



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Engenharia de Hamiltonianos e Aplicações em Teoria da Informação Quântica

Gentil Dias de Moraes Neto

São Carlos-SP
-Março-2008-



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Engenharia de Hamiltonianos e Aplicações em Teoria da Informação Quântica

Gentil Dias de Moraes Neto

Dissertação apresentada ao departamento
de Física da Universidade Federal de
São Carlos como parte dos requisitos
necessários para a obtenção do
título de **Mestre em Física**.

Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa

São Carlos-SP
-Março-2008-

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

M827eh

Moraes Neto, Gentil Dias de.

Engenharia de hamiltonianos e aplicações em teoria da
informação quântica / Gentil Dias de Moraes Neto. -- São
Carlos : UFSCar, 2008.

76 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2008.

1. Informação quântica. 2. Óptica quântica. 3.
Computação quântica. I. Título.

CDD: 530.12 (20^a)

GENTIL DIAS DE MORAES NETO

*Dissertação de Mestrado submetida à
Coordenação do Programa de Pós-
Graduação em Física da Universidade
Federal de São Carlos, como requisito
parcial para a obtenção do título de
Mestre em Física.*

Aprovada em: 28/03/2008.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Milled Hassan Youssef Moussa (Orientador)
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar



Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano
Universidade de São Paulo- IFSC/USP



Prof. Dra. Kyoko Furuya
Universidade de Campinas - IFGW/UNICAMP

Com amor e carinho à Karen

Agradecimentos

- A minha família pelo apoio incondicional;
- Ao Prof. Dr. Miled H. Y. Moussa;
- Aos amigos e professores do DF-UFSCAR;
- Capes pelo suporte financeiro desta pesquisa.

Resumo

Nesta dissertação abordamos o tema da engenharia de Hamiltonianos e sua utilização para a implementação de portas lógicas quânticas. Especificamente, tratamos três sistemas distintos: no primeiro, consideramos um íon armadilhado numa cavidade, com seus níveis eletrônicos sujeitos a um processo de amplificação linear; no segundo, retomando o sistema de um íon armadilhado numa cavidade, consideramos que esta seja atravessada por um átomo; no terceiro, consideramos dois íons armadilhados na cavidade. Nestes três casos consideramos que a interação da matéria com os campos de radiação e vibração dão-se de forma dispersiva. O primeiro sistema foi utilizado para a engenharia de interações entre os campos de radiação e vibração. Aplicações dos Hamiltonianos efetivos construídos são apresentadas. Através do segundo sistema mostramos como construir portas de fase e *CNOT*, pelas quais utilizamos os estados vibracionais para o controle dos estados eletrônicos e vice-versa. Através da duplicação desse sistema, mostramos como teletransportar o estado vibracional de um íon para outro armadilhados em cavidades distintas. Notamos que o nosso protocolo de teletransporte prescinde da necessidade de mapear o estado vibracional a ser teletransportado para o modo da cavidade, diminuindo o número de passos necessários para a efetivação do processo. No terceiro sistema mostramos como implementar portas de fase e *CNOT* que se utilizam dos estados eletrônicos (vibracionais) de um dos íons para o controle dos estados vibracionais (eletrônicos) do outro. Por fim, mostramos como preparar os estados da base de Bell para os graus de liberdade vibracionais de ambos os íons.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Um panorama atual da óptica quântica atômica	1
2	Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (EQC)	5
2.1	Introdução	5
2.2	Eletrodinâmica Clássica.	5
2.3	Quantização do Campo Eletromagnético	8
2.4	Estados do Campo Eletromagnético.	9
2.4.1	Estado de Número.	10
2.4.2	Estados Coerentes.	10
2.4.3	Estados de Gato de Schrödinger	11
2.4.4	Estados Coerentes Comprimidos.	12
2.5	Quantização do Campo do Elétron.	13
2.6	Interação da Radiação com a Matéria	14
2.6.1	Aproximação de Onda Girante	15
2.7	Hamiltoniano de Jaynes-Cummings.	16
2.7.1	Evolução no modelo de Jaynes-Cummings.	17
2.7.2	Inversão atômica ($\delta = 0$)	19
2.7.3	Interação dispersiva	21
2.8	Experimentos em EQC	22
2.8.1	Átomos de Rydberg.	23
2.8.2	Zonas de Ramsey.	24
2.8.3	Cavidades.	25
2.8.4	Medidas	26
2.9	Íons Armadilhados	27

3	Computação e Informação Quântica	32
3.1	Bits Quânticos (qubits)	32
3.1.1	Estados de Superposição	35
3.1.2	Emaranhamento	37
3.2	Computador Quântico	39
3.2.1	Circuitos Quânticos	40
3.2.2	Portas Lógicas Quânticas	42
3.3	Codificação Super Densa	45
3.4	Teletransporte	46
4	A Aproximação de James-Jerke Para a Construção de Hamiltonianos Efetivos	49
4.1	Introdução	49
4.2	Hamiltonianos médios em Optica Quântica	50
4.2.1	Exemplo: O Hamiltoniano dispersivo.	52
4.2.2	Hamiltoniano efetivo para a geração de modos não estacionarios	53
4.2.3	Hamiltonianos bilineares	54
5	Hamiltonianos Efetivos e Aplicações	55
5.1	Interação Fóton-Fônon	55
5.2	Átomo e íon interagindo dispersivamente com o modo da cavidade.	59
5.2.1	Protocolo Para Construção da Porta Lógica CNOT	60
5.2.2	Geração da base de Bell	63
5.2.3	Teletransporte	65
5.3	Dois íons interagindo dispersivamente com um modo do campo.	66
5.3.1	Protocolo Para Construção da Porta CNOT.	67
5.3.2	Geração da base de Bell	68
6	Conclusão	70

Lista de Figuras

2.4.1 Distribuição Poissoniana do número de fótons para um estado coerente com $ \alpha = 5$.	11
2.4.2 Distribuição do número de fótons para um estado de gato par com $ \alpha = 5$.	12
2.7.1 Inversão atômica de um átomo de dois níveis inicialmente preparado em um estado excitado e o campo em um estado coerente com $ \alpha ^2 = 25$.	21
2.8.1 Aparato experimental e esquema dos níveis eletrônicos do Rubídio [2].	23
2.8.2 Caverna tipo Fabry Perot utilizada nos experimentos do Lab. Kastler Brossel. A caverna é feita de dois espelhos com $50mm$ de diâmetro e $40mm$ de raio de curvatura. O modo presente na caverna é gaussiano TEM_{000} , que apresenta 9 antinodos entre os espelhos. A largura mínima do modo é de $w_0 = 6mm$ e o volume do modo de $V = 700mm^3$.	26
2.8.3 Detector com campo elétrico dependente do tempo. www.cqed.org/spip.php?article164 .	27
2.8.4 Detector com campo elétrico dependente da posição. www.cqed.org/spip.php?article164 .	27
2.9.1 Representação de um íon armadilhado dentro de uma caverna. e.heart-c704.uibk.ac.at/	31
3.1.1 Esfera de Bloch.	33
3.2.1 Vários qbits correspondentes a distintos sistemas. $\tau_Q(s)$ dá o tempo estimado de decoerência, $\tau_{op}(s)$ tempo de operação, e $n_{op} = \lambda^{-1}$ é o número de operações possíveis de serem realizadas neste sistema.	40
3.2.2 Circuito com uma operação controlada.	41
3.2.3 Representação da porta CNOT em circuitos. O círculo cheio (vazio) representa o qubit controle (alvo).	44
5.3.1 Dois íons armadilhados no interior de uma caverna.	66

Capítulo 1

Introdução

1.1 Um panorama atual da óptica quântica atômica

Nas últimas décadas, a Óptica Quântica passou por um acelerado desenvolvimento, aprofundando os conhecimentos estabelecidos acerca do campo de radiação, da matéria e da interação entre ambos, além de alargar significativamente seus domínios, emprestando muito dos seus conceitos e técnicas para o que se convencionou denominar Teoria da Informação Quântica. Se na década de 1990 a Óptica Quântica proporcionou resultados decisivos associados às propriedades da luz [1], seguiram-se passos igualmente determinantes para a manipulação de estados da matéria e da sua interação com o campo de radiação [2–4].

Em se tratando da luz, os desenvolvimentos teórico e experimental no tratamento das estatísticas de fótocontagens associadas aos estados comprimidos do campo de radiação, aprofundaram tanto o conhecimento do campo luminoso como a dicotomia entre suas descrições clássica e quântica. O antiagrupamento de fótons e a estatística sub-Poissoniana de fótocontagens constituem algumas das propriedades não-clássicas do campo luminoso que estabelecem de forma inequívoca a necessidade da sua descrição quântica [1].

Quanto a preparação de estados da matéria e da sua interação com o campo de radiação, mencionamos primeiramente os experimentos em eletrodinâmica quântica (EQC) de cavidades e íons armadilhados, que resultaram de um domínio sem precedentes na manipulação dos campos de radiação e matéria em nível dos seus constituintes fundamentais. Em EQC lembramos as observações experimentais das oscilações de Rabi de estados circulares de Rydberg [5], e do processo de decoerência de estados mesoscópicos de um modo da cavidade [6]. A preparação de estados emaranhados massivos, envolvendo níveis de Rydberg de um par de átomos [7], e a implementação de portas lógicas quânticas [8] constituem outras realizações importantes em EQC. Esta maestria dos processos da EQC foram igualmente alcançadas através de íons armadilhados, onde mencionamos a implementação de

portas lógicas fundamentais [9], além da preparação de estados não-clássicos do campo vibracional [10], dentre os quais os estados emaranhados massivos [11] que, de forma similar à Ref. [7], obtêm-se através dos níveis eletrônicos de um par de íons armadilhados.

Por fim, ainda no que diz respeito à manipulação de estados da matéria e sua interação com a luz, devemos mencionar a realização dos condensados atômicos de Bose-Einstein, que contribuem para uma melhor compreensão tanto das interações inerentes à matéria como de sua interação com a radiação [13]. Dentre muitas realizações notáveis, teóricas e experimentais, mencionamos a excitação de fônons [14] e a espectroscopia de Bragg [15] em um CBE. Lembramos também da demonstração de que os átomos de um CBE exibem coerências de ordens elevadas, características dos fótons na luz laser [16], sedimentando a analogia natural entre os campos de radiação e matéria que responde, em parte, pelo rápido desenvolvimento da “Óptica Quântica Atômica” [17]. Mencionamos, por fim, as medidas das taxas de decaimento e deslocamento das frequências (dependentes da temperatura) das excitações coletivas de um CBE [18], além da medida da fase relativa entre dois CBEs [19].

Os resultados acima mencionados motivaram propostas ousadas no que diz respeito aos processos de engenharia de Hamiltonianos e reservatórios. No primeiro caso, através da modelagem de um sistema físico de interesse pela qual submetemo-lo a interações com sistemas auxiliares, quânticos ou clássicos e de aproximações diversas subsequentes, procura-se por interações efetivas associadas a processos de interesse. Dentre esses processos mencionamos a compressão de estados de modos da cavidade e a realização de operações lógicas quânticas, alcançados a partir de hamiltonianos quadráticos e bilineares, respectivamente [76]. O programa de engenharia de interações é condição necessária para a engenharia de reservatórios, dado que através das interações auxiliares acima mencionadas, podemos modificar os efeitos do vácuo sobre o sistema de interesse [30]. A implementação experimental das engenharias de interação e reservatório, levadas a cabo através das armadilhas iônicas [12], reforça e confirma o domínio alcançado na manipulação do átomo e dos campos de radiação e vibração através das técnicas de interação radiação-matéria.

O desenvolvimento recente da Óptica Quântica, motivado pelos avanços alcançados na manipulação de átomos, fótons e ‘fônons’ [20], ocorre no sentido a considerar redes de cavidades interagentes, incluindo a possibilidade de armadilhamento de átomos ou amostras atômicas nestas cavidades. Este desenvolvimento dá-se, em parte, na esteira dos resultados alcançados, também a partir da década de 1990, com as redes ópticas, que compreendem átomos, amostras atômicas ou mesmo CBEs, armadilhados em potenciais ópticos periódicos. Possibilidades notáveis foram consideradas no contexto das redes ópticas, como por exemplo o emaranhamento de átomos neutros via colisões controladas, viabilizadas pelo deslocamento das armadilhas ópticas, uma com relação a outra [21]. Mostrou-se também a possibilidade de se utilizar as redes ópticas para produzir, entre os átomos de uma e

outra rede, interações similares àquelas da física da matéria condensada, que descrevem o ferromagnetismo, o antiferromagnetismo [22], e o paramagnetismo [23]. Mencionamos também a implementação de portas lógicas quânticas através da repulção de Coulomb entre íons armadilhados [24], ou de interações dipolo-dipolo entre átomos neutros induzidas via campos clássicos [25]. Por fim, ressaltamos a manipulação de estados do movimento de átomos neutros [26] ou CBEs [27], além da implementação do processo de transferência de estados em redes ópticas [28].

Voltando às redes de cavidades, ou osciladores harmônicos quânticos, muito tem sido realizado recentemente no que diz respeito às dinâmicas de coerência e decoerência de estados. Mencionamos especificamente o processo de transferência perfeita de estados entre os osciladores da rede [29], e o mecanismo de decoerência de estados que revela aspectos interessantes como a não aditividade das taxas de relaxação [32–35]. Nos trabalhos das Refs. [32–34], considera-se o caso geral em que cada oscilador da rede acopla-se ao seu respectivo reservatório, ao contrário da asserção *ad hoc* de que toda a rede acopla-se a um reservatório comum. Tratando-se de redes de osciladores harmônicos dissipativos, apresentou-se recentemente um tratamento geral que, englobando as referências [32–34], aplica-se a qualquer topologia da rede, isto é, a qualquer padrão de acoplamentos entre os osciladores, quaisquer que sejam suas frequências naturais e seus acoplamentos. O tratamento geral apresentado na Ref. [36], possibilitou a construção teórica de um dispositivo para o armazenamento dinâmico de estados em redes de osciladores dissipativos [37]. Por armazenamento refere-se à proteção de estados contra o processo de decoerência induzido pelos reservatórios associados a cada oscilador da rede. Este dispositivo compreende as topologias ótimas que viabilizam evoluções específicas de estados preparados em osciladores individuais da rede. Destas evoluções específicas resulta a maximização dos tempos de decoerência dos estados armazenados, antes que sejam resgatados nos osciladores onde foram originalmente preparados.

Uma extensão recente do programa de redes de cavidades, considera à inserção de átomos ou amostras atômicas no interior dessas cavidades [29, 31]. Através da manipulação desses átomos via campos clássicos externos e de suas interações como as respectivas cavidades, e destas entre si, verificam-se fenômenos interessantes como, por exemplo, o *bloqueio de fótons*: enquanto que na ausência dos átomos as cavidades podem armazenar, em princípio, qualquer número de fótons, a presença dos átomos faz com que as cavidades aceitem um único fóton, repelindo a injeção de fótons adicionais. Este fenômeno possibilita então a construção de cristais de luz, nos quais os fótons são armadilhados nas cavidades através da repulsão mútua que exercem entre si, mediada pelos átomos. Esta repulsão entre os fótons alcançada na Ref. [29] é forte o suficiente para simular um estado do tipo *isolante de Mott*, no qual os fótons, localizados nas diferentes cavidades, impedem o movimento dos

vizinhos. Dado que na ausência dos átomos, e portanto na ausência da repulsão por eles mediada, os fótons movem-se livremente entre as cavidades, de forma similar a um estado superfluido no qual encontram-se espalhados através da rede, verifica-se nestes sistemas uma transição de fase quântica, à temperatura zero, análoga àquela entre um isolante de Mott e um superfluido [31].

Ressaltamos, por fim, que mesmo estes fenômenos em redes de cavidades contendo átomos em seus interiores estão na iminência de serem realizados experimentalmente através dos desenvolvimentos recentes da eletrodinâmica quântica de circuitos (EQCir) [38]. Este circuito compõem-se de cavidades e átomos artificiais, que operam no regime de microondas (3-30 GHz), construídos a partir de elementos supercondutores. Enquanto que um átomo artificial (ou qubit supercondutor) compreende uma junção Josephson, a cavidade artificial é modelada a partir de *gaps* em linhas de transmissão supercondutoras (que simulam os espelhos de uma cavidade real) separados pela distância aproximada de um número inteiro de meios comprimentos de onda (1-10 cm). Portanto, redes de nanocavidades acopladas por linhas de transmissão supercondutoras (os guias de onda), e que interagem com átomos artificiais *localizados* na região dos seus campos, fornecem plataformas adequadas para simular, com diversas vantagens, os processos típicos da EQC numa escala sem precedentes. Dentre as vantagens da EQCirc sobre a EQC começamos por mencionar que a construção desses circuitos segue-se das técnicas convencionais da microeletrônica. Dado que os átomos artificiais podem ser fabricados na localização desejada do circuito, evita-se assim as dificuldades consideráveis de se resfriar e armadilhar átomos em cavidades convencionais. Além disso, o momento de dipolo dos átomos artificiais é grande o suficiente para acessar regimes de acoplamentos átomo-campo consideravelmente mais abrangentes que àqueles da EQC.

Capítulo 2

Eletrodinâmica Quântica de Cavernas (EQC)

2.1 Introdução

Diversos fenômenos envolvendo o campo luminoso, como o efeito fotoelétrico, efeito Compton e Lamb shift, podem ser explicados por modelos puramente clássicos, onde a luz é descrita como uma onda eletromagnética obedecendo às equações de Maxwell e possuindo fase e amplitude bem definidos [40]. Mesmo após a quantização do campo eletromagnético realizada por P.A.M. Dirac em 1927, o modelo semi-clássico continuou a fornecer explicações satisfatórias para os efeitos luminosos. Entretanto, em 1977 [41], foi demonstrada a necessidade de uma teoria quântica, para explicar o antiagrupamento de fótons que se manifesta no contexto dos estados comprimidos da luz, aqueles que apresentam uma diminuição da incerteza de uma das quadraturas do campo eletromagnético menor que o ruído do vácuo. Inicialmente, vamos discutir a eletrodinâmica clássica mostrando que a Hamiltoniana do campo de radiação pode ser descrita por um conjunto de osciladores harmônicos independentes. Em seguida, abordamos o processo de quantização do campo eletromagnético e apresentamos alguns estados do campo. Posteriormente, mostramos como é possível obter o Hamiltoniano de interação radiação-matéria, assim como uma breve revisão do estado da arte experimental no domínio da EQC, e finalmente discutimos a dinâmica de íons armadilhados.

2.2 Eletrodinâmica Clássica.

Consideremos inicialmente a teoria clássica de radiação em uma caverna onde, por simplificação, a interação do campo com possíveis fontes estão descartadas. As equações de

Maxwell para o campo eletromagnético no vácuo, em unidades gaussianas, são [40]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{-1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.2.2)$$

Logo, a energia e o momentum linear associados ao campo são dados por

$$H = \frac{1}{8\pi} \int_V (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) d^3r \quad \text{e} \quad \vec{P} = \frac{1}{4\pi c} \int_V (\vec{E} \times \vec{B}) d^3r, \quad (2.2.3)$$

no qual V representa o volume da cavidade em que estão inseridos os campos eletromagnéticos. Podemos expressar os campos eletromagnéticos \vec{E} e \vec{B} em termos dos potenciais vetorial \vec{A} e escalar ϕ da seguinte forma

$$\vec{E} = \vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.2.4)$$

Estes potenciais são invariantes pela transformação de Gauge, pela qual torna-se

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' + \nabla\Lambda \quad \text{e} \quad \Phi \rightarrow \Phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad (2.2.5)$$

Dessa forma, sempre podemos escolher o potencial vetor \vec{A} de modo que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (gauge de Coulomb). Em particular, na ausência de cargas ($\Phi = 0$), a solução da equação de ondas para o potencial vetor \vec{A} , escreve-se da forma

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.2.6)$$

e permite-nos descerver completamente o campo eletromagnético. As soluções reais da equação de onda para o potencial vetor satisfazem condições periódicas em uma caixa cúbica de volume $V = L^3$, que podem ser expandidas em série de Fourier como seguem:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\{k_i\}} \left[\vec{A}_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{A}_k^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right] \quad (\{k_i\} = k_x, k_y, k_z), \quad (2.2.7)$$

onde a soma é sobre todos os valores possíveis de $k_i = (\frac{2\pi}{L})n_i$, com $i = x, y, z$ e $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty$. A condição do gauge de Coulomb implica que $\vec{k} \cdot \vec{A}_k = 0$, ou seja, as

componentes de Fourier são perpendiculares ao vetor de propagação \vec{k} . Conseqüentemente, $\vec{A}_k(\vec{A}^*_k)$ tem apenas duas componentes associadas a uma dada direção de propagação \vec{k} .

$$\vec{A}_k(t) = \sum_{\alpha} c_{k\alpha}(t) \vec{\epsilon}_{k\alpha} \quad (\alpha = 1, 2), \quad (2.2.8)$$

em que $\vec{\epsilon}_{k\alpha}$ denota os vetores de polarização unitários tais que $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_{k\alpha} = 0$ e $\vec{\epsilon}_{k1} \perp \vec{\epsilon}_{k2}$.

Substituindo a série de Fourier Eq.(2.2.7) na equação de ondas Eq.(2.2.6), obtemos uma equação diferencial para os coeficientes $c_{k\alpha}(t)$, ou seja,

$$\frac{d^2 c_{k\alpha}(t)}{dt^2} + \omega_k^2 c_{k\alpha}(t) = 0. \quad (2.2.9)$$

Portanto, os coeficientes de Fourier oscilam harmônicamente com frequência $\omega_k = c|\vec{k}|$, permitindo assim obtermos uma expressão final para o potencial vetor

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\{k_i\}, \alpha} \vec{\epsilon}_{k\alpha} \left[c_{k\alpha}(0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + c_{k\alpha}^*(0) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right]. \quad (2.2.10)$$

Assim, os campos elétricos e magnéticos podem ser expressos em termos desses coeficientes de Fourier da forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\{k_i\}, \alpha} |\vec{k}| \vec{\epsilon}_{k\alpha} \left[c_{k\alpha}(0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + c_{k\alpha}^*(0) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right], \quad (2.2.11)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\{k_i\}, \alpha} \vec{k} \times \vec{\epsilon}_{k\alpha} \left[c_{k\alpha}(0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + c_{k\alpha}^*(0) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right]. \quad (2.2.12)$$

Finalmente, a energia eletromagnética pode então ser descrita pela hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2\pi c^2} \sum_{\{k_i\}, \alpha} \omega_k^2 c_{k\alpha}^*(t) c_{k\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi c^2} \sum_{\{k_i\}, \alpha} \omega_k^2 c_{k\alpha}^*(0) c_{k\alpha}(0). \quad (2.2.13)$$

Vamos agora definir as variáveis canônicas reais

$$Q_{k\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2}} [c_{k\alpha}(t) + c_{k\alpha}^*(t)], \quad (2.2.14)$$

$$P_{k\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2}} [c_{k\alpha}(t) - c_{k\alpha}^*(t)], \quad (2.2.15)$$

de modo que

$$c_{k\alpha}(t) = \sqrt{\pi c^2} \left[Q_{k\alpha}(t) + \frac{i}{\omega_k} P_{k\alpha}(t) \right]. \quad (2.2.16)$$

Em termos dessas novas variáveis, temos que

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\{k_i\}, \alpha} (P_{k\alpha}^2 + \omega_k^2 Q_{k\alpha}^2), \quad (2.2.17)$$

ou seja, a energia do campo eletromagnético livre tem a mesma forma da Hamiltoniana de um conjunto de osciladores desacoplados, onde cada oscilador tem massa unitária e frequência de vibração ω_k .

2.3 Quantização do Campo Eletromagnético

A proposta de Dirac consiste em considerar $Q_{k\alpha}$ e $P_{k\alpha}$ como operadores satisfazendo as regras de comutação

$$\begin{aligned} [P_{k\alpha}, P_{k'\alpha'}] &= [Q_{k\alpha}, Q_{k'\alpha'}] = 0, \\ [Q_{k\alpha}, P_{k'\alpha'}] &= i\hbar\delta_{k,k'}, \delta_{\alpha,\alpha'}. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Além disso, segundo o princípio de correspondência, considerar-se a (2.2.17) como operador Hamiltoniano do sistema quântico.

Seguiremos agora o formalismo adotado habitualmente para o oscilador harmônico, introduzindo, para cada oscilador do campo, os operadores de aniquilação e criação

$$a_{k\alpha} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} Q_{k\alpha} + i \frac{P_{k\alpha}}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} \quad \text{e} \quad a_{k\alpha}^\dagger = (a_{k\alpha})^\dagger, \quad (2.3.2)$$

respectivamente, de modo que

$$\begin{aligned} [a_{k\alpha}, a_{k'\alpha'}] &= [a_{k\alpha}^\dagger, a_{k'\alpha'}^\dagger] = 0, \\ [a_{k\alpha}, a_{k'\alpha'}^\dagger] &= i\hbar\delta_{k,k'}, \delta_{\alpha,\alpha'} \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

que resulta para o operador Hamiltoniano

$$H = \sum_{\{k_i\}, \alpha} \hbar\omega_k (a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha} + \frac{1}{2}). \quad (2.3.4)$$

Subtraindo o termo constante e infinito da expressão acima (que é equivalente a definir a energia de ponto zero como sendo aquela em que o termo infinito não esta presente), obtemos o Hamiltoniano

$$H = \sum_{\{k_i\}, \alpha} \hbar\omega_k a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha}. \quad (2.3.5)$$

Nos casos de interesse desta dissertação, onde desejamos estudar os efeitos de um unico modo unidimensional interagindo com a materia, temos o Hamiltoniano do modo

$$H = \hbar\omega_k a^\dagger a. \quad (2.3.6)$$

2.4 Estados do Campo Eletromagnético.

A engenharia de estados quânticos da luz, tais como o estado de número, o estado coerente e o coerente comprimido, além de superposições e emaranhamentos destes, são de extremo interesse, tanto pelas suas aplicações tecnológicas em processos de informação quântica como para a investigação de fenômenos fundamentais tais como a não localidade e a decoerência de estados.

Uma das maneiras de se caracterizar um estado arbitrário do campo eletromagnético, utilizando o operador densidade, é através da projeção do estado do campo na base do estado de número, ou seja,

$$P_n = \langle n | \rho | n \rangle. \quad (2.4.1)$$

Notamos que a distribuição de número de fótons denota a probabilidade de se encontrar n fótons em um dado estado do campo. Contudo é interessante salientar que a distribuição P_n contém apenas informação a respeito dos elementos diagonais do operador densidade do campo.

As propriedades estatísticas da luz permitem determinar se um estado é puramente clássico ou se pode apresentar efeitos quânticos. Essas propriedades estatísticas podem ser dadas pelo parâmetro Q de Mandel [40], definido em termos da variância $(\Delta n)^2$ e do número médio de fótons $\langle n \rangle$, como se segue

$$Q = \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}, \quad (2.4.2)$$

onde $\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$.

Utilizando esta definição, pode-se estabelecer a seguinte classificação para a estatística do campo

$$\begin{aligned} Q < 0 & \text{ Estatística Subpoissoniana,} \\ Q = 0 & \text{ Estatística Poissoniana,} \\ Q > 0 & \text{ Estatística Superpoissoniana.} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Abaixo apresentamos uma breve discussão de alguns desses estados.

2.4.1 Estado de Número.

Os estados de número ou estados de *Fock* do campo de radiação, são aqueles que apresentam um número de fótons bem definido, e conseqüentemente uma indefinição total na fase do campo. Estes estados formam uma base completa, descrita na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{n,m}. \quad (2.4.4)$$

e são auto-estados do operador número $\mathbf{N} = a^\dagger a$, onde os operadores a e a^\dagger respondem pela aniquilação e criação de fótons respectivamente, de forma que

$$\mathbf{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (2.4.5)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (2.4.6)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.4.7)$$

Para este estado, temos o operador densidade dado por

$$\rho_n = |n\rangle\langle n|, \quad (2.4.8)$$

e a distribuição de número de fótons

$$P_n(m) = |\langle n|m\rangle|^2 = \delta_{n,m}. \quad (2.4.9)$$

O estado de número tem estatística subpoissoniana com $Q = -1$, caracterizando o como um estado de origem puramente quântica.

2.4.2 Estados Coerentes.

Introduzidos por Glauber [40], os estados coerentes são auto-estados do operador de aniquilação de fótons

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.4.10)$$

de forma que sendo a não hermitiano, seu autovalor pode ser um número complexo, $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$. Estes estados podem ser descritos pela atuação do operador deslocamento $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$ no vácuo

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle, \quad (2.4.11)$$

operador este que está associado à evolução temporal do campo eletromagnético interagindo com uma corrente clássica. Definindo os *operadores de quadratura* do campo como

$$X_1 = \frac{1}{2}(a + a^\dagger) \quad \text{e} \quad X_2 = \frac{1}{2}(a - a^\dagger)$$

verifica-se que o estado coerente apresenta iguais variâncias nessas quadraturas cujo produto apresenta o menor valor permitido pelo principio da incerteza de Heisenberg, ou seja ($\hbar = 1$).

$$\Delta X_1 \cdot \Delta X_2 = \frac{1}{4}. \quad (2.4.12)$$

Os estados coerentes definem a base supercompleta

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle\alpha|, \quad \langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)+\alpha^*\beta}, \quad (2.4.13)$$

e são descritos em termos da base de número pela superposição

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.4.14)$$

a partir da qual conclui-se que a distribuição de fótons no estado coerente é Poissoniana

$$P_n(\alpha) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (2.4.15)$$

sendo o número medio de fótons e a variância iguais a $|\alpha|^2$ que resulta em um fator $Q = 1$. Na

Fig.(2.4.1) temos um gráfico da distribuição do número de fótons para um estado coerente $|\alpha| = 5$.

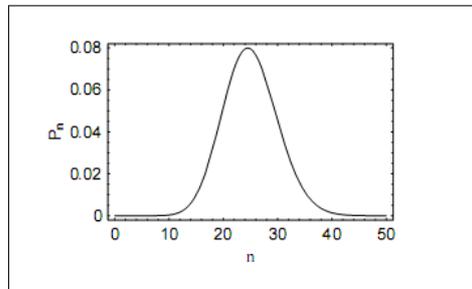


Figura 2.4.1: Distribuição Poissoniana do número de fótons para um estado coerente com $|\alpha| = 5$.

2.4.3 Estados de Gato de Schrödinger

A superposição de dois estados coerentes descrita na forma

$$|\alpha, \phi\rangle = N^{1/2}(|\alpha\rangle + e^{i\phi} |-\alpha\rangle), \quad (2.4.16)$$

com a constante de normalização dada por

$$N = \frac{1}{2} [1 + \exp - (2|\alpha|^2) \cos \phi]^{-1}, \quad (2.4.17)$$

caracteriza um estado do tipo "*Gato de Schrödinger (GS)*". De fato, ao expandirmos esse estado na base de Fock, teremos

$$|\alpha, \phi\rangle = N^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n e^{i\phi}] \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.4.18)$$

Quando $\phi = 0$, obtemos um estado denominado *estado do tipo GS par*, enquanto que $\phi = \pi$ caracteriza o *estado do tipo GS ímpar*. Como notamos da Eq.(2.4.18), esses estados são superposições de estados de número par ou ímpar apenas. A distribuição de número de fótons neste caso é

$$P_n(\alpha, \phi) = |\langle n|\alpha, \phi\rangle|^2 = \frac{(1 + (-1)^n \cos \phi) |\alpha|^{2n}}{(1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \phi) n!}. \quad (2.4.19)$$

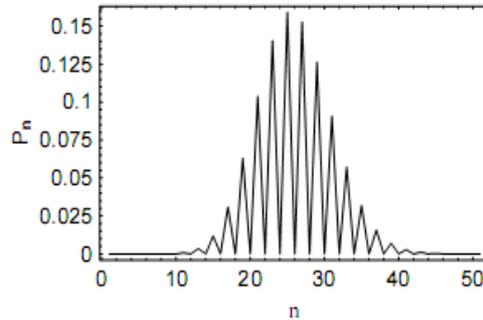


Figura 2.4.2: Distribuição do número de fótons para um estado de gato par com $|\alpha| = 5$.

Na Fig.(2.4.2) vemos o caráter oscilatório da distribuição do número de fótons associado ao efeito de interferência entre os estados no espaço de fase.

2.4.4 Estados Coerentes Comprimidos.

Os estados coerentes comprimidos são caracterizados pelo fato de possuírem a variância de uma das quadraturas menor que o ruído de vácuo, e conseqüentemente a variância da quadratura canonicamente conjugada maior que este valor. Estes estados são gerados através de processos não-lineares, envolvendo termos quadráticos dos operadores de criação e aniquilação de fótons. A atuação do operador de compressão, descrito na forma $S(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2})}$, sobre o estado coerente, resulta no estado coerente comprimido

$$|\alpha, \xi\rangle = S(\xi)D(\alpha)|0\rangle, \quad (2.4.20)$$

onde $\xi = re^{i\theta}$, r é o fator de compressão e θ é o ângulo de rotação no espaço de fase. Definindo, portanto, novas quadraturas Y_1 e Y_2 , num espaço de fase obtido através de uma rotação de $\theta/2$ em relação ao espaço definido por X_1 e X_2 , isto é

$$Y_1 + iY_2 = (X_1 + iX_2)e^{-i\frac{\theta}{2}}, \quad (2.4.21)$$

verificamos que as variâncias das quadraturas Y_1 e Y_2 do estado coerente comprimido e o produto entre elas satisfazem as relações

$$\Delta Y_1 = \frac{e^{-r}}{2}, \quad \Delta Y_2 = \frac{e^r}{2}, \quad \Delta Y_1 \cdot \Delta Y_2 = \frac{1}{4}, \quad (2.4.22)$$

onde verifica-se que a variância ΔY_1 pode ter um valor menor que o ruído do vácuo, a depender do fator de compressão.

2.5 Quantização do Campo do Elétron.

No formalismo da segunda quantização [40], o Hamiltoniano de um átomo em termos dos seus níveis de energia pode ser escrito como

$$\mathbf{H}_a = \int \Psi^\dagger(r)H_0(r)\Psi(r)d^3r, \quad (2.5.1)$$

sendo $H_0(r) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)$, e o operador de campo $\Psi(r) = \sum_i b_i \phi_i(r)$ e seu adjunto $\Psi^\dagger(r) = \sum_i b_i^\dagger \phi_i^\dagger(r)$, onde $b_i(b_i^\dagger)$ é o operador de destruição(criação) do i -ésimo nível de energia com auto-funções $\phi_i(r)$ satisfazendo a relação $\int \phi_i^*(r)\phi_j(r)d\mathbf{r} = \delta_{ij}$.

Assim, neste formalismo o Hamiltoniano será dado

$$\mathbf{H}_a = \int \Psi^\dagger(r)H_0(r)\Psi(r)d^3r \quad (2.5.2)$$

$$= \int \sum_i b_i^\dagger \phi_i^\dagger(r) \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) \right] \sum_j b_j \phi_j(r) d^3r = \sum_j b_j^\dagger b_j E_j. \quad (2.5.3)$$

Definimos $\mathbf{N}_j = b_j^\dagger b_j$ como operador número de ocupação de elétrons no nível de energia j , os operadores seguem a relações de anti-comutação fermiônica:

$$\{b_j^\dagger, b_j\} = \delta_{jk}, \quad \{b_j^\dagger, b_j^\dagger\} = \{b_j, b_j\} = 0. \quad (2.5.4)$$

Em particular, para um átomo preparado para que apenas dois níveis interajam efetivamente com o modo do campo temos:

$$\mathbf{H}_a = \sum_{j=1}^2 b_j^\dagger b_j E_j = E_1 b_1^\dagger b_1 + E_2 b_2^\dagger b_2 = \hbar\omega_1 b_1^\dagger b_1 + \hbar\omega_2 b_2^\dagger b_2, \quad (2.5.5)$$

definindo o ponto de energia zero em $\hbar(\omega_1 + \omega_2)/2$, ou seja, $E_1 = -E_2 = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$, obtemos o Hamiltoniano

$$\mathbf{H}_a = \frac{\hbar\omega_0}{2}(b_2^\dagger b_2 - b_1^\dagger b_1) = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z. \quad (2.5.6)$$

Considerou-se na equação acima a seguinte correspondência entre os operadores fermiônicos e operadores de "pseudo-spin":

operadores pseudo-spin	operadores eletrônicos	
$\sigma_z = 2\rangle\langle 2 - 1\rangle\langle 1 $	$b_2^\dagger b_2 - b_1^\dagger b_1$	
$\sigma_+ = 2\rangle\langle 1 $	$b_2^\dagger b_1$,
$\sigma_1 = 1\rangle\langle 2 $	$b_1^\dagger b_2$	
$\sigma_{ij} = i\rangle\langle j $	$b_i^\dagger b_j$	

na aproximação do átomo de dois níveis é usual denominar seus níveis energeticos de estado fundamental $|g\rangle$ ($|1\rangle$) e estado excitado $|e\rangle$ ($|2\rangle$).

2.6 Interação da Radiação com a Matéria

A maneira formal de se encontrar o Hamiltoniano que determina a dinâmica de interação entre radiação e a matéria, consiste em a partir da Lagrangeana clássica do eletromagnetismo. Em seguida, obtem-se os momentos conjugados, e a hamiltoniana, e aplicar o procedimento de quantização canônica de Dirac¹ [40]. Não vamos seguir este procedimento. Por simplicidade vamos introduzir o termo de interação e justificar sua validade.

Estamos interessados aqui em campos óticos, ou seja, com comprimento de onda da ordem de alguns milhares de angstroms, enquanto que o tamanho típico de um átomo é de apenas alguns angstroms. Assim, podemos desprezar a variação espacial dos campos ao longo da extensão do átomo. Os campos vêem o átomo como um ponto e sendo o átomo neutro, o que efetivamente interage com o campo é apenas o momento de dipolo elétrico do átomo.

Logo, o termo de interação \mathbf{H}_I refere-se ao acoplamento do dipolo atômico $\vec{\mathbf{d}}$ com o campo elétrico $\vec{\mathbf{E}}$, dado por

¹Uma forma elegante de se obter o hamiltoniano de interação radiação e matéria é utilizar-se da invariância de Gauge.

$$\mathbf{H}_I = -\vec{\mathbf{d}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = - \sum_{ij,\alpha} \left[\vec{\mathbf{d}}_{ij} \cdot \vec{\lambda} \sigma_{ij} a + \vec{\mathbf{d}}_{ij} \cdot \vec{\lambda}^* \sigma_{ij} a^\dagger \right], \quad (2.6.1)$$

$$\vec{\lambda} = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2V \epsilon_0}} \vec{u}(R). \quad (2.6.2)$$

Simplificamos ainda mais nosso modelo considerando o caso em que apenas um modo da cavidade interage com um átomo na aproximação de dois níveis.

O dipolo atômico $\vec{\mathbf{d}} = e \cdot \vec{\mathbf{r}}$ é um operador ímpar, ou seja, $\vec{\mathbf{r}} \rightarrow -\vec{\mathbf{r}}$. O Hamiltoniano \mathbf{H}_a é invariante sobre esta operação, o que significa que os autoestados $|g\rangle$ e $|e\rangle$ tem paridade bem definida. Assim os elementos de matriz $\langle e|\mathbf{d}|e\rangle$ e $\langle g|\mathbf{d}|g\rangle$ são nulos. Logo para um átomo de dois níveis, o operador $\vec{\mathbf{d}}$ só tem elementos não diagonais e pode ser escrito como

$$\vec{\mathbf{d}} = \vec{j} \sigma^- + \vec{j}^* \sigma^+, \quad (2.6.3)$$

sendo $\vec{j} = \langle g|\mathbf{d}|e\rangle$. Assim, o Hamiltoniano total que descreve a interação de um modo do campo com um átomo de dois níveis na aproximação de dipolo é

$$H = \hbar \omega a^\dagger a + \frac{\hbar \omega_0}{2} \sigma_z + \hbar g (a + a^\dagger) (\sigma^- + \sigma^+), \quad (2.6.4)$$

onde definimos a constante de acoplamento g para ser um número real dado por

$$g = e \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2V \epsilon_0}} |\vec{u}(R) \cdot \vec{j}|. \quad (2.6.5)$$

2.6.1 Aproximação de Onda Girante

A aproximação de onda girante (AOG) consiste em desprezar a contribuição dos termos $a\sigma_-$ e $a^\dagger\sigma^+$ (contra girantes) na dinâmica de interação átomo-campo. Esta aproximação é válida quando o acoplamento g é fraco e o campo não é intenso.

Na literatura a aproximação de onda girante é frequentemente justificada pelo argumento que os termos contra girantes geram processos que não conservam a energia. Essa possível violação é causada ao se considerar como a energia total do sistema a energia livre do campo e átomo, $E_T = E_A + E_C$. Esquecendo que átomo e campo interagem, ou seja, a energia total do sistema é dada por $E_T = E_A + E_C + E_I$, e que o número de excitações $N_{ex} = \sigma_z + a^\dagger a$ não é uma medidade de energia do sistema, visto que $[N_{ex}, H_I] \neq 0$.

Podemos entender a aproximação de onda girante como o da obtenção de um Hamiltoniano efetivo, onde o efeito dos termos contra girantes que são termos muito oscilantes em media não contribuem efetivamente para a dinâmica do sistema. Matematicamente podemos ver isso, escrevendo o Hamiltoniano Eq.(2.6.4) na representação de interação

$$H_I = \hbar g (a\sigma_+ e^{i(\omega-\omega_0)t} + a\sigma_- e^{i(\omega+\omega_0)t} + h.c.), \quad (2.6.6)$$

utilizando a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H_I(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.6.7)$$

integrando formalmente e fazendo uma media temporal, vemos que os pesos das contribuições dos termos contra girantes para evolução do sistema é $\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega+\omega_0} \ll 1$, enquanto os termos girantes contribuem com $\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega-\omega_0}$.

Devemos notar que a condição imposta foi $\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega+\omega_0} \ll 1$, e não $\frac{g}{\omega+\omega_0} \ll \frac{g}{\omega-\omega_0}$, pois, mesmo sendo a contribuição contra girante muito menor que a contribuição girante, independente do número médio de fótons na cavidade, quando este número é suficientemente grande os efeitos dos termos contra girante se tornam relevantes e a aproximação deixa de ser válida, assim como ocorre no caso de campos clássicos muito intensos.

Assim no regime de acoplamento fraco e campos não muito intensos o Hamiltoniano que descreve a interação entre um átomo de dois níveis e um modo do campo quantizado sobre as aproximações de dipolo e

$$H_I = \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) \quad (2.6.8)$$

que é conhecido como Hamiltoniano de Jaynes-Cummings [40, 42].

2.7 Hamiltoniano de Jaynes-Cummings.

Um dos problemas mais simples e ao mesmo tempo não trivial envolvendo a interação átomo-campo é o acoplamento de um átomo de dois níveis com um único modo do campo eletromagnético.

A descrição de um átomo de dois níveis é válida se os níveis atômicos envolvidos estão em ressonância ou aproximadamente em ressonância com o campo eletromagnético, enquanto que os outros níveis se encontram bastante fora da ressonância de forma que o acoplamento entre átomo-campo seja desprezível.

O grande trunfo deste modelo de interação de um modo do campo eletromagnético com um átomo de dois níveis dentro de uma cavidade óptica ou de microondas é que o mesmo pode ser estudado sem a necessidade do uso de teoria de perturbação ou de soluções numéricas, pois, possui solução exata e suas predições podem ser verificadas em laboratório.

A teoria semiclássica considera um átomo como um sistema quântico de dois níveis interagindo com um único modo do campo, este tratado classicamente. Contudo, muitas vezes, tal teoria falha ao tentar explicar resultados observados experimentalmente, em uma descrição completamente quântica se faz necessaria. O modelo de Jaynes-Cummings (MJC) é utilizado no estudo de aspectos quânticos fundamentais da interação radiação-matéria,

Assim temos que diagonalizar uma matriz 2×2 , tendo como resultados os seguintes autoestados

$$|n, +\rangle = \cos(\Theta_n) |g, n+1\rangle + \sin(\Theta_n) |e, n\rangle, \quad (2.7.6)$$

$$|n, -\rangle = \cos(\Theta_n) |e, n\rangle - \sin(\Theta_n) |g, n+1\rangle, \quad (2.7.7)$$

onde

$$\cos(\Theta_n) = \frac{\Delta_n - \delta}{\sqrt{(\Delta_n - \delta)^2 - \Omega_n^2}}, \quad (2.7.8)$$

$$\sin(\Theta_n) = \frac{\Omega_n}{\sqrt{(\Delta_n - \delta)^2 - \Omega_n^2}}, \quad (2.7.9)$$

$$\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}, \text{ frequência de Rabi,} \quad (2.7.10)$$

$$\Delta_n = +\sqrt{\delta^2 + \Omega_n^2}, \quad (2.7.11)$$

$$\delta = \omega_0 - \omega, \quad (2.7.12)$$

com auto energias

$$E_{n\pm} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \pm \hbar\Delta_n. \quad (2.7.13)$$

Os autoestados $|n, \pm\rangle$ são emaranhados, ou seja, durante a interação átomo-campo não existe um estado bem definido atômico ou fótonico, por isso os estados $|n, \pm\rangle$ são chamados de estados vestidos, ou quasipartículas chamadas de polaritons.

Vamos analisar dois regimes importantes de parâmetros, o regime ressonante caracterizado por $\delta = 0$, e o dispersivo, caracterizado por $\delta \gg \Omega_n$.

Interação ressonante ($\delta = 0$) Quando a interação átomo-campo é ressonante, o estado de polaritons tem a mesma contribuição fotônica e atômica, no qual o sistema apresenta-se maximamente emaranhado

$$|n, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, n\rangle \pm |g, n+1\rangle), \quad (2.7.14)$$

com energia $E_{n\pm} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \pm \hbar g\sqrt{n+1}$.

Para estudar a evolução de um estado puro qualquer $|\Psi(0)\rangle$, passaremos à representação de interação. Sendo o Hamiltoniano de interação invariante ($\delta = 0$), os autoestados são os mesmos da representação de Schrödinger a menos de uma fase:

$$H_I = \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-), \quad (2.7.15)$$

$$|n, \pm\rangle_I = e^{-i(n+\frac{1}{2})\hbar\omega} |n, \pm\rangle, \quad (2.7.16)$$

$$E_{n\pm}^I = \frac{\hbar\Omega_n}{2}. \quad (2.7.17)$$

Desta forma, um estado inicial dado por

$$|\Psi(0)\rangle = c_0 |g, 0\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n\pm} |n, \pm\rangle, \quad (2.7.18)$$

evolui para

$$|\Psi(t)\rangle_I = c_0 |g, 0\rangle_I + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n\pm} e^{-i\frac{\hbar\Omega_n}{2}t} |n, \pm\rangle_I. \quad (2.7.19)$$

Em termos dos estados $|e, n\rangle, |g, n+1\rangle$ as expressões acima são

$$|\Psi(0)\rangle = c_0 |g, 0\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} a_n |e, n\rangle + b_n |g, n+1\rangle, \quad (2.7.20)$$

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle_I &= c_0 |g, 0\rangle_I + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(\frac{\Omega_n}{2}t) - ib_n \sin(\frac{\Omega_n}{2}t)) |e, n\rangle + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos(\frac{\Omega_n}{2}t) - ia_n \sin(\frac{\Omega_n}{2}t)) |g, n+1\rangle. \end{aligned} \quad (2.7.21)$$

2.7.2 Inversão atômica ($\delta = 0$)

A inversão atômica, é definida como a probabilidade de encontrarmos o átomo no estado excitado menos a probabilidade dele estar no estado fundamental, isto é

$$\begin{aligned} W(t) &= |\langle\Psi(t)|e\rangle|^2 - |\langle\Psi(t)|g\rangle|^2 = \langle\Psi(t)|\sigma_z|\Psi(t)\rangle = \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cos(\frac{\Omega_n}{2}t) - ib_n \sin(\frac{\Omega_n}{2}t)|^2 - 1, \end{aligned} \quad (2.7.22)$$

com a condição de normalização

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = 1 - |c_0|^2. \quad (2.7.23)$$

Para o estado inicial da forma

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n P_n |n\rangle |g\rangle \quad \text{ou} \quad |\Psi(0)\rangle = \sum_n P_n |n\rangle |e\rangle, \quad (2.7.24)$$

onde $P_n = |\langle \Psi(t) | n \rangle|^2$ é a distribuição inicial dos fótons do campo. Temos neste caso que a inversão atômica é

$$W(t) = \sum_n^\infty P_n \cos(\Omega_n t). \quad (2.7.25)$$

Evidentemente as características dinâmicas da inversão ficam determinadas pela distribuição dos fótons da cavidade.

No caso do estado de número $P_n = \delta_{mn}$, a evolução é periódica, com o campo trocando energia com o átomo com frequência de Rabi Ω_n .

Quando a distribuição P_n abrange um intervalo grande de valores de n , os termos evoluem com várias frequências de Rabi, que interferem entre si. Com isso a inversão rapidamente colapsa. Como discutido em [43], existiram instantes em que os termos mais importantes da distribuição podem evoluir em fase, ocorrendo um ressurgimento (revival) na dinâmica de inversão.

Consideremos o caso de um estado coerente $|\alpha\rangle$, que apresenta uma distribuição de fótons Poissoniana

$$P_n = \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (2.7.26)$$

a inversão atômica neste caso será dada por

$$W(t) = \sum_n^\infty \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos(\Omega_n t). \quad (2.7.27)$$

Como não se conhece fórmula explícita para resumir a expressão acima, requer-se o uso de soluções numéricas ou assintóticas. Um fator fundamental para ocorrência de revivals é a estrutura granular da distribuição de fótons. Desta forma revivals são fenômenos puramente quânticos.

O tempo de colapso pode ser estimado, determinado a defasagem entre os termos da expressão da inversão de população, o que leva ao resultado

$$t_c = \left[2g(\sqrt{\langle n \rangle + \Delta n} - \sqrt{\langle n \rangle - \Delta n}) \right]^{-1} \approx \frac{1}{g}. \quad (2.7.28)$$

As oscilações de Rabi persistem por algum tempo até que os termos de $W(t)$ entram em fase novamente. Esse comportamento ocorre para o tempo denominado tempo de revival [43]

$$t_r = 2\pi \left[2g(\sqrt{\langle n \rangle + 1} - \sqrt{\langle n \rangle}) \right]^{-1} \approx \frac{2\pi\sqrt{\langle n \rangle}}{g}. \quad (2.7.29)$$

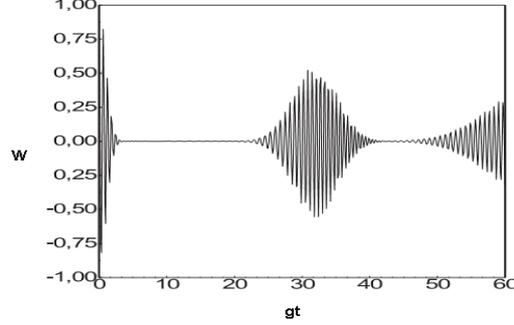


Figura 2.7.1: Inversão atômica de um átomo de dois níveis inicialmente preparado em um estado excitado e o campo em um estado coerente com $|\alpha|^2 = 25$.

Na Fig.(2.7.1), mostramos a inversão atômica para um estado coerente em função do parâmetro de interação gt , com a intensidade inicial do campo $|\alpha|^2 = 25$. Pode ser observado claramente os colapsos das oscilações de Rabi com seus subsequentes revivals.

2.7.3 Interação dispersiva

À medida que a dessintonia δ entre a transição atômica e o modo da cavidade aumenta, esperamos que os efeitos da interação átomo-campo sejam enfraquecidos. Para a análise da interação dispersiva vamos considerar o regime de parâmetros, acessível experimentalmente, no qual $\omega_0, \omega \gg \delta \gg \Omega_n$ [2].

Sendo $\delta \gg \Omega_n$, podemos expandir a Eq. 2.7.10, até segunda ordem no parâmetro $\frac{\Omega_n}{\delta}$, de forma a obter

$$\Delta_n \simeq |\delta| \left(1 + \frac{\Omega_n^2}{2\delta^2} \right). \quad (2.7.30)$$

Podemos fazer as seguintes aproximações utilizando a expressão acima:

$$\cos(\Theta_n) \simeq \frac{\Omega_n}{4\delta^2} \left(1 + O\left(\frac{\Omega_n^2}{\delta^2}\right) \right), \quad (2.7.31)$$

$$\sin(\Theta_n) \simeq 1 - O\left(\frac{\Omega_n^2}{\delta^2}\right), \quad (2.7.32)$$

Com isso obtemos os autoestados do Hamiltoniano do sistema, no caso $\delta > 0$, são dados por

$$|n, +\rangle \simeq |n, e\rangle, \quad (2.7.33)$$

$$|n, -\rangle \simeq -|n+1, g\rangle, \quad (2.7.34)$$

e para o caso de $\delta < 0$ temos

$$|n, +\rangle \simeq |n+1, g\rangle, \quad (2.7.35)$$

$$|n, -\rangle \simeq |n, e\rangle. \quad (2.7.36)$$

As correções para as autoenergias são

$$E_{\pm} \simeq \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \pm \frac{\hbar}{2} |\delta| \pm \frac{|\delta| \hbar}{\delta^2 4} \Omega_n^2. \quad (2.7.37)$$

No limite dispersivo os autoestados voltam a ser fatorados, ou seja, a interação não emaranha os sistemas. O termo de interação atua como perturbação, que desloca os níveis de energia dos estados do Hamiltoniano sem interação. Este deslocamento dos níveis de energia depende do número de fótons na cavidade e é dado por

$$\Delta\omega_{eg}(n) = \frac{g^2(2n+1)}{\delta}. \quad (2.7.38)$$

Na interação dispersiva, não ocorre troca de fótons, porém o átomo pode ganhar fases em seus níveis internos que depende do número de fótons do modo da cavidade; o Hamiltoniano efetivo dessa interação será derivado no próximo capítulo tem a seguinte forma

$$H_{\text{ef}} = \hbar\chi a^\dagger a \sigma_z. \quad (2.7.39)$$

2.8 Experimentos em EQC

O MJC foi considerado por muito tempo como um ótimo *toy model* para descrever a interação radiação-matéria quânticamente. A partir da década de 80 com os avanços nas técnicas de preparação e manipulação de átomos individuais e contenção de modos quantizados do campo em cavidades, tornou-se possível a comprovação experimental do MJC. Uma representação do aparato experimental típico utilizado pelo grupo de S.Haroche é mostrado na Fig.(2.8.1).

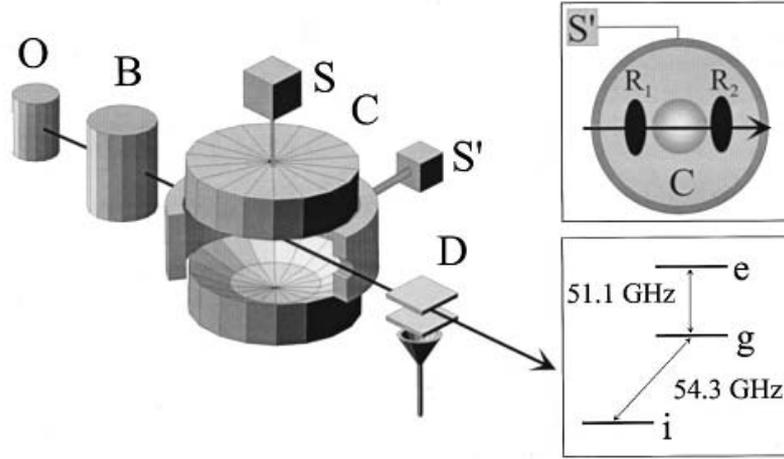


Figura 2.8.1: Aparato experimental e esquema dos níveis eletrônicos do Rubídio [2].

2.8.1 Átomos de Rydberg.

Átomos de Rydberg, em geral, são elementos alcalinos que possuem o número quântico principal n elevado ($n > 15$). Devido à blindagem do núcleo pelos demais elétrons (que formam uma camada fechada no caso dos alcalinos), podemos tratá-los na prática como um estado hidrogenóide muito excitado. São átomos que podem ter uma vida média da ordem de 10^{-2} segundos e apresentam um momento de dipolo elevado [2]

$$d \cong n^2 e a_0, \quad (2.8.1)$$

onde e é a carga e a_0 o raio atômico. Este intenso momento de dipolo permite a obtenção de constantes de acoplamento da ordem de $g \sim 10^5 s^{-1}$.

Uma classe especial desses átomos é constituída pelos “átomos circulares” que possuem momento angular l, m máximos. Logo, pela regra de seleção de dipolo elétrico $\Delta l = \pm 1$, esses estados só podem se acoplar aos estados circulares imediatamente superiores ou inferiores ($n \pm 1$). Tais propriedades dos átomos de Rydberg são interessantes para experimentos em EQC. Na região de microondas, experimentos típicos utilizam átomos de rubídio com $n = 50$ e $n = 51$, e frequência de transição $\frac{\omega_0}{2\pi} = 51.1 GHz$. Outro ponto interessante no uso de átomos de Rydberg é que são facilmente ionizados, permitindo a sua detecção por ionização.

O feixe de átomos de Rydberg possui uma distribuição térmica de velocidades, de forma que são colimados e selecionados de acordo com a velocidade desejada. A precisão na velocidade dos átomos no feixe é de $\pm 0,4 m/s$ para velocidades da ordem de $10^2 - 10^3 m/s$. Com isso o controle da posição de cada átomo emitido tem uma precisão de $\pm 1 mm$.

2.8.2 Zonas de Ramsey.

Para a manipulação dos estados internos de um átomo utilizam-se campos eletromagnéticos aprisionados em cavidades de baixo fator de qualidade ($Q \sim 10^3$), denominadas Zonas de Ramsey [44]. O baixo fator de qualidade faz com que ocorram perdas substanciais para as paredes da cavidade, sendo necessário uma contínua amplificação do campo eletromagnético na cavidade, mantendo assim as propriedades clássicas do campo mesmo para um número médio de fótons baixo.

Tratamos aqui o Hamiltoniano que descreve a interação de um campo clássico com um átomo de dois níveis de energia na aproximação de dipolo. Para isso, considera-se o campo elétrico

$$E_{(r,t)} = \lambda_k(F^* - F) \quad (2.8.2)$$

onde os operadores de criação e destruição de fótons da expressão (2.6.1) são substituídos pela intensidade do campo F de cada modo, refazendo os calculos para o Hamiltoniano de interação encontramos:

$$H_{zR} = \hbar\lambda|F|(\sigma_+e^{-i\varphi} + \sigma_-e^{i\varphi}) \quad (2.8.3)$$

sendo λ o fator de acoplamento átomo-campo. O operador de evolução na representação de interação será dado por

$$U_{zR}(\phi) = e^{-i\frac{H_{zR}t}{\hbar}} = \cos(\phi)I - i\sin(\phi)[e^{-i\varphi}\sigma_+ + e^{i\varphi}\sigma_-]$$

sendo $\phi = \lambda|F|t$ a intensidade da rotação desejada, I a matriz identidade, φ a fase do campo clássico e σ_+ (σ_-) os operadores de levantamento (abaixamento) definidos pelas matrizes de Pauli. Dessa forma ao passar por uma zona de Ramsey o átomo tem seus níveis internos transformados, segundo as expressões abaixo

$$U_{zR(\phi,\varphi)}|g\rangle = \cos(\phi)|g\rangle - ie^{-i\varphi}\sin(\phi)|e\rangle \quad (2.8.4)$$

$$U_{zR(\phi,\varphi)}|e\rangle = \cos(\phi)|e\rangle - ie^{i\varphi}\sin(\phi)|g\rangle \quad (2.8.5)$$

Notamos que as zonas de Ramsey realizam rotações no estado atômico, mas não mudam a fase relativa entre as suas componentes. Para isto, devemos passar o átomo por uma região que tenha campos estáticos fracos (Defasadores atômicos), que através dos efeitos Stark ou Zeeman quebra a degenerescência deslocando os níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ de maneiras distintas, logo as fases $e^{-i\omega_e\tau}$ e $e^{-i\omega_g\tau}$ adquiridas após um tempo de interação τ são diferentes.

2.8.3 Cavidades.

Os experimentos típicos em cavidades demandam um certo tempo de interação entre o átomo e o campo. Este tempo de interação deve ser muito menor que os tempos de vida dos estados do átomo e do campo dentro da cavidade. Para isso utiliza-se cavidades de alto fator de qualidade.

$$Q = \tau_v \omega, \quad (2.8.6)$$

onde τ_v é o tempo de vida e ω a frequência do modo armadilhado dentro da cavidade. Quando resfriadas a temperaturas de aproximadamente $0,5K$, cavidades supercondutoras de Nióbio apresentam um número médio de fótons térmicos, da ordem de $0,02$, na região de microondas com fator de qualidade $Q \sim 10^{10}$, e tempo de vida do modo de $\tau_v \sim 10^{-1}s$. O tempo típico de interação átomo-campo é da ordem de $\tau \sim 10^{-5}s$ [2,45]. O que possibilita que os experimentos sejam realizados com significativas fidelidades.

Para os modos tipicamente utilizados, que são ressonantes ou próximos da ressonância com a transição dos átomos de Rydberg ($51GHz$) a constante de acoplamento é da ordem de $g \simeq 10^5 Hz$, sendo este um acoplamento efetivo visto que a amplitude do campo não é uniforme, apresentando valor máximo no centro da cavidade. Logo, um tratamento rigoroso exige a utilização de uma constante de acoplamento dependente do tempo $g(t)$ que deve modificar os autoestados $|n, \pm\rangle$, causando transições entre polaritons. Para contornar este problema utiliza-se velocidades atômicas suficientemente baixas para que o *teorema adiabático* seja válido, de forma que os autoestados do Hamiltoniano dependente do tempo continuem os mesmos. Sobre esta condição podemos ignorar a dependência temporal do acoplamento e o Hamiltoniano (2.6.8) pode ser utilizado.

Um parâmetro importante é a dessintonia $\delta = \omega_0 - \omega$, que tem seu controle feito pela aplicação de uma tensão nos espelhos da cavidade. Assim, via efeito Stark altera-se a separação dos níveis de energia do átomo, tornando sua interação com o campo ressonante ou dispersiva.

A preparação dos campos dentro da cavidade é relativamente simples, se comparada à dos estados atômicos, porém limitada a alguns estados específicos. O mais simples de ser preparado, porém sem muito interesse prático para experimentos em EQC é o estado térmico, que devido à necessidade de resfriamento dos espelhos supercondutores não possui um espectro amplo. A preparação de um estado coerente é feita pelo acoplamento da cavidade, via guia de onda, ao campo produzido por uma fonte clássica de radiação ressonante com o modo da cavidade. Variando o tempo de interação e a amplitude do campo clássico tem-se o controle da amplitude $|\alpha|^2$ do estado $|\alpha\rangle$ que se deseja criar dentro da cavidade.

No domínio ótico, além dos ressonadores tipo do Fabry Perrot é utilizado microcavi-

dades esféricas que têm o modo do campo propagando muito próximo a sua superfície interna e pode interagir com campos externos aplicados, além de poderem ser acopladas via fibra ótica formando cadeia de microcavidades. Na Fig.(2.8.2) temos uma representação esquemática de uma cavidade tipo Fabry Perot, utilizada em experimentos na região de microondas.

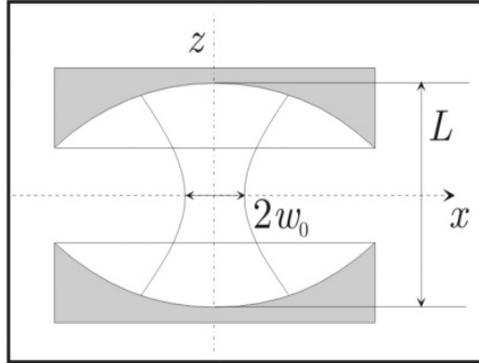


Figura 2.8.2: Cavidade tipo Fabry Perot utilizada nos experimentos do Lab. Kastler Brossel. A cavidade é feita de dois espelhos com 50mm de diâmetro e 40mm de raio de curvatura. O modo presente na cavidade é gaussiano TEM_{900} , que apresenta 9 antinodos entre os espelhos. A largura mínima do modo é de $w_0 = 6\text{mm}$ e o volume do modo de $V = 700\text{mm}^3$.

2.8.4 Medidas

Os observáveis atômicos são mais acessíveis à medida, do que os relacionados ao campo. O elétron exterior dos átomos de Rydberg tem energia de ligação baixa², assim, a medição por ionização seletiva é frequentemente empregada nos experimentos em EQC [46]. Neste esquema de medição utilizam-se dois detectores, com efeitos complementares. O primeiro detector Fig.(2.8.3), possui um campo elétrico dependente do tempo para ionizar os estados eletrônicos. Os estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$, assim como os outros níveis eletrônicos possuem tempos de ionização característicos, logo é possível através do controle da velocidade do feixe atômico discriminar qualquer nível eletrônico do átomo. O segundo detector Fig.(2.8.4) tem por finalidade detectar todos os átomos em um determinado nível sem se importar com a velocidade do átomo. Para isso o detector é construído de forma a ter um campo elétrico com dependência espacial, o que limita a detecção à apenas um nível previamente escolhido através da manipulação da posição da fenda onde está localizado o elétron multiplicador. Este esquema de detecção conjunta apresenta eficiência de $90 \pm 10\%$. [46].

²O campo elétrico de ionização varia com n^4 o que torna possível a detecção seletiva dos níveis $|e\rangle$ ($n = 51$) e $|g\rangle$ ($n = 50$).

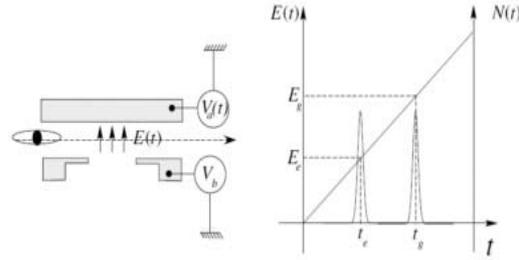


Figura 2.8.3: Detector com campo elétrico dependente do tempo. www.cqed.org/spip.php?article164.

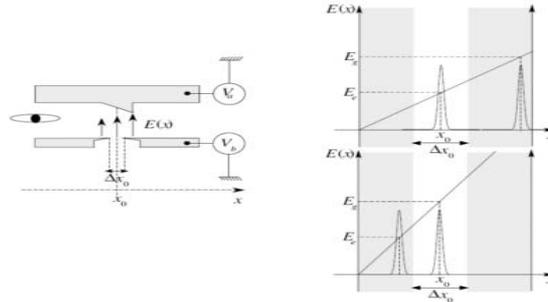


Figura 2.8.4: Detector com campo elétrico dependente da posição. www.cqed.org/spip.php?article164.

2.9 Íons Armadilhados

Um sistema muito importante em óptica quântica, tanto do ponto de vista teórico como das futuras aplicações, principalmente em computação quântica, é o sistema formado por íons interagindo com o campo de radiação em cavidades, a eletrodinâmica quântica com íons aprisionados [3]. Na Fig.(2.9.1) temos uma representação deste sistema.

Quando temos um íon armadilhado em um potencial harmônico, podemos tratar o seu movimento vibracional quânticamente, dessa forma, associa-se um operador para ao vetor posição do centro de massa do íon. O Hamiltoniano livre para o movimento vibracional do íon neste caso é

$$H_v = \hbar\nu b^\dagger b, \quad (2.9.1)$$

onde ν é a frequência da armadilha, $b^\dagger(b)$ é o operador de criação (aniquilação) de excitações dos modos de vibração. Normalmente considera-se um íon numa armadilha de Paul que utiliza-se de campos elétricos oscilantes. A armadilha confina o íon nas três dimensões num potencial que é aproximadamente harmônico. Na interação do íon com campos eletromagnéticos é possível escolher uma configuração tal que podemos considerar apenas um grau de liberdade espacial (translação) e utilizar da aproximação de dois níveis para os estados eletrônicos.

O Hamiltoniano de interação do íon aprisionado, interagindo com o campo de radiação

é em geral complicado. No entanto sobre certo regime de parâmetros podemos simplificar o estudo da dinâmica do sistema consideravelmente.

Para um íon armadilhado interagindo com um modo do campo da cavidade e submetido a um feixe laser externo temos

$$H = H_0 + H_C + H_L, \quad (2.9.2)$$

em que H_0 é o Hamiltoniano livre do sistema, H_C é o Hamiltoniano de interação do íon com o campo da cavidade e H_L é o Hamiltoniano de interação do íon com o campo externo, dados por:

$$H_0 = \hbar\nu b^\dagger b + \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z, \quad (2.9.3)$$

$$H_C = \hbar\zeta(\sigma_+ + \sigma_-)(a^\dagger + a)\cos(\eta_c(b^\dagger + b) + \phi), \quad (2.9.4)$$

$$H_L = \hbar\Omega\{\sigma_+ \exp i[\eta_L(b^\dagger + b) - \omega_L t + \theta] + \sigma_- \exp -i[\eta_L(b^\dagger + b) - \omega_L t + \theta]\}. \quad (2.9.5)$$

Nas equações acima $\eta_c = 2\pi a_0/\lambda_c$ e $\eta_L = 2\pi a_0/\lambda_L$ são, respectivamente, os parâmetros de Lamb-Dicke relativos aos campo da cavidade e do laser, sendo a_0 a largura do poço harmônico, $\lambda_c(\lambda_L)$ o comprimento de onda do campo da cavidade (laser), $\zeta(\Omega)$ é a constante de acoplamento cavidade-íon (laser-íon). As fases ϕ e θ dão a posição do centro da armadilha com relação ao modo do campo e ao campo inicial do laser, respectivamente.

Se o movimento do íon é restrito a uma região do espaço muito menor do que o comprimento de onda do campo, estamos no regime de Lamb-Dicke (LD)³. Vamos assumir a seguir que o sistema esta no regime LD, ou seja, $\eta_c \ll 1$ e $\eta_L \ll 1$, tal que podemos aproximar o cosseno e as exponencias ate segunda ordem no parâmetro de Lamb-Dicke por

$$\cos(\eta_c(b^\dagger + b) + \phi) \approx \left[1 - \frac{\eta_c^2}{2}(b^\dagger + b)^2\right] \cos \phi - \eta_c(b^\dagger + b) \sin \phi, \quad (2.9.6)$$

$$\exp i\eta_L(b^\dagger + b) \approx 1 + i\eta_L(b^\dagger + b). \quad (2.9.7)$$

Nessa aproximação o Hamiltoniano na representação de interação, assume a forma

³O parâmetro de Lamb-Dicke utilizado tipicamente em experimentos é $\eta = 0.1$. [47]

$$\begin{aligned}
 H_I = & \hbar\Omega(\sigma_+ e^{i(\delta_L t + \theta)} + h.c) + i\hbar\Omega\eta_L(\sigma_+ b e^{i[(\delta_L - \nu)t + \theta]} + \sigma_+ b^\dagger e^{i[(\delta_L + \nu)t + \theta]} - h.c) \\
 & + \hbar\zeta \cos \phi \left[1 - \frac{\eta_c^2}{2}(1 + 2b^\dagger b) \right] [\sigma_- a^\dagger e^{i\delta_c t} + \sigma_+ a^\dagger e^{i(\delta_c + 2\omega)t} + h.c] \\
 & - \hbar\zeta\eta_c \sin \phi [\sigma_+ b^\dagger a^\dagger e^{i(\delta_c + \nu + 2\omega)t} + \sigma_+ b a^\dagger e^{i(\delta_c - \nu + 2\omega)t} + h.c] \\
 & - \hbar\zeta\eta_c \sin \phi [\sigma_+ b a e^{i(\delta_c - \nu)t} + \sigma_+ b^\dagger a e^{i(\delta_c + \nu)t} + h.c] \\
 & - \frac{\eta_c^2}{2} \hbar\zeta \cos \phi [\sigma_+ b^{\dagger 2} a^\dagger e^{i(\delta_c + 2\nu + 2\omega)t} + \sigma_+ b^2 a^\dagger e^{i(\delta_c - 2\nu + 2\omega)t} + h.c] \\
 & - \frac{\eta_c^2}{2} \hbar\zeta \cos \phi [\sigma_- b^{\dagger 2} a^\dagger e^{-i(\delta_c - 2\nu)t} + \sigma_- b^2 a^\dagger e^{-i(\delta_c + 2\nu)t} + h.c], \tag{2.9.8}
 \end{aligned}$$

em que $\delta_L = \omega_0 - \omega_L$ e $\delta_c = \omega_0 - \omega$ são as dessintonias átomo-laser e átomo-campo, respectivamente.

O Hamiltoniano (2.9.8) tem um bom número de parâmetros que podem ser controlados experimentalmente o que possibilita a obtenção de dinâmicas distintas. A seguir, explicitamos alguns Hamiltonianos que podem ser obtidos a partir da Eq.(2.9.8) pelo escolha das dessintonias e aplicação da AOG. O que garante a validade dos Hamiltonianos obtidos apenas no regime de acoplamento suficientemente fraco e baixo número de excitações vibracionais e fotônicas.

Iniciaremos analisando o caso $\zeta = 0$, no qual

$$H_I = \hbar\Omega(\sigma_+ e^{i(\delta_L t + \theta)} + h.c) + i\hbar\Omega\eta_L(\sigma_+ b e^{i[(\delta_L - \nu)t + \theta]} + \sigma_+ b^\dagger e^{i[(\delta_L + \nu)t + \theta]} - h.c). \tag{2.9.9}$$

Três possíveis escolhas para δ_L , resultam em interações distintas:

- $\delta_L = 0$ "*Carrier*"

$$H_c = \hbar\Omega(\sigma_+ e^{i\theta} + \sigma_- e^{-i\theta}). \tag{2.9.10}$$

Tal interação causa transições apenas entre os dois níveis internos do íon sem alterar o estado do campo ou do movimento do centro de massa. A evolução segundo o Hamiltoniano carrier é da forma

$$e^{\frac{-i}{\hbar}H_c t} |n, g\rangle = \cos(\Omega t) |n, g\rangle - i e^{-i\theta} \sin(\Omega t) |n, e\rangle, \tag{2.9.11}$$

$$e^{\frac{-i}{\hbar}H_c t} |n, e\rangle = \cos(\Omega t) |n, e\rangle - i e^{i\theta} \sin(\Omega t) |n, g\rangle. \tag{2.9.12}$$

Esse Hamiltoniano realiza um papel semelhante a zona de Ramsey nos estados atômicos, e pode ser utilizado para a implementação da porta lógica de Hadamard.

- $\delta_L = -\nu$ "*desvio para o azul*"

$$H_{AJC} = i\hbar\Omega\eta_L(\sigma_+b^\dagger e^{i\theta} - \sigma_-be^{-i\theta}). \quad (2.9.13)$$

Trata-se de um Hamiltoniano conhecido como anti-Jaynes-Cumming (AJC) e representa um processo de duplo decaimento ou excitação onde os graus de liberdade internos e de movimento vibracional do íon decaem ou excitam-se simultaneamente de um quantum de energia cada, levando a seguinte dinâmica de evolução

$$e^{-\frac{it}{\hbar}H_{AJC}} |n, g\rangle = \cos(\Omega\eta_L\sqrt{n+1}t) |n, g\rangle - ie^{i\theta} \sin(\Omega\eta_L\sqrt{n+1}t) |n+1, e\rangle, \quad (2.9.14)$$

$$e^{-\frac{it}{\hbar}H_{AJC}} |n, e\rangle = \cos(\Omega\eta_L\sqrt{n}t) |n, e\rangle - ie^{-i\theta} \sin(\Omega\eta_L\sqrt{n}t) |n-1, g\rangle. \quad (2.9.15)$$

Tal processo não é encontrado na interação átomo-cavidade padrão. Esse processo tem sido utilizado para geração de estados não clássicos do movimento do centro de massa do íon.

- $\delta_L = \nu$ "desvio para o vermelho"

$$H_{JC} = i\hbar\Omega\eta_L(\sigma_+be^{i\theta} - \sigma_-b^\dagger e^{-i\theta}). \quad (2.9.16)$$

Esse é um Hamiltoniano do tipo Jaynes-Cummings usual e descreve o processo em que o íon se excita ou decai enquanto o movimento vibracional sofre um decaimento ou excitação de um quantum de energia, de forma que os estados eletrônicos e vibracionais evoluem como

$$e^{-\frac{it}{\hbar}H_{JC}} |n, g\rangle = \cos(\Omega\eta_L\sqrt{n}t) |n, g\rangle - ie^{i\theta} \sin(\Omega\eta_L\sqrt{n}t) |n-1, e\rangle, \quad (2.9.17)$$

$$e^{-\frac{it}{\hbar}H_{JC}} |n, e\rangle = \cos(\Omega\eta_L\sqrt{n+1}t) |n, e\rangle - ie^{-i\theta} \sin(\Omega\eta_L\sqrt{n+1}t) |n+1, g\rangle. \quad (2.9.18)$$

Além de todas as propriedades dinâmicas que o MJC exhibe, esta interação é utilizada, no caso do íon, para trazer sua energia vibracional ao estado fundamental. Esse esquema é conhecido como *resfriamento de banda lateral resolvida* [9].

Temos ainda outras situações possíveis para o Hamiltoniano de interação, decorrentes do ajuste da dessintonia átomo-campo.

No caso de $\Omega = 0$ (laser desligado), obtemos

$$\begin{aligned}
 H_I = & \hbar\zeta \cos \phi \left[1 - \frac{\eta_c^2}{2} (1 + 2b^\dagger b) \right] [\sigma_- a^\dagger e^{i\delta_c t} + \sigma_+ a^\dagger e^{i(\delta_c + 2\omega)t} + h.c.] \\
 & - \hbar\zeta \eta_c \sin \phi [\sigma_+ b^\dagger a^\dagger e^{i(\delta_c + \nu + 2\omega)t} + \sigma_+ b a^\dagger e^{i(\delta_c - \nu + 2\omega)t} + h.c.] \\
 & - \hbar\zeta \eta_c \sin \phi [\sigma_+ b a e^{i(\delta_c - \nu)t} + \sigma_+ b^\dagger a e^{i(\delta_c + \nu)t} + h.c.] \\
 & - \frac{\eta_c^2}{2} \hbar\zeta \cos \phi [\sigma_+ b^{\dagger 2} a^\dagger e^{i(\delta_c + 2\nu + 2\omega)t} + \sigma_+ b^2 a^\dagger e^{i(\delta_c - 2\nu + 2\omega)t} + h.c.] \\
 & - \frac{\eta_c^2}{2} \hbar\zeta \cos \phi [\sigma_- b^{\dagger 2} a^\dagger e^{i(\delta_c + 2\nu)t} + \sigma_- b^2 a^\dagger e^{-i(\delta_c + 2\nu)t} + h.c.], \tag{2.9.19}
 \end{aligned}$$

que geram Hamiltonianos que podem ser utilizados para geração da base de Bell e portas lógicas e acoplamentos dependente da intensidade do movimento iônico [48].

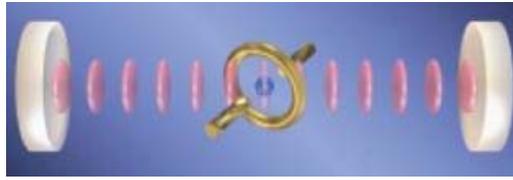


Figura 2.9.1: Representação de um íon armadilhado dentro de uma cavidade. e.heart-c704.uibk.ac.at/

Em experimentos em cavidades ópticas normalmente usa-se íons de cálcio $^{40}\text{Ca}^+$ que possuem a estrutura de níveis, frequências de transição e largura de linhas apropriadas para a manipulação coerente, além de possuir uma massa apropriada para o aprisionamento e cristalização numa armadilha de Paul [49]. No caso da interação com cavidades de microondas o íon freqüentemente usado é $^{171}\text{Yb}^+$ [47] que apresenta uma rápida e elevada eficiência na preparação dos estados eletrônicos de interesse assim como um apreciável tempo de vida dos níveis eletrônicos que é da ordem de $2.5s$.

As medidas dos estados eletrônicos do íon são feitas por técnicas de fluorescência⁴, com capacidade de discriminação entre dois estados eletrônicos com eficiência próxima de 100%.

A realização prática de protocolos interessantes em computação e informação quântica utilizando íons armadilhados, sofrem limitações devido a perda de coerência, resultante da interação do meio ambiente e de flutuações intrínsecas nos parâmetros de interação envolvidos.

⁴Mais especificamente uma técnica conhecida como *electron shelving technique*.

Capítulo 3

Computação e Informação Quântica

3.1 Bits Quânticos (qubits)

A teoria da informação clássica trata do armazenamento, processamento e transmissão de informações (letras, palavras, números) através de canais que operam de acordo com as leis da mecânica clássica. Esta informação é codificada através de unidades fundamentais denominadas bit (do termo em inglês *Binary digit*), os quais podem assumir os valores lógicos “0” ou “1”. Os bits podem ser representados fisicamente por algum dispositivo com dois estados distinguíveis e não ambíguos, de forma que com N destes dispositivos pode-se representar N bits, dando lugar a um número total de estados (lógicos) igual a 2^N . Em nossos computadores, os bits são representados pela presença ou não de correntes elétricas em componentes eletrônicos dentro dos chips: a presença da corrente indica o estado lógico 1 e a sua ausência o estado lógico 0.

Em um computador quântico, um sistema de 2 estados é utilizado para representar um bit, sendo então chamado de quantum bit (qubit). Os qubits podem assumir os valores lógicos “0”, “1” ou qualquer mistura destes dois estados simultaneamente, o que é conhecido como *superposição coerente de estados*. Os exemplos mais comuns para a representação física de um qubit são: estados de polarização de um fóton (horizontal ou vertical), elétrons em átomos de dois níveis, elétrons em poços quânticos, e spins nucleares.

Matematicamente, o estado de um qubit é descrito por um vetor unitário

$$|\psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle \quad (3.1.1)$$

com as amplitudes α_0 e $\alpha_1 \in \mathbb{C}$, satisfazendo a condição de normalização

$$|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1.$$

Os kets $|0\rangle$ e $|1\rangle$ representam os vetores

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.2)$$

O conjunto $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ forma uma base em um espaço de Hilbert bidimensional (\mathbb{C}^2), chamada de base computacional. No caso de um sistema de spin $1/2$, identificamos $|0\rangle \equiv |\downarrow\rangle$ e $|1\rangle \equiv |\uparrow\rangle$.

Existe uma interpretação geométrica para um qubit em \mathbb{R}^3 e que ajuda no entendimento de suas propriedades. Como $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$ a equação (3.1.1) pode ser reescrita como :

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} [\cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle], \quad (3.1.3)$$

sendo θ, ϕ e $\gamma \in \mathbb{R}$. Como o termo $e^{i\gamma}$ (chamado fator de fase global) não tem efeito físico observável (lembre-se que $|e^{i\gamma}| = 1$), pode ser desconsiderado e a equação se transforma em

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle. \quad (3.1.4)$$

Os números $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$, definem um ponto na esfera tridimensional de raio unitário (chamada esfera de Bloch - Fig.(3.1.1)). O ângulo θ que o vetor faz com o eixo vertical (eixo Z) está relacionado com as "contribuições" relativas dos estados da base $|0\rangle$ e $|1\rangle$ para o estado geral do qubit. O ângulo ϕ é a projeção que o vetor sobre o plano $x - y$ faz com o eixo x corresponde à fase relativa do qubit. O fator de fase relativa tem grande importância nos efeitos de interferência.

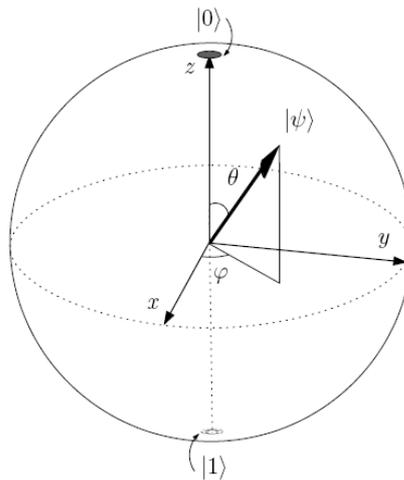


Figura 3.1.1: Esfera de Bloch.

A física quântica descreve o estado genérico de um sistema composto de n qubits como uma superposição normalizada dos 2^n estados da base computacional

$$\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |2^n - 1\rangle\}, \quad (3.1.5)$$

do espaço \mathbb{C}^n , ou seja,

$$|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} \alpha_x |x\rangle, \quad \text{com a restrição} \quad \sum_{x=0}^{2^n-1} |\alpha_x|^2 = 1. \quad (3.1.6)$$

Assim, o estado geral $|\psi\rangle$ de um sistema com n qubits é descrito por um vetor unitário no espaço \mathbb{C}^{2^n} com amplitudes α_x , $0 \leq \alpha_x \leq 2^n - 1$.

Por exemplo, o estado geral de um sistema de dois qubits é uma superposição dos estados da base computacional $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ e $|3\rangle$, ou na notação binária

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle = |0\rangle, \quad |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle = |1\rangle, \quad |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle = |2\rangle, \quad |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle = |3\rangle.$$

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle \quad (3.1.7)$$

com a restrição

$$\sum_{i,j=0}^1 |\alpha_{ij}|^2 = 1. \quad (3.1.8)$$

Um tipo especial de estado é o chamado produto direto que é descrito pelo produto tensorial dos estados de seus componentes. Por exemplo, se $|\psi\rangle_A$ e $|\varphi\rangle_B$ são os vetores de estado de dois qubits A e B nos espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$:

$$|\psi\rangle_A = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}_A \quad \text{e} \quad |\varphi\rangle_B = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}_B, \quad (3.1.9)$$

ou, de outra forma,

$$|\psi\rangle_A = \psi_0 |0\rangle_A + \psi_1 |1\rangle_A \quad \text{e} \quad |\varphi\rangle_B = \varphi_0 |0\rangle_B + \varphi_1 |1\rangle_B. \quad (3.1.10)$$

Então, o estado produto direto do sistema composto pelos dois qubits, $|\psi\rangle_{AB}$, é obtido pelo produto tensorial de $|\psi\rangle_A$ com $|\varphi\rangle_B$. Lembrando que:

$$U \otimes V = \begin{pmatrix} u_{11}V & u_{12}V & \cdots \\ u_{21}V & u_{22}V & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}v_{11} & u_{11}v_{12} & \cdots & u_{12}v_{11} & u_{12}v_{12} & \cdots \\ u_{11}v_{21} & u_{11}v_{22} & & u_{12}v_{21} & u_{12}v_{22} & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ u_{21}v_{11} & u_{21}v_{12} & & & & \\ u_{21}v_{21} & u_{21}v_{22} & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}, \quad (3.1.11)$$

obtemos assim o estado que representa os dois sistemas

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_{AB} &= |\psi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \psi_0\varphi_0 \\ \psi_0\varphi_1 \\ \psi_1\varphi_0 \\ \psi_1\varphi_1 \end{pmatrix}_{AB} \\
 &= [\psi_0|0\rangle_A + \psi_1|1\rangle_A] \otimes [\varphi_0|0\rangle_B + \varphi_1|1\rangle_B] \\
 &= \psi_0\varphi_0|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \psi_0\varphi_1|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B \\
 &\quad + \psi_1\varphi_0|1\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \psi_1\varphi_1|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B.
 \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Podemos simplificar a notação omitindo o símbolo \otimes e escrevendo $|1\rangle_A \otimes |0\rangle_B = |10\rangle$, tal que

$$|\psi\rangle_{AB} = \psi_0\varphi_0|00\rangle + \psi_0\varphi_1|01\rangle + \psi_1\varphi_0|10\rangle + \psi_1\varphi_1|11\rangle. \tag{3.1.13}$$

O vetor resultante $|\psi\rangle_{AB}$ é um vetor no espaço $\mathbb{C}^{2^2} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ gerado pela base

$$\{|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B, |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\}. \tag{3.1.14}$$

Note que o estado geral de dois qubits dado pela Eq.(3.1.7) é da forma produto direto (3.1.13) se e somente se,

$$\alpha_{00} = \psi_0\varphi_0, \quad \alpha_{01} = \psi_0\varphi_1, \quad \alpha_{10} = \psi_1\varphi_0, \quad \alpha_{11} = \psi_1\varphi_1, \tag{3.1.15}$$

ou seja

$$\alpha_{00}\alpha_{11} = \alpha_{01}\alpha_{10}. \tag{3.1.16}$$

Visto que as amplitudes em (3.1.7) são regidas pela condição de normalização (3.1.8), essa relação não é geral, e portanto, o estado geral de dois qubits nem sempre é o produto direto dos estados do qubits individuais. Por exemplo, o estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle),$$

não pode ser escrito como um produto direto de estados de um qubit. Quando isso ocorre, o estado é dito estar emaranhado.

3.1.1 Estados de Superposição

No caso de um qbit, é necessários, geralmente, mais do que um bit de informação para determinar o estado do sistema. Isto deve-se ao fato do estado de um sistema quântico poder ser representado por uma *superposição de estados*. A superposição é devido ao fato da Mecânica Quântica(MQ) ser linear. Uma forma de ver isso é observar que a equação de Schroendiger é uma equação diferencial *linear* de primeira ordem e portanto, se $|\psi_1\rangle$

e $|\psi_2\rangle$ são soluções desta equação então $a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle$ também é solução, onde a e b são coeficientes quaisquer.

Na formulação de Dirac da MQ, a superposição entra como um princípio, pois nesta é estabelecido que para cada sistema físico é associado um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Cada elemento deste espaço ($|\psi\rangle \in \mathcal{H}$) caracteriza um estado do sistema físico, logo uma superposição também é um estado do sistema físico em questão (pois \mathcal{H} é um espaço vetorial).

Devido a normalização, impõe-se que os coeficientes a e b seguem a relação $a^2 + b^2 = 1$. Diferente do caso clássico, uma medida de estado de um qbit da forma:

$$|\psi\rangle = a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle, \quad (3.1.17)$$

não permite determiná-lo completamente, pois da medida de (3.1.17) é obtido como resultado o estado $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Cada um destes estados é medido com uma certa probabilidade relacionada com os coeficientes de (3.1.17) pela *regra de Born*:

$$\begin{aligned} Prob(|1\rangle) &= |a|^2, \\ Prob(|0\rangle) &= |b|^2. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Diferente da mistura estatística, onde os coeficientes representam a probabilidade do sistema *ser* este ou aquele. Numa superposição os coeficientes representam a probabilidade de se *medir* este ou aquele estado, ou seja, ele não está em um ou outro estado com certa probabilidade, mas sim nos dois ao mesmo tempo. Este ponto é importante pois muitas vezes a regra de Born é interpretada de forma errônea. Para ilustrar isso considere que o estado:

$$|\psi\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (3.1.19)$$

seja submetido a uma porta Hadamard, que é definida como

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.1.20)$$

tal que

$$H|\psi\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = |0\rangle,$$

mostrando que uma medida após a Hadamard resulta em $|0\rangle$ com probabilidade 1.

Mas, se interpretarmos, erroneamente, dando o mesmo significado de mistura estatística para o estado de superposição (3.1.19), então a aplicação da Hadamard resultará num dos seguintes estados:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (3.1.21)$$

Sendo que, ambos implicam numa igual probabilidade ($= \frac{1}{2}$) de medirmos $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. O que contradiz o resultado anterior que assegura uma probabilidade igual a 1 de medirmos $|0\rangle$.

Com isso, concluímos que a *superposição* é uma descrição irreduzível do estado de um qubit.

3.1.2 Emaranhamento

Em 1935 é apresentado por Einstein, Podolski e Rosen um importante conceito em física o "paradoxo EPR", em um trabalho, onde tenta-se responder a seguinte pergunta: "A Mecânica Quântica pode ser considerada uma teoria completa?". Uma teoria é completa somente se é capaz de prever o valor de uma grandeza física sem que seja antes necessária a realização de uma medida. Segundo a MQ, variáveis que não comutam não possuem realidade simultânea. No entanto no argumento de EPR, construído com base em estados emaranhados de pares correlacionados, verifica-se que a medida de posição de uma das partículas do par implica no conhecimento de antemão da posição da outra partícula. Dado que o mesmo aplica-se aos momentos de ambas as partículas, chega-se à conclusão de que tanto a posição como o momento da partícula que não submetemos ao processo de medida possuem realidades simultâneas. O aparente paradoxo da situação é resolvido através da verificação experimental de que a medida de observáveis de uma partícula projeta instantaneamente o estado do seu par correlacionado. Esse fato que foge á intuição clássica estava evidentemente alheio ao argumento de EPR.

O espaço de Hilbert de um sistema composto $\mathcal{H}_{A_1 A_2 \dots A_n}$ é formado pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert dos subsistemas individuais, respectivamente $\mathcal{H}_{A_1}, \mathcal{H}_{A_2}, \dots, \mathcal{H}_{A_n}$. Se for possível escrever o estado $|\psi_{A_1 A_2 \dots A_n}\rangle \in \mathcal{H}_{A_1 A_2 \dots A_n}$ como:

$$|\psi_{A_1 A_2 \dots A_n}\rangle = |\psi_{A_1}\rangle \otimes |\psi_{A_2}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{A_n}\rangle, \quad (3.1.22)$$

então este estado é dito *separável*, caso contrário, o estado é dito estar *emaranhado*.

No estudo de sistemas compostos o operador densidade desempenha um importante papel. Um sistema bipartite AB é descrito pelo vetor de estado conjunto $|\psi\rangle_{AB}$ ou pelo operador densidade ρ^{AB} , mas se desejarmos obter informações somente em relação a um dos subsistemas temos que tomar o traço parcial deste operador densidade,

$$\rho^A = Tr_B (\rho^{AB}) \quad \text{e} \quad \rho^B = Tr_A (\rho^{AB}). \quad (3.1.23)$$

O emaranhamento pode também ser definido em termos do operador densidade: o estado de um sistema composto é *separável* (não-emaranhado) se for possível escrever o

operador densidade como:

$$\rho^{A_1 \dots A_n} = \rho^{A_1} \otimes \dots \otimes \rho^{A_n}. \quad (3.1.24)$$

Se um sistema for formado por dois subsistemas este é chamado bipartite. Como exemplos de sistemas bipatites temos: dois átomos, dois spins, a polarização de 2 fótons. Uma única partícula pode constituir um sistema bipartite, desde que cada um dos dois subsistemas seja relativo a certos graus de liberdade, por exemplo, um subsistema referente ao estado vibracional e o outro referente aos níveis eletrônicos de um íon armadilhado. Para que exista emaranhamento entre sistemas é necessário que estes tenham interagido em algum momento ou que tenham interagido com um terceiro subsistema que transfere o emaranhamento.

O emaranhamento não indica que existe necessariamente interação entre os sistemas, mas que existe alguma correlação entre eles, sendo que esta correlação é de caráter quântico e não clássica. Este caráter quântico da correlação é de difícil compreensão.

De um ponto de vista clássico a correlação pode ser compreendida através do seguinte exemplo: suponha que tenhamos duas bolas de bilhar, uma vermelha e a outra preta. Colocamos cada bola em uma caixa e entregamos cada caixa a uma pessoa diferente sem que estas conheçam o conteúdo das caixas, apenas que numa há uma bola preta e a na outra uma bola vermelha. Se uma das pessoas abrir a sua caixa e tirar uma bola vermelha (por exemplo) então ela sabe o conteúdo da outra caixa sem que ela precise ser aberta. As duas observações estão correlacionadas.

Agora, o seguinte exemplo mostra a diferença da correlação (clássica) e do emaranhamento: Suponha uma mulher esteja grávida de gêmeos que possuem a seguinte característica, se um for canhoto o outro é destro. Apenas com esta informação uma pessoa dá uma caneta para uma das crianças, se ela pegar a caneta com a mão esquerda (por exemplo) sabe-se que a outra é destra. Ou seja, o fato de uma das crianças apanhar a caneta com a mão esquerda, é que define a destreza da outra criança.

Para ilustrar um importante aspecto do emaranhamento considere um estado emaranhado de um sistema bipartite da forma:

$$|\psi\rangle_+ = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.1.25)$$

A matriz de Pauli X é dada por:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.26)$$

Calculando as médias de X_A e X_B em relação ao estado (3.1.25) são obtidos os seguintes resultados:

$$\langle X_A \rangle = \langle \psi_+ | X_A | \psi_+ \rangle = \frac{\langle 00 | + \langle 11 |}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}} = 0, \quad (3.1.27)$$

e

$$\langle X_B \rangle = \langle \psi_+ | X_B | \psi_+ \rangle = 0, \quad (3.1.28)$$

mas se calcularmos a *correlação* entre X_A e X_B , isto é, a média de $X_A X_B$, obtemos o seguinte resultado:

$$\langle X_A X_B \rangle = \langle \psi_+ | X_A X_B | \psi_+ \rangle = \frac{\langle 00 | + \langle 11 |}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|11\rangle + |00\rangle}{\sqrt{2}} = 1, \quad (3.1.29)$$

mostrando que existe correlação máxima entre os spins.

Suponha que se faça medidas sobre o qubit A representadas pelos operadores $M_0^A = |0\rangle\langle 0|$ e $M_1^A = |1\rangle\langle 1|$. A probabilidade de se obter 0 ou 1 é a mesma e igual a $1/2$:

$$p(0) = \langle \psi_+ | M_0^{A\dagger} M_0^A | \psi_+ \rangle = \frac{1}{2} = \langle \psi_+ | M_1^{A\dagger} M_1^A | \psi_+ \rangle = p(1). \quad (3.1.30)$$

Supondo que tenhamos medido 0 e como consequência do postulado da medida o estado no qual o sistema deve se projetar será

$$|\psi_0\rangle = \frac{M_0^A |\psi_+\rangle}{1/\sqrt{2}} = |00\rangle. \quad (3.1.31)$$

Com isso, o estado do qubit B fica completamente determinado apenas com uma medida efetuada sobre o qubit A , ainda que nenhuma medida tenha sido realizada sobre B .

Até o momento poderíamos pensar que estamos presenciando uma correlação de caráter clássico, como o caso das bolas de bilhar, mas essa conclusão mostra-se falsa mediante o seguinte problema: Se a medida for realizada em outra base, por exemplo, $M_+^A = |+\rangle\langle +|$ e $M_-^A = |-\rangle\langle -|$ ao medir o estado $|+\rangle$ para o qubit A o estado do sistema composto após a medida é $|++\rangle$. Assim, o estado do qubit B depende do tipo de medida realizada sobre o qubit A . Esse fato não pode ser ilustrado usando o exemplo das bolas de bilhar.

A influência do resultado de uma medida em um qubit sobre o estado de outro qubit, ainda que localizado remotamente em relação ao primeiro é um exemplo do que se passou a chamar *não-localidade*.

3.2 Computador Quântico

Para se conseguir construir o "*hardware*" para um computador quântico, é necessária uma tecnologia que possibilite a manipulação coerente de qubits. O hardware precisará se adequar a alguns requisitos severos que primeiro foram discutidos por DiVincenzo [54], que estabeleceu critérios para identificar possíveis sistemas quânticos que poderiam ser úteis, em princípio, para se implementar um computador quântico, através das seguintes condições:

Sistema	τ_Q	τ_{op}	$n_{op} = \lambda^{-1}$
Spin nuclear	$10^{-2} - 10^8$	$10^{-3} - 10^{-6}$	$10^5 - 10^{14}$
Spin eletrônico	10^{-3}	10^{-7}	10^4
Armadilha de íons (In^+)	10^{-1}	10^{-14}	10^{13}
Elêtron -Au	10^{-8}	10^{-14}	10^6
Elêtron -GaAs	10^{-10}	10^{-13}	10^3
Ponto quântico	10^{-6}	10^{-9}	10^3
Cavidade óptica	10^{-5}	10^{-14}	10^9
Cavidade de microonda	10^0	10^{-4}	10^4

Figura 3.2.1: Vários qubits correspondentes a distintos sistemas. $\tau_Q(s)$ dá o tempo estimado de decoerência, $\tau_{op}(s)$ tempo de operação, e $n_{op} = \lambda^{-1}$ é o número de operações possíveis de serem realizadas neste sistema.

1. *Necessidade de qubits*: sistemas quânticos descritos por espaços de Hilbert finitos, os quais podem ser decompostos em forma de produtos tensoriais;
2. *Etapa de inicialização*: habilidade para preparar o sistema quântico a partir de um estado inicial, tal como o estado fundamental;
3. *Longo tempo de coerência*: um sistema adequado precisa de um grande isolamento de seu meio ambiente, de maneira que uma superposição de estados quânticos se mantenha por tempos suficientes para que os processos computacionais possam ser completados;
4. *Controle universal*: habilidade para submeter o sistema quântico a uma seqüência controlável de transformações unitárias;
5. *Medições*: capacidade de leitura para medir o estado quântico final. No que se refere aos possíveis qubits, a Fig.(3.2.1) mostra algumas das mais importantes realizações destas unidades de informação quântica

3.2.1 Circuitos Quânticos

Uma operação lógica ou até mesmo um algoritmo pode ser descrito por um diagrama denominado circuito quântico. Estes determinam quais e em que ordem as chaves lógicas são aplicadas a um ou mais qubits de um sistema. Os circuitos quânticos são compostos de linhas e símbolos, como podemos ver na Fig.(3.2.2). As linhas representam os qubits (uma linha para cada qubit), necessários para realizar uma determinada operação e os

símbolos representam as chaves lógicas. As chaves lógicas (descritas por caixas, com letras) descrevem um conjunto de operações quânticas aplicadas a um ou mais qubits. Para apresentar as convenções usadas em circuitos quânticos, vamos utilizar um circuito (porta U-controlada) em que a entrada e a saída são estados de 2 qubits.

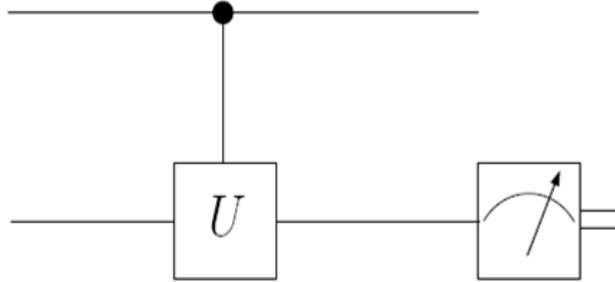


Figura 3.2.2: Circuito com uma operação controlada.

- **Entrada:** pode ser o produto tensorial entre os qbits de entrada ou um estado emaranhado (os qbits não devem ser considerados individualmente).
- **Linhas horizontais:** as linhas que aparecem não são necessariamente fios. Elas representam a evolução de um qubit, podendo representar apenas a passagem do tempo ou, por exemplo, o deslocamento de um fóton.
- **Sentido:** o circuito descreve a evolução do sistema quântico no tempo, da esquerda para a direita. Com isso, não se aplica ao caso quântico a retroalimentação, que pode ocorrer em um circuito clássico.
- **Linhas verticais:** o segmento vertical que aparece unindo os símbolos \bullet e U informa que o circuito atua simultaneamente nos dois qbit. A linha vertical representa o sincronismo, e não o envio de informação. Portanto, não são permitidas nem junções, nem bifurcações de qbits.
- **Controle:** o símbolo \bullet indica que o qubit representado nessa linha é um qubit de controle, ou seja, caso esteja no estado $|1\rangle$, a porta U realiza a operação; caso esteja no estado $|0\rangle$, a porta U não realiza operação alguma. Caso o qubit de controle seja um estado superposto ou os 2 qubits estejam emaranhados, não é possível compreender o comportamento individual do qubit de controle e do qubit alvo. Devemos considerar a ação do operador unitário, que representa todo o circuito, atuando simultaneamente nos 2 qubits.
- **Saída:** os qubits que compõem a saída do circuito podem ou não ser medidos.

Como o qubit inferior está sendo medido (o símbolo de medida está indicado na Fig.(3.2.2), o resultado será 0 ou 1.

Vistas as principais convenções, vamos apresentar algumas portas quânticas. Começemos por portas de 1 qubit. No caso clássico, há apenas uma possibilidade: a porta *NOT*. O mesmo não ocorre nos circuitos quânticos, como veremos.

Antes de prosseguir, façamos uma observação. A importância do estudo de portas lógicas em computação quântica baseia-se no fato de que toda matriz unitária 2×2 pode ser representada por um circuito quântico de 1 qubit e vice-versa. Sendo assim, a evolução no tempo de um sistema quântico isolado, dado por um qubit, pode ser representada tanto matematicamente (por uma transformação unitária) quanto logicamente (por um circuito quântico).

3.2.2 Portas Lógicas Quânticas

Porta NOT Quântica

No caso clássico, a porta *NOT* troca o 1 por 0 e vice-versa. A generalização para o caso quântico é dada por um operador X que satisfaz :

$$X |0\rangle = |1\rangle, \quad X |1\rangle = |0\rangle,$$

sua representação matricial na base computacional, tem a forma

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.1)$$

que é uma das matrizes de Pauli, as outras duas matrizes de Pauli também são importantes na representação de circuitos e definem as operações Y e Z , são dadas pelas matrizes

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.2)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.3)$$

Porta Hadamard

Uma outra porta de 1 qubit, largamente utilizada, é a porta Hadamard H , definida pelo operador

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.4)$$

Aplicando H na base computacional, obtemos:

$$H |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad (3.2.5)$$

$$H |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \quad (3.2.6)$$

que são superposições dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, onde a probabilidade de se medir um dos estados, é 50%. A atuação do operador H em cada qubit de um registrador com 2 qubits no estado $|00\rangle$, ocorre da seguinte forma

$$\begin{aligned} H^{\otimes 2} |00\rangle &= H |0\rangle \otimes H |0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Podemos generalizar para estados com n qubit, obtendo

$$H^{\otimes n} |0 \dots 0\rangle = (H |0\rangle)^{\otimes n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right)^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=0}^{N-1} |i\rangle. \quad (3.2.8)$$

O mesmo pode ser feito para qubits inicialmente no estado $|1\rangle$

Quando atuamos H em um estado genérico $|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$, obtemos

$$H |\Psi\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (3.2.9)$$

Uma nova aplicação de H no estado acima, leva a

$$\begin{aligned} HH |\Psi\rangle &= \frac{\alpha H}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{\beta H}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\ &= \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

o que demonstra o caráter unitário da operação de Hadamard.

Porta S

A matriz unitária associada à porta S é dada por

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (3.2.11)$$

Aplicando S em um estado de superposição qualquer $|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$, resulta em

$$S |\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + i\beta |1\rangle. \quad (3.2.12)$$

Note que, se for feita uma medida do estado $S|\Psi\rangle$, as probabilidades de se obter os estados $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ serão as mesmas, comparadas com uma medida realizada sobre o estado $|\Psi\rangle$. Isso não acontece, por exemplo, usando a porta H . Por isso a porta S é chamada de porta de fase.

Porta T

A matriz unitária associada à porta T é

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \quad (3.2.13)$$

A atuação de T em um estado genérico $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, leva ao estado

$$T|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \exp(i\frac{\pi}{4})\beta|1\rangle. \quad (3.2.14)$$

Onde as probabilidades de se obter os estados $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ serão as mesmas, comparadas com uma medida realizada sobre o $|\Psi\rangle$.

Porta CNOT

Uma porta controlada Fig.(3.2.3), age dependendo do valor do qubit de controle. Ela é “ativada” se o qubit de controle estiver no estado $|1\rangle$, e nada faz, se ele estiver no estado $|0\rangle$. Essa descrição é adequada apenas quando o qubit de controle está nos estados $|1\rangle$ ou $|0\rangle$. Entretanto, o que distingue a porta $CNOT$ quântica da clássica é que, na porta $CNOT$ quântica, os qubit alvo e de controle podem ser estados superpostos, além disso, os dois qubit podem estar emaranhados.

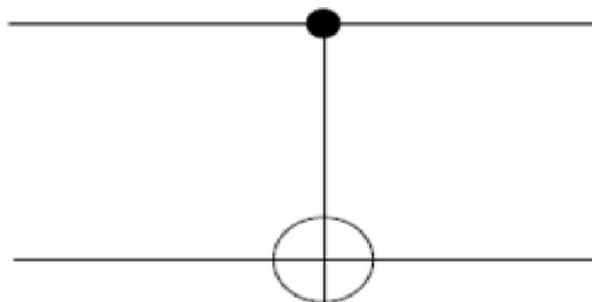


Figura 3.2.3: Representação da porta CNOT em circuitos. O círculo cheio (vazio) representa o qubit controle (alvo).

A ação da porta $CNOT(CX$ ou $C_{ij})$ pode ser caracterizada pelas transformações operadas nos elementos da base computacional, junto a sua representação matricial

$$\begin{aligned}
 CX |00\rangle &= |00\rangle \\
 CX |01\rangle &= |01\rangle \\
 CX |10\rangle &= |11\rangle \\
 CX |11\rangle &= |10\rangle
 \end{aligned}
 \quad
 CX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \quad
 \begin{aligned}
 &|i, j\rangle \rightarrow |i, i \oplus j\rangle \\
 &\text{onde } i, j \in \{0, 1\}, \text{ e } \oplus \text{ é adição modulo } 2.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.15}$$

Um resultado importante sobre circuitos quânticos é que qualquer operador unitário pode ser representado usando portas *CNOT* e portas de 1 qubit [50].

Uma aplicação interessante da porta *CX* é para a construção da operação de troca (*swap*)

$$S_{wap} = C_1 X C_2 X C_1 X, \quad S_{wap} |01\rangle = |10\rangle. \tag{3.2.16}$$

Algumas identidades úteis entre as portas são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{X+Z}{\sqrt{2}} & S &= T^2 & XYX &= -Y & HXH &= Z \\
 HYH &= -Y & HZH &= X & CX_1 C &= X_1 X_2 & CY_1 C &= Y_1 X_2 \\
 CZ_1 C &= Z_1 & CX_2 C &= X_2 & CY_2 C &= Z_1 Y_2 & CZ_2 C &= Z_1 Z_2
 \end{aligned}
 \tag{3.2.17}$$

Nas implementações físicas das portas quânticas frequentemente é mais simples obter através da evolução livre do Hamiltoniano a tabela verdade da porta de fase controlada *CZ*. Uma identidade muito importante que será utilizada nesta dissertação é a que existe entre a *CNOT* e a porta *CZ*, que se expressa da seguinte forma

$$C_i X_j = H_j (C_i Z_j) H_j. \tag{3.2.18}$$

3.3 Codificação Super Densa

A codificação super densa [51] é uma aplicação simples e surpreendente da mecânica quântica elementar, que tem como objetivo transmitir 2 bits de informação utilizando um único qubit. Para isso Alice e Bob devem compartilhar um par de qubits no estado emaranhado (par EPR), por exemplo o estado

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \tag{3.3.1}$$

O primeiro qubit se encontra com Alice, e o segundo com Bob, temos o estado $|\Psi\rangle$ sendo fixado previamente não ocorrendo, necessidade de Alice enviar qubits extras a Bob para preparar o estado.

Ao enviar o seu qubit para Bob é possível para Alice através do protocolo da codificação super densa, comunicar dois bits de informação clássica, para isso ela deve seguir os seguintes passos:

- Se ela deseja comunicar os bits 00 não deve realizar nenhuma operação em seu qubit, ou seja

$$I |\Psi\rangle = |\Psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \quad (3.3.2)$$

- Para enviar os bits 10, deve aplicar uma operação de fase Z em seu qubit

$$Z |\Psi\rangle = |\Psi\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle). \quad (3.3.3)$$

- O envio dos bits 01, requer a aplicação de uma porta X em seu qubit

$$X |\Psi\rangle = |\Psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle). \quad (3.3.4)$$

- envio dos bits 11, é obtido com a operação Y em seu qubit

$$Y |\Psi\rangle = |\Psi\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (3.3.5)$$

Os estados resultantes dessas operações são os estados da base de Bell, portanto são distinguidos por medidas realizadas por Bob. Para obter a informação transmitida por Alice, Bob deve aplicar uma $CNOT$ em ambos os qubits do par EPR, obtendo o estado

$$\begin{aligned} CX |\Psi\rangle_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) |0\rangle \\ CX |\Psi\rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) |0\rangle \\ CX |\Psi\rangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) |1\rangle \\ CX |\Psi\rangle_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) |1\rangle \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

e finalmente o protocolo termina, com Bob aplicando uma operação H no primeiro qubit.

$$\begin{aligned} H_1 CX |\Psi\rangle_0 &= \frac{H_1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) = \frac{H_1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) |0\rangle = |0\rangle |0\rangle \\ H_1 CX |\Psi\rangle_1 &= \frac{H_1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) = \frac{H_1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) |0\rangle = |1\rangle |0\rangle \\ H_1 CX |\Psi\rangle_2 &= \frac{H_1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |01\rangle) = \frac{H_1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) |1\rangle = |0\rangle |1\rangle \\ H_1 CX |\Psi\rangle_3 &= \frac{H_1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle) = \frac{H_1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) |1\rangle = |1\rangle |1\rangle \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Este protocolo de codificação superdensa foi verificado parcialmente em laboratório utilizando pares de fótons emaranhados [53].

3.4 Teletransporte

Em 1993 [52] um grupo internacional da IBM composto por seis cientistas desenvolveram um protocolo onde mostram que o teletransporte é de fato possível de ser realizado, mas somente se o objeto original for destruído. Não poderíamos fazer varias copias de um mesmo

objeto, "*Teorema da não clonagem*", a partir do momento em que o estado original é sempre destruído para que seja possível ler todas as informações relativas a ele. No princípio, o teletransporte era considerado uma utopia. Ele não era levado a sério porque se pensava que violaria o princípio da incerteza. De acordo com o princípio da incerteza, quanto mais exata a medição de um objeto, mais seu estado é perturbado pelo processo de medição, até atingir um ponto onde o estado original do objeto estaria completamente desorganizado. E esse ponto ocorreria antes mesmo de se conseguir informações suficientes para fazer uma réplica exata. Esta limitação imposta pela natureza quântica foi superada utilizando outro conceito inerente à teoria quântica o emaranhamento. O protocolo encontrou uma maneira de varrer parte da informação do objeto A , o qual queremos teletransportar, e transmiti-la através de meios clássicos, e a parte não varrida da informação transmitir através do efeito EPR, a outro objeto C que nunca esteve em contato com A . Após isso, é possível manipular o objeto C de forma que este contenha toda informação do estado A antes de ser teletransportado. A informação sobre o objeto A é levada até C por outro objeto B . Este objeto B é na verdade um par EPR, ou seja, é um par de partículas emaranhadas.

Como vimos o objetivo do teletransporte é transmitir o estado quântico de uma partícula utilizando-se de um canal de transmissão clássico e um canal não local para transmitir a informação e assim reconstruir o estado quântico original. Também sabemos que um estado quântico não pode ser copiado, isso significa que o estado original deve ser necessariamente destruído. Da mesma forma que na codificação superdensa para se realizar o teletransporte Alice e Bob necessitam compartilhar um estado tipo EPR que faz o papel do canal não local.

O protocolo inicia-se com Alice possuindo um qubit $|\phi\rangle$, onde o estado desse qubit é desconhecido

$$|\phi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle. \quad (3.4.1)$$

Alice aplica o passo de decodificação (medida) da codificação superdensa a esse qubit e a sua metade do par emaranhado. Então temos inicialmente o seguinte estado:

$$|\phi\rangle \otimes |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha |000\rangle + \alpha |101\rangle + \beta |010\rangle + \beta |011\rangle) \quad (3.4.2)$$

dos quais Alice controla os dois primeiros qubits, e Bob o último.

Agora, Alice aplica as operações CX e H ao seu par de qubits, tendo como qubit alvo o estado que se deseja teletransportar, o estado resultante dessas operações é

$$\begin{aligned} H C X(|\phi\rangle \otimes |\Psi\rangle) = & [(|00\rangle (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) + |01\rangle (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle)) \\ & + (|10\rangle (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) + |11\rangle (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle))] . \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Alice faz uma medição e tem como resultado um dos seguintes estados: $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$, com igual probabilidade. E envia essa informação para Bob, que agora deve realizar o mesmo

processo de codificação do processo de codificação super densa, ou seja, se ele recebeu de Alice os bits 00 ele não deve fazer nada no seu qubit, diferentemente se ele receber de Alice os bits 01, Bob devera nesse caso aplicar X em seu qubit. Nos experimentos de teletransporte [55] a fidelidade do estado teletransportado é menor que 1, isso é devido a imperfeições na preparação dos pares EPR assim como nas transformações unitarias que Bob deve realizar.

Capítulo 4

A Aproximação de James-Jerke Para a Construção de Hamiltonianos Efetivos

4.1 Introdução

A teoria de Hamiltonianos Efetivos (HE) foi desenvolvida no âmbito da física nuclear [56], para determinar a interação efetiva entre os nucleons. Posteriormente foi desenvolvida e extensamente utilizada em química quântica [57].

O uso de Hamiltonianos efetivos em contrapartida às soluções numéricas do hamiltoniano total, é vantajoso no sentido que possibilita um melhor entendimento dos processos físicos relevantes para a dinâmica do sistema e fortalece a intuição física acerca dos fenômenos. Este "insight" sobre os efeitos relevantes na dinâmica do sistema é essencial para a proposição de protocolos de interação radiação-materia para as engenharias de estados quânticos, Hamiltonianos e reservatórios.

Existe uma grande variedade de técnicas para a determinação da evolução de sistemas dependentes do tempo, além das usuais técnicas perturbativas, como por exemplo o uso de séries de Dyson. Nos casos relevantes em óptica quântica, a depender da ordem onde se faz o truncamento da série, os Hamiltonianos freqüentemente apresentam termos seculares, impossibilitando a convergência da série e resultando em uma evolução não unitária.

Em um dos trabalhos pioneiros em óptica quântica, Autler e Townes [59] consideram o efeito de um campo de bombeio periódico em um sistema quântico utilizando o teorema de Floquet, de forma a eliminar a dependência temporal do Hamiltoniano de interação. Este formalismo é estendido em [60] através da introdução dos operadores de Floquet-Green.

Outros métodos para a determinação de Hamiltonianos efetivos têm em comum o uso

de transformações canônicas (unitárias) através das quais o Hamiltoniano efetivo obtido, após aproximações, compõem-se dos termos não seculares da teoria de perturbação [61]. Do ponto de vista operacional, estes métodos são tão trabalhosos quanto as técnicas padrões em teoria de perturbação.

Klimov *et al.* [62], desenvolvem um método utilizando transformações canônicas, onde mostram que a ação de campos quânticos em sistemas de 2 (N) níveis leva à deformação da álgebra $SU(2)$ ($SU(N)$) que descreve esses sistemas. A partir da deformação algébrica causada pelo campo, encontram uma forma fechada para os HEs, que são diagonais na base do Hamiltoniano livre.

Um método de obtenção de HEs extensamente utilizado em óptica quântica é a eliminação adiabática detalhada nas Refs. [63]. Este método consiste no ajuste das frequências e intensidades dos campos e transições atômicas envolvidos, de forma a eliminar certos graus de liberdade do Hamiltoniano, que são apenas virtualmente excitados e descritos por termos que oscilam rapidamente no tempo. Assim, a eliminação adiabática consiste num processo de engenharia da aproximação de ondas girantes, aplicada a graus de liberdade que desejamos descartar. Aplicações do método podem ser encontradas nas Refs [64].

No desenvolvimento da espectroscopia de ressonância nuclear magnética (RNM), a teoria de HEs, conhecidos como Hamiltonianos médios porque descrevem o efeito médio do campo no intervalo de tempo de sua interação com o sistema de spins, foi essencial para aprimorar a técnica de RMN [65]. De fato, estes HEs possibilitaram, através do ajuste de campos externos aplicados, a engenharia das interações internas entre os spins.

Nesta dissertação estaremos utilizando um método de obtenção de HEs em óptica quântica, proposto por James e Jerke [66], que tem muito em comum com as técnicas desenvolvidas no âmbito da RNM. Esta técnica combina o processo de iteração com as aproximações de Markov e de ondas girantes.

4.2 Hamiltonianos médios em Optica Quântica

O método proposto por James-Jerke, consiste na determinação do Hamiltoniano efetivo de sistemas que interagem dispersivamente, lançando mão do processo de iteração da solução formal da equação de Schrödinger, além de aproximações apropriadas, conforme descrevemos abaixo. Este método é análogo àquele apresentado por Cohen-Tannoudji *et al.* [67], no qual se determinam os elementos de matriz do HE na representação de Schrödinger, mas apresenta a vantagem de um custo operacional muito inferior.

Partimos da equação de Schrödinger na representação de interação

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H_I(t) |\psi(t)\rangle, \quad (4.2.1)$$

obtemos a solução formal

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H_I(t') |\psi(t')\rangle dt'. \quad (4.2.2)$$

que conduzida de volta à Eq. [4.2.1], leva à expressão

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H_I(t) |\psi(0)\rangle + \frac{H_I(t)}{i\hbar} \int_0^t H_I(t') |\psi(t')\rangle dt'. \quad (4.2.3)$$

Assumindo que o Hamiltoniano $\hat{H}_I(t)$ apresente termos altamente oscilantes comparados ao segundo termo, podemos, via aproximação de ondas girantes, desprezar o primeiro termo da Eq. (4.2.3). Além disso, utilizamos a aproximação Markoviana para retirar o vetor de estado do integrando do segundo termo. Estas aproximações resultam na dinâmica simplificada, descrita pela equação

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} \approx H_{\text{ef}} |\psi(t)\rangle, \quad (4.2.4)$$

onde o Hamiltoniano efetivo H_{ef} , é dado por

$$H_{\text{ef}} = \frac{H_I(t)}{i\hbar} \int_0^t H_I(t') dt'. \quad (4.2.5)$$

Para sistemas onde a dependência temporal é harmônica, tal que o hamiltoniano na representação de interação seja da forma

$$H_I = \sum_{n=1}^N h_n e^{i\omega_n t} + h_n^\dagger e^{-i\omega_n t}, \quad (4.2.6)$$

podemos obter a seguinte expressão para o Hamiltoniano efetivo

$$H_{\text{ef}}(t) = \sum_{m,n=1}^N \frac{[h_m^\dagger, h_n]}{\hbar \bar{\omega}_{mn}} e^{i(\omega_m - \omega_n)t} \quad (4.2.7)$$

com $1/\bar{\omega}_{mn} = (1/\omega_m + 1/\omega_n)/2$.

Dado que o Hamiltoniano efetivo (4.2.5) é frequentemente não hermiteano, a evolução por ele governada é frequentemente não unitária, fato que ocorre devido à remoção pela média temporal das componentes que apresentam oscilações rápidas. Isto se dá de forma análoga ao que ocorre quando traçamos os graus de liberdade do reservatório na dedução da equação mestra para a descrição de sistemas quânticos abertos. Para reter apenas a dinâmica dos termos hermiteanos, devemos realizar a simetrização

$$H_{\text{efs}} = \frac{1}{2}(H_{\text{ef}} + H_{\text{ef}}^\dagger). \quad (4.2.8)$$

Observamos, por fim, que o Hamiltoniano (4.2.8) oferece uma boa descrição da dinâmica de sistemas interagindo dispersivamente no regime de acoplamento fraco, para tempos superiores a vários períodos de interação característicos do sistema. Sob estas condições, os efeitos transientes devido às componentes altamente oscilantes se anulam.

4.2.1 Exemplo: O Hamiltoniano dispersivo.

Demonstraremos a técnica acima apresentada através de sua aplicação a um caso simples, muito utilizado em EQC. Conforme vimos, a interação de um átomo de dois níveis com um modo do campo de radiação é descrita pelo Hamiltoniano de Jaynes-Cummings. No regime em que a interação é dispersiva e o acoplamento entre o átomo e o campo não é suficientemente intenso, de forma que a condição $g\sqrt{n}/\delta \ll 1$ seja válida, podemos encontrar um Hamiltoniano efetivo diagonal. O efeito desta interação corresponde à introdução de uma fase tanto nos níveis atômicos como nos estados do campo, ao invés da troca de excitação entre estes sistemas.

Partindo do hamiltoniano de Jaynes-Cummings H_{JC} na representação de interação

$$H_I = g(a\sigma_+ e^{-i\delta t} + a^\dagger \sigma_- e^{i\delta t}) = h e^{-i\delta t} + h^\dagger e^{i\delta t}, \quad (4.2.9)$$

onde definimos a dessintonia entre o átomo e o campo da forma $\delta = \omega_0 - \omega$, obtemos através das Eq. (4.2.7) o resultado desejado

$$H_{\text{ef}}(t) = \frac{1}{\hbar\delta} [h^\dagger, h] = \frac{\hbar g^2}{\delta} [a\sigma_+, a^\dagger \sigma_-] = \hbar\chi a^\dagger a \sigma_z + H_{\text{Stark}}, \quad (4.2.10)$$

onde $\chi = g^2/\delta$ e $H_{\text{Stark}} = \hbar\chi\sigma_+\sigma_-$. O termo H_{Stark} pode ser eliminado através da transformação unitária $U = e^{\frac{i}{\hbar}H_{\text{Stark}}}$.

Esse Hamiltoniano efetivo tem grande utilidade em EQC, dado que é usado na engenharia de estados do tipo EPR, em medidas quânticas não demolidoras de estados do campo, para propostas de construção de portas de fase [1], dentre inúmeras outras aplicações.

Outra proposta interessante que se utiliza da interação dispersiva entre radiação e matéria, diz respeito à interação entre dois átomos viabilizada por um modo da cavidade [69]. Nesse caso, partimos do Hamiltoniano

$$H_T = \omega a^\dagger a + \sum_{j=1}^2 \frac{\omega_0}{2} \sigma_z^j + \hbar g (a\sigma_+^j + a^\dagger \sigma_-^j), \quad (4.2.11)$$

que na representação de interação é descrito por

$$H_I = \sum_{j=1}^2 \hbar g (a\sigma_+^j e^{-i\delta t} + a^\dagger \sigma_-^j e^{i\delta t}). \quad (4.2.12)$$

No regime em que $g\sqrt{n}/\delta \ll 1$, o Hamiltoniano que descreve a dinâmica deste sistema, obtido via Eq. (4.2.7), é

$$H_{\text{ef}} = \frac{1}{\hbar\delta} \sum_{j=1}^2 [h_j^\dagger, h_j] = \frac{\hbar g^2}{\delta} \sum_{j=1}^2 [a^\dagger \sigma_-^j, a\sigma_+^j] = \chi \sum_{j=1}^2 (|e_j\rangle\langle_j e| + \sigma_z^j) a^\dagger a + (\sigma_+^1 \sigma_-^2 + \sigma_+^2 \sigma_-^1). \quad (4.2.13)$$

Esta interação pode também ser usada para a geração de estados do tipo EPR entre os átomos, assim como a geração de uma operação controlada CNOT, utilizando os níveis internos dos átomos como qbits.

4.2.2 Hamiltoniano efetivo para a geração de modos não estacionários

Na Ref. [70], foi proposto um protocolo para a engenharia de um modo não estacionário de uma cavidade não ideal, onde mostrou-se que a engenharia deste modo, pode proteger o estado do sistema da decoerência. Este protocolo considera a interação dispersiva do modo com um átomo submetido a um processo de amplificação linear com intensidade modulada (laser modulado). O Hamiltoniano deste sistema é dado por

$$H_T = \omega a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + F(t)(e^{-i\omega_L t} \sigma_+ + e^{i\omega_L t} \sigma_-) + g(a\sigma_+ + a^\dagger \sigma_-), \quad (4.2.14)$$

onde a amplitude do campo de amplificação tem a seguinte forma

$$F(t) = F_0 \cos(\varrho + \phi). \quad (4.2.15)$$

Na representação de interação o Hamiltoniano transformado é dado por

$$H_I(t) = F(t)(e^{-i\Delta t} \sigma_+ + e^{i\Delta t} \sigma_-) + g(a\sigma_+ e^{-i\delta t} + a^\dagger \sigma_- e^{i\delta t}), \quad (4.2.16)$$

onde defenimos os detuning entre o laser e o átomo $\Delta = \omega_L - \omega_0$ e entre o átomo e o campo $\delta = \omega - \omega_0$.

Considerando o seguinte regime de parâmetros

$$|\Delta| \gg |\delta| \gg \varrho, \quad \frac{F_0}{\Delta} \ll \frac{g}{\delta},$$

sob estas condições podemos eleminar a contribuição dos termos altamente oscilantes, aplicando a Eq.(4.2.5) e teremos o mesmo Hamiltoniano efetivo encontrado para cavidades com espelhos que oscilam adiabaticamente.

$$H_{\text{ef}} = \hbar\Omega(t)\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\chi(t)a^\dagger a\sigma_z, \quad (4.2.17)$$

onde

$$\Omega(t) = \frac{\omega_0}{2} + \frac{F^2}{\Delta}, \quad (4.2.18)$$

$$\chi(t) = \frac{g^2 n}{\delta} \left(1 - \frac{F_0^2}{\delta \Delta} \sin(2\varrho t)\right). \quad (4.2.19)$$

Infelizmente as condições impostas para validade desse Hamiltoniano impedem de se mimicar o movimento mecânico dos espelhos necessários no efeito Casimir dinâmico.

4.2.3 Hamiltonianos bilineares

A conversão paramétrica de frequências é amplamente utilizada em óptica quântica, necessária para a geração de estados comprimidos da luz e para geração de estados de dois fótons, permitindo a verificação e melhor entendimento da natureza quântica da luz, além de inúmeras aplicações tecnológicas que possui no domínio de ondas viajantes [71].

Consideremos duas cavidades dispostas perpendicularmente com modos idênticos ou modos que têm polarizações ortogonais, interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis, o que descreve este sistema é dado por

$$H_T = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega b^\dagger b + \frac{\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\lambda(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) + \hbar\lambda(b\sigma_+ + b^\dagger\sigma_-), \quad (4.2.20)$$

na representação de interação transforma-se

$$H_I = \lambda e^{i\delta t} (a\sigma^+ + b\sigma^+) + h.c. \quad (4.2.21)$$

Utilizando a expressão 4.2.7, podemos encontrar o Hamiltoniano efetivo

$$H_{\text{ef}} = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\hbar\delta_j} [h_j^\dagger, h_j] = \chi(a^\dagger a + b^\dagger b + a^\dagger b + b^\dagger a)\sigma_z \quad (4.2.22)$$

onde o acoplamento efetivo $\chi = \frac{\lambda^2}{\delta}$.

Vemos que a presença do átomo na cavidade induz um acoplamento do tipo troca entre os modos do campo.

Capítulo 5

Hamiltonianos Efetivos e Aplicações

5.1 Interação Fóton-Fônon

Na Ref. [20] os autores demonstram como é possível obter interações bilineares e quadráticas entre o modo do campo da cavidade interagindo com um íon de três níveis sujeito a um campo externo. Neste trabalho, definem-se cinco diferentes regimes de parâmetros dos quais seguem-se cinco Hamiltonianos distintos para o sistema. Utilizando-se do método apresentado no capítulo anterior, mostramos como obter outras possíveis interações entre fótons e fônons que podem ser consideradas complementares àquelas apresentados em Ref. [20].

Consideremos um íon aprisionado em uma cavidade, no regime LD, estando o centro da armadilha iônica posicionada em um antinodo do campo, $\phi = -\pi/2$ e $\theta = 0$. O íon está sujeito a um campo externo de frequência ω_L . A interação entre os campos e o íon se dá de forma dispersiva, tal que o Hamiltoniano total desse sistema é dado por

$$H_T = \hbar\nu b^\dagger b + \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\zeta\eta_c(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger)(b^\dagger + b) + \hbar\Omega(\sigma_+ e^{-i\omega_L t} + h.c.) + i\hbar\Omega\eta_L(\sigma_+ b e^{-i\omega_L t} + \sigma_+ b^\dagger e^{-i\omega_L t} - h.c.). \quad (5.1.1)$$

Onde $b^\dagger(b)$ e $a^\dagger(a)$ são operadores de criação (aniquilação) de quantas do estado vibracional do íon e do modo do campo na cavidade, respectivamente. A constante de acoplamento $\zeta(\Omega)$ e parâmetro de Lamb-Dicke $\eta_c(\eta_L)$ são referentes ao campo na cavidade (externo).

Na representação de interação o Hamiltoniano acima, transforma-se para

$$H_I = \hbar\Omega(\sigma_+ e^{i\delta_L t} + h.c.) + i\hbar\Omega\eta_L(\sigma_+ b e^{i[(\delta_L - \nu)t]} + \sigma_+ b^\dagger e^{i[(\delta_L + \nu)t]} - h.c.) + \hbar\zeta\eta_c[\sigma_+ b a e^{i(\delta_c - \nu)t} + \sigma_+ b^\dagger a e^{i(\delta_c + \nu)t} + h.c.], \quad (5.1.2)$$

onde definimos as dessintonias $\delta_c = \omega_0 - \omega$ e $\delta_L = \omega_0 - \omega_L$.

Aplicando o metodo de James-Jerke ao Hamiltoniano 5.1.2, obtemos

$$\begin{aligned}
 H_{ef} = & H_{Stark} + e^{i[(\delta_L - \delta_c + \nu)t]} \left[\hbar\zeta\eta_c\Omega \left(\frac{-\sigma_- \sigma_+ ba + \sigma_+ \sigma_- b^\dagger a^\dagger}{\delta_c - \nu} \right) + \hbar\zeta\eta_c\Omega \left(\frac{\sigma_+ \sigma_- ba - \sigma_- \sigma_+ b^\dagger a^\dagger}{\delta_L} \right) \right] \\
 & + e^{i[(\delta_L - \delta_c - \nu)t]} \left[\hbar\zeta\eta_c\Omega \left(\frac{-\sigma_- \sigma_+ b^\dagger a + \sigma_+ \sigma_- ba^\dagger}{\delta_c + \nu} \right) + \hbar\zeta\eta_c\Omega \left(\frac{\sigma_+ \sigma_- b^\dagger a - \sigma_- \sigma_+ ba^\dagger}{\delta_L} \right) \right] \\
 & + e^{i[(\delta_L - \delta_c)t]} \left[i\hbar\zeta\eta_c\eta_L\Omega \left(\frac{\sigma_+ \sigma_- bb^\dagger a^\dagger - \sigma_- \sigma_+ b^\dagger ba}{\delta_c - \nu} \right) + \hbar\zeta\eta_c\Omega \left(\frac{\sigma_+ \sigma_- bb^\dagger a - \sigma_- \sigma_+ b^\dagger ba^\dagger}{\delta_L - \nu} \right) \right] \\
 & + e^{i[(\delta_L - \delta_c + 2\nu)t]} \left[i\hbar\zeta\eta_c\eta_L\Omega \left(\frac{\sigma_+ \sigma_- b^{\dagger 2} a^\dagger - \sigma_- \sigma_+ b^2 a}{\delta_c - \nu} \right) + \hbar\zeta\eta_c\Omega \left(\frac{\sigma_+ \sigma_- b^2 a - \sigma_- \sigma_+ b^{\dagger 2} a^\dagger}{\delta_L + \nu} \right) \right] \\
 & + e^{i[(\delta_L - \delta_c - 2\nu)t]} \left[i\hbar\zeta\eta_c\eta_L\Omega \left(\frac{\sigma_+ \sigma_- b^2 a^\dagger - \sigma_- \sigma_+ b^{\dagger 2} a}{\delta_c + \nu} \right) + \hbar\zeta\eta_c\Omega \left(\frac{\sigma_+ \sigma_- b^{\dagger 2} a - \sigma_- \sigma_+ b^2 a^\dagger}{\delta_L - \nu} \right) \right] \\
 & + e^{i[(\delta_L - \delta_c)t]} \left[i\hbar\zeta\eta_c\eta_L\Omega \left(\frac{\sigma_+ \sigma_- b^\dagger ba^\dagger - \sigma_- \sigma_+ bb^\dagger a}{\delta_c + \nu} \right) + \hbar\zeta\eta_c\Omega \left(\frac{\sigma_+ \sigma_- b^\dagger ba - \sigma_- \sigma_+ bb^\dagger a^\dagger}{\delta_L + \nu} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

onde os termos análogos àqueles do efeito Stark são dados por

$$\begin{aligned}
 H_{Stark} = & \hbar\sigma_z \left[\frac{\Omega^2}{\delta_L} - (\Omega\eta_L)^2 (1 + 2b^\dagger b) \left(\frac{1}{(\delta_L - \nu)} + \frac{1}{(\delta_L + \nu)} \right) \right] \\
 & + \hbar\sigma_z (\zeta\eta_c)^2 \left[(b^\dagger ba^\dagger a) \left(\frac{1}{(\delta_L - \nu)} + \frac{1}{(\delta_L + \nu)} \right) + (1 + a^\dagger a + b^\dagger b) \left(\frac{\sigma_+ \sigma_-}{(\delta_L - \nu)} - \frac{\sigma_- \sigma_+}{(\delta_L + \nu)} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Através da manipulação das dessintonias, obtemos os seguintes Hamiltonianos efetivos:

- $\delta_L = \delta_c - \nu$

$$\begin{aligned}
 H_{ef1} = & \chi_1 \sigma_z (ba + b^\dagger a^\dagger), \\
 \chi_1 = & \frac{\hbar\zeta\eta_c\Omega}{\delta_c - \nu}.
 \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

- $\delta_L = \delta_c + \nu$

$$\begin{aligned}
 H_{ef2} = & \chi_2 \sigma_z (ba^\dagger + b^\dagger a), \\
 \chi_2 = & \frac{\hbar\zeta\eta_c\Omega}{\delta_c + \nu}.
 \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

- $\delta_L = \delta_c$

$$H_{ef3} = \left[\chi_3 \sigma_z b^\dagger b (a + a^\dagger) \left(\frac{1}{\delta_c - \nu} + \frac{1}{\delta_c + \nu} \right) + \chi_3 \left(\frac{\sigma_+ \sigma_-}{\delta_c - \nu} - \frac{\sigma_- \sigma_+}{\delta_c + \nu} \right) (a - a^\dagger) \right], \quad (5.1.7)$$

$$\chi_3 = \hbar i \zeta \eta_c \eta_L \Omega.$$

- $\delta_L = \delta_c + 2\nu$

$$H_{ef4} = \chi_4 \sigma_z (b^2 a^\dagger - b^{\dagger 2} a), \quad (5.1.8)$$

$$\chi_4 = \frac{i \hbar \zeta \eta_c \eta_L \Omega}{\delta_c + 2\nu}.$$

- $\delta_L = \delta_c - 2\nu$

$$H_{ef5} = \chi_5 \sigma_z (b^2 a - b^{\dagger 2} a^\dagger), \quad (5.1.9)$$

$$\chi_5 = \frac{i \hbar \zeta \eta_c \eta_L \Omega}{\delta_c - 2\nu}.$$

Interações bilineares do tipo 5.1.5 e 5.1.6 são obtidas nas Ref. [71] e Ref. [75] entre dois modos do campo de radiação e dois modos de vibração do íon, respectivamente. Este tipo de acoplamento entre modos bosônicos é utilizado num grande número de protocolos de geração de estados no domínio da EQC [76] e de implementação de operações lógicas [48].

O Hamiltoniano 5.1.5 (5.1.6) descreve um acoplamento efetivo entre o modo do campo e o estado vibracional do íon análogo ao de campos propagantes que interagem em um cristal não linear, como em um processo de conversão paramétrica descendente (ascendente) de frequências CPD (CPA).

Nas Ref. [68] os autores utilizam-se do Hamiltoniano 5.1.6 para realizar a troca de estados entre o campo de radiação e o modo vibracional do íon. O estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle_c |n\rangle_v$, com o campo da cavidade no vácuo e o modo vibracional do íon no estado de número, evolui segundo o Hamiltoniano 5.1.6 para o emaranhado

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{\frac{i}{\hbar} \chi_2 t (b a^\dagger + b^\dagger a)} |0\rangle_c |n\rangle_v \\ &= \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{n!}{k!(n-k)!}} (\sin \chi_2 t / \hbar)^k \times (\cos \chi_2 t / \hbar)^{n-k} |k\rangle_c |n-k\rangle_v. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Para um tempo de interação $\tau = \frac{\hbar \pi}{2\chi_2}$, ocorre total transferência do estado vibracional para o modo do campo de forma que

$$|\Psi(\hbar \pi / 2\chi_2)\rangle = |n\rangle_c |0\rangle_v, \quad (5.1.11)$$

o que, pela linearidade do operador evolução, também ocorre para qualquer estado $|\varphi\rangle_v$ inicialmente preparado, ou seja

$$|\Psi(\hbar\pi/2\chi_2)\rangle = |\Psi(t)\rangle = e^{\frac{i\pi}{2}(ba^\dagger - b^\dagger a)} |0\rangle_c |\varphi\rangle_v \quad (5.1.12)$$

$$= |\varphi\rangle_c |0\rangle_v. \quad (5.1.13)$$

O Hamiltoniano 5.1.5 pode ser usado para gerar um estado de vácuo comprimido [76]. Quando o parâmetro de compressão tende a infinito e projetamos o estado na base de posição, obtemos um par EPR de posição-momento como o originalmente usado no argumento contra a completeza ou o princípio da incerteza da Mecânica Quântica. De fato, para o íon preparado no estado $|g\rangle$ e ambos os modos, da cavidade e vibracional no estado de vácuo, a evolução do Hamiltoniano 5.1.5 leva ao estado

$$\begin{aligned} |\Psi(\tau)\rangle &= e^{\frac{i}{\hbar}|\chi_1|\tau(ba + b^\dagger a^\dagger)} |0\rangle_c |0\rangle_v |g\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\tanh \chi_1\tau/\hbar]^n |n\rangle_c |n\rangle_v |g\rangle}{\cosh \chi_1\tau/\hbar}. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Podemos estimar a qualidade do estado EPR preparado, através das seguintes quantidades definidas a partir dos valores médios das quadraturas [72] dos modos da cavidade e vibracional:

$$(\Delta x)^2 = \langle (x_a - x_b)^2 \rangle = \frac{e^{-2|\chi_1|\tau/\hbar}}{2}, \quad (5.1.15)$$

$$(\Delta p)^2 = \langle (p_a + p_b)^2 \rangle = \frac{e^{-2|\chi_1|\tau/\hbar}}{2} \quad (5.1.16)$$

Das Eqs. 5.1.15 e 5.1.16, vemos que a soma $(\Delta x)^2 + (\Delta p)^2 = e^{-2\chi_1 t/\hbar}$, anula-se para o estado de EPR ideal e iguala-se à unidade para um estado totalmente separado [72]. Portanto, podemos usar a expressão $1 - e^{-2|\chi_1|\tau/\hbar}$, para estimar a qualidade do estado EPR preparado utilizando parâmetros experimentalmente acessíveis. Considerando $\zeta = \Omega \approx 10^6 \text{ Hz}$, $\eta_c \approx 10^{-1}$, $\delta_c - \nu \approx 10^7 \text{ Hz}$ e um tempo de interação que seja suficientemente menor que os tempos de vida característicos dos sistemas evoluídos, para isso tomamos o tempo de interação da ordem de $\tau \approx 10^{-4} \text{ s}$, temos neste caso $1 - e^{-2|\chi_1|\tau/\hbar} = 0.87$.

A evolução da interação do estado de vácuo do modo da cavidade governada pela interação 5.1.7 gera estados coerentes com amplitude dependente da intensidade do movimento do íon. O caráter não linear das interações 5.1.8 e 5.1.9 pode ser útil a protocolos de geração e troca de estados quânticos em EQC, como por exemplo para gerar estados comprimidos do modo vibracional do íon.

5.2 Átomo e íon interagindo dispersivamente com o modo da cavidade.

Consideremos um íon de dois níveis aprisionado num potencial harmônico e inserido no interior de uma cavidade, e que um átomo de dois níveis seja injetado através da cavidade. Vamos assumir que o centro da armadilha iônica coincide com um antinodo do campo de forma que $\phi = -\pi/2$ na Eq.(2.9.4). Por fim, consideramos que átomo e íon interagem de forma dispersiva com o modo do campo, de forma que no regime de LD o Hamiltoniano total do sistema é dado por

$$H_T = \hbar\nu b^\dagger b + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_0 \frac{\sigma_z^1}{2} + \hbar\omega_0 \frac{\sigma_z^2}{2} + \hbar g(\sigma_1^+ a + \sigma_1^- a^\dagger) + \hbar\zeta(\sigma_2^+ a + \sigma_2^- a^\dagger)\eta(b^\dagger + b), \quad (5.2.1)$$

onde $b, b^\dagger(a, a^\dagger)$ são operadores do modo vibracional do íon (campo) e o índice 1(2) refere-se ao átomo (íon).

Na representação de interação o Hamiltoniano é dado por

$$H_I = \hbar g(\sigma_1^+ a \exp(i\delta t) + \sigma_1^- a^\dagger \exp(-i\delta t)) + \hbar\zeta\eta(\sigma_2^+ a b^\dagger \exp(i\Delta_+ t) + \sigma_2^- a b \exp(i\Delta_- t) + h.c), \quad (5.2.2)$$

onde definimos $\Delta_\pm = (\delta \pm \nu)$, $\delta = \omega_0 - \omega$.

Utilizando a Eq.(4.2.5), obtemos o Hamiltoniano efetivo sem AOG

$$\begin{aligned} H_{\text{ef}} = & \frac{\hbar g^2}{\delta} [\sigma_1^+ \sigma_1^- a a^\dagger - \sigma_1^- \sigma_1^+ a^\dagger a] + \frac{\hbar(\zeta\eta)^2}{\Delta_+} [\sigma_2^+ \sigma_2^- a a^\dagger b - h.c] + \\ & + \frac{\hbar(\zeta\eta)^2}{\Delta_-} [\sigma_2^+ \sigma_2^- a a^\dagger b^\dagger - h.c] + \chi [-\sigma_1^+ \sigma_2^+ a^2 b^\dagger \frac{\exp i(\delta + \Delta_+)t}{\Delta_+}] \\ & + \chi [-\sigma_1^+ \sigma_2^+ a^2 b^\dagger \frac{\exp i(\delta + \Delta_-)t}{\Delta_-} + \sigma_1^+ \sigma_2^- a a^\dagger b \frac{\exp i(\delta - \Delta_+)t}{\Delta_+}] + \\ & + \chi [\sigma_1^+ \sigma_2^- a a^\dagger b^\dagger \frac{\exp i(\delta - \Delta_-)t}{\Delta_-} - \sigma_1^- \sigma_2^+ a^\dagger a b^\dagger \frac{\exp -i(\delta - \Delta_+)t}{\Delta_+}] \\ & + \chi [-\sigma_1^- \sigma_2^+ a^\dagger a b \frac{\exp -i(\delta - \Delta_-)t}{\Delta_-} + \sigma_1^- \sigma_2^- a^\dagger a b \frac{\exp -i(\delta + \Delta_+)t}{\Delta_+}] \\ & + \chi [\sigma_1^- \sigma_2^- a^\dagger a b^\dagger \frac{\exp -i(\delta + \Delta_-)t}{\Delta_-}], \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

sendo o acoplamento efetivo $\chi = \hbar g \zeta \eta$.

Escolhendo apropriadamente as dessintonias, encontramos finalmente um conjunto de Hamiltonianos efetivos que descreve a evolução do sistema:

- $\delta = \Delta_+$

$$H_{\text{ef}} = \frac{\chi}{2\Delta_+} [\sigma_1^+ \sigma_2^- b + \sigma_1^- \sigma_2^+ b^\dagger] a^\dagger a + H_{\text{Stark}}. \quad (5.2.4)$$

- $\delta = \Delta_-$

$$H_{\text{ef}} = \frac{\chi}{2\Delta_-} [\sigma_1^+ \sigma_2^- b^\dagger + \sigma_1^- \sigma_2^+ b] a^\dagger a + H_{\text{Stark}} \quad (5.2.5)$$

- $\delta = -\Delta_+$

$$H_{\text{ef}} = \frac{\chi}{2\Delta_+} [\sigma_1^+ \sigma_2^+ a^2 b^\dagger + \sigma_1^- \sigma_2^- a^{\dagger 2} b] + H_{\text{Stark}} \quad (5.2.6)$$

- $\delta = -\Delta_-$

$$H_{\text{ef}} = \frac{\chi}{2\Delta_-} [\sigma_1^+ \sigma_2^+ a^2 b^\dagger + \sigma_1^- \sigma_2^- a^{\dagger 2} b] + H_{\text{Stark}} \quad (5.2.7)$$

Onde $H_{\text{Stark}} = \frac{\sigma_1^+ \sigma_1^-}{\delta} + \frac{\hbar(\zeta\eta)^2}{\Delta_+} \sigma_2^+ \sigma_2^- b + \frac{\hbar(\zeta\eta)^2}{\Delta_-} \sigma_2^+ \sigma_2^- b^\dagger$.

5.2.1 Protocolo Para Construção da Porta Lógica CNOT

Propomos a implementação da operação $CNOT$, utilizando como qubit alvo os graus eletrônicos do átomo e os graus vibracionais do íon como qubit de controle. O protocolo é baseado na seguinte decomposição da operação $CNOT$

$$C_i X_j = H_j C_i Z_j H_j, \quad (5.2.8)$$

na qual a operação de Hadamard H deve realizar-se sobre os estados atômicos através da utilização de zonas de Ramsey. Mostraremos que a evolução temporal do Hamiltoniano Eq.(5.2.5) pode implementar a porta de fase de dois qubits $C_i Z_j$. O estado inicial do campo acrescenta apenas uma fase no operador de evolução temporal, o que acarreta uma mudança no tempo de interação necessário para gerar a operação da porta de fase. Tanto no início como no término do processo o íon encontra-se no estado fundamental eletrônico $|g\rangle_2$.

Calculamos a evolução temporal dos estados iniciais de interesse:

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= U(t) |\Psi(0)\rangle = \\
 &= e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{\chi}{2\Delta_-}[\sigma_1^+\sigma_2^-b^\dagger + \sigma_1^-\sigma_2^+b]a^\dagger a)t} |g\rangle_1 |0\rangle_2 |g\rangle_2 |n\rangle_c \\
 &= |g\rangle_1 |0\rangle_2 |g\rangle_2 |n\rangle_c,
 \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= U(t) |\Psi(0)\rangle = \\
 &= e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{\chi}{2\Delta_-}[\sigma_1^+\sigma_2^-b^\dagger + \sigma_1^-\sigma_2^+b]a^\dagger a)t} |e\rangle_1 |0\rangle_2 |g\rangle_2 |n\rangle_c \\
 &= |e\rangle_1 |0\rangle_2 |g\rangle_2 |n\rangle_c,
 \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= U(t) |\Psi(0)\rangle = \\
 &= e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{\chi}{2\Delta_-}[\sigma_1^+\sigma_2^-b^\dagger + \sigma_1^-\sigma_2^+b]a^\dagger a)t} |g\rangle_1 |1\rangle_2 |g\rangle_2 |n\rangle_c \\
 &= |g\rangle_1 |1\rangle_2 |g\rangle_2 |n\rangle_c,
 \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= U(t) |\Psi(0)\rangle = \\
 &= e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{\chi}{2\Delta_-}[\sigma_1^+\sigma_2^-b^\dagger + \sigma_1^-\sigma_2^+b]a^\dagger a)t} |e\rangle_1 |1\rangle_2 |g\rangle_2 |n\rangle_c \\
 &= \cos\left(\frac{\chi n}{\hbar 2\Delta_-}t\right) |e\rangle_1 |1\rangle_2 |g\rangle_2 |n\rangle_c - i \sin\left(\frac{\chi n}{\hbar 2\Delta_-}t\right) |g\rangle_1 |0\rangle_2 |e\rangle_2 |n\rangle_c.
 \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Escolhendo o tempo de evolução $t = \frac{\hbar 2\pi n \Delta_-}{\chi}$, obtemos a tabela verdade da porta de fase

$$\begin{aligned}
 CZ : \quad & \begin{aligned}
 (|g\rangle_1 |0\rangle_2) |g\rangle_2 &\rightarrow (|g\rangle_1 |0\rangle_2) |g\rangle_2 \\
 (|e\rangle_1 |0\rangle_2) |g\rangle_2 &\rightarrow (|e\rangle_1 |0\rangle_2) |g\rangle_2 \\
 (|g\rangle_1 |1\rangle_2) |g\rangle_2 &\rightarrow (|g\rangle_1 |1\rangle_2) |g\rangle_2 \\
 (|e\rangle_1 |1\rangle_2) |g\rangle_2 &\rightarrow -(|e\rangle_1 |1\rangle_2) |g\rangle_2
 \end{aligned}
 \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

O tempo de interação necessário para a operação é da ordem de $\tau_{CZ} = \frac{\hbar 2\pi n \Delta_-}{\chi} \simeq 10^{-4} s$.

Em seguida, vamos demonstrar que a utilização das zonas de Ramsey antes e depois da passagem do átomo pela cavidade (ou da execução da porta de fase), finaliza a implementação da porta *CNOT* desejada. De fato:

$$\begin{aligned}
 C_2 X_1 |1\rangle_2 |e\rangle_1 &= H_a C_v Z_a H_a |e\rangle_1 |1\rangle_2 = H_1 C_2 Z_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_1 - |e\rangle_1) |1\rangle_2 = \\
 &= H_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_1 + |e\rangle_1) |1\rangle_2 = |1\rangle_2 |g\rangle_1,
 \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 X_1 |1\rangle_2 |g\rangle_1 &= H_1 C_2 Z_1 H_1 |1\rangle_2 |g\rangle_1 = H_1 C_2 Z_1 |1\rangle_2 \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_1 + |e\rangle_1) = \\
 &= H_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_1 - |e\rangle_1) |1\rangle_2 = |1\rangle_2 |e\rangle_1, \tag{5.2.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 X_1 |0\rangle_2 |e\rangle_1 &= H_a C_v Z_a H_a |e\rangle_1 |0\rangle_2 = H_1 C_2 Z_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_1 - |e\rangle_1) |0\rangle_2 = \\
 &= H_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_1 - |e\rangle_1) |0\rangle_2 = |0\rangle_2 |g\rangle_1, \tag{5.2.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 X_1 |0\rangle_2 |g\rangle_1 &= H_a C_v Z_a H_a |e\rangle_1 |0\rangle_2 = H_1 C_2 Z_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_1 + |e\rangle_1) |0\rangle_2 = \\
 &= H_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_1 + |e\rangle_1) |0\rangle_2 = |0\rangle_2 |g\rangle_1. \tag{5.2.17}
 \end{aligned}$$

Portanto, as operações acima reproduzem a tabela verdade da operação *CNOT* entre os graus de liberdade vibracionais do íon atuando como qubit de controle e os graus eletrônicos do átomo como qubit alvo:

$$\begin{aligned}
 |0\rangle_2 |g\rangle_1 &\rightarrow |0\rangle_2 |g\rangle_1 \\
 |0\rangle_2 |e\rangle_1 &\rightarrow |0\rangle_2 |e\rangle_1 \\
 |1\rangle_2 |g\rangle_1 &\rightarrow |1\rangle_2 |e\rangle_1 \\
 |1\rangle_2 |e\rangle_1 &\rightarrow |1\rangle_2 |g\rangle_1
 \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

Podemos, agora, inverter os papéis dos qubits alvo e controle, utilizando sequências de pulsos carrier, Eq.(2.9.10) e AJC, Eq.(2.9.13) para implementar a operação de hadamard H nos estados vibracionais:

$$\begin{aligned}
 H |g, 0\rangle &= e^{\frac{-i}{\hbar} H_c \tau_{c3}} e^{-\frac{i}{\hbar} \tau_{ajc2} H_{AJC}} e^{\frac{-i}{\hbar} H_c \tau_{c1}} |g, 0\rangle = \frac{e^{\frac{-i}{\hbar} H_c \tau_{c3}} e^{-\frac{i}{\hbar} \tau_{ajc2} H_{AJC}}}{\sqrt{2}} (|g, 0\rangle + |e, 0\rangle) \\
 &= \frac{e^{\frac{-i}{\hbar} H_c \tau_{c3}}}{\sqrt{2}} (|e, 1\rangle + |e, 0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) |g\rangle, \tag{5.2.19}
 \end{aligned}$$

onde os intervalos de tempo dos pulso utilizados são $\tau_{c1} = \pi/4$, $\tau_{ajc2} = \pi/2$ e $\tau_{c3} = \pi/2$. O mesmo processo pode ser feito para o estado $|1\rangle$. Portanto a porta *CNOT*, tem agora os papéis dos qubits alvo e controle trocados. A tabela verdade desta operação é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 |g\rangle_1 |0\rangle_2 &\rightarrow |g\rangle_1 |0\rangle_2 \\
 |e\rangle_1 |0\rangle_2 &\rightarrow |e\rangle_1 |1\rangle_2 \\
 |g\rangle_1 |1\rangle_2 &\rightarrow |g\rangle_1 |1\rangle_2 \\
 |e\rangle_1 |1\rangle_2 &\rightarrow |e\rangle_1 |0\rangle_2
 \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

A implementação desta operação exige a aplicação de seis pulsos laser distintos e a evolução livre do Hamiltoniano efetivo 5.2.5. O tempo estimado de operação neste caso é o mesmo da porta de fase $\tau_{CNOT} \approx 10^{-4}s$, pois, o tempo necessario de cada pulso laser é da ordem de $\tau_L \approx 10^{-7}s$. Nestas estimativas o valor dos parâmetros utilizados foram $g = \zeta = \Omega_L = 10^6 Hz$, $\eta = 10^{-1}$ e $\delta = \Delta_- = 10^7 Hz$ [47, 49].

Evidentemente, os mecanismos de dissipação (ruído) envolvidos afetam a evolução unitária necessária para a realização das operações lógicas quânticas. As fontes de ruído neste sistema afetam o movimento do íon aprisionado e induzem o decaimento do átomo e dos estados do campo da cavidade. Salientamos, contudo, que o tempo estimado para a operação da *CNOT* é muito menor que os tempos de decaimento característicos para este sistema no regime de microondas onde o tempo de vida do fóton na cavidade é da ordem de $\tau_c \approx 10^{-1}s$ e dos níveis eletrônicos do átomo de Rydberg assim como do estado vibracional do íon da ordem de $\tau_a \approx \tau_v \approx 10^{-2}s$.

5.2.2 Geração da base de Bell

Utilizando os Hamiltonianos efetivos Eq.(5.2.4) e Eq.(5.2.5), anteriormente construídos, desenvolvemos um protocolo para gerar todos os estados da base de Bell envolvendo os graus de liberdade vibracionais do íon e eletrônicos do átomo.

Para gerar os estados $|\Phi\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_1 |0\rangle_2 \pm |g\rangle_1 |1\rangle_2)$, devemos preparar o sistema no estado

$$|\psi(0)\rangle = |e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_2 |n\rangle, \quad (5.2.21)$$

e através da evolução livre governada pelo Hamiltoniano

$$H_{\text{ef}} = \frac{\chi}{2\Delta_+} [\sigma_1^+ \sigma_2^- b + \sigma_1^- \sigma_2^+ b^\dagger] a^\dagger a, \quad (5.2.22)$$

obtemos

$$|\psi(t)\rangle = \left[\cos\left(\frac{\chi nt}{\hbar 2\Delta_+}\right) |e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_2 |n\rangle - i \sin\left(\frac{\chi nt}{\hbar 2\Delta_+}\right) |g\rangle_1 |e\rangle_2 |1\rangle_2 |n\rangle \right]. \quad (5.2.23)$$

Em seguida aplicando um pulso carrier ao íon, obtemos

$$|\psi(t)\rangle = \left[\cos\left(\frac{\chi nt}{\hbar 2\Delta_+}\right) |e\rangle_1 |0\rangle_2 (\cos(\phi)|g\rangle_2 - i e^{-i\phi} \text{sen}(\phi)|e\rangle_2) \right] |n\rangle \quad (5.2.24)$$

$$+ \left[-i \sin\left(\frac{\chi nt}{\hbar 2\Delta_+}\right) |g\rangle_1 |1\rangle_2 (\cos(\phi)|e\rangle_2 - i e^{i\phi} \text{sen}(\phi)|g\rangle_2) \right] |n\rangle. \quad (5.2.25)$$

Uma medida de fluorescência que resulte em $|g\rangle_2$ projetará o estado em

$$|\psi(t)\rangle = \left[\cos(\phi) \cos\left(\frac{\chi n t}{\hbar 2\Delta_+}\right) |e\rangle_1 |0\rangle_2 + e^{i\varphi} \sin(\phi) \sin\left(\frac{\chi n t}{\hbar 2\Delta_+}\right) |g\rangle_1 |1\rangle_2 \right] |g\rangle_2 |n\rangle. \quad (5.2.26)$$

Para um tempo de interação $\tau = (\frac{\pi}{4} - \cos(\phi)) \frac{\hbar 2\Delta_+}{\chi n}$, onde $0 < \phi < \pi/2$ e $\varphi = \pm\pi/2$, obtemos

finalmente o estado

$$|\Phi\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_1 |0\rangle_2 \pm |g\rangle_1 |1\rangle_2). \quad (5.2.27)$$

Os outros dois estados da base de Bell $|\Psi\rangle_{\pm} = \frac{1}{2}(|e\rangle_1 |1\rangle_2 \pm |g\rangle_1 |0\rangle_2)$, são gerados através da evolução do estado inicial $|\psi(0)\rangle = |e\rangle_1 |1\rangle_2 |g\rangle_2 |n\rangle_c$, governada pelo Hamiltoniano (5.2.5), de forma a se obter

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\chi n}{\hbar 2\Delta_-} t\right) |e\rangle_1 |1\rangle_2 |g\rangle_2 |n\rangle_c - i \sin\left(\frac{\chi n}{\hbar 2\Delta_-} t\right) |g\rangle_1 |0\rangle_2 |e\rangle_2 |n\rangle_c. \quad (5.2.28)$$

Seguindo o protocolo, aplica-se em seguida um pulso carrier e realiza-se uma medida que resulte em $|g\rangle_2$, e conseqüentemente, no estado

$$|\psi(t)\rangle = \left[\cos(\phi) \cos\left(\frac{\chi n t}{\hbar 2\Delta_-}\right) |e\rangle_1 |0\rangle_2 + e^{i\varphi} \sin(\phi) \sin\left(\frac{\chi n t}{\hbar 2\Delta_-}\right) |g\rangle_1 |1\rangle_2 \right] |g\rangle_2 |n\rangle, \quad (5.2.29)$$

onde escolhemos o tempo de interação τ e o ângulo de rotação ϕ tal que

$$\tau = \left(\frac{\pi}{4} - \cos(\phi)\right) \frac{\hbar 2\Delta_+}{\chi n}, \quad (5.2.30)$$

onde os parâmetros do pulso Carrier satisfazem: $\phi > \arccos(\pi/4)$ e $\varphi = \pm\pi/2$. Obtemos finalmente o estado

$$|\Psi\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_1 |1\rangle_2 \pm |g\rangle_1 |0\rangle_2). \quad (5.2.31)$$

Podemos estimar o tempo total das operações envolvidas no protocolo, utilizando os mesmo valores da seção anterior, de forma a obtermos o valor $\tau_{op} \approx 10^{-5}s$, muito menor que o tempo de vida dos estados envolvidos.

Na Ref. [73] os autores propõem um protocolo para a geração da base de Bell dos estados eletrônicos de íons armadilhados em cavidades distintas, utilizando um átomo para distribuir o emaranhamento. Neste trabalho o processo não é probabilístico, uma vez que não necessita de uma medida projetiva.

5.2.3 Teletransporte

Desenvolvemos nessa seção um protocolo para o teletransporte do estado vibracional de um íon armadilhado em uma cavidade, em posse de Alice, para outro íon armadilhado em outra cavidade, em posse de Bob. A injeção de um átomo consecutivamente pelas cavidades de Bob e Alice deve promover o canal não-local necessário para a realização do processo. Portanto, o aparato experimental aqui utilizado compreende uma extensão daquele descrito na Seção 5.2, no qual apenas uma cavidade, contendo um íon armadilhado, é atravessada pelo átomo. Assim os Hamiltonianos efetivos deduzidos 5.2.5 e 5.2.4, aplicam-se a ambas as etapas de interação átomo-fóton-fônon quando da passagem do átomo por ambas as cavidades necessárias para o processo de teletransporte.

Considerando que o átomo atravesse primeiramente a cavidade em posse de Bob e utilizando o protocolo desenvolvido para a preparação da base de Bell, obtém-se o canal não-local

$$|\Psi\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_A |0\rangle_B + |g\rangle_A |1\rangle_B), \quad (5.2.32)$$

que compreende um emaranhado entre os estados de Fock vibracional em posse de Bob, e os estados eletrônicos do átomo que viaja em direção ao laboratório de Alice.

Seja o estado vibracional do íon em posse de Alice dado por $|\phi\rangle = \alpha |0\rangle_A + \beta |1\rangle_A$. Este estado pode ser facilmente preparado por seqüências de pulsos Carrier e AJC, através do mesmo sistema utilizado para realizar a operação de Hadamard nos estados vibracionais do íon.

Dados o canal não-local e o estado a ser teletransportado, temos como estado inicial do sistema

$$|\phi\rangle \otimes |\Psi\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha |e_A 0_A 0_B\rangle + \alpha |g_A 0_A 1_B\rangle + \beta |e_A 1_A 0_B\rangle + \beta |g_A 1_A 1_B\rangle), \quad (5.2.33)$$

no qual Alice controla os dois primeiros qubits, e Bob o último.

De posse do átomo, Alice aplica as operações CX e H , sucessivamente, aos estados do átomo e do íon em sua cavidade, resultando no emaranhado

$$\begin{aligned} H C X (|\phi\rangle \otimes |\Psi\rangle) = & [(|e0\rangle_A (\alpha |0\rangle_B + \beta |1\rangle_B) + |e1\rangle_A (\alpha |1\rangle_B + \beta |0\rangle_B)] \\ & + [|g0\rangle_A (\alpha |0\rangle_B - \beta |1\rangle_B) + |g1\rangle_A (\alpha |1\rangle_B - \beta |0\rangle_B)]. \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

A operação CX pode ser executada utilizando a porta $CNOT$, apresentada anteriormente, que possui como qubit alvo o estado vibracional, a operação H é efetivada por seqüências de pulsos carrier e AJC.

Continuando o protocolo do teletransporte, Alice deve realizar uma medida conjunta em seus qubits e enviar seu resultado a Bob, que então realizara uma operação apropriada de rotação em seu qubit Eqs.(3.3.2-3.3.5), obtendo por fim $|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B$.

Como discutido na Ref. [73] este sistema não permite operações entre íons muito distantes devido à decoerência do estado emaranhado durante o tempo de vôo do átomo. Embora para distancias da ordem de milímetros entre as cavidades onde se encontram os íons esperamos que processo apresente uma alta fidelidade.

5.3 Dois íons interagindo dispersivamente com um modo do campo.

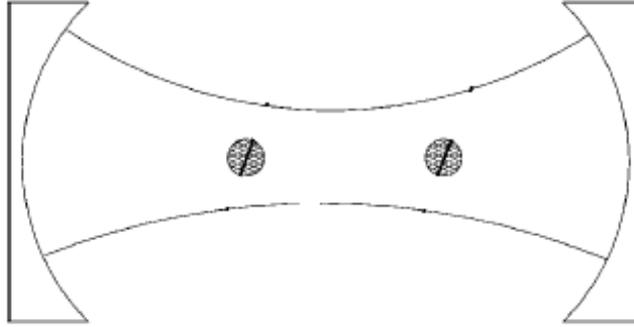


Figura 5.3.1: Dois íons armadilhados no interior de uma cavidade.

Consideremos dois íons numa armadilha tipo Paul interagindo com um modo do campo numa cavidade. (Ver Fig.(5.3.1)), estando o centro da armadilha em nodos distintos do modo da cavidade. No regime de Lamb-Dicke, o Hamiltoniano do sistema é dado por

$$H_T = \hbar\nu(b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2) + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_0 \left(\frac{\sigma_z^1 + \sigma_z^2}{2} \right) + \hbar\zeta(\sigma_1^+ a + \sigma_1^- a^\dagger)\eta(b_1^\dagger + b_1) + \hbar\zeta(\sigma_2^+ a + \sigma_2^- a^\dagger)\eta(b_2^\dagger + b_2). \quad (5.3.1)$$

Na representação de interação o Hamiltoniano transformado tem a forma

$$H_I = \sum_{j=1,2} \Omega(\sigma_j^+ b_j a \exp(i\Delta_- t) + \sigma_j^- b_j^\dagger a \exp(i\Delta_+ t) + h.c.), \quad (5.3.2)$$

onde definimos o acoplamento $\Omega = \hbar\zeta\eta$ e as dessintonias $\Delta_\pm = (\delta \pm \nu)$.

O Hamiltoniano efetivo para esse sistema, no limite em que $\Delta_{\pm} > \nu \gg \frac{\Omega\sqrt{\bar{n}_c+1}}{\hbar}$, sendo \bar{n}_c é o número médio de fótons, pode ser obtido utilizando a Eq.(4.2.5). Quando consideramos a cavidade no estado de vácuo, obtemos um Hamiltoniano que contem termos que descrevem deslocamentos nas frequências eletrônicas que dependem do estado vibracional, além de termos de troca de excitações entre íons. O Hamiltoniano efetivo que descreve a interação de dois íons acoplados pelo modo da cavidade no vácuo é dado por

$$H_{\text{ef}} = \chi_+[\sigma_1^+\sigma_1^-b_1^\dagger b_1 + \sigma_2^+\sigma_2^-b_2^\dagger b_2] + \chi_-[\sigma_1^+\sigma_1^-b_1 b_1^\dagger + \sigma_2^+\sigma_2^-b_2 b_2^\dagger] + \chi_+[\sigma_1^+\sigma_2^-b_1^\dagger b_2 + \sigma_2^+\sigma_1^-b_2^\dagger b_1] + \chi_-[\sigma_1^+\sigma_2^-b_1 b_2^\dagger + \sigma_2^+\sigma_1^-b_2 b_1^\dagger], \quad (5.3.3)$$

com o acoplamento efetivo $\chi_{\pm} = \frac{\Omega^2}{2\hbar\Delta_{\pm}}$.

5.3.1 Protocolo Para Construção da Porta CNOT.

Utilizando a evolução livre do Hamiltoniano efetivo obtido na seção anterior propomos a implementação da porta de fase entre os graus de liberdade de íons distintos, ou seja, o estado eletrônico de um dos íons e o vibracional do outro. Em seguida mostramos como obter a *CNOT* neste sistema.

Para um tempo de interação igual a $\tau_{\text{fase}} = \frac{\hbar\pi}{\chi_-}$, a evolução livre segundo o Hamiltoniano 5.3.3 nos estados de interesse leva a tabela verdade da porta de fase entre graus eletrônicos de um íon com os vibracionais do outro íon.

$$\begin{aligned} (|g\rangle_1 |0\rangle_2) |g\rangle_2 |0\rangle_1 &\rightarrow (|g\rangle_1 |0\rangle_2) |g\rangle_2 |0\rangle_1 \\ (|g\rangle_1 |1\rangle_2) |g\rangle_2 |0\rangle_1 &\rightarrow (|g\rangle_1 |1\rangle_2) |g\rangle_2 |0\rangle_1 \\ (|e\rangle_1 |0\rangle_2) |g\rangle_2 |0\rangle_1 &\rightarrow (|e\rangle_1 |0\rangle_2) |g\rangle_2 |0\rangle_1 \\ (|e\rangle_1 |1\rangle_2) |g\rangle_2 |0\rangle_1 &\rightarrow -(|e\rangle_1 |1\rangle_2) |g\rangle_2 |0\rangle_1 \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Ao se completar a operação, tanto o estado eletrônico do íon 2 quanto o estado vibracional do íon 1 permanecem inalterados e o sistema esta pronto para realizar novas operações¹. O controle do tempo necessario a implementação da porta de fase pode ser realizado, pela aplicação de campos elétricos estáticos que por efeito Stark desacoplam o íon da cavidade.

A porta *CNOT* pode ser implementada utilizando-se a decomposição

$$C_i X_j = H_j C_i Z_j H_j, \quad (5.3.5)$$

cuja implementação resume-se ao endereçamento de feixes laser em um dos íons além das interação efetiva que confeccionamos para implementação da porta de Fase.

¹O estado do campo na cavidade permanece sempre no vácuo durante toda evolução necessária para implementação da operação lógica.

Uma questão importante que naturalmente surge é o efeito da decoerência na operação da porta. Aqui temos fontes de decoerência provenientes do movimento do ion aprisionado e também da emissão espontânea. Essas fontes afetam a evolução unitária necessária para a realização das operações lógicas quânticas. O tempo para a implementação da porta de fase é da ordem de $\tau_{CZ} \simeq 10^{-3}s$ e para aplicação dos pulso laser necessários para as operações de Hadamard da ordem de $\tau_H \simeq 10^{-7}s$. O tempo total de operação da *CNOT* é inferior ao menor tempo de decoerência envolvido que é o dos estados vibracionais do íon da ordem de $\tau_v \simeq 10^{-2}s$ [47, 49]. Outras propostas de implementação de operações lógicas entre qubits de íons armadilhados através da interação dispersiva com um modo da cavidade, utilizam-se do deslocamento Stark nas frequências eletrônicas para gerar a dinâmica condicionada, exigida pelas operações lógicas [77].

5.3.2 Geração da base de Bell

Utilizando a evolução livre do Hamiltoniano Eq.(5.3.3) e o endereçamento de pulsos laser, mostramos ser possível gerar os estados da base de Bell dos estados vibracionais de íons que interagem dispersivamente como um modo da cavidade. Considerando que a cavidade encontra-se no estado de vácuo, iniciamos o protocolo com o estado inicial

$$|\psi(0)\rangle = (|e\rangle_1 |1\rangle_2) |g\rangle_2 |0\rangle_1, \quad (5.3.6)$$

que evolui, segundo o Hamiltoniano (5.3.3), para

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\chi-t}{\hbar 2}\right) |e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_1 |1\rangle_2 - i \sin\left(\frac{\chi-t}{\hbar 2}\right) |g\rangle_1 |e\rangle_2 |1\rangle_1 |0\rangle_2. \quad (5.3.7)$$

Para gerar os estados $|\Phi\rangle_{\pm} = \frac{1}{2}(|0\rangle_1 |1\rangle_1 \pm |1\rangle_1 |0\rangle_2)$, aplicamos um pulso carrier em ambos os íons e realizamos uma medida dos estados eletrônicos que resulte em $|g\rangle_1$ e $|g\rangle_2$.

A normalização dos estados da base de Bell exige que o tempo de interação associado à evolução do Hamiltoniano junto ao tempo e intensidade dos pulsos carrier aplicados, satisfaçam as seguintes condições

$$-i \cos\left(\frac{\chi-t}{\hbar 2}\right) \sin \phi_1 \cos \phi_2 e^{i\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.3.8)$$

$$-\sin\left(\frac{\chi-t}{\hbar 2}\right) \cos \phi_1 \sin \phi_2 e^{i\varphi} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5.3.9)$$

Se os parâmetros obedecem as Eqs.(5.3.8-5.3.9), obtemos os estados da base de Bell

$$|\Phi\rangle_{\pm} = \frac{1}{2}(|0\rangle_1 |1\rangle_1 \pm |1\rangle_1 |0\rangle_2). \quad (5.3.10)$$

O estado $|\Psi\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 \pm |1\rangle_1 |1\rangle_2)$ é construído da seguinte maneira, além da evolução livre do Hamiltoniano e a aplicação de pulsos carrier nos íons, devemos aplicar

um pulso $JC(\pi/2)$ (Eq.(2.9.16) em um dos íons de forma que ocorra com certeza a troca de excitação entre o estado vibracional e o eletrônico do íon. O estado evoluído apos a aplicação do pulso JC no íon 2 é dado por

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\chi-t}{\hbar 2}\right) |e\rangle_1 |e\rangle_2 |0\rangle_1 |0\rangle_2 - i \sin\left(\frac{\chi-t}{\hbar 2}\right) |g\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle_1 |1\rangle_2. \quad (5.3.11)$$

Em seguida aplicando pulsos carrier em ambos os íons e realizando uma medida que resulte em $|g\rangle_1$ e $|g\rangle_2$, obtemos o estado emaranhado

$$|\Psi\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 \pm |1\rangle_1 |1\rangle_2).$$

Onde impomos as seguintes relações entre os parâmetros

$$-\cos\left(\frac{\chi-t}{\hbar 2}\right) \sin \phi_1 \sin \phi_2 e^{-2i\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.3.12)$$

$$i \sin\left(\frac{\chi-t}{\hbar 2}\right) \cos \phi_1 \cos \phi_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.3.13)$$

para assegurar a normalização do estado.

O tempo necessário para a geração dos estados da base de Bell neste sistema é da ordem de $\tau_{Bell} \approx 10^{-3}s$, utilizando os mesmos valores de parâmetros experimentais da seção anterior. Como consideramos o modo da cavidade durante todo processo no estado de vácuo, estes estados são robustos quanto aos efeitos de dissipação da cavidade. Sendo o tempo de coerência dos estados vibracionais, superior a muitos milissegundos [47], esperamos que os estados obtidos através deste protocolo possuam uma fidelidade considerável.

Na Ref. [74] é proposto um protocolo para geração de estados emaranhados mesoscópicos dos modos de vibração de um ensemble de íons que interagem dispersivamente com o modo da cavidade análogo ao descrito nesta seção para o caso de apenas, dois íons na cavidade.

Capítulo 6

Conclusão

Nessa dissertação abordamos alguns tópicos atuais na interface entre a Óptica Quântica e a Teoria da Informação Quântica, a partir de três sistemas específicos: i) um íon armadilhado em uma cavidade, submetido a um processo de amplificação linear; ii) um íon armadilhado em uma cavidade na qual se injeta um átomo; iii) dois íons armadilhados em uma cavidade. Nesses três sistemas, partimos da engenharia de Hamiltonianos no contexto específico em que as interações do átomo ou íon com os campos de radiação ou vibração ocorrem no regime dispersivo. Obtidos os Hamiltonianos desejados, em regimes particulares dos parâmetros envolvidos, passamos então a aplicá-los a processos específicos da teoria da informação quântica. No caso do primeiro sistema estudado — do íon armadilhado em uma cavidade, submetido a um processo de amplificação linear — restringi-mo-nos à engenharia de interações, discutindo as possíveis aplicações dos Hamiltonianos efetivos construídos, conforme indicado na literatura recente.

Considerando-se o segundo sistema físico — um íon armadilhado em uma cavidade na qual se injeta um átomo —, aplicamos os Hamiltonianos efetivos tanto para a confecção de uma porta CNOT como para a engenharia dos estados da base de Bell. Nessa porta CNOT, utilizamos qubits codificados nos estados vibracionais do íon para o controle de qubits codificados nos estados eletrônicos do átomo e vice-versa. Quanto à base de Bell, desenvolvemos um protocolo probabilístico que se utiliza de medidas projetivas dos estados eletrônicos do íon para o emaranhamento de seus estados vibracionais com os estados eletrônicos do átomo. A conjunção da porta CNOT com os estados da base de Bell, foi então considerada para a realização do teletransporte de um estado vibracional iônico. Para isso, duplicamos o nosso segundo sistema físico, considerando agora duas cavidades, cada qual com o seu íon armadilhado, ambas atravessadas pelo mesmo átomo, consecutivamente. Salientamos que o protocolo de teletransporte aqui desenvolvido, prescinde da necessidade de mapeamento do estado a ser teletransportado para estados de sistemas auxiliares. Portanto, o teletransporte dá-se diretamente do estado vibracional do íon emissor para aquele

do íon receptor.

No terceiro sistema físico considerado — dois íons armadilhados em uma cavidade — utilizamos o Hamiltoniano efetivo deduzido para a construção de uma porta CNOT que se utiliza de qubits codificados em estados vibracionais de um íon para o controle de qubits de estados eletrônicos do outro íon. Além disso, desenvolvemos um protocolo probabilístico para a preparação de estados da base de Bell que compreendem emaranhados entre os estados vibracionais de ambos os íons.

Em todos os sistemas estudados, analisamos brevemente a possível implementação experimental dos protocolos apresentados. Contudo, para uma análise rigorosa das fidelidades desses protocolos, devemos utilizar tratamentos de ruídos disponíveis na literatura, como por exemplo a técnica dos operadores fenomenológicos, que torna viável um tratamento analítico dos processos de perdas. É evidente que um tratamento ab-initio dessas perdas, via equações mestras ou função-P de Glauber-Sudarshan, torna-se praticamente proibitiva, em função dos vários passos de interações envolvidos em nosso protocolos de interação da matéria com os campos de radiação e vibração. No entanto, mesmo para uma análise mais detalhada da eficiência da técnica dos operadores fenomenológicos, devemos também, para a finalização deste trabalho, desenvolver um tratamento numérico das equações mestras envolvidas, considerando-se as principais fontes de ruído presentes nos sistemas. Evidentemente, esta posterior análise de ruídos, pode levar a modificações nos protocolos sugeridos, de forma a maximizar suas fidelidades.

Por fim, além das análises de perdas, outro tópico relevante consiste da possível “escalabilidade” dos protocolos aqui desenvolvidos para o contexto de redes de cavidades contendo íons armadilhados. Por “escalabilidade” referímo-nos à transposição dos nossos protocolos dos contextos específicos aqui tratados, nos quais apenas duas partículas interagem via acoplamento dispersivo com o modo da cavidade, para o contexto de N partículas interagentes. Por exemplo, podemos estender o primeiro sistema físico por nós considerado, de uma única cavidade contendo um íon armadilhado, para um conjunto de cavidades, cada qual contendo um íon armadilhado, acopladas entre si por guias de onda. Nesse novo sistema, devemos tratar do acoplamento entre as cavidades para a realização de operações lógicas que envolvam íons de cavidades distintas. Contudo, no caso do nosso terceiro sistema físico, a escalabilidade consiste, mais que num problema teórico, num desafio à tecnologia disponível de endereçamento de partículas individuais num processador lógico.

Referências Bibliográficas

- [1] D. F. Walls, *Nature* **306**, 141 (1983).
- [2] J. M. Raimond, M. Brune, S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).
- [3] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 281 (2003).
- [4] W. Ketterle, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 1131 (2002); E. A. Cornell and C. E. Wieman, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 875 (2002).
- [5] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800 (1996).
- [6] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887 (1996).
- [7] E. Hagley, X. Maître, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1 (1997).
- [8] A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5166 (1999).
- [9] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4714 (1995).
- [10] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1796 (1996).
- [11] Q. A. Turchette, C. S. Wood, B. E. King, C. J. Myatt, D. Leibfried, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3631 (1998).
- [12] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, D. Wineland, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 281 (2003).
- [13] A. J. Leggett, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 1083 (2003).
- [14] D. M. Stamper-Kurn, A. P. Chikkatur, A. Görlitz, S. Inouye, S. Gupta, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2876 (1999).

- [15] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4569 (1999).
- [16] E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt, M. J. Holland, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 337 (1997).
- [17] J.I. Cirac, M. Lewenstein, K. Mølner, and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **57**, 1208 (1998).
- [18] D. S. Jin, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 764 (1997).
- [19] D. S. Hall, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1543 (1998).
- [20] R. L. Rodrigues, M. H. Moussa, and C. J. Villas-Bôas, *Phys. Rev. A* **74**, 063811 (2006).
- [21] D. Jaksch, H.-J. Briegel, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1975 (1999).
- [22] A. Sorensen and K. Molmer, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2274 (1999).
- [23] D. R. Meacher, S. Guibal, C. Mennerat, J.-Y. Courtois, K. I. Petsas, and G. Grynberg, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1958 (1995)
- [24] J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995).
- [25] G. K. Brennen, C. M. Caves, P. S. Jessen, and I. H. Deutsch, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1060 (1999).
- [26] M. Morinaga, I. Bouchoule, J.-C. Karam, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4037 (1999).
- [27] Dae-Il Choi and Qian Niu, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2022 (1999).
- [28] David L. Feder, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 180502 (2006).
- [29] M. B. Plenio, F. L. Semião, *New J. Phys.* **7**, 73 (2005).
- [30] J. F. Poyatos, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4728 (1996).
- [31] M. J. Hartmann, F. G. S. L. Brandão, M. B. Plenio, *Nature Physics* **2**, 849 (2006).
- [32] M. A. de Ponte, M. C. de Oliveira, and M. H. Y. Moussa, *Annals of Physics* **317**, 72 (2005).

- [33] M. A. de Ponte, M. C. de Oliveira, and M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **70**, 022324 (2004).
- [34] M. A. de Ponte, M. C. de Oliveira, and M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **70**, 022325 (2004).
- [35] G. Burkard and F. Brito, *Phys. Rev. B* **72**, 054528 (2005).
- [36] M. A. de Ponte, S. S. Mizrahi, and M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **76**, 032101 (2007).
- [37] M. A. de Ponte, S. S. Mizrahi, and M. H. Y. Moussa, *quant-ph* 0707.1629v1.
- [38] Y. Makhlin, G. Schon, A. Shnirman, *Rev. Mod. Phys.* **73**,357 (2001).
- [39] M. A. de Ponte, C. J. Villas-Bôas, R. M. Serra, and M. H. Y. Moussa, *Europhysics Letters* **72**, 383 (2005).
- [40] D. F. Walls e G. J. Milburn, *Quantum Optics*, (Springer-Verlag, Berlim, 1995); C.Cohen-Tannoudji, J.Dupont-Roce, G.Grynberg, *Photons and Atoms, Introduction to Quantum Electrodynamics*, (Wiley, NewYork, 1989); Wolfgang P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, (Wiley-Verlag, Berlim, 2001).
- [41] H. J. Kimble, M. Dagenaise, L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691 (1977).
- [42] B. W. Shore, P. L. Knight, *J. Mod. Opt* **40**, 1195 (1993).
- [43] J. H. Eberly, N. B. Narizhny, J. J. S anches, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1323 (1980).
- [44] J. I. Kim, K. M. Fonseca Romero, A.M. Horiguti, L. Davidovich, M.C. Nemes, A. F. R. de Toledo Piza, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4737 (1999).
- [45] S. Kuhr, S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Hoff, S. Del glise, S. Osnaghi, M. Brune, J.M. Raimond, S. Haroche, E. Jacques, P. Bosland, B. Visentin, *Appl. Phys. Lett.* **90**, 164101 (2007).
- [46] P. Maioli, T. Meunier, S. Gleyzes, A. Auffeves, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 113601 (2005).
- [47] S. Olmschenk, K. C. Younge, D. L. Moehring, D. N. Matsukevich, P. Maunz, C. Monroe, *Phys. Rev. A* **76**, 052314 (2007);Chr. Balzer, A. Braun, T. Hannemann, Chr. Paape, M. Ettlner, W. Neuhauser, and Chr. Wunderlich *Phys. Rev. A* **73**, 041407 (2006).
- [48] F. L. Semi o, A. Vidiella-Barranco, J. A. Roversi, *Phys. Lett. A* **299**, 423 (2002).

- [49] H. C. Nagerl, W. Bechter, J. Eschner, F. S. Kalere, R. Blatt, *Appl. Phys. B* **66**, 603 (1998).
- [50] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press (2000).
- [51] C. H. Bennett et al. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881, (1992).
- [52] C. H. Bennett et al. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895, (1993).
- [53] K. Mattle et al. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4656, (1996).
- [54] D. P. Divincenzo, *Fortschr. Phys.* **48**, 771 (2000).
- [55] D. Bouwmeester et al. *Nature* **390**, 575 (1997).
- [56] C. Bloch, *Nucl. Phys* **6**, 329 (1958).
- [57] P. Durand, *J. of Mol. Struc* **120**, 443 (1985).
- [58] D. J. Klein, *J. Chem. Phys.* **61**, 786 (1974).
- [59] S. H. Autler, C. H. Townes, *Phys. Rev.* **100**, 703 (1955) .
- [60] D. F. Martinez, *J. Phys. A. Math. Gen.* **36**, 9827 (2003).
- [61] L. Sczaniecki, *Phys. Rev. A* **28**, 3493 (1983); I. Shavitt, , L. T. Redmon, , *J. Chem. Phys.* **73**, 5711(1980).
- [62] A. B. Klimov, L. L. Sánchez-Soto, *Phys. Rev. A* **61**, 063802 (2000); I. Sainz, A. B. Klimov, and Luis Roa, *Phys. Rev. A* **73**, 032303 (2006).
- [63] Bloembergen, N, *Nonlinear optics* (John Wiley, New York, 1990); Y. R. Shen, *The principles of nonlinear optics* (John Wiley, New York, 1985);
- [64] E. Brion, L. H. Pedersen, K. Mølmer, [quant-ph/0610056v1](#); R. R. Puri, R. K. Bullough, *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 2021(1988).
- [65] U. Haeblerlen, *Adv. Magn. Reson.*, Suppl 1, (1976); M. M. Maricq, *Phys. Rev. B* **25**, 6622 (1982).
- [66] D. F. V. James, J. Jerke, *Can. J. Phys* **85**, 625(2007); D. F. V. James, *Fortschr. Phys.* **48**, 823 (2000).
- [67] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*, (Wiley, New York, 1992).

- [68] Gao-Xiang Li ,Shao-Ping Wu,Guang-MingHuang, Phys. Rev. A **71**, 063817 (2005); R. Rangel, E. Massoni, N. Zagury, Rev. A **69**, 023805 (2004).
- [69] S. B. Sheng, G. C. Guo, Phys. Rev. Lett. **85**, 2392 (2000).
- [70] L. C. Céleri, M. A. de Ponte, C. J. Villas-Boas, M. H. Y. Moussa, quant-ph/0609199v4.
- [71] F. O. Prado, N. G. de Almeida, M. H. Y. Moussa, C. J. Villas-Bôas, Phys. Rev. A **73**, 043803 (2006).
- [72] S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble, P. van Loock, Phys. Rev. A **64**, 022321 (2001).
- [73] F. L. Semião, R. J. Messori, K. Furuya, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **40**, 221 (2007).
- [74] F. L. Semião, K. Furuya, Phys. Rev. A **75**, 042315 (2007)
- [75] J. Steinbach, J. Twamley, P. L. Knigth. Phys. Rev. A **56**, 4815 (1997).
- [76] C. J. Villas-Boas, N. G. de Almeida, R. M. Serra, M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. A **68**, 061801 (2003);C. J.Villas-Boas, M. H. Y. Moussa, European Physical Journal D **32**, 147(2005).
- [77] E. Jane, M. B. Plenio,D. Jonathan, Phys. Rev. A **65**, 050302 (2002); D. Jonathan, M. B. Plenio, P. L. Knight, Phys. Rev. A **62**, 042307 (2000).