

Jonas Floriano Gomes dos Santos

*Ondas gravitacionais e o espectro de  
anisotropia tensorial na presença de  
neutrinos cosmológicos*

São Carlos – SP

Julho / 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

*Ondas gravitacionais e o espectro de  
anisotropia tensorial na presença de  
neutrinos cosmológicos*

Dissertação apresentada ao Departamento de  
Física da Universidade Federal de São Car-  
los para a obtenção do título de Mestre em  
Física.

**Jonas Floriano Gomes dos Santos**

Orientador:

Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini

São Carlos – SP

Julho / 2012

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

S237og

Santos, Jonas Floriano Gomes dos.  
Ondas gravitacionais e o espectro de anisotropia tensorial  
na presença de neutrinos cosmológicos / Jonas Floriano  
Gomes dos Santos. -- São Carlos : UFSCar, 2012.  
61 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São  
Carlos, 2012.

1. Física. 2. Cosmologia. 3. Ondas gravitacionais. 4.  
Neutrinos. I. Título.

CDD: 530 (20<sup>a</sup>)

**Jonas Floriano Gomes dos Santos**

Dissertação de Mestrado submetida à  
Coordenação do Programa de Pós-  
Graduação em Física, da Universidade  
Federal de São Carlos, como requisito  
parcial para a obtenção do título de  
Mestre em Ciências.

Aprovada em 10/07/2012.

**BANCA EXAMINADORA**

*Alex Eduardo de Bernardini*

---

Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini  
Universidade Federal de São Carlos - DF

*Wayne Leonardo Silva de Paula*

---

Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula  
Universidade Federal de São Carlos - DF

*Luiz Vitor de Souza Filho*

---

Prof. Dr. Luiz Vitor Silva de Souza Filho  
Universidade de São Paulo - IFSC

*Dedico esta dissertação aos meus pais,  
cujo esforço que fizeram para  
que eu estivesse aqui hoje é incomensurável.*

# *Agradecimentos*

Dedico meus sinceros agradecimentos para:

- o Professor Doutor Alex Eduardo de Bernardini, pela orientação, incentivo e paciência comigo durante esses dois anos de trabalho. Agradeço a ele também por sempre exigir de mim uma postura profissional, o que enriqueceu muito minha formação;
- todos meus amigos e colegas da pós-graduação em Física, em especial ao André Luis Rossi Melzi, por toda ajuda que me forneceu durante meu período de mestrado;
- os meus pais e meu irmão, que sempre se preocuparam comigo;
- a minha namorada Joana, pela paciência e carinho que dedica a mim.
- a CAPES, pelo suporte financeiro do trabalho.

*Todo trabalho é digno de respeito,  
e a humildade em reconhecer isso  
é um passo importante para qualquer  
nação ou comunidade.*

# *Resumo*

Neste trabalho nós estudamos a evolução de ondas gravitacionais primordiais acopladas ao tensor de stress anisotrópico dos neutrinos cosmológicos. Assim como em um universo dominado por radiação, em um universo composto de radiação e matéria os neutrinos podem agir como um meio dispersivo efetivo para ondas gravitacionais, além de introduzir pequenas variações sobre a contribuição tensorial das anisotropias de temperatura da radiação cósmica de fundo. Nossos resultados são obtidos em um cenário de transição radiação-matéria (RMD), tal que contemplamos modos que entram no horizonte de Hubble, seja na era de domínio de radiação (RD), seja na era de domínio de matéria (MD). Usando a variável de evolução  $k\eta$ , foi possível escrever nossas soluções independentes da frequência da onda. Nossos resultados ratificam que  $C_l^T$  decai abruptamente após  $l \sim 100$  com pequenas modificações no termo de quadrupolo da variância de temperatura,  $C_2^T$ , devido ao acoplamento de neutrinos e a inclusão de termos de colisões nas equações dinâmicas.



# *Abstract*

In this work we have studied the evolution of primordial gravitational waves coupled to anisotropic stress tensor of cosmological neutrinos. As in a radiation dominated universe, in a universe dominated by radiation and matter the neutrinos can work as an effective dispersive medium for the gravitational waves, besides introduce small modifications over the tensor contribution to the cosmological microwave background anisotropy. Our results are obtained in a radiation-matter transition scenario (RMD), so that we contemplate modes that cross the horizon in the radiation era and matter era. Using the evolution variable  $k\eta$ , it was possible to write our solutions independent from the frequency of the wave. Our results ratify that  $C_l^T$  die out after  $l \sim 100$  with small modifications on the quadrupole term,  $C_2^T$ , due to the coupling to neutrinos and the inclusion of collision terms into the dynamical equations.

# *Sumário*

**Lista de Figuras**

**Lista de Tabelas**

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 12
<b>2</b>	<b>O universo plano, homogêneo e isotrópico em expansão</b>	p. 16
2.1	Fundamentos Algébricos . . . . .	p. 16
2.2	Conteúdo energético do universo . . . . .	p. 20
2.3	A equação de Einstein . . . . .	p. 22
<b>3</b>	<b>Perturbações</b>	p. 25
3.1	Perturbações tensoriais na métrica . . . . .	p. 26
3.1.1	O tensor momento-energia perturbado . . . . .	p. 28
3.1.2	Componentes da equação de Einstein para perturbações tensoriais	p. 29
3.1.3	A equação de Boltzmann . . . . .	p. 30
<b>4</b>	<b>Algumas soluções simples</b>	p. 34
4.1	Universo dominado por radiação . . . . .	p. 34
4.2	Universo dominado por matéria . . . . .	p. 35
<b>5</b>	<b>Interação de ondas gravitacionais com neutrinos</b>	p. 37
5.1	Regime de <i>free-streaming</i> dos neutrinos . . . . .	p. 39
5.2	Regime relevante para colisões . . . . .	p. 43

<b>6</b>	<b>Contribuição do stress anisotrópico dos neutrinos na temperatura da RCF</b>	p. 47
6.1	$C_l$ para perturbações tensoriais . . . . .	p. 48
6.1.1	$C_l^T$ para o domínio RMD . . . . .	p. 50
6.1.2	Discussão sobre o termo de quadrupolo $C_2^T$ e o fator $r$ . . . . .	p. 52
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	p. 55
	<b>Referências</b>	p. 57
	<b>Apêndice I</b>	p. 59
	<b>Apêndice II</b>	p. 60

# *Lista de Figuras*

- 1    Expansão do universo para os tempos  $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$ , respectivamente. Enquanto a distância comóvel entre os pontos independe do tempo, a distância física é a distância comóvel multiplicada pelo fator de escala no respectivo tempo. . . . . p. 19
- 2    Evolução da amplitude das ondas normalizadas  $h_{ij}/h_{ij}^{(0)}$  como função de  $k\eta$  para o cenário cósmico de fundo RD (curvas vermelhas) e RMD (curvas pretas). Os resultados são para stress anisotrópico nulo (curvas pontilhadas), para  $R_\nu = 0.4052$  (curvas tracejadas), e para  $R_\nu = 1$  (curvas contínuas). Note que as curvas no regime RMD são descritas para  $\eta$  como múltiplo de  $\eta_{eq}$ . . . . . p. 40
- 3    Mesmo gráfico como na Fig. 2, mas agora para  $\eta$  como múltiplo de  $0.1\eta_{eq}$  (figura à esquerda) e para  $\eta$  como múltiplo de  $0.01\eta_{eq}$  (figura à direita). Note a modificação na diferença de fase entre os três gráficos. . . . . p. 41
- 4    Média temporal de  $(k\eta)^2 |k_{ij}(k\eta)|^2$  como função de  $k[Mpc]^{-1}$  para a era de domínio da radiação (curvas vermelhas) e para um período de transição radiação-matéria (curvas pretas). Os resultados são para a ausência do stress anisotrópico (curvas pontilhadas), para  $R_\nu = 0.4052$  (curvas tracejadas), e para  $R_\nu = 1$  (curvas contínuas). Note a existência de um valor  $\tilde{k}$  para o qual tanto na RD quanto RMD a curva contínua cruza com as outras duas curvas. . . . . p. 42
- 5    Evolução da amplitude das ondas normalizadas  $h_{ij}/h_{ij}^{(0)}$  como função de  $k\eta$  para era RMD no caso em que consideramos termos de colisão. Os resultados são para  $k\tau = 0.01, 0.1, 1$ , e 10 e para o caso sem colisões de acordo com a legenda, com  $\tau$  em unidades de  $\eta_0$  e  $k$  em unidades de  $1/\eta_0$ . Nossos resultados são para três famílias de neutrinos,  $R_\nu = 0.4052$  (curvas vermelhas), e para o caso extremo de um grande número de famílias de neutrinos,  $R_\nu = 1$ . . . . . p. 45

6	Média temporal de $(k\eta)^2 h_{ij}(k\eta) ^2$ como função de $k[Mpc]^{-1}$ para o cenário RMD em que levamos em conta termos de colisão. Os resultados são para $k\tau = 0.01$ e $10$ e para os casos sem colisões de acordo com a legenda, com $\tau$ em unidades de $\eta_0$ e $k$ em unidades de $1/\eta_0$ . . . . .	p. 46
7	Contribuição tensorial para o espectro de potência angular para o caso analítico sem a função transferência (curva pontilhada) e com a função transferência para levar em conta modos que entraram no horizonte na era da radiação (curva contínua). Note que para baixos valores de multipolo as curvas são aproximadamente as mesmas. . . . .	p. 50
8	Contribuição tensorial para o espectro de potência angular no cenário RMD. Os resultados são para o stress anisotrópico nulo (curva pontilhada), para $R_\nu = 0.4052$ (curva tracejada), e para $R_\nu = 1$ (curva contínua). Comparamos ainda com a solução analítica para $R_\nu = 0$ (curva azul). . . . .	p. 51
9	Contribuição tensorial para o espectro de potência angular para o cenário RMD considerando termos de colisão. Os resultados são para $k\tau = 0.01, 0.1, 1,$ e $10$ . Os casos sem colisões são mostrados de acordo com a legenda. . . . .	p. 52

# *Lista de Tabelas*

- 1 Valores de  $C_2^T$  e as respectivas razões entre a contribuição escalar e tensorial para o termo de quadrupolo, para stress anisotrópico dos neutrinos nulo ( $R_\nu = 0$ ), para  $R_\nu = 0.4052$  e para diversas famílias de neutrinos ( $R_\nu = 1$ ). Os resultados são para o domínio RMD. . . . . p. 54
- 2 Valores de  $C_2^T$  e as respectivas razões entre a contribuição escalar e tensorial para o termo de quadrupolo, para o caso em que consideramos termos de colisão, para o valor padrão de três famílias de neutrinos,  $R_\nu = 0.4052$ , e para  $R_\nu = 1$ . Os resultados são para um universo RMD. . . . . p. 54

# 1 *Introdução*

Nos últimos anos um grande volume de dados observacionais foram usados para verificar modelos ou restringir intervalos de valores para parâmetros em cosmologia a partir de observações provenientes de inhomogeneidades da distribuição da matéria e anisotropias na radiação cósmica de fundo. Do ponto de vista teórico, esse tratamento é feito através de perturbações na métrica e no tensor momento-energia, tendo um universo de fundo plano, homogêneo, e isotrópico em expansão. O modelo cosmológico padrão  $\Lambda$ CDM (*Lambda-Cold Dark Matter*), estuda a evolução destas perturbações a partir da equação de Einstein, onde é possível decompor as perturbações de acordo com a sua influência na evolução do universo.

De forma completamente análoga ao eletromagnetismo, a relatividade geral prevê o surgimento de ondas gravitacionais devido a oscilação de corpos massivos. No contexto cosmológico, o rápido crescimento de massas primordiais e flutuações na densidade de energia são identificadas como o mecanismo mais simples para produzir estruturas cosmológicas e anisotropias na temperatura da radiação cósmica de fundo. Em particular, ondas gravitacionais primordiais são propostas em diversos modelos inflacionários simples como consequências da rápida expansão do universo durante a inflação. Devido ao caráter extremamente fraco da interação gravitacional quando comparada com outras forças, ondas gravitacionais a princípio propagam-se livremente pelo espaço. Desse modo, a detecção direta destas ondas poderia fornecer a capacidade de estudar o universo durante o período inflacionário, assim como a radiação cósmica de fundo permite analisar o universo quando este possuía apenas 300 mil anos.

Enquanto anisotropias na temperatura da radiação cósmica de fundo (RCF) vem sendo observadas [1], experimentos atuais estão aptos apenas a estipular limites superiores para a polarização da RCF que podem ter sido causada por ondas gravitacionais primordiais [2, 3, 4, 5, 6]. Entretanto, a detecção direta é dificultada devido a raridade de fenômenos capazes de gerar ondas gravitacionais detectáveis pelos aparelhos de medida atuais, de tal modo que a medida que a sensibilidade dos aparelhos de medida é

aprimorada, a taxa de eventos por ano que podem gerar ondas gravitacionais detectáveis torna-se maior. Nesse ponto, é importante destacar os esforços brasileiros em desenvolver um detector direto de ondas gravitacionais, que deverá operar no intervalo de frequências entre 3.0 – 3.4KHz [7].

Todos esses fatos possibilitam a inclusão de elementos extras no conjunto de constituintes do universo de forma a avistar uma melhor concordância entre as predições teóricas e os dados observáveis de anisotropias na RCF. Neste contexto, a interação de ondas gravitacionais primordiais com a componente de stress anisotrópico dos neutrinos pode ser de interesse teórico para a cosmologia. Dependendo do período da história térmica dos neutrinos cosmológicos, o stress anisotrópico pode atuar como uma viscosidade efetiva, absorvendo parte das ondas gravitacionais em baixas frequências. Este ponto é detalhadamente explorado do ponto de vista teórico em [8, 9, 10], onde a possibilidade de ondas gravitacionais acopladas a neutrinos cosmológicos em um cenário de domínio de radiação (RD) foi considerada.

A história térmica dos neutrinos cosmológicos tem como temperatura de desacoplamento  $T \approx 1MeV$  que é aproximadamente obtida igualando-se a taxa de interação dos neutrinos com a taxa de expansão do universo. Podemos dividir a história dos neutrinos em três períodos [9]:

- Para  $T \gg 1MeV$ , os neutrinos estão fortemente acoplados ao plasma, tal que eles podem ser considerados como um fluido perfeito. Neste caso, a evolução das ondas gravitacionais não é alterada pelo stress anisotrópico dos neutrinos;
- Quando  $T \sim 1MeV$ , os neutrinos estão desacoplando do plasma. Então, o regime de fluido perfeito encerra-se e o stress anisotrópico deve ser levado em conta.
- Para  $T \ll 1MeV$ , os neutrinos se comportam como partículas livres, não interagindo mais com outros constituintes do plasma.

Neste trabalho, estudamos a influência causada pelo stress anisotrópico dos neutrinos sobre a propagação de ondas gravitacionais primordiais em um período de transição radiação-matéria, o qual denominaremos RMD. Além disso, analisamos o impacto causado nas anisotropias de temperatura na RCF quando neutrinos são incluídos ao plasma cosmológico através do cálculo da variância de temperatura relativa a perturbações tensoriais na métrica (espectro de potência angular),  $C_l^T$ . O fato de considerarmos um período composto de radiação e matéria nos permite trabalhar com modos gravitacionais num intervalo amplo de frequência, indo desde  $k \gg 0.1[Mpc]^{-1}$  (era de domínio da radiação)



até  $k \sim 0.1[Mpc]^{-1}$  (início da era da matéria). Além disso, o tratamento perturbativo segue alguns métodos teóricos abordados em [8, 9, 11, 12].

Este trabalho foi organizado como se segue:

No segundo capítulo são abordadas as características de um universo plano, homogêneo e isotrópico em expansão. Fundamentos de álgebra tensorial são introduzidos, além da noção de um sistema de coordenadas comóveis. Obtemos expressões para as densidades de energia dos constituintes do universo no modelo  $\Lambda$ CDM. Determinamos expressões para o fator de escala do universo para três períodos diferentes: domínio da radiação, domínio da matéria, e um período de transição radiação-matéria (RMD), o qual consideramos para obter nossos resultados. Apresentamos também a equação de Einstein, que será a equação básica para nosso trabalho.

O capítulo 3 apresenta com certo detalhe a teoria de perturbações cosmológicas, tratando a métrica e o tensor momento-energia perturbativamente até primeira ordem. É desenvolvido o formalismo de multipolos, no qual expandimos algumas funções relevantes em polinômios de Legendre para construir um sistema de equações acopladas conveniente para ser resolvido numericamente. Por fim, apresentamos a equação dos modos tensoriais contendo uma parte devido ao stress anisotrópico dos neutrinos, onde deve ser ressaltado que ela foi construída considerando-se um período de domínio radiação-matéria.

Soluções simples da equação dos modos tensoriais são apresentadas no capítulo 4, onde desenvolvemos soluções analíticas para dois casos especiais: um universo dominado por radiação e um universo dominado por matéria, onde assumimos as condições  $\eta \ll \eta_{eq}$  e  $\eta \gg \eta_{eq}$ , respectivamente, onde  $\eta_{eq}$  corresponde a escala de tempo conforme de igualdade entre as densidades de energia de radiação e de matéria. Mostramos que na ausência de qualquer tensor de stress anisotrópico, o único efeito sobre a propagação de ondas gravitacionais é causado pela expansão do universo. Além disso, uma breve analogia com o oscilador harmônico simples é feita, onde nota-se que o fator de amortecimento é duas vezes maior quando consideramos um universo dominado por matéria.

No capítulo 5 mostramos nossa análise do acoplamento do stress anisotrópico dos neutrinos às ondas gravitacionais primordiais. Avaliamos a evolução das ondas gravitacionais através da amplitude e também calculamos uma média temporal em função da frequência,  $D(k)^2$ , para três valores de um parâmetro  $R_\nu$ , isto é, a razão entre a densidade de neutrinos e a densidade total de radiação. Obtemos nossos resultados para o regime de *free-streaming* dos neutrinos, quando eles se comportam como partículas livres e o tensor de stress anisotrópico pode afetar a propagação das ondas. Além disso, consideramos in-

terações de neutrinos através de um termo de colisões parametrizado por um tempo médio entre colisões  $\tau$ , e mostramos que para  $\tau \ll 1$  conseguimos representar o período em que os neutrinos estavam fortemente acoplados ao plasma, muito antes do desacoplamento,  $T \gg 1\text{MeV}$ .

Para completar nosso estudo dos efeitos do stress anisotrópico dos neutrinos, no capítulo 6 analisamos seu impacto sobre anisotropias na temperatura da radiação cósmica de fundo através do cálculo do espectro de potência angular,  $C_l^T$ . Primeiramente avaliamos a influência da adição de neutrinos ao plasma, na ausência de colisões, onde comparamos nossos resultados com uma função analítica descrevendo um universo de radiação mais matéria através da solução para o regime de domínio da matéria mais uma função transferência para considerar modos que entraram no horizonte na era da radiação. Então, consideramos colisões e recalculamos os resultados da variância da temperatura em um período de domínio RMD. Por fim, fizemos uma breve discussão sobre a razão entre a contribuição tensorial e escalar sobre anisotropias na temperatura, em particular para o termo de quadrupolo  $C_2^T/C_2^S$ .

As conclusões e discussões sobre nossos resultados são apresentadas no capítulo 7, em particular para o período de domínio RMD. Discutimos também sobre a consideração de neutrinos exóticos como um meio de validar nossos resultados.

Por todo o trabalho, por conveniência, utilizaremos unidades naturais tal que  $c = \hbar/2\pi = k_B = 1$ , e iremos resolver nossas equações no espaço de Fourier, onde  $\partial/\partial x^i \rightarrow ik_i$ . Finalmente, iremos adotar a seguinte assinatura para a métrica:  $(-, +, +, +)$ .

## 2 *O universo plano, homogêneo e isotrópico em expansão*

Neste capítulo, iremos introduzir os elementos fundamentais que são a base do modelo cosmológico padrão, a saber, o modelo  $\Lambda$ CDM. A teoria base que será utilizada é a relatividade geral de Einstein, onde particularmente iremos partir da equação de Einstein para obter alguns resultados importantes. No modelo  $\Lambda$ CDM, temos que os constituintes básicos são os fótons, neutrinos (iremos considerar apenas neutrinos ultra-relativísticos, que se comportam como neutrinos sem massa), bárions, matéria escura fria e energia escura modelada como constante cosmológica.

Sendo que a relatividade geral é fundamentalmente descrita em termos de tensores, vamos introduzir inicialmente algumas propriedades de álgebra tensorial que irão ser úteis no desenvolvimento deste trabalho. Logo após, uma descrição da densidade de energia dos constituintes do universo será feita, sempre considerando o caráter de expansão do nosso modelo de universo.

### 2.1 Fundamentos Algébricos

Toda a formulação da relatividade geral é feita em um espaço Riemanniano quadridimensional (três dimensões espaciais e uma temporal), onde cada ponto é denotado através do conjunto de coordenadas  $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ . De acordo com a notação convencional, índices gregos são usados para as quatro coordenadas 0, 1, 2 e 3 e índices latinos para as três coordenadas espaciais 1, 2 e 3. Ainda de acordo com o comumente usado, índices gregos ou latinos iguais são somados sobre as respectivas coordenadas. Todo o formalismo de álgebra tensorial pode ser detalhadamente encontrado em [13, 14]. Dessa forma, um tensor genérico é definido como

$$T_{\nu_1 \nu_2 \dots}^{\mu_1 \mu_2 \dots} = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x_{\alpha_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x_{\alpha_2}} \dots \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'_{\nu_1}} \frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'_{\nu_2}} \dots T_{\beta_1 \beta_2 \dots}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots}, \quad (2.1)$$

sob uma transformação de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ .

Em especial, o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  contém toda informação geométrica do espaço de Riemann, pois define o intervalo espaço-temporal entre dois eventos que se localizam em  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$  e estão infinitesimalmente separados:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.2)$$

Algumas propriedades importantes do tensor métrico são que ele é um tensor simétrico  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ , tendo sua forma contravariante  $g^{\mu\nu}$  definida por  $g_{\mu\lambda} g^{\sigma\mu} = \delta_\lambda^\sigma$ , onde  $\delta_\lambda^\sigma$  é o delta de Kronecker (igual à unidade se  $\lambda = \sigma$  e zero no caso contrário).

A derivada covariante, generalização da derivada parcial no espaço de Riemann, é definida como

$$T_{\beta_1\beta_2\dots;\sigma}^{\alpha_1\alpha_2\dots} = T_{\beta_1\beta_2\dots,\sigma}^{\alpha_1\alpha_2\dots} + (\Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha_1} T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\nu\alpha_2\dots} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha_2} T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\nu\dots} + \dots) - (\Gamma_{\beta_1\sigma}^\mu T_{\mu\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots} + \Gamma_{\beta_2\sigma}^\mu T_{\beta_1\mu\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots} + \dots), \quad (2.3)$$

onde  $\Gamma_{\sigma\nu}^\alpha$  é um pseudo-tensor conhecido como símbolo de Christoffel. A notação utilizada acima é de que a *vírgula* denota derivada parcial ao passo que *ponto e vírgula* denotam derivada covariante.

No caso da relatividade geral, o símbolo de Christoffel pode ser escrito em função do tensor métrico como

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}], \quad (2.4)$$

onde definimos a notação  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha$ .

Além disso, para qualquer vetor covariante é possível demonstrar a relação  $T_{\mu;\nu;\lambda} - T_{\mu;\lambda;\nu} = T_\sigma R_{\mu\nu\lambda}^\sigma$  onde  $R_{\mu\nu\lambda}^\sigma$  é o tensor curvatura ou tensor de Riemann e é definido por

$$R_{\mu\nu\lambda}^\sigma \equiv \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\sigma + \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\alpha. \quad (2.5)$$

Devido à sua importância em geometria diferencial, algumas propriedades do tensor de Riemann são:

$$\begin{aligned} R_{\sigma\mu\nu\lambda} &= -R_{\mu\sigma\nu\lambda} = -R_{\sigma\mu\lambda\nu}, \\ R_{\sigma\mu\nu\lambda} &= R_{\nu\lambda\sigma\mu}, \\ R_{\sigma\mu\nu\lambda} + R_{\sigma\lambda\mu\nu} + R_{\sigma\nu\lambda\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

O tensor de Riemann obedece ainda a identidade de Bianchi:

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda;\rho} + R_{\sigma\mu\rho\nu;\lambda} + R_{\sigma\mu\lambda\rho;\nu} = 0. \quad (2.7)$$

A forma contraída do tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma}, \quad (2.8)$$

é conhecida como tensor de Ricci e pode ser escrita como

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}, \quad (2.9)$$

e, por fim, contraindo o tensor de Ricci, obtemos o chamado escalar de Ricci:

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Uma vez que o escalar de Ricci é um invariante, vale a pena ressaltar que ele não depende do sistema de coordenadas inercial escolhido.

### A expansão do universo

Segundo o modelo cosmológico padrão, o universo está em expansão isotrópica, o que significa que ele se expande da mesma maneira em todas direções do espaço-tempo. Assumindo isso, a distância entre duas galáxias, por exemplo, é maior hoje do que foi no passado. Assim, partindo da suposição de uma expansão uniforme, podemos traçar uma rede imaginária que cresce uniformemente conforme o universo se expande, ou evolui no tempo. Chamaremos esta rede imaginária de sistema de coordenadas comóveis, sendo que de acordo com essa definição a distância entre duas galáxias não é alterada em função do tempo. Podemos definir também um ponto comóvel como sendo a localização de um observador que mede densidade de momento zero. Por outro lado, a distância física entre dois objetos é a distância comóvel multiplicada por um parâmetro de expansão (fator de escala), que iremos chamar de  $a$ . Desse modo, obtemos a seguinte relação entre as coordenadas comóveis  $x^{\mu} = (\eta, \vec{x})$  e as coordenadas físicas  $r^{\mu} = (t, \vec{r})$ :

$$a(\eta) \equiv \frac{\partial r^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{x}}, \quad (2.11)$$

onde  $\eta$  é chamado de tempo conforme.

Em um universo plano, é conveniente normalizar o fator de escala para a unidade para a época presente. Desse modo, ao longo de todo o texto o subscrito 0 indicará o valor

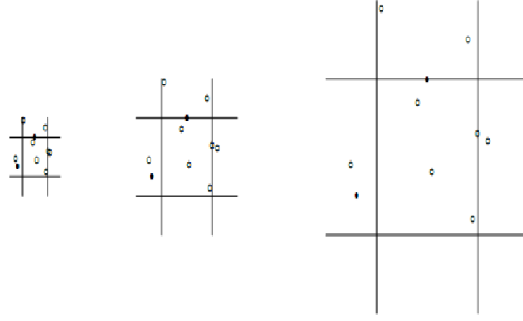


Figura 1: Expansão do universo para os tempos  $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$ , respectivamente. Enquanto a distância comóvel entre os pontos independe do tempo, a distância física é a distância comóvel multiplicada pelo fator de escala no respectivo tempo.

presente de qualquer grandeza.

Uma vez que o universo está se expandindo uniformemente, a chamada lei de Hubble prevê que as velocidades instantâneas das galáxias distantes aumentam linearmente conforme a distância ao observador, onde o parâmetro de proporcionalidade é chamado de parâmetro de Hubble:

$$H(\eta) \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} \equiv \frac{\dot{a}}{a^2}, \quad (2.12)$$

onde *pontos* denotam derivadas em relação ao tempo conforme.

Por fim, assumimos que em nosso modelo o universo é plano. Partindo disso, podemos escrever a métrica para um universo plano em expansão uniforme como

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j], \quad (2.13)$$

ou, retornando ao tempo físico como variável temporal:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.14)$$

que na forma matricial é escrita como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

## 2.2 Conteúdo energético do universo

Na relatividade geral, as propriedades de energia e momento de uma dada partícula são descritas pelo tensor momento-energia, definido formalmente para um fluido ideal como [12]

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{P}g^{\mu\nu} + (\rho + \mathcal{P})U^\mu U^\nu, \quad (2.16)$$

onde  $U^\mu$  é a quadri-velocidade das partículas,  $\rho$  e  $\mathcal{P}$  são, respectivamente, a densidade e a pressão do fluido, medidos no sistema de coordenadas comóveis.

Em coordenadas comóveis e para velocidades peculiares zero o tensor momento-energia é escrito como

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Para um fluido que interage apenas gravitacionalmente, a derivada covariante do tensor momento-energia é zero, correspondendo à equação de conservação de  $T_{\nu}^{\mu}$ :

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} \equiv \frac{\partial T_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0. \quad (2.18)$$

Tomando a componente tempo-tempo do tensor momento-energia, a Eq. (2.18) leva a

$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \frac{\dot{a}}{a}[3\rho + 3\mathcal{P}] = 0. \quad (2.19)$$

Assim, a Eq. (2.19) juntamente com a equação de estado de cada tipo de fluido considerado nos fornece a solução para a pressão e densidade de energia dos fluidos que compõem o universo (radiação, matéria e energia escura) em função do fator de escala. Será mostrado agora o comportamento da densidade de energia para cada tipo de fluido do universo.

### • Radiação

No caso da radiação, que possui uma equação de estado independente do tempo e é dada por  $\mathcal{P}_r = \rho_r/3$ , temos que a equação de conservação do tensor momento-energia leva diretamente à

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial a} + \frac{4\rho_r}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_r \propto a^{-4}. \quad (2.20)$$

A relação acima assume a característica de igualdade quando escrevemos a densidade

de energia de radiação em termos da densidade crítica para um universo plano no modelo FRW (Fredmann-Roberston-Walker), de modo que obtemos:

$$\bar{\rho}_r = \frac{\Omega_r \rho_0}{a^4}. \quad (2.21)$$

### • Matéria

O comportamento do tensor momento-energia associado a matéria e a matéria escura fria é o mesmo, assim como suas equações de estado. Ambas são consideradas não relativísticas. Sendo que nestes casos temos  $\mathcal{P}_m = 0$ , a equação de conservação do tensor momento-energia toma a forma

$$\frac{\partial \rho_m}{\rho_m} = -3 \frac{\partial a}{a} \Rightarrow \rho_m \propto a^{-3}. \quad (2.22)$$

Analogamente, podemos escrever a densidade de energia de matéria em termos da densidade crítica do universo, de modo que obtemos:

$$\bar{\rho}_m = \frac{\Omega_m \rho_0}{a^3}. \quad (2.23)$$

### • Energia escura

Por fim, temos outro constituinte do universo, a energia escura, que no modelo  $\Lambda$ CDM é modelada como constante cosmológica. A equação de estado neste caso é simples e dada por  $\mathcal{P}_\Lambda = -\rho_m$ . Do mesmo modo como nos outros casos, a equação de conservação do tensor momento-energia para energia escura leva a

$$\frac{\partial \rho_\Lambda}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \rho_\Lambda = cte. \quad (2.24)$$

Escrevendo a densidade de energia da constante cosmológica em função da densidade crítica:

$$\bar{\rho}_\Lambda = \rho_0 \Omega_\Lambda. \quad (2.25)$$

No modelo assumido neste trabalho, assume-se que inicialmente a densidade de energia de radiação era dominante, sendo muito maior que a densidade de energia de matéria, que por sua vez era muito maior que a densidade de energia da constante cosmológica ( $\rho_r \gg \rho_m \gg \rho_\Lambda$ ). Esta última, dado que nos preocupamos com a fase RMD, será desconsiderada para todos os efeitos em nossa análise.

Os respectivos períodos acima são chamados de período de domínio da radiação,



período de domínio da matéria e período de domínio da constante cosmológica. Iremos definir aqui o tempo conforme no qual o universo passa do domínio da radiação para o domínio da matéria por  $\eta_{eq}$ , correspondendo a igualdade entre as densidades de energia da radiação e da matéria.

## 2.3 A equação de Einstein

A principal ferramenta da teoria da relatividade geral é a equação de Einstein. Esta teoria descreve como a curvatura do espaço-tempo atua sobre a matéria para se manifestar na forma de gravidade e como as energias dos fluídos que estamos considerando influenciam na estrutura do espaço-tempo, modificando sua curvatura. A equação de Einstein relaciona de forma dinâmica as duas componentes básicas do universo: o tensor momento-energia,  $T_{\mu\nu}$ , que diz respeito ao conteúdo energético do universo, e o tensor de Einstein, que leva a informação sobre a geometria do universo. Assim, a equação de Einstein é escrita como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

sendo o tensor de Einstein definido como o lado esquerdo da Eq. (2.26).

Uma forma de se obter a equação de Einstein é através da seguinte ação S:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R} + S_M, \quad \delta S = 0, \quad (2.27)$$

sendo  $S_M$  a ação responsável a originar o tensor momento-energia.

Para o nosso modelo de universo considerado plano, homogêneo e isotrópico em expansão juntamente com a expressão do tensor momento-energia de um fluído perfeito, a componente tempo-tempo da equação de Einstein assume a forma:

$$\frac{8\pi G a^2}{3} \rho = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2. \quad (2.28)$$

Esta equação é conhecida como equação de Friedmann. Já a componente espaço-espaço do traço da equação de Einstein, nas mesmas considerações acima, tem a forma dada por:

$$8\pi G a^2 \mathcal{P} = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2. \quad (2.29)$$

As outras componentes da equação, a saber, as componentes espaço-tempo e espaço-espaço sem traço são nulas nas condições de homogeneidade e isotropia.

Fazendo uso da Eq. (2.28) e das equações para as densidades de energia de radiação e de matéria, iremos agora determinar as expressões para alguns fatores de escala em função do tempo conforme  $\eta$ .

#### • Domínio da radiação

No período de domínio da radiação, quando a densidade de energia de radiação era muito maior do que as demais, ou seja, para um dado tempo conforme  $\eta \ll \eta_{eq}$ , podemos obter uma solução aproximada para o fator de escala  $a$  em função de  $\eta$ . Escrevendo então a densidade de energia como sendo  $\rho \approx \rho_r$  na Eq.(2.28) e com  $\rho_r$  dado pela Eq. (2.21) obtemos

$$\dot{a}^2 \propto cte, \quad (2.30)$$

e em termos das constantes em questão, temos então a expressão para o fator de escala na era de domínio da radiação:

$$a_r(\eta) \approx \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0\Omega_r}{3}}\eta. \quad (2.31)$$

#### • Domínio da matéria

Segundo o modelo  $\Lambda$ CDM, após o período de domínio da radiação, o universo entra no período de domínio da matéria, sendo então a densidade de energia de matéria muito maior que as densidades de energia de radiação e da constante cosmológica. Aproximando a densidade de energia para  $\rho \approx \rho_m$  na equação de Friedmann e usando a Eq. (2.23) para  $\rho_m$ , obtemos

$$\dot{a}^2 \propto a, \quad (2.32)$$

que em termos das constantes apropriadas pode ser escrita como:

$$a_m(\eta) \approx \frac{2\pi G\rho_0\Omega_m}{3}(\eta + \eta_{eq})^2. \quad (2.33)$$

Para valores de  $\eta \gg \eta_{eq}$  podemos escrever:

$$a_m(\eta) \approx \frac{2\pi G\rho_0\Omega_m}{3}\eta^2. \quad (2.34)$$

#### • Domínio conjunto radiação e matéria

Uma vez que em nosso trabalho queremos estudar o comportamento das ondas gravitacionais num período composto predominantemente de radiação e matéria, seria interessante se tivéssemos uma solução para o fator de escala em função de  $\eta$  que envolvesse ao mesmo tempo estes dois constituintes. Assumindo então que a soma das densidades de energia de

radiação e matéria é muito maior do que a densidade de energia da constante cosmológica ( $\rho \approx \rho_r + \rho_m \gg \rho_\Lambda$ ) conseguimos uma expressão geral para o fator de escala num período de transição radiação-matéria dada por:

$$a(\eta) \approx \frac{2\pi G \rho_0 \Omega_m}{3} \eta^2 + \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 \Omega_r}{3}} \eta. \quad (2.35)$$

### 3 *Perturbações*

No capítulo anterior apresentamos as equações necessárias para descrever a evolução temporal para um universo plano, homogêneo e isotrópico em expansão. Com base nisso, e dadas as condições iniciais, podemos saber como as densidades de energia dos constituintes do universo, no modelo  $\Lambda$ CDM, evoluem, além de conseguirmos também as expressões para o fator de expansão do universo para as diversas épocas que consideramos. No caso de um universo homogêneo as soluções para o tensor momento-energia e para as equações de Einstein, em alguns casos particulares, podem ser resolvidas analiticamente [15].

As evidências observacionais [16] mostram que o universo evoluiu de um estado que pode ser caracterizado por um fluido muito homogêneo e isotrópico em altíssima temperatura, para o estado atual em que conhecemos bem, caracterizado por uma temperatura de fundo baixa e com estruturas gravitacionais complexas formadas. Além disso, embora nosso universo atualmente apresente um caráter muito alto de homogeneidade e isotropia, pequenas flutuações na temperatura de fundo cósmico são registradas. Uma maneira de representar essas flutuações é através da teoria de perturbações cosmológicas lineares. Em termos matemáticos, isso se resume em resolver as equações de Einstein perturbadas em primeira ordem, tendo como base não perturbada o modelo de universo plano, homogêneo e isotrópico em expansão.

Ao longo deste capítulo, iremos apresentar algumas consequências da inserção de perturbações na métrica. Embora pareça simples, o uso de perturbações somente em primeira ordem nos permite explicar diversos dados observacionais, como flutuações na temperatura de fundo cósmico. A única dificuldade é a liberdade de calibre que a teoria possui. Como quantidades físicas não devem depender da escolha de coordenadas, devemos usar uma formulação chamada de invariante de calibre. Em teorias de perturbações cosmológicas existem vários tipos de calibres, cada um mais compatível com o problema que se quer resolver.

Pelo caráter tensorial da métrica, logo a teoria de perturbações em primeira ordem

também deve ser descrita como um tensor

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Isso leva a inclusão de três tipos diferentes de perturbações: escalares, vetoriais e tensoriais

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}^{escalar} + \delta g_{\mu\nu}^{vetor} + \delta g_{\mu\nu}^{tensor}. \quad (3.2)$$

As perturbações escalares são responsáveis pela formação de estruturas, como galáxias e aglomerados de galáxias, além de influenciarem na temperatura de fundo cósmico [16]. Já as perturbações vetoriais são responsáveis por efeitos gravitomagnéticos [17]. Por fim, perturbações tensoriais na métrica irão produzir ondas gravitacionais. Neste trabalho, estamos interessados no último tipo de perturbação.

### 3.1 Perturbações tensoriais na métrica

A métrica perturbada de Friedmann-Robertson-Walker para um universo plano ( $K=0$ ), em coordenadas Cartesianas, pode ser escrita na sua forma mais geral como:

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2(\eta)[-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j + h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu] \\ &= a^2(\eta)[-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + 2B_i d\eta dx^i + (\delta_{ij} - 2\Phi + h_{ij})dx^i dx^j], \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde o tensor de perturbação  $h_{\mu\nu}$  foi decomposto em outras funções:  $\Psi$ ,  $\Phi$ ,  $B_i$  e  $h_{ij}$ . Separando as componentes da métrica, podemos escrevê-las como

$$\begin{aligned} g_{00}(x^i, \eta) &= -a^2(\eta)[1 + 2\Psi(x^i, \eta)], \\ g_{i0}(x^i, \eta) &= a^2(\eta)2B_i(x^i, \eta), \\ g_{ij}(x^i, \eta) &= a^2(\eta)\delta_{ij}[1 - 2\Phi(x^i, \eta)] + h_{ij}(x^i, \eta). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Uma vez que o tensor  $h_{\mu\nu}$  é simétrico e de ordem 2, ele terá no máximo 10 componentes que podem ser escritos em termos de duas funções escalares ( $\Psi$  e  $\Phi$ ) somando 2 graus de liberdade, um tri-vetor ( $B_i$ ) com mais 3 graus de liberdade, e um tensor ( $h_{ij}$ ) simétrico e com traço nulo contendo 5 graus liberdade.

#### Desacoplamento EVT

Uma ferramenta muito importante em teoria de perturbações cosmológicas é o desacoplamento EVT, que permite, em primeira ordem de perturbação, trabalhar com as

perturbações de forma independente uma da outra.

*componentes escalares*

Para as duas funções escalares presentes no tensor de perturbação,  $\Psi$  e  $\Phi$ , o desacoplamento é trivial, uma vez que são escalares. Assim, temos uma componente para cada uma destas funções.

*componentes vetoriais*

Já o vetor  $B_i$  pode ser decomposto como

$$B_i = B_i^{\parallel} + B_i^{\perp}, \quad \text{onde} \quad \vec{\nabla} \times B_i^{\parallel} = \vec{\nabla} \cdot B_i^{\perp} = 0. \quad (3.5)$$

Uma vez que podemos escrever  $B_i^{\parallel} = \nabla B$ , onde  $B$  é uma função escalar, o tri-vetor assume a forma

$$B_i = \nabla B + B_i^{\perp}. \quad (3.6)$$

Desse modo  $B_i$  passa a ser escrito em termos de uma função escalar mais uma parte vetorial que é irredutível.

*componentes tensoriais*

De modo análogo ao feito para a parte vetorial, podemos decompor o tensor simétrico  $h_{ij}$  em funções escalares, vetoriais e tensoriais:

$$h_{ij} = h_{ij}^{\parallel} + h_{ij}^{\perp} + h_{ij}^T, \quad (3.7)$$

onde  $h_{ij}^{\parallel}$  é chamada parte longitudinal,  $h_{ij}^{\perp}$  é a parte solenoidal e  $h_{ij}^T$  recebe o nome de parte transversal. Além disso, estas componentes estão sujeitas às seguintes condições:

$$\epsilon^{ijk} \partial_j \partial^l h_{lk}^{\parallel} = 0, \quad \partial^i \partial^j h_{ij}^{\perp} = 0, \quad \partial^i h_{ij}^T = 0. \quad (3.8)$$

Desse modo, a decomposição EVT nos permite escrever o tensor de perturbação métrico inicial  $h_{\mu\nu}$  em termos de funções escalares, vetoriais e tensoriais, sendo que a única componente tensorial, após a decomposição, é o tensor transversal  $h_{ij}^T$  de ordem 2 e sem traço.

Existem dois calibres convenientes para se estudar perturbações tensoriais, o calibre sincrônico e o calibre de Poisson. Em ambos, as perturbações tensoriais são invariantes. Por todo o trabalho, iremos usar o calibre sincrônico, no qual as perturbações tensoriais

na métrica podem ser escritas como

$$g_{ij} = a^2(\eta)[\delta_{ij} + \mathcal{H}_{ij}], \quad (3.9)$$

onde  $\mathcal{H}_{ij}$  é a matriz associada à perturbação tensorial, expressa por:

$$\mathcal{H}_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Vemos acima que a matriz  $\mathcal{H}_{ij}$  satisfaz as condições descritas da decomposição EVT.

### 3.1.1 O tensor momento-energia perturbado

Lembremos que para um fluido ideal o tensor momento-energia é expresso por

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{P}g^{\mu\nu} + (\rho + \mathcal{P})U^\mu U^\nu, \quad (3.11)$$

onde as componentes neste caso são dadas por:

$$T_0^0 = -\bar{\rho}, \quad T_0^i = 0, \quad T_j^i = \bar{\mathcal{P}}, \quad (3.12)$$

onde as barras superiores indicam quantidades não perturbadas e  $T_\nu^\mu = g_{\nu\lambda}T^{\mu\lambda}$ .

Entretanto, se o fluido apresenta uma pequena variação em sua quadrivelocidade, de modo que ele não se comporte exatamente como ideal, podemos tratar essa alteração como uma pequena perturbação na densidade de energia e pressão. Assim, teríamos então  $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho$  e  $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}} + \delta\mathcal{P}$ , onde  $\delta\rho$  e  $\delta\mathcal{P}$  são pequenas perturbações introduzidas, respectivamente, na densidade de energia e pressão do fluido. Desse modo passamos a ter as seguintes componentes tempo-tempo e espaço-espaço do tensor momento-energia:

$$T_0^0 = -(\bar{\rho} + \delta\rho), \quad (3.13)$$

$$T_j^i = (\bar{\mathcal{P}} + \delta\mathcal{P})\delta_j^i + \Sigma_j^i, \quad \Sigma_i^i = 0, \quad (3.14)$$

onde  $\Sigma_j^i$  é a parte anisotrópica com traço nulo da componente espacial do tensor momento-energia.

A parte anisotrópica da componente espaço-espaço do tensor momento-energia,  $\Sigma_j^i$ , representa efeitos dissipativos do fluido considerado quando este não se comporta como ideal. Em relação aos fótons, sua componente de stress anisotrópico pode ser desconsiderada até o desacoplamento destas partículas do plasma cósmico [15]. Em alguns modelos

inflacionários, são previstos o surgimento da componente anisotrópica devido ao *inflaton* e ao campo de Higgs [18]. Neste trabalho, restringimos nossa atenção para a componente de stress anisotrópico devido apenas aos neutrinos cosmológicos.

### 3.1.2 Componentes da equação de Einstein para perturbações tensoriais

Apresentamos agora as componentes da equação de Einstein para perturbações tensoriais na métrica. Lembremos que a equação de Einstein é dada pela Eq. (2.35). Precisamos calcular primeiramente o tensor de Ricci. Utilizando a Eq. (3.10) para perturbações tensoriais, as componentes tempo-tempo e espaço-espaço do tensor de Ricci são dados por

$$R_{00} = -3 \frac{d^2 a / dt^2}{a}, \quad (3.15)$$

$$R_{ij} = g_{ij} \left( \frac{d^2 a / dt^2}{a} + 2H \right) + \frac{3}{2} a^2 H \mathcal{H}_{ij,0} + a^2 \frac{\mathcal{H}_{ij,00}}{2} + \frac{k^2}{2} \mathcal{H}_{ij}, \quad (3.16)$$

sendo que consideramos apenas perturbações de primeira ordem.

Observando-se que o escalar de Ricci é a contração das componentes do tensor de Ricci, rapidamente podemos ver que ele não é alterado por perturbações tensoriais. Disso, segue que a componente tempo-tempo da equação de Einstein não é alterada por perturbações tensoriais. Por outro lado, a componente espaço-espaço passa a ser expressa por

$$\delta G_j^i = \delta R_j^i = 8\pi G \delta T_j^i, \quad (3.17)$$

onde  $\delta$  representa quantidades perturbadas em primeira ordem.

Partindo das componentes do tensor de perturbação tensorial, podemos escrever a equação de Einstein para a evolução dos modos tensoriais como [13]:

$$\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2} + \left( \frac{3}{a} \frac{da}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial t} h_{ij} - \left( \frac{\nabla^2}{a^2} \right) h_{ij} = 16\pi G \frac{\Sigma_{ij}}{a^2}, \quad (3.18)$$

ou, escrevendo em função do tempo conforme  $\eta$  e no espaço de Fourier  $\partial/\partial x^i \rightarrow ik_i$ :

$$\ddot{h}_{ij} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{h}_{ij} + k^2 h_{ij} = 16\pi G \Sigma_{ij}. \quad (3.19)$$

Como podemos ver a Eq. (3.19) representa a equação de um oscilador harmônico amortecido, com a inclusão de um termo devido à perturbação no tensor momento-energia do fluido considerado.



### 3.1.3 A equação de Boltzmann

No espaço de fase, como é usual, a função distribuição  $f(x^i, p_j, \eta)$  fornece o número de partículas dentro do elemento de volume  $dx^1 dx^2 dx^3 dP_1 dP_2 dP_3$ :

$$f(x^i, p_j, \eta) dx^1 dx^2 dx^3 dp_1 dp_2 dp_3 = dN. \quad (3.20)$$

O tensor momento-energia pode ser escrito no espaço de fase em termos da função distribuição como

$$T_\nu^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \int f(x^i, p_j, \eta) \frac{P^\mu P_\nu}{P^0} dP_1 dP_2 dP_3, \quad (3.21)$$

onde o momento próprio,  $p_j = p^j$ , medido por um observador em coordenadas espaciais fixas está relacionado a  $P_i$  por  $P_i = a(\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij})p^j$ .

Usando novas definições  $P_i \rightarrow q_i = ap_i$  onde  $q_i = qn_i$ , podemos escrever a função distribuição como a soma de uma parte não perturbada mais uma pequena perturbação:

$$f(x^i, q, n_j, \eta) = f_0(q)[1 + \Psi(x^i, q, n_j, \eta)], \quad (3.22)$$

onde  $f_0(q) = \frac{g_s}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\epsilon/T_0 \pm 1}}$ ,  $g_s$  é a quantidade de graus de liberdade da partícula considerada e  $T_0$  é a temperatura média do fluido.

Da matriz de perturbação tensorial, Eq. (3.10), obtemos

$$\sqrt{-g} = a^4 \left(1 + \frac{h}{2}\right) \quad e \quad dP_1 dP_2 dP_3 = \left(1 + \frac{h}{2}\right) q^2 dq d\Omega \quad (3.23)$$

Com isso podemos escrever o tensor momento-energia do seguinte modo:

$$T_j^i = a^{-4} \int \frac{q^2}{\epsilon} n^i n_j f_0(q) (1 + \Psi) q^2 dq d\Omega, \quad (3.24)$$

onde  $\epsilon \equiv \sqrt{q^2 + a^2 m^2}$ .

De modo geral, a equação de evolução para  $\Psi(x^i, q, n_j, \eta)$  pode ser obtida através da equação de Boltzmann:

$$\hat{L}[f] = \hat{C}[f], \quad (3.25)$$

onde  $\hat{L}$  é o operador de Liouville e  $\hat{C}$  é operador de colisão representando possíveis interações entre as partículas do fluido. Usando a equação da geodésica o operador de Liouville pode ser escrito como [8]:

$$\hat{L}[f] \equiv \frac{Df}{D\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{1}{2} q n^i n_j \frac{dh_{ij}}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial q}. \quad (3.26)$$

### Formalismo de multipolo

Existem duas formas para se resolver o sistema de equações (2.28, 3.19, 3.24, 3.26). A primeira é em sua forma integral, apresentada em [10]. Já a outra forma consiste em escrever nosso problema de forma que seja mais compatível para a integração numérica. Para isso, vamos estruturar um formalismo de multipolos para nossas equações, com poucas variações do método utilizado para perturbações escalares [12] e formalmente desenvolvido em [8].

Usando a Eq. (3.22) para a função distribuição, e lembrando que estamos considerando apenas neutrinos sem massa, a equação de Boltzmann pode ser escrita no espaço de Fourier como

$$\dot{\Psi} + ik_i n^i \Psi - \frac{1}{2} n^i n^j \dot{h}_{ij} \frac{d \ln f_0}{d \ln q} = \frac{1}{f_0} \hat{C}[f], \quad (3.27)$$

onde *pontos* denotam derivadas em relação ao tempo conforme.

Definindo uma função

$$F_\nu(k_i, n_j, \eta) \equiv \frac{\int q^3 f_0(q) \Psi(k_i, q, n_j, \eta) dq}{\int q^3 f_0(q) dq}, \quad (3.28)$$

nós multiplicamos a Eq. (3.27) por  $q^3 f_0$  e integramos em  $q$ , obtendo

$$\dot{F}_\nu + ik_i n^i F_\nu + 2 \dot{h}_{ij} n^i n^j = \frac{4\pi}{a^4 \bar{\rho}_\nu} \int q^3 \hat{C}[f] dq, \quad (3.29)$$

onde usamos que  $\bar{\rho}_\nu = 4\pi a^{-4} \int q^3 f_0(q) dq$ .

Após isso, é conveniente definir ainda a seguinte função:

$$\mathcal{F}_{ij}(k_i, \mu, \eta) = \int_0^{2\pi} \left( n_i n_j - \frac{\delta_{ij}}{3} \right) F_\nu d\varphi, \quad (3.30)$$

sendo  $\varphi$  o ângulo polar, de modo que o elemento de ângulo sólido infinitesimal é dado por  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ .

Logo após isso, nós multiplicamos a Eq. (3.29) por  $(n_i n_j - \delta_{ij}/3)$  e integramos em  $\varphi$ . Então obtemos, usando  $\mu \equiv \hat{k} \cdot \hat{n}$ :

$$\dot{\mathcal{F}}_{ij} + ik \mu \mathcal{F}_{ij} + 2 \dot{h}_{lm} \int_0^{2\pi} n^l n^m \left( n_i n_j - \frac{\delta_{ij}}{3} \right) d\varphi = \mathcal{C}_{ij}, \quad (3.31)$$

onde agora o termo de colisão passa a ser definido por:

$$\mathcal{C}_{ij} \equiv \frac{4\pi}{a^4 \bar{\rho}_\nu} \int q^3 dq \int_0^{2\pi} d\varphi \left( n_i n_j - \frac{\delta_{ij}}{3} \right) \hat{C}[f]. \quad (3.32)$$

Agora, expandimos  $\mathcal{F}_{ij}$  e  $\mathcal{C}_{ij}$  em polinômios de Legendre:

$$\mathcal{F}_{ij}(k_i, \mu, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) \mathcal{F}_{ij}^{(l)}(k_i, \eta) P_l(\mu), \quad (3.33)$$

$$\mathcal{C}_{ij}(k_i, \mu, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) \mathcal{C}_{ij}^{(l)}(k_i, \eta) P_l(\mu). \quad (3.34)$$

Para obter um sistema de equações diferenciais adequado para ser resolvido numericamente, multiplicamos a Eq. (3.31) por  $(i^l/2)P_l$  e integramos sobre  $\mu$  usando a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre. O cálculo detalhado pode ser visto em [8], sendo o resultado dado por:

$$\dot{\mathcal{F}}_{ij}^{(0)} = -k \mathcal{F}_{ij}^{(1)} - \frac{8\pi}{15} \dot{h}_{ij} + \mathcal{C}_{ij}^{(0)}, \quad (3.35)$$

$$\dot{\mathcal{F}}_{ij}^{(2)} = -\frac{k}{5} [3\mathcal{F}_{ij}^{(3)} - 2\mathcal{F}_{ij}^{(1)}] - \frac{16\pi}{105} \dot{h}_{ij} + \mathcal{C}_{ij}^{(2)}, \quad (3.36)$$

$$\dot{\mathcal{F}}_{ij}^{(4)} = -\frac{k}{9} [5\mathcal{F}_{ij}^{(5)} - 4\mathcal{F}_{ij}^{(3)}] - \frac{8\pi}{315} \dot{h}_{ij} + \mathcal{C}_{ij}^{(4)}, \quad (3.37)$$

$$\dot{\mathcal{F}}_{ij}^{(l)} = -\frac{k}{2l+1} [(l+1)\mathcal{F}_{ij}^{(l+1)} - l\mathcal{F}_{ij}^{(l-1)}] + \mathcal{C}_{ij}^{(l)} \quad (l \neq 0, 2, 4). \quad (3.38)$$

É importante dizer que este sistema é completamente equivalente à equação de Boltzmann original e escrita de forma apropriada para ser resolvido por diversos métodos numéricos de equações diferenciais. Em nosso trabalho, utilizamos o *software Mathematica*, versão 7.0, para realizar nossos cálculos.

Por outro lado, o tensor de stress anisotrópico dos neutrinos pode ser escrito como

$$\Sigma_{ij}^{\nu} = T_{ij} - \frac{g_{ij}}{3} T_k^k = \frac{a^2 \bar{\rho}_{\nu}}{4\pi} \int \left( n_i n_j - \frac{\delta_{ij}}{3} \right) F_{\nu} d\Omega = \frac{a^2 \bar{\rho}_{\nu}}{4\pi} \mathcal{F}_{ij}^{(0)}, \quad (3.39)$$

onde aqui estamos considerando apenas a componente de stress anisotrópico devido aos neutrinos e utilizamos o fato de que  $\int n_i n_j d\Omega = 4\pi \delta_{ij}/3$ .

Substituindo a expressão acima para o tensor de stress na Eq. (3.19) conseguimos:

$$\ddot{h}_{ij} + 2\frac{\dot{a}}{a} \dot{h}_{ij} + k^2 h_{ij} = 4G\bar{\rho}_{\nu} a^2 \mathcal{F}_{ij}^{(0)}. \quad (3.40)$$

Estamos interessados em soluções para o regime de domínio de radiação e matéria ou, como denominamos, regime RMD. Sendo assim, devemos escrever a densidade de energia dos neutrinos,  $\bar{\rho}_{\nu}$ , de modo a poder contabilizá-la numericamente e expressar os parâmetros de densidade de radiação e de matéria. Para isso, introduzimos a definição  $R_{\nu} \equiv \bar{\rho}_{\nu}/\bar{\rho}_r$  (onde  $\rho_{\gamma}$  se refere aos fótons), o qual é a razão entre a densidade de neutrinos

e a densidade total de radiação, sendo  $\bar{\rho}_r = \bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu$ . Multiplicando e dividindo  $\bar{\rho}_\nu$  pela densidade de radiação e pela densidade total, obtemos

$$\bar{\rho}_\nu = \bar{\rho}_\nu \times \frac{\bar{\rho}_r}{\bar{\rho}_r} \times \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}} = R_\nu \frac{\bar{\rho}_r}{\bar{\rho}_r + \bar{\rho}_m} \bar{\rho} = R_\nu \frac{1}{1 + \Omega_m/\Omega_r} \bar{\rho} = R_\nu \frac{1}{1 + (1 - R_\nu) \frac{\Omega_m}{\Omega_\gamma}} \bar{\rho}. \quad (3.41)$$

Usando a equação de Friedmann podemos obter a densidade de energia total em termos do fator de escala e de sua primeira derivada. Desse modo, a densidade de energia dos neutrinos fica expressa por

$$\bar{\rho}_\nu = \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{\dot{a}}{a^2} \right)^2 \frac{R_\nu}{1 + (1 - R_\nu) \frac{\Omega_m}{\Omega_\gamma}} \quad (3.42)$$

Inserindo este resultado na equação dos modos tensoriais, Eq. (3.40), temos:

$$\ddot{h}_{ij} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_{ij} + k^2 h_{ij} = \frac{3}{2\pi} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \frac{R_\nu}{1 + (1 - R_\nu) \frac{\Omega_m}{\Omega_\gamma}} \mathcal{F}_{ij}^{(0)} \quad (3.43)$$

Pelo comportamento das ondas gravitacionais quando elas estão muito fora do horizonte de Hubble, e portanto sem conexão causal com o restante do inventário cósmico ( $k\eta \gg 1$ ) temos que as condições iniciais são dadas por  $\dot{h}_{ij}(0) = 0$  e  $\mathcal{F}_{ij}^{(l)}(0) = 0$ . Além disso, sempre é possível re-escalonar o valor inicial  $h_{ij}(0)$  de modo a termos a condição de normalização dada por  $h_{ij}(0) = h_{ij}^{(0)} = 1$ .

## 4 *Algumas soluções simples*

No capítulo anterior descrevemos as perturbações na métrica e no tensor momento-energia onde demos atenção especial para o caso de perturbações tensoriais. Realizamos nossa análise perturbativa considerando apenas termos de primeira ordem de perturbação. Então, fizemos a expansão em multipolos para as funções  $\mathcal{F}_{ij}$  e  $\mathcal{C}_{ij}$  para que fosse possível analisar a inclusão de neutrinos cosmológicos ao plasma do universo e sua influência sobre a evolução das ondas gravitacionais primordiais. Neste capítulo iremos apresentar algumas soluções analíticas simples para o caso particular onde  $R_\nu = 0$ , ou seja, na ausência do tensor de stress anisotrópico dos neutrinos. Embora sejam casos não relevantes ao objetivo de nosso estudo, tais soluções permitem analisar a propagação de ondas gravitacionais quando a única influência sobre elas é a expansão do universo.

Obteremos soluções para dois casos particulares, era de domínio da radiação e era de domínio da matéria, ambos os casos muito longe do tempo de igualdade radiação-matéria. Vale ressaltar que para nossos resultados, analíticos e numéricos, a componente da constante cosmológica não é relevante. Assumindo que antes das ondas gravitacionais entrarem no horizonte elas não sofriam efeitos devido à expansão do universo, podemos determinar uma condição inicial como sendo  $\dot{h}_{ij}(0) = 0$ . Além disso, é sempre possível escolher de forma arbitrária o valor de  $h_{ij}^{(0)}$ , de modo que iremos definir  $h_{ij}^{(0)} = 1$ .

### 4.1 Universo dominado por radiação

Para modos que entram no horizonte em um universo dominado por radiação, ou seja, para um universo constituído apenas de fótons ou por outras partículas sem massa, a expressão para o fator de escala é dada pela equação

$$a_r(\eta) \approx \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0\Omega_r}{3}}\eta. \quad (4.1)$$

Substituindo esta expressão na equação dos modos tensoriais, Eq. (3.43), lembrando

que estamos assumindo  $R_\nu = 0$ , obtemos:

$$\ddot{h}_{ij}(\eta) + \frac{2}{\eta}\dot{h}_{ij}(\eta) + k^2 h_{ij}(\eta) = 0, \quad \text{onde usamos que } \dot{a}/a = 1/\eta. \quad (4.2)$$

Definindo uma nova variável de integração  $u \equiv k\eta$ , a equação acima fica:

$$\ddot{h}_{ij}(u) + \frac{2}{u}\dot{h}_{ij}(u) + h_{ij}(u) = 0, \quad (4.3)$$

que pode ser imediatamente reconhecida como a equação esférica de Bessel de ordem zero, cuja solução geral é dada por

$$h_{ij}(k\eta) = A \frac{\sin(k\eta)}{k\eta} + B \frac{\cos(k\eta)}{k\eta}, \quad (4.4)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais do problema.

As constantes podem ser determinadas através da condição  $h_{ij}(0) = 1$ . Neste caso, como a função que multiplica  $B$  diverge, temos que assumir  $B \equiv 0$ . Disso, segue imediatamente o valor para a outra constante,  $A = 1$ . Desse modo, a solução para modos que entram no horizonte na era da radiação é dada por:

$$h_{ij}(k\eta) = \frac{\sin(k\eta)}{k\eta}. \quad (4.5)$$

## 4.2 Universo dominado por matéria

Em analogia ao item anterior, podemos determinar uma solução analítica simples para ondas gravitacionais em um universo dominado por matéria, ou seja, constituído de partículas não relativísticas. Usando a Eq. (2.34) para nosso fator de escala neste cenário e substituindo na equação dos modos tensoriais, Eq. (3.43):

$$\ddot{h}_{ij}(\eta) + \frac{4}{\eta}\dot{h}_{ij}(\eta) + k^2 h_{ij}(\eta) = 0, \quad \text{onde agora usamos que } \dot{a}/a = 2/\eta. \quad (4.6)$$

Usando novamente a variável conveniente  $u \equiv k\eta$ :

$$\ddot{h}_{ij}(u) + \frac{4}{u}\dot{h}_{ij}(u) + h_{ij}(u) = 0, \quad (4.7)$$

a qual pode ser identificada como a equação esférica de Bessel de ordem 1, com solução geral dada por:

$$h_{ij}(k\eta) = C \left( \frac{\sin(k\eta) - (k\eta) \cos(k\eta)}{(k\eta)^3} \right) - D \left( \frac{\cos(k\eta) - (k\eta) \sin(k\eta)}{(k\eta)^3} \right). \quad (4.8)$$

Escrevendo a solução acima em termos das funções esféricas de Bessel e de Neumann temos:

$$h_{ij}(k\eta) = C \frac{j_1(k\eta)}{k\eta} + D \frac{n_1(k\eta)}{k\eta}. \quad (4.9)$$

Para valores muito pequenos de  $k\eta$ , a função esférica de Neumann diverge, tal que exigimos  $D \equiv 0$ . Assim, definindo, como é comum em outros trabalhos [19, 20],  $C \equiv 3$ , temos que a solução para modos em um universo dominado por matéria é dado por:

$$h_{ij}(k\eta) = 3 \left( \frac{\sin(k\eta) - (k\eta) \cos(k\eta)}{(k\eta)^3} \right). \quad (4.10)$$

Nos dois casos mostrados acima, para um universo dominado por radiação e para um universo dominado por matéria não relativística, nós consideramos a ausência do stress anisotrópico dos neutrinos. Assim, podemos ver que as equações dos modos tensoriais são imediatamente reconhecidas como a equação de um oscilador harmônico amortecido modificada por coeficientes não constantes. Notamos também que para um universo dominado por matéria o fator de amortecimento (coeficiente da derivada de primeira ordem) é duas vezes o respectivo fator para um universo dominado por radiação. Isso explica um eventual amortecimento mais significativo dos modos de propagação em um universo dominado por matéria.

Embora essas soluções sejam específicas e simples, foi instrutivo apresentá-las, uma vez que com elas mostramos a possibilidade de obter soluções analíticas para ondas gravitacionais primordiais para alguns cenários particulares.

## 5 *Interação de ondas gravitacionais com neutrinos*

No capítulo anterior resolvemos as equações dos modos tensoriais para dois universos particulares, dominado por radiação e dominado por matéria. Consideramos apenas o caso sem neutrinos, ou seja, sem a influência do stress anisotrópico no tensor momento-energia. De certa forma, levamos em conta apenas perturbações na métrica.

Neste capítulo iremos estudar a influência do tensor de stress anisotrópico dos neutrinos sobre a propagação de ondas gravitacionais primordiais. Uma vez que o tensor de stress dos fótons pode ser desconsiderado pois estes permanecem acoplados aos bárions (cosmológicos), de tal modo que interações intermitentes suprimem esta contribuição, e a contribuição de outras partículas massivas, não relativísticas, são irrelevantes quando inseridas na equação de Einstein, iremos assumir que a única perturbação sobre o tensor momento-energia advém da inclusão de neutrinos cosmológicos ao plasma do universo. As ondas gravitacionais irão interagir com o fluido segundo a equação demonstrada no capítulo 3:

$$\ddot{h}_{ij} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_{ij} + k^2 h_{ij} = \frac{3}{2\pi} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \frac{R_\nu}{1 + (1 - R_\nu)\frac{\Omega_m}{\Omega_\gamma}} \mathcal{F}_{ij}^{(0)}, \quad (5.1)$$

onde  $\mathcal{F}_{ij}^{(0)}$  é obtido segundo o sistema de equações expandidas em multipolos desenvolvido no mesmo capítulo:

$$\dot{\mathcal{F}}_{ij}^{(0)} = -k \mathcal{F}_{ij}^{(1)} - \frac{8\pi}{15} \dot{h}_{ij} + \mathcal{C}_{ij}^{(0)}, \quad (5.2)$$

$$\dot{\mathcal{F}}_{ij}^{(2)} = -\frac{k}{5} [3\mathcal{F}_{ij}^{(3)} - 2\mathcal{F}_{ij}^{(1)}] - \frac{16\pi}{105} \dot{h}_{ij} + \mathcal{C}_{ij}^{(2)}, \quad (5.3)$$

$$\dot{\mathcal{F}}_{ij}^{(4)} = -\frac{k}{9} [5\mathcal{F}_{ij}^{(5)} - 4\mathcal{F}_{ij}^{(3)}] - \frac{8\pi}{315} \dot{h}_{ij} + \mathcal{C}_{ij}^{(4)}, \quad (5.4)$$

$$\dot{\mathcal{F}}_{ij}^{(\ell)} = -\frac{k}{2\ell + 1} [(\ell + 1)\mathcal{F}_{ij}^{(\ell+1)} - \ell \mathcal{F}_{ij}^{(\ell-1)}] + \mathcal{C}_{ij}^{(\ell)} \quad (\ell \neq 0, 2, 4). \quad (5.5)$$



Como já dito, utilizamos o *Software Mathematica*, versão 7.0, para resolver nossos cálculos. Durante o desenvolvimento do trabalho, foi possível conhecer e aprimorar técnicas de integração numérica e de controle de convergência durante os cálculos. Nossa programação foi toda escrita de modo que o parâmetro  $R_\nu$  levasse em conta a quantidade de famílias de neutrinos considerada. Com isso nossos algoritmos podem, ao menos em princípio, ser usados para outros modelos teóricos em que a quantidade de neutrinos seja diferente da prevista pelo modelo padrão.

Em ordem para deixar nosso sistema de equações invariante de escala, iremos descrever nossas funções em função da nova variável  $k\eta$ . Assim, a Eq. (2.35) pode ser aproximadamente escrita em termos da variável  $k\eta$  como:

$$\begin{aligned} a(\eta) &\approx \frac{2\pi G\rho_0\Omega_m}{3}\eta^2 + \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0\Omega_r}{3}}\eta, \\ &\approx \frac{1}{k} \left( \frac{8\pi G}{3}\Omega_r \right)^{1/2} \left[ \frac{(k\eta)^2}{4k\eta_{eq}} + k\eta \right], \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde  $\eta_{eq} = (3\Omega_r/(8\pi G))^{1/2}/\Omega_m$  é o valor do tempo conforme na igualdade radiação matéria e foi obtido igualando-se as Eqs. (2.33) e (2.31).

Lembrando que a Eq. (5.1) foi obtida assumindo-se um fundo cosmológico de radiação e matéria, o qual denominamos RMD, nosso tratamento permite considerar ondas gravitacionais que entraram no horizonte tanto na era da radiação como na era da matéria. Desse modo, estamos levando em conta ondas com valores de  $k \sim 0.1[Mpc]^{-1}$  (início da era da matéria) e ondas com valores de  $k \gg 0.1[Mpc]^{-1}$  (era da radiação).

Além de estudar a inclusão dos neutrinos ao plasma, iremos também considerar colisões efetivas inerentes ao fluido. O termo responsável pelas colisões no sistema é  $\mathcal{C}_{ij}^{(l)}$ . Esse termo representa toda forma de interações envolvendo neutrinos, e será mais a frente parametrizado para poder ser contabilizado em nossos cálculos.

Para levar em conta a adição de neutrinos ao plasma cosmológico, iremos variar o valor de  $R_\nu$ . Para obter o valor padrão para três famílias de neutrinos, escrevemos a densidade de energia dos neutrinos,  $\bar{\rho}_\nu$ , em termos da densidade de energia dos fótons,  $\bar{\rho}_\gamma$ , como [15]:

$$\bar{\rho}_\nu = 3\frac{7}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} \bar{\rho}_\gamma, \quad (5.7)$$

onde o número 3 é a quantidade de famílias de neutrinos segundo o modelo padrão.

Então, substituímos a relação 5.7 na nossa definição de  $R_\nu$  e obtemos o valor para o caso padrão de três famílias de neutrinos,  $R_\nu = 0.4052$ . Desse modo,  $R_\nu = 0$  representa

a ausência do stress anisotrópico dos neutrinos,  $R_\nu = 0.4052$  o valor padrão, e  $R_\nu \approx 1$  representa o caso em que assumimos a existência de outros tipos de graus de liberdade (Ex.: número extras de sabores). Na verdade,  $R_\nu = 1$  corresponde a um caso exageradamente limítrofe para esta contribuição, no caso da mesma ser máxima. Vale ressaltar que o caso  $R_\nu = 1$  é mais um limite matemático do que um limite físico, uma vez que segundo o modelo padrão cosmológico existe um intervalo muito pequeno no qual a quantidade de famílias de neutrinos pode variar [21]. Assumimos os valores cosmológicos padrões para os parâmetros de densidade  $\Omega_i$ , com  $i = \gamma$  e  $m$ , tal que  $\Omega_\gamma/\Omega_m \approx 10^{-4}$ .

## 5.1 Regime de *free-streaming* dos neutrinos

Primeiramente, iremos desconsiderar os efeitos devido ao termo de colisões, ou seja,  $C_{ij}^{(l)} = 0$  em nosso sistema de equações. Essa consideração caracteriza o regime de *free-streaming* dos neutrinos, quando eles já desacoplaram do plasma e comportam-se como partículas livres,  $T \ll 1MeV$ . Em outras palavras, este regime é relevante para ondas gravitacionais que entram no horizonte após o desacoplamento.

A fim de resolver numericamente nossas equações, as condições iniciais apropriadas podem ser escritas como  $\dot{h}_{ij}(0) = 0$  e  $\mathcal{F}_{ij}^{(l)}(0) = 0$ . Além disso, iremos usar a mesma arbitrariedade para escolher o valor da amplitude inicial antes dos modos entrarem no horizonte de Hubble como sendo  $h_{ij}^{(0)} = 1$ . Trabalhando com a variável  $k\eta$  de modo a suprimir a dependência explícita em  $k$ , nós iremos identificar o valor  $k\eta \sim 1$  nos gráficos como sendo o momento em que os modos cruzam o horizonte. É importante lembrar que nossa parametrização feita em  $a(\eta)$  deixa nossa variável  $\eta$  escrita em unidades de  $\eta_{eq}$  para o cenário RMD.

Afim de comparar o acoplamento do stress anisotrópico dos neutrinos com ondas gravitacionais na era de domínio da radiação (RD) e em um regime de transição radiação-matéria (RMD), resolvemos o sistema de equações acopladas para 1200 multipolos e mostramos a amplitude dos modos na Fig. 2.

Como é possível notar na Fig. 2, os modos no domínio RMD são amortecidos mais acentuadamente do que aqueles no domínio RD. Isso se deve ao fato de nas curvas RMD estarmos contabilizando o efeito da matéria. Podemos notar também uma diferença de fase constante entre as curvas nos dois regimes de domínio. Essa fase pode ser naturalmente explicada devido a diferença de oscilação das respectivas curvas, uma vez que no

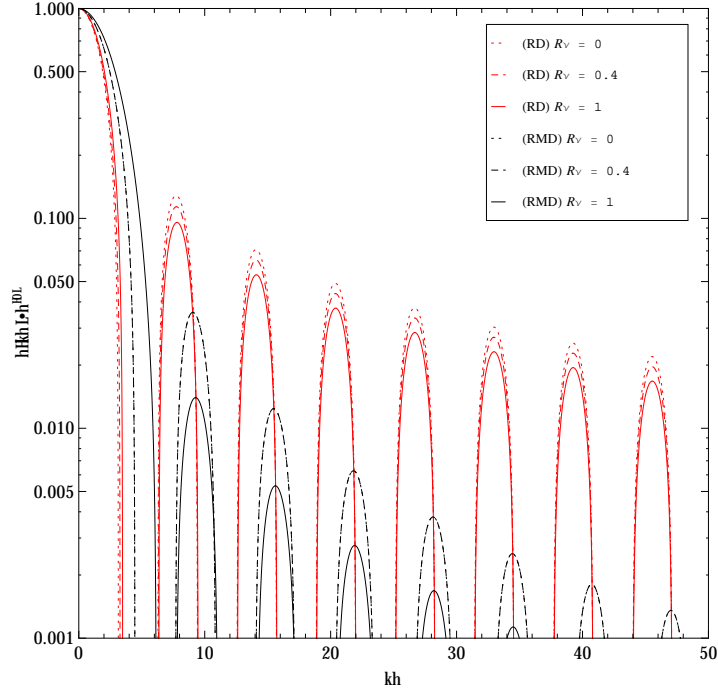


Figura 2: Evolução da amplitude das ondas normalizadas  $h_{ij}/h_{ij}^{(0)}$  como função de  $k\eta$  para o cenário cósmico de fundo RD (curvas vermelhas) e RMD (curvas pretas). Os resultados são para stress anisotrópico nulo (curvas pontilhadas), para  $R_\nu = 0.4052$  (curvas tracejadas), e para  $R_\nu = 1$  (curvas contínuas). Note que as curvas no regime RMD são descritas para  $\eta$  como múltiplo de  $\eta_{eq}$ .

limite de domínio da radiação,

$$|h_{ij}(k\eta)| = \frac{\sin(k\eta)}{k\eta}, \quad (5.8)$$

e no limite de domínio da matéria,

$$|h_{ij}(k\eta)| = 3 \frac{(\sin(k\eta) - k\eta \cos(k\eta))}{(k\eta)^3}. \quad (5.9)$$

A vantagem de escrever nossos resultados em função de uma variável independente de escala nos obriga a escrever  $k\eta$  em unidades de  $k\eta_{eq}$ . Desse modo, a Fig. 3 mostra o mesmo resultado da Fig. 2, mas agora para  $\eta$  descrito em termos de  $0.1\eta_{eq}$  e  $0.01\eta_{eq}$ . Segundo as figuras, podemos notar que a medida que diminuimos a referência de escala para  $\eta$  como múltiplo de  $\eta_{eq}$  as curvas no domínio RMD tendem às curvas no domínio RD.

Esse fato é esperado, uma vez que fazendo isso estamos cada vez mais entrando na era da radiação, ou seja, o efeito devido à matéria passa a ser suprimido. A Fig. 2 também mostra que a inclusão de neutrinos amortecce as ondas gravitacionais, agindo como uma força de atrito viscoso na propagação dos modos, sendo o efeito, relativo aos neutrinos, mais notório no domínio de radiação.

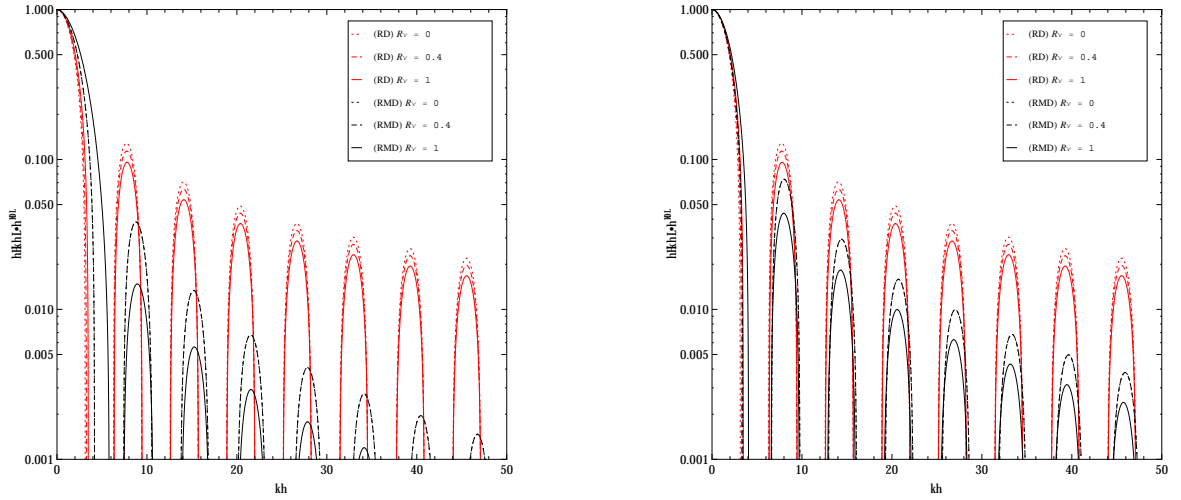


Figura 3: Mesmo gráfico como na Fig. 2, mas agora para  $\eta$  como múltiplo de  $0.1\eta_{eq}$  (figura à esquerda) e para  $\eta$  como múltiplo de  $0.01\eta_{eq}$  (figura à direita). Note a modificação na diferença de fase entre os três gráficos.

Uma vez que o stress anisotrópico dos neutrinos atua como uma força de atrito viscoso, amortecendo as onda gravitacionais, nós podemos tentar avaliar algum comportamento dependente da frequência conforme os neutrinos se desacoplam do plasma. Para fazer isso, quantificamos o efeito do amortecimento dependente da frequência através do cálculo da média temporal  $D(k)^2 \equiv \langle 2(k\eta)^2 |h_{ij}(k\eta)|^2 \rangle$  como função da escala cosmológica  $k[Mpc]^{-1}$ . Nossos resultados serão apresentados em termos da escala cosmológica  $\eta_0 \approx 5000[Mpc]^{-1}$ . Dessa forma,  $k$  será descrito em unidades de  $[1/\eta_0]$ . Além disso, da expressão de  $D(k)^2$ , logo notamos que para  $h_{ij} = \sin(k\eta)/k\eta$  obtemos  $D(k) = 1$ .

Calculamos nossa quantidade média dependente da frequência para três valores de  $R_\nu$ , de modo a avaliar o impacto do stress anisotrópico dos neutrinos sobre  $D(k)^2$ . A Fig. 4 mostra o resultado de nossa integração numérica nas eras RD e RMD, de modo a podermos comparar também a influência da matéria.

Pode ser visto na Fig. 4 a comparação entre as médias  $D(k)^2$  na era da radiação (RD)

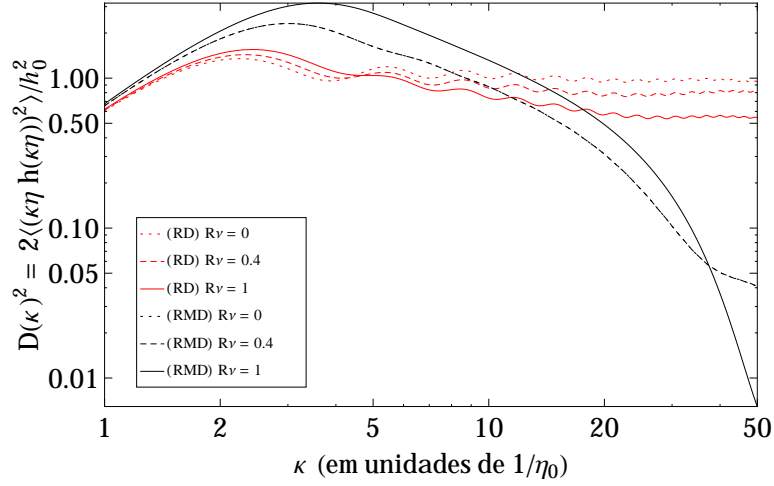


Figura 4: Média temporal de  $(k\eta)^2 |k_{ij}(k\eta)|^2$  como função de  $k[\text{Mpc}]^{-1}$  para a era de domínio da radiação (curvas vermelhas) e para um período de transição radiação-matéria (curvas pretas). Os resultados são para a ausência do stress anisotrópico (curvas pontilhadas), para  $R_\nu = 0.4052$  (curvas tracejadas), e para  $R_\nu = 1$  (curvas contínuas). Note a existência de um valor  $\tilde{k}$  para o qual tanto na RD quanto RMD a curva contínua cruza com as outras duas curvas.

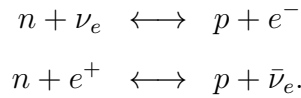
e em um período de transição radiação matéria (RMD). A curva pontilhada vermelha naturalmente representa o caso quando os modos tensoriais são descritos por  $h_{ij}(k\eta) = \sin(k\eta)/k\eta$ , como já comentamos acima. Podemos notar que a curva obtida para  $R_\nu = 1$  cruza as curvas para  $R_\nu = 0$  e para  $R_\nu = 0.4$  em algum valor  $\tilde{k}$  descrito em termos de  $\eta_0$ . Uma vez que nossa média é quantificada a partir de uma escala temporal  $\eta_*$  até o tempo presente,  $\eta = \eta_0$ , ela é válida apenas para escalas (das ondas gravitacionais) que entram no horizonte para valores de tempo  $\eta < \eta_*$ . Assim, podemos indicar superficialmente um dado valor de  $\tilde{k}$  a partir do qual o cálculo da média é válido. Em outras palavras, para valores de  $k > \tilde{k}$  temos uma quantidade suficiente de ciclos de oscilação tal que  $D(k)^2$  forneça valores representativos.

A Fig. 4 também mostra o efeito da inclusão de matéria como constituinte de fundo cósmico. De forma geral, a matéria atua de forma a aumentar o valor de  $\tilde{k}$  no qual a verdadeira média é quantificada. O parâmetro de matéria também deixa menos evidente a diferença entre a ausência do stress anisotrópico e o valor padrão de neutrinos,  $R_\nu = 0.4052$ . Isso é explicado tendo em vista o termo adicional  $\Omega_m/\Omega_\gamma$  na equação dos modos tensoriais, que surge quando consideramos o período de transição radiação-matéria.

## 5.2 Regime relevante para colisões

Após termos estudado o acoplamento de ondas gravitacionais primordiais ao stress anisotrópico dos neutrinos para o regime de *free-streaming*, avaliando a evolução dos modos tensoriais em função da variável adimensional  $k\eta$  e calculando a quantidade  $D(k)^2$  como nossa média temporal, iremos obter os mesmos resultados no caso em que o termo de colisões é considerado.

No modelo padrão, neutrinos interagem via interação fraca com  $e^+$  e  $e^-$  através dos diagramas [22]



O desacoplamento dos neutrinos do plasma cosmológico acontece aproximadamente quando a taxa de expansão do universo,  $H$ , passa ser maior do que a taxa de interação dos neutrinos. A partir disso eles se comportam como partículas livres, e conseguimos os resultados da Sec. 5.1. Considerando os neutrinos como um único fluido, a temperatura na qual acontece o desacoplamento é  $T \sim 1MeV$ . Desse modo, nossos resultados em que iremos considerar os termos de colisão em nosso sistema de equações acopladas são para o regime de  $T > 1MeV$ .

A consideração de interação de neutrinos é muito complicada e pode ser detalhadamente vista em [22, 23]. Assim, em vista para considerar todos os possíveis tipos de interações envolvendo neutrinos antes do desacoplamento ( $T > 1MeV$ ), iremos adotar uma parametrização em que o termo  $C_{ij}^{(l)}$  representa tais interações. Além disso, iremos assumir que podemos escrever

$$\hat{C}[f] = -f_0 \frac{\Psi}{\tau}, \quad (5.10)$$

onde  $\tau$  é o tempo médio entre colisões. Usando toda manipulação algébrica da expansão

em multipolos desenvolvida no capítulo 3 para esta parametrização, obtemos

$$\mathcal{C}_{ij}^{(l)} = -\frac{\mathcal{F}_{ij}^{(l)}}{\tau}. \quad (5.11)$$

O uso do fator  $\tau$  como tempo médio entre colisões representa bem o comportamento de  $\mathcal{C}_{ij}^{(l)}$ . Para  $\tau \ll 1$  estamos no regime de muitas colisões, o que representa o caso quando os neutrinos estão fortemente acoplados ao plasma. Já  $\tau \gg 1$  condiz com a situação aproximada de *free-streaming* dos neutrinos, ou seja, raras colisões. Na realidade, como estamos trabalhando com a variável adimensional  $k\eta$ , iremos adotar a nova variável temporal entre colisões  $k\tau$ , que contém as mesmas características de  $\tau$ .

Para  $k\tau \ll 1$ , muitas colisões, podemos escrever  $\tau \ll 1/k$ . Assim, no limite de  $\tau \gg 1$ ,  $k$  torna-se muito pequeno, de modo que podemos desprezar os termos que multiplicam  $k$  na Eq. (5.5) e temos a equação

$$\dot{\mathcal{F}}_{ij}^{(l)} \approx -\frac{\mathcal{F}_{ij}^{(l)}}{\tau} \Rightarrow \frac{d\mathcal{F}_{ij}^{(l)}}{\mathcal{F}_{ij}^{(l)}} \approx -\frac{d\eta}{\tau} \Rightarrow \mathcal{F}_{ij}^{(l)} \propto e^{-\eta/\tau}, \quad (5.12)$$

significando que o stress anisotrópico decai exponencialmente com o tempo.

Consequentemente o comportamento assintótico de  $\mathcal{C}_{ij}^{(l)}$  fica dado por

$$\mathcal{C}_{ij}^{(l)} \propto -\frac{e^{-\eta/\tau}}{\tau}. \quad (5.13)$$

Para analisar o efeito de colisões sobre a propagação de ondas gravitacionais consideramos os seguintes valores para  $k\tau$ : 0.01, 0.1, 1, 10. Assim, podemos avaliar a evolução dos neutrinos passando de um fluido fortemente acoplado até quando se comportam aproximadamente como partículas livres. A evolução das ondas gravitacionais quando consideramos termos de colisão, em um período de transição radiação-matéria, é mostrada na Fig. 5.

Como podemos ver na Fig. 5, para o valor padrão  $R_\nu = 0.4052$  é mostrado apenas a curva sem colisões. Isso é feito pois, variando o parâmetro de colisões  $k\tau$  as curvas vermelhas não sofrem alterações e por isso são sobrepostas. Entretanto, se considerarmos a possibilidade de muitas famílias de neutrinos,  $R_\nu = 1$ , o efeito das colisões torna-se evidente. A medida que aumentamos o valor de  $k\tau$ , a evolução das ondas gravitacionais se aproxima daquela para o caso sem colisões. Sendo que, diminuindo o valor de  $\tau$  estamos regredindo na história dos neutrinos, chegando ao ponto de um fluido fortemente acoplado, o caso extremo de  $k\tau = 0.01$  representa a mínima influência dos neutrinos sobre

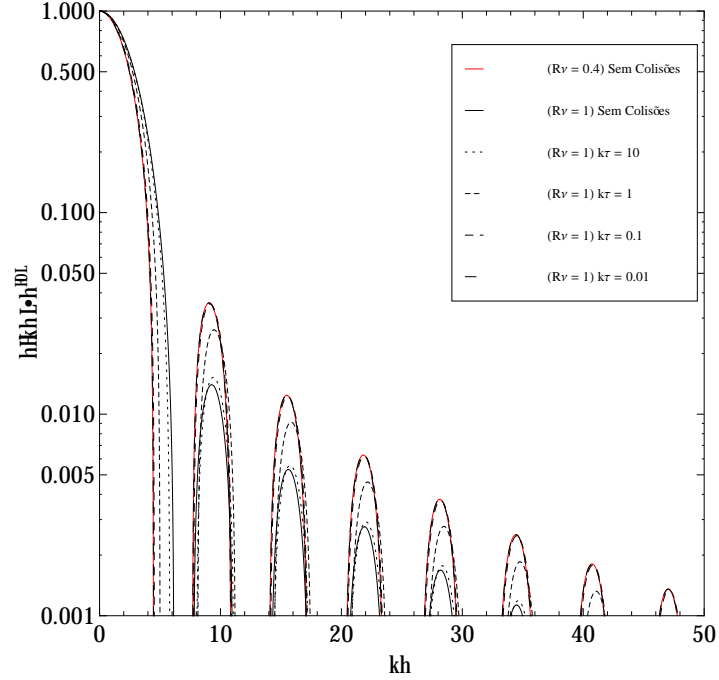


Figura 5: Evolução da amplitude das ondas normalizadas  $h_{ij}/h_{ij}^{(0)}$  como função de  $k\eta$  para era RMD no caso em que consideramos termos de colisão. Os resultados são para  $k\tau = 0.01, 0.1, 1$ , e  $10$  e para o caso sem colisões de acordo com a legenda, com  $\tau$  em unidades de  $\eta_0$  e  $k$  em unidades de  $1/\eta_0$ . Nossos resultados são para três famílias de neutrinos,  $R_\nu = 0.4052$  (curvas vermelhas), e para o caso extremo de um grande número de famílias de neutrinos,  $R_\nu = 1$ .

a propagação das ondas gravitacionais, uma vez que o efeito de  $\mathcal{F}_{ij}^{(l)}$  torna-se desprezível.

Para avaliar o efeito das colisões sobre a média temporal das ondas gravitacionais,  $D(k)^2$ , consideramos dois valores aproximadamente limítrofes quanto à nossa parametrização de  $k\tau$ :  $0.01$  e  $10$ . Com isso, podemos estudar o efeito de raras colisões ( $k\tau = 10$ ) e muitas colisões ( $k\tau = 0.01$ ) sobre  $D(k)^2$ . Nossos resultados são mostrados na Fig. 6.

Como mostrado na Fig. 6, as curvas concordam com as interpretações físicas para os limites de  $k\tau \ll 1$  e para  $k\tau \gg 1$ . Podemos notar também que para muitas colisões a curva para  $R_\nu = 1$  torna-se aproximadamente idêntica à curva para  $R_\nu = 0.4052$ , confirmando o fato de que o aumento de colisões suprime a atuação do stress anisotrópico dos neutrinos como uma força viscosa de atrito.

Nossa análise neste capítulo deu-se em torno da influência do stress anisotrópico dos



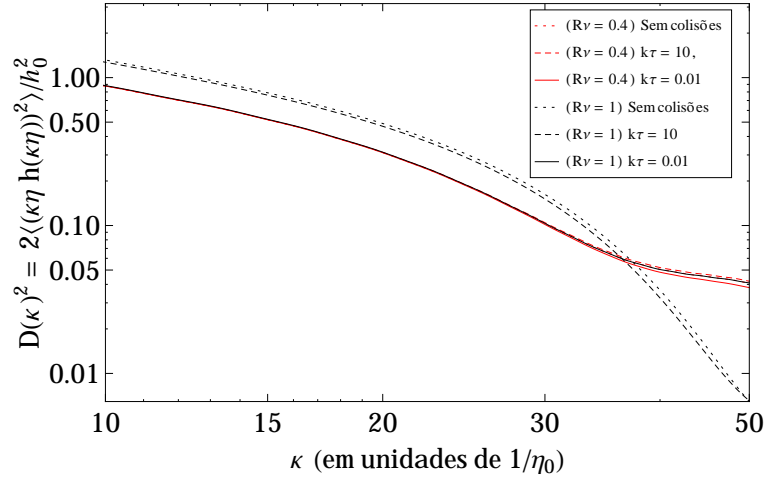


Figura 6: Média temporal de  $(k\eta)^2 |h_{ij}(k\eta)|^2$  como função de  $k[Mpc]^{-1}$  para o cenário RMD em que levamos em conta termos de colisão. Os resultados são para  $k\tau = 0.01$  e 10 e para os casos sem colisões de acordo com a legenda, com  $\tau$  em unidades de  $\eta_0$  e  $k$  em unidades de  $1/\eta_0$ .

neutrinos sobre as ondas gravitacionais primordiais. Para isso, estudamos o comportamento da amplitude das ondas e calculamos a média temporal,  $D(k)^2$ . Separamos nosso estudo em duas partes, na ausência e inclusão de colisões. Mostramos que, para um dado valor de  $k\tau$  tal que  $k\tau \ll 1$ , recuperamos o resultado de ausência do tensor de stress anisotrópico. De fato, notamos que a medida que  $k\tau$  diminui,  $\mathcal{C}_{ij}^{(l)}$  aumenta, e por outro lado  $\mathcal{F}_{ij}^{(l)}$  decai exponencialmente, segundo as Equações (5.12) e (5.13).

Nossos resultados mostram também que o valor de  $\tilde{k}$  para o qual o número de ciclos de oscilação passa a ser suficiente para realizar a média  $D(k)^2$  é alterado sutilmente devido a inclusão de colisões parametrizadas por  $k\tau$ . O parâmetro  $\tilde{k}$  e o comportamento das curvas para  $R_\nu = 0.4052$  são recuperados quando levamos em conta  $k\tau \ll 1$  para  $R_\nu = 1$ .

## 6 *Contribuição do stress anisotrópico dos neutrinos na temperatura da RCF*

Neste capítulo, vamos quantificar a contribuição do stress anisotrópico dos neutrinos sobre a temperatura da radiação cósmica de fundo (RCF). A detecção direta de anisotropias na temperatura da RCF foi realizada pelo satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*)[1]. De forma geral, as anisotropias na temperatura podem ser escritas como a temperatura de fundo dos fótons ( $T_0$ ) mais uma pequena perturbação no campo de temperatura:

$$T(\vec{x}, \hat{p}, \eta) = T(\eta)[1 + \Theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta)], \quad (6.1)$$

onde  $\Theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta) = \delta T/T$ .

Embora este campo de temperatura seja definido em cada ponto do espaço-tempo, nós podemos observar somente na data e no local em que estamos atualmente, ou seja, observamos nas coordenadas presentes  $(\vec{x}_0, \eta_0)$  [15]. Assim, é possível medir anisotropias na RCF devido a dependência na direção  $\hat{p}$ . Seguindo o procedimento usual, nós expandimos a perturbação no campo de temperatura em harmônicos esféricos [15, 24]:

$$\Theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta) = \frac{\delta T}{T_0} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\vec{x}, \eta) Y_{lm}(\hat{p}). \quad (6.2)$$

Aqui, usamos  $T_0$  para representar a temperatura dos fótons de fundo cósmico. Desta expressão, toda informação contida no campo de temperatura também pode ser conseguida através da amplitude dependente do espaço-tempo  $a_{lm}$ . Para descrever  $a_{lm}$  em termos do campo  $\Theta$ , usamos a relação de ortogonalidade dos harmônicos esféricos:

$$\int d\Omega Y_{lm}(\hat{p}) Y_{l'm'}(\hat{p}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (6.3)$$

onde  $\Omega$  é o ângulo sólido em termos de  $\hat{p}$ .

Multiplicando ambos os lados da Eq. (6.2) por  $Y_{lm}^*(\hat{p})$  e integrando, obtemos

$$a_{lm}(\vec{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{p}} \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{p}) \Theta(\vec{k}, \hat{p}, \eta). \quad (6.4)$$

Note que fizemos a transformada de Fourier em  $\Theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta)$ . Para calcular a variância devido a perturbações na temperatura, nós multiplicamos a Eq. (6.4) por  $a_{lm}^*$ , tal que chegamos em

$$\delta_W \delta_{mm'} C_l \equiv a_{lm} a_{l'm'}^* = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{p}) \Theta(\vec{k}, \hat{p}) \int d\Omega' Y_{l'm'}^*(\hat{p}') \Theta(\vec{k}', \hat{p}') \quad (6.5)$$

## 6.1 $C_l$ para perturbações tensoriais

Com base nos elementos matriciais que representam perturbações tensoriais na métrica, podemos decompor a perturbação tensorial na temperatura como

$$\Theta^T(k, \mu, \phi) = \Theta_+^T(k, \mu)(1 - \mu^2) \cos(2\phi) + \Theta_\times^T(k, \mu)(1 - \mu^2) \sin(2\phi), \quad (6.6)$$

onde  $(1 - \mu^2) = \sin^2(\theta)$  e  $\mu = \cos(\theta)$ , e o sobrescrito “T” representa apenas a contribuição tensorial no campo de temperatura.

A partir disso a contribuição tensorial para a variância de temperatura fica dada por [15]:

$$C_{l,i}^T = \frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 \times \left| \frac{\Theta_{l-2,i}^T}{(2l-1)(2l+1)} + 2 \frac{\Theta_{l,i}^T}{(2l-1)(2l+3)} + \frac{\Theta_{l+2,i}^T}{(2l+1)(2l+3)} \right|^2, \quad (6.7)$$

onde  $i$  denota os modos representados por  $+$  e  $\times$ , e  $\Theta_{l,i}^T$  é obtido de

$$\begin{aligned} \Theta_{l,i}^T &= -\frac{1}{2} \int_{\eta_*}^{\eta_0} d\eta j_l[k(\eta_0 - \eta)] \dot{h}_{ij}, \\ \Theta_{l,i}^{T(MD)} &\approx -\frac{1}{2} \int_{\eta_*}^{\eta_0} d\eta j_l[k(\eta_0 - \eta)] \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{3j_1(k\eta)}{k\eta} \right] P_h^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde a última linha é uma aproximação analítica para o cenário de domínio da matéria e  $P_h^{1/2}$  é a amplitude inicial das ondas gravitacionais.

Substituindo a Eq. (6.8) na Eq. (6.7):

$$\begin{aligned} C_l^T &= 2 \frac{9(l-1)l(l+1)(l+2)}{4\pi} \int_0^\infty dk k^2 P_h(k) \\ &\times \left| \int_0^{\eta_0} d(k\eta) \frac{j_2(k\eta)}{k\eta} \left[ \frac{j_{j-2}(k[\eta_0 - \eta])}{(2l-1)(2l+1)} + 2 \frac{j_l(k[\eta_0 - \eta])}{(2l-1)(2l+3)} + \frac{j_{l+2}(k[\eta_0 - \eta])}{(2l+1)(2l+3)} \right] \right|^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Na expressão acima assumimos que estamos interessados em valores de  $\eta_* \ll \eta_0$ , tal que consideramos  $\eta_* = 0$  no limite de integração. Usamos também o fato de que  $(j_1/x)' = -j_2/x$ . Além disso, o fator 2 vem do fato de estarmos somando as componentes  $+$  e  $\times$  dos modos tensoriais. Usando a seguinte expressão para o espectro de potencia das onda gravitacionais:

$$P_h(k) = \frac{8\pi}{k^3} \frac{H^2}{m_{Pl}^2}, \quad (6.10)$$

onde estamos assumindo a aproximação de *slow-roll* para a inflação, e definindo novas variáveis de integração  $y \equiv k\eta_0$  e  $x \equiv k\eta$ , nós finalmente conseguimos uma expressão final para  $C_l^T$ :

$$C_l^T = 36 \left( \frac{H_{inf}}{m_{Pl}} \right)^2 (l-1)l(l+1)(l+2) \int_0^\infty \frac{dy}{y} \times \left| \int_0^y dx \frac{j_2(x)}{x} \left[ \frac{j_{l-2}(y-x)}{(2l-1)(2l+1)} + 2 \frac{j_l(y-x)}{(2l-1)(2l+3)} + \frac{j_{l+2}(y-x)}{(2l+1)(2l+3)} \right] \right|^2. \quad (6.11)$$

Na expressão,  $H_{inf}$  representa o valor do parâmetro de Hubble durante o período inflacionário do universo ou, de forma mais precisa, quando os modos de interesse cruzaram o horizonte ( $k\eta \sim 1$ ).

Devido a está expressão ter sido obtida para soluções na era de domínio da matéria, ela é válida apenas para pequenos valores de multipolos. Para conseguirmos incluir ondas gravitacionais que entraram no horizonte na era da radiação, podemos usar uma função transferência  $T(k/k_{eq})$ , onde  $k_{eq}$  é a escala que entra no horizonte na igualdade radiação-matéria, ou resolver as equações para  $C_l^T$  no período de transição radiação-matéria RMD. Nossos resultados são obtidos para o domínio RMD, mas comparamos eles com a solução analítica no caso sem neutrinos.

A fim de comparar nossos resultados no regime RMD com a solução analítica na era da matéria inserindo uma função transferência, resolvemos o caso analítico usando a função transferência obtida em [19]:

$$T(k/k_{eq}) = [1.0 + 1.34(k/k_{eq}) + 2.50(k/k_{eq})^2]^{1/2}. \quad (6.12)$$

Em termos gerais, a função transferência acima garante que consideremos ondas gravitacionais que entram no horizonte na era da radiação. Existem outras funções transferência, porém são funções de ajuste fino, usadas para estudar algum fenômeno específico. Portanto, para os objetivos de nosso trabalho, o uso apenas da Eq. (6.12) é suficiente.

A Fig. 7 mostra a diferença em se considerar modos que entraram no horizonte na era da radiação através do uso da função transferência, Eq. (6.12). Vemos que para baixos

valores de multipolos a diferença não é significativa.

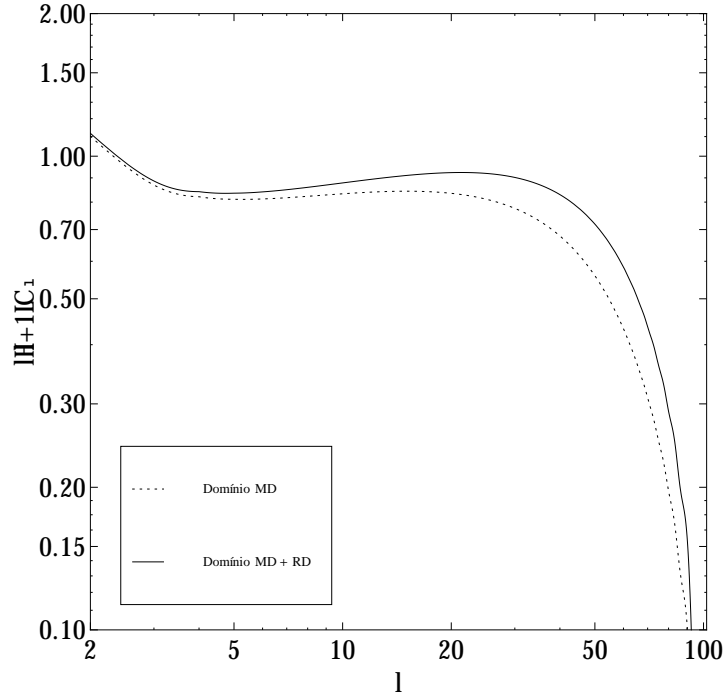


Figura 7: Contribuição tensorial para o espectro de potência angular para o caso analítico sem a função transferência (curva pontilhada) e com a função transferência para levar em conta modos que entraram no horizonte na era da radiação (curva contínua). Note que para baixos valores de multipolo as curvas são aproximadamente as mesmas.

### 6.1.1 $C_l^T$ para o domínio RMD

A fim de contabilizar o efeito do stress anisotrópico dos neutrinos sobre a variância de temperatura da RCF através do espectro de potência angular,  $C_l^T$ , nós calculamos numericamente a contribuição tensorial para o domínio RMD. Primeiramente, analisamos o caso sem colisões,  $\mathcal{C}_{ij}^{(l)} = 0$ . Nossos resultados são apresentados na Fig. 8, onde comparamos nossa solução numérica para  $R_\nu = 0$  com a solução analítica.

Como podemos observar, nossos resultados para  $R_\nu = 0$  seguem bem a curva analítica até  $l \sim 30$ , ou seja, para baixos valores de multipolos conseguimos bons resultados quando comparados com outros trabalhos de caráter analítico [19] e numérico [25]. A figura também mostra uma diferença sutil quando consideramos o valor padrão de três famílias de neutrinos ( $R_\nu = 0.4052$ ) em comparação ao resultado na ausência do stress anisotrópico.

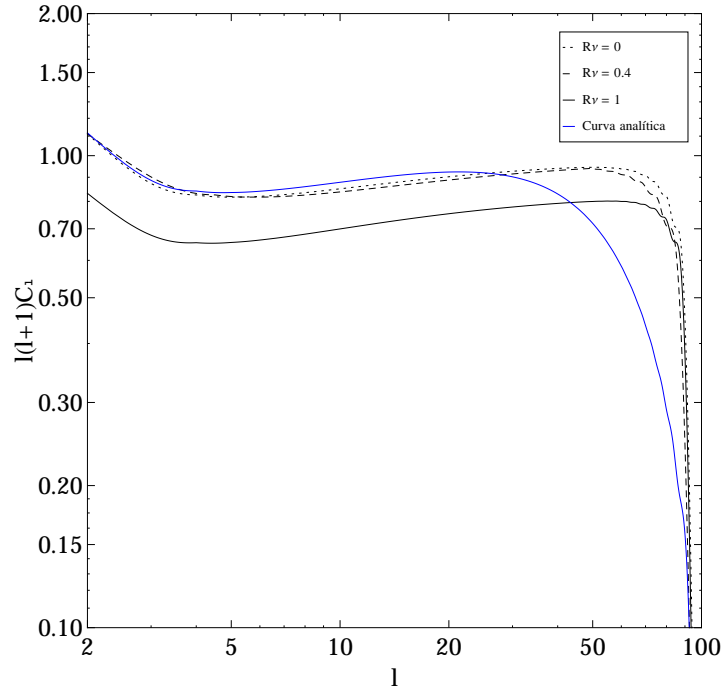


Figura 8: Contribuição tensorial para o espectro de potência angular no cenário RMD. Os resultados são para o stress anisotrópico nulo (curva pontilhada), para  $R_\nu = 0.4052$  (curva tracejada), e para  $R_\nu = 1$  (curva contínua). Comparamos ainda com a solução analítica para  $R_\nu = 0$  (curva azul).

Entretanto, quando consideramos muitas famílias de neutrinos ( $R_\nu = 1$ ), o efeito passa a ser mais efetivo, de modo que temos uma diminuição aproximadamente constante nos valores de  $C_l^T$  até  $l \sim 90$ , quando temos uma queda acentuada das curvas numéricas.

Analisamos também o efeito das colisões parametrizadas por um tempo médio entre colisões  $\tau$  sobre nossas equações. O procedimento de se incluir colisões é completamente análogo ao feito no caso apresentado na Sec.5.2 e novamente mostramos resultados para  $k\tau = 0.01, 0.1, 1$ , e 10. Nossos resultados são vistos na Fig. 9.

As diferenças devido aos termos de colisão são imperceptíveis quando levamos em conta três famílias de neutrinos. Por causa disso, é mostrado apenas a curva do  $C_l^T$  para  $R_\nu = 0.4052$  sem colisões, uma vez que as outras se sobrepõem a esta última. Um efeito mais aparente seria notado se levássemos em conta apenas modos que entraram no horizonte de Hubble na era da radiação. O efeito de se considerar muitas colisões no sistema, ( $k\tau \sim 0.01$ ), para  $R_\nu = 1$ , faz com que os  $C_l^{T,s}$  se aproximem dos valores

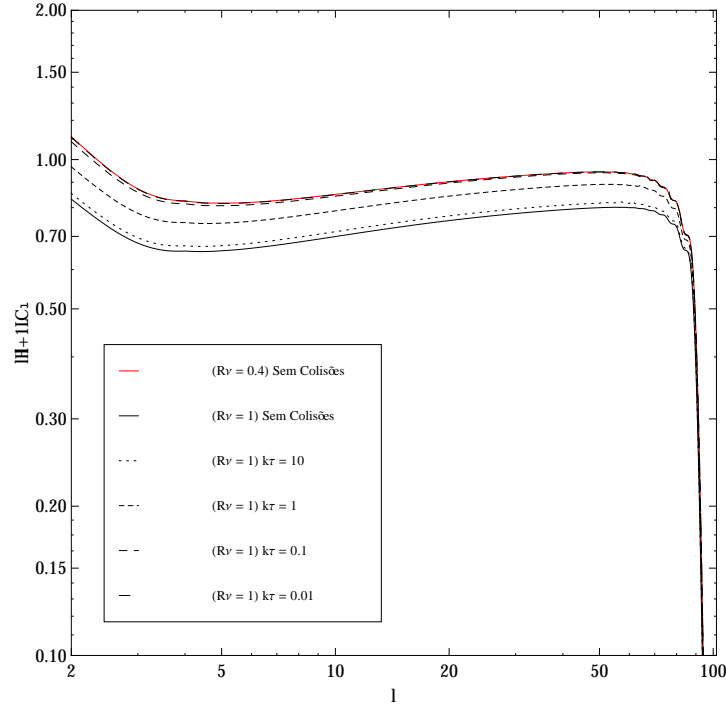


Figura 9: Contribuição tensorial para o espectro de potência angular para o cenário RMD considerando termos de colisão. Os resultados são para  $k\tau = 0.01, 0.1, 1$ , e  $10$ . Os casos sem colisões são mostrados de acordo com a legenda.

calculados para  $R_\nu = 0.4052$ , como mostrado na Fig. 9 e também discutido quando analisamos o impacto das colisões sobre a amplitude dos modos tensoriais. Isso ratifica o fato de que a inclusão de colisões contrabalança o efeito do stress anisotrópico dos neutrinos, uma vez que os neutrinos estão fortemente acoplados ao plasma.

### 6.1.2 Discussão sobre o termo de quadrupolo $C_2^T$ e o fator $r$

Neste último tópico sobre a influência do stress anisotrópico dos neutrinos, iremos discutir brevemente seu impacto na razão entre a contribuição tensorial e a contribuição escalar na variância de temperatura. Além disso, iremos também comentar sobre um parâmetro de *slow-roll* para garantir o modelo mais simples de inflação.

A fim de se comparar os efeitos das contribuições escalar e tensorial sobre a variância

de temperatura da RCF, é comum definir um parâmetro  $r$  tal como [24, 26]

$$r \equiv \frac{C_l^T}{C_l^S}, \quad (6.13)$$

onde  $C_l^T$  é a contribuição tensorial e  $C_l^S$  é a contribuição escalar.

Esta razão para quantificar o impacto das ondas gravitacionais é aproximada, pois ela assume um espectro independente do multipolo  $l$ . Em geral, as contribuições escalar e tensorial são dependentes de  $l$ . Além disso, a contribuição escalar é levada em conta assumindo-se apenas o efeito *Sachs-Wolfe* [15, 27]. Devido a isso, o fator  $r$  é mais comumente definido considerando o termo de quadrupolo para as contribuições escalar e tensorial, tal que

$$r = \frac{C_2^T}{C_2^S}. \quad (6.14)$$

Levando-se em conta a ausência de qualquer anisotropia sobre o tensor momento-energia, a razão entre  $C_2^T$  e  $C_2^S$  é dada por [15, 24]

$$r = 13.86\epsilon, \quad (6.15)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro usado para caracterizar a aproximação de *slow-roll* e é definido por [26]:

$$\epsilon \equiv \frac{m_{PI}^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \simeq -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (6.16)$$

tal que a condição de *slow-roll* exige  $\epsilon \ll 1$  durante a inflação, vide apêndice I.

Assumindo que essas aproximações são válidas e que o stress anisotrópico dos neutrinos não altera o valor da contribuição escalar,  $C_2^S$ , nós calculamos a influência dos neutrinos ao plasma cosmológico através de  $C_2^T$  e apresentamos novos valores para o fator  $r$ , mostrados na Tab. 1, onde levamos em conta apenas a inclusão de neutrinos. Resultados considerando termos de colisão parametrizados por um tempo médio entre colisões  $\tau$  são mostrados na Tab. 2. Nossos resultados foram calculados assumindo o cenário RMD.

Sendo que  $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ , os resultados acima mostram que a contribuição gravitacional é desconsiderada, se e somente se, a inflação evolui de modo exponencial, de acordo com as condições de *slow-roll*. Infelizmente, os resultados não mostram uma diferença entre a ausência do stress anisotrópico dos neutrinos e  $R_\nu = 0.4052$ , até a precisão de nossos resultados. Entretanto, quando levamos em conta a existência de outros graus de liberdade de neutrinos, tal que  $R_\nu = 1$ , nossos resultados mostram uma diferença perceptível, em



$R_\nu$	$C_2^T$	r
0	0.18534	13.86 $\epsilon$
0.4052	0.18534	13.86 $\epsilon$
1	0.1387	10.39 $\epsilon$

Tabela 1: Valores de  $C_2^T$  e as respectivas razões entre a contribuição escalar e tensorial para o termo de quadrupolo, para stress anisotrópico dos neutrinos nulo ( $R_\nu = 0$ ), para  $R_\nu = 0.4052$  e para diversas famílias de neutrinos ( $R_\nu = 1$ ). Os resultados são para o domínio RMD.

$k\tau$	$C_2^T(R_\nu = 0.4)$	$r(R_\nu = 0.4)$	$C_2^T(R_\nu = 1)$	$r(R_\nu = 1)$
$k\tau = 10$	0.1853	13.86 $\epsilon$	0.1424	10.67 $\epsilon$
$k\tau = 1$	0.1853	13.86 $\epsilon$	0.1612	12.07 $\epsilon$
$k\tau = 0.1$	0.1853	13.86 $\epsilon$	0.1812	13.56 $\epsilon$
$k\tau = 0.01$	0.1853	13.86 $\epsilon$	0.1849	13.85 $\epsilon$

Tabela 2: Valores de  $C_2^T$  e as respectivas razões entre a contribuição escalar e tensorial para o termo de quadrupolo, para o caso em que consideramos termos de colisão, para o valor padrão de três famílias de neutrinos,  $R_\nu = 0.4052$ , e para  $R_\nu = 1$ . Os resultados são para um universo RMD.

particular quando levamos em conta os termos de colisão, Tab. 2.

## 7 Conclusões

A detecção direta de ondas gravitacionais primordiais proporcionaria uma nova e única maneira de analisar os momentos mais remotos da história do universo, a saber, o período inflacionário. Além de contribuir para o estudo de diversos modelos teóricos em cosmologia, poderíamos analisar dados em uma escala de energia além da gerada pelos aceleradores de partículas atuais. A detecção direta destas ondas provenientes do período inflacionário talvez seja possível em um futuro próximo, devido aos projetos de interferômetros em andamento, em particular através da detecção de alterações na polarização da radiação cósmica de fundo.

Neste trabalho, nós estudamos teoricamente o acoplamento do tensor de stress anisotrópico dos neutrinos sobre ondas gravitacionais primordiais. Avaliamos o impacto do stress anisotrópico sobre a propagação das ondas e também suas consequências sobre a variância da temperatura da radiação cósmica de fundo através do cálculo de  $C_l^T$ . Através de cálculos analíticos e numéricos, mostramos que a inclusão de neutrinos ao plasma causa um amortecimento das ondas gravitacionais, em analogia a um oscilador harmônico amortecido. Sendo dois os efeitos que atuam sobre a propagação das ondas, a expansão do universo e a inclusão de neutrinos, foi possível mostrar que o stress anisotrópico dos neutrinos se comporta como uma força de atrito viscoso na propagação das ondas gravitacionais, absorvendo parte dessas ondas principalmente no limite de  $k \ll 0.1[Mpc]^{-1}$  (grandes comprimentos de onda).

Através da decomposição dos modos tensoriais, nós também estudamos o efeito do stress anisotrópico sobre a temperatura da radiação cósmica de fundo. Considerando apenas o efeito *Sachs-Wolfe* relativo a perturbações escalares, e assumindo que os neutrinos interagem apenas com as ondas gravitacionais, recalculamos a contribuição da parte tensorial em relação a parte escalar da variância da temperatura,  $C_2^T/C_2^S$ . Mostramos que nosso sistema de equações acopladas, construído através da expansão em multipolos, permite encontrar resultados mais precisos e suficientemente generalizados quando comparado com resultados analíticos na ausência do stress anisotrópico dos neutrinos.

Em todos nossos resultados, consideramos o efeito de interações a partir de termos de colisão parametrizados por um parâmetro  $\tau$ , para o caso padrão de três famílias de neutrinos  $R_\nu = 0.4052$  e assumindo um grande número de famílias de neutrinos  $R_\nu = 1$ . Notamos uma modificação na amplitude das ondas quando levamos em conta variações em  $\tau$ , além das curvas de  $C_l^T$  para o caso  $R_\nu = 1$  tenderem ao caso  $R_\nu = 0.4052$  quando  $\tau \sim 0.01$ . Fisicamente, esse último fato é esperado, uma vez que diminuindo o valor de  $\tau$  estamos considerando os neutrinos ainda mais acoplados ao plasma e portanto o efeito do stress anisotrópico torna-se desprezível. Uma vez que analisamos o impacto dos neutrinos sobre a temperatura da radiação cósmica de fundo, vimos que as ondas gravitacionais atuam como uma conexão entre a inclusão de neutrinos e seu efeito sobre  $C_l^T$ .

Embora efeitos sutis tenham sido conseguidos quando consideramos o valor padrão de  $R_\nu = 0.4052$ , a possibilidade exótica de um maior número de graus de liberdade para os neutrinos foi estudada assumindo  $R_\nu = 1$ . Assim, uma vez que dados futuros possam identificar um maior número de fontes que causam anisotropias na temperatura da radiação cósmica de fundo, a possibilidade envolvendo neutrinos pode ser avaliada observacionalmente através do fator  $r$ .

Em última análise, nosso estudo passa a fazer parte de uma variedade de outros trabalhos sobre a inclusão de neutrinos ao plasma cosmológico. Nossa desvantagem aparente em tratar numericamente o problema é compensada pelo fato de considerarmos um período de transição radiação-matéria (RMD), além da possibilidade de obtermos resultados, a princípio, para qualquer modelo cosmológico que assuma outras quantidades de famílias de neutrinos.

## *Referências*

- [1] C. L. Bennett, *et al.*, *The Astrophysical Journal Letters* **464**, L1 (1996).
- [2] A. Abramovici *et al.*, *Science* **256**, 325 (1992); B. Abbott, *et al.*, *Nucl. Instrum. Meth.* **A517**, 154 (2004). Veja também <http://www.ligo.org/>.
- [3] B. Caron *et al.*, *Class. Quantum Grav.* **14**, 1461 (1997); F. Acernese *et al.*, *Class. Quant. Grav.* **25**, 114045 (2008). Veja também <http://www.virgo.infn.it/>.
- [4] H. Lück *et al.*, *Class. Quantum Grav.* **14**, 1471 (1997); B. Willke *et al.*, *Class. Quant. Grav.* **23**, S207 (2006). Veja também <http://www.geo600.uni-hannover.de/>.
- [5] K. Kawabe *et al.*, *Class. Quantum Grav.* **14**, 1477 (1997).
- [6] K. Danzmann *et al.*, *Class. Quantum Grav.* **14**, 1399 (1997); P. L. Bender *et al.*, *Laser Interferometer Space Antenna for the Detection and Observation of Gravitational Waves: Pre-Phase A Report 2nd Edition*, (MPQ233, Max-Planck Institut fur Quantenoptik, 1998).
- [7] O. D. Aguiar *et al.*, *Class. Quantum Grav.* **25**, 114042 (2008).
- [8] R. Benini, M. Lattanzi, G. Montani, *Gen. Rel. Gra.* **43**, 945 (2011).
- [9] R. Benini, M. Lattanzi, G. Montani, *Class. Quantum Grav.* **27**, 194008 (2010).
- [10] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D69**, 023503 (2004).
- [11] A. E. Bernardini e E. L. D. Perico, *JCAP* **01**, 10 (2011).
- [12] C. P. Ma and E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **455**, 7 (1995).
- [13] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).
- [14] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity* (Pearson Addison Wesley, 2004).
- [15] S. Dodelson, *Modern cosmology* (Academic Pr., 2003).
- [16] V. F. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology* (Cambridge Univ. Pr., 2005).
- [17] R. Durrer, *The physics of the early universe* **653**, 31 (2005).
- [18] J. García-Bellido, D. G. Figueroa, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 61302 (2007).
- [19] M. S. Turner, M. White, J. E. Lidsey, *Phys. Rev.* **D48**, 4613 (1993).
- [20] Y. Wang, *Phys. Rev.* **D53**, 639 (1996).

- 
- [21] <http://pdg.lbl.gov/2012/listings/rpp2012-list-number-neutrino-types.pdf>.
- [22] S. Hannestad, *New J. Phys.* **6**, 108 (2004).
- [23] A. D. Dolgov, *Phys. Rept.* **370**, 333 (2002).
- [24] A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure* (Cambridge Univ. Pr., 2000).
- [25] J.R. Pritchard and M. Kamionkowski, *Annals Phys.* **318**, 2 (2005).
- [26] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Phys. Lett.* **B291**, 391 (1992).
- [27] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton Univ. Pr.,1993).

## Apêndice I

Um período inflacionário durante a evolução do universo é necessário para explicar algumas questões não completamente respondidas no modelo cosmológico padrão em relação aos dados observacionais. O período inflacionário pode ser expresso em termos do fator de escala como

$$\ddot{a} > 0. \quad (7.1)$$

Um importante problema que a inflação resolve é o problema do horizonte. De forma geral, a distribuição de temperatura da radiação cósmica de fundo que observamos é uniforme. Entretanto fótons que estavam separados por uma distância maior do que a escala do horizonte na última superfície de espalhamento não teriam interagido antes do desacoplamento. Assim, o modelo do Big Bang por si só não explica a uniformidade na temperatura da RCF. Se considerarmos a inflação, então o problema do horizonte pode ser resolvido devido a redução do raio comóvel de Hubble durante o período inflacionário, o que explica a homogeneidade na temperatura da radiação de fundo, pois agora os fótons passariam a ter contato causal e portanto interagiriam antes do desacoplamento.

Supondo um campo escalar gerador do período inflacionário, as condições de *slow-roll* sobre o potencial de inflação para se analisar modelos inflacionários são definidas como

$$\begin{aligned} \epsilon &\equiv \frac{m_{PI}^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \\ \eta &\equiv \frac{m_{PI}^2}{8\pi} \frac{V''}{V}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde ' representa derivadas em relação ao campo escalar  $\phi$ , com:

$$\epsilon \ll 1 \quad \text{e} \quad |\eta| \ll 1. \quad (7.3)$$

A partir destas aproximações, é possível estabelecer uma relação entre o parâmetro de Hubble durante o período inflacionário e a magnitude do potencial inflacionário. O parâmetro  $\eta$  nada tem a ver com o tempo conforme.

## Apêndice II

Para perturbações tensoriais, a contribuição para a variância devido a perturbação na temperatura,  $\Theta^T$ , Eq. (6.5), é dada por

$$C_l^T = \sum_{l''} (-i)^{l'+l''} (2l'+1)(2l''+1) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta_{l'}^T(k) \Theta_{l''}^{T,*}(k) I_{lm'}(k) I_{lm''}^*(k), \quad (7.1)$$

onde foi definido

$$I_{lm'}(k) = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \int d\Omega P_{l'}(\hat{k} \cdot \hat{\gamma}) Y_{lm}(\Omega) [Y_{22}(\Omega) + Y_{2-2}(\Omega)]. \quad (7.2)$$

Na expressão acima, o fator  $(8\pi/15)^{1/2}[Y_{22} + Y_{2-2}]$  vem da combinação do termo  $\sin^2(\theta) \cos(2\phi)$ , que aparece na Eq. (6.6), em função de harmônicos esféricos. Devido a isso, esta última equação é válida apenas para os modos  $+$ . Entretanto, a expressão para os modos  $\times$  é idêntica.

A principal dificuldade está em resolver a integral em  $I_{lm'}$ , que não é trivial. Reescrevendo o polinômio de Legendre como  $[4\pi/(2l'+1)]^{1/2} Y_{l'0}/i^{l'}$ , transformamos a expressão em uma integral de produtos de três harmônicos esféricos. Esse produto pode ser reescrito em termos dos símbolos de Wigner  $3-j$ , usando, por exemplo, o livro *Quantum Mechanics* (Landau And Lifshits). A integral fica então dada por

$$I_{lm'} = \sqrt{\frac{32\pi^2}{15(2l'+1)}} \frac{1}{i^{l'}} \langle lm | Y_{22} + Y_{2-2} | l'0 \rangle, \quad (7.3)$$

sendo esta expressão diferente de zero para  $m = 2$  ou  $m = -2$ . Para  $m$  assumindo um desses dois valores, o elemento de matriz é

$$\langle lm | Y_{22} + Y_{2-2} | l'0 \rangle = i^{l'-l} \begin{pmatrix} l & 2 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[ \frac{5(2l'+1)(2l+1)}{4\pi} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} l & 2 & l' \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

As únicas vezes que o elemento de matriz é diferente de zero são quando  $l' = l - 2, l, l + 2$ . Assim, usando novamente a referência citada, temos o resultado final:

$$I_{lm'} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \sqrt{2l+1} i^{-l} (\delta_{m,2} + \delta_{m,-2}) [c_{-2} \delta_{l,l-2} + c_0 \delta_{l,l} + c_2 \delta_{l,l+2}], \quad (7.5)$$

onde os coeficientes são

$$\begin{aligned}c_{-2} &= \frac{\sqrt{6} [(l-1)l(l+1)(l+2)]^{1/2}}{4 (2l-3)(2l-1)(2l+1)} \\c_0 &= \frac{-2\sqrt{6} [(l-1)l(l+1)(l+2)]^{1/2}}{4 (2l-1)(2l+1)(2l+3)} \\c_2 &= \frac{\sqrt{6} [(l-1)l(l+1)(l+2)]^{1/2}}{4 (2l+1)(2l+3)(2l+5)}.\end{aligned}\tag{7.6}$$

A partir desses coeficientes e através de manipulações algébricas obtemos a Eq. (6.7).