

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Solução de um Modelo de Vértices Assimétrico de Três Estados

Cláudio Silva de Melo
Orientador: Prof. Dr. Márcio J. Martins

Dissertação de mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Física da
Universidade Federal de São Carlos como
requisito parcial à obtenção do título de
Mestre em Física.

São Carlos
Fevereiro - 2005

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

M528sm

Melo, Cláudio Silva de.

Solução de um modelo de vértices assimétrico de três estados / Cláudio Silva de Melo. -- São Carlos : UFSCar, 2005.

63 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2005.

1. Teorias e física matemática. 2. Modelos integráveis. 3. Yang-Baxter (equação). 4. Modelo de dezenove vértices. 5. Equações de reflexão.I. Título.

CDD: 530.1 (20^a)

Agradecimentos

Ao Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos pelo apoio institucional e pelas facilidades oferecidas.

À FAPESP, pelo suporte financeiro.

Aos Profs. Márcio e Lauro por todas as oportunidades, pela orientação, amizade e motivação.

A minha querida Patrícia, pelo apoio e incentivo incondicional à realização desse trabalho.

Aos meus pais, meus irmãos e minha irmã por serem minha família.

Aos meus amigos pelos bons tempos de convivência.

Por fim, a Deus por essa maravilhosa teia de experiências, a vida.

Resumo

Nesta dissertação descrevemos primeiramente os conceitos e técnicas matemáticas relevantes a teoria dos modelos integráveis bidimensionais. O formalismo do Método do Espalhamento Inverso Quântico é aplicado a um modelo de vértices assimétricos de três estados com condições de contorno fechado e aberto. Determinamos então os autovalores e autovetores das respectivas matrizes de transferência pelo método do ansatz de Bethe algébrico.

Abstract

In this work we first review some of the techniques relevant to the theory of two-dimensional integrable models. We apply the Quantum Inverse Scattering approach to a class of three-state vertex model with both closed and open boundaries. The respective transfer matrices eigenvalues and eigenvectors are determined by the algebraic Bethe ansatz method.

Sumário

Introdução	1
1 Integrabilidade	4
2 Modelo de vértice de três estados	11
3 Solução Algébrica do Espectro	19
3.1 Condição de Contorno Fechado	19
3.2 Condição de Contorno Aberto	27
4 Conclusão	44
Apêndice A: Demonstração de Propriedades	47
Apêndice B: Funções Auxiliares e Identidades	53

Lista de Figuras

1	Rede quadrada com L linhas e colunas.	5
2	Configuração de vértice.	6
3	Geometria do Contorno.	7
4	Representação gráfica dos dezenove pesos de Boltzmann não nulos relativos a matriz $R_{\alpha_1^{(i,j)}, \alpha_2^{(i,j)}}^{\alpha_1^{(i+1,j)}, \alpha_2^{(i,j+1)}}(\lambda)$. Note que a simetria $U(1)$ ($\alpha_1^{(i,j)} + \alpha_2^{(i,j)} = \alpha_1^{(i+1,j)} + \alpha_2^{(i,j+1)}$) é satisfeita.	15

Introdução

Na mecânica estatística do equilíbrio, sistemas são geralmente modelados especificando um conjunto de estados $\{\sigma\}$ associado a uma coleção de N sítios de uma dada rede. Uma energia $E_\sigma(p_1, \dots, p_n)$ é associada a cada estado possível onde p_1, \dots, p_n são parâmetros específicos de um dado modelo. A energia livre F por sítio a uma temperatura T é determinada pelo seguinte limite

$$F = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_B T}{N} \ln Z, \quad (1)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e Z é a função de partição dado por

$$Z = \sum_{\sigma \in \{\text{estados}\}} e^{-\frac{E_\sigma(p_1, \dots, p_n)}{k_B T}} \quad (2)$$

Em geral, a solução do problema combinatorial associado a função de partição é extremamente sofisticado especialmente no caso de dimensões $d \geq 2$. Uma maneira alternativa é a utilização da técnica da matriz de transferência, cuja idéia básica é transformar a soma da função de partição em soma sobre índices de multiplicação de matrizes. Neste formalismo, o cálculo da função de partição é substituído por um problema de autovalores desta matriz. De fato, seja Γ_0 o maior autovalor da matriz de transferência, então a energia livre por sítio é

$$F = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_B T}{N} \ln \Gamma_0^L, \quad (3)$$

onde L é o número de sítios que definem o espaço da matriz de transferência.

Infelizmente, a dimensão da matriz de transferência cresce com a potência $N^{(d-1)/d}$ e dessa forma o cálculo do maior autovalor desta matriz é ainda uma admirável tarefa e geralmente um problema sem solução. Em duas dimensões entretanto, Baxter mostrou que este problema é em princípio tratável se olharmos para a classe de modelos bidimensionais cujas matrizes de transferência comutam entre si para valores distintos dos parâmetros p_1, \dots, p_n que caracterizam as interações do modelo. Em outras palavras, denotando esta matriz por $T(p_1, \dots, p_n)$

escolhemos famílias de modelos tais que

$$[T(p_1, \dots, p_n), T(p'_1, \dots, p'_n)] = 0 \quad \forall p_i, p'_j. \quad (4)$$

Desta condição segue imediatamente que a matriz de transferência torna-se uma função geradora de um número infinito de quantidades conservadas, e dizemos, portanto, que tais sistemas são integráveis à maneira clássica de Liouville.

Do ponto de vista histórico, a contribuição considerada como o marco inicial da elaboração de métodos exatos em sistemas quânticos unidimensionais ou clássicos bidimensionais foi a solução dada por H. Bethe em 1931 [1], para o modelo isotrópico de Heisenberg. Bethe utilizou uma hipótese para as funções de onda deste modelo que ficou conhecida com o nome de ansatz de Bethe. Outros grandes avanços foram a técnica da matriz de transferência desenvolvida por Kramers e Wannier em 1941 [2], que mais tarde desempenhou um papel fundamental na definição de integrabilidade, e a solução do modelo de Ising bidimensional dada por Onsager em 1944 [3]. No estudo do modelo totalmente anisotrópico de Heisenberg, Baxter [4] obteve condições de integrabilidade para os pesos de Boltzmann do modelo de 8-vértices equivalente. Paralelamente, no ansatz da solução de gás de Fermi interagente via potencial delta, condições similares foram encontradas por Gaudin [5] e Yang [6]. Atualmente, essas condições são conhecidas como a equação de Yang-Baxter. A importância dessa equação foi melhor compreendida com o advento do Método do Espalhamento Inverso Quântico desenvolvido pela escola de Leningrado [7] que unificou a técnica da matriz de transferência, a equação de Yang-Baxter e o ansatz de Bethe. Através do Método do Espalhamento Inverso Quântico a matriz de transferência ganhou o papel de uma função geradora de uma família de quantidades conservadas, o ansatz de Bethe, que torna-se trabalhoso para modelos que possuem um grande número de estados acessíveis, adquiri uma abordagem algébrica, que se fundamenta da comutatividade da matriz de transferência e por fim, passamos a melhor entender a estrutura algébrica da equação de Yang-Baxter. Subsequentemente, Sklyanin [8] generalizou o conceito de matriz de transferência comutante no caso de condição de contorno aberto. Tal extensão foi

construída no espírito do Método do Espalhamento Inverso Quântico e envolveu a utilização de duas novas matrizes K^\pm satisfazendo as chamadas equações de reflexão [8, 9] que garantem a integrabilidade na fronteira. Consequentemente, a equação de Yang-Baxter passa a ser condição fundamental de integrabilidade para modelo de vértices com condição de fronteira aberta ou fechada. O estudo de métodos que nos permitam obter soluções dessa equação representa, sem sombra de dúvida, um tema interessante.

Organizamos esta dissertação da seguinte forma. Na próxima seção introduzimos e analisamos as estruturas algébricas relacionadas a integrabilidade de modelos de vértices bidimensionais baseada no Método do Espalhamento Inverso Quântico. Na seção 2, exibimos um modelo de vértices de três estados com simetria de carga $U(1)$ obtido a partir de uma representação do grupo de braid através de um procedimento conhecido pelo nome de Baxterização. Também estudamos as soluções diagonais das equações de reflexão [8] e encontramos uma família de soluções de um parâmetro que nos leva a uma hamiltoniana integrável de cadeia aberta e spin 1. Na seção 3, utilizamos o formalismo algébrico do ansatz de Bethe para obtermos a expressão explícita dos autovetores e autovalores da correspondente matriz de transferência sujeita as condições de contorno fechado e aberto. A seção 4 é dedicada às nossas conclusões e comentários finais. Em particular, motivado no recente trabalho [10], apresentamos uma conjectura sobre o espectro de um modelo de vértices de N -estados integrável invariante pela simetria $U(1)$ com condições toroidais de contorno. Finalmente, no Apêndice A está demonstrado algumas das propriedades matemáticas e técnicas utilizadas no decorrer desse trabalho, e no Apêndice B estão exibidas as expressões e identidades usadas na construção do estado de uma e duas partículas definidos na seção 3.

1 Integrabilidade

A criação da versão quântica do Método do Espalhamento Inverso na década de setenta representou sem sombra de dúvida um marco no desenvolvimento do estudo de modelos bidimensionais integráveis. Esse método permitiu a unificação de vários conceitos importantes tais como a técnica da matriz de transferência, o ansatz de Bethe e as equações de Yang-Baxter. Atualmente, o método do espalhamento inverso constitui um assunto muito bem desenvolvido, possuindo conexões importantes em diversos ramos da Física Matemática [11, 12].

Uma das vantagens deste formalismo é que o ansatz de Bethe, usualmente trabalhoso para modelos com um grande número de graus de liberdade, adquire agora uma forma algébrica e em princípio de caráter universal para uma variedade de sistemas.

Nessa seção discutiremos as principais características desse método dentro do contexto de modelos de vértices bidimensionais. Considere uma rede quadrada com L linhas e colunas como está ilustrado na Figura 1. A cada cruzamento entre uma linha e uma coluna associamos um sítio da rede e ao conjunto das quatro ligações relativas a um sítio denominamos de vértice. Suponhamos que a cada ligação entre os sítios da rede seja associada uma variável discreta $\alpha_k^{(i,j)} = 1, \dots, \ell_k$. Ao conjunto das ligações referente a um dado vértice associamos um peso de Boltzmann $\mathcal{L}_{\alpha_1^{(i,j)}, \alpha_2^{(i,j)}}^{\alpha_1^{(i+1,j)}, \alpha_2^{(i,j+1)}}(\lambda)$ conforme a Figura 2, representando a soma da contribuição de energia de cada vértice. A variável contínua λ é conhecida como parâmetro espectral, caracterizando a curva dos pesos estatísticos exatamente solúveis.

O peso de Boltzmann $\mathcal{L}_{\alpha_1^{(i,j)}, \alpha_2^{(i,j)}}^{\alpha_1^{(i+1,j)}, \alpha_2^{(i,j+1)}}(\lambda)$ pode ser visto, para cada i -ésima linha como o elemento de matriz de um operador $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_i}(\lambda)$. Este operador é usualmente visto como uma matriz no espaço auxiliar $\mathcal{A} = \mathfrak{C}^{\ell_1}$, representando o número das configurações horizontais, cujo elementos são operadores que atuam no espaço quântico $V = \prod_{i=1}^L \mathfrak{C}^{\ell_2}$ correspondente as possíveis configurações verticais.

Impondo condições de contorno periódico em ambas direções horizontal e vertical da rede quadrada, podemos em princípio determinar a função de partição deste modelo de vértice com a ajuda do conceito da matriz de transferência [2]. Dividimos o sistema bidimensional em um

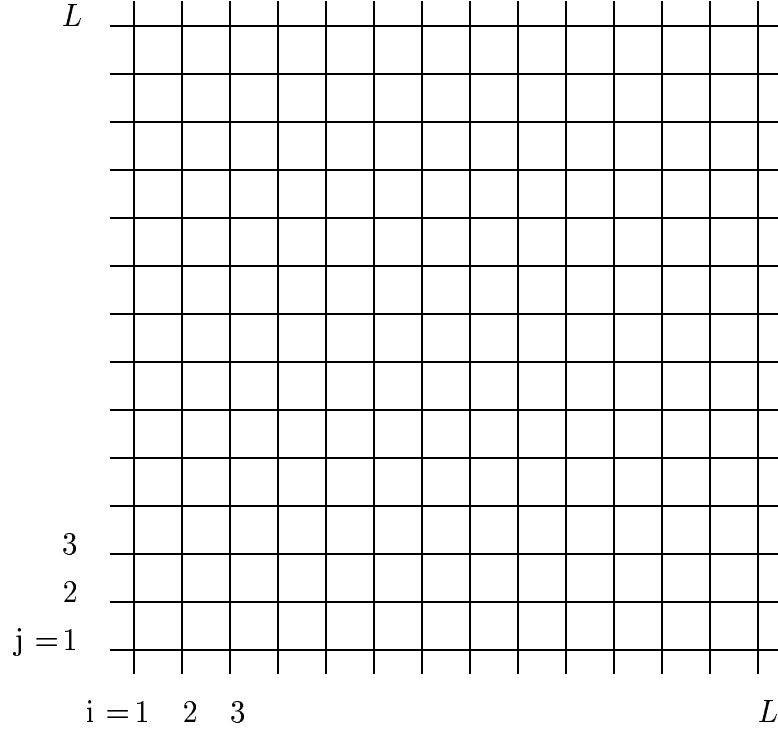


Figura 1: Rede quadrada com L linhas e colunas.

conjunto de subsistemas unidimensionais, de maneira que o peso estatístico de um dado estado possa ser escrito como um produto matricial de fatores $T(\lambda)$. Neste caso, a função de partição pode ser escrita como

$$Z = \text{Tr}_V [T^L(\lambda)], \quad (5)$$

onde Tr_V significa que o traço deve ser tomado no espaço V .

A matriz de transferência $T(\lambda)$, por sua vez, é determinada em termos do traço no espaço auxiliar de um produto ordenado de operadores $\mathcal{L}_{\mathcal{A}i}(\lambda)$, ou seja

$$T(\lambda) = \text{Tr}_{\mathcal{A}} [\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\lambda)], \quad (6)$$

sendo que $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\lambda)$ é conhecida pelo nome de matriz de monodromia e dada por

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\lambda) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}L}(\lambda) \cdots \mathcal{L}_{\mathcal{A}1}(\lambda). \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_{\alpha_1^{(i,j)}, \alpha_2^{(i,j)}}^{\alpha_1^{(i+1,j)}, \alpha_2^{(i,j+1)}}(\lambda) = \begin{array}{c|c} & \alpha_2^{(i,j+1)} \\ \hline \alpha_1^{(i,j)} & \alpha_1^{(i+1,j)} \\ \hline & \alpha_2^{(i,j)} \end{array}$$

Figura 2: Configuração de vértice.

Uma condição suficiente para a comutatividade da matriz de transferência para diferentes valores do parâmetro espectral,

$$[T(\lambda), T(\mu)] = 0 \quad \forall \lambda, \mu \quad (8)$$

é a existência de uma matriz inversível $R(\lambda, \mu)$ satisfazendo as seguintes relações locais

$$R(\lambda, \mu) \mathcal{L}_{\mathcal{A}j}(\lambda) \otimes \mathcal{L}_{\mathcal{A}j}(\mu) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}j}(\mu) \otimes \mathcal{L}_{\mathcal{A}j}(\lambda) R(\lambda, \mu) \quad j = 1, \dots, L, \quad (9)$$

onde é enfatizado que o produto tensorial em (9) refere-se ao espaço auxiliar \mathcal{A} . Mencionamos também que a relação local (9) estende-se globalmente para a matriz de monodromia, isto é

$$R(\lambda, \mu) \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\lambda) \otimes \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\mu) = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\mu) \otimes \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\lambda) R(\lambda, \mu). \quad (10)$$

A equação de Yang-Baxter emerge da estrutura algébrica (9) com a imposição da propriedade de associatividade. Considerando tal propriedade, existem duas maneiras de ordenarmos o produto de três matrizes $\mathcal{L}_{\mathcal{A}1}(\lambda_1)$, $\mathcal{L}_{\mathcal{A}2}(\lambda_2)$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{A}3}(\lambda_3)$ e a compatibilidade entre estas duas possibilidades implica em um vínculo para as matrizes $R(\lambda, \mu)$, denominado de equação de Yang-Baxter

$$R_{23}(\lambda_1, \lambda_2) R_{12}(\lambda_1, \lambda_3) R_{23}(\lambda_2, \lambda_3) = R_{12}(\lambda_2, \lambda_3) R_{23}(\lambda_1, \lambda_3) R_{12}(\lambda_1, \lambda_2), \quad (11)$$

onde $R_{ab}(\lambda, \mu)$ denota a matriz $R(\lambda, \mu)$ situada no espaço $\mathcal{A}_a \otimes \mathcal{A}_b$.

Um fato interessante ocorre quando a solução $R_{ab}(\lambda, \mu)$ da equação de Yang-Baxter satisfaz a propriedade de diferença $R_{ab}(\lambda, \mu) = R_{ab}(\lambda - \mu)$ e os espaços associados aos graus de liberdade vertical e horizontal são idênticos ($\ell_1 = \ell_2$). Nesse caso segue-se que uma possível representação para a álgebra (9) é dada por $\mathcal{L}_{ab}(\lambda) = P_{ab}R_{ab}(\lambda)$, onde P_{ab} é o operador de permutação dos espaços $\mathcal{A}_a \otimes \mathcal{A}_b$. Consequentemente, obter uma solução da equação de Yang-Baxter torna-se imediatamente equivalente a encontrar um modelo de vértice bidimensional exatamente solúvel com condição de contorno toroidal.

No final da década de oitenta, Sklyanin [8] generalizou este procedimento para o caso de condição de contorno aberto no espaço horizontal. Neste caso torna-se necessário a introdução de duas novas álgebras referentes as condições de integrabilidade nas fronteiras a direita e a esquerda, como mostra a Figura 3.



Figura 3: Geometria do Contorno.

As matrizes $K_{\mathcal{A}}^{\pm}(\lambda)$ descrevem as interações nas fronteiras e a compatibilidade com a condição de integrabilidade no volume (11) requer que estas matrizes satisfaçam as seguintes relações

$$\mathcal{L}_{12}(u-v)K_1^-(u)\mathcal{L}_{21}(u+v)K_2^-(v) = K_2^-(v)\mathcal{L}_{12}(u+v)K_1^-(u)\mathcal{L}_{21}(u-v) \quad (12)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{21}(v-u)^{t_1 t_2} K_1^+(u)^{t_1} \left[(\mathcal{L}_{21}(u+v)^{t_1})^{-1} \right]^{t_2} K_2^+(v)^{t_2} &= K_2^+(v)^{t_2} \left[(\mathcal{L}_{12}(u+v)^{t_2})^{-1} \right]^{t_1} \times \\ &K_1^+(u)^{t_1} \mathcal{L}_{12}(v-u)^{t_1 t_2}, \end{aligned} \quad (13)$$

onde o índice $k = 1$ ou 2 denota o espaço \mathcal{A}_k em que a matriz situa e t_k indica a operação de transposição no k -ésimo espaço.

Essas equações são denominadas por equações de Yang-Baxter de contorno ou equações de reflexão e de reflexão dual, respectivamente. Neste ponto gostaríamos de enfatizar que a equação (13) é de fato uma generalização da proposta original apresentada no trabalho de Sklyanin [8]. Nos casos em que o operador $\mathcal{L}_{ab}(\lambda)$ possui as simetrias de “crossing” generalizada, unitariedade e PT [8, 13], ou seja

$$\text{crossing : } [\mathcal{L}_{12}(u)^{t_2}]^{-1} = \frac{1}{\rho_c(u + \alpha)} M_2 \mathcal{L}_{21}(-u - 2\alpha)^{t_2} M_2^{-1} \quad (14)$$

$$\text{unitariedade : } \mathcal{L}_{12}(u) \mathcal{L}_{21}(-u) = \rho(u) \hat{1} \quad (15)$$

$$\text{PT : } \mathcal{L}_{21}(u) = \mathcal{L}_{12}(u)^{t_1 t_2}, \quad (16)$$

tal que $\rho(u)$ e $\rho_c(u)$ são funções de normalização, $\hat{1}$ é a matriz identidade, α é um parâmetro específico do modelo de vértice em questão e M é uma matriz simétrica satisfazendo a relação

$$[\mathcal{L}_{12}(u), M_{\mathcal{A}} \otimes M_{\mathcal{A}}] = 0, \quad (17)$$

a equação (13) reduz à equação original proposta por Sklyanin, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{12}(v - u) K_1^+(u)^{t_1} M_1^{-1} \mathcal{L}_{21}(-u - v - 2\alpha) M_1 K_2^+(v)^{t_2} &= K_2^+(v)^{t_2} M_1 \mathcal{L}_{12}(-u - v - 2\alpha) M_1^{-1} \times \\ &K_1^+(u)^{t_1} \mathcal{L}_{21}(v - u). \end{aligned} \quad (18)$$

Nas condições (14-17) não é difícil mostrarmos que os espaços das soluções $K_{\mathcal{A}}^{\pm}(\lambda)$ podem ser relacionados diretamente. Mais especificamente, este isomorfismo entre $K_{\mathcal{A}}^+(\lambda)$ e $K_{\mathcal{A}}^-(\lambda)$ é dado por

$$K_{\mathcal{A}}^+(u)^{t_{\mathcal{A}}} = M_{\mathcal{A}} K_{\mathcal{A}}^-(-u - \alpha). \quad (19)$$

O análogo da matriz de monodromia $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\lambda)$ para o caso de condição de contorno aberto

torna-se

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{A}}(u) &= \mathcal{L}_{\mathcal{A}L}(u) \dots \mathcal{L}_{\mathcal{A}2}(u) \mathcal{L}_{\mathcal{A}1}(u) K_{\mathcal{A}}(u) \mathcal{L}_{\mathcal{A}1}^{-1}(-u) \dots \mathcal{L}_{\mathcal{A}L}^{-1}(-u) \\ &= \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(u) K_{\mathcal{A}}(u) \mathcal{T}_{\mathcal{A}}^{-1}(-u). \end{aligned} \quad (20)$$

Esta matriz $U_{\mathcal{A}}(\lambda)$ é comumente denominada de operador de monodromia dupla. No Apêndice A demonstramos que a equação de reflexão (12) estende-se globalmente para o operador $U_{\mathcal{A}}(u)$, isto é

$$\mathcal{L}_{12}(u-v) U_1(u) \mathcal{L}_{21}(u+v) U_2(v) = U_2(v) \mathcal{L}_{12}(u+v) U_1(u) \mathcal{L}_{21}(u-v). \quad (21)$$

Finalmente, a matriz de transferência comutante $t(u)$ para condição de contorno aberto, na situação em que o operador de Lax $\mathcal{L}_{ab}(\lambda)$ possui a propriedade de unitariedade é

$$t(u) = Tr_{\mathcal{A}} [K_{\mathcal{A}}^+(u) U_{\mathcal{A}}(u)]. \quad (22)$$

A demonstração da comutatividade dessa matriz de transferência dupla, isto é

$$[t(\lambda), t(\mu)] = 0 \quad \forall \lambda, \mu, \quad (23)$$

no caso mais geral onde requer-se apenas a propriedade de unitariedade foi desenvolvida no Apêndice A.

Concluimos esta seção mencionando uma conexão entre os modelos de vértices bidimensionais e os modelos quânticos unidimensionais de spin. A Hamiltoniana destes últimos sistemas é obtida expandindo a matriz de transferência em torno de um ponto $\lambda = \lambda_0$ onde o operador $\mathcal{L}_{ab}(\lambda)$ calculado neste ponto torna-se proporcional ao permutador P_{ab} . Os operadores que satisfazem esta condição são denominados de soluções regulares da equação de Yang-Baxter.

Omitindo detalhes destes cálculos, encontra-se que para condição de contorno toroidal a

respectiva Hamiltoniana \mathcal{H}_f é dada por

$$\mathcal{H}_f = \sum_{i=1}^{L-1} H_{i,i+1} + H_{L,1}, \quad H_{i,i+1} = P_{i,i+1} \frac{d\mathcal{L}_{i,i+1}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0}. \quad (24)$$

Para condição de contorno aberto encontramos que quando $Tr_{\mathcal{A}} [K_{\mathcal{A}}^+(\lambda_0)] \neq 0$, a Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H}_a^{(1)} = \sum_{i=1}^{L-1} H_{i,i+1} + \frac{\zeta}{2\kappa} \frac{dK_1^-(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} + \frac{\zeta}{2} \frac{Tr_{\mathcal{A}} \left[\frac{dK_{\mathcal{A}}^+(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \right]}{Tr_{\mathcal{A}} [K_{\mathcal{A}}^+(\lambda_0)]}, \quad (25)$$

tal que os parâmetros ζ e κ são determinados pelas relações $\mathcal{L}_{ab}(\lambda_0) = \zeta P_{ab}$ e $K_{\mathcal{A}}^-(\lambda_0) = \kappa \hat{1}$.

Entretanto, na situação $Tr_{\mathcal{A}} [K_{\mathcal{A}}^+(\lambda_0)] = 0$, a respectiva expressão é bem mais complicada,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a^{(2)} &= \sum_{i=1}^{L-1} H_{i,i+1} + \frac{\zeta}{2\kappa} \frac{dK_1^-(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \\ &+ \frac{1}{\Upsilon} \left\{ Tr_{\mathcal{A}} \left[\frac{dK_{\mathcal{A}}^+(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} H_{\mathcal{A},L} \right] + \frac{1}{2} Tr_{\mathcal{A}} \left[K_{\mathcal{A}}^+(\lambda_0) P_{AL} \frac{d^2 \mathcal{L}_{AL}(\lambda)}{d\lambda^2} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \right] \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\zeta} Tr_{\mathcal{A}} [K_{\mathcal{A}}^+(\lambda_0) H_{\mathcal{A},L}^2] \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

onde

$$\Upsilon = Tr_{\mathcal{A}} \left[\frac{dK_{\mathcal{A}}^+(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \right] + \frac{2}{\zeta} Tr_{\mathcal{A}} [K_{\mathcal{A}}^+(\lambda_0) H_{\mathcal{A},L}]. \quad (27)$$

Na próxima seção discutiremos o formalismo apresentado acima no caso específico de um modelo de vértices com três estados ($\ell_1 = \ell_2 = 3$), cujos pesos de Boltzmann são assimétricos com relação a conjugação de carga $U(1)$. Por esta simetria entendemos que os únicos pesos de Boltzmann não nulos são aqueles cuja configurações de vértices satisfazem a relação $\alpha_1^{i,j} + \alpha_2^{i,j} = \alpha_1^{i+1,j} + \alpha_2^{i,j+1}$, veja Figura 2.

2 Modelo de vértice de três estados

Uma maneira de obtermos soluções da equação de Yang-Baxter é primeiramente estudarmos representações do grupo de braid ou de tranças de Artin [14]. Este grupo é gerado por um conjunto de geradores S_i ($i = 1, \dots, n$) e suas inversas sujeitos as seguintes relações

$$S_i S_{i\pm 1} S_i = S_{i\pm 1} S_i S_{i\pm 1} \quad (28)$$

$$S_i S_j = S_j S_i \quad |i - j| \geq 2. \quad (29)$$

Seja $S \in \mathfrak{C}^N \otimes \mathfrak{C}^N$ uma matriz $N^2 \times N^2$ não singular, dizemos então que $S_i = \hat{1}_1 \otimes \dots \otimes \hat{1}_{i-1} \otimes S \otimes \hat{1}_{i+1} \otimes \dots \otimes \hat{1}_n$ é uma representação do grupo de braid, desde que S seja solução da relação

$$(S \otimes \hat{1})(\hat{1} \otimes S)(S \otimes \hat{1}) = (\hat{1} \otimes S)(S \otimes \hat{1})(\hat{1} \otimes S), \quad (30)$$

onde o símbolo $\hat{1}_i$ denota a matriz identidade $N \times N$ no i -ésimo espaço.

Em princípio, dado uma representação S seria possível gerar soluções da equação de Yang-Baxter re-introduzindo o parâmetro espectral λ através de um procedimento elaborado por Jones [15], conhecido pelo nome de Baxterização e posteriormente desenvolvido na referência [16].

Nesta seção estamos interessados em explorar uma representação peculiar de braid, invariante pela simetria de carga $U(1)$, originalmente proposta pelos autores Couture, Lee e Schmeing [17]. Mais tarde, esta solução foi interpretada como um caso especial de braids coloridos [18] relacionados aparentemente com uma extensão Z_N das álgebras graduadas. Esta representação é especial pelo fato de estar em princípio ligada a representações específicas do grupo quântico $U_q[SL(2)]$ quando o parâmetro de deformação q torna-se raiz da unidade, $q^N = 1$ [19]. O caso $N = 2$ está diretamente ligado a um modelo de vértices de dois estados satisfazendo a condição de férmions livres, cujas propriedades são bem conhecidas na literatura [20]. Desta forma, apenas para $N \geq 3$ espera-se encontrar novos modelos de vértices com comportamento ainda por ser determinado.

Concentraremos nossa atenção no caso mais simples não trivial $N = 3$. Primeiramente, observamos que a maneira na qual Couture, Lee e Schmeing [17] apresentaram sua solução não é a mais adequada para uma análise posterior das propriedades do espectro da respectiva matriz de transferência pelo ansatz de Bethe. Entretanto, este problema pode em geral ser resolvido através de uma transformação compatível com a propriedade fundamental do braid (30). No caso específico de $N = 3$, o resultado final em coordenadas convenientes é dado por

$$S = \frac{1}{\sqrt{wq}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - q & 0 & \sqrt{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - q)(1 - wq) & 0 & \sqrt{q(1 - q)(q - w^{-1})} & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{q(1 - q)(q - w^{-1})} & 0 & wq & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q(wq - 1) & 0 & w^2 q^{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w^2 q^{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & wq^2 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

onde $w = e^{\left[\frac{2\pi I \varepsilon}{3}\right]}$ com $\varepsilon = \pm 1$.

Essa representação do braid possui três distintos autovalores, denotados por

$$\left(S_i + \frac{1}{\sqrt{w}}\right) \left(S_i - \frac{1}{\sqrt{wq}}\right) (S_i - \sqrt{wq}) = 0, \quad (32)$$

além de satisfazer a seguinte identidade

$$\begin{aligned} (S_i - \vartheta) S_{i\pm 1}^{-1} (S_i - \vartheta) - S_i^{-1} (S_{i\pm 1} - \vartheta) S_i^{-1} = \\ (S_{i\pm 1} - \vartheta) S_i^{-1} (S_{i\pm 1} - \vartheta) - S_{i\pm 1}^{-1} (S_i - \vartheta) S_{i\pm 1}^{-1}, \end{aligned} \quad (33)$$

onde $\vartheta = \frac{(-1+q)(-1+wq)}{\sqrt{wq}}$.

O conjunto das relações algébricas (28-33) satisfeitas por S_i , conforme demonstrado em [16], é a condição suficiente para gerar uma solução $R(\lambda)$ da equação de Yang-Baxter (11). A matriz $R(\lambda)$ é procurada como combinação linear de S , S^{-1} e a identidade $\hat{1}$ com coeficientes dependentes do parâmetro espectral λ . A solução final para a matriz $R(\lambda)$ é

$$R(\lambda) = \hat{1} \otimes \hat{1} + \frac{e^{2\lambda} - 1}{\vartheta} S + \frac{e^{-2\lambda} - 1}{\vartheta} S^{-1}. \quad (34)$$

Com objetivo de facilitar futuros cálculos algébricos é útil explicitar uma representação da matriz $R(\lambda)$ com os respectivos pesos de Boltzmann simplificados. Denotando $q = e^{2I\gamma}$ e após uma segunda transformação compatível com a equação de Yang-Baxter, encontramos que a matriz $R(\lambda)$ pode ser reescrita na seguinte forma

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda) & 0 & b(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(\lambda) & 0 & d(\lambda) & 0 & e(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & b_{12}(\lambda) & 0 & h(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{12}(\lambda) & 0 & g(\lambda) & 0 & d_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1(\lambda) & 0 & b_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & e_1(\lambda) & 0 & d_{13}(\lambda) & 0 & c_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{13}(\lambda) & 0 & f_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (35)$$

onde os respectivos pesos são dados por

$$a(x) = \sinh [x + I\gamma] \sinh \left[x + I\left(\gamma + \frac{\varepsilon\pi}{3}\right) \right] \quad (36a)$$

$$a_1(x) = \sinh [x - I\gamma] \sinh \left[x - I\left(\gamma + \frac{\varepsilon\pi}{3}\right) \right] \quad (36b)$$

$$b(x) = b_{12}(x) = \sinh [x] \sinh \left[x + I\left(\gamma + \frac{\varepsilon\pi}{3}\right) \right] \quad (36c)$$

$$b_1(x) = b_{13}(x) = -\sinh [x] \sinh [x - I\gamma] \quad (36d)$$

$$c(x) = c_1(x) = \sinh [I\gamma] \sinh \left[I\left(\gamma + \frac{\varepsilon\pi}{3}\right) \right] \quad (36e)$$

$$d(x) = d_1(x) = d_{12}(x) = d_{13}(x) = -\sinh [x] \sqrt{\sinh [I\gamma] \sinh \left[I\left(\frac{2\varepsilon\pi}{3} - \gamma\right) \right]} \quad (36f)$$

$$e(x) = e_1(x) = \sinh [x] \sinh \left[x + I\frac{\varepsilon\pi}{3} \right] \quad (36g)$$

$$f(x) = h(x) = \sinh [I\gamma] \sinh \left[x + I\left(\gamma + \frac{\varepsilon\pi}{3}\right) \right] \quad (36h)$$

$$f_1(x) = h_1(x) = -\sinh [x - I\gamma] \sinh \left[I\left(\gamma + \frac{\varepsilon\pi}{3}\right) \right] \quad (36i)$$

$$g(x) = \sinh [I\gamma] \sinh \left[I\left(\gamma + \frac{\varepsilon\pi}{3}\right) \right] + \sinh [x] \sinh \left[x - I\frac{\varepsilon\pi}{3} \right]. \quad (36j)$$

Na Figura 4 ilustramos os dezenove pesos de Boltzmann não nulos em termos dos três possíveis valores de carga $\pm, 0$ referentes a invariância pela simetria $U(1)$. Para valores arbitrários de γ , vemos que a matriz $R(\lambda)$ (35,36) é bastante diferente daquelas associadas a conhecidos modelos de vértices de três estados, tais como o modelo de Fattsev-Zamolodchikov [21]¹ e Izerpin-Korepin [22]. Ressaltamos também que muitos dos pesos de Boltzmann de $R(\lambda)$ (35,36) são assimétricos com relação a conjugação de carga ($+ \leftrightarrow -$) $U(1)$. Por esta razão, o operador de Lax $\mathcal{L}_{12}(\lambda)$ associado a este modelo não satisfaz propriedades de “crossing” usuais, mas apenas uma generalização desta dada por

$$[\mathcal{L}_{12}(u)^{t_2}]^{-1} = \frac{1}{\rho_c(u - \frac{I\pi\varepsilon}{3} + I\pi\mathcal{Z})} \mathcal{L}_{21}\left(-u + \frac{2I\pi\varepsilon}{3} - 2I\pi\mathcal{Z}\right)^{t_2}, \quad (37)$$

¹Para o valor específico $\gamma = -\frac{2\pi\varepsilon}{3}$, o modelo (35,36) torna-se equivalente a aquele proposto por Fattsev-Zamolodchikov.

onde $\rho_c(\lambda) = \frac{1}{16} \frac{\sinh[3\lambda]}{\sinh[\lambda]}$ e \mathcal{Z} é um inteiro.

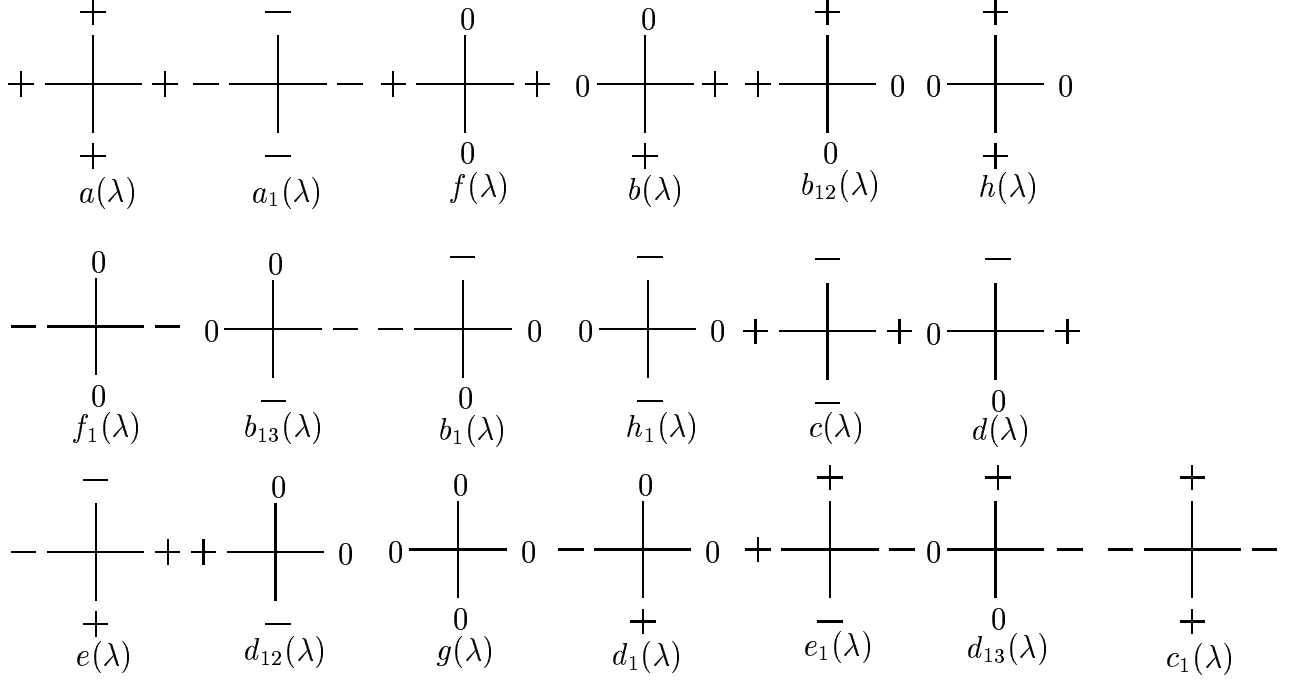


Figura 4: Representação gráfica dos dezoito pesos de Boltzmann não nulos relativos a matriz $R_{\alpha_1^{(i,j)}, \alpha_2^{(i,j)}}^{\alpha_1^{(i+1,j)}, \alpha_2^{(i,j+1)}}(\lambda)$. Note que a simetria U(1) ($\alpha_1^{(i,j)} + \alpha_2^{(i,j)} = \alpha_1^{(i+1,j)} + \alpha_2^{(i,j+1)}$) é satisfeita.

Outra propriedade importante da matriz $R(\lambda)$ (35,36) é que esta é invariante pelas simetrias P e T separadamente, isto é

$$\mathcal{L}_{12}(\lambda) = \mathcal{L}_{21}(\lambda) = \mathcal{L}_{12}(\lambda)^{t_1 t_2}. \quad (38)$$

Todas estas propriedades mostram que é possível procurar agora as matrizes de reflexão $K_{\mathcal{A}}^{\pm}(\lambda)$ dentro do formalismo discutido na seção 1. Em outras palavras é suficiente determinarmos $K_{\mathcal{A}}^{-}(\lambda)$ através da equação de reflexão (12), desde que a matriz de reflexão $K_{\mathcal{A}}^{+}(\lambda)$ na fronteira oposta deverá ser dada diretamente pelo isomorfismo

$$K_{\mathcal{A}}^{+}(\lambda) = K_{\mathcal{A}}^{-}\left(\frac{I\pi\varepsilon}{3} - I\pi\mathcal{Z} - \lambda\right). \quad (39)$$

Neste trabalho estamos interessados nas condições de fronteiras mais simples possíveis. Estas são aquelas que comutam com a simetria do volume, e portanto possuem a seguinte forma diagonal

$$K_{\mathcal{A}}^-(u) = \begin{pmatrix} Y_1(u) & 0 & 0 \\ 0 & Y_2(u) & 0 \\ 0 & 0 & Y_3(u) \end{pmatrix}_{\mathcal{A}}. \quad (40)$$

Substituindo o ansatz $K^-(u)$ representado por (40) em (12) encontramos várias relações funcionais entre os elementos $Y_j(u)$. Entretanto, poucas delas são realmente independentes e as mais simples podem ser escritas na forma

$$\frac{Y_2(u)}{Y_1(u)} = - \frac{b(u_+)f(u_-)\frac{Y_2(v)}{Y_1(v)} - b(u_-)f(u_+)}{b(u_-)h(u_+)\frac{Y_2(v)}{Y_1(v)} - b(u_+)h(u_-)} \quad (41)$$

$$\frac{Y_3(u)}{Y_2(u)} = - \frac{b_1(u_+)h_1(u_-)\frac{Y_3(v)}{Y_2(v)} - b_1(u_-)h_1(u_+)}{b_1(u_-)f_1(u_+)\frac{Y_3(v)}{Y_2(v)} - b_1(u_+)f_1(u_-)}, \quad (42)$$

onde $u_{\pm} = u \pm v$.

Substituindo os pesos (36) concluímos que essas equações são separáveis somente se as razões $\frac{Y_2(u)}{Y_1(u)}$ e $\frac{Y_3(u)}{Y_2(u)}$ forem fixadas na seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{Y_2(u)}{Y_1(u)} &= \frac{\cosh [u] - \beta_1 \sinh [u]}{\cosh [u] + \beta_1 \sinh [u]}, \\ \frac{Y_3(u)}{Y_2(u)} &= \frac{\cosh [u] - \beta_2 \sinh [u]}{\cosh [u] + \beta_2 \sinh [u]}, \end{aligned} \quad (43)$$

onde β_1 e β_2 são constantes arbitrárias.

As relações acima permitem escrevermos uma proposta para as funções $Y_j(u)$ em termos de um fator de normalização global. Substituindo as equações (43) em (12) encontramos que

todas as relações funcionais são satisfeitas se as constantes β_1 e β_2 são fixadas por

$$\beta_1 = \cosh [\xi_-] \quad \beta_2 = \cosh \left[\xi_- + I \frac{\pi \varepsilon}{3} \right], \quad (44)$$

onde ξ_- é um parâmetro livre.

Simplificando esses resultados concluímos que os elementos da matriz $K_{\mathcal{A}}^-(\lambda)$ são dados por

$$Y_1(\lambda) = \sinh \left[\xi_- - \frac{I\varepsilon\pi}{6} + \lambda \right] \sinh \left[\xi_- + \frac{I\varepsilon\pi}{6} + \lambda \right] \quad (45a)$$

$$Y_2(\lambda) = \sinh \left[\xi_- - \frac{I\varepsilon\pi}{6} - \lambda \right] \sinh \left[\xi_- + \frac{I\varepsilon\pi}{6} + \lambda \right] \quad (45b)$$

$$Y_3(\lambda) = \sinh \left[\xi_- - \frac{I\varepsilon\pi}{6} - \lambda \right] \sinh \left[\xi_- + \frac{I\varepsilon\pi}{6} - \lambda \right]. \quad (45c)$$

Considerando o isomorfismo (39), segue que a matriz $K_{\mathcal{A}}^+(\lambda)$ é dada por

$$K_{\mathcal{A}}^+(u) = \begin{pmatrix} Z_1(u) & 0 & 0 \\ 0 & Z_2(u) & 0 \\ 0 & 0 & Z_3(u) \end{pmatrix}_{\mathcal{A}}, \quad (46)$$

onde

$$Z_1(\lambda) = \sinh \left[\xi_+ - \lambda + \frac{I\pi\varepsilon}{6} - I\pi\mathcal{Z} \right] \sinh \left[\xi_+ - \lambda + \frac{I\varepsilon\pi}{2} - I\pi\mathcal{Z} \right] \quad (47a)$$

$$Z_2(\lambda) = \sinh \left[\xi_+ + \lambda - \frac{I\pi\varepsilon}{2} + I\pi\mathcal{Z} \right] \sinh \left[\xi_+ - \lambda + \frac{I\varepsilon\pi}{2} - I\pi\mathcal{Z} \right] \quad (47b)$$

$$Z_3(\lambda) = \sinh \left[\xi_+ + \lambda - \frac{I\pi\varepsilon}{2} + I\pi\mathcal{Z} \right] \sinh \left[\xi_+ + \lambda - \frac{I\varepsilon\pi}{6} + I\pi\mathcal{Z} \right], \quad (47c)$$

tal que ξ_+ é também um parâmetro livre.

De posse das matrizes $K_{\mathcal{A}}^{\pm}(\lambda)$ e $R(\lambda)$ podemos construir as matrizes de transferência para as condições de contorno aberto e fechado, e conseqüentemente as respectivas Hamiltonianas de spin. Aqui observamos que no nosso caso $Tr_{\mathcal{A}} [K_{\mathcal{A}}^+(0)] = 0$ e portanto os cálculos referentes

a Hamiltoniana com condição de contorno aberto segue da expressão (26). O resultado final para as Hamiltonianas com condições de contorno aberto e fechado em termos de matrizes de spin-1 são:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_a^{(2)} &= \sum_{i=1}^{L-1} H_{i,i+1} + \frac{\sinh [I\gamma] \sinh [I\gamma + \frac{I\pi\varepsilon}{3}]}{2 \sinh [\xi_- + \frac{I\pi\varepsilon}{6}] \sinh [\xi_- - \frac{I\pi\varepsilon}{6}]} \left(\sinh [2\xi_-] S_1^z + \sinh \left[\frac{I\pi\varepsilon}{3} \right] S_1^z S_1^z \right) \\
&\quad + \frac{\sinh [I\gamma] \sinh [I\gamma + \frac{I\pi\varepsilon}{3}]}{2 \sinh [\xi_+ - I\gamma - \frac{I\pi\varepsilon}{2}] \sinh [\xi_+ - I\gamma - \frac{5\pi\varepsilon}{6}]} \left(\sinh \left[2\xi_+ - 2I\gamma - \frac{I\pi\varepsilon}{3} \right] S_L^z \right. \\
&\quad \left. + \sinh \left[\frac{I\pi\varepsilon}{3} \right] S_L^z S_L^z \right), \\
\mathcal{H}_f &= \sum_{i=1}^{L-1} H_{i,i+1} + H_{L,1},
\end{aligned} \tag{48}$$

onde a expressão do termo do volume é

$$\begin{aligned}
H_{i,i+1} &= \sinh \left[2I\gamma + \frac{I\pi\varepsilon}{3} \right] S_i^z S_{i+1}^z (S_i^z + S_{i+1}^z) \\
&\quad + \cosh \left[I\gamma + \frac{I\pi\varepsilon}{3} \right] \sinh [I\gamma] [(S_i^z + S_i^z S_i^z)(\hat{1} - S_{i+1}^z S_{i+1}^z) + (\hat{1} - S_i^z S_i^z)(S_{i+1}^z S_{i+1}^z + S_{i+1}^z)] \\
&\quad + \cosh [I\gamma] \sinh \left[I\gamma + \frac{I\pi\varepsilon}{3} \right] [(S_i^z - S_i^z S_i^z)(\hat{1} - S_{i+1}^z S_{i+1}^z) + (\hat{1} - S_i^z S_i^z)(S_{i+1}^z - S_{i+1}^z S_{i+1}^z)] \\
&\quad + 2 \sinh \left[\frac{I\pi\varepsilon}{3} \right] [S_i^+ S_i^+ S_{i+1}^- S_{i+1}^- + S_i^- S_i^- S_{i+1}^+ S_{i+1}^+ - (\hat{1} - S_i^z S_i^z)(\hat{1} - S_{i+1}^z S_{i+1}^z)] \\
&\quad + \sqrt{\sinh [I\gamma] \sinh \left[I\left(\gamma - \frac{2\varepsilon\pi}{3}\right) \right]} [S_i^z S_i^+ S_{i+1}^z S_{i+1}^- + S_i^+ S_i^z S_{i+1}^- S_{i+1}^z + S_i^- S_i^z S_{i+1}^+ S_{i+1}^z \\
&\quad + S_i^z S_i^- S_{i+1}^z S_{i+1}^+] \\
&\quad + 2 \sinh \left[I\gamma + \frac{I\pi\varepsilon}{3} \right] [S_i^z S_i^+ S_{i+1}^- S_{i+1}^z + S_i^- S_i^z S_{i+1}^z S_{i+1}^+] \\
&\quad + 2 \sinh [I\gamma] [S_i^+ S_i^z S_{i+1}^z S_{i+1}^- + S_i^z S_i^- S_{i+1}^+ S_{i+1}^z].
\end{aligned} \tag{49}$$

Na próxima seção diagonalizaremos as matrizes de transferência $T(\lambda)$ e $t(\lambda)$, determinando seus autovetores e autovalores pelo Método do Espalhamento Inverso Quântico [11].

3 Solução Algébrica do Espectro

Nessa seção, através do formalismo algébrico do ansatz de Bethe, abordaremos o problema de diagonalização das duas matrizes de transferência (6,22) referentes ao modelo de vértices (35,36) com condições de contorno fechado e aberto.

3.1 Condição de Contorno Fechado

O primeiro passo para a diagonalização da matriz de transferência (6) do modelo de vértices (35,36) com condição de contorno toroidal é representar a matriz de monodromia de forma conveniente. Previa experiência com modelos de vértices de três estados [23] sugerem adotar a seguinte representação

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc} A_1(\lambda) & B_{12}(\lambda) & B_{13}(\lambda) \\ C_{21}(\lambda) & A_2(\lambda) & B_{23}(\lambda) \\ C_{31}(\lambda) & C_{32}(\lambda) & A_3(\lambda) \end{array} \right)_{\mathcal{A}}, \quad (50)$$

donde segue-se imediatamente que a matriz de transferência é dada por

$$T(\lambda) = A_1(\lambda) + A_2(\lambda) + A_3(\lambda). \quad (51)$$

O próximo procedimento para a diagonalização de $T(\lambda)$ consiste na determinação de um estado de referência $|0\rangle$ tal que sua atuação em $T(\lambda)$ seja conhecida exatamente. Em geral, a determinação deste pseudovácuo para $T(\lambda)$ é um trabalho árduo, o que felizmente não ocorre no nosso caso. Inspeção direta das propriedades de triangularidade do operador de Lax $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_i}(\lambda)$ nos sugere que um possível vetor é o seguinte estado ferromagnético

$$|0\rangle = \prod_{j=1}^L \otimes \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)_j, \quad (52)$$

o qual possui as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
A_1(\lambda) |0\rangle &= a^L(\lambda) |0\rangle, \quad A_2(\lambda) |0\rangle = b^L(\lambda) |0\rangle, \quad A_3(\lambda) |0\rangle = e^L(\lambda) |0\rangle \\
C_{32}(\lambda) |0\rangle &= 0, \quad B_{23}(\lambda) |0\rangle \neq 0 \\
C_{1i}(\lambda) |0\rangle &= 0, \quad B_{1i}(\lambda) |0\rangle \neq 0, \quad i = 2, 3 \\
T(\lambda) |0\rangle &= ([a(\lambda)]^L + [b(\lambda)]^L + [e(\lambda)]^L) |0\rangle.
\end{aligned} \tag{53}$$

A idéia agora é escrever possíveis autovetores de $T(\lambda)$ como combinações lineares dos operadores de criação $B_{12}(\lambda)$, $B_{13}(\lambda)$ e $B_{23}(\lambda)$. Explorando as relações de comutação entre a diagonal $A_i(\lambda)$ e os operadores de criação que podem ser derivadas da equação (10), concluímos que um provável autovetor é

$$|\Phi_1(\lambda_1)\rangle = \Phi_1(\lambda_1) |0\rangle = B_{12}(\lambda_1) |0\rangle, \tag{54}$$

o qual denotaremos por estado de uma partícula, sendo λ_1 um parâmetro a ser determinado.

No cálculo do autovalor do estado de uma partícula são utilizados as seguintes relações de comutação provenientes da álgebra (10)

$$A_1(\lambda)B_{12}(\mu) = \frac{a(\mu - \lambda)}{b(\mu - \lambda)}B_{12}(\mu)A_1(\lambda) - \frac{h(\mu - \lambda)}{b(\mu - \lambda)}B_{12}(\lambda)A_1(\mu), \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
A_3(\lambda)B_{12}(\mu) &= \frac{b_1(\lambda - \mu)}{e(\lambda - \mu)}B_{12}(\mu)A_3(\lambda) - \frac{d(\lambda - \mu)}{e(\lambda - \mu)}B_{23}(\lambda)A_2(\mu) + \\
&+ \frac{f_1(\lambda - \mu)}{e(\lambda - \mu)}B_{13}(\mu)C_{32}(\lambda) - \frac{c(\lambda - \mu)}{e(\lambda - \mu)}B_{13}(\lambda)C_{32}(\mu),
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
A_2(\lambda)B_{12}(\mu) &= \frac{g(\lambda - \mu)}{b(\lambda - \mu)}B_{12}(\mu)A_2(\lambda) - \frac{f(\lambda - \mu)}{b(\lambda - \mu)}B_{12}(\lambda)A_2(\mu) + \\
&+ \frac{d(\lambda - \mu)}{b(\lambda - \mu)}A_1(\mu)B_{23}(\lambda) + \frac{d_{13}(\lambda - \mu)}{b(\lambda - \mu)}B_{13}(\mu)C_{21}(\lambda),
\end{aligned} \tag{57}$$

Notamos entretanto que a equação (57) não está na sua forma ideal, pois um dos operadores de criação $B_{23}(\lambda)$ aparece a direita da relação de comutação. A idéia central do método é ordenar os operadores de criação e aniquilação de modo que estes possam atuar a esquerda e a direita do estado de referência, respectivamente. Tal propriedade pode ser recuperada com o auxílio da relação

$$\begin{aligned} A_1(\mu)B_{23}(\lambda) &= \frac{b(\lambda - \mu)}{e(\lambda - \mu)}B_{23}(\lambda)A_1(\mu) - \frac{d_1(\lambda - \mu)}{e(\lambda - \mu)}B_{12}(\mu)A_2(\lambda) + \\ &+ \frac{f(\lambda - \mu)}{e(\lambda - \mu)}B_{13}(\lambda)C_{21}(\mu) - \frac{c_1(\lambda - \mu)}{e(\lambda - \mu)}B_{13}(\mu)C_{21}(\lambda). \end{aligned} \quad (58)$$

Eliminando o termo $A_1(\mu)B_{23}(\lambda)$ da equação (57) através de (58) encontramos

$$\begin{aligned} A_2(\lambda)B_{12}(\mu) &= \frac{g_r(\lambda - \mu)}{b(\lambda - \mu)}B_{12}(\mu)A_2(\lambda) - \frac{f(\lambda - \mu)}{b(\lambda - \mu)}B_{12}(\lambda)A_2(\mu) + \\ &+ \frac{d(\lambda - \mu)}{e(\lambda - \mu)}B_{23}(\lambda)A_1(\mu) + \frac{d(\lambda - \mu)f(\lambda - \mu)}{b(\lambda - \mu)e(\lambda - \mu)}B_{13}(\lambda)C_{21}(\mu) + \\ &+ \frac{d_{13}(\lambda - \mu)e(\lambda - \mu) - d(\lambda - \mu)c_1(\lambda - \mu)}{b(\lambda - \mu)e(\lambda - \mu)}B_{13}(\mu)C_{21}(\lambda), \end{aligned} \quad (59)$$

onde $g_r(\lambda) = g(\lambda) - \frac{d(\lambda)d_1(\lambda)}{e(\lambda)}$.

Aplicando o vetor $|0\rangle$ nas equações (55,56,59) obtemos que o primeiro termo do lado direito dessas equações contribuem para o autovalor da matriz de transferência e são denominados termos “queridos”. Os termos restantes não proporcionais ao autovetor são denominados termos “indesejáveis” ou “não-queridos” e necessitam ser cancelados afim de que o problema de autovalores seja realmente satisfeito. Utilizando a propriedade $\frac{h(-\lambda)}{b(-\lambda)} = -\frac{f(\lambda)}{b(\lambda)}$, encontramos que a condição sobre o parâmetro λ_1 que garante o anulamento dos termos não-queridos advindos de $B_{12}(\lambda)$ e $B_{23}(\lambda)$ e o autovalor da matriz $T(\lambda)$ para o vetor $|\Phi_1(\lambda_1)\rangle$ são dados por

$$T(\lambda) |\Phi_1(\lambda_1)\rangle = \left([a(\lambda)]^L \frac{a(\lambda_1 - \lambda)}{b(\lambda_1 - \lambda)} + [b(\lambda)]^L \frac{g_r(\lambda - \lambda_1)}{b(\lambda - \lambda_1)} + [e(\lambda)]^L \frac{b_1(\lambda - \lambda_1)}{e(\lambda - \lambda_1)} \right) |\Phi_1(\lambda_1)\rangle \quad (60)$$

$$\left(\frac{a(\lambda_1)}{b(\lambda_1)} \right)^L = 1. \quad (61)$$

A equação (61) é chamada de equação do ansatz de Bethe para uma partícula.

Na construção do estado de duas partículas é esperado que este seja simétrico e dado em termos dos dois vetores linearmente independentes $B_{12}(\lambda_1)B_{12}(\lambda_2)|0\rangle$ e $B_{13}(\lambda_1)|0\rangle$. Experiências anteriores [23, 24] em determinar estado de duas partículas sugerem olharmos primeiro a relação de comutação entre $B_{12}(\lambda_1)$ e $B_{12}(\lambda_2)$. Usando as seguintes relações de (10)

$$B_{12}(\lambda)B_{12}(\mu) = \frac{g(\lambda - \mu)}{a(\lambda - \mu)}B_{12}(\mu)B_{12}(\lambda) + \frac{d(\lambda - \mu)}{a(\lambda - \mu)}A_1(\mu)B_{13}(\lambda) + \frac{d_{13}(\lambda - \mu)}{a(\lambda - \mu)}B_{13}(\mu)A_1(\lambda) \quad (62)$$

$$A_1(\mu)B_{13}(\lambda) = \frac{a(\lambda - \mu)}{e(\lambda - \mu)}B_{13}(\lambda)A_1(\mu) - \frac{d_1(\lambda - \mu)}{e(\lambda - \mu)}B_{12}(\mu)B_{12}(\lambda) - \frac{c_1(\lambda - \mu)}{e(\lambda - \mu)}B_{13}(\mu)A_1(\lambda), \quad (63)$$

obtemos

$$\begin{aligned} & B_{12}(\lambda_1)B_{12}(\lambda_2) - \frac{d(\lambda_1 - \lambda_2)}{e(\lambda_1 - \lambda_2)}B_{13}(\lambda_1)A_1(\lambda_2) = \frac{g_r(\lambda_1 - \lambda_2)}{a(\lambda_1 - \lambda_2)} \times \\ & \times \left(B_{12}(\lambda_2)B_{12}(\lambda_1) + \frac{e(\lambda_1 - \lambda_2)d_{13}(\lambda_1 - \lambda_2) - d(\lambda_1 - \lambda_2)c_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{e(\lambda_1 - \lambda_2)g(\lambda_1 - \lambda_2) - d(\lambda_1 - \lambda_2)d_1(\lambda_1 - \lambda_2)}B_{13}(\lambda_2)A_1(\lambda_1) \right) \\ & = \frac{g_r(\lambda_1 - \lambda_2)}{a(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(B_{12}(\lambda_2)B_{12}(\lambda_1) - \frac{d(\lambda_2 - \lambda_1)}{e(\lambda_2 - \lambda_1)}B_{13}(\lambda_2)A_1(\lambda_1) \right). \end{aligned} \quad (64)$$

Logo, podemos construir o estado de duas partículas da forma

$$\begin{aligned} |\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2)\rangle & = \left(B_{12}(\lambda_1)B_{12}(\lambda_2) - \frac{d(\lambda_1 - \lambda_2)}{e(\lambda_1 - \lambda_2)}B_{13}(\lambda_1)A_1(\lambda_2) \right) |0\rangle \\ & = \Phi_2(\lambda_1, \lambda_2) |0\rangle, \end{aligned} \quad (65)$$

onde, devido a identidade

$$\frac{e(u)d_{13}(u) - d(u)c_1(u)}{e(u)g(u) - d(u)d_1(u)} = -\frac{d(-u)}{e(-u)}, \quad (66)$$

o vetor (65) é simétrico em relação a λ_1 e λ_2 a menos de um fator multiplicativo.

O autovalor de $T(\lambda)$ associado a este estado é

$$\begin{aligned}
T(\lambda) |\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2)\rangle &= [a(\lambda)]^L \prod_{j=1}^2 \frac{a(\lambda_j - \lambda)}{b(\lambda_j - \lambda)} + \\
&+ [b(\lambda)]^L \prod_{j=1}^2 \frac{g_r(\lambda - \lambda_j)}{b(\lambda - \lambda_j)} + [e(\lambda)]^L \prod_{j=1}^2 \frac{b_1(\lambda - \lambda_j)}{e(\lambda - \lambda_j)} |\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2)\rangle. \quad (67)
\end{aligned}$$

As condições sobre os parâmetros λ_1 e λ_2 necessárias para $|\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$ ser um autovetor da matriz de transferência são dadas por

$$\left(\frac{a(\lambda_i)}{b(\lambda_i)} \right)^L = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{b(\lambda_j - \lambda_i) g_r(\lambda_i - \lambda_j)}{a(\lambda_j - \lambda_i) b(\lambda_i - \lambda_j)} \quad i = 1, 2. \quad (68)$$

Estas equações são denominadas de equações do ansatz de Bethe para o estado de duas partículas, e foram obtidas a partir do cancelamento dos termos não-queridos gerados de $T(\lambda)$ atuando em $|\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$. As technicalidades envolvidas no cálculo das equações (68) referentes ao estado de duas partículas são similares às usadas no estado de uma partícula, e devido a vasta literatura [23, 24] disponível sobre o assunto no caso de contorno toroidal, essas não serão descritas.

A fim de que seja possível construir o estado genérico de n -partículas é conveniente analisarmos primeiramente o estado de três partículas. A construção deste estado representa um passo não trivial com relação ao estado de duas partículas, nos proporcionando um procedimento a ser seguido no caso de um estado genérico de n -partículas. Esperamos que este estado $|\Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\rangle = \Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle$ possa ser construído a partir da seguinte combinação linear

$$\begin{aligned}
\Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= B_{12}(\lambda_1)B_{12}(\lambda_2)B_{12}(\lambda_3) + f_1^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)B_{12}(\lambda_1)B_{13}(\lambda_2)A_1(\lambda_3) \\
&+ f_2^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)B_{13}(\lambda_1)B_{12}(\lambda_2)A_1(\lambda_3) + f_3^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)B_{13}(\lambda_1)B_{12}(\lambda_3)A_1(\lambda_2), \quad (69)
\end{aligned}$$

onde os coeficientes $f_j^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ devem ser determinados a partir da propriedade de simetria

perante a troca $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$ e $\lambda_2 \leftrightarrow \lambda_3$. Novas relações de comutação são necessárias para a implementação deste passo, dentre elas

$$B_{12}(\lambda)B_{13}(\mu) = \frac{b_{13}(\lambda - \mu)}{a(\lambda - \mu)}B_{13}(\mu)B_{12}(\lambda) + \frac{h_1(\lambda - \mu)}{a(\lambda - \mu)}B_{12}(\mu)B_{13}(\lambda) \quad (70)$$

$$B_{13}(\lambda)B_{12}(\mu) = \frac{b_1(\lambda - \mu)}{a(\lambda - \mu)}B_{12}(\mu)B_{13}(\lambda) + \frac{f_1(\lambda - \mu)}{a(\lambda - \mu)}B_{13}(\mu)B_{12}(\lambda). \quad (71)$$

Impondo tais condições de simetrização, é possível escrever o vetor referente ao estado de três partículas em termos da seguinte relação de recorrência

$$\begin{aligned} \Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= B_{12}(\lambda_1)\Phi_2(\lambda_2, \lambda_3) - \sum_{j=2}^3 \frac{d(\lambda_1 - \lambda_j)}{e(\lambda_1 - \lambda_j)}B_{13}(\lambda_1) \\ &\times \Phi_1(\lambda_{(5-j)})A_1(\lambda_j) \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^3 \frac{a(\lambda_k - \lambda_j)}{b(\lambda_k - \lambda_j)} \prod_{i=2}^{j-1} \frac{g_r(\lambda_i - \lambda_j)}{a(\lambda_i - \lambda_j)}. \end{aligned} \quad (72)$$

As expressões (65,72) são extremamente importantes, uma vez que sugerem ser possível escrever o vetor referente ao estado genérico de n -partículas em termos dos vetores de $(n-1)$ e $(n-2)$ partículas via uma relação de recorrência. Em outras palavras, a partir de operadores simétricos $\Phi_{n-1}(\{\lambda_j\}_{n-1})$ e $\Phi_{n-2}(\{\lambda_j\}_{n-2})$ é possível gerar o operador $\Phi_n(\{\lambda_j\}_n)$ e assim construir o estado de n -partículas através da relação $|\Phi_n(\{\lambda_j\}_n)\rangle = \Phi_n(\{\lambda_j\}_n)|0\rangle$. Seguindo a literatura [23, 24] e com ajuda do método de indução, a relação de recorrência entre $\Phi_{n-1}(\{\lambda_j\}_{n-1})$, $\Phi_{n-2}(\{\lambda_j\}_{n-2})$ e $\Phi_n(\{\lambda_j\}_n)$ torna-se ²

$$\begin{aligned} \Phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= B_{12}(\lambda_1)\Phi_{n-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_n) - \sum_{j=2}^n \frac{d(\lambda_1 - \lambda_j)}{e(\lambda_1 - \lambda_j)}B_{13}(\lambda_1) \\ &\times \Phi_{n-2}(\lambda_2, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n)A_1(\lambda_j) \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^n \frac{a(\lambda_k - \lambda_j)}{b(\lambda_k - \lambda_j)} \prod_{i=2}^{j-1} \frac{g_r(\lambda_i - \lambda_j)}{a(\lambda_i - \lambda_j)}. \end{aligned} \quad (73)$$

²Ressaltamos que similar relação de recorrência pode ser estabelecida para os operadores de criação $B_{23}(\lambda)$ e $B_{13}(\lambda)$ [24]. Espera-se que os autovalores correspondentes sejam relacionados com o da equação (76) fazendo $\lambda \rightarrow \frac{I\pi\epsilon}{3} - \lambda$.

Segue-se também que o autovalor e as respectivas equações do ansatz de Bethe para as variáveis $\{\lambda_j\}_n$ do estado de n -partículas são

$$\begin{aligned} T(u) |\Phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\rangle &= [a(u)]^L \prod_{j=1}^n \frac{a(\lambda_j - u)}{b(\lambda_j - u)} + \\ &+ [b(u)]^L \prod_{j=1}^n \frac{g_r(u - \lambda_j)}{b(u - \lambda_j)} + [e(u)]^L \prod_{j=1}^n \frac{b_1(u - \lambda_j)}{e(u - \lambda_j)} |\Phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\rangle \end{aligned} \quad (74)$$

e

$$\left[\frac{a(\lambda_l)}{b(\lambda_l)} \right]^L = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{g_r(\lambda_l - \lambda_j) b(\lambda_j - \lambda_l)}{b(\lambda_l - \lambda_j) a(\lambda_j - \lambda_l)} \quad l = 1 \dots n. \quad (75)$$

Substituindo nas expressões (74,75) os específicos pesos de Boltzmann (36) relativo ao modelo de vértice discutido na seção 2, concluímos que o autovalor da matriz de transferência é dado por

$$\begin{aligned} T(\lambda) |\Phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\rangle &= \left[\sinh[\lambda + I\gamma] \sinh\left[\lambda + I\left(\gamma + \frac{\varepsilon\pi}{3}\right)\right] \right]^L \prod_{j=1}^n \frac{\sinh[\lambda_j - \lambda + I\gamma]}{\sinh[\lambda_j - \lambda]} + \\ &+ \left[\sinh[\lambda] \sinh\left[\lambda + I\left(\gamma + \frac{\varepsilon\pi}{3}\right)\right] \right]^L \prod_{j=1}^n \frac{\sinh[\lambda - \lambda_j - I\gamma] \sinh\left[\lambda - \lambda_j - I\frac{\varepsilon\pi}{3}\right]}{\sinh[\lambda - \lambda_j] \sinh\left[\lambda - \lambda_j + I\frac{\varepsilon\pi}{3}\right]} + \\ &+ \left[\sinh[\lambda] \sinh\left[\lambda + I\frac{\varepsilon\pi}{3}\right] \right]^L \prod_{j=1}^n \frac{-\sinh[\lambda - \lambda_j - I\gamma]}{\sinh\left[\lambda - \lambda_j + I\frac{\varepsilon\pi}{3}\right]} |\Phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\rangle, \end{aligned} \quad (76)$$

enquanto que as respectivas equações do ansatz de Bethe para as variáveis $\{\lambda_i\}_n$ são

$$\begin{aligned} \left[\frac{\sinh[\lambda_l + I\gamma]}{\sinh[\lambda_l]} \right]^L &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{\sinh[\lambda_l - \lambda_j - I\frac{\varepsilon\pi}{3}]}{\sinh[\lambda_l - \lambda_j + I\frac{\varepsilon\pi}{3}]} \\ l &= 1 \dots n. \end{aligned} \quad (77)$$

Uma característica interessante desta última equação é que apenas o lado esquerdo é dependente da anisotropia, enquanto que o direito é fixo. Em geral, o lado esquerdo de uma

equação do ansatz de Bethe de apenas um nível pode ser interpretado como dado pelo produto das amplitudes de espalhamento elástico entre partículas idênticas. No nosso caso, tal amplitude possui uma estrutura similar a daquela encontrada por Koberle e Swieca [25] no caso do espalhamento entre partículas invariantes pela simetria Z_3 . Este fato sugere que as excitações elementares deste modelo podem ter características interessantes e desta forma as equações (77) merecem ser estudadas mais a fundo.

3.2 Condição de Contorno Aberto

As principais idéias do procedimento algébrico discutido na seção anterior podem ser adaptadas para a diagonalização da matriz de transferência dupla [8]. Esta generalização, no caso específico de modelos de vértices de três estados foi originalmente desenvolvida por Fan [9] e recentemente revisada por Kurak e Santos [26], corrigindo certos progressos feitos anteriormente por Li, Shi e Shi [27]. Nesta seção reformularemos esta extensão no caso onde a matriz $R(\lambda)$ possui a estrutura geral dada pela equação (35). Inicialmente definimos uma representação para a matriz de monodromia dupla $U_{\mathcal{A}}(\lambda)$ (20),

$$U_{\mathcal{A}}(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc} A_1^d(\lambda) & B_{12}^d(\lambda) & B_{13}^d(\lambda) \\ C_{21}^d(\lambda) & A_2^d(\lambda) & B_{23}^d(\lambda) \\ C_{31}^d(\lambda) & C_{32}^d(\lambda) & A_3^d(\lambda) \end{array} \right)_{\mathcal{A}}. \quad (78)$$

De acordo com as equações (22,46,78), a matriz de transferência dupla é dada por

$$t(\lambda) = Z_1(\lambda)A_1^d(\lambda) + Z_2(\lambda)A_2^d(\lambda) + Z_3(\lambda)A_3^d(\lambda). \quad (79)$$

O próximo passo consiste em determinar o valor dos elementos da matriz de monodromia dupla no estado de referência ferromagnético $|0\rangle$ da seção anterior (52). Isto é essencial para ajudar a distinguirmos possíveis operadores de criação e aniquilação. Através da equação (20), podemos representar a matriz de monodromia dupla em termos dos elementos da matriz de monodromia, isto é,

$$U_{\mathcal{A}}(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc} A_1(\lambda) & B_{12}(\lambda) & B_{13}(\lambda) \\ C_{21}(\lambda) & A_2(\lambda) & B_{23}(\lambda) \\ C_{31}(\lambda) & C_{32}(\lambda) & A_3(\lambda) \end{array} \right)_{\mathcal{A}} \left(\begin{array}{ccc} Y_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & Y_2(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & Y_3(\lambda) \end{array} \right)_{\mathcal{A}} \\ \times \left(\begin{array}{ccc} A_1^{-1}(-\lambda) & B_{12}^{-1}(-\lambda) & B_{13}^{-1}(-\lambda) \\ C_{21}^{-1}(-\lambda) & A_2^{-1}(-\lambda) & B_{23}^{-1}(-\lambda) \\ C_{31}^{-1}(-\lambda) & C_{32}^{-1}(-\lambda) & A_3^{-1}(-\lambda) \end{array} \right)_{\mathcal{A}}. \quad (80)$$

Devido a propriedade de unitariedade da matriz $\mathcal{L}_{\mathcal{A}i}(\lambda)$, o vetor referência (52) atua na matriz $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}^{-1}(-\lambda)$ triangularizando o espaço \mathcal{A} . Portanto a matriz $U_{\mathcal{A}}(\lambda)$ aplicada no estado $|0\rangle$ é dada por

$$U_{\mathcal{A}}(\lambda) |0\rangle = \begin{pmatrix} Y_1(\lambda)A_1(\lambda)A_1^{-1}(-\lambda) & Y_1(\lambda)A_1(\lambda)B_{12}^{-1}(-\lambda) + Y_2(\lambda)B_{12}(\lambda)A_2^{-1}(-\lambda) \\ 0 & Y_1(\lambda)C_{21}(\lambda)B_{12}^{-1}(-\lambda) + Y_2(\lambda)A_2(\lambda)A_2^{-1}(-\lambda) \\ 0 & Y_1(\lambda)C_{31}(\lambda)B_{12}^{-1}(-\lambda) \\ Y_1(\lambda)A_1(\lambda)B_{13}^{-1}(-\lambda) + Y_2(\lambda)B_{12}(\lambda)B_{23}^{-1}(-\lambda) + Y_3(\lambda)B_{13}(\lambda)A_3^{-1}(-\lambda) \\ Y_1(\lambda)C_{21}(\lambda)B_{13}^{-1}(-\lambda) + Y_2(\lambda)A_2(\lambda)B_{23}^{-1}(-\lambda) + Y_3(\lambda)B_{23}(\lambda)A_3^{-1}(-\lambda) \\ Y_1(\lambda)C_{31}(\lambda)B_{13}^{-1}(-\lambda) + Y_2(\lambda)C_{32}(\lambda)B_{23}^{-1}(-\lambda) + Y_3(\lambda)A_3(\lambda)A_3^{-1}(-\lambda) \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} |0\rangle. \quad (81)$$

Logo, para determinarmos a ação do vetor $|0\rangle$ na matriz de monodromia dupla é necessário utilizarmos as relações de comutação entre $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\lambda)$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}^{-1}(-\lambda)$ [9]. Substituindo μ por $-\lambda$ em (10) e reescrevendo essa equação da forma

$$\mathcal{T}_2^{-1}(-\lambda)L_{12}(2\lambda)\mathcal{T}_1(\lambda) = \mathcal{T}_1(\lambda)L_{12}(2\lambda)\mathcal{T}_2^{-1}(-\lambda), \quad (82)$$

obtemos as relações necessárias para concluir que os operadores da matriz de monodromia

dupla atua no estado $|0\rangle$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
A_1^d(\lambda) |0\rangle &= Y_1(\lambda) A_1(\lambda) A_1^{-1}(-\lambda) |0\rangle, \\
A_2^d(\lambda) |0\rangle &= \frac{f(2\lambda)}{a(2\lambda)} Y_1(\lambda) A_1(\lambda) A_1^{-1}(-\lambda) |0\rangle + \left(Y_2(\lambda) - \frac{f(2\lambda)}{a(2\lambda)} Y_1(\lambda) \right) A_2(\lambda) A_2^{-1}(-\lambda) |0\rangle, \\
A_3^d(\lambda) |0\rangle &= \frac{c(2\lambda)}{a(2\lambda)} Y_1(\lambda) A_1(\lambda) A_1^{-1}(-\lambda) |0\rangle + \left(\frac{a(2\lambda)h_1(2\lambda) - c(2\lambda)h(2\lambda)}{a(2\lambda)g(2\lambda) - f(2\lambda)h(2\lambda)} \right) \\
&\quad \times \left(Y_2(\lambda) - \frac{f(2\lambda)}{a(2\lambda)} Y_1(\lambda) \right) A_2(\lambda) A_2^{-1}(-\lambda) |0\rangle + \left(Y_3(\lambda) \right. \\
&\quad \left. - Y_2(\lambda) \frac{a(2\lambda)h_1(2\lambda) - c(2\lambda)h(2\lambda)}{a(2\lambda)g(2\lambda) - f(2\lambda)h(2\lambda)} - Y_1(\lambda) \frac{c(2\lambda)g(2\lambda) - f(2\lambda)h_1(2\lambda)}{a(2\lambda)g(2\lambda) - f(2\lambda)h(2\lambda)} \right) \\
&\quad \times A_3(\lambda) A_3^{-1}(-\lambda) |0\rangle, \\
C_{31}^d(\lambda) |0\rangle &= 0, \quad B_{13}^d(\lambda) |0\rangle \neq 0, \\
C_{i+1i}^d(\lambda) |0\rangle &= 0, \quad B_{ii+1}^d(\lambda) |0\rangle \neq 0, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{83}$$

Dessa maneira, o vetor $|0\rangle$ é um autovetor da matriz de transferência dupla, além de triangularizar essa matriz. Afim de simplificarmos as relações de comutação utilizadas na resolução do problema de autovalores [8, 9], é conveniente introduzimos novos operadores $\tilde{A}_i(\lambda)$ dados por

$$\tilde{A}_1(\lambda) = A_1^d(\lambda), \tag{84}$$

$$\tilde{A}_2(\lambda) = A_2^d(\lambda) - \frac{f(2\lambda)}{a(2\lambda)} \tilde{A}_1(\lambda), \tag{85}$$

$$\tilde{A}_3(\lambda) = A_3^d(\lambda) - \frac{a(2\lambda)h_1(2\lambda) - c(2\lambda)h(2\lambda)}{a(2\lambda)g(2\lambda) - f(2\lambda)h(2\lambda)} \tilde{A}_2(\lambda) - \frac{c(2\lambda)}{a(2\lambda)} \tilde{A}_1(\lambda), \tag{86}$$

de modo que suas ações no estado $|0\rangle$ sejam proporcionais a apenas um termo com potência

L, isto é,

$$\tilde{A}_1(\lambda) |0\rangle = \omega_1^{(-)}(\lambda) \left(\frac{a(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L |0\rangle, \quad (87)$$

$$\tilde{A}_2(\lambda) |0\rangle = \omega_2^{(-)}(\lambda) \left(\frac{b(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L |0\rangle, \quad (88)$$

$$\tilde{A}_3(\lambda) |0\rangle = \omega_3^{(-)}(\lambda) \left(\frac{e(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L |0\rangle, \quad (89)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_1^{(-)}(\lambda) &= Y_1(\lambda) \\ \omega_2^{(-)}(\lambda) &= Y_2(\lambda) - \frac{f(2\lambda)}{a(2\lambda)} Y_1(\lambda) \\ \omega_3^{(-)}(\lambda) &= Y_3(\lambda) - Y_2(\lambda) \frac{a(2\lambda)h_1(2\lambda) - c(2\lambda)h(2\lambda)}{a(2\lambda)g(2\lambda) - f(2\lambda)h(2\lambda)} - Y_1(\lambda) \frac{c(2\lambda)g(2\lambda) - f(2\lambda)h_1(2\lambda)}{a(2\lambda)g(2\lambda) - f(2\lambda)h(2\lambda)}. \end{aligned} \quad (90)$$

A matriz de transferência dupla é dada em termos dos novos operadores $\tilde{A}_i(\lambda)$ por

$$t(\lambda) = \sum_{k=1}^3 \omega_k^{(+)}(\lambda) \tilde{A}_k(\lambda), \quad (91)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_1^{(+)}(\lambda) &= Z_1(\lambda) + Z_2(\lambda) \frac{f(2\lambda)}{a(2\lambda)} + Z_3(\lambda) \frac{c(2\lambda)}{a(2\lambda)} \\ \omega_2^{(+)}(\lambda) &= Z_2(\lambda) + Z_3(\lambda) \frac{a(2\lambda)h_1(2\lambda) - c(2\lambda)h(2\lambda)}{a(2\lambda)g(2\lambda) - f(2\lambda)h(2\lambda)} \\ \omega_3^{(+)}(\lambda) &= Z_3(\lambda). \end{aligned} \quad (92)$$

Portanto o autovalor de $t(\lambda)$ no estado de referência $|0\rangle$ é

$$\begin{aligned} t(\lambda) |0\rangle &= \left(\omega_1^{(+)}(\lambda)\omega_1^{(-)}(\lambda) \left(\frac{a(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L + \omega_2^{(+)}(\lambda)\omega_2^{(-)}(\lambda) \left(\frac{b(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L \right. \\ &\quad \left. + \omega_3^{(+)}(\lambda)\omega_3^{(-)}(\lambda) \left(\frac{e(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (93)$$

De posse desse autovetor e autovalor da matriz de transferência dupla, seguimos as estratégias do formalismo algébrico do ansatz de Bethe construindo o estado de uma partícula de modo análogo ao desenvolvido na seção anterior, isto é, definimos este por

$$|\Phi_1^d(\lambda_1)\rangle = \Phi_1^d(\lambda_1) |0\rangle = B_{12}^d(\lambda_1) |0\rangle. \quad (94)$$

As relações de comutação usadas na abordagem algébrica do ansatz de Bethe são dadas pela equação (21), entretanto, com objetivo de facilitar o entendimento das technicalidades envolvendo o processo de diagonalização, é conveniente reescrevermos essa equação em termos da matriz $R(\lambda)$, ou seja,

$$R_{12}(u-v)U_1(u)R_{12}(u+v)U_1(v) = U_1(v)R_{12}(u+v)U_1(u)R_{12}(u-v). \quad (95)$$

Com o intuito de desenvolver as manipulações utilizadas na obtenção dos autovalores da matriz de transferência dupla, denotaremos por $[i, j]$ a relação de comutação localizada na i -ésima linha com a j -ésima coluna da equação (95). Para solucionar o problema de autovalor para o estado de uma partícula é necessário obtermos apropriadas relações de comutação entre $\tilde{A}_i(\lambda)$ e $B_{12}^d(\lambda_1)$. Por sua vez, essas são obtidas manipulando as relações de comutação [1,2], [2,3], [2,5] e [3,6] de (95),

$$\begin{aligned} [1, 2] \quad & a(u_-) (b_{12}(u_+)B_{12}^d(u)A_1^d(v) + d_{13}(u_+)B_{13}^d(u)C_{21}^d(v)) = \\ & = f(u_-) (b_{12}(u_+)B_{12}^d(v)A_1^d(u) + d_{13}(u_+)B_{13}^d(v)C_{21}^d(u)) \\ & + b_{12}(u_-) (h(u_+)B_{12}^d(v)A_2^d(u) + c_1(u_+)B_{13}^d(v)C_{32}^d(u) + a(u_+)A_1^d(v)B_{12}^d(u)), \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned}
[2, 3] \quad & f(u_-) \left(d_{12}(u_+) B_{12}^d(u) A_1^d(v) + b_{13}(u_+) B_{13}^d(u) C_{21}^d(v) \right) \\
& + b(u_-) e_1(u_+) B_{23}^d(u) A_1^d(v) = \\
& = c(u_-) \left(d_{12}(u_+) B_{12}^d(v) A_1^d(u) + b_{13}(u_+) B_{13}^d(v) C_{21}^d(u) \right) \\
& + d_{12}(u_-) \left(g(u_+) B_{12}^d(v) A_2^d(u) + f_1(u_+) B_{13}^d(v) C_{32}^d(u) + f(u_+) A_1^d(v) B_{12}^d(u) \right) \\
& + e_1(u_-) \left(d_1(u_+) B_{12}^d(v) A_3^d(u) + b(u_+) A_1^d(v) B_{23}^d(u) \right), \tag{97}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[2, 5] \quad & b(u_-) \left(b_{12}(u_+) A_2^d(u) B_{12}^d(v) + d_{13}(u_+) B_{23}^d(u) A_2^d(v) \right) \\
& + f(u_-) \left(f(u_+) A_1^d(u) B_{12}^d(v) + f_1(u_+) B_{13}^d(u) C_{32}^d(v) + g(u_+) B_{12}^d(u) A_2^d(v) \right) = \\
& = d(u_-) \left(d_{12}(u_+) B_{12}^d(v) A_1^d(u) + b_{13}(u_+) B_{13}^d(v) C_{21}^d(u) \right) \\
& + g(u_-) \left(g(u_+) B_{12}^d(v) A_2^d(u) + f_1(u_+) B_{13}^d(v) C_{32}^d(u) + f(u_+) A_1^d(v) B_{12}^d(u) \right) \\
& + d_{13}(u_-) \left(d_1(u_+) B_{12}^d(v) A_3^d(u) + b(u_+) A_1^d(v) B_{23}^d(u) \right), \tag{98}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[3, 6] \quad & e(u_-) e_1(u_+) A_3^d(u) B_{12}^d(v) \\
& + d(u_-) \left(d_{12}(u_+) A_2^d(u) B_{12}^d(v) + b_{13}(u_+) B_{23}^d(u) A_2^d(v) \right) \\
& + c(u_-) \left(c(u_+) A_1^d(u) B_{12}^d(v) + a_1(u_+) B_{13}^d(u) C_{32}^d(v) + h_1(u_+) B_{12}^d(u) A_2^d(v) \right) = \\
& = b_{13}(u_-) \left(b_1(u_+) B_{12}^d(v) A_3^d(u) + d(u_+) A_1^d(v) B_{23}^d(u) \right) \\
& + h_1(u_-) \left(h_1(u_+) B_{12}^d(v) A_2^d(u) + a_1(u_+) B_{13}^d(v) C_{32}^d(u) + c(u_+) A_1^d(v) B_{12}^d(u) \right), \tag{99}
\end{aligned}$$

onde $u_{\pm} = u \pm v$.

A seguir descrevemos os detalhes de tais manipulações. A equação (96) fornece diretamente a relação entre $\tilde{A}_1(\lambda)$ e $B_{12}^d(\lambda_1)$. A partir da subtração de $[2, 5]e_1(u_-) - [2, 3]d_{13}(u_-)$ cancelamos o termo $B_{12}^d(v)A_3^d(u)$. Repassando os operadores $A_i^d(\lambda)$ por $\tilde{A}_i(\lambda)$ e permutando os termos $\tilde{A}_1(u)B_{12}^d(v)$ e $\tilde{A}_1(v)B_{12}^d(u)$ através da equação (96), obtemos a relação entre $\tilde{A}_2(u)B_{12}^d(v)$. A equação (99) gera a relação entre $\tilde{A}_3(u)$ e $B_{12}^d(v)$, mas não de forma direta. Primeiramente temos que permutar o termo $A_1^d(u)B_{23}^d(v)$ de (99). A relação de comutação

usada nesse procedimento é obtida do cancelamento do termo $A_1^d(u)B_{12}^d(v)$ em (97) através de (96). Após essas manipulações, repassamos $A_i^d(\lambda)$ por $\tilde{A}_i(\lambda)$ na equação (99) modificada e por fim, permutamos os termos $\tilde{A}_1(u)B_{12}^d(v)$ e $\tilde{A}_2(u)B_{12}^d(v)$ através das relações anteriores obtidas. Conseqüentemente, a abordagem do problema de uma partícula é feita por um processo de indução, onde em primeiro lugar é contruída a relação entre $\tilde{A}_1(u)B_{12}^d(v)$, depois $\tilde{A}_2(u)B_{12}^d(v)$ e por fim $\tilde{A}_3(u)B_{12}^d(v)$, sendo necessário a primeira relação para então obter a segunda e assim por diante. Esse desenvolvimento indutivo também estende-se ao problema de autovetor para o estado de duas partículas.

Antes de prosseguir, salientamos que três identidades entre os pesos estatísticos foram satisfeitas afim de encontrarmos as apropriadas relações de comutação entre $\tilde{A}_i(u)$ e $B_{12}^d(v)$. De maneira mais específica, os coeficientes do termo $B_{12}^d(v)\tilde{A}_1(u)$ que aparecem na relação final de $\tilde{A}_2(u)B_{12}^d(v)$ e de $\tilde{A}_3(u)B_{12}^d(v)$ devem ser nulos, sendo o mesmo para o coeficiente de $B_{12}^d(v)\tilde{A}_2(u)$ que aparece em $\tilde{A}_3(u)B_{12}^d(v)$. Estas identidades estão detalhadas no Apêndice B.

Após essas manipulações algébricas obtemos a seguinte estrutura

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(u)B_{12}^d(v) &= a_1^1(u, v)B_{12}^d(v)\tilde{A}_1(u) + a_2^1(u, v)B_{12}^d(u)\tilde{A}_1(v) + a_3^1(u, v)B_{12}^d(u)\tilde{A}_2(v) \\ &+ a_4^1(u, v)B_{13}^d(v)C_{21}^d(u) + a_5^1(u, v)B_{13}^d(u)C_{21}^d(v) + a_6^1(u, v)B_{13}^d(u)C_{32}^d(v), \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2(u)B_{12}^d(v) &= a_1^2(u, v)B_{12}^d(v)\tilde{A}_2(u) + a_2^2(u, v)B_{12}^d(u)\tilde{A}_1(v) + a_3^2(u, v)B_{12}^d(u)\tilde{A}_2(v) \\ &+ a_4^2(u, v)B_{23}^d(u)\tilde{A}_1(v) + a_5^2(u, v)B_{23}^d(u)\tilde{A}_2(v) + a_6^2(u, v)B_{13}^d(v)C_{21}^d(u) \\ &+ a_7^2(u, v)B_{13}^d(v)C_{32}^d(u) + a_8^2(u, v)B_{13}^d(u)C_{21}^d(v) + a_9^2(u, v)B_{13}^d(u)C_{32}^d(v) \\ &+ a_{10}^2(u, v)B_{12}^d(v)\tilde{A}_1(u), \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_3(u)B_{12}^d(v) &= a_1^3(u, v)B_{12}^d(v)\tilde{A}_3(u) + a_2^3(u, v)B_{12}^d(u)\tilde{A}_1(v) + a_3^3(u, v)B_{12}^d(u)\tilde{A}_2(v) \\
&+ a_4^3(u, v)B_{23}^d(u)\tilde{A}_1(v) + a_5^3(u, v)B_{23}^d(u)\tilde{A}_2(v) + a_6^3(u, v)B_{13}^d(v)C_{21}^d(u) \\
&+ a_7^3(u, v)B_{13}^d(v)C_{32}^d(u) + a_8^3(u, v)B_{13}^d(u)C_{21}^d(v) + a_9^3(u, v)B_{13}^d(u)C_{32}^d(v) \\
&+ a_{10}^3(u, v)B_{12}^d(v)\tilde{A}_1(u) + a_{11}^3(u, v)B_{12}^d(v)\tilde{A}_2(u). \tag{102}
\end{aligned}$$

Devido a enorme complexidade das expressões $a_i^j(u, v)$ em termos dos pesos de Boltzmann, essas funções foram definidas no Apêndice B.

Rearranjando a ação da matriz de transferência dupla no estado $B_{12}^d(\lambda_1) |0\rangle$ ficamos com

$$\begin{aligned}
t(\lambda) |\Phi_1^d(\lambda_1)\rangle &= \sum_{i=1}^3 \omega_i^{(+)}(\lambda) a_1^{(i)}(\lambda, \lambda_1) B_{12}^d(\lambda_1) \tilde{A}_i(\lambda) |0\rangle \\
&+ B_{12}^d(\lambda) \left(\sum_{j=1}^3 \omega_j^{(+)}(\lambda) a_2^{(j)}(\lambda, \lambda_1) \tilde{A}_1(\lambda_1) + \omega_j^{(+)}(\lambda) a_3^{(j)}(\lambda, \lambda_1) \tilde{A}_2(\lambda_1) \right) |0\rangle \\
&+ B_{23}^d(\lambda) \left(\sum_{j=2}^3 \omega_j^{(+)}(\lambda) a_4^{(j)}(\lambda, \lambda_1) \tilde{A}_1(\lambda_1) + \omega_j^{(+)}(\lambda) a_5^{(j)}(\lambda, \lambda_1) \tilde{A}_2(\lambda_1) \right) |0\rangle. \tag{103}
\end{aligned}$$

Os dois últimos termos de (103) são termos não-queridos e dando continuidade a estratégia da abordagem do ansatz de Bethe, impomos que estes devem ser nulos, isto é,

$$\left(\frac{a(\lambda_1)}{b(\lambda_1)} \right)^{2L} \frac{\omega_1^{(-)}(\lambda_1)}{\omega_2^{(-)}(\lambda_1)} = \frac{\sum_{j=2}^3 \omega_j^{(+)}(\lambda) a_5^{(j)}(\lambda, \lambda_1)}{\sum_{i=2}^3 \omega_i^{(+)}(\lambda) a_4^{(i)}(\lambda, \lambda_1)} = \frac{\sum_{j=1}^3 \omega_j^{(+)}(\lambda) a_3^{(j)}(\lambda, \lambda_1)}{\sum_{i=1}^3 \omega_i^{(+)}(\lambda) a_2^{(i)}(\lambda, \lambda_1)} \tag{104}$$

e

$$t(\lambda) |\Phi_1^d(\lambda_1)\rangle = \sum_{i=1}^3 \omega_i^{(+)}(\lambda) a_1^{(i)}(\lambda, \lambda_1) B_{12}^d(\lambda_1) \tilde{A}_i(\lambda) |0\rangle. \tag{105}$$

Simplificando as equações anteriores através da substituição dos pesos de Boltzmann obtemos

$$\left(\frac{a(\lambda_1)}{b(\lambda_1)} \right)^{2L} \frac{\omega_1^{(-)}(\lambda_1) \omega_1^{(+)}(\lambda_1)}{\omega_2^{(-)}(\lambda_1) \omega_2^{(+)}(\lambda_1)} \frac{b_{12}(2\lambda_1)^2}{a(2\lambda_1)g_s(2\lambda_1)} = 1 \tag{106}$$

e

$$\begin{aligned}
t(\lambda) |\Phi_1^d(\lambda_1)\rangle &= \left[\omega_1^{(-)}(\lambda)\omega_1^{(+)}(\lambda) \frac{a(\lambda_1 - \lambda)b_{12}(\lambda + \lambda_1)}{b_{12}(\lambda_1 - \lambda)a(\lambda + \lambda_1)} \left(\frac{a(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L \right. \\
&+ \omega_2^{(-)}(\lambda)\omega_2^{(+)}(\lambda) \frac{g_r^d(\lambda - \lambda_1)g_s(\lambda + \lambda_1)}{b(\lambda - \lambda_1)b_{12}(\lambda + \lambda_1)} \left(\frac{b(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L + \omega_3^{(-)}(\lambda)\omega_3^{(+)}(\lambda) \\
&\times \left. \frac{b_{13}(\lambda - \lambda_1)}{e(\lambda - \lambda_1)} \frac{b_1(\lambda + \lambda_1)b(\lambda + \lambda_1) - d_1(\lambda + \lambda_1)d(\lambda + \lambda_1)}{e_1(\lambda + \lambda_1)b(\lambda + \lambda_1)} \left(\frac{e(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L \right] \\
&|\Phi_1^d(\lambda_1)\rangle, \tag{107}
\end{aligned}$$

onde $g_s(u) = g(u) - \frac{f(u)h(u)}{a(u)}$ e $g_r^d(u) = g(u) - \frac{d_{13}(u)d_{12}(u)}{e_1(u)}$.

Comparando as equações (104,106) vemos que a condição de integrabilidade leva a várias relações entre os pesos estatísticos, as quais simplificam a equação do ansatz de Bethe.

Na construção de um ansatz para o estado de duas partículas, utilizamos as relações de comutação [1,3] e [1,5] da equação (95). Atuando essas relações no estado $|0\rangle$ obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
&B_{12}^d(u)B_{12}^d(v) + \frac{d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)}B_{13}^d(u)A_2^d(v) - \frac{d_{13}(u_-)e_1(u_+)}{e_1(u_-)b_{12}(u_+)}B_{13}^d(u)A_1^d(v) = \frac{g_r^d(u_-)}{a(u_-)} \\
&\times \left(B_{12}^d(v)B_{12}^d(u) + \frac{d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)}B_{13}^d(v)A_2^d(u) + \frac{d(u_-) - \frac{c(u_-)d_{13}(u_-)}{e_1(u_-)}}{g_r^d(u_-)} \frac{e_1(u_+)}{b_{12}(u_+)}B_{13}^d(v)A_1^d(u) \right). \tag{108}
\end{aligned}$$

Da equação (108) segue que um possível estado de duas partículas é

$$\begin{aligned}
|\Phi_2^d(\lambda_1, \lambda_2)\rangle &= \Phi_2^d(\lambda_1, \lambda_2) |0\rangle = \left(B_{12}^d(\lambda_1)B_{12}^d(\lambda_2) + \frac{d_{13}(\lambda_1 + \lambda_2)}{b_{12}(\lambda_1 + \lambda_2)}B_{13}^d(\lambda_1)A_2^d(\lambda_2) \right. \\
&- \left. \frac{d_{13}(\lambda_1 - \lambda_2)e_1(\lambda_1 + \lambda_2)}{e_1(\lambda_1 - \lambda_2)b_{12}(\lambda_1 + \lambda_2)}B_{13}^d(\lambda_1)A_1^d(\lambda_2) \right) |0\rangle, \tag{109}
\end{aligned}$$

desde que este seja simétrico em relação aos parâmetros λ_1 e λ_2 a menos de um fator multi-

plicativo, isto é,

$$|\Phi_2^d(\lambda_1, \lambda_2)\rangle = Z^d(\lambda_1, \lambda_2) |\Phi_2^d(\lambda_2, \lambda_1)\rangle, \quad (110)$$

onde $Z^d(u, v) = \frac{g_r^d(u_-)}{a(u_-)}$.

Na resolução do problema de autovalor para o estado de duas partículas são necessárias apropriadas relações de comutação entre $\tilde{A}_i(u)$ e $B_{13}^d(v)$, $B_{12}^d(u)$ e $B_{jj+1}^d(v)$, $C_{j+1j}^d(v)$ e $B_{12}^d(v)$. No caso dos operadores $C_{j+1j}^d(v)$ e $B_{12}^d(v)$, as relações vêm de [2,4] e [3,5] da equação (95) e as relações referentes aos outros operadores são obtidas de [1,3]; [1,5],[2,6];[2,8] e [3,9]. Através de manipulações algébricas análogas as descritas no problema de autovalor para o estado de uma partícula encontramos as seguintes expressões

$$\tilde{A}_i(u)B_{13}^d(v)|0\rangle = b_1^i(u, v)B_{13}^d(v)\tilde{A}_i(u)|0\rangle + \text{não-queridos}, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (111)$$

$$\begin{aligned} C_{21}^d(u)B_{12}^d(v)|0\rangle &= \left[c_{22}^1(u, v)\tilde{A}_2(v)\tilde{A}_2(u) + c_{21}^1(u, v)\tilde{A}_2(v)\tilde{A}_1(u) + c_{12}^1(u, v)\tilde{A}_1(v)\tilde{A}_2(u) \right. \\ &\quad \left. + c_{11}^1(u, v)\tilde{A}_1(v)\tilde{A}_1(u) \right] |0\rangle, \end{aligned} \quad (112)$$

$$\begin{aligned} C_{32}^d(u)B_{12}^d(v)|0\rangle &= \left[c_{23}^2(u, v)\tilde{A}_2(v)\tilde{A}_3(u) + c_{22}^2(u, v)\tilde{A}_2(v)\tilde{A}_2(u) + c_{21}^2(u, v)\tilde{A}_2(v)\tilde{A}_1(u) \right. \\ &\quad \left. + c_{13}^2(u, v)\tilde{A}_1(v)\tilde{A}_3(u) + c_{12}^2(u, v)\tilde{A}_1(v)\tilde{A}_2(u) + c_{11}^2(u, v)\tilde{A}_1(v)\tilde{A}_1(u) \right] |0\rangle, \end{aligned} \quad (113)$$

$$B_{12}^d(v)B_{12}^d(u)|0\rangle = \left[d_2^1(u, v)B_{13}^d(v)\tilde{A}_2(u) + d_1^1(u, v)B_{13}^d(v)\tilde{A}_1(u) + \text{não-queridos} \right] |0\rangle, \quad (114)$$

$$\begin{aligned} B_{12}^d(v)B_{23}^d(u)|0\rangle &= \left[d_3^2(u, v)B_{13}^d(v)\tilde{A}_3(u) + d_2^2(u, v)B_{13}^d(v)\tilde{A}_2(u) + d_1^2(u, v)B_{13}^d(v)\tilde{A}_1(u) \right. \\ &\quad \left. + \text{não-queridos} \right] |0\rangle, \end{aligned} \quad (115)$$

onde por não-queridos entendemos como os termos que não fornecem contribuições propor-

cionais a $|\Phi_2^d(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$. No Apêndice B estão definidas as expressões explícitas para as funções $b_1^i(u, v)$, $c_{ij}^k(u, v)$ e $d_j^i(u, v)$.

Analisando a ação dos operadores $\tilde{A}_i(\lambda)$ sobre o estado de duas partículas $|\Phi_2^d(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$ através das relações (100-102,111-115) concluímos que os termos queridos para este estado possuem a seguinte estrutura

$$\begin{aligned}
t(\lambda) |\Phi_2^d(\lambda_1, \lambda_2)\rangle &= B_{12}^d(\lambda_1)B_{12}^d(\lambda_2) \sum_{i=1}^3 \omega_i^{(+)}(\lambda) \left(\prod_{j=1}^{n=2} a_1^i(\lambda, \lambda_j) \right) \tilde{A}_i(\lambda) |0\rangle \\
&+ B_{13}^d(\lambda_1)\tilde{A}_3(\lambda) \left(\Lambda_2^{32}(\lambda, \{\lambda_i\})\tilde{A}_2(\lambda_2) + \Lambda_2^{31}(\lambda, \{\lambda_i\})\tilde{A}_1(\lambda_2) \right) |0\rangle \\
&+ B_{13}^d(\lambda_1)\tilde{A}_2(\lambda) \left(\Lambda_2^{22}(\lambda, \{\lambda_i\})\tilde{A}_2(\lambda_2) + \Lambda_2^{21}(\lambda, \{\lambda_i\})\tilde{A}_1(\lambda_2) \right) |0\rangle \\
&+ B_{13}^d(\lambda_1)\tilde{A}_1(\lambda) \left(\Lambda_2^{12}(\lambda, \{\lambda_i\})\tilde{A}_2(\lambda_2) + \Lambda_2^{11}(\lambda, \{\lambda_i\})\tilde{A}_1(\lambda_2) \right) |0\rangle \\
&+ \text{não - queridos}, \tag{116}
\end{aligned}$$

onde as funções $\Lambda_2^{lk}(\lambda, \{\lambda_i\})$ são dadas por

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^{3k}(\lambda, \{\lambda_i\}) &= \omega_3^{(+)}(\lambda) \left(b_1^3(\lambda, \lambda_1)\alpha_k(\lambda_1, \lambda_2) + a_7^3(\lambda, \lambda_1)c_{k3}^2(\lambda, \lambda_2) \right. \\
&+ \left. a_1^3(\lambda, \lambda_1)a_{3+k}^3(\lambda, \lambda_2)d_3^2(\lambda, \lambda_1) \right) \\
&+ \omega_2^{(+)}(\lambda) \left(a_7^2(\lambda, \lambda_1)c_{k3}^2(\lambda, \lambda_2) + a_1^2(\lambda, \lambda_1)a_{3+k}^2(\lambda, \lambda_2)d_3^2(\lambda, \lambda_1) \right), \tag{117}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^{2k}(\lambda, \{\lambda_i\}) &= \omega_3^{(+)}(\lambda) \left(a_7^3(\lambda, \lambda_1)c_{k2}^2(\lambda, \lambda_2) + a_6^3(\lambda, \lambda_1)c_{k2}^1(\lambda, \lambda_2) + \right. \\
&+ \left. a_1^3(\lambda, \lambda_1)a_{3+k}^3(\lambda, \lambda_2)d_2^2(\lambda, \lambda_1) + a_1^3(\lambda, \lambda_1)a_{1+k}^3(\lambda, \lambda_2)d_2^1(\lambda, \lambda_1) \right) \\
&+ \omega_2^{(+)}(\lambda) \left(b_1^2(\lambda, \lambda_1)\alpha_k(\lambda_1, \lambda_2) + a_7^2(\lambda, \lambda_1)c_{k2}^2(\lambda, \lambda_2) + a_6^2(\lambda, \lambda_1)c_{k2}^1(\lambda, \lambda_2) \right. \\
&+ \left. a_1^2(\lambda, \lambda_1)a_{3+k}^2(\lambda, \lambda_2)d_2^2(\lambda, \lambda_1) + a_1^2(\lambda, \lambda_1)a_{1+k}^2(\lambda, \lambda_2)d_2^1(\lambda, \lambda_1) \right) \\
&+ \omega_1^{(+)}(\lambda) \left(a_4^1(\lambda, \lambda_1)c_{k2}^1(\lambda, \lambda_2) + a_1^1(\lambda, \lambda_1)a_{1+k}^1(\lambda, \lambda_2)d_2^1(\lambda, \lambda_1) \right) \tag{118}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^{1k}(\lambda, \{\lambda_i\}) &= \omega_3^{(+)}(\lambda) \left(a_7^3(\lambda, \lambda_1) c_{k1}^2(\lambda, \lambda_2) + a_6^3(\lambda, \lambda_1) c_{k1}^1(\lambda, \lambda_2) + \right. \\
&+ a_1^3(\lambda, \lambda_1) a_{3+k}^3(\lambda, \lambda_2) d_1^2(\lambda, \lambda_1) + a_1^3(\lambda, \lambda_1) a_{1+k}^3(\lambda, \lambda_2) d_1^1(\lambda, \lambda_1) \left. \right) \\
&+ \omega_2^{(+)}(\lambda) \left(a_7^2(\lambda, \lambda_1) c_{k1}^2(\lambda, \lambda_2) + a_6^2(\lambda, \lambda_1) c_{k1}^1(\lambda, \lambda_2) \right. \\
&+ a_1^2(\lambda, \lambda_1) a_{3+k}^2(\lambda, \lambda_2) d_1^2(\lambda, \lambda_1) + a_1^2(\lambda, \lambda_1) a_{1+k}^2(\lambda, \lambda_2) d_1^1(\lambda, \lambda_1) \left. \right) \\
&+ \omega_1^{(+)}(\lambda) \left(b_1^1(\lambda, \lambda_1) \alpha_k(\lambda_1, \lambda_2) + a_4^1(\lambda, \lambda_1) c_{k1}^1(\lambda, \lambda_2) + a_1^1(\lambda, \lambda_1) a_{1+k}^1(\lambda, \lambda_2) d_1^1(\lambda, \lambda_1) \right).
\end{aligned} \tag{119}$$

Para que o vetor $|\Phi_2^d(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$ seja um autovetor da matriz de transferência são necessárias várias identidades entre os pesos estatísticos de forma que

$$\Lambda_2^{lk}(\lambda, \{\lambda_i\}) = \alpha_k(\lambda_1, \lambda_2) \omega_i^{(+)}(\lambda) \prod_{i=1}^{n=2} a_1^l(\lambda, \lambda_i) \tag{120}$$

Dessa maneira considerando as equações (116,120,87) derivamos a expressão

$$\begin{aligned}
t(\lambda) |\Phi_2^d(\lambda_1, \lambda_2)\rangle &= \left[\omega_1^{(-)}(\lambda) \omega_1^{(+)}(\lambda) \left(\prod_{j=1}^{n=2} \frac{a(\lambda_j - \lambda) b_{12}(\lambda + \lambda_j)}{b_{12}(\lambda_j - \lambda) a(\lambda + \lambda_j)} \right) \left(\frac{a(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L \right. \\
&+ \omega_2^{(-)}(\lambda) \omega_2^{(+)}(\lambda) \left(\prod_{j=1}^{n=2} \frac{g_r^d(\lambda - \lambda_j) g_s(\lambda + \lambda_j)}{b(\lambda - \lambda_j) b_{12}(\lambda + \lambda_j)} \right) \left(\frac{b(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L + \omega_3^{(-)}(\lambda) \omega_3^{(+)}(\lambda) \\
&\times \left. \left(\prod_{j=1}^{n=2} \frac{b_{13}(\lambda - \lambda_j)}{e(\lambda - \lambda_j)} \frac{b_1(\lambda + \lambda_j) b(\lambda + \lambda_j) - d_1(\lambda + \lambda_j) d(\lambda + \lambda_j)}{e_1(\lambda + \lambda_j) b(\lambda + \lambda_j)} \right) \left(\frac{e(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L \right] \\
&|\Phi_2^d(\lambda_1, \lambda_2)\rangle + \text{n\~{a}o - queridos.} \tag{121}
\end{aligned}$$

As condições sobre os parâmetros λ_1 e λ_2 para o cancelamento dos termos não-queridos são equivalentes a condiçãõ de analiticidade do autovalor da matriz de transferência dupla, e

portanto as equações do ansatz de Bethe para o estado de duas partículas são

$$\left(\frac{a(\lambda_i)}{b(\lambda_i)}\right)^{2L} \frac{\omega_1^{(-)}(\lambda_i)}{\omega_2^{(-)}(\lambda_i)} \frac{\omega_1^{(+)}(\lambda_i)}{\omega_2^{(+)}(\lambda_i)} \frac{b_{12}(2\lambda_i)^2}{a(2\lambda_i)g_s(2\lambda_i)} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{g_s(\lambda_i + \lambda_j)a(\lambda_i + \lambda_j)}{b_{12}(\lambda_i + \lambda_j)^2} \frac{g_r^d(\lambda_i - \lambda_j)b_{12}(\lambda_j - \lambda_1)}{b(\lambda_i - \lambda_j)a(\lambda_j - \lambda_i)} \quad (122)$$

Ressaltamos que as equações (122) foram obtidas a partir da imposição do anulamento dos termos não-queridos, sendo que para chegarmos nesse resultado final foram necessárias várias relações entre os pesos estatísticos.

Observamos também que uma análise das relações de comutação vindas da equação (95) revela que o estado de duas partículas pode ser construído por ambos os operadores de criação $B_{12}^d(\lambda)$ e $B_{13}^d(\lambda)$ ou $B_{23}^d(\lambda)$ e $B_{13}^d(\lambda)$. Essa propriedade não é particular desse sistema, mas sim uma característica geral da abordagem algébrica do ansatz de Bethe desenvolvida em [24].

Seguindo o raciocínio da seção anterior para o estado de três partículas, e observando que no caso de condição de fronteira aberta o estado de duas partículas é formado pelos operadores $B_{12}^d(\lambda)$, $B_{13}^d(\lambda)$, $\tilde{A}_1^d(\lambda)$ e $\tilde{A}_2^d(\lambda)$, esperamos que este estado simétrico $|\Phi_3^d(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\rangle = \Phi_3^d(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) |0\rangle$ possa ser construído a partir da seguinte combinação linear

$$\begin{aligned} \Phi_3^d(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= B_{12}^d(\lambda_1) [B_{12}^d(\lambda_2)B_{12}^d(\lambda_3) \\ &+ B_{13}^d(\lambda_2) (g_1^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\tilde{A}_1(\lambda_3) + g_2^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)B_{12}^d(\lambda_2)\tilde{A}_2(\lambda_3))] \\ &+ B_{13}^d(\lambda_1) [B_{12}^d(\lambda_2) (g_3^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\tilde{A}_1(\lambda_3) + g_4^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\tilde{A}_2(\lambda_3)) \\ &+ B_{12}^d(\lambda_3) (g_5^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\tilde{A}_1(\lambda_2) + g_6^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\tilde{A}_2(\lambda_2))] , \end{aligned} \quad (123)$$

onde, de modo análogo ao caso de condição de contorno toroidal, os coeficientes $g_j^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ devem ser determinados a partir da propriedade de simetria do estado. As relações de comutação necessárias para a implementação da simetrização são (100, 101,108), além de [1,6], [1,8] e [2,9] da equação (95). Após vários cálculos, encontramos que o vetor referente ao estado de

três partículas é

$$\begin{aligned}
\Phi_3^d(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= B_{12}^d(\lambda_1)\Phi_2^d(\lambda_2, \lambda_3) \\
&+ B_{13}^d(\lambda_1)\sum_{i=2}^3\Phi_1^d(\lambda_{(5-i)}) \times \\
&\times \left(\zeta_{b,i}^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\tilde{A}_2^d(\lambda_i) + \zeta_{a,i}^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\tilde{A}_1^d(\lambda_i) \right), \tag{124}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\zeta_{b,i}^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{d_{13}(\lambda_1 + \lambda_i)}{b_{12}(\lambda_1 + \lambda_i)} \prod_{j=2}^{i-1} Z^d(\lambda_j, \lambda_i) \frac{g_r^d(\lambda_i - \lambda_1)g_s(\lambda_i + \lambda_1)}{b(\lambda_i - \lambda_1)b_{12}(\lambda_i + \lambda_1)}, \\
\zeta_{a,i}^3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{d_{13}(\lambda_1 + \lambda_i)}{b_{12}(\lambda_1 + \lambda_i)} \left(\frac{f(2\lambda_i)}{a(2\lambda_i)} - \frac{d_{13}(\lambda_1 - \lambda_i)e_1(\lambda_1 + \lambda_i)}{e_1(\lambda_1 - \lambda_i)d_{13}(\lambda_1 + \lambda_i)} \right) \times \\
&\times \prod_{j=2}^{i-1} Z^d(\lambda_j, \lambda_i) \frac{a(\lambda_1 - \lambda_i)b_{12}(\lambda_1 + \lambda_i)}{b_{12}(\lambda_1 - \lambda_i)a(\lambda_1 + \lambda_i)},
\end{aligned}$$

e $Z^d(\lambda_j, \lambda_i)$ é o fator de normalização do estado de duas partículas.

Considerando este resultado e os existentes na literatura [26, 27], é razoável conjecturar que o estado de n -partículas para modelos de vértices de três estados com condições de fronteiras diagonais é gerado por operadores simétricos através da seguinte relação de recorrência

$$|\Phi_n^d(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\rangle = \Phi_n^d(\lambda_1, \dots, \lambda_n) |0\rangle \tag{125}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_n^d(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= B_{12}^d(\lambda_1)\Phi_{n-1}^d(\lambda_2, \dots, \lambda_n) + \\
&+ B_{13}^d(\lambda_1)\sum_{i=2}^n\Phi_{n-2}^d(\lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n) \times \\
&\times \left(\zeta_{b,i}^n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\tilde{A}_2^d(\lambda_i) + \zeta_{a,i}^n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\tilde{A}_1^d(\lambda_i) \right), \tag{126}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\zeta_{b, i}^n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \frac{d_{13}(\lambda_1 + \lambda_i)}{b_{12}(\lambda_1 + \lambda_i)} \prod_{j=2}^{i-1} Z^d(\lambda_j, \lambda_i) \Lambda_b^{n-2}(\lambda_i; \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n), \\
\Lambda_b^{n-2}(\lambda_i; \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n) &= \prod_{j=1}^{n-2} \frac{g_r^d(\lambda_i - \lambda_j) g_s(\lambda_i + \lambda_j)}{b(\lambda_i - \lambda_j) b_{12}(\lambda_i + \lambda_j)}, \\
\zeta_{a, i}^n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \frac{d_{13}(\lambda_1 + \lambda_i)}{b_{12}(\lambda_1 + \lambda_i)} \left(\frac{f(2\lambda_i)}{a(2\lambda_i)} - \frac{d_{13}(\lambda_1 - \lambda_i) e_1(\lambda_1 + \lambda_i)}{e_1(\lambda_1 - \lambda_i) d_{13}(\lambda_1 + \lambda_i)} \right) \times \\
&\quad \times \prod_{j=2}^{i-1} Z^d(\lambda_j, \lambda_i) \Lambda_a^{n-2}(\lambda_i; \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n), \\
\Lambda_a^{n-2}(\lambda_i; \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n) &= \prod_{j=1}^{n-2} \frac{a(\lambda_j - \lambda_i) b_{12}(\lambda_j + \lambda_i)}{b_{12}(\lambda_j - \lambda_i) a(\lambda_j + \lambda_i)},
\end{aligned}$$

sendo que $Z^d(\lambda_i, \lambda_j) Z^d(\lambda_j, \lambda_i) = 1$.

O processo de recorrência acima gera um estado de n -partículas simétrico a menos de um fator multiplicativo, isto é,

$$|\Phi_n^d(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n)\rangle = Z^d(\lambda_i, \lambda_j) |\Phi_n^d(\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n)\rangle, \quad (127)$$

sendo esse fator $Z^d(\lambda, \mu)$ independente de n .

Do ponto de vista do Método do Espalhamento Inverso Quântico, a condição de associatividade da álgebra de Yang-Baxter reduz o espalhamento de n -partículas a sucessivos espalhamentos de duas partículas. Concluimos assim que o autovalor da matriz de transferência dupla e as respectivas equações do ansatz de Bethe para o estado de n -partículas são dados

por

$$\begin{aligned}
t(\lambda) |\Phi_n^d(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\rangle &= \left[\omega_1^{(-)}(\lambda) \omega_1^{(+)}(\lambda) \left(\prod_{j=1}^n \frac{a(\lambda_j - \lambda) b_{12}(\lambda + \lambda_j)}{b_{12}(\lambda_j - \lambda) a(\lambda + \lambda_j)} \right) \left(\frac{a(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L \right. \\
&+ \omega_2^{(-)}(\lambda) \omega_2^{(+)}(\lambda) \left(\prod_{j=1}^n \frac{g_r^d(\lambda - \lambda_j) g_s(\lambda + \lambda_j)}{b(\lambda - \lambda_j) b_{12}(\lambda + \lambda_j)} \right) \left(\frac{b(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L + \omega_3^{(-)}(\lambda) \omega_3^{(+)}(\lambda) \\
&\times \left. \left(\prod_{j=1}^n \frac{b_{13}(\lambda - \lambda_j) b_1(\lambda + \lambda_j) b(\lambda + \lambda_j) - d_1(\lambda + \lambda_j) d(\lambda + \lambda_j)}{e(\lambda - \lambda_j) e_1(\lambda + \lambda_j) b(\lambda + \lambda_j)} \right) \left(\frac{e(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right)^L \right] \\
&|\Phi_n^d(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\rangle
\end{aligned} \tag{128}$$

e

$$\left(\frac{a(\lambda_i)}{b(\lambda_i)} \right)^{2L} \frac{\omega_1^{(-)}(\lambda_i) \omega_1^{(+)}(\lambda_i)}{\omega_2^{(-)}(\lambda_i) \omega_2^{(+)}(\lambda_i)} \frac{b_{12}(2\lambda_i)^2}{a(2\lambda_i) g_s(2\lambda_i)} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{g_s(\lambda_i + \lambda_j) a(\lambda_i + \lambda_j)}{b_{12}(\lambda_i + \lambda_j)^2} \frac{g_r^d(\lambda_i - \lambda_j) b_{12}(\lambda_j - \lambda_i)}{b(\lambda_i - \lambda_j) a(\lambda_j - \lambda_i)}. \tag{129}$$

Finalmente, usando a forma explícita dos pesos de Boltzmann e depois de várias simplificações, encontramos que o autovalor da matriz de transferência dupla referente ao modelo de vértices de três estados descrito na seção 2 é

$$\begin{aligned}
t(\lambda) |\Phi_n^d(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\rangle &= \omega_1^{(+)}(\lambda) \omega_1^{(-)}(\lambda) \left[\frac{a(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right]^L \prod_{j=1}^n \frac{\sinh[-\lambda + \lambda_j + I\gamma] \sinh[\lambda + \lambda_j]}{\sinh[-\lambda + \lambda_j] \sinh[\lambda + \lambda_j + I\gamma]} \\
&+ \omega_2^{(+)}(\lambda) \omega_2^{(-)}(\lambda) \left[\frac{b(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right]^L \prod_{j=1}^n \frac{\sinh[-\lambda + \lambda_j + I\gamma] \sinh[-\lambda + \lambda_j + \frac{I\pi\epsilon}{3}] \sinh[\lambda + \lambda_j]}{\sinh[-\lambda + \lambda_j] \sinh[-\lambda + \lambda_j - \frac{I\pi\epsilon}{3}] \sinh[\lambda + \lambda_j + I\gamma]} \\
&\quad \times \frac{\sinh[\lambda + \lambda_j + I(\gamma - \frac{\pi\epsilon}{3})]}{\sinh[\lambda + \lambda_j + I(\gamma + \frac{\pi\epsilon}{3})]} + \\
&+ \omega_3^{(+)}(\lambda) \omega_3^{(-)}(\lambda) \left[\frac{e(\lambda)^2}{\rho(\lambda)} \right]^L \prod_{j=1}^n \frac{\sinh[-\lambda + \lambda_j + I\gamma] \sinh[\lambda + \lambda_j]}{\sinh[-\lambda + \lambda_j - \frac{I\pi\epsilon}{3}] \sinh[\lambda + \lambda_j + I(\gamma + \frac{\pi\epsilon}{3})]} |\Phi_n^d(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\rangle,
\end{aligned} \tag{131}$$

onde $\rho(\lambda)$ e $\omega_i^{(\pm)}(\lambda)$ são dados por

$$\rho(\lambda) = \sinh \left[\lambda + I\gamma \right] \sinh \left[-\lambda + I\gamma \right] \sinh \left[\lambda + I \left(\gamma + \frac{\pi\varepsilon}{3} \right) \right] \sinh \left[-\lambda + I \left(\gamma + \frac{\pi\varepsilon}{3} \right) \right], \quad (132)$$

$$\begin{aligned} \omega_i^{(-)}(\lambda) &= \prod_{j=i}^2 \sinh \left[\xi_- + \lambda - \left(\frac{3}{2} - j \right) \frac{I\pi\varepsilon}{3} \right] \prod_{k=1}^{i-1} \sinh \left[\xi_- - \lambda - I\gamma + \left(\frac{1}{2} - k \right) \frac{I\pi\varepsilon}{3} \right] \\ &\times \prod_{l=1}^{i-1} \frac{\sinh \left[2\lambda + (l-1) \frac{I\pi\varepsilon}{3} \right]}{\sinh \left[2\lambda + I\gamma + (i+l-3) \frac{I\pi\varepsilon}{3} \right]}, \end{aligned} \quad (133)$$

$$\begin{aligned} \omega_i^{(+)}(\lambda) &= \prod_{j=1}^{i-1} \sinh \left[\xi_+ + \lambda - \left(\frac{5}{2} - j \right) \frac{I\pi\varepsilon}{3} + I\pi\mathcal{Z} \right] \\ &\times \prod_{k=i}^2 \sinh \left[\xi_+ - \lambda - I\gamma + \left(\frac{5}{2} - k \right) \frac{I\pi\varepsilon}{3} - I\pi\mathcal{Z} \right] \\ &\times \prod_{l=i}^2 \frac{\sinh \left[2\lambda + (l-1) \frac{I\pi\varepsilon}{3} \right]}{\sinh \left[2\lambda + I\gamma + (i+l-2) \frac{I\pi\varepsilon}{3} \right]}. \end{aligned} \quad (134)$$

Encontramos também que as variáveis λ_j devem satisfazer as seguintes equações do ansatz de Bethe

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\sinh [\lambda_l + I\gamma]}{\sinh [\lambda_l]} \right]^{2L} \frac{\sinh \left[\lambda_l - \xi_+ + I \left(\gamma - \frac{\pi\varepsilon}{2} \right) + I\pi\mathcal{Z} \right]}{\sinh \left[\lambda_l + \xi_+ - \frac{I\pi\varepsilon}{2} + I\pi\mathcal{Z} \right]} \frac{\sinh \left[\lambda_l + \xi_- - \frac{I\pi\varepsilon}{6} \right]}{\sinh \left[\lambda_l - \xi_- + I \left(\gamma + \frac{\pi\varepsilon}{6} \right) \right]} = \\ &= (-1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{\sinh \left[\lambda_l - \lambda_j - \frac{I\pi\varepsilon}{3} \right]}{\sinh \left[\lambda_l - \lambda_j + \frac{I\pi\varepsilon}{3} \right]} \frac{\sinh \left[\lambda_l + \lambda_j + I \left(\gamma - \frac{\pi\varepsilon}{3} \right) \right]}{\sinh \left[\lambda_l + \lambda_j + I \left(\gamma + \frac{\pi\varepsilon}{3} \right) \right]} \end{aligned} \quad (136)$$

$$l = 1 \dots n,$$

Ressaltamos que estes resultados foram verificados numericamente para valores de $L = 2, \dots, 5$, reproduzindo o espectro do estado fundamental e de alguns estados excitados da matriz de transferência dupla.

4 Conclusão

Nessa dissertação revisitamos o Método do Espalhamento Inverso no caso de modelos bidimensionais com condições de contorno fechado e aberto. Em particular, introduzimos uma nova relação para uma das fronteiras que possibilitou estender a integrabilidade a uma classe geral de operadores de Lax satisfazendo apenas a propriedade de unitariedade.

Como aplicação, consideramos a solução do problema de autovalores para a matriz de transferência de um modelo de vértices assimétrico de três estados invariante pela simetria $U(1)$. Tal espectro foi determinado exatamente pelo método do ansatz de Bethe algébrico tanto para o caso de condição de contorno toroidal como para uma classe de fronteiras diagonais.

A extensão natural deste trabalho seria considerar um modelo de vértice com um número arbitrário N de estados por ligação invariante pela simetria $U(1)$. Este sistema possui um total de $\frac{N}{3}(2N^2 + 1)$ pesos de Boltzmann não nulos, e é natural esperar que no caso mais simples de condições de contorno periódico o espectro seja dado em termos de expressões universais, dependendo apenas de algumas das amplitudes da matriz $R(\lambda)$. Neste caso, seria razoável representar a matriz monodromia pela estrutura

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_1(\lambda) & B_{12}(\lambda) & \cdots & B_{1N}(\lambda) \\ C_{21}(\lambda) & A_2(\lambda) & \cdots & B_{2N}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & B_{(N-1)N}(\lambda) \\ C_{N1}(\lambda) & C_{N2}(\lambda) & \cdots & C_{N(N-1)}(\lambda) & A_N(\lambda) \end{pmatrix}_{\mathcal{A}}, \quad (138)$$

enquanto que o estado de referência seria dado por

$$|0\rangle = \prod_{j=1}^L \otimes |0\rangle_j, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_N. \quad (139)$$

Nossa experiência com sistemas de vértices deste tipo [10], bem como o trabalho de outros autores [23, 24], sugere fortemente que os autovetores serão dados em termos de uma relação de recorrência de ordem $N - 1$ envolvendo os operadores de criação $B_{1j}(\lambda)$ $j = 2, \dots, N$. Embora, no momento não saibamos os detalhes envolvidos nesta relação de recorrência, isto não nos impede de conjecturarmos a expressão geral para os autovalores. De fato, em uma teoria integrável é esperado que a análise dos estados de uma e duas partículas já contenha os ingredientes fundamentais que descrevem o espectro. Omitindo detalhes da nossa análise [28], neste caso, passamos agora a anunciar uma conjectura para os autovalores e respectivas equações do ansatz de Bethe de um modelo de vértices de N -estados invariantes pela simetria $U(1)$. Seja $\Lambda(\lambda, \{\lambda_j\}_n)$ o autovalor da matriz de transferência $T(\lambda)$ com condição de contorno periódico, então

$$\Lambda(\lambda, \{\lambda_j\}_n) = \sum_{i=1}^N [R_{1,i}^{i,1}(\lambda)]^L \prod_{j=1}^n P_i(\lambda, \lambda_j), \quad (140)$$

onde os polinômios $P_i(\lambda, \lambda_j)$ são

$$P_i(\lambda, \lambda_j) = \begin{cases} \frac{R_{1,1}^{1,1}(\lambda_j - \lambda)}{R_{1,2}^{2,1}(\lambda_j - \lambda)}, & i = 1 \\ \left| \begin{array}{cc} R_{1,i+1}^{i+1,1}(\lambda - \lambda_j) & R_{1,i+1}^{i,2}(\lambda - \lambda_j) \\ R_{2,i}^{i+1,1}(\lambda - \lambda_j) & R_{2,i}^{i,2}(\lambda - \lambda_j) \end{array} \right|, & i = 2, \dots, N - 1 \\ \frac{R_{1,i}^{i,1}(\lambda - \lambda_j) R_{1,i+1}^{i+1,1}(\lambda - \lambda_j)}{R_{2,N}^{N,2}(\lambda - \lambda_j)}, & i = N. \\ \frac{R_{2,N}^{N,2}(\lambda - \lambda_j)}{R_{1,N}^{N,1}(\lambda - \lambda_j)}, & i = N. \end{cases} \quad (141)$$

Por outro lado, as equações do ansatz de Bethe vinculadas as variáveis $\{\lambda_j\}_n$ são dadas por

$$\left[\frac{R_{1,1}^{1,1}(\lambda_i)}{R_{1,2}^{2,1}(\lambda_i)} \right]^L = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{P_2(\lambda_i, \lambda_j)}{P_1(\lambda_i, \lambda_j)} \quad i = 1, \dots, n. \quad (142)$$

Acreditamos que os resultados (140-142) sejam válidos para modelos com matrizes $R(\lambda)$ satisfazendo apenas a propriedade de unitariedade e evidentemente a equação de Yang-Baxter.

Notamos que a forma funcional dos polinômios $P_i(\lambda, \lambda_j)$ é bem simples, cujo significado mais profundo, infelizmente ainda nos é desconhecido. Seria extremamente interessante semelhante conjectura para o caso de condições abertas de contorno, mesmo no caso específico de fronteiras diagonais. Até o presente momento tal generalização tem nos frustrado e esperamos voltar a este problema em um futuro próximo.

Apêndice A: Demonstração de Propriedades

Este apêndice tem como objetivo exibir a demonstração da comutação da matriz de transferência dupla (22), a extensão da equação de reflexão (12) à matriz de monodromia dupla $U_{\mathcal{A}}(\lambda)$ e o isomorfismo entre as matrizes $K_{\mathcal{A}}^+(\lambda)$ e $K_{\mathcal{A}}^-(\lambda)$. Dessa forma segmentamos este apêndice em três seções, a extensão, a comutação e o isomorfismo, respectivamente.

Extensão da Equação de Reflexão (12)

Nessa seção demonstramos que a equação (21) satisfeita pela matriz de monodromia dupla é obtida da extensão da equação de reflexão (12).

Inicialmente reescrevemos a equação (10) nas seguintes formas

$$\mathcal{L}_{12}(u-v)\mathcal{T}_1(u)\mathcal{T}_2(v) = \mathcal{T}_2(v)\mathcal{T}_1(u)\mathcal{L}_{12}(u-v), \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{T}_2^{-1}(v)\mathcal{T}_1^{-1}(-u)\mathcal{L}_{21}(v+u) = \mathcal{L}_{21}(v+u)\mathcal{T}_1^{-1}(-u)\mathcal{T}_2^{-1}(v), \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{T}_1^{-1}(u)\mathcal{T}_2^{-1}(-v)\mathcal{L}_{12}(u+v) = \mathcal{L}_{12}(u+v)\mathcal{T}_2^{-1}(-v)\mathcal{T}_1^{-1}(u), \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{T}_2^{-1}(-v)\mathcal{T}_1^{-1}(-u)\mathcal{L}_{21}(-v+u) = \mathcal{L}_{21}(-v+u)\mathcal{T}_1^{-1}(-u)\mathcal{T}_2^{-1}(-v), \quad (\text{A.4})$$

sendo que as últimas três equações acima seguem da equação (A.1) através das transformações

$$(\text{A.2}) : (u, v) \rightarrow (v, -u) ; (1, 2) \rightarrow (2, 1) \quad (\textit{permutador})$$

$$(\text{A.3}) : (u, v) \rightarrow (u, -v)$$

$$(\text{A.4}) : (u, v) \rightarrow (-v, -u) ; (1, 2) \rightarrow (2, 1).$$

Partindo do lado esquerdo da expressão (21) e utilizando as equações (A.1,A.2), juntamente

com a definição de matriz de monodromia dupla (20), encontramos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{12}(u-v)\mathcal{T}_1(u)\mathcal{T}_2(v)\mathcal{T}_2^{-1}(v)K_1(u)\mathcal{T}_1^{-1}(-u)\mathcal{L}_{21}(v+u)\mathcal{T}_2(v)K_2(v)\mathcal{T}_2^{-1}(-v) &= \\
\mathcal{T}_2(v)\mathcal{T}_1(u)\mathcal{L}_{12}(u-v)K_1(u)\mathcal{T}_2^{-1}(v)\mathcal{T}_1^{-1}(-u)\mathcal{L}_{21}(v+u)\mathcal{T}_2(v)K_2(v)\mathcal{T}_2^{-1}(-v) &= \\
\mathcal{T}_2(v)\mathcal{T}_1(u)\mathcal{L}_{12}(u-v)K_1(u)\mathcal{L}_{21}(v+u)\mathcal{T}_1^{-1}(-u)\mathcal{T}_2^{-1}(v)\mathcal{T}_2(v)K_2(v)\mathcal{T}_2^{-1}(-v) &= \\
\mathcal{T}_2(v)\mathcal{T}_1(u)\mathcal{L}_{12}(u-v)K_1(u)\mathcal{L}_{21}(v+u)K_2(v)\mathcal{T}_1^{-1}(-u)\mathcal{T}_2^{-1}(-v) & \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

Por outro lado, manipulando o lado direito da equação (21), através das equações (A.3,A.4) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2(v)K_2(v)\mathcal{T}_1(u)\mathcal{T}_1^{-1}(u)\mathcal{T}_2^{-1}(-v)\mathcal{L}_{12}(u+v)\mathcal{T}_1(u)K_1(u)\mathcal{T}_1^{-1}(-u)\mathcal{L}_{21}(u-v) &= \\
\mathcal{T}_2(v)K_2(v)\mathcal{T}_1(u)\mathcal{L}_{12}(u+v)\mathcal{T}_2^{-1}(-v)\mathcal{T}_1^{-1}(u)\mathcal{T}_1(u)K_1(u)\mathcal{T}_1^{-1}(-u)\mathcal{L}_{21}(u-v) &= \\
\mathcal{T}_2(v)\mathcal{T}_1(u)K_2(v)\mathcal{L}_{12}(u+v)K_1(u)\mathcal{T}_2^{-1}(-v)\mathcal{T}_1^{-1}(-u)\mathcal{L}_{21}(u-v) &= \\
\mathcal{T}_2(v)\mathcal{T}_1(u)K_2(v)\mathcal{L}_{12}(u+v)K_1(u)\mathcal{L}_{21}(-v+u)\mathcal{T}_1^{-1}(-u)\mathcal{T}_2^{-1}(-v). & \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

Utilizando a equação de reflexão (12) concluímos que as equações (A.5) e (A.6) são idênticas e portanto demonstramos a relação (21). Logo a equação de reflexão (12) estende-se globalmente à matriz de monodromia dupla.

Comutação da Matriz de Transferência Dupla

Nesse seção do apêndice está demonstrado a comutação da matriz de transferência dupla (22) no caso em que a matriz $\mathcal{L}_{12}(\lambda)$ satisfaz somente a propriedade de unitariedade.

Através das equações (15,20,22) expressamos o produto de matrizes de transferência dupla

da forma

$$\begin{aligned}
t(u)t(v) &= Tr_{12} [K_1^+(u)^{t_1} K_2^+(v) U_1(u)^{t_1} U_2(v)] \\
&= Tr_{12} \left[K_1^+(u)^{t_1} K_2^+(v) (\mathcal{L}_{21}(u_+)^{t_1})^{-1} \mathcal{L}_{21}(u_+)^{t_1} U_1(u)^{t_1} U_2(v) \right] \\
&= Tr_{12} \left[K_1^+(u)^{t_1} K_2^+(v) (\mathcal{L}_{21}(u_+)^{t_1})^{-1} (U_1(u) \mathcal{L}_{21}(u_+) U_2(v))^{t_1} \right] \\
&= Tr_{12} \left[K_1^+(u)^{t_1} K_2^+(v) (\mathcal{L}_{21}(u_+)^{t_1})^{-1} \left(\frac{\mathcal{L}_{21}(-u_-)}{\rho(u_-)} \mathcal{L}_{12}(u_-) U_1(u) \mathcal{L}_{21}(u_+) U_2(v) \right)^{t_1} \right].
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Assim reescrevemos $t(u)t(v)$ como o traço no espaço $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ do produto de duas matrizes que atuam nos espaços $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes V^N$. Através da propriedade

$$Tr_{12} [X_{12} Y_{12}] = Tr_{12} [X_{12}^{t_1} Y_{12}^{t_1}], \tag{A.8}$$

onde X_{12} e Y_{12} são matrizes que atuam nos espaços $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes V^N$, e usando a equação de reflexão (12) ficamos com

$$\begin{aligned}
t(u)t(v) &= Tr_{12} \left[\left(K_1^+(u)^{t_1} K_2^+(v) (\mathcal{L}_{21}(u_+)^{t_1})^{-1} \right)^{t_1} \frac{\mathcal{L}_{21}(-u_-)}{\rho(u_-)} U_2(v) \mathcal{L}_{12}(u_+) U_1(u) \mathcal{L}_{21}(u_-) \right] \\
&= Tr_{12} \left[\left(K_1^+(u)^{t_1} \left((\mathcal{L}_{21}(u_+)^{t_1})^{-1} \right)^{t_2} K_2^+(v)^{t_2} \right)^{t_1 t_2} \frac{\mathcal{L}_{21}(-u_-)}{\rho(u_-)} \right. \\
&\quad \left. \times U_2(v) \mathcal{L}_{12}(u_+) U_1(u) \mathcal{L}_{21}(u_-) \right] \\
&= Tr_{12} \left[\left(\mathcal{L}_{21}(-u_-)^{t_1 t_2} K_1^+(u)^{t_1} \left((\mathcal{L}_{21}(u_+)^{t_1})^{-1} \right)^{t_2} K_2^+(v)^{t_2} \right)^{t_1 t_2} \frac{1}{\rho(u_-)} \right. \\
&\quad \left. \times U_2(v) \mathcal{L}_{12}(u_+) U_1(u) \mathcal{L}_{21}(u_-) \right].
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Substituindo a equação de reflexão dual (13) e utilizando a propriedade cíclica do traço

obtemos

$$\begin{aligned}
t(u)t(v) &= Tr_{12} \left[\left(K_2^+(v)^{t_2} \left((\mathcal{L}_{12}(u_+)^{t_2})^{-1} \right)^{t_1} K_1^+(u)^{t_1} \mathcal{L}_{12}(-u_-)^{t_1 t_2} \right)^{t_1 t_2} \right. \\
&\quad \times \left. U_2(v) \mathcal{L}_{12}(u_+) U_1(u) \frac{\mathcal{L}_{21}(u_-)}{\rho(u_-)} \right] \\
&= Tr_{12} \left[\mathcal{L}_{12}(-u_-) \left(K_2^+(v)^{t_2} \left((\mathcal{L}_{12}(u_+)^{t_2})^{-1} \right)^{t_1} K_1^+(u)^{t_1} \right)^{t_1 t_2} \right. \\
&\quad \times \left. U_2(v) \mathcal{L}_{12}(u_+) U_1(u) \frac{\mathcal{L}_{21}(u_-)}{\rho(u_-)} \right] \\
&= Tr_{12} \left[\left(K_2^+(v)^{t_2} \left((\mathcal{L}_{12}(u_+)^{t_2})^{-1} \right)^{t_1} K_1^+(u)^{t_1} \right)^{t_1 t_2} U_2(v) \mathcal{L}_{12}(u_+) U_1(u) \right].
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Por fim, desenvolvendo a transposta t_2 na equação anterior e utilizando a propriedade (A.8), demonstramos a comutação da matriz de transferência dupla, isto é,

$$\begin{aligned}
t(u)t(v) &= Tr_{12} \left[\left(K_2^+(v)^{t_2} \left((\mathcal{L}_{12}(u_+)^{t_2})^{-1} \right)^{t_1} K_1^+(u)^{t_1} \right)^{t_1} (U_2(v) \mathcal{L}_{12}(u_+) U_1(u))^{t_2} \right] \\
&= Tr_{12} \left[K_2^+(v)^{t_2} K_1^+(u) \left(\mathcal{L}_{12}(u_+)^{t_2} \right)^{-1} \mathcal{L}_{12}(u_+)^{t_2} U_2(v)^{t_2} U_1(u) \right] \\
&= Tr_{12} \left[K_2^+(v)^{t_2} U_2(v)^{t_2} K_1^+(u) U_1(u) \right] = Tr_2 [K_2^+(v) U_2(v)] Tr_1 [K_1^+(u) U_1(u)] \\
&= t(v)t(u).
\end{aligned} \tag{A.11}$$

A equação (13) é uma generalização da equação (18) proposta por Sklyanin [8]. No caso particular em que o operador $\mathcal{L}_{ab}(\lambda)$ satisfaz as propriedades (14,16), a equação (13) recai em

(18), isto é,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{21}(v-u)^{t_1 t_2} K_1^+(u)^{t_1} \left((\mathcal{L}_{21}(u+v)^{t_1})^{-1} \right)^{t_2} K_2^+(v)^{t_2} = K_2^+(v)^{t_2} \left((\mathcal{L}_{12}(u+v)^{t_2})^{-1} \right)^{t_1} \\
& \quad \times K_1^+(u)^{t_1} \mathcal{L}_{12}(v-u)^{t_1 t_2} \\
\rightarrow \mathcal{L}_{12}(v-u) K_1^+(u)^{t_1} M_1^{-1} \frac{\mathcal{L}_{21}(-u-v-2\alpha)}{\rho_c(-u_+-2\alpha)} M_1 K_2^+(v)^{t_2} &= K_2^+(v)^{t_2} M_1 \frac{\mathcal{L}_{12}(-u-v-2\alpha)}{\rho_c(-u_+-2\alpha)} M_1^{-1} \\
& \quad \times K_1^+(u)^{t_1} \mathcal{L}_{21}(v-u) \quad (A.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \mathcal{L}_{12}(v-u) K_1^+(u)^{t_1} M_1^{-1} \mathcal{L}_{21}(-u-v-2\alpha) M_1 K_2^+(v)^{t_2} \\
& = K_2^+(v)^{t_2} M_1 \mathcal{L}_{12}(-u-v-2\alpha) M_1^{-1} K_1^+(u)^{t_1} \mathcal{L}_{21}(v-u). \quad (A.13)
\end{aligned}$$

Isomorfismo das Matrizes de Reflexão

Na demonstração do isomorfismo entre $K_{\mathcal{A}}^-(\lambda)$ e $K_{\mathcal{A}}^+(\lambda)$ consideramos que o operador $\mathcal{L}_{ab}(\lambda)$ satisfaz a simetria de “crossing” (14), unitariedade (15) e PT (16).

Consequentemente as matrizes $K_{\mathcal{A}}^+(\lambda)$ e $K_{\mathcal{A}}^-(\lambda)$ satisfazem, respectivamente, as relações

$$\mathcal{L}_{12}(u-v) K_1^-(u) \mathcal{L}_{21}(u+v) K_2^-(v) = K_2^-(v) \mathcal{L}_{12}(u+v) K_1^-(u) \mathcal{L}_{21}(u-v) \quad (A.14)$$

e

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{12}(v-u) K_1^+(u)^{t_1} M_1^{-1} \mathcal{L}_{21}(-u-v-2\alpha) M_1 K_2^+(v)^{t_2} \\
& = K_2^+(v)^{t_2} M_1 \mathcal{L}_{12}(-u-v-2\alpha) M_1^{-1} K_1^+(u)^{t_1} \mathcal{L}_{21}(v-u). \quad (A.15)
\end{aligned}$$

Multiplicando pelo lado esquerdo a equação (A.14) por $M_1 M_2$ e utilizando a propriedade $[\mathcal{L}_{12}, M_1 M_2] = 0$, temos

$$\mathcal{L}_{12}(u-v) M_1 K_1^-(u) M_1^{-1} M_1 M_2 \mathcal{L}_{21}(u+v) K_2^-(v) = M_2 K_2^-(v) M_1 \mathcal{L}_{12}(u+v) M_1^{-1} M_1 K_1^-(u) \mathcal{L}_{21}(u-v). \quad (A.16)$$

Comutando M_1M_2 e \mathcal{L}_{21} e realizando a mudança de variáveis $(u, v) \rightarrow (-u - \alpha, -v - \alpha)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{12}(v - u)M_1K_1^-(-u - \alpha)M_1^{-1}\mathcal{L}_{21}(-u - v - 2\alpha)M_1M_2K_2^-(-v - \alpha) &= M_2K_2^-(-v - \alpha) \times \\ &\times M_1\mathcal{L}_{12}(-u - v - 2\alpha)M_1^{-1}M_1K_1^-(-u - \alpha)\mathcal{L}_{21}(v - u). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Comparando a equação de reflexão dual (A.15) e a anterior, concluímos que um isomorfismo entre $K_{\mathcal{A}}^+(\lambda)$ e $K_{\mathcal{A}}^-(\lambda)$ é dado por $[K_{\mathcal{A}}^+(\lambda)]^{t_{\mathcal{A}}} = M_{\mathcal{A}}K_{\mathcal{A}}^-(-\lambda - \alpha)$.

Apêndice B: Funções Auxiliares e Identidades

Este apêndice tem como objetivo listar as expressões das funções $a_i^j(u, v)$, $b_1^i(u, v)$, $c_{ij}^k(u, v)$ e $d_i^j(u, v)$, usadas na seção 3.

Com intuito de facilitar a representação dessas expressões definimos três funções auxiliares

$$M_{12}(u) = \frac{f(2u)}{a(2u)} \quad (\text{B.1})$$

$$M_{13}(u) = \frac{c(2u)}{a(2u)} \quad (\text{B.2})$$

$$M_{23}(u) = \frac{a(2u)h_1(2u) - c(2u)h(2u)}{a(2u)g(2u) - f(2u)h(2u)}. \quad (\text{B.3})$$

Dessa maneira, os referidos coeficientes das relações de comutação são

$$a_1^1(u, v) = \frac{a(-u_-)b_{12}(u_+)}{b_{12}(-u_-)a(u_+)} \quad (\text{B.4})$$

$$a_2^1(u, v) = -\frac{h(u_+)}{a(u_+)} \left(\frac{f(-u_-)b_{12}(u_+)}{b_{12}(-u_-)h(u_+)} + M_{12}(v) \right) \quad (\text{B.5})$$

$$a_3^1(u, v) = -\frac{h(u_+)}{a(u_+)} \quad (\text{B.6})$$

$$a_4^1(u, v) = \frac{a(-u_-)d_{13}(u_+)}{b_{12}(-u_-)a(u_+)} \quad (\text{B.7})$$

$$a_5^1(u, v) = -\frac{f(-u_-)d_{13}(u_+)}{b_{12}(-u_-)a(u_+)} \quad (\text{B.8})$$

$$a_6^1(u, v) = -\frac{c_1(u_+)}{a(u_+)} \quad (\text{B.9})$$

$$a_1^2(u, v) = \frac{(e_1(u_-)g(u_-) - d_{13}(u_-)d_{12}(u_-))}{e_1(u_-)b(u_-)} \frac{(a(u_+)g(u_+) - f(u_+)h(u_+))}{a(u_+)b_{12}(u_+)} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} a_2^2(u, v) &= \frac{(e_1(u_-)g(u_-) - d_{13}(u_-)d_{12}(u_-))}{e_1(u_-)b(u_-)} \frac{a(u_-)f(u_+)}{b_{12}(u_-)a(u_+)} - \frac{f(u_-)g(u_+)}{b(u_-)b_{12}(u_+)} M_{12}(v) \\ &+ \frac{d_{13}(u_-)f(u_-)d_{12}(u_+)}{e_1(u_-)b(u_-)b_{12}(u_+)} - \left(\frac{f(u_-)f(u_+)}{b(u_-)b_{12}(u_+)} + M_{12}(u) \right) a_2^1(u, v) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$a_3^2(u, v) = -\frac{f(u_-)g(u_+)}{b(u_-)b_{12}(u_+)} + \left(\frac{f(u_-)f(u_+)}{b(u_-)b_{12}(u_+)} + M_{12}(u) \right) \frac{h(u_+)}{a(u_+)} \quad (\text{B.12})$$

$$a_4^2(u, v) = -\frac{d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)} M_{12}(v) + \frac{d_{13}(u_-)e_1(u_+)}{e_1(u_-)b_{12}(u_+)} \quad (\text{B.13})$$

$$a_5^2(u, v) = -\frac{d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} a_6^2(u, v) &= \frac{(e_1(u_-)d(u_-) - d_{13}(u_-)c(u_-))}{e_1(u_-)b(u_-)} \frac{b_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)} - \frac{(e_1(u_-)g(u_-) - d_{13}(u_-)d_{12}(u_-))}{e_1(u_-)b(u_-)} \\ &\times \frac{f(u_+)f(u_-)d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)b_{12}(u_-)a(u_+)} - \left(\frac{f(u_-)f(u_+)}{b(u_-)b_{12}(u_+)} + M_{12}(u) \right) \frac{a(-u_-)d_{13}(u_+)}{b_{12}(-u_-)a(u_+)} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$a_7^2(u, v) = \frac{(e_1(u_-)g(u_-) - d_{13}(u_-)d_{12}(u_-))}{e_1(u_-)b(u_-)} \frac{(a(u_+)f_1(u_+) - f(u_+)c_1(u_+))}{a(u_+)b_{12}(u_+)} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} a_8^2(u, v) &= \frac{(e_1(u_-)g(u_-) - d_{13}(u_-)d_{12}(u_-))}{e_1(u_-)b(u_-)} \frac{f(u_+)a(u_-)d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)b_{12}(u_-)a(u_+)} + \frac{d_{13}(u_-)f(u_-)b_{13}(u_+)}{e_1(u_-)b(u_-)b_{12}(u_+)} \\ &+ \left(\frac{f(u_-)f(u_+)}{b(u_-)b_{12}(u_+)} + M_{12}(u) \right) \frac{f(-u_-)d_{13}(u_+)}{b_{12}(-u_-)a(u_+)} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$a_9^2(u, v) = -\frac{f(u_-)f_1(u_+)}{b(u_-)b_{12}(u_+)} + \left(\frac{f(u_-)f(u_+)}{b(u_-)b_{12}(u_+)} + M_{12}(u) \right) \frac{c_1(u_+)}{a(u_+)} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} a_{10}^2(u, v) &= \frac{(e_1(u_-)d(u_-) - d_{13}(u_-)c(u_-))}{e_1(u_-)b(u_-)} \frac{d_{12}(u_+)}{b_{12}(u_+)} + \frac{(e_1(u_-)g(u_-) - d_{13}(u_-)d_{12}(u_-))}{e_1(u_-)b(u_-)} \\ &\times \left[\frac{g(u_+)}{b_{12}(u_+)} M_{12}(u) - \frac{f(u_+)h(u_+)}{b_{12}(u_+)a(u_+)} \left(\frac{f(u_-)b_{12}(u_+)}{b_{12}(u_-)h(u_+)} + M_{12}(u) \right) \right] \\ &- \left(\frac{f(u_-)f(u_+)}{b(u_-)b_{12}(u_+)} + M_{12}(u) \right) \frac{a(-u_-)b_{12}(u_+)}{b(-u_-)a(u_+)} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$a_1^3(u, v) = \frac{b_{13}(u_-)}{e(u_-)} \frac{(b_1(u_+)b(u_+) - d(u_+)d_1(u_+))}{e_1(u_+)b(u_+)} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned}
a_2^3(u, v) &= \frac{b_{13}(u_-)d(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} \left(\frac{f(u_-)d_{12}(u_+)}{e_1(u_-)b(u_+)} - \frac{d_{12}(u_-)f(u_+)a(u_-)b_{12}(u_+)}{e_1(u_-)b(u_+)b_{12}(u_-)a(u_+)} \right) \\
&+ \frac{h_1(u_-)c(u_+)a(u_-)b_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)b_{12}(u_-)a(u_+)} - \frac{c(u_-)h_1(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} M_{12}(v) - \left(\frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + M_{23}(u) \right) \\
&\times a_2^2(u, v) - \left(\frac{c(u_-)c(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + \frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} M_{12}(u) + M_{13}(u) \right) a_2^1(u, v) \quad (\text{B.21})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3^3(u, v) &= -\frac{c(u_-)h_1(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} - \left(\frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + M_{23}(u) \right) a_3^2(u, v) \\
&+ \left(\frac{c(u_-)c(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + \frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} M_{12}(u) + M_{13}(u) \right) \frac{h(u_+)}{a(u_+)} \quad (\text{B.22})
\end{aligned}$$

$$a_4^3(u, v) = \frac{b_{13}(u_-)b(u_-)d(u_+)}{e(u_-)e_1(u_-)b(u_+)} - \frac{d(u_-)b_{13}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} M_{12}(u) - \left(\frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + M_{23}(u) \right) a_4^2(u, v) \quad (\text{B.23})$$

$$a_5^3(u, v) = -\frac{d(u_-)b_{13}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + \left(\frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + M_{23}(u) \right) \frac{d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned}
a_6^3(u, v) &= -\frac{h_1(u_-)c(u_+)f(u_-)d_{13}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)b_{12}(u_-)a(u_+)} - \left(\frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + M_{23}(u) \right) a_6^2(u, v) \\
&- \frac{b_{13}(u_-)d(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} \left(\frac{c(u_-)b_{13}(u_+)}{e_1(u_-)b(u_+)} - \frac{d_{12}(u_-)f(u_+)f(u_-)d_{13}(u_+)}{e_1(u_-)b(u_+)b_{12}(u_-)a(u_+)} \right) \\
&- \left(\frac{c(u_-)c(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + \frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} M_{12}(u) + M_{13}(u) \right) \frac{a(-u_-)d_{13}(u_+)}{b_{12}(-u_-)a(u_+)} \quad (\text{B.25})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_7^3(u, v) &= \frac{h_1(u_-)a(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} - \frac{b_{13}(u_-)d(u_+)d_{12}(u_-)}{e(u_-)e_1(u_+)e_1(u_-)} \left(\frac{f_1(u_+)}{b(u_+)} - \frac{f(u_+)c_1(u_+)}{b(u_+)a(u_+)} \right) \\
&- \frac{h_1(u_-)c(u_+)c_1(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)a(u_+)} - \left(\frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + M_{23}(u) \right) a_7^2(u, v) \quad (\text{B.26})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_8^3(u, v) &= \frac{b_{13}(u_-)d(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} \left(\frac{f(u_-)b_{13}(u_+)}{e_1(u_-)b(u_+)} - \frac{d_{12}(u_-)f(u_+)a(u_-)d_{13}(u_+)}{e_1(u_-)b(u_+)b_{12}(u_-)a(u_+)} \right) \\
&+ \frac{h_1(u_-)c(u_+)a(u_-)d_{13}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)b_{12}(u_-)a(u_+)} - \left(\frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + M_{23}(u) \right) a_8^2(u, v) \\
&+ \left(\frac{c(u_-)c(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + \frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} M_{12}(u) + M_{13}(u) \right) \frac{f(-u_-)d_{13}(u_+)}{b_{12}(-u_-)a(u_+)} \quad (\text{B.27})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_9^3(u, v) &= -\frac{c(u_-)a_1(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} - \left(\frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + M_{23}(u) \right) a_9^2(u, v) \\
&+ \left(\frac{c(u_-)c(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + \frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} M_{12}(u) + M_{13}(u) \right) \frac{c_1(u_+)}{a(u_+)} \quad (\text{B.28})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{10}^3(u, v) &= \frac{b_{13}(u_-)b_1(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} M_{13}(u) + \frac{h_1(u_-)h_1(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} M_{12}(u) - \frac{b_{13}(u_-)d(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} \left[\frac{d_1(u_+)}{b(u_+)} M_{13}(u) \right. \\
&+ \frac{d_{12}(u_-)}{e_1(u_-)} \left(\frac{g(u_+)}{b(u_+)} - \frac{f(u_+)h(u_+)}{a(u_+)b(u_+)} \right) M_{12}(u) - \frac{d_{12}(u_-)f(u_+)f(u_-)b_{12}(u_+)}{e_1(u_-)b(u_+)b_{12}(u_-)a(u_+)} \\
&+ \left. \frac{c(u_-)d_{12}(u_+)}{e_1(u_-)b(u_+)} \right] - \frac{h_1(u_-)c(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} \left(\frac{f(u_-)b_{12}(u_+)}{b_{12}(u_-)a(u_+)} + \frac{h(u_+)}{a(u_+)} M_{12}(u) \right) \\
&- \left(\frac{c(u_-)c(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + \frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} M_{12}(u) + M_{13}(u) \right) \frac{a(-u_-)b_{12}(u_+)}{b_{12}(-u_-)a(u_+)} \quad (\text{B.29})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11}^3(u, v) &= \frac{b_{13}(u_-)b_1(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)}M_{23}(u) + \frac{h_1(u_-)h_1(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} - \frac{b_{13}(u_-)d(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} \left(\frac{d_1(u_+)}{b(u_+)}M_{23}(u) \right. \\
&+ \left. \frac{d_{12}(u_-)g(u_+)}{e_1(u_-)b(u_+)} - \frac{d_{12}(u_-)f(u_+)h(u_+)}{e_1(u_-)b(u_+)a(u_+)} \right) - \frac{h_1(u_-)c(u_+)h(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)a(u_+)} \\
&- \left(\frac{d(u_-)d_{12}(u_+)}{e(u_-)e_1(u_+)} + M_{23}(u) \right) \frac{(e_1(u_-)g(u_-) - d(u_-)d_1(u_-))}{e_1(u_-)b(u_-)} \\
&\times \frac{(a(u_+)g(u_+) - f(u_+)h(u_+))}{a(u_+)b_{12}(u_+)} \tag{B.30}
\end{aligned}$$

$$b_1^1(u, v) = \frac{a(-u_-)e_1(u_+)}{e_1(-u_-)a(u_+)} \tag{B.31}$$

$$b_1^2(u, v) = \frac{(b_{13}(u_-)b_1(u_-) - f_1(u_-)h_1(u_-))}{b_{13}(u_-)b(u_-)} \frac{(b_{13}(u_+)b_{12}(u_+) - d_{13}(u_+)d_{12}(u_+))}{b_{12}(u_+)b_{12}(u_+)} \tag{B.32}$$

$$\begin{aligned}
b_1^3(u, v) &= \frac{a_1(u_-)}{e(u_-)} \left[\frac{a_1(u_+)}{e_1(u_+)} - \frac{h_1(u_+)}{e_1(u_+)} \frac{(a(u_+)f_1(u_+) - f(u_+)c_1(u_+))}{(a(u_+)g(u_+) - f(u_+)h(u_+))} \right. \\
&+ \left. \frac{c(u_+)}{e_1(u_+)} \frac{(h(u_+)f_1(u_+) - g(u_+)c_1(u_+))}{(a(u_+)g(u_+) - f(u_+)h(u_+))} \right] \tag{B.33}
\end{aligned}$$

$$c_{22}^1(u, v) = -\frac{h(u_+)}{a(u_+)} \tag{B.34}$$

$$c_{21}^1(u, v) = -\left(\frac{h(u_+)}{a(u_+)}M_{12}(u) + \frac{b(u_+)f(u_-)}{a(u_+)b(u_-)} \right) \tag{B.35}$$

$$c_{12}^1(u, v) = \frac{b(u_+)h(u_-)}{a(u_+)b(u_-)} - \frac{h(u_+)}{a(u_+)}M_{12}(v) \quad (\text{B.36})$$

$$c_{11}^1(u, v) = \frac{f(u_+)}{a(u_+)} - \frac{b(u_+)f(u_-)}{a(u_+)b(u_-)} + \left(\frac{b(u_+)h(u_-)}{a(u_+)b(u_-)} - \frac{h(u_+)}{a(u_+)}M_{12}(v) \right) M_{12}(u) \quad (\text{B.37})$$

$$c_{23}^2(u, v) = -\frac{d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)} \quad (\text{B.38})$$

$$c_{22}^2(u, v) = -\left(\frac{d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)}M_{23}(u) + \frac{g(u_+)d(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)} + \frac{f(u_+)d(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)}c_{22}^1(u, v) \right) \quad (\text{B.39})$$

$$c_{21}^2(u, v) = -\left(\frac{d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)}M_{13}(u) + \frac{g(u_+)d(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)}M_{12}(u) + \frac{d(u_+)c(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)} + \frac{f(u_+)d(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)}c_{21}^1(u, v) \right) \quad (\text{B.40})$$

$$c_{13}^2(u, v) = \frac{e(u_+)d_{13}(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)} - \frac{d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)}M_{12}(v) \quad (\text{B.41})$$

$$c_{12}^2(u, v) = \frac{e(u_+)d_{13}(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)}M_{23}(u) + \frac{d(u_+)g(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)} - \left(\frac{d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)}M_{23}(u) + \frac{g(u_+)d(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)} \right) M_{12}(v) \quad (\text{B.42})$$

$$\begin{aligned}
c_{11}^2(u, v) &= \frac{e(u_+)d_{13}(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)}M_{13}(u) + \frac{d(u_+)g(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)}M_{12}(u) + \frac{c(u_+)d(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)} \\
&- \left(\frac{d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)}M_{13}(u) + \frac{g(u_+)d(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)}M_{12}(u) + \frac{d(u_+)c(u_-)}{b_{12}(u_+)e(u_-)} \right) M_{12}(v) \quad (\text{B.43})
\end{aligned}$$

$$d_2^1(u, v) = -\frac{d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)} \quad (\text{B.44})$$

$$d_1^1(u, v) = -\frac{d_{13}(u_+)}{b_{12}(u_+)} \left[\frac{(d(u_-)e_1(u_-) - c(u_-)d_{13}(u_-))}{(g(u_-)e_1(u_-) - d_{12}(u_-)d_{13}(u_-))} \frac{e_1(u_+)}{d_{13}(u_+)} + M_{12}(u) \right] \quad (\text{B.45})$$

$$d_3^2(u, v) = -\frac{(a(u_+)f_1(u_+) - f(u_+)c_1(u_+))}{(a(u_+)g(u_+) - f(u_+)h(u_+))} \quad (\text{B.46})$$

$$d_2^2(u, v) = -\frac{(a(u_+)f_1(u_+) - f(u_+)c_1(u_+))}{(a(u_+)g(u_+) - f(u_+)h(u_+))} M_{23}(u) \quad (\text{B.47})$$

$$\begin{aligned}
d_1^2(u, v) &= -\frac{(a(u_+)f_1(u_+) - f(u_+)c_1(u_+))}{(a(u_+)g(u_+) - f(u_+)h(u_+))} M_{13}(u) + \frac{(d_{12}(u_-)d(u_-) - g(u_-)c(u_-))}{(d_{12}(u_-)d_{13}(u_-) - g(u_-)e_1(u_-))} \\
&\times \frac{f(u_+)e_1(u_+)}{a(u_+)g(u_+) - f(u_+)h(u_+)} \quad (\text{B.48})
\end{aligned}$$

Conforme mencionado no texto, as seguintes identidades devem ser satisfeitas

$$a_{10}^2(u, v) = 0 \tag{B.49}$$

$$a_{10}^3(u, v) = 0 \tag{B.50}$$

$$a_{11}^3(u, v) = 0. \tag{B.51}$$

Referências

- [1] H. A. Bethe, *Z.Phys.* 71 (1931) 205.
- [2] H. A. Kramers e G.H. Wannier, *Phys. Rev.* 60 (1941) 257.
- [3] L. Onsager, *Phys. Rev.* 65 (1944) 117.
- [4] R. J. Baxter, “Exactly Solved Models in Statistical Mechanics”, Academic Press, New York, 1982.
- [5] M. Gaudin, *Phys. Lett. A* 24 (1967) 55.
- [6] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.* 19 (1967) 1312.
- [7] L. A. Takhtajan and L. D. Faddeev, *Russ. Math. Sur.*, 34(1979) 11.
- [8] E. K. Sklyanin, *J.Phys.A:Math.Gen.* 21 (1988) 2375.
- [9] H. Fan, *Nuc. Phys.B* 488 (1997) 409.
- [10] C. S. Melo, G. A. P. Ribeiro and M. J. Martins *Nucl. Phys. B* 711 (2005) 565-603.
- [11] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin and L. A. Takhtajan, “Yang-Baxter equation in integrable systems”, Advanced Series in Mathematical Physics, edited by M. Jimbo, World Scientific, vol. 10, 1989.
- [12] V. E. Korepin, G. Izergin and N. M. Bogoliubov, “Quantum Inverse Scattering Method, Correlation Functions and Algebraic Bethe ansatz”, Cambridge University Press, 1992, Cambridge.
- [13] L. Mezincescu and R. I. Nepomechie, *J. Phys. A: Math Gen.* 24 (1991) 217; *Int. J. Mod. Phys. A* 6 (1991) 5231.
- [14] E. Artin, *Ann. of Math.*, 48(1947) 101-126.

- [15] V. F. R Jones, *Commun. Math. Phys.* 125 (1985) 459; *Int. J. Mod. Phys. B* 4 (1990) 98.
- [16] M. L. Ge, Y. S. Wu and K. Xue, *Int. J. Mod. Phys. A* 6 (1991) 3735.
- [17] M. Couture, H. C. Lee and N. C. Schmeing, in *Proceeding of "Physics, Geometry and Topology"*, NATO ASI v 238 (1989) 573.
- [18] T. Deguchi and Y. Akutsu, *Phys. Rev. Lett.* 67 (1991) 777.
- [19] M. Couture, *J. Phys. A: Math. Gen.* 24 (1991) 1103.
- [20] C. Fan and F. Y. Wu, *Phys. Rev. B* 2 (1970) 723; B. U. Felderhof, *Physica* 66 (1973) 279.
- [21] A. B. Zamolodchikov and A. V. Fatteev, *Sov. J. Nucl. Phys.* 32 (1980) 298.
- [22] A. G. Izergin and Y. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.* 79 (1981) 303.
- [23] V. O. Tarasov, *Teor. Math. Phys.*, 76 (1988) 793.
- [24] M. J. Martins, *Nucl. Phys. B*, 450(1995) 768; M.J. Martins and P.B. Ramos, *Nucl. Phys. B*, 500(1997) 579.
- [25] R. Koberle and J. A. Swieca, *Phys. Lett. B*, 86 (1979) 209.
- [26] V. Kurak e A. Lima-Santos, *Nucl. Phys. B* 699 (2004) 595, *nlin. SI/0407006*.
- [27] G. L. Shi, K. J. Shi e R. H. Shi, *Nucl. Phys. B*, 670 (2003) 401.
- [28] C. S. Melo e M. J. Martins, "Solution of N-state vertex model satisfying an ice rule", em preparação.