

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Transparência Eletromagneticamente Induzida
em Diferentes Sistemas Físicos e seu Análogo em
Osciladores Acoplados

Luis Antônio Cabral

UFSCar - São Carlos

Março/2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Transparência Eletromagneticamente Induzida
em Diferentes Sistemas Físicos e seu Análogo em
Osciladores Acoplados

Luís Antônio Cabral

Dissertação submetida ao Departamento de
Física da Universidade Federal de São Carlos
- DF/UFSCar, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas

UFSCar - São Carlos

Março/2014

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

C117te

Cabral, Luís Antônio.

Transparência eletromagneticamente induzida em diferentes sistemas físicos e seu análogo em osciladores acoplados / Luís Antônio Cabral. -- São Carlos : UFSCar, 2013.

104 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Ótica quântica. 2. Transparência induzida eletromagneticamente. 3. Osciladores harmônicos. 4. Eletrodinâmica quântica de cavidades. 5. Equivalência clássica. I. Título.

CDD: 535.15 (20^a)

Luis Antonio Cabral

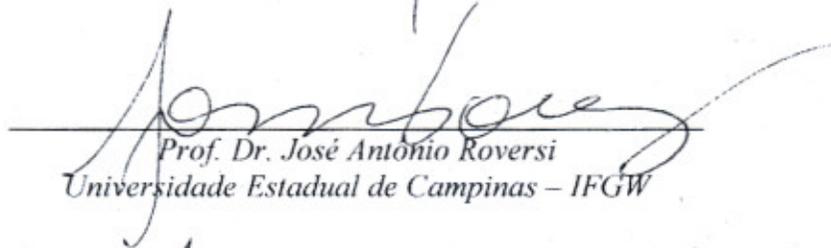
Dissertação de mestrado submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal de São Carlos, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em física.

Aprovado em: 01 de agosto de 2013

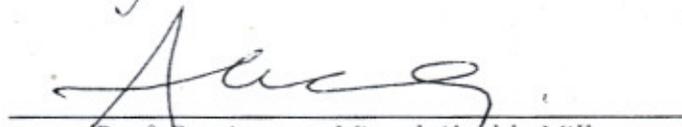
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Boas (Orientador)
Universidade Federal de São Carlos - DF



Prof. Dr. José Antônio Roversi
Universidade Estadual de Campinas - IFGW



Prof. Dr. Augusto Miguel Alcázar de Milla
Universidade Federal de Uberlândia - IF

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por estar sempre ao meu lado durante toda a minha existência. Sem Ele nenhum passo seria realizado.

Ao Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas pela recepção em seu grupo, orientação e por ter me confiado este trabalho. Sou grato por todo conhecimento de mecânica quântica que me passou.

À minha mãe, Maria Antônia Cabral, por quem tenho grande admiração, carinho e respeito. A minha inspiração, motivação e aprendizado do cotidiano eu devo a ela. E à minha irmã, Júlia Cabral, que sempre nos proporciona grandes alegrias. Elas nunca deixaram de estar presente em todos os momentos, incentivando e apoiando. É difícil expressar o imenso amor e reconhecimento que eu tenho por elas. Agradecimentos e carinho especial pelo casal Geralda e Luiz da Silva, pois me consideram um membro de sua família e desde pequeno me mostrando os valores mais preciosos da vida.

À Alessandra Regina Wolf por entender a minha ausência e sempre me completar com tanto amor e carinho.

Ao James Alves de Souza pelo companheirismo durante todo o mestrado e também pelas sugestões de melhoria desta dissertação. Ao Jaldair Araújo e Rodolfo Silva pelo apoio e ao Prof. Dr. Luís Vicente Garcia pelo grande incentivo antes da minha vinda para São Carlos. À Janaína Martins Alves e à todos os amigos que não estou citando aqui, os meus sinceros agradecimentos por todos os momentos que vivenciamos.

Por fim, aos professores do Departamento de Física da UFSCar que participaram de minha formação e à CAPES pelo fundamental apoio financeiro.

Sumário

1	Introdução	1
2	Transparência Eletromagneticamente Induzida	4
2.1	Átomo de Três Níveis na Configuração Λ	5
2.2	EIT: Tratamento Matemático	6
2.2.1	Estados Escuros de um Átomo de Três Níveis na Configuração Λ	9
2.2.1.1	Análise da Intensidade dos Campos Clássicos	10
2.3	Dinâmica do Sistema	12
2.4	Velocidade de Grupo no Meio Atômico	14
2.5	Comprovação Experimental da EIT	16
3	Osciladores e a Analogia Clássica da EIT	19
3.1	Oscilações	19
3.1.1	Oscilações Forçadas e Amortecidas	22
3.1.2	Oscilações Amortecidas Forçadas e Acopladas	23
3.2	Analogia Clássica da EIT	25
3.2.1	Formulação Hamiltoniana	26
4	Análogo Clássico da EIT: Dois Osciladores Acoplados	32

4.1	Optomecânica de Cavidades	32
4.1.1	Optomecânica	34
4.1.2	Susceptibilidade Optomecânica	36
4.1.3	Regime de Acoplamento Fraco para Optomecânica	37
4.1.4	Optomecânica e EIT Atômica	38
4.2	Dois Osciladores Harmônicos Quânticos: Dois Modos de uma Cavi- dade	39
4.3	Átomo de Dois Níveis em uma Cavidade	42
4.3.1	O Modelo de Rabi	45
4.3.2	Aproximação de Onda Girante e o Modelo de Jaynes-Cummings	45
4.3.2.1	Estados Vestidos do Modelo de Jaynes-Cummings	47
4.3.3	Aproximação Semiclássica	48
5	Análogo Clássico da EIT: Três Osciladores Acoplados	55
5.1	Átomo de Quatro Níveis: Configuração Tipo “Tripod”	56
5.2	Átomo de Quatro Níveis: Configuração Tipo <i>Y</i> Invertido	58
5.3	Átomo de Três Níveis em uma Cavidade Ressonante	59
5.3.1	Análogo Elétrico	67
6	Considerações Finais	70
6.1	Dois Osciladores Harmônicos	70
6.2	Três Osciladores Harmônicos	71
6.3	Aplicações	72
6.3.1	Dois Osciladores Harmônicos	73
6.3.2	Três Osciladores Harmônicos	75

A	Quantização do Campo Eletromagnético em uma Cavidade . .	76
A.1	Eletrodinâmica Clássica	77
A.2	Campo Eletromagnético Livre	79
A.3	O Oscilador Harmônico Quântico	81
A.4	Acoplamento Átomo-Campo	83
B	Evolução de Estados Atômicos	85
B.1	Operador Densidade de Estados	85
B.1.1	Estado Puro	86
B.1.2	Mistura Estatística de Estados	87
B.1.2.1	Populações e Coerências	88
B.2	Série de Baker-Campbell-Hausdorff	88
B.2.1	Sistemas Quânticos Abertos	89
B.2.1.1	Equação Mestra	90
	Referências Bibliográficas	92

Resumo

A incidência simultânea de dois feixes luminosos em um ou mais átomos provoca a interferência destrutiva desses feixes em um dos estados atômicos causando o cancelamento da absorção de um dos feixes incidentes e esse fenômeno é denominado Transparência Eletromagneticamente Induzida (“*Electromagnetically Induced Transparency*”, EIT). O objetivo principal deste trabalho é mostrar que a Transparência Eletromagneticamente Induzida, que é normalmente estudada no contexto quântico, pode ser modelada classicamente em função de osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados. Para que a equivalência clássica seja bem fundamentada, será apresentada a teoria da EIT em diversos sistemas quânticos e também a teoria dos osciladores harmônicos clássicos.

As equivalências serão realizadas comparando as equações de movimento clássicas e quânticas obtidas para cada regime. Para isso, vamos realizar a equivalência da EIT em sistemas quânticos de três níveis em configuração Λ e dois níveis com o sistema clássico de dois osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados. Logo após, será analisada a equivalência de dois sistemas quânticos compostos por átomos de quatro níveis e átomos de três níveis mais um modo da cavidade com o sistema clássico de três osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados em diferentes configurações.

Palavras-chave: Transparência Eletromagneticamente Induzida, EIT, Osciladores Harmônicos, Eletrodinâmica Quântica de Cavidades, Equivalência Clássica.

Abstract

The simultaneous incidence of two light beams on one or more atoms causes destructive interference of these beams in atomic states causing cancellation of the absorption of one of the incident beams and this phenomenon is called Electromagnetically Induced Transparency (EIT). The main objective of this work is to show that the Electromagnetically Induced Transparency, which is usually studied in the quantum context, can be modeled classically as a function of coupled harmonic oscillators subject to an external force and dissipation. To establish the classical equivalence, it will be presented the theory of the EIT in different quantum systems and also the theory of classic harmonic oscillators.

Equivalences are performed by comparing the equations of motion of classical and quantum obtained for each scheme. For this, we perform the equivalent of EIT in three-level quantum systems in setting Λ and two levels with the classical system of two damped harmonic oscillators coupled and forced. After that, we will analyze the equivalence of two quantum systems compounds of four levels atoms and three levels atoms plus one mode of the cavity with the classical damped forced harmonic oscillator and three systems coupled in different configurations.

Keywords: Electromagnetically Induced Transparency, EIT, Harmonic Oscillators, Cavity Quantum Electrodynamics, Classical Equivalence.

Lista de Figuras

2.1	Átomo de três níveis na configuração Λ com os parâmetros relevantes, os quais serão explicados no decorrer do texto.	5
2.2	Parte real de $\chi^{(1)}$ (relacionada ao índice de refração n do meio).	14
2.3	Parte imaginária de $\chi^{(1)}$ (relacionada a absorção do meio).	14
2.4	Propagação de ondas eletromagnéticas.	15
2.5	“ <i>Delay</i> ” da onda eletromagnética ao mudar o meio de propagação.	16
2.6	Diagrama de níveis de energia do átomo de estrôncio.	17
2.7	Transmissão vs dessintonia do campo de prova. Nas partes (a) e (c) não foi aplicado o campo de prova. Já em (b) o campo de prova teve $1,3 \text{ cm}^{-1}$ de intensidade e dessintonia $\Delta\omega_c = -0,2 \text{ cm}^{-1}$ e em (d) intensidade de $1,5 \text{ cm}^{-1}$ e dessintonia $\Delta\omega_c = -0,1 \text{ cm}^{-1}$	18
3.1	Sistema massa mola.	20
3.2	Sistema massa mola dissipativo.	21
3.3	Sistema massa mola forçado.	22
3.4	Sistema massa mola forçado e amortecido.	23
3.5	Sistema massa-mola acoplado.	24
3.6	Sistema massa-mola amortecido, forçado e dissipativo.	25

3.7	Analogia clássica da EIT mostrando a susceptibilidade elétrica $\chi \propto \rho_{31}$ em comparação com seu equivalente clássico dado por \tilde{a}_- , veja eq.3.34. Os parâmetros utilizados são $\Omega_p = 0,02\gamma_{31}$, $\gamma_2 = 0,01\gamma_{31}$, $\gamma_3 = 0$ para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle (a) $\Omega_c = 0,0$, (b) $0,05\gamma_{31}$, (c) $0,5\gamma_{31}$, (d) $1,0\gamma_{31}$ e (e) $2,0\gamma_{31}$, lembrando que $\gamma_{31} = \Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_3$, sendo $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5$ [unidades de frequência]. Para os osciladores acoplados foram utilizados o mesmo conjunto de parâmetros seguindo a equivalência apresentada na tabela 3.1.	31
4.1	Radiação interagindo com um sistema optomecânico. Figura retirada da referência [68].	33
4.2	Sistema optomecânico simples. Cavity sem átomo com uma das paredes acopladas a uma mola de frequência ω	34
4.3	Modos do campo eletromagnético dentro da cavidade optomecânica.	35
4.4	Átomo de dois níveis confinado em uma cavidade.	42
4.5	Sistema átomo-campo. Bombeio na cavidade.	49
4.6	Comportamento tipo EIT observado no valor médio do operador aniquilação de fótons $\langle \hat{a} \rangle$ vs. Δ/κ obtido para um sistema composto por um átomo de dois níveis interagindo com um único modo de uma cavidade óptica (2-NBC) em comparação com seu análogo clássico obtido utilizando-se um sistema de dois osciladores harmônicos acoplados (2-OHA). O modo da cavidade é bombeado por um campo clássico de força $\varepsilon = 0,02\kappa$ e dissipação atômica $\gamma = 0,01\kappa$ para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle (a) $\Omega_c = 0,0$, (b) $0,05\kappa$, (c) $0,5\kappa$, (d) $1,0\kappa$ e (e) $2,0\kappa$. Para os osciladores acoplados foram utilizados o mesmo conjunto de parâmetros seguindo a equivalência apresentada na tabela 4.3.	51
4.7	Ilustração do sistema átomo-campo considerando o bombeio no átomo.	52

4.8	Comportamento tipo EIT observado no valor médio do operador atômico $\langle \hat{\sigma}_- \rangle$ vs. Δ/γ obtido para um sistema composto por um átomo de dois níveis interagindo com um único modo de uma cavidade óptica com bombeio no átomo (2-NBA) em comparação com seu análogo clássico (2-OHA). Os parâmetros utilizados são os mesmos da figura 4.6.	53
5.1	Átomo de quatro níveis do tipo “tripod”.	56
5.2	Três osciladores acoplados com duas forças independentes aplicadas nos osciladores 1 e 2.	57
5.3	Átomo de quatro níveis do tipo Y invertido.	58
5.4	Três osciladores acoplados com uma força aplicada no oscilador de massa m_3	59
5.5	Átomo de três níveis em configuração Λ confinado no interior de uma cavidade ressonante juntamente com um campo de radiação.	60
5.6	Diagrama de energia de um átomo de três níveis em configuração Λ e do modo do campo eletromagnético quantizado na cavidade.	60
5.7	Espectro de transmissão em função da dessintonia normalizada Δ/κ de um único átomo de três níveis no interior da cavidade (linha sólida), utilizando os parâmetros $g = 5\kappa$, $\varepsilon = 0,01\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\Omega_C = 3,0\kappa$ e $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. A linha pontilhada mostra o espectro da cavidade vazia.	61
5.8	Três osciladores acoplados com uma força aplicada no oscilador de massa m_2	62
5.9	Valor médio do operador aniquilação de fótons $\langle \hat{a} \rangle$ vs. Δ/κ do sistema CEIT em comparação com seu análogo clássico obtido utilizando-se um sistema de três osciladores harmônicos acoplados (3-OHA). Os parâmetros utilizados são $\Omega_p = 0,02\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle (a) $\Omega_c = 0$; (b) $0,05\kappa$; (c) $0,5\kappa$; (d) $1,0\kappa$; (e) $2,0\kappa$	66

5.10	Análogo elétrico do modelo de três osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados.	68
6.1	Metamaterial. Duas camadas formadas de fios (barras) de ouro em que temos as oscilações das antenas de dipolo (camada superior) e de quadrupolo (camada inferior).	73
A.1	Cavidade de comprimento L com um campo eletromagnético confinado em seu interior.	79

Lista de Tabelas

3.1	Analogia da EIT com os dois osciladores harmônicos acoplados (2-OHA).	30
4.1	Equivalência entre o sistema optomecânico apresentado e a EIT em um sistema atômico de três níveis em configuração Λ .	39
4.2	Parâmetros clássicos e quânticos. Analogia do sistema de dois osciladores acoplados (2-OHA) com o sistema de duas cavidades acopladas (2-CA).	42
4.3	Analogias entre os parâmetros clássicos do sistema de dois osciladores harmônicos acoplados (2-OHA) com os sistemas quânticos de um átomo de dois níveis interagindo com um modo de uma cavidade óptica considerando o bombeio na cavidade (2-NBC) e no átomo (2-NBA).	54
5.1	Parâmetros clássicos e quânticos. Analogia clássica da CEIT com três osciladores harmônicos acoplados (3-OHA).	67
5.2	Equivalência entre os parâmetros dos sistemas elétrico e mecânico.	69
6.1	Analogias dos diversos sistemas quânticos com o sistema clássico de dois osciladores forçados e acoplados.	71
6.2	Parâmetros clássicos e quânticos. Analogia com três osciladores clássicos.	72

Capítulo 1

Introdução

Na década de 1970, a introdução de técnicas de óptica em cristais causou a procura e desenvolvimento de novos materiais ópticos. Em 1976, Alzetta *et al* [1] observaram que, para tempos suficientemente longos, um sistema atômico em configuração Λ é levado para um estado escuro (“*dark state*”, em inglês) via decaimento atômico. O termo estado escuro é devido a probabilidade nula de absorção dos campos incidentes. Em 1990, Harris observou que a interferência quântica ao incidir um laser de controle juntamente com um laser de bombeio em uma amostra modifica a resposta óptica do material, notando que poderia eliminar a absorção e modificar o índice de refração do meio material alterando a susceptibilidade linear¹ do meio na frequência de transição dos níveis atômicos. Esse fenômeno, Harris cunhou o nome de Transparência Eletromagneticamente Induzida (“*Electromagnetically Induced Transparency*”, EIT).

O fenômeno da Transparência Eletromagneticamente Induzida (capítulo 2) consiste na anulação da absorção de um feixe de luz (campo de prova) que interage com um meio atômico quando sobre esse meio fazemos incidir outro feixe de luz (campo de controle). Os feixes de luz originam-se de lasers que são acoplados a duas transições atômicas diferentes e compartilham um dos níveis atômicos. Como consequência, temos uma interferência destrutiva entre

¹A susceptibilidade linear ou elétrica do material no contexto clássico consiste em verificar o quanto o meio se polariza em resposta a um campo elétrico incidente, de acordo com a equação: $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e^{(1)} \vec{E}$, sendo \vec{P} a polarização, ϵ_0 a permissividade elétrica do vácuo, $\chi_e^{(1)}$ a susceptibilidade elétrica e \vec{E} o vetor campo elétrico. Essa é a equação macroscópica da polarização.

os possíveis caminhos de absorção [2], causando o cancelamento da absorção do campo de prova, modificação no índice de refração (n) do meio e fomentando o fenômeno da “*Slow Light*” (Luz Lenta), “*Stopping Light*” (Parada da Luz) [3] nesses meios atômicos. A EIT possui diversas aplicações notáveis, principalmente devido a redução da velocidade da luz e, dentre esses exemplos, podemos citar a memória quântica [3] e um método para ponderar o teor de glicose no sangue [4].

Usualmente estudamos a EIT utilizando a mecânica quântica em um sistema atômico de três níveis em configuração Λ , V ou *casca*, porém podemos obter processos análogos a EIT em outros sistemas quânticos como no átomo de dois níveis interagindo com o modo de uma cavidade, apontando a Transparência Induzida pelo Vácuo (em inglês “*Vacuum-Induced Transparency, (VIT)*”) [5], o tunelamento quântico induzindo a transparência (em inglês “*Tunneling Induced Transparency, (TIT)*”) [6], dois ressonadores² quânticos acoplados [7]. Contudo, o trabalho [8] trouxe um sistema clássico de dois osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados (sistema massa-mola) em que foi possível estudar um análogo clássico da EIT em um átomo de três níveis em configuração Λ .

O sistema massa-mola apresentado na referência [8] como análogo clássico da EIT consiste em uma configuração linear de dois osciladores acoplados por uma mola com uma força externa aplicada no primeiro oscilador (capítulo 3). Neste ínterim, definimos variáveis clássicas de acordo com as transformações canônicas para que resultassem em uma Lagrangiana e uma Hamiltoniana clássica do sistema para auferirmos um tratamento Hamiltoniano ao sistema apresentado. Depois de algumas transformações das variáveis, obtemos as equações de movimento e as comparamos com as equações da EIT e verificamos a equivalência clássica com êxito.

No capítulo 4 é apresentado outros sistemas quânticos que reproduzem o comportamento de EIT e que podem ser comparados com o modelo clássico de dois osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados. Primeiramente, como motivação será apresentado o trabalho 4.1 em que um simples sistema

²Ressonadores são dispositivos que, ao receber a incidência do campo eletromagnético, apresentam em seu interior frequências específicas com comportamento ressonante. Existem ressonadores de vários tipos, como os sonoros.

optomecânico apresenta o regime de EIT e posteriormente vamos analisar o caso em que duas cavidades estão acopladas [7], empregando o formalismo de dois osciladores harmônicos quânticos acoplados e obtendo as equações de movimento dos operadores quânticos de abaixamento e levantamento para realizar a analogia com as variáveis clássicas definidas para o sistema massa-mola. Logo após, tratamos o caso de um átomo de dois níveis utilizando a aproximação semiclássica (detalhes no capítulo 4) e a análise de suas equações de movimento com as equações dos osciladores clássicos foi satisfatória.

Levando em consideração os demais sistemas quânticos, a proposição do capítulo 5 é analisar o modelo clássico de três osciladores harmônicos acoplados, também forçados e amortecidos, em diferentes configurações. Nosso principal objetivo nesta parte é mostrar que as equações da EIT em um átomo de três níveis em configuração Λ mais um modo da cavidade [10] são equivalente às equações de três osciladores harmônicos acoplados. Posteriormente, serão apresentadas as conclusões deste trabalho (capítulo 6) e os apêndices, que contêm parte da teoria desenvolvida nos capítulos desta dissertação.

Capítulo 2

Transparência

Eletromagneticamente Induzida

Como descrito no capítulo 1, a EIT é um fenômeno observado a mais de duas décadas e está baseada na interferência de dois campos clássicos incidentes em uma amostra atômica com dessintonia¹ nula em um dos estados atômicos causando a anulação da absorção e a modificação do índice de refração do meio com a alteração das propriedades ópticas do material, dadas pela susceptibilidade elétrica de primeira ordem $\chi_e^{(1)}$ na equação da polarização. A polarização de um meio é dada em função da susceptibilidade e no contexto quântico pode ser escrita em função dos momentos de dipolo e dos elementos da matriz densidade, como será demonstrado com detalhes na seção 2.1. A parte imaginária da susceptibilidade elétrica [$Im(\chi_e^{(1)})$] determina a absorção do meio enquanto que a parte real [$Re(\chi_e^{(1)})$] determina o índice de refração do meio atômico.

Neste capítulo, faremos uma análise do modelo quântico da EIT em um sistema atômico de três níveis em configuração Λ .

¹Dessintonia é a diferença entre a frequência do campo eletromagnético e dos níveis do átomo que recebem a radiação.

2.1 Átomo de Três Níveis na Configuração Λ

A figura abaixo indica o sistema atômico de três níveis na configuração² Λ , sendo os estados atômicos $|1\rangle$ e $|2\rangle$ os estados fundamentais do átomo e $|3\rangle$ o estado excitado.

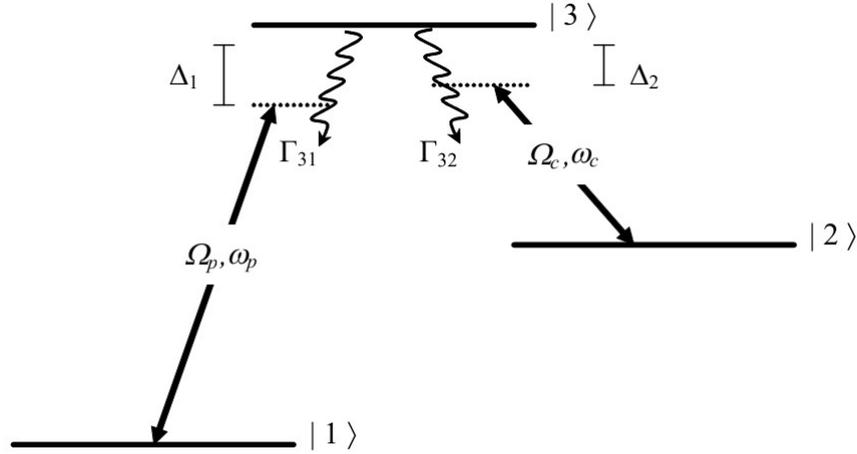


FIGURA 2.1: Átomo de três níveis na configuração Λ com os parâmetros relevantes, os quais serão explicados no decorrer do texto.

A figura acima representa um sistema atômico de três níveis interagindo com dois campos eletromagnéticos. $2\Omega_p$ é definido como frequência de Rabi do campo de prova (frequência ω_p) e $2\Omega_c$ a frequência de Rabi do campo de controle (frequência ω_c). Γ_{31} e Γ_{32} são as taxas de decaimento espontâneo do nível $|3\rangle$ para os níveis $|1\rangle$ e $|2\rangle$, respectivamente. Note que os campos incidentes em questão são tratados classicamente.

Na próxima seção, faremos uma análise matemática da EIT na configuração Λ . Para isso vamos definir o Hamiltoniano de interação (H_I) que descreve a dinâmica de dois campos (tratados classicamente) atuando sobre a amostra atômica, induzindo as transições $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ e $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, dessa forma:

$$H_I = -(\Omega_p(t)\hat{\sigma}_{31}e^{i\Delta_1 t} + \Omega_c(t)\hat{\sigma}_{32}e^{i\Delta_2 t}) + h.c., \quad (2.1)$$

sendo $\Delta_1 = \omega_{31} - \omega_p$ a diferença entre a frequência de transição atômica ω_{31} (transição $|3\rangle \leftrightarrow |1\rangle$) e a do campo de prova ω_p ; $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_c$ a diferença entre

²Outras possíveis configurações atômicas são: tipo cascata e V (detalhes na referência [3]).

a frequência de transição atômica ω_{32} (transição $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$) e a do campo de bombeio ω_c ; *h.c.* significa hermitiano conjugado e $\hat{\sigma}_{ij}$ é o operador que identifica as transições dos níveis atômicos. Note que o Hamiltoniano acima está na representação de interação.

2.2 EIT: Tratamento Matemático

O estudo do fenômeno da EIT proporciona observar a resposta do meio material à incidência de luz. Para isso é necessário conhecer a polarização (\vec{P}) do meio dada em função do operador densidade de estados $\hat{\rho}$ e do momento de dipolo atômico $\vec{\mu}$ (com $\vec{\mu} = -e \sum_i \vec{r}_i$, sendo \vec{r}_i a distância entre o elétron do i -ésimo átomo e o seu núcleo). A polarização de um material pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} = -e \frac{\sum_i \langle \vec{r}_i \rangle}{V} = \frac{N}{V} \text{Tr}(\hat{\rho} \vec{\mu}), \quad (2.2)$$

sendo \vec{E} o vetor campo elétrico incidente no material, $\chi_e^{(1)}$ a susceptibilidade elétrica do meio e N o número total de átomos contidos no volume V . Note que 2.2 é definida em termos macroscópicos (clássicos) na esquerda e na direita em termos quânticos.

Para estados bem definidos ($|\Psi(t)\rangle$) o operador densidade é dado como $\hat{\rho} = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$, porém vamos escrever o operador densidade de uma forma mais geral como $\hat{\rho} = \sum_i \rho_i |\Psi_i(t)\rangle \langle \Psi_i(t)|$. Na representação de Schrödinger temos:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \rho_{11} |1\rangle \langle 1| + \rho_{22} |2\rangle \langle 2| + \rho_{33} |3\rangle \langle 3| + \\ &+ (\rho_{21} e^{-i\omega_{21}t} |2\rangle \langle 1| + \rho_{31} e^{-i\omega_{31}t} |3\rangle \langle 1| + \rho_{32} e^{-i\omega_{32}t} |3\rangle \langle 2| + h.c.). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nesse caso, ω_{21} , ω_{31} e ω_{32} são as frequências associadas às transições $|2\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, $|3\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ e $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, respectivamente; ρ_{ij} são os elementos do operador densidade e $|i\rangle \langle j|$ são os operadores atômicos associados a população dos níveis ($i = j$) e às transições entre esses níveis ($i \neq j$).

Podemos escrever o operador momento de dipolo para um único átomo

na forma:

$$\hat{\mu} = e\hat{r},$$

sendo e a carga do elétron e \hat{r} o operador posição da carga elétrica em relação ao núcleo atômico. Ao introduzirmos o operador unitário na equação acima, os elementos não nulos (por paridade) são μ_{13} e μ_{23} . Assim, podemos escrever o operador momento de dipolo das transições permitidas $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ e $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ como:

$$\hat{\mu} = \mu_{13}|1\rangle\langle 3| + \mu_{23}|2\rangle\langle 3| + h.c., \quad (2.4)$$

o que nos permite calcular a polarização do meio no sistema Λ (figura 2.1):

$$P = \frac{N}{V}(\mu_{13}\rho_{31}e^{-i\omega_{31}t} + \mu_{23}\rho_{32}e^{-i\omega_{32}t} + c.c.), \quad (2.5)$$

$c.c.$ é o complexo conjugado. Nesse caso, μ_{ij} são os elementos de dipolo atômico das transições $i \leftrightarrow j$. Os elementos ρ_{23} e ρ_{13} podem ser obtidos via evolução da equação de Liouville-von Neumann ($\hbar = 1$) (referência [3] e apêndice B):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -i[H_I, \hat{\rho}] + \Gamma_{31}(2\hat{\sigma}_{13}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{31} - \hat{\sigma}_{33}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_{33}) + \\ & + \Gamma_{32}(2\hat{\sigma}_{23}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{33}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_{33}) + \gamma_2(2\hat{\sigma}_{22}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{22} - \\ & - \hat{\sigma}_{22}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_{22}) + \gamma_3(2\hat{\sigma}_{33}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_{33}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

sendo $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$ o operador que descreve a transição entre os níveis $|i\rangle$ e $|j\rangle$, com $i = 1, 2, 3$; $i \neq j$ e caso $i = j = 1, 2, 3$ o operador $\hat{\sigma}_{ij}$ descreve a projeção dos níveis $|i\rangle$ e $|j\rangle$.

Como estamos interessados em analisar o índice de refração³ e a absorção do meio, precisamos obter a susceptibilidade elétrica de primeira ordem $\chi_e^{(1)}$ a qual pode ser obtida via cálculo da polarização \vec{P} . Por sua vez, a polarização pode ser calculada em função dos elementos ρ_{31} e ρ_{32} da matriz densidade do operador $\hat{\rho}$, através da equação de Liouville-von Neumann. Em geral, analisamos o regime assintótico, isto é, impondo $\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial t} = 0$.

Aplicando a transformação unitária $U_1 = e^{i(\Delta_1\hat{\sigma}_{33} + (\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22})t}$ em 2.1 para

³O índice de refração determina a velocidade de grupo (subseção 2.4) de um campo de radiação se propagando nesse meio atômico.

passar para uma representação independente do tempo, sendo uma forma mais conveniente, temos

$$\tilde{H}_I = \Delta_1 \hat{\sigma}_{33} + (\Delta_1 - \Delta_2) \hat{\sigma}_{22} - (\Omega_p \hat{\sigma}_{31} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} + h.c.). \quad (2.7)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = & -i \left[(\Delta_1 \hat{\sigma}_{33} + (\Delta_1 - \Delta_2) \hat{\sigma}_{22}) - (\Omega_p \hat{\sigma}_{31} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} + h.c.), \tilde{\rho} \right] + \\ & + \Gamma_{31} (2\hat{\sigma}_{13} \tilde{\rho} \hat{\sigma}_{31} - \hat{\sigma}_{33} \tilde{\rho} - \tilde{\rho} \hat{\sigma}_{33}) + \Gamma_{32} (2\hat{\sigma}_{23} \tilde{\rho} \hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{33} \tilde{\rho} - \tilde{\rho} \hat{\sigma}_{33}) + \\ & + \gamma_2 (2\hat{\sigma}_{22} \tilde{\rho} \hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{22} \tilde{\rho} - \tilde{\rho} \hat{\sigma}_{22}) + \gamma_3 (2\hat{\sigma}_{33} \tilde{\rho} \hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33} \tilde{\rho} - \tilde{\rho} \hat{\sigma}_{33}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por simplicidade, omitiremos o “ \sim ” daqui para frente. Calculando os elementos que nos interessam e impondo o regime assintótico ($\dot{\rho}_{ij} = 0$), temos que

$$\rho_{31} = \frac{i}{(i\Delta_1 + \Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_3)} (-\Omega_p \rho_{33} + \Omega_p \rho_{11} + \Omega_c \rho_{21}), \quad (2.9)$$

$$\rho_{32} = \frac{i}{(i\Delta_2 + \Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_2 + \gamma_3)} (-\Omega_p \rho_{33} + \Omega_p \rho_{12} + \Omega_c \rho_{22}), \quad (2.10)$$

$$\rho_{12} = \frac{i}{[\gamma_2 - i(\Delta_1 - \Delta_2)]} (\Omega_p \rho_{32} - \Omega_c \rho_{13}), \quad (2.11)$$

sendo ρ_{31} , ρ_{32} e ρ_{12} os elementos da matriz densidade no regime assintótico. De posse dos elementos da matriz densidade em termos do Hamiltoniano de interação (2.7) e dos campos clássicos incidentes, é conveniente analisar a intensidade desses campos antes de impor o regime assintótico para esses elementos. É nesse ínterim que se encontra um fenômeno mais geral que a Transparência Eletromagneticamente Induzida (EIT): “*Coherent Population Trapping (CPT)*” ou aprisionamento coerente de população. Uma revisão completa sobre o assunto está no trabalho de E. Arimondo, referência [18].

A primeira observação experimental desse fenômeno foi reportada em 1976 por Alzetta *et al*, em “*Nuovo Cimento*” **B36**, 5(1976), referência [1]. Segundo Alzetta, para tempos suficientemente longos, o sistema atômico (na configuração Λ) é levado para um estado escuro (“*dark state*”, em inglês) via decaimento atômico. Chama-se estado escuro pois a probabilidade de absorção dos

campos (ou excitação dos átomos) é nula. A explicação dada para esse fenômeno é a interferência destrutiva entre os campos quando os átomos encontram-se nesse estado escuro.

A principal diferença entre a EIT e a CPT é que na Transparência Eletromagneticamente Induzida o campo de acoplamento é muito maior que o de bombeio ($|\Omega_c| \gg |\Omega_p|$), aprisionando a população atômica em um dos seus estados (“*dark state*”), onde não há a absorção pelo sistema devido à interferência dos campos incidentes. Já na CPT, os campos eletromagnéticos possuem intensidades similares ($|\Omega_c| \approx |\Omega_p|$), permitindo uma certa absorção até que o sistema sature.

Na próxima seção, vamos discorrer sobre o estado escuro de um átomo de três níveis em configuração Λ devido a ação dos campos clássicos incidentes para que possamos determinar o regime de EIT.

2.2.1 Estados Escuros de um Átomo de Três Níveis na Configuração Λ

Para encontrarmos o estado escuro do sistema quântico que estamos considerando (átomo de três níveis em configuração Λ , figura 2.1) vamos encontrar os autoestados e autovalores do Hamiltoniano 2.7. Para isso, é conveniente escrever o Hamiltoniano em forma matricial (base adotada $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$):

$$H_I = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega_p \\ 0 & -(\Delta_1 - \Delta_2) & \Omega_c \\ \Omega_p & \Omega_c & -\Delta_1 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Adotando $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$,

$$H_I = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega_p \\ 0 & 0 & \Omega_c \\ \Omega_p & \Omega_c & -\Delta \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Diagonalizando e extraindo os autovalores da matriz acima, temos:

$$E_0 = 0; \quad (2.14)$$

$$E_+ = \left[\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega_p^2 + \Omega_c^2} \right]; \quad (2.15)$$

$$E_- = \left[\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega_p^2 + \Omega_c^2} \right], \quad (2.16)$$

e os respectivos autoestados:

$$|a_0\rangle = \cos(\theta)|1\rangle - \sin(\theta)|2\rangle; \quad (2.17)$$

$$|a_+\rangle = \sin(\theta)\sin(\phi)|1\rangle + \cos(\theta)\sin(\phi)|2\rangle + \cos(\phi)|3\rangle; \quad (2.18)$$

$$|a_-\rangle = \sin(\theta)\cos(\phi)|1\rangle + \cos(\theta)\cos(\phi)|2\rangle - \sin(\theta)|3\rangle, \quad (2.19)$$

com $\tan(\theta) = \frac{\Omega_p}{\Omega_c}$ e $\tan(2\phi) = \frac{\sqrt{\Omega_p^2 + \Omega_c^2}}{\Delta}$. Note que se o sistema for preparado no autoestado $|a_0\rangle$ ele não sofrerá alteração alguma, uma vez que seu autovalor é nulo. Portanto, o estado escuro $|a_0\rangle$ aparece devido a interação do átomo com os campos incidentes e não se altera sob a ação dos campos clássicos em questão, ou seja, não possui evolução temporal.

2.2.1.1 Análise da Intensidade dos Campos Clássicos

1. $|\Omega_p| \ll |\Omega_c|$: vemos que $\tan(\theta) \cong 0$. Com isso, os autoestados acima escrevem-se:

$$\begin{aligned} |a_0\rangle &\cong |1\rangle; \\ |a_+\rangle &\cong \sin(\phi)|2\rangle + \cos(\phi)|3\rangle; \\ |a_-\rangle &\cong -\cos(\phi)|2\rangle - \sin(\phi)|3\rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nesse caso, o estado escuro é o autoestado $|a_0\rangle \cong |1\rangle$. Isso implica em uma absorção nula do campo de prova quando os átomos forem preparados inicialmente nesse estado. Esse caso ($|\Omega_p| \ll |\Omega_c|$) é a condição para que o sistema apresente EIT.

No limite em que $\Delta \rightarrow 0$, $\tan(2\phi) = \frac{\sqrt{\Omega_p^2 + \Omega_c^2}}{\Delta} \rightarrow \infty$ e $\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}$. Os autoestados

ficam:

$$\begin{aligned}
|a_0\rangle &\cong |1\rangle; \\
|a_+\rangle &\cong \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle); \\
|a_-\rangle &\cong \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |3\rangle).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

2. $|\Omega_p| \gg |\Omega_c|$: vemos que $\tan(\theta) = \frac{\Omega_p}{\Omega_c} \rightarrow \infty$ e $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Também, assumindo que $\Delta \rightarrow 0$, $\tan(2\phi) = \frac{\sqrt{\Omega_p^2 + \Omega_c^2}}{\Delta} \rightarrow \infty$ e $\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}$. Com isso, os autoestados acima escrevem-se:

$$\begin{aligned}
|a_0\rangle &\cong -|2\rangle; \\
|a_+\rangle &\cong \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |3\rangle); \\
|a_-\rangle &\cong \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |3\rangle).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Nesse caso, o estado escuro é o autoestado $|2\rangle$.

3. $|\Omega_p| \approx |\Omega_c|$ (Condição de CPT): aplicando a mesma intensidade dos campos clássicos incidentes na amostra atômica, temos que $\tan \theta = 1$, ou seja, $\cos \theta = \sin \theta$. Então, os autoestados tornam-se:

$$\begin{aligned}
|a_0\rangle &\cong \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle - |2\rangle]; \\
|a_+\rangle &\cong \frac{1}{\sqrt{2}}[\sin(\phi)|1\rangle + \sin(\phi)|2\rangle + \cos(\phi)|3\rangle]; \\
|a_-\rangle &\cong \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(\phi)|1\rangle + \cos(\phi)|2\rangle] - |3\rangle.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Em dessintonia nula ($\Delta = 0$), $\tan(2\phi) \rightarrow \infty$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$. Assim,

$$\begin{aligned}
|a_0\rangle &\cong \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle - |2\rangle]; \\
|a_+\rangle &\cong \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle) \right]; \\
|a_-\rangle &\cong \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle) \right].
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Note que o autoestado com autovalor nulo (portanto sem evolução tempo-

ral) é uma superposição dos estados fundamentais. Portanto, a CPT é um caso mais geral que a EIT.

2.3 Dinâmica do Sistema

Considerando o item 1 acima ($|\Omega_p| \ll |\Omega_c|$, que é a condição de EIT), sabemos que o estado escuro é o estado $|1\rangle$ e assintoticamente o sistema estará nesse estado. Assim, $\rho_{11} \cong 1$ e $\rho_{22} \cong \rho_{33} \cong 0$. Usando essa condição nas equações (2.9 – 2.11) e adotando novamente dessintonias Δ_1 e Δ_2 arbitrárias, temos:

$$\begin{aligned}\rho_{12} &\cong -\frac{i\Omega_c}{\gamma_{21} + i(\Delta_2 - \Delta_1)}\rho_{13}; \\ \rho_{31} &\cong \frac{i}{i\Delta_1 + \gamma_{31}}(\Omega_p + \Omega_c\rho_{21}); \\ \rho_{32} &\cong \frac{i\Omega_p}{i\Delta_2 + \gamma_{32}}\rho_{12},\end{aligned}$$

em que $\gamma_{31} = \Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_3$, $\gamma_{32} = \Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_2 + \gamma_3$ e $\gamma_{21} \equiv \gamma_2$. Substituindo $\rho_{12} = \rho_{21}^*$ em ρ_{31} e ρ_{32} , temos que

$$\rho_{31} = \frac{i\Omega_p[\gamma_2 - i(\Delta_2 - \Delta_1)]}{(i\Delta_1 + \gamma_{31})[\gamma_2 - i(\Delta_2 - \Delta_1)] + \Omega_c^2} \quad (2.25)$$

e

$$\rho_{32} = -\frac{1}{i\Delta_2 + \gamma_{32}} \left[\frac{i\Omega_p^2\Omega_c}{(-i\Delta_1 + \gamma_{31})[\gamma_2 + i(\Delta_2 - \Delta_1)] + \Omega_c^2} \right]. \quad (2.26)$$

Substituindo 2.25 e 2.26 na equação 2.5 obtemos:

$$\begin{aligned}P &= \frac{N}{V} \left[\mu_{13} \frac{i\Omega_p[\gamma_2 - i(\Delta_2 - \Delta_1)]}{i\Delta_1 + \gamma_{31}[\gamma_2 - i(\Delta_2 - \Delta_1)] + \Omega_c^2} e^{i\Delta_1 t} e^{-i\omega_1 t} + c.c. - \right. \\ &\quad - \mu_{23} \frac{1}{[i\Delta_2 + \gamma_{32}]} \left(\frac{i\Omega_p^2\Omega_c}{(-i\Delta_1 + \gamma_{31})[\gamma_2 + i(\Delta_2 - \Delta_1)] + \Omega_c^2} \right) \\ &\quad \left. e^{i\Delta_2 t} e^{-i\omega_{32} t} + c.c. \right]. \quad (2.27)\end{aligned}$$

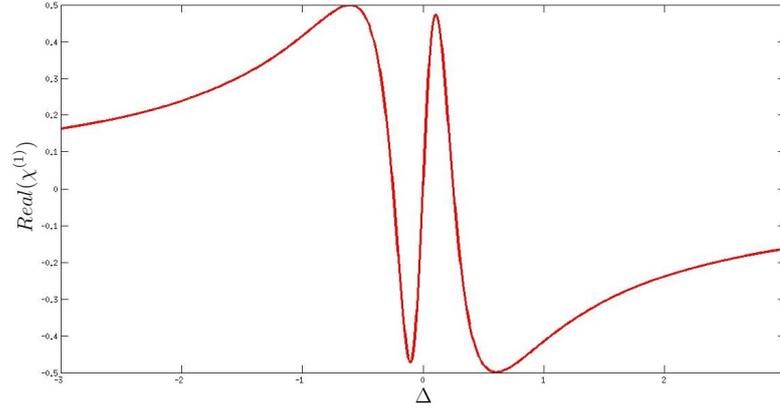
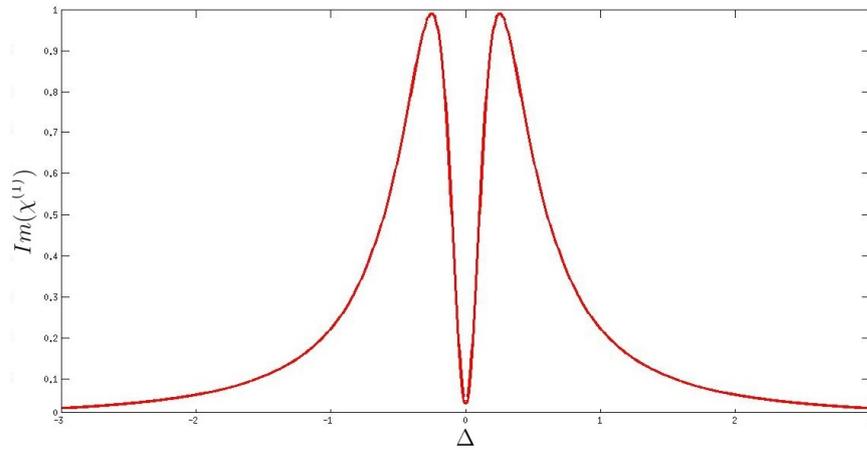
Como $\Delta_1 = \omega_{31} - \omega_p$ e $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_c$, temos que $\Delta_1 - \omega_{31} = -\omega_p$ e $\Delta_2 - \omega_{32} = -\omega_c$. Definindo também $\Delta = \Delta_1$ e $\delta = \Delta_1 - \Delta_2$, temos que

$$P = \frac{N}{V} \left[\mu_{13} \frac{i\Omega_p[\gamma_2 + i\delta]}{(i\Delta + \gamma_{31})[\gamma_2 + i\delta] + \Omega_c^2} e^{-i\omega_p t} + c.c. - \right. \\ \left. - \mu_{23} \frac{1}{[i(\Delta - \delta) + \gamma_{32}]} \left(\frac{i\Omega_p^2 \Omega_c}{(-i\Delta + \gamma_{31})[\gamma_2 - i\delta] + \Omega_c^2} \right) \right. \\ \left. e^{-i\omega_c t} + c.c. \right]. \quad (2.28)$$

Sabendo que $E = E_p e^{-i\omega_p t} + E_c e^{-i\omega_c t} + c.c.$, o termo de resposta linear do meio ao campo de prova é o termo proporcional a $e^{-i\omega_p t}$ (e seu complexo). Como $\Omega_p = \frac{\mu_{13} E_p}{\varepsilon_0}$, vemos que o termo de resposta linear do meio ($\chi^{(1)}$) ao campo de prova é ($\hbar = 1$):

$$\chi^{(1)} = \frac{|\mu_{13}|^2 N/V}{\varepsilon_0} \frac{i(\gamma_2 + i\delta)}{(i\Delta + \gamma_{31})(\gamma_2 + i\delta) + \Omega_c^2}. \quad (2.29)$$

Por inspeção das equações para ρ_{31} e ρ_{12} vemos que a resposta linear do meio, dado por $\chi^{(1)}$, é proporcional ao elemento de matriz da transição atômica $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, ou seja, $\chi^{(1)} \propto \rho_{31}$. Vale salientar que o cancelamento da absorção e a modificação no índice de refração do meio ocorre na ressonância, ou seja, quando a diferença entre a frequência de transição atômica ω_{31} e a do campo incidente ω_p é nula. Nas figuras abaixo, assumimos o campo de acoplamento ressonante com a transição $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, de modo que $\delta = \Delta$. Na figura 2.2 é apresentada a variação da parte real da função $\chi^{(1)}(-\omega_p, \omega_p)$ em função da dessintonia Δ (comportamento do índice de refração n do meio e é nesse ínterim que está o fenômeno da “*Slow Light*” descrito na próxima seção) e na figura 2.3 a variação da parte imaginária de $\chi^{(1)}(-\omega_p, \omega_p)$ em função de Δ (comportamento da absorção do meio).

FIGURA 2.2: Parte real de $\chi^{(1)}$ (relacionada ao índice de refração n do meio).FIGURA 2.3: Parte imaginária de $\chi^{(1)}$ (relacionada a absorção do meio).

2.4 Velocidade de Grupo no Meio Atômico

Os campos clássicos incidentes no átomo são de natureza eletromagnética e obedecem as leis de Maxwell (apêndice A, [19] e equações A.1-A.4). As leis de Maxwell nos indicam que as ondas eletromagnéticas podem se propagar no vácuo com velocidade igual a $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3.10^8 \text{ m/s}$ (velocidade da luz), sendo μ_0 e ε_0 a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do vácuo e são constituídas dos vetores campo magnético e elétrico, sendo sempre ortogonais entre si e a direção de propagação da onda. Na figura abaixo, λ é o comprimento de onda que multiplicada pela frequência nos fornece a velocidade da onda.

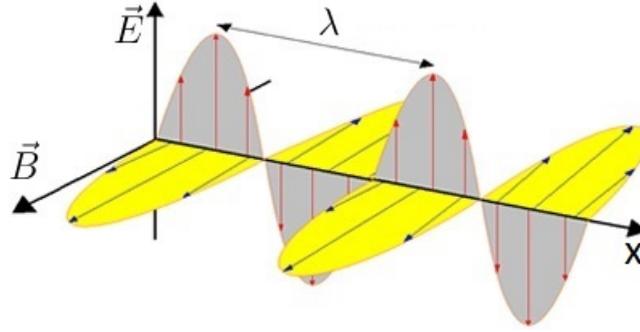


FIGURA 2.4: Propagação de ondas eletromagnéticas.

A velocidade de grupo (v_g) é definida como um único pulso constituído por uma superposição de um grande número de ondas. Então, podemos escrever que:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (2.30)$$

sendo ω a frequência da luz no meio. Se $\omega = \omega(k) = \frac{ck}{n}$, com $n = n(k)$,

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n} - \frac{ck}{n^2} \frac{dn}{dk} = \\ &= \frac{c}{n} - \frac{\omega}{n} \frac{dn}{dk} = \frac{c}{n} - \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n} - \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} v_g, \end{aligned} \quad (2.31)$$

ou

$$v_g + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} v_g = v_g \left(1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right) = \frac{c}{n}, \quad (2.32)$$

o que finalmente nos fornece:

$$v_g = \frac{\frac{c}{n}}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}, \quad (2.33)$$

com c a velocidade da luz no vácuo, $\frac{dn}{d\omega} = \frac{dn}{d\omega_p}$ e $n = n(\omega)$ o índice de refração do meio material. Portanto, a velocidade de grupo é inversamente proporcional a variação (derivada) do índice de refração do meio.

Uma interessante aplicação da drástica mudança de velocidade é a “*Slow Light*”, exemplificada na figura abaixo:

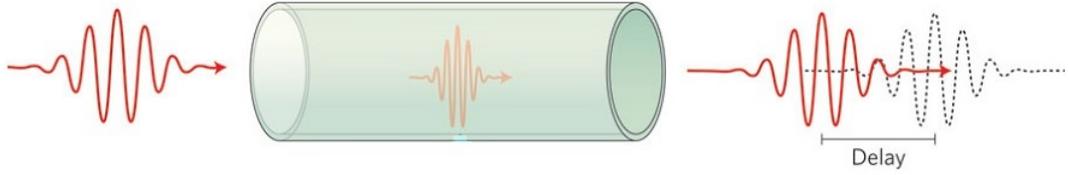


FIGURA 2.5: “Delay” da onda eletromagnética ao mudar o meio de propagação.

Nos primeiros trabalhos experimentais, Harris e seus colaboradores determinaram que a velocidade da luz em um meio de vapor de chumbo foi reduzida para $v_g = 165 \text{ m/s}$. Posteriormente, Meschede e colaboradores reportaram que a velocidade de grupo foi $v_g = 200 \text{ m/s}$. Mas foi o trabalho da equipe de L. Hau que direcionou a atenção da comunidade científica para a “*Slow Light*” quando observaram que a velocidade da luz foi reduzida para apenas 17 m/s no contexto da EIT, referência [21]. Para ter uma dimensão do acontecimento, uma onda eletromagnética que se propaga normalmente no vácuo tem sua velocidade igual a $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ e ao penetrar em outro material, tendo como exemplo o vidro com índice de refração médio $n_{\text{vidro}} = 1,5$, altera sua velocidade para $2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, ou seja, houve uma grande variação da velocidade da luz na mudança dos meios. Nas condições do trabalho de Hau, a velocidade da luz foi determinada em $1,7 \cdot 10^1 \text{ m/s}$, ou seja, a redução abrupta da velocidade é de sete ordens de grandeza.

2.5 Comprovação Experimental da EIT

Segue a primeira observação experimental da EIT, reportada em 1991 por K. J. Boller, A. Imamoglu e S. E. Harris (referência [22]) em um sistema do tipo Λ .

A figura 2.6 indica o diagrama de níveis de energia do átomo de estrôncio. O campo de bombeio, de frequência ω_c e com taxa de Rabi $2\Omega_c$, é aplicado na transição $|3\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ e o campo de prova, de frequência ω_p e com taxa de Rabi $2\Omega_p$, na transição $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ ⁴. Na transmissão o campo de prova apresentou um

⁴O campo de bombeio tem um comprimento de onda $\lambda_c = 337,1 \text{ nm}$ e o campo de prova $\lambda_p = 570,3 \text{ nm}$. O experimento contou com átomos de estrôncio e densidade de energia do laser de bombeio de $10 \frac{\text{mJ}}{\text{cm}^2}$, em pulsos com intervalos de 4 ns . Os átomos eram aprisionados e preparados no estado $5s5p^1P_1$ (nível $|1\rangle$) por 50 ns e o diâmetro do feixe do campo de prova era

atraso entre 25 e 150 ns em relação ao campo de bombeio devido a passagem da população para o nível $|1\rangle$ ($5s5p^1P_1$).

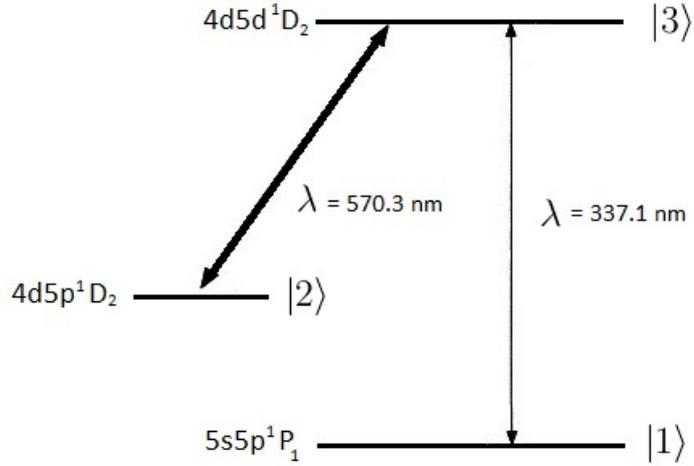


FIGURA 2.6: Diagrama de níveis de energia do átomo de estrôncio.

Os dados do experimento foram registrados através da medida de energia do campo de prova. A figura 2.7 (retirada da referência [22]) indica a transmissão como função da dessintonia do campo prova, com população inicialmente no nível $5s5p^1P_1$ (nível $|1\rangle$). Nas partes (a) e (b) da figura, a população do nível $5s5p^1P_1$ é pequena, porém o suficiente para que o meio se torne transparente e (a) indica o perfil de transmissão sem o campo de controle. Em (b) temos a presença do campo de controle, que corresponde a frequência de Rabi na transição $4d5p^1D_2 \leftrightarrow 4d5d^1D_2$, de valor $1,3 \text{ cm}^{-1}$. Já nas partes (c) e (d) da figura, a população do nível $5s5p^1P_1$ é suficientemente grande em relação a (a) e (b) e, em (c), não foi aplicado o campo de controle. Em (d) o campo de controle, correspondente a frequência de Rabi na transição $4d5p^1D_2 \rightarrow 4d5d^1D_2$, teve valor $1,5 \text{ cm}^{-1}$.

De acordo com o trabalho [22], a unidade de frequência adotada é cm^{-1} , o que não é usual. Porém, os autores unificaram a notação das unidades de energia, frequência e comprimento de onda utilizando o vetor de onda.

de 0,2 mm e o de bombeio 3 mm. Para garantir a máxima sobreposição temporal dos lasers foi utilizado um fotodiodo (com intervalo de 100 ps para a recarga) e uma porta integradora (modelo *Stanford Reserch Systems SR255*).

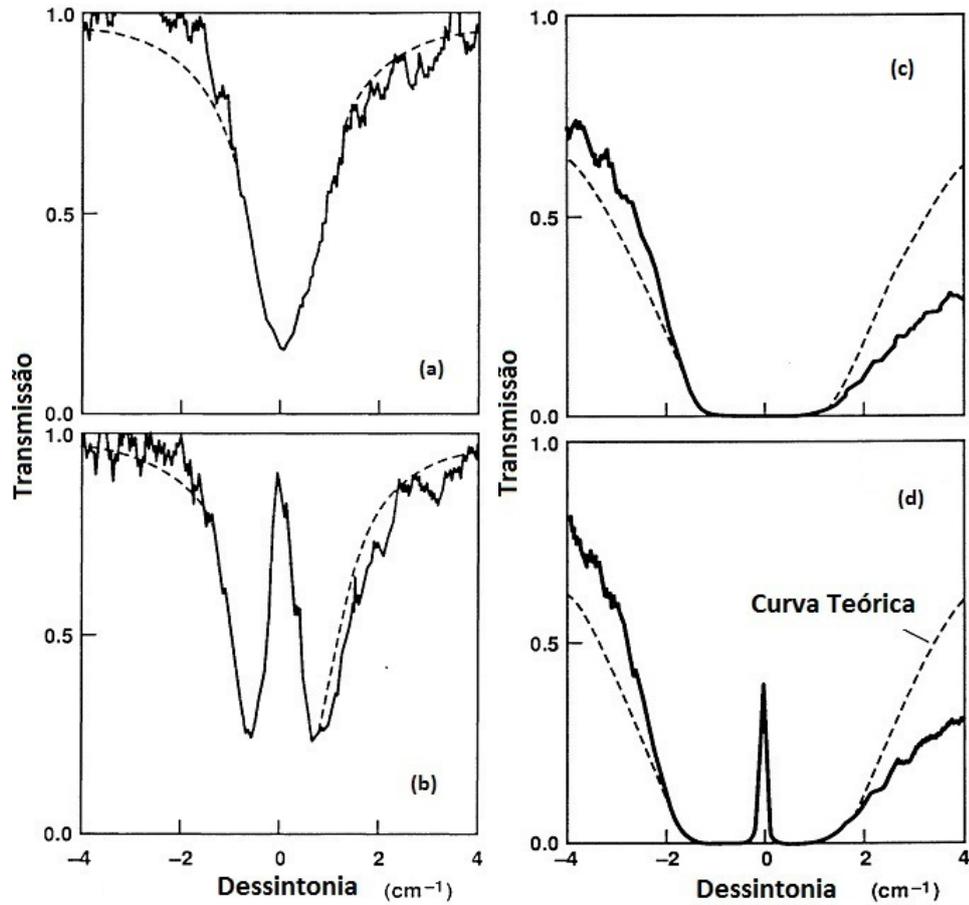


FIGURA 2.7: Transmissão vs dessintonia do campo de prova. Nas partes (a) e (c) não foi aplicado o campo de prova. Já em (b) o campo de prova teve $1,3 \text{ cm}^{-1}$ de intensidade e dessintonia $\Delta\omega_c = -0,2 \text{ cm}^{-1}$ e em (d) intensidade de $1,5 \text{ cm}^{-1}$ e dessintonia $\Delta\omega_c = -0,1 \text{ cm}^{-1}$.

O autor registra que na primeira tentativa de observação experimental da EIT não obteve sucesso devido ao acoplamento do laser incidente (a EIT requer acoplamento dos modos do campo com o átomo) e que a EIT pode ser observada em frequência de luz branca com monocromador.

Capítulo 3

Osciladores e a Analogia Clássica da EIT

A finalidade deste capítulo é apresentar o resultado do análogo clássico da Transparência Eletromagneticamente Induzida com dois osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados, proposto em [8]. Utilizando um tratamento Hamiltoniano, vamos definir as variáveis clássicas e derivar as equações de movimento no regime assintótico para que possamos averiguar a equivalência clássica da EIT. Para solidificar a equivalência, está incluída nas próximas seções a teoria básica envolvendo oscilações, que servirá de base para o entendimento do análogo clássico da EIT deste e dos demais capítulos.

3.1 Oscilações

Oscilações é um assunto de fundamental importância pois é estudada praticamente em todas as áreas da física. Exemplos de modelos oscilatórios são encontrados em sistemas mecânico vibratórios incluindo os pêndulos, diapasões, cordas de instrumentos musicais, colunas de ar em instrumentos de sopro, corrente elétrica alternada, oscilações de corrente em circuitos elétricos [24], etc. Esses e outros modelos clássicos podem ter sua física modelada por osciladores assim como muitas situações na física quântica podem ter seu modelo analisado em forma de osciladores, como no caso da EIT em um átomo de três níveis em

configuração Λ e sistemas optomecânico, o que é objeto de estudo deste trabalho.

Os sistemas oscilantes mais simples possuem apenas um grau de liberdade, ou seja, são descritos apenas por uma única coordenada, como por exemplo o ângulo de desvio do pêndulo em relação a posição vertical de equilíbrio. A força que faz acontecer as oscilações é dada em função da energia potencial $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$ e caso essa energia esteja na forma de energia potencial elástica [23]-[30] a força toma a forma $F(x) = -kx$, sendo x o deslocamento do objeto estudado, $k = m\omega^2$ a constante elástica da mola e ω a sua frequência de oscilação característica, caracterizando a Lei de Hooke. A energia potencial elástica é dada por $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

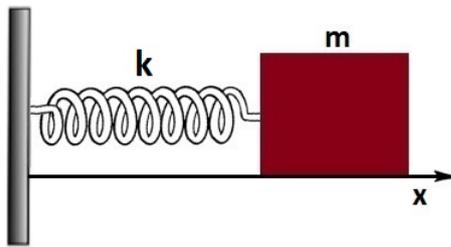


FIGURA 3.1: Sistema massa mola.

A equação de movimento, admitindo que nenhuma outra força age sobre o corpo é:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \quad (3.1)$$

Simplificando pela massa m , temos:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad (3.2)$$

sendo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. A equação 3.2 descreve o movimento de um oscilador harmônico unidimensional. Para pequenos desvios de posição qualquer oscilador harmônico (com um grau de liberdade) deve obedecer a essa equação de movimento. É importante ressaltar que a restrição para pequenos desvios é importante, pois se passarmos do limite elástico de uma mola ela não retornará à posição de equilíbrio produzindo deformações permanentes, o que será desconsiderado nessa dissertação.

O movimento de um oscilador harmônico chama-se movimento harmônico

simples (mhs) e seu movimento é governado pela equação 3.2, que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Na prática o movimento harmônico simples ocorre em sistemas que apresentam uma dissipação γ de energia. A oscilação é amortecida pelas forças dissipativas que atuam no sistema.

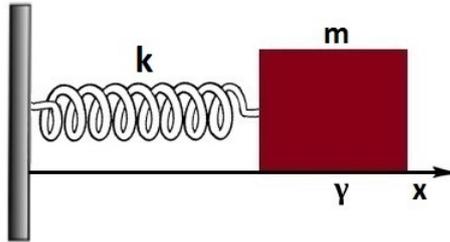


FIGURA 3.2: Sistema massa mola dissipativo.

Como exemplo de sistemas dissipativos temos a oscilação do pêndulo que perde energia devido a resistência do ar, um líquido em um tubo é amortecido devido a sua viscosidade e esse amortecimento é proporcional a velocidade e, por isso, vamos adicionar o termo dissipativo $\eta\dot{x}$ na equação 3.2:

$$m\ddot{x} = -m\omega^2x - \eta\dot{x}, \quad \eta > 0, \quad (3.3)$$

sendo que $-\eta\dot{x}$ é a força dissipativa do sistema e o sinal negativo significa que essa resistência é no sentido oposto da velocidade ($\eta > 0$). Simplificando por m , a equação se torna:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2x = 0, \quad (3.4)$$

em que foi empregado a frequência angular do sistema $\omega^2 = \frac{k}{m}$ e a dissipação atômica $\gamma = \frac{\eta}{m}$. Uma força externa pode agir no oscilador produzindo uma vibração mecânica de modo que as oscilações por ela produzidas são denominadas oscilações forçadas. A força externa age no oscilador de modo a suprir a perda pelas dissipações.

Como exemplo de oscilações forçadas podemos citar: as oscilações do diafragma de um microfone ou do tímpano humano sob a ação das ondas sonoras; as oscilações de uma pessoa sentada em um balanço sob a ação de empurrões periódicos; as oscilações elétricas, produzidas em um circuito detector de rádio ou televisão sob o efeito do sinal eletromagnético captado; as oscilações dos

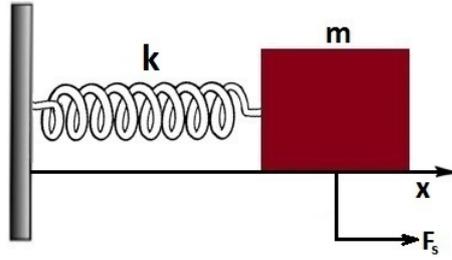


FIGURA 3.3: Sistema massa mola forçado.

elétrons em átomos ou moléculas de um meio material sob a ação de uma onda eletromagnética.

Sendo a força periódica no tempo, vamos chamar $F_s(t) = F \cos(\omega_s t)$ a força externa de frequência angular ω_s e adicionando na equação 3.2 temos que:

$$m\ddot{x} + m\omega^2 = F_s(t) = F \cos(\omega_s t). \quad (3.5)$$

Novamente simplificando pela massa, obtemos:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} \cos(\omega_s t). \quad (3.6)$$

3.1.1 Oscilações Forçadas e Amortecidas

Agora será considerado um sistema em que é aplicada uma força externa periódica, forçando o sistema, e também que possua uma dissipação proporcional a velocidade na mesma equação, desse modo:

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = F_s(t) = F \cos(\omega_s t). \quad (3.7)$$

Simplificando pela massa e passando para a forma complexa,

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} e^{-i\omega_s t}. \quad (3.8)$$

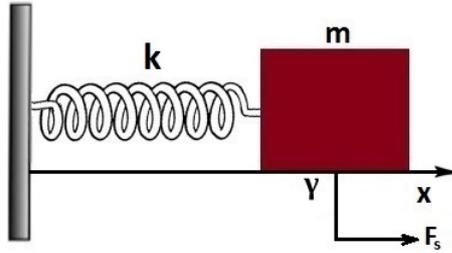


FIGURA 3.4: Sistema massa mola forçado e amortecido.

Essa é a forma mais geral de sistemas físicos oscilantes que encontramos na natureza, pois normalmente o sistema recebe uma força externa que condiciona sua oscilação e dissipa neste espaço, seja por meio do atrito com o ar ou onde estiver confinado. Caso a força e a dissipação não estejam presentes no sistema podemos apenas anular esses fatores de 3.8. Assim, praticamente qualquer problema que envolva vibrações mecânicas reduz-se a um oscilador harmônico desde que as pequenas amplitudes de vibração também estejam envolvidas, isto é, quando não é ultrapassado o limite elástico da mola.

Um exemplo está na eletrodinâmica, pois ao construirmos um circuito elétrico com indutância L , resistência R e capacitância C em série e sujeito a uma força eletromotriz aplicada $E(t)$, temos a seguinte dinâmica:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t), \quad (3.9)$$

sendo q a carga e $\frac{dq}{dt}$ a corrente no circuito. A teoria de oscilações elétricas em uma linha de transmissão é matematicamente similar ao problema da corda vibrante ou da cavidade de ar ressonante, podendo ter sua física modelada por osciladores clássicos. Essa modelagem oscilatória por circuitos elétricos também é apresentada em [8].

3.1.2 Oscilações Amortecidas Forçadas e Acopladas

Considere dois osciladores de massa m_1 e m_2 conectados a suportes fixos (sem qualquer vibração), ligados por molas de constantes elásticas $k_1 = m\omega_1^2$ e $k_2 = m\omega_2^2$ e esses osciladores estão conectados entre si por uma terceira mola de

constante elástica $k_{12} = m\omega_{12}^2$, sendo que ω_{12}^2 é a frequência de oscilação da mola que conecta os osciladores 1 e 2. Considere também que esse sistema, indicado na figura 3.5, pode oscilar apenas em uma dimensão (no eixo x):

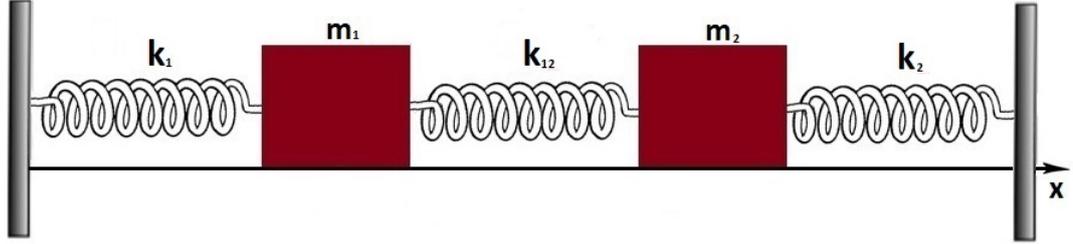


FIGURA 3.5: Sistema massa-mola acoplado.

Nesse caso, a massa m_1 está acoplada com a massa m_2 por meio da mola de constante elástica de acoplamento k_{12} e qualquer vibração em um dos osciladores influenciará imediatamente o outro oscilador acoplado. Caso a mola central não estivesse presente, os dois osciladores moveriam-se livremente com frequências características $\omega_n = \sqrt{\frac{k_n}{m_n}}$, com $n = 1, 2$.

A análise do acoplamento entre as massas é feita através da investigação das equações de movimento do sistema, dada em função da posição de deslocamento x , da constante elástica da mola k e da massa m :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_{12}x_2; \\ m\ddot{x}_2 &= -k_2x_2 + k_{12}x_1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para simplificar os cálculos, vamos utilizar $k_1 = k_2 = k$, $m_1 = m_2 = m$ e fazer $\omega_{12}^2 = \frac{k_{12}}{m}$. Ao dividir o sistema acima por m , obtemos:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2x_1 - \omega_{12}^2x_2 &= 0; \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2x_2 - \omega_{12}^2x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

A introdução de uma força ($F_s(t) = Fe^{-i\omega_s t}$) na situação ilustrada pela figura 3.5 fará a massa m_1 oscilar influenciando a massa m_2 e, considerando a dissipação dos elementos massivos do sistema nas equações 3.11, temos a figura 3.6.

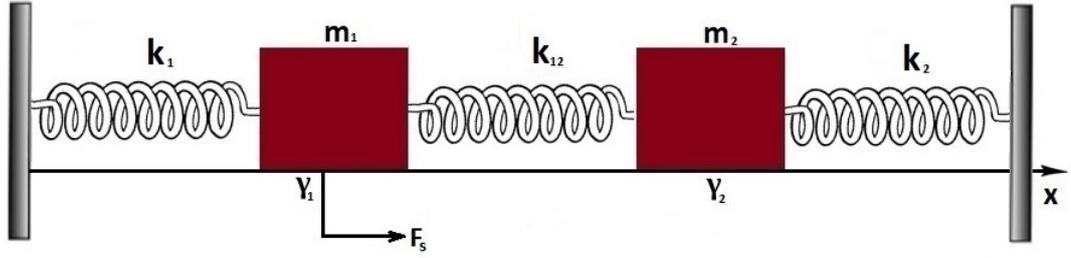


FIGURA 3.6: Sistema massa-mola amortecido, forçado e dissipativo.

Note que a força é aplicada apenas no primeiro oscilador. Dessa forma, o novo sistema de equações possuirá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \omega_{12}^2 x_2 &= \frac{F}{m} e^{-i\omega_s t}; \\ \ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \omega_{12}^2 x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

O sistema modelado pelas equações acima (3.12) é apresentado em [8] e utilizado como modelo clássico da EIT.

3.2 Analogia Clássica da EIT

No modelo clássico, introduzido por Carlos Leonardo Garrido Alzar e colaboradores[8], o átomo é modelado por um sistema harmônico amortecido forçado e acoplado, formado pela partícula 1 de massa m_1 , unido a duas molas de constantes elásticas k_1 e k_{12} , como discutido na seção anterior. A partícula 1 é submetida a ação de uma força harmônica (força sonda) $F_s(t) = F e^{-i(\omega_s t + \phi_s)}$, com frequência ω_1 , como ilustrado na figura 3.6.

Ao averiguarmos a potência transferida pela força harmônica à partícula 1 vemos um perfil de absorção com frequência de ressonância $\omega_1^2 = (k_1 + k_{12})/m$. Essa potência transferida evidencia um comportamento de absorção similar ao da EIT, que muda a medida que alteramos o valor de k_{12} . A curva de absorção começa a se dividir caracterizando um dubleto similar ao Autler-Townes [32] da EIT. Essa divisão é uma manifestação da separação dos modos normais de vibração.

Para realizar a analogia entre o oscilador harmônico clássico massa-mola e o modelo quântico de um átomo de três níveis na configuração Λ , vamos continuar a impor (como na subseção anterior) que $m_1=m_2=m$, o que nos facilitará os cálculos. Nessa configuração clássica, o feixe de controle é simulado pelo acoplamento do oscilador 1 com o segundo oscilador via mola de constante elástica k_{12} e o feixe sonda é modelado pela força harmônica que age sobre a partícula 1. Os cálculos serão apresentados na próxima seção.

3.2.1 Formulação Hamiltoniana

Para a formulação matemática, utilizaremos a abordagem Hamiltoniana do problema clássico que estamos considerando.

Considerando que as partículas 1 e 2 estão acopladas, a lagrangiana total [27]-[30] do sistema é dada por $L = L_1 + L_2 + L_{int} + L_B$, sendo $L_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}m\omega_1^2 x_1^2$ a lagrangiana da partícula 1, $L_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}m\omega_2^2 x_2^2$ a lagrangiana da partícula 2, $L_{int} = -m\omega_{12}^2 x_1 x_2$ a lagrangiana de interação e $L_B = x_1 F_s(t)$ o termo lagrangiano que indica o bombeio no sistema. Assim:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}m\omega_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}m\omega_2^2 x_2^2 + m\omega_{12}^2 x_1 x_2 + x_1 F_s(t). \quad (3.13)$$

A Hamiltoniana é

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2) - k_{12} x_1 x_2 - x_1 F_s(t). \quad (3.14)$$

A equação de movimento de Hamilton ($\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$) para a partícula 1 é dada por:

$$\dot{p}_1 = -k_1 x_1 + k_{12} x_2 + F_s(t)$$

e, desenvolvendo,

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \omega_{12}^2 x_2 = \frac{F_s(t)}{m}.$$

Sabendo que $F_s(t) = F e^{-i\omega_s t}$, obtemos:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \omega_{12}^2 x_2 = \frac{F}{m} e^{-i\omega_s t}. \quad (3.15)$$

Para a partícula 2 é análogo ($F = 0$):

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \omega_{12}^2 x_1 = 0. \quad (3.16)$$

Adicionando a dissipação em 3.15 e 3.16, obtemos:

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \omega_{12}^2 x_2 = \frac{F}{m} e^{-i\omega_s t} \quad (3.17)$$

e

$$\ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \omega_{12}^2 x_1 = 0. \quad (3.18)$$

As equações 3.17 e 3.18 são idênticas as vistas em [8]. A partir de $\omega_1^2 = \frac{k_1+k_{12}}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{k_2+k_{12}}{m}$ e considerando $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ($k_1 = k_2 = k$), segue a definição das variáveis clássicas:

Definição 3.2.1 (Variáveis Clássicas)

$$a_+ = -\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p_1 + im\omega x_1) \quad e \quad a_- = +\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p_1 - im\omega x_1); \quad (3.19)$$

$$b_+ = -\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p_2 + im\omega x_2) \quad e \quad b_- = +\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p_2 - im\omega x_2), \quad (3.20)$$

sendo 3.19 para a partícula 1 e 3.20 para a partícula 2. Resolvendo o sistema com (a_+, a_-, b_+, b_-) ,

$$x_1 = (a_+ + a_-)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad e \quad x_2 = (b_+ + b_-)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}; \quad (3.21)$$

$$p_1 = i(a_+ - a_-)\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \quad e \quad p_2 = i(b_+ - b_-)\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}, \quad (3.22)$$

em que os índices 1 e 2 indicam as partículas consideradas. Aplicando as equações 3.21 e 3.22 em 3.14, ficamos com:

$$H = \hbar\omega[a_+a_- + b_+b_-] - \frac{\omega_{12}^2\hbar}{2\omega}[a_+b_+ + a_+b_- + a_-b_+ + a_-b_-] - (a_+ + a_-)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}F_s(t). \quad (3.23)$$

O termo $\frac{\omega_{12}^2}{2\omega}$ será denominado por Ω_{12} e fazendo $F_s(t) = F(e^{i\omega_s t} + e^{-i\omega_s t})$ podemos

também denominar $\Omega_s = \sqrt{\frac{F^2}{2m\hbar\omega}}$. Assim,

$$H = \hbar\omega[a_+a_- + b_+b_-] - \hbar\Omega_{12}[a_+b_+ + a_+b_- + a_-b_+ + a_-b_-] - \hbar\Omega_s(a_+ + a_-)(e^{i\omega_s t} + e^{-i\omega_s t}). \quad (3.24)$$

Aplicando a aproximação de onda girante ($a_{\pm} = a_{\pm}e^{\pm i\omega t}$) em 3.24 e determinando a diferença de frequências por $\Delta = \omega - \omega_s$, porém $\Delta \ll \omega$ o que implica em $\omega \approx \omega_s$, temos:

$$H = \hbar\omega[a_+a_- + b_+b_-] - \hbar\Omega_{12}[a_+b_- + a_-b_+] - \hbar\Omega_s(a_+ + a_-)(e^{i\omega_s t} + e^{-i\omega_s t}), \quad (3.25)$$

portanto no regime de aproximação de onda girante¹, os termos (a_+b_+) e (a_-b_-) podem ser desprezados pois contribuem muito pouco para a dinâmica do sistema. Adotando a representação $\{ \quad \}$ para os Parênteses de Poisson [27]-[30] e de posse de 3.25, podemos verificar a veracidade das equações 3.17 e 3.18 da seguinte forma:

$$\dot{q} = \{q, H\} \rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = \{p, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.26)$$

e vemos que \dot{p} nos fornece justamente as equações de movimento de Hamilton para o problema massa-mola. Ainda adotando os Parênteses de Poisson, podemos verificar que $\{x, p\} = 1$ e $\{a_+, a_-\} = \frac{i}{\hbar}$ (note que na última identidade utilizamos os Parênteses de Poisson e como resultado temos a constante de Planck).

Efetuada a mesma operação com as variáveis clássicas 3.19, 3.20 em 3.25 e $\hbar = 1$, temos:

$$\dot{a}_- = \{a_-, H\} = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial a_+} = -i(\omega a_- - \Omega_{12}b_- - \Omega_s e^{-i\omega_s t}); \quad (3.27)$$

$$\dot{a}_+ = \{a_+, H\} = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial a_-} = i(\omega a_+ - \Omega_{12}b_+ - \Omega_s e^{i\omega_s t}). \quad (3.28)$$

O mesmo desenvolvimento é feito para a partícula 2:

$$\dot{b}_- = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial b_+} = -i(\omega b_- - \Omega_{12}a_-); \quad (3.29)$$

¹A aproximação de onda girante consiste em ignorar os termos contra girantes da Hamiltoniana, válido quando o acoplamento do campo é muito fraco comparado com as frequências naturais dos osciladores. Mais detalhes serão apresentados futuramente, no capítulo 4 (subseção 4.3.2).

$$\dot{b}_+ = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial b_+} = i(\omega b_+ - \Omega_{12} a_+). \quad (3.30)$$

Adicionando a dissipação γ_1 nas equações 3.27-3.28 e γ_2 nas equações 3.29-3.30, ficamos com:

$$\begin{aligned} \dot{a}_- &= -i(\omega a_- - \Omega_{12} b_- - \Omega_s e^{-i\omega_s t}) - \gamma_1 a_-; \\ \dot{a}_+ &= i(\omega a_+ - \Omega_{12} b_+ - \Omega_s e^{i\omega_s t}) - \gamma_1 a_+; \\ \dot{b}_- &= -i(\omega b_- - \Omega_{12} a_-) - \gamma_2 b_-; \\ \dot{b}_+ &= i(\omega b_+ - \Omega_{12} a_+) - \gamma_2 b_+. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para eliminarmos a dependência temporal das equações acima, vamos fazer a seguinte mudança de variáveis:

$$a_{\pm}(t) = \tilde{a}_{\pm}(t) e^{\pm i\omega_s t} \quad (3.32)$$

e

$$b_{\pm}(t) = \tilde{b}_{\pm}(t) e^{\pm i\omega_s t}. \quad (3.33)$$

Com essa mudança e impondo o regime assintótico ($\dot{\tilde{a}}_{\pm} = \dot{\tilde{b}}_{\pm} = 0$), podemos escrever:

$$\tilde{a}_- = \frac{\Omega_s(\Delta - i\gamma_2)}{(\Delta - i\gamma_2)(\Delta - i\gamma_1) - \Omega_{12}^2}; \quad (3.34)$$

$$\tilde{b}_- = \frac{\Omega_{12}\Omega_s}{(\Delta - i\gamma_2)(\Delta - i\gamma_1) - \Omega_{12}^2}, \quad (3.35)$$

em que $\Delta = \omega - \omega_s$ e a_+ e b_+ são os conjugados.

Se tomarmos a equação 2.25 assumindo $\Delta_2 = 0$ e $\Delta = \Delta_1$, podemos então obter ρ_{31} (após certa manipulação algébrica) como:

$$\rho_{31} = \frac{\Omega_p(\Delta - i\gamma_2)}{(\Delta - i\gamma_{31})(\Delta - i\gamma_2) - \Omega_c^2}.$$

Comparando a equação acima com as eqs.3.34 e 3.35 vemos que ρ_{31} é idêntico a \tilde{a}_- . A analogia clássica para cada parâmetro é mostrado na tabela 3.1.

2-OHA	EIT
Ω_s	Ω_p
Ω_{12}	Ω_c
γ_1	γ_{31}
γ_2	γ_2
Δ	Δ

TABELA 3.1: Analogia da EIT com os dois osciladores harmônicos acoplados (2-OHA).

Na figura 3.7 mostramos a parte imaginária e real da susceptibilidade elétrica χ do sistema EIT, cujo o comportamento é determinado pela parte imaginária e real de ρ_{31} , em função da dessintonia entre átomo e campo normalizada Δ/γ_{31} para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle Ω_c . As curvas de (a) a (e) são obtidas considerando-se perfeita ressonância entre átomo e campos $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, utilizando os parâmetros $\Omega_p = 0,02\gamma_{31}$, $\gamma_2 = 0,01\gamma_{31}$, $\gamma_3 = 0$. Os resultados do sistema EIT (linha vermelha pontilhada) são comparados com os resultados obtidos para o sistema de dois osciladores harmônicos acoplados (2-OHA, linha sólida azul), dados por 3.34, para o mesmo conjunto de parâmetros seguindo a equivalência apresentada na tabela 3.1.

Como já discutido anteriormente a parte imaginária da susceptibilidade elétrica $\text{Im}\{\chi\}$ está relacionada à absorção e transmissão enquanto que a parte real, $\text{Real}\{\chi\}$, às propriedades refrativas do meio atômico. Quando $\Omega_c = 0$, figura 3.7(a), temos um perfil típico de absorção dada por uma Lorentziana com máximo em $\Delta = 0$. No sistema de osciladores esta condição é equivalente a termos um único oscilador harmônico amortecido e forçado ($k_{12} = 0$) representando a transição atômica $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. À medida que aumentamos $\Omega_c \equiv \Omega_{12}$ observa-se o aparecimento de uma estreita janela de absorção para ambos os sistemas, a qual vai a zero quando a condição $\Omega_p \ll \Omega_c$ é satisfeita, figuras 3.7(c), 3.7(d) e 3.7(e). Essa condição também é essencial para observação da concordância completa entre o sistema atômico e clássico. A figura 3.7(b) mostra um caso em que a condição é violada de modo que a aproximação $\rho_{11} \neq 1$ não é mais válida. A janela de absorção não vai a zero nesse caso porque o parâmetro de defasagem $\gamma_2 \neq 0$, mesmo com a segunda condição de EIT $\gamma_2 \ll \gamma_{31}$ sendo satisfeita. O parâmetro γ_2 é responsável pela destruição do estado escuro.

As figuras 3.7(c), 3.7(d) e 3.7(e) mostram claramente que os dois máximos

de absorção são distanciados um do outro por $2\Omega_c$, evoluindo do espectro de EIT, estreita janela de absorção, para o espectro do tipo Autler-Townes, em que os picos são afastados e com boa resolução. Os resultados mostram que a principal característica da EIT dada pela janela de absorção nula, atribuída ao efeito de interferência quântica do sistema átomo-campo, também pode ser observada pela interferência clássica entre os modos normais de oscilação de um sistema de dois osciladores harmônicos acoplados quando $\Omega_s \ll \Omega_{12}$.

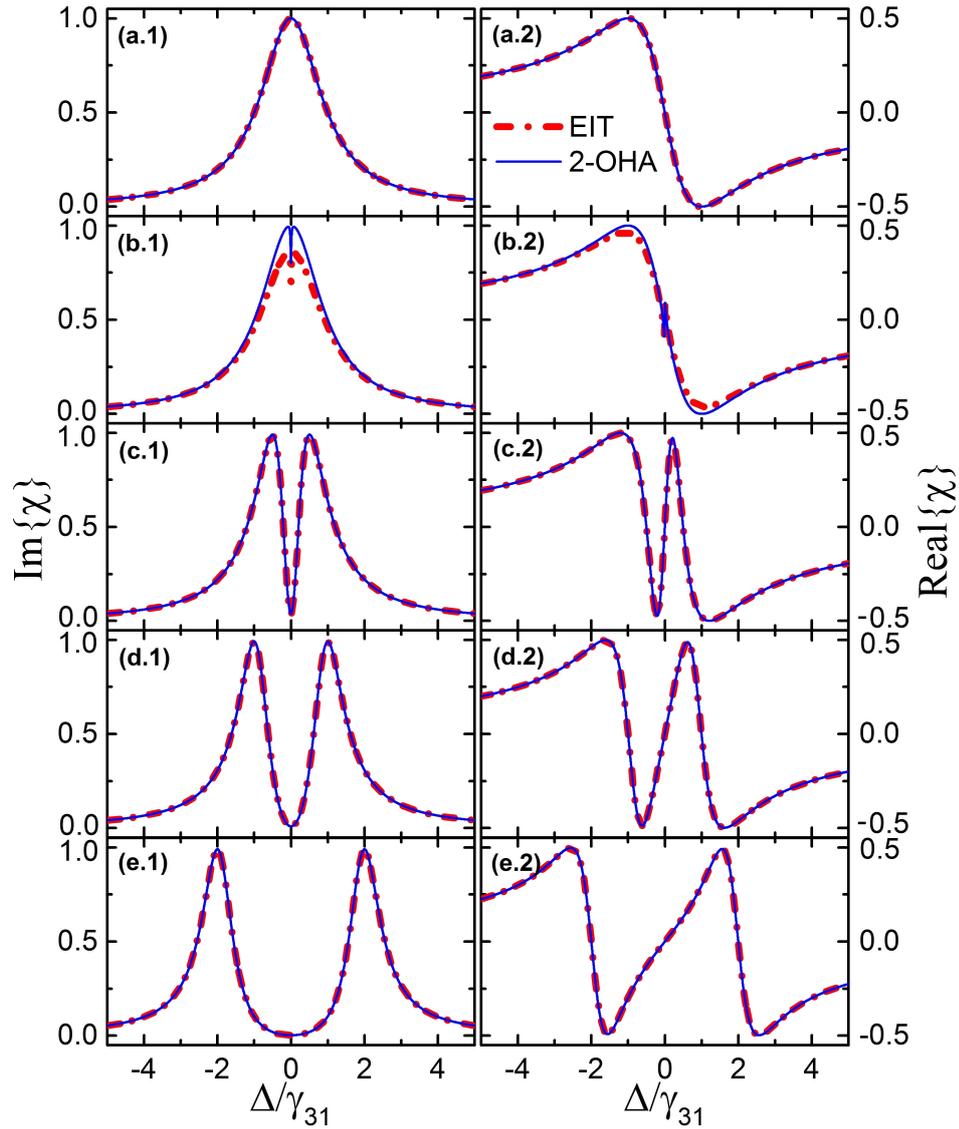


FIGURA 3.7: Analogia clássica da EIT mostrando a susceptibilidade elétrica $\chi \propto \rho_{31}$ em comparação com seu equivalente clássico dado por \tilde{a}_- , veja eq.3.34. Os parâmetros utilizados são $\Omega_p = 0,02\gamma_{31}$, $\gamma_2 = 0,01\gamma_{31}$, $\gamma_3 = 0$ para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle (a) $\Omega_c = 0,0$, (b) $0,05\gamma_{31}$, (c) $0,5\gamma_{31}$, (d) $1,0\gamma_{31}$ e (e) $2,0\gamma_{31}$, lembrando que $\gamma_{31} = \Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_3$, sendo $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5$ [unidades de frequência]. Para os osciladores acoplados foram utilizados o mesmo conjunto de parâmetros seguindo a equivalência apresentada na tabela 3.1.

Capítulo 4

Análogo Clássico da EIT: Dois Osciladores Acoplados

Nos capítulos anteriores foi apresentado a teoria básica da EIT (em um átomo de três níveis em configuração Λ), dos osciladores clássicos (sistema massa-mola) e da analogia já realizada da EIT. Neste capítulo, será apresentado um sistema optomecânico que é a motivação para a investigação de outros sistemas quânticos em que ocorrem processos tipo EIT e possuem analogia com dois osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados.

4.1 Optomecânica de Cavidades

Em meados do século XVII, Kepler descreve a influência luminosa em partículas e após vários anos surge a teoria eletromagnética de Maxwell em que temos a solidificação dos conceitos da dinâmica da radiação, impulsionando experimentalistas da época a mostrar que a luz possui momento (denotado por momento óptico) e traz os efeitos de radiação e pressão onde incide.

Com o advento dos lasers na década de 1970 foi proposto que seria possível utilizar essa força (proveniente da radiação do laser) para manipular o movimento mecânico de certos objetos. Hänsch e Schawlow, Wineland e Dehmelt propuseram formas diferentes de utilizar a pressão da radiação e Ashkin, Chu *et al*

utilizaram novas técnicas para formar armadilhas em seus átomos usando forças ópticas.

Depois de estabelecida a influência da radiação no movimento mecânico, os experimentalistas começaram a entender e examinar cada termo do sistema clássico e sua correspondência com os termos da mecânica quântica para tentar diferenciar o limite clássico do quântico no sistema optomecânico estudado.

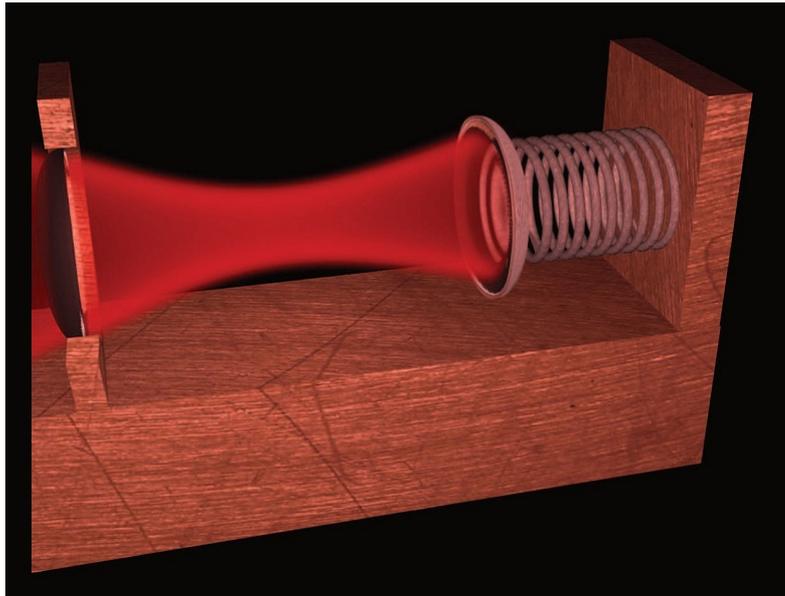


FIGURA 4.1: Radiação interagindo com um sistema optomecânico. Figura retirada da referência [68].

Nos anos posteriores a 1970, os sistemas optomecânicos tem atraído a atenção dos cientistas da comunidade óptica, o que gerou um grande número de modelos teóricos e seus respectivos experimentos. Para exemplificar essa procura por modelos optomecânicos, várias aplicações foram (e ainda são) estudadas como o fenômeno do resfriamento dos modos do campo dentro da cavidade (“*laser cooling*”, referência [62]), os metamateriais [86]-[87] que são materiais não encontrados naturalmente no meio ambiente e apresentam propriedades surpreendentes como índice de refração negativo e o controle de suas propriedades pela radiação incidente.

4.1.1 Optomecânica

Um sistema optomecânico simples [66] consiste em uma cavidade óptica com suas paredes refletoras sendo submetidas a uma pequena força gerada pelo campo eletromagnético confinado em seu interior. Acoplado a um dos espelhos (sendo que esse espelho é perfeitamente refletor, ou seja, a radiação não deixa o interior da cavidade e possui reflexão total) está uma mola que faz com que esse espelho tenha um deslocamento e uma consequente vibração.

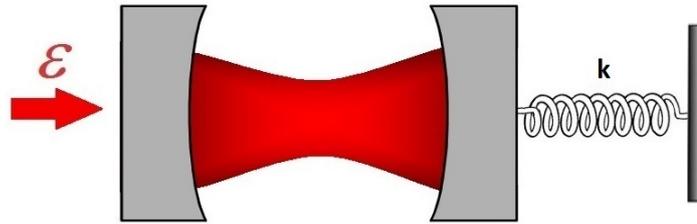


FIGURA 4.2: Sistema optomecânico simples. Cavidade sem átomo com uma das paredes acopladas a uma mola de frequência ω .

A dependência entre a pressão de radiação, a posição e a distância entre os espelhos define a optomecânica de cavidades ópticas: perturbações mecânicas que causem flutuações na frequência de ressonância óptica irão alterar a energia eletromagnética armazenada na cavidade e, reciprocamente, essas flutuações de energia eletromagnética modificarão as vibrações mecânicas. Essa dinâmica de absorção (armazenamento) de energia eletromagnética nos indicará o comportamento da EIT. Como exemplo, a referência [63] nos propõe um análogo da EIT em sistemas optomecânicos em que o amortecimento mecânico é muito menor que a dissipação da cavidade e a referência [65] nos mostra que a “*Slow Light*” possui um análogo na optomecânica de cavidades.

A oscilação do espelho móvel irá definir os modos do campo eletromagnético dentro da cavidade (energia armazenada) e a dinâmica do sistema. A frequência do campo de incidência une-se com a frequência de oscilação das paredes espelhadas da cavidade, acoplando-se. Como o espelho se move livremente de acordo com a força de oscilação da mola do sistema mecânico, temos que as frequências (do espelho e campo incidente) podem ser somadas (caso a direção de oscilação do espelho e do campo incidente sejam momentaneamente

contrárias, $\omega_l + \Omega_m$), sendo ω_l a frequência da radiação que entra na cavidade e Ω_m a frequência de oscilação mecânica. Agora, se a frequência de oscilação do espelho e a frequência do campo estiverem no mesmo sentido, temos que $\omega_l - \Omega_m$. As frequências serão introduzidas no campo intracavidade. No caso da soma de frequências, temos o termo anti-Stokes e no caso da subtração, o termo Stokes.

A frequência do campo de bombeio dentro da cavidade induz a EIT na condição de ressonância com a frequência de oscilação optomecânica e também no regime de acoplamento fraco. Assim, o espalhamento Stokes ($\omega_l - \Omega_m$) não é considerado na dinâmica do sistema por não estar em ressonância com a cavidade, portanto apenas restarão as frequências anti-Stokes ($\omega_l + \Omega_m$) nos termos intracavidade do operador \hat{a} .

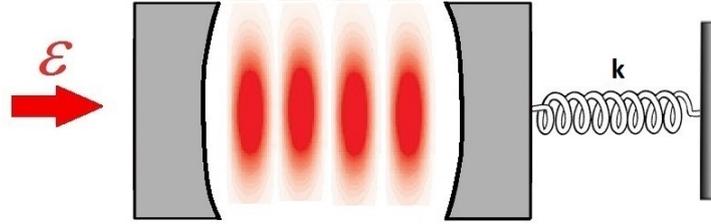


FIGURA 4.3: Modos do campo eletromagnético dentro da cavidade optomecânica.

Utilizando a representação de Heisenberg, o trabalho [63] apresenta as equações de movimento da optomecânica e realiza a analogia com as equações da EIT em um átomo de três níveis em configuração Λ a partir da Hamiltoniana optomecânica abaixo (sem contar com efeitos como o “*backaction*”¹), considerando que apenas um modo do campo se acopla com um modo mecânico da cavidade.

$$\hat{H} = \hat{H}_{mec} + \hat{H}_{opt} + \hat{H}_{int} + \hat{H}_{campo}, \quad (4.1)$$

¹Previsto primeiramente na década de 1960 por Baginsky, o efeito “*backaction*” [66] é a pressão da radiação, a qual modifica a dinâmica do oscilador mecânico com a vibração mecânica de uma das paredes da cavidade. Essa modificação da oscilação do sistema, alterando as propriedades ópticas do sistema, é denominada dinâmica *backaction* e não altera apenas o amortecimento e a constante da mola, mas também a troca de energia entre os modos mecânicos e ópticos.

sendo

$$\hat{H}_{mec} = \frac{\hat{p}^2}{2m_{ef}} + \frac{1}{2}m_{ef}\Omega_m^2\hat{x}_m^2; \quad (4.2)$$

$$\hat{H}_{opt} = \hbar\omega_c \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right); \quad (4.3)$$

$$\hat{H}_{int} = \hbar G \hat{x} \hat{a}^\dagger \hat{a}; \quad (4.4)$$

$$\hat{H}_{campo} = i\hbar\sqrt{\eta_c\kappa}(\varepsilon\hat{a}^\dagger + \varepsilon^*\hat{a}), \quad (4.5)$$

sendo que \hat{x} e \hat{p} são os operadores posição e momento do sistema mecânico, m_{ef} é a sua massa efetiva e Ω_m sua frequência angular, ε é a amplitude do campo de bombeio, G o acoplamento mecânico, κ é o decaimento da cavidade, η_c é o parâmetro da cavidade óptica e $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ o número de fótons dentro da cavidade. A força da pressão de radiação é dada por $F(x) = \frac{\partial H_{in}(x)}{\partial x}$.

Resolvendo 4.1 na representação de Heisenberg (equações quânticas de Langevin (mais detalhes em [64]), sendo um tratamento mais apropriado para o sistema optomecânico pois permite a descrição conjunta da interação da radiação com a cavidade) para um sistema girante com $\Delta = \omega_l - \omega_c$, temos os operadores $\langle \dot{\hat{a}} \rangle$ e $\langle \dot{\hat{x}} \rangle$. No estado estacionário, esses operadores se tornam $\langle \hat{a} \rangle = \frac{\sqrt{\eta_c\kappa\varepsilon}}{-i(\Delta - G\langle \hat{x} \rangle) + \frac{\kappa}{2}}$ e $\langle \hat{x} \rangle = \frac{\langle \dot{\hat{a}} \rangle^2}{\Omega_m^2 m_{ef}}$. Utilizando o ansatz $\hat{a} = \langle \hat{a} \rangle + \delta\hat{a}$ e $\hat{x} = \langle \hat{x} \rangle + \delta\hat{x}$ nas equações $\langle \dot{\hat{a}} \rangle$ e $\langle \dot{\hat{x}} \rangle$, ficamos com:

$$\delta\dot{\hat{a}} = \delta\langle \hat{a} \rangle \left(i\Delta - \frac{\kappa}{2} \right) - iG\delta\hat{x}\delta\langle \hat{a} \rangle + \sqrt{\eta_c\kappa}\delta\varepsilon; \quad (4.6)$$

$$\delta\ddot{\hat{x}} + \Gamma_m\delta\dot{\hat{x}} + \Omega_m^2\delta\hat{x} = -\frac{\hbar G}{m_{ef}}\langle \hat{a} \rangle(\delta\hat{a} + \delta\hat{a}^\dagger) + \delta F, \quad (4.7)$$

em que foi utilizada a propriedade hermitiana $\delta\hat{x} = \delta\hat{x}^\dagger$, $\bar{\Delta} = \Delta - G\langle \hat{x} \rangle$ é a dessintonia do campo de controle e Γ_m é o decaimento mecânico do sistema.

4.1.2 Susceptibilidade Optomecânica

No capítulo 2 (seção 2.2) foi definida a susceptibilidade de um material χ_e a partir de sua polarização \vec{P} e do vetor campo elétrico \vec{E} , dessa forma:

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}. \quad (4.8)$$

Para fazer a analogia com a susceptibilidade clássica, é conveniente escrever os operadores quânticos em função de suas amplitudes ($\delta\hat{a} = A^- e^{-i\Omega t} + A^+ e^{i\Omega t}$, seu conjugado e $\delta\hat{x} = X e^{-i\Omega t} + X^* e^{i\Omega t}$, sendo $\Omega = \omega_p - \omega_l$ o referencial girante) em 4.6-4.7 e obter:

$$A^- = \frac{1 + if(\Omega)}{-i(\bar{\Delta} + \Omega) + \frac{\kappa}{2} + 2\bar{\Delta}f(\Omega)} \sqrt{\eta_c \kappa}, \quad (4.9)$$

em que

$$f(\Omega) = \hbar G^2 \langle \hat{a} \rangle^2 \frac{\chi(\Omega)}{i(\bar{\Delta} - \Omega) + \frac{\kappa}{2}}, \quad (4.10)$$

com

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{m_{ef}} \frac{1}{\Omega_m^2 - \Omega^2 - i\Omega\Gamma_m}, \quad (4.11)$$

sendo $\chi(\Omega)$ a susceptibilidade² do sistema optomecânico.

4.1.3 Regime de Acoplamento Fraco para Optomecânica

No regime de acoplamento fraco para a optomecânica ($\kappa \ll \Omega_m$), podemos fazer $A^+ \approx 0$. Desse modo, os parâmetros da susceptibilidade linear podem ser assim aproximados:

$$m_{ef}(\Omega_m^2 - \Omega^2 - i\Gamma_m\Omega) \approx \Omega_m(2\Delta' - i\Gamma_m). \quad (4.12)$$

Com isso, a solução para o campo dentro da cavidade (A^-) é:

$$A^- = \frac{\sqrt{\eta_c \kappa} \varepsilon_p}{-i(\bar{\Delta} + \Omega_m + \Delta') + \kappa/2 + \frac{\Omega_c^2/4}{-i\Delta' + \Gamma_m/2}}, \quad (4.13)$$

em que $\Omega_c = 2G\langle \hat{a} \rangle x_{zpf}$ é o acoplamento entre os ressonadores óptico e mecânico, sendo $x_{zpf} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{ef}\Omega_m}}$ a amplitude de flutuação do ponto zero do oscilador mecânico. Portanto,

$$A^- = \frac{\sqrt{\eta_c \kappa} \varepsilon_p}{-i\bar{\Delta} + \kappa/2 + \frac{\Omega_c^2/4}{-i\Delta' + \Gamma_m/2}}, \quad (4.14)$$

em que a dessintonia do campo de prova é igual ao limite inferior da frequência oscilação mecânica ($\bar{\Delta} = -\Omega_m$).

²Note que a susceptibilidade optomecânica envolve termos do campo eletromagnético e do sistema mecânico, portanto cabe aqui mencionar “susceptibilidade mecânica” do meio.

A equação 4.14 é equivalente a 3.34, identificando o análogo do sistema optomecânico apresentado com o sistema de dois osciladores clássicos.

4.1.4 Optomecânica e EIT Atômica

Utilizando a representação de Heisenberg da mecânica quântica, o Hamiltoniano que descreve a dinâmica da EIT em um átomo de três níveis em configuração Λ , sendo $|3\rangle$ o estado excitado, $|1\rangle$ e $|2\rangle$ os estados fundamentais (de acordo com a figura 2.1) é dado por:

$$\hat{H} = \sum_j \hbar\omega_j \hat{\sigma}_{jj} - \frac{\hbar}{2}\mu_{23}(\hat{\sigma}_{23} + \hat{\sigma}_{32})\varepsilon(t) - \frac{\hbar}{2}\mu_{13}(\hat{\sigma}_{13} + \hat{\sigma}_{31})\varepsilon(t), \quad (4.15)$$

sendo $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$ os operadores projetores, com $i, j = 1, 2, 3$ os níveis atômicos. ω_{ij} e μ_{ij} são a frequência e o momento de dipolo na transição $i \leftrightarrow j$, respectivamente. Colocando os operadores atômicos no estado estacionário e em função de suas amplitudes ($\hat{\sigma}_{12} = S_{12}e^{-i\Omega t}$, $\hat{\sigma}_{13} = S_{13}e^{-i(\omega_c + \Omega)t}$ e $\varepsilon_p e^{-i\omega_p t} = \varepsilon_p e^{-i(\omega_c + \Omega)t}$ com $\omega_p = \omega_c + \Omega$), ficamos com:

$$S_{13} = -\frac{\frac{i\mu_{13}\varepsilon_p}{2\hbar}}{-i(\Delta' + \omega_c - \omega_{32}) + \frac{\gamma_{13}}{2} + \frac{\Omega_c^2/4}{-i\Delta' + \gamma_{12}/2}}, \quad (4.16)$$

em que $\Delta' = \Omega - \omega_{21} = \omega_p - \omega_{31}$. Se o campo de controle estiver na ressonância com a transição $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ ($\omega_c = \omega_{32}$), temos:

$$S_{13} = -\frac{\frac{i\mu_{13}\varepsilon_p}{2\hbar}}{-i\Delta' + \frac{\gamma_{13}}{2} + \frac{\Omega_c^2/4}{-i\Delta' + \gamma_{12}/2}}. \quad (4.17)$$

Note que 4.17 representa 2.25 na notação de Heisenberg. Assim temos uma equivalência clara entre a física da optomecânica e a da EIT (em um átomo de três níveis em uma configuração Λ). Assim 4.16-4.17 é perfeitamente equivalente a 4.13-4.14, notando a diferença de regimes e a aplicando a tabela abaixo:

Optomecânica	EIT
A^-	$\hat{\sigma}_{13}$
X	$\hat{\sigma}_{12}$
$\hbar\Omega_m$	$\hbar\omega_{21}$
$2G\langle\hat{a}\rangle x_{zpf}$	$\mu_{23}\varepsilon_c\hbar$

TABELA 4.1: Equivalência entre o sistema optomecânico apresentado e a EIT em um sistema atômico de três níveis em configuração Λ .

4.2 Dois Osciladores Harmônicos Quânticos: Dois Modos de uma Caverna

A versão quântica do oscilador harmônico consiste em resolver a equação de Schrödinger para o potencial $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$.

O Hamiltoniano do oscilador 1 é dado por $\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + V_1(\hat{x})$, sendo \hat{p}_1 e $V_1(\hat{x})$ o operador momento e o potencial para o oscilador 1, respectivamente. Da mesma forma para o oscilador 2, obtendo \hat{H}_2 . Vamos definir \hat{H}_0 o Hamiltoniano resultante ($\hat{H}_0 = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$), \hat{H}_{int} o Hamiltoniano de interação entre eles e \hat{H}_B o Hamiltoniano de bombeio devido ao campo eletromagnético incidente no primeiro oscilador. Portanto, o Hamiltoniano do sistema \hat{H} se torna:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} + \hat{H}_B = \frac{1}{2m}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + V_1(\hat{x}) + V_2(\hat{x}) + \hat{H}_{int} + \hat{H}_B. \quad (4.18)$$

Para dispor 4.18 em uma notação mais conveniente, vamos novamente considerar $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ e a definição 4.2.1.

Definição 4.2.1 (Operadores Quânticos)

$$\hat{a}^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\hat{p}_1 + im\omega\hat{x}_1) \quad e \quad \hat{a} = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\hat{p}_1 - im\omega\hat{x}_1); \quad (4.19)$$

$$\hat{b}^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\hat{p}_2 + im\omega\hat{x}_2) \quad e \quad \hat{b} = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\hat{p}_2 - im\omega\hat{x}_2). \quad (4.20)$$

Note a semelhança entre 3.19-3.20 (variáveis clássicas) e 4.19-4.20 (operadores quânticos) e essa analogia é assegurada pela quantização do campo eletromagnético

(detalhes no capítulo A). Portanto, no regime quântico

$$a_+ \rightarrow \hat{a}^\dagger, \quad a_- \rightarrow \hat{a}, \quad b_+ \rightarrow \hat{b}^\dagger, \quad b_- \rightarrow \hat{b}.$$

Para obter o Hamiltoniano 4.18 para a partícula 1 em função de 4.19 é conveniente escrevê-lo na forma $\hat{H}_1 = \hbar\omega\frac{1}{2}(\hat{x}_1^2 + \hat{p}_1^2)$. Ao substituir o produto $\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{x}_1^2 + \hat{p}_1^2 - 1)$ no Hamiltoniano ficamos com $\hat{H}_1 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$. Sabendo que $\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{n}$ (operador número), então $\hat{H}_1 = \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2})$.

Desprezando o fator $(\frac{1}{2})$ do Hamiltoniano do \hat{H}_1 (energia do ponto zero) e adicionando os operadores $(\hat{b}^\dagger\hat{b})$ da partícula 2 (descartando o mesmo fator) temos $\hat{H}_0 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b})$. O Hamiltoniano de interação (\hat{H}_{int}) devido ao acoplamento dos osciladores transforma-se em $\hat{H}_{int} = \hbar\lambda[\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b}]$ e o de bombeio devido a energia do campo incidente no primeiro oscilador fica $\hat{H}_B = \hbar\varepsilon[\hat{a}e^{i\omega_s t} + h.c.]$. Portanto, o Hamiltoniano resultante ($\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} + \hat{H}_B$) dos dois osciladores harmônicos é escrito como:

$$\hat{H} = \hbar\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b}] + \hbar\lambda[\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b}] + \hbar\varepsilon[\hat{a}e^{i\omega_s t} + h.c.]. \quad (4.21)$$

Note que o Hamiltoniano 4.21 é análogo a 3.25. Para facilitar os cálculos vamos escrever o hamiltoniano na representação de interação (\hat{H}_I) utilizando a transformação unitária $\hat{H}_I = U_0(H_{int} + H_B)U_0^\dagger$, sendo $U_0 = e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}}$, $\hat{H}_0 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b})$ e $\hat{H}_{int} + \hat{H}_B = \hbar\lambda[\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b}] + \hbar\varepsilon[e^{i\omega_s t}\hat{a} + h.c.]$. Utilizando a aproximação de Baker Campbell Hausdorff ($e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \frac{1}{3!}[X, [X, [X, Y]]] + \dots$, apêndice B) temos que

$$\hat{H}_I = \lambda(\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b}) + \varepsilon(\hat{a}e^{i\Delta t} + h.c.). \quad (4.22)$$

Na equação acima $\Delta = \omega_s - \omega$. A temporalidade de 4.22 é eliminada empregando-se uma segunda transformação unitária, dada por $U_1 = e^{-i\Delta(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b})t}$. Logo, tem-se:

$$\tilde{\hat{H}}_I = \Delta(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{a}^\dagger\hat{a}) + \lambda(\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b}) + \varepsilon(\hat{a} + h.c.). \quad (4.23)$$

A dinâmica dissipativa desse sistema pode ser obtida via equação de Liouville

von-Neumann:

$$\dot{\hat{\rho}} = -i[\tilde{H}_I, \hat{\rho}] + \mathcal{L}_a \hat{\rho} + \mathcal{L}_b \hat{\rho}, \quad (4.24)$$

em que $\mathcal{L}_a = \kappa_1(2\hat{a}^\dagger \hat{\rho} \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a})$, $\mathcal{L}_b = \kappa_2(2\hat{b}^\dagger \hat{\rho} \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{b}^\dagger \hat{b})$, sendo κ_1 a taxa de decaimento do modo a (oscilador 1) e κ_2 a taxa de decaimento do modo b (oscilador 2).

Podemos obter a evolução média dos operadores do sistema calculando o traço $\langle \dot{\hat{\theta}} \rangle = Tr(\dot{\hat{\rho}} \hat{\theta})$, sendo $\hat{\theta}$ os operadores quânticos. Assim, as equações de movimento que descrevem nosso sistema são:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\hat{a}} \rangle &= -i\{(\Delta - i\kappa_1)\langle \hat{a} \rangle + \lambda\langle \hat{b} \rangle + \varepsilon\}; \\ \langle \dot{\hat{a}}^\dagger \rangle &= i\{(\Delta - i\kappa_1)\langle \hat{a}^\dagger \rangle + \lambda\langle \hat{b}^\dagger \rangle + \varepsilon\}; \\ \langle \dot{\hat{b}} \rangle &= -i\{(\Delta - i\kappa_2)\langle \hat{b} \rangle + \lambda\langle \hat{a} \rangle\}; \\ \langle \dot{\hat{b}}^\dagger \rangle &= i\{(\Delta - i\kappa_2)\langle \hat{b}^\dagger \rangle + \lambda\langle \hat{a}^\dagger \rangle\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Desenvolvendo e colocando no regime assintótico temos que:

$$\langle \hat{a} \rangle = \frac{\varepsilon(\Delta - i\kappa_2)}{(\Delta - i\kappa_1)(\Delta - i\kappa_2) - \lambda^2}. \quad (4.26)$$

Comparando as equações 4.26 e 3.34,

$$\tilde{a}_- = \frac{\Omega_s(\Delta - i\gamma_2)}{(\Delta - i\gamma_1)(\Delta - i\gamma_2) - \Omega_{12}^2}$$

vemos que ambas são equivalentes. A analogia clássica desse sistema consiste na análise comparativa dos seguintes parâmetros: o campo de bombeio ε faz o papel da expressão da força clássica Ω_s , κ_1 e κ_2 são as dissipações da cavidade e suas analogias são as dissipações γ_1 e γ_2 do sistema mecânico. A equivalência dos sistemas de duas cavidades acopladas e dois osciladores acoplados é esperada pois os modos do campo eletromagnético são quantizados por um conjunto de osciladores harmônicos, um para cada modo (apêndice A). A tabela abaixo (4.2) resume a equivalência dos parâmetros do sistema de dois osciladores harmônicos acoplados (2-OHA) com o modelo quântico de duas cavidades acopladas (2-CA):

2-OHA	2-CA
Ω_s	ε
Ω_{12}	λ
γ_1	κ_1
γ_2	κ_2
Δ	Δ

TABELA 4.2: Parâmetros clássicos e quânticos. Analogia do sistema de dois osciladores acoplados (2-OHA) com o sistema de duas cavidades acopladas (2-CA).

4.3 Átomo de Dois Níveis em uma Cavidade

Como apresentado no apêndice A, o campo eletromagnético é quantizado em uma analogia com o oscilador harmônico quântico associado aos operadores criação e aniquilação (\hat{a} e \hat{a}^\dagger) de fótons. A geometria e a distância entre os espelhos da cavidade nos informam os modos do campo em seu interior e a intensidade do acoplamento átomo-campo. Ao adaptarmos a distância entre as paredes da cavidade, podemos fazer a radiação incidente ser ressonante com os níveis atômicos.

A figura 4.4 ilustra um átomo de dois níveis em uma cavidade. A dinâmica desse modelo físico, estudada em eletrodinâmica quântica de cavidades (EQC), é induzida pelo laser de amplitude ε e frequência ω_p acoplando com o átomo a uma taxa g , implicando em uma emissão espontânea de um fóton devido a mudança eletrônica de níveis a uma taxa γ e uma consequente perda de fótons pela cavidade a uma taxa κ .

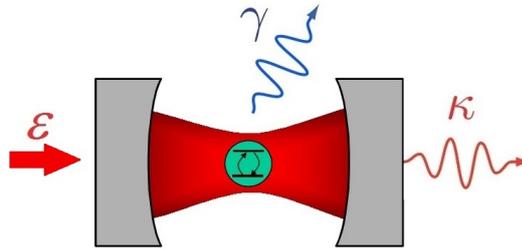


FIGURA 4.4: Átomo de dois níveis confinado em uma cavidade.

Devido as regras de seleção e os modos da cavidade, o átomo pode ser considerado como um sistema quântico com apenas dois níveis de energia em que a informação deste sistema é uma superposição dos autoestados quânticos $|g\rangle$

(“*ground state*” ou estado fundamental) e $|e\rangle$ (“*excited state*” ou estado excitado). Portanto, esse modelo atômico é análogo de um sistema de spin $1/2$, ou seja, com apenas dois estados acessíveis. Nesse caso, os operadores do campo são descritos por matrizes de Pauli para spin $1/2$.

A notação das matrizes de Pauli aplicada a um sistema de spin $1/2$ (operadores de spin) é dada como:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Percebe-se que os dois níveis atômicos formam uma base no espaço de Hilbert:

$$|g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}, \quad (i, j = g, e)$$

e a relação de completeza

$$\sum_{i=g}^e |i\rangle\langle i| = |g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e| = \hat{\sigma}_{gg} + \hat{\sigma}_{ee} = I,$$

em que I é a matriz identidade 2×2 .

Então, temos que

$$\hat{\sigma}_x = |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|; \quad \hat{\sigma}_y = -i|e\rangle\langle g| + i|g\rangle\langle e|; \quad \hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|; \quad (4.27)$$

$$\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_{eg} = |e\rangle\langle g|; \quad \hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_{ge} = |g\rangle\langle e|; \quad (4.28)$$

$$\hat{\sigma}_+|g\rangle = |e\rangle; \quad \hat{\sigma}_-|e\rangle = |g\rangle. \quad (4.29)$$

A partir de 4.28 e 4.29 concluímos que o operador $\hat{\sigma}_-$ leva o átomo do estado

excitado para o estado fundamental e $\hat{\sigma}_+$ leva o átomo do estado fundamental para o estado excitado.

O Hamiltoniano \hat{H} que descreve a interação de um átomo com um campo eletromagnético quantizado no interior de uma cavidade é dado por:

$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{H}_a + \hat{H}_I, \quad (4.30)$$

sendo

$$\hat{H}_c = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{n}_k + \frac{1}{2} \right); \quad (4.31)$$

$$\hat{H}_a = \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii}; \quad (4.32)$$

$$\hat{H}_I = \hbar \sum_{ij} \sum_k \left(g_{k,i,j} \hat{a}_k \hat{\sigma}_{ij} + g_{k,i,j}^* \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_{ij} \right), \quad (4.33)$$

em que ω_k é a frequência do k-ésimo modo do campo, \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger são os operadores criação e aniquilação dos fótons da cavidade, $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$ tal que $|i\rangle$ e $|j\rangle$ é autoestado de \hat{H}_a com autoenergia E_i e $g_{k,i,j}$ é a constante de acoplamento entre o átomo e o k-ésimo modo do campo. O Hamiltoniano 4.30 considera os modos do campo e os níveis atômicos. O Hamiltoniano do campo ressonante com a frequência do átomo é dado por:

$$\hat{H}_c = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.34)$$

Sabendo que o operador número é dado por $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ e desprezando a energia de ponto zero, temos que o Hamiltoniano do campo é dado por:

$$\hat{H}_c = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (4.35)$$

Supondo que o sistema que estamos discutindo possua suas autoenergias E_e e E_g com os respectivos autoestados $|e\rangle$ (estado excitado) e $|g\rangle$ (estado fundamental), o Hamiltoniano do átomo 4.32 pode ser reescrito em termos dos operadores de spin:

$$\hat{H}_a = E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_g \hat{\sigma}_{gg}. \quad (4.36)$$

Desenvolvendo a expressão acima,

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}) + \frac{1}{2}(E_e + E_g), \quad (4.37)$$

sendo $\hbar\omega = E_e - E_g$ com ω a frequência de transição atômica. Empregando $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = \langle \hat{\sigma}_{ee} \rangle - \langle \hat{\sigma}_{gg} \rangle$ e desconsiderando o deslocamento de energia ficamos com:

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z. \quad (4.38)$$

O Hamiltoniano de interação 4.33 pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_I &= \hbar \sum_{i,j \in \{e,g\}} \{g\hat{a}\hat{\sigma}_{i,j} + g^*\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{i,j}\} \\ &= \hbar\{g\hat{a}\hat{\sigma}_+ + g^*\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+ + g\hat{a}\hat{\sigma}_- + g^*\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\} \\ &= \hbar(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(g\hat{a} + g^*\hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (4.39)$$

4.3.1 O Modelo de Rabi

Utilizando os Hamiltonianos 4.35, 4.38 e 4.39, o Hamiltoniano 4.30 assume a forma:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \hbar g(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (4.40)$$

que é o Hamiltoniano de Rabi (HR) [39]. O Hamiltoniano de Rabi descreve um sistema constituído por um único modo do campo eletromagnético quantizado interagindo com um átomo de dois níveis no interior de uma cavidade com paredes perfeitamente condutoras.

4.3.2 Aproximação de Onda Girante e o Modelo de Jaynes-Cummings

O Hamiltoniano de Rabi 4.40 possui os termos ressonantes e os anti-ressonantes (contra-girantes). Os termos ressonantes $\hat{a}\hat{\sigma}_+$ e $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-$ representam, respectivamente, a absorção de um fóton do campo e a consequente transição

do estado fundamental para o estado excitado do átomo e a transição do estado excitado para o estado fundamental seguida da emissão de um fóton. Os termos anti-ressonantes (contra-girantes) $\hat{a}\hat{\sigma}_-$ e $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+$ representam, respectivamente, a transição do estado excitado para o fundamental seguida da absorção de um fóton e a transição do estado fundamental para o excitado com a criação de um fóton.

Como discutido anteriormente, a aproximação de onda girante consiste em desprezar os termos mais oscilantes de 4.40 por não contribuírem significativamente com o Hamiltoniano de Rabi. Para a melhor visualização da aproximação de onda girante, é conveniente mudar temporariamente para a representação de interação, que consiste na aplicação de uma transformação unitária $U = e^{-\frac{iH_0t}{\hbar}}$, sendo $H_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z$. Nessa representação, os operadores \hat{a} , \hat{a}^\dagger , $\hat{\sigma}_-$ e $\hat{\sigma}_+$ possuem a seguinte dependência temporal:

$$\hat{a} = \hat{a}e^{i\omega t}; \quad \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t}; \quad \hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_+ e^{-i\omega t}; \quad \hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_- e^{i\omega t}. \quad (4.41)$$

Assim, o Hamiltoniano de Rabi será:

$$H_I = \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a}e^{i\Delta t} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger e^{-i\Delta t}) + \hbar g(\hat{\sigma}_-\hat{a}e^{i\delta t} + \hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger e^{-i\delta t}), \quad (4.42)$$

com $\Delta = \omega - \omega_0$ e $\delta = \omega + \omega_0$.

Na condição em que $\Delta \ll \delta$ (próximo da ressonância), pode-se desprezar o termo final do Hamiltoniano acima se

$$\frac{g\langle\hat{a}\rangle}{\delta} \ll 1, \quad (4.43)$$

em que $\langle\hat{a}\rangle \approx \sqrt{\bar{n}}$, com $\bar{n} = \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$, sendo \bar{n} o número médio de fótons.

Aplicando a transformação inversa, recupera-se o Hamiltoniano de Rabi na representação de Schrödinger sujeito a aproximação de onda girante:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger), \quad (4.44)$$

que é o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings. O modelo de Jaynes-Cummings é

utilizado para descrever o acoplamento de um átomo de dois níveis com uma cavidade.

4.3.2.1 Estados Vestidos do Modelo de Jaynes-Cummings

Escrevendo o Hamiltoniano 4.44 na forma matricial:

$$\hat{H}_n = \begin{pmatrix} (n+1)\hbar\omega - \frac{\hbar\omega}{2} & \hbar g\sqrt{n+1} \\ \hbar g\sqrt{n+1} & n\hbar\omega + \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix},$$

podemos encontrar os respectivos autoestados e autoenergias:

$$\begin{aligned} |\Psi^+\rangle &= \cos\theta_n|e, n-1\rangle - \sin\theta_n|g, n\rangle; \\ |\Psi^-\rangle &= \sin\theta_n|e, n-1\rangle + \cos\theta_n|g, n\rangle, \end{aligned} \quad (4.45)$$

com

$$\begin{aligned} E_n^+ &= \hbar \left[(n-1)\omega + \frac{\omega_0}{2} \right] - \frac{\hbar}{2}(\Omega_n - \Delta); & E_0 &= -\frac{\hbar\omega_0}{2}; \\ E_n^- &= \hbar \left[n\omega - \frac{\omega_0}{2} \right] + \frac{\hbar}{2}(\Omega_n - \Delta), \end{aligned} \quad (4.46)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \sin\theta_n &= \frac{\Omega_n - \Delta}{\sqrt{(\Omega_n - \Delta)^2 + 4g^2n}}; & \cos\theta_n &= \frac{2gn}{\sqrt{(\Omega_n - \Delta)^2 + 4g^2n}}; \\ \Omega_n &= \sqrt{\Delta^2 + 4g^2n}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

A base formada por esses autoestados recebe o nome de *base vestida* e este processo de diagonalização de *método do átomo vestido* (pois é constituída do átomo e o campo). Para um acoplamento fraco na condição de ressonância ($\omega \approx \omega_0$) os termos ressonantes oscilam mais lentamente com relação aos contra-girantes e por isso eles possuem uma contribuição cumulativa com o tempo, diferentemente dos termos contra-girantes que oscilam muito rapidamente e não terão efeito significativo no Hamiltoniano de Rabi, contribuindo apenas com pequenas oscilações em torno da oscilação de Rabi. A troca de energia entre o átomo e o campo é periódica e é denominada de *oscilações de Rabi*.

4.3.3 Aproximação Semiclássica

A aproximação semiclassical consiste em tratar o campo eletromagnético incidente na amostra classicamente e o átomo de dois níveis quanticamente. Logo, o produto da média dos operadores do átomo ($\hat{\sigma}$) e do campo (\hat{a}) pode ser decomposto:

$$\langle \hat{a}\hat{\sigma} \rangle = \langle \hat{a} \rangle \langle \hat{\sigma} \rangle. \quad (4.48)$$

Para um regime de acoplamento átomo-campo forte, temos $g_0 > (\Gamma, \kappa)$ o que indica a maior intensidade do acoplamento em relação as dissipações (átomo ou cavidade) e esse processo está relacionado com a anarmonicidade do Hamiltoniano de Jaynes-Cummings [42]. No regime de acoplamento átomo-campo fraco, a intensidade da dissipação é maior que o acoplamento, ou seja, $g_0 < (\Gamma, \kappa)$ e, assim, podemos decompor o produto dos valores médios dos operadores do átomo e do campo ($\langle \hat{a}\hat{\sigma} \rangle$) de acordo com 4.48 sem que ocorram divergências e perdas de generalidades. Portanto, a aproximação semiclassical é válida em regimes de acoplamentos fracos, a qual utilizaremos para escrever as equações de um átomo de dois níveis em regime de EIT.

Escrevendo o Hamiltoniano de Rabi 4.40 com a aproximação de onda girante temos o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings 4.44, como discutido anteriormente. Iluminando a cavidade com um laser (campo clássico) de intensidade ε e passando o Hamiltoniano 4.44 para a representação de interação (\hat{H}_I) com a transformação unitária $\hat{H}_I = U_0 \hat{H} U_0$, sendo $U_0 = e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}}$, $\hbar = 1$, $\hat{H}_0 = \omega_p(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{\sigma}_z}{2})$ (referencial do laser) e utilizando a aproximação de Baker-Campbell-Hausdorff (apêndice B) ficamos com:

$$\hat{H} = \Delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta \hat{\sigma}_z + (g \hat{a} \hat{\sigma}_+ + \varepsilon \hat{a} + h.c.), \quad (4.49)$$

com $\Delta = \omega - \omega_p$ a diferença de frequência entre o campo de bombeio e o modo da cavidade. Note que em 4.49 temos o bombeio ($\varepsilon \hat{a} + h.c.$) na cavidade (figura 4.5).

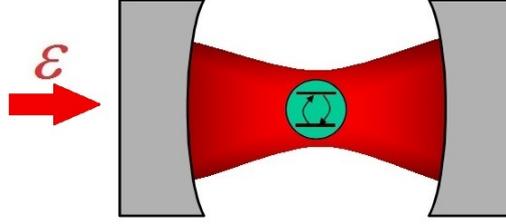


FIGURA 4.5: Sistema átomo-campo. Bombeio na cavidade.

A dinâmica dissipativa desse sistema é dada pela equação de Liouville von-Neumann (apêndice B), com

$$\mathcal{L}_b = \kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (4.50)$$

sendo \mathcal{L}_b o Liouvilliano do campo, que contém os termos dissipativos da equação mestra e κ indica o decaimento da cavidade. Desse modo, podemos obter as equações de movimento para as médias dos operadores do sistema:

$$\langle \dot{\hat{a}} \rangle = \langle \hat{a} \rangle (-\kappa - i\Delta) - i(g\langle \hat{\sigma}_- \rangle - \varepsilon); \quad (4.51)$$

$$\langle \dot{\hat{\sigma}}_- \rangle = \langle \hat{\sigma}_- \rangle (-\gamma - i\Delta) + ig\langle \hat{\sigma}_z \hat{a} \rangle. \quad (4.52)$$

Adotando a aproximação semiclássica 4.48, ficamos com:

$$\langle \dot{\hat{a}} \rangle = \langle \hat{a} \rangle (-\kappa - i\Delta) - i(g\langle \hat{\sigma}_- \rangle - \varepsilon); \quad (4.53)$$

$$\langle \dot{\hat{\sigma}}_- \rangle = \langle \hat{\sigma}_- \rangle (-\gamma - i\Delta) + ig\langle \hat{\sigma}_z \rangle \langle \hat{a} \rangle. \quad (4.54)$$

Escrevendo 4.53 no regime assintótico ($\langle \dot{\hat{a}} \rangle = 0$) temos:

$$\langle \hat{a} \rangle = - \left(\frac{g\langle \hat{\sigma}_- \rangle - \varepsilon}{\Delta - i\kappa} \right). \quad (4.55)$$

Da mesma forma, empregando 4.54 no regime assintótico ficamos com:

$$\langle \hat{\sigma}_- \rangle = \frac{g\langle \hat{\sigma}_z \rangle \langle \hat{a} \rangle}{\Delta - i\gamma}. \quad (4.56)$$

O resultado da manipulação algébrica de 4.56 em 4.55 é:

$$\langle \hat{a} \rangle = \frac{\varepsilon(\Delta - i\gamma)}{(\Delta - i\kappa)(\Delta - i\gamma) + g^2 \langle \hat{\sigma}_z \rangle}. \quad (4.57)$$

Pelo resultado obtido para \tilde{a}_- , dado pela eq. 3.34,

$$\tilde{a}_- = \frac{\Omega_s(\Delta - i\gamma_2)}{(\Delta - i\gamma_1)(\Delta - i\gamma_2) - \Omega_{12}^2};$$

vemos que a força do campo de bombeio ε no sistema átomo-campo é análogo à taxa de bombeio mecânico Ω_s para o sistema de dois osciladores acoplados. Note também que κ equivale a γ_1 e γ a γ_2 . Considerando o caso de baixa excitação atômica $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = \langle \sigma_{ee} \rangle - \langle \sigma_{gg} \rangle = -1$ a correspondência entre os parâmetros é completamente estabelecida, de modo que g é equivalente à taxa de acoplamento clássico Ω_{12} . Logo,

$$\varepsilon \leftrightarrow \Omega_s; \quad g \leftrightarrow \Omega_{12}; \quad \kappa \leftrightarrow \gamma_1 \quad \gamma \leftrightarrow \gamma_2.$$

Vemos então que o equivalente clássico do sistema átomo-cavidade com bombeio na cavidade também é obtido com o sistema de dois osciladores harmônicos acoplados. Na figura 4.6 é plotado a parte real e imaginária do valor médio do operador aniquilação de fótons (curva vermelha pontilhada), dado pela equação 4.57, em função da dessintonia normalizada Δ/κ para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle Ω_c . Note que as principais características da EIT, como o aparecimento de uma janela de transmissão, são reproduzidas com o sistema átomo-cavidade quando a condição $\varepsilon \ll g \langle \hat{a} \rangle_{max}$ é satisfeita, sendo $\langle \hat{a} \rangle_{max} = \varepsilon/(\Delta - i\kappa)$ o valor médio de \hat{a} na ausência de átomos $g = 0$.

Os resultados da figura 4.6 foram obtidos utilizando-se os parâmetros $\Omega_p = 0,02\kappa$ e $\gamma_2 = 0,01\kappa$. Utilizando a equivalência de parâmetros listada anteriormente os gráficos de 4.6(a) a 4.6(e) mostram que o sistema clássico (curvas sólidas em azul) reproduz os resultados quânticos perfeitamente para todos os valores da frequência de Rabi do campo de controle utilizados.

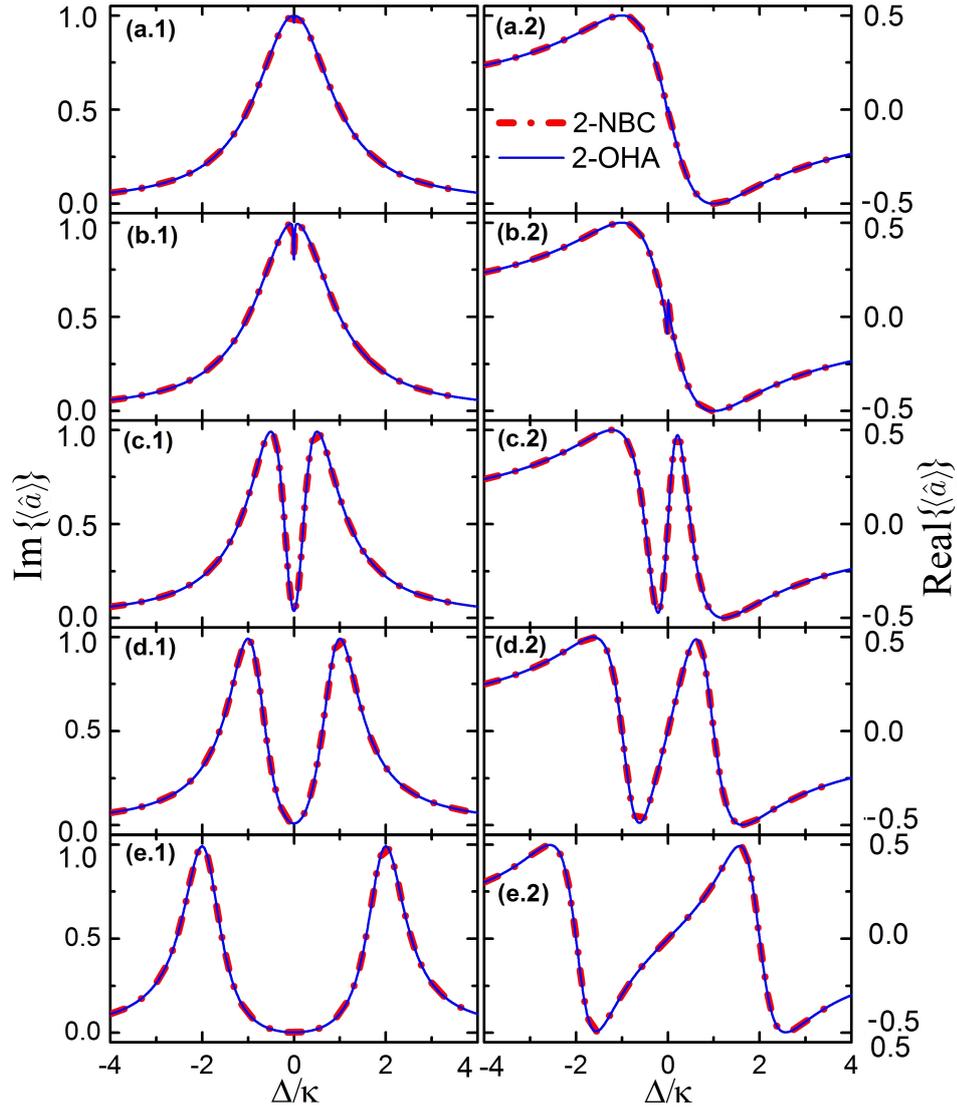


FIGURA 4.6: Comportamento tipo EIT observado no valor médio do operador aniquilação de fótons $\langle \hat{a} \rangle$ vs. Δ/κ obtido para um sistema composto por um átomo de dois níveis interagindo com um único modo de uma cavidade óptica (2-NBC) em comparação com seu análogo clássico obtido utilizando-se um sistema de dois osciladores harmônicos acoplados (2-OHA). O modo da cavidade é bombeado por um campo clássico de força $\varepsilon = 0,02\kappa$ e dissipação atômica $\gamma = 0,01\kappa$ para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle (a) $\Omega_c = 0,0$, (b) $0,05\kappa$, (c) $0,5\kappa$, (d) $1,0\kappa$ e (e) $2,0\kappa$. Para os osciladores acoplados foram utilizados o mesmo conjunto de parâmetros seguindo a equivalência apresentada na tabela 4.3.

Se considerarmos o bombeio no átomo (figura 4.7) o Hamiltoniano do sistema átomo-campo é escrito como:

$$\hat{H} = \Delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta \hat{\sigma}_z + (g \hat{a} \hat{\sigma}_+ + \varepsilon \hat{\sigma}_+ + h.c.). \quad (4.58)$$

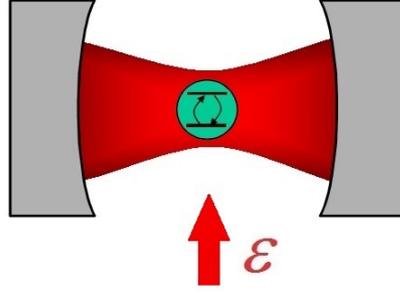


FIGURA 4.7: Ilustração do sistema átomo-campo considerando o bombeio no átomo.

Resolvendo da mesma forma como feito anteriormente, mas dessa vez com o Liouvilliano atômico $\mathcal{L}_a = \gamma(2\hat{\sigma}_-\rho\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\rho - \rho\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)$, a resposta do campo de prova é obtida através do valor médio do operador atômico $\hat{\sigma}_-$. No estado estacionário tem-se:

$$\langle \hat{\sigma}_- \rangle = \frac{\varepsilon \langle \hat{\sigma}_z \rangle (\Delta - i\kappa)}{(\Delta - i\gamma)(\Delta - i\kappa) + g^2 \langle \hat{\sigma}_z \rangle}, \quad (4.59)$$

o qual também é idêntico a \tilde{a}_- dado pela eq. 3.34,

$$\tilde{a}_- = \frac{\Omega_s(\Delta - i\gamma_2)}{(\Delta - i\gamma_1)(\Delta - i\gamma_2) - \Omega_{12}^2},$$

para o caso em que $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = -1$. A equivalência entre os parâmetros clássicos e quânticos para o sistema átomo-campo com bombeio no átomo é obtida pela comparação direta das equações acima e apresentada na tabela 4.3. Note que se trocarmos $\kappa \leftrightarrow \gamma$ obtemos o caso anterior, com bombeio na cavidade.

A figura 4.8 mostra a parte real e imaginária de $\langle \hat{\sigma}_- \rangle$ em função da dessintonia normalizada Δ/γ (2-NBA) para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle Ω_c em comparação com seu análogo clássico (2-OHA). Os parâmetros utilizados são os mesmos da figura 4.6 para o caso em que o bombeio é no modo da cavidade, ou seja, $\Omega_p = 0,02\gamma$ e $\kappa = 0,01\gamma$. Como no caso anterior os resultados clássicos reproduzem perfeitamente os resultados quânticos.

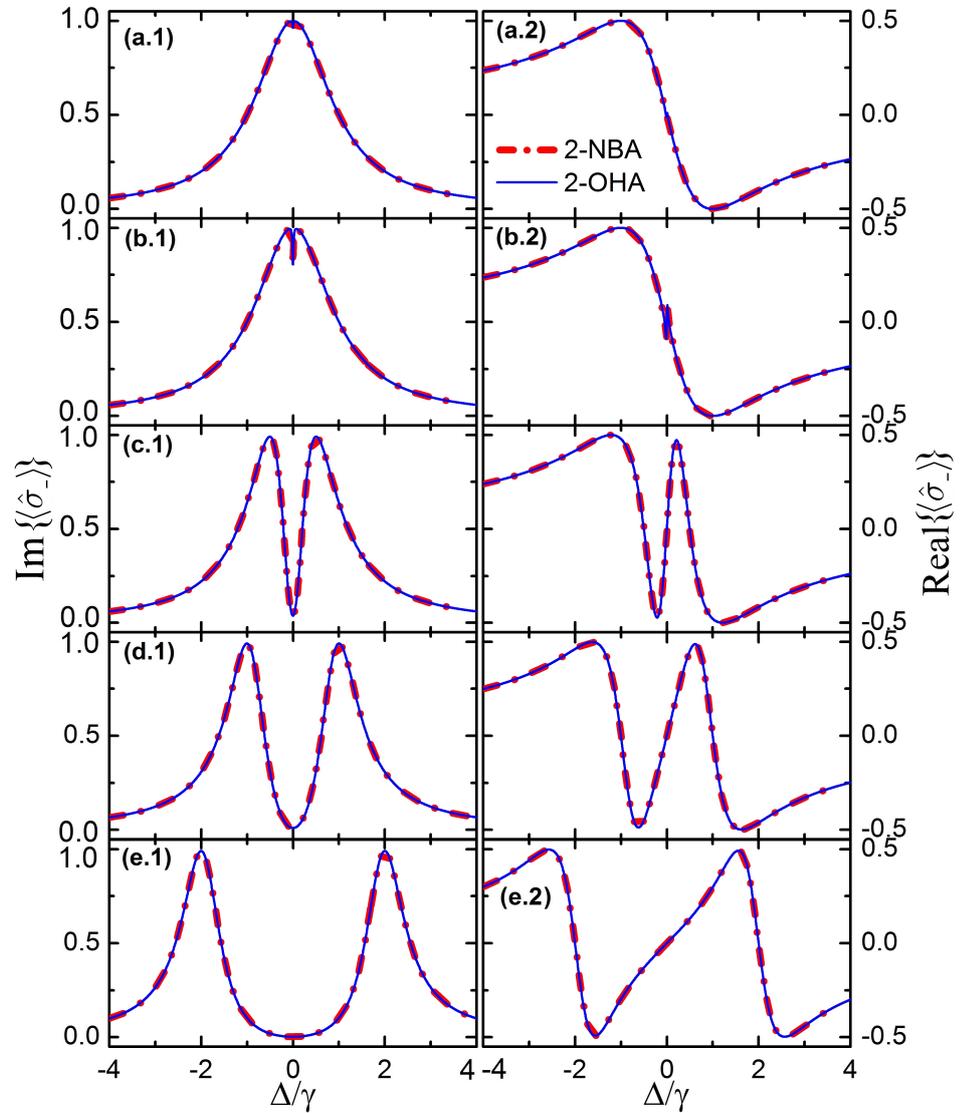


FIGURA 4.8: Comportamento tipo EIT observado no valor médio do operador atômico $\langle \hat{\sigma}_- \rangle$ vs. Δ/γ obtido para um sistema composto por um átomo de dois níveis interagindo com um único modo de uma cavidade óptica com bombeio no átomo (2-NBA) em comparação com seu análogo clássico (2-OHA). Os parâmetros utilizados são os mesmos da figura 4.6.

Portanto, o análogo clássico do sistema quântico de um átomo de dois níveis interagindo com um único modo da cavidade pode ser obtido com o bombeio sendo considerado tanto na cavidade quanto no átomo. A tabela abaixo resume as equivalências obtidas para a cavidade bombeada (2-NBC) e para o átomo bombeado (2-NBA) utilizando-se um sistema clássico de dois osciladores harmônicos acoplados (2-OHA).

2-OHA	2-NBC	2-NBA
Ω_s	ε	ε
Ω_{12}	g	g
γ_1	κ	γ
γ_2	γ	κ
Δ	Δ	Δ

TABELA 4.3: Analogias entre os parâmetros clássicos do sistema de dois osciladores harmônicos acoplados (2-OHA) com os sistemas quânticos de um átomo de dois níveis interagindo com um modo de uma cavidade óptica considerando o bombeio na cavidade (2-NBC) e no átomo (2-NBA).

Capítulo 5

Análogo Clássico da EIT: Três Osciladores Acoplados

O foco agora é o análogo clássico da EIT utilizando o sistema de três osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados. Ao modificar o oscilador em que a força externa é aplicada, identificamos um novo conjunto de equações de movimento do sistema massa-mola e cada nova caracterização mecânica implica em uma configuração atômica em que ocorre o análogo da EIT. Primeiramente será apresentado o sistema em que duas forças são aplicadas em osciladores distintos descrevendo o análogo clássico da dupla EIT (“*Double Electromagnetically Induced Transparency*”, DEIT) em uma configuração atômica de quatro níveis do tipo “*tripod*” (seção 5.1). Na seção 5.2 é aplicada uma força no oscilador central para obter o análogo clássico da DEIT em um átomo de quatro níveis do tipo Y invertido. As descrições dos sistemas quânticos contidas nas seções 5.1 e 5.2 são encontradas na literatura. Na próxima seção (5.3), será exposta a configuração mecânica em que apenas uma força é aplicada em um dos osciladores para modelar classicamente o sistema quântico de um átomo de três níveis em configuração Λ e o modo da cavidade.

5.1 Átomo de Quatro Níveis: Configuração Tipo “Tripod”

Como discutido no capítulo 2, somente os níveis atômicos ressonantes ou quase-ressonantes com os campos externos (lasers) são levados em consideração na interação átomo-campo, obedecendo as regras de seleção que identificam as reais transições populacionais do átomo. Um exemplo é a DEIT, que em um átomo de quatro níveis em configuração do tipo “*tripod*” [11]-[15] possui a seguinte forma:

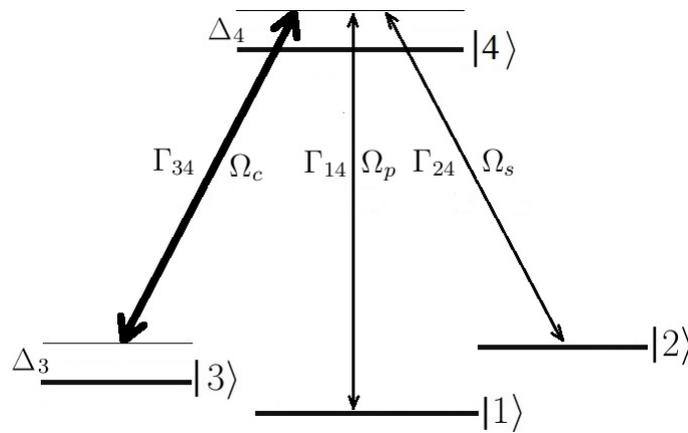


FIGURA 5.1: Átomo de quatro níveis do tipo “*tripod*”.

Nota-se que o estado atômico $|4\rangle$ é o nível de mais alta energia, sendo o nível excitado do átomo e onde ocorre a interferência do sistema. Os níveis $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$ são os níveis fundamentais, sendo que $|2\rangle$ possui maior energia que $|3\rangle$ e, por sua vez, maior que $|1\rangle$. Δ_3 e Δ_4 são as dessintonias do terceiro e quarto níveis atômicos. Um olhar atento vai indicar que o sistema tipo “*tripod*” é constituído de sistemas de três níveis tipo Λ (detalhes no apêndice B). As transições proibidas são entre os níveis fundamentais. Ω_c é o campo de controle que incide na transição $|3\rangle \leftrightarrow |4\rangle$ e Ω_p é o campo de prova que estimula as transições $|1\rangle \leftrightarrow |4\rangle$. No caso do átomo de quatro níveis do tipo “*tripod*” há mais um campo de acoplamento Ω_s e atua na transição $|2\rangle \leftrightarrow |4\rangle$.

A referência [11] apresenta o arranjo dos osciladores como análogo clássico da DEIT:

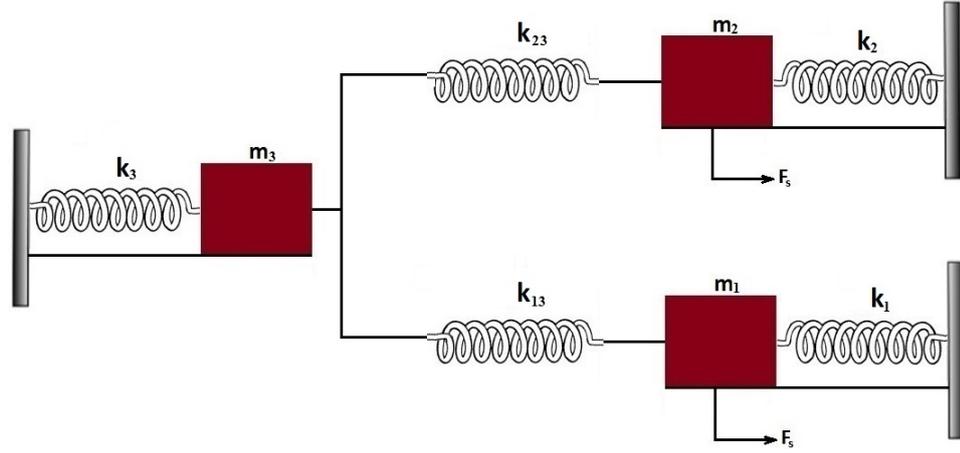


FIGURA 5.2: Três osciladores acoplados com duas forças independentes aplicadas nos osciladores 1 e 2.

A situação apresentada na figura 5.2 indica que duas forças externas de mesma intensidade ($F_s(t) = Fe^{-i\omega_s t}$) são aplicadas nos osciladores da direita, forçando o sistema de modo que ω_1 , ω_2 e ω_3 são as frequências naturais de seus respectivos modos de vibração, ω_{13} e ω_{23} são as frequências de acoplamento entre os osciladores $1 \leftrightarrow 3$ e $2 \leftrightarrow 3$, γ_1 , γ_2 e γ_3 as dissipações mecânicas relativas a cada componente do sistema e m_1 , m_2 e m_3 suas massas. Ao desligarmos uma das molas de acoplamento, o sistema apresentado reduz-se ao caso de dois osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados, como tratado no capítulo 3.

De acordo com a seção 3.1 do capítulo 3, podemos determinar as equações de movimento para o sistema de três osciladores acoplados com duas forças aplicadas (figura 5.2), expressas da seguinte forma:

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \omega_{13}^2 x_3 = \frac{F}{m} e^{-i\omega_s t}; \quad (5.1)$$

$$\ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \omega_{23}^2 x_3 = \frac{F}{m} e^{-i\omega_s t}; \quad (5.2)$$

$$\ddot{x}_3 + \gamma_3 \dot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 - (\omega_{13}^2 x_1 + \omega_{23}^2 x_2) = 0, \quad (5.3)$$

sendo as frequências dadas por:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + k_{13}}{m}; \quad \omega_2^2 = \frac{k_2 + k_{23}}{m}; \quad \omega_3^2 = \frac{k_3 + k_{13} + k_{23}}{m}, \quad (5.4)$$

em que é utilizado $\omega_{13}^2 = \frac{k_{13}}{m}$ e $\omega_{23}^2 = \frac{k_{23}}{m}$.

Os gráficos apresentados em [11] indicam que a DEIT (em um átomo de quatro níveis do tipo “*tripod*”) pode ser modelada pelo seu análogo clássico de três osciladores amortecidos forçados e acoplados.

5.2 Átomo de Quatro Níveis: Configuração Tipo Y Invertido

O arranjo de um átomo de quatro níveis em configuração Y invertido no contexto da DEIT é dado por:

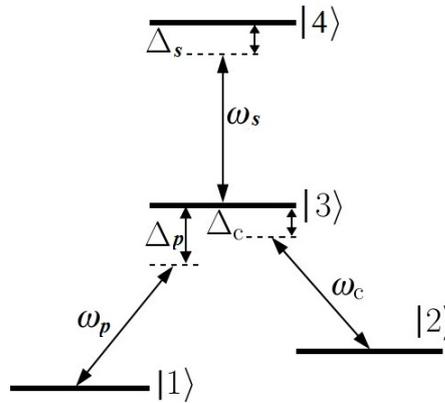


FIGURA 5.3: Átomo de quatro níveis do tipo Y invertido.

A figura 5.3 indica que o estado $|4\rangle$ é o nível de mais alta energia. Os níveis fundamentais são $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$, sendo crescente a ordem de energia nesses estados atômicos. Podemos notar que essa configuração atômica se resume ao arranjo de um átomo de três níveis em configuração Λ ao desligar ω_s . As transições proibidas para esse caso são $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle \leftrightarrow |4\rangle$ e as permitidas indicadas na figura.

A proposta de [16] é assumir que a força seja aplicada no primeiro oscilador (de massa m_3 , figura 5.4) que se acopla com os demais, de massas m_1 e m_2 por meio de ω_{13} e ω_{23} , respectivamente.

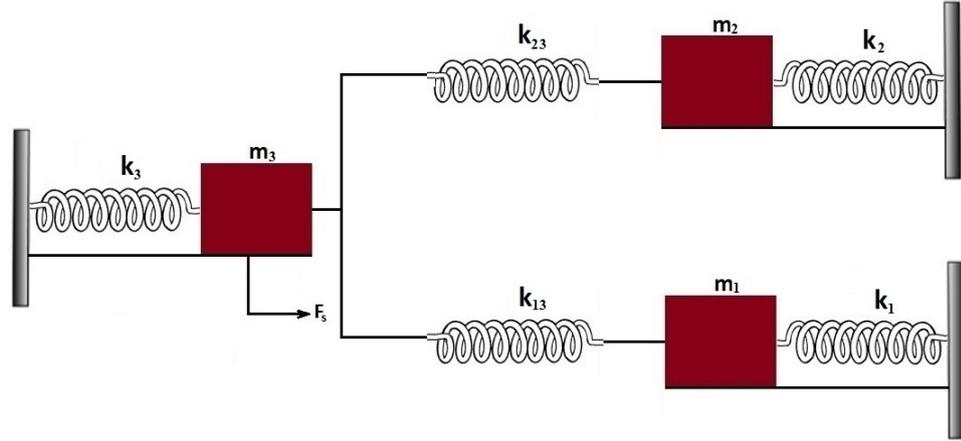


FIGURA 5.4: Três osciladores acoplados com uma força aplicada no oscilador de massa m_3 .

Para esse sistema, as equações de movimento se tornam:

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \omega_{13}^2 x_3 = 0; \quad (5.5)$$

$$\ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \omega_{23}^2 x_3 = 0; \quad (5.6)$$

$$\ddot{x}_3 + \gamma_3 \dot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 - (\omega_{13}^2 x_1 + \omega_{23}^2 x_2) = \frac{F}{m} e^{-i\omega_s t}, \quad (5.7)$$

sendo considerado 5.4. Observando as simulações de [16], vemos que a DEIT (em um átomo de quatro níveis do tipo Y invertido) pode ser modelada pelo seu análogo mecânico apropriado de três osciladores acoplados.

5.3 Átomo de Três Níveis em uma Cavidade Ressonante

Nesta seção, vamos propor o sistema quântico de um átomo de três níveis confinado em uma cavidade ressonante juntamente com um campo eletromagnético reproduzindo o fenômeno da EIT em cavidades ou “*Cavity Electromagnetically Induced Transparency*” (CEIT) [10]:

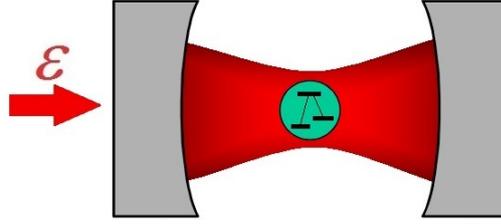


FIGURA 5.5: Átomo de três níveis em configuração Λ confinado no interior de uma cavidade ressonante juntamente com um campo de radiação.

O campo eletromagnético é quantizado (apêndice A) como uma soma de osciladores harmônicos independentes. O operador número $\hat{n} = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ nos fornece o número de fótons dentro da cavidade. Para um determinado estado de Fock do campo $|n\rangle$, o operador criação adiciona um quantum de energia ($\hbar\omega$) e o operador aniquilação retira a mesma quantidade de energia do modo considerado da cavidade.

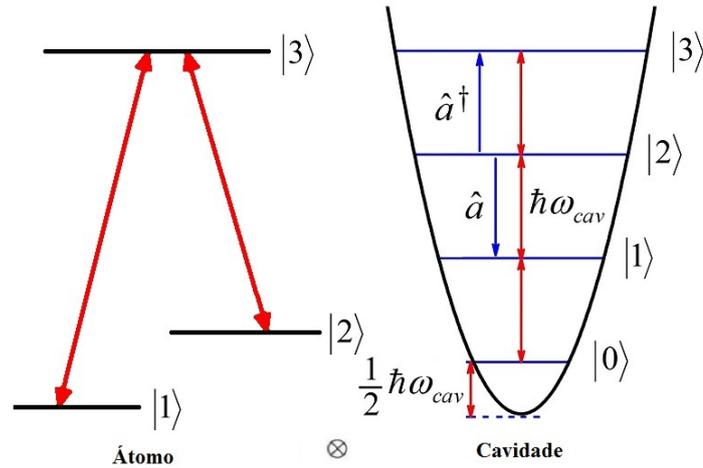


FIGURA 5.6: Diagrama de energia de um átomo de três níveis em configuração Λ e do modo do campo eletromagnético quantizado na cavidade.

A dinâmica do sistema é descrita pelo seguinte Hamiltoniano:

$$H_{CEIT} = \Delta \hat{\sigma}_{11} + (\Delta_1 - \Delta_2) \hat{\sigma}_{22} + \Delta_1 \hat{\sigma}_{33} - \Delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + (g \hat{a} \hat{\sigma}_{31} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} + \epsilon \hat{a} + h.c.), \quad (5.8)$$

sendo $\Delta = \omega_p - \omega_{cav}$ a dessintonia entre a frequência (ω_p) do campo de prova e a frequência do modo da cavidade (ω_{cav}), $\Delta_1 = \omega_{31} - \omega_{cav}$ e $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_c$ são as dessintonias entre átomo e cavidade e átomo e campo de controle,

respectivamente. A equação mestra do sistema é assim escrita:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}} = & -i[H_{CEIT}, \hat{\rho}] + \kappa(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \sum_{l=1,2} \Gamma_{3l}(2\hat{\sigma}_{l3}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{3l} - \hat{\sigma}_{33}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_{33}) \\ & + \sum_{j=2,3} \gamma_{jj}(2\hat{\sigma}_{jj}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{jj} - \hat{\sigma}_{jj}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_{jj}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

O espectro quântico de transmissão (número de fótons transmitidos pela cavidade $\hat{n} = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$) do sistema átomo-cavidade é obtido numericamente resolvendo-se para o estado estacionário de ρ truncando-se a base de Fock do campo da cavidade de acordo com a força do campo de prova. O resultado é apresentado na figura 5.7 abaixo.

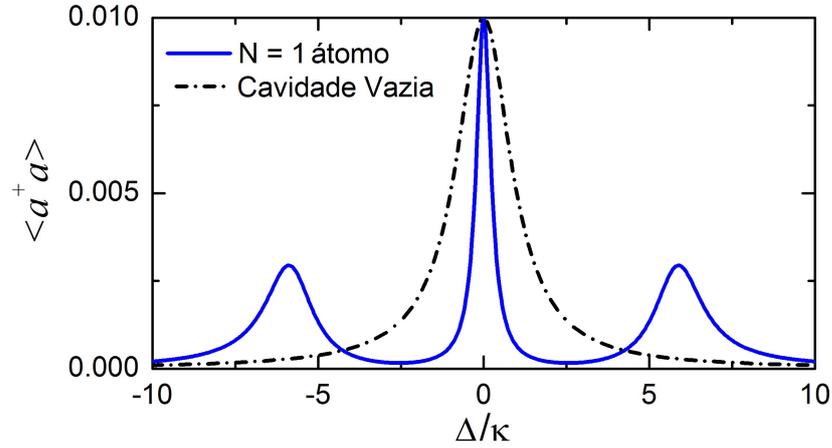


FIGURA 5.7: Espectro de transmissão em função da dessintonia normalizada Δ/κ de um único átomo de três níveis no interior da cavidade (linha sólida), utilizando os parâmetros $g = 5\kappa$, $\varepsilon = 0,01\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\Omega_C = 3,0\kappa$ e $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. A linha pontilhada mostra o espectro da cavidade vazia.

Substituindo 5.8 em 5.9, utilizando a aproximação semiclássica 4.48 e considerando a condição $\Omega_c \gg g \langle \hat{a} \rangle_{max}$, sendo $\langle \hat{a} \rangle_{max} = \varepsilon / (\Delta - i\kappa)$ para $\Omega_c = g = 0$, tem-se as equações de movimento dos operadores atômicos e do campo:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\hat{a}} \rangle &= -i\{(\Delta - i\kappa)\langle \hat{a} \rangle + g\langle \hat{\sigma}_{13} \rangle + \varepsilon\}, \\ \langle \dot{\hat{\sigma}}_{13} \rangle &= -i(\Delta + \Delta_1 - i\gamma_{31})\langle \hat{\sigma}_{13} \rangle - i\{g\langle \hat{a} \rangle(\langle \hat{\sigma}_{11} \rangle - \langle \hat{\sigma}_{33} \rangle) + \Omega_c\langle \hat{\sigma}_{12} \rangle\}, \\ \langle \dot{\hat{\sigma}}_{12} \rangle &= -i(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 - i\gamma_2)\langle \hat{\sigma}_{12} \rangle - i\{-g\langle \hat{a} \rangle\langle \hat{\sigma}_{32} \rangle + \Omega_c\langle \hat{\sigma}_{13} \rangle\}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para o caso de baixa excitação atômica $\langle \sigma_{11} \rangle \approx 1$ e perfeita ressonância entre o átomo e os campos da cavidade e de controle $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, tem-se no regime assintótico

$$\langle \hat{a} \rangle = \frac{\varepsilon(\Delta - i\gamma_{31})(\Delta - i\gamma_2) + \varepsilon\Omega_c^2}{(\Delta - i\gamma_{31})(\Delta - i\gamma_2)(\Delta - i\kappa) - \Omega_c^2(\Delta - i\kappa) - g^2(\Delta - i\gamma_2)}. \quad (5.11)$$

O análogo clássico (figura 5.8) do sistema quântico (figura 5.5) que é investigado nesta seção (5.3) considera as discussões em torno do sistema átomo-cavidade (figura 5.6), sendo que nessa configuração de três osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados como análogo do sistema CEIT a força é aplicada no oscilador de massa m_2 , que tem sua oscilação acoplada com o oscilador de massa m_3 por meio da mola de acoplamento de frequência ω_{23} , que por sua vez é acoplado com o oscilador de massa m_1 por meio da mola de frequência ω_{13} :

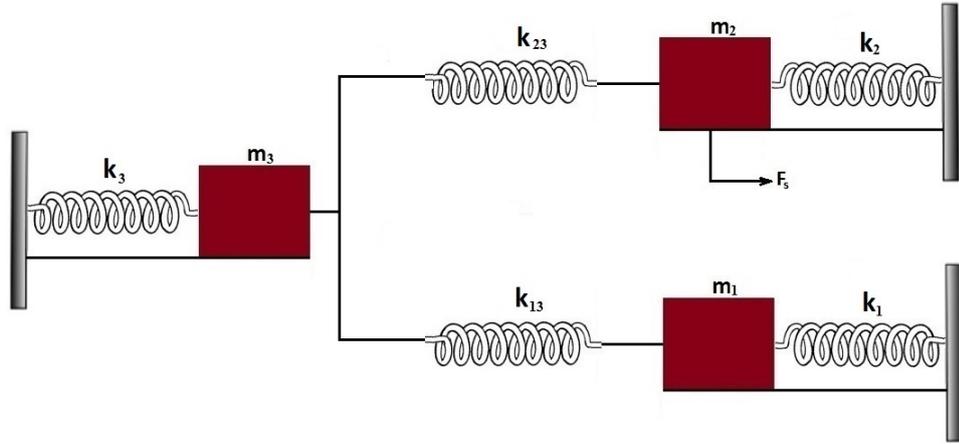


FIGURA 5.8: Três osciladores acoplados com uma força aplicada no oscilador de massa m_2 .

As equações de movimento para esse sistema são:

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \omega_{13}^2 x_3 = 0; \quad (5.12)$$

$$\ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \omega_{23}^2 x_3 = \frac{F}{m} e^{-i\omega_s t}; \quad (5.13)$$

$$\ddot{x}_3 + \gamma_3 \dot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 - (\omega_{13}^2 x_1 + \omega_{23}^2 x_2) = 0, \quad (5.14)$$

em que novamente foi considerado 5.4. Como no capítulo 3, vamos utilizar o

formalismo Hamiltoniano para o sistema proposto. Considerando que os elementos massivos da figura 5.8 estão acoplados pelas molas de contante elástica k_{13} e k_{23} e o sistema é forçado por $F_s(t) = Fe^{-i\omega st}$, temos que a Hamiltoniana total ($H = H_0 + H_{int} + H_B$) do sistema é constituída pela Hamiltoniana inicial $H_0 = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2}(k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x_3^2)$, de interação entre as partículas $H_{int} = -k_{13}x_1x_3 - k_{23}x_2x_3$ e pela Hamiltoniana de bombeio $H_B = x_2F_s(t)$, disposta assim:

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2}(k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x_3^2) - k_{13}x_1x_3 - k_{23}x_2x_3 - x_2F_s(t). \quad (5.15)$$

A confirmação da abordagem Hamiltoniana em 5.15 é dada pela aplicação da equação de Hamilton $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$, o que nos fornece justamente as equações de movimento do sistema 5.12-5.14. Para reescrever a Hamiltoniana do sistema em termo de variáveis clássicas, é interessante convencionar que $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ e empregar a definição 5.3.1:

Definição 5.3.1 (Variáveis Clássicas)

$$a_+ = -\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p_1 + im\omega x_1) \quad e \quad a_- = +\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p_1 - im\omega x_1); \quad (5.16)$$

$$b_+ = -\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p_2 + im\omega x_2) \quad e \quad b_- = +\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p_2 - im\omega x_2); \quad (5.17)$$

$$c_+ = -\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p_3 + im\omega x_3) \quad e \quad c_- = +\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p_3 - im\omega x_3). \quad (5.18)$$

Note que a diferença entre as definições 3.2.1 e 5.3.1 é a introdução da variável clássica c_{\pm} para o terceiro oscilador. Em termos dessas novas variáveis, a Hamiltoniana do sistema escreve-se como:

$$H = \hbar\omega(a_+a_- + b_+b_- + c_+c_-) - \frac{\hbar\omega_{13}^2}{2\omega}(a_+c_+ + a_+c_- + a_-c_+ + a_-c_-) - \frac{\hbar\omega_{23}^2}{2\omega}(b_+c_+ + b_+c_- + b_-c_+ + b_-c_-) - (b_+ + b_-)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}F_s(t). \quad (5.19)$$

Definindo os acoplamentos como $\Omega_{13} = \frac{\omega_{13}^2}{2\omega}$, $\Omega_{23} = \frac{\omega_{23}^2}{2\omega}$, a força como $F_s(t) = F(e^{-i\omega st} + e^{i\omega st})$ e $\Omega_s = \sqrt{\frac{F^2}{2m\hbar\omega}}$, vamos aplicar a aproximação de onda girante

(“RWA”) para obter:

$$\begin{aligned}
H &= \hbar\omega(a_+a_- + b_+b_- + c_+c_-) - \hbar\Omega_{13}(a_+c_- + a_-c_+) - \\
&- \hbar\Omega_{23}(b_+c_- + b_-c_+) - \hbar\Omega_s(b_+e^{-i\omega_s t} + b_-e^{i\omega_s t}),
\end{aligned} \tag{5.20}$$

sendo novamente $\Delta = \omega - \omega_s$, mas $\Delta \ll \omega$ o que implica em $\omega \approx \omega_s$ e 5.20 é a Hamiltoniana do sistema em função das variáveis clássicas definidas anteriormente. Adotando os Parênteses de Poisson ([27]-[30]) para encontrar as equações de movimento para as variáveis clássicas e $\hbar = 1$, temos:

$$\dot{a}_- = \{a_-, H\} = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial a_+} = -i(\omega a_- - \Omega_{13}c_-) - \gamma_1 a_-; \tag{5.21}$$

$$\dot{b}_- = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial b_+} = -i(\omega b_- - \Omega_{23}c_- - \Omega_s e^{-i\omega_s t}) - \gamma_2 b_-; \tag{5.22}$$

$$\dot{c}_- = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial c_+} = -i(\omega c_- - \Omega_{13}a_- - \Omega_{23}b_-) - \gamma_3 c_-; \tag{5.23}$$

Note que 5.21-5.23 foram apresentadas acima com a adição da dissipação γ de cada oscilador. Como em 3.32 e 3.33, a seguinte transformação elimina a temporalidade das equações acima:

$$\begin{aligned}
a_-(t) &= \tilde{a}_-(t)e^{-i\omega_s t}; \\
b_-(t) &= \tilde{b}_-(t)e^{-i\omega_s t}; \\
c_-(t) &= \tilde{c}_-(t)e^{-i\omega_s t}.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Com essa mudança e impondo o regime assintótico, ficamos com:

$$\tilde{a}_- = \frac{\Omega_{13}\tilde{c}_-}{\Delta - i\gamma_1}; \tag{5.25}$$

$$\tilde{b}_- = \frac{\Omega_{23}\tilde{c}_- + \Omega_s}{\Delta - i\gamma_2}; \tag{5.26}$$

$$\tilde{c}_- = \frac{\Omega_{13}\tilde{a}_- + \Omega_{23}\tilde{b}_-}{\Delta - i\gamma_3}. \tag{5.27}$$

O valor médio do operador aniquilação de fótons $\langle \hat{a} \rangle$ do sistema CEIT possui seu análogo clássico com a variável 5.26 devido a aplicação da força no oscilador de massa m_2 do sistema mecânico. O desenvolvimento de \tilde{b}_- em função de \tilde{c}_- e \tilde{a}_- nos fornece:

$$\tilde{b}_- = \frac{\Omega_s(\Delta - i\gamma_1)(\Delta - i\gamma_3) - \Omega_s\Omega_{13}^2}{(\Delta - i\gamma_1)(\Delta - i\gamma_2)(\Delta - i\gamma_3) - \Omega_{13}^2(\Delta - i\gamma_2) - \Omega_{23}^2(\Delta - i\gamma_1)}, \quad (5.28)$$

que é semelhante a 5.11,

$$\langle \hat{a} \rangle = \frac{\varepsilon(\Delta - i\gamma_{31})(\Delta - i\gamma_2) + \varepsilon\Omega_c^2}{(\Delta - i\gamma_{31})(\Delta - i\gamma_2)(\Delta - i\kappa) - \Omega_c^2(\Delta - i\kappa) - g^2(\Delta - i\gamma_2)}.$$

A figura 5.9 apresenta a parte real e imaginária do operador aniquilação de fótons em função da dessintonia normalizada Δ/κ indicando o comportamento da CEIT para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle Ω_c . Quando $\Omega_c = 0$, figura 5.9 (a.1), temos um único pico central identificando o “*dark state*” do sistema com máximo em dessintonia nula ($\Delta = 0$) e comportamento similar é visto em b.1. À medida que aumentamos a intensidade do campo de controle surgem pequenos picos laterais indicando a interação dos modos do campo eletromagnético confinado na cavidade com o átomo, descritos pelas figuras de c1-e1. As figuras da direita (a.2-e.2) indicam o comportamento da dispersão do sistema com o aumento da intensidade do campo de controle. Nas mesmas figuras estão as curvas clássicas para o mesmo conjunto de parâmetros. Em todas as simulações a curva clássica coincidiu com a quântica.

Das equações obtidas e da figura acima, podemos afirmar que o oscilador de massa m_3 faz o papel do campo eletromagnético interagindo com o átomo, os osciladores de massa m_2 e m_1 estabelecem as analogias com as transições $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ e $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, respectivamente. Os fatores de acoplamento do átomo com os campos clássicos de radiação são equivalentes às constantes de acoplamento $\Omega_{(13,23)}$. Uma análise com maior profundidade induz a conclusão que g é o análogo

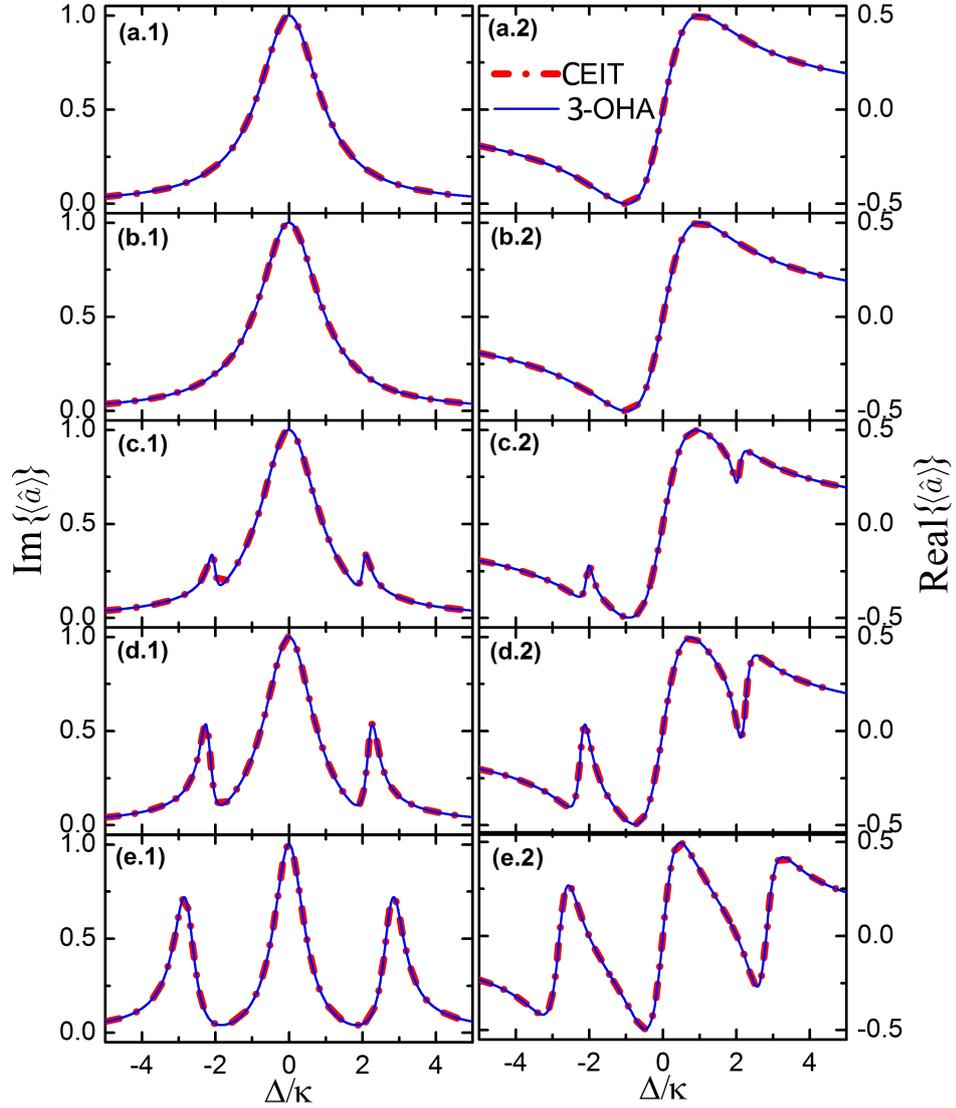


FIGURA 5.9: Valor médio do operador aniquilação de fótons $\langle \hat{a} \rangle$ vs. Δ/κ do sistema CEIT em comparação com seu análogo clássico obtido utilizando-se um sistema de três osciladores harmônicos acoplados (3-OHA). Os parâmetros utilizados são $\Omega_p = 0,02\kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle (a) $\Omega_c = 0$; (b) $0,05\kappa$; (c) $0,5\kappa$; (d) $1,0\kappa$; (e) $2,0\kappa$.

do acoplamento Ω_{23} e o campo de controle Ω_c o análogo de Ω_{13} . Sabendo que o termo Ω_s indica a força aplicada no sistema clássico sendo o equivalente do campo de prova Ω_p na configuração quântica e a dissipação do oscilador γ_3 o decaimento Γ_3 e Γ_2 do átomo, a condição para que o sistema clássico encontre-se em regime de EIT é que a dissipação do terceiro oscilador seja maior que a do primeiro, que por sua vez, deve ser muito maior que a do segundo, ou seja, $\gamma_1 \ll \gamma_2 < \gamma_3$.

A tabela 5.1 resume as equivalências clássicas do sistema de três os-

osciladores harmônicos acoplados (3-OHA) e quânticas (CEIT) discutidas:

3-OHA	CEIT
Ω_s	ε
Ω_{13}	Ω_c
Ω_{23}	g
γ_1	γ_2
γ_2	κ
γ_3	γ_{31}
Δ	Δ

TABELA 5.1: Parâmetros clássicos e quânticos. Analogia clássica da CEIT com três osciladores harmônicos acoplados (3-OHA).

Desse modo, a análise das equações 5.11, 5.28 e da figura 5.9 indica que o sistema CEIT em um átomo de três níveis tipo Λ mais o modo do campo confinado em uma cavidade se resume em um sistema clássico de três osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados.

5.3.1 Análogo Elétrico

Alguns componentes dos circuitos RLC estudados na literatura apresentam justamente a função dos elementos do modelo mecânico em seus respectivos regimes. Portanto, é justo fazer uma analogia entre o modelo RLC e o mecânico. Dentre as várias maneiras de preparar o aparato experimental e elétrico que é análogo ao sistema massa-mola, considera-se que o sistema mecânico de três osciladores possui molas de acoplamentos e a anulação de um desses acoplamentos implica em uma configuração de dois osciladores acoplados. Assim, o modelo elétrico deve ser ajustado de modo que apresente circuitos independentes.

Como apresentado na subseção 3.1.1 e em [8], [11] e [16], a força clássica deve introduzir energia no sistema e o mesmo papel possui a força eletromotriz no análogo elétrico. As dissipações mecânicas no circuito são as resistências devido as suas funções de retirar energia do sistema. O correspondente elétrico do deslocamento mecânico x (sua derivada fornece a velocidade e a aceleração) é a carga (sendo que sua derivada indica a corrente do sistema). Por fim, a constante das molas são os capacitores no circuito RLC e com essa equivalência de parâmetros estabelecemos a analogia elétrica.

O circuito RLC equivalente ao sistema massa-mola constituído por três osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados é assim apresentado:

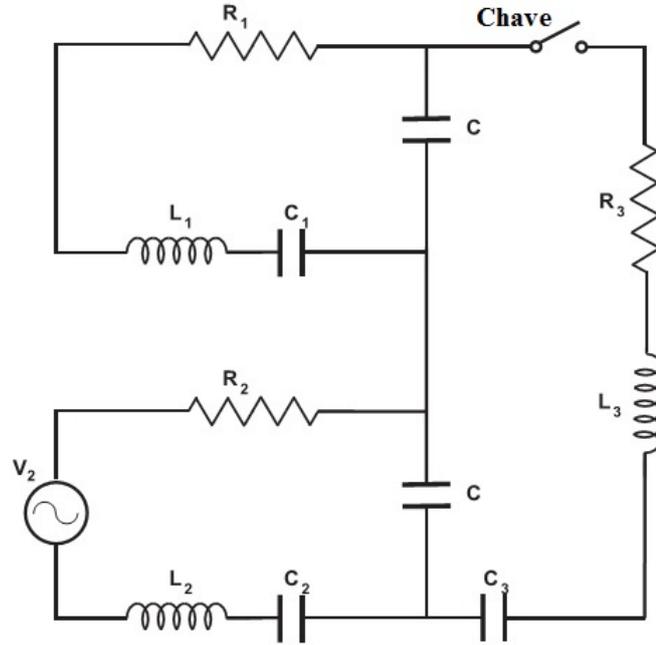


FIGURA 5.10: Análogo elétrico do modelo de três osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados.

Note que a figura 5.10 indica três circuitos independentes constituídos pelos circuitos R_3 , L_3 e C_3 formando um circuito por onde passa uma corrente i_3 e em R_1 , L_1 , C_1 e R_2 , L_2 e C_2 formam os outros dois circuitos com correntes i_1 e i_2 , respectivamente. Ao desligar a chave ilustrada na figura, o único circuito que permanecerá ligado será o segundo, que possui corrente i_2 e ao desconectar qualquer capacitor do análogo elétrico será desligado o circuito em que ele se encontra. A modelagem matemática do circuito elétrico apresentado é dado pelas equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + r\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 - \Omega_c^2 q_3 &= 0; \\ \ddot{q}_2 + r\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 - \Omega_r^2 q_3 &= \frac{V}{L} e^{-i\omega_s t}; \\ \ddot{q}_3 + r\dot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 - (\Omega_c^2 q_1 + \Omega_r^2 q_2) &= 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

sendo $\Omega_c^2 = \frac{1}{L_1 C}$, $\Omega_r^2 = \frac{1}{L_2 C}$, $r_j = \frac{R_j}{L_j}$ e $\omega_j^2 = \frac{1}{L_j C_{eq}}$, com $j = 1, 2, 3$, $C_{e1} = \frac{C C_1}{(C + C_1)}$, $C_{e2} = \frac{C C_2}{(C + C_2)}$ e $C_{e3} = \frac{C C_3}{(C + C_3)}$. Para finalizar esse resultado, a tabela 5.2 resume as analogias apresentadas nessa subseção:

Modelo Mecânico	Modelo Elétrico
γ	R/L
m	L
k	$1/C$
x	q
$F/me^{-i\omega_s t}$	$V/Le^{-i\omega_s t}$

TABELA 5.2: Equivalência entre os parâmetros dos sistemas elétrico e mecânico.

Capítulo 6

Considerações Finais

Este último capítulo tem como objetivo reunir todos os resultados dos capítulos anteriores e ainda discutir sua importância e aplicação. Para isso, nas seções 6.1-6.2 serão analisadas as equivalências entre o sistema clássico de dois e três osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados com a EIT em átomos de dois, três níveis e quatro níveis. Logo após (seção 6.3), serão apresentados as aplicações tecnológicas para destacar a importância do estudo do análogo clássico da EIT e suas aplicações. A subseção 6.3.1 refere-se as aplicações para o sistema com dois osciladores e 6.3.2 aplicações para três osciladores acoplados.

6.1 Dois Osciladores Harmônicos

A analogia clássica da EIT com o sistema de dois osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados foi obtida por meio do formalismo Hamiltoniano após a definição das variáveis clássicas para a substituição na Hamiltoniana do sistema mecânico e as equações de movimento obtidas foram equivalentes às equações de movimento da média dos operadores no regime assintótico para um átomo de três níveis em configuração Λ . Para uma maior precisão dos resultados, o comportamento das equações do caso clássico foi comparado com [3] e a analogia clássica da EIT para esse sistema foi estabelecida. O sucesso da descrição clássica da EIT em um átomo de três níveis em configuração Λ por osciladores mecânicos proporcionou uma certa segurança para a busca por

outros sistemas quânticos. Foi modelada classicamente a situação em que temos duas cavidades quânticas acopladas [7] se comportando como dois osciladores harmônicos quânticos, cuja modelagem matemática obtida via equação mestra dissipativa no regime assintótico se mostrou equivalente com o sistema clássico massa-mola. Logo após, as equações do átomo de dois níveis empregando a aproximação semiclássica em sistemas bombeados na cavidade e diretamente no átomo apresentaram seu comportamento similar ao sistema clássico de dois osciladores. Também foi apresentado um estudo já realizado de um sistema optomecânico, o qual indicou que sua dinâmica é similar a de um átomo de três níveis em configuração Λ , estabelecendo que sua descrição clássica também é descrita por dois osciladores acoplados.

A tabela 6.1 resume a equivalência entre os parâmetros clássicos do sistema mecânico de dois osciladores harmônicos acoplados (2-OHA) e quânticos dos sistemas de dois níveis com bombeio no átomo (2-NBA), dois níveis com bombeio na cavidade (2-NBC), duas cavidades acopladas (2-CA) e a EIT em um átomo de três níveis em configuração Λ :

2-OHA	2-NBA	2-NBC	2-CA	EIT
Ω_s	ε	ε	ε	Ω_p
Ω_{12}	g	g	λ	Ω_c
γ_1	γ	κ	κ_1	γ_{31}
γ_2	κ	γ	κ_2	γ_2
Δ	Δ	Δ	Δ	Δ

TABELA 6.1: Analogias dos diversos sistemas quânticos com o sistema clássico de dois osciladores forçados e acoplados.

6.2 Três Osciladores Harmônicos

O sistema clássico de três osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados foi estudado em diferentes configurações (detalhes no capítulo 5) e interessantes analogias foram discutidas e obtidas. Para realizar a analogia clássica com três osciladores acoplados é necessário um átomo de quatro níveis ou um sistema de um átomo de três níveis confinado em uma cavidade. A primeira analogia discutida foi entre o arranjo clássico de três osciladores com duas forças

aplicadas em osciladores distintos com o modelo quântico da “*Double Electromagnetically Induced Transparency*” (DEIT) em um átomo de quatro níveis na configuração do tipo “*tripod*” [11] (figura 5.1) e, logo após, a DEIT em um sistema atômico na configuração do tipo *Y* invertido [16] com três osciladores em que apenas uma força é aplicada no oscilador central. Os resultados anteriores são encontrados normalmente na literatura e suas equações apresentam um análogo clássico satisfatório. Outro modelo foi tratado no capítulo 5 em que uma força é aplicada em um dos osciladores como indica a figura 5.8 e esse modelo é o análogo clássico da EIT em um átomo de três níveis em configuração Λ mais um modo da cavidade. Ao modificar o oscilador em que é aplicada a força, temos os casos anteriores e se anular um dos acoplamentos mecânicos (molas) do sistema proposto, as equações de movimento recuperam a proposição de [8].

A tabela 6.2 indica as equivalências obtidas entre o sistema mecânico de três osciladores e o modelo da EIT em um átomo de três níveis mais um modo da cavidade:

EIT (Átomo de Três Níveis e Cavidade)	Três Osciladores Clássicos
ε	Ω_s
Ω_c	Ω_{13}
g	Ω_{23}
γ_2	γ_1
κ	γ_2
γ_{31}	γ_3
Δ	Δ

TABELA 6.2: Parâmetros clássicos e quânticos. Analogia com três osciladores clássicos.

6.3 Aplicações

Motivado pelas discussões anteriores e pelo excelente resultado conquistado na analogia clássica da EIT, as seções abaixo apresentam algumas aplicações para deixar clara a importância dos resultados obtidos.

6.3.1 Dois Osciladores Harmônicos

Os metamateriais¹ foram previstos teoricamente pelo físico Victor Veselago em 1967 e mesmo após a sua descoberta foram considerados impossíveis de se produzir por apresentarem propriedades ópticas estranhas² de acordo com a física da época, tais como índice de refração negativo e efeito Doppler invertido. Atualmente, os estudos de metamateriais apresentam um campo de pesquisa próprio com inovações tecnológicas e descobertas intrigantes³. Dentre essas linhas de pesquisa estão os metamateriais controlados pela luz.

Alguns metamateriais apresentam em sua composição estruturas em que podemos obter um comportamento clássico análogo a EIT [86]-[91]. A estrutura de [92] consiste em um metamaterial nanoplasmonico que é formado por células funcionais, sendo que cada célula compreende uma barra de ouro empilhada em cima de dois simétricos fios de ouro, como na figura 6.1 retirada da referência [92].

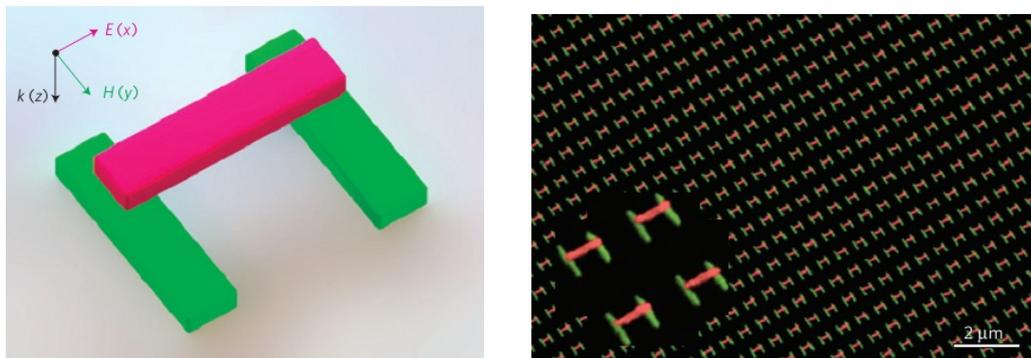


FIGURA 6.1: Metamaterial. Duas camadas formadas de fios (barras) de ouro em que temos as oscilações das antenas de dipolo (camada superior) e de quadrupolo (camada inferior).

Na figura acima, a barra de ouro da parte superior possui um dipolo oscilante (dois osciladores) como uma antena que irradia fortemente para o espaço tridimensional e o par de fios de ouro na parte inferior atua como uma antena de

¹Metamaterial é um material produzido artificialmente dotado de propriedades físicas que não são encontradas normalmente na natureza. O prefixo meta vem do grego e significa além de.

²Esse nome reflete a perplexidade da comunidade científica quando encontrou nos materiais propriedades físicas antes consideradas impossíveis e que normalmente não são encontradas na natureza.

³Também podemos destacar os metamateriais que permitem alterações em suas propriedades eletromagnéticas oferecendo possibilidade de aplicações tecnológicas inéditas.

quadripolo não radioativa e sua frequência de ressonância é ajustada dentro do perfil de vibração da antena superior. O amortecimento do quadripolo deriva-se quase que exclusivamente a partir de perdas intrínsecas do metal (amortecimento de Drude) e é muito menor que o amortecimento de radiação da antena de dipolo. A física desse sistema pode ser entendida como uma analogia da EIT em três níveis atômicos em configuração V ([3], [97]) em que os níveis $|1\rangle$ e $|2\rangle$ são os níveis excitados, $|0\rangle$ é o nível fundamental e as transições dipolo permitidas são $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, sendo relacionados com fótons de frequência ω_0 , dissipação γ_1 e $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ são as transições dipolo não permitidas (quadripolo). O dipolo da antena é representado pelo oscilador 1 em que é aplicado um campo $\vec{E}(t)$ e o quadripolo (dois osciladores acoplados) pelo oscilador 2 e sua dinâmica é dada pelas equações:

$$\ddot{q}_1(t) + \gamma_1 \dot{q}_1(t) + \omega_0^2 q_1(t) + \kappa \dot{q}_2(t) = E(t); \quad (6.1)$$

$$\ddot{q}_2(t) + \gamma_2 \dot{q}_2(t) + (\omega_0 + \delta)^2 q_2(t) - \kappa \dot{q}_1(t) = 0, \quad (6.2)$$

sendo ω_0 a frequência do oscilador 1, δ denota a dessintonia entre as frequências de ressonância do oscilador 1 e 2, γ_1 e γ_2 são as dissipações dos osciladores 1 e 2, respectivamente, sendo ($\gamma_2 \ll \gamma_1 \ll \omega_0$), κ é o coeficiente do acoplamento entre os osciladores e q_1 e q_2 são as cargas oscilantes. Resolvendo as equações 6.1-6.2, utilizando $\omega - \omega_0 \ll \omega_0$, $\omega_0^2 - \omega^2 \approx -2\omega_0(\omega - \omega_0)$, obtemos a potência dissipada:

$$P(t) = \frac{i}{2} \frac{(\omega - \omega_0 - \delta) + i\frac{\gamma_2}{2}}{(\omega - \omega_0 + i\frac{\gamma_1}{2})(\omega - \omega_0 - \delta + i\frac{\gamma_2}{2}) - \frac{\kappa^2}{4}}, \quad (6.3)$$

sendo as equações 6.1-6.3 semelhantes as equações de [8] e as equações encontradas nessa dissertação. Outro modelo que também utiliza metamateriais para contribuir com o avanço da medicina é o sensor de glicose proposto em [4], pois apresenta um método de medida de glicose não invasivo e em tempo real utilizando metamateriais também com dipolos e quadripolos oscilantes acoplados. Lentes de contato são inseridas na superfície dos olhos do paciente.

Esses metamateriais são fotônicos e capazes de detectar em pouco tempo as mudanças das propriedades dielétricas do meio e as lentes de contato contém em sua composição hidrogéis e indicadores fluorescentes que respondem a incidência

de luz e atuam de acordo com a concentração de glicose ocular, modificando o índice de refração das lentes de contato. Essas lentes são invisíveis aos olhos humanos e biocompatíveis (compatíveis com a estrutura ocular onde está inserida). Os dados são recebidos por um fotodiodo e enviados para um leitor que fará o tratamento desse sinal e ao final da medida temos o resultado da medição do teor de glicose ocular (e conseqüentemente do sangue) do indivíduo.

6.3.2 Três Osciladores Harmônicos

O desligamento de uma das molas do sistema constituído por três osciladores harmônicos amortecidos forçados e acoplados implica diretamente no modelo de dois osciladores, sendo um modelo mais geral. Assim concluimos que todas as aplicações tecnológicas do modelo com dois osciladores são também para três e as referências explicadas na subseção 6.3.1 poderiam ser tratadas nessa subseção.

Considerando que o aparato experimental do sistema mecânico de três osciladores pode ser reproduzido em laboratórios de ensino de Física, esse sistema nos permite apresentar a física clássica envolvida no sistema e introduzir a mecânica quântica no ensino médio.

Apêndice A

Quantização do Campo Eletromagnético em uma Cavidade

Em 1864 James Clerk Maxwell apresentou a compilação das equações que descrevem o eletromagnetismo clássico impulsionando o surgimento de muitas descobertas como a invenção da lâmpada elétrica em 1879 por Thomas Edson e outros fenômenos foram satisfatoriamente explicados, como o Efeito Fotoelétrico por Albert Einstein. Nesses acontecimentos, a luz é tratada classicamente obedecendo as equações de Maxwell com amplitude e fase bem definidas. Em 1927, Dirac apresentou a quantização do campo eletromagnético em que o modelo semiclássico foi apresentado para explicar os fenômenos luminosos.

Utilizamos uma cavidade para confinar o campo eletromagnético em seu interior e analisá-lo no regime estacionário, sendo que o tamanho da cavidade determina os modos normais de vibração do campo eletromagnético.

Neste capítulo será apresentada uma descrição do campo de radiação no contexto de sua quantização confinado em uma cavidade. Posteriormente a descrição da interação desse campo com um átomo. Será considerado que o átomo é neutro e se move com velocidades não relativísticas em relação a cavidade, mas com velocidades altas o suficiente para que os efeitos quânticos do movimento

sejam desprezados [85]. Também será empregada a aproximação dipolar¹, em que o tamanho do átomo é pequeno em relação ao comprimento de onda tornando o átomo pontual para o campo eletromagnético e podendo ser tratado como um dipolo elétrico. Todas essas aproximações simplificam o processo de quantização do campo eletromagnético, que será apresentado nas próximas seções.

A.1 Eletrodinâmica Clássica

A transição da mecânica clássica para a mecânica quântica pode ser mais facilmente alcançada se as equações da teoria eletromagnética de Maxwell são tratadas de forma que os vetores \vec{E} e \vec{B} possam ser expressos em termos dos modos normais de vibração, obedecem uma equação do tipo oscilador harmônico e estão relacionadas com as variáveis posição (q) e momento linear (p), as quais são substituídas por seus respectivos operadores (\hat{q}) e (\hat{p}).

Há analogias e pontos comuns entre a teoria clássica e quântica da radiação eletromagnética. As analogias se baseiam no fato de que os campos de radiação são tratados como quantidades algébricas (mecânica clássica) e como operadores (mecânica quântica) e ambas as teorias, sendo um ponto comum, se baseiam na teoria de Maxwell, cujas equações em um meio não magnético possuem a forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (\text{A.4})$$

ε_0 , μ_0 , ρ e \vec{J} são, respectivamente, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, a densidade de carga e a densidade de corrente elétrica.

¹Na aproximação dipolar, o comprimento de onda dos campos eletromagnéticos são muito maiores que a extensão atômica, portanto podemos desprezar a variação espacial dos campos em relação ao átomo. Assim $\vec{k} \cdot \vec{r} \ll 1$, em que \vec{r} é a posição do elétron em relação ao núcleo e \vec{k} é o vetor de onda.

Sabendo que podemos escrever as equações de Maxwell em termos do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e do potencial escalar $\phi(\vec{r}, t)$, para simplificar os cálculos vamos escrever A.1-A.4 da seguinte forma:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = \mu_0 \vec{J}; \quad (\text{A.5})$$

$$-\varepsilon_0 \vec{\nabla}^2 \phi - \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \sigma, \quad (\text{A.6})$$

em que $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$ e foi utilizada a identidade $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A})$. As transformações de gauge são definidas por:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' - \vec{\nabla} \Xi; \quad (\text{A.7})$$

$$\phi \rightarrow \phi' + \frac{\partial \Xi}{\partial t}, \quad (\text{A.8})$$

sendo Ξ a função de gauge, uma função arbitrária da posição \vec{r} e do tempo t . Portanto, podemos considerar $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, que é o calibre de Coulomb, substituir em A.5 e obter:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{J} \quad (\text{A.9})$$

e

$$-\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (\text{A.10})$$

A solução da equação A.9 pode ser facilitada utilizando o teorema de Helmholtz, que permite escrever qualquer campo vetorial como uma soma de duas componentes: uma com o divergente (componente transversal) nulo e a outra com o rotacional (componente longitudinal) nulo. Assim, podemos escrever o vetor densidade de corrente da seguinte forma:

$$\vec{J} = \vec{J}_T + \vec{J}_L. \quad (\text{A.11})$$

As componentes \vec{J}_T e \vec{J}_L são denominadas componentes transversal e longitudinal, respectivamente. Utilizando a equação de continuidade ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), temos

a componente longitudinal da densidade de corrente:

$$\vec{J}_L = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (\text{A.12})$$

Utilizando o calibre de Coulomb, ficamos com:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J}_T; \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi = \mu_0 \vec{J}_L. \quad (\text{A.14})$$

A.2 Campo Eletromagnético Livre

Assuma um elemento de espaço cúbico de comprimento L , como ilustrado na figura A.1. Essa região do espaço é denominada cavidade de quantização, pois é a região do espaço onde o campo eletromagnético é confinado e quantizado.

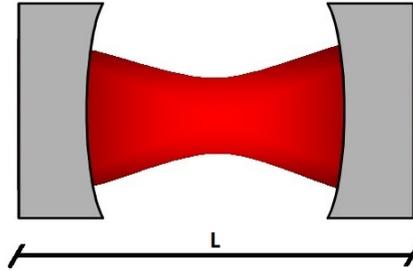


FIGURA A.1: Cavidade de comprimento L com um campo eletromagnético confinado em seu interior.

Assumindo que a cavidade esteja com ausência de cargas,

$$\vec{J}_T = 0, \quad \text{implicando em} \quad -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Podemos expandir o potencial como uma soma de contribuições dos modos da cavidade, assim:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \left[\vec{A}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{A}_k^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right], \quad (\text{A.16})$$

sendo \vec{k} o vetor de onda, possuindo componentes discretas dadas por:

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad (\text{A.17})$$

com $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Utilizando a condição de contorno da cavidade A.15 e equação A.16, temos que as diferentes componentes de \vec{A} são independentes e satisfazem a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}_k(t)}{\partial t^2} + \omega_k^2 \vec{A}_k = 0, \quad (\text{A.18})$$

sendo a frequência angular dada por $\omega_k^2 = ck$. A solução da equação acima é:

$$\vec{A}_k(t) = \vec{A}_k(0)e^{-i\omega_k t}. \quad (\text{A.19})$$

Observe que a solução acima também é válida para $\vec{A}_k^*(t)$ e que as soluções de \vec{A}_k e \vec{A}_k^* podem ser substituídas em A.16 para a obtenção do potencial vetorial. Colocando nas equações A.13-A.14 temos os campos elétrico e magnético para cada modo do campo k na ausência de cargas livres:

$$\vec{E}_k(\vec{r}, t) = i\omega_k \left[\vec{A}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{A}_k^*(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right], \quad (\text{A.20})$$

$$\vec{H}_k(\vec{r}, t) = \frac{i}{\mu_0} k \times \left[\vec{A}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{A}_k^*(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right]. \quad (\text{A.21})$$

O campo eletromagnético pode ser quantizado a partir da conversão da equação A.20-A.21 em uma equação de um oscilador harmônico quântico e para isso devemos expressar o potencial vetor $\vec{A}_k(t)$ em termo da posição (q) e momento (p) associados aos modos da cavidade k . Para isso, vamos calcular a energia média clássica de cada modo normal da cavidade:

$$\bar{U}_k = \frac{1}{2} \int_{\text{cavidade}} \left[\varepsilon_0 \bar{E}_k^2 + \mu_0^{-1} \bar{B}_k^2 \right] dV, \quad (\text{A.22})$$

sendo que a média é identificada por uma “barra”. \vec{E}_k e \vec{B}_k são os vetores campo elétrico e magnético associados com o modo k e são proporcionais da seguinte

forma:

$$\vec{E}_k = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \vec{H}_k. \quad (\text{A.23})$$

Substituindo \vec{E}_k e \vec{B}_k , ficamos com

$$\bar{U}_k = 2\varepsilon_0 L^3 \omega_k^2 \vec{A}_k \vec{A}_k^*. \quad (\text{A.24})$$

Os potenciais vetor (\vec{A}_k) e (\vec{A}_k^*) podem ser convenientemente escritos em função das coordenadas generalizadas de posição q_k e momento linear p_k , desta forma:

$$\vec{A}_k(t) = (4\varepsilon_0 L^3 \omega_k^2)^{-\frac{1}{2}} (\omega_k q_k(t) + ip_k(t)) \vec{\varepsilon}_k; \quad (\text{A.25})$$

$$\vec{A}_k^*(t) = (4\varepsilon_0 L^3 \omega_k^2)^{-\frac{1}{2}} (\omega_k q_k(t) - ip_k(t)) \vec{\varepsilon}_k. \quad (\text{A.26})$$

As quantidades q_k e p_k são escalares e as propriedades vetoriais \vec{A}_k e \vec{A}_k^* foram separadas pela introdução do vetor unitário $\vec{\varepsilon}_k$. Utilizando as expressões A.25-A.26 e substituindo na expressão da energia média contida no modo k (A.24), obtemos:

$$\bar{U}_k = \frac{1}{2} (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) = H. \quad (\text{A.27})$$

A equação acima é a energia média de um oscilador de massa unitária, que é equivalente a Hamiltoniana de um sistema de osciladores desacoplados (detalhes no capítulo 3), em que cada oscilador tem massa unitária e frequência de vibração ω_k .

A.3 O Oscilador Harmônico Quântico

Nesta seção, vamos desenvolver a teoria do oscilador harmônico quântico em uma dimensão na forma mais adequada da quantização do campo, sendo que cada modo k do campo eletromagnético corresponde a um oscilador. A quantização do campo eletromagnético consiste em considerar a proposta de Dirac e fazer as coordenadas generalizadas escalares q_k e p_k como operadores posição e

momento, satisfazendo as seguintes regras de comutação:

$$[\hat{p}_k, \hat{p}_k] = [\hat{q}_k, \hat{q}_k] = 0 \quad (\text{A.28})$$

e

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_k] = i\hbar. \quad (\text{A.29})$$

O campo eletromagnético é quantizado [85] pela associação com o oscilador harmônico quântico para cada modo do campo eletromagnético k dentro da cavidade. Para isso, substitui-se A.25-A.26 por operadores. Portanto, podemos alterar os escalares q_k e p_k por operadores posição \hat{q}_k e momento \hat{p}_k (satisfazendo as regras de comutação A.28-A.29) na Hamiltoniana A.27 e determinar as autoenergias do sistema quântico pela resolução da equação de autovalores $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$. Os operadores posição e momento estão relacionados com os operadores criação \hat{a} e aniquilação \hat{a}^\dagger da seguinte forma:

$$\hat{a}_k(t) = (2\hbar\omega_k)^{-\frac{1}{2}} (\omega_k\hat{q}_k(t) + i\hat{p}_k(t)); \quad (\text{A.30})$$

$$\hat{a}_k^\dagger(t) = (2\hbar\omega_k)^{-\frac{1}{2}} (\omega_k\hat{q}_k(t) - i\hat{p}_k(t)). \quad (\text{A.31})$$

Assim, as quantidades vetoriais \vec{A}_k e \vec{A}_k^* também são dadas em função dos operadores criação e aniquilação:

$$\vec{A}_k(t) \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_k}} \hat{a}_k(t) \quad (\text{A.32})$$

e

$$\vec{A}_k^*(t) \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_k}} \hat{a}_k^\dagger(t). \quad (\text{A.33})$$

A representação do potencial vetorial tem a forma:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \hat{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_k}} \left[\hat{a}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \hat{a}_k^\dagger(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \vec{\varepsilon}_k. \quad (\text{A.34})$$

Com isso, os operadores criação e aniquilação estão relacionados com a dinâmica do campo dentro da cavidade, criando e aniquilando fótons. O operador número de fótons do k -ésimo modo da cavidade ($\hat{n}_k = \hat{a}^\dagger \hat{a}$) está associado com a

energia do oscilador em termo dos operadores criação e aniquilação de fótons:

$$\hat{U}_k = \hbar\omega_k \left(\hat{n}_k + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.35})$$

O Hamiltoniano quantizado para o campo eletromagnético é a soma de todos os modos do campo:

$$\hat{H}_c = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{n}_k + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.36})$$

Os operadores \hat{a}_k , \hat{a}_k^\dagger e \hat{n}_k apresentam as seguintes propriedades:

- i. Os autovalores do operador número \hat{n}_k são sempre positivos;
- ii. Se $|n_k\rangle$ é um autoestado de \hat{n}_k , então:

$$\begin{aligned} \hat{a}_k |n_k\rangle &= n_k |n_k - 1\rangle, \\ \hat{a}_k^\dagger |n_k\rangle &= (n_k + 1) |n_k + 1\rangle; \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

- iii. As relações de comutação devem ser satisfeitas:

- a. $[\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] = 1$;
- b. $[\hat{n}_k, \hat{a}_k] = -\hat{a}_k$;
- c. $[\hat{n}_k, \hat{a}_k^\dagger] = \hat{a}_k^\dagger$.

A.4 Acoplamento Átomo-Campo

Assumindo o sistema físico descrito pelo Hamiltoniano 4.30 e o tratamento dado aos Hamiltonianos na seção 4.3, vamos assumir que um átomo pontual recebe um campo de radiação eletromagnético. Portanto, o átomo é considerado um dipolo elétrico (duas cargas iguais oscilantes) e esse processo, como discutido anteriormente, recebe o nome de aproximação de dipolo.

Como estamos considerando o átomo como um dipolo, o Hamiltoniano de interação é dado pelo produto do dipolo atômico com o campo elétrico:

$$\hat{H}_I = -\vec{d} \cdot \vec{E}, \quad (\text{A.38})$$

sendo \vec{d} o vetor momento de dipolo do átomo. O operador momento de dipolo é definido da seguinte forma:

$$\hat{d} = \sum_{ij} \hat{\sigma}_{ij} \vec{d}_{ij}. \quad (\text{A.39})$$

O campo elétrico é escrito como:

$$\hat{E} = -\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_k}} \left[i\omega_k \hat{a}_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - i\omega_k \hat{a}_k^\dagger(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right] \vec{\varepsilon}_k. \quad (\text{A.40})$$

Utilizando A.39, o Hamiltoniano A.38 fica:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= -i\hbar \sum_{ij} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_k}} \left[\hat{a}_k \hat{\sigma}_{ij} \vec{d}_{ij} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_{ij} \vec{d}_{ij} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right] = \\ &= \hbar \sum_{i,j} \sum_k \left[g_{k,i,j} \hat{a}_k \hat{\sigma}_{i,j} + g_{k,i,j}^* \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_{i,j} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

sendo $g_{k,i,j}$ a constante de acoplamento átomo-campo, que possui a forma:

$$g_{k,i,j}(\vec{r}) = -i \sqrt{\frac{\omega_k}{2\varepsilon_0 \hbar L^3}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{d}_{i,j} \cdot \vec{\varepsilon}_k. \quad (\text{A.42})$$

Note que a constante de acoplamento depende da geometria da cavidade, a qual indica a configuração dos modos e o volume onde o campo eletromagnético está confinado.

Apêndice B

Evolução de Estados Atômicos

A interpretação probabilística da mecânica quântica indica que é conveniente tratar os sistemas quânticos com o operador densidade de estados. Esse operador descreve quanticamente o sistema estudado e é dado em termos da função de onda, que possui a informação do sistema. A variação temporal do operador densidade de estados juntamente com a introdução das dissipações do sistema (operadores de Lindblad) permite descrever a dinâmica do sistema com a equação mestra, a qual será discutida e demonstrada neste apêndice.

B.1 Operador Densidade de Estados

O formalismo do operador densidade de estados foi descrito na Mecânica Quântica Estatística para resolver o problema de medidas de um sistema quântico quando esse se encontra em uma mistura estatística de estados. Para a melhor compreensão do operador densidade, vamos discutir os casos em que temos um estado puro e uma mistura estatística de estados.

B.1.1 Estado Puro

Considere um sistema que se encontra em um estado bem definido $|\Psi(t)\rangle$, cuja expansão na base ortonormal discreta $\{\mu_n\}$ é dada por:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j c_n(t) |\mu_n(t)\rangle. \quad (\text{B.1})$$

Os coeficientes acima devem satisfazer a relação:

$$\sum_n |c_n|^2 = 1, \quad (\text{B.2})$$

indicando que $|\Psi(t)\rangle$ é normalizado. Os elementos do operador $|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ são:

$$\langle\mu_p|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|\mu_n\rangle = c_n^*(t)c_p(t). \quad (\text{B.3})$$

Portanto, a definição do operador densidade ($\hat{\rho}$) na representação mais geral de Schrödinger é dada por:

$$\hat{\rho}(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|. \quad (\text{B.4})$$

Assim, podemos escrever os elementos da matriz do operador densidade como:

$$\rho_{np}(t) = \langle\mu_n|\hat{\rho}(t)|\mu_p\rangle = c_n(t)c_p^*(t). \quad (\text{B.5})$$

Dessa forma, o operador densidade é suficiente para caracterizar o estado quântico e assim podemos obter todas as predições físicas do sistema. A soma dos elementos da diagonal (traço) da matriz densidade deve ser igual a:

$$\sum_n |c_n|^2 = \sum_n \hat{\rho}_{nm}(t) = Tr[\hat{\rho}(t)] = 1, \quad (\text{B.6})$$

designando a conservação da probabilidade. Por essa razão, podemos calcular a média de um sistema físico. Para isso, considere θ um operador ou um observável, então a sua média é calculada como:

$$\langle\theta\rangle(t) = \sum_{np} \langle\mu_p|\hat{\rho}(t)|\mu_n\rangle\langle\mu_n|\theta|\mu_p\rangle = \sum_p \langle\mu_p|\hat{\rho}(t)\theta|\mu_p\rangle = Tr\{\hat{\rho}\theta\}. \quad (\text{B.7})$$

Portanto, a média de um operador é calculada como o traço desse operador, como foi feito em B.7.

A evolução do operador $\hat{\rho}(t)$ pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= \left(\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle \right) \langle\Psi(t)| + |\Psi(t)\rangle \left(\frac{d}{dt}\langle\Psi(t)| \right) = \\ &= \frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| + \frac{1}{-i\hbar}|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|\hat{H}(t) = \\ &= \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)]. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

A equação acima é conhecida como Equação de von-Neumann.

B.1.2 Mistura Estatística de Estados

Em uma mistura estatística de estados, o sistema tem probabilidade p_1 de estar no estado $|\Psi_1\rangle$, p_2 de estar no estado $|\Psi_2\rangle$, ..., p_k de estar no estado $|\Psi_k\rangle$ e assim por diante desde que satisfaçam as seguintes relações:

$$\begin{cases} 0 \leq p_1, \leq p_2, \dots, p_k \dots \leq 1, \\ \sum_k p_k = 1. \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

O caso de um sistema no estado puro é um caso particular de uma mistura estatística quando uma das probabilidades acima for 1 (consequentemente nulas as demais). Para uma mistura estatística, o operador densidade é definido como:

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k \hat{\rho}_k, \quad (\text{B.10})$$

sendo $\hat{\rho}_k$ o operador densidade do estado puro $|\Psi_k\rangle$ ($\hat{\rho}_k = \sum_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|$). Contudo, ele não é um operador projetor, pois

$$\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho} \quad \text{e} \quad \text{Tr}\{\hat{\rho}^2\} \neq 1. \quad (\text{B.11})$$

Na equação acima, teríamos uma igualdade se o estado fosse puro. Essa desigualdade nos indicará a observação da coerência do sistema.

B.1.2.1 Populações e Coerências

Vamos considerar os elementos diagonais de $\hat{\rho}$ uma mistura estatística (equação B.10) e considerar $c_n^{(k)}$ como coeficiente da base $\{\mu_n\}$ do estado $|\Psi_k\rangle$. Então: $c_n^{(k)} = \langle \mu_n | \Psi_k \rangle$.

Assim, podemos definir o elemento ρ_{nn} da seguinte forma:

$$\rho_{nn} = \sum_k p_k |c_n^{(k)}|^2, \quad (\text{B.12})$$

sendo que $c_n^{(k)}$ é um número real e positivo, indicando que se o estado for $|\Psi_k\rangle$ a ocupação dos níveis de energia do sistema serão correspondentes ao autoestado $|\mu_n\rangle$. Sabendo que p_k representa a probabilidade de que o sistema esteja no estado $|\Psi_k\rangle$, podemos afirmar que ρ_{nn} representa a média de encontrar o sistema no estado $|\mu_n\rangle$. Por essa razão ρ_{nn} é chamado de população do estado $|\mu_n\rangle$.

Para os elementos não diagonais do elemento ρ_{np} , temos:

$$\rho_{np} = \sum_k p_k c_n^{(k)} [c_p^{(k)}]^*, \quad (\text{B.13})$$

sendo que o termo cruzado $c_n^{(k)} [c_p^{(k)}]^*$ representa a interferência entre os estados $|\mu_n\rangle$ e $|\mu_p\rangle$, que pode aparecer quando o estado $|\Psi_k\rangle$ é uma superposição linear coerente desses estados. ρ_{np} nulo significa que na média dos estados possíveis da mistura estatística não há os efeitos de interferência entre os estados $|\mu_n\rangle$ e $|\mu_p\rangle$ e se ρ_{np} não for nulo haverá coerência entre esses dois estados. Portanto, os elementos não diagonais são chamados de coerências.

B.2 Série de Baker-Campbell-Hausdorff

Considere um operador unitário A tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = 1$. Por definição, podemos expandir uma função de operador $F(A)$ em uma série de

potências nos coeficientes f_n :

$$F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n. \quad (\text{B.14})$$

Como exemplo, a expansão da exponencial e^A nos fornece:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots \quad (\text{B.15})$$

Levando em consideração as definições acima, podemos escrever as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \sum_p \frac{A^p}{p!} \sum_q \frac{B^q}{q!} = \sum_{p,q} \frac{A^p B^q}{p! q!}; \\ e^B e^A &= \sum_q \frac{B^q}{q!} \sum_p \frac{A^p}{p!} = \sum_{p,q} \frac{B^q A^p}{p! q!}; \\ e^{A+B} &= \sum_q \frac{(A+B)^q}{q!}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Se os operadores A e B comutarem, temos que $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$. Assim, estamos aptos à definir a série infinita de Baker-Campbell-Hausdorff:

Definição B.2.1 (Série de Baker-Campbell-Hausdorff)

$$e^{-s(A+B)} = e^{-sA} e^{-sB} e^{-\frac{s^2}{2}[A,B]} e^{-\frac{s^3}{3}[A,[A,B]]} e^{-\frac{s^3}{3}[2B+A,[A,B]]} \dots \quad (\text{B.17})$$

B.2.1 Sistemas Quânticos Abertos

Quando nos referimos ao conceito de sistema isolado, ou seja, sistema sem qualquer dissipação, entende-se uma idealização de um sistema real. Em geral, os sistemas de interesse não são isolados mas sim abertos. Assim, outros sistemas interagem na dinâmica do sistema de interesse, trocando energia.

Os sistemas físicos normalmente apresentam um comportamento irreversível e, com o passar do tempo, irão evoluir para um estado de equilíbrio (ou estacionário, assintótico) determinado pelas condições do ambiente. Esse processo

de evolução para um estado estacionário recebe o nome de processo de relaxação.

Para simplificar a notação, vamos determinar como o sistema de interesse como S e o reservatório como R [64]. O sistema S é irreversível, R possui muitos graus de liberdade (garantindo que a reação de R sobre S possa ser desprezada) e vamos assumir que R e S são fracamente acoplados (aproximação de Born) [20], assim R é um reservatório térmico.

B.2.1.1 Equação Mestra

Sabemos que o estado de um sistema quântico pode ser descrito pelo operador densidade $\hat{\rho}$ e a evolução desse sistema é dada por B.8. Agora, como estamos interessados na evolução do sistema mais geral possível (sistema e o reservatório), o operador densidade será descrito pela seguinte equação abaixo, de Liouville-von-Neumann B.8:

$$\dot{\hat{\rho}}_{SR}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_{SR}, \hat{\rho}_{SR}(t)]. \quad (\text{B.18})$$

O operador \hat{H}_{SR} atua no espaço de Hilbert $\hat{H}_{SR} = \hat{H}_S \times \hat{H}_R$ e é formado pelos Hamiltonianos livres do sistema, reservatório e de interação entre eles. Na condição em que o tempo de correlação entre as variáveis do reservatório for muito menor que o tempo de relaxação do sistema, pode-se fazer a aproximação de Markov:

Aproximação de Markov: as escalas de tempo das correlações do reservatório são muito menores que as da dinâmica do sistema de interesse de tal forma que seus efeitos de memória podem ser ignorados.

Na representação de Schrödinger a eliminação de variáveis do ambiente nos conduz a uma equação mestra generalizada, uma equação diferencial linear para a matriz densidade reduzida do sistema S . Na representação de Heisenberg somos levados as equações de Langevin generalizadas para os observáveis de S .

A equação para descrever a evolução do sistema S é conhecida como

Equação Mestra:

$$\dot{\hat{\rho}}_{SR}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_{SR}, \hat{\rho}_{SR}(t)] + \mathcal{L}(\hat{\rho}), \quad (\text{B.19})$$

sendo $\mathcal{L}(\hat{\rho})$ o superoperador chamado de Liouvilliano, que introduzirá o comportamento dissipativo e não unitário do sistema em que se encontra toda a informação da ação do efeito do reservatório e sua forma depende do tipo de interação entre o sistema e o reservatório. Para um reservatório constituído por infinitos osciladores harmônicos a temperatura nula acoplados fracamente a um único modo de um campo eletromagnético, esse superoperador tem a forma:

$$\mathcal{L}(\hat{\rho}) = \frac{\kappa}{2}(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}), \quad (\text{B.20})$$

sendo κ a constante de amortecimento para o modo considerado.

Referências Bibliográficas

- [1] Alzetta, G; Gozzini, A.; Moi, L; Orriols, G.: “An Experimental Method for the Observation of R. F. Transitions and Laser Beat Resonances in Oriented Na Vapor”, *Nuovo Cimento B* **36**, 5(1976).
- [2] Harris, Stephen E.: “Eletromagneticamente Induced Transparency”, *Physics Today* **50**(7), 36(1997).
- [3] Fleischhauer, Michael; Imamoglu, Atac; Marangos, P. Jonathan: “Electromagnetically Induced Transparency: Optics in Coerente Media”, *Reviews of Modern Physics* **77**(2), 663(2005).
- [4] Rapp, Philipp; Mesch, Martin; Giessen, Harald; Tarín, Cristina: “Regression Methods for Ophthalmic Glucose Sensing Using Metamaterials”, *Journal of Electrical and Computer Engineering* **5**(2011), 1(2011).
- [5] Tanji-Suzuki, Haruka; Chen, Wenlan; Landig, Renate; Simon, Jonathan; Vuleti, Vladan: “Vacuum-Induced Transparency”, *Science* **333**, 1266(2011).
- [6] Borges, H. S.; Villas-Bôas, J. M.; Neto, O. O. Diniz; Alcade, A. M.: “Tunneling Induced Transparency and Slow Light in Quantum Dot Molecules”, *Physical Review B* **85**, 115425(2012).
- [7] Ponte, M. A; Villas-Bôas, C. J.; Serra, R. M.; Moussa, M. H. Y.: “Electromagnetically Induced Transparency and Dynamic Stark Effect in Coupled Quantum Resonators”, *Europhysics Letters* **72**(3), 383(2005).
- [8] Alzar, C. L. Garrido; Martinez, M. A. G.; Nussenzveig, Paulo: “Classical Analog of Electromagnetically Induced Transparency”, *American Journal of Physics* **70**(1), 37(2002).
- [9] Alzar, Carlos Leonardo Garrido: “Estudo de Propriedades Quânticas dos Feixes Sonda e de Bombeio na Transparência Induzida por Laser”, Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, IFUSP (2002).
- [10] M. Mucke, E. Figueroa, J. Bochmann, C. Hahn, K. Murr, S. Ritter, C. J. Villas-Boas, G. Rempe: “Electromagnetically Induced Transparency with Single Atoms in a Cavity”, *Nature* **465**, 755(2010).

- [11] Bai, Zhengyang; Hang, Chao; Huang, Guoxiang: “Classical Analogs of Double Electromagnetically Induced Transparency”, *Optics Communications* **291**, 253(2013).
- [12] Petrosyan, David; Malakyan, Yuri P.: “Magneto-Optical Rotation and Cross-Phase Modulation via Coherently Driven Four-Level Atoms in a Tripod Configuration”, *Physical Review A* **70**, 023822(2004).
- [13] S. Rébic *et al*: “Polarization Phase Gate With a Tripod Atomic System”, *Physical Review A* **70**, 032317(2004).
- [14] Wang, Zeng-Bin; Marzlin, Karl-Peter; Sanders, Barry C.: “Large Cross-Phase Modulation Between Slow Copropagating Weak Pulses in Rb^{87} ”, *Physical Review Letters* **97**, 063901(2006).
- [15] Shujing Li *et al*: “Enhanced Cross-Phase Modulation Based on a Double Electromagnetically Induced Transparency in a Four-Level Tripod Atomic System”, *Physical Review Letters* **101**, 073602(2008).
- [16] Harden, Joshua; Joshi, Amitabh; Serna, Juan D: “Demonstration of Double EIT Using Coupled Harmonic Oscillators and RLC Circuits”, *European Journal of Physics* **32**, 541(2011).
- [17] Goren, C.; Wilson-Gordon, A. D.; Rosenbluh, M.; Friedmann, H.: “Sub-Doppler and Subnatural Narrowing of an Absorption Line Induced by Interacting Dark Resonances in a Tripod System”, *Physical Review A* **69**, 063802(2004).
- [18] Arimondo, E.: “Coherent Population Trapping in Laser Spectroscopy”, E. Wolf, *Progress in Optics XXXV*, Elsevier Science B. V. (1996).
- [19] Jackson, John David: “Classical Electrodynamics”, Third Edition, John Wiley & Sons (1999).
- [20] Scully, Marlan O.; Zubairy, M. Suhail: “Quantum Optics”, Cambridge University Press (1997).
- [21] Hau, Lene Vestergaard; Harris, S. E.; Dutton, Zachary; Behroozi, Cyrus H.: “Light Speed Reduction to 17 Metres per Second in an Ultracold Atomic Gas”, *Nature* **397**, 594 (1999).
- [22] Boller, K. J.; Imamoglu, A; Harris, S.: “Observation of Electromagnetically Induced Transparency”, *Physical Review Letters* **66**(20), 2593 (1991).
- [23] Nussenzveig, H. Moysés: “Curso de Física Básica: Mecânica”, Volume **1**, Quarta Edição, Editora Blucher (2002).
- [24] Nussenzveig, H. Moysés: “Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas”, Volume **2**, Quarta Edição, Editora Blucher (2002).
- [25] Nussenzveig, H. Moysés: “Curso de Física Básica: Eletromagnetismo”, Volume **3**, Quarta Edição, Editora Blucher (2002).

- [26] Nussenzveig, H. Moysés: “Curso de Física Básica: Óptica, Relatividade, Física Quântica”, Volume 4, Quarta Edição, Editora Blucher (2002).
- [27] Symon, Keith R.: “Mechanics”, Third Edition, Addison Wesley (1971).
- [28] Goldstein, H.: “Classical Mechanics”, Third Edition, Addison Wesley, (2001).
- [29] Marion, Jerry B.; Thornton, Stephen T.: “Classical Dynamics of Particles and Systems”, Fifth Edition, Thomson/Books-Cole (2004).
- [30] Neto, João Barcelos: “Mecânica Newtoniana e Lagrangiana e Hamiltoniana”, Primeira Edição, Livraria da Física (2001).
- [31] Figueiredo, Djairo Guedes de; Neves, Aloísio Freiria: “Equações Diferenciais Aplicadas”, Terceira Edição, Quarta Impressão, Coleção Matemática Universitária, IMPA (2012).
- [32] Autler, S. H.; Townes, C. H.: “Stark Effect in Rapidly Varying Fields”, *Physical Review* **100**(2), 703(1955).
- [33] Moura, Alessandro Paulo Sérgio de: “Efeito dos Termos Contra-Girantes no Modelo de Jaynes Cummings”, Dissertação Apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp (1997).
- [34] Villas-Bôas, Celso Jorge: “Transparência Eletromagneticamente Induzida”, Notas de Aula 25/05/2011.
- [35] Marangos, J. P.: “Electromagnetically Induced Transparency”, *Journal of Modern Optics* **45**(3), 471(1998).
- [36] Souza, James A.: “Controle das Propriedades Estatísticas do Campo e Biestabilidade Óptica em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades”, Tese de Doutorado Apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos, UFSCar (2013).
- [37] Schleich, P. Wolfgang: “Quantum Optics in Phase Space”, WILEY-VCH (2001).
- [38] Werner, Vogel; Welsch, Dirk-Gunnar: “Quantum Optics”, Third Edition, WILEY-VCH (2006).
- [39] Rabi, I. I.: “On the Process of Space Quantization”, *Physical Review* **49**, 324-328(1936).
- [40] Walther, H.; Varcoe, B. T. H.; Englert, B. G.; Becker, T.: “Cavity Quantum Electrodynamics”, *Report on Progress in Physics* **69**, 1325(2006).
- [41] Trifonov, E. D.; Zaitsev, A. I.: “Semiclassical Theory of Cooperative Radiation of a Polyatomic System”, *Sov. Phys. JETP* **45**, 4(1977).

- [42] Jaynes, E. T.; Cummings, F. W.: “Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation. Theories with Application to the Beam Maser”, *Proc. IEEE* **51**, 89(1963).
- [43] Jr., C. R. Stroud; Jaynes, E. T.: “Long-Term Solutions in Semiclassical Radiation Theory”, *Physical Review A* **1**, 1(1970).
- [44] Crisp, M. D.; Jaynes, E. T.: “Radiative Effects in Semiclassical Theory”, *Physical Review* **179**, 5(1969).
- [45] Milonny, P. W.: “Semiclassical and Quantum-Electrodynamical Approaches in Nonrelativistic Radiation Theory”, *Physics Reports (Section C in Physics Letters)* **25**, 1(1976).
- [46] Crisp, M. D.: “Self-fields in Semiclassical Radiation Theory”, *Physical Review A* **42**(7), 42(1990).
- [47] Clauser, J. F.: “Experimental Limitations to the Validity of Semiclassical Radiation Theories”, *Physical Review A* **6**(1), 6(1972).
- [48] Banacloche, Julio Gea; Li, Yong-qing; Shao-zheng, Jin; Xiao, Min: “Electromagnetically Induced Transparency in Ladder-Type Inhomogeneously Broadened Media Theory and Experiment”, *Physical Review A* **51**(1), 51(1995).
- [49] Carmichael, H. J.: “Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations”, *Springer Series* (2000).
- [50] Oliveira, Thiago Werlang: “Termalização e Correlações Quânticas nos Contextos de Sistemas Quânticos Abertos e Cadeias de Spins”, Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos, UFSCar (2013).
- [51] Nohama, F. K.: “Emaranhamento e Caos em um Sistema de Dois Spins”, Dissertação Apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp (2002).
- [52] Deriglazov, A. A.; Figueiras, J. G.: “Formalismo Hamiltoniano e Transformações Canônicas em Mecânica Clássica”, Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora.
- [53] Tannoudji, C. C.; Diu, B; Laloë, F: “Quantum Mechanics”, Volume **1**, WILEY-VCH (1997).
- [54] Santos, L. S.: “Quebra de Simetria de Lorentz e o Termo de Chern-Simons em (3+1) Dimensões”, Dissertação Apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, USP (2009).
- [55] Munhoz, P. P.: “Perda de Coerência e Teletransporte em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades”, Tese de Doutorado Apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp (2008).

- [56] Paulinelli, R. T. F.: “Discriminação e Decoerência: um Modelo em Cavidades de Microondas”, Dissertação Apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG (2012).
- [57] Carvalho, Silvana Alves de: “Transparência Induzida Eletromagneticamente em Vapor Atômico de Cálcio”, Dissertação Apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp (2006).
- [58] Oliveira, Thiago Werlang: “Estudo do Modelo de Rabi no Contexto de Sistemas Quânticos Abertos”, Dissertação de Mestrado Apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos, UFSCar (2009).
- [59] Ferreira de Camargo Yabu-uti, Bruno: “Emaranhamento Quântico entre Átomos Localizados em Cavidades Distintas”, Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas, Unicamp (2007).
- [60] Shore, B. W.; Knight, P. L.: “The Jaynes-Cummings Model”, *Journal of Modern Optics* **40**, 1195(1993).
- [61] Yang, Xiaodong; Yu, Mingbin, Kwong, Dim-Lee; Wong, Chee Wei: “All-Optical Analog to Electromagnetically Induced Transparency in Multiple Coupled Photonic Crystal Cavities”, *Physical Review Letters* **102**, 173902(2009).
- [62] Bhattacharya, M.; Uys, H.; Meystre, P.: “Optomechanical Trapping and Cooling of Partially Reflective Mirrors”, *Physical Review A* **77**, 033819 (2008).
- [63] Stefan Weis *et al*: “Optomechanically Induced Transparency”, *Science* **330**, 1520 (2010).
- [64] Gardiner, C. W.; Zoller, P.: “Quantum Noise”, Second Enlarged Edition, Springer Series (2000).
- [65] Safavi-Naeini, A. H.; Mayer Alegre, T. P.; Chan, J.; Eichenfield, M; Winger, M; Lin, Q; Hill, J. T.; Chang, D. E.; Painter, O.: “Electromagnetically Induced Transparency and Slow-Light With Optomechanics”, *Nature* **472**, 69(2011).
- [66] Kippenberg, T. J.; Vahala, K. J.: “Cavity Opto-Mechanics”, *Optics Express* **15**(25), 17172(2007).
- [67] Wiederhecker, Gustavo S.; Mayer, Thiago P.: “Optomecânica de Microcavidades: do Quente ao Frio”, *Revista Physicae* **10**, (2011).
- [68] Schlieber, Albert: “Cavity Optomechanics and Optical Frequency Comb Generation with Silica Whispering-Gallery-Mode Microresonators”, Dissertação Apresentada ao Instituto Max Plack (Alemanha), MPQ (2009).

- [69] Qu, Kenan; Agarwal, G. S.: “Optical Memories and Transduction of Fields in Double Cavity Optomechanical Systems”, arXiv: **1210.4067v1**, (2012).
- [70] Arcizet, O.; Cohadon, P. F.; Briant, T.; Pinard, M.; Heidmann, A.: “Radiation-Pressure Cooling and Optomechanical Instability of a Micromirror”, *Nature* **444**, 71(2006).
- [71] A. Schliesser *et al*: “Resolved Sideband Cooling of a Micromechanical Oscillator”, *Nature Physics* **4**, 415(2008).
- [72] Agarwal, G. S.; Huang, Sumei: “Electromagnetically Induced Transparency in Mechanical Effects of Light”, *Physical Review A* **81**, 041803(R) (2010).
- [73] Gu, Wen-ju; Li, Gao-xiang: “Quantum Interference Effects on Ground-State Optomechanical Cooling”, *Physical Review A* **83**, 025804(2013).
- [74] Dobrindt, J. M.; Wilson-Rae; Kippenberg, T. J.: “Parametric Normal-Mode Splitting in Cavity Optomechanics”, *Physical Review Letters* **71**, 263602(2008).
- [75] Agarwal, G. S.; Huang, Sumei: “Optomechanical Systems as Single-Photon Routers”, *Physical Review A* **85**, 021801(R)(2012).
- [76] Qu, Kenan; Agarwal, G. S.: “Phonon Mediated Electromagnetically Induced Absorption in Cavity Optomechanics”, arXiv:1301.3070v1(2013).
- [77] Stamper-Kurn, Dan M.: “Cavity Optomechanics with Cold Atoms”, arXiv:1204.4351v1 (2012).
- [78] Marquardt, Florian; Girvin, Steve M.: “Optomechanics”, *Physics* **2**, 40(2009).
- [79] Kippenberg, T. J.; Vahala, K. J.: “Cavity Optomechanics: Back-Action at the Mesoscale”, *Science* **321**, 1172(2008).
- [80] Elste, Florian; Girvin, S. M.; Clerk, A. A.: “Quantum Noise Interference and Backaction Cooling in Cavity Nanomechanics”, *Physical Review Letters* **102**, 207209(2009).
- [81] Rivière, R.; Deléglise, S.; Weis, S.; Gavartin, E.; Arcizet, O.; Schliesser, A.; Kippenberg, T. J.: “Optomechanical Sideband Cooling of a Micromechanical Oscillator Close to the Quantum Ground State”, *Physical Review A* **83**, 063835(2011).
- [82] Schliesser, A.; Del Haye, P.; Nooshi, N.; Vahala, K. J.; Kippenberg, T. J.: “Radiation Pressure Cooling of a Micromechanical Oscillator Using Dynamical Backaction”, *Physical Review Letters* **97**, 243905(2006).
- [83] Hänsch, T. W.; Schawlow, A. L.: “Cooling of Gases by Laser Radiation”, *Optics Communications* **13**(1), 68(1975).

- [84] Meyer, G. M.; Scully, M. O.; Walther, H.: “Quantum Theory of the Maser. I. General Theory”, *Physical Review A* **56**(5), 4142(1997).
- [85] Loudon, Rodney: “The Quantum Theory of Light”, Third Edition, Oxford Science Publications, (2000).
- [86] Sun, Y.; Tan, W.; Liang, L.; Jiang, H. T.; Wang, Z. G.; Liu, F. Q., Chen, H.: “Metamaterial Analog of Quantum Interference: From Electromagnetically Induced Transparency to Absorption”, *Europhysics Letters* **98**, 64007(2012).
- [87] Papasimakis, N.; Fedotov, V. A.; Zheludev, N. I.: “Metamaterial Analog of Electromagnetically Induced Transparency”, *Physical Review Letters* **101**, 253903(2008).
- [88] Chiam, Sher-Yi; Singh, Ranjan; Rockstuhl, Carsten; Lederer, Falk; Zhang, Weili; Bettiol, Andrew A.: “Analogue of Electromagnetically Induced Transparency in a Terahertz Metamaterial”, *Physical Review B* **80**, 153103(2009).
- [89] Lu, Hua; Liu, Xueming, Mao, Dong: “Plasmonic Analog of Electromagnetically Induced Transparency in Multi-Nanoresonator-Coupled Waveguide Systems”, *Physical Review A* **85**, 053803(2012).
- [90] Tassin, P.; Zhang, Lei; Koschny, Th.; Economou, E. N., Soukoulis, C.M.: “Low-Loss Metamaterials Based on Classical Electromagnetically Induced Transparency”, *Physical Review Letters* **102**, 053901(2009).
- [91] Cihan Kurter *et al*: “Classical Analogue of Electromagnetically Induced Transparency with a Metal-Superconductor Hybrid Metamaterial”, *Physical Review Letters* **107**, 043901(2011).
- [92] Liu, Na; Langguth, Lutz; Weiss, Thomas; Kästel, Jürgen; Fleischhauer, Michael; Pfau, Tilman; Giessen, Harald: “Plasmonic Analogue of Electromagnetically Induced Transparency at the Drude Damping Limit”, *Nature Materials* **8**(2009).
- [93] Nogueira, Giovana Trevisan: “Dinâmica de um Sistema Átomo-Campo Eletromagnético Acoplado a uma Segunda Cavidade”, Dissertação de Mestrado Apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp (2001).
- [94] Gomez, Álvaro Fernandes: “Transferência de Coerência Átomo-Campo em um Micromaser de Dois Fótons”, Tese de Doutorado Apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp (2003).
- [95] Litvak, A. G.; Tokman, M. D.: “Electromagnetically Induced Transparency in Ensembles of Classical Oscillators”, *Physical Review Letters* **88**, 095003-1(2002).

-
- [96] Johansson, J. R.; Nation, P.D.; Nori, Franco: “QuTiP: An Open-Source Python Framework for the Dynamics of Open Quantum Systems”, *Computer Physics Communications*, **183** 1760(2012).
- [97] Zhu, Chengjie; Tan, Chaohua; Huang, Guoxiang: “Crossover From Electromagnetically Induced Transparency to Autler-Townes Splitting in Open V-type Molecular Systems”, *Physical Review A* **87**, 043813(2013).
- [98] Chang, Yue; Sun, C. P.: “Analog of Electromagnetically Induced Transparency Effect for Two Nano/Micro-Mechanical Resonators Coupled With Spin Ensemble”, arXiv:1101.2115v1(2011).