

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

ENGENHARIA DE INTERAÇÕES
FÔNON-FÓTON-MATÉRIA
MEDIADAS POR UM CAMPO CLÁSSICO

Ricardo Luciano Rodrigues
Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa

Dissertação submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos necessários à obtenção do Título de Mestre em Física.

São Carlos -- SP
-- Abril de 2004 --



**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

R696ei

Rodrigues, Ricardo Luciano.

Engenharia de Interações fônon-fóton-matéria mediadas por um campo clássico / Ricardo Luciano Rodrigues. -- São Carlos : UFSCar, 2006.

70 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2004.

1. Física óptica. 2. Óptica quântica. 3. Engenharia de interações. 4. Compressão paramétrica. 5. Aproximação adiabática. 6. Hamiltonianos efetivos. I. Título.

CDD: 535.2 (20^a)

ATA DA 82ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

MESTRANDO: **RICARDO LUCIANO RODRIGUES**

DATA: 30/04/2004

HORÁRIO: 15:30 h

LOCAL: Sala de Seminários "Jorge André Swieca"

TÍTULO: *Engenharia de Interações Fônon-Fóton-Matéria Mediadas por um Campo Clássico*

BANCA EXAMINADORA:

<i>Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa (orientador)</i>	- Presidente	- DF/UFSCar
<i>Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida</i>	- Membro	- UCG/GO
<i>Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano</i>	- Membro	- IFSC/USP

Reuniu-se a Banca Examinadora acima descrita, nas formas e termos do artigo 25 do Regimento Interno do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos, para *Exame de Defesa de Dissertação de Mestrado* sob o título "*Engenharia de Interações Fônon-Fóton-Matéria Mediadas por um Campo Clássico*", do candidato **Ricardo Luciano Rodrigues**. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca Examinadora – *Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa*. Após a explanação do candidato, o presidente passou a palavra aos componentes da Banca Examinadora. Terminada a arguição, a Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta para atribuição dos conceitos, os quais transcreveram:

<i>Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa</i>	conceito =	<u>A</u>
<i>Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida</i>	conceito =	<u>A</u>
<i>Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano</i>	conceito =	<u>A</u>

De acordo com o parágrafo 1º do artigo 26 do Regimento Interno do PPG-FIS, o candidato foi considerado aprovado, com o conceito: A.

Encerrada a sessão secreta, o presidente informou o resultado. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão, e para constar, eu, Benedito Wilson de Oliveira, lavrei a presente ata, que assino com os membros da Banca Examinadora.

Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa
Presidente

Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida
Membro

Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano
Membro

Sr. Benedito Wilson de Oliveira
Secretário do PPG-FIS

The image shows four horizontal lines representing signature lines. The first line has a signature that appears to be 'Miled Hassan Youssef Moussa'. The second line has a signature that appears to be 'Norton Gomes de Almeida'. The third line has a signature that appears to be 'Reginaldo de Jesus Napolitano'. The fourth line has a signature that appears to be 'Benedito Wilson de Oliveira'. There is a vertical line on the right side of the page, possibly a page marker.

“A verdade é um diamante de alto preço, mas que não pode ser atirada com grosseria na face da vítima, porque fere. E mesmo sendo de extraordinário valor, este gesto tira-lhe a qualidade, face ao grotesco do inusitado.”
(Seminário: O Perdão e o Autoperdão – **Divaldo P. Franco**)

AGRADECIMENTOS

É difícil falar de agradecimentos quando temos tanto a agradecer aqueles que fizeram parte em nosso crescimento pessoal, espiritual e profissional. Para começar, um agradecimento especial a meu orientador Prof. Dr. Miled Youssef Hassan Moussa, que soube ser paciente e que sempre foi muito mais que um orientador, sendo sempre acessível e amigo em todas as oportunidades.

Aos Professores do Departamento de Física, que desde a graduação muito tem-me ensinado. Em particular aos professores: Prof. Dr. José Pedro Rino, pelos conselhos oportunos numa fatídica greve em 1998; Pr. Dr. Gilmar Eugenio Marques, sempre acessível e meu orientador de iniciação científica no programa PET da Capes e Prof. Dr. Nelson Studart Filho, coordenador do PET-Física, guardarei ótimas lembranças de nossos “papos” extra-classe.

Aos colegas de graduação, que labutaram comigo nas durezas do curso, os amigos sempre presentes e aqueles que o tempo separou. Anjinho, José Raphael, Cassius, Yoshi, Paulo Nerd, Sandrão Macarrão, Tércio, Mariana, Tatiana, Sybele, Letícia, Talita, Quica, Patrícia, Daniela.

Aos excelentes co-orientadores que tive no decorrer do mestrado, principalmente a Celso Villas-Bôas, que muito me inspirou e influenciou.

Aos meus pais por todo o incentivo que sempre me deram e a meu irmão.

E a Deus por ter nos dado a vida e a capacidade de compreendê-lo pelo estudo da realidade.

E por fim, à Capes por todo o suporte financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação abordamos o problema de um íon de três níveis armadilhado e inserido em uma cavidade com alto fator de qualidade. Desejamos estudar o processo de interação fônon-fóton-matéria, mediado por um campo clássico. Em particular, estaremos interessados na engenharia do processo de troca de duas excitações, fônon e/ou fóton, que resultam na compressão do modo da cavidade e/ou do modo de vibração do íon. Empregaremos a técnica de aproximação adiabática para a obtenção de Hamiltonianos efetivos simplificados.

ABSTRACT

In this work we consider the problem of a three-level trapped ion inside a high- Q cavity. We study the process of phonon-photon-matter interaction mediated by a classical field. We are particularly interested in the engineering process of two excitation changes, phonons and/or photons, which result in squeezing of the cavity mode and/or the vibrational field. The adiabatic approximation is employed to obtain simplified effective Hamiltonians.

SUMÁRIO

1	Introdução.....	1
2	Interação Radiação-Matéria.....	6
2.1	Introdução.....	6
2.2	Quantização da Interação Radiação-Matéria.....	6
2.3	Diferentes Interações.....	11
2.4	Parâmetro de Lamb-Dicke.....	13
3	Processo de Compressão Paramétrica.....	15
3.1	Introdução.....	15
3.2	Quadraturas do Campo Elétrico.....	15
3.3	Estado Coerente e Estado Comprimido.....	16
3.4	Variâncias e Incerteza no Processo de Compressão.....	19
3.5	Taxa de Compressão.....	22
4	Engenharia de Interações.....	23
4.1	Introdução.....	23
4.2	Modelando a Interação Fônon-Fóton-Matéria.....	24
4.3	Transformações e Rotações.....	28
4.4	Aproximação Adiabática.....	32
4.5	Hamiltonianos Efetivos e Regime de Parâmetros.....	39
4.6	Análise e Discussão dos Resultados.....	43
5	Conclusão.....	45
A	Quantização do Campo Eletromagnético.....	47
B	Quantização do Campo Eletrônico.....	54
C	Invariância da Equação de Liouville-Von Neumann.....	58
D	Integração Formal e Condições de Aplicação da Aproximação Adiabática.....	60
E	Aproximação Adiabática na Base e-g.....	64

LISTA DE FIGURAS

3.1 Representação pictórica da incerteza no espaço de fase associada a um (a) estado coerente e a um (b) estado comprimido.....	17
4.1 Representação esquemática para um Íon de três níveis armadilhado dentro de uma cavidade (com a armadilha dentro da cavidade) e amplificado por um campo clássico.....	24
4.2 Esquema de Energias e acoplamentos para os níveis internos do íon com o laser e com o modo da cavidade.....	25

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A teoria quântica teve seu início em 1900, quando Planck [1] propôs que se poderia descrever a distribuição espectral da energia eletromagnética irradiada por uma fonte térmica, postulando que a energia de um oscilador harmônico é discretizada (quantizada). Em 1905, Einstein [2] mostrou que o efeito fotoelétrico poderia ser explicado a partir da hipótese de corpuscularidade da radiação eletromagnética. O quantum da radiação foi denominado de fóton muito tempo depois, em 1926, pelo químico Lewis [3], em um artigo no qual propunha uma lei de conservação de fótons.

A outra corrente principal nas fundações da teoria quântica estava centrada na explicação das linhas do espectro atômico. A interação da radiação eletromagnética com o átomo foi discutida inicialmente por Einstein [4] em 1917, que introduziu os coeficientes de emissão espontânea e estimulada (teoria semi-clássica – átomo + campo + Eqs. de Maxwell).

Uma grande excitação decorreu da sugestão feita por Schawlow e Townes e por Prokhorov em 1958 [5] que um maser poderia ser operado em frequências ópticas. Dentro de uma década de operação bem sucedida do primeiro maser óptico, ou laser, áreas da física completamente novas se abriram e uma onda de desenvolvimento tecnológico associado surgiu. A física do laser englobou campos como estatística de fótons, micro-contagem, medida e absorção de dois fótons.

A partir do desenvolvimento do laser e sua teoria, uma nova área surgiu: a Óptica Quântica. Inicialmente, quantizou-se o campo eletromagnético luminoso e procurou-se por alguns critérios e efeitos que tornassem a Óptica Quântica

necessária como uma teoria para a explicação dos fenômenos luminosos, tanto dos campos estacionários isolados, quanto de sua interação com a matéria. Alguns efeitos como o anti-agrupamento de fotocontagens, mostraram-se explicáveis somente se o campo de radiação estivesse quantizado. Daí por diante, outros efeitos, como a estatística sub-Poissoniana, compressão de quadraturas, colapsos e ressurgimentos da inversão de população atômica foram observados experimentalmente. Conceitos novos como a distribuição de quase-probabilidade e novas interpretações com respeito ao espaço de fase de um sistema foram abordados e puderam ser implementados na área de Óptica quântica.

Muitas das indeterminações que estão associadas às medidas na área de Óptica Quântica, são devidas à influência do meio, tal como componentes ópticos na fonte de luz que vibram de uma forma não controlada e levam a uma mudança aleatória na frequência e na amplitude do campo de radiação. Esses ruídos podem ser eliminados com “designs” especiais das fontes de luz, sobrando apenas tipos de ruídos ópticos mais fundamentais. Tais ruídos resultam da indeterminação quântica intrínseca ao processo de geração de luz e a seu acoplamento com a matéria e tem sido objeto de estudo recente [6].

Concentrando-nos na amplitude do campo, o estado que apresenta ruído mais baixo é o vácuo eletromagnético. Tal flutuação independe da frequência e da excitação do modo do campo. Recentemente, trabalhos sobre estados coerentes comprimidos [7,8,9] mostraram que é possível diminuir o ruído óptico quântico abaixo do ruído de vácuo, para certos valores de ângulos de fase ou quadraturas, com um respectivo aumento do ruído na quantidade conjugada. Isto é devido a incerteza de Heisenberg [10], na qual dois observáveis canonicamente conjugados tem o produto de suas incertezas sempre maior ou igual à constante $\hbar/2$.

Como possíveis geradores de estados comprimidos, os processos de amplificação paramétrica passaram a ser considerados um dos temas centrais em

Óptica Quântica, tanto no que concerne à fundamentação da Teoria Quântica, quanto ao incrível apelo tecnológico associado. Como produto direto dos processos de amplificação paramétrica, os estados comprimidos tem sido profundamente estudados como forma de aumentar nossa compreensão acerca das propriedades quânticas da radiação [11] e a natureza de sua interação com a matéria [12,13,14,15].

A melhora na razão sinal ruído que pode ser obtida via compressão do campo de radiação, deve representar uma motivação para a imediata implementação tecnológica. Salta às vistas o fato de, se uma das quadraturas do campo de radiação for comprimida, mais informação do que numa quadratura não comprimida poderá ser armazenada, motivando a busca tecnológica pelo controle do processo de transmissão de informação comprimida. Quando sistemas capazes de transmitir informação comprimida numa das quadraturas do campo forem implementados, deverá ocorrer uma revolução na tecnologia atual em telecomunicações [16,17]. É ainda mais fascinante a possibilidade futura de detectarmos ondas gravitacionais com “ponteiros” medidores constituídos de campo comprimido, que serão ultra sensíveis às menores perturbações espaciais [18,19].

Na literatura, é bem discutido que a interação radiação-matéria, descrita pelo modelo de Jaynes-Cummings [20], pode atuar comprimindo o estado de um campo inicial na cavidade $|\psi\rangle$, como discutido nas Refs. [21, 22 e 23]. Porém, o Modelo de Jaynes-Cummings não permite um completo controle do processo de compressão, pois, para um dado estado inicial do campo de radiação $|\psi\rangle$, não podemos descrever a compressão como a aplicação do operador de compressão sobre o estado inicial $S(\gamma)|\psi\rangle$.

Comummente a compressão do campo de radiação é obtida em processos paramétricos em meios não lineares [24,25,26] sendo escassa na literatura a

obtenção do processo de compressão em sistemas envolvendo cavidades. Celso Villas-Bôas *et al.* [27], propuseram recentemente um dos primeiros modelos para a obtenção de compressão do campo de radiação num sistema envolvendo um átomo de três níveis interagente com um modo da cavidade, amplificado por um laser.

Neste trabalho estaremos considerando um íon de três níveis armadilhado, inserido numa cavidade com alto fator de qualidade e constantemente amplificado por um laser. Não nos importaremos com as especificações da armadilha iônica empregadas. Aplicaremos a técnica da aproximação adiabática, para fazermos engenharia de interações, obtendo diferentes Hamiltonianos, selecionados por ajuste conveniente dos parâmetros do sistema. Dentre os Hamiltonianos efetivos possíveis, dedicaremos especial atenção àqueles que envolvam processos de dois fótons, pois resultam em compressão paramétrica do modo da cavidade. Mostraremos como obter o operador de compressão de uma das quadraturas do campo de radiação, como consequência do operador de evolução temporal.

Este trabalho está dividido da seguinte forma. No Capítulo 2, desenvolvemos o modelo de interação radiação-matéria para um íon interagindo com o campo de radiação, tanto do laser, quanto da cavidade. No Capítulo 3 são apresentados conceitos básicos sobre processos de compressão paramétrica e taxa de compressão. Engenharia de interações via aproximação adiabática, algumas considerações sobre o método de aproximação usado e discussão dos resultados, são apresentados no Capítulo 4. Uma breve conclusão com algumas perspectivas futuras será apresentada no Capítulo 5. Apresentamos também cinco apêndices que discutem: a quantização da radiação (Apêndice A); a quantização do campo eletrônico (Apêndice B); a invariância da Eq. de Liouville-Von Neumann (Apêndice C); a integração formal na aproximação adiabática (Apêndice D) e a aproximação adiabática numa base diferente da proposta neste trabalho (Apêndice E).

Durante todo o desenvolvimento deste trabalho estaremos utilizando a constante de Planck como a unidade ($\hbar = 1$).

CAPÍTULO 2

INTERAÇÃO RADIAÇÃO-MATÉRIA

2.1. INTRODUÇÃO

Um sistema de dois níveis interagindo com o campo de radiação, gera um modelo quântico simplificado e importante para a interação da radiação com a matéria. O modelo torna-se muito simples se o campo é monocromático [20,28]

Tal modelo tem sido vastamente utilizado em várias áreas da Física moderna, como no estudo da ressonância magnética nuclear, onde se trabalha com o modelo de interação de um dipolo magnético e o campo magnético de rádio frequência. O modelo também constrói a base da Física de laser em Óptica Quântica, em que um dipolo elétrico, tanto um átomo de Hydberg [29] quanto um íon armadilhado, interage com um único modo do campo de radiação. Com uma interação ressonante, a maior parte das transições atômicas fica longe da ressonância com os modos do campo e podem ser desprezadas.

Necessitamos a dedução de dois tipos diferentes de Hamiltonianos de Interação radiação-matéria, chamados Hamiltonianos tipo Jaynes-Cummings, pois na seqüência deste trabalho estaremos considerando as interações: íon armadilhado interagindo com o campo de um laser, íon armadilhado interagindo com o campo de radiação de uma cavidade.

2.2. QUANTIZAÇÃO DA INTERAÇÃO RADIAÇÃO-MATÉRIA

O Hamiltoniano clássico que descreve a interação entre o campo eletromagnético e um elétron, desprezando-se o spin deste elétron [30,31,32], é dado por

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{x}) + H_{campo}, \quad (2.1)$$

sendo m a massa, e e \mathbf{p} a carga e o momento do elétron, respectivamente, $V(\mathbf{x})$ o potencial de Coulomb e H_{campo} o Hamiltoniano do campo de radiação livre.

Quanticamente podemos escrever o Hamiltoniano Total de interação radiação-matéria como

$$H = H_{el} + H_{int} + H_{campo}, \quad (2.2)$$

Da quantização dos campos de radiação e eletrônico, sabemos que (ver Apêndices A e B)

$$H_{campo} = \sum_l \omega_l (\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + 1/2) \quad (2.3)$$

$$H_{el} = \sum_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j E_j, \quad (2.4)$$

sendo que, as Eqs. (2.3) e (2.4) descrevem os Hamiltonianos quânticos do campo de radiação H_{campo} e do campo eletrônico H_{el}

O Hamiltoniano H_{int} , refere-se ao termo de interação que pode ser obtido abrindo-se o quadrado perfeito no parêntese em (2.1). Identificando-se o termo $\mathbf{p}^2/2m$ com o Hamiltoniano do campo eletrônico livre, restam-nos os outros dois termos do Hamiltoniano de interação radiação-matéria que devem ser quantizados, dados por

$$\frac{-e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}, \quad (2.5)$$

$$\frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2. \quad (2.6)$$

É fácil demonstrar que o termo (2.6) é muito pequeno comparado com o termo (2.5), sendo desprezível sua contribuição.

Vamos utilizar o mesmo formalismo de segunda quantização apresentado no Apêndice B, para obtermos o Hamiltoniano de interação radiação matéria.

Expandindo os operadores do campo eletrônico de forma que o operador de campo $\Psi(\mathbf{x})$ possa ser entendido como uma superposição de modos normais, e $\phi_j(\mathbf{x})$ como autofunções do Hamiltoniano H_{el} com autovalor E_j , podemos escrever

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_j \hat{b}_j \phi_j(\mathbf{x}), \quad (2.7)$$

e da mesma forma escrever o Hamiltoniano de interação como

$$H_{int} = \int \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \left[\frac{-e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \right] \Psi(\mathbf{x}) d^3x. \quad (2.8)$$

Substituindo o potencial vetor quantizado, obtido no Apêndice A,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \sqrt{\frac{1}{2\epsilon_0 \omega_k}} (\hat{a}_k(t) \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) + h.c.), \quad (2.9)$$

no Hamiltoniano de interação em segunda quantização (2.8), temos

$$\begin{aligned} H_{int} &= \frac{-e}{m} \sum_{jlk} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l \sqrt{\frac{1}{2\epsilon_0 \omega_k}} \int \phi_j^*(\mathbf{x}) \left\{ \left[\hat{a}_k(t) \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) + \hat{a}_k^\dagger(t) \mathbf{u}_k^*(\mathbf{x}) \right] \cdot \mathbf{p} \right\} \phi_l(\mathbf{x}) d^3x, \\ &= \sum_{jlk} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l \left(\frac{-e}{m} \right) \sqrt{\frac{1}{2\epsilon_0 \omega_k}} \left\{ \hat{a}_k(t) \int \phi_j^*(\mathbf{x}) \left[\mathbf{u}_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p} \right] \phi_l(\mathbf{x}) d^3x + h.c. \right\}, \end{aligned}$$

que pode se rescrito na forma

$$H_{int} = \sum_{jlk} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l \left\{ \hat{a}_k(t) g_{jlk} + \hat{a}_k^\dagger(t) g_{ljk}^* \right\}, \quad (2.10)$$

onde foi definido o fator de acoplamento átomo-campo g_{jlk} como sendo

$$g_{jlk} = \left(\frac{-e}{m} \right) \sqrt{\frac{1}{2\epsilon_0 \omega_k}} \int \phi_j^*(\mathbf{x}) \left[\mathbf{u}_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p} \right] \phi_l(\mathbf{x}) d^3x. \quad (2.11)$$

Assumindo que a forma espacial da função vetorial $\mathbf{u}_k(\mathbf{x})$, seja dada para ondas planas

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}) = 1/\sqrt{L^3} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \varphi)}, \quad (2.12)$$

e que para um íon aprisionado, apenas uma pequena variação em torno da posição \mathbf{x}_0 (tomado como o centro da armadilha) seja permitida, podemos perceber que a função $\mathbf{u}_k(\mathbf{x})$ variará muito pouco em comparação com as funções eletrônicas, podendo ser tirada de dentro da integral. Desta forma podemos aproximar g_{jlk} , por

$$g_{jlk} = -e \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_0\omega_k}} \mathbf{u}_k(\mathbf{x}_0) \cdot \int \phi_j^*(\mathbf{x}) \left(\frac{\mathbf{p}}{m} \right) \phi_l(\mathbf{x}) d^3x. \quad (2.13)$$

A partir do Hamiltoniano livre do elétron,

$$\hat{H}_{el\acute{e}tron} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}),$$

pode-se demonstrar com facilidade que,

$$-i \frac{\mathbf{p}}{m} = [H_{el\acute{e}tron}, \mathbf{x}] = H_{el\acute{e}tron} \mathbf{x} - \mathbf{x} H_{el\acute{e}tron}. \quad (2.14)$$

Substituindo a Eq. (2.14) na Eq. (2.13), temos

$$g_{jlk} = -i \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_0\omega_k}} v_{jk} \mathbf{u}_k(\mathbf{x}_0) \int \phi_j^*(\mathbf{x}) (e\mathbf{x}) \phi_l(\mathbf{x}) d^3x, \quad (2.15)$$

com $v_{jl} = (E_j - E_l)$.

Descrevendo o Hamiltoniano (2.10) na representação de interação, que é definida a partir da transformação unitária $U = e^{-i(\hat{H}_{campo} + \hat{H}_{el})t}$, levando ao Hamiltoniano $H_{int}^I = U^\dagger H_{int} U - \hat{H}_{campo} - \hat{H}_{el}$, podemos obter o Hamiltoniano de interação nesta representação, após alguma álgebra, como

$$\hat{H}_{int}^I = \sum_{jlk} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l \left\{ g_{jlk} \hat{a}_k e^{-i(\omega_k - \nu_{jl})t} + g_{ljk}^* \hat{a}_k^\dagger e^{i(\omega_k + \nu_{jl})t} \right\}. \quad (2.16)$$

Considerando agora, que temos um elétron, que pode ocupar somente dois níveis, ou seja, $l = j = (1, 2)$, reescrevemos a Eq. (2.16) na forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int}^I = & \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 \left[g_{12k} \hat{a}_k e^{-i(\omega_k + \nu_{21})t} + g_{21k}^* \hat{a}_k^\dagger e^{i(\omega_k - \nu_{21})t} \right] \\ & + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1 \left[g_{21k} \hat{a}_k e^{-i(\omega_k - \nu_{21})t} + g_{12k}^* \hat{a}_k^\dagger e^{i(\omega_k + \nu_{21})t} \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

identificando que temos somente duas freqüências diferentes em (2.17).

Se nos restringirmos a analisar apenas um único modo $\omega = \omega_k$, de forma que, $\hat{a}_k = \hat{a}$, e assumirmos que existe uma quase ressonância entre o modo de transição atômica, representado pelo operador \hat{b}_l ($l = 1, 2$) e o modo de vibração da radiação, representado pelo operador \hat{a} , ou seja $\nu_{21} \cong \omega$, então notamos claramente que uma das duas freqüências envolvidas na expressão (2.17) será praticamente nula, enquanto a outra será grande, em outras palavras,

$$\omega - \nu_{21} \cong 0 \quad e \quad \omega + \nu_{21} \cong 2\omega.$$

Substituindo esses valores na Eq. (2.17), encontramos,

$$H_{\text{int}}^I = \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 \left(g_{12} \hat{a} e^{-2i\omega t} + g_{21}^* \hat{a}^\dagger \right) + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1 \left(g_{21} \hat{a} + g_{12}^* \hat{a}^\dagger e^{+2i\omega t} \right), \quad (2.18)$$

e sabendo-se que $g_{21} = g_{12}^*$, para $g_{21} = g$, podemos simplificá-la para

$$\hat{H}_{\text{int}}^I = g^* \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 \left(\hat{a} e^{-2i\omega t} + \hat{a}^\dagger \right) + g \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1 \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger e^{+2i\omega t} \right). \quad (2.19)$$

Calculando-se a média temporal sobre cada um dos termos que envolvem exponenciais no Hamiltoniano (2.19), encontramos

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{-2i\omega t} dt = \frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega T} e^{-i\omega T}, \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{2i\omega t} dt = \frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega T} e^{i\omega T}, \quad (2.21)$$

onde notamos que ambas tornar-se-ão muito pequenas e poderão ser desprezadas se o intervalo de tempo T , sobre o qual calculamos a média temporal, for muito grande em comparação com o tempo dado pela freqüência natural do modo da cavidade ω . É importante notar que o intervalo de tempo T , será proporcional ao inverso da freqüência de acoplamento de Rabi $T \approx 1/g$, o que implica que essa escala será muito maior do que a escala de tempo do campo na cavidade.

Desta forma, justificamos que se desprezem os termos que oscilem muito rapidamente, em comparação com aqueles que pouco oscilam. Os termos de

oscilação rápida terão contribuição média pequena, para a dinâmica do sistema como um todo. Esta aproximação é chamada de aproximação de onda girante.

Com estas considerações, vamos reescrever o Hamiltoniano de interação átomo-campo dado por (2.19), na forma

$$\hat{H}_{\text{int}}^I = g \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1 \hat{a} + g^* \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 \hat{a}^\dagger, \quad (2.22)$$

com o fator de acoplamento átomo-campo, que é a frequência de Rabi para o modo k , é dado por

$$g = -i \sqrt{\frac{1}{2\epsilon_0 \omega}} v_{21} \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) \mathbf{d}_{12}, \quad (2.23)$$

e o momento de dipolo para a transição $1 \rightarrow 2$ é

$$\mathbf{d}_{12} = \int \phi_j^*(\mathbf{x})(e\mathbf{x})\phi_l(\mathbf{x}) d^3x. \quad (2.24)$$

Tratando os operadores fermiônicos \hat{b}_1 e \hat{b}_2 pela álgebra de pseudo-spin, apresentada no Apêndice B, reescrevemos a Eq. (2.22) na forma sintética.

$$\hat{H}_{\text{int}}^I = g \hat{a} \hat{\sigma}_+ + g^* \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-. \quad (2.25)$$

2.3. DIFERENTES INTERAÇÕES

Na seção anterior, obtivemos o modelo de interação radiação-matéria, mas não fizemos considerações sobre qual a forma do acoplamento de Rabi [33]. Para começar, vamos identificar a Eq. (2.24) o dipolo elétrico para a transição permitida, como

$$\mathbf{d}_{12} = \int \phi_j^*(\mathbf{x})(e\mathbf{x})\phi_l(\mathbf{x}) d^3x,$$

em seguida lembremos que a função dos modos do campo de radiação é dada por

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}_0) = 1/\sqrt{L^3} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0 + \varphi)},$$

assim como o acoplamento de Rabi por

$$g = -i \sqrt{\frac{1}{2\epsilon_0 \omega}} v_{21} \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) \mathbf{d}_{12},$$

que depende tanto do momento de dipolo, quanto da forma da expansão espacial dos modos do campo.

Se estivermos interessados no acoplamento de um íon com o campo de radiação de uma cavidade, poderemos aproximar a dependência exponencial da função $\mathbf{u}_k(\mathbf{x}_0)$ por seno ou cosseno, já que o campo de radiação será estacionário, dependendo da posição em que o centro da armadilha esteja colocado, se no nodo ou anti-nodo do campo de radiação dentro da cavidade.

$$\left\{ \begin{array}{l} g = g' \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0) \rightarrow \text{nodo,} \\ \text{ou} \\ g = g' \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0) \rightarrow \text{anti-nodo.} \end{array} \right. \quad (2.26)$$

E fácil entender se devemos escolher seno ou cosseno. Primeiro lembremos que o campo da cavidade se anula nas bordas. Agora imagine que o centro da armadilha seja colocada no centro da cavidade e neste ponto o campo da cavidade seja nulo, neste caso o íon sente um campo tipo seno, pois a função que descreve o campo deve ser ímpar, portanto seno. Caso o centro da armadilha esteja na origem e o campo da cavidade esteja no seu valor mais intenso, o anti-nodo, então o íon sofre a ação de um campo que pode melhor ser representado por cosseno, pois a função que descreve o campo tem de ser par, portanto, cosseno. Podemos também não colocar o centro da armadilha no centro da cavidade, mas apenas nos nodos ou anti-nodos, mas as funções que descreveriam o campo ainda seriam melhor representadas por seno e cosseno, respectivamente.

A posição que aparece na função deve sofrer um tratamento quântico, sendo preciso tratá-lo como operador do modo de vibração.

Com estas considerações, podemos reescrever o Hamiltoniano de interação, na representação de Schrödinger, para uma interação de apenas um modo da

cavidade com uma transição eletrônica, sem a aproximação de ondas girantes na forma

$$\hat{H}_{\text{int}}^S = \left[g' (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{\sigma}_+ + g'' (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{\sigma}_- \right] L(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0), \quad (2.27)$$

onde definimos

$$L(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0) = \begin{cases} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0) \rightarrow \text{nodo}, \\ \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0) \rightarrow \text{anti-nodo}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Agora, se estivermos interessados no acoplamento do íon com um laser, temos de tratar quanticamente toda a parte espacial da expansão do campo, portanto redefiniremos o novo parâmetro de acoplamento de dipolo como

$$g = g' e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 + \varphi)}, \quad (2.29)$$

porém as amplitudes da expansão do campo para o laser deverão ser tratadas de forma clássica, pois a amplitude do laser não pode ser quantizada, ele é um campo clássico, assim devemos substituir

$$\begin{aligned} \hat{a}(t) &= \Omega e^{-i\omega t}, \\ \hat{a}^\dagger(t) &= \Omega^* e^{+i\omega t}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Com estas considerações, podemos reescrever o Hamiltoniano de interação, na representação de Schrödinger, para uma interação de apenas uma transição eletrônica com um laser monomodal de frequência ressonante com esta transição, sem a aproximação de ondas girantes por

$$H_{\text{int}}^S = \Omega e^{-i\omega t} \sigma_+ e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 + \varphi)} + \Omega^* e^{i\omega_c t} \sigma_- e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 + \varphi)}. \quad (2.31)$$

2.4. PARÂMETRO DE LAMB-DICKE

O Parâmetro de Lamb-Dicke pode ser determinado a partir da expressão $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0$, veja por exemplo a Ref. [34], onde tomamos $\mathbf{x}_o = \Delta x_o (c^\dagger + c) \hat{x}$ e $\mathbf{k} = 2\pi/\lambda \hat{k}$.

Desta forma, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 &= \frac{2\pi\Delta x_0}{\lambda} (c^\dagger + c) (\hat{k} \cdot \hat{x}) \\ &= \eta (c^\dagger + c),\end{aligned}$$

com o parâmetro de Lamb-Dicke sendo dado por

$$\eta = \frac{2\pi\Delta x_0}{\lambda} (\hat{k} \cdot \hat{x}). \quad (2.32)$$

Note, a direção \hat{k} nos dá a direção do campo de radiação, enquanto a direção \hat{x} nos dá a direção de confinamento do íon na armadilha. Podemos entender Δx_0 como a oscilação média do íon, enquanto λ é o comprimento de onda do campo de radiação.

Podemos controlar o valor do parâmetro de Lamb-Dicke variando a frequência do campo de radiação ou variando o ângulo relativo entre a direção do campo e a direção de confinamento do íon, o que nos garante um controle suficiente deste parâmetro.

CAPÍTULO 3

PROCESSO DE COMPRESSÃO PARAMÉTRICA

3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos as idéias principais acerca dos processos de compressão paramétrica de quadraturas, para servir de suporte para a interpretação dos resultados que serão obtidos no Capítulo 4.

3.2. QUADRATURAS DO CAMPO ELÉTRICO

Uma outra forma de escrevermos o campo elétrico quantizado para um único modo, é

$$\mathbf{E} = i \sqrt{\frac{\omega}{2\epsilon_0 c}} \hat{e} \left[a e^{-i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} - a^\dagger e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} \right], \quad (3.1)$$

onde, ω e \vec{k} são a freqüência e o vetor de onda de um único modo do campo, a e a^\dagger os operadores de destruição e criação deste único modo (em analogia com o oscilador harmônico vale a relação de comutação $[a, a^\dagger] = 1$), ϵ_0 a constante de permissibilidade elétrica, c a velocidade da luz e \hat{e} a direção do campo. Se definirmos as quadraturas do campo elétrico como sendo

$$X = \frac{a + a^\dagger}{2} \quad e \quad Y = \frac{a - a^\dagger}{2i}, \quad (3.2)$$

que respeitam a relação de comutação $[X, Y] = i/2$, podemos reescrever o campo elétrico (3.1), com auxílio de (3.2), na forma

$$\mathbf{E} = 2 \sqrt{\frac{\omega}{2\epsilon_0 c}} \hat{e} \left[X \operatorname{sen}(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r}) - Y \operatorname{cos}(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r}) \right]. \quad (3.3)$$

As quadraturas (3.2) são de suma importância, pois nos dão o comportamento do campo elétrico e pode-se entendê-las como se fossem a posição e o momento do campo, em franca analogia com o oscilador harmônico.

3.3. ESTADO COERENTE E ESTADO COMPRIMIDO

No desenvolvimento desta seção, utilizaremos um estado muito especial para tomarmos valores médios e calcularmos variâncias, chamado de estado coerente ou quase clássico, pois apresenta a incerteza mínima. Dentre os estados quânticos, o mais clássico é o estado coerente, que será designado por $|\alpha\rangle$. Este estado é obtido por meio da aplicação do operador deslocamento, $D(\alpha) = \exp\{\alpha a^\dagger - \alpha^* a\}$, sobre o vácuo, em outras palavras, $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$.

Pode-se demonstrar facilmente que o estado coerente satisfaz as operações,

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= \alpha|\alpha\rangle, \\ \langle\alpha|a^\dagger &= \alpha^*\langle\alpha|, \\ \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle &= |\alpha|^2, \end{aligned} \tag{3.4}$$

e pode-se notar que o estado coerente é auto-estado do operador de destruição de fótons. E principalmente, o valor médio do operador de número $a^\dagger a$, tomado neste estado, fornece-nos o número médio de excitação do estado coerente $|\alpha|^2$.

Invertendo as eqs. (3.2), obtemos a relação entre o operador de destruição e os operadores de quadratura,

$$a = X + iY. \tag{3.5}$$

Utilizando as relações (3.4) e a Eq. (3.5), podemos escrever o valor médio do operador destruição de um modo do campo como,

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \langle\alpha|X|\alpha\rangle + i\langle\alpha|Y|\alpha\rangle, \\ &= \alpha_R + i\alpha_I = \alpha, \end{aligned} \tag{3.6}$$

ou seja, α (o estado coerente) pode ser interpretado como um vetor no plano complexo, possuindo como coordenada real o valor médio da quadratura X e como coordenada imaginária o valor médio da quadratura Y , ambos os valores médios são tomados com relação ao estado coerente.

Pode-se demonstrar com facilidade que as variâncias para as quadraturas do campo elétrico, obtidas a partir do estado coerente, são numericamente iguais à mínima incerteza possível, $\langle(\Delta X)^2\rangle = \langle(\Delta Y)^2\rangle = 1/4$, levando-nos a associar ao estado coerente a idéia de estado mais clássico possível.

Pictoricamente, podemos visualizar o estado coerente como o vetor $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$ no plano complexo, com um círculo de incerteza de diâmetro $d = 1/2$ centrado no ponto do plano complexo (α_R, α_I) [32]. Ou seja, temos o comprimento do vetor complexo bem definido e identificamos $|\alpha|^2$ como o número médio de fótons do estado coerente, figura (3.1-a).

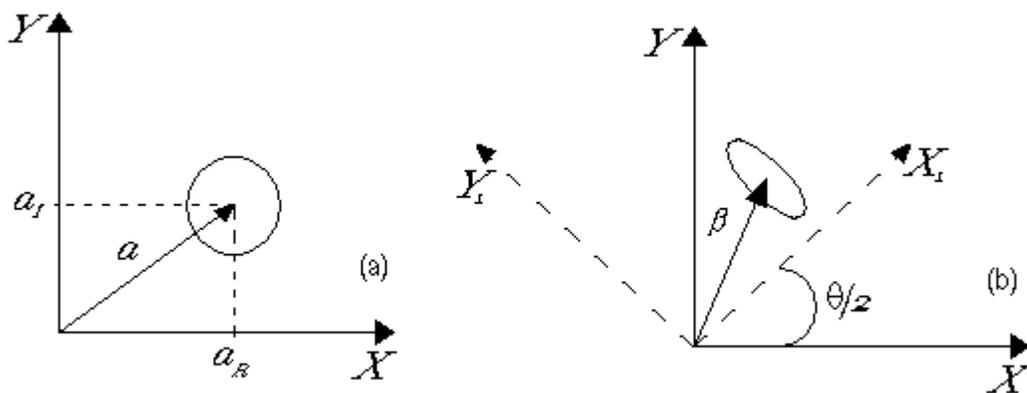


Figura 3:1 Representação pictórica da incerteza no espaço de fase associada a um (a) estado coerente e a um (b) estado comprimido.

Vamos agora definir um estado comprimido $|\beta\rangle$, como aquele que possui a variância diminuída em uma quadratura e aumentada na outra, sem violar a relação de incerteza de Heizenberg. O operador de compressão é dado por:

$$S(\gamma) = e^{\frac{1}{2}(\gamma^* a^2 - \gamma a^{\dagger 2})}, \quad (3.7)$$

onde podemos escrever $\gamma = re^{i\theta}$. Os operadores de destruição e criação de um modo comprimido, satisfazem as relações

$$A = S^\dagger(\gamma) a S(\gamma) = \mu a - \nu a^\dagger, \quad (3.8)$$

$$A^\dagger = S^\dagger(\gamma) a^\dagger S(\gamma) = \mu a^\dagger - \nu^* a, \quad (3.9)$$

sendo $\nu = \sinh(r)e^{i\theta}$ e $\mu = \cosh(r)$, dois números complexos que, como veremos mais adiante, representam a rotação do estado comprimido $|\beta\rangle$ em relação ao estado coerente $|\alpha\rangle$. É fácil demonstrar que a relação de comutação usual $[A, A^\dagger] = 1$ se mantém.

O estado coerente comprimido $|\beta\rangle$ é dado por um deslocamento do vácuo e por uma compressão,

$$|\beta\rangle = |\alpha, \gamma\rangle = S(\gamma)D(\alpha)|0\rangle. \quad (3.10)$$

Notamos que, obter o valor médio do operador de aniquilação a no estado coerente comprimido $|\beta\rangle$, será igual a se obter o valor médio do operador de aniquilação comprimido A na base coerente,

$$\langle a \rangle = \langle \beta | a | \beta \rangle = \langle \alpha | A | \alpha \rangle = \mu\alpha - \nu\alpha^* = \beta, \quad (3.11)$$

o que nos leva a interpretar que, comprimir um estado coerente é o mesmo que transformar o vetor de estado coerente $|\alpha\rangle$ em outro vetor coerente (comprimido)

$$|\beta\rangle = |\mu\alpha - \nu\alpha^*\rangle. \quad (3.12)$$

Notamos ainda que existe uma relação importante entre os operadores de compressão e de deslocamento [8], dada por: $S(\gamma)D(\alpha) = D(\beta)S(\gamma)$.

3.4. VARIÂNCIAS E INCERTEZA NO PROCESSO DE COMPRESSÃO

Vamos agora comprimir as quadraturas. Sejam \tilde{X} e \tilde{Y} as quadraturas comprimidas, obtidas por meio da atuação do operador de compressão,

$$\tilde{X} = S^\dagger(\beta) X S(\beta) = \frac{A + A^\dagger}{2}, \quad (3.13)$$

$$\tilde{Y} = S^\dagger(\beta) Y S(\beta) = \frac{A - A^\dagger}{2i}, \quad (3.14)$$

substituindo as eqs. (3.8) e (3.9) nas relações (3.13) e (3.14), podemos reescrever as quadraturas comprimidas após, alguma álgebra, como

$$\tilde{X} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-r} + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^r \right] \frac{e^{-i\theta/2}}{2} a + \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-r} - i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^r \right] \frac{e^{i\theta/2}}{2} a^\dagger, \quad (3.15)$$

$$\tilde{Y} = \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-r} - i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^r \right] \frac{e^{-i\theta/2}}{2} a + \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-r} + i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^r \right] \frac{e^{i\theta/2}}{2} a^\dagger, \quad (3.16)$$

e por conseguinte, obter as variâncias para as quadraturas comprimidas,

$$\langle (\Delta\tilde{X})^2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-2r} + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{2r} \right), \quad (3.17)$$

$$\langle (\Delta\tilde{Y})^2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-2r} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{2r} \right). \quad (3.18)$$

Note que as variâncias são independentes da amplitude do estado coerente α , mas dependem do ângulo θ , o que significa dizer que, estando na base das quadraturas do campo elétrico originais, X e Y , as novas quadraturas do campo elétrico comprimidas, \tilde{X} e \tilde{Y} , apresentar-se-ão com uma rotação que dependerá do ângulo θ . Isto fica claro olhando, tanto para a forma das quadraturas comprimidas (3.15) e (3.16), quanto para as variâncias obtidas a partir das quadraturas comprimidas (3.17) e (3.18). A existência desta dependência em θ , entre as exponenciais em r e em $-r$, que correspondem às quadraturas estendida e comprimida, respectivamente, diz-nos que não estamos descrevendo o problema na melhor base possível.

Vamos agora descobrir qual a rotação da base de quadraturas, que melhor descreve o processo de compressão. Para tanto, aplicaremos o operador de compressão nas quadraturas do campo elétrico rodadas de um ângulo ϕ arbitrário, a se determinar.

Aplicando-se o operador de rotação $R(\phi) = e^{-i\phi a^\dagger a}$, teremos os novos operadores de aniquilação e de criação do campo de radiação a e a^\dagger , descritos na forma:

$$\begin{aligned} R^\dagger(\phi) a R(\phi) &= a e^{-i\phi}, \\ R^\dagger(\phi) a^\dagger R(\phi) &= a^\dagger e^{i\phi}, \end{aligned}$$

assim, após algumas passagens, as quadraturas do campo elétrico na base $\{X_1, Y_1\}$ obtidas via rotação serão:

$$X_1 = R^\dagger(\phi) X R(\phi) = \frac{a e^{-i\phi} + a^\dagger e^{i\phi}}{2}, \quad (3.19)$$

$$Y_1 = R^\dagger(\phi) Y R(\phi) = \frac{a e^{-i\phi} - a^\dagger e^{i\phi}}{2i}. \quad (3.20)$$

Aplicando o operador de compressão (3.7) às quadraturas “rodadas” (3.19) e (3.20), obtemos:

$$\tilde{X}_1 = \lambda^* a + \lambda a^\dagger, \quad (3.21)$$

$$\tilde{Y}_1 = \rho^* a + \rho a^\dagger, \quad (3.22)$$

que são as quadraturas “rodadas” e comprimidas, sendo λ e ρ dados por,

$$\begin{aligned} \lambda &= \left[\frac{\cosh(r)e^{i\phi} - \sinh(r)e^{i(\theta-\phi)}}{2} \right], \\ \rho &= i \left[\frac{\cosh(r)e^{i\phi} + \sinh(r)e^{i(\theta-\phi)}}{2} \right]. \end{aligned}$$

Escolhendo-se $\theta = 2\phi$, estaremos analisando o processo de compressão na rotação adequada dos eixos das quadraturas, pois estaremos descrevendo as novas quadraturas na direção dos eixos principais da elipse representativa do

estado coerente comprimido, Figura (3.1-b). Com esta escolha particular de ϕ , obtemos

$$\lambda = \left(\frac{e^{-r}}{2} \right) e^{i\phi} \quad \text{e} \quad \rho = i \left(\frac{e^r}{2} \right) e^{-i\phi}.$$

Substituindo-se estes valores para λ e ρ nas eqs. (3.21) e (3.22), encontramos

$$\tilde{X}_1 = \left(\frac{e^{-i\phi} a + e^{i\phi} a^\dagger}{2} \right) e^{-r},$$

$$\tilde{Y}_1 = \left(\frac{e^{-i\phi} a - e^{i\phi} a^\dagger}{2i} \right) e^r,$$

e, como os parênteses são exatamente as quadraturas rodadas X_1 e Y_1 , dadas por (3.19) e (3.20), segue que

$$\tilde{X}_1 = X_1 e^{-r}, \tag{3.23}$$

$$\tilde{Y}_1 = Y_1 e^r. \tag{3.24}$$

As equações acima, apresentam-se numa forma simples e elegante para se descrever o processo de compressão das quadraturas do campo de radiação. A Eq. (3.23) corresponde à quadratura que será comprimida, enquanto a Eq. (3.24) corresponde àquela que será distendida. Só nos interessaremos pela quadratura (3.23). Este conjunto de operações sobre as quadraturas, justifica-se, pois a compressão não se dá nas direções das quadraturas originais do campo, mas numa direção que sofreu uma rotação de $\phi = \theta/2$. Por isso precisamos efetuar uma rotação sobre as quadraturas originais, descrevendo o processo todo na rotação particular que a compressão selecionou.

As variâncias para as quadraturas \tilde{X}_1 e \tilde{Y}_1 , assim como a relação de incerteza de Heisenberg para o problema completo de um estado comprimido, podem agora ser obtidas com muita facilidade como

$$\langle (\Delta \tilde{X}_1)^2 \rangle = \frac{e^{-2r}}{4}, \quad (3.25)$$

$$\langle (\Delta \tilde{Y}_1)^2 \rangle = \frac{e^{2r}}{4}, \quad (3.26)$$

$$\sqrt{\langle (\Delta \tilde{X}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \tilde{Y}_1)^2 \rangle} = \frac{1}{4}. \quad (3.27)$$

Desta forma, podemos visualizar o processo de compressão como uma rotação do estado (vetor complexo) no espaço de fase, em conjunto com uma alteração do formato pictórico da incerteza associado a ele, mas obrigatoriamente tendo que preservar a área da figura pictórica original, para não violar a relação de incerteza de Heisenberg. Para o caso de uma compressão de estados coerentes, temos que: um vetor complexo $|\alpha\rangle$, com a incerteza pictoricamente na forma circular, é rodado pelo processo de compressão para um novo vetor complexo $|\beta\rangle$, com a incerteza pictoricamente na forma elíptica, Figura (3.1-b).

3.5. TAXA DE COMPRESSÃO

Para um dado parâmetro de compressão γ , a rotação dos eixos será determinada por $\phi = \theta/2$, que é a rotação particular selecionada pelo processo e o fator de compressão será dado pela relação $r = |\gamma|$.

Assim, teremos o grau de compressão da quadratura \tilde{X}_1 , dado pela expressão prática:

$$q_1 = (1 - e^{-2r}) \times 100 \%, \quad (3.28)$$

sendo q_1 o valor da compressão em porcentagens que sofrerá a quadratura \tilde{X}_1 .

CAPÍTULO 4

ENGENHARIA DE INTERAÇÕES

4.1. Introdução

Neste capítulo, aplicaremos a técnica de aproximação adiabática para a engenharia de interações efetivas. Vamos abordar o problema de um íon de três níveis armadilhado num potencial eletromagnético, inserido numa cavidade quântica com alto fator de qualidade e excitado por um campo clássico. Nosso objetivo é reduzir o Hamiltoniano total do sistema, que apresenta considerável grau de complexidade, a um Hamiltoniano mais simples, que possa ser tratado analiticamente, ou que possa, ao menos, mostrar de maneira clara quais processos são mais importantes para a dinâmica efetiva do sistema.

Os parâmetros ajustáveis do sistema sofrerão restrições quanto aos valores que poderão assumir devido à aproximação adiabática. Chamaremos de regime de parâmetros ao conjunto de valores que os parâmetros ajustáveis terão de assumir para a distinção entre os possíveis Hamiltonianos efetivos que governarão a dinâmica do sistema de interação fônon-fóton-matéria.

Dentre os possíveis Hamiltonianos, dedicaremos especial atenção àquele que apresenta termos de troca de dois fótons, por levar impreterivelmente à compressão de uma das quadraturas do campo de radiação. Como exemplo de aplicação das técnicas apresentadas de engenharia de interações, obteremos a taxa de compressão de uma das quadraturas do campo de radiação para o Hamiltoniano efetivo que gera o operador de compressão do campo como conseqüência da evolução temporal.

4.2. Modelando a Interação Fônon-Fóton-Matéria

Existem na literatura muitos trabalhos que abordaram a interação tipo Jaynes-Cummings envolvendo cavidades, armadilhas iônicas e campos clássicos (laser) acoplados, encontramos nas Refs. [35,36,37,38,39,40,27] alguns exemplos de trabalhos que modelam a interação de modo semelhante ao nosso, destaque especial para as Ref. [35,36]. Outros trabalhos também abordaram o problema de um íon armadilhado numa cavidade, com enfoque pouco diferente [41,33,42]

No desenvolvimento deste capítulo, não faremos considerações quanto ao formato da armadilha e às estratégias usadas para aprisionar o íon. A saber, encontramos grande variedade de arquiteturas na literatura, as que aplicam campos de quadrupolo eletrostáticos e magnetostáticos são as mais comuns [43], denominadas armadilhas de Penning. Há também as que usam campos de radiofrequência, também marcadamente quadrupolares, denominadas armadilha de Paul [44,45,46] que se dividem em lineares e elípticas.

Nosso sistema de interesse pode ser esquematicamente visualizado na Figura (4.1).

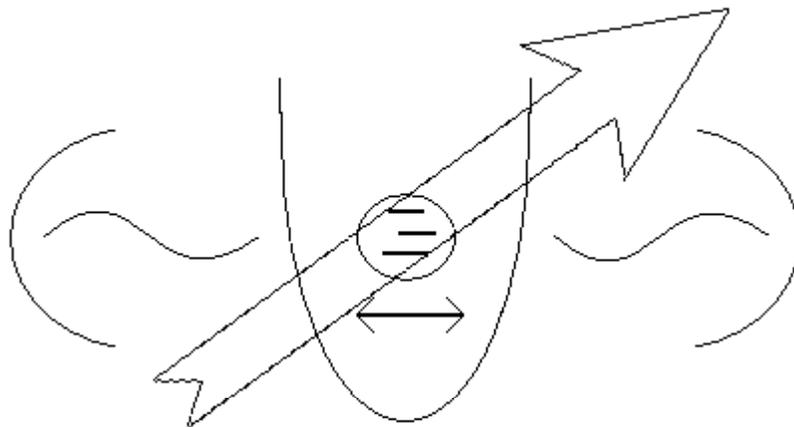


Figura 4.1 : Representação esquemática para um íon de três níveis armadilhado dentro de uma cavidade (com a armadilha dentro da cavidade) e amplificado por um campo clássico.

Consideremos o diagrama de níveis e acoplamentos, proposto para o sistema íon armadilhado inserido numa cavidade e excitado por um campo clássico.

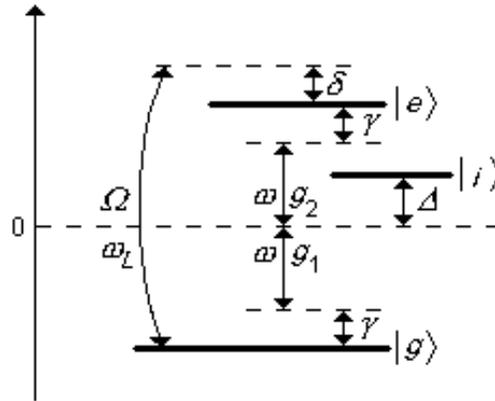


Figura 4.2: Esquema de Energias e acoplamentos para os níveis internos do íon com o laser e com o modo da cavidade

No esquema acima temos que $|e\rangle, |g\rangle$ e $|i\rangle$ são os níveis excitado, fundamental e intermediário do íon de três níveis, respectivamente. Os níveis eletrônicos interagem com um único modo de frequência do campo da cavidade ω . O sistema íon-armadilha-cavidade é constantemente amplificado por um laser de frequência ω_L . O Laser promove a transição $g \leftrightarrow e$ com constante de acoplamento Ω e dessintonia δ . A cavidade induz transições “virtuais” $g \leftrightarrow i$ com constante de acoplamento g_1 e $i \leftrightarrow e$ com constante de acoplamento g_2 .

As transições $i \leftrightarrow e$ e $g \leftrightarrow i$ acoplam-se dispersivamente com o modo da cavidade, com dessintonias $\gamma + \Delta$ e $\gamma - \Delta$, respectivamente. Porém, a transição $g \leftrightarrow e$ é quase ressonante com o dobro da frequência do modo ω , com dessintonia 2γ . No esquema de energias adotados, vemos que o estado intermediário possui dessintonia Δ com o zero de energias. Veremos mais adiante que $\Delta \gg \gamma, \delta$.

Analisando o diagrama de energias da Figura (4.1) vemos que:

$$\omega_L = 2(\omega + \gamma) + \delta, \quad (4.1)$$

$$\omega_e = \omega + \gamma, \quad (4.2)$$

$$\omega_g = -(\omega + \gamma), \quad (4.3)$$

$$\omega_i = \Delta, \quad (4.4)$$

onde os índices e , g e i referem-se às freqüências associadas à energia interna dos níveis eletrônicos.

Naturalmente podemos descrever o Hamiltoniano livre do sistema como uma soma das energias dos níveis eletrônicos, da vibração do íon armadilhado e do modo na cavidade, dado por

$$H_0^S = \nu c^\dagger c + \omega a^\dagger a + \omega_e \sigma_{ee} + \omega_g \sigma_{gg} + \omega_i \sigma_{ii}, \quad (4.5)$$

onde o índice “S” refere-se à representação de Schrödinger e ν é a freqüência normal de vibração do íon na armadilha.

Para descrever as interações envolvidas, usamos os modelos de interação radiação-matéria apresentados no capítulo 2, sendo que, teremos agora três níveis internos, ao invés de dois. Assim, os termos de interação sem a aproximação de ondas girantes, são dados por

$$V^S = (g_1 \sigma_{gi} + g_2 \sigma_{ie})(a^\dagger + a)L(\eta_c, c^\dagger, c) + H.c. \\ + \Omega e^{-i\omega_c t} \sigma_{eg} F(\eta_L, c^\dagger, c) + \Omega^* e^{i\omega_c t} \sigma_{ge} F^\dagger(\eta_L, c^\dagger, c), \quad (4.6)$$

onde $a^\dagger(a)$ e $c^\dagger(c)$ são os operadores de criação (destruição) de fótons na cavidade e de fônons na armadilha; σ_{jk} ($j, k = e, g, i$) são os operadores de transição eletrônica.

A primeira linha da Eq. (4.6) descreve a interação entre o campo de radiação da cavidade com o íon. A segunda linha da Eq. (4.6) descreve somente a interação do íon com o laser. Os operadores $L(\eta_c, c^\dagger, c)$ e $F(\eta_L, c^\dagger, c)$ aparecem das

interações entre o íon armadilhado com o modo da cavidade e com o laser, respectivamente e são definidos como (ver Capítulo 2)

$$L(\eta_c, c^\dagger, c) = \begin{cases} \sin[\eta_c(c^\dagger + c)] \\ \cos[\eta_c(c^\dagger + c)] \end{cases}, \quad (4.7)$$

$$F(\eta_L, c^\dagger, c) = e^{i\eta_L(c^\dagger + c)} e^{-i\phi_L}, \quad (4.8)$$

onde η_c e η_L são os parâmetros de Lamb-Dicke, apresentados no Capítulo 2, relativos às interações do íon com o campo na cavidade e com o campo clássico. A fase ϕ_L é uma fase relativa e pode ser ajustada para obtermos acoplamentos reais, imaginários ou complexos na interação íon-laser. Temos dois valores diferentes para o parâmetro de Lamb-Dicke, pois temos dois campos diferentes que interagem com o íon e conseqüentemente dois comprimentos de onda diferentes

Podemos escolher seno ou cosseno para a interação íon-modo da cavidade, o que na realidade implica em posicionar o centro da armadilha iônica no nodo ou anti-nodo do campo da cavidade. Para os operadores definidos nas Eqs. (4.7) e (4.8), são válidas as relações

$$\begin{aligned} L &= L^\dagger, \\ F^\dagger F &= FF^\dagger = 1, \\ [F, L] &= [F^\dagger, L] = [F, L^\dagger] = [F^\dagger, L^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Substituindo as freqüências, definidas nas Eqs. (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) no Hamiltoniano total do sistema, obtemos

$$\begin{aligned} H^S &= H_0^S + V^S, \\ H_0^S &= \nu c^\dagger c + \omega a^\dagger a + (\omega + \gamma)(\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) + \Delta \sigma_{ii}, \\ V^S &= \left[(g_1 \sigma_{gi} + g_2 \sigma_{ie})(a^\dagger + a)L + \Omega e^{-i(2\omega + 2\gamma + \delta)t} \sigma_{eg} F + H.c. \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Por motivo de simplificação de notação, não manteremos a dependência funcional dos operadores L e F durante o desenvolvimento deste capítulo.

4.3. Transformações e Rotações

Passando o Hamiltoniano (4.10) para a representação de interação, definida a partir da transformação unitária $U_1 = e^{-iH_0^S t}$, obtemos que o novo Hamiltoniano nesta representação será $H_1 = U_1^\dagger H^S U_1 - H_0^S$. Desta forma

$$H_1 = \left\{ \left[g_1 \sigma_{gi} e^{-i(\Delta+\delta)t} + g_2 \sigma_{ie} e^{i(\Delta-\delta)t} \right] \left(a^\dagger + a e^{-2i\omega t} \right) L_1 + \Omega \sigma_{eg} e^{-i\delta t} F_1 + H.c. \right\}. \quad (4.11)$$

Olhando para o Hamiltoniano de interação, notamos que existem termos que possuem freqüências muito maiores que os demais. Estes podem ser desprezados fazendo a aproximação de ondas girantes, mas para que esta aproximação seja válida, é necessário que a freqüência ω seja muito maior que as demais, satisfazendo $\omega \gg \Delta, \delta, \gamma$.

Assim a Eq. (4.11) reduz-se a

$$H_1 = \left\{ \left[g_1 \sigma_{gi} e^{-i(\Delta+\delta)t} + g_2 \sigma_{ie} e^{i(\Delta-\delta)t} \right] a^\dagger L_1 + \Omega \sigma_{eg} e^{-i\delta t} F_1 + H.c. \right\}, \quad (4.12)$$

onde definimos os novos operadores dos modos de Fônons

$$L_1 = U_1^\dagger L U_1,$$

$$F_1 = U_1^\dagger F U_1,$$

que passam a ter dependência temporal devido à rotação provocada pela representação de interação.

Vamos agora aplicar outra transformação unitária U_2 , que pode ser entendida como a transformação que coloca o sistema na freqüência do nível intermediário. Definindo $U_2 = e^{-i\Delta(\sigma_{ee} + \sigma_{gg})t}$, o novo Hamiltoniano que descreve a evolução será dado por $H_2 = U_2^\dagger H_1 U_2 - \Delta(\sigma_{ee} + \sigma_{gg})$. Desta forma

$$H_2 = \left\{ \left[g_1 \sigma_{gi} e^{-i\delta t} + g_2 \sigma_{ie} e^{-i\delta t} \right] a^\dagger L_1 + \Omega \sigma_{eg} e^{-i\delta t} F_1 + H.c. \right\} - \Delta(\sigma_{ee} + \sigma_{gg}). \quad (4.13)$$

Note que esta transformação não afetou os operadores dos modos de fônon. A transformação U_2 é importante para garantirmos que os termos diagonais do

Hamiltoniano H_2 , escrito na base $\{|e\rangle, |g\rangle, |i\rangle\}$ sejam muito maiores do que os termos de interação, fora da diagonal. Esta condição consiste no âmago da aproximação adiabática, e é também chamada de regime de acoplamento fraco. Deduz-se desta afirmação que o parâmetro Δ , deva ser maior do que os outros acoplamentos, e sem dúvidas esta será uma das condições para a validade da aproximação adiabática (ver Apêndice D).

A melhor forma de se fazer a aproximação adiabática será rodar novamente o Hamiltoniano H_2 . Esta nova rotação será montada de forma a diagonalizar o subespaço $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ de H_2 , conduzindo-nos a um novo Hamiltoniano H_3 , dado por

$$H_3 = U_3^\dagger H_2 U_3 - iU_3^\dagger \frac{dU_3}{dt}. \quad (4.14)$$

Antes de escrevermos U_3 , a rotação que diagonaliza o subespaço $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, a título de facilitar a manipulação algébrica, definimos o operador

$$A = a^\dagger L_1 e^{-iyt}. \quad (4.15)$$

Para visualizarmos melhor o que significa diagonalizar o subespaço $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ de H_2 , vamos representar esquematicamente este Hamiltoniano na forma de uma matriz dada na base $\{|e\rangle, |g\rangle, |i\rangle\}$. Assim esquematicamente temos

$$H_2 = \begin{bmatrix} -\Delta & \Omega F_1 e^{-i\delta t} & g_2^* A^\dagger \\ \Omega^* F_1^\dagger e^{i\delta t} & -\Delta & g_1 A \\ g_2 A & g_1^* A^\dagger & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

onde visualizamos claramente que, a matriz que diagonaliza o bloco $e \leftrightarrow g$ do Hamiltoniano (4.16) será

$$U_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{\Omega}{|\Omega|} F_1^\dagger e^{i\delta t} & -\frac{\Omega}{|\Omega|} F_1^\dagger e^{i\delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

que possui dependência temporal, tanto explicitamente na exponencial, quanto implicitamente no operador do modo de fônon F .

É evidente que a transformação unitária U_3 e o Hamiltoniano H_2 não devem ser encarados como matrizes, pois não iremos aqui definir como se comporta uma matriz de matrizes, isto foi apenas um artifício para reconhecer a transformação que diagonaliza o sub-bloco $e \leftrightarrow g$ do Hamiltoniano H_2 .

A transformação U_3 é unitária e pode ser descrita na forma usual como

$$U_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{ee} + \sigma_{eg}) + \frac{\Omega}{|\Omega|} F_1^\dagger e^{i\delta t} (\sigma_{ge} - \sigma_{gg}) \right] + \sigma_{ii}. \quad (4.17)$$

Particularmente é interessante, definirmos U_3 sem nenhuma dependência temporal, pois assim, não teremos o segundo termo da Eq. (4.14), e a transformação U_3 representará simplesmente uma rotação sobre H_2 .

Para eliminarmos a dependência temporal de U_3 , precisamos impor que a dessintonia do laser com a transição $e \leftrightarrow g$ seja nula

$$\delta = 0, \quad (4.18)$$

e que a expansão em série do operador F , dado pela Eq. (4.8), não dependa dos operadores de destruição e criação de fônons na armadilha (c^\dagger, c) ,

$$F = \left[1 + i\eta_L (c^\dagger + c) - \frac{\eta_L^2}{2} (c^\dagger + c)^2 + \dots \right] e^{-i\phi_L} \cong e^{-i\phi_L},$$

que implica em termos o parâmetro de Lamb-Dicke para o acoplamento do laser com o íon muito pequeno $\eta_L \ll 1$.

Com as considerações acima, iremos encontrar o novo Hamiltoniano H_3 na base rodada pela transformação unitária U_3 .

Definindo a quantidade

$$d = \frac{\Omega}{\Delta} e^{-i\phi_L}, \quad (4.19)$$

podemos rescrever o Hamiltoniano (4.16) na base $\{|e\rangle, |g\rangle, |i\rangle\}$ como

$$H_2 = -\Delta(\sigma_{gg} + \sigma_{ee}) + (\Omega d \sigma_{eg} + \Omega^* d^* \sigma_{ge}) + (g_2^* A^\dagger \sigma_{ei} + g_2 A \sigma_{ie}) + (g_1 A \sigma_{gi} + g_1^* A^\dagger \sigma_{ig}). \quad (4.20)$$

Definindo os operadores

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(g_2^* A^\dagger + \frac{d}{|d|} g_1 A \right), \quad (4.21)$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(g_2^* A^\dagger - \frac{d}{|d|} g_1 A \right),$$

podemos aplicar a transformação U_3 sem dependência temporal, dada por

$$U_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{ee} + \sigma_{eg}) + \frac{d^*}{|d|} (\sigma_{ge} - \sigma_{gg}) \right] + \sigma_{ii}, \quad (4.22)$$

em H_2 , obtendo assim, o novo Hamiltoniano na base nova $\{|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle\}$ como

$$H_3 = -(\Delta + |\Omega|) \sigma_{++} - (\Delta - |\Omega|) \sigma_{--} + R \sigma_{+i} + S \sigma_{-i} + R^\dagger \sigma_{i+} + S^\dagger \sigma_{i-}. \quad (4.23)$$

Esta última transformação unitária pode ser interpretada como aquela que provoca uma rotação da base $\{|e\rangle, |g\rangle, |i\rangle\}$ para a base $\{|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle\}$. Desta forma estabelecemos uma ligação entre as bases, que será

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e\rangle + \frac{d^*}{|d|} |g\rangle \right), \quad (4.24)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e\rangle - \frac{d^*}{|d|} |g\rangle \right),$$

e reciprocamente

$$|e\rangle = \frac{(|+\rangle + |-\rangle)}{\sqrt{2}}, \quad (4.25)$$

$$|g\rangle = \frac{d}{|d|} \frac{(|+\rangle - |-\rangle)}{\sqrt{2}}.$$

Agora, estamos em condições de finalmente fazermos a aproximação adiabática sobre nossas transições, eletrônicas. Notando que, se antes imporíamos

que não houvesse transições entre os níveis $g \leftrightarrow i$ e $i \leftrightarrow e$, agora imporemos que não haja transições entre os novos estados eletrônicos $|- \rangle \leftrightarrow |i \rangle$ e $|i \rangle \leftrightarrow |+ \rangle$.

4.4. Aproximação Adiabática

Na representação de Schrödinger a equação de Liouville-Von Neumann é:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho^S = [H^S, \rho^S], \quad (4.26)$$

sendo de fácil demonstração que sua estrutura não se modifica sob as transformações unitárias por nós aplicadas sobre o Hamiltoniano total na representação de Schrödinger (ver Apêndice C). Assim, podemos escrever

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho_3 = [H_3, \rho_3], \quad (4.27)$$

que, aberta para seus nove elementos corresponde a

$$\begin{aligned} i\dot{\rho}_{++} &= H_{++}\rho_{++} - \rho_{++}H_{++} + H_{+-}\rho_{-+} - \rho_{+-}H_{-+} + H_{+i}\rho_{i+} - \rho_{+i}H_{i+}, \\ i\dot{\rho}_{+-} &= H_{++}\rho_{+-} - \rho_{+-}H_{+-} + H_{+-}\rho_{--} - \rho_{+-}H_{--} + H_{+i}\rho_{i-} - \rho_{+i}H_{i-}, \\ i\dot{\rho}_{+i} &= H_{++}\rho_{+i} - \rho_{++}H_{+i} + H_{+-}\rho_{-i} - \rho_{+-}H_{-i} + H_{+i}\rho_{ii} - \rho_{+i}H_{ii}, \\ i\dot{\rho}_{-+} &= H_{-+}\rho_{++} - \rho_{-+}H_{++} + H_{--}\rho_{-+} - \rho_{--}H_{-+} + H_{-i}\rho_{i+} - \rho_{-i}H_{i+}, \\ i\dot{\rho}_{--} &= H_{-+}\rho_{+-} - \rho_{-+}H_{+-} + H_{--}\rho_{--} - \rho_{--}H_{--} + H_{-i}\rho_{i-} - \rho_{-i}H_{i-}, \\ i\dot{\rho}_{-i} &= H_{-+}\rho_{+i} - \rho_{-+}H_{+i} + H_{--}\rho_{-i} - \rho_{--}H_{-i} + H_{-i}\rho_{ii} - \rho_{-i}H_{ii}, \\ i\dot{\rho}_{i+} &= H_{i+}\rho_{++} - \rho_{i+}H_{++} + H_{i-}\rho_{-+} - \rho_{i-}H_{-+} + H_{ii}\rho_{i+} - \rho_{ii}H_{i+}, \\ i\dot{\rho}_{i-} &= H_{i+}\rho_{+-} - \rho_{i+}H_{+-} + H_{i-}\rho_{--} - \rho_{i-}H_{--} + H_{ii}\rho_{i-} - \rho_{ii}H_{i-}, \\ i\dot{\rho}_{ii} &= H_{i+}\rho_{+i} - \rho_{i+}H_{+i} + H_{i-}\rho_{-i} - \rho_{i-}H_{-i} + H_{ii}\rho_{ii} - \rho_{ii}H_{ii}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Substituindo os elementos de H_3 , nas Equações acima, obtemos

$$\begin{aligned} i\dot{\rho}_{++} &= R\rho_{i+} - \rho_{+i}R^\dagger, \\ i\dot{\rho}_{+-} &= 2|\Omega|\rho_{+-} + R\rho_{i-} - \rho_{+i}S^\dagger, \\ i\dot{\rho}_{+i} &= -(\Delta - |\Omega|)\rho_{+i} + R\rho_{ii} - \rho_{++}R - \rho_{+-}S, \\ i\dot{\rho}_{-+} &= -2|\Omega|\rho_{-+} + \rho_{-i}R^\dagger - S\rho_{i+}, \\ i\dot{\rho}_{--} &= S\rho_{i-} - \rho_{-i}S^\dagger, \\ i\dot{\rho}_{-i} &= -(\Delta + |\Omega|)\rho_{-i} + S\rho_{ii} - \rho_{--}S - \rho_{-+}R, \\ i\dot{\rho}_{i+} &= (\Delta - |\Omega|)\rho_{i+} - \rho_{ii}R^\dagger + R^\dagger\rho_{++} + S^\dagger\rho_{-+}, \\ i\dot{\rho}_{i-} &= (\Delta + |\Omega|)\rho_{i-} - \rho_{ii}S^\dagger - \rho_{++}S^\dagger + R^\dagger\rho_{+-}, \\ i\dot{\rho}_{ii} &= R^\dagger\rho_{+i} - \rho_{i+}R + S^\dagger\rho_{-i} - \rho_{i-}S. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Impondo a condição adiabática para as transições dos níveis $|+\rangle$ e $|-\rangle$ para $|i\rangle$, que equivale a fazer $\dot{\rho}_{+i} = \dot{\rho}_{-i} = 0$ nas Eqs. (4.29), encontramos que os elementos do operador densidade, associados àqueles em que impomos a condição adiabática serão

$$\begin{cases} \rho_{+i} = \left(\frac{\Delta + |\Omega|}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) (R\rho_{ii} - \rho_{++}R - \rho_{+-}S), \\ \rho_{i+} = \left(\frac{\Delta + |\Omega|}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) (\rho_{ii}R^\dagger - R^\dagger\rho_{++} - S^\dagger\rho_{-+}), \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\begin{cases} \rho_{-i} = \left(\frac{\Delta - |\Omega|}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) (S\rho_{ii} - \rho_{--}S - \rho_{-+}R), \\ \rho_{i-} = \left(\frac{\Delta - |\Omega|}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) (\rho_{ii}S^\dagger - S^\dagger\rho_{--} - R^\dagger\rho_{+-}). \end{cases} \quad (4.31)$$

Substituindo as Eqs. (4.30) e (4.31) aos elementos $i\dot{\rho}_{++}$, $i\dot{\rho}_{--}$ e $i\dot{\rho}_{ii}$ das Eqs (4.29), encontramos as equações, no regime adiabático, que descrevem a evolução da probabilidade de medirmos o íon no nível $|+\rangle$ por

$$\begin{aligned} i\dot{\rho}_{++} = \left(\frac{1}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left\{ \left[-(\Delta + |\Omega|)RR^\dagger \right] \rho_{ii} - \rho_{ii} \left[-(\Delta + |\Omega|)RR^\dagger \right] \right. \\ \left. + \left[-(\Delta + |\Omega|)RS^\dagger \right] \rho_{ii} - \rho_{ii} \left[-(\Delta + |\Omega|)SR^\dagger \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

de medirmos o íon no nível $|-\rangle$ por

$$\begin{aligned} i\dot{\rho}_{--} = \left(\frac{1}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left\{ \left[-(\Delta - |\Omega|)SS^\dagger \right] \rho_{ii} - \rho_{ii} \left[-(\Delta - |\Omega|)SS^\dagger \right] \right. \\ \left. + \left[-(\Delta - |\Omega|)SR^\dagger \right] \rho_{ii} - \rho_{ii} \left[-(\Delta - |\Omega|)RS^\dagger \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

e de medirmos o íon no nível $|i\rangle$ por

$$i\dot{\rho}_{ii} = \left(\frac{1}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left\{ \left[\Delta(R^\dagger R + S^\dagger S) + |\Omega|(R^\dagger R - S^\dagger S) \right] \rho_{ii} \right. \\ \left. - \rho_{ii} \left[\Delta(R^\dagger R + S^\dagger S) + |\Omega|(R^\dagger R - S^\dagger S) \right] \right. \\ \left. - 2|\Omega| \left[S^\dagger \rho_{-+} R - R^\dagger \rho_{+-} S \right] \right\}. \quad (4.34)$$

Assumindo que o Hamiltoniano H_3 no regime adiabático possa ser representado na forma mais geral por

$$H_3^A = \left(H_{++}^A \sigma_{++} + H_{--}^A \sigma_{--} + H_{ii}^A \sigma_{ii} \right) + \left(H_{+-}^A \sigma_{+-} + H_{-+}^A \sigma_{-+} \right) \\ + \left(H_{i+}^A \sigma_{i+} + H_{+i}^A \sigma_{+i} \right) + \left(H_{i-}^A \sigma_{i-} + H_{-i}^A \sigma_{-i} \right), \quad (4.35)$$

podemos encontrar um conjunto de equações análogas às Eqs. (4.28), que serão usadas para a comparação dos elementos $i\dot{\rho}_{++}$, $i\dot{\rho}_{--}$ e $i\dot{\rho}_{ii}$ obtidos pela aproximação adiabática com aqueles obtidos a partir do Hamiltoniano adiabático (4.35). Depois de compararmos os elementos do operador densidade, encontramos os elementos do Hamiltoniano adiabático total.

Os elementos adiabáticos do Hamiltoniano (4.35) são

$$H_{++}^A = \left(\frac{1}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left[-(\Delta + |\Omega|) RR^\dagger \right], \quad (4.36)$$

$$H_{--}^A = \left(\frac{1}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left[-(\Delta - |\Omega|) SS^\dagger \right], \quad (4.37)$$

obtidos imediatamente, sem nenhuma condição,

$$H_{ii}^A = \left(\frac{1}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left[\Delta(R^\dagger R + S^\dagger S) + |\Omega|(R^\dagger R - S^\dagger S) \right], \quad (4.38)$$

que requer que seja satisfeita a condição, $S^\dagger \rho_{-+} R = R^\dagger \rho_{+-} S$, e

$$H_{+-}^A = \left(\frac{1}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left[-\Delta RS^\dagger \right], \quad (4.39)$$

$$H_{-+}^A = \left(\frac{1}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left[-\Delta SR^\dagger \right], \quad (4.40)$$

onde devemos impor que $|\Omega| \ll \Delta$.

A condição para H_{ii}^A não é um problema, pois ela será sempre verdadeira se o íon for inicialmente preparado no estado intermediário. Neste caso, somente o elemento ρ_{ii} do operador densidade total inicial será não nulo. Como no regime adiabático, o nível intermediário não transiciona para os demais, o operador densidade total possuirá somente o subespaço de base $\{|i\rangle\}$ não nulo. Caso o íon não seja preparado inicialmente no estado intermediário, o sistema nunca transicionará para este estado, sendo portanto, irrelevante o valor de H_{ii}^A , podendo ser desconsiderado.

Substituindo as Eqs. (4.36), (4.37), (4.38), (4.39) e (4.40) no Hamiltoniano dado pela Eq. (4.35), obtemos o Hamiltoniano adiabático total na base $\{|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle\}$ como

$$H_3^A = \left(\frac{-1}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left\{ (\Delta + |\Omega|) RR^\dagger \sigma_{++} + (\Delta - |\Omega|) SS^\dagger \sigma_{--} + \Delta SR^\dagger \sigma_{-+} + \Delta RS^\dagger \sigma_{+-} \right\} \\ + \left(\frac{1}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left\{ \left[\Delta (R^\dagger R + S^\dagger S) + |\Omega| (R^\dagger R - S^\dagger S) \right] \sigma_{ii} \right\}. \quad (4.41)$$

Reescrevendo o Hamiltoniano (4.41) na forma mais resumida,

$$H_3^A = H_{++}^A \sigma_{++} + H_{--}^A \sigma_{--} + H_{+-}^A \sigma_{+-} + H_{-+}^A \sigma_{-+} + H_{ii}^A \sigma_{ii}, \quad (4.42)$$

e substituindo as Eqs. (4.21), (4.20), (4.19), (4.15) e (4.9) aos elementos obtidos acima, encontramos

$$H_{++}^A = \left[\frac{-(\Delta + |\Omega|) L_1^2}{2(\Delta^2 - |\Omega|^2)} \right] \left\{ (|g_1|^2 + |g_2|^2) a^\dagger a + |g_2|^2 + \frac{1}{|\Omega|} \left(\Omega g_1 g_2 e^{-i\phi_L} e^{-2i\gamma t} a^{\dagger 2} + H.c \right) \right\},$$

(4.43)

$$H_{--}^A = \left[\frac{-(\Delta - |\Omega|)L_1^2}{2(\Delta^2 - |\Omega|^2)} \right] \left\{ (|g_1|^2 + |g_2|^2) a^\dagger a + |g_2|^2 - \frac{1}{|\Omega|} (\Omega g_1 g_2 e^{-i\phi_L} e^{-2i\gamma t} a^{\dagger 2} + H.c.) \right\},$$

(4.44)

$$H_{+-}^A = \left[\frac{-\Delta L_1^2}{2(\Delta^2 - |\Omega|^2)} \right] \left\{ (|g_2|^2 - |g_1|^2) a^\dagger a + |g_2|^2 + \frac{1}{|\Omega|} (\Omega g_1 g_2 e^{-i\phi_L} e^{-2i\gamma t} a^{\dagger 2} - H.c.) \right\},$$

(4.45)

$$H_{-+}^A = \left[\frac{-\Delta L_1^2}{2(\Delta^2 - |\Omega|^2)} \right] \left\{ (|g_2|^2 - |g_1|^2) a^\dagger a + |g_2|^2 - \frac{1}{|\Omega|} (\Omega g_1 g_2 e^{-i\phi_L} e^{-2i\gamma t} a^{\dagger 2} - H.c.) \right\},$$

(4.46)

$$H_{ii}^A = \left(\frac{\Delta L_1^2}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left\{ (|g_1|^2 + |g_2|^2) a^\dagger a + |g_1|^2 + \frac{1}{\Delta} (\Omega g_1 g_2 e^{-i\phi_L} e^{-2i\gamma t} a^{\dagger 2} + H.c.) \right\},$$

(4.47)

que são os elementos do Hamiltoniano adiabático, na base rodada $\{|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle\}$.

Encontrados os elementos do Hamiltoniano adiabático, podemos aplicar a rotação inversa U_3^\dagger e retornarmos para a base $\{|e\rangle, |g\rangle, |i\rangle\}$.

Temos duas formas de retornarmos à base antiga, ou aplicamos explicitamente a transformação unitária de rotação inversa, ou encontramos como os elementos de transição eletrônica na base nova se conectam aos elementos de transição na base antiga. Aplicamos explicitamente a transformação unitária U_3 na “ida”, portanto escolhemos conectar os elementos de transição eletrônica no caminho de “volta”.

Dadas as equações de rotação (4.24), podemos escrever os elementos de transição eletrônica de uma base em função dos elementos da outra, como

$$\sigma_{++} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ee} + \sigma_{gg} + \frac{\Omega e^{-i\phi_L}}{|\Omega|} \sigma_{eg} + \frac{\Omega^* e^{i\phi_L}}{|\Omega|} \sigma_{ge} \right), \quad (4.48)$$

$$\sigma_{--} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ee} + \sigma_{gg} - \frac{\Omega e^{-i\phi_L}}{|\Omega|} \sigma_{eg} - \frac{\Omega^* e^{i\phi_L}}{|\Omega|} \sigma_{ge} \right), \quad (4.49)$$

$$\sigma_{+-} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ee} - \sigma_{gg} - \frac{\Omega e^{-i\phi_L}}{|\Omega|} \sigma_{eg} + \frac{\Omega^* e^{i\phi_L}}{|\Omega|} \sigma_{ge} \right), \quad (4.50)$$

$$\sigma_{-+} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ee} - \sigma_{gg} + \frac{\Omega e^{-i\phi_L}}{|\Omega|} \sigma_{eg} - \frac{\Omega^* e^{i\phi_L}}{|\Omega|} \sigma_{ge} \right), \quad (4.51)$$

que podem ser substituídos no Hamiltoniano (4.42), nos dando os elementos do Hamiltoniano adiabático na base $\{|e\rangle, |g\rangle, |i\rangle\}$ escritos como

$$H_{ee}^A = \frac{1}{2} (H_{++}^A + H_{--}^A + H_{+-}^A + H_{-+}^A), \quad (4.52)$$

$$H_{gg}^A = \frac{1}{2} (H_{++}^A + H_{--}^A - H_{+-}^A - H_{-+}^A), \quad (4.53)$$

$$H_{eg}^A = \frac{\Omega e^{-i\phi_L}}{2|\Omega|} (H_{++}^A - H_{--}^A - H_{+-}^A + H_{-+}^A), \quad (4.54)$$

$$H_{ge}^A = \frac{\Omega^* e^{i\phi_L}}{2|\Omega|} (H_{++}^A - H_{--}^A + H_{+-}^A - H_{-+}^A). \quad (4.55)$$

O elemento H_{ii}^A não foi alterado pela rotação, permanecendo o mesmo que foi obtido na Eq. (4.47).

Substituindo os elementos de Hamiltoniano (4.43), (4.44), (4.45) e (4.46) nas Eqs. (4.52), (4.53), (4.54) e (4.55), encontramos finalmente os elementos do Hamiltoniano adiabático na base $\{|e\rangle, |g\rangle, |i\rangle\}$, dados por

$$H_{ee}^A = \left(\frac{-\Delta L_1^2}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left\{ |g_2|^2 a^\dagger a + |g_2|^2 + \frac{1}{\Delta} (\Omega g_1 g_2 e^{-i\phi_L} e^{-2i\gamma t} a^{\dagger 2} + H.c) \right\}, \quad (4.57)$$

$$H_{gg}^A = \left(\frac{-\Delta L_1^2}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left\{ |g_1|^2 a^\dagger a + \frac{1}{\Delta} (\Omega g_1 g_2 e^{-i\phi_L} e^{-2i\gamma t} a^{\dagger 2} + H.c) \right\}, \quad (4.58)$$

$$H_{eg}^A = \left(\frac{-\Delta L_1^2}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left\{ \frac{\Omega e^{-i\phi_L}}{2\Delta} (|g_1|^2 + |g_2|^2) a^\dagger a + \frac{|g_2|^2 \Omega e^{-i\phi_L}}{2\Delta} + \Omega^* g_1^* g_2^* e^{2i\gamma t} a^2 \right\}, \quad (4.59)$$

$$H_{ge}^A = \left(\frac{-\Delta L_1^2}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left\{ \frac{\Omega^* e^{i\phi_L}}{2\Delta} (|g_1|^2 + |g_2|^2) a^\dagger a + \frac{|g_2|^2 \Omega^* e^{i\phi_L}}{2\Delta} + \Omega g_1 g_2 e^{-2i\gamma t} a^{\dagger 2} \right\}. \quad (4.60)$$

Se definirmos as quantidades

$$\begin{cases} \varpi = \frac{\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} (|g_1|^2 + |g_2|^2), \\ \zeta = \frac{\Omega g_1 g_2}{\Delta^2 - |\Omega|^2} e^{-i\phi_L}, \end{cases} \quad (4.61)$$

juntamente com

$$\begin{cases} \varpi_1 = \frac{\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} |g_1|^2, \\ \varpi_2 = \frac{\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} |g_2|^2, \\ \varpi = \varpi_1 + \varpi_2, \end{cases} \quad (4.62)$$

podemos reescrever de forma resumida os elementos adiabáticos obtidos acima, como

$$H_{ee}^A = \left(\varpi_2 a^\dagger a + \varpi_2 + \frac{\zeta}{2} e^{-2i\gamma t} a^{\dagger 2} + \frac{\zeta^*}{2} e^{2i\gamma t} a^2 \right) L_1^2, \quad (4.63)$$

$$H_{gg}^A = \left(\varpi_1 a^\dagger a + \frac{\zeta}{2} e^{-2i\gamma t} a^{\dagger 2} + \frac{\zeta^*}{2} e^{2i\gamma t} a^2 \right) L_1^2, \quad (4.64)$$

$$H_{eg}^A = \Omega e^{-i\phi_L} \left(\frac{\varpi a^\dagger a + \varpi_2}{2} + \frac{\Delta \zeta^*}{|\Omega|^2} e^{i\phi_L} e^{2i\gamma t} a^{\dagger 2} \right) L_1^2, \quad (4.65)$$

$$H_{ge}^A = \Omega^* e^{i\phi_L} \left(\frac{\varpi a^\dagger a + \varpi_2}{2} + \frac{\Delta \zeta}{|\Omega|^2} e^{-i\phi_L} e^{-2i\gamma t} a^2 \right) L_1^2, \quad (4.66)$$

$$H_{ii}^A = \left(\varpi a^\dagger a + \varpi_1 + \zeta e^{-2i\gamma t} a^{\dagger 2} + \zeta^* e^{2i\gamma t} a^2 \right) L_1^2. \quad (4.67)$$

O Hamiltoniano adiabático total para a base antiga é dado por

$$H_2^A = H_{ee}^A \sigma_{ee} + H_{gg}^A \sigma_{gg} + H_{eg}^A \sigma_{eg} + H_{ge}^A \sigma_{ge} + H_{ii}^A \sigma_{ii}, \quad (4.68)$$

onde seus elementos são dados pelas equações obtidas acima.

Antes de analisarmos os resultados obtidos até aqui, algumas outras questões podem ser levantadas:

Primeiro, realizar formalmente a integração dos elementos $\dot{\rho}_{+i} = \dot{\rho}_{-i} = 0$, dados pelas Eqs. (4.29) conduziria-nos aos mesmos resultados? e se conduzir, existe alguma condição para que a aproximação adiabática valha? A resposta para estas duas perguntas são apresentadas no Apêndice D.

Segundo, por que tivemos que aplicar uma transformação unitária que atua rodando os níveis eletrônicos da base $\{|e\rangle, |g\rangle, |i\rangle\}$ para a base $\{|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle\}$ antes de realizarmos a aproximação adiabática? poderíamos fazer a aproximação adiabática sem esta rotação? As respostas para estas perguntas encontram-se no Apêndice E, onde mostramos que existe um inconveniente em não mudarmos de base.

4.5. Hamiltonianos Efetivos e Regime de Parâmetros

Nosso Hamiltoniano de interesse a partir daqui, será aquele que descreve a evolução do sistema para o átomo inicialmente no estado intermediário. Olhando para o Hamiltoniano total dado pela Eq. (4.68), vemos claramente que o estado intermediário não se acopla com os demais, enquanto os estados excitado e fundamental permanecem acoplados. Nosso enfoque, portanto, será somente para o Hamiltoniano H_{ii}^A .

O Hamiltoniano efetivo que atuará sobre o sistema, para o íon inicialmente em $|i\rangle$, é dado pela Eq. (4.67), que será renomeada para

$$\tilde{H} = \left(\varpi a^\dagger a + \varpi_1 + \zeta e^{-2i\gamma t} a^{\dagger 2} + \zeta^* e^{2i\gamma t} a^2 \right) L_1^2. \quad (4.69)$$

Aplicando as transformações inversas U_2^\dagger e U_1^\dagger , retornamos para a representação de Schrödinger, obtendo

$$\tilde{H}^S = \nu c^\dagger c + \omega a^\dagger a + \Delta + \left(\varpi a^\dagger a + \varpi_1 + \zeta e^{-2i(\omega+\gamma)t} a^{\dagger 2} + \zeta^* e^{2i(\omega+\gamma)t} a^2 \right) L^2. \quad (4.70)$$

Para prosseguirmos, temos de escolher se colocamos a armadilha no nodo ou anti-nodo do campo da cavidade, escolhendo seno ou cosseno para o operador L . Desprezando termos da ordem $O(\eta_c^3)$ ou maiores, encontramos

$$L^2 = \begin{cases} \sin^2 \left[\eta_c (c^\dagger + c) \right] \approx \eta_c^2 (c^\dagger + c)^2, \\ \cos^2 \left[\eta_c (c^\dagger + c) \right] \approx 1 - \eta_c^2 (c^\dagger + c)^2. \end{cases}$$

Substituindo o operador L no Hamiltoniano efetivo (4.70), encontramos dois Hamiltonianos efetivos diferentes na representação de Schrödinger, que chamaremos de \tilde{H}_1^S para a escolha do seno e de \tilde{H}_2^S para a escolha do cosseno, dados por

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1^S = & \left(\nu + 2\eta_c^2 \varpi_1 \right) c^\dagger c + \omega a^\dagger a + \left(\Delta + \eta_c^2 \varpi_1 \right) \\ & + \eta_c^2 \varpi a^\dagger a \left(c^{\dagger 2} + c^2 \right) + \eta_c^2 \varpi_1 \left(c^{\dagger 2} + c^2 \right) + 2\eta_c^2 \varpi a^\dagger a \left(c^\dagger c + 1/2 \right) \\ & + \left(2\eta_c^2 \zeta e^{-2i(\omega+\gamma)t} a^{\dagger 2} + 2\eta_c^2 \zeta^* e^{2i(\omega+\gamma)t} a^2 \right) \left(c^\dagger c + 1/2 \right) \\ & + \left(\eta_c^2 \zeta e^{-2i(\omega+\gamma)t} a^{\dagger 2} c^{\dagger 2} + \eta_c^2 \zeta^* e^{2i(\omega+\gamma)t} a^2 c^2 \right) \\ & + \left(\eta_c^2 \zeta e^{-2i(\omega+\gamma)t} a^{\dagger 2} c^2 + \eta_c^2 \zeta^* e^{2i(\omega+\gamma)t} a^2 c^{\dagger 2} \right), \end{aligned} \quad (4.71)$$

para a armadilha no nodo do campo da cavidade e

$$\begin{aligned} \tilde{H}_2^S = & \nu c^\dagger c + (\omega + \varpi) a^\dagger a + (\Delta + \varpi_1) + \zeta e^{-2i(\omega+\gamma)t} a^{\dagger 2} + \zeta^* e^{2i(\omega+\gamma)t} a^2 \\ & - \eta_c^2 \left[\varpi a^\dagger a + \varpi_1 + \zeta e^{-2i(\omega+\gamma)t} a^{\dagger 2} + \zeta^* e^{2i(\omega+\gamma)t} a^2 \right] \left(2c^\dagger c + c^{\dagger 2} + c^2 + 1 \right), \end{aligned} \quad (4.72)$$

para a armadilha no anti-nodo do campo da cavidade.

O primeiro Hamiltoniano \tilde{H}_1^S pode ser levado para a representação de interação definida a partir do seu Hamiltoniano livre, com a transformação

$$U_4 = e^{-i \left[(v+2\eta_c^2\varpi_1)c^\dagger c + \omega a^\dagger a \right] t},$$

$$H_4 = U_4^\dagger \tilde{H}_1^S U_4 - (v+2\eta_c^2\varpi_1)c^\dagger c - \omega a^\dagger a.$$

O segundo Hamiltoniano \tilde{H}_2^S pode ser levado para a representação de interação definida a partir do seu Hamiltoniano livre, com a transformação

$$U_5 = e^{-i \left[v c^\dagger c + (\omega + \varpi) a^\dagger a \right] t},$$

$$H_5 = U_5^\dagger \tilde{H}_2^S U_5 - v c^\dagger c - (\omega + \varpi) a^\dagger a.$$

Desta forma teremos dois Hamiltonianos efetivos na representação de interação, dados por

$$\begin{aligned} H_4 = & 2\eta_c^2 \varpi a^\dagger a (c^\dagger c + 1/2) + \left(2\eta_c^2 \zeta e^{-2i\gamma t} a^{\dagger 2} + 2\eta_c^2 \zeta^* e^{2i\gamma t} a^2 \right) (c^\dagger c + 1/2) \\ & + \left(\eta_c^2 \varpi a^\dagger a + \eta_c^2 \varpi_1 \right) \left[e^{2i(v+2\eta_c^2\varpi_1)t} c^{\dagger 2} + e^{-2i(v+2\eta_c^2\varpi_1)t} c^2 \right] \\ & + \left[\eta_c^2 \zeta e^{-2i(\gamma-v-2\eta_c^2\varpi_1)t} a^{\dagger 2} c^{\dagger 2} + \eta_c^2 \zeta^* e^{2i(\gamma-v-2\eta_c^2\varpi_1)t} a^2 c^2 \right] \\ & + \left[\eta_c^2 \zeta e^{-2i(\gamma+v+2\eta_c^2\varpi_1)t} a^{\dagger 2} c^2 + \eta_c^2 \zeta^* e^{2i(\gamma+v+2\eta_c^2\varpi_1)t} a^2 c^{\dagger 2} \right], \end{aligned} \quad (4.73)$$

quando o átomo encontra-se no nodo do campo da cavidade e

$$H_5 = \zeta e^{-2i(\gamma-\varpi)t} a^{\dagger 2} + \zeta^* e^{2i(\gamma-\varpi)t} a^2, \quad (4.74)$$

quando o átomo encontra-se no anti-nodo do campo da cavidade, além de termos desprezado termos de ordem $O(\eta_c^2)$ ou superior.

Escolhendo convenientemente o valor das fases tanto para o Hamiltoniano H_4 quanto para o Hamiltoniano H_5 , podemos obter Hamiltonianos efetivos diferentes.

Agrupamos as escolhas particulares de parâmetros que conduzem a interações diferentes, obtendo:

Para $L = \cos\left[\eta_c(c^\dagger + c)\right]$, considerando $\eta_c^2 \approx 0$ e ajustando $\gamma = \varpi$, obtemos o

Hamiltoniano efetivo

$$V_1 = \zeta a^{\dagger 2} + \zeta^* a^2. \quad (4.76)$$

Para $L = \sin\left[\eta_c(c^\dagger + c)\right]$, considerando $\eta_c^3 \approx 0$, ajustando $\gamma = 0$ e garantindo que $\eta_c^2 \varpi_1 \ll \nu$ (esta condição será discutida mais adiante), obtemos o Hamiltoniano efetivo

$$V_2 = 2(c^\dagger c + 1/2)\left(2\eta_c^2 \varpi a^\dagger a + 2\eta_c^2 \zeta a^{\dagger 2} + 2\eta_c^2 \zeta^* a^2\right). \quad (4.77)$$

Escolhendo $L = \sin\left[\eta_c(c^\dagger + c)\right]$, considerando $\eta_c^3 \approx 0$, deixando γ livre, mas garantindo que $\gamma \ll \nu$ e $\eta_c^2 \varpi_1 \ll \nu$, obtemos o Hamiltoniano efetivo

$$V_3 = 2(c^\dagger c + 1/2)\left(2\eta_c^2 \varpi a^\dagger a + 2\eta_c^2 \zeta e^{-2i\gamma} a^{\dagger 2} + 2\eta_c^2 \zeta^* e^{2i\gamma} a^2\right). \quad (4.78)$$

Escolhendo $L = \sin\left[\eta_c(c^\dagger + c)\right]$, considerando $\eta_c^3 \approx 0$, escolhendo $\gamma = \nu + \varpi_1/2$, garantindo $\eta_c^2 \varpi_1 \ll \nu$, obtemos o Hamiltoniano efetivo

$$V_4 = 2\varpi a^\dagger a(c^\dagger c + 1/2) + \left(\eta_c^2 \zeta a^{\dagger 2} c^{\dagger 2} + \eta_c^2 \zeta^* a^2 c^2\right). \quad (4.79)$$

Escolhendo $L = \sin\left[\eta_c(c^\dagger + c)\right]$, considerando $\eta_c^3 \approx 0$, escolhendo $\gamma = -\nu - \varpi_1/2$, garantindo $\eta_c^2 \varpi_1 \ll \nu$, obtemos o Hamiltoniano efetivo

$$V_5 = 2\varpi a^\dagger a(c^\dagger c + 1/2) + \left(\eta_c^2 \zeta a^{\dagger 2} c^2 + \eta_c^2 \zeta^* a^2 c^{\dagger 2}\right). \quad (4.80)$$

4.6. *Análise e Discussão dos Resultados*

Dos cinco Hamiltonianos efetivos obtidos no final da seção anterior, o primeiro será objeto de nosso estudo mais pormenorizado.

Como V_1 não apresenta dependência temporal, podemos escrever o operador de evolução temporal de forma usual $e^{-iV_1\tau}$, sendo τ o tempo de interação do íon com os campos clássico e da cavidade.

A evolução temporal, obtida com a interação V_1 será o operador de compressão, estudado no Capítulo 3, que poderá ser escrito como

$$S(\zeta, \tau) = \exp\left\{\frac{1}{2}\left[(2i\zeta\tau)^* a - (2i\zeta\tau) a^\dagger\right]\right\},$$

onde identificamos claramente o fator de compressão dado por $\gamma = 2i\zeta\tau$ e o raio de compressão por $r(\tau) = 2|\zeta|\tau$.

Assumindo valores típicos para os parâmetros envolvidos [47,48,49,27] que satisfaçam as restrições encontradas no desenvolvimento deste trabalho, temos para os acoplamentos de dipolo $|g_1| \equiv |g_2| \sim 3 \times 10^5 s^{-1}$, para a intensidade do campo clássico $|\Omega| \sim 3 \times 10^5 s^{-1}$ e para a dessintonia do nível intermediário $\Delta \sim 3 \times 10^6 s^{-1}$.

Além dessas escolhas, temos algumas outras que não aparecem explicitamente na interação V_1 , e podem ser tomadas como $\eta_c \leq 3 \times 10^{-1}$ e $\eta_L \leq 1 \times 10^{-1}$ para os parâmetros de Lamb-Dicke, $\nu \sim 5 \times 10^5 s^{-1}$ para a frequência de vibração do íon, $\delta = 0$ para a dessintonia do laser com a transição $e \leftrightarrow g$ e $\omega \sim 10^{10} s^{-1}$.

Com as escolhas acima encontramos

$$\begin{cases} |\zeta| \sim 3 \times 10^3 s^{-1}, \\ \varpi \equiv 2\varpi_1 \sim 3 \times 10^4 s^{-1} \ll \nu, \end{cases}$$

que juntamente com um tempo de interação íon-armadilha-cavidade-laser da ordem de $\tau \sim 2 \times 10^{-4} s$, nos fornecem um raio de compressão $r(\tau) \sim 1,2$, resultando uma taxa de compressão

$$q = (1 - e^{-2r}) \times 100\% \approx 91\%.$$

Outra condição importante exigida para obtermos as interações V_2 , V_3 , V_4 e V_5 foi satisfeita, pois, pelas escolhas feitas temos realmente $\eta_c^2 \varpi_1 \ll \nu$.

Evidentemente os Hamiltonianos de interação, V_2 , V_3 , V_4 e V_5 , também apresentarão compressão, sendo que os dois últimos apresentarão compressão tanto numa quadratura do campo da cavidade, quanto do campo de vibração, podendo gerar-se, a partir deles, estados comprimidos emaranhados.

Podemos ainda fazer aproximações semi-clássicas sobre os operadores de modo de fônons e encontrar compressão nas quadraturas do campo de radiação dependente da excitação de vibração iônica; ou aproximações semi-clássicas sobre os operadores de modo de fótons e encontrar compressão nas quadraturas do modo de vibração.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Desenvolvemos neste trabalho, um estudo sobre engenharia de Hamiltonianos, onde mostramos como é possível obter processos paramétricos em sistemas envolvendo um íon armadilhado inserido numa cavidade com alto fator de qualidade e constantemente amplificado por um campo clássico, utilizando a técnica da aproximação adiabática.

Consideramos a interação de um íon de três níveis, submetido a um processo de amplificação linear, com um único modo da cavidade. Tratamos o caso ideal sem considerar perdas. Utilizamos o método da aproximação adiabática, para encontrar vários Hamiltonianos efetivos diferentes, que poderão ser escolhidos para governar a evolução do sistema segundo ajuste conveniente do regime de parâmetros, controlando as dessintonias envolvidas e a colocação da armadilha na cavidade. Em particular, para um dos Hamiltonianos efetivos, obtivemos uma alta taxa de compressão, em torno de 91%, utilizando os parâmetros atuais em Óptica Quântica.

Apresentamos um desenvolvimento detalhado do método da aproximação adiabática. Encontramos o regime de validade da aproximação adiabática, via integração formal, de forma a garantir que a escolha do regime de parâmetros se adequem aos valores selecionados pelo método aproximativo. Descobrimos duas formas diferentes de se realizar a aproximação adiabática, sendo que uma delas apresenta o inconveniente de necessitar de simetrização, um artifício matemático

pouco rigoroso. Em vista dos dois caminhos possíveis, sugerimos para a aplicação de tal método aproximativo, o caminho que não apresenta ambigüidades.

Por fim, os Hamiltonianos efetivos encontrados, e não analisados, continuarão a ser objetos de nossos estudos futuros, pois tais Hamiltonianos evidentemente geram estados comprimidos emaranhados entre o estado da cavidade e do modo de vibração, podendo ser utilizados para esquemas de proteção de estados. Podemos também fazer aproximações semi-clássicas obtendo compressão tanto no modo de fótons quanto no modo de fônons, mais interessante ainda, é a possibilidade de obter o operador de compressão do modo de vibração. Esperamos começar em breve a analisar numericamente todas as quatro interações que aqui foram deixadas de lado.

APÊNDICE A

QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Neste apêndice, vamos realizar de forma sucinta a quantização do campo de radiação eletromagnética [30,31,32]. Partindo das equações de Maxwell do eletromagnetismo clássico e da expansão do potencial vetor em termos dos modos normais do campo na cavidade, podemos, de forma simples, quantizar o campo pela substituição das amplitudes clássicas, por operadores que atuam no espaço de Hilbert.

As equações de Maxwell para o caso de não existirem fontes presentes, são expressas na forma,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\text{A.4})$$

que satisfazem as relação entre os campos,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (\text{A.6})$$

sendo $\mu_0 \varepsilon_0 = c^{-2}$, onde c é a velocidade da luz no vácuo, ε_0 a permissibilidade elétrica e μ_0 a permeabilidade magnética.

A Eq. (A.1) nos diz que \mathbf{B} é solenoidal, ou seja, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, enquanto a Eq. (A.2) será satisfeita se tivermos, $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t - \nabla V$, sendo \mathbf{A} e V os potenciais vetor e escalar, respectivamente.

Demonstra-se facilmente que as equações de Maxwell são invariantes sob transformações de calibre (gauge), podendo-se trabalhar com quaisquer \mathbf{A} e V , que respeitem as equações acima. Quando não existem fontes presentes, por motivo de simplicidade, o gauge de Coulomb é ideal, pois pode ser escrito como $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ e $V = 0$, de modo que os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} ficam completamente determinados somente pelo potencial vetor \mathbf{A} e dados por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (\text{A.8})$$

Substituindo as Eqs. (A.7) e (A.8) em (A.4), e usando as relações (A.5) e (A.6), vemos que o potencial vetor satisfaz a equação de onda,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (\text{A.9})$$

Para resolver a equação de onda, faremos algumas considerações. Assumiremos que o campo de radiação esteja contido em uma cavidade com paredes perfeitamente condutoras; assumiremos que a cavidade seja um cubo de volume total L^3 , de forma que se estivermos interessados em um campo de radiação no espaço livre, basta fazer o volume ir ao infinito no final dos cálculos.

Impondo condições de contorno sobre os campos, a solução da equação de onda terá um conjunto infinito (discreto) de soluções de modos normais ortogonais uns aos outros. Qualquer campo arbitrário na cavidade poderá ser expresso como uma soma desses modos normais, com amplitudes convenientes. Os modos normais formam um conjunto completo de funções ortogonais, que podem ser combinadas para expressarem qualquer campo na cavidade.

Para expandir o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, nos modos normais de vibração. usaremos o procedimento de separação de variáveis, de forma que a Eq. (A.9), se torna

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_l q_l(t) \mathbf{u}_l(\mathbf{r}), \quad (\text{A.10})$$

sendo, $1/\sqrt{\epsilon_0}$ a normalização, $q_l(t)$ a l -ésima amplitude temporal associada ao modo l , e $\mathbf{u}_l(\mathbf{r})$ o l -ésimo modo normal da expansão do potencial vetor.

Substituindo a Eq. (A.10) na equação de onda (A.9), teremos para cada l ,

$$\nabla^2 \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) + \frac{\omega_l^2}{c^2} \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{d^2 q_l}{dt^2} + \omega_l^2 q_l = 0, \quad (\text{A.12})$$

sendo ω_l^2 a frequência normal para cada modo l .

Obteremos as soluções estacionárias se impusermos que nas paredes da cavidade a componente tangencial de \mathbf{E} e a componente normal de \mathbf{B} sejam nulas respeitando as relações

$$u_l|_{\text{tan}} = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \times u_l|_{\text{normal}} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo as Eqs. (A.13) e (A.14) no gauge de Coulomb notamos que $\nabla \cdot \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) = 0$, deve ser satisfeita para todo modo l .

As soluções de (A.11) que satisfazem as condições de contorno (A.13) e (A.14) nos fornecem um conjunto discreto de modos normais que são mutuamente ortogonais e satisfazem a relação de normalização,

$$\int_{\text{cav}} \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_m(\mathbf{r}) d^3 r = \delta_{lm}, \quad (\text{A.15})$$

Devido às condições de contorno para a cavidade cúbica, os $\mathbf{u}_l(\mathbf{r})$ somente podem ser $\text{sen}(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r})$ ou $\text{cos}(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r})$, que são funções reais, assim como as amplitudes temporais que também o são (discutiremos mais adiante). Entretanto, para outras geometrias, teremos outros conjuntos completos de funções ortogonais.

Para ondas propagantes no espaço livre, por exemplo, teremos combinações lineares de exponenciais do tipo $e^{\pm i \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}}$, assim como as amplitudes temporais serão dadas por exponenciais $q_l(t) = C e^{\pm i \omega_l t}$. Condições de contorno e geométricas dos diversos sistemas possíveis determinam os diferentes modos normais, que são distinguidos pelo índice l . Em geral, vários números são necessários para se especificar o modo l de forma que, l é somente uma abreviatura para este conjunto de números.

As amplitudes $q_l(t)$ satisfazem a equação (A.12), que é a equação de movimento do oscilador harmônico, para cada modo. E a cada modo do campo, pode ser associado um oscilador harmônico de frequência ω_l .

A energia de um campo eletromagnético é dada por:

$$H_{campo} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2 \right) d^3r = \frac{1}{2} \int \left[\epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] d^3r. \quad (\text{A.16})$$

Substituindo a expressão para o potencial vetor dada por (A.10) em (A.16), obtemos,

$$\begin{aligned} H_{campo} &= \frac{1}{2} \sum_{l,m} \dot{q}_l \dot{q}_m \int_{cav} \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_m(\mathbf{r}) d^3r \\ &+ \frac{c^2}{2} \sum_{l,m} q_l q_m \int_{cav} \nabla \times \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{u}_m(\mathbf{r}) d^3r, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

e usando a relação de ortogonalidade (A.15), notamos que a primeira somatória de (A.17) reduz-se à $\sum_l \dot{q}_l^2$.

Usando a identidade vetorial

$$\nabla \times \mathbf{u}_l \cdot \nabla \times \mathbf{u}_m = \mathbf{u}_m \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_l) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_m \times \nabla \times \mathbf{u}_l),$$

na segunda integral de (A.17) e aplicando o teorema de Gauss, encontramos

$$\int_{cav} (\nabla \times \mathbf{u}_l \cdot \nabla \times \mathbf{u}_m) d^3r = \int_{cav} \mathbf{u}_m \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_l) d^3r + \int_{paredes} (\mathbf{u}_m \times \nabla \times \mathbf{u}_l) dS, \quad (\text{A.18})$$

onde dS é o elemento de área sobre as paredes da cavidade.

Na equação acima, percebemos que a integral de superfície se anula, devido à condição (A.14). Substituindo outra identidade vetorial,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_l) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_l) - \nabla^2 \mathbf{u}_l,$$

na primeira integral de (A.18), obtemos

$$\int_{cav} \mathbf{u}_m \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_l) d^3r = \int_{cav} \mathbf{u}_m \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_l) d^3r - \int_{cav} \mathbf{u}_m \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_l d^3r,$$

e notamos a primeira integral do lado esquerdo da Eq. acima é nula devido ao gauge de Coulomb. Substituindo-se a Eq. (A.11) e a relação de ortogonalidade (A.15) na expressão acima, obtemos

$$\int_{cav} \mathbf{u}_m \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_l) d^3r = \frac{\omega_l^2}{c^2} \int_{cav} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_l d^3r = \frac{\omega_l^2}{c^2} \delta_{lm}. \quad (\text{A.19})$$

E por fim, notamos que se substituirmos esta Eq. (A.19) na Eq. (A.17), encontramos

$$H_{campo} = \frac{1}{2} \sum_l (\dot{q}_l^2 + \omega_l^2 q_l^2) \equiv \sum_l H_l, \quad (\text{A.20})$$

que nos dá a energia total do campo eletromagnético, como uma somatória infinita das energias de cada oscilador harmônico de frequência ω_l , ou seja, a energia do campo é equivalente à soma de energias de infinitos modos de radiação desacoplados.

Quantizamos cada um dos l osciladores harmônicos desacoplados com energia clássica H_l do campo de radiação de forma usual, definindo os operadores não hermitianos de destruição e criação de uma excitação do campo de radiação, para um único modo do campo, como

$$\begin{aligned}\hat{a}_l &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_l}}(\omega_l \hat{q}_l + i\hat{p}_l), \\ \hat{a}_l^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_l}}(\omega_l \hat{q}_l - i\hat{p}_l),\end{aligned}\tag{A.21}$$

em que \hat{q}_l e \hat{p}_l são os operadores associados à amplitude temporal e ao seu momento, respectivamente. Existe uma completa analogia entre estes operadores de campo de radiação com a posição e o momento para o oscilador harmônico. Assim, \hat{a}_l e \hat{a}_l^\dagger são os operadores de destruição e de criação de uma excitação no modo l .

Os operadores de destruição e de criação, para quaisquer modos, respeitam as relações de comutação bosônicas usuais:

$$\begin{aligned}[\hat{a}_l, \hat{a}_m^\dagger] &= \delta_{lm}, \\ [\hat{a}_l, \hat{a}_m] &= 0 = [\hat{a}_l^\dagger, \hat{a}_m^\dagger].\end{aligned}$$

Podemos demonstrar com facilidade que as Eq. (A.21), satisfazem

$$\begin{aligned}\hat{a}_l(t) &= \hat{a}_l e^{-i\omega_l t}, \\ \hat{a}_l^\dagger(t) &= \hat{a}_l^\dagger e^{+i\omega_l t},\end{aligned}\tag{A.22}$$

e portanto podemos escrever o Hamiltoniano total do campo de radiação quantizado dentro da cavidade como

$$\hat{H}_{campo} = \sum_l \omega_l \left(\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + 1/2 \right).\tag{A.23}$$

É igualmente fácil obter a expressão para o potencial vetor quantizado, com o auxílio da Eq. (A.22), invertendo as Eqs. (A.21), e substituindo-as na Eq. (A.10), obtendo assim

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{2\omega_l \epsilon_0}} \sum_l \left(\hat{a}_l^\dagger e^{+i\omega_l t} + \hat{a}_l e^{-i\omega_l t} \right) \mathbf{u}_l(\mathbf{r}).\tag{A.24}$$

Para encerrar esta seção, é importante notar que o Hamiltoniano para o campo de radiação quantizado não apresenta dependência no volume da cavidade, de modo que para um campo livre, teremos o mesmo Hamiltoniano.

APÊNDICE B

QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETRÔNICO

Ao iniciarmos este procedimento, devemos atentar para a franca analogia entre o campo de luz e o campo eletrônico, levando-nos assim, a repetirmos os passos que nos conduziram à quantização do campo de radiação, para obtermos o campo eletrônico quantizado [30,31,32]. Um modo mais rigoroso para se fazer esta quantização é baseado no formalismo lagrangeano, porém, optamos por utilizar este método mais direto, pois complicações desnecessárias fogem ao escopo deste apêndice.

Os modos individuais do campo eletrônico obedecem à equação de Schrödinger,

$$H_{el}\phi_j(\mathbf{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right) \phi_j(\mathbf{x}) = E_j\phi_j(\mathbf{x}), \quad (\text{B.1})$$

sendo m a massa do elétron, $V(\mathbf{x})$ o potencial de Coulomb e E_j a energia do j -ésimo nível eletrônico. As interações entre os elétrons são desprezadas.

Podemos expandir uma função de onda geral em uma superposição de auto-funções (modos) como

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_j b_j \phi_j(\mathbf{x}),$$

em que, por analogia com a quantização do campo de luz, os coeficientes da expansão b_j tornar-se-ão operadores (\hat{b}_j) na quantização do campo eletrônico e $\Psi(\mathbf{x})$ tornar-se-á um operador de campo que será definido por

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{x}) &= \sum_j \hat{b}_j \phi_j(\mathbf{x}), \\ \Psi^\dagger(\mathbf{x}) &= \sum_j \hat{b}_j^\dagger \phi_j^*(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{B.2}$$

As funções $\phi_j(\mathbf{x})$ obedecerão a relação de ortogonalidade

$$\int \phi_i^*(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) d^3x = \delta_{ij}.\tag{B.3}$$

Para derivar um novo tipo de equação de Schrödinger que descreva o campo eletrônico quantizado, partiremos de uma expressão para a energia total. Uma expressão que faz papel análogo à energia do campo (H_{campo}), que é o valor esperado do Hamiltoniano H_{el} , dado por

$$\hat{H}_{el} = \int \Psi^\dagger(\mathbf{x}) [H_{el}] \Psi(\mathbf{x}) d^3x,\tag{B.4}$$

que poderá ser rescrito com o auxílio das Eqs. (B.1), (B.2), (B.3) e (B.4) como

$$\begin{aligned}\hat{H}_{el} &= \int \sum_i \hat{b}_i^\dagger \phi_i^*(\mathbf{x}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] \sum_j \hat{b}_j \phi_j(\mathbf{x}) d^3x \\ &= \sum_{ij} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \int \phi_i^*(\mathbf{x}) [E_j] \phi_j(\mathbf{x}) d^3x \\ &= \sum_{ij} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j E_j \delta_{ij},\end{aligned}$$

e que pode ser rescrito elegantemente na forma

$$\hat{H}_{el} = \sum_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j E_j,\tag{B.5}$$

sendo que $\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j$ é interpretado como o “operador número” para o número de ocupação de elétrons no nível de energia j .

Sendo o estado de vácuo definido como, $\hat{b}_j |0\rangle = 0$, um estado com um elétron no j -ésimo nível de energia é descrito por $\hat{b}_j^\dagger |0\rangle$. O princípio de exclusão de

Pauli exclui a possibilidade de termos dois ou mais elétrons no mesmo estado, então o estado formado aplicando-se duas vezes o operador de criação sobre o vácuo não pode existir, $\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0\rangle = 0$, mais ainda, para qualquer estado $|\phi\rangle$, a relação $\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |\phi\rangle = 0$ deve ser satisfeita.

Os operadores de campo eletrônicos deverão obedecer às relações de anticomutação fermiônica

$$\begin{aligned} \{\hat{b}_j, \hat{b}_k^\dagger\} &= \delta_{jk}, \\ \{\hat{b}_j^\dagger, \hat{b}_k^\dagger\} &= 0 = \{\hat{b}_j, \hat{b}_k\}. \end{aligned}$$

Vamos agora analisar o caso em que temos um único átomo, com um único elétron, que pode assumir apenas dois níveis de energia: 1 ou 2; que serão os níveis fundamental e excitado.

O Hamiltoniano em segunda quantização para este caso será dado por

$$\hat{H}_{el} = \sum_{j=1}^2 \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j E_j = \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 E_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 E_2, \quad (\text{B.6})$$

sendo $E_j = \omega_j$. Assumindo que o ponto de energia zero seja exatamente o valor médio entre E_2 e E_1 , segue que,

$$\begin{aligned} \omega_2 - \omega_1 &= \omega, \\ \omega_2 &= -\omega_1 = \frac{\omega}{2}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

em que ω (temos $\hbar=1$) é à diferença de energia entre os níveis E_2 e E_1 , que coincide em módulo a diferença de frequência entre os níveis excitado e fundamental.

Substituindo as relações (B.7) na Eq. (B.6), obtemos o Hamiltoniano em segunda quantização para o campo eletrônico.

$$\hat{H}_{el} = \frac{\omega}{2} (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2). \quad (\text{B.8})$$

Podemos utilizar a álgebra de spin, se lembrarmos que: sempre que uma excitação eletrônica é criada no estado excitado (2) outra é destruída no estado fundamental (1), e vice-versa. Chamaremos de operadores de pseudo-spin aos operadores de campo eletrônico, pois respeitam a mesma regra de equivalência, dada por

$$\begin{aligned}\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 &= \hat{\sigma}_z \quad (\text{operador de transição eletrônica}), \\ \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 &= \hat{\mathbf{1}} \quad (\text{operador identidade}), \\ \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1 &= \hat{\sigma}_+ \quad (\text{operador de levantamento de nível eletrônico}), \\ \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 &= \hat{\sigma}_- \quad (\text{operador de abaixamento de nível eletrônico}).\end{aligned}$$

Utilizando a equivalência entre as álgebras, podemos reescrever o Hamiltoniano (B.8) como

$$\hat{H}_{el} = \frac{\omega}{2} \hat{\sigma}_z. \quad (\text{B.9})$$

Portanto, obtivemos o Hamiltoniano em segunda quantização, para o campo eletrônico de um elétron, num átomo com dois níveis possíveis de energia.

APÊNDICE C

INVARIÂNCIA DA EQUAÇÃO DE LIOUVILLE-VON NEUMANN

Seja a Equação de Liouville-Von Neumann dada por

$$i \frac{\partial \rho_S}{\partial t} = [H^S, \rho_S], \quad (\text{C.1})$$

escrevendo o Hamiltoniano em Schrödinger como

$$H^S = H_0^S + V^S,$$

vamos demonstrar que a equação de Liouville-Von Neumann Eq. (C.1) não se altera sob as transformações apresentadas no Capítulo 4.

Dadas as transformações unitárias

$$\begin{aligned} U_1 &= e^{-iH_0^S t}, \\ U_2 &= e^{-i\Delta(\sigma_{ee} + \sigma_{gg}) t}, \\ U_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{ee} + \sigma_{eg}) + \frac{d^*}{|d|} (\sigma_{ge} - \sigma_{gg}) \right] + \sigma_{ii}, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

podemos criar uma transformação U_{21} que seja a associação de U_2 e U_1 definida como

$$U_{21} = U_2 U_1 = e^{-i(H_0^S + \Delta\sigma_{ee} + \Delta\sigma_{gg}) t}, \quad (\text{C.3})$$

e obter as derivadas temporais na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{21}}{\partial t} &= -i(H_0^S + \Delta\sigma_{ee} + \Delta\sigma_{gg}) U_{21}, \\ \frac{\partial U_{21}^\dagger}{\partial t} &= i(H_0^S + \Delta\sigma_{ee} + \Delta\sigma_{gg}) U_{21}^\dagger, \\ \frac{\partial U_3}{\partial t} &= \frac{\partial U_3^\dagger}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

O Hamiltoniano H_3 que foi obtido no Capítulo 4, que pode ser rescrito como

$$H_3 = U_3^\dagger H_2 U_3 = U_3^\dagger \left(U_{21}^\dagger H^S U_{21} - H_0^S - \Delta\sigma_{ee} - \Delta\sigma_{gg} \right) U_3. \quad (\text{C.5})$$

Sabendo que o operador densidade se transforma como se segue

$$\begin{cases} \rho_3 = U_3^\dagger U_{21}^\dagger \rho_S U_{21} U_3, \\ \rho_S = U_{21} U_3 \rho_3 U_3^\dagger U_{21}^\dagger, \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

podemos substituir ρ_S , dado pela Eq. (C.6), no lado esquerdo da Eq. de Liouville-Von Neumann dado pela EQ. (C.1). Abrindo as derivadas temporais, encontramos

$$\begin{aligned} iU_{21}U_3 \frac{\partial \rho_3}{\partial t} U_3^\dagger U_{21}^\dagger &= [H^S, \rho_S] - i \frac{\partial U_{21}}{\partial t} U_3 \rho_3 U_3^\dagger U_{21}^\dagger - iU_{21}U_3 \rho_3 U_3^\dagger \frac{\partial U_{21}^\dagger}{\partial t} \\ &= [H^S, \rho_S] - [H_0^S + \Delta\sigma_{ee} + \Delta\sigma_{gg}, U_{21}U_3 \rho_3 U_3^\dagger U_{21}^\dagger] \\ &= [H^S, \rho_S] - [H_0^S + \Delta\sigma_{ee} + \Delta\sigma_{gg}, \rho_S], \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

onde usamos as relações dadas nas Eqs. (C.4) e (C.6). Aplicando as transformações $U_3^\dagger U_{21}^\dagger$ do lado esquerdo dos dois lados da igualdade em (C.7) e $U_{21}U_3$ no lado direito, encontramos

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \rho_3}{\partial t} &= \left[U_3^\dagger \left(H^S - H_0^S + \Delta\sigma_{ee} + \Delta\sigma_{gg} \right) U_3, \rho_3 \right] \\ &= [U_3^\dagger H_2 U_3, \rho_3], \end{aligned}$$

onde usamos a Eq.(C.5), e assim

$$i \frac{\partial \rho_3}{\partial t} = [H_3, \rho_3]. \quad (\text{C.8})$$

Portanto a equação de Liouville-Von Neumann pode ser escrita de forma análoga à que tínhamos na representação de Schrödinger.

APÊNDICE D

INTEGRAÇÃO FORMAL E CONDIÇÕES DE APLICAÇÃO DA APROXIMAÇÃO ADIABÁTICA

Vamos descobrir quais as condições que devem ser impostas sobre o sistema para que a aproximação adiabática possa ser aplicada sobre os elementos do operador densidade que descreve as transições eletrônicas que envolvem o estado intermediário, ou seja, $\dot{\rho}_{-i} = \dot{\rho}_{+i} \cong 0$. As Eqs. (4.29) nos dão

$$\begin{aligned} i\dot{\rho}_{+i} &= -(\Delta - |\Omega|)\rho_{+i} + R\rho_{ii} - \rho_{++}R - \rho_{+-}S, \\ i\dot{\rho}_{-i} &= -(\Delta + |\Omega|)\rho_{-i} + S\rho_{ii} - \rho_{--}S - \rho_{-+}R, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

que podem ser integradas formalmente. Realizaremos a integração para a primeira equação de (D.1), o resultado poderá ser estendido para a segunda sem qualquer problema. Assim

$$i\left[\dot{\rho}_{+i} - i(\Delta - |\Omega|)\rho_{+i}\right] = R\rho_{ii} - \rho_{++}R - \rho_{+-}S, \quad (\text{D.2})$$

onde vemos que o lado esquerdo da igualdade pode ser apresentado como um único operador

$$T = R\rho_{ii} - \rho_{++}R - \rho_{+-}S, \quad (\text{D.3})$$

Olhando para os operadores R e S apresentados na Eq. (4.22) e com o auxílio da Eq. (4.15), podemos mostrar que o lado direito da igualdade acima pode ser quebrada em duas partes,

$$T = T_1 e^{i\delta_1 t} + T_2 e^{i\delta_2 t},$$

onde δ_1 e δ_2 representam as dependências temporais explícitas que vêm dos termos do Hamiltoniano. Os operadores T_1 e T_2 possuem dependência temporal

implícita, vinda do fato de envolverem elementos do operador densidade. Assim, (D.2) pode ser escrita como

$$i\left[\dot{\rho}_{+i} - i(\Delta - |\Omega|)\rho_{+i}\right] = T_1 e^{i\delta_1 t} + T_2 e^{i\delta_2 t}, \quad (\text{D.4})$$

que pode ser melhorada se usarmos o fato de

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_{+i} e^{-i(\Delta - |\Omega|)t} \right] &= \left[\dot{\rho}_{+i} - i(\Delta - |\Omega|)\rho_{+i} \right] e^{-i(\Delta - |\Omega|)t} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_{+i} e^{-i(\Delta - |\Omega|)t} \right] e^{i(\Delta - |\Omega|)t} &= \left[\dot{\rho}_{+i} - i(\Delta - |\Omega|)\rho_{+i} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Substituindo a Eq. (D.5) na Eq. (D.4), encontramos

$$\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} \left[i\rho_{+i} e^{-i(\Delta - |\Omega|)t} \right] dt = \int_0^\tau \left(T_1 e^{i\delta_1 t} + T_2 e^{i\delta_2 t} \right) e^{-i(\Delta - |\Omega|)t} dt, \quad (\text{D.6})$$

que será integrada por partes, resultando

$$\begin{aligned} i \left[\rho_{+i}(\tau) e^{-i(\Delta - |\Omega|)\tau} - \rho_{+i}(0) \right] &= \frac{iT_1}{\Delta - |\Omega|} \left(1 - \frac{\delta_1}{\Delta - |\Omega|} \right) e^{-i(\Delta - |\Omega| - \delta_1)t} \Bigg|_0^\tau + \frac{\dot{T}_1}{(\Delta - |\Omega|)^2} e^{-i(\Delta - |\Omega| - \delta_1)t} \Bigg|_0^\tau \\ &+ \frac{iT_2}{\Delta - |\Omega|} \left(1 - \frac{\delta_2}{\Delta - |\Omega|} \right) e^{-i(\Delta - |\Omega| - \delta_2)t} \Bigg|_0^\tau + \frac{\dot{T}_2}{(\Delta - |\Omega|)^2} e^{-i(\Delta - |\Omega| - \delta_2)t} \Bigg|_0^\tau \\ &+ O \left[(\Delta - |\Omega|)^3 \right]. \end{aligned}$$

A expansão pode ser truncada se tivermos

$$\frac{\delta_1}{\Delta - |\Omega|} \approx \frac{\delta_2}{\Delta - |\Omega|} \ll 1, \quad (\text{D.7})$$

que corresponde a termos as dependências temporais explícitas dos elementos do Hamiltoniano pequenas comparadas com a dessintonia Δ .

Considerando

$$\frac{T_1}{\Delta - |\Omega|} \approx \frac{T_2}{\Delta - |\Omega|} \approx \frac{T}{\Delta - |\Omega|} \ll 1,$$

que não deve ser entendida como uma comparação entre operadores e a dessintonia Δ , mas que corresponde, se olharmos para as Eqs. (4.15) e (4.22), a termos os acoplamentos muito menores do que esta dessintonia, encontramos

$$\frac{g_1}{\Delta - |\Omega|} \approx \frac{g_2}{\Delta - |\Omega|} \ll 1. \quad (\text{D.8})$$

Dissemos anteriormente que a aproximação adiabática também era conhecida como regime de acoplamento fraco, isto se deve ao fato de necessitarmos que os elementos diagonais do Hamiltoniano sejam muito maiores do que os termos de acoplamento fora da diagonal.

Com as considerações acima, vemos que a integração (D.6) reduziu-se a

$$i \left[\rho_{+i}(\tau) e^{-i(\Delta - |\Omega|)\tau} - \rho_{+i}(0) \right] = \frac{i}{\Delta - |\Omega|} \left(T_1 e^{-i(\Delta - |\Omega| - \delta_1)\tau} + T_2 e^{-i(\Delta - |\Omega| - \delta_2)\tau} \right) \Bigg|_0^\tau,$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \left\{ (\Delta - |\Omega|) \rho_{+i}(t) - T_1(t) e^{i\delta_1 t} - T_2(t) e^{i\delta_2 t} \right\} e^{-i(\Delta - |\Omega|)t} \\ & = (\Delta - |\Omega|) \rho_{+i}(0) - T_1(0) - T_2(0). \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Reconhecendo que o lado direito da igualdade acima possui apenas operadores constantes, podemos definir o operador

$$K = (\Delta - |\Omega|) \rho_{+i}(0) - T_1(0) - T_2(0),$$

de forma a escrevermos

$$(\Delta - |\Omega|) \rho_{+i}(t) - T_1 e^{i\delta_1 t} - T_2 e^{i\delta_2 t} = K e^{i(\Delta - |\Omega|)t}. \quad (\text{D.10})$$

Tomando a média temporal sobre o lado direito da Eq. (D.10)

$$M = \frac{1}{T} \int_0^T K e^{i(\Delta - |\Omega|)t} dt = K e^{i(\Delta - |\Omega|)T/2} \frac{\sin[(\Delta - |\Omega|)T/2]}{(\Delta - |\Omega|)T/2},$$

vemos que, se a média for feita sobre um intervalo de tempo suficientemente grande, $(\Delta - |\Omega|)T \gg 1$, ela se anulará, mas isto equivale a dizer que a escala de tempo de interesse em nosso problema, terá de ser grande comparada com $1/(\Delta - |\Omega|)$. Desta forma, teremos $M \ll 1$ e o lado direito da integração (D.10) pode ser tomada como nula, restando

$$\begin{aligned} (\Delta - |\Omega|) \rho_{+i}(t) &= T_1 e^{i\delta_1 t} + T_2 e^{i\delta_2 t} = T \\ \Rightarrow \rho_{+i}(t) &= \frac{T}{\Delta - |\Omega|}, \end{aligned}$$

substituindo a Eq. (D.3) na equação acima, obtemos finalmente

$$\rho_{+i}(t) = \frac{1}{\Delta - |\Omega|} (R\rho_{ii} - \rho_{++}R - \rho_{+-}S) = \left(\frac{\Delta + |\Omega|}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) (R\rho_{ii} - \rho_{++}R - \rho_{+-}S),$$

que corresponde à Eq. (4.30), obtida pela imposição da condição adiabática. Se realizarmos o mesmo raciocínio para ρ_{-i} , encontraremos uma expressão, que será idêntica à Eq. (4.31), dada por

$$\rho_{-i}(t) = \frac{1}{(\Delta + |\Omega|)} (S\rho_{ii} - \rho_{--}S - \rho_{-+}R) = \left(\frac{\Delta - |\Omega|}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) (S\rho_{ii} - \rho_{--}S - \rho_{-+}R).$$

Portanto, as conclusões que tiramos ao realizar a integração formal sobre os elementos de transição para o nível intermediário do operador densidade, são:

1. Os acoplamentos devem ser muito menores do que os termos diagonais do Hamiltoniano efetivo, pois das integrações obtivemos

$$\begin{aligned} \rho_{+i} &\rightarrow |g_1|, |g_2| \ll \Delta - |\Omega|, \\ \rho_{-i} &\rightarrow |g_1|, |g_2| \ll \Delta + |\Omega|, \end{aligned} \tag{D.11}$$

que podem ser reorganizadas de forma a resultarem na condição

$$|\Omega| \ll \Delta. \tag{D.12}$$

2. As dependências temporais explícitas devem ser muito pequenas em comparação com a dessintonia do nível intermediário

$$\delta_1, \delta_2 \ll \Delta. \tag{D.13}$$

APÊNDICE E

APROXIMAÇÃO ADIABÁTICA NA BASE E-G

Durante o desenvolvimento desta tese, percebemos que tínhamos de rodar a base $\{|e\rangle, |g\rangle, |i\rangle\}$ para a nova base $\{|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle\}$ antes de realizarmos a aproximação adiabática, pois aplicar a aproximação aos elementos $\rho_{ei} \equiv \rho_{ig} \equiv 0$, conduzia-nos à necessidade de simetrização dos termos do Hamiltoniano adiabático final.

Entendemos a simetrização como um artifício muito radical, que não gostaríamos de lançar mão com freqüência. Não nos sentimos atraídos pela idéia de fazer simetrizações em sistemas quânticos.

Neste apêndice, vamos mostrar como a aproximação adiabática na base $\{|e\rangle, |g\rangle, |i\rangle\}$ requer a simetrização como forma de restituir os resultados encontrados para a base $\{|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle\}$.

Os nove elementos de evolução do operador densidade, obtidos a partir da equação de Liouville-Von Neumann, são

$$\begin{aligned}
i\dot{\rho}_{ee} &= H_{ee}\rho_{ee} - \rho_{ee}H_{ee} + H_{eg}\rho_{ge} - \rho_{eg}H_{ge} + H_{ei}\rho_{ie} - \rho_{ei}H_{ie} , \\
i\dot{\rho}_{eg} &= H_{ee}\rho_{eg} - \rho_{ee}H_{eg} + H_{eg}\rho_{gg} - \rho_{eg}H_{gg} + H_{ei}\rho_{i-} - \rho_{ei}H_{i-} , \\
i\dot{\rho}_{ei} &= H_{ee}\rho_{ei} - \rho_{ee}H_{ei} + H_{eg}\rho_{gi} - \rho_{eg}H_{gi} + H_{ei}\rho_{ii} - \rho_{ei}H_{ii} , \\
i\dot{\rho}_{ge} &= H_{ge}\rho_{ee} - \rho_{ge}H_{ee} + H_{gg}\rho_{ge} - \rho_{gg}H_{ge} + H_{gi}\rho_{ie} - \rho_{gi}H_{ie} , \\
i\dot{\rho}_{gg} &= H_{ge}\rho_{eg} - \rho_{ge}H_{eg} + H_{gg}\rho_{gg} - \rho_{gg}H_{gg} + H_{gi}\rho_{ig} - \rho_{gi}H_{ig} , \quad (\text{E.1}) \\
i\dot{\rho}_{gi} &= H_{ge}\rho_{ei} - \rho_{ge}H_{ei} + H_{gg}\rho_{gi} - \rho_{gg}H_{gi} + H_{gi}\rho_{ii} - \rho_{gi}H_{ii} , \\
i\dot{\rho}_{ie} &= H_{ie}\rho_{ee} - \rho_{ie}H_{ee} + H_{ig}\rho_{ge} - \rho_{ig}H_{ge} + H_{ii}\rho_{ie} - \rho_{ii}H_{ie} , \\
i\dot{\rho}_{ig} &= H_{ie}\rho_{eg} - \rho_{ie}H_{eg} + H_{ig}\rho_{gg} - \rho_{ig}H_{gg} + H_{ii}\rho_{ig} - \rho_{ii}H_{ig} , \\
i\dot{\rho}_{ii} &= H_{ie}\rho_{ei} - \rho_{ie}H_{ei} + H_{ig}\rho_{gi} - \rho_{ig}H_{gi} + H_{ii}\rho_{ii} - \rho_{ii}H_{ii} .
\end{aligned}$$

O Hamiltoniano nesta base é dado por

$$\begin{aligned}
 H_2 = & -\Delta(\sigma_{gg} + \sigma_{ee}) + (\Omega d\sigma_{eg} + \Omega^* d^* \sigma_{ge}) \\
 & + (g_2^* A^\dagger \sigma_{ei} + g_2 A \sigma_{ie}) + (g_1 A \sigma_{gi} + g_1^* A^\dagger \sigma_{ig}).
 \end{aligned} \tag{E.2}$$

Substituindo o Hamiltoniano (E.2) nas Eqs. (E.1), obtemos

$$\begin{aligned}
 i\dot{\rho}_{ee} &= \Delta(d\rho_{ge} - d^* \rho_{eg}) + (g_2^* A^\dagger \rho_{ie} - g_2 \rho_{ei} A), \\
 i\dot{\rho}_{eg} &= -\Delta d(\rho_{ee} - \rho_{gg}) + g_2^* A^\dagger \rho_{ig} - g_1^* \rho_{ei} A^\dagger, \\
 i\dot{\rho}_{ei} &= -\Delta \rho_{ei} + (g_2^* A^\dagger \rho_{ii} - g_2^* \rho_{ee} A^\dagger) + \Delta d \rho_{ei} - g_1 \rho_{eg} A, \\
 i\dot{\rho}_{ge} &= \Delta d^*(\rho_{ee} - \rho_{gg}) - g_2 \rho_{gi} A - g_1 A \rho_{ie}, \\
 i\dot{\rho}_{gg} &= \Delta(d^* \rho_{eg} - d \rho_{ge}) + (g_1 A \rho_{ig} - g_1^* \rho_{gi} A^\dagger), \\
 i\dot{\rho}_{gi} &= -\Delta \rho_{gi} + (g_1 A \rho_{ii} - g_1 \rho_{gg} A) + \Delta d^* \rho_{ei} - g_2^* \rho_{ge} A^\dagger, \\
 i\dot{\rho}_{ie} &= \Delta \rho_{ie} - (g_2 \rho_{ii} A - g_2 A \rho_{gg}) - \Delta d^* \rho_{ig} - g_1^* A^\dagger \rho_{ge}, \\
 i\dot{\rho}_{ig} &= \Delta \rho_{gi} - (g_1^* \rho_{ii} A^\dagger - g_1^* A^\dagger \rho_{gg}) - \Delta d \rho_{ei} - g_2 A \rho_{ge}, \\
 i\dot{\rho}_{ii} &= (g_2 A \rho_{ei} - g_2^* \rho_{eg} A^\dagger) + (g_1^* A^\dagger \rho_{gi} - g_1 \rho_{ig} A).
 \end{aligned} \tag{E.3}$$

Aplicando a condição adiabática $\rho_{ei} \cong \rho_{ig} \cong 0$, aos elementos dados pelas

Eqs (E.3) encontramos

$$\begin{aligned}
 \rho_{gi} &= \left(\frac{\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left[(g_1 A + d^* g_2^* A^\dagger) \rho_{ii} - g_1 (\rho_{gg} + d^* \rho_{eg}) A - g_2^* (\rho_{ge} + d^* \rho_{ee}) A^\dagger \right], \\
 \rho_{ie} &= \left(\frac{\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left[\rho_{ii} (g_2 A + d^* g_1^* A^\dagger) - g_1^* A^\dagger (d^* \rho_{gg} + \rho_{eg}) - g_2 A (d^* \rho_{eg} + \rho_{ee}) \right].
 \end{aligned} \tag{E.4}$$

Substituindo os elementos calculados nas Eqs. (E.4) em $i\dot{\rho}_{ii}$ e $i(\dot{\rho}_{ee} + \dot{\rho}_{gg})$,

encontramos

$$i(\dot{\rho}_{ee} + \dot{\rho}_{gg}) = \left(\frac{\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left\{ \begin{aligned} & \rho_{ge} \left(d |g_2|^2 A^\dagger A + g_1^* g_2^* A^{\dagger 2} \right) - \left(d |g_1|^2 A^\dagger A + g_1^* g_2^* A^{\dagger 2} \right) \rho_{ge} \\ & + \rho_{eg} \left(d^* |g_1|^2 A^\dagger A + g_1 g_2 A^2 \right) - \left(d^* |g_2|^2 A^\dagger A + g_1 g_2 A^2 \right) \rho_{eg} \\ & - \rho_{gg} \left(|g_1|^2 AA^\dagger + dg_1 g_2 A^2 \right) - \left(|g_1|^2 AA^\dagger + d^* g_1^* g_2^* A^{\dagger 2} \right) \rho_{gg} \\ & - \rho_{ee} \left(|g_2|^2 A^\dagger A + d^* g_1^* g_2^* A^{\dagger 2} \right) - \left(|g_2|^2 A^\dagger A + dg_1 g_2 A^2 \right) \rho_{ee} \end{aligned} \right\},$$

e também

$$i\dot{\rho}_{ii} = \left(\frac{\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left\{ \begin{aligned} & (dg_1 g_2 - d^* g_1^* g_2^*) (\rho_{ee} - \rho_{gg}) \\ & + |g_2|^2 A (d^* \rho_{eg} - d \rho_{ge}) A^\dagger - |g_1|^2 A^\dagger (d^* \rho_{eg} - d \rho_{ge}) A \\ & + \left(|g_2|^2 AA^\dagger + |g_1|^2 A^\dagger A + dg_1 g_2 A^2 + d^* g_1^* g_2^* A^{\dagger 2} \right) \rho_{ii} \\ & - \rho_{ii} \left(|g_2|^2 AA^\dagger + |g_1|^2 A^\dagger A + dg_1 g_2 A^2 + d^* g_1^* g_2^* A^{\dagger 2} \right) \end{aligned} \right\},$$

Comparadas as equações acima com as equações abaixo

$$i(\dot{\rho}_{ee} + \dot{\rho}_{gg}) = (H_{ee}^A \rho_{ee} - \rho_{ee} H_{ee}^A) + (H_{gg}^A \rho_{gg} - \rho_{gg} H_{gg}^A) \\ + (H_{eg}^A \rho_{ge} - \rho_{ge} H_{eg}^A) + (H_{ge}^A \rho_{eg} - \rho_{eg} H_{ge}^A),$$

$$i\dot{\rho}_{ii} = H_{ii}^A \rho_{ii} - \rho_{ii} H_{ii}^A,$$

obtidas a partir das Eqs. (E.1) e do Hamiltoniano adiabático geral, não encontramos concordância expressa entre os termos que deveríamos obter para o Hamiltoniano adiabático.

Em outras palavras, encontramos para os mesmos elementos, diferentes expressões, notadamente

$$H_{ee}^A \rightarrow \left(\frac{-\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left(|g_2|^2 A^\dagger A + d^* g_1^* g_2^* A^{\dagger 2} \right) \neq \left(\frac{-\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left(|g_2|^2 A^\dagger A + dg_1 g_2 A^2 \right),$$

$$H_{gg}^A \rightarrow \left(\frac{-\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left(|g_1|^2 AA^\dagger + dg_1 g_2 A^2 \right) \neq \left(\frac{-\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left(|g_1|^2 AA^\dagger + d^* g_1^* g_2^* A^{\dagger 2} \right),$$

$$H_{eg}^A \rightarrow \left(\frac{-\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left(d |g_2|^2 A^\dagger A + g_1^* g_2^* A^{\dagger 2} \right) \neq \left(\frac{-\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left(d^* |g_1|^2 AA^\dagger + g_1^* g_2^* A^{\dagger 2} \right),$$

$$H_{ge}^A \rightarrow \left(\frac{-\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left(d^* |g_1|^2 AA^\dagger + g_1 g_2 A^2 \right) \neq \left(\frac{-\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \right) \left(d^* |g_1|^2 A^\dagger A + g_1 g_2 A^2 \right).$$

Note que temos duas expressões diferentes para cada termo do Hamiltoniano adiabático. A única maneira de fazer com que eles coincidam, é simetrizá-los, ou seja, tomarmos as duas expressões diferentes, somá-las e dividir por dois. Figurativamente, faremos

$$H'_{jl} \neq H''_{jl}$$

$$\Rightarrow H_{jl} = \frac{H'_{jl} + H''_{jl}}{2},$$

sendo $(j, l = e, g, i)$. Somente com esta simetria recuperaremos os resultados obtidos no Capítulo 4.

O elemento adiabático para o nível intermediário, é encontrado corretamente, apenas a condição sobre o operador densidade aparece aqui, um pouco diferente da obtida no Capítulo 4, podendo ser escrita como

$$d^* \rho_{eg} = d \rho_{ge},$$

$$\rho_{ee} = \rho_{gg},$$

mas a interpretação ainda será a mesma. Se tivermos o íon inicialmente no nível intermediário, então todos os elementos do operador densidade que não o elemento ρ_{ii} serão sempre nulos em todos os tempos, pois o íon não transiciona para os outros níveis, satisfazendo a condição requerida para o Hamiltoniano adiabático do nível intermediário. Caso o sistema não inicie no estado intermediário, então não existe motivo para procurarmos estabelecer o elemento H_{ii}^A .

Portanto demonstramos que é mais conveniente fazer a aproximação adiabática, não na base $\{|e\rangle, |g\rangle, |i\rangle\}$, mas na base rodada $\{|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle\}$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Planck, M. Verh. dt. Phys. Ges. **2**, 2002 (1900)
 - [2] Einstein, A. Annln. Phys. **17**, 132 (1905)
 - [3] Lewis, G. N. Nature **118**, 874 (1926)
 - [4] Einstein, A. Phys. Z. **18**, 121 (1917)
- As referências [1], [2] e [4] foram reimpressas em inglês e discutidas em detalhes por Ter Haar, “*the old theory*” (Oxford Pergamon (1967))
- [5] Allen, L. e Eberly, J. H. *Optical rersonance and two-levels atoms* (New York Dover)
 - [6] Serra R. M. *et al.*, Phys. Rev A **64**, 033419 (2001)
 - [7] Yuen, H. P Phys. Rev. A **13**, 02226 (1976)
 - [8] Walls, D. F. Nature 306, **141** (1983)
 - [9] Knight, P. L. J. Mod. Opt. B **34**, 709 (1987)
 - [10] Dodonov, V. V., J. Opt. B: Quantun Semiclass. Opt. **4**, R1 (2002)
 - [11] Stoler, D., Phys. Lett. **33** 1397 (1974)
 - [12] Milburn, G. J., Opt. Acta **31**, 671 (1984)
 - [13] Kimble, H. J. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **39**, 691 (1977)
 - [14] Yuen, H. P *et al.*, Opt. Lett. **4**, 334 (1979)
 - [15] Milburn, G. J. *et al.*, J. Opt. Soc. Am. B **1**, 390 (1984)
 - [16] Yuen, H. P *et al.*, IEEE Trans. Inf. Theory. **24**, 657 (1978)
 - [17] Wineland, D. J. *et al.*, Phys. Rev. A, **50**, 67 (1994)
 - [18] Hollenhorst, J. N., Phys. Rev. D. **19**, 1669 (1979)
 - [19] Caves, C. M. *et al.*, Rev. Mod. Phys. **52**, 341 (1980)
 - [20] Jaynes, E. T. e Cummings, F. W. ,Proc. IEEE **51**, 63 (1963)
 - [21] Gerry, C. C. e Ghosh, H.,Phys. Lett A **229**, 17 (1997)
 - [22] Kuklinski, J. R. e Madajczyk, J. L., Phys. Rev. A **37**, 3175 (1988)

- [23] Mark Hillery, Phys. Rev. A **39**, 1556 (1989)
- [24] Slusher, R. E. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **55**, 2409 (1985)
- [25] Schelby, R. M. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **57**, 691 (1986)
- [26] Wu, L. A. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2520 (1986)
- [27] Villas-Bôas, C. J., de Almeida, N. G., Serra, R. M., e Moussa, M. H. Y., Phys Rev. A **68**, 061801 (2003)
- [28] Yoo, H. e Eberly, J. H. Phys. Reports **118** , 239 (1985)
- [29] Ejnisman, R. e Nussenzveig, P. Rev. Bras. de Ens. de Fís. **19** n.1, 90 (1997)
- [30] Walls, D. F. e Milburn, G. J., "*Quantum Optics*" (Springer-Verlag, Berlin (1994))
- [31] Haken, H., "*Waves, Photons and Atoms*" (North-Holland, Amsterdam (1981))
V.1
- [32] Orszag, M., "*Quantum Optics*" (Springer-Verlag, Berlin (2000))
- [33] Sermião, V. B., Vidiella-Barranco, A. e Roversi, J. A. Phys. Rev. A **66**, 063403 (2002)
- [34] Steinbach, J. *et al.* Phys. Rev. A **56**, 4815 (1997)
- [35] Parkins, A. S. e Larsabal, E., Phys. Rev. A **63**, 012304 (2000)
- [36] Parkins, A. S. e Kimble, H. J., J. Opt. B. **1**, **496** (1999)
- [37] Shelly Sharma, S. e Vidiella-Barranco, A., Phys. Lett. A **309**, 345 (2002)
- [38] Buzek, V. *et al.* Phys. Rev. A **56**, 2352 (1997)
- [39] Cirac, J. I., Lewenstein, M. e Zoller, P., Phys. Rev. A **51**, 1650 (1995)
- [40] Sermião, F. L., Vidiella-Barranco, A., e Roversi, J. A., Phys. Rev. A **64**, 024305 (2001)
- [41] Sermião, F. L., Vidiella-Barranco, A., e Roversi, J. A., Phys. Lett. A **299**, 423 (2002)
- [42] XuBo Zou, Pahlke, K. e Mathis, W, Phys. Rev. A **65**, 064303 (2002)
- [43] Gosch, P. K., "*Ion Traps*" (Oxford Science Publications, Oxford (200))
- [44] Höffges, J. T. et al., Opts. Comm. **133**, 170 (1997)

- [45] Wineland, D. J. *et al.*, Phys. Rev. A **36** 2220 (1987)
- [46] Dario Tavares de Castro Neto, Tese de Doutorado: “Multiestabilidade em Sistemas com um íon Aprisionado” (UFRJ – Rio de Janeiro (2004))
- [47] Raimond, J. M., Brune, M. e Haroche S., Rev. Mod. Phys **73**, 565 (2001)
- [48] Osnaghi, S. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 037902 (2001)
- [49] Weidinger, M. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 3795 (1999)