

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ESTUDO DO MODELO DE RABI NO
CONTEXTO DE SISTEMAS QUÂNTICOS
ABERTOS

Thiago Werlang de Oliveira

UFSCar - São Carlos

Março/2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ESTUDO DO MODELO DE RABI NO
CONTEXTO DE SISTEMAS QUÂNTICOS
ABERTOS

Thiago Werlang de Oliveira

Dissertação submetida ao Departamento de
Física da Universidade Federal de São Carlos
- DF/UFSCar, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas

UFSCar - São Carlos

Março/2009

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

O482em

Oliveira, Thiago Werlang de.

Estudo do modelo de Rabi no contexto de sistemas quânticos abertos / Thiago Werlang de Oliveira. -- São Carlos : UFSCar, 2009.
56 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Sistemas quânticos abertos. 2. Hamiltoniano de Rabi. 3. Interação da radiação com a matéria. 4. Decoerência (Decoherence). 5. Efeito Casimir dinâmico. 6. Ótica quântica. I. Título.

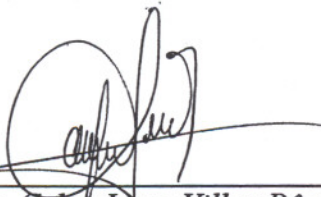
CDD: 539 (20^a)

Thiago Werlang de Oliveira

Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal de São Carlos, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovado em: 27 de Fevereiro de 2009

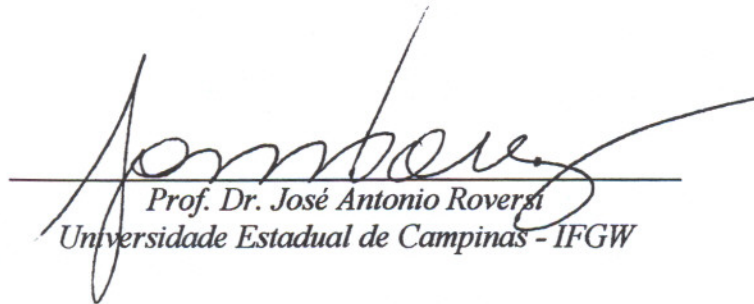
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas (orientador)
Universidade Federal de São Carlos – DF



Profa. Dra. Maria Carolina Nemes
Universidade de Federal de Minas Gerais - DF



Prof. Dr. José Antonio Rovera
Universidade Estadual de Campinas - IFGW

Agradecimentos

Ao professor Celso Jorge Villas-Bôas pela orientação, dedicação e incentivo. Agradeço pela confiança depositada em minha pessoa desde os tempos da graduação.

Aos amigos Alexandre Dodonov e Eduardo Inácio Duzzioni pelas discussões que foram de grande importância para o desenvolvimento desta dissertação.

Aos amigos, colegas e professores que contribuíram para a minha formação pessoal e profissional.

Aos meus pais pelo apoio e incentivo no decorrer da minha vida.

À Eveliny, minha noiva, por quem tenho grande amor e admiração.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O hamiltoniano de Rabi descreve a interação entre um átomo de dois níveis e um único modo de um campo eletromagnético quantizado. Neste trabalho estudamos numericamente e analiticamente a dinâmica do hamiltoniano de Rabi sujeita aos reservatórios de fase e decaimento, introduzidos na equação mestra através dos operadores de Lindblad usuais. Quando o sistema está sujeito a um reservatório de fase atômico markoviano, os termos contra-girantes no hamiltoniano de Rabi induzem uma criação de fótons a partir do vácuo a uma taxa linear. No caso em que há efeitos dissipativos, o número médio de fótons atinge um valor assintótico maior que o número médio de fótons térmicos, esperado na ausência dos termos contra-girantes. Revelamos a origem do fenômeno e estimamos a sua importância em situações realistas. Ainda, calculamos aproximadamente a taxa de criação de fótons quando há apenas defasagem e os valores estacionários do número médio de fótons e da inversão atômica no caso geral.

Abstract

The Rabi Hamiltonian describes the interaction between a two-level atom and a single mode of the quantized electromagnetic field. In this work we study numerically and analytically the dynamics of the Rabi hamiltonian subjected to damping and dephasing reservoirs, included via the usual Lindblad superoperators in the master equation. When the system is subjected to the Markovian atomic dephasing reservoir, the anti-rotating term in the Rabi hamiltonian leads to a linear photon generation from the vacuum. In the case where the dissipation effects are present, the asymptotic mean photon number attains a value higher than the thermal photon number, expected in the absence of the anti-rotating term. We reveal the origins of the phenomenon and estimate its importance in realistic situations. Still, we evaluate approximately the photon creation rate in the pure dephasing case and the asymptotic mean photon number and the atomic population inversion in the general case.

Lista de Figuras

- 2.1 Probabilidade de encontrarmos o átomo no estado $|e\rangle$ em função do tempo t via o modelo de J.C., com RWA (linha sólida) e sem RWA (linha tracejada). Para $\Delta = 0.3g$, $n = 4$ e $g/\omega_0 = 0.5$ 12
- 2.2 Probabilidade de encontrarmos o átomo no estado $|e\rangle$ em função do tempo t via o modelo de J.C., com RWA (linha sólida) e sem RWA (linha tracejada). Para $\Delta = 0.3g$, $n = 4$ e $g/\omega_0 = 0.05$ 12
- 3.1 Dinâmica do hamiltoniano de Rabi para $\Delta = 0$ e $g = 0.1$ e estado inicial $|g, 0\rangle$ em função do tempo adimensional $\tau = \eta t$ ($\eta = 0.1$). **a)** Número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$ sem defasagem (linha 1) e com defasagem $\gamma_{ph} = 0.1$ (linha 2). A linha 2 mostra a criação de fótons a partir do vácuo devido à defasagem atômica. **b)** Fator q de Mandel em função de τ para $\gamma_{ph} = 0.1$, mostrando que a estatística do campo criado é super-Poissoniana, pois $q > 0$ 17
- 3.2 Dinâmica do HR para $\Delta = 0$ and $g = 0.1$ em função de τ . **a)** Número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$ para diferentes estados iniciais $|\phi_i\rangle$, $i = 1, \dots, 6$ (ver o texto), demonstrando que a taxa de criação de fótons assintótica independe do estado inicial. **b)** Inversão atômica $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ para os estados iniciais $|\phi_i\rangle$ mostrados em (a): como esperado, $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ vai a zero assintoticamente devido a decoerência. 18

- 3.3 **a)** Energia total (átomo+campo+interação) $\langle \hat{H} \rangle$ em função de τ para $\Delta = 0$ e $g = 0.1$ e estado inicial $|g, 0\rangle$. A energia do sistema exibe um comportamento análogo ao do número médio de fótons. **b)** Energia de interação $\langle \hat{H}_I \rangle$ em função de τ para os mesmos parâmetros de a). . . . 19
- 3.4 **a-c).** Número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$ para o HR em função de τ para três trajetórias particulares, obtidas através da abordagem das trajetórias quânticas. Os parâmetros usados foram $\Delta = 0$, $g = 0.1$, $\gamma_{ph} = 0.1$, e estado inicial $|g, 5\rangle$. $\langle \hat{n} \rangle$ tende a crescer com o tempo. **d)** $\langle \hat{n} \rangle$ para uma única trajetória usando o HJC. **e)** $\langle \hat{n} \rangle$ vs. τ para o HR (linha 1) e para o hamiltoniano \hat{H}_E (linha 2, ver o texto), demonstrando que o fenômeno é devido aos termos contra-girantes e ao estado de vácuo, $\hat{a}|0\rangle = 0$ 20
- 3.5 Variação da taxa de criação de fótons assintótica $d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a$ em função de **a)** $(\omega + \omega_0)$ para g e γ_{ph} fixos; **b)** g para γ_{ph} e ω_0 fixos; **c)** γ_{ph} para g e ω_0 fixos. Observa-se que $d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a \sim \gamma_{ph}$ e é inversamente proporcional a $(\omega_0 + \omega)^2$. No limite de acoplamento fraco $d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a \sim g^2$ 22
- 3.6 Simulação da defasagem atômica através de variações aleatórias da frequência atômica para os parâmetros $\Omega_0 = 1$, $g = 6 \cdot 10^{-2}$, $\varepsilon = g$. **a)** Espectro de frequências do ruído $\omega_0(t) - \Omega_0$. Linha 1 corresponde a um ruído de baixa frequência e a linha 3 a um ruído de alta frequência. **b)** $\langle \hat{n} \rangle$ para três realizações computacionais usando um ruído de alta frequência. **c)** $\langle \hat{n} \rangle_{av}$ média sobre muitas realizações computacionais, mostrando um crescimento de fótons que depende da frequência do ruído. A linha 2 indica um ruído de média frequência. **d)** P_e média sobre muitas realizações computacionais. Estas curvas concordam qualitativamente com os resultados obtidos por meio da equação mestra. . . . 24

- 3.7 **a)** $\langle \hat{n} \rangle$ vs. τ usando a equação mestra (3.2) para o estado inicial $|g, 0\rangle$ e parâmetros $\Delta = 0$, $g = 0.1$, $n_t = 0$, e $(\gamma_{ph}, \gamma, \kappa)$ como segue. Linha 1: $(0, 0, 1) \cdot 10^{-1}$, linha 2: $(0, 1, 0) \cdot 10^{-1}$, linha 3: $(1, 1, 1) \cdot 10^{-1}$, linha 4: $(1, 0, 1) \cdot 10^{-1}$, linha 5: $(1, 1, 0) \cdot 10^{-1}$, linha 6: $(0, 0, 0)$. **b)** $\langle \hat{n} \rangle$ vs. gt para o estado inicial $|g, 0\rangle$ usando os parâmetros da EDQ em circuitos $\Delta = 0$, $g = 2 \cdot 10^{-2}$, $n_t = 6 \cdot 10^{-2}$ (a linha 1 denota o número médio de fótons térmicos n_t). Linha 2: parâmetros atuais $(2, 3, 0.4) \cdot 10^{-4}$. Linha 3: cenário futuro $(2, 3, 0.4) \cdot 10^{-5}$. Linha 4: vizinhança altamente ruidosa $(200, 3, 0.4) \cdot 10^{-4}$. **c)** P_e para os parâmetros correspondentes em (b); o comportamento de P_e é semelhante ao de $\langle \hat{n} \rangle$ 27
- 3.8 Comparação da estatística dos fótons criados através da decoerência para o estado inicial $|g, 0\rangle$ e parâmetros atuais da EDQ em circuitos: $g/\omega = 2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta = 0$, $(\gamma_{ph}, \gamma, \kappa) = (2, 3, 0.4) \cdot 10^{-4}$ com $n_t = 0$ (sólido), com a estatística do campo térmico com o mesmo número médio de fótons $n_{th} = 10^{-3}$ (esparso). $P(n)$ denota a probabilidade do estado $|n\rangle$. 28
- 4.1 Valores assintóticos de ζ_a e α_a para $\Gamma_{ph} = \gamma = \kappa = 0$ em função de **a)** g para $\gamma_{ph} = 0.05$ e $\Delta_+ = 2$; **b)** γ_{ph} para $\Delta_+ = 2$ e $g = 0.02$; **c)** Δ_+ para $g = 0.02$ e $\gamma_{ph} = 0.05$ 32
- 4.2 Comparação entre os valores numéricos de $d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a$ (bolas) e a eq. (4.5) (quadrados) para $\Gamma_{ph} = \gamma = \kappa = 0$ em função de **a)** g para $\gamma_{ph} = 0.05$ e $\Delta_+ = 2$; **b)** γ_{ph} para $\Delta_+ = 2$ e $g = 0.02$; **c)** Δ_+ para $g = 0.02$ e $\gamma_{ph} = 0.05$ 33

Lista de Tabelas

4.1	Valores numéricos N e S e os limitantes superiores $(N_>, S_>)$ dados pelas desigualdades (4.11) e (4.12) para diferentes valores de γ_{ph} , γ e κ para $g = 2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta = 0$ e $\Gamma_{ph} = 0$. Os limitantes inferiores são $N_< = 10^{-4}$ e $S_< = 4 \cdot 10^{-4}$, pois para os parâmetros usados $\Theta \simeq (g/\Delta_+)^2$	36
4.2	Valores Numéricos N e S , e limitantes inferiores $(N_<, S_<)$ e superiores $(N_>, S_>)$ dados pelas desigualdades (4.11) e (4.12) para diferentes valores de g e Δ_+ para $n_t = 0$ e $(\Gamma_{ph}, \gamma_{ph}, \gamma, \kappa) = (0, 0.1, 1, 1) \cdot 10^{-2}$	37

Sumário

1	Introdução	1
2	O Modelo de Rabi	4
2.1	Conservação de Energia	7
2.2	Aproximação de Onda Girante	9
3	Interação com o Meio-ambiente - um tratamento numérico	13
3.1	Reservatório de Fase Atômico	15
3.1.1	Frequência Aleatória	22
3.2	Efeitos Dissipativos	25
3.3	Considerações Finais	29
4	Tratamento analítico	30
4.1	Reservatório de Fase Atômico	31
4.2	Caso Dissipativo - Regime Estacionário	34
5	Conclusão	38
	Referências Bibliográficas	39
A	Quantização do campo eletromagnético numa cavidade perfeitamente condutora	44

A.1	Potenciais para o Campo Eletromagnético Clássico	45
A.2	Campo Livre	46
A.3	Hamiltoniano de Interação Átomo-Campo	50
B	Trajетórias Quânticas	53

Capítulo 1

Introdução

Um problema fundamental e de grande importância em Física é a descrição da interação entre a radiação e a matéria. O modelo mais simples a abordar este tema foi introduzido por I. I. Rabi [1] e consiste na interação de um átomo de dois níveis com um único modo de um campo eletromagnético (EM) quantizado.

Embora o modelo de Rabi (MR) tenha sido muito estudado nas últimas décadas, até o momento não foi possível obter uma solução exata para ele, apenas soluções numéricas [2, 3, 4, 5] e soluções analíticas aproximadas [6, 7, 8] foram obtidas. A aproximação mais utilizada para se obter uma solução analítica é a *aproximação de onda girante* (RWA, do inglês *rotating wave approximation*), válida em um regime onde o campo não é muito intenso e o acoplamento entre átomo e campo é fraco. Esta aproximação elimina certos termos do hamiltoniano que descreve o modelo de Rabi, chamados de termos *contra-girantes*, como ficará claro no decorrer do texto. Neste limite o modelo de Rabi possui solução exata sendo então conhecido como modelo de Jaynes-Cummings (MJC) [9, 10].

Por ter solução exata o MJC tem sido exaustivamente empregado na Óptica Quântica, principalmente na Eletrodinâmica Quântica (EDQ) em cavidades, onde a maioria dos experimentos satisfazem as condições exigidas pelo modelo. O MJC revelou interessantes fenômenos devido à natureza quântica do campo eletromagnético como, por exemplo, colapsos e ressurgimentos da inversão de população [11], oscilações de Rabi [1], estados não-clássicos do campo como o

“gato de Schrödinger” [12] e o emaranhamento entre átomo e campo [13]. Ainda, a manipulação da interação átomo-campo é utilizada na implementação de portas lógicas quânticas em íons aprisionados [14] e em EDQ em cavidades [15], bem como em processos de teletransporte atômico [16], contribuindo assim para um rápido desenvolvimento da ciência da informação quântica [17]. Além disso, nos últimos anos o MJC tem sido investigado experimentalmente num contexto que une EDQ em cavidades e matéria condensada usando qubits supercondutores como átomos de dois níveis artificiais acoplados (fortemente) a um guia de microondas [18, 19, 20] (área conhecida como EDQ em circuitos [21]) e pontos quânticos acoplados a microcavidades de cristais fotônicos [22, 23].

Entretanto, recentes trabalhos tem questionado a validade da RWA [24, 25, 26] e novos métodos aproximativos tem sido propostos [8, 6]. Além disso, foi demonstrado que os termos contra-girantes são responsáveis por diversos fenômenos novos, como a implementação das transições de Landau-Zener de um qubit em EDQ em circuitos [30, 31], geração de emaranhamento entre átomo e campo [32, 36], simulação do efeito Casimir dinâmico em microcavidades supercondutoras [33, 34, 35] ou em EDQ em circuitos [36], e o caos quântico [27, 28, 29] onde estuda-se, por exemplo, o que ocorre com certas propriedades quânticas do sistema quando o análogo clássico deste apresenta um comportamento caótico.

Uma grande parte dos estudos sobre a influência dos termos contra-girantes foi realizado considerando o sistema átomo-campo isolado do meio-ambiente. Embora a dinâmica do MJC tenha sido exaustivamente estudada na presença de vizinhanças dissipativas [37, 40, 41, 42], a dinâmica do MR não tem recebido tanta atenção no contexto de sistemas abertos. Em vista desse fato, nesta dissertação realizamos um estudo sobre a dinâmica do MR sujeita à ação do meio-ambiente.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 é feita a dedução do modelo de Rabi no contexto de cavidades e discutida a questão da não-conservação de energia associada aos termos contra-girantes presentes no modelo; no capítulo 3 realizamos um estudo numérico da dinâmica do MR sujeita aos reservatórios de fase e decaimento e mostramos que existe uma criação de fótons devido a decoerência; no capítulo 4 apresentamos cálculos analíticos para

a taxa de criação de fótons, no caso onde o sistema interage com um reservatório de fase markoviano, e também os valores estacionários do número médio de fótons e da inversão atômica para quando há dissipação. Finalmente, no capítulo 5 apresentamos nossas conclusões.

Capítulo 2

O Modelo de Rabi

Neste capítulo é apresentado o modelo de Rabi que descreve um sistema constituído de um único modo do campo eletromagnético quantizado interagindo com um átomo de dois níveis no interior de uma cavidade com paredes perfeitamente condutoras.

Nosso ponto de partida é o hamiltoniano \hat{H} que descreve a interação de um átomo com um campo eletromagnético quantizado no interior de uma cavidade (deduzido no Apêndice A). O hamiltoniano \hat{H} é dado pela seguinte expressão:

$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{H}_a + \hat{H}_I, \quad (2.1)$$

com

$$\hat{H}_c = \sum_k \hbar \omega_k \left(\hat{n}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (2.2)$$

$$\hat{H}_a = \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} \quad (2.3)$$

$$\hat{H}_I = \hbar \sum_{i,j} \sum_k \left\{ g_{k,i,j} \hat{a}_k \hat{\sigma}_{ij} + g_{k,i,j}^* \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_{ij} \right\}, \quad (2.4)$$

onde ω_k é a frequência do k-ésimo modo, \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger são operadores que aniquilam e criam fótons de vetor de onda \vec{k} na cavidade, e $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ é o operador número do k-ésimo modo. Ainda, $\hat{\sigma}_{ij} = |\psi_i\rangle \langle \psi_j|$ tal que $|\psi_i\rangle$ é um autoestado de \hat{H}_a com autoenergia E_i e $g_{k,i,j}$ é a constante de acoplamento entre o átomo e o k-ésimo modo do campo.

Este hamiltoniano leva em conta todos os modos do campo eletromagnético e todos os níveis atômicos. Ajustando a geometria da cavidade é possível fazer com que a frequência ω de um dos modos da cavidade fique muito próxima da frequência de transição atômica ω_0 . Ainda, se este modo estiver suficientemente separado dos modos vizinhos então praticamente apenas este modo irá ser excitado pela transição atômica. Esta condição é satisfeita se o comprimento dos intervalos de frequência para os modos vizinhos forem (em módulo) muito maiores que a largura espectral da transição atômica entre os dois níveis definida por ω_0 . Garante-se assim que apenas um dos modos do campo seja levado em conta. O hamiltoniano do campo passa a ser dado por:

$$\hat{H}_c = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.5)$$

Agora, se for possível garantir que apenas estes dois níveis sejam populados então os demais níveis podem ser desprezados. Uma forma de viabilizar esta condição é usar *regras de seleção*, por exemplo. Supondo que isso seja possível e que tenhamos um átomo de dois níveis cujas autoenergias são E_e e E_g com os respectivos autoestados $|e\rangle$ (estado excitado) e $|g\rangle$ (estado fundamental), o hamiltoniano referente ao átomo livre é então:

$$\hat{H}_a = E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_g \hat{\sigma}_{gg}. \quad (2.6)$$

Agora, observe que o operador dipolo atômico $\hat{\mathbf{d}} = e\hat{\mathbf{r}}$ é ímpar em relação à inversão pelo centro do átomo ($\hat{\mathbf{r}} \rightarrow -\hat{\mathbf{r}}$) e que o hamiltoniano (2.6) é invariante em relação a esta transformação, ou seja, os seus autoestados tem paridade bem definida. Portanto, os elementos $\langle e | \hat{\mathbf{d}} | e \rangle$ e $\langle g | \hat{\mathbf{d}} | g \rangle$ são nulos.

Para verificar isso observe que:

$$\begin{aligned} \langle e | \hat{\mathbf{d}} | e \rangle &= \int d^3r \langle e | \hat{\mathbf{d}} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | e \rangle \\ &= e \int d^3r |\psi_e(\vec{r})|^2 \vec{r} \quad , \psi_e(\vec{r}) = \langle \vec{r} | e \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois a integração é em todo o espaço e o integrando é uma função ímpar. Analogamente mostra-se que $\langle g | \hat{\mathbf{d}} | g \rangle = 0$.

Portanto o operador $\hat{\mathbf{d}}$ tem elementos nulos na diagonal. Usando a seguinte notação:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{eg} &= |e\rangle \langle g| = \hat{\sigma}_+, \\ \hat{\sigma}_{ge} &= |g\rangle \langle e| = \hat{\sigma}_-, \end{aligned}$$

o hamiltoniano de interação é:

$$\begin{aligned}\hat{H}_I &= \hbar \sum_{i,j \in \{e,g\}} \{g\hat{a}\hat{\sigma}_{ij} + g^*\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{ij}\} \\ &= \hbar \{g\hat{a}\hat{\sigma}_+ + g^*\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+ + g\hat{a}\hat{\sigma}_- + g^*\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Fazendo uso deste resultado e das eqs. (2.5) e (2.6) o hamiltoniano total, eq. (2.1), assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) + E_e\hat{\sigma}_{ee} + E_g\hat{\sigma}_{gg} \\ &+ \hbar(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(g\hat{a} + g^*\hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (2.8)$$

com a seguinte constante de acoplamento $g = g(\vec{r})$:

$$g(\vec{r}) = -i\sqrt{\frac{\omega}{2\epsilon_0\hbar L^3}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{d}_{eg} \cdot \vec{\epsilon}. \quad (2.9)$$

O termo referente ao átomo pode ser escrito de outra maneira:

$$\begin{aligned}\hat{H}_a &= E_e\hat{\sigma}_{ee} + E_g\hat{\sigma}_{gg} \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega_0(\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}) + \frac{1}{2}(E_e + E_g), \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $\hbar\omega_0 = E_e - E_g$ com ω_0 sendo a frequência de transição atômica.

Portanto, a menos de um deslocamento na energia, o hamiltoniano atômico é:

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z, \quad (2.11)$$

com $\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}$ igual à componente z do momento angular para uma partícula de spin 1/2. Desta maneira, não levando em conta a energia de ponto zero e considerando g real, a hamiltoniano total possui a seguinte expressão:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar g(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.12)$$

conhecido como *Hamiltoniano de Rabi* (HR) [1].

A constante de acoplamento g é a frequência de Rabi do vácuo, ou seja, é a frequência de troca de energia entre o átomo e o campo, quando o campo está inicialmente no vácuo e o átomo no estado excitado.

2.1 Conservação de Energia

A interação descrita pelo hamiltoniano (2.12) possui dois tipos de termos, os *ressonantes* e os *anti-ressonantes* ou *contra-girantes*. Os termos *ressonantes* $\hat{a}\hat{\sigma}_+$ e $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-$ representam respectivamente a absorção de um fóton e a conseqüente transição do estado fundamental para o estado excitado, e a transição do estado excitado para o fundamental seguida da emissão de um fóton. Estes processos são aqueles “normalmente intuídos” na interação entre fótons e átomos, não apresentando maiores surpresas.

No entanto, os termos *contra-girantes* $\hat{a}\hat{\sigma}_-$ e $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+$ são geralmente chamados de *não-conservativos* [47, 48, 49], pois implicariam numa violação do princípio de conservação de energia. Esta interpretação está associada aos processos que eles representam, respectivamente, a transição do estado excitado para o fundamental seguida da absorção de um fóton, e a transição do estado fundamental para o excitado como conseqüência da criação de um fóton.

Este intrigante fato é melhor ilustrado com o seguinte exemplo: considere um átomo no estado fundamental $|g\rangle$ parado no interior de uma cavidade na presença de um campo no estado $|0\rangle$, ou seja, com zero fótons. O termo contra-girante $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+$ possibilita a seguinte transição:

$$|g\rangle \otimes |0\rangle \longrightarrow |e\rangle \otimes |1\rangle,$$

e portanto existe uma probabilidade não-nula de medir um fóton sendo que não havia inicialmente nenhum fóton na cavidade e o átomo estava no estado fundamental. Um fóton foi criado a partir do vácuo!

Perante estes argumentos, a pergunta a se fazer é: existe uma violação da conservação de energia? A resposta é não. Para verificar isso parte-se da equação

de Heisenberg, que descreve a evolução temporal de um operador \hat{O} ,

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{O}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{O}}{\partial t},$$

onde \hat{H} é o hamiltoniano do sistema. No caso em questão $\hat{O} = \hat{H}(0)$ e como $[\hat{H}, \hat{H}] = 0$ então,

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{O}, \hat{H}] = 0,$$

mostrando que \hat{H} é uma constante de movimento, logo a energia total do sistema $E = \langle \hat{H} \rangle$ é conservada.

Este resultado parece ser paradoxal para alguns quando confrontado com o exemplo acima, mas este aparente paradoxo pode ser solucionado de forma simples. Se a energia total do sistema for tratada como sendo a energia do átomo mais a energia do campo então realmente a energia não é conservada. Porém, claramente esse não é o caso, pois é necessário levar em consideração a energia de interação entre o átomo e o campo, que atua como um tipo de “energia potencial”, como constatado em [50].

Como,

$$E = \langle \hat{H} \rangle = \langle \hat{H}_a \rangle + \langle \hat{H}_c \rangle + \langle \hat{H}_I \rangle,$$

a energia de interação é:

$$\langle \hat{H}_I \rangle = E - \langle \hat{H}_a \rangle - \langle \hat{H}_c \rangle, \quad (2.13)$$

e para o exemplo dado $E = 0$. Esta energia potencial é a responsável por dar conta das diferenças de energia associadas aos termos contra-girantes.

Mesmo tendo demonstrado a conservação de energia, os processos gerados pelos termos contra-girantes ainda causam uma certa “estranheza”. Muito provavelmente, isso ocorre pois é comum pensar que o estado fundamental do sistema é aquele em que o átomo está no estado fundamental $|g\rangle$ e o campo no vácuo $|0\rangle$, mas este não é o caso, o estado $|g\rangle \otimes |0\rangle$ não é o estado de menor energia do hamiltoniano (2.12).

Além disso, o *número de excitações*, definido pelo operador:

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{1}{2} \mathbb{I}. \quad (2.14)$$

não é uma constante de movimento, pois \hat{N} não comuta com \hat{H} , o que implica na existência de transições entre estados com diferentes números de excitação, provocadas pelos termos contra-girantes.

2.2 Aproximação de Onda Girante

Como mencionado na introdução, com a aproximação de onda girante é possível obter uma solução analítica para o modelo de Rabi. Para aplicar esta aproximação é conveniente mudar temporariamente para a representação de interação, que consiste na aplicação de uma transformação unitária $U = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}$, com $H_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z$, ao hamiltoniano (2.12). Nesta representação os operadores \hat{a} , \hat{a}^\dagger , $\hat{\sigma}_+$ e $\hat{\sigma}_-$ possuem a seguinte dependência temporal:

$$\hat{a} = \hat{a}e^{i\omega t}, \quad (2.15)$$

$$\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t}, \quad (2.16)$$

$$\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_- e^{i\omega t}, \quad (2.17)$$

$$\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_+ e^{-i\omega t}, \quad (2.18)$$

introduzindo ao hamiltoniano (2.12), na representação de interação, uma dependência temporal:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \hbar g \underbrace{(\hat{\sigma}_+\hat{a}e^{i\Delta t} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger e^{-i\Delta t})}_{\text{termo 1}} \\ &+ \hbar g \underbrace{(\hat{\sigma}_-\hat{a}e^{i\bar{\omega}t} + \hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger e^{-i\bar{\omega}t})}_{\text{termo 2}}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde $\Delta = \omega - \omega_0$ e $\bar{\omega} = \omega + \omega_0$.

A aproximação de onda girante consiste em desprezar os termos mais oscilantes da eq. (2.19), os quais são determinados através da média temporal de cada termo desta expressão. O termo 1 é proporcional a

$$\frac{1}{T} \int_0^T \hat{\sigma}_+\hat{a}e^{i\Delta t} dt = \left| \frac{\hat{\sigma}_+\hat{a}}{\langle \hat{a} \rangle} \right| \frac{g \langle \hat{a} \rangle}{i\Delta} (e^{i\Delta T} - 1), \quad (2.20)$$

enquanto que o termo 2 é proporcional a

$$\frac{1}{T} \int_0^T \hat{\sigma}_-\hat{a}e^{-i\bar{\omega}t} dt = \left| \frac{\hat{\sigma}_-\hat{a}}{\langle \hat{a} \rangle} \right| \frac{g \langle \hat{a} \rangle}{-i\bar{\omega}} (e^{-i\bar{\omega}T} - 1), \quad (2.21)$$

levando em conta os respectivos complexos conjugados.

Na condição em que $\Delta \ll \bar{\omega}$ (próximo da ressonância), pode-se desprezar o termo 2 se,

$$\frac{g \langle \hat{a} \rangle}{\bar{\omega}} \ll 1, \quad (2.22)$$

onde $\langle \hat{a} \rangle \approx \sqrt{\bar{n}}$ com $\bar{n} = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$.

Esta condição é geralmente satisfeita nos experimentos usuais da Eletrodinâmica Quântica em Cavidades [51], onde o acoplamento típico g é da ordem de 10^4 Hz ou 10^5 Hz e as frequências ω e ω_0 da ordem de 10^{10} Hz no regime de microondas, e g da ordem de 10^7 Hz ou 10^8 Hz com frequências ω e ω_0 da ordem de 10^{15} Hz no regime óptico.

Aplicando a transformação inversa recupera-se o hamiltoniano de Rabi na representação de Schrödinger sujeito à aproximação de onda girante:

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger), \quad (2.23)$$

conhecido como hamiltoniano de Jaynes-Cummings (HJC).

A solução deste hamiltoniano é obtida observando que ele pode ser escrito como uma soma direta da seguinte forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_g \oplus \hat{H}_0 \oplus \hat{H}_1 \oplus \hat{H}_2 \oplus \dots, \quad (2.24)$$

onde

$$\hat{H}_g = -\frac{\hbar\omega_0}{2} |g, 0\rangle \langle g, 0|, \quad (2.25)$$

$$\hat{H}_n = \begin{pmatrix} (n+1)\hbar\omega - \frac{\hbar\omega_0}{2} & \hbar g \sqrt{n+1} \\ \hbar g \sqrt{n+1} & n\hbar\omega + \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix}.$$

Com isso, nota-se que os estados $|e, n\rangle$ e $|g, n+1\rangle$ geram um subespaço invariante em relação ao hamiltoniano (2.23). Portanto, o operador \hat{H} pode ser diagonalizado, pois para isso basta diagonalizar matrizes 2×2 . Os autoestados e as respectivas autoenergias são dados abaixo:

$$|\psi_0\rangle = |g, 0\rangle, \quad (2.26)$$

$$|\psi_n^+\rangle = \cos \theta_n |e, n-1\rangle - \sin \theta_n |g, n\rangle, \quad (2.27)$$

$$|\psi_n^-\rangle = \sin \theta_n |e, n-1\rangle + \cos \theta_n |g, n\rangle, \quad (2.28)$$

com

$$E_0 = -\frac{\hbar\omega_0}{2}, \quad (2.29)$$

$$E_n^+ = \hbar \left[(n-1)\omega + \frac{\omega_0}{2} \right] - \frac{\hbar}{2}(\Omega_n - \Delta), \quad (2.30)$$

$$E_n^- = \hbar \left[n\omega - \frac{\omega_0}{2} \right] + \frac{\hbar}{2}(\Omega_n - \Delta), \quad (2.31)$$

onde

$$\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2n}, \quad (2.32)$$

$$\sin \theta_n = \frac{\Omega_n - \Delta}{\sqrt{(\Omega_n - \Delta)^2 + 4g^2n}}, \quad (2.33)$$

$$\cos \theta_n = \frac{2g\sqrt{n}}{\sqrt{(\Omega_n - \Delta)^2 + 4g^2n}}. \quad (2.34)$$

A base formada por estes autoestados recebe o nome de *base vestida* e este processo de diagonalização de *método do átomo vestido*. Se o estado inicial do sistema for $|\psi(0)\rangle = |e, n\rangle$ e $\Delta = 0$ então o estado evoluído $|\psi(t)\rangle$ irá oscilar no tempo entre os estados $|e, n\rangle$ e $|g, n+1\rangle$ e assim a troca de energia entre o átomo e o campo será periódica.

O número de excitações \hat{N} comuta com o hamiltoniano (2.23) e portanto é uma quantidade conservada, com isso as transições produzidas por este hamiltoniano conservam o número de excitação. Quando esta quantidade não é conservada, como ocorre com o hamiltoniano (2.12), o subespaço gerado pelos estados $|e, n\rangle$ e $|g, n+1\rangle$ deixa de ser invariante tornando a decomposição (2.24) inaplicável, impossibilitando o processo de diagonalização aqui apresentado.

Próximo a condição de ressonância ($\omega \approx \omega_0$), para um acoplamento fraco, os termos ressonantes oscilam mais lentamente com relação aos contra-girantes e portanto eles tem uma contribuição acumulativa com o tempo. Assim, a troca de energia entre átomo e campo é periódica sendo este padrão chamado de *oscilações de Rabi*. Já os termos contra-girantes, por oscilarem muito rapidamente (com frequência da ordem de ω), não terão um efeito cumulativo com o tempo, contribuindo apenas com pequenas oscilações em torno da oscilação de Rabi.

Um gráfico da população do estado excitado P_e em função do tempo t , figura (2.1), mostra a influência dos termos contra-girantes para $g/\omega_0 = 0.5$ e

$\Delta = 0.3g$ quando o átomo está inicialmente no estado excitado e o campo com $n = 4$ fótons. Essa influência é minimizada conforme o acoplamento torna-se mais fraco, como mostra a figura (2.2) onde $g/\omega_0 = 0.05$.

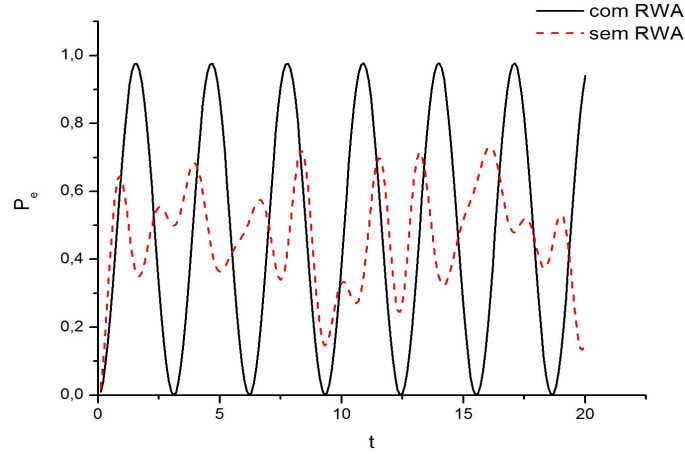


FIGURA 2.1: Probabilidade de encontrarmos o átomo no estado $|e\rangle$ em função do tempo t via o modelo de J.C., com RWA (linha sólida) e sem RWA (linha tracejada). Para $\Delta = 0.3g$, $n = 4$ e $g/\omega_0 = 0.5$.

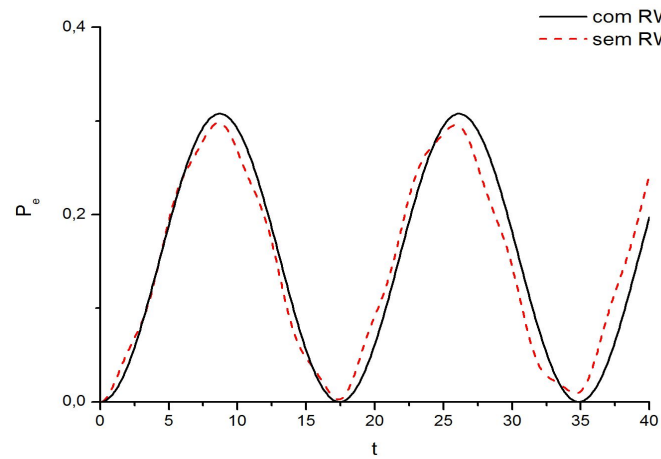


FIGURA 2.2: Probabilidade de encontrarmos o átomo no estado $|e\rangle$ em função do tempo t via o modelo de J.C., com RWA (linha sólida) e sem RWA (linha tracejada). Para $\Delta = 0.3g$, $n = 4$ e $g/\omega_0 = 0.05$.

Capítulo 3

Interação com o Meio-ambiente - um tratamento numérico

Neste capítulo estuda-se numericamente a dinâmica do hamiltoniano de Rabi sujeita aos efeitos dos reservatórios de fase e decaimento. Assumimos¹ que a descrição da dinâmica deste sistema seja dada pela equação mestra padrão, fazendo uso dos superoperadores de Lindblad usuais para a defasagem e decaimento [53].

Na Física, o conceito de sistema *isolado* representa uma idealização de sistemas reais. Em geral, os sistemas de interesse não são isolados, mas sim *abertos*, e portanto interagem com outros sistemas, resultando, por exemplo, na troca de energia e partículas.

Geralmente, estes sistemas apresentam um comportamento irreversível e, se estiverem inicialmente em um estado de não-equilíbrio, irão evoluir para um estado de equilíbrio (ou estacionário) determinado por certas condições externas. Chama-se de *processo de relaxação* essa evolução do sistema para um estado de equilíbrio.

A abordagem de sistemas abertos [53] considera a interação do sistema de interesse S com outro sistema R de maneira tal que o comportamento irreversível do sistema S seja contemplado. Para tanto, assume-se que os sistemas S e R sejam

¹Nesta dissertação não é apresentada uma dedução da equação mestra utilizada, mas a validade da mesma pode ser garantida segundo os argumentos apresentados no final do capítulo.

fracamente acoplados e que R possua um número infinito de graus de liberdade, garantindo assim que a reação de R sobre S possa ser desprezada. Com isso, o estado de R passa a ser descrito por uma distribuição de equilíbrio, ou seja, R atua como um *reservatório térmico*.

Como resultado da interação com o meio-ambiente o estado do sistema perde a sua coerência com o passar do tempo, tendendo a uma mistura estatística. Esse processo é chamado de *decoerência*.

Na Mecânica Quântica o estado de um sistema pode ser descrito por um operador densidade $\hat{\rho}_T$ [54]. A evolução unitária de um sistema isolado é dada pela equação de Liouville - Von Neumann:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_T(t)}{\partial t} = \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}_T(t) \right], \quad (3.1)$$

onde $\hat{H}(t)$ é o hamiltoniano do sistema.

Como estamos interessados na dinâmica do sistema S , toma-se o traço parcial sobre os graus de liberdade do reservatório R , resultando no operador densidade $\hat{\rho}(t) = \text{Tr}_R \hat{\rho}_T(t)$. Na condição em que o tempo de correlação entre as variáveis do reservatório for muito menor que o tempo de relaxação do sistema pode-se fazer a aproximação de Markov [53], onde é assumido que toda a informação sobre o passado do sistema é perdida. Nesse caso é possível obter uma equação para descrever a evolução do sistema S conhecida como *equação mestra*:

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \hat{\rho}(t)] + \mathcal{L}(\hat{\rho}). \quad (3.2)$$

A dinâmica que resulta da equação (3.2) é não-unitária e descreve a evolução do sistema S sujeito a interação com o reservatório R . A informação sobre o efeito do reservatório está totalmente contida no superoperador $\mathcal{L}(\hat{\rho})$, cuja forma funcional depende do tipo de interação entre sistema e reservatório.

Como mencionado no início deste capítulo, em nosso estudo assumimos a validade da equação mestra (3.2) onde o superoperador $\mathcal{L}(\hat{\rho})$ é dado por:

$$\mathcal{L}(\hat{\rho}) = \mathcal{L}_a(\hat{\rho}) + \mathcal{L}_f(\hat{\rho}) + \mathcal{L}_{da}(\hat{\rho}) + \mathcal{L}_{df}(\hat{\rho}), \quad (3.3)$$

definido em termos dos seguintes superoperadores de Lindblad [53]

$$\mathcal{L}_a(\hat{\rho}) = \gamma(n_t + 1)\mathcal{D}[\hat{\sigma}_-]\hat{\rho} + \gamma n_t \mathcal{D}[\hat{\sigma}_+]\hat{\rho},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f(\hat{\rho}) &= \kappa(n_t + 1)\mathcal{D}[\hat{a}]\hat{\rho} + \kappa n_t\mathcal{D}[\hat{a}^\dagger]\hat{\rho}, \\ \mathcal{L}_{da}(\hat{\rho}) &= \frac{\gamma_{ph}}{2}\mathcal{D}[\hat{\sigma}_z]\hat{\rho}, \quad \mathcal{L}_{df}(\hat{\rho}) = \frac{\Gamma_{ph}}{2}\mathcal{D}[\hat{n}]\hat{\rho},\end{aligned}$$

que fazem uso da notação padrão [37] $\mathcal{D}[\hat{L}]\hat{\rho} \equiv (2L\hat{\rho}L^\dagger - L^\dagger L\hat{\rho} - \hat{\rho}L^\dagger L)/2$.

O superoperador $\mathcal{L}_a(\hat{\rho})$ descreve a interação do átomo com um reservatório térmico com número médio de fótons térmicos igual a n_t e taxa de decaimento atômico γ . A transição $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ é proporcional a $\gamma(n_t + 1)$ enquanto que a transição $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ é proporcional a γn_t . Observa-se assim que as emissões espontâneas podem ocorrer a temperatura zero, o que não ocorre com as excitações. A interação entre o campo e o reservatório térmico (com número médio de fótons térmicos igual a n_t) é descrita pelo superoperador $\mathcal{L}_f(\hat{\rho})$. A perda de fótons é proporcional a $\kappa(n_t + 1)$ enquanto que o acréscimo de fótons no sistema, devido exclusivamente à temperatura, é proporcional a κn_t . κ é então definida como a constante de decaimento do campo.

Outra fonte de decoerência no sistema é o reservatório de fase atuando no átomo (campo), representado por $\mathcal{L}_{da}(\hat{\rho})$ ($\mathcal{L}_{df}(\hat{\rho})$) com γ_{ph} (Γ_{ph}) denotando a taxa de defasagem do átomo (campo). Geralmente, em EDQ em circuitos a taxa de defasagem da cavidade é muito pequena em relação as outras fontes de decoerência [62] e portanto pode ser desprezada. Entretanto, em EDQ em cavidades tal efeito pode ser significativo devido a medida de *back-action* [38], que ocorre quando o campo é medido por meio de medidas quânticas não-demolidoras usando átomos de Rydberg não-ressoantes [39]. No restante do capítulo considera-se $\Gamma_{ph} = 0$.

3.1 Reservatório de Fase Atômico

Nesta seção considera-se apenas a ação do reservatório de fase atômico ($\kappa = \gamma = 0$). Os parâmetros utilizados na integração numérica da eq. (3.2) foram escolhidos de forma a otimizar os cálculos e não estão relacionados a dados experimentais. Entretanto, verificou-se que para parâmetros realistas tem-se qualitativamente o mesmo comportamento. Por conveniência escolhemos a frequência da cavidade como $\omega = 1$ com os demais parâmetros dados em termos desta frequência. Nas figuras 3.1-3.4 escolhemos os parâmetros $g = 0.1$ e $\Delta = 0$.

O estado $|g, 0\rangle$ é o estado fundamental do MJC, e portanto não está acoplado aos demais autoestados do hamiltoniano. Por outro lado, os termos contra-girantes induzem transições entre este e os demais estados e como os estados do átomo e do campo são limitados por $|g\rangle$ e $|0\rangle$, respectivamente, estas transições contribuem apenas para o crescimento de $\langle \hat{n} \rangle$. Na fig.3.1(a) fizemos o gráfico do número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$ em função do tempo adimensional $\tau \equiv t\eta$, com $\eta = 0.1$, para o estado inicial $|g, 0\rangle$. No caso sem defasagem ($\gamma_{ph} = 0$, fig.3.1a, curva 1) observa-se um comportamento oscilatório limitado, como descrito detalhadamente em [3], mostrando a criação de fótons a partir do vácuo devido aos termos contra-girantes. Entretanto, no caso em que o reservatório de fase esteja atuando ($\gamma_{ph} = 0.1$), a fig.3.1a (curva 2) mostra também que $\langle \hat{n} \rangle$ cresce com o tempo, mas agora tendendo assintoticamente² a uma taxa de crescimento linear. Um comportamento aparentemente inesperado! Ainda, de acordo com o gráfico do fator de Mandel q em função de τ (fig.3.1b) é possível constatar que a estatística do campo criado é super-Poissoniana, pois $q > 0$.

O mecanismo de geração de fótons através da decoerência atômica demonstrado na fig.3.1a é independente da condição inicial. Isso é verificado no gráfico de $\langle \hat{n} \rangle$ em função de τ (fig.3.2a) para seis diferentes estados iniciais: $|\phi_1\rangle = |g, 0\rangle$, $|\phi_2\rangle = |g, \alpha\rangle$, onde $|\alpha\rangle$ é um estado coerente com $|\alpha|^2 = 0.05$, $|\phi_3\rangle = [(|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}] \otimes |0\rangle$, $|\phi_4\rangle = [(|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}] \otimes |\alpha\rangle$, $|\phi_5\rangle = |e, 0\rangle$ e $|\phi_6\rangle = |e, \alpha\rangle$. A diferença básica entre estes estados é o número de excitação inicial $\langle \hat{N}_k \rangle = \langle \phi_k | \hat{N} | \phi_k \rangle$: $\langle \hat{N}_1 \rangle = 0$, $\langle \hat{N}_2 \rangle = 0.05$, $\langle \hat{N}_3 \rangle = 0.5$, $\langle \hat{N}_4 \rangle = 0.55$, $\langle \hat{N}_5 \rangle = 1$ e $\langle \hat{N}_6 \rangle = 1.05$. Observa-se que após o regime transiente ($\tau \gtrsim 15$), cuja duração é proporcional ao número inicial de quantas, todas as curvas apresentam o mesmo comportamento - uma dependência linear com a mesma taxa de criação de fótons. Na fig.3.2b tem-se o gráfico da inversão atômica $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ em função de τ para estes mesmos estados, mostrando que $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ tende assintoticamente para zero. Este resultado era esperado devido à decoerência atômica.

Como visto na seção 1.1, a energia do sistema átomo-campo é conservada na situação ideal, pois quando há um aumento da energia do átomo e/ou do

²O termo assintótico usado nesta seção é em relação ao tempo de simulação numérica nos impedindo de inferir o comportamento do sistema para $t \rightarrow \infty$.

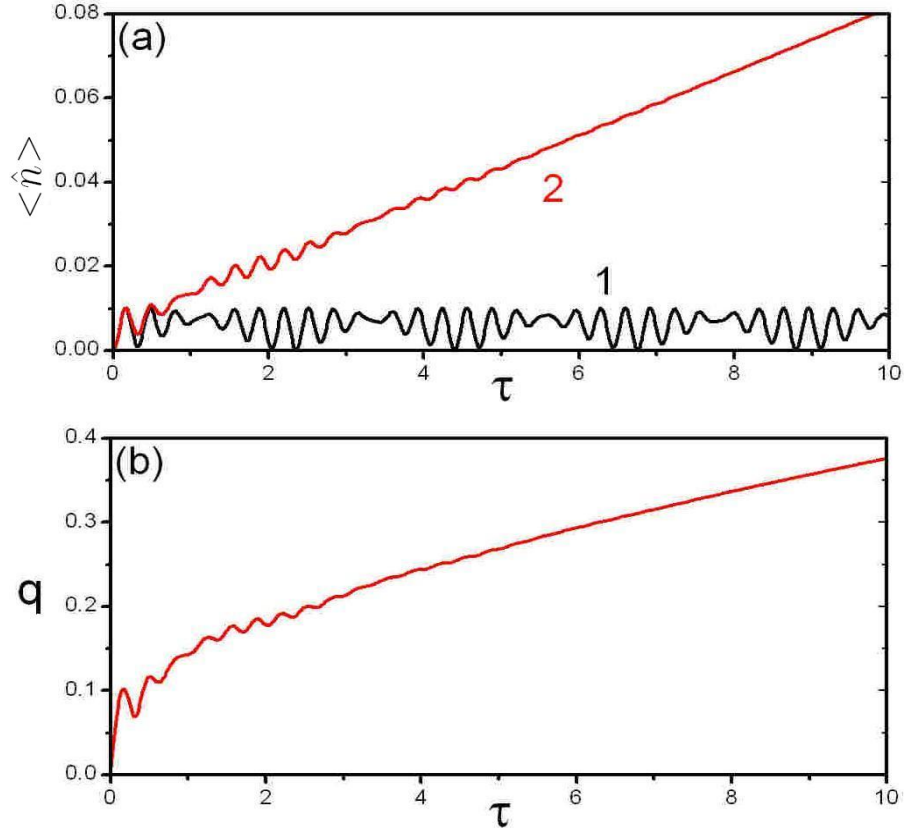


FIGURA 3.1: Dinâmica do hamiltoniano de Rabi para $\Delta = 0$ e $g = 0.1$ e estado inicial $|g, 0\rangle$ em função do tempo adimensional $\tau = \eta t$ ($\eta = 0.1$). **a)** Número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$ sem defasagem (linha 1) e com defasagem $\gamma_{ph} = 0.1$ (linha 2). A linha 2 mostra a criação de fótons a partir do vácuo devido à defasagem atômica. **b)** Fator q de Mandel em função de τ para $\gamma_{ph} = 0.1$, mostrando que a estatística do campo criado é super-Poissoniana, pois $q > 0$.

campo existe uma compensação da mesma devido ao termo de interação $\langle \hat{H}_I \rangle = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)$. Conforme a discussão nos parágrafos anteriores, a interação com um reservatório de fase leva a uma criação de fótons e portanto um aumento da energia do campo na cavidade, dada por $\langle \hat{H}_c \rangle = \omega \langle \hat{n} \rangle$. Porém, como consequência da decoerência, a energia de interação $\langle \hat{H}_I \rangle$ tende a zero (fig.3.3b) e com isso a energia do sistema $\langle \hat{H} \rangle$ tende a aumentar com tempo, exibindo um comportamento análogo ao do número médio de fótons (fig.3.3a). Este é um resultado interessante pois mostra um aumento da energia do sistema mesmo com o reservatório de fase não trocando energia diretamente com o sistema.

A equação mestra descreve um efeito médio do meio-ambiente sobre o

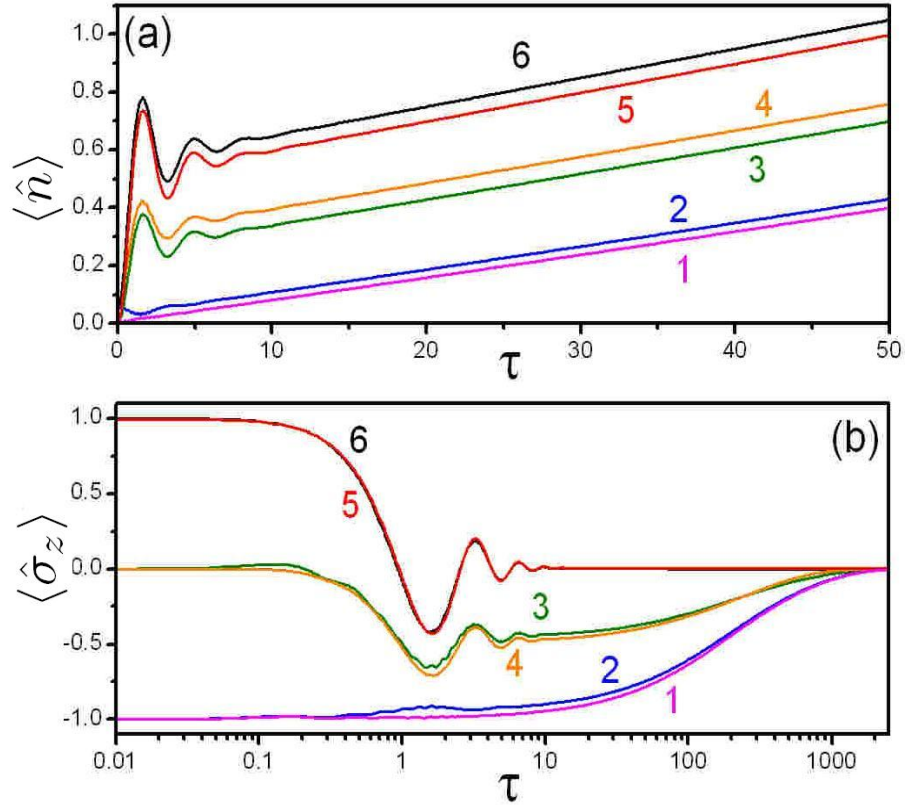


FIGURA 3.2: Dinâmica do HR para $\Delta = 0$ and $g = 0.1$ em função de τ . **a)** Número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$ para diferentes estados iniciais $|\phi_i\rangle$, $i = 1, \dots, 6$ (ver o texto), demonstrando que a taxa de criação de fótons assintótica independe do estado inicial. **b)** Inversão atômica $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ para os estados iniciais $|\phi_i\rangle$ mostrados em (a): como esperado, $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ vai a zero assintoticamente devido a decoerência.

sistema. Para uma melhor compreensão do papel da defasagem na criação de fótons fez-se uso da abordagem das *Trajétórias Quânticas* (ver o Apêndice B) para estudar o comportamento do número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$ durante trajetórias individuais.

Para o reservatório de fase tem-se $\hat{A} = \hat{\sigma}_z$ e portanto o hamiltoniano efetivo não-hermitiano é:

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H} - i(\gamma_{ph}/2)\mathbb{I}, \quad (3.4)$$

onde \hat{H} é o hamiltoniano de Rabi (eq. (2.12)). Na figs.3.4a-c foi feito o gráfico do número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$ em função de τ para três trajetórias individuais, partindo sempre do estado inicial $|g, 5\rangle$. Note que em cada umas das trajetórias

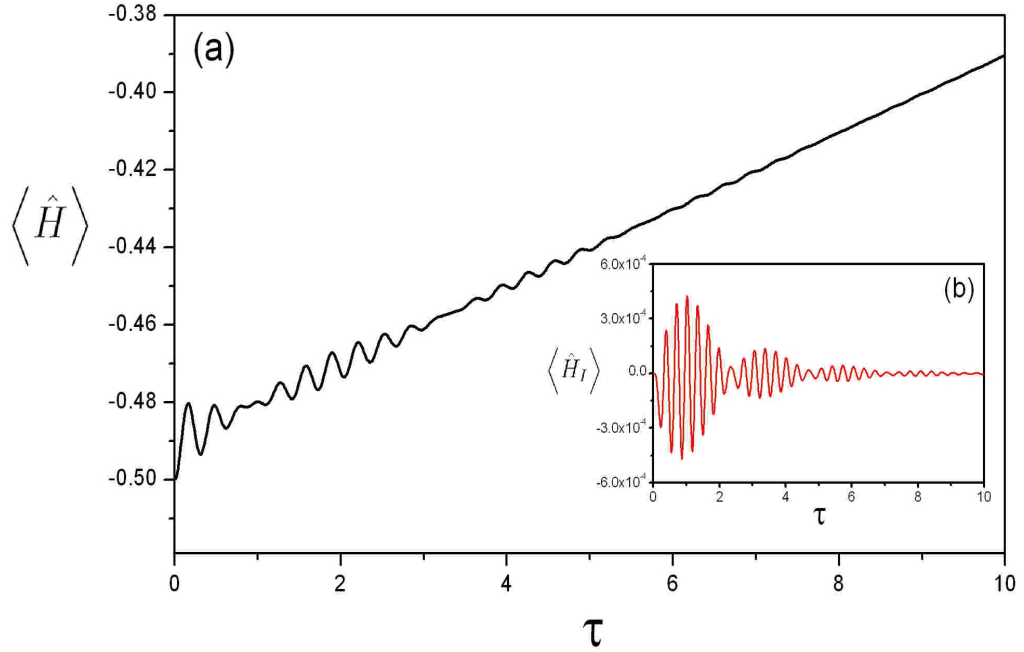


FIGURA 3.3: **a)** Energia total (átomo+campo+interação) $\langle \hat{H} \rangle$ em função de τ para $\Delta = 0$ e $g = 0.1$ e estado inicial $|g, 0\rangle$. A energia do sistema exibe um comportamento análogo ao do número médio de fótons. **b)** Energia de interação $\langle \hat{H}_I \rangle$ em função de τ para os mesmos parâmetros de a).

a tendência de $\langle \hat{n} \rangle$ é sempre aumentar com o passar do tempo. Isso ocorre por duas razões: (i) os termos contra-girantes no hamiltoniano de Rabi e (ii) o fato do campo na cavidade ser limitado inferiormente pelo estado de vácuo, $\hat{a}|0\rangle = 0$.

Para justificar (i), fizemos o gráfico de $\langle \hat{n} \rangle$ em função de τ (fig.3.4d) para uma trajetória quântica particular usando o hamiltoniano de Jaynes-Cummings (eq.(2.23)) no lugar do HR na equação (3.4). Esse gráfico mostra que o $\langle \hat{n} \rangle$ oscila com o tempo mas não cresce, em contraste com o caso anterior (figs.3.4a-c).

A explicação do processo de criação de fótons segue do seguinte argumento: note que todo estado pode ser escrito em termos da base $\{|s, n\rangle\}$ (com $s = \{g, e\}$ e $|n\rangle$ um estado de Fock). Entre os *saltos* o sistema evolui de acordo com o hamiltoniano de Rabi (2.12) (o termo não-hermitiano não é importante devido a condição de normalização [55]). O HJC induz transições do tipo $|g, n\rangle \leftrightarrow |e, n-1\rangle$, enquanto que os termos contra-girantes induzem transições do tipo $|g, n\rangle \leftrightarrow |e, n+1\rangle$. A combinação de ambas as partes gera todas

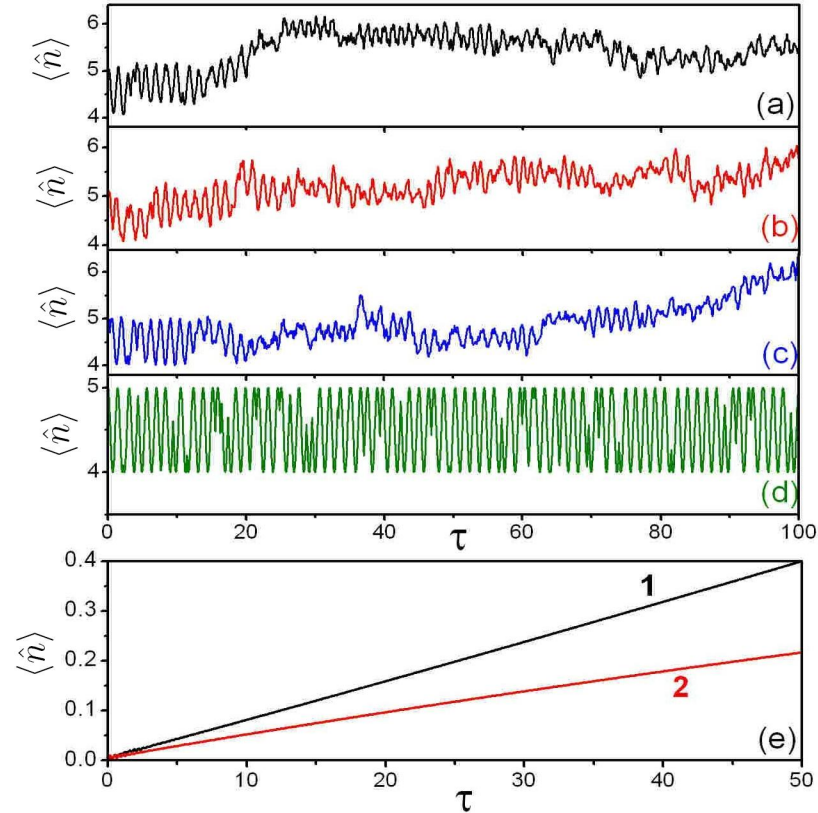


FIGURA 3.4: **a-c)** Número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$ para o HR em função de τ para três trajetórias particulares, obtidas através da abordagem das trajetórias quânticas. Os parâmetros usados foram $\Delta = 0$, $g = 0.1$, $\gamma_{ph} = 0.1$, e estado inicial $|g, 5\rangle$. $\langle \hat{n} \rangle$ tende a crescer com o tempo. **d)** $\langle \hat{n} \rangle$ para uma única trajetória usando o HJC. **e)** $\langle \hat{n} \rangle$ vs. τ para o HR (linha 1) e para o hamiltoniano \hat{H}_E (linha 2, ver o texto), demonstrando que o fenômeno é devido aos termos contra-girantes e ao estado de vácuo, $\hat{a}|0\rangle = 0$.

as transições possíveis. Entretanto, os estados de Fock são limitados inferiormente pelo estado de vácuo (ii), assim se o sistema estiver no estado $|s, n\rangle$ existem mais estados acessíveis da forma $|s', m > n\rangle$ do que estados da forma $|s', m < n\rangle$ e portanto o número médio de fótons tende a crescer entre os saltos. Durante um salto, o reservatório “mede” o estado atômico através da aplicação do operador $\hat{\sigma}_z$ na função de onda, transformando $|g\rangle \rightarrow -|g\rangle$ e $|e\rangle \rightarrow |e\rangle$. Com isso a coerência entre os estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$ é perdida e a subsequente evolução pelo hamiltoniano \hat{H} não levará o sistema novamente para o estado anterior ao salto. Essa é a razão que faz com que o $\langle \hat{n} \rangle$ tende a aumentar após cada salto, como foi constatado nas figs.3.4a-c. Após fazer a média em relação a muitas trajetórias constata-se que

$\langle \hat{n} \rangle$ sempre cresce, em concordância com o resultado obtido via equação mestra (fig.3.1a, curva 2).

Além das duas razões apresentadas acima como justificativas do processo de criação de fótons, poderia se pensar numa terceira razão - os diferentes pesos $\sqrt{n+1}$ e \sqrt{n} que surgem após a aplicação dos operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} , respectivamente, ao estado de Fock $|n\rangle$. Para verificar isso considera-se o hamiltoniano \hat{H}_E obtido mediante a substituição dos operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} pelos *operadores exponenciais de fase* [56, 57] $\hat{E}_- \equiv (n+1)^{-1/2}\hat{a}$ e $\hat{E}_+ = \hat{E}_-^\dagger$ no HR (2.12), respectivamente, onde $\hat{E}_+\hat{E}_- = \mathbb{I} - |0\rangle\langle 0|$. O hamiltoniano \hat{H}_E escreve-se como:

$$\hat{H}_E = \omega\hat{E}_+\hat{E}_- + \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_z + g(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{E}_- + \hat{E}_+). \quad (3.5)$$

Com isso, eliminam-se os pesos $\sqrt{n+1}$ e \sqrt{n} do HR, desde que $\hat{E}_+|n\rangle = |n+1\rangle$ e $\hat{E}_-|n\rangle = |n-1\rangle$. Na fig.3.4(e) tem-se o gráfico de $\langle \hat{n} \rangle$ (curva 1) e $\langle \hat{n}_E \rangle$ (curva 2), obtido de \hat{H}_E (3.5), em função de τ para o estado inicial $|g, 0\rangle$. Em ambos os casos há criação de fótons do vácuo, embora $\langle \hat{n}_E \rangle$ aumente a uma taxa menor que $\langle \hat{n} \rangle$, e portanto os pesos $\sqrt{n+1}$ e \sqrt{n} não são os responsáveis pela criação de fótons.

No limite assintótico $\langle \hat{n}(\tau) \rangle$ cresce linearmente com o tempo, como constatado na fig.3.1a. O próximo passo desta análise numérica foi encontrar como a taxa de criação de fótons assintótica $d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a$ escala com $\omega + \omega_0$, g , e γ_{ph} usando a equação mestra do sistema. Na fig.3.5a fez-se o gráfico de $d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a$ em função de $\omega + \omega_0$ para $g = 0.1$ e $\gamma_{ph} = 0.1$ o qual mostra que $d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a$ é inversamente proporcional a $(\omega + \omega_0)^2$. Para $\gamma_{ph} = 0.1$ e $\Delta = 0$ observa-se que na condição em que $g \ll 1$ a taxa de criação de fótons assintótica $d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a$ é proporcional a g^2 (fig3.5b), embora esta dependência seja modificada para valores de g fora desse limite. Finalmente, a análise da fig.3.5c mostra que $d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a \propto \gamma_{ph}$, onde os parâmetros usados foram $g = 0.1$ e $\Delta = 0$. Este resultado está de acordo com a abordagem das trajetórias quânticas, onde um maior valor de γ_{ph} implica numa maior probabilidade de salto e conseqüentemente num crescimento de $\langle \hat{n} \rangle$ a uma taxa maior.

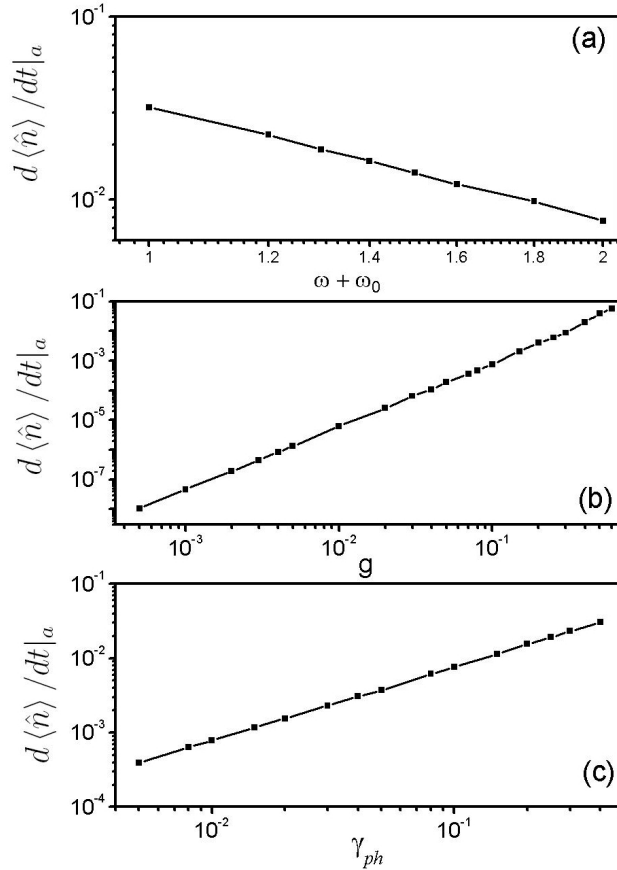


FIGURA 3.5: Variação da taxa de criação de fótons assintótica $d\langle\hat{n}\rangle/dt|_a$ em função de **a)** $(\omega + \omega_0)$ para g e γ_{ph} fixos; **b)** g para γ_{ph} e ω_0 fixos; **c)** γ_{ph} para g e ω_0 fixos. Observa-se que $d\langle\hat{n}\rangle/dt|_a \sim \gamma_{ph}$ e é inversamente proporcional a $(\omega_0 + \omega)^2$. No limite de acoplamento fraco $d\langle\hat{n}\rangle/dt|_a \sim g^2$.

3.1.1 Frequência Aleatória

Uma das origens da defasagem de um ponto de vista físico é a variação aleatória da frequência de transição atômica ω_0 devido a interação com o meio-ambiente [60, 61]. Em átomos artificiais (qubits supercondutores) a fonte de decoerência dominante é o ruído $1/f$ atuante sobre a frequência de transição atômica. Para investigar o efeito desse ruído no sistema átomo-cavidade, a equação mestra (3.2) para o HR (2.12) foi integrada numericamente (com $\kappa = \gamma = \gamma_{ph} = 0$), onde assumiu-se uma frequência ω_0 sujeita a flutuações estocásticas. O objetivo aqui é mostrar que, em relação a uma média sobre um *ensemble*, essa fonte de decoerência induz uma criação de fótons a partir do vácuo. Este resultado

é esperando pois a sua descrição matemática é dada pelo superoperador $\mathcal{L}_{da}(\hat{\rho})$ estudado no tópico anterior.

Considere o seguinte modelo para a frequência de transição dependente do tempo $\omega_0(t)$:

$$\omega_0(t + dt) = \omega_0(t) + \begin{cases} 0.1\epsilon x r & \text{se } \omega_0(t) < \Omega_0 - 0.8\epsilon \\ -0.1\epsilon x r & \text{se } \omega_0(t) > \Omega_0 + 0.8\epsilon \\ 0.1\epsilon x (r - 1/2) & \text{para demais valores} \end{cases}, \quad (3.6)$$

onde $\Omega_0 \equiv \omega_0(t = 0)$ é a frequência de transição atômica média, $r \in (0, 1)$ um número aleatório, $\epsilon \ll 1$ é o deslocamento máximo da frequência atômica, e dt é o “passo” computacional, com $gdt \ll 1$. O parâmetro x está associado à “frequência” do ruído: qualitativamente, para x pequeno (veja discussão abaixo) tem-se um ruído de baixa frequência e no limite oposto um ruído de alta frequência.

Para o estado inicial $|g, 0\rangle$ calculamos, em relação a uma média sobre um *ensemble*, o número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle_{av}$ e a probabilidade do átomo estar no estado excitado P_e , para os parâmetros $\Omega_0 = 1$, $g = 6 \cdot 10^{-2}$ e $\epsilon = g$. Considerou-se três exemplos de ruídos cujos espectros aparecem na fig.3.6a: $x = 1$ corresponde a um ruído de baixa frequência (curva 1) e $x = 6$ é a nossa referência para um ruído de alta frequência (curva 3), enquanto que $x = 3$ é um ruído de média frequência³. A fig.3.6b mostra três curvas do número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$ que correspondem a três realizações computacionais particulares para um ruído de alta frequência: é possível notar que embora ocorra um acréscimo e um decréscimo aleatório do número médio de fótons, em média $\langle \hat{n} \rangle$ sempre cresce. As figs. 3.6c e 3.6d mostram, respectivamente, $\langle \hat{n} \rangle_{av}$ e P_e em relação a uma média após muitas realizações computacionais para os três tipos de ruídos. Observa-se que há um crescimento de $\langle \hat{n} \rangle_{av}$ e P_e ; além disso, o crescimento de $\langle \hat{n} \rangle_{av}$ é aproximadamente linear, o que está de acordo com os resultados anteriores.

O crescimento do número médio de fótons é maior para ruídos de alta frequência, como mostra a fig.3.6c. Este comportamento pode ser entendido qualitativamente da seguinte forma: A dinâmica do HR sujeita a uma frequência

³A curva correspondente a este ruído não foi inserida na fig.3.6a, pois ela se encontra entre as outras duas e isso comprometeria a compreensão do gráfico.

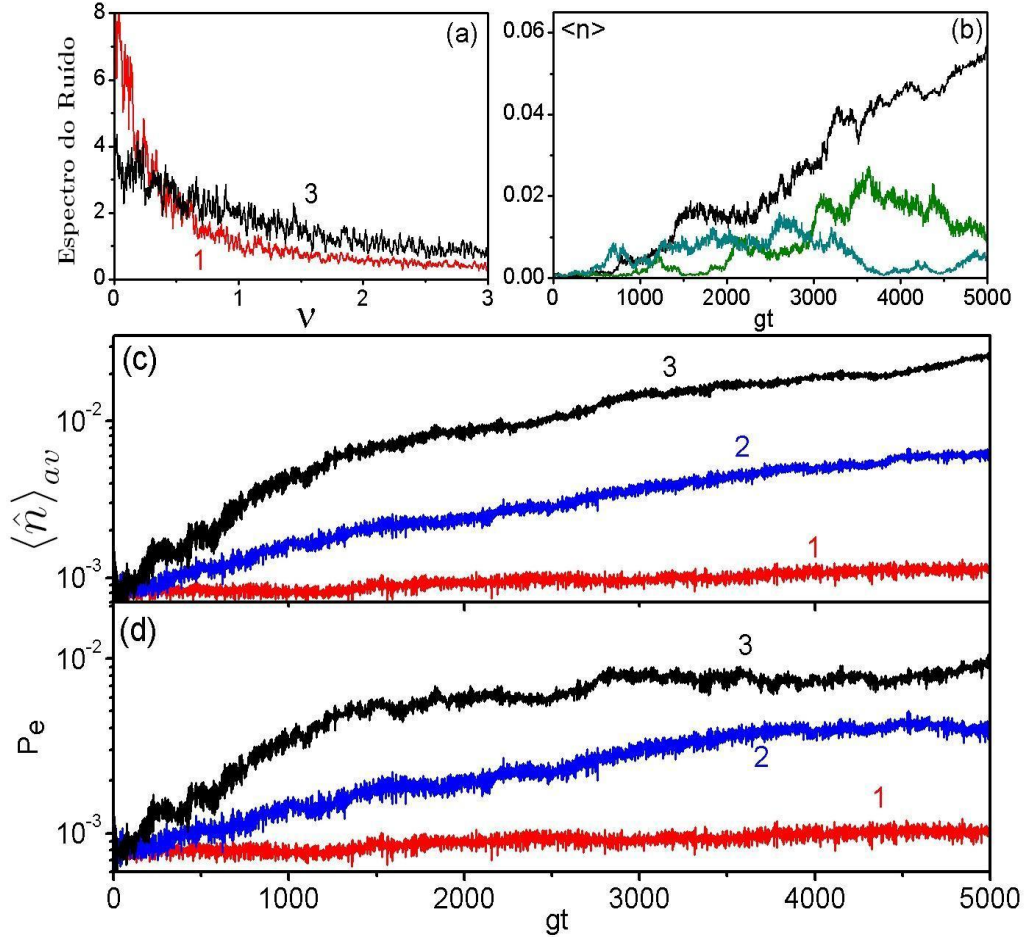


FIGURA 3.6: Simulação da defasagem atômica através de variações aleatórias da frequência atômica para os parâmetros $\Omega_0 = 1$, $g = 6 \cdot 10^{-2}$, $\varepsilon = g$. **a)** Espectro de frequências do ruído $\omega_0(t) - \Omega_0$. Linha 1 corresponde a um ruído de baixa frequência e a linha 3 a um ruído de alta frequência. **b)** $\langle \hat{n} \rangle$ para três realizações computacionais usando um ruído de alta frequência. **c)** $\langle \hat{n} \rangle_{av}$ média sobre muitas realizações computacionais, mostrando um crescimento de fótons que depende da frequência do ruído. A linha 2 indica um ruído de média frequência. **d)** P_e média sobre muitas realizações computacionais. Estas curvas concordam qualitativamente com os resultados obtidos por meio da equação mestra.

atômica não-aleatória $\omega_0(t)$ permite a geração coerente tanto de excitações do campo eletromagnético como do átomo quando $\omega_0(t)$ exibe uma dependência temporal periódica [33, 34, 35, 36, 61] ou linear [31, 32]. Ainda, a taxa de criação de fótons depende da forma de $\omega_0(t)$ [31] e no caso periódico da modulação de $\omega_0(t)$ [33, 36]. Por exemplo, no caso periódico, dependendo da frequência de modulação de $\omega_0(t)$, denotada por η , a dinâmica efetiva do sistema será descrita aproximadamente pelo hamiltoniano de Jaynes-Cummings, Anti-Jaynes-Cummings, ou por um hamiltoniano que simula o efeito Casimir dinâmico. Cada um destes processos é caracterizado por uma frequência de ressonância, ou seja, um valor específico de η .

Como a transformada de Fourier do ruído (fig.3.6a) contém frequências ressonantes ($\nu \approx 2$, por exemplo [33, 36]), com seus respectivos pesos, para as quais existe criação de fótons no caso periódico, espera-se em média um lento e incoerente crescimento do número médio de fótons devido a estas componentes do espectro do ruído. Para ruídos de alta frequência existe um número maior de frequências ressonantes e/ou os pesos destas são maiores em relação aos ruídos de baixa frequência. Isso explica o porque de uma maior taxa de criação de fótons para ruídos de alta-frequência (fig.3.6c).

Portanto, uma possível origem física para a criação de fótons a partir do vácuo através da decoerência na EDQ de cavidades é a variação aleatória da frequência de transição atômica, que induz um HR efetivo dependente do tempo, para o qual os fótons são criados devido às frequências ressonantes presentes no espectro do ruído [33, 36].

3.2 Efeitos Dissipativos

Em situações realistas, além do reservatório de fase, existem outras importantes fontes de decoerência que atuam sobre o sistema, por exemplo, os reservatórios térmicos. Quando outros reservatórios estão presentes existe uma competição entre os fótons criados através da defasagem atômica e os fótons perdidos através do decaimento (atômico e da cavidade).

Para observar este efeito, a eq.(3.2) foi integrada numericamente e fez-se então um gráfico de $\langle \hat{n} \rangle$ vs. τ (ver fig.3.7a) para diferentes taxas de decaimento e parâmetros: $\Delta = 0$, $g = 0.1$, $n_t = 0$ e para o estado inicial $|g, 0\rangle$. Quando o reservatório de fase é desconsiderado, curva 1, com os parâmetros dissipativos $(0, 0, 1) \cdot 10^{-1}$ [segundo a notação $(\gamma_{ph}, \gamma, \kappa)$] e curva 2, com parâmetros $(0, 1, 0) \cdot 10^{-1}$, observa-se que o valor estacionário de $\langle \hat{n} \rangle$ é menor que aquele obtido na presença da defasagem: curvas 4, com $(1, 0, 1) \cdot 10^{-1}$, e 5 com $(1, 1, 0) \cdot 10^{-1}$. Ainda, os valores estacionários de $\langle \hat{n} \rangle$ para os parâmetros $(1, 1, 1) \cdot 10^{-1}$ (curva 3), $(1, 0, 1) \cdot 10^{-1}$ (curva 4) e $(1, 1, 0) \cdot 10^{-1}$ (curva 5) são maiores que o valor máximo de $\langle \hat{n} \rangle$ obtido na ausência de reservatórios [para $(\gamma_{ph}, \gamma, \kappa) = (0, 0, 0)$], como mostra a curva 6. O efeito da temperatura ($n_t \neq 0$) é de apenas deslocar todas as curvas para cima.

Na fig.3.7b considerou-se um conjunto de parâmetros experimentais obtidos de recentes experimentos em EDQ em circuitos [62]: $\Delta = 0$, $g = 2 \cdot 10^{-2}$, e $n_t = 6 \cdot 10^{-2}$. A curva 1 mostra o número médio de fótons térmicos n_t e a curva 2 mostra $\langle \hat{n} \rangle$ obtido através da eq. (3.2) para as taxas de dissipação presentes nos experimentos atuais: $\gamma_{ph} = 2 \cdot 10^{-4}$, $\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ e $\kappa = 4 \cdot 10^{-5}$. Não existe uma diferença visível entre $\langle \hat{n} \rangle$ e n_t , mesmo para $\Delta = 0.2$ (a correspondente curva não foi incluída no gráfico). O próximo passo foi considerar um cenário futuro onde as taxas de decaimento atômico e de dissipação da cavidade sejam suprimidas em uma ordem de magnitude: $\gamma = 3 \cdot 10^{-5}$ e $\kappa = 4 \cdot 10^{-6}$, mantendo o mesmo valor para γ_{ph} . Neste caso (curva 3) nota-se uma pequena diferença entre $\langle \hat{n} \rangle$ e n_t tornando o fenômeno observável em medidas com grande precisão. Agora, mantendo os valores atuais para as taxas de dissipação, $\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ e $\kappa = 4 \cdot 10^{-5}$, considera-se uma vizinhança altamente ruidosa [63] que proporcione uma taxa de defasagem $\gamma_{ph} = 2 \cdot 10^{-2}$ (curva 4), duas ordens de grandeza maior que a melhor taxa de defasagem atual. Nesta condição, em consequência da criação de fótons através da decoerência, $\langle \hat{n} \rangle$ é quase o dobro do número médio de fótons térmicos n_t .

Finalmente, na fig.3.7c fez-se o gráfico de P_e em relação aos parâmetros da fig.3.7b, onde a curva 1 mostra P_e^{RWA} obtida através do HJC para os parâmetros dissipativos atuais a qual é independente das taxas de dissipação. O compor-

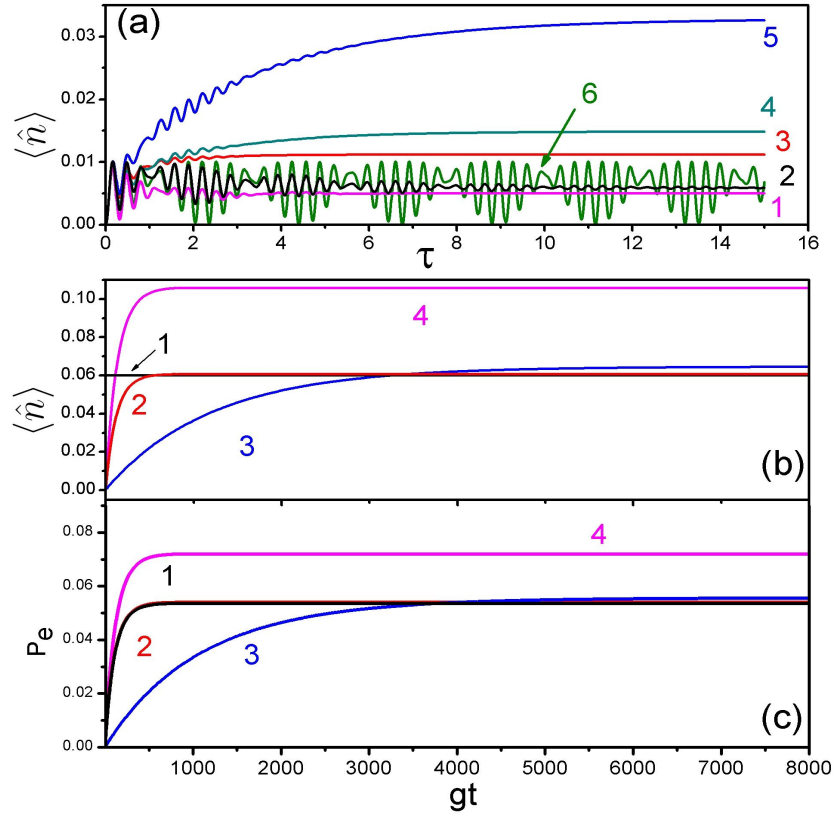


FIGURA 3.7: **a)** $\langle \hat{n} \rangle$ vs. τ usando a equação mestra (3.2) para o estado inicial $|g, 0\rangle$ e parâmetros $\Delta = 0$, $g = 0.1$, $n_t = 0$, e $(\gamma_{ph}, \gamma, \kappa)$ como segue. Linha 1: $(0, 0, 1) \cdot 10^{-1}$, linha 2: $(0, 1, 0) \cdot 10^{-1}$, linha 3: $(1, 1, 1) \cdot 10^{-1}$, linha 4: $(1, 0, 1) \cdot 10^{-1}$, linha 5: $(1, 1, 0) \cdot 10^{-1}$, linha 6: $(0, 0, 0)$. **b)** $\langle \hat{n} \rangle$ vs. gt para o estado inicial $|g, 0\rangle$ usando os parâmetros da EDQ em circuitos $\Delta = 0$, $g = 2 \cdot 10^{-2}$, $n_t = 6 \cdot 10^{-2}$ (a linha 1 denota o número médio de fótons térmicos n_t). Linha 2: parâmetros atuais $(2, 3, 0.4) \cdot 10^{-4}$. Linha 3: cenário futuro $(2, 3, 0.4) \cdot 10^{-5}$. Linha 4: vizinhança altamente ruidosa $(200, 3, 0.4) \cdot 10^{-4}$. **c)** P_e para os parâmetros correspondentes em (b); o comportamento de P_e é semelhante ao de $\langle \hat{n} \rangle$.

tamento de P_e é semelhante ao de $\langle \hat{n} \rangle$, indicando que P_e cresce devido à ação combinada da defasagem e dos termos contra-girantes, embora este fenômeno seja insignificante para os parâmetros atuais. Agora, para valores maiores de γ_{ph} (curva 4), P_e é substancialmente maior que P_e^{RWA} , mostrando que grandes taxas de defasagem podem induzir um erro do tipo *bit flip*.

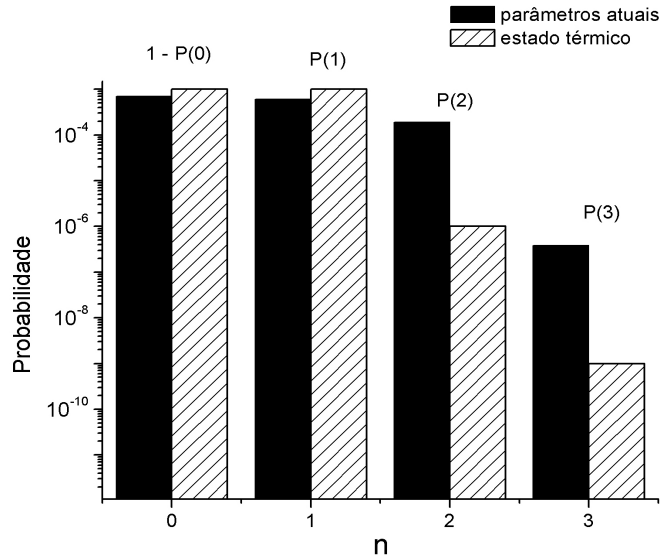


FIGURA 3.8: Comparação da estatística dos fótons criados através da decoerência para o estado inicial $|g, 0\rangle$ e parâmetros atuais da EDQ em circuitos: $g/\omega = 2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta = 0$, $(\gamma_{ph}, \gamma, \kappa) = (2, 3, 0.4) \cdot 10^{-4}$ com $n_t = 0$ (sólido), com a estatística do campo térmico com o mesmo número médio de fótons $n_{th} = 10^{-3}$ (espaçada). $P(n)$ denota a probabilidade do estado $|n\rangle$.

É interessante observar também que mesmo interagindo com reservatórios inicialmente a $T = 0K$, no limite assintótico o sistema irá se comportar como se estivesse sujeito a um reservatório “térmico” efetivo com $\tilde{n}_t > 0$, pois $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \hat{n}(\tau) \rangle > 0$. O número médio de fótons térmicos efetivo \tilde{n}_t cresce quando o reservatório de fase está presente (veja a fig.3.7a: curvas 3, 4 e 5) e decresce quando os reservatórios térmicos dissipativos do campo e do átomo são predominantes. Entretanto, na fig.3.8 comparou-se a estatística dos fótons criados (assintoticamente) através da decoerência para o estado inicial $|g, 0\rangle$, temperatura nula ($n_t = 0$), e os parâmetros atuais da EDQ em circuitos: $g = 2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta = 0$ e $(\gamma_{ph}, \gamma, \kappa) = (2, 3, 0.4) \cdot 10^{-4}$, com uma distribuição térmica com o mesmo

número de fótons térmicos $n_t = 10^{-3}$ e, como previamente observado em [24], as estatísticas diferem uma da outra.

3.3 Considerações Finais

Embora não tenha sido apresentada uma dedução formal da equação mestra (3.2) usada neste capítulo, podemos assegurar a validade desta no regime de acoplamento fraco ($g \ll \omega, \omega_0$) baseado nos recentes experimentos em EDQ em circuitos [18, 62] onde os resultados experimentais mostram-se de acordo com esta descrição [22, 64]. Além disso, como discutido na seção 3.1.1, os resultados obtidos via a simulação numérica de uma frequência de transição atômica aleatória concordam qualitativamente com a descrição da equação mestra, mostrando que a descrição dada por esta deve estar correta.

Capítulo 4

Tratamento analítico

Neste capítulo é obtida uma expressão analítica aproximada para a taxa de criação de fótons quando há apenas a ação do reservatório de fase atômico. Para o caso geral (onde $\Gamma_{ph}, \gamma_{ph}, \gamma, \kappa \neq 0$) são obtidas expressões analíticas para o número médio de fótons e para a inversão atômica no regime estacionário. Nosso tratamento é válido quando o número médio de fótons é pequeno e a comparação com resultados numéricos exatos mostram uma boa concordância com as expressões analíticas obtidas.

O ponto de partida é a equação mestra (3.2), com a qual é possível obter as seguintes equações de movimento de Heisenberg para o número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$ e para a inversão atômica $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ usando a relação $\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O})$:

$$\frac{d\langle \hat{n} \rangle}{dt} = -\sqrt{2}g \langle \hat{p}\hat{\sigma}_x \rangle - \kappa \langle \hat{n} \rangle + \kappa n_t, \quad (4.1)$$

$$\frac{d\langle \hat{\sigma}_z \rangle}{dt} = 2\sqrt{2}g \langle \hat{x}\hat{\sigma}_y \rangle - \frac{\gamma}{2} [1 + (2n_t + 1) \langle \hat{\sigma}_z \rangle]. \quad (4.2)$$

As equações para as variáveis dinâmicas de segunda ordem são:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \hat{p}\hat{\sigma}_x \rangle}{dt} &= -\omega \langle \hat{x}\hat{\sigma}_x \rangle - \omega_0 \langle \hat{p}\hat{\sigma}_y \rangle - \chi \langle \hat{p}\hat{\sigma}_x \rangle - \sqrt{2}g, \\ \frac{d\langle \hat{x}\hat{\sigma}_x \rangle}{dt} &= \omega \langle \hat{p}\hat{\sigma}_x \rangle - \omega_0 \langle \hat{x}\hat{\sigma}_y \rangle - \chi \langle \hat{x}\hat{\sigma}_x \rangle, \\ \frac{d\langle \hat{p}\hat{\sigma}_y \rangle}{dt} &= -\omega \langle \hat{x}\hat{\sigma}_y \rangle + \omega_0 \langle \hat{p}\hat{\sigma}_x \rangle - \chi \langle \hat{p}\hat{\sigma}_y \rangle - \sqrt{2}g\alpha, \\ \frac{d\langle \hat{x}\hat{\sigma}_y \rangle}{dt} &= \omega \langle \hat{p}\hat{\sigma}_y \rangle + \omega_0 \langle \hat{x}\hat{\sigma}_x \rangle - \chi \langle \hat{x}\hat{\sigma}_y \rangle - \sqrt{2}g\zeta, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde

$$\chi \equiv \gamma_{ph} + \Gamma_{ph} + \frac{\kappa}{2} + \gamma \left(n_t + \frac{1}{2} \right). \quad (4.4)$$

O sistema de equações (4.3) não é fechado pois as variáveis dinâmicas $\zeta \equiv \langle 2\hat{x}^2\hat{\sigma}_z \rangle$ e $\alpha \equiv \langle (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\hat{\sigma}_z \rangle$ obedecem suas equações diferenciais correspondentes. Portanto, este sistema de equações acopladas não pode ser integrado exatamente, embora alguns métodos numéricos baseados numa semi-álgebra de Lie tenham sido propostos [26]. Novamente escolhemos por conveniência $\omega = 1$ e os demais parâmetros dados em termos de ω .

4.1 Reservatório de Fase Atômico

Nesta seção é deduzida a taxa de criação de fótons assintótica¹ $d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a$ na ausência do decaimento atômico ($\gamma = 0$), defasagem do campo na cavidade (Γ_{ph}) e da dissipação da cavidade ($\kappa = 0$), para o estado inicial $|g, 0\rangle$ e nos regimes de acoplamento fraco ($g \ll \omega, \omega_0$) e baixas temperaturas ($n_t \ll 1$).

Para tanto, note que, quando o número médio de fótons gerados através da decoerência for pequeno, $\langle \hat{n} \rangle \ll 1$, o estado $|g, 0\rangle$ terá a maior probabilidade de ocupação e portanto é possível assumir que $\zeta \simeq \langle g, 0 | 2\hat{x}^2\hat{\sigma}_z | g, 0 \rangle = -1$ e $\alpha \simeq \langle g, 0 | (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\hat{\sigma}_z | g, 0 \rangle = 0$ tornando o sistema de equações (4.3) solúvel exatamente. Neste caso o sistema (4.3) apresenta uma solução assintótica, pois cada uma das equações das variáveis dinâmicas segue o padrão

$$\frac{d\langle \hat{O} \rangle}{dt} = \dots - \chi \langle \hat{O} \rangle,$$

cuja solução é da forma $\langle \hat{O} \rangle = f(t)e^{-\chi t}$ (onde $f(t)$ é uma função das variáveis dinâmicas) que tende a zero para $t \gg 1$.

Para testar a validade desta hipótese, estudamos numericamente o comportamento assintótico dos valores de ζ_a e α_a em função dos parâmetros g , γ_{ph} e Δ_+ (com $\Delta_+ \equiv \omega + \omega_0$). Como pode ser observado na fig.4.1 os valores de ζ_a e α_a estão sempre próximos de -1 e 0 , respectivamente, como era esperado.

¹Quando $\langle \hat{n} \rangle$ passa a depender linearmente do tempo.

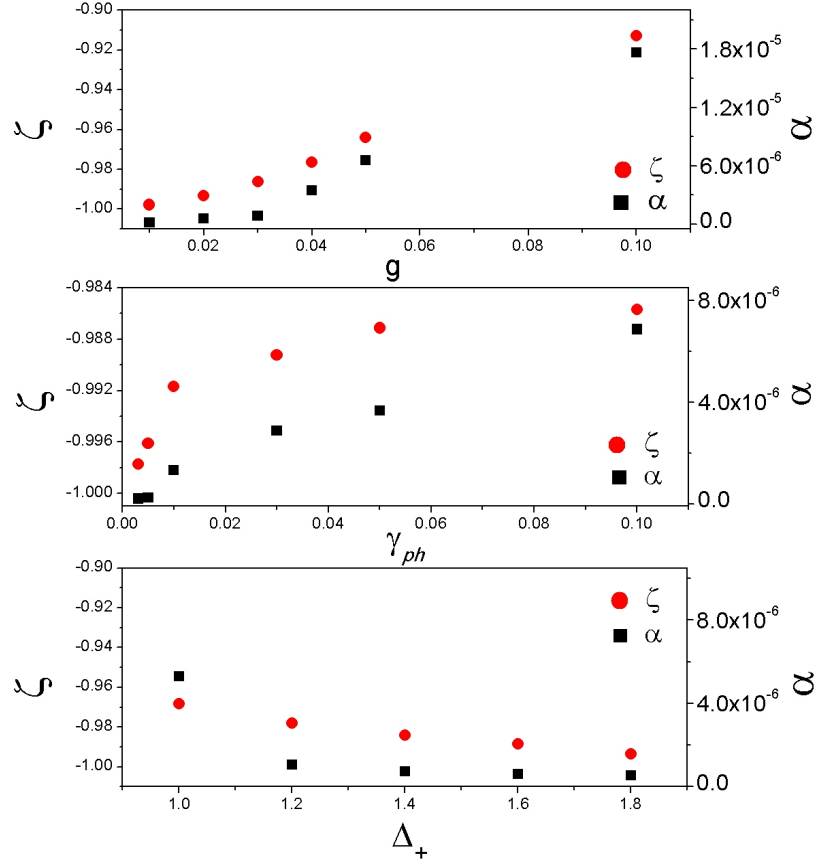


FIGURA 4.1: Valores assintóticos de ζ_a e α_a para $\Gamma_{ph} = \gamma = \kappa = 0$ em função de **a)** g para $\gamma_{ph} = 0.05$ e $\Delta_+ = 2$; **b)** γ_{ph} para $\Delta_+ = 2$ e $g = 0.02$; **c)** Δ_+ para $g = 0.02$ e $\gamma_{ph} = 0.05$.

Na condição de $\langle \hat{n} \rangle \ll 1$ os valores assintóticos das quantidades que aparecem nas eqs. (4.1) e (4.2) são:

$$\langle \hat{p}\hat{\sigma}_x \rangle_a = -\langle \hat{x}\hat{\sigma}_y \rangle_a \simeq -\sqrt{2} \frac{g\gamma_{ph}}{\Delta_+^2 + \gamma_{ph}^2}.$$

Substituindo $\langle \hat{p}\hat{\sigma}_x \rangle_a$ na equação (4.1) encontramos que a taxa de criação de fótons assintótica $d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a$ atinge o seguinte valor:

$$d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a \simeq 2\gamma_{ph} \frac{g^2}{\Delta_+^2 + \gamma_{ph}^2}. \quad (4.5)$$

Como em geral $\gamma_{ph} \ll \Delta_+$ tem-se que $d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a$ é proporcional a g^2 e γ_{ph} , e também inversamente proporcional a Δ_+^2 , como constatado numericamente no capítulo anterior. Na fig.4.2 comparamos os valores numéricos de $d\langle \hat{n} \rangle / dt|_a$

com aqueles obtidos através da eq.(4.5) em função dos parâmetros g , γ_{ph} e Δ_+ . Nota-se que a expressão analítica aproximada escala corretamente em relação aos parâmetros usados, mas difere ligeiramente dos valores numéricos. Isso ocorre devido ao fato dos parâmetros ζ_a e α_a diferirem um pouco de -1 e 0 , respectivamente, diferença essa que não é levada em conta nos cálculos analíticos. Entretanto, a fórmula (4.5) fornece a ordem de magnitude correta da taxa de criação de fótons através da decoerência.

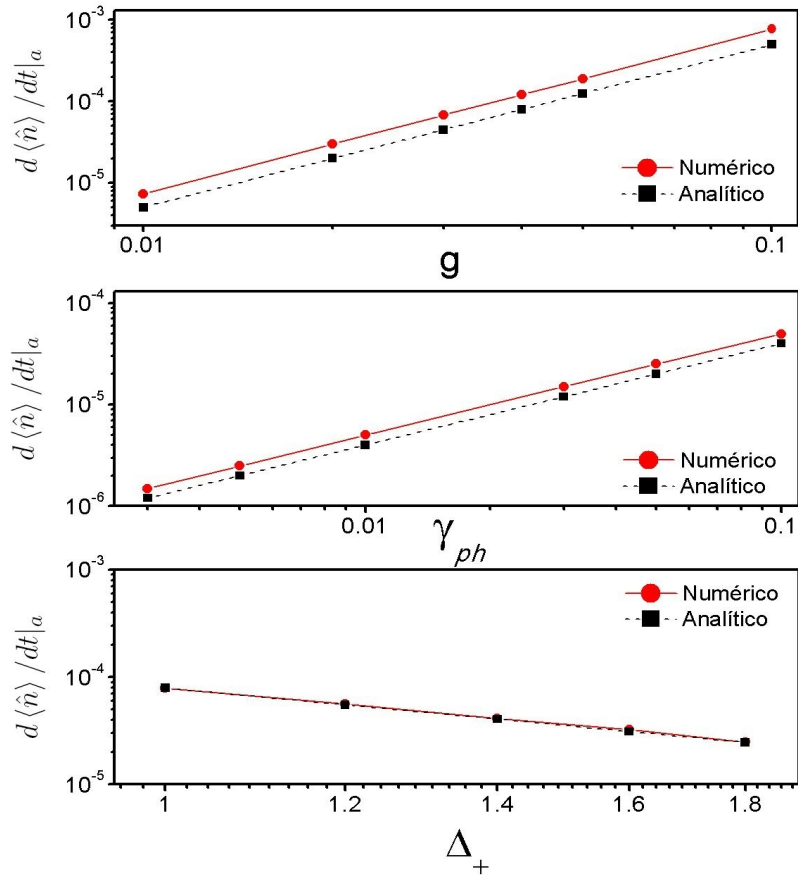


FIGURA 4.2: Comparação entre os valores numéricos de $d\langle\hat{n}\rangle/dt|_a$ (bolas) e a eq. (4.5) (quadrados) para $\Gamma_{ph} = \gamma = \kappa = 0$ em função de **a)** g para $\gamma_{ph} = 0.05$ e $\Delta_+ = 2$; **b)** γ_{ph} para $\Delta_+ = 2$ e $g = 0.02$; **c)** Δ_+ para $g = 0.02$ e $\gamma_{ph} = 0.05$.

4.2 Caso Dissipativo - Regime Estacionário

Aplicamos agora o mesmo procedimento da seção anterior para tratarmos o caso geral, quando o decaimento atômico, a defasagem do campo, e a dissipação da cavidade estão presentes ($\Gamma_{ph}, \gamma_{ph}, \gamma, \kappa \neq 0$). Neste caso os valores estacionários $\langle \hat{n} \rangle_\infty$ e $\langle \hat{\sigma}_z \rangle_\infty$ obtidos das eqs.(4.1) e (4.2) são:

$$\langle \hat{n} \rangle_\infty = -\frac{\sqrt{2}g}{\kappa} \langle \hat{p}\hat{\sigma}_x \rangle_\infty + n_t, \quad (4.6)$$

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle_\infty = -\frac{1}{2n_t + 1} + \frac{2\sqrt{2}g}{\gamma(n_t + 1/2)} \langle \hat{x}\hat{\sigma}_y \rangle_\infty. \quad (4.7)$$

No limite de $\langle \hat{n} \rangle \ll 1$, as quantidades $\langle \hat{p}\hat{\sigma}_x \rangle_\infty$ e $\langle \hat{x}\hat{\sigma}_y \rangle_\infty$ derivadas da solução do sistema de equações (4.3) são dadas por:

$$\langle \hat{p}\hat{\sigma}_x \rangle_\infty = -\langle \hat{x}\hat{\sigma}_y \rangle_\infty \simeq -\sqrt{2} \frac{g\chi}{\Delta_+^2 + \chi^2}.$$

Substituindo estes valores nas eqs.(4.6) e (4.7) obtemos as seguintes expressões para $\langle \hat{n} \rangle_\infty$ e $\langle \hat{\sigma}_z \rangle_\infty$:

$$\langle \hat{n} \rangle_\infty \simeq n_t + 2\Theta \frac{\chi}{\kappa}, \quad (4.8)$$

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle_\infty \simeq -\frac{1}{2n_t + 1} + 4\Theta \frac{\chi}{\gamma(n_t + 1/2)}, \quad (4.9)$$

onde

$$\Theta \equiv \frac{g^2}{\Delta_+^2 + \chi^2}. \quad (4.10)$$

Segundo a equação (4.9) se a temperatura for próxima de zero ($n_t \simeq 0$) e o acoplamento átomo-campo for fraco ($g \ll \omega, \omega_0$) a inversão atômica $\langle \hat{\sigma}_z \rangle_\infty$ é próxima de -1. Este resultado era esperado, pois nestas condições o efeito dos termos contra-girantes é pequeno e assim o átomo terá uma maior probabilidade de permanecer no estado fundamental.

Podemos ainda obter limitantes inferiores para $\langle \hat{n} \rangle_\infty$ e $\langle \hat{\sigma}_z \rangle_\infty$. Os valores mínimos de $\langle \hat{n} \rangle_\infty$ e $\langle \hat{\sigma}_z \rangle_\infty$ ocorrem na condição em que a matriz densidade do sistema seja a mais próxima possível de $|g, 0\rangle \langle g, 0|$. Portanto, das eqs.(4.8) e (4.9) e tomando o menor valor de χ [eq.(4.4)] deduzimos as expressões $\langle \hat{n} \rangle_\infty \geq n_t + \Theta$ e $\langle \hat{\sigma}_z \rangle_\infty \geq -(2n_t + 1)^{-1} + 4\Theta$ resultando nas seguintes desigualdades para os

valores estacionários:

$$\Theta \leq \langle \hat{n} \rangle_\infty - n_t \lesssim 2\Theta \frac{\chi}{\kappa} \quad (4.11)$$

$$4\Theta \leq \langle \hat{\sigma}_z \rangle_\infty + \frac{1}{2n_t + 1} \lesssim 4\Theta \frac{\chi}{\gamma(n_t + 1/2)}. \quad (4.12)$$

A equação (4.11) mostra que a combinação dos contra-girantes com os efeitos dissipativos cria pelo menos $\Theta \simeq (g/\Delta_+)^2$ fótons acima do número médio de fótons térmicos n_t . Nas tabelas (4.1) e (4.2) comparamos as quantidades $N \equiv \langle \hat{n} \rangle_\infty - n_t$ e $S \equiv \langle \hat{\sigma}_z \rangle_\infty + (2n_t + 1)^{-1}$ obtidas via cálculo numérico com os limitantes inferiores ($N_<, S_<$) e superiores ($N_>, S_>$) obtidos das eqs.(4.11) e (4.12), mostrando que os limitantes inferiores são sempre satisfeitos. Os limitantes superiores são satisfeitos em quase todos os casos², concordando em ordem de magnitude com todas as simulações realizadas.

Finalizamos este capítulo notando que a expressão (4.11) pode vir a explicar parcialmente porque o número médio de fótons observados em [39] $n_t = 0.06$ é um pouco maior que o número de fótons térmicos esperado $n_t = 0.05$ - neste caso o erro de fase introduzido no estado do campo na cavidade pela medida de *back-action* pode ser significativo, e assim seria esperada uma criação de fótons devido à decoerência.

²Os desvios associados aos casos onde os limitantes não são satisfeitos estão associados com a divergência das quantidades ζ e α dos valores -1 e 0 , respectivamente.

$10^3\gamma_{ph}$	$10^3\gamma$	$10^3\kappa$	10^4N	$10^4N_>$	10^4S	$10^4S_>$
20	10	1	15.2	50.0	21.0	21.0
20	10	3	19.7	18.0	28.7	30.0
20	10	5	9.69	10.9	12.3	22.0
20	10	10	6.50	6.00	40.0	37.0
2	10	10	2.51	2.40	8.90	10.0
3	10	10	3.51	3.20	6.00	13.0
10	10	10	4.51	4.00	7.00	24.0
20	3	10	5.78	5.30	48.0	70.0
20	5	10	5.93	5.50	78.0	76.0

TABELA 4.1: Valores numéricos N e S e os limitantes superiores ($N_>$, $S_>$) dados pelas desigualdades (4.11) e (4.12) para diferentes valores de γ_{ph} , γ e κ para $g = 2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta = 0$ e $\Gamma_{ph} = 0$. Os limitantes inferiores são $N_< = 10^{-4}$ e $S_< = 4 \cdot 10^{-4}$, pois para os parâmetros usados $\Theta \simeq (g/\Delta_+)^2$.

$10^3 g$	Δ_+	$10^4 N$	$10^4 N_>$ $10^4 N_<$	$10^4 S$	$10^4 S_>$ $10^4 S_<$
8	2.0	0.39	0.38	1.00	1.54
			0.16		0.64
10	2.0	0.62	0.60	1.20	2.40
			0.25		1.00
50	2.0	15.7	15.0	29.0	60.0
			6.25		25.0
20	1.6	3.75	3.75	7.50	15.0
			1.56		6.25
20	1.4	4.85	4.90	9.80	19.6
			2.04		8.16
20	1.0	9.58	9.60	20.0	38.4
			4.00		16.0
20	0.8	14.7	15.0	30.0	60.0
			6.25		25.0

TABELA 4.2: Valores Numéricos N e S , e limitantes inferiores ($N_<, S_<$) e superiores ($N_>, S_>$) dados pelas desigualdades (4.11) e (4.12) para diferentes valores de g e Δ_+ para $n_t = 0$ e $(\Gamma_{ph}, \gamma_{ph}, \gamma, \kappa) = (0, 0.1, 1, 1) \cdot 10^{-2}$.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho estudamos numericamente e analiticamente a dinâmica do hamiltoniano de Rabi sujeita aos reservatórios de fase e decaimento, introduzidos na equação mestra através dos operadores de Lindblad usuais. Mostrou-se que a defasagem atômica combinada com os termos contra-girantes proporciona uma criação de fótons a partir do vácuo. A interpretação física para o fenômeno foi dada por duas abordagens distintas: 1) uma abordagem via trajetórias quânticas e 2) um modelo microscópico da defasagem baseado nas flutuações estocásticas da frequência de transição atômica. Mostrou-se também que na presença de fontes dissipativas a criação de fótons através da decoerência é suprimida, sendo fornecida uma estimativa da magnitude do fenômeno em situações realistas.

Foi obtida uma expressão analítica aproximada para a taxa de criação de fótons quando o sistema está sujeito apenas a defasagem atômica. Também foram deduzidas desigualdades que fornecem limitantes inferiores e superiores para os valores assintóticos do número médio de fótons e da inversão atômica, no caso em que os efeitos dissipativos estão presentes. Nossos resultados analíticos são válidos somente quando o número médio de fótons é pequeno e o acoplamento átomo-campo é fraco. Entretanto, nos sistemas atuais da EDQ em cavidades e circuitos estas condições são geralmente satisfeitas. Finalmente, nosso estudo mostrou a importância dos termos contra-girantes no contexto de sistemas quânticos abertos, estimando a sua influência sobre as quantidades experimentalmente observáveis.

Referências Bibliográficas

- [1] RABI, I. I. “*On the Process of Space Quantization*”. Physical Review, **49**, p. 324-328, 1936.
- [2] EMARY, C. “*Coupled Cluster Techniques and the Rabi Hamiltonian*”. International Journal of Modern Physics B, **17**, p. 5477-5481, 2003.
- [3] BISHOP, R. F.; EMARY, C. “*Time Evolution of the Rabi Hamiltonian from the Unexcited Vacuum*”. Journal of Physics A: Mathematical and General, **34**, p. 5635-5651 ,2001.
- [4] BISHOP, R. F.; DAVIDSON, N. J.; QUICK, R. M.; VAN DER WALT, D. M. “*Variational results for the Rabi Hamiltonian*”. Physics Letters A, **254**, p. 215-224, 1999.
- [5] FESSATIDIS, V.; MANCINI, J. D.; BOWEN, S. P. “*Moments Expansion study of the Rabi Hamiltonian*” .Physics Letters A, **297**, p. 100-104 ,2002.
- [6] PEREVERZEV, A.; BITTNER, E. R. “*Exactly Solvable Approximating Models for Rabi Hamiltonian dynamics*”. Physical Chemistry Chemical Physics, **8**, p. 1378-1384, 2006.
- [7] DEBERGH, N.; KLIMOV, A. B. “*Quasi-Exavctly Solvable Approach to the Jaynes-Cummings Model without Rotation Wave Approximation*”. International Journal of Modern Physics A, **16**, p. 4057-4068, 2001.
- [8] IRISH, E. K. “*Generalized Rotating-Wave Approximation for Arbitrarily Large Coupling*”. Physical Review Letters, **99**, p. 173601 ,2007.
- [9] JAYNES, E. T.; CUMMINGS, F. W. “*Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*”. Proceedings of the IEEE, **51**, p. 89-109 ,1963.
- [10] SHORE, B. W.; KNIGHT, P. L. “*The Jaynes-Cummings Model*”. Journal of Modern Optics, **40**, p. 1195-1238, 1993.
- [11] REMPE, G.; WALTHER, H.; KLEIN, N. “*Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser*”. Physical Review Letters, **58**, p. 353-356, 1987.

- [12] BRUNE, M.; HAROCHE, S.; RAIMOND, J. M.; DAVIDOVICH, L.; ZAGURY, N. “*Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of Schrödinger cat states*”. *Physical Review A*, **45**, p. 5193-5214, 1992.
- [13] BOSE, S.; FUENTES-GURIDI, I.; KNIGHT, P. L.; VEDRAL, V. “*Subsystem Purity as an Enforcer of Entanglement*”. *Physical Review Letters*, **87**, p. 050401, 2001.
- [14] CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. “*Quantum Computations with Cold Trapped Ions*”. *Physical Review Letters*, **74**, p. 4091-4094, 1995.
- [15] PELLIZZARI, T.; GARDINER, S. A.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. “*Decoherence, Continuous Observation, and Quantum Computing: A Cavity QED Model*”. *Physical Review Letters*, **75**, p. 3788-3791, 1995.
- [16] BARRETT, M. D.; CHIAVERINI, J.; SCHAEZT, T.; BRITTON, J.; ITANO, W. M.; JOST, J. D.; KNILL, E.; LANGER, C.; LEIBFRIED, D.; OZERI, R.; WINELAND, D. J. “*Deterministic quantum teleportation of atomic qubits*”. *Nature*, **429**, p. 737-739, 2004.
- [17] NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [18] CHIORESCUM I.; BERTET, P.; SEMBA, K.; NAKAMURA, Y.; HARMANS, C. J. P. M.; MOOJI, J. E. “*Coherent dynamics of a flux qubit coupled to a harmonic oscillator*”. *Nature*, **431**, p. 159-162, 2004.
- [19] WALLRAFF, A.; SCHUSTER, D. I.; BLAIS, A.; FRUNZIO, L.; HUANG, R.-S.; MAJER, J.; KUMAR, S.; GIRVIN, S. M.; SCHOELFKOPF, R. J. “*Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics*”. *Nature*, **431**, p. 162-167, 2004.
- [20] JOHANSSON, J.; SAITO, S.; MENO, T.; NAKANO, H.; UEDA, M.; SEMBA, K.; TAKAYANAGI, H. “*Vacuum Rabi Oscillations in a Macroscopic Superconducting Qubit LC Oscillator System*”. *Physical Review Letters*, **96**, p. 127006, 2006.
- [21] ZAGOSKIN, A.; BLAIS, A. “*Superconducting Qubits*”. *Physics in Canada*, **63**, p. 215-227, 2007.
- [22] REITHMAIER, J. P.; SEK, G.; LOFFLER, A.; HOFMANN, C.; KUHN, S.; REITZENSTEIN, S.; KELDYSH, L. V.; KULAKOVSKII, V. D.; REINECKE, T. L.; FORCHEL, A. “*Strong coupling in a single quantum dot semiconductor microcavity system*”. *Nature*, **432**, p. 197-200, 2004.
- [23] YOSHIE, T.; SCHERER, A.; HENDRICKSON, J.; KHITROVA, G.; GIBBS, H. M.; RUPPER, G.; ELL, C.; SHCHEKIN, O. B.; DEPPE D. G. “*Vacuum Rabi splitting with a single quantum dot in a photonic crystal nanocavity*”, *Nature*, **432**, p. 200-203, 2004.

- [24] KLIMOV, A. B.; ROMERO, J. L.; SAAVEDRA, C. “*General properties of quantum systems interacting with a field mode in a low- Q cavity*”. Physical Review A, **64**, p. 063802, 2001.
- [25] LARSON, J. “*Dynamics of the Jaynes Cummings and Rabi models old wine in new bottles*”. Physica Scripta, **76**, p. 146-160, 2007.
- [26] BERLIN, G.; ALIAGA, J. “*Validity of the rotating wave approximation in the driven Jaynes Cummings model*”. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, **6**, p. 231-237, 2004.
- [27] BONCI, L.; RONCAGLIA, R.; WEST, B. J.; GRIGOLINI, P. “*Quantum irreversibility and chaos*”. Physical Review Letters, **67**, p. 2593-2596, 1991.
- [28] C. Emary and T. Brandes “*Quantum Chaos Triggered by Precursors of a Quantum Phase Transition: The Dicke Model*”. Physical Review Letters, **90**, p. 044101, 2003.
- [29] FURUYA, K.; NEMES, M. C.; PELLEGRINO, G. Q. “*Quantum Dynamical Manifestation of Chaotic Behavior in the Process of Entanglement*”. Physical Review Letters, **80**, p. 5524-5527, 1998.
- [30] SAITO, K.; WUBS, M.; KOHLER, S.; HANGGI, P.; KAYANUMA, Y. “*Quantum state preparation in circuit QED via Landau-Zener tunneling*”. Europhysics Letters, **76**, p. 22-28, 2006.
- [31] SAITO, K.; WUBS, M.; KOHLER, S.; HANGGI, P.; KAYANUMA, Y. “*Dissipative Landau-Zener transitions of a qubit: Bath-specific and universal behavior*”. Physical Review B, **75**, p. 214308, 2007.
- [32] WUBS, M.; KOHLER, S.; HANGGI, P.; “*Entanglement creation in circuit QED via Landau Zener sweeps*”. Physica E: Low dimensional Systems and Nanostructures, **40**, p. 187-197, 2007.
- [33] CIUTI, C.; CARUSOTTO, I. “*On the ultrastrong vacuum Rabi coupling of an intersubband transition in a semiconductor microcavity*”. Journal of Applied Physics, **101**, 081709, 2007.
- [34] DE LIBERATO S.; CIUTI, C.; CARUSOTTO, I. “*Quantum Vacuum Radiation Spectra from a Semiconductor Microcavity with a Time-Modulated Vacuum Rabi Frequency*”. Physical Review Letters, **98**, p. 103602, 2007.
- [35] CIUTI, C.; BASTARD, G.; CARUSOTTO, I. “*Quantum vacuum properties of the intersubband cavity polariton field*”. Physical Review B, **72**, p. 115303, 2005.
- [36] DODONOV, A. V.; CELERI, L. C.; PASCOAL, F.; LUKIN, M. D.; YELIN, S. F. “*Photon generation from vacuum in non-stationary circuit QED*”. preprint at arXiv: 0806.4035.
- [37] BLAIS, A.; GAMBETTA, J.; WALLRAFF, A.; SCHUSTER, D. I.; GIRVIN, S. M.; DEVORET, M. H.; SCHOELFKOPF, R. J. “*Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics*”. Physical Review A, **75**, p. 032329, 2007.

- [38] BRUNE, M.; HAROCHE, S.; RAIMOND, J. M. “*Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of Schrödinger cat*”. Physical Review A, **45**, p. 5193-5214, 1992.
- [39] BRUNE, M.; BERNU, J.; GUERLIN C.; DELEGLISE, S.; SAYRIN C.; GLEYZES, S.; KUHR, S.; DOTSENKI, S.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. “*Process Tomography of Field Damping and Measurement of Fock State Lifetimes by Quantum Nondemolition Photon Counting in a Cavity*”. Physical Review Letters, **101**, p. 240402, 2008.
- [40] BRIEGEL, H.-J.; ENGLERT, B.-G. “*Quantum optical master equations: The use of damping bases*”. Physical Review A, **47**, p. 3311-3329, 1993.
- [41] AUFFÈVES, A.; GERARD, J.-M.; POIZAT, J.-P. “*Pure emitter dephasing : a resource for advanced solid-state single photon sources*”. Preprint at arXiv:0808.0820.
- [42] NAESBY, A.; SUHR, T.; KRISTENSEN, P. T.; MOERK, J. “*Influence of Pure Dephasing on Emission Spectra from Single Photon Sources*”. Physical Review A, **78**, p. 045802, 2008.
- [43] LOUDON, R. “*The Quantum Theory of Light*”. 3ed. USA: Oxford University Press, 1973. 448p.
- [44] MEYER, G. M.; SCULLY, M. O.; WALTHER, H. “*Quantum theory of the mazer. I. General theory*”. Physical Review A, **56**, p. 4142, 1997.
- [45] JACKSON, J.D. “*Classical Electrodynamics*”. 3ed. New York: John Wiley and Sons, 1975. 808p.
- [46] COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. “*Quantum Mechanics*”. New York: John Wiley, 1977. 1524p.
- [47] SCULLY, M.O.; ZUBAIRY, M.S. “*Quantum Optics*”. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 630p.
- [48] GERRY, C.; KNIGHT, P. “*Introductory Quantum Optics*”. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 317p.
- [49] VEDRAL, V. “*Modern Foundations of Quantum Optics*”. London: Imperial College Press, 2005. 222p.
- [50] MOURA, A.P.S.; FURUYA, K. “*feito dos termos contra-girantes no modelo de Jaynes-Cummings*”. Dissertação apresentada ao instituto de Física Gleb Wataghin, 1997.
- [51] WALTHER, H.; VARCOE, B.T.H.; ENGLERT, B.G.; BECKER, T. “*Cavity quantum electrodynamics*”. Report on Progress in Physics, 69, p. 1325-1382, 2006.
- [52] LOUISELL, W.H. “*Quantum Statistical Properties of Radiation*”. New York: John Wiley and Sons, 1973. 544p.

- [53] CARMICHAEL, H. “*An Open Systems Approach to Quantum Optics*”. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1993. 189p.
- [54] BLUM, K. “*Density Matrix Theory and Applications*”. New York: Plenum Press, 1981. 323p
- [55] GOTO, H.; ICHIMURA, K. “*Quantum trajectory simulation of controlled phase-flip gates using the vacuum Rabi splitting*”. *Physical Review A*, **72**, p. 054301, 2005.
- [56] LONDON, F. “*Über die Jacobischen Transformationen der Quantenmechanik*”. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, **37**, p. 915-925, 1926.
- [57] SUSSKIND, L.; GLOGOWER, J. “*Quantum Mechanical Phase and Time Operator*”. *Physics*, **1**, p. 49-61, 1964.
- [58] NAGOURNEY, W.; SANDBERGE, J.; DEHMELT, H. “*Shelved optical electron amplifier: Observation of quantum jumps*”. *Physical Review Letters*, **56**, p. 2797-2799, 1986.
- [59] GISIN, N. “*Time Correlations and Heisenberg Picture in the Quantum State Diffusion Model of Open Systems*”. *Journal of Modern Optics*, **40**, 2313-2319, 1993.
- [60] MAKHLIN, Y.; SCHON, G.; SHNIRMAN, A. “*Quantum-state engineering with Josephson-junction devices*”. *Review Modern Physics*, **73**, p. 357-400, 2001.
- [61] DODONOV, V. V. “*Modern Nonlinear Optics*”. 2ed. New York: John Wiley and Sons, 2001. 727p.
- [62] SCHUSTER, HOUCK, A. A.; SCHREIER, J. A.; WALLRAFF, A.; GAMBETTA, J.; BLAIS, A.; FRUNZIO, L.; MAJER, J.; JOHNSON, B.; DEVORET, M. H.; GIRVIN, S. M.; SCHOELFKOPF, R. J. “*Resolving photon number states in a superconducting circuit*”. *Nature*, **445**, p. 515-518, 2007.
- [63] ALIFERIS, P.; BRITO, F.; DIVICENZO, D. P.; PRESKILL, J.; STEFFEN, M.; TERHAL, B. M. “*Fault-tolerant computing with biased-noise superconducting qubits: a case study*”. *New Journal of Physics*, **11**, p. 013061, 2009.
- [64] BOISSONNEAULT, M.; GAMBETTA, J. M.; BLAIS, A. “*Nonlinear dispersive regime of cavity QED: The dressed dephasing model*”. *Physical Review A*, **77**, p. 060305, 2008.

Apêndice A

Quantização do campo eletromagnético numa cavidade perfeitamente condutora

Na óptica quântica, cavidade significa um “ressonador” para a radiação eletromagnética. Um ressonador é um aparelho que é ressonante somente com certas frequências, onde os padrões espaciais de vibração destas frequências chamam-se *modos* do ressonador.

Neste apêndice tem-se como objetivo apresentar a quantização do campo eletromagnético restrito a uma cavidade condutora ideal e posteriormente a descrição da interação deste campo com um átomo. A hipótese das paredes da cavidade serem perfeitamente condutoras implica em graus de liberdade discretos do campo, em vez de contínuos, representando uma simplificação considerável do procedimento de quantização. Assume-se também que o átomo é neutro e se move sempre com velocidades não-relativísticas em relação à cavidade, mas com velocidades altas o suficiente para que os efeitos quânticos do movimento sejam desprezados¹ [44]. Também é empregado neste tratamento uma importante aproximação, a *aproximação dipolar*, onde o tamanho do átomo é pequeno o suficiente em relação ao comprimento de onda de forma tal que o átomo é pontual do ponto de vista do campo, podendo ser tratado como um dipolo elétrico.

¹Os experimentos típicos utilizam átomos com velocidades de aproximadamente 400 m/s.

Inicialmente, faremos a quantização do campo eletromagnético na cavidade na ausência de cargas e correntes, através do método desenvolvido em [43], para posteriormente introduzir a interação entre átomo e campo.

A.1 Potenciais para o Campo Eletromagnético Clássico

O ponto de partida para fazermos a quantização do campo eletromagnético é as equações de Maxwell da eletrodinâmica clássica [45] que, num meio não-magnético, são dadas por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (\text{A.4})$$

onde ϵ_0 e μ_0 são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo. ρ e \vec{J} são, respectivamente, densidade de carga e densidade de corrente.

Em termos do potencial vetorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e do potencial escalar $\phi(\vec{r}, t)$, definidos por:

$$\mu_0 \vec{H} = \nabla \times \vec{A}, \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad (\text{A.6})$$

podemos reescrever as equações acima. Substituindo as eqs. (A.5) e (A.6) nas eqs. (A.3) e (A.4) são obtidas as seguintes equações de movimento para os potenciais:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi = \mu_0 \vec{J}, \quad (\text{A.7})$$

$$-\epsilon_0 \nabla^2 \phi - \epsilon_0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = \rho. \quad (\text{A.8})$$

Como os campos \vec{H} e \vec{E} são invariantes em relação às chamadas *trans-*

formações de calibre, dadas por:

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \nabla f; \quad (\text{A.9})$$

$$\phi \longrightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}; \quad (\text{A.10})$$

onde f é uma função arbitrária das coordenadas e do tempo, as eqs. (A.7) e (A.8) não determinam de forma única os potenciais \vec{A} e ϕ . Agora, como f é arbitrária, ela é escolhida de forma a satisfazer

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0; \quad (\text{A.11})$$

escolha esta denominada *calibre de Coulomb*. Além desta condição, para simplificar as eqs. (A.7) e (A.8) faz-se uso do Teorema de Helmholtz [46]. Este teorema afirma que todo vetor pode ser decomposto em duas partes, uma com divergente nulo (componente transversal) e outra com rotacional nulo (componente longitudinal). Assim, para o vetor densidade de corrente temos:

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_T; \quad (\text{A.12})$$

onde $\nabla \cdot \vec{J}_T = 0$ e $\nabla \times \vec{J}_L = 0$. Usando a equação de continuidade

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0;$$

e a eq. (A.8) a componente longitudinal da densidade de corrente é obtida:

$$\vec{J}_L = \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Assim, no calibre de coulomb, as eqs. (A.7) e (A.8) tornam-se:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J}_T; \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (\text{A.14})$$

A.2 Campo Livre

Considere o campo eletromagnético numa região cúbica de lado L sujeito a alguma condição de contorno real. Na ausência de densidade de carga e densidade de corrente, condição de espaço livre, temos:

$$\vec{J}_T = 0.$$

Assim, nesta região o potencial vetorial \vec{A} pode ser expandido numa série de Fourier:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \left\{ \vec{A}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{A}_k^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\}; \quad (\text{A.15})$$

onde as componentes do vetor \vec{k} , devido às condições de contorno na cavidade (assume-se que as paredes possuem uma condutância infinita), possuem os seguintes valores:

$$k_j = \frac{2\pi n_j}{L}, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = x, y, z. \quad (\text{A.16})$$

Para satisfazer o calibre de Coulomb,

$$\vec{k} \cdot \vec{A}_k = \vec{k} \cdot \vec{A}_k^* = 0.$$

Portanto, usando as eqs. (A.15) e (A.13) (com $\vec{J}_T = 0$) obtém-se que todas as componentes de \vec{A} seguem a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}_k(t)}{\partial t^2} + \omega_k^2 \vec{A}_k(t) = 0, \quad (\text{A.17})$$

onde $\omega_k^2 = ck$. Observe que tal equação também é válida para \vec{A}_k^* . A solução desta equação é bem conhecida:

$$\vec{A}_k(t) = \vec{A}_k(0) e^{-i\omega_k t},$$

substituindo-a na eq. (A.15) o potencial vetorial assume a seguinte forma:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \left\{ \vec{A}_k(0) e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{A}_k^*(0) e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\}. \quad (\text{A.18})$$

Os campos elétrico e magnético associados a cada modo k são obtidos através das eqs. (A.5) e (A.6), observando que na ausência de cargas livres e campos de origem externa podemos sempre escolher $\phi = 0$ como solução da equação (A.14). Portanto,

$$\vec{E}_k(\vec{r}, t) = i\omega_k \left\{ \vec{A}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{A}_k^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\}, \quad (\text{A.19})$$

$$\vec{H}_k(\vec{r}, t) = \frac{i}{\mu_0} \vec{k} \times \left\{ \vec{A}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{A}_k^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\}. \quad (\text{A.20})$$

A energia média contida no k -ésimo modo é dada por:

$$\bar{U}_k = \frac{1}{2} \int_{\text{cavidade}} \left(\epsilon_0 \overline{E_k^2} + \mu_0 \overline{H_k^2} \right) dV, \quad (\text{A.21})$$

onde a “barra” denota uma média temporal.

As amplitudes \vec{E}_k e \vec{H}_k estão relacionadas da seguinte forma:

$$E_k = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_k.$$

Substituindo as eqs. (A.39) e (A.20) em (A.21) e calculando as médias temporais a seguinte expressão é obtida:

$$\bar{U}_k = 2\epsilon_0 L^3 \omega_k^2 \vec{A}_k \cdot \vec{A}_k^*. \quad (\text{A.22})$$

Esta expressão para a energia média pode ser reescrita em termos de uma coordenada generalizada q_k e seu momento conjugado p_k usando as seguintes transformações:

$$\vec{A}_k(t) = (4\epsilon_0 L^3 \omega_k^2)^{-1/2} (\omega_k q_k(t) + i p_k(t)) \vec{\epsilon}_k, \quad (\text{A.23})$$

$$\vec{A}_k^*(t) = (4\epsilon_0 L^3 \omega_k^2)^{-1/2} (\omega_k q_k(t) - i p_k(t)) \vec{\epsilon}_k, \quad (\text{A.24})$$

onde $\vec{\epsilon}_k$ é um vetor unitário e tanto $q_k(t)$ como $p_k(t)$ são grandezas escalares.

Usando estas transformações a energia média contida no k -ésimo modo assume a seguinte forma:

$$\bar{U}_k = \frac{1}{2} (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2). \quad (\text{A.25})$$

Observe que esta expressão para a energia média é a mesma daquela obtida para um oscilador harmônico de massa unitária.

A quantização do campo eletromagnético é obtida mediante à associação de um oscilador harmônico quântico com cada modo modo k do campo de radiação. Formalmente, substitui-se as quantidades vetoriais $\vec{A}_k(t)$ e $\vec{A}_k^*(t)$ por operadores. Para tanto, substituímos os escalares $q_k(t)$ e $p_k(t)$ por operadores $\hat{q}_k(t)$ e $\hat{p}_k(t)$ obedecendo a seguinte relação de comutação:

$$[\hat{q}_k(t), \hat{p}_k(t)] = i\hbar.$$

Agora, no âmbito da *segunda quantização*, os operadores $\hat{q}_k(t)$ e $\hat{p}_k(t)$ são levados, por meio de uma transformação apropriada, aos operadores de destruição $\hat{a}_k(t)$ e criação $\hat{a}_k^\dagger(t)$, respectivamente. A transformação mencionada é:

$$\hat{a}_k(t) = (2\hbar\omega_k)^{-1/2} (\omega_k \hat{q}_k(t) + i\hat{p}_k(t)), \quad (\text{A.26})$$

$$\hat{a}_k^\dagger(t) = (2\hbar\omega_k)^{-1/2} (\omega_k \hat{q}_k(t) - i\hat{p}_k(t)). \quad (\text{A.27})$$

Fazendo uso desta transformação as quantidades vetoriais \vec{A}_k e \vec{A}_k^* são associadas aos seguintes operadores:

$$\vec{A}_k(t) \longrightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3 \omega_k}} \hat{a}_k(t), \quad (\text{A.28})$$

$$\vec{A}_k^*(t) \longrightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3 \omega_k}} \hat{a}_k^\dagger(t). \quad (\text{A.29})$$

Nestas condições o potencial vetorial (eq. (A.18)) passa a ser representado como segue:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \hat{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3 \omega_k}} \left\{ \hat{a}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \hat{a}_k^\dagger(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\} \vec{e}_k. \quad (\text{A.30})$$

Nesta descrição, \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger são operadores que aniquilam e criam um fóton de vetor de onda \vec{k} na cavidade. O número de fótons na cavidade, associado ao k -ésimo modo, é determinado pelo autovalor do operador $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$, chamado *operador de número*.

Além disso, a energia média (eq. (A.25)) em termos dos operadores de criação e aniquilação é:

$$\hat{U}_k = \hbar\omega_k \left(\hat{n}_k + \frac{1}{2} \right).$$

O hamiltoniano para o campo eletromagnético total é a soma sobre todos os modos da equação anterior,

$$\hat{H}_c = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{n}_k + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.31})$$

Algumas propriedades dos operadores \hat{a}_k , \hat{a}_k^\dagger e \hat{n}_k são apresentadas abaixo:

- 1) Os autovalores do operador número \hat{n}_k são sempre positivos.

2) Se $|n_k\rangle$ é um autoestado do operador número então:

$$\begin{aligned}\hat{a}_k |n_k\rangle &= n_k |n_k - 1\rangle, \\ \hat{a}_k^\dagger |n_k\rangle &= (n_k + 1) |n_k + 1\rangle.\end{aligned}$$

3) As seguintes relações de comutação são satisfeitas:

$$\begin{aligned}[\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] &= 1, \\ [\hat{n}_k, \hat{a}_k] &= -\hat{a}_k, \\ [\hat{n}_k, \hat{a}_k^\dagger] &= \hat{a}_k^\dagger.\end{aligned}$$

A.3 Hamiltoniano de Interação Átomo-Campo

Até o momento tratou-se do campo eletromagnético livre no interior de uma cavidade, no entanto, tem-se interesse na interação deste campo com um átomo. Neste intuito, uma forma de proceder seria partir da Lagrangeana Clássica e desta derivar a hamiltoniana do sistema para então aplicar o procedimento de quantização de Dirac. Porém, seguiremos outro caminho, através da introdução de uma interação *ad hoc* que torna o procedimento mais simples e proporciona interpretações físicas mais diretas.

No caso de termos um átomo no interior da cavidade, espera-se que o hamiltoniano total seja da forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{H}_a + \hat{H}_I, \quad (\text{A.32})$$

onde \hat{H}_c é o hamiltoniano do campo na ausência do átomo (eq. (A.31)), \hat{H}_a o hamiltoniano do átomo na ausência do campo e \hat{H}_I o hamiltoniano que descreve a interação do átomo com o campo.

O hamiltoniano \hat{H}_a depende do átomo que será considerado, mas isso não será levado em conta neste momento, apenas que as autoenergias e autoestados deste hamiltoniano sejam conhecidos. As autoenergias e autoestados de \hat{H}_a são denotados, respectivamente, por E_i e $|\psi_i\rangle$, tais que:

$$\hat{H}_a |\psi_i\rangle = E_i |\psi_i\rangle. \quad (\text{A.33})$$

Como os auto estados de \hat{H}_a formam uma base completa,

$$\sum_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \mathbb{I},$$

pode-se reescrever \hat{H}_a da seguinte forma:

$$\hat{H}_a = \sum_i E_i \sigma_{ii}, \quad (\text{A.34})$$

onde os operadores σ_{ij} são definidos como:

$$\sigma_{ij} = |\psi_i\rangle \langle \psi_j|.$$

O próximo passo é determinar o hamiltoniano de interação \hat{H}_I . Como geralmente tem-se interesse em regimes onde o comprimento de onda do campo é da ordem de alguns milhares de angstroms (regime ótico) e o tamanho típico de um átomo é da ordem de poucos angstroms, pode-se desprezar a variação espacial dos campos ao longo da extensão do átomo. Esta condição é formalmente expressa por $\vec{k} \cdot \vec{r} \ll 1$, onde \vec{r} é o vetor posição do elétron, e conhecida como *aproximação de dipolo*. Nesta condição o átomo é pontual do ponto de vista dos campos e assim ele pode ser tratado como um dipolo elétrico.

Além disso, como as contribuições magnéticas são muito menores que aquelas provenientes do termo de interação do campo elétrico com o dipolo atômico [43] a influência do campo magnético pode ser desprezada. Portanto, o hamiltoniano de interação \hat{H}_I descreve a interação de um dipolo atômico \vec{d} com o campo elétrico \vec{E} .

No eletromagnetismo clássico a energia de interação de um dipolo elétrico com um campo elétrico é:

$$H_I = -\vec{d} \cdot \vec{E}, \quad (\text{A.35})$$

onde \vec{d} é o vetor momento de dipolo do átomo.

Para a quantização desta hamiltoniana é introduzido o operador momento de dipolo:

$$\hat{\mathbf{d}} = \sum_{ij} \sigma_{ij} \vec{d}_{ij}, \quad (\text{A.36})$$

onde

$$\vec{d}_{ij} = \langle \psi_i | \hat{\mathbf{d}} | \psi_i \rangle = \vec{d}_{ij}^*. \quad (\text{A.37})$$

O operador campo elétrico é obtido por meio da seguinte expressão:

$$\hat{E} = -\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}, \quad (\text{A.38})$$

onde o operador \hat{A} é dado pela eq. (A.30). Assim,

$$\hat{E} = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3 \omega_k}} \left\{ i\omega_k \hat{a}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - i\omega_k \hat{a}_k^\dagger(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\} \vec{\epsilon}_k. \quad (\text{A.39})$$

Usando as eqs. (A.36) e (A.39) o hamiltoniano de interação \hat{H}_I obtido a partir da hamiltoniano clássica (eq. A.35) é:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{E} \\ &= -i\hbar \sum_{ij} \sum_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2\epsilon_0 \hbar L^3}} \left\{ \hat{a}_k \sigma_{ij} \vec{d}_{ij} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \hat{a}_k^\dagger \sigma_{ij} \vec{d}_{ij} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\} \vec{\epsilon}_k \\ &= \hbar \sum_{i,j} \sum_k \left\{ g_{k,i,j} \hat{a}_k \sigma_{ij} + g_{k,i,j}^* \hat{a}_k^\dagger \sigma_{ij} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

onde $g_{k,i,j} = g_{k,i,j}(\vec{r})$ é a *constante de acoplamento* átomo-campo:

$$g_{k,i,j}(\vec{r}) = -i \sqrt{\frac{\omega_k}{2\epsilon_0 \hbar L^3}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{d}_{ij} \cdot \vec{\epsilon}_k, \quad (\text{A.41})$$

a qual depende da frequência ω_k do modo, do volume da cavidade, do momento de dipolo \vec{d}_{ij} e do vetor posição \vec{r} .

Apêndice B

Trajetórias Quânticas

A equação mestra nos dá a evolução de um *ensemble* (um conjunto de estados puros: uma mistura estatística) ao invés da evolução de um único estado puro. Porém, já é possível observar experimentalmente a evolução de um único elemento do ensemble em um meio dissipativo como, por exemplo, a observação experimental de saltos quânticos na fluorescência de um único íon de três níveis [58, 59]. Tal fato manifestou o interesse em uma equação com a qual fosse possível obter a evolução de um único vetor de estado no contexto de sistema abertos. Em 1992, I.C. Percival sugeriu que uma equação de Schrödinger estocástica (uma equação não-linear para o vetor de estado com um termo aleatório) poderia ser utilizadas para este fim [?]. Ao mesmo tempo, H. J. Carmichael, inspirado pela teoria de fotodeteção, propôs uma abordagem análoga, a qual denominou de “trajetórias quânticas” [53].

O método das trajetórias quânticas (TQ) é uma abordagem que permite descrever a dinâmica de um estado puro no caso de sistemas abertos. Esse tratamento via TQ é equivalente àquele proveniente da equação mestra no limite em que toma-se a média sobre muitas trajetórias, como será demonstrado abaixo. Além de se poder tratar a evolução de estados puros, o método das TQ proporciona uma fantástica técnica de simulação computacional para equações mestras. Isso ocorre pois vamos lidar o tempo todo com vetores de estado e não com operadores densidade e portanto, se o espaço de Hilbert do sistema tem dimensão N então teremos que obter a solução de um sistema de N equações e

não N^2 como no caso da equação mestra.

Supondo que a dinâmica do operador densidade do sistema $\hat{\rho}$ seja dada pela equação mestra:

$$\dot{\hat{\rho}} = i [\hat{H}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} (2\hat{A}\hat{\rho}\hat{A}^\dagger - \hat{\rho}\hat{A}^\dagger\hat{A} - \hat{A}^\dagger\hat{A}\hat{\rho}), \quad (\text{B.1})$$

onde \hat{H} é o hamiltoniano do sistema, \hat{A} um operador bosônico ou um operador fermiônico de dois níveis ($\hat{\sigma}_z$ ou $\hat{\sigma}_\pm$) e γ a taxa de decaimento associada ao processo. Podemos reescrever esta equação da seguinte forma:

$$\dot{\hat{\rho}} + i (\hat{H}_{eff}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}_{eff}) = \gamma\hat{A}\hat{\rho}\hat{A}^\dagger, \quad (\text{B.2})$$

onde é definido o operador não-hermitiano:

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H} - i\frac{\gamma}{2}\hat{A}^\dagger\hat{A}. \quad (\text{B.3})$$

A trajetória quântica é gerada da seguinte maneira: dado o estado inicial $|\psi(t)\rangle$, existem duas possibilidades. Primeira, o sistema evolui não-unitariamente segundo o hamiltoniano (B.3):

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = e^{-i\hat{H}_{eff}\delta t} |\psi(t)\rangle, \quad (\text{B.4})$$

ou sofre um “salto quântico” descrito como

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = \hat{A} |\psi(t)\rangle. \quad (\text{B.5})$$

Observe que estas operações são não-unitárias e portanto a norma do vetor é alterada em cada passo, sendo necessário normalizá-lo. Para decidir entre as duas possibilidades é gerado um número aleatório n_a entre 0 e 1 e este é comparado com a probabilidade de ocorrer um salto P . A probabilidade P de que ocorra ao menos um salto num dado intervalo de tempo é simplesmente quanto a norma do estado (B.4) diminui, ou seja

$$P = 1 - \langle \psi(t + \delta t) | \psi(t + \delta t) \rangle, \quad (\text{B.6})$$

sendo $|\psi(t + \delta t)\rangle$ dado por (B.4). Para δt pequeno a probabilidade P passa a ser dada por:

$$P = \gamma \langle \psi(t) | \hat{A}^\dagger \hat{A} | \psi(t) \rangle \delta t, \quad (\text{B.7})$$

onde é possível notar que a probabilidade diminui a medida que γ torna-se menor.

Assim, dado $|\psi(t)\rangle$ o estado evoluído $|\psi(t + \delta t)\rangle$ é obtido através do seguinte algoritmo:

1) Calcule a probabilidade P de que ocorra um *salto* segundo a eq. (B.7).

2) Gere um número aleatório n_a entre 0 e 1 e compare com P . Decida qual das duas possibilidades será usada como segue:

Se $n_a < P$ ocorre um *salto* e o sistema colapsa no estado normalizado:

$$|\psi\rangle \longrightarrow \frac{\hat{A}|\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle\psi(t)|\hat{A}^\dagger\hat{A}|\psi(t)\rangle}}.$$

Se $n_a \geq P$ então o sistema evolui segundo o hamiltoniano não-hermitiano (B.3). O estado normalizado é então:

$$|\psi\rangle \longrightarrow \frac{e^{-i\hat{H}_{eff}\delta t}|\psi(t)\rangle}{1 - P},$$

ou, para δt pequeno,

$$|\psi\rangle \longrightarrow \frac{(1 - i\hat{H}\delta t - (\gamma/2)\delta t\hat{A}^\dagger\hat{A})|\psi\rangle}{1 - P}. \quad (\text{B.8})$$

3) Repita estes passos até obter uma trajetória completa.

Como mencionado no início deste apêndice os resultados obtidos via trajetórias quânticas devem coincidir com aqueles obtidos através da equação mestra. Para verificar isso, apresento agora uma demonstração desse fato. A evolução do operador densidade $|\psi\rangle\langle\psi|$ num intervalo Δt é dada pela soma de duas possibilidades:

$$|\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow P|\psi_{salto}\rangle\langle\psi_{salto}| + (1 - P)|\psi_{sem-salto}\rangle\langle\psi_{sem-salto}|. \quad (\text{B.9})$$

Usando (B.7) e (B.8) teremos

$$\begin{aligned} |\psi\rangle\langle\psi| &\rightarrow \gamma\Delta t\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}^\dagger \\ &+ (1 - i\hat{H}\Delta t - (\gamma/2)\Delta t\hat{A}^\dagger\hat{A})|\psi\rangle\langle\psi|(1 + i\hat{H}\Delta t - (\gamma/2)\Delta t\hat{A}^\dagger\hat{A}), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

como consideramos Δt pequeno então

$$\begin{aligned} |\psi\rangle\langle\psi| &\rightarrow |\psi\rangle\langle\psi| - i\Delta t [\hat{H}, |\psi\rangle\langle\psi|] \\ &+ \frac{\gamma}{2}\Delta t \left(2\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}^\dagger - |\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}^\dagger\hat{A} - \hat{A}^\dagger\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi| \right), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

ou

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = i[\hat{H}, \rho] + \frac{\gamma}{2} \left(2\hat{A}\rho\hat{A}^\dagger - \rho\hat{A}^\dagger\hat{A} - \hat{A}^\dagger\hat{A}\rho \right), \quad (\text{B.12})$$

que torna-se a equação mestra no limite de $\Delta t \rightarrow 0$.