

Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas  
Programa de Pós-Graduação em Física

Emanuel Cardozo Diniz

Termalização de qubits sujeitos à ação de reservatórios  
coletivos Markovianos

São Carlos - SP

2014



Emanuel Cardozo Diniz

Termalização de qubits sujeitos à ação de reservatórios  
coletivos Markovianos

Dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos como pré-requisito à obtenção do título de Mestre.

**Área de concentração:** Física Estatística.

**Linha de Pesquisa:** Informação Quântica.

Orientador: Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Boas.

São Carlos - SP

2014

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

D585tq      Diniz, Emanuel Cardozo.  
              Termalização de qubits sujeitos à ação de reservatórios  
              coletivos markovianos / Emanuel Cardozo Diniz. -- São  
              Carlos : UFSCar, 2014.  
              101 f.

              Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São  
              Carlos, 2014.

              1. Informação quântica. 2. Rabi, Modelo de. 3.  
              Termalização. 4. Interação da radiação com a matéria. I.  
              Título.

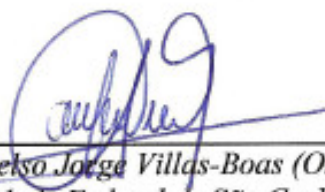
CDD: 530.12 (20ª)

**Emanuel Cardozo Diniz**

Dissertação de mestrado submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal de São Carlos, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em física.

**Aprovado em: 26 de agosto de 2014**

**BANCA EXAMINADORA**



---

*Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Boas (Orientador)*  
*Universidade Federal de São Carlos - DF*



---

*Prof. Dr. Alexandre Dodonov*  
*Universidade de Brasília - IF*



---

*Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano*  
*Universidade de São Paulo - IFSC*

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha família, no qual está incluído meu pai José de Ribamar Pereira Diniz, minha mãe Maria do Rosário Golçalves Cardoso, meus irmãos Rafael e Daniel além dos animais de estimação, tantos aos vivos quantos aos que já se foram. Aos meus pais agradeço por sempre tentarem me ajudar de alguma forma quando precisei e por me apoiar em todas as minhas decisões. Aos meus irmãos sou grato pelos momentos de descontração e brincadeiras. Quanto aos animais de estimação, fica o sentimento de cuidar bem deles e tratá-los de forma digna como todos mereciam ser tratados. Agradeço aos poucos amigos que tenho pelos momentos de convivência e descontração. Gostaria de expressar minha profunda gratidão ao meu orientador Celso Jorge Villas-Bôas por ter aceitado me orientar e pelo apoio nos momentos complicados, além de me ensinar muita coisa sobre o trabalho em que realizamos neste mestrado. Acima de tudo pela sua enorme paciência para comigo. Agradeço ao meu colega de sala e de grupo de pesquisa, Daniel Zini Rossato, por ter me ensinado muita coisa sobre os problemas numéricos e pelas discursões sobre a física que este trabalho proporciona além das discursões sobre futebol dentre outras. Sou grato ao Thiago Werlang pelas sugestões que foram significativas para o rumo que este trabalho foi direcionado. Deixo meus agradecimentos ao meu amigo imaginário *Kelvin* pelas sugestões à cerca deste trabalho. Aos colegas de casa aqui em São Carlos pela harmoniosa convivência. Agradeço ao homem lá de cima (**Deus**) por sempre guiar meus passos e me proteger do mal.

Por fim, agradeço a agência de fomento, Capes pelo suporte financeiro durante esses dois anos.

*"Tell me now you sinner  
you run for a better world  
Tell me why you'd leave her  
despite all the pain  
Don't deny that you once tried to mend  
the circumstances now out of hand  
And don't deny your life's a living hell  
you're a shadow of your own self*

*Tell me now you sinner  
still lost in your secret world  
Tell me now you've seen her  
you know how she hurts  
Don't deny that you will understand  
the circumstances of pain at hand  
And don't assert that we will both survive  
'cause I can't take more of life*

*Stretch your arms out for the fire  
for another dark desire  
In the fields you burn with loss again  
as you dream your life away*

***Say: would you never walk away  
on the break of a coming day  
Would you end this line with me***

***Would you like to waste away what we've ever been?***

***Would you like to come along with me?***

***Would you like to lay to rest our insanity?***

***Would you like to cope for the unreal?.***

*(Sirenia, A Shadow Of Your Own Self)*





# Resumo

Estamos interessados em entender o processo de termalização em sistemas quânticos markovianos, quando temos um ou dois qubits interagindo com um modo quântico do campo eletromagnético, utilizando o modelo de Rabi, em situações onde há interação com estruturas de reservatório que modelam o ambiente que cerca o sistema. Essa análise da termalização é baseada no cálculo dos autovalores do liouvilliano da equação mestra markoviana. Iremos focar principalmente nas situações onde há interação com reservatórios independentes e coletivos, para casos onde o subsistema interage com reservatórios a  $T=0K$  e  $T > 0K$ . Investigamos situações onde há termalização ou não do sistema e como esse fator pode influenciar nas propriedades físicas interessantes, como, por exemplo, a estatística de detecção de fótons no regime ultra forte utilizando a teoria de entrada e saída e correlações quânticas entre os qubits interagindo com reservatórios markovianos.

**Palavras-chaves:** Modelo de Rabi, equação mestra Markoviana, autovalores, reservatório, estatística de fotodetecção, correlações quânticas.



# Abstract

We are interested in understanding the process of Markovian thermalization in quantum systems when we have one or two qubits interacting with a quantum electromagnetic field mode, using the Rabi model, in situations where there is interaction with a reservoir modeling the environment surrounding the system. This analysis of the thermalization is based on the calculation of the eigenvalues of the Liouvillian of the Markovian master equation. We will focus mainly on situations where there is interaction with independent and collective reservoirs, for cases where the subsystems interact with reservoirs at  $T=0K$  and  $T >0K$ . We investigate situations where there is no thermalization of the system and how this may influence interesting physical properties, such as the statistical properties of the field in the ultra strong scheme using the theory of input-output and quantum correlations between qubits collectively interacting with Markovian reservoirs.

**Key-words:** Rabi model, Markovian master equation, eigenvalues, open quantum systems, statistical photodetection and quantum correlations.



# Lista de ilustrações

- Figura 1 – Representação pictórica da caixa de par de Cooper, que constitui o qubit de carga. Figura retirada da referência [11]. . . . . 23
- Figura 2 – Níveis de energia do Hamiltoniano referente à caixa de par de Cooper. a) Níveis de energia no regime onde  $E_J$  prevalece. b) Níveis de energia no regime onde  $E_J \ll E_C$ . c) Implementação do qubit, no ponto de degenerescência  $n_g = 0.5$ . . . . . 25
- Figura 3 – a) Representação pictórica do qubit de fluxo interrompido pelas junções Josephson; b) Representação do circuito para o sistema em questão. Figura retirada da referência [10]. . . . . 27
- Figura 4 – a) Cenário do potencial  $U(\Phi_1, \Phi_2)$  no plano das fases  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ ; b) Estrutura do potencial em função das fases  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  na direção dos dois pontos de mínimo localizados na mesma célula unitária; c) Análogo à situação anterior, porém considerando um dos mínimos em uma célula unitária em conexão com o seu vizinho mais próximo localizado em outra célula unitária. Os valores utilizados foram  $\Phi = \Phi_0/2$  (ponto de frustração) e  $\alpha = 0,8$  na Fig.b) e  $\alpha = 1,0$  na Fig.c). . . . . 28
- Figura 5 – a) Representação pictórica da implementação do qubit de fluxo, no qual as correntes persistentes (setas azuis e vermelhas), circulando tanto para a esquerda quanto para a direita, representam os estados do qubit. b) Os seis primeiros níveis do sistema na representação de carga, onde os dois primeiros representam o qubit. Figura retirada da referência [25]. 30
- Figura 6 – a) Representação pictórica do qubit de fase; b) Implementação do qubit utilizando o SQUID; c) Níveis de energia para o qubit de fase, aprisionados em mínimos locais do potencial  $U(\varphi)$ , no qual temos os níveis de energia mais baixos. Figura adaptada da referência [30]. . . . . 31

- Figura 7 – a) Representação do circuito LC. b) Níveis de energia do circuito LC. c) Representação do circuito LC com o termo não linear. d) Níveis de energia do circuito LC não linear. Figura retirada da referência [39] . . . 35
- Figura 8 – Linha de transmissão do tipo coplanar. Abaixo temos a sequência de circuitos LC que constituem a linha. Figura adaptada da Referência [43]. 36
- Figura 9 – Representação pictórica de uma cavidade interagindo com um átomo. Os parâmetros  $\gamma$  e  $\kappa$  são as taxas de decaimento do átomo e do campo na cavidade, respectivamente,  $t_{transit}$  é o tempo de trânsito do átomo na cavidade (ou tempo de interação átomo-campo) e  $g$  é a constante de acoplamento átomo-campo. . . . . 42
- Figura 10 – a) Aparato experimental: representação pictórica do experimento, onde o qubit de fluxo, representado pela caixa vermelha, e o ressonador, em azul, compartilham uma área da junção Josephson que fica abaixo dos qubits de fluxo. A indutância de Josephson,  $L_J$ , da junção é responsável por mediar o acoplamento ultra forte entre o qubit e o campo. b) Ilustração que representa o qubit de fluxo (cor rosa) acoplado galvanicamente ao ressonador (CPW); abaixo temos uma imagem por litografia óptica do circuito quântico; c) Representação pictórica do gap com capacitores usados em *circuit QED*, que funcionam como os "espelhos" refletindo a voltagem aplicada na linha de transmissão. Estas figuras e informações foram obtidas das referências [48, 49]. . . . . 43
- Figura 11 – Representação pictórica do espectro de autovalores da equação mestra. Os autovalores estacionários são representados pelos círculos fechados de cor vermelha, enquanto que os autovalores com parte imaginária não-nula são representados por círculos fechados azuis. O termo  $\Delta = \min_{\alpha > 0} \text{Re}(-\lambda_\alpha)$  é o gap espectral, definido pelo menor autovalor em módulo com parte real negativa. Figura retirada da referência [71]. . . 56
- Figura 12 – Evolução da distância traço entre os operadores  $\rho_S(t)$  e  $\rho_T$  para a) condição inicial  $|e, 0\rangle$  e b) condição inicial  $|g, 0\rangle$ . Foram utilizados os parâmetros  $\Delta = 0$ ,  $\kappa = 0$ ,  $1\omega_c$ ,  $\gamma = 0$ ,  $1\omega_c$  e diferentes valores de  $g/\omega_c$ . . 58

Figura 13 – Evolução da distância traço entre os operadores $\rho_S(t)$ e $\rho_T$ para a) condição inicial $ eg, 0\rangle$ e b) condição inicial $ gg, 0\rangle$ . Foram utilizados os parâmetros $\Delta = 0$ , $\kappa = 0,1\omega_c$ e diferentes valores de $g/\omega_c$ . . . . .	60
Figura 14 – Subespaços $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ desacoplados para o sistema. . . . .	62
Figura 15 – Ilustração dos 3 primeiros autovalores da equação mestra para diferentes tipos de acoplamento $g/\omega_c$ . Os dois autovalores nulos calculados através do Liouvilliano definido na Eq.(5.14) são dados pelas curvas tracejadas na horizontal, de cores azul e verde, com os codinomes EV1 e EV2, enquanto o autovalor não-nulo é representado pela curva vermelha e codinome EV3. . . . .	64
Figura 16 – Função de correlação $g_{out}^2(0)$ obtida através do estado estacionário térmico $\rho_T$ a) Figura retirada da referência [88]. b) Função $g_{out}^2(0)$ Utilizando o estado estacionário $\rho_{SS}$ dado pela Eq.(5.27). . . . .	73
Figura 17 – Função de correlação $g^2(0)$ do campo intra-cavidade, calculada a partir do estado estacionário $\rho_{SS}$ e do estado térmico $\rho_T$ , em função de $n_{th}$ . . . . .	75
Figura 18 – Função de correlação $g^2(0)$ do campo de saída calculada a partir do estado estacionário $\rho_{SS}$ e do estado térmico $\rho_T$ , em função de $n_{th}$ . . . . .	76
Figura 19 – Número médio de fótons intra-cavidade, calculado a partir do estado estacionário $\rho_{SS}$ e do estado térmico $\rho_T$ , em função de $n_{th}$ . . . . .	78
Figura 20 – Fluxo de fótons que escapam do ressonador, calculado a partir do estado estacionário $\rho_{SS}$ e do estado térmico $\rho_T$ , em função de $n_{th}$ . A taxa de decaimento da cavidade aqui utilizada foi $\gamma_0 = 0,01\omega_c$ . . . . .	79
Figura 21 – Correlações quânticas obtidas através do estado estacionário $\rho_{SS}$ , Eq.(5.27), em função dos valores de acoplamento $0 \leq g/\omega_c \leq 1$ e temperatura $0,05 < k_B T/\hbar\omega_c < 0,25$ . a) Discórdia ;b) Emaranhamento de Formação. Utilizados os parâmetros $\Delta = 0$ , sob a condição inicial $ eg, 0\rangle$ . c) Discórdia ; d) Emaranhamento de Formação. Utilizados os parâmetros $\Delta = 0$ , sob a condição inicial $ g, g, 0\rangle$ . . . . .	89

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Regimes de acoplamento . . . . .	42
Tabela 2 – Fluxo de fótons $NM_{out}/\omega_c$ , que escapam da cavidade, utilizando os estados $\rho_{SS}$ e $\rho_T$ . . . . .	79



# Sumário

	<b>Lista de ilustrações . . . . .</b>	<b>11</b>
	<b>Lista de tabelas . . . . .</b>	<b>14</b>
	<b>Sumário . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Qubits Supercondutores: Um novo paradigma para a informa- ção quântica . . . . .</b>	<b>20</b>
2.1	Junções Josephson . . . . .	20
2.2	Qubits supercondutores . . . . .	22
2.2.1	Qubit de Carga . . . . .	22
2.2.2	Qubit de Fluxo . . . . .	27
2.2.3	Qubit de Fase . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Quantização do circuito e da linha de transmissão . . . . .</b>	<b>33</b>
3.1	A quantização do circuito . . . . .	34
3.2	Linha de Transmissão . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Descrição da interação radiação-matéria: O modelo de Rabi .</b>	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>Termalização em sistemas quânticos abertos . . . . .</b>	<b>47</b>
5.1	Equação mestra: Uma abordagem Markoviana . . . . .	47
5.2	Forma de Lindblad da equação mestra . . . . .	51
5.3	Termalização para o sistema com um ou dois qubits interagentes com um modo quântico . . . . .	53
5.3.1	Autovalores da equação mestra markoviana . . . . .	53
5.4	Estado estacionário do sistema . . . . .	62

<b>6</b>	<b>Propriedades estatísticas do campo de radiação dentro e fora do ressonador no regime ultra forte . . . . .</b>	<b>67</b>
6.1	Formalismo de <i>entrada e saída</i> . . . . .	69
6.2	Estatística de fotodeteccção no regime ultraforte . . . . .	71
6.3	Resultados . . . . .	72
6.3.1	Função de correlação: entrada e saída . . . . .	74
6.3.2	Número médio de fótons: entrada e saída . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Correlações Quânticas entre os qubits induzidas pelo modo quântico do campo e pelo reservatório. . . . .</b>	<b>81</b>
7.1	Resultados . . . . .	88
<b>8</b>	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>91</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>92</b>
	<b>Apêndices . . . . .</b>	<b>99</b>
	<b>APÊNDICE A – Apêndice . . . . .</b>	<b>100</b>
A.1	Receita para preparar $ eg\rangle$ em nosso sistema no contexto de <i>circuit QED</i>	100

# 1 Introdução

Nos últimos 30 anos atingiram-se avanços significativos no que diz respeito à habilidade de utilizar a luz para observar e manipular a matéria na escala atômica. Estes avanços permitiram o surgimento de novos dispositivos que atualmente são de fundamental importância para o progresso científico e tecnológico. Muitos desses avanços foram alcançados graças à teoria da eletrodinâmica quântica que nos permite buscar o entendimento sobre os fenômenos decorrentes da interação de luz com a matéria em escalas muito além do que imaginariamos existir. Para estudar e investigar as propriedades da interação de luz com a matéria por intermédio da eletrodinâmica quântica, surgiu a Óptica Quântica, no final dos anos de 1960, que se encarregou de estudar de maneira sucinta a interação de fótons individuais com a matéria, baseando-se nas descobertas de Planck e Einstein sobre o comportamento quântico da energia e da luz. Neste trabalho iremos buscar um entendimento acerca deste tipo de interação quando tratamos sistemas confinados em alguma região do espaço, que é o foco de estudo de uma sub-área da Óptica Quântica conhecida como eletrodinâmica quântica de cavidades. A interação da luz com a matéria assim passou a ser estudada em cavidades Ópticas e de Microondas por meio do Modelo de Jaynes-Cummings [1], que fornece uma descrição bem precisa quando estamos interessados em regimes de acoplamento átomo-campo fraco ou forte, isto é, regimes onde o acoplamento entre o átomo e o campo é menor ou maior que a taxa de decaimento atômico ou da cavidade. Entretanto, mais recentemente foi possível construir novos sistemas físicos, dentro de uma área hoje conhecida como eletrodinâmica quântica de circuitos, onde outros regimes de acoplamento átomo-campo podem ser alcançados, como o regime de acoplamento ultra forte, onde o acoplamento átomo-campo é comparável à frequência de transição atômica ou à frequência do modo do campo. Nesse regime o modelo de Jaynes-Cummings perde sua validade e a descrição mais precisa desse sistema é dada por um Hamiltoniano mais completo e que até o momento tem se mostrado eficaz na descrição de regimes de interação mais fortes. Tal modelo é conhecido como modelo de Rabi [2,3], que apesar de sua simplicidade possui complicações no que diz respeito à sua

solução analítica e integrabilidade relacionadas às poucas quantidades conservadas de sua estrutura. Neste trabalho estamos interessados em estudar a dinâmica desse modelo de Rabi quando o sistema em questão interage com o meio ambiente que o cerca. Isso será feito via o formalismo de equações mestras que são úteis no estudo de sistemas quânticos abertos. Em particular, estamos interessados em entender como ocorre o processo de termalização nesse modelo de Rabi, isto é, quais as condições para que o sistema atinja o estado de equilíbrio com o reservatório que o cerca e qual o tempo necessário para que essa termalização aconteça. Investigaremos como o número de átomos ( $N = 1$  ou  $2$ ) e a natureza do reservatório (isto é, se temos reservatório atuando coletivamente ou individualmente nos átomos) influenciam o processo de termalização.

No regime de acoplamento ultra forte, a equação mestra padrão obtida dentro das aproximações de Born e Markov, usualmente utilizada para descrever experimentos em óptica quântica, deixa de ser válida e, então, uma nova equação mestra deve ser deduzida [4]. Ao contrário da equação mestra padrão, essa nova equação mestra depende diretamente dos autoestados do Hamiltoniano e, por isso, para cada acoplamento átomo-campo ou dessintonia entre o átomo e o campo nós temos que deduzir uma nova equação mestra. Investigar como ocorre esse processo de termalização em determinados sistemas é importante, pois em alguns trabalhos recentes foi investigada a possibilidade do estado de vácuo gerar correlações quânticas no regime de acoplamento ultra forte entre dois qubits supercondutores de forma espontânea [5]. Portanto, verificar em que situações o sistema atinge seu estado de equilíbrio térmico com o meio ambiente é importante no estudo de possíveis arquiteturas de computação quântica, uma vez que o emaranhamento é um recurso essencial. Neste trabalho, no capítulo 2, fazemos uma breve introdução sobre os qubits supercondutores de estado sólido compostos por um ingrediente fundamental: a junção Josephson. Em seguida, abordamos as características e peculiaridades de três tipos de qubit: os de carga, fluxo e fase. Em seguida, no capítulo 3, damos ênfase à descrição sobre a quantização do circuito LC e das linhas de transmissão, nas quais são inseridos os qubits no intuito de se estudar a interação desses qubits com a radiação em comprimento de microondas que é inserida na linha de transmissão. No capítulo 4, fazemos uma rápida descrição do processo de interação da radiação com a matéria no contexto

de eletrodinâmica quântica de cavidades e circuitos e o modelo responsável por descrever tal interação: o modelo de Rabi. Discutimos, no capítulo 5, o processo de termalização no contexto de sistemas quânticos abertos utilizando a equação mestra markoviana para esse tipo de análise. Em seguida introduzimos como é feito o estudo da termalização onde este é baseado na análise dos autovalores do Liouvilliano correspondente à equação mestra markoviana. Descrevemos os casos em que ocorre a termalização ou não para um e dois qubits e fornecemos algumas evidências sobre essas análises. Para casos em que não ocorre termalização, principalmente quando qubits interagem com reservatórios coletivos, propomos um estado estacionário para o sistema. A partir deste estado, investigamos algumas propriedades físicas tais como: estatística de detecção de fótons no regime ultra forte e geração de correlações quânticas entre os qubits nesse regime descritos nos capítulos 6 e 7.

## 2

# Qubits Supercondutores: Um novo paradigma para a informação quântica

A descoberta do fenômeno da supercondutividade em 1911 por *H. Kamerlingh-Onnes* foi um grande marco para o surgimento de um novo conceito em física. Dentre as teorias e efeitos que foram influenciados pela supercondutividade, podemos destacar os efeitos de resistência nula, o efeito *Meissner-Oksenfeld* (1933), teoria fenomenológica de London (1935), teoria de *Guinzburg-Landau* desenvolvida em 1950, a teoria *BCS* (*Bardeen, Cooper, Schrieffer*) datada de 1957, o efeito *Josephson* (1962), dentre outros. As teorias de *Guinzburg-Landau* e *BCS* são as mais bem sucedidas na explicação desse fenômeno, sendo que a primeira delas explica de forma bastante sucinta, apesar de ser puramente fenomenológica, grande parte das propriedades de supercondutores, enquanto a segunda, considerada mais fundamental, é deduzida de primeiros princípios, explicando os mecanismos microscópicos da supercondutividade, tratando-a como uma teoria quântica. Para mais detalhes sobre o efeito de supercondutividade e suas teorias correlatas, recomendo a excelente referência [6]. A seguir, faremos uma breve discussão sobre a física de circuitos supercondutores que utilizam o efeito *Josephson*<sup>1</sup>. Sendo que este efeito tem papel central no contexto de qubits supercondutores, que iremos introduzir nesta seção.

### 2.1 Junções Josephson

A física de qubits supercondutores obteve um progresso considerável na última década e atualmente tem se estabelecido cada vez mais como uma área candidata para o estudo e implementação de bits quânticos para informação quântica. O elemento chave para a construção desses qubits é a junção *Josephson*, sendo esta caracterizada por uma

---

<sup>1</sup> Por esse efeito, B. Josephson foi agraciado com o prêmio Nobel de física em 1973.

combinação de dois metais supercondutores separados por uma fina barreira isolante de alguns nanômetros para que possa haver o tunelamento dos pares de Cooper [6]. Considerando o sistema em si, podemos definir o número de pares de Cooper,  $n_1$  e  $n_2$  e as fases quânticas  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , referentes às funções de onda correspondentes ao lado direito e esquerdo da junção. Essas funções de onda são definidas por  $\Psi_1 = \sqrt{n_1}e^{i\varphi_1}$  e  $\Psi_2 = \sqrt{n_2}e^{i\varphi_2}$ , de modo que o efeito do tunelamento dos pares de Cooper ocasiona uma diferença de fase devida à superposição das funções de onda dos metais supercondutores, que constituem o sistema. Essa predição foi feita por Josephson [7], sendo esta descrita pela equação:

$$I_J = I_c \sin \varphi, \quad (2.1)$$

onde  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  representa a diferença de fase e  $I_c$ , a corrente crítica. A equação acima é conhecida como a primeira equação de *Josephson*, sendo que esta correlaciona a diferença de fase da junção com a supercorrente  $I_J$  gerada pelos pares de Cooper que fluem através da junção. Além disso, Josephson deduziu que uma diferença de fase varia linearmente em relação ao tempo, quando aplicada uma diferença de potencial  $V$  entre os dois supercondutores, sendo isto descrito por:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{\Phi_0} V, \quad (2.2)$$

onde  $\Phi_0 = \hbar/2e$  é o fluxo quântico supercondutor [8], tal que a equação anterior é conhecida como a segunda equação de *Josephson*. Pode-se também estabelecer uma relação de efeitos que ocorrem na descrição das equações de *Josephson*; estes são descritos pelos efeitos *Josephson* DC e AC [9]. O primeiro efeito é descrito pela Eq. (2.1), enquanto o segundo ocorre no momento em que uma corrente-ac de frequência  $\nu = 2eV/\hbar$  oscila entre os dois metais supercondutores, caso aplicada uma tensão  $V$  na junção. O grande atrativo da junção Josephson é que a mesma pode ser utilizada como um indutor não linear contendo as mesmas variáveis utilizadas na teoria eletromagnética, tais como indutância, onde isto pode ter um efeito análogo ao de derivar a Eq. (2.1). Assim, fazendo uso da Eq. (2.2), encontramos:

$$\dot{I}_J = I_c \cos \varphi \frac{2\pi}{\Phi_0} V,$$

de modo que a dependência da derivada  $\dot{I}_J$  com o potencial  $V$  caracteriza a equação obtida anteriormente como um indutor, que pode ser definido ao fazer o potencial  $V$  ser igual a

$L_J \dot{I}_J$ . Por fim, a indutância Josephson,  $L_J$ , será descrita por:

$$L_J = \frac{\Phi_0}{2\pi \cos \varphi I_c}. \quad (2.3)$$

A expressão anterior caracteriza um indutor não linear<sup>2</sup> pela relação de proporcionalidade  $L_J \propto 1/\cos \varphi$ . Outro parâmetro importante da descrição da junção é a energia Josephson,  $E_J = \Phi_0 I_c / 2\pi$ , que representa o máximo de energia potencial da junção. A energia total armazenada na junção assume a forma do potencial [9]:

$$U_J(\varphi) = \int I_J V dt = E_J (1 - \cos \varphi),$$

que é conhecido como *tilted washboard potential*<sup>3</sup>, por conta dos diferentes *bias* de correntes aplicadas.

## 2.2 Qubits supercondutores

Faremos aqui uma breve introdução aos qubits supercondutores constituídos por junções Josephson e algumas características peculiares existentes entre eles.

### 2.2.1 Qubit de Carga

Em eletrodinâmica quântica de circuitos, os portadores responsáveis por apresentarem uma resposta à voltagem aplicada à linha de transmissão são constituídos por materiais supercondutores submetidos ao efeito Josephson. Dois materiais supercondutores conectados por uma fina camada isolante fazem o papel do "átomo" na interação com o campo aplicado na linha de transmissão formando assim o circuito supercondutor, funcionando por conta da supercondutividade em regimes de temperatura criogênica da ordem de umas dezenas de milikelvins. O ingrediente fundamental para todo esse processo é descrito por um dispositivo chave conhecido como a caixa de par de Cooper [10, 11]. Uma ilustração da caixa é pode ser vista na figura abaixo;

<sup>2</sup> Tal não-linearidade é importante e será entendida na próxima seção, pois através dela é possível implementar a transição entre os dois primeiros estados quânticos de um sistema de muitos níveis.

<sup>3</sup> Essa denominação está relacionada com a forma assumida pelo potencial. Para mais detalhes, veja, [9].



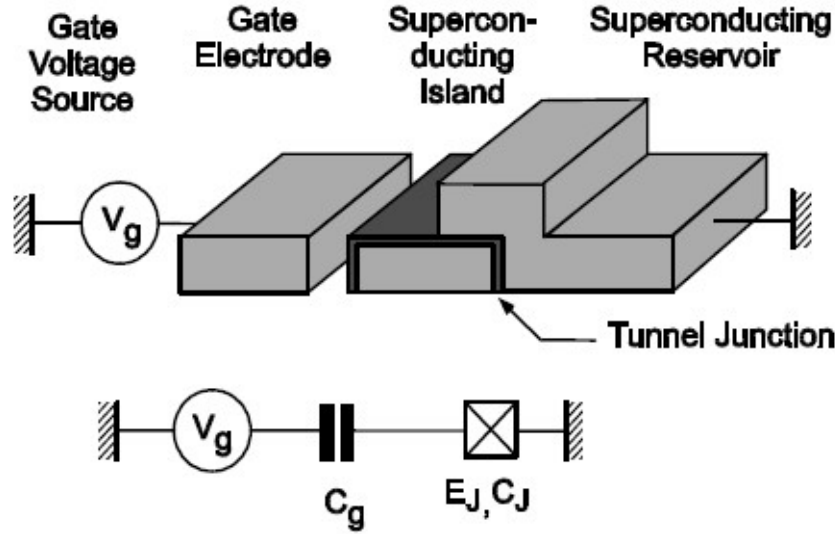


Figura 1: Representação pictórica da caixa de par de Cooper, que constitui o qubit de carga. Figura retirada da referência [11].

Como pode ser visto acima, esse dispositivo é composto por um eletrodo supercondutor BCS, que nesse contexto é denominado de "ilha", onde esta é conectada a um reservatório BCS supercondutor via uma junção Josephson de energia  $E_J$  e capacitância  $C_J$  ilustrada na Fig. 1. Através desse dispositivo pode haver o tunelamento dos pares de Cooper entre ambos os materiais supercondutores por intermédio da junção Josephson, fazendo com que o número  $N$  de pares de Cooper seja considerado, para esse sistema, um grau de liberdade<sup>4</sup>. O número  $N$  pode ser tratado agora como uma variável que flutua quanticamente, por conta da imprecisão do número de pares ao ocorrer o tunelamento em ambos os lados da ilha supercondutora. A variável  $N$  pode ser descrita por um operador  $\hat{N}$  [11]:

$$\hat{N} |N\rangle = N |N\rangle, \quad (2.4)$$

onde  $N \in \mathbb{Z}$ . A fase de superposição entre as funções de onda descrita na seção 1 também é promovida ao status de observável quântico, de modo que agora, em contrapartida ao caso clássico, ela é descrita pelo operador  $\hat{\varphi}$ ,<sup>5</sup> de modo a satisfazer a relação de comutação

<sup>4</sup> Neste caso, a variável  $N$  é referente ao excesso de pares de Cooper que se acumulam na ilha supercondutora, via o tunelamento através das junções Josephson. A ilha pode ser polarizada pela capacitância conectada a uma fonte de tensão.

<sup>5</sup> O intervalo para a fase  $\varphi$  é  $[0, 2\pi]$ .

$[\hat{\varphi}, \hat{\mathbf{N}}] = i\hbar$ . Essa relação de incerteza entre a fase e o operador  $\hat{\mathbf{N}}$  pode ser reescrita, levando à obtenção da relação de comutação  $[e^{-i\hat{\varphi}}, \hat{\mathbf{N}}] = \hbar e^{-i\hat{\varphi}}$ , que pode ser obtida através dos operadores de fase introduzidos em [12]<sup>6</sup>.

Através da nova relação de comutação, podemos relacionar os operadores  $\hat{\mathbf{N}}$  e  $\hat{\varphi}$ , utilizando a expressão  $\exp(\pm i\hat{\varphi}) |\mathbf{N}\rangle = |\mathbf{N} \pm 1\rangle$ . O mapa entre a fase e o estado de carga é estabelecido através das autofunções [8]:

$$|\varphi\rangle = \sum_{\mathbf{N}} e^{i\mathbf{N}\varphi} |\mathbf{N}\rangle \quad \text{e} \quad |\mathbf{N}\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-i\mathbf{N}\varphi} |\varphi\rangle. \quad (2.5)$$

Com o auxílio dos operadores  $\hat{\mathbf{N}}$  e  $\hat{\varphi}$  pode-se escrever o hamiltoniano que descreve o sistema referente à Fig.1, de forma que este é dado por:

$$\hat{H} = 4E_C (\hat{\mathbf{N}} - N_g)^2 - E_J \cos \hat{\varphi}, \quad (2.6)$$

onde  $E_C = (2e)^2 / 2C_\Gamma$  é a energia de um par de Cooper, com  $C_\Gamma = C_g + C_J$  sendo a capacitância total na ilha [13]. O primeiro termo em (2.6) refere-se à parte eletrostática do sistema, caracterizando o regime de cargas, com  $N_g = C_g V_g / (2e)$  sendo denominado como a carga de porta no eletrodo. O segundo termo é referente à diferença da fase supercondutora da junção Josephson com energia  $E_J$  definida na seção 2.1. No intuito de encontrar os autoestados do hamiltoniano, expressa-se o mesmo na base de autoestados de carga utilizando (2.6) para obter [11]:

$$\hat{H} = 4E_C \sum_{\mathbf{N}} \left[ (\mathbf{N} - N_g)^2 |\mathbf{N}\rangle \langle \mathbf{N}| - \frac{E_J}{2} (|\mathbf{N}\rangle \langle \mathbf{N} + 1| + |\mathbf{N} + 1\rangle \langle \mathbf{N}|) \right]. \quad (2.7)$$

Pode-se então, a partir desse hamiltoniano<sup>7</sup>, acessar o espectro do sistema que é ilustrado na figura abaixo. Os níveis de energia para o sistema variam de acordo com  $E_J$ . No caso onde  $E_J = 0$  temos a formação de bandas de energia periódicas em função do parâmetro  $N_g$ . Para  $E_J$  finito há uma quebra de degenerência ocasionando a separação entre os primeiros níveis de energia bem no ponto de degenerescência de carga; neste caso  $N_g = 0, 5$  e no

<sup>6</sup> Especificamente, são utilizados os operadores bosônicos de criação e aniquilação  $\hat{b} = e^{-i\hat{\varphi}} \sqrt{\hat{\mathbf{N}}}$  e  $\hat{b}^\dagger = e^{i\hat{\varphi}} \sqrt{\hat{\mathbf{N}}}$ .

<sup>7</sup> O segundo termo do hamiltoniano (2.6) transforma-se na expressão de auto estados ao fazer  $\cos \hat{\varphi} = \frac{1}{2} (e^{i\hat{\varphi}} + e^{-i\hat{\varphi}}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{N}} (|\mathbf{N}\rangle \langle \mathbf{N} + 1| + |\mathbf{N} + 1\rangle \langle \mathbf{N}|)$ , com as autofunções (2.5) e a fórmula  $\exp(\pm i\hat{\varphi}) |\mathbf{N}\rangle = |\mathbf{N} \pm 1\rangle$ .

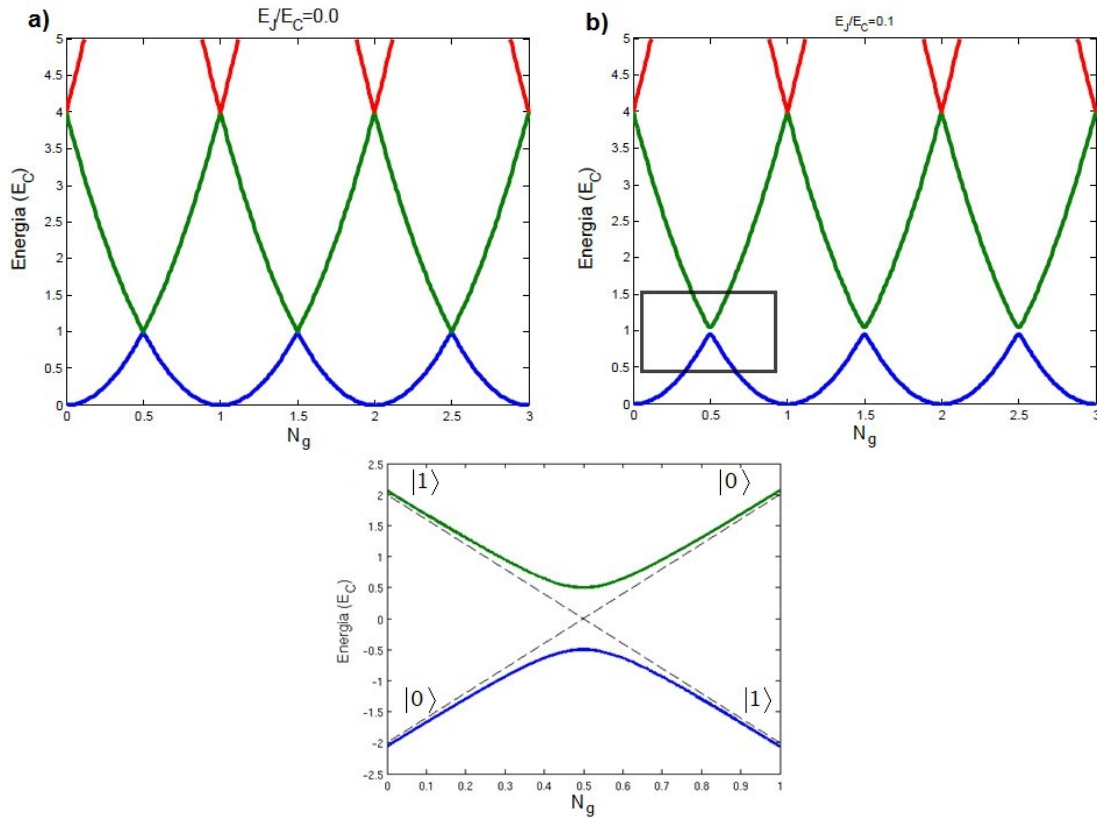


Figura 2: Níveis de energia do Hamiltoniano referente à caixa de par de Cooper. a) Níveis de energia no regime onde  $E_J$  prevalece. b) Níveis de energia no regime onde  $E_J \ll E_C$ . c) Implementação do qubit, no ponto de degenerescência  $n_g = 0.5$ .

intervalo de carga de porta  $N_g \in [0, 1]$  como descrito em [13]. Isso permite a implementação de um sistema manipulando os dois estados de mais baixa energia  $|\mathbf{N}\rangle = |0\rangle$  e  $|\mathbf{N}\rangle = |1\rangle$  caracterizando o popular qubit, que neste caso é denominado por qubit de carga já que neste sistema considera-se relevante a razão  $E_J/E_C \ll 1$ , no qual o regime de carga é preponderante. Portanto, a possibilidade de implementação do qubit de carga permite escrever o hamiltoniano [14]

$$\hat{H}_{qubit} = -\frac{1}{2} (E_{el}\hat{\sigma}_z + E_J\hat{\sigma}_x), \quad (2.8)$$

com  $E_{el}$  e  $E_J$  representando as energias de carga e do tunelamento Josephson, como também  $\hat{\sigma}_z$  e  $\hat{\sigma}_x$  as matrizes de Pauli para o sistema de dois níveis. Os parâmetros do hamiltoniano acima podem ser controlados de forma mais precisa, via a utilização do dispositivo SQUID<sup>8</sup> constituído de duas ou mais junções Josephson inseridas em uma

<sup>8</sup> A sigla SQUID vem do inglês (*Superconductor Quantum Interfering Device*). São dispositivos super-

estrutura em forma de loop, na qual a energia de tunelamento fica dependente apenas de um fluxo externo  $\Phi_x$ , fazendo com que o parâmetro de tunelamento Josephson torne-se dependente do fluxo:

$$E_J = E_{Jmáx} \cos\left(\pi \frac{\Phi_x}{\Phi_0}\right). \quad (2.9)$$

Devemos ressaltar que durante os anos de 1990 ocorreram avanços significativos na implementação de qubits supercondutores. Dentre eles, destacam-se as observações experimentais realizadas por V. Bouchiat e colaboradores em Saclay, França [13], utilizando o protótipo ilustrado na Fig.1 desta seção. No contexto de coerência quântica, destacamos a primeira realização de espectroscopia do estado de qubit, por Nakamura e colaboradores em Tóquio, Japão [17]. Doravante a esses resultados faremos lista com os qubits no regime de carga que existem atualmente:

- *Quantonium*: proposto em 2002 por A. Cottet *et al* [18], vindo a ser implementado experimentalmente onde observaram-se oscilações de Rabi nesse protótipo [19]. Ganhou bastante notoriedade por apresentar o mais longo tempo de coerência atingido por um qubit Josephson obtido até então<sup>9</sup>.

- *Transmon*: um dos maiores problemas dos qubits Josephson é que estes são bem afetados com o ruído oriundo do ambiente externo. Tendo em vista esse problema, em 2007 J. Koch e colaboradores [20] propuseram um novo tipo de qubit, denominado de *Transmon*, operando no regime no qual a razão entre as energias é  $E_J/E_C \gg 1$ . O qubit *Transmon* é mais robusto, sendo menos sensível ao ruído de carga que costumeiramente surge nesses sistemas, destacando-se assim por exibir o mais longo tempo de coerência dentre todos os qubits Josephson existentes atualmente. Um ponto importante é que, com o aumento da escala de energia  $E_J/E_C$ , ele vai perdendo a estrutura anarmônica de níveis e passando a se comportar de maneira análoga a um oscilador harmônico, recuperando a estrutura harmônica de níveis de energia.

---

condutores de interferência quântica que têm como objetivo medir o campo magnético aplicado numa determinada amostra de interesse. Tal dispositivo é formado por um anel supercondutor interrompido por uma ou mais junções Josephson. Para um maior esclarecimento, veja, as referências [15, 16].

<sup>9</sup> Até o ano de 2004.

### 2.2.2 Qubit de Fluxo

No caso anterior vimos uma situação em que o regime de carga era dominante para a implementação de um sistema de dois níveis. Agora teremos a situação contrária, onde a energia Josephson será dominante em relação a energia de carga,  $[E_C/E_J \ll 1]$ . Vale a pena mencionar que a sugestão de implementação de um sistema de dois níveis por meio de um loop<sup>10</sup> supercondutor interrompido por uma junção de tunelamento Josephson foi feita por A. J. Legget<sup>11</sup> [21] onde tal implementação pode ser feita utilizando o (SQUID) [10, 16]. Nesta seção focaremos em uma outra topologia de qubit, onde agora ele é constituído por um loop interrompido por 3 junções Josephson (qubit Delft) [22–24], como pode ser visto na figura abaixo. Na figura 3, especificamente em 3(a) vemos que para este tipo de qubit

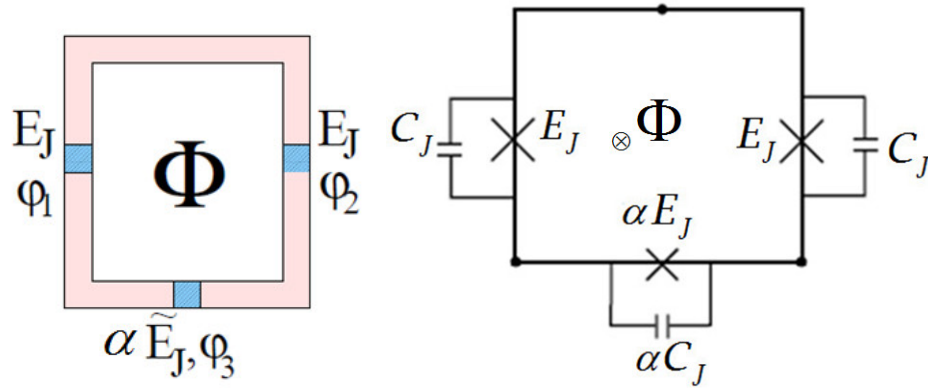


Figura 3: a) Representação pictórica do qubit de fluxo interrompido pelas junções Josephson; b) Representação do circuito para o sistema em questão. Figura retirada da referência [10].

temos duas junções Josephson com energias e capacitâncias Josephson iguais, sendo que uma terceira junção é diferente e menor que as outras junções do loop por um fator de assimetria  $\alpha$ <sup>12</sup>. Neste sistema, a fase exerce um papel dominante sendo que através da quantização do fluxo [8]

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = 2\pi n, \quad (2.10)$$

<sup>10</sup> Loop é uma estrutura em forma de anel que tem como finalidade confinar o fluxo magnético ocasionando o surgimento de correntes persistentes circulando no sentido horário e anti-horário no interior do loop.

<sup>11</sup> Agraciado com o Prêmio nobel de física em 2002.

<sup>12</sup> O parâmetro assimétrico  $\alpha$  é relativo à junção de menor sítio, dentre as outras 2 que compõem este tipo de qubit.

onde fixamos umas das três fases, no caso a fase  $\varphi_3$ , e deixamos livres as outras duas fases simétricas  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , que neste caso serão expressas em termos de duas novas variáveis  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ . Sob tal imposição, pode-se escrever a Lagrangeana do sistema, obtendo:

$$\mathcal{L}(\Phi_1, \Phi_2; \dot{\Phi}_1, \dot{\Phi}_2) = \frac{C_J}{2} (\dot{\Phi}_1^2 + \dot{\Phi}_2^2) + \frac{\alpha C_J}{2} (\dot{\Phi}_1^2 - \dot{\Phi}_2^2) - U(\Phi_1, \Phi_2), \quad (2.11)$$

com os dois primeiros termos são oriundos da quantização do fluxo, onde fixamos uma das fases para as duas junções simétricas e assimétricas, e o segundo termo é referente a um potencial, que depende apenas das variáveis  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ , em que este é definido pela expressão:

$$U(\Phi_1, \Phi_2) = -E_J \left\{ \left[ \cos\left(2\pi\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right) + \cos\left(2\pi\frac{\Phi_2}{\Phi_0}\right) \right] + \alpha \cos\left(2\pi\frac{\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi}{\Phi_0}\right) \right\}. \quad (2.12)$$

Por meio desse potencial pode-se observar situações onde há um mínimo de potencial para um valor  $\alpha > 0,5$  exibindo uma forma de duplo potencial que pode ser vista na Fig.4: Na

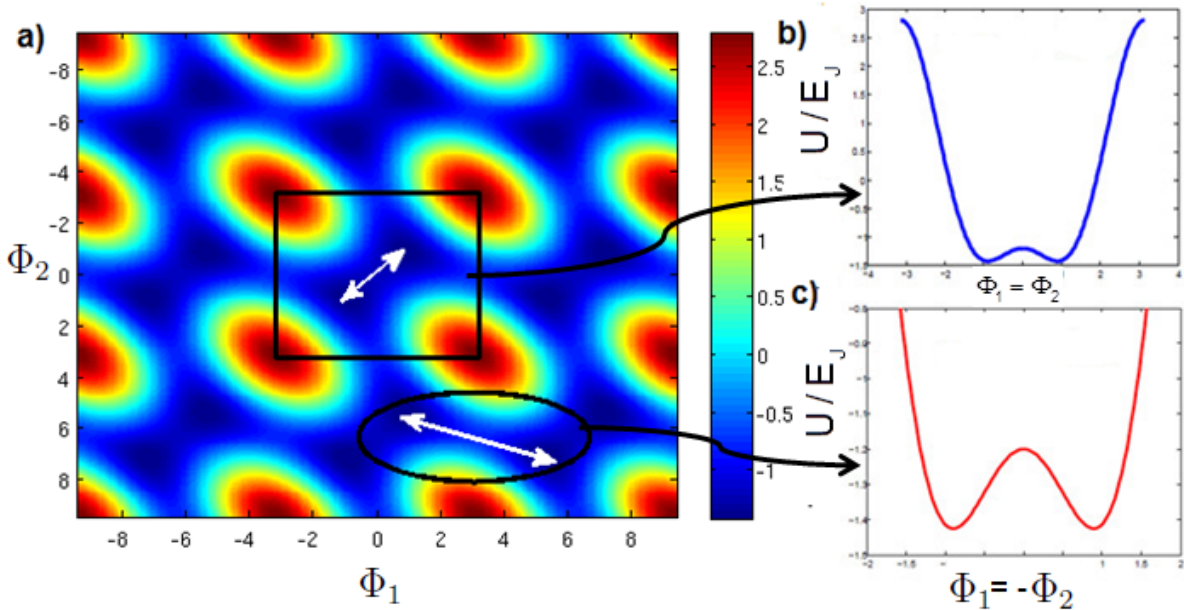


Figura 4: a) Cenário do potencial  $U(\Phi_1, \Phi_2)$  no plano das fases  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ ; b) Estrutura do potencial em função das fases  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  na direção dos dois pontos de mínimo localizados na mesma célula unitária; c) Análogo à situação anterior, porém considerando um dos mínimos em uma célula unitária em conexão com o seu vizinho mais próximo localizado em outra célula unitária. Os valores utilizados foram  $\Phi = \Phi_0/2$  (ponto de frustração) e  $\alpha = 0,8$  na Fig.b) e  $\alpha = 1,0$  na Fig.c).

figura 4.(a) o potencial ilustra uma estrutura com dois mínimos degenerados (destacados no quadrado preto), acima de um valor crítico  $\alpha = 0,5$  em  $\phi_1 = -\phi_2 = \pm \phi^* \bmod 2\pi$ , com  $\phi^* = \pm \arccos(1/2\alpha)$ . Em 4.b) exibimos o potencial quando  $\phi_2 = -\phi_1$  e os mínimos estão localizados na mesma célula unitária, enquanto que em c) tem-se o potencial quando os dois mínimos estão localizados em células diferentes do espaço de fase (destacadas no círculo preto). A diferença entre as figuras b) e c) reflete o fato de haver tunelamento de uma partícula sujeita a esse potencial, dependendo dos valores de  $\alpha$ , que faz com que a barreira de potencial desempenhe o papel de um ponto de sela e da fase em questão.

Efetuada uma mudança de variáveis em função de  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  podemos escrever  $\Phi_A = (\Phi_1 + \Phi_2)/2$  e  $\Phi_B = (\Phi_1 - \Phi_2)/2$ , de modo que, ao inserir tais variáveis no potencial (2.12), pode-se obter, com auxílio deste, o hamiltoniano do sistema ao efetuar uma transformação de Legendre, passando a ser definido por:

$$H = \frac{\Pi_A^2}{C_J} + \frac{\Pi_B^2}{C_J(1+\alpha)} - E_J \left\{ \left[ 2 \cos\left(2\pi \frac{\Phi_A}{\Phi_0}\right) \cos\left(2\pi \frac{\Phi_B}{\Phi_0}\right) \right] + \alpha \cos\left(2\pi \frac{\Phi - 2\Phi_B}{\Phi_0}\right) \right\}, \quad (2.13)$$

com  $\Pi_A = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}_A$  e  $\Pi_B = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}_B$  definindo os momentos canônicos do sistema. O hamiltoniano acima, responsável pela descrição do qubit da Fig. 3, pode ser diagonalizado utilizando a base de carga de maneira análoga à que foi feita na seção anterior. A ilustração dos níveis de energia deste sistema é exibida na Fig. 5. Como foi exemplificado na figura 5, no ponto onde  $\Phi = \Phi_0/2$ , existe a possibilidade de implementar um estado de qubit  $|\pm\rangle$  como superposição de correntes persistentes<sup>13</sup>, que circulam no sentido horário e anti-horário ( $|\uparrow\rangle = |\odot\rangle$  e  $|\downarrow\rangle = |\circ\rangle$ ) no loop supercondutor, na região que abrange os intervalos  $\Phi < \Phi_0/2$  e  $\Phi > \Phi_0/2$ . Feitas essas considerações pode-se escrever o hamiltoniano do qubit de fluxo como [22]:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\epsilon}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Delta}{2}\hat{\sigma}_x, \quad (2.14)$$

onde os parâmetros  $\epsilon$  e  $\Delta$  definem o ponto de degenerescência dependente da corrente persistente e o elemento que depende da matriz de tunelamento, respectivamente. Importantes realizações experimentais foram reportadas utilizando o qubit Delft. Dentre elas,

<sup>13</sup> Corrente persistente é a corrente elétrica que circula num supercondutor indefinidamente. Num loop supercondutor essa corrente pode circular tanto no sentido horário, como no sentido anti-horário, dependendo da orientação do campo magnético.

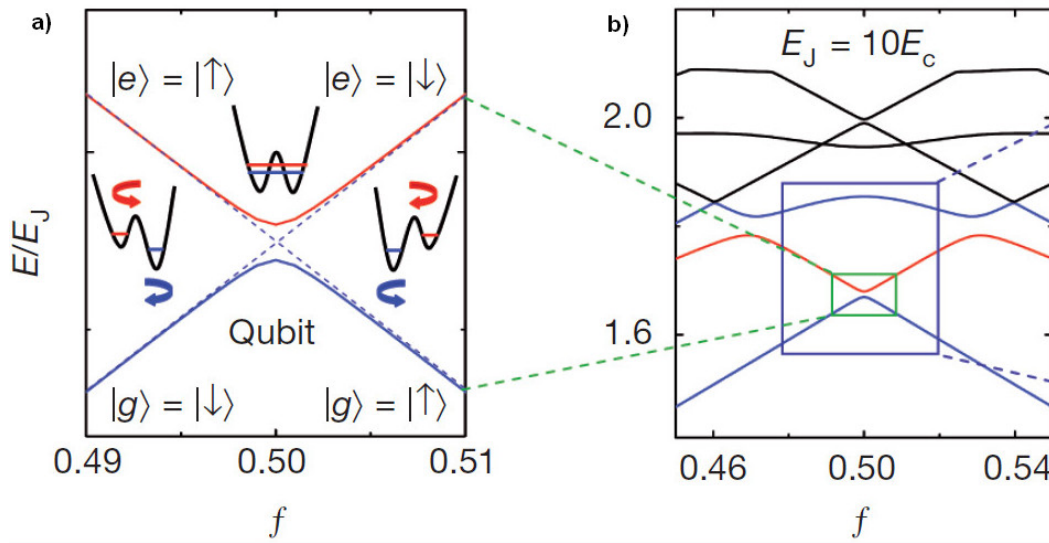


Figura 5: a) Representação pictórica da implementação do qubit de fluxo, no qual as correntes persistentes (setas azuis e vermelhas), circulando tanto para a esquerda quanto para a direita, representam os estados do qubit. b) Os seis primeiros níveis do sistema na representação de carga, onde os dois primeiros representam o qubit. Figura retirada da referência [25].

destaco algumas das mais significativas: **i)** Verificação das oscilações de Rabi em um qubit de estado sólido (Chiorescu *et al* [26]) e **ii)** Um novo prótipo de qubit de fluxo desenvolvido recentemente, recebendo o codinome de "*Fluxonium*" [27]. Esse qubit é menos afetado por possíveis flutuações de carga que eventualmente ocorrem no ambiente do circuito e, além disso, ele preserva a anarmonicidade do espectro de níveis de energia, levando vantagem em relação ao *Transmon*, seu qubit concorrente.

### 2.2.3 Qubit de Fase

Este tipo de qubit pertence à classe dos qubits Josephson na qual o efeito de fase tem predominância sobre os efeitos de carga do sistema, sendo isto representado pela razão  $E_J \sim 10^4 E_C$ . Uma implementação desse qubit pode ser feita utilizando uma intensa corrente *bias*  $I_b$ <sup>14</sup> de intensidade próxima ao valor de corrente crítica,  $I_c$ , no intuito de

<sup>14</sup> A corrente bias, ou corrente de polarização em eletrônica, é o método de criação de tensões ou correntes predeterminadas em vários pontos de um circuito eletrônico para definir um ponto de operação adequado. Essa corrente é utilizada a fim de operar um circuito de forma adequada. A corrente  $I_b$  é a corrente total que atravessa o supercondutor.



adquirir uma larga não linearidade no sistema através da junção Josephson. O hamiltoniano desse sistema, representado no circuito abaixo, figura 6. (a), é definido por [28]:

$$\hat{H} = \frac{1}{2C}\hat{Q}^2 - \frac{I_c\Phi_0}{2\pi}\cos(\hat{\varphi}) - \frac{I_b\Phi_0}{2\pi}\hat{\varphi}. \quad (2.15)$$

O potencial deste circuito, tendo nele imbutidas as correntes  $I_b$  e  $I_c$ , escreve-se como:

$$U(\varphi) = -I_b\frac{\Phi_0}{2\pi}\varphi - \frac{I_c\Phi_0}{2\pi}\cos(\varphi),$$

de modo que, quando as intensidades de corrente  $I_b$  e  $I_c$  são bem próximas e a fase adquire valor  $\varphi \approx \pi/2$ , o potencial tem uma forma aproximadamente cúbica, conforme descrito em [29]:

$$U(\varphi) = \varphi_0(I_c - I_b)(\varphi - \pi/2) - \frac{I_c\varphi_0}{6}(\varphi - \pi/2)^3,$$

onde este potencial tem a forma conhecida na literatura como "*tilted washboard potential*", que depende crucialmente da diferença entre as correntes  $I_c - I_b$ . A ilustração desse potencial pode ser vista na figura 6. A não linearidade pode ser visível na representação pictórica

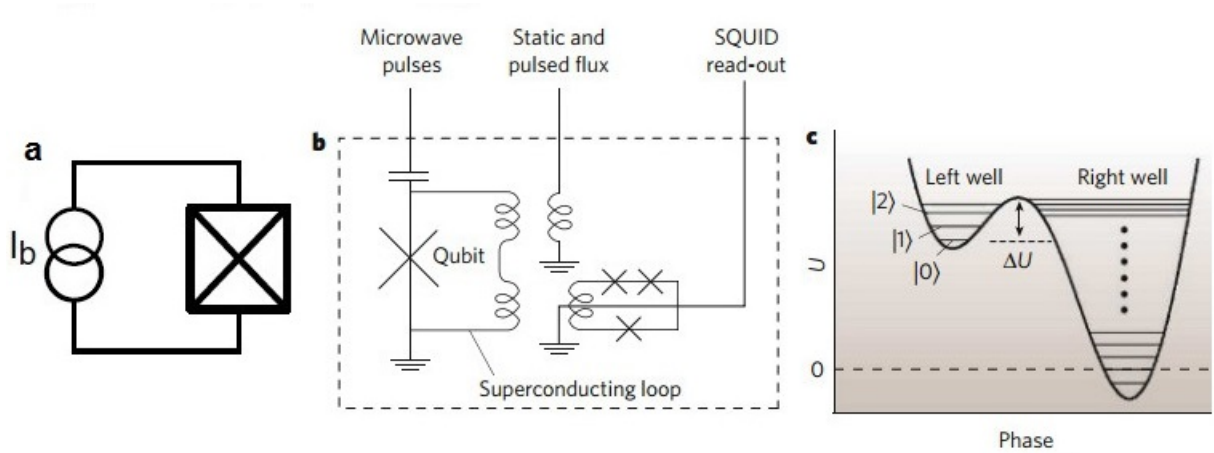


Figura 6: a) Representação pictórica do qubit de fase; b) Implementação do qubit utilizando o SQUID; c) Níveis de energia para o qubit de fase, aprisionados em mínimos locais do potencial  $U(\varphi)$ , no qual temos os níveis de energia mais baixos. Figura adaptada da referência [30].

do potencial, onde é possível observar a existência de mínimos locais ao aplicar uma corrente *bias* na junção Josephson, de modo que a forma não-linear do potencial próxima

a um ponto de mínimo local permite a manutenção da não-linearidade. A quantização dos níveis de energia se dá ao aplicar uma corrente *bias* crítica no intervalo que abrange de  $0,95I_c$  a  $0,98I_c$ , onde, nesse intervalo, o mínimo de potencial confina somente alguns poucos níveis de energia [8]. De certa forma, esses níveis são metaestáveis, pois existe uma probabilidade pequena, mas não nula, de que alguns deles possam tunelar e se juntar ao espectro contínuo do sistema ao modificar a intensidade do *bias* de corrente. Para os dois primeiros níveis essa probabilidade de tunelamento pode ser desprezada, a fim de que estes possam formar o qubit de estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  espaçados por uma frequência de transição  $\omega_{01} \approx 0,95 \omega_p$ <sup>15</sup>, permitindo, assim, que possa ser definido o hamiltoniano para esse sistema descrito segundo [29]:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_{01}}{2}\hat{\sigma}_z + \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{01}C}}\delta I(\hat{\sigma}_x + \chi\hat{\sigma}_z), \quad (2.16)$$

onde  $\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x, \delta I$  são as matrizes de Pauli e a intensidade de corrente, respectivamente, e  $\chi$  é um parâmetro que depende da altura da barreira  $\Delta U$  (ver Fig.(6c)) e da frequência  $\omega_{01}$ . Outros detalhes sobre esse tipo de qubit, tais como parâmetros de tunelamento e altura da barreira de potencial, que são levados em consideração na implementação desse sistema, não serão abordados aqui, porém são bem descritos nas referências [8, 31]. A quantização dos níveis de energia no potencial descrito acima já era conhecida, sendo que esta foi fruto de uma observação experimental realizada em 1985 por Martinis *et al* [32, 33], como também em 1988 por Clarke *et al* [34]. O codinome, qubit de fase, foi oriundo da observação de oscilações de Rabi entre os dois primeiros estados de um qubit de fase, em 2002, por Martinis *et al* [35]. Uma visão mais geral sobre todos esses qubits seupercondutores descritos aqui e nas seções anteriores pode ser encontrada em [30].

<sup>15</sup> O fator  $\omega_p$  corresponde à frequência de oscilação de plasma [8].

### 3 Quantização do circuito e da linha de transmissão

Nesta seção daremos um breve enfoque sobre a quantização do circuito, no mesmo espírito da quantização do campo. Entretanto, agora as variáveis quantizadas serão os elementos do circuito LC, onde este é composto pelas mesmas variáveis da teoria eletromagnética usual, tais como indutância e capacitância. Tais variáveis são essenciais na construção dos circuitos supercondutores.

Em cursos de eletromagnetismo clássico quando se quer saber as equações dinâmicas de um circuito utilizando as regras de Kirchoff para um circuito, temos que nos atentar às variáveis de relevância que constituem tal circuito, tais como voltagem  $V$  e corrente  $I$ . Por meio dos diferenciais dessas duas grandezas, podemos definir elementos individuais do circuito de modo que

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt}, \\ V &= \frac{d\Phi}{dt}, \end{aligned}$$

com  $Q = CV$  e  $\Phi = LI$  representando a capacitância e indutância lineares, respectivamente. Essas duas variáveis descrevem perfeitamente a dinâmica de um circuito LC, sendo que em analogia ao oscilador harmônico simples, a capacitância  $C$  exerce o papel inverso da massa  $M$  da partícula do oscilador, e o inverso da indutância,  $1/L$ , faz o papel da constante de mola  $k$ . Em analogia ao oscilador harmônico no qual as variáveis canônicas são  $(x, P)$ , no circuito LC teremos a carga e o fluxo  $(Q, \Phi)$  como as variáveis conjugadas do sistema [36]. Essas variáveis são importantes para a descrição da hamiltoniana do circuito, pois elas, além de serem variáveis canonicamente conjugadas, a carga e o fluxo são observáveis físicos importantes na descrição física do efeito Josephson. Entretanto, a fim de obter a descrição hamiltoniana, devemos antes abordar o formalismo lagrangeano do circuito, sendo que isso pode ser feito por intermédio das variáveis de carga e corrente, de modo a escrever a

lagrangeana do sistema como sendo

$$\mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}) = \frac{C\dot{\Phi}^2}{2} - \frac{\Phi^2}{2L}, \quad (3.1)$$

isso levando em consideração a descrição análoga utilizada no oscilador harmônico. No intuito de uma futura abordagem de quantização do circuito, escrevemos o momentum conjugado em relação ao fluxo, de modo que este será

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = C\dot{\Phi}.$$

Agora com a introdução da quantidade anterior, pode-se obter a hamiltoniana do circuito, ao aplicar a transformação de Legendre [37]:

$$H = \sum_k \dot{\Phi}_k Q_k - \mathcal{L}, \quad (3.2)$$

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L}. \quad (3.3)$$

### 3.1 A quantização do circuito

O procedimento de quantização do circuito, após a abordagem hamiltoniana realizada anteriormente, é mais simples. Para isso seguimos o princípio de quantização canônica no qual as variáveis  $Q$  e  $\Phi$  serão denominadas pelos seus respectivos operadores,  $\hat{Q}$  e  $\hat{\Phi}$ , afim de que por meio destes seja obedecida a relação de comutação  $[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = -i\hbar$ . Estes operadores podem ser escritos em termos dos operadores de criação e aniquilação em analogia ao procedimento padrão adotado na quantização do oscilador harmônico, sendo que para o circuito LC, temos [38]

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2L}}\hat{\Phi} + i\frac{1}{\sqrt{2C}}\hat{Q}, \\ \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2L}}\hat{\Phi} - i\frac{1}{\sqrt{2C}}\hat{Q}. \end{aligned}$$

O operador  $\hat{a}$  e seu hermitiano conjugado  $\hat{a}^\dagger$  obedecem à relação de comutação  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ . Em termos de  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  escreve-se o Hamiltoniano como:

$$\hat{H} = \hbar\omega_n \left( \hat{n} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.4)$$

onde  $\omega_c = \sqrt{1/LC}$  representa a frequência do circuito e  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  representa o operador número de fótons contidos no circuito. Além disso, uma grandeza importante no circuito é a impedância  $Z = \sqrt{L/C}$  imbutida nos operadores  $\hat{\Phi}$  e  $\hat{Q}$ . Do hamiltoniano do circuito pode-se concluir que as excitações para esse sistema são fótons com frequência  $\omega_c$  na região de microondas, considerando que neste sistema o circuito-LC desempenha o mesmo papel que um ressonador de microondas, onde este irá confinar os fótons. Em suma o circuito-LC pode ser considerado um sistema análogo ao oscilador harmônico, como pode ser visto na figura abaixo. Da Fig. 7(b) percebe-se que os níveis de energia do circuito são

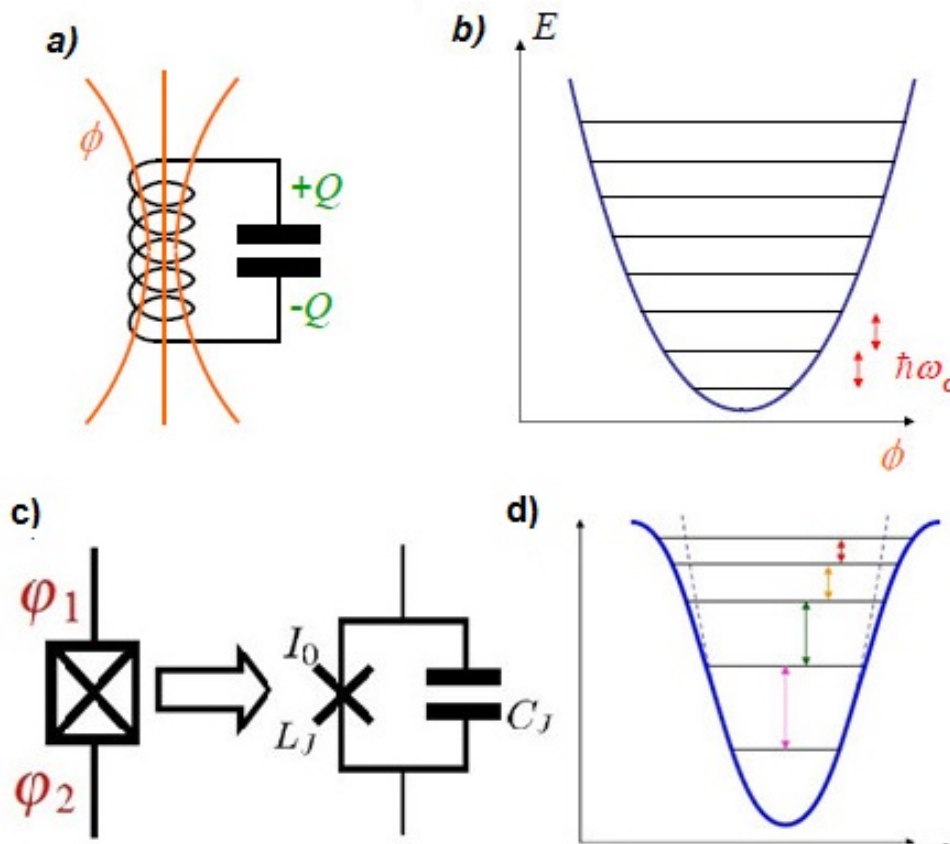


Figura 7: a) Representação do circuito LC. b) Níveis de energia do circuito LC. c) Representação do circuito LC com o termo não linear. d) Níveis de energia do circuito LC não linear. Figura retirada da referência [39]

equidistantes, separados por um quantidade  $\hbar\omega_c$ . Um dos grandes atrativos da utilização da indutância Josephson não-linear,  $I_J$ , é que esta introduz uma não linearidade nos níveis de energia do sistema, Fig. 7(d), tornando possível a implementação de um sistema de dois

níveis. Podendo assim, ser estudada no contexto de circuitos elétricos em conjunto com a capacitância  $C_J$ , de maneira que esta funciona como um elemento não dissipativo Josephson do circuito supercondutor, possibilitando o estudo de coerência em supercondutores sem dissipação, algo importante na implementação de computação quântica [29].

## 3.2 Linha de Transmissão

A engenharia de circuitos supercondutores requer linhas de transmissão para que estas armazenem e confinem os fótons na região de microondas que irão por ventura interagir com os qubits supercondutores. A linha de transmissão neste caso é representada por uma estrutura em 1-D (unidimensional), onde agora esta desempenha o papel de ressonador, e que pode ser modelada por uma cadeia de circuitos-LC discretos infinitesimais. Para fins práticos, iremos considerar que a linha de transmissão aqui tratada será finita e, portanto, será submetida a eventuais condições de contorno, vide figura 8. A teoria

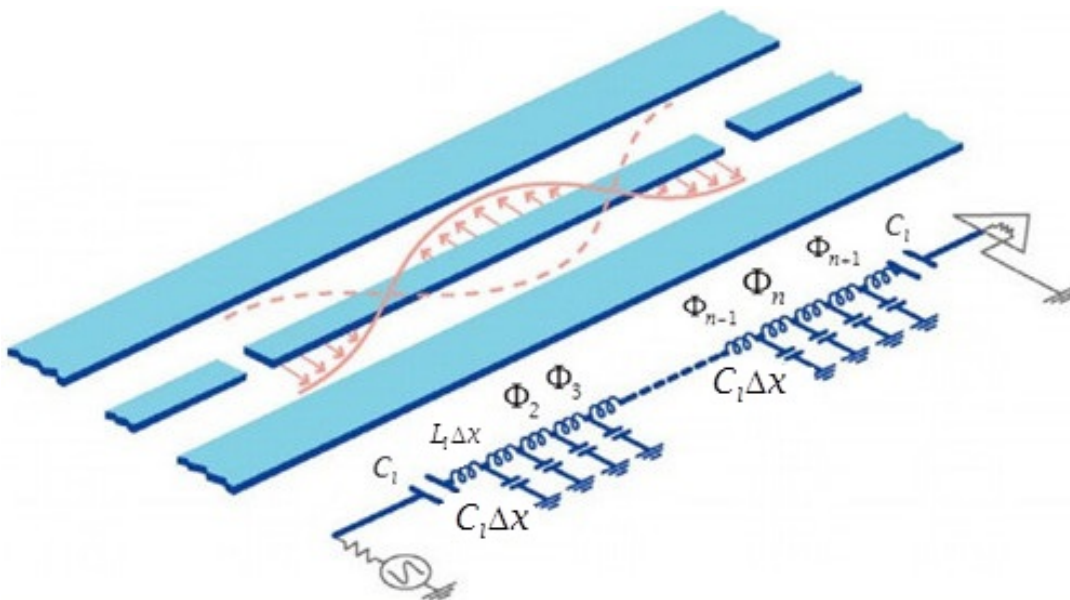


Figura 8: Linha de transmissão do tipo coplanar. Abaixo temos a sequência de circuitos LC que constituem a linha. Figura adaptada da Referência [43].

quântica das linhas de transmissão foi previamente estabelecida em trabalhos tais como [41],

entretanto, ganhou bastante notoriedade após B. Yurque e J. S. Denker [42] e recentemente por M. Devoret [36]. O procedimento de quantização do ressonador unidimensional de comprimento  $l$ , com indutâncias e capacitâncias reduzidas<sup>1</sup>, pode ser feito partindo da lagrangeana do circuito [43]:

$$\mathcal{L} = \int_{-l/2}^{l/2} dx \left[ \frac{C_l}{2} (\dot{\phi}(x, t))^2 - \frac{1}{2L_l} (\partial_x \phi(x, t))^2 \right], \quad (3.5)$$

onde este tipo de lagrangeana é obtido ao fazer o limite contínuo ao fazer  $\Delta x \rightarrow 0$ . Os termos  $C_l$  e  $L_l$  são a capacitância e indutância do ressonador e  $\phi(x, t)$  é o fluxo do campo que é a coordenada generalizada do sistema. A equação Euler-Lagrange para o sistema gera a seguinte equação de onda:

$$v_p^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3.6)$$

com  $v_p = 1/\sqrt{C_l L_l}$  sendo a velocidade de propagação dos modos no ressonador.

A solução da Eq.(3.6) é obtida ao impor a condição de fronteira aberta, no intuito de que haja a neutralidade de carga, assim fazendo com que a corrente seja nula nos terminais no ressonador. Sob a condição de fronteira

$$\partial_x \phi(-l/2, t) = \partial_x \phi(l/2, t) = 0$$

obtém-se a solução

$$\phi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \left[ \sum_{n_e=2}^{N_e} \phi_{n_e}(t) \cos(n_e k_{n_e}) + \sum_{n_o=1}^{N_o} \phi_{n_o}(t) \sin(n_o k_{n_o}) \right], \quad (3.7)$$

com  $k_n = n\pi/l$  o vetor de onda propagante no ressonador. Na solução (3.7),  $n_e$  e  $n_o$  correspondem aos modos inteiros pares e ímpares da solução, e  $N_e, N_o$  são os "cutoffs" nos números de modos pelo fato da linha não ser estritamente unidimensional [43]. Utilizando a solução obtida anteriormente e substituindo-a em (3.5) gera-se o resultado:

$$\mathcal{L} = \sum_{n=n_e, n_o} \frac{C}{2} \dot{\phi}_n(t)^2 - \frac{C}{2} \omega_n^2 \phi_n^2(t), \quad (3.8)$$

<sup>1</sup> A linha de transmissão em cada segmento infinitesimal possui indutância  $L_l = L/l$  e capacitâncias  $C_l = C/l$  reduzidas. Na obtenção da Lagrangeana do circuito, a passagem do limite discreto para o contínuo é feita quando, em  $\Delta C = \tilde{C}\Delta x$  e  $\Delta L = \tilde{L}\Delta x$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ .

levando em consideração que em (3.8)  $C = C_l l$  é a capacitância total do ressonador e  $\omega_n = n\pi/(l\sqrt{C_l L_l})$  corresponde à frequência referente ao  $n$  –ésimo oscilador da linha de transmissão. A hamiltoniana deste sistema é obtida sem dificuldade, através da transformação de Legendre de maneira análoga à feita na seção anterior, na Eq.(3.2), e, assim, obtemos

$$H = \sum_n \frac{Q_n^2(t)}{2C} + \frac{C}{2} \omega_n^2 \phi_n^2(t), \quad (3.9)$$

lembrando que o momento canônico agora está relacionado com a carga pela relação  $Q_n(t) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}_n(t) = C\dot{\phi}_n(t)$ . O procedimento de quantização em (3.9) é feito efetuando a correspondência:

$$Q_n \rightarrow \hat{Q}_n = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_n C}{2}} (\hat{a}_n - \hat{a}_n^\dagger), \quad (3.10)$$

$$\phi_n \rightarrow \hat{\phi}_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n C}} (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger) \quad (3.11)$$

e, portanto, levando em consideração as relações de comutação  $[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{n,m}$  e  $[\hat{\phi}_n, \hat{Q}_n] = -i\hbar\delta_{n,m}$ , de modo a obter

$$\hat{H} = \sum_n \hbar\omega_n \left( \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right).$$

Esta expressão nos permite concluir que o processo de quantização do ressonador linha de transmissão se reduz a uma soma discreta de infinitos osciladores individuais. Para fins práticos, é útil apenas considerar um ressonador unimodal, de modo que podemos reescrever a última expressão como

$$\hat{H} = \hbar\omega_1 \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.12)$$

aqui  $n = 1$  corresponde ao primeiro modo com frequência  $\hbar\omega_1$ . Geralmente os experimentos utilizando as linhas de transmissão são operados no intuito de manipular um único modo harmônico. Dependendo do tipo de qubit que está sendo inserido na linha de transmissão, ele pode ser acoplado em baixas temperaturas ao menor modo do ressonador que possui um antinó, ou de voltagem, ou de corrente. Para um qubit de fluxo, por exemplo, o menor modo utilizando é aquele que possui simetria ímpar, ou seja, ( $n_0 = 1$ ), para este ter um antinó de fluxo no centro do ressonador. Enquanto isso, quando se tem o qubit de carga, o menor modo é aquele com simetria par ( $n_e = 2$ ), que tem um antinó de voltagem.



Tratando a expressão (3.7) para o fluxo no mesmo espírito com que foi feita a correspondência de quantização anteriormente temos

$$\hat{\phi}(x, t) = \sum_{n_e=2}^{N_e} \sqrt{\frac{\hbar}{l\omega_{n_e}C}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \cos\left(\frac{n_e\pi x}{l}\right) + \sum_{n_o=1}^{N_o} \sqrt{\frac{\hbar}{l\omega_{n_o}C}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \text{sen}\left(\frac{n_o\pi x}{l}\right),$$

onde, a partir dessa expressão, podemos calcular a voltagem, que é aplicada na linha de transmissão [43]:

$$\begin{aligned} \hat{V}(x, t) &= \frac{\partial \hat{\phi}(x, t)}{\partial t} = - \sum_{n_o=1}^{N_o} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{n_o}}{lC}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \text{sen}\left(\frac{n_o\pi x}{l}\right) + \\ &+ \sum_{n_e=2}^{N_e} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{n_e}}{lC}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \cos\left(\frac{n_e\pi x}{l}\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

A corrente aplicada ao ressonador pode ser calculada, obtendo como resultado

$$\begin{aligned} \hat{I}(x, t) &= \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{\phi}(x, t)}{\partial x} = - \sum_{n_o=1}^{N_o} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{n_o}}{lL}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \text{sen}\left(\frac{n_o\pi x}{l}\right) + \\ &+ \sum_{n_e=2}^{N_e} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{n_e}}{lL}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \cos\left(\frac{n_e\pi x}{l}\right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

O fluxo, a voltagem e a corrente agora passam a corresponder às flutuações quânticas do ressonador, ou seja, quando não há fótons no estado  $|0\rangle$ , referente ao hamiltoniano (3.12). Quando o ressonador está no seu estado de vácuo, ele possui uma energia de ponto zero,  $\hbar\omega_n/2$ . Para o ressonador, a voltagem e a corrente de ponto zero terão valores do desvio quadrático médio da ordem

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{n_e}}{lC}}, \quad (3.15)$$

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{n_e}}{lL}}, \quad (3.16)$$

permitindo, assim, que o campo elétrico tenha também um  $rms^2$  com um valor

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{n_e}}{\mathcal{V}C}},$$

onde  $\mathcal{V}$  assume-se ser o volume sob o qual os fótons estão confinados, de modo que é possível, por conta do caráter unidimensional do ressonador, confinar em volumes pequenos

<sup>2</sup> Do inglês(*root mean square*)

(da ordem  $\mathcal{V}/\lambda^3 \sim 10^{-5} - 10^{-6}$ ) as flutuações do vácuo de  $E_{rms}$  e  $V_{rsm}$  bem mais intensas que as obtidas em ressonadores ópticos<sup>3</sup>. Esse ponto será abordado com mais detalhes mais à frente, quando explanarmos a interação de fótons de microondas com qubits supercondutores.

---

<sup>3</sup> No ressonador unidimensional, o valor do campo elétrico  $E_{rms}$  é da ordem de 100 vezes maior que o obtido em cavidades ópticas 3D.

## 4 Descrição da interação radiação-matéria: O modelo de Rabi

Desde o surgimento da eletrodinâmica quântica tem-se buscado respostas de como entender de maneira prática o comportamento da interação de luz com matéria. Entretanto para verificar esse comportamento foram necessárias implementações que tornassem possível esse entendimento do ponto de vista realístico por meio de técnicas experimentais. Avanços significativos foram feitos na década de 80 quando conseguiram verificar comportamentos de interação de fótons individuais com átomos confinados em cavidades ópticas; um exemplo desse dispositivo é exposto na Fig. 9. Nesses experimentos foram observados comportamentos de natureza quântica, tais como oscilações de Rabi do vácuo e o colapso e ressurgimento de oscilações de Rabi para campos coerentes ou térmicos, previstos pelo modelo de Jaynes e Cummings [1]. Nessa mesma década surgiu um conceito novo nas áreas de Óptica Quântica e Informação Quântica denominado "descoerência" [44], que descreve como um sistema quântico pode ser afetado drasticamente quando interage com o meio ambiente. Em experimentos que utilizam cavidades ópticas esse efeito pode afetar o sistema de interesse, tanto se o acoplamento entre átomo-radiação eletromagnética for fraco, ou forte, comparado com as taxas de dissipação do sistema. Para regimes de acoplamento fraco e forte o modelo de Jaynes-Cummings mostrou-se satisfatório para explicar propriedades dessa interação. Entretanto, ele se mostrou insuficiente para explicar a física inserida em regimes de acoplamentos conhecidos como ultra forte, isto é, para energias de acoplamento da ordem das energias dos qubits ou dos modos do campo de radiação.

Mais recentemente surgiu uma nova área denominada eletrodinâmica quântica de circuitos (*circuit QED*) [43], na qual o modelo de Jaynes-Cummings foi implementado com bastante sucesso. Nessa nova área as cavidades são modeladas por guias de ondas e os átomos (que assumem o papel do “*qubit*” estudado em informação quântica), por circuitos supercondutores que utilizam junções Josephson em diferentes topologias: qubits de carga, de fluxo e de fase (abordados no capítulo 2 deste trabalho). Em eletrodinâmica

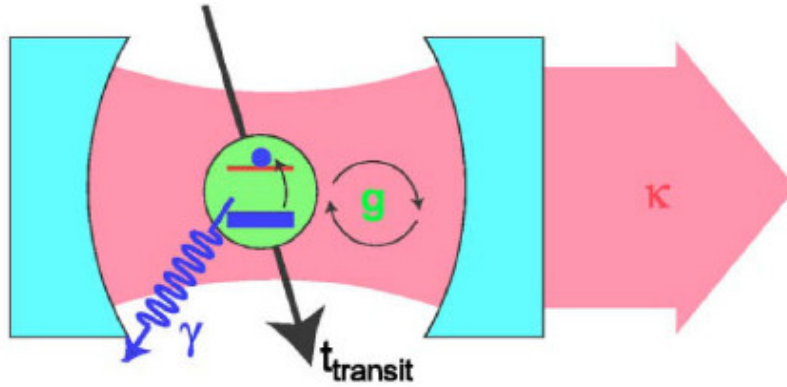


Figura 9: Representação pictórica de uma cavidade interagindo com um átomo. Os parâmetros  $\gamma$  e  $\kappa$  são as taxas de decaimento do átomo e do campo na cavidade, respectivamente,  $t_{transit}$  é o tempo de trânsito do átomo na cavidade (ou tempo de interação átomo-campo) e  $g$  é a constante de acoplamento átomo-campo.

quântica de circuitos é possível realizar experimentos em que esses qubits supercondutores possam interagir com a radiação de microondas inserida no ressonador, alcançando regimes de acoplamento muito fortes entre luz e matéria, bem maiores do que os atingidos em eletrodinâmica de cavidades ópticas e de microondas em  $3D$ . Isso é possível pois, nessa nova área, torna-se menos desafiador obter momentos dipolo de intensa magnitude, pois os átomos artificiais podem ser inseridos na linha de transmissão, por um tempo indefinido, ao contrário do que ocorre, por exemplo, em cavidades ópticas, onde os átomos só ficam disponíveis ao experimento num curto período de tempo. Essa peculiaridade da *circuit QED* faz com que se alcancem grandes momentos de dipolo, sendo que esses podem chegar à casa de centenas ou até milhares de vezes maiores do que as interações de dipolo obtidas no domínio da eletrodinâmica quântica de cavidades e de microondas  $3D$  (como as utilizadas por Serge Haroche em Paris). A tabela a seguir descreve os regimes citados no texto.

Tabela 1: Regimes de acoplamento

Fraco	Forte	...	Ultra Forte	Intensamente Forte
$g < \kappa, \gamma$	$g > \kappa, \gamma$	Fronteira	$0.1 \leq g/\omega_c \leq 1$	$g/\omega_c \geq 1$
<i>cavity QED</i>	<i>cavity QED</i>	...	<i>circuit QED</i>	<i>circuit QED</i>

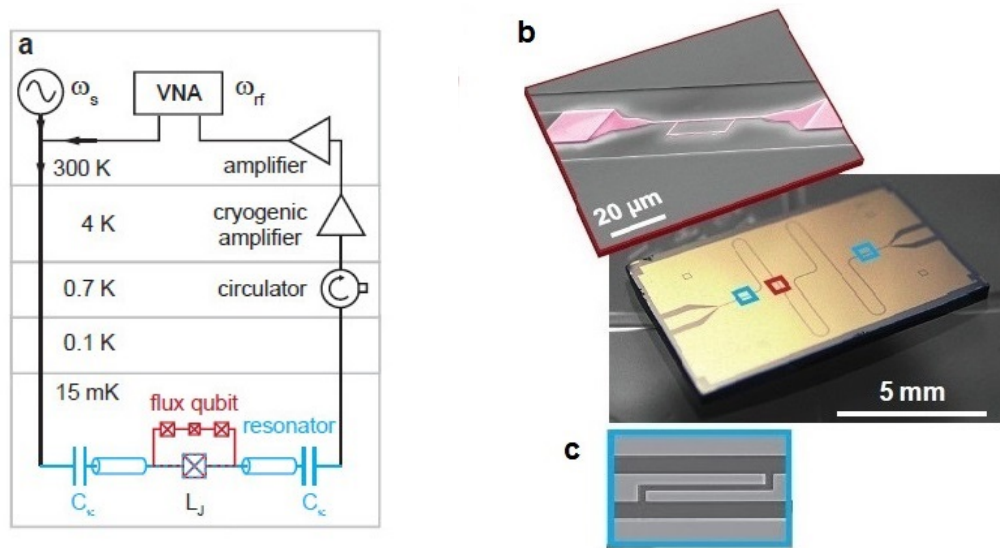


Figura 10: a) Aparato experimental: representação pictórica do experimento, onde o qubit de fluxo, representado pela caixa vermelha, e o ressonador, em azul, compartilham uma área da junção Josephson que fica abaixo dos qubits de fluxo. A indutância de Josephson,  $L_J$ , da junção é responsável por mediar o acoplamento ultra forte entre o qubit e o campo. b) Ilustração que representa o qubit de fluxo (cor rosa) acoplado galvanicamente ao ressonador (CPW); abaixo temos uma imagem por litografia óptica do circuito quântico; c) Representação pictórica do gap com capacitores usados em *circuit QED*, que funcionam como os "espelhos" refletindo a voltagem aplicada na linha de transmissão. Estas figuras e informações foram obtidas das referências [48, 49].

No ano de 2004, Wallraff *et al.* [47] propuseram um primeiro protótipo, utilizando a proposta teórica feita em [43] para implementar eletrodinâmica quântica de circuitos, dando início à realização experimental que acarretaria em uma busca de um maior entendimento acerca destes dispositivos. Além disso, por conta dos altos acoplamentos entre luz e matéria alcançados, foi possível acessar um novo regime, especificamente em um experimento realizado em 2010, em Munique, por Niemczyk *et al.* [48]. Eles utilizaram um qubit de fluxo (qubit Delft), conforme foi visto no capítulo 2, acoplado indutivamente ao ressonador, onde o "*design*" deste experimento pode ser visto na Fig. 10a. Tal feito experimental comprovou que os fenômenos físicos descritos no regime de acoplamento ultra forte [50–52] não podem ser mais explicados por intermédio do modelo de Jaynes-Cummings, de modo que tornou-se necessária a utilização de um modelo mais preciso para descrever sistemas de acoplamento ultra-fortes entre radiação e matéria e, assim, despertou o interesse pelo

entendimento e análise do modelo de Rabi, que será um dos temas centrais deste trabalho.

Em 1954 R. Dicke [53] propôs um modelo que consistia de  $N$  átomos interagindo com um contínuo de modos do campo eletromagnético no espaço livre. Tal modelo pode ser interpretado como uma generalização do modelo de Rabi quântico [3], que, para  $N$  átomos idênticos de dois níveis interagindo com o modo do campo quantizado, é descrito pelo hamiltoniano:

$$\hat{H}_R = \sum_i \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_z^i + \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sum_i g^{(i)} \hat{\sigma}_x^i, \quad (4.1)$$

onde o índice  $i$  deixa subentendido que o sistema contém  $N$  átomos. Nesse hamiltoniano,  $\omega_0$  é a frequência de transição entre os níveis atômicos,  $\omega_c$  é a frequência do modo do campo e  $g$  é o acoplamento qubit-ressonador;  $\hat{\sigma}_z^i$  e  $\hat{\sigma}_x^i = (\hat{\sigma}_+^i + \hat{\sigma}_-^i)$  são as matrizes de Pauli usuais para o  $i$ -ésimo qubit. Os objetos  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  são os operadores de aniquilação e criação de fótons no campo. Aqui neste trabalho estamos interessados em estudar esse modelo quando temos um ou dois átomos, caso de  $N = 1, 2$ .

Em cavidades ópticas o acoplamento entre o átomo e o campo,  $g$ , é descrito pela interação de dipolo elétrico proporcional a  $\hat{H}_{int} = -\mathbf{d} \cdot \vec{E}$ , onde  $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{e} \vec{\mathbf{r}}$  é o operador dipolo elétrico e  $\vec{E}$  representa o campo elétrico quantizado. Define-se então a constante de acoplamento do sistema [44]

$$g = -i \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega_c}{V_{ol}}} \mathbf{d}_{eg} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i \cdot \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}, \quad (4.2)$$

onde  $\vec{\mathbf{k}}$  é o vetor de onda que corresponde ao modo do campo eletromagnético,  $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}$  denomina as polarizações do campo e  $\vec{\mathbf{r}}$  é a posição do elétron no átomo. O termo  $\mathbf{d}_{eg}$  é responsável pela transição entre os níveis do átomo onde  $V_{ol}$  é o volume ocupado pelo modo do campo de radiação em questão. Uma das diferenças desse modelo em relação ao modelo de Jaynes-Cummings é de caráter estrutural, sendo que no modelo de Rabi utilizam-se os termos contra-girantes que são responsáveis pela criação e aniquilação de fótons virtuais no interior da cavidade. Considerando esses termos, há uma redefinição nas constantes de movimento, pois no modelo Jaynes-Cummings tínhamos o número total de excitações do sistema,  $\hat{N} = \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- + \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , como uma quantidade conservada,  $[\hat{N}, \hat{H}_{JC}] = 0$ , que perde sua validade ao utilizarmos o novo modelo. No modelo de Rabi, a quantidade

conservada é a definida por um operador paridade do número de excitações do sistema,  $\hat{\Pi} = (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-}$ , satisfazendo  $[\hat{\Pi}, \hat{H}] = 0$  [46]. Outro ponto de vista que esse modelo fornece está ligado ao do estado fundamental do sistema, que é fortemente modificado, por conta da adição dos termos contra-girantes no modelo de Rabi [4]. Neste caso, o estado fundamental para o modelo de Rabi é dado por [4, 46]

$$|\tilde{G}\rangle = c_{g0} |g\ 0\rangle + c_{e1} |e\ 1\rangle + c_{g2} |g\ 2\rangle + c_{e3} |e\ 3\rangle + c_{g4} |g\ 4\rangle + \dots, \quad (4.3)$$

com  $c_{\alpha,n}$  ( $\alpha = g, e; n = 0, 1, 2, \dots$ ) sendo os coeficientes dependentes da razão  $g/\omega_c$ . Vale a pena ressaltar que, no limite de acoplamentos  $g/\omega_c$  não muito intensos, o modelo de Jaynes-Cummings pode ser utilizado. O modelo de Rabi, apesar da sua forma aparentemente simples, apresenta algumas complicações no que diz respeito à sua integrabilidade e solução analítica. Entretanto, em 2011, D. Braak [45] declarou que o modelo estava resolvido, por encontrar uma solução analítica para o cálculo de autoenergias do modelo<sup>1</sup>. Porém, sua solução ainda não permite acessar os autoestados do sistema, de modo que conseguem-se acessá-los apenas numericamente até o momento.

Em eletrodinâmica quântica de circuitos, a descrição da interação radiação-matéria depende da topologia do átomo artificial que está sendo utilizado. No experimento descrito na Fig. 10, em que foi utilizado o qubit Delft, o Hamiltoniano de Rabi que rege o sistema é definido por [48]:

$$\hat{H} = \hbar\omega_q \hat{\sigma}_z + \sum_n \left[ \hbar\omega_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \hbar g_n (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger) (\cos\theta \hat{\sigma}_z - \text{sen}\theta \hat{\sigma}_x) \right], \quad (4.4)$$

onde, no primeiro termo,  $\omega_q = \sqrt{\Delta^2 + (\epsilon\phi(x))^2}$  corresponde à frequência de transição entre os dois primeiros níveis do qubit de fluxo, em que este depende do *gap*  $\Delta$  entre os níveis degenerados não perturbados e também da energia do *bias*  $\epsilon$ , que é dependente do fluxo magnético  $\phi(x)$ . Os termos angulares dependem da frequência  $\omega_q$ , nos quais  $\cos\theta = \Delta/\hbar\omega_q$  e  $\text{sen}\theta = \epsilon\phi(x)/\hbar\omega_q$ . Para o caso do circuito quântico, a frequência do ressonador é definida pelo modo  $\omega_n = \sqrt{1/L_n C_n}$  (sendo  $L$  a indutância e  $C$ , a capacitância do circuito), descrito no capítulo 3. Já o acoplamento  $g_n$  para cada modo é dado por

<sup>1</sup> A solução analítica encontrada por Braak envolve a expansão de um tipo especial de função transcendental, porém essa solução não é tão simples de ser implementada. Por conta disso, neste trabalho calculamos as autoenergias do modelo de forma numérica.

$g_n = MI_p I_c$  e depende da denominação do qubit que está sendo utilizado para descrever a interação com o modo do ressonador. Em *circuit QED* a constante de acoplamento ocorre de maneira análoga à que foi descrita anteriormente, sendo que, dependendo do tipo de qubit artificial em questão, podem-se ter acoplamentos capacitivos, geralmente utilizados em qubits de carga, e acoplamentos indutivos, quando se tem qubit de fluxo ou de fase. Para mais detalhes veja [54]. No caso do qubit de fluxo, o acoplamento depende da indutância mútua,  $M = L + L_J$ , com  $L$  descrevendo a indutância relacionada à geometria do qubit supercondutor e  $L_J$  descrevendo a junção Josephson, que é compartilhada entre o qubit e a cavidade, que é responsável pelo acoplamento ultra forte (essa junção é exposta na Fig. 10. a). Os termos  $I_p$  e  $I_c$  descrevem a corrente persistente do qubit e a amplitude de corrente das flutuações do vácuo (3.16), respectivamente. Neste trabalho não iremos expor detalhes do experimento, de modo que as informações completas a cerca do experimento em si podem ser obtidas nas referências [48, 49].



# 5 Termalização em sistemas quânticos abertos

Nas últimas duas décadas houve um grande progresso no uso de técnicas experimentais que hoje possibilitam manipular sistemas quânticos com um alto grau de precisão. Utilizando técnicas de resfriamento de átomos confinados em armadilhas ópticas atualmente tem-se conseguido isolar (quase idealmente) tais sistemas do ambiente externo, de modo que isso possibilita a observação da evolução quântica unitária do sistema. Todavia, sempre existe uma interação inevitável com o ambiente externo, que pode causar alguns danos ao sistema oriundos de processos dissipativos. Alguns progressos teóricos feitos recentemente forneceram boas expectativas sobre o estudo do processo de termalização, dentre eles podemos destacar os trabalhos relacionados a esse estudo em sistemas isolados [55], bem como estudos envolvendo a relação existente entre termalização e sistemas não integráveis [56]. Entretanto, o resultado mais surpreendente foi verificado em um experimento relatado por Kinoshita *et al.* [57], onde, utilizando um condensado de Bose-Einstein unidimensional, foi possível observar a não termalização desse sistema em nenhuma das escalas de tempo acessíveis no experimento. O problema sobre termalização abordado neste trabalho está condicionado à abordagem de sistemas quânticos abertos, onde utilizaremos para tal a técnica de equações mestras introduzida a seguir.

## 5.1 Equação mestra: Uma abordagem Markoviana

Neste trabalho estamos interessados em analisar o comportamento de um sistema quando há interação com o meio ambiente<sup>1</sup>. O tratamento usual utilizado para analisar a interação de um sistema de interesse com o meio ambiente é feito via formalismo de sistemas quânticos abertos. Nesse formalismo, utiliza-se uma técnica importante para descrever a evolução da interação do sistema com o ambiente; a equação mestra. Vamos

---

<sup>1</sup> O sistema pode ser analisado contendo poucos graus de liberdade, em contraste à estrutura do ambiente, que possui infinitos graus de liberdade. Aqui denotaremos este ambiente em algumas partes do texto pelo termo *reservatório* ou *banho*, entretanto, ambos têm o mesmo significado de ambiente externo.

aqui fornecer as principais passagens para obter essa equação, sendo que iremos omitir algumas deduções que são um pouco extensas, mas que podem ser encontradas em alguns trabalhos recentes feitos no nosso grupo de pesquisa [58], como também na referência padrão [59]. O roteiro utilizado neste trabalho é feito no intuito de discutir a equação mestra que rege o sistema no regime de acoplamento ultraforte. Em contraste à equação mestra padrão utilizada popularmente na maioria dos livros de Óptica Quântica, neste formalismo o acoplamento do sistema átomo-campo é levado em conta na dedução da equação mestra. Por esta característica peculiar, este formalismo ficou conhecido como equação mestra de estado vestido [4].

Para obter a equação mestra é necessário descrever a estrutura do hamiltoniano que irá representar o sistema total. Nesse caso denominaremos  $H_S$  como sendo o hamiltoniano que descreve o sistema,  $H_R$  correspondendo à parte do reservatório e  $H_{SR}$  representando a interação entre ambos, podendo o hamiltoniano total ser escrito como

$$H = H_S + H_R + H_{SR}. \quad (5.1)$$

O sistema pode ser considerado um sistema finito dimensional e o reservatório é modelado como sendo uma estrutura de dimensão infinita<sup>2</sup>. Para obter a equação mestra é necessário utilizar o formalismo do operador densidade [59]. Com o auxílio desse operador podemos calcular a evolução temporal do sistema descrito pelo hamiltoniano (5.1), no qual a evolução é governada pela equação de Liouville - von Neumann:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H, \rho(t)], \quad (5.2)$$

assumindo ( $\hbar = 1$ ). Na representação de interação, a equação (5.2) é dada por

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) = -i[\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\rho}(t)], \quad (5.3)$$

onde o estado na interação é definido por  $\tilde{\rho}(t) = U(t)\rho(t)U^\dagger(t)$ , e  $\tilde{H}_{SR}(t) = U(t)H_{SR}(t)U^\dagger(t)$

<sup>2</sup> O exemplo típico dessa situação pode ser feito quando colocamos um sistema de dois níveis (podendo ser um átomo) interagindo com um modo do campo eletromagnético como sendo o nosso sistema e a modelagem de um reservatório constituído de um número infinito de osciladores harmônicos não interagentes.

em que  $U(t) = e^{-i(H_S+H_R)t}$ . A solução da Eq.(5.3) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(t) &= \tilde{\rho}(0) - i \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t')], \\ \tilde{\rho}(t) &= \tilde{\rho}(0) - i \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(0)] \\ &\quad - \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' [\tilde{H}_{SR}(t'), [\tilde{H}_{SR}(t''), \tilde{\rho}(t'')]],\end{aligned}$$

de modo que ao substituir essa solução na Eq.(5.3), temos

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -i [\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\rho}(0)] - \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t')]]. \quad (5.4)$$

Como estamos interessados em acessar a informação do sistema utilizando o operador  $\rho_S$ , torna-se necessário usar a técnica do traço parcial,  $\tilde{\rho}_S(t) = Tr_R(\tilde{\rho}(t))$ ,<sup>3</sup> sobre as variáveis do reservatório. Assim, tomamos o traço parcial em ambos os membros da Eq.(5.4), de modo que obtemos:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = \int_0^t dt' Tr_R [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t')]], \quad (5.5)$$

de maneira que o termo  $Tr_R[\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(0)] = 0$  na Eq.(5.4), por conta do caráter aleatório do estado do reservatório. Para seguir adiante com a Eq.(5.5), deve-se considerar a seguinte aproximação: devemos considerar que o sistema e o reservatório interagem fracamente, de forma que o reservatório é pouco afetado ao interagir com o sistema: ou seja, o estado total do sistema em um tempo  $t$  pode ser escrito na forma produto de  $\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}_S(t) \otimes \rho_R$ . De um modo direto, isso significa que só levamos em conta os efeitos até segunda ordem na ordem de interação entre o sistema e o reservatório. Onde tal consideração é conhecida na literatura de sistemas quânticos abertos como *aproximação de Born*.

Levando em consideração tal aproximação de Born a Eq. (5.4) pode ser redefinida da forma

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = - \int_0^t dt' Tr_B [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}_S(t') \otimes \rho_R]], \quad (5.6)$$

que é conhecida como equação de Redfield, pois é uma equação local no tempo, porém depende da condição inicial em  $t = 0$ , portanto não é útil para o nosso problema abordado neste trabalho. No intuito de obter o caráter markoviano, utilizamos a seguinte aproximação:

<sup>3</sup> O problema de um sistema quântico aberto consiste em derivar uma equação mestra que forneça a evolução da dinâmica reduzida do sistema. Essa dinâmica reduzida é obtida ao fazer o traço sobre todos os graus de liberdade do reservatório.

· Aproximação de *Markov*: A essência dessa aproximação está no fato de considerarmos que as escalas de tempo  $\tau_c$  referentes às funções de correlação do reservatório são muito menores que a escala de evolução  $\tau_S$  pertinente ao sistema <sup>4</sup>.

Utilizando a aproximação anterior, podemos transformar a Eq.(5.6) em uma equação genuinamente markoviana da seguinte maneira: A equação (5.6) contém uma referência a um tempo inicial particular,  $t = 0$  no limite inferior do integrando. Para remover essa peculiaridade, fazemos uso da substituição  $t' \rightarrow t - \tau$ , que permite agora estender o limite superior do integrando na Eq.(5.6) para o infinito, por conta do rápido decaimento das funções de correlação do reservatório. Assim a Eq.(5.6) pode ser escrita como [59]

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = -\int_0^{\infty} d\tau T r_R \left[ \tilde{H}_{SR}(t), \left[ \tilde{H}_{SR}(t - \tau), \tilde{\rho}_S(t) \otimes \rho_R \right] \right]. \quad (5.7)$$

Agora esta equação tem caráter markoviano, entretanto devemos nos atentar a um fato importante. A evolução de um sistema quântico markoviano é descrita por um gerador de semi-grupo quântico, que na literatura é comum denominar esse tal gerador como o gerador de Davies [60]. Durante os anos de 1970, esse tema foi alvo de intenso estudo pois já era sabido que a dinâmica irreversível de um sistema quântico aberto era governada por um gerador de semi-grupo. Uma pergunta que ficou sem resposta durante metade daquela década concernia em saber qual era a forma do gerador que governava a dinâmica irreversível do sistema.

<sup>4</sup> Assumir a existência de uma ampla largura de banda para a interação sistema-reservatório é equivalente a afirmar que o reservatório possui um tempo curto de memória, isso faz com que as funções de correlação decaia rapidamente. Considerando assim, que existe apenas interações locais entre ambos.

## 5.2 Forma de Lindblad da equação mestra

A equação markoviana obtida na seção anterior ainda não se mostra suficiente para explicar a dinâmica irreversível de um sistema quântico aberto. Ela não garante a evolução do semi-grupo quântico que governa a dinâmica irreversível [61]. Para obter a evolução do semi-grupo é necessário recorrer à seguinte aproximação:

– aproximação secular: também conhecida como aproximação de onda girante [59], tal aproximação descarta termos que evoluem mais rapidamente que a escala de evolução do sistema  $S$ . Após considerar as aproximações anteriores é útil assumir que a interação sistema-reservatório pode ser escrita em termos de operadores  $\hat{A}_i$  e  $\hat{B}_i$ , onde estes agem no espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_S$  e  $\mathcal{H}_R$  do sistema e do reservatório, respectivamente, de modo que podemos escrever

$$\hat{H}_{SR} = \sum_i \hat{A}_i \otimes \hat{B}_i. \quad (5.8)$$

O operador  $A_i$  é projetado no subespaço de autoestados de  $H_S$  utilizando os operadores de projeção  $\Pi(\omega)$ <sup>5</sup>:

$$\hat{A}_i(\omega) = \sum_{\epsilon - \epsilon' = \hbar\omega} \Pi(\epsilon) \hat{A}_i \Pi(\epsilon'), \quad (5.9)$$

onde assume-se que o espectro de autovalores de  $H_S$  é discreto, e que possui um gap de energia fixa entre seus níveis de energia denotados por  $\epsilon - \epsilon' = \omega$ . O operador  $\hat{A}_i$  é projetado nos autoestados de  $H_S$   $|\epsilon\rangle = \epsilon|\epsilon\rangle$  utilizando os operadores de projeção  $\Pi(\epsilon) = |\epsilon\rangle\langle\epsilon|$  associados à autoenergia  $\epsilon$ .

Com a definição desse operador, agora basta calcular as relações de comutação existente entre  $\hat{A}_i(\omega)$  e seu hermiteano conjugado e  $H_S$ , utilizar a representação de interação (5.7) e fazer a substituição desses resultados no duplo comutador existente na Eq. (5.7). Com algumas outras manipulações algébricas como as feitas em [58], e utilizando a aproximação secular acima, a Eq. (5.7) tem a sua forma final escrita como:

$$\dot{\rho}_S(t) = i [\rho_S(t), \hat{H}_{LS} + \hat{H}_S] + \mathcal{D}_T(\rho_S(t)), \quad (5.10)$$

em que

$$\hat{H}_{LS} = \sum_{\omega} \sum_{ij} S_{ij}(\omega) \hat{A}_i^\dagger(\omega) \hat{A}_j(\omega) \quad (5.11)$$

<sup>5</sup> Não confundir esse operador com o operador paridade utilizado no capítulo anterior.

é o hamiltoniano de *Lamb shift*<sup>6</sup> [59]. A equação (5.10) é obtida ao fazermos ao utilizarmos a representação de Schrödinger para o sistema. Para o caso onde o sistema intererege com reservatório térmico à temperatura finita, o termo  $\mathcal{D}_T(\rho_S(t))$  é escrito como [59]:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_T(\rho_S(t)) = & \sum_{\omega>0} \gamma(\omega) \left[ (\hat{A}_i(\omega)\rho_S(t)\hat{A}_i^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \{ \hat{A}_i^\dagger(\omega)\hat{A}_i(\omega), \rho_S(t) \} \right] \\ & + \sum_{\omega>0} \gamma(-\omega) \left[ (\hat{A}_i^\dagger(\omega)\rho_S(t)\hat{A}_i(\omega) - \frac{1}{2} \{ \hat{A}_i(\omega)\hat{A}_i^\dagger(\omega), \rho_S(t) \} \right], \end{aligned} \quad (5.12)$$

de maneira que este termo é conhecido como o "*dissipador*", pois este descreve a dissipação oriunda da interação do sistema com o reservatório. As quantidades descritas por  $\gamma(\omega) = 2\pi\gamma_0 f(\omega)(1+N(\omega))$  com  $\omega > 0$  e  $\gamma(-\omega) = 2\pi\gamma_0 f(\omega)N(\omega)$  com  $\omega < 0$ , são funções da densidade espectral do reservatório  $f(\omega)$  e da taxa de dissipação  $\gamma_0$ <sup>7</sup> [58, 59] como também do número médio de excitações  $N(\omega)$  do reservatório com energia  $\hbar\omega$

$$N(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1},$$

definido pela distribuição de Planck. Para casos onde trata-se a interação do sistema com reservatórios à temperatura nula,  $T = 0K$ , a forma do dissipador é obtida ao fazermos  $N(\omega) = 0$ . A forma da equação Eq. (5.12) corresponde à forma de Lindblad da equação mestra de sistemas quânticos markovianos [62], sendo que a parte correspondente ao dissipador da Eq. (5.12) descreve a evolução não unitária do sistema por conta dos processos dissipativos.

Com a definição do dissipador da equação mestra, podemos escrever a Eq.(5.10) na seguinte representação

$$\hat{\mathcal{L}}_t \rho_S(t) = \dot{\rho}_S(t), \quad (5.13)$$

de forma que

$$\hat{\mathcal{L}}_t = i [\rho_S(t), \hat{H}] + \mathcal{D}_T(\rho_S(t)), \quad (5.14)$$

é definido como o *Liouvilliano* do sistema.

No regime ultra forte, a modelagem de sistemas quânticos abertos precisou passar por uma reformulação, pois, para casos onde se usava o método padrão de equações

<sup>6</sup> O hamiltoniano de Lamb-Shift produz uma renormalização dos níveis de energia livre do sistema induzidos pela interação com o ambiente. Entretanto não faremos uso deste hamiltoniano em nossos cálculos utilizando a equação mestra.

<sup>7</sup> Neste trabalho utilizamos a densidade espectral do reservatório como sendo de ruído branco.

mestras markovianas, estas já não forneciam resultados que fossem fisicamente aceitáveis. A equação mestra falha, por exemplo, ao descrever o estado fundamental calculado a partir da equação mestra padrão, utilizando o modelo de Rabi, como foi demonstrado em [4]. Nesse mesmo trabalho, fazendo comparações com a referência [63], os autores revelaram a necessidade de utilizar um formalismo mais correto para descrever a interação do sistema com o meio ambiente, que ficaria a cargo de um tipo de equação conhecida como equação mestra de estado vestido Eq. (5.10). A partir de então, foi possível estudar de maneira correta e explorar as novas propriedades físicas que o regime ultra forte proporciona.

### 5.3 Termalização para o sistema com um ou dois qubits interagentes com um modo quântico

Do ponto de vista matemático, estudos de considerável relevância e rigor matemático mostraram as circunstâncias nas quais um sistema atinge o estado de equilíbrio no contexto de sistemas quânticos abertos. Trabalhos como os de V. Back *et al* [64] e posteriormente de M. Merkli e J. Fröhlich [65], abordam a propriedade denominada "*retorno ao equilíbrio*", no qual um subsistema quântico termaliza ao interagir com um banho térmico (reservatório). Em contraste a estes estudos, nosso objetivo aqui se refere ao estudo do problema de termalização em sistemas quânticos markovianos, analisando os autovalores da equação mestra definida na seção anterior. Isso será feito a seguir.

#### 5.3.1 Autovalores da equação mestra markoviana

Após definirmos a equação mestra na seção anterior, iremos nos ater ao problema central desta seção que consiste na verificação da termalização ou não do sistema. Para isso, deveremos analisar os estados estacionários da equação mestra (5.10), isto é, os possíveis  $\rho_{ss}$  relacionados ao operador densidade que satisfazem a condição [66]

$$\hat{\mathcal{L}}_t \rho_{ss} = 0 \tag{5.15}$$

e se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\hat{\mathcal{L}}_t} \rho = \rho_{ss}, \tag{5.16}$$

para qualquer estado inicial  $\rho$ .

Na dedução da equação mestra é possível mostrar que essa equação possui um estado estacionário, como consequência da condição de *Kubo-Martin-Schwinger*<sup>8</sup>, que é o estado em que o sistema se encontra em equilíbrio térmico com o reservatório. Assim o estado térmico do sistema  $S$ , que é descrito pelo ensemble de Gibbs:

$$\rho_T = \frac{e^{-H_S\beta}}{\mathcal{Z}}, \quad (5.17)$$

é um estado estacionário da equação mestra (5.10), porém ele não é necessariamente o único estado estacionário. Nesse estado  $\mathcal{Z} = \text{Tr}_S (e^{-H_S\beta})$  descreve a de função partição do sistema e  $\beta = 1/k_B T$ , onde  $T$  é a temperatura do sistema. Nosso estudo neste trabalho tem como foco principal saber em quais situações o sistema terá apenas um único estado estacionário, de modo que este fato será fundamental para o estudo do processo de termalização no nosso modelo de interesse que neste caso é o modelo de Rabi.

Podemos definir o nosso conceito de termalização da seguinte forma: O nosso sistema irá termalizar quando a equação mestra (5.10) tiver um único estado estacionário descrito por  $\rho_{ss}$ , e que este coincida com o estado de equilíbrio térmico  $\rho_T$  (5.17). Deste modo se a Eq. (5.15) tiver mais de um estado estacionário o sistema não irá termalizar, de tal modo que o estado final irá depender do estado inicial.

Nossa investigação no processo de termalização será baseada na análise dos autovalores da Eq.(5.10), sendo que para essa análise faremos uso do teorema demonstrado em [66, 69, 70], que estabelece uma condição necessária e suficiente para que a equação mestra (5.10) tenha um único estado estacionário. Esse teorema demonstra que a equação mestra (5.10) tem um único estado estacionário se e somente se, o autovalor nulo do *Liouvilliano*  $\hat{\mathcal{L}}_t$  for não-degenerado e se a parte real dos demais autovalores for negativa.

Um entendimento a cerca desse teorema pode ser obtido do seguinte modo: vamos considerar que  $\lambda_k$  é um autovalor de  $\hat{\mathcal{L}}_t$ , assim podemos ter um ou mais operadores

<sup>8</sup> Esta condição é primordial no contexto de mecânica estatística quântica pois ela generaliza o ensemble de Gibbs para sistemas de dimensão infinita, como é o caso do reservatório, como foi demonstrado em [67]. Essa condição pode ser encontrada em algumas referências importantes que abordam assuntos que estão além do escopo deste trabalho, pois envolvem conceitos de álgebras de operadores limitados em mecânica quântica estatística; uma delas é [68]. No contexto de sistemas quânticos abertos utiliza-se tal condição para mostrar que o estado térmico de Gibbs é solução da equação mestra (5.10). Isso está demonstrado em detalhes na referência [69].



densidade  $\rho_k$  associados a esse autovalor compondo a equação de autovalor  $\hat{\mathcal{L}}_t \rho_k = \rho_k \lambda_k$ . Considerando que o operador densidade pode ser escrito em termos de combinações lineares dos  $\rho_k$ , poderemos ter como ponto de partida uma condição inicial  $\rho(0)$  para a equação mestra (5.10), de modo que podemos escrever  $\rho(0) = \sum_k c_k \rho_k$ . Feito isso, podemos escrever a solução de Eq. (5.10) em termos dos  $\rho'_k$ , obtendo como resultado

$$\dot{\rho}(t) = \hat{\mathcal{L}}_t \rho(t) \rightarrow \rho(t) = e^{\hat{\mathcal{L}}_t t} \rho(0) = \sum_k c_k e^{\lambda_k t} \rho_k, \quad (5.18)$$

onde na última expressão utilizamos a equação de autovalor  $\hat{\mathcal{L}}_t \rho_k = \rho_k \lambda_k$ .

Definida a Eq. (5.18), podemos analisar os seus autovalores decompondo-os em duas partes, uma sendo a parte real denominada por  $\lambda_k^R$  e a outra parte imaginária denominada por  $\lambda_k^I$ . A partir dessa decomposição podemos escrever o autovalor  $\lambda_k = \lambda_k^R + i \lambda_k^I$ , e assim (5.18) pode ser reescrita como:  $\rho(t) = \sum_k c_k e^{\lambda_k^R t} e^{i \lambda_k^I t} \rho_k$ . A solução assintótica acontece quando  $\lambda_k^R = 0$  (quando a parte real do autovalor for nula). Entretanto, a parte imaginária  $\lambda_k^I$  pode ser não nula, de modo que isso apenas influencia no tempo em que o sistema atinge o estado assintótico<sup>9</sup>. É importante frisar que para nosso problema em questão, a solução estacionária não deve depender das condições iniciais. Para isso, é essencial que tanto a parte real  $\lambda_k^R$  quanto a parte imaginária  $\lambda_k^I$  sejam nulas, e além disso, o autovalor  $\lambda_k = 0$  deve ser não-degenerado. Uma representação pictórica da situação citada anteriormente é ilustrada na Fig. 11.

Após ser feita a análise sobre os autovalores da equação mestra (5.10) e impor as condições nas quais o autovalor é útil para nosso trabalho, iremos utilizar uma medida estatística entre estados quânticos para verificar a rapidez e a forma com a qual o operador densidade obtido via equação mestra (5.10) se aproxima do estado previsto pelo ensemble de Gibbs (5.17). Esta medida é conhecida na teoria de informação quântica como distância traço [72], definida pela expressão:

$$\mathcal{D}(\rho(t), \rho_T) = \sum Tr |\rho_S(t) - \rho_T| = \frac{1}{2} \sum_j |\alpha_j|, \quad (5.19)$$

<sup>9</sup> Quando a parte imaginária do autovalor  $\lambda_k^I$  for não-nula, temos situações em que os estados estacionários podem oscilar no tempo devido ao termo  $e^{i \lambda_k^I t}$  na somatória  $\sum_k c_k e^{\lambda_k^R t} e^{i \lambda_k^I t} \rho_k$ , fazendo com que tenhamos estados estacionários de não-equilíbrio.

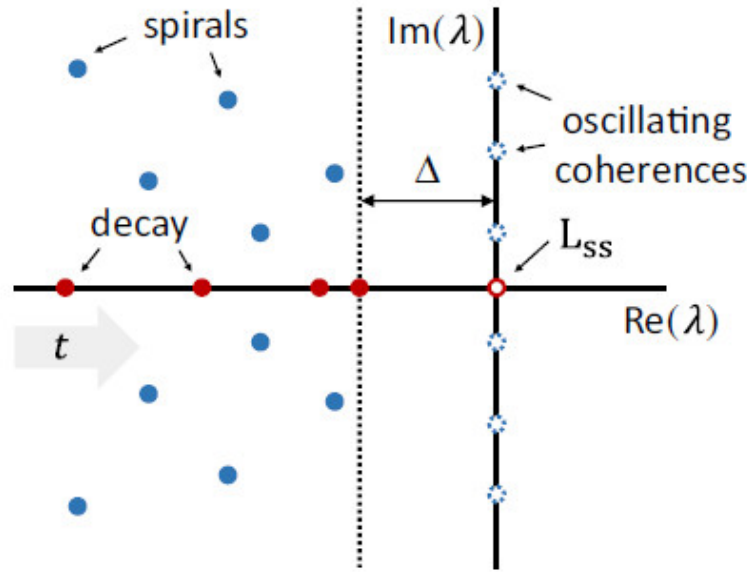


Figura 11: Representação pictórica do espectro de autovalores da equação mestra. Os autovalores estacionários são representados pelos círculos fechados de cor vermelha, enquanto que os autovalores com parte imaginária não-nula são representados por círculos fechados azuis. O termo  $\Delta = \min_{\alpha > 0} \text{Re}(-\lambda_\alpha)$  é o gap espectral, definido pelo menor autovalor em módulo com parte real negativa. Figura retirada da referência [71].

onde os  $\alpha_j$  descrevem os autovalores referentes a diferença entre as matrizes  $\rho_S(t)$  e  $\rho_T$ . Neste trabalho fez-se uma análise sobre a termalização baseada nos autovalores do Liouvilliano do sistema. Quando a equação mestra possui um único autovalor nulo  $\lambda_k$  significa que o sistema termaliza; quando essa condição não é satisfeita (ou seja, no caso em que há mais autovalores nulos) o sistema não termaliza. A partir dessas informações investigamos alguns casos que serão descritos abaixo. Todas essas verificações foram feitas de forma numérica, via simulação computacional, utilizando o software *MATLAB<sup>TM</sup>*. Para procedermos com o cálculo numérico, primeiramente foi necessário definirmos a base do sistema para podermos obter a equação mestra numérica a ser resolvida. Assim, truncamos a base de Fock do campo  $\{|n\rangle\}$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots$ , para um valor  $n_{máx}$  e efetuamos alguns testes para verificar se este valor estava satisfatório dentro de um erro numérico aceitável. Em seguida, integramos as equações de movimento utilizando a biblioteca *Quantum Toolbox*, descrita em [73], ou, então, com rotinas desenvolvidas pelo nosso próprio grupo. A

obtenção da equação mestra (5.10) requer cálculos mais elaborados, pois precisamos, de imediato, determinar as autoenergias e os autoestados do sistema e, em seguida ordenar as autoenergias de maneira crescente. Por fim, estabelecemos a diferença entre as autoenergias,  $\epsilon - \epsilon' = \hbar\omega$ , sendo possível calcular os operadores  $\hat{A}_i(\omega)$  da equação mestra (5.10).

Até o presente momento já investigamos duas situações, isto é, o modelo de Rabi com um átomo ( $i = 1$ ), ou com dois átomos ( $i = 1, 2$ ), no modelo descrito pela Eq. (4.1). Abaixo discutimos esses dois casos estudados.

### i) Modelo de Rabi com um átomo: Interação com Reservatórios Independentes

Analizamos esse caso utilizando a abordagem de reservatórios independentes, via Eq.(5.10). Nessa consideração, cada partícula, tanto o qubit, quanto o modo do campo, interage cada um com seus reservatórios individuais, a  $T = 0K$ . As situações investigadas sob tal abordagem foram as seguintes:

- *Decaimento somente no campo:* O modo da cavidade interage com o reservatório. Este caso equivale a escrever a Eq. (5.8) como  $\hat{H}_{SR} = \sum_i \hat{A}_i \otimes \hat{B}_i = \hat{A}_i \otimes \hat{B}$  em que  $\hat{A} = (\hat{c} + \hat{c}^\dagger)$  é designado como o operador do sistema e  $\hat{B} = \sum_l \alpha_l (\hat{b}_l + \hat{b}_l^\dagger)$  descrevendo o operador do banho, onde  $\hat{b}_l$  e  $\hat{b}_l^\dagger$  são os operadores de aniquilação e criação para o modo  $l$  do banho com frequência  $\nu_l$ , com  $\alpha_l$  representando o acoplamento do sistema ao  $l$ -ésimo modo do reservatório. Neste caso, fazemos a correspondência  $\hat{c} \rightarrow \hat{a}$ .

- *Decaimento somente no átomo:* Consideramos que o átomo interage com o reservatório, de maneira análoga à descrição feita no caso anterior, mas agora com  $\hat{c} \rightarrow \hat{\sigma}^-$ .

- *Decaimento em ambos:* O átomo e o modo do campo interagem com o reservatório. Equivale a escrever  $\hat{H}_{SR} = \sum_{i=1,2} \hat{A}_i \otimes \hat{B}_i$ , nos quais  $\hat{A}_1 = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$  e  $\hat{A}_2 = (\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-)$  correspondem aos operadores do átomo e do campo, respectivamente. Os operadores do reservatório são definidos por  $\hat{B}_1 = \sum_l \beta_l (\hat{b}_l + \hat{b}_l^\dagger)$  e  $\hat{B}_2 = \sum_k \xi_k (\hat{\eta}_k + \hat{\eta}_k^\dagger)$ , com  $\beta_l$  ( $\xi_k$ ) sendo o acoplamento do campo (átomo) ao  $l$ -ésimo ( $k$ -ésimo) modo dos seus respectivos reservatórios.

Através de nossos cálculos numéricos verificamos que o sistema termaliza em todos

os casos descritos acima, isto é, o Liouvilliano do sistema,  $\hat{\mathcal{L}}_t$ , sempre apresenta apenas um único autovalor com parte real nula (que refere-se ao estado térmico, como discutido acima). Para ilustrar o comportamento da termalização, iremos mostrar a evolução da distância traço para a situação mais realística das que foram descritas (*Decaimento em ambos*). Foram feitos alguns testes numéricos onde variamos o parâmetro de acoplamento  $g$  de  $g_{\min}/\omega_c = 0,1$  até  $g_{\max}/\omega_c = 1,0$ , utilizando passos de  $0,01$ . Consideramos também alguns valores para a dessintonia entre a frequência de transição atômica e a do campo  $\Delta = \omega_0 - \omega_c$ ; especificamente,  $(\Delta = 0, \Delta = 0,25, \Delta = 0,5)^{10}$ .

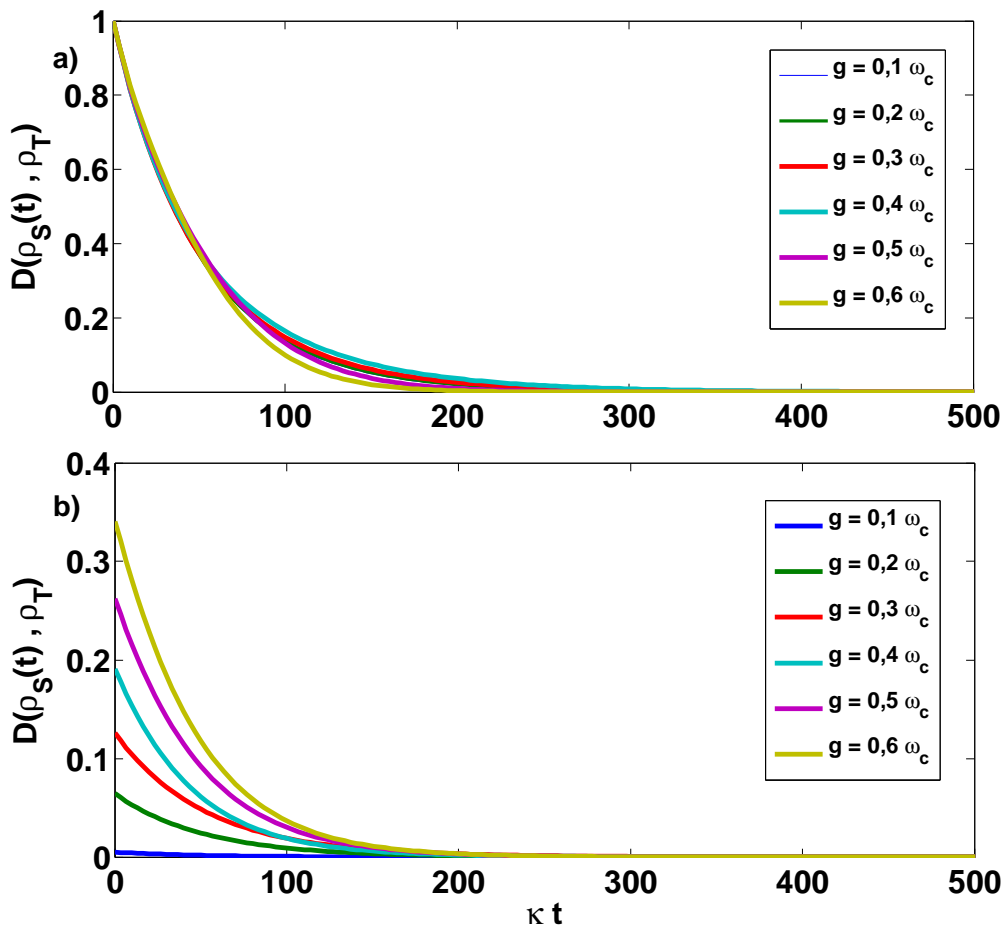


Figura 12: Evolução da distância traço entre os operadores  $\rho_S(t)$  e  $\rho_T$  para a) condição inicial  $|e, 0\rangle$  e b) condição inicial  $|g, 0\rangle$ . Foram utilizados os parâmetros  $\Delta = 0$ ,  $\kappa = 0,1\omega_c$ ,  $\gamma = 0,1\omega_c$  e diferentes valores de  $g/\omega_c$ .

<sup>10</sup> Esse sistema foi preparado nos estados iniciais  $|g, 0\rangle$  e  $|e, 0\rangle$ , isto é, o átomo nos estados fundamental e excitado ( $|g\rangle, |e\rangle$ ) e o campo da cavidade no estado de vácuo  $|0\rangle$ .

Podemos perceber através da Fig. 12 que a termalização para esse caso sempre ocorre, para qualquer valor do acoplamento, independente da condição inicial sob a qual o sistema fora preparado. É possível observar que o tempo necessário para o sistema atingir o estado de equilíbrio térmico diminui à medida que o acoplamento diminui, segundo a Fig. 12b, uma vez que os termos dissipativos tornam-se dominantes sobre os termos de evolução coerente (dependentes de  $g/\omega_c$ ), de modo que a estrutura do estado fundamental muda de acordo com o valor do acoplamento  $g/\omega_c$ , segundo a Eq. (4.3).

## ii) Modelo de Rabi com dois átomos: Interação com Reservatórios independentes e coletivos

Neste caso analisamos o processo de termalização no modelo de Rabi onde este agora consta de dois átomos interagindo com o modo do campo eletromagnético. O modelo que descreve essa situação é definido pelo Hamiltoniano (4.1), onde os dois qubits correspondem ao índice  $i = 1$  e  $i = 2$ . Para este modelo, investigamos todas as situações acima envolvendo reservatórios independentes a  $T = 0K$ . Após analisar todas as situações descritas acima, verificamos que o sistema não termalizou tendo em vista que o cálculo da Eq. (5.10) forneceu dois autovalores nulos somente no caso em que fora considerado apenas decaimento no campo e isso aconteceu para qualquer valor do acoplamento átomo-campo  $g$  estudado. Na Fig. 13, ilustramos o comportamento da distância traço para esse caso específico. Nesse caso específico, destacamos um ponto importante: quando se considera somente o modo da cavidade, submetido à interação com o reservatório, tal situação faz com que a independência dos subespaços do sistema seja mantida [74] pois, nesse tipo de interação o reservatório não é capaz de induzir transições entre autoestados de subespaços distintos, os quais serão discutidos mais à frente. Uma consequência do que foi dito aqui é que, por conta da independência desses subespaços, o sistema irá exibir termalização ou não, dependendo da condição inicial sob a qual ele é preparado. Na Fig. 13(a), o estado  $\rho_S(t)$ , calculado a partir da equação mestra Eq. (5.10) não se aproxima

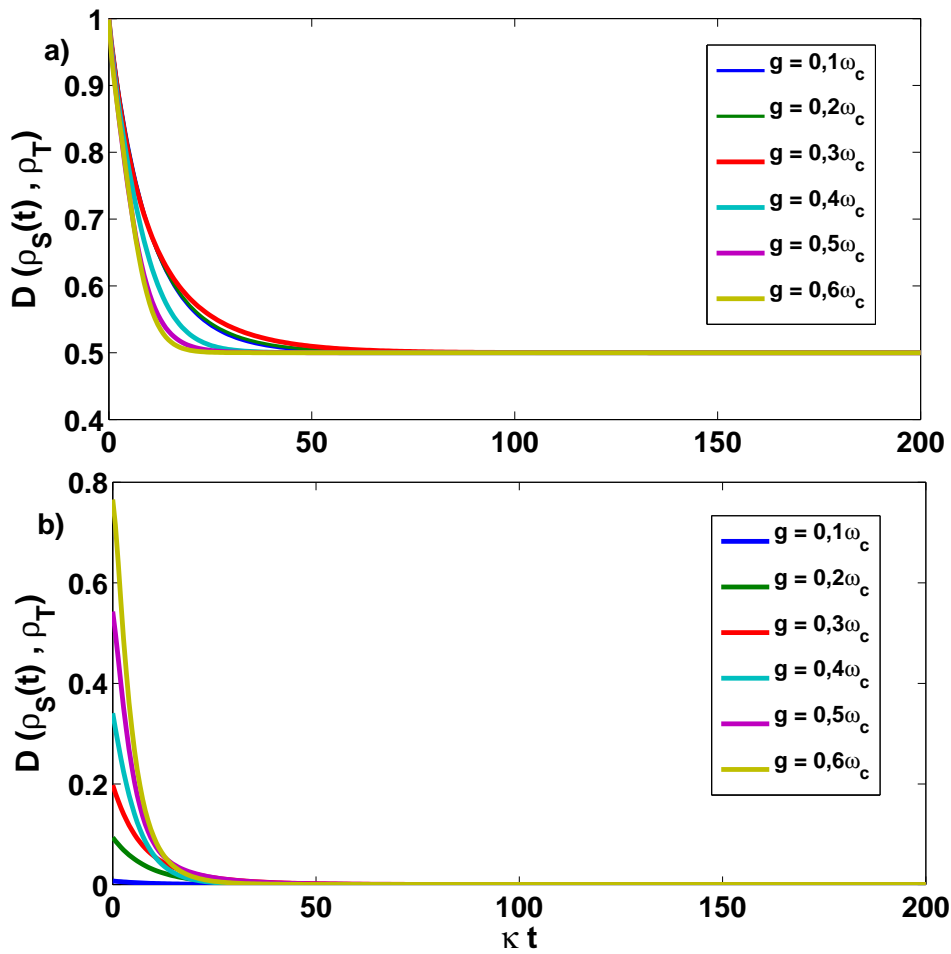


Figura 13: Evolução da distância traço entre os operadores  $\rho_S(t)$  e  $\rho_T$  para a) condição inicial  $|eg, 0\rangle$  e b) condição inicial  $|gg, 0\rangle$ . Foram utilizados os parâmetros  $\Delta = 0$ ,  $\kappa = 0, 1\omega_c$  e diferentes valores de  $g/\omega_c$ .

do estado descrito pelo ensemble de Gibbs Eq. (5.17) sob a condição inicial  $|eg, 0\rangle$ <sup>11</sup> na qual o sistema foi preparado evidenciando claramente o cenário de não termalização. Isso significa que o estado térmico  $\rho_T$  descrito pela Eq. (5.17) não é o único estado estacionário do sistema, podendo assim haver um outro estado estacionário em questão. Entretanto, ao considerar a condição inicial  $|gg, 0\rangle$ , o sistema atinge o estado estacionário, isto é, o estado  $\rho(t)$  calculado a partir da equação mestra Eq. (5.10) coincide com o estado térmico da Eq. (5.17) como pode ser visto na Fig. 13(b), evidenciando claramente o cenário de termalização. Portanto, a termalização do sistema acontecerá ou não, dependendo da

<sup>11</sup> Um roteiro indicando como é feita a preparação deste estado é fornecido no apêndice A.

condição inicial em que o sistema é preparado.

Além das situações em que temos reservatórios independentes para os qubits e para o campo, analisamos também a situação em que há um reservatório coletivo para os qubits.

- *Reservatório coletivo para os átomos.* Essa é uma situação muito interessante, pois foi verificada experimentalmente no contexto de *circuit QED* como foi demonstrado em [75]. Nesta abordagem os dois átomos interagem com um único reservatório e o modo do campo de radiação interage com um outro reservatório independente, agora utilizando a Eq.(5.10). Neste caso escreve-se  $\hat{H}_{SR} = \sum_{i=1,2} \hat{A}_i \otimes \hat{B}_i$ , onde  $\hat{A}_1 = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$  e  $\hat{A}_2 = (\hat{\sigma}_x^1 + \hat{\sigma}_x^2)$  e  $\hat{B}_1$  e  $\hat{B}_2$  são os operadores dos reservatórios para o campo e para os qubits, respectivamente. Estamos considerando a interação de dois qubits com o ressonador, onde tal situação está representada pelo hamiltoniano (4.1), com ( $i = 1, 2$ ) de modo que podemos utilizar uma base de estados atômicos conhecida como base de Dicke<sup>12</sup> para esse sistema. Em nosso caso de interesse, estes estados são definidos por:  $E_n - E_{n-1} = \hbar\omega_c$

$$|\psi_1\rangle = |g, g\rangle, \quad |\psi_2\rangle = |e, e\rangle, \quad (5.20)$$

$$|\psi_+\rangle = 1/\sqrt{2}(|e, g\rangle + |g, e\rangle), \quad (5.21)$$

$$|\psi_-\rangle = 1/\sqrt{2}(|e, g\rangle - |g, e\rangle), \quad (5.22)$$

A interação dos qubits (quando idênticos) com o reservatório coletivo possibilita que estes possam ser influenciados por duas dinâmicas diferentes, relacionadas a dois subespaços diferentes, (vide Fig. 14).

O subespaço  $\mathcal{H}_1$  é constituído por estados de paridades positivas e negativas, como consequência dos estados vestidos  $|S\rangle$  do acoplamento átomo-campo do modelo de Rabi;  $\mathcal{H}_2$  corresponde ao subespaço referente aos estados  $|PM, n\rangle = |\psi_-, n\rangle$  que satisfazem  $H_R |\psi_-, n\rangle = n\hbar\omega_c |\psi_-, n\rangle$ , gerando uma estrutura de níveis similar à de um oscilador harmônico, em que  $n$  representa o número de fótons na cavidade. As dinâmicas do

<sup>12</sup> A introdução desses estados está relacionada com os operadores coletivos de momento angular definidos por:  $\hat{J}_z = \sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_z^{(i)}$  e  $\hat{J}_\pm = \sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_\pm^{(i)}$ , com  $\hat{\sigma}_+^{(i)} = |e\rangle_i \langle g|_i$  e  $\hat{\sigma}_-^{(i)} = |g\rangle_i \langle e|_i$  e  $\hat{\sigma}_z^{(i)} = (\hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{\sigma}_-^{(i)} - \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\sigma}_+^{(i)})$  de modo que são satisfeitas as relações de comutação  $[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm$ ;  $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2 \hat{J}_z$ .

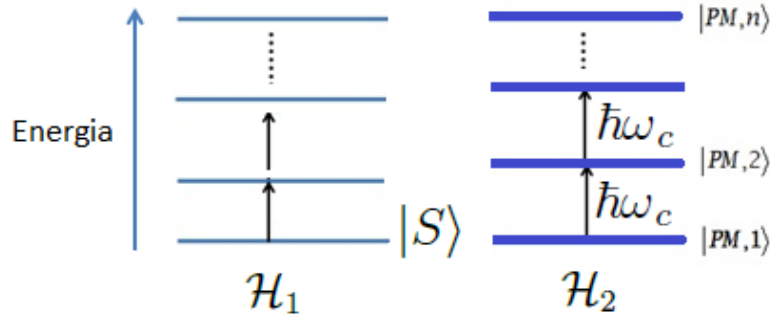


Figura 14: Subespaços  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  desacoplados para o sistema.

sistema são definidas por uma dinâmica livre referente ao estado  $|\psi_{-}\rangle$ , caracterizado por ser um estado subradiante<sup>13</sup>, pois ele é autoestado com autovalor nulo do hamiltoniano de Rabi referente à parte atômica descrita por  $\tilde{H}_R = (H_R - \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a})$ , como também do hamiltoniano total,  $\tilde{H}_T = \tilde{H}_R + H_I$ , que descreve a interação do sistema com o reservatório. Em ambos os casos, a parte atômica, ao atuar em  $|\psi_{-}\rangle$ , gera os resultados  $(\hat{\sigma}_z^1 + \hat{\sigma}_z^2)|\psi_{-}\rangle = 0$  e  $(\hat{\sigma}_x^1 + \hat{\sigma}_x^2)|\psi_{-}\rangle = 0$ , fazendo com que o reservatório coletivo não seja capaz de afetar a dinâmica regida por esse estado<sup>14</sup>, enquanto que a outra dinâmica é restrita aos estados  $\{|gg\rangle, |\psi_{+}\rangle, |ee\rangle\}$ . Um fato interessante é que os estados (5.21) e (5.22) são caracterizados por serem estados maximamente emaranhados de um sistema de dois qubits, conhecidos como *estados de Bell* [76], possibilitando o estudo de correlações quânticas entre esses qubits. Além disso, deve-se destacar que o estado (5.22) é considerado um "*dark state*", isto é, quando os qubits estão nesse estado, eles não conseguem enxergar o campo da cavidade, sendo que o sistema atômico nesse estado fica impossibilitado de absorver qualquer fóton oriundo do campo na cavidade. Como consequência disso, ele se desacopla do modo da cavidade, isto é,  $|PM, n\rangle = |\psi_{-}\rangle \otimes |n\rangle$ , fazendo com que o sistema se comporte como uma cavidade vazia, equivalendo ao caso no qual  $g/\omega_c = 0$ .

## 5.4 Estado estacionário do sistema

Recentemente, uma verificação experimental comprovou que a dinâmica de interação coletiva entre qubits e reservatório é uma situação real em eletrodinâmica quântica

<sup>13</sup> Esse estado é conhecido na literatura por ser um estado livre de decoerência.

<sup>14</sup> Assim, o estado  $|\psi_{-}\rangle$  desacopla-se, tanto do modo da cavidade, quanto do reservatório.



de circuitos, como foi descritos em [75]. Nesse experimento os autores utilizam qubits *Transmon*, descrito brevemente no capítulo 2, acoplados a um guia de onda coplanar. Essa situação é interessante, pois verificamos que é um caso no qual o sistema não termaliza, pelo fato do estado subradiante  $|\psi_{-}\rangle$  ser autoestado do hamiltoniano total  $\tilde{H}_T = \tilde{H}_R + H_I$  com autovalor nulo. Esse caso foi verificado aqui neste trabalho utilizando dois qubits interagindo com reservatórios atômicos coletivos, no intervalo de temperaturas  $0 \leq k_B T / \hbar \omega_c \leq 0.25$ . Realizamos uma abordagem numérica para comprovar nosso resultado, onde variamos o acoplamento qubit-ressonador no intervalo  $0.1 \leq g/\omega_c \leq 0.7$ , com os dois qubits em ressonância com o modo da cavidade ( $\Delta = 0$ ). Para todos os valores investigados, encontramos dois autovalores do Liouvilliano<sup>15</sup> com parte real nula, utilizando a Eq. (5.10), comprovando que esse sistema não termaliza mesmo para um regime de temperatura finita<sup>16</sup>. Na Fig. 15 ilustramos os três primeiros autovalores da Eq. (5.10) como função da temperatura ( $k_B T$ ).

Um questionamento que foi feito baseou-se na seguinte hipótese: O primeiro autovalor nulo corresponde ao estado térmico  $\rho_T$ , referente à Eq. (5.17), onde esse é o estado do sistema acoplando átomo e campo, enquanto que o segundo autovalor nulo deve corresponder a algum outro estado estacionário ainda desconhecido. Os dois subespaços ilustrados na Fig. 14 são independentes, de modo que o estado estacionário deve ser composto por uma mistura dos estados estacionários de cada subespaço. O caso estudado nesta seção, referente ao reservatório coletivo para átomos, mantém a independência dos dois subespaços, impedindo que o sistema efetue transições entre  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ . Assim, concluímos que há possibilidade de ter um estado estacionário para esse sistema que deve ser uma mistura do estado térmico total sem projeção no estado  $|\psi_{-}\rangle$ , por motivos citados na seção anterior, em adição à outra parte, referente ao estado composto pela parte do subsistema atômico com projeção no estado  $|\psi_{-}\rangle$  e pelo estado térmico do campo definido por:

$$\rho_{th} = \frac{e^{-\beta H_c}}{\text{Tr}(e^{-\beta H_c})}, \quad (5.23)$$

com  $H_c = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}$  sendo o hamiltoniano do campo no ressonador. O estado estacionário

<sup>15</sup> Nesse cálculo numérico utilizamos o valor da base de Fock  $N = 25$ , que já demonstrava uma boa acurácia com o erro numérico.

<sup>16</sup> O regime de temperatura criogênica, no qual são realizados os experimentos com qubits supercondutores, é da ordem de milikelvins.

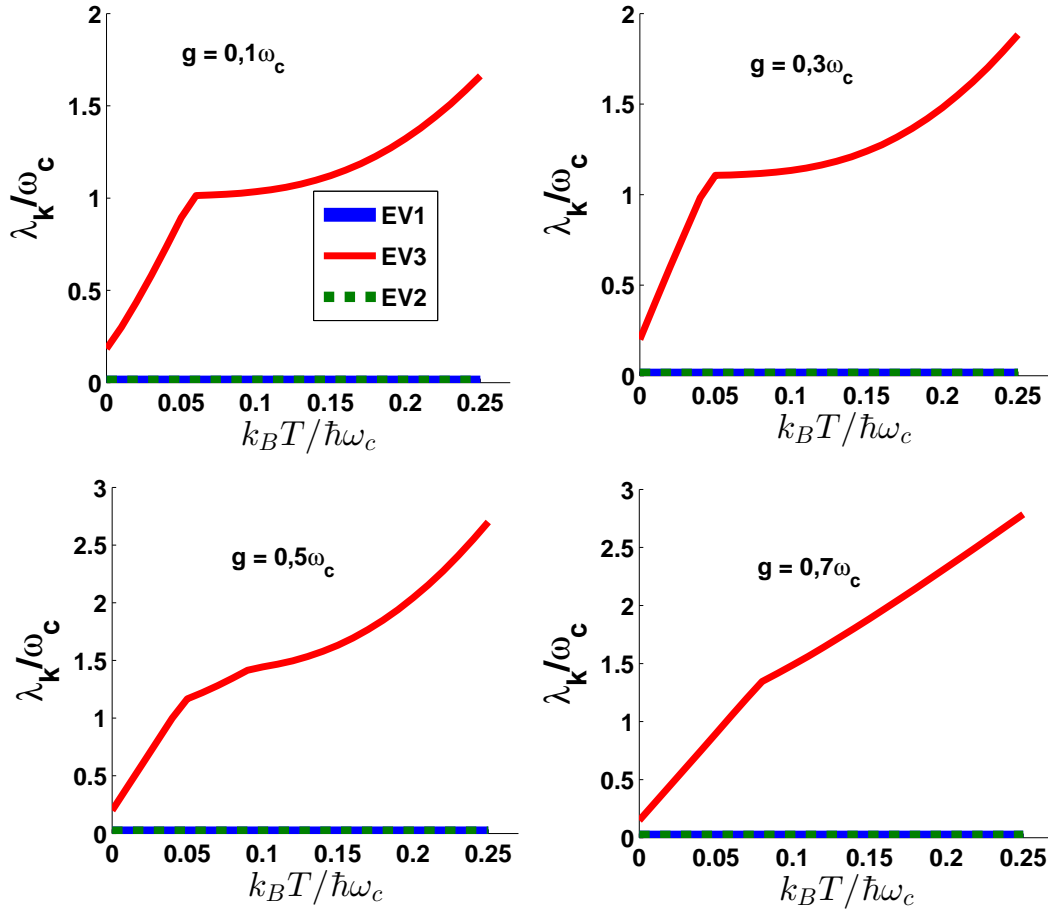


Figura 15: Ilustração dos 3 primeiros autovalores da equação mestra para diferentes tipos de acoplamento  $g/\omega_c$ . Os dois autovalores nulos calculados através do Liouvilliano definido na Eq.(5.14) são dados pelas curvas tracejadas na horizontal, de cores azul e verde, com os codinomes EV1 e EV2, enquanto o autovalor não-nulo é representado pela curva vermelha e codinome EV3.

obtido após a análise anterior. será uma composição dos autoestados que constituem os subespaços  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  do modelo de Rabi, ilustrado na Fig. 14. Estamos interessados nos estados estacionários pertencentes a cada um desses subespaços, sendo que, por meio da relação de completude à seguir

$$\mathbf{1} = \sum_{S=1}^{\infty} |S\rangle \langle S| + \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_{-}\rangle \langle \psi_{-}| \otimes |n\rangle \langle n|, \quad (5.24)$$

podemos expressar os autoestados dos subespaços  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ . A primeira soma em (5.24)

corresponde aos autoestados de  $\mathcal{H}_1$ , que são os autoestados do subespaço simétrico do modelo de Rabi, enquanto, a segunda soma, é referente aos autoestados  $|PM, n\rangle = |\psi_-, n\rangle$ , que consititem o subespaço  $\mathcal{H}_2$ . O operador densidade do sistema total (átomo-campo) não normalizado é  $\rho = e^{-\beta H_R}$ . Por conta da independência dos dois subespaços e pelas peculiaridades envolvendo o estado  $|\psi_-\rangle$  já descritas na seção anterior, nos interessa aqui encontrar o estado térmico total, que não terá projeção no estado  $|\psi_-\rangle$ . Assim, ao projetar o operador densidade do sistema total<sup>17</sup>,  $\rho = e^{-\beta H_R}$ , na Eq. (5.24), obtemos a expressão

$$e^{-\beta H_R} \mathbf{1} = e^{-\beta H_R} \sum_{S=1}^{\infty} |S\rangle \langle S| + e^{-\beta H_R} \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_-\rangle \langle \psi_-| \otimes |n\rangle \langle n|, \quad (5.25)$$

onde agora denominamos  $\rho_{sim} = e^{-\beta H_R} \sum_{S=1}^{\infty} |S\rangle \langle S|$ , como o estado estacionário não normalizado correspondente ao subespaço simétrico  $\mathcal{H}_1$ . A partir de agora, o estado estacionário será composto pelo operador densidade do sistema total,  $\rho = e^{-\beta H_R}$ , menos a parte que corresponde ao estado  $|\psi_-\rangle$  do subespaço  $\mathcal{H}_2$ . Então, de acordo com as afirmações anteriores, teremos:

$$\begin{aligned} \rho_{sim} &= e^{-\beta H_R} \mathbf{1} - e^{-\beta H_R} \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_-\rangle \langle \psi_-| \otimes |n\rangle \langle n|, \\ \rho_{sim} &= e^{-\beta H_R} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}} \otimes |n\rangle \langle n| |\psi_-\rangle \langle \psi_-|, \\ \rho_{sim} &= e^{-\beta H_R} - e^{-\beta H_c} \otimes |\psi_-\rangle \langle \psi_-|, \end{aligned} \quad (5.26)$$

para a forma final do estado térmico total. Na dedução desse estado utilizamos, na segunda linha da forma acima,  $H_R |\psi_-, n\rangle = n\omega_c |\psi_-, n\rangle$  e  $|PM, n\rangle = |\psi_-\rangle \otimes |n\rangle$ , caracterizando o estado desacoplado da cavidade em  $\mathcal{H}_2$ . Além disso, na terceira linha da forma deduzida acima utilizamos a expressão não normalizada para o estado  $\rho_{th}$  descrito na Eq.(5.23). Desta forma, o estado obtido na Eq.(5.26) será o estado térmico total sem projeção no "dark state"<sup>18</sup>  $|\psi_-\rangle$ . Portanto, podemos escrever o estado estacionário do sistema da seguinte forma:

$$\rho_{SS} = P_g \tilde{\rho}_T + P_{\psi_-} |\psi_-\rangle \langle \psi_-| \otimes \rho_{th}, \quad (5.27)$$

no qual  $\tilde{\rho}_T = \rho_{sim}/Tr(\rho_{sim})$  é o estado térmico obtido na Eq.(5.26), normalizado. Na Eq.(5.27) as probabilidades correspondem a  $P_g = (1 - P_{\psi_-})$ , sob o qual  $P_{\psi_-}$  é a projeção

<sup>17</sup> O estado estacionário do sistema a  $T = 0K$  é dado por  $\rho = e^{-\beta H_R}/Tr(e^{-\beta H_R})$ .

<sup>18</sup> Este estado na literatura utilizada em óptica quântica é conhecido como estado escuro.

do estado inicial em  $|\psi_{-}\rangle$  e  $P_{\psi_{-}} = Tr_T (|\psi_{-}\rangle\langle\psi_{-}| \rho_{SS})$ . No regime ultra forte, sob o qual o modelo de Rabi é válido, esse estado estacionário pode exibir diferenças bem significativas em relação ao estado de equilíbrio térmico (5.17). No próximo capítulo, essas diferenças serão evidenciados.

## 6 Propriedades estatísticas do campo de radiação dentro e fora do ressonador no regime ultra forte

A natureza do campo eletromagnético e sua interação com a matéria tem um papel histórico importante no desenvolvimento da mecânica quântica. O mediador deste tipo de interação, o fóton, desempenhou o papel central, tanto nos quanta de energia introduzidos por Planck no contexto de radiação de corpo negro, quanto na teoria do efeito fotoelétrico descrita por Einstein. Alguns anos depois da introdução e desenvolvimento destas ideias, Dirac e Jordan iriam descrever a quantização do campo eletromagnético, que seria fundamental para o desenvolvimento da eletrodinâmica quântica nos anos de 1940, que adequadamente descreve os aspectos fundamentais da interação de elétrons com fótons. Essa teoria seria necessária para a construção da teoria de fotodeteção e coerência de campos quânticos formulada por Glauber [77], no início da década de 1960, que serviu de ponto de partida para o surgimento da óptica quântica [78]. Com o auxílio da teoria da coerência óptica foi possível analisar aspectos quânticos do campo eletromagnético, comparando suas propriedades estatísticas previstas pelas teorias quântica e clássica. Na teoria de fotodeteção, a informação sobre a interação da luz com uma amostra de interesse é armazenada no estado do campo de radiação emitido, o qual é utilizado no cálculo das funções de correlação desse campo. A informação sobre o campo é embutida nas funções de correlação de primeira e segunda ordens que comumente surgem em óptica quântica, que ajudam a distinguir o caráter clássico e quântico da luz. Para nosso propósito, a função de correlação de segunda ordem é definida por [3]

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}^\dagger(t+\tau) \hat{a}(t+\tau) \hat{a}(t) \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2}, \quad (6.1)$$

onde  $\langle \hat{O} \rangle = Tr \langle \rho \hat{O} \rangle$  representa o valor esperado para o observável  $\hat{O}$ . A expressão acima é referente a apenas um modo do campo, considerando-o estacionário, sempre sendo uma

função de  $\tau$ , que é a diferença temporal entre as detecções dos fótons no campo. Esse tipo de função é uma medida de correlação de intensidade em dois pontos do tempo e do espaço, utilizada no experimento de *Hanbury Brown - Twiss* para descrever a interferência entre dois fótons [3]. Através da função de correlação de segunda ordem pode-se diferenciar a estatística do campo de radiação, caso ele seja mais quântico ou mais clássico, por meio da função  $P(\alpha)$  de Glauber e Sudarshan, que é interpretada com uma função de quase-probabilidade para estados quânticos. Se um estado que é descrito pela função  $P(\alpha)$  não possuir parte negativa, então ele será dito um estado clássico, caso contrário, se alguma porção dele tiver  $P(\alpha) < 0$  ou alguma singularidade, então ele será não-clássico. Na Eq. (6.1), quando  $\tau \rightarrow 0$ , detecção na mesma posição no tempo e no espaço, podemos escrever

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2}, \quad (6.2)$$

onde esta função nos permite escrever as desigualdades  $\infty \geq g^{(2)}(0) \geq 1$  e  $1 > g^{(2)}(0) \geq 0$  correspondendo aos intervalos onde há a distinção do caráter clássico e quântico da luz. Para os casos em que temos  $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$ , é comum a situação conhecida como agrupamento (*bunching*) de fótons, devido ao fato de termos maior possibilidade de detectar fótons em sequência, ou seja, após a detecção do primeiro fóton, há um esforço na probabilidade de detecção de um segundo fóton [79]. Outra desigualdade,  $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ , possui um caráter contrário ao descrito pela desigualdade anterior, sendo que agora tem-se um fenômeno conhecido como anti-agrupamento (*antibunching*) de fótons, pois, neste caso, após haver a detecção do primeiro fóton, é requerido um certo período de tempo para que ocorra a detecção do segundo fóton. Considerando a luz no seu estado estacionário, pode-se expressar a função (6.2) em termos do número médio de fótons,  $\langle \hat{n} \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ , e da variância  $\langle \Delta \hat{n} \rangle$ , de acordo com [80], de maneira que

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}. \quad (6.3)$$

Por meio desta expressão, podemos ter intervalos separando o que é quântico e o que é clássico com relação à luz. Em geral, quando  $g^{(2)}(0) = 1$ , com  $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle$  temos uma estatística poissoniana, que ocorre usualmente na luz coerente em lasers. Quando  $g^{(2)}(0) > 1$ , com  $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle > \langle \hat{n} \rangle$ , a estatística é super-poissoniana, geralmente observada

em luz térmica, enquanto que  $g^{(2)}(0) < 1$  e  $\langle (\Delta\hat{n})^2 \rangle < \langle \hat{n} \rangle$  implica numa estatística sub-poissoniana como consequência de luz anti-agrupada, revelando um caráter não-clássico da luz. No último caso descrito, a não-classicalidade é uma consequência dos valores negativos assumidos pela função de quase-probabilidade  $P(\alpha)$ . Para o estado térmico representado em termos da função  $P(\alpha)$ , o valor da função de correlação definida pela Eq. (6.2) é exatamente  $g^{(2)}(0) = 2$ . Um ponto de vista mais geral sobre o que foi abordado até aqui e além pode ser encontrado com mais detalhes nas referências [3, 80, 81].

## 6.1 Formalismo de entrada e saída

Usualmente utilizamos equações mestras para calcular estatísticas do campo de radiação inserido em uma cavidade óptica quando temos átomos fracamente interagentes, como o campo dentro da cavidade, e, nesse caso, as propriedades do campo fora da cavidade serão proporcionais às propriedades dentro da cavidade. No entanto, para regimes de acoplamento muito forte, isso deixa de ser válido e precisamos então de uma teoria de entrada e saída para relacionar as propriedades do campo emitido com o campo dentro da cavidade. Para modelagem desse efeito utiliza-se a teoria de entrada e saída (*input-output*), descrita na referência [82], que permite calcular as equações de Langevin para o sistema e o reservatório. Com esse objetivo, podemos definir o Hamiltoniano total como sendo:

$$H = H_S + H_B + H_{SB}, \quad (6.4)$$

onde  $H_S$  define o hamiltoniano do sistema de interesse, que no nosso caso é uma cavidade com hamiltoniano sendo definido por  $H = \hbar_c \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}$ . A parte do banho é descrita através do hamiltoniano  $H_B = \hbar \int d\omega_k \omega_k b_k^\dagger b_k$ , de modo que a interação sistema-banho é dada por  $H_{SB} = i \hbar \int d\omega_k g(\omega_k) [\hat{b}_k \hat{a}^\dagger - \hat{a} \hat{b}_k^\dagger]$ , na qual  $\hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger$  representam os operadores bosônicos do banho, satisfazendo as relações de comutação  $[\hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger] = \delta(k - k')$ ,  $[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}] = 0$ . O fator  $g(\omega_k)$  é a constante de acoplamento entre a cavidade e o  $k$ -ésimo modo do banho. Com auxílio do hamiltoniano acima, obtemos as equações de movimento para os operadores do

sistema e do banho, utilizando a representação de Heisenberg [83]:

$$\dot{\hat{b}}_k = -i\omega\hat{b}_k + g(\omega)\hat{a} \quad (6.5)$$

$$\dot{\hat{a}} = -\frac{i}{\hbar}[a, H_S] - \int d\omega_k g(\omega_k)\hat{b}_k. \quad (6.6)$$

A solução da equação de movimento para  $\hat{b}_k$  pode ser escrita por meio de duas maneiras, onde estas podem ser feitas em termos das condições iniciais para um tempo  $t_0 < t$  que descrevem a entrada, ou em termos das condições finais envolvendo tempos  $t_1 > t$  que descrevem a saída. Assim, utilizando essas condições, podemos integrar a Eq.(6.5), obtendo como soluções [83]:

$$\hat{b}_k(t) = \hat{b}_k(t_0) e^{-i\omega_k(t-t_0)} + g(\omega_k) \int_{t_0}^t dt' e^{-i\omega_k(t-t')} \hat{a}(t'), \quad (6.7)$$

$$\hat{b}_k(t) = \hat{b}_k(t_1) e^{-i\omega(t-t_1)} - g(\omega_k) \int_t^{t_1} dt' e^{-i\omega(t-t')} \hat{a}(t'), \quad (6.8)$$

onde  $t_0 < t < t_1$ , e  $\hat{b}_k(t_0)$  é o valor de  $\hat{b}_k$  quando  $t = t_0$ , enquanto que  $\hat{b}_k(t_1)$  é o valor de  $\hat{b}_k$  em  $t = t_1$ . As duas expressões obtidas, quando inseridas na Eq.(6.6), fornecem os resultados<sup>1</sup>:

$$\dot{\hat{a}}(t) = -\frac{i}{\hbar}[a, H_S] - \frac{\gamma}{2}\hat{a}(t) + \sqrt{\gamma}\hat{a}_{in}(t), \text{ para } t_0 < t, \quad (6.9)$$

$$\dot{\hat{a}}(t) = -\frac{i}{\hbar}[a, H_S] + \frac{\gamma}{2}\hat{a}(t) - \sqrt{\gamma}\hat{a}_{out}(t), \text{ para } t < t_1, \quad (6.10)$$

onde os campos entrada e saída<sup>2</sup> são, reespectivamente:

$$\hat{a}_{in}(t) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega_k e^{-i\omega(t-t_0)} \hat{b}_k(t_0) \quad \text{e}$$

$$\hat{a}_{out}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega_k e^{-i\omega(t-t_1)} \hat{b}_k(t_1),$$

<sup>1</sup> Na obtenção desse resultado é necessário utilizar a aproximação de Markov, onde consideramos que o acoplamento do sistema com o banho é quase constante, isto é,  $g(\omega) = \sqrt{\gamma/2\pi}$ . Em seguida, devemos

resolver a integral:  $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega g^2(\omega) \int_{t_0}^t dt' e^{-i\omega(t-t')} \hat{a}(t') = \frac{\gamma}{2\pi} 2\pi \int_{t_0}^t dt' \delta(t-t') \hat{a}(t') = \frac{\gamma}{2} \hat{a}(t)$ .

Dois integrais úteis nesses cálculos são:  $\int_{t_0}^t dt' \delta(t-t') f(t') = \int_t^{t_1} dt' \delta(t-t') f(t') = \frac{1}{2} f(t)$  e

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} = 2\pi \delta(t-t').$$

<sup>2</sup> Para denominar os campos de entrada e saída( *input-output*) iremos utilizar a notação padrão encontrada nos livros de óptica quântica  $\hat{a}_{in}$  e  $\hat{a}_{out}$ .



sendo que através dos campos descritos acima e das expressões (6.9) e (6.10), encontramos a relação entrada e saída para os campos:

$$\hat{a}_{out}(t) + \hat{a}_{in}(t) = \sqrt{\gamma} \hat{a}(t), \quad (6.11)$$

que tem seu domínio de validade para qualquer hamiltoniano que descreva o sistema intra-cavidade. As equações (6.9) e (6.10) são as equações de Langevin em óptica quântica.

## 6.2 Estatística de fotodeteção no regime ultraforte

Os dois tópicos brevemente relatados neste capítulo são bem estabelecidos na teoria padrão de óptica quântica no que concerne a teoria de radiação matéria em regimes de acoplamento  $g/\omega_c$  não muito intensos. Todavia, esses conceitos perdem sua validade para regimes de acoplamento além, como é o caso do ultraforte, sendo necessário uma nova descrição tanto dos conceitos de fotodeteção envolvendo as funções de correlação quanto de uma teoria de entrada e saída que vai além da teoria padrão descrita nas seções anteriores. Uma das consequências dessa reformulação fica por conta do estado fundamental do sistema, que agora por conta do modelo de Rabi, contém um número finito de fótons, isto é, (4.3)  $\langle \tilde{G} | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \tilde{G} \rangle > 0$ . A teoria padrão de fotodeteção não descreve corretamente as propriedades estatísticas do campo de radiação no regime ultraforte, por exemplo, prevê erroneamente a criação de um fluxo de fótons  $\langle N \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = Tr [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \rho_T] > 0$ , extracavidade para casos onde há interação com reservatórios a  $T = 0K$ , no qual são válidas as relações descritas na Eq.(6.2). A fim de resolver esse problema, os autores em [84] expressaram o campo da cavidade,  $\hat{X} = -iX_0 (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$ , na base vestida do Hamiltoniano de Rabi (4.1), resultante do sistema acoplado átomo-campo, no intuito de definir corretamente a teoria de fotodeteção com relação ao campo de saída neste novo regime. Deste modo, é possível definir, nessa nova abordagem, as componentes do campo da cavidade com frequências positiva e negativa,  $\hat{X}^+$  e  $\hat{X}^-$ , em função dos autoestados do Hamiltoniano do modelo de Rabi  $H_R$ . Com isso temos:

$$\dot{X}^+ = -i \sum_{j, k>j} \Delta_{kj} X_{kj} |j\rangle \langle k| \quad \rightarrow \quad \dot{X}^- = (\dot{X}^+)^\dagger, \quad (6.12)$$

na qual a derivada em relação ao tempo acima é obtida por utilizar a equação de movimento na representação de Heisenberg,  $\dot{X} = i\hbar[H_R, X]$ . Os autoestados  $|j\rangle, |k\rangle$  correspondem à equação de autovalor  $H_R|j\rangle = E|j\rangle$ , onde  $X_{jk} = \langle j|\hat{X}|k\rangle$  e  $\Delta = \omega_j - \omega_k$  definem o operador na base vestida e as autoenergias de transição de  $H_R$ . Tendo em mente as novas considerações, a equação de entrada e saída<sup>3</sup> no regime ultraforte pode ser escrita como [84]:

$$\hat{a}_{out}(t) = \hat{a}_{in}(t) - i\sqrt{\gamma}\dot{X}^+. \quad (6.13)$$

Com a nova definição da teoria de entrada e saída no regime ultra forte, obtém-se de forma correta a estatística do campo de saída onde temos  $\langle \tilde{G}|\hat{a}_{out}^\dagger\hat{a}_{out}|\tilde{G}\rangle = 0$ , [86] pois, agora, o estado fundamental contém uma população de fótons finita, que não escapam da cavidade e, portanto, não pode ser detectada [85]. A teoria de fotodeteccção foi adaptada ao regime ultraforte, sendo que neste regime a função de correlação do campo de saída passa a ser definida, então, por [84]:

$$g_{out}^{(2)}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \hat{a}_{out}^\dagger(t)\hat{a}_{out}^\dagger(t+\tau)\hat{a}_{out}(t+\tau)\hat{a}_{out}(t) \rangle}{\langle \hat{a}_{out}^\dagger\hat{a}_{out} \rangle^2}. \quad (6.14)$$

Em um trabalho recente [88] foi feita uma análise sobre o comportamento das propriedades estatísticas do campo de radiação no regime ultraforte, especificamente com relação à função de correlação de saída do campo no regime ultraforte como também o espectro de emissão do sistema. Na próxima seção ilustramos algumas propriedades estatísticas do campo de radiação.

## 6.3 Resultados

Nossos resultados nesta seção estão relacionados com os casos em que verificamos a ausência de termalização, conforme foi discutido no capítulo 5. Uma das formas de visualizar o efeito da não termalização pode ser feito observando o comportamento da estatística do campo de radiação no regime ultra forte. Nossas análises são motivadas a partir de afirmações feitas na referência [88], que contradizem o que verificamos neste trabalho. Na

<sup>3</sup> As relações de entrada e saída são deduzidas de maneira análoga ao que foi feito na seção anterior, onde a única diferença agora está no fato de levar em consideração o termo  $\dot{X}^+$  [84].

referência citada, os autores afirmam que o estado térmico descrito pela Eq. (5.17) é o estado estacionário, isto é, para o caso onde  $\rho(t \rightarrow \infty)$  conseqüentemente  $\dot{\rho}(t \rightarrow \infty) = 0$  da equação mestra, definida pela Eq. (5.14), descrita no capítulo 5. Além disso os autores afirmam que isso ocorre independente das taxas de decaimento, tanto na cavidade, quanto no átomo. Entretanto, isso não condiz com o que verificamos aqui neste trabalho, onde demonstramos casos em que essa afirmação falha: **i)** quando há interação de dois qubits com o modo da cavidade e considerando decaimento apenas no campo; **ii)** como também para casos onde os dois qubits interagem com reservatórios coletivos. Nessas situações, o estado estacionário do sistema nem sempre é descrito pelo estado de equilíbrio térmico pelo fato do sistema não exibir termalização, sendo necessário definir um novo estado estacionário, de maneira que este é dado pela Eq. (5.27) do capítulo 5. Para verificarmos ambos comportamentos de termalização ou não, efetuamos os cálculos da função de correlação, Eq. (6.14), utilizando o estado térmico  $\rho_T = e^{-H_S \beta} / \mathcal{Z}$  e o nosso estado estacionário descrito pela Eq. (5.27),  $\rho_{SS} = P_g \tilde{\rho}_T + P_{\psi_-} |\psi_-\rangle \langle \psi_-| \otimes \rho_{th}$ , para efeitos de comparação entre eles. Na Fig. 16 ilustramos as funções de correlação  $g_{out}^{(2)}$ . Visualizando a Fig. 16 já podemos

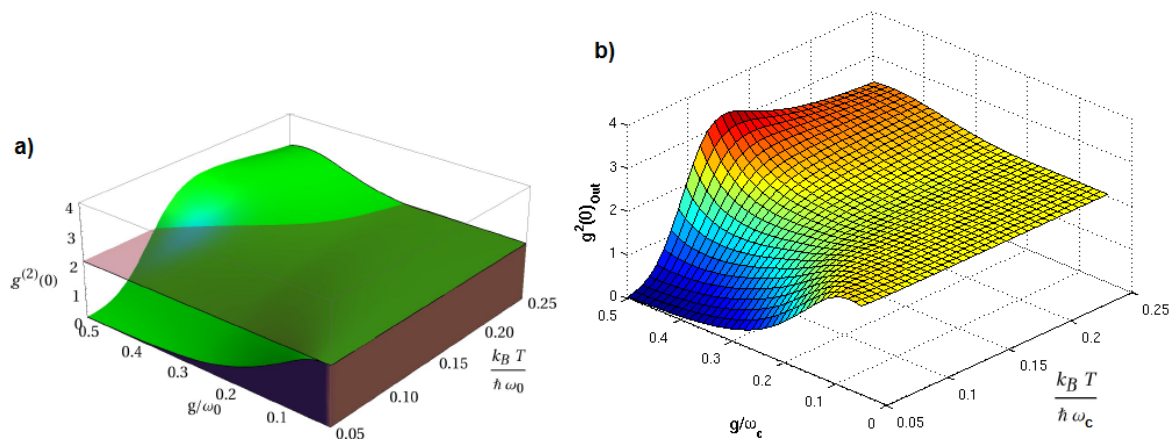


Figura 16: Função de correlação  $g_{out}^{(2)}(0)$  obtida através do estado estacionário térmico  $\rho_T$  a) Figura retirada da referência [88]. b) Função  $g_{out}^{(2)}(0)$  Utilizando o estado estacionário  $\rho_{SS}$  dado pela Eq.(5.27).

perceber que existe uma diferença entre os dois estados estacionários à medida que tem-se o aumento de temperatura. No regime de baixas temperaturas e acoplamentos fracos eles são praticamente os mesmos. No regime ultraforte os autores da referência [88] demonstraram que é possível acessar, por exemplo, valores bem mais altos que o tradicional  $g_{out}^{(2)} = 2$  (vide

Fig. 16a) no regime de altos acoplamentos,  $0,1 < g/\omega_c < 1$ , e no intervalo de temperaturas  $0,05\hbar\omega_c < k_B T < 0,25\hbar\omega_c$ , pronunciando um efeito de agrupamento de fótons bem maior que o descrito pela teoria padrão, obtendo uma estatística bem super-poissoniana. Para regimes de baixas temperaturas,  $k_B T / \hbar\omega_c < 0,1$ , e valores elevados de acoplamento,  $g/\omega_c > 0,3$ , é possível observar um caráter de antiagrupamento de fótons, revelando uma estatística sub-poissoniana e, conseqüentemente, uma estatística não-clássica para o campo de radiação. O valor descrito pela teoria de fotodeteção padrão,  $g_{out}^{(2)} = 2$ , pode ser recuperado no regime de baixos acoplamentos e temperaturas suficientemente altas [87]. Para o cálculo da função  $g_{out}^{(2)}$  utilizamos o operador densidade, que nesse caso é descrito pelo estado térmico,  $\rho_T$ , referente à Eq. (5.17), definido no capítulo 5, em conjunto com o estado estacionário  $\rho_{SS}$ , Eq. (5.27). Em todos os casos descritos neste capítulo utilizamos os valores  $P_g = 1/2$ , com  $P_{\psi_-} = 1/2$ , para as probabilidades que correspondem ao estado estacionário  $\rho_{SS} = P_g \tilde{\rho}_T + P_{\psi_-} |\psi_- \rangle \langle \psi_-| \otimes \rho_{th}$ .

### 6.3.1 Função de correlação: entrada e saída

Resolvemos, então, fazer uma comparação entre os dois estados estacionários térmicos  $\rho_T$  e  $\rho_{SS}$  para analisar a estatística do campo quando ocorre termalização ou não, utilizando a teoria de detecção definida na seção anterior. Inicialmente, vamos ilustrar o comportamento das funções de correlação dos campos dentro e fora do ressonador e analisar o que acontece se partirmos de um estado estacionário que difere do estado térmico. Em todos os resultados utilizamos, o intervalo de temperaturas,  $0,05\hbar\omega_c < k_B T < 0,5\hbar\omega_c$ , no qual realizamos nossas análises numéricas em função do número de fótons térmicos  $n_{th}$ ,

$$\bar{n}_{th} = \frac{1}{(e^{\hbar\omega_c/k_B T} - 1)}, \quad (6.15)$$

que fica estritamente relacionado com a temperatura  $T$  através da relação [89]

$$T = \frac{\hbar\omega_c}{k_B} \left[ \ln \left( \frac{1 + \bar{n}_{th}}{\bar{n}_{th}} \right) \right]^{-1}. \quad (6.16)$$

Pode-se observar, através da figura 17 que, à medida que aumentamos a intensidade de acoplamento entre o sistema átomo e o campo, existe uma diferença significativa entre os dois estados estacionários, ficando evidente que o estado térmico não é o estado estacionário

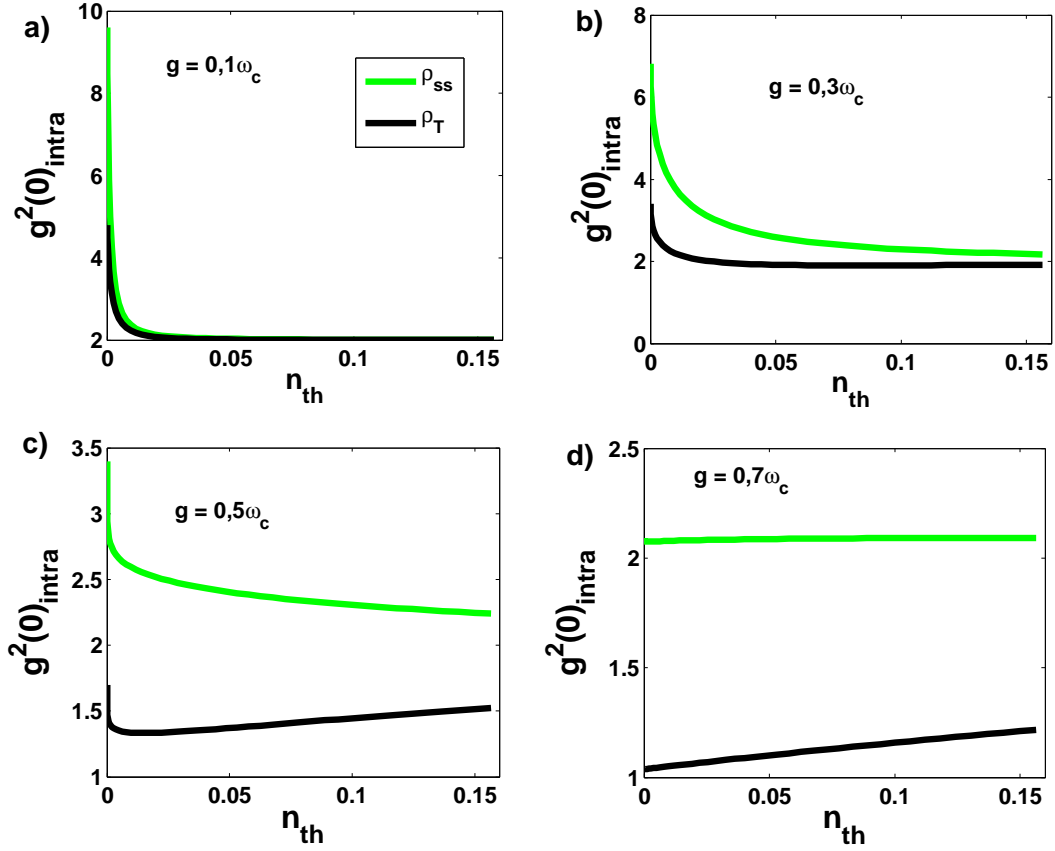


Figura 17: Função de correlação  $g^2(0)$  do campo intra-cavidade, calculada a partir do estado estacionário  $\rho_{SS}$  e do estado térmico  $\rho_T$ , em função de  $n_{th}$ .

do sistema. Quando se têm acoplamentos não muito intensos e baixas temperaturas, não há muita diferença entre os dois estados estacionários (vide Fig. 17 (a-b)), com exceção a temperaturas  $T \rightarrow 0K$ . Entretanto observamos que a estatística intracavidade do sistema total átomo e campo revela um caráter altamente super-poissoniano no regime de baixas temperaturas, no intervalo de acoplamento correspondente a  $0,1 \leq g/\omega_c \leq 0,5$ . Todavia, ao considerarmos um valor de acoplamento  $g/\omega_c = 0,7$  (vide Fig. 17(d)), a estatística do campo intracavidade exibe um valor próximo ao obtido pela teoria padrão para o estado térmico  $g_{\text{intra}}^{(2)}(0) = 2$ . Neste caso, consideramos a informação contida no campo da cavidade do sistema total átomo e campo, sendo que nesse caso utilizamos a função definida na Eq. (6.2).

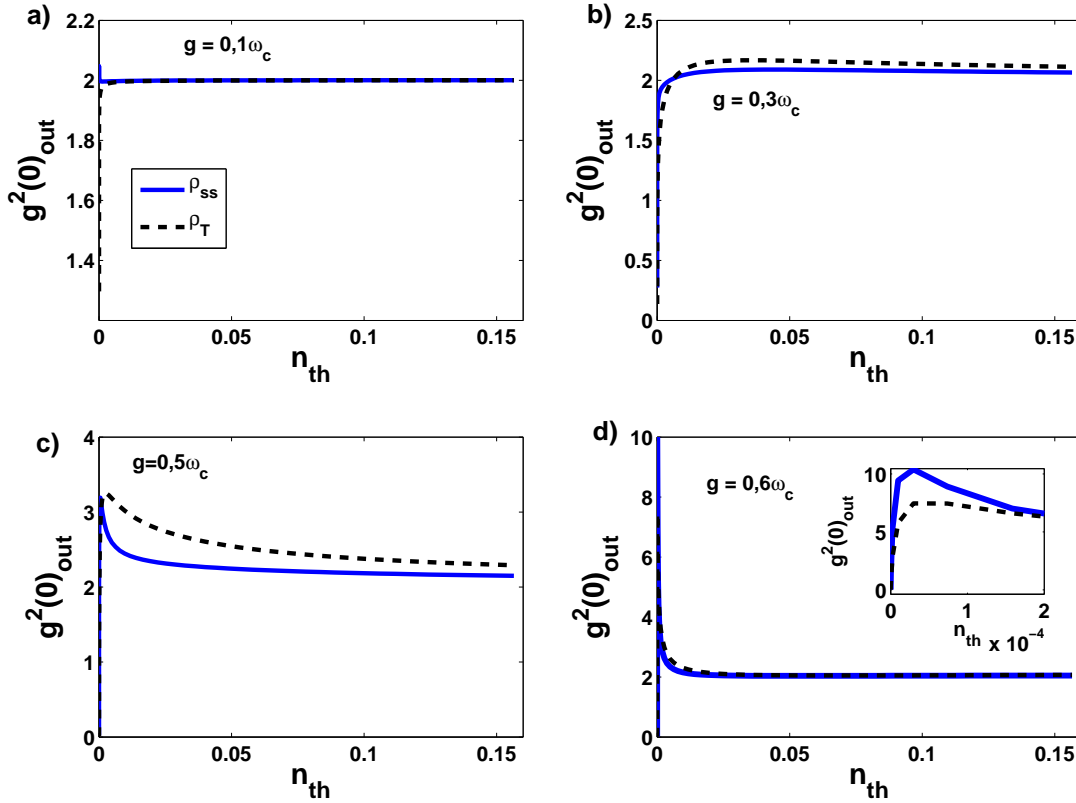


Figura 18: Função de correlação  $g^2(0)$  do campo de saída calculada a partir do estado estacionário  $\rho_{SS}$  e do estado térmico  $\rho_T$ , em função de  $n_{th}$ .

Na figura 18 exibimos a função de correlação para o campo de saída do ressonador utilizando a teoria de entrada e saída da seção anterior, Eq. (6.14), considerando  $\tau \rightarrow 0$ . Observamos a mesma diferença entre os estados estacionários, sendo que esta diferença é pequena no intervalo de acoplamentos que correspondem a  $0,1 \leq g/\omega_c \leq 0,3$  (vide Fig. 18 (a-b)). No limite de acoplamento fraco,  $g/\omega_c \lesssim 0,1$ , e temperaturas suficientemente altas, a função de correlação tem um valor  $g_{out}^{(2)}(0) = 2$  bem próximo ao descrito pela teoria padrão de fotodeteccção, evidenciando a ocorrência de uma estatística super-poissoniana. Enquanto isso, no intervalo condizente à  $0,3 \leq g/\omega_c \leq 0,6$  e  $n_{th} < 0,05$  a função de correlação assume valores  $g^{(2)}(0) < 1$ , deixando clara a existência de uma estatística sub-poissoniana e, conseqüentemente, a ocorrência de uma estatística não-clássica para o campo de radiação. Todavia, a maior diferença entre os dois estados estacionários surge quando se tem um valor de acoplamento  $g/\omega_c = 0,5$ , acompanhado de um alto agrupamento, relacionado ao

caráter super-poissoniano do campo de saída (vide Fig. 18(c)). No regime de acoplamento especificamente de  $g/\omega_c = 0,6$ , para baixas temperaturas, existe uma diferença entre ambos os estados, enquanto que eles são praticamente os mesmos no regime de alta temperatura. Na Figura 18(d) em "inset" é possível observar a ocorrência de estatística sub-poissoniana, com  $g_{out}^{(2)}(0) < 1$ , e altamente super-poissoniana, com  $g_{out}^{(2)}(0) > 1$ , do campo de saída, ambos a baixas temperaturas. Entretanto, quando se têm altas temperaturas, a função de correlação exibe um valor próximo ao obtido pela teoria padrão para o estado térmico com  $g_{out}^{(2)}(0) = 2$ . Valores acima de  $g/\omega_c > 0,6$  fornecem um elevado caráter super-poissoniano por conta da degenerescência entre os níveis de energia do modelo de Rabi. Por isso, nossas análises foram restritas até esse valor de acoplamento.

### 6.3.2 Número médio de fótons: entrada e saída

Resolvemos fazer um comparativo entre o número médio de fótons que estão no interior da cavidade com os que escapam da cavidade, utilizando a teoria de entrada e saída no regime ultraforte para verificar as consequências relacionadas à utilização do estado estacionário  $\rho_{SS}$  e o estado térmico  $\rho_T$ . Exibimos o comportamento do número médio de fótons intra-cavidade utilizando a expressão padrão:

$$NM_{intra} = Tr [\hat{a}^\dagger \hat{a} \rho], \quad (6.17)$$

para alguns valores de acoplamento,  $g/\omega_c$ , em função do número médio de fótons térmicos,  $n_{th}$ . A diferença entre os dois estados estacionários é bem pequena quando temos acoplamento  $g/\omega_c \lesssim 0,1$  e temperaturas relativamente baixas,  $n_{th} \approx 0,01$  (vide Fig. 19(a)). Para casos onde o acoplamento é acrescido no intervalo  $0,3 \leq g/\omega_c \leq 0,5$ , a diferença entre ambos os estados é nítida, sendo que este comportamento torna-se mais evidente com o acréscimo de temperatura (vide Fig. 19(b-c)). No caso onde o acoplamento já é muito intenso,  $g/\omega_c = 0,7$ , a diferença entre os dois estados estacionários se torna cada vez mais evidente. Na figura 20 mostramos o comportamento do fluxo de fótons que escapam do ressonador

$$NM_{out} = \gamma_0 \langle \dot{X}^- \dot{X}^+ \rangle, \quad (6.18)$$

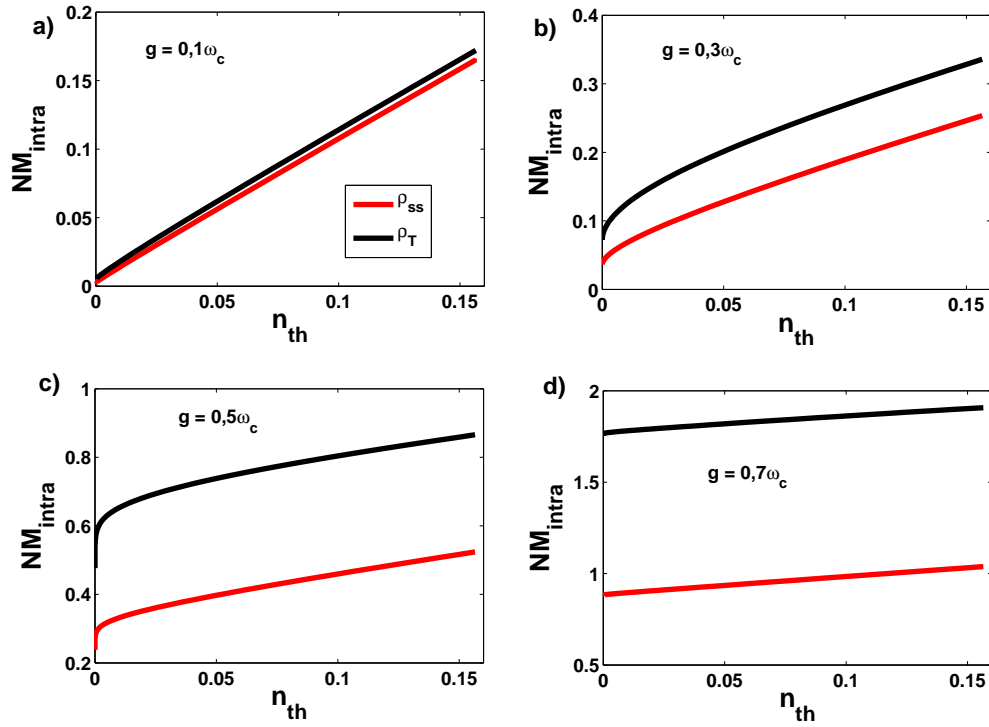


Figura 19: Número médio de fótons intra-cavidade, calculado a partir do estado estacionário  $\rho_{SS}$  e do estado térmico  $\rho_T$ , em função de  $n_{th}$ .

para diferentes parâmetros de acoplamento  $g/\omega_c$ . O parâmetro  $\gamma_0$  que descreve a dissipação no modo da cavidade irá apenas influenciar a taxa de decaimento do número médio de fótons que escapam da cavidade. É possível notar que a diferença entre os estados estacionários é pequena em regime de baixo acoplamento e baixas temperaturas (veja Fig. 20(a)), porém, à medida que temos um aumento, tanto do acoplamento, quanto em temperatura, nota-se uma diferença considerável entre ambos os estados, sendo que este comportamento pode ser visto nas Fig's. 20(b),(c). Um comportamento interessante ocorre especificamente quando se tem o valor de acoplamento  $g/\omega_c = 0,7$ . Nesse valor, o número médio de fótons que escapam da cavidade cresce, podendo isso ser consequência dos decaimentos cascata que ocorrem no modelo de Rabi, por conta dos níveis mais excitados. Na tabela 2, fornecemos os valores numéricos para o número médio de fótons correspondente aos dois estados estacionários utilizados.

Dos valores mostrados na tabela 2, podemos ver que existe uma diferença um tanto



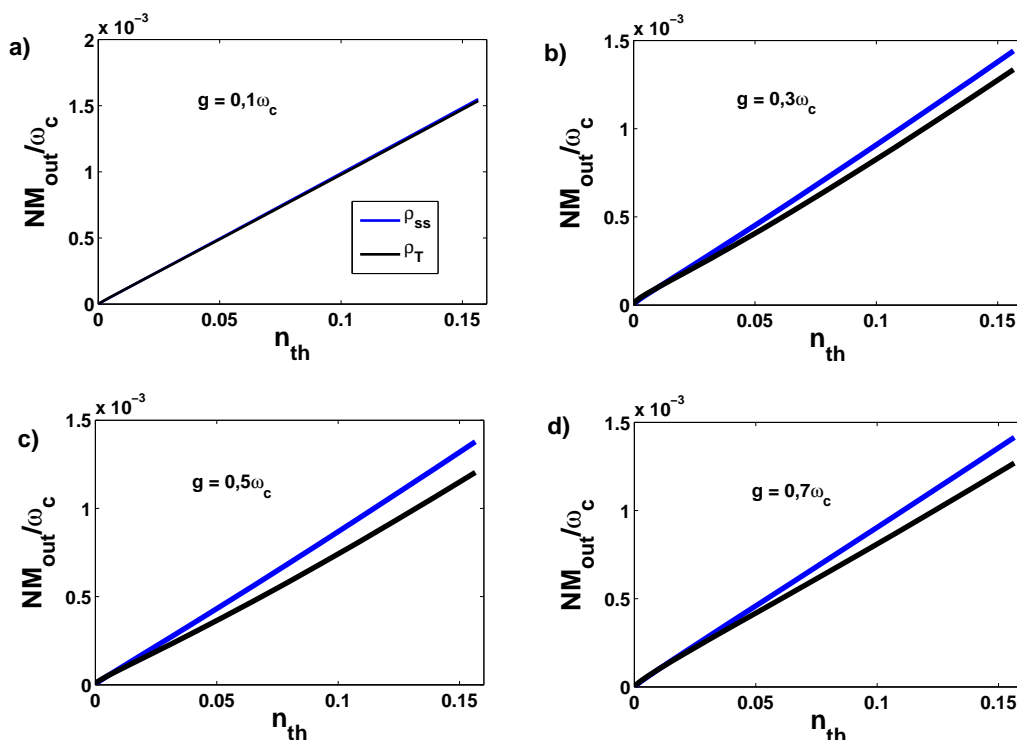


Figura 20: Fluxo de fótons que escapam do ressonador, calculado a partir do estado estacionário  $\rho_{SS}$  e do estado térmico  $\rho_T$ , em função de  $n_{th}$ . A taxa de decaimento da cavidade aqui utilizada foi  $\gamma_0 = 0,01\omega_c$ .

Tabela 2: Fluxo de fótons  $NM_{out}/\omega_c$ , que escapam da cavidade, utilizando os estados  $\rho_{SS}$  e  $\rho_T$ .

	$g = 0.1\omega_c$	$g = 0.3\omega_c$	$g = 0.5\omega_c$	$g = 0.7\omega_c$
$\rho_{SS}$	0.00153	0.00144	0.00137	0.00141
$\rho_T$	0.00153	0.00133	0.00120	0.00126

significativa do número médio de fótons que escapam da cavidade, quando utilizam-se os dois estados para investigar esse efeito<sup>4</sup>. Isso mostra claramente que o estado térmico  $\rho_T$  não é o estado estacionário do sistema, como é descrito na maioria dos últimos trabalhos que abordaram essa teoria de fotodeteção no regime ultra forte. Neste novo ramo da física de supercondutores, o mediador da interação é o fóton de frequência em microondas.

<sup>4</sup> No regime ultra forte para determinados valores dos parâmetros de frequência  $\omega_c$  e da taxa de dissipação  $\gamma_0$  pode-se ter, um fluxo de fótons que escapam do ressonador da ordem de  $NM_{out} \approx 1 \times 10^7$  fótons por segundo, como descrito em [90]

Um desafio acerca desses fótons em frequência de microondas reside na grande dificuldade de detecção individual, pois estes fótons possuem energias da ordem de  $10^4$  a  $10^5$  vezes menores que a energia dos fótons da luz visível. Essa dificuldade tem sido contornada nos últimos anos quando experimentos conseguiram detectar fótons individuais com baixa eficiência, como em [91, 92], e com detecção de alta eficiência em um ressonador de acordo com [93]. Além dos experimentos citados, existem propostas teóricas, como as de [94], que fornecem alternativas para resolver o problema da detecção de fótons individuais no regime de microondas. Ademais, alguns experimentos na área de circuitos supercondutores já possibilitam a detecção das funções de correlação para o campo, tais como [95, 96]. Nossos resultados nesta seção podem ser bem úteis para analisar o comportamento da estatística do campo de radiação térmica no regime ultraforte, considerando que a área de circuitos supercondutores seja, talvez, a candidata ideal para verificar a acurácia de nossos resultados. Nesta seção, enfatizamos a diferença existente entre os estados estacionários, tornando evidente tais diferenças entre as propriedades estatísticas do campo de radiação térmico. À medida que temos acréscimo de temperatura, as diferenças entre os estados é significativa em alguns valores de acoplamento  $g/\omega_c$ . Na referência [88] os autores assumem que o modo do campo e átomos interagem com reservatórios independentes, e assumem que o sistema termaliza. Tais resultados estão corretos mas não se aplicam, por exemplo, em situações experimentais como a descrita na referência [75], onde precisamos usar a teoria de reservatórios coletivos para os qubits, para uma correta descrição dos resultados experimentais. Nessa situação mostramos que o sistema nem sempre atinge o estado  $\rho_T$  descrito pelo ensemble de Gibbs.

## 7 Correlações Quânticas entre os qubits induzidas pelo modo quântico do campo e pelo reservatório.

Faremos uma breve introdução de dois tipos de correlações quânticas que iremos utilizar aqui neste trabalho. Correlações existem, tanto do ponto de vista clássico, quanto no ponto de vista quântico, de modo que é possível analisar aspectos da teoria da informação por meio destes dois pontos de vista. Um dos fundamentos bastante singulares relacionados à mecânica quântica é a possibilidade de fornecer uma gama de fenômenos não previstos pela teoria clássica, tais como o emaranhamento quântico. Este fenômeno tem sido tema de debate e intenso estudo teórico e experimental por décadas, tendo atingido seu ápice, onde resultados teóricos e experimentais obtidos nos anos de 1990 possibilitaram avanços significativos no contexto de informação e comunicação quântica. No contexto físico, o emaranhamento está relacionado com o princípio de superposição de estados em mecânica quântica. Do ponto de vista matemático, utiliza-se a teoria estrutural de produtos tensoriais atuando no espaço de Hilbert para tratar sistemas quânticos compostos. Utilizando a notação tensorial, iremos introduzir o conceito de emaranhamento.

### **Emaranhamento: sistemas bipartites puros**

Considere  $|\psi\rangle$  um estado de um sistema quântico  $S$ , com um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , associado a ele. Iremos focar no sistema  $S$  consistindo de duas partes,  $A$  e  $B$  isto é, um sistema bipartite que terá o espaço de Hilbert composto pelas duas partes, de modo que  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Para casos nos quais um sistema em consideração é descrito por um estado puro,  $|\psi_{AB}\rangle$ , descrito no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_{AB}$ , é dito ser separável se ele for expresso da forma:

$$|\psi_{AB}\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B, \quad (7.1)$$

caso contrário, se a forma acima não for obedecida, o sistema é não-separável, ou emara-

nhado. Deve-se ter em conta que o emaranhamento e a separabilidade são conceitos que estão de certa forma relacionados um com o outro, pois a separabilidade, ou não, de um estado pode descrever se o sistema possui emaranhamento. O contexto de separabilidade, tratando especificamente estados puros, pode ser analisada utilizando a decomposição de Schmidt [97]:

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{k=1}^{\min(d_A, d_B)} \lambda_k |u_A^k\rangle \otimes |v_B^k\rangle, \quad (7.2)$$

no quais  $|u_A^k\rangle$  e  $|v_B^k\rangle$  são as bases de Schmidt pertencentes aos espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ , satisfazendo as relações de ortogonalidade  $\langle u_A^i | u_A^{i'} \rangle = \delta_{ii'}$  e  $\langle v_B^i | v_B^{i'} \rangle = \delta_{ii'}$ . Um parâmetro importante nesta decomposição é o ranque de Schmidt,  $r \leq \min(d_A, d_B)$ , com  $\{\lambda_i\}$  denominando os números de Schmidt<sup>1</sup> [97]. Sabendo esses codinomes envolvidos na decomposição, podemos escrever o operador densidade para o estado puro (7.2) como:

$$\rho = \sum_{k, k'=1}^r \lambda_{k'}^* \lambda_k |u_A^k\rangle \langle u_A^{k'}| \otimes |v_B^k\rangle \langle v_B^{k'}|. \quad (7.3)$$

Através do ranque de Schmidt pode-se dizer se um estado bipartite é separável, ou não. Quando o ranque for  $r = 1$ , o estado é separável, podendo ser escrito como  $|\psi_{AB}\rangle = |u_A^1\rangle \otimes |v_B^1\rangle$ . Entretanto, para  $r > 1$  o estado é não-separável, podendo ser escrito em termos de probabilidades marginais:

$$\rho_A = Tr_B[\rho] \rightarrow \rho_A = \sum_{j=1}^r |\lambda_j|^2 |u_A^j\rangle \langle u_A^j| \quad (7.4)$$

$$\rho_B = Tr_A[\rho] \rightarrow \rho_B = \sum_{j=1}^r |\lambda_j|^2 |v_B^j\rangle \langle v_B^j|, \quad (7.5)$$

sendo que os vetores da base de Schmidt  $|u_A^j\rangle$  e  $|v_B^j\rangle$ , são os autovetores de  $\rho_A$  e  $\rho_B$  com autovalores não-nulos, reespectivamente. Podemos observar, das expressões anteriores, que, apesar dos operadores densidade  $\rho_A$  e  $\rho_B$  agirem em seus respectivos espaços de Hilbert, eles compartilham o mesmo conjunto de autovalores  $\{|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \dots, |\lambda_r|^2\}$ , ou seja, os valores quadráticos dos números de Schmidt são autovalores comuns de  $\rho_A$  e  $\rho_B$ . Uma consequência do que foi dito no parágrafo anterior é que pode-se utilizar a entropia de von Neumann,  $S(\rho) = -Tr[\rho \ln \rho]$ , como uma medida de emaranhamento para estados puros.

<sup>1</sup> Os escalares  $\lambda_i$  são números reais não-negativos.

Assim, de modo que assim teremos:

$$E\{|\psi_{AB}\rangle\} = S(\rho_A) = S(\rho_B) \quad (7.6)$$

$$E_S\{|\psi_{AB}\rangle\} = -\sum_{j=1}^r \lambda_j^2 \log_2 \lambda_j^2, \quad (7.7)$$

onde essa expressão é conhecida com o codinome de entropia do emaranhamento, de modo que ela é nula quando o estado é separável,  $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 0$ , e finita para estados emaranhados. Nisso resume-se o conceito de separabilidade envolvendo estados puros bipartites. O mesmo conceito envolvendo estados mistos já não é tão simples de ser abordado, por conta de uma série de propriedades existentes, de modo que não o faremos aqui por não ser o objetivo deste trabalho. Entretanto, esse assunto é bastante discutido nas referências [98,99], principalmente no que diz respeito ao importante critério de separabilidade de Peres-Horodecki para sistemas de baixa dimensionalidade. A entropia de von Neumann pode ser bem útil no contexto do emaranhamento, pois ela pode ser uma importante medida para quantificá-lo, como foi demonstrado por C. H. Bennett *et al* em 1996 [100]. Na referência [100], os autores justificam o uso da entropia de von Neumann como uma medida de emaranhamento, por meio do emaranhamento de formação, definido pela expressão [100]:

$$EoF(\rho) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_{i=1} p_i E(|\psi_i\rangle), \quad (7.8)$$

em que  $\rho = \sum_{i=1} p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ , com  $\sum_{i=1} p_i = 1$  e  $p_i > 0$ , se refere à mistura estatística do operador densidade  $\rho$  com probabilidade normalizada e positiva. O emaranhamento de formação pode ser interpretado como uma medida que quantifica o número mínimo de estados singletos necessários para criar o estado  $\rho$  [100]. No EoF,<sup>2</sup> o termo  $E(|\psi_i\rangle)$  denota a entropia do emaranhamento do estado puro  $|\psi_i\rangle$ . Uma informação importante refere-se ao processo de minimização inserido na Eq.(7.8), pois não existe métodos até o momento para calcular  $EoF(\rho)$  em dimensão arbitrária. Porém, para casos envolvendo um par de qubits (um par de sistemas bidimensionais) existe um método eficiente que nos dá uma solução analítica fechada para o processo de minimização de  $EoF(\rho)$ . Tal método é devido a Wootters, que utilizou uma medida de emaranhamento conhecida como

<sup>2</sup> Utilizaremos essa sigla para quando nos referirmos ao Emaranhamento de Formação.

"concorrência" <sup>3</sup> [101, 102]:

$$C(\rho) = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4), \quad (7.9)$$

onde os  $\lambda$ 's representam as raízes quadradas dos autovalores da matriz  $R^2 = \tilde{\rho}\rho$ , onde  $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y)$  descreve uma operação conhecida como *spin-flip*<sup>4</sup> para o estado de par de qubits. Através da "concorrência" pode-se caracterizar o emaranhamento de formação através da expressão [101]:

$$EoF_S(\psi) = \mathcal{E}_F(C(\rho)),$$

no qual o termo  $\mathcal{E}_F$  é dado por:

$$\mathcal{E}_F(C) = H\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2(\rho)}}{2}\right), \quad (7.10)$$

onde  $H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$  é a entropia de Shannon binária, destacando que  $x$  é o termo entre parênteses do membro direito da expressão anterior. No caso particular de matrizes na forma "X"<sup>5</sup> [103]:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (7.11)$$

a "concorrência" (7.9) pode ser facilmente calculada tendo seu valor:

$$C(\rho) = \max\left(0, |\rho_{32}| - \sqrt{\rho_{44}\rho_{11}}, |\rho_{41}| - \sqrt{\rho_{33}\rho_{22}}\right).$$

O conhecimento de uma família de estados que possuem essa forma  $X$  é útil, pois permite o cálculo da "concorrência" em alguns casos analiticamente. Exemplos desses estados são: estados de Bell e estados de Werner, dentre outros [99]. Ressaltamos que existem outras medidas de emaranhamento além destas que descrevemos acima. Entretanto, neste

<sup>3</sup> Essa medida foi introduzida por Bennet *et al* em 1996 e o resultado foi generalizado por Hill e Wootters em 1998.

<sup>4</sup> O spin-flip descreve uma operação para um qubit envolvendo um operador antiunitário.

<sup>5</sup> A matriz  $X$  definida tem esse nome pois é a forma na qual estão dispostos os termos diagonais da referida matriz.

trabalho utilizaremos apenas o EoF em função da concorrência. Para mais detalhes sobre outras medidas e um ponto de vista mais geral sobre a teoria do emaranhamento quântico recomenda-se a referência [99].

### Discórdia quântica

A teoria de informação clássica é muitas vezes baseada nas ideias postuladas por C. Shannon, utilizando o ingrediente fundamental para a teoria da informação, a entropia, através da qual podemos saber o quanto um sistema físico pode estar desorganizado ou não. Na teoria de informação quântica, a entropia também exerce um papel fundamental no que diz respeito às medidas de correlação entre dois ou mais sistemas. Neste caso a entropia é descrita pela entropia de von Neumann. O enfoque de relatar o que foi dito anteriormente está relacionado com uma medida de correlação que utilizamos aqui neste trabalho, conhecida como discórdia quântica. Relatamos no início desta seção que a informação clássica tem como ponto chave a entropia de Shannon, definida por [97]:

$$H(X) = -\sum_x p_x \log p_x, \quad (7.12)$$

na qual a entropia  $H(X)$  tem como função quantificar o grau de ignorância de uma dada variável clássica,  $X$ , com  $x \in X$  e  $p_x$  sendo a probabilidade de um dado evento  $x$ . No contexto de informação clássica, a correlação entre duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  pode ser descrita em termos da informação mútua definida por:

$$\mathcal{I}(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y), \quad (7.13)$$

nas quais  $H(X)$  é a entropia definida na Eq.(7.12), sendo que o mesmo argumento anterior é válido para  $H(Y)$  e  $H(X, Y)$ , sendo que esta última representa a entropia de Shannon sobre uma distribuição de probabilidade  $p(x, y)$ . Considerando a probabilidade condicional  $p(x|y) = p(x, y)/p(y)$  em que as variáveis  $X$  e  $Y$  possam assumir os valores  $x$  e  $y$ , respectivamente, é possível encontrar a seguinte expressão:

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y), \quad (7.14)$$

onde  $H(X|Y) = \sum_y p(y) H(X|Y = y)$  define a entropia condicional de  $X$  dada uma variável  $Y$ . Ao substituir a Eq.(7.14) em (7.13) obtém-se uma expressão equivalente à informação mútua, onde esta é dada por:

$$\mathcal{J}(X : Y) = H(X) - H(X|Y), \quad (7.15)$$

de maneira que esta expressão relaciona a entropia condicional e a informação mútua. Essa expressão implica que a informação mútua determina que o decréscimo da informação na variável  $X$  requer um conhecimento sobre  $Y$ . Nesse contexto podemos dizer que há uma informação compartilhada por  $X$  e  $Y$ <sup>6</sup>. No contexto de informação quântica pode-se utilizar de maneira análoga os mesmos argumentos de probabilidade para a informação mútua. Porém, agora a entropia envolvida é definida de acordo com a entropia de von Neumann:

$$S(\rho) = -Tr[\rho \log \rho]. \quad (7.16)$$

A notação é mantida, mas estamos considerando o logarítmo na base 2. Utilizando essa entropia, podemos escrever a informação mútua entre dois subsistemas  $A$  e  $B$  de modo a escrever as equações (7.13) inserindo a entropia de von Neumann, obtendo:

$$\mathcal{I}(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}), \quad (7.17)$$

onde  $\rho_{AB}$  é a matriz densidade conjunta dos subsistemas. A outra expressão relacionada com a entropia condicional requer algumas considerações, pois, em contrapartida ao caso clássico, no caso de sistemas quânticos a informação é obtida via diferentes processos de medida que inevitavelmente podem vir a perturbar o sistema. Na teoria da informação quântica utiliza-se uma técnica de medida projetiva conhecida como POVM<sup>7</sup> [97]. A POVM pode ser descrita por um conjunto qualquer de operadores  $\{E_d\}$  positivos semi-definidos, isto é,  $\langle \psi | E_d | \psi \rangle \geq 0$ , pertencentes ao espaço de Hilbert de  $H_D$ , que obedecem a relação de preservação de identidade. No presente trabalho iremos utilizar a medida que é construída a partir da diferença entre a informação mútua quântica (7.13), em termos da entropia (7.16) e as correlações clássicas, onde tal diferença define a medida de correlações conhecida

<sup>6</sup> As equações (7.14) e (7.15) são idênticas na teoria da informação clássica, equivalendo, assim, à igualdade  $\mathcal{I}(X : Y) = \mathcal{J}(X : Y)$ .

<sup>7</sup> A sigla (POVM) significa, medida valorada por operadores positivos



como discórdia quântica [104]:

$$\begin{aligned} D &= I(A : B) - \mathcal{J}(A : B), \\ D &= S(\rho_A) - S(\rho_{AB}) - \min_{\{\Pi_d^A\}} \sum_d p_d S(\rho_{B|\Pi_d^A}). \end{aligned} \quad (7.18)$$

A discórdia foi uma medida introduzida no artigo de W. Zurek e H. Ollivier [104], tornando-se notória por ser uma medida que captura correlações não-clássicas, inclusive o emaranhamento. Em suma, ela pode ser vista como uma medida de "quanticidade de correlações", sendo assim mais completa apenas que o tradicional emaranhamento. Para mais detalhes sobre a teoria de discórdia quântica, recomendamos a leitura da referência [105]. De acordo com o que foi relatado acerca do emaranhamento de formação, onde nos deparamos com o problema de minimização, o mesmo acontece quando se trata da discórdia quântica, que, por construção, utiliza medidas projetivas POVM para a realização das medidas. Cálculos envolvendo discórdia não são tão simples de serem feitos, mesmo utilizando abordagem numérica, onde a dificuldade surge por conta da minimização inserida na Eq. (7.18). Um dos problemas a serem contornados no cálculo da discórdia reside no fato de minimizar a entropia condicional do subsistema  $A$ . Essa minimização pode ser feita utilizando os projetores ortogonais  $\Pi_j^B = |B_k\rangle \langle B_k|$ , com o índice  $k$  variando de 1 a 2. Os estados  $|B_k\rangle$  são definidos pela forma [106]:

$$\begin{aligned} |B_1\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle \quad e \\ |B_2\rangle &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle - e^{i\phi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle, \end{aligned} \quad (7.19)$$

com os ângulos variando no intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , nos quais uma representação geométrica desses projetores pode ser vista através da esfera de Bloch. Alguns progressos no intuito de resolver esse problema de minimização foram obtidos, como, por exemplo, na referência [107], que concerne a obtenção de uma forma analítica fechada para estados descritos pela matriz densidade  $\rho$  na forma  $X$  (7.11) para sistemas de dois qubits. O estudo citado no parágrafo anterior foi uma generalização da primeira análise de problemas de minimização envolvendo discórdia quântica feita em [108]. O processo de minimização realizado neste trabalho, envolvendo o cálculo da discórdia, foi feito numericamente utilizando o software Matlab<sup>TM</sup>, cujos parâmetros angulares dos

projetores que variamos durante o processo correspondem aos intervalos  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

## 7.1 Resultados

As correlações aqui estudadas foram o *Emaranhamento de Formação* e a *Discórdia Quântica*, brevemente abordadas na seção anterior. O estudo de correlações no regime ultra forte tem sido feito recentemente, especificamente na Ref. [5]. Nesse trabalho, autores analisaram a geração de correlações entre dois qubits no modelo de Rabi utilizando a Eq. (5.10) e apenas considerando decaimento no campo da cavidade. Nesse trabalho, os autores mostraram que, partindo de um estado inicial onde ambos os átomos e modo do campo encontram-se nos seus estados fundamentais,  $|gg0\rangle$ , há uma certa geração de correlação entre os átomos. Este é justamente um caso em que há ocorrência de termalização do sistema, como foi mostrado no capítulo 5 deste trabalho, no qual o sistema encontra-se no estado fundamental em  $T = 0K$ . No entanto, é possível gerar um grau de correlação na situação onde há ausência de termalização, maior do que o obtido no referido trabalho. Para isso, usamos o fato de que esse sistema não termaliza e utilizamos um estado atômico inicial onde um dos átomos é preparado no estado fundamental e o outro é preparado no estado excitado, sendo que esse estado,  $|eg\rangle$ , tem projeção no estado subradiante  $|\psi_{-}\rangle$ . Investigamos a possibilidade de gerar correlações quânticas entre os átomos e o modo do campo interagindo com o reservatório a temperatura finita, na qual a temperatura é inserida via o estado térmico  $\rho_{th}$ , descrito na Eq. (5.23) do capítulo 5. Durante nossos cálculos numéricos observamos que a forma  $X$  definida em (7.11) da matriz densidade atômica foi preservada, além de sua positividade. Na Fig. 21, ilustramos o comportamento das correlações quânticas obtidas de acordo com os argumentos anteriores. Podemos observar através da Fig. 21 que se consegue gerar um alto grau de correlação entre os qubits, podendo assim atingir valores significativos para a discórdia e o EoF nesse regime. O estado estacionário obtido, por ter em sua estrutura uma projeção no estado subradiante  $|\psi^{-}\rangle$  maximamente emaranhado, preserva um certo valor das correlações. A Discórdia e o EoF exibem valores relativamente altos (*Discórdia*  $\approx 0,4$

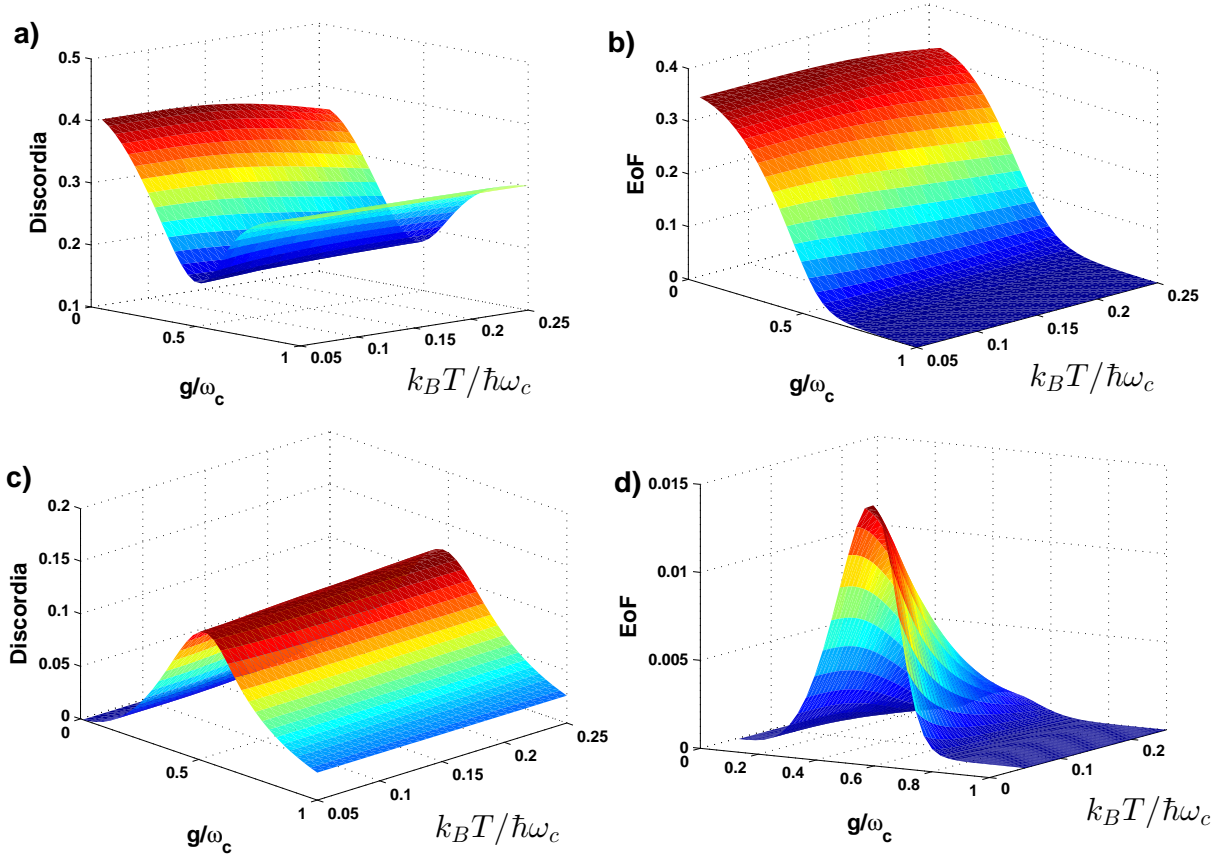


Figura 21: Correlações quânticas obtidas através do estado estacionário  $\rho_{SS}$ , Eq.(5.27), em função dos valores de acoplamento  $0 \leq g/\omega_c \leq 1$  e temperatura  $0,05 < k_B T / \hbar \omega_c < 0,25$ . a) Discórdia ;b) Emaranhamento de Formação. Utilizados os parâmetros  $\Delta = 0$ , sob a condição inicial  $|eg, 0\rangle$ . c) Discórdia ; d) Emaranhamento de Formação. Utilizados os parâmetros  $\Delta = 0$ , sob a condição inicial  $|g, g, 0\rangle$

e  $EoF \approx 0,35$ ), para valores de probabilidades,  $P_g = 1/2$  com  $P_{\psi_-} = 1/2$ , no estado  $\rho_{SS} = P_g \tilde{\rho}_T + P_{\psi_-} |\psi_-\rangle \langle \psi_-| \otimes \rho_{th}$ . As correlações podem ser vistas nas Figuras 21(a e b). O alto valor das correlações ocorre, pois o estado inicial  $|eg\rangle$  tem projeção no estado subradiante  $|\psi^-\rangle$ , que tem como característica ser um estado que não decai, fazendo com que as correlações fiquem "aprisionadas". Por esse motivo, esse estado contribui para o alto valor das correlações obtidas, enquanto a outra contribuição é por conta do estado  $\tilde{\rho}_T = \rho_{sim} / Tr(\rho_{sim})$ , cujo  $\rho_{sim} = e^{-\beta H_R} - e^{-\beta H_c} \otimes |\psi_-\rangle \langle \psi_-|$  é o estado estacionário

pertencente ao subespaço simétrico não normalizado definido no capítulo 5. Especialmente na discórdia, Fig. 21 (c),(d), ocorre um comportamento curioso no ponto  $g/\omega_c = 0,5$ . Nas Figuras 21(c) e (d) pode ser visualizada a geração de correlações quânticas a partir do estado fundamental do sistema, para valores de probabilidades  $P_g = 1$  e  $P_{\psi_-} = 0$ , no estado  $\rho_{SS}$  acima. Podemos perceber que as correlações preservam valores interessantes, tanto para a discórdia ( $Discórdia \approx 0,12$ ), quanto para o EoF ( $EoF \approx 0,014$ ), quando se têm temperaturas suficientemente baixas e acoplamento  $g/\omega_c = 0,5$ , sendo que a maior contribuição para o valor dessas correlações é devida ao estado  $\tilde{\rho}_T$ . Com o aumento da temperatura, o valor dessas correlações naturalmente vai diminuir por conta da interação com o reservatório térmico, que consegue ter maior influência na dissipação dos qubits. Para temperaturas suficientemente altas, o EoF sofre mais com os efeitos dissipativos oriundos da interação com o reservatório térmico. Enquanto isso, a discórdia parece em ambos os casos manter valores consideráveis de correlação, mesmo a temperaturas suficientemente altas, mostrando que esse tipo de correlação é mais robusta que o EoF. Nossos resultados podem ser interessantes para a implementação de possíveis experimentos, que tenham como objetivo a geração dessas correlações quânticas, utilizando qubits supercondutores.

## 8 Conclusões

O estudo relacionado à termalização de qubits interagindo com estruturas de reservatórios nos forneceu resultados interessantes. Após investigarmos a interação do sistema com diferentes tipos de reservatórios, mostramos em quais situações houve termalização ou não. Os casos nos quais envolviam um qubit interagindo com o modo do campo, descrito pelo modelo de Rabi, termalizam em qualquer situação envolvendo interação com reservatórios, sendo que esse resultado independe das taxas de decaimento, tanto do átomo, quanto do modo da cavidade. Entretanto, quando se têm casos onde temos dois qubits, a situação muda substancialmente. Ao considerarmos decaimento somente do modo da cavidade, o sistema não exhibe comportamento algum de termalização. Outra situação em que não ocorre termalização é quando se têm dois qubits interagindo com reservatório coletivo, que neste caso é uma situação real que ocorre em *circuit QED*. Observamos que a consequência da não termalização é devida ao fato do estado subradiante  $|\psi_{-}\rangle$  ser um autoestado do sistema total descrito pelo hamiltoniano de Rabi e do reservatório. Esse estado desacopla os átomos tanto do campo quanto do reservatório, tendo uma dinâmica independente. Tendo isso em vista, propomos um novo estado estacionário para o sistema, que é composto pelos estados estacionários dos dois subespaços que constituem o modelo de Rabi. Por meio desse estado estacionário, resolvemos analisar algumas propriedades, tais como a estatística do campo de radiação no regime ultra forte e correlações quânticas entre os qubits e o reservatório. A validade de nossos resultados está condicionada à validade do regime de acoplamento fraco entre o sistema e o reservatório, regime esse que foi utilizado para a construção da equação mestra markoviana. Estamos cientes de que estes estudos podem, de alguma forma, acrescentar novas ideias relacionadas com a informação quântica e tecnologias quânticas no contexto de circuitos supercondutores e áreas afins, sob as quais o regime ultra forte pode ser investigado.

# Referências

- [1] E. T. Jaynes and F.W. Cummings, Proc. IEEE. **51**, 89 (1963).
- [2] I. I. Rabi, Phys. Rev. **49**, 324 (1936).
- [3] M. O. Scully e M. S. Zubairy, Quantum Optics (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [4] F. Beaudoin, J. M. Gambetta, A. Blais, Phys. Rev. A. **84**, 043832 (2011).
- [5] R. Altintas, R. Eryigit, Phys. Rev. A. **87**, 022124 (2013).
- [6] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*. (Dover, New York, 1996), segunda edição).
- [7] B. Josephson, Physics Letters **1**, 251 (1962).
- [8] A. M. Zagoskin, *Quantum engineering: Theory and design of quantum coherent structures*.(Cambridge University Press, 2011).
- [9] Likharev, K. K. *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*. CRC Press (1986).
- [10] Yu. Makhlin, G. Schon, A. Shnirman, Rev. Mod. Phys. **73**, 357 (2001).
- [11] D. Vion, Josephson quantum bits based on a cooper pair box, in Quantum entanglement and information processing, session LXXIX (Proceedings of the Les Houches Summer School) (2003).
- [12] P. Carruthers, M. M. Nieto, Rev. Mod. Phys., **40**, 411 (1968).
- [13] V. Bouchiat *et al.*, Physica Scripta T **76**, 165 (1998).
- [14] A. Shnirman, G. Schön, Z. Hermon, Phys. Rev.Lett. **79**, 2371(1997).
- [15] J. Clarke, Proc. IEEE. **77**, 1208 (1982).

- 
- [16] Leggett, A. J., in "Quantum Tunneling in Condensed Matter Media" Edited by Y.Kagan and Leggett, A. J. ,(Elsevier, Amsterdam, 1992).
- [17] Y. Nakamura, Y. Pashkin, J. S. Tsai, Nature **398**, 786 (1999).
- [18] A. Cottet *et al.*, Physica C **367**, 197 (2002).
- [19] D. Vion *et al.*, Science **296**, 886 (2002).
- [20] J. Koch *et al.*, Phy. Rev. A. **76**, 042319 (2007).
- [21] A. J. Leggett, Progress of Theoretical Physics Supplement **69**, 80 (1980).
- [22] T. P. Orlando *et al.*, Phys. Rev. B **60**, 15398 (1999).
- [23] J. E. Mooij *et al.*, Science **285**, 1036 (1999).
- [24] C. H. van der Wal *et al.*, Science **290**, 773 (2000).
- [25] J. Q. You, F. Nori, Nature **474**, 589 (2011).
- [26] I. Chiorescu *et al.*, Science **299**, 1869 (2003).
- [27] V. E. Manucharyan *et al.*, Science **326**, 113 (2009).
- [28] John M. Martinis. Course 13: Superconducting qubits and the physics of Josephson junctions. In Jean-Michel Raimond Daniel Estève and Jean Dalibard, editors, Quantum Entanglement and Information Processing Ecole d' été de Physique des Houches Session LXXIX, volume 79 of Les Houches, pages 487 – 520. Elsevier, 2004.
- [29] Devoret, M. H., A. Wallraff, and J. M. Martinis, Superconducting qubits: A short review, in Quantum entanglement and Information Processing (Les Houches Session LXXIX), edited by J. M. Raimond, J. Dalibard, and D. Esteve, 443rd ed. (Elsevier) pp. 443–485, 2004.
- [30] J. Clarke, F. Wilhelm, Nature **453**, 1031 (2008).
- [31] J. Martinis, Quant. Inf. Proc.**8**, 81 (2009).
- [32] J. M. Martinis, M. H. Devoret, J. Clarke, Phys. Rev. Lett. **55**, 1543 (1985).

- 
- [33] J. M. Martinis, M. H. Devoret, J. Clarke, *Phys. Rev. B.* **35**, 4682 (1987).
- [34] J. Clarke *et al.*, *Science* **239**, 992 (1988).
- [35] J. M. Martinis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 117901 (2002).
- [36] Devoret, Michel H. (1997). Quantum fluctuations in electrical circuits. In Les Houches Session LXIII, 1995, eds S. Reynaud, E. Giacobino and J. Zinn-Justin. Elsevier Science B. V.
- [37] Goldstein, H. *Classical Mechanics*. Adiason-Wesley Publishing Company, 2ed, (1980).
- [38] Steven M. Girvin, *Superconducting Qubits and Circuits: Artificial Atoms Coupled to Microwave Photons*, (Lecture Notes, 2011).
- [39] Devoret, M. H. Course of the 13 th of may, 2008 at College de France : Quantum signals and circuits (2008).
- [40] D. P, DiVincenzo, *Fortschritte der Physik*, **48**, 771, (2000).
- [41] Louisell, W. H. *Quantum statistical properties of radiation*. John Wiley & Sons, 1973.
- [42] B.Yurke, J. S. Denker, *Phys. Rev. A* **29**, 1419 (1984).
- [43] A. Blais *et al.*, *Phys. Rev. A.* **69**, 062320 (2004).
- [44] S. Haroche and J.-M. Raymond, *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons* (Oxford University Press, New York, 2006).
- [45] D. Braak, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 100401 (2011).
- [46] J. Casanova *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 263603 (2010).
- [47] A. Wallraff *et al.*, *Nature* **431**, 162 (2004).
- [48] T. Niemczyk *et al.*, *Nature. Phys.* **6**, 772 (2010).
- [49] T.Niemczyk., Tese de Doutorado em Ciências Naturais - Fakultät für Physik, Technischen Universität München, München, 2011.



- 
- [50] C. Ciuti, G. Bastard, Phys. Rev. B **72**, 115303 (2005).
- [51] M. Devoret, S. Girvin and R. Schoelkopf, Ann. Phys. (Leipzig) **16**, 767 (2007).
- [52] J. Bourassa *et al.*, Phys. Rev. A **80**, 032109 (2009).
- [53] R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
- [54] Z.-L. Xiang, S. Ashhab, J. You, and F. Nori, Rev. Mod. Phys. **85**, 623 (2013).
- [55] M. C. Bañuls, J. I. Cirac, and M. B. Hastings, Phys. Rev. Lett. **106**, 050405 (2011).
- [56] C. Gogolin, M. P. Müller, J. Eisert, Phys. Rev. Lett. **106**, 040401 (2011).
- [57] T. Kinoshita, T. Wenger and D. S. Weiss, Nature. **440**, 900 (2006).
- [58] Werlang, T. Tese de Doutorado em Física- Departamento de Física, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.
- [59] H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press (2006).
- [60] E. B. Davies, Comm. Math. Phys. **39**, 91 (1974).
- [61] R. Dumcke and H. Spohn, Z. Phys. B **34**, 419 (1979).
- [62] G. Lindblad, Commun. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
- [63] T. Werlang *et al.*, Phys. Rev. A **78**, 053805 (2008).
- [64] V. Bach *et al.*, J. Math. Phys, **41**, 3985, (2000).
- [65] M. Merkli, J. Fröhlich, Commun. Math. Phys, **251**, 235 (2004).
- [66] H. Spohn, Rep. Math. Phys, **10**, 189 (1976).
- [67] R. Haag *et al.*, Commun. Math. Phys. **5**, 215 (1967).
- [68] O. Bratteli and D.W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, volumes 1 e 2. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1981.

- 
- [69] A. Rivas and S.F. Huelga. *Open quantum systems: An introduction*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011.
- [70] H. Spohn, Lett. Math. Phys. **2**, 33 (1977).
- [71] V. V. Albert , Liang Jiang, Phys. Rev. A **89**, 022118 (2014).
- [72] I. Bengtsson and K. Życzkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge Univ Press, 2006.
- [73] Tan, S. M. A, J. Opt. B. **1**, 424 (1999).
- [74] Rossato, Z. D, Tese de Doutorado em Física- Departamento de Física, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.
- [75] F. Nissen *et al.*, Phys. Rev. Lett. **110**, 203602, (2013).
- [76] Z. Ficek, R. Tanás. Physics Reports **372**, 369 (2002).
- [77] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
- [78] R. J. Glauber, Rev. Mod. Phys **78**, 1267 (2006).
- [79] B. Baseia, Rev. Bras. Ens. Fis. **17**, 1 (1995).
- [80] D. F. Walls e G. J. Milburn, Quantum Optics, 2nd ed. (Springer, Berlin, 2008).
- [81] Chiao, R.Y. and Garisson, J.C. Quantum Optics. Oxford University Express, New York, (2008).
- [82] C. W. Gardiner and P. Zoller, Quantum Noise, 2nd ed. (Springer, New York, 2000).
- [83] Z. Ficek, M. R. Wahiddin, Quantum Optics for Beginners. Pan Stanford Publishing (2014).
- [84] A. Ridolfo *et al.*, Phys. Rev. Lett. **109**, 193602 (2012).
- [85] S. DE Liberato *et al.*, Phys. Rev. A. **80**, 053810 (2009).
- [86] L. Garziano *et al.*, Phys. Rev. A. **88**, 063829 (2013).

- 
- [87] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1*, 2nd ed., Springer, (2000); *Statistical Methods in Quantum Optics 2*, Springer, (2008).
- [88] A. Ridolfo *et al.*, *Phys. Rev.Lett.* **110**, 163601 (2013).
- [89] R. R. Puri, *Mathematical methods of quantum optics*, Springer, (2001).
- [90] R. Stassi *et al.*, *Phys. Rev.Lett.* **110**, 243601 (2013).
- [91] A. A. Houck, *et al.*, *Nature* **449**, 328 (2007).
- [92] D. I. Schuster, *et al.*, *Nature* **445**, 515 (2007).
- [93] M. Hofheinz, *et al.*, *Nature* **459**, 546 (2009).
- [94] G. Romero, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **102**,173602, 2009.
- [95] D. Bozyigit, *et al.*, *Nature Phys.* **7**, 154 (2011).
- [96] M. Mariatoni, *et al.*, *Phys.Rev.Lett.* **105**,133601 (2010).
- [97] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [98] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996).
- [99] R. Horodecki *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
- [100] C. H. Bennett *et al.*, *Phys. Rev. A.* **54**, 3824 (1996).
- [101] W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).
- [102] W. K. Wootters, *Quantum Information and Computation.* **1**, 27 (2001).
- [103] T.Yu, J. H. Eberly, *Quantum Information and Computation.* **7**, 459 (2007).
- [104] H. Ollivier, W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017901 (2001).
- [105] K. Modi *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1655 (2012).
- [106] Cheng-Zhi, Wang *et al.*, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44**, 015503 (2011).

- [107] M. Ali *et al.*, Phys. Rev. A **81**, 042105, (2010).
- [108] S. Luo, Phys. Rev. A. **77**, 042303 (2008).
- [109] S. Filipp *et al.*, Phys. Rev A. **84**, 061805(R) (2011).
- [110] J. A. Mlynek *et al.*, Phys. Rev. A. **86**, 053838, (2012).
- [111] S. Filipp *et al.*, Phys. Rev A. **83**, 063827 (2011).
- [112] S. Filipp *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 200402 (2009).

# Apêndices

# APÊNDICE A – Apêndice

## A.1 Receita para preparar $|eg\rangle$ em nosso sistema no contexto de circuit QED

· Caminhos possíveis

Na referência [109] os autores mostraram como preparar o estado subradiante em *circuit QED*. Isso foi realizado, utilizando dois qubits supercondutores (Transmon) acoplados através de um guia de onda (campo comum da cavidade). Os autores demonstraram que o estado subradiante pode ser excitado utilizando controle de fase local dos qubits individuais alterando a simetria do campo de excitação. A preparação desse estado é feita utilizando o controle de fase local do campo de radiação microondas que incide sobre os qubits. Os autores nesse trabalho mostram que é possível controlar os qubits individualmente, onde estes podem ser endereçados via uma linha de carga acoplada capacitivamente. Nessa linha de carga também é possível ajustar a fase relativa  $\phi$  do pulso microondas incidente sobre os qubits. Se a fase for ajustada para um valor  $\phi = \pi$  é permitida a ocorrência de transições para o estado assimétrico (veja Fig.1(b)) de [109], por conta da ação de campos locais que agem nos qubits. A fase  $\phi$  é uma fase relativa entre os campos que agem sobre os qubits, cujo hamiltoniano de interação é dado por

$$H_d = \hbar\epsilon (\sigma_1^+ + \xi e^{i\phi} \sigma_2^+) + h.c.,$$

onde  $\xi$  é uma relação de amplitude dos bombeios locais sobre os qubits e  $\epsilon$  é o acoplamento qubit-campo. Apenas ajustando a fase apropriadamente no hamiltoniano acima é possível ajustar ou desativar a transição do estado fundamental  $|gg\rangle$  para o estado assimétrico  $|\psi_-\rangle$ . Esse é o ponto chave da referência [109].

O ponto que estamos querendo responder é como fazer a geração de um estado do tipo  $|eg\rangle$  para o caso onde há interação coletiva entre os qubits com um banho, endereçando

os qubits de maneira individual. Em [109] relata-se que o efeito do decaimento subradiante do estado dark é suprimido porque há defasagem local agindo individualmente nos qubits. O processo de defasagem mistura os estados simétricos e antisimétricos por adicionar uma fase relativa entre os estados  $|ge\rangle$  e  $|eg\rangle$ . Na referência [75] os autores mostraram que em contraste com o efeito tradicional de superradiância, eles observaram o estreitamento da largura de linha no regime de forte defasagem (isto é, quando as taxas de decaimento de defasagem e da cavidade são comparáveis), quando o número de qubits é acrescido. Essas observações são compatíveis com um modelo "coletivo" de processos de defasagem, onde todos os qubits são acoplados a um único banho, com espectro correspondente a  $1/f$ . A arquitetura experimental utilizada é a mesma da referência [110] com qubits transmon acoplados a um único modo do ressonador.

Existe outro trabalho [111] que já menciona a conexão de estados simétricos e antisimétricos sendo estes superposições de  $|ge\rangle$  e  $|eg\rangle$  por modificar o sinal das constantes de acoplamento  $g^{(i)}$  entre os qubits. Além disso é possível fazer a preparação desses estados utilizando técnicas de tomografia [112]. Nesse trabalho, os autores relatam que a frequência de transição dos qubits são ajustadas por fluxos externos em cada uma das bobinas. Isso significa que as frequências dos qubits  $\omega_{a1}/2\pi$  e  $\omega_{a2}/2\pi$  podem ser sintonizadas independentemente com a utilização dos fluxos  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  nas bobinas. Além disso, os qubits podem ser endereçados individualmente por meio de um bombeio do tipo  $\hbar\epsilon(t)(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ , onde cada qubit é recebe o bombeio com frequências  $\omega_{d1}$  e  $\omega_{d2}$ , como é descrito na referência [112]:

- Ponto 1: Pode-se endereçar os qubits individualmente.
- Ponto 2: É possível mudar o sinal das constantes de acoplamento.
- Ponto 3: É possível mudar a frequência de transição entre os qubits. Isto é, podemos sintonizar separadamente a frequência de cada um dos qubits individualmente.