unidade devido ao processo de amortecimento. Porém, para  $N > 2$  o processo de transferência de estados não ocorre, isto é, não obtemos um valor significativo para  $P_T(t)$  visto que o estado de superposição é pulverizado entre os  $N - 1$  osciladores conectados ao oscilador 1. De fato, o estado da rede nos “tempos de transferência”, que assumimos ser  $t_R/2$ , compreende um emaranhado do sistema completo da forma

$$\mathcal{N}(|\varrho^+, \{v_\ell^-\}\rangle + |\varrho^-, \{v_\ell^+\}\rangle), \quad (3.71)$$

onde, afora um fator de fase irrelevante,  $\varrho^\pm = [(N - 2)(\alpha \pm 2\eta) \pm 2\eta] / N$  e  $v_\ell^\pm = v^+ = [(N - 2)(\eta \pm \alpha) + N\alpha] / N$ . O estado da Eq.(3.71), que mostra como o estado tipo “gato de Schrödinger” é pulverizado nos  $N - 1$  osciladores da rede, é obtido considerando o estado inicial  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$  e substituindo os “tempos de transferência”  $t_R/2$  na Eq.(3.38). Referímo-nos a tempos de transferência entre aspas (que assumimos ser  $t_R/2$ ), quando  $N > 2$ , os casos em que a probabilidade da superposição  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  transferir-se para um dos  $N - 1$  osciladores restantes não seja significativa.

Na Fig.-3.5(b) traçamos o gráfico da probabilidade de transferência  $P_T(t)$  para o caso  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$  considerando os mesmo parâmetros da Fig.-3.4(b). Como na Fig.-3.5(a), as curvas para  $N = 2, 3$  e 10 são representadas por linhas tracejada, sólida e pontilhada, respectivamente. Novamente, o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  transfere-se para o oscilador 2 somente para  $N = 2$ . Porém, como acontece quando comparamos a função  $P_R(t)$  nas Figs.-3.4(a e b), a taxa de dissipação para o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  é menor do que no caso  $\Gamma_2 = \Gamma_1$ .

Figura 3-4: Probabilidade de recorrência  $P_R(t)$  versus (a)  $\Gamma t$ , para o caso  $\Gamma_m = \Gamma$  (em uma razão fictícia  $\Gamma/\omega_0 = 1/2$ ) e (b)  $\Gamma_1 t$ , para o caso  $\Gamma_\ell = \Gamma_2 \ll \Gamma_1$  (em uma razão fictícia  $\Gamma_1/\omega_0 = 1/2$  e  $\Gamma_2/\omega_0 = 10^{-2}/2$ ), assumindo ruído branco Markoviano e o estado fatorado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_\ell\}\rangle$ , com parâmetros reais  $\alpha = \eta = 1$  e  $\lambda/\omega_0 = 2$ . O detalhe em (a) mostra escalas de tempo realistas  $\Gamma/\omega_0 \ll 1$ , na qual  $P_R(t)$  retorna próximo da unidade muitas vezes antes que a relaxação torne-se perceptível.

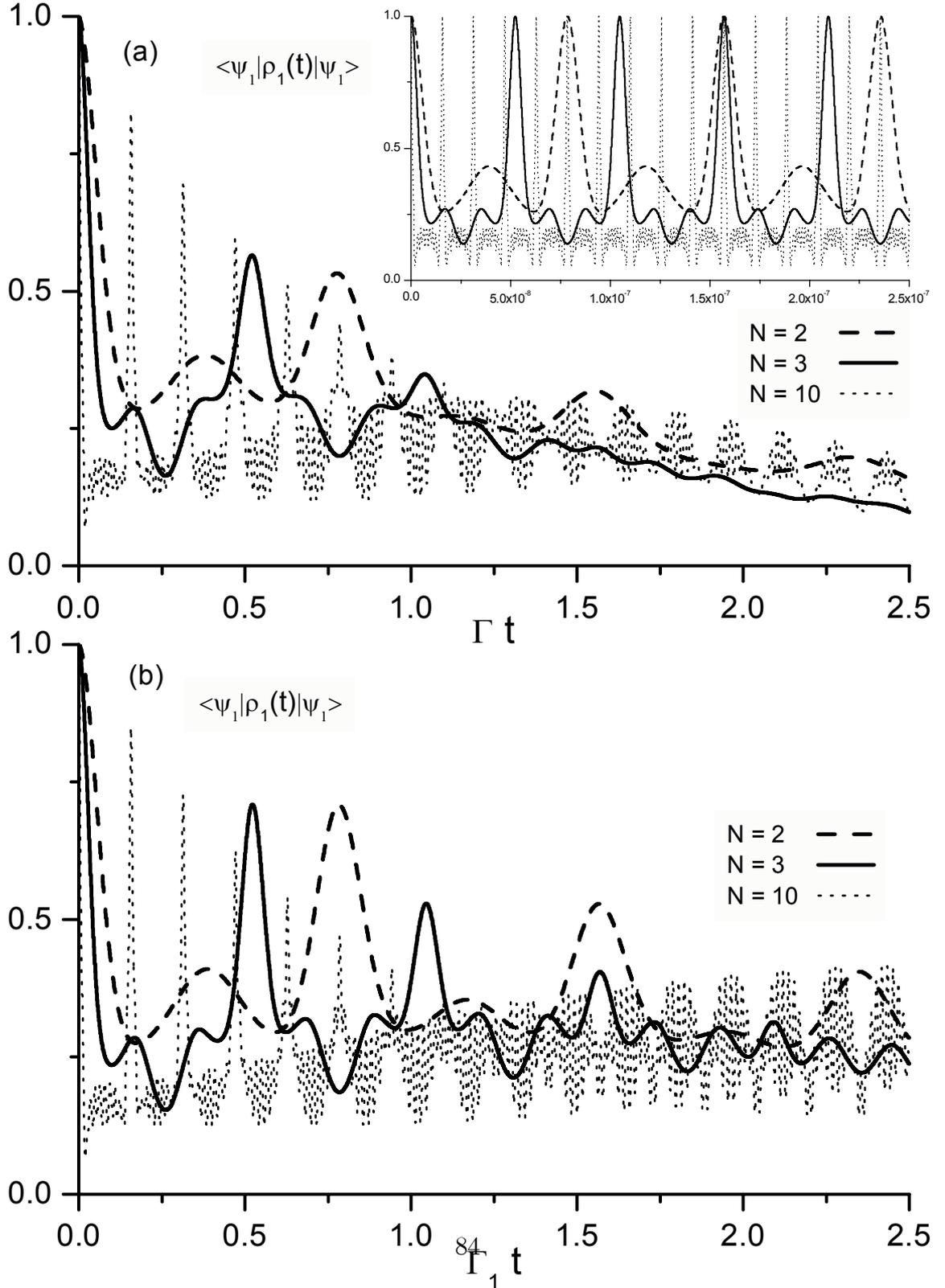
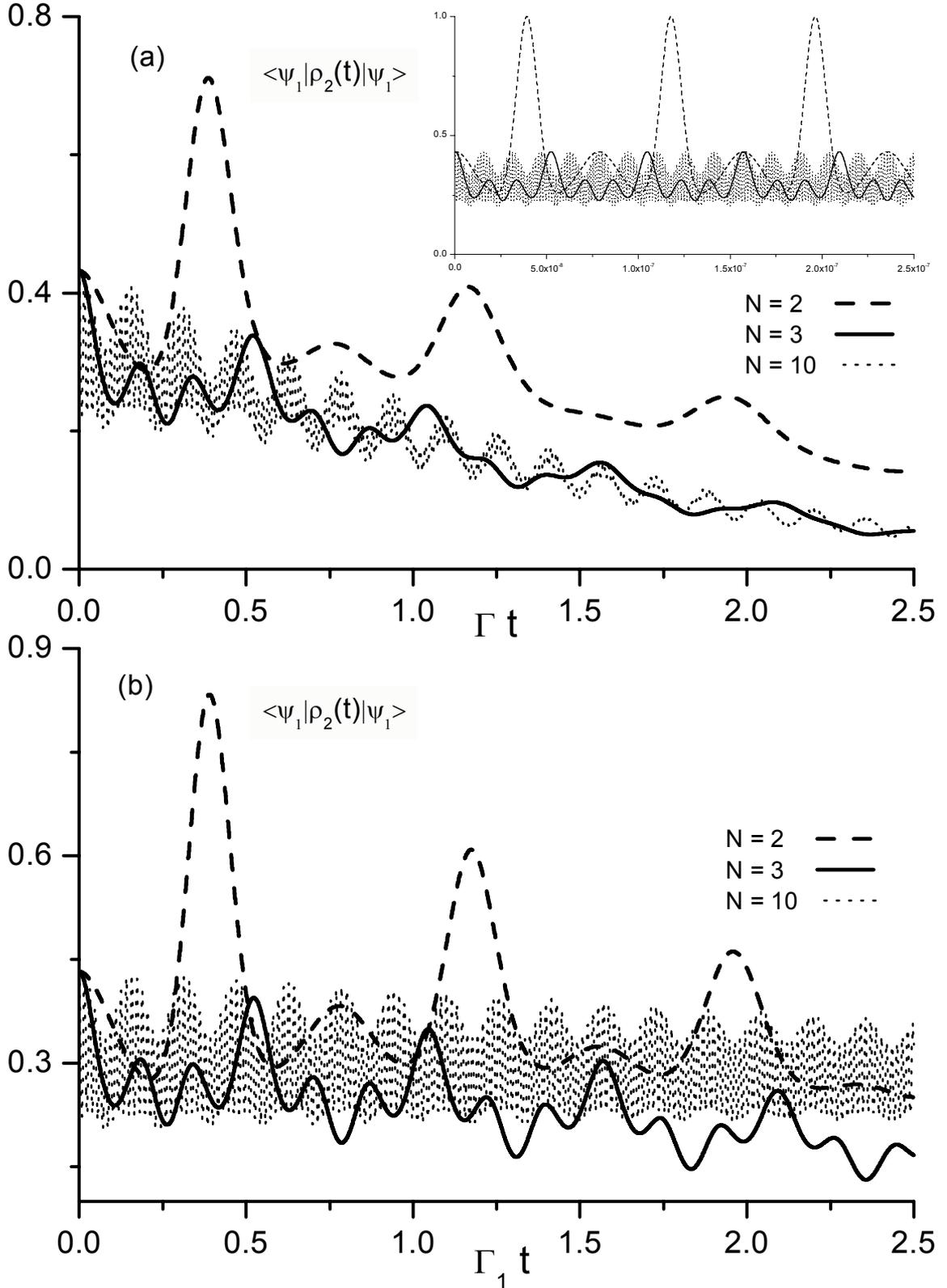


Figura 3-5: Probabilidade de transferência  $P_T(t)$  versus (a)  $\Gamma t$ , para o caso  $\Gamma_m = \Gamma$  (em uma razão fictícia  $\Gamma/\omega_0 = 1/2$ ) e (b)  $\Gamma_1 t$ , para  $\Gamma_\ell = \Gamma_2 \ll \Gamma_1$  (em uma razão fictícia  $\Gamma_1/\omega_0 = 1/2$  e  $\Gamma_2/\omega_0 = 10^{-2}/2$ ), assumindo ruído branco Markoviano e o estado fatorado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_\ell\}\rangle$ , com parâmetros reais  $\alpha = \eta = 1$  e  $\lambda/\omega_0 = 2$ .



### 3.10 Excesso de Entropia

Nesta *Seção*, considerando novamente o estado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_l\}\rangle$  e ambos os casos  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  e  $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$ , analisamos as entropias lineares para o estado conjunto, o estado reduzido do oscilador 1 e o estado reduzido de todos os  $N - 1$  osciladores restantes. Essas funções, calculadas a partir das *Eqs.* (3.63) e (3.64), no regime de acoplamento forte, são dadas, respectivamente, por

$$\mathcal{S}_{1,\dots,N}(t) = 1 - \text{Tr}_{1,\dots,N} \tilde{\rho}_{1,\dots,N}^2(t), \quad (3.72a)$$

$$\mathcal{S}_1(t) = 1 - \text{Tr}_1 \rho_1^2(t), \quad (3.72b)$$

$$\mathcal{S}_{2,\dots,N}(t) = 1 - \text{Tr}_{2,\dots,N} [\text{Tr}_1 \tilde{\rho}_{1,\dots,N}(t)]^2. \quad (3.72c)$$

Afim de analisar a evolução da correlação entre os estados reduzidos do oscilador 1 e todos os demais osciladores, também definimos nesta *Seção* o excesso de entropia, dado por

$$\mathcal{E}(t) \equiv \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_{2,\dots,N}(t) - \mathcal{S}_{1,\dots,N}(t). \quad (3.73)$$

Nas *Figs.-3.6* e *3.7* traçamos o gráfico das quantidades definidas nas *Eqs.* (3.72a)-(3.72c) e (3.73) contra  $\Gamma t$  e  $\Gamma_1 t$ , considerando os casos  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  e  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$ , respectivamente, e ruído branco Markoviano. Utilizamos a razão  $\lambda/\Gamma = 4$  na *Fig.-3.6* e, na *Fig.-3.7* assumimos  $\Gamma_1/\Gamma_2 = 10^2$  e  $\lambda/\Gamma_1 = 4$ . Como explicado acima, estas razões fictícias foram escolhidas para uma melhor visualização da dinâmica dissipativa. Em ambas as figuras escolhemos  $\alpha = \eta = 1$  como parâmetros reais e redes com  $N = 2, 3, 10$  e  $50$  osciladores.

Nas *Figs.-3.6(a)* e *3.7(a)* consideramos o caso  $N = 2$ , exhaustivamente analisado no *Capítulo 2*. Nestas figuras, a linha sólida espessa, representando a entropia linear do estado conjunto  $\mathcal{S}_{1,2}(t)$ , começa em zero, vai a um máximo devido ao processo de decoerência e então retorna a zero, visto que no limite assintótico todos os osciladores alcançam o vácuo. Enquanto isso, as entropias lineares dos estados reduzidos  $\mathcal{S}_1(t)$  e  $\mathcal{S}_2(t)$ , representadas pelas linhas sólida e tracejada, respectivamente, oscilam entre zero e 0.5. A função  $\mathcal{S}_1(t)$  ( $\mathcal{S}_2(t)$ ) alcança seu mínimo quando o oscilador 1 (oscilador 2) assume (recupera) o estado  $|-\eta\rangle_1$  ( $|\eta\rangle_2$ ), como pode ser calculado da *Eq.* (3.38). Ao mesmo tempo,  $\mathcal{S}_2(t)$  ( $\mathcal{S}_1(t)$ ) toca

na linha s3lida espessa representando  $\mathcal{S}_{1,2}(t)$ , por cima, indicando que a superposi33o  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  3 transferida (recuperada) ao oscilador 2 (1) a caminho da decoer3ncia. Temos certeza que 3 exatamente o estado  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  que recorre (transfere-se) ao oscilador 1 (2) atrav3s das *Figs.-3.4* e *3.5*, que mostram claramente (considerando par3metros realistas) que esta superposi33o de fato recorre (transfere-se) ao oscilador 1 (2). Portanto, enquanto a superposi33o  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  preparada no oscilador 1, transfere-se para o oscilador 2 e subseq3entemente 3 recuperada pelo oscilador 1, o estado coerente  $|\eta\rangle_2$  preparado no oscilador 2, recorre a este sistema, mas n3o 3 transferido ao oscilador 1 (como enfatizado no *Cap3tulo 2*) que, em vez disso, assume o estado  $|-\eta\rangle_1$ .

Tamb3m observamos das *Figs.-3.6(a)* e *3.7(a)* que as correla33es m3ximas entre os osciladores 1 e 2 ocorrem nos pontos onde as curvas  $\mathcal{S}_1(t)$  e  $\mathcal{S}_2(t)$  se cruzam, como ilustrado pela linha pontilhada representando o excesso de entropia  $\mathcal{E}(t)$ . Quando as entropias lineares  $\mathcal{S}_1(t)$  ou  $\mathcal{S}_2(t)$  tocam na curva  $\mathcal{S}_{1,2}(t)$ , isto 3, quando o estado de superposi33o  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  recorre ao oscilador 1 ou 3 transferido ao oscilador 2, o excesso de entropia bem como as correla33es entre os osciladores alcan3am seus m3nimos. Note que, a medida que o tempo passa, os osciladores n3o se descorrelacionam por completo, visto que o excesso de entropia nunca alcan3a zero. Como analisado no *Cap3tulo 2*, onde somente o caso  $N = 2$  foi considerado, o m3nimo do excesso de entropia  $\mathcal{E}(t)$  afasta-se de zero devido ao desenvolvimento de uma inevit3vel correla33o de fundo entre os osciladores, que deste modo tornam-se correlacionados enquanto que a entropia linear do estado conjunto  $\mathcal{S}_{1,2}(t)$  alcan3a seu valor m3ximo. Evidentemente, o m3nimo do excesso de entropia  $\mathcal{E}(t)$  retorna a zero, bem como a entropia linear do estado conjunto  $\mathcal{S}_{1,2}(t)$ , quando o sistema todo vai para o estado de v3cuo. Esta correla33o de fundo surge por meio de dois diferentes processos: (i) o canal de dissipa33o misto ( $\mathcal{L}_{mn}\rho_{1,\dots,N}(t)$ ) que conecta os operadores de Liouville individuais  $\mathcal{L}_m\rho_{1,\dots,N}(t)$  e tamb3m (ii) os canais de dissipa33o usuais ( $\mathcal{L}_m\rho_{1,\dots,N}(t)$ ) quando as taxas de dissipa33o dos  $N$  osciladores,  $\Gamma_n$ , s3o diferentes entre si. Para taxas de dissipa33o iguais, os canais de dissipa33o usuais n3o contribuem para o desenvolvimento da correla33o de fundo.

Para o caso  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  e assumindo ru3do branco Markoviano, o desenvolvimento desta correla33o de fundo ocorre somente para  $N = 2$  visto que os canais de dissipa33o mistos  $\mathcal{L}_{mn}\rho_{1,\dots,N}(t)$  s3o nulos para  $N > 2$  (e as taxas de dissipa33o s3o iguais). De fato,

verifica-se, para  $N = 2$ , que ruído branco Markoviano implica em  $\gamma^- = \gamma^+/2 = \Gamma/4$ , enquanto que para  $N > 2$  obtemos  $\gamma^- = \gamma^+ = \Gamma/N$ . Devido a esta correlação de fundo, originária do canal de dissipação misto  $\mathcal{L}_{12}\rho_{1,2}(t)$ , o oscilador 1 (2) nunca recorre (assume) exatamente ao (o) estado  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ : a probabilidade do estado  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  recorrer (transferir-se) ao oscilador 1 (2) decresce quando a entropia linear do estado conjunto aumenta, alcançando um máximo e retornando a zero. De forma similar, o oscilador 1 (2) nunca assume (recupera) exatamente o estado  $|-\eta\rangle_1 (|\eta\rangle_2)$ .

Nas *Figs.-3.6(b)* e *3.7(b)* consideramos  $N = 3$ . Neste caso, como discutido acima e indicado nas figuras, perdemos a transferência do estado de superposição  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  para o sistema “2 + 3” (quando assumimos a mesma intensidade do acoplamento entre todos os osciladores). De fato, para qual oscilador, 2 ou 3, a superposição será transferida? Visto que assumimos a mesma intensidade de acoplamento entre os osciladores, a superposição deve ser compartilhada entre os osciladores 2 e 3. Ela não será encontrada no sistema “2 + 3” com uma probabilidade significativa que possa ser interpretada como um processo de transferência. Portanto, não existe nenhuma transferência de estados entre os sistemas reduzidos 1 e “2 + 3”. As funções  $\mathcal{S}_1(t)$  e  $\mathcal{S}_{2,3}(t)$  evoluem através do que podemos denominar “*mínimos locais*” antes do processo de recorrência, onde uma dessas funções alcança zero e a outra toca na curva  $\mathcal{S}_{1,2,3}(t)$ . Conseqüentemente, o excesso de entropia  $\mathcal{E}(t)$  também passa por “*mínimos locais*” (onde se esperava ocorrer o processo de transferência), visto que nessas regiões os sistemas 1 e “2 + 3” apresentam um grau significativo de emaranhamento. Como nas *Figs.-3.6(a)* e *3.7(a)*, as correlações máximas entre esses sistemas reduzidos ainda ocorrem nos pontos onde as curvas  $\mathcal{S}_1(t)$  e  $\mathcal{S}_{2,3}(t)$  se cruzam, como indicado pela linha pontilhada representando  $\mathcal{E}(t)$ . A diferença entre as *Figs.-3.6(b)* e *3.7(b)* é que na última existe o desenvolvimento de uma correlação de fundo entre os osciladores, como no caso  $N = 2$ . De fato, para  $\Gamma_2 \neq \Gamma_1$ , as diferentes taxas de dissipação dos operadores de Liouville individuais  $\mathcal{L}_m\rho_{1,2,3}(t)$  levam ao desenvolvimento da correlação de fundo. Note que no ruído branco Markoviano os canais de dissipação mistos  $\mathcal{L}_{mn}\rho_{1,2,3}(t)$  são nulos e não contribuem para a correlação de fundo. Desta forma, diferentes taxas de dissipação dos operadores de Liouville individuais levam ao desenvolvimento de uma correlação de fundo mesmo quando os canais de dissipação mistos são nulos.

Enquanto que os processos de transferência de estados são perdidos para  $N > 2$ ,

os processos de recorrência são mantidos: quando  $\mathcal{S}_1(t)$  toca na linha sólida espessa de  $\mathcal{S}_{1,\dots,N}(t)$ , o estado  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  recorre ao oscilador 1 a caminho da decoerência, como indicado na *Fig.-3.6* e também nas *Figs.-3.7(b,c e d)* para  $N = 3, 10$  e  $50$ , respectivamente. Simultaneamente, quando  $\mathcal{S}_{2,\dots,N}(t)$  alcança o zero, os estados coerentes  $|\eta, \dots, \eta\rangle_{2,\dots,N}$  recorrem ao sistema “ $2 + \dots + N$ ”. Evidentemente, para o caso  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$  da *Fig.-3.7*, os estados que recorrem aos sistemas “1” e “ $2 + \dots + N$ ” não são exatamente a superposição  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  e os estados coerentes  $|\eta, \dots, \eta\rangle_{2,\dots,N}$ , respectivamente. Isto se deve ao desenvolvimento de uma correlação de fundo. Porém, ainda que os sistemas “1” e “ $2 + \dots + N$ ” não se decorrelacionem completamente nos tempos de recorrência, uma *pequena* rede com  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$  pode proteger, no sistema “ $2 + \dots + N$ ”, o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  preparado no oscilador 1. Como visto da *Eq.(3.58)*, em uma pequena rede obtemos um tempo de decoerência para o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  cerca de duas vezes o valor derivado para um único oscilador. Quando o número de osciladores da rede cresce, o tempo de decoerência aproxima-se daquele para um único oscilador dissipativo. De fato, o tempo de decoerência calculado pela *Eq.(3.58)*, para o caso  $N = 3$ , é  $9/5$  vezes o valor estimado quando a superposição é preparada em um único oscilador dissipativo. Para uma rede com  $N = 5$  (e  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$ ), o tempo de decoerência é cerca de  $3/2$  vezes o valor calculado para um único oscilador dissipativo.

Além disso, é crucial notar que a correlação de fundo não afeta significativamente a fidelidade da superposição recuperada  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  quando consideramos uma rede onde  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$ . De fato, para qualquer que seja a função de distribuição espectral, o tempo de correlação que decorre do desenvolvimento da correlação de fundo, estimado quando o mínimo de  $\mathcal{E}(t)$  aproxima-se de  $10^{-2}$ , é dado por

$$\tau_c \approx \frac{N}{10 |\alpha| \sqrt{N-1} |\gamma_1^+ - \gamma_2^- + (N-1)(\gamma_2^+ - \gamma_1^-)|}. \quad (3.74)$$

Da *Eq.(3.74)* concluímos que para o regime de acoplamento fraco, quando  $\gamma_\ell^+ = \gamma_\ell^- = \Gamma_\ell/N$ , e considerando que todos os osciladores da rede possuem a mesma taxa de dissipação,  $\Gamma_m = \Gamma$ , o tempo de correlação torna-se infinito, isto é, a entropia  $\mathcal{S}_{2,\dots,N}(t)$  sempre retorna a zero nos tempos de recorrência. Para  $\Gamma_2 \neq \Gamma_1$ , considerando o tempo de decoerência  $\tau_D$  calculado no regime de acoplamento forte (*Eq.(3.57)*), obtemos a razão

Figura 3-6: Entropias lineares  $\mathcal{S}_{1,\dots,N}(t)$ ,  $\mathcal{S}_1(t)$ ,  $\mathcal{S}_{2,\dots,N}(t)$  e excesso de entropia  $\mathcal{E}(t)$  contra  $\Gamma t$ , para  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  (ajustando  $\lambda/\Gamma = 4$ ), assumindo ruído branco Markoviano e o estado fatorado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_e\}\rangle$ , com parâmetros reais  $\alpha = \eta = 1$ . Redes com (a)  $N = 2$ , (b)  $N = 3$ , ...

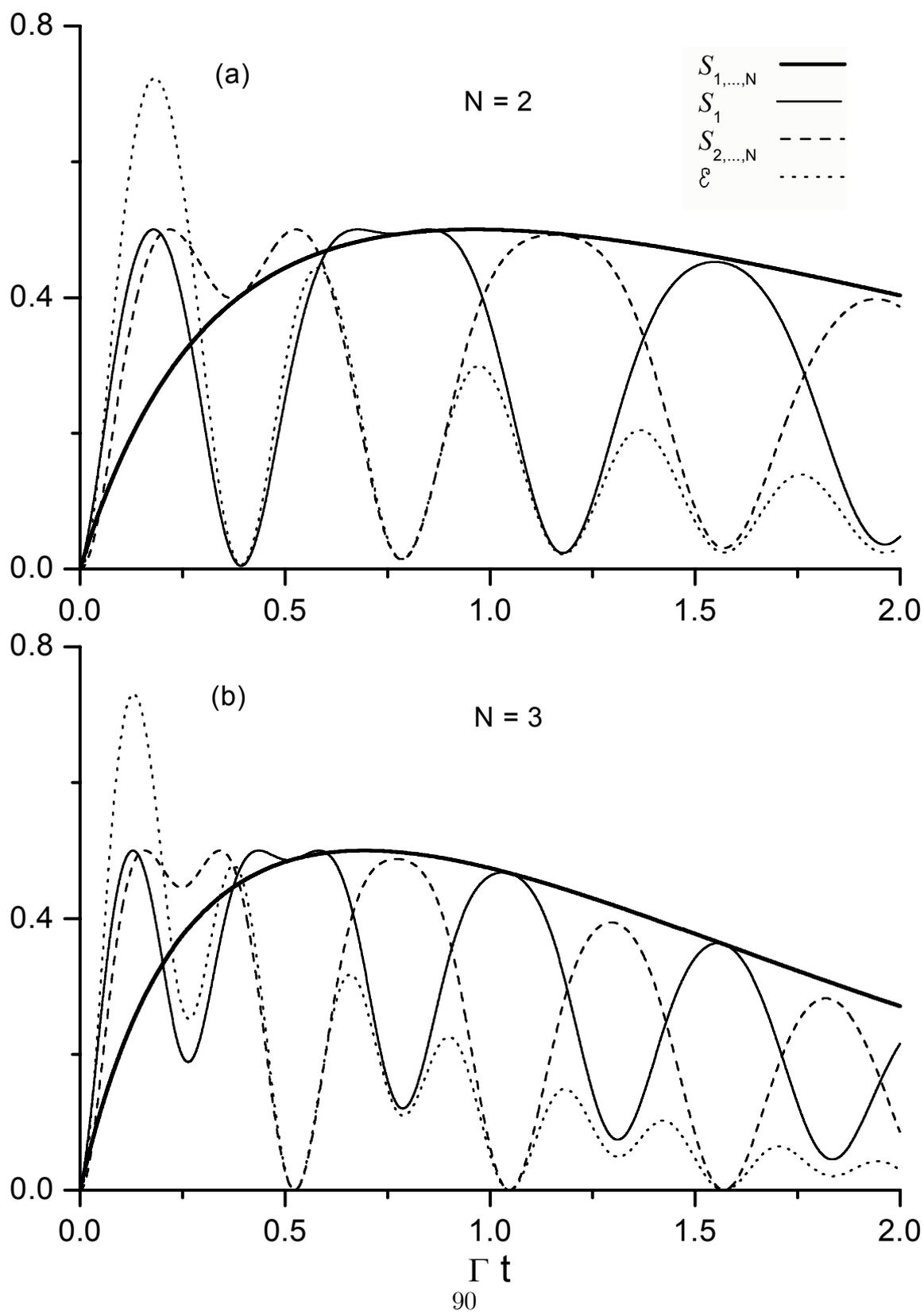


Figura 3-6: ... (c)  $N = 10$  e (d)  $N = 50$ .

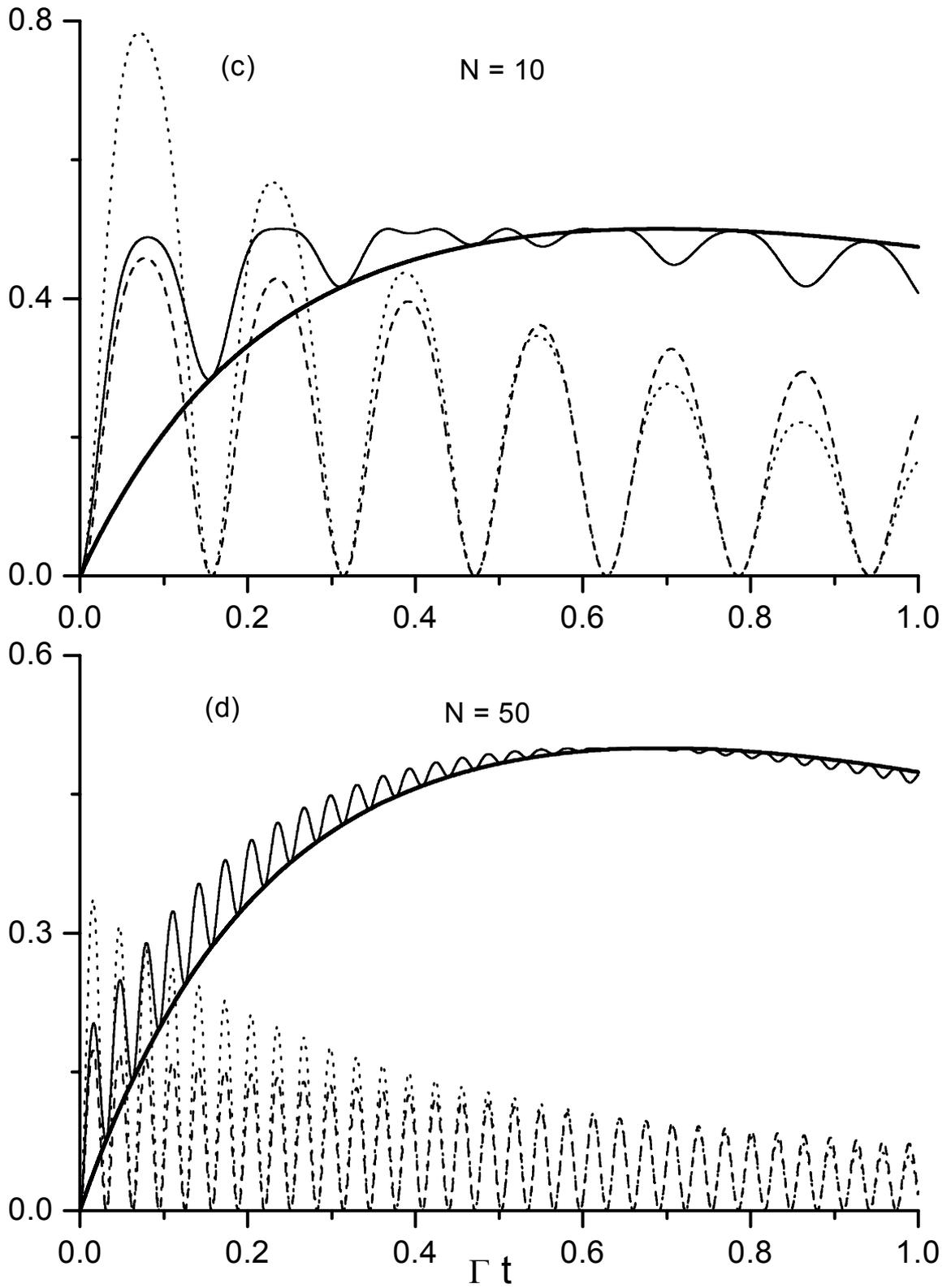


Figura 3-7: Entropias lineares  $\mathcal{S}_{1,\dots,N}(t)$ ,  $\mathcal{S}_1(t)$ ,  $\mathcal{S}_{2,\dots,N}(t)$  e excesso de entropia  $\mathcal{E}(t)$  contra  $\Gamma_1 t$ , para  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$  (ajustando  $\Gamma_1/\Gamma_2 = 10^2$  e  $\lambda/\Gamma_1 = 4$ ), assumindo ruído branco Markoviano e o estado fatorado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_l\}\rangle$ , com parâmetros reais  $\alpha = \eta = 1$ . Redes com (a)  $N = 2$ , (b)  $N = 3$ , ...

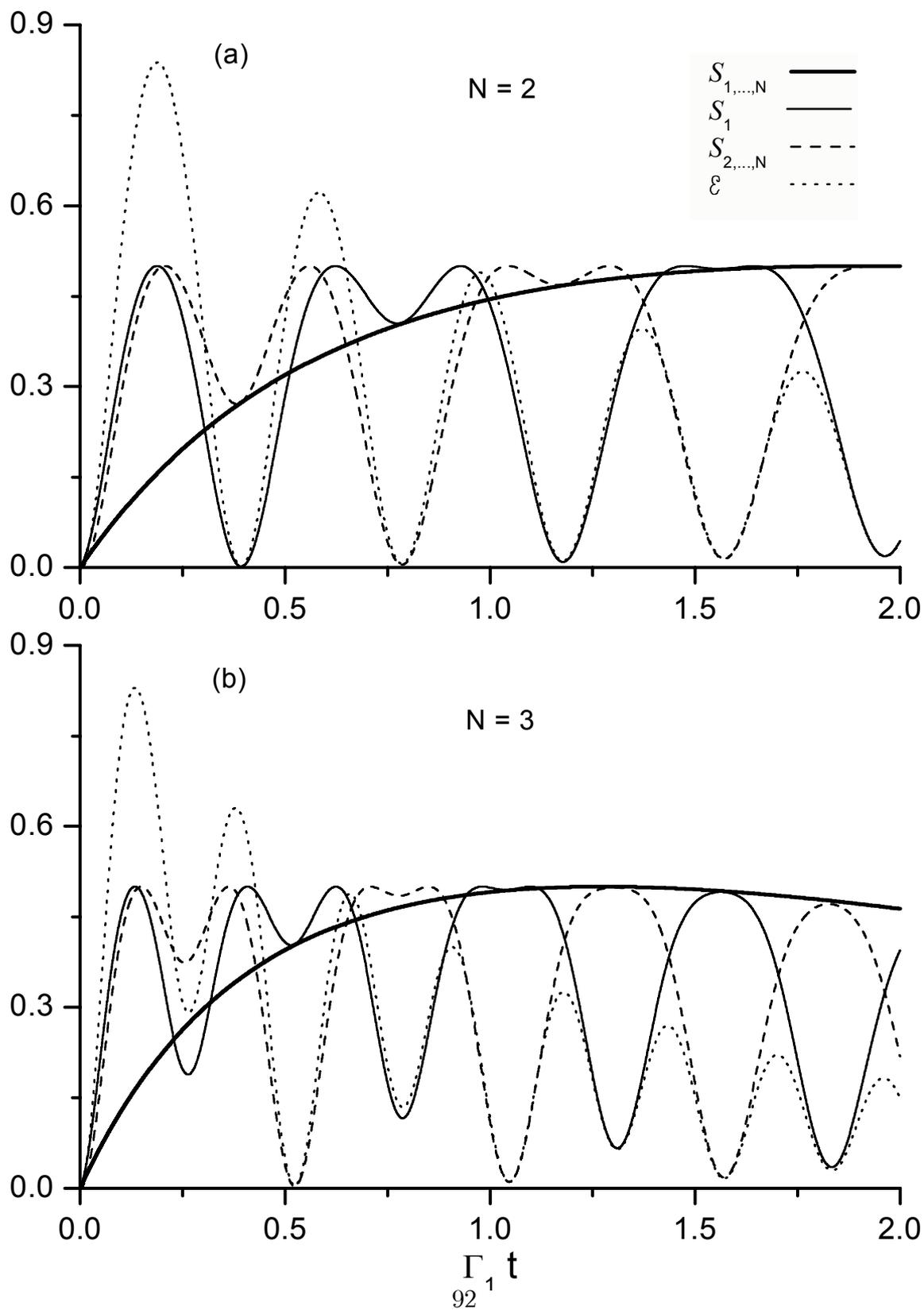
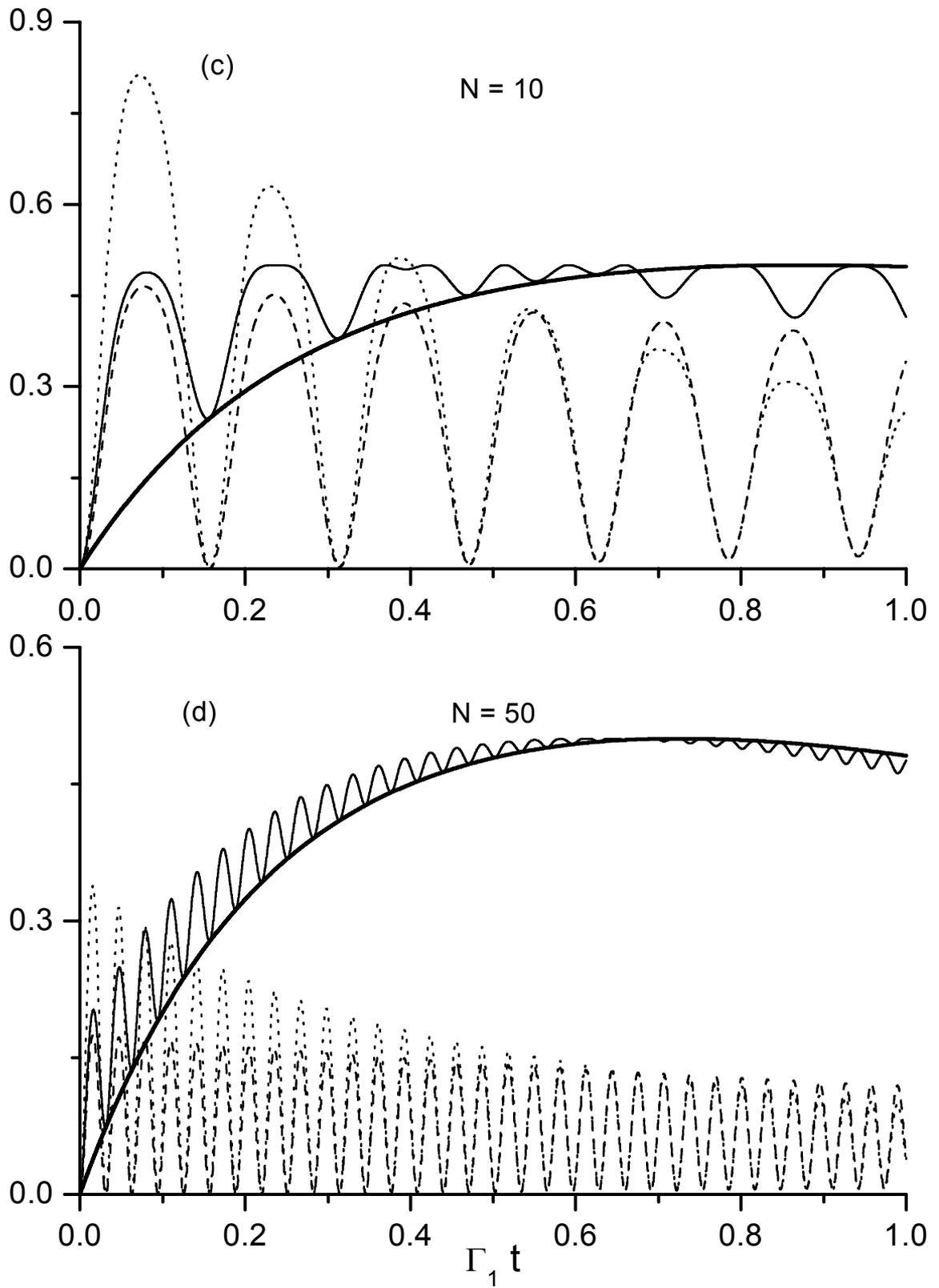


Figura 3-7: ... (c)  $N = 10$  e (d)  $N = 50$ .



$$\tau_C/\tau_D \quad \frac{\tau_C}{\tau_D} \approx \frac{|\alpha| [\gamma_1^+ + (N-1)(\gamma_2^+ + \gamma_2^-) + (N-1)^2\gamma_1^-]}{5\sqrt{N-1} |\gamma_1^+ - \gamma_2^- + (N-1)(\gamma_2^+ - \gamma_1^-)|}. \quad (3.75)$$

Portanto, quando  $\tau_C/\tau_D \gtrsim 1$  podemos sempre recuperar o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  no oscilador 1, com uma fidelidade considerável, apesar da correlação de fundo (isto é, o processo de emaranhamento entre os osciladores que compõem a rede). Evidentemente, para  $\tau_C/\tau_D \gtrsim 1$  o tempo de correlação torna-se maior do que o tempo de decoerência, e deste modo torna-se desprezível para os propósitos de proteção de estados. Para uma rede com  $N > 2$  e  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$ , assumindo ruído branco Markoviano, obtemos da Eq.(3.75) o resultado

$$\frac{\tau_C}{\tau_D} \approx \frac{|\alpha| [(N-1)^2 + 1]}{5\sqrt{N-1}(N-2)}. \quad (3.76)$$

Como um exemplo, para  $N = 5$  obtemos  $\tau_C/\tau_D \approx |\alpha|/2$  de modo que, partindo de um estado coerente  $|\alpha| \gtrsim 2$ , podemos recuperar o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  protegido no sistema “2 + ... + 5” com uma boa fidelidade. Evidentemente, para  $N > 5$  obtemos uma razão  $\tau_C/\tau_D$  maior do que a unidade mesmo para  $|\alpha|$  menor do que 2. Este é um resultado importante, visto que o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ , preparado no oscilador 1, pode ser protegido contra a decoerência pelo sistema “2 + ... + N”, quando  $\Gamma_2 \neq \Gamma_1$ , e eventualmente recuperado no oscilador 1. Porém, salientamos novamente (no contexto de ruído branco Markoviano) que para  $N > 2$  a proteção de estado não é tão eficiente quanto para  $N = 2$ . Este mecanismo para proteção de estados pode ser aplicado na eletrodinâmica quântica de cavidades, onde um estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  pode ser preparado em uma cavidade aberta de qualidade inferior, protegido contra a decoerência em um sistema de cavidades fechadas de qualidade superior e ser resgatado na cavidade aberta, digamos, para propósitos de interação átomo-campo.

Considerando uma rede com o mesmo fator de amortecimento,  $\Gamma_m = \Gamma$ , no regime de acoplamento forte, obtemos da Eq.(3.74) a expressão

$$\frac{\tau_C}{\tau_D} \approx \frac{|\alpha| [\gamma^+ + (N-1)\gamma^-]}{5\sqrt{N-1} |\gamma^+ - \gamma^-|}. \quad (3.77)$$

Para  $N > 2$  e assumindo ruído branco Markoviano, obtemos  $\tau_C/\tau_D \rightarrow \infty$  como esperado das Figs.-3.6(b,c e d). Para  $N = 2$  obtemos  $\tau_C/\tau_D = 3|\alpha|/5$  de modo que, para  $|\alpha| \gtrsim 2$

obtemos  $\tau_C/\tau_D \gtrsim 1$ .

Finalmente, note que quando preparamos um estado do tipo “*gato de Schrödinger*” no oscilador 1, a rede funciona como parte do reservatório  $R_1$  como indicado nas *Figs.- 3.6(d)* e *3.7(d)*. De fato, para  $N \gg 1$ , estas figuras indicam que a evolução do estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ , preparado no oscilador 1, não depende da rede. A entropia linear para o estado conjunto,  $\mathcal{S}_{1,\dots,N}(t)$ , coincide com aquela para o estado reduzido do oscilador 1,  $\mathcal{S}_1(t)$ , durante toda a evolução.

### 3.11 Conclusão

Neste *Capítulo* analisamos a dinâmica de coerência e o processo de decoerência de estados quânticos em uma rede composta por  $N$  osciladores dissipativos acoplados. Assumindo que todos os osciladores possuem a mesma frequência natural  $\omega_0$  e acoplam-se com a mesma intensidade  $\lambda$ , consideramos ambos os regimes de acoplamento fraco e forte entre os osciladores. Além disso consideramos uma rede simétrica onde todos os osciladores interagem entre si.

Quando assumimos todos os osciladores com a mesma frequência natural  $\omega_0$ , interagindo entre si com a mesma intensidade  $\lambda$ , observamos que a rede apresenta somente dois modos normais distintos,  $\Omega_1$  e  $\Omega_\ell$ , como definido nas *Eqs. (3.6a)* e *(3.6b)*, respectivamente. Um resultado central é que no regime de acoplamento forte a taxa de dissipação para cada oscilador  $\Gamma_m$  (calculada a partir de uma função centralizada em torno do modo normal  $\omega_0$ ) desdobra-se em dois diferentes valores  $\gamma_m^+$  e  $\gamma_m^-$  (calculados a partir de funções centralizadas em torno dos modos normais  $\Omega_1$  e  $\Omega_\ell$ , respectivamente). No regime de acoplamento fraco não há desdobramento da taxa de dissipação, de modo que  $\gamma_m^\pm = \Gamma_m/N$ , onde  $\Gamma_m$  define a constante de dissipação de um único oscilador dissipativo. As constantes de dissipação  $\gamma_m^+$  e  $\gamma_m^-$ , obtidas pelo desdobramento de  $\Gamma_m$  no regime de acoplamento forte, podem assumir valores completamente diferentes a depender das densidades espectrais dos reservatórios associados aos osciladores que compõem a rede. Visto que a magnitude dessas constantes de dissipação dependem da densidade espectral em torno dos modos normais, o mecanismo de desdobramento pode ser usado para controlar o processo de decoerência de estados quânticos da rede. Portanto, a construção de densidades espectrais

específicas do reservatório, através do programa de engenharia de reservatórios, torna-se extremamente importante para o controle do processo de decoerência de osciladores quânticos fortemente interagentes.

Observe que denominamos regime de acoplamento forte as situações em que o parâmetro  $\lambda(N - 1)$  é suficientemente grande para deslocar os modos normais para regiões muito distantes da frequência natural  $\omega_0$ . Essas situações surgem quando aumentamos a intensidade do acoplamento entre os osciladores e/ou o número de osciladores pertencentes à rede. Deste modo, note que em um processador lógico quântico realista, o número de nós dissipativos deve sempre ser motivo de preocupação quando se analisa a dinâmica de coerência e estima-se os tempos de decoerência, visto que os canais de dissipação mistos podem ocorrer mesmo no caso em que a intensidade de acoplamento é fraca.

Uma outra consequência do regime de acoplamento forte, relacionado ao desdobramento das taxas de dissipação, é o surgimento de canais de dissipação mistos na equação mestra da rede, como descrito na *Eq. (3.19)*. Esses canais de dissipação mistos acoplam os canais de dissipação individuais descritos pelos operadores de Liouville  $\mathcal{L}_m \rho_{1,\dots,N}(t)$ . Como vemos da *Eq. (3.19)*, esses canais de dissipação mistos tornam-se nulos quando  $\gamma_m^+ = \gamma_m^-$ , o que sempre ocorre no regime de acoplamento fraco e também no regime de acoplamento forte quando se considera uma densidade espectral do tipo ruído branco Markoviano. Os canais de dissipação mistos são responsáveis pelo surgimento de uma correlação de fundo entre os osciladores, ou seja, uma correlação residual permanente entre os osciladores que compõem a rede. Como salientado neste *Capítulo*, diferentes taxas de dissipação associadas aos operadores de Liouville individuais também levam ao desenvolvimento de uma correlação de fundo, mesmo quando os canais de dissipação mistos são nulos.

Considerando uma rede simétrica, calculamos o tempo de decoerência para estados quânticos da rede, emaranhados ou não, no regime de acoplamento forte. A expressão calculada pode facilmente ser particularizada para o regime de acoplamento fraco. Em particular, calculamos o tempo de decoerência para o estado fatorado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes \{|\eta_\ell\rangle\}$ , onde um estado do tipo “gato de Schrödinger” é preparado no oscilador 1 enquanto que os demais  $N - 1$  osciladores são preparados nos estados coerentes  $\eta$ . Assumimos que o oscilador 1 possui taxa de dissipação  $\Gamma_1$  enquanto os demais  $N - 1$  osciladores da rede possuem taxa de dissipação  $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$ . Encontramos que o tempo

de decoerência do estado do tipo “*gato de Schrödinger*”  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ , preparado no oscilador 1, é maximizado quando  $N = 2$ , caso em que apenas um segundo oscilador, com taxa de dissipação  $\Gamma_2$ , é acoplado ao oscilador 1, cuja taxa de dissipação é  $\Gamma_1$ . Quando aumentamos o número  $N$  de osciladores da rede, os tempos de decoerência, que são maximizados para  $N = 2$  (caso em que  $\tau_D = (|\alpha|^2 \Gamma_1)^{-1}$ ), decrescem gradualmente, alcançando o valor bem conhecido  $(2|\alpha|^2 \Gamma_1)^{-1}$  (calculado quando a superposição  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  é preparada em um único oscilador dissipativo) quando  $N \rightarrow \infty$ .

Para entender este interessante resultado, analisamos as dinâmicas de *i*) recorrência de estados e *ii*) transferência de estados, isto é, *i*) a probabilidade que o estado de superposição  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ , preparado no oscilador 1, recorra ao seu sistema inicial e *ii*) a probabilidade de transferência do estado de superposição a um oscilador particular entre os  $N - 1$  osciladores restantes (isto é, a probabilidade do estado  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  estar em um dos  $N - 1$  osciladores restantes). Verifica-se que o processo de transferência de estados ocorre somente quando  $N = 2$ , de modo que a superposição  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ , preparada no oscilador 1, é protegida no oscilador 2 que possui uma taxa de dissipação menor. De outra forma, para  $N > 2$ , o processo de transferência não ocorre com uma probabilidade significativa e a superposição não pode ser completamente protegida nos  $N - 1$  osciladores restantes da rede. De fato, quando acoplamos o oscilador 1 a um sistema de  $\ell (> 2)$  osciladores, como pode a superposição  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  ser transferida para os demais osciladores? Esta superposição é de alguma forma pulverizada nos  $N - 1$  osciladores restantes da rede, de modo que nunca será encontrada em um deles com probabilidade significativa e, portanto, a proteção de estados não será tão eficiente quanto para  $N = 2$ .

Também analisamos as entropias lineares para o estado conjunto,  $\mathcal{S}_{1,\dots,N}(t)$ , o estado reduzido do oscilador 1,  $\mathcal{S}_1(t)$ , e o estado reduzido de todos os  $N - 1$  osciladores restantes,  $\mathcal{S}_{2,\dots,N}(t)$ , como definido pelas *Eqs. (3.72a)-(3.72c)*. A quantidade que denominamos excesso de entropia,  $\mathcal{E}(t) \equiv \mathcal{S}_1(t) + \mathcal{S}_{2,\dots,N}(t) - \mathcal{S}_{1,\dots,N}(t)$ , foi também considerada. Observa-se que para  $N > 2$ , afora a perda do processo de transferência de estados, isto é, a superposição  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$  não pode ser transferida para os  $N - 1$  osciladores restantes com uma probabilidade significativa, esta superposição dificilmente deixa o oscilador 1 quando  $N \gg 1$ . De fato, a frequência do processo de recorrência de estados cresce com o au-

mento do número  $N$  de osciladores da rede. Este é um aspecto interessante da dinâmica de coerência em uma rede quântica simétrica: quando preparamos um estado de superposição em um oscilador dissipativo particular 1, de uma rede simétrica com  $N$  ( $N \gg 1$ ) osciladores dissipativos acoplados, tal estado de superposição decai como se o oscilador dissipativo 1 fosse desacoplado da rede. Portanto, os  $N - 1$  osciladores restantes da rede não podem ser distingüidos dos modos do reservatório acoplado ao oscilador 1.

# Capítulo 4

## Rede Central de $N$ Osciladores Dissipativos Acoplados

### 4.1 Introdução

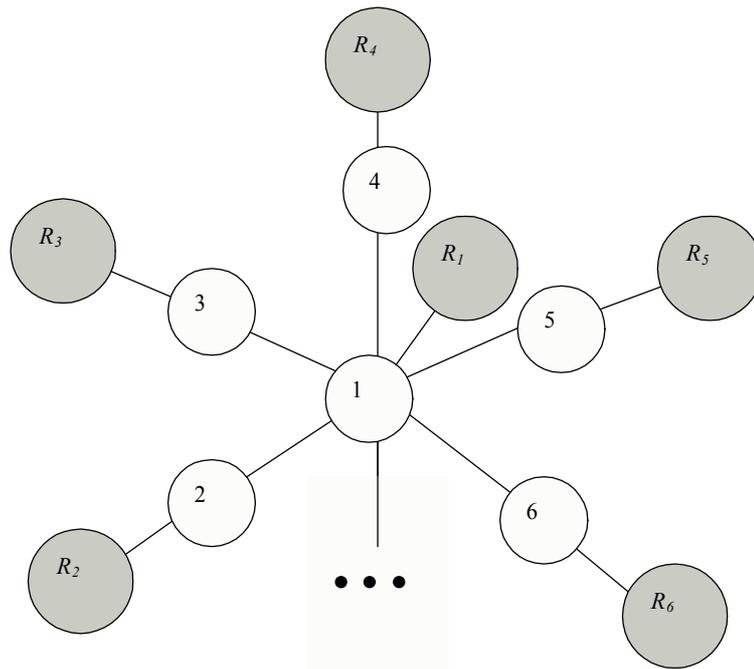
No *Capítulo 3* analisamos os fenômenos da não localidade e decoerência através de estados quânticos preparados em uma rede de  $N$  osciladores dissipativos interagentes, considerando uma rede simétrica onde todos os osciladores interagem entre si. Agora, ainda preocupados com os mesmos fenômenos, consideraremos uma topologia diferente em que um oscilador dissipativo central interage com os demais  $N - 1$  osciladores dissipativos periféricos, conforme esboça a *Fig.-4.1*. De forma similar ao *Capítulo 3*, aqui analisamos, especificamente, o processo de decoerência focalizando o oscilador central, que além de interagir com o seu respectivo reservatório, interage diretamente com os demais  $N - 1$  osciladores periféricos não interagentes. Evidentemente, o oscilador central interage indiretamente com os reservatórios associados aos  $N - 1$  osciladores periféricos, os quais interagem indiretamente uns com os outros através do oscilador central 1. Considerando, como feito no *Capítulo 3* desta tese, que todos os osciladores possuem a mesma frequência natural  $\omega_0$  e acoplam-se com a mesma intensidade  $\lambda$ , derivamos equações mestras para ambos os regimes de acoplamento, fraco e forte. A partir das equações mestras, a dinâmica de coerência de estados particulares da rede é analisada bem como os tempos de decoerência desses estados. Os resultados obtidos aqui, para a rede central de osciladores, são comparados àqueles da rede simétrica no *Capítulo 3* desta tese. A comparação mostra

como a topologia de uma rede afeta a dinâmica de coerência em osciladores quânticos fortemente interagentes.

## 4.2 Rede Central

Como no caso da rede simétrica, também assumiremos neste *Capítulo* que as interações entre os osciladores, bem como entre os osciladores e seus reservatórios, são descritas através da aproximação de onda girante. Denominamos por rede central o caso em que um único oscilador interage com os demais osciladores compondo a rede, conforme a *Fig.-4.1*.

Figura 4-1: Esquema de uma rede central onde um oscilador dissipativo central 1 interage com  $N - 1$  osciladores dissipativos periféricos não interagentes. Seus respectivos reservatórios são rotulados por  $R_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ).



Considere que o índice  $\ell$  varia de 2 à  $N$ , como realizado no *Capítulo* anterior, ao passo que o índice  $n$  varia de 1 à  $N$ . O sistema Hamiltoniano para a rede central é representado

por

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{\ell} \frac{\omega_0}{N-1} \left( a_1^\dagger + (N-1) \frac{\lambda}{2\omega_0} a_\ell^\dagger \right) \left( a_1 + (N-1) \frac{\lambda}{2\omega_0} a_\ell \right) \\
&+ \sum_{\ell} \omega_0 \left( a_\ell^\dagger + (N-1) \frac{\lambda}{2\omega_0} a_1^\dagger \right) \left( a_\ell + (N-1) \frac{\lambda}{2\omega_0} a_1 \right) \\
&+ \sum_{n,k} \omega_{nk} \left( b_{nk}^\dagger + \frac{V_{nk}}{\omega_{nk}} a_n^\dagger \right) \left( b_{nk} + \frac{V_{nk}}{\omega_{nk}} a_n \right), \tag{4.1}
\end{aligned}$$

onde  $a_n^\dagger$  e  $a_n$  são, respectivamente, os operadores de criação e destruição para o  $n$ -ésimo oscilador, ao passo que  $b_{nk}^\dagger$  e  $b_{nk}$  são os operadores análogos para o  $k$ -ésimo modo do reservatório associado ao sistema  $n$ , cuja frequência e intensidade do acoplamento escrevem-se  $\omega_{nk}$  e  $V_{nk}$ , respectivamente. Assumindo que o acoplamento entre os osciladores e seus reservatórios satisfazem a condição  $\sum_k (V_{nk})^2 / \omega_{nk} \ll \omega_0$  e definindo a frequência deslocada

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 \left[ 1 + (N-1) \frac{\lambda^2}{(2\omega_0)^2} \right], \tag{4.2}$$

obtemos da Eq.(4.1) o Hamiltoniano  $H = H_0^S + H_0^R + V$ , em que

$$H_0^S = \tilde{\omega}_0 \sum_n a_n^\dagger a_n + \lambda \sum_{\ell} \left( a_1^\dagger a_\ell + a_1 a_\ell^\dagger \right), \tag{4.3a}$$

$$H_0^R = \sum_{n,k} \omega_{nk} b_{nk}^\dagger b_{nk}, \tag{4.3b}$$

$$V = \sum_{n,k} V_{nk} \left( a_n^\dagger b_{nk} + a_n b_{nk}^\dagger \right). \tag{4.3c}$$

Observe que para a rede central, sempre que  $\lambda/(2\omega_0) \gtrsim 1/\sqrt{N-1}$ , o valor  $\tilde{\omega}_0$  será significativamente deslocado de sua frequência natural  $\omega_0$  e, afim de garantir um espectro de energia com um limite inferior para qualquer que seja o valor do acoplamento  $\lambda$ , temos que partir de um Hamiltoniano positivo definido dado pela Eq.(4.1). Note que no caso da rede simétrica, a condição era  $\lambda/(2\omega_0) \gtrsim 1/(N-1)$ . O Hamiltoniano  $H_0^S$  pode ser

diagonalizado através da transformação canônica

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}} \left( -\sqrt{N-1}a_1 + \sum_{\ell} a_{\ell} \right), \quad (4.4a)$$

$$A_j = \frac{1}{\sqrt{(N-j)(N-j+1)}} \left( -(N-j)a_j + \sum_{r=j+1}^N a_r \right), \quad (4.4b)$$

$$A_N = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}} \left( \sqrt{N-1}a_1 + \sum_{\ell} a_{\ell} \right), \quad (4.4c)$$

onde assumimos que  $j = 2, 3, \dots, N-1$  e verificamos que o operador  $A_n$  satisfaz as mesmas relações de comutação que os operadores  $a_n$ :  $[A_n, A_m] = 0$  e  $[A_n, A_m^\dagger] = \delta_{mn}$  ( $m = 1, \dots, N$ ). De forma análoga ao que fizemos nos *Capítulos* anteriores, esses novos operadores são introduzidos para desacoplar as interações diretas, descritas pelo segundo termo do lado direito da *Eq.(4.3a)*, entre o oscilador central 1 e os  $N-1$  osciladores periféricos. Conseqüentemente, interações indiretas entre os osciladores serão criadas através de seus respectivos reservatórios, como descrito pelo Hamiltoniano  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_I$ , onde

$$\mathbf{H}_0 = \sum_n \left( \Omega_n A_n^\dagger A_n + \sum_k \omega_{nk} b_{nk}^\dagger b_{nk} \right), \quad (4.5a)$$

$$\mathbf{H}_I = \sum_{m,n,k} C_{nm} V_{mk} \left( A_n^\dagger b_{mk} + A_n b_{mk}^\dagger \right). \quad (4.5b)$$

Diferentemente do caso da rede simétrica, em que apenas dois modos normais distintos surgiam, na rede central observamos o surgimento de três diferentes modos normais para o sistema acoplado. Estes modos normais são:

$$\Omega_1 = \tilde{\omega}_0 - \lambda\sqrt{N-1}, \quad (4.6a)$$

$$\Omega_j = \tilde{\omega}_0, \quad (4.6b)$$

$$\Omega_N = \tilde{\omega}_0 + \lambda\sqrt{N-1}. \quad (4.6c)$$

Os coeficientes  $C_{nm}$  que aparecem no Hamiltoniano da Eq.(4.5b) satisfazem as relações

$$C_{11} = -C_{N1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad C_{1\ell} = C_{N\ell} = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}}, \quad (4.7a)$$

$$C_{j1} = 0, \quad C_{jj} = -\sqrt{\frac{N-j}{N-j+1}}, \quad C_{jN} = \frac{1}{\sqrt{(N-j+1)(N-j)}}, \quad (4.7b)$$

$$C_{rj} = \frac{1}{\sqrt{(N-j+1)(N-j)}} \text{ para } 1 < r < j, \quad (4.7c)$$

$$C_{rj} = 0 \text{ para } j < r < N. \quad (4.7d)$$

Seguindo os mesmos passos realizados no *Capítulo* anterior, quando derivamos a equação de evolução da matriz densidade do sistema conjunto  $\rho_{1,\dots,N}(t)$ , na representação de interação, consideraremos a teoria das perturbações até a segunda ordem. Desta forma verificamos que o operador densidade satisfaz a equação

$$\frac{d}{dt}\rho_{1,\dots,N}(t) = -\int_0^t dt' \text{Tr}_R [\mathbf{V}(t), [\mathbf{V}(t'), \rho_R(0) \otimes \rho_{1,\dots,N}(t)']], \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{V}(t) = \exp(i\mathbf{H}_0 t)\mathbf{H}_I \exp(-i\mathbf{H}_0 t)$ . Definindo os operadores do reservatório  $\mathcal{O}_{nm}^\dagger(t) = \sum_k V_{mk} b_{mk}^\dagger \exp[i(\omega_{mk} - \Omega_n)t]$ , de modo que  $\mathbf{V}(t) = \sum_{m,n} C_{nm} (A_n^\dagger \mathcal{O}_{nm} + A_n \mathcal{O}_{nm}^\dagger)$ , verificamos que as integrais que aparecem na Eq.(4.8) relacionam-se às funções de correlação da forma

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt' \langle \mathcal{O}_{n'n}(t) \mathcal{O}_{mn}^\dagger(t') \rangle \\ = & \sum_{k,k'} \int_0^t dt' V_{nk} V_{nk'} \langle b_{nk} b_{nk'}^\dagger \rangle \exp\{-i[(\omega_{nk} - \Omega_{n'})t - (\omega_{nk'} - \Omega_m)t']\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde, como  $n$  e  $m, n' = 1, \dots, N$ . Assumindo que as frequências dos reservatórios estejam muito próximas, de modo a permitir uma somatória contínua, lembrando que a função  $\mathbf{N}_n(\omega_{nk})$  é definida por

$$\langle b_n^\dagger(\omega_{nk}) b_n(\omega_{nk'}) \rangle = 2\pi \mathbf{N}_n(\omega_{nk}) \delta(\omega_{nk} - \omega_{nk'}), \quad (4.10)$$

e realizando as transformações de variáveis  $\tau = t - t'$  e  $\varepsilon = \omega_{nk} - \Omega_m$ , podemos reescrever

a integral da Eq.(4.9) na forma

$$\int_0^t dt' \langle \mathcal{O}_{n'n}(t) \mathcal{O}_{mn}^\dagger(t') \rangle = \exp [i (\Omega_{n'} - \Omega_m) t] \int_{-\Omega_m}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi} [\sigma_n(\varepsilon + \Omega_m) V_n(\varepsilon + \Omega_m)]^2 \times [\mathbf{N}_n(\varepsilon + \Omega_m) + 1] \int_0^{\infty} d\tau e^{-i\varepsilon\tau}. \quad (4.11)$$

Note que a última integral da Eq.(4.11) contribui significativamente somente quando  $|\varepsilon t| \lesssim 1$ , de modo que o limite superior desta integral temporal pode ser estendido para o infinito. Considerando que as funções  $V_n(\varepsilon + \Omega_m)$ ,  $\sigma_n(\varepsilon + \Omega_m)$  e  $\mathbf{N}_n(\varepsilon + \Omega_m)$  variam suavemente em torno do modo normal  $\Omega_m$  (como usualmente feito na derivação da equação mestra), obtemos

$$\int_0^t dt' \langle \mathcal{O}_{n'n}(t) \mathcal{O}_{mn}^\dagger(t') \rangle = \frac{N}{2} \gamma_n(\Omega_m) [\mathbf{N}_n(\Omega_m) + 1] \exp [i (\Omega_{n'} - \Omega_m) t], \quad (4.12)$$

onde as taxas de dissipação são definidas pela equação

$$\gamma_n(\Omega_m) = \frac{1}{N} V_n^2(\Omega_m) \sigma_n^2(\Omega_m) \int_{-\Omega_m}^{\infty} d\varepsilon \delta(\varepsilon). \quad (4.13)$$

Observe que para uma rede central o valor mínimo do modo normal  $\Omega_1$  é nulo,  $\Omega_1|_{\min} \simeq 0$ , um valor que segue de  $\lambda = 2\omega_0/\sqrt{N-1}$ . No caso particular em que  $N = 2$ , obtemos o mínimo  $\Omega_1|_{\min} \simeq 0$  com  $\lambda = 2\omega_0$ , como discutido no *Capítulo 2*. Portanto, considerando o caso geral de  $N$  osciladores acoplados, estaremos interessados em duas diferentes intensidades de acoplamento:  $\lambda = 2\omega_0/\sqrt{N-1}$ , de modo que  $\Omega_1 \simeq 0$ ,  $\Omega_j = 2\omega_0$  e  $\Omega_N = 4\omega_0$ , e, para efeitos de comparação com os resultados de uma rede simétrica, também consideraremos o caso em que  $\lambda = 2\omega_0$ , de modo que  $\Omega_1 = \omega_0(N - 2\sqrt{N-1})$ ,  $\Omega_j = N\omega_0$  e  $\Omega_N = \omega_0(N + 2\sqrt{N-1})$ . Para um dos casos em que estamos interessados, quando  $\Omega_1 \simeq 0$ ,  $\Omega_j = 2\omega_0$  e  $\Omega_N = 4\omega_0$ , obtemos da Eq.(4.13)

$$\gamma_n(\Omega_1) = \frac{1}{2N} V_n^2(\Omega_1) \sigma_n^2(\Omega_1), \quad (4.14a)$$

$$\gamma_n(\Omega_\ell) = \frac{1}{N} V_n^2(\Omega_\ell) \sigma_n^2(\Omega_\ell). \quad (4.14b)$$

No regime de acoplamento fraco, definindo  $\Gamma_n = V_n^2(\omega_0) \sigma_n^2(\omega_0)$ , obtemos da Eq.(4.13) o

resultado

$$\gamma_n(\Omega_m) = \frac{1}{N} V_n^2(\omega_0) \sigma_n^2(\omega_0) = \frac{\Gamma_n}{N}. \quad (4.15)$$

Finalmente, de forma análoga ao que ocorreu no *Capítulo 2*, note que a suposição de que  $V_n$ ,  $\sigma_n$  e  $\mathbf{N}_n$  sejam funções que variam lentamente em torno da frequência  $\Omega_m$ , não se aplica à função  $\mathbf{N}_n(\Omega_1) = [\exp(\Omega_1/kT) - 1]^{-1}$  quando consideramos o caso em que  $\lambda = 2\omega_0/\sqrt{N-1}$  (pois neste caso verifica-se que  $\Omega_1 \approx 0$ ) e reservatório em equilíbrio térmico à temperatura  $T$ . Porém, esta suposição pode seguramente ser aplicado a um reservatório em zero absoluto, situação que analisamos no presente *Capítulo*. Na prática,  $\mathbf{N}_n(\Omega_1) \approx 0$  sempre que o deslocamento na frequência  $\Omega_1$ , vindo da contribuição do valor principal de Cauchy, torna-se suficientemente maior do que  $kT$ .

### 4.3 Equação Mestra

Definindo, no regime de acoplamento forte, as expressões simplificadas  $\gamma_n(\Omega_1) = \gamma_n^-$ ,  $\gamma_n(\Omega_j) = \gamma_n$  e  $\gamma_n(\Omega_N) = \gamma_n^+$ , bem como  $\mathbf{N}_n(\Omega_1) = \mathbf{N}_n^-$ ,  $\mathbf{N}_n(\Omega_j) = \mathbf{N}_n$  e  $\mathbf{N}_n(\Omega_N) = \mathbf{N}_n^+$  (que se reduzem a  $\gamma_n^- = \gamma_n^+ = \gamma_n = \Gamma_n/N$  e  $\mathbf{N}_n^- = \mathbf{N}_n^+ = \mathbf{N}_n = \mathbf{N}_n(\omega_0)$  no regime de acoplamento fraco), e usando as *Eqs.(4.4a)-(4.4c)* junto com os coeficientes  $C_{mn}$ , definidos acima, obtemos a equação mestra na representação de Schrödinger

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{1,\dots,N}(t) = & i \left[ \rho_{1,\dots,N}(t), \tilde{\omega}_0 \sum_n a_n^\dagger a_n + \lambda \sum_\ell \left( a_\ell^\dagger a_1 + a_\ell a_1^\dagger \right) \right] \\ & + \sum_n \mathcal{L}_n \rho_{1,\dots,N}(t) + \sum_{\ell,n(\ell \neq n)} \mathcal{L}_{\ell n} \rho_{1,\dots,N}(t), \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde os operadores de Liouville  $\mathcal{L}_n \rho_{1,\dots,N}(t)$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \rho_{1,\dots,N}(t) &= \frac{N}{4} (\gamma_1^+ + \gamma_1^-) \left( [a_1 \rho_{1,\dots,N}(t), a_1^\dagger] + [a_1, \rho_{1,\dots,N}(t) a_1^\dagger] \right) \\ &\quad + \frac{N}{4} (\gamma_1^+ \mathbf{N}_1^+ + \gamma_1^- \mathbf{N}_1^-) \left( [ [a_1, \rho_{1,\dots,N}(t)], a_1^\dagger ] \right. \\ &\quad \left. + [a_1, [\rho_{1,\dots,N}(t), a_1^\dagger]] \right), \end{aligned} \quad (4.17a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\ell \rho_{1,\dots,N}(t) &= N \frac{\gamma_\ell^+ + 2(N-2)\gamma_\ell + \gamma_\ell^-}{4(N-1)} \left( [a_\ell \rho_{1,\dots,N}(t), a_\ell^\dagger] \right. \\ &\quad \left. + [a_\ell, \rho_{1,\dots,N}(t) a_\ell^\dagger] \right) + N \frac{\gamma_\ell^+ \mathbf{N}_\ell^+ + 2(N-2)\gamma_\ell \mathbf{N}_\ell + \gamma_\ell^- \mathbf{N}_\ell^-}{4(N-1)} \\ &\quad \times \left( [ [a_\ell, \rho_{1,\dots,N}(t)], a_\ell^\dagger ] + [a_\ell, [\rho_{1,\dots,N}(t), a_\ell^\dagger]] \right), \end{aligned} \quad (4.17b)$$

ao passo que os canais de dissipação mistos são aqui separados em canais de dissipação mistos direto e indireto. Este canais são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\ell 1} \rho_{1,\dots,N}(t) &= \frac{N}{4\sqrt{N-1}} \left\{ (\gamma_1^+ - \gamma_1^-) \left( [a_\ell \rho_{1,\dots,N}(t), a_1^\dagger] + [a_1, \rho_{1,\dots,N}(t) a_\ell^\dagger] \right) \right. \\ &\quad + (\gamma_1^+ \mathbf{N}_1^+ - \gamma_1^- \mathbf{N}_1^-) \left( [ [a_\ell, \rho_{1,\dots,N}(t)], a_1^\dagger ] + [a_1, [\rho_{1,\dots,N}(t), a_\ell^\dagger]] \right) \\ &\quad + (\gamma_\ell^+ - \gamma_\ell^-) \left( [a_\ell, \rho_{1,\dots,N}(t) a_1^\dagger] + [a_1 \rho_{1,\dots,N}(t), a_\ell^\dagger] \right) \\ &\quad \left. + (\gamma_\ell^+ \mathbf{N}_\ell^+ - \gamma_\ell^- \mathbf{N}_\ell^-) \left( [a_\ell, [\rho_{1,\dots,N}(t), a_1^\dagger]] + [ [a_1, \rho_{1,\dots,N}(t)], a_\ell^\dagger ] \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.18a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\ell \ell'} \rho_{1,\dots,N}(t) &= \frac{N}{4(N-1)} \left\{ (\gamma_{\ell'}^- - 2\gamma_{\ell'} + \gamma_{\ell'}^+) \left( [a_\ell \rho_{1,\dots,N}(t), a_{\ell'}^\dagger] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [a_{\ell'}, \rho_{1,\dots,N}(t) a_\ell^\dagger] \right) + (\gamma_{\ell'}^+ \mathbf{N}_{\ell'}^+ - 2\gamma_{\ell'} \mathbf{N}_{\ell'} + \gamma_{\ell'}^- \mathbf{N}_{\ell'}^-) \right. \\ &\quad \left. \times \left( [ [a_\ell, \rho_{1,\dots,N}(t)], a_{\ell'}^\dagger ] + [a_{\ell'}, [\rho_{1,\dots,N}(t), a_\ell^\dagger]] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.18b)$$

A equação mestra *Eq.(4.16)* é uma forma geral válida para o regime de acoplamento forte. Evidentemente, os canais de dissipação mistos  $\mathcal{L}_{\ell n} \rho_{1,\dots,N}(t)$ , que se originam do acoplamento forte entre os sistemas, podem ser da mesma ordem de magnitude que os canais de dissipação diretos  $\mathcal{L}_n \rho_{1,\dots,N}(t)$ . No regime de acoplamento fraco, quando  $\gamma_n^- = \gamma_n^+ = \gamma_n = \Gamma_n/N$  e  $\mathbf{N}_n^- = \mathbf{N}_n^+ = \mathbf{N}_n = \mathbf{N}_n(\omega_0)$ , os canais de dissipação mistos cancelam-se e a equação mestra *Eq.(4.16)* reduz-se à forma esperada para  $N$  osciladores dissipativos

independentes, onde os operadores de Liouville simplificam-se na estrutura bem conhecida

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_n \rho_{1,\dots,N}(t) = & \frac{\Gamma_n}{2} \{ ([a_n \rho_{1,\dots,N}(t), a_n^\dagger] + [a_n, \rho_{1,\dots,N}(t) a_n^\dagger]) \\ & + \mathbf{N}_n(\omega_0) ([a_n, \rho_{1,\dots,N}(t)], a_n^\dagger) + [[a_n^\dagger, \rho_{1,\dots,N}(t)], a_n] \}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Da mesma forma que acontece no caso da rede simétrica, é importante salientar que para a rede central com um grande número de osciladores, todos os modos normais podem ser deslocados para regiões muito longe da frequência natural  $\omega_0$  até mesmo no caso em que a intensidade do acoplamento  $\lambda$  é pequena comparada a  $\omega_0$ . Como observado no *Capítulo* anterior, este é um aspecto crucial de uma rede com  $N \gg 1$ , visto que neste caso temos sempre que considerar os canais de dissipação mistos, que aparecem devido aos diferentes valores das taxas de dissipação  $\gamma_n^-$ ,  $\gamma_n$  e  $\gamma_n^+$ . Num processador de informação quântica realista o número de nodos dissipativos deve sempre ser levado em conta quando analisamos as dinâmicas de coerência e decoerência – mesmo no caso de acoplamento fraco entre os nodos.

## 4.4 Desdobramento das Taxas de Dissipação

Como observado nos *Capítulos 2 e 3*, entre outros aspectos de sistemas fortemente acoplados, exploramos as aplicações do deslocamento das taxas de dissipação dos osciladores, que se origina do desdobramento das frequências naturais  $\omega_0$  nos modos normais do sistema. Para ilustrar o mecanismo de desdobramento das taxas de dissipação, responsável pelo surgimento dos canais de dissipação mistos, assumimos, como nos *Capítulos* anteriores, um acoplamento Lorentziano  $V_n$  entre os osciladores da rede e seus respectivos reservatórios. A função de amortecimento  $\Gamma_n(\chi)$  apresenta então uma forma Lorentziana, que no regime de acoplamento fraco centra-se em torno de  $\omega_0$ , de modo que

$$\Gamma_n(\chi) = \sigma_n^2 \frac{\kappa}{(\chi - \omega_0)^2 + \kappa^2}, \quad (4.20)$$

onde o parâmetro  $\kappa$  refere-se à largura espectral em torno do modo  $\omega_0$ . No regime de acoplamento forte a função de amortecimento desdobra-se (junto com o desdobramento da frequência natural  $\omega_0$  em três modos normais distintos  $\Omega_1$ ,  $\Omega_j$  e  $\Omega_N$ ) em três funções

Lorentzianas:

$$\begin{aligned}\Gamma_n(\chi) &= \frac{\kappa\sigma_n^2}{N} \left( \frac{1}{(\chi - \Omega_1)^2 + \kappa^2} + \sum_j \frac{1}{(\chi - \Omega_j)^2 + \kappa^2} + \frac{1}{(\chi - \Omega_N)^2 + \kappa^2} \right) \\ &= \gamma_n(\Omega_1) + \sum_j \gamma_n(\Omega_j) + \gamma_n(\Omega_N).\end{aligned}\quad (4.21)$$

No regime de acoplamento fraco, quando  $\Omega_n \approx \omega_0$ , obtemos das *Eqs. (4.15)* e *(4.21)* que  $\gamma_n(\omega_0) + \sum_j \gamma_n(\omega_0) + \gamma_n(\omega_0) = \Gamma_n$  e que os operadores de Liouville das *Eqs. (4.17a)* e *(4.17b)* reduzem-se à forma de Liouville usual para  $N$  osciladores dissipativos independentes, como ocorre no caso da rede simétrica. Neste regime, a taxa de dissipação, que assumimos igual ao máximo de uma estreita função de amortecimento, isto é,  $\Gamma_m(\omega_0) = \Gamma_m$  (para um pequeno valor de  $\kappa$ ), torna-se  $N$  vezes maior do que o valor atribuído para  $\gamma_n(\Omega_1)$ ,  $\gamma_n(\Omega_j)$  e  $\gamma_n(\Omega_N)$ .

O desdobramento da Lorentziana na *Eq. (4.20)* naquelas da *Eq. (4.21)* torna-se mais pronunciado quando  $\lambda$  e/ou  $N$  aumenta(m). Como explicado acima e nos *Capítulos* anteriores, uma rede com um número grande de osciladores também desloca os modos normais para regiões muito distantes da frequência natural  $\omega_0$ . Desta forma, as densidades espectrais dos reservatórios podem ser empregadas para controlar o processo de decoerência de estados quânticos da rede, pois os modos normais podem ser deslocados para regiões do espaço das frequências onde a densidade espectral é significativamente menor do que aquela em torno de  $\omega_0$ . Em outras palavras, aumentando o parâmetro  $\lambda\sqrt{N-1}$ , através da intensidade do acoplamento e/ou do número de osciladores da rede, torna-se possível explorar regiões do espaço das frequências que são diferentes daquela em torno de  $\omega_0$ . Por este motivo, chamamos de regime de acoplamento forte às situações onde o parâmetro  $\lambda\sqrt{N-1}$  é grande o suficiente para que os canais de dissipação mistos possam se tornar relevantes.

Em vez de considerarmos diferentes densidades espectrais do reservatório, conforme realizado nos *Capítulos* anteriores, analisaremos neste *Capítulo* apenas o reservatório com densidade espectral do tipo ruído branco Markoviano. Como a densidade espectral de um reservatório do tipo ruído branco Markoviano é invariante sob translações no espaço das frequências (veja *Seção 3.5*), quando assumimos um acoplamento Lorentziano entre os osciladores e seus respectivos reservatórios - centrado em torno das frequências dos modos

normais, como na Eq.(4.21) - obtemos da Eq.(4.13) os resultados  $\gamma_n = \gamma_n^+ = 2\gamma_n^- = \Gamma_n/N$  (que segue da intensidade  $\lambda = 2\omega_0/\sqrt{N-1}$ ). Portanto, a taxa de dissipação em torno de  $\Omega_1 \approx 0$  torna-se metade do valor em torno dos modos normais  $\Omega_j$  e  $\Omega_N$ . Após derivarmos a equação de Fokker-Planck e estimarmos os tempos de decoerência de certos estados quânticos da rede, as conseqüências da taxa de dissipação  $\gamma_n^-$  serão analisadas e os tempos de decoerência em diferentes topologias comparados.

## 4.5 Equação de Fokker-Planck

A equação de Fokker-Planck para a representação  $P$ , associada a equação mestra Eq.(4.16), é dada por

$$\frac{d}{dt}P(\{\eta_n\}, t) = \sum_m \left( \Pi_m + C_m(\{\eta_n\}) \frac{\partial}{\partial \eta_m} + \sum_n D_{mn} \frac{\partial^2}{\partial \eta_m \partial \eta_n^*} + c.c. \right) P(\{\eta_n\}, t), \quad (4.22)$$

onde a função  $C_m(\{\eta_n\})$  e os elementos de matriz  $D_{mn}$  satisfazem as relações

$$C_1(\{\eta_n\}) = (A_1 + i\tilde{\omega}_0) \eta_1 + B_1 \sum_{\ell} \eta_{\ell}, \quad (4.23a)$$

$$C_{\ell}(\{\eta_n\}) = B_{\ell} \eta_1 + \left( \frac{N}{2} \gamma_{\ell} + i\tilde{\omega}_0 \right) \eta_{\ell} + A_{\ell} \sum_{\ell'} \eta_{\ell'}, \quad (4.23b)$$

$$D_{11} = \frac{N}{4} (\gamma_1^+ \mathbf{N}_1^+ + \gamma_1^- \mathbf{N}_1^-), \quad (4.23c)$$

$$D_{1\ell} = D_{\ell 1} = \frac{N}{8\sqrt{N-1}} (\gamma_1^+ \mathbf{N}_1^+ + \gamma_{\ell}^+ \mathbf{N}_{\ell}^+ - \gamma_1^- \mathbf{N}_1^- - \gamma_{\ell}^- \mathbf{N}_{\ell}^-), \quad (4.23d)$$

$$D_{\ell\ell'} = \frac{N}{4(N-1)} \{ \gamma_{\ell}^+ \mathbf{N}_{\ell}^+ + 2[(N-1)\delta_{\ell\ell'} - 1] \gamma_{\ell} \mathbf{N}_{\ell} + \gamma_{\ell}^- \mathbf{N}_{\ell}^- \}, \quad (4.23e)$$

enquanto que os parâmetros  $\Pi_m$ ,  $A_m$  e  $B_m$  são definidos por

$$\Pi_1 = \frac{N}{4} (\gamma_1^+ + \gamma_1^-), \quad (4.24a)$$

$$\Pi_\ell = \frac{N}{4(N-1)} [\gamma_\ell^+ + 2(N-2)\gamma_\ell + \gamma_\ell^-], \quad (4.24b)$$

$$A_1 = \frac{N}{4} (\gamma_1^+ + \gamma_1^-), \quad (4.24c)$$

$$A_\ell = \frac{N}{4(N-1)} (\gamma_\ell^+ - 2\gamma_\ell + \gamma_\ell^-), \quad (4.24d)$$

$$B_n = \frac{N}{4\sqrt{N-1}} (\gamma_n^+ - \gamma_n^-) + i\lambda. \quad (4.24e)$$

Para um reservatório à temperatura zero absoluto, a equação de *Fokker-Planck* (4.22), reduz-se à equação de arrasto

$$\frac{d}{dt} P(\{\eta_n\}, t) = \sum_m \left( \Pi_m + C_m(\{\eta_n\}) \frac{\partial}{\partial \eta_m} + c.c. \right) P(\{\eta_n\}, t). \quad (4.25)$$

Seguindo os mesmos procedimentos do *Capítulo* anterior para a resolução da equação de arrasto, consideramos a transformação  $P(\{\eta_n\}, t) = \tilde{P}(\{\eta_n\}, t) \exp(2 \sum_m \Pi_m t)$  e assumimos uma solução da Eq.(4.25) na forma  $\tilde{P}(\{\eta_n\}, t) = \tilde{P}(\{\eta_n(t)\})$  para obter a equação

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} = \sum_m \left( \frac{d\eta_m}{dt} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta_m} + c.c. \right) = \sum_m \left( C_m(\{\eta_n\}) \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta_m} + c.c. \right). \quad (4.26)$$

Afim de obter uma solução analítica para o sistema resultante da Eq.(4.26), a saber

$$\frac{d\eta_1}{dt} = (A_1 + i\tilde{\omega}_0) \eta_1 + B_1 \sum_\ell \eta_\ell, \quad (4.27a)$$

$$\frac{d\eta_\ell}{dt} = B_\ell \eta_1 + \left( \frac{N}{2} \gamma_\ell + i\tilde{\omega}_0 \right) \eta_\ell + A_\ell \sum_{\ell'} \eta_{\ell'}, \quad (4.27b)$$

assumimos que todos os osciladores da rede apresentam a mesma taxa de dissipação  $\Gamma_m = \Gamma$ , de modo que  $\gamma_m^\pm = \gamma^\pm$  e  $\gamma_m = \gamma$ . Com esta suposição, a solução das Eqs.(4.27a) e (4.27b) é dada por  $\eta_m(t) = e^{i\tilde{\omega}_0 t} \sum_n \chi_{mn}(t) \eta_n^0$ , onde denotamos  $\eta_n^0 = \eta_n(t=0)$  e

definimos as funções

$$\chi_{11}(t) = f_1(t)g_1(t) + if_2(t)g_2(t), \quad (4.28a)$$

$$\chi_{1\ell}(t) = \chi_{\ell 1}(t) = \frac{1}{\sqrt{N-1}} [f_1(t)g_2(t) + if_2(t)g_1(t)], \quad (4.28b)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\ell\ell'}(t) &= \frac{1}{N-1} \left[ f_1(t)g_1(t) + if_2(t)g_2(t) - \exp\left(\frac{N}{2}\gamma t\right) \right] \\ &\quad + \delta_{\ell\ell'} \exp\left(\frac{N}{2}\gamma t\right), \end{aligned} \quad (4.28c)$$

em que, assim como  $\ell$ , assumimos que  $\ell' = 2, \dots, N$ . As funções dependentes do tempo que aparecem nas *Eqs. (4.28a)-(4.28c)* são dadas por

$$f_1(t) = \cos\left(\lambda\sqrt{N-1}t\right), \quad f_2(t) = \text{sen}\left(\lambda\sqrt{N-1}t\right), \quad (4.29a)$$

$$g_1(t) = \frac{1}{2} \left[ \exp\left(\frac{N}{2}\gamma^+ t\right) + \exp\left(\frac{N}{2}\gamma^- t\right) \right], \quad (4.29b)$$

$$g_2(t) = \frac{1}{2} \left[ \exp\left(\frac{N}{2}\gamma^+ t\right) - \exp\left(\frac{N}{2}\gamma^- t\right) \right]. \quad (4.29c)$$

Finalmente, a solução da equação de arrasto *Eq. (4.25)* pode ser escrita na forma

$$P(\{\eta_n\}, t) = e^{2[\Pi_1 + (N-1)\Pi_2]} P(\{\eta_n\}, t=0)|_{\eta_m \rightarrow \eta_m(t)}. \quad (4.30)$$

## 4.6 Operador Densidade

O operador densidade  $\rho_{1,\dots,N}(t)$  para um sistema de  $N$  osciladores dissipativos acoplados, segundo a topologia central, é obtido assumindo que todos os osciladores da rede possuem a mesma taxa de dissipação, isto é,  $\Gamma_m = \Gamma$ , e que o estado inicial do sistema é preparado em uma superposição de estados coerentes da forma

$$\begin{aligned} |\Psi_{1,\dots,N}\rangle &= \mathcal{N} \left( e^{i\delta_1} |\{\beta_m^1\}\rangle + e^{i\delta_2} |\{\beta_m^2\}\rangle + \dots + e^{i\delta_J} |\{\beta_m^J\}\rangle \right) \\ &\equiv \mathcal{N} \sum_{p=1}^J e^{i\delta_p} |\{\beta_m^p\}\rangle, \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde  $\mathcal{N}$  é o fator de normalização,  $\delta_p$  indica uma fase associada a cada estado da superposição e o índice inferior (superior) refere-se aos  $N$  osciladores ( $J$  distintos estados da

superposição). Desta forma, o operador densidade é escrito por

$$\begin{aligned}\rho_{1,\dots,N}(t) &= \int P(\{\eta_n\}, t) |\{\eta_n\}\rangle \langle\{\eta_n\}| d^2\{\eta_n\} \\ &= \mathcal{N}^2 \sum_{p,q=1}^J e^{\phi_{pq}(t)+i(\delta_p-\delta_q)} \prod_m \langle\beta_m^q | \beta_m^p\rangle^{1-\Upsilon_{mm}(t)} |\xi_m^p(t)\rangle \langle\xi_m^q(t)|, \quad (4.32)\end{aligned}$$

onde, assumindo que  $p, q = 1, 2, \dots, J$ , a função  $\phi_{pq}(t)$  é dada por

$$\phi_{pq}(t) = \frac{1}{2} \sum_{m,n(m \neq n)} [\beta_m^p (\beta_n^{*p} - \beta_n^{*q}) - \beta_n^{*q} (\beta_m^p - \beta_m^q)] \Upsilon_{nm}(t), \quad (4.33)$$

enquanto que os estados evoluídos dos osciladores satisfazem a relação

$$\xi_m^p(t) = \sum_n \mu_{mn}(t) \beta_n^p, \quad (4.34)$$

em que

$$\Upsilon_{mn}(t) = \sum_{n'} \mu_{n'm}^*(t) \mu_{n'n}(t), \quad (4.35a)$$

$$\mu_{mn}(t) = e^{-i\tilde{\omega}_0 t} \chi_{mn}(-t). \quad (4.35b)$$

Finalmente, o operador densidade reduzido para o  $m$ -ésimo oscilador, obtido eliminando os graus de liberdade dos demais osciladores, isto é,  $\rho_m(t) = \text{Tr}_{n \neq m} \rho_{1,\dots,N}(t)$ , é dado por

$$\rho_m(t) = \mathcal{N}^2 \sum_{p,q} e^{\theta_m^{pq}(t)+i(\delta_p-\delta_q)} \left( \prod_n \langle\beta_n^q | \beta_n^p\rangle^{1-|\mu_{mn}(t)|^2} \right) |\xi_m^p(t)\rangle \langle\xi_m^q(t)|, \quad (4.36)$$

com

$$\theta_m^{pq}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n,n'(n \neq n')} [\beta_n^p (\beta_{n'}^{*p} - \beta_{n'}^{*q}) - \beta_{n'}^{*q} (\beta_n^p - \beta_n^q)] \mu_{mn'}^*(t) \mu_{mn}(t). \quad (4.37)$$

Da Eq.(4.36) podemos obter a matriz densidade para o oscilador central,  $\rho_1(t)$ , e também para qualquer um dos  $N - 1$  osciladores periféricos,  $\rho_\ell(t)$ , que se acoplam ao oscilador central.

## 4.7 Decoerência

Nesta *Seção* estimamos os tempos de decoerência para alguns estados particulares da rede central, lembrando que estamos considerando o caso em que todos os osciladores da rede possuem a mesma taxa de dissipação  $\Gamma_m = \Gamma$ . Por dificuldades técnicas, não analisaremos o caso em que a taxa de dissipação  $\Gamma_1$ , do oscilador central 1, difere das demais taxas de dissipação associadas aos  $N - 1$  osciladores periféricos, que assumimos iguais:  $\Gamma_\ell = \Gamma_2$ . Porém, no caso em que  $\Gamma_1$  difere de  $\Gamma_\ell = \Gamma_2$ , os resultados seriam idênticos aos do *Capítulo 3* quando consideramos o regime de acoplamento fraco, uma vez que os canais de dissipação mistos tornam-se nulos em ambas as topologias. Portanto, com a suposição acima, perde-se os resultados relacionados ao regime de acoplamento forte com taxas de dissipação distintas.

Notando que na rede central há uma simetria entre os  $N - 1$  osciladores periféricos que se acoplam ao oscilador central, estimamos o tempo de decoerência para o estado de superposição que corresponde a um caso particular do estado definido na *Eq.(4.31)*,

$$|\psi_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_\pm \left( \left| \underbrace{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}_R, \underbrace{-\alpha, \dots, -\alpha}_S, \underbrace{\eta, \dots, \eta}_{N-R-S-1} \right\rangle \pm \left| \underbrace{-\alpha, -\alpha, \dots, -\alpha}_R, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_S, \underbrace{\eta, \dots, \eta}_{N-R-S-1} \right\rangle \right), \quad (4.38)$$

onde o primeiro estado coerente em ambos os *kets* refere-se ao oscilador central 1.  $R$  ( $S$ ) indica o número de osciladores periféricos no estado coerente  $\alpha$  ( $-\alpha$ ) no primeiro termo da superposição e  $-\alpha$  ( $\alpha$ ) no segundo termo da superposição. Os  $N - R - S - 1$  osciladores restantes encontram-se no estado coerente  $\eta$ . Note que quando  $R = S = 0$ , obtemos da *Eq.(4.38)* o estado de superposição

$$|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes \{|\eta_\ell\rangle\}, \quad (4.39)$$

em que um estado do tipo “*gato de Schrödinger*” é preparado no oscilador 1, enquanto que os  $N - 1$  osciladores periféricos são preparados no estado coerente  $\eta$ .

O operador densidade para o estado  $|\psi_{1,\dots,N}\rangle$ , derivado da Eq.(4.32), é dado por

$$\begin{aligned} \rho_{1,\dots,N}(t) &= \mathcal{N}_{\pm}^2 \sum_{p,q=1}^2 (\pm)^{1-\delta_{pq}} \exp \{-2|\alpha|^2 [1 - \Upsilon_{11}(t) + (1 + \Upsilon_{\ell\ell'(\ell \neq \ell')}(t) - \Upsilon_{\ell\ell}(t)) \\ &\quad \times (R + S) - 2(R - S)\Upsilon_{1\ell}(t) - (R - S)^2\Upsilon_{\ell\ell'(\ell \neq \ell')}(t)] (1 - \delta_{pq}) \\ &\quad + \phi_{pq}(t)\} |\{\xi_m^p(t)\}\rangle \langle \{\xi_m^q(t)\}|, \end{aligned} \quad (4.40)$$

em que, conforme segue da Eq.(4.33),

$$\phi_{pq}(t) = 2i(N - R - S - 1) \operatorname{Im} \left[ \eta \left( \Upsilon_{1\ell}(t)\beta_1^{p*} + \Upsilon_{\ell\ell'(\ell \neq \ell')}(t) \sum_{j=2}^{1+R+S} \beta_j^{p*} \right) \right], \quad (4.41)$$

e, que segue da Eq.(4.35a),

$$\Upsilon_{11}(t) = \frac{1}{2} [\exp(-N\gamma^+t) + \exp(-N\gamma^-t)], \quad (4.42a)$$

$$\Upsilon_{1\ell}(t) = \frac{1}{2\sqrt{N-1}} [\exp(-N\gamma^+t) - \exp(-N\gamma^-t)], \quad (4.42b)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\ell\ell'}(t) &= \frac{1}{2(N-1)} \{ \exp(-N\gamma^+t) + \exp(-N\gamma^-t) \\ &\quad + 2[(N-1)\delta_{\ell\ell'} - 1] \exp(-N\gamma t) \}. \end{aligned} \quad (4.42c)$$

O decaimento da coerência do estado de superposição da Eq.(4.38), calculado através da Eq.(4.40), é descrito pela

$$\begin{aligned} &\exp \left\{ -2|\alpha|^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(R-S)^2}{N-1} \right) [\exp(-N\gamma^+t) + \exp(-N\gamma^-t)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (R-S) \frac{\sqrt{N-1}}{N-1} [\exp(-N\gamma^+t) - \exp(-N\gamma^-t)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [1 - \exp(-N\gamma t)](R+S) + \exp(-N\gamma t) \frac{(R-S)^2}{N-1} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

de modo que o tempo de decoerência é dado por

$$\begin{aligned} \tau_D |_{|\psi_{1,\dots,N}\rangle} &= \frac{N-1}{N|\alpha|^2} \left\{ [(R-S)^2 + N-1] (\gamma^- + \gamma^+) - 2(R-S) \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{N-1} (\gamma^- - \gamma^+) + 2\gamma [(N-1)(R+S) - (R-S)^2] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Observe que quando  $R = N - 1$  ( $S = 0$ ), o que leva a superposição  $|\phi_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} (|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle \pm |-\alpha_1, \dots, -\alpha_N\rangle)$  (com  $\alpha_m = \alpha$ ), obtemos o resultado

$$\tau_D |\phi_{1,\dots,N}\rangle = \frac{1}{N |\alpha|^2 [N(\gamma^- + \gamma^+) + 2\sqrt{N-1}(\gamma^- - \gamma^+)]}. \quad (4.45)$$

Embora  $|\phi_{1,\dots,N}\rangle$  seja um autoestado do modo normal  $\Omega_1$  para a rede simétrica, o mesmo não acontece para a rede central. Note que para  $N = 1$  e, conseqüentemente,  $\gamma^- = \gamma^+ = \Gamma$ , obtemos o resultado esperado para a decoerência do estado de superposição  $\mathcal{N}_{\pm} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$ , dado por  $(2|\alpha|^2 \Gamma)^{-1}$ . Por outro lado, quando  $R = S - 1$ , correspondendo a uma família de estados de superposição (que são autoestados do modo normal  $\Omega_\ell$  para a rede simétrica, mas não para a rede central),

$$|\tilde{\phi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} \left( \left| \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_S, \underbrace{-\alpha, \dots, -\alpha}_S, \underbrace{\eta, \dots, \eta}_{N-2S} \right\rangle \pm \left| \underbrace{-\alpha, \dots, -\alpha}_S, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_S, \underbrace{\eta, \dots, \eta}_{N-2S} \right\rangle \right), \quad (4.46)$$

obtemos o resultado

$$\tau_D |\tilde{\phi}_{1,\dots,N}\rangle = \frac{N-1}{N |\alpha|^2 [N(\gamma^- + \gamma^+ - 2\gamma) + 2\sqrt{N-1}(\gamma^- - \gamma^+) + 4S(N-1)\gamma]}. \quad (4.47)$$

Finalmente, quando  $R = S = 0$ , levando ao estado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$  da Eq. (4.39), obtemos

$$\tau_D |\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \frac{1}{N |\alpha|^2 (\gamma^- + \gamma^+)}, \quad (4.48)$$

que no limite de acoplamento fraco ( $\gamma^{\pm} = \Gamma/N$ ), reduz-se exatamente ao valor esperado para o tempo de decoerência do estado de superposição  $\mathcal{N}_{\pm} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$  preparado em um único oscilador dissipativo:  $(2|\alpha|^2 \Gamma)^{-1}$ .

Considerando a intensidade do acoplamento  $\lambda = 2\omega_0/\sqrt{N-1}$ , de forma que o modo normal  $\Omega_1$  seja deslocado para zero e, conseqüentemente,  $\gamma^+ = \gamma = 2\gamma^- = \Gamma/N$ , obtemos os tempos de decoerência para os estados  $|\phi_{1,\dots,N}\rangle$ ,  $|\tilde{\phi}_{1,\dots,N}\rangle$  e  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$ , dados, respecti-

vamente, por

$$\tau_D|\phi_{1,\dots,N}\rangle = \frac{4}{(3N + 2\sqrt{N-1})} \frac{1}{2|\alpha|^2 \Gamma}, \quad (4.49a)$$

$$\tau_D|\tilde{\phi}_{1,\dots,N}\rangle = \frac{4(N-1)}{[8S(N-1) - 2\sqrt{N-1} - N]} \frac{1}{2|\alpha|^2 \Gamma}, \quad (4.49b)$$

$$\tau_D|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \frac{4}{3} \frac{1}{2|\alpha|^2 \Gamma}. \quad (4.49c)$$

Para  $N = 2$  ( $S = 1$ ) os resultados em ambas topologias levam exatamente aos mesmos resultados. De fato, as *Eqs.(4.49a)-(4.49c)* reduzem-se, como deveriam, àquelas para uma rede simétrica:  $\tau_D|\phi_{1,\dots,N}\rangle = (4|\alpha|^2 \Gamma)^{-1}$ ,  $\tau_D|\tilde{\phi}_{1,\dots,N}\rangle = (2|\alpha|^2 \Gamma)^{-1}$  e  $\tau_D|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = (4/3)(2|\alpha|^2 \Gamma)^{-1}$ . Note que para  $N > 2$  os tempos de decoerência dos estados  $|\phi_{1,\dots,N}\rangle$ ,  $|\tilde{\phi}_{1,\dots,N}\rangle$  e  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$ , obtidos nas *Eqs.(4.49a)-(4.49c)* são maiores do que os valores correspondentes para o caso da rede simétrica. Isto é de se esperar, uma vez que para o acoplamento  $\lambda = 2\omega_0/\sqrt{N-1}$  verificamos que  $\gamma^- = \Gamma/2N$  para a rede central e  $\gamma^- = \Gamma/N$  para a rede simétrica. Por outro lado, se considerarmos a intensidade de acoplamento  $\lambda = 2\omega_0$  verificamos, para  $N > 2$ , que  $\gamma^\pm = \gamma = \Gamma/N$  e portanto obtemos os seguintes tempos de decoerência

$$\tau_D|\phi_{1,\dots,N}\rangle = \frac{1}{2N|\alpha|^2 \Gamma}, \quad (4.50a)$$

$$\tau_D|\tilde{\phi}_{1,\dots,N}\rangle = \frac{1}{4S|\alpha|^2 \Gamma}, \quad (4.50b)$$

$$\tau_D|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \frac{1}{2|\alpha|^2 \Gamma}. \quad (4.50c)$$

Observe que estes tempos são menores do que aqueles das *Eqs.(4.49a)-(4.49c)*, o que se deve ao fato que para  $\lambda = 2\omega_0$  o modo normal  $\Omega_1$  não é deslocado para zero e, conseqüentemente, a taxa de dissipação  $\gamma^-$  assume os mesmos valores que  $\gamma$  e  $\gamma^+$ , ou seja,  $\gamma^- = \Gamma/N$ . Porém, os resultados nas *Eqs.(4.50a)-(4.50c)* são exatamente os mesmos que aqueles calculados para uma rede simétrica, visto que os canais de dissipação mistos tornam-se nulos em ambas as topologias quando consideramos  $\lambda = 2\omega_0$  e ruído branco Markoviano. Salientamos que os canais de dissipação mistos são os ingredientes que diferenciam as dinâmicas de coerência em ambas as topologias, simétrica e central.

Notamos, finalmente, que podemos preparar estados particulares da rede cujos tempos

de decoerência dependam somente de  $\gamma$  ou mesmo de  $\gamma$  e  $\gamma^-$  (ou  $\gamma^+$ ). Como um exemplo, se considerarmos que  $R - S = \pm\sqrt{N-1}$ , verificamos que o tempo de decoerência dependerá somente de  $\gamma^\pm$  e  $\gamma$ . Tomando  $N = 5$ ,  $R = 1$  e  $S = 3$ , de modo que  $R - S = -\sqrt{N-1}$ , obtemos o estado  $\mathcal{N}(|\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle \pm |-\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle)$ , cujo tempo de decoerência é dado por

$$\tau_D = \frac{1}{10|\alpha|^2(2\gamma^- + 3\gamma)}, \quad (4.51)$$

que para o ruído branco Markoviano torna-se  $(1/4)(2|\alpha|^2\Gamma)^{-1}$ , ao passo que, para a rede simétrica, obtemos o mesmo resultado que no regime de acoplamento fraco  $(1/5)(2|\alpha|^2\Gamma)^{-1}$ . Para ampliar a nossa compreensão acerca dos resultados para os tempos de decoerência acima obtidos, analisamos, a seguir, as dinâmicas de recorrência e transferência de estados quânticos na rede central.

## 4.8 Dinâmicas de Recorrência e Transferência de Estados

Considerando o caso em que todos os osciladores da rede possuem a mesma taxa de dissipação  $\Gamma_m = \Gamma$ , analisamos nesta *Seção* o efeito da dissipação sobre dois fenômenos: a transferência do estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ , preparado no oscilador central 1, a um dos  $N - 1$  osciladores periféricos e a sua subsequente recorrência ao oscilador central. Considerando que a rede central, no regime de acoplamento forte, é preparada no estado de superposição dado pela *Eq.(4.39)*,

$$|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_\ell\}\rangle, \quad (4.52)$$

calculamos, de forma análoga ao *Capítulo* anterior, a probabilidade do estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  ser transferido para um dos  $N - 1$  osciladores periféricos e a probabilidade de recorrência do mesmo estado para o oscilador central.

Assim como ocorre no caso da rede simétrica, não esperamos que a probabilidade do estado  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  transferir-se para um dos  $N - 1$  osciladores periféricos alcance a unidade. Como existem  $N - 1$  osciladores acoplados ao oscilador central 1, espera-se

que a superposição  $\mathcal{N}_{\pm} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  seja pulverizada nestes osciladores. Como salientamos no *Capítulo 3*, esta expectativa aplica-se somente quando se considera que todos os acoplamentos entre os osciladores da rede tenham a mesma intensidade  $\lambda$ . De fato, para uma rede central em que o oscilador 1 acopla-se aos demais osciladores com diferentes intensidades  $\lambda_{\ell}$ , a probabilidade da superposição  $\mathcal{N}_{\pm} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  ser transferida para um dos  $N - 1$  osciladores periféricos deve depender da intensidade  $\lambda_{\ell}$ . Portanto, pode ocorrer que a probabilidade de transferência de um estado do oscilador central para um oscilador periférico particular torne-se significativa se um acoplamento apropriado entre ambos os osciladores for escolhido.

No que diz respeito ao estado de superposição  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$ , o operador densidade reduzido do oscilador central 1 e de qualquer um dos  $N - 1$  osciladores periféricos, obtidos da *Eq.(4.36)*, são dados, respectivamente, por

$$\rho_1(t) = \mathcal{N}_{\pm}^2 \sum_{p,q=1}^2 (\pm)^{1-\delta_{pq}} \exp \left[ -2 |\alpha|^2 (1 - |\mu_{11}(t)|^2) (1 - \delta_{pq}) + \theta_1^{pq}(t) \right] |\xi_1^p(t)\rangle \langle \xi_1^q(t)| \quad (4.53)$$

e

$$\rho_{\ell}(t) = \mathcal{N}_{\pm}^2 \sum_{p,q=1}^2 (\pm)^{1-\delta_{pq}} \exp \left[ -2 |\alpha|^2 (1 - |\mu_{\ell 1}(t)|^2) (1 - \delta_{pq}) + \theta_{\ell}^{pq}(t) \right] |\xi_{\ell}^p(t)\rangle \langle \xi_{\ell}^q(t)|, \quad (4.54)$$

onde

$$\theta_m^{pq}(t) = 2i \operatorname{Im} \left( \eta \beta_1^{p*} \mu_{m1}^*(t) \sum_{\ell} \mu_{m\ell}(t) \right). \quad (4.55)$$

Notamos que as expressões para  $\rho_1(t)$ ,  $\rho_{\ell}(t)$  e  $\theta_m^{pq}(t)$  são exatamente aquelas para a rede simétrica à menos das funções  $\mu_{m\ell}(t)$ . A mesma observação aplica-se às probabilidades de recorrência e transferência de estados, obtidas através dos operadores densidades reduzidos

das Eq.(4.53) e Eq.(4.54), dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} P_R(t) &\equiv \text{Tr} [\rho_1(t)\rho_1(0)] \\ &= \sum_{p,q=1}^2 \mathcal{C}_{pq}^1(t) \langle \xi_1^q | (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \langle \langle \alpha | \pm \langle -\alpha | | \xi_1^p \rangle, \end{aligned} \quad (4.56a)$$

$$\begin{aligned} P_T(t) &\equiv \text{Tr} [\rho_\ell(t)\rho_1(0)] \\ &= \sum_{p,q=1}^2 \mathcal{C}_{pq}^\ell(t) \langle \xi_\ell^q | (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \langle \langle \alpha | \pm \langle -\alpha | | \xi_\ell^p \rangle, \end{aligned} \quad (4.56b)$$

onde os coeficientes  $\mathcal{C}_{pq}^m(t)$  são definidos da forma

$$\mathcal{C}_{pq}^1(t) = \mathcal{N}_\pm^4 (\pm)^{1-\delta_{pq}} \exp [-2 |\alpha|^2 (1 - |\mu_{11}(t)|^2) (1 - \delta_{pq}) + \theta_1^{pq}(t)], \quad (4.57a)$$

$$\mathcal{C}_{pq}^\ell(t) = \mathcal{N}_\pm^4 (\pm)^{1-\delta_{pq}} \exp [-2 |\alpha|^2 (1 - |\mu_{\ell 1}(t)|^2) (1 - \delta_{pq}) + \theta_\ell^{pq}(t)]. \quad (4.57b)$$

Considerando ruído branco Markoviano e que todos os osciladores da rede possuem a mesma taxa de dissipação  $\Gamma_m = \Gamma$ , analisamos nas *Figs. 4.2* e *4.3* as probabilidades de recorrência e transferência de estados, respectivamente. Afim de comparar os resultados em ambas as topologias, nas *Figs. 4.2(a)* e *4.3(a)* traçamos os gráficos das probabilidades de recorrência e transferência de estados versus  $\Gamma t$ . Consideramos nestas figuras os mesmos parâmetros do caso de uma rede simétrica (*Figs.-3.4(a)* e *3.5(a)* do *Capítulo 3*):  $\alpha = \eta = 1$ ,  $\lambda/\omega_0 = 2$ , e tomamos a razão fictícia  $\Gamma/\omega_0 = 1/2$  para uma melhor visualização da dinâmica dissipativa. Nas *Figs.-4.2(b)* e *4.3(b)* também consideramos esses mesmos parâmetros exceto a intensidade do acoplamento  $\lambda/\omega_0 = 2/\sqrt{N-1}$ , que desloca o modo normal  $\Omega_1$  para zero.

As curvas nas *Figs.-4.2(b)* e *4.3(b)* referem-se aos valores  $N = 2$  (linha tracejada), 3 (linha sólida) e 10 (linha pontilhada). Observamos que a probabilidade de recorrência  $P_R(t)$  decai exponencialmente devido ao processo dissipativo e, como no caso da rede simétrica, o decaimento é mais lento para o caso em que  $N = 2$ ,  $\gamma^+ = \gamma = 2\gamma^-$ . Para  $N > 2$ , de modo que  $\gamma^\pm = \gamma$ , o decaimento da probabilidade  $P_R(t)$  é aproximadamente o mesmo para qualquer que seja o número de osciladores da rede. A diferença entre os resultados de ambas as topologias torna-se claro quando calculamos o tempo de recorrência (através da função  $\mu_{11}(t)$  da Eq.(4.34)) que, para a rede central, segue da relação

$\cos(N\lambda t) \cos(\sqrt{N-1}\lambda t) = 1$ , de modo que

$$t_R = \frac{r\pi}{\sqrt{N-1}\lambda} = \frac{s\pi}{N\lambda}, \quad (4.58)$$

sendo  $r$  e  $s$  ambos inteiros par ou ímpar. Portanto, diferentemente do caso de uma rede simétrica, onde os tempos de recorrência tornam-se menores quanto maior o número de osciladores na rede, para a rede central os tempos de recorrência seguem de um ajuste de fases entre as frequências naturais deslocadas  $\tilde{\omega}_0 = N\lambda$  e o acoplamento  $\sqrt{N-1}\lambda$ . Como mostrado no detalhe da *Fig.-4.2(a)*, na escala realista em que  $\Gamma/\omega_0 \ll 1$ , a probabilidade  $P_R(t)$  alcança valores significativos (em torno de 0.5) muitas vezes antes que o processo de relaxação aconteça. Essas *recorrências secundárias*, onde a probabilidade assume valores significativos, não aparecem na rede simétrica e não foram consideradas no cálculo do tempo de recorrência da *Eq.(4.58)*.

Ainda com relação a probabilidade de recorrência da *Fig.-4.2(b)*, quando  $\lambda = 2\omega_0/\sqrt{N-1}$ , notamos que o tempo de recorrência, na escala realista do detalhe, será o mesmo para qualquer que seja o número de osciladores que compõem a rede, sendo dado por

$$t_R = \frac{r\pi}{2\omega_0}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (4.59)$$

De fato, quando  $\lambda = 2\omega_0/\sqrt{N-1}$ , obtemos  $\tilde{\omega}_0 = 2\omega_0$  (veja *Eq.(4.2)*) e, conseqüentemente,  $\cos(\tilde{\omega}_0 t) \cos(\sqrt{N-1}\lambda t) = \cos^2(2\omega_0 t) = 1$ . Note que as curvas para  $N = 2$ , em ambas as *Figs.-4.2(a e b)*, são, como esperado, exatamente as mesmas.

Na *Fig.-4.3(a)* analisamos a probabilidade de transferência de estados,  $P_T(t)$ , considerando as curvas para  $N = 2, 3$  e  $10$ , representadas por linhas tracejada, sólida e pontilhada, respectivamente. Evidentemente, para  $N = 2$  a superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  transfere-se para o oscilador 2 como indicado pelo detalhe na escala realista ( $\Gamma/\omega_0 \ll 1$ ). A probabilidade  $P_T(t)$  decai devido ao processo de dissipação, como mostra a linha tracejada. Para  $N > 2$  não obtemos um valor significativo para a probabilidade de transferência  $P_T(t)$ , como esperado: o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  é pulverizado para os  $N - 1$  osciladores periféricos. Porém, no caso de uma rede central, o estado da rede nos “*tempos de transferência*” (que assumimos ser  $t_R/2$ ) não é um emaranhado do sistema conjunto, como acontece na rede simétrica. Considerando o estado inicial  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$  e subs-

Figura 4-2: Probabilidade de recorrência  $P_R(t)$  versus  $\Gamma t$ , para  $\Gamma_m = \Gamma$  (em uma razão fictícia  $\Gamma/\omega_0 = 1/2$ ) e (a)  $\lambda/\omega_0 = 2$  e (b)  $\lambda/\omega_0 = 2/\sqrt{N-1}$ , assumindo ruído branco Markoviano e o estado fatorado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_{\ell}\}\rangle$ , com parâmetros reais  $\alpha = \eta = 1$ . Os detalhes mostram escalas de tempo realistas  $\Gamma/\omega_0 \ll 1$ , na qual  $P_R(t)$  retorna próximo da unidade muitas vezes antes que a relaxação torne-se perceptível.

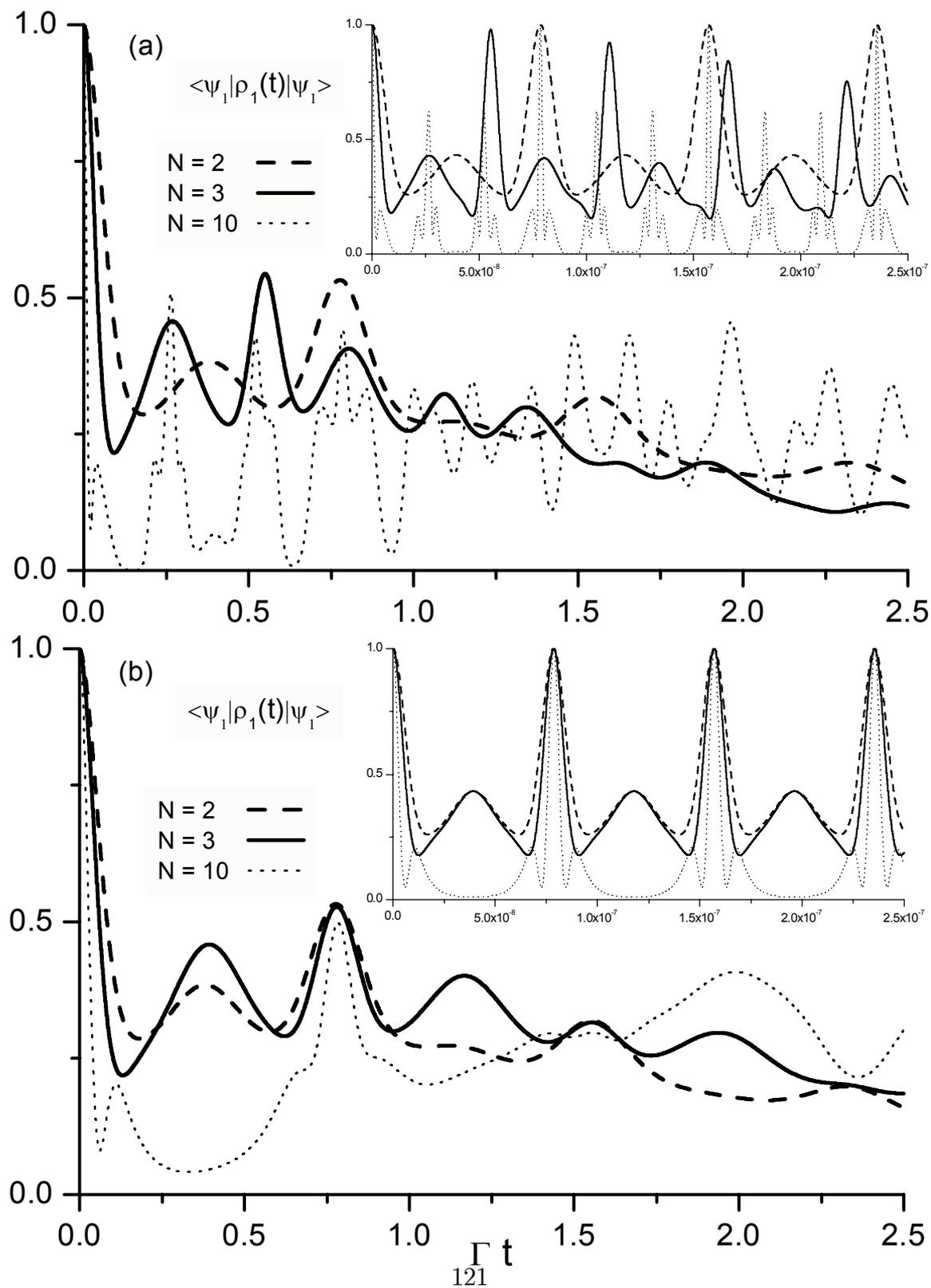
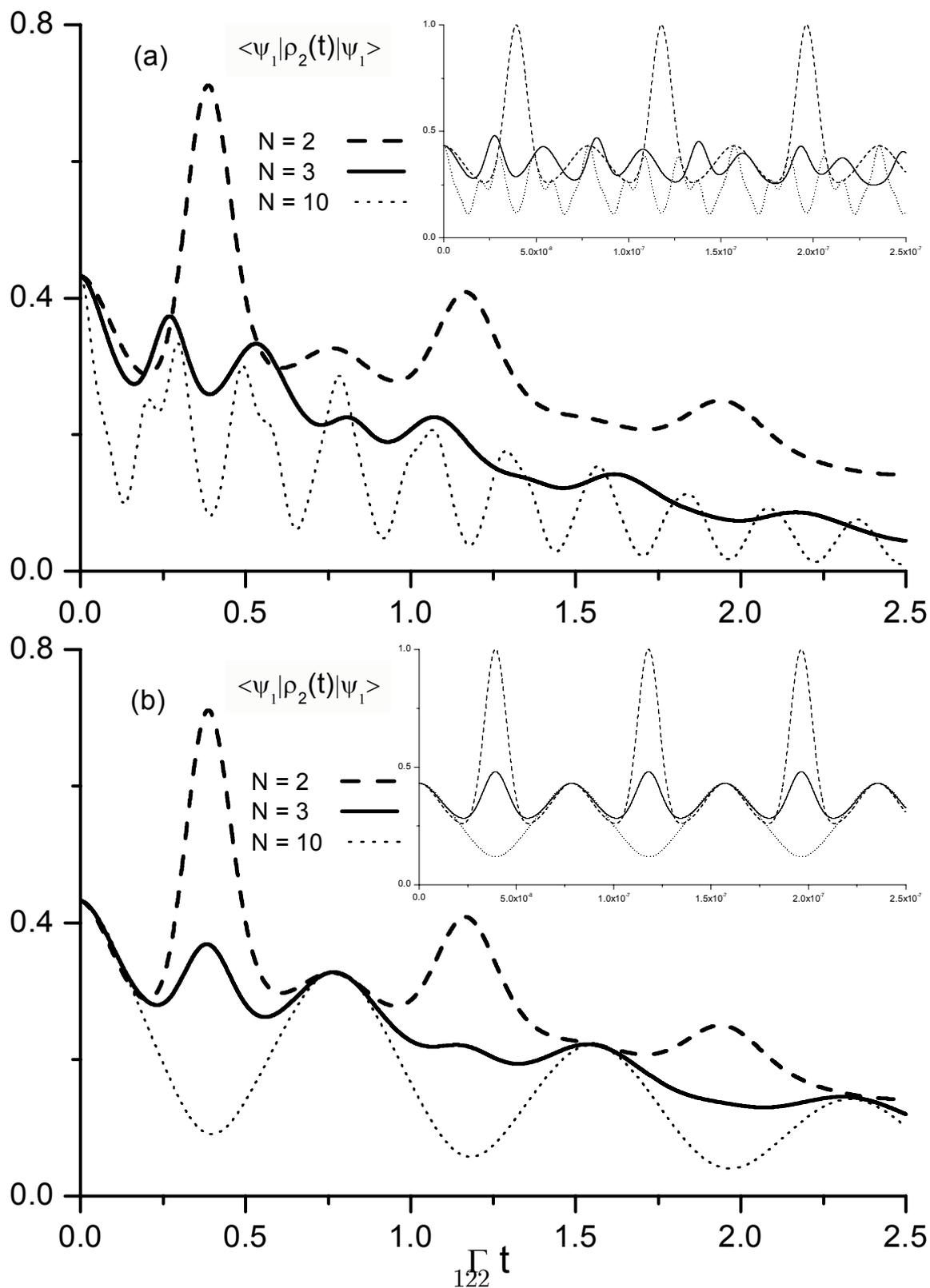


Figura 4-3: Probabilidade de transferência  $P_T(t)$  versus  $\Gamma t$ , para  $\Gamma_m = \Gamma$  (em uma razão fictícia  $\Gamma/\omega_0 = 1/2$ ) e (a)  $\lambda/\omega_0 = 2$  e (b)  $\lambda/\omega_0 = 2/\sqrt{N-1}$ , assumindo ruído branco Markoviano e o estado fatorado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_\ell\}\rangle$ , com parâmetros reais  $\alpha = \eta = 1$ . Os detalhes mostram escalas de tempo realistas  $\Gamma/\omega_0 \ll 1$ , na qual  $P_T(t)$  retorna próximo da unidade muitas vezes antes que a relaxação torne-se perceptível.



tituindo os “*tempos de transferência*” na Eq.(4.34), verificamos que o estado do oscilador central (um estado coerente  $\varsigma$ ) desacopla-se do emaranhado entre os  $N - 1$  osciladores periféricos. Portanto, nos “*tempos de transferência*” obtemos

$$|\psi_{transf.}\rangle = \mathcal{N} |\varsigma_1\rangle \otimes (|\{\varepsilon_\ell\}\rangle + |{-\varepsilon_\ell}\rangle), \quad (4.60)$$

onde  $\varsigma_1 = -\eta/\sqrt{N-1}$  e  $\varepsilon_\ell = \varepsilon = \alpha/\sqrt{N-1}$ . Observe que o estado do sistema conjunto oscila entre  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$  (onde o oscilador central encontra-se em um estado do tipo “*gato de Schrödinger*” e os osciladores periféricos em estados coerentes  $\eta$ ), e  $|\psi_{transf.}\rangle$  (onde o oscilador central encontra-se em um estado coerente  $\varsigma_1$  e os osciladores periféricos correlacionados como na Eq.(4.60)). A Eq.(4.60) mostra como o estado do tipo “*gato de Schrödinger*”, inicialmente preparado no oscilador 1, é pulverizado nos  $N - 1$  osciladores periféricos.

Finalmente, na Fig.-4.3(b) traçamos as curvas para as probabilidades de transferência considerando  $\lambda = 2\omega_0/\sqrt{N-1}$ . Como na Fig.-4.3(a) a transferência da superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  para os  $N - 1$  osciladores periféricos ocorre somente quando  $N = 2$ . A seguir, analisamos as entropias lineares do sistema conjunto, do oscilador central e dos  $N - 1$  osciladores periféricos.

## 4.9 Excesso de Entropia

Considerando novamente o estado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_\ell\}\rangle$ , um reservatório com densidade espectral do tipo ruído branco Markoviano e o caso em que todos os osciladores da rede possuem a mesma taxa de dissipação  $\Gamma_m = \Gamma$ , analisamos nesta *Seção* as entropias do estado conjunto, do estado reduzido do oscilador 1, e do estado reduzido dos demais osciladores. Essas funções, calculadas a partir das Eqs.(4.40) e (4.53), são dadas, respectivamente, por

$$\mathcal{S}_{1,\dots,N}(t) = 1 - \text{Tr}_{1,\dots,N} \rho_{1,\dots,N}^2(t), \quad (4.61a)$$

$$\mathcal{S}_1(t) = 1 - \text{Tr}_1 \rho_1^2(t), \quad (4.61b)$$

$$\mathcal{S}_{2,\dots,N}(t) = 1 - \text{Tr}_{2,\dots,N} [\text{Tr}_1 \rho_{1,\dots,N}(t)]^2. \quad (4.61c)$$

A evolução da correlação entre os estados reduzidos do oscilador 1 e dos  $N - 1$  osciladores periféricos será analisada através do excesso de entropia, definido por

$$\mathcal{E}(t) \equiv \mathcal{S}_1(t) + \mathcal{S}_{2,\dots,N}(t) - \mathcal{S}_{1,\dots,N}(t). \quad (4.62)$$

Na *Fig.-4.4*, as quantidades das *Eqs.(4.61a)-(4.61c)* e *(4.62)* são traçadas contra  $\Gamma t$ , considerando  $\alpha = \eta = 1$  como parâmetros reais, tomando a razão fictícia  $\lambda/\Gamma = 4$  e a intensidade do acoplamento  $\lambda = 2\omega_0$ . As *Figs.-4.4(a,b,c e d)* referem-se a  $N = 2, 3, 10$  e  $50$  osciladores, respectivamente. Nessas figuras, assim como ocorre para a rede simétrica, a linha sólida espessa que representa a entropia linear do estado conjunto  $\mathcal{S}_{1,\dots,N}(t)$ , começa em zero, vai a um máximo devido ao processo de decoerência (ou emaranhamento entre o sistema conjunto composto pelos osciladores da rede e seus respectivos reservatórios) e então retorna a zero, uma vez que no limite assintótico todos os osciladores devem alcançar o vácuo quando os reservatórios estão à temperatura zero absoluto. Enquanto isso, as entropias lineares dos estados reduzidos  $\mathcal{S}_1(t)$  e  $\mathcal{S}_{2,\dots,N}(t)$ , representadas pelas linhas sólida e tracejada, respectivamente, oscilam entre zero e 0.5. O caso  $N = 2$  coincide, como esperado, com aquele de uma rede simétrica, onde o estado do tipo “*gato de Schrödinger*”, preparado no oscilador 1, transfere-se para o oscilador 2 e recorre, subseqüentemente, ao oscilador 1. De fato, a função  $\mathcal{S}_1(t)$  ( $\mathcal{S}_2(t)$ ) alcança seu mínimo quando o oscilador 1 (oscilador 2) assume (recupera) o estado  $|\!-\!\eta\rangle_1$  ( $|\eta\rangle_2$ ), como pode ser calculado da *Eq.(4.34)*. Ao mesmo tempo,  $\mathcal{S}_2(t)$  ( $\mathcal{S}_1(t)$ ) toca por cima a linha sólida espessa, representando  $\mathcal{S}_{1,2}(t)$ , indicando que a superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  foi transferida (recuperada) ao (pelo) oscilador 2 (1), a caminho da decoerência. Temos certeza que é exatamente o estado  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  que recorre (transfere-se) ao oscilador 1 (2) através das *Figs.-4.2* e *4.3*, que indicam, através das probabilidades de recorrência e transferência de estados, respectivamente, que esta superposição de fato recorre (transfere-se) ao oscilador 1 (2), a caminho da decoerência.

Também observamos da *Fig.-4.4* que as correlações máximas entre o oscilador central 1 e os periféricos ocorrem nos pontos onde as curvas  $\mathcal{S}_1(t)$  e  $\mathcal{S}_{2,\dots,N}(t)$  se cruzam, como ilustrado pela linha pontilhada representando o excesso de entropia  $\mathcal{E}(t)$ . Quando a entropia linear  $\mathcal{S}_1(t)$  ( $\mathcal{S}_{2,\dots,N}(t)$ ) toca a curva  $\mathcal{S}_{1,\dots,N}(t)$ , isto é, quando o estado de

Figura 4-4: Entropias lineares  $\mathcal{S}_{1,\dots,N}(t)$ ,  $\mathcal{S}_1(t)$ ,  $\mathcal{S}_{2,\dots,N}(t)$  e excesso de entropia  $\mathcal{E}(t)$  contra  $\Gamma t$ , para  $\Gamma_m = \Gamma$  (ajustando  $\lambda/\Gamma = 4$ ) e  $\lambda/\omega_0 = 2$ , assumindo ruído branco Markoviano e o estado fatorado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_\ell\}\rangle$ , com parâmetros reais  $\alpha = \eta = 1$ . Redes com (a)  $N = 2$ , (b)  $N = 3$ , ...

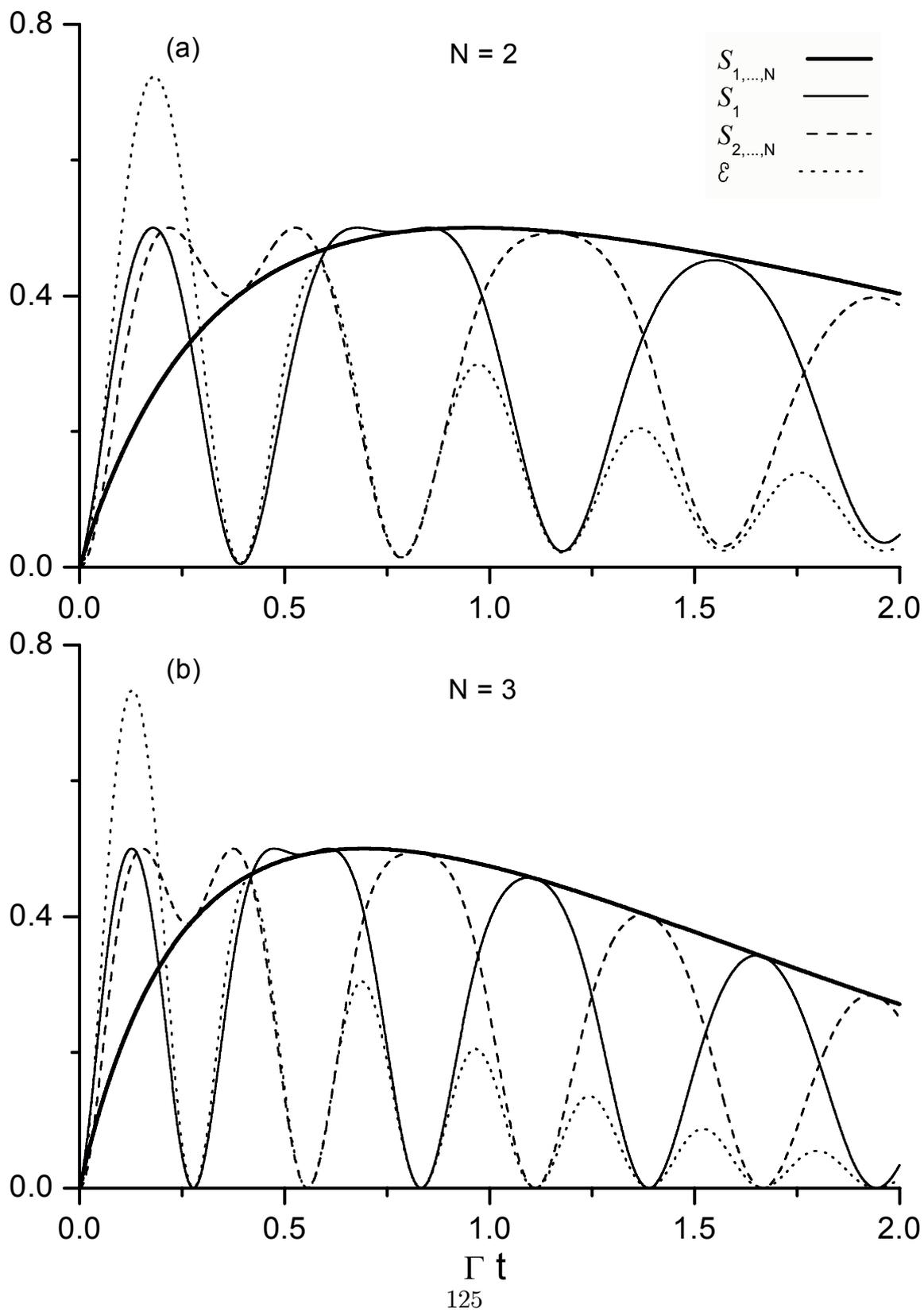
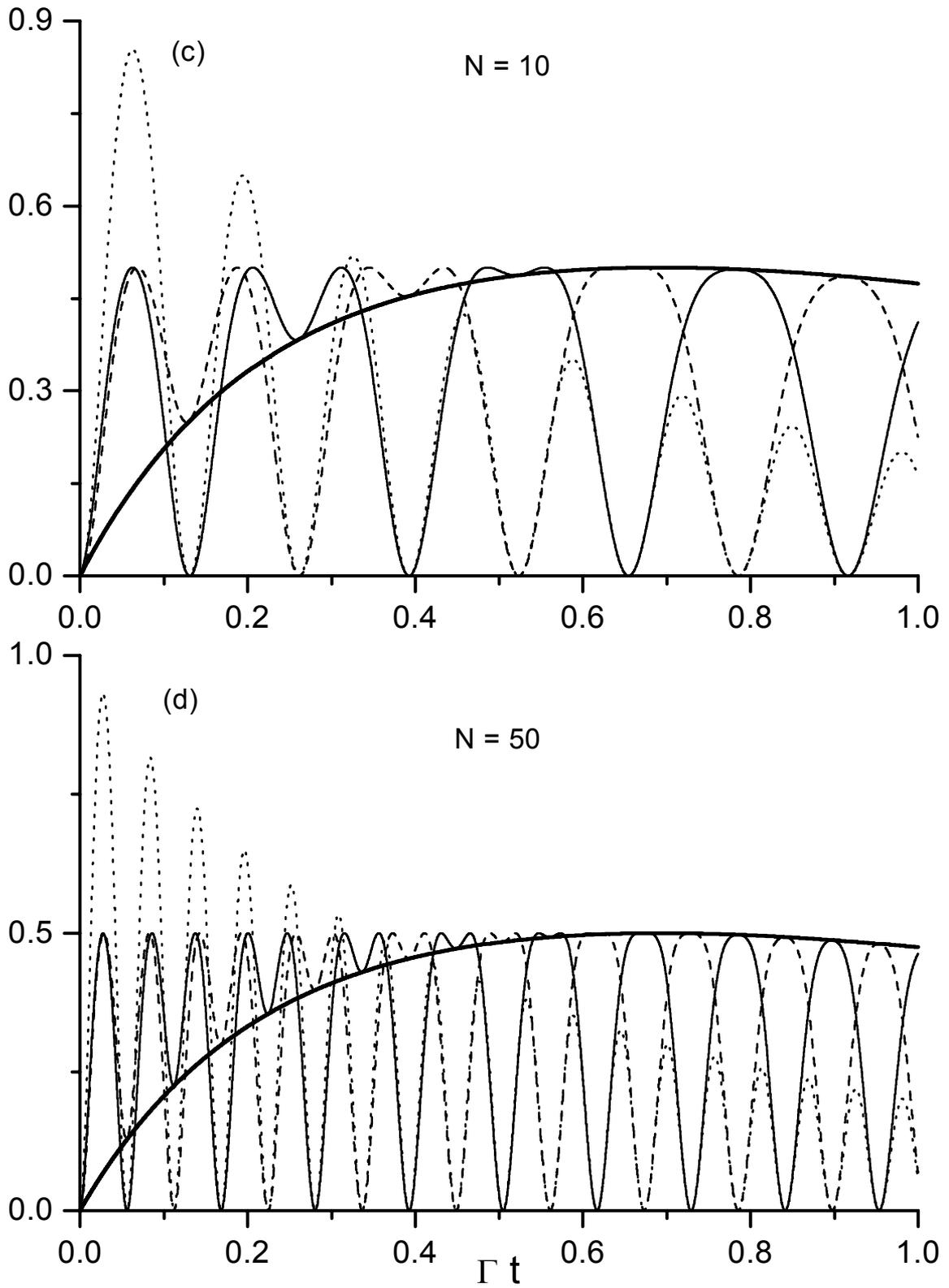


Figura 4-4: ... (c)  $N = 10$  e (d)  $N = 50$ .



superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  recorre ao oscilador 1 (e os  $N - 1$  osciladores periféricos correlacionam-se na forma  $\mathcal{N}(|\{\varepsilon_\ell\}\rangle + |-\varepsilon_\ell\rangle)$ , como na Eq.(4.60)), o excesso de entropia bem como as correlações entre os osciladores alcançam seus valores mínimos. Observamos que nos “tempos de transferência”  $t_R/2$ , quando  $\rho_1(t_R/2) = |\varsigma_1\rangle\langle\varsigma_1|$  e  $\rho_{2,\dots,N}(t_R/2) = \mathcal{N}^2(|\{\varepsilon_\ell\}\rangle + |-\varepsilon_\ell\rangle)(\langle\{\varepsilon_\ell\}| + \langle\{-\varepsilon_\ell\}|)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{1,\dots,N}(t_R/2) &= 1 - \text{Tr}_1 \rho_1^2(t_R/2) \text{Tr}_{2,\dots,N} \rho_{2,\dots,N}^2(t_R/2) \\ &= 1 - \text{Tr}_{2,\dots,N} \rho_{2,\dots,N}^2(t_R/2) = \mathcal{S}_{2,\dots,N}(t_R/2). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Note que a medida que o tempo evolui os osciladores não se decorrelacionam para o caso  $N = 2$ , dado que o excesso de entropia não alcança o zero. Isto ocorre visto que para  $N = 2$ ,  $\gamma^+ = 2\gamma^- = \Gamma/2$ , e conseqüentemente, o canal de dissipação misto  $\mathcal{L}_{12}\rho_{12}$  não é nulo, levando ao desenvolvimento de uma correlação de fundo que correlaciona permanentemente ambos os osciladores. Quando  $N > 2$  obtemos os mesmo valores para as taxas de dissipação  $\gamma^\pm = \Gamma/N$  e, deste modo, o canal de dissipação misto é nulo, impedindo o desenvolvimento da correlação de fundo. Como observado no *Capítulo* anterior, as correlações de fundo surgem por dois diferentes processos: (i) os canais de dissipação mistos ( $\mathcal{L}_{\ell n}\rho_{1,\dots,N}(t)$ ), que acoplam os operadores de Liouville individuais  $\mathcal{L}_m\rho_{1,\dots,N}(t)$ , e (ii) os canais de dissipação usuais ( $\mathcal{L}_m\rho_{1,\dots,N}(t)$ ) quando as taxas de dissipação  $\Gamma_n$  dos osciladores da rede diferem-se entre si. Para taxas de dissipação iguais, como ocorre aqui para  $N > 2$ , os canais de dissipação individuais não contribuem para o desenvolvimento da correlação de fundo.

A diferença essencial entre as curvas na *Fig.-4.4* para a rede central e aquelas para a rede simétrica (*Fig.-3.6* do *Capítulo 3*) é que na rede simétrica os demais  $N - 1$  osciladores atuam como parte do reservatório para o oscilador 1 onde o estado do tipo “gato de Schrödinger”  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  é preparado. À medida em que  $N$  aumenta, o estado do tipo “gato de Schrödinger” dificilmente deixa o oscilador 1, visto que os tempos de recorrência tornam-se menores quando  $N$  aumenta (veja Eq.(3.70)). Portanto, em uma rede simétrica com  $N \gg 1$ , o estado do tipo “gato de Schrödinger”, preparado no oscilador 1, comporta-se como se este oscilador estivesse desacoplado dos demais  $N - 1$  osciladores que compõem a rede; o mesmo não acontece para a rede central. Em vez

disso, como descrito acima, o estado do sistema conjunto para a rede central oscila entre  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$  e  $|\psi_{transf.}\rangle$ , isto é, o estado do tipo “*gato de Schrödinger*” preparado no oscilador 1 é pulverizado para os  $N - 1$  osciladores periféricos da rede, como ocorre na rede simétrica, mas de um modo em que estes osciladores encontram-se na superposição coerente  $\mathcal{N}(|\{\varepsilon_\ell\}\rangle + |\{-\varepsilon_\ell\}\rangle)$ , que se desacopla do estado do oscilador 1 nos “*tempos de transferência*”.

Com relação a possibilidade de proteger o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ , preparado no oscilador 1, acoplado aos osciladores periféricos, de modo a obter o tempo de decoerência  $\tau_D|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = (4/3)(2|\alpha|^2\Gamma)^{-1}$ , notamos que a correlação de fundo desenvolvida na *Fig.-4.4(a)* não afeta significativamente a fidelidade da superposição recuperada  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ . O tempo de correlação, estimado como o tempo quando o mínimo de  $\mathcal{E}(t)$  aproxima-se de  $10^{-2}$ , é escrito como

$$\tau_C \approx \frac{0.1}{|\alpha|} \frac{1}{|\gamma^+ - \gamma^-|}. \quad (4.64)$$

No regime de acoplamento fraco, quando  $\gamma^\pm = \Gamma/N$ , o tempo de correlação vai a infinito, de modo que a entropia  $\mathcal{S}_{2,\dots,N}(t)$  sempre retorna a zero nos tempos de recorrência. Considerando o tempo de decoerência  $\tau_D$ , calculado no regime de acoplamento forte (*Eq.(4.48)*), obtemos a razão

$$\frac{\tau_C}{\tau_D} \approx \frac{N|\alpha|}{10} \frac{\gamma^+ + \gamma^-}{|\gamma^+ - \gamma^-|}. \quad (4.65)$$

Para  $\tau_C/\tau_D \gtrsim 1$  o tempo de correlação torna-se maior que o tempo de decoerência, e portanto torna-se desprezível para propósitos de proteção de estados. Assumindo ruído branco Markoviano, obtemos a razão  $\tau_C/\tau_D \rightarrow \infty$  para  $N > 2$  como esperado das curvas nas *Figs.-4.4(b,c e d)*. Porém, para  $N = 2$  obtemos o mesmo resultado que no caso da rede simétrica, onde  $\tau_C/\tau_D = 3|\alpha|/5$ , de modo que para  $|\alpha| \gtrsim 2$  obtemos  $\tau_C/\tau_D \gtrsim 1$ . Como salientado no *Capítulo* anterior, este mecanismo de proteção de estados pode ser aplicado em eletrodinâmica quântica de cavidades, onde um estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  pode ser preparado em uma cavidade aberta de qualidade inferior, protegido contra decoerência em um sistema de cavidades fechadas de qualidade superior e resgatado de volta à cavidade aberta, digamos, para propósitos de interação átomo-

campo.

Finalmente, note que para a intensidade de acoplamento  $\lambda = 2\omega_0/\sqrt{N-1}$  obtemos exatamente as curvas na *Fig.-4.4(a)* para quaisquer valores de  $N$ . De fato, é fácil concluir que as oscilações das entropias lineares  $\mathcal{S}_1(t)$  e  $\mathcal{S}_{2,\dots,N}(t)$ , bem como do excesso de entropia  $\mathcal{E}(t)$ , decorrem do termo  $\cos(\sqrt{N-1}\lambda t)$  que se torna  $\cos(2\omega_0 t)$  quando  $\lambda = 2\omega_0/\sqrt{N-1}$  e, portanto, independem de  $N$ .

## 4.10 Conclusão

Neste *Capítulo*, assim como no anterior, investigamos a dinâmica de coerência e o processo de decoerência de estados quânticos em uma rede composta por  $N$  osciladores dissipativos acoplados. Diferentemente do *Capítulo 3*, consideramos aqui uma rede central onde um único oscilador dissipativo, central, acopla-se a  $N-1$  osciladores periféricos dissipativos não interagentes. Os resultados obtidos para esta topologia foram comparados com aqueles do *Capítulo 3*, para uma rede simétrica (rede de  $N$  osciladores mutuamente interagentes). Como no *Capítulo 3*, assumimos que todos os osciladores possuem a mesma frequência natural  $\omega_0$  e acoplam-se com a mesma intensidade  $\lambda$ . Também consideramos ambos os regimes de acoplamento fraco e forte entre os osciladores. De forma similar ao *Capítulo 3*, denominamos regime de acoplamento forte as situações em que o parâmetro  $\lambda\sqrt{N-1}$  é suficientemente grande de forma a deslocar os modos normais para regiões muito distantes da frequência natural  $\omega_0$  do sistema. Essas situações surgem quando aumentamos a intensidade do acoplamento entre os osciladores e/ou o número de osciladores da rede.

Como primeiramente salientado no *Capítulo 2* (onde realizou-se uma análise detalhada de uma rede composta por apenas dois osciladores) e posteriormente no *Capítulo 3*, a essência do acoplamento forte entre os osciladores é deslocar as frequências dos modos normais para regiões muito distantes da frequência natural  $\omega_0$  do sistema. Portanto, se as densidades espectrais dos reservatórios em torno das frequências dos modos normais são significativamente diferentes daquela em torno de  $\omega_0$ , a dinâmica de coerência do sistema pode ser significativamente modificada. Desta maneira, para uma rede de osciladores fortemente acoplados as densidades espectrais dos reservatórios apresentam um

papel central na dinâmica dissipativa e, conseqüentemente, o programa de engenharia de reservatórios quânticos torna-se importante.

Enquanto que para a rede simétrica obtivemos apenas dois modos normais distintos,  $\Omega_1 = \tilde{\omega}_0 + (N - 1)\lambda$  e  $\Omega_\ell = \tilde{\omega}_0 - \lambda$ , para a rede central obtivemos três diferentes modos normais,  $\Omega_1 = \tilde{\omega}_0 - \lambda\sqrt{N - 1}$ ,  $\Omega_j = \tilde{\omega}_0$  e  $\Omega_N = \tilde{\omega}_0 + \lambda\sqrt{N - 1}$ . Além disso, quando consideramos a intensidade do acoplamento  $\lambda = 2\omega_0/\sqrt{N - 1}$ , o modo normal  $\Omega_1$  é deslocado para zero independentemente do número  $N$  de osciladores da rede. Esta é uma diferença crucial entre as redes simétrica e central, visto que na rede simétrica um de seus modos normais,  $\tilde{\omega}_0 - \lambda$ , é deslocado para zero somente no caso particular em que  $N = 2$ . Portanto, mesmo se considerarmos um reservatório do tipo ruído branco Markoviano, o tempo de decoerência de estados quânticos de superposição aumenta independentemente do valor  $N$ , quando se considera uma rede central. Como o modo normal  $\Omega_1 = \tilde{\omega}_0 - \lambda\sqrt{N - 1}$  é deslocado para zero, os acoplamentos entre os osciladores e seus respectivos reservatórios tornam-se metade do original e, deste modo, o tempo de decoerência aumenta.

Da mesma forma que concluímos no *Capítulo 3*, quando consideramos estados da rede que são autoestados dos modos normais  $\Omega_1$  e  $\Omega_\ell$ , isto é, autoestados das frequências que são deslocadas para regiões distantes da frequência natural  $\omega_0$  do sistema, os tempos de decoerência associados a estes autoestados podem ser significativamente melhorados dependendo da densidade espectral dos reservatórios. Para um reservatório cuja densidade espectral é dada pela distribuição de Bose-Einstein [22, 23], por exemplo, o tempo de decoerência de um autoestado do modo normal  $\Omega_1$  é aumentado devido ao decaimento exponencial da densidade espectral. Para a rede central analisada neste *Capítulo*, não se pode obter todos os autoestados associados aos modos normais em termos de estados coerentes. Esta tarefa torna-se difícil para a rede central devido a ausência de completa simetria.

Também salientamos que no caso  $N = 2$ , onde ambas as topologias coincidem, o tempo de decoerência do estado  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\eta_2\rangle$ , um estado que representa um “*gato de Schrödinger*” preparado no oscilador 1 e um estado coerente preparado no oscilador 2, aumenta por um fator  $8/3$  quando consideramos ruído branco Markoviano, regime de acoplamento forte e taxas de dissipação distintas, de modo que  $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$ . Mesmo no regime de acoplamento fraco e ruído branco Markoviano, o tempo de decoerência aumenta

por um fator 2 quando  $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$ . Para um valor arbitrário  $N$  e considerando o estado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_\ell\}\rangle$  (onde um estado do tipo “*gato de Schrödinger*” é preparado no oscilador 1 enquanto todos os demais osciladores são preparados nos estados coerentes  $\eta$ ), o tempo de decoerência da superposição  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  aumenta mesmo para uma densidade espectral do tipo ruído branco Markoviano quando se assume  $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$  em ambas as topologias. Este resultado foi verificado para a rede simétrica e deve valer também para a rede central, onde somente o caso  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  foi calculado (devido as dificuldades analíticas). Porém, quando  $N \gg 1$ , os  $N - 1$  osciladores restantes da rede simétrica comportam-se como se eles fossem parte do reservatório e o tempo de decoerência da superposição  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  permanece inalterado para ambos os casos em que  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$  e  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ . Para a rede central em que  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ , o tempo de decoerência do estado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_\ell\}\rangle$  sempre aumenta por um fator 4/3, para qualquer que seja o valor  $N$ , quando se considera a intensidade do acoplamento  $\lambda = 2\omega_0/\sqrt{N-1}$ , que desloca  $\Omega_1$  para zero. Este resultado segue da dinâmica de transferência de estados discutida abaixo.

Analisando a dinâmica de transferência e recorrência de estados, começando pelo estado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle = \mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1 \otimes |\{\eta_\ell\}\rangle$ , verificamos que no caso da rede central o estado do sistema conjunto oscila entre  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$  e  $|\psi_{transf.}\rangle = \mathcal{N}|\zeta_1\rangle \otimes (|\{\varepsilon_\ell\}\rangle \pm |-\varepsilon_\ell\rangle)$  (quando o oscilador central está num estado coerente  $|\zeta\rangle$  e todos os osciladores periféricos estão emaranhados). Nos tempos de recorrência a rede retorna ao estado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$  enquanto que nos “*tempos de transferência*” (que assumimos ser metade do tempo de recorrência) o estado é o produto definido por  $|\psi_{transf.}\rangle$ . De fato, não existe uma transferência do estado de superposição inicial  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ , preparado no oscilador 1, para os osciladores periféricos. O produto direto em  $|\psi_{transf.}\rangle$  mostra como o estado do tipo “*gato de Schrödinger*” é pulverizado nos  $N - 1$  osciladores periféricos da rede. Este é o motivo pelo qual denominamos “*tempo de transferência*” a metade do tempo de recorrência. Na rede simétrica, onde todos os osciladores acoplam-se entre si, se começarmos com o estado  $|\tilde{\psi}_{1,\dots,N}\rangle$  obtemos nos “*tempos de transferência*” um emaranhado do sistema conjunto, em vez do produto expresso por  $|\psi_{transf.}\rangle$ .

Deste modo concluímos que a topologia define a dinâmica de coerência e os tempos de decoerência de estados quânticos da rede. Porém, tal fenômeno depende crucialmente

do estado da rede. Como discutido acima, no regime de acoplamento forte as densidades espectrais dos reservatórios associados a cada oscilador da rede desempenham um papel decisivo na dinâmica de coerência e no processo de decoerência de estados da rede.

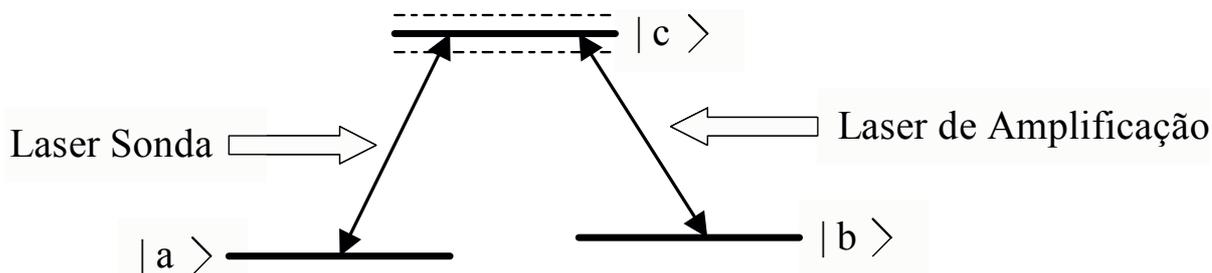
# Capítulo 5

## Transparência Eletromagneticamente Induzida e Efeito Stark Dinâmico em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades

### 5.1 Introdução

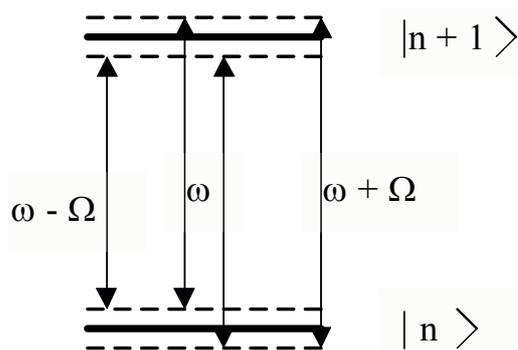
Parte significativa dos trabalhos atuais em óptica é dedicada aos fenômenos quânticos de coerência e interferência. Isto se deve a um tal domínio das interações do átomo com o campo de radiação que permite a investigação de efeitos quânticos fundamentais e parece inaugurar uma nova tecnologia em comunicação e computação [14, 17]. Nesta perspectiva, a transparência eletromagneticamente induzida (*TEI*) desempenha um papel importante em uma variedade de processos, abrangendo desde a óptica não linear [73] à computação e comunicação quânticas [14, 17]. Baseada na interferência quântica destrutiva, a *TEI* é um fenômeno em que a absorção de um laser sonda, ressonante com uma transição atômica ( $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ ), é reduzida ou mesmo eliminada pela aplicação de um laser de amplificação de alta intensidade a uma transição adjacente ao mesmo estado excitado ( $|b\rangle \rightarrow |c\rangle$ ). Veja *Fig.-5.1*. Este efeito surge devido ao desdobramento do estado atômico excitado (linhas tracejadas da *Fig.-5.1*), comum a ambas transições adjacentes. Quando o desdobramento

Figura 5-1: Sistema atômico de três níveis para a transparência eletromagneticamente induzida.



é menor que a largura do estado excitado, os dois níveis resultantes são indistinguíveis e, conseqüentemente, induzem interferências destrutivas no espectro de absorção do laser sonda [74]. À medida em que a intensidade do laser de amplificação aumenta, a separação entre os níveis, antes indistinguíveis, também aumenta, eliminando a indistingüibilidade e, conseqüentemente, o espectro de absorção evolui para o dubleto de Autler-Townes. Por meio de um mecanismo similar, embora utilizando-se de interações não lineares, a forte excitação de um átomo de dois níveis por um laser sonda induz o efeito Stark dinâmico levando ao aparecimento de bandas laterais no espectro de ressonância fluorescente [75, 76]. Veja *Fig.-5.2*.

Figura 5-2: Desdobramento dos estados atômicos devido ao efeito Stark dinâmico.



A fenomenologia da *TEI*, observada em amostras atômicas, foi recentemente reproduzida em um sistema clássico constituído por dois osciladores dissipativos acoplados. Um destes osciladores, modelando o átomo de três níveis, é submetido a uma força de amplificação linear [77] que desempenha o papel do laser sonda. O laser de amplificação é

simulado pelo acoplamento entre os osciladores. A versão quântica deste análogo clássico da *TEI*, que contribui para um aprofundamento da compreensão deste fenômeno e de suas propriedades, será analisada neste *Capítulo*. Nesta versão quântica os osciladores clássicos são substituídos por cavidades quânticas acopladas através da aproximação de ondas girantes. O laser sonda será representado através dos processos de ampliações linear e paramétrica, esta última empregada para reproduzir a fenomenologia do mecanismo não linear relacionado a ressonância fluorescente de uma transição atômica sujeita a um laser de alta intensidade.

## 5.2 Processos de Amplificação Linear e Paramétrica em um Sistema de Dois Osciladores Dissipativos Acoplados

O Hamiltoniano de duas cavidades dissipativas acopladas, rotuladas por  $\ell = 1, 2$ , é dado por

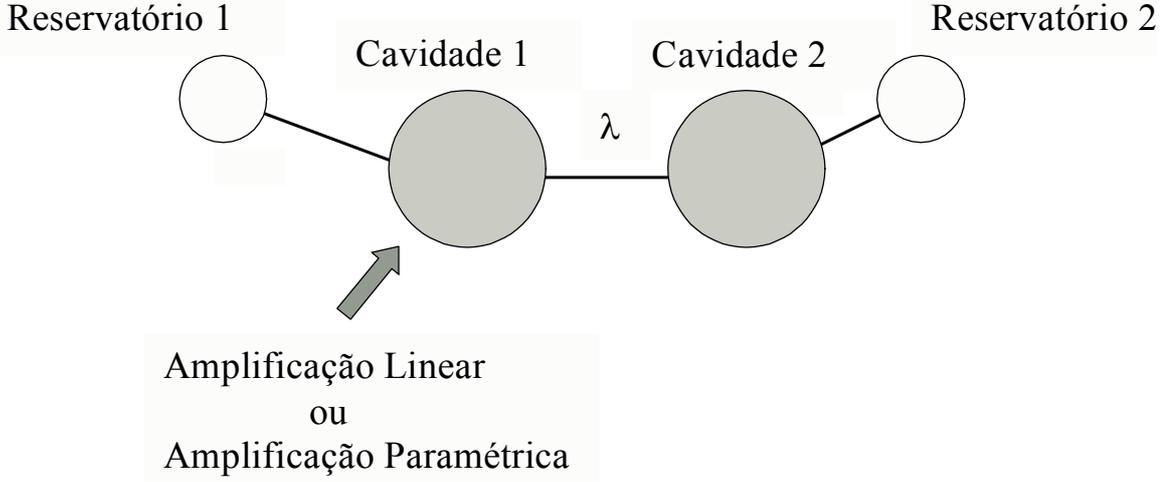
$$H = \sum_{\ell} \left[ \omega_{\ell} a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell} + \sum_k \omega_{\ell k} b_{\ell k}^{\dagger} b_{\ell k} + \sum_k V_{\ell k} \left( a_{\ell} b_{\ell k}^{\dagger} + a_{\ell}^{\dagger} b_{\ell k} \right) \right] + \lambda \left( a_1 a_2^{\dagger} + a_1^{\dagger} a_2 \right) + H_{amplif.}, \quad (5.1)$$

onde  $a_{\ell}^{\dagger}$  e  $a_{\ell}$  são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação para o modo da cavidade de frequência  $\omega_{\ell}$ , ao passo que  $b_{\ell k}$  e  $b_{\ell k}^{\dagger}$  são os operadores análogos para o  $k$ -ésimo modo do reservatório associado à cavidade  $\ell$ , cuja frequência e intensidade do acoplamento são  $\omega_{\ell k}$  e  $V_{\ell k}$ , respectivamente. Como se mostra na *Fig.-5.3*, assumimos que o processo de amplificação atua sobre a cavidade 1. O Hamiltoniano de amplificação linear ou paramétrica é dado por

$$H_{amplif.} = F \left[ \left( a_1^{\dagger} e^{-i\omega t} \right)^{(1+p)} + \left( a_1 e^{i\omega t} \right)^{(1+p)} \right], \quad (5.2)$$

onde o parâmetro  $p$  assume o valor 0 (1) para o processo de amplificação linear (paramétrica). A intensidade do acoplamento entre as cavidades é  $\lambda$  e o campo clássico de amplificação li-

Figura 5-3: Esquema representando duas cavidades dissipativas acopladas. A cavidade 1 é submetida a um processo de amplificação linear ou paramétrica.



near (paramétrica) aplicado à cavidade 1 tem intensidade  $F$  e frequência  $\omega$  ( $2\omega$ ). Seguindo os procedimentos realizados no *Capítulo 2*, em que derivamos uma equação mestra para um sistema de dois osciladores dissipativos acoplados (estando o oscilador 2 sujeito a uma amplificação linear), e incluindo o processo de amplificação paramétrica, obtemos a equação mestra, na representação de Schrödinger, dada por

$$\frac{d\rho_{12}(t)}{dt} = i[\rho_{12}(t), H_0] + \sum_{\ell} \mathcal{L}_{\ell}\rho_{12}(t), \quad (5.3)$$

onde

$$H_0 = \sum_{\ell} \Omega_{\ell} a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell} + \lambda (a_1 a_2^{\dagger} + a_1^{\dagger} a_2) + \tilde{H}_{amplif.} \quad (5.4)$$

e  $\Omega_{\ell} = \omega_{\ell} - \omega$  corresponde aos modos normais dos campos nas cavidades acopladas. Os Hamiltonianos de amplificação linear e paramétrica são dados, respectivamente, por  $\tilde{H}_{linear} = F (a_1^{\dagger} + a_1)$  e  $\tilde{H}_{param.} = F \left[ (a_1^{\dagger})^2 + (a_1)^2 \right]$ , enquanto que o operador de Liouville  $\mathcal{L}_{\ell}\rho_{12}(t)$  origina-se da estrutura usual de operadores

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\ell}\rho_{12}(t) \equiv & \frac{\Gamma_{\ell}}{2} \left\{ \left( [a_{\ell}\rho_{12}(t), a_{\ell}^{\dagger}] + [a_{\ell}, \rho_{12}(t)a_{\ell}^{\dagger}] \right) \right. \\ & \left. + \mathbf{N}_{\ell}(\omega_{\ell}) \left( [[a_{\ell}^{\dagger}, \rho_{12}(t)], a_{\ell}] + [a_{\ell}^{\dagger}, [\rho_{12}(t), a_{\ell}]] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

A função  $\mathbf{N}_n(\omega_{nk})$ , que leva em conta a temperatura do reservatório, segue da função de correlação  $\langle b_n^\dagger(\omega_{nk})b_n(\omega_{nk'}) \rangle = 2\pi\mathbf{N}_n(\omega_{nk})\delta(\omega_{nk} - \omega_{nk'})$  e a taxa de dissipação da cavidade  $\ell$  é definida por  $\Gamma_\ell \equiv V_\ell^2(\omega_\ell)\sigma_\ell^2(\omega_\ell)$ .  $\sigma_\ell(\omega_{\ell k})$  representa a densidade de estados do reservatório associado à cavidade  $\ell$ . Usando os procedimentos usuais e assumindo ruído branco Markoviano, derivamos uma versão “c-number” da equação mestra (5.3) para a função característica  $\chi(\{\eta_\ell\}, t)$ , dada por

$$\frac{d\chi(t)}{dt} = \sum_\ell \left[ \left( C_\ell \frac{\partial}{\partial \eta_\ell} + c.c. \right) - \Gamma_\ell \mathbf{N}_\ell |\eta_\ell|^2 + iF(\eta_1 + \eta_1^*)(\eta_1 - \eta_1^*)^p \delta_{\ell 1} \right] \chi(t), \quad (5.6)$$

onde definimos

$$\Lambda_\ell = \Gamma_\ell/2 + i\Omega_\ell, \quad (5.7)$$

$$C_\ell(\{\eta_\ell\}) = \eta_\ell \Lambda_\ell + i\lambda \eta_{\ell-(-1)^\ell} + 2i\mathbf{p}F\eta_1^*. \quad (5.8)$$

Tomando ambos os reservatórios à zero absoluto e assumindo que a solução da Eq.(5.6) possa ser escrita na forma

$$\chi(\{\eta_\ell\}, t) = \psi(\{\eta_\ell(t)\})\phi(\{\eta_\ell\}), \quad (5.9)$$

com  $\eta_\ell(0) = \eta_\ell$ , verificamos que a função característica, evoluída temporalmente, tem por solução

$$\chi(\{\eta_\ell\}, t) = \frac{\chi(\{\eta_\ell\}, 0)}{\phi(\{\eta_\ell\})} \Big|_{\eta_\ell \rightarrow \eta_\ell(t)} \phi(\{\eta_\ell\}), \quad (5.10)$$

onde a função  $\phi(\{\eta_\ell\})$  é solução da equação

$$\sum_\ell \left[ iF(\eta_1 + \eta_1^*)(\eta_1 - \eta_1^*)^p \delta_{\ell 1} + \left( C_\ell \frac{\partial}{\partial \eta_\ell} + c.c. \right) \right] \phi(\{\eta_\ell\}) = 0. \quad (5.11)$$

Observe que a solução (5.10) depende do estado inicial do sistema representado em termos de  $\chi(\{\eta_\ell\}, 0)$  e também da função  $\phi(\{\eta_\ell\})$ . Além disso, devemos substituir  $\eta_\ell$  pela solução

das equações diferenciais acopladas

$$\frac{\partial \eta_\ell(t)}{\partial t} = C_\ell(\{\eta_\ell\}), \quad (5.12)$$

obtidas através da equação

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \sum_\ell \left( \frac{\partial \eta_\ell(t)}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\ell} + c.c. \right) = \sum_\ell \left( C_\ell(t) \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\ell} + c.c. \right). \quad (5.13)$$

Da solução das equações acopladas (5.12), observamos, no caso da amplificação linear, que os campos em ambas as cavidades sempre evoluem para estados coerentes estacionários,  $\alpha_1 = -iF\Lambda_2/(\lambda^2 + \Lambda_1\Lambda_2)$  e  $\alpha_2 = -\lambda F/(\lambda^2 + \Lambda_1\Lambda_2)$ , caracterizados pelo equilíbrio entre o processo de amplificação e o mecanismo dissipativo das cavidades, mediado pela intensidade de acoplamento  $\lambda$ . A partir das mesmas equações diferenciais acopladas para  $\eta_\ell(t)$ , Eq.(5.12), é possível encontrar, como esperado para o caso de um sistema submetido a um processo de amplificação paramétrica, o limiar bem conhecido da dinâmica de estados dos campos em cavidades [78, 79]. Este limiar ocorre quando o parâmetro de amplificação efetivo  $\xi = 4F/\Gamma_1$  iguala-se a um valor crítico  $\xi_c$  dependendo da amplitude crítica  $F_c$ . Obtemos três diferentes dinâmicas para os estados dos campos nas cavidades, dependendo se o parâmetro de amplificação efetivo é forte ( $\xi > \xi_c$ ), crítico ( $\xi = \xi_c$ ) ou fraco ( $\xi < \xi_c$ ). Para  $\xi \geq \xi_c$  a solução assintótica para quaisquer quantidades físicas é divergente ao passo que obtemos soluções estacionárias para  $\xi < \xi_c$ . Para o caso de ressonância,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , o parâmetro de amplificação crítico é dado por

$$\xi_c = \begin{cases} 1 + 4\lambda^2/(\Gamma_1\Gamma_2) & \text{se } \lambda < \Gamma_2/2, \\ 1 + \Gamma_2/\Gamma_1 & \text{se } \lambda \geq \Gamma_2/2. \end{cases} \quad (5.14)$$

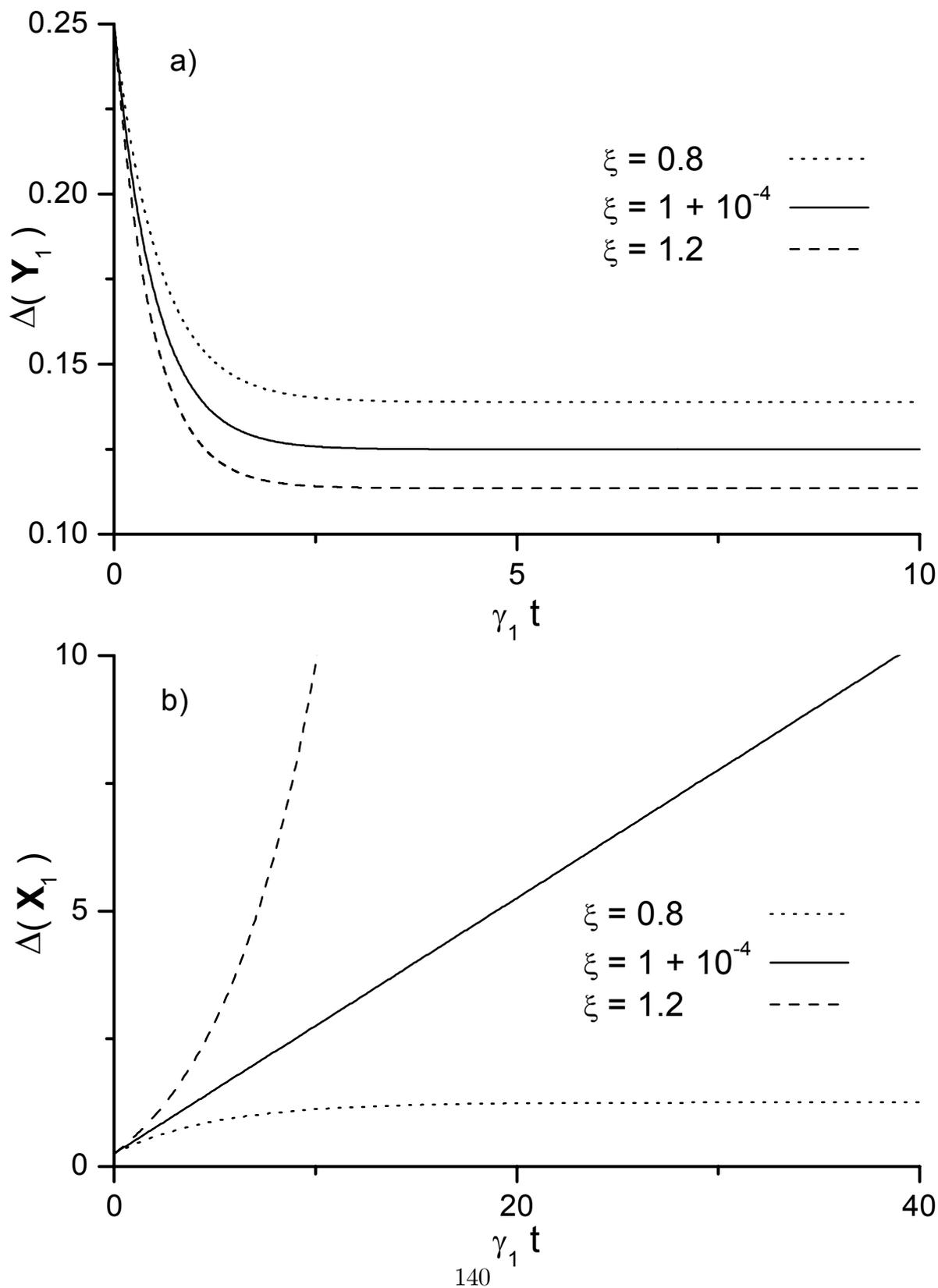
Evidentemente, quando  $\lambda = 0$  recobrimos o resultado usual  $\xi_c = 1$  para um sistema isolado submetido ao processo de amplificação paramétrica [78, 79]. Para os três regimes do processo de amplificação o campo na cavidade 1 evolue para um estado coerente comprimido. No entanto, quando  $\xi < \xi_c$  o estado assintótico será estacionário enquanto que para  $\xi \geq \xi_c$  o estado assintótico será divergente, cuja energia cresce monotonicamente. As Figs.-5.4(a e b) mostram, respectivamente, a evolução temporal das variâncias das

quadraturas  $\mathbf{X}_1 = \left( a_1 e^{i\pi/4} + a_1^\dagger e^{-i\pi/4} \right) / 2$  e  $\mathbf{Y}_1 = \left( a_1 e^{i\pi/4} - a_1^\dagger e^{-i\pi/4} \right) / 2i$  que estão relacionadas ao modo da cavidade 1. Nestas figuras assumimos as condições  $\lambda = \Gamma_2/2$ ,  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 10^{-4}$  e que os estados coerentes iniciais estejam no estado de vácuo,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , de modo que  $\xi_c = 1 + 10^{-4}$ . Na *Fig.-5.4(a)* as linhas pontilhada, sólida e tracejada seguem de  $\xi = 0.8$ ,  $1 + 10^{-4}$  e  $1.2$ , respectivamente. Observe que o grau de compressão da quadratura  $\mathbf{Y}_1$  é proporcional a magnitude do parâmetro efetivo  $\xi$ , ao passo que o limiar na dinâmica do sistema torna-se evidente na *Fig.-5.4(b)*, onde a variância da quadratura  $\mathbf{X}_1$  segue dos mesmos valores de  $\xi$  utilizados na *Fig.-5.4(a)*.

Em seguida, o fenômeno análogo a transparência eletromagneticamente induzida (*TEI*) será caracterizado através do estado do campo na cavidade 1 que se estabelece nas vizinhanças do tempo de relaxação do sistema. Para ambos os processos de amplificação o tempo de relaxação pode ser derivado a partir da condição  $\partial\eta_\ell(t)/\partial t \rightarrow 0$ , que para o caso do processo de amplificação linear é dado por  $\tau_R = \Gamma_2/2 + 2\lambda^2/\Gamma_1$ , onde assumimos  $\Gamma_1 \gg \lambda \gg \Gamma_2$ . Note que estamos definindo um tempo de relaxação mesmo para os regimes  $\xi \geq \xi_c$ , que surgem do processo de amplificação paramétrica, em que as cavidades não alcançam estados estacionários. Portanto, o tempo de relaxação que definimos refere-se somente a eliminação da dinâmica de coerência dos estados quânticos entre ambas as cavidades analisada no *Capítulo 2*, em que assumimos um processo de amplificação linear. Lembre que no *Capítulo 2* os estados dos campos eram trocados entre os osciladores através das dinâmicas de recorrência e transferência de estados. Por conseqüência, antes do tempo de relaxação, a dinâmica de coerência dos estados quânticos entre ambas as cavidades impede a ocorrência do efeito similar a *TEI*. Portanto, o sistema deve alcançar um estado estacionário de modo a permitir a ocorrência de interferências destrutivas que promovam o efeito do tipo *TEI*. Daqui por diante estaremos interessados nos estados da cavidade 1 por volta do tempo de relaxação.

Em amostras atômicas, o fenômeno da *TEI* é caracterizado através da permissividade do meio, associada ao índice de refração complexo  $n + ik$ , em que as respostas dispersivas e absorptivas seguem, respectivamente, das partes real  $n$  e imaginária  $k$  (denominado coeficiente de absorção). Em nosso modelo, o papel da permissividade é desempenhado pela quantidade  $\mathcal{E}_\ell^{1/2} e^{i\Theta_\ell}$ , que representa o centro da distribuição de quase probabilidade do estado do campo na cavidade  $\ell$ , no espaço de fase definido pelas quadraturas

Figura 5-4: Evolução temporal das variâncias das quadraturas (a)  $\mathbf{X}_1 = (a_1 e^{i\pi/4} + a_1^\dagger e^{-i\pi/4})/2$  e (b)  $\mathbf{Y}_1 = (a_1 e^{i\pi/4} - a_1^\dagger e^{-i\pi/4})/2i$ , relacionados ao modo da cavidade 1. As quadraturas foram rodadas, por um fator  $\pi/4$ , devido ao ângulo de compressão.



$X_\ell = (a_\ell + a_\ell^\dagger)/2$  e  $Y_\ell = (a_\ell - a_\ell^\dagger)/2i$ . Note que não estamos preocupados com as propriedades de compressão dos estados assintóticos obtidos com a amplificação paramétrica, onde quadraturas rotacionadas devem ser introduzidas. O coeficiente de absorção está diretamente associado com a energia média do campo na cavidade  $\ell$  dada pela função de correlação  $\langle X_\ell^2 + Y_\ell^2 \rangle = \mathcal{E}_\ell$  (em unidades de  $\hbar\omega_\ell$ ). A resposta dispersiva está associada ao ângulo  $\Theta$  através da função de correlação  $\langle X_\ell Y_\ell + Y_\ell X_\ell \rangle / \mathcal{E}_\ell = \sin 2\Theta_\ell$ . Na Ref. [77] a resposta dispersiva é derivada da parte real da dependência com a frequência da amplitude de oscilação da partícula 1, submetida à força de amplificação linear (além do acoplamento com a partícula 2):  $\text{Re}[x_1(\omega - \omega_1)]$ . Na presente versão quântica o valor médio equivalente  $\langle X_\ell \rangle$  também leva à resposta dispersiva requerida, como em [77], para o processo de amplificação linear. Porém, para o caso da amplificação paramétrica, o valor médio  $\langle X_\ell \rangle$  não é uma quantidade conveniente para se medir a resposta dispersiva, visto que este anula-se quando a excitação inicial do campo na cavidade  $\ell$  é também nula. Deste modo, consideraremos a função de correlação  $\langle X_\ell Y_\ell + Y_\ell X_\ell \rangle / \mathcal{E}_\ell$  para descrever a resposta dispersiva de forma geral. De fato, seu análogo clássico, proporcional a  $\text{Re}[x_\ell p_\ell]$ , também leva a dispersão usual, em que se observa uma inclinação abrupta no regime de *TEI*. As curvas de absorção e dispersão, dadas pelas funções de correlação  $\langle X_\ell^2 + Y_\ell^2 \rangle$  e  $\langle X_\ell Y_\ell + Y_\ell X_\ell \rangle / \mathcal{E}_\ell$ , respectivamente, são calculadas através da função característica (5.10) na forma

$$\mathcal{E}_\ell = - \frac{\partial^2}{\partial \alpha_\ell \partial \alpha_\ell^*} \chi(\{\alpha_m\}, t) \Big|_{\alpha_m \rightarrow 0}, \quad (5.15a)$$

$$\sin 2\Theta_\ell = \frac{1}{\mathcal{E}_\ell} \left( \frac{\partial^2}{\partial (\alpha_\ell)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (\alpha_\ell^*)^2} \right) \chi(\{\alpha_m\}, t) \Big|_{\alpha_m \rightarrow 0}. \quad (5.15b)$$

A seguir, para o processo de amplificação linear, traçamos os gráficos dos valores médios  $\mathcal{E}_1$  e  $\sin 2\Theta_1$  referentes a cavidade 1, versus  $\Delta = (\omega - \omega_1) / \Gamma_1$ . Para a amplificação paramétrica, afim de analisar o comportamento das curvas de absorção e dispersão da cavidade 1 nos regimes não estacionário de acoplamento crítico e forte (onde a solução assintótica de  $\mathcal{E}_1$  é divergente), traçamos o gráfico da razão  $\mathcal{E}_1 / \mathcal{E}_0$ , em vez de  $\mathcal{E}_1$ , onde  $\mathcal{E}_0$  é o valor de  $\mathcal{E}_1$  quando  $\Delta = 0$ .

## 5.2.1 Amplificação Linear

Nas *Figs.-5.5(a, b, e c)* mostramos as curvas de absorção e dispersão para o processo de amplificação linear considerando os parâmetros  $\lambda/\Gamma_1 = 2 \times 10^{-2}$ ,  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 10^{-4}$ ,  $F/\Gamma_1 = 1/4$  e os estados coerentes iniciais  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Como dito acima, quando assumimos um tempo muito menor que o tempo de relaxação,  $t \ll \tau_R$ , o efeito do tipo *TEI* é inibido pela dinâmica de coerência entre os estados dos campos nas cavidades. Porém, no tempo  $t = 10^{-2} \times \tau_R$ , a *Fig.-5.5(a)* apresenta uma interessante oscilação em torno de uma estreita região sobre o pico da curva de absorção, promovendo um pequeno crescimento da probabilidade de absorção na vizinhança do pico. Nota-se também que o efeito do tipo *TEI* começa a surgir, evoluindo para a forma completa por volta do tempo de relaxação, como mostrado pela *Fig.-5.5(b)*, onde  $t = \tau_R$ . Nas *Figs.-5.5(a e b)* analisamos o caso degenerado  $\omega_1 = \omega_2 = \tilde{\omega}$  e, afim de encontrar o efeito do tipo *TEI* sem resvalar para o regime de *AT*, assumimos que  $\Gamma_2 \ll \lambda \ll \Gamma_1$ . De fato, uma transparência completa ocorre somente quando  $\Gamma_2 = 0$ , visto que o mínimo do buraco cavado no pico da curva de absorção é dado por  $\mathcal{E}_1 = [2F\Gamma_2 / (4\lambda^2 + \Gamma_1\Gamma_2)]^2$ .

Quando assumimos o caso não degenerado  $\omega_1 = \tilde{\omega} = \omega_2 - \nu$ , no tempo de relaxação, o buraco que antes ocorria em  $\omega = \tilde{\omega}$  (no caso degenerado) desloca-se para  $\omega = \tilde{\omega} + \nu$ , como se mostra na *Fig.-5.5(c)*, onde considera-se que  $\tilde{\omega} + \nu$  está dentro da largura da curva de absorção. Neste caso, o efeito da *TEI* deslocada é acompanhado por um aumento da amplitude de absorção, que se torna menor à medida que aumentamos  $\nu$ . Quando a magnitude de  $\nu$  é suficientemente grande, de modo a deslocar  $\tilde{\omega} + \nu$  para fora da curva de absorção, o crescimento da amplitude de absorção torna-se nula. Finalmente, assumindo os mesmos parâmetros utilizados na *Fig.-5.5(b)*, mas com a intensidade do acoplamento amplificada,  $\lambda/\Gamma_1 = 1$ , o efeito análogo à *TEI* evolui para o regime do tipo *AT*, como mostrado na *Fig.-5.5(d)*.

Convém salientar que no regime de *TEI* a energia média do campo na cavidade 1 ( $\mathcal{E}_1 = \langle X_1^2 + Y_1^2 \rangle$ ) tende a zero quando o mesmo ocorre com  $\Gamma_2$ . Este efeito, que ocorre a partir de um intervalo de tempo da ordem de  $\tau_R$ , independe dos estados iniciais dos campos nas cavidades 1 e 2. Resulta portanto de um processo de ressonância entre o campo de amplificação e o modo da cavidade 2 efetivado pelo acoplamento entre as cavidades e mediado pelos mecanismos de dissipação. Este processo de ressonância torna-se claro na

*Fig.-5.5(c)*, em que o efeito de *TEI* ocorre exatamente quando a frequência do processo de amplificação torna-se  $\omega = \omega_2$ .

Seria interessante procurar pelo aumento eletromagneticamente induzido da taxa de absorção, conforme indica a *Fig.-5.5(a)*, no domínio original do fenômeno da *TEI*, em que um sistema atômico, na configuração  $\Lambda$ , é submetido aos lasers de amplificação e sonda. Acreditamos que este pequeno aumento da taxa de absorção, indicado pelo nosso modelo, possa também ser observado em amostras atômicas, uma vez que se deve a interferências quânticas construtivas, onde a absorção de um feixe laser sonda, ressonante com uma transição atômica, é aumentada pela aplicação de um campo de amplificação forte a uma transição adjacente.

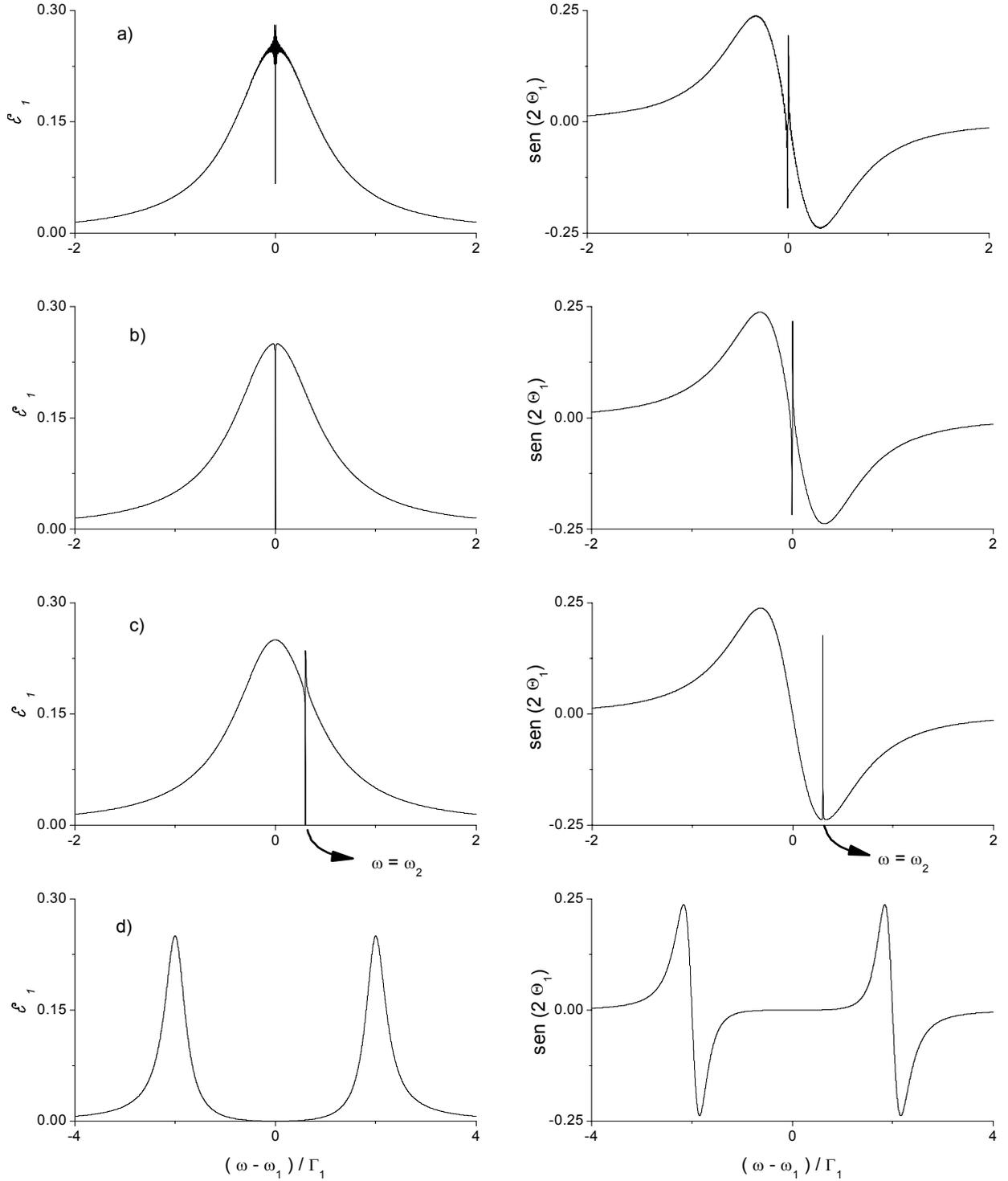
## 5.2.2 Amplificação Paramétrica

Para a amplificação paramétrica o efeito similar da *TEI* ocorre somente sobre um estreito intervalo  $|\xi| \lesssim \xi_c + 10^{-4}$  em torno do limiar estabelecido pelo parâmetro crítico  $\xi_c$ , isto é, em torno de

$$F_c = \begin{cases} (\Gamma_1 + 4\lambda^2/\Gamma_2)/4 & \text{se } \lambda < \Gamma_2/2, \\ (\Gamma_1 + \Gamma_2)/4 & \text{se } \lambda \geq \Gamma_2/2. \end{cases} \quad (5.16)$$

Diferentemente do processo de amplificação linear, onde o efeito do tipo *TEI* pode ser alcançado independentemente da razão  $F/\Gamma_1$ , a forte sensibilidade deste efeito com relação a amplitude do campo paramétrico segue da natureza de dois fótons deste processo de amplificação. No que diz respeito a intensidade do acoplamento  $\lambda$  entre as cavidades, apesar de que deva ser muito menor que  $\Gamma_1$ , ele pode ser da ordem de  $\Gamma_2$ , obedecendo a relação  $\Gamma_2 \lesssim \lambda \ll \Gamma_1$ . A seguir, analisamos as respostas de absorção e dispersão para os três regimes de amplificação paramétrica considerando  $\lambda = \Gamma_2/2$ ,  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 10^{-4}$  e os estados coerentes iniciais  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Começamos com o regime de amplificação fraca  $\xi = \xi_c - 1,5 \times 10^{-4}$ , apresentando na *Fig.-5.6(a)* a curva de absorção do campo na cavidade 1. Como mostra esta figura, onde o tempo de relaxação  $\tau_R$  foi considerado — e, portanto, soluções estacionárias para os campos em ambas as cavidades — o efeito similar a *TEI* não é tão pronunciado quanto no processo de amplificação linear. De fato, dificilmente podemos caracterizar este efeito como do tipo *TEI*, visto que o máximo da razão  $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0$  é próximo à unidade (isto é, o mínimo do buraco cavado no pico da curva

Figura 5-5: Curvas de absorção (à esquerda) e dispersão (à direita) para o processo de amplificação linear. Considerando o caso degenerado  $\omega_1 = \omega_2$ , os parâmetros  $\lambda/\Gamma_1 = 2 \times 10^{-2}$ ,  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 10^{-4}$ ,  $F/\Gamma_1 = 1/4$  e os estados coerentes iniciais  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , analisamos o surgimento do efeito análogo ao da *TEI* em (a)  $t = 10^{-2} \times \tau_R$  para sua forma final em (b)  $t = \tau_R$ . Também em  $t = \tau_R$  analisamos (c) o caso não degenerado  $\omega_1 = \omega_2 - \nu$  e em (d) a transição do efeito da *TEI* para o regime de *AT*.



de absorção, quando  $\Delta = 0$ ). Devido a solução estacionária alcançada para o regime de amplificação fraca, a curva de absorção permanece imóvel para  $t > \tau_R$ .

Para o regime crítico,  $\xi_c = 1 + 10^{-4}$ , as curvas de absorção para  $t = 0.8 \times \tau_R$ ,  $t = \tau_R$  e  $t = 1.1 \times \tau_R$  (onde  $\tau_R$  representa o tempo de relaxação para o regime de amplificação fraco,  $\xi < \xi_c$ ) são apresentadas na *Fig.-5.6(b)*, como indicado pelas linhas pontilhada, sólida e tracejada, respectivamente. Diferentemente do regime de amplificação fraca,  $\xi < \xi_c$ , observamos que o máximo da razão  $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0$  é cerca de duas ordens de magnitude maior que a unidade ( $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0$ ) para  $t = \tau_R$ , aumentando com a evolução temporal. Da mesma forma que no regime de acoplamento fraco, o comportamento observado neste caso dificilmente pode ser caracterizado como um efeito do tipo *TEI*, mas sim como uma mistura entre os efeitos de *TEI* e *AT*, visto que o buraco cavado no pico da curva de absorção apresenta uma largura significativa se comparada àquela do efeito do tipo *TEI* no caso da amplificação linear. A *Fig.-5.6(c)* apresenta as curvas de absorção para  $t = 0.8 \times \tau_R$ ,  $t = \tau_R$  e  $t = 1.1 \times \tau_R$ , no regime de amplificação forte, representadas por linhas pontilhada, sólida e tracejada, respectivamente. Novamente, uma mistura entre os efeitos de *TEI* e *AT* é observado, porém a razão  $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0$  não aumenta tão rapidamente como no regime crítico — ainda que ambos  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_0$  aumentem, independentemente, em taxas significativamente maiores que aquelas para o regime crítico. O máximo da razão  $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0$  é (somente) cerca de uma ordem de magnitude maior que a unidade ( $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0$ ) para  $t = \tau_R$  e aumenta com a evolução temporal. Note que os intervalos das dessintonias  $\Delta$ , nas *Figs.-5.6(b e c)*, onde as curvas de absorção assumem valores significativos, são consideravelmente pequenos quando comparados àqueles da *Fig.-5.6(a)* para o regime de amplificação fraco. Portanto, quando o parâmetro de amplificação efetivo  $\xi$  aumenta, o intervalo  $\Delta$  da curva de absorção decresce. Desta forma, não é difícil entender por que o intervalo  $\Delta$  da curva de absorção no regime de amplificação linear é maior do que aqueles no caso da amplificação paramétrica. Considerando a curva dispersiva, que é praticamente a mesma para os três regimes de amplificação paramétrica, obtemos o gráfico da *Fig.-5.6(d)* considerando novamente os parâmetros  $\lambda = \Gamma_2/2$ ,  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 10^{-4}$  e os estados coerentes iniciais  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Ao contrário do caso da amplificação linear, quando no regime de *TEI* observamos uma inclinação abrupta na resposta dispersiva do meio, a amplificação paramétrica não exhibe este comportamento abrupto na resposta

dispersiva.

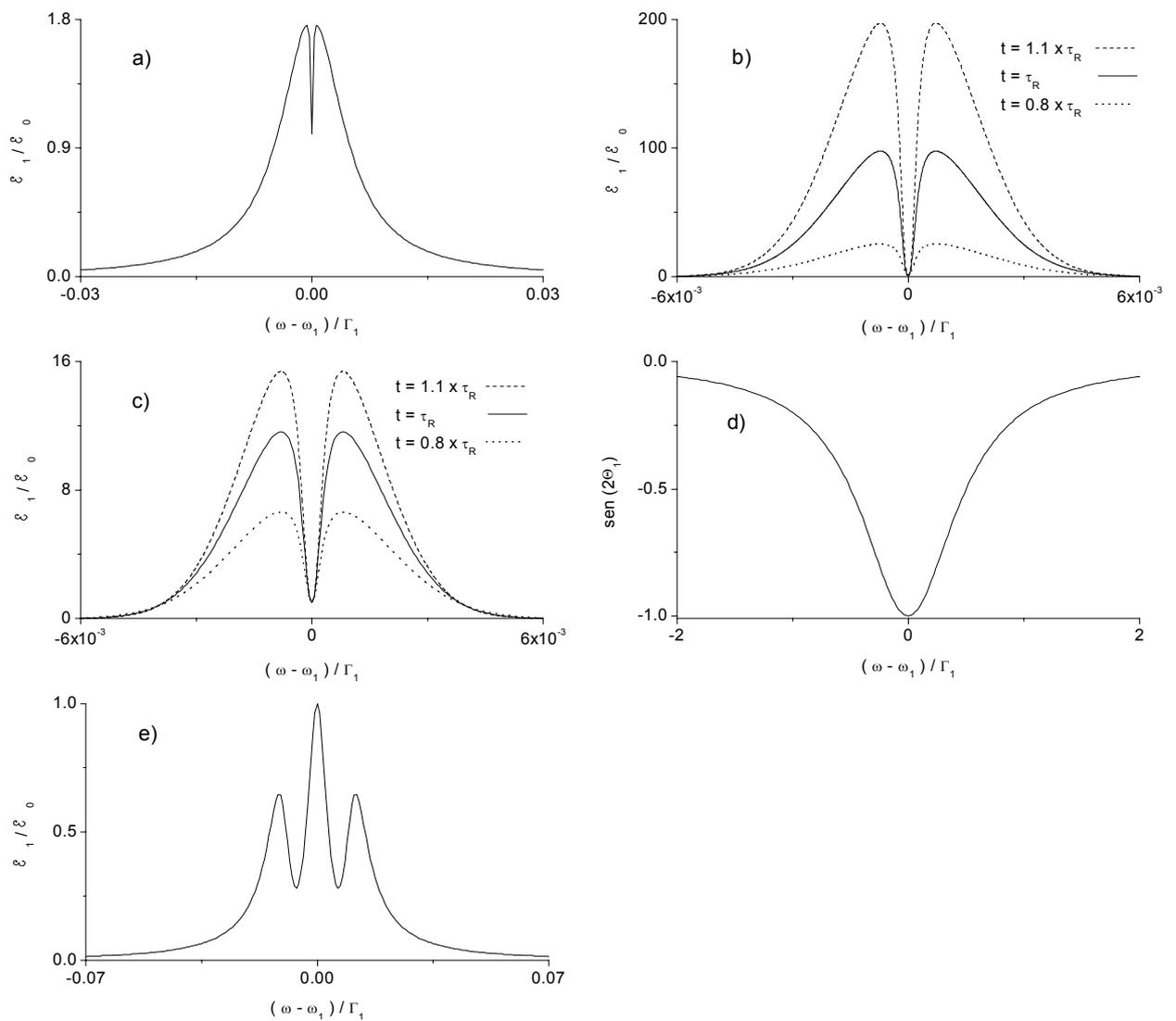
Finalmente, a *Fig.-5.6(e)* apresenta a curva de absorção para o regime de amplificação fraca mantendo o tempo de relaxação  $\tau_R$ ,  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 10^{-4}$ , os estados coerentes iniciais  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , mas aumentando a intensidade do acoplamento entre as cavidades tal que  $\lambda/\Gamma_1 = 10^{-2}$  (em vez de  $5 \times 10^{-5}$ ). Observe que esta figura reproduz o padrão bem conhecido apresentado pelo espectro de ressonância fluorescente de um átomo de dois níveis amplificado por um campo incidente cuja frequência de Rabi é comparável, ou maior que, a largura de linha atômica. Afinal, assim como a fenomenologia da *TEI* pode ser reproduzida em um sistema de dois osciladores dissipativos acoplados, o mesmo acontece com a fenomenologia da ressonância fluorescente. O átomo de dois níveis é novamente representado pela cavidade 1 enquanto que o campo de amplificação forte, cuja intensidade leva a uma modulação do momento de dipolo quântico que induz bandas laterais no espectro de absorção [38], é simulado pela amplificação paramétrica junto com (o processo de interferência devido) a cavidade 2. De fato, campos de amplificação de alta intensidade dão origem a interações não lineares que podem ser atribuídas a dois campos laser [38], modelados pelo campo paramétrico em conjunto com a cavidade 2. O padrão apresentado na *Fig.-5.6(e)* pode também ser obtido nos regimes de amplificação crítico e forte; porém, certamente, não ocorre com a amplificação linear, seja qual for sua intensidade; o único ingrediente não linear em nosso sistema de duas cavidades dissipativas acopladas é o campo de amplificação paramétrica.

### 5.3 Conclusão

Neste *Capítulo* consideramos um sistema de duas cavidades dissipativas interagentes, estando uma delas submetida a um processo de amplificação linear ou paramétrica. Partindo de uma equação mestra para o regime de acoplamento fraco entre as cavidades, derivamos uma versão “c-number” desta equação em termos da função característica  $\chi(\{\eta_\ell\}, t)$ , da qual podemos obter valores médios associados aos operadores de campo  $a_\ell$  e  $a_\ell^\dagger$ .

No que diz respeito ao processo de amplificação linear, consideramos a versão quântica do trabalho realizado em [77], que considera dois osciladores dissipativos clássicos acoplados, estando um deles submetido a uma força de amplificação linear. Em nossa versão

Figura 5-6: Curvas de absorção para o processo de amplificação paramétrica são apresentadas segundo os regimes de amplificação (a) fraca, (b) crítica e (c) forte. Em (d) mostramos a curva de dispersão, que é idêntica para ambos os regimes de amplificação. A curva em (e) mostra o surgimento do efeito Stark Dinâmico.



quântica, os osciladores clássicos são substituídos por modos do campo de radiação em cavidades e a força clássica de amplificação linear por uma fonte de microondas acoplada a uma cavidade. Verifica-se, conforme esperado, que os fenômenos observados no sistema clássico, a transparência eletromagneticamente induzida e o regime de Autler-Townes, são também vistos em nosso modelo. Além disso observa-se um aumento eletromagneticamente induzido da taxa de absorção conforme indica a *Fig.-5.4(b)*. Acreditamos que este efeito possa também ser observado no domínio original do fenômeno da *TEI*, em que um sistema atômico, na configuração  $\Lambda$ , é submetido aos lasers de amplificação e sonda.

Quanto ao processo de amplificação paramétrica, partindo da solução das equações diferenciais acopladas para  $\eta_\ell(t)$ , *Eq.(5.12)*, observa-se a existência do típico limiar representado pelo parâmetro de amplificação crítico  $\xi_c$  (considerando o caso de ressonância  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ), a partir do qual as dinâmicas para os estados dos campos deixam de apresentar um comportamento assintótico estacionário para apresentar soluções divergentes. Quando analisamos o espectro de absorção da cavidade 1 através da razão  $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0$ , as curvas de absorção obtidas, *Figs.-5.6(a, b e c)*, dificilmente podem ser caracterizadas como um efeito do tipo *TEI*, mas sim como uma mistura entre os efeitos de *TEI* e *AT*, visto que o buraco cavado no pico de absorção apresenta uma largura significativamente maior que o efeito do tipo *TEI* usual no caso da amplificação linear. Além disso, a curva de dispersão  $\sin 2\Theta_1$ , *Fig.-5.6(d)*, não apresenta nenhuma inclinação abrupta associada ao fenômeno análogo da *TEI*, sendo idêntica para os três regimes de amplificação. Verificamos que o efeito misto de *TEI* e *AT* depende da intensidade do processo de amplificação paramétrica, ocorrendo somente em um estreito intervalo  $|\xi| \lesssim \xi_c + 10^{-4}$  em torno do limiar dado pelo parâmetro crítico  $\xi_c$ . Verifica-se também que a intensidade do acoplamento  $\lambda$  entre as cavidades, apesar de ser muito menor que  $\Gamma_1$ , pode ser da ordem de  $\Gamma_2$ , obedecendo a relação  $\Gamma_2 \lesssim \lambda \ll \Gamma_1$ , em vez de  $\Gamma_2 \ll \lambda \ll \Gamma_1$ , como ocorre no caso do processo de amplificação linear.

Por fim, quando aumentamos a intensidade do acoplamento entre as cavidades, observa-se o surgimento do padrão bem conhecido apresentado pelo fenômeno da ressonância fluorescente de um átomo de dois níveis sujeito a um campo incidente cuja frequência de Rabi é comparável ou maior que a largura de linha atômica, *Fig.-5.6(e)*.

# Capítulo 6

## Observações Finais

Nesta Tese propusemo-nos a analisar as dinâmicas de coerência e decoerência de estados quânticos em uma rede de osciladores dissipativos acoplados. Em particular, analisamos a dependência destas dinâmicas com relação a intensidade dos acoplamentos entre os osciladores e a topologia da rede. Verificamos que a equação mestra, associada a uma rede com  $N$  osciladores dissipativos, acoplados segundo uma dada topologia, é da forma

$$\frac{d}{dt}\rho_{1,\dots,N}(t) = \frac{i}{\hbar} [\rho_{1,\dots,N}(t), H_0] + \sum_m \mathcal{L}_m \rho_{1,\dots,N}(t) + \sum_{m,n(m \neq n)} \mathcal{L}_{mn} \rho_{1,\dots,N}(t), \quad (6.1)$$

em que  $H_0$  corresponde ao Hamiltoniano da rede de osciladores acoplados,  $\mathcal{L}_m \rho_{1,\dots,N}(t)$  corresponde ao operador de Liouville usual de um oscilador acoplado a um reservatório térmico enquanto que  $\mathcal{L}_{mn} \rho_{1,\dots,N}(t)$  corresponde ao canal de dissipação misto decorrente do acoplamento entre os osciladores  $m$  e  $n$  (e, portanto, dependentes da topologia da rede). Os canais mistos podem ser da mesma ordem de magnitude que os canais usuais no regime de acoplamento forte entre os osciladores da rede, em que, para a rede simétrica (central),  $N\lambda \approx \omega_0$  ( $\sqrt{N}\lambda \approx \omega_0$ ). No caso estudado no *Capítulo 2*, onde  $N = 2$ , o regime de acoplamento forte corresponde à situação em que  $\lambda \approx \omega_0$ . Contudo, para os casos dos *Capítulos 3* e *4*, em que redes com  $N$  osciladores são estudadas, mesmo na situação em que  $\lambda \ll \omega_0$ , devemos considerar os canais de dissipação mistos se  $N$  for suficientemente grande tal que  $N\lambda \approx \omega_0$  ( $\sqrt{N}\lambda \approx \omega_0$ ) para uma rede simétrica (central).

Devemos ressaltar que analisamos a situação em que todos os osciladores da rede possuem a mesma frequência natural  $\omega_0$  e todos os acoplamentos entre os osciladores a

mesma intensidade  $\lambda$ . No regime de acoplamento forte verifica-se que os modos normais da rede são substancialmente deslocados com relação à frequência natural dos osciladores  $\omega_0$ . Dessa forma, se o acoplamento dos osciladores com seus respectivos reservatórios possui uma forma Lorentziana, centrada em torno da frequência natural  $\omega_0$  (no regime de acoplamento fraco), então a função amortecimento para o  $n$ -ésimo oscilador da rede,  $\Gamma_n(\chi)$  (que é definida pelo produto  $V_{nk}^2 \sigma_n^2$ , onde  $\sigma_n$  representa a densidade espectral do reservatório e  $V_{nk}^2$  o acoplamento Lorentziano entre os osciladores da rede e seus respectivos reservatórios), será também uma função Lorentziana centrada em  $\omega_0$ . Note que à medida que nos aproximamos do regime de acoplamento forte, a frequência natural  $\omega_0$  se desdobra nas frequências dos modos normais e, por consequência, ocasiona um desdobramento da função amortecimento, inicialmente centrada em  $\omega_0$ , em  $N$  funções Lorentzianas  $\gamma_n(\chi)$  (cuja amplitude máxima é reduzida por um fator  $N$ ), centradas nas frequências dos  $N$  modos normais  $\Omega_m$  (lembrando que  $m$  varia de 1 à  $N$ ). Vemos então que as densidades espectrais dos reservatórios,  $\sigma_n$ , podem ser empregadas para controlar o processo de decoerência de estados quânticos da rede, uma vez que os modos normais podem ser deslocados para regiões do espaço das frequências onde a densidade espectral é significativamente menor do que aquela em torno de  $\omega_0$ . Em outras palavras, aumentando a intensidade do acoplamento  $\lambda$  e/ou o número  $N$  de osciladores da rede torna-se possível explorar regiões do espaço das frequências que são diferentes daquela em torno de  $\omega_0$ .

Uma situação interessante ocorre quando consideramos que um dos osciladores, o oscilador 1, por exemplo, possui fator de qualidade  $\Gamma_1$  inferior aos dos demais osciladores da rede, que possuem fator de qualidade  $\Gamma_\ell = \Gamma_2$ . Nesta situação, quando preparamos no oscilador 1 um estado do tipo “*gato de Schrödinger*”  $\mathcal{N}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ , e estados coerentes nos demais  $N - 1$  osciladores,  $|\{\beta_\ell\}\rangle$ , observa-se que o tempo de decoerência do estado  $\mathcal{N}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  aumenta com relação ao caso em que o oscilador 1 acopla-se apenas a seu respectivo reservatório, caso em que  $\tau_D = (2|\alpha|^2 \Gamma_1)^{-1}$ . Este aumento é máximo quando a rede é constituída por apenas dois osciladores, de modo que no regime de acoplamento fraco obtemos  $\tau_D = (|\alpha|^2 \Gamma_1)^{-1}$ . Se ao invés do regime de acoplamento fraco, considerarmos o regime de acoplamento forte, o aumento é ainda maior,  $\tau_D = (3|\alpha|^2 \Gamma_1/4)^{-1}$ . À medida que o número de osciladores cresce, este aumento torna-se cada vez menor. De fato, para  $N$  osciladores, no regime de acoplamento fraco, temos

$\tau_D = N^2 / \{2|\alpha|^2 [(1 + (N - 1)^2) \Gamma_1 + 2(N - 1)\Gamma_2]\}$ , e quando  $N \gg 1$  vemos que  $\tau_D = (2|\alpha|^2 \Gamma_1)^{-1}$ , que é idêntico ao resultado obtido quando o estado em questão é preparado em um único oscilador com fator de qualidade  $\Gamma_1$ .

O fato do tempo de decoerência do estado  $\mathcal{N}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$  ser maximizado para  $N = 2$  é compreendido quando analisamos as dinâmicas de recorrência e transferência de estados. Quando se faz esta análise, observamos que o estado  $\mathcal{N}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$ , inicialmente preparado no oscilador 1, sofre efetivamente o processo de transferência (com probabilidade igual a unidade) quando a rede é constituída por apenas 2 osciladores. À medida que o número de osciladores da rede aumenta, verifica-se que este estado é pulverizado nos  $N - 1$  osciladores restantes com uma pequena probabilidade de ser encontrado em qualquer um destes osciladores. Apesar de não existir uma probabilidade significativa (para  $N \gg 1$ ) de encontrar o estado de superposição  $\mathcal{N}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  em um dos  $N - 1$  osciladores restantes, ainda podemos proteger este estado da decoerência através do processo de transferência de estados, pois para uma pequena rede, digamos  $N = 5$ , verificamos que o tempo de decoerência é aumentado por um fator  $25/17 \approx 1.5$ .

Observou-se, portanto, que *i*) o regime de acoplamento forte fornece-nos um meio de controlar a decoerência através do conhecimento das densidades espectrais do reservatório (que podem, em princípio, ser elaboradas através da engenharia de reservatórios); *ii*) observou-se também que o tempo de decoerência do estado  $\mathcal{N}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ , preparado no oscilador com fator de qualidade  $\Gamma_1$ , é aumentado se acoplarmos este oscilador à  $N - 1$  osciladores com fatores de qualidade  $\Gamma_\ell = \Gamma_2 \ll \Gamma_1$ , nos quais preparamos o estado coerente  $|\{\beta\}_\ell\rangle$ .

Se por um lado, sob as observações realizadas no parágrafo acima, existe a possibilidade de se controlar a decoerência dos estados da rede, por outro vemos o surgimento de correlações de fundo entre estes estados. Estas correlações são observadas quando se analisa as entropias lineares do sistema conjunto e dos sistemas reduzidos de osciladores, além do excesso de entropia. Observamos duas causas distintas para o surgimento destas correlações: *i*) quando os canais de dissipação usuais, para  $N > 2$ , são diferentes entre si, isto é, quando  $\Gamma_2 \neq \Gamma_1$  e *ii*) quando o canal de dissipação misto é não nulo. Porém, quando quantificamos o tempo de correlação  $\tau_C$  (estimado, escrupulosamente, como o tempo em que o mínimo do excesso de entropia aproxima-se de  $10^{-2}$ ), notamos que a proteção de

estados, segundo os esquemas descritos acima, pode ser alcançada contanto que  $\tau_C/\tau_D \gtrsim 1$ . Como um exemplo, para a rede simétrica com  $N = 5$  obtemos  $\tau_C/\tau_D \approx |\alpha|/2$  de modo que, partindo de um estado com  $|\alpha| \gtrsim 2$ , podemos recuperar o estado de superposição  $\mathcal{N}_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$  protegido no sistema “ $2 + \dots + 5$ ” com uma boa fidelidade, visto que a correlação não interferirá significativamente no processo de transferência e recorrência de estados. Evidentemente, para  $N > 5$  obtemos uma razão  $\tau_C/\tau_D$  maior que a unidade, mesmo para  $|\alpha|$  menor do que 2.

No *Capítulo 5* voltamos ao sistema estudado no *Capítulo 2* (uma rede com apenas dois osciladores dissipativos acoplados, com um desses osciladores submetido a um processo de amplificação linear), incluindo o processo de amplificação paramétrica. Reproduzimos neste sistema a fenomenologia dos efeitos de Transparência Eletromagneticamente Induzida (*TEI*), Autler-Townes (*AT*) e o efeito Stark Dinâmico (*ESD*), típicos dos processos de interação radiação-matéria. A fenomenologia da *TEI*, observada em amostras atômicas, foi recentemente reproduzida em um sistema clássico constituído por dois osciladores dissipativos acoplados [77]. Um destes osciladores, modelando o átomo de três níveis, é submetido a uma força de amplificação linear que desempenha o papel do laser sonda. O laser de amplificação é simulado pelo acoplamento entre os osciladores. Em nossa versão quântica, substituímos os osciladores clássicos por modos do campo de radiação em cavidades e a força clássica de amplificação linear por uma fonte de microondas acoplada a cavidade 1, que simula o átomo. De forma similar, a fenomenologia do *ESD* é modelada pelo modo do campo na cavidade 1 (representado um átomo de dois níveis), enquanto que o campo de amplificação forte, cuja intensidade leva a uma modulação do momento de dipolo quântico que induz bandas laterais no espectro de absorção [38], é simulado por um processo de amplificação paramétrica em conjunto com (o processo de interferência devido) a cavidade 2.

Analogamente ao que ocorre no sistema clássico, a transparência eletromagneticamente induzida e o regime de Autler-Townes são também vistos em nosso modelo. Além disso observa-se um aumento eletromagneticamente induzido da taxa de absorção em tempos anteriores ao tempo de relaxação do sistema. Vale ressaltar que as interferências destrutivas, responsáveis pelo fenômeno da *TEI*, só ocorrem por completo quando os estados das cavidades alcançam o regime estacionário, uma vez que a dinâmica de coerência en-

tre estes estados impede que a interferência destrutiva alcance sua plenitude. Além da dependência com o tempo de relaxação, também nota-se que o fenômeno da *TEI* é observado apenas quando a intensidade do acoplamento entre as cavidades obedece a relação  $\Gamma_2 \ll \lambda \ll \Gamma_1$ , isto é, quando a cavidade sujeita ao processo de amplificação possui uma taxa de dissipação muito maior que a intensidade do acoplamento, que por sua vez é muito maior que a taxa de dissipação da segunda cavidade. O regime de *AT* é alcançado quando aumentamos a intensidade do acoplamento entre as cavidades de modo que  $\lambda \simeq \Gamma_1$ .

Um efeito muito semelhante ocorre para o processo de amplificação paramétrica. Neste caso as curvas de absorção para a cavidade 1 apresentam uma mistura dos fenômenos de *TEI* e *AT* que fazem com que o buraco cavado no pico da curva de absorção apresente uma largura significativa se comparada àquela do efeito do tipo *TEI* no caso da amplificação linear. Além disto, verifica-se que o efeito misto entre *TEI* e *AT* depende da intensidade do processo de amplificação paramétrica, ocorrendo somente em um estreito intervalo  $|\xi| \lesssim \xi_c + 10^{-4}$  em torno do limiar dado pelo parâmetro crítico  $\xi_c$ . Verifica-se também que a intensidade do acoplamento  $\lambda$  entre as cavidades, apesar de ser muito menor que  $\Gamma_1$ , pode ser da ordem de  $\Gamma_2$ , obedecendo a relação  $\Gamma_2 \lesssim \lambda \ll \Gamma_1$ , em vez de  $\Gamma_2 \ll \lambda \ll \Gamma_1$ , como ocorre no caso do processo de amplificação linear. Por fim, quando aumentamos a intensidade do acoplamento entre as cavidades, reproduzimos o *ESD*, que leva ao aparecimento de bandas laterais no espectro de ressonância fluorescente.

Para finalizar, notamos que a análise que desenvolvemos sobre as dinâmicas de coerência e decoerência de estados em uma rede de osciladores acoplados pode se desdobrar em diversas direções. Primeiramente, notamos que *i)* é interessante considerar diferentes intensidades de acoplamento entre os osciladores da rede. Este problema pode ser resolvido analiticamente para uma rede composta por três osciladores. Simulações numéricas podem e devem ser empregadas para o tratamento de uma rede com um número significativo de osciladores acoplados segundo diferentes intensidades. Neste situação, o processo de transferência de estados pode tornar-se completamente diferente do caso de iguais acoplamentos entre os osciladores. De fato, um estado do tipo “*gato de Schrödinger*”  $\mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$ , inicialmente preparado no oscilador 1, deve apresentar probabilidades maiores de ser transferido para os osciladores da rede que se acoplam ao oscilador 1 com

maior intensidade. Certamente, uma grande quantidade de informações, com respeito as dinâmicas de coerência e decoerência de estados, pode ser extraída deste sistema. Em particular, esperamos observar algo como que uma condensação da excitação em um dos osciladores da rede. Esta condensação deve ser favorecida quando, além dos diferentes acoplamentos entre os osciladores, considerarmos que os mesmos possuem diferentes fatores de dissipação. Neste contexto torna-se interessante a análise do equilíbrio da excitação na rede, que pode ser acompanhado, em seu caminho para o equilíbrio térmico com os reservatórios, através da dinâmica de coerência de estados.

*ii)* Outra análise a ser feita diz respeito às dinâmicas de coerência e decoerência do estado  $(|0\rangle \pm |1\rangle)_1 \otimes \{|0_\ell\rangle\}$ , em que um bit quântico é preparado no oscilador 1 enquanto que os demais osciladores encontram-se no estado de vácuo. A análise da dinâmica de coerência deste estado é certamente mais atraente do ponto de vista da Teoria de Informação Quântica. Podemos considerar também a situação em que todos os osciladores da rede são preparados no estado  $(|0\rangle \pm |1\rangle)$ . Estes estados podem, à princípio, simular grosseiramente a dinâmica de coerência em um processador lógico quântico.

*iii)* É também interessante o cálculo de funções de correlação entre os osciladores da rede e a dependência dessas correlações com a topologia. Na rede central, por exemplo, este cálculo pode indicar como os osciladores periféricos interagem entre si através do oscilador central. Podemos analisar, entre outras, as funções de correlação entre os operadores de quadratura  $\langle X_\ell^1(t)X_{\ell'}^1(t')\rangle$ ,  $\langle X_\ell^2(t)X_{\ell'}^2(t')\rangle$  e  $\langle X_\ell^1(t)X_{\ell'}^2(t')\rangle$ , em que os índices inferiores rotulam os osciladores  $\ell$  e  $\ell'$  enquanto que os superiores rotulam as quadraturas 1 e 2. A dependência destas funções de correlação com a topologia da rede pode ser útil na análise das dinâmicas de coerência e decoerência de estados.

*iv)* A análise de um sistema de três osciladores acoplados – com diferentes constantes de acoplamento e dissipação – em que cada oscilador é submetido a um processo de amplificação linear ou paramétrica, pode indicar efeitos inusitados nos processos análogos à transparência eletromagneticamente induzida. Sistema de osciladores acoplados podem constituir-se em laboratórios privilegiados para a análise dos processos de interferência destrutiva ou construtiva que ocorrem em amostras atômicas excitadas por feixes laser.

*v)* É importante ressaltar que estamos interessados na elaboração ou adaptação de novas técnicas para o tratamento das dinâmicas de coerência e decoerência de estados em

redes de osciladores acoplados. Por exemplo, estamos no momento procurando adaptar, para a estimativa do tempo de decoerência de estados em redes de osciladores acoplados, a técnica de expansão perturbativa do efeito de idempotência, apresentada em [80]. Técnicas alternativas tem sido investigadas.

Finalmente, mencionamos que a presente Tese, que contribui para tornar mais abrangente as perspectivas sobre as dinâmicas de coerência e decoerência de estados em redes quânticas, pode proporcionar uma motivação para futuras investigações teóricas e experimentais. Juntamente com outros trabalhos sobre processos de decoerência em sistemas quânticos  $N$ -dimensional [72], separabilidade de estados mistos e transmissão em redes quânticas [17, 82], este trabalho consiste num passo inicial para a compreensão de um processador lógico quântico de grande escala.

# Referências Bibliográficas

- [1] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King and D. M. Meekhof, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* **103**, 259 (1998).
- [2] S. Haroche, *Fundamental Systems in Quantum Optics* (Les Houches, 1990) eds. J. Dalibard, J. M. Raimond and J. Zinn-Justin (Elsevier, New York, 1992) p. 771; M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800 (1996); E. Hagley, X. Maitre, C. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond and S. Haroche, *ibid.* **79**, 1 (1997); M. Weidinger, B. T. H. Varcoe, R. Heerlein and H. Walter, *ibid.* **82**, 3795 (1999).
- [3] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble and E. S. Polzik, *Science* **282**, 706 (1998); S. Braunstein and H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998).
- [4] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [5] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter and A. Zeilinger, *Nature* **390**, 575 (1997); D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy and S. Popescu, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1121 (1998).
- [6] L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J. M. Raimond and S. Haroche, *Phys. Rev. A* **50**, R895 (1994); J. I. Cirac and A. S. Parkins, *Phys. Rev. A* **50**, R4441 (1994).
- [7] M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **54**, 4661 (1996); M. Y. M. Moussa, *Phys. Rev. A* **55**, R3287 (1997); C. J. Villas-Boas, N. G. de Almeida and M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **60**, 2759 (1999); N. G. de Almeida, R. Napolitano and M. H. Y. Moussa, *Phys.*

- Rev. A* **62**, 010101(R) (2000); R. M. Serra, C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida, and M. H. Y. Moussa, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4**, 316 (2002).
- [8] K. Vogel, V. M. Akulin and W. P. Schleich, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1816 (1993); A. S. Parkins, P. Marte, P. Zoller and H. J. Kimble, *ibid.* **71**, 3095 (1993); D. T. Pegg, L. S. Phillips and S. M. Barnett, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1604 (1998); M. Dakna, J. Clausen, L. Knöll and D. G. Welsch, *Phys. Rev. A* **59**, 1658 (1999).
- [9] M. H. Y. Moussa and B. Baseia, *Phys. Lett. A* **238**, 223 (1998); R. M. Serra, N. G. de Almeida, C. J. Villas-Boas and M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **62**, 043810 (2000).
- [10] R. M. Serra, P. Ramos, N. G. de Almeida, W. D. José and M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **63**, 053813 (2001).
- [11] J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995).
- [12] I. L. Chuang, L. M. K. Vandersypen, X. Zhou, D. W. Leung and S. Lloyd, *Nature* **393**, 143 (1998).
- [13] B. E. Kane, *Nature* **393**, 143 (1998).
- [14] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi, and H. J. Kimble, *ibid.* **75**, 4710 (1995).
- [15] L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood, and I. L. Chuang, *Nature* **414**, 883 (2001).
- [16] P. Shor, in: *Proceedings of the 35th Annual Symposium on the Theory of Computer Science*, ed S. Goldwasser (IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1994), p. 124; *ibid. quant-ph/9508027*.
- [17] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, and H. Mabuchi, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3221 (1997); T. Pellizzari, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 5242 (1997); H. J. Briegel, W. Dür, J. I. Cirac, and P. Zoller, *ibid.* **81**, 5932 (1998); S. J. van Enk, H. J. Kimble, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **59**, 2659 (1999).
- [18] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4714 (1995).

- [19] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887 (1996).
- [20] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King and D. J. Wineland, *Science* **272**, 1131 (1996).
- [21] G. C. Ghirardi, A. Rimini and T. Weber, *Phys. Rev. D* **34**, 470 (1986); P. Pearle, *Phys. Rev. A* **39**, 2277 (1989); G. C. Ghirardi, P. Pearle and A. Rimini, *Phys. Rev. A* **42**, 78 (1990).
- [22] E. Joos and H. D. Zeh, *Z. Phys. B: Condens. Matter* **59**, 223 (1985).
- [23] M. C. de Oliveira, N.G. de Almeida, S. S. Mizrahi, and M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **62**, 012108 (2000).
- [24] W. H. Zurek, *Phys. Today* **44**, 36 (1991); W. H. Zurek and J. P. Paz, *Phys. Rev. Lett* **72**, 2508 (1994).
- [25] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Annals of Physics* **149**, 374 (1983); A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Physica A* **121**, 587 (1983).
- [26] D. Jaksch, H. J. Briegel, J. I. Cirac, C. W. Gardiner and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1975 (1999).
- [27] G. K. Brennen, C. M. Caves, P. S. Jessen and I. H. Deutsch, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1060 (1999).
- [28] A. Sorensen and K. Molmer, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2274 (1999).
- [29] P. M. Platzman and M. I. Dykman, *Science* **284**, 1967 (1999); A. J. Dahm, J. M. Goodkind, I. Karakurt and S. Pilla, *quant-ph/0111029*.
- [30] B. R. Mollow and R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **160**, 1076 (1967); *ibid.* **160**, 1097 (1967).
- [31] M. H. Y. Moussa, S. S. Mizrahi and A. O. Caldeira, *Phys. Lett. A* **221**, 145 (1996).
- [32] S. Haroche and J. M. Raimond, *Phys. Today* **49**, 51 (1996).
- [33] W. G. Unruh, *Phys. Rev. A* **51**, 992 (1995).

- [34] S. Schneider and G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* **57**, 3748 (1998); *Phys. Rev. A* **59**, 3766 (1999).
- [35] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Translated by R. T. Beyer, Princeton University Press (1995).
- [36] W. H. Zurek, *Phys. Rev. D* **24**, 1516 (1981); **26**, 1862 (1982); *Physics Today* **44**(10), 36 (1991).
- [37] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1796 (1996).
- [38] D. F. Walls and J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1994); M. O. Scully, and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [39] C. Di Fidio and W. Vogel, *Phys. Rev. A* **62**, 031802(R) (2000).
- [40] R. M. Serra, N. G. de Almeida, W. B. da Costa, and M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **64**, 033419 (2001).
- [41] A. A. Budini, R. L. de Matos, and N. Zagury, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4**, S462 (2002).
- [42] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, UK, (2000).
- [43] M. C. de Oliveira, and W. J. Munro, *Phys. Rev. A* **61**, 42309 (2000).
- [44] S. Haroche, *Physics Today* **51**(7), 36 (1998).
- [45] D. Vitali, and Tombesi, *Phys. Rev. A* **59**, 4178 (1999).
- [46] D. Vitali, P. Tombesi, and G. J. Milburn, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2442 (1997); *ibid. J. Mod. Opt.* **44**, 2033 (1997).
- [47] M. C. de Oliveira, M. H. Y. Moussa, and S. S. Mizrahi, *Phys. Rev. A* **61**, 63809 (2000); *J. Opt B: Quantum Semiclass. Opt.* **3**, 57 (2001).

- [48] J. F. Poyatos, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4728 (1996).
- [49] C. J. Myatt, B. E. King, Q. A. Turchette, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland, *Nature* **403**, 269 (2000).
- [50] A. R. R. Carvalho, P. Milman, R. L. de Matos Filho, and L. Davidovich, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4988 (2001).
- [51] A. M. Steane, *Phys. Rev. A* **68**, 042322 (2003).
- [52] M. S. Byrd, Lian-Ao Wu, D. A. Lidar, *quant-ph/0402098*.
- [53] J. M. Raimond, M. Brune and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1964 (1997).
- [54] S. G. Mookarzel, A. N. Salgueiro, and M. C. Nemes, *Phys. Rev. A* **65**, 044101 (2002).
- [55] H. Zoubi, M. Orenstien, and A. Ron, *Phys Rev. A* **62**, 033801 (2000).
- [56] J. Steinbach, J. Twamley , and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **56**, 4815 (1997).
- [57] A. J. Dahm, J. M. Goodkind, I. Karakurt, and S. Pilla, *J. Low Temp. Phys.* **126**, 709 (2002).
- [58] N. Studart and S. S. Sokolov, in *Two-Dimensional Electron System*, ed. by E. Y. Andrei, Kluwer Academic Publishers, Netherlands (1997).
- [59] D. F. Walls, *Z. Physik* **234**, 231 (1970).
- [60] H. J Carmichael and D. F. Walls, *Phys. A* **6**, 1552 (1973).
- [61] G. W. Ford, J. T. Lewis, and R. F. O'Connell, *Phys. Rev. A* **37**, 4419 (1988); G. W. Ford and R. F. O'Connell, *Physica A* **37**, 377 (1997).
- [62] M. Rosenau da Costa, A. O. Caldeira, S. M. Dutra, and H. Westfahl, Jr., *Phys. Rev. A* **61**, 022107 (2000).
- [63] B. E. King, C. S. Wood, C. J. Myatt, Q. A. Turchette, D. Leibfried, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1525 (1998).
- [64] G. J. Milburn, A. S. Lane, and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **27**, 2804 (1983).

- [65] C. W. Gardiner, P. Zoller, *Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics* (Springer, Berlin, 2000).
- [66] P. Bocchieri and A. Loinger, *Phys. Rev.* **107**, 337 (1957).
- [67] M. C. de Oliveira, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, *J. Opt. B* **1**, 610 (1999).
- [68] M. Koashi and A. Winter, *Phys. Rev. A* **69**, 022309 (2004).
- [69] C. H. Bennett, *Phys. Today* **48**, 24 (1995); C. H. Bennett, D. P. Divincenzo, *Nature* **377**, 389 (1995).
- [70] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, and H. Mabuchi, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3221 (1997).
- [71] N. Lutkenhaus, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **57**, 548 (1998).
- [72] G. Teklemariam, E. M. Fortunato, C. C. Lópes, J. Emerson, Juan Pablo Paz, T. F. Havel, and D. G. Gory, *Phys. Rev. A* **67**, 062316 (2003).
- [73] S. E. Harris, J. E. Field, and A. Imamoglu, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1107 (1990).
- [74] S. E. Harris, *Phys. Today* **50**(7), 37 (1997).
- [75] B. R. Mollow, *Phys. Rev.* **188**, 1969 (1969).
- [76] R. E. Grove, F. Y. Wu, S. Ezekiel, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1426 (1975); W. Hartig, W. Rasmussen, R. Schieder, H. Walther, *Z. Physik A* **278**, 205 (1976).
- [77] C. L. Garrido Alzar, M. A. G. Martinez, and P. Nussenzveig, *Am. J. Phys.* **70**, 37 (2002).
- [78] H. J. Carmichael, G. J. Milburn, and D. F. Walls, *J. Phys. A: Math Gen.* **17**, 469 (1984).
- [79] S. S. Mizrahi, M. H. Y. Moussa, and B. Baseia, *Int. J. Mod. Phys. B* **8**, 1563 (1994).
- [80] Ji Il Kim, M. C. Nemes, A. F. R. de Toledo Piza, and H. E. Borges, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 207 (1996).

[81] A. Blais, *Phys. Rev. A* **64**, 022312 (2001).

[82] Z. Y. Gu, S. W. Qian, *Commun. Theor. Phys.* **40**, 151 (2003).