

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

SIMONE FERREIRA SOUZA

CORRELAÇÕES QUÂNTICAS: MEDIDAS E SIMETRIAS

SÃO CARLOS - SP

2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

SIMONE FERREIRA SOUZA

CORRELAÇÕES QUÂNTICAS: MEDIDAS E SIMETRIAS

*Tese apresentada ao Departamento de Física
da Universidade Federal de São Carlos como
parte dos requisitos para a obtenção do título de
Doutora em Física.*

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Salomon S. Mizrahi*

SÃO CARLOS - SP

2011

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

S729cq

Souza, Simone Ferreira.

Correlações quânticas : medidas e simetrias / Simone
Ferreira Souza. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
151 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,
2011.

1. Física quântica. 2. Emaranhamento. 3. Discórdia
(Física quântica). 4. Geometria de Minkowski. I. Título.

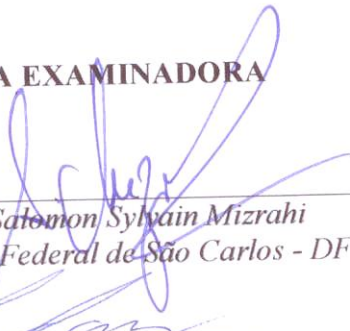
CDD: 539 (20^a)

SIMONE FERREIRA SOUZA


Tese de Doutorado submetida à
Coordenação do Programa de Pós-
Graduação em Física, da Universidade
Federal de São Carlos, como requisito
parcial para a obtenção do título de
Doutor em Ciências.

Aprovada em 17/06/2011.

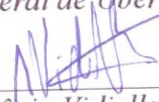
BANCA EXAMINADORA



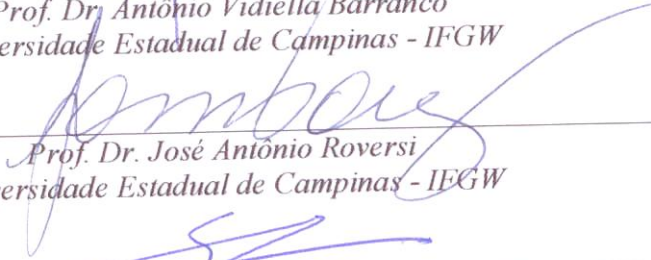
Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi
Universidade Federal de São Carlos - DF




Prof. Dr.ª Liliana Sanz de La Torre
Universidade Federal de Uberlândia - INFIS



Prof. Dr. Antônio Vidiella Barranco
Universidade Estadual de Campinas - IFGW



Prof. Dr. José Antônio Roversi
Universidade Estadual de Campinas - IFGW



Prof. Dr. Eduardo Ribeiro de Azevedo
Universidade de São Paulo - IFSC

Dedico essa tese a meus pais, Delcino e Fátima.

Agradecimentos

Quero agradecer ao professor Salomon por sua orientação, sua infinita paciência e seu grande empenho em todos estes anos de trabalho. Sentirei falta das nossas longas conversas sobre física e também dos momentos de descontração regados a cafezinhos, história e boas risadas. Para mim foi uma grande honra trabalharmos juntos e jamais me esquecerei de todo apoio que recebi por parte dele nos momentos mais difíceis desta jornada.

Creio que nem todas as palavras do mundo seriam suficientes para descrever o quanto sou grata à minha amiga e colaboradora Helena Carolina Braga. É simplesmente impossível retribuir a altura tudo que esta moça já fez por mim e a única coisa que posso dizer é que Helena é a irmã que Deus me permitiu escolher. Tenho muito orgulho desta amizade e tenho certeza que sempre estaremos juntas, nos momentos bons e ruins. Sem o seu entusiasmo e dedicação, este trabalho não teria sido realizado.

Agradeço ao meu noivo Claudinei Caetano pela cumplicidade e companheirismo ao longo de todos estes anos. Por ser extremamente tolerante para entender e apoiar uma doutoranda em final de projeto, por compartilhar comigo os mesmos sonhos e por me fazer tão feliz.

A todos os membros do Grupo de Informação Quântica e àqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho os meus mais sinceros agradecimentos. Em especial, ao meu amigo Cláudio José da Silva pela amizade, incentivo e pela leitura da tese.

Agradeço ao Departamento de Física da UFSCar e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo apoio financeiro.

Um agradecimento mais do que especial aos meus pais, Delcino e Fátima, pelo carinho e amor com que me criaram. Certamente eu não estaria escrevendo esta tese de doutorado se

não fosse pelo incentivo que recebi por parte deles ao longo de toda a minha vida.

Finalmente agradeço a Deus pelo dom da vida, por minha família e por todas as pessoas que contribuíram e contribuem para a minha formação.

Conteúdo

Lista de Figuras	ii
Lista de Tabelas	v
1 Introdução	1
2 Fundamentos Teóricos	6
2.1 Os bits Quânticos e suas Representações	7
2.2 Emaranhamento	8
2.2.1 Critério de Separabilidade de Peres-Horodecki	10
2.3 Medidas Quânticas	13
2.4 Entropia e Informação	17
2.4.1 A entropia de Shannon	17
2.4.2 Entropia de von Neumann	21
3 Emaranhamento: uma Visão Geométrica.	26
3.1 Vetores de Polarização e Matriz de Correlação	28
3.2 Simetrias da Transposição Parcial Positiva	30
3.3 Estados do tipo X : Parametrização do Espaço	32

3.3.1	Condições de Positividade dos Autovalores: Espaço de Fase dos Estados Emaranhados	36
3.4	Quantificação do Emaranhamento	51
3.4.1	Medida de Emaranhamento via Distâncias Quadráticas	53
4	Emaranhamento e separabilidade para estados da variedade D-7	61
4.1	A álgebra $su(4)$	62
4.2	As subálgebras $su(2) \times u(1) \times su(2)$	63
4.3	Estrutura dos autovalores para os estados de variedade D-7	65
4.3.1	O gerador $\hat{e}_1 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha$	66
4.3.2	O gerador $\hat{f}_1 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\beta$ ($\alpha \neq \beta$)	69
4.3.3	O gerador $\hat{g}_1 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{1}_2$	72
4.4	Exemplos Ilustrativos	75
4.4.1	Exemplo 1: A matriz Tanas-Ficek	76
4.4.2	Exemplo 2: matriz Shabani-Lidar	80
5	Discórdia Quântica	83
5.1	Correlações Clássicas e Discórdia Quântica	83
5.1.1	Discórdia para Estados do Tipo X	88
5.1.2	Aplicações	98
5.1.3	Discórdia vs. Morte Súbita do Emaranhamento.	101
6	Comentários e Conclusões	106
	Apêndices	109
A	Matriz Genérica na Forma de Fano	109

A.1	Matrizes genéricas 2×2	109
A.2	Matrizes Hermitianas 2×2	112
A.3	Matrizes Hermitianas 4×4 - Forma de Fano	113
B	Rotações e Reflexões por planos genéricos	120
B.1	Fixando o Eixo z	120
B.2	Aplicação em uma Matriz do tipo X	121
C	Detalhes Matemáticos dos Exemplos Apresentados	125
C.1	Estado de Werner	125
C.2	Estado de Peres-Horodecki	128
C.3	Estado Almeida-Davidovich	131
C.4	Estado de Gisin	135
C.5	Estado Das-Agarwal	140
C.6	Concurrence	142
C.7	Negatividade	143
D	A Métrica de Minkowski	144
	Referências Bibliográficas	145

Lista de Figuras

2.1	Esfera de Bloch.	9
3.1	Diagramas de Minkowski: (a) Projeção do cone de eventos no plano. (b) Analogia do cone de eventos no hiperespaço para estados quânticos.	38
3.2	Espaço de fase do estado de Werner variando o único parâmetro interno do estado. As setas indicam a direção das sequências de pontos quando aumentamos os valores do parâmetro, de 0 a 1. A linha pontilhada em 45° é o limite que separa as regiões onde o estado é separável ou emaranhado. As grandezas são adimensionais.	41
3.3	O gráfico do espaço de fase do estado de Peres-Horodecki variando o único parâmetro interno do estado. As setas indicam a direção das sequências de pontos quando aumentamos os valores dos parâmetros, de 0 a 1.	43
3.4	Espaço de fase para o estado Gisin, que depende de três parâmetros, onde apenas dois são independentes. Cada curva com seta corresponde a valores fixos de dois parâmetros, enquanto o terceiro é variado em seu domínio.	45

- 3.5 O gráfico representa o estado dinâmico de Almeida-Davidovich. São atribuídos valores fixos aos parâmetros α e β , enquanto $p = (1 - \exp(-\gamma t))$ varia no intervalo $[0, 1)$. Os estados representados pelas linhas tracejada e sólida atravessam a fronteira em um tempo finito, um fenômeno conhecido como morte súbita do emaranhamento. A linha ponto-tracejada nunca atravessa a fronteira, alcançando-a assintoticamente. Os parâmetros estão em unidades adimensionais. 48
- 3.6 Evolução do estado dinâmico de Das-Agarwal para dois qubits interagentes com condição inicial $p = 0,4$ e diferença de fase inicial $\chi = \pi/4$. A curva tracejada representa a evolução para $\nu = 0$ e a sólida para $\nu = 5\gamma$. Os eixos estão em unidades adimensionais, enquanto ν e γ estão em s^{-1} 51
- 3.7 Medidas de emaranhamento para o estado de Werner, como função do parâmetro x . No item (a) faz-se a comparação entre as medidas (3.44) e (3.50) e em (b) a comparação entre (3.49) e (3.50). 56
- 3.8 As medidas de emaranhamento (3.44), (3.50) e (3.49) são comparadas simultaneamente para o estado de Peres-Horodecki. Todas elas são funções do parâmetro intrínseco x 57
- 3.9 As medidas de emaranhamento (3.47), (3.50) e (3.49) para o estado de Gisin, como função do parâmetro intrínseco x . No item (a) visualiza-se as curvas para $|ab| = 0.34$ e em (b) para $|ab| = 0.5$ 58
- 3.10 Medidas de emaranhamento (3.47), (3.50) e (3.49) para o estado Almeida-Davidovich. O item (a) representa o estado para os parâmetros $|\alpha|/|\beta| = 0.5123$ enquanto o item (b) o representa para $|\alpha|/|\beta| = 1.0202$. O parâmetro $p = [1 - \exp(-\gamma t)]$ (sendo γ a taxa de decaimento e $p \in [0, 1)$). 59

3.11	As medidas de emaranhamento (3.47), (3.50) e (3.49) para o estado de Das- Agarwal. mostram o estado evoluindo no tempo, . No item (a) representa- mos qubits não interagentes ($\nu = 0$) e no item (b) qubits interagentes, com um parâmetro de interação $\nu = 5\gamma$, onde γ é a constante de decaimento. Os parâmetros ν e γ estão em s^{-1}	60
4.1	Espaço de fase do estado Tanás-Ficek.	80
4.2	Medida de emaranhamento para o estado Tanás-Ficek.	81
5.1	Discórdia quântica para o estado de Werner que apresenta um intervalo de sep- arabilidade em $0 \leq x < 1/3$	88
5.2	Discórdia, <i>concurrence</i> e correlação clássica para o estado de Werner como função do parâmetro x para $0 \leq x \leq 1$	99
5.3	Discórdia, <i>concurrence</i> e correlação clássica para o estado de Peres-Horodecki como função do parâmetro x para $0 \leq x \leq 1$	101
5.4	Dinâmica dissipativa da <i>concurrence</i> como função do parâmetro x e γ , assumindo independentes reservatórios de atenuação da fase.	104
5.5	Dinâmica dissipativa da discórdia como função do parâmetro x e γ , assumindo independentes reservatórios de atenuação da fase.	105

Lista de Tabelas

3.1	Invariância do espectro de autovalores da matriz $\hat{\rho}_{12}^T$ para a reflexão de uma partícula.	34
3.2	Invariância do espectro de autovalores da matriz $\hat{\rho}_{12}$ para duas reflexões locais, uma em cada partícula.	35
4.1	Tabela de multiplicação $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$	64
4.2	Tabela de comutação $[\hat{e}_i, \hat{e}_j]$	65
4.3	A primeira coluna se refere ao gerador $u(1)$ enquanto as quatro colunas seguintes mostram os novos parâmetros em termos dos vetores de polarização e componentes da matriz de correlação. As colunas 6 e 7 contém os autovalores para um estado de dois qubits. Omitimos os casos $\hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha$ e $\hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha$ uma vez que eles são trivialmente obtidos da segunda e terceira linhas.	76
4.4	A primeira coluna mostra as componentes da matriz (4.8) na base computacional, multiplicada por 4. As outras três colunas exibem os elementos da matriz dados em termos dos VPs e dos elementos da MC para cada operador $u(1)$, mostrado na primeira linha.	76

-
- 4.5 A primeira coluna mostra as componentes da matriz (4.8) na base computacional, multiplicada por 4. As outras três colunas exibem os elementos da matriz dados em termos dos VPs e dos elementos da MC para cada operador $u(1)$, mostrado na primeira linha. 77
- 4.6 A primeira coluna mostra as componentes da matriz (4.8) na base computacional, multiplicada por 4. As outras três colunas exibem os elementos da matriz dados em termos dos VPs e dos elementos da MC para cada operador $u(1)$, mostrado na primeira linha. 77

Resumo

Nesta tese exploramos dois tipos de correlações quânticas: o emaranhamento e a discórdia. Apresentamos um método geométrico de caracterização e quantificação do emaranhamento baseado em simetrias de vetores e matrizes associados ao operador densidade dos estados quânticos de dois qubits. Introduzimos uma nova base de parâmetros que descrevem o operador densidade, e este procedimento nos permite estabelecer o critério de separabilidade de Peres-Horodecki em termos de distâncias quadráticas que obedecem a métrica de Minkowski, proporcionando uma interpretação mais geral deste critério bem como a construção de um quantificador de emaranhamento. Neste método, quando as distâncias quadráticas forem não negativas, o sistema é dito separável, por outro lado, quando forem negativas o sistema é dito emaranhado. Tais distâncias quadráticas são invariantes por transformações unitárias e podem ser representadas graficamente em um espaço de fase hiperbólico parametrizado, onde uma análise quantitativa pode ser realizada e até mesmo trajetórias podem ser traçadas. O método é generalizado para uma classe maior de estados com até sete parâmetros independentes, que nomeamos de estados de variedade D-7, através do uso de teoria de grupos, onde classificamos os estados de acordo com as simetrias de seus sete geradores, sendo que um deles comuta com todos os outros. Para ilustrar o método proposto, uma série de exemplos presentes na literatura são estudados. Esta mesma notação é empregada no cálculo da discórdia quântica para estados de variedade D-7, proporcionando uma abordagem mais explícita da condição de minimização da entropia. A dinâmica dissipativa da discórdia para um sistema de dois qubits imersos em reservatórios individuais é calculada e, escolhendo condições iniciais que manifestem o fenômeno de morte súbita do emaranhamento, comparamos as duas dinâmicas (emaranhamento e discórdia) e mostramos que nos casos onde o emaranhamento desaparece subitamente, a discórdia quântica desaparece somente no limite assintótico.

Abstract

In this thesis, we explore two sort of quantum correlations: entanglement and quantum discord. We present a geometric method to identify and measure the degree of entanglement based on symmetries of vectors and matrices associated with the two-qubits density operator of quantum states. We introduce a new basis of parameters describing the density operator, and this procedure allows us to establish the Peres-Horodecki separability criterion in terms of squared distances that obey the Minkowski metric, giving a more general interpretation of this criterion as well as building a quantifier of entanglement. In this method, if the squared distance is of the kind timelike, i.e. non-negative, the two-qubit system is separable. Otherwise, if it is spacelike, namely, the squared distance is negative, the two qubits are entangled. Such squared distances are invariant by unitary transformations and can be represented graphically in a hyperbolic parameterized phase space, allowing a suitable graphic representation, i.e., in a phase space where the system trajectories can be drawn. The method is generalized to a larger class of states having at most seven independent parameters, the D-7 manifold class. Using group theory methods we classify these states according to the symmetries of seven generators, where one of them commutes with the others. We illustrate the method and the theory by presenting several two-qubit systems found in the literature. This same notation is used to calculate the quantum discord for states whose 4×4 matrices belong to the D-7 manifold class, providing a more explicit condition of minimization of entropy. We calculate the dissipative dynamics of two-qubits quantum discord under local noisy environments. Choosing initial conditions that manifest the so-called sudden death of entanglement, we compare the dynamics of entanglement with that of quantum discord and we show that in cases where the entanglement suddenly disappears, quantum discord vanishes only in the asymptotic limit.

Capítulo 1

Introdução

Uma correlação é a relação entre duas ou mais variáveis e é um fenômeno universal, sendo a ponte através da qual nos comunicamos e transmitimos informações. No mundo clássico, as correlações foram bem estudadas do ponto de vista da teoria da informação (ver Ref. [1]). Contudo, a “quantização” da informação clássica ou o estudo das correlações de caráter quântico não é uma tarefa simples. As dificuldades surgem devido ao fato de que tal informação é codificada em estados quânticos, que podem ser não ortogonais e, portanto, não podem ser distinguidos de forma inequívoca e, além disso, ao fato de que os sistemas quânticos podem ser correlacionados de modo inacessível aos objetos clássicos.

O estudo de possíveis correlações entre sistemas quânticos teve início com Einstein, Podolsky, Rosen [2] e Schrödinger [3]. Estes precursores estavam interessados no fenômeno do emaranhamento, um tipo peculiar de correlação quântica entre subsistemas (ou entre diferentes graus de liberdade em um único sistema), sem nenhum análogo clássico. Desde 1964, quando J.S. Bell propôs suas engenhosas desigualdades para distinguir entre as propriedades locais e não locais de um estado quântico [4], intensivas investigações foram realizadas sobre o emaranhamento tanto no âmbito experimental quanto no teórico [5–14], elevando o status do emaranhamento de um conceito fundamental em física para um recurso utilizado no processamento de informação quântica [15]. Na década de 1990 testemunhamos um avanço com a

criação de um interessante critério para decidir se um sistema bipartido, de baixa dimensionalidade no espaço de Hilbert, é separável ou emaranhado; este ficou conhecido como o critério de transposição parcial positiva (TPP) ou critério de Peres-Horodecki, levando os nomes dos seus descobridores [7, 8]. O critério consiste na análise de uma possível ocorrência de autovalores negativos em uma matriz densidade parcialmente transposta, ρ^T , construída a partir do estado ρ de dois qubits. A existência de pelo menos um autovalor negativo é uma assinatura de emaranhamento. Posteriormente, vários outros critérios foram descobertos, como a *concurrence* (que é mais do que um critério - é uma medida do grau de emaranhamento), proposta por W. K. Wootters [9], assim como a negatividade, proposta por G. Vidal e R. F. Werner [10], que está intimamente relacionada com o critério de separabilidade de Peres-Horodecki [7, 8].

Não há dúvida de que o emaranhamento é realmente um aspecto importante da mecânica quântica e que é também um pré-requisito para muitos processos de informação quântica [16]. No entanto, o emaranhamento não é o único aspecto quântico das correlações, ou seja, a noção de correlação quântica é mais geral do que o emaranhamento. Embora exista vasta literatura sobre o estudo do emaranhamento, apenas recentemente as correlações quânticas receberam a atenção devida. Uma das motivações para o estudo deste tema foi, por exemplo, a descoberta de que o emaranhamento não é necessário para a computação quântica determinística com um qubit (CQD1) [17], mostrando que outros tipos de correlações não-clássicas são responsáveis pela eficiência computacional na CQD1 [18, 19].

Neste cenário, torna-se uma necessidade lógica o estudo das correlações quânticas, diferentes do emaranhamento, em sistemas quânticos compostos. A primeira tentativa de se estabelecer uma medida para o conteúdo quântico das correlações se deve a Harold Ollivier e Wojciech H. Zurek, que introduziram o conceito de discórdia quântica [20] com o intuito de medir o quão não-clássica é a correlação entre dois sistemas quânticos. Uma abordagem difer-

ente, contudo, complementar à de Ollivier e Zurek, foi proposta por Leah Henderson e Vlatko Vedral, que sugeriram a divisão da correlação total, associada a um sistema quântico, em duas partes, uma clássica e outra quântica [21], sendo a parte clássica definida como a máxima informação sobre um subsistema que pode ser obtida realizando-se medidas no outro subsistema. Todas estas considerações, lançam uma nova luz sobre as propriedades das correlações associadas a um sistema quântico composto. Desta forma, muitos trabalhos têm sido dedicados ao estudo das funções desempenhadas pelos diferentes tipos de correlações em processos quânticos, revelando a relação existente entre elas [18, 22–25].

No entanto, não existe um método eficaz para calcular analiticamente resultados exatos para a discórdia quântica. Ao contrário da medida de emaranhamento, os novos paradigmas da “quanticidade” das correlações são as medidas orientadas. O que deve ser feito em todos esses paradigmas é extrair informações sobre um sistema A medindo o sistema B . Dado um sistema quântico bipartido no estado ρ^{AB} , quando o subsistema B é medido, fornecendo um resultado i com probabilidade p_i , o sistema A estaria em algum estado pós-medida ρ_i^A . Para se obter uma medição completa no sistema B , ρ_i e p_i devem ser os membros e as probabilidades de um conjunto do estado local do sistema A , ou seja, $\rho^A = \sum_i p_i \rho_i^A$. A informação acessível sobre o sistema A , com respeito à medida particular feita em B , é dada por $S(\rho^A) - \sum_i p_i S(\rho_i^A)$, onde $S(\rho)$ é a entropia de von Neumann de um estado ρ . O maior obstáculo é o de maximizar o acesso à informação, ou de forma equivalente, minimizar a entropia média $\bar{S}^A = \sum_i p_i S(\rho_i^A)$ sobre todas as possíveis medições completas realizadas sobre o sistema B . Os resultados analíticos explícitos para a discórdia quântica são obtidos apenas para casos muito especiais: os estados de Bell diagonais [26], estados do tipo X [27], e para estados Gaussianos de sistema com variáveis contínuas [28].

Neste contexto, apresentaremos, no capítulo 3, uma perspectiva geométrica para os

estados emaranhados, que difere das já conhecidas na literatura [29]. Nesta abordagem, es- creveremos os estados quânticos de dois qubits num espaço próprio de parâmetros e estabele- ceremos distâncias entre o estado emaranhado e seu correspondente separável mais próximo, o que tornará possível não apenas determinar quantitativamente a fronteira entre os espaços de estados separáveis e emaranhados, fornecendo uma interpretação mais geral do critério de TPP, mas também traçar trajetórias para estados dinâmicos num *espaço de fase* construído em analo- gia ao diagrama de Minkowski. Construiremos ainda uma medida de emaranhamento baseada nestas distâncias quadráticas e a compararemos com duas medidas já conhecidas na literatura. Nesta parte do trabalho, nos restringiremos a uma classe de estados amplamente conhecidos na literatura, nomeados estados do tipo X , que englobam muitos sistemas estacionários de dois qubits [7, 8, 30, 31], bem como sistemas que evoluem no tempo [12, 13, 32–37].

No capítulo 4, estabeleceremos a invariância das distâncias quadráticas para todo sub- conjunto de matrizes com variedade D-7 (matrizes contendo no máximo sete parâmetros inde- pendentes) usando-se a teoria de grupos. Além disso, mostraremos que este método se aplica também a estados com outras simetrias e não apenas ao tradicional estado X . Esta abor- dagem nos permitirá generalizar o método proposto no capítulo 3, fornecendo uma visão mais abrangente acerca do emaranhamento em diferentes sistemas pertencentes ao D-7.

No capítulo 5, calcularemos a discórdia quântica para um estado X genérico, baseados no trabalho de Rau e colaboradores em [27]. Neste caso, empregaremos a notação apresen- tada no capítulo 3 e mostraremos que nossa análise proporciona uma abordagem mais explícita da condição de minimização da entropia. Ainda neste capítulo, faremos a comparação entre o emaranhamento, a discórdia e a correlação clássica para alguns estados quânticos conhecidos na literatura e verificaremos que não existe um ordenamento entre estes três tipos de correlações, podendo a discórdia ser maior que o emaranhamento, quando é medido via *concurrence* [9],

ou vice-versa. Mostraremos também que a discórdia quântica exibe um fenômeno muito interessante, revelando-se imune à morte súbita mesmo em sistemas que a apresentam para o emaranhamento. No capítulo 6 apresentaremos nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

A teoria quântica da informação tem como objetivo estudar as tarefas básicas no processamento de informação, que podem ser realizadas utilizando-se sistemas físicos descritos de acordo com as leis da mecânica quântica [15]. Ela foi construída, em grande parte, pela generalização no âmbito dos elementos da teoria da informação tradicional, que foram planejados para explicar a transmissão, armazenamento e processamento de informação usando meios clássicos [1]. A descrição matemática de sistemas quânticos difere fundamentalmente da descrição dos sistemas clássicos e esta diferença presta à informação quântica um caráter significativamente diferente da informação clássica.

O objetivo deste capítulo não é dar uma visão global deste tema vasto, mas sim fazer uma breve revisão dos conceitos teóricos relacionados a este tema que serão utilizados ao longo desta tese. Iniciaremos com o conceito e representação de um bit quântico seguidos da definição de emaranhamento e separabilidade, onde apresentaremos o critério de separabilidade de Peres-Horodecki. Em seguida introduziremos o formalismo de medidas em Mecânica Quântica e apresentaremos, por fim, o conceito de informação e sua relação com a entropia. O leitor poderá encontrar um extenso tratamento sobre a teoria quântica da informação em [15, 38, 39] e nas referências citadas ao longo do capítulo.

2.1 Os bits Quânticos e suas Representações

O bit quântico, ou qubit [15], é a unidade fundamental da teoria quântica da informação e pode ser representado por vetores em um espaço complexo bidimensional, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Qualquer base ortonormal deste espaço pode ser aplicada em correspondência com dois valores de bits, 0 e 1, a fim de representar a base computacional de um único qubit, $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Os estados puros¹ desta base podem ser fisicamente implementados por qualquer sistema quântico de dois estados, tais como, o alinhamento de um spin nuclear em um campo magnético uniforme ou dois níveis de energia em um átomo.

A diferença crucial que existe entre um bit clássico e o qubit, reside no fato de que os estados quânticos, ao contrário dos clássicos, podem existir em superposições lineares de seus elementos. O princípio da superposição implica que qualquer combinação linear complexa dos estados da base do qubit representa também um estado físico deste qubit, ou seja,

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (2.1)$$

com $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{C}$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, descreve o estado do qubit, mostrando que existe um contínuo de configurações possíveis, enquanto que para sistemas clássicos o bit pode assumir apenas dois valores lógicos, 0 ou 1. Estes vetores da base, chamada base computacional, podem ser representados na forma matricial como $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ e $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, sendo $(\dots)^T$ a operação de transposição total.

Uma representação geral para o estado de um qubit é fornecida pelo operador densidade (ou estatístico) escrito em termos das matrizes de Pauli mais o operador unidade $\{\hat{1}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$, tal que

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left(\hat{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{P} \right), \quad (2.2)$$

¹Seja o operador densidade $\hat{\rho} = \sum_i P_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$, com $\sum_i P_i = 1$ para $0 \leq P_i \leq 1$. Teremos um estado puro se $P_i = \delta_{ij}$, acarretando em $Tr\hat{\rho}^2 = 1$, e um estado de mistura ocorrerá se $P_i \neq 0$, o que nos leva a $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$ e consequentemente a $Tr\hat{\rho}^2 < 1$.

com as propriedades

$$\text{Tr}\hat{\rho} = 1, \quad |\vec{P}| \leq 1 \quad \text{e} \quad \text{Tr}\hat{\rho}^2 = |\vec{P}|^2. \quad (2.3)$$

O vetor \vec{P} , conhecido como vetor de Bloch, denota a direção da polarização em \mathbb{R}^3 e $\vec{\sigma} = \sigma_x\hat{i} + \sigma_y\hat{j} + \sigma_z\hat{k}$. O caso $|\vec{P}| = 1$, representa um estado puro do qubit, onde $\text{Tr}\hat{\rho} = \text{Tr}\hat{\rho}^2 = 1$, e $|\vec{P}| < 1$ o caso de mistura estatística, tal que, $\text{Tr}\hat{\rho}^2 < 1$. Assumindo o vetor de Bloch como sendo $\vec{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}$, então a forma explícita da matriz densidade que descreve o qubit será

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_z & P_x - iP_y \\ P_x + iP_y & 1 - P_z \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

A representação de Bloch revela a geometria dos qubits no \mathbb{R}^3 , constituindo um isomorfismo com vetores em \mathcal{H}^2 . Escrevendo o vetor \vec{P} como função de dois ângulos, tal que, $\vec{P} = (\sin\theta \cos\phi)\hat{i} + (\sin\theta \sin\phi)\hat{j} + (\cos\theta)\hat{k}$, para $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$, veremos que os número θ e ϕ definem um ponto sobre a superfície de uma esfera de raio unitário conforme ilustrado na Fig.(2.1), conhecida como esfera de Bloch, que auxilia a visualização e o entendimento das propriedades gerais dos vetores em \mathcal{H}^2 . A fronteira da esfera consiste inteiramente de estados puros, $|\psi(\theta, \phi)\rangle$, e os estados mistos do qubit, $\rho(\theta, \phi)$, encontram-se no interior da esfera e são combinações ponderadas dos estados puros. O estado de máxima mistura, $(1/2)\mathbb{I}$, está no centro da esfera e é uma combinação linear uniformemente ponderada de quaisquer dois estados puros ortogonais.

2.2 Emaranhamento

O espaço de Hilbert de um sistema composto constituído de vários subsistemas $(1, 2, 3, \dots, N)$, é formado pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert dos subsistemas individuais, ou seja, $\mathcal{H}_{1,2,3,\dots,N} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$. Se for possível escrever o estado do sistema composto,

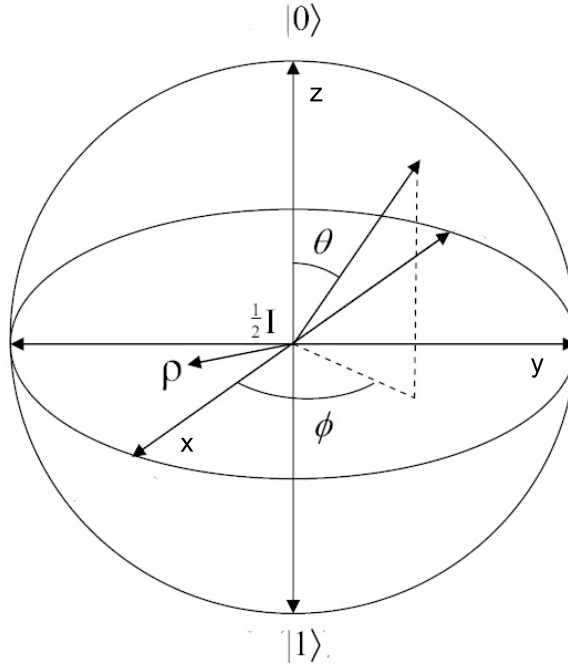


Figura 2.1: Esfera de Bloch.

$\rho_{1,2,3,\dots,N} \in \mathcal{H}_{1,2,3,\dots,N}$, como

$$\rho_{1,2,3,\dots,N} = \sum_i p_i \rho_i^1 \otimes \rho_i^2 \otimes \rho_i^3 \otimes \dots \otimes \rho_i^N, \quad (2.5)$$

sendo $\rho_i^1 = |\psi_i^1\rangle \langle \psi_i^1|$, $\rho_i^2 = |\varphi_i^2\rangle \langle \varphi_i^2|$, ..., $\rho_i^N = |\phi_i^N\rangle \langle \phi_i^N|$, $\sum_i p_i = 1$ e $\{|\psi_i^1\rangle, |\varphi_i^2\rangle, \dots, |\phi_i^N\rangle\}$ os estados puros normalizados dos subsistemas 1, 2, ..., N, então este estado é dito ser *separável*. Se nenhuma combinação linear convexa do tipo (2.5) é possível para um dado $\rho_{1,2,3,\dots,N}$, então este estado é dito *emaranhado* e inclui correlações quânticas.

A interpretação física para sistemas bipartidos, que podem ser escritos como o estado produto $\rho_{1,2} = \rho_1 \otimes \rho_2$, é a de que quando o primeiro sistema está no estado ρ_1 , o estado do segundo sistema é certamente determinado por ρ_2 [15]. Para um sistema composto emaranhado é realmente complicado atribuir as propriedades dos subsistemas individuais, pois há um tipo especial de correlação entre as diferentes partes que não pode ser interpretada classicamente, o tempo todo.

Uma das características dos sistemas separáveis é que eles podem ser preparados localmente. Em outras palavras, é possível que algumas pessoas afastadas espacialmente e detentoras dos subsistemas, preparem todo o estado separável de um sistema composto via uma sequência de operações locais, feitas em seus subsistemas, combinadas previamente através de algum canal de comunicação clássica compartilhado entre elas (isto é, via LOCC - do inglês Local Operations and Classical Communication). Isso nunca é possível caso as partes desejem preparar qualquer estado emaranhado cujos subsistemas estejam separados espacialmente, ou seja, LOCC não pode gerar emaranhamento. Este fenômeno pode ser descrito como a impossibilidade de criar aspectos não-locais em um sistema global por alguma manipulação local.

Encontrar uma decomposição como a da Eq.(2.5) para um estado misto genérico $\rho_{1,2,3,\dots,N}$, ou provar que ela não existe não é uma tarefa fácil. Muitas considerações tem sido feitas para analisar o caráter de separabilidade dos estados quânticos², mas para casos de sistemas multipartidos (sistema de 3 ou mais partes), o problema é não trivial. Para sistemas bipartidos, temos condições necessárias e suficientes, enunciadas pelos chamados critérios de separabilidade. Nesta tese nos restringiremos somente a sistemas bipartidos de dimensionalidade 2×2 e usaremos o método da transposição parcial positiva como critério de separabilidade.

2.2.1 Critério de Separabilidade de Peres-Horodecki

Em 1996, Asher Peres mostrou que a operação de transposição matricial executada em um dos subsistemas da matriz densidade do estado conjunto (chamada transposição parcial) está profundamente ligada ao emaranhamento [8]. Em seu trabalho, Peres conjecturou sobre a suficiência desta condição, mas foram os integrantes da “família Horodecki” (a saber, M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki), que demonstraram a suficiência deste critério para sistemas de dimensionalidade 2×2 e 2×3 , revelando que nos demais casos este é somente uma

²Para uma revisão detalhada sobre o assunto consultar a Ref. [16]

condição necessária [7]³. Tal formulação ficou conhecida como critério de Peres-Horodecki.

Primeiramente, note que se uma matriz densidade ρ descreve um estado físico, então sua matriz transposta ρ^T também descreverá um estado físico, uma vez que, os autovalores de ambas serão positivos⁴ (para uma operação de transposição total). Todavia, a operação de transposição parcial, que por definição, leva um estado

$$\rho = \sum_{i,j,\alpha,\beta} \rho_{i\alpha,j\beta} |i, \alpha\rangle \langle j, \beta|, \quad (2.6)$$

em outro estado, descrito por

$$\rho^{T_2} = \sum_{i,j,\alpha,\beta} \rho_{i\alpha,j\beta} |i, \beta\rangle \langle j, \alpha|, \quad (2.7)$$

para uma transposição feita com relação ao segundo índice, pode conduzir a diferentes resultados quanto à positividade dos autovalores.

Considerando um estado separável para um sistema bipartido descrito por

$$\rho_{1,2} = \sum_i p_i \rho_i^1 \otimes \rho_i^2, \quad (2.8)$$

encontra-se que a sua transposição parcial, que é uma operação linear no espaço de operadores⁵, é dada por

$$\rho_{1,2}^{T_2} = \sum_i p_i \rho_i^1 \otimes (\rho_i^2)^T. \quad (2.9)$$

Este resultado permitiu que Peres fizesse a seguinte análise: como $(\rho_i^2)^T$ é a matriz densidade que descreve o subsistema 2, tem-se, por definição, que esta é representada por um operador positivo semidefinido. Diante disso, o autor enunciou o seguinte critério [8]: *o estado de um sistema físico, representado por um operador densidade ρ , será emaranhado se a sua transposta parcial não for positiva.*

³Na verdade, trata-se de um trabalho, concomitante ao de Peres, que demonstra um critério necessário e suficiente de separabilidade. Tal critério, baseado na teoria de mapas positivos, que tem a transposição parcial como caso equivalente para dimensionalidades $2 \otimes 2$ e $3 \otimes 3$.

⁴Podemos dizer então que trata-se de um operador positivo semidefinido.

⁵Dado o operador de transposição T , teremos que $T(AB) = T(A)T(B)$ para quaisquer matrizes A e B .

No mesmo ano em que Peres enunciou este critério de separabilidade, a família Horodecki mostrou que o êxito do mesmo reside no fato da transposição parcial ser um *mapa*⁶ positivo, mas não *completamente positivo*.

Por definição, um mapa $\mathbf{M} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é dito positivo quando leva operadores positivos em outros operadores também positivos, isto é, dado um operador

$$\rho \geq 0, \quad (2.10)$$

então

$$\mathbf{M}(\rho) \geq 0. \quad (2.11)$$

Note portanto que a transposição de matrizes é um mapa positivo, pois como vimos anteriormente, é um tipo de operação que não muda os autovalores da matriz.

Em contrapartida, um mapa é dito completamente positivo quando é positivo e sua extensão a qualquer produto tensorial é também um mapa positivo, ou seja, se

$$\rho \geq 0, \quad (2.12)$$

então

$$(\mathbf{M} \otimes \mathbf{I}_N)(\rho) \geq 0 \quad \forall N, \quad (2.13)$$

sendo \mathbf{I}_N um mapa que representa a matriz identidade de dimensão $N \times N$.

Nesta linguagem de mapas positivos, a família Horodecki generalizou o critério de Peres da seguinte forma: *uma matriz densidade ρ é separável se, e somente se, para qualquer mapa positivo \mathbf{M} o operador $(\mathbf{I} \otimes \mathbf{M})(\rho)$ seja também positivo.*

A partir desta definição eles provaram que todos os mapas positivos agindo sobre os espaços $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ e $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$, podem ser contruídos por combinações de mapas completamente positivos e a transposição parcial, mostrando assim que, para estas dimensões, o critério de Peres é necessário e suficiente.

⁶Aqui, a palavra mapa é utilizada para designar um operador que age no espaço dos operadores.

2.3 Medidas Quânticas

Estados quânticos podem sofrer dois tipos distintos de transformação: (i) as transformações unitárias, que regem a evolução de sistemas quânticos não interagentes; (ii) as transformações não-unitárias, das quais os processos de medição fazem parte. Executar as tarefas de processamento de informação quântica geralmente envolvem uma etapa de medição quântica, uma vez que tais medições são necessárias para se obter informações a partir dos estados quânticos.

Um dos postulados da teoria quântica que descreve o ato de medição, pode ser apresentado da seguinte forma [15]: *Um observável físico é descrito por um conjunto completo de operadores de medida, \mathcal{M}_r , que atuam no espaço de Hilbert \mathcal{H} do sistema a ser observado. A probabilidade de obtermos o resultado r , rotulada por $p(r)$, para um estado descrito por $|\Psi\rangle$ é*

$$p(r) = \langle \Psi | \mathcal{M}_r^\dagger \mathcal{M}_r | \Psi \rangle, \quad (2.14)$$

sendo o estado pós-medição descrito por

$$\frac{\mathcal{M}_r |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | \mathcal{M}_r^\dagger \mathcal{M}_r | \Psi \rangle}}. \quad (2.15)$$

Os operadores \mathcal{M}_r satisfazem às propriedades:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r^\dagger \mathcal{M}_r &\geq 0, \\ \sum_r \mathcal{M}_r^\dagger \mathcal{M}_r &= I, \end{aligned} \quad (2.16)$$

que implicam em probabilidades positivas cuja soma é igual a unidade.

Medidas de von Neumann

A medida de von Neumann, conhecida também como medida projetiva, é vista como um caso muito particular da definição de medida enunciada no postulado acima. Quando, além de satisfazerem as propriedades dadas em (2.16), os operadores também satisfazerem a condição

$$\mathcal{M}_r \mathcal{M}_{r'} = \mathcal{M}_r \delta_{r,r'},$$

estaremos lidando com medidas projetivas. Em outras palavras, os operadores de medida \mathcal{M}_r serão projetores⁷ ortonormais.

A título de ilustração, consideremos um sistema de dois qubits emaranhados cujo estado é

$$|\psi_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle), \quad (2.18)$$

com $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{C}$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Se o aparelho de medição for construído para detectar e registrar autovalores associados a um estado $|r_1\rangle$ do subsistema 1, então o projetor é escrito como $\mathcal{M}_r^{(1)} = |r_1\rangle\langle r_1|$, e o estado do sistema que resultará após a medição é

$$\mathcal{M}_r^{(1)} |\psi_{1,2}\rangle = |\psi_r\rangle = |r_1\rangle\langle r_1|\psi_{1,2}\rangle = |r_1\rangle \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle r|0\rangle_1 |0\rangle_2 + \langle r|1\rangle_1 |1\rangle_2) \right], \quad (2.19)$$

sendo os coeficientes $\langle r|0\rangle_1$ e $\langle r|1\rangle_1$ as probabilidades de encontrarmos os autovalores 0 ou 1, respectivamente. O estado $\mathcal{M}_r^{(1)} |\psi_{1,2}\rangle$ é diferente do original, pois o conteúdo informativo é modificado, porém, se a medição for repetida imediatamente a seguir, teremos como resultado o mesmo autovalor, ou seja, uma segunda medição não modificará o estado já medido. O subsistema 2 é projetado em um estado que depende do resultado das medições feitas em 1, uma vez que, feita uma medição sobre o subsistema 2, as probabilidades associadas aos resultados $|0\rangle_2$ e $|1\rangle_2$ são $p(0)_2 = |\langle r|0\rangle_1|^2/2$ e $p(1)_2 = |\langle r|1\rangle_1|^2/2$, respectivamente. Neste sentido, os resultados das medições sobre o estado $|\psi_{1,2}\rangle$ estão correlacionados.

Medidas POVM

Como vimos em (2.14) e (2.15), o postulado da medida em mecânica quântica descreve a estatística de medições e o estado do sistema pós-medição. Contudo, em algumas aplicações, os

⁷Os projetores foram introduzidos na mecânica quântica por John von Neumann (1903 - 1957). Eles devem satisfazer as condições de serem hermitianos, mutuamente exclusivos e idempotentes,

$$(P_k)^\dagger = (P_k), \quad P_k P_{k'} = P_k \delta_{k,k'}. \quad (2.17)$$

estados do sistema após a medida é de pouco interesse, sendo mais importante a probabilidade dos diferentes resultados da medição. Este é, por exemplo, o caso em que a medida é feita somente uma vez, e o experimento é concluído. Neste caso, faz-se uso de uma ferramenta matemática conhecida como *formalismo* da medida valorada por operadores positivos ou, como é mais conhecida na literatura, o formalismo POVM (do inglês "Positive Operator-Valued Measure")⁸. Tal conceito tem a seguinte definição: *Os operadores $\Pi_r = \mathcal{M}_r^\dagger \mathcal{M}_r$, conhecidos como elementos POVM associados ao possível resultado da medição, possuem as seguintes características:*

- *São hermitianos e positivos semidefinidos, ou seja, $\Pi_r = \Pi_r^\dagger$ e $\Pi_r \geq 0$ para todo r ;*
- *A probabilidade de obtermos o resultado r para um estado descrito por $|\Psi\rangle$ é dada por $p(r) = \langle \Psi | \Pi_r | \Psi \rangle$;*
- *Satisfazem a relação de completude, ou seja, $\sum_r \Pi_r = I$*

O conjunto completo Π_r é conhecido como POVM.

Para ilustrar o conceito de POVM, faremos uso de um exemplo bem simples envolvendo dois indivíduos, Alice e Bob [15]. Suponha que Alice envie a Bob um qubit preparado em um dos dois estados

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \quad \text{ou} \quad |\psi_2\rangle = \frac{(|0\rangle + |1\rangle)}{\sqrt{2}}, \quad (2.20)$$

e que Bob tenha como objetivo descobrir qual estado Alice enviou. Como estes estados não são ortogonais, Bob não poderia distingui-los utilizando-se apenas de medidas projetivas de von Neumann, uma vez que $|\psi_2\rangle$ pode ser decomposto em uma componente paralela a $|\psi_1\rangle$, o que poderia levá-lo ao erro em um processo de medição, uma vez que em ambos os estados existe uma probabilidade não nula do resultado estar relacionado ao estado $|0\rangle$. Contudo, se Bob faz

⁸Adotaremos a sigla POVM por conveniência.

uso do POVM descrito pelos elementos

$$\Pi_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right) |1\rangle\langle 1|, \quad (2.21)$$

$$\Pi_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right) \frac{(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|)}{2} \quad (2.22)$$

$$\Pi_3 = I - \Pi_1 - \Pi_2, \quad (2.23)$$

ele poderá, em algumas vezes, distinguir entre os estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sem cometer erros na identificação.

Uma vez que a cada elemento POVM está associada uma probabilidade $\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\} \rightarrow \{p(1), p(2), p(3)\}$, caso Alice envie a Bob o estado $|\psi_1\rangle$, ele encontrará

$$p(1) = 0, \quad p(2) \neq 0, \quad p(3) \neq 0. \quad (2.24)$$

Note que o elemento Π_1 foi intencionalmente construído para que, dado o estado $|\psi_1\rangle$, a probabilidade associada fosse nula. Dessa forma, diante de $p(1) = 0$, Bob pode afirmar que o estado enviado foi $|\psi_2\rangle$.

Por outro lado, recebendo $|\psi_2\rangle$ terá que

$$p(1) \neq 0, \quad p(2) = 0, \quad p(3) \neq 0. \quad (2.25)$$

Dessa forma, se Bob medir Π_2 e o resultado for nulo ele concluirá, com segurança, que o estado enviado foi $|\psi_1\rangle$. No entanto, algumas vezes, Bob medirá o elemento Π_3 e não poderá afirmar nada sobre o estado recebido, diferentemente dos demais elementos onde ele pôde determiná-lo com exatidão. Este é o custo da distinção exata de estados não ortogonais.

2.4 Entropia e Informação

2.4.1 A entropia de Shannon

Entropia é um conceito que se expandiu muito além de suas origens termodinâmicas e assumiu o papel de conceito-chave nas teorias da informação clássica e quântica. A entropia de Shannon⁹, que é a idéia central da teoria clássica da informação, pode ser interpretada como uma medida da incerteza sobre o resultado de uma experiência que ocorre de acordo com uma distribuição de probabilidades, ou ainda como a quantidade de informação necessária para especificar os resultados que realmente ocorrem [1]. Tal medida é definida como função de uma distribuição de probabilidades, p_1, p_2, \dots, p_n ($p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$), associada a uma variável aleatória X , tal que

$$H(X) \equiv H(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv - \sum_i p_i \log p_i, \quad (2.26)$$

na qual o logaritmo é na base 2 (todos os logaritmos daqui em diante serão na base 2) e a entropia é expressa em bits. Se X assume algum valor α com probabilidade 1 então nenhuma informação nova é obtida com a observação de X e conseqüentemente (2.26) retorna um valor nulo. Todavia, se X possui uma distribuição uniforme (todos os resultados são igualmente prováveis), tal que $p_i = 1/n$ para todo i , então o valor de $H(X)$ é $\log n$.

A entropia de Shannon apresenta muitas propriedades interessantes, tais como

- Positividade: claramente $H(p_1, p_2, \dots, p_n) \geq 0$ para todas as distribuições de probabilidade discretas;
- Continuidade: $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ é uma função contínua da distribuição.
- Expansibilidade: adota-se a convenção de que $0 \log 0 = 0$. Então será verdade que

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n) = H(p_1, p_2, \dots, p_n, 0).$$

⁹Desenvolvida por Claude E. Shannon (1916 - 2001) em 1948, com o objetivo de investigar a capacidade máxima de comunicação em um canal (clássico).

- Concavidade: é uma função côncava no sentido da teoria de conjuntos convexos.
- Aditividade: se temos uma distribuição de probabilidade conjunta $p_{1,2}$ de duas variáveis aleatórias e se elas são independentes, de modo que as probabilidades conjuntas são produtos das probabilidades individuais, então

$$H(p_1 p_2) = H(p_1) + H(p_2),$$

Ou seja, as informações necessárias para descrever duas variáveis aleatórias independentes é a soma das informações necessárias para descrevê-las separadamente;

- Subaditividade: se as duas variáveis aleatórias X e Y não são independentes, então

$$H(p_{1,2}) \leq H(p_1) + H(p_2),$$

com igualdade se, e somente se, as variáveis aleatórias são independentes (neste caso uma variável não carrega informação sobre a outra, ou seja, o total da informação no par é a soma das informações em cada uma). Caso contrário, o total de informação no par é menor que a soma da informação em seus constituintes. $H(p_{1,2})$ é conhecida como entropia conjunta e é definida como

$$H(X, Y) = - \sum_{ij} p_{ij} \log p_{ij},$$

para as variáveis aleatórias X e Y que apresentam uma distribuição de probabilidades $p_i = P(X = \alpha_i)$ e $q_j = P(Y = \alpha_j)$. A distribuição conjunta do vetor aleatório (X, Y) é caracterizada pela probabilidade $p_{ij} = P(X = \alpha_i, Y = \alpha_j)$, sendo $p_{ij} = p_i q_j$ se as variáveis são independentes.

Entropia Relativa

Considerando agora duas variáveis aleatórias, X e Y , com distribuições de probabilidade (p_1, p_2, \dots, p_n) e (q_1, q_2, \dots, q_n) , definimos a entropia relativa de X com relação a Y como

$$H(X \parallel Y) = \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{p_i}{q_i}. \quad (2.27)$$

A entropia relativa informa o quão distintas são as duas distribuições de probabilidade, (p_1, p_2, \dots, p_n) e (q_1, q_2, \dots, q_n) . Como principais características podemos citar:

- Positividade: $H(X \parallel Y) \geq 0$, sendo a igualdade satisfeita se, e somente se, $(p_1, p_2, \dots, p_n) = (q_1, q_2, \dots, q_n)$.
- Assimetria: $H(X \parallel Y) \neq H(Y \parallel X)$, mostrando que esta medida não poderia nos fornecer uma noção de distância.

A entropia relativa é frequentemente útil, não por si mesma, mas porque outras quantidades entrópicas podem ser vistas como casos especiais desta entropia. No que segue, faremos uso desta afirmativa.

Entropia Condicional e Informação Mútua

Dadas duas variáveis aleatórias X e Y , podemos nos perguntar como o conteúdo de informação de X se relaciona com o conteúdo de informação de Y . A entropia conjunta, apresentada na propriedade de subaditividade de (2.26), sugere que pode haver correlação entre as variáveis e que, ao adquirir conhecimento sobre uma podemos também ganhar informação sobre a outra. Tal afirmação pode ser pensada da seguinte forma: suponha que o valor de Y seja conhecido, tal que tenhamos $H(Y)$ bits de informação sobre o par (X, Y) . Embora tenhamos conhecimento sobre Y , ainda há uma incerteza relacionada ao par (X, Y) que está diretamente ligada ao desconhecimento da variável X . Desta forma, definimos a entropia de X *condicionada ao*

conhecimento de Y , como

$$H(X | Y) \equiv H(X, Y) - H(Y). \quad (2.28)$$

Esta entropia é uma medida da nossa ignorância (na média) sobre X , dado que a variável Y seja conhecida.

Outra indagação importante é a de como medir a quantidade de informação que X e Y possuem em comum, ou seja, qual é a *informação mútua* do par (X, Y) . Tal quantidade definida por

$$H(X : Y) \equiv H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (2.29)$$

é uma medida do grau de correlação entre as duas variáveis aleatórias e é um funcional simétrico:

$$H(X : Y) = H(Y : X).$$

Podemos relacionar a entropia condicional à informação mútua através da definição (2.28), tal que $H(X : Y) = H(X) - H(X | Y)$

Apresentamos algumas relações entre as entropias vistas até o momento:

- $H(X, Y) = H(Y, X)$ e $H(X : Y) = H(Y : X)$, ou seja, estas funções são simétricas.
- $H(X | Y) \geq 0$, portanto $H(X : Y) \leq H(Y)$, com a igualdade sendo satisfeita se, e somente se, Y for uma função de X .
- $H(X) \leq H(X, Y)$, com a igualdade sendo satisfeita se, e somente se, Y for uma função de X .
- $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$, com a igualdade sendo satisfeita se, e somente se, X e Y forem variáveis aleatórias independentes.
- $H(X | Y) \leq H(Y)$, e portanto, $H(X : Y) \geq 0$, com a igualdade sendo satisfeita em cada uma das desigualdades se, e somente se, X e Y forem variáveis aleatórias independentes.

2.4.2 Entropia de von Neumann

No âmbito da teoria de probabilidades clássica, estado é uma distribuição de probabilidades e a entropia de Shannon é uma função desta distribuição. No que concerne à teoria quântica, um estado é representado por uma matriz densidade ρ que pode ser associada a muitas distribuições de probabilidades, uma vez que existem muitos POVMs possíveis. Além disso, qualquer matriz densidade pode originar-se de diferentes formas da mistura de estados puros normalizados. Esta diferença entre a descrição matemática de sistemas quânticos e clássicos, confere à informação quântica um caráter significativamente diferente da informação clássica.

A medida padrão da informação contida em um sistema quântico descrito pelo operador estatístico ρ é a entropia de von Neumann

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log \hat{\rho}) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i, \quad (2.30)$$

onde o logaritmo é na base 2 e λ_i são os autovalores de $\hat{\rho}$.

A entropia de von Neumann desempenha um papel importante na teoria quântica da informação análogo ao desempenhado pela entropia de Shannon na teoria clássica: $S(\rho)$ mede a incerteza¹⁰ associada a um estado quântico descrito por uma matriz densidade. No entanto, a entropia de von Neumann difere da entropia de Shannon em aspectos importantes. No caso de sistemas clássicos, a entropia pode ser vista como a informação obtida ao identificarmos o estado do sistema, enquanto $\hat{\rho}$, em geral, não pode ser identificada pela observação de um evento, tal que $S(\hat{\rho})$ fornece apenas um limite para esta informação.

Entropia Relativa Quântica

Como no caso da entropia de Shannon, é muito útil definir uma versão quântica da entropia relativa. Para qualquer par de estados quânticos $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$, definimos a entropia relativa quântica

¹⁰Esta quantidade deve, no entanto, ser distinguida da incerteza nos valores de propriedades quânticas incompatíveis na relação de incerteza de Heisenberg, que existe até mesmo no mais simples estado puro.

como

$$S(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) \equiv \text{Tr}(\hat{\rho} \log \hat{\rho}) - \text{Tr}(\hat{\rho} \log \hat{\sigma}) \quad (2.31)$$

A entropia relativa quântica é não negativa, um resultado algumas vezes chamado de desigualdade de Klein.

Teorema 1 (Desigualdade de Klein). *A entropia relativa quântica é não negativa:*

$$S(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) \geq 0,$$

com a igualdade sendo satisfeita se, e somente se, $\hat{\rho} = \hat{\sigma}$.

Demonstração

Sejam $\hat{\rho} = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$ e $\hat{\sigma} = \sum_j q_j |j\rangle\langle j|$ decomposições ortogonais para $\hat{\sigma}$ e $\hat{\rho}$. Pela definição (2.31) temos

$$S(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) = \sum_i p_i \log p_i - \sum_i \langle i | \hat{\rho} \log \hat{\sigma} | i \rangle. \quad (2.32)$$

Como $|i\rangle$ é autovetor de $\hat{\rho}$, temos $\langle i | \hat{\rho} = p_i \langle i |$ e

$$\langle i | \log \hat{\sigma} | i \rangle = \langle i | \left(\sum_j \log(q_j) |j\rangle\langle j| \right) | i \rangle = \sum_j \log(q_j) P_{ij},$$

onde $P_{ij} = \langle i | j \rangle \langle j | i \rangle \geq 0$. A Eq.(2.32) pode ser escrita como

$$S(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) = \sum_i p_i \left(\log p_i - \sum_j P_{ij} \log q_j \right).$$

Note que P_{ij} satisfaz as equações $P_{ij} \geq 0$, $\sum_i P_{ij} = 1$ e $\sum_j P_{ij} = 1$. Usando o fato de que o logaritmo é uma função estritamente côncava, segue que $\sum_j P_{ij} \log q_j \leq \log r_i$, em que $r_i = \sum_j P_{ij} q_j$, com a igualdade sendo satisfeita se, e somente se, existir um valor de j para o qual $P_{ij} = 1$. Portanto,

$$S(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) \geq \sum_i p_i \log \frac{p_i}{r_i},$$

com a igualdade sendo satisfeita se, e somente se, para cada i existir um valor de j tal que $P_{ij} = 1$ e se $p_i = r_i$. A condição $p_i = r_i$ nos diz que os autovalores correspondentes de $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$ serão idênticos, e portanto $\hat{\rho} = \hat{\sigma}$ serão as condições de igualdade.

No que segue, listaremos algumas propriedades básicas da entropia de von Neumann, as quais referiremos como um teorema:

Teorema 2 (Propriedades básicas da entropia de von Neumann).

1. A entropia de von Neumann é não-negativa e é nula se, e somente se, o estado for puro.
2. Para sistemas descritos por estados em um espaço de Hilbert d -dimensional, teremos $0 \leq S(\rho) \leq \log d$, de modo que para qubits $0 \leq S(\rho) \leq 1$.
3. Suponha que p_i sejam probabilidades e que os operadores densidade ρ_i têm suporte em subespaços ortogonais. Então,

$$S\left(\sum_i p_i \rho_i\right) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i). \quad (2.33)$$

Demonstração

1. Segue diretamente da definição.
2. Da desigualdade de Klein (Teorema 1) temos, $0 \leq S(\rho \parallel I/d) = -S(\rho) + \log d$.
3. Sejam λ_i^j e $|e_i^j\rangle$ os autovalores e autovetores correspondentes de ρ_i . Observe que $p_i \lambda_i^j$ e $|e_i^j\rangle$ são autovalores e autovetores de $\sum_i p_i \rho_i$, de onde

$$\begin{aligned} S\left(\sum_i p_i \rho_i\right) &= -\sum_{ij} p_i \lambda_i^j \log p_i \lambda_i^j \\ &= -\sum_i p_i \log p_i - \sum_i p_i \sum_i \lambda_i^j \log \lambda_i^j \\ &= H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i). \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

A Eq.(2.33) mostra como as entropias de Shannon e von Neumann se complementam.

Entropia Condicional Quântica e Informação Mútua Quântica

O análogo quântico da entropia conjunta para dois sistemas A e B é definida como $S(A, B) = S(\rho_{AB}) \equiv -\text{Tr}(\rho_{AB} \log \rho_{AB})$, onde ρ_{AB} é a matriz densidade do sistema AB . Podemos fazê-lo também para a entropia condicional, de forma análoga à quantidade clássica correspondente, por

$$S(A | B) \equiv S(A, B) - S(B) \quad (2.34)$$

No entanto, ao contrário da entropia condicional clássica, (2.34) pode tornar-se negativa, indicando que é possível que a ignorância nos estados dos componentes individuais seja maior do que no estado conjunto de um sistema quântico bipartido. Como exemplo, consideremos um sistema AB de dois qubits no estado emaranhado $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$. Como esse é um estado puro, $S(A, B) = 0$. Todavia, o sistema A possui operador densidade igual a $I/2$ e, portanto, sua entropia é igual a 1, logo $S(B | A) \equiv S(A, B) - S(A) = -1$.

Teorema 3. *A entropia condicional quântica é subaditiva para sistemas quânticos distintos representados pelo estado conjunto $S(\rho_A \otimes \rho_B)$, isto é, $S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$, sendo a igualdade satisfeita se o estados estão descorrelacionados, ou seja, $S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B)$.*

Demonstração A prova da subaditividade é uma aplicação simples da desigualdade de Klein, $S(\rho) \leq -\text{Tr}(\rho \log \sigma)$. Designando $\rho \equiv \rho_{AB}$ e $\sigma \equiv \rho_A \rho_B$, notamos que

$$\begin{aligned} -\text{Tr}(\rho \log \sigma) &= -\text{Tr}[\rho_{AB} \log(\rho_A \rho_B)] \\ &= -\text{Tr}(\rho_A \log \rho_A) - \text{Tr}(\rho_B \log \rho_B) \\ &= S(A) + S(B). \end{aligned}$$

A desigualdade de Klein fornece, portanto, $S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$, como queríamos demonstrar.

Teorema 4. *A entropia é uma função côncava no conjunto dos operadores densidade, ou seja, dada uma distribuição de probabilidade p_i e os correspondentes operadores densidade ρ_i , a entropia satisfaz a desigualdade*

$$S\left(\sum_i p_i \rho_i\right) \geq \sum_i p_i S(\rho_i). \quad (2.35)$$

Demonstração Suponhamos que ρ_i são estados de um sistema A e consideremos um sistema auxiliar B cujo espaço de estados tenha uma base ortonormal $\{|i\rangle\}$. Para o sistema composto

$$\rho_{AB} \equiv \sum_i p_i \rho_i \otimes |i\rangle \langle i|, \quad (2.36)$$

obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} S(A) &= S\left(\sum_i p_i \rho_i\right), \\ S(B) &= S\left(\sum_i p_i |i\rangle \langle i|\right) = H(p_i), \\ S(A, B) &= H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i). \end{aligned}$$

Usando a subaditividade de $S(A, B)$ teremos (2.35).

A informação mútua quântica entre dois subsistemas descritos pelos estados ρ_A e ρ_B que compõem um sistema descrito pelo estado conjunto ρ_{AB} é

$$\begin{aligned} I(A : B) &\equiv S(A) + S(B) - S(A, B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \\ &= S(A) - S(A | B) = S(B) - S(B | A), \end{aligned} \quad (2.37)$$

também por analogia com a quantidade clássica correspondente dada em (2.29). A Eq.(2.37) tem dois significados operacionais distintos porém relacionados [23, 40]. Em específico, a quantidade total de correlação, medida pela taxa mínima de aleatoriedade que é necessária para apagar completamente todas as correlações em um estado ρ_{AB} , é igual à informação mútua quântica.

Capítulo 3

Emaranhamento: uma Visão Geométrica.

Neste capítulo apresentamos um método geométrico que nos permite interpretar a separabilidade dos estados emaranhados de uma forma inédita e estabelecer distâncias quadráticas que nos permitem quantificar o grau de emaranhamento.

O método apresentado aqui é baseado em simetrias de vetores e matrizes, associados ao operador densidade dos estados quânticos de dois qubits (puros e de mistura) e estas simetrias são reveladas por operações de reflexão nos vetores e matrizes por planos cartesianos. Nesta abordagem, a cada estado $\hat{\rho}$, associa-se dois vetores de polarização (VPs) e uma matriz de correlação (MC), encontrados a partir da representação de $\hat{\rho}$ na forma de Fano [41]. Neste cenário, uma operação de transposição parcial em $\hat{\rho}$ é equivalente à operação de reflexão nos VPs e na MC, por um plano escolhido no \mathcal{R}^3 , em somente um dos qubits.

No que se segue, concentramos nossa atenção sobre os estados representados por matrizes 4×4 pertencentes à classe de variedade D-7, ou seja, matrizes contendo no máximo sete parâmetros independentes. Em particular, estudaremos estados que recaem em um caso especial dos D-7, que são comumente referidos como estados do tipo X . Muitos estados estacionários de dois qubits [7, 8, 30, 31], bem como estados que evoluem no tempo [12, 13, 32–37], se enquadram nesta classe. Neste contexto, analisamos as simetrias dos VPs e dos elementos da

MC resultantes das reflexões locais por planos cartesianos no \mathcal{R}^3 , e verificamos que em todos os casos o conjunto de autovalores de $\hat{\rho}$ permanece invariante. Isto nos permite estabelecer o critério de separabilidade de Peres-Horodecki em termos de uma distância quadrática com a métrica de Minkowski, de forma similar à relatividade restrita, mas com o suporte compacto $[0, 1]$. Na relatividade, a métrica de Minkowski resulta na distância $s^2 = t^2 - \vec{r}^2$, mas com o espaço-tempo admitindo valores de $[-\infty, \infty]$. A projeção deste hiperespaço é feita em analogia à projeção do espaço-tempo quadridimensional de Minkowski no plano t^2 vs. \vec{r}^2 (conhecido como diagrama de Minkowski), que aqui chamaremos de *espaço de fase*. Neste diagrama a projeção da superfície cônica, que separa os espaços tipo tempo e tipo espaço, isto é, uma reta a 45 graus, agora caracteriza a fronteira dos estados separáveis e emaranhados, tal que, os estados separáveis são identificados por pontos situados dentro do cone, ou em sua superfície, enquanto que, além do cone, os pontos representam os estados emaranhados.

Neste contexto, apresentaremos alguns exemplos ilustrativos, onde é possível visualizar fenômenos interessantes apresentados pelos estados quânticos emaranhados, tais como a morte súbita e o renascimento súbito do emaranhamento. Finalizaremos estabelecendo uma medida de emaranhamento baseada nas distâncias quadráticas e a compararemos com as medidas algébricas usuais: a *concurrence* de Wootters [9] e a negatividade de Werner-Vidal [10]. Este método dispensa operações diretas na matriz densidade, sendo suficiente escrever as expressões diretamente em termos das entradas da matriz, o que o torna um método simples, porém robusto, comparado aos demais que exigem o cálculo dos autovalores. Todo o conteúdo deste capítulo pode ser encontrado na referência [42].

3.1 Vetores de Polarização e Matriz de Correlação

Qualquer estado de um sistema de dois qubits no espaço de Hilbert $C^2 \otimes C^2$ pode ser parametrizado na forma de Fano [41]¹

$$\hat{\rho}_{1,2} = \frac{1}{2^2} \left(1_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{P}_2 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{P}_1 \otimes 1_2 + \sum_{ij} M_{ij} \sigma_{1,i} \otimes \sigma_{2,j} \right), \quad (3.1)$$

sendo $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ os operadores de Pauli, $1_{1(2)}$ o operador unidade associado ao subsistema 1(2) e os índices da soma recebem o conjunto $\{x, y, z\}$. Nos segundo e terceiro termos de (3.1), \vec{P}_1 e \vec{P}_2 são os Vetores de Polarização (VPs) e o quarto termo engloba os elementos da Matriz de Correlação (MC)

$$\begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

sendo $M_{ij} = \langle \sigma_{1,i} \sigma_{2,j} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}_{1,2} \sigma_{1,i} \sigma_{2,j})$ com $|M_{ij}| \leq 1$; o primeiro (segundo) subscrito i (j) está associado ao qubit 1 (2).

Calculando, por exemplo, o traço sobre o qubit 2 encontramos o estado do qubit 1 $\hat{\rho}_1 = (1 + \vec{P}_1 \cdot \vec{\sigma}_1)/2$, onde $\vec{P}_1 = \langle \vec{\sigma}_1 \rangle$ é o VP, cujas propriedades são $\text{Tr} \hat{\rho}_1^2 = (1 + |\vec{P}_1|^2)/2 \leq 1$ e $|\vec{P}_1| \leq 1$.

Um estado separável de dois qubits escrito em termos de VPs e MC, possui as seguintes propriedades:

- os VPs são escritos como

$$\vec{P}_\mu = \sum_k p_k \vec{Q}_\mu^{(k)},$$

onde $\vec{Q}_\mu^{(k)}$ é um vetor com $|\vec{Q}_\mu^{(k)}| \leq 1$ para $(\mu = 1, 2)$; o sobrescrito k caracteriza uma direção.

¹Para mais informações, veja o Apêndice A.

- os elementos da MC são escritos como

$$M_{ij} = \sum_k p_k \vec{Q}_{1,i}^{(k)} \vec{Q}_{2,j}^{(k)},$$

com pesos $p_k \in [0, 1]$ e $\sum_k p_k = 1$.

Desta forma, a Eq.(3.1) passa a ser escrita como

$$\hat{\rho}_{1,2}^{sep} = \frac{1}{4} \sum_k p_k \left(1_1 + \vec{Q}_1^{(k)} \cdot \vec{\sigma}_1 \right) \otimes \left(1_2 + \vec{Q}_2^{(k)} \cdot \vec{\sigma}_2 \right). \quad (3.3)$$

Se o estado (3.1) não pode ser reduzido para a forma (3.3), então dizemos que os qubits estão emaranhados.

Podemos observar que: (a) se todos os $|\vec{Q}_\mu^{(k)}| = 1$, isto é, são vetores unitários, então os estados $\left(1_1 + \vec{Q}_1^{(k)} \cdot \vec{\sigma}_1 \right) / 2$ e $\left(1_2 + \vec{Q}_2^{(k)} \cdot \vec{\sigma}_2 \right) / 2$ são puros, e se $p_k \neq 0$ para um único valor de k , $k = k_0$, então o estado $\hat{\rho}_{1,2}^{sep}$ é puro; (b) Fazendo-se medições em $\hat{\rho}_{1,2}^{sep}$, a única informação que pode ser recuperada resume-se aos VPs e à matriz (3.2). Os valores dos pesos p_k permanecem desconhecidos.

Embora a representação de Fano (3.1) pareça mais complicada que a forma habitual escrita em termos dos elementos da matriz $\rho_{ij} = \langle i | \hat{\rho}_{1,2} | j \rangle$, $i, j = 1, \dots, 4$, esta tem a vantagem de revelar características físicas interessantes sobre a natureza do emaranhamento ².

Os VPs podem ser escritos em termos dos elementos usuais da matriz densidade como

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} P_{1,x} \\ P_{1,y} \\ P_{1,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Re(\rho_{13} + \rho_{24}) \\ -2Im(\rho_{13} + \rho_{24}) \\ 2(\rho_{11} + \rho_{22}) - 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} P_{2,x} \\ P_{2,y} \\ P_{2,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Re(\rho_{12} + \rho_{34}) \\ -2Im(\rho_{12} + \rho_{34}) \\ 2(\rho_{11} + \rho_{33}) - 1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

²Para a base computacional, podemos verificar que as polarizações \vec{P}_k e a matriz de correlação \mathbb{M} permanecem invariantes sob as mudanças dos rótulos $1 \leftrightarrow 2$ e $3 \leftrightarrow 4$.

assim como a MC

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}(\rho_{14} + \rho_{23}) & 2\operatorname{Im}(\rho_{23} + \rho_{41}) & 2\operatorname{Re}(\rho_{13} - \rho_{24}) \\ 2\operatorname{Im}(\rho_{41} + \rho_{32}) & 2\operatorname{Re}(\rho_{23} - \rho_{14}) & 2\operatorname{Im}(\rho_{24} - \rho_{13}) \\ 2\operatorname{Re}(\rho_{12} - \rho_{34}) & 2\operatorname{Im}(\rho_{34} - \rho_{12}) & 1 - 2(\rho_{22} + \rho_{33}) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

As matrizes densidade de cada subsistema são independentes dos elementos da MC, de forma que

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} & \rho_{13} + \rho_{24} \\ \rho_{31} + \rho_{42} & \rho_{33} + \rho_{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_{1,z} & P_{1,x} - iP_{1,y} \\ P_{1,x} + iP_{1,y} & 1 - P_{1,z} \end{pmatrix}$$

e

$$\hat{\rho}_2 = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{33} & \rho_{12} + \rho_{34} \\ \rho_{21} + \rho_{43} & \rho_{22} + \rho_{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_{2,z} & P_{2,x} - iP_{2,y} \\ P_{2,x} + iP_{2,y} & 1 - P_{2,z} \end{pmatrix}.$$

Note que $\operatorname{Tr}(\hat{\rho}_1^2) \leq 1$ e $\operatorname{Tr}(\hat{\rho}_2^2) \leq 1$ implica $|\vec{P}_k| \leq 1$, para $k = 1, 2$.

3.2 Simetrias da Transposição Parcial Positiva

No capítulo 2 apresentamos o critério de separabilidade de Peres-Horodecki, no qual, fazendo-se uso da operação de transposição parcial em um sistema de dois qubits representado pela matriz $\hat{\rho}$, uma nova matriz $\hat{\rho}^T$ é obtida e a positividade de seus autovalores é checada, de forma que, se houver pelo menos um autovalor negativo os qubits possuem algum grau de emaranhamento e caso contrário, lidamos com estados separáveis³ [7, 8].

Para uma matriz densidade $\hat{\rho}_{1,2}$, escrita na base computacional, a matriz transposta parcialmente, $\hat{\rho}_{1,2}^T$, é obtida executando-se as seguintes permutações nos elementos da matriz original, $\rho_{12} \leftrightarrow \rho_{21}$, $\rho_{14} \leftrightarrow \rho_{23}$, $\rho_{32} \leftrightarrow \rho_{41}$, $\rho_{34} \leftrightarrow \rho_{43}$. Contudo, esse procedimento não apresenta um significado físico até que seja analisado sob a perspectiva da matriz (3.1) que, escrita na

³Esta conclusão é válida apenas para sistemas 2×2 e 2×3 .

3.3 Estados do tipo X : Parametrização do Espaço

Vários sistemas físicos estudados na teoria quântica da informação tem sido descritos por uma classe de estados puros ou mistos denominados estados X [34]. Estes estados são representados por matrizes 4×4 pertencentes à classe de variedade D-7 (matrizes contendo no máximo sete parâmetros independentes, de um total de quinze)⁴. Apesar de esta classe de estados já ter sido usada anteriormente na literatura (veja, por exemplo, [43, 44]), foi assim denominada em [34] devido ao aspecto visual da matriz densidade, que remete à letra X do alfabeto:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}.$$

Neste caso, elementos não nulos ocorrem apenas na diagonal principal e na diagonal secundária. Muitos cálculos relacionados a emaranhamento e a outras propriedades, como a discórdia quântica [27, 45, 46], que será tratada no capítulo 5, podem ser realizados analiticamente para estes estados, o que os tornam convenientes para uma análise direta e transparente.

A matriz densidade apresentada em (3.7) pode ser reduzida para a forma X fazendo-se $P_{k,x} = P_{k,y} = M_{jz} = 0$, para $k = 1, 2$ e $j = x, y, z$. Assim

$$\hat{\rho}_{12} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + P_{1,z} + P_{2,z} + M_{zz} & & & 0 \\ & 0 & & 1 + P_{1,z} - P_{2,z} - M_{zz} \\ & 0 & & M_{xx} + M_{yy} + i(M_{yx} - M_{xy}) \\ M_{xx} - M_{yy} + i(M_{yx} + M_{xy}) & & & 0 \\ & 0 & & M_{xx} - M_{yy} - i(M_{yx} + M_{xy}) \\ M_{xx} + M_{yy} - i(M_{yx} - M_{xy}) & & & 0 \\ & 1 - P_{1,z} + P_{2,z} - M_{zz} & & 0 \\ & 0 & & 1 - P_{1,z} - P_{2,z} + M_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

⁴Esta classe de matrizes será tratada em detalhes no próximo capítulo.

e os VPs e a MC passam a ser escritos como

$$\vec{P}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{k,z} \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & 0 \\ M_{yx} & M_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & M_{zz} \end{pmatrix}.$$

A física torna-se mais transparente e a descrição do emaranhamento e da separabilidade adquire uma compreensão mais clara neste tipo de estado.

Neste ponto, introduzimos oito novos parâmetros escritos em termos dos PVs e da MC como se segue

$$t_{\pm} = \frac{1 \pm M_{zz}}{2}, \quad (3.11)$$

$$u_{\pm} = \frac{P_{1,z} \pm P_{2,z}}{2}, \quad (3.12)$$

$$v_{\pm} = \frac{M_{xx} \pm M_{yy}}{2}, \quad (3.13)$$

$$w_{\pm} = \frac{M_{yx} \pm M_{xy}}{2}, \quad (3.14)$$

que assumem valores no intervalo $[0, 1]$. Podemos escrever os autovalores de (3.10) em termos das definições (3.11) - (3.14) como

$$\lambda_1 = \frac{t_- + V_1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{t_- - V_1}{2}, \quad (3.15)$$

$$\lambda_3 = \frac{t_+ + V_2}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{t_+ - V_2}{2}, \quad (3.16)$$

onde

$$V_1 = \sqrt{u_-^2 + v_+^2 + w_-^2} \quad e \quad V_2 = \sqrt{u_+^2 + v_-^2 + w_+^2}. \quad (3.17)$$

Transpondo parcialmente a matriz (3.10) e calculando os autovalores, encontramos

$$\lambda_1^T = \frac{t_- + V_1^T}{2}, \quad \lambda_2^T = \frac{t_- - V_1^T}{2}, \quad (3.18)$$

$$\lambda_3^T = \frac{t_+ + V_2^T}{2}, \quad \lambda_4^T = \frac{t_+ - V_2^T}{2}, \quad (3.19)$$

sendo

$$V_1^T = \sqrt{u_-^2 + v_-^2 + w_+^2} \quad \text{e} \quad V_2^T = \sqrt{u_+^2 + v_+^2 + w_-^2}. \quad (3.20)$$

Note que os subscritos dos parâmetros v e w nas equações (3.17) e (3.20) foram trocados. Isto acontece porque, segundo os mapas (3.8) e (3.9), a transposição parcial corresponde a reflexões pelo plano x - z no VP e nos elementos da MC do subsistema 2, tal que $P_{2,y} \rightarrow -P_{2,y}$ e $M_{jy} \rightarrow -M_{jy}$, com $(j = x, y, z)$. Logo, a base de autovalores $\{\lambda_i^T\}$ pode ser obtida diretamente do conjunto $\{\lambda_i\}$ fazendo-se tais reflexões ou, de forma equivalente, aplicando-se as modificações

$$\{v_{\pm}, w_{\pm}\} \rightarrow \{v_{\mp}, w_{\mp}\}. \quad (3.21)$$

Analisando os autovalores da matriz $\hat{\rho}_{12}$ dados por (3.15) e (3.16), podemos visualizar a transposição parcial por uma perspectiva mais geral no espaço \mathcal{R}^3 . Para tal, notemos, analisando a Tabela 3.1, que reflexões locais dos VPs e da MC, quer no qubit 1 ou 2, por qualquer um dos planos x - z , y - z , x - y ou mesmo um plano arbitrário passando pela origem do sistema de coordenadas (veja o apêndice B), preservam o mesmo espectro de autovalores dado em (3.18) e (3.19).

$\lambda_1^T =$	$\lambda_1^{(2-y)} =$	$\lambda_1^{(2-x)} =$	$\lambda_3^{(2-z)} =$	$\lambda_1^{(1-x)} =$	$\lambda_1^{(1-y)} =$	$\lambda_3^{(1-z)}$
$\lambda_2^T =$	$\lambda_2^{(2-y)} =$	$\lambda_2^{(2-x)} =$	$\lambda_4^{(2-z)} =$	$\lambda_2^{(1-x)} =$	$\lambda_2^{(1-y)} =$	$\lambda_4^{(1-z)}$
$\lambda_3^T =$	$\lambda_3^{(2-y)} =$	$\lambda_3^{(2-x)} =$	$\lambda_1^{(2-z)} =$	$\lambda_3^{(1-x)} =$	$\lambda_3^{(1-y)} =$	$\lambda_1^{(1-z)}$
$\lambda_4^T =$	$\lambda_4^{(2-y)} =$	$\lambda_4^{(2-x)} =$	$\lambda_2^{(2-z)} =$	$\lambda_4^{(1-x)} =$	$\lambda_4^{(1-y)} =$	$\lambda_2^{(1-z)}$

Tabela 3.1: Invariância do espectro de autovalores da matriz $\hat{\rho}_{12}^T$ para a reflexão de uma partícula.

Nas primeiras duas colunas da Tabela 3.1, encontramos os autovalores da matriz $\hat{\rho}_{12}^T$ dados por (3.18) e (3.19), onde a segunda coluna é dada pelo mapa (3.21) que corresponde ao critério de TPP. Cada autovalor $\lambda_i^{(Partícula-Coordenada \text{ que muda de sinal})}$ nas demais colunas, corresponde a reflexões locais dos VPs e da MC do qubit 1 ou 2, pelos planos

- z - y , onde o sinal das componentes x de uma das partículas é trocado ($x \rightarrow -x$),
- x - z , onde o sinal das componentes y de uma das partículas é trocado ($y \rightarrow -y$),
- x - y , onde o sinal das componentes z de uma das partículas é trocado ($z \rightarrow -z$),

por exemplo, $\lambda_1^{(1-z)}$ é o autovalor da nova matriz construída a partir das reflexões no plano x - y executadas no qubit 1, ou seja, $M_{zj} \rightarrow -M_{zj}$, com ($j = x, y, z$). Note que o ordenamento das linhas nas colunas 4 e 7 difere do ordenamento das demais, mas o espectro total de autovalores continua preservado.

A invariância do espectro de autovalores para $\hat{\rho}_{12}^T$, evidencia que transpor parcialmente um estado é equivalente a fazer qualquer reflexão local de uma partícula sob qualquer plano cartesiano.

Por outro lado, as matrizes construídas a partir de duas reflexões locais, uma em cada qubit, dos VPs e da MC do estado $\hat{\rho}_{12}$, preservam (ou restauram) o espectro de autovalores da matriz original, dado por (3.15) e (3.16), como mostra a Tabela (3.2). A primeira coluna desta

$\lambda_i =$	$\lambda_i^{(1-x,2-x)} =$	$\lambda_i^{(1-y,2-y)} =$	$\lambda_i^{(1-z,2-z)} =$
$\lambda_1 =$	$\lambda_1^{(1-x,2-z)} =$	$\lambda_1^{(1-y,2-z)} =$	$\lambda_3^{(1-x,2-y)} =$
$\lambda_2 =$	$\lambda_2^{(1-x,2-z)} =$	$\lambda_2^{(1-y,2-z)} =$	$\lambda_4^{(1-x,2-y)} =$
$\lambda_3 =$	$\lambda_3^{(1-x,2-z)} =$	$\lambda_3^{(1-y,2-z)} =$	$\lambda_1^{(1-x,2-y)} =$
$\lambda_4 =$	$\lambda_4^{(1-x,2-z)} =$	$\lambda_4^{(1-y,2-z)} =$	$\lambda_2^{(1-x,2-y)} =$

Tabela 3.2: Invariância do espectro de autovalores da matriz $\hat{\rho}_{12}$ para duas reflexões locais, uma em cada partícula.

tabela mostra os autovalores da matriz $\hat{\rho}_{12}$ dados por (3.15) e (3.16). Nas demais, cada autovalor $\lambda_m^{(Partícula\ 1-Cordenada\ que\ muda\ de\ sinal,\ Partícula\ 2-Cordenada\ que\ muda\ de\ sinal)}$, corresponde a uma reflexão

local dos VPs e dos elementos da MC de cada um dos qubits que compõem o estado, por um

dos planos x - z , y - z ou x - y . Se os dois qubits forem refletidos pelo mesmo plano, todo o espectro de autovalores da matriz $\hat{\rho}_{12}$ é preservado e há uma correspondência um a um para cada autovalor, por exemplo, $\lambda_1 = \lambda_1^{(1-x,2-x)} = \lambda_1^{(1-y,2-y)} = \lambda_1^{(1-z,2-z)}$. O mesmo é verificado para o conjunto de reflexões pelos planos y - z e x - y nos qubits 1 e 2, respectivamente, bem como para as reflexões pelos planos x - z e x - y nos qubits 1 e 2, respectivamente; como exemplo podemos citar, $\lambda_3 = \lambda_3^{(1-x,2-z)} = \lambda_3^{(1-y,2-z)}$. No entanto, para os qubits 1 e 2 refletidos pelo plano y - z e x - z , não há o mesmo tipo de correspondência, mas sim uma permutação entre os diferentes índices dos autovalores (representados pelo subscrito), como mostra a quarta coluna da tabela. Embora haja esta permutação, toda a base de autovalores λ_i é restaurada.

3.3.1 Condições de Positividade dos Autovalores: Espaço de Fase dos Estados Emaranhados

Como cada autovalor do estado $\hat{\rho}_{12}$, dados em (3.15) e (3.16), está no intervalo $[0, 1]$, teremos

$$0 \leq \lambda_1 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq (t_- + V_1) \leq 2; \quad (3.22)$$

$$0 \leq \lambda_2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq (t_- - V_1) \leq 2; \quad (3.23)$$

$$0 \leq \lambda_3 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq (t_+ + V_2) \leq 2; \quad (3.24)$$

$$0 \leq \lambda_4 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq (t_+ - V_2) \leq 2. \quad (3.25)$$

As condições (3.22)-(3.25), nos permitem validar as seguintes desigualdades:

$$s_1^2 \equiv t_-^2 - V_1^2 \geq 0, \quad s_2^2 \equiv t_+^2 - V_2^2 \geq 0. \quad (3.26)$$

Ao identificarmos os parâmetros t_{\pm} como “variáveis temporais” e $\{u_{\pm}, v_{\pm}, w_{\pm}\}$ como “variáveis espaciais”, podemos fazer uso do léxico da teoria da relatividade restrita e dizer que s_1^2 e s_2^2 são distâncias quadráticas do “*tipo tempo*”, apesar de terem um suporte compacto, $s_i^2 \in [0, 1]$. Além disso, as igualdades em (3.26) definem uma superfície cônica no hiperespaço

quadridimensional, assim como nos diagramas de Minkowski, onde os estados são separados por um cone de eventos e a região interior ao cone caracteriza estados do tipo tempo e a exterior do tipo espaço (veja Apêndice D).

Fazendo o mesmo procedimento para os autovalores da matriz transposta, dados em (3.18) e (3.19), encontramos desigualdades similares,

$$(s_1^T)^2 \equiv t_-^2 - (V_1^T)^2 \geq 0, \quad (s_2^T)^2 \equiv t_+^2 - (V_2^T)^2 \geq 0. \quad (3.27)$$

As distâncias quadráticas (3.26) são do “tipo tempo”, ou seja, sempre positivas e não fornecem nenhuma informação sobre a separabilidade ou o grau de emaranhamento do sistema. No entanto, as desigualdades (3.27) possuem uma característica interessante: se $\hat{\rho}_{1,2}$ contém algum grau de emaranhamento para um conjunto de valores dos parâmetros intrínsecos ao estado, então as distâncias quadráticas ($(s_1^T)^2$ ou/e $(s_2^T)^2$) tornam-se negativas⁵, ou seja, do “tipo espaço”. Neste caso, podemos identificar duas regiões separadas por uma fronteira com a forma de uma superfície cônica, como mostrada na Fig.(3.3.1).

Esta analogia com a teoria da relatividade, proporciona uma caracterização dos estados quânticos sob a mesma ótica geométrica, isto é, uma descrição destes estados no plano t^2 vs. \vec{r}^2 , o que nos permite estabelecer o seguinte significado ao critério de TPP:

- se $t_-^2 \geq (V_1^T)^2$ (ou $t_+^2 \geq (V_2^T)^2$) o estado $\hat{\rho}_{1,2}$ é *tipo separável*;
- se $t_-^2 < (V_1^T)^2$ (ou $t_+^2 < (V_2^T)^2$), este é *tipo emaranhado*.

A fronteira do cone de eventos, determina a separação entre estados do *tipo separável* e estados do *tipo emaranhado*.

Uma vez que $(s_1)^2 = 4\lambda_1\lambda_2$ e $(s_2)^2 = 4\lambda_3\lambda_4$, bem como $(s_1^T)^2 = 4\lambda_1^T\lambda_2^T$ e $(s_2^T)^2 =$

⁵Em geral, a violação das desigualdades se dá de forma alternada, onde, se $(s_1^T)^2$ é negativa $(s_2^T)^2$ é positiva, ou vice-versa. Contudo, para determinados estados ambas podem ser violadas.

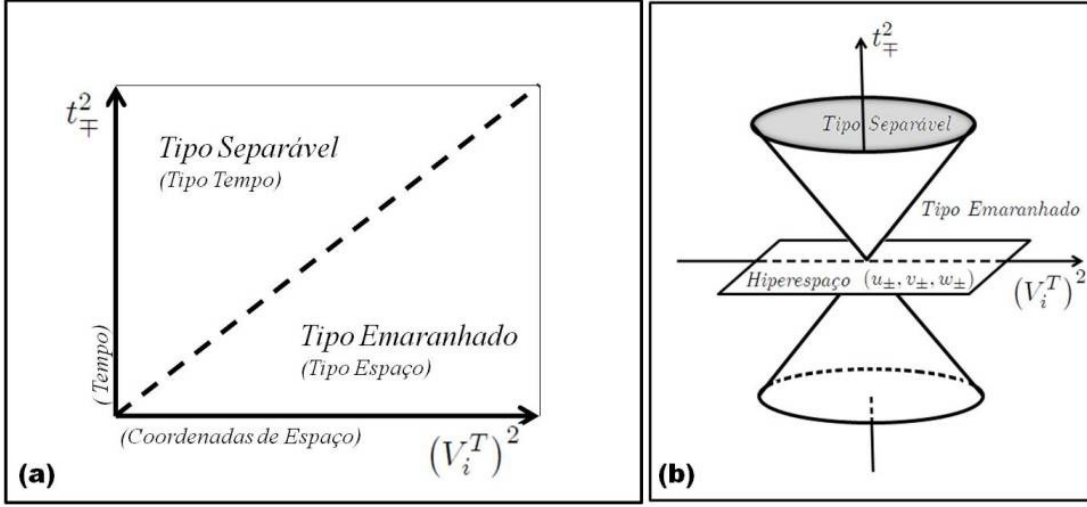


Figura 3.1: Diagramas de Minkowski: (a) Projeção do cone de eventos no plano. (b) Analogia do cone de eventos no hiperespaço para estados quânticos.

$4\lambda_3^T \lambda_4^T$, as distâncias quadráticas são invariantes sob transformações de similaridade nos estados $\hat{\rho}_{1,2}$ e $\hat{\rho}_{1,2}^T$. Note que, como $\lambda_1^T + \lambda_2^T + \lambda_3^T + \lambda_4^T = 1$, teremos as seguintes possibilidades:

- se $\lambda_1^T \lambda_2^T > 0$ e $\lambda_3^T \lambda_4^T > 0$, então necessariamente $\{\lambda_1^T, \lambda_2^T, \lambda_3^T, \lambda_4^T\}$ são todos positivos.
- se $\lambda_1^T \lambda_2^T > 0$ e $\lambda_3^T \lambda_4^T < 0$ (ou $\lambda_1^T \lambda_2^T < 0$ e $\lambda_3^T \lambda_4^T > 0$), então necessariamente 3 autovalores possuem o mesmo sinal e o restante sinal oposto.

Foram apresentadas na literatura diversas representações pictóricas de estados quânticos de acordo com o caráter separável/emaranhado [33, 47, 48], mas aqui apresentamos uma representação quantitativa no *espaço de fase* através das desigualdades (3.27), onde os estados podem ser imediatamente reconhecidos como separáveis ou emaranhados. Para ilustrar o nosso procedimento fizemos o gráfico $(t_{\pm})^2$ vs. $(V_{1,2}^T)^2$ para cinco estados de sistemas bipartidos encontrados na literatura, mostrando que suas características com relação à separabilidade e ao emaranhamento podem ser imediatamente identificadas. Neste *espaço de fase*, $(t_{\pm})^2$ e $(V_{1,2}^T)^2$ desempenham o papel de variáveis dependentes de parâmetros intrínsecos de cada estado estu-

dado.

Estado de Werner

O primeiro estado a ser analisado, denominado estado de Werner, é uma mistura estatística cuja matriz densidade é dada por [30]

$$\hat{\rho}_W = x |\psi^-\rangle \langle \psi^-| + \frac{1}{4}I, \quad (3.28)$$

sendo $|\psi^-\rangle = (1/\sqrt{2})(|01\rangle - |10\rangle)$ e I a matriz identidade. Representando-o matricialmente, na base computacional ($|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$), teremos

$$\hat{\rho}_W = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+x}{4} & -\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{2} & \frac{1+x}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Calculemos os vetores de polarização e a matriz de correlação do estado $\hat{\rho}_W$ usando (3.4), (3.5) e (3.6), onde os VPs e os elementos de MC são apresentados em termos dos elementos da matriz ρ_W . Note que este é um estado X , assim como todos os demais estados que apresentaremos aqui, implicando, como vimos anteriormente, em $P_{k,x} = P_{k,y} = M_{jz} = 0$, para $k = 1, 2$ e $j = x, y, z$. Logo,

$$\begin{pmatrix} P_{1,x} \\ P_{1,y} \\ P_{1,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re}(\rho_{13} + \rho_{24}) \\ -2 \operatorname{Im}(\rho_{13} + \rho_{24}) \\ 2(\rho_{11} + \rho_{22}) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P_{2,x} \\ P_{2,y} \\ P_{2,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re}(\rho_{12} + \rho_{34}) \\ -2 \operatorname{Im}(\rho_{12} + \rho_{34}) \\ 2(\rho_{11} + \rho_{33}) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re}(\rho_{14} + \rho_{23}) & 2 \operatorname{Im}(\rho_{23} + \rho_{41}) & 2 \operatorname{Re}(\rho_{13} - \rho_{24}) \\ 2 \operatorname{Im}(\rho_{41} + \rho_{32}) & 2 \operatorname{Re}(\rho_{23} - \rho_{14}) & 2 \operatorname{Im}(\rho_{24} - \rho_{13}) \\ 2 \operatorname{Re}(\rho_{12} - \rho_{34}) & 2 \operatorname{Im}(\rho_{34} - \rho_{12}) & 1 - 2(\rho_{22} + \rho_{33}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Uma vez calculados os VPs e a MC do estado $\hat{\rho}_W$, podemos encontrar os parâmetros introduzidos em (3.11)-(3.14) e assim obtermos as desigualdades (3.27) que nos permitirão analisar os intervalos de separabilidade e emaranhamento de $\hat{\rho}_W$. A saber

$$\begin{aligned} t_+ &= \frac{1+M_{zz}}{2} = \frac{1-x}{2} & t_- &= \frac{1-M_{zz}}{2} = \frac{1+x}{2} \\ u_+ &= \frac{P_{1,z}+P_{2,z}}{2} = 0 & u_- &= \frac{P_{1,z}-P_{2,z}}{2} = 0 \\ v_+ &= \frac{(M_{xx}+M_{yy})}{2} = -x & v_- &= \frac{(M_{xx}-M_{yy})}{2} = 0 \\ w_+ &= \frac{M_{xy}+M_{yx}}{2} = 0 & w_- &= \frac{M_{xy}-M_{yx}}{2} = 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Na Figura (3.2), a linha contínua representa o estado de Werner e a linha pontilhada a 45° é o delimitador que divide o espaço de fase em duas regiões, *tipo separável* e *tipo emaranhado*. No primeiro caso estão apenas os estados que, para um certo conjunto de parâmetros internos do sistema, são separáveis (e se encontram na região superior ao delimitador) e no outro os que são emaranhados (região inferior ao delimitador). Um único ponto neste espaço (um para cada valor de x), representa o estado dado pela matriz (3.29) e uma seqüência densa destes pontos é representada pela linha contínua no intervalo em que este representa um estado físico, a saber, $0 \leq x \leq 1$.

A desigualdade $(s_1^T)^2 \geq 0$ nunca é violada⁶, ou seja, é sempre positiva para qualquer valor de x no intervalo de existência de ρ_W , e por isso não fornece nenhuma informação sobre

⁶Veja o Apêndice C para mais detalhes sobre os intervalos de validade das desigualdades, dadas em (3.27), para todos os exemplos mostrados aqui.

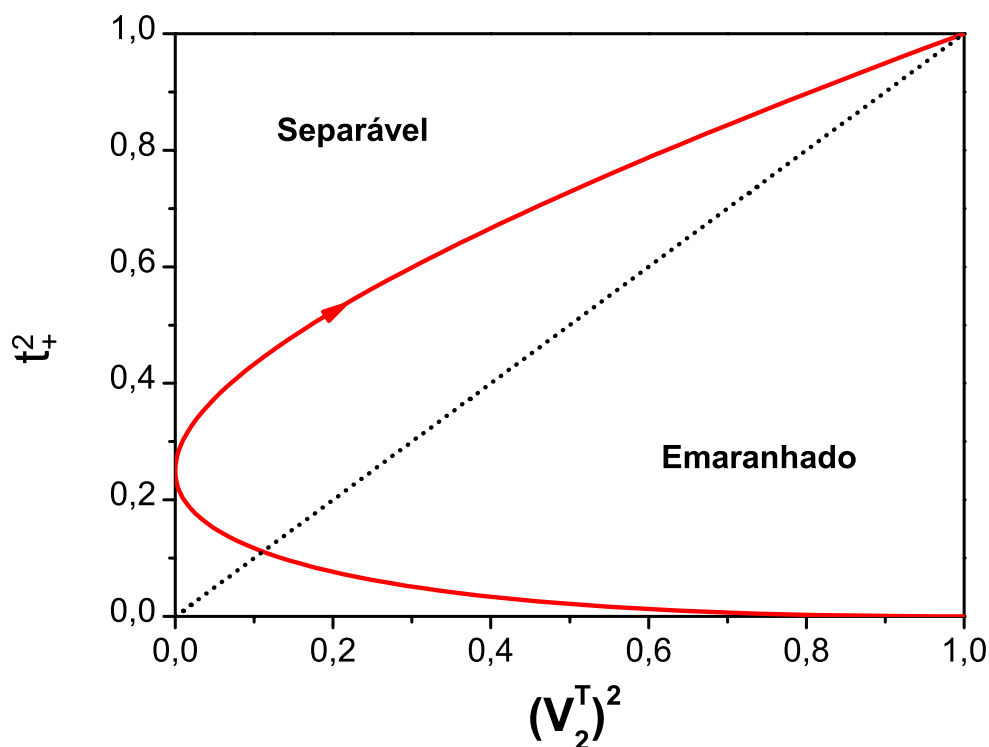


Figura 3.2: Espaço de fase do estado de Werner variando o único parâmetro interno do estado. As setas indicam a direção das seqüências de pontos quando aumentamos os valores do parâmetro, de 0 a 1. A linha pontilhada em 45° é o limite que separa as regiões onde o estado é separável ou emaranhado. As grandezas são adimensionais.

a condição de separabilidade do estado. Contudo, o mesmo não acontece com $(s_2^T)^2$ que exibe uma curva que passa pelas duas regiões divididas pela superfície delimitadora. As setas indicam a direção das seqüências de pontos quando aumentamos os valores do parâmetro x , de 0 a 1. A desigualdade $(s_2^T)^2$ só é satisfeita quando $0 \leq x \leq 1/3$, mostrando que este é o intervalo de separabilidade do sistema, que concorda exatamente com o resultado encontrado usando-se o critério de TPP onde, transpondo parcialmente a matriz (3.29) e diagonalizando-a, obtemos três autovalores iguais a $(1 - x)/4$ e um igual a $(1 - 3x)/4$, que serão positivos para qualquer $x < 1/3$, o que garante um estado separável para este intervalo.

Estado de Peres-Horodecki

Um outro exemplo interessante é o estado de Peres-Horodecki, cujo matriz densidade ρ_{PH} é dada por [7]

$$\hat{\rho}_{PH} = x |\psi^-\rangle \langle \psi^-| + (1-x) |00\rangle \langle 00|, \tag{3.31}$$

sendo $|\psi^-\rangle = (1/\sqrt{2})(|01\rangle - |10\rangle)$. Representando-o matricialmente, na base computacional ($|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$), teremos

$$\hat{\rho}_{PH} = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Os VPs e os elementos da MC do estado $\hat{\rho}_{PH}$ são dados por

$$\begin{aligned} P_{1,z} &= 1-x & P_{2,z} &= 1-x \\ M_{xx} &= -x & M_{xy} &= 0 \\ M_{yy} &= -x & M_{yx} &= 0 \\ M_{zz} &= 1-2x. \end{aligned} \tag{3.33}$$

e os os parâmetros (3.11)-(3.14) tornam-se

$$\begin{aligned} t_+ &= \frac{1+M_{zz}}{2} = (1-x) & t_- &= \frac{1-M_{zz}}{2} = x \\ u_+ &= \frac{P_{1,z}+P_{2,z}}{2} = 1-x & u_- &= \frac{P_{1,z}-P_{2,z}}{2} = 0 \\ v_+ &= \frac{(M_{xx}+M_{yy})}{2} = -x & v_- &= \frac{(M_{xx}-M_{yy})}{2} = 0 \\ w_+ &= \frac{M_{xy}+M_{yx}}{2} = 0 & w_- &= \frac{M_{xy}-M_{yx}}{2} = 0. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Na Fig.(3.3), a linha contínua representa uma seqüência densa de pontos para o estado dado pela matriz (3.32), no intervalo $0 \leq x \leq 1$, em que este representa um estado físico.

Assim como para o estado de Werner, a desigualdade $(s_1^T)^2 \geq 0$ é sempre válida para qualquer valor de x no intervalo de existência do estado (3.32), não fornecendo nenhuma

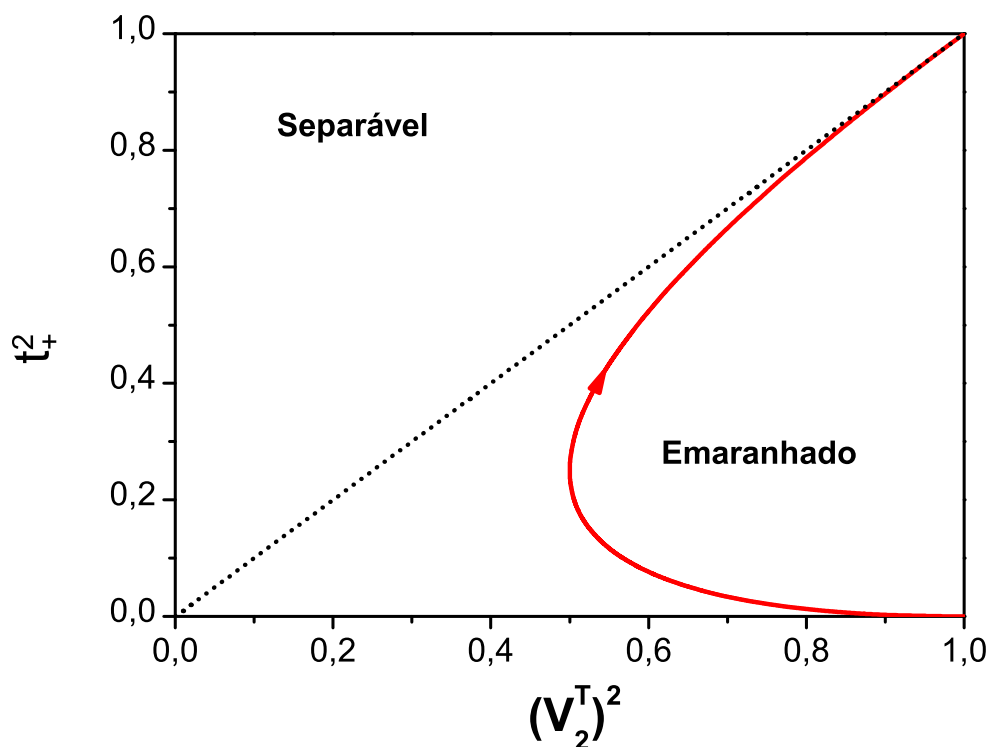


Figura 3.3: O gráfico do espaço de fase do estado de Peres-Horodecki variando o único parâmetro interno do estado. As setas indicam a direção das seqüências de pontos quando aumentamos os valores dos parâmetros, de 0 a 1.

informação sobre a condição de separabilidade. Todavia, a desigualdade $(s_2^T)^2 \geq 0$, exibe uma curva que não cruza a borda que delimita as duas regiões, mas permanece sobre ela para um certo valor do parâmetro x . Analisando o intervalo de validade da desigualdade $(s_2^T)^2 \geq 0$, encontramos que esta só é satisfeita para um único valor de x , $x = 0$, mostrando que este estado só é separável para este valor. Este resultado concorda com o encontrado usando-se o critério de TPP.

Estado de Gisin

Consideramos agora o estado representado pela seguinte matriz densidade [31]

$$\begin{aligned} \rho_G = & \frac{1-x}{2} (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + x (a^2 |10\rangle\langle 10| + b^2 |01\rangle\langle 01|) \\ & + xab (|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|) \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde a e $b \in \mathcal{R}$ e $a^2 + b^2 = 1$.

Representando o estado matricialmente, teremos

$$\rho_G = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & xa^2 & xab & 0 \\ 0 & xab & xb^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-x}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Os VPs e os elementos da MC do estado $\hat{\rho}_G$ são

$$\begin{aligned} P_{1,z} &= 2xa^2 - x & P_{2,z} &= 2xb^2 - x \\ M_{xx} &= 2xab & M_{xy} &= 0 \\ M_{yy} &= 2xab & M_{yx} &= 0 \\ M_{zz} &= 1 - 2x. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Logo,

$$\begin{aligned} t_+ &= \frac{1+M_{zz}}{2} = 2 - 2x & t_- &= \frac{1-M_{zz}}{2} = 2x \\ u_+ &= \frac{P_{1,z}+P_{2,z}}{2} = 0 & u_- &= \frac{P_{1,z}-P_{2,z}}{2} = 2x(a^2 - b^2) \\ v_+ &= \frac{(M_{xx}+M_{yy})}{2} = 4xab & v_- &= \frac{(M_{xx}-M_{yy})}{2} = 0 \\ w_+ &= \frac{M_{xy}+M_{yx}}{2} = 0 & w_- &= \frac{M_{xy}-M_{yx}}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

A Fig. (3.4) representa o estado Gisin [31] que depende de três parâmetros intrínsecos, destes apenas dois são independentes, onde cada linha contínua corresponde a valores fixos do par (a, b) enquanto x é variado. Novamente, a desigualdade para $(s_1^T)^2$, encontrada usando-se os parâmetros dados em (3.38), é sempre válida para qualquer valor dos parâmetros a , b e x no intervalo de existência do estado (3.36), enquanto que a desigualdade para $(s_2^T)^2$ exhibe curvas

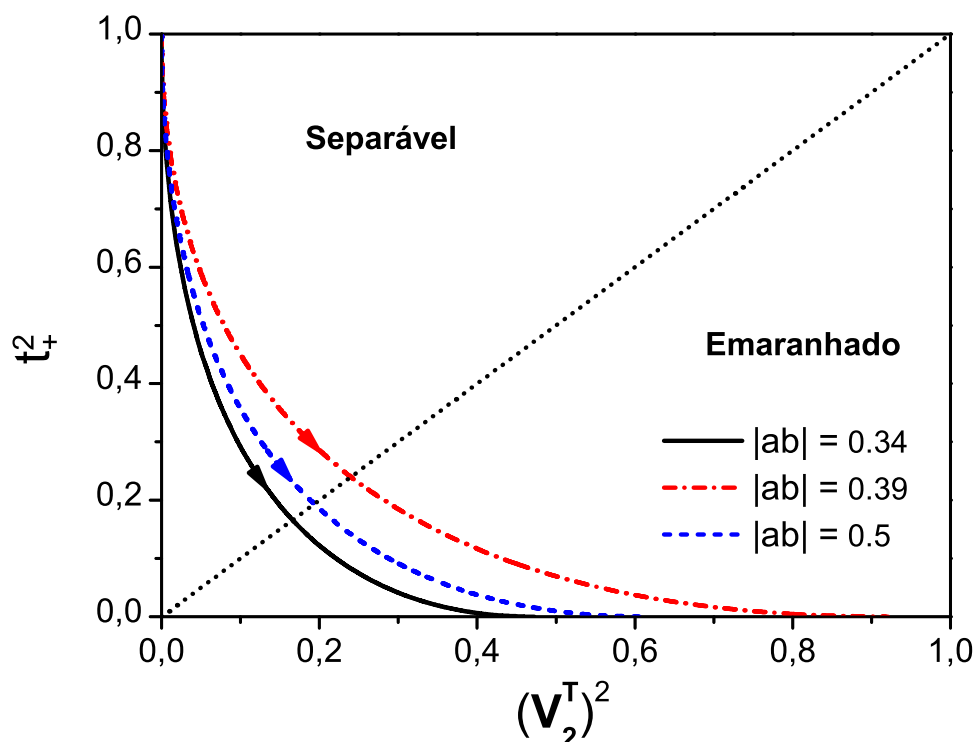


Figura 3.4: Espaço de fase para o estado Gisin, que depende de três parâmetros, onde apenas dois são independentes. Cada curva com seta corresponde a valores fixos de dois parâmetros, enquanto o terceiro é variado em seu domínio.

que cruzam a borda delimitadora representando os diversos estados para três diferentes valores do par (a, b) . Analisando o intervalo de validade da desigualdade para $(s_2^T)^2$, encontramos que esta é violada quando $x > (1 + 2|ab|)^{-1}$, mostrando que neste intervalo temos um estado emaranhado. Este resultado concorda exatamente com o encontrado usando-se o critério de TPP.

Estado de Almeida-Davidovich

Consideremos agora um estado dinâmico que evolui no tempo, constituído por dois qubits, inicialmente preparados em um estado emaranhado, onde cada qubit está imerso em um reser-

vatório de amplitude⁷. Este sistema foi produzido experimentalmente por Almeida e colaboradores [12] usando óptica linear, onde cada qubit e seu respectivo reservatório foram implementados usando-se diferentes graus de liberdade de um único fóton. Com este sistema verificou-se experimentalmente que, para um certo valor dos parâmetros envolvidos, existe um desemaranhamento abrupto do sistema devido à interação com estes reservatórios. Este fenômeno é conhecido na literatura como *morte súbita do emaranhamento* e foi proposto teoricamente por T. Yu e J. H. Eberly [34].

Para o estado inicial $[|\alpha\rangle|00\rangle + |\beta\rangle\exp(i\theta)|11\rangle]$, com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, onde os qubits estão em contato com reservatórios individuais idênticos, a evolução do sistema é dada por

$$\begin{aligned} \rho_{AD} = & (|\alpha|^2 + |\beta|^2 p^2) |11\rangle\langle 11| + |\alpha||\beta|(1-p) (e^{-i\delta}|00\rangle\langle 11| + e^{i\delta}|11\rangle\langle 00|) \\ & + |\beta|^2(1-p)^2 |00\rangle\langle 00| + |\beta|^2 p(1-p) (|10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01|), \end{aligned} \quad (3.39)$$

com $0 \leq p \leq 1$.

Representando (3.39) matricialmente, na base computacional, teremos

$$\rho_{AD} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 p^2 & 0 & 0 & |\alpha||\beta| e^{-i\delta}(1-p) \\ 0 & |\beta|^2(1-p)p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2(1-p)p & 0 \\ |\beta||\alpha| e^{i\delta}(1-p) & 0 & 0 & |\beta|^2(1-p)^2 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Os VPs e a MC do estado $\hat{\rho}_{AD}$ são dados por:

$$\begin{aligned} P_{1,z} &= 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2 p) - 1 & P_{2,z} &= 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2 p) - 1 \\ M_{xx} &= 2|\alpha||\beta| \cos(\delta)(1-p) & M_{xy} &= 2|\beta||\alpha| \sin(\delta)(1-p) \\ M_{yy} &= -2|\alpha||\beta| \cos(\delta)(1-p) & M_{yx} &= 2|\beta||\alpha| \sin(\delta)(1-p) \\ M_{zz} &= 1 - 4|\beta|^2(1-p)p \end{aligned}, \quad (3.41)$$

⁷Reservatório de amplitude é aquele no qual toda a energia do sistema é transferida para o reservatório. Um exemplo comum dessa dinâmica é o decaimento exponencial de um átomo de dois níveis interagindo com os infinitos modos de um campo eletromagnético à temperatura nula.

e os parâmetros introduzidos em (3.11)-(3.14) tornam-se

$$\begin{aligned}
 t_+ &= \frac{1 + M_{zz}}{2} = 1 - 2|\beta|^2(1-p)p \\
 t_- &= \frac{1 - M_{zz}}{2} = 2|\beta|^2(1-p)p \\
 u_+ &= \frac{P_z(1) + P_z(2)}{2} = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2 p) - 1 \\
 u_- &= \frac{P_z(1) - P_z(2)}{2} = 0 \\
 v_+ &= \frac{(M_{xx} + M_{yy})}{2} = 0 \\
 v_- &= \frac{(M_{xx} - M_{yy})}{2} = 2|\alpha||\beta|\cos(\delta)(1-p) \\
 w_+ &= \frac{M_{xy} + M_{yx}}{2} = 2|\beta||\alpha|\sin(\delta)(1-p) \\
 w_- &= \frac{M_{xy} - M_{yx}}{2} = 0
 \end{aligned}$$

Para o estado (3.39) de Almeida-Davidovich, a desigualdade para $(s_2^T)^2$ é sempre válida, diferentemente dos últimos três exemplos, onde esta sempre era violada. Neste caso, as informações sobre a condição de separabilidade e emaranhamento serão fornecidas por $(s_1^T)^2$, uma vez que $(s_2^T)^2$ é sempre positiva. A Fig.(3.5) apresenta a evolução temporal do estado ρ_{AD} , de acordo com o parâmetro $p = [1 - \exp(-\gamma t)]$ (onde γ é a taxa de decaimento e $p \in [0, 1)$), para um dado conjunto de valores de $|\alpha|/|\beta|$. As setas indicam a direção da seqüência de pontos quando aumentamos os valores do parâmetro p . Nesta figura são exibidas três trajetórias, sendo que para dois valores do conjunto escolhido, a saber $|\alpha|/|\beta| = 0,25$ e $|\alpha|/|\beta| = 0,51$, a fronteira que demarca os espaços separável e emaranhado é cruzada em um tempo finito, o que caracteriza o fenômeno de morte súbita do emaranhamento. Para o outro valor ($|\alpha|/|\beta| = 1,02$) a trajetória nunca atravessa a fronteira, ou seja, o estado é separável somente no regime assintótico.

Analisando $(s_1^T)^2$, encontramos os intervalos de separabilidade e emaranhamento para o estado (3.39). Esta desigualdade é sempre satisfeita no intervalo $|\alpha/\beta| \leq p \leq 1$ (para $|\beta| > |\alpha|$), evidenciando então o regime de separabilidade do estado, enquanto que, para $0 \leq p < |\alpha/\beta|$ esta

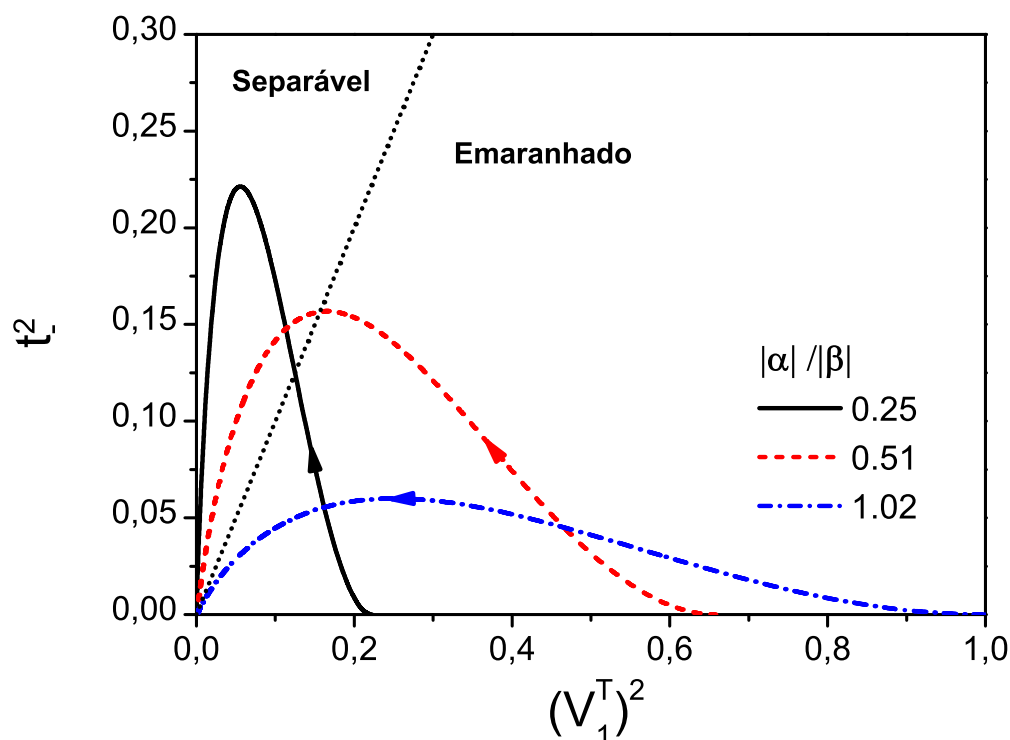


Figura 3.5: O gráfico representa o estado dinâmico de Almeida-Davidovich. São atribuídos valores fixos aos parâmetros α e β , enquanto $p = (1 - \exp(-\gamma t))$ varia no intervalo $[0, 1)$. Os estados representados pelas linhas tracejada e sólida atravessam a fronteira em um tempo finito, um fenômeno conhecido como morte súbita do emaranhamento. A linha ponto-tracejada nunca atravessa a fronteira, alcançando-a assintoticamente. Os parâmetros estão em unidades adimensionais.

é sempre violada, garantindo que neste intervalo temos um estado emaranhado. Observando estes regimes, fica claro que existe um desemaranhamento súbito quando $p = |\alpha/\beta|$. Estes resultados concordam exatamente com os encontrados teoricamente [34] e experimentalmente [12] para o estudo do fenômeno de morte súbita do emaranhamento.

Estado de Das-Agarwal

Um exemplo muito interessante foi apresentado por S. Das e G. S. Agarwal [37], onde um sistema de dois qubits inicialmente emaranhados e interagindo com os seus respectivos reservatórios,

apresenta um comportamento atípico ao longo de sua evolução temporal, exibindo repetidos intervalos de emaranhamento e separabilidade. Este fenômeno ficou conhecido como *colapso e ressurgimento do emaranhamento* ou tão somente *renascimento súbito do emaranhamento*. Este sistema foi modelado por dois átomos de dois níveis acoplados um ao outro, com parâmetro de interação ν , e interagindo com diferentes reservatórios, que levam a uma descoerência local e à perda de emaranhamento, sendo esta descoerência representada pela taxa de decaimento γ (assumindo que os dois qubits decaem com a mesma taxa).

Considerando os qubits no estado inicial $\rho = (1/3) (a |11\rangle \langle 11| + d |00\rangle \langle 00| + |\psi\rangle \langle \psi|)$, onde $|\psi\rangle = |10\rangle + \exp(i\chi) |01\rangle$, para $d = 1 - p$ e $p \geq 0$, podemos escrever a matriz densidade que representa a evolução do sistema como

$$\rho_{DA} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(t) & z(t) \exp(i\chi) & 0 \\ 0 & w(t) \exp(-i\chi) & c(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d(t) \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

sendo os coeficientes dados por

$$a(t) = p \exp(-2\gamma t),$$

$$b(t) = \exp(-\gamma t) [1 - \sin(\chi) \sin(2\nu t)],$$

$$c(t) = \exp(-\gamma t) \{1 + \sin(\chi) \sin(2\nu t) + p[1 - \exp(-\gamma t)]\},$$

$$d(t) = 3 - \exp(-\gamma t) (p + 2),$$

$$z(t) = \exp(-\gamma t) \{ \cos^2(\chi) + \sin^2(\chi) \cos(2\nu t) + i \sin(\chi) \cos(\chi) [\cos(2\nu t) - 1] \},$$

$$w(t) = \exp(-\gamma t) \exp(2i\chi) \{ \cos^2(\chi) - \sin^2(\chi) \cos(2\nu t) - i \sin(\chi) \cos(\chi) [\cos(2\nu t) + 1] \},$$

onde γ é a taxa de decaimento espontâneo dos qubits, χ é a diferença de fase no estado inicial, ν é o parâmetro de interação e p é o parâmetro do estado inicial que deve satisfazer a condição $p \geq 0$.

Os parâmetros necessários para a análise das desigualdades (3.27) são dados por

$$t_+ = 1 - [b(t) + c(t)]$$

$$t_- = b(t) + c(t)$$

$$u_+ = 2a(t) + b(t) + c(t) - 1$$

$$u_- = b(t) - c(t)$$

$$v_+ = 2 [\operatorname{Re}(z(t)) \cos(\chi) - \operatorname{Im}(z(t)) \sin(\chi)]$$

$$v_- = 0$$

$$w_+ = [\operatorname{Re}(z(t)) - \operatorname{Re}(w(t))] \sin(\chi) + [\operatorname{Im}(z(t)) + \operatorname{Im}(w(t))] \cos(\chi)$$

$$w_- = [\operatorname{Re}(z(t)) + \operatorname{Re}(w(t))] \sin(\chi) + [\operatorname{Im}(z(t)) - \operatorname{Im}(w(t))] \cos(\chi)$$

A Fig.(3.6) mostra a evolução do estado ρ_{DA} para dois parâmetros de interação, revelada pela desigualdade $(s_2^T)^2 \geq 0$, uma vez que $(s_1^T)^2 \geq 0$ é sempre válida. A linha tracejada representa a evolução na ausência de interação entre os qubits, ou seja, para $\nu = 0$, mostrando que neste caso, o estado permanece emaranhado. Para $\nu \neq 0$, uma mudança drástica é observada, pois o estado evolui e atravessa a fronteira em ambas as direções. Um cruzamento da direita para a esquerda caracteriza o *colapso do emaranhamento* (ou *morte súbita do emaranhamento*), enquanto o outro cruzamento, da esquerda para a direita, o *ressurgimento súbito do emaranhamento* (ou *renascimento súbito*). Este resultado concorda com o encontrado em [37].

O emaranhamento tem sido reconhecido como um recurso útil, que permite ao processamento quântico da informação um alto grau de superioridade perante o tratamento clássico. Diante disso é natural a indagação de como este recurso deve ser quantificado, isto é, o quanto de emaranhamento contém um dado estado que será utilizado em tais tarefas de processamento. Na próxima seção, proporemos uma medida de emaranhamento baseada nas distâncias quadráticas apresentadas em (3.27). Antes, mostraremos algumas medidas algébricas de emaranhamento

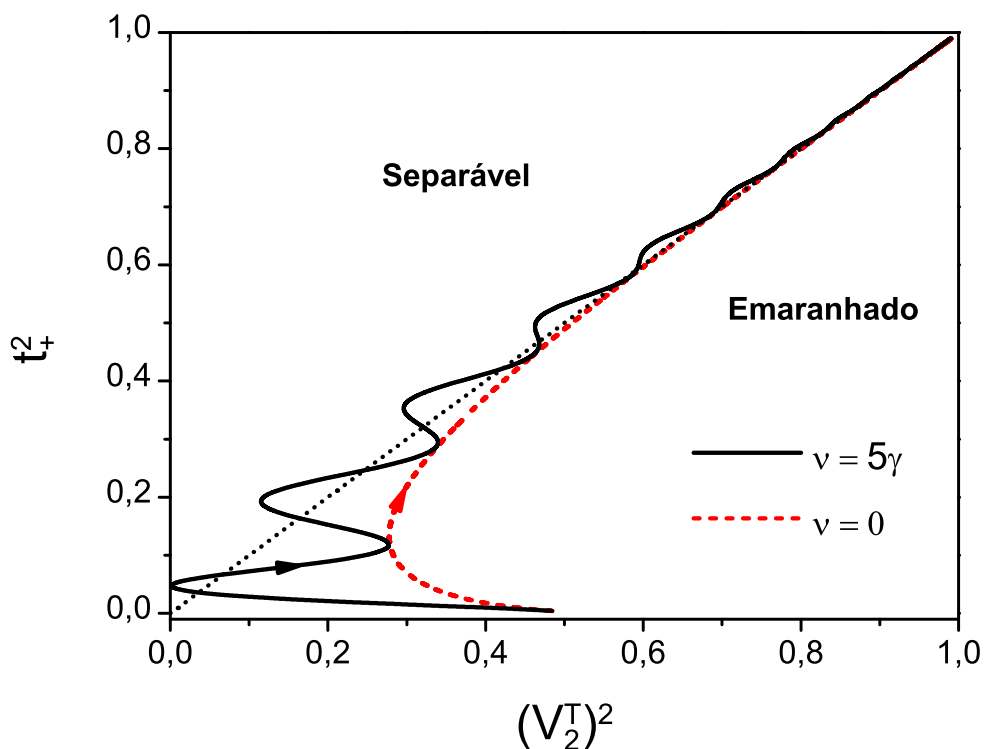


Figura 3.6: Evolução do estado dinâmico de Das-Agarwal para dois qubits interagentes com condição inicial $p = 0,4$ e diferença de fase inicial $\chi = \pi/4$. A curva tracejada representa a evolução para $\nu = 0$ e a sólida para $\nu = 5\gamma$. Os eixos estão em unidades adimensionais, enquanto ν e γ estão em s^{-1} .

para que tenhamos uma base de comparação.

3.4 Quantificação do Emaranhamento

Concurrence

Uma medida prática para quantificar o emaranhamento em qualquer estado de dois qubits foi proposta por Wootters e denominada *concurrence* [9]. Sua definição está relacionada com os elementos do operador $\tilde{\rho}$, que é construído a partir do operador densidade do sistema executando-se

operações de spin-flip em seus subsistemas, tal que

$$\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y, \quad (3.43)$$

sendo σ_y o operador de Pauli e ρ^* o complexo conjugado da matriz ρ .

Dada a Eq.(3.43), define-se a *concurrence* de ρ como sendo

$$C(\rho) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}, \sqrt{\lambda_4}\}, \quad (3.44)$$

onde λ_i são os autovalores da matriz $\rho\tilde{\rho}$, rotulados em ordem decrescente ($\lambda_1 \geq (\sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}, \sqrt{\lambda_4})$).

Para estados separáveis tem-se $C(\rho) = 0$ e para estados maximamente emaranhados $C(\rho) = 1$.

Podemos escrever a *concurrence* para um estado X em termos dos parâmetros (3.11)-(3.14), tal que

$$C = \max\{0, C_1, C_2\} \quad (3.45)$$

com

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{v_-^2 + w_+^2} - \sqrt{t_-^2 - u_-^2}, \\ C_2 &= \sqrt{v_+^2 + w_-^2} - \sqrt{t_+^2 - u_+^2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Necessariamente, $t_-^2 \geq u_-^2$ e $t_+^2 \geq u_+^2$, e para que não haja emaranhamento ambas as desigualdades $C_1 \leq 0$ e $C_2 \leq 0$ devem ser satisfeitas, ou seja,

$$\begin{aligned} v_-^2 + w_+^2 + u_-^2 &\leq t_-^2 \\ v_+^2 + w_-^2 + u_+^2 &\leq t_+^2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Negatividade

A medida de emaranhamento proposta por Vidal e Werner [10] está relacionada com o critério de separabilidade de Peres-Horodecki [7, 8] e é denominada negatividade. Como vimos anteriormente, se o operador resultante da transposição parcial em uma dada matriz densidade for

positivo, diz-se que este estado é separável, mas caso este leve a um operador não físico, ou seja, com autovalores negativos, diz-se então que é emaranhado. A negatividade se propõe a medir o quanto ρ^{T_i} (para $i = 1$ ou 2) falha em ser positivo semi-definido, de forma que em sua definição, faz-se uso da soma dos módulos dos autovalores de ρ^{T_i} , tal que

$$N(\rho) = \|\rho^{T_i}\| - 1, \quad (3.48)$$

sendo $\|\circ\|$ a norma do traço do argumento.

A Eq.(3.48), pode ser escrita em termos dos parâmetros $\{t_+, t_-, V_1^T, V_2^T\}$, como

$$N_{VW} = \frac{1}{2}(|t_- + V_1^T| + |t_- - V_1^T| + |t_+ + V_2^T| + |t_+ - V_2^T|) - 1. \quad (3.49)$$

Ao se comparar a negatividade e a *concurrence*, nota-se que estas duas quantidades são iguais para estados puros, mas que $N \leq C$ para estados de mistura [10], logo, para um dado valor da *concurrence*, existe um intervalo de possíveis valores para a negatividade, o que implica que estas ordenam diferentemente os estados quanto ao seu emaranhamento.

3.4.1 Medida de Emaranhamento via Distâncias Quadráticas

A partir da violação das desigualdades propostas em (3.27) podemos efetivamente definir uma medida de emaranhamento, ou seja, verificaremos quão negativa é a distância $(s_i^T)^2$. A esta medida em termos das desigualdades damos o nome N_{dist} e a definimos como

$$N_{dist} = \max \left\{ 0, - (s_1^T)^2, - (s_2^T)^2 \right\}. \quad (3.50)$$

Note que existe uma certa equivalência entre (3.50) e a *concurrence*, uma vez que as condições para que não haja emaranhamento nos conduzem às desigualdades dadas em (3.47), que coincidem com as distâncias quadráticas em (3.27). Desta forma, a condição de separabilidade é igual para ambas as medidas.

Suponha ainda que em (3.47) tenhamos $C_2 > 0$ e $C_2 > C_1$. Dessa forma, $C = C_2$ é a medida do emaranhamento, que é diferente da distância $(s_2^T)^2 = t_+^2 - (V_2^T)^2$. No entanto, podemos encontrar uma relação entre as duas, de forma que

$$C_2^2 + 2C_2\sqrt{t_+^2 - u_+^2} = -(s_2^T)^2.$$

Para $C_2 = 0$, necessariamente $s_2^T = 0$, e para $C_2 = 1$ (emaranhamento máximo entre os subsistemas), temos, a partir de (3.47), que $\sqrt{v_+^2 + w_-^2} = 1 + \sqrt{t_+^2 - u_+^2}$, tal que a Eq.(3.4.1) assumirá o seu menor valor $(s_2^T)_{\min}^2 = -\left(1 + 2\sqrt{t_+^2 - u_+^2}\right)$. Uma análise similar pode ser feita para o caso $C_1 > 0$ e $C_1 > C_2$, obtendo resultados semelhantes. Desta forma $(s_1^T)^2$ decresce monotonicamente de 0 a $-\left(1 + 2\sqrt{t_-^2 - u_-^2}\right)$ e $(s_2^T)^2$ de 0 a $-\left(1 + 2\sqrt{t_+^2 - u_+^2}\right)$.

No que segue, faremos uma análise comparativa entre a distância quadrática, a negatividade e a *concurrence*, dadas respectivamente por (3.50), (3.49) e (3.45).

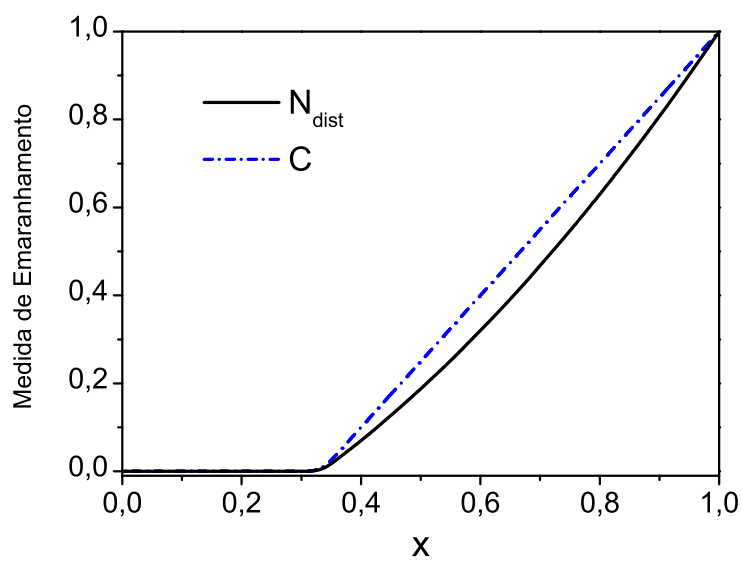
A Fig.(3.7) mostra as medidas de emaranhamento (3.45), (3.50) e (3.49) para o estado de Werner que é descrito pela matriz densidade (3.29) [30]. Todas estas medidas podem ser escritas como funções do parâmetro intrínseco x que está no intervalo de existência do estado. Através de (3.7)-(a) e (3.7)-(b), podemos notar que existe uma concordância qualitativa entre as três medidas. O mesmo acontece para o estado de Peres-Horodecki [7] descrito por (3.32) e exibido na Fig.(3.8); para este estado, a *concurrence* é uma linha reta e as negatividades apresentam curvas quase coincidentes.

Os gráficos da Fig.(3.9) esboçam as medidas de emaranhamento para o estado de Gisin [31], descrito pela matriz (3.36), para diferentes valores do parâmetro $|ab|$. A Fig.(3.9)-(a) mostra que a *concurrence* C e as negatividades N_{dist} e N_{VW} são coincidentes para $|ab| = 0.5$. No entanto, para os outros valores de $|ab|$ isso não acontece, como exemplificamos na Fig.(3.9)-(b) para $|ab| = 0.34$.

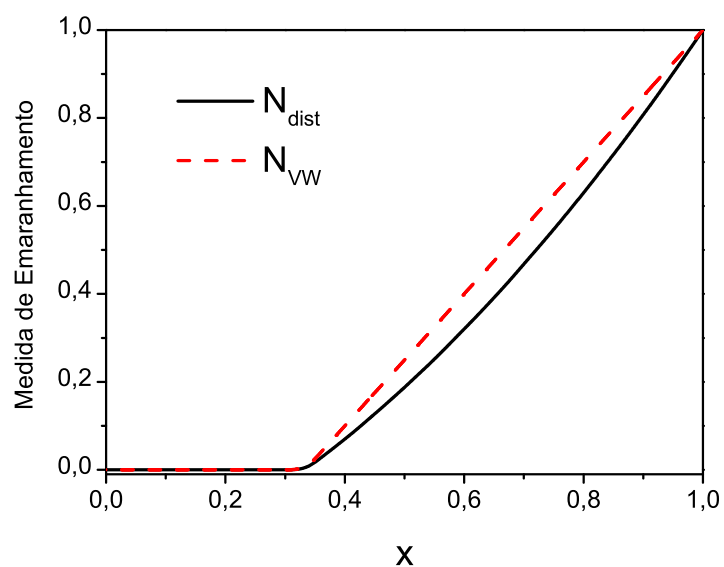
Para o estado dinâmico de Almeida e colaboradores [12], mais uma vez há uma con-

cordância qualitativa entre as três medidas de emaranhamento, como podemos verificar na Fig.(3.10). Quando $|\alpha|/|\beta| < 1$, o fenômeno de morte súbita do emaranhamento é revelado, como podemos ver na Fig.(3.10)-(a), caso contrário os sistemas permanecem emaranhados para todos os tempos finitos, como mostrado em (3.10)-(b). Da mesma forma, para o sistema de qubits interagentes proposto por Das-Agarwal [37], descrito pela matriz densidade (3.42) e esboçado pela Fig.(3.11), quando uma seqüência de colapsos e ressurgimentos do emaranhamento emerge, as curvas são ligeiramente diferentes quanto às amplitudes dos picos, mantendo no entanto o mesmo padrão. Em suma, as três medidas fornecem as mesmas informações e são qualitativamente equivalentes.

Com os exemplos apresentados verificamos que todas as três medidas fornecem as mesmas informações e também exibem a mesma tendência gráfica, apesar de serem formalmente distintas.



(a)



(b)

Figura 3.7: Medidas de emaranhamento para o estado de Werner, como função do parâmetro x . No item (a) faz-se a comparação entre as medidas (3.44) e (3.50) e em (b) a comparação entre (3.49) e (3.50).

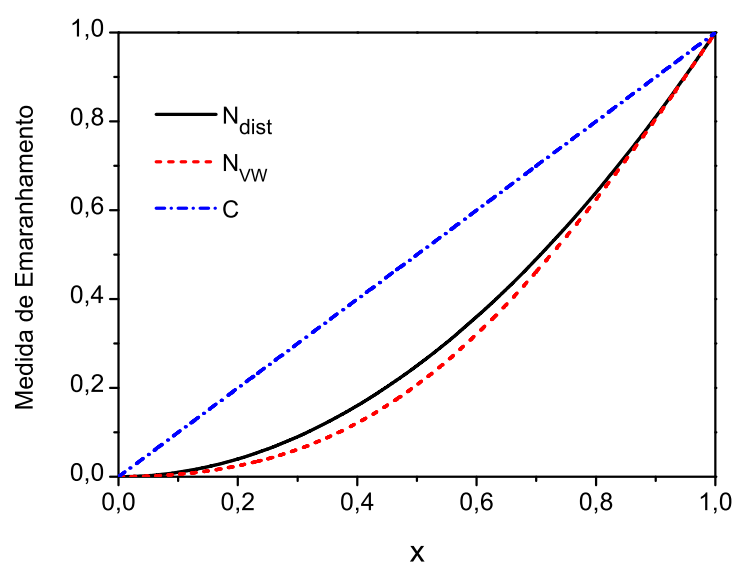
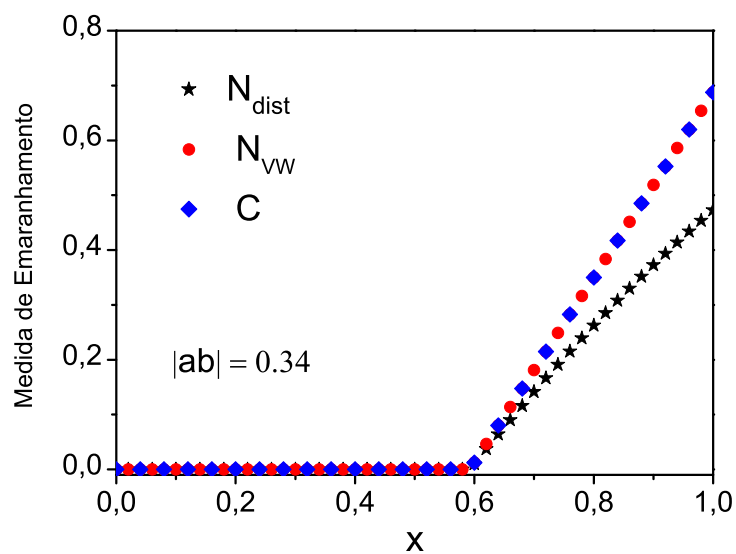
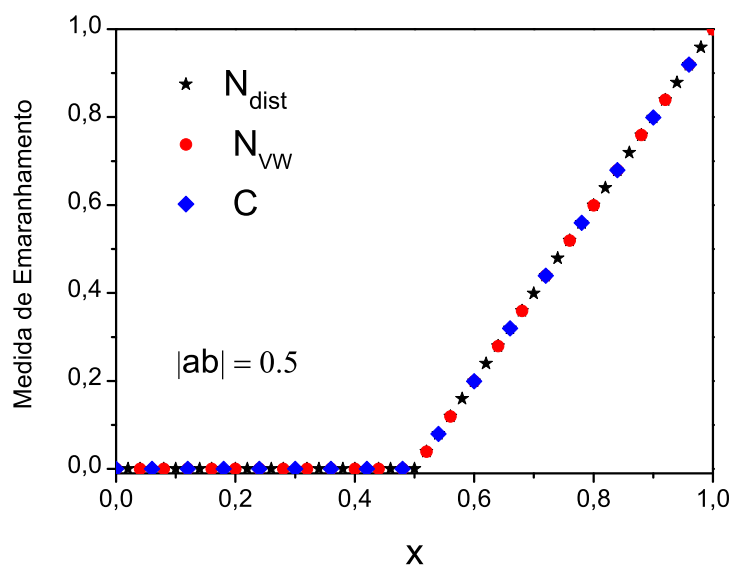


Figura 3.8: As medidas de emaranhamento (3.44), (3.50) e (3.49) são comparadas simultaneamente para o estado de Peres-Horodecki. Todas elas são funções do parâmetro intrínseco x .

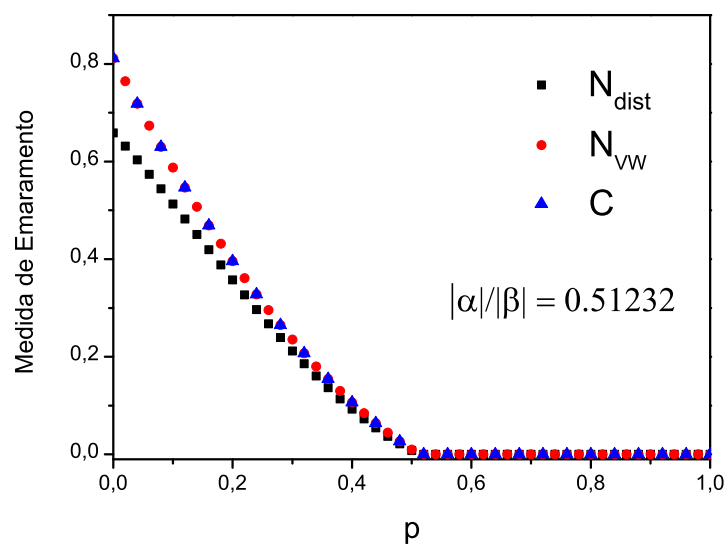


(a)

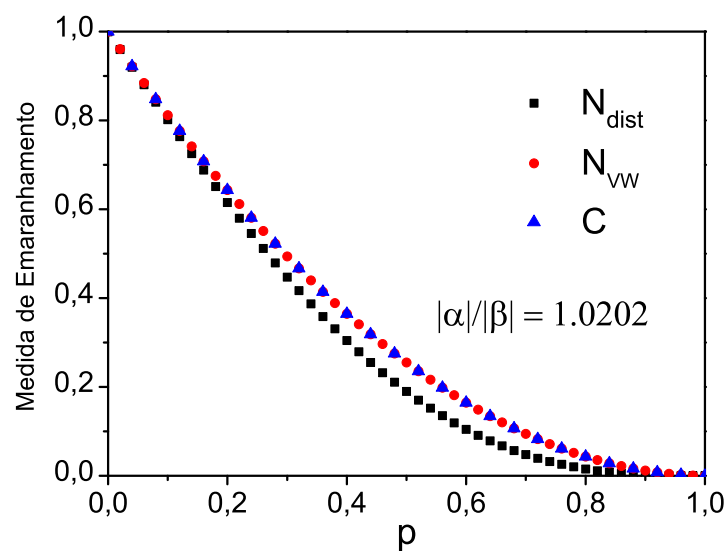


(b)

Figura 3.9: As medidas de emaranhamento (3.47), (3.50) e (3.49) para o estado de Gisin, como função do parâmetro intrínseco x . No item (a) visualiza-se as curvas para $|ab| = 0.34$ e em (b) para $|ab| = 0.5$.

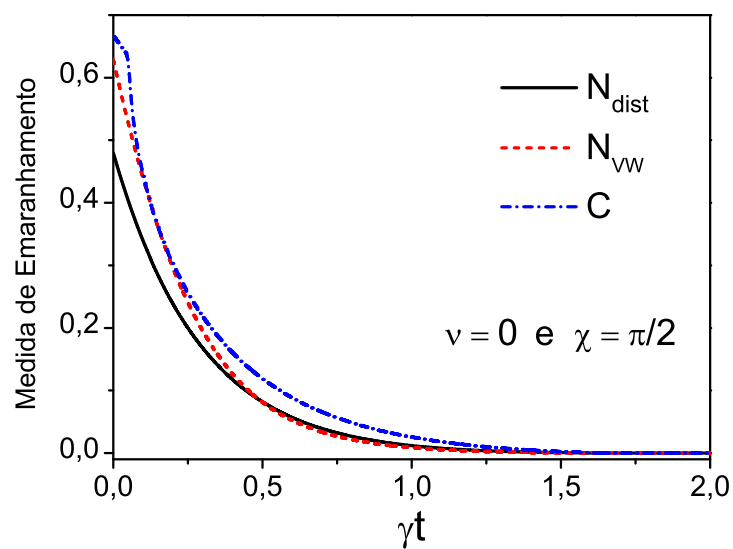


(a)

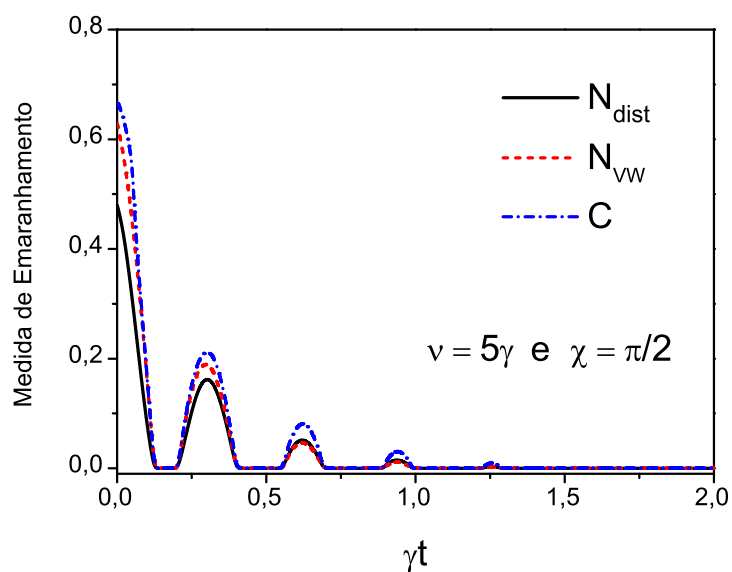


(b)

Figura 3.10: Medidas de emaranhamento (3.47), (3.50) e (3.49) para o estado Almeida-
Davidovich. O item (a) representa o estado para os parâmetros $|\alpha|/|\beta| = 0.5123$ enquanto
o item (b) o representa para $|\alpha|/|\beta| = 1.0202$. O parâmetro $p = [1 - \exp(-\gamma t)]$ (sendo γ a
taxa de decaimento e $p \in [0, 1)$).



(a)



(b)

Figura 3.11: As medidas de emaranhamento (3.47), (3.50) e (3.49) para o estado de Das-Agarwal. mostram o estado evoluindo no tempo, . No item (a) representamos qubits não interagentes ($\nu = 0$) e no item (b) qubits interagentes, com um parâmetro de interação $\nu = 5\gamma$), onde γ é a constante de decaimento. Os parâmetros ν e γ estão em s^{-1} .

Capítulo 4

Emaranhamento e separabilidade para estados da variedade $D-7$

O método de distâncias de emaranhamento definido em termos de variáveis com uma geometria hiperbólica, semelhante ao espaço de Minkowski da relatividade especial, foi apresentado no Capítulo 3 [42]. Apesar de ser baseado no critério de TPP [7,8] ele conduz a uma nova visão do fenômeno de separabilidade e de emaranhamento, uma vez que fornece uma divisão quantitativa de um *espaço de fase*, que estabelece uma real, não apenas pictórica, determinação das fronteiras entre os estados separáveis e emaranhados. O método expressa o operador densidade em termos de vetores de polarização (VPs) e da matriz de correlação (MC), e permite verificar que o critério TPP é realmente uma reflexão de um VP e de alguns elementos da MC por planos especiais no espaço 3-D e nos permite ainda definir um quantificador de emaranhamento.

Enquanto que no capítulo 3 foram trabalhados exemplos com um tipo especial de estado, bastante comum na literatura, denominado estado X [12, 30, 31, 35–37, 48–51], aqui mostraremos que ele pertence a uma classe maior de estados de dois qubits, que denominamos classe da variedade $D - 7$, pois cada estado depende, *no máximo*, de sete parâmetros independentes e têm a propriedade de simetria de um subgrupo de $SU(4)$, o $SU(2) \times U(1) \times SU(2)$. Este subgrupo possui quatro álgebras $su(2)$ (seis geradores) em intersecção, que comutam com o gerador de $u(1)$. Esta abordagem, baseada no trabalho de A.R.P. Rau [52], fornece uma visão

mais abrangente do método proposto anteriormente, bem como sua generalização.

4.1 A álgebra $su(4)$

Estados globais de sistemas de dois qubits são representados por matrizes 4×4 que possuem quinze elementos independentes, mais a identidade. Estes sistemas apresentam as simetrias do grupo $SU(4)$ e os estados são expressos em termos dos geradores da álgebra $su(4)$. Existem quinze geradores mais a unidade. Cada gerador é escrito em termos de um produto direto envolvendo o operador unidade e as três matrizes de Pauli $\{\hat{I}_1, \hat{\sigma}_1^\alpha\} \times \{\hat{I}_2, \hat{\sigma}_2^\beta\}$, com $(\hat{\sigma}^\alpha \hat{\sigma}^\beta = \hat{I} \delta_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\sigma}^\gamma)$, onde os índices gregos denotam as componentes x, y, z dos geradores. Três geradores da álgebra $su(4)$ são $\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha$, seis outros possuem a forma $\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\beta$ ($\alpha \neq \beta$), três são $\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{I}_2$, outros três $\hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha$ e por último a identidade $\hat{I}_1 \otimes \hat{I}_2$. Cada um destes dezesseis geradores será representado como \hat{e}_l , com $l = 0, \dots, 15$ e $\hat{e}_0 = \hat{I}_1 \otimes \hat{I}_2$. Os índices subscritos denotam a qual subsistema os geradores pertencem. Sendo assim, um estado de dois qubits pode ser escrito como

$$\hat{\rho}_{1,2} = \frac{1}{4} \left(\hat{e}_0 + \sum_{l=1}^{15} c_l \hat{e}_l \right) \quad (4.1)$$

e necessariamente, $\text{Tr} \hat{e}_l = 0$.

Muitos sistemas físicos têm seus estados associados às subálgebras do $su(4)$. Em particular, é bastante comum encontrar na literatura estudos teóricos e experimentais de estados físicos representados pelos geradores da subálgebra $su(2) \times u(1) \times su(2)$ [53]. Esta álgebra é originada pelo operador unidade mais 7 geradores: um pertence à álgebra unitária $u(1)$ e comuta com as seis outras, criando assim quatro subálgebras $su(2)$. As álgebras $su(2)$ não permitem qualquer produto direto $su(2) \times su(2)$, pois os geradores de uma das $su(2)$ não comutam com os geradores das outras, como será mostrado abaixo. Os estados dos dois subsistemas possuem, conjuntamente, sete grupos de parâmetros independentes, esses estados são ditos formar uma

classe de variedade D-7.

4.2 As subálgebras $su(2) \times u(1) \times su(2)$

Vamos agora construir as diversas representações de estados da classe de variedade D-7. Os possíveis geradores para a álgebra $u(1)$ são: (1) $\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha$, (2) $\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\beta$ e (3) $\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{I}_2$ (que é equivalente a $\hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha$ mudando os subíndices $1 \leftrightarrow 2$).

(1) O gerador $\hat{e}_1 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha$ de $u(1)$ comuta com os seis elementos do subgrupo

$$E_6 = \left\{ \hat{e}_2 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{I}_2, \hat{e}_3 = \hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha, \hat{e}_4 = -\hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma, \right. \\ \left. \hat{e}_5 = \hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\beta, \hat{e}_6 = \hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma, \hat{e}_7 = \hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{\sigma}_2^\beta \right\}, \quad (4.2)$$

com $(\alpha \neq \beta \neq \gamma)$, que forma quatro subálgebras $su(2)$

$$A_1 = \{\hat{e}_2, \hat{e}_4, \hat{e}_6\}, \quad A_2 = \{\hat{e}_2, \hat{e}_5, \hat{e}_7\}, \quad A_3 = \{\hat{e}_3, \hat{e}_4, \hat{e}_7\}, \quad A_4 = \{\hat{e}_3, \hat{e}_5, \hat{e}_6\}, \quad (4.3)$$

sendo $E_6 = \bigcup_k A_k$. As relações de comutação obedecidas, por exemplo, pelos elementos da subálgebra A_1 , são $[\hat{e}_2, \hat{e}_4] = 2i\hat{e}_6$, $[\hat{e}_4, \hat{e}_6] = 2i\hat{e}_2$ e $[\hat{e}_6, \hat{e}_2] = 2i\hat{e}_4$, as demais relações são obtidas pela mudança cíclica dos operadores. Note que $[\hat{e}_2, \hat{e}_3] = [\hat{e}_4, \hat{e}_5] = [\hat{e}_6, \hat{e}_7] = 0$ e que quaisquer duas bases A_k possuem um elemento em comum ($A_j \cap A_k = \{\hat{e}_l\}$), o que implica que não podemos formar nenhum produto direto $su(2) \times su(2)$ escolhendo qualquer duas subálgebras desta base.

(2) Outra possibilidade é escolher $\hat{f}_1 = \hat{\sigma}_i^\alpha \otimes \hat{\sigma}_j^\beta$ como gerador de $u(1)$. Esta base comuta com o subgrupo

$$F_6 = \left\{ \hat{f}_2 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{I}_2, \hat{f}_3 = \hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\beta, \hat{f}_4 = -\hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha, \right. \\ \left. \hat{f}_5 = \hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma, \hat{f}_6 = \hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha, \hat{f}_7 = \hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{\sigma}_2^\beta \right\}, \quad (4.4)$$

com $(\alpha \neq \beta \neq \gamma)$. As quatro subálgebras $su(2)$ formadas por (4.4) são

$$B_1 = \{\hat{f}_2, \hat{f}_4, \hat{f}_6\}, \quad B_2 = \{\hat{f}_2, \hat{f}_5, \hat{f}_7\}, \quad B_3 = \{\hat{f}_3, \hat{f}_4, \hat{f}_7\}, \quad B_4 = \{\hat{f}_3, \hat{f}_5, \hat{f}_6\}, \quad (4.5)$$

onde $F_6 = \bigcup_k B_k$ e $u(1) \times F_6 \subset su(4)$.

(3) Por último, o gerador $\hat{g}_1 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{I}_2$, que comuta com a base

$$G_6 = \left\{ \hat{g}_2 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha, \hat{g}_3 = \hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha, \hat{g}_4 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\beta, \right. \\ \left. \hat{g}_5 = \hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\beta, \hat{g}_6 = \hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma, \hat{g}_7 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma \right\}, \quad (4.6)$$

com $(\alpha \neq \beta \neq \gamma)$, que forma quatro subalgebras $su(2)$

$$C_1 = \{\hat{g}_2, \hat{g}_4, \hat{g}_6\}, \quad C_2 = \{\hat{g}_2, \hat{g}_5, \hat{g}_7\}, \quad C_3 = \{\hat{g}_3, \hat{g}_4, \hat{g}_7\}, \quad C_4 = \{\hat{g}_3, \hat{g}_5, \hat{g}_6\}, \quad (4.7)$$

com $(F_6 = \bigcup_k G_k$ e $u(1) \times G_6 \subset su(4))$.

Estes três tipos de subalgebras, dadas por (4.3), (4.5) e (4.7), são determinadas pelos seus respectivos geradores $u(1)$ e possuem a mesma estrutura de grupo, em outras palavras, elas seguem a mesma tabela de multiplicação dada em Tab.(4.1). As relações de comutação, que também são comuns às três subalgebras, estão descritas na Tabela (4.2).

	\hat{e}_0	\hat{e}_1	\hat{e}_2	\hat{e}_3	\hat{e}_4	\hat{e}_5	\hat{e}_6	\hat{e}_7
\hat{e}_0	\hat{e}_0	\hat{e}_1	\hat{e}_2	\hat{e}_3	\hat{e}_4	\hat{e}_5	\hat{e}_6	\hat{e}_7
\hat{e}_1	\hat{e}_1	\hat{e}_0	\hat{e}_3	\hat{e}_2	\hat{e}_5	\hat{e}_4	\hat{e}_7	\hat{e}_6
\hat{e}_2	\hat{e}_2	\hat{e}_3	\hat{e}_0	\hat{e}_1	$i\hat{e}_6$	$i\hat{e}_7$	$-i\hat{e}_4$	$-i\hat{e}_5$
\hat{e}_3	\hat{e}_3	\hat{e}_2	\hat{e}_1	\hat{e}_0	$i\hat{e}_7$	$i\hat{e}_6$	$-i\hat{e}_5$	$-i\hat{e}_4$
\hat{e}_4	\hat{e}_4	\hat{e}_5	$-i\hat{e}_6$	$-i\hat{e}_7$	\hat{e}_0	\hat{e}_1	$i\hat{e}_2$	$i\hat{e}_3$
\hat{e}_5	\hat{e}_5	\hat{e}_4	$-i\hat{e}_7$	$-i\hat{e}_6$	\hat{e}_1	\hat{e}_0	$i\hat{e}_3$	$i\hat{e}_2$
\hat{e}_6	\hat{e}_6	\hat{e}_7	$i\hat{e}_4$	$i\hat{e}_5$	$-i\hat{e}_2$	$-i\hat{e}_3$	\hat{e}_0	\hat{e}_1
\hat{e}_7	\hat{e}_7	\hat{e}_6	$i\hat{e}_5$	$i\hat{e}_4$	$-i\hat{e}_3$	$-i\hat{e}_2$	\hat{e}_1	\hat{e}_0

Tabela 4.1: Tabela de multiplicação $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$.

	\hat{e}_0	\hat{e}_1	\hat{e}_2	\hat{e}_3	\hat{e}_4	\hat{e}_5	\hat{e}_6	\hat{e}_7
\hat{e}_0	0	0	0	0	0	0	0	0
\hat{e}_1	0	0	0	0	0	0	0	0
\hat{e}_2	0	0	0	0	$2i\hat{e}_6$	$2i\hat{e}_7$	$-2i\hat{e}_4$	$-2i\hat{e}_5$
\hat{e}_3	0	0	0	0	$2i\hat{e}_7$	$2i\hat{e}_6$	$-2i\hat{e}_5$	$-2i\hat{e}_4$
\hat{e}_4	0	0	$-2i\hat{e}_6$	$-2i\hat{e}_7$	0	0	$2i\hat{e}_2$	$2i\hat{e}_3$
\hat{e}_5	0	0	$-2i\hat{e}_7$	$-2i\hat{e}_6$	0	0	$2i\hat{e}_3$	$2i\hat{e}_2$
\hat{e}_6	0	0	$2i\hat{e}_4$	$2i\hat{e}_5$	$-2i\hat{e}_2$	$-2i\hat{e}_3$	0	0
\hat{e}_7	0	0	$2i\hat{e}_5$	$2i\hat{e}_4$	$-2i\hat{e}_3$	$-2i\hat{e}_2$	0	0

Tabela 4.2: Tabela de comutação $[\hat{e}_i, \hat{e}_j]$.

4.3 Estrutura dos autovalores para os estados de variedade D-7

Uma vez que o operador densidade de estados pode ser escrito da forma da Eq.(4.1), utilizando-se os elementos do subgrupo como base, e como o elemento comutativo comum comuta com cada um deles em separado, isto implica que ele deve comutar também com o operador densidade. Desta forma, utilizando-se um estado genérico de dois qubits, parametrizado na forma de Fano [41],

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \left(1_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes \sum_{\delta=\alpha,\beta,\gamma} P_{2,\delta} \hat{\sigma}_2^\delta + \sum_{\delta=\alpha,\beta,\gamma} P_{1,\delta} \hat{\sigma}_1^\delta \otimes 1_2 + \sum_{\delta=\alpha,\beta,\gamma} \sum_{\epsilon=\alpha,\beta,\gamma} M_{\delta\epsilon} \hat{\sigma}_1^\delta \otimes \hat{\sigma}_2^\epsilon \right), \quad (4.8)$$

onde, $P_{1(2),\delta}$ são os VPs para o subsistema 1(2) e $M_{\delta\epsilon} = \langle \hat{\sigma}_1^\delta \otimes \hat{\sigma}_2^\epsilon \rangle$ são os elementos da MC, apresentamos a estrutura matricial dos estados construídos a partir das condições $[\hat{\rho}, \hat{e}_1]$, $[\hat{\rho}, \hat{f}_1]$ e $[\hat{\rho}, \hat{g}_1]$, e as novas desigualdades quadráticas que resultam destas novas estruturas. Em (4.8) os índices δ e ϵ recebem, cada um, o conjunto (α, β, γ) , que posteriormente assumirão, cada um, os rótulos (x, y, z) .

4.3.1 O gerador $\hat{e}_1 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha$

O comutador entre a matriz (4.8) e o gerador $\hat{e}_1 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha$ é dado por

$$\begin{aligned} [\hat{\rho}, \hat{e}_1] = & \frac{1}{4} [(1_1 \otimes 1_2), (\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha)] + \frac{1}{4} \left[\left(1_1 \otimes \sum_{\delta=\alpha,\beta,\gamma} P_{2,\delta} \hat{\sigma}_2^\delta \right), (\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha) \right] + \\ & + \frac{1}{4} \left[\left(\sum_{\delta=\alpha,\beta,\gamma} P_{1,\delta} \hat{\sigma}_1^\delta \otimes 1_2 \right), (\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha) \right] + \frac{1}{4} \left[\left(\sum_{\delta=\alpha,\beta,\gamma} \sum_{\epsilon=\alpha,\beta,\gamma} M_{\delta\epsilon} \hat{\sigma}_1^\delta \otimes \hat{\sigma}_2^\epsilon \right), (\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha) \right]. \end{aligned}$$

Uma vez que este gerador comuta com a base (4.2), teremos

$$\begin{aligned} [\hat{\rho}, \hat{e}_1] = & \frac{i}{2} \left[-P_{1,\beta} [(\hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha)] + P_{1,\gamma} [(\hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha)] - P_{2,\beta} [(\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma)] + P_{2,\gamma} [(\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\beta)] \right. \\ & \left. + M_{\alpha\beta} [(1_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma)] + M_{\alpha\gamma} [(1_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\beta)] - M_{\beta\alpha} [(\hat{\sigma}_1^\gamma \otimes 1_2)] + M_{\gamma\alpha} [(\hat{\sigma}_1^\beta \otimes 1_2)] \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Cada termo da soma (4.9) possui um elemento de base que é linearmente independente, então, para que $[\hat{\rho}, \hat{e}_1] = 0$ é necessário que o coeficiente que multiplica cada termo seja nulo, ou seja,

$$\begin{aligned} P_{1,\beta} = 0, \quad P_{1,\gamma} = 0, \quad P_{2,\beta} = 0, \quad P_{2,\gamma} = 0, \\ M_{\alpha\beta} = 0, \quad M_{\alpha\gamma} = 0, \quad M_{\beta\alpha} = 0, \quad M_{\gamma\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dessa forma, o novo estado contruído a partir do gerador $\hat{e}_1 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha$ é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = & \frac{1}{4} (1_1 \otimes 1_2 + P_{2,\alpha} 1_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha + P_{1,\alpha} \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes 1_2 + M_{\alpha\alpha} \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha + \\ & + M_{\beta\beta} \hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\beta + M_{\gamma\beta} \hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{\sigma}_2^\beta + M_{\beta\gamma} \hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma + M_{\gamma\gamma} \hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma), \end{aligned} \quad (4.11)$$

reduzindo, assim, o número de parâmetros livres de quinze para sete. Para diferentes escolhas de α , β e γ uma nova classe de estados é encontrada. Cada estado apresenta um novo conjunto de autovalores, que serão analisados a seguir.

Escolha 1: $(\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z)$.

Para $\alpha = x$, $\beta = y$ e $\gamma = z$, verificamos que o elemento comutativo comum será $\hat{e}_1 = \hat{\sigma}_1^x \otimes \hat{\sigma}_2^x$ e que as condições (4.10) reduzem-se a $P_{1,y} = P_{1,z} = P_{2,y} = P_{2,z} = M_{xy} = M_{xz} = M_{yx} = M_{zx} = 0$.

Assim, a matriz densidade (4.11) pode ser escrita na base computacional como

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + M_{zz} & P_{2,x} - iM_{zy} & P_{1,x} - iM_{yz} & M_{xx} - M_{yy} \\ P_{2,x} + iM_{zy} & 1 - M_{zz} & M_{xx} + M_{yy} & P_{1,x} + iM_{yz} \\ P_{1,x} + iM_{yz} & M_{xx} + M_{yy} & 1 - M_{zz} & P_{2,x} + iM_{zy} \\ M_{xx} - M_{yy} & P_{1,x} - iM_{yz} & P_{2,x} - iM_{zy} & 1 + M_{zz} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

com os seus autovalores dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{4} (1 - M_{xx}) \pm \frac{1}{4} \sqrt{(P_{1,x} - P_{2,x})^2 + (M_{zz} + M_{yy})^2 + (M_{yz} - M_{zy})^2}, \quad (4.13)$$

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{4} (1 + M_{xx}) \pm \frac{1}{4} \sqrt{(P_{1,x} + P_{2,x})^2 + (M_{zz} - M_{yy})^2 + (M_{yz} + M_{zy})^2}. \quad (4.14)$$

Como vimos no capítulo anterior, dada a matriz densidade de um sistema, a transposição parcial positiva é equivalente a fazermos as mudanças $P_{2,y} \rightarrow -P_{2,y}$ e $M_{ky} \rightarrow -M_{ky}$ para $(k = x, y, z)$ em seus elementos. Dessa forma, podemos obter a base de autovalores da matriz transposta ρ^T através das Eqs.(4.13) e (4.14). A saber

$$\lambda_{\pm}^T = \frac{1}{4} (1 - M_{xx}) \pm \frac{1}{4} \sqrt{(P_{1,x} - P_{2,x})^2 + (M_{zz} - M_{yy})^2 + (M_{yz} + M_{zy})^2}, \quad (4.15)$$

$$\mu_{\pm}^T = \frac{1}{4} (1 + M_{xx}) \pm \frac{1}{4} \sqrt{(P_{1,x} + P_{2,x})^2 + (M_{zz} + M_{yy})^2 + (M_{yz} - M_{zy})^2}. \quad (4.16)$$

Uma análise semelhante àquela feita no capítulo 3, nos permite construir novas distâncias quadráticas examinando a positividade dos autovalores da matriz transposta, (4.15) e (4.16).

Para tal, consideremos oito novos parâmetros

$$t_{\pm} = \frac{1 \pm M_{xx}}{2}, \quad u_{\pm} = \frac{P_{1,x} \pm P_{2,x}}{2}, \quad v_{\pm} = \frac{M_{yy} \pm M_{zz}}{2}, \quad w_{\pm} = \frac{M_{yz} \pm M_{zy}}{2}. \quad (4.17)$$

Uma vez que $\lambda_{\pm}^T = (t_{-} \pm V_1^T) / 2$ e $\mu_{\pm}^T = (t_{+} \pm V_2^T) / 2$, onde escrevemos

$$V_1^T = \sqrt{u_-^2 + v_-^2 + w_+^2}, \quad V_2^T = \sqrt{u_+^2 + v_+^2 + w_-^2}, \quad (4.18)$$

estão no intervalo $[0, 1]$, as seguintes desigualdades são válidas

$$(s_1^T)^2 \equiv t_-^2 - (V_1^T)^2 \geq 0, \quad (s_2^T)^2 \equiv t_+^2 - (V_2^T)^2 \geq 0. \quad (4.19)$$

Escolha 3: $(\alpha, \beta, \gamma) = (y, z, x)$.

Neste caso, o elemento comutativo comum é $\hat{e}_1 = \hat{\sigma}_1^y \otimes \hat{\sigma}_2^y$ e as condições (4.10) são $P_{1,z} = P_{1,x} = P_{2,z} = P_{2,x} = M_{yz} = M_{yx} = M_{zy} = M_{xy} = 0$. Desta forma, a matriz densidade (4.11) é escrita como

$$\hat{\rho}_{1,2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + M_{zz} & -iP_{2,y} + M_{zx} & -iP_{1,y} + M_{xz} & M_{xx} - M_{yy} \\ iP_{2,y} + M_{zx} & 1 - M_{zz} & M_{xx} + M_{yy} & -iP_{1,y} - M_{xz} \\ iP_{1,y} + M_{xz} & M_{xx} + M_{yy} & 1 - M_{zz} & -iP_{2,y} - M_{zx} \\ M_{xx} - M_{yy} & iP_{1,y} - M_{xz} & iP_{2,y} - M_{zx} & 1 + M_{zz} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

sendo os autovalores dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{4}(1 - M_{yy}) \pm \frac{1}{4}\sqrt{(P_{1,y} - P_{2,y})^2 + (M_{xx} - M_{zz})^2 + (M_{xz} + M_{zx})^2} \quad (4.23)$$

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{4}(1 + M_{yy}) \pm \frac{1}{4}\sqrt{(P_{1,y} + P_{2,y})^2 + (M_{xx} - M_{zz})^2 + (M_{xz} - M_{zx})^2}. \quad (4.24)$$

Note que a estrutura dos autovalores para esta classe de estados é a mesma encontrada para as duas últimas subálgebras geradas por \hat{e}_1 . Desta forma, é fácil ver que as novas distâncias quadráticas terão a mesma estrutura já apresentada, com os novos parâmetros dados por

$$t_{\pm} = \frac{1 \pm M_{yy}}{2}, \quad u_{\pm} = \frac{P_{1,y} \pm P_{2,y}}{2}, \quad v_{\pm} = \frac{M_{xx} \pm M_{zz}}{2}, \quad w_{\pm} = \frac{M_{xz} \pm M_{zx}}{2}. \quad (4.25)$$

4.3.2 O gerador $\hat{f}_1 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\beta$ ($\alpha \neq \beta$)

De forma análoga ao gerador \hat{e}_1 , calculamos o comutador entre a matriz (4.8) e o gerador $\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\beta$. Uma vez que este gerador comuta com a base (4.4), teremos

$$\begin{aligned} [\hat{\rho}, \hat{f}_1] &= \frac{i}{2} \left[P_{2,\alpha} (\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma) - P_{2,\gamma} (\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha) - P_{1,\beta} (\hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{\sigma}_2^\beta) + P_{1,\gamma} (\hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\beta) \right. \\ &\quad \left. + M_{\alpha\alpha} (1_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma) - M_{\alpha\gamma} (1_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha) - M_{\beta\beta} (\hat{\sigma}_1^\gamma \otimes 1_2) + M_{\gamma\beta} (\hat{\sigma}_1^\beta \otimes 1_2) \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Como cada termo da soma (4.26) possui um elemento de base que é linearmente independente, então, para que $[\hat{\rho}, \hat{f}_1] = 0$ é necessário que o coeficiente que multiplica cada termo seja nulo,

ou seja,

$$\begin{aligned} P_{1,\beta} &= 0, & P_{1,\gamma} &= 0, & P_{2,\alpha} &= 0, & P_{2,\gamma} &= 0, \\ M_{\alpha\alpha} &= 0, & M_{\alpha\gamma} &= 0, & M_{\beta\beta} &= 0, & M_{\gamma\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Desta forma, o novo estado contruído a partir do gerador $\hat{f}_1 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\beta$ é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{4} \left(1_1 \otimes 1_2 + P_{2,\beta} 1_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\beta + P_{1,\alpha} \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes 1_2 + M_{\beta\alpha} \hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha \right. \\ &\quad \left. + M_{\gamma\alpha} \hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha + M_{\alpha\beta} \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\beta + M_{\beta\gamma} \hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma + M_{\gamma\gamma} \hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

reduzindo, assim, o número de parâmetros livres de quinze para sete. Como anteriormente, diferentes escolhas de α , β e γ conduzirão a diferentes estados.

Escolha 4: $(\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z)$.

Para tais parâmetros, verificamos que $\hat{f}_1 = \hat{\sigma}_1^x \otimes \hat{\sigma}_2^y$ é o gerador $u(1)$ da subálgebra e que as condições (4.27) reduzem-se a $P_{1,y} = P_{1,z} = P_{2,x} = P_{2,z} = M_{xx} = M_{xz} = M_{yy} = M_{zy} = 0$. Logo, a matriz densidade (4.28) é dada como

$$\hat{\rho}_{1,2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + P_{2,z} + M_{zz} & -iP_{2,y} + M_{zx} & P_{1,x} - iM_{yz} & -i(M_{xy} + M_{yx}) \\ iP_{2,y} + M_{zx} & 1 - P_{2,z} - M_{zz} & i(M_{xy} - M_{yx}) & P_{1,x} + iM_{yz} \\ P_{1,x} + iM_{yz} & -i(M_{xy} - M_{yx}) & 1 - P_{1,z} - M_{zz} & -iP_{2,y} - M_{zx} \\ i(M_{xy} + M_{yx}) & P_{1,x} - iM_{yz} & P_{2,y} - M_{zx} & 1 - P_{1,z} + M_{zz} \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

sendo os seus autovalores

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{4} (1 + M_{xy}) \pm \frac{1}{4} \sqrt{(P_{1,x} + P_{2,y})^2 + (M_{yz} - M_{zx})^2 + (M_{zz} + M_{yx})^2}, \quad (4.30)$$

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{4} (1 - M_{xy}) \pm \frac{1}{4} \sqrt{(P_{1,x} - P_{2,y})^2 + (M_{yz} + M_{zx})^2 + (M_{zz} - M_{yx})^2}. \quad (4.31)$$

Assim como fizemos anteriormente, construiremos novas distâncias quadráticas examinando a positividade dos autovalores da matriz (4.29) transposta parcialmente. Antes disso,

note que a estrutura dos autovalores (4.30) e (4.31) é a mesma encontrada nos casos estudados em \hat{e}_1 , logo, a estrutura das desigualdades permanece a mesma.

Partindo dos autovalores encontrados e do equivalente geométrico para a transposição parcial ($P_{2,y} \rightarrow -P_{2,y}$ e $M_{ky} \rightarrow -M_{ky}$ para $(k = x, y, z)$), encontramos as desigualdades $(s_1^T)^2 \equiv t_-^2 - (V_1^T)^2 \geq 0$ e $(s_2^T)^2 \equiv t_+^2 - (V_2^T)^2 \geq 0$, sendo $V_1^T = \sqrt{u_-^2 + v_-^2 + w_+^2}$ e $V_2^T = \sqrt{u_+^2 + v_+^2 + w_-^2}$, construídas com os parâmetros

$$t_\pm = \frac{1 \pm M_{xy}}{2}, \quad u_\pm = \frac{P_{1,x} \pm P_{2,y}}{2}, \quad v_\pm = \frac{M_{yz} \pm M_{zx}}{2}, \quad w_\pm = \frac{M_{zz} \pm M_{yx}}{2}. \quad (4.32)$$

Note que a diferença entre as desigualdades construídas para este gerador e as demais calculadas anteriormente é o conjunto de parâmetros $\{t_\pm, u_\pm, v_\pm, w_\pm\}$ dados em (4.32).

Escolha 5: $(\alpha, \beta, \gamma) = (z, x, y)$.

Para esta escolha, verificamos que o elemento comutativo comum é $\hat{f}_1 = \hat{\sigma}_1^z \otimes \hat{\sigma}_2^x$. Desta forma, as condições (4.27) reduzem-se a $P_{1,x} = P_{1,y} = P_{2,z} = P_{2,y} = M_{zz} = M_{zy} = M_{xx} = M_{yx} = 0$ e podemos escrever a matriz densidade (4.28) como

$$\hat{\rho}_{1,2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + P_{1,z} & P_{2,x} + M_{zx} & M_{xz} - iM_{yz} & -M_{yy} - iM_{xy} \\ P_{2,x} + M_{zx} & 1 + P_{1,z} & M_{yy} + iM_{xy} & -M_{xz} + iM_{yz} \\ M_{xz} + iM_{yz} & M_{yy} - iM_{xy} & 1 - P_{1,z} & P_{2,x} - M_{zx} \\ -M_{yy} + iM_{xy} & -M_{xz} - iM_{yz} & P_{2,x} - M_{zx} & 1 - P_{1,z} \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Uma vez que a estrutura das desigualdades permanece a mesma, basta encontramos os diferentes parâmetros $\{t_\pm, u_\pm, v_\pm, w_\pm\}$ para este gerador. Partindo dos autovalores da matriz (4.33) e aplicando as mudanças equivalentes ao critério de TPP, encontramos

$$t_\pm = \frac{1 \pm M_{zx}}{2}, \quad u_\pm = \frac{P_{i,z} \pm P_{j,x}}{2}, \quad v_\pm = \frac{M_{yz} \pm M_{xy}}{2}, \quad w_\pm = \frac{M_{yy} \pm M_{xz}}{2}. \quad (4.34)$$

Assim como para os demais casos, as desigualdades construídas a partir dos autovalores da matriz original (4.33) não fornecem nenhuma informação adicional a respeito do regime de separabilidade do estado.

Escolha 6: $(\alpha, \beta, \gamma) = (y, z, x)$.

Neste caso, o gerador da subálgebra $f(1)$ é $\hat{\sigma}_1^y \otimes \hat{\sigma}_2^z$ e a condição $[\hat{\rho}, \hat{f}_1] = 0$, dada em (4.27), é satisfeita para $P_{1,z} = P_{1,x} = P_{2,y} = P_{2,x} = M_{yy} = M_{yx} = M_{zz} = M_{xz} = 0$, o que nos permite escrever a matriz densidade como

$$\hat{\rho}_{1,2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + P_{2,z} & M_{zx} - iM_{zy} & -iP_{1,y} - iM_{yz} & M_{xx} - iM_{xy} \\ M_{zx} + iM_{zy} & 1 - P_{2,z} & M_{xx} + iM_{xy} & -iP_{1,y} + iM_{yz} \\ iP_{1,y} + iM_{yz} & M_{xx} - iM_{xy} & 1 + P_{2,z} & -M_{zx} + iM_{zy} \\ M_{xx} + iM_{xy} & iP_{1,y} - iM_{yz} & -M_{zx} - iM_{zy} & 1 - P_{2,z} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Os autovalores da matriz (4.35) são dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{4} (1 - M_{yz}) \pm \frac{1}{4} \sqrt{(P_{1,y} - P_{2,z})^2 + (M_{zx} + M_{xy})^2 + (M_{xx} - M_{zy})^2},$$

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{4} (1 + M_{yz}) \pm \frac{1}{4} \sqrt{(P_{1,y} + P_{2,z})^2 + (M_{zx} - M_{xy})^2 + (M_{xx} + M_{zy})^2}$$

Logo, para este gerador os parâmetros $\{t_{\pm}, u_{\pm}, v_{\pm}, w_{\pm}\}$ são

$$t_{\pm} = \frac{1 \pm M_{yz}}{2}, \quad u_{\pm} = \frac{P_{i,y} \pm P_{j,z}}{2}, \quad v_{\pm} = \frac{M_{zx} \pm M_{xy}}{2}, \quad w_{\pm} = \frac{M_{xx} \pm M_{zy}}{2}.$$

4.3.3 O gerador $\hat{g}_1 = \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{1}_2$

Uma vez que o gerador $\hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{1}_2$ comuta com cada um dos elementos de base (4.6), encontramos o comutador entre a matriz (4.8) e este gerador

$$[\hat{\rho}, \hat{e}_i] = \frac{i}{2} \left[-P_{1,\beta} (\hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{1}_1) + P_{1,\gamma} (\hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{1}_2) - M_{\beta\alpha} (\hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha) - M_{\beta\beta} (\hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{\sigma}_2^\beta) \right. \\ \left. - M_{\beta\gamma} (\hat{\sigma}_1^\gamma \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma) + M_{\gamma\alpha} (\hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha) + M_{\gamma\beta} (\hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\beta) + M_{\gamma\gamma} (\hat{\sigma}_1^\beta \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma) \right] \quad (4.36)$$

Como cada termo da soma (4.36) possui um elemento de base que é linearmente independente, então, para que $[\hat{\rho}, \hat{g}_1] = 0$ é necessário que o coeficiente que multiplica cada termo seja nulo,

ou seja,

$$\begin{aligned} P_{1,\beta} &= 0, & P_{1,\gamma} &= 0 \\ M_{\beta\alpha} &= 0, & M_{\beta\beta} &= 0, & M_{\beta\gamma} &= 0, & M_{\gamma\alpha} &= 0, & M_{\gamma\beta} &= 0, & M_{\gamma\gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

Dessa forma, o novo estado contruído a partir do gerador \hat{g}_1 é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{4} \left(1_1 \otimes 1_2 + \left(P_{2,\alpha} 1_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha + P_{2,\beta} 1_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\beta + P_{2,\gamma} 1_1 \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma \right) \right. \\ &\quad \left. + (P_{1,\alpha} \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes 1_2) + M_{\alpha\alpha} \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\alpha + M_{\alpha\beta} \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\beta + M_{\alpha\gamma} \hat{\sigma}_1^\alpha \otimes \hat{\sigma}_2^\gamma \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Note que o número de parâmetros livres foi reduzido de quinze para sete. Como anteriormente, analisaremos a diferenças entre os parâmetros das desigualdades geradas a partir das diferentes escolhas de α , β e γ .

Escolha 7: $(\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z)$.

Neste caso, o elemento comutativo comum é $\hat{g}_1 = \hat{\sigma}_1^x \otimes \hat{1}_2$ e as condições dadas em (4.37) tornam-se $P_{1,y} = P_{1,z} = M_{yx} = M_{yy} = M_{yz} = M_{zx} = M_{zy} = M_{zz} = 0$. Desta forma, a matriz (4.38) é reescrita como

$$\hat{\rho}_{1,2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + P_{2,z} & P_{2,x} - iP_{2,y} & P_{1,x} + M_{xz} & M_{xx} - iM_{xy} \\ P_{2,x} + iP_{2,y} & 1 - P_{2,z} & M_{xx} + iM_{xy} & P_{1,x} - M_{xz} \\ P_{1,x} + M_{xz} & M_{xx} - iM_{xy} & 1 + P_{2,z} & P_{2,x} - iP_{2,y} \\ M_{xx} + iM_{xy} & P_{1,x} - M_{xz} & P_{2,x} + iP_{2,y} & 1 - P_{2,z} \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

sendo os seus autovalores dados por

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \frac{1}{4} (1 - P_{1,x}) \pm \frac{1}{4} \sqrt{(P_{2,z} - M_{xz})^2 + (M_{xy} - P_{2,y})^2 + (P_{2,x} - M_{xx})^2} \\ \mu_{\pm} &= \frac{1}{4} (1 + P_{1,x}) \pm \frac{1}{4} \sqrt{(P_{2,z} + M_{xz})^2 + (P_{2,y} + M_{xy})^2 + (P_{2,x} + M_{xx})^2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Note que, ao aplicarmos as mudanças equivalentes ao critério TPP, encontramos o mesmo conjunto de autovalores. Isto se dá, devido ao fato de \hat{g}_1 gerar somente estados

Escolha 9: $(\alpha, \beta, \gamma) = (y, z, x)$.

O elemento comutativo comum é $\hat{g}_1 = \hat{\sigma}_1^y \otimes \hat{1}_2$ e as condições (4.37) reduzem-se a $P_{1,z} = P_{1,x}M_{zy} = M_{zz} = M_{zx} = M_{xy} = M_{xz} = M_{xx} = 0$. O estado gerado é da forma

$$\hat{\rho}_{1,2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + P_{2,z} & P_{2,x} - iP_{2,y} & -iP_{1,y} - iM_{yz} & -M_{yy} - iM_{yx} \\ P_{2,x} + iP_{2,y} & 1 - P_{2,z} & M_{yy} - iM_{yx} & -iP_{1,y} + iM_{yz} \\ iP_{1,y} + iM_{yz} & M_{yy} + iM_{yx} & 1 + P_{2,z} & P_{2,x} - iP_{2,y} \\ -M_{yy} + iM_{yx} & iP_{1,y} - iM_{yz} & P_{2,x} + iP_{2,y} & 1 - P_{2,z} \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Trata-se de um estado separável, onde as desigualdades construídas a partir dos autovalores da matriz transposta parcialmente são sempre satisfeitas. Para este estado os parâmetros $\{t_{\pm}, u_{\pm}, v_{\pm}, w_{\pm}\}$ são dados por

$$t_{\pm} = \frac{1 \pm P_{iy}}{2}, \quad u_{\pm} = \frac{P_{jz} \pm M_{yz}}{2}, \quad v_{\pm} = \frac{P_{jx} \pm M_{yx}}{2}, \quad w_{\pm} = \frac{P_{jy} \mp M_{yy}}{2}.$$

Mostramos que as nove formas para (4.8), os estados (4.12) a (4.41), têm em comum a estrutura de seus autovalores $\{\lambda_{\pm}, \mu_{\pm}\}$ e que o produto de cada par, $4\lambda_+\lambda_-$ e $4\mu_+\mu_-$, pode ser escrito como $s^2 = t^2 - \vec{V}^2$, com $\vec{V} = (u, v, w)$, onde u, v e w são considerados componentes de um vetor no espaço 3-D. Mostramos também que os autovalores λ_{\pm}^T e μ_{\pm}^T de cada estado transposto parcialmente, $\hat{\rho}_{12}^T$, são obtidos diretamente dos autovalores de $\hat{\rho}_{1,2}$, simplesmente mudando $P_{2,y} \rightarrow -P_{2,y}$ e $M_{ky} \rightarrow -M_{ky}$, gerando um conjunto de parâmetros $\{t_{\pm}, u_{\pm}, v_{\pm}, w_{\pm}\}$ diferente para cada estado como mostrado na Tabela (4.3). As Tabelas (4.4), (4.5) e (4.6) exibem um resumo das nove formas para (4.8) geradas a partir dos operadores \hat{e}_1, \hat{f}_1 e \hat{g}_1 .

4.4 Exemplos Ilustrativos

Apresentamos aqui dois exemplos encontrados na literatura e representaremos suas distâncias quadráticas $(s_1^T)^2$ e $(s_2^T)^2$ no espaço de fase. Neste contexto, estudaremos as quantidades de emaranhamento, mostrando uma estreita relação com a concorrência proposta por Wothers [?].

$u(1)$	$2t_{\pm}$	$2u_{\pm}$	$2v_{\pm}$	$2w_{\pm}$	$2\lambda_{\pm}$	$2\mu_{\pm}$
$\hat{\sigma}_1^{\alpha} \otimes \hat{\sigma}_2^{\alpha}$	$1 \pm M_{\alpha\alpha}$	$P_{1\alpha} \pm P_{2\alpha}$	$M_{\alpha\alpha} \pm M_{\gamma\gamma}$	$M_{\gamma\beta} \pm M_{\beta\gamma}$		
$\hat{\sigma}_1^{\alpha} \otimes \hat{\sigma}_2^{\beta}$	$1 \pm M_{\alpha\beta}$	$P_{1\alpha} \pm P_{2\beta}$	$M_{\beta\gamma} \pm M_{\gamma\alpha}$	$M_{\gamma\gamma} \pm M_{\beta\alpha}$	$t_{-} \pm V_1$	$t_{+} \pm V_2$
$\hat{\sigma}_1^{\alpha} \otimes \hat{I}_2$	$1 \pm P_{1\alpha}$	$P_{2\gamma} \pm M_{\alpha\gamma}$	$P_{2\beta} \pm M_{\gamma\alpha}$	$P_{2\alpha} \pm M_{\alpha\alpha}$		

Tabela 4.3: A primeira coluna se refere ao gerador $u(1)$ enquanto as quatro colunas seguintes mostram os novos parâmetros em termos dos vetores de polarização e componentes da matriz de correlação. As colunas 6 e 7 contém os autovalores para um estado de dois qubits. Omitimos os casos $\hat{\sigma}_1^{\beta} \otimes \hat{\sigma}_2^{\alpha}$ e $\hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_2^{\alpha}$ uma vez que eles são trivialmente obtidos da segunda e terceira linhas.

$u(1)$	$\hat{\sigma}_1^z \otimes \hat{\sigma}_2^z$	$\hat{\sigma}_1^x \otimes \hat{\sigma}_2^x$	$\hat{\sigma}_1^y \otimes \hat{\sigma}_2^y$
$4\rho_{11}$	$1 + P_{1z} + P_{2z} + M_{zz}$	$1 + M_{zz}$	$1 + M_{zz}$
$4\rho_{12}$	0	$P_{2x} - iM_{zy}$	$-iP_{2y} + M_{zx}$
$4\rho_{13}$	0	$P_{1x} - iM_{yz}$	$-iP_{1y} + M_{xz}$
$4\rho_{14}$	$M_{xx} - M_{yy} - i(M_{yx} + M_{xy})$	$M_{xx} - M_{yy}$	$M_{xx} - M_{yy}$
$4\rho_{22}$	$1 + P_{1z} - P_{2z} - M_{zz}$	$1 - M_{zz}$	$1 - M_{zz}$
$4\rho_{23}$	$M_{xx} + M_{yy} - i(M_{yx} - M_{xy})$	$M_{xx} + M_{yy}$	$M_{xx} + M_{yy}$
$4\rho_{24}$	0	$P_{1x} + iM_{yz}$	$-iP_{1y} - M_{xz}$
$4\rho_{33}$	$1 - P_{1z} + P_{2z} - M_{zz}$	$1 - M_{zz}$	$1 - M_{zz}$
$4\rho_{34}$	0	$P_{2x} + iM_{zy}$	$-iP_{2y} - M_{zx}$
$4\rho_{44}$	$1 - P_{1z} - P_{2z} + M_{zz}$	$1 + M_{zz}$	$1 + M_{zz}$

Tabela 4.4: A primeira coluna mostra as componentes da matriz (4.8) na base computacional, multiplicada por 4. As outras três colunas exibem os elementos da matriz dados em termos dos VPs e dos elementos da MC para cada operador $u(1)$, mostrado na primeira linha.

4.4.1 Exemplo 1: A matriz Tanas-Ficek

Um estado dinâmico foi deduzido em [54] para um sistema consistindo de dois átomos de dois níveis, coletivamente acoplados a um campo, com menores níveis de energia $|g_i\rangle$ e níveis mais elevados de energia $|e_i\rangle$ ($i = 1, 2$), separados por um gap de energia $\hbar\omega_0$. Os átomos, considerados idênticos, são acoplados a um campo de radiação multimodal que se encontra

$u(1)$	$\hat{\sigma}_1^x \otimes \hat{\sigma}_2^y$	$\hat{\sigma}_1^z \otimes \hat{\sigma}_2^x$	$\hat{\sigma}_1^y \otimes \hat{\sigma}_2^z$
$4\rho_{11}$	$1 + P_{2z} + M_{zz}$	$1 + P_{1z}$	$1 + P_{2z}$
$4\rho_{12}$	$-iP_{2y} + M_{zx}$	$P_{2x} + M_{zx}$	$M_{zx} - iM_{zy}$
$4\rho_{13}$	$P_{1x} - iM_{yz}$	$M_{xz} - iM_{yz}$	$-iP_{1y} - iM_{yz}$
$4\rho_{14}$	$-i(M_{xy} + M_{yx})$	$-M_{yy} - iM_{xy}$	$M_{xx} - iM_{xy}$
$4\rho_{22}$	$1 - P_{2z} - M_{zz}$	$1 + P_{1z}$	$1 - P_{2z}$
$4\rho_{23}$	$i(M_{xy} - M_{yx})$	$M_{yy} + iM_{xy}$	$M_{xx} + iM_{xy}$
$4\rho_{24}$	$P_{1x} + iM_{yz}$	$-M_{xz} + iM_{yz}$	$-iP_{1y} + iM_{yz}$
$4\rho_{33}$	$1 - P_{1z} - M_{zz}$	$1 - P_{1z}$	$1 + P_{2z}$
$4\rho_{34}$	$-iP_{2y} - M_{zx}$	$P_{2x} - M_{zx}$	$-M_{zx} + iM_{zy}$
$4\rho_{44}$	$1 - P_{1z} + M_{zz}$	$1 - P_{1z}$	$1 - P_{2z}$

Tabela 4.5: A primeira coluna mostra as componentes da matriz (4.8) na base computacional, multiplicada por 4. As outras três colunas exibem os elementos da matriz dados em termos dos VPs e dos elementos da MC para cada operador $u(1)$, mostrado na primeira linha.

$u(1)$	$\hat{\sigma}_1^x \otimes \hat{1}_2$	$\hat{\sigma}_1^y \otimes \hat{1}_2$	$\hat{\sigma}_1^z \otimes \hat{1}_2$
$4\rho_{11}$	$1 + P_{2z}$	$1 + P_{2z}$	$1 + P_{1z} + P_{2z} + M_{zz}$
$4\rho_{12}$	$P_{2x} - iP_{2y}$	$P_{2x} - iP_{2y}$	$P_{2x} - iP_{2y} + M_{zx} - iM_{zy}$
$4\rho_{13}$	$P_{1x} + M_{xz}$	$-iP_{1y} - iM_{yz}$	0
$4\rho_{14}$	$M_{xx} - iM_{xy}$	$-M_{yy} - iM_{yx}$	0
$4\rho_{22}$	$1 - P_{2z}$	$1 - P_{2z}$	$1 + P_{1z} - P_{2z} - M_{zz}$
$4\rho_{23}$	$M_{xx} + iM_{xy}$	$M_{yy} - iM_{yx}$	0
$4\rho_{24}$	$P_{1x} - M_{xz}$	$-iP_{1y} + iM_{yz}$	0
$4\rho_{33}$	$1 + P_{2z}$	$1 + P_{2z}$	$1 - P_{1z} + P_{2z} - M_{zz}$
$4\rho_{34}$	$P_{2x} - iP_{2y}$	$P_{2x} - iP_{2y}$	$P_{2x} - iP_{2y} - M_{zx} + iM_{zy}$
$4\rho_{44}$	$1 - P_{2z}$	$1 - P_{2z}$	$1 - P_{1z} - P_{2z} + M_{zz}$

Tabela 4.6: A primeira coluna mostra as componentes da matriz (4.8) na base computacional, multiplicada por 4. As outras três colunas exibem os elementos da matriz dados em termos dos VPs e dos elementos da MC para cada operador $u(1)$, mostrado na primeira linha.

inicialmente no estado de vácuo $|\{0\}\rangle$. Os átomos irradiam espontaneamente e seus campos exercem uma forte influência dinâmica, um sobre o outro, através dos modos do vácuo. A base dos estados é escolhida em função do estado singlete (ou estado anti-simétrico)

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g_1\rangle |e_2\rangle - |e_1\rangle |g_2\rangle) \quad (4.43)$$

e o tripleto (ou estado simétrico)

$$|e\rangle = |e_1\rangle |e_2\rangle, \quad |g\rangle = |g_1\rangle |g_2\rangle, \quad |s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g_1\rangle |e_2\rangle + |e_1\rangle |g_2\rangle), \quad (4.44)$$

também conhecidos como estados de Dicke. Se no tempo $t = 0$ ambos os átomos estão preparados em um estado de superposição $|\psi_0\rangle = \sqrt{p}|e\rangle + \sqrt{1-p}|g\rangle$, onde $p \in [0, 1]$, segundo a Ref. ([54], a matriz densidade que fornece a evolução do sistema é dada por

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{ee}(t) & \rho_{eg}(t) & 0 & 0 \\ \rho_{eg}^*(t) & \rho_{gg}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{ss}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{aa}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

sendo que cada elemento da matriz evolui conforme

$$\rho_{ee}(t) = p \exp(-2\gamma t), \quad (4.46)$$

$$\rho_{eg}(t) = \sqrt{p(1-p)} \exp(-\gamma t), \quad (4.47)$$

$$\rho_{ss}(t) = p \exp(-\gamma t) \left(\frac{\gamma + \gamma_{12}}{\gamma - \gamma_{12}} \right) [\exp(-\gamma_{12}t) - \exp(-\gamma t)], \quad (4.48)$$

$$\rho_{aa}(t) = p \exp(-\gamma t) \left(\frac{\gamma - \gamma_{12}}{\gamma + \gamma_{12}} \right) [\exp(\gamma_{12}t) - \exp(-\gamma t)], \quad (4.49)$$

sendo γ a taxa de decaimento espontâneo dos átomos, causado pelo acoplamento com o campo de vácuo, e $\gamma_{1,2}$ o damping coletivo (parâmetro de amortecimento coletivo). Os elementos (4.46)-(4.49) estão sujeitos à conservação da probabilidade $\rho_{gg}(t) = 1 - \rho_{ss}(t) - \rho_{aa}(t) - \rho_{ee}(t)$. Vale a pena notar que a matriz depende efetivamente de apenas três parâmetros intrínsecos independentes, γt , γ_{12}/γ and p .

Na base computacional o estado (4.45) torna-se

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{ee}(t) & 0 & 0 & \rho_{eg}(t) \\ 0 & \frac{1}{2}\rho_{aa}(t) + \frac{1}{2}\rho_{ss}(t) & \frac{1}{2}\rho_{aa}(t) - \frac{1}{2}\rho_{ss}(t) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\rho_{aa}(t) - \frac{1}{2}\rho_{ss}(t) & \frac{1}{2}\rho_{aa}(t) + \frac{1}{2}\rho_{ss}(t) & 0 \\ \rho_{eg}^*(t) & 0 & 0 & 1 - \rho_{ss}(t) - \rho_{aa}(t) - \rho_{ee}(t) \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

que é do formato X (como apresentado em 4.20) e comuta com $\hat{\sigma}_{z,1} \otimes \hat{\sigma}_{z,2}$. Para este estado, os vetores de polarização e a matriz de correlação são dados por

$$P_{1,x} = P_{1,y} = P_{2,x} = P_{2,y} = 0 \quad (4.51)$$

$$P_{1,z} = P_{2,z} = 2\rho_{ee}(t) + \rho_{aa}(t) + \rho_{ss}(t) - 1, \quad (4.52)$$

$$M_{xz} = M_{yz} = M_{zx} = M_{zy} = 0, \quad (4.53)$$

$$M_{xx} = 2 \operatorname{Re} \left(\rho_{eg}(t) + \frac{1}{2}\rho_{aa}(t) - \frac{1}{2}\rho_{ss}(t) \right), \quad (4.54)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = 2 \operatorname{Im} \left(\rho_{eg}^*(t) + \frac{1}{2}\rho_{aa}(t) - \frac{1}{2}\rho_{ss}(t) \right), \quad (4.55)$$

$$M_{yy} = 2 \operatorname{Re} \left(-\rho_{eg}(t) + \frac{1}{2}\rho_{aa}(t) - \frac{1}{2}\rho_{ss}(t) \right), \quad (4.56)$$

$$M_{zz} = 1 - 2(\rho_{aa}(t) + \rho_{ss}(t)). \quad (4.57)$$

Desta forma, podemos encontrar os parâmetros $\{t_{\pm}, u_{\pm}, v_{\pm}, w_{\pm}\}$ para o estado (4.50)

$$u_+ = p \exp(-\gamma t) \left[\left(\frac{\gamma - \gamma_{12}}{\gamma + \gamma_{12}} \right) [\exp(\gamma_{12}t) - \exp(-\gamma t)] \right. \\ \left. + 2 \exp(-\gamma t) + \left(\frac{\gamma + \gamma_{12}}{\gamma - \gamma_{12}} \right) [\exp(-\gamma_{12}t) - \exp(-\gamma t)] \right] - 1$$

$$u_- = 0$$

$$v_+ = p \exp(-\gamma t) \left\{ \left(\frac{\gamma - \gamma_{12}}{\gamma + \gamma_{12}} \right) [\exp(\gamma_{12}t) - \exp(-\gamma t)] \right. \\ \left. - \left(\frac{\gamma + \gamma_{12}}{\gamma - \gamma_{12}} \right) [\exp(-\gamma_{12}t) - \exp(-\gamma t)] \right\}$$

$$v_- = 2p \exp(-\gamma t) \left(\frac{\sqrt{p(1-p)}}{p} \right)$$

$$w_+ = \frac{M_{xy} + M_{yx}}{2} = 0$$

$$w_- = \frac{M_{xy} - M_{yx}}{2} = 0$$

$$t_+ = \frac{1 - p \exp(-\gamma t) \left\{ \left(\frac{\gamma - \gamma_{12}}{\gamma + \gamma_{12}} \right) [\exp(\gamma_{12} t) - \exp(-\gamma t)] + \left(\frac{\gamma + \gamma_{12}}{\gamma - \gamma_{12}} \right) [\exp(-\gamma_{12} t) - \exp(-\gamma t)] \right\}}{2}$$

$$t_- = \frac{p \exp(-\gamma t) \left\{ \left(\frac{\gamma - \gamma_{12}}{\gamma + \gamma_{12}} \right) [\exp(\gamma_{12} t) - \exp(-\gamma t)] + \left(\frac{\gamma + \gamma_{12}}{\gamma - \gamma_{12}} \right) [\exp(-\gamma_{12} t) - \exp(-\gamma t)] \right\}}{2}.$$

O diagrama no espaço de fase para a matriz transposta, $\rho^T(t)$ mostra uma evolução temporal do sistema.

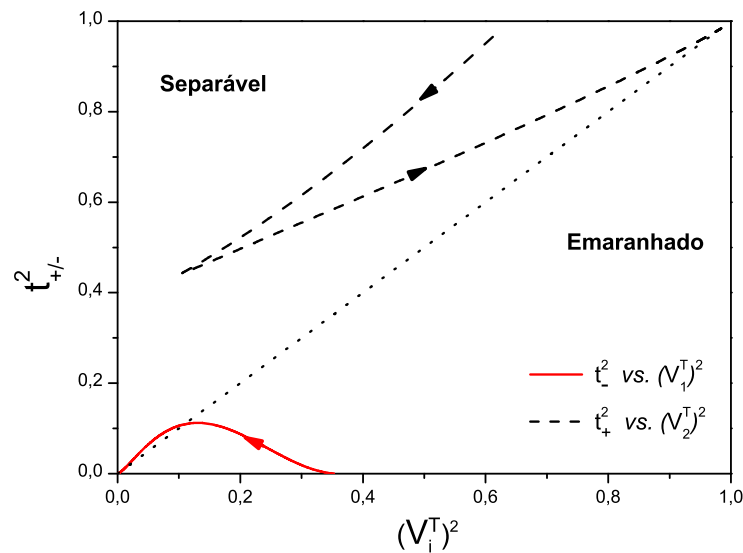


Figura 4.1: Espaço de fase do estado Tanás-Ficek.

4.4.2 Exemplo 2: matriz Shabani-Lidar

Em [55], os autores estudaram a discórdia (que veremos no próximo capítulo) para mapas positivo e afirmaram que uma matriz A é positiva se cada sub-matriz principal de A é positiva. Nesta abordagem eles manipularam uma sub-matriz 4×4 positiva e parametrizada 4×4 que

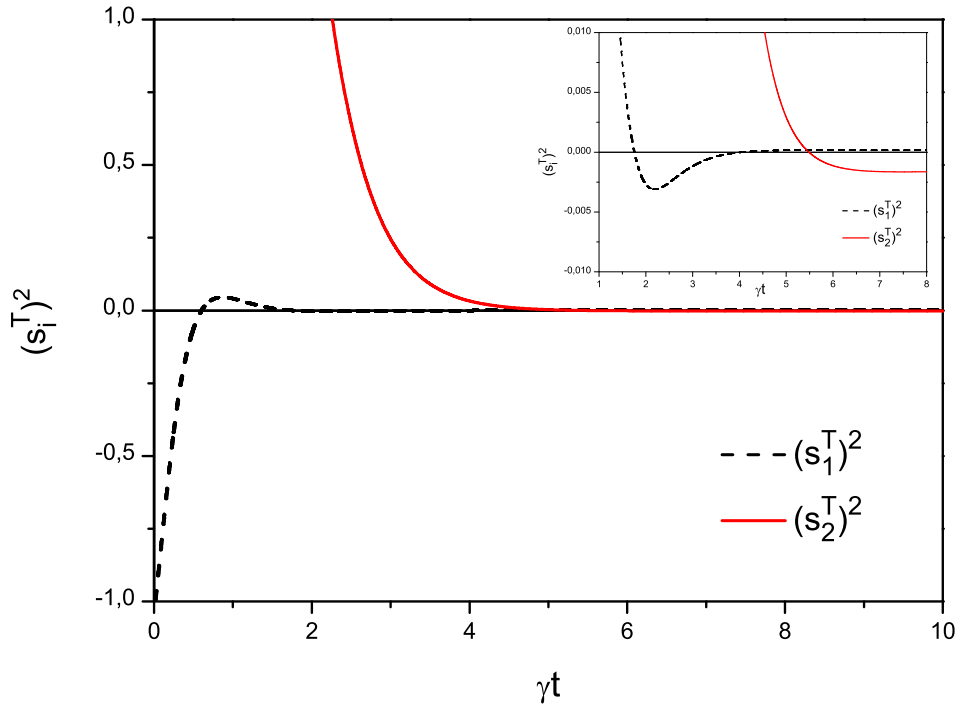


Figura 4.2: Medida de emaranhamento para o estado Tanás-Ficek.

não é da forma X (e não foi associada a qualquer sistema físico),

$$\hat{\rho}_{SL} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} t_1 & ia & ib_R - b_I & t_3 \\ -ia & t_1 & t_3 & -ib_R + b_I \\ -ib_R - b_I & t_3 & t_2 & -ic \\ t_3 & ib_R + b_I & ic & t_2 \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

A matriz (4.58) possui sete parâmetros $\{t_1, t_2, t_3, a, b_R, b_I, c\}$ e uma verificação imediata mostra que a mesma comuta com $\hat{\sigma}_1^z \otimes \hat{\sigma}_2^y$ (seu gerador $u(1)$), logo a matriz (4.58) pertence à classe $D-7$ do tipo (4.35), permutando partículas 1 e 2. Porém, apenas seis parâmetros são independentes uma vez que a normalização estabelece a restrição $(t_1 + t_2)/2 = 1$. A fim de que $[\hat{\rho}, \hat{\sigma}_1^z \otimes \hat{\sigma}_2^y] = 0$ as seguintes condições são impostas $P_{2z} = P_{2x} = P_{1y} = P_{1x} = M_{yy} = M_{xy} = M_{zz} = M_{zx} = 0$, e

os seis outros geradores são

$$F_6 = \left\{ \hat{f}_2 = \hat{\sigma}_1^z \otimes \hat{I}_2, \hat{f}_3 = \hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_2^y, \hat{f}_4 = -\hat{\sigma}_1^x \otimes \hat{\sigma}_2^z, \right. \\ \left. \hat{f}_5 = \hat{\sigma}_1^y \otimes \hat{\sigma}_2^x, \hat{f}_6 = \hat{\sigma}_1^y \otimes \hat{\sigma}_2^z, \hat{f}_7 = \hat{\sigma}_1^x \otimes \hat{\sigma}_2^x \right\}. \quad (4.59)$$

Os demais componentes da polarização são $P_{1z} = t_1 - 1$, $P_{2y} = (c - a) / 2$ e a matriz de correlação é

$$\mathbb{M}_{1,2} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_3 & 0 & -b_I \\ 0 & 0 & -b_R \\ 0 & -\frac{(c+a)}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nas expressões para as distâncias $s_1^2 \equiv t_-^2 - (\vec{V}_1)^2 \geq 0$ e $s_2^2 \equiv t_+^2 - (\vec{V}_2)^2 \geq 0$ ($V_1 = \sqrt{u_-^2 + v_+^2 + w_-^2}$ e $V_2 = \sqrt{u_+^2 + v_-^2 + w_+^2}$), têm-se

$$t_{\pm} = \frac{2 \mp (c+a)}{4}, \quad u_{\pm} = \frac{2(t_1 - 1) \pm (c-a)}{4} \\ v_{\pm} = \mp \frac{b_I}{2}, \quad w_{\pm} = \frac{(t_3 \mp b_R)}{2}. \quad (4.60)$$

As distâncias quadráticas para a matriz transposta $\hat{\rho}^T$, podem ser facilmente calculadas fazendo-se uso dos parâmetros (4.60). Note que as diferenças entre as distâncias quadráticas da matriz transposta e da matriz original são dadas por

$$(s_1^T)^2 - s_1^2 \equiv +t_3 b_R \geq 0 \quad (s_2^T)^2 - s_2^2 \equiv -t_3 b_R \geq 0,$$

portanto, o emaranhamento ocorre se $t_3 b_R > s_2^2$ ou $t_3 b_R < -s_1^2$.

Capítulo 5

Discórdia Quântica

5.1 Correlações Clássicas e Discórdia Quântica

A discórdia quântica é uma medida que tem por objetivo captar todas as correlações quânticas do sistema, não se limitando somente ao emaranhamento. Esta quantidade foi originalmente proposta por Harold Ollivier e Wojciech H. Zurek como a diferença entre duas fórmulas clássicas idênticas, mas quanticamente distintas, que medem a quantidade de informação mútua de um par de sistemas quânticos [20].

Em teoria clássica da informação, a correlação total entre os dois subsistemas A e B , cujo estado é matematicamente representado por uma distribuição de probabilidades conjunta p_{jk}^{AB} , pode ser obtida pela informação mútua

$$I(\rho^{AB}) \equiv H(p^A) + H(p^B) - H(p^{AB}) \quad (5.1)$$

onde $p_j^A = \sum_k p_{jk}^{AB}$ e $p_k^B = \sum_j p_{jk}^{AB}$ são as probabilidades marginais com j e k indexando os resultados da medição das partes A e B , e $H(\cdot)$ é um funcional da entropia de Shannon, isto é, $H(p^{AB}) = -\sum_k p_{jk}^{AB} \log(p_{jk}^{AB})$. Esta mesma quantidade pode ser reescrita como

$$I(p^{AB}) \equiv H(p^A) - H(p^{AB} | p^B), \quad (5.2)$$

onde

$$H(p^{AB} | p^B) \equiv H(p^{AB}) - H(p^B) = - \sum_k p_{jk}^{AB} \log(p_{j|k}^{AB}) \quad (5.3)$$

é a entropia condicional clássica e $p_{j|k}^{AB} = p_{jk}^{AB}/p_k^B$ é a distribuição de probabilidade condicional dada a distribuição marginal p_k^B , e como vimos anteriormente (5.1) e (5.2) quantificam a ignorância (em média) em relação ao valor de A , quando se conhece B . Na teoria clássica da informação estas duas expressões são equivalentes, mas existe diferença entre elas no domínio quântico.

Para generalizar estas expressões para o domínio quântico, substituímos as distribuições de probabilidades clássicas pelos operadores densidade e a entropia de Shannon pela entropia de von Neumann. Em particular, se ρ^{AB} denota o operador densidade de um sistema bipartido composto AB , então $\rho^A = \text{Tr}_B(\rho^{AB})$ e $\rho^B = \text{Tr}_A(\rho^{AB})$ são os operadores densidade reduzidos que descrevem o estado dos subsistemas A e B , respectivamente. Agora podemos fornecer as versões quânticas das equações. (5.1) e (5.2), respectivamente:

$$\mathcal{I}(\rho^{AB}) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB}) \quad (5.4)$$

$$\mathcal{I}(\rho^{AB}) = S(\rho^A) - S(\rho^{AB} | \rho^B). \quad (5.5)$$

com a entropia condicional sendo definida como

$$S(\rho^{AB} | \rho^B) = S(\rho^{AB}) - S(\rho^B), \quad (5.6)$$

que é uma generalização formal da entropia condicional clássica dada em (5.3). As Eqs.(5.4) e (5.5) são denominadas informação mútua quântica e são usualmente utilizadas como uma medida das correlações totais do sistema, quantificando a robustez da correlação e, operacionalmente, sendo a taxa mínima de ruído que é necessária para apagar completamente todas as correlações em ρ^{AB} [23, 40].

Para generalizar a Eq.(5.5), Oliver e Zurek fizeram uso do operador densidade condicional que é obtido através de medidas projectivas efetuadas em um dos subsistemas [20]. Por influência da teoria quântica da informação, consideraremos que cada subsistema deste sistema bipartido está em posse de dois personagens: Alice e Bob. Dessa forma, suponhamos que Bob realize medições projectivas (do tipo von Neumann) em seu estado B . A base de elementos das medidas projectivas é indicada por $\{B_i\}$ com $B_i > 0$ e $\sum_i B_i = 1$. A probabilidade de que o resultado i seja obtido é dada por

$$p_i = \text{Tr} (1 \otimes B_i) \rho^{AB} (1 \otimes B_i).$$

O estado do sistema A que corresponde ao resultado i é

$$\rho_i^A = \frac{1}{p_i} [(I \otimes B_i) \rho^{AB} (I \otimes B_i)]. \quad (5.7)$$

Considerando todos os elementos B_i 's das medições, os estados do subsistema A serão caracterizados pelo conjunto $\{\rho_i, p_i\}$. Note que o estado local de Alice ρ^A permanece inalterado, ou seja, $\rho^A = \sum_i p_i \rho_i^A$, para qualquer conjunto pós-medidas. Em outras palavras, as medições de Bob induzem uma decomposição do estado local de Alice ρ^A para o conjunto $\{\rho_i^A, p_i\}$. Claramente, ρ_i^A dado em (5.7), pode ser considerado como um operador densidade condicional (condicionado aos resultados de medida rotulados por i), que é uma generalização formal da distribuição de probabilidade clássica. Assim, uma definição alternativa para a entropia condicional quântica pode ser escrita como

$$S(\rho^{AB} | \{B_i\}) = \sum_i p_i S(\rho_i^A),$$

permitindo uma definição diferente da informação mútua quântica dada em (5.5), a saber

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\rho^{AB} | \{B_i\}) &= S(\rho^A) - S(\rho^{AB} | \{B_i\}) \\ &= S(\rho^A) - \sum_i p_i S(\rho_i^A). \end{aligned}$$

Medidas projetivas sobre o subsistema B removem todas as correlações não clássicas entre A e B , e o valor de $\mathcal{I}(\rho^{AB} | \{B_i\})$ depende da escolha de $\{B_i\}$. Desta forma, o máximo de $\mathcal{I}(\rho^{AB} | \{B_i\})$, sobre todas as medições $\{B_i\}$ de Bob, pode ser interpretado como a correlação clássica contida no sistema, isto é,

$$\mathcal{C}^A = \max_{B_i} \left[S(\rho^A) - \sum_i p_i S(\rho_i^A) \right] = S(\rho^A) - \min_{B_i} \left[\sum_i p_i S(\rho_i^A) \right]. \quad (5.8)$$

O sobrescrito A em \mathcal{C} indica a situação em que Bob adquire informações sobre o subsistema A de Alice realizando medições em seu subsistema B . Da mesma forma, se Alice faz medições projectivas, $\{A_j\}$, podemos definir a informação obtida sobre a partícula B através de medições sobre a partícula A ,

$$\mathcal{C}^B = \max_{A_j} \left[S(\rho^B) - \sum_j p_j S(\rho_j^B) \right] = S(\rho^B) - \min_{A_j} \left[\sum_j p_j S(\rho_j^B) \right]. \quad (5.9)$$

Geralmente, $\mathcal{C}^A \neq \mathcal{C}^B$, o que significa que a informação clássica é assimétrica. Tal quantidade foi estudada por Henderson e Vedral, que postularam os seguintes critérios para uma medida de correlações clássicas [21]:

- $\mathcal{C} = 0$ para estados produtos,
- \mathcal{C} é invariante sob transformações unitárias locais. Isso ocorre porque qualquer mudança de base não deve afetar as correlação entre os dois subsistemas.
- \mathcal{C} não aumenta sob operações locais. Se os dois subsistemas evoluem de forma independente então a correlação entre eles não pode aumentar.
- $\mathcal{C} = S(\rho^A) = S(\rho^B)$ para estados puros.

Possuímos, então, dois análogos à informação mútua clássica, dados por (5.4) e (5.5).

A diferença

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^A &= \mathcal{I} - \mathcal{C}^A \\ &= S(\rho^B) - S(\rho^{AB}) + \min_{B_i} \left[\sum_i p_i S(\rho_i^A) \right]. \end{aligned}$$

é conhecida como discórdia quântica e é interpretada como uma medida de correlações puramente quânticas. De forma similar podemos escrever que $\mathcal{D}^B = \mathcal{I} - \mathcal{C}^B$.

Para estados puros, o emaranhamento e a discórdia são equivalentes, entretanto existe uma diferença fundamental entre estas grandezas ao tratarmos com estados mistos. Um exemplo que ilustra bem esta diferença é o estado de Werner [30]

$$\hat{\rho}_W = x |\psi^-\rangle \langle \psi^-| + \frac{1}{4}I, \quad (5.10)$$

com $|\psi^-\rangle = (1/\sqrt{2})(|01\rangle - |10\rangle)$ e I a matriz identidade, que engloba estados emaranhados e separáveis dependendo do parâmetro x . A Fig.(5.1) mostra o gráfico da discórdia quântica para este estado e revela que tal quantidade é não nula mesmo no intervalo de separabilidade, $0 \leq x < 1/3$, mostrando que as correlações quânticas podem estar presentes mesmo em estados não emaranhados, revelando então que as medidas de emaranhamento, tais como, *concurrence*, negatividade, etc., não capturam todas as correlações entre dois sistemas mistos separáveis.

Obter a discórdia quântica requer considerável esforço devido ao complicado processo de maximização (dado em (5.8)) no cálculo da correlação clássica, uma vez que esta maximização deve ser sobre todas as possíveis medições projectivas de Bob. Diante disso, torna-se clara a dificuldade do cálculo da discórdia para sistemas quânticos bipartidos genéricos. Como vimos no Capítulo 3, vários sistemas físicos estudados na teoria quântica da informação tem sido descritos por uma classe de estados puros e mistos pertencentes à classe de variedade D-7, denominados estados X , e para estes estados o cálculo da discórdia torna-se possível. Em [26], Shunlong Luo calculou a discórdia analiticamente para uma classe destes estados, contudo,

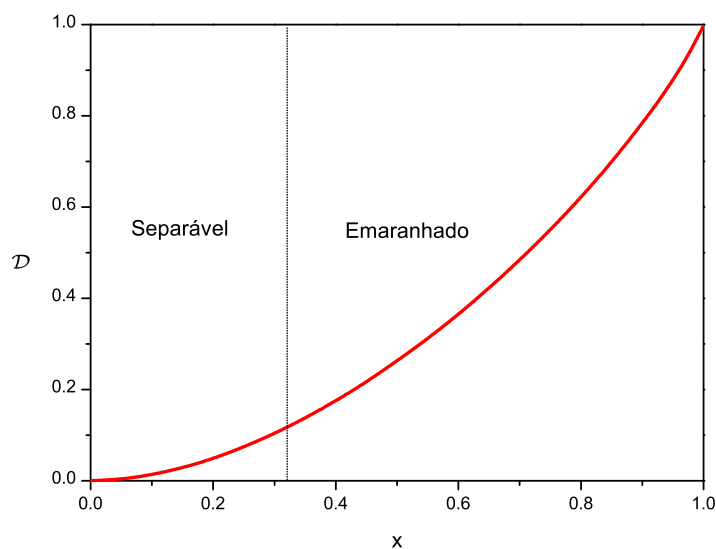


Figura 5.1: Discórdia quântica para o estado de Werner que apresenta um intervalo de separabilidade em $0 \leq x < 1/3$.

restringindo-se somente a três parâmetros livres. Extendemos este resultado para um conjunto de cinco parâmetros livres em [56] e calculamos a dinâmica dissipativa da discórdia para um sistema de dois qubits sujeito a vários canais dissipativos.

No que segue, vamos além do resultado encontrado em [56] e calcularemos a discórdia quântica para um estado X com sete parâmetros livres, baseados no resultado encontrado por Rau e colaboradores em [27], e faremos a comparação entre o emaranhamento, a discórdia e a correlação clássica para alguns estados quânticos. Mostraremos também que a discórdia quântica exibe um fenômeno muito interessante, revelando-se imune à morte súbita mesmo em sistemas que a apresentam para o emaranhamento.

5.1.1 Discórdia para Estados do Tipo X

No Capítulo 4, vimos que os estados do tipo X de sistemas de dois qubits, constituem um caso particular da classe de estados da variedade D-7. A matriz densidade que representa tal estado,

escrita na forma de Fano [41] e em termos dos parâmetros $\{t_{\pm}, u_{\pm}, v_{\pm}, w_{\pm}\}$, introduzidos no Capítulo 3, é dada por

$$\rho^{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_+ + u_+ & 0 & 0 & v_- - iw_+ \\ 0 & t_- + u_- & v_+ + iw_- & 0 \\ 0 & v_+ - iw_- & t_- - u_- & 0 \\ v_- + iw_+ & 0 & 0 & t_+ - u_+ \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

lembrando que

$$\begin{aligned} t_{\pm} &= \frac{1 \pm M_{zz}}{2}, & u_{\pm} &= \frac{P_{A,z} \pm P_{B,z}}{2}, \\ v_{\pm} &= \frac{M_{xx} \pm M_{yy}}{2}, & w_{\pm} &= \frac{M_{yx} \pm M_{xy}}{2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Os autovalores da matriz (5.11) são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\left(t_- + \sqrt{u_-^2 + v_+^2 + w_-^2}\right)}{2}, & \lambda_2 &= \frac{\left(t_- - \sqrt{u_-^2 + v_+^2 + w_-^2}\right)}{2}, \\ \lambda_3 &= \frac{\left(t_+ + \sqrt{u_+^2 + v_-^2 + w_+^2}\right)}{2}, & \lambda_4 &= \frac{\left(t_+ - \sqrt{u_+^2 + v_-^2 + w_+^2}\right)}{2}. \end{aligned}$$

A informação mútua quântica é então dada por [15]

$$\mathcal{I}(\rho^{AB}) = \mathcal{S}(\rho^A) + \mathcal{S}(\rho^B) + \sum_{i=0}^3 \lambda_i \log \lambda_i,$$

onde ρ^A e ρ^B são os estados reduzidos de ρ^{AB} com

$$\mathcal{S}(\rho^A) = -\frac{1}{2} \left[(1 + u_+ + u_-) \log \left(\frac{1 + u_+ + u_-}{2} \right) + (1 - u_- - u_+) \log \left(\frac{1 - u_- - u_+}{2} \right) \right], \quad (5.13)$$

$$\mathcal{S}(\rho^B) = -\frac{1}{2} \left[(1 + u_+ - u_-) \log \left(\frac{1 + u_+ - u_-}{2} \right) + (1 + u_- - u_+) \log \left(\frac{1 + u_- - u_+}{2} \right) \right]. \quad (5.14)$$

Nas Eqs. (5.13) e (5.14) foi usado o fato de que $t_+ + t_- = 1$, que pode ser verificado através das definições dadas em (5.12). Todos os logaritmos estão na base 2 e o serão ao longo de todo o capítulo.

Calculemos agora a correlação clássica $\mathcal{C}(\rho^{AB})$ considerando medidas projetivas sob o subsistema B . Como vimos anteriormente, $\mathcal{C}(\rho^{AB})$ é assimétrica com relação à troca do subsistema a ser medido, contudo medidas projetivas efetuadas no subsistema A fornecem o mesmo resultado se nos restringirmos a estados com $u_+ = 0$ ou $u_- = 0$, uma vez que para esta classe de estados $S(\rho^A) = S(\rho^B)$, o que pode ser facilmente verificado pelas Eqs.(5.13) e (5.14). Faremos aqui o cálculo para o caso geral, ou seja, sem as restrições mencionadas, contudo, os exemplos utilizados nesta tese recaem sempre em um destes dois casos.

Seja $\{\Pi_i = |i\rangle\langle i|, i = 0, 1\}$ um conjunto de medições projetivas aplicadas ao subsistema B na base computacional $\{|i\rangle\}$, de forma que qualquer medição de von Neumann para o subsistema B pode ser escrita como

$$\{B_i = V\Pi_i V^\dagger, i = 0, 1\} \quad (5.15)$$

para algum operador unitário $V \in SU(2)$. Mas qualquer operador unitário $V \in SU(2)$ pode ser escrito como [26]

$$V = tI + i\vec{y} \cdot \vec{\sigma},$$

com $t, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ e $t^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$, implicando que $t, y_i \in [-1, 1]$, para $i = 1, 2, 3$.

Depois de executada a medição, o estado do subsistema A será descrito pelo ensemble $\{\rho_i, p_i\}$, onde

$$\begin{cases} \rho_i = \frac{1}{p_i} [(I \otimes B_i) \rho^{AB} (I \otimes B_i)] \\ p_i = \text{Tr} (I \otimes B_i) \rho^{AB} (I \otimes B_i). \end{cases} \quad (5.16)$$

Este ensemble pode ser caracterizado pelos autovalores de ρ_0 e ρ_1 , que são dados por

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm}(\rho_0) &= \frac{1}{2}(1 \pm \theta), \\ \mu_{\pm}(\rho_1) &= \frac{1}{2}(1 \pm \theta'), \end{aligned}$$

com

$$\theta = \sqrt{\frac{[(t_+ - t_- + u_+ + u_-)k + (t_- - t_+ + u_+ + u_-)l]^2 + 4\Theta}{[(1 + u_+ - u_-)k + (1 - u_+ + u_-)l]^2}} \quad (5.17)$$

$$\theta' = \sqrt{\frac{[(t_+ - t_- + u_+ + u_-)l + (t_- - t_+ + u_+ + u_-)k]^2 + 4\Theta}{[(1 + u_+ - u_-)l + (1 - u_+ + u_-)k]^2}}, \quad (5.18)$$

onde

$$\Theta = kl [(v_- + v_+)^2 + (w_+ + w_-)^2] - 4m(v_-v_+ + w_+w_-) + 4n(v_-w_- - w_+v_+). \quad (5.19)$$

As probabilidades correspondentes são dadas por

$$p_0 = \frac{1}{2} [(1 + u_+ - u_-)k + (1 - u_+ + u_-)l],$$

$$p_1 = \frac{1}{2} [(1 + u_+ - u_-)l + (1 - u_+ + u_-)k]$$

e os parâmetros m , n , k e l são definidos como

$$m = (ty_1 + y_2y_3)^2,$$

$$n = (ty_2 - y_1y_3)(ty_1 + y_2y_3), \quad (5.20)$$

$$k = t^2 + y_3^2,$$

$$l = y_1^2 + y_2^2.$$

Uma vez que $k + l = 1$, o que corresponde a $t^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$, verificamos que as Eqs.(5.17) e (5.18) dependem de três parâmetros reais k , m e n , tais que $k \in [0, 1]$, $m \in [0, 1/4]$, e $n \in [-1/8, 1/8]$, para $t, y_i \in [-1, 1]$ com $i = 1, 2, 3$ [27].

Note que ρ_i , dado em (5.16), pode ser considerado como um operador densidade condicional, uma vez que, está condicionado ao resultado i da medição executada sobre o sistema descrito por ρ^{AB} . Com este operador densidade condicional, podemos definir a entropia condicional quântica como [26]

$$S(\rho|\{B_i\}) := \sum_i p_i S(\rho_i) = p_0 S(\rho_0) + p_1 S(\rho_1), \quad (5.21)$$

onde as entropias do ensemble $\{\rho_i, p_i\}$ são

$$\begin{aligned} S(\rho_0) &= - \left(\frac{1-\theta}{2} \right) \log \left(\frac{1-\theta}{2} \right) - \left(\frac{1+\theta}{2} \right) \log \left(\frac{1+\theta}{2} \right), \\ S(\rho_1) &= - \left(\frac{1-\theta'}{2} \right) \log \left(\frac{1-\theta'}{2} \right) - \left(\frac{1+\theta'}{2} \right) \log \left(\frac{1+\theta'}{2} \right), \end{aligned}$$

com θ e θ' dados pelas Eqs.(5.17) e (5.18). Dessa forma, a correlação clássica é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\rho) &= \max_{\{B_i\}} [\mathcal{I}(\rho^{AB} | \{B_i\})] \\ &= S(\rho^A) - \min_{\{B_i\}} [S(\rho^{AB} | \{B_i\})]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

O cálculo da correlação clássica envolve a minimização da quantidade $S(\rho | \{B_i\})$ com respeito às medições de Von Neumann e, em geral, esta não é uma tarefa trivial. Entretanto, Rau e colaboradores propuzeram uma análise diferenciada que permite o cálculo analítico da máxima correlação clássica e, conseqüentemente, da discórdia quântica [27].

Para minimizar a Eq.(5.21), definindo iguais a zero suas derivadas parciais com respeito a k , m e n , devemos observar primeiramente que esta expressão é simétrica sob a troca de k e $l = 1 - k$, mostrando, portanto, que se trata de uma função par de $(k - l)$ com o limite de valores nos pontos $k = l = 1/2$ ou nos pontos $k = 0$ ou $k = 1$. Da definição destes parâmetros dada em (5.20), os pontos $k = 0$ e $k = 1$, requerem que $t = y_3 = 0$ ou $y_1 = y_2 = 0$ e, portanto, $m = n = 0$. Por outro lado, para $k = l = 1/2$ podemos verificar, através das Eqs.(5.17) e (5.18), que $\theta = \theta'$ e, conseqüentemente, $S(\rho_0) = S(\rho_1)$, mostrando que neste caso a minimização de $S(\rho | \{B_i\})$ é igual a minimização de $S(\rho_0)$ ou de $S(\rho_1)$. Além disso, podemos notar que Θ , dado em (5.19), envolve somente expressões lineares de m e n , de forma que o limite dos seus valores são obtidos somente nos pontos $m = 0, 1/4$ e $n = 0, \pm 1/8$. Assim a máxima correlação clássica e, conseqüentemente, a discórdia podem ser calculadas analiticamente.

No que segue, apresentaremos estes cálculos para um caso geral, onde nenhuma restrição é imposta à matriz densidade que representa um estado do tipo X e mostraremos que

uma nova análise pode ser feita proporcionando uma abordagem mais explícita da condição de maximização de θ e θ' .

Cálculo para $k = l = 1/2$

Como vimos anteriormente, para $k = l = 1/2$ o parâmetro Θ assume o limite dos seus valores nos pontos $m = 0, 1/4$ e $n = 0, \pm 1/8$. Desta forma, calculando o parâmetro θ para cada valor de m e n obtemos

m	n	θ_j
0	0	$\sqrt{V + \alpha}$
0	1/8	$\sqrt{V + \alpha + \beta}$
0	-1/8	$\sqrt{V + \alpha - \beta}$
1/4	0	$\sqrt{V - \alpha}$
1/4	1/8	$\sqrt{V - \alpha + \beta}$
1/4	-1/8	$\sqrt{V - \alpha - \beta}$

(5.23)

onde

$$V = (V_1)^2 + (V_2)^2 + 2u_+u_-$$

$$\alpha = 2(v_-v_+ + w_+w_-)$$

$$\beta = 2(v_-w_- - w_+v_+).$$

Analisando a Tabela (5.23), notamos que os possíveis maiores valores de θ são

$$\theta_2 = \sqrt{V + \alpha + \beta}$$

$$\theta_3 = \sqrt{V + \alpha - \beta}$$

$$\theta_5 = \sqrt{V - \alpha + \beta}$$

$$\theta_6 = \sqrt{V - \alpha - \beta}.$$

Supondo que α e β possam ser positivos ou negativos, teremos

$$\alpha > 0 \text{ quando } v_-v_+ + w_+w_- > 0,$$

$$\alpha < 0 \text{ quando } v_-v_+ + w_+w_- < 0,$$

$$\beta > 0 \text{ quando } v_-w_- - w_+v_+ > 0,$$

$$\beta < 0 \text{ quando } v_-w_- - w_+v_+ < 0.$$

Assim, analisando cada um dos valores de θ quanto à positividade de α e β , encontramos que

$$\text{se } \alpha > 0 \text{ e } \beta > 0 \Rightarrow \theta_{\text{sup}} = \theta_2,$$

$$\text{se } \alpha > 0 \text{ e } \beta < 0 \Rightarrow \theta_{\text{sup}} = \theta_3,$$

$$\text{se } \alpha < 0 \text{ e } \beta > 0 \Rightarrow \theta_{\text{sup}} = \theta_5,$$

$$\text{se } \alpha < 0 \text{ e } \beta < 0 \Rightarrow \theta_{\text{sup}} = \theta_6,$$

onde θ_{sup} representa o valor máximo do parâmetro θ .

Neste caso, a entropia condicional dada em (5.21) é escrita como

$$\tilde{S}(\rho_i) \Big|_{\theta_j} = p_0 S(\rho_0) + p_1 S(\rho_1)$$

sendo

$$p_0 = \left[\left(\frac{1 + u_+ - u_-}{2} \right) k + \left(\frac{1 - u_+ + u_-}{2} \right) l \right] = \frac{1}{2},$$

$$p_1 = \left[\left(\frac{1 + u_+ - u_-}{2} \right) l + \left(\frac{1 - u_+ + u_-}{2} \right) k \right] = \frac{1}{2},$$

para $k = l = 1/2$, e

$$S(\rho_0) = S(\rho_1) = - \left(\frac{1 - \theta_j}{2} \right) \log \left(\frac{1 - \theta_j}{2} \right) - \left(\frac{1 + \theta_j}{2} \right) \log \left(\frac{1 + \theta_j}{2} \right),$$

o que resulta em

$$\tilde{S}(\rho_0) \Big|_{\theta_j} = - \left(\frac{1 - \theta_j}{2} \right) \log \left(\frac{1 - \theta_j}{2} \right) - \left(\frac{1 + \theta_j}{2} \right) \log \left(\frac{1 + \theta_j}{2} \right). \quad (5.24)$$

Desta forma, a minimização de $S(\rho^{AB}|\{B_i\})$, dada em (5.22), é encontrada calculando-se apenas o valor mínimo de $S(\rho_0)$, o que corresponde à minimização de $\tilde{S}(\rho_0)|_{\theta_j}$ a partir do maior valor do parâmetro θ , ou seja,

$$\min S(\rho^{AB}|\{B_i\}) = \min [S(\rho_0)] = \tilde{S}(\rho_0)|_{\theta_{\text{sup}}},$$

onde

$$\theta_{\text{sup}} = \max \{\theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_6\}. \quad (5.25)$$

Cálculo para $k = 0$ e $l = 1$

Da definição destes parâmetros vimos que os valores limites são dados nos pontos $k = 0$ e $k = 1$, e que requerem $m = n = 0$. Isto nos permite escrever θ e θ' como

$$\theta = \frac{|t_- - t_+ + u_+ + u_-|}{|1 - u_+ + u_-|}, \quad (5.26)$$

$$\theta' = \frac{|t_+ - t_- + u_+ + u_-|}{|1 + u_+ - u_-|}. \quad (5.27)$$

Neste caso a entropia condicional é dada por

$$\tilde{S}(\rho_i)|_{\theta_j} = p_0 S(\rho_0) + p_1 S(\rho_1)$$

com

$$p_0 = \frac{1}{2} [(1 + u_+ - u_-)k + (1 - u_+ + u_-)l] = \frac{1}{2} (1 - u_+ + u_-),$$

$$p_1 = \frac{1}{2} [(1 + u_+ - u_-)l + (1 - u_+ + u_-)k] = \frac{1}{2} (1 + u_+ - u_-),$$

para $k = 0$ e $l = 1$, e

$$S(\rho_0) = - \left(\frac{1-\theta}{2} \right) \log \left(\frac{1-\theta}{2} \right) - \left(\frac{1+\theta}{2} \right) \log \left(\frac{1+\theta}{2} \right)$$

$$S(\rho_1) = - \left(\frac{1-\theta'}{2} \right) \log \left(\frac{1-\theta'}{2} \right) - \left(\frac{1+\theta'}{2} \right) \log \left(\frac{1+\theta'}{2} \right)$$

O que nos leva a

$$\begin{aligned} \check{S}(\rho_i)|_{\theta, \theta'} &= \frac{1}{2}(1 - u_+ + u_-) \left[-\left(\frac{1 - \theta}{2}\right) \log\left(\frac{1 - \theta}{2}\right) - \left(\frac{1 + \theta}{2}\right) \log\left(\frac{1 + \theta}{2}\right) \right] \\ &+ \frac{1}{2}(1 + u_+ - u_-) \left[-\left(\frac{1 - \theta'}{2}\right) \log\left(\frac{1 - \theta'}{2}\right) - \left(\frac{1 + \theta'}{2}\right) \log\left(\frac{1 + \theta'}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Correlação Clássica e Discórdia Quântica

Para definirmos a correlação clássica do sistema descrito por ρ^{AB} devemos encontrar o valor mínimo entre $\check{S}(\rho_0)|_{\theta_{\text{sup}}}$, dada em (5.24), e $\check{S}(\rho_i)|_{\theta, \theta'}$ encontrada em (5.28), de forma que

$$\mathcal{C}(\rho^{AB}) = S(\rho^A) - \min_{\{B_i\}} \left[\check{S}(\rho_0)|_{\theta_{\text{sup}}}, \check{S}(\rho_i)|_{\theta, \theta'} \right],$$

onde θ_{sup} , θ e θ' são dados por (5.25), (5.26) e (5.27), respectivamente.

A informação mútua quântica, que quantifica a correlação total do sistema, é dada por

$$\mathcal{I}(\rho^{AB}) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB}), \quad (5.29)$$

sendo

$$\begin{aligned} S(\rho^A) &= -\frac{1}{2} \left[(1 + u_+ + u_-) \log\left(\frac{1 + u_+ + u_-}{2}\right) + (1 - u_- - u_+) \log\left(\frac{1 - u_- - u_+}{2}\right) \right], \\ S(\rho^B) &= -\frac{1}{2} \left[(1 + u_+ - u_-) \log\left(\frac{1 + u_+ - u_-}{2}\right) + (1 + u_- - u_+) \log\left(\frac{1 + u_- - u_+}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S(\rho^{AB}) &= -\sum_{i=0}^3 \lambda_i \log \lambda_i \\ &= -\left(\frac{t_- + V_1}{2}\right) \log\left(\frac{t_- + V_1}{2}\right) - \left(\frac{t_- - V_1}{2}\right) \log\left(\frac{t_- - V_1}{2}\right) \\ &\quad - \left(\frac{t_+ + V_2}{2}\right) \log\left(\frac{t_+ + V_2}{2}\right) - \left(\frac{t_+ - V_2}{2}\right) \log\left(\frac{t_+ - V_2}{2}\right) \end{aligned}$$

com

$$V_1 = \sqrt{u_-^2 + v_+^2 + w_-^2} \quad \text{e} \quad V_2 = \sqrt{u_+^2 + v_-^2 + w_+^2}.$$

Desta forma, a discórdia quântica é calculada como

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\rho^{AB}) &= \mathcal{I}(\rho^{AB}) - \mathcal{C}(\rho^{AB}) \\
&= S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB}) - \left[S(\rho^A) - \min_{\{B_i\}} \left[\tilde{S}(\rho_0) \Big|_{\theta_{\text{sup}}}, \check{S}(\rho_i) \Big|_{\theta, \theta'} \right] \right] \\
&= S(\rho^B) + S(\rho^{AB}) + \min_{\{B_i\}} \left[\tilde{S}(\rho_0) \Big|_{\theta_{\text{sup}}}, \check{S}(\rho_i) \Big|_{\theta, \theta'} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left[(1 + u_+ - u_-) \log \left(\frac{1 + u_+ - u_-}{2} \right) + (1 + u_- - u_+) \log \left(\frac{1 + u_- - u_+}{2} \right) \right] \\
&\quad + \left(\frac{t_- + V_1}{2} \right) \log \left(\frac{t_- + V_1}{2} \right) + \left(\frac{t_- - V_1}{2} \right) \log \left(\frac{t_- - V_1}{2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{t_+ + V_2}{2} \right) \log \left(\frac{t_+ + V_2}{2} \right) + \left(\frac{t_+ - V_2}{2} \right) \log \left(\frac{t_+ - V_2}{2} \right) \\
&\quad + \min_{\{B_i\}} \left[\tilde{S}(\rho_0) \Big|_{\theta_{\text{sup}}}, \check{S}(\rho_i) \Big|_{\theta, \theta'} \right].
\end{aligned}$$

Relembrando que

$$\theta_2 = \sqrt{V + \alpha + \beta}; \quad \theta_3 = \sqrt{V + \alpha - \beta}; \quad \theta_5 = \sqrt{V - \alpha + \beta}; \quad \theta_6 = \sqrt{V - \alpha - \beta},$$

e

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{|t_- - t_+ + u_+ + u_-|}{|1 - u_+ + u_-|}; \\
\theta' &= \frac{|t_+ - t_- + u_+ + u_-|}{|1 + u_+ - u_-|}.
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(v_- v_+ + w_+ w_-)}{2}; \\
\beta &= \frac{(v_- w_- - w_+ v_+)}{2}; \\
V &= (V_1)^2 + (V_2)^2 + 2u_+ u_-; \\
V_1 &= \sqrt{u_-^2 + v_+^2 + w_-^2}; \\
V_2 &= \sqrt{u_+^2 + v_-^2 + w_+^2}.
\end{aligned}$$

5.1.2 Aplicações

No que segue, estudaremos a relação entre a discórdia, o emaranhamento e a correlação clássica para alguns estados anteriormente apresentados. O emaranhamento será quantificado pela *currence* [9] que foi amplamente discutida nos capítulos anteriores.

Estado de Werner

No início deste capítulo, apresentamos o estado de Werner como um exemplo onde a discórdia é não nula mesmo no intervalo onde o estado é separável. Aqui, analisaremos a relação entre a correlação clássica, a discórdia e o emaranhamento para este estado. Sabendo que

t_+	t_-	u_+	u_-	v_+	v_-	w_+	w_-	V_1	V_2	V	α	β
$(1-x)/2$	$(1+x)/2$	0	0	$-x$	0	0	0	$ x $	0	x^2	0	0

encontramos

θ_2	θ_3	θ_5	θ_6	θ	θ'
$ x $	$ x $	$ x $	$ x $	$ x $	$ x $

Desta forma, as quantidades $\tilde{S}(\rho_0)|_{\theta_j}$ e $\check{S}(\rho_i)|_{\theta,\theta'}$ serão iguais e dadas por

$$\tilde{S}(\rho_0)|_{\theta_j} = \check{S}(\rho_i)|_{\theta,\theta'} = -\left(\frac{1-|x|}{2}\right) \log\left(\frac{1-|x|}{2}\right) - \left(\frac{1+|x|}{2}\right) \log\left(\frac{1+|x|}{2}\right),$$

tal que podemos escrever a correlação clássica como

$$\mathcal{C}(\rho^{AB}) = 1 + \left(\frac{1-|x|}{2}\right) \log\left(\frac{1-|x|}{2}\right) + \left(\frac{1+|x|}{2}\right) \log\left(\frac{1+|x|}{2}\right). \quad (5.30)$$

A informação mútua quântica, dada em (5.29), torna-se

$$\mathcal{I}(\rho^{AB}) = 2 + \left(\frac{1+3x}{4}\right) \log\left(\frac{1+3x}{4}\right) + 3 \left(\frac{1-x}{4}\right) \log\left(\frac{1-x}{4}\right).$$

Então, a discórdia quântica pode ser escrita como

$$\mathcal{D}(\rho^{AB}) = \frac{1}{4} [(1-x) \log(1-x) + (1+3x) \log(1+3x) - 2(1+x) \log(1+x)].$$

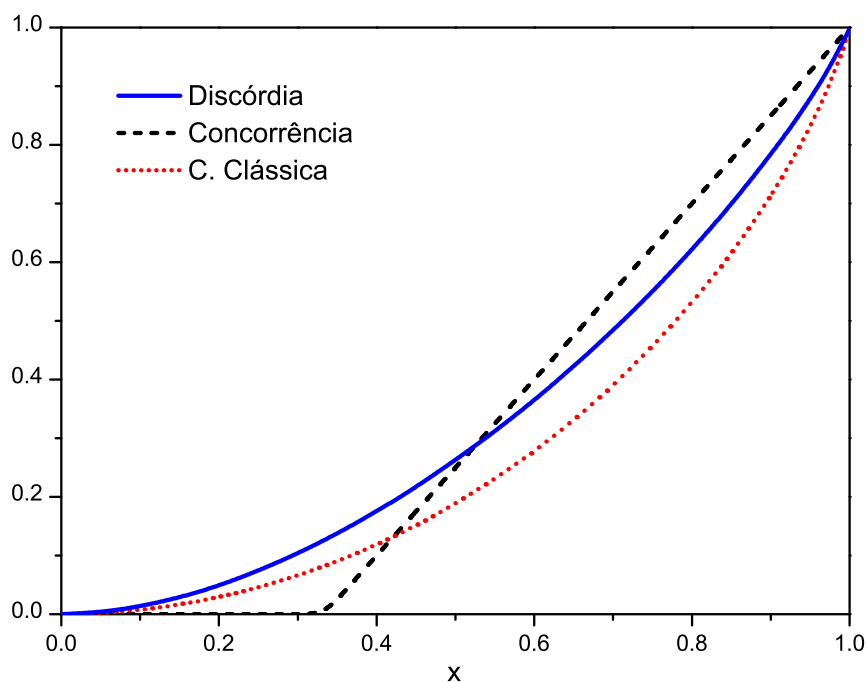


Figura 5.2: Discórdia, *concurrência* e correlação clássica para o estado de Werner como função do parâmetro x para $0 \leq x \leq 1$.

A Fig. (5.2) mostra a discórdia, a *concurrência* e a correlação clássica para o estado de Werner, onde a linha sólida representa a discórdia, a tracejada representa a *concurrência* e a pontilhada a correlação clássica. Notamos que a discórdia é inicialmente maior que a *concurrência* e a correlação clássica, contudo para $0,5 \lesssim x < 1$ a *concurrência* torna-se maior que a discórdia e a correlação clássica.

Estado de Peres-Horodecki

Para o estado de Peres-Horodecki [8], dado na Eq. (3.31) no Capítulo 3, encontramos

t_+	t_-	u_+	u_-	v_+	v_-	w_+	w_-
$(1-x)$	x	$(1-x)$	0	$-x$	0	0	0

logo

V_1	V_2	θ_2	θ_3	θ_5	θ_6	θ	θ'
$ x $	$ 1-x $	$\sqrt{2x(x-1)+1}$	$=\theta_2$	$=\theta_2$	$=\theta_2$	1	$\frac{ x }{ 2-x }$

Primeiramente, devemos analisar qual é o maior valor do parâmetro θ no intervalo de existência da ρ_{PH} , $0 \leq x \leq 1$. Neste caso podemos notar que $\theta_i > \theta'$, de forma que $\tilde{S}(\rho_0)|_{\theta_{\text{sup}}} > \check{S}(\rho_i)|_{\theta, \theta'}$, logo a correlação clássica é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\rho_{PH}) = & -\frac{1}{2} \left[(2-x) \log \left(\frac{2-x}{2} \right) + x \log \left(\frac{x}{2} \right) \right] \\ & + \left(\frac{1 - \sqrt{2x(x-1)+1}}{2} \right) \log \left(\frac{1 - \sqrt{2x(x-1)+1}}{2} \right) \\ & + \left(\frac{1 + \sqrt{2x(x-1)+1}}{2} \right) \log \left(\frac{1 + \sqrt{2x(x-1)+1}}{2} \right). \end{aligned}$$

Assim, a discórdia é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\rho_{PH}) = & 2 - \left(\frac{2-x}{2} \right) \log(2-x) + \left(\frac{x}{2} \right) \log(x) + (1-x) \log(1-x) \\ & - \left(\frac{1 - \sqrt{2x(x-1)+1}}{2} \right) \log \left(1 - \sqrt{2x(x-1)+1} \right) \\ & - \left(\frac{1 + \sqrt{2x(x-1)+1}}{2} \right) \log \left(1 + \sqrt{2x(x-1)+1} \right) \end{aligned}$$

A Fig. (5.3) mostra a discórdia, a *concurrence* e a correlação clássica para o estado de Peres-Horodecki, onde a linha sólida representa a discórdia, a tracejada representa a *concurrence* e a pontilhada a correlação clássica. Notamos que para este estado a concorência sempre é maior do que a discórdia e a correlação clássica. Note, entretanto, que $\mathcal{D}(\rho_{PH}) \geq \mathcal{C}(\rho_{PH})$ para todo o intervalo de existência do estado, $0 \leq x \leq 1$.

Os exemplos mostram que não existe um ordenamento entre a discórdia, o emaranhamento e as correlações clássicas, podendo a discórdia ser maior que o emaranhamento, quando o medimos via *concurrence* [9], ou vice-versa. Isso indica que a discórdia não é simplesmente a

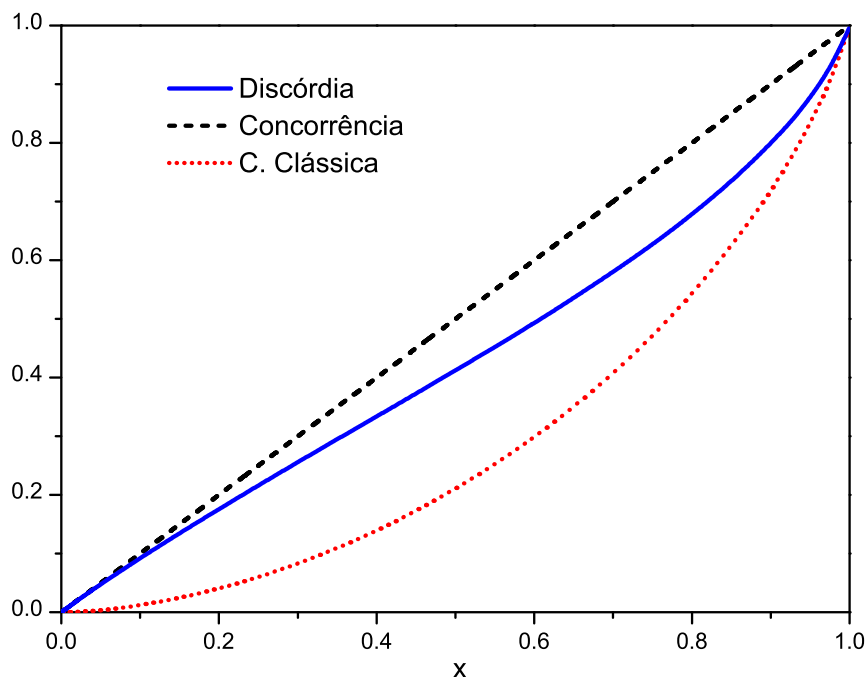


Figura 5.3: Discórdia, *concurrency* e correlação clássica para o estado de Peres-Horodecki como função do parâmetro x para $0 \leq x \leq 1$

soma do emaranhamento e algum outro tipo de correlação não clássica, mas sim uma medida independente que pode incluir o emaranhamento.

5.1.3 Discórdia vs. Morte Súbita do Emaranhamento.

Como vimos anteriormente, ao considerarmos um par de qubits emaranhados expostos a reservatórios individuais, desemaranhamento pode ocorrer em um tempo finito [12, 34, 57] diferentemente da usual decoerência local em tempo assintótico. A ocorrência deste fenômeno, denominado como morte súbita do emaranhamento (MSE), depende da interação entre o sistema e o reservatório e do estado inicial dos dois qubits. Em [56] investigamos a dinâmica da discórdia de dois qubits sob condições onde a MSE pode ocorrer e mostramos que, mesmo em casos

onde o emaranhamento desaparece subitamente, a discórdia quântica decai somente em tempo assintótico. Neste sentido, a discórdia é mais robusta contra a decoerência que o emaranhamento, implicando que algoritmos quânticos baseados somente em correlações quânticas mensuradas pela discórdia, podem vir a ser mais robustos do que aqueles baseados no emaranhamento.

Para examinar a dinâmica do emaranhamento e da discórdia para um sistema de dois qubits sob a ação de um reservatório de atenuação da fase¹, nós utilizamos o estado de Werner, $\rho_W(0) = x |\psi^-\rangle \langle \psi^-| + \mathbb{I}/4$, como condição inicial. Neste caso, podemos escrever a matriz densidade que representa a evolução do sistema como

$$\rho_W(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+x}{4} & -\frac{x}{2}(1-\gamma) & 0 \\ 0 & -\frac{x}{2}(1-\gamma) & \frac{1+x}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

onde $\gamma = 1 - e^{-\Gamma t}$, com Γ denotando a taxa de decaimento [15]

Para o estado (5.31) teremos

t_+	t_-	u_+	u_-	v_+	v_-	w_+	w_-
$\frac{1-x}{2}$	$\frac{1+x}{2}$	0	0	$-x(1-\gamma)$	0	0	0

logo

V_1	V_2	θ_2	θ_3	θ_5	θ_6	θ	θ'
$x(1-\gamma)$	0	$x(1-\gamma)$	$x(1-\gamma)$	$x(1-\gamma)$	$x(1-\gamma)$	$ x $	$ x $

Podemos observar que $\theta = \theta' = |x|$ é maior que qualquer um dos θ_i , logo $\check{S}(\rho_i)|_{\theta, \theta'} \leq \check{S}(\rho_0)|_{\theta_{\text{sup}}}$

e $\min_{\{B_i\}} \left[\check{S}(\rho_0)|_{\theta_{\text{sup}}}, \check{S}(\rho_i)|_{\theta, \theta'} \right] = \check{S}(\rho_i)|_{\theta, \theta'}$ que é dada por

$$\check{S}(\rho_i)|_{\theta, \theta'} = - \left(\frac{1-|x|}{2} \right) \log \left(\frac{1-|x|}{2} \right) - \left(\frac{1+|x|}{2} \right) \log \left(\frac{1+|x|}{2} \right).$$

¹Este tipo de reservatório leva a extinção das coerências quânticas sem que as amplitudes sejam modificadas, ou seja, sem que haja perda de energia [15].

Desta forma, a correlação clássica pode ser escrita como

$$\mathcal{C}(\rho_W) = S(\rho^A) - \min_{\{B_i\}} \left[S'(\rho_0)|_{\theta_{\text{sup}}}, S'(\rho_i)|_{\theta, \theta'} \right] \quad (5.32)$$

$$= 1 + \left(\frac{1 - |x|}{2} \right) \log \left(\frac{1 - |x|}{2} \right) + \left(\frac{1 + |x|}{2} \right) \log \left(\frac{1 + |x|}{2} \right), \quad (5.33)$$

e a discórdia é finalmente dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(x, \gamma) &= \left(\frac{1 + x + 2|x(1 - \gamma)|}{4} \right) \log(1 + x + 2|x(1 - \gamma)|) \\ &+ \left(\frac{1 + x - 2|x(1 - \gamma)|}{4} \right) \log(1 + x - 2|x(1 - \gamma)|) \\ &- \left(\frac{1 + |x|}{2} \right) \log(1 + |x|). \end{aligned}$$

Para o estado (5.31), a *concurrence* pode ser escrita como

$$C'(\rho_W) = x \left(\frac{3 - 2\gamma}{2} \right) - \frac{1}{2}, \quad (5.34)$$

e atinge um valor nulo em um tempo finito para qualquer $x \neq 1$, como pode ser visto na Fig.(5.4). Por outro lado, a Fig.(5.5) nos mostra que, para qualquer valor de x , a discórdia se anula somente no limite assintótico. Este mesmo comportamento é apresentado quando consideramos os reservatórios de atenuação de amplitude, de despolarização e os de fase aplicados em conjunto com os de atenuação da amplitude [56]. Podemos concluir, então, que a discórdia é mais robusta que as medidas de emaranhamento, sendo imune à morte súbita. Isto aponta para o fato de que a ausência de emaranhamento não indica necessariamente a ausência de correlações quânticas. Assim, a discórdia quântica pode ser a melhor forma de quantificação dos recursos quânticos disponíveis para os processos de informação quântica e computação quântica.

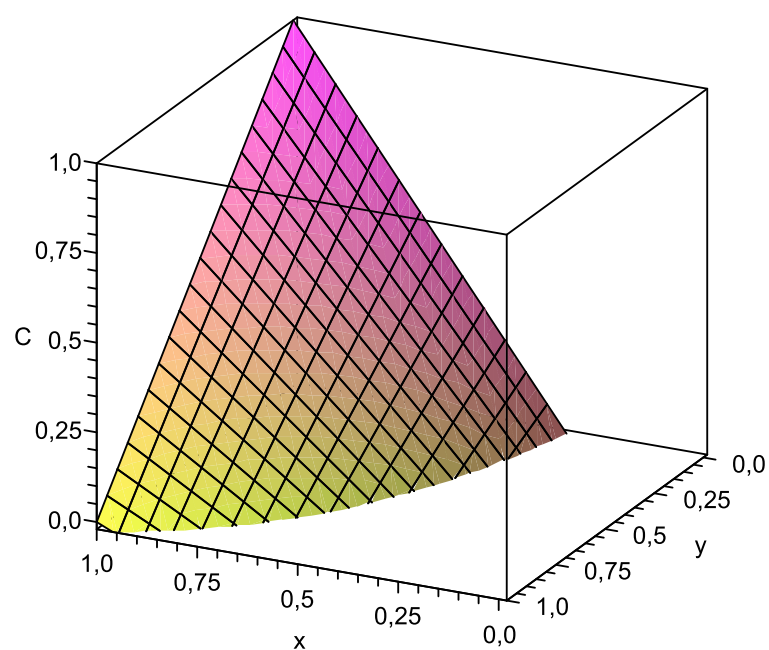


Figura 5.4: Dinâmica dissipativa da *concurrence* como função do parâmetro x e γ , assumindo independentes reservatórios de atenuação da fase.

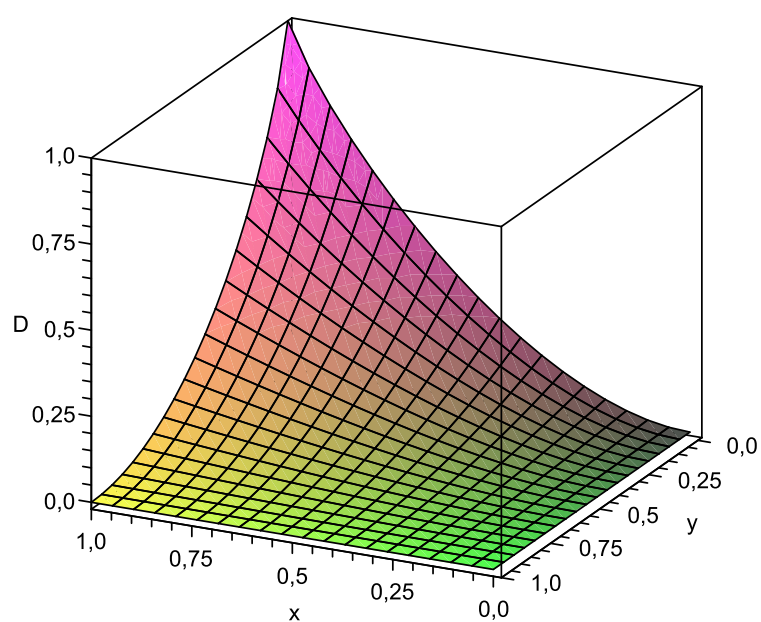


Figura 5.5: Dinâmica dissipativa da discórdia como função do parâmetro x e γ , assumindo independentes reservatórios de atenuação da fase.

Capítulo 6

Comentários e Conclusões

Nesta tese abordamos, inicialmente, a questão do emaranhamento e separabilidade em um sistema de dois qubits representado por uma matriz X 4×4 de variedades D-7. Observamos que a matriz do tipo X indica simetrias físicas quando expressa em termos dos vetores de polarização e dos elementos da matriz de correlação em \mathcal{R}^3 . Apresentamos então um método geométrico que nos permitiu interpretar a separabilidade dos estados emaranhados de uma forma inédita e estabelecer distâncias quadráticas, calculadas na métrica de Minkowski, que proporcionaram a definição de um quantificador do grau de emaranhamento, que mostrou-se equivalente à *concurrency* e à negatividade apesar de serem formalmente distintos. Do ponto de vista operacional, o método proposto revelou-se bastante simples, uma vez que o cálculo das distâncias quadráticas para um estado quântico genérico foi feita apenas com a identificação direta dos elementos da matriz densidade que descreve o sistema com as componentes $(t_{\pm}, u_{\pm}, v_{\pm}, w_{\pm})$ do espaço quadridimensional.

As simetrias foram reveladas através de operações de reflexão nos vetores de polarização e nos elementos da matriz de correlação, o que nos permitiu concluir que transpor parcialmente um sistema equivale a fazer uma reflexão, em um plano qualquer do \mathcal{R}^3 , sob os elementos de apenas um dos subsistemas. Foi possível concluir também que duas reflexões locais, efetuadas de forma independente em cada subsistema, não alteram o espectro de autovalores da matriz

densidade do estado conjunto.

Este método geométrico nos proporcionou um enorme ganho quanto às representações dos estados emaranhados, pois nos permitiu fazer uma análise quantitativa do emaranhamento, ao contrário das representações usuais que são apenas pictóricas e qualitativas. Neste cenário, foi possível representar os estados através da projeção da superfície cônica no plano t^2 vs. \vec{r}^2 , tal que, a fronteira do cone determinou a separação entre estados do *tipo separável* e estados do *tipo emaranhado*. Obtivemos curvas que nos permitiram analisar o intervalo de separabilidade para cada estado estacionário estudado como exemplo, bem como a traçar trajetórias para os estados dinâmicos que exibem a morte súbita e o renascimento súbito do emaranhamento, mostrando que, em um tempo finito, a trajetória cruza a linha que separa os espaços, vinda da região do estados tipo emaranhado para a região onde os estados são do tipo separável, o que caracteriza a morte súbita do emaranhamento ou ainda que a trajetória cruza a fronteira entre as regiões no sentido oposto indicando o renascimento súbito do emaranhamento.

Posteriormente, estendemos o método para toda a subálgebra dos D-7, o que nos forneceu uma visão mais abrangente acerca das simetrias envolvidas nos estados descritos por essa subálgebra. Mostramos que as distâncias quadráticas permanecem invariantes em sua forma, tal que, somente a definição das variáveis do espaço quadridimensional requer mudanças, que são aplicadas de acordo com a simetria e as relações de comutação do estado estudado. Esta análise nos permitiu concluir que existem simetrias próprias para a representação dos estados separáveis desta subálgebra, devido ao fato de que seis das quinze classes de estados só podem representar estados separáveis, uma vez que a reflexão de uma partícula, em um plano qualquer do \mathcal{R}^3 , resulta sempre em um espectro de autovalores positivos, iguais ao do estado original. Esta é uma característica intrínseca e está largamente relacionada à simetria do sistema.

Por fim, calculamos a discórdia quântica para um estado X genérico, escrito na forma

de Fano, o que nos proporcionou uma abordagem mais explícita da condição de minimização da entropia no cálculo desta correlação quântica. Fizemos ainda a comparação entre o emaranhamento, medido via *concurrence*, a discórdia e a correlação clássica para alguns estados quânticos conhecidos na literatura e verificamos que não existe uma relação de ordem entre estes três tipos de correlações, podendo a discórdia ser maior que o emaranhamento, ou vice-versa. Mostramos também que a discórdia quântica, calculada para um sistema de dois qubits acoplados a diferentes reservatórios de fase, é mais robusta que as medidas de emaranhamento, sendo imune à morte súbita. Tal resultado aponta para o fato de que a ausência de emaranhamento não indica necessariamente a ausência de correlações quânticas.

Assim, a discórdia quântica parece ser a melhor forma de quantificação dos recursos quânticos disponíveis para os processos de informação. Diante disso torna-se fundamental sua caracterização e o estudo do seu comportamento nos diversos sistemas quânticos. Inseridos neste contexto, estamos trabalhando recentemente em uma interpretação geométrica para a discórdia e estudando também qual o papel desta quantidade nas transições de fase quântica.

Apêndice A

Matriz Genérica na Forma de Fano

A.1 Matrizes genéricas 2×2

Dada uma matriz genérica 2×2 com elementos em \mathbb{C} , podemos escrevê-la como a soma de duas matrizes hermitianas, \mathbb{H}_1 e \mathbb{H}_2 , como segue

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathbb{H}_1 + i\mathbb{H}_2 \quad (\text{A.1})$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & c_1^* \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} a_2 & c_2^* \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

os oito diferentes elementos são reorganizados com o conjunto de números reais $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$ e imaginários $\{c_1, c_2\}$. As matrizes $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ são hermitianas, contudo a matriz \mathbb{G} não possui essa propriedade:

$$\mathbb{G}^\dagger = \mathbb{H}_1^\dagger - i\mathbb{H}_2^\dagger = \mathbb{H}_1 - i\mathbb{H}_2 \neq \mathbb{G}. \quad (\text{A.3})$$

Os elementos desta matriz estão relacionados com os elementos das matrizes hermitianas da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a_1 + ia_2 \\ b = c_1^* + ic_2^* \\ c = c_1 + ic_2 \\ d = b_1 + ib_2 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \text{Re } a, \quad a_2 = \text{Im } a \\ c_1 = \frac{1}{2}(c + b^*) \\ c_2 = \frac{1}{2i}(c - b^*) \\ b_1 = \text{Re } d, \quad b_2 = \text{Im } d \end{array} \right\}. \quad (\text{A.4})$$

Cada matriz hermitiana, \mathbb{H}_1 e \mathbb{H}_2 , pode ser escrita em termos das matrizes de Pauli $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ e a matriz unidade $\hat{1}$, tal que

$$\hat{H}_k = \alpha_k \hat{1} + \frac{1}{2} \vec{P}_k \cdot \vec{\sigma}, \quad k = 1, 2,$$

sendo $\vec{\sigma} = \hat{\sigma}_x \hat{i} + \hat{\sigma}_y \hat{j} + \hat{\sigma}_z \hat{k}$, com

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O fator α_k é um número escalar e \vec{P}_k é um vetor, ambos são expressos em termos dos elementos da matriz (A.2) como

$$\alpha_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

$$\vec{P}_k = (c_k + c_k^*) \hat{i} + \frac{1}{i} (c_k - c_k^*) \hat{j} + (a_k - b_k) \hat{k} = (2 \operatorname{Re} c_k) \hat{i} + (2 \operatorname{Im} c_k) \hat{j} + (a_k - b_k) \hat{k},$$

ou em termos dos elementos da matriz (A.1) como

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (a + d),$$

$$\vec{P}_1 = \operatorname{Re} (c + b) \hat{i} + \operatorname{Im} (c - b) \hat{j} + \operatorname{Re} (a - d) \hat{k}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Im} (a + d)$$

$$\vec{P}_2 = \operatorname{Im} (c + b) \hat{i} - \operatorname{Re} (c - b) \hat{j} + \operatorname{Im} (d - a) \hat{k}.$$

com

$$\left| \vec{P}_1 \right|^2 = (\operatorname{Re} (c + b))^2 + (\operatorname{Im} (c - b))^2 + (\operatorname{Re} (a - d))^2$$

$$\left| \vec{P}_2 \right|^2 = (\operatorname{Im} (c + b))^2 + (\operatorname{Re} (c - b))^2 + (\operatorname{Im} (d - a))^2$$

e sendo o ângulo entre eles dado por

$$\cos \Theta = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{\left| \vec{P}_1 \right| \left| \vec{P}_2 \right|} = \frac{\operatorname{Re} (c + b) \operatorname{Im} (c + b) - \operatorname{Im} (c - b) \operatorname{Re} (c - b) + \operatorname{Re} (a - d) \operatorname{Im} (d - a)}{\left| \vec{P}_1 \right| \left| \vec{P}_2 \right|}.$$

Reescrevendo a matriz \mathbb{G} como

$$\mathbb{G} = \mathbb{H}_1 + i\mathbb{H}_2 = \alpha_G \hat{1} + \frac{1}{2} \vec{P}_G \cdot \vec{\sigma}$$

com α_G e \vec{P}_G sendo quantidades complexas dadas por,

$$\alpha_G = \alpha_1 + i\alpha_2 = \frac{1}{2}(a + d)$$

$$\vec{P}_G = \vec{P}_1 + i\vec{P}_2 = (b + c)\hat{i} + i(b - c)\hat{j} + (a - d)\hat{k}$$

e

$$\text{Tr}(\mathbb{G}\vec{\sigma}) = \vec{P}_G = \text{Re } \vec{P}_G + i \text{Im } \vec{P}_G,$$

o vetor de polarização.

Como complemento, destacamos as quantidades

$$\begin{aligned} \mathbb{G}^2 &= \left(\alpha_G \hat{1} + \frac{1}{2} \vec{P}_G \cdot \vec{\sigma} \right) \left(\alpha_G \hat{1} + \frac{1}{2} \vec{P}_G \cdot \vec{\sigma} \right) = \left(\alpha_G^2 + \frac{1}{4} (\vec{P}_G)^2 \right) \hat{1} + \left(\alpha_G \vec{P}_G + i \frac{1}{4} \vec{P}_G \times \vec{P}_G \right) \\ &= \left[\alpha_G^2 + \frac{1}{4} (\vec{P}_G)^2 \right] \hat{1} + \alpha_G \vec{P}_G \cdot \vec{\sigma} \end{aligned}$$

$$\text{Tr} \mathbb{G} = 2\alpha_G = a + d \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \mathbb{G}^2 &= 2 \left(\alpha_G^2 + \frac{1}{4} (\vec{P}_G)^2 \right) \\ &= 2 \left[\frac{1}{4} (a + d)^2 + \frac{1}{4} [(b + c)^2 - (b - c)^2 + (a - d)^2] \right] \\ &= \frac{1}{2} [(a + d)^2 + (b + c)^2 - (b - c)^2 + (a - d)^2] \\ &= \frac{1}{2} [2a^2 + 2d^2 + 4bc] = a^2 + d^2 + 2bc, \end{aligned}$$

e por fim,

$$\frac{1}{2} [(\text{Tr} \mathbb{G})^2 - \text{Tr} \mathbb{G}^2] = ad - bc = \det \mathbb{G}.$$

A.2 Matrizes Hermitianas 2×2

Para que a matriz (A.1) seja hermitiana os elementos a e d devem ser reais ($a_1 = a$, $d_1 = d$, $\mathbb{H}_2 = 0$ e $\mathbb{G} = \mathbb{H}_1 \equiv \mathbb{H}$) e $b = c^*$, tal que o vetor $\vec{P}_G = (2 \operatorname{Re} c) \hat{i} + (2 \operatorname{Im} c) \hat{j} + (a - d) \hat{k}$ seja real.

A matriz hermitiana 2×2

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} a & c^* \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

tem autovalores reais

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[(a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4|c|^2} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Para que estes autovalores sejam positivos, as seguintes condições devem ser satisfeitas

1)

$$0 \leq \lambda_{\pm} \implies a + d \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

e

2)

$$\begin{aligned} (a + d) \geq \mp \sqrt{(a - d)^2 + 4|c|^2} &\implies (a + d)^2 \geq (a - d)^2 + 4|c|^2 \\ &\implies ad \geq |c|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Então, os elementos a e d devem ser números reais não negativos, ou seja, $a \geq 0$, $d \geq 0$ e $ad \geq |c|^2$ ou $\det \mathbb{H} \geq 0$. Além disso

$$\begin{aligned} \lambda_+ \lambda_- &= \frac{1}{4} [(a + d)^2 - (a - d)^2 - 4|c|^2] = ad - |c|^2 = \det \mathbb{H} \\ \operatorname{Tr} \mathbb{H} &= \lambda_+ + \lambda_- = a + d \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\operatorname{Tr} \mathbb{H}^2 = \lambda_+^2 + \lambda_-^2 = \frac{2}{4} [(a + d)^2 + (a - d)^2 + 4|c|^2] = a^2 + d^2 + 2|c|^2.$$

Assim como no caso das matrizes genéricas, podemos escrever \mathbb{H} em termos das matrizes de Pauli e a identidade, tal que

$$\hat{H} = \alpha \hat{1} + \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{\sigma}, \quad (\text{A.11})$$

sendo

$$\alpha = \frac{a+d}{2} \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{P} = (2 \operatorname{Re} c) \hat{i} + (2 \operatorname{Im} c) \hat{j} + (a-d) \hat{k}. \quad (\text{A.13})$$

As condições de não negatividade são $\alpha \geq 0$ e $\alpha \geq |\vec{P}|/2$.

Quando \hat{H} representar uma matriz densidade, $\hat{H} = \hat{\rho}$, devemos garantir que $\operatorname{Tr} \hat{\rho} = 1$, $\operatorname{Tr} \hat{\rho}^2 \leq 1$, e $\hat{\rho}$ deve ser positiva semidefinida. Isso implica que

a) $\operatorname{Tr} \hat{\rho} = 1 \implies a+d = 1$, ou seja, $\alpha = 1/2$, então

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}).$$

b) $\operatorname{Tr} \hat{\rho}^2 \leq 1 \implies |\vec{P}| \leq 1$. Uma vez que

$$\hat{\rho}^2 = \frac{1}{4} (\hat{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) (\hat{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) = 1/4 [(1 + \vec{P} \cdot \vec{P}) \hat{1} + 2\vec{P} \cdot \vec{\sigma} + i\vec{P} \times \vec{P} \cdot \vec{\sigma}]$$

(onde usamos a relação $\vec{A} \cdot \vec{\sigma} \vec{B} \cdot \vec{\sigma} = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{\sigma}$) então,

$$\operatorname{Tr} \hat{\rho}^2 = \frac{1}{2} (1 + |\vec{P}|^2) \leq 1 \implies |\vec{P}| \leq 1$$

e para que esta condição seja satisfeita devemos ter

$$[4(\operatorname{Re} c)^2 + 4(\operatorname{Im} c)^2 + (a-d)^2] \leq 1.$$

A.3 Matrizes Hermitianas 4×4 - Forma de Fano

Qualquer matriz hermitiana 4×4 pode ser escrita em quatro blocos, tal que

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} \mathbb{H}_+ & \mathbb{G}^\dagger \\ \mathbb{G} & \mathbb{H}_- \end{pmatrix}; \quad \mathbb{F}^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbb{H}_+ & \mathbb{G} \\ \mathbb{G}^\dagger & \mathbb{H}_- \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

sendo as matrizes hermitianas \mathbb{H}_+ e \mathbb{H}_- dadas por

$$\mathbb{H}_\pm = \begin{pmatrix} a_\pm & c_\pm^* \\ c_\pm & d_\pm \end{pmatrix}$$

que podem ser escritas como

$$\hat{H}_{\pm} = I_{\pm} \hat{1}_p + \vec{R}_{\pm} \cdot \vec{\sigma}_p$$

com

$$I_{\pm} = \frac{a_{\pm} + d_{\pm}}{2}, \quad \vec{R}_{\pm} = (\text{Re } c_{\pm}) \hat{i} + (\text{Im } c_{\pm}) \hat{j} + \frac{(a_{\pm} - d_{\pm})}{2} \hat{k}.$$

A matriz \mathbb{G} é não hermitiana e nós a escrevemos como a soma de duas matrizes hermitianas como fizemos na seção A1, a saber

$$\mathbb{G} = \mathbb{H}_1 + i\mathbb{H}_2$$

$$\mathbb{G}^{\dagger} = \mathbb{H}_1^{\dagger} - i\mathbb{H}_2^{\dagger} = \mathbb{H}_1 - i\mathbb{H}_2 \neq \mathbb{G},$$

sendo

$$\mathbb{H}_1 = \frac{\mathbb{G} + \mathbb{G}^{\dagger}}{2} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1^* \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{H}_2 = \frac{\mathbb{G} - \mathbb{G}^{\dagger}}{2i} = \begin{pmatrix} a_2 & c_2^* \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

logo, lidamos com quatro diferentes matrizes hermitianas, \mathbb{H}_+ , \mathbb{H}_- , \mathbb{H}_1 , \mathbb{H}_2 . Escrevendo-as como operadores teremos

$$\hat{H}_1 = J_1 \hat{1}_p + \vec{Q}_1 \cdot \vec{\sigma}_p$$

$$\hat{H}_2 = J_2 \hat{1}_p + \vec{Q}_2 \cdot \vec{\sigma}_p$$

com

$$J_{1,2} = \frac{a_{1,2} + d_{1,2}}{2}, \quad \vec{Q}_{1,2} = (\text{Re } c_{1,2}) \hat{i} + (\text{Im } c_{1,2}) \hat{j} + \frac{(a_{1,2} - d_{1,2})}{2} \hat{k}.$$

Assim, reescrevendo \mathbb{G} ,

$$\begin{aligned} \hat{G} &= J_1 \hat{1}_p + \vec{Q}_1 \cdot \vec{\sigma}_p + i \left(J_2 \hat{1}_p + \vec{Q}_2 \cdot \vec{\sigma}_p \right) \\ &= J \hat{1}_p + \vec{Q} \cdot \vec{\sigma}_p, \end{aligned}$$

sendo

$$J = J_1 + iJ_2, \quad e \quad \vec{Q} = \vec{Q}_1 + i\vec{Q}_2$$

e

$$\hat{G}^\dagger = J^* \hat{1}_p + \vec{Q}^* \cdot \vec{\sigma}_p.$$

Desta forma, a matriz \mathbb{F} pode ser escrita como

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} I_+ \hat{1}_p + \vec{R}_+ \cdot \vec{\sigma}_p & J^* \hat{1}_p + \vec{Q}^* \cdot \vec{\sigma}_p \\ J \hat{1}_p + \vec{Q} \cdot \vec{\sigma}_p & I_- \hat{1}_p + \vec{R}_- \cdot \vec{\sigma}_p \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

onde o subscrito p refere-se à paridade. Interpretação: I_+ e I_- representam as intensidades dos tipos de graus de liberdade (ou partículas) e \vec{R}_+/I_+ e \vec{R}_-/I_- são vetores de polarização dos "feixes" (duas partículas), \vec{Q}_R e \vec{Q}_I o efeito de interferência entre os dois graus de liberdade (partículas). Os elementos da matriz (A.15) são obtidos pelo cálculo do traço:

$$\begin{aligned} I_+ \hat{1}_p + \vec{R}_+ \cdot \vec{\sigma}_p &= \text{Tr}_s \left(\frac{\hat{1}_s + \sigma_{s,z}}{2} \mathbb{F} \right) \\ I_- \hat{1}_p + \vec{R}_- \cdot \vec{\sigma}_p &= \text{Tr}_s \left(\frac{\hat{1}_s - \sigma_{s,z}}{2} \mathbb{F} \right) \\ J \hat{1}_p + \vec{Q} \cdot \vec{\sigma}_p &= \text{Tr}_s \left(\frac{\sigma_{s,x} + i\sigma_{s,y}}{2} \mathbb{F} \right) = \text{Tr}_s (\sigma_{s,+} \mathbb{F}) \\ J^* \hat{1}_p + \vec{Q}^* \cdot \vec{\sigma}_p &= \text{Tr}_s \left(\frac{\sigma_{s,x} - i\sigma_{s,y}}{2} \mathbb{F} \right) = \text{Tr}_s (\sigma_{s,-} \mathbb{F}) \end{aligned}$$

onde o subscrito s refere-se à matriz (A.15) assumindo que seus elementos são números e não operadores (ou matrizes).

A matriz \mathbb{F} pode ser escrita como a seguinte matriz 4×4 :

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} I_+ + R_{+z} & R_{+x} - iR_{+y} & J^* + Q_z^* & Q_x^* - iQ_y^* \\ R_{+x} + iR_{+y} & I_+ - R_{+z} & Q_x^* + iQ_y^* & J^* - Q_z^* \\ J + Q_z & Q_x - iQ_y & I_- + R_{-z} & R_{-x} - iR_{-y} \\ Q_x + iQ_y & J - Q_z & R_{-x} + iR_{-y} & I_- - R_{-z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

que é positiva semidefinida (todos os autovalores são não negativos) quando

$$I_+ \geq \left| \vec{R}_+ \right|, \quad (\text{A.17})$$

$$I_- \geq \left| \vec{R}_- \right| \quad (\text{A.18})$$

$$2I_+I_- \geq |J|^2 + \left| \vec{Q} \right|^2 \quad (\text{A.19})$$

e

$$\begin{aligned} I_+ \left(|I_-|^2 - \left| \vec{R}_- \right|^2 \right) + I_- \left(|I_+|^2 - \left| \vec{R}_+ \right|^2 \right) &\geq (I_+ + I_-) \left(|J|^2 + \left| \vec{Q} \right|^2 \right) \\ &- \left(\vec{R}_+ + \vec{R}_- \right) \cdot \left(J\vec{Q}^* + J^*\vec{Q} \right) - i \left(\vec{R}_+ - \vec{R}_- \right) \cdot \left(\vec{Q} \times \vec{Q}^* \right), \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

($\left| \vec{Q} \right|^2 = |Q_x|^2 + |Q_y|^2 + |Q_z|^2$, o mesmo para $\left| \vec{R}_\pm \right|^2$) e obviamente, $\det \mathbb{F} \geq 0$. Se \mathbb{F} representa um operador densidade teremos que $\text{Tr } \mathbb{F} = 1$ e isso implica

$$2(I_+ + I_-) = 1. \quad (\text{A.21})$$

além disso $\text{Tr } \mathbb{F}^2 \leq 1$, implicando

$$2 \left[\left(|I_+|^2 + |I_-|^2 + 2|J|^2 \right) + \left(\vec{R}_+^2 + \vec{R}_-^2 + 2 \left| \vec{Q} \right|^2 \right) \right] \leq 1, \quad (\text{A.22})$$

sendo $\left| \vec{Q} \right|^2 = \vec{Q} \cdot \vec{Q}^*$.

Escrevendo a matriz (A.16) segundo os operadores encontrados, teremos

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \frac{1}{2} \left[\left(I_+ \hat{1}_p + \vec{R}_+ \cdot \vec{\sigma}_p \right) + \left(I_- \hat{1}_p + \vec{R}_- \cdot \vec{\sigma}_p \right) \right] \otimes \hat{1}_s \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(I_+ \hat{1}_p + \vec{R}_+ \cdot \vec{\sigma}_p \right) - \left(I_- \hat{1}_p + \vec{R}_- \cdot \vec{\sigma}_p \right) \right] \otimes \hat{\sigma}_{z,s} \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(J^* \hat{1}_p + \vec{Q}^* \cdot \vec{\sigma}_p \right) + J \hat{1}_p + \vec{Q} \cdot \vec{\sigma}_p \right] \otimes \hat{\sigma}_{x,s} \\ &+ \frac{1}{2i} \left[\left(J \hat{1}_p + \vec{Q} \cdot \vec{\sigma}_p \right) - \left(J^* \hat{1}_p + \vec{Q}^* \cdot \vec{\sigma}_p \right) \right] \otimes \hat{\sigma}_{y,s} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

ou

$$\begin{aligned}
\hat{F} &= \left(\frac{I_+ + I_-}{2} \right) \hat{1}_p \otimes \hat{1}_s + \left(\frac{\vec{R}_+ + \vec{R}_-}{2} \right) \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{1}_s \\
&+ \left(\frac{I_+ - I_-}{2} \right) \hat{1}_p \otimes \hat{\sigma}_{z,s} + \left(\frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \right) \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{\sigma}_{z,s} \\
&+ J_R \hat{1}_p \otimes \hat{\sigma}_{x,s} + \vec{Q}_R \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{\sigma}_{x,s} \\
&+ J_I \hat{1}_p \otimes \hat{\sigma}_{y,s} + \vec{Q}_I \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{\sigma}_{y,s} \\
\hat{F} &= \left(\frac{I_+ + I_-}{2} \right) \hat{1}_p \otimes \hat{1}_s + \hat{1}_p \otimes \left[J_R \hat{\sigma}_{x,s} + J_I \hat{\sigma}_{y,s} + \left(\frac{I_+ - I_-}{2} \right) \hat{\sigma}_{z,s} \right] + \left(\frac{\vec{R}_+ + \vec{R}_-}{2} \right) \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{1}_s \\
&+ \left[\vec{Q}_R \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{\sigma}_{x,s} + \vec{Q}_I \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{\sigma}_{y,s} + \left(\frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \right) \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{\sigma}_{z,s} \right]. \tag{A.24}
\end{aligned}$$

Definindo os vetores

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \vec{\Lambda}_s &= \left(J_R, J_I, \frac{I_+ - I_-}{2} \right) \\
\frac{1}{2} \vec{\Lambda}_p &= \vec{R}_+ + \vec{R}_-
\end{aligned}$$

e o tensor

$$\overleftrightarrow{M} = \overleftarrow{Q}_R \hat{i} + \overleftarrow{Q}_I \hat{j} + \left(\frac{\overleftarrow{R}_+ - \overleftarrow{R}_-}{2} \right) \hat{k}$$

encontramos

$$\begin{aligned}
\hat{F} &= \left(\frac{I_+ + I_-}{2} \right) \hat{1}_p \otimes \hat{1}_s + \frac{1}{2} \hat{1}_p \otimes \vec{\Lambda}_s \cdot \vec{\sigma}_s + \frac{1}{2} \vec{\Lambda}_p \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{1}_s + \vec{\sigma}_p \cdot \overleftrightarrow{M} \cdot \vec{\sigma}_s \\
&= \left(\frac{I_+ + I_-}{2} \right) \hat{1}_p \otimes \hat{1}_s + \frac{1}{2} \hat{1}_p \otimes \vec{\Lambda}_s \cdot \vec{\sigma}_s + \frac{1}{2} \vec{\Lambda}_p \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{1}_s + \overleftrightarrow{M} : \vec{\sigma}_p \otimes \vec{\sigma}_s, \tag{A.25}
\end{aligned}$$

conhecida como forma de Fano (citar fano), onde

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}_p \cdot \overleftrightarrow{M} \cdot \vec{\sigma}_s &= \overleftrightarrow{M} : \vec{\sigma}_p \otimes \vec{\sigma}_s \\
 &= \vec{Q}_R \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{\sigma}_{x,s} + \vec{Q}_I \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{\sigma}_{y,s} + \left(\frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \right) \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{\sigma}_{z,s} \\
 &= \vec{Q}_R \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \vec{\sigma}_s \cdot \hat{i} + \vec{Q}_I \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \vec{\sigma}_s \cdot \hat{j} + \left(\frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \right) \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \vec{\sigma}_s \cdot \hat{k} \\
 &= \left(\vec{Q}_R \cdot \hat{i} + \vec{Q}_I \cdot \hat{j} + \left(\frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \right) \cdot \hat{k} \right) (\vec{\sigma}_p \otimes \vec{\sigma}_s) \\
 &= \vec{\sigma}_p \cdot \begin{pmatrix} \vec{Q}_R \\ \vec{Q}_I \\ \frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} \cdot \vec{\sigma}_s.
 \end{aligned}$$

Sendo \hat{F} uma matriz densidade, $\text{Tr}_{p,s} \hat{F} = 1$, so

$$4 \left(\frac{I_+ + I_-}{2} \right) = 1 \implies I_+ + I_- = \frac{1}{2}.$$

Tomando o traço sobre cada grau de liberdade, teremos

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_s \hat{F} &= \frac{1}{2} \left(\hat{1}_p + \vec{\Lambda}_p \cdot \vec{\sigma}_p \right) \implies \text{Tr}_{s,p} \left(\hat{F} \vec{\sigma}_p \right) = \vec{\Lambda}_p \\
 \text{Tr}_p \hat{F} &= \frac{1}{2} \left(\hat{1}_s + \vec{\Lambda}_s \cdot \vec{\sigma}_s \right) \implies \text{Tr}_{p,s} \left(\hat{F} \vec{\sigma}_s \right) = \vec{\Lambda}_s
 \end{aligned}$$

e

$$\text{Tr}_{p,s} \left(\hat{F} \sigma_{p,i} \sigma_{s,j} \right) = (\text{Tr}_p \sigma_{p,i} \vec{\sigma}_p) \cdot \overleftrightarrow{M} \cdot (\text{Tr}_s \sigma_{s,j} \vec{\sigma}_s).$$

Mas uma vez que

$$\begin{aligned}
 \sigma_i \vec{\sigma} &= \sigma_i \sigma_j \hat{e}_j = (\delta_{i,j}) \hat{1} \hat{e}_j + i \varepsilon_{i,j,k} \sigma_k \hat{e}_j \\
 &= \hat{e}_i \hat{1} + i \varepsilon_{i,j,k} \hat{e}_j \sigma_k
 \end{aligned}$$

e

$$\text{Tr} (\sigma_i \vec{\sigma}) = 2 \hat{e}_i.$$

encontraremos

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{p,s} \left(\hat{F} \sigma_{p,i} \sigma_{s,j} \right) &= 4 \hat{\epsilon}_i \cdot \overleftarrow{\mathbf{M}} \cdot \hat{\epsilon}_j \\ &= 4 \hat{\epsilon}_i \cdot \left(\overleftarrow{Q}_R \hat{i} + \overleftarrow{Q}_I \hat{j} + \left(\frac{\overleftarrow{R}_+ - \overleftarrow{R}_-}{2} \right) \hat{k} \right) \cdot \hat{\epsilon}_j \\ &= 4 \left[Q_{R,i} (\hat{i} \cdot \hat{\epsilon}_j) + Q_{I,i} (\hat{j} \cdot \hat{\epsilon}_j) + \left(\frac{R_{+,i} - R_{-,i}}{2} \right) \hat{k} \cdot \hat{\epsilon}_j \right]. \end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\vec{Q}_R \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{\sigma}_{x,s} + \vec{Q}_I \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{\sigma}_{y,s} + \left(\frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \right) \cdot \vec{\sigma}_p \otimes \hat{\sigma}_{z,s} = M_{i,j} (\sigma_{i,p} \otimes \hat{\sigma}_{j,s})$$

como

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_p \cdot \overleftarrow{\mathbf{M}} \cdot \vec{\sigma}_s &= \left(\vec{Q}_R \cdot \vec{\sigma}_p \quad \vec{Q}_I \cdot \vec{\sigma}_p \quad \left(\frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \right) \cdot \vec{\sigma}_p \right) \begin{pmatrix} \otimes \hat{\sigma}_{x,s} \\ \otimes \hat{\sigma}_{y,s} \\ \otimes \hat{\sigma}_{z,s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{x,p} & \sigma_{y,p} & \sigma_{z,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{R,x} & Q_{I,x} & \left(\frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \right)_x \\ Q_{R,y} & Q_{I,y} & \left(\frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \right)_y \\ Q_{R,z} & Q_{I,z} & \left(\frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \right)_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \otimes \hat{\sigma}_{x,s} \\ \otimes \hat{\sigma}_{y,s} \\ \otimes \hat{\sigma}_{z,s} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

tendo a matriz

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} Q_{R,x} & Q_{I,x} & \left(\frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \right)_x \\ Q_{R,y} & Q_{I,y} & \left(\frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \right)_y \\ Q_{R,z} & Q_{I,z} & \left(\frac{\vec{R}_+ - \vec{R}_-}{2} \right)_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Apêndice B

Rotações e Reflexões por planos genéricos

B.1 Fixando o Eixo z

Vamos fazer uma rotação dos eixos de coordenadas x e y

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$\bar{y} = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$\bar{z} = z$$

Qualquer reflexão no plano $\bar{x} - \bar{z}$, ou seja, plano $\bar{x} - z$ significa trocar o sinal da componente normal ao plano. A componente normal ao plano é dada por

$$n = \bar{x} \times z$$

$$n = (x \cos \theta - y \sin \theta) \times z$$

$$n = y \cos \theta + x \sin \theta$$

$$n = \bar{y}$$

Assim a reflexão será dada pela troca

$$\bar{y} \rightarrow -\bar{y}$$

o que implica

$$\bar{y}_R = -x \sin \theta - y \cos \theta$$

A matriz de transformação conjunta (Rotação e Reflexão) será portanto

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_R \\ \bar{y}_R \\ \bar{z}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_R = x \cos \theta - y \sin \theta = \bar{x}$$

$$\bar{y}_R = -x \sin \theta - y \cos \theta = -\bar{y}$$

$$\bar{z}_R = z = \bar{z}$$

B.2 Aplicação em uma Matriz do tipo X

Seja a matriz de variedade D-7 na forma X, escrita em termos dos vetores de polarização e dos elementos da matriz de correlação

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + P_z(1) + P_z(2) + M_{zz} & & & 0 \\ 0 & 1 + P_z(1) - P_z(2) - M_{zz} & & \\ 0 & M_{xx} + M_{yy} - i(M_{xy} - M_{yx}) & & \\ M_{xx} - M_{yy} + i(M_{xy} + M_{yx}) & & & 0 \\ 0 & M_{xx} - M_{yy} - i(M_{xy} + M_{yx}) & & \\ M_{xx} + M_{yy} + i(M_{xy} - M_{yx}) & & & 0 \\ 1 - P_z(1) + P_z(2) - M_{zz} & & & 0 \\ 0 & 1 - P_z(1) - P_z(2) + M_{zz} & & \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Aplicando as operações de rotação com reflexão somente na segunda partícula, teremos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{P}_x(1) \\ \bar{P}_y(1) \\ \bar{P}_z(1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_z(1) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{P}_x(2) \\ \bar{P}_y(2) \\ \bar{P}_z(2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_z(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_z(2) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{M}_{xx} & \bar{M}_{xy} & 0 \\ \bar{M}_{yx} & \bar{M}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{M}_{zz} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & 0 \\ M_{yx} & M_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & M_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\cos \theta) M_{xx} - (\sin \theta) M_{xy} & -(\cos \theta) M_{xy} - (\sin \theta) M_{xx} & 0 \\ (\cos \theta) M_{yx} - (\sin \theta) M_{yy} & -(\sin \theta) M_{yx} - (\cos \theta) M_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & M_{zz} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Os termos que devemos analisar são

$$t_{\pm} = \frac{1 \pm M_{zz}}{2}, \quad u_{\pm} = \frac{P_z(1) \pm P_z(2)}{2}, \quad v_{\pm} = \frac{(M_{xx} \pm M_{yy})}{2}, \quad w_{\pm} = \frac{M_{xy} \pm M_{yx}}{2}.$$

Neste caso teremos

$$\bar{t}_{\pm} = t_{\pm}$$

$$\bar{u}_{\pm} = u_{\pm}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{v}_+ &= \frac{(\bar{M}_{xx} + \bar{M}_{yy})}{2} \\ &= \frac{(\cos \theta) M_{xx} - (\sin \theta) M_{xy} - (\sin \theta) M_{yx} - (\cos \theta) M_{yy}}{2} \\ &= \frac{(\cos \theta) (M_{xx} - M_{yy}) - (\sin \theta) (M_{xy} + M_{yx})}{2} \\ &= (\cos \theta) v_- - (\sin \theta) w_+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_- &= \frac{(\bar{M}_{xx} - \bar{M}_{yy})}{2} = \frac{(\cos \theta)(M_{xx} + M_{yy}) - (\sin \theta)(M_{xy} - M_{yx})}{2} \\ &= (\cos \theta) v_+ - (\sin \theta) w_-\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{w}_- &= \frac{(\bar{M}_{xy} - \bar{M}_{yx})}{2} = \frac{-(\cos \theta) M_{xy} - (\sin \theta) M_{xx} - (\cos \theta) M_{yx} + (\sin \theta) M_{yy}}{2} \\ &= \frac{-(\cos \theta)(M_{xy} + M_{yx}) - (\sin \theta)(M_{xx} - M_{yy})}{2} \\ &= -(\cos \theta) w_+ - (\sin \theta) v_-\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{w}_+ &= (\bar{M}_{xy} + \bar{M}_{yx}) = -(\cos \theta) M_{xy} - (\sin \theta) M_{xx} + (\cos \theta) M_{yx} - (\sin \theta) M_{yy} \\ &= -(\cos \theta)(M_{xy} - M_{yx}) - (\sin \theta)(M_{xx} + M_{yy}) \\ &= -(\cos \theta) w_- - (\sin \theta) v_+\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\bar{V}_1^2 &= \bar{u}_-^2 + \bar{v}_+^2 + \bar{w}_-^2 \\ &= u_-^2 + [(\cos \theta) v_- - (\sin \theta) w_+]^2 + [-(\cos \theta) w_+ - (\sin \theta) v_-]^2 \\ &= u_-^2 + (\cos \theta)^2 v_-^2 - 2(\cos \theta)(\sin \theta) v_- w_+ + (\sin \theta)^2 w_+^2 + (\cos \theta)^2 w_+^2 \\ &\quad + 2(\cos \theta)(\sin \theta) w_+ v_- + (\sin \theta)^2 v_-^2 \\ &= u_-^2 + [(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2] v_-^2 - 2(\cos \theta)(\sin \theta) v_- w_+ + 2(\cos \theta)(\sin \theta) w_+ v_- \\ &\quad + [(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2] w_+^2 \\ &= u_-^2 + v_-^2 + w_+^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{V}_2^2 &= \bar{u}_+^2 + \bar{v}_-^2 + \bar{w}_+^2 \\
&= \bar{u}_+^2 + [(\cos \theta) v_+ - (\sin \theta) w_-]^2 + [-(\cos \theta) w_- - (\sin \theta) v_+]^2 \\
&= \bar{u}_+^2 + (\cos \theta)^2 v_+^2 - 2(\cos \theta)(\sin \theta) v_+ w_- + (\sin \theta)^2 w_-^2 + (\cos \theta)^2 w_-^2 \\
&\quad + 2(\cos \theta)(\sin \theta) w_- v_+ + (\sin \theta)^2 v_+^2 \\
&= \bar{u}_+^2 + [(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2] v_+^2 + [(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2] w_-^2 \\
&= \bar{u}_+^2 + v_+^2 + w_-^2
\end{aligned}$$

Os autovalores da matriz depois da aplicação das operações de rotação e reflexão na segunda partícula serão

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_1 &= \frac{1}{2} [\bar{t}_- + |\bar{V}_1|] = \frac{1}{2} [t_- + \sqrt{u_-^2 + v_-^2 + w_+^2}] \\
\bar{\lambda}_2 &= \frac{1}{2} [\bar{t}_- - |\bar{V}_1|] = \frac{1}{2} [t_- - \sqrt{u_-^2 + v_-^2 + w_+^2}] \\
\bar{\lambda}_3 &= \frac{1}{2} [\bar{t}_+ + |\bar{V}_2|] = \frac{1}{2} [t_+ + \sqrt{u_+^2 + v_+^2 + w_-^2}] \\
\bar{\lambda}_4 &= \frac{1}{2} [\bar{t}_+ - |\bar{V}_2|] = \frac{1}{2} [t_+ - \sqrt{u_+^2 + v_+^2 + w_-^2}].
\end{aligned}$$

Ao compararmos estes autovalores com os autovalores da transposição parcial vemos que são idênticos

$$\begin{aligned}
&\text{Eigenvalues of the matrix } \rho^T \\
\lambda_1^T &= \frac{1}{2} [t_- + \sqrt{u_-^2 + v_-^2 + w_+^2}] \\
\lambda_2^T &= \frac{1}{2} [t_- - \sqrt{u_-^2 + v_-^2 + w_+^2}] \\
\lambda_3^T &= \frac{1}{2} [t_+ + \sqrt{u_+^2 + v_+^2 + w_-^2}] \\
\lambda_4^T &= \frac{1}{2} [t_+ - \sqrt{u_+^2 + v_+^2 + w_-^2}]
\end{aligned}$$

Assim temos que os autovalores são invariantes sob tais transformações.

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_1 &= \lambda_1^T \\
\bar{\lambda}_2 &= \lambda_2^T \\
\bar{\lambda}_3 &= \lambda_3^T \\
\bar{\lambda}_4 &= \lambda_4^T
\end{aligned}$$

Apêndice C

Detalhes Matemáticos dos Exemplos Apresentados

C.1 Estado de Werner

Dada o operador densidade [30]

$$\hat{\rho}_W = x |\psi^-\rangle \langle \psi^-| + \frac{1}{4}I, \quad (\text{C.1})$$

sendo $|\psi^-\rangle = (1/\sqrt{2})(|01\rangle - |10\rangle)$ e I é a matriz identidade. Representando-o matricialmente na base computacional ($|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$), teremos

$$\hat{\rho}_W = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+x}{4} & -\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{2} & \frac{1+x}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix}.$$

teremos três autovalores iguais a $\frac{(1-x)}{4}$ e um igual a $\frac{(3x+1)}{4}$ sendo estes positivos para qualquer $\frac{-1}{3} \leq x \leq 1$.

Vamos analisar o traço de ρ_B^2 e encontrar para qual intervalo de x este estado representa

um estado físico:

$$\rho_B^2 = \begin{pmatrix} \left[\frac{1-x}{4}\right]^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[\frac{1+x}{4}\right]^2 + \left[-\frac{x}{2}\right]^2 & 2\left[\frac{1+x}{4}\right]\left[-\frac{x}{2}\right] & 0 \\ 0 & 2\left[\frac{1+x}{4}\right]\left[-\frac{x}{2}\right] & \left[\frac{1+x}{4}\right]^2 + \left[-\frac{x}{2}\right]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left[\frac{1-x}{4}\right]^2 \end{pmatrix}$$

logo

$$\text{Tr}\rho_B^2 = 2\left[\frac{1-x}{4}\right]^2 + 2\left[\frac{1+x}{4}\right]^2 + 2\left[-\frac{x}{2}\right]^2$$

Para que este seja um estado físico devemos ter $\text{Tr}\rho_B^2 \leq 1$. Vejamos então, para quais valores de x este é um estado físico

$$\begin{aligned} 2\left[\frac{1-x}{4}\right]^2 + 2\left[\frac{1+x}{4}\right]^2 + 2\left[-\frac{x}{2}\right]^2 &\leq 1 \\ \frac{x^2 - 2x + 1}{16} + \frac{1 + 2x + x^2}{16} + \frac{x^2}{4} &\leq \frac{1}{2} \\ 6x^2 + 2 &\leq 8 \\ 6x^2 - 6 &\leq 0 \\ |x| &\leq 1, \end{aligned}$$

logo para que o estado seja físico devemos ter $-1 \leq x \leq 1$.

Fazendo a transposta parcial desta matriz e diagonalizando teremos três autovalores iguais a $\frac{(1+x)}{4}$ e um igual a $\frac{(1-3x)}{4}$. Aplicando o critério PPT encontramos que estes autovalores serão positivos para qualquer $x < 1/3$, ou seja para estes valores teremos uma matriz separável.

Para este estado encontramos

$$P_z(1) = 0$$

$$P_z(2) = 0$$

$$M_{xx} = -x$$

$$M_{yy} = -x$$

$$M_{xy} = 0$$

$$M_{yx} = 0$$

$$M_{zz} = -x.$$

Logo

$$\begin{aligned} u_+ &= \frac{P_z(1) + P_z(2)}{2} = 0 \\ u_- &= \frac{P_z(1) - P_z(2)}{2} = 0 \\ v_+ &= \frac{(M_{xx} + M_{yy})}{2} = -x \\ v_- &= \frac{(M_{xx} - M_{yy})}{2} = 0 \\ w_+ &= \frac{M_{xy} + M_{yx}}{2} = 0 \\ w_- &= \frac{M_{xy} - M_{yx}}{2} = 0 \\ t_+^2 &= \frac{(2 - |1 - M_{zz}|)^2}{4} = \frac{(1 + M_{zz})^2}{4} = \frac{(1 - x)^2}{4} \\ t_-^2 &= \frac{(2 - |1 + M_{zz}|)^2}{4} = \frac{(1 - M_{zz})^2}{4} = \frac{(1 + x)^2}{4} \end{aligned}$$

As desigualdades são

$$\text{Desigualdade 1: } (s_1^T)^2 \equiv t_-^2 - (u_-^2 + v_-^2 + w_+^2) \geq 0$$

$$(1 + x)^2 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$\text{Solução: } -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$\text{Desigualdade 2 : } (s_2^T)^2 \equiv t_+^2 - (u_+^2 + v_+^2 + w_-^2) \geq 0$$

$$(1-x)^2 - (4x^2) \geq 0 \quad \longrightarrow \quad 1 - 2x + x^2 - 4x^2 \geq 0$$

$$-3x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad 3x^2 + 2x - 1 \leq 0$$

$$x = 1/3 \quad \text{e} \quad x = -1$$

$$\text{Solução: } -1 \leq x \leq 1/3$$

Logo, o intervalo de separabilidade é $-1 \leq x \leq 1/3$.

C.2 Estado de Peres-Horodecki

Dado o estado [8]

$$\hat{\rho}_{PH} = x |\psi^-\rangle \langle \psi^-| + (1-x) |00\rangle \langle 00|,$$

sendo $|\psi^-\rangle = (1/\sqrt{2})(|01\rangle - |10\rangle)$. Representando-o matricialmente na base computacional ($|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$), teremos

$$\hat{\rho}_{PH} = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

possui dois autovalores nulos e os demais valendo x e $1-x$, que são positivos para qualquer $0 \leq x \leq 1$.

Vamos analisar o traço de ρ_B^2 e encontrar para qual intervalo de x este estado representa um estado físico:

$$\rho_B^2 = \begin{pmatrix} [1-x]^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-\frac{x}{2}]^2 + [\frac{x}{2}]^2 & 2[\frac{x}{2}][-\frac{x}{2}] & 0 \\ 0 & 2[\frac{x}{2}][-\frac{x}{2}] & [-\frac{x}{2}]^2 + [\frac{x}{2}]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

logo

$$\text{Tr}\rho_B^2 = [1 - x]^2 + 2 \left[-\frac{x}{2}\right]^2 + 2 \left[\frac{x}{2}\right]^2 \leq 1.$$

$$[1 - x]^2 + 2 \left[-\frac{x}{2}\right]^2 + 2 \left[\frac{x}{2}\right]^2 \leq 1$$

$$x^2 - 2x + 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \leq 1$$

$$x^2 - x \leq 0,$$

logo para que o estado seja físico devemos ter $0 \leq x \leq 1$.

Fazendo a transposição parcial e calculando os autovalores, vemos que para este estado, somente em $x = 0$ teremos um caso separável. Para todos os demais valores de x o estado está emaranhado.

Para este estado encontramos

$$P_z(1) = 1 - x$$

$$P_z(2) = 1 - x$$

$$M_{xx} = -x$$

$$M_{xy} = 0$$

$$M_{yy} = -x$$

$$M_{yx} = 0$$

$$M_{zz} = 1 - 2x$$

Logo

$$\begin{aligned}
 t_+ &= (1 - x) \\
 t_- &= x \\
 u_+ &= \frac{P_z(1) + P_z(2)}{2} = 1 - x \\
 u_- &= P_z(1) - P_z(2) = 0 \\
 v_+ &= \frac{(M_{xx} + M_{yy})}{2} = -x \\
 v_- &= (M_{xx} - M_{yy}) = 0 \\
 w_+ &= \frac{M_{xy} + M_{yx}}{2} = 0 \\
 w_- &= M_{xy} - M_{yx} = 0
 \end{aligned}$$

As desigualdades ?? e ?? serão dadas por

$$\text{Desigualdade 1 : } (s_1^T)^2 \equiv t_-^2 - (u_-^2 + v_-^2 + w_+^2) \geq 0$$

$$(2x)^2 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad 4x^2 \geq 0$$

$$\text{Solução: } \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$\text{Desigualdade 2 : } (s_2^T)^2 \equiv t_+^2 - (u_+^2 + v_+^2 + w_-^2) \geq 0$$

$$(2 - 2x)^2 - [(2 - 2x)^2 + (-2x)^2] \geq 0$$

$$4 - 8x + 4x^2 - [4 - 8x + 4x^2 + 4x^2] \geq 0$$

$$-4x^2 \geq 0$$

$$\text{Solução: } \quad x = 0$$

Como as duas devem ser satisfeitas ao mesmo tempo, teremos que somente em $x = 0$ o estado é separável.

C.3 Estado Almeida-Davidovich

O operador densidade é escrito como [12]

$$\begin{aligned} \rho_D &= (|\alpha|^2 + |\beta|^2 p^2) |11\rangle \langle 11| + |\alpha| |\beta| (1-p) (e^{-i\delta} |00\rangle \langle 11| + e^{i\delta} |11\rangle \langle 00|) \\ &\quad + |\beta|^2 (1-p)^2 |00\rangle \langle 00| + |\beta|^2 p(1-p) (|10\rangle \langle 10| + |01\rangle \langle 01|) \\ \rho_D &= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 p^2 & 0 & 0 & |\alpha| |\beta| e^{-i\delta} (1-p) \\ 0 & |\beta|^2 (1-p)p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2 (1-p)p & 0 \\ |\beta| |\alpha| e^{i\delta} (1-p) & 0 & 0 & |\beta|^2 (1-p)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

com $0 \leq p \leq 1$. Calculando a expressão da concurrence para este estado encontraremos

$$C = \max \{0, 2(1-p) |\beta| (|\alpha| - p |\beta|)\}$$

Desta expressão, vemos que para $|\beta| \leq |\alpha|$, o emaranhamento desaparece somente quando $p = 1$. Enquanto que para $|\beta| > |\alpha|$ o emaranhamento desaparece para $p = |\alpha/\beta| < 1$, que corresponde a um tempo finito. Esse fenômeno foi chamado de morte súbita do emaranhamento.

Vamos analisar o traço de ρ_D^2 e encontrar para qual intervalo de x este estado representa um estado físico:

$$\rho_D^2 = \begin{pmatrix} [|\alpha|^2 + |\beta|^2 p^2]^2 + [|\alpha| |\beta| (1-p)]^2 & 0 \\ 0 & [|\beta|^2 (1-p)p]^2 \\ 0 & 0 \\ [|\beta| |\alpha| e^{i\delta} (1-p)] [|\alpha|^2 + |\beta|^2 p^2] + [|\beta|^2 (1-p)^2] [|\beta| |\alpha| e^{i\delta} (1-p)] & 0 \\ 0 & [|\alpha|^2 + |\beta|^2 p^2] [|\alpha| |\beta| e^{-i\delta} (1-p)] + [|\alpha| |\beta| e^{-i\delta} (1-p)] [|\beta|^2 (1-p)^2] \\ 0 & 0 \\ [|\beta|^2 (1-p)p]^2 & 0 \\ 0 & [|\beta| |\alpha| (1-p)]^2 + [|\beta|^2 (1-p)^2]^2 \end{pmatrix}$$

logo

$$\begin{aligned} \text{Tr}\rho_D^2 &= [|\alpha|^2 + |\beta|^2 p^2]^2 + [|\alpha| |\beta| (1-p)]^2 + 2 [|\beta|^2 (1-p)p]^2 + [|\beta| |\alpha| (1-p)]^2 + [|\beta|^2 (1-p)^2]^2 \\ &= |\alpha|^4 + |\beta|^2 \{|\beta|^2 + 2|\alpha|^2 - 4p [1 - (2|\beta|^2 + |\alpha|^2)p + 2|\beta|^2 p^2 - |\beta|^2 p^3]\}, \end{aligned}$$

ou seja, p deve estar entre 0 e 1.

Para este estado encontramos

$$P_z(1) = 2 (|\alpha|^2 + |\beta|^2 p) - 1$$

$$P_z(2) = 2 (|\alpha|^2 + |\beta|^2 p) - 1$$

$$M_{xx} = 2 |\alpha| |\beta| \cos(\delta) (1-p)$$

$$M_{yy} = -2 |\alpha| |\beta| \cos(\delta) (1-p)$$

$$M_{xy} = 2 |\beta| |\alpha| \sin(\delta) (1-p)$$

$$M_{yx} = 2 |\beta| |\alpha| \sin(\delta) (1-p)$$

$$M_{zz} = 1 - 4 |\beta|^2 (1-p)p$$

Logo

$$u_+ = P_z(1) + P_z(2) = [4 (|\alpha|^2 + |\beta|^2 p) - 2]$$

$$u_- = P_z(1) - P_z(2) = 0$$

$$v_+ = (M_{xx} + M_{yy}) = 0$$

$$v_- = (M_{xx} - M_{yy}) = 4 |\alpha| |\beta| \cos(\delta) (1-p)$$

$$w_+ = M_{xy} + M_{yx} = 4 |\beta| |\alpha| \sin(\delta) (1-p)$$

$$w_- = M_{xy} - M_{yx} = 0$$

$$t_+^2 = (1 + M_{zz})^2 = [2 - 4 |\beta|^2 (1-p)p]^2$$

$$t_-^2 = (1 - M_{zz})^2 = [4 |\beta|^2 (1-p)p]^2$$

No caso do estado Davidovich para $|\beta| = 2|\alpha|$, na morte subita $p = |\alpha/\beta| = 1/2$ não haverá violação uma vez que o estado torna-se separável.

Analisando as desigualdades

$$\begin{aligned} \text{Desigualdade 1 : } \quad (s_1^T)^2 &\equiv t_-^2 - (u_-^2 + v_-^2 + w_+^2) \geq 0 \\ [4|\beta|^2(1-p)p]^2 - \{[4|\alpha||\beta|\cos(\delta)(1-p)]^2 + [4|\beta||\alpha|\sin(\delta)(1-p)]^2\} &\geq 0 \\ 16|\beta|^4(1-p)^2p^2 - \{16|\alpha|^2|\beta|^2(1-p)^2\cos^2(\delta) + 16|\alpha|^2|\beta|^2(1-p)^2\sin^2(\delta)\} &\geq 0 \\ 16|\beta|^4(1-p)^2p^2 - 16|\alpha|^2|\beta|^2(1-p)^2 &\geq 0 \\ 16|\beta|^2(1-p)^2(|\beta|^2p^2 - |\alpha|^2) &\geq 0 \\ |\beta|^2p^2 - |\alpha|^2 &\geq 0 \\ -\infty \leq p \leq -\frac{|\alpha|}{|\beta|} \cup \frac{|\alpha|}{|\beta|} \leq p \leq \infty. &\text{ vale apenas para o intervalo físico } 0 \leq p \leq 1 \\ \text{separabilidade } \frac{|\alpha|}{|\beta|} \leq p \leq 1, &\text{ para } \frac{|\alpha|}{|\beta|} \leq 1. \end{aligned}$$

A violação da separabilidade (i.e. emaranhamento) ocorre no intervalo complementar: $0 \leq p < \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, portanto o emaranhamento desaparece em $p = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, o que caracteriza a morte subita.

$$\begin{aligned} \text{Desigualdade 2 : } \quad (s_2^T)^2 &\equiv t_+^2 - (u_+^2 + v_+^2 + w_-^2) \geq 0 \\ 2^2 [1 - 2|\beta|^2(1-p)p]^2 - 2^2 [2(|\alpha|^2 + |\beta|^2p) - 1]^2 &\geq 0 \\ [1 - 2|\beta|^2(1-p)p]^2 - [2(|\alpha|^2 + |\beta|^2p) - 1]^2 &\geq 0 \\ |2(|\alpha|^2 + |\beta|^2p) - 1| &\leq |1 - 2|\beta|^2(1-p)p| \\ -|1 - 2|\beta|^2(1-p)p| &\leq (2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2p - 1) \leq |1 - 2|\beta|^2(1-p)p| \end{aligned}$$

$$1^a \text{ Parte: } -|1 - 2|\beta|^2(1-p)p| \leq (2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 p - 1)$$

$$|1 - 2|\beta|^2(1-p)p| \leq -(2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 p - 1)$$

$$(2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 p - 1) \leq 1 - 2|\beta|^2(1-p)p \leq -(2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 p - 1)$$

$$\text{Parte 1.1: } 2p - p^2 \leq \frac{2 - 2|\alpha|^2}{2|\beta|^2}$$

$$\text{Parte 1.2: } p^2 \leq \frac{-|\alpha|^2}{|\beta|^2}$$

$$\text{Parte 1.1: } 2p - p^2 \leq \frac{1 - |\alpha|^2}{|\beta|^2}$$

$$\text{Parte 1.2: } p^2 \leq \frac{-|\alpha|^2}{|\beta|^2}$$

$$\text{Parte 1.1: } 2p - p^2 - \frac{1 - |\alpha|^2}{|\beta|^2} \leq 0$$

$$[p - 1][p - 1] \leq 0$$

$p \leq 1$, não é violada nunca no estado físico $0 \leq p \leq 1$

Parte 1.2: $p^2 \leq \frac{-|\alpha|^2}{|\beta|^2}$ não vale pois p deve ser real

$$2^a \text{ Parte: } (2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 p - 1) \leq |1 - 2|\beta|^2(1-p)p|$$

$$\text{Parte 2.1: } 1 - 2|\beta|^2(1-p)p \geq (2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 p - 1)$$

$$2p - p^2 \leq -\frac{2|\alpha|^2 - 2}{2|\beta|^2}$$

$$[p - 1][p - 1] \leq 0,$$

$p \leq 1$, não é violada nunca no estado físico $0 \leq p \leq 1$

$$\text{Parte 2.2: } 1 - 2|\beta|^2(1-p)p \leq -(2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 p - 1)$$

$$p^2 \leq \frac{-|\alpha|^2}{|\beta|^2} \text{ não vale pois } p \text{ deve ser real}$$

A segunda desigualdade não é violada nunca no caso do estado Almeida-Davidovich.

C.4 Estado de Gisin

Dada a matriz [31]

$$\rho_S = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & xa^2 & xab & 0 \\ 0 & xab & xb^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-x}{2} \end{pmatrix}$$

com

$$a^2 + b^2 = 1$$

Sendo os autovalores

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} [x + |x|]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} [x - |x|]$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{2} (1 - x)$$

Vamos analisar o traço de ρ_B^2 e encontrar para qual intervalo de x este estado representa um estado físico:

$$\rho_B^2 = \begin{pmatrix} \left[\frac{1-x}{2}\right]^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [xa^2]^2 + [xab]^2 & [xa^2][xab] + [xab][xb^2] & 0 \\ 0 & [xa^2][xab] + [xab][xb^2] & [xa^2]^2 + [xab]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left[\frac{1-x}{2}\right]^2 \end{pmatrix}$$

logo

$$\text{Tr}\rho_B^2 = 2 \left[\frac{1-x}{2}\right]^2 + 2 [xa^2]^2 + 2 [xab]^2$$

Para que este seja um estado físico devemos ter $\text{Tr}\rho_B^2 \leq 1$. Vejamos então, para quais valores de x este é um estado físico

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[1-x]^2 + 2x^2a^4 + 2x^2a^2b^2 &\leq 1 \\ x^2\left(\frac{1}{2} + 2a^4 + 2a^2b^2\right) - x - \frac{1}{2} &\leq 0 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2\left(\frac{1}{2} + 2a^4 + 2a^2b^2\right)}}{2\left(\frac{1}{2} + 2a^4 + 2a^2b^2\right)} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{2 + 4a^4 + 4a^2b^2}}{1 + 4a^4 + 4a^2b^2} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{2 + 4a^2(a^2 + b^2)}}{1 + 4a^2(a^2 + b^2)} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{2 + 4a^2}}{1 + 4a^2} \\ \left(x - \frac{1 + \sqrt{2 + 4a^2}}{1 + 4a^2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{2 + 4a^2}}{1 + 4a^2}\right) &\leq 0 \\ \text{ou } \left(x - \frac{1 + \sqrt{2 + 4a^2}}{1 + 4a^2}\right) \geq 0 \text{ e } \left(x - \frac{1 - \sqrt{2 + 4a^2}}{1 + 4a^2}\right) &\leq 0 \text{ ou} \\ \left(x - \frac{1 + \sqrt{2 + 4a^2}}{1 + 4a^2}\right) \leq 0 \text{ e } \left(x - \frac{1 - \sqrt{2 + 4a^2}}{1 + 4a^2}\right) &\geq 0 \\ \text{logo para que o estado seja físico devemos ter} & \end{aligned}$$

$$x \geq \frac{1 + \sqrt{2 + 4a^2}}{1 + 4a^2} \text{ e } x \leq \frac{1 - \sqrt{2 + 4a^2}}{1 + 4a^2}$$

como não existe intersecção entre estes intervalos, teremos que o intervalo de validade da rho

$$\frac{1 + \sqrt{2 + 4a^2}}{1 + 4a^2} \geq x \geq \frac{1 - \sqrt{2 + 4a^2}}{1 + 4a^2}.$$

Fazendo a transposição parcial e calculando os autovalores

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2}(x + |x|) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(x - |x|) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2}\left(a + d + \sqrt{a^2 - 2ad + d^2 + 4|w|^2}\right) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2}\left(a + d - \sqrt{a^2 - 2ad + d^2 + 4|w|^2}\right).\end{aligned}$$

vemos que para este estado teremos caso de emaranhamento para $x > (1 + 2|ab|)^{-1}$.

Neste caso encontramos

$$P_z(1) = 2xa^2 - x$$

$$P_z(2) = 2xb^2 - x$$

$$M_{xx} = 2xab$$

$$M_{yy} = 2xab$$

$$M_{xy} = 0$$

$$M_{yx} = 0$$

$$M_{zz} = 1 - 2x.$$

Logo

$$u_+ = P_z(1) + P_z(2) = 2x(a^2 + b^2 - 1) = 0$$

$$u_- = P_z(1) - P_z(2) = 2x(a^2 - b^2)$$

$$v_+ = (M_{xx} + M_{yy}) = 4xab$$

$$v_- = (M_{xx} - M_{yy}) = 0$$

$$w_+ = M_{xy} + M_{yx} = 0$$

$$w_- = M_{xy} - M_{yx} = 0$$

$$t_+^2 = (1 + M_{zz})^2 = (2 - 2x)^2$$

$$t_-^2 = (1 - M_{zz})^2 = (2x)^2$$

As desigualdades são

$$\text{Desigualdade 1 : } (s_1^T)^2 \equiv t_-^2 - (u_-^2 + v_-^2 + w_+^2) \geq 0$$

$$(2x)^2 - [2x(a^2 - b^2)]^2 \geq 0$$

$$4x^2 [1 - (a^2 - b^2)^2] \geq 0$$

$$4x^2 [a^2 - a^4] \geq 0$$

$$\text{Solução: } -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$\text{Desigualdade 2 : } (s_2^T)^2 \equiv t_+^2 - (u_+^2 + v_+^2 + w_-^2) \geq 0$$

$$(2 - 2x)^2 - (4xab)^2 \geq 0$$

$$4 [x^2 (1 - 4|ab|^2) - 2x + 1] = 0$$

$$\text{raízes: } x = \frac{1}{2|ab| + 1} \text{ e } x = -\frac{1}{2|ab| - 1}$$

$$\left(x - \frac{1}{2|ab| + 1}\right) \left(x + \frac{1}{2|ab| - 1}\right) \geq 0$$

$$\text{ou } \left(x - \frac{1}{2|ab| + 1}\right) \geq 0 \text{ e } \left(x + \frac{1}{2|ab| - 1}\right) \geq 0 \text{ ou}$$

$$\left(x - \frac{1}{2|ab| + 1}\right) \leq 0 \text{ e } \left(x + \frac{1}{2|ab| - 1}\right) \leq 0$$

$$\text{ou } x \geq \frac{1}{2|ab| + 1} \text{ e } x \geq -\frac{1}{2|ab| - 1} \text{ ou}$$

$$x \leq \frac{1}{2|ab| + 1} \text{ e } x \leq -\frac{1}{2|ab| - 1}$$

Olhando o primeiro conjunto de desigualdades, vemos que ambas $\left(x \geq \frac{1}{2|ab|+1} \text{ e } x \geq -\frac{1}{2|ab|-1}\right)$ são satisfeitas ao mesmo tempo quando:

$$x \geq \frac{1}{2|ab| + 1} .$$

que é o intervalo de separabilidade. Analizando o segundo conjunto de desigualdades

$$\left(x \leq \frac{1}{2|ab| + 1} \text{ e } x \leq -\frac{1}{2|ab| - 1}\right)$$

vemos que:

$$x \leq \frac{1}{2|ab| + 1} \text{ e } x \leq -\frac{1}{2|ab| - 1}$$

que valem simultaneamente apenas para $a = 0$ e $a = 1$.

No entanto, para $a = 0$, o intervalo de separabilidade seria $x \leq 1$, mas este intervalo não está contido no intervalo de validade da rho, o que nos deixa como intervalo de separabilidade apenas $x \geq \frac{1}{2|ab|+1}$.

C.5 Estado Das-Agarwal

Dada a matriz [37]

$$\rho' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(t) & z(t) \exp(i\chi) & 0 \\ 0 & w(t) \exp(-i\chi) & c(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d(t) \end{pmatrix}.$$

onde os coeficientes são dados por

$$b(t) = \exp(-\gamma t) [1 - \sin(\chi) \sin(2\nu t)]$$

$$c(t) = \exp(-\gamma t) [1 + \sin(\chi) \sin(2\nu t) + p - p \exp(-\gamma t)]$$

$$a(t) = p \exp(-2\gamma t)$$

$$a(0) = p$$

$$b(t) = \exp(-\gamma t) [1 - \sin(\chi) \sin(2\nu t) - p \exp(-\gamma t) + p \exp(-\gamma t)]$$

$$b(0) = 1$$

$$c(t) = \exp(-\gamma t) \{1 + \sin(\chi) \sin(2\nu t) + p [1 - \exp(-\gamma t)]\}$$

$$c(0) = 1$$

$$d(t) = p \exp(-\gamma t) - 2 \exp(-\gamma t) [1 + p] + 3$$

$$d(0) = 1 - p$$

$$z(t) = \exp(-\gamma t) \{ \cos^2(\chi) + \sin^2(\chi) \cos(2\nu t) + i \sin(\chi) \cos(\chi) [\cos(2\nu t) - 1] \}$$

$$z(0) = 1$$

$$w(t) = \exp(-\gamma t) \exp(2i\chi) \{ \cos^2(\chi) - \sin^2(\chi) \cos(2\nu t) - i \sin(\chi) \cos(\chi) [\cos(2\nu t) + 1] \}$$

$$w(0) = \exp(2i\chi) \{ \cos^2(\chi) - \sin^2(\chi) - 2i \sin(\chi) \cos(\chi) \}$$

$$P_z(1) = 2(a(t) + b(t)) - 1$$

$$P_z(2) = 2(a(t) + c(t)) - 1$$

$$M_{xx} = 2(\operatorname{Re}(z(t)) \cos(\chi) - \operatorname{Im}(z(t)) \sin(\chi))$$

$$M_{yy} = 2(\operatorname{Re}(z(t)) \cos(\chi) - \operatorname{Im}(z(t)) \sin(\chi))$$

$$M_{xy} = 2(\operatorname{Re}(z(t)) \sin(\chi) + \operatorname{Im}(z(t)) \cos(\chi))$$

$$M_{yx} = 2(-\operatorname{Re}(w(t)) \sin(\chi) + \operatorname{Im}(w(t)) \cos(\chi))$$

$$M_{zz} = 1 - 2(b(t) + c(t)).$$

Logo

$$u_+ = P_z(1) + P_z(2) = 4a(t) + 2b(t) + 2c(t) - 2$$

$$u_- = P_z(1) - P_z(2) = 2b(t) - 2c(t)$$

$$v_+ = (M_{xx} + M_{yy}) = 4(\operatorname{Re}(z(t)) \cos(\chi) - \operatorname{Im}(z(t)) \sin(\chi))$$

$$v_- = (M_{xx} - M_{yy}) = 0$$

$$w_+ = M_{xy} + M_{yx} = 2([\operatorname{Re}(z(t)) - \operatorname{Re}(w(t))] \sin(\chi) + [\operatorname{Im}(z(t)) + \operatorname{Im}(w(t))] \cos(\chi))$$

$$w_- = M_{xy} - M_{yx} = 2([\operatorname{Re}(z(t)) + \operatorname{Re}(w(t))] \sin(\chi) + [\operatorname{Im}(z(t)) - \operatorname{Im}(w(t))] \cos(\chi))$$

$$t_+^2 = (1 + M_{zz})^2 = (2 - 2(b(t) + c(t)))^2$$

$$t_-^2 = (1 - M_{zz})^2 = (2(b(t) + c(t)))^2$$

$$\text{Desigualdade 1 : } (s_1^T)^2 \equiv t_-^2 - (u_-^2 + v_-^2 + w_-^2) \geq 0$$

$$[b(t) + c(t)]^2 - 4\{[b(t) - c(t)]^2 + [[z(t) - w(t)] \sin(\chi)]^2\} \geq 0$$

$$\text{Desigualdade 2 : } (s_2^T)^2 \equiv t_+^2 - (u_+^2 + v_+^2 + w_+^2) \geq 0$$

$$[1 - b(t) + c(t)]^2 - \{[2a(t) + b(t) + c(t) - 1]^2 + [2z(t) \cos(\chi)]^2 + [[z(t) + w(t)] \sin(\chi)]^2\} \geq 0$$

Os intervalos de separabilidade serão cíclicos.

C.6 Concurrence

Para uma matriz do tipo X

$$\hat{\rho}_{12} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}$$

teremos que a concurrence possui uma forma analítica simples

$$C = \max \{0, C_1, C_2\}$$

sendo

$$C_1 = 2 |\rho_{14}| - 2\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}$$

$$C_2 = 2 |\rho_{23}| - 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}$$

Para a matriz original teremos

$$\rho_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_+ + u_+ & 0 & 0 & v_- - iw_+ \\ 0 & t_- + u_- & v_+ + iw_- & 0 \\ 0 & v_+ - iw_- & t_- - u_- & 0 \\ v_- + iw_+ & 0 & 0 & t_+ - u_+ \end{pmatrix}$$

teremos

$$C_1 = 2 \left| \frac{v_- - iw_+}{2} \right| - 2\sqrt{\left(\frac{t_- + u_-}{2}\right) \left(\frac{t_- - u_-}{2}\right)} = \sqrt{v_-^2 + w_+^2} - \sqrt{t_-^2 - u_-^2},$$

$$C_2 = 2 \left| \frac{v_+ + iw_-}{2} \right| - 2\sqrt{\left(\frac{t_+ + u_+}{2}\right) \left(\frac{t_+ - u_+}{2}\right)} = \sqrt{v_+^2 + w_-^2} - \sqrt{t_+^2 - u_+^2}.$$

C.7 Negatividade

A negatividade de ρ (quando esta descreve um sistema de 2 qbits) é definida como

$$N(\rho) = \|\rho^T\| - 1$$

sendo $\|\rho^T\|$ a norma do traço, ou seja, a soma dos módulos dos autovalores da matriz transposta. Desta forma a negatividade de um estado maximamente emaranhado de 2 qbits vale 1.

Para a matriz escrita em termos dos parâmetros $\{t_{\pm}, u_{\pm}, v_{\pm}, w_{\pm}\}$ teremos

$$\rho_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_+ + u_+ & 0 & 0 & v_- - iw_+ \\ 0 & t_- + u_- & v_+ + iw_- & 0 \\ 0 & v_+ - iw_- & t_- - u_- & 0 \\ v_- + iw_+ & 0 & 0 & t_+ - u_+ \end{pmatrix}$$

com autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left(t_- + \sqrt{u_-^2 + v_-^2 + w_+^2} \right), & \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left(t_- - \sqrt{u_-^2 + v_-^2 + w_+^2} \right) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left(t_+ + \sqrt{u_+^2 + v_+^2 + w_-^2} \right), & \lambda_4 &= \frac{1}{2} \left(t_+ - \sqrt{u_+^2 + v_+^2 + w_-^2} \right). \end{aligned}$$

Logo a negatividade será dada por

$$\begin{aligned} N(\rho) &= \left| \frac{1}{2} \left(t_- + \sqrt{u_-^2 + v_-^2 + w_+^2} \right) \right| + \left| \frac{1}{2} \left(t_- - \sqrt{u_-^2 + v_-^2 + w_+^2} \right) \right| \\ &+ \left| \frac{1}{2} \left(t_+ + \sqrt{u_+^2 + v_+^2 + w_-^2} \right) \right| + \left| \frac{1}{2} \left(t_+ - \sqrt{u_+^2 + v_+^2 + w_-^2} \right) \right| - 1. \end{aligned}$$

Apêndice D

A Métrica de Minkowski

No contexto da relatividade restrita, um “evento”, é um ponto no espaço especificado pelo vetor posição $\vec{r} \equiv \{x^1, x^2, x^3\}$ em um dado instante de tempo t , sendo x^i , com $i = 1, 2, 3$, componentes cartesianas de \vec{r} . Este ponto no espaço-tempo é rotulado pelo objeto de quatro componentes $s \equiv \{x^\mu\}$, com $\mu = 0, 1, 2, 3$ e $x^0 = ct$, sendo c a velocidade da luz. Esse objeto contém as componentes de um quadrivetor sob transformações de Lorentz, que deixam invariante a quantidade

$$s \cdot s \equiv \sum_{\mu\nu} x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \equiv \sum_{\mu\nu} \sum_{\nu} x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \equiv \sum_{\mu} x^\mu x_\nu, \quad (\text{D.1})$$

em que a métrica é definida pelo tensor

$$\{g_{\mu\nu}\} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

O grupo de transformação de Lorentz é um conjunto de transformações lineares, reais (para preservar o caráter real das coordenadas espaço-temporais), cujos elementos mantêm invariante a quantidade (D.1), que é dada explicitamente como [58]

$$s^2 \equiv c^2 t^2 - |\vec{r}|^2. \quad (\text{D.2})$$

Esta quantidade é portanto algo que, como a distância, é real de algum modo. Portanto, s^2 define um intervalo quadrático entre dois pontos¹ no hiperespaço quadrimensional, cuja métrica é definida a partir de $c^2t^2 - |\vec{r}|^2$. Este hiperespaço é conhecido como *espaço de Minkowski*.

Analisando a métrica dada por (D.2), notamos que a mesma apresentará valores positivos somente se $c^2t^2 > |\vec{r}|^2$, ou seja, se o espaço máximo percorrido não for maior do que aquele percorrido pela luz com velocidade c no mesmo intervalo de tempo t . Portanto, qualquer velocidade v não deve ultrapassar c no espaço-tempo com $s^2 > 0$. Tais eventos, caracterizados por distâncias positivas no espaço-tempo, são ditos do *tipo tempo* (ou *timelike*) e englobam a realidade física que conhecemos. Distâncias negativas por sua vez, caracterizam eventos onde $|\vec{r}|^2 > c^2t^2$ e são definidos como eventos do *tipo espaço* (ou *spacelike*).

A partir desta definição Minkowski idealizou uma projeção deste hiperespaço no espaço tridimensional onde uma superfície cônica delimita a fronteira entre os eventos *tipo tempo* (interiores ao cone) e *tipo espaço* (exteriores ao cone). A esta representação damos o nome de cone de eventos (ou cone de luz) e sua projeção no plano t vs. \vec{r} é conhecida como diagrama de Minkowski.

¹Um deles é, neste caso, a origem.

Bibliografia

- [1] COVER, T. M.; THOMAS, J. A. *Elements of information theory*. J. Wiley, 1991.
- [2] EINSTEIN, A.; PODILSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, v. 47, n. 10, p. 777–780, May 1935.
- [3] SCHRÖDINGER, E. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, v. 23, p. 807–812, 1935. Traduzido para o inglês em *Quantum Theory and Measurement*, Seção I.11 da Parte I, editado por J. A. Wheeler and W. H. Zurek (Princeton University Press, New Jersey, 1983).
- [4] BELL, J. S. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physica*, v. 1, p. 195, 1964.
- [5] ASPECT, A.; DALIBARD, J.; ROGER, G. Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, v. 49, n. 25, p. 1804–1807, Dec 1982.
- [6] KWIAT, P. G.; MATTLE, K.; WEINFURTER, H.; ZEILINGER, A.; SERGIENKO, A. V.; SHIH, Y. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, v. 75, n. 24, p. 4337–4341, Dec 1995.
- [7] HORODECKI, M.; HORODECKI, P.; HORODECKI, R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Phys. Lett. A*, v. 223, n. 1-2, p. 1 – 8, 1996.
- [8] PERES, A. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, v. 77, n. 8, p. 1413–1415, Aug 1996.
- [9] WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, v. 80, n. 10, p. 2245–2248, Mar 1998.
- [10] VIDAL, G.; WERNER, R. F. Computable measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, v. 65, n. 3, p. 032314, Feb 2002.

- [11] MINTERT, F.; CARVALHO, A. R. R.; KUS, M.; BUCHLEITNER, A. Measures and dynamics of entangled states. *Physics Reports*, v. 415, n. 4, p. 207 – 259, 2005.
- [12] ALMEIDA, M. P.; DE MELO, F.; HOR-MEYLL, M.; SALLES, A.; WALBORN, S. P.; RIBEIRO, P. H. S.; DAVIDOVICH, L. Environment-induced sudden death of entanglement. *Science*, Washington, v. 316, p. 579 – 582, 2007.
- [13] MAZZOLA, L.; MANISCALCO, S.; PILO, J.; SUOMINEN, K. A.; GARRAWAY, B. M. Sudden death and sudden birth of entanglement in common structured reservoirs. *Phys. Rev. A*, v. 79, n. 4, p. 042302, Apr 2009.
- [14] KILIN, S. Y.; MIKHALYCHEV, A. B. Optical qudit-type entanglement creation at long distances by means of small cross-kerr nonlinearities. *Phys. Rev. A*, v. 83, n. 5, p. 052303, May 2011.
- [15] NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, 2000.
- [16] HORODECKI, R.; HORODECKI, P.; HORODECKI, M.; HORODECKI, K. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, v. 81, n. 2, p. 865–942, Jun 2009.
- [17] KNILL, E.; LAFLAMME, R. Power of one bit of quantum information. *Phys. Rev. Lett.*, v. 81, n. 25, p. 5672–5675, Dec 1998.
- [18] DATTA, A.; SHAJI, A.; CAVES, C. M. Quantum discord and the power of one qubit. *Phys. Rev. Lett.*, v. 100, n. 5, p. 050502, Feb 2008.
- [19] LANYON, B. P.; BARBIERI, M.; ALMEIDA, M. P.; WHITE, A. G. Experimental quantum computing without entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, v. 101, n. 20, p. 200501, Nov 2008.
- [20] OLLIVIER, H.; ZUREK, W. Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, n. 1, p. 017901, Dec 2001.
- [21] HENDERSON, L.; VEDRAL, V. Classical, quantum and total correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 34, n. 35, p. 6899, 2001.

- [22] OPPENHEIM, J.; HORODECKI, M.; HORODECKI, P.; HORODECKI, R. Thermodynamical approach to quantifying quantum correlations. *Phys. Rev. Lett.*, v. 89, n. 18, p. 180402, Oct 2002.
- [23] GROISMAN, B.; POPESCU, S.; WINTER, A. Quantum, classical, and total amount of correlations in a quantum state. *Phys. Rev. A*, v. 72, n. 3, p. 032317, Sep 2005.
- [24] SARANDY, M. S. Classical correlation and quantum discord in critical systems. *Phys. Rev. A*, v. 80, n. 2, p. 022108, Aug 2009.
- [25] MAZIERO, J.; CÉLERI, L. C.; SERRA, R. M.; VEDRAL, V. Classical and quantum correlations under decoherence. *Phys. Rev. A*, v. 80, n. 4, p. 044102, Oct 2009.
- [26] LUO, S. Quantum discord for two-qubit systems. *Phys. Rev. A*, v. 77, n. 4, p. 042303, Apr 2008.
- [27] ALI, M.; RAU, A. R. P.; ALBER, G. Quantum discord for two-qubit x states. *Phys. Rev. A*, v. 81, n. 4, p. 042105, Apr 2010.
- [28] GIORDA, P.; APARIS, M. G. Gaussian quantum discord. *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, n. 2, p. 020503, Jul 2010.
- [29] CUNHA, M. T. The geometry of entanglement sudden death. *New J. Phys.*, v. 9, p. 237, 2007.
- [30] WERNER, R. F. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, v. 40, n. 8, p. 4277–4281, Oct 1989.
- [31] GISIN, N. Hidden quantum nonlocality revealed by local filters. *Physics Letters A*, Amsterdam, v. 210, n. 3, p. 151 – 156, 1996.
- [32] YU, T.; EBERLY, J. H. Sudden death of entanglement: Classical noise effects. *Optics Communications*, Amsterdam, v. 264, n. 2, p. 393 – 397, 2006. Quantum Control of Light and Matter - In honor of the 70th birthday of Bruce Shore.
- [33] YU, T.; EBERLY, J. H. Negative entanglement measure, and what it implies. *Journal of Modern Optics*, v. 54, p. 2289–2296, 2007.

- [34] YU, T.; EBERLY, J. H. Finite-time disentanglement via spontaneous emission. *Phys. Rev. Lett.*, v. 93, n. 14, p. 140404, Sep 2004.
- [35] BELLOMO, B.; FRANCO, R. L.; COMPAGNO, G. Non-markovian effects on the dynamics of entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, v. 99, n. 16, p. 160502, Oct 2007.
- [36] LÓPEZ, C. E.; ROMERO, G.; LASTRA, F.; SOLANO, E.; RETAMAL, J. C. Sudden birth versus sudden death of entanglement in multipartite systems. *Phys. Rev. Lett.*, v. 101, n. 8, p. 080503, Aug 2008.
- [37] DAS, S.; AGARWAL, G. S. Bright and dark periods in the entanglement dynamics of interacting qubits in contact with the environment. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 42, n. 14, p. 141003, 2009.
- [38] JAEGER, G. *Quantum information - an overview*. Springer Science, 2007.
- [39] BENGTSSON, I.; ZYCZKOWSKI, K. *Geometry of quantum states - an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 2006.
- [40] SCHUMACHER, B.; WESTMORELAND, M. D. Quantum mutual information and the one-time pad. *Phys. Rev. A*, v. 74, n. 4, p. 042305, Oct 2006.
- [41] FANO, U. Pairs of two-level systems. *Rev. Mod. Phys.*, v. 55, n. 4, p. 855–874, Oct 1983.
- [42] BRAGA, H.; SOUZA, S.; MIZRAHI, S. S. Geometrical meaning of two-qubit entanglement and its symmetries. *Phys. Rev. A*, v. 81, n. 4, p. 042310, Apr 2010.
- [43] BOSE, S.; FUENTES-GURIDI, I.; KNIGHT, P. L.; VEDRAL, V. Subsystem purity as an enforcer of entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, v. 87, n. 5, p. 050401, Jul 2001.
- [44] LAGMAGO KAMTA, G.; STARACE, A. F. Anisotropy and magnetic field effects on the entanglement of a two qubit heisenberg xy chain. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, n. 10, p. 107901, Feb 2002.
- [45] DILLENCHNEIDER, R. Quantum discord and quantum phase transition in spin chains. *Phys. Rev. B*, v. 78, n. 22, p. 224413, Dec 2008.

- [46] ALI, M.; RAU, A. R. P.; ALBER, G. Quantum discord for two-qubit x states. *Phys. Rev. A*, v. 81, n. 4, p. 042105, Apr 2010.
- [47] CUNHA, M. O. T. The geometry of entanglement sudden death. *New Journal of Physics*, v. 9, n. 7, p. 237, 2007.
- [48] SALLES, A.; DE MELO, F.; ALMEIDA, M. P.; GOR-MEYLL, M.; WALBORN, S. P.; RIBEIRO, P. H. S.; DAVIDOVICH, L. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment. *Phys. Rev. A*, v. 78, n. 2, p. 022322, Aug 2008.
- [49] RIGOLIN, G. Thermal entanglement in the two-qubit heisenberg xyz model. *International Journal of Quantum Information*, v. 2, p. 393–405, 2004.
- [50] DODD, P. J.; HALLIWELL, J. J. Disentanglement and decoherence by open system dynamics. *Phys. Rev. A*, v. 69, n. 5, p. 052105, May 2004.
- [51] ALTAFINI, C.; HAVEL, T. F. Reflection symmetries for multiqubit density operators. *Journal of Mathematical Physics*, Woodbury, v. 47, n. 3, p. 032104, 2006.
- [52] RAU, A. R. P. Algebraic characterization of x -states in quantum information. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, n. 41, p. 412002, 2009.
- [53] VINJANAMPATHY, S.; RAU, A. R. P. Generalized x states of n qubits and their symmetries. *Phys. Rev. A*, v. 82, n. 3, p. 032336, Sep 2010.
- [54] FICEK, Z.; TANAS, R. Dark periods and revivals of entanglement in a two-qubit system. *Phys. Rev. A*, v. 74, n. 2, p. 024304, Aug 2006.
- [55] SHABANI, A.; LIDAR, D. A. Vanishing quantum discord is necessary and sufficient for completely positive maps. *Phys. Rev. Lett.*, v. 102, n. 10, p. 100402, Mar 2009.
- [56] WERLANG, T.; SOUZA, S.; FANCHINI, F. F.; VILLAS BOAS, C. J. Robustness of quantum discord to sudden death. *Phys. Rev. A*, v. 80, n. 2, p. 024103, Aug 2009.
- [57] SANTOS, M. F.; MILMAN, P.; DAVIDOVICH, L.; ZAGURY, N. Direct measurement of finite-time disentanglement induced by a reservoir. *Phys. Rev. A*, v. 73, n. 4, p. 040305, Apr 2006.

-
- [58] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The feynman lectures on physics*. Bookman, 2008. Tradução: A. V. R. da Silva e K. R. Coutinho. Consultoria, supervisão e revisão técnica desta edição: A. Fazzio.