

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Problema relativístico de dois corpos na Eletrodinâmica de Ação à Distância

Efrain Buksman Hollander

Orientador: Prof. Dr. Jayme Vicente De Luca Filho

Tese submetida ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física

São Carlos - SP

Dezembro 2003

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

H734pr

Hollander, Efrain Buksman.

Problema relativístico de dois corpos. / José Varalda. --
São Carlos : UFSCar, 2003.
129 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,
2003.

1. Eletrodinâmica. 2. Ação à distância. 3. Equações
diferenciais com retardo e avanço. I. Título.

CDD: 537.6 (20^a)

Dedico este trabalho aos meus filhos Matias, Tirza e à minha querida mulher Zulema pelo contínuo apoio.

Agradecimentos

Ao meu Orientador, Prof. Jayme Vicente de Luca Filho, pela orientação nesta área da Física. Aos professores J. P. Rino, pela iniciação na Física Computacional, e ao Prof. Salomon Mizrahi pela discussões sobre temas afines.

Aos meus Pais que sempre me motivaram neste caminho da Ciências, as vezes um pouco tortuoso mais sempre interessante. A meus professores: Dafonte, Zak e Prof. R. Gambini. Agradeço também ao Prof. Julio Zuckerman e à Prof. Iignes Caracelli, pela confiança e mão amiga.

Finalmente a FAPESP pelo apoio financeiro sem o qual nao seria possível este Doutorado.

Resumo

Neste trabalho nós estudamos o problema relativístico de dois corpos na eletrodinâmica de ação à distância. Este sistema dinâmico foi proposto no começo do século passado como exemplo de dinâmica relativística e ganhou status de eletrodinâmica nos anos 40 com os trabalhos de Dirac, Wheeler e Feynman. As equações de movimento deste problema envolvem argumentos retardados e avançados simetricamente, são pouco estudadas e difíceis de resolver. Nós tentamos entender a dinâmica deste sistema com ênfase na física deste complexo sistema dinâmico conservativo. Nós estudamos os seguintes casos do problema de dois corpos:

(i) Nós começamos o estudo com o problema geral atrativo de massas arbitrárias e órbitas em três dimensões (o átomo de Hidrogênio). Nós desenvolvemos um método numérico para este problema, que apresentou muitas limitações. Nós calculamos numericamente algumas órbitas com esse método, mas algumas limitações não possibilitaram um estudo completo da dinâmica neste caso. Alguns fracassos iniciais nos levaram a restringir o estudo ao problema mais simples de órbitas colineares e massas iguais ((ii) e (iii)).

(ii) Para o problema colinear repulsivo de dois elétrons, nós obtivemos uma aproximação analítica para as órbitas repulsivas de baixa energia e desenvolvemos um método numérico estável baseado em minimização. Usando este método nós calculamos numericamente as órbitas para várias energias. Nós também obtivemos uma descrição Hamiltoniana com dois graus de liberdade para a dinâmica colinear, na forma de um Hamiltoniano implícito.

(iii) Para o problema colinear atrativo com massas iguais, nós derivamos equações de movimento que são regulares na colisão. Para isso usamos as integrais de Noether do problema de dois corpos relativístico como motivação e também para remover infinitos da equação de movimento. O procedimento desenvolvido é análogo à regularização de Levi-Civita do problema de Kepler.

Estas equações regulares foram adaptadas num método numérico estável baseado em minimização, análogo ao desenvolvido em (ii). Usando este método, nós calculamos numericamente orbitas para várias energias no caso atrativo.

Abstract

We study the relativistic two-body problem of the action-at-a-distance electrodynamics. This dynamical system appeared 100 years ago as a time-symmetric relativistic motion and acquired the status of electrodynamics in the 1940's by the works of Dirac, Wheeler and Feynman. The equations of motion for this problem are delay equations involving retarded and advanced arguments symmetrically. We outline our dynamical studies with an emphasis on the physics of this complex conservative dynamical system. We study the following versions of this electromagnetic two-body problem:

(i) For the case of two arbitrary masses with attractive interaction (hydrogen atom), we develop a numerical method to integrate the three-dimensional motion. This method has a very limited applicability and could not answer several dynamical questions. We calculated numerically some orbits. The difficulties of this complex case suggested that we should restrict the study to the simpler problem of straight-line orbits and equal masses ((ii) and (iii)).

(ii) We study the colinear orbits of the repulsive problem of two electrons (two electrons moving on the same line). We obtain an analytical approximation for the low-energy colinear orbits. We also develop a stable numerical method based on steepest-descent minimization. Using this method we calculated the orbits numerically for several energies. We also found a two-degree-of-freedom implicit Hamiltonian formalism to describe this colinear motion.

(iii) For the attractive problem with equal masses, we derive an equation of motion that is regular at the collision. Our method uses the energy constant related to the

Poincaré invariance of the theory to motivate the regularizing coordinate transformation and to remove infinities from the equation of motion. The collision orbits are calculated numerically using the regular equation adapted in a self-consistent minimization method (a stable numerical method that chooses only nonrunaway orbits). We compare our regularization of this Poincaré-invariant case to the Levi-Civita regularization of the Galilei-invariant Kepler problem.

Sumário

1	Eletrodinâmica de ação à distância	10
1.1	Introdução	10
1.2	Lagrangiana de Fokker	11
1.2.1	Teoria da radiação de Wheeler e Feynman	15
1.3	Teorias covariantes de ação à distância	20
1.3.1	Dinâmica de vínculos	22
1.3.2	Partícula livre na dinâmica de vínculos	24
1.3.3	Duas partículas interagentes na dinâmica de vínculos	26
1.3.4	Teorema da <i>não-interação</i> na dinâmica de vínculos	28
2	Problema de dois corpos eletromagnético	32
2.1	Introdução	32
2.2	Hamiltoniano <i>assimétrico</i> para dois elétrons.	34
2.2.1	Separação da ação de Fokker	34
2.2.2	Descrição Hamiltoniana e solução analítica	36
2.2.3	Invariância de Lorentz	40
2.2.4	Solução aproximada do problema <i>simétrico</i>	42
2.3	Órbitas circulares do problema <i>simétrico</i>	46
2.4	Estudo numérico do átomo de hidrogênio	50
2.4.1	Resultados numéricos	54

3	Formulação Hamiltoniana do problema simétrico	60
3.1	Introdução	60
3.2	O método	62
3.3	Condições de Simetria para o caso de Massas Iguais	69
3.4	Determinação dos potenciais	72
3.5	Integração Numérica das órbitas	77
3.6	Discussão e Conclusões.	85
4	Problema atrativo de dois corpos	86
4.1	Introdução	86
4.2	Preliminares da regularização	87
4.3	Transformação do parametro de evolução	93
4.4	Utilização das expressões integrais da Energia na regularização das equações	98
4.5	Solução numérica	103
4.6	Conclusões	107

Capítulo 1

Eletrodinâmica de ação à distância

1.1 Introdução

A invariância de Poincare é uma exigência para qualquer teoria física moderna. Entre as teorias covariantes, as teorias de campo tiveram êxito em descrever a física das interações, como por exemplo QED, QCD, etc. Estas teorias só podem ser tratadas em forma perturbativa e precisam ser renormalizadas no tratamento quântico. As teorias de campo estão plenas de infinitos provenientes da auto-interação, tanto no tratamento clássico como quântico. Uma outra teoria de campo fundamental, a Gravidade, não pode ser tratada em forma perturbativa e portanto não pode ser renormalizada. A vantagem das teorias de interação direta entre partículas pontuais, que são chamadas de *ação à distância*, é que estas não sofrem de auto-interação pela própria definição. Nestas, a interação propaga-se com a velocidade da luz, mas sem a intervenção de um campo intermediário. O campo, pode até ser definido na teoria de ação à distância, porém não possui graus de liberdade próprios e é determinado a partir dos graus de liberdade das partículas.

Desde a publicação do artigo de Wheeler e Feynman [1], a eletrodinâmica de ação à distância tornou-se uma explicação viável para o paradoxo que surge da equação de Abraham-Lorentz [2]. Esta equação leva em conta o termo de amortecimento radiativo,

porém a solução viola o conceito tradicional de causalidade. Este conceito não aparece na teoria de *ação à distância*, onde os potenciais retardados e avançados são considerados equivalentes desde o começo. Esta teoria teve sucesso ao determinar o termo exato para a força de amortecimento radiativo, proposto *ad hoc* por Dirac. Porém, uma teoria *simétrica* no tempo como esta, tem que dar uma explicação coerente a efeitos aparentemente causais, como por exemplo o fenômeno da radiação. Esta explicação foi dada por Wheeler e Feynman em [1]. Wheeler e Feynman também tentaram encontrar uma formulação Hamiltoniana, com a intenção de quantizar a eletrodinâmica de ação à distância, que até hoje só pode ser quântizada no formalismo de integrais de trajetória [3].

Discute-se aqui também uma incompatibilidade entre a invariância de Poincaré e a descrição local Hamiltoniana, o chamado *Teorema da não-interação* de 1963 [4]. Discutimos também um método para evitar as conseqüências do teorema, a chamada dinâmica de vínculos, que apareceu vinte anos mais tarde. Este capítulo está dividido da seguinte maneira: (i) Na Seção I discute-se as soluções da equação de Abraham-Lorentz para uma força simples e a teoria de radiação proposta por Wheeler e Feynman. (ii) Na Seção II mostra-se como o teorema da *não-interação* é contornado usando-se a dinâmica de vínculos. A demonstração do teorema da *não-interação* em sua versão original é apresentado no Apêndice I.

1.2 Lagrangiana de Fokker

A teoria de ação à distância foi iniciada por Scharwzschild (1903) [5], Tetrode (1922) [6] e Fokker (1929) [7]. Finalmente em 1945, Wheeler e Feynman mostraram [1], [11] que esta teoria descreve exatamente a eletrodinâmica nas suas conseqüências clássicas. Nesta teoria, o campo eletromagnético está descrito em função das órbitas das partículas. Como na teoria de Maxwell, as partículas sentem a interação com um atraso no tempo igual à distância entre elas dividida pela velocidade da luz. A ação que descreve esta interação

entre N partículas $i = 1 \dots N$, é

$$S = - \sum_i \int m_i d\tau_i - \sum_{i>j} \int \int e_i e_j \delta(s^2) d\tau_i d\tau_j \quad (1.1)$$

sendo m_i a massa da partícula i , $d\tau_i$ o intervalo de tempo próprio e

$$s^2 = g_{\mu\nu} (x_{(i)}^\nu - x_{(j)}^\nu) (x_{(i)}^\mu - x_{(j)}^\mu), \quad (1.2)$$

é a distância entre as partículas no espaço de Minkowski com a métrica $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$. A função delta que aparece na Eq. (1.1) assegura que as partículas só interagem quando conectadas em forma simétrica no tempo, por um raio de luz. A maior diferença entre esta teoria e a eletrodinâmica de Maxwell é que a interação se dá não somente com o passado da outra partícula, mas também com o *futuro* dela. Essa interação pode ser descrita pelos *campos diretos*,

$$A_\nu^{(i)}(x^\mu) \equiv e_i \int \delta(s_i^2) dx_\nu^{(i)}, \quad F_{\mu\nu}^{(i)} = \partial_\mu A_\nu^{(i)} - \partial_\nu A_\mu^{(i)}. \quad (1.3)$$

Esses campos não têm graus de liberdade próprios e os únicos graus de liberdade que aparecem são os das próprias partículas. Podemos ver que esta teoria resulta nos mesmos potenciais convencionais de Lienard-Wiechert, integrando a expressão acima e usando as propriedades da função delta. A variação da ação Eq. (1.1), resulta na equação para a partícula i

$$m_i \frac{d^2 x^\mu^{(i)}}{d\tau^2} = e_i \sum_{j \neq i} F_{Total \nu}^{\mu (j)} \frac{dx^\nu^{(i)}}{d\tau}, \quad (1.4)$$

onde o campo total é dado por

$$F_{(Total)}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \{F_{ret} + F_{adv}\}, \quad (1.5)$$

o que faz desta uma teoria *simétrica* no tempo. Por outro lado, usando a teoria de Maxwell e a força de Lorentz, obtém-se

$$m_i \frac{d^2 x^\mu{}^{(i)}}{d\tau^2} = e_i \sum_j F_{(ret)\nu}^{\mu(j)} \frac{dx^\nu{}^{(i)}}{d\tau}, \quad (1.6)$$

onde é usado o potencial retardado e a somatória é sob todas as partículas incluindo a própria partícula i . Na teoria de *ação à distância*, os dois potenciais são equivalentes. Como é sabido, os potenciais avançados e retardados de Lienard-Wiechert resolvem as equações de Maxwell, porém, costuma-se usar somente o potencial retardado. Isto se justifica porque a solução retardada pode ser visualizada como uma onda saindo de um elemento radiante e chegando a um ponto distante *mais tarde*. Por serem as equações de Maxwell simétricas no tempo, não podem determinar qual potencial deve ser usado, portanto nesta teoria o potencial é imposto *ad hoc*.

Vejamos o que acontece quando é usado unicamente o potencial *retardado* na análise de uma partícula acelerada. A equação de movimento de Abraham-Lorentz para uma partícula carregada e acelerada escreve-se [2]

$$m_i \frac{d^2 x_i^\mu}{d\tau^2} = e_i F_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{2e^2}{3} g_{\nu\sigma} \left(\frac{d^3 x^\mu}{d\tau^3} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{d^3 x^\nu}{d\tau^3} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \frac{dx^\sigma}{d\tau}, \quad (1.7)$$

onde F_ν^μ denota uma força externa aplicada sobre a partícula e o segundo termo à direita é a força de amortecimento por radiação. Em 1938 Dirac apresentou uma explicação ao termo radiativo, agregando ao campo externo F_ν^μ um campo aparentemente proveniente da própria partícula (auto-interação), igual a

$$R_\nu^\mu \equiv \frac{1}{2} \left\{ F_{\nu(ret)}^\mu - F_{\nu(adv)}^\mu \right\}, \quad (1.8)$$

Usando a força adicional Eq. (1.8) mais a força retardada na Eq. (1.6), a equação Eq. (1.7) fica

$$m_i \frac{d^2 x_i^\mu}{d\tau^2} = e_i (F_\sigma^\mu + R_\sigma^\mu) \frac{dx^\sigma}{d\tau}. \quad (1.9)$$

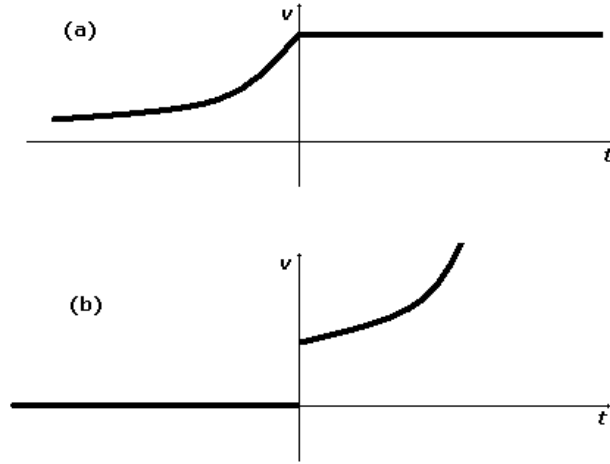


Figura 1-1: Comportamento da velocidade de uma partícula nas equações de Abraham-Lorentz, com um impulso $F = P\delta(t)$. No caso (a) $v = \frac{P}{m} \exp\left(\frac{3t}{2\tau}\right)$ para $t < 0$ e $v = \frac{P}{m}$ para $t \geq 0$. No caso (b) $v = 0$ para $t \leq 0$ e $v = \frac{P}{m} \exp\left(\frac{3t}{2\tau}\right)$ para $t > 0$, com $\tau = \frac{mc^3}{e^2}$.

Assumindo o limite onde o volume do elétron vai a zero, Dirac consegue derivar a Eq. (1.7) da Eq. (1.9) [8]. Agora considere-se uma partícula na qual atua um impulso de força em $t = 0$, de $\vec{F} = P\delta(t)$, A aproximação de baixas velocidades da Eq. (1.7), prescreve a seguinte equação de movimento

$$M\ddot{x} = P\delta(t) + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{x}. \quad (1.10)$$

(a equação relativística não apresenta diferenças qualitativas). Para que a partícula se movimente com velocidade constante para $t > 0$, a solução contínua e não disparante da Eq. (1.10) deve se comportar para $t < 0$ como

$$\dot{x} = \frac{P}{m} \exp\left(\frac{2}{3} \frac{mc^3}{e^2} t\right), \quad t < 0. \quad (1.11)$$

Por outro lado, impondo a condição inicial $\dot{x} = 0$, para todo $t < 0$, a solução contínua

para $t \geq 0$ é

$$\dot{x} = \frac{P}{m} \exp\left(\frac{3}{2} \frac{mc^3}{e^2} t\right), \quad t > 0. \quad (1.12)$$

que é explicitamente disparante como se mostra na Figura 1.1. Em particular a solução Eq. (1.11), não é compatível com a causalidade, vide Figura 1.1 (a). A partícula começa a se movimentar antes do impulso de força atuar nela. Para o caso (b) na Figura 1.1, a solução contínua Eq. (1.12) é *disparante* e não é *física* [8].

1.2.1 Teoria da radiação de Wheeler e Feynman

A pergunta que surge imediatamente é: como esta teoria simétrica no tempo pode explicar um fenômeno causal como a radiação?. Wheeler e Feynman conseguiram dar uma explicação no seu artigo Ref. [1]. Daremos a seguir uma explicação simplificada considerando o seguinte modelo: uma carga a dentro de uma esfera de vácuo de raio R ($R \rightarrow \infty$) e fora desta N partículas distribuídas uniformemente formando um universo homogêneo. Estas partículas são consideradas com velocidades muito baixas. Cada partícula interage com o universo através de *campos diretos* iguais à soma

$$F = \frac{1}{2} \{F_{ret} + F_{adv}\}. \quad (1.13)$$

Wheeler e Feynman estimaram a resposta do universo ao campo gerado pela partícula a para uma posição perto desta. A aceleração da partícula a é considerada com uma componente típica de frequência ω e amplitude u_0 . O campo elétrico retardado, gerado por a que tem contribuição a longas distâncias, atuando no ponto P , escreve-se como

$$E_\theta = u_0 \frac{e}{r} \sin \theta \exp[i\omega(r - t)], \quad (1.14)$$

onde r é a distância a P e o ângulo θ está mostrado na Figura 1.2. Incluindo agora o efeito da refração na Eq. (1.14) por causa da fronteira entre o vácuo e o universo

homogêneo, para o qual o índice refração é dado por $(n - ik)$, obtém-se

$$E_\theta = \frac{2eu_0 \sin \theta}{r(1 + n - ik)} \exp [i\omega (r - t + (n - ik - 1)(r - R))], \quad (1.15)$$

a contribuição à aceleração da carga P devido a este campo é

$$a_P = \frac{e}{m} p(\omega) E_\theta, \quad (1.16)$$

onde $p(\omega)$ esta determinada pela equação

$$(n - ik)^2 = 1 - \frac{4\pi N e^2 p(\omega)}{m\omega^2}, \quad (1.17)$$

A idéia de Wheeler e Feynman foi que a carga P gera uma onda avançada que se movimenta para atrás no tempo, chegando à carga a ao mesmo tempo que esta gera a onda retardada. Na direção da aceleração de a , a contribuição da metade de campo avançado proveniente de P devido a aceleração encontrada anteriormente Eq. (1.16), é

$$a_R = E_\theta \frac{e}{m} p(\omega) \left[\frac{e}{2r} \sin \theta \right] \exp(-i\omega r).$$

Agora integrando sob as N partículas, obtém-se

$$a_R = \int_R^\infty \int_{\theta=0}^\pi \int_{\phi=0}^{2\pi} E_\theta \frac{e^2}{2mr} p(\omega) \sin \theta \exp(-i\omega r) N r^2 dr d\theta d\phi = -\frac{2}{3} i\omega u_0 e^{-i\omega t}. \quad (1.18)$$

É fácil notar que a resposta do universo, normal a aceleração cancela-se, integrando então a Eq. (1.18) para todas as frequências obtém-se exatamente o termo *radiativo* na Eq. (1.10).

Também pode dada uma segunda explicação pictórica: Um ponto típico P do universo gera uma onda avançada quando a onda retardada da partícula a chega até ele. Uma onda avançada emanando de P pode ser vista como uma onda esférica vindo do infinito

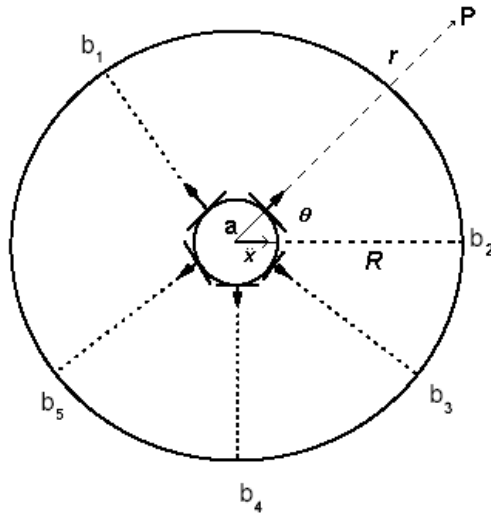


Figura 1-2: Mostra-se aqui a resposta do universo homogêneo de partículas b_1, b_2, \dots , ao campo produzido pela partícula a , como uma frente de onda saindo de a . O ângulo θ é o usado na derivação Eqs. (1.14)-(1.18)

e convergindo sobre P . Esta onda cruza a fonte a 'antes' de chegar a P . Se o universo absorve completamente toda a radiação procedente da fonte a , a resposta de todos os pontos P no universo geram uma onda esférica convergindo sobre a e depois saindo dela, como se mostra na Figura 1.2. Produzindo assim finalmente, a expressão

$$F_{resposta} = \frac{1}{2} \{F_{ret} - F_{adv}\}. \quad (1.19)$$

Este resultado, foi prescrito *ad hoc*, por Dirac para explicar a força de amortecimento devido à radiação gerada por uma partícula acelerada [8]. Somando este campo ao campo total produzido pela fonte a obtêm-se então

$$\frac{1}{2} \{F_{ret} + F_{adv}\} + \frac{1}{2} \{F_{ret} - F_{adv}\} = F_{ret}. \quad (1.20)$$

Isto explica porque em experimentos macroscópicos cotidianos mede-se somente o campo *retardado*, mesmo sendo esta uma teoria *simétrica*. É preciso lembrar que na derivação

o universo há de absorver em forma íntegra *todo o campo eletromagnético* que emana de suas partículas. O argumento dado em [1] para achar a expressão (1.20) não funciona no caso em que o universo não absorve perfeitamente toda a radiação. Esta aproximação de absorção completa é uma tentativa de eliminar a dinâmica das outras cargas do universo. Supondo então que a absorção seja completa, os campos tanto o criado diretamente pela aceleração da partícula como a resposta do resto do Universo a estes, tem que decair para $r \rightarrow \infty$ como $O(1/r)$, ou seja

$$\sum_b \frac{1}{2} [F_{ret}^{(b)} + F_{adv}^{(b)}] \sim O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (1.21)$$

pois, como estes campos podem ser vistos como ondas que se transportam para o futuro e para o passado, tem que se comportar para $r \rightarrow \infty$ independentemente como

$$\sum_b \frac{1}{2} F_{ret}^{(b)} \sim O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \sum_b \frac{1}{2} F_{adv}^{(b)} \sim O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (1.22)$$

deduz-se então que

$$\sum_b \frac{1}{2} [F_{ret}^{(b)} - F_{adv}^{(b)}] \sim O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (1.23)$$

Porém, esta combinação de potências representa um campo *sem fontes* e portanto a Eq. (1.23) implica que

$$\sum_b \frac{1}{2} [F_{ret}^{(b)} - F_{adv}^{(b)}] \equiv 0.$$

Conclui-se que o campo atuante sobre a é:

$$\sum_{b \neq a} \frac{1}{2} [F_{ret}^{(b)} + F_{adv}^{(b)}] = \frac{1}{2} \{F_{ret}^{(a)} - F_{adv}^{(a)}\} + \sum_{b \neq a} F_{ret}^{(b)} \quad (1.24)$$

Note-se que esta solução não é única; pode-se ver que trocando as palavras $ret \leftrightarrow adv$

em (1.24) obtêm-se

$$\sum_{a \neq b} \frac{1}{2} \{F_{ret}^{(b)} + F_{adv}^{(b)}\} = \frac{1}{2} \{F_{ret}^{(a)} - F_{adv}^{(a)}\} + \sum_{a \neq b} F_{ret}^{(b)}, \quad (1.25)$$

o que resulta em um universo que admite somente *soluções avançadas*. Isto muda o sinal da força de auto-interação na Eq. (1.7) de amortecida para forçante. Existe então uma ambigüidade na prescrição. Wheeler e Feynman argumentaram que a fórmula correta era aquela que corresponde à direção termodinâmica do tempo (aumento da entropia). Novas idéias surgiram então no âmbito da Cosmologia propostas por Hogart (1962) [9] e posteriormente foram ampliadas e discutidas por Hoyle e Narlikar [10]. A idéia central é que tomando em conta a expansão do universo, a ambigüidade referida acima é quebrada. Generalizando em forma natural a prescrição, pode-se escrever Eq. (1.13) como:

$$F_{Total} = AF_{ret} + BF_{adv}, \quad (1.26)$$

onde A, B são constantes. Em vários modelos cosmológicos o futuro e o passado absorvem a radiação com diferentes eficiências que vamos denotar f, p . Então $f = 1$ denota um universo futuro com absorção perfeita e $p = 1$ define um universo passado com absorção perfeita. Por auto-consistência com (1.24), o campo total é

$$F_{Total} = \frac{1}{2} \{F_{ret} + F_{adv}\} + \frac{1}{2} (Af - Bp) \{F_{ret} - F_{adv}\}. \quad (1.27)$$

Igualando termo a termo em (1.24) e (1.25) separadamente, determina-se os coeficientes A e B

$$A = \frac{1-p}{2-f-p}, \quad B = \frac{1-f}{2-f-p}. \quad (1.28)$$

Nota-se que se $f = 1$, obtêm-se um universo que aceita soluções retardadas somente se $p \neq 1$, e vice-versa. Só o caso de $p = f = 1$, acaba em uma situação ambígua. Isso mostra que aceitando certos modelos cosmológicos (*Quasi-Steady-State Universe*) [12], onde $p \simeq f \simeq \frac{1}{2}$, porem $p \neq f$, obtêm-se uma prescrição única, que relaciona a direção

do tempo eletrodinâmico com a direção do tempo cosmológico [3].

Nossa pesquisa trata de duas partículas isoladas. Neste caso, a teoria de ação à distância determina equações dinâmicas bastante diferentes da teoria de Maxwell. Ambos os campos retardado e avançado têm que ser considerados atuando entre as partículas. Nós argumentamos que a presença do universo tem um efeito que pode ser considerado perturbativo. Na interação entre um átomo e o universo, como por exemplo no caso do átomo de Hidrogênio, o termo radioativo nos potenciais de Lienard-Wiechert é muito menor em comparação ao termo Coulombiano.

Existe relativamente pouca literatura para estas teorias de ação à distância, uma das razões disto é que as equações derivadas da ação Eq. (1.1), são equações não-locais (*differential-difference equations*) difíceis de resolver mesmo por métodos numéricos. Além disto, a condição inicial para estas equações não é meramente pontual como no caso Newtoniano, mas tem que ser dado um segmento da órbita, consistente com as equações, para que estas evoluam. Alguns autores propuseram Lagrangianos covariantes que aproximam de alguma maneira a ação de Fokker para o caso *assimétrico* no tempo, no qual uma das partículas sente só a interação retardada da outra e a segunda só a interação avançada. Estas teorias assimétricas produzem equações locais, no entanto os aspectos clássicos e quânticos da teoria *simétrica* original contínua pouco entendida até hoje [3].

1.3 Teorias covariantes de ação à distância

As teorias relativísticas, como a eletrodinâmica de ação à distância, tiveram uma decaída na década de 60, depois da demonstração do teorema da *não-interação* [4], [14]. Este teorema demonstra que se quisermos descrever no espaço de fase um sistema de partículas de tal maneira que:

- (i) a dinâmica seja regida por um Hamiltoniano,
- (ii) a álgebra de Lie do grupo de Poincare seja realizada através de transformações canônicas, ou seja, os geradores infinitesimais: momento linear P^μ e momento angular

generalizado $J^{\mu\nu}$, obedecem a álgebra de Poincaré com os colchetes de Poisson.

(iii) as coordenadas das partículas individuais se transformem corretamente pelo o grupo de Lorentz, de modo que as partículas tenham trajetórias bem definidas.

Surpreendentemente, este teorema demonstra que estes requerimentos são satisfeitos apenas se as partículas se movimentam como partículas livres, ou seja, toda interação fica excluída na descrição [4] (vide também o Apêndice I). As consequências deste teorema foram evitadas pelos próprios autores vinte anos depois usando a teoria de vínculos e as diferentes *formas dinâmicas* de Dirac [13], [15], dando lugar assim a teorias Hamiltonianas de ação à distância [16], [17], [19]. Este teorema foi demonstrado também para a descrição Lagrangiana da dinâmica [21]. Neste formalismo, as consequências deste teorema podem ser evitadas usando Lagrangianos que dependem das derivadas das coordenadas a todas as ordens [19]. Uma exceção importante é quando o espaço é o de Minkowski \mathbf{M}_2 , de 1+1 dimensões, onde pode ser proposta uma descrição Hamiltoniana sem necessidade da dinâmica de vínculos. Vários Hamiltonianos neste espaço \mathbf{M}_2 foram sugeridos para interações escalares e vetoriais, como também foi estudada a quantização de alguns destes [19]. Nos anos 70 um Hamiltoniano foi derivado da ação de Fokker (interação *eletrodinâmica*) em \mathbf{M}_2 [20]. Tanto este último como os outros Hamiltonianos propostos são *assimétricos* no tempo, ou seja, enquanto uma das partículas sente só a interação retardada da outra, a segunda, só sente a interação avançada [26], [28]. No espaço de quatro dimensões de Minkowski \mathbf{M}_4 , alguns autores propuseram teorias de vínculo com Hamiltonianos na forma isotrópica da dinâmica (*isotropic form of dynamics*), todas estas assimétricas no tempo, porem aproximando a interação *eletromagnética* [19]. Outras propostas existentes não se derivam da ação de Fokker nem têm relação direta com as equações de Maxwell, mas são explicitamente covariantes e o potencial definido aproxima-se do potencial de Coulomb para baixas velocidades [15], [17].

1.3.1 Dinâmica de vínculos

Este formalismo foi desenvolvido primeiramente por Komar e outros [15], [16], [17], e mostra como o teorema da *não-interação* pode ser evitado. A Dinâmica de vínculos é usada essencialmente quando por alguma razão têm que se trabalhar com mais graus de liberdade de que os graus de liberdade físicos. No caso da Dinâmica relativística de partículas o movimento destas é descrito por linhas de universo $\gamma_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{M}_4$. Estas podem ser parametrizadas de forma arbitrária com parâmetros τ_i , de modo que $q_i^\mu(\tau_i)$ são as coordenadas das partículas. Esta arbitrariedade é a que faz que a Lagrangiana da ação Eq. (1.1) seja singular e tenha que ser tratado com vínculos. O formalismo da dinâmica de vínculos opera em um espaço de fase onde as coordenadas da partícula são sua posição e seu tempo q_i^μ associadas a seu momento e sua energia $p_{i\mu}$. Este espaço é maior do que se necessita, o que é característico da dinâmica de vínculos, onde a identificação das verdadeiras variáveis é conhecida ao final do tratamento, depois de serem impostos todos os vínculos. A quarta coordenada é usada para permitir a definição de um parênteses covariante, como segue. O colchete de Poisson para duas funções quaisquer $A(q, p)$ e $B(q, p)$ nesse espaço é definido através da forma simplética explicitamente covariante

$$\{A(q, p), B(q, p)\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q^m} \frac{\partial B}{\partial p_m} - \frac{\partial A}{\partial p_m} \frac{\partial B}{\partial q^m}. \quad (1.29)$$

Note-se que estas expressões são análogas aos colchetes da mecânica clássica, porém aqui a primeira coordenada é basicamente arbitrária. No mesmo espírito da mecânica Hamiltoniana, uma transformação canônica é definida para preservar esta forma simplética. Qualquer função $A(p, q)$ do espaço de fase pode ser usada como gerador de uma transformação canônica de modo que a transformação infinitesimal pode ser escrita

$$\begin{aligned} \delta_{Aq} &= \{q, A\} \\ \delta_{Ap} &= \{p, A\}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Uma conseqüência direta desta definição é que por uma mudança infinitesimal, qualquer

função $B(q, p)$ do espaço de fase se transforma como $\delta_A B = \{A, B\}$. Usando esta convenção, é trivial confirmar que as dez quantidades P^μ e $J^{\mu\nu}$ definidas como

$$\begin{aligned} P^\mu &\equiv p_1^\mu + p_2^\mu, \\ J^{\mu\nu} &\equiv q_1^\mu p_1^\nu - q_1^\nu p_1^\mu + q_2^\mu p_2^\nu - q_2^\nu p_2^\mu, \end{aligned} \quad (1.31)$$

satisfazem a álgebra de Lie do grupo de Poincaré, e servem como geradores canônicos das transformações infinitesimais deste grupo. Note-se também que com esta definição as variáveis $q_1^\mu, q_2^\mu, p_1^\mu, p_2^\mu$ transformam-se como quadri-vetores de Lorentz.

Agora que já foi satisfeita a simetria, vamos implementar a dinâmica: consideremos N funções sobre o espaço de fase $K_i(q, p)$, $i = 1, \dots, N$, de modo que

$$K_i(q, p) = 0, \quad i = 1 \dots N. \quad (1.32)$$

Estas relações definem uma hipersuperfície no espaço de fase, a qual é chamada de hipersuperfície de vínculo. Como estas quantidades tem que ser sempre nulas, então deve valer

$$\{K_i, K_j\} = \sum_{m=1}^N \lambda_{ij}^m K_m \approx 0, \quad (1.33)$$

onde λ_{ij}^m são funções totalmente arbitrárias do espaço de fase. O símbolo " \approx " significa: igualdade em forma fraca, ou seja, a igualdade só é válida na hipersuperfície definida pelo vínculo.

Pode-se dizer que estas funções formam um sistema de vínculos de primeira classe, definidas assim por Dirac quando os vínculos comutam entre si [18]. É evidente, por consequência da Eq. (1.33), que a hipersuperfície é invariante sob transformações geradas pelas funções K_i . Note-se que começando com um ponto qualquer da hipersuperfície de vínculo (1.32), pode-se aplicar nele uma transformação canônica infinitesimal gerada por K_i , o ponto resultante pertencerá sempre à mesma superfície. Isto gera uma classe de equivalência, que será definida como a *trajetória dinâmica generalizada*. Estas N funções

são chamadas de Hamiltonianos. Esta forma de definir a trajetória tem a virtude de não fazer referência a nenhum parâmetro de evolução, o que faz possível manter a covariância em forma explícita. Isto não é ainda completamente satisfatório porque nós estamos interessados em linhas de universo, como representação das partículas, o que se consegue logo depois de impor vínculos secundários que não comutam com os K_i . Note-se também que os dez geradores do grupo ainda realizam a álgebra de Lie corretamente.

1.3.2 Partícula livre na dinâmica de vínculos

Tomemos primeiro o exemplo de uma partícula livre relativística. Começaremos com um espaço de fase de oito dimensões com as variáveis básicas x^μ, p^μ postulando para estas as seguintes relações com os colchetes de Poisson

$$\{x^\mu, x^\nu\} = 0, \{x^\mu, p^\nu\} = g^{\mu\nu}, \{p^\mu, p^\nu\} = 0. \quad (1.34)$$

Note-se que um elemento geral do grupo de Poincare pode-se escrever (Λ, a) , sendo

$$R(\Lambda, a) : \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad p^\mu \rightarrow p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu. \quad (1.35)$$

Esta definição evidentemente preserva as relações entre as variáveis Eq. (1.34). A realização canônica da álgebra é feita com os dez geradores

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, \quad P^\mu = p^\mu, \quad (1.36)$$

que satisfazem a álgebra de Lie do grupo. Imponhamos agora o vínculo Hamiltoniano

$$K = p^\mu p_\mu - m^2 \approx 0, \quad (1.37)$$

este define uma hipersuperfície Σ de dimensão sete. Esta superfície é invariante já que foi usada uma função K invariante de Poincare. Podemos agora mover qualquer ponto de Σ através de uma transformação canônica definida por

$$\frac{dx^\mu}{d\sigma} \approx v \{x^\mu(\sigma), K\}, \quad \frac{dp^\mu}{d\sigma} \approx v \{p^\mu(\sigma), K\}, \quad (1.38)$$

onde $v(\sigma)$ é uma função arbitrária. Se queremos assinalar a cada ponto da linha de universo um valor definido do parâmetro σ , precisamos adicionar um outro vínculo, de modo que

$$\chi(x, p, \sigma) \approx 0. \quad (1.39)$$

com a condição

$$\{\chi, K\} \neq 0. \quad (1.40)$$

Isto é para assegurar que para cada σ existe um único ponto no qual $\chi \approx 0$. Usando este vínculo pode-se fixar v usando a condição de preservação do vínculo secundário no tempo

$$\frac{d\chi}{d\sigma} \approx \frac{\partial\chi}{\partial\sigma} + v \{\chi, K\} \approx 0 \Rightarrow v \approx -\frac{\partial\chi}{\partial\tau} / \{\chi, K\}. \quad (1.41)$$

Pode-se agora definir equações de evolução para qualquer função $f(x, p, \sigma)$ restringida a Σ

$$\frac{df}{d\sigma} \approx \frac{\partial f}{\partial\sigma} - \frac{\{f, K\}}{\{\chi, K\}} \frac{\partial\chi}{\partial\sigma}. \quad (1.42)$$

No espaço de fase restrito de seis dimensões definido pelos dois vínculos K, χ , define-se os colchetes de Dirac como

$$\{f, g\}^* \equiv \{f, g\} - (\{f, K\} \{\chi, g\} - \{f, \chi\} \{K, g\}) / \{\chi, K\}. \quad (1.43)$$

Estes colchetes atuam no espaço não-degenerado de seis dimensões com exatamente o dobro do número de graus de liberdade de uma partícula livre. Note-se os geradores do grupo , $J_{\mu\nu}$ e P_μ comutam com K , e por isto a álgebra com os colchetes de Dirac é a mesma que com os colchetes de Poisson. Pode-se agora definir uma derivada explícita relacionada com o *Hamiltoniano de Dirac* definido de modo que

$$\frac{df}{d\tau} \approx \frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{\{f, K\}}{\{\chi, K\}} \frac{\partial \chi}{\partial \tau} \approx \frac{\partial' f}{\partial \tau} + \{f, H^D\}^* . \quad (1.44)$$

Agora temos então *onze* geradores da Dinâmica para a partícula livre que são $J_{\mu\nu}$, P_μ e H^D .

1.3.3 Duas partículas interagentes na dinâmica de vínculos

Para mais de uma partícula existem vários modos de escolher os vínculos, mas pelo menos um deles tem que ser o Hamiltoniano. Neste exemplo, ele é proposto para ser uma aproximação à interação eletrodinâmica. O número de vínculos está limitado pela diferença entre os dezesseis graus de liberdade iniciais e os doze que são os verdadeiros. No espaço de 16 dimensões Γ para duas partículas, definido pelas variáveis $x_{\mu i}$, $p_{\mu i}$, $i = 1, 2$, pode-se definir as seguintes generalização dos colchetes de Poisson

$$\{x_{\mu j}, p_{\nu k}\} = \delta_{jk} g_{\mu\nu} . \quad (1.45)$$

As transformações de Poincare $R(\Lambda, a)$

$$R(\Lambda, a) : x_{\mu j} \rightarrow x'_{\mu j} = \Lambda_\mu^\nu x_{\nu j} + a_\mu; \quad p_{\mu k} \rightarrow p'_{\mu k} = \Lambda_\mu^\nu p_{\nu k}, \quad (1.46)$$

são canônicas e realizam a álgebra de Lie de Poincare com os colchetes acima. Uma das possibilidades é definir de forma simétrica para as duas partículas os vínculos K_1, K_2 , de

modo que

$$\begin{aligned} K_1 &= p_1^2 - m_1^2 - V, \\ K_2 &= p_2^2 - m_2^2 - V, \end{aligned} \tag{1.47}$$

onde V é um termo de interação em princípio arbitrário. A condição de primeira classe

$$\{K_1, K_2\} = \{p_1^2 - p_2^2, V\} \approx 0, \tag{1.48}$$

condiciona o potencial como função somente de p_1^μ , p_2^μ e r_\perp^μ , esta última definida por

$$r_\perp^\mu \equiv r^\mu - p^\mu \frac{P \cdot r}{p^2}, \quad r^\mu = x_1^\mu - x_2^\mu,$$

onde $P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$ e $p^\mu = p_1^\mu - p_2^\mu$. Escolhendo por exemplo o potencial simples $V(r_\perp^2) = \pm \frac{e^2}{2\sqrt{r_\perp^2}}$, recupera-se na aproximação de baixas velocidades a teoria de Coulomb. Outros potenciais podem ser propostos de maneira que imitem melhor os potenciais de Fokker, como por exemplo a aproximação de Darwin [45]. No espaço Σ de catorze dimensões gerado pelos vínculos K_1, K_2 , toma-se um ponto qualquer (x, p) . Devido à propriedade de primeira classe destes vínculos, pode-se construir um sub-espço S formado pela contínua transformação de K_1, K_2 , sobre o ponto, ficando este completamente contido em Σ . Para obter uma curva C de uma dimensão, para cada partícula novos vínculos devem ser especificados, já que estamos interessados num único parâmetro de evolução para as duas partículas. A idéia proposta em [15] é considerar dois vínculos de tipo

$$\begin{aligned} \chi_1(x, p) &\approx 0, \\ \chi_2(x, p, \tau) &\approx 0, \end{aligned}$$

sendo que o segundo depende do parâmetro de evolução τ . É evidente que estes vínculos têm que ser de segunda classe, ou seja,

$$\det |\{\chi_j, K_k\}| \neq 0, \quad (1.49)$$

para ter uma descrição única. Agora podemos definir os colchetes de Dirac que atuam no espaço de doze dimensões

$$\{f, g\}^D \equiv \{f, g\} - u_{jk} (\{f, K_j\} \{\chi_k, g\} - \{f, \chi_j\} \{K_k, g\} - \{f, K_j\} u_{jl} \{\chi_l, \chi_m\} u_{mr} \{K_r, g\}), \quad (1.50)$$

onde u_{ij} esta definido por $u_{ij} \equiv \{\chi_i, K_j\}^{-1}$. Devido a que os K_i comutam com $J^{\mu\nu}$ e P_μ , estes geradores ainda realizam a álgebra de Lie de Poincare com os colchetes de Dirac, equivalentes aos colchetes de Poisson atuando na hipersuperfície. Agora podemos resolver as equações que determinam as trajetórias das partículas

$$\begin{aligned} \frac{dx_j^\mu}{d\tau} &= v_k(\tau) \{x_j^\mu(\tau), K_k\}, \\ \frac{dp_j^\mu}{d\tau} &= v_k(\tau) \{p_j^\mu(\tau), K_k\}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

onde $v_k(\tau)$ jogam o papel de multiplicadores de Lagrange e são calculados impondo que os vínculos têm que ser mantidos para todo tempo, ou seja

$$\frac{d\chi_k}{d\tau} \approx 0, \Rightarrow v_k = -u_{km} \frac{\partial \chi_m}{\partial \tau}. \quad (1.52)$$

1.3.4 Teorema da *não-interação* na dinâmica de vínculos

Dependendo de χ_1, χ_2 o teorema da *não-interação* reaparece, podendo ser evitado dentro do formalismo covariante com uma escolha correta destes vínculos. Sejam O e O' dois referenciais inerciais conectados por um elemento infinitesimal do grupo de Poincare, então as coordenadas x^μ, x'^μ , relativas ao mesmo evento P , estão relacionadas geometricamente

por

$$O' = (\Lambda, a) O : x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu\nu} x_{\nu} + a^{\mu}, \quad (1.53)$$

Escrevesse agora o gerador infinitesimal geral G a partir dos geradores das transformações infinitesimais do grupo (translação, rotação e *boosts*),

$$G = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} - a^{\mu} P_{\mu}, \quad (1.54)$$

Se uma partícula se encontra sobre a linha L na hipersuperfície Σ , esta linha é transformada por G em outra L' preservando o parâmetro τ , de modo por definição

$$x'^{\mu}(\tau) \approx x^{\mu}(\tau) + \{G, x^{\mu}(\tau)\}^D. \quad (1.55)$$

Estas duas construções descrevem uma única linha de universo, só se

$$x'^{\mu}(\tau) \approx x^{\mu}(\tau + \delta\tau) + \omega^{\mu\nu} x_{\nu}(\tau + \delta\tau) + a^{\mu}, \quad (1.56)$$

expandindo todos os termos, chega-se à condição de linha de universo (CLU) que se escreve

$$\{G, x_i^{\mu}\}^D = \omega^{\mu\nu} x_{\nu i} + a^{\mu} + \left(\frac{\partial' x_i^{\mu}}{\partial \tau} + \{x_i^{\mu}, \mathcal{H}\}^D \right) \delta_i \tau. \quad (1.57)$$

Note-se que esta condição se escreve usando os dez geradores mais o Hamiltoniano \mathcal{H} com os colchetes de Dirac no espaço de fase físico de doze dimensões. Vejamos o que acontece se escolhermos por exemplo os vínculos

$$\chi_1 = \frac{1}{2} (x_1^0 - x_2^0), \quad \chi_2 = \frac{1}{2} (x_1^0 + x_2^0) - \tau, \quad (1.58)$$

isto corresponde ao que é chamado forma instantânea de Dirac (*instant form of Dynamics*, $\tau = t_1 = t_2$). Usando estes vínculos pode-se calcular a matriz $\{\chi_j, K_k\}$, e achar o

determinante desta. Também é fácil calcular os colchetes de Poisson entre G e $\chi_{1,2}$

$$\begin{aligned}\{G, \chi_1\} &\approx \omega^{0j} r_j, \\ \{G, \chi_1\} &\approx a^0 + \frac{1}{2} \omega^{0j} (x_{j1} + x_{j2}).\end{aligned}\tag{1.59}$$

Se existem $\delta_{1,2}\tau$, então

$$\{x^\mu, K_\beta\} u_{\beta 1} \omega^{0j} \approx -\{x^\mu, K_\beta\} u_{\beta 2} \left[\delta_\alpha \tau + a^0 + \frac{1}{2} \omega^{0j} (x_{j1} + x_{j2}) \right],\tag{1.60}$$

onde $j = 1, 2, 3$ denotam as coordenadas espaciais e $\alpha, \beta = 1, 2$, as diferentes partículas.

Logo

$$\delta_\alpha \tau + a^0 + \frac{1}{2} \omega^{0j} (x_{j1} + x_{j2}) \propto \omega^{0j} r_j,\tag{1.61}$$

para $\alpha = 1, 2$. Agora se as condições *CLU também* devem ser obedecidas, os quatro vectores seguintes

$$A_\alpha^\mu \equiv \{x_\alpha^\mu, K_\beta\} \frac{u_{\beta 1}}{|u|}, \quad B_\alpha^\mu \equiv \{x_\alpha^\mu, K_\beta\} \frac{u_{\beta 2}}{|u|},\tag{1.62}$$

devem cumprir que: A_1 deve ser paralelo a B_1 assim como A_2 deve ser paralelo a B_2 .

Estes podem ser escritos explicitamente em função de p_1, p_2, r_\perp como

$$\begin{aligned}A_1 &= 2 \left[p_2^0 + 2P^0 \frac{(P \cdot r)^2}{p^4} V' \right] p_1 + 2 (p_1^0 + p_2^0) \frac{(P \cdot r)}{p^2} V' r_\perp, \\ B_1 &= 2P_2^0 p_1 - 2P^0 \frac{(P \cdot r)}{p^2} V' r_\perp, \\ A_2 &= 2 \left[p_1^0 + 2P^0 \frac{(P \cdot r)^2}{p^4} V' \right] p_2 + 2 (p_1^0 - p_2^0) \frac{(P \cdot r)}{p^2} V' r_\perp, \\ B_1 &= 2p_1^0 p_1 - 2P^0 \frac{(P \cdot r)}{p^2} V' r_\perp.\end{aligned}\tag{1.63}$$

Concluimos então que as condições *CLU* obrigam que \vec{r}_\perp seja paralelo a \vec{p}_1 , como também a \vec{p}_2 . Se chega então a condição: \vec{p}_1 paralelo a \vec{p}_2 . Isto faz sentido somente para o caso

que o potencial seja identicamente zero.

Esta é uma versão moderna do teorema de *não-interação*. Note-se que o que falhou aqui foi a escolha de forma instantânea para os vínculos χ_i porém, isto é facilmente removível. Se estes vínculos tivessem sido escolhidos de modo invariante baixo a transformação de Poincare, por exemplo

$$\chi_1 = P.r, \quad \chi_2 = \frac{1}{2}P(x_1 + x_2) - \tau, \quad (1.64)$$

pode-se demonstrar que as condições *CLU* não limitam em nada o potencial $V(r_{\perp}^2)$. Vimos então que definindo-se de forma invariante os vínculos χ_i , e postulando-se V de modo que este aproxime o potencial Coulombiano [23], é possível obter-se uma teoria de ação-a-distância que aproxime a eletrodinâmica.

Capítulo 2

Problema de dois corpos eletromagnético

2.1 Introdução

Neste capítulo discute-se um Hamiltoniano proposto por Staruszkiewicz, como aproximação à eletrodinâmica de ação à distância no problema de dois corpos [20]. Este Hamiltoniano está descrito na forma frontal da dinâmica. Esta consiste em uma folhação do espaço-tempo em hiperplanos tangentes às faces do cone de luz. Nesta descrição, as partículas com o mesmo parâmetro de evolução estão conectadas por um raio de luz, de modo que, uma das partículas só interage com a posição futura da outra, e a segunda só interage com a posição passada da primeira. Por causa disto, esta descrição é chamada comumente de *assimétrica*. A vantagem desta formulação é que as equações resultantes são locais. Porém, a simetria com respeito ao uso das duas interações é perdida. A solução deste problema *assimétrico* para duas partículas de massas iguais e cargas de mesmo sinal em uma dimensão foi achada por vários autores em forma analítica [22]. Nós estudaremos aqui uma solução aproximada do problema *simétrico* utilizando as duas soluções assimétricas.

Conhece-se até hoje uma única solução analítica do problema *simétrico* com interação

atrativa [24], [25]. Esta solução consiste em duas partículas movimentado-se em um plano em órbitas circulares e concêntricas. Esta solução simples é interessante do ponto de vista físico, já que estas partículas, mesmo aceleradas, não perdem energia por radiação (considerando estas isoladas do resto do universo). A possibilidade deste tipo de solução é uma consequência direta da *simetria* da descrição, ou seja à utilização dos dois potenciais avançado e retardado. A estabilidade linear da solução circular foi também estudada [38]. Para qualquer órbita foram encontradas infinitas soluções divergentes, onde as partículas aceleram até a velocidade da luz. Este tipo de solução disparante sempre é encontrado no estudo destas equações. Em certos casos, como o estudado nos capítulos III e IV, estas soluções são evitadas por construção (redução à variedade não disparante).

Estas equações não-locais com avanço e retardo (*differential-difference equations*) são pouco estudadas na literatura matemática. Métodos numéricos de resolução foram levados a cabo com sucesso somente para baixas velocidades [29]. Apresenta-se neste Capítulo também um integrador numérico implícito que trabalha no espaço tri-dimensional. Considerando por exemplo o átomo de Hidrogênio, o programa não converge para velocidades do elétron maiores a $v_e = 0.008c$, devido a suas particularidades estruturais. Este fracasso no estudo numérico para três dimensões, devido ao próprio método e à falta de regularização das equações, nos levou a abandonar este método e motivou o um estudo subsequente em uma dimensão. Usando um método numérico diferente o caso de espalhamento foi estudado com sucesso no Capítulo III. Também conseguiu-se regularizar as equações para o caso atrativo, o que será apresentado no Capítulo IV.

Este Capítulo está organizado da seguinte maneira: (i) Na seção I apresenta-se o Hamiltoniano assimétrico para o espalhamento de dois elétrons e uma solução aproximada do problema simétrico. (ii) Na seção II discute-se a solução circular para o problema atrativo de dois corpos. (iii) Na seção III apresenta-se o método numérico em três dimensões e as suas limitações para velocidades relativísticas e longos tempos de integração.

2.2 Hamiltoniano *assimétrico* para dois elétrons.

2.2.1 Separação da ação de Fokker

As equações que se derivam da ação Eq. (1.1) para duas partículas podem ser simplificadas pelas condições iniciais $y = 0$, $z = 0$, em $t < 0$. Estas limitam o movimento a uma dimensão espacial. Nesse caso, as equações ficam bastante mais simples, guardando as características mais relevantes das equações em 3-D. Nesta seção, vamos considerar o problema repulsivo de dois elétrons movimentando-se de forma simétrica com respeito à origem. A ação de Fokker Eq. (1.1) para duas partículas escreve-se

$$S = -m_1 \int d\tau_1 - m_2 \int d\tau_2 - e_1 e_2 \int \int \dot{x}_1^\alpha \dot{x}_2^\alpha \delta[(x_1 - x_2)^\nu (x_1 - x_2)_\nu] d\tau_1 d\tau_2. \quad (2.1)$$

Desta ação deriva-se a equação de movimento, por exemplo para a partícula 2

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_2}{\sqrt{1 - v_2^2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m_e c^2} \left[\frac{1}{q^2} \left(\frac{1 + v_1(t + q/c)}{1 - v_1(t + q/c)} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1 - v_1(t - r/c)}{1 + v_1(t - r/c)} \right) \right], \quad (2.2)$$

onde $v(t) \equiv dx/cdt$ é a velocidade da partícula dividida por c de carga e e massa m_e e r , q são os raios avançados e retardados, implicitamente definidos pelas condições do cone de luz

$$\begin{aligned} r(t) &= x_1(t) - x_2(t - r/c), \\ q(t) &= x_1(t) - x_2(t + q/c). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para movimento ao longo do eixo x , a ação Eq. (2.1) pode ser descomposta em uma soma de duas ações, introduzindo-se as novas variáveis

$$\begin{aligned} ct_1 - x_1 &= \xi_1, & ct_1 + x_1 &= \zeta_1, \\ ct_2 - x_2 &= \xi_2, & ct_2 + x_2 &= \zeta_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

e tomando-se a convenção: $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ para todo t , ou seja, a partícula 1 esta sempre à direita. A ação toma a forma

$$S = \frac{1}{2} (S_a + S_b), \quad (2.5)$$

onde

$$S_a = -m_1 \int \sqrt{d\xi_1 d\zeta_1} - m_2 \int \sqrt{d\xi_2 d\zeta_2} + e_1 e_2 \int \int \frac{\delta(\zeta_1 - \zeta_2)}{|\xi_1 - \xi_2|} (d\xi_1 d\zeta_2 + d\xi_2 d\zeta_1), \quad (2.6)$$

$$S_b = -m_1 \int \sqrt{d\xi_1 d\zeta_1} - m_2 \int \sqrt{d\xi_2 d\zeta_2} + e_1 e_2 \int \int \frac{\delta(\xi_1 - \xi_2)}{|\zeta_1 - \zeta_2|} (d\xi_1 d\zeta_2 + d\xi_2 d\zeta_1), \quad (2.7)$$

Nas Eqs. (2.6) e (2.7) ξ_1 e ζ_1 são funções de um parâmetro arbitrário σ . Note-se que estas integrais são invariâtes por transformações arbitrárias do parâmetro de evolução. Usando esta invariância podemos escolher $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$ como parâmetro de integração da ação S_a Eq. (2.6), sendo escolhido para a segunda ação S_b Eq. (2.7) o parâmetro $\xi_1 = \xi_2 = \xi$. Obtemos assim, depois de integrar a função delta

$$S_a = \int \left[-m_1 \sqrt{\dot{\xi}_1} - m_2 \sqrt{\dot{\xi}_2} + e_1 e_2 \frac{\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2}{|\xi_1 - \xi_2|} \right] d\zeta, \quad (2.8)$$

$$S_b = \int \left[-m_1 \sqrt{\dot{\zeta}_1} - m_2 \sqrt{\dot{\zeta}_2} + e_1 e_2 \frac{\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_2}{|\zeta_1 - \zeta_2|} \right] d\xi. \quad (2.9)$$

Consideremos agora as variações independentes

$$\delta S_a = 0, \quad (2.10)$$

$$\delta S_b = 0. \quad (2.11)$$

As soluções destas ações parciais Eqs. (2.10) ou (2.11) são diferentes, em geral, da solução da Eq. (2.2). Considerando estas ações como independentes, obtêm-se duas estórias, para cada partícula. Na folhacao feita para S_a Eq. (2.8) o elétron 1 sente o campo do elétron 2 na posição futura, e este último só sente o campo produzido pelo elétron 1 na posição passada, (de aqui em diante esta folhacao é chamada de caso a). Na segunda folhacao ocorre o contrário. A seguir vamos usar essas duas soluções para achar uma solução aproximada da Eq. (2.2).

2.2.2 Descrição Hamiltoniana e solução analítica

A seguir, descrevemos um método para integrar as equações variacionais $\delta S_a = 0$, (ou $\delta S_b = 0$). Fazendo as transformações de Legendre das ações (2.8) e (2.9) obtêm-se os Hamiltonianos H_a and H_b respectivamente

$$\begin{aligned} H_a &= -\frac{c^4}{4} \left[\frac{m_1^2}{\left(p_1 + \frac{e_1 e_2}{|\xi_1 - \xi_2|}\right)} + \frac{m_2^2}{\left(p_2 + \frac{e_1 e_2}{|\xi_1 - \xi_2|}\right)} \right] \\ H_b &= -\frac{c^4}{4} \left[\frac{m_1^2}{\left(p_1 + \frac{e_1 e_2}{|\zeta_1 - \zeta_2|}\right)} + \frac{m_2^2}{\left(p_2 + \frac{e_1 e_2}{|\zeta_1 - \zeta_2|}\right)} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde no caso a

$$p_i \equiv \frac{\partial L_a}{\partial \dot{\xi}_i} = -\frac{m_i}{2\sqrt{\dot{\xi}_i}} + \frac{e_1 e_2}{|\xi_1 - \xi_2|}, \quad (2.13)$$

e no caso b

$$p_i \equiv \frac{\partial L_b}{\partial \dot{\zeta}_i} = -\frac{m_i}{2\sqrt{\dot{\zeta}_i}} + \frac{e_1 e_2}{|\zeta_1 - \zeta_2|}, \quad (2.14)$$

e $\dot{\xi}_i \equiv d\xi_i/d\zeta$ e $\dot{\zeta}_i \equiv d\zeta_i/d\xi$. Note-se que estas duas ações dependem só da diferença $(\xi_1 - \xi_2)$ ou $(\zeta_1 - \zeta_2)$ e portanto $P = p_1 + p_2$ é uma constante de movimento. Isto sugere

a seguinte transformação canônica (caso *a*)

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} (\xi_1 + \xi_2), \quad x = \frac{1}{2} (\xi_1 - \xi_2) \\ P &= p_1 + p_2, \quad p = p_1 - p_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

ficando o Hamiltoniano Eq. (2.12) (para massas iguais $m_1 = m_2 = m$)

$$H = -\frac{m^2 c^4}{2} \left[\frac{1}{P + p + \frac{e^2}{r}} + \frac{1}{P - p + \frac{e^2}{r}} \right] \equiv E \quad (2.16)$$

onde $r \equiv \frac{1}{2} |\xi_1 - \xi_2| = |x|$. Definindo x_a para o caso *a*, igual a

$$x_a = -(x_1 - x_2) = -r, \quad (2.17)$$

e

$$t_1 - t_2 = -r < 0, \quad (2.18)$$

então x_a é a distância entre os elétrons no cone de luz, onde a partícula 1 está no passado da partícula 2.

No caso (*b*)

$$x_b = (x_1 - x_2) = r, \quad (2.19)$$

$$t_1 - t_2 = r > 0, \quad (2.20)$$

e a partícula 1 está sempre no futuro da partícula 2. Podemos então expressar p em função de E, P, r usando a Eq. (2.16)

$$p = \pm \frac{\sqrt{(E - rEP)[E - r(EP + 1)]}}{rE}, \quad (2.21)$$

onde o raio do elétron clássico foi tomado igual a 1, ou seja, $\frac{me^2}{c^2} = 1$, e também $c = 1$. Usando agora o formalismo de Hamilton-Jacobi, pode-se definir um novo Hamiltoniano K que

seja igual a zero

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (2.22)$$

onde a função geratriz S , é definida como

$$S = PX + W(x, P, E) - Et, \quad (2.23)$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (2.24)$$

Esta equação determina a função W

$$W = \int p dx = \pm \int dx \frac{\sqrt{E^2 + rE(2EP + 1) + r^2EP(EP + 1)}}{Er} \quad (2.25)$$

Como o Hamiltoniano é zero, as novas coordenadas são constantes, o que define X e ζ , para o caso a

$$\begin{aligned} X_0 &= \partial S / \partial P = X + \frac{\partial W}{\partial P}, \\ \zeta_0 &= -\partial S / \partial P = \zeta - \frac{\partial W}{\partial P} \end{aligned} \quad (2.26)$$

sendo o caso b completamente simétrico. Convém fazer a mudança de variável de r para uma nova variável s definida como

$$E^2 + rE(2g + 1) + r^2\rho \equiv C^2 \sinh^2(s) \quad (2.27)$$

onde $\rho \equiv EP(EP + 1)$, $g \equiv EP$ e C^2 é definido

$$C^2 \equiv \frac{E^2}{4(2EP + 1)(EP + 1)}. \quad (2.28)$$

E a Eq. (2.27) pode ser resolvida para r , obtendo-se

$$r = \frac{E}{2\rho} \cosh(s) - \frac{E(2EP + 1)}{2\rho}. \quad (2.29)$$

Podemos ver da Eq. (2.29) que g tem que cumprir: $g < -1$ para que r seja positivo. Integrando as Eqs. (2.21) e derivando em relação a s a Eq. (2.29),

$$\frac{dr_a}{ds} = -\frac{E}{2\rho} \sinh(s), \quad (2.30)$$

resulta em

$$\zeta = \frac{g [\sinh(s) + s]}{4E\rho^{3/2}}, \quad (2.31)$$

$$X = -E \frac{[s - (2g + 1) \sinh(s)]}{4\rho^{3/2}}. \quad (2.32)$$

Pode-se voltar às coordenadas e aos tempos reais usando a Eq. (2.4)

$$t_1 = \frac{1}{2} (\zeta + X - r), \quad t_2 = \frac{1}{2} (\zeta + X + r), \quad (2.33)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} (\zeta - X + r), \quad x_2 = \frac{1}{2} (\zeta - X - r), \quad (2.34)$$

Obtemos então a posição e o tempo parametrizados pelo parâmetro s para as partículas 1 e 2 no caso a , (o caso b e simétrico)

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{8E\rho^{3/2}} [-2\sqrt{\rho}E^2 \cosh(s) - (E^2(2g+1) + g) \sinh(s) + (g - E^2)s] + \frac{1}{4} \frac{E(2g+1)}{\rho} + C_t, \\ x_1 &= \frac{1}{8E\rho^{3/2}} [2\sqrt{\rho}E^2 \cosh(s) - (E^2(2g+1) - g) \sinh(s) + (g + E^2)s] - \frac{1}{4} \frac{E(2g+1)}{\rho} + C_x, \\ t_2 &= \frac{1}{8E\rho^{3/2}} [2\sqrt{\rho}E^2 \cosh(s) + (E^2(2g+1) + g) \sinh(s) + (g - E^2)s] - \frac{1}{4} \frac{E(2g+1)}{\rho} + C_t, \\ x_2 &= \frac{1}{8E\rho^{3/2}} [-2\sqrt{\rho}E^2 \cosh(s) + (E^2(2g+1) - g) \sinh(s) + (g + E^2)s] \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{E(2g+1)}{\rho} + C_x \end{aligned} \quad (2.35)$$

que depende dos parâmetros dinâmicos E e P , e as constantes C_t, C_x . Note-se que por construção o parâmetro s sempre relaciona dois pontos das curvas que se encontram em cone de luz.

2.2.3 Invariância de Lorentz

A solução é invariante de Lorentz já que foi construída de uma ação covariante. Pode-se ver isto também explicitamente. Usando a transformação de Lorentz e as Eqs. (2.4) obtém-se a transformação de ξ para um referencial com velocidade relativa W , ($c = 1$)

$$\xi'_{1,2} = \sqrt{\frac{1+W}{1-W}} \xi_{1,2}, \quad (2.36)$$

$$\zeta'_{1,2} = \sqrt{\frac{1-W}{1+W}} \zeta_{1,2}, \quad (2.37)$$

Usando a definição de P para os dois casos a e b , $P^{a,b} = p_1^{a,b} + p_2^{a,b}$, e as Eqs. (2.13), (2.14) (2.15), (2.16) é fácil verificar por exemplo, para o caso a

$$P'_a = \sqrt{\frac{1-W}{1+W}} P_a, \quad E'_a = \sqrt{\frac{1+W}{1-W}} E_a. \quad (2.38)$$

onde para o caso b deve-se trocar W por $-W$. Disso segue-se que para os dois casos a e b $g \equiv EP$, e o parâmetro s são escalares de Lorentz. Note-se que pode-se definir as constantes P^0 e P^1

$$P^0 \equiv P + E, \quad P^1 \equiv P - E, \quad (2.39)$$

que transformam como um vector de Lorentz, ou seja

$$P^{0'} = \frac{P^0 - WP^1}{\sqrt{1-W^2}}, \quad P^{1'} = \frac{P^1 - WP^0}{\sqrt{1-W^2}} \quad (2.40)$$

O referencial do centro de massa é comumente definido em forma dinâmica como o referencial onde o momento total é igual a zero. Neste caso simples, define-se este referencial usando uma avaliação assintótica da solução Eq. (2.35). Calculando estas velocidades da soluções Eqs. (2.35), define-se o referencial do centro de massa de modo

que

$$\frac{dx_{1,2}}{dt_{1,2}} = v_{1,2}(s \rightarrow \infty) = v_{1,2}(s \rightarrow -\infty), \quad (2.41)$$

obtendo assim que

$$E = \sqrt{-g} \quad (2.42)$$

ou seja, $E = -P$, para os dois casos a e b . Da mesma maneira podemos escrever as coordenadas e os tempos, notando-se que as condições assintóticas do problema são as mesmas para os dois casos, ou seja, $v_{1a}^\infty = v_{1b}^\infty \equiv V$. Encontra-se então que

$$g_a = -\frac{1}{\sqrt{1-V^2}} = g_b. \quad (2.43)$$

Usando o parâmetro $g \equiv g_a = g_b$, e fácil ver por inspeção que as curvas $x_{1a}(t)$ e $x_{1b}(t)$ são idênticas, porém paralelas no plano (x, t) para o mesmo valor de $E_a = E_b = E$. Agora fazendo uma última mudança de parâmetro de s para um novo s definido como

$$s \rightarrow s - \frac{1}{8} \frac{\sqrt{-g}}{\rho^{3/2}} \ln(-2g - 1 - 2\sqrt{\rho}) - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{-g}(2g+1)}{\rho}. \quad (2.44)$$

Escolhe-se então as constantes C_t e C_x de modo as duas órbitas de uma mesma partícula, para os dois casos a e b , que são idênticas para o mesmo valor de E , sejam também coincidentes. Fazendo isto por exemplo para a partícula 2, ou seja

$$x_{2a}(t) = x_{2b}(t),$$

para todo o tempo t , obtemos então a solução que depende somente da velocidade assintótica V (no centro de massa),

$$x_{1,2} = \pm C \cosh(s) + K, \quad (2.45)$$

$$t_{1,2} = A \sinh(s) + Bs \pm \Delta \quad (2.46)$$

onde

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4} \frac{(1-V^2)^2}{V^3}, \quad B = \frac{1}{4} \frac{(1-V^2)^{5/2}}{V^3} \\
C &= \frac{1}{4} \frac{(1-V^2)^2}{V^2}, \quad K = \frac{1}{4} \frac{(1-V^4)}{V^2 \sqrt{1-V^2}} \\
\Delta &= \frac{\sqrt{1-V^2}}{8V^3} \left[\ln \left(\frac{1-V}{1+V} \right) (1-V^2)^2 + 2V(1+V^2) \right],
\end{aligned} \tag{2.47}$$

onde o sinal positivo na Eq. (2.46) corresponde ao caso *a* e o sinal negativo corresponde ao caso *b* (vide Figura 2.2). Note-se que para a partícula 1 as órbitas ficam determinadas, porem nunca *são coincidentes*, ou seja, $\Delta \neq 0$ para todo V .

2.2.4 Solução aproximada do problema *simétrico*.

Nos propomos como solução aproximada da Eq. (2.2), a média das duas órbitas. Esta media é mostrada para a partícula 1 na Figura 2.1. Podemos ver da Eq. (2.47) que Δ fica pequeno em relação a distância x_0 para baixas velocidades; motivados nisto definimos uma solução simétrica média em forma paramétrica,

$$x(s) \equiv x_1(s), \tag{2.48}$$

$$x_2(s) \equiv -x_1(s), \tag{2.49}$$

$$t(s) \equiv A \sinh(s) + Bs, \tag{2.50}$$

O ponto de retorno, ou seja, o ponto de distância mínima entre os elétrons pode ser calculado facilmente:

$$x_0 = \frac{1}{4} \frac{1-V^2}{V^2} \left(1 - V^2 + \frac{1+V^2}{\sqrt{1-V^2}} \right). \tag{2.51}$$

A seguir vamos demonstrar que no caso de $V \ll c$, esta solução é uma *solução analítica aproximada* da Eq. (4.2) e estimaremos o erro. Para isto, voltemos às variáveis originais, nestas variáveis as equações derivadas das ações Eqs. (2.10) e (2.11), ficam não-locais e

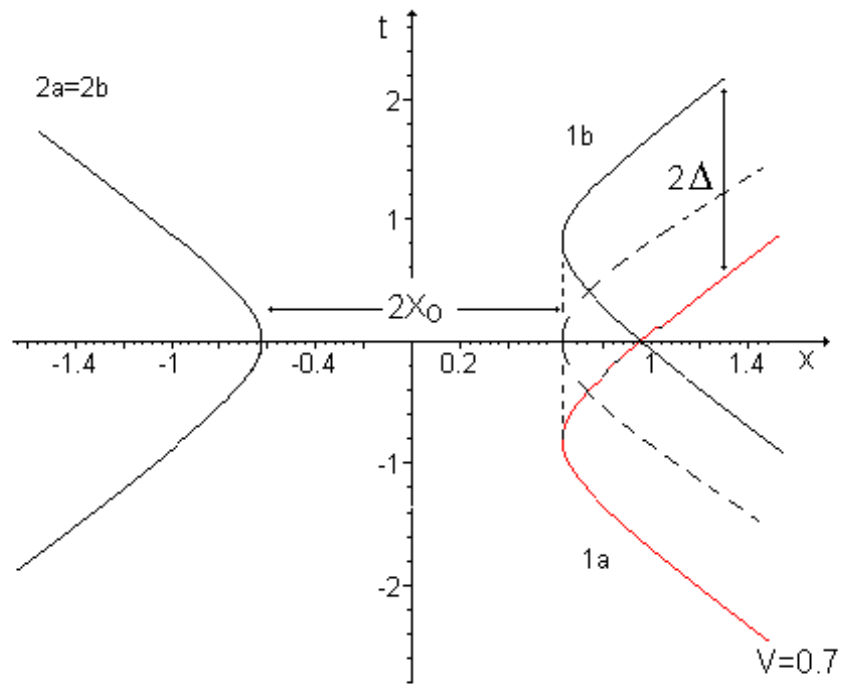


Figura 2-1: Trajetórias calculadas analiticamente para o caso *assimétrico* para uma velocidade típica assintótica $V = 0.7c$. Note-se que a separação 2Δ entre os dois casos a e b que aparece na figura, depende de V , e por tanto esta solução não é solução do problema simétrico. Mostra-se também em traço pontilhado a solução aproximada do problema simétrico.

são ($c = 1$)

$$\frac{dv_{1a}/dt}{(1 - v_{1a}^2)^{3/2}} = \frac{1}{q^2} \left(\frac{1 - v_{2a}(t+q)}{1 + v_{2a}(t+q)} \right), \quad (2.52)$$

$$\frac{dv_{1b}/dt}{(1 - v_{1b}^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1 + v_{2b}(t-r)}{1 - v_{2b}(t-r)} \right), \quad (2.53)$$

onde $r, q > 0$ estão definidos positivos e implicitamente pela Eq. (2.3). Para o problema de massas iguais e no referencial onde

$$x_1(t) = -x_2(t), \quad (2.54)$$

para todo t , a Eq. (2.2) escrita em forma paramétrica, torna-se

$$\frac{\dot{v}(s)/\dot{t}(s)}{(1 - v^2(s))^{3/2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{q^2} \left(\frac{1 - v(s+s_q)}{1 + v(s+s_q)} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1 + v(s-s_r)}{1 - v(s-s_r)} \right) \right] \quad (2.55)$$

onde \dot{v} denota a derivada com respeito ao parâmetro s , e escolhe-se o parâmetro s de tal modo que \dot{t} seja sempre positivo. Para $r(s)$ e $q(s)$ obtemos em forma paramétrica

$$t_2(s) - t_1(s - s_r) = |x_2(s) - x_1(s - s_r)|, \quad (2.56)$$

$$t_2(s) - t_1(s + s_q) = |x_2(s) - x_1(s + s_q)|. \quad (2.57)$$

Somemos agora as equações Eqs. (2.52) e (2.53). Do lado esquerdo da equação a solução no caso a , e no caso b , são coincidentes, fica então a igualdade

$$\frac{m_e \dot{v}_*(s)/\dot{t}_*}{(1 - v_*^2(s))^{3/2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r_*^2(s)} \left(\frac{1 - v(s - s_{r*})}{1 + v(s - s_{r*})} \right) + \frac{1}{q_*^2} \left(\frac{1 + v(s + s_{q*})}{1 - v(s + s_{q*})} \right) \right], \quad (2.58)$$

onde s_{r*} e s_{q*} ficam definidos pela equação implícita

$$r_* \equiv t_*(s) - t_*(s - s_r) + 2\Delta = x_*(s - s_{r*}) + x_*(s), \quad (2.59)$$

$$q_* \equiv t_*(s + s_q) - t_*(s) + 2\Delta = x_*(s + s_{q*}) + x_*(s),$$

Pode-se concluir então, que para $\Delta \ll x_*(s)$, nossa solução paramétrica é uma solução aproximada da Eq. (4.2). Para estimar o erro desta aproximação, consideremos as seguintes expansões

$$\begin{aligned} x(s) &= x_*(s) - \varepsilon(s), \quad \varepsilon(s) > 0 \quad \forall s, \\ t(s) &= t_*(s), \\ s_r(s) &= s_{r*}(s) + \delta_r(s), \quad s_q = s_{q*}(s) + \delta_q(s), \quad \delta_{r,q} > 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

Agora tomando $V \ll 1$ expande-se a Eq. (2.56), por exemplo, para r resultando

$$r = x_*(s - sr_*) - \varepsilon(s - sr_*) + x_*(s) - \varepsilon(s) - \dot{x}_* \delta_r = t(s) - t(s - sr_*) + \dot{t} \delta_r. \quad (2.61)$$

Usando agora a igualdade

$$\dot{t} \delta_r (1 + v_*) + \varepsilon(s - sr_*) + \varepsilon(s) = 2\Delta, \quad (2.62)$$

encontra-se um estimativa do erro $\varepsilon(s)$,

$$\varepsilon(s) \lesssim 2\Delta. \quad (2.63)$$

Note-se que para $V \ll 1$ temos que Δ tende a $2/3$ e x_0 tende a $x_0 \simeq \frac{1}{2V^2}$, resultando em $\varepsilon(s) \simeq 2\Delta$. Por exemplo, para uma velocidade assintótica $V/c = 0.2$, o erro é da ordem $\varepsilon/x_0 = 0.1$, ou seja um erro de 10%.

Nossa solução analítica depende de um só parâmetro: a velocidade assintótica V . Nesta solução paramétrica $t(s)$ e $x(s)$ transformam-se como um quadri-vetor de Lorentz, porém, esta é uma solução aproximada apenas para baixas velocidades. Fazendo um cálculo *numérico* pode-se fazer uma melhor estimativa do erro, encontrando assim o limite no qual esta solução é aceitável. Conhecendo a solução pode-se comparar $\frac{dv_*}{dt}$ com

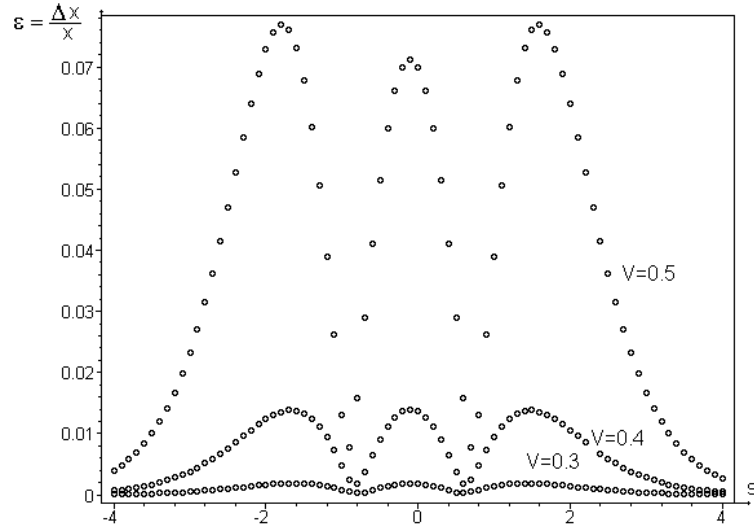


Figura 2-2: Erros relativos $\varepsilon = \Delta x/x$ para toda a órbita.

a aceleração na Eq. (4.2) , o erro é então

$$erro_a = \left| dv_*/dt - \frac{1}{2} (1 - v^2)^{3/2} \left[\frac{1}{r_*^2(s)} \frac{1 - v_*(s - s_{r*})}{1 + v(s - s_{r*})} + \frac{1}{q_*^2} \frac{1 + v(s + s_{q*})}{1 - v(s + s_{q*})} \right] \right|. \quad (2.64)$$

Integrando as equações numericamente para várias velocidades assintóticas, acha-se o erro relativo na coordenada x , $\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$ mostrado na Figura 2.2. Note-se que o erro máximo achado desta forma, para uma velocidade assintótica de $v_e^\infty = 0.5c$ não chega ao 10%, sendo que para $v_e^\infty = 0.4c$ o erro é de aproximadamente 1%.

2.3 Órbitas circulares do problema *simétrico*

A solução de círculos concêntricos para o caso atrativo de dois corpos foi proposta em 1946 por Schomberg [24], e redescoberta depois por Schild em 1962 [25]. Denotando as linhas de universo do elétron e próton respectivamente como x_e^μ and x_p^μ , e fazendo as

variações da ação Eq. (2.1), obtemos as seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned} m_e \ddot{x}_e^\nu &= -e \dot{x}_e^\mu F_\mu^\nu, \\ F^{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu, \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde o vetor potencial que atua no elétron é igual à semi-soma

$$A(x_p) = \frac{1}{2}(A^+ + A^-), \quad (2.66)$$

e as contribuições retardadas e avançadas são dadas por

$$A^{(\pm)\nu} = \mp \frac{e \dot{x}_p^\nu}{(x_e^\mu - x_p^\mu) \dot{x}_{p\mu}} \Big|_{t_p^\pm}, \quad (2.67)$$

Para o próton, as equações são análogas. A solução circular se escreve

$$\begin{aligned} x_e^\mu &= (ct_e, R_e \cos(\omega t_e), R_e \sin(\omega t_e), 0), \\ x_p^\mu &= (ct_p, -R_p \cos(\omega t_p), -R_p \sin(\omega t_p), 0), \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde R_e, R_p são os raios correspondentes ao elétron e próton respectivamente, e ω é a velocidade angular. O ângulo de retardo (ou avanço) θ que é mostrado na Figura 2.3, define-se da condição de cone de luz

$$(t_e - t_p)^2 - |\vec{x}_e - \vec{x}_p|^2 = 0 \quad (2.69)$$

resultando em

$$\beta_e^2 + \beta_p^2 + 2\beta_e \beta_p \cos \theta = \theta^2, \quad (2.70)$$

onde $\beta_{e,p} \equiv \frac{\omega R_{e,p}}{c}$. Os tempos retardados e avançados, por exemplo para o elétron, se escrevem $t_e^\pm = t_p \pm \theta$, e são mostrados na Figura 2.3.

Note-se que o fato de usar ambas as interações, avançada e retardada, faz com que

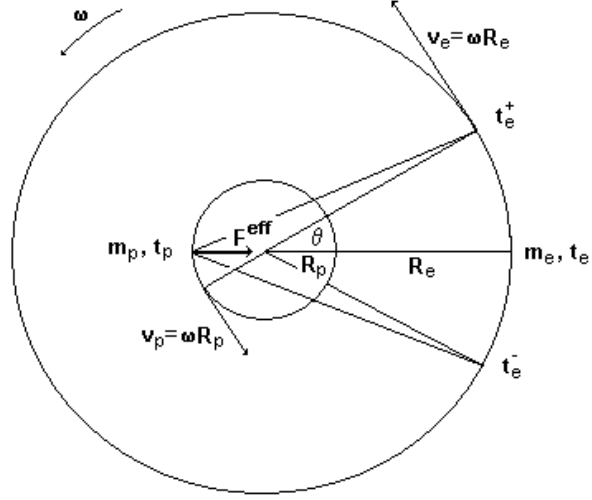


Figura 2-3: Mostra-se a definição de θ e os tempos retardados e avançados do elétron em relação ao próton t_e^+ , t_e^- . Mostra-se também a força efetiva \vec{F}^{eff} .

a órbita circular seja solução do problema simétrico. A força efetiva, que é a soma destas duas interações idênticas em módulo fica perpendicular ao movimento e produz a aceleração centrípeta do movimento circular (vide \vec{F}^{eff} na Figura 2.3).

Nesta teoria não-local, as expressões das quantidades conservadas de Noether que são obtidas da ação de Fokker Eq. (1.1), contém integrais que dependem de segmentos das órbitas. Estas já foram escritas por Wheeler e Feynman em 1945 [1], e foram reescritas recentemente de uma forma um pouco mais simples na Ref. [26]. A expressão original para momento linear P^μ pode ser escrita [25]:

$$\begin{aligned}
 P^\mu = & \left[m_e \frac{\dot{x}_e^\mu}{\sqrt{\dot{x}_e^2}} - e^2 A^\mu(x_e) \right]_{\lambda_e} + \left[m_p \frac{\dot{x}_p^\mu}{\sqrt{\dot{x}_p^2}} - e^2 A^\mu(x_p) \right]_{\lambda_p} \\
 & - \frac{2e^2}{c} \left(\int_{\lambda_e}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\lambda_p} - \int_{-\infty}^{\lambda_e} \int_{\lambda_p}^{+\infty} \right) \delta'(\xi^2) (x_e^\mu - x_p^\mu) \dot{x}_e^\nu \dot{x}_{p\nu} d\lambda_e d\lambda_p,
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

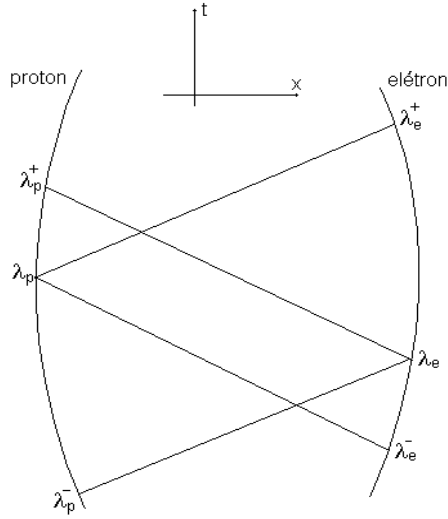


Figura 2-4: Eventos sobre as órbitas usados para o calculo das integrais que aparecem na expressão da energia Eq. (2.71).

onde λ_e, λ_p , são parâmetros arbitrários, (vide Figura 2.4). Para esta solução particular as integrais podem ser calculadas. Esta expressão avaliada no centro de massa, definido como o referencial onde

$$P^1 = P^2 = P^3 = 0$$

foi calculada por Schild [25], resultando em

$$P^0 \equiv E^{Schild} = m_e c^2 (1 - \beta_e^2)^{\frac{1}{2}} + m_p c^2 (1 - \beta_p^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.72)$$

O momento angular no mesmo referencial também pode ser calculado explicitamente resultando em [25]

$$L^{Schild} = \frac{e^2}{c} \left[\frac{(1 + \beta_e \beta_p \cos \theta)}{(\theta + \beta_e \beta_p \sin \theta)} \right]. \quad (2.73)$$

Uma década mais tarde, a estabilidade desta solução foi estudada [38]. Numa análise de estabilidade linear, encontra-se um número infinito de soluções disparantes (*run away*-

solutions) para qualquer órbita. Isto e tema de discussão até hoje, acredita-se que para poder estudar a estabilidade, deve-se reduzir primeiro o problema à variedade de soluções não disparantes.

2.4 Estudo numérico do átomo de hidrogênio

É interessante observar que as equações de movimento para o átomo de hidrogênio podem ser escritas em forma causal, resolvendo-se as equações de movimento para as acelerações e as velocidades mais avançadas. Por exemplo, para uma dimensão a Eq. (2.2) não depende da aceleração avançado, mas si da velocidade avançada $v_2(t+q)$, que pode ser isolada resultando em

$$v_2(t+q) = \frac{1 - q^2 \left(\frac{2dv_1/dt}{(1-v_1^2)^{3/2}} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{1-v_2(t-r)}{1+v_2(t-r)} \right) \right)}{1 + q^2 \left(\frac{2dv_1/dt}{(1-v_1^2)^{3/2}} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{1-v_2(t-r)}{1+v_2(t-r)} \right) \right)} \quad (2.74)$$

Note-se que do lado direito da Eq. (2.74) só existem quantidades definidas no passado do tempo $t_{2a} \equiv t+q$. Isto motivou a primeira tentativa numerica em três dimensões. Nesse esquema, a evolução fica completamente determinada pelas trajetórias passadas de ambas partículas, podendo-se implementar métodos numéricos conhecidos que contém só retardo no argumento [27]. No entanto esta integração direta dá lugar a uma instabilidade na solução (o erro na aceleração aumenta em forma exponencial), o que faz com que este esquema seja impraticável, como está discutido em [29].

Aqui é discutido um método de resolução que é uma versão melhorada de um método proposto originalmente em [29]. Este é melhorado utilizando-se um método implícito e iterativo de convergência. Note-se que para equações *não-locais* deste tipo, a aceleração de qualquer uma das partículas depende da posição, velocidade e aceleração das outras, avaliadas no tempo passado e no tempo futuro. Está claro, então, que qualquer método numérico deve *prever* as posições, velocidades e acelerações futuras da outra partícula.

Depois, usando-se as equações de movimento, estas posições, velocidades, etc, devem ser *recalculadas* até obter-se a convergência.

O método é como segue: sejam dados N pontos das órbitas iniciais para o elétron e o próton, dos quais conhecemos $x_e, x_p, v_e, v_p, a_e, a_p$ e os tempos t_e, t_p , respectivamente, calculados de modo que as coordenadas e os tempos fiquem sempre em condição de cone de luz ($c = 1$) Eq. (2.69). Estas órbitas iniciais podem ser por exemplo, elipses Coulombianas longe da origem, ou as órbitas circulares de Schild. É conveniente introduzir um parâmetro tal que as duas curvas sejam parametrizadas com um *único* parâmetro k . Este é tomado de tal modo que o parâmetro k aumenta em um número inteiro, igual ao número de passos intermediários menos um, cada vez que o cone de luz de uma das partículas encontra a trajetória da outra, isto é mostrado na Figura 2.5. Esta tipo de parametrização é sempre possível para qualquer órbita. O esquema proposto aqui tem 1 ponto intermediário entre dois pontos quaisquer em cone de luz. Em princípio, o número de pontos poderia ser aumentado, mas isso sacrifica em demasia o tempo computacional.

O programa consiste nos seguinte passos:

1. Partindo de k , o primeiro passo do método é calcular, por *extrapolação*, a coordenada e a velocidade do ponto $k + 1$, tanto para o elétron como para o próton. Para isto, é usado o método de Adams [31] de ordem 4 de passo constante, também a cada extrapolação tem que ser achado $\dot{t}_p(k + 1)$ e $\dot{t}_e(k + 1)$, onde o ponto significa derivação em relação a k . Encontram-se estes derivando a condição de cone de luz Eq. (2.69), resultando por exemplo para $\dot{t}_p(k + 1)$

$$\dot{t}_p(k + 1) = \dot{t}_e(k) \left(\frac{|\vec{x}_p^+ - \vec{x}_e| - \beta ((\vec{x}_p^+ - \vec{x}_e) \cdot \vec{v}_p(k + 1))}{|\vec{x}_p^+ - \vec{x}_e| + \beta ((\vec{x}_p^+ - \vec{x}_e) \cdot \vec{v}_e(k))} \right).$$

2. Faz-se uma segunda extrapolação até a intersecção com o cone de luz, encontrando-se $\vec{x}_{e,p}(k + 3)$ e $\vec{v}_{e,p}(k + 3)$. Este passo é chamado *passo de cone de luz (PCL)*.

3. Acha-se então a aceleração do ponto $a_{e,p}(k + 2)$, usando a fórmula de diferenciação

BDF (backwards differentiation formula) de ordem 3, definida como

$$\vec{a}_{e,p}(k+2) = \frac{1/2}{t_{e,p}(k+3)} \left[\frac{11}{6} \vec{v}_{e,p}(k) - 3\vec{v}_{e,p}(k-2) + \frac{3}{2} \vec{v}_{e,p}(k-4) - \frac{1}{3} \vec{v}_{e,p}(k-6) \right] \quad (2.75)$$

onde utilizam-se pontos da órbita já conhecidos [31].

4. Agora têm-se todas as variáveis necessárias para achar a aceleração $\vec{a}_{e,p}(k+1)$, usando a equação de movimento para 3 dimensões, obtida a partir da ação (1.1)

$$\begin{aligned} \vec{a}_e^\pm &= -\frac{\mu}{m_e} \sqrt{1 - \beta^2 v_e^2} \left[\vec{E}_e^\pm \left(1 \mp \frac{\beta \vec{\rho}_e^\pm \cdot \vec{v}_e}{|\vec{\rho}_e^\pm|} \right) + \beta \left(\vec{E}_e^\pm \cdot \vec{v}_e \right) \left(\frac{\vec{\rho}_e^\pm}{|\vec{\rho}_e^\pm|} - \beta \vec{v}_e \right) \right], \quad (2.76) \\ \vec{a}_e &= \frac{1}{2} (\vec{a}_e^+ + \vec{a}_e^-), \end{aligned}$$

onde $\vec{\rho}_e^\pm$ esta definido por $\vec{\rho}_e^\pm \equiv \vec{x}_p^\pm - \vec{x}_e$ e o campo elétrico retardado e avançado de Lienard-Wiechert esta dado por

$$\vec{E}_e^\pm = \mp \frac{\left[\left(1 - \beta^2 (v_p^\pm)^2 - \vec{\rho}_e^\pm \cdot \vec{a}_p^\pm \right) (\vec{\rho}_e^\pm \mp |\vec{\rho}_e^\pm| \vec{v}_p^\pm) + (\pm |\vec{\rho}_e^\pm| - \vec{\rho}_e^\pm \cdot \vec{v}_p^\pm) (|\vec{\rho}_e^\pm| \vec{a}_p^\pm) \right]}{(\pm |\vec{\rho}_e^\pm| - \vec{\rho}_e^\pm \cdot \vec{v}_p^\pm)^3}. \quad (2.77)$$

5. Considerando agora $\vec{a}_{e,p}(k+1)$ achada anteriormente, recalcula-se: $\vec{v}_{e,p}(k+1)$ e $\vec{x}_{e,p}(k+1)$, usando uma extrapolação *implícita*, ou seja, uma expressão que usa o dato de aceleração encontrado anteriormente para calcular a velocidade e depois a coordenada, volta-se então ao passo 1. Fazendo isto de forma interativa., obtém-se a convergência, podendo ir para o passo seguinte $k+2$.

Este método pode ser melhorado aumentando o número de pontos intermediários. Note-se, porém, que o passo *PCL*, no estágio 3, *não* pode ser *diminuído*, por ser dependente da velocidade, ou seja, das condições iniciais de energia e momento angular. É interessante usar variáveis escaladas atômicas para estudar o átomo de hidrogênio; as variáveis usadas estão escaladas da seguinte maneira:

$$t \rightarrow t/\omega_0, \quad x \rightarrow x/R_0, \quad (2.78)$$

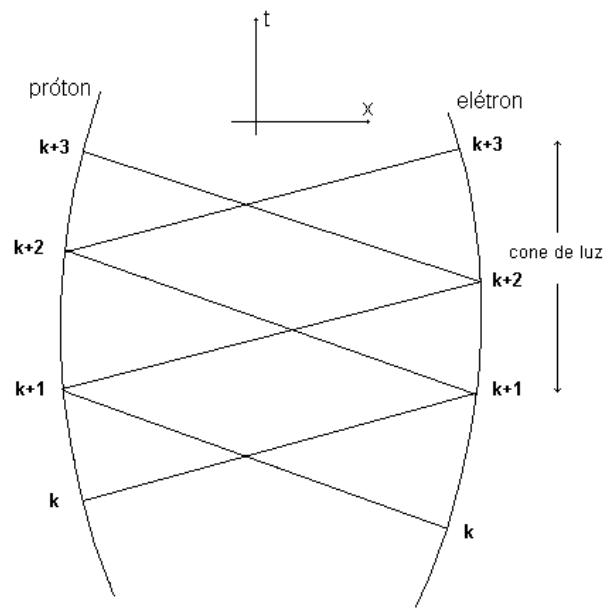


Figura 2-5: Mostra-se aqui os pontos da órbita usados no cálculo das coordenadas, velocidades e acelerações no procedimento numérico.

onde ω_0 e R_0 , cumprem com a relação

$$\mu\beta^2c^2 = \frac{e^2}{R_0}, \quad (2.79)$$

e β é definido como $\beta \equiv \frac{\omega_0^2 R_0^2}{c^2}$. Nestas unidades, a velocidade escalada do elétron fica sempre da ordem de um ($\vec{v}_e \approx 1$), e a velocidade da luz $c = 1/\beta$. Por exemplo para energias da ordem do estado fundamental do hidrogênio $E \simeq -13.5eV$, têm-se que $\beta \simeq 0.007$. Como dissemos anteriormente, a condição inicial neste tipo de equação não é local, ou seja, temos que postular um segmento da solução para poder iniciar o integrador. Neste trabalho, o segmento inicial é dado de duas maneiras: uma é a solução circular de Schild com uma pequena perturbação fora do plano, e a segunda usa elipses Coulombianas.

Dois tipos de testes diferentes são feitos na hora de rodar o programa: um teste é feito calculando-se numericamente a aceleração, pelas fórmulas de *BDF* Eq. (2.75), comparando esta com a aceleração achada pela Eq. (2.76). Outro teste é feito calculando a integral da energia (2.71) para cada cone de luz.

2.4.1 Resultados numéricos

É fisicamente interessante estudar a solução para energias da ordem do estado fundamental do Hidrogênio e com momentos da ordem da constante de Plank. Isto se faz com a perspectiva de comparar os resultados clássico com as aproximações quase-clássicas conhecidas. Para soluções no plano, o primeiro resultado parcial foi que para altas energias o integrador aceita como condição inicial as elipses de Coulomb com qualquer excentricidade $\varepsilon = [0, 1]$. Ao diminuir a energia o integrador só aceita excentricidades menores, até chegar a uma energia da ordem $E \approx \mu c^2 \beta^2$, $\beta \approx 0.01$ na qual o erro fica muito grande e só converge para a solução circular.

Encontram-se as órbitas para velocidades com $\beta = 0.007$, para a qual se consegue integrar até 10^5 voltas. Estudou-se também o comportamento de órbitas definidas inicialmente no plano, adicionando-se a estas perturbações pequenas fora deste. Concluimos

para integrações da ordem de 10^5 voltas, que as órbitas finais ainda apresentam desvios *pequenos* fora do plano. Tomando a conservação da energia como teste, percebe-se que depois deste número de voltas, o valor inicial da energia tem um erro de 5%, o que se toma como limite para acabar a integração. Apresentam-se abaixo os gráficos correspondentes ao valor mais baixo de energia na qual o programa funcionou $\beta \approx 0.0075$. Na Figura 2.6 mostra-se a excentricidade das elipses aproximadas como medida de sua deformação, porem, não podemos chegar a conclusões definitivas sobre nenhum comportamento porque o erro começa a aumentar em proporções significativas. Na Figura 2.7 mostra-se os desvios do eixo ampliadas, estas têm que ser inicialmente pequenas para o integrador convergir, já que a única solução conhecida, da qual começamos é a solução de Schild no plano. Estas perturbações fora do plano continuam pequenas ao longo do todo o tempo de integração. Na figura 2.8 mostra-se as órbitas no plano (x, y) , e como estas elipses se deformam no tempo. Por último na Figura 2.9 mostra a conservação da energia calculada para algumas voltas.

Alguns fracassos iniciais nos convenceram que este método numérico limitado do caso tridimensional, não pode decidir questões de interesse como a estabilidade da solução. Para energias mais relativísticas, e momentos angulares baixos, não podemos controlar as divergências mesmo aumentando o números de pontos intermédios, já que o passo *PCL* é fundamental e não pode ser diminuído. Decidimos portanto restringir-nos nesta fase apenas no problema restrito a uma dimensão, e nos capítulos seguintes apresentamos métodos melhores que não têm estas restrições como também as equações que se integram no caso atrativo são regularizadas.

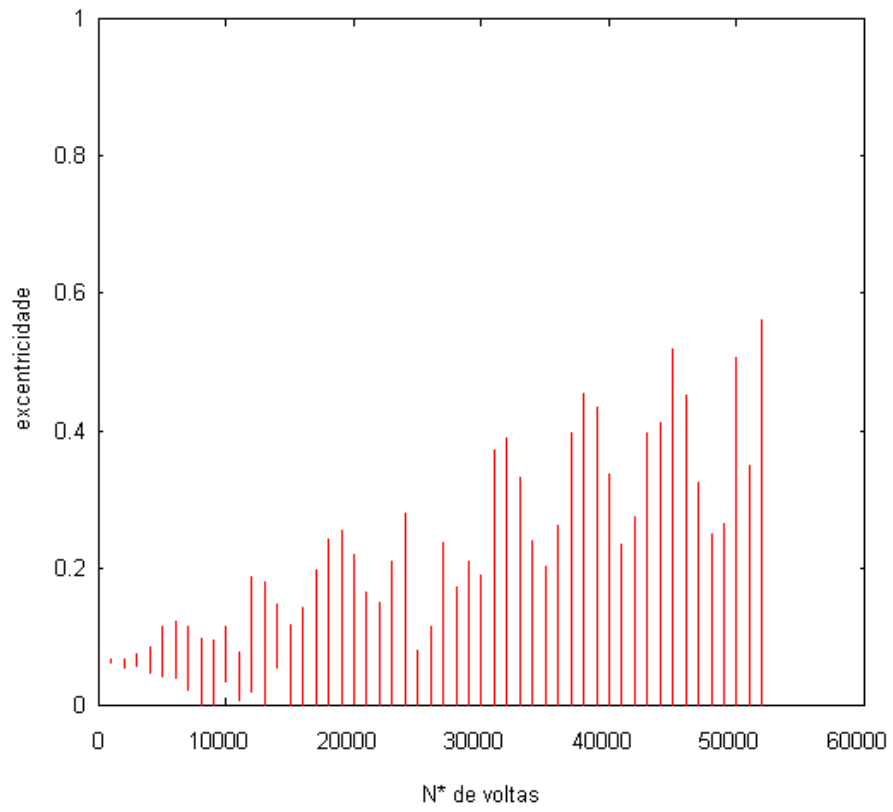


Figura 2-6: Degeneração da excentricidade aproximada das órbitas quase-elípticas.

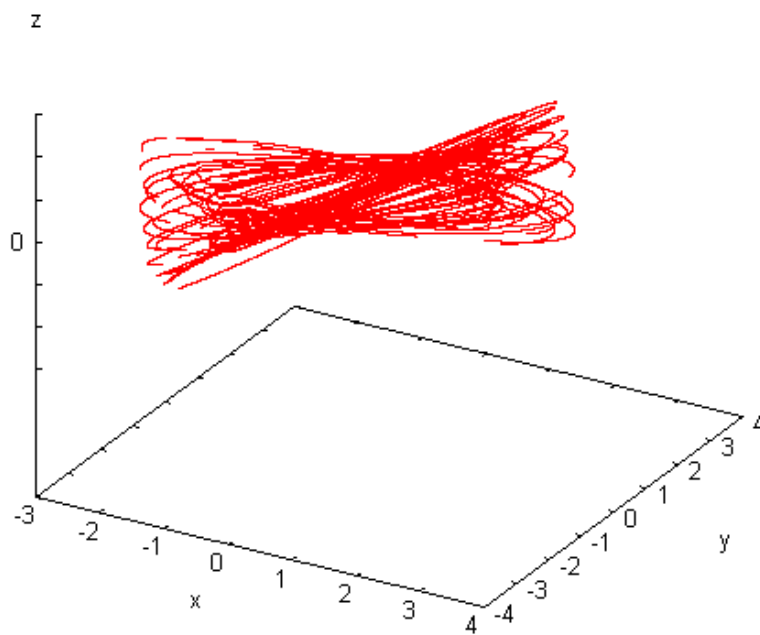


Figura 2-7: Comportamento da órbita em três dimensões. Oscilações fora do plano xy . É desenhada uma órbita e cada 100 voltas, para $\beta = 0.075$.

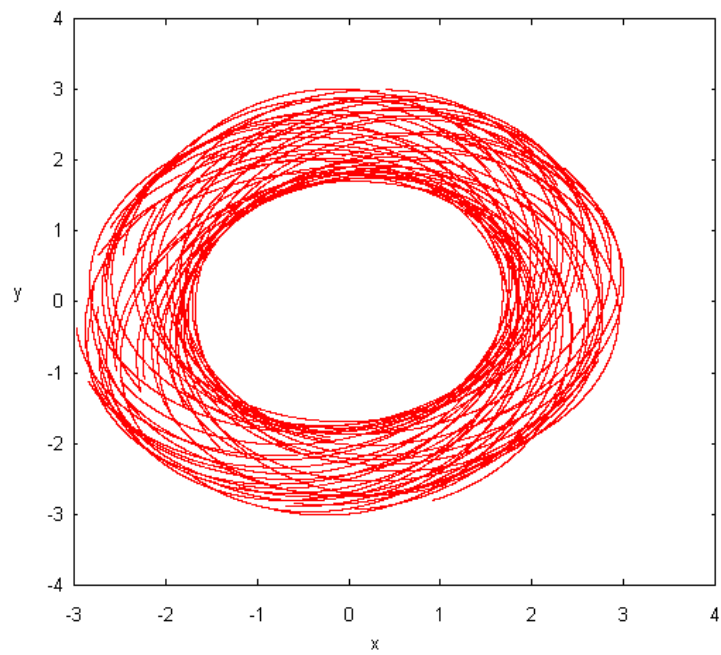


Figura 2-8: Projeção sob o plano xy da coordenada relativa $\vec{x}_e - \vec{x}_p$ em função do tempo, (uma órbita cada 100 voltas). Note-se que além da presseção das órbitas, existe uma deformação das mesmas, que leva o elétron a ficar cada vez mais perto do núcleo.

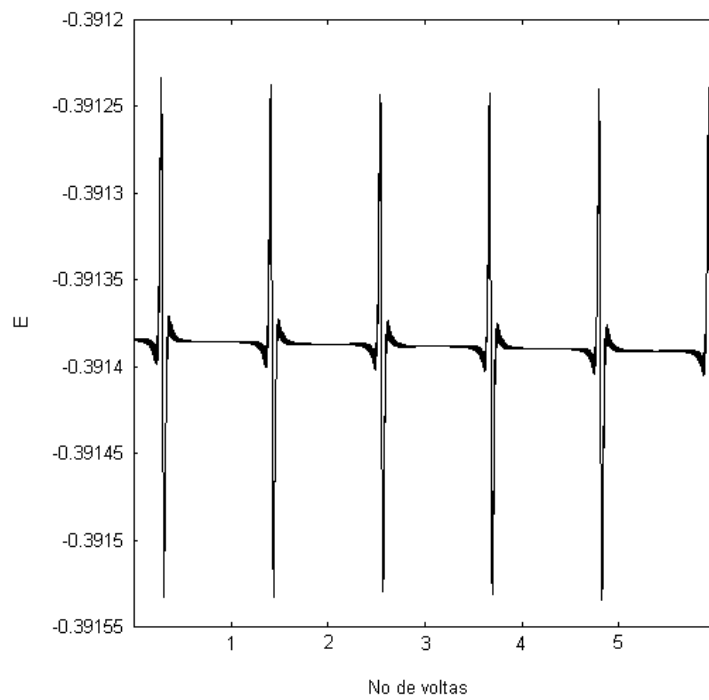


Figura 2-9: Conservação da energia para algumas voltas. Note-se além das flutuações perto da origem esta vai diminuindo levemente, depois de 10^5 voltas esta diferença atinge o 5 %.

Capítulo 3

Formulação Hamiltoniana do problema simétrico

3.1 Introdução

Existem varias teorias invariantes sob o grupo de Poincaré, porem apenas a dinâmica relativística de uma única partícula é totalmente compreendida atualmente. Já para a dinâmica relativística de dois corpos existe o teorema da *não-interação* apresentado no Capitulo 1 e também na Ref. [4]. Mais de quinze anos se passaram até que foi proposta a dinâmica de vínculos como método para contornar as conseqüências deste teorema [16],[15]. Apesar disto, não é conhecida até hoje uma formulação Hamiltoniana com vínculos da eletrodinamica *simétrica* de ação à distância. Neste capítulo apresenta-se uma descrição Hamiltoniana do problema de dois corpos da eletrodinâmica relativística de ação à distância. As órbitas Hamiltonianas são calculadas numericamente por um método estável e auto-consistente que usa o método de minimização de máxima inclinação (*steepest-descent method*), escolhendo apenas as órbitas não-disparantes. Para o problema de dois corpos da eletrodinâmica de ação à distância, não há soluções gerais conhecidas. A única solução particular conhecida até hoje é a de órbitas circulares para o problema atrativo, como discutido na Ref. [24, 25].

Um problema que já foi estudado anteriormente foi o caso de dois elétrons movimentando-se em linha reta $[-x_2(t) = x_1(t) \equiv x(t)]$, onde a minimização da ação Eq. 1.1 prediz a equação

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_1}{\sqrt{1-v_1^2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m_e c^2} \left[\frac{1}{q^2} \left(\frac{1+v(t+q)/c}{1-v(t+q)/c} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1-v(t-r)/c}{1+v(t-r)/c} \right) \right], \quad (3.1)$$

onde $v(t) = dx/dt$ é a velocidade do elétron de carga e e massa m_e e r e q são os tempos avançados e retardados, implicitamente definidos pelas condições do cone de luz

$$\begin{aligned} cr(t) &= x(t) + x(t-r), \\ cq(t) &= x(t) + x(t+q), \end{aligned} \quad (3.2)$$

e c é a velocidade da luz. Em geral, este tipo de equação com retardo e avanço, como as Eqs. (3.1) e (3.2), requer uma função como condição inicial, a diferença das equações ordinárias onde se requer apenas os valores das variáveis para um valor qualquer do parâmetro de evolução. Para este caso particular em que as duas partículas movimentam-se de forma simétrica partindo de uma distância mínima com velocidade zero, foi provado em 1979 [39], [40], que para distâncias suficientemente grandes (baixas velocidades), toda a órbita é determinada a partir das condições iniciais *pontuais* $x^0(t=0) = r_{\min}$, e $v^0(t=0) = 0$. Este resultado simples sugere que a redução à variedade não disparante das soluções de Eq. (3.1) pode ser determinada por condições iniciais Newtonianas (posição e velocidade).

A seguir, apresenta-se um método para encontrar soluções não-disparantes das equações (3.1) e (3.2) com um formalismo Hamiltoniano. Nosso método é baseado na física: a ação de Fokker se separa em duas ações transformando a equação diferencial *não-local* com avanço e retardo em duas equações diferenciais ordinárias Hamiltonianas com trajetórias idênticas. O Hamiltoniano é definido de forma implícita em termos de funções em princípio desconhecidas usando a teoria de Hamilton-Jacobi. A condição de que as duas funções

descrevem a mesma trajetória envolve um problema funcional, que determina as funções desconhecidas.

Este capítulo é organizado da seguinte forma: Na Seção II descrevemos o método bi-Lagrangiano e encontramos os Hamiltonianos resultantes. Na Seção III determinamos uma equação para combinar a dinâmica de uma das partículas em duas folhações tangentes ao cone de luz. Na Seção IV apresentamos o método numérico auto-consistente de minimização de máxima inclinação (*steepest-descent quenching*) para encontrar as órbitas Hamiltonianas. No Apêndice II discutimos a propriedade bi-monotônica para o caso de massas iguais. Este trabalho foi publicado Ref. [35].

3.2 O método

O primeiro passo do método é uma transformação para novas variáveis como segue

$$\begin{aligned}\xi_1 &\equiv ct_1 - x_1, & \zeta_1 &\equiv ct_1 + x_1, \\ \xi_2 &\equiv ct_2 - x_2, & \zeta_2 &\equiv ct_2 + x_2.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Fazendo-se esta transformação a ação da Eq. 2.1 separa-se na soma de duas ações S_a e S_b , como foi discutido no Capítulo II, Eqs. (2.6) e (2.7), e na Ref. [20], repetidas aqui por conveniência

$$S = \frac{1}{2}(S_a + S_b),\tag{3.4}$$

com

$$\begin{aligned}S_a &= - \int m_1(d\xi_1 d\zeta_1)^{1/2} - \int m_2(d\xi_2 d\zeta_2)^{1/2} \\ &\quad - e^2 \int \int \frac{\delta(\zeta_1 - \zeta_2)}{|\xi_1 - \xi_2|} (d\xi_1 d\zeta_2 + d\xi_2 d\zeta_1),\end{aligned}\tag{3.5}$$

e

$$S_b = - \int m_1 (d\xi_1 d\zeta_1)^{1/2} - \int m_2 (d\xi_2 d\zeta_2)^{1/2} - e^2 \int \int \frac{\delta(\xi_1 - \xi_2)}{|\zeta_1 - \zeta_2|} (d\xi_1 d\zeta_2 + d\xi_2 d\zeta_1). \quad (3.6)$$

No capítulo II estudamos a solução das equações que se obtém fazendo as variações *independentes* das Eqs (3.5) e (3.6). Estas equações são locais mas perderam a simetria original da eletrodinâmica de ação à distância. Neste capítulo mostraremos como partindo de *ambas* as Lagrangianas encontramos equações Hamiltonianas. Dado que estas ações são invariantes por reparametrizações do parâmetro de evolução, na primeira ação S_a , Eq. (3.5) pode-se tomar como parâmetro $\zeta \equiv \zeta_1 = \zeta_2$, e para S_b , Eq. (3.6) o parâmetro $\xi = \xi_1 = \xi_2$. Como já foi discutido no capítulo II, esta parametrização é conhecida como folhação frontal da dinâmica (*front form of dynamics*). Esta folhação faz com que os dois pontos relacionados pelo mesmo parâmetro se encontrem sempre em condição de cone de luz

$$(x_1 - x_2)^2 - (t_1 - t_2)^2 = 0. \quad (3.7)$$

Sem perder a generalidade e simplificando a notação, a partícula 1 sempre é posta à direita da partícula 2 e é fácil mostrar então que para o caso *a*, a distância geométrica entre as partículas é

$$r_a = -\frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2). \quad (3.8)$$

enquanto que para o caso *b*

$$r_b = \frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2). \quad (3.9)$$

Também no Capítulo II mostra-se que a minimização das ações S_a e S_b Eqs. (3.5) e (3.6) em forma independente, resultam em duas trajetórias *não* coincidentes. Caso estas duas soluções fossem coincidentes, esta solução seria também uma solução da variação da

ação simétrica, ou seja $\delta S = \frac{1}{2}\delta S_a + \frac{1}{2}\delta S_b = 0 + 0 = 0$. Como foi provado analiticamente no capítulo anterior, isto nunca é assim, existindo um *gap* entre as duas soluções que depende da energia e que não pode ser removido (vide Figura 2.3 do Capítulo II).

Para evitar isto nos propusemos um problema com dois Lagrangianos gerais que tenta resolver simultaneamente as duas equações

$$\delta S_a = \delta G, \tag{3.10}$$

e

$$\delta S_b = -\delta G, \tag{3.11}$$

onde G é em princípio indeterminado. A idéia é encontrar uma Lagrangiana G suficientemente geral de modo que das Eqs. (3.10) e (3.11) se obtenha um sistema de equações *locais* que resultem uma única trajetória, e portanto uma solução da ação de Fokker.

Definiremos primeiro uma família de curvas com simetria temporal, ou seja

$$\begin{aligned} x_1(-t) &= x_1(t), \\ x_2(-t) &= x_2(t), \end{aligned}$$

dinamicamente relacionadas ao centro de massa, que será chamada de *CMF*. Como a solução que estamos procurando tem que ser simétrica no tempo, ela pertencerá a esta família. Para velocidades assintóticas suficientemente baixas foi demonstrado na Ref [39] e também no Apêndice II, que a solução é duplamente monotônica, ou seja, a distância entre as partículas em cone de luz diminui até certo ponto e volta a aumentar em forma monotônica. Nesta família de órbitas, vamos demonstrar certas igualdades integrais, tomando estas formalmente desde $-\infty$ até $+\infty$ e ignorando a questão da existência e convergência destas, isto está discutido na Ref [20].

A identidade mais trivial, para uma função arbitrária ϕ qualquer é

$$\int_a^b \phi(\zeta) d\zeta = \int_b^a \phi(\xi) d\xi. \quad (3.12)$$

onde o subíndice denota a parametrização. Note-se que a Eq. (3.12) é uma consequência da transformação de coordenadas induzida pela simetria temporal da família ($\zeta \rightarrow -\xi$). Da mesma forma pode-se provar para essa família que para qualquer função V cumpre-se

$$\int_a^b V(\zeta) \left(\frac{d\xi_1}{d\zeta} + \frac{d\xi_2}{d\zeta} \right) d\zeta = \int_b^a V(\xi) \left(\frac{d\zeta_1}{d\xi} + \frac{d\zeta_2}{d\xi} \right) d\xi, \quad (3.13)$$

A combinação $(d\xi_1 d\zeta_2 + d\xi_2 d\zeta_1)$ é um elemento de área invariante de Lorentz que aparece naturalmente nas Eqs. (3.5) e (3.6). Por último, a reversão temporal nesta família *CMF* ($\zeta_{1,2} \rightarrow -\xi_{1,2}, \xi_{1,2} \rightarrow -\zeta_{1,2}$) produz as identidades seguintes para funções arbitrárias $\alpha(\zeta)$ e $\beta(\zeta)$

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha(\zeta) (d\xi_1 d\zeta_1)^{1/2} &= \int_b^a \alpha(\xi) (d\xi_1 d\zeta_1)^{1/2}, \\ \int_a^b \beta(\zeta) (d\xi_2 d\zeta_2)^{1/2} &= \int_b^a \beta(\xi) (d\xi_2 d\zeta_2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Estas identidades sugerem que pode ser definido o Lagrangiano G da seguinte forma

$$G = \int_a^b \left[\phi(\zeta) + \frac{1}{2} V(\zeta) (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2) + \alpha(\zeta) \sqrt{\dot{\xi}_1} + \beta(\zeta) \sqrt{\dot{\xi}_2} \right] d\zeta. \quad (3.15)$$

onde $\dot{\xi}_1$ indica a derivada com respeito a ζ . Para o caso b define-se da mesma forma

$$G = \int_b^a \left[\phi(\xi) + \frac{1}{2} V(\xi) (\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_2) + \alpha(\xi) \sqrt{\dot{\zeta}_1} + \beta(\xi) \sqrt{\dot{\zeta}_2} \right] d\xi, \quad (3.16)$$

Note-se que estes Lagrangianos são locais. A necessidade de somente quatro funções é esclarecido mais adiante, quando escrevemos quatro equações que determinam estas funções arbitrárias.

A seguir vamos resolver cada problema Eqs. (3.10) e (3.10) por separado para as duas

folhações. Depois de incluir o Lagrangiano indeterminado G , o problema variacional $\delta S_a = \delta G$ na família CMF implica a resolução das equações de Euler-Lagrange para $L_a \equiv S_a - G$,

$$L_a = - \int [M_{1a} \sqrt{\dot{\xi}_1} + M_{2a} \sqrt{\dot{\xi}_2} + (\frac{e^2}{|\xi_1 - \xi_2|} + \frac{1}{2}V(r_a))(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2) + \phi(r_a)] d\xi, \quad (3.17)$$

onde $M_{1a} \equiv m_1 + \alpha(r_a)$ e $M_{2a} \equiv m_2 + \beta(r_a)$. Da mesma forma, o problema $\delta S_b = -\delta G$ implica em $L_b \equiv S_b + G$,

$$L_b = - \int [M_{1b} \sqrt{\dot{\zeta}_1} + M_{2b} \sqrt{\dot{\zeta}_2} + (\frac{e^2}{|\zeta_1 - \zeta_2|} - \frac{1}{2}V(r_b))(\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_2) - \phi(r_b)] d\xi, \quad (3.18)$$

com $M_{1b} \equiv m_1 - \alpha(r_b)$ e $M_{2b} \equiv m_2 - \beta(r_b)$. Nos introduzimos as funções arbitrárias ϕ , V , α , and β , que entram com sinal positivo para o caso a e sinal negativo no caso b . O Hamiltoniano é dado em cada caso por

$$H_a = \frac{-1}{4} \left\{ \frac{M_{1a}^2}{(p_1 + \frac{1}{2}V + \frac{e^2}{|\xi_1 - \xi_2|})} + \frac{M_{2a}^2}{(p_2 + \frac{1}{2}V + \frac{e^2}{|\xi_1 - \xi_2|})} \right\} - \phi(r_a), \quad (3.19)$$

e

$$H_b = \frac{-1}{4} \left\{ \frac{M_{1b}^2}{(p_1 - \frac{1}{2}V + \frac{e^2}{|\zeta_1 - \zeta_2|})} + \frac{M_{2b}^2}{(p_2 - \frac{1}{2}V + \frac{e^2}{|\zeta_1 - \zeta_2|})} \right\} + \phi(r_b). \quad (3.20)$$

Note-se que o Hamiltoniano H_a depende somente de $r_a = -\frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)$, o que implica que $P_a = p_1 + p_2$ é uma constante de movimento. Para a outra caso b o Hamiltoniano H_b depende somente de $r_b = \frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)$, implicando que $P_b = p_1 + p_2$. Esta constante sugere uma transformação canônica definida no caso a , como

$$\begin{aligned} X &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), & P &\equiv p_1 + p_2 \\ x &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2), & p &= p_1 - p_2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para o caso b usa-se uma transformação análoga trocando ξ por ζ nas Eqs. (3.21).

Pode-se usar as Eqs. (3.21) para expressar p_1 e p_2 da Eq. (3.19) em termos da constante P_a e do momento relativo p_a , substituindo a condição $H_a = E_a$, dando assim

$$p_a = \frac{\Delta_a}{(E_a + \phi)} \pm \sqrt{\left(P_a + \frac{Q_a}{(E_a + \phi)} + V(r) + \frac{e^2}{r_a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_a^2 - Q_a^2}{(E_a + \phi)^2}\right)}, \quad (3.22)$$

onde $Q_a \equiv \frac{1}{4}(M_{1a}^2 + M_{2a}^2)$ e $\Delta_a \equiv \frac{1}{4}(M_{2a}^2 - M_{1a}^2)$ e $r_a = |x|$. O caso b é completamente análogo. Mostrou-se aqui que qualquer solução das Eqs. (3.19) e (3.20) é também uma solução do problema original com avanço e retardo Eqs. (3.1) e (3.2), para potenciais arbitrários ϕ, V, α , and β . Como veremos na seção numérica (Seção IV), mesmo encontrando os potenciais corretamente os Hamiltonianos (3.19) e (3.20) possuem uma única trajetória em comum. Isto pode ser contornado generalizando os potenciais das Eqs. (3.19) e (3.20), como funções implícitas da energia E_a e E_b . Por exemplo ϕ é generalizado a $\phi \equiv \phi(r_a, E_a)$ no caso a e $\phi \equiv \phi(r_b, E_b)$ no caso b , (o mesmo para V, α , e β). Este Hamiltoniano é ainda uma função do espaço de fase, já que o mesmo E é uma função do espaço de fase.

Agora para cada órbita particular com energia E_o , pode-se definir ainda os Lagrangianos Eqs. (3.17) e (3.18) usando *formas fixas dos* potenciais: $\phi = \phi(r, E_o)$; $V = V(r, E_o)$; $\alpha = \alpha(r, E_o)$; and $\beta = \beta(r, E_o)$. Porém, para conservar as equações Hamiltonianas deve se suprir uma condição de modo que as derivadas parciais com respeito a E_a, E_b em cada caso se anulem, ou seja

$$\frac{\partial H_a(p, P, r, E_a)}{\partial E_a} = 0, \quad (3.23)$$

e no caso b

$$\frac{\partial H_b(p, P, r, E_b)}{\partial E_b} = 0. \quad (3.24)$$

Tem que ficar claro que depois da generalização das Eqs. (3.19) e (3.20) a dependência implícita Eqs. (3.23) e (3.24) não se pode voltar aos Lagrangianos originais e a formulação

fica uma formulação Hamiltoniana implícita.

Mostremos como mesmo em forma implícita pode-se escrever as equações de movimento, no formalismo de Hamilton-Jacobi, usando uma transformação canônica com uma função geratriz S dada por

$$S = PX + W(x, P, E) - E\zeta, \quad (3.25)$$

onde a função $W(x, P, E)$ é definida por integração da condição $p = \partial W/\partial x$, e p é dado na Eq. (3.22).

Esta transformação canônica é definida de modo que o novo momento associado à variável X anterior é a mesma constante $P = \partial S/\partial X$ e o outro momento é a energia E (nesta última definição aproveitamos o fato de que E é um dos argumentos dos potenciais). Escolhe-se S à maneira de Hamilton-Jacobi de tal forma que o Hamiltoniano se anule: $K = H + \frac{\partial S}{\partial \zeta} = 0$. Como o Hamiltoniano é zero, as novas coordenadas são definidas simplesmente com duas constantes X_0 e C_0

$$\begin{aligned} X_0 &= \partial S/\partial P = X + \partial W/\partial P \\ C_0 &= -\partial S/\partial E = \zeta - \partial W/\partial E \end{aligned} \quad (3.26)$$

As equações acima para o caso a define ζ e X como funções da variável $r_a \equiv |x|$. Para uso futuro, é interessante tomar os diferenciais da Eq. (3.26) com respeito a x ,

$$\begin{aligned} dX &= -(\partial^2 W/\partial x \partial P)dx = -(\partial p/\partial P)dx, \\ d\zeta &= (\partial W/\partial x \partial E)dx = (\partial p/\partial E)dx, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde usamos $p = \partial W/\partial x$ e trocamos as derivadas parciais. A forma explícita do diferencial para a trajetória é obtida usando a Eq. (3.3) relacionando a coordenada X com ζ e

usando (3.27) se relaciona dX e $d\zeta$ com dx . Para o caso a a solução explícita é

$$\begin{aligned}
dt_{1a} &= \frac{1}{2}(d\zeta_a + dX_a + dx_a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_a}{\partial P} - \frac{\partial p_a}{\partial E} - 1\right)dr_a, \\
dt_{2a} &= \frac{1}{2}(d\zeta_a + dX_a - dx_a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_a}{\partial P} - \frac{\partial p_a}{\partial E} + 1\right)dr_a, \\
dx_{1a} &= \frac{1}{2}(d\zeta_a - dX_a - dx_a) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\partial p_a}{\partial P} - \frac{\partial p_a}{\partial E}\right)dr_a, \\
dx_{2a} &= \frac{1}{2}(d\zeta_a - dX_a + dx_a) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_a}{\partial P} + \frac{\partial p_a}{\partial E} + 1\right)dr_a,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde foi usada $dx_a = -dr_a$. Análogamente, para o caso b ($dx_b = dr_b$) obtemos a solução explícita

$$\begin{aligned}
dt_{1b} &= \frac{1}{2}(d\xi_b + dX_b + dx_b) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_b}{\partial E} - \frac{\partial p_b}{\partial P} + 1\right)dr_b, \\
dt_{2b} &= \frac{1}{2}(d\xi_b + dX_b - dx_b) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_b}{\partial E} - \frac{\partial p_b}{\partial P} - 1\right)dr_b, \\
dx_{1b} &= \frac{1}{2}(-d\xi_b + dX_b + dx_b) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\partial p_b}{\partial P} - \frac{\partial p_b}{\partial E}\right)dr_b, \\
dx_{2b} &= \frac{1}{2}(-d\xi_b + dX_b - dx_b) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_b}{\partial P} + \frac{\partial p_b}{\partial E} + 1\right)dr_b.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Note-se que as Eqs. (3.28) e (3.29) levam à solução explícita em termos de $p(r, E, P)$ dado na Eq. (3.22).

3.3 Condições de Simetria para o caso de Massas Iguais

Nesta seção discutimos o caso de massas iguais, tomando $m_1 = m_2 = m$, em unidades nas quais $\frac{e^2}{mc^2} = 1$. Derivaremos relações gerais de simetria envolvendo as quatro funções arbitrárias α, β, V , e ϕ . A fórmula (3.22) para p_a é a solução da equação quadrática que define duas funções diferentes dependendo do sinal positivo ou negativo da raiz quadrada. É fácil de mostrar que no ponto de ramificação a raiz quadrada se anula, separando o espaço de fase em duas regiões físicas t e d , indicadas na Figura 3.1, pela notação p_a^t e

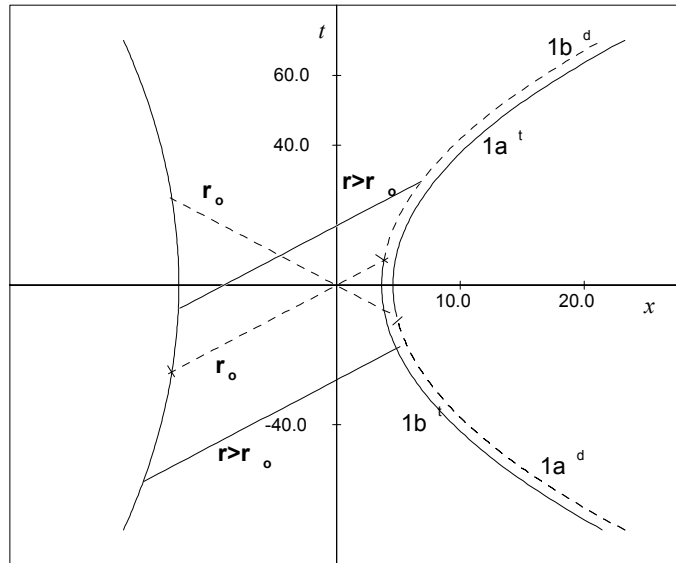


Figura 3-1: Uma trajetória da família CMF , para $m_1 \neq m_2$, em unidades nas quais $e^2/mc^2 = 1$. Mostra-se aqui as ramificações $1a^t$, em traço sólido e $1a^d$ e traço pontilhado e vice-versa para o caso b . Também mostra-se a distância mínima em cone de luz r_0 . Note-se que estão indicadas aqui as distâncias geométricas no plano (x, t) , sendo que as distâncias espaciais obtêm-se dividindo estas por $\sqrt{2}$ ($c = 1$).

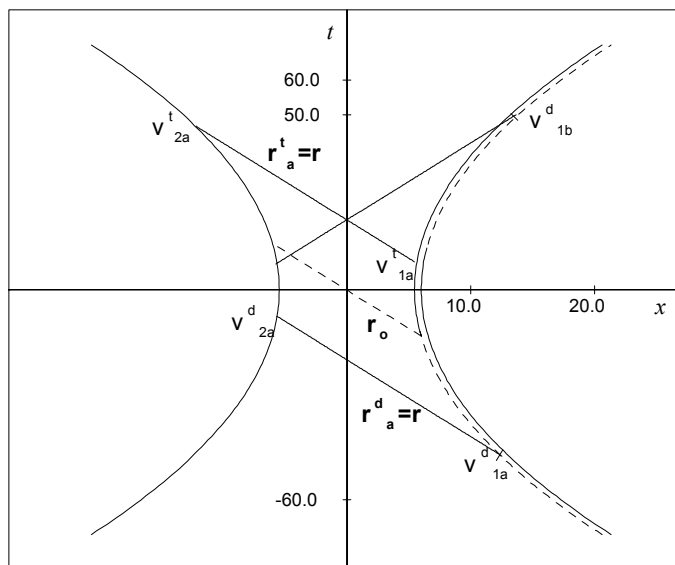


Figura 3-2: Uma trajetórias da família CMF para $m_1 = m_2$. Mostra-se aqui a velocidade para os pontos relacionados por inversão temporal v_{1a}^d e v_{1b}^d . Note-se que estão indicadas aqui as distâncias geométricas no plano (x, t) sendo que as distâncias espaciais se obtêm dividindo estas por $\sqrt{2}$ ($c = 1$).

p_a^d . Já assumimos anteriormente que a solução tem reversão temporal. Para ser coerente com isto, a reversão temporal deve *mapear* cada ramificação do caso a da partícula 1 em uma ramificação do caso b da partícula 2, resultando em $v_{1a,b}^{d,t}(r) = -v_{1b,a}^{d,t}(r)$ para $r \in [r_o, \infty]$, como é ilustrado na Figura 3.2 para massas iguais. Em forma análoga, para a partícula 2 temos que $v_{2a,b}^{d,t}(r) = -v_{2b,a}^{d,t}(r)$ para $r \in [r_o, \infty]$. Estas duas condições, quando expressas em termos de $\partial p / \partial P$ e $\partial p / \partial E$ usando as Eqs. (3.28) e (3.29), implicam nas quatro condições

$$\frac{\partial p_{a,b}^{t,d}}{\partial P} = \frac{\partial p_{b,a}^{t,d}}{\partial P}, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial p_{a,b}^{t,d}}{\partial E} = \frac{\partial p_{b,a}^{t,d}}{\partial E}. \quad (3.31)$$

As condições (3.30) e (3.31) representam duas condições para a região t e duas condições para a região d , cada uma envolvendo os quatro potenciais.

3.4 Determinação dos potenciais

Nesta seção vamos introduzir uma descrição simples em termos de duas funções $s(r, E)$ e $F(r, E)$ que são imediatamente acessíveis em forma numérica. A região d da Eq.(3.30) e (3.31) é estudada definindo $\partial p_a^d/\partial P$, $\partial p_a^d/\partial E$, $\partial p_b^d/\partial P$, e $\partial p_b^d/\partial E$ em termos de $s(r, E)$ e $F(r, E)$ como

$$\frac{\partial p_a^d}{\partial P} = \frac{\partial p_b^d}{\partial P} \equiv -\frac{\cosh[s(r, E)]}{\sinh[s(r, E)]}, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial p_a^d}{\partial E} = \frac{\partial p_b^d}{\partial E} \equiv \frac{F(r, E)}{\sinh[s(r, E)]}. \quad (3.33)$$

Para a ramificação t , as conseqüências das definições (3.32) e (3.33) das relações de simetria Eqs. (3.30) e (3.31) são:

(i) a região t envolve a mesma função $F(r, E)$ que a região d e (ii) a região t envolve a mesma função $s(r, E)$ que a região d trocando-se o sinal desta. A descrição intuitiva é que $\pm s(r, E)$ e $F(r, E)$ descreve ambos os casos a e b , trocando-se $s(r, E)$ por $-s(r, E)$, de uma região para outra, sem mudar $F(r, E)$. A seguir, tiramos a dependência de E dos potenciais para abreviar a notação.

Agora temos que impor que a órbita seja solução de ambos os Hamiltonianos Eqs. (3.19) e (3.20). Podemos usar as Eqs. (3.28) , (3.29) e (3.32), (3.33) para expressar os diferenciais da partícula-1

$$\begin{aligned} dt_{1a} + dx_{1a} &= \frac{-1}{\sinh(s_a)} F(r_a) dr_a, \\ dt_{1a} - dx_{1a} &= -\frac{\exp(s_a)}{\sinh(s_a)} dr_a, \end{aligned} \quad (3.34)$$

e para caso b ,

$$\begin{aligned} dt_{1b} + dx_{1b} &= \frac{\exp(s_b)}{\sinh(s_b)} dr_b, \\ dt_{1b} - dx_{1b} &= \frac{1}{\sinh(s_b)} F(r_b) dr_b. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Neste ponto convém introduzir uma função Φ relativa à velocidade da partícula 1, de modo que a velocidade da partícula 1 seja a mesma nos dois casos a e b , ou seja

$$v_{1a}(s_a, r_a) = v_{1b}(s_b, r_b) \equiv \tanh(\Phi) \quad (3.36)$$

usando agora as Eqs. (3.34) e (3.35) chega-se a

$$\exp(2\Phi) \equiv \exp(-s_a) F(r_a) = \exp(s_b) / F(r_b). \quad (3.37)$$

resultando assim em

$$\exp(s_a) \exp(s_b) = F(r_a) F(r_b). \quad (3.38)$$

Note-se que a diferencia das condições de simetria na Eq. (3.38) r_a e diferente de r_b .

Também para massas iguais cumpre-se a simetria

$$v_{2a}^t(r) = v_{1a}^d(r)$$

como mostrado na Figura 3.2, ou em termos de Φ , $\Phi_d = \Phi_t$. Usando agora a Eq. (3.37), como também o fato que s muda de sinal quando muda a ramificação, obtém-se então

$$\exp(\Phi_d) \exp(\Phi_t) = F(r_a). \quad (3.39)$$

Como consequência note-se que $F(\infty) = 1$, assim que $\Phi_d(\infty) = -\Phi_t(\infty)$. Como esta órbita é descrita por dois diferenciais, existe outra condição de paralelismo que pode ser expressa no tempo próprio da partícula 1

$$(d\tau_1)^2 = \frac{\exp(s_a)}{\sinh^2(s_a)} F(r_a) (dr_a)^2 = \frac{\exp(s_b)}{\sinh^2(s_b)} F(r_b) (dr_b)^2, \quad (3.40)$$

de onde se derivam equações diferenciais para r_a e r_b :

$$\begin{aligned} \frac{dr_a}{d\tau_1} &= -\frac{\exp(-s_a/2) \sinh(s_a)}{\sqrt{F(r_a)}}, \\ \frac{dr_b}{d\tau_1} &= \frac{\exp(-s_b/2) \sinh(s_b)}{\sqrt{F(r_b)}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Pode-se também eliminar s_a e s_b em favor de Φ usando a Eq. (3.37) e a Eq. (3.41), que resulta em

$$\begin{aligned} \frac{dr_a}{d\tau_1} &= -\frac{1}{2} \left[\exp(-\Phi) - \frac{\exp(3\Phi)}{F^2(r_a)} \right], \\ \frac{dr_b}{d\tau_1} &= \frac{1}{2} \left[\exp(\Phi) - \frac{\exp(-3\Phi)}{F^2(r_b)} \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para finalizar, temos que impor uma equação para a variável Φ . Esta é fornecida pela equação de movimento Eq. (3.1). Então, para obter uma equação local se escreve a Eq. (3.1) usando uma combinação do caso a e do caso b , de modo que onde deve-se escrever a velocidade da posição avançada, usa-se o caso a e para a velocidade retardada usa-se o caso b . Usando o parâmetro de tempo próprio da partícula 1, a Eq. (3.1) se escreve em

nossas unidades como

$$\frac{d\Phi}{d\tau_1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\exp(2\Phi)}{r_a^2 F^2(r_a)} + \frac{\exp(-2\Phi)}{r_b^2 F^2(r_b)} \right\}. \quad (3.43)$$

As equações (3.42) e (3.43) constituem um sistema completo de equações diferenciais ordinárias (*EDO*) para descrever a partícula 1. Para resolver as Eqs. (3.42) e (3.43) é preciso postular a função arbitrária $F(r)$ que aparece nestas equações, com a forma assintótica $F(\infty) = 1$. Por auto-consistência, a função $F(r)$ deve ser tomada de modo que as duas órbitas, do caso a e do caso b , sejam coincidentes. Este problema funcional é resolvido numericamente na seção seguinte. Por último, mostremos que podemos escrever todos os potenciais em função de $s(r, E)$ e $F(s, E)$, que serão finalmente achadas em forma numérica. Uma solução possível das condições Eqs. (3.23) e (3.24) e das Eqs. (3.30) e (3.31) é

$$P_a + V + \frac{e^2}{r} = \frac{[2(1 + \alpha)(1 + \beta) \cosh(s) - (1 + \alpha)^2 - (1 + \beta)^2]}{4(E + \phi)}, \quad (3.44)$$

e

$$P_b - V + \frac{e^2}{r} = \frac{[2(1 - \alpha)(1 - \beta) \cosh(s) - (1 - \alpha)^2 - (1 - \beta)^2]}{4(E - \phi)}. \quad (3.45)$$

Para o caso a , a equação de movimento para ξ_1 e ξ_2 derivada das Eqs. (3.19) e (3.23) é

$$\frac{d\xi_1}{d\zeta} = \frac{\exp(s)}{F(r)} = \frac{(1 + \alpha)^2}{4(p_1 + \frac{1}{2}V + \frac{e^2}{2r})^2}, \quad (3.46)$$

e

$$\frac{d\xi_2}{d\zeta} = \frac{\exp(-s)}{F(r)} = \frac{(1 + \beta)^2}{4(p_2 + \frac{1}{2}V + \frac{e^2}{2r})^2}. \quad (3.47)$$

Tomando o sinal da raiz que tem sentido físico nas Eqs. (3.46) e (3.47) substituindo na Eq. (3.19), resulta em

$$E_a = -\phi + \frac{1}{2\sqrt{F}} [(1 + \alpha) \exp(s/2) - (1 + \beta) \exp(-s/2)], \quad (3.48)$$

Da mesma forma, para o caso b obtem-se

$$E_b = \phi - \frac{1}{2\sqrt{F}}[(1 - \alpha) \exp(s/2) - (1 - \beta) \exp(-s/2)]. \quad (3.49)$$

Se deduz que $E_b = E_a = E$ e $P_b = P_a = P$. Isso define a solução para ϕ , V , α e β das Eqs. (3.48) e (3.48) como

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\sinh(s/2)}{\sqrt{F}}, \\ V &= \sqrt{F} \sinh(s/2). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para as funções α e β se cumpre

$$\begin{aligned} \alpha \exp(s/2) - \beta \exp(-s/2) &= 2E\sqrt{F}, \\ \alpha \exp(-s/2) - \beta \exp(s/2) &= -\frac{2(P + \frac{e^2}{r})}{\sqrt{F}}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde E e P são as únicas constantes do problema. Para a distância mínima em cone de luz r_o , onde $s(r_o) = 0$, o determinante do sistema linear (3.51) se anula dando uma condição que envolve E e P

$$E = -\frac{(P + \frac{e^2}{r_o})}{F(r_o)}. \quad (3.52)$$

Para $r > r_o$, temos que $s(r) \neq 0$ e a Eq. (3.51) pode ser resolvida para α e β resultando

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{[EF(r) \exp(s/2) + (P + \frac{e^2}{r}) \exp(-s/2)]}{\sqrt{F(r)} \sinh(s)}, \\ \beta &= \frac{[EF(r) \exp(-s/2) + (P + \frac{e^2}{r}) \exp(s/2)]}{\sqrt{F(r)} \sinh(s)}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.5 Integração Numérica das órbitas

Nesta seção vamos descrever o método numérico que envolve uma única função $F(r)$. Postula-se primeiro a forma funcional de $F(r)$. Para isto são usados N ($N \sim 18$) parâmetros arbitrários numa série truncada,

$$F(r) = 1 - \sum_{n=1}^{n=N} \frac{k_n}{r^n}, \quad (3.54)$$

que tem explicitamente a forma assintótica desejada. Depois de assumir um conjunto de valores para os k_n , as Eqs. (3.42) e (3.43) constituem um problema simples de equações diferenciais ordinárias (*EDO*) com condições iniciais pontuais. A integração é levada a cabo desde o ponto simétrico r_s , onde $\tau_1 = 0$, $\Phi = 0$ e $r_a = r_b = r_s > r_o$. Note-se que a integração produz automaticamente uma órbita com reversão temporal para a partícula 1. Pode-se checar por inspeção das Eqs. (3.42) e (3.43), que substituindo τ_1 por $-\tau_1$ e Φ por $-\Phi$ muda-se r_a e r_b , de maneira que $r_a(-\tau_1) = r_b(\tau_1)$. Dados os coeficientes k_n , nosso método numérico produz duas trajetórias para a partícula 2, de modo que $x_{2a}(\tau_1) = x_{2b}(-\tau_1)$. Como é ilustrado na Figura 3.3, uma escolha genérica dos k_n não produz soluções *coincidentes* para a partícula 2. É preciso ajustar esta função para que as duas trajetórias sejam uma só no final do método.

Para isto integra-se o sistema de equações (3.42) e (3.43), junto com as equações para $(\frac{dx_{2a}}{dr_a})$, $(\frac{dt_{2a}}{dr_a})$, $(\frac{dx_{2b}}{dr_b})$ e $(\frac{dt_{2b}}{dr_b})$ determinadas pelas Eqs. (3.28) e (3.29). Calcula-se a trajetória numericamente usando o método de Runge-Kutta implícito (9/8). Dadas as duas trajetórias calcula-se então a diferença entre as áreas para N tempos ($N \simeq 200$)

$$A(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{1i} - x_{2ai})^2 + (x_{1i} - x_{2bi})^2}. \quad (3.55)$$

Depois de implementar o método de minimização no espaço de parâmetros de dimensão $N \approx 18$ governado pela equação de minimização $dk_n/ds = -\partial A/\partial k_n$ encontra-se o mínimo

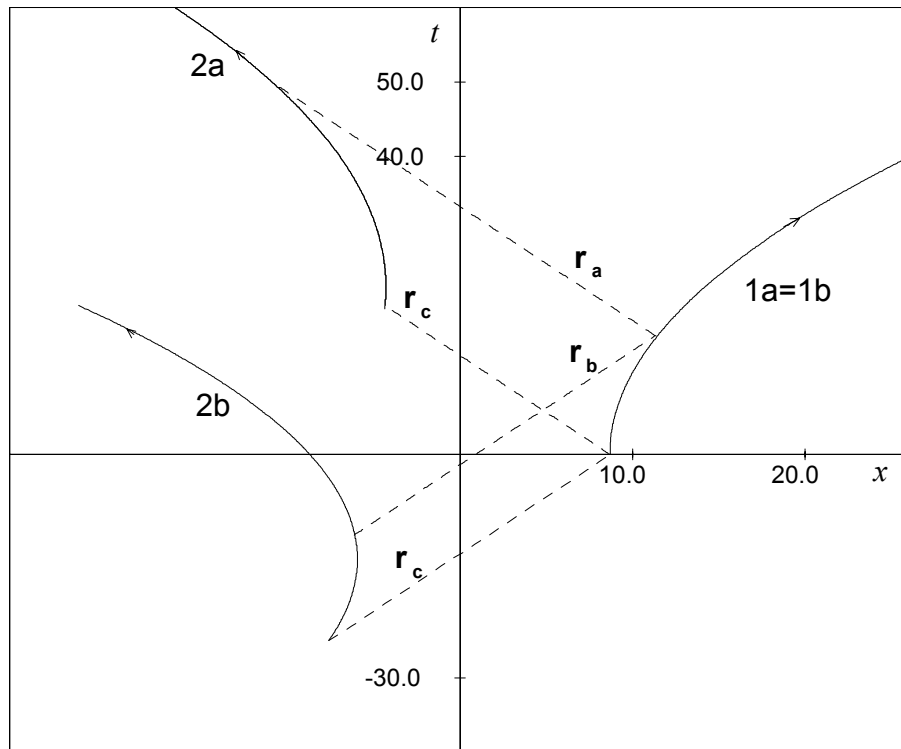


Figura 3-3: Trajetórias achadas numericamente para coeficientes arbitrários k_n . Note-se que a não ser que estes k_n de $F(r)$ sejam calculados pelo método de minimização, a órbita futura da partícula 2 no caso b não coincide com a do caso a .

de $A(k)$ que neste caso deveria chegar a zero (*steepest -descent method*).

Na Figura 3.4 mostra-se as trajetórias encontradas depois da convergência do processo de minimização. Coloca-se as trajetórias da partícula 2 refletidas com respeito ao eixo x de modo de checar a coincidência com a trajetória da partícula 1 (massas iguais). Mostramos soluções para velocidades assintóticas $v^\infty/c = 0.46$, $v^\infty/c = 0.54$ and $v^\infty/c = 0.71$. Note-se que estas trajetórias coincidem perfeitamente, indicando que o processo foi bem sucedido. Como a solução é auto-consistente, não se pode determinar a velocidade asintótica diretamente, esta é estimada para o tempo em que a variação relativa desta $\frac{dv}{d\tau}/v$ é menor que 0.1 %.

Para achar o conjunto de parâmetros para as diferentes velocidades, começa-se com velocidades baixas onde $r_s \gg 1$, depois diminui-se gradualmente r_s aplicando a minimização para cada condição inicial. A partir da convergência numérica, encontra-se para cada velocidade assintótica o raio máximo em cone de luz r_o . Pode-se apreciar na Tabela I, que esta distância diminui até uma velocidade de aproximadamente $v^\infty/c = 0.78$, e depois volta a aumentar. Para órbitas com velocidades assintóticas maiores a $v^\infty/c > 0.8$ não basta determinar uma única função como a dada na Eq. (3.54) para aproximar toda a órbita. Para estas velocidades, utiliza-se uma aproximação de vários polinômios de terceira ordem cada uma (*akima cubic spline approximation*), conseguindo a convergência para altas velocidades. Usando esta aproximação encontra-se a solução numérica para as velocidades $v^\infty/c = 0.7$, $v^\infty/c = 0.8$, $v^\infty/c = 0.9$ e $v^\infty/c = 0.94$ que são mostradas nas Figuras 3.5 e 3.6 .

Distingue-se na Figura 3.6 um comportamento atípico. bem diferente do espalhamento Coulombiano: a existência para velocidades assintóticas muito altas, de uma distância mínima $r_o = 1$, ou seja, um raio clássico do elétron em nossas unidades, $e^2/m_e c^2 = 1$. Isto pode ser explicado intuitivamente assim: as partículas só interagem via cone de luz, portanto uma partícula de alta velocidade assintótica $v \approx -c$, sente um impulso de força em torno de $r = r_o$, que a desacelera fortemente. Para tempos maiores, esta sente um campo muito fraco da outra porque r é muito grande (área marcada na Figura

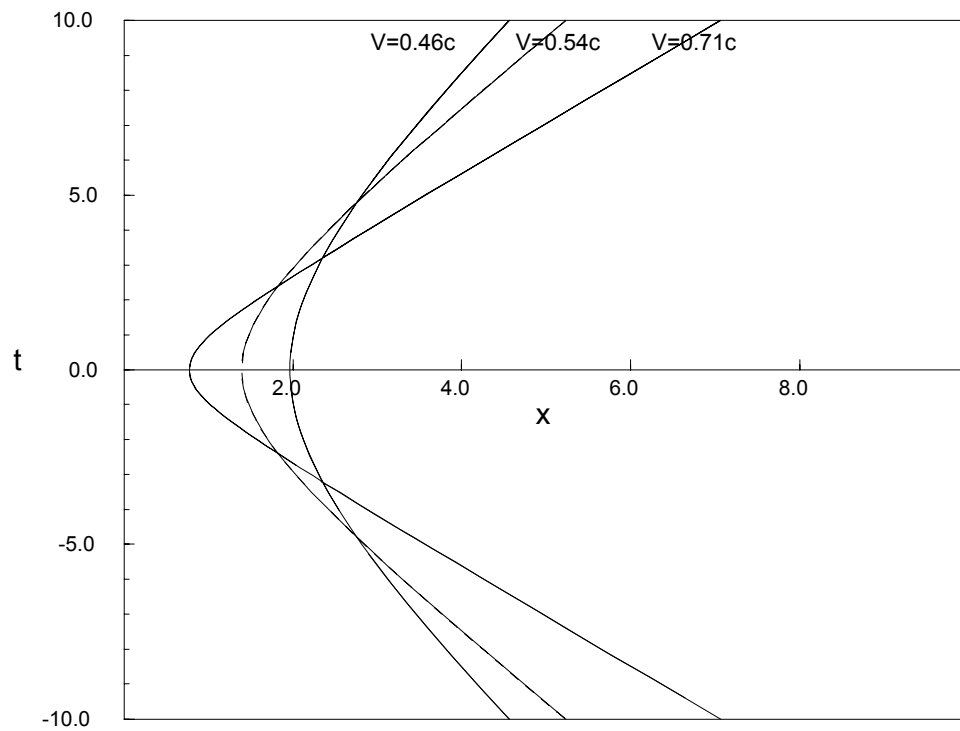


Figura 3-4: Trajetórias determinadas numericamente para $m_1 = m_2$ no plano (x, t) em unidades nas quais $e^2/mc^2 = 1$. Mostram-se três órbitas para velocidades assintóticas $v = 0.46c$, $v = 0.54c$, $v = 0.71c$.

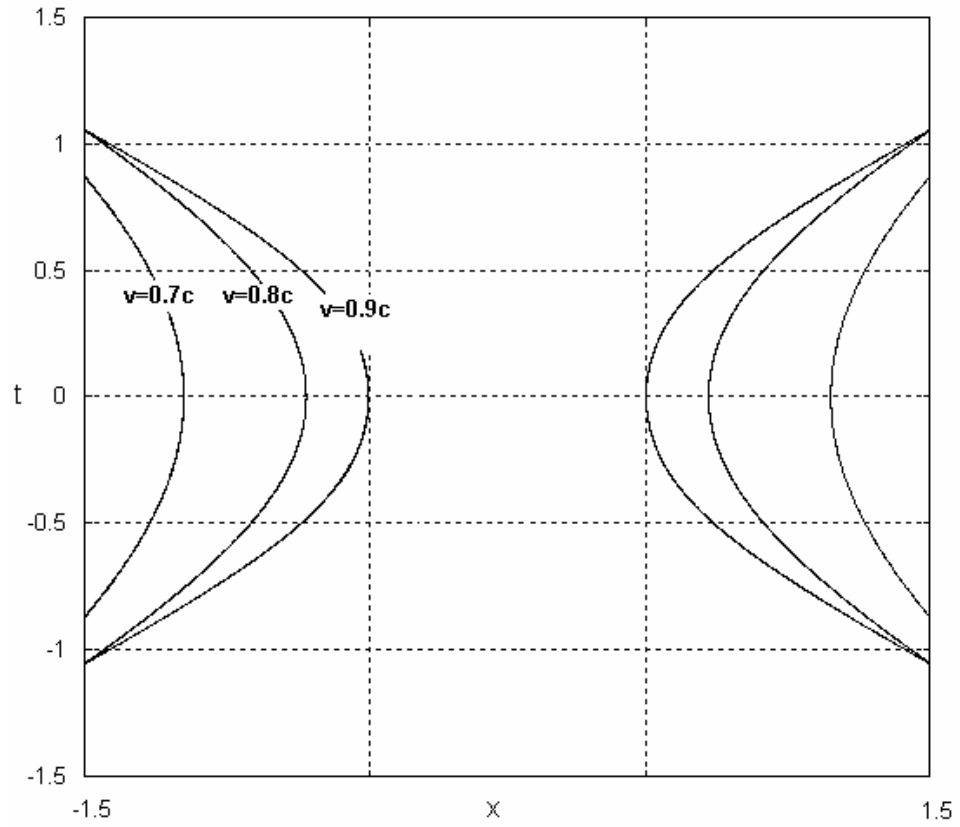


Figura 3-5: Trajetórias calculadas numericamente. utilizando-se mais de um polinômio para $F(1/r)$, para velocidades assintóticas de $v^\infty = 0.7c$, $v^\infty = 0.8c$, $v^\infty = 0.9c$. Note-se que a distância mínima no cone de luz r_o tende a um que em nossas unidades $e^2/mc^2 = 1$ e $c = 1$.

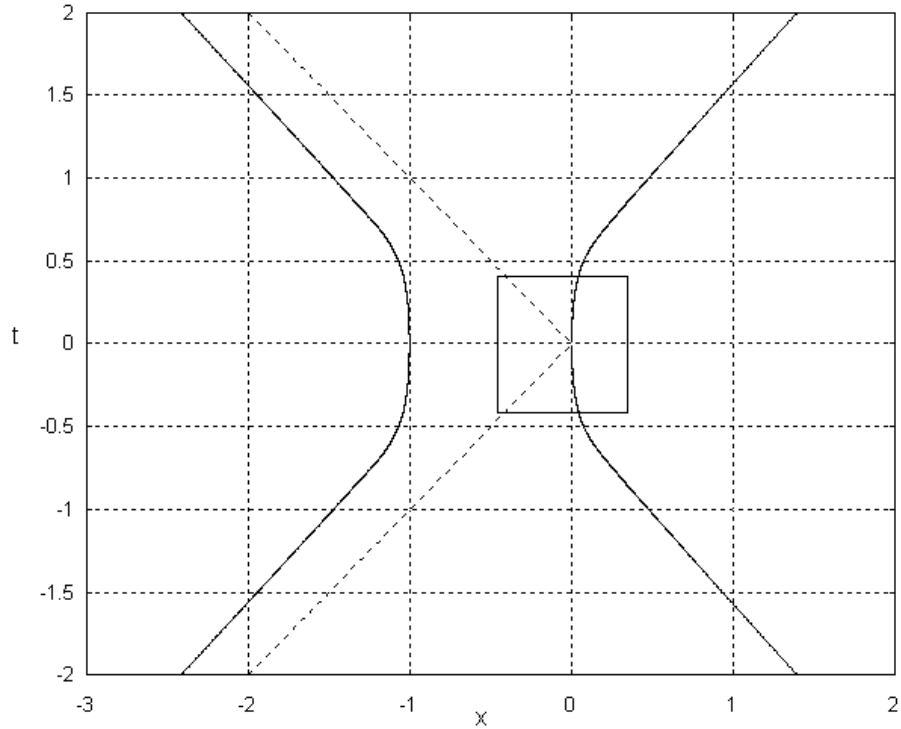


Figura 3-6: Trajetórias das partículas determinadas numericamente depois de obter a convergência a uma única órbita, para uma velocidades assíntótica $v^\infty = 0.94c$. No quadro dentro da figura mostra-se a desaceleração da partícula da velocidade da luz até uma velocidade zero, entrando depois numa zona sem interação alguma.

3.6), repetindo-se o mesmo para $t > 0$. Este resultado surpreendente parece ser uma consequência da invariância do grupo de Poincaré, como e discutido nas Refs. [48, 49].

Finalmente, na Figura 3.7 se descreve $F(r)$ em função de (r_o/r) para velocidades assíntótica de $v^\infty/c = 0.3$, $v^\infty/c = 0.6$ e $v^\infty/c = 0.7$ e $v^\infty/c = 0.8$. Note-se que a forma funcional de $F(r)$ é aproximadamente uma função linear de (r_o/r) para baixas velocidades, porém para altas velocidades esta se comporta bem diferente. Na Tabela I, apresenta-se as velocidades assíntóticas v^∞/c em função da raio inicial r_s , até uma velocidade de $v^\infty/c = 0.8$ onde a solução é encontrada com um único polinômio $F(1/r)$. Observe-se na Tabela I que os coeficientes k_n , que convergem a um valor menor que 10^{-14} são descartados e apenas são considerados os N coeficientes maiores que este valor. Este

número aumenta a medida que a velocidade assimpmtótica aproxima-se da velocidade da luz, como é notado na Tabela I. Para a solução simétrica, ou seja, na família *CMF* foi provado que para velocidades suficientemente baixas velocidades a solução existe e é única [39]. Para velocidades assimpmtóticas de aproximadamente $v/c = 0.92$, estudos numéricos posteriores que utilizam outros métodos de convergência mostram que existe uma bifurcação, ou seja, existe mais de uma solução para a mesma velocidade assimpmtótica [32].

É interessante apreciar a diferença entre este método e outros métodos numéricos de resolução deste tipo de equações diferenciais com retardo e avanço, nos quais estão plenas de soluções disparantes(*run away solutions*). Este método numérico é superior nesse aspecto porque a solução está por construção na variedade não-disparante, e o problema de achar $F(r)$ é numericamente estável já que não envolve nenhuma extrapolação.

v^∞/c	r_s	r_o/r_s	N
0.11	60.00	0.9959	5
0.21	22.00	0.9881	6
0.30	10.00	0.9693	7
0.40	6.00	0.9413	9
0.51	4.00	0.8865	13
0.60	3.27	0.8213	16
0.71	2.96	0.7075	17
0.8	2.55	0.7199	18

Tabela I - Velocidades assimpmtóticas calculadas numericamente para os raio simétrico r_s ($\Phi = 0$), em unidades nas quais $e^2/mc^2 = 1$. Note-se que o valor deste raio r_s diminui mas depois aumenta para $v^\infty = 0.8c$, portanto que o raio maximo r_o diminui sempre até o valo $r_o = 1$.

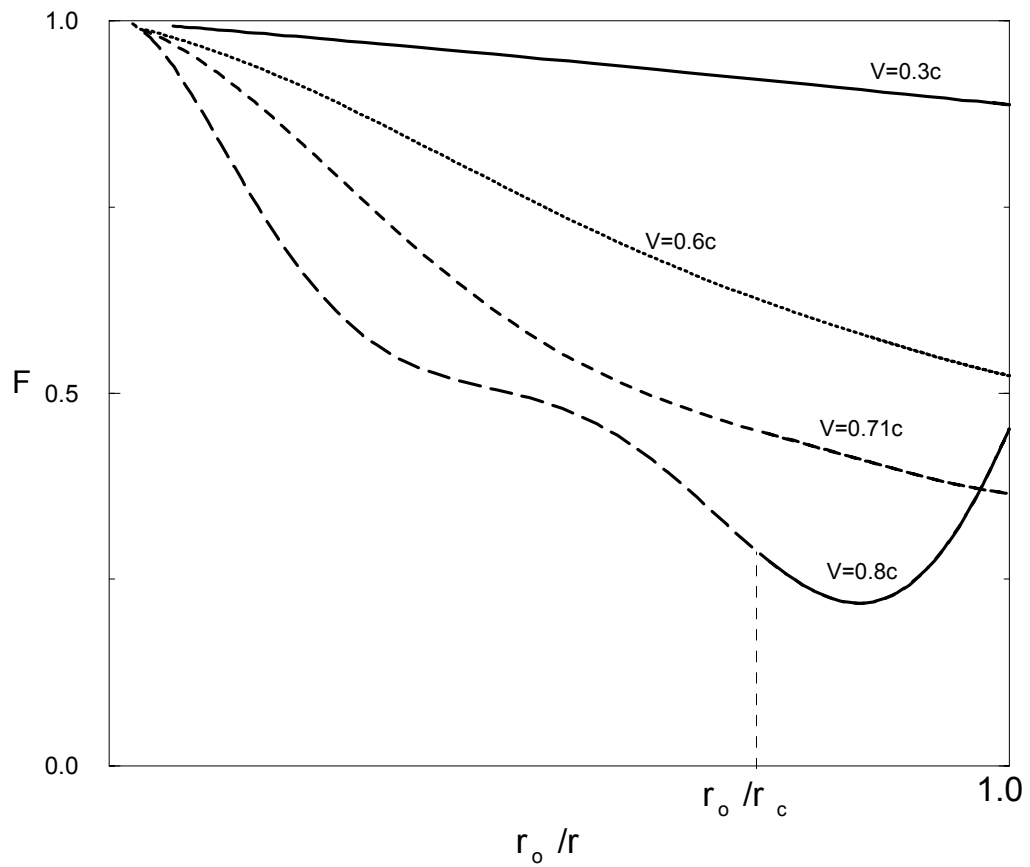


Figura 3-7: A função $F(r)$ determinada numericamente. Para baixas velocidades assintóticas esta é aproximada por $F(r) \sim 1 - k_1/r$.

3.6 Discussão e Conclusões.

Neste capítulo foi discutida uma formulação Hamiltoniana para o caso de duas massas iguais e cargas do mesmo sinal (caso repulsivo) na eletrodinâmica de ação à distância. A única formulação Hamiltoniana do problema simétrico descrita na literatura, é a proposta de um Hamiltoniano com infinitos graus de liberdade [47]. Nossa descrição, em forma implícita, contém somente dois graus de liberdade correspondentes às duas partículas envolvidas. Esta formulação não contradisse o já discutido no Capítulo I, o Teorema da *não-interação* [4] por duas razões: (i) este teorema é um obstáculo apenas para uma descrição em três dimensões onde as rotações jogam um papel principal, (ii) o parâmetro de evolução em nossa descrição, ζ no caso a e ξ no caso b , não é o tempo e por isto o teorema não se aplica.

A literatura matemática sobre equações diferenciais com retardo dependente do tempo é bastante escassa [50, 51], porém existem alguns resultados interessantes: no artigo de 1974 escrito por Kaplan e Yorke [52] discute-se que para certas equações diferenciais com retardo simples, o sub-espaço de soluções *periódicas* desta, estão associadas com equações diferenciais *ordinárias* equivalentes. Isto foi generalizado em 1999 [53], mostrando que várias classes de equações com retardo, pode-se associar equações diferenciais *Hamiltonianas* [53].

Como foi visto neste caso especial, as condições físicas do espaço de soluções que evitam a divergência, produzem uma redução do espaço dinâmico das equações originais de infinitas dimensões (avanço e retardo), para um problema de dimensões finitas de tipo Newtoniano. Pode então ser aplicáveis a estas as teorias conhecidas para sistemas dinâmicos de dimensões finitas [50].

Capítulo 4

Problema atrativo de dois corpos

4.1 Introdução

O estado fundamental do átomo de Hidrogênio tem momento angular $L = 0$. Classicamente, este estado equivale a órbitas aproximadamente colineares, que apresentam em forma natural velocidades relativísticas perto da singularidade. Isto sugere que o problema atrativo de dois corpos deve ser estudado num formalismo que seja invariante de Poincaré. O problema da regularização surge naturalmente na colisão de dois corpos em uma dimensão e com interação atrativa. As equações *não-locais* da eletrodinâmica de ação à distância, assim como as equações de Kepler não relativísticas, são originalmente singulares. Neste Capítulo, derivam-se equações diferenciais que são regulares na colisão de dois corpos. Para isso, usa-se a energia conservada do problema de dois corpos eletromagnético. Esta expressão, derivada da ação de Fokker, contém integrais sobre segmentos das órbitas como consequência da invariância de Poincaré Eq. (2.71). Estas podem ser calculadas depois de conhecida a solução das equações de movimento. Nós trabalharemos apenas no caso de massas iguais $m_1 = m_2$. Neste caso e para órbitas simétricas no tempo, estas integrais se simplificam, podendo ser usadas com sucesso na regularização. O uso da energia foi proposto em [43, 44] para regularizar o problema de Kepler e aqui nós generalizamos esta idéia para o problema relativístico. O método

numérico está explicado no Capítulo 3 e baseia-se em postular uma série para as velocidades avançada e retardada, determinando duas trajetórias para uma das partículas. Então, por um método de minimização auto-consistente encontra-se uma única órbita para esta partícula.

Este Capítulo está dividido da seguinte maneira: (i) Na seção I mostramos que as partículas chegam à velocidade da luz na singularidade para *qualquer* energia. (ii) Na seção II encontramos a solução aproximada perto da colisão para as velocidades independentemente da energia da órbita. (iii) Na seção III definimos variáveis derivadas da energia que são eficazes na regularização e escrevemos equações regulares para estas. (iv) Na seção IV apresentamos e discutimos os resultados numéricos.

4.2 Preliminares da regularização

Nós trabalharemos somente no caso de duas partículas de massas iguais e cargas opostas (ou seja, o problema atrativo). Serão estudadas somente orbitas colineares e simétricas com respeito à origem, ou seja, as que obedecem

$$x_1(t) = -x_2(t). \quad (4.1)$$

Esta família de orbitas está discutida no Capítulo 3, onde foi chamada de família *CMF*. A equação para a partícula 1, que se deriva da ação de Fokker Eq. (1.1), para massas iguais em uma dimensão é [39],

$$\frac{dv_1}{dt_1} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r_a^2} \frac{(1-v_{2a})}{(1+v_{2a})} + \frac{1}{r_b^2} \frac{(1+v_{2b})}{(1-v_{2b})} \right\} (1-v_1^2)^{3/2}, \quad (4.2)$$

onde v_{2b}, v_{2a} são as velocidades correspondentes aos pontos de corte do cone de luz que emana de partícula 1 com a órbita da partícula 2. Todas as quantidades estão em unidades $\frac{e^2}{mc^2} = 1$ e $c = 1$, e estão ilustradas na Figura 4.1 e Figura 4.2. Denomina-se com subíndice (*a*) a posição futura da partícula 2 com respeito à partícula 1, e com

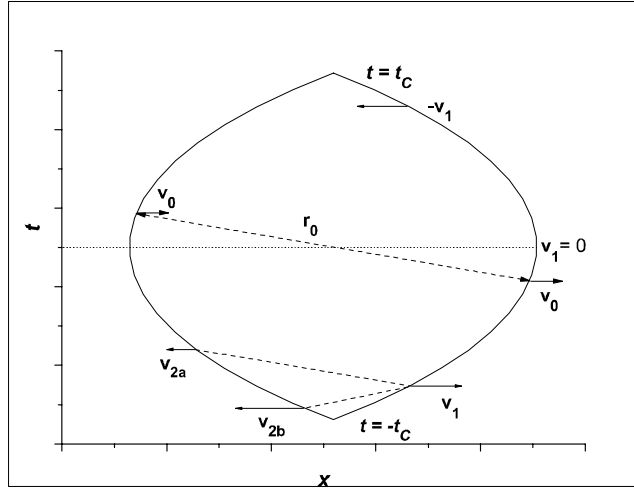


Figura 4-1: Trajetória típica das partículas para massas iguais com a simetria temporal proposta. Mostra-se a distância máxima em cone de luz r_0 , as velocidades futura v_{2a} e passada v_{2b} em relação a um tempo t_1 da partícula 1 e os pontos de colisão $t = t_C$ e $t = -t_C$. A órbita mostra-se com traço sólido, e os raios com traço pontilhado.

subíndice (b) a posição passada desta. Os raios r_a, r_b que conectam estes pontos com a posição da partícula 1, correspondem às duas folhações do espaço-tempo tangentes ao cone de luz. Estes raios estão definidos implicitamente pela condição de cone de luz

$$r_a \equiv x_1(t_1) - x_2(t_{2a}) = c(t_{2a} - t_1), \quad (4.3)$$

$$r_b \equiv x_1(t_1) - x_2(t_{2b}) = c(t_1 - t_{2b}), \quad (4.4)$$

como ilustrado na Figura 4.2. Note-se que t_{2a} e t_{2b} são definidos pelas Eqs. (4.3) e (4.4) como

$$t_{2a} \equiv t_1 + r_a/c,$$

$$t_{2b} \equiv t_1 - r_b/c.$$

As equações para as posições e os tempos encontram-se derivando as Eqs. (4.3) e (4.4) em relação a t_1 . Por exemplo, para encontrar-se $\frac{dt_{2a}}{dt_1}$ deriva-se em relação a t_1 a Eq. (4.3), obtendo-se $\frac{dt_{2a}}{dt_1} = \frac{(1+v_1)}{(1+v_{2a})}$. Para o resto das variáveis $x_1, x_{2a}, t_{2b}, x_{2b}$, as equações encontram-se da mesma forma, resultando em

$$\frac{dx_1}{dt_1} = v_1, \quad (4.5)$$

$$\frac{dt_{2a}}{dt_1} = \frac{(1+v_1)}{(1+v_{2a})}, \quad (4.6)$$

$$\frac{dx_{2a}}{dt_1} = v_{2a} \frac{(1+v_1)}{(1+v_{2a})}, \quad (4.7)$$

$$\frac{dt_{2b}}{dt_1} = \frac{(1-v_1)}{(1-v_{2b})}, \quad (4.8)$$

$$\frac{dx_{2b}}{dt_1} = v_{2b} \frac{(1-v_1)}{(1-v_{2b})}. \quad (4.9)$$

Sem perder a generalidade, vamos assumir que $x_1(t) > 0$, $x_{2a}(t)$ e $x_{2b}(t) < 0$, ou seja, a partícula 1 esta sempre à direita da partícula 2.

Da condição de cone de luz Eqs. (4.3) e (4.3) para órbitas com a simetria *CMF*, segue-se que as funções $r_a(t)$ e $r_b(t)$ são de fato definidas por uma única função $r(t)$, que obedece

$$\begin{aligned} r_a(t) &= r(t), \\ r_b(t + r_a/c) &= r(t), \end{aligned} \quad (4.10)$$

como ilustrado na Figura 4.3.

Tambem por causa da simetria, v_{2a} e v_{2b} estão definidas a partir de uma única função $v(t)$, através de argumentos retardados e avançados como segue

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v(t), \\ v_{2a}(t) &\equiv -v(t + r_a/c), \\ v_{2b}(t) &\equiv -v(t - r_b/c). \end{aligned} \quad (4.11)$$

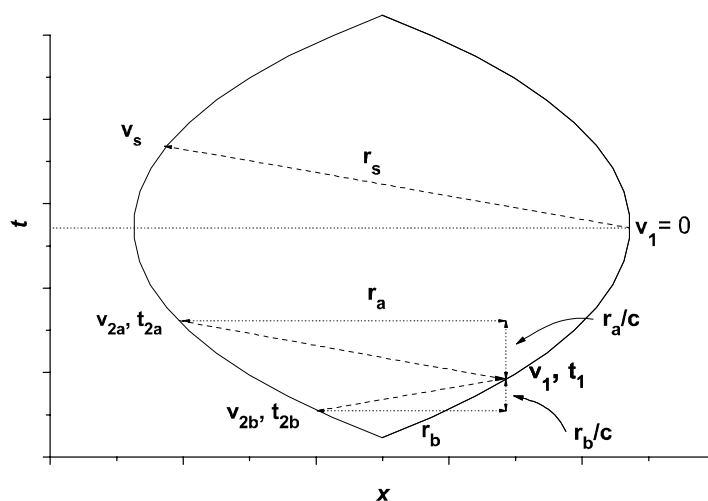


Figura 4-2: Trajetória típica das partículas 1 e 2 em unidades arbitrárias. Indicamos o ponto simétrico (com raios simétricos $r_a = r_b \equiv r_s$) e a velocidade futura (ou passada) v_s correspondente ao cone de luz do ponto onde a velocidade v_1 da partícula 1 é igual a zero. Também estão ilustrados os raios r_a e r_b .

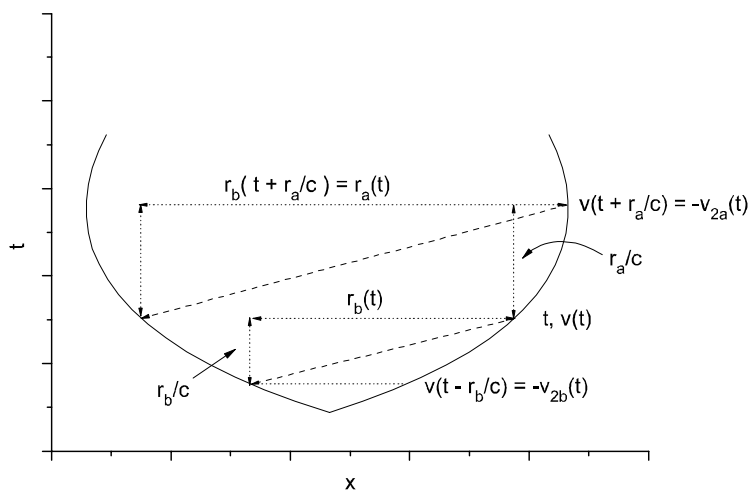


Figura 4-3: Nesta figura mostra-se como as velocidades v_{2a} , v_{2b} , v_1 e os raios r_a , r_b estão relacionadas pelo cone de luz com as funções $r(t)$, $v(t)$.

É necessário regularizar as Eqs. (4.2) e (4.5)-(4.9) para poder achar uma solução numérica. Para isto deve-se conhecer o comportamento destas funções perto da colisão. Nos usaremos como guia a regularização do problema de Kepler discutido no Apêndice III. Nesse caso não relativístico [42, 43, 44], as equações ficam completamente regularizadas, porém o resultado não é físico na colisão, já que a velocidade e a aceleração tendem a infinito. No presente caso relativístico, demonstraremos primeiro um teorema preliminar que mostra que as velocidades das partículas tendem à velocidade da luz na colisão. Para cargas de sinal oposto, cada partícula sente uma força de *atração* da outra partícula nas posições passada e futura. Por isto para soluções *físicas* nas quais a aceleração não diverge, a distância entre elas *sempre* tende a zero. Note-se que não existe no caso atrativo um teorema de existência e unicidade como no caso repulsivo [39]. Logo poderiam existir soluções nas quais uma das partículas atinge a velocidade da luz a uma distância finita, e com uma aceleração infinita. Estas soluções disparantes, se existirem, não são estudadas aqui.

As velocidades e os raios obedecem certas propriedades monotônicas que são mostradas a seguir. Da Eq. (4.2) se deduz que $\frac{dv_1}{dt_1} < 0$, para todos os tempos, já que os dois termos da direita são positivos. Pela simetria da órbita $\frac{dv_{2a}}{dt_{2a}} > 0$ e $\frac{dv_{2b}}{dt_{2b}} > 0$. Encontra-se então que

$$|v_{2a}| < v_1 < |v_{2b}|, \quad (4.12)$$

para qualquer tempo t_1 . Também é fácil mostrar que $r_a(t_{2a})$ e $r_b(t_1)$ são funções monotônicas. Como as velocidades são globalmente monotônicas, existe um raio máximo r_0 para $t = t_0$ onde $v_1(t_1 = t_0) = v_{2a}(t_{2a}) \equiv v_0$ (vide Figura 4.1). Das Eqs. (4.5) e (4.7) temos que

$$\frac{dr_a}{dt_1} = \frac{v_1 - v_{2a}}{1 + v_{2a}}, \quad (4.13)$$

$$\frac{dr_b}{dt_1} = \frac{v_1 - v_{2b}}{1 - v_{2b}}, \quad (4.14)$$

então $\left. \frac{dr_a}{dt_1} \right|_{t_1=t_0} = 0$ para $t_1 = t_0$. Obviamente também se cumpre que

$$\begin{aligned} \frac{dr_a}{dt_1} &> 0 ; t < t_0, \\ \frac{dr_a}{dt} &< 0 ; t > t_0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Por causa disto e do fato de que r_a e r_b são determinadas por uma única função $r(t)$ avaliada em pontos distintos (4.10) obtem-se que

$$r_b < r_a, \quad (4.16)$$

para todo $t < t_0$ e $r_b > r_a$ para todo $t > t_0$.

Demonstraremos agora que para o caso atrativo os modulos das velocidades v_{2a} , v_{1a} e v_{2b} tendem à velocidade da luz c , quando o raio maior r_a tende a zero para $t = -t_C$.

Lema:

Assumindo que existe uma solução contínua $(r(t), v(t))$ na vizinhança da colisão $r_a = 0$ ($r_b = 0$) e $t = -t_C$ ($t = t_C$), então as velocidades das duas partículas tendem à velocidade da luz em $t = -t_C$.

Prova pelo absurdo:

Vamos demonstrar isto pelo absurdo: da divisão da Eq. (4.14) pela Eq. (4.14) obtem-se

$$\frac{dv_1}{dr_b} = -\frac{(1 - v_{2b})}{2(v_1 - v_{2b})} \left\{ \frac{(1 - v_{2a})}{r_a^2(1 + v_{2a})} + \frac{(1 + v_{2b})}{r_b^2(1 - v_{2b})} \right\} (1 - v_1^2)^{3/2} \quad (4.17)$$

Consideramos apenas a colisão em $t = -t_C$, sendo a outra colisão em $t = t_C$ completamente simétrica. Suponhamos que nenhuma das velocidades atinge a velocidade da luz

na colisão. Então para $t = -t_C$, temos

$$\begin{aligned} v_1 &= v^C, \\ v_{2a} &= -v^C, \\ v_{2b} &= -v^C. \end{aligned} \tag{4.18}$$

onde $|v^C| < 1$. Desprezando os termos de menor ordem e usando a Eq. (4.16), integra-se a Eq. (4.17) termo a termo, obtendo-se

$$v_1 = \frac{cte}{r_b} + \dots, \tag{4.19}$$

Da Eq. (4.19) vemos que quando r_b tende a zero, v_1 tende a infinito. Isto é absurdo já que foi suposto $v_1 = v_1^C < 1$. Concluimos então que $v_1(r_a = 0) = 1$. Da propriedade monotônica (4.12), se deduz também que $v_{2b}(r_b = 0) = -1$. Por último, usando a Eq. (4.11) para $r_a = 0$, vemos que $v_{2a}(r_a = 0) = -1$, ou seja, $v^C = 1$.

4.3 Transformação do parametro de evolução

Para entender a introdução de um parametro de evolução, nós estudaremos uma expansão das velocidades v_{2a} , v_1 e v_{2b} em série de potências, dos raios futuro e passado perto da colisão. Para achar a solução deste tipo de equação não-local, a forma funcional das velocidades v_a, v_b deve ser postulada *a priori*, o que transforma as equações não-locais em equações diferenciais ordinárias. Como já foi explicado no Capítulo 3 e na Ref [35], a solução destas equações *não-locais* só será obtida depois de impor a condição de *auto-consistência*. Para isso, postulamos as funções $1 + v_{2a}$ e $1 + v_{2b}$, como funções do raio r_a, r_b elevados a certas potências da seguinte forma

$$1 + v_{2a} \sim ar_a^q + a_1 r_a^{q+1} + \dots \tag{4.20}$$

$$1 + v_{2b} \sim Br_b^s + B_1 r_b^{s+1} + \dots \tag{4.21}$$

onde q e $p > 0$, e a e $B > 0$ são constantes a determinar.

Para simplificar o tratamento, vamos primeiro demonstrar que o segundo termo da direita na Eq. (4.2) é infinitesimal perto da colisão. Para isto escrevemos as equações para v_1 e r_b em termos do parâmetro de evolução r_a (dividindo-se a Eq. (4.2) pela Eq. (4.13) e a Eq. (4.14) pela Eq. (4.13)), resultando em

$$\frac{dv_1}{dr_a} = -\frac{(1-v_1^2)^{3/2}}{2r_a^2(v_1-v_{2a})} \left\{ (1-v_{2a}) + \frac{(1+v_{2b})(1+v_{2a})r_a^2}{r_b^2(1-v_{2b})} \right\} \quad (4.22)$$

$$\frac{dr_b}{dr_a} = \frac{v_1-v_{2b}}{1-v_{2b}} \frac{1+v_{2a}}{v_1-v_{2a}} \sim \frac{1+v_{2a}}{2} + \left(\frac{1+v_{2a}}{2} \right)^2 \sim \frac{a}{2} r_a^q + \dots \quad (4.23)$$

Integrando-se a Eq. (4.23) obtemos

$$r_b \sim \frac{a r_a^{q+1}}{2(q+1)}. \quad (4.24)$$

O primeiro termo da direita na Eq. (4.22) é constante em primeira ordem perto de $r_a = 0$,

$$(1-v_{2a}) \sim 2, \quad (4.25)$$

enquanto o segundo termo é proporcional a $r_a^{q(s-1)+s}$

$$\frac{(1+v_{2b})(1+v_{2a})r_a^2}{r_b^2(1-v_{2b})} \sim \frac{aB r_b^{s-2} r_a^{q+2}}{2} \propto r_a^{q(s-1)+s}. \quad (4.26)$$

Este último tende a zero por ser $qs + (s - q) > 0$, já que $r_a > r_b$, e por (4.20) $s \geq q$.

Usando os resultados acima, pode-se verificar que as equações Eqs. (4.5)-(4.9) ficam regulares se introduzimos o parâmetro de evolução u , definido por

$$dt_1 = du (1+v_{2a})(1-v_{2b}). \quad (4.27)$$

Note-se que u é simétrico com respeito ao tempo, comportando-se como dr_a para $t = -t_C$, e como dr_b para $t = t_C$. Desprezando os termos menores, o sistema de equações Eqs.

(4.2) e (4.5)-(4.9) simplifica-se perto da colisão, sendo este ainda um sistema *não-local*, que depende somente da velocidade avançada v_{2a} . Por causa disso, esta velocidade tem que ser ainda postulada. Note-se que nestas equações não aparece a velocidade v_{2b} , (para $t = t_C$, não aparece v_{2a}). O sistema de equações Eqs. (4.2) e (4.5)-(4.9) simplifica-se perto de $u = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{dr_a}{du} &\sim 4, \\ \frac{dv_1}{du} &\sim -\frac{4\sqrt{2}}{r_a^2} (1 - v_1)^{3/2}, \\ \frac{dr_b}{du} &\sim 2(1 + v_{2a}).\end{aligned}\tag{4.28}$$

Escolhendo $u = 0$ para $t = -t_C$ e postulando-se para v_{2a} uma forma funcional com dois parâmetros a e q , ($1 + v_{2a} \sim 4au^q$), integra-se as Eqs. (4.28), resultando em

$$r_a \sim 4u,\tag{4.29}$$

$$1 + v_{2a} \sim 4au^q\tag{4.30}$$

$$1 - v_1 \sim 32u^2,$$

$$r_b \sim \frac{2a}{(q+1)}u^{q+1}.$$

Também da expressão Eq. (4.21) deduz-se que

$$1 + v_{2b} \sim B \frac{2^s a^s}{(q+1)^s} u^{s(q+1)}.\tag{4.31}$$

O último passo para encontrar a solução das equações *não-locais* perto da colisão é exigir que $x_{2a}(t)$ e $x_{2b}(t)$ sejam a mesma órbita. Para isto, basta impor que exista $\Delta u(u) > 0$, definido por

$$t_1(u + \Delta s(u)) = t_{2a}(u),\tag{4.32}$$

tal que se cumpra

$$1 - v_1(s + \Delta u(u)) = 1 + v_{2a}(u), \quad (4.33)$$

para $u = 0$. Encontra-se que

$$\begin{aligned} \Delta u(u) &= F u^{\frac{1}{q+1}}, \\ q &= 1, \\ F &= \sqrt{a/2}, \quad a = 2\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Por último encontra-se B e s , impondo a condição de autoconsistência

$$1 + v_{2b}(u + \Delta u(u)) = 1 - v_1(u), \quad (4.35)$$

obtendo-se assim $B = 2$ e $s = 2$. Pode-se expressar as velocidades em função dos raios usando as Eqs. (4.30), (4.31) e (4.44)

$$1 + v_{2a} \sim 2\sqrt{2}r_a + \dots, \quad (4.36)$$

$$1 - v_1 \sim 2r_a^2 + \dots, \quad (4.37)$$

$$1 - v_1 \sim 2\sqrt{2}r_b + \dots, \quad (4.38)$$

$$1 + v_{2b} \sim 2r_b^2 + \dots \quad (4.39)$$

Usando estas últimas equações Eqs. (4.36)-(4.39) podemos re-escrever as velocidades v_{2a} e v_{2b} em função de v_1

$$1 + v_{2a} \sim 2\sqrt{1 - v_1} + \dots \quad (4.40)$$

$$1 + v_{2b} \sim \frac{(1 - v_1)^2}{4} + \dots \quad (4.41)$$

Estas expressões Eqs. (4.40) e (4.41) serão usadas na solução numérica. Também pode-se verificar da Eq. (4.25) que o termo correspondente à posição passada contribui na

expansão de v_1 na ordem 5 em r_a .

É interessante achar também o próximo termo da série para v_1 , Eq. 4.37. Para isso a equação (4.22) pode ser então simplificada usando-se que

$$\frac{1 - v_{2a}}{v_1 - v_{2a}} = \frac{1}{1 - \frac{(1-v_1)}{2-(1+v_{2a})}} \sim \frac{2}{1 + v_1} \left(1 + \frac{(1-v)(1+v_{2a})}{4} \right) \sim \frac{2}{1 + v_1}, \quad (4.42)$$

que desprezando-se termos menores, obtem-se

$$\frac{dv_1}{dr_a} = -\frac{(1 - v_1^2)^{3/2}}{r_a^2(1 + v_1)} + O_{nla}(r_a^4) + O_{nlb}(r_a^5). \quad (4.43)$$

Note-se que para esta equação ordinária, com condição inicial $r_a = 0$, a solução existe apenas se $v_1^2 = 1$. Porém, $f(r_a, v_1) \equiv -\frac{1}{2} \frac{(1-v_1^2)^{3/2}}{r_a^2(1+v_1)}$ não obedece à condição de *Lipschitz*, e a solução não é única. Esta depende de uma constante livre C , e pode ser escrita como

$$v_1(r_a) = \frac{(1 + Cr_a)^2 - r_a^2}{(1 + Cr_a)^2 + r_a^2} + O_{nla}(r_a^5) + \dots \quad (4.44)$$

Pode-se checar diretamente que esta expressão é solução da Eq. (4.43). A constante C está relacionada com a energia E e será calculada na Seção IV. Expandindo-se a Eq. (4.44) obtemos

$$1 - v_1 \sim 2r_a^2 + 4Cr_a^3 + \dots \quad (4.45)$$

que contém também o próximo termo da expansão Eq. (4.37). Note-se que podemos também obter o próximo termo na série da Eq. (4.39) substituindo v_1 por $-v_{2b}$ e r_a por r_b na Eq. (4.45)

$$1 + v_{2b} \sim 2r_b^2 + 4Cr_b^3 + \dots$$

Isto é uma consequência da simetria, ou seja, destas funções serem determinadas a partir de uma única função, como está ilustrada na Figura 4.3. Podemos inclusive determinar

v_{2b} até ordem quinta com esta simetria

$$v_{2b}(r_b) = -\frac{(1 + Cr_b)^2 - r_b^2}{(1 + Cr_b)^2 + r_b^2} + O_{nla}(r_b^5) + \dots \quad (4.46)$$

4.4 Utilização das expressões integrais da Energia na regularização das equações

Nesta teoria não-local, as constantes de Noether envolvem não somente as velocidades e as posições retardadas e avançadas, mas também integrais destas ao longo de segmentos da órbita (Eq. (2.71)). Ao longo de órbitas simétricas a energia $E_T^{WF} \equiv 2E$ (E é a energia por partícula) se simplifica, resultando em duas expressões simétricas com respeito ao tempo [45], [46]

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2}} - \frac{1}{2r_a} - \frac{Y_a}{(1 + v)}, \quad (4.47)$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2}} - \frac{1}{2r_b} + \frac{Y_b}{(1 - v)}, \quad (4.48)$$

onde Y_a e Y_b estão definidas por

$$Y_a \equiv \frac{(1 + v_1)}{2} \int_{t_1}^{t_{2a}=t_1+r_a/c} dt'_1 \frac{v_1}{r_-^2} \frac{(1 + v_2^-)}{(1 - v_2^-)}, \quad (4.49)$$

$$Y_b \equiv \frac{(1 - v_1)}{2} \int_{t_{2b}=t_1-r_b/c}^{t_1} dt'_1 \frac{v_1}{r_+^2} \frac{(1 - v_2^+)}{(1 + v_2^+)}, \quad (4.50)$$

onde r_+, v_2^+ e r_-, v_2^- são os raios e as velocidades avançadas e retardadas com respeito à partícula 1 como se mostra na Figura 4.3. Derivando-se qualquer uma das expressões da energia, Eqs. (4.47) ou (4.48), em relação ao tempo e usando a Eq. (4.2) obtém-se $\frac{dE}{dt_1} = 0$ (ou seja, a energia é conservada). Note-se que estas expressões tem o limite correto para energias não relativísticas uma vez que Y_a e Y_b tendem a zero longe do ponto de colisão.

Como pode-se apreciar, a Eq. (4.2) não é regular na colisão, ou seja, aparecem ter-

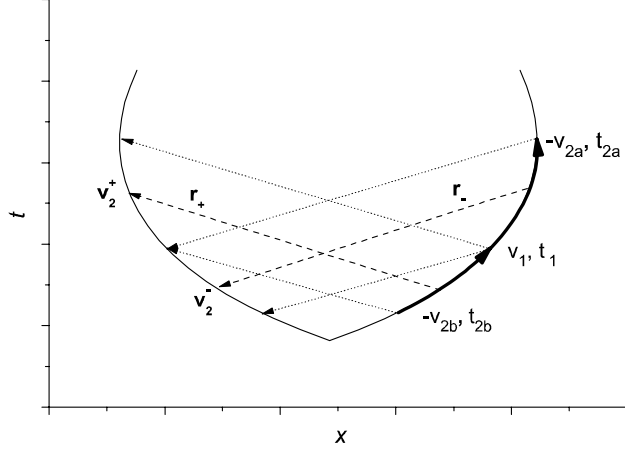


Figura 4-4: Segmentos da órbita relevantes para o cálculo de Y_a e Y_b , e as quantidades r^+, r^-, v_2^+, v_2^- .

mos infinitos em forma explícita. Para regularizar esta equação utilizaremos as energias definidas anteriormente Eqs. (4.47) e (4.48). Estudaremos aqui somente a colisão que acontece em $t = -t_C$, sendo que para $t = t_C$ o estudo é completamente simétrico. Pode-se calcular aproximadamente a energia na Eq. (4.48) usando a Eq. (4.2) e desprezando-se o termo menor

$$\int_{-v_{2b}}^{v_1} \frac{v_1}{(1 - v_1^2)^{3/2}} dv_1 = -\frac{1}{2} \int_{t_{2b}}^{t_1} \frac{v_1 (1 - v_2^+)}{r_+^2 (1 + v_2^+)} dt_1' + O(r_a^5). \quad (4.51)$$

Substituindo a Eq. (4.51) na Eq. (4.50) obtém-se uma aproximação para Y_b

$$Y_b \simeq \frac{\sqrt{1 - v_1}}{\sqrt{1 + v_1}} - \frac{(1 - v_1)}{\sqrt{1 - v_{2b}^2}}, \quad (4.52)$$

e substituindo-se esta aproximação de Y_b na Eq. (4.48), obtém-se

$$E \simeq -\frac{1}{2r_b} + \frac{1}{\sqrt{1 - v_{2b}^2}}. \quad (4.53)$$

Esta expressão Eq. (4.53) confirma o comportamento de $v_{2b}(r_b)$ como função de r_b Eq. (4.39). Pode-se também avaliar uma aproximação para Y_a , usando a Eq. (4.39) obtendo assim

$$Y_a \simeq \frac{(1+v_1)(r_a-r_b)}{2} \simeq -\frac{(1-v_1)}{2\sqrt{2}} \quad (4.54)$$

Por último, usando as aproximações Eqs. (4.44), (4.38) e a Eq. (4.48), a constante C pode ser calculada como

$$C = -2E. \quad (4.55)$$

A evolução de v_1 em relação ao parâmetro u pode ser calculada da Eq. (4.2)

$$\frac{dv_1}{du} = -\frac{\sqrt{1-v_1^2}}{2}\xi, \quad (4.56)$$

onde ξ é definida por

$$\xi \equiv (1-v_1^2) \left(\frac{(1-v_{2a})(1-v_{2b})}{r_a^2} + \frac{(1+v_{2a})(1+v_{2b})}{r_b^2} \right). \quad (4.57)$$

Note-se que : (i) ξ da Eq. (4.57) tem indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$, (ii) e $\frac{dv_1}{du}$ na Eq. (4.56) não evolui a partir da condição inicial $v_1 = 1$. Para resolver (ii) convem calcular v_1 a partir das variáveis Y_a, Y_b usando as Eqs. (4.47) e (4.48). Precisa-se então incluir equações de evolução para Y_a e Y_b que são obtidas derivando em relação ao tempo as Eqs. (4.47) e (4.48), resultando

$$\frac{dY_a}{du} = \frac{(v_1-v_{2a})(1-v_{2b})(1+v_1)}{2r_a^2} - \frac{\xi}{2} \left(\frac{v_1}{(1-v_1)} - Y_a \sqrt{\frac{1-v_1}{1+v_1}} \right), \quad (4.58)$$

$$\frac{dY_b}{du} = -\frac{(v_1-v_{2b})(1+v_{2a})(1-v_1)}{2r_b^2} + \frac{\xi}{2} \left(\frac{v_1}{(1+v_1)} + Y_b \sqrt{\frac{1+v_1}{1-v_1}} \right). \quad (4.59)$$

O sistema formado por Eqs. (4.59) e (4.58) ainda contém indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$. Porém, demonstraremos que estas expressões tem limites finitos na colisão se: (i) as órbitas tem energia finita (ii) as variáveis Y_a e Y_b são finitas na colisão, ou seja, cumprem-

se os comportamentos já determinados na Seção II.

Estudaremos a colisão para $t = -t_C$, definindo as variáveis auxiliares $z \equiv \sqrt{1 - v_1}$, $w \equiv \sqrt{1 + v_1}$ como também as quantidades explicitamente finitas na colisão α e β , definidas como

$$\alpha \equiv \frac{1 + v_{2a}}{\sqrt{1 - v_1}}, \quad (4.60)$$

$$\beta \equiv \frac{1 + v_{2b}}{(1 - v_1)^2}. \quad (4.61)$$

Na colisão ($v_1 = 1$, $z = 0$ e $w = \sqrt{2}$), é fácil encontrar os valores limites de α e β : $\alpha = 2$ e $\beta = 1/4$, usando as Eqs. (4.40) e (4.41). Resolvendo a Eq. (4.47) para r_a e a Eq. (4.48) para r_b , obtem-se

$$r_a = \frac{w^2 z}{2(-w^2 z E - z Y_a + w)} \equiv \frac{w \rho_a}{2} z, \quad (4.62)$$

$$r_b = \frac{z^2 w}{2(-z^2 w E + w Y_b + z)} \equiv \frac{\rho_b}{2 Y_b} z^2. \quad (4.63)$$

As variáveis auxiliares ρ_a e ρ_b definidas pelas Eqs. (4.62) e (4.63) têm valores explicitamente finitos na colisão, dados por: $\rho_a^0 = 1, \rho_b^0 = 1$. Expressando-se a Eq. (4.58) nestas variáveis chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{dY_a}{du} = & T_f^a + z \left(4 \frac{\alpha}{\rho_a^2} + \frac{1}{2w} \xi Y_a + 2w^2 \alpha \beta \frac{Y_b}{\rho_b^2} \right) - 4z^2 \frac{\beta}{\rho_a^2} + \\ & + z^3 \left(2\alpha \frac{\beta}{\rho_a^2} - 2w^2 \alpha \beta \frac{Y_b}{\rho_b^2} \right) + 6z^4 \frac{\beta}{\rho_a^2} - 4z^5 \alpha \frac{\beta}{\rho_a^2}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

onde ξ é

$$\xi = \left(\frac{16(1 - \alpha z/2)(1 - \beta z^4)}{\rho_a^2} + \frac{4Y_b \alpha \beta z^3 w^2}{\rho_b^2} \right). \quad (4.65)$$

A Eq. (4.64) não é uma expansão em séries de potências, mas uma expressão exata e

regular. Na colisão z toma o valor $z = 0$, e T_f^a é o único termo diferente de zero e igual a

$$T_f^a = 4(1 - z(wE - Y_a/w))^2,$$

que é finito na colisão. Substituindo-se as Eqs. (4.63), (4.62) na Eq. (4.59) e depois de algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dY_b}{du} = & T_b^f + \left(16 + \frac{1}{2w}\xi + 8wE\alpha Y_b^2 - 4w\alpha\frac{Y_b}{\rho_a^2} + \frac{8}{w}\alpha Y_a Y_b^2\right) + \\ & + z \left(\frac{8}{wY_b} - 8E\alpha Y_a Y_b^2 - 16wE + 2\alpha\frac{Y_b^2}{\rho_b^2} - 4w^2 E^2 \alpha Y_b^2 - \frac{4}{w^2}\alpha Y_a^2 Y_b^2\right) \\ & + z^2 \left(2w^3\alpha\beta\frac{Y_b^2}{\rho_b^2} - 16\frac{E}{Y_b} - \frac{1}{2w}\xi\right) \\ & + z^3 \left(8w\frac{E^2}{Y_b} - 8w\beta\frac{Y_b}{\rho_a^2} + 2\alpha\beta\frac{Y_b^2}{\rho_b^2}\right) + 4wz^4\alpha\beta\frac{Y_b}{\rho_a^2}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde

$$T_b^f = \frac{4Y_b}{z}(2w - \alpha Y_b), \quad (4.67)$$

é o único termo potencialmente singular, já que contém uma divisão por zero. A seguir, mostraremos que este termo é finito. Para isto, usando a Eq. (4.48) expressamos z como

$$z = \frac{(r_b + \sqrt{r_b}\sqrt{2w^2Y_b + r_b + 4w^2EY_br_b})}{w(1 + 2Er_b)}. \quad (4.68)$$

Substituindo agora a Eq. (4.52) para Y_b

$$Y_b \simeq \sqrt{2} - \frac{z}{w} + O(z^4),$$

na Eq. (4.68), encontra-se para $z^2(r_b) \equiv (1 - v_1)$ que

$$z^2 = 2r_b\sqrt{2} - 4\sqrt{2}Er_b^2 + O(r_b^3). \quad (4.69)$$

Finalmente, como foi discutido anteriormente na Eq. (4.11) e como está ilustrado na Figura 4.1, a simetria proposta para estas órbitas implica que $v_1(r_a)$ é funcionalmente idêntica a $-v_{2b}(r_b)$. Trocando-se agora o argumento da Eq. (4.69) de r_b para r_a e eliminando r_a em favor de v_1 usando a Eq. (4.37), obtem-se

$$\alpha \equiv \frac{1 + v_{2a}}{z} = 2 - 2\sqrt{2}E z + O(z^2). \quad (4.70)$$

Substituindo a Eq. (4.70) na Eq. (4.67) e expandindo, encontra-se que T_b^f é *finito* e diferente de zero na colisão.

4.5 Solução numérica

O procedimento numérico só pode utilizar equações que sejam explicitamente regulares. Como a velocidade avançada v_{2a} aparece naturalmente na expressão Eqs. (4.67) para T_b^f , temos que postular v_{2a} para que T_b^f seja *explicitamente finito*, obtendo-se assim uma equação Eq. (4.66) regular na colisão. Além disso, devemos postular um *ansatz* para v_{2a} e v_{2b} de modo que: (i) obedeça as condições de simetria temporal da órbita

$$\begin{aligned} v_{2a}(t) &= -v_{2b}(-t), \\ r_a(t) &= r_b(-t). \end{aligned} \quad (4.71)$$

(ii) Se comporte na colisão como foi achado anteriormente, Eqs. (4.40) e (4.41). (iii) Todas as equações envolvidas sejam regulares (iv) A função $v_{2b}(r_b)$ deve ser determinada imitando a Eq. (4.46). A forma mais simples de satisfazer as condições acima, é postular v_{2a} e v_{2b} como funções de r_a , r_b e v_1 , em termos de um único conjunto de parâmetros que

aparecem na função $g_{a,b}$

$$\begin{aligned}\frac{1 - v_{2a}}{1 + v_{2a}} &\equiv \frac{(1 + v_1)}{(1 - v_1)} \frac{r_a}{\sqrt{2}g_a}, \\ \frac{1 + v_{2b}}{1 - v_{2b}} &\equiv \frac{(1 - v_1)}{(1 + v_1)} \frac{r_b}{\sqrt{2}g_b},\end{aligned}\tag{4.72}$$

onde $g_{a,b}$ é postulada como a série regular

$$g_{a,b}(r_{a,b}) \equiv 1 + k_1 r_{a,b} + k_2 r_{a,b}^2 + \dots k_N r_{a,b}^N \dots\tag{4.73}$$

Usando este *ansatz* o termo T_b^f ainda não fica *explicitamente* finito. Por isto, deve ser usado um *ansatz* melhorado resultado de dividir por r_b/r_a e multiplicar por uma série equivalente $f(r)$ a este, a Eq. (4.72), obtendo assim

$$\begin{aligned}\frac{1 - v_{2a}}{1 + v_{2a}} &\equiv \frac{1}{(3 + v_1)} \sqrt{\frac{1 + v_1}{1 - v_1}} \frac{2r_a^2 f_a}{g_a r_b}, \\ \frac{1 + v_{2b}}{1 - v_{2b}} &\equiv \frac{1}{(3 - v_1)} \sqrt{\frac{1 - v_1}{1 + v_1}} \frac{2r_b^2 f_b}{g_b r_a},\end{aligned}\tag{4.74}$$

onde $f_{a,b}$ é definida por

$$f_{a,b}(r_{b,a}) \equiv 1 + K_1 r_{b,a} + K_2 r_{b,a}^2 + \dots + K_N r_{b,a}^N\tag{4.75}$$

Pode-se checar diretamente que este *ansatz* obedece todas as condições descritas anteriormente. Este também também é definido simétrico com respeito ao tempo, $r_a \leftrightarrow r_b, v_1 \leftrightarrow -v_1$, e tem o comportamento correto perto da colisão predito nas Eqs. (4.40) e (4.41).

Depois de substituir os coeficientes k_i, K_i na Eq. (4.73), as equações se convertem em equações diferenciais ordinárias que são integradas com um método de *Runge-Kutta* implícito de nona ordem. Geram-se assim duas trajetórias para a partícula 2, correspondentes ao passado e futuro. A escolha de condições iniciais simétricas com respeito ao tempo gera uma solução com a mesma simetria, já que as equações são invariantes pela

transformação $u \leftrightarrow -u$. O sistema completo de equações inclui as Eqs. (4.59) e (4.58) junto com Eqs. (4.5)-(4.9) em termos de r_a, r_b, Y_a, Y_b , e v_1 . Pode-se calcular as condições iniciais para Y_a, Y_b em $r_a = 0, r_b = 0$ e $v_1 = 1$, usando a Eq. (4.52) e (4.54) dando

$$\begin{aligned} Y_a(u=0) &= 0, \\ Y_b(u=0) &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

A velocidade v_1 é encontrada diretamente resolvendo para v_1 a combinação simétrica

$$E_T = \frac{2}{\sqrt{1-v_1^2}} - \frac{1}{2r_a} - \frac{1}{2r_b} + \frac{Y_b}{(1-v)} - \frac{Y_a}{(1+v)} \quad (4.76)$$

resultado da soma das Eqs. (4.47) e (4.48). Este procedimento é sempre possível porque $\frac{dr_a}{du}$, $\frac{dY_a}{du}$ e $\frac{dY_b}{du}$ são diferentes de zero na colisão.

Nosso método numérico auto-consistente calcula duas funções $S_1(k, K, t)$ e $S_2(k, K, t)$, que devem-se anular quando as duas trajetórias passada e futura são coincidentes. Estas funções de controle da autoconsistência são definidas por

$$\begin{aligned} S_1(k, K, t) &= x_1(t) + x_{2a}(t), \\ S_2(k, K, t) &= x_1(t) + x_{2b}(t), \end{aligned} \quad (4.77)$$

para uma grade de m pontos sobre a órbita ($m \simeq 400$). Os coeficientes são então modificados por um algoritmo de minimização de mínimos quadrados que atua no espaço dos parâmetros (*Levenberg-Marquardt algorithm*) [41]. Note-se que se pudéssemos encontrar a solução analítica das equações diferenciais ordinárias conseguiríamos anular em forma exata para qualquer ordem estas funções S_1 e S_2 . Numéricamente, consegue-se um mínimo para $S_{1,2}$ da ordem de 1×10^{-5} (vide Tabela II).

O processo numérico precisa de uma boa solução aproximada para começar a minimização, pois iniciando esta com coeficientes muito errados não se consegue a convergên-

cia. Para isto usamos a solução com a condição inicial no ponto simétrico, $v_1 = 0$. Encontramos assim os coeficientes aproximados k_i relativos a cada raio r_s , definido por $r_a(v_1 = 0) = r_b(v_1 = 0) \equiv r_s$. Estamos agora preparados para começar uma integração começando da colisão. Como a energia E aparece explicitamente na equações de movimento, deve-se conhecer primeiro esta energia E em função dos k_i, K_i . Esta energia pode achar-se em forma *exata* a partir destes coeficientes

$$v_s = \frac{(-3g_b + 2r_s f_b)}{(3g_b + 2r_s f_b)}, \quad (4.78)$$

$$E = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r_s} + \frac{1}{\sqrt{1 - v_s^2}} \right),$$

onde

$$v_{2a}(v_1 = 0) = -v_{2b}(v_1 = 0) \equiv v_s.$$

Agora podemos começar a integração a partir da colisão ($r_a = r_b = 0$), usando estes coeficientes e a energia E encontrados acima. Nosso procedimento numérico recalcula os coeficientes para esta energia fixa E até a convergência final.

r_s	E	$k_1 r_s$	$K_1 r_s$	N	$k_N r_s^N$	$K_N r_s^N$	<i>relative error</i>
0.2	-1.2459	0.0800	82.24	5	-6.8992×10^{-2}	-0.30701	3×10^{-6}
1.0	0.5550	-0.0129	-0.2461	5	2.915	1.277	1×10^{-4}
5.0	0.9062	3.211	3.851	4	8.91	-13.825	7×10^{-4}
10.0	0.9519	10.70	4.249	4	7.886	-2.044	6×10^{-4}

Tabela II

As trajetórias auto-consistentes para os diferentes raios iniciais aproximados: $r_s = 0.5$, $r_s = 1$, $r_s = 5$, $r_s = 10$, são mostradas na Figura 4.5. Para raios maiores que $r_s \approx 10$ e saindo com a condição inicial simétrica $r_a = r_b = r_s$, é muito difícil fazer com que

as trajetórias cheguem suficientemente perto da colisão para poder começar então com raio zero. Para estes raios são achadas apenas as órbitas começando com a condição inicial simétrica $r_s = 100$, $r_s = 10^3$, $r_s = 10^4$, $r_s = 137^2$, como se mostra na Figura 4.6. A eficiência do método de regularização já foi provada para raios menores onde as velocidades são relativísticas em quase toda a órbita. Na Tabela II com os primeiros coeficientes, a energia E da órbita e o erro relativo.

4.6 Conclusões

Nós estudamos a solução numérica das equações regularizadas, para o problema atrativo de dois corpos em movimento colinear. A diferença do caso repulsivo, no caso atrativo não existe um teorema de existência e unicidade como o da Ref. [39]. Os resultados numéricos sugerem que a solução simétrica é univocamente determinada apenas pela energia. Estudamos isto fazendo pequenas variações dos coeficientes k_i, K_i e aplicando-se novamente a minimização, os coeficientes convergem aos mesmos valores encontrados anteriormente. Isto sugere que uma segunda solução, se existir, terá parâmetros completamente diferentes dos encontrados aqui.

A regularização das órbitas Coulombianas planares esta discutida no Apêndice III e nas Ref. [43, 44]. As órbitas quase-colineares são elipses com uma excentricidade infinitesimal, onde as partículas trocam de direção na hora da colisão, como explicado no Apêndice III. A solução relativística que estudamos aqui é topologicamente diferente, como podemos ver a partir da Eq. (4.29), que prediz na colisão que $\frac{dv_1}{dr_a} = 0$ (para $r_a = 0$). Isto significa que as partículas aproximam-se da colisão sem sentir *nenhuma força*. Extrapolando o resultado para duas dimensões, com uma distância mínima ε , $v_1 \sim 1$, concluímos que no caso relativístico as partículas não mudam de direção na colisão. Estas ainda sentem uma força na direção perpendicular ao eixo, porém esta é menor que a força Coulombiana, já que no ponto de distância mínima as posições futura e passada da outra partícula estão longe do ponto de contato, isto é mostrado na Figura 4.7.

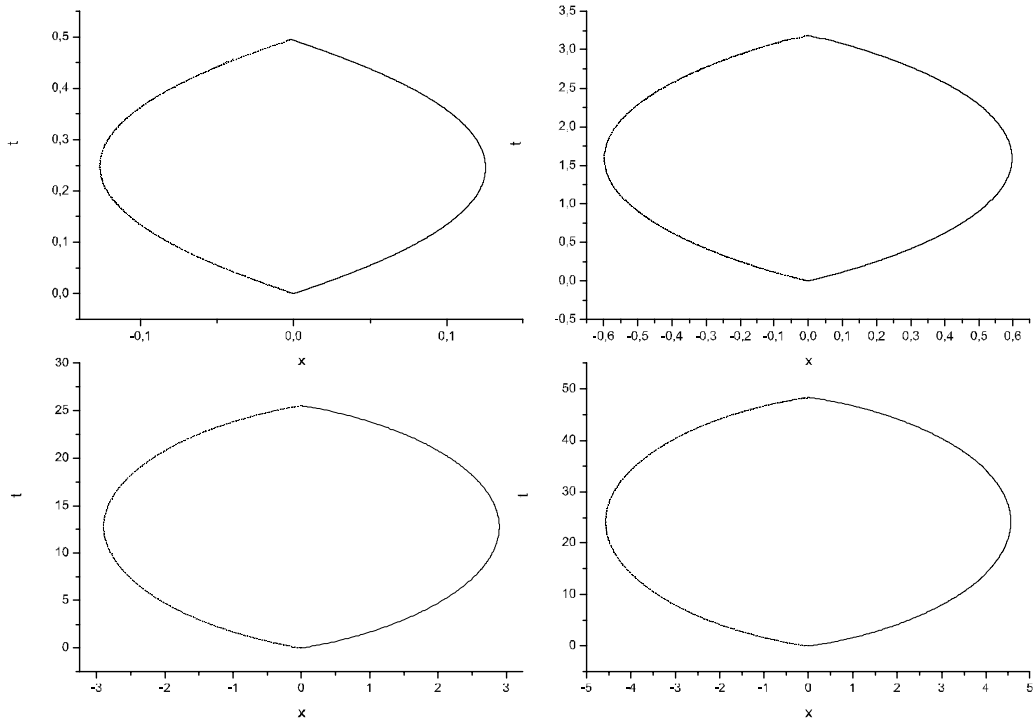


Figura 4-5: Trajetórias calculadas numericamente saindo com a condição inicial $r_a = r_b = 0$, $Y_a = 0$, $Y_b = \sqrt{2}$ e $v_1 = 1$. Denota-se com traço sólido a trajetória da partícula 1, e com traço pontilhado as duas trajetórias coincidentes da partícula 2.

Da análise numérica apresentada na Tabela II, vemos que nossas séries convergem para todas as energias. Observamos também que para raios clássicos menores que o raio do elétron a energia fica negativa, o que é uma surpresa.

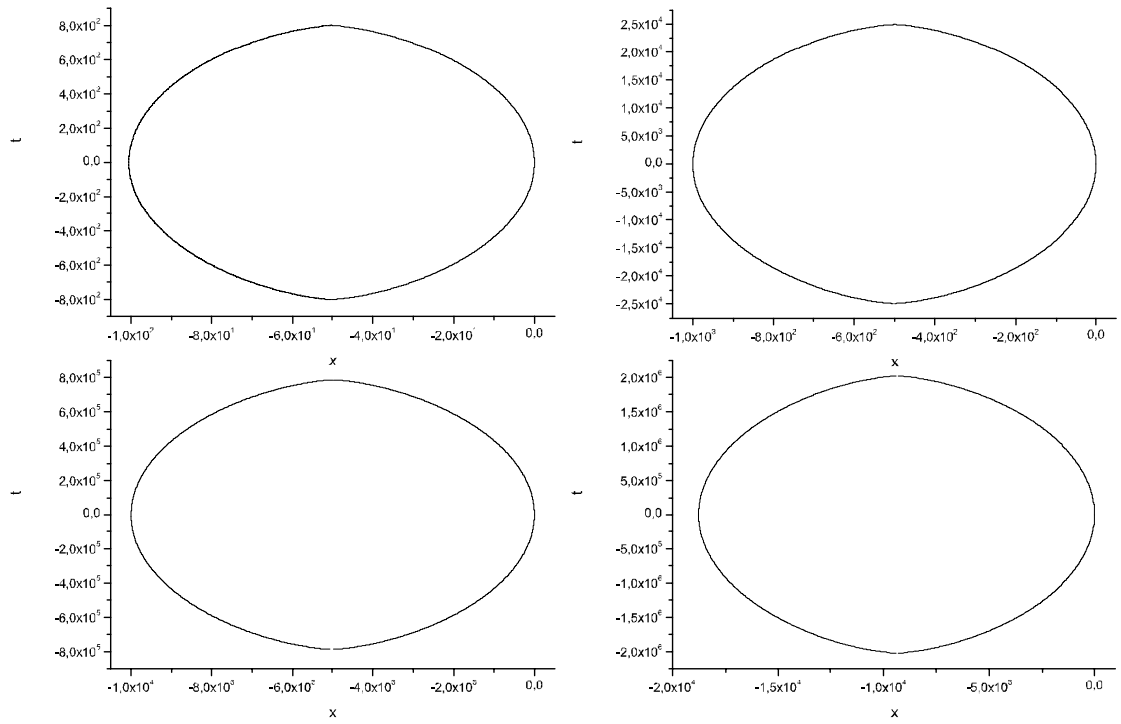


Figura 4-6: Trajetórias calculadas numericamente saindo com a condição inicial $r_a = r_b = r_s$ e $v_1 = 0$. Para raios $r_s = 100$, $r_s = 10^3$, $r_s = 10^4$, $r_s = 137^2$.

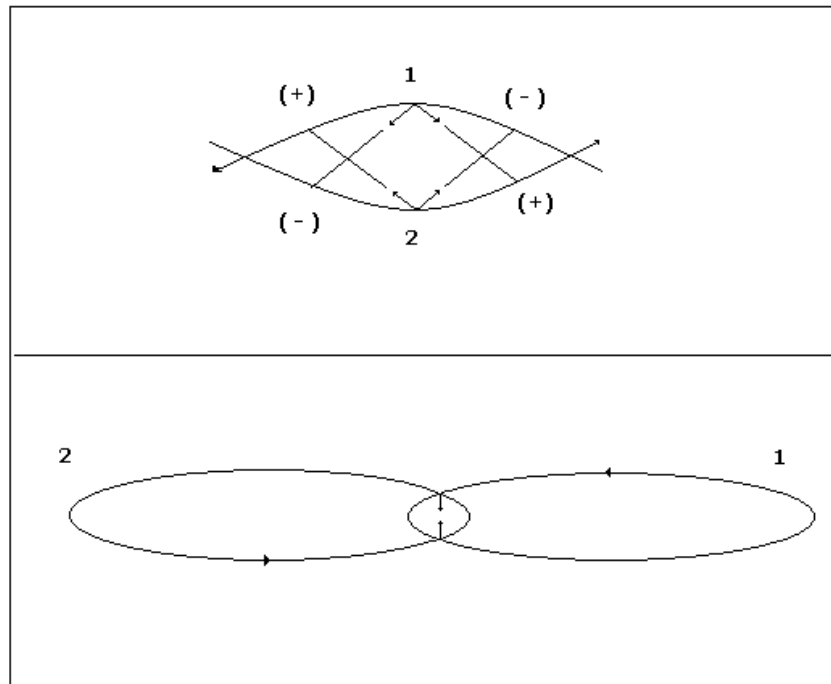


Figura 4-7: Mostra-se a extrapolação do comportamento das trajetórias perto de uma dimensão na eletrodinâmica de ação à distância (acima), comparada com a aproximação Coulombiana (abaixo).

Apêndice I: Teorema de não-interação

Daremos a seguir uma demonstração do teorema provado em 1963 da Ref. [4]. Trabalharemos com duas partículas no espaço de fase construído com doze variáveis $q_1^{1,2}, q_2^{1,2}, q_3^{1,2}, p_1^{1,2}, p_2^{1,2}, p_3^{1,2}$, o que denotaremos como (q, p) . Qualquer quantidade física neste espaço pode ser escrita como uma função $A(q, p)$ do espaço de fase. Uma transformação finita escreve-se formalmente através dos geradores $T(q, p)$ de um grupo de Lie qualquer atuando sobre uma função $A(q, p)$ das variáveis canônicas q e p como segue

$$e^{[T(q,p)]_s} A(q, p) \equiv A + s[A, T] + \frac{s^2}{2} [A, [A, T]] + \dots \quad (4.80)$$

onde s é o parâmetro contínuo, e os colchetes de Poisson estão definidos como

$$[A(q, p), T(q, p)] \equiv \sum_{n=1}^2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial A}{\partial q_i^n} \frac{\partial T}{\partial p_i^n} - \frac{\partial A}{\partial p_i^n} \frac{\partial T}{\partial q_i^n} \right). \quad (4.81)$$

Por exemplo, para uma translação, s é uma distância, para uma rotação s é um ângulo e para uma transformação de Lorentz $\tanh(s)$ é a velocidades relativa entre os referenciais.

Para o grupo de Poincaré a álgebra de Lie representada com os colchetes de Poisson e os dez geradores do grupo, \mathbf{P} , \mathbf{J} , \mathbf{K} e H , correspondentes as translações espaciais, rotações, *boost* e translações no tempo. Em notação vetorial estas relações podem ser

escritas como

$$\begin{aligned}
[\mathbf{P}, \mathbf{P}] &= 0, \quad [\mathbf{P}, H] = 0, \\
[\mathbf{J}, H,] &= 0, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{P}] = \mathbf{I} \wedge \mathbf{P}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{J}] = \mathbf{I} \wedge \mathbf{J} \\
[\mathbf{J}, \mathbf{K}] &= \mathbf{I} \wedge \mathbf{K}, \quad [\mathbf{K}, H] = \mathbf{P}, \quad [K, K] = -I \wedge \mathbf{J} \\
[K_i, P_j] &= \delta_{ij} H.
\end{aligned} \tag{4.82}$$

onde a notação $[\mathbf{J}, \mathbf{J}] = \mathbf{I} \wedge \mathbf{J}$ equivale a $[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k$, e i, j, k são subíndices espaciais e ε_{ijk} é o tensor anti-simétrico. Esta maneira de construir a simetria é geral e pode ser aplicada tanto para partículas como para teorias de campo.

Além destas considerações de simetria existem certas quantidades na teoria que devem-se transformar como vetores, tensores, etc, sob as transformações do grupo. No formalismo usado aqui, a variação de uma quantidade sob uma transformação de coordenadas é determinada pelo colchete entre esta quantidade e um gerador do grupo. Por exemplo, para uma transformação de Lorentz infinitesimal no eixo x , temos que

$$\begin{aligned}
q_j^n(t') &= q_j^n(t) - s \delta_{j1} t \\
t' &= t - s q_1^n(t) / c^2
\end{aligned} \tag{4.83}$$

onde s é a velocidade relativa infinitesimal. Então a transformação canônica infinitesimal no mesmo eixo gerada por K_1^s , se escreve

$$q_i^n(t') = q_i^n(t) + s [q_i^n(t), K_k] + \dots, \tag{4.84}$$

comparando estas duas expressões Eqs (4.83) e (4.84) obtém-se uma relação

$$q_i^n(t - s q^n/c^2) + s [q_i^n(t), K_k] = q_i^n(t) - st, \tag{4.85}$$

e finalmente se deduz em primeira ordem em s que

$$[q_i^n, K_k] = q_k^n [q_i^n, H] - \delta_{jk} ct \quad (4.86)$$

Esta última relação, Eq. (4.86) que chamaremos de Condição de linha de Universo (*CLU*), não é um resultado apenas da álgebra do grupo de Poincare mas também de exigir que as posições das partículas transformem corretamente sob uma transformação de Lorentz. De maneira similar, se a transformação fosse uma rotação ao redor do eixo z , e assumindo que $[J_k, H] = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} q_1'(t) &= q_1(t) \cos s + q_2(t) \sin s, \\ q_2'(t) &= -q_1(t) \sin s + q_2(t) \cos s, \end{aligned} \quad (4.87)$$

que implica nas seguintes relações

$$\begin{aligned} [J_3, q_1] &= q_2, \\ [J_3, q_2] &= -q_1. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Da mesma maneira para translações encontra-se que

$$[q_j, P_k] = \delta_{jk}. \quad (4.89)$$

Levando em conta os resultados acima, demonstraremos primeiro que os geradores P_j têm a mesma forma,

$$P_j = p_{1j} + p_{2j} \quad (4.90)$$

para partículas livres ou para partículas com interação. Dada qualquer interação, pode-se escrever

$$P_j = p_{1j} + p_{2j} + F_j. \quad (4.91)$$

e da Eq. (4.89) encontra-se diretamente que

$$[F_j, q_k] = 0. \quad (4.92)$$

Fazendo então a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{q}^1 + \mathbf{q}^2, \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2, \end{aligned} \quad (4.93)$$

encontra-se que

$$0 = [p_j, p_k] = 2(\partial F_j / \partial r_k - \partial F_k / \partial r_j). \quad (4.94)$$

Deixando agora as q_j^1 e q_j^2 fixas escreve-se a transformação canônica

$$\begin{aligned} p_j^1 &\rightarrow p_j^1 - \frac{F_j}{2} - \frac{W_j}{2}, \\ p_j^2 &\rightarrow p_j^2 - \frac{F_j}{2} + \frac{W_j}{2}, \end{aligned} \quad (4.95)$$

onde W_j esta definida por

$$W_j = \frac{1}{3} \sum_k \int dr_k \frac{\partial F_k}{\partial q_j}. \quad (4.96)$$

Note-se então que esta transformação deixa o P_j em forma de partículas livres, ou seja,

$$P_j = p_j^1 + p_j^2 + F_j \rightarrow p_j^1 + p_j^2. \quad (4.97)$$

Estas transformações são todas canônicas e por isto não alterao em nada a álgebra do resto dos geradores. Da mesma forma pode-se mostrar que os geradores das rotações J_k podem sempre ser escritos depois de transformações canonicas, usando a Eq. (4.88) na forma de partículas livres , ou seja,

$$J_i = \varepsilon_{ijk} q_j^1 p_k^1 + \varepsilon_{ijk} q_j^2 p_k^2. \quad (4.98)$$

Agora vejamos como a condição de *CLU*, Eq. (4.86), reescrita como

$$\partial K_k / \partial p_j^n = q_k^n (\partial H / \partial p_j^n), \quad (4.99)$$

onde $n = 1, 2$ denota as duas partículas, limita completamente a interação. Derivando esta equação em relação a p_i^m e trocando índices encontra-se que

$$(q_k^n - q_k^m) \partial^2 H / \partial p_j^n \partial p_i^m = 0. \quad (4.100)$$

Então para $m \neq n$ deduz-se que $\partial^2 H / \partial p_j^n \partial p_i^m = 0$, o que mostra que H pode-ser sempre expressado da forma

$$H = H_1 + H_2, \quad (4.101)$$

onde H_1 , depende unicamente de p_1, q_1 e q_2 , e H_2 depende de p_2, q_1 e q_2 . Do fato que $[H, P_j] = 0$, e usando as definições Eqs. (4.93), chega-se a

$$\partial H_1 / \partial r_j = -\partial H_2 / \partial r_j. \quad (4.102)$$

Como o lado esquerdo de Eq. (4.102) é função somente de p_1 , e o lado direito é função somente de p_2 , deve existir uma função G de \mathbf{r} e \mathbf{q} definidas em Eq. (4.93), tal que $\partial H_1 / \partial r_j = -\partial H_2 / \partial r_j = \partial G / \partial r_j$. Re definindo-se H_1 e H_2 adicionando G e $-G$, encontra-se que o novo H_1 depende agora só de p_1 e q e H_2 depende só de p_2 e q . Agora usando a identidade de Jacobi, e as Eqs. (4.82), obtém-se

$$[J_i, [H_1, J_j]] - [J_j, [H, J_i]] = \varepsilon_{ijk} [H_1, J_k], \quad (4.103)$$

que em notação vectorial escreve-se

$$[H_1, \mathbf{J}] = -(\mathbf{q} \wedge \nabla) \wedge [H_1, \mathbf{J}], \quad (4.104)$$

onde ∇ é o gradiente em relação a \mathbf{q} . Isto implica que deve existir uma função W tal que

$[H_1, \mathbf{J}] = -[H_2, \mathbf{J}] = \mathbf{q} \wedge \nabla W$, ou seja,

$$[H_1, J_j] = -[H_2, J_j] = [W, J_j]. \quad (4.105)$$

Pode-se então voltar a escrever H_1, H_2 adicionando e subtraindo W , de modo que os novos Hamiltonianos H_1, H_2 comutam com J_j ou seja sejam funções invariantes sob rotações. Então H_1 tem que ser somente função de $(p^1)^2, p^1 \cdot q, (q)^2$, e o mesmo para H_2 $\left((p^2)^2, p^2 \cdot q, (q)^2\right)$. Substituindo-se $H = H_1 + H_2$ na condição *CLU* Eq. (4.99) obtém-se uma expressão geral para K_j

$$K_j = q_j^1 H_1 + q_j^2 H_2 + F_j, \quad (4.106)$$

onde F_j é uma função arbitraria de q^1 e q^2 . Usando as Eqs. (4.82), (4.106) e a forma de H_1, H_2 conclui-se que

$$[F_j, P_k] = 0, \quad [J_i, F_j] = \varepsilon_{ijk} F_k,$$

o que significa que \mathbf{F} função só de \mathbf{q} , ou seja, $F_j = q_j F(\mathbf{q}^2)$. Então K_j escreve-se

$$K_j = q_j^1 (H_1 + F) + q_j^2 (H_2 - F),$$

de modo que redefinindo-se $H_1 = H_1 + F, H_2 = H_2 - F$, chega-se à expressão

$$K_j = q_1 H_1 + q_2 H_2. \quad (4.107)$$

Avaliando o colchete

$$[K_j, H] = H_1 [q_j^1, H_1] + H_2 [q_j^2, H_2] + (q_j^1 - q_j^2) [H_1, H_2], \quad (4.108)$$

derivando H_1 em relação a $(\mathbf{p}^1)^2$ e H_2 em relação a $(\mathbf{p}^2)^2$ e usando as Eqs. 4.82 $[K_j, H] =$

$P_j = p_j^1 + p_j^2$ obtém-se

$$2H_1 \frac{\partial H_1}{\partial (\mathbf{p}^1)^2} = 2H_2 \frac{\partial H_2}{\partial (\mathbf{p}^1)^2} = 1, \quad (4.109)$$

de onde conclui-se que H_1 e H_2 devem ter a forma

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{(\mathbf{p}^1)^2 + W_1}, \\ H_2 &= \sqrt{(\mathbf{p}^2)^2 + W_2}, \end{aligned} \quad (4.110)$$

onde W_1 e função $(\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{q})$ e $(\mathbf{q})^2$ e W_2 e função $(\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{q})$ e $(\mathbf{q})^2$. Avaliando a Eq. (4.108) com os Hamiltonianos descritos anteriormente Eq. (4.110), encontra-se que $[K_j, H]$ é igual a

$$p_j^1 + p_j^2 + \frac{1}{2} (q_j^1 - q_j^2) \left[\frac{\partial W_1}{\partial (\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{q})} + \frac{\partial W_2}{\partial (\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{q})} \right] + [H_1, H_2]. \quad (4.111)$$

Demonstremos agora que esta última expressão, Eq. (4.111), se anula. Para isso calcula-se primeiro $-4H_1H_2 [H_1, H_2]$

$$\begin{aligned} &2 (\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{p}^2) \left(\frac{\partial W_1}{\partial (\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{q})} + \frac{\partial W_2}{\partial (\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{q})} \right) \\ &+ 2 (\mathbf{q})^2 \left(\frac{\partial W_1}{\partial (\mathbf{q})^2} \frac{\partial W_2}{\partial (\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{q})} + \frac{\partial W_2}{\partial (\mathbf{q})^2} \frac{\partial W_1}{\partial (\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{q})} \right) \\ &+ (\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{q}) \left(4 \frac{\partial W_2}{\partial (\mathbf{q})^2} + \frac{\partial W_1}{\partial (\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{q})} \frac{\partial W_2}{\partial (\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{q})} \right) \\ &+ (\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{q}) \left(4 \frac{\partial W_1}{\partial (\mathbf{q})^2} + \frac{\partial W_1}{\partial (\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{q})} \frac{\partial W_2}{\partial (\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{q})} \right). \end{aligned} \quad (4.112)$$

Como esta expressão Eq. (4.112) deve ser igual a

$$2H_1H_2 \left(\frac{\partial W_1}{\partial (\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{q})} + \frac{\partial W_2}{\partial (\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{q})} \right), \quad (4.113)$$

e a variável $(\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{p}^2)$ não aparece nesta segunda expressão, o coeficiente desta variável na

Eq. (4.112) deve-se anular , ou seja,

$$\frac{\partial W_1}{\partial(\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{q})} = -\frac{\partial W_2}{\partial(\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{q})}. \quad (4.114)$$

Como o lado direito da Eq. (4.114) é função somente de $(\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{q})$ e $(\mathbf{q})^2$ e o lado esquerdo de $(\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{q})$ e $(\mathbf{q})^2$, estas são funções só de $(\mathbf{q})^2$. Então W_1 e W_2 podem ser escritas como

$$W_1 = (\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{q}) F + G_1, \quad (4.115)$$

$$W_2 = (\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{q}) F + G_2,$$

onde F, G_1 e G_2 , são funções só de $(\mathbf{q})^2$. É fácil mostrar usando as Eqs. (4.112) e (4.113) que

$$\frac{dG_1}{d(\mathbf{q})^2} = \frac{dG_2}{d(\mathbf{q})^2} = \frac{1}{4} \left(F^2 + 2(\mathbf{q})^2 F \frac{dF'}{d(\mathbf{q})^2} \right) = \frac{d(\mathbf{q})^2 F^2}{d(\mathbf{q})^2},$$

isto significa finalmente que

$$G_1 = \frac{1}{4} (\mathbf{q})^2 F^2 + m_1^2, \quad (4.116)$$

$$G_2 = \frac{1}{4} (\mathbf{q})^2 F^2 + m_2^2,$$

onde m_1^2 e m_2^2 são constantes arbitrárias. Deixando as \mathbf{q}^1 e \mathbf{q}^2 fixas e transformando os momentos

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^1 &\rightarrow \mathbf{p}^1 - \frac{1}{2} F \mathbf{q}, \\ \mathbf{p}^2 &\rightarrow \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} F \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (4.117)$$

gera-se uma transformação canônica que deixa os Hamiltonianos H_1 e H_2 na forma final

correspondente a *partículas livres*

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{(\mathbf{p}^1)^2 + m_1^2}, \\ H_2 &= \sqrt{(\mathbf{p}^2)^2 + m_1^2}. \end{aligned} \tag{4.118}$$

Isto demonstra que levando em conta a invariância de Poincaré e a condição *CLU*, Eq. (4.99), a teoria de ação à distância, Hamiltoniana pode representar apenas duas partículas livres.

Apêndice II: Prova da propriedade bi-monotônica

Neste apêndice mostramos que no limite de baixas velocidades a solução das Eqs. (??) e (3.2) tem somente duas ramificações definidas por $\dot{r} > 0$ e $\dot{r} < 0$. Por causa da simetria temporal, a demonstração é a mesma considerando r_a ou r_b . É suficiente provar que existe um único ponto onde \dot{q} se anula, onde q está definido na Eq. (3.2). Para uma órbita na família *CMF* a condição de cone de luz é escrita

$$q = x_1(t) - x_2(t + q), \quad (4.119)$$

onde $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são as posições das partículas 1 e 2, sendo que em nossa convenção a partícula 2 se encontra sempre à direita da partícula 1, e além disto $c = 1$. Observe-se que por ser a interação sempre repulsiva, a velocidade $v_1(t)$ é monotonicamente *crescente* no tempo sendo que a velocidade da partícula 2, $v_2(t)$, é monotonicamente *decrecente*. Tomando a derivada da equação Eq. (4.119) com respeito ao tempo e isolando \dot{q} , obtem-se

$$\dot{q} = \frac{v_1(t) - v_2(t + q)}{1 + v_2(t + q)}. \quad (4.120)$$

Para baixas energias temos os limites $|v_2(t + q)| < v_2(\infty) \ll 1$ e $|v_1(t)| < v_1(\infty) \ll 1$, e portanto o denominador da Eq. (4.120) é sempre positivo. Na família *CMF* o valor de \dot{q} muda de sinal com valores dentro do intervalo

$$-\left(\frac{v_1(\infty) + v_2(\infty)}{1 + v_2(\infty)}\right) < \dot{q} < \left(\frac{v_1(\infty) + v_2(\infty)}{1 - v_2(\infty)}\right). \quad (4.121)$$

Para completar a prova note-se que a soma de duas funções monotônicas crescentes $v_1(t)$ e $-v_2(t+q)$ é também uma função monotônica crescente, e portanto pode-se anular somente uma vez. Note-se que para altas velocidades não está assegurado que $-v_2(t+q)$ seja uma função monotônica crescente para todo t , já que

$$\frac{dv_2(t+q)}{dt} = (1 + \dot{q}) \frac{dv_2(t+q)}{d(t+q)}, \quad (4.122)$$

é o produto de $(1 + \dot{q})$ por $\frac{dv_2(t+q)}{d(t+q)}$, e esta última é sempre positiva. Note-se que a Eq. (4.122) garante que $v_2(t+q)$ é monotônica crescente em t se

$$(1 + \dot{q}) > 0,$$

que se cumpre pelo menos para o caso de baixas velocidades. Uma estimativa simples de onde a propriedade bi-monotônica pode falhar encontra-se substituindo $|\dot{q}| = 1$ na Eq. (4.121), o que prediz aproximadamente $v^\infty = (1/3)c$.

Apêndice III : Regularização do problema de Kepler

Nós faremos aqui uma revisão da regularização de Levi-Civita do problema de Kepler no plano [42, 43, 44], para comparar com o presente caso relativístico e servir de modelo. Como consequência da invariância de Galilei, as equações do problema de Kepler separam em uma equação para o movimento do centro de massa $\mathbf{X} \equiv (m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2)/M$ e uma equação para o movimento da coordenada relativa $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ no plano

$$M\ddot{\mathbf{X}} = 0, \quad (4.123)$$

$$\mu\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{e^2\mathbf{x}}{r^3}, \quad (4.124)$$

onde $r \equiv |\mathbf{x}|$ é o módulo da distância relativa, e μ e M são a massa reduzida e a massa total respectivamente. Note-se que a Eq. (4.124) é singular para $r \equiv |\mathbf{x}| = 0$ e portanto não pode ser integrada numericamente. O primeiro passo desta regularização consiste na mudança do parâmetro de tempo t para um parâmetro s definido por

$$dt = r ds. \quad (4.125)$$

É conveniente expressar o vetor relativo \mathbf{x} do movimento plano, por uma variável complexa z definida por

$$z^2 \equiv x + iy, \quad (4.126)$$

onde x e y são as componentes cartesianas do vetor \mathbf{x} . A equação de evolução de z em termos de s e pode ser calculada usando-se as Eqs. (4.124) e (4.125)

$$\frac{2\mu z}{r^2} \left(\frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{E}{2\mu} z \right) = 0, \quad (4.127)$$

onde E é a energia

$$E = \frac{\mu}{2} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2 - \frac{e^2}{r}. \quad (4.128)$$

Físicamente o parâmetro E deve ser uma constante real finita, que pode ser substituída no procedimento numérico por uma constante real arbitrária, representando a condição inicial. Para valores negativos de E a Eq. (4.127) converte-se na equação de um oscilador harmônico simples. Isto completa a regularização das equações do problema de Kepler. Para encontrar a solução colinear basta impor $y = 0$ em (4.126). Esta órbita colinear não é tão popular, e pode ser resolvida em forma analítica. A solução da Eq. (4.127) é

$$z = \sqrt{x} = A \sin(ks). \quad (4.129)$$

onde $k = \sqrt{|E/2\mu|}$. Substituindo a solução Eq. (4.129) na expressão da energia Eq. (4.128) obtem-se

$$-|E| = \frac{2\mu k^2 A^2 \cos^2(ks) - e^2}{A^2 \sin^2(ks)} \quad (4.130)$$

de onde calcula-se $A = \sqrt{e^2/|E|}$.

Note-se algumas particularidades da solução: (i) Dado que a Eq. (4.127) cumpre-se para qualquer órbita plana para momentos angulares pequenos $O(\varepsilon)$, estas órbitas são elipses com um movimento ao largo do eixo x aproximado pela equação (4.129) e movimento ao longo do eixo y descrito por uma função harmônica de amplitude de ordem ε . Note-se que para órbitas físicas nas quais E tem que ser real z satisfaz equações harmônicas não acopladas como a Eq. (4.127). (ii) A órbita de colisão é o "limite" de momento angular zero de uma órbita elíptica. Nesse limite o foco da elipse tende ao centro de força, e a velocidades troca de sinal em forma descontínua, passando de $+\infty$ para $-\infty$

na direção x . Isto é o que se chama de colisão regular e está ilustrado na Figura 4.7.

Referências Bibliográficas

- [1] J. A. Wheeler and R. P. Feynman, *Rev. of Mod. Physics*, **17**, 157 (1945) and *Rev. of Mod. Phys.* **21**, 425 (1949).
- [2] J. D. Jackson *Classical Electrodynamics*, (Jhon Wiley & Sons, New York 1975).
- [3] F. Hoyle, Jayant V Narlikar, *Cosmology and Action at a Distance Electrodynamics*, (World Scientific, Singapore 1996).
- [4] D.G.Currie, T.F. Jordan, E.C.G. Sudarshan, "The theory of Action-at-a-distance in Relativistic Particle Dynamics", A reprint collection, Edited by E.H. Kerner, (Gordon and Breach Publishers, New York).
- [5] K. Schwarzschild, *Göttinger Nachrichten*, **128** 132 (1903).
- [6] H. Tetrode, *Zeits f. Physik*, **10** 317 (1922).
- [7] A. D. Fokker, *Zeits f. Physik*, **58** 386 (1929); *Physica* **9**, 33 (1929), *Physica* **12**, 145 (1929).
- [8] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc.* **A167**, 148 (1938b).
- [9] J. E. Hogarth, *Proc. R. Soc.* **A314**, 529 (1962).
- [10] F. Hoyle, J. V. Narlikar, *Ann. Phys. (N.Y.)* **54**, 207 (1969), F. Hoyle, J. V. Narlikar, *Ann. Phys. (N.Y.)* **62**, 44 (1971).
- [11] D. Leiter, *Am. J. Phys.* **38**, 207 (1970).

- [12] F. Hoyle, G. Burbidge, J.V. Narlikar *Astrophys. J.* **410**, 437 (1993).
- [13] P.A.M. Dirac *Rev. Mod. Phys.* **21**, 392 (1949).
- [14] H. Leutwyler, "*The theory of Action-at-a-distance in Relativistic Particle Dynamics*", A reprint collection, Edited by E.H. Kerner, (Gordon and Breach Publishers, New York).
- [15] E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda and J. N. Goldberg, *Physical Review D* **23**, 2218 (1981).
- [16] A. Komar , *Physical Review D* **18**, 1881 (1978).
- [17] A. Komar , *Physical Review D* **18**, 1887 (1978).
- [18] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective*, (John Wiley and Sons, New York 1974).
- [19] R.P. Gaida, V.I Tretyak, Yu. G. Yaremko, *Theor. Math. Phys.* vol. **101**, N° **3**, 1443 (1994).
- [20] A.Staruszkiewicz, *Annalen der Physik.***7**.Folge, Band 25, Heft 4 (1972).
- [21] G. Marmo, N. Mukunda and E.C.G. Sudarshan, *Phys. Rev. D* **30** , 2110 (1984).
- [22] Robert Nyden Hill, *Relativistic Action at a distance: Classical and Quantum Aspects*, Springer-Verlag, Berlin 1982, page 104.
- [23] H.W. Crater, Peter Van Alstine, *Phys. Rev. D.* **46** 2 (1992).
- [24] M.Schönberg, *Phys. Rev.* **69** 211 (1946).
- [25] A. Schild, *Phys. Rev.* **131** 2762 (1963) , A. Schild, *Science* **138** 994 (1962).
- [26] S. Klimenko and I. Nikitin, *Nuovo Cimento* **116** 1029 (2001).

- [27] *Numerical Methods for Delay Differential Equations*, Alfredo Bellen and Marino Zenaro, University di Trieste, Italy, Oxford Press (2002). K.W. Neves and S.Thompson. *Applied Numerical Mathematics* 9, 385-401, North-Holland (1992).
- [28] Shpytko V. *Acta Phys. Pol.B*, **27**, 9, 2057–2070 (1996).
- [29] I.N.Nikitin and J. De Luca, *International Journal of Modern Physics C*, Vol **12**, 739-750 (2000).
- [30] J. De Luca, *Physical Review E*, **62**, 2060 (2001).
- [31] E.Hairer, S.P.Norsett and G.Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I*, Springer-Verlag 1987.
- [32] S. V. Klimenko, I. N. Nikitin and W. F. Urazmetov, *Il Nuovo Cimento*, **111**, 1281 (1998).
- [33] R.N. Hill "Relativistic Action at a distance: Classical and Quantum aspects ", Proceedings, Barcelona, Spain 1981, Edited by J. Llosa, Lecture Notes in Physics **162**, page 104 (Springer, New York 1982).
- [34] K. Schwarzschild, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Physik. KI IIa* (1903); H.Tetrode, *Z. Physik* **10**, 317 (1922); A. D. Fokker *ibid.***58** **386** (1929).
- [35] E. B. Hollander, Jayme De Luca, *Phys. Rev. E* 67 026219 (2003).
- [36] D.G. Currie, T.F. Jordan e E.C.G. Sudarshan, *Rev. Mod. Physics* **35**, 350 (1963), D.G. Currie, *J. Math. Physics* **4**, 1470 (1963) .
- [37] Gaida R.P., Kluchovsky Yu.B.,Tretyak V.I., *Three-dimensional Lagrangian aproche to the classical relativistic dynamics of directly interacting particles, in Constraint's Theory and Relativistic Dynamics*, ed. World Sci. Publ. 1987, p. 210-241.
- [38] C. M. Andersen, Hans C. Von Baeyer, *Phys. Rev. D* **5**, 4 (1972).

- [39] R.D. Driver, *Phys. Rev. D.* **19**, No 4, 1098-1107, (1979).
- [40] J. Hoag and R. D. Driver, *Nonlinear Analysis, Theory Methods & Applications*, **15**, 165 (1990).
- [41] J.C. Nash, *Compact Numerical methods for Computers*, Adam Hilger (1990).
- [42] T. Levi-Civita, *Ann. Math.* **9** 1 (1903).
- [43] E.L. Stiefel, G. Scheifele, *Linear and Regular celestial mechanics*, Springer-Verlag New York (1971).
- [44] S.J.Aarseth and K.Zare, *Celestial mechanics* **10**, 185 (1974).
- [45] J. L. Anderson, *Principles of Relativity Physics* , Academic Press INC., New York p. 222 (1967).
- [46] S. Klimenko, I. Nikitin, *IL Nuovo Cimento* **116** 1029 (2001).
- [47] I. N. Nikitin, *Il Nuovo Cimento* **110B** 7, (1995).
- [48] E. Laserra, I.P. Pavlotsky and M. Strianese, *Physica A* **219**, 141 (1995).
- [49] E. Laserra, M. Strianese and I.P.Pavlotsky, *Physica B*, **9**, 563 (1995).
- [50] Odo Diekmann and H.O.Walther, *Delay Equations: Functional-,Complex-,and Non-linear Analysis*, Springer NY (1995).
- [51] L.E.Elsgolts and S.B.Norkin, *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press, NY (1973).
- [52] J. Kaplan and J. Yorke, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **48**, 317 (1974). J. Kaplan and J. Yorke, *Journal of Differential Equations* **23**, 293 (1977).
- [53] Jibin Li, Xue-Zhong He and Zhengrong Liu, *Nonlinear Analysis* **35**, 457 (1999).

- [54] J. De Luca, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 680 (1998) and J. De Luca, *Phys. Rev. E* **58**, 5727 (1998).
- [55] J. De Luca, *Phys. Rev. E* **62**, 2060 (2000).
- [56] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective*, (John Wiley and Sons, New York 1974).