



Universidade Federal de São Carlos

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Física

Estudo dos Efeitos de Colisões Atômicas na Dinâmica, nas Propriedades Estatísticas e no Emaranhamento entre Átomos Aprisionados Interagindo com Luz

Vívian Vanessa França

Dissertação submetida ao
Departamento de Física da
Universidade Federal de
São Carlos como parte dos
requisitos necessários para
a obtenção do Título de
Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Aparecido Pratavia

São Carlos – SP
Março - 2005

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

F814ee

França, Vívian Vanessa.

Estudo dos efeitos de colisões atômicas na dinâmica, nas propriedades estatísticas e no emaranhamento entre átomos aprisionados interagindo com luz / Vívian Vanessa França. -- São Carlos : UFSCar, 2005.

71 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2005.

1. Mecânica quântica. 2. Emaranhamento. 3. Bose – Einstein, condensação de. 4. Segurança crítica. I. Título.

CDD: 530.12 (20^a)

**DEFESA DA 89ª DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

MESTRANDO: *Vivian Vanessa França*

DATA: *10/03/2005*

HORÁRIO: *10:00 h*

LOCAL: *Sala de Seminários “Jorge André Swieca”*

TÍTULO: *“Estudos dos Efeitos de Colisões Atômicas na Dinâmica, nas Propriedades Estatísticas e no Emaranhamento entre Átomos Aprisionados Interagindo com Luz”*

Banca Examinadora	Instituição	Conceito
<i>Prof. Dr. Gilberto Aparecido Prata Vieira (orientador)</i>	- DF/UFSCar	A
<i>Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi</i>	- DF/UFSCar	A
<i>Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano</i>	- IFSC/USP	A

São Carlos, 10 de março de 2005.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade da vida.

Agradeço aos meus avós paternos, Jayme e Judith, e aos meus avós maternos, que não se encontram mais entre nós, José e Odete, por todo amor e incessante incentivo.

Agradeço aos meus pais, Cláudio e Eliane, pelo exemplo, pelos cuidados, amor, dedicação, incentivo e compreensão.

Aos meus irmãos mais novos, Cláudio e Rafael, pelo carinho e confiança.

A todos os meus familiares, à família da Tia Rô, da Tia Clélia, da Tia Lana, do Tio Cló, do Tio Vanderlei e da Tia Venina, por acompanharem, torcerem e apoiarem minha jornada.

Ao meu amor, Emanuel, pelo seu infinito amor, atenção, compreensão, admirável paciência e colaboração.

Aos Professores Veríssimo, Goto, Otta, Carias e João Baptista, da Universidade Estadual de Londrina, por acreditarem e me impulsionarem à pesquisa.

Agradeço muito ao Dr. Gilberto A. Prativiera pela orientação, confiança, amizade e paciência.

Agradeço a todos os Professores e Funcionários do DF-UFSCar por permitirem dois anos de muito aprendizado, muito ricos à minha formação intelectual e pessoal, e especialmente aos Professores Paulo Daniel, César, Studart, Salomon e Marcos de Oliveira, pelo apoio e amizade.

Agradeço aos meus amigos de Apucarana, de Londrina e de muitos outros cantos, que mesmo distante sempre me deram muita força. E agradeço aos amigos Rômuloide, Laurita, Yoshida, Prancha, Joselito, Cache, Hério, Jack, Mario e Ju, que estiveram mais próximos durante o mestrado e por isso precisaram de mais paciência.

Muito obrigada!

“Anybody who is not shocked by quantum theory has not understood it.”

Niels Bohr

Resumo

Neste trabalho nós consideramos um Condensado de Bose-Einstein em uma armadilha interagindo simultaneamente com o campo quantizado de uma cavidade de alto fator de qualidade e com o campo de um laser tratado classicamente e suposto de intensidade fixa. Colisões entre átomos são incluídas por meio de um potencial de contato tipo delta. É obtido um modelo linearizado que inclui amplificação simultânea dos campos óptico e atômico. Nós analisamos os efeitos das colisões atômicas sobre a estabilidade e as propriedades estatísticas do sistema. Também é realizado um estudo do grau de emaranhamento entre os campos óptico e atômico.

Abstract

In this work we consider a trapped Bose-Einstein Condensate interacting simultaneously with a high quality cavity quantized field and a classical undepleted laser field. Collisions between atoms are taken into account by a delta type contact potential. A linearized model is obtained which take into account simultaneous amplification of atomic and optical fields. We analyse the effects of atomic collisions on the system stability and statistical properties. Also is done a study of the degree of entanglement between atomic and optical fields.

Sumário

1	Introdução	2
2	Descrição do Sistema Físico e do Modelo	6
2.1	Regime Não-ressonante	8
2.2	Regime Linear	10
2.3	Modelo Linear com Colisões	12
3	Estabilidade e Estatística dos Campos	15
3.1	Análise da Estabilidade	17
3.2	Correlação átomo-átomo e fóton-fóton	23
3.3	Correlação entre átomo-fóton	30
4	Emaranhamento entre Átomos e Luz	35
4.1	Operador Densidade	35
4.2	Pureza, Entropia Linear e Emaranhamento	37
4.3	Função de Wigner e Entropia Linear	39
5	Conclusões e Perspectivas	48
6	Apêndices	50
6.1	Apêndice I: Gross - Pitaevskii	50
6.2	Apêndice II - Coeficientes $u_j(t)$ e $v_j(t)$	54
6.3	Apêndice III - Cálculo da Função de Wigner	58
6.4	Apêndice IV - Cálculo da Wigner do Modo Óptico	63
6.5	Apêndice V - Coeficientes da Entropia	65

Lista de Figuras

2.1	Formado por N átomos bosônicos no estado fundamental de uma armadilha, sob ação do campo de uma cavidade (ring cavity), com frequência ω_1 e vetor de onda \mathbf{k}_1 , e do campo de um laser (ω_2, \mathbf{k}_2)	7
3.1	O acoplamento entre átomos e luz, χ^2 , em função da diferença de frequência entre os campos ópticos, δ . Para parâmetros na região I o sistema é exponencialmente instável, enquanto que para parâmetros na região II o sistema é exponencialmente instável e oscilante. Os parâmetros δ , χ e κ estão em unidades de ω	18
3.2	Logaritmo do número médio em função do tempo no regime I de instabilidade. (a) o número médio de fótons e (b) o número médio de átomos, para $\delta = 1$, $\chi^2 = 1$, $\alpha = 2e^{-i\pi/2}$ e parâmetros de colisão $\kappa = 0$ e $\kappa = 0,8$. Os parâmetros foram tomados em unidades de ω	20
3.3	Logaritmo do número médio em função do tempo no regime II de instabilidade. (a) o número médio de fótons e (b) o número médio de átomos, para $\delta = -1$, $\chi^2 = 1$, $\alpha = 2e^{-i\pi/2}$ e parâmetros de colisão $\kappa = 0$ e $\kappa = 0,8$. Os parâmetros foram tomados em unidades de ω	21
3.4	Número médio em função do tempo no regime estável. (a) o número médio de fótons e (b) o número médio de átomos, para $\delta = 4$, $\chi^2 = 0,5$, $\alpha = 2e^{-i\pi/2}$ e parâmetro de colisão $\kappa = 0$ e $\kappa = 0,8$. Os parâmetros foram tomados em unidades de ω	22
3.5	Correlação de 2^a ordem no tempo. As linhas tracejada e cheia representam $g_{\hat{c}\hat{c}}^{(2)}(t)$ e $g_{\hat{a}\hat{a}}^{(2)}(t)$, respectivamente. (a) regime I, com $\delta = 1$, $\chi^2 = 1$; (b) regime II, $\delta = -1$, $\chi^2 = 1$. Adotamos $\alpha = 2e^{-i\pi/2}$ e $\kappa = 0$. Os parâmetros estão em unidades de ω	25
3.6	Função de correlação $g_{\hat{c}\hat{c}}^{(2)}$ em função da intensidade e da fase do campo óptico no regime I. (a) $\kappa = 0$ e (b) $\kappa = 0,8$. Adotamos $\delta = 1$, $\chi^2 = 1$ e $t = 12$. Os parâmetros estão em unidades de ω	26
3.7	Função de correlação $g_{\hat{a}\hat{a}}^{(2)}$ em função da intensidade e da fase do campo óptico no regime I. (a) $\kappa = 0$ e (b) $\kappa = 0,8$. Adotamos $\delta = 1$, $\chi^2 = 1$ e $t = 12$. Os parâmetros estão em unidades de ω	27

3.8	Função de correlação $g_{\hat{c}\hat{c}}^{(2)}$ em função da intensidade e da fase do campo óptico no regime II. (a) $\kappa = 0$ e (b) $\kappa = 0, 8$. Adotamos $\delta = -1, \chi^2 = 1$ e $t = 12$. Os parâmetros estão em unidades de ω	28
3.9	Função de correlação $g_{\hat{a}\hat{a}}^{(2)}$ em função da intensidade e da fase do campo óptico no regime II. (a) $\kappa = 0$ e (b) $\kappa = 0, 8$. Adotamos $\delta = -1, \chi^2 = 1$ e $t = 12$. Os parâmetros estão em unidades de ω	29
3.10	Correlação átomo-fóton em função do tempo para o regime I. Comparamos $g_{\hat{c}\hat{a}}^{(2)}(t)$ com os limites superiores clássico e quântico, sem colisão (a,c,e) e com colisão (b,d,f). Adotamos $\delta = 1$ e $\chi^2 = 1$. Os parâmetros estão em unidades de ω	32
3.11	Correlação átomo-fóton em função do tempo para o regime II. Comparamos $g_{\hat{c}\hat{a}}^{(2)}(t)$ com os limites superiores clássico e quântico, sem colisão (a,c,e) e com colisão (b,d,f). Adotamos $\delta = 1$ e $\chi^2 = 1$. Os parâmetros estão em unidades de ω	33
4.1	Entropia linear em função do tempo para três valores diferentes de $\alpha = 0, 2$ e $2e^{-i\pi/2}$. (a) regime I ($\delta = 1, \chi^2 = 1$) e (b) regime II ($\delta = -1, \chi^2 = 1$). Consideramos $\kappa = 0$. Os parâmetros estão em unidades de ω . Note a independência da entropia com α	41
4.2	Coefficiente y de emaranhamento em função do tempo para os regimes I ($\delta = 1, \chi^2 = 1$) e II ($\delta = -1, \chi^2 = 1$). Consideramos $\kappa = 0$. Os parâmetros estão em unidades de ω	44
4.3	Entropia linear em função do tempo para o regime I ($\delta = 1, \chi^2 = 1$). Os parâmetros estão em unidades de ω	44
4.4	Entropia linear em função do tempo para o regime II ($\delta = -1, \chi^2 = 1$). Os parâmetros estão em unidades de ω	45
4.5	Coefficiente y em função do tempo para o regime I ($\delta = 1, \chi^2 = 1$). Os parâmetros estão em unidades de ω	45
4.6	Coefficiente y em função do tempo para o regime II ($\delta = -1, \chi^2 = 1$). Os parâmetros estão em unidades de ω	46
4.7	Entropia linear em função do tempo para o regime estável ($\delta = 4, \chi^2 = 0, 5$). Os parâmetros estão em unidades de ω	46
4.8	Coefficiente y em função do tempo para a região estável ($\delta = 4, \chi^2 = 0, 5$). Os parâmetros estão em unidades de ω	47

Capítulo 1

Introdução

Em 1925, Satyendra Nath Bose e Albert Einstein predisseram um estado particular da matéria em que os átomos de um gás ideal, que obedecem a estatística de Bose, perdem sua identidade individual e passam a atuar como uma entidade única, através de uma ocupação macroscópica de mesmo estado quântico de momento nulo, formando um condensado de Bose-Einstein (em inglês, Bose-Einstein Condensation ou BEC) [1]. Bose e Einstein consideraram N partículas bosônicas e não-relativísticas, de massa m , em uma caixa de volume L^3 com condições de contorno periódicas. No limite termodinâmico, verificaram que ocorre uma transição de fase a uma certa temperatura crítica T_c , definida por $\rho\lambda_{dB}^3(T_c) = 2,612\dots$, onde $\rho = \frac{N}{L^3}$ é a densidade, $\lambda_{dB}(T_c) = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_bT_c}$ é o comprimento de onda térmico de de Broglie e k_b é a constante de Boltzmann, e que, para temperaturas $T < T_c$, tal que a distância entre os átomos é da ordem do seu comprimento de onda de de Broglie, a razão entre o número de partículas no estado fundamental, N_0 , e o número de partículas total tende a $\frac{N_0}{N} \rightarrow 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$, ou seja, para $T \rightarrow 0$, todos os bósons tendem ao estado fundamental, $N_0 \rightarrow N$.

Porém, quase todos os materiais cuja densidade e temperatura, no equilíbrio térmico, obedecem a $\frac{\rho}{T_c^3} = 2,612 \left(\frac{mk_bT_c}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$, encontram-se no estado sólido. O He^4 é uma exceção, que em $T \rightarrow 0$ é um fluido, mas é um sistema tão fortemente interagente, em comparação com o gás ideal predito por Einstein, que $\frac{N_0}{N} < 0$, [2]. Por isso, passaram-se 70 anos após a predição de Bose e Einstein, até que um BEC fosse observado.

O esquema experimental que levou à condensação de gases atômicos foi o de obter um gás bosônico de densidade extremamente baixa ($\sim 10^{15} \text{cm}^{-3}$) e resfriá-

lo (a temperaturas inferiores à $10^{-5}K$) rapidamente o suficiente para que não tivesse tempo de se recombinar e solidificar. Para chegar a essas temperaturas, foi preciso confinar os átomos, alterando assim, a temperatura crítica [3] e combinar técnicas de resfriamento, como resfriamento por lasers (laser cooling) [4] e resfriamento evaporativo [5].

O primeiro BEC foi obtido em 1995, pelo grupo do Eric Cornell e Carl Wieman (National Institute of Standards & Technology), com átomos de rubídio [6]. No mesmo ano, dois outros condensados foram obtidos, um BEC com átomos de sódio, pelo grupo do Wolfgang Ketterle (Massachusetts Institute of Technology) [7] e um BEC com átomos de lítio, pelo grupo do Randy Hulet (University of Colorado) [8].

Um dos interesses nos condensados de Bose-Einstein deve-se ao fato de que o BEC é um sistema quântico com grande número de partículas e assim, uma importante ferramenta para o estudo das bases da Mecânica Quântica, como por exemplo, o emaranhamento entre sistemas. O emaranhamento é uma das mais notáveis propriedades da Mecânica Quântica de sistemas com mais de uma componente. Em um sistema de duas componentes (a e b), o emaranhamento entre as partes caracteriza-se pelo fato do vetor de estado do sistema não poder ser escrito como um produto do vetor de estado de cada subsistema. O estudo do emaranhamento, sobretudo quanto a obtenção de fontes de estados emaranhados e medida quantitativa de emaranhamento, tem importância fundamental para o desenvolvimento das áreas de comunicação, informação e computação quântica, por exemplo, na implementação do teletransporte [9, 10] e da criptografia quântica [11].

Em particular, o estudo da interação entre átomos de um condensado e luz tem despertado grande interesse, como por exemplo, o espalhamento de luz por condensados [12, 13], para determinação do índice de refração de condensados [14] e a detecção óptica da fase relativa entre dois condensados [15]. Nestes casos, os feixes luminosos são considerados como clássicos e usados para sondar as propriedades dos átomos, sendo que a dinâmica e as propriedades quânticas dos campos ópticos não são consideradas. Entretanto, a situação em que o condensado interage com campos ópticos quantizados, formando uma entidade dinamicamente acoplada, tem mostrado resultados interessantes, como a possibilidade de amplificação de campos ópticos e atômicos [16, 17, 18], o controle óptico das propriedades estatísticas dos átomos [19, 20] e emaranhamento entre

átomos e luz [17, 21]. Especificamente, do ponto de vista do processamento de informação quântica, estados emaranhados de átomos e luz são interessantes, pois átomos podem atuar como elementos de armazenamento de informação, enquanto que a luz pode atuar como um canal de transmissão de informação.

É conhecido que a armadilha que aprisiona os átomos modifica as propriedades atômicas, como por exemplo, em uma armadilha harmônica, onde a temperatura crítica [3], cuja dependência com o número de átomos no estado fundamental é alterada para $\frac{N_0}{N} \rightarrow 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$. Espera-se, então, que a interação entre átomos e luz também seja modificada pela presença da armadilha. Esta situação pode ser chamada de Óptica Atômica de Cavidades [17] em analogia à Eletrodinâmica de Cavidades, onde a emissão espontânea pelos átomos é modificada devido à presença da cavidade [22, 23], isto é, devido à mudança das condições de contorno em relação ao espaço livre. Os efeitos da armadilha foram introduzidos na referência [17] em um modelo de átomos, não-interagentes, de um condensado interagindo com campos ópticos quantizados através da expansão do campo atômico nas autofunções da armadilha. A dinâmica deste sistema foi comparada com o modelo no espaço livre, onde o campo atômico foi expandido em ondas planas. Verificou-se que, no regime de confinamento, as intensidades dos campos óptico e atômico apresentam dois regimes de instabilidade exponencial. O estudo das propriedades estatísticas deste mesmo modelo foi realizado na referência [20] e verificou-se que, variando a intensidade e a fase do estado inicial do campo óptico, os modos óptico e atômico apresentam correlações de segunda ordem que variam de coerentes a supertérmicas. Estes resultados sugerem que podemos ter um controle óptico para o emaranhamento. Entretanto, nenhuma análise detalhada sobre o emaranhamento foi realizada. Além disso, em ambos os trabalhos [17, 20], as colisões atômicas foram desprezadas.

Neste trabalho de mestrado, para tornar o modelo considerado nas referências [17, 20] mais realista, incluímos colisões atômicas e estudamos seus efeitos sobre a estabilidade e as propriedades estatísticas do sistema. Além disso, fizemos um estudo detalhado do grau de emaranhamento entre átomos e luz, através de duas medidas, entropia linear e coeficiente y definido por A. S. M. de Castro e V. V. Dodonov em [24] e analisamos os efeitos das colisões sobre o emaranhamento.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos detalhadamente o modelo descrevendo este sistema de átomos e luz;

no capítulo 3 estudamos a estabilidade e as propriedades estatísticas do sistema; no capítulo 4 apresentamos o estudo do emaranhamento entre átomos e luz e, finalmente, no capítulo 5 apresentamos as conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Descrição do Sistema Físico e do Modelo

O sistema físico estudado é constituído por N átomos bosônicos, aprisionados por um potencial externo $V(r)$, onde consideramos apenas transições entre dois níveis, com frequência de transição ω_0 . Os átomos interagem com dois campos eletromagnéticos monocromáticos, um campo fraco de uma cavidade em forma de anel (ring cavity - [25]) de alto fator de qualidade e um campo intenso de um laser, de frequências ω_1 e ω_2 , respectivamente. Na *Figura 2.1* apresentamos um esquema do sistema. O laser, denominado “*pump*”, é tratado como um campo clássico, enquanto que o campo na cavidade, denominado “*probe*” é tratado quanticamente. Inicialmente consideraremos que a amostra atômica é suficientemente diluída para podermos desprezar colisões atômicas. Assim, o Hamiltoniano do sistema átomos-luz pode ser escrito como

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{átomos}} + \hat{H}_{\text{luz}} + \hat{H}_{\text{átomos-luz}} \quad (2.1)$$

onde $\hat{H}_{\text{átomos}}$ e \hat{H}_{luz} representam a evolução livre dos campos atômico e ópticos e $\hat{H}_{\text{átomos-luz}}$ descreve o acoplamento entre átomos e luz.

Para considerar o carácter quântico estatístico dos átomos, vamos descrevê-los em segunda quantização [26] pelo operador de campo atômico $\hat{\Psi}_{g(e)}^\dagger(\mathbf{r})$, que cria um átomo no estado do fundamental (excitado) na posição \mathbf{r} do centro de massa, satisfazendo as seguintes relações de comutação

$$\left[\hat{\Psi}_i(\mathbf{r}), \hat{\Psi}_j^\dagger(\mathbf{r}') \right] = \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad i, j = \{e, g\} \quad (2.2)$$

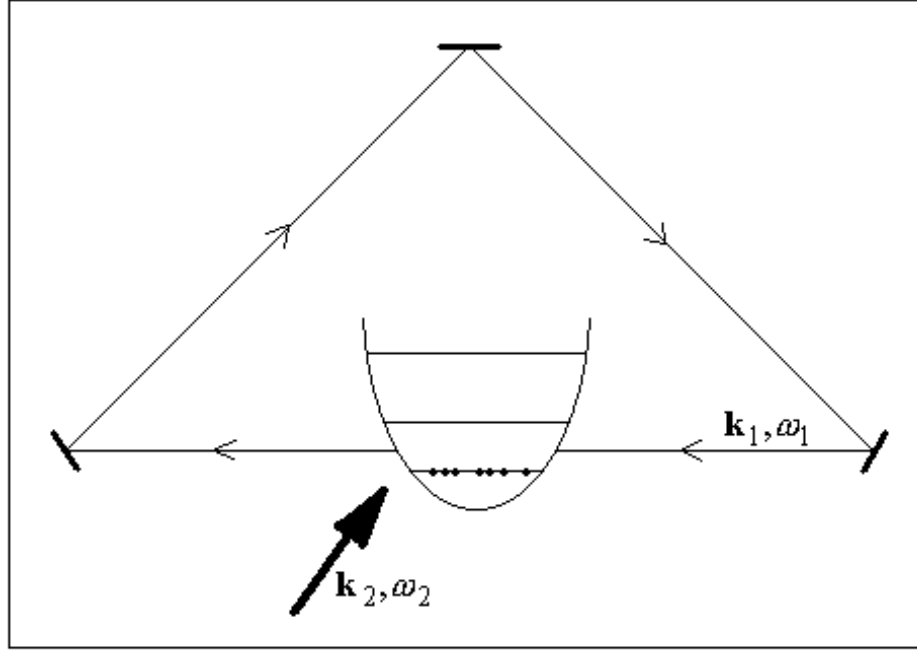


Figura 2.1: Formado por N átomos bosônicos no estado fundamental de uma armadilha, sob ação do campo de uma cavidade (ring cavity), com frequência ω_1 e vetor de onda \mathbf{k}_1 , e do campo de um laser (ω_2, \mathbf{k}_2).

$$\left[\hat{\Psi}_i(\mathbf{r}), \hat{\Psi}_j(\mathbf{r}') \right] = \left[\hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\Psi}_j^\dagger(\mathbf{r}') \right] = 0. \quad (2.3)$$

A contribuição atômica para o Hamiltoniano (2.1) é dada por

$$\hat{H}_{\text{átomos}} = \int d^3\mathbf{r} \Psi_g^\dagger(\mathbf{r}) H_0 \Psi_g(\mathbf{r}) + \int d^3r \Psi_e^\dagger(\mathbf{r}) (H_0 + \hbar\omega_0) \Psi_e(\mathbf{r}), \quad (2.4)$$

onde

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

é o Hamiltoniano de um átomo no estado fundamental, com energia cinética $\frac{p^2}{2m}$ e energia potencial $V(\mathbf{r})$, e m é a massa atômica. Em 2.4 consideramos que o potencial $V(\mathbf{r})$ é o mesmo para os estados fundamental e excitado.

O campo da cavidade é descrito quanticamente pelos operadores de criação (\hat{a}_1^\dagger) e aniquilação (\hat{a}_1) de fótons, que satisfazem as relações de comutação

$$\left[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger \right] = 1; \quad \left[\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1^\dagger \right] = \left[\hat{a}_1, \hat{a}_1 \right] = 0, \quad (2.6)$$

enquanto que o campo do laser é tratado classicamente e suposto com intensidade fixa, permitindo que façamos a substituição

$$\hat{a}_2 \text{ (operador)} \longrightarrow a_2 e^{-i\omega_2 t} \text{ (número complexo)}, \quad (2.7)$$

onde $|a_2|^2$ é proporcional à intensidade do laser. Dessa forma, a contribuição do campo do laser ao Hamiltoniano óptico seria $\hbar\omega_2 |a_2|^2$, que não depende do tempo e, portanto, não precisa ser incluída pois não participa da dinâmica. Assim, o Hamiltoniano óptico é dado por

$$\hat{H}_{luz} = \hbar\omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1. \quad (2.8)$$

A interação entre átomos e luz, último termo da equação (2.1), é considerada na aproximação de dipolo elétrico e de onda girante [27], ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{átomos-luz}} &= \hbar g_1 \hat{a}_1 \int d^3 \mathbf{r} \hat{\Psi}_e^\dagger(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \hat{\Psi}_g(\mathbf{r}) \\ &+ \hbar g_2 a_2 e^{-i\omega_2 t} \int d^3 \mathbf{r} \hat{\Psi}_e^\dagger(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \hat{\Psi}_g(\mathbf{r}) + h.c. \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $\mathbf{k}_{1(2)}$ é o vetor de onda dos campos probe (pump), $g_{1(2)}$ é o coeficiente de acoplamento átomos - luz e *h.c.* significa hermitiano conjugado.

Portanto, o Hamiltoniano (2.1) pode ser escrito explicitamente como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3 \mathbf{r} \Psi_g^\dagger(\mathbf{r}) H_0 \Psi_g(\mathbf{r}) + \int d^3 \mathbf{r} \Psi_e^\dagger(\mathbf{r}) (H_0 + \hbar\omega_0) \Psi_e(\mathbf{r}) + \hbar\omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \\ &\left[\hbar g_1 \hat{a}_1 \int d^3 \mathbf{r} \hat{\Psi}_e^\dagger(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \hat{\Psi}_g(\mathbf{r}) + \hbar g_2 a_2 e^{-i\omega_2 t} \int d^3 \mathbf{r} \hat{\Psi}_e^\dagger(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \hat{\Psi}_g(\mathbf{r}) + h.c. \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.1 Regime Não-ressonante

Vamos considerar que no instante inicial os átomos estão no estado fundamental interno g e que a temperatura é bem abaixo da temperatura crítica de transição, de forma que eles formam um condensado de Bose-Einstein ocupando o estado fundamental da armadilha. Além disso, vamos considerar o caso em que

as frequências ω_1 e ω_2 são várias ordens de grandeza maior que a frequência de transição atômica ω_0 e que a diferença $\hbar\Delta = \hbar(\omega_2 - \omega_0)$ é muito maior que a energia dos átomos ($\hbar\Delta \gg \langle H_0 \rangle$). Nesta situação, podemos desprezar a emissão espontânea. Além disso, processos de um único fóton, excitando o átomo, não ocorrem neste regime *não-ressonante*. Os átomos sofrem apenas transições virtuais de dois fótons, em que seu estado interno permanece inalterado, mas o movimento do seu centro de massa pode mudar, devido ao recuo. Por exemplo, um átomo que absorve um fóton do campo pump e emite um fóton para o probe, sofre um recuo igual à diferença de momenta dos campos.

A equação de movimento de um dado observável \hat{A} pode ser obtida pela equação de Heisenberg [32]

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[\hat{A}, \hat{H}]. \quad (2.11)$$

Assim, introduzindo o operador

$$\tilde{\Psi}_e(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = e^{i\omega_2 t} \hat{\Psi}_e(\mathbf{r}), \quad (2.12)$$

obtemos, a partir do Hamiltoniano (2.10) e da Eq. (2.11), a equação de movimento

$$\frac{d\tilde{\Psi}_e(\mathbf{r}, \mathbf{t})}{dt} = i\Delta\tilde{\Psi}_e(\mathbf{r}, \mathbf{t}) - i(g_1\tilde{a}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + g_2 a_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}) \hat{\Psi}_g(\mathbf{r}), \quad (2.13)$$

onde desprezamos a energia cinética e potencial e definimos o operador $\tilde{a}_1 = e^{i\omega_2 t} \hat{a}_1$, cuja equação de movimento é

$$\frac{d\tilde{a}_1}{dt} = -i\delta\tilde{a}_1 - ig_1^* \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_g^\dagger(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \tilde{\Psi}_e(\mathbf{r}, \mathbf{t}), \quad (2.14)$$

com $\delta = \omega_1 - \omega_2$. Do mesmo modo, para o operador $\hat{\Psi}_g(\mathbf{r})$ temos

$$\frac{d\hat{\Psi}_g(\mathbf{r})}{dt} = -i\frac{H_0}{\hbar} \hat{\Psi}_g(\mathbf{r}) - i(g_1^* \hat{a}_1^\dagger e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + g_2^* \hat{a}_2^* e^{i\omega_2 t} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}) \hat{\Psi}_e(\mathbf{r}). \quad (2.15)$$

No regime não-ressonante temos

$$\frac{d\tilde{\Psi}_e(\mathbf{r}, \mathbf{t})}{dt} \approx 0, \quad (2.16)$$

e assim, das equações (2.12 e 2.13) temos

$$\hat{\Psi}_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta} (g_1 \hat{a}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + g_2 a_2 e^{-i\omega_2 t} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}) \hat{\Psi}_g(\mathbf{r}). \quad (2.17)$$

Substituindo a equação (2.17) nas equações (2.14 e 2.15) e desprezando termos independentes de \mathbf{r} , que corresponderiam a um desvio das frequências óptica e atômica, eliminamos o estado excitado do sistema e as equações de movimento podem ser obtidas do Hamiltoniano efetivo

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_g^\dagger(\mathbf{r}) \left[H_0 + \frac{\hbar g_1^* g_2 a_2}{\Delta} \hat{a}_1^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \frac{\hbar g_2^* g_1 a_2^*}{\Delta} \hat{a}_1 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] \hat{\Psi}_g(\mathbf{r}) + \hbar \delta \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \quad (2.18)$$

que descreve a interação entre os campos ópticos com átomos no estado fundamental, onde $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$.

2.2 Regime Linear

O operador de campo $\hat{\Psi}_g(\mathbf{r})$ pode ser expandido numa base de funções, como por exemplo, na base de ondas planas. A expansão em ondas planas é adequada para o caso de sistemas homogêneos, isto é, sem potencial de confinamento ($V(\mathbf{r}) = 0$). Para átomos confinados ($V(\mathbf{r}) \neq 0$) esta expansão é razoável para tempos curtos¹, tais que, durante os processos de emissão e absorção de fótons, os átomos se propagam por distâncias curtas comparadas com as dimensões da armadilha e se comportam, durante esse intervalo de tempo, como se estivessem no espaço livre. Portanto, para o caso de interesse, átomos em uma armadilha, é mais apropriado expandir o operador de campo atômico nas autofunções $\{\varphi_n(\mathbf{r})\}$ da armadilha, isto é,

$$\hat{\Psi}_g(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\mathbf{r}) \hat{c}_n, \quad (2.19)$$

onde \hat{c}_n é o operador de aniquilação de átomos no estado interno g do modo n da armadilha. As autofunções φ_n obedecem à relação de ortogonalidade

$$\int \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_{n'}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \delta_{nn'} \quad (2.20)$$

e à equação de autovalores

¹estima-se que seja da ordem de dezenas de milisegundos, já que a velocidade de recuo é da ordem de 1cm/s e as armadilhas medem cerca de 100microns (10^{-2}cm) [26].

$$H_0\varphi_n(\mathbf{r}) = \varepsilon_n\varphi_n(\mathbf{r}), \quad (2.21)$$

onde $\varepsilon_n = \hbar\omega_n$ é a energia do n -ésimo modo da armadilha.

Usando a expansão (2.19) e a relação (2.20), o Hamiltoniano (2.18) é reescrito como

$$\hat{H} = \hbar\delta\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega_n\hat{c}_n^\dagger\hat{c}_n + \hbar\chi(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \sum_{n,n'=0}^{\infty} \hat{c}_n^\dagger\hat{c}_{n'}A_{nn'}, \quad (2.22)$$

onde $\chi = \frac{|g_1||g_2||a_2|}{|\Delta|}$, $\hat{a} \equiv \frac{g_1g_2^*a_2^*\Delta}{|g_1||g_2||a_2||\Delta|}\hat{a}_1$ é o operador de campo óptico redefinido com um fator de fase extra e

$$A_{nn'} = \int d^3\mathbf{r}\varphi_n^*(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\varphi_{n'}(\mathbf{r}) \quad (2.23)$$

é o elemento de matriz de transição entre os estados $\varphi_n(\mathbf{r})$ e $\varphi_{n'}(\mathbf{r})$, que consideramos, sem perda de generalidade, como um número real.

Por simplicidade vamos supor que o estado condensado se acopla apenas com um estado m da armadilha e que os elementos de matriz $A_{nn'}$ são nulos para $n = n'$. Desse modo, o Hamiltoniano (2.22) simplifica-se para

$$\hat{H} = \hbar\delta\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_0\hat{c}_0^\dagger\hat{c}_0 + \hbar\omega_m\hat{c}_m^\dagger\hat{c}_m + \hbar\chi A_{0m}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{c}_0^\dagger\hat{c}_m + \hat{c}_m^\dagger\hat{c}_0). \quad (2.24)$$

Apesar das simplificações, o Hamiltoniano (2.24) contém termos com produto de três operadores, o que resultará em equações de movimento não-lineares. Nós vamos considerar que o número N de átomos no estado fundamental da armadilha seja grande o suficiente tal que permaneça praticamente constante durante o tempo de interação com os campos ópticos. O valor esperado de \hat{c}_0^\dagger e \hat{c}_0 é da ordem de $(N+1)^{1/2}$ e $N^{1/2}$, respectivamente. Como $N \gg 1$, a diferença entre \hat{c}_0^\dagger e \hat{c}_0 é desprezível e podemos tratá-los como números em vez de operadores. Com essa hipótese podemos fazer a aproximação

$$\hat{c}_0 \simeq \sqrt{N}, \quad (2.25)$$

que é válida para tempos de interação tais que $\langle \hat{c}_0^\dagger\hat{c}_0 \rangle \gg \langle \hat{c}_m^\dagger\hat{c}_m \rangle$. Assim, o Hamiltoniano (2.24) é simplificado para o Hamiltoniano quadrático

$$\hat{H} = \hbar\delta\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_m\hat{c}_m^\dagger\hat{c}_m + \underbrace{\hbar\chi_m(\hat{a}^\dagger\hat{c}_m + \hat{a}\hat{c}_m^\dagger)}_{V_1} + \underbrace{\hbar\chi_m(\hat{a}^\dagger\hat{c}_m^\dagger + \hat{a}\hat{c}_m)}_{V_2}, \quad (2.26)$$

onde $\chi_m = \sqrt{N}\chi A_{0m}$.

No Hamiltoniano (2.26) o termo V_1 representa uma interação em que há troca oscilante de excitações entre átomos e luz enquanto que o termo V_2 é análogo ao Oscilador Paramétrico Óptico (OPO) não-degenerado [27], responsável pela amplificação da intensidade dos campos, exceto que, no caso do OPO ambos os campos são campos ópticos.

2.3 Modelo Linear com Colisões

O Hamiltoniano (2.18) foi obtido desprezando-se interações entre os átomos. Com a finalidade de nos aproximarmos do sistema físico real e, assim, dos experimentos, neste trabalho vamos acrescentar colisões atômicas ao modelo. Devido às baixas densidades das amostras gasosas produzidas em laboratório ($\sim 10^{15} \text{cm}^{-3}$), a contribuição mais significativa às colisões é devido às colisões binárias, que em segunda quantização são escritas na forma

$$\hat{H}_{\text{átomo-átomo}} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}'), \quad (2.27)$$

onde $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é o potencial de interação.

No caso de um condensado de Bose-Einstein, em que o comprimento de espalhamento é muito pequeno (da ordem da nuvem eletrônica $\sim 1 \text{nm}$) e as densidades são baixas ($\sim 10^{15} \text{cm}^{-3}$), tal que a distância média entre os átomos seja de $\sim 100 \text{nm}$, o potencial $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ pode ser aproximado por uma função de contato,

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = U_0 \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.28)$$

com

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (2.29)$$

onde a é o comprimento de espalhamento, que a princípio pode ser positivo ou negativo dependendo do potencial entre os átomos ser repulsivo ou atrativo. Entretanto, $a > 0$ favorece a ocupação múltipla de um mesmo estado, isto é, o condensado é mais estável [28, 29], de forma que consideraremos apenas o caso em que a é positivo.

Devido à adoção do regime não ressonante de interação entre átomos e campos ópticos, a probabilidade de encontrarmos átomos no estado interno excitado é muito pequena e, assim, podemos desprezar as colisões entre átomos no estado interno excitado e entre átomos no estado interno fundamental com átomos do estado interno excitado. Portanto, a contribuição atômica ao Hamiltoniano (2.18) é modificada pela inclusão de colisões entre átomos no estado fundamental, tornando-se

$$\hat{H}_{\text{átomos}} = \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_g^\dagger(\mathbf{r}) \left[H_0 + \frac{U_0}{2} \hat{\Psi}_g^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_g(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}_g(\mathbf{r}). \quad (2.30)$$

Novamente vamos considerar a hipótese (2.25) e a expansão (2.19) e, como estamos interessados no regime linear, vamos considerar o termo contendo \hat{c}_m como uma perturbação. Dessa forma vamos manter no Hamiltoniano (2.30) apenas termos de 2ª ordem nos operadores $\hat{c}_m, \hat{c}_m^\dagger$. Com essas considerações o Hamiltoniano torna-se

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{átomos}} &= \hat{c}_m^\dagger \hat{c}_m \int d^3\mathbf{r} N \varphi_m^*(\mathbf{r}) [H_0 + 2NU_0 |\varphi_0(\mathbf{r})|^2] \varphi_m(\mathbf{r}) \\ &+ \left[\frac{NU_0}{2} \hat{c}_m^{\dagger 2} \int d^3\mathbf{r} \varphi_m^{*2}(\mathbf{r}) \varphi_0^2(\mathbf{r}) + h.c. \right] \\ &+ \left[\sqrt{N} \hat{c}_m^\dagger \int d^3\mathbf{r} \varphi_m^*(\mathbf{r}) [H_0 + NU_0 |\varphi_0(\mathbf{r})|^2] \varphi_0(\mathbf{r}) + h.c. \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

Mas a função de onda do condensado, $\varphi_0(\mathbf{r})$, devido à presença de colisões, agora satisfaz à equação de Gross-Pitaevskii (Apêndice I)

$$[H_0 + NU_0 |\varphi_0(\mathbf{r})|^2] \varphi_0(\mathbf{r}) = \mu \varphi_0(\mathbf{r}), \quad (2.32)$$

onde μ é o potencial químico, de modo que os termos lineares em \hat{c}_m e \hat{c}_m^\dagger (2.31) são nulos, devido à relação de ortogonalidade (2.20). Portanto o Hamiltoniano (2.31) torna-se

$$\hat{H}_{\text{átomos}} = \hbar\tilde{\omega}_m \hat{c}_m^\dagger \hat{c}_m + \frac{\hbar\kappa_m}{2} (\hat{c}_m^2 + \hat{c}_m^{\dagger 2}), \quad (2.33)$$

onde

$$\int d^3\mathbf{r} N \varphi_m^*(\mathbf{r}) [H_0 + 2NU_0 |\varphi_0(\mathbf{r})|^2] \varphi_m(\mathbf{r}) = \hbar\tilde{\omega}_m \quad (2.34)$$

é a energia do modo m modificado por colisões e

$$\kappa_m = \frac{2NU_0}{\hbar} \int d^3r \varphi_m^{*2}(\mathbf{r}) \varphi_0^2(\mathbf{r}) \quad (2.35)$$

é o parâmetro de colisão, suposto real e que depende da “integral de *overlap*” da função de onda dos átomos no estado $\varphi_0(\mathbf{r})$ com a função de onda dos átomos no modo m da armadilha. Nós vamos considerar que a contribuição da integral de *overlap* é pequena, de modo que $\kappa_m < \hbar\tilde{\omega}_m$.

Dessa forma, o Hamiltoniano quadrático descrevendo a interação entre átomos e luz incluindo colisões é dado por

$$\hat{H} = \hbar\delta\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega\hat{c}^\dagger\hat{c} + \frac{\hbar\kappa}{2}(\hat{c}^2 + \hat{c}^{\dagger 2}) + \hbar\chi(\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{c}^\dagger + \hat{c}), \quad (2.36)$$

onde redefinimos os parâmetros e operadores sem índices para simplificar a notação. Note que as colisões contribuem com um termo análogo ao do oscilador paramétrico óptico degenerado [27], neste caso contribuindo com criação e aniquilação de dois átomos simultaneamente no mesmo modo, que poderia ser útil na geração de estados comprimidos [22].

Consideraremos que inicialmente o modo \hat{c} não contenha átomos, isto é, se encontra em estado de vácuo, e que o campo óptico está em um estado coerente, ou seja

$$|\psi\rangle_{t=0} = |0\rangle_{\text{átomos}} |\alpha\rangle_{\text{luz}}, \quad (2.37)$$

onde

$$\hat{a}|0, \alpha\rangle = \alpha|0, \alpha\rangle \quad \text{e} \quad \hat{c}^\dagger|0, \alpha\rangle = |1, \alpha\rangle, \quad (2.38)$$

com

$$\alpha = |\alpha|e^{-i\phi}. \quad (2.39)$$

Nos próximos capítulos estudaremos a dinâmica do sistema átomos-luz, suas propriedades estatísticas e seu grau de emaranhamento.

Capítulo 3

Estabilidade e Estatística dos Campos

Neste capítulo analisaremos a estabilidade e as propriedades estatísticas do sistema interagente descrito pelo Hamiltoniano (2.36). Para isso é necessário obter a dinâmica dos campos, determinada pela equação de Heisenberg,

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[\hat{A}, \hat{H}], \quad (3.1)$$

onde $\hat{A}(t)$ é um observável e \hat{H} é o Hamiltoniano do sistema.

A partir do Hamiltoniano (2.36) obtemos o seguinte sistema linear de equações diferenciais acopladas para as amplitudes dos campos ópticos e atômicos

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -i\delta\hat{a} - i\chi(\hat{c}^\dagger + \hat{c}), \quad (3.2)$$

$$\frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} = i\delta\hat{a}^\dagger + i\chi(\hat{c}^\dagger + \hat{c}), \quad (3.3)$$

$$\frac{d\hat{c}}{dt} = -i\omega\hat{c} - i\kappa\hat{c}^\dagger - i\chi(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (3.4)$$

$$\frac{d\hat{c}^\dagger}{dt} = i\omega\hat{c}^\dagger + i\kappa\hat{c} + i\chi(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (3.5)$$

cuja solução foi obtida usando o método da Transformada de Laplace [30] (detalhes são apresentados no Apêndice II). A solução do sistema (3.2 - 3.5) pode ser escrita como

$$\hat{a}(t) = \sum_{j=1}^4 u_j(t)\hat{o}_j, \quad (3.6)$$

$$\hat{c}(t) = \sum_{j=1}^4 v_j(t) \hat{o}_j, \quad (3.7)$$

onde definimos $\hat{o}_1 = \hat{c}(0)$, $\hat{o}_2 = \hat{c}^\dagger(0)$, $\hat{o}_3 = \hat{a}(0)$, $\hat{o}_4 = \hat{a}^\dagger(0)$ e os coeficientes $u_j(t), v_j(t)$ são

$$u_1(t) = \sum_{k=1}^4 \frac{(\omega_k - i\delta)(-i\omega_k + \kappa - \omega)\chi}{\prod_{k' \neq k} (\omega_k - \omega_{k'})} \exp[\omega_k t], \quad (3.8)$$

$$u_2(t) = \sum_{k=1}^4 \frac{(\omega_k - i\delta)(\omega - i\omega_k - \kappa)\chi}{\prod_{k' \neq k} (\omega_k - \omega_{k'})} \exp[\omega_k t], \quad (3.9)$$

$$u_3(t) = \sum_{k=1}^4 \frac{(\omega_k^2 + \omega^2 - \kappa^2)(\omega_k - i\delta) + 2i\chi^2(\omega - \kappa)}{\prod_{k' \neq k} (\omega_k - \omega_{k'})} \exp[\omega_k t], \quad (3.10)$$

$$u_4(t) = \sum_{k=1}^4 \frac{2i\chi^2(\omega - \kappa)}{\prod_{k' \neq k} (\omega_k - \omega_{k'})} \exp[\omega_k t], \quad (3.11)$$

$$v_1(t) = \sum_{k=1}^4 \frac{(\omega_k^2 + \delta^2)(\omega_k - i\omega) + 2i\delta\chi^2}{\prod_{k' \neq k} (\omega_k - \omega_{k'})} \exp[\omega_k t], \quad (3.12)$$

$$v_2(t) = \sum_{k=1}^4 \frac{2i\delta\chi^2 - i\kappa(\omega_k^2 + \delta^2)}{\prod_{k' \neq k} (\omega_k - \omega_{k'})} \exp[\omega_k t], \quad (3.13)$$

$$v_3(t) = \sum_{k=1}^4 \frac{-i\chi(\omega_k - i\delta)(\omega_k - i\omega + i\kappa)}{\prod_{k' \neq k} (\omega_k - \omega_{k'})} \exp[\omega_k t], \quad (3.14)$$

$$v_4(t) = \sum_{k=1}^4 \frac{-i\chi(\omega_k + i\delta)(\omega_k - i\omega + i\kappa)}{\prod_{k' \neq k} (\omega_k - \omega_{k'})} \exp[\omega_k t], \quad (3.15)$$

com $\prod_{k' \neq k} (\omega_k - \omega_{k'}) = \prod_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^4 (\omega_k - \omega_{k'})$ sendo o produtório em k' e

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\kappa^2 - \delta^2 - \omega^2 + \sqrt{(\delta^2 + \omega^2 - \kappa^2)^2 + 4\delta(\kappa - \omega)(\delta\kappa + \delta\omega - 4\chi^2)}}}{\sqrt{2}}, \quad (3.16)$$

$$\omega_2 = -\frac{\sqrt{\kappa^2 - \delta^2 - \omega^2 + \sqrt{(\delta^2 + \omega^2 - \kappa^2)^2 + 4\delta(\kappa - \omega)(\delta\kappa + \delta\omega - 4\chi^2)}}}{\sqrt{2}}, \quad (3.17)$$

$$\omega_3 = \frac{\sqrt{\kappa^2 - \delta^2 - \omega^2 - \sqrt{(\delta^2 + \omega^2 - \kappa^2)^2 + 4\delta(\kappa - \omega)(\delta\kappa + \delta\omega - 4\chi^2)}}}{\sqrt{2}}, \quad (3.18)$$

$$\omega_4 = -\frac{\sqrt{\kappa^2 - \delta^2 - \omega^2 - \sqrt{(\delta^2 + \omega^2 - \kappa^2)^2 + 4\delta(\kappa - \omega)(\delta\kappa + \delta\omega - 4\chi^2)}}}{\sqrt{2}} \quad (3.19)$$

são as raízes da equação de quarto grau

$$\varpi^4 + (\delta^2 + \omega^2 - \kappa^2)\varpi^2 + \delta^2(\omega^2 - \kappa^2) + 4\delta\chi^2(\kappa - \omega) = 0. \quad (3.20)$$

3.1 Análise da Estabilidade

Os coeficientes $u_j(t)$ e $v_j(t)$, dependentes de δ , χ , ω e κ , embora sejam complicados, carregam toda a dependência temporal nas exponenciais $\exp[\omega_k t]$. Assim, a estabilidade do sistema é determinada pela natureza das frequências ω_k , que podem ser reais, imaginárias puras ou complexas. Das equações (3.16 - 3.19) verifica-se que para

$$\delta > 0 \quad \text{e} \quad \chi^2 > \frac{\delta(\kappa + \omega)}{4},$$

duas raízes são reais e duas puramente imaginárias, da forma

$$\omega_1 = i\Omega \quad \omega_2 = -i\Omega \quad \omega_3 = -\Gamma \quad \omega_4 = \Gamma, \quad (3.21)$$

onde Ω e Γ são quantidades reais. Nesta situação, o sistema é exponencialmente instável. Denominaremos este regime de instabilidade, de *regime I*.

Para

$$\delta < 0 \quad \text{e} \quad \chi^2 > \frac{(\kappa^2 + \delta^2 - \omega^2)^2}{16\delta(\kappa - \omega)}, \quad (3.22)$$

todas as raízes são complexas, da forma

$$\omega_1 = \Gamma + i\Omega \quad \omega_2 = -\Gamma + i\Omega \quad \omega_3 = \Gamma - i\Omega \quad \omega_4 = -\Gamma - i\Omega, \quad (3.23)$$

e o sistema também será instável, mas agora a instabilidade será causada por duas exponenciais crescentes no tempo (devido às frequências ω_1 e ω_3), à mesma taxa Γ , mas girantes com frequências iguais e opostas $\pm\Omega$, causando um crescimento exponencial com oscilações. Denominaremos este regime de instabilidade de *regime II*. Para os demais valores de parâmetros as soluções são oscilantes e, portanto, o sistema será estável.

Na *Figura 3.1* mostramos as regiões de instabilidade dos regimes I e II para diferentes valores do parâmetro de colisão κ , onde adotamos $\kappa \equiv \kappa/\omega$, $\chi \equiv \chi/\omega$ e $\delta \equiv \delta/\omega$. Verifica-se que a presença de colisões atômicas reduz as regiões de instabilidade do sistema. Uma possível explicação para esse efeito, é o fato de que as colisões favorecem os átomos a permanecerem no estado $\varphi_0(\mathbf{r})$ [28], para $\kappa < \omega$.

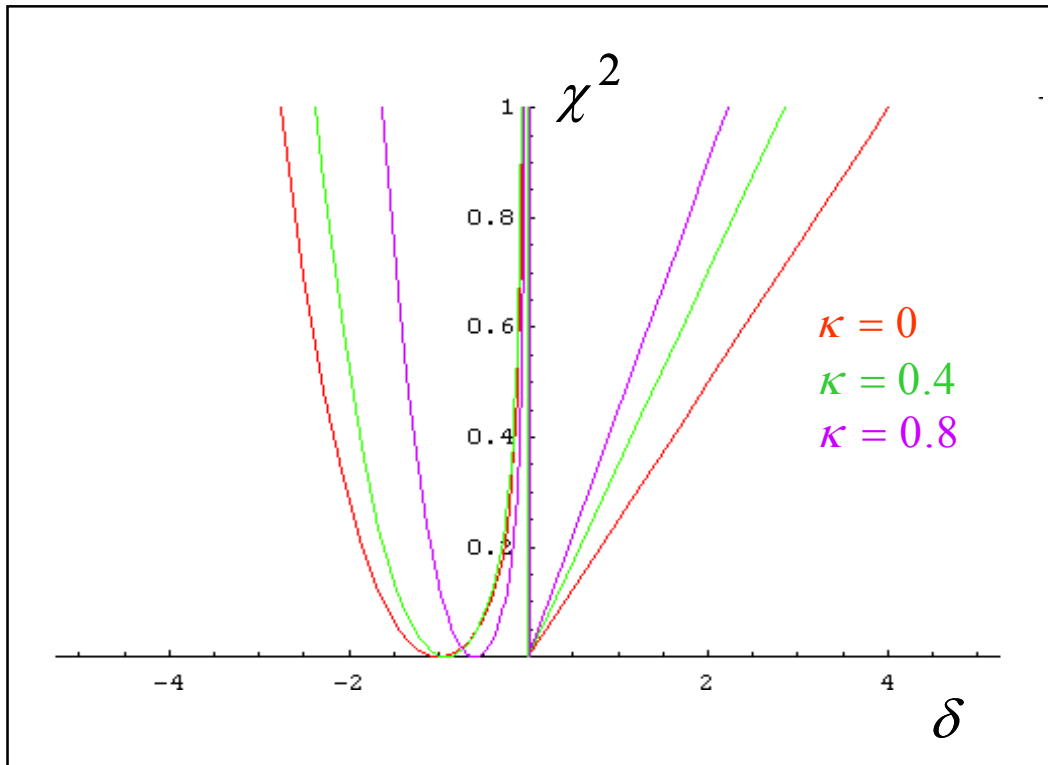


Figura 3.1: O acoplamento entre átomos e luz, χ^2 , em função da diferença de frequência entre os campos ópticos, δ . Para parâmetros na região I o sistema é exponencialmente instável, enquanto que para parâmetros na região II o sistema é exponencialmente instável e oscilante. Os parâmetros δ , χ e κ estão em unidades de ω .

Para ilustrar o comportamento dos campos no tempo, vamos analisar o número médio de fótons e de átomos. Usando as equações (3.6 e 3.7) e considerando o estado inicial (2.37), obtemos o valor médio do número de fótons e de átomos,

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) \rangle &= |u_2(t)|^2 + |u_4(t)|^2 + u_4^*(t)u_3(t)\alpha^2 \\ &\quad + u_3^*(t)u_4(t)\alpha^{*2} + |\alpha|^2 (|u_3(t)|^2 + |u_4(t)|^2) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{c}^\dagger(t)\hat{c}(t) \rangle &= |v_2(t)|^2 + |v_4(t)|^2 + v_4^*(t)v_3(t)\alpha^2 \\ &\quad + v_3^*(t)v_4(t)\alpha^{*2} + |\alpha|^2 (|v_3(t)|^2 + |v_4(t)|^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Note que os valores médios contêm termos independentes de α , contribuindo para uma amplificação espontânea dos campos, podendo ser atribuídos a flutuações de vácuo, e termos dependentes de α , contribuindo para uma amplificação estimulada dos campos.

Nas *Figuras 3.2 - a* e *3.2 - b* mostramos o comportamento em escala logarítmica do número médio de fótons e de átomos em função do tempo, respectivamente, para valores de parâmetros no regime I de instabilidade, onde adotamos $\delta = 1$ e $\chi^2 = 1$ e variamos o parâmetro de colisão. Verificamos que o efeito das colisões é de diminuir a taxa de crescimento exponencial dos campos.

Na *Figura 3.3* apresentamos gráficos semelhantes aos da *Figura 3.2*, mas para valores de parâmetros no regime II de instabilidade, $\delta = -1$, $\chi^2 = 1$. Podemos verificar que além da diminuição na taxa de crescimento exponencial, a presença de colisões altera a frequência e a amplitude de oscilação da função.

Finalmente, nas *Figuras 3.4 - a* e *3.4 - b* mostramos os gráficos do número médio de fótons e de átomos, respectivamente, para valores de parâmetros externos às regiões I e II, $\delta = 4$, $\chi^2 = 0,5$, $\alpha = 2e^{-\frac{i\pi}{2}}$, e diferentes valores para o parâmetro de colisão. Observamos que as colisões alteram as oscilações do número médio de fótons e de átomos em função do tempo, sendo a amplitude de oscilações do número médio de fótons a mais afetada neste regime de parâmetros.

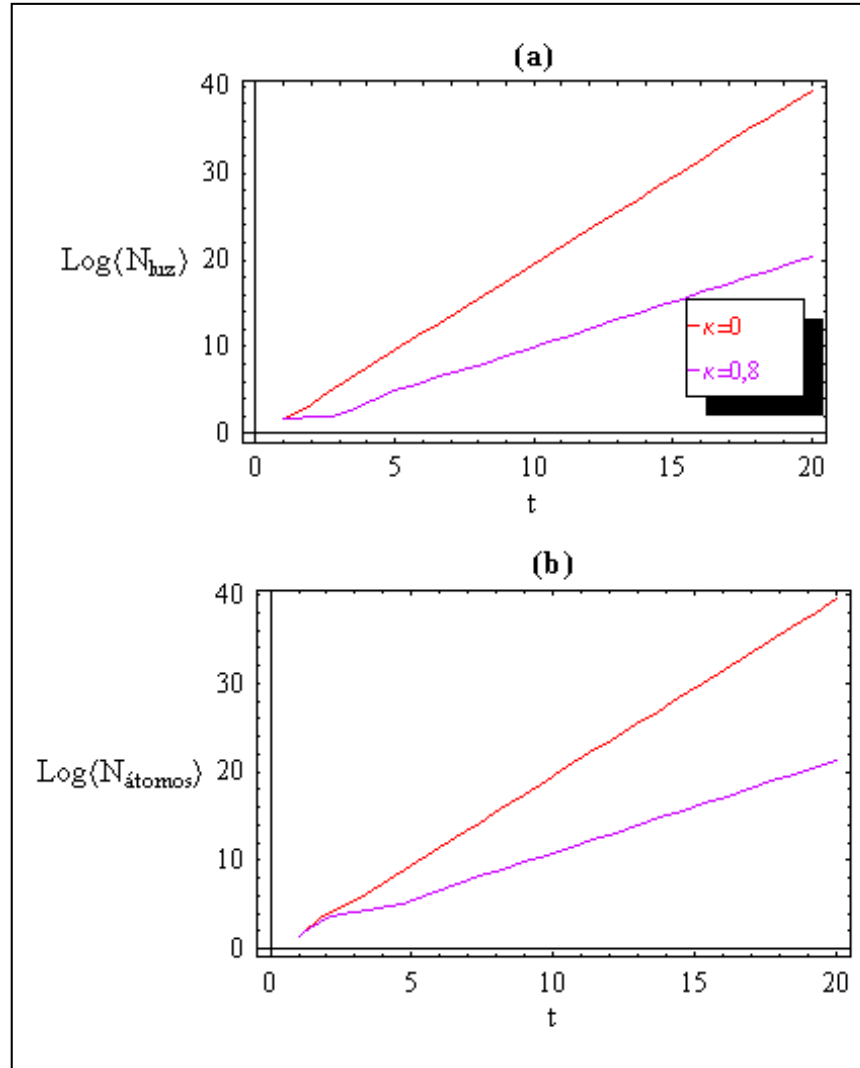


Figura 3.2: Logaritmo do número médio em função do tempo no regime I de instabilidade. (a) o número médio de fótons e (b) o número médio de átomos, para $\delta = 1$, $\chi^2 = 1$, $\alpha = 2e^{-i\pi/2}$ e parâmetros de colisão $\kappa = 0$ e $\kappa = 0,8$. Os parâmetros foram tomados em unidades de ω .

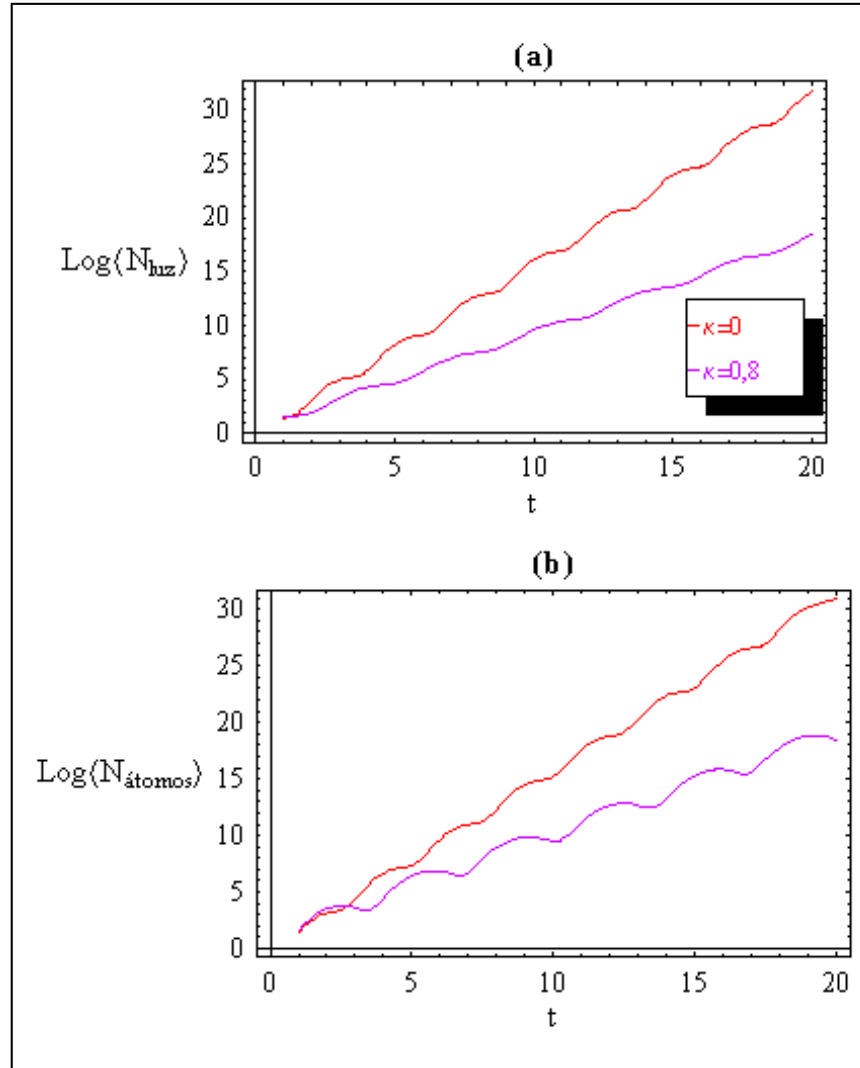


Figura 3.3: Logaritmo do número médio em função do tempo no regime II de instabilidade. (a) o número médio de fótons e (b) o número médio de átomos, para $\delta = -1$, $\chi^2 = 1$, $\alpha = 2e^{-i\pi/2}$ e parâmetros de colisão $\kappa = 0$ e $\kappa = 0,8$. Os parâmetros foram tomados em unidades de ω .

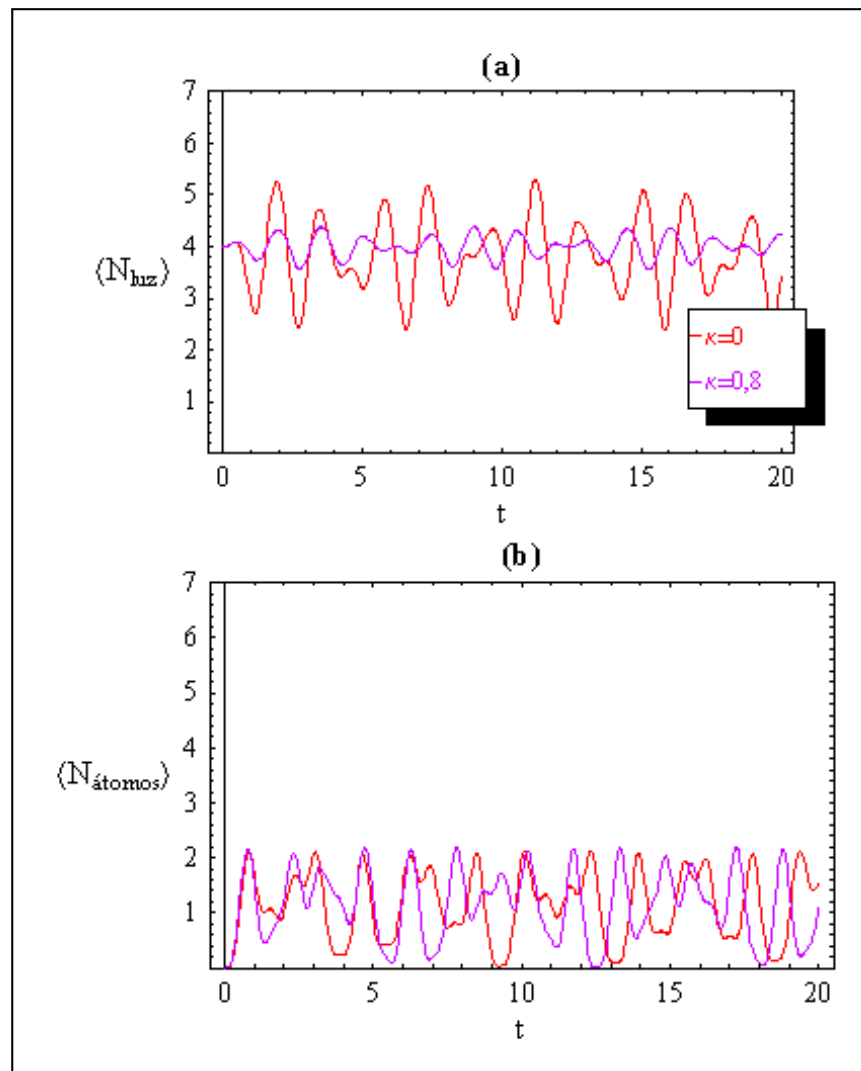


Figura 3.4: Número médio em função do tempo no regime estável. (a) o número médio de fótons e (b) o número médio de átomos, para $\delta = 4$, $\chi^2 = 0,5$, $\alpha = 2e^{-i\pi/2}$ e parâmetro de colisão $\kappa = 0$ e $\kappa = 0,8$. Os parâmetros foram tomados em unidades de ω .

3.2 Correlação átomo-átomo e fóton-fóton

Nesta seção caracterizamos as propriedades estatísticas dos modos óptico e atômico do sistema átomos-luz através das funções de correlação de segunda ordem normalizadas,

$$g_{\hat{c}\hat{c}}^{(2)}(t) = \frac{\langle \hat{c}^\dagger(t)\hat{c}^\dagger(t)\hat{c}(t)\hat{c}(t) \rangle}{\langle \hat{c}^\dagger(t)\hat{c}(t) \rangle^2}, \quad (3.26)$$

$$g_{\hat{a}\hat{a}}^{(2)}(t) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\hat{a}(t) \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) \rangle^2}, \quad (3.27)$$

onde $g_{\hat{c}\hat{c}}^{(2)}(t)$, $g_{\hat{a}\hat{a}}^{(2)}(t)$ são as funções de correlação de segunda ordem entre átomo-átomo e luz-luz normalmente ordenadas, respectivamente. As funções de correlação foram introduzidas na teoria da coerência desenvolvida por Glauber em 1963, que se baseia no uso de funções de correlação para caracterizar propriedades estatísticas dos campos [22]. Por exemplo, para uma luz linearmente polarizada, o campo elétrico quantizado é

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t), \quad (3.28)$$

onde

$$\mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t) = -i \sum_k \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \hat{a}_k^\dagger e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}, \quad (3.29)$$

com $\mathbf{E}^+ = (\mathbf{E}^-)^\dagger$, V é o volume quantizado, ω_k e \mathbf{k} são frequências e vetor de onda de um fóton e $\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k$ são operadores de criação e aniquilação de um fóton no k -ésimo modo. A intensidade média da luz, $\langle I(t) \rangle$, é definida por [27]

$$\langle I(t) \rangle = \langle \mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (3.30)$$

e a função de correlação de intensidade-intensidade de 2ª ordem, $g^{(2)}(\tau)$, é definida como

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle : I(t)I(t+\tau) : \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}, \quad (3.31)$$

onde $\langle : \cdot : \rangle$ significa que a média sobre os operadores deve ser tomada no ordenamento normal. Assim,

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \mathbf{E}^-(t)\mathbf{E}^-(t+\tau)\mathbf{E}^+(t+\tau)\mathbf{E}^+(t) \rangle}{\langle \mathbf{E}^-(t)\mathbf{E}^+(t) \rangle^2}. \quad (3.32)$$

Fisicamente, $g^{(2)}(\tau)$ é proporcional à probabilidade de detecção de um fóton no tempo $t+\tau$, dado que um outro fóton foi detectado no tempo t . Para o nosso caso (3.26 e 3.27), em que consideramos $\tau = 0$, $g_{\hat{a}\hat{a}}^{(2)}(t)$ corresponde à probabilidade de detecção de dois fótons simultaneamente. Um experimento para a medida de $g^{(2)}$ foi introduzido por Hanbury-Brown e Twiss nos anos 50 [22]. A função de correlação de segunda ordem permite, por exemplo, que se faça a distinção, entre um campo coerente e um campo térmico, pois $g_{coerente}^{(2)} = 1$ e $g_{térmico}^{(2)} = 2$ [22]. Embora tenha sido desenvolvida para fótons, a teoria de Glauber pode ser generalizada para átomos, onde o operador \hat{E}^- é substituído pelo operador $\hat{\Psi}^\dagger$.

Considerando o estado inicial (2.37), obtivemos para a função de correlação átomo-átomo,

$$g_{\hat{c}\hat{c}}^{(2)}(t) = \frac{f(v_i) + f(v_i, \alpha)}{\langle \hat{c}^\dagger(t) \hat{c}(t) \rangle^2}, \quad (3.33)$$

onde

$$f(v_i) = 2|v_2|^4 + 2|v_4|^4 + |v_1|^2|v_2|^2 + 4|v_2|^2|v_4|^2 + |v_3|^2|v_4|^2 + (v_1^*v_2^*v_3v_4 + h.c.), \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} f(v_i, \alpha) &= |\alpha|^2 [|v_4|^4 (3 + 8|v_3|^2 + 4|v_2|^2) + 4|v_3|^2|v_2|^2 + 2(v_1^*v_2^*v_3v_4 + h.c.)] \\ &\quad + |\alpha|^4 [4|v_3|^2|v_4|^2 + |v_3|^4 + |v_4|^4] + [\alpha^4 (v_4^{*2}v_3^2) + h.c.] \quad (3.35) \\ &\quad + [\alpha^2 [v_1^*v_2^*v_3^2 + 4|v_2|^2v_4^*v_3 + v_4^{*2}v_1v_2] + h.c.] \\ &\quad + [\alpha^2 [v_3v_4v_4^{*2}(5 + 2|\alpha|^2) + v_3^*v_4^*v_3^2(1 + 2|\alpha|^2)] + h.c.], \end{aligned}$$

onde $v_i(t) \equiv v_i$ para simplificar a notação. A função $g_{\hat{a}\hat{a}}^{(2)}(t)$ é obtida substituindo, v_i por u_i .

Vamos considerar as correlações nos regimes instáveis, pois, devido ao comportamento exponencial das soluções, as correlações tornam-se estacionárias para tempos longos, como ilustrado na *Figura 3.5*, e dependendo da intensidade e da fase do campo óptico inicial, apresentam propriedades estatísticas interessantes.

Apresentamos nas *Figuras 3.6* e *3.7* as funções $g_{\hat{c}\hat{c}}^{(2)}(t)$ e $g_{\hat{a}\hat{a}}^{(2)}(t)$ em função da intensidade ($|\alpha|^2$) e da fase (ϕ) do campo óptico no regime I, para o caso sem colisões ($\kappa = 0$) e com colisões ($\kappa = 0, 8$), onde fixamos o tempo $t \equiv \omega t = 12$. Observamos que as correlações de segunda ordem entre átomo-átomo e entre luz-luz são extremamente sensíveis à intensidade e à fase do campo óptico e que,

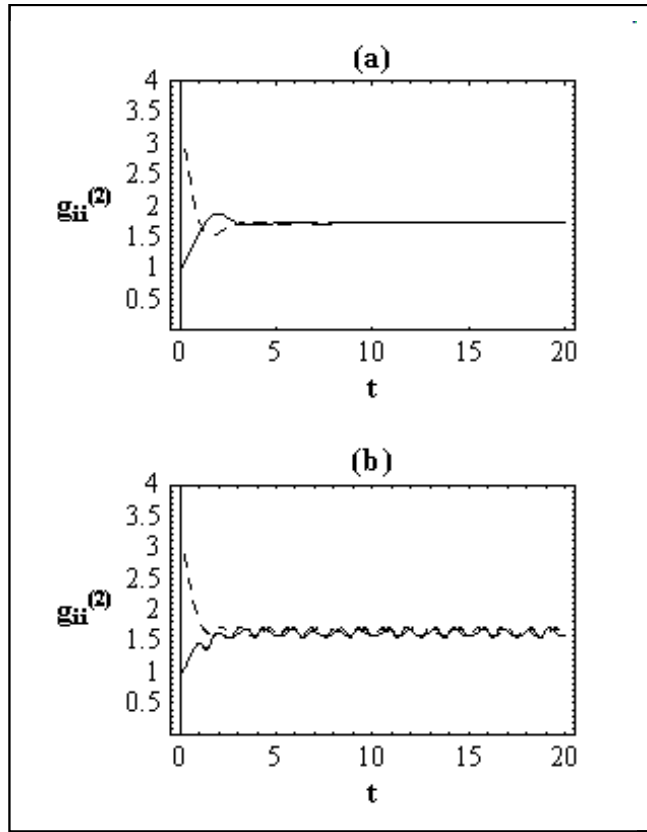


Figura 3.5: Correlação de 2ª ordem no tempo. As linhas tracejada e cheia representam $g_{\tilde{c}\tilde{c}}^{(2)}(t)$ e $g_{\tilde{a}\tilde{a}}^{(2)}(t)$, respectivamente. (a) regime I, com $\delta = 1, \chi^2 = 1$; (b) regime II, $\delta = -1, \chi^2 = 1$. Adotamos $\alpha = 2e^{-i\pi/2}$ e $\kappa = 0$. Os parâmetros estão em unidades de ω .

variando $|\alpha|^2$ e ϕ , os campos apresentam estatística que varia entre coerente ($g_{ii}^{(2)}(t) = 1$), térmica ($g_{ii}^{(2)}(t) = 2$) e supertérmica ($g_{ii}^{(2)}(t) > 2$) [31]. Nota-se também que a presença de colisões desloca, na fase, a estatística dos campos (*Figuras 3.6 - b e 3.7 - b*).

Analogamente, apresentamos nas *Figuras 3.8 e 3.9* as funções $g_{\tilde{c}\tilde{c}}^{(2)}(t)$ e $g_{\tilde{a}\tilde{a}}^{(2)}(t)$ em função da intensidade e da fase do campo óptico para o regime II. Neste caso, quanto maior o valor de $|\alpha|^2$, menos sensíveis são as correlações à fase do campo óptico comparadas às correlações no regime I, mas a estatística também varia de coerente até supertérmica. Entretanto, nas *Figuras 3.8 - a e 3.8 - b* podemos ver que a inclusão de colisões tornam as correlações atômicas mais sensíveis à fase, enquanto que as correlações ópticas tornam-se menos dependentes da fase, como mostram as *Figuras 3.9 - a e 3.9 - b*.

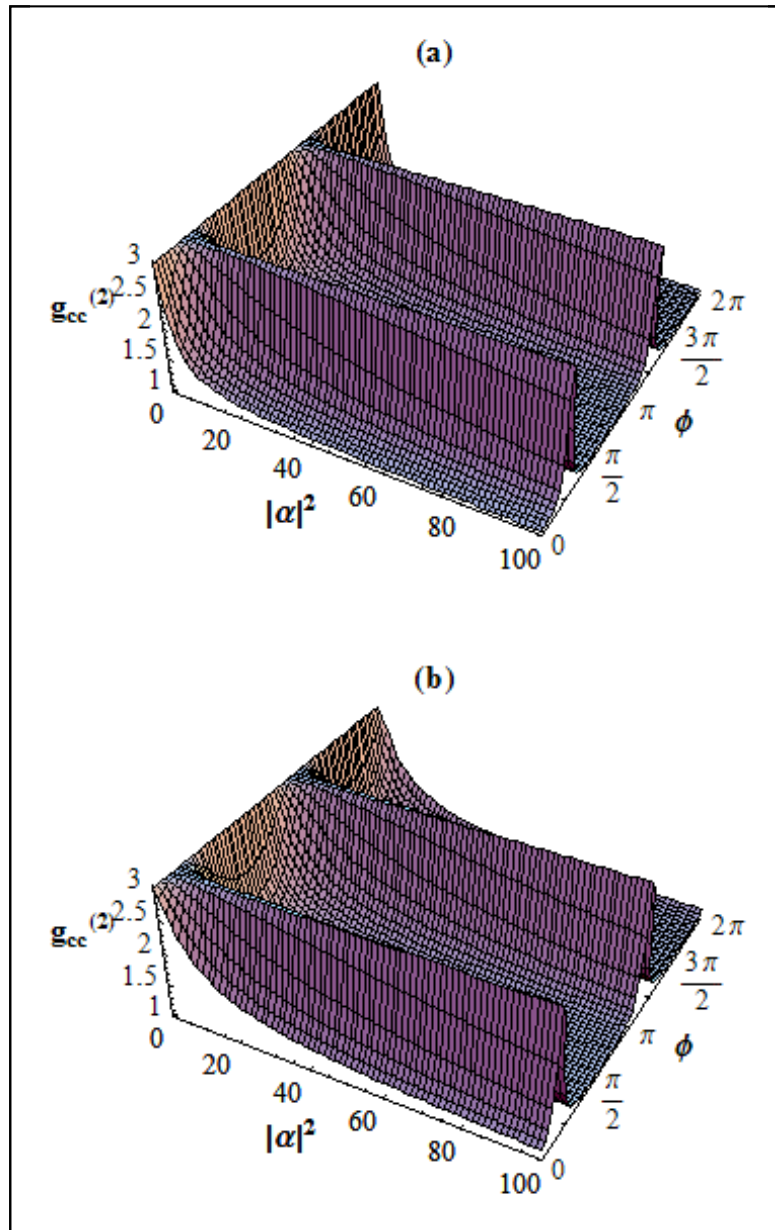


Figura 3.6: Função de correlação $g_{cc}^{(2)}$ em função da intensidade e da fase do campo óptico no regime I. (a) $\kappa = 0$ e (b) $\kappa = 0, 8$. Adotamos $\delta = 1, \chi^2 = 1$ e $t = 12$. Os parâmetros estão em unidades de ω .

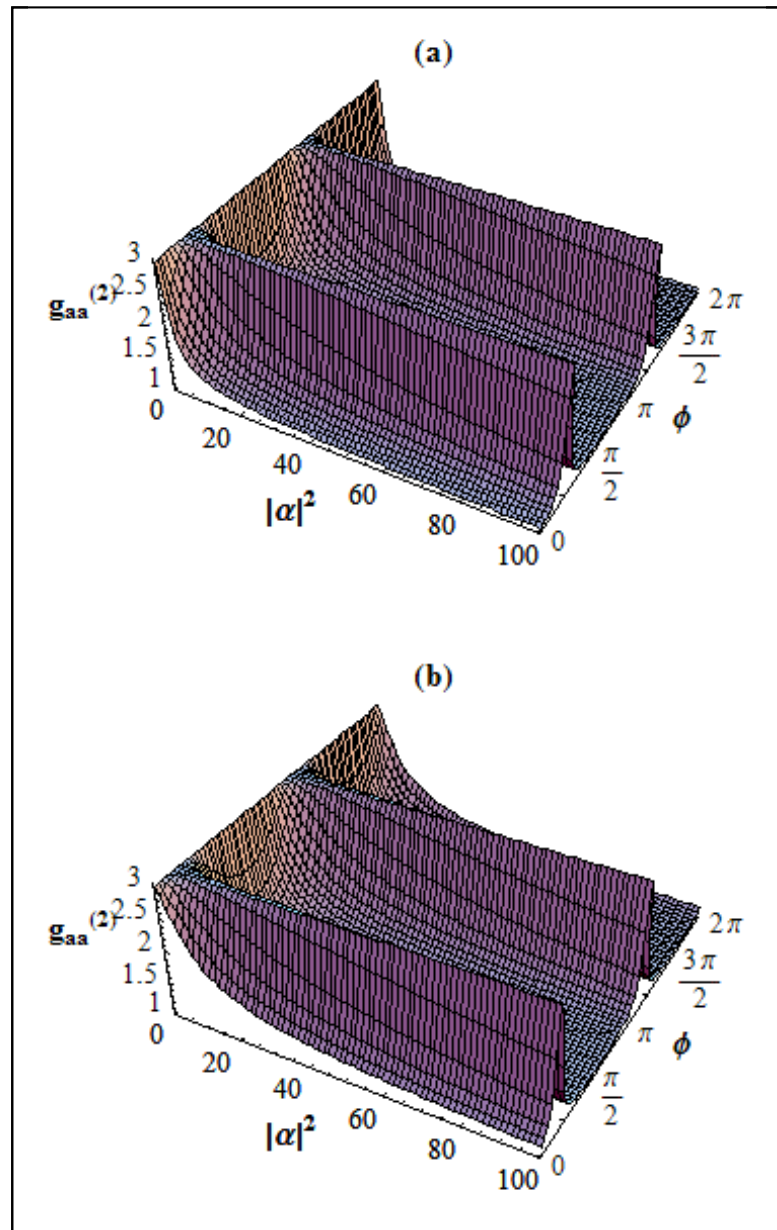


Figura 3.7: Função de correlação $g_{aa}^{(2)}$ em função da intensidade e da fase do campo óptico no regime I. (a) $\kappa = 0$ e (b) $\kappa = 0, 8$. Adotamos $\delta = 1, \chi^2 = 1$ e $t = 12$. Os parâmetros estão em unidades de ω .

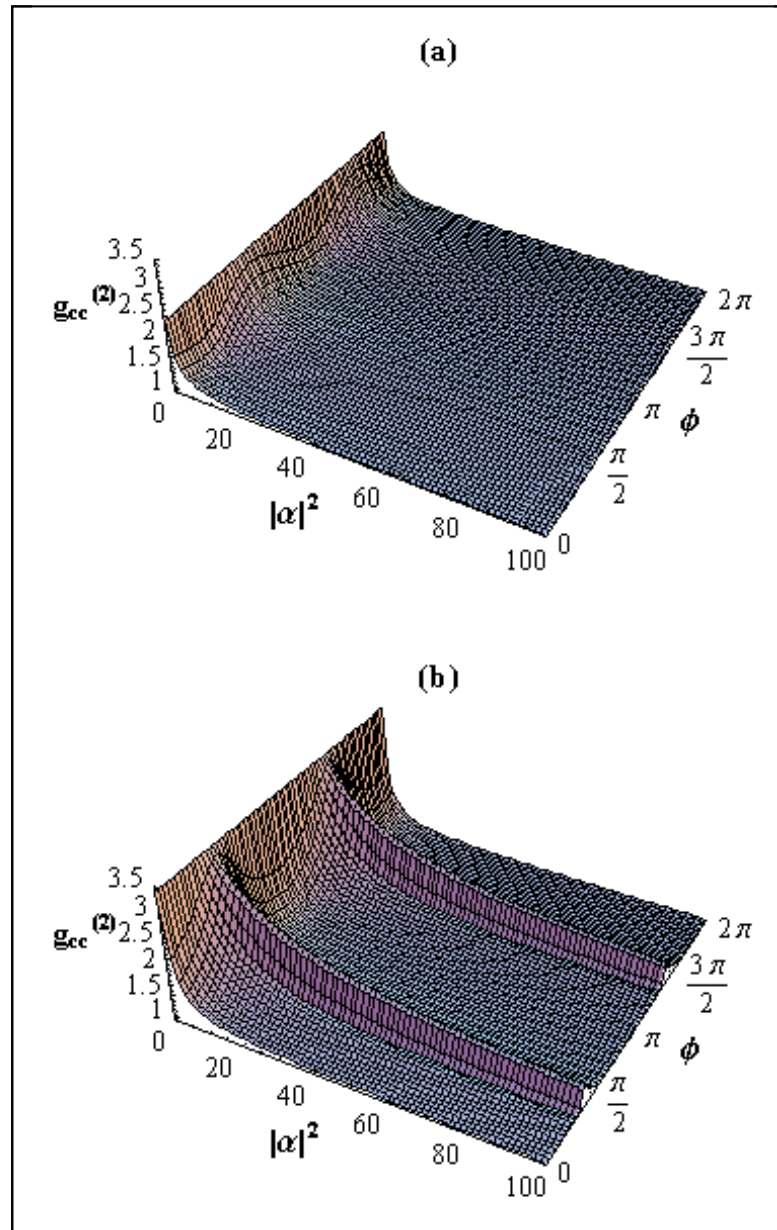


Figura 3.8: Função de correlação $g_{cc}^{(2)}$ em função da intensidade e da fase do campo óptico no regime II. (a) $\kappa = 0$ e (b) $\kappa = 0,8$. Adotamos $\delta = -1$, $\chi^2 = 1$ e $t = 12$. Os parâmetros estão em unidades de ω .

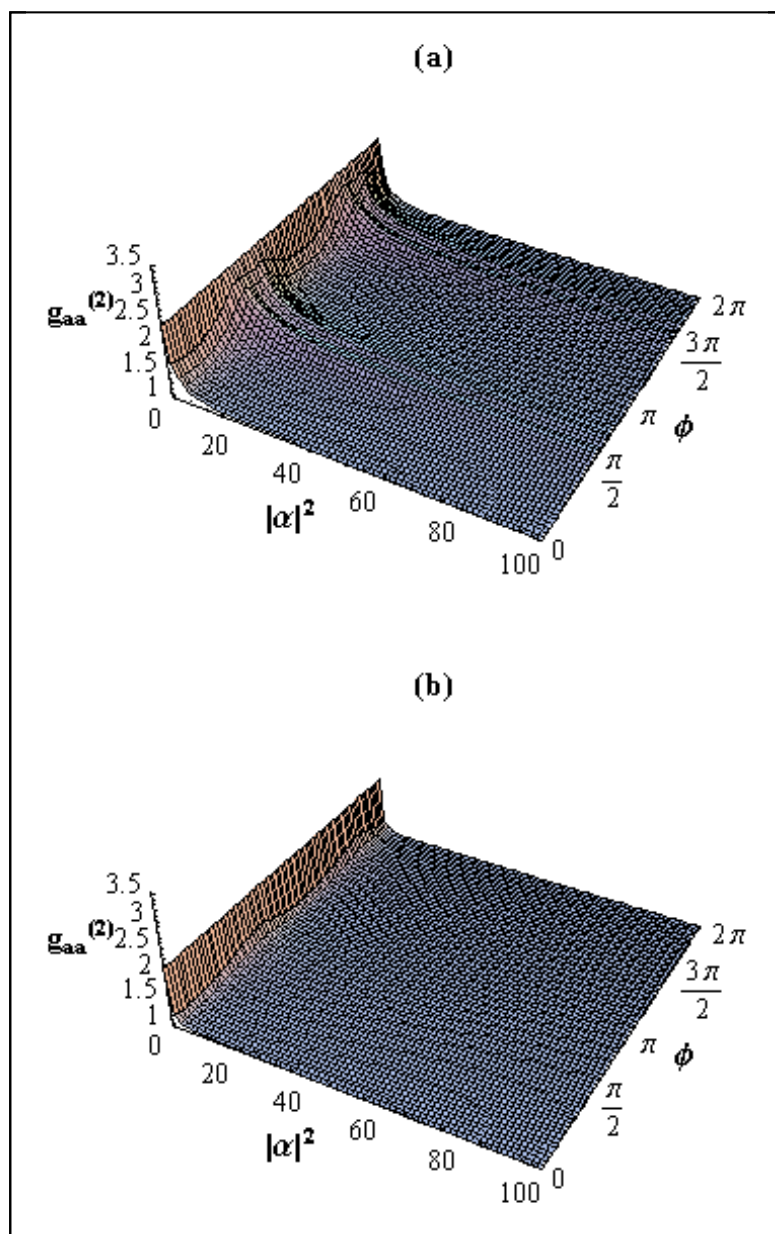


Figura 3.9: Função de correlação $g_{\hat{a}\hat{a}}^{(2)}$ em função da intensidade e da fase do campo óptico no regime II. (a) $\kappa = 0$ e (b) $\kappa = 0,8$. Adotamos $\delta = -1$, $\chi^2 = 1$ e $t = 12$. Os parâmetros estão em unidades de ω .

3.3 Correlação entre átomo-fóton

Nesta seção, estudamos as propriedades estatísticas entre os átomos e os fótons do sistema, através da função de correlação de segunda ordem

$$g_{\hat{c}\hat{a}}^{(2)}(t) = \frac{\langle \hat{c}^\dagger(t)\hat{c}(t)\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) \rangle}{\langle \hat{c}^\dagger(t)\hat{c}(t) \rangle \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) \rangle}, \quad (3.36)$$

tomada no ordenamento de número. Considerando o estado inicial (2.37), obtemos

$$g_{\hat{c}\hat{a}}^{(2)}(t) = \frac{f(v_i, u_i) + f(v_i, u_i, \alpha)}{\langle \hat{c}^\dagger(t)\hat{c}(t) \rangle \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) \rangle}, \quad (3.37)$$

onde

$$\begin{aligned} f(v_i, u_i) &= (v_2^*v_3 + v_4^*v_1)(u_1^*u_4 + u_3^*u_2) + 2v_2^*v_1u_1^*u_2 \\ &\quad + 2v_4^*v_3u_3^*u_4 + (|v_2|^2 + |v_4|^2)(|u_2|^2 + |u_4|^2) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} f(v_i, u_i, \alpha) &= c_1(v_i, u_i) |\alpha|^2 + c_2(v_i, u_i) |\alpha|^4 + [c_4(v_i, u_i) |\alpha|^2 \alpha^2 + h.c.] \\ &\quad + [c_3(v_i, u_i) \alpha^2 + v_4^*v_3u_4^*u_3\alpha^4 + h.c.], \end{aligned} \quad (3.39)$$

com

$$\begin{aligned} c_1(v_i, u_i) &= (u_1^*u_4 + u_3^*u_2)(v_2^*v_3 + v_4^*v_1) + (v_3^*v_1 + v_2^*v_4)(u_1^*u_3 + u_4^*u_2) \\ &\quad + 4v_4^*v_3u_3^*u_4 + |v_3|^2 (|u_2|^2 + |u_3|^2 + 2|u_4|^2) \\ &\quad + |v_2|^2 (|u_3|^2 + |u_4|^2 + |v_4|^2 (|u_2|^2 + 3|u_4|^2 + 2|u_3|^2)), \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$c_2(v_i, u_i) = (|v_3|^2 + |v_4|^2)(|u_3|^2 + |u_4|^2) + v_4^*v_3u_3^*u_4 + v_3^*v_4u_4^*u_3 \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} c_3(v_i, u_i) &= (u_1^*u_3 + u_4^*u_2)(v_2^*v_3 + v_4^*v_1) + u_4^*u_3(|v_2|^2 + |v_4|^2) \\ &\quad + v_4^*v_3(|u_2|^2 + 3|u_4|^2 + 2|u_3|^2). \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$c_4(v_i, u_i) = u_4^* u_3 (|v_3|^2 + |v_4|^2) + v_4^* v_3 (|u_3|^2 + |u_4|^2). \quad (3.43)$$

Particularmente, para campos clássicos, que possuem distribuição P de Glauber positiva [27], a função de correlação de segunda ordem entre átomo-fóton é limitada por

$$g_{\hat{c}\hat{a}}^{(2)}(t) \leq \sqrt{g_{\hat{c}\hat{c}}^{(2)}(t)g_{\hat{a}\hat{a}}^{(2)}(t)},$$

enquanto que os campos quânticos são limitados por [27]

$$g_{\hat{c}\hat{a}}^{(2)}(t) \leq \sqrt{\left[g_{\hat{c}\hat{c}}^{(2)}(t) + \frac{1}{\langle \hat{c}^\dagger(t)\hat{c}(t) \rangle} \right] \left[g_{\hat{a}\hat{a}}^{(2)}(t) + \frac{1}{\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) \rangle} \right]}. \quad (3.44)$$

que para $\langle \hat{c}^\dagger(t)\hat{c}(t) \rangle$ e $\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) \rangle \gg 1$, tendem ao limite clássico (??).

Comparamos $g_{\hat{c}\hat{a}}^{(2)}(t)$ com os limites clássico e quântico nas regiões instáveis, para diferentes valores de α , nos casos sem e com colisões atômicas. Na *Figura 3.10* apresentamos $g_{\hat{c}\hat{a}}^{(2)}(t)$ em função do tempo no regime I para $\kappa = 0$, com $\alpha = 0$, $\alpha = 2$ e $\alpha = 2e^{-i\pi/2}$ e para $\kappa = 0,8$ para os mesmos valores de α . Verificamos que para o caso espontâneo, $\alpha = 0$, apenas para tempos muito curtos a desigualdade clássica (??) é maximamente violada (*Figura 3.10 - a*). Para $\alpha \neq 0$, comparando *Figura 3.10 - c* com a *Figura 3.10 - e*, observamos que $g_{\hat{c}\hat{a}}^{(2)}(t)$ depende da fase e que ambas tendem ao limite clássico para tempos longos. Para $\alpha = 2$ a correlação fica bem mais distante do limite superior quântico se comparada ao caso espontâneo, mas ainda viola a desigualdade clássica para tempos curtos. Com a inclusão de colisões, verificamos que as correlações são mais oscilantes e ligeiramente menores e, para $\alpha = 2e^{-i\pi/2}$ a desigualdade clássica não é mais violada em momento algum.

Apresentamos na *Figura 3.11* os mesmos gráficos da *Figura 3.10* no regime II, para $\kappa = 0$ e $\kappa = 0,8$. Verificamos que as características são semelhantes ao regime I para tempos curtos, mas para tempos longos as correlações estacionam abaixo do limite superior clássico e que a presença de colisões atômicas faz com que a correlação entre átomo-luz atinja valores menores.

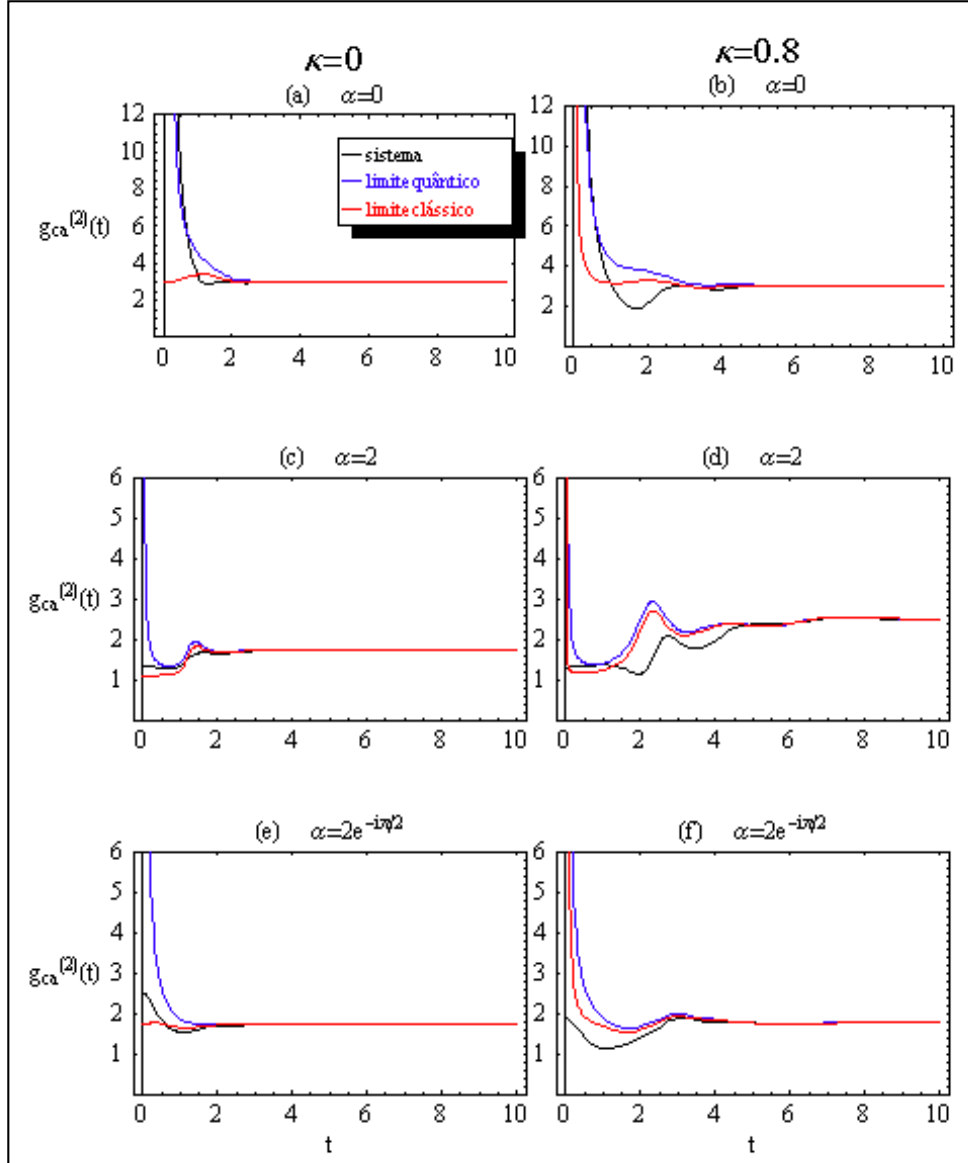


Figura 3.10: Correlação átomo-fóton em função do tempo para o regime I. Comparamos $g_{ca}^{(2)}(t)$ com os limites superiores clássico e quântico, sem colisão (a,c,e) e com colisão (b,d,f). Adotamos $\delta = 1$ e $\chi^2 = 1$. Os parâmetros estão em unidades de ω .

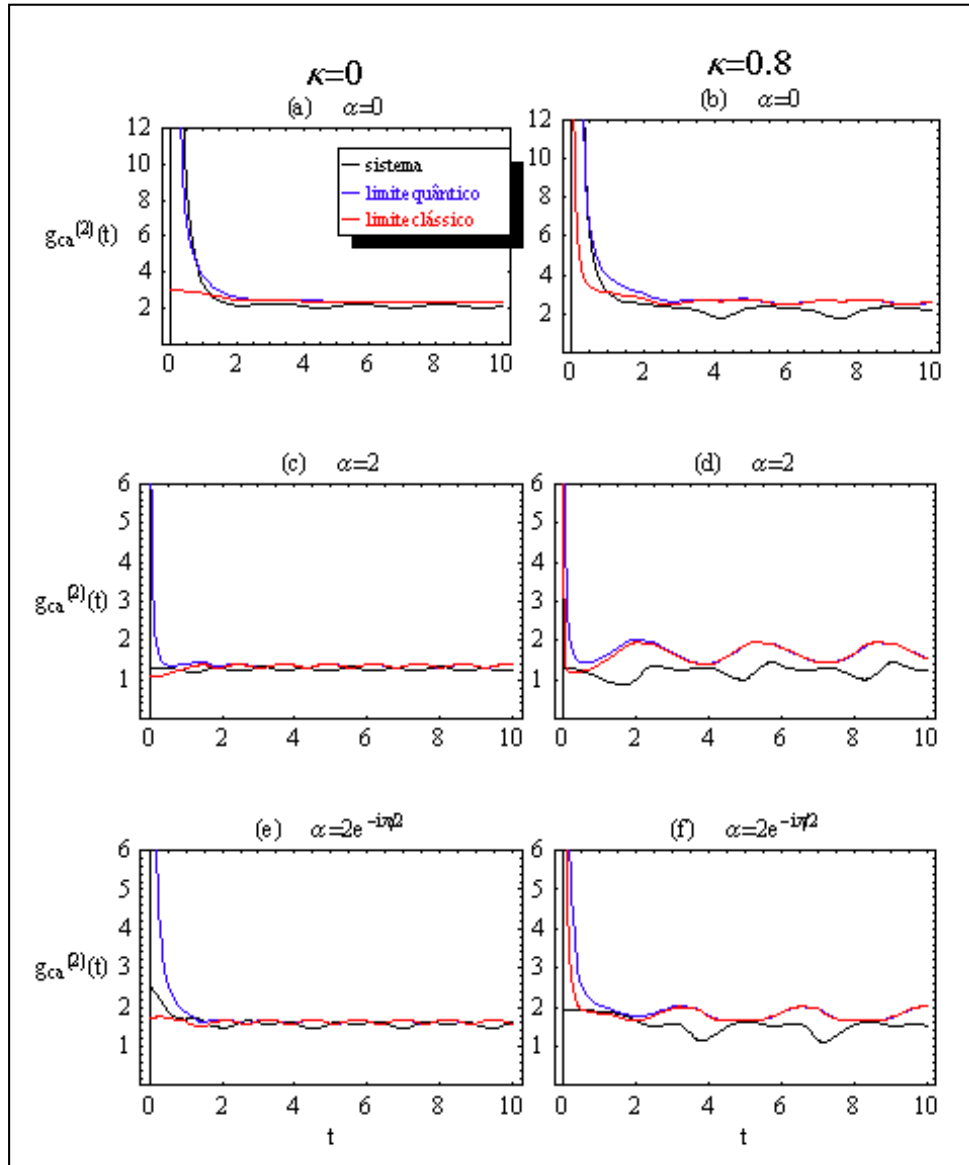


Figura 3.11: Correlação átomo-fóton em função do tempo para o regime II. Comparamos $g_{ca}^{(2)}(t)$ com os limites superiores clássico e quântico, sem colisão (a,c,e) e com colisão (b,d,f). Adotamos $\delta = 1$ e $\chi^2 = 1$. Os parâmetros estão em unidades de ω .

Neste capítulo, verificamos que as correlações de segunda ordem $g_{ii}^{(2)}(t)$ apresenta comportamento variando entre coerente, térmico e supertérmico dependendo dos valores da intensidade e fase do campo óptico. A presença de flutuações térmicas e supertérmicas indicam a presença de emaranhamento, pois cada subsistema estaria em um estado misto. As correlações típicas de estado coerente indicam que cada subsistema estaria em um estado puro e, assim, indicam ausência de emaranhamento. Isto sugere que poderíamos ter um controle óptico sobre o grau de emaranhamento. Entretanto, para garantir que um estado seja coerente seria necessário verificar a fatoração das correlações em todas as ordens e não apenas a de segunda ordem. Assim, tornou-se necessário um estudo mais detalhado do emaranhamento, através de outra técnica. Este estudo foi realizado e os resultados são apresentados e discutidos no próximo capítulo.

Capítulo 4

Emaranhamento entre Átomos e Luz

Em um sistema de duas componentes (a e b), o *emaranhamento* entre as partes caracteriza-se quando o vetor de estado do sistema, $|\Psi_{ab}\rangle$, não pode ser escrito como um produto do vetor de estado de cada subsistema $|\Psi_{ab}\rangle \neq |\phi_a\rangle \otimes |\chi_b\rangle$. Ou, equivalentemente, por não ser possível fatorar o operador densidade do sistema, $\hat{\rho}_{ab}(t)$, na forma

$$\hat{\rho}_{ab}(t) = \hat{\rho}_a(t) \otimes \hat{\rho}_b(t), \quad (4.1)$$

onde $\hat{\rho}_{a(b)}(t)$ é o operador densidade reduzido, descrevendo as propriedades do subsistema $a(b)$, dado por:

$$\hat{\rho}_{a(b)}(t) = Tr_{b(a)} [\hat{\rho}_{ab}(t)] \quad (4.2)$$

e $Tr_{b(a)} [\hat{\rho}_{ab}(t)]$ representa a operação traço sobre $\hat{\rho}_{ab}(t)$ com relação à componente $b(a)$.

Neste capítulo caracterizaremos a presença de emaranhamento entre átomos e luz no nosso sistema, através da entropia linear e do parâmetro y introduzido por V. V. Dodonov [24].

4.1 Operador Densidade

Alguns sistemas físicos podem ser representados por um único vetor de estado $|\alpha(t)\rangle$, onde está contida a informação sobre o sistema. Entretanto, existem situ-

ações em que conhecemos apenas a probabilidade P_i de encontrarmos o sistema em um dado estado $|\alpha_i(t)\rangle$. No primeiro caso dizemos que o sistema se encontra em um estado puro, cuja evolução é descrita pela equação de Schrodinger. Para obtermos informação do sistema associada a um certo observável \hat{A} , basta calcularmos o seu valor esperado

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \alpha(t) | \hat{A} | \alpha(t) \rangle. \quad (4.3)$$

No segundo caso, dizemos que o sistema se encontra em um estado misto. Nesse caso, para obtermos o valor esperado do mesmo observável \hat{A} , tomamos a média em um ensemble [32]

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_i P_i \langle \alpha_i(t) | \hat{A} | \alpha_i(t) \rangle, \quad (4.4)$$

com

$$0 \leq P_i \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_i P_i = 1. \quad (4.5)$$

Usando a relação de completeza $\sum_\beta |\beta\rangle \langle \beta| = 1$, é simples mostrar que a equação (4.4) pode ser escrita como

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_\beta \langle \beta | \left(\sum_i P_i |\alpha_i(t)\rangle \langle \alpha_i(t)| \right) \hat{A} | \beta \rangle, \quad (4.6)$$

de onde surge a definição do *operador densidade*

$$\hat{\rho}(t) = \sum_i P_i |\alpha_i(t)\rangle \langle \alpha_i(t)| \quad (4.7)$$

e a média do observável \hat{A} pode ser reescrita como

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr \left[\hat{\rho}(t) \hat{A} \right]. \quad (4.8)$$

O operador densidade tem as seguintes propriedades

$$\langle i | \hat{\rho} | i \rangle \geq 0 \quad (4.9)$$

$$Tr \hat{\rho} = 1 \quad (4.10)$$

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger \quad (4.11)$$

$$Tr \hat{\rho}^2 \leq 1 \quad (4.12)$$

sendo que a igualdade em (4.12) ocorre quando o sistema se encontra em um estado puro. Assim a relação (4.12) é útil para distinguir entre estados puros e mistos.

O operador densidade (4.7) pode ser utilizado para a descrição de sistemas puros e mistos. Entretanto, há formas alternativas e equivalentes para a descrição de um sistema, em termos das funções de distribuição [22]. Especificamente para o nosso sistema, convém usar uma outra representação para o estado do sistema, uma vez que a presença simultânea dos termos V_1 e V_2 (2.26) e a presença de colisões dificultam o processo de aplicação do operador evolução [27]. Neste trabalho, vamos utilizar a função de distribuição de Wigner.

4.2 Pureza, Entropia Linear e Emaranhamento

Para sistemas de duas componentes, cujo estado total é puro,

$$\hat{\rho}_{ab} = |\Psi_{ab}\rangle \langle \Psi_{ab}|, \quad (4.13)$$

a medida da pureza de uma das componentes é suficiente para medir a presença de emaranhamento. Para visualizar, considere um sistema de duas componentes em um estado total puro, representado pelo operador densidade (4.13). Quando o subsistema representado por $\hat{\rho}_a$ é puro? Isto é, em qual situação $\hat{\rho}_a = |\phi_a\rangle \langle \phi_a|$? Somente quando

$$|\Psi_{ab}\rangle = |\phi_a\rangle \otimes |\chi_b\rangle, \quad (4.14)$$

onde $|\phi_a\rangle$ e $|\chi_b\rangle$ representam o vetor de estado dos subsistemas. Para verificar, considere que $|\Psi_{ab}\rangle$ é dado pela equação (4.14), então:

$$\hat{\rho}_{ab} = |\phi_a\rangle \langle \phi_a| \otimes |\chi_b\rangle \langle \chi_b| \quad (4.15)$$

e, de acordo com a equação (4.2), $\hat{\rho}_a$ é necessariamente puro:

$$\hat{\rho}_a = |\phi_a\rangle \langle \phi_a|, \quad (4.16)$$

onde usamos $Tr_b [|\chi_b\rangle \langle \chi_b|] = 1$. Portanto, se a matriz densidade do subsistema a não for a de um estado puro da forma (4.16), $|\Psi_{ab}\rangle \neq |\phi_a\rangle \otimes |\chi_b\rangle$ e o sistema total é *emaranhado*. O estado de máximo emaranhamento é aquele em que $\hat{\rho}_a$ e $\hat{\rho}_b$ são maximamente mistos, isto é, aquele em que $Tr \hat{\rho}_{a(b)}^2(t)$ são mínimos.

Entretanto é mais conveniente usar uma medida que cresça com o aumento do emaranhamento, por isso utiliza-se a diferença

$$s(t) = 1 - Tr \hat{\rho}^2(t), \quad (4.17)$$

chamada *entropia linear*, limitada entre $0 \leq s(t) \leq 1$, que corresponde aos primeiros termos da expansão da entropia de von Neumann [33] definida por

$$S(t) = -Tr [\rho(t) \ln \rho(t)], \quad (4.18)$$

que é uma generalização da entropia de Boltzmann da Mecânica Estatística Clássica. É interessante notar que a entropia do sistema total independe do tempo $S_{ab}(t) = S_{ab}(0)$, enquanto que a entropia das partes,

$$S_{a(b)}(t) = -Tr_{a(b)} [\rho_{a(b)}(t) \ln \rho_{a(b)}(t)], \quad (4.19)$$

mantém a dependência temporal.

Assim como a entropia de von Neumann, a entropia linear total de um sistema de duas componentes, $s_{ab}(t)$, é limitada pela desigualdade de Araki - Lieb [34] :

$$|s_a(t) - s_b(t)| \leq s_{ab}(t) \leq s_a(t) + s_b(t), \quad (4.20)$$

cuja demonstração é encontrada em [38] e onde

$$s_{a(b)}(t) = 1 - Tr [\rho_{a(b)}^2(t)]. \quad (4.21)$$

Portanto, se o sistema total estiver em um estado puro, $s_{ab}(0) = s_{ab}(t) = 0$, necessariamente

$$s_a(t) = s_b(t). \quad (4.22)$$

A equação (4.22) corrobora a conveniência da entropia linear como medida de emaranhamento, pois o emaranhamento do sistema a com o sistema b , medido pela entropia $s_a(t)$ é igual ao emaranhamento do sistema b com o sistema a , medido pela entropia $s_b(t)$, visto que há apenas os dois subsistemas interagindo.

Para o nosso sistema, cujo estado inicial (2.37) é puro e a evolução é unitária, a entropia linear total é nula e a entropia das partes será $s_a(t) = s_b(t) = 1$ para o máximo emaranhamento e $s_a(t) = s_b(t) = 0$ quando não houver emaranhamento entre átomos e luz.

É importante lembrar que para sistemas de duas componentes cujo estado total é misto ou sistemas com mais de duas componentes, a entropia linear não é um parâmetro suficiente para determinar a presença de emaranhamento [35], existindo várias propostas para o estudo do emaranhamento em tais situações [36, 37].

4.3 Função de Wigner e Entropia Linear

De acordo com a discussão da seção 4.1, vamos utilizar a função de Wigner [22] como representação do estado do sistema, que para dois modos é definida como

$$W(\beta_a, \beta_c, t) = \frac{1}{\pi^4} \int d^2\eta_a \int d^2\eta_c \exp[\beta_a \eta_a^* - \beta_a^* \eta_a + \beta_c \eta_c^* - \beta_c^* \eta_c] C(\eta_a, \eta_c, t), \quad (4.23)$$

onde $\beta_{a,c}$ e $\eta_{a,c}$ são complexos,

$$\int d^2\eta_{a(c)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\text{Re}(\eta_{a(c)}) \int_{-\infty}^{\infty} d\text{Im}(\eta_{a(c)}) \quad (4.24)$$

e $C(\eta_a, \eta_c, t)$ é a função característica para dois modos, definida por

$$C(\eta_a, \eta_c, t) = \text{Tr} [\exp[\eta_a \hat{a}^\dagger + \eta_c \hat{c}^\dagger - \eta_a^* \hat{a} + \eta_c^* \hat{c}] \hat{\rho}(t)]. \quad (4.25)$$

A função de Wigner do modo óptico (atômico) é obtida por

$$W_{a(c)}(\beta_{a(c)}, t) = \int d^2\beta_{c(a)} W(\beta_a, \beta_c, t), \quad (4.26)$$

e se relaciona com a pureza do modo óptico (atômico), $\text{Tr}[\rho_{a(c)}^2(t)]$, através da relação [38]

$$\text{Tr}[\rho_{a(c)}^2(t)] = \pi \int d^2\beta_{a(c)} W_{a(c)}^2(\beta_{a(c)}, t). \quad (4.27)$$

Portanto, para o cálculo da entropia linear de um dos modos (4.21), será necessário calcular a função de Wigner do sistema todo e, a seguir, traçar sobre um dos modos.

A vantagem de utilizarmos a função de Wigner está no fato de que podemos transferir a dependência temporal do operador densidade em (4.25) para os operadores de criação e aniquilação de átomos e fótons, cuja solução obtivemos

das equações de movimento de Heisenberg. Como o sistema de interesse tem evolução unitária, então

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^\dagger(t), \quad (4.28)$$

onde $\hat{U}(t) = e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}$ é o operador de evolução temporal do sistema. Substituindo (4.28) na equação (4.25) e usando a propriedade cíclica do traço obtemos

$$C(\eta_a, \eta_c, t) = Tr \left[\hat{U}^\dagger(t) \exp[\eta_a \hat{a}^\dagger + \eta_c \hat{c}^\dagger - \eta_a^* \hat{a} + \eta_c^* \hat{c}] \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \right], \quad (4.29)$$

e assim

$$C(\eta_a, \eta_c, t) = Tr \left[\exp[\eta_a \hat{a}^\dagger(t) + \eta_c \hat{c}^\dagger(t) - \eta_a^* \hat{a}(t) + \eta_c^* \hat{c}(t)] \hat{\rho}(0) \right]. \quad (4.30)$$

Portanto, para obtermos $C(\eta_a, \eta_c, t)$ e a função de Wigner do sistema, basta usarmos as equações (3.6) e (3.7).

Assim, a Wigner do sistema é dada por

$$W(\beta_a, \beta_c, t) = \frac{\exp \left[\frac{N^2}{4I} + \frac{E^2}{4J} \right] \exp[V]}{\pi^2 \sqrt{[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2] IJ}}, \quad (4.31)$$

os coeficientes e o cálculo detalhado são apresentados no Apêndice III.

Uma vez obtida a função de Wigner do sistema (4.31), devemos calcular a função de Wigner de um dos modos (4.26). Escolhemos arbitrariamente a Wigner do modo óptico

$$W_a(\beta_a, t) = \int d^2\beta_c W(\beta_a, \beta_c, t). \quad (4.32)$$

cuja solução para o nosso sistema é

$$W_a(\beta_a, t) = \frac{e^{D+V+A}}{\pi \xi^{1/2}} \exp \left[\frac{(S + Q - R)(B^2 + C^2) - 2i(B^2 - C^2)(S - Q)}{2[(S + Q - R)^2 + (S - Q)^2]} \right], \quad (4.33)$$

o cálculo completo e os coeficientes são apresentados no Apêndice IV.

Substituindo a Eq.(4.33) na Eq.(4.27), obtemos, da Eq.(4.21), a entropia linear do modo óptico

$$s_a(t) = 1 - \frac{\exp[Y^* + \frac{z^2}{4X}]}{\pi\xi\sqrt{t_5^2 - 4t_3t_4}}, \quad (4.34)$$

cujos coeficientes são apresentados no Apêndice V.

Embora não tenha sido possível verificar explicitamente da expressão da entropia (4.34), devido sua complexidade, verificamos numericamente que a entropia linear independe da intensidade e da fase do campo óptico. Para ilustrar essa independência, apresentamos na *Figura 4.1* a entropia em função do tempo para três diferentes valores de α , para o sistema sem colisões atômicas, nos regimes I e II.

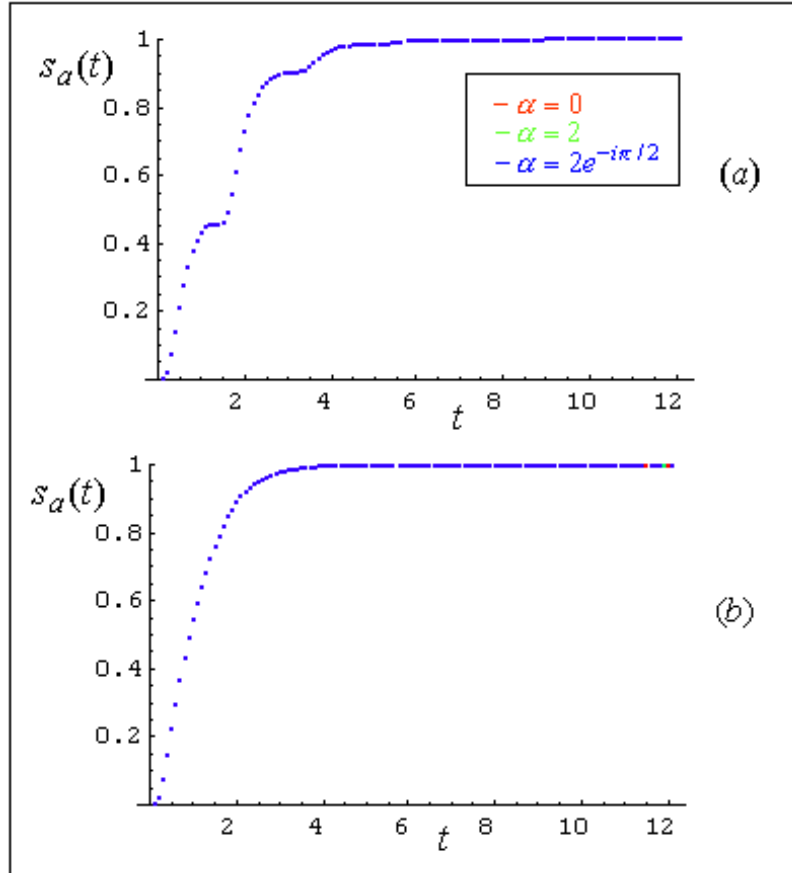


Figura 4.1: Entropia linear em função do tempo para três valores diferentes de $\alpha = 0, 2$ e $2e^{-i\pi/2}$. (a) regime I ($\delta = 1, \chi^2 = 1$) e (b) regime II ($\delta = -1, \chi^2 = 1$). Consideramos $\kappa = 0$. Os parâmetros estão em unidades de ω . Note a independência da entropia com α .

Além da entropia linear, utilizamos o parâmetro de emaranhamento y , definido em [24]

$$y = \left[\frac{|\overline{\hat{a}\hat{c}^\dagger}|^2 + |\overline{\hat{a}\hat{c}}|^2}{2 \left(\overline{\hat{a}^\dagger\hat{a}} + \frac{1}{2} \right) \left(\overline{\hat{c}^\dagger\hat{c}} + \frac{1}{2} \right)} \right]^{1/2}, \quad (4.35)$$

com $\overline{ab} = \langle ab \rangle - \langle a \rangle \langle b \rangle$. O parâmetro y tem a vantagem de ser facilmente calculável para o nosso sistema. Usando a expansão dos operadores $\hat{a}(t)$ e $\hat{c}(t)$ (3.6, 3.7) e as relações (2.38), obtemos

$$y = \left[\frac{|u_1 v_1^* + u_3 v_3^*|^2 + |u_1 v_2 + u_3 v_4|^2}{2 \left(|u_2|^2 + |u_4|^2 + \frac{1}{2} \right) \left(|v_2|^2 + |v_4|^2 + \frac{1}{2} \right)} \right]^{1/2}, \quad (4.36)$$

que independe da intensidade e da fase do campo óptico, corroborando os resultados obtidos numericamente para a entropia linear.

Para ilustrar, mostramos na *Figura 4.2*, o comportamento do coeficiente y em função do tempo para os regimes I e II. Verificamos que o máximo de emaranhamento medido pelo coeficiente y , ao contrário do medido pela entropia, não é o mesmo para os regimes I e II.

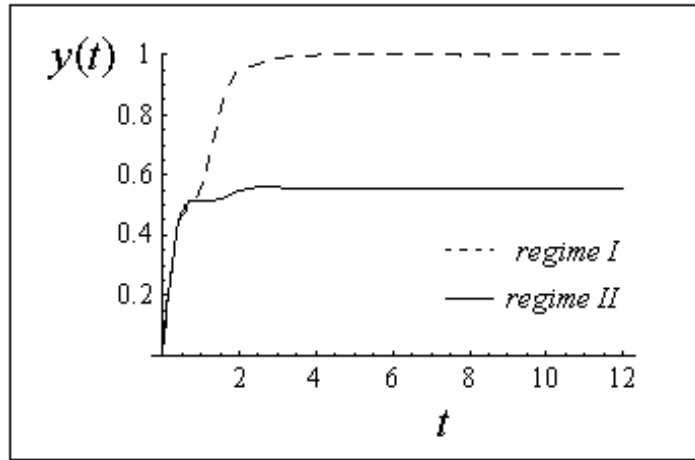


Figura 4.2: Coeficiente y de emaranhamento em função do tempo para os regimes I ($\delta = 1, \chi^2 = 1$) e II ($\delta = -1, \chi^2 = 1$). Consideramos $\kappa = 0$. Os parâmetros estão em unidades de ω .

A entropia linear em função do tempo é apresentada nas *Figuras 4.3 e 4.4* para os dois regimes instáveis, I e II, respectivamente, e comparamos os casos

sem ($\kappa = 0$) e com colisões atômicas ($\kappa = 0,8$). Verificamos que, em ambos os regimes, o emaranhamento atinge seu valor máximo mais lentamente com a presença das colisões.

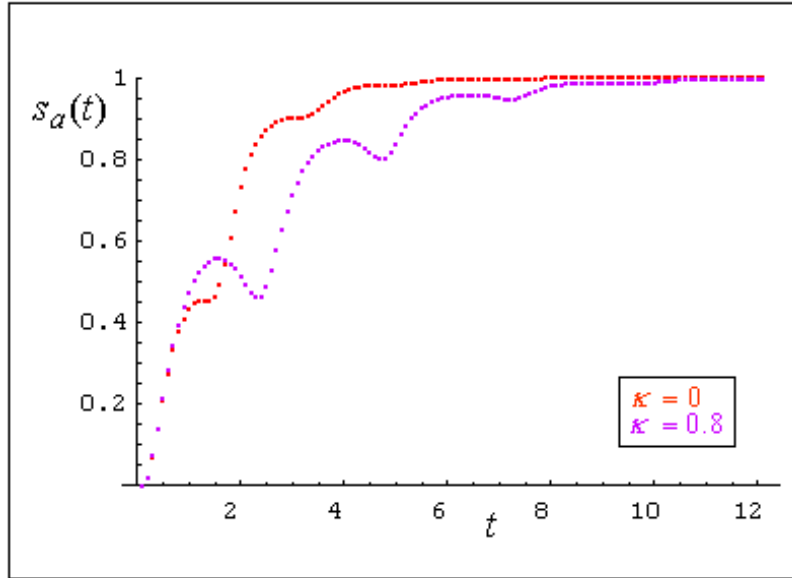


Figura 4.3: Entropia linear em função do tempo para o regime I ($\delta = 1, \chi^2 = 1$). Os parâmetros estão em unidades de ω .

A mesma análise dos efeitos das colisões foi realizada para o coeficiente y e é apresentada nas *Figuras 4.5 e 4.6*. Para o regime I, verificamos que o emaranhamento, com a inclusão de colisões, atinge mais lentamente seu valor máximo. Entretanto, para o regime II, o coeficiente y se torna oscilante, como pode ser visto na *Figura 4.6*. Comparando os dois regimes de instabilidade, verificamos que, para tempos longos, a entropia linear atinge o mesmo valor máximo para as regiões I e II, enquanto o coeficiente y apresenta distinção na intensidade de emaranhamento entre as regiões.

Para a região estável, com $\delta = 4$ e $\chi^2 = 0,5$, mostramos nas *Figuras 4.7 e 4.8* a entropia linear e o coeficiente y em função do tempo, respectivamente. Verificamos em ambas as funções, que átomos e luz emaranham-se e desemaranham-se no tempo, sendo que, nesta região, o grau de emaranhamento medido pela entropia é menor que o grau medido pelo coeficiente y . Verificamos também, que a inclusão de colisões basicamente desloca os instantes em que o sistema é desemaranhado.

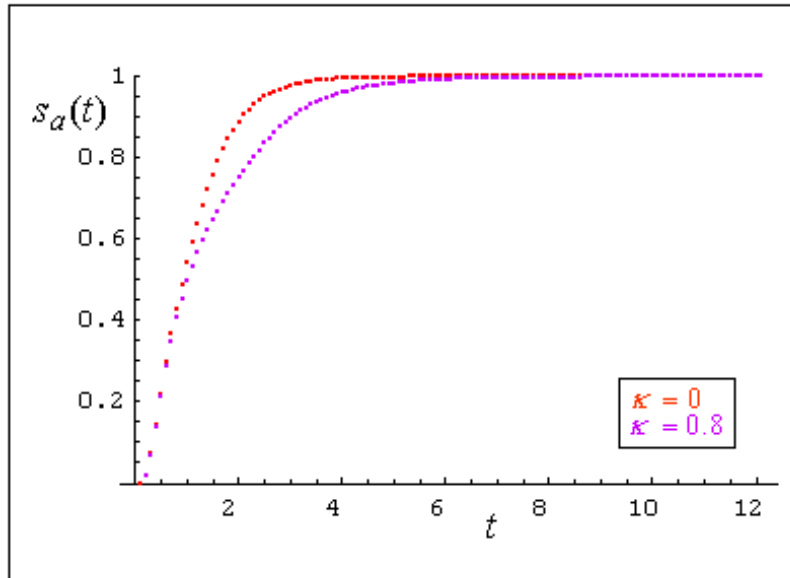


Figura 4.4: Entropia linear em função do tempo para o regime II ($\delta = -1, \chi^2 = 1$). Os parâmetros estão em unidades de ω .

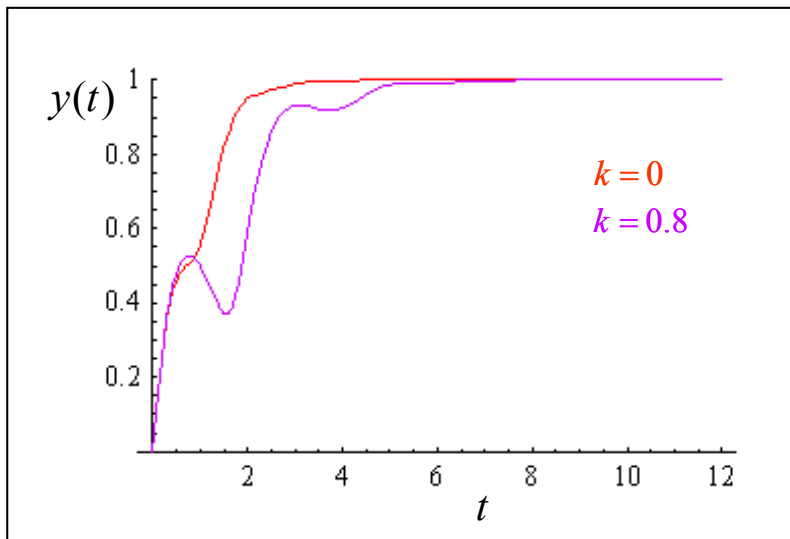


Figura 4.5: Coeficiente y em função do tempo para o regime I ($\delta = 1, \chi^2 = 1$). Os parâmetros estão em unidades de ω .

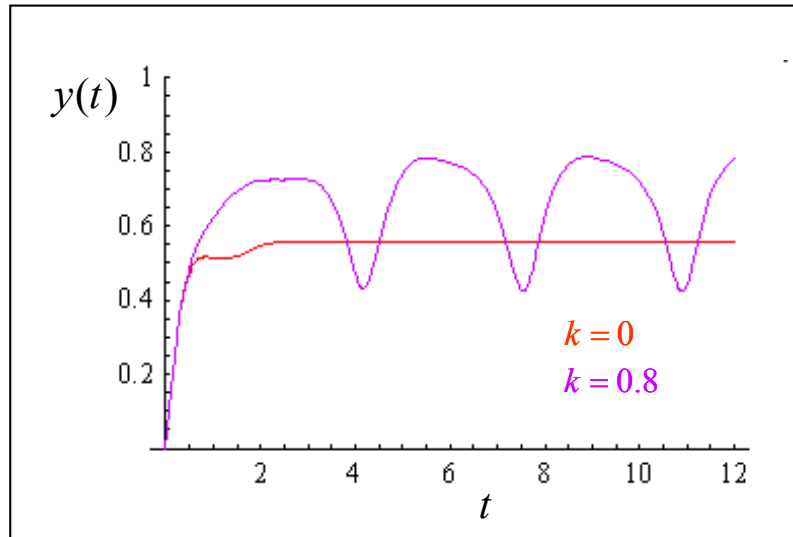


Figura 4.6: Coeficiente y em função do tempo para o regime II ($\delta = -1, \chi^2 = 1$). Os parâmetros estão em unidades de ω .

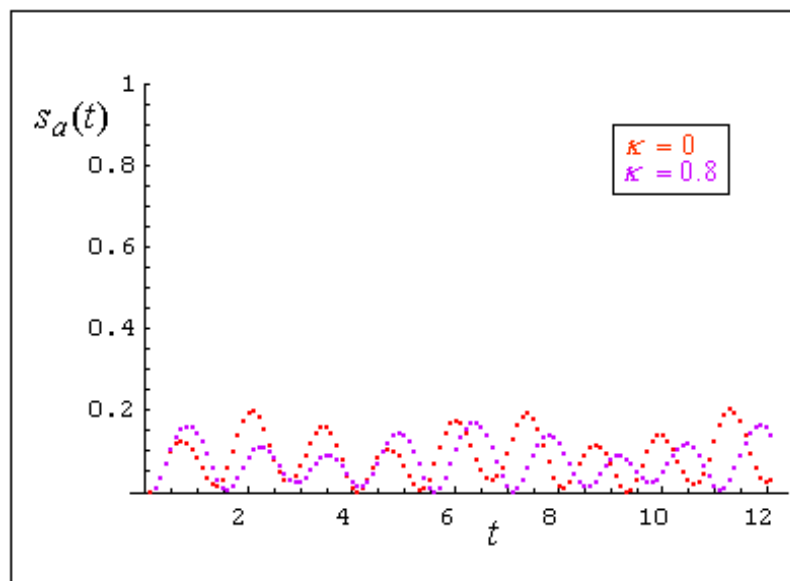


Figura 4.7: Entropia linear em função do tempo para o regime estável ($\delta = 4, \chi^2 = 0,5$). Os parâmetros estão em unidades de ω .

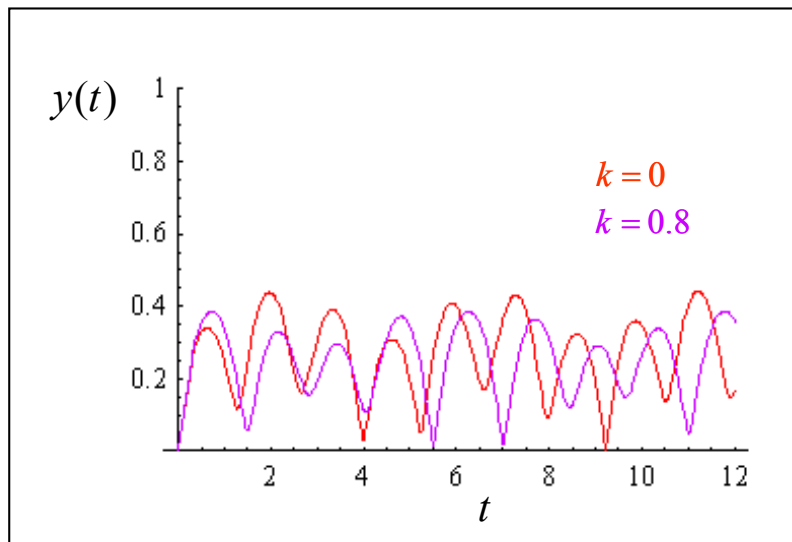


Figura 4.8: Coeficiente y em função do tempo para a região estável ($\delta = 4, \chi^2 = 0, 5$). Os parâmetros estão em unidades de ω .

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho estudamos os efeitos das colisões atômicas sobre a dinâmica de um sistema interagente de átomos aprisionados e luz, no qual ocorre amplificação simultânea dos campos ópticos e atômicos. De acordo com os resultados obtidos, podemos listar as seguintes conclusões:

- colisões atômicas alteram a estabilidade do sistema átomos-luz, diminuindo a taxa de crescimento exponencial dos campos, para valores de parâmetros nos quais o sistema é instável;

- nos regimes instáveis o sistema apresenta propriedades estatísticas, caracterizadas pelas funções de correlação de 2ª ordem, que são estacionárias e que dependem da intensidade e da fase do campo óptico, possibilitando o controle da estatística dos átomos através de luz. As correlações têm características de campos que variam de coerentes até supertérmicas e são mais afetadas pelas colisões no regime II de instabilidade.

- analisando a entropia linear e o parâmetro y , verificamos que o emaranhamento independe da intensidade ou da fase do campo óptico. Portanto, embora seja possível controlar as propriedades estatísticas do sistema, concluímos que não é possível controlar opticamente o grau do emaranhamento. Além disso, para tempos longos, a entropia linear atinge o mesmo valor máximo de emaranhamento para ambos os regimes de instabilidade, enquanto que o coeficiente y toma valores máximos de emaranhamento distintos entre uma região e outra, sendo menor para o regime II.

Como vimos, sistemas interagentes de átomos aprisionados e campos ópticos apresentam comportamento físico muito interessante. Alguns aspectos que

não foram considerados neste trabalho e que podem ser explorados são, por exemplo, a inclusão de dissipação no campo da cavidade e seu impacto sobre as propriedades do sistema e a inclusão do modo \hat{c}_0 , que tornaria a dinâmica não linear.

Capítulo 6

Apêndices

6.1 Apêndice I: Gross - Pitaevskii

A função de onda $\psi(r)$ de um condensado, formado por N átomos no estado fundamental do potencial, sem interação, obedece à equação de Schrödinger linear

$$\hat{H}_0\psi(r) = E\psi(r), \quad (6.1)$$

onde

$$\hat{H}_0 = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\hat{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + V(r_\alpha) \right). \quad (6.2)$$

Mas esta é uma situação ideal. Os átomos no estado condensado interagem sob um potencial efetivo

$$U(r, r') = U_0\delta^3(r - r'), \quad (6.3)$$

com

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (6.4)$$

onde a é o comprimento de espalhamento de onda-s.

Com a presença de colisões a função de onda, $\psi(r)$, é modificada e passa a satisfazer a equação de Gross-Pitaevskii

$$\left(\hat{H}_0 + U_0(N-1)|\psi(r)|^2\right)\psi(r_1, \dots, r_n) = \mu\psi(r), \quad (6.5)$$

onde $N \gg 1$ ($\sim 10^6$) de forma que podemos fazer $N-1 \approx N$.

Demonstração:

1) Hartree

Devemos inicialmente considerar o *ansatz* (Hartree): a função de onda de um sistema de N partículas em um mesmo estado quântico é dada pelo produto da função de onda de cada partícula naquele estado,

$$\psi(r_1, \dots, r_n) = \psi_1(r_1)\psi_2(r_2)\dots\psi_n(r_n). \quad (6.6)$$

Para o caso de partículas idênticas, as funções de onda são idênticas e, portanto

$$\psi(r_1, \dots, r_n) = \prod_{i=1}^n \psi(r_i). \quad (6.7)$$

2) Funcional da Energia

Considere um condensado de N átomos idênticos interagentes cujo Hamiltoniano é dado por

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \quad (6.8)$$

onde \hat{H}_0 é dado por (6.2) e \hat{H}_I é dado por

$$\hat{H}_I = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} U(r_\alpha, r_\beta). \quad (6.9)$$

O valor esperado de \hat{H} , tomado no estado condensado $\psi(r_1, \dots, r_n)$, é dado por

$$\langle \psi(r_1, \dots, r_n) | \hat{H} | \psi(r_1, \dots, r_n) \rangle = E[\psi, \psi^*], \quad (6.10)$$

onde $E[\psi, \psi^*]$ é o *funcional da energia* do sistema, isto é, a energia é um funcional de ψ e ψ^* . Uma vez obtido o funcional da energia, basta minimizá-lo com relação ao estado fundamental para obtermos a equação de Gross-Pitaevskii.

Para obter $E[\psi, \psi^*]$ calcularemos o valor médio de \hat{H} em duas partes:

a) contribuição de \hat{H}_0

- para um único átomo β

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \hat{H}_0^\beta | \psi \rangle &= \langle \psi | \left[\frac{\hat{p}_\beta^2}{2m} + V(r_\beta) \right] | \psi \rangle & (6.11) \\
&= \int d^3x \psi^*(r_1) \dots \psi^*(r_n) \left[\frac{\hat{p}_\beta^2}{2m} + V(r_\beta) \right] \psi(r_1) \dots \psi(r_n) \\
&= \int d^3x \psi^*(r_\beta) \left[\frac{\hat{p}_\beta^2}{2m} + V(r_\beta) \right] \psi(r_\beta) \prod_{\alpha \neq \beta} |\psi(r_\alpha)|^2,
\end{aligned}$$

usando

$$\int d^3r_{\alpha \neq \beta} \prod_{\alpha \neq \beta} |\psi(r_\alpha)|^2 = 1, \quad (6.12)$$

obtemos

$$\langle \psi | \hat{H}_0^\beta | \psi \rangle = \int d^3r_\beta \psi^*(r_\beta) \left[\frac{\hat{p}_\beta^2}{2m} + V(r_\beta) \right] \psi(r_\beta). \quad (6.13)$$

- para N átomos idênticos

$$\langle \psi | \hat{H}_0 | \psi \rangle = N \int d^3r \psi^*(r) \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) \right] \psi(r). \quad (6.14)$$

b) contribuição de \hat{H}_I :

- para um único par de átomos $\beta \neq \gamma$

$$\begin{aligned}
\langle \psi | U(r_\beta, r_\gamma) | \psi \rangle &= U_0 \langle \psi | \delta^3(r_\beta - r_\gamma) | \psi \rangle & (6.15) \\
&= U_0 \int d^3x \psi^*(r_1) \dots \psi^*(r_n) \delta^3(r_\beta - r_\gamma) \psi(r_1) \dots \psi(r_n) \\
&= U_0 \int d^3x \psi^*(r_\beta) \psi^*(r_\gamma) \delta^3(r_\beta - r_\gamma) \psi(r_\beta) \psi(r_\gamma) \prod_{\alpha \neq \beta, \gamma} |\psi(r_\alpha)|^2,
\end{aligned}$$

usando

$$\int d^3r_{\alpha \neq \beta, \gamma} \prod_{\alpha \neq \beta, \gamma} |\psi(r_\alpha)|^2 = 1, \quad (6.16)$$

obtemos

$$\langle \psi | U(r_\beta, r_\gamma) | \psi \rangle = g \int d^3x \psi^{*2}(r_\beta) \psi^2(r_\beta). \quad (6.17)$$

- para $N(N-1)/2$ pares de átomos

$$\langle \psi | \hat{H}_I | \psi \rangle = U_0 \frac{N(N-1)}{2} \int d^3x \psi^{*2}(r) \psi^2(r). \quad (6.18)$$

Portanto o funcional da energia, por átomo, é dado por

$$\frac{E[\psi, \psi^*]}{N} = \int d^3r \psi^*(r) \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) \right] \psi(r) + U_0 \frac{(N-1)}{2} \int d^3x \psi^{*2}(r) \psi^2(r). \quad (6.19)$$

3) Minimização do Funcional da Energia

Para minimizar $\frac{E[\psi, \psi^*]}{N}$ devemos usar cálculo variacional. Note, entretanto, que há um vínculo para $\psi(r)$

$$\int d^3x \psi^*(r) \psi(r) = 1, \quad (6.20)$$

que garante a normalização da função de onda. Portanto será preciso usar a técnica dos multiplicadores de Lagrange.

- Teorema de Lagrange: calcular um extremo de $F(x, y)$ sob o vínculo $G(x, y)$, é equivalente a calcular um extremo da função

$$F(x, y) + \lambda G(x, y), \quad (6.21)$$

onde λ é uma certa constante, desde que pelo menos uma das derivadas parciais $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$ não se anule no ponto crítico.

Assim, calcular o mínimo da (6.19) com relação à ψ^* , com a restrição (6.20), é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial \psi^*} \left(\frac{E[\psi, \psi^*]}{N} - \mu \int d^3r \psi^* \psi \right) = 0, \quad (6.22)$$

onde escolhemos $\lambda = -\mu$ e μ é o potencial químico¹. Note que podemos associar uma densidade de energia $K(\psi, \psi^*)$

$$K(\psi, \psi^*) = \frac{E[\psi, \psi^*]}{N} - \mu \int d^3r \psi^* \psi. \quad (6.23)$$

Assim

¹Essa escolha se justifica já que μ é a variação da energia em função do número de átomos, mantendo entropia e volume constantes: $\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S, V}$.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial \psi^*} K(\psi, \psi^*) & (6.24) \\
&= \int d^3r \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) \right] \psi(r) + U_0(N-1) \int d^3x \psi^*(r) \psi^2(r) - \mu \int d^3r \psi(r) \\
&= \int d^3r \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) + U_0(N-1) |\psi(r)|^2 - \mu \right) \psi(r).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a equação de Gross-Pitaevskii

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) + U_0(N-1) |\psi(r)|^2 \right) \psi(r) = \mu \psi(r). \quad (6.25)$$

6.2 Apêndice II - Coeficientes $u_j(t)$ e $v_j(t)$

Nosso problema consiste em resolver o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{a}}{dt} &= -i\delta\hat{a} - i\chi_m(\hat{c}^\dagger + \hat{c}) \\
\frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} &= i\delta\hat{a}^\dagger + i\chi_m(\hat{c}^\dagger + \hat{c}) \\
\frac{d\hat{c}}{dt} &= -i\omega_c\hat{c} - i\chi_m(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) - 2i\kappa_m\hat{c}^\dagger \\
\frac{d\hat{c}^\dagger}{dt} &= i\omega_c\hat{c}^\dagger + i\chi_m(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + 2i\kappa_m\hat{c}.
\end{aligned} \quad (6.26)$$

Aplicando a Transformada de Laplace [30]

$$\begin{aligned}
L(\hat{c}) &\equiv F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \hat{c}(t) dt \\
L(\hat{a}) &\equiv G(s) = \int_0^\infty e^{-st} \hat{a}(t) dt
\end{aligned} \quad (6.27)$$

e a propriedade

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) = sL(y) - y(0), \quad (6.28)$$

obtemos o sistema de equações algébricas

$$\begin{aligned}
sF - \hat{c}(0) &= -i\omega_c F - i\chi_m(G^\dagger + G) \\
sF^\dagger - \hat{c}^\dagger(0) &= i\omega_c F^\dagger + i\chi_m(G^\dagger + G) \\
sG - \hat{a}(0) &= -i\delta G - i\chi_m(F^\dagger + F) \\
sG^\dagger - \hat{a}^\dagger(0) &= i\delta G^\dagger + i\chi_m(F^\dagger + F),
\end{aligned} \tag{6.29}$$

cuja solução é dada por

$$F = f_1(s)\hat{c}(0) + f_2(s)\hat{c}^\dagger(0) + f_3(s)\hat{a}(0) + f_4(s)\hat{a}^\dagger(0), \tag{6.30}$$

$$G = g_1(s)\hat{c}(0) + g_2(s)\hat{c}^\dagger(0) + g_3(s)\hat{a}(0) + g_4(s)\hat{a}^\dagger(0), \tag{6.31}$$

onde

$$\begin{aligned}
f_1(s) &= \frac{-2i\delta\chi_m^2 - (s - i\omega_c)(s^2 + \delta^2)}{(s^2 + \omega_c^2 - 4\kappa_m^2)(s^2 + \delta^2) + (8\kappa_m - 4\omega_c)\delta\chi_m^2} \\
f_2(s) &= \frac{i\kappa_m(s^2 + \delta^2) - 2i\delta\chi_m^2}{(s^2 + \omega_c^2 - 4\kappa_m^2)(s^2 + \delta^2) + (8\kappa_m - 4\omega_c)\delta\chi_m^2} \\
f_3(s) &= \frac{-\chi_m(s - i\delta)(\kappa_m - \omega_c - is)}{(s^2 + \omega_c^2 - 4\kappa_m^2)(s^2 + \delta^2) + (8\kappa_m - 4\omega_c)\delta\chi_m^2} \\
f_4(s) &= \frac{-\chi_m(s + i\delta)(\kappa_m - \omega_c - is)}{(s^2 + \omega_c^2 - 4\kappa_m^2)(s^2 + \delta^2) + (8\kappa_m - 4\omega_c)\delta\chi_m^2}
\end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}
g_1(s) &= \frac{-\chi_m\omega_c(s - i\delta) + \chi_m(s - i\delta)(\kappa_m - is)}{(s^2 + \omega_c^2 - 4\kappa_m^2)(s^2 + \delta^2) + (8\kappa_m - 4\omega_c)\delta\chi_m^2} \\
g_2(s) &= \frac{\chi_m\omega_c(s - i\delta) - \chi_m(s - i\delta)(\kappa_m + is)}{(s^2 + \omega_c^2 - 4\kappa_m^2)(s^2 + \delta^2) + (8\kappa_m - 4\omega_c)\delta\chi_m^2} \\
g_3(s) &= \frac{(s^2 + \omega_c^2 - \kappa_m^2)(s - i\delta) + 2i\chi_m^2(\omega_c - \kappa_m)}{(s^2 + \omega_c^2 - 4\kappa_m^2)(s^2 + \delta^2) + (8\kappa_m - 4\omega_c)\delta\chi_m^2} \\
g_4(s) &= \frac{2i\chi_m^2(\omega_c - \kappa_m)}{(s^2 + \omega_c^2 - 4\kappa_m^2)(s^2 + \delta^2) + (8\kappa_m - 4\omega_c)\delta\chi_m^2}.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Agora basta fazermos a Transformada Inversa de Laplace dos coeficientes $f_j(s)$ e $g_j(s)$,

$$\begin{aligned}
v_j(t) &= \int_0^\infty e^{-st} f_j(s) ds \\
u_j(t) &= \int_0^\infty e^{-st} g_j(s) ds,
\end{aligned} \tag{6.34}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= \frac{\chi_m e^{\omega_1 t} (\omega_1 - i\delta) (-i\omega_1 + \kappa_m - \omega_c)}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_4)} + \\
&\frac{\chi_m e^{\omega_2 t} (\omega_2 - i\delta) (-i\omega_2 + \kappa_m - \omega_c)}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_4)} + \\
&\frac{\chi_m e^{\omega_3 t} (\omega_3 - i\delta) (-i\omega_3 + \kappa_m - \omega_c)}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_4)} + \\
&\frac{\chi_m e^{\omega_4 t} (\omega_4 - i\delta) (-i\omega_4 + \kappa_m - \omega_c)}{(\omega_4 - \omega_1)(\omega_4 - \omega_2)(\omega_4 - \omega_3)}
\end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= \frac{\chi_m e^{\omega_1 t} (\omega_1 - i\delta) (\omega_c - i\omega_1 - \kappa_m)}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_4)} + \\
&\frac{\chi_m e^{\omega_2 t} (\omega_2 - i\delta) (\omega_c - i\omega_2 - \kappa_m)}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_4)} + \\
&\frac{\chi_m e^{\omega_3 t} (\omega_3 - i\delta) (\omega_c - i\omega_3 - \kappa_m)}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_4)} + \\
&\frac{\chi_m e^{\omega_4 t} (\omega_4 - i\delta) (\omega_c - i\omega_4 - \kappa_m)}{(\omega_4 - \omega_1)(\omega_4 - \omega_2)(\omega_4 - \omega_3)}
\end{aligned} \tag{6.36}$$

$$\begin{aligned}
u_3(t) &= \frac{e^{\omega_1 t} [(\omega_1^2 + \omega_c^2 - \kappa_m^2)(\omega_1 - i\delta) + 2i\chi_m^2 (\omega_c - \kappa_m)]}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_4)} + \\
&\frac{e^{\omega_2 t} [(\omega_2^2 + \omega_c^2 - \kappa_m^2)(\omega_2 - i\delta) + 2i\chi_m^2 (\omega_c - \kappa_m)]}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_4)} + \\
&\frac{e^{\omega_3 t} [(\omega_3^2 + \omega_c^2 - \kappa_m^2)(\omega_3 - i\delta) + 2i\chi_m^2 (\omega_c - \kappa_m)]}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_4)} + \\
&\frac{e^{\omega_4 t} [(\omega_4^2 + \omega_c^2 - \kappa_m^2)(\omega_4 - i\delta) + 2i\chi_m^2 (\omega_c - \kappa_m)]}{(\omega_4 - \omega_1)(\omega_4 - \omega_2)(\omega_4 - \omega_3)}
\end{aligned} \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned}
u_4(t) = & \frac{2i\chi_m^2(\omega_c - \kappa_m)e^{\omega_1 t}}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_4)} + \\
& \frac{2i\chi_m^2(\omega_c - \kappa_m)e^{\omega_2 t}}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_4)} + \\
& \frac{2i\chi_m^2(\omega_c - \kappa_m)e^{\omega_3 t}}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_4)} + \\
& \frac{2i\chi_m^2(\omega_c - \kappa_m)e^{\omega_4 t}}{(\omega_4 - \omega_1)(\omega_4 - \omega_2)(\omega_4 - \omega_3)}
\end{aligned} \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned}
v_1(t) = & \frac{e^{\omega_1 t}[(\omega_1^2 + \delta^2)(\omega_1 - i\omega_c) + 2i\delta\chi_m^2]}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_4)} + \\
& \frac{e^{\omega_2 t}[(\omega_2^2 + \delta^2)(\omega_2 - i\omega_c) + 2i\delta\chi_m^2]}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_4)} + \\
& \frac{e^{\omega_3 t}[(\omega_3^2 + \delta^2)(\omega_3 - i\omega_c) + 2i\delta\chi_m^2]}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_4)} + \\
& \frac{e^{\omega_4 t}[(\omega_4^2 + \delta^2)(\omega_4 - i\omega_c) + 2i\delta\chi_m^2]}{(\omega_4 - \omega_1)(\omega_4 - \omega_2)(\omega_4 - \omega_3)}
\end{aligned} \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned}
v_2(t) = & \frac{[2i\delta\chi_m^2 - i\kappa_m(\omega_1^2 + \delta^2)]e^{\omega_1 t}}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_4)} + \\
& \frac{[2i\delta\chi_m^2 - i\kappa_m(\omega_2^2 + \delta^2)]e^{\omega_2 t}}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_4)} + \\
& \frac{[2i\delta\chi_m^2 - i\kappa_m(\omega_3^2 + \delta^2)]e^{\omega_3 t}}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_4)} + \\
& \frac{[2i\delta\chi_m^2 - i\kappa_m(\omega_4^2 + \delta^2)]e^{\omega_4 t}}{(\omega_4 - \omega_1)(\omega_4 - \omega_2)(\omega_4 - \omega_3)}
\end{aligned} \tag{6.40}$$

$$\begin{aligned}
v_3(t) = & \frac{-i\chi_m e^{\omega_1 t}(\omega_1 - i\delta)(\omega_1 - i\omega_c + i\kappa_m)}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_4)} + \\
& \frac{-i\chi_m e^{\omega_2 t}(\omega_2 - i\delta)(\omega_2 - i\omega_c + i\kappa_m)}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_4)} + \\
& \frac{-i\chi_m e^{\omega_3 t}(\omega_3 - i\delta)(\omega_3 - i\omega_c + i\kappa_m)}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_4)} + \\
& \frac{-i\chi_m e^{\omega_4 t}(\omega_4 - i\delta)(\omega_4 - i\omega_c + i\kappa_m)}{(\omega_4 - \omega_1)(\omega_4 - \omega_2)(\omega_4 - \omega_3)}
\end{aligned} \tag{6.41}$$

$$\begin{aligned}
v_4(t) = & \frac{-i\chi_m e^{\omega_1 t} (\omega_1 + i\delta)(\omega_1 - i\omega_c + i\kappa_m)}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_4)} + \\
& \frac{-i\chi_m e^{\omega_2 t} (\omega_2 + i\delta)(\omega_2 - i\omega_c + i\kappa_m)}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_4)} + \\
& \frac{-i\chi_m e^{\omega_3 t} (\omega_3 + i\delta)(\omega_3 - i\omega_c + i\kappa_m)}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_4)} + \\
& \frac{-i\chi_m e^{\omega_4 t} (\omega_4 + i\delta)(\omega_4 - i\omega_c + i\kappa_m)}{(\omega_4 - \omega_1)(\omega_4 - \omega_2)(\omega_4 - \omega_3)}
\end{aligned} \tag{6.42}$$

onde $\omega_{1,2,3,4}$ são as raízes que satisfazem a equação quártica

$$(s^2 + \omega_c^2 - \kappa_m^2)(s^2 + \delta^2) + (\kappa_m - \omega_c)4\delta\chi_m^2 = 0, \tag{6.43}$$

dadas por

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa_m^2}{2} - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\omega_c^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\xi}} \tag{6.44}$$

$$\omega_2 = -\sqrt{\frac{\kappa_m^2}{2} - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\omega_c^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\xi}} \tag{6.45}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{\kappa_m^2}{2} - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\omega_c^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\xi}} \tag{6.46}$$

$$\omega_4 = -\sqrt{\frac{\kappa_m^2}{2} - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\omega_c^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\xi}}, \tag{6.47}$$

com

$$\xi = (\delta^2 + \omega_c^2 - \kappa_m^2)^2 + 4\delta(\kappa_m - \omega_c)(\delta\kappa_m - 4\chi_m^2 + \delta\omega_c). \tag{6.48}$$

6.3 Apêndice III - Cálculo da Função de Wigner

Considerando o estado inicial (2.37), temos

$$\hat{\rho}(0) = |0, \alpha\rangle \langle \alpha, 0|$$

e assim

$$C(\eta_a, \eta_c, t) = \langle \alpha, 0 | \exp[\eta_a \hat{a}^\dagger(t) + \eta_c \hat{c}^\dagger(t) - \eta_a^* \hat{a}(t) + \eta_c^* \hat{c}(t) | 0, \alpha \rangle. \quad (6.49)$$

Usando a expansão dos operadores $\hat{a}(t)$ e $\hat{c}(t)$ (3.6, 3.7) e as relações (2.38), encontramos

$$C(\eta_a, \eta_c, t) = \exp[q\alpha - q^* \alpha^* - 1/2 (|q|^2 + |p|^2)], \quad (6.50)$$

onde

$$q = \eta_a u_4^* - \eta_a^* u_3 + \eta_c v_4^* - \eta_c^* v_3, \quad (6.51)$$

$$p = \eta_a u_2^* - \eta_a^* u_1 + \eta_c v_2^* - \eta_c^* v_1. \quad (6.52)$$

Assim, a função de Wigner (4.23) é dada por

$$W(\beta_a, \beta_c, t) = \frac{1}{\pi^4} \int d^2 \eta_a \int d^2 \eta_c e^{\beta_a \eta_a^* - \beta_a^* \eta_a + \beta_c \eta_c^* - \beta_c^* \eta_c} e^{q\alpha - q^* \alpha^* - 1/2 (|q|^2 + |p|^2)}. \quad (6.53)$$

Para a integração, abrimos novamente os coeficientes q e p , juntamos os termos em η_a e η_c e, para integrarmos inicialmente em η_a , explicitamos os termos independentes de η_a ,

$$\begin{aligned} W(\beta_a, \beta_c, t) &= \frac{1}{\pi^4} \int d^2 \eta_c \underbrace{\exp [-(d\eta_c^2 + c.c.) - (l\eta_c - c.c.) - b|\eta_c|^2]}_{A(\eta_c)} \quad (6.54) \\ &\quad \times \int d^2 \eta_a \underbrace{\exp [-(c\eta_a^2 + r\eta_a + c.c.) - (j\eta_a - c.c.) - a|\eta_a|^2]}_{B(\eta_a, \eta_c)}, \end{aligned}$$

onde *c.c.* significa complexo conjugado e

$$\begin{aligned}
a &= 1/2(|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 + |u_4|^2), \\
b &= 1/2(|v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 + |v_4|^2), \\
c &= -1/2(u_1^*u_2^* + u_3^*u_4^*), \\
d &= -1/2(v_1^*v_2^* + v_3^*v_4^*), \\
f &= 1/2(u_1^*v_1 + u_2^*v_2 + u_3^*v_3 + u_4^*v_4), \\
g &= -1/2(u_1^*v_2^* + u_2^*v_1^* + u_3^*v_4^* + u_4^*v_3^*), \\
j &= \beta_a^* - u_4^*\alpha - u_3^*\alpha^*, \\
l &= \beta_c^* - v_4^*\alpha - v_3^*\alpha^*, \\
r &= f\eta_c^* + g\eta_c.
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Considerando que η_a pode ser separado como $\eta_a = x+iy$, tal que $d^2\eta_a = dx dy$ (4.24), a primeira integração consiste em

$$\begin{aligned}
\int d^2\eta_a B(\eta_a, \eta_c) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \underbrace{e^{-(a+c+c^*)x^2 - (r+r^*+j-j^*)x}}_{D(x)} \\
&\quad \times \underbrace{e^{-(a-c-c^*)y^2 - i(r-r^*+j+j^*)y - 2i(c-c^*)xy}}_{E(x,y)}.
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Vamos integrar primeiramente em y ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy E(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(a-c-c^*)y^2 - [i(r-r^*+j+j^*) + 2(c-c^*)x]y}, \tag{6.57}$$

mas note que a integral é gaussiana, cuja solução é

$$\begin{aligned}
I_{gaussiana} &= \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-Ay^2 - By} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-A(y^2 + \frac{B}{A}y)} \\
&= e^{\frac{B^2}{4A}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-A(y + \frac{B}{2A})^2}}_{\sqrt{\frac{\pi}{A}}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}}.
\end{aligned} \tag{6.58}$$

Assim, a integração em y (6.57) resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy E(x, y) = \sqrt{\frac{\pi}{a - c - c^*}} \exp \left[\frac{[i(r - r^* + j + j^*) + 2(c - c^*)x]^2}{4(a - c - c^*)} \right]. \quad (6.59)$$

Portanto, a integral (6.56) torna-se

$$\int d^2 \eta_a B(\eta_a, \eta_c) = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-(a+c+c^*)x^2 - (r+r^*+j-j^*)x}}{\sqrt{a - c - c^*}} e^{\frac{[i(r-r^*+j+j^*)+2(c-c^*)x]^2}{4(a-c-c^*)}}, \quad (6.60)$$

restando a integração em x , que também é uma gaussiana e, embora seja mais trabalhosa, é resolvida da mesma forma que a integração em y , resultando

$$\begin{aligned} \int d^2 \eta_a B(\eta_a, \eta_c) &= \frac{\pi}{\sqrt{a + c + c^* + \frac{(c-c^*)^2}{a-c-c^*}}} \exp \left[\frac{-[r - r^* + j + j^*]^2}{4(a - c - c^*)} \right] \\ &\times \exp \left[\frac{[r + r^* + j - j^* + \frac{r-r^*+j+j^*}{a-c-c^*}(c - c^*)]^2}{4 \left(a + c + c^* + \frac{(c-c^*)^2}{a-c-c^*} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Substituindo a (6.61) na função de Wigner (6.54)

$$\begin{aligned} W(\beta_a, \beta_c, t) &= \frac{1}{\pi^3} \int d^2 \eta_c \frac{A(\eta_c)}{\sqrt{a + c + c^* + \frac{(c-c^*)^2}{a-c-c^*}}} \exp \left[\frac{-[r - r^* + j + j^*]^2}{4(a - c - c^*)} \right] \\ &\times \exp \left[\frac{[r + r^* + j - j^* + \frac{r-r^*+j+j^*}{a-c-c^*}(c - c^*)]^2}{4 \left(a + c + c^* + \frac{(c-c^*)^2}{a-c-c^*} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (6.62)$$

A integração em η_c , foi feita de maneira análoga à em η_a : abrindo-se os coeficientes dependentes de η_c ($A(\eta_c)$ e r), separando η_c em partes real e imaginária, $\eta_c = x + iy$, e resolvendo as integrais gaussianas em x e y . O procedimento é idêntico, porém demasiado longo, apresentaremos apenas o resultado final:

$$W(\beta_a, \beta_c, t) = \frac{\exp \left[\frac{N^2}{4I} + \frac{E^2}{4J} \right] \exp[V]}{\pi^2 \sqrt{[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2] I J}}, \quad (6.63)$$

onde os coeficientes $N, I, E, J, Q, R, S, T, U$ e V são:

$$\begin{aligned}
 N &= i(T - U), \\
 I &= R - Q - S, \\
 E &= T + U + \frac{(Q - S)(T - U)}{R - Q - S}, \\
 J &= Q + R + S + \frac{(Q - S)^2}{R - Q - S},
 \end{aligned} \tag{6.64}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= d - \frac{(g + f^*)^2(a - c - c^*)}{4[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2]} \\
 &\quad - \frac{2(c - c^*)(g^2 - f^{*2})}{4[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2]} \\
 &\quad + \frac{(g - f^*)^2(a + c + c^*)}{4[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2]},
 \end{aligned} \tag{6.65}$$

$$\begin{aligned}
 R &= b - \frac{2(g + f^*)(f + g^*)(a - c - c^*)}{4[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2]} \\
 &\quad - \frac{4(c - c^*)(gf - g^*f^*)}{4[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2]} \\
 &\quad + \frac{2(g - f^*)(f - g^*)(a + c + c^*)}{4[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2]},
 \end{aligned} \tag{6.66}$$

$$\begin{aligned}
 S &= d^* - \frac{(f + g^*)^2(a - c - c^*)}{4[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2]} \\
 &\quad - \frac{2(c - c^*)(f^2 - g^{*2})}{4[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2]} \\
 &\quad + \frac{(f - g^*)^2(a + c + c^*)}{4[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2]},
 \end{aligned} \tag{6.67}$$

$$\begin{aligned}
 T &= l - \frac{2(g + f^*)(j - j^*)(a - c - c^*)}{4[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2]} \\
 &\quad - \frac{4(c - c^*)(jg + j^*f^*)}{4[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2]} \\
 &\quad + \frac{2(g - f^*)(j + j^*)(a + c + c^*)}{4[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2]},
 \end{aligned} \tag{6.68}$$

$$\begin{aligned}
U = & -l^* - \frac{2(f+g^*)(j-j^*)(a-c-c^*)}{4[(a-c-c^*)(a+c+c^*)+(c-c^*)^2]} \\
& - \frac{4(c-c^*)(jf+j^*g^*)}{4[(a-c-c^*)(a+c+c^*)+(c-c^*)^2]} \\
& + \frac{2(f-g^*)(j+j^*)(a+c+c^*)}{4[(a-c-c^*)(a+c+c^*)+(c-c^*)^2]},
\end{aligned} \tag{6.69}$$

$$\begin{aligned}
V = & \frac{(j-j^*)^2(a-c-c^*)}{4[(a-c-c^*)(a+c+c^*)+(c-c^*)^2]} \\
& + \frac{2(c-c^*)(j^2-j^{*2})}{4[(a-c-c^*)(a+c+c^*)+(c-c^*)^2]} \\
& - \frac{(j+j^*)^2(a+c+c^*)}{4[(a-c-c^*)(a+c+c^*)+(c-c^*)^2]},
\end{aligned} \tag{6.70}$$

6.4 Apêndice IV - Cálculo da Wigner do Modo Óptico

Para a integração em β_c , devemos abrir os coeficientes da Eq.(6.63) para recuperar a dependência em β_c . Entretanto, observando os coeficientes (6.55), notamos que apenas l depende de β_c , de forma que basta abrir os termos que dependam de l e l^* , ou seja, apenas os que contêm T ou U , que, de acordo com as equações da (6.64), são N e E . Dessa forma, o único termo da Eq.(6.63) que ficará na integral em β_c será: $\exp\left[\frac{N^2}{4I} + \frac{E^2}{4J}\right]$. Usando as definições (6.64), obtemos para o argumento da exponencial

$$\frac{N^2}{4I} + \frac{E^2}{4J} = -\frac{(T-U)^2}{4(R-Q-S)} + \frac{\left[T+U + \frac{(Q-S)(T-U)}{R-Q-S}\right]^2}{4\left[Q+R+S + \frac{(Q-S)^2}{R-Q-S}\right]}, \tag{6.71}$$

juntando os termos em T^2, U^2 e TU encontramos

$$\frac{N^2}{4I} + \frac{E^2}{4J} = \frac{-[ST^2 + QU^2 + RTU]}{(R-Q-S)(Q+R+S) + (Q-S)^2}. \tag{6.72}$$

Note (6.68 e 6.69), entretanto, que podemos definir $T = T' + l$ e $U = U' - l^*$, então

$$\frac{N^2}{4I} + \frac{E^2}{4J} = \frac{-(2T'S + RU')l + (2U'Q + RT')l^* - Sl^2 - Ql^{*2} + R|l|^2}{(R - Q - S)(Q + R + S) + (Q - S)^2} + \underbrace{\frac{-(RT'U' + QU'^2 + ST'^2)}{(R - Q - S)(Q + R + S) + (Q - S)^2}}_A, \quad (6.73)$$

onde A independe de l ,

$$A = \frac{-(RT'U' + QU'^2 + ST'^2)}{(R - Q - S)(Q + R + S) + (Q - S)^2}. \quad (6.74)$$

Assim, a função de Wigner do modo óptico é reescrita como

$$W_a(\beta_a, t) = \frac{e^{V+A} \int d^2\beta_c \exp \left[\frac{-(2T'S + RU')l + (2U'Q + RT')l^* - Sl^2 - Ql^{*2} + R|l|^2}{(R - Q - S)(Q + R + S) + (Q - S)^2} \right]}{\pi^2 \sqrt{[(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2]} IJ}. \quad (6.75)$$

Usando a definição de l (6.55) e organizando os termos, a integral em β_c ,

$$Int_{\beta_c} \equiv \int d^2\beta_c \exp \left[\frac{-(2T'S + RU')l + (2U'Q + RT')l^* - Sl^2 - Ql^{*2} + R|l|^2}{(R - Q - S)(Q + R + S) + (Q - S)^2} \right],$$

torna-se

$$Int_{\beta_c} = \int d^2\beta_c \exp [B\beta_c^* + C\beta_c - S\beta_c^{*2} - Q\beta_c^2 + R|\beta_c|^2 + D], \quad (6.76)$$

onde

$$B = \frac{-2T'S - RU' + 2S(v_4^*\alpha + v_3^*\alpha^*) - R(v_4\alpha^* + v_3\alpha)}{(R - Q - S)(Q + R + S) + (Q - S)^2}, \quad (6.77)$$

$$C = \frac{2U'Q + RT' + 2Q(v_4\alpha^* + v_3\alpha) - R(v_4^*\alpha + v_3^*\alpha^*)}{(R - Q - S)(Q + R + S) + (Q - S)^2}, \quad (6.78)$$

$$D = \frac{(2T'S + RU')(v_4^*\alpha + v_3^*\alpha^*) - (2U'Q + RT')(v_4\alpha^* + v_3\alpha)}{(R - Q - S)(Q + R + S) + (Q - S)^2} + \frac{R|v_4\alpha^* + v_3\alpha|^2 - S(v_4^*\alpha + v_3^*\alpha^*)^2 - Q(v_4\alpha^* + v_3\alpha)^2}{(R - Q - S)(Q + R + S) + (Q - S)^2}. \quad (6.79)$$

Separando β_c em $\beta_c = x + iy$,

$$\begin{aligned} Int_{\beta_c} = e^D \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp[-(S + Q - R)x^2 + (B + C)x] \\ \times \exp[-(R - S - Q)y^2 - i(B - C)y + 2i(S - Q)xy], \end{aligned} \quad (6.80)$$

chegamos novamente a duas integrais gaussianas. Resolvendo em y a equação (6.80) torna-se

$$\begin{aligned} Int_{\beta_c} = \sqrt{\frac{\pi}{S + Q - R}} e^D \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-(S + Q - R)x^2 + (B + C)x] \\ \times \exp\left[\frac{[B - C - 2i(S - Q)x]^2}{4(S + Q - R)}\right], \end{aligned} \quad (6.81)$$

finalmente, integrando em x encontramos

$$Int_{\beta_c} = \frac{\pi \exp\left[D + \frac{(B-C)^2}{4(S+Q-R)}\right] \exp\left[\frac{[i(B-C)(S-Q) - (B+C)(S+Q-R)]^2}{4(S+Q-R)[(S+Q-R)^2 + (S-Q)^2]}\right]}{[(S + Q - R)^2 + (S - Q)^2]^{1/2}}, \quad (6.82)$$

e, portanto, a função de Wigner do modo óptico (6.75) é dada por

$$W_a(\beta_a, t) = \frac{e^{D+V+A}}{\pi\xi^{1/2}} \exp\left[\frac{(S + Q - R)(B^2 + C^2) - 2i(B^2 - C^2)(S - Q)}{2[(S + Q - R)^2 + (S - Q)^2]}\right], \quad (6.83)$$

onde

$$\xi = IJ [(a - c - c^*)(a + c + c^*) + (c - c^*)^2] [(S + Q - R)^2 + (S - Q)^2]. \quad (6.84)$$

6.5 Apêndice V - Coeficientes da Entropia

Obtida a função de Wigner do modo óptico (4.33), basta calcular a integral da Eq. (4.27) para obtermos a entropia linear dada pela Eq.(4.21). Substituindo a (4.33) na (4.27) obtemos

$$Tr(\rho_a^2) = \frac{1}{\pi\xi} \int d^2\beta_a e^{D+V+A} \exp \left[\frac{(S+Q-R)(B^2+C^2) - 2i(B^2-C^2)(S-Q)}{[(S+Q-R)^2 + (S-Q)^2]} \right], \quad (6.85)$$

onde A, B, C, D (através dos coeficientes T', U') e V dependem de j, j^* que dependem de β_a, β_a^* . Explicitamente

$$T' = j f_1 - j^* f_2, \quad (6.86)$$

$$U' = j f_3 - j^* f_4, \quad (6.87)$$

$$V = f_5 j^2 + f_6 j^{*2} - f_7 |j|^2, \quad (6.88)$$

onde

$$f_1 = \frac{2(g-f^*)(a+c+c^*) - 4g(c-c^*) - 2(g+f^*)(a-c-c^*)}{4[(a-c-c^*)(a+c+c^*) + (c-c^*)^2]}, \quad (6.89)$$

$$f_2 = \frac{4f^*(c-c^*) - 2(g-f^*)(a+c+c^*) - 2(g+f^*)(a-c-c^*)}{4[(a-c-c^*)(a+c+c^*) + (c-c^*)^2]}, \quad (6.90)$$

$$f_3 = \frac{2(f-g^*)(a+c+c^*) - 4f(c-c^*) - 2(f+g^*)(a-c-c^*)}{4[(a-c-c^*)(a+c+c^*) + (c-c^*)^2]}, \quad (6.91)$$

$$f_4 = \frac{4g^*(c-c^*) - 2(f-g^*)(a+c+c^*) - 2(f+g^*)(a-c-c^*)}{4[(a-c-c^*)(a+c+c^*) + (c-c^*)^2]}, \quad (6.92)$$

$$f_5 = \frac{-4c^*}{4[(a-c-c^*)(a+c+c^*) + (c-c^*)^2]}, \quad (6.93)$$

$$f_6 = \frac{-4c}{4[(a-c-c^*)(a+c+c^*) + (c-c^*)^2]}, \quad (6.94)$$

$$f_7 = \frac{a-c-c^*}{4[(a-c-c^*)(a+c+c^*) + (c-c^*)^2]}. \quad (6.95)$$

O procedimento para a integração β_a (6.85) é idêntico ao utilizado nas integrações anteriores: substitui-se as equações (6.86 e 6.87) em A, B, C e D (6.77,

6.78, 6.79 e 6.73) e, usando a definição de $j = \beta_a^* - u_4^* \alpha - u_3^* \alpha^*$ (6.55) e a separação $\beta_a = x + iy$, obtém-se novamente duas integrais gaussianas, cujas soluções conhecemos. Entretanto, os coeficientes se tornaram extremamente complexos, de forma que não foi possível obter uma expressão analítica simples. O resultado final para a entropia linear do modo óptico é

$$s_a(t) = 1 - \frac{\exp[Y^* + \frac{z^2}{4X}]}{\pi \xi \sqrt{t_5^2 - 4t_3 t_4}}, \quad (6.96)$$

onde

$$Y^* = t_6 - \frac{(t_1 - t_2)^2}{4Y}, \quad (6.97)$$

$$z = \frac{(t_1 - t_2)(t_4 - t_3)}{Y} - t_1 - t_2, \quad (6.98)$$

$$X = \frac{(t_4 - t_3)^2}{Y} - (t_3 + t_4 + t_5), \quad (6.99)$$

com

$$t_1 = 2k_1 - \frac{(h_1 - g_1)(h_3 - g_3)}{\Phi} + \frac{p_1 p_3}{\Theta}, \quad (6.100)$$

$$t_2 = 2k_2 - \frac{(h_2 - g_2)(h_3 - g_3)}{\Phi} + \frac{p_2 p_3}{\Theta}, \quad (6.101)$$

$$t_3 = 2k_4 - \frac{(h_2 - g_2)^2}{2\Phi} + \frac{p_2^2}{2\Theta}, \quad (6.102)$$

$$t_4 = 2k_5 - \frac{(h_1 - g_1)^2}{2\Phi} + \frac{p_1^2}{2\Theta}, \quad (6.103)$$

$$t_5 = 2k_6 - \frac{(h_2 - g_2)(h_1 - g_1)}{\Phi} + \frac{p_2 p_1}{\Theta}, \quad (6.104)$$

$$t_6 = 2k_3 - \frac{(h_3 - g_3)^2}{2\Phi} + \frac{p_3^2}{2\Theta} \quad (6.105)$$

e os novos coeficientes $g_i, h_i, k_i, p_i, \Theta$ e Φ são

$$g_1 = \frac{2Qf_3 - Rf_1}{R^2 - 4QS}, \quad (6.106)$$

$$g_2 = \frac{2Qf_4 + Rf_1}{R^2 - 4QS}, \quad (6.107)$$

$$g_3 = -g_1(\alpha u_4^*(t) + \alpha^* u_3^*(t)) - g_2(\alpha u_3(t) + \alpha^* u_4(t)) \quad (6.108)$$

$$+ \frac{R(\alpha v_4^*(t) + \alpha^* v_3^*(t))}{R^2 - 4QS} + \frac{2Q(\alpha v_3(t) + \alpha^* v_4(t))}{R^2 - 4QS},$$

$$h_1 = \frac{-2Sf_1 + Rf_3}{R^2 - 4QS}, \quad (6.109)$$

$$h_2 = \frac{2Sf_2 - Rf_4}{R^2 - 4QS}, \quad (6.110)$$

$$h_3 = -h_1(\alpha u_4^*(t) + \alpha^* u_3^*(t)) - h_2(\alpha u_3(t) + \alpha^* u_4(t)) \quad (6.111)$$

$$+ \frac{R(\alpha v_3(t) + \alpha^* v_4(t))}{R^2 - 4QS} + \frac{2S(\alpha v_4^*(t) + \alpha^* v_3^*(t))}{R^2 - 4QS},$$

$$k_1 = - \left[\frac{(2Sf_2 - Rf_4)(\alpha v_4^*(t) + \alpha^* v_3^*(t)) + (Rf_2 - 2Qf_4)(\alpha v_3(t) + \alpha^* v_4(t))}{R^2 - 4QS} \right]$$

$$- 2(\alpha u_3(t) + \alpha^* u_4(t)) \left[f_5 + \frac{Rf_1 f_3 - Sf_1^2 - Qf_3^2}{R^2 - 4QS} \right] \quad (6.112)$$

$$+ (\alpha u_4^*(t) + \alpha^* u_3^*(t)) \left[f_7 + \frac{R(f_1 f_4 + f_2 f_3) - 2Sf_1 f_2 - 2Qf_3 f_4}{R^2 - 4QS} \right]$$

$$k_2 = \left[\frac{(2Sf_1 - Rf_3)(\alpha v_4^*(t) + \alpha^* v_3^*(t)) + (Rf_1 - 2Qf_3)(\alpha v_3(t) + \alpha^* v_4(t))}{R^2 - 4QS} \right]$$

$$- 2(\alpha u_4^*(t) + \alpha^* u_3^*(t)) \left[f_6 + \frac{Rf_2 f_4 - Sf_2^2 - Qf_4^2}{R^2 - 4QS} \right] \quad (6.113)$$

$$+ (\alpha u_3(t) + \alpha^* u_4(t)) \left[f_7 + \frac{R(f_1 f_4 + f_2 f_3) - 2Sf_1 f_2 - 2Qf_3 f_4}{R^2 - 4QS} \right]$$

$$\begin{aligned}
k_3 = & \frac{(\alpha u_3 + \alpha^* u_4) [(2Sf_2 - Rf_4)(\alpha v_4^* + \alpha^* v_3^*) + (Rf_2 - 2Qf_4)(\alpha v_3 + \alpha^* v_4)]}{R^2 - 4QS} \\
& - \frac{(\alpha u_4^* + \alpha^* u_3^*) [(2Sf_1 - Rf_3)(\alpha v_4^* + \alpha^* v_3^*) + (Rf_1 - 2Qf_3)(\alpha v_3 + \alpha^* v_4)]}{R^2 - 4QS} \\
& + \frac{(\alpha^2 u_4^{*2} + \alpha^{*2} u_3^{*2} + 2|\alpha|^2 u_3^* u_4^*) (f_5 + Rf_1 f_3 - Sf_1^2 - Qf_3^2)}{R^2 - 4QS} \quad (6.114) \\
& - \frac{S [\alpha^2 v_4^{*2} + \alpha^{*2} v_3^{*2} + 2|\alpha|^2 v_3^* v_4^*]}{R^2 - 4QS} - \frac{Q [\alpha^2 v_3^2 + \alpha^{*2} v_4^2 + 2|\alpha|^2 v_3 v_4]}{R^2 - 4QS} \\
& - \frac{R [\alpha^2 v_3 v_4^* + \alpha^{*2} v_4 v_3^* + |\alpha|^2 (|v_3|^2 + |v_4|^2)]}{R^2 - 4QS}
\end{aligned}$$

$$k_4 = f_6 + \frac{Rf_2 f_4 - Sf_2^2 - Qf_4^2}{R^2 - 4QS} \quad (6.115)$$

$$k_5 = f_5 + \frac{Rf_1 f_3 - Sf_1^2 - Qf_3^2}{R^2 - 4QS} \quad (6.116)$$

$$k_6 = f_7 - \frac{R(f_1 f_4 + f_2 f_3) - 2Sf_1 f_2 - 2Qf_3 f_4}{R^2 - 4QS} \quad (6.117)$$

$$p_1 = h_1 \frac{2Q - R}{R - Q - S} + g_1 \frac{2S - R}{R - Q - S}, \quad (6.118)$$

$$p_2 = h_2 \frac{2Q - R}{R - Q - S} + g_2 \frac{2S - R}{R - Q - S}, \quad (6.119)$$

$$p_3 = h_3 \frac{2Q - R}{R - Q - S} + g_3 \frac{2S - R}{R - Q - S}, \quad (6.120)$$

$$\Theta = \frac{Q + R + S + (R - Q - S)(Q - S)^2}{R^2 - 4QS} \quad (6.121)$$

$$\Phi = \frac{R - Q - S}{R^2 - 4QS}, \quad (6.122)$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein and S. B. Preuss, *Akad. Wiss. Ber.*, **3**, 18 (1925).
- [2] P. Sokol, *Bose-Einstein Condensation*, by A. Griffin, D.W. Snoke, S. Stringari, Cambridge University Press, Cambridge, USA.
- [3] V. Bagnato, D. E. Pritchard and D. Kleppner, *Phys. Rev. A*, **35**, 4354 (1987).
- [4] W. D. Phillips and H. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 596 (1982).
- [5] M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 416 (1996).
- [6] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman and E. A. Cornell, *Science*, **269**, 198 (1995).
- [7] K. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3969 (1995).
- [8] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 1684 (1995).
- [9] C.H. Bennett, G. Brassard et al., *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1895 (1993).
- [10] D. Boschi et al., *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 1121 (1998).
- [11] Simon C. et al. , *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 4729 (2000).
- [12] H. D. Politzer, *Phys. Rev. A*, **43**, 6444 (1991).
- [13] L. You, M. Lewenstein, R. G. Glauber and J. Cooper, *Phys. Rev. A*, **53**, 329 (1996).
- [14] O. Morice, Y. Castin and J. Dalibard, *Phys. Rev. A*, **51**, 3896 (1995).
- [15] J. Javanainen, *Phys. Rev. A*, **54**, R4629 (1996).
- [16] C. K. Low and N. P. Bigelow, *Phys. Rev. A*, **58**, 4791 (1998).

- [17] M. G. Moore and P. Meystre, *Phys. Rev. A*, **59**, R1754 (1999).
- [18] S. Inouye, R. F. Low, S. Gupta, T. Pfau, A. Gorlitz, T. L. Gustavson, D. E. Pritvhard and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 4225 (2000).
- [19] H. Zeng, F. Lin and W. Zhang, *Phys. Lett. A*, **201**, 397 (1995).
- [20] G.A. Pratavia, *Phys. Rev. A*, **67**, 045602 (2003).
- [21] M. G. Moore O. Zobay and P. Meystre, *Phys. Rev. A*, **69**, 1491 (1999).
- [22] M.O. Scully and M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press (1997).
- [23] J. Parker, C. R. Stroud Jr., *Phys. Rev. A* **35**, 4226 (1987).
- [24] A. S. M. de Castro and V. V. Dodonov, *Journal of Russian Laser Research*, **23**, 93(2002).
- [25] M.G. Moore, O. Zobay and P. Meystre, *Phys. Rev. A*, **60**, 1491 1999.
- [26] M. Lewenstein, Li You, J. Cooper and K. Burnett, *Phys. Rev. A*, **50**, 2207(1994).
- [27] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin (1994).
- [28] A. J. Leggett, *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 307(2001).
- [29] A. Joshi and S.V. Lawande, *Curr. Sci.*, **82**, 816(2002).
- [30] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods For Physicists*, Academic Press, New York (1995).
- [31] K. J. McNeil and D. F. Walls, *Phys. Lett.*, **51A**, 233 (1975).
- [32] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley Longman (1994).
- [33] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton, NJ (1955).
- [34] H. Araki and E.H. Lieb, *Commun. Math. Phys.*, **18**, 160 (1070).
- [35] C.H. Bennett, *Phys. Scr.*, **T76**, 210 (1998).
- [36] V. Vedral et al., *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 2275 (1997).
- [37] V. Vedral and M.B. Plenio, *Phys. Rev. A*, **57**, 1619 (1998).
- [38] V.V. Dodonov, W.D. José and S.S. Mizrahi, *J. Opt. B*, **5**, S567 (2003).

