

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Correlações quânticas e transição quântico-clássica
em cavidades ópticas

Daniel Zini Rossatto

São Carlos

Fevereiro/2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Correlações quânticas e transição quântico-clássica em cavidades ópticas

Daniel Zini Rossatto

Tese submetida ao Programa de Pós-graduação
em Física da Universidade Federal de São Car-
los, como parte dos requisitos para obtenção do
título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas

São Carlos

Fevereiro/2014

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

R823cq Rossatto, Daniel Zini.
Correlações quânticas e transição quântico-clássica em
cavidades ópticas / Daniel Zini Rossatto. -- São Carlos :
UFSCar, 2014.
90 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,
2014.

1. Óptica quântica. 2. Eletrodinâmica quântica de
cavidades. 3. Sistemas quânticos abertos. 4.
Emaranhamento. 5. Medição quântica não destrutiva. I.
Título.


CDD: 530 (20^a)

Daniel Zini Rossatto

Tese de doutorado submetida à
Coordenação do Programa de Pós-
Graduação em Física, da
Universidade Federal de São
Carlos, como requisito parcial para
a obtenção do título de doutor em
ciências.

Aprovado em: 27 de fevereiro de 2014

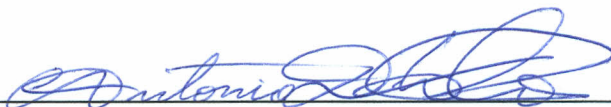
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. *Celso Jorge Villas* - Bôas (Orientador)
Universidade Federal de São Carlos - DF



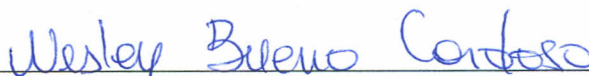
Prof. Dr. *Renato Moreira Angelo*
Universidade Federal do Paraná - DF



Prof. Dr. *Antônio Zelaquett Khoury*
Universidade Federal Fluminense - DF



Prof. Dr. *Leonardo Kleber Castelano*
Universidade Federal de São Carlos - DF



Prof. Dr. *Wesley Bueno Cardoso*
Universidade Federal de Goiás - DF

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas pela orientação, amizade, motivação, conselhos e ensinamentos, além de sua exponencial contribuição para a minha formação acadêmica e pessoal.

Aos meus amigos e colegas, aos funcionários do Departamento de Física da UFSCar, principalmente à Dona Neusa e à Dona Alice pelo santo café de cada dia, e aos professores doutores Thiago Werlang, Leonardo K. Castelano, Felipe F. Fanchini e Norton G. de Almeida pelas colaborações científicas.

À Cassiana pelo amor e paciência em todos os momentos, a seus pais, Sebastião e Ioneide, e toda a sua família que me acolheram com muito carinho ao longo desses anos.

Aos meus amados pais, Geraldo e Eliana, meus queridos irmãos, Livia e Lucas, e a toda minha família pelo apoio e incentivo ao longo da minha vida, além de amor, carinho, churrascos e muita paciência, é claro!

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

E, finalmente, ao St. Patrick's pub, ao antigo Absolut e ao Chalé Acústico pelas noites de *chopp* e *rock n' roll*.

Resumo

Esta tese é constituída por três estudos no contexto de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades. Primeiramente, investigamos a transição quântico-clássica de um campo de uma cavidade dissipativa através da geração de correlação entre dois átomos de dois níveis não interagentes acoplados a um modo da cavidade. Em primeiro lugar, mostramos que há uma janela de tempo na qual o modo da cavidade exibe um comportamento clássico, que depende da taxa de decaimento da cavidade, do acoplamento átomo-campo e do número de átomos. Em seguida, considerando o regime estacionário, vemos que o emaranhamento entre os átomos desaparece à medida que o número médio de fótons intracavidade (\bar{n}) é aumentado. Entretanto, a informação mútua, as correlações clássicas e a discórdia quântica atingem valores assintóticos não nulos mesmo no limite $\bar{n} \rightarrow \infty$, seja \bar{n} aumentado coerente ou incoerentemente. Assim, o modo da cavidade sempre preserva algumas características quânticas no limite macroscópico ($\bar{n} \rightarrow \infty$), que são reveladas pela geração de correlação no sistema atômico devido a sua interação com o campo da cavidade. Posteriormente, apresentamos uma proposta de um esquema probabilístico para preparar um estado atômico maximamente emaranhado entre um par de átomos de dois níveis acoplados a um modo de uma cavidade dissipativa, sem a necessidade de um controle preciso da evolução do sistema e do estado inicial atômico. Mostramos que o estado estacionário deste sistema dissipativo é uma mistura de duas partes, onde os átomos estão em seu estado fundamental ou em um estado maximamente emaranhado. Então, aplicando-se um campo de prova sobre o modo da cavidade, mostramos como discriminar esses estados sem perturbar o sistema atômico, onde realizamos uma medição quântica não destrutiva via a transmissão da cavidade, tal que a transmissão só é máxima quando os átomos estão maximamente emaranhados. Nosso esquema baseia-se em um efeito de interferência como aquele que ocorre no fenômeno de transparência eletromagneticamente induzida, tal que ele funciona mesmo no limite de uma taxa de decaimento da cavidade

muito mais forte do que o acoplamento átomo-campo. Finalmente, estudamos a dinâmica de um átomo de dois níveis interagindo com um reservatório estruturado lorentziano considerando correlações iniciais entre sistema e reservatório. Mostramos que, no regime de acoplamento forte entre sistema e reservatório, a dinâmica da pureza pode determinar se havia correlações iniciais entre sistema e reservatório. Além disso, introduzindo um segundo átomo interagindo com o mesmo reservatório, além de determinar se havia tais correlações iniciais, a dinâmica da pureza atômica permite a identificação do tipo da correlação inicial.

Palavras-chave: Eletrodinâmica quântica de cavidades, sistemas quânticos abertos, transição quântico-clássica, estados emaranhados, medição quântica não destrutiva, correlações iniciais sistema-reservatório.

Abstract

This thesis consists of three studies in the context of cavity quantum electrodynamics. Firstly, we investigate the quantum-to-classical transition of a dissipative cavity field by measuring the correlations between two non-interacting atoms coupled to the cavity mode. We note that there is a time window in which the mode presents a classical behavior, which depends on the cavity decay rate, the atom-field coupling strength and the number of atoms. Then, considering the steady state of two atoms inside the cavity, we note that the entanglement between the atoms disappears while the intracavity mean number of photons (\bar{n}) increases. However, the mutual information, the classical correlations and the quantum discord reach asymptotic non-zero values even in the limit of $\bar{n} \rightarrow \infty$, whether \bar{n} is increased coherently or incoherently. Therefore, the cavity mode always preserves some quantum characteristics in the macroscopic limit ($\bar{n} \rightarrow \infty$), which are revealed by the generation of correlations in the atomic system due to its interaction with the cavity field. Afterwards, we propose a probabilistic scheme to prepare a maximally entangled state between a pair of two-level atoms coupled to a leaking cavity mode, without requiring precise time-controlling of the system evolution and initial atomic state. We show that the steady state of this dissipative system is a mixture of two parts, the atoms being either in their ground state or in a maximally entangled one. Then, by applying a weak probe field to the cavity mode we are able to discriminate those states without disturbing the atomic system, where we perform a quantum nondemolition measurement via the cavity transmission, so that one has maximum transmission only when the atomic system is in an entangled state. Our scheme relies on an interference effect as it happens in electromagnetically induced transparency phenomenon so that it works even in the limit of a cavity decay rate much stronger than the atom-field coupling. Finally, we study the dynamics of a two-level atom interacting with a Lorentzian structured reservoir considering initial system-environment correlations. It is shown that under strong

system-reservoir coupling the dynamics of purity can determine whether there are initial correlations between system and environment. Moreover, by introducing a second atom interacting with the same environment, besides determining if there are initial system-environment correlations, the dynamics of the atomic purity allows us to identify the kind of the initial correlation.

Keywords: Cavity quantum electrodynamics, open quantum systems, quantum-to-classical transition, entangled states, nondemolition measurements, system-environment initial correlations.

Contents

1	Introdução	1
2	Eletrodinâmica Quântica de Cavidades	7
2.1	Hamiltonianos de Jaynes-Cummings e de Tavis-Cummings	7
2.1.1	Campo de bombeamento	10
2.2	Dinâmica de sistemas quânticos abertos	11
2.2.1	Equação mestra markoviana	11
2.3	Propriedades estatísticas do campo	12
3	Correlações Quânticas	16
3.1	Elementos da teoria de informação clássica	16
3.2	Elementos da teoria de informação quântica	18
3.3	Correlações quânticas	20
3.3.1	Emaranhamento	20
3.3.2	Discórdia quântica	21
4	Transição Quântico-Clássica do Campo da Cavidade	24
4.1	Modelo semiclássico	25
4.2	Modelo quântico	27
4.2.1	Bombeamento coerente	27
4.2.2	Bombeamento incoerente	37
4.2.3	Tempo característico para atingir o regime estacionário	41
4.3	Conclusão	45
5	Geração Probabilística de Emaranhamento Atômico em Cavidades	46
5.1	Modelo	46

5.2	Monitoramento do sistema	49
5.2.1	Sistema em $ D, 0\rangle$	49
5.2.2	Sistema em $ G, 0\rangle$	50
5.3	Influência do decaimento atômico	53
5.3.1	Reservatórios atômicos independentes	53
5.3.2	Reservatório atômico coletivo	53
5.4	Simulando um experimento	54
5.5	Estado inicial	55
5.6	Medição direta da concorrência	57
5.7	Conclusão do capítulo	57
6	Pureza como uma testemunha para correlações iniciais entre sistema-reservatório	59
6.1	Modelo	59
6.2	Abordagem via pseudomodo	60
6.3	Um único átomo interagindo com o reservatório	61
6.4	Átomo de prova	64
6.5	Conclusão do capítulo	66
7	Conclusões	67
8	Considerações finais	69
A	Relação de comutação para $\mathcal{L}_j^{SC}(t)$	80
B	Simulação numérica	81
B.1	Escrevendo o hamiltoniano do sistema	81
B.2	Escrevendo o liouvilliano	82
B.3	Obtendo $\rho(t)$	83
B.4	Calculando média de operadores	83
B.5	Exemplo: calculando $g^{(2)}(0)$	83
C	Eliminação adiabática	86

D	Correlações para estados-X	88
D.1	Concorrência	88
D.2	Informação mútua	89
D.3	Discórdia quântica	89

List of Figures

2.1	Da esquerda para direita, tem-se os níveis de energia para o átomo de dois níveis e para o modo da cavidade; os níveis degenerados de energia do sistema total átomo+cavidade sem interação (estados nus - $g_0 = 0$); e os níveis de energia do sistema com interação (estados vestidos - $g_0 \neq 0$), formando a escada anarmônica de Jaynes-Cummings.	9
2.2	Estrutura de níveis de energia do modelo de Tavis-Cummings para $N = 2$. À esquerda temos os níveis de energia do subespaço dado pela Eq. (2.5) e à direita do subespaço dado pela Eq. (2.6).	10
2.3	Contagem de fótons em função do tempo para campos que apresentam (a) agrupamento de fótons, (b) aleatoriedade (campo coerente) e (c) antiagrupamento de fótons. Esta figura foi retirada da Ref. [92].	15
3.1	Valor da D_q (linha tracejada) e do E_F (linha cheia) para o estado de Werner $\rho_W = \frac{1-p}{4}\mathbf{1} + p \Phi^+\rangle\langle\Phi^+ $, com $ \Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(00\rangle + 11\rangle)$. Observe que, mesmo na região em que ρ_W é separável ($E_F = 0$), $D_q > 0$, ou seja, separabilidade nem sempre pode ser tratada como sinônimo de classicalidade.	23
4.1	Dependência com ε/κ (a) do número médio de fótons, \bar{n} , e (b) da função de correlação de segunda ordem, $g^{(2)}(0)$. No <i>inset</i> da parte (a) é possível observar o pequeno desvio de \bar{n} (linha sólida) em relação ao número médio de fótons do campo coerente no caso de uma cavidade vazia ($= \varepsilon^2/\kappa^2$ - linha tracejada).	30
4.2	Comportamento de $g^{(2)}(\tau)$ para (a) $\varepsilon = 0.1\kappa$, (b) $\varepsilon = 0.5\kappa$ e (c) $\varepsilon = \kappa$, considerando $ gg\rangle$ (azul pontilhado) e $ ge\rangle$ (vermelho sólido) inicialmente.	32

4.3	Evolução temporal (escala logarítmica) da (a) pureza atômica considerando um (linha cheia), dois (linha tracejada) e três átomos (linha pontilhada). Considerando apenas dois átomos, temos a evolução temporal do (b) emaranhamento de formação e da (c) discórdia entre os átomos. Aqui, fixamos $g = 0.01\kappa$, $\varepsilon = 0.1\kappa$ e todos os átomos inicialmente em $ e\rangle$ e a cavidade em $ 0\rangle_c$	34
4.4	Dependência em ε/κ de $I(\rho_{at}^{ss})$ (preto), $J(\rho_{at}^{ss})$ (roxo), $D_q(\rho_{at}^{ss})$ (azul) e $E_F(\rho_{at}^{ss})$ (vermelho) para os estados iniciais atômicos (a) $ gg\rangle$ e (b) $ ge\rangle$. Os círculos correspondem aos resultados numéricos obtidos a partir da equação mestra sem aproximações, que confirmam os nossos resultados analíticos.	36
4.5	Dependência de (a) \bar{n} com n_{th} e de (b) $g^{(2)}(\tau)$ com $\kappa\tau$	39
4.6	Dependência em n_{th} de $I(\rho_{at}^{ss})$ (preto), $J(\rho_{at}^{ss})$ (roxo), $D_q(\rho_{at}^{ss})$ (azul) e $E_F(\rho_{at}^{ss})$ (vermelho) para os estados iniciais atômicos (a) $ gg\rangle$ e (b) $ ge\rangle$. Os círculos correspondem aos resultados numéricos obtidos a partir da equação mestra sem aproximações.	41
4.7	(a) $\kappa\tau_R^{(1)}$ vs $(\varepsilon/\kappa)^2$ considerando os valores de g_0 como 0.01κ (preto), 0.1κ (vermelho), 0.25κ (azul), 0.5κ (verde), 0.75κ (roxo) e κ (cinza). (b) $\kappa\tau_R^{(1)}$ vs $(g_0/\kappa)^{-2}$ fixando $\varepsilon = 1000\kappa$. Considerando os mesmos valores de g_0 em (a), temos (c) $\kappa\tau_R^{(2)}$ vs $(\varepsilon/\kappa)^2$, (d) informação mútua vs κt , (e) discórdia vs κt e (f) correlações clássicas vs κt . Em (d)-(f) usou-se o estado inicial $ gg\rangle \otimes 0\rangle_c$	44
5.1	Representação pictórica da configuração experimental: um par de átomos de dois níveis acoplados a uma cavidade dissipativa. Uma vez que o sistema atinge o estado estacionário, um campo de prova é ligado e a transmissão da cavidade passa a ser monitorada.	47
5.2	Diagrama de níveis de energia do sistema com as taxas de decaimento das transições permitidas e com o campo de prova.	48

5.3	Transmissão da cavidade <i>vs</i> dessintonia entre o campo de prova e o modo da cavidade, assumindo $g_0 = 0.2\kappa$ e $\varepsilon = 0.05g_0$. A linha sólida preta representa o caso de $\rho_{ss} \rightarrow D, 0\rangle$, onde se observa o comportamento tipo cavidade vazia ($g_0 = 0$). Os círculos azuis representam o caso de $\rho_{ss} \rightarrow G, 0\rangle$, onde se nota que, mesmo para $g_0\sqrt{2} \lesssim \kappa/2$, a transmissão da cavidade é nula para $\Delta_p = 0$ neste caso.	52
5.4	(a) Transmissão normalizada da cavidade <i>vs</i> Δ_p/κ , com $g_0 = 0.2\kappa$, $\varepsilon = 0.05g_0$ e $\Gamma_c = 0.1g_0$ ($\gamma = 0$). Evolução temporal da concorrência (linha tracejada) e da transmissão normalizada (linha sólida) para uma única trajetória quando (b) $\rho_{ss} \rightarrow G, 0\rangle$ e (c) $\rho_{ss} \rightarrow D, 0\rangle$, assumindo o estado inicial $ g\rangle_1 \otimes e\rangle_2 \otimes 0\rangle_c$	56
6.1	Evolução temporal da pureza atômica para o (a) regime de acoplamento forte $\Gamma = \Omega$ e o (b) regime de acoplamento fraco $\Gamma = 5\Omega$ considerando os estados iniciais ρ_a (linha sólida), $\rho_b = \rho_d$ (linha pontilhada) e ρ_c (linha tracejada), onde fixou-se $\alpha^2 = 0.5$	63
6.2	Evolução temporal da pureza P referente ao sistema contituído pelos dois átomos para o (a) regime de acoplamento forte $\Gamma = \Omega$ e o (b) regime de acoplamento fraco $\Gamma = 5\Omega$, considerando os estados iniciais ρ_a (linha sólida), ρ_b (linha pontilhada), ρ_c (linha tracejada) e ρ_d (linha ponto-tracejada), com $\alpha^2 = 0.5$	65
6.3	Dinâmica da informação mútua, das correlações clássicas, do emaranhamento de formação e da discórdia quântica para os dois átomos para ρ_a (linha sólida), ρ_b (linha pontilhada), ρ_c (linha tracejada) and ρ_d (linha ponto-tracejada) com $\alpha^2 = 0.5$ e $\Gamma = \Omega$	66

Chapter 1

Introdução

A teoria da mecânica quântica, desenvolvida no início do século XX, explica os fenômenos da natureza do ponto de vista microscópico. Seu aspecto contra-intuitivo revolucionou a maneira pela qual a natureza é vista e interpretada, fazendo com que essa teoria adquirisse o *status* de "suprema teoria da matéria, da radiação e suas interações" [1]. Por outro lado, na década de 1930, Church e Turing matematizaram o conceito de algoritmo e fundaram as bases da teoria da computação, promovendo uma revolução tecnológica através dos computadores. No início da década de 1980, a observação da lei de Moore¹ [2] deixou claro aos físicos de que seriam as leis da Física, e não as regras da Matemática, que ditariam os limites dos computadores, despontando, assim, as teorias da computação e da informação quântica [1]. Nesse âmbito, está sendo reconhecido nas últimas décadas que as estranhezas da mecânica quântica podem ser domadas para a implementação de novas funções para a transmissão, o armazenamento e o processamento de informação [1, 3, 4].

Em 1946, E. M. Purcell (laureado com o Nobel de Física em 1952) e colaboradores [5] mostraram que a taxa de emissão espontânea de um sistema atômico excitado podia ser modificada manipulando-se seu meio ambiente, de modo que criou-se uma área de pesquisa denominada Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (EQC), que estuda a interação radiação-matéria em geometrias confinadas [6]. A EQC tem se mostrado uma técnica muito útil para se estudar fundamentos de mecânica quântica, a transmissão e o processamento de informação em sistemas quânticos abertos, onde tal conceito tem sido explorado em inúmeros dispositivos ópto-quânticos. Exemplos disso são as pesquisas

¹A lei de Moore afirma que, por volta do ano 2020, cada bit em um computador seria codificado em apenas um único átomo.

desenvolvidas pelos professores S. Haroche e D. J. Wineland, laureados com o Nobel de Física em 2012 devido ao desenvolvimento de métodos experimentais inovadores que permitem a medição e manipulação de sistemas quânticos individuais [6, 7]. No caso mais simples, o campo eletromagnético quantizado na cavidade pode interagir com um qubit (sistema quântico de dois níveis) e trocar coerentemente com este um *quantum* de energia (um fóton individual) à frequência de Rabi do vácuo, quantificada pelo acoplamento g_0 entre qubit e campo. Nestas condições, uma cavidade pode servir como um barramento de dados em processamento de informação quântica, transferindo dados quânticos entre diferentes qubits (fótons são muito atrativos para carregar informação devido à sua robustez contra decoerência, oferecendo vantagens para futuras aplicações em computação quântica). No entanto, em qualquer sistema físico real, podem existir perdas de energia indesejáveis, tais como o escape de fótons da cavidade (à taxa κ) e da emissão incoerente do qubit (à taxa γ), sendo que a troca coerente entre qubit e cavidade apenas pode ser observada quando $g_0 > \kappa, \gamma$, que é conhecido como regime de acoplamento forte, no qual é possível resolver espectroscopicamente a separação de modos devido ao acoplamento.

Embora a teoria quântica preveja muitos fenômenos não clássicos intrigantes, como superposição quântica de estados e não localidade quântica [8, 9], tais fenômenos são observados somente com muita dificuldade em objetos macroscópicos [10–15], uma vez que a física clássica é recuperada da mecânica quântica para sistemas com muitas excitações e muitas partículas [16]. O surgimento da física clássica da mecânica quântica é então ativamente estudada e sugestões para explicá-la incluem decoerência devido à interação com o meio ambiente [17], impossibilidade de superposição macroscópica de estados distintos [18] e restrições devido à medições imprecisas [19]. Entretanto, para determinar o comportamento quântico ou clássico de um dado sistema é necessário introduzir o medidor para observar suas propriedades, o que não é uma tarefa simples na teoria quântica. A mera interação de um dado sistema com um medidor modifica sua dinâmica de maneira que a transição quântico-clássica pode depender do medidor envolvido [20].

Para campos eletromagnéticos confinados em cavidades usualmente emprega-se um átomo para medir as propriedades de tal campo [21–23]. Na Ref. [22], a transição quântico-clássica foi investigada aumentando-se gradualmente a temperatura efetiva de um sistema no contexto de eletrodinâmica quântica de circuitos. A baixas temperaturas, as oscilações de Rabi e a separação de modos foram observadas, revelando a natureza quântica do

campo. Porém, estes efeitos desaparecem quando a temperatura é aumentada, elevando o número médio de fótons, \bar{n} , do modo da cavidade. Naturalmente, as condições necessárias para um modo bosônico apresentar um comportamento clássico dependem dos parâmetros do sistema, e mesmo um modo da cavidade com \bar{n} muito pequeno pode comportar-se classicamente [23]. Geralmente, entretanto, o aumento de \bar{n} destrói as propriedades quânticas do sistema, como mostrado nas Refs. [21, 22]. Na Ref. [24], a não classicalidade de um campo de uma cavidade ideal interagindo com um átomo de dois níveis também foi investigada, mostrando que o anti-agrupamento de fótons (fenômeno puramente quântico) ainda está presente para \bar{n} inicial até três fótons. Todavia, dos resultados analíticos em [24], pode-se ver que este fenômeno desaparece no limite de um campo macroscópico ($\bar{n} \rightarrow \infty$).

Diferentemente desses estudos, a primeira parte desta tese foi investigar o comportamento do campo de uma cavidade dissipativa interagindo com dois átomos em vez de apenas um. Da mesma forma que em [23], nós assumimos que o modo da cavidade é bombeado por um campo clássico externo (laser) que controla o número médio de fótons intracavidade (\bar{n}). Como um campo puramente clássico² não é capaz de gerar qualquer tipo de correlação entre os átomos, uma vez que tais campos somente realizam operações locais sobre os átomos, o caráter quântico e a transição quântico-clássica do campo intracavidade foram investigados através da geração de correlação entre os átomos incrementando \bar{n} . Aqui, a presença de qualquer tipo de correlação entre os átomos (quântica [25, 26] ou clássica [27]) pode ser tomada como uma assinatura do comportamento não clássico (granular) de um campo macroscópico intracavidade, assim como o movimento browniano de um grão de pólen em um fluido macroscópico é uma assinatura do comportamento móvel das partículas que compõem o fluido. Além disso, também investigamos a geração de correlação incrementando \bar{n} incoerentemente, aumentando a temperatura do sistema como em [22].

Além da possível aplicação da geração de correlações entre átomos na investigação da transição quântico-clássica de um campo intracavidade, a preparação e manipulação de estados correlacionados, principalmente estados emaranhados, têm atraído muito interesse nas últimas décadas, uma vez que tais estados não têm análogo clássico e são ingredientes

²Por um campo puramente clássico nós estamos nos referindo a um campo multimodo, onde os operadores aniquilação/criação são substituídos por amplitudes complexas dependentes do tempo, cuja interação com um sistema atômico é descrita por equações diferenciais semiclássicas (equações de Maxwell-Bloch).

chaves em testes de não localidade quântica [28] e possuem um papel importante em comunicação e informação quântica [29], tais como criptografia [30], computação [31] e teletransportes quânticos [32]. Estados atômicos emaranhados podem ser preparados através do controle coerente de dinâmicas unitárias [33–37], como uma consequência de medições [38–44] ou até mesmo como um resultado de um processo dissipativo [45–50]. Recentemente, a preparação de sistemas quânticos em estados emaranhados a partir de esquemas dissipativos tem sido muito estudada; o ruído que está sempre presente nestes experimentos pode ser usado como uma fonte de geração de emaranhamento, evitando, assim, o efeito destrutivo usual nas coerências quânticas do sistema devido à interação entre sistema e meio ambiente.

Por outro lado, quantificadores de emaranhamento, tais como concorrência [51] e negatividade [52], não são observáveis físicos, isto é, não há observáveis que possam ser medidos diretamente, até agora, para descrever o emaranhamento de um dado estado quântico arbitrário. Em geral, é necessário realizar a tomografia do estado quântico para calcular estes quantificadores, inevitavelmente perturbando o estado do sistema, embora recentemente alguns métodos interessantes têm sido propostos para construir observáveis diretos relacionados ao emaranhamento de sistemas particulares [53–57]. Enquanto os autores dos trabalhos [53–56] podem determinar o emaranhamento quando poucas cópias do sistema quântico estão disponíveis, na Ref. [57] os autores fazem isto introduzindo um átomo de prova que realiza uma medição quântica não destrutiva [58].

Neste contexto, a segunda parte desta tese consistiu na proposta de um esquema probabilístico para preparar um estado maximamente emaranhado entre um par de átomos de dois níveis acoplados a um modo de uma cavidade dissipativa, sem a necessidade de um controle preciso da evolução temporal do sistema e de um acoplamento átomo-campo forte. Além disso, também foi proposto um método para testemunhar se o sistema atômico está emaranhado ou não através de uma medição quântica não destrutiva, feita a partir da transmissão da cavidade, de modo que o sistema atômico não seja perturbado.

Na terceira e última parte desta tese, estudou-se a dinâmica de um átomo de dois níveis interagindo com um reservatório estruturado lorentziano³, considerando correlações ini-

³Um reservatório estruturado é aquele que possui uma certa densidade de modos. No caso de um reservatório estruturado lorentziano, temos que sua densidade de modos é dada por uma lorentziana, onde tal tipo de densidade é uma excelente aproximação para descrever a emissão espontânea de um átomo de dois níveis [59].

ciais entre o sistema e o reservatório. A preparação do estado inicial desempenha um papel fundamental na implementação de qualquer experimento. Como recentemente observado [60, 61], procedimentos diferentes para a preparação de estados iniciais podem levar a diferenças não triviais nos resultados experimentais devido à interação sistema-reservatório, onde tais diferenças surgem das correlações iniciais entre o sistema e seu meio ambiente. Apesar da suposição de um estado inicial sistema-reservatório descorrelacionado ser amplamente utilizada, ela não é sempre bem justificada, especialmente quando o sistema interage fortemente com o seu reservatório [62, 63]. Desta maneira, a influência das correlações iniciais na dinâmica de sistemas quânticos abertos tem sido intensamente estudada [64–73]. Na Ref. [74], os autores verificaram que a resposta transiente linear de um sistema de dois níveis acoplado a um reservatório difere significativamente se o estado inicial é correlacionado ou não. Outra questão importante diz respeito à possibilidade de associar um mapa completamente positivo a uma dinâmica quântica, que só é possível quando não há correlações quânticas entre o sistema e o reservatório inicialmente [75]. Ademais, os efeitos das correlações iniciais foram recentemente observados experimentalmente usando-se um aparato exclusivamente óptico para sondar a evolução de um estado emaranhado de dois qubits [76].

Neste cenário, mostramos que a dinâmica da pureza do sistema pode ser usada como uma testemunha das correlações iniciais entre o sistema (átomo de dois níveis) e o reservatório quando eles interagem fortemente. Além disso, introduzindo um segundo átomo (qubit de prova) interagindo com o mesmo reservatório, somos capazes de determinar os diferentes tipos de correlações iniciais através da dinâmica da pureza do sistema atômico composto.

Esta tese é dividida da seguinte maneira. No Capítulo 2 introduzimos brevemente alguns conceitos da Eletrodinâmica Quântica de Cavidade, como a modelagem da interação radiação-matéria e da dinâmica de sistemas quânticos abertos a serem utilizadas. No Capítulo 3 descrevemos brevemente os elementos básicos presentes em teoria de informação que nos possibilitam quantificar a informação contida em um estado de um sistema físico, de modo que possamos dividir as correlações totais em uma parte puramente clássica e outra quântica. Já no Capítulo 4, apresentamos a investigação da transição quântico-clássica de um modo de uma cavidade dissipativa através da geração de correlações entre um par de átomos de dois níveis acoplados ressonantemente a tal modo da cavidade, cujos

resultados foram publicados na Ref. [77]. O Capítulo 5 ilustra um esquema probabilístico para preparar um estado atômico maximamente emaranhado entre um par de átomos de dois níveis acoplados a um modo de uma cavidade dissipativa, além de um método para testemunhar se o sistema atômico está emaranhado ou não através de uma medição quântica não destrutiva, onde tais resultados foram publicados na Ref. [78]. No Capítulo 6 mostramos como a pureza atômica pode testemunhar as correlações iniciais entre sistema-reservatório quando nosso sistema é dado por um átomo de dois níveis, estudo o qual foi publicado na Ref. [79]. No Capítulo 7 expomos as conclusões e, finalmente, no Capítulo 8 apresentamos algumas considerações finais.

Chapter 2

Eletrodinâmica Quântica de Cavidades

Por toda esta tese, consideraremos um sistema constituído de átomos de dois níveis interagindo com um modo do campo eletromagnético quantizado confinado em uma cavidade¹. Desta forma, este capítulo será dedicado a uma breve revisão das bases teóricas do modelo de interação radiação-matéria a ser utilizado, sem pretensões de discussões aprofundadas, uma vez que estas podem ser amplamente encontradas em vários livros-textos de Óptica Quântica.

2.1 Hamiltonianos de Jaynes-Cummings e de Tavis-Cummings

A dinâmica de um sistema constituído pela interação entre um átomo de dois níveis e

¹Embora um átomo real possua uma estrutura de níveis complexa e uma cavidade possua infinitos modos, é possível descrever um átomo como um sistema quântico de dois níveis e uma cavidade possuindo um único modo quando a frequência de tal modo é ressonante (ou quase-ressonante) com a frequência de transição atômica entre os dois níveis a serem considerados, além das regras de seleção de dipolo permitirem tal transição, e que outras transições possíveis sejam suficientemente não-ressonantes de modo que a probabilidade deste último evento ocorrer seja desprezível.

um modo do campo eletromagnético é dada pelo hamiltoniano de Jaynes-Cummings² [80]

$$H_{JC} = \omega_0 a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + g_0 (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+), \quad (2.1)$$

cujos termos representam, respectivamente, a evolução livre (do campo e do átomo) e o hamiltoniano de interação de dipolo (note que ao longo desta tese utilizaremos $\hbar = 1$). Ao longo desta tese, iremos considerar o caso em que as frequências do campo e do átomo são idênticas (ω_0), isto é, o caso ressonante. O hamiltoniano de interação é escalado pelo acoplamento átomo-campo $g_0 = d \sqrt{\frac{\omega_0}{2\epsilon_0 V}}$, com d sendo o momento de dipolo elétrico e V o volume da cavidade, onde tal interação descreve a troca coerente de um *quantum* de energia entre o átomo e o modo da cavidade a uma taxa dada por g_0 . Os operadores atômicos de levantamento e abaixamento são dados por $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$, com $\sigma_{x,y,z}$ sendo os operadores de Pauli; a (a^\dagger) é o operador aniquilação (criação) do modo da cavidade.

Os autoestados deste sistema são caracterizados pelo compartilhamento de uma excitação entre o átomo e o campo [81]. Considerando $n \geq 1$ excitações no sistema, estes estados refletem esta noção de troca de energia uma vez que eles são uma superposição dos estados de n -excitações (desacoplados) [81]

$$|\pm, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, n-1\rangle \pm |g, n\rangle), \quad (2.2)$$

onde $|e, n-1\rangle \equiv |e\rangle \otimes |n-1\rangle_c$ e $|g, n\rangle \equiv |g\rangle \otimes |n\rangle_c$, com $|g\rangle$ e $|e\rangle$ simbolizando os estados fundamental e excitado do átomo, respectivamente, e $|m\rangle_c$ o estado de Fock do campo com m excitações³. Embora os estados nus (desacoplados), $|e, n-1\rangle$ e $|g, n\rangle$, sejam degenerados com energia $(n-1/2)\omega_0$, os estados vestidos (autoestados), $|\pm, n\rangle$, possuem uma separação como resultado da interação

$$E_\pm^{(n)} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \omega_0 \pm g_0 \sqrt{n}, \quad (2.3)$$

exceto pelo estado fundamental do sistema composto, $|g, 0\rangle$, que possui energia $E^{(0)} = -\frac{\omega_0}{2}$. Esta estrutura de níveis de energia está ilustrada na Fig. 2.1, que representa a escada anarmônica de Jaynes-Cummings.

²O Hamiltoniano de Jaynes-Cummings é válido no regime em que $g_0 \ll \omega_0$, isto é, quando a interação é uma perturbação ao sistema desacoplado, de modo que seja possível aplicar a aproximação de onda girante.

³Note que n em $|\pm, n\rangle$ representa o número de excitações presentes no sistema quando este está em tal estado. Cuidado deve ser tomado para não confundir com o número de fótons do campo.

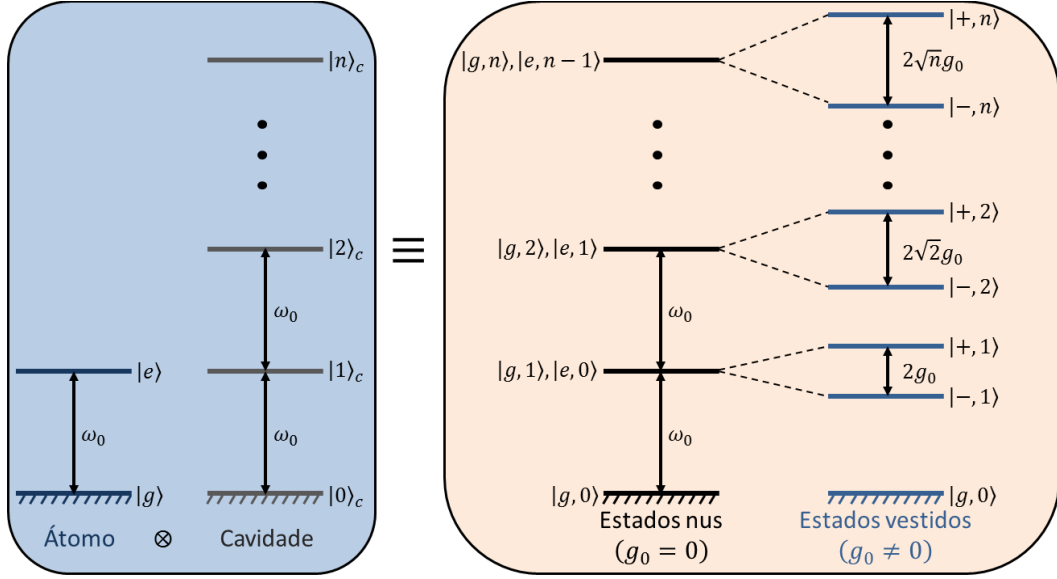


Figure 2.1: Da esquerda para direita, tem-se os níveis de energia para o átomo de dois níveis e para o modo da cavidade; os níveis degenerados de energia do sistema total átomo+cavidade sem interação (estados nus - $g_0 = 0$); e os níveis de energia do sistema com interação (estados vestidos - $g_0 \neq 0$), formando a escada anarmônica de Jaynes-Cummings.

Para o caso de N átomos de dois níveis idênticos interagindo com o modo da cavidade, com $N \geq 2$, a dinâmica é descrita pelo hamiltoniano de Tavis-Cummings [82]

$$H_{TC} = \omega_0 a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} S_z + g_0 (a^\dagger S_- + a S_+), \quad (2.4)$$

que nada mais é que uma extensão do modelo de Jaynes-Cummings, onde $S_{z,\pm} = \sum_{j=1}^N \sigma_{z,\pm}^j$ são os operadores coletivos atômicos, com $\sigma_{z,\pm}^j$ sendo os operadores do j -ésimo átomo. Considerando apenas dois átomos ($N = 2$), os autoestados de (2.4) podem ser divididos em dois subespaços independentes⁴: um deles é dado por

$$n = 0 \rightarrow E_0^{(0)} : |G, 0\rangle = |G\rangle \otimes |0\rangle_c; \quad (2.5a)$$

$$n = 1 \rightarrow E_{\pm}^{(1)} : |\pm, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi^+\rangle \otimes |0\rangle_c \pm |G\rangle \otimes |1\rangle_c); \quad (2.5b)$$

$$n \geq 2 \rightarrow \begin{cases} E_0^{(n)} : |0, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} (\sqrt{n-1} |G\rangle \otimes |n\rangle_c - \sqrt{n} |\Sigma\rangle \otimes |n-2\rangle_c) \\ E_{\pm}^{(n)} : |\pm, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(2n-1)}} (\sqrt{n} |G\rangle \otimes |n\rangle_c + \sqrt{n-1} |\Sigma\rangle \otimes |n-2\rangle_c) \\ \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |\Psi^+\rangle \otimes |n-1\rangle_c \end{cases} \quad (2.5c)$$

⁴ H_{TC} não promove transições entre os subespaços.

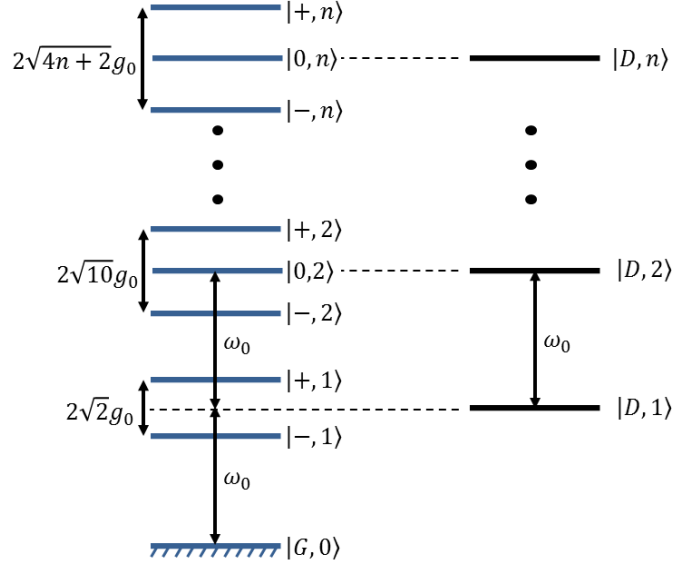


Figure 2.2: Estrutura de níveis de energia do modelo de Tavis-Cummings para $N = 2$. À esquerda temos os níveis de energia do subespaço dado pela Eq. (2.5) e à direita do subespaço dado pela Eq. (2.6).

onde $E_0^{(n)} = (n-1)\omega_0$ e $E_{\pm}^{(n)} = (n-1)\omega_0 \pm 2g_0\sqrt{n(1-\delta_{n,1}) + \frac{1}{2}}$, com $\delta_{n,m} = 1$ se $n = m$ e $\delta_{n,m} = 0$ se $n \neq m$; o outro subespaço é dado por uma estrutura equispaçada tipo oscilador harmônico

$$n \geq 1 \text{ excitações} \rightarrow |D, n\rangle = |\Psi^-\rangle \otimes |n-1\rangle_c \leftrightarrow E_D^{(n)} = (n-1)\omega_0. \quad (2.6)$$

Aqui, $|G\rangle \equiv |gg\rangle$, $|\Psi^{\pm}\rangle \equiv (|ge\rangle \pm |eg\rangle)/\sqrt{2}$ e $|\Sigma\rangle \equiv |ee\rangle$, onde $|xy\rangle \equiv |x\rangle_1 \otimes |y\rangle_2$ denota o primeiro átomo no estado x e o segundo no estado y . A Fig. 2.2 ilustra esta estrutura de níveis de energia.

O espectro tipo oscilador harmônico do subespaço dado pela Eq. (2.6) é devido ao fato dos seus autoestados serem um produto entre o estado do sistema atômico e o estado do modo da cavidade. Além disso, $|\Psi^-\rangle$ é um *dark state* do subsistema atômico, ou seja, quando os átomos estão neste estado eles não “enxergam” o campo da cavidade e vice-versa. Assim, qualquer fóton incidindo sobre o sistema só poderá ser absorvido pela cavidade, ou seja, é como se tivéssemos o caso de uma cavidade vazia ($g_0 = 0$).

2.1.1 Campo de bombeamento

Em certos casos, a fim de controlar o número médio de fótons na cavidade ou ape-

nas provar (sondar) o sistema, iremos bombear a cavidade com um campo clássico externo coerente (laser) de frequência ω_p e amplitude ε , cujo hamiltoniano que descreve tal bombeamento é dado por [83]

$$H_p = \varepsilon (ae^{i\omega_p t} + a^\dagger e^{-i\omega_p t}). \quad (2.7)$$

Devido a essa explícita dependência temporal a energia do sistema não é mais conservada, assim como não é quando levamos em conta a interação do sistema com o meio ambiente.

Para facilitar os cálculos será conveniente eliminar a dependência temporal do hamiltoniano total $H_T = H_{TC} + H_p$, o que pode ser facilmente realizado através da transformação unitária

$$\mathcal{T} = \exp [-i\omega_p t (a^\dagger a + S_z/2)], \quad (2.8)$$

que conduz o hamiltoniano para

$$H = \Delta_p a^\dagger a + \frac{\Delta_p}{2} S_z + g_0 (a^\dagger S_- + a S_+) + \varepsilon (a + a^\dagger), \quad (2.9)$$

com $\Delta_p = \omega_0 - \omega_p$. Este hamiltoniano é essencialmente a base para todos os casos estudados nesta tese.

2.2 Dinâmica de sistemas quânticos abertos

Até agora, o sistema átomo-campo foi descrito somente como um sistema fechado, isto é, a interação deste sistema com o meio ambiente foi desconsiderada. A fim de levar em conta os processos dissipativos introduzidos pelo meio ambiente, vamos utilizar o formalismo de equação mestra [84] conjuntamente com o formalismo do operador densidade [85].

2.2.1 Equação mestra markoviana

Considerando que nosso sistema interaja com um meio ambiente (reservatório térmico bosônico) a uma dada temperatura T , no limite de validade da aproximação de Born-

Markov⁵ [84], temos que a sua dinâmica será descrita pela equação mestra dada por [86,87]

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \mathcal{L}\rho \\ &= -i[H, \rho] + \kappa(n_{th} + 1)\mathcal{D}[a]\rho + \frac{\gamma}{2}(n_{th} + 1)\sum_{j=1}^N\mathcal{D}[\sigma_-^j]\rho \\ &\quad + \kappa n_{th}\mathcal{D}[a^\dagger]\rho + \frac{\gamma}{2}n_{th}\sum_{j=1}^N\mathcal{D}[\sigma_+^j]\rho,\end{aligned}\tag{2.10}$$

onde \mathcal{L} é o operador de Liouville (ou Liouvilliano) [87], ρ é o operador densidade [85], que descreve o estado do sistema, n_{th} é o número médio de fótons térmicos do reservatório⁶, e $\mathcal{D}[\mathcal{O}]\rho = 2\mathcal{O}\rho\mathcal{O}^\dagger - \mathcal{O}^\dagger\mathcal{O}\rho - \rho\mathcal{O}^\dagger\mathcal{O}$ para um dado operador \mathcal{O} do sistema. Aqui, o primeiro termo do lado direito da Eq. (2.10) descreve a evolução unitária do sistema, o segundo descreve o escape de fótons da cavidade (à taxa de $\kappa(n_{th} + 1)$), o terceiro descreve a emissão espontânea atômica (à taxa de $\gamma(n_{th} + 1)$), e, finalmente, os dois últimos termos descrevem a injeção de energia de forma incoerente na cavidade (à taxa de κn_{th}) e nos átomos (à taxa de γn_{th}), respectivamente, pelo reservatório.

2.3 Propriedades estatísticas do campo

Nesta seção, iremos abordar as propriedades estatísticas da radiação eletromagnética quantizada, como as funções de correlação, ou coerências, e os fenômenos de agrupamento (do inglês *bunching*) e antiagrupamento (do inglês *antibunching*) de fótons, de maneira que possamos determinar quando um campo possui um comportamento não clássico, do ponto de vista de sua estatística.

A teoria de coerência quântica nos permite examinar estados do campo que exibem certas características não clássicas, isto é, estados que não podem ser descritos por uma teoria estatística clássica. De fato, R. J. Glauber (laureado com o Nobel de Física em 2005) e outros, em uma série de artigos publicados na década de 60 [88–91], mostraram como uma teoria de coerência quântica poderia ser construída, a partir de observáveis, de

⁵A aproximação de Born-Markov é válida quando a interação entre sistema e reservatório é suficientemente fraca e o tempo característico do sistema é muito maior que o tempo associado ao decaimento das correlações entre as variáveis do reservatório, de modo que toda a informação transferida para o meio ambiente não retorna para o sistema [84, 87].

⁶O número médio de fótons térmicos se relaciona com a temperatura da seguinte forma $n_{th} = 1/[\exp(\hbar\omega_0/k_B T) - 1]$ (estatística de Bose-Einstein), com $n_{th} \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow 0$ [86].

uma forma paralela à teoria clássica. Experimentalmente, a intensidade de um feixe de luz é medida através de dispositivos que absorvem fótons: tal absorção da luz resulta na ionização de átomos que constituem o dispositivo e a detecção subsequente do foto-elétron constitui a detecção do respectivo fóton. Da contagem de foto-elétrons, as propriedades estatísticas do campo podem ser determinadas [81].

A ideia de coerência em óptica foi primeiramente associada à possibilidade de produzir franjas de interferência quando dois campos eram superpostos, tal que o maior grau de coerência óptica era associado a um campo que produzia franjas com máxima visibilidade. De fato, a função de correlação de primeira ordem (ou coerência de primeira ordem), suficiente para explicar experimentos de interferência clássicos, está estritamente associada com a visibilidade das franjas de interferência. Entretanto, a função de correlação de primeira ordem e, conseqüentemente, os experimentos que envolvem coerências de primeira ordem, não são capazes de distinguir estados da luz com distribuições espectrais idênticas mas com estatísticas de fótons completamente diferentes [86]. Desta forma, a função de correlação de primeira ordem não é capaz de distinguir luz quântica de luz clássica, sendo necessário considerar coerências de ordem mais altas para distinguir entre propriedades estatísticas clássicas de quânticas.

Dado um modo de um campo de radiação estacionário, a probabilidade de detectar um fóton em um tempo t^7 e outro fóton em um tempo $t + \tau$ está associada com a função de correlação de segunda ordem normalizada [92]

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a^\dagger(t) a^\dagger(t+\tau) a(t+\tau) a(t) \rangle}{\langle a^\dagger(t) a(t) \rangle^2}, \quad (2.11)$$

que descreve o processo de interferência de dois fótons, onde tal interferência é experimentada através do interferômetro de Hanbury-Brown e Twiss [81].

A função $g^{(2)}(\tau)$ é amplamente utilizada em óptica quântica para a obtenção de informação sobre as propriedades estatísticas da luz. Para $\tau \rightarrow 0$

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}, \quad (2.12)$$

onde $\hat{n} \equiv a^\dagger a$ é o operador número, $\langle \hat{n} \rangle$ é o número médio de fótons e $\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle \equiv \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2$ é a variância do número médio de fótons (flutuações do campo).

⁷Estamos considerando que t pertence à janela de tempo na qual o campo de radiação já atingiu o estado estacionário.

A partir de $g^{(2)}(0)$ e $g^{(2)}(\tau)$ é possível definir a estatística do campo e definir limites nos quais o campo se comporta não classicamente [93]. Classicamente, a função de correlação de segunda ordem para $\tau = 0$ é restrita ao intervalo $1 \leq g^{(2)}(0) \leq \infty$, enquanto que, quanticamente, temos que $0 \leq g^{(2)}(0) \leq \infty$ [81]. Assim temos que $g^{(2)}(0) \geq 1$ não é capaz de distinguir um campo clássico de um quântico uma vez que tanto a teoria quântica quanto a clássica prevêm este resultado. Por outro lado, se $g^{(2)}(0) < 1$ há uma evidência de radiação não clássica, principalmente pelo fato de que esta desigualdade está associada a funções de quase-probabilidade negativas [85, 92, 93], isto é, não há como descrever campos que satisfazem tal desigualdade através de uma teoria estatística clássica. Além disso, $g^{(2)}(0)$ também nos fornece a estatística de fótons [81] da seguinte forma:

$$g^{(2)}(0) > 1 \Leftrightarrow \langle \Delta \hat{n}^2 \rangle > \langle \hat{n} \rangle \rightarrow \text{estatística super-Poissoniana}; \quad (2.13)$$

$$g^{(2)}(0) = 1 \Leftrightarrow \langle \Delta \hat{n}^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle \rightarrow \text{estatística Poissoniana}; \quad (2.14)$$

$$g^{(2)}(0) < 1 \Leftrightarrow \langle \Delta \hat{n}^2 \rangle < \langle \hat{n} \rangle \rightarrow \text{estatística sub-Poissoniana}. \quad (2.15)$$

Originado da desigualdade de Cauchy-Schwarz, outro limite que campos clássicos devem satisfazer é $g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$ [86]. Entretanto, a teoria quântica de coerência prevê a violação de tal desigualdade. Os fenômenos de agrupamento (*bunching*) e antiagrupamento (*antibunching*) de fótons são identificados quando $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$ e $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$, respectivamente [92, 93]. Na Fig. 2.3 ilustramos o perfil de contagem de fótons utilizando um interferômetro de Hanbury-Brown e Twiss, mostrando que quando o campo apresenta agrupamento de fótons [Fig. 2.3(a)], estes têm uma maior probabilidade de chegarem nos detectores agrupados do que mais espaçados temporalmente. Já para o caso de um campo coerente [Fig. 2.3(b)], como um laser, os fótons chegam aleatoriamente, mostrando ausência de correlações de fótons. Quando o campo apresenta antiagrupamento de fótons [Fig. 2.3(c)], estes tem uma probabilidade maior de chegarem em intervalos de tempos mais espaçados. Desta forma, analogamente à discussão feita no parágrafo anterior, temos que $g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$ (agrupamento de fótons e detecção randômica) não é um indicativo de um campo clássico (nem quântico), mas, se uma dada radiação apresenta o fenômeno de antiagrupamento de fótons [$g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$], isto evidencia o caráter não clássico de tal radiação.

O fenômeno de antiagrupamento de fótons e a estatística sub-Poissoniana são efeitos puramente quânticos distintos. Embora eles tenham sido frequentemente confundidos como sendo o mesmo efeito, eles não o são [94]. Como um exemplo podemos citar um



Figure 2.3: Contagem de fótons em função do tempo para campos que apresentam (a) agrupamento de fótons, (b) aleatoriedade (campo coerente) e (c) antiagrupamento de fótons. Esta figura foi retirada da Ref. [92].

campo no estado comprimido, que apresenta antiagrupamento de fótons mas possui estatística super-Poissoniana [86].

Por fim, campos de radiação (luz, por exemplo) que possuem estatística sub-Poissoniana ou apresentam o fenômeno de antiagrupamento de fótons são campos não clássicos, isto é, não podem ser descritos por uma teoria estatística clássica. Portanto, quando um certo campo de radiação satisfizer $g^{(2)}(0) < 1$ e/ou $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ poderemos inferir a sua não classicalidade.

Chapter 3

Correlações Quânticas

Como discutido na seção 2.3, é possível descrever um campo de radiação através de uma teoria estatística clássica quando certas desigualdades não são violadas. Contudo, esta tese buscou outro fator para determinar a não classicalidade de um campo de radiação mesmo que as suas propriedades estatísticas possam ser descritas classicamente. Tal fator jaz na capacidade de tal campo gerar correlações entre dois átomos quando estes são preparados inicialmente em um estado descorrelacionado. Assim, este capítulo será devotado a descrever brevemente os elementos básicos da teoria de informação, tanto no contexto clássico quanto quântico, que nos possibilitam quantificar a informação contida em um estado de um sistema físico, de modo que possamos dividir as correlações totais em uma parte puramente clássica e outra quântica.

3.1 Elementos da teoria de informação clássica

O conceito chave em teoria de informação clássica é a entropia de Shannon [95],

$$\mathcal{H}(X) \equiv - \sum_i p_i \log_2(p_i), \quad (3.1)$$

que é utilizada para quantificar a informação de uma fonte X , que produz mensagens (comunicação) x_i com probabilidade p_i . Esta entropia pode ser vista como uma medida de nossa ignorância antes de sabermos o valor de X [1, 96] e será máxima quando todos os resultados que a variável aleatória X pode tomar forem igualmente prováveis, e será mínima quando apenas um resultado for 100% provável¹ [1].

¹Aqui é definido que $0 \log(0) \equiv 0$ uma vez que o limite $x \log(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$ existe.

Quando temos um par de variáveis aleatórias, X e Y , isto é, um sistema bipartido, define-se a entropia conjunta, que mede a informação do par (X, Y) , como

$$\mathcal{H}(X, Y) \equiv - \sum_{ij} p_{ij} \log_2(p_{ij}), \quad (3.2)$$

com p_{ij} sendo a distribuição de probabilidade conjunta. A entropia conjunta é subaditiva [1]

$$\mathcal{H}(X, Y) \leq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y), \quad (3.3)$$

onde a igualdade é satisfeita quando X e Y forem variáveis aleatórias independentes (variáveis descorrelacionadas), ou seja, quando $p_{ij} = p_i p_j$ ². A subaditividade da entropia possibilita a definição de uma medida de correlações totais entre X e Y chamada de informação mútua, que é dada por

$$I_c(X : Y) \equiv \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(X, Y), \quad (3.4)$$

onde $I_c(X : Y) = 0$ se, e somente se, X e Y forem descorrelacionados.

Expressando a distribuição de probabilidade conjunta p_{ij} em termos da probabilidade condicional $p_{i|j} \equiv p_{ij}/p_j$ (regra de Bayes) [1], é possível reescrever a Eq. (3.4) em uma segunda forma, que chamaremos de

$$J_c(X : Y) \equiv \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X|Y), \quad (3.5)$$

com

$$\mathcal{H}(X|Y) \equiv \sum_j p_j \mathcal{H}(X, Y = y_j) \quad (3.6)$$

sendo a entropia condicional, que mede a incerteza de X dado que foram feitas medições de Y . Embora a entropia condicional não seja necessariamente simétrica, isto é, $\mathcal{H}(X|Y)$ pode ser diferente de $\mathcal{H}(Y|X)$, a informação mútua sempre é simétrica. Dessa forma, a Eq. (3.5) admite uma segunda interpretação para a informação mútua: ela quantifica a informação obtida de X devido ao conhecimento de Y . No contexto clássico, as duas formas para a informação mútua são equivalentes, $I_c(X : Y) = J_c(X : Y)$, mas no caso quântico tal igualdade nem sempre é válida, como veremos posteriormente.

²As distribuições marginais p_i e p_j são obtidas através de p_{ij} da seguinte maneira: $p_i = \sum_j p_{ij}$ e $p_j = \sum_i p_{ij}$, respectivamente.

3.2 Elementos da teoria de informação quântica

A entropia de Shannon mede a ignorância associada a distribuições de probabilidades clássicas. Os estados quânticos podem ser descritos de forma semelhante, com operadores densidades substituindo distribuições de probabilidades. Nesta seção vamos generalizar a definição da entropia de Shannon para estados quânticos.

Von Neumann definiu a entropia de um estado quântico ρ pela expressão [1,97]

$$S(\rho) \equiv -Tr(\rho \log_2 \rho). \quad (3.7)$$

Em um contexto quântico, o resultado de uma medida em um estado representado pela matriz densidade ρ consiste em uma distribuição de probabilidade [1]. Von Neumann mostrou que a menor entropia devida a estas distribuições de probabilidades geradas do estado ρ é aquela devida à distribuição de probabilidade composta pelos autovalores λ_i de ρ , isto é, esta distribuição surgiria de medidas projetivas nos autovetores do estado. Assim, se escolhermos medidas projetivas na base dos autoestados de ρ , podemos escrever (3.7) como [97]:

$$S(\rho) = \mathcal{H}(\lambda) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i. \quad (3.8)$$

Para construir o análogo quântico da informação mútua clássica, Eq. (3.4), considere-se um sistema quântico bipartido AB descrito pelo operador densidade ρ_{AB} . A informação mútua quântica $I(A : B)$ é obtida usando a entropia de Von Neumann em vez da entropia de Shannon, levando à seguinte definição

$$I(A : B) \equiv S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}). \quad (3.9)$$

As entropias dos subsistemas A e B são calculadas a partir dos operadores densidades reduzidos de cada subsistema, $\rho_A = Tr_B(\rho_{AB})$ e $\rho_B = Tr_A(\rho_{AB})$ ³, respectivamente. A entropia de Von Neumann também é subaditiva [1], ou seja,

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B), \quad (3.10)$$

onde a igualdade é satisfeita quando os subsistemas forem descorrelacionados ($\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$). Desta forma, $I(A : B) = 0$ quando $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, isto é, quando não existir nenhum tipo de correlação, quântica nem clássica, entre os subsistemas.

³Aqui, Tr_A e Tr_B representam o traço parcial em relação ao subsistema A e B , respectivamente. Quando não houver especificação, entende-se que o traço será total, ou seja, sobre os dois subsistemas, tal que $Tr = Tr_{AB} = Tr_A Tr_B$.

Vimos que a informação mútua é obtida no contexto quântico substituindo-se as distribuições de probabilidade clássicas pelo operador densidade do sistema quântico, resultando em (3.9). Entretanto, o análogo quântico da segunda versão da informação mútua clássica, Eq. (3.5), não pode ser facilmente obtido pelo fato de que a regra de Bayes nem sempre é válida no caso quântico [98]. Por exemplo, de acordo com a regra de Bayes, a entropia condicional quântica poderia ser escrita como $S(\rho_{A|B}) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$, mas esta expressão assume um valor negativo para o estado quântico $|\Psi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ [1], e portanto ela não pode ser interpretada como no caso clássico, onde a entropia condicional é não negativa.

Para assegurar que a entropia condicional quântica seja sempre não negativa e possa ser interpretada como uma medida da informação sobre A dado que B é conhecido, deve-se ter em mente que o processo de medida de um sistema quântico pode ser realizado de diferentes maneiras e, além disso, as medidas geralmente perturbam o sistema. Desta forma, dado que seja aplicado um conjunto de medidas $\{\epsilon_b = M_b^\dagger M_b\}$ ⁴ sobre o subsistema B , a entropia condicional quântica é definida como [1]

$$S(\rho_{A|B}) = \min_{\{\epsilon_b\}} \sum_b p_b S(\rho_{A|B=b}), \quad (3.11)$$

onde

$$\rho_{A|B=b} = \frac{\text{Tr}_B(\mathbf{1}_A \otimes \epsilon_b \rho_{AB})}{\text{Tr}(\mathbf{1}_A \otimes \epsilon_b \rho_{AB})} \quad (3.12)$$

é o estado remanescente de A depois de obter o resultado b em B com probabilidade $p_b = \text{Tr}(\mathbf{1}_A \otimes \epsilon_b \rho_{AB})$, com $\mathbf{1}_A$ sendo o operador identidade que atua no espaço do subsistema A . A minimização é feita na Eq. (3.11) para garantir que ela nos dê a mínima incerteza possível com relação a A dado o conhecimento de B . Portanto, o análogo quântico da segunda versão da informação mútua clássica, Eq. (3.5), pode ser definido como

$$J(A : B) = S(\rho_A) - \min_{\{\epsilon_b\}} \sum_b p_b S(\rho_{A|B=b}) = \max_{\{\epsilon_b\}} \left(S(\rho_A) - \sum_b p_b S(\rho_{A|B=b}) \right). \quad (3.13)$$

Esta segunda versão quântica para a informação mútua pode ser interpretada como a informação acessível sobre A extraída localmente através da melhor estratégia de medidas sobre B . A melhor estratégia será aquela que extraia a maior quantidade de informação causando a menor perturbação possível em ρ_{AB} [99]. A partir disso, esta segunda versão

⁴Os operadores $\{M_b\}$ atuam sobre o espaço de estados do sistema em questão e satisfazem as seguintes propriedades: $\sum_b \epsilon_b = \sum_b M_b^\dagger M_b = \mathbf{1}_B$ e $\epsilon_b = M_b^\dagger M_b \geq 0$ para qualquer b , com $\mathbf{1}_B$ sendo o operador identidade de tal espaço de estados [1].

foi definida por Henderson e Vedral [100] como sendo as correlações clássicas compartilhadas pelo sistema bipartido, uma vez que ela é equivalente à primeira versão quando a quantidade de informação compartilhada por A e B pode ser obtida localmente sem perturbar o sistema, ou seja, quando essa quantidade de informação for igual à informação clássica [102].

3.3 Correlações quânticas

3.3.1 Emaranhamento

Nesta seção nos restringiremos aos conceitos de emaranhamento necessários para o entendimento de nosso problema. Para uma boa revisão sobre o assunto, é recomendável a leitura da Ref. [103].

Um estado quântico bipartido descrito por ρ_{AB} é dito emaranhado se, e somente se, ele não puder ser escrito como um estado separável

$$\rho_{AB} = \sum_j p_j \rho_A^j \otimes \rho_B^j, \quad (3.14)$$

onde $\sum_j p_j = 1$ e $p_j \geq 0$ para qualquer j [104]. Para estados puros, todas as correlações quânticas são devidas ao emaranhamento, e qualquer estado emaranhado viola alguma desigualdade de Bell [28]. Aliás, o emaranhamento é necessário para um estado quântico possuir propriedades não locais, isto é, violação de alguma desigualdade de Bell. Assim, emaranhamento não pode ser gerado somente por operações locais e comunicação clássica (LOCC⁵) [105].

Para fim de cálculos numéricos, dado que nosso sistema AB terá dimensão $2 \otimes 2$, usaremos aqui a expressão do emaranhamento de formação (E_F) [106] em função da concorrência [51]

$$E_F(\rho) = -F(\rho) \log F(\rho) - [1 - F(\rho)] \log [1 - F(\rho)], \quad (3.15)$$

onde $F(\rho) = \left(1 + \sqrt{1 - C(\rho)^2}\right) / 2$, com $C(\rho)$ sendo a concorrência do estado ρ . A concorrência é dada por $C = \max(0, \Lambda)$, onde $\Lambda = \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}$ e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ são os autovalores da matriz $\rho \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y$, sendo ρ^* o complexo conjugado de ρ e σ_y a matriz de Pauli. O emaranhamento de formação é definido no

⁵Sigla referente à expressão do inglês *Local Operations and Classical Communication*.

intervalo $0 \leq E_F \leq 1$, com $E_F = 0$ para estados descorrelacionados e $E_F = 1$ para estados maximamente emaranhados.

3.3.2 Discórdia quântica

Na teoria de informação quântica, pode ocorrer de $I(A : B) > J(A : B)$, isto é, o estado ρ_{AB} pode possuir mais informação do que aquela que possa ser obtida localmente. Isso motivou Ollivier e Zurek [107] a definirem uma medida de correlações quânticas, denominada de discórdia quântica⁶, definida como a diferença entre as duas versões quânticas da informação mútua

$$\begin{aligned} D_q(\rho_{AB}) &\equiv I(A : B) - J(A : B) \\ &= S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) + \min_{\{\epsilon_b\}} \sum_b p_b S(\rho_{A|B=b}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

definição que implica que a medição é realizada sobre o subsistema B ⁷. Assim, a discórdia seria uma medida de informação que não pode ser extraída localmente (sem medidas conjuntas) [99].

Embora a minimização presente no cálculo das correlações clássicas, $J(A : B)$, e, conseqüentemente, no cálculo da discórdia, $D_q(\rho_{AB})$, seja feitas a partir de medidas generalizadas (POVM)⁸, o que impõe grande dificuldade tanto analítica quanto numérica; foi mostrado que o POVM que minimiza $D_q(\rho_{AB})$, quando ρ_{AB} representa um sistema de dois qubits (que será o caso tratado nesta tese - dois átomos de dois níveis), é dado por medidas projetivas, mas não necessariamente ortogonais [108]. Por outro lado, foi recentemente demonstrado que, para este caso, bastariam dois projetores ortogonais para minimizar a discórdia [109]. Desta forma, para calcular a discórdia, nós escolhemos o conjunto de projetores $\{M_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|, M_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|\}$, com

$$|\psi_1\rangle = \cos\theta |g\rangle + e^{i\phi} \sin\theta |e\rangle; \quad (3.17)$$

$$|\psi_2\rangle = -\cos\theta |e\rangle + e^{-i\phi} \sin\theta |g\rangle, \quad (3.18)$$

onde a minimização é feita numericamente sobre os parâmetros $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$ através de um algoritmo desenvolvido em *Matlab*[®].

⁶Ao longo do texto iremos nos referir à discórdia quântica apenas por discórdia.

⁷Em todos os casos analisados nesta tese, devido à simetria do nosso problema, obtemos o mesmo resultado para D_q , sejam as medidas realizadas no subsistema A quanto no B . Entretanto, D_q não é uma função simétrica para o caso geral.

⁸Sigla referente à expressão do inglês *Positive Operator-Valued Measure*.

Pode-se mostrar que o estado ρ_{AB} terá discórdia nula se, e somente se, existe uma medida de Von Neumann $\{M_k^B = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\}$ (conjunto completo de projetores) tal que [110]

$$\sum_k (\mathbf{1}_A \otimes M_k^B) \rho_{AB} (\mathbf{1}_A \otimes M_k^B) = \rho_{AB}. \quad (3.19)$$

Em outras palavras, o estado de discórdia nula é da forma

$$\rho_{AB} = \sum_j p_j \rho_A^j \otimes |\phi_j\rangle_B \langle\phi_j|, \quad (3.20)$$

onde ρ_A^j são operadores densidades do subsistema A e $\{|\phi_j\rangle_B\}$ formam um conjunto de estados ortogonais do subsistema B ⁹. Os estados de discórdia nula satisfazem $I(A : B) = J(A : B)$, uma vez que só as correlações clássicas estão presentes, conforme discutido no final da seção 3.2.

Este resultado mostra que a existência de correlações quânticas é devida ao princípio de superposição, que permite descrever um dos subsistema através de um conjunto de estados não ortogonais, mesmo que o estado global seja um estado separável. Por exemplo, o estado (3.20) é um estado separável [vide Eq. (3.14)]; caso $\{|\phi_j\rangle_B\}$ não seja um conjunto de estados ortogonais, $D_q > 0$. Desta forma, o conceito de discórdia faz com que o conceito de separabilidade não possa ser considerado como sinônimo de classicalidade, mostrando que estados separáveis mistos podem ter discórdia não nula embora tenham emaranhamento nulo. Para ilustrar um exemplo disso, a Fig. 3.1 mostra D_q e E_F para o estado de Werner

$$\rho_W = \frac{1-p}{4} \mathbf{1} + p |\zeta\rangle\langle\zeta|, \quad (3.21)$$

com $|\zeta\rangle$ sendo um dos estados de Bell

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|gg\rangle \pm |ee\rangle) \quad \text{ou} \quad |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|ge\rangle \pm |eg\rangle). \quad (3.22)$$

Ela mostra que $D_q > 0$ para $p > 0$, em contraste com a separabilidade bem conhecida para este estado quando $p \leq 1/3$, onde E_F é nulo.

A forma dos estados de discórdia nula (3.20) deixa claro o papel fundamental do princípio de superposição na existência de correlações quânticas. Ele também nos permite entender por que a maioria dos estados bipartidos exibirá correlações com características não clássicas. Com base na Eq. (3.20), um estado com $D_q = 0$ exige que pelo menos um dos subsistemas seja descrito por um conjunto de estados ortogonais $\{|\phi_j\rangle\}$. Assumindo

⁹Se as medidas forem realizadas sobre o sistema A a descrição será de forma análoga.

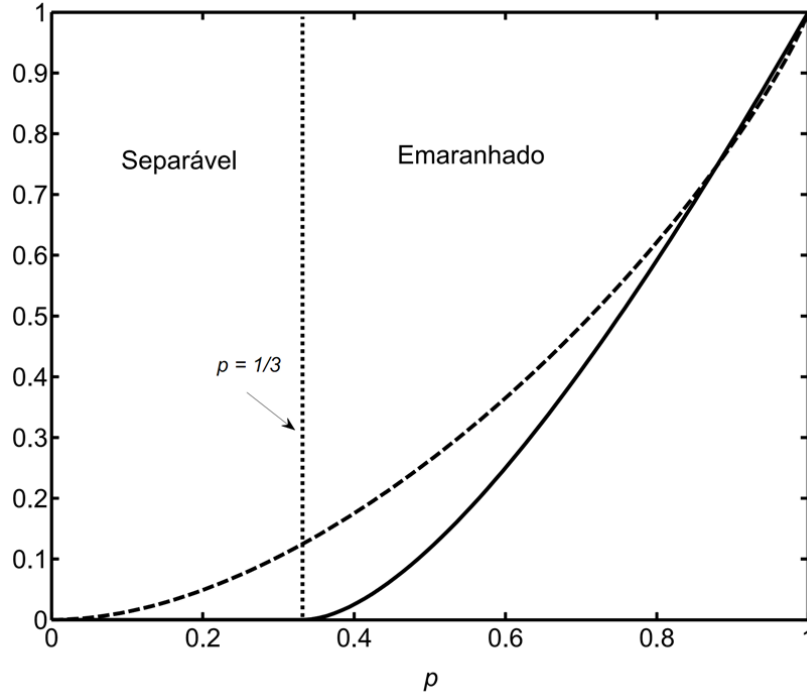


Figure 3.1: Valor da D_q (linha tracejada) e do E_F (linha cheia) para o estado de Werner $\rho_W = \frac{1-p}{4}\mathbf{1} + p|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$, com $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Observe que, mesmo na região em que ρ_W é separável ($E_F = 0$), $D_q > 0$, ou seja, separabilidade nem sempre pode ser tratada como sinônimo de classicidade.

que este subsistema seja de dimensão 2, cada elemento do conjunto pode ser escrito como $|\phi_j\rangle = \alpha_j|g\rangle + \beta_j|e\rangle$, com $|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2 = 1$. Portanto, não é difícil ver que a ortogonalidade entre os elementos do conjunto $\{|\phi_j\rangle\}$ impõe fortes restrições sobre os parâmetros α_j e β_j . Além disso, qualquer perturbação em um destes parâmetros pode invalidar a condição de ortogonalidade, levando à criação de correlações quânticas [99].

Para uma revisão histórica sobre correlações quânticas e algumas aplicações, principalmente sobre discórdia quântica, vide Refs. [99, 101, 102].

Chapter 4

Transição Quântico-Clássica do Campo da Cavidade

O objetivo deste capítulo é investigar a transição quântico-clássica de um modo de uma cavidade dissipativa através da geração de correlações (de qualquer natureza, quântica e/ou clássica) entre um par de átomos de dois níveis¹, não interagentes, acoplados ressonantemente a tal modo da cavidade. Tal investigação consiste em monitorar as correlações, no regime estacionário [$\dot{\rho}(t \rightarrow \infty) = 0$], na medida em que se aumenta o número médio de fótons intracavidade, coerentemente (via bombeamento coerente externo) ou incoerentemente (via temperatura). Como o sistema atômico será o medidor que irá monitorar o comportamento do campo, iremos considerar que os átomos são ideais (não interagem com o reservatório, $\gamma = 0$), como feito em [21], pois a dissipação atômica pode mascarar o resultado a ser buscado². Os resultados mais relevantes deste capítulo foram publicados na Ref. [77].

¹Diferentemente das Refs. [21–23], para monitorar o comportamento do modo da cavidade, nós utilizaremos dois átomos de dois níveis ao invés de apenas um.

²Como o monitoramento do campo será feito através da geração de correlação entre os átomos e tais correlações são sensíveis a processos dissipativos atômicos [111], a ausência de tal correlação, no regime estacionário, poderia ser um efeito produzido pela presença de processos dissipativos atômicos ao invés da classicalidade do campo, mascarando o resultado. Dessa forma, só iremos considerar a dissipação no modo da cavidade.

4.1 Modelo semiclássico

O hamiltoniano de Tavis-Cummings, Eq. (2.4), descreve N átomos de dois níveis acoplados a um modo do campo eletromagnético quantizado de uma cavidade. Uma modelagem semiclássica para este sistema, isto é, tratar o campo classicamente, pode ser feita através da substituição dos operadores do campo por amplitudes complexas que podem depender do tempo [92], $a \rightarrow \alpha(t)$ e $a^\dagger \rightarrow \alpha^*(t)$ ³. Desta forma, a dinâmica do sistema é descrita pelo hamiltoniano semiclássico

$$H_{TC}^{SC}(t) = \omega_0 |\alpha(t)|^2 + \frac{\omega_0}{2} S_z + g_0 [\alpha^*(t) S_- + \alpha(t) S_+], \quad (4.1)$$

dado $\alpha(t)$. Além disso, a Eq. (4.1) pode ser escrita como

$$H_{TC}^{SC}(t) = \sum_{j=1}^N H_j^{SC}(t), \quad (4.2)$$

com

$$H_j^{SC}(t) = \frac{\omega_0}{N} |\alpha(t)|^2 + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z^j + g_0 [\alpha^*(t) \sigma_-^j + \alpha(t) \sigma_+^j], \quad (4.3)$$

sendo que $[H_j^{SC}(t), H_k^{SC}(t')] = 0$ para $j \neq k$.

Como estamos desconsiderando a dissipação atômica e o campo é definido por uma amplitude complexa, a equação mestra, neste caso, levará em conta somente o sistema atômico e será dada por

$$\dot{\rho}_{at} = \mathcal{L}_{SC}(t) \rho_{at}, \quad (4.4)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SC}(t) \rho_{at} &= -i [H_{TC}^{SC}(t), \rho_{at}] \\ &= -i \left[\sum_j H_j^{SC}(t), \rho_{at} \right] \\ &= \sum_j (-i [H_j^{SC}(t), \rho_{at}]) \\ &= \left(\sum_j \mathcal{L}_j^{SC}(t) \right) \rho_{at}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A solução da Eq. (4.4) é dada por [87]

$$\begin{aligned} \rho_{at}(t) &= e^{\int_0^t \mathcal{L}_{SC}(t') dt'} \rho_{at}(0) \\ &= e^{\sum_j \int_0^t \mathcal{L}_j^{SC}(t') dt'} \rho_{at}(0). \end{aligned} \quad (4.6)$$

³Outra forma de tratar classicamente o campo é utilizar as equações de Maxwell-Bloch, que podem ser obtidas do formalismo de equação mestra, Eq. (2.10), aplicando a fatoração nos termos duais das médias que envolvem operadores atômico e do campo, como, por exemplo, $\langle a \sigma_z \rangle \rightarrow \langle a \rangle \langle \sigma_z \rangle$ [83].

Entretanto, como $[H_j^{SC}(t), H_k^{SC}(t')] = 0$ para $j \neq k$, então $[\mathcal{L}_j^{SC}(t), \mathcal{L}_k^{SC}(t')] = 0$ para $j \neq k$ (vide Apêndice A), de forma que a exponencial pode ser fatorada

$$e^{\sum_j \int_0^t \mathcal{L}_j^{SC}(t') dt'} = \prod_j e^{\int_0^t \mathcal{L}_j^{SC}(t') dt'}, \quad (4.7)$$

conduzindo à solução

$$\rho_{at}(t) = \prod_j e^{\int_0^t \mathcal{L}_j^{SC}(t') dt'} \rho_{at}(0), \quad (4.8)$$

que nos mostra que, quando um campo é tratado classicamente, este só realiza operações locais nos átomos.

Preparando os átomos inicialmente no estado separável e descorrelacionado

$$\begin{aligned} \rho_{at}(0) &= \rho_1(0) \otimes \rho_2(0) \otimes \dots \otimes \rho_N(0) \\ &= \prod_j^\otimes \rho_j(0), \end{aligned} \quad (4.9)$$

temos, a partir da Eq. (4.8), que

$$\rho_{at}(t) = \prod_j^\otimes \rho_j(t), \quad (4.10)$$

com $\rho_j(t) = e^{\int_0^t \mathcal{L}_j^{SC}(t') dt'} \rho_j(0)$, ou seja, isto mostra claramente que um campo descrito classicamente não é capaz de gerar qualquer tipo de correlação entre os átomos, pois o sistema continua em um estado descorrelacionado para todo t . É importante enfatizar que este raciocínio também é válido para o caso em que levamos em conta a emissão atômica como uma fonte para o campo da cavidade mesmo quando este é tratado classicamente, isto é, quando descrevemos a dinâmica do sistema através das equações de Maxwell-Bloch [83].

Para o caso de dois átomos ($N = 2$), identificados como A e B , vimos no Capítulo 3 que, para estados do tipo $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, $I(A : B) = J(A : B) = 0$ o que leva a $D_q(\rho_{AB}) = 0$. Desta forma, considerando o modelo totalmente quântico através da Eq. (2.10), se houver geração de correlação entre os átomos, isto será uma testemunha da não classicalidade do campo. Neste sentido, vamos analisar agora o modelo quântico e monitorar a geração de correlação entre os átomos, no regime estacionário, enquanto aumentamos o número médio de fótons intracavidade coerentemente e incoerentemente.

4.2 Modelo quântico

4.2.1 Bombeamento coerente

Vamos considerar agora que o modo do campo confinado na cavidade seja tratado quanticamente, tal que a dinâmica de nosso sistema seja dada pela equação mestra (2.10). Entretanto, vamos considerar também que o controle sobre o número de fótons intracavidade seja feito apenas coerentemente, ou seja, vamos considerar o caso no qual $n_{th} \ll 1$ ($\hbar\omega_0 \gg k_B T$), de modo que o reservatório não consiga injetar energia térmica no sistema. Além disso, como dito anteriormente, iremos desconsiderar a dissipação atômica ($\gamma = 0$), pois os átomos farão o papel de um detector ideal de não classicalidade do campo. Dessa forma, a dinâmica do sistema será descrita por

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \kappa \mathcal{D}[a] \rho, \quad (4.11)$$

lembrando que

$$H = g_0 (a^\dagger S_- + a S_+) + \varepsilon (a + a^\dagger); \quad (4.12)$$

$$\mathcal{D}[a] \rho = 2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a, \quad (4.13)$$

onde fixamos $\Delta_p = 0$ ⁴.

Para problemas no regime de baixa excitação, a Eq. (4.11) pode ser integrada numericamente sem muita dificuldade. Entretanto, quando o campo de bombeamento se torna muito forte, $\varepsilon/\kappa \gg 1$, o número médio de fótons intracavidade se torna muito alto e isto faz com que o problema seja inviável computacionalmente, uma vez que a dimensão do espaço de Fock necessária para uma simulação numérica escala com ε^2/κ^2 neste caso. Frequentemente, o campo intracavidade é muito próximo a um estado coerente⁵ mas com pequenos desvios devido ao acoplamento átomo-campo. Neste caso, com o intuito de observar a ação do campo da cavidade sobre os átomos devida às pequenas flutuações quânticas, nós iremos deslocar, do estado do campo, o campo médio dado por $\alpha \propto \varepsilon/\kappa$, que essencialmente é um termo clássico. Para isso, vamos aplicar na Eq. (4.11) uma

⁴Com a restrição $\Delta_p = 0$, a transformação unitária utilizada para eliminar a temporalidade do Hamiltoniano corresponde exatamente à representação de interação [85].

⁵Para um cavidade vazia, a Eq. (4.11) nos dá que o estado estacionário para o campo da cavidade será dado pelo estado coerente $|\beta\rangle = |i\varepsilon/\kappa\rangle$. O termo *cavidade vazia* está sendo usado para descrever a situação na qual nenhum átomo está presente, o que equivale à situação na qual $g_0 = 0$.

transformação unitária independente do tempo dada pelo operador deslocamento⁶ [86]

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), \quad (4.14)$$

que conduz a $H_D = D^\dagger(\alpha) H D(\alpha)$ e $\rho_D = D^\dagger(\alpha) \rho D(\alpha)$. Fixando

$$\alpha = -i\varepsilon/\kappa, \quad (4.15)$$

que é exatamente o negativo da amplitude do estado estacionário da cavidade para o caso de cavidade vazia ($g_0 = 0$), após algumas linhas de álgebra a Eq. (4.11) se torna

$$\dot{\rho}_D = -i[H_Q + H_{SC}, \rho_D] + \kappa \mathcal{D}[a] \rho_D, \quad (4.16)$$

onde

$$H_Q = g_0 (a^\dagger S_- + a S_+); \quad (4.17)$$

$$H_{SC} = \Omega S_+ + \Omega^* S_-, \quad (4.18)$$

com

$$\Omega = g_0 \alpha = -i g_0 \varepsilon / \kappa. \quad (4.19)$$

Evidentemente, a dinâmica nesta representação transformada [Eq. (4.16)] é praticamente idêntica à representação original [Eq. (4.11)]; a única diferença se encontra no hamiltoniano de bombeamento. Nesta nova representação, o campo de bombeamento excita diretamente os átomos ao invés do modo da cavidade⁷, e isto será muito conveniente, uma vez que, agora, o espaço de Fock necessário para simulações numéricas pode ter dimensão muito menor. De fato, o número médio de fótons intracavidade máximo nesta nova representação, \bar{n}_D^{\max} , será da ordem de $N g^2 / 4$ [112].

A partir da solução de ρ_D via Eq. (4.16), pode-se recuperar a solução $\rho = D(\alpha) \rho_D D^\dagger(\alpha)$, referente à representação original, dada pela Eq. (4.11). Similarmente, se o interesse for

⁶O operador deslocamento possui propriedades convenientes que transformam o estado de vácuo como $D(\alpha) |0\rangle_c = |\alpha\rangle$ e o operador aniquilação como $D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha$.

⁷Na representação original, o campo de bombeio excita o modo da cavidade, mas este está interagindo com os átomos. Então, de certa forma, os átomos são indiretamente excitados. Isto é evidenciado, na nova representação, pela amplitude de bombeio Ω , que é proporcional à amplitude do campo de bombeio real (ε) e pelo acoplamento átomo-campo (g_0).

o cálculo de valores esperados relativos a operadores do campo⁸, pode-se utilizar ρ_D diretamente, como, por exemplo,

$$\begin{aligned}
\langle a \rangle &= Tr(a\rho) \\
&= Tr[aD(\alpha)\rho_D D^\dagger(\alpha)] \\
&= Tr[D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)\rho_D] \\
&= Tr[(a+\alpha)\rho_D] \\
&= Tr(a\rho_D) + \alpha,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

que é muito mais conveniente do que transformar o operador densidade.

Estatística de fótons

Agora, antes de investigarmos a geração de correlação entre um par de átomos acoplados ao campo da cavidade, vamos observar como as propriedades estatísticas deste campo, $g^{(2)}(0)$ e $g^{(2)}(\tau)$, comportam-se em relação a ε , que está estritamente relacionado com o número médio de fótons intracavidade. Para isto, obteve-se a solução estacionária da Eq. (4.16) numericamente (vide apêndice B), $\rho_D(t \rightarrow \infty)$ tal que $\dot{\rho}_D(t \rightarrow \infty) = 0$, considerando $N = 2$, $g = 0.1\kappa$ e o sistema inicialmente tanto no estado $|gg\rangle \otimes |0\rangle_c$ quanto $|ge\rangle \otimes |0\rangle_c$ ⁹.

A Fig. 4.1(a) ilustra a dependência de \bar{n} com ε/κ considerando o estado inicial $|gg\rangle \otimes |0\rangle_c$ ¹⁰. A partir do *inset* da Fig 4.1(a) é possível observar o pequeno desvio de \bar{n} (linha cheia) em relação ao caso de cavidade vazia ($= \varepsilon^2/\kappa^2$ - linha tracejada), mostrando que a suposição feita anteriormente é válida. Já a Fig 4.1(b) ilustra a dependência de $g^{(2)}(0)$ com ε/κ considerando os estados iniciais $|gg\rangle \otimes |0\rangle_c$ e $|ge\rangle \otimes |0\rangle_c$, onde observamos que $g^{(2)}(0) \geq 1$ para qualquer valor de ε ; além disto, podemos ver que o campo apresenta estatística super-Poissoniana para $\varepsilon \lesssim g$ e Poissoniana para $\varepsilon \gg g$, pois, neste último caso, o campo tende para o estado coerente $|\alpha\rangle$, com α dado por (4.15).

⁸Como $D(\alpha)$ só atua no subespaço do campo, que é independente do subespaço atômico, o cálculo de valores esperados relativos a operadores atômicos será independente da representação, ou seja, dado um operador atômico \mathcal{A} , então $\langle \mathcal{A} \rangle = Tr(\mathcal{A}\rho) = Tr(\mathcal{A}\rho_D)$.

⁹O estado estacionário do campo é independente do estado inicial do campo. Entretanto, como a Eq. (4.16) ainda preserva a independência dos subespaços de autoestados do modelo de Tavis-Cummings (vide seção 2.1), o estado estacionário do sistema total dependerá do estado inicial do sistema atômico, conforme veremos posteriormente.

¹⁰O comportamento de \bar{n} para o estado inicial $|ge\rangle \otimes |0\rangle_c$ é similar.

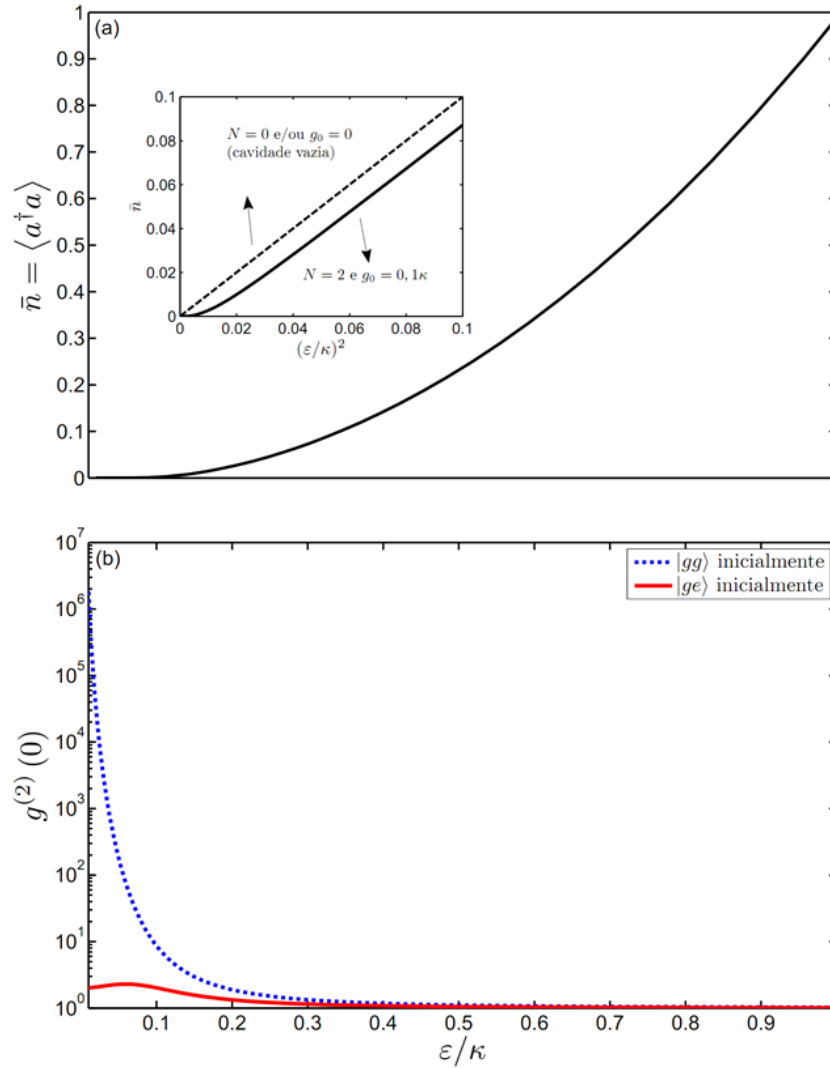


Figure 4.1: Dependência com ε/κ (a) do número médio de fótons, \bar{n} , e (b) da função de correlação de segunda ordem, $g^{(2)}(0)$. No *inset* da parte (a) é possível observar o pequeno desvio de \bar{n} (linha sólida) em relação ao número médio de fótons do campo coerente no caso de uma cavidade vazia ($= \varepsilon^2/\kappa^2$ - linha tracejada).

Por outro lado, utilizando os mesmos parâmetros da Fig. 4.1, a Fig. 4.2 nos dá o comportamento de $g^{(2)}(\tau)$ para $\varepsilon/\kappa = 0.1; 0.5$ e 1 , onde é possível observar que $g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$ para qualquer valor de ε ; e observa-se também que $g^{(2)}(\tau)$ e $g^{(2)}(0) \rightarrow 1$ quando $\varepsilon/\kappa \gg 1$, pelo fato de que, como dito anteriormente, o campo tende a um estado coerente neste limite.

Portanto, através dos resultados ilustrados nas Figs. 4.1 e 4.2, vemos que $g^{(2)}(0) \geq 1$ e $g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$ para qualquer valor de ε e, conseqüentemente, para qualquer \bar{n} . Desta forma, para este caso, a estatística do campo da cavidade pode ser tratada através de uma teoria estatística clássica. A seguir, vamos analisar a ação do campo sobre os átomos a partir de uma perspectiva da correlação gerada entre os átomos quando estes são preparados em um estado produto (descorrelacionado) inicialmente.

Geração de correlação

Do ponto de vista atômico, a Eq. (4.16) deixa claro que há a competição de duas dinâmicas: uma governada por um campo clássico (H_{SC}) e a outra por um campo quântico (H_Q). Agora, vamos investigar o que acontece com a dinâmica dos N átomos de dois níveis quando o modo da cavidade dissipa fortemente.

Assumindo $\kappa \gg g\sqrt{N}\sqrt{\bar{n}_D + 1}$, $|\Omega| \sqrt{N}$, o modo da cavidade rapidamente atinge seu estado estacionário (ρ_c^{ss}), tal que, para $\kappa t \gg 1$, podemos aproximar $\rho(t) \approx \rho_c^{ss} \otimes \rho_{at}(t)$ [87], onde $\rho_{at}(t)$ é a matriz densidade atômica. A partir dessas condições, as variáveis do campo podem ser adiabaticamente eliminadas (vide Apêndice B) [87,113], resultando na equação mestra reduzida para os átomos

$$\dot{\rho}_{at} = -i[H_{SC}, \rho_{at}] + \Gamma_{eff} \mathcal{D}[S_-] \rho_{at}, \quad (4.21)$$

onde $\Gamma_{eff} = g^2/\kappa$.

Janela de tempo semiclássica

Observe que a Eq. (4.21) descreve um conjunto de N átomos bombeados por um campo clássico com frequência de Rabi efetiva $|\Omega|$ e interagindo com um reservatório coletivo efetivo com taxa de decaimento efetiva Γ_{eff} . De acordo com a Eq. (4.21), para $|\Omega| \sqrt{N} \gg N\Gamma_{eff}$ ¹¹, ou seja, para $\varepsilon \gg g\sqrt{N}$, e para tempos de interação $t \ll 1/N\Gamma_{eff} =$

¹¹O número de átomos N é considerado pelo fato de $\langle S_{\pm} \rangle_{\max} \sim \sqrt{N}$.

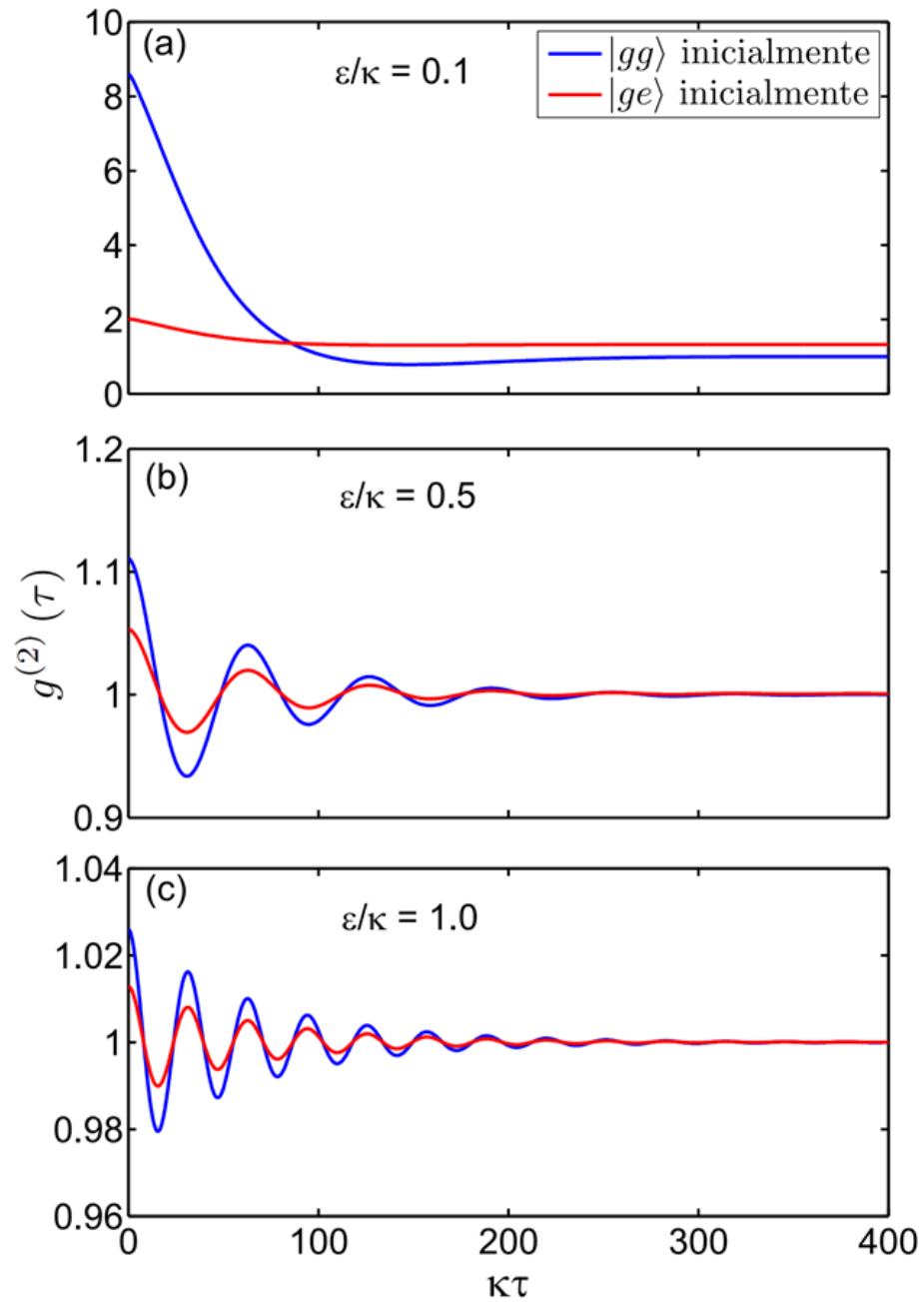


Figure 4.2: Comportamento de $g^{(2)}(\tau)$ para (a) $\varepsilon = 0.1\kappa$, (b) $\varepsilon = 0.5\kappa$ e (c) $\varepsilon = \kappa$, considerando $|gg\rangle$ (azul pontilhado) e $|ge\rangle$ (vermelho sólido) inicialmente.

κ/Ng^2 , a dinâmica atômica será principalmente governada pelo termo de evolução livre. Assim, como a equação mestra reduzida acima foi derivada para $\kappa t \gg 1$, podemos ver que, para tempos de interação limitados à janela de tempo

$$1 \ll \kappa t \ll \frac{\kappa}{N\Gamma_{eff}} = \left(\frac{\kappa}{g\sqrt{N}} \right)^2, \quad (4.22)$$

a equação mestra pode ser aproximada para [23]

$$\dot{\rho}_{at} \approx -i [H_{SC}, \rho_{at}], \quad (4.23)$$

que representa um sistema atômico interagindo com um campo eletromagnético clássico. Esta dinâmica efetiva descreve o comportamento semiclássico presente na física da interferometria de Ramsey de átomos de Rydberg [23]; nosso resultado expande os resultados da Ref. [23] para N átomos.

Neste caso, assim como discutido na seção 4.1, preparando os átomos inicialmente em um estado produto, Eq. (4.9), teremos que $\rho_{at}(t)$ também será um estado produto, Eq. (4.10), mostrando claramente que o hamiltoniano de interação H_{SC} é incapaz de gerar qualquer tipo de correlação entre os átomos. Além disso, se o estado atômico inicial for puro, ele permanecerá puro para qualquer tempo de acordo com a Eq. (4.23). Assim, a pureza atômica¹² seria um bom parâmetro para validar esse regime semiclássico, uma vez que, fora da janela de tempo semiclássica, Eq. (4.22), a dinâmica do sistema é governada pela Eq. (4.21), onde a presença do termo de dissipação efetivo introduzirá decoerência no sistema atômico.

Olhando para a Eq. (4.22), fixada a razão g/κ , vemos que o tempo de interação para o qual o regime semiclássico ainda permanece válido decresce com $1/N$, isto é, quanto maior o número de átomos interagindo com o modo da cavidade, menor é a janela de tempo na qual o regime semiclássico é válido. A fim de verificar este resultado, realizamos algumas simulações numéricas utilizando a equação mestra total dada pela Eq. (4.16), que não possui aproximações. A Fig. 4.3(a) ilustra a pureza atômica para 1, 2 e 3 átomos na cavidade, para $g = 0.01\kappa$, $\varepsilon = 0.1\kappa$ (que resulta em um $\bar{n}_{\max} = 0.01$) e com os átomos preparados inicialmente no estado excitado $|e\rangle$ ¹³ e o modo da cavidade no estado de vácuo $|0\rangle_c$, onde podemos observar que a pureza atômica decresce rapidamente quando o sistema deixa a janela de tempo semiclássica, além de decrescer mais rápido quanto maior N .

¹²A pureza atômica é definida como $P_{at} = Tr(\rho_{at}^2)$ [81].

¹³O comportamento da pureza é análogo quando se considera os átomos inicialmente em qualquer estado puro fatorado.

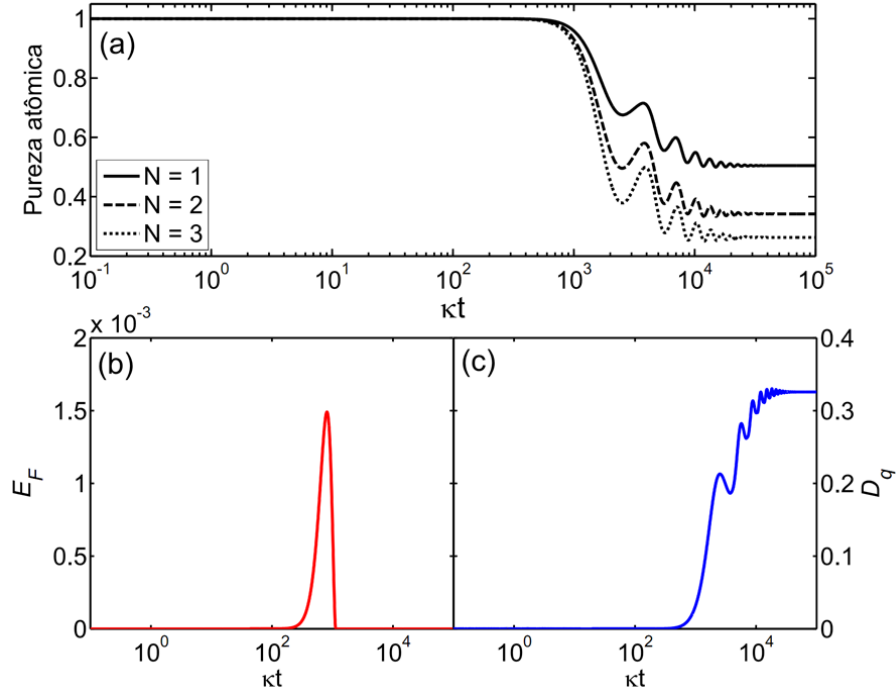


Figure 4.3: Evolução temporal (escala logarítmica) da (a) pureza atômica considerando um (linha cheia), dois (linha tracejada) e três átomos (linha pontilhada). Considerando apenas dois átomos, temos a evolução temporal do (b) emaranhamento de formação e da (c) discórdia entre os átomos. Aqui, fixamos $g = 0.01\kappa$, $\varepsilon = 0.1\kappa$ e todos os átomos inicialmente em $|e\rangle$ e a cavidade em $|0\rangle_c$.

Agora, considerando apenas dois átomos e os mesmos parâmetros, vemos a partir da Fig. 4.3(b) que o emaranhamento de formação, E_F , é nulo para tempos de interação longos e quase nulo para tempos de interação curtos. Portanto, E_F não se apresenta como um artefato útil para distinguir o caráter quântico e clássico do campo da cavidade no regime estacionário do sistema. Por outro lado, a partir da Fig. 4.3(c), vemos que a discórdia, D_q , possui valores muito pequenos na janela de tempo semiclassical, tal que as correlações geradas entre os átomos pelo campo da cavidade são desprezíveis, o que confirma o caráter clássico do campo neste limite. Entretanto, D_q cresce continuamente até atingir um valor estacionário, onde tal valor apreciável mostra que as correlações quânticas entre os átomos, geradas pela interação destes com o modo da cavidade¹⁴, é significativa para longos tempos de interação e revelam o caráter quântico do campo da cavidade.

Curiosamente, aqui temos uma transição clássico-quântica ao invés de uma quântico-

¹⁴Lembrem-se que inicialmente os átomos estão descorrelacionados.

clássica. Desta forma, a fim de determinar o comportamento quântico do campo da cavidade, vamos investigar as correlações entre os átomos no regime estacionário.

Regime estacionário

Nesta seção, iremos investigar a possível geração de correlações entre um par de átomos no regime estacionário, isto é, para $\rho_{at}(t \rightarrow \infty)$ tal que $\dot{\rho}_{at}(t \rightarrow \infty) = 0$, de modo que possamos determinar o comportamento quântico do campo da cavidade. Para isto, vamos obter a solução estacionária da Eq. (4.21). Antes, é importante salientar que a Eq. (4.21) foi obtida a partir de certas restrições ($\kappa \gg g\sqrt{N}\sqrt{\bar{n}_D + 1}, |\Omega| \sqrt{N}$), sendo válida para $\kappa t \gg 1$. Entretanto, a partir da comparação de vários resultados obtidos pela Eq. (4.21) e pela Eq. (4.16), observou-se que esta equação continua sendo válida no regime estacionário mesmo quando tais restrições são violadas. Portanto, como estamos interessados no regime estacionário, a Eq. (4.21) pode ser usada sem perda de generalidade.

Impondo $\dot{\rho}_{at} = 0$ na Eq. (4.21), o problema se reduz a um sistema de equações lineares, cujas incógnitas são os elementos da matriz densidade atômica. Assim, foi possível obter a solução analítica do estado atômico estacionário (ρ_{at}^{ss}) na base $\{|gg\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle, |ee\rangle\}$, dada por

$$\rho_{at}^{ss} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & \mathcal{R}_4 & \mathcal{R}_4 & \mathcal{R}_5 \\ \mathcal{R}_4 & \mathcal{R}_2 & \mathcal{R}_6 & \mathcal{R}_7 \\ \mathcal{R}_4 & \mathcal{R}_6 & \mathcal{R}_2 & \mathcal{R}_7 \\ \mathcal{R}_5 & \mathcal{R}_7 & \mathcal{R}_7 & \mathcal{R}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

onde

$$\mathcal{R}_1 = \frac{(1 - P_{\Psi^-})}{\mathcal{N}} [|\Omega|^4 + \Gamma_{eff}^2 (4\Gamma_{eff}^2 + 2|\Omega|^2)]; \quad (4.25a)$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{P_{\Psi^-}}{2} + \frac{(1 - P_{\Psi^-})}{2\mathcal{N}} |\Omega|^2 (2\Gamma_{eff}^2 + |\Omega|^2); \quad (4.25b)$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{(1 - P_{\Psi^-})}{\mathcal{N}} |\Omega|^4; \quad (4.25c)$$

$$\mathcal{R}_4 = -\frac{(1 - P_{\Psi^-})}{\mathcal{N}} |\Omega| \Gamma_{eff} (2\Gamma_{eff}^2 + |\Omega|^2); \quad (4.25d)$$

$$\mathcal{R}_5 = \frac{(1 - P_{\Psi^-})}{\mathcal{N}} 2|\Omega|^2 \Gamma_{eff}^2; \quad (4.25e)$$

$$\mathcal{R}_6 = \mathcal{R}_2 - P_{\Psi^-}; \quad (4.25f)$$

$$\mathcal{R}_7 = -\frac{(1 - P_{\Psi^-})}{\mathcal{N}} |\Omega|^3 \Gamma_{eff}, \quad (4.25g)$$

com

$$\mathcal{N} = 3|\Omega|^4 + 4\Gamma_{eff}^4 + 4|\Omega|^2 \Gamma_{eff}^2 \quad (4.26)$$

sendo um fator de normalização, e

$$P_{\Psi^-} = Tr [\rho_{at}(0) |\Psi^- \rangle \langle \Psi^-|] \quad (4.27)$$

sendo a projecção do estado inicial atômico em $|\Psi^- \rangle = (|ge\rangle - |eg\rangle) / \sqrt{2}$.

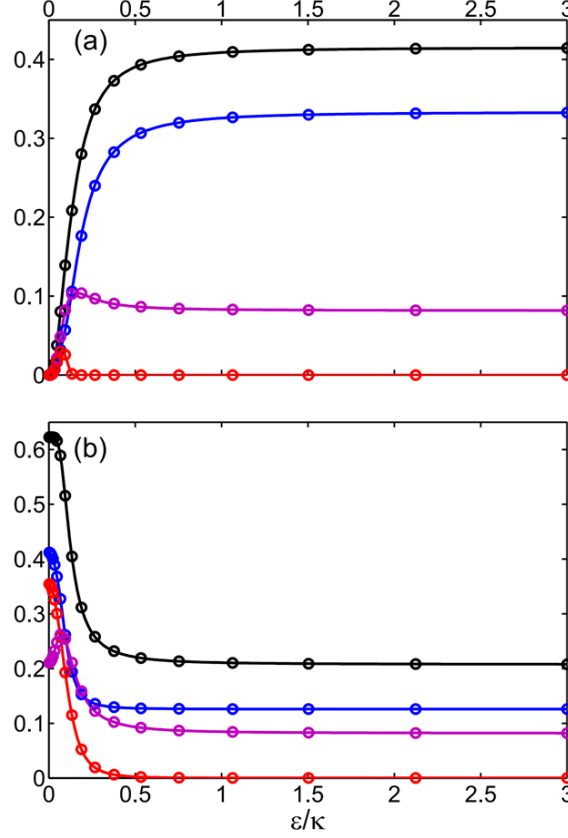


Figure 4.4: Dependência em ε/κ de $I(\rho_{at}^{ss})$ (preto), $J(\rho_{at}^{ss})$ (roxo), $D_q(\rho_{at}^{ss})$ (azul) e $E_F(\rho_{at}^{ss})$ (vermelho) para os estados iniciais atômicos (a) $|gg\rangle$ e (b) $|ge\rangle$. Os círculos correspondem aos resultados numéricos obtidos a partir da equação mestra sem aproximações, que confirmam os nossos resultados analíticos.

A partir de (4.24), obtemos as linhas cheias da Fig. 4.4 que ilustram a informação mútua $I(\rho_{at}^{ss})$, as correlações clássicas $J(\rho_{at}^{ss})$, o emaranhamento de formação $E_F(\rho_{at}^{ss})$ e a discórdia $D_q(\rho_{at}^{ss})$ em função de ε/κ , assumindo $g = 0.1\kappa$ e os estados atômicos iniciais (a) $|gg\rangle$ e (b) $|ge\rangle$. Para testar a validade da (4.21), estas correlações também foram calculadas numericamente a partir da equação mestra total sem aproximações¹⁵ (círculos), Eq. (4.16), onde podemos ver que a Eq. (4.21) nos fornece uma boa aproximação do estado do sistema atômico no regime estacionário.

¹⁵Os resultados independem do estado inicial do campo. Porém, aqui, foi utilizado o campo inicialmente no estado de vácuo da representação deslocada.

Na Fig. 4.4, vemos que E_F sempre vai a zero para $\varepsilon \gg g, \kappa$ ($\bar{n} \rightarrow \infty$), sendo diferente de zero somente para $\varepsilon \ll g, \kappa$, isto é, para pequenos valores de \bar{n} . Este resultado parece confirmar o princípio de equivalência, já que, no limite de um campo macroscópico ($\bar{n} \rightarrow \infty$), esperamos a concordância entre a descrição semiclassical e a quântica, no sentido de que tal campo não é capaz de gerar correlações entre os átomos. Surpreendentemente, J e D_q (e consequentemente I)¹⁶ são sempre não nulos, atingindo valores significativos mesmo no limite de $\varepsilon \gg g, \kappa$ e, ainda, no regime estacionário (o valor de g não altera significativamente o padrão das curvas da Fig. 4.4, ele só as “translada”). Isto significa que o modo da cavidade é capaz de gerar correlações (quânticas e clássicas) entre os átomos para qualquer \bar{n} , mesmo para campos extremamente intensos. Portanto, o modo da cavidade tem seu caráter quântico revelado através das correlações geradas entre os átomos, mesmo que sua estatística possa ser descrita classicamente, como discutido anteriormente.

Por outro lado, alguém poderia argumentar que a origem deste caráter quântico do campo seria uma consequência da coerência do campo de bombeamento, que gera um campo coerente dentro da cavidade, como em [114, 115]. Entretanto, sendo este o caso, um bombeamento incoerente sobre a cavidade (temperatura, por exemplo) não levaria à geração de correlação entre os átomos no regime estacionário. Desta forma, iremos analisar este caso mais cuidadosamente a seguir.

4.2.2 Bombeamento incoerente

Vamos considerar agora que o controle sobre o número de fótons intracavidade seja feito apenas incoerentemente, ou seja, vamos considerar o caso no qual $\varepsilon = 0$ e $n_{th} \neq 0$, de modo que a dinâmica do sistema seja dada pela equação mestra

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \kappa(n_{th} + 1)\mathcal{D}[a]\rho + \kappa n_{th}\mathcal{D}[a^\dagger]\rho, \quad (4.28)$$

com

$$H = g_0(a^\dagger S_- + a S_+); \quad (4.29)$$

$$\mathcal{D}[a]\rho = 2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a; \quad (4.30)$$

$$\mathcal{D}[a^\dagger]\rho = 2a^\dagger\rho a - a a^\dagger\rho - \rho a a^\dagger. \quad (4.31)$$

¹⁶Recorde que um campo clássico não é capaz de gerar qualquer tipo de correlações entre os átomos. Desta forma, se tal campo só gerasse correlações clássicas, por exemplo, isto também evidenciaria seu caráter quântico.

Assim como no caso em que se leva em conta o bombeamento coerente, a Eq. (4.28) pode ser integrada numericamente sem muita dificuldade no limite de baixas excitações, mas apresenta grande dificuldade computacional quando o número médio de fótons intracavidade se torna muito alto, visto que, para este caso, a dimensão do espaço de Fock necessária para uma simulação numérica escala com n_{th} . Aqui, o campo da cavidade será dado por um estado próximo a um estado térmico [92] no regime estacionário¹⁷, porém não existe uma transformação unitária análoga à Eq. (4.14) que faça com que seja possível diminuir drasticamente a “amplitude” do estado térmico. Desta forma, a integração numérica da Eq. (4.28) deverá ser feita através de força computacional bruta *a priori*.

Estatística de fótons

Novamente, antes de investigarmos a geração de correlação entre um par de átomos acoplados ao campo da cavidade, vamos observar o comportamento das propriedades estatísticas deste campo, $g^{(2)}(0)$ e $g^{(2)}(\tau)$, em relação a n_{th} . Analogamente ao caso de bombeamento coerente, obteve-se a solução estacionária da Eq. (4.28) numericamente, $\rho(t \rightarrow \infty)$ tal que $\dot{\rho}(t \rightarrow \infty) = 0$, considerando $N = 2$, $g = 0.1\kappa$ e o sistema inicialmente tanto no estado $|gg\rangle \otimes |0\rangle_c$ quanto $|ge\rangle \otimes |0\rangle_c$. Entretanto, como os resultados são muito próximos, iremos mostrar somente os resultados obtidos através do estado inicial $|gg\rangle \otimes |0\rangle_c$.

A Fig. 4.5(a) ilustra a dependência de \bar{n} com n_{th} , onde vemos que $\bar{n} = n_{th}$, dado que os quadrados vermelhos são exatamente valores de n_{th} ¹⁸. Desta forma, temos que o campo da cavidade é dado por um estado térmico no regime estacionário. Outros fatores que comprovam isto são que: *i*) $g^{(2)}(0) = 2$ independentemente de n_{th} (obtido numericamente, embora não seja mostrado aqui por ser um valor constante); e *ii*) $g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$, conforme observado na Fig. 4.5(b) (este resultado também independe de n_{th}), que indica a estatística super-Poissoniana de tal campo.

Portanto, vemos que $g^{(2)}(0) > 1$ e $g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$ para qualquer valor de n_{th} , ou

¹⁷O estado térmico para um modo de uma cavidade é dado por $\rho_{th} = \exp(-\beta H_{campo}) / \text{Tr}[\exp(-\beta H_{campo})]$, onde $H_{campo} = \hbar\omega_0 a^\dagger a$ e $\beta = 1/k_B T$. Tal estado possui as propriedades: $\bar{n} = n_{th}$, $g^{(2)}(0) = 2$ e $g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$, com $g^{(2)}(\tau) \rightarrow 1$ quando $\tau \rightarrow \infty$ [92]

¹⁸Para um átomo interagindo com um modo da cavidade e no limite de $\bar{n} \gg 1$, o limite clássico derivado na Ref. [22] requer $n_{th} > (g/\kappa)^2$. Neste limite, as propriedades estatísticas do campo são aquelas do estado térmico. No nosso caso foi assumido $g = 0.1\kappa$, tal que $n_{th} = 1$ já é muito maior que $(g/\kappa)^2$.

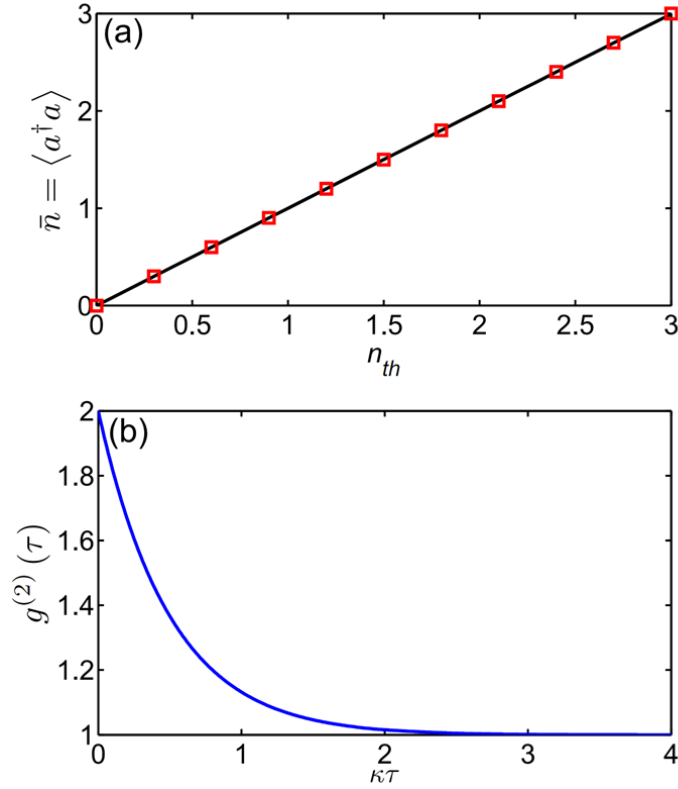


Figure 4.5: Dependência de (a) \bar{n} com n_{th} e de (b) $g^{(2)}(\tau)$ com $\kappa\tau$.

seja, a estatística do campo da cavidade pode ser tratada através de uma teoria estatística clássica, assim como no caso de bombeamento coerente. Deste modo, vamos analisar a ação do campo sobre os átomos a partir da correlação gerada entre os átomos quando estes são preparados em um estado produto inicialmente.

Geração de correlação

Agora, vamos investigar o que acontece com a dinâmica dos 2 átomos de dois níveis quando o modo da cavidade dissipa fortemente. Analogamente ao caso com bombeamento coerente, supondo $\kappa(n_{th} + 1) \gg g$, podemos aproximar $\rho(t) \approx \rho_c^{ss} \otimes \rho_{at}(t)$ para $\kappa t \gg 1$ [87], de forma que podemos eliminar adiabaticamente as variáveis do campo, obtendo, assim, a equação mestra reduzida para os átomos

$$\dot{\rho}_{at} = \Gamma_{eff}(n_{th} + 1) \mathcal{D}[S_-] \rho_{at} + \Gamma_{eff} n_{th} \mathcal{D}[S_+] \rho_{at}, \quad (4.32)$$

que representa a interação dos átomos com um reservatório térmico coletivo, onde $\Gamma_{eff} = g^2/\kappa$. É importante observar que, diferentemente do caso com bombeamento coerente, a Eq. (4.32) nos dá não só o comportamento estacionário do sistema atômico, mas também

seu comportamento dinâmico (para $\kappa t \gg 1$), pois a restrição $\kappa (n_{th} + 1) \gg g$ é fortalecida com o aumento de n_{th} (que é o nosso interesse).

Impondo $\dot{\rho}_{at} = 0$, obtemos a solução estacionária, na base $\{|gg\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle, |ee\rangle\}$,

$$\rho_{at}^{ss} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & d & 0 \\ 0 & d & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

onde

$$a = \frac{(1 - P_{\Psi^-})}{\mathcal{N}} (n_{th} + 1)^2; \quad (4.34a)$$

$$b = \frac{P_{\Psi^-}}{2} + \frac{(1 - P_{\Psi^-})}{2\mathcal{N}} n_{th} (n_{th} + 1); \quad (4.34b)$$

$$c = \frac{(1 - P_{\Psi^-})}{\mathcal{N}} n_{th}^2; \quad (4.34c)$$

$$d = b - P_{\Psi^-}, \quad (4.34d)$$

tal que $\mathcal{N} = 3n_{th}^2 + 3n_{th} + 1$ e $P_{\Psi^-} = Tr[\rho_{at}(0) |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-|]$.

Devido ao tipo especial do operador densidade ρ_{at}^{ss} dado pela Eq. (4.33), que é uma vertente dos estados conhecidos como *estados-X* [116, 117], é possível calcular as correlações atômicas analiticamente (vide Apêndice C). A partir destas expressões analíticas, como visualizado na Fig. 4.6, obtemos I (linha preta), J (linha roxa), E_F (linha vermelha) e D_q (linha azul) em função de n_{th} , considerando $g = 0.1\kappa$ e os estados atômicos iniciais (a) $|gg\rangle$ e (b) $|ge\rangle$. Os círculos são os resultados numéricos obtidos através da equação mestra sem aproximações dada pela Eq. (4.28).

Da Fig. 4.6 vemos que, no regime estacionário, E_F sempre vai a zero com o aumento da temperatura. Entretanto, isto não acontece com as outras correlações, o que nos mostra que o modo da cavidade ainda é capaz de gerar correlações entre os átomos mesmo quando tal campo interage com um reservatório térmico a altas temperaturas. Além disso, neste caso, o mesmo padrão das correlações é obtido para qualquer valor do acoplamento átomo-campo. O acoplamento meramente determina o tempo de interação necessário para os átomos atingirem o estado estacionário, tal que quanto maior o acoplamento, menor é o tempo de interação necessário para o sistema atingir o regime estacionário. Por fim, vemos que o campo da cavidade sempre é capaz de gerar correlações entre os átomos quando estes são preparados inicialmente em um estado descorrelacionado, independentemente da

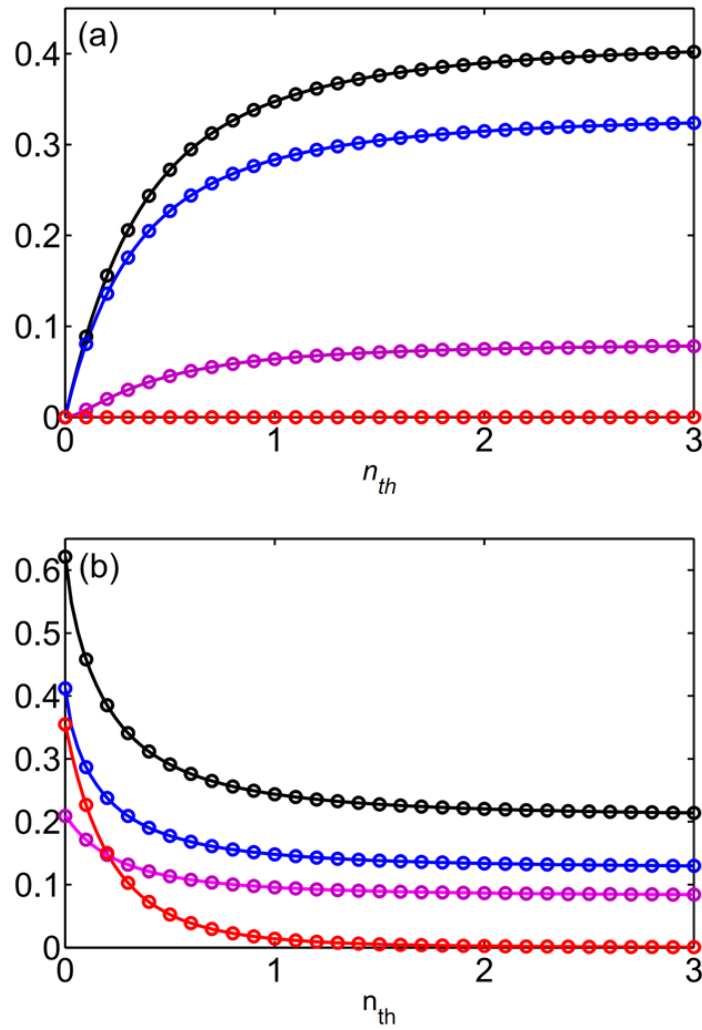


Figure 4.6: Dependência em n_{th} de $I(\rho_{at}^{ss})$ (preto), $J(\rho_{at}^{ss})$ (roxo), $D_q(\rho_{at}^{ss})$ (azul) e $E_F(\rho_{at}^{ss})$ (vermelho) para os estados iniciais atômicos (a) $|gg\rangle$ e (b) $|ge\rangle$. Os círculos correspondem aos resultados numéricos obtidos a partir da equação mestra sem aproximações.

temperatura do reservatório, revelando o caráter quântico do campo para qualquer valor de temperatura.

Um fato interessante é que, no limite $\bar{n} \rightarrow \infty$, tanto para o caso de bombeamento coerente quanto o de temperatura, as correlações atingem os mesmos valores assintóticos.

4.2.3 Tempo característico para atingir o regime estacionário

Até este momento, só analisamos os resultados para o regime estacionário, mas quase nada se falou sobre o tempo de interação necessário para atingir tal regime. Assim, nesta seção será investigado o tempo típico de relaxação (τ_R) do sistema tanto para o caso de

bombeamento coerente quanto incoerente.

Bombeamento coerente

Para o caso de bombeamento coerente, tal investigação pode ser feita através da diagonalização do liouvilliano da equação mestra dada pela Eq. (4.16), que não possui aproximações.

Dado o Liouvilliano \mathcal{L} , tal que

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho, \quad (4.35)$$

temos que a solução pode ser dada por [118]

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t} \rho(0). \quad (4.36)$$

Diagonalizando \mathcal{L} , podemos escrever $\rho(0)$ em função dos auto-operadores de \mathcal{L}

$$\rho(0) = \sum_j c_j \rho_j, \quad (4.37)$$

onde $\mathcal{L}\rho_j = \lambda_j \rho_j$, de forma que [118]

$$\rho(t) = \sum_j c_j e^{\lambda_j t} \rho_j. \quad (4.38)$$

Os auto-operadores ρ_j não descrevem necessariamente um operador densidade [118], mas a combinação deles sim, resultando em $\rho(t)$. Como \mathcal{L} não é um operador hermitiano, os autovalores λ_j geralmente são complexos, onde $\text{Re}(\lambda_j) \leq 0$ por uma questão de convergência, de modo que $\text{Re}(\lambda_j)$ nos dá a relaxação do sistema, pois $e^{\text{Re}(\lambda_j)t} = e^{-|\text{Re}(\lambda_j)|t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, exceto para o caso em que $\text{Re}(\lambda_j) = 0$. Portanto, os estados estacionários do sistema serão dados pela combinação dos ρ_j associados aos autovalores de parte real nula^{19,20} [119], e o tempo típico de relaxação do sistema pode ser caracterizado como

$$\tau_R = \frac{1}{\min\{|\text{Re}(\lambda_j)|\}}, \quad (4.39)$$

com $\text{Re}(\lambda_j) \neq 0$.

Para o caso de bombeamento coerente, identificamos dois tempos característicos para a relaxação do sistema, $\tau_R^{(1)}$ e $\tau_R^{(2)}$, com $\tau_R^{(2)} > \tau_R^{(1)}$. A Fig. 4.7(a) mostra o comportamento de

¹⁹No caso mais geral, os estados estacionários podem oscilar no tempo devido ao termo $\exp[i \text{Im}(\lambda_j)t]$ (estados estacionários de não-equilíbrio).

²⁰Como ρ_j representa um estado estacionário se $\text{Re}(\lambda_j) = 0$, então necessariamente ρ_j descreverá uma matriz densidade neste caso.

$\tau_R^{(1)}$ em função de $(\varepsilon/\kappa)^2$ considerando alguns valores de g_0 , onde se observa que $\tau_R^{(1)}$ satura para $\varepsilon \gg g_0$. Neste regime, considerando $\varepsilon = 1000\kappa$ e para os valores de acoplamento considerados, vemos a partir da Fig. 4.7(b) que $\tau_R^{(1)}$ possui uma dependência praticamente linear com relação a $(g_0/\kappa)^{-2}$, ou seja, quanto maior o valor de g_0 , menor é o tempo de interação necessário para atingir o regime caracterizado por $\tau_R^{(1)}$. Já a Fig. 4.7(c) ilustra a dependência de $\tau_R^{(2)}$ com $(\varepsilon/\kappa)^2$ considerando os mesmos valores de g_0 utilizados anteriormente, onde se nota a dependência linear entre $\tau_R^{(2)}$ e $(\varepsilon/\kappa)^2$ quando $\varepsilon \gg g_0$, tal que $\tau_R^{(2)}$ assume os mesmos valores independentemente de g_0 neste limite. Assim, vemos que quanto maior ε , maior é o tempo de interação necessário para atingir o regime caracterizado por $\tau_R^{(2)}$, isto é, quanto maior ε , maior é o tempo necessário para se atingir o regime estacionário do sistema.

Para ilustrar melhor esses dois tempos característicos para a relaxação do sistema, vamos olhar para a dinâmica das correlações, onde utilizou-se $\varepsilon = 1000\kappa$, o estado inicial $|gg\rangle \otimes |0\rangle_c$ (os resultados para o estado inicial $|ge\rangle \otimes |0\rangle_c$ são analógos) e os valores de g_0 usados anteriormente²¹. As Figs. 4.7(d)-(f) ilustram a dinâmica da informação mútua, da discórdia e das correlações clássicas, respectivamente, onde vemos que o sistema praticamente atinge um regime estacionário intermediário para $\kappa t \gtrsim \tau_R^{(1)}$ e depois atinge o verdadeiro regime estacionário para $\kappa t \gtrsim \tau_R^{(2)}$. Além disso, observa-se também que para $\kappa t \sim \tau_R^{(1)}$ o sistema já possui valores consideráveis para as correlações, não sendo necessário atingir o verdadeiro regime estacionário.

Por outro lado, é possível notar também que, no limite de espaço livre ($g_0 \rightarrow 0$) e de um campo extremamente intenso ($\varepsilon \rightarrow \infty$), $\tau_R^{(1)}$ e $\tau_R^{(2)}$ crescem infinitamente, levando a uma possível explicação do fato de que não são observadas gerações espontâneas de correlações entre os átomos no espaço livre, quando estes estão sujeitos a um campo externo coerente. Além disso, se $\tau_R^{(1)}$ e $\tau_R^{(2)}$ possuírem valores muito altos, a dissipação atômica, desprezada aqui, começa a ter relevância na dinâmica do sistema, e, se este for o caso, tal efeito dissipativo levará o sistema atômico para o estado maximamente misto $(|gg\rangle\langle gg| + |ge\rangle\langle ge| + |eg\rangle\langle eg| + |ee\rangle\langle ee|)/4$, que não possui nenhum tipo de correlação.

Bombeamento incoerente

Para o caso com bombeamento incoerente, o tempo típico de relaxação do sistema

²¹Aqui E_F é desprezível para os valores de ε e g_0 utilizado.

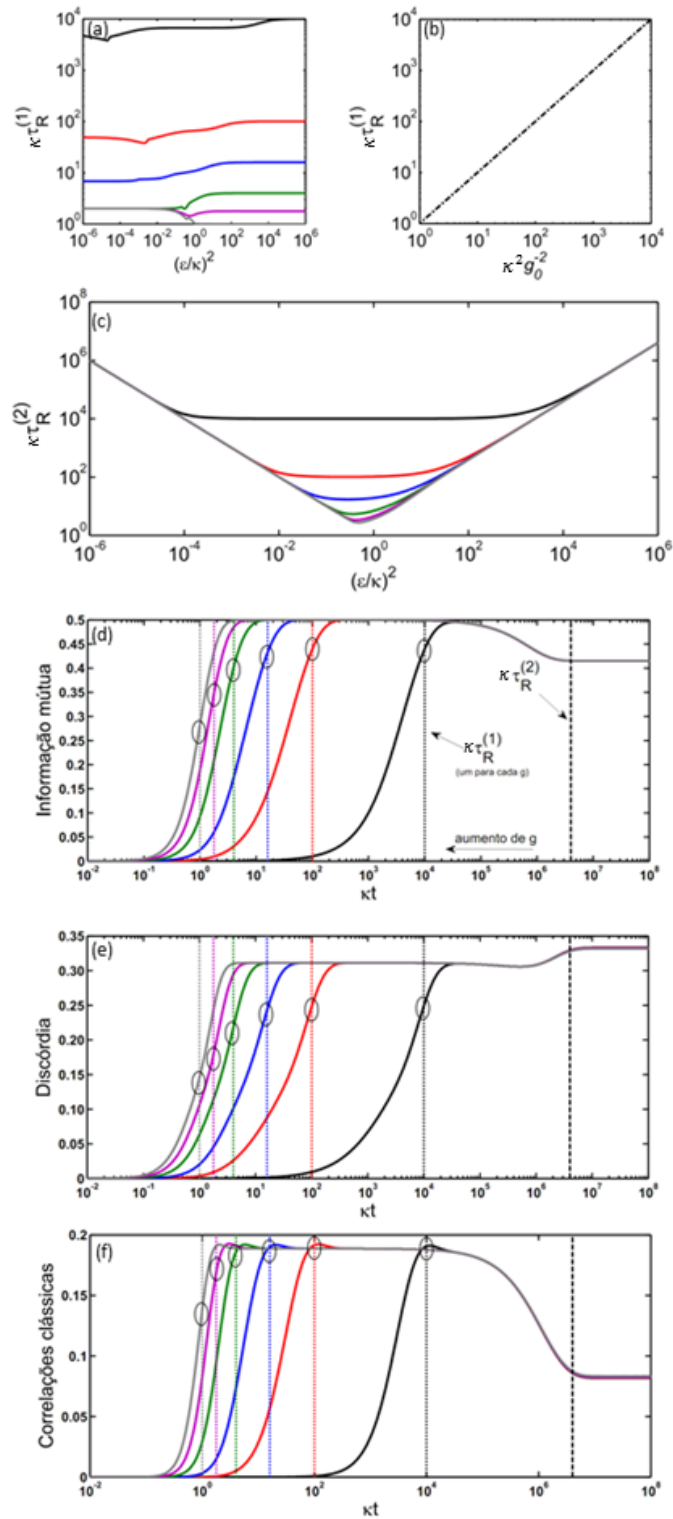


Figure 4.7: (a) $\kappa\tau_R^{(1)}$ vs $(\varepsilon/\kappa)^2$ considerando os valores de g_0 como 0.01κ (preto), 0.1κ (vermelho), 0.25κ (azul), 0.5κ (verde), 0.75κ (roxo) e κ (cinza). (b) $\kappa\tau_R^{(1)}$ vs $(g_0/\kappa)^{-2}$ fixando $\varepsilon = 1000\kappa$. Considerando os mesmos valores de g_0 em (a), temos (c) $\kappa\tau_R^{(2)}$ vs $(\varepsilon/\kappa)^2$, (d) informação mútua vs κt , (e) discórdia vs κt e (f) correlações clássicas vs κt . Em (d)-(f) usou-se o estado inicial $|gg\rangle \otimes |0\rangle_c$.

pode ser obtido diretamente da solução da Eq. (4.32). Obtendo a solução de tal equação diferencial para estados atômicos iniciais descorrelacionados, observa-se que o termo que vai mais lentamente a zero é do tipo e^{-t/τ_R} com

$$\kappa\tau_R = \frac{1}{4(g_0/\kappa)^2 \left[2n_{th} + 1 - \sqrt{n_{th}(n_{th} + 1)} \right]}. \quad (4.40)$$

Com relação ao caso anterior, também vemos que $\tau_R \rightarrow \infty$ no limite de espaço livre ($g_0 \rightarrow 0$) neste caso. Entretanto, agora, quanto maior n_{th} menor é τ_R .

4.3 Conclusão

Nós mostramos nesta primeira parte da tese que a geração de correlação entre átomos pode ser tomada como uma assinatura do comportamento não clássico do modo da cavidade. É importante enfatizar que, para $\bar{n} \gg 1$, emaranhamento não está presente no sistema atômico, tal que o caráter quântico do modo da cavidade pode ser revelado através das correlações clássicas, da discórdia quântica e, conseqüentemente, da informação mútua. Além disso, essas correlações são não nulas para qualquer valor de acoplamento átomo-campo, mesmo no limite de um bombeamento coerente externo intenso ou altas temperaturas. Então, podemos afirmar que, embora as propriedades estatísticas do campo mostrem que elevando \bar{n} em um modo de uma cavidade dissipativa o limite clássico é atingido, as correlações estacionárias não nulas entre os átomos mostram que o caráter quântico deste campo ainda se manifesta mesmo para um campo macroscópico. Também apresentamos uma possível explicação para a não observação desse caráter quântico do campo no limite de altas excitações (altas temperaturas ou bombeamentos intensos) e no limite de espaço livre ($g_0 \rightarrow 0$): o tempo para se atingir o estado estacionário quântico aumenta à medida que se diminui g_0 , de modo que $\tau_R \rightarrow \infty$ para $g_0 \rightarrow 0$.

Chapter 5

Geração Probabilística de Emaranhamento Atômico em Cavernas

Na segunda parte desta tese estudou-se um esquema probabilístico para preparar um estado atômico maximamente emaranhado entre um par de átomos de dois níveis acoplados a um modo de uma caverna dissipativa, sem a necessidade de um controle preciso sobre a evolução temporal do sistema e de um acoplamento átomo-campo forte, onde tal sistema é praticamente aquele estudado na seção 4.2.1. Além disso, como o esquema é probabilístico, também foi proposto um método para testemunhar se o sistema atômico está emaranhado ou não através de uma medição quântica não destrutiva, feita a partir da transmissão da caverna, de modo que o sistema atômico não seja perturbado. Os resultados mais relevantes deste capítulo foram publicados na Ref. [78].

5.1 Modelo

Vamos considerar, novamente, dois átomos de dois níveis, não interagentes, acoplados ressonantemente a um modo da caverna, ou seja, o modelo de Tavis-Cummings [82]

$$H_{TC} = \omega_0 a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} S_z + g_0 (a^\dagger S_- + a S_+). \quad (5.1)$$

Considerando uma caverna dissipativa a temperatura zero, $n_{th} \ll 1$ ($\hbar\omega_0 \gg k_B T$), a dinâmica deste sistema, na representação de interação [85], é governada pela equação

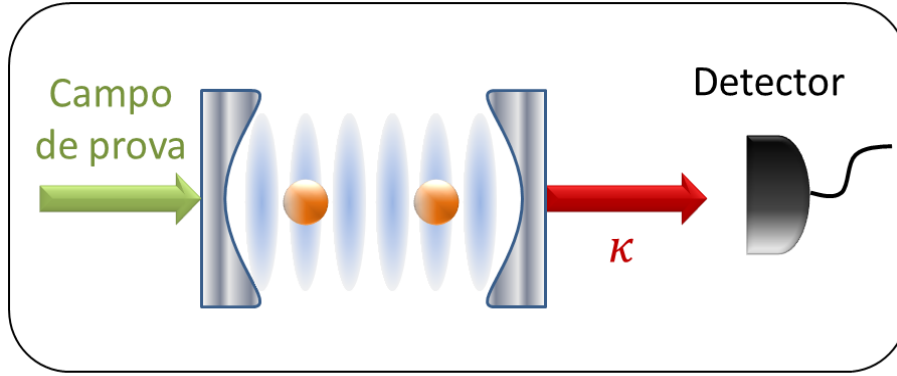


Figure 5.1: Representação pictórica da configuração experimental: um par de átomos de dois níveis acoplados a uma cavidade dissipativa. Uma vez que o sistema atinge o estado estacionário, um campo de prova é ligado e a transmissão da cavidade passa a ser monitorada.

mestra [84]

$$\dot{\rho} = -i [g_0 (a^\dagger S_- + a S_+), \rho] + \kappa (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a). \quad (5.2)$$

A configuração experimental proposta é mostrada na Fig. 5.1.

O espectro do sistema, isto é, seus estados permitidos, é dado pelos estados vestidos (autoestados) de H_{TC} ,

$$|G, 0\rangle = |G\rangle \otimes |0\rangle_c; \quad (5.3)$$

$$|\pm, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi^\pm\rangle \otimes |0\rangle_c \pm |G\rangle \otimes |1\rangle_c); \quad (5.4)$$

$$|D, n\rangle = |\Psi^\pm\rangle \otimes |n\rangle_c, \quad (5.5)$$

com energias $E_0^{(0)} = -\omega_0$, $E_\pm^{(1)} = \pm g_0 \sqrt{2}$ e $E_D^{(n)} = n\omega_0$, respectivamente, onde $n = \{0, 1\}$, $|G\rangle \equiv |gg\rangle$ e $|\Psi^\pm\rangle \equiv (|ge\rangle \pm |eg\rangle) / \sqrt{2}$. Aqui, estamos considerando somente os autoestados de mais baixas energias do sistema pois estaremos interessados em seu estado estacionário, que é uma mistura desses estados. Ademais, nosso esquema utilizará um campo de prova (fraco), que também irá manter o campo da cavidade com no máximo um fóton, como explicaremos mais adiante.

O decaimento do modo da cavidade pode promover transições entre os autoestados do sistema, cujas taxas de transição podem ser obtidas através da regra de ouro de Fermi [120, 121]. Como estamos considerando somente o decaimento do modo da cavidade, a taxa de transição de um estado de mais alta energia $|i\rangle$ para um de mais baixa $|f\rangle$ é dada

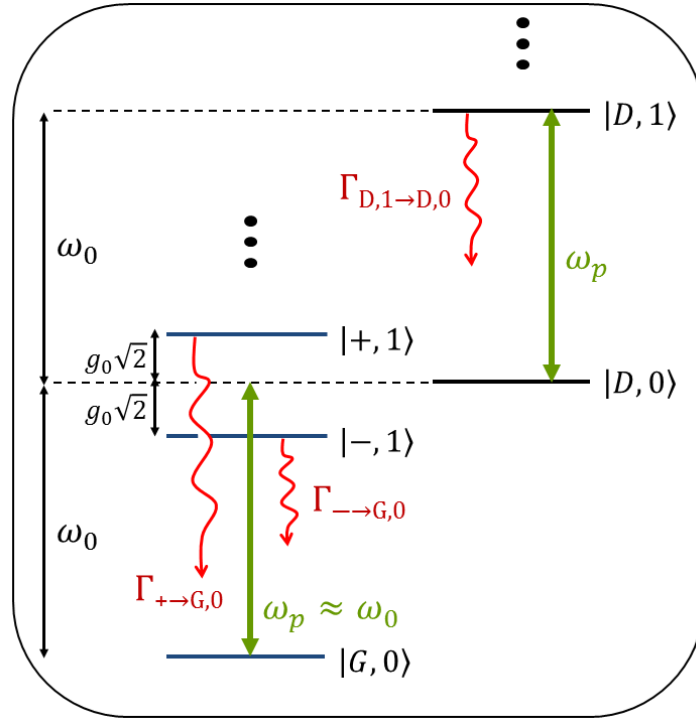


Figure 5.2: Diagrama de níveis de energia do sistema com as taxas de decaimento das transições permitidas e com o campo de prova.

por [120, 121]

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \kappa |\langle f | a | i \rangle|^2. \quad (5.6)$$

Como visto na seção 2.1, a estrutura de autoestados de H_{TC} é dada por dois subespaços independentes, $\{|G, 0\rangle, |-, 1\rangle, |+, 1\rangle\}$ e $\{|D, n\rangle\}$, ou seja, H_{TC} não promove transições entre estados pertencentes a subespaços distintos. A partir da regra de ouro de Fermi, obtemos as seguintes taxas de transição não nulas

$$\Gamma_{\pm \rightarrow G, 0} = \kappa/2; \quad (5.7)$$

$$\Gamma_{D, n+1 \rightarrow D, n} = \kappa, \quad (5.8)$$

o que mostra que o decaimento da cavidade ainda mantém a independência dos subespaços. Na Fig. 5.2, é ilustrado o diagrama de níveis de energia do sistema total com as transições permitidas e suas taxas de decaimento, além do campo de prova (frequência ω_p) que será introduzido mais adiante.

Devido à existência dos dois subespaços independentes, para qualquer estado inicial geral, o estado estacionário do sistema é uma mistura dos autoestados de menor energia

de cada subespaço, isto é,

$$\rho_{ss} = (1 - P_{\Psi^-}) |G, 0\rangle \langle G, 0| + P_{\Psi^-} |D, 0\rangle \langle D, 0|, \quad (5.9)$$

com P_{Ψ^-} sendo a projeção do estado inicial atômico no estado $|\Psi^-\rangle$, como anteriormente. O estado estacionário acima é obtido diretamente da Eq. (5.2) para $t \rightarrow \infty$ ($\dot{\rho} = 0$), cuja solução é dada exatamente pela Eq. (4.24) considerando $\varepsilon = 0$.

No contexto de uma realização experimental individual, vemos de ρ_{ss} que o sistema atômico pode estar ou no estado fundamental $|G\rangle$ ou no estado maximamente emaranhado $|\Psi^-\rangle$ com probabilidades $(1 - P_{\Psi^-})$ e P_{Ψ^-} , respectivamente. Existe, então, uma probabilidade de termos os átomos em um estado maximamente emaranhado. Entretanto, se realizarmos uma medição direta no sistema atômico para identificarmos em qual estado ele se encontra, isto perturbaria tal sistema de forma que o estado emaranhado seria levado para um estado produto, ou seja, perderíamos o emaranhamento. A fim de contornar este problema, temos de ser capazes de medir o sistema atômico não destrutivamente. De fato, isto pode ser feito monitorando-se o sistema através de um campo de prova, que nos permitirá distinguir os estados atômicos ($|G\rangle$ e $|\Psi^-\rangle$) através da transmissão da cavidade sem perturbar o sistema atômico.

5.2 Monitoramento do sistema

Para medir nosso sistema não destrutivamente, primeiro devemos esperar até que o sistema atinja seu estado estacionário (ρ_{ss}) e, então, aplicamos um campo de prova na cavidade, cujo hamiltoniano é descrito pela Eq. (2.7), com $\varepsilon \ll g_0$, pois, como o campo é de prova, ele deve ser uma pequena perturbação ao sistema. Além disso, como tal campo de prova também não é capaz de induzir transições entre autoestados pertencentes a subespaços distintos¹, podemos analisar o seu efeito sobre o sistema para cada caso separadamente.

5.2.1 Sistema em $|D, 0\rangle$

Para entender como este campo de prova pode nos fornecer informações a respeito do

¹Dado o Hamiltoniano de bombeio H_p [Eq. (2.7)], é fácil provar que a probabilidade de transição $|\langle \psi_1 | H_p | \psi_2 \rangle|^2$ induzida por tal bombeio é nula quando $|\psi_1\rangle \in \{|G, 0\rangle, |-, 1\rangle, |+, 1\rangle\}$ e $|\psi_2\rangle \in \{|D, n\rangle\}$, ou seja, H_p não promove transições entre autoestados pertencentes a subespaços distintos.

estado atômico, vamos primeiramente considerar o caso ressonante, $\omega_p = \omega_0$. No contexto de uma realização experimental individual, se o sistema estiver no estado $|D, 0\rangle$, vemos a partir da Fig. 5.2 que o campo de prova é capaz de promover a transição $|D, 0\rangle \leftrightarrow |D, 1\rangle$ ressonantemente. Ademais, como o estado $|\Psi^-\rangle$ é um *dark state* e é desacoplado do modo da cavidade², o sistema se comporta, neste caso, como uma cavidade vazia ($g_0 = 0$). Assim, o estado assintótico do campo da cavidade é um estado coerente

$$|\alpha\rangle_c = e^{-|\alpha|^2} (|0\rangle_c + \alpha |1\rangle_c + \dots), \quad (5.10)$$

com $\alpha = i\varepsilon/\kappa$; então, para um campo de prova fraco ($\varepsilon \ll g_0$), o novo estado estacionário do sistema será dado por

$$|\psi\rangle_{ss}^D \approx |\Psi^-\rangle \otimes \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\kappa^2}\right) |0\rangle_c + i \frac{\varepsilon}{\kappa} |1\rangle_c \right]. \quad (5.11)$$

Olhando para a Eq. (5.11), vemos que a transmissão normalizada da cavidade³

$$T \equiv \frac{\langle a^\dagger a \rangle}{(\varepsilon/\kappa)^2} \quad (5.12)$$

será dada, neste caso, por

$$T_{|D\rangle} = 1. \quad (5.13)$$

5.2.2 Sistema em $|G, 0\rangle$

Se o sistema estiver no estado $|G, 0\rangle$, vemos a partir da Fig. 5.2 que o campo de prova poderia induzir, *a priori*, duas transições não ressonantes, $|G, 0\rangle \leftrightarrow |\pm\rangle$, com dessintonias entre as frequências do campo de prova e do sistema átomo-campo dadas por $\pm g_0\sqrt{2}$. Entretanto, quando $\omega_p = \omega_0$, o campo de prova não introduz nenhum fóton na cavidade no novo regime estacionário, independentemente do valor de g_0 , como será explicado mais adiante. Consequentemente, quando o sistema estiver no estado $|G, 0\rangle$, o campo de prova não introduz nenhuma excitação no sistema, de modo que o novo estado estacionário neste caso será dado por

$$|\psi\rangle_{ss}^G \approx |G, 0\rangle, \quad (5.14)$$

tal que

$$T_{|G\rangle} = 0.$$

²O estado $|\Psi^-\rangle$ é desacoplado do modo da cavidade pois $|D, n\rangle = |\Psi^-\rangle \otimes |n\rangle_c$ para qualquer $n \geq 0$.

³Como este capítulo não envolve temperatura, estamos utilizando a letra T para indicar a transmissão normalizada da cavidade.

Portanto, a transmissão normalizada da cavidade pode ser usada para nos fornecer informações sobre o estado atômico estacionário [Eq.(5.9)]

$$T_{|D\rangle} = 1 \text{ quando os átomos estiverem em } |\Psi^-\rangle; \quad (5.15a)$$

$$T_{|G\rangle} = 0 \text{ quando os átomos estiverem em } |G\rangle. \quad (5.15b)$$

Assim, no regime estacionário, após a aplicação do campo de prova sobre o sistema, a medição da transmissão da cavidade funciona como uma medição não destrutiva do estado atômico, nos permitindo saber se os átomos estão maximamente emaranhados (transmissão máxima) ou não (transmissão nula). Além disso, nosso esquema não necessita de um detector de fótons muito eficiente, uma vez que um único *click* no detector é suficiente para discriminar entre os dois estados acessíveis no regime estacionário. Desta forma, um estado emaranhado pode ser preparado simplesmente monitorando a transmissão da cavidade: qualquer *click* no detector projeta o sistema atômico em $|\Psi^-\rangle$. Se nenhum *click* for registrado, então reinicia-se o sistema.

Análogo da transparência eletromagneticamente induzida

Para $\omega_p = \omega_0$, esperamos que a transmissão da cavidade seja máxima quando os átomos estão no estado maximamente emaranhado, uma vez que, neste estado, o sistema atômico está desacoplado do modo da cavidade, tal que o sistema átomo-campo comporta-se como uma cavidade vazia ($g_0 = 0$). Entretanto, quando o sistema está no estado $|G, 0\rangle$, temos que a transmissão é zero. A razão para esta transmissão nula poderia estar relacionada com a dessintonia entre o campo de prova e o sistema átomo-campo: as duas transições ($|G, 0\rangle \leftrightarrow |\pm\rangle$) são acopladas pelo campo de prova, mas com dessintonias $\pm g_0\sqrt{2}$. Como ambas as transições possuem a mesma taxa de decaimento $\Gamma_{\pm \rightarrow G,0} = \kappa/2$, pode-se ver que, para $g_0\sqrt{2} \gg \kappa/2$, o campo de prova estará muito fora de ressonância com o sistema átomo-campo, ou seja, o sistema não conseguirá absorver quase nada da energia injetada pelo campo de prova e, conseqüentemente, não transmitirá quase nada. Se este fosse o caso, alguém poderia argumentar que nosso esquema só funcionaria no regime de acoplamento forte. Porém, nosso esquema também é válido para o regime de acoplamento fraco, pois a verdadeira razão para a ausência de transmissão pela cavidade é que nosso sistema possui dois canais de absorção, $|G, 0\rangle \leftrightarrow |-\rangle$ e $|G, 0\rangle \leftrightarrow |+\rangle$, que se interferem destrutivamente levando a uma absorção nula pelo sistema (e, conseqüente-

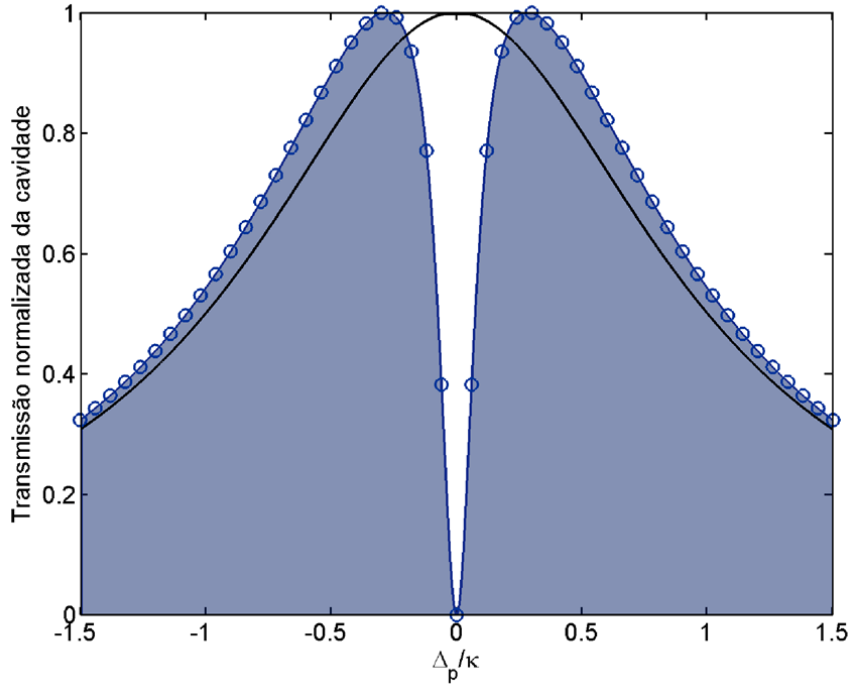


Figure 5.3: Transmissão da cavidade *vs* dessintonia entre o campo de prova e o modo da cavidade, assumindo $g_0 = 0.2\kappa$ e $\varepsilon = 0.05g_0$. A linha sólida preta representa o caso de $\rho_{ss} \rightarrow |D, 0\rangle$, onde se observa o comportamento tipo cavidade vazia ($g_0 = 0$). Os círculos azuis representam o caso de $\rho_{ss} \rightarrow |G, 0\rangle$, onde se nota que, mesmo para $g_0\sqrt{2} \lesssim \kappa/2$, a transmissão da cavidade é nula para $\Delta_p = 0$ neste caso.

mente, uma transmissão nula) no caso ressonante $\omega_p = \omega_0$, analogamente ao fenômeno de transparência eletromagneticamente induzida [122–124].

A Fig. 5.3 ilustra a transmissão da cavidade como função da dessintonia entre o campo de prova e o modo da cavidade, $\Delta_p = \omega_0 - \omega_p$, assumindo $g_0 = 0.2\kappa$ e $\varepsilon = 0.05g_0$; onde observamos que, mesmo para $g_0\sqrt{2} \lesssim \kappa/2$, a transmissão da cavidade é nula para $\Delta_p = 0$ quando $\rho_{ss} \rightarrow |G, 0\rangle$ (círculos azuis). A linha sólida preta representa o caso quando $\rho_{ss} \rightarrow |D, 0\rangle$, de modo que vemos que a transmissão da cavidade se comporta como se tivéssemos o caso de cavidade vazia ($g_0 = 0$). Portanto, vemos que nosso esquema é válido para qualquer valor de g_0 , mas, quanto menor g_0 , maior é o tempo necessário para que o sistema atinja seu estado estacionário, uma vez que tal tempo é proporcional à κ/g_0^2 ⁴.

⁴Aqui, g_0^2/κ é o decaimento atômico coletivo efetivo induzido pela interação dos átomos com a cavidade dissipativa [113], conforme visto no capítulo anterior.

5.3 Influência do decaimento atômico

Nesta seção, discutiremos a influência do decaimento atômico, desconsiderado até agora, na aplicabilidade de nosso esquema para a geração de estados atômicos maximamente emaranhados.

5.3.1 Reservatórios atômicos independentes

Se os átomos estiverem sujeitos a reservatórios independentes (um para cada átomo), cujo liouvilliano é $(\gamma/2) \sum_{j=1}^2 \mathcal{D}[\sigma_-^j] \rho$, com γ sendo a taxa de decaimento, temos que a estrutura de subespaços independentes é quebrada, pois tal tipo de reservatório induz transições entre autoestados pertencentes a subespaços diferentes, de modo que o sistema é levado para o estado de menor energia no regime estacionário, ou seja, $\rho(t \rightarrow \infty) \rightarrow |G, 0\rangle \langle G, 0|$. Em outras palavras, o estado emaranhado terá um tempo de vida finito que será proporcional ao tempo de vida atômico. Assim, como um átomo de dois níveis real pode possuir uma taxa de decaimento γ significativa, nossos resultados serão válidos em uma janela de tempo definida por $\gamma t \lesssim 1$ e $g_0^2 t / \kappa \gg 1$, de maneira que deve-se ter $g_0^2 / \kappa \gg \gamma$.

5.3.2 Reservatório atômico coletivo

Se os átomos estiverem sujeitos a um reservatório atômico coletivo ao invés de reservatórios independentes ($\Gamma_c \mathcal{D}[S_-] \rho$, com Γ_c sendo a taxa de decaimento coletiva), como usualmente ocorre em eletrodinâmica quântica de circuitos [125, 126], temos que o estado estacionário continuará sendo aquele da Eq. (5.9) para $g_0^2 t / \kappa \gg 1$ (mas sem um limite superior restringindo o tempo de interação), isto é, tal reservatório não destrói a independência dos subespaços⁵, mostrando que eletrodinâmica quântica de circuitos seria um excelente cenário para implementar nosso esquema. Além disso, tal decaimento coletivo não atua sobre os autoestados do subespaço $\{|D, n\rangle\}$ ⁶, ou seja, a presença deste tipo de

⁵É fácil mostrar que a probabilidade de transição $|\langle \psi_1 | S_- | \psi_2 \rangle|^2$ induzida por tal reservatório coletivo é nula quando $|\psi_1\rangle \in \{|G, 0\rangle, |-, 1\rangle, |+, 1\rangle\}$ e $|\psi_2\rangle \in \{|D, n\rangle\}$, ou seja, o reservatório atômico coletivo não promove transições entre autoestados pertencentes a subespaços distintos.

⁶Utilizando a regra de ouro de Fermi, vemos que o decaimento coletivo contribuiria para a Eq. (5.8) com o termo $|\langle D, n | S_- | D, n+1 \rangle|^2$. Porém, este termo é nulo devido a $S_- |\Psi^-\rangle = 0$. Assim, neste caso, somente o decaimento da cavidade contribui para o decaimento dos autoestados do subespaço $\{|D, n\rangle\}$.

decaimento não modifica a transmissão da cavidade quando os átomos estão no estado $|\Psi^-\rangle$, de forma que ainda temos $T_{|D\rangle} = 1$. Entretanto, a transmissão da cavidade será afetada por este decaimento quando os átomos estiverem em $|G\rangle$, tal que, neste caso, na ressonância $\omega_p = \omega_0$,

$$T_{|G\rangle} = \frac{(\Gamma_c \kappa / g_0^2)^2}{(1 + \Gamma_c \kappa / g_0^2)^2}. \quad (5.16)$$

Deste modo, a presença do decaimento atômico coletivo diminui o contraste entre $T_{|D\rangle}$ e $T_{|G\rangle}$, mas é possível alcançar um excelente contraste com parâmetros experimentais observados recentemente no limite de $g_0 \gg \Gamma_c$ [127, 128]. Por exemplo, para $\Gamma_c \sim \kappa = 0.01g_0$ [127, 128], $T_{|G\rangle} \sim 10^{-8}$. Assim, quanto menor a razão $\Gamma_c \kappa / g_0^2$, melhor será a eficiência de nosso método.

A razão para o aumento em $T_{|G\rangle}$ está relacionada a uma perturbação na interferência destrutiva (responsável pela absorção nula no caso ressonante $\omega_p = \omega_0$), pois o decaimento atômico coletivo faz o mesmo papel da defasagem atômica no fenômeno de transparência eletromagneticamente induzida usual em *ensemble* atômico [122]; isto é, tal decaimento (Γ_c) destrói a superposição do estado quântico $|\phi\rangle = \mathcal{N}(g_0\sqrt{2}|G\rangle - \varepsilon|\Psi^+\rangle)$, que é o responsável pelo efeito de interferência nos canais de absorção do sistema átomo-cavidade, onde \mathcal{N} é um fator de normalização. Aqui, $g\sqrt{2}(\varepsilon)$ faz o mesmo papel do campo de controle (campo de prova) no fenômeno de transparência eletromagneticamente induzida [122].

5.4 Simulando um experimento

A mecânica quântica é uma teoria estatística, o que fica claro, por exemplo, quando se usa o formalismo de equação mestra. Dado um observável \mathcal{O} , seu valor médio é dado por $\langle \mathcal{O} \rangle = \text{Tr}(\mathcal{O}\rho)$, onde ρ descreve o estado do *ensemble*. Do ponto de vista experimental, $\langle \mathcal{O} \rangle$ é o resultado de uma média obtida a partir de várias realizações individuais do experimento.

Por outro lado, o formalismo conhecido como *quantum jump approach* descreve a dinâmica de um sistema quântico do ponto de vista de realizações experimentais individuais através do método de Monte Carlo aplicado a funções de onda [129, 130], onde cada realização individual é geralmente conhecida como uma trajetória quântica [83]. A partir de cada trajetória quântica, é possível observar, por exemplo, saltos quânticos na

dinâmica do sistema, que estão relacionados aos colapsos na função de onda do sistema devidos à interação sistema-reservatório. O formalismo de equação mestra é recuperado do *quantum jump approach* quando tomamos a média de várias trajetórias [129, 130], ou seja, quando olhamos os resultados obtidos do ponto de vista de um *ensemble*, de modo que os dois formalismos se tornam equivalentes.

A fim de simular realizações experimentais individuais para nosso sistema, onde ρ_{ss} colapsa tanto para $|D, 0\rangle$ quanto para $|G, 0\rangle$, utilizamos o *quantum jump approach* através do programa desenvolvido por S. M. Tan [132] escrito em MATLAB e amplamente conhecido na área de óptica quântica como “Quantum Optics Toolbox”⁷. Trajetórias quânticas individuais são mostradas na Fig. 5.4(b) e 5.4(c), simulando realizações experimentais para dois casos: quando $\rho_{ss} \rightarrow |G, 0\rangle$ [Fig. 5.4(b)] e quando $\rho_{ss} \rightarrow |D, 0\rangle$ [Fig. 5.4(c)]. Aqui, adotamos $g_0 = 0.2\kappa$, $\varepsilon = 0.05g_0$, $\Gamma_c = 0.1g_0$ ($\gamma = 0$) e o estado inicial $|g\rangle_1 \otimes |e\rangle_2 \otimes |0\rangle_c$. A Fig. 5.4(a) é o análogo da Fig. 5.3 para os parâmetros acima. Como podemos ver na Fig. 5.4, quando os átomos estão no estado maximamente emaranhado (descorrelacionado), a transmissão da cavidade na região de monitoramento é máxima (quase zero). Aqui, usamos a concorrência para medir o grau de emaranhamento atômico. Esta figura também nos ajuda a ver a evolução de uma trajetória do sistema: em $t = 0$, o sistema é preparado no estado inicial, seguido pela estabilização do sistema; então o campo de prova é ligado, o qual requer uma segunda estabilização; finalmente, monitora-se a transmissão da cavidade, onde o estado atômico é medido não destrutivamente.

5.5 Estado inicial

Como vimos até agora, para gerar o estado atômico maximamente emaranhado, é necessário que o estado atômico inicial tenha uma projeção não nula no estado $|\Psi^-\rangle$, ou seja, P_{Ψ^-} necessariamente deve ser não nulo. Isto pode ser feito de várias formas, por exemplo:

(i) se for possível estimular os átomos individualmente, então pode-se preparar o estado inicial $|g\rangle_1 \otimes |e\rangle_2 \otimes |0\rangle_c$;

(ii) se não for possível, então um campo incoerente pode ser aplicado em ambos os átomos simultaneamente, de modo a preparar o estado inicial $\rho(0) = \frac{1}{4} \otimes |0\rangle_c \langle 0|$, com

⁷Recentemente, foi desenvolvido o “The Quantum Toolbox in Python” (QuTiP) [131], que modernizou e estendeu o “Quantum Optics Toolbox”.

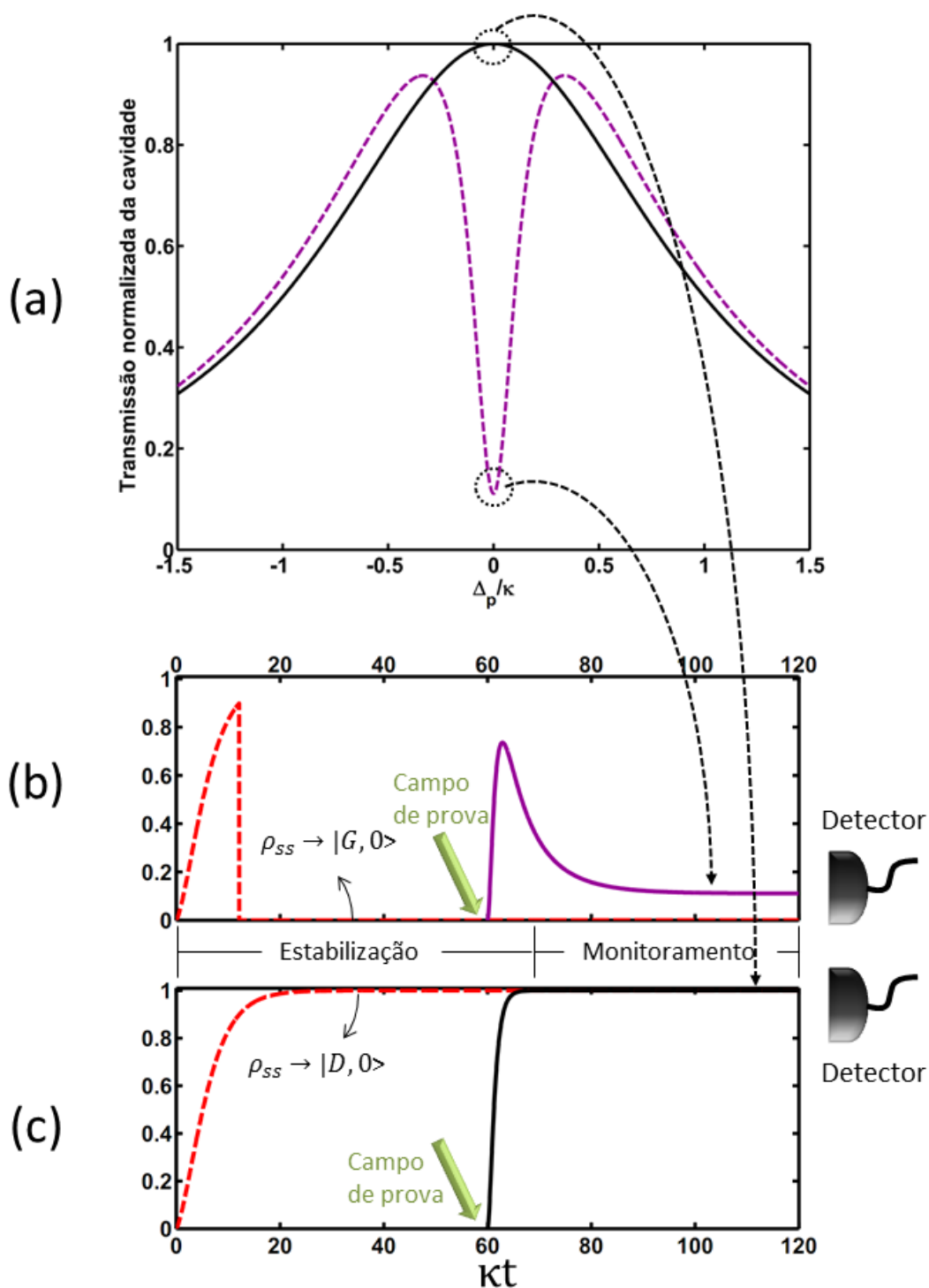


Figure 5.4: (a) Transmissão normalizada da cavidade *vs* Δ_p/κ , com $g_0 = 0.2\kappa$, $\varepsilon = 0.05g_0$ e $\Gamma_c = 0.1g_0$ ($\gamma = 0$). Evolução temporal da concorrência (linha tracejada) e da transmissão normalizada (linha sólida) para uma única trajetória quando (b) $\rho_{ss} \rightarrow |G, 0\rangle$ e (c) $\rho_{ss} \rightarrow |D, 0\rangle$, assumindo o estado inicial $|g\rangle_1 \otimes |e\rangle_2 \otimes |0\rangle_c$.

$\mathbf{1}_a$ sendo a matriz identidade atômica ($\mathbf{1}_a = (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)_1 \otimes (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)_2$).

No primeiro caso temos que $P_{\Psi^-} = 1/2$, enquanto que no segundo $P_{\Psi^-} = 1/4$, estas sendo as probabilidades de preparar os átomos no estado maximamente emaranhado.

5.6 Medição direta da concorrência

Além de usar nosso esquema como uma fonte de estados atômicos maximamente emaranhados, ele também pode ser usado como um método direto para quantificar a concorrência dos átomos. Como explicado anteriormente, para qualquer estado inicial, o estado estacionário do sistema átomo-campo é dado pela Eq. (5.9), que é uma mistura de um estado atômico descorrelacionado e de um maximamente emaranhado. Aplicando um campo de prova, o estado estacionário torna-se

$$\rho_{ss} \rightarrow \tilde{\rho}_{ss} \approx (1 - P_{\Psi^-}) |\psi\rangle_{ss}^G \langle\psi| + P_{\Psi^-} |\psi\rangle_{ss}^D \langle\psi|, \quad (5.17)$$

onde $|\psi\rangle_{ss}^G$ e $|\psi\rangle_{ss}^D$ são dados pelas Eqs. (5.14) e (5.11), respectivamente. Para este estado, a transmissão média é $T(\tilde{\rho}_{ss}) = P_{\Psi^-}$. Entretanto, a concorrência do estado atômico também é $C[Tr_c(\tilde{\rho}_{ss})] = P_{\Psi^-}$ ⁸, onde Tr_c refere-se ao traço parcial sobre as variáveis do campo. Portanto, vemos que a transmissão do sistema átomo-campo $T(\tilde{\rho}_{ss})$ é exatamente o grau de emaranhamento (concorrência) entre os dois átomos. Neste sentido, nosso esquema funciona como um método direto para medir a concorrência do estado atômico estacionário, sem a necessidade de qualquer reconstrução tomográfica da matriz densidade atômica e do conhecimento do estado inicial do sistema.

5.7 Conclusão do capítulo

Nesta segunda parte da tese nós mostramos um esquema probabilístico para preparar um estado maximamente emaranhado entre um par de átomos de dois níveis acoplados a uma cavidade dissipativa, e como provar que o sistema atômico está em tal estado, sem perturbá-lo, via transmissão da cavidade. Além disso, vimos também que tal esquema funciona como um método direto para medir a concorrência do estado estacionário, sem

⁸Do estado $\tilde{\rho}_{ss}$, obtemos o estado atômico $\tilde{\rho}_{ss}^{at} = Tr_c(\tilde{\rho}_{ss}) = (1 - P_{\Psi^-}) |G\rangle\langle G| + P_{\Psi^-} |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$. O estado atômico $\tilde{\rho}_{ss}^{at}$ pertence à classe dos estados- X , de modo que é simples o cálculo de sua concorrência (vide Apêndice C).

a necessidade de qualquer reconstrução tomográfica da matriz densidade atômica e do conhecimento do estado inicial do sistema. Também mostramos que a eletrodinâmica quântica de circuitos é um dos candidatos mais promissores para a implementação de nosso esquema.

Chapter 6

Pureza como uma testemunha para correlações iniciais entre sistema-reservatório

Neste capítulo estudamos a dinâmica de um sistema constituído de um átomo de dois níveis (qubit) interagindo com um reservatório a temperatura nula, sem considerar as aproximações de Born e Markov [84]. Aqui, apresentamos um estudo introdutório no qual a dinâmica da pureza atômica pode ser usada como uma testemunha das correlações iniciais entre o sistema e o reservatório. Além disso, introduzindo um segundo átomo (qubit de prova) interagindo com o mesmo reservatório, mostramos que é possível determinar os diferentes tipos de correlações iniciais através da dinâmica da pureza do sistema atômico. Os resultados deste capítulo foram publicados na Ref. [79].

6.1 Modelo

A dinâmica de dois átomos de dois níveis não interagentes acoplados a um reservatório bosônico comum a temperatura nula é dado pelo hamiltoniano ($\hbar = 1$)

$$H = H_S + H_R + H_{SR}, \quad (6.1)$$

com

$$H_S = \frac{\omega_0}{2} (\sigma_z^1 + \sigma_z^2); \quad (6.2)$$

$$H_R = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k; \quad (6.3)$$

$$H_{SR} = (\sigma_+^1 + \sigma_+^2) \sum_k g_k a_k + (\sigma_-^1 + \sigma_-^2) \sum_k g_k^* a_k^\dagger, \quad (6.4)$$

onde a_k^\dagger (a_k) é o operador criação (aniquilação) do k -ésimo modo do reservatório de frequência ω_k , g_k é a constante de acoplamento entre cada átomo e o k -ésimo modo, ω_0 é a frequência de transição entre os estados fundamental $|g\rangle$ e excitado $|e\rangle$ do átomo de dois níveis, e $\sigma_\pm^j = (\sigma_x^j \pm i\sigma_y^j)/2$, com $\sigma_{x,y,z}^j$ sendo os operadores de Pauli para o j -ésimo átomo.

6.2 Abordagem via pseudomodo

Esta dinâmica pode ser resolvida utilizando-se variáveis auxiliares definidas a partir das propriedades da distribuição espectral do reservatório, onde tais variáveis auxiliares são obtidas através do método de pseudomodos [133–135]. Para o caso em que os átomos interagem ressonantemente com um reservatório de densidade espectral lorentziana e considerando que o sistema total possua no máximo uma excitação, podemos descrever a dinâmica deste sistema através da equação mestra de pseudomodo [133], que é dada, na representação de interação, por

$$\dot{\rho} = -i[V, \rho] + \frac{\Gamma}{2} (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a), \quad (6.5)$$

com

$$V = \Omega [(\sigma_+^1 + \sigma_+^2) a + (\sigma_-^1 + \sigma_-^2) a^\dagger], \quad (6.6)$$

onde ρ é a matriz densidade para os dois átomos e o pseudomodo, a (a^\dagger) e Γ são o operador aniquilação (criação) e a taxa de decaimento do pseudomodo, respectivamente, e Ω é a constante de acoplamento entre cada átomo e o pseudomodo. Em outras palavras, a dinâmica de átomos de dois níveis interagindo com um reservatório de densidade espectral lorentziana, quando há no máximo uma excitação no sistema total, é equivalente à dinâmica de átomos de dois níveis acoplados a um modo de uma cavidade dissipativa (neste caso o reservatório é descrito efetivamente por um modo fictício de uma cavidade

dissipativa [133]), ou seja, é praticamente o mesmo modelo utilizado nos capítulos anteriores; entretanto, aqui não é aplicada nem a aproximação de Born nem a de Markov para a obtenção da Eq. (6.5) [133].

A distribuição espectral associada com o pseudomodo é [133]

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{\Omega^2}{\pi} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (6.7)$$

Aqui, há dois regimes a serem considerados [134]: (i) um regime de acoplamento forte que ocorre quando $\Gamma < 2\Omega$ e (ii) um regime de acoplamento fraco para $\Gamma > 2\Omega$. Como discutido na Ref. [134], para o regime de acoplamento forte, a dinâmica atômica apresenta características não markovianas, e quando o acoplamento se torna fraco, o comportamento markoviano é recuperado.

6.3 Um único átomo interagindo com o reservatório

Uma questão importante na teoria de sistemas quânticos abertos é a habilidade de determinar a origem da decoerência de um qubit [84]. Dado o estado misto de um qubit

$$\rho_S(0) = \alpha^2 |g\rangle \langle g| + (1 - \alpha^2) |e\rangle \langle e|, \quad (6.8)$$

onde $\alpha \in [0, 1]$, não podemos, a princípio, determinar como este estado foi preparado inicialmente, uma vez que não temos informação sobre os graus de liberdade do reservatório. Por exemplo, o estado dado pela Eq. (6.8) pode ser obtido de diferentes maneiras:

(a) o estado do sistema foi preparado sem qualquer correlação com o reservatório,

$$\rho_a = \rho_S(0) \otimes |0\rangle_E \langle 0|, \quad (6.9)$$

onde $|n\rangle_E$ representa o estado do reservatório com n excitações;

(b) o sistema estava classicamente correlacionado com o reservatório,

$$\rho_b = \alpha^2 |g\rangle \langle g| \otimes |1\rangle_E \langle 1| + (1 - \alpha^2) |e\rangle \langle e| \otimes |0\rangle_E \langle 0|, \quad (6.10)$$

ou seja, as duas formas da informação mútua quântica são equivalentes ($I = J$), de modo que tanto o emaranhamento de formação E_F quanto a discórdia quântica D_q são nulos para o estado ρ_b ;

(c) o sistema estava quanticamente correlacionado com o reservatório mas com emaranhamento nulo,

$$\rho_c = \alpha^2 |g\rangle \langle g| \otimes |\phi\rangle_E \langle \phi| + (1 - \alpha^2) |e\rangle \langle e| \otimes |0\rangle_E \langle 0|, \quad (6.11)$$

com $|\phi\rangle_E = (|0\rangle_E + |1\rangle_E) / \sqrt{2}$; e

(d) o sistema e o reservatório estavam emaranhados,

$$\rho_d(0) = |\varphi\rangle \langle \varphi|, \quad (6.12)$$

onde $|\varphi\rangle = \alpha |g\rangle |1\rangle_E + \sqrt{1 - \alpha^2} |e\rangle |0\rangle_E$.

Em todos os estados acima, traçando sobre as variáveis do reservatório, nós obtemos o mesmo operador densidade dado em (6.8). Então, como a informação sobre o reservatório não é acessível, qualquer medida realizada no estado do qubit não distingue se o sistema estava ou não correlacionado com o reservatório. Uma possível maneira de determinar a existência de estados inicialmente correlacionados foi sugerida pelos autores da Ref. [136], que é baseada na dinâmica da distância traço, que é uma medida de distinguibilidade entre dois estados quânticos [137]. Eles mostraram que se a distância traço aumenta em relação ao seu valor inicial, o sistema e o reservatório estavam inicialmente correlacionados, isto é, a dinâmica do sistema pode ser usada para identificar a presença de correlações iniciais entre sistema e reservatório. Entretanto, este método não identifica a natureza das correlações iniciais, ou seja, seu aspecto quântico ou clássico.

Aqui, nós utilizamos a dinâmica da pureza do sistema para testemunhar a correlação inicial entre sistema e reservatório. Antes, relembremos que a pureza de um estado quântico ρ é definida como $P(\rho) = \text{Tr}(\rho^2)$, e um estado é puro ($P = 1$) se, e somente se, $\rho^2 = \rho$. Em nosso caso, a pureza do sistema, constituído por um átomo de dois níveis, é dada por $P[\text{Tr}_{pm}(\rho)]$, onde Tr_{pm} é o traço sobre as variáveis do pseudomodo.

Para o caso de apenas um átomo interagindo com o reservatório, calculamos numericamente a dinâmica da pureza atômica, via Eq. (6.5), para os estados iniciais dados nas Eqs. (6.9)-(6.12) tanto para o regime de acoplamento forte ($\Gamma < 2\Omega$) quanto para o fraco ($\Gamma > 2\Omega$). Na Fig. 6.1, observa-se que o comportamento da dinâmica da pureza do sistema para o estado inicial descorrelacionado (linha sólida) é diferente dos inicialmente correlacionados. Entretanto, a dinâmica do estado inicial emaranhado ρ_d coincide com a do estado classicamente correlacionado ρ_b . Estes estados diferem entre si por dois termos extras que aparecem em ρ_d , porém, para nosso tipo de interação, a evolução temporal destes termos extras não afeta a dinâmica do sistema atômico reduzido, fazendo com que a dinâmica da pureza para ρ_b e ρ_d sejam indistinguíveis.

Dessa forma, vemos que a dinâmica da pureza do sistema pode ser usada como uma testemunha das correlações iniciais sistema-reservatório, mas, neste caso, o tipo de cor-

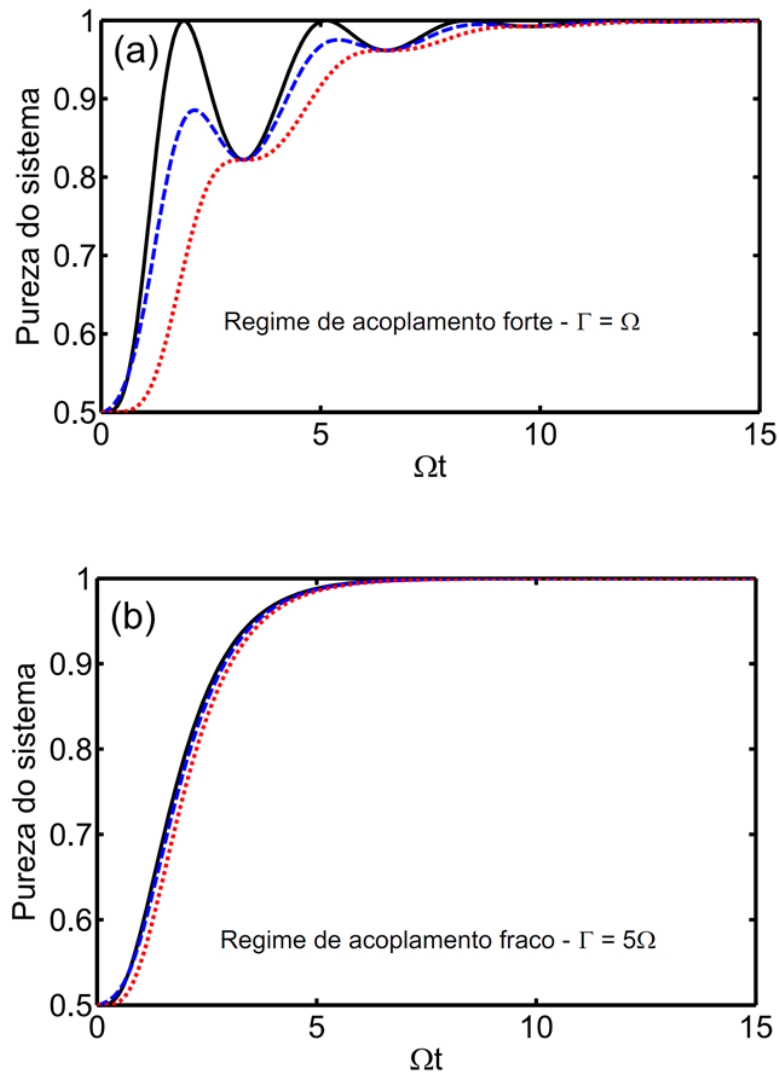


Figure 6.1: Evolução temporal da pureza atômica para o (a) regime de acoplamento forte $\Gamma = \Omega$ e o (b) regime de acoplamento fraco $\Gamma = 5\Omega$ considerando os estados iniciais ρ_a (linha sólida), $\rho_b = \rho_d$ (linha pontilhada) e ρ_c (linha tracejada), onde fixou-se $\alpha^2 = 0.5$.

relação inicial não é bem determinado. A partir da Fig. 6.1(b) vemos que as curvas se tornam indistinguíveis na medida que o acoplamento sistema-reservatório se torna fraco, ou seja, as correlações iniciais não interferem muito na dinâmica do sistema, tal que a suposição de um estado inicialmente descorrelacionado é bem justificada neste caso [62, 63]. Além disso, vemos que a pureza atinge o mesmo valor assintoticamente ($P = 1$), independentemente do estado inicial. Isto é esperado uma vez que estamos assumindo um reservatório a temperatura zero, pois este leva o átomo para o seu estado fundamental $|g\rangle$ assintoticamente. Embora a Fig. 6.1 refira-se a um valor particular de $\alpha^2 = 0.5$, nossos resultados foram checados para diferentes valores de α , e as mesmas características foram

observadas.

6.4 Átomo de prova

Utilizando um segundo átomo (átomo de prova) interagindo com o mesmo reservatório e considerando os estados iniciais como $\rho = |g\rangle\langle g| \otimes \rho_i$ ($i = a, b, c, d$), nós calculamos numericamente a dinâmica da pureza do sistema (agora constituído pelos dois átomos) como mostrado na Fig. 6.2. Nesta situação, a dinâmica da pureza possui comportamentos diferentes para cada estado inicial. A fim de entender este fenômeno, é necessário analisar o papel do reservatório comum. Embora os átomos não interajam diretamente, eles interagem via reservatório [138, 139], uma vez que este é comum aos dois. Dessa forma, o reservatório comum produz correlações entre os átomos, e estas correlações dependem do estado inicial sistema-reservatório, onde tal dependência é mais evidente quando a interação entre o sistema e o reservatório se torna mais forte, tal que quanto mais forte a interação for, melhor será a distinção entre a dinâmica da pureza para cada estado inicial. Além disso, a correlação inicial do átomo original com o reservatório pode ser dinamicamente transferida para o segundo átomo de forma que a pureza do sistema atômico pode exibir uma assinatura do tipo da correlação inicial entre o átomo original e o reservatório. Em outras palavras, os dois termos extras do estado inicial ρ_d induzem correlações que são capturadas pela pureza referente aos dois átomos.

Por fim, para determinar se havia ou não correlações iniciais entre o sistema e o reservatório, seria suficiente comparar a dinâmica da pureza do sistema obtida experimentalmente com o resultado teórico. Se for necessário obter mais informação sobre o tipo de correlação inicial, pode-se utilizar um átomo de prova interagindo com o mesmo reservatório e então comparar os resultados experimentais com os teóricos. No caso em que utiliza-se o átomo de prova, observa-se que a dinâmica de outras propriedades do sistema atômico também são capazes de determinar e classificar as correlações iniciais entre sistema e reservatório, tais como a dinâmica das correlações geradas entre os dois átomos, conforme ilustrado na Fig. 6.3.

É interessante observar o que ocorre se outros tipos de interação no hamiltoniano forem considerados. Por exemplo, uma importante classe de hamiltonianos é encontrada quando o sistema é acoplado a um reservatório de fase, onde tal acoplamento é descrito pela matriz

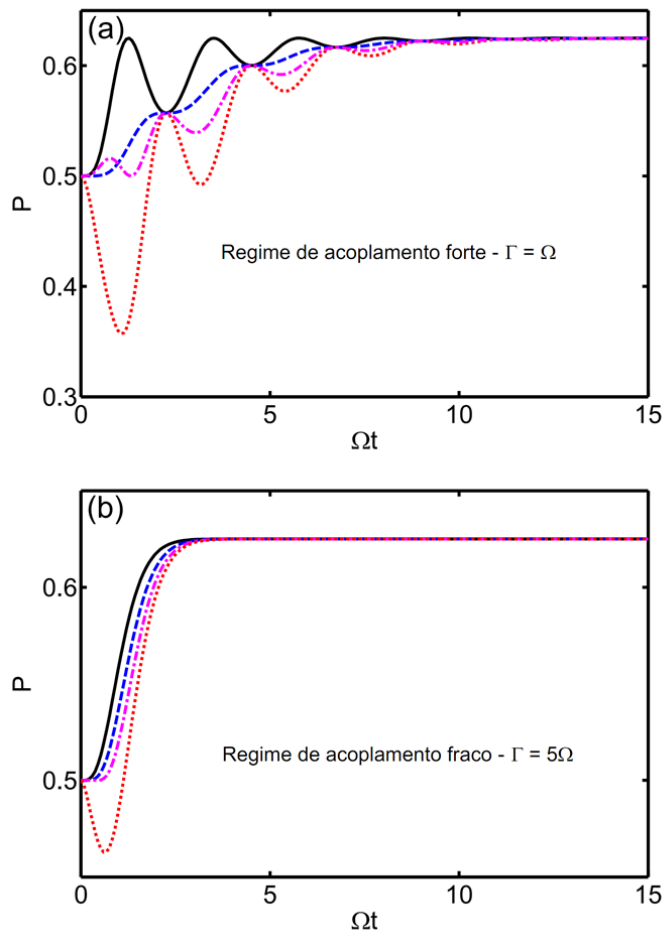


Figure 6.2: Evolução temporal da pureza P referente ao sistema contituído pelos dois átomos para o (a) regime de acoplamento forte $\Gamma = \Omega$ e o (b) regime de acoplamento fraco $\Gamma = 5\Omega$, considerando os estados iniciais ρ_a (linha sólida), ρ_b (linha pontilhada), ρ_c (linha tracejada) e ρ_d (linha ponto-tracejada), com $\alpha^2 = 0.5$.

de Pauli σ_z . Este tipo de interação é comumente usado para modelar a dinâmica de sistemas de estado sólido, por exemplo, pontos quânticos [140] e junções Josephson [141]. Se considerarmos este tipo de interação conjuntamente com os estados iniciais estudados aqui, não seríamos capazes de identificar a correlação inicial entre sistema e reservatório. Isto ocorre porque os estados iniciais dados pelas Eqs. (6.9)-(6.12) são escritos através dos autovetores de σ_z , de modo que nenhuma diferença seria observada para este tipo de interação. Entretanto, se outra condição inicial for considerada, por exemplo, estados iniciais representados através dos autovetores de σ_x , a mesma metodologia utilizada aqui poderia ser aplicada. De fato, os autores da Ref. [142] estenderam nosso estudo para o caso em que o átomo está sujeito a um reservatório de fase.

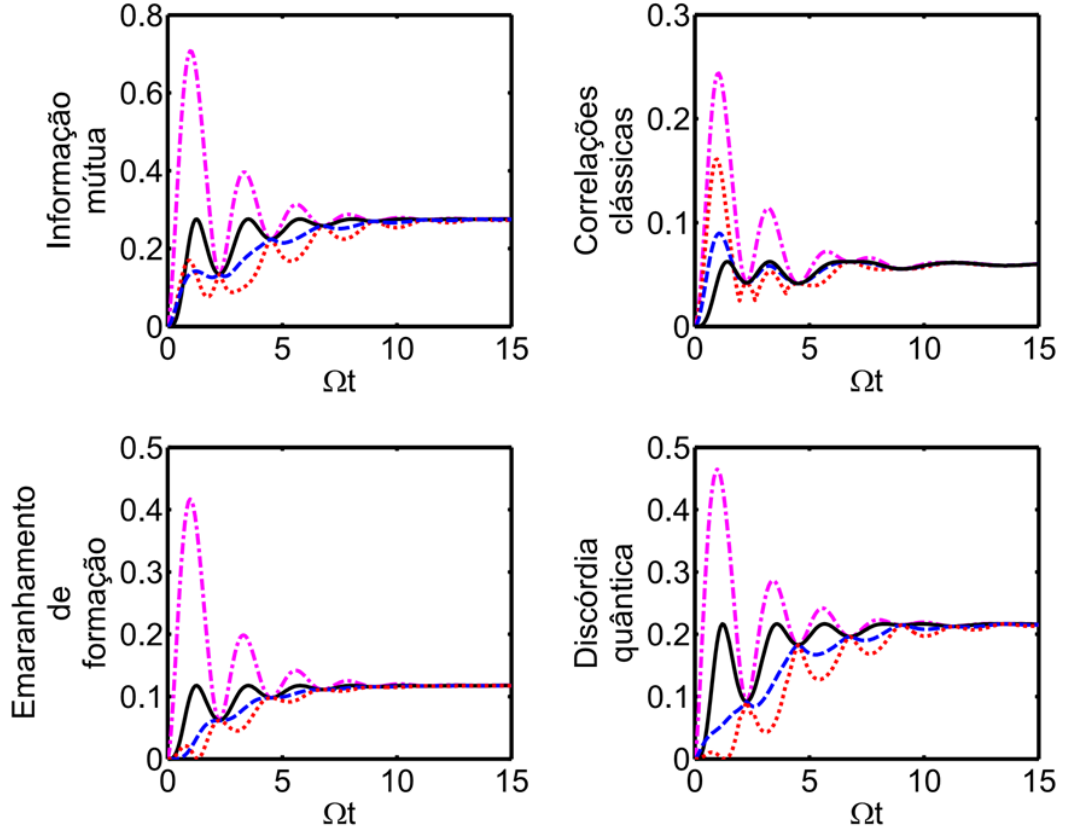


Figure 6.3: Dinâmica da informação mútua, das correlações clássicas, do emaranhamento de formação e da discórdia quântica para os dois átomos para ρ_a (linha sólida), ρ_b (linha pontilhada), ρ_c (linha tracejada) and ρ_d (linha ponto-tracejada) com $\alpha^2 = 0.5$ e $\Gamma = \Omega$.

6.5 Conclusão do capítulo

Nesta terceira parte da tese, mostramos um meio de determinar a possível existência de correlações iniciais entre um átomo de dois níveis e um reservatório estruturado lorentziano a temperatura zero. Encontramos que a dinâmica da pureza atômica possui assinaturas das correlações iniciais sistema-reservatório. Além disso, mostramos que é possível identificar o tipo de correlação inicial através da utilização de um átomo de prova interagindo com o mesmo reservatório. Finalmente, como somente apresentamos um estudo numérico, esperamos que este estudo estimule novas investigações nesta área, especialmente na obtenção de resultados analíticos que provem a eficiência da pureza como uma testemunha para correlações iniciais sistema-reservatório para estados e hamiltonianos mais gerais.

Chapter 7

Conclusões

Os resultados apresentados nesta tese estão associados a três estudos no contexto de Eletrodinâmica Quântica de Cavidade que consistem praticamente no caso em que um par de átomos de dois níveis interage com um modo de uma cavidade dissipativa.

No Capítulo 4, mostramos que a geração de correlação entre os átomos pode ser tomada como uma assinatura do comportamento não clássico do modo da cavidade. É importante enfatizar que, para $\bar{n} \gg 1$, o emaranhamento não está presente no sistema atômico, tal que o caráter quântico do modo da cavidade pode ser revelado através das correlações clássicas, da discórdia quântica e, conseqüentemente, da informação mútua. Além disso, estas correlações são não nulas para qualquer valor de acoplamento átomo-campo, mesmo no limite de um bombeamento coerente externo intenso ou altas temperaturas. Então, podemos afirmar que, embora as propriedades estatísticas do campo mostrem que elevando \bar{n} em um modo de uma cavidade dissipativa o limite clássico é atingido, as correlações estacionárias não nulas entre os átomos mostram que o caráter quântico deste campo ainda se manifesta mesmo para um campo macroscópico. Também apresentamos uma possível explicação para a não observação desse caráter quântico do campo no limite de altas excitações (altas temperaturas ou bombeamentos intensos) e no limite de espaço livre ($g_0 \rightarrow 0$): o tempo para se atingir o estado estacionário quântico aumenta à medida que se diminui g_0 , de modo que $\tau_R \rightarrow \infty$ para $g_0 \rightarrow 0$.

No Capítulo 5, mostramos um esquema probabilístico para preparar um estado atômico maximamente emaranhado entre um par de átomos de dois níveis interagindo com um modo de uma cavidade dissipativa, e como provar que o sistema atômico está em tal estado, sem perturbá-lo, via transmissão da cavidade. No caso de uma realização ex-

perimental individual, vimos que se o sistema atômico estiver no estado maximamente emaranhado, a transmissão da cavidade será máxima, enquanto que ela será nula se o sistema atômico estiver no estado descorrelacionado. Portanto, um único *click* no detector é suficiente para determinar que os átomos estão emaranhados. Além disso, vimos também que tal esquema funciona como um método direto para medir a concorrência do estado estacionário, sem a necessidade de qualquer reconstrução tomográfica da matriz densidade atômica e do conhecimento do estado inicial do sistema. Também mostramos que a eletrodinâmica quântica de circuitos é um dos candidatos mais promissores para a implementação de nosso esquema.

Por fim, no Capítulo 6, estudamos uma maneira de determinar a existência de correlações iniciais entre um átomo de dois níveis e um reservatório estruturado lorentziano a temperatura nula. Constatamos que a dinâmica da pureza do sistema possui assinaturas das correlações iniciais sistema-reservatório. Além disso, mostramos que é possível identificar a natureza de tais correlações iniciais através de um segundo átomo interagindo com o mesmo reservatório.

Chapter 8

Considerações finais

Os resultados ilustrados no Capítulo 4 (bombeamento coerente) serviram de motivação para o estudo que atualmente está sendo executado. Tal estudo consiste em tentar explicar a biestabilidade óptica [143, 144] (N átomos dentro de uma cavidade óptica) através de uma teoria puramente quântica, uma vez que este fenômeno é explicado através de uma teoria semiclássica. Um dos principais desafios de se estudar este fenômeno a partir de um modelo totalmente quântico é o crescimento exponencial da dimensão do espaço de Hilbert com o número de átomos (N), de forma que é necessário um computador de alto desempenho mesmo para poucos átomos. Por outro lado, aplicando-se a chamada aproximação semiclássica [83], que consiste em desconsiderar as correlações entre átomos e campo, o problema se torna tratável analítica e computacionalmente, uma vez que a dinâmica se reduz às conhecidas equações de Maxwell-Bloch [83] (teoria semiclássica), onde N se apresenta somente como um parâmetro. Um dos objetivos deste estudo atual é entender e explicar a transição quântico-(semi)clássica para o fenômeno de biestabilidade óptica, e como obtê-lo de forma controlada no limite de poucos átomos, onde tais questões ainda estão em aberto no contexto de eletrodinâmica quântica de cavidades (e circuitos). Em nossa pesquisa em andamento, estamos investigando qual o real motivo do aparecimento de um efeito não linear, experimentalmente testado, que é a biestabilidade óptica. Quando aplicamos a aproximação semiclássica, a dinâmica é descrita por um sistema finito de equações diferenciais *não lineares* acopladas, justificando a biestabilidade óptica (fenômeno não linear). Entretanto, surge uma indagação devido ao fato de que, inicialmente, estas equações fazem parte de um sistema infinito de equações diferenciais *lineares* acopladas (deduzido através de uma teoria totalmente quântica) e, sendo linear,

como há a aparição de uma não linearidade? Neste sentido, surge uma questão: como e em quais condições a teoria quântica (linear) prevê o fenômeno de biestabilidade, uma vez que a teoria semiclássica (não linear) é um limite da teoria quântica? Resultados preliminares indicam que um dos possíveis motivos para o aparecimento deste fenômeno em cavidades é o tempo de interação necessário para que o sistema atinja o regime estacionário. Agora, além deste tempo depender da amplitude do bombeamento externo como vimos no Capítulo 4, ele também depende do número de átomos, de modo que quanto maior N maior será esse tempo. Portanto, este estudo sobre o fenômeno de biestabilidade óptica é praticamente uma extensão do que vimos no Capítulo 4. Além disso, o contexto de eletrodinâmica quântica de circuitos é muito mais atrativo do que o contexto de cavidades ópticas, principalmente devido ao seu poderio em relação à obtenção do regime de acoplamento forte, ingrediente essencial para a biestabilidade óptica. Ademais, a eletrodinâmica quântica de circuitos permite um melhor controle individual dos átomos artificiais, uma vez que estes são fixos, diferentemente de átomos aprisionados em armadilhas ópticas que não possuem posições bem definidas dentro da cavidade, o que pode mascarar os resultados experimentais uma vez que o movimento dos átomos implica em acoplamento átomo-campo variável, o que gera flutuações na transmissão da cavidade. Dessa forma, parte dos estudos realizados nesta tese também nos motivaram a nos inserir nessa crescente área da eletrodinâmica quântica de circuitos, aumentando a possibilidade de adquirir novos conhecimentos e de propor novas ideias.

Além das três publicações discutidas nesta tese [77–79], temos mais duas publicações cujos temas fogem um pouco do escopo desta tese: em uma delas estudou-se um comportamento tipo calor específico negativo no contexto de óptica quântica [145], enquanto na outra investigou-se a relação do grau de não markovianidade para reservatórios independentes e comuns com o número de qubits do sistema [146].

Bibliography

- [1] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [2] G. E. Moore, *Electronics* **38**, 114 (1965).
- [3] C. H. Bennett e D. P. DiVincenzo, *Nature* **404**, 247 (2000).
- [4] D. P. DiVincenzo, *Fortschr. Phys.* **48**, 771 (2000).
- [5] E. M. Purcell, H. C. Torrey e R. V. Pound, *Phys. Rev.* **69**, 37 (1946).
- [6] S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 1083 (2013).
- [7] D. J. Wineland, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 1103 (2013).
- [8] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [9] A. Aspect, *Nature* **398**, 189, (1999).
- [10] B. Julsgaard, A. Kozhekin e E. S. Polzik, *Nature* **413**, 400 (2001).
- [11] A. J. Berkley, H. Xu, R. C. Ramos, M. A. Gubrud, F. W. Strauch, P. R. Johnson, J. R. Anderson, A. J. Dragt, C. J. Lobb e F. C. Wellstood, *Science* **300**, 1548 (2003).
- [12] W. Dür e H.-J. Briegel, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 180403 (2004).
- [13] M. Paternostro, D. Vitali, S. Gigan, M. S. Kim, C. Brukner, J. Eisert e M. Aspelmeyer, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 250401 (2007).
- [14] M. J. Hartmann e M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 200503 (2008).
- [15] H. Krauter, C. A. Muschik, K. Jensen, W. Wasilewski, J. M. Petersen, J. I. Cirac e E. S. Polzik, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 080503 (2011).

-
- [16] N. Bohr, *The correspondence principle (1918-1923)* (North-Holland, Amsterdam, 1976).
- [17] M. Schlosshauer, *Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition* (Springer, Heidelberg Berlin, 2007).
- [18] G. C. Ghirardi, A. Rimini e T. Weber, Phys. Rev. D **34**, 470 (1986).
- [19] J. Kofler e C. Brukner, Phys. Rev. Lett. **99**, 180403 (2007).
- [20] W. H. Zurek, Rev. Mod. Phys. **75**, 715 (2003).
- [21] M. J. Everitt, W. J. Munro e T. P. Spiller, Phys. Rev. A **79**, 032328 (2009).
- [22] J. M. Fink, L. Steffen, P. Studer, Lev S. Bishop, M. Baur, R. Bianchetti, D. Bozyigit, C. Lang, S. Filipp, P. J. Leek e A. Wallraff., Phys. Rev. Lett. **105**, 163601 (2010).
- [23] J. I. Kim, K. M. Fonseca Romero, A. M. Horiguti, L. Davidovich, M. C. Nemes e A. F. R. de Toledo Piza, Phys. Rev. Lett. **82**, 4737 (1999).
- [24] Ho Trung Dung, A. S. Shumovsky e N. N. Bogolubov, Opt. Commun. **90**, 322 (1992).
- [25] H. Ollivier e W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001).
- [26] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin e W. K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).
- [27] L. Henderson e V. Vedral, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 6899 (2001).
- [28] J. S. Bell, Physics **1**, 195 (1965).
- [29] C. H. Bennett e D. P. Divincenzo, Nature **404**, 247 (2000).
- [30] A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).
- [31] D. Gottesman e I. L. Chuang, Nature **402**, 390 (1999).
- [32] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).

- [33] A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J.-M. Raimond e S. Haroche, *Science* **288**, 2024 (2000).
- [34] S.-B. Zheng e G.-C. Guo, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2392 (2000).
- [35] C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano, D. J. Wineland e C. Monroe, *Nature* **404**, 256 (2000).
- [36] L. DiCarlo, J. M. Chow, J. M. Gambetta, Lev S. Bishop, B. R. Johnson, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, L. Frunzio, S. M. Girvin e R. J. Schoelkopf, *Nature* **460**, 240 (2009).
- [37] S. Filipp, A. F. van Loo, M. Baur, L. Steffen e A. Wallraff, *Phys. Rev. A* **84**, 061805(R) (2011).
- [38] M. B. Plenio, S. F. Huelga, A. Beige e P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **59**, 2468 (1999).
- [39] J. Wang, H. M. Wiseman e G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* **71**, 042309 (2005).
- [40] A. R. R. Carvalho, A. J. S. Reid e J. J. Hope, *Phys. Rev. A* **78**, 012334 (2008).
- [41] B. Julsgaard e K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **85**, 032327 (2012).
- [42] J. Hong e H.-W. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 237901 (2002).
- [43] A. S. Sørensen e K. Mølmer, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 097905 (2003).
- [44] J. Metz, M. Trupke e A. Beige, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 040503 (2006).
- [45] A. Beige, D. Braun, B. Tregenna e P. L. Knight, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1762 (2000).
- [46] S. G. Clark e A. S. Parkins, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 047905 (2003).
- [47] M. J. Kastoryano, F. Reiter e A. S. Sørensen, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 090502 (2011).
- [48] L. Slodička, G. Hétet, N. Röck, P. Schindler, M. Henrich e R. Blatt, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 083603 (2013).
- [49] S. Diehl, A. Micheli, A. Kantian, B. Kraus, H. P. Büchler e P. Zoller, *Nature Phys.* **4**, 878 (2008).

- [50] F. Verstraete, M. M. Wolf e J. I. Cirac, *Nature Phys.* **5**, 633 (2009).
- [51] W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).
- [52] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996).
- [53] S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, F. Mintert e A. Buchleitner, *Phys. Rev. A* **75**, 032338 (2007).
- [54] F. Mintert e A. Buchleitner, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 140505 (2007).
- [55] C.-S. Yu e H.-S. Song, *Phys. Rev. A* **76**, 022324 (2007).
- [56] C.-S. Yu, C. Li e H.-S. Song, *Phys. Rev. A* **77**, 012305 (2008).
- [57] Z. N. Li, J. S. Jin e C. S. Yu, *Phys. Rev. A* **83**, 012317 (2011).
- [58] V. B. Braginsky, Y. I. Vorontsov e K. S. Thorne, *Science* **209**, 547 (1980).
- [59] M. Rippin e P. L. Knight, *J. Mod. Opt.* **43**, 807 (1996).
- [60] K. Modi e E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. A* **81**, 052119 (2010).
- [61] K. Modi, *Open Syst. Inf. Dyn.* **18**, 253 (2011).
- [62] P. Pechukas, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1060 (1994).
- [63] P. Pechukas, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3021 (1995).
- [64] R. Alicki, *Phys. Rev. Lett* **75**, 3020 (1995).
- [65] P. Stelmachovic e V. Buzek, *Phys. Rev. A* **64**, 062106 (2001).
- [66] P. Stelmachovic e V. Buzek, *Phys. Rev. A* **67**, 029902 (2003).
- [67] T. F. Jordan, A. Shaji e E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. A* **70**, 052110 (2004).
- [68] H. A. Carteret, D. R. Terno e K. Zyczkowski, *Phys. Rev. A* **77**, 042113 (2008).
- [69] Y. J. Zhang, X. B. Zou, Y. J. Xia e G. C. Guo, *Phys. Rev. A* **82**, 022108 (2010).
- [70] A. G. Dijkstra e Y. Tanimura, *Phys. Rev. Lett* **104**, 250401 (2010).

- [71] Y. Zhang, X. Zou, Y. Xia e G. Guo, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44**, 035503 (2011).
- [72] C. A. Rodríguez-Rosario, K. Modi e A. Aspuru-Guzik, *Phys. Rev. A* **81**, 012313 (2010).
- [73] A. R. Usha Devi, A. K. Rajagopal e Sudha, *Phys. Rev. A* **83**, 022109 (2011).
- [74] C. Uchiyama e M. Aihara, *Phys. Rev. A* **82**, 044104 (2010).
- [75] A. Shabani e D. A. Lidar, *Phys. Rev. Lett* **102**, 100402 (2009).
- [76] A. Smirne, D. Brivio, S. Cialdi, B. Vacchini e M. G. A. Paris, *Phys. Rev. A* **84**, 032112 (2011).
- [77] D. Z. Rossatto, T. Werlang, E. I. Duzzioni e C. J. Villas-Boas, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 153601 (2011).
- [78] D. Z. Rossatto e C. J. Villas-Boas, *Phys. Rev. A* **88**, 042324 (2013).
- [79] D. Z. Rossatto, T. Werlang, L. K. Castelano, C. J. Villas-Boas e F. F. Fanchini, *Phys. Rev. A* **84**, 042113 (2011).
- [80] E. T. Jaynes e F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [81] C. Gerry e P. Knight, *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [82] M. Tavis e F. W. Cummings, *Phys. Rev.* **170**, 379 (1968).
- [83] H. J. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Lecture Notes in Physics Vol. 18 (Springer, Berlin, 1993).
- [84] H.-P. Breuer e F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, Oxford, 2007).
- [85] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space* (WILEY-VCH, Berlin, 2001).
- [86] D. F. Walls e G. J. Milburn, *Quantum Optics*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 2008).
- [87] C. W. Gardiner e P. Zoller, *Quantum Noise*, 2nd ed. (Springer, New York, 2000).

- [88] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
- [89] R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [90] U. M. Titulaer e R. J. Glauber, Phys. Rev. **140**, B676 (1965).
- [91] C. L. Mehta e E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. **138**, B274 (1965).
- [92] M. O. Scully e M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [93] B. Baseia, Rev. Bras. Ens. Fis. 17, **1** (1995).
- [94] X. T. Zou e L. Mandel, Phys. Rev. A **41** 475 (1990).
- [95] C. E. Shannon e W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication* (Univ. of Illinois Press, 1949).
- [96] T. M. Cover e J. A. Thomas, *Elements of Information Theory* (Wiley, 1991).
- [97] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1955).
- [98] A. Peres *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Kluwer Academic Publishers, New York, 2002).
- [99] T. W. de Oliveira, *Termalização e Correlações Quânticas nos contextos de Sistemas Quânticos Abertos e Cadeias de Spins*. São Carlos: UFSCar, 2013. 205 f. Tese (Doutorado em Física) - Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos - SP, 2013.
- [100] L. Henderson e V. Vedral, J. Phys. A. Math. Gen. **34** 6899 (2001).
- [101] L. C. Céleri, J. Maziero e R. M. Serra, Int. J. Quant. Inf. **9**, 1837 (2011).
- [102] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek e V. Vedral, Rev. Mod. Phys. **84**, 1655 (2012).
- [103] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki e K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).

- [104] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [105] R. F. Werner, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).
- [106] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. Smolin, e W. K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).
- [107] H. Ollivier e W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2002).
- [108] G. M. D'Ariano, P. Perinotti e P. Lo Presti, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 5979 (2005).
- [109] F. Galve, G. L. Giorgi e R. Zambrini, Europhys. Lett. **96**, 40005 (2011).
- [110] A. Datta, arXiv:0807.4490 (2008).
- [111] T. Werlang, S. Souza, F. F. Fanchini e C. J. Villas Boas, Phys. Rev. A **80**, 024103 (2009).
- [112] E. Solano, G. S. Agarwal e H. Walther, Phys. Rev. Lett. **90**, 027903 (2003).
- [113] R. K. Bullough, *Hyperfine Interact*, **37**, 71 (1987).
- [114] P. Alsing e H. J. Carmichael, Quantum Opt. **3**, 13 (1991).
- [115] M. A. Armen, A. E. Miller e H. Mabuchi, Phys. Rev. Lett. **103**, 173601 (2009).
- [116] A. R. P. Rau, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 412002 (2009).
- [117] N. Quesada, A. A.-Qasimia e D. F.V. James, J. Mod. Opt. **59**, 1322 (2012).
- [118] H.-J. Briegel e B.-G. Englert, Phys. Rev. A **47**, 3311 (1993).
- [119] V. V. Albert e L. Jiang, arXiv:1310.1523 (2013).
- [120] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc e G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions* (Wiley, New York, 1992).
- [121] P. Xue, Z. Ficek e B. C. Sanders, Phys. Rev. A **86**, 043826 (2012).
- [122] M. Fleischhauer, A. Imamoglu e J. P. Marangos, Rev. Mod. Phys. **77**, 633 (2005).
- [123] P. M. Alsing, D. A. Cardimona e H. J. Carmichael, Phys. Rev. A **45**, 1793 (1992).
- [124] P. R. Rice e R. J. Brecha, Opt. Commun. **126**, 230 (1996).

- [125] G. Burkard e F. Brito, *Phys. Rev. B* **72**, 054528 (2005).
- [126] F. Nissen, J. M. Fink, J. A. Mlynek, A. Wallraff e J. Keeling, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 203602 (2013).
- [127] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, e R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004).
- [128] A. Blais, J. Gambetta, A. Wallraff, D. I. Schuster, S. M. Girvin, M. H. Devoret, e R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* **75**, 032329 (2007).
- [129] K. Mølmer, Y. Castin e J. Dalibard, *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 524 (1993).
- [130] M. B. Plenio e P. L. Knight, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 101 (1998).
- [131] J. R. Johansson, P.D. Nation e F. Nori, *Comp. Phys. Comm.* **184**, 1234 (2013).
- [132] S. M. Tan, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **1**, 424 (1999).
- [133] B. M. Garraway, *Physical Review A* **55**, 2290 (1997).
- [134] B. J. Dalton, S. M. Barnett e B. M. Garraway, *Phys. Rev. A* **64**, 053813 (2001).
- [135] L. Mazzola, B. Bellomo, R. Lo Franco e G. Compagno, *Phys. Rev. A* **81**, 052116 (2010).
- [136] E.-M. Laine, J. Piilo e H.-P. Breuer, *Europhys. Lett.* **92**, 60010 (2010).
- [137] H.-P. Breuer, E.-M. Laine e J. Piilo, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 210401 (2009).
- [138] F. F. Fanchini, T. Werlang, C. A. Brasil, L. G. E. Arruda e A. O. Caldeira, *Phys. Rev. A* **81**, 052107 (2010).
- [139] L. Mazzola, S. Maniscalco, J. Piilo, K.-A. Suominen e B. M. Garraway, *Phys. Rev. A* **79**, 042302 (2009).
- [140] F. F. Fanchini, L. K. Castelano e A. O. Caldeira, *New J. Phys.* **12**, 073009 (2010).
- [141] Y. Makhlin, G. Schön e A. Shnirman, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 357 (2001).
- [142] J. Dajka, B. Gardas e J. Łuczka, *Int. J. Theor. Phys.* **52**, 1148 (2013).

-
- [143] L. A. Lugiato, *Theory of Optical Bistability*, em E. Wolf, *Progress in Optics*, Vol. 21 (North Holland, Amsterdam, 1984).
- [144] H. M. Gibbs, *Optical Bistability: Controlling Light with Light* (Academic Press, New York, 1985).
- [145] D. Z. Rossatto, A. R. de Almeida, T. Werlang, C. J. Villas-Boas e N. G. de Almeida, *Phys. Rev. A* **86**, 035802 (2012).
- [146] F. F. Fanchini, G. Karpat, L. K. Castelano e D. Z. Rossatto, *Phys. Rev. A* **88**, 012105 (2013).
- [147] A. S. Parkins e H. J. Kimble, *Journal of Optics B* **1**, 496 (1999).
- [148] M. Gu, *An Investigation of Quantum Entanglement in Open Systems*. Auckland: University of Auckland, 2005. 142 f. Dissertação (Mestrado em Física), University of Auckland, Auckland, New Zealand, 2005.

Appendix A

Relação de comutação para $\mathcal{L}_j^{SC}(t)$

Seja $\mathcal{L}_j^{SC}(t) \bullet = -i [H_j^{SC}(t), \bullet]^1$ e \mathcal{X} um operador arbitrário,

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_j^{SC}(t), \mathcal{L}_k^{SC}(t')] \mathcal{X} &= \mathcal{L}_j^{SC}(t) \mathcal{L}_k^{SC}(t') \mathcal{X} - \mathcal{L}_k^{SC}(t') \mathcal{L}_j^{SC}(t) \mathcal{X} \\ &= -i \mathcal{L}_j^{SC}(t) [H_k^{SC}(t'), \mathcal{X}] + i \mathcal{L}_k^{SC}(t') [H_j^{SC}(t), \mathcal{X}] \\ &= -[H_j^{SC}(t), [H_k^{SC}(t'), \mathcal{X}]] + [H_k^{SC}(t'), [H_j^{SC}(t), \mathcal{X}]] \\ &= -[H_j^{SC}(t), H_k^{SC}(t')] \mathcal{X} + \mathcal{X} [H_k^{SC}(t'), H_j^{SC}(t)] \\ &= -[[H_j^{SC}(t), H_k^{SC}(t')], \mathcal{X}]. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Se $[H_j^{SC}(t), H_k^{SC}(t')] = 0$ para $j \neq k$, então $[\mathcal{L}_j^{SC}(t), \mathcal{L}_k^{SC}(t')] = 0$ para $j \neq k$, uma vez que \mathcal{X} é arbitrário.

¹Quando aplicado em um operador, o sinal \bullet deverá ser substituído por tal operador, por exemplo, dado um operador \mathcal{X} , $\mathcal{L}_j^{SC}(t) \mathcal{X} = -i [H_j^{SC}(t), \mathcal{X}]$.

Appendix B

Simulação numérica

As simulações numéricas realizadas nesta tese foram feitas a partir de algoritmos escritos em linguagem de programação Matlab utilizando o pacote “Quantum Optics Toolbox” [132] devido à facilidade de implementação, uma vez que o hamiltoniano e o liouviliano podem ser escritos em uma forma bem próxima àquela escrita em um pedaço de papel. Aqui serão apresentados algumas linhas de comando básicas, uma descrição completa do pacote de óptica quântica pode ser encontrada na Ref. [132].

B.1 Escrevendo o hamiltoniano do sistema

Como um exemplo, vamos considerar o caso de um átomo de dois níveis interagindo com um modo de uma cavidade. Neste caso, o hamiltoniano do sistema é dado pelo hamiltoniano de Jaynes-Cummings [Eq. (2.1)] que, na representação de interação, é dado por

$$H = g_0 (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-). \quad (\text{B.1})$$

A seguir, serão mostradas as linhas do algoritmo, representadas por `>>`, necessárias para a escrita de H em linguagem de programação Matlab utilizando o pacote “Quantum Optics Toolbox”, onde o símbolo de porcentagem `%` é utilizado para introduzir comentários ao código.

```
>> N = 5; % dimensão do espaço de Fock que descreve o modo do campo da cavidade  
(como o espaço de Fock é infinito, aqui o valor de N deve ser escolhido de modo que a  
probabilidade do campo possuir N+1 excitações seja desprezível).
```

`>> idc = identity(N);` % operador identidade do espaço de Hilbert do modo da cavidade.

`>> ida = identity(2);` % operador identidade do espaço de Hilbert do átomo de dois níveis.

`>> a = tensor(destroy(N) , ida);` % o operador aniquilação do campo é dado pelo comando `destroy(N)`, mas, como o sistema total é $\text{campo} \otimes \text{átomo}$, utilizamos o comando `tensor` para especificar que este operador só age no espaço de Hilbert do campo, uma vez tomamos o produto tensorial de `destroy(N)` com o operador identidade do espaço de Hilbert do átomo `ida`. O operador criação é obtido simplesmente tomando-se o hermitiano de `a`, que em Matlab é dado pelo comando `a'`.

`>> sm = tensor(idc , sigmam);` % operador atômico σ_- .

`>> g0 = 0.1;` % valor do acoplamento utilizado (nas simulações desta tese tomamos todos os parâmetros em razão da taxa de decaimento da cavidade κ , ou seja, $g_0 = 0.1$ significa que $g_0/\kappa = 0.1$).

`>> H = g0*(a*sm' + a'*sm);` % hamiltoniano. Observe como a escrita é idêntica àquela que escrevemos em um pedaço de papel!

B.2 Escrevendo o liouvilliano

Continuando com o exemplo, vamos assumir que o campo e o átomo interajam com um reservatório markoviano de temperatura nula, de maneira que a dinâmica do sistema seja dada pela Eq. (2.10) com $n_{th} = 0$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \mathcal{L}\rho \\ &= -i[H, \rho] + \kappa \mathcal{D}[a]\rho + \frac{\gamma}{2} \mathcal{D}[\sigma_-]\rho, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

lembrando que $\mathcal{D}[\mathcal{O}] = 2\mathcal{O}\rho\mathcal{O}^\dagger - \mathcal{O}^\dagger\mathcal{O}\rho - \rho\mathcal{O}^\dagger\mathcal{O}$. Para especificarmos se um operador \mathcal{X} está à esquerda ou à direita de ρ utilizamos os comandos `spre(X)` e `spost(X)`, respectivamente. Assim, definidos os valores de κ e γ , podemos escrever \mathcal{L} em linguagem de programação como

`>> Lcampo = kappa*(2*spre(a)*spost(a') - spre((a')*a) - spost((a')*a));`

```
>> Latomo = 0.5*gamma*( 2*spre(sm)*spost(sm') - spre(sm'*sm) - spost(sm'*sm)
);
>> L = -1i*( spre(H)-spost(H) ) + Lcampo + Latomo;
```

B.3 Obtendo $\rho(t)$

Da expressão $\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho$, se \mathcal{L} não depende explicitamente do tempo, temos que $\rho(t) = e^{\mathcal{L}t}\rho(0)$. Desta forma, especificado t e $\rho(0)$ temos

```
>> rhot = expm(L*t)*rho0; % quando temos uma exponencial de matriz devemos
usar o comando expm.
```

Um exemplo de $\rho(0)$ seria

```
>> ggg = basis(2,2); % estado atômico |g>.
>> eee = basis(2,1); % estado atômico |e>.
>> c0 = basis(N,1); % campo no estado de vácuo.

>> psi0 = tensor(c0 , eee); % |\psi(0)> = |0>_c \otimes |e>.
>> rho0 = psi0*(psi0'); % \rho(0) = |\psi(0)><\psi(0)|.
```

B.4 Calculando média de operadores

Dado um operador \mathcal{O} temos que $\langle \mathcal{O} \rangle = Tr(\mathcal{O}\rho)$. Esta operação em Matlab equivale ao código

```
>> Omedio = expect(O , rhot) ou trace(O*rhot);
```

B.5 Exemplo: calculando $g^{(2)}(0)$

Para dar uma visão geral, a seguir é mostrado, como exemplo, o algoritmo completo para calcular $g^{(2)}(0)$ em função de ε/κ dado pela Fig. 4.1.

```
N = 5; % dimensão do espaço de Fock utilizada.
ida = identity(2); % operador identidade atômico.
idc = identity(N); % operador identidade do campo.
```

kappa = 1.0; % taxa de decaimento da cavidade (aqui utilizamos o valor 1.0, dessa forma todos os parâmetros do sistema serão parametrizados por κ).

g0 = 0.1; % valor de acoplamento utilizado g_0/κ .

gamma = 0.0; % taxa de decaimento atômico γ/κ .

TM = 1.0e8; % tempo longo para garantir que o sistema estará no regime estacionário.

NSTEPS = 1001;

Elist = linspace(0.0,1.0,NSTEPS); % nos dá uma lista de NSTEPS valores equispaçados de ε/κ no intervalo $[0.0,1.0]$.

c0 = basis(N,1); % estado inicial do modo = $|0\rangle_c \rightarrow$ VÁCUO.

ggg = basis(2,2); % estado atômico $|g\rangle$.

eee = basis(2,1); % estado atômico $|e\rangle$.

psi0 = tensor(c0,ggg,ggg); % estado inicial campo+átomos $|0\rangle_c \otimes |g\rangle \otimes |g\rangle$.

rho0 = (psi0*psi0'); % matriz densidade inicial.

a = tensor(destroy(N),ida,ida); % operador aniquilação do modo da cavidade.

sm1 = tensor(idc, sigmam, ida); % σ_-^1 operador abaixamento atômico do átomo1.

sm2 = tensor(idc, ida, sigmam); % σ_-^2 operador abaixamento atômico do átomo2.

Lf = kappa*(2*spre(a)*spost(a') - spre((a')*a) - spost((a')*a)); % decaimento do campo.

L1 = 0.5*gamma*(2*spre(sm1)*spost(sm1') - spre(sm1'*sm1) - spost(sm1'*sm1);
% decaimento do átomo 1.

L2 = 0.5*gamma*(2*spre(sm2)*spost(sm2') - spre(sm2'*sm2) - spost(sm2'*sm2);
% decaimento do átomo 2.

Ldiss = Lf + L1 + L2; % liouvilliano da parte dissipativa.

parfor kk = 1:NSTEPS % loop para calcular $g^{(2)}(0)$ para os valores de ε/κ definidos anteriormente.

E = Elist(kk); % valor da amplitude do campo de bombeamento.

% Representação deslocada

```
alpha = -1i*E*tensor(idc,ida,ida)/(kappa);
```

```
Omega = g0*alpha;
```

```
Hsc = Omega*(sm1' + sm2') + Omega'*(sm1 + sm2);
```

```
H = g0*(sm1' + sm2')*a + g*(sm1 + sm2)*a' + Hsc ; % hamiltoniano de
tavis-cummings + bombeamento na representação independente do tempo e deslocada.
```

```
L = -1i.*( spre(H) - spost(H) ) + Ldiss; % liouvilliano total.
```

```
rhoss = expm(L*TM)*rho0; % matriz densidade estacionária.
```

```
NM(kk) = expect((a'+alpha')*(a+alpha),rhoss); % número médio de fótons
<a†a> para cada valor de ε/κ.
```

```
g20(kk) = expect( ((a'+alpha')^2.0)*((a+alpha)^2.0),rhoss)/(NM(kk)^2.0);
% g(2)(0) para cada valor de ε/κ.
```

```
end % final do loop.
```

```
f1 = figure; plot(Elist,g20); % geração da figura g(2)(0) vs ε/κ.
```

Appendix C

Eliminação adiabática

Dada a equação mestra

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}_0 \rho + \kappa (n_{th} + 1) \mathcal{L}[a] \rho + \kappa n_{th} \mathcal{L}[a^\dagger] \rho, \quad (\text{C.1})$$

com

$$\mathcal{L}_0 \rho = -i [H, \rho]; \quad (\text{C.2})$$

$$\mathcal{L}[A] \rho = (2A\rho A^\dagger - A^\dagger A\rho - \rho A^\dagger A), \quad (\text{C.3})$$

e

$$H = g_0 (aS_+ + a^\dagger S_-) + (\Omega S_+ + \Omega^* S_-), \quad (\text{C.4})$$

assumindo $\kappa (n_{th} + 1) \gg g\sqrt{N}, |\Omega| \sqrt{N}$, ou seja, o tempo de relaxação da cavidade é muito maior do que o tempo característico de interação desta com os átomos, temos que o modo da cavidade atinge rapidamente seu estado estacionário (ρ_c^{ss}), tal que, para $\kappa t \gg 1$, podemos aproximar $\rho(t) \approx \rho_c^{ss} \otimes \rho_{at}(t)$ [87], onde ρ_{at} é a matriz densidade atômica. Deste modo, podemos obter o operador densidade atômico via equação [87, 147]

$$\dot{\rho}_{at} = Tr_c \left\{ \mathcal{L}_0 \left[\int_0^\infty d\tau e^{\mathcal{L}_c \tau} \mathcal{L}_0 (\rho_c^{ss} \otimes \rho_{at}) \right] \right\}, \quad (\text{C.5})$$

onde

$$\mathcal{L}_0 \mathcal{B} = -i [H, \mathcal{B}]; \quad (\text{C.6})$$

$$\mathcal{L}_c \mathcal{B} = \kappa (n_{th} + 1) \mathcal{L}[a] \mathcal{B} + \kappa n_{th} \mathcal{L}[a^\dagger] \mathcal{B}, \quad (\text{C.7})$$

para qualquer operador \mathcal{B} , e Tr_c indica o traço sobre as variáveis do modo da cavidade.

Assim, aplicando \mathcal{L}_0 e \mathcal{L}_c na Eq. (C.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{at} = & -i [\Omega S_+ + \Omega^* S_-, \rho_{at}] \\
& + g^2 \int_0^\infty d\tau \{ \langle a(t+\tau) a(t) \rangle_{ss} [S_+ \rho_{at} S_+ - S_+ S_+ \rho_{at}] \\
& + \langle a(t) a(t+\tau) \rangle_{ss} [S_+ \rho_{at} S_+ - S_+ S_+ \rho_{at}] \\
& + \langle a(t+\tau) a^\dagger(t) \rangle_{ss} [S_- \rho_{at} S_+ - S_+ S_- \rho_{at}] \\
& + \langle a(t) a^\dagger(t+\tau) \rangle_{ss} [S_- \rho_{at} S_+ - \rho_{at} S_+ S_-] \\
& + \langle a^\dagger(t+\tau) a(t) \rangle_{ss} [S_+ \rho_{at} S_- - S_- S_+ \rho_{at}] \\
& + \langle a^\dagger(t) a(t+\tau) \rangle_{ss} [S_+ \rho_{at} S_- - \rho_{at} S_- S_+] \\
& + \langle a^\dagger(t+\tau) a^\dagger(t) \rangle_{ss} [S_- \rho_{at} S_- - S_- S_- \rho_{at}] \\
& + \langle a^\dagger(t) a^\dagger(t+\tau) \rangle_{ss} [S_- \rho_{at} S_- - \rho_{at} S_- S_-] \}, \tag{C.8}
\end{aligned}$$

onde [87]

$$\langle X(t) Y(t+\tau) \rangle_{ss} = \langle X(t) Y(t+\tau) \rangle_{\kappa t \gg 1} = Tr_c [Y e^{\mathcal{L}_c \tau} (\rho X)]; \tag{C.9}$$

$$\langle X(t+\tau) Y(t) \rangle_{ss} = \langle X(t+\tau) Y(t) \rangle_{\kappa t \gg 1} = Tr_c [X e^{\mathcal{L}_c \tau} (Y \rho)]. \tag{C.10}$$

As funções de correlação acima podem ser calculadas através da *Quantum Regression Formula* [83]: dado um conjunto completo de operadores A_μ tal que

$$\frac{d}{dt} A_\mu = Tr (A_\mu \dot{\rho}) = \sum_\lambda M_{\mu\lambda} A_\lambda, \tag{C.11}$$

podemos escrever

$$\frac{d}{d\tau} \langle \mathcal{O}(t) A_\mu(t+\tau) \rangle = \sum_\lambda M_{\mu\lambda} \langle \mathcal{O}(t) A_\lambda(t+\tau) \rangle; \tag{C.12}$$

$$\frac{d}{d\tau} \langle A_\mu(t+\tau) \mathcal{O}(t) \rangle = \sum_\lambda M_{\mu\lambda} \langle A_\lambda(t+\tau) \mathcal{O}(t) \rangle, \tag{C.13}$$

sendo $\mathcal{O}(t)$ qualquer operador. Para o nosso caso, obtemos [148]

$$\langle a(t+\tau) a^\dagger(t) \rangle_{ss} = \langle a(t) a^\dagger(t+\tau) \rangle_{ss} = (n_{th} + 1) e^{-\kappa\tau}; \tag{C.14a}$$

$$\langle a^\dagger(t+\tau) a(t) \rangle_{ss} = \langle a^\dagger(t) a(t+\tau) \rangle_{ss} = n_{th} e^{-\kappa\tau}, \tag{C.14b}$$

sendo nulas todas as outras funções de correlação.

Finalmente, substituindo (C.14) em (C.8), temos que

$$\dot{\rho}_a = -i [\Omega S_+ + \Omega^* S_-, \rho_a] + \Gamma_{eff} (n_{th} + 1) \mathcal{L} [S_-] \rho_a + \Gamma_{eff} n_{th} \mathcal{L} [S_+] \rho_a, \tag{C.15}$$

com $\Gamma_{eff} = g^2/\kappa$.

Appendix D

Correlações para estados- X

Os estados da forma

$$\rho_X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23}^* & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

são conhecidos como estados- X [116, 117], onde este nome está associado ao fato de a matriz acima lembrar a letra X . Devido a sua estrutura de somente 7 parâmetros livres (considerando que $\text{Tr}\rho_X = 1$, ou seja, o estado é normalizado), o cálculo das correlações é extremamente simplificado [117]. Assim, a seguir, vamos calcular as correlações para a matriz densidade dada pela Eq. (4.33)

$$\rho_{at}^{ss} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & d & 0 \\ 0 & d & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad (\text{D.2})$$

onde a, b, c e d são dados pela Eq. (4.34).

D.1 Concorrência

A concorrência para uma matriz densidade geral ρ é dada por $C = \max(0, \Lambda)$, onde $\Lambda = \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}$ e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ são os autovalores da matriz $\rho\sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y$, sendo ρ^* o complexo conjugado de ρ e σ_y a matriz de Pauli. Entretanto,

para estados da forma da Eq. (D.1), a concorrência é simplificada para a expressão

$$C(\rho_X) = 2 \max(0, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}). \quad (\text{D.3})$$

Para o nosso caso a equação acima pode ser simplificada mais ainda, dado que $\rho_{14} = 0$, de modo que obtemos

$$C(\rho_{at}^{ss}) = 2 \max(0, |d| - \sqrt{ac}). \quad (\text{D.4})$$

D.2 Informação mútua

A informação mútua é dada por

$$I(A : B) \equiv S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}), \quad (\text{D.5})$$

onde $S(\mathcal{Y}) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i$ é a entropia de Von Neumann, com $\{\lambda_i\}$ sendo os autovalores da matriz \mathcal{Y} . Assim, dado os autovalores das matrizes densidade ρ_A , ρ_B e ρ_{AB} o cálculo de $I(A : B)$ é direto.

Para $\rho_{AB} = \rho_{at}^{ss}$ obtém-se os autovalores a , $b + d$, $b - d$ e c . Além disso, através do traço parcial, temos

$$\rho_A = \rho_B = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & b + c \end{pmatrix},$$

que possuem autovalores $a + b$ e $b + c$.

D.3 Discórdia quântica

Para estados do tipo- X , D_q pode ser calculada analiticamente como [117]

$$D_q(\rho_X) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - \max(D_1, D_2), \quad (\text{D.6})$$

onde

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{i=1,3} \rho_{ii} \log_2 \left(\frac{\rho_{ii}}{\rho_{ii} + \rho_{i+1,i+1}} \right) + \sum_{i=2,4} \rho_{ii} \log_2 \left(\frac{\rho_{ii}}{\rho_{ii} + \rho_{i-1,i-1}} \right); \\ D_2 &= \sum_{i=0,1} \left[\frac{1 + (-1)^i \Upsilon}{2} \right] \log_2 \left[\frac{1 + (-1)^i \Upsilon}{2} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

com

$$\Upsilon = \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + 4(|\rho_{14}|^2 + |\rho_{23}|^2)}. \quad (\text{D.8})$$

Para o nosso caso $\rho_{11} = a$, $\rho_{14} = 0$, $\rho_{22} = \rho_{33} = b$, $\rho_{23} = d$ e $\rho_{44} = c$.

As correlações clássicas podem ser calculadas a partir da diferença entre a informação mútua e a discórdia quântica.