**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Semicontinuidade Superior de Atratores para Semigrupos Multívocos

Jacson Simsen

São Carlos - SP

2007

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Semicontinuidade Superior de Atratores para Semigrupos Multívocos

Jacson Simsen

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Matemática, área de concentração: Análise Matemática

**São Carlos - SP**

**Agosto de 2007**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da**
**Biblioteca Comunitária/UFSCar**

| | |
|---|---|
| | Simsen, Jacson. |
| S614ss | Semicontinuidade superior de atratores para semigrupos multívocos / Jacson Simsen. -- São Carlos : UFSCar, 2007.<br>151 f.<br><br>Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2007.<br><br>1. Análise matemática. 2. Semicontinuidade superior de atratores. 3. Semigrupos multívocos. 4. P-laplaciano. 5. Inclusões diferenciais. 6. Semifluxos generalizados. I. Título. |
| | CDD: 515 (20ª) |

**Banca Examinadora:**

**Profa. Dra. Cláudia Buttarello Gentile**
DM - UFSCar

**Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento**
DM - UFSCar

**Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho**
ICMC - USP

**Prof. Dr. Luiz Augusto de Oliveira**
IME – USP

**Prof. Dr. Alejandro Vidal Lopez**
Universidade Complutense de Madrid

Dedico este trabalho a minha maravilhosa esposa Mariza.

# Agradecimentos

A Deus pela oportunidade de vida e por ter me dado forças para superar as dificuldades.

A Mariza, minha adorável esposa, pelo companherismo, amor, carinho e incentivo.

Aos meus pais pela educação, formação moral, apoio, incentivo e por todo amor e carinho que tem por mim.

A minha orientadora Prof. Dra. Cláudia Buttarello Gentile, por ter me dado a oportunidade de continuar estudando e pela orientação deste trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Aos meus irmãos Lírio, Marilene e Mareli, por todo amor e carinho que tem por mim.

Aos meus amigos Luiza, Francisco, Chiquinho, Marcos, Kelly, Marcelo, Helena, Yasmin, Tamara, Jiuliano, Maurício, Josiane, Ivo, Ana Cláudia, Jamil, Marciano, Gisele, Pedrinho, Sônia, Marquinhos e Clério, pela amizade e por compartilharem comigo os momentos difíceis e as vitórias.

Aos amigos do PPG-M pelo bom ambiente de trabalho.

Aos amigos e colegas do futebol nosso de cada semana.

Aos professores Alexandre Nolasco de Carvalho e José A. Langa por terem sido atenciosos e ter me dado a oportunidade de conversar com eles.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar e da UFSM, em especial, ao César Rogério, Cezar Kondo, Pedro Perguer, Ivo, Adalberto, João

Sampaio, Dirceu Penteado, Gerson Petronilho, Maurício Fronza da Silva, João Batista Peneireiro, Marcelo Nogutti, Pedro, Atelmo, Osmar, Lurdinha, Janice, Marli, Regina e João Paulo, pelos ensinamentos e por darem sentido à palavra Professor.

A minha colega de Doutorado Ana Cláudia, pela amizade e companherismo.

Ao meu orientador de iniciação científica (PET) Prof. Dr. Maurício Fronza da Silva e ao meu orientador de mestrado Prof. Dr. Gerson Petronilho, pelos ensinamentos que me foram dados nessas etapas anteriores para chegar com uma boa base e maturidade nesta etapa atual.

Ao meu professor de matemática do ensino médio Roque Jungblut, grande responsável por eu ter gostado das ciências exatas.

A secretária Irma, pela paciência e disposição em sempre nos ajudar.

Obrigado a todos!

# Resumo

Neste trabalho desenvolvemos uma teoria abstrata para existência e caracterização de atratores para semigrupos multívocos definidos por semifluxos generalizados. Posteriormente aplicamos os resultados abstratos à sistemas de inclusões diferenciais governados pelo p-laplaciano e obtivemos semicontinuidade superior dos atratores quando o parâmetro de difusão tende a infinito.

# Abstract

In this work we developed an abstract theory for existence and characterization of attractors for multivalued semigroups defined by generalized semiflows and we apply the abstract results to systems of p-laplacian differential inclusions and we obtain upper semicontinuity of the attractors as the parameter of diffusion goes to infinity.

# Sumário

# Capítulo 0

# Introdução

É conhecido na literatura que problemas de reação e difusão da forma

$$u_t - D\Delta u + f(u, \nabla u) = 0$$

com condições de fronteira de Neumann homogêneas, $u = (u_1, \cdots, u_m)^T$ e $D = \text{diag}(d_1, \cdots, d_m)$ têm a dinâmica assintótica descrita por um sistema de equações diferenciais ordinárias quando os coeficientes de difusão tornam-se arbitrariamente grandes, isto é, quando $d_0 = inf_{1 \leq i \leq m} d_i$ tende a infinito. A justificativa física para este fenômeno baseia-se no fato de que, se a difusão é muito grande então rapidamente ocorre um processo de redistribuição de $u$ e, havendo homogenização, qualquer variação espacial de $u$ reduz-se a zero. Ou seja, o único parâmetro relevante no limite da dinâmica do problema passa a ser o tempo, [11, 15, 17, 26, 35].

Este é o tema que norteia este trabalho, no qual mostramos que o mesmo fenômeno ocorre em sistemas similares envolvendo o operador $p$-laplaciano $\Delta_p$, $p > 2$. Neste caso, o processo de homogenização em um problema escalar descrito por uma equação bem posta se dá de uma forma bastante natural e pode ser demonstrado através de uma seqüência de passos que descreveremos a seguir.

Consideramos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^D}{\partial t}(t) - D\triangle_p u^D(t) + |u^D(t)|^{p-2}u^D(t) = B(u^D(t)), \;\; t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u^D(0) = u_0^D \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega$ é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave, $n \geq 1$, $D \geq 1$ é constante, $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ uma aplicação globalmente Lipschitz, e $\Delta_p = div(|\nabla u^D|^{p-2}\nabla u^D)$, $p > 2$. Primeiramente notamos que, para cada valor do parâmetro $D$, o problema acima define um semigrupo contínuo $\{S^D(t)\}$ de operadores não-lineares em $L^2(\Omega)$ e existe um atrator global $\mathcal{A}_D$ para este semigrupo neste espaço, [12]. Quando o parâmetro de difusão tende a infinito mostramos que as soluções da equação aproximam-se de sua média espacial depois de transcorrido algum tempo, e a família de atratores $\{\mathcal{A}_D\}$ é semicontínua superiormente com relação a $D$ em $D = +\infty$ no seguinte sentido: $\text{dist}(\mathcal{A}^D, \mathcal{A}^\infty) \to 0$ quando $D \to +\infty$, onde $\mathcal{A}^\infty$ é o atrator do semigrupo associado ao problema

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + |u(t)|^{p-2}u(t) = B(u(t)) \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

As afirmações acima estão descritas na primeira seção do Capítulo 5 deste texto.

Ao tentarmos estender este procedimento a um sistema de inclusões diferenciais envolvendo o $p$-laplaciano degenerado deparamo-nos com um problema aparentemente simples mas cuja análise dependeria de respondermos a um fio de perguntas. De fato, não encontramos na literatura uma teoria que fosse adequada para o tratamento de sistemas dinâmicos descritos por operadores multívocos que contemplasse as nossas necessidades. Muito embora tais sistemas venham sendo tratados por vários autores há aproximadamente duas décadas e de forma cada vez mais sistemática [3, 14, 32], há questões relevantes ainda não completamente analisadas e descritas. Isto é, mesmo havendo diversos resultados que garantem condições suficientes para existência de atratores para semigrupos multívocos ou semifluxos generalizados, não sabíamos por exemplo se o atrator neste caso poderia ser caracterizado pela reunião das trajetórias completas limitadas. Assim, uma grande parte deste trabalho foi agrupar teorias já existentes adequadas ao tratamento de problemas sem unicidade, unificar notações e terminologias, e complementá-las com diversos resultados adaptados da teoria clássica de semigrupos. O produto deste esforço constitui o artigo [36] e está descrito no Capítulo 3. Há diversas considerações que fazemos nesta parte do texto que não têm uma aplicação direta nos dois capítulos subsequentes. Em particular aquelas que se relacionam com os "$\varphi$-conceitos", isto é, dissipatividade, atratividade e propriedades assintóticas que podem ocorrer sem qualquer uniformidade no tempo. Os sistemas diferenciais que consideramos nos capítulos 4 e 5 satisfazem na verdade condições de compacidade e dissipatividade bastante uniformes com relação ao tempo, dados iniciais e o parâmetro de difusão. Ainda assim, com a finalidade de divulgar nosso trabalho, optamos por inserir o texto [36] completamente no Capítulo 3.

Uma vez estabelecida e organizada a parte teórica da nossa análise, voltamo-nos novamente para problemas específicos envolvendo sistemas acoplados de inclusões diferenciais da forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - div(D_1|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u \in F(u,v) & t > 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - div(D_2|\nabla v|^{q-2}\nabla v) + |v|^{q-2}v \in G(u,v) & t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(t,x) = \dfrac{\partial v}{\partial n}(t,x) = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, & t \geq 0 \\ (u(0), v(0)) \text{ em } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), & \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, conexo e suave, $p, q > 2$, $D_1, D_2 \in L^\infty(\Omega)$, $D_i(x) \geq \sigma > 0$ q.t.p. em $\Omega$, $i = 1, 2$, e $F$ e $G$ são operadores multívocos limitados, semicontínuos superiormente e satisfazendo uma condição de sublinearidade descrita na Seção 4.1 do Capítulo 4. A existência de solução global é garantida por um resultado de Diaz e Vrabie, desenvolvido para operadores de difusão em meios porosos em [18], onde os autores já anunciam a possibilidade de uma adaptação simples e direta para o $p$-laplaciano e outras classes de operadores monótonos. Este resultado de existência está feito com detalhes para sistemas envolvendo o $p$-laplaciano com condições de fronteira de Dirichlet homogênea em [34]. Mostramos no Capítulo 4 que, para cada par $(D_1, D_2)$ nas condições acima, a dinâmica descrita por este sistema é dada por um semifluxo generalizado $\mathbb{G}_{(D_1,D_2)}$ em $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ o qual tem um $B$-atrator global compacto invariante $\mathcal{A}_{(D_1,D_2)}$. Além disso, mostramos que a família de atratores $\{\mathcal{A}_{(D_1,D_2)}\}$ é semicontínua superiormente com relação a $(D_1, D_2)$ desde que estes estejam em subconjuntos limitados de $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ e posicionados a uma distância positiva $\sigma$ da origem.

Para obter a semicontinuidade superior dos atratores bastam uma certa continuidade no fluxo e um conjunto de estimativas uniformes para as soluções. As propriedades de continuidade com relação aos dados iniciais e coeficientes de difusão foram demonstradas com o auxílio de um teorema de compacidade que desempenhou um papel importante neste trabalho, tendo sido usado sucessivas vezes ao longo dos Capítulos 4 e 5. Neste texto usamos não apenas a forma original deste resultado, o Teorema de Baras, que encontra-se demonstrada em [40], mas também uma ligeira variação dela dedutível exatamente da mesma forma, na qual admitimos variação dos dados iniciais do sistema em um conjunto pre-compacto. Foi também necessário lançar mão de um teorema de compacidade mais geral que este, no qual admite-se variação dos operadores que governam o sistema, cuja demonstração apresentamos na íntegra no Capítulo 4. Uma primeira versão deste resultado já havia sido demonstrada em [23].

Finalmente demonstramos que a família de atratores $\{\mathcal{A}_{(D_1,D_2)}\}$ associada ao sistema de inclusões diferenciais acima é semicontínua superiormente se os parâmetros de difusão são números reais tendendo a infinito, e os atratores $\mathcal{A}_{(D_1,D_2)}$ convergem neste caso para o atrator $\mathcal{A}_\infty$ do semifluxo generalizado associado ao sistema de inclusões diferenciais em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{u} + |u|^{p-2}u \in F(u,v) \\ \dot{v} + |v|^{q-2}v \in G(u,v) \\ (u(0), v(0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Em particular, exibimos com este resultado, sistemas de inclusões diferenciais cujas concentrações assintóticas são descritas por atratores com dimensão de Hausdorff finita.

A organização deste trabalho foi feita da seguinte forma: No Capítulo 1 enunciamos, a fim de evitar muitas referências externas, os principais resultados de Análise, Análise Funcional, teoria de operadores monótonos em espaços de Hilbert e equações de evolução governadas por tais operadores, e um conjunto de definições e teoremas acerca de operadores multívocos que usaremos posteriormente. No Capítulo 2 definimos o operador p-laplaciano perturbado com condição de fronteira Neumann homogênea e enumeramos as principais propriedades deste operador. O Capítulo 3 conforme já foi dito contém os resultados sobre existência e caracterização de atratores para problemas diferenciais sem unicidade. O Capítulo 4 destina-se à colocação de um problema envolvendo inclusões diferenciais governadas pelo $p$-laplaciano. Nele demonstramos que o sistema considerado define um semifluxo generalizado para cada valor do parâmetro de difusão, e que este semifluxo possui atrator global compacto. No capítulo 5 consideramos os coeficientes de difusão constantes e analisamos o caso em que este parâmetro torna-se arbitrariamente grande.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados utilizados ao longo deste trabalho.

## 1.1 Uma Coletânea de Resultados

**Lema 1.1 (Gronwall-Bellman)** *Seja $m \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ qtp em $(0,T)$ e seja $a$ uma constante não-negativa. Seja $\phi$ uma função contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$ verificando*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\phi(s)ds,$$

*para todo $t \in [0,T]$. Então,*

$$\phi(t) \leq a e^{\int_0^t m(s)ds}$$

*para todo $t \in [0,T]$.*

**Lema 1.2 (Gronwall)** *Seja $m \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ qtp em $(0,T)$ e seja $a$ uma constante não-negativa. Seja $\phi$ uma função contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$ tal que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds,$$

*para todo $t \in [0,T]$. Então,*

$$| \phi(t) | \leq a + \int_0^t m(s)ds$$

*para todo* $t \in [0, T]$.

**Lema 1.3 (Lema Uniforme de Gronwall)** *(Lema 1.1, p.89, [37]) Sejam* $g, h, y$ *três funções positivas localmente integráveis em* $]t_0, +\infty[$ *tal que* $y'$ *é localmente integrável em* $]t_0, +\infty[$, *e os quais satisfazem*

$\frac{dy}{dt} \leq gy + h$ *para* $t \geq t_0$,

$\int_t^{t+r} g(s)ds \leq a_1, \ \int_t^{t+r} h(s)ds \leq a_2, \ \int_t^{t+r} y(s)ds \leq a_3,$ *para* $t \geq t_0$,

*sendo que* $r, a_1, a_2, a_3,$ *são constantes positivas. Então*

$y(t+r) \leq (\frac{a_3}{r} + a_2)exp(a_1), \ \forall\, t \geq t_0.$

**Lema 1.4 (Desigualdade de Tartar)** *Seja* $p \geq 2$. *Então, para todo* $a, b \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$

$$\langle \| a \|^{p-2} a - \| b \|^{p-2} b, a - b \rangle \geq \gamma_0 \| a - b \|^p$$

*onde* $\gamma_0$ *é positivo e depende apenas de* $p$ *e de* $m$.

*Se* $1 < p < 2$ *então para todo* $a, b \in \mathbb{R}^m$

$$\langle \| a \|^{p-2} a - \| b \|^{p-2} b, a - b \rangle \leq \gamma_1 \| a - b \|^p$$

*onde* $\gamma_1$ *depende apenas de* $p$ *e de* $m$.

Para a demonstração deste lema no caso $p \geq 2$ veja a dissertação [34]. A demonstração do caso $1 < p < 2$ pode ser encontrada em [19].

**Lema 1.5** *(Lema 5.1, p.163, [37]) Seja* $y$ *uma função positiva absolutamente contínua em* $(0, \infty)$ *a qual satisfaz*

$$y' + \gamma y^p \leq \delta,$$

*com* $p > 1, \gamma > 0, \delta \geq 0$. *Então, para* $t \geq 0$,

$$y(t) \leq (\delta/\gamma)^{1/p} + (\gamma(p-1)t)^{-1/(p-1)}.$$

**Definição 1.6** *(Definição 1.1, p.72, [16]) Seja* $X$ *um espaço de Banach,* $\Lambda$ *um espaço topológico e* $\mathcal{A}_\lambda \subset X, \ \lambda \in \Lambda$. *Dizemos que a família de conjuntos* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

*é semicontinua superiormente em* $\lambda = \lambda_0$ *se* $\sup_{x_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda} dist(x_\lambda, \mathcal{A}) \to 0$ *quando* $\lambda \to \lambda_0$.

**Lema 1.7** *(Lema 1.1, p.72, [16]) Seja* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *como na Definição 1.6. Se qualquer seqüência* $\{x_{\lambda_n}\}$ *com* $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \to \lambda_0$, *possui uma subseqüência convergente com o limite pertencente ao conjunto* $\mathcal{A}$, *então* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontinua superiormente em* $\lambda_0$.

## 1.2 Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Hilbert

Para as demonstrações dos resultados dessa seção sugerimos ao leitor como um excelente texto a dissertação [34]. O leitor que já estiver familiarizado com a teoria de operadores maximais monótonos já pode ir direto a Seção 1.3.

### 1.2.1 Noção de Operador Monótono

Seja $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Um operador é uma aplicação de $H$ em $\mathcal{P}(H)$ (conjunto das partes de $H$). Se para todo $x \in H$, o conjunto $Ax$ contém no máximo um elemento dizemos que $A$ é unívoco, caso contrário dizemos que $A$ é multívoco. O domínio de $A$ é o conjunto $\mathcal{D}(A) = \{x \in H; Ax \neq \emptyset\}$ e a imagem de $A$ é o conjunto $\mathcal{R}(A) = \bigcup_{x\in H} Ax$.

Identificaremos $A$ com o seu gráfico em $H \times H$, isto é, $A = \{(x, y); y \in Ax\}$. O operador $A^{-1}$ é o operador cujo gráfico é simétrico ao de $A$, isto é, $y \in A^{-1}x \iff x \in Ay$; evidentemente $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$.

O conjunto dos operadores é ordenado pela inclusão dos gráficos: $A \subset B$ se e somente se para todo $x \in H, Ax \subset Bx$.

**Definição 1.8** *Dizemos que um operador* $A$ *em* $H$ *é monótono se para todo* $x_1$, $x_2 \in \mathcal{D}(A)$, $\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$, *ou mais precisamente para todo* $y_1 \in Ax_1$ *e para todo* $y_2 \in Ax_2$, $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$.

**Exemplo 1.9** *Seja $\varphi$ uma função convexa e própria sobre $H$, ou seja, uma aplicação de $H$ em $]-\infty,+\infty]$, tal que $\varphi \not\equiv +\infty$ e*

$$\varphi(tx+(1-t)y) \;\leq\; t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$$

*para todo $x, y \in H$ e para todo $t \in (0,1)$. O domínio da função $\varphi$, $D(\varphi)$, é dado por $D(\varphi) = \{x \in H; \varphi(x) < +\infty\}$. A subdiferencial $\partial\varphi$ de $\varphi$, definida por*

$$y \in \partial\varphi(x) \Longleftrightarrow \text{ para todo } \xi \in H,\; \varphi(\xi) \geq \varphi(x) + \langle y, \xi - x\rangle,$$

*é monótona em $H$.*

A noção de operador monótono em um espaço de Hilbert aparece como um caso particular de operador monótono de um espaço de Banach no seu dual. Seja $X$ um espaço de Banach de norma $\|\cdot\|$ e $X^*$ seu dual.

**Definição 1.10** *Uma aplicação $B$ de $X$ em $\mathcal{P}(X^*)$ é monótona se para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(B)$ e para todo $y_1 \in Bx_1, y_2 \in Bx_2$, tem-se*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle_{X^*,X} \geq 0,$$

*onde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*,X}$ indica o produto escalar na dualidade $X^*, X$. Dizemos que $B$ é maximal monótono se não estiver propriamente contido em qualquer outro conjunto monótono. De forma explícita, $B$ é maximal monótono se, e somente se, $B$ é monótono e, se $(x,y) \in X \times X^*$ for tal que*

$$\langle y - B\xi, x - \xi\rangle_{X^*,X} \geq 0,\; \forall\, \xi \in D(B)$$

$$(\text{ou mais precisamente}, \langle y - \eta, x - \xi\rangle_{X^*,X} \geq 0,\; \forall\, (\xi,\eta) \in B),$$

*então $y \in Bx$.*

**Definição 1.11** *(Definição 1.3(i), p. 34, [5]) Seja $B$ um operador unívoco definido de $X$ em $X^*$ tal que $D(B) = X$. Diremos que $B$ é hemicontínuo em $X$ se $w - \lim_{t\to 0} B(u+tv) = Bu,\; \forall\, u, v \in X$.*

**Definição 1.12** *Seja $B$ um operador unívoco definido de $X$ em $X^*$ tal que $D(B) = X$. Diremos que $B : X \to X^*$ é coercivo se* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\langle Bu_n, u_n\rangle_{X^*,X}}{\|u_n\|_X} = +\infty$, *sempre que* $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_X = +\infty$.

**Teorema 1.13** *(Teorema 1.3, p. 40, [5]) Se $X$ é um espaço de Banach reflexivo e $B$ é um operador monótono, definido em toda parte e hemicontínuo de $X$ em $X^*$, então $B$ é maximal monótono. Se em adição $B$ for coercivo, então $R(B) = X^*$.*

Se o operador $A$ estiver definido de $X$ em $\mathcal{P}(X)$, a condição de monotonicidade é expressa por meio do operador dualidade $F$ da seguinte forma: para cada $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ e para todo $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$,

$$\langle y_1 - y_2, f\rangle_{X,X^*} \geq 0,$$

para algum $f \in F(x_1 - x_2)$. Neste caso dizemos que o operador é acretivo e $-A$ é dissipativo. Em espaços de Hilbert as noções de operadores monótonos e acretivos confundem-se. Para detalhes sobre operadores monótonos em espaço de Banach e operadores acretivos, veja [5].

### 1.2.2 Noção de Operador Maximal Monótono

O conjunto dos operadores monótonos de $H$ é ordenado pela inclusão dos gráficos, e isto justifica a seguinte definição:

**Definição 1.14** *O operador monótono $A$ de $H$ é maximal monótono se ele não está propriamente contido em qualquer outro operador monótono de $H$.*

Explicitemos esta definição: $A$ é maximal monótono se e somente se $A$ é monótono e, se $(x, y) \in H \times H$ for tal que

$$\langle y - A\xi, x - \xi\rangle \geq 0$$

para todo $\xi \in \mathcal{D}(A)$ (ou mais precisamente, $\langle y - \eta, x - \xi\rangle \geq 0$, para todo $(\xi, \eta) \in A$), então $y \in Ax$.

A próxima proposição nos dá algumas caracterizações de operadores maximais monótonos:

**Proposição 1.15** *Seja $A$ um operador de $H$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

*(i) $A$ é maximal monótono;*

*(ii) $A$ é monótono e $\mathcal{R}(I+A) = H$;*

*(iii) Para todo $\lambda > 0$, $(I+\lambda A)^{-1}$ é uma contração definida sobre todo $H$.*

**Exemplo 1.16** *Seja $\varphi$ uma função convexa, própria sobre $H$. Se $\varphi$ é semicontínua inferiormente (s.c.i.), então $\partial\varphi$ é maximal monótono e $D(\partial\varphi) \subset D(\varphi) \subset \overline{D(\varphi)} = \overline{D(\partial\varphi)}$.*

### 1.2.3 Problemas de Evolução Associados a Operadores Monótonos

**Resolução da inclusão $\dfrac{du}{dt} + Au \ni 0$, $u(0) = u_0$**

Seja $H$ um espaço de Hilbert e seja $A$ um operador maximal monótono em $H$. Considere o problema de valor inicial (p.v.i.):

$$(P)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

onde $x \in \mathcal{D}(A)$ e $A \subset H \times H$ é possivelmente multívoco.

Seja $T > 0$. Dizemos que uma aplicação $u : [0,T] \to H$ é uma solução do p.v.i. $(P)$ se $u$ satisfaz as seguintes condições:

1. $u \in \mathcal{C}([0,T]; H)$ e $u(0) = x$.

2. $u$ é Lipschitz contínua em $[0,T]$.

3. a inclusão $\dfrac{du}{dt} + Au \ni 0$ é satisfeita *qtp* em $[0,T]$, (ou seja, existe $\eta$ tal que $\eta(t) \in Au(t)$ *qtp* e $\dfrac{du}{dt} + \eta = 0$).

**Observação 1.17** *Em qualquer espaço de Banach reflexivo (em particular, em qualquer espaço de Hilbert), a condição* (2) *implica que* $u$ *é absolutamente contínua e portanto diferenciável qtp. Além disso,* $u$ *é a integral de sua derivada e isto garante a existência de* $\frac{du}{dt}$ *qtp em* $[0, T]$*, [5].*

Passaremos agora aos principais resultados:

**Proposição 1.18** *Seja* $A$ *um operador monótono. Então o p.v.i.*

$$(P) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

*tem no máximo uma solução.*

**Teorema 1.19** *Seja* $A$ *um operador maximal monótono. Dado* $T > 0$*, para cada* $x \in \mathcal{D}(A)$ *o p.v.i.*

$$(P) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

*tem uma solução em* $[0, T]$*.*

**O Semigrupo gerado por um conjunto maximal monótono em um espaço de Hilbert**

**Definição 1.20** *Seja* $C$ *um subconjunto fechado de* $H$*. Um semigrupo de contrações em* $C$ *é uma função* $S : [0, \infty) \times C \to C$ *a qual satisfaz:*

*(i)* $S(t + s)x = S(t)S(s)x$*, para todo* $x \in C$ *e para todo* $t, s \geq 0$*;*

*(ii)* $S(0)x = x$*, para todo* $x \in C$*;*

*(iii) Para todo* $x \in C$*,* $S(t)x$ *é contínua em* $t \geq 0$*;*

*(iv)* $\| S(t)x - S(t)y \| \leq \| x - y \|$*, para todo* $t \geq 0$ *e para todo* $x, y \in C$*.*

Seja $A$ maximal monótono e $x \in \mathcal{D}(A)$. Pelo Teorema 1.19 existe uma solução $u \in \mathcal{C}([0,T];H)$ para o p.v.i.

$$(P)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Podemos definir uma família de aplicações em $\mathcal{D}(A)$ da seguinte forma:

$$S(t)x = u(t)$$

para todo $t \geq 0$ onde $u(t)$ é solução do p.v.i. $(P)$.

A unicidade da solução do p.v.i. $(P)$ garante a propriedade de semigrupo. De fato, se $u$ é a solução que começou em $u_0$ e $\overline{u}$ é a solução que começou em $u(s)$, então pela unicidade de solução temos que $u(t+s) = \overline{u}(t)$, pois

$$\| u(t+s) - \overline{u}(t) \| \leq \| u(s) - \overline{u}(0) \| = 0$$

ou seja,

$$u(t+s, x, u_0) = \overline{u}(t, x, \overline{u}_0) = \overline{u}(t, x, u(s)) = u(t, x, u(s, x, u_0))$$

e em notação de semigrupo: $S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0$.

A continuidade do semigrupo é bastante simples de ser verificada. Além disso temos que o semigrupo é de contrações. Com efeito,

$$\| S(t)x - S(t)y \| = \| u(t) - v(t) \| \leq \| x - y \|$$

onde $u$ e $v$ são soluções de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av \ni 0 \\ v(0) = y \end{cases}$$

respectivamente.

Logo $\{S(t); t \geq 0\}$ forma um semigrupo de contrações em $\mathcal{D}(A)$. Vamos estender o semigrupo por continuidade à todo o fecho do domínio de $A$, $\overline{\mathcal{D}(A)}$.

Assim, se $x \in \overline{\mathcal{D}(A)} \backslash \mathcal{D}(A)$, então existe uma seqüência $\{x_n\}$ de elementos em $\mathcal{D}(A)$ tal que $x_n \xrightarrow{H} x$.

Definimos,

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty} S(t)x_n.$$

Este limite certamente existe, desde que $\{S(t)x_n\}$ forma uma seqüência de Cauchy:

$$\| S(t)x_n - S(t)x_m \| \leq \| x_n - x_m \|$$

que é de Cauchy, pois $x_n$ converge.

Note que quando estendido à $\overline{\mathcal{D}(A)}$, o semigrupo é ainda contínuo em $t$, e é ainda um semigrupo de contrações. De fato, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$, então

$$\| S(t)x_n - S(t)y_n \| \leq \| x_n - y_n \|$$

o que implica em

$$\| S(t)x - S(t)y \| \leq \| x - y \|$$

e portanto é contração.

Agora, observe que $x_n \to x$ implica em $S(t)x_n \to S(t)x$ uniformemente, pois

$$\| S(t)x_n - S(t)x \| \leq \| x_n - x \| \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Logo dado $x \in \overline{\mathcal{D}(A)} \backslash \mathcal{D}(A)$, $x_n \to x$, $t_0 > 0$ fixo e $\epsilon > 0$, sejam $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| S(t)x - S(t)x_m \| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

em algum intervalo de tempo $[0,T]$ suficientemente grande e $t \in [0,T]$ tal que

$$\| S(t)x_m - S(t_0)x_m \| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

então

$$\begin{aligned}
\| S(t)x - S(t_0)x \| &\leq \| S(t)x - S(t)x_m \| \\
&+ \| S(t)x_m - S(t_0)x_m \| + \| S(t_0)x_m - S(t_0)x \| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto o semigrupo estendido à $\overline{\mathcal{D}(A)}$ é contínuo em $t$.

Concluímos assim que para todo conjunto maximal monótono $A$, em um espaço de Hilbert $H$, existe um semigrupo $\{S(t); t \geq 0\}$ de contrações definido em $\overline{\mathcal{D}(A)}$.

Dizemos que o semigrupo $\{S(t); t \geq 0\}$ é gerado por $A$. É interessante lembrar que $\overline{\mathcal{D}(A)}$ é um convexo fechado em $H$.

No caso em que o operador $A$ é a subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i., o semigrupo gerado por $A$ exerce um efeito regularizante sobre o dado inicial:

**Teorema 1.21** *(Teorema 3.2, p. 57, [7]) Seja $\varphi$ uma função convexa própria e s.c.i. em $H$ e seja $S(t)$ o semigrupo gerado por $\partial\varphi$ em $\overline{D(\partial\varphi)}$. Então para todo $u_0 \in \overline{D(\partial\varphi)}$ e todo $t > 0$, $S(t)u_0 \in D(\partial\varphi)$, e $t \mapsto S(t)u_0$ é Lipschitz em $[\delta, +\infty)$, $\forall\, \delta > 0$.*

**Semigrupos Compactos**

Uma classe especial de semigrupos que aparece frequentemente em aplicações é a de semigrupos compactos, isto é, a classe de todos os semigrupos $\{S(t); S(t) : C \to C, t \geq 0\}$ contendo apenas operadores compactos não expansivos para cada $t > 0$, e onde $C$ é um subconjunto não vazio em um espaço de Banach real $X$.

**Definição 1.22** *Um operador $T : C \subset X \to X$ é compacto se ele é contínuo e leva subconjuntos limitados de $C$ em subconjuntos relativamente compactos em $X$.*

**Definição 1.23** *Um semigrupo $\{S(t); S(t) : C \to C, t \geq 0\}$ de aplicações não expansivas em $C \subset X$ é compacto se para cada $t > 0$, $S(t)$ é um operador compacto.*

**Definição 1.24** *Um semigrupo $\{S(t); S(t) : C \to C, t \geq 0\}$ de aplicações não expansivas em $C \subset X$ é equicontínuo se para cada subconjunto limitado $M$ em $C$, a família de funções $\{S(\cdot)x; x \in M\}$ é equicontínua em cada $t > 0$.*

**Resolução da inclusão $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$**

**Definição 1.25** *Seja $A$ um operador de $H$ e $f \in L^1(0,T;H)$. Chamamos de solução forte da inclusão $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ à toda função $u \in \mathcal{C}([0,T];H)$ absolutamente contínua sobre todo compacto de $(0,T)$ tal que $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ e $\dfrac{d}{dt}u(t) + Au(t) \ni f(t)$ qtp em $(0,T)$.*

**Definição 1.26** *Dizemos que $u \in \mathcal{C}([0,T];H)$ é solução fraca da inclusão $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ se existem seqüências $f_n \in L^1(0,T;H)$ e $u_n \in \mathcal{C}([0,T];H)$ tais que $u_n$ é solução forte da inclusão*

$$\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$$

*e $f_n \to f$ em $L^1(0,T;H)$ e $u_n \to u$ uniformemente em $[0,T]$.*

**Teorema 1.27** *Seja $A$ um operador maximal monótono em $H$. Para toda $f \in L^1(0,T;H)$ e todo $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, existe uma solução fraca única, $u$, da inclusão diferencial $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ tal que $u(0) = u_0$.*

**Corolário 1.28** *Seja $A$ um operador maximal monótono em $H$ e $u$ e $v$ as soluções em $[0,T]$ de*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av \ni g \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

*respectivamente. Então:*

$$\| u(t) - v(t) \| \leq \| u(s) - v(s) \| + \int_s^t \| f(\tau) - g(\tau) \| \, d\tau$$

*para todo $0 \leq s < t \leq T$.*

A proposição a seguir é extremamente importante na demonstração de um resultado de existência, que aparecerá mais adiante.

**Proposição 1.29** *(Proposição 3.6, p. 70, [7]) Sejam $A$ um operador maximal monótono, $u \in C([0,T];H)$ e $f \in L^1(0,T;H)$. Então $u$ é solução fraca da equação*

$\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ *se e somente se u verifica*

$$\frac{1}{2} \parallel u(t) - x \parallel^2 \leq \frac{1}{2} \parallel u(s) - x \parallel^2 + \int_s^t \langle f(\tau) - y, u(\tau) - x \rangle d\tau$$

*para todo* $x \in \mathcal{D}(A)$ *e* $y \in Ax$ *e para todo* $0 \leq s \leq t \leq T$.

O próximo resultado será importante para garantirmos que sob certas condições as soluções fracas são de fato soluções fortes.

**Teorema 1.30** *(Teorema 3.6, p. 72, [7]) Seja* $\varphi$ *convexa própria e s.c.i. em* $H$ *tal que* $\min\{\varphi(u); u \in H\} = 0$, *e seja* $f \in L^2(0,T;H)$. *Então toda solução fraca da equação* $\frac{du}{dt} + \partial\varphi(u) \ni f$, *é uma solução forte. Além disso a função* $t \mapsto \varphi(u(t))$ *pertence a* $L^1(0,T;H)$ *e é absolutamente contínua sobre todo intervalo* $[\delta, T]$, $\forall\, \delta \in (0,T)$ *com* $|\frac{du}{dt}|^2 + \frac{d}{dt}\varphi(u) = \langle f, \frac{du}{dt} \rangle$ *q.t.p. em* $(0,T)$. *Se* $u(0) \in D(\varphi)$ *então* $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$ *e a função* $t \mapsto \varphi(u(t))$ *é absolutamente contínua sobre* $[0,T]$.

## 1.3 O Teorema de Baras

Nosso objetivo nesta seção é enunciar um resultado de compacidade devido à Baras o qual será essencial para um resultado de existência.

O Teorema de Baras refere-se às propriedades de compacidade do conjunto de soluções de uma família de equações diferenciais. Naturalmente, assim como outros importantes resultados de compacidade existentes na literatura, este também se apóia no clássico Teorema de Ascoli-Arzelà.

Considere $(P_f)$ o seguinte problema de valor inicial:

$$(P_f) \begin{cases} \dfrac{du^f}{dt} + Au^f \ni f \\ u^f(0) = u_0 \end{cases}$$

onde $A$ é maximal monótono em um espaço de Hilbert $H$, $f \in L^1(0,T;H)$ e $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Fazendo $f$ variar em um conjunto $K \subset L^1(0,T;H)$ obtemos uma família de problemas e portanto uma família de soluções.

Estamos interessados em estabelecer condições para que o conjunto $\{u^f; f \in K\}$ possua alguma propriedade de compacidade.

**Definição 1.31** *Um subconjunto $K$ em $L^1([a,b];X)$ é uniformemente integrável se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_E \| f(t) \|_X \, dt \leq \epsilon$$

*para cada subconjunto mensurável $E$ em $[a,b]$ cuja medida de Lebesgue é menor que $\delta(\epsilon)$, e uniformemente para $f \in K$.*

**Observação 1.32** *Como $[a,b]$ é compacto, segue facilmente que cada subconjunto uniformemente integrável em $L^1([a,b];X)$ é limitado na norma de $L^1([a,b];X)$.*

**Teorema 1.33** *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to \mathcal{P}(H)$ um operador maximal monótono, seja $u_0$ um elemento fixo em $\overline{\mathcal{D}(A)}$, e seja $K$ um subconjunto uniformemente integrável em $L^1([0,T];H)$. Sejam $u^f$ solução de $(P_f)$ em $[0,T]$ e $M(K) = \{u^f; f \in K\}$. Se para cada $t \in [0,T]$, o conjunto $M(K)(t) = \{u^f(t); u^f \in M(K)\}$ é relativamente compacto em $H$, então o conjunto $M(K)$ é relativamente compacto em $C([0,T];H)$.*

**Lema 1.34** *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to \mathcal{P}(H)$ um operador maximal monótono, seja $\{S(t); S(t) : \overline{\mathcal{D}(A)} \to \overline{\mathcal{D}(A)}, t \geq 0\}$ o semigrupo gerado por $A$ em $\overline{\mathcal{D}(A)}$, e sejam $f \in L^1([0,T];H)$, $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ e $u$ a única solução de $(P_f)$ em $[0,T]$ correspondente a $f$ e a $u_0$. Então para cada $t \in (0,T]$, $s \in [0,T)$ e $h > 0$ com $t - h \in [0,T]$, $s + h \in [0,T]$, temos*

$$\| S(h)u(t-h) - u(t) \| \leq \int_{t-h}^{t} \| f(s) \| \, ds$$

*e*

$$\| S(h)u(s) - u(s+h) \| \leq \int_{s}^{s+h} \| f(s) \| \, ds.$$

**Teorema 1.35 (Baras)** *Se $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to \mathcal{P}(H)$ é um operador maximal monótono, $A$ gera um semigrupo compacto, $u_0$ é um elemento fixo em $\overline{\mathcal{D}(A)}$, e $K$ é um subconjunto uniformemente integrável em $L^1([0,T];H)$, então o conjunto $M(K) = \{u^f; f \in K\}$ é relativamente compacto em $C([0,T];H)$.*

## 1.4 Operadores Multívocos

Para as demonstrações dos resultados desta seção sugerimos ao leitor, como um excelente texto, a dissertação [34].

Seja $X$ um espaço de Banach real, e seja $M$ um subconjunto Lebesgue mensurável em $\mathbb{R}^q$, onde $q \geq 1$.

Consideraremos apenas dois casos específicos, quando $M$ é um intervalo não vazio em $\mathbb{R}$, ou $M = I \times \Omega$, onde $I$ é um intervalo não vazio em $\mathbb{R}$ e $\Omega$ é um subconjunto Lebesgue mensurável, limitado e não vazio em $\mathbb{R}^{q-1}$, $q \geq 2$.

**Definição 1.36** *A aplicação $G : M \to \mathcal{P}(X)$ é chamada mensurável se para cada subconjunto fechado $C$ em $X$ o conjunto*

$$G^{-1}(C) = \{y \in M; G(y) \cap C \neq \emptyset\}$$

*é Lebesgue mensurável.*

Se $G$ é unívoco a definição acima é equivalente a definição usual de função mensurável.

**Definição 1.37** *Uma função $g : M \to X$ é uma seleção da aplicação multívoca $G : M \to \mathcal{P}(X)$, se $g(y) \in G(y)$, para $y \in M$, qtp. Denotamos por*

$$SelG \doteq \{f; f : M \to X, f\, \textit{é seleção mensurável de } G\}.$$

**Teorema 1.38** *Se $X$ é separável e $G : M \to \mathcal{P}(X)$ é uma aplicação mensurável com valores não vazios e fechados, então $G$ tem pelo menos uma seleção mensurável.*

No que segue $U$ denota um espaço topológico.

**Definição 1.39** *Uma aplicação $G : U \to \mathcal{P}(X)$ é semicontínua superiormente (fracamente semicontínua superiormente) em $u \in U$, se*

*(i) $G(u)$é não vazio, limitado, fechado e convexo.*

*(ii) Para cada subconjunto $D$ aberto (fracamente aberto) em $X$ com $G(u) \subset D$, existe uma vizinhança $V$ de $u$, tal que $G(v) \subset D$, para cada $v \in V$.*

*Se $G$ é semicontínua superiormente (fracamente semicontínua superiormente) em cada $u \in U$, então ela é semicontínua superiormente (fracamente semicontínua superiormente) em $U$.*

**Observação 1.40** *É evidente que cada aplicação semicontínua superiormente $G : U \to \mathcal{P}(X)$ é fracamente semicontínua superiormente , uma vez que cada aberto da topologia fraca é aberto na topologia forte. Porém, o contrário não é verdade, a menos que $X$ seja de dimensão finita.*

**Observação 1.41** *Se $G$ é unívoca, então ela é semicontínua superiormente (fracamente semicontínua superiormente) em $u$ se e somente se ela é contínua (fracamente contínua) em $u$ no sentido usual.*

**Lema 1.42** *Considere a aplicação $G : U \to \mathcal{P}(X)$ e suponha que para cada $u \in U$, $G(u)$ é não vazio, limitado, fechado e convexo. As seguintes condições são equivalentes:*

*(i) $G : U \to \mathcal{P}(X)$ é semicontínua superiormente (fracamente semicontínua superiormente) em $U$;*

*(ii) Para cada aberto (fracamente aberto) $D$ em $X$, o conjunto*

$$\widetilde{G}^{-1}(D) = \{v \in U; G(v) \subset D\}$$

*é aberto em $U$;*

*(iii) Para cada fechado (fracamente fechado) $C$ em $X$, o conjunto*

$$G^{-1}(C) = \{u \in U; G(u) \cap C \neq \emptyset\}$$

*é fechado em $U$.*

**Lema 1.43** *Sejam $X$ e $Y$ dois espaços de Banach reais, seja $g : M \to Y$ uma função mensurável e $G : Y \to \mathcal{P}(X)$ uma aplicação semicontínua superiormente. Então*

$$G \circ g : M \to \mathcal{P}(X)$$

*é mensurável.*

**Teorema 1.44** *Seja $M$ um subconjunto não vazio, limitado e Lebesgue mensurável em $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, $U$ um espaço topológico, e $X$ um espaço de Banach real. Se $E : U \to \mathcal{P}(X)$ é fracamente semicontínua superiormente, $u_n : M \to U$, e $f_n \in SelE(u_n)$ para $n \in \mathbb{N}$, são seqüências satisfazendo*

$$f_n \rightharpoonup f \ \text{ em } L^1(M; X)$$

*e*

$$u_n(y) \to u(y) \qquad \text{qtp em } M,$$

*então $f \in SelE(u)$.*

**Observação 1.45** *Como cada aplicação semicontínua superiormente é fracamente semicontínua superiormente, a conclusão do Teorema permanece inalterada se assumirmos que $E$ é semicontínua superiormente.*

Na demonstração do teorema de existência nós usaremos o seguinte Teorema do Ponto Fixo, o qual é uma variação de um Teorema devido a Arino, Gauthier e Penot, [2], [18], [39].

**Teorema 1.46 (Teorema do Ponto Fixo)** *Seja $K$ um subconjunto não vazio fracamente compacto em um espaço de Banach real $X$ e seja $E : K \to \mathcal{P}(K)$ tal que para cada $u \in K$, $E(u)$ é fechado e convexo. Se o gráfico de $E$ é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado, então $E$ tem pelo menos um ponto fixo, isto é, existe pelo menos um elemento $u \in K$ tal que $u \in E(u)$.*

# Capítulo 2

# O Operador p-Laplaciano Perturbado com Condição de Fronteira Neumann Homogênea

## 2.1 Uma Teoria Preliminar

Consideremos os seguintes problemas

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A_H(u(t)) = 0, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \in H, \end{cases} \tag{2.1}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A_H(u(t)) = F(u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \in H, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $A_H$ é um operador maximal monótono num espaço de Hilbert $H$ e $F : H \to H$ uma aplicação globalmente Lipschitz.

Consideremos as seguintes condições:

$(H-14)$ : $(i)$ Seja $H$ um espaço de Hilbert e $V$ um espaço de Banach reflexivo tal que $V \subset H \subset V^*$com inclusões contínuas e densas e com $V^*$ denotando o dual topológico de $V$.

$(ii)$ Seja $A : V \to V^*$ (definido em todo V) um operador não-linear, monótono, coercivo e hemicontínuo.

$(H-15)$ : Existem constantes $w_1, w_2 > 0$, $c_1 \in \mathbb{R}$ e $p \geq 2$ tais que para cada $v \in V$ as seguintes duas condições ocorrem:

$$\langle Av, v\rangle_{V^*,V} \geq w_1 \|v\|_V^p + c_1 \tag{2.3}$$

$$\|Av\|_{V*} \leq w_2(1 + \|v\|_V^{p-1}). \tag{2.4}$$

Sob estas hipóteses o operador $A_H$, a realização de $A$ em $H$ dada por

$$\begin{cases} D(A_H) = \{v \in V;\ Av \in H\} \\ A_H(v) = Av, \text{ se } v \in D(A_H), \end{cases} \tag{2.5}$$

é um operador maximal monótono em $H$ (veja [9] e [33] e exemplo 2.3.7 do livro [7]). Temos

**Lema 2.1** *(Lema 1, p. 696, [12]) Se (H - 14) e (H - 15) valem, então o domínio* $D(A_H)$ *é denso em H, isto é,* $\overline{D(A_H)} = H$.

Assim, considere o semigrupo contínuo de operadores não-lineares $\{S(t) : H \to H\}_{t\geq 0}$, gerado por $A_H$.

**Definição 2.2** *Uma função* $u \in C([0,T]; H)$ *é uma solução forte para (2.2) se* $u$ *é absolutamente contínua em qualquer subintervalo compacto de* $(0,T)$, $u(t) \in D(A_H)$ $t-$*q.t.p. em* $(0,T)$, *e*

$$\frac{du}{dt}(t) + A(u(t)) = F(u(t)),\ \ t - q.t.p. \text{ em } (0,T).$$

*Uma função* $u \in C([0,T]; H)$ *é chamada uma solução fraca para (2.2) se existe uma seqüência* $\{u_n\}$ *de soluções fortes convergindo para* $u$ *em* $C([0,T]; H)$.

**Proposição 2.3** *(Proposição 1, p. 695, [12]) Se (H - 14) vale, então a equação (2.2) define um semigrupo de operadores não-lineares* $\{T(t) : \overline{D(A_H)} \to \overline{D(A_H)}, t \geq 0\}$, *onde para cada* $u_0 \in \overline{D(A_H)}$, $t \mapsto T(t)u_0$ *é a solução fraca global de (2.2) iniciando em* $u_0$. *Este semigrupo é tal que* $\mathbb{R}^+ \times \overline{D(A_H)} \ni (t, u_0) \mapsto T(t)u_0 \in \overline{D(A_H)}$ *é uma aplicação contínua. Adicionalmente, se* $u_0 \in D(A_H)$ *então* $u^T(\cdot) \doteq T(\cdot)u_0$ *é uma solução forte Lipschitz contínua de (2.2).*

O lema a seguir mostra que é suficiente checar a compacidade do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ gerado por $A_H$, e o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ associado ao problema (2.2), considerando dados iniciais $u_0$ em subconjuntos densos do espaço de fase $H$, em particular em $D(A_H)$.

**Lema 2.4** *(Lema 2, p. 697, [12]) Seja $K$ uma aplicação contínua em um espaço métrico $X$. Seja $W$ um subconjunto denso de $X$. São equivalentes:*

*1. Para cada bola aberta $B_X(r)$ a imagem $K(B_X(r)\cap W)$ é precompacto em $X$;*

*2. Para cada subconjunto limitado $B$ de $X$, a imagem $K(B)$ é precompacta em $X$.*

**Teorema 2.5** *(Teorema 2.6, p. 140-141, [5]) Suponhamos que valem $(H-14)$ e $(H-15)$. Se $u_0 \in H$ e $f \in L^{p'}(0,T,V^*)$, onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, então existe uma única função $u(t)$ a qual toma valores em $V^*$, que é absolutamente contínua em $[0,T]$ e satisfaz*

$$u \in C([0,T];H)\cap L^p(0,T;V),\frac{du}{dt}\in L^{p'}(0,T;V^*) \tag{2.6}$$

$$\frac{du}{dt}(t)+Au(t)=f(t),\ t\text{-}qtp\ em\ (0,T) \tag{2.7}$$

$$u(0)=u_0.$$

*Em particular, este resultado vale para $f=0\in L^{p'}(0,T;V^*)$.*

**Teorema 2.6** *([30], p. 57-58) Suponhamos que a inclusão $V\subset H$ é compacta. Considerando o conjunto $W \doteq \{v; v\in L^{p_0}(0,T;V), v'=\frac{dv}{dt}\in L^{p_1}(0,T,V^*)\}$, com $T$ finito e $1<p_0,p_1<+\infty$, munido com a norma $\|v\|_{L^{p_0}(0,T;V)}+\|v'\|_{L^{p_1}(0,T,V^*)}$, temos que $W$ é um espaço de Banach, $W\subset L^{p_0}(0,T;H)$ com inclusão compacta.*

O próximo teorema nos dá estimativas para $\|u\|_{L^p(0,T;V)}$ e $\|\frac{du}{dt}\|_{L^{p'}(0,T,V^*)}$ e garante, sob certas condições, a compacidade do semigrupo gerado por $A_H$.

**Teorema 2.7** *Se as hipóteses $(H-14)$ e $(H-15)$ são satisfeitas, então para qualquer $u_0\in D(A_H)$ e todo $T>0$ tem-se:*

$$\int_0^T \|u(s)\|_V^p ds \leq \mathcal{C}_1(\|u_0\|_H,T) \tag{2.8}$$

$$\int_0^T \|\frac{du}{dt}(s)\|_{V^*}^{p'} ds \leq \mathcal{C}_2(\|u_0\|_H, T), \tag{2.9}$$

*onde $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são funções localmente limitadas e $u$ é solução do problema homogêneo (2.1). Além disso, se a inclusão $V \subset H$ é compacta, então $S(t) : H \to H$ é uma aplicação compacta, para cada $t > 0$.*

**Demonstração:** Seja $u_0 \in D(A_H)$ e $T > 0$. Pelos Teorema 1.19 e Proposição 1.18 temos que existe uma única solução $u \in C([0,T]; H)$ de (2.1). Aplicando o Teorema 2.5 com $f \equiv 0 \in L^{p'}(0,T,V^*)$ obtemos que $u \in C([0,T]; H) \cap L^p(0,T;V)$ e $\frac{du}{dt} \in L^{p'}(0,T;V^*)$. Sendo $u$ solução de (2.1), temos que a equação é satisfeita t-qtp em $[0,T]$. Usando $(H-15)$ obtemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = -\langle A(u(t)), u(t)\rangle_{V^*,V} \leq -w_1\|u(t)\|_V^p - c_1.$$

Integrando sobre $(0,T)$ encontramos:

$$\|u(t)\|_H^2 + 2w_1\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \leq \|u_0\|_H^2 + c_2, \ c_2 = -2c_1T.$$

Isto mostra que (2.8) é satisfeito.

Temos que $\frac{du}{dt}(t) = -Au(t)$, t- qtp em $[0,T]$. Logo por (2.4)

$$\begin{aligned}
\|\tfrac{du}{dt}(t)\|_{V^*}^{p'} &= \|-Au(t)\|_{V^*}^{p'} = \|Au(t)\|_{V^*}^{p'} \\
&\leq [w_2(1 + \|u(t)\|_V^{p-1})]^{p'} \\
&\leq 2^{p'-1}[w_2^{p'}(1 + \|u(t)\|_V^{(p-1)p'})] \\
&= c_3(1 + \|u(t)\|_V^p).
\end{aligned}$$

Integrando sobre $(0,T)$ e usando (2.8), obtemos (2.9).

Suponhamos agora que a inclusão $V \subset H$ é compacta. Seja $t > 0$. Mostremos que $S(t) : H \to H$ é uma aplicação compacta. De acordo com o Lema 2.4, é suficiente considerar subconjuntos limitados de $H$ tendo a forma $\mathcal{B} = B_H(r) \cap D(A_H)$. Consideremos os conjuntos $\tilde{\mathcal{B}} \doteq \{S(.)u_0, u_0 \in \mathcal{B}\} \subset C([0,T]; H)$ e $W \doteq \{v \in L^p(0,T;V);\ \frac{dv}{dt} \in L^{p'}(0,T,V^*)\}$ (com $p \geq 2$ como em $(H-15)$) com $W$ munido com a norma $\|v\|_W \doteq \|v\|_{L^p(0,T;V)} + \|\frac{dv}{dt}\|_{L^{p'}(0,T,V^*)}$. Como uma conseqüência de (2.8) e (2.9) o conjunto $\tilde{\mathcal{B}}$ é limitado na norma de $W$. O Teorema 2.5 garante que $\tilde{\mathcal{B}} \subset W$. Logo pelo Teorema 2.6, temos que $\tilde{\mathcal{B}}$ é precompacto em $L^p(0,T;H)$.

Tome uma seqüência qualquer $\{u_n\} \in \mathcal{B}$ e considere a seqüência $\{S(.)u_n\} \subset \tilde{\mathcal{B}}$. Logo existe uma subseqüência $\{S(.)u_{n_k}\}$ de $\{S(.)u_n\}$ e $v_0 \in L^p(0,T;H)$ tal que

$$\left(\int_0^T \|S(s)u_{n_k} - v_0(s)\|_H^p ds\right)^{1/p} \to 0 \text{ quando } k \to +\infty. \tag{2.10}$$

Então a seqüência $\{\|S(.)u_{n_k} - v_0(.)\|_H\}$ de funções reais $\|S(.)u_{n_k} - v_0(.)\|_H : (0,T) \to \mathbb{R}$ converge a zero em $L^p(0,T;\mathbb{R})$ e, em particular, existe uma subseqüência $\{\|S(.)u_{n_{k_l}} - v_0(.)\|_H\}$ tal que

$$\|S(.)u_{n_{k_l}} - v_0(.)\|_H \to 0 \text{ qtp em } (0,T). \tag{2.11}$$

Agora, usando (2.11), temos que para qualquer $t > 0$ exite $\tau \in (0,t)$ tal que $S(\tau)u_{n_{k_l}} \to v_0(\tau)$ em $H$. Portanto,

$$S(t)u_{n_{k_l}} = S(t-\tau)S(\tau)u_{n_{k_l}} \to S(t-\tau)v_0(\tau) \text{ em } H,$$

o que prova que a seqüência $\{S(t)u_n\}$ tem uma subseqüência convergente em $H$.

Portanto, $S(t)\mathcal{B}$ é precompacto, e portanto $S(t) : H \to H$ é uma aplicação compacta. ■

Salientamos que embora tenhamos obtado por fazer a demonstração para o caso homogêneo, este último resultado já foi estabelecido em [12] para uma F globalmente Lipschitz geral, mais precisamente, segue dos Lemas 3 e 4 p. 697- 698 em [12] o seguinte resultado:

**Teorema 2.8** *Se as hipóteses $(H-14)$ e $(H-15)$ são satisfeitas e $p > 2$, então para qualquer $u_0 \in D(A_H)$ e todo $T > 0$ tem-se:*

$$\int_0^T \|u(s)\|_V^p ds \le \mathcal{C}_1(\|u_0\|_H, T) \tag{2.12}$$

$$\int_0^T \|\frac{du}{dt}(s)\|_{V^*}^{p'} ds \le \mathcal{C}_2(\|u_0\|_H, T), \tag{2.13}$$

*onde $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são funções localmente limitadas e $u$ é solução do problema (2.2). Além disso, se a inclusão $V \subset H$ é compacta, então $T(t) : H \to H$ é uma aplicação compacta, para cada $t > 0$.*

Além disso, temos

**Lema 2.9** *(Lema 5, p. 700, [12]) Considere que* $(H-14)$, (2.3) *sejam satisfeitos. Se* $p>2$, *então o semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *associado ao problema (2.2) é B-dissipativo em* $\overline{D(A_H)}$.

**Teorema 2.10** *(Teorema 1, p. 700, [12]) Suponhamos que* $(H-14)$, (2.3) *valem e* $p>2$. *Se* (2.12) *e* (2.13) *são satisfeitas para algum* $T>0$ *e a inclusão* $V\subset H$ *é compacta, então o semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *associado ao problema (2.2) possui um B-atrator global maximal compacto invariante em* $\overline{D(A_H)}$.

Assim, usando os três resultados acima podemos concluir

**Teorema 2.11** *Se as hipóteses* $(H-14)$ *e* $(H-15)$ *são satisfeitas,* $p>2$ *e a inclusão* $V\subset H$ *é compacta, então o semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *associado ao problema (2.2) possui um B-atrator global maximal compacto invariante em* $H=\overline{D(A_H)}$.

## 2.2 O Operador p-Laplaciano Perturbado com Condição de Fronteira Neumann Homogênea

Consideremos $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, $N\geq 1$, um aberto (de classe $C^1$), conexo, limitado, com fronteira $\partial\Omega$ suave, e sejam $H\doteq L^2(\Omega,\mathbb{R})$ e $V\doteq W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R})$, $2<p<+\infty$ fixo qualquer . Então $H$ é um espaço de Hilbert real e $V$ é um espaço de Banach real reflexivo.

Sabemos pelo Teorema de Rellich-Kondrachov que $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R})$ está compactamente contido em $L^p(\Omega,\mathbb{R})$, $\forall\, p\geq 1$. Mas $L^p(\Omega,\mathbb{R})\hookrightarrow L^2(\Omega,\mathbb{R})$, $\forall\, p>2$. Logo $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R})\subset\subset L^2(\Omega,\mathbb{R})$, $\forall\, p>2$.

Temos também que a inclusão $V\subset H$ é densa, pois $H=L^2(\Omega,\mathbb{R})=\overline{W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R})}^H\subset\overline{W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R})}^H\subset\overline{H}^H=H$, logo $\overline{V}^H=H$.

Visto que $V\subset H$, considerando o operador restrição temos que $H^*\subset V^*$. Pelo Teorema de representação de Riez, $H\equiv H^*$. Logo temos $V\subset H\subset V^*$, com inclusões contínuas e densas.

Portanto, a condição $(i)$ de $(H-14)$ está verificada.

Passemos agora a definição do nosso operador definido em $V$. Seja $\{D^\lambda\} \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $D^\lambda(x) \geq \delta > 0$ $x-$qtp em $\Omega$ para cada $\lambda \in [0, \lambda_0]$ e $D^\lambda$ converge para $D^0$ em $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ quando $\lambda \to 0$. Logo existe uma constante $M > 0$ tal que $\|D^\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$, $\forall\, \lambda \in [0, \lambda_0]$. Consideremos, para cada $\lambda \in [0, \lambda_0]$, o operador $A^{D^\lambda}$ que a cada elemento $u \in V = W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$ associa o elemento de $V^*$,

$$A^{D^\lambda} u : V \to \mathbb{R}$$

dado por

$$A^{D^\lambda} u(v) \doteq \int_\Omega D^\lambda(x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_\Omega |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx.$$

$A^{D^\lambda} u$ está bem definido, pois para cada $v \in V$ temos

$$A^{D^\lambda} u(v) \;\leq\; M \parallel \nabla u \parallel_p^{p-1} \parallel \nabla v \parallel_p + \parallel u \parallel_p^{p-1} \parallel v \parallel_p < \;\infty$$

visto que $|\nabla u|$, $|\nabla v|, u, v \in L^p(\Omega)$.

Mostremos agora, que se $u \in V$, então $A^{D^\lambda} u \in V^*$. De fato, como $A^{D^\lambda} u$ está bem definido, para cada $u$, então resta mostrar que $A^{D^\lambda} u$ é linear e limitado. A linearidade segue diretamente da definição de $A^{D^\lambda} u$ e das propriedades da integral. $A^{D^\lambda} u$ é limitado, pois

$$\parallel A^{D^\lambda} u \parallel_{V^*} \leq C \parallel u \parallel_{W^{1,p}(\Omega)}^{p-1} < +\infty,\; C = C(N, p, M) > 0.$$

**Lema 2.12** *O operador $A^{D^\lambda} : V \to V^*$ é monótono.*

**Demonstração:** Usando a desigualdade de Tartar temos que para todo $u, v \in V$:

$$\begin{aligned}
\langle A^{D^\lambda} u - A^{D^\lambda} v, u - v \rangle_{V^*, V} &= \langle A^{D^\lambda} u, u - v \rangle_{V^*, V} - \langle A^{D^\lambda} v, u - v \rangle_{V^*, V} \\
&\geq \delta \gamma_1 \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p dx + \gamma_2 \int_\Omega |u - v|^p dx \\
&= \delta \gamma_1 \parallel \nabla u - \nabla v \parallel_p^p + \gamma_2 \parallel u - v \parallel_p^p \geq \; 0,
\end{aligned}$$

$\gamma_1 = \gamma_1(p, N) \geq 0$, $\gamma_2 = \gamma_2(p, N) \geq 0$.

Portanto $A^{D^\lambda}$ é monótono. ■

**Lema 2.13** *O operador* $A^{D^\lambda} : V \to V^*$ *é coercivo.*

**Demonstração:** Se $u \in V$,

$$\begin{aligned} \langle A^{D^\lambda} u, u\rangle_{V^*,V} &\geq \delta \parallel \nabla u \parallel_p^p + \parallel u \parallel_p^p \\ &\geq \tfrac{\delta}{N} \textstyle\sum_{i=1}^N \parallel \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \parallel_p^p + \parallel u \parallel_p^p \\ &\geq C \parallel u \parallel_V^p,\ C = C(N,\delta) > 0. \end{aligned}$$

Logo, se $\{u_j\} \subset V$ for tal que $\lim_{j\to+\infty} \parallel u_j \parallel_V = +\infty$, então $\lim_{j\to+\infty} C \parallel u_j \parallel_V^{p-1} = +\infty$ e $\frac{\langle A^{D^\lambda} u_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{\|u_j\|_V} \geq C \parallel u_j \parallel_V^{p-1}$ . Portanto $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \frac{\langle A^{D^\lambda} u_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{\parallel u_j \parallel_V} = +\infty.$ ■

**Lema 2.14** *O operador* $A^{D^\lambda} : V \to V^*$ *é hemicontínuo.*

**Demonstração:** Queremos mostrar que $w - \lim_{t\to 0} A^{D^\lambda}(u + tv) = A^{D^\lambda} u$, para quaisquer $u, v \in V$. Como $V = W^{1,p}(\Omega, \mathrm{I\!R})$ $(p > 2)$ é reflexivo $(V = V^{**})$, precisamos mostrar que

$$\langle A^{D^\lambda}(u + tv), \varphi\rangle_{V^*,V} \longrightarrow \langle A^{D^\lambda} u, \varphi\rangle_{V^*,V} \text{ quando } t \to 0,\ \forall\, \varphi \in V.$$

De fato, sejam $u, v, \varphi \in V$ e $t \in (-1, 1)$. Temos

$|\langle A^{D^\lambda}(u + tv), \varphi\rangle_{V^*,V} - \langle A^{D^\lambda} u, \varphi\rangle_{V^*,V}| =$

$= | \int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla(u + tv)|^{p-2}\nabla(u + tv)\nabla\varphi dx + \int_\Omega |u + tv|^{p-2}(u + tv)\varphi dx$

$- \int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi dx - \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx|$

$\leq \|D^\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\ |\nabla(u + tv)|^{p-2}\nabla(u + tv) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u|\ |\nabla\varphi|dx$

$+ \int_\Omega |\ |u + tv|^{p-2}(u + tv) - |u|^{p-2}u|\ |\varphi|dx \to 0$, quando $t \to 0$,

pois $\phi_p(\ell) \doteq |\ell|^{p-2}\ell,\ \ell \in \mathrm{I\!R}$, é contínua e $\nabla(u + tv) = \nabla u + t\nabla v \to \nabla u$ quando $t \to 0$.

Portanto, O operador $A^{D^\lambda} : V \to V^*$ é hemicontínuo. ■

**Observação 2.15** *Usando o Teorema 1.13 concluímos que o operador* $A^{D^\lambda} : V \to V^*$, $D(A^{D^\lambda}) = V$, *é maximal monótono e* $R(A^{D^\lambda}) = Imagem(A^{D^\lambda}) = A^{D^\lambda}(V) = V^*$.

Concluímos que a hipótese $(H-14)$ é satisfeita.

Mostremos agora que a hipótese $(H-15)$ também é satisfeita: No Lema 2.13, mostramos que existe uma constante $C = C(N,\delta) > 0$ tal que para cada $u \in V$ $\langle A^{D^\lambda}u, u\rangle_{V^*,V} \geq C \parallel u \parallel_V^p$ . Considerando $w_1 = C$ e $c_1 = 0$, obtemos (2.3).
Quando mostramos que $A^{D^\lambda}u$ é limitado, mostramos que existe uma constante $w_2 = C(N,p,M) > 0$ tal que para cada $u \in V$,

$$\parallel A^{D^\lambda}u \parallel_{V^*} \leq w_2 \parallel u \parallel_V^{p-1} < w_2(\parallel u \parallel_V^{p-1} + 1).$$

Portanto a hipótese $(H-15)$ é satisfeita.

Logo podemos concluir (por Browder-Minty) que o operador $A_H^{D^\lambda}$, a realização de $A^{D^\lambda}$ em $H$ dada por

$$\begin{cases} D(A_H^{D^\lambda}) = \{v \in V;\ A^{D^\lambda}v \in H\} \\ A_H^{D^\lambda}(v) = A^{D^\lambda}v, \text{ se } v \in D(A_H^{D^\lambda}), \end{cases} \tag{2.14}$$

é um operador maximal monótono em $H$ e $\overline{D(A_H^{D^\lambda})} = H = L^2(\Omega)$.

Daí, pela teoria desenvolvida na seção 2.1, concluímos que o semigrupo gerado pelo operador $A_H^{D^\lambda} : D(A_H^{D^\lambda}) \subset H \to H$ é compacto. Daqui em diante denotaremos $A_H^{D^\lambda} : D(A_H^{D^\lambda}) \subset H \to H$ por
$A_H^{D^\lambda}(u) \doteq -div(D^\lambda|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u$.

Os semigrupos gerados por certas classes de operadores maximais monótonos tem um efeito regularizante sobre os dados iniciais, isto é, $S(t)u_0 \in \mathcal{D}(A)$ para todo $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ e todo $t > 0$, principalmente no caso onde $A$ é a subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i. ( veja Teorema 1.21).

É possível mostrar que o operador $A_H^{D^\lambda}$ é do tipo subdiferencial. Considere

$$\psi^{D^\lambda} : L^2(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

definido por

$$\psi^{D^\lambda}(u) : \begin{cases} \dfrac{1}{p}\left[\displaystyle\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u|^p dx + \int_\Omega \parallel u \parallel^p dx\right], & u \in W^{1,p}(\Omega) \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $\partial\psi^{D^\lambda}$ é maximal monótono em $L^2(\Omega)$, uma vez que $\psi^{D^\lambda}$ é uma aplicação convexa, própria e semicontínua inferiormente ( veja Exemplo 1.16).

Mostremos que $-div(D^\lambda|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+|u|^{p-2}u=\partial\psi^{D^\lambda}u$. Como ambos são maximais monótonos basta mostrarmos apenas uma das inclusões. Mostraremos então que $-div(D^\lambda|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+|u|^{p-2}u\subset\partial\psi^{D^\lambda}u$ :

Seja $u\in\mathcal{D}(-div(D^\lambda|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+|u|^{p-2}u)$ e

$v=-div(D^\lambda|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+|u|^{p-2}u$, então para cada $\xi\in V$

$$\begin{aligned}
\langle v,\xi-u\rangle &= \langle A^{D^\lambda}u,\xi-u\rangle\\
&= \int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)(\nabla\xi(x)-\nabla u(x))dx\\
&\quad+\int_\Omega |u(x)|^{p-2}u(x)(\xi(x)-u(x))dx\\
&= \int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla\xi(x)dx-\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u(x)|^{p}dx\\
&\quad+\int_\Omega |u(x)|^{p-2}u(x)\xi(x)dx-\int_\Omega |u(x)|^{p}dx.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\langle v,\xi-u\rangle+\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u(x)|^{p}dx+\int_\Omega |u(x)|^{p}dx=\\
&= \int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla\xi(x)dx+\int_\Omega |u(x)|^{p-2}u(x)\xi(x)dx\\
&\leq \int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u(x)|^{p-1}|\nabla\xi(x)|dx+\int_\Omega |u(x)|^{p-1}|\xi(x)|dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{p'}\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u(x)|^{p}dx+\frac{1}{p}\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla\xi(x)|^{p}dx\\
&\quad+\frac{1}{p'}\int_\Omega |u(x)|^{p}dx+\frac{1}{p}\int_\Omega |\xi(x)|^{p}dx\\
&= \frac{1}{p'}\left[\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u(x)|^{p}dx+\int_\Omega |u(x)|^{p}dx\right]\\
&\quad+\frac{1}{p}\left[\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla\xi(x)|^{p}dx+\int_\Omega |\xi(x)|^{p}dx\right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\langle v,\xi-u\rangle+\left(1-\frac{1}{p'}\right)\left[\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u(x)|^{p}dx+\int_\Omega |u(x)|^{p}dx\right]\leq\\
&\leq \frac{1}{p}\left[\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla\xi(x)|^{p}dx+\int_\Omega |\xi(x)|^{p}dx\right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle v, \xi - u \rangle + \psi^{D^\lambda}(u) \leq \psi^{D^\lambda}(\xi), \ \forall \ \xi \in V = W^{1,p}(\Omega).$$

Agora note que se $\xi \in L^2(\Omega) \backslash W^{1,p}(\Omega)$ então $\psi^{D^\lambda}(\xi) = \infty$ e o resultado segue.

Logo,

$$\langle v, \xi - u \rangle + \psi^{D^\lambda}(u) \leq \psi^{D^\lambda}(\xi)$$

para todo $\xi \in L^2(\Omega)$, e portanto $v \in \partial\psi^{D^\lambda}(u)$.

Como $A_H^{D^\lambda}$ e $\partial\psi^{D^\lambda}$ são maximais monótonos segue que $A_H^{D^\lambda} = \partial\psi^{D^\lambda}$. Como queríamos demonstrar.

## Capítulo 3

# Atratores para Semigrupos multívocos definidos por Semifluxos Generalizados

Semifluxos Generalizados são uma abstração de EDP's para as quais pode haver mais do que uma solução correspondente a um dado inicial. Segundo [3], a necessidade para a teoria de tais semifluxos generalizados chega pelas seguintes razões, podem existir EDP's que tem mais do que uma solução ou pode ser o caso de não se saber que a solução é única. Problemas deste tipo são usualmente chamados mal-postos. Mesmo com a falta de unicidade é possível obter a existência de atratores globais para problemas diferenciais. Na verdade, propriedades de compacidade e dissipatividade são suficientes para provar a existência de um conjunto maximal compacto invariante o qual atrai todos os conjuntos limitados. Existem vários autores lidando com esta questão, entre eles citamos Ball, [3], Melnik e Valero, [32], e Carvalho e Gentile, [14]. Também citamos [10], onde pode ser encontrada uma boa descrição dos dois primeiros trabalhos citados e uma comparação entre eles. De uma maneira muito simplificada, poderíamos dizer que Melnik e Valero consideram operadores multívocos atuando em dados iniciais $u_0$ do espaço de fase $X$ e chegando no conjunto de todos os possíveis estados em tempo $t$, $T(t)u_0 \subset X$ enquanto Ball olha as soluções como o bloco fundamental em suas considerações, como brevemente descreveremos neste capítulo. As idéias no terceiro trabalho são conectadas com ambos os dois primeiros, visto que lidam com semigrupos multívocos construídos por considerar todas as possíveis soluções começando em dados iniciais. A principal distinção no estudo do comportamento assintótico em [14] é que o semigrupo multívoco considerado lá possui uma propriedade de regularidade forte de modo que ele eventualmente se torna um semigrupo. Parece ser difícil de lidar com esta condição, mas na verdade ela pode ser facilmente obtida, por métodos de comparação, para uma classe de problemas envolvendo operadores maximais monótonos com resolvente crescente e para os quais a unicidade não é uma questão trivial, [13].

Neste trabalho estaremos interessados em semigrupos multívocos $T(t)$ definidos por um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$, isto é, cada ponto $\zeta \in T(t)x$, $x \in X$ ($X$ um espaço métrico completo, $t \in [0, \infty)$) é tal que $\zeta = \varphi(t)$, onde $\varphi$ é uma solução em $\mathcal{G}$ e $\varphi(0) = x$. A maioria das definições da teoria de semigrupos pode ser estendida de uma maneira muito natural para a estrutura multívoca, mas algumas delas aceitam mais do que uma extensão. Este é o caso quando consideramos a existência de um certo tempo $\tau$ para o qual após ele uma certa condição precisa ser satisfeita, como ocorre em conceitos de atração, absorção e dissipatividade ou propriedades eventuais. Na teoria de semigrupos, este tempo pode ser escolhido uniformemente em conjuntos limitados ou não, e estas são as únicas duas possibilidades. Aqui, neste contexto, podemos considerar a possibilidade em um tempo, após alguma coisa acontece, sendo uniforme em conjuntos limitados, uniforme em pontos ou ainda não ser uniforme em nenhum dos dois casos. Uniformidade nos pontos significa que dado um ponto arbitrário $x \in X$, existe um tempo $\tau = \tau(x)$ para o qual após ele todas as soluções $\varphi \in \mathcal{G}$ começando em $x$ satisfazem certa propriedade. Esta distinção gera um novo grupo de definições o qual não faz sentido na teoria unívoca e alguns destes conceitos parecem jogar uma regra especial no contexto de semigrupos multívocos.

Neste texto chamaremos de $\varphi$-conceitos aqueles que são definidos sem supor qualquer uniformidade no tempo, isto é, adicionamos o prefixo $\varphi$ com as palavras atração, dissipatividade, limitado, etc, para indicar que não estamos supondo que o tempo em tais definições seja uniformemente escolhido em qualquer sentido. Por exemplo, dizemos que um conjunto $A$ $\varphi-$atrai um subconjunto $M \subset X$ se dado $\varepsilon > 0$, cada solução em $\mathcal{G}$ começando num ponto em $M$, eventualmente entra numa $\varepsilon$ vizinhança de $A$, $O_\varepsilon(A)$, e permanece dentro dela. Um dos nossos principais resultados estabelece que, se um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ é $\varphi$-assintóticamente compacto e possui uma função de Lyapunov, então existe um $\varphi$-atrator global fechado minimal $\widehat{N}$ para $\mathcal{G}$ e $\widehat{N}$ coincide com o conjunto das soluções estacionárias em $\mathcal{G}$.

Este capítulo está baseado no trabalho [36], e será organizado como segue. A seção 3.1 contém os principais resultados na literatura sobre existência de atratores para problemas diferenciais sem unicidade e fornece a base de informações para discusões posteriores. Descrevemos todas as definições e teoremas relevantes de [3], [32], [10] e [14], e também adicionamos algumas outras estendidas facilmente de [24] e [29]. Na seção 3.2 obtemos algumas caracterizações do atrator, como é feito em [29] para semigrupos, e provamos que, até mesmo no caso multívoco, o B-atrator global maximal compacto invariante pode ser descrito em termos do conjunto instável dos equilíbrios, se existir uma função de Lyapunov para o sistema. Na seção 3.3 discutimos os $\varphi$-conceitos.

## 3.1 Semigrupos Multívocos - Uma Teoria para Problemas Diferenciais sem Unicidade

Nesta seção introduzimos a estrutura abstrata geral para estudar atratores para problemas diferenciais sem unicidade. A maioria dos resultados neste texto preliminar já está publicado em [3], [32], [10] ou [14], conforme indicaremos no início de cada resultado conhecido. Introduzimos algumas definições e resultados adicionais os quais são facilmente estendidos da teoria clássica de semigrupos, e usamos fortemente [31] para dar suporte a nossa discussão.

### 3.1.1 Definições, Notações e Fatos Preliminares

Seja $(X, d)$ um espaço métrico completo e sejam $P(X), B(X), C(X), K(X)$ e $BC(X)$ denotando respectivamente os subconjuntos não-vazio, não-vazio e limitado, não-vazio e fechado, não-vazio e compacto e não-vazio limitado e fechado de $X$. Para $x \in X$ e $A, B \in P(X)$, e $\varepsilon > 0$ definimos

$$\begin{aligned}
d(x, A) &\doteq \inf_{a\in A}\{d(x, a)\};\\
\mathrm{dist}(A, B) &\doteq \sup_{a\in A}\{d(a, B)\} = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\{d(a, b)\};\\
d_H(A, B) &\doteq \max\{\mathrm{dist}(A, B), \mathrm{dist}(B, A)\};\\
O_\varepsilon(A) &\doteq \{z \in X; d(z, A) < \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

**Definição 3.1** *[3] Um* ***semifluxo generalizado*** $\mathcal{G}$ *em* $X$ *é uma família de aplicações* $\varphi : [0, \infty) \to X$ *satisfazendo as condições:*

*(H1) (Existência) Para cada* $z \in X$ *existe pelo menos um* $\varphi \in \mathcal{G}$ *com* $\varphi(0) = z$.

*(H2) (Translação) Se* $\varphi \in \mathcal{G}$ *e* $\tau \geq 0$, *então* $\varphi^\tau \in \mathcal{G}$, *sendo que* $\varphi^\tau(t) := \varphi(t+\tau), \forall t \in [0, \infty)$.

*(H3) (Concatenação) Se* $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$, *e* $\psi(0) = \varphi(t)$ *para algum* $t \geq 0$, *então* $\theta \in \mathcal{G}$, *sendo que*

$$\theta(\tau) \doteq \begin{cases} \varphi(\tau) & \text{se } \tau \in [0, t] \\ \psi(\tau - t) & \text{se } \tau \in (t, \infty) \end{cases}$$

*(H4) (Semicontinuidade superior com relação aos dados iniciais) Se* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}$ *e* $\varphi_j(0) \to z$, *então existe uma subseqüência* $\{\varphi_\mu\}$ *de* $\{\varphi_j\}$ *e* $\varphi \in \mathcal{G}$ *com* $\varphi(0) = z$ *tal que* $\varphi_\mu(t) \to \varphi(t)$ *para cada* $t \geq 0$.

**Definição 3.2** *Dizemos que* $\mathcal{G}$ *é um* ***semifluxo generalizado contínuo*** *se cada* $\varphi \in \mathcal{G}$ *é uma aplicação contínua de* $[0, \infty)$ *em* $X$.

**Definição 3.3** *Um* ***semigrupo multívoco*** $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ***definido por*** $\mathcal{G}$ *é uma família de operadores multívocos* $T(t) : P(X) \to P(X)$ *tal que, para cada* $t \geq 0$*,*

$$T(t)E \doteq \{\varphi(t);\ \varphi \in \mathcal{G} \text{ com } \varphi(0) \in E\}.$$

É bem conhecido que a família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz

**Proposição 3.4** *[10]*

*(a)* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é um semigrupo em* $P(X)$*, isto é,* $T(0) = Id_{P(X)}$ *e* $T(t+s) = T(t)T(s)$ *para todo* $t, s \geq 0$*;*

*(b)* $T(t)$ *é monótono com relação a ordem parcial de inclusão de conjuntos, isto é,* $E \subset F$ *implica* $T(t)E \subset T(t)F$ *para todo* $t \geq 0$*;*

*(c)* $T(t)x$ *é compacto para cada* $x \in X$*;*

*(d) Se* $\{K_n\}_{n\geq 1}$ *é uma seqüência de subconjuntos compactos de* $X$ *tal que* $dist(K_n, K) \to 0$ *quando* $n \to \infty$*, então* $dist(T(t)K_n, T(t)K) \to 0$ *quando* $n \to \infty$*, para cada* $t \geq 0$*; e*

*(e)* $T(t) : X \to K(X)$ *tem gráfico fechado para cada* $t \geq 0$*, e é uma aplicação semicontínua superiormente, isto é, para cada* $x \in X$ *e aberto* $N$ *contendo* $T(t)x$*, existe uma vizinhança* $M$ *de* $x$ *tal* $T(t)M \subset N$*.*

**Observação 3.5** *Em todo este capítulo* $\mathcal{G}$ *denotará um Semifluxo Generalizado e* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *denotará um semigrupo multívoco definido por* $\mathcal{G}$*.*

**Definição 3.6** *A* ***órbita positiva*** *de* $\varphi \in \mathcal{G}$ *e* $E \subset X$ *são dadas por*
$\gamma^+(\varphi) \doteq \{\varphi(t); t \geq 0\}$ *e* $\gamma^+(E) \doteq \bigcup_{t\geq 0} T(t)E$*.*
*Se* $\tau > 0$*,*
$\gamma^+_\tau(\varphi) \doteq \{\varphi(t); t \geq \tau\}$ *e* $\gamma^+_\tau(E) \doteq \bigcup_{t\geq \tau} T(t)E$*.*

**Definição 3.7** *Dizemos que existe uma* ***órbita completa*** *através de* $x \in X$ *se existe uma aplicação* $\psi : \mathbb{R} \to X$ *tal que, para qualquer* $s \in \mathbb{R}$*,* $\psi^s|_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{G}$ *e*

$\psi(0) = x$. *Neste caso, a órbita completa de* $\psi$ *é dada por*

$$\gamma(\psi) = Im\ \psi = \{\psi(t), t \in \mathbb{R}\}.$$

*Também dizemos que* $\psi$ ***é uma órbita completa através de*** $x$.

**Definição 3.8** *Dizemos que uma órbita completa* $\psi : \mathbb{R} \to X$ *é* ***estacionária*** *se* $\psi(t) = z$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *para algum* $z \in X$. *Consideremos*

$$Z(\mathcal{G}) \doteq \{z \in X;\ \text{existe uma órbita completa } \psi \text{ tal que } \psi(t) = z\ \forall\, t \in \mathbb{R}\}.$$

**Observação 3.9** *Observamos que* $z \in Z(\mathcal{G})$ *pode ser chamada uma* ***solução estacionária*** *em* $\mathcal{G}$ *visto que* $z \in Z(\mathcal{G})$ *se, e somente se,* $\exists\, \phi \in \mathcal{G}$ *tal que* $\phi(t) = z$ *para todo* $t \geq 0$.

*Quando estamos lidando com equações ou inclusões diferenciais, também temos que* $z \in Z(\mathcal{G})$ *se, e somente se,* $z \in T(t)z$ *para todo* $t \geq 0$, *portanto neste caso podemos nos referir a* $z$ *como um* ***equilíbrio*** *de* $T(t)$.

**Observação 3.10** *Segue de* $(H_4)$ *que* $Z(\mathcal{G})$ *é um conjunto fechado.*

**Definição 3.11** *Dizemos que um subconjunto* $A \subset X$ *é* ***positivamente invariante*** *se* $T(t)A \subset A$, $\forall\, t \geq 0$, $A$ *é* ***negativamente invariante*** *se* $A \subset T(t)A$, $\forall\, t \geq 0$, $A$ *é* ***invariante*** *se* $T(t)A = A$, $\forall\, t \geq 0$, *e* $A$ *é* ***quasi-invariante*** *se para cada* $z \in A$ *existe uma órbita completa* $\psi$ *através de* $z$ *e* $\psi(t) \in A$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

**Observação 3.12** *Invariante* $\Rightarrow$ *quasi-invariante* $\Rightarrow$ *negativamente invariante.*

**Definição 3.13** *Se* $\varphi \in \mathcal{G}$, $\psi$ *é uma órbita completa e* $E \subset X$,

- $\omega(\varphi) \doteq \{z \in X; \varphi(t_j) \to z, t_j \to +\infty\}$;
- $\alpha(\psi) \doteq \{z \in X; \psi(t_j) \to z, t_j \to -\infty\}$;
- $\omega(E) \doteq \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(E)}$;
- $\omega_B(E) \doteq \{z \in X; \exists\, \varphi_j \in \mathcal{G}, \{\varphi_j(0)\} \subset E,\ \{\varphi_j(0)\} \in B(X),\ \text{e existe}$

  $\{t_j\} \subset \mathbb{R}^+,\ t_j \to +\infty \text{ com } \varphi_j(t_j) \to z\}$.

**Observação 3.14** $\omega(\varphi) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(\varphi)}$.

**Observação 3.15** *[32] O conjunto $\omega(E)$ consiste dos limites de todas as seqüências convergentes $\{\xi_n\}$, onde $\xi_n \in T(t_n)E$, $t_n \to +\infty$. $\omega_B(E) \subset \omega(E)$ e $\omega_B(E) = \omega(E)$ se $E$ é limitado. Portanto denotamos $\omega_B(B) = \omega(B)$ se $B \in B(X)$.*

**Definição 3.16** *Sejam $A, E \in P(X)$. Dizemos que $A$ **atrai** $E$ se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\tau = \tau(\varepsilon, E) \geq 0$ tal que $T(t)E \subset O_\varepsilon(A)$ para todo $t \geq \tau$, ou equivalentemente, dist$(T(t)E, A) \to 0$ quando $t \to +\infty$.*

**Definição 3.17**

*(a) O subconjunto $A$ é um **B-atrator global** se ele atrai todos os subconjuntos limitados de $X$.*

*(b) O subconjunto $A$ é um **atrator global de pontos** se ele atrai todos os pontos de $X$.*

**Definição 3.18** *O semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ é **eventualmente limitado** se para qualquer $B \in B(X)$ exite $\tau = \tau(B) \geq 0$ tal que $\gamma_\tau^+(B) \in B(X)$.*

**Definição 3.19**

*(a) $\mathcal{G}$ é **limitado dissipativo ou B-dissipativo** se existe um B-atrator global limitado para $\mathcal{G}$.*

*(b) $\mathcal{G}$ é **ponto dissipativo** se existe um atrator global de pontos limitado para $\mathcal{G}$.*

*(c) Dizemos que $\mathcal{G}$ é **$\varphi$-dissipativo** se existe um conjunto limitado $B_0$ tal que, para qualquer $\varphi \in \mathcal{G}$, $\varphi(t) \in B_0$ para todo $t$ suficientemente grande.*

**Observação 3.20** *Limitado dissipativo $\Rightarrow$ ponto dissipativo $\Rightarrow$ $\varphi$-dissipativo. (**$\varphi$-dissipatividade** é chamada **ponto dissipatividade** em [3] ).*

**Definição 3.21** *$\mathcal{G}$ é **compacto** se, para qualquer seqüência $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{G}$ com $\{\varphi_j(0)\}$ é limitado, existe uma subseqüência $\{\varphi_{j_k}\} \subset \{\varphi_j\}$ tal que $\{\varphi_{j_k}(t)\}$ é convergente para cada $t > 0$.*

**Definição 3.22** *$\mathcal{G}$ é **assintóticamente compacto** se, para qualquer seqüência $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{G}$ com $\{\varphi_j(0)\} \in B(X)$, e para qualquer seqüência $\{t_j\}$, $t_j \to +\infty$, a seqüência $\{\varphi_j(t_j)\}$ possui uma subseqüência convergente; (Ou equivalentemente, para qualquer $B \in B(X)$, cada seqüência $\{\xi_n\}$, com $\xi_n \in T(t_n)B$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, e $t_n \to +\infty$, contém uma subseqüência convergente).*

**Definição 3.23** *$\mathcal{G}$ é **condicionalmente assintóticamente compacto** se, para qualquer $B \in B(X)$ tal que $\gamma^+_{\tau(B)}(B) \in B(X)$ para algum $\tau(B) \geq 0$, cada seqüência $\{\xi_n\}$, com $\xi_n \in T(t_n)B$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, e $t_n \to +\infty$, contém uma subseqüência convergente. (Em [32], esta condição é chamada **assintóticamente semicompacto superior**, e em [4] de classe AK).*

**Lema 3.24** *Seja $\mathcal{G}$ assintóticamente compacto. Se $B \in BC(X)$ é negativamente invariante, então $B$ é compacto.*

A demonstração do lema é trivial.

**Proposição 3.25** *[3]*

*(a) Se $\mathcal{G}$ é assintóticamente compacto, então $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado.*

*(b) Se $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado e compacto, então $\mathcal{G}$ é assintóticamente compacto.*

**Proposição 3.26** *[10] $\mathcal{G}$ é assintóticamente compacto se, e somente se, $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado e condicionalmente assintóticamente compacto.*

### 3.1.2 Atratores para $\mathcal{G}$

Nesta seção damos condições no semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ para que $\omega(B)$ atraia $B$ para todo $B \in B(X)$, e provamos que estas condições implicam que $\overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)}$ é o único atrator global de pontos fechado minimal e $\overline{\bigcup_{B \in B(X)} \omega(B)}$ é o único B-atrator global fechado minimal. Em ordem para fazer isto, o seguinte lema será essencial.

**Lema 3.27** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e seja $F \in C(X)$. Se $F$ atrai um subconjunto $A \in P(X)$, então $\omega_B(A) \subset \omega(A) \subset F$. Se $\omega(A)$ atrai $A$, então ele será* *o único conjunto minimal fechado que atrai $A$. Também, para qualquer $A \in P(X)$ e para qualquer $\tau \geq 0$, temos $\omega(\gamma_\tau^+(A)) = \omega(A)$.*

**Teorema 3.28** *(i) Se $F \subset X$ é um atrator global de pontos fechado, então $\overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)} \subset F$. Em particular, se $\overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$ é um atrator global de pontos, então ele será o único atrator global de pontos fechado minimal $\widehat{M}$.*

*(ii) Se para cada $x \in X$, $\omega(x)$ atrai $x$, então $\mathcal{G}$ possui o único atrator global de pontos fechado minimal $\widehat{M}$ e $\widehat{M} = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$.*

**Teorema 3.29** *(i) Se $F \subset X$ é um $B$-atrator global fechado, então $\overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)} \subset F$, em particular, se $\overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)}$ é um $B$-atrator global, então ele será o único $B$-attractor global fechado minimal $M$.*

*(ii) Se para cada $B \in B(X)$, $\omega(B)$ atrai $B$, então $\mathcal{G}$ possui o único $B$-attractor global fechado minimal $M$ e*

$$M = \overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)}.$$

**Lema 3.30** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e $K \in K(X)$. Se $K$ atrai $A \in P(X)$, então cada seqüência $\{\xi_n\}$, com $\xi_n \in T(t_n)A$ e $t_n \to +\infty$, contém uma subseqüência que converge para algum ponto de $K$.*

Os quatro resultados acima podem ser provados usando os mesmos argumentos dos resultados análogos no caso únivoco (veja [31]). Somente observamos que no contexto multívoco os conjuntos $\omega$-limites não são necessariamente positivamente invariantes. A próxima proposição segue o Lema 3.1.1 [24], e pode ser facilmente provada usando os argumentos de Ball como está feito no Lema 3.4 (i), [3].

**Proposição 3.31** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e $A \in P(X)$ tal que $\omega(A)$ é um conjunto não-vazio compacto que atrai $A$. Então $\omega(A)$ é quasi-invariante e portanto negativamente invariante. O mesmo é válido para $\omega_B(A)$ se $\omega_B(A)$ é um conjunto não-vazio compacto que atrai $A$.*

O próximo lema estabelece a propriedade essencial de compacidade que precisamos para obter boas condições nos conjuntos $\omega$-limites. Sua demonstração é evidente.

**Lema 3.32** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e $A \in P(X)$. Se cada seqüência $\{\xi_n\}$, com $\xi_n \in T(t_n)A$ e $t_n \to +\infty$, contém uma subseqüência convergente em $X$, então $\omega(A)$ é o conjunto não-vazio minimal fechado que atrai $A$ e também, $\omega(A)$ é compacto e quasi-invariante.*

Pelos Lemas 3.30 e 3.32, obtemos imediatamente os seguintes dois resultados:

**Teorema 3.33** *$\omega(A)$ é um conjunto não-vazio quasi-invariante e compacto que atrai $A$ se, e somente se, cada seqüência $\{\xi_n\}$, com $\xi_n \in T(t_n)A$ e $t_n \to +\infty$, contém uma subseqüência convergente em $X$.*

**Teorema 3.34** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e $K \in K(X)$. Se $K$ atrai $A \in P(X)$, então $\omega(A)$ é um conjunto não-vazio minimal fechado que atrai $A$, e $\omega(A)$ é compacto e quasi-invariante.*

**Proposição 3.35** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e seja $A \in P(X)$ tal que $\overline{\gamma^+(A)}$ é compacto. Então $\omega(A)$ é um conjunto não-vazio compacto que atrai $A$ e $\omega(A)$ é quasi-invariante.*

**Demonstração:** Seja $\{x_n\} \subset A$. Por $(H_1)$ existe $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{G}$ tal que $\varphi_n(0) = x_n$. Considere a seqüência $t_n \to +\infty$ e a seqüência $\{\varphi_n(t_n)\}$. Então $\{\varphi_n(t_n)\}$ possui uma subseqüência convergente $\varphi_{n_k}(t_{n_k}) \to y \in \omega(A)$. Portanto $\omega(A) \neq \emptyset$. Visto que $\omega(A) \subset \overline{\gamma^+(A)}$ segue que $\omega(A)$ é compacto. Também, temos que $\omega(A)$ atrai $A$. Suponhamos que não, então existe $\varepsilon_0 > 0$ e seqüências $t_j \to \infty$, $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{G}$ com $\varphi_j(0) \in A$ tal que $\varphi_j(t_j) \notin O_{\varepsilon_0}(\omega(A))$, o que é uma contradição. Portanto, segue da Proposição 3.31 que $\omega(A)$ é quasi-invariante. ∎

**Lema 3.36** *[3] Seja $\mathcal{G}$ assintóticamente compacto.*

*(i) Seja $B \in B(X)$. Então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante, e é o conjunto minimal fechado que atrai $B$. Se $T(t_0)\omega(B) \subset B$ para algum $t_0 \geq 0$, então $\omega(B)$ é invariante.*

*(ii) Se $\varphi \in \mathcal{G}$ então $\omega(\varphi)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante. Também, temos* $\lim_{t\to+\infty} d(\varphi(t), \omega(\varphi)) = 0$.

*(iii) Se $\psi$ é uma órbita completa limita então $\alpha(\psi)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante, e* $\lim_{t\to-\infty} d(\psi(t), \alpha(\psi)) = 0$.

**Teorema 3.37** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado condicionalmente assintóticamente compacto e $A \in P(X)$. Se existe $\tau \geq 0$ tal que $\gamma_\tau^+(A) \in B(X)$, então $\omega(A)$ é um conjunto não-vazio, compacto, quasi-invariante e $\omega(A)$ é o conjunto minimal fechado que atrai $A$.*

**Demonstração:** Considere uma seqüência arbitrária $\{\xi_n\}$ com $\xi_n \in T(t_n)A$ e $t_n \to +\infty$. Podemos escolher uma subseqüência $t_{n_k} \to +\infty$ satisfazendo $t_{n_k} \geq \tau$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Temos que $\gamma_\tau^+(\gamma_\tau^+(A)) \in B(X)$ e
$T(t_{n_k})A = T(t_{n_k} - \tau)T(\tau)A$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Visto que $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintóticamente compacto e $\xi_{n_k} \in T(t_{n_k} - \tau)\gamma_\tau^+(A)$, obtemos que $\{\xi_{n_k}\}$ tem uma subseqüência convergente em $X$. Então, segue do Lema 3.32 que $\omega(A)$ é um conjunto não-vazio minimal fechado que atrai $A$, e $\omega(A)$ é compacto e quasi-invariante. ■

O próximo lema motiva a definição de outra propriedade de compacidade.

**Lema 3.38** *[31] Seja $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ uma seqüência decrescente de conjuntos em um espaço métrico completo $X$ ($L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_n \supset \ldots$), satisfazendo a seguinte condição: Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um conjunto compacto $K_n \subset X$ e um número $\varepsilon_n > 0$ tal que*

$$L_n \subset O_{\varepsilon_n}(K_n) \quad \textit{and} \quad \varepsilon_n \to 0 \ \textit{ as } n \to +\infty.$$

*Então para cada $y_n \in L_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ dado, a seqüência $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ contém uma subseqüência convergente.*

**Definição 3.39** *Dizemos que um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ possui* ***B-ACP (B-asymptotically compact property)*** *se para qualquer $B \in B(X)$ tal que $\gamma^+_{t_1(B)}(B)$ $\in B(X)$ para um certo $t_1(B) \geq 0$, existe um tempo $t_2(B) \geq t_1(B)$ tal que para qualquer $t \geq t_2(B)$, existem um conjunto compacto $K(B,t) \subset X$ e $\varepsilon(B,t) > 0$ satisfazendo*

$$T(t)B \subset O_{\varepsilon(B,t)}(K(B,t)) \quad e \quad \varepsilon(B,t) \to 0 \ \ \text{quando } t \to +\infty.$$

Usando $(H_3)$, Lemas 3.38, 3.32, 3.27, e com os mesmos argumentos podemos estender o Teorema 4.12 em [31] para o caso multívoco:

**Teorema 3.40** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado com B-ACP e $A \in P(X)$. Se existe $\tau \geq 0$ tal que $\gamma^+_\tau(A) \in B(X)$, então $\omega(A)$ é um conjunto não-vazio, compacto, quasi-invariante e ele é o minimal fechado que atrai $A$.*

Assim, temos como uma conseqüência do Teorema 3.28 (ii), Teorema 3.29 (ii) e Teorema 3.40 o seguinte resultado:

**Teorema 3.41** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado eventualmente limitado com B-ACP. Então $\mathcal{G}$ possui o único atrator global de pontos fechado minimal $\widehat{M}$ e $\mathcal{G}$ possui o único B-atrator global fechado minimal $M$. Também, temos*

$$\widehat{M} = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)}, \qquad M = \overline{\bigcup_{B \in B(X)} \omega(B)}.$$

**Observação 3.42** *Percebe-se que na literatura o objetivo final tem sido sempre encontrar o $B-$atrator global maximal compacto invariante $\mathcal{A}$. Mas note que os teoremas 3.28, 3.29 e 3.41 são interessantes por si só, porque sempre que existir o $B-$atrator global maximal compacto invariante $\mathcal{A}$, ele coincidirá com $M$, o que nos garante isto é o seguinte*

**Lema 3.43** *[32] Seja $B \in B(X)$ um conjunto negativamente invariante. Se $Z$ é um B-atrator global, então $B \subset \overline{Z}$.*

Algumas outras classes de semifluxos generalizados, inspirado na Teoria de Semigrupos, serão agora introduzidas e faremos uma comparação entre elas.

**Definição 3.44** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado.*

*(a) Dizemos que $\mathcal{G}$ é de* ***classe*** *$\mathcal{K}^*$ se $T(t) : X \to P(X)$ é compacto para algum $t_1 > 0$, i.e., para cada $B \in B(X)$, sua imagem $T(t_1)B$ é relativamente compacto em $X$.*

*(b) Dizemos que $\mathcal{G}$ é de* ***classe B-**$\mathcal{K}$ *se para cada $B \in B(X)$, existe $t_1 = t_1(B) \geq 0$ tal que $T(t)B$ é relativamente compacto para cada $t \geq t_1$.*

*(c) $\mathcal{G}$ é chamado* ***assintóticamente suave*** *se, para qualquer conjunto não vazio, fechado, limitado e positivamente invariante $B \subset X$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ tal que $J$ atrai $B$. (Ball, [4], introduziu esta definição, mas não tem a condição restritiva "para conjuntos fechados").*

*(d) Dizemos que $\mathcal{G}$ é* ***uniformemente compacto para t grande*** *se para cada $B \in B(X)$ existe um $t(B) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t(B)}B$ é relativamente compacto em $X$.*

**Teorema 3.45** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado, então*

*(i) $\mathcal{G}$ é de classe $\mathcal{K}^*$ $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ é de classe B-$\mathcal{K}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintóticamente compacto.*

*(ii) $\mathcal{G}$ possui B-ACP $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintóticamente compacto.*

*(iii) $\mathcal{G}$ possui B-ACP $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ é assintóticamente suave.*

*(iv) $\mathcal{G}$ uniformemente compacto para t grande $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado e ele é de classe B-$\mathcal{K}$.*

*(v) $\mathcal{G}$ é assintóticamente compacto $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ eventualmente limitado.*

*(vi) $\mathcal{G}$ compacto e eventualmente limitado $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ é assintóticamente compacto.*

*(vii) $\mathcal{G}$ é assintóticamente compacto $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintóticamente compacto e eventualmente limitado.*

**Observação 3.46** *É interessante observar que se na definição de $\mathcal{G}$ ser assintóticamente suave tirassemos a condição "conjunto fechado", então teríamos que vale* *a volta em (iii), isto é, $\mathcal{G}$ assintóticamente suave implicaria que $\mathcal{G}$ possui B-ACP (veja [4]). Mais adiante, na seção 3.1.3 veremos que se o semigrupo multívoco "se comportar como um semigrupo para tempo grande", então teremos que vale a volta em (iii).*

**Lema 3.47** *[3] Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado $\varphi$-dissipativo e eventualmente limitado. Então existe um conjunto limitado $B_1$ tal que dado qualquer compacto $K \subset X$ existe $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0,\ t_1 = t_1(K) > 0$, tal que $T(t)O_\varepsilon(K) \subset B_1$ para todo $t \geq t_1$.*

**Observação 3.48** *Segue como um corolário da demonstração do Lema 3.5 em [3]: Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado eventualmente limitado. Se existe um conjunto limitado $B_0$ tal que, para qualquer $\varphi \in \mathcal{G}$ e $\varepsilon > 0$, $\varphi(t) \in O_\varepsilon(B_0)$ para todo $t$ suficientemente grande, então do fato de ser eventualmente limitado sabemos que para cada $\delta > 0$ existe $\tau(B_0, \delta) \geq 0$ tal que $B_1 \doteq \gamma^+_{\tau(B_0,\delta)}(O_\delta(B_0)) \in B(X)$, e além disso para cada conjunto compacto $K \subset X$, existe $\varepsilon = \varepsilon(K, \delta) > 0$ e $t_1 = t_1(K, \delta) \geq 0$ tal que $T(t)O_\varepsilon(K) \subset B_1$ para todo $t \geq t_1$.*

*Este resultado aparece na Teoria de Semigrupos, [29], [31], e sua demonstração usa a continuidade de cada operador $T(t)$. Uma vez que admitimos que $T(t)$ é um operador multívoco ele perde a continuidade, mas os semigrupos multívocos mantém a propriedade essencial de atração.*

O Lema 3.47 nos diz que se $\mathcal{G}$ é $\varphi$-dissipativo e eventualmente limitado, então existe um conjunto limitado $B_1$ que absorve vizinhanças de compactos. Se além disso $\mathcal{G}$ possuir B-ACP, então existe um conjunto limitado que absorve conjuntos limitados. Veja a próxima proposição.

**Proposição 3.49** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado eventualmente limitado e suponha que $\mathcal{G}$ é $\varphi$-dissipativo. Se $\mathcal{G}$ possui B-ACP, ou equivalentemente, se $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintóticamente compacto, então $\mathcal{G}$ possui um conjunto limitado que absorve todos os conjuntos limitados. Portanto, em particular $\mathcal{G}$ é B-dissipativo.*

**Demonstração:** Seja $B_1$ como na Observação 3.48.

Afirmação: $B_1$ absorve todos os conjuntos limitados de X. De fato, como $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado, para cada $B \in B(X)$ existe um $t(B) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t(B)}(B) \in B(X)$. Logo, pelo Teorema 3.40, obtemos que $\omega(B)$ é um conjunto não vazio compacto que atrai $B$. Logo existem $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)O_\varepsilon(\omega(B)) \subset B_1$ e $T(t)B \subset O_\varepsilon(\omega(B))$ para todo $t \geq t_0$. ■

**Teorema 3.50** *[3] Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado. Se $\mathcal{G}$ possui um B-atrator global compacto invariante, então $\mathcal{G}$ é $\varphi$-dissipativo e assintóticamente compacto. Reciprocamente, se $\mathcal{G}$ é $\varphi$-dissipativo e assintótiticamente compacto, então $\mathcal{G}$ possui um B-atrator global compacto invariante $\mathcal{A}$. O B-atrator global $\mathcal{A}$ é único e é dado por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in B(X)} \omega(B) = \omega_B(B_1) = \omega_B(X),$$

*onde $B_1 \in B(X)$ é como no Lema 3.47. Além disso, $\mathcal{A}$ é o subconjunto maximal compacto invariante de X, e $\mathcal{A}$ é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados.*

**Teorema 3.51** *[32] Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado. Se $\mathcal{G}$ tem um B-atrator global compacto, então $\mathcal{G}$ tem um B-atrator global compacto invariante o qual é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados.*

Agora daremos mais condições equivalentes para a existência do B-atrator global maximal compacto invariante.

**Teorema 3.52** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado. As seguintes sentenças são equivalentes:*

*(I) $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintóticamente compacto e B-dissipativo;*

*(II) $\mathcal{G}$ possui B-ACP e é B-dissipativo;*

*(III) $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintóticamente compacto, eventualmente limitado e ponto dissipativo;*

*(IV) $\mathcal{G}$ possui B-ACP, é eventualmente limitado e ponto dissipativo;*

*(V) $\mathcal{G}$ possui B-ACP, é eventualmente limitado e $\varphi$-dissipativo;*

*(VI) $\mathcal{G}$ é assintóticamente compacto e $\varphi$-dissipativo;*

*(VII) $\mathcal{G}$ possui um B-atrator global fechado minimal não-vazio o qual é o subconjunto maximal compacto invariante de $X$;*

*(VIII) $\mathcal{G}$ possui um B-atrator global compacto não-vazio.*

**Demonstração:** É fácil ver que $\mathcal{G}$ B-dissipativo implica $\mathcal{G}$ eventualmente limitado e ponto dissipativo; e ponto dissipativo implica $\varphi-$dissipativo. Pelo Teorema 3.45 (ii) $\mathcal{G}$ possui B-ACP $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintóticamente compacto. Novamente pelo Teorema 3.45 (vii) e (ii) $\mathcal{G}$ é assintóticamente compacto $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintóticamente compacto e eventualmente limitado $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ possui B-ACP e $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado. Assim, temos $(I) \Leftrightarrow (II) \Rightarrow (III) \Leftrightarrow (IV) \Rightarrow (V) \Leftrightarrow (VI)$. Pelo Teorema 3.50 $(VI) \Leftrightarrow (VII)$. Trivialmente $(VII) \Rightarrow (VIII)$. Finalmente, o Lema 3.30 garante que $(VIII) \Rightarrow (I)$. ■

**Observação 3.53** *Se $\mathcal{G}$ é assintóticamente compacto, ou equivalentemente, se $\mathcal{G}$ possui B-ACP e é eventualmente limitado, então:*

*(a) $\mathcal{G}$ é ponto dissipativo $\Leftrightarrow \bigcup_{x\in X}\omega(x) \in B(X)$.*

*(b) $\mathcal{G}$ é B-dissipativo $\Leftrightarrow \bigcup_{B\in B(X)}\omega(B) \in B(X)$.*

**Observação 3.54** *[31] Se para cada $B \in B(X)$, $\omega(B) = \bigcup_{x\in B}\omega(x)$, e $\omega(B)$ atrai $B$, então $\widehat{M} = M$.*

**Teorema 3.55** *Seja $\mathcal{G}$ assintóticamente compacto, ou equivalentemente, $\mathcal{G}$ possui B-ACP e é eventualmente limitado. Sejam $\widehat{M}$ e $M$ como no Teorema 3.41. Se $\widehat{M} \in B(X)$, então para cada $\delta > 0$, $M = \omega(O_\delta(\widehat{M}))$. Além disso, $M$ é o subconjunto maximal compacto invariante de $X$.*

**Demonstração:** Pela Observação 3.48 e Teorema 3.50, $B_1 \doteq \gamma^+_{\tau(\widehat{M},\delta)}(O_\delta(\widehat{M})) \in B(X)$, e $\mathcal{A} \doteq \omega_B(B_1) = \bigcup_{B\in B(X)}\omega(B)$ é um B-atrator global compacto invariante.

Além disso, $\mathcal{A}$ é o subconjunto maximal compacto invariante de X, e $\mathcal{A}$ é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados. Portanto $M = \mathcal{A}$ e temos

$$M = \overline{\bigcup_{B \in B(X)} \omega(B)} = \bigcup_{B \in B(X)} \omega(B) = \omega(B_1) = \omega\Big(\gamma^+_{\tau(\widehat{M},\delta)}(O_\delta(\widehat{M}))\Big) = \omega(O_\delta(\widehat{M})).$$

■

### 3.1.3 Eventual Semigrupos

Existe uma classe de semigrupos multívocos que se comportam, para valores de $t$ grandes, como um semigrupo unívoco. Isto ocorre quando lidamos com problemas sem unicidade de solução mas que possuem propriedades regularizantes fortes. Esta classe foi introduzida em [14], onde lidam com problemas a respeito do $p$-laplaciano, $p > 2$. Quando se considera problemas parabólicos perturbados por operadores não globalmente Lipschitz, a unicidade não é uma questão trivial mas, sob condições razoáveis, estes problemas possuem regularidade suficiente e propriedades de absorção para que se consigua unicidade após um certo tempo ter ocorrido. Abaixo descreveremos brevemente estas idéias, já colocando-as no contexto de semifluxos generalizados.

**Definição 3.56** *Dizemos que um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ define um* ***eventual semigrupo*** *se existe um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ tal que para qualquer $B \in B(X)$, existe $\tau_0 = \tau_0(B) > 0$ tal que, se $\tau \geq \tau_0$ e $x_\tau \in T(\tau)B$ então para cada $t \geq 0$, $T(t)x_\tau = S(t)x_\tau$, onde $T(t)$ é o semigrupo multívoco definido por $\mathcal{G}$.*

**Teorema 3.57** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado que define um eventual semigrupo associado com o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e seja $B_0 \in B(X)$ tal que $\gamma^+_{\tau_1}(B_0) = \bigcup_{t \geq \tau_1} T(t)B_0 \in B(X)$ para algum $\tau_1 = \tau_1(B_0) \geq 0$. Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é de classe $\mathcal{K}$ ou de classe $\mathcal{AK}$ ou de classe B-$\mathcal{AK}$ ou se ele possui B-ACP (para estas definições veja [31]), então*

*(i) $\omega(B_0)$ é não vazio, compacto e invariante por $\{S(t)\}_{t\geq 0}$;*

*(ii)* $\omega(B_0)$ *atrai* $B_0$;

*(iii)* $\omega(B_0)$ *é o conjunto minimal fechado que atrai* $B_0$;

**Demonstração:** O caso onde $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é de classe $\mathcal{K}$ está feito no Teorema 2.1 em [14] onde é usado o Teorema 2.1, [29]. Para os outros casos basta repetir o mesmo raciocínio feito em [14], e o resultado segue do Teorema 4.13, [31], e Proposition 3.4, [29] para $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe $\mathcal{AK}$ e classe B-$\mathcal{AK}$. Teorema 4.12 em [31] é usado se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ possui B-ACP. ∎

Como uma conseqüência temos

**Teorema 3.58** *Seja* $\mathcal{G}$ *um semifluxo generalizado B-dissipativo que define um eventual semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *associado com o semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$*. Suponhamos que para qualquer* $B \in B(X)$, $\omega(B)$ *é um conjunto invariante sob* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$*. Se o semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é de classe* $\mathcal{K}$ *ou de classe* $\mathcal{AK}$ *ou de classe B-*$\mathcal{AK}$ *ou se ele possui B-ACP, então* $\mathcal{G}$ *possui um B-atrator global maximal compacto invariante.*

**Observação 3.59** *Como um complemento do Teorema 3.45 (iii) observamos que se* $\mathcal{G}$ *define um eventual semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *associado com um semigrupo assintóticamente suave, então* $\mathcal{G}$ *possui B-ACP.*

## 3.2 Caracterizações para o B-Atrator Global Maximal Compacto Invariante

Nesta seção obtemos algumas caracterizações para o B-atrator global maximal compacto invariante. Em particular provamos que, até mesmo no caso multívoco, este conjunto pode ser descrito em termos do conjunto instável dos estados de equilíbrio, se existe uma função de Lyapunov para o sistema. Também descrevemos este atrator como união das órbitas completas limitadas (ou órbitas completas precompactas) como está feito no caso unívoco.

**Teorema 3.60** *Seja $\mathcal{G}$ assintóticamente compacto e $\varphi$-dissipativo. Então o B-atrator global maximal compacto invariante pode ser caracterizado por:*

*(i)* $\mathcal{A} = \bigcup_{B \in B(X)} \omega(B)$ ;

*(ii)* $\mathcal{A} = \omega_B(X)$ ;

*(iii)* $\mathcal{A} = \omega_B(B_1)$, *onde* $B_1 \in B(X)$ *é o conjunto do Lema 3.47;*

*(iv)* $\mathcal{A} = \bigcup_{K \in K(X)} \omega(K)$ ;

*(v)* $\mathcal{A}$ *é a união de todas as órbitas completas limitadas em X;*

*(vi)* $\mathcal{A}$ *é a união de todas as órbitas completas precompactas em X;*

*(vii)* $\mathcal{A}$ *é o conjunto maximal limitado invariante em X.*

**Demonstração:** Para as partes (i), (ii) e (iii) veja Teorema 3.50.

(iv): Visto que $\mathcal{A}$ é compacto e invariante, $\omega(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Portanto, temos

$$\bigcup_{K \in K(X)} \omega(K) \subset \bigcup_{B \in B(X)} \omega(B) = \mathcal{A} = \omega(\mathcal{A}) \subset \bigcup_{K \in K(X)} \omega(K).$$

Portanto $\mathcal{A} = \bigcup_{K \in K(X)} \omega(K)$.

(v) e (vi): Visto que $\mathcal{A}$ é invariante, então ele é quasi-invariante. Assim, dado $x \in \mathcal{A}$, existe uma órbita completa $\psi$ através de $x$ (isto é, $\psi(0) = x$) tal que $\psi(t) \in \mathcal{A}$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. Considere $\gamma(\psi) = \mathrm{Im}\ \psi = \{\psi(t), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{A} \in B(X)$. Então $\gamma(\psi)$ é limitado. Além disso note que, $\gamma(\psi)$ é precompacto, uma vez que $\overline{\gamma(\psi)} \subset \mathcal{A}$. Portanto podemos concluir que $\mathcal{A}$ está incluso na união de todas as órbitas completas limitadas em $X$ e $\mathcal{A}$ está incluso na união de todas as órbitas completas precompactas em $X$.

Por outro lado, se $x \in X$ e $\psi_x$ é uma órbita completa limitada (ou precompacta) em $X$ através de $x$, considere $\gamma(\psi_x) = \mathrm{Im}\ \psi_x = \{\psi_x(t), t \in \mathbb{R}\}$. Visto que $\gamma(\psi_x)$ é negativamente invariante, temos

$$\gamma(\psi_x) \subset \overline{\gamma(\psi_x)} \subset \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\gamma(\psi_x)} \subset \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\gamma_\tau^+(\gamma(\psi_x))} = \omega(\gamma(\psi_x)) \subset \bigcup_{B \in B(X)} \omega(B) = \mathcal{A}.$$

Portanto, $\bigcup_{x \in X} \gamma(\psi_x) \subset \mathcal{A}$.

(vii) Se $D \subset X$ é um subconjunto limitado e invariante de $X$, então

$$D \subset \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(D)} = \omega(D) \subset \bigcup_{B \in B(X)} \omega(B) = \mathcal{A}.$$

■

**Definição 3.61** *[3] Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado. A aplicação $V : X \to \mathbb{R}$ é uma **função de Lyapunov para** $\mathcal{G}$ se*

*(i) $V$ é contínua;*

*(ii) $V(\varphi(t)) \leq V(\varphi(s))$ sempre que $\varphi \in \mathcal{G}$ e $t \geq s \geq 0$;*

*(iii) Se $V(\psi(t)) =$ constante, para alguma órbita completa $\psi$ e todo $t \in \mathbb{R}$, então $\psi$ é estacionária.*

**Lema 3.62** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado, e $x \in X$ tal que existe uma órbita completa $\psi_x$ através de $x$ e um conjunto compacto $K$ tal que $\{\psi_x(t); t \leq 0\} \subset K$, então $\alpha(\psi_x)$ é quasi-invariante.*

**Demonstração:** Seja $z \in \alpha(\psi_x)$. Então existe uma seqüência $t_j \to -\infty$ (podemos supor sem perda de generalidade que $\ldots \leq t_2 \leq t_1 \leq 0$) tal que $\psi_x(t_j) \to z$. Por definição de órbita completa temos $\psi_x^{t_j} \in \mathcal{G}$ e $\psi_x^{t_j}(0) \to z$. Daí por $(H_4)$, existe uma subseqüência, a qual não renomearemos, e uma solução $g_0 \in \mathcal{G}$ com $g_0(0) = z$, tal que $\psi_x^{t_j}(t) \to g_0(t)$, $\forall\, t \geq 0$. Claramente $g_0(t) \in \alpha(\psi_x)$, $\forall\, t \geq 0$. Agora consideremos $\tau_j \doteq t_j - 1$ ($\tau_j \leq 0$). Visto que $\psi_x^{t_j-1}(0) = \psi_x(t_j - 1) = \psi_x(\tau_j) \in K \in K(X)$, temos (após extrair uma outra subseqüência) que $\psi_x^{t_j-1}(0) = \psi_x(\tau_j) \to y$. Por $(H_4)$, existe uma subseqüência, a qual não renomearemos, e uma solução $g_1 \in \mathcal{G}$ com $g_1(0) = y$ tal que $\psi_x^{t_j-1}(t) \to g_1(t)$, $\forall\, t \geq 0$. Claramente $g_1(t) \in \alpha(\psi_x)$, $\forall\, t \geq 0$. Note que $g_1^1 = g_0$, visto que $g_1^1(t) = g_1(t+1) = \lim_{j\to+\infty} \psi_x^{t_j-1}(t+1) = \lim_{j\to+\infty} \psi_x^{t_j}(t) = g_0(t)$, $\forall\, t \geq 0$. Procedendo assim indutivamente, encontramos para cada $r = 1, 2, \ldots,$ uma solução $g_r \in \mathcal{G}$ tal que $g_r^1 = g_{r-1}$ e $g_r(t) \in \alpha(\psi_x)$, $\forall\ t \geq 0$. Dado $t \in \mathbb{R}$, definimos $g(t)$ como o valor comum de $g_r(t + r)$ para $r \geq -t$. Então $g$ é uma órbita completa com $g(0) = g_0(0) = z$. De fato, dado $s \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$, temos

$g^s(t) = g(t+s) = g_r(t+s+r) = g_r^{s+r}(t)$, onde $r \doteq \lceil -s \rceil$ é o menor valor inteiro positivo o qual é maior ou igual a $-s$. (note que $s+r \geq 0$ e $-(t+s) \leq -s \leq r$). Como $g_r \in \mathcal{G}$, por $(H_2)$, $g_r^{s+r} \in \mathcal{G}$. Portanto $g^s = g_r^{s+r} \in \mathcal{G}$. Assim $g$ é uma órbita completa com $g(0) = z$ e $g(t) \in \alpha(\psi_x)$, $\forall\, t \geq 0$. Portanto $\alpha(\psi_x)$ é quasi-invariante.

■

**Lema 3.63** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e suponha que existe uma função de Lyapunov $V : X \to \mathbb{R}$ para $\mathcal{G}$. Seja $x \in X$ tal que existe uma órbita completa $\psi_x$ através de $x$ e um conjunto compacto $K$ com $\{\psi_x(t); t \leq 0\} \subset K$. Então $\alpha(\psi_x) \subset Z(\mathcal{G})$.*

**Demonstração:** Seja $\{t_j\}$ uma seqüência tal que $t_j \to -\infty$ quando $j \to +\infty$ e $\ldots t_j < \ldots < t_2 < t_1 \leq 0$. Por hipótese existe uma subseqüência convergente $\{\psi_x(t_{j_\ell})\} \subset \{\psi_x(t_j)\}$. Pela Definition 3.61 (ii) obtemos que $\{V(\psi_x(t_{j_\ell}))\}$ é uma seqüência não decrescente. De fato, $t_{j_{\ell+1}} < t_{j_\ell}$ então $t_{j_\ell} = t_{j_{\ell+1}} + r,\ r > 0$. Assim $\psi_x(t_{j_\ell}) = \psi_x(t_{j_{\ell+1}} + r) = \psi_x^{t_{j_{\ell+1}}}(r)$ e $\psi_x^{t_{j_{\ell+1}}} \in \mathcal{G}$. Então

$$V(\psi_x(t_{j_\ell})) = V(\psi_x^{t_{j_{\ell+1}}}(r)) \leq V(\psi_x^{t_{j_{\ell+1}}}(0)) = V(\psi_x(t_{j_{\ell+1}})).$$

Portanto temos que

$\lim_{\ell \to +\infty} V(\psi_x(t_{j_\ell})) = d \doteq \sup\{V(\psi_x(t_{j_\ell})),\ \ell \in \mathbb{N}\}$,

e este limite não depende da seqüência $\{t_j\}$ escolhida.

Seja $y \in \alpha(\psi_x)$. Então $y = \lim_{j \to +\infty} \psi_x(t_j),\ t_j \to -\infty$. Logo $\lim_{\ell \to +\infty} V(\psi_x(t_{j_\ell})) = d$ e $\lim_{\ell \to +\infty} \psi_x(t_{j_\ell}) = y,\ t_{j_\ell} \to -\infty$. Também, temos $\lim_{\ell \to +\infty} V(\psi_x(t_{j_\ell})) = V(y)$. Pela unicidade do limite, $V(y) = d$. Sabemos do Lema 3.62 que $\alpha(\psi_x)$ é quasi-invariante. Então existe uma órbita completa $\widetilde{\psi}$ através de $y$ tal que $\widetilde{\psi}(t) \in \alpha(\psi_x)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Portanto $V(\widetilde{\psi}(t)) = d = V(y)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, isto é, $\widetilde{\psi}$ é uma solução estacionária e $y \in Z(\mathcal{G})$. ■

**Teorema 3.64** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado contínuo e suponhamos que existe uma função de Lyapunov $V : X \to \mathbb{R}$ para $\mathcal{G}$, e que $\mathcal{G}$ tem um B-atrator global maximal compacto invariante $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{A} = W^u(Z(\mathcal{G}))$ onde $W^u(Z(\mathcal{G}))$ é o conjunto* *instável de $Z(\mathcal{G})$ dado por $\{y \in X$; existe uma órbita completa $\varphi_y$ através de $y$ e $d(\varphi_y(-t), Z(\mathcal{G})) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$.*

**Demonstração:** Seja $x \in \mathcal{A}$. Visto que $\mathcal{A}$ é invariante existe uma órbita completa $\phi_x$ através de $x$ tal que $\phi_x(t) \in \mathcal{A}$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. Visto que $\mathcal{A}$ é compacto, temos pelo lema anterior que $\alpha(\phi_x) \subset Z(\mathcal{G})$. Também, temos que $\phi_x(-t) \to \alpha(\phi_x)$. De fato, $\lim_{t\to+\infty} d(\phi_x(-t), \alpha(\phi_x)) = 0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ existe $\tau_\varepsilon \geq 0$ tal que $\phi_x(-t) \in O_\varepsilon(\alpha(\phi_x)))$, $\forall\ t \geq \tau_\varepsilon$. Suponhamos, por contradição, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $k \in \mathbb{N}$, existe $t_k \geq k$ com $\phi_x(-t_k) \notin O_{\varepsilon_0}(\alpha(\phi_x))$. Uma vez que $\{\phi_x(-t_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é compacto, temos que $\{\phi_x(-t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ tem uma subseqüência convergente a qual converge a um ponto de $\alpha(\phi_x))$, o que é impossível. Portanto $\lim_{t\to+\infty} d(\phi_x(-t), \alpha(\phi_x)) = 0$. Portanto $x \in W^u(Z(\mathcal{G}))$ e $\mathcal{A} \subset W^u(Z(\mathcal{G}))$.

Por outro lado, seja $x \in W^u(Z(\mathcal{G}))$. Então existe uma órbita completa $\phi_x$ através de $x$ tal que $\phi_x(-t) \to Z(\mathcal{G})$. Uma vez que $Z(\mathcal{G}) \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é um B-atrator global, dado $\varepsilon_0 > 0$, existe $\tau_0 \geq 0$ tal que $T(t)x \subset O_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) \in B(X)$ and $\phi_x(-t) \in O_{\varepsilon_0}(\mathcal{A})$, $\forall\ t \geq \tau_0$. Visto que $\mathcal{G}$ é contínuo, temos $\gamma(\phi_x) \doteq \{\phi_x(t);\ t \in \mathbb{R}\} \in B(X)$, e portanto $\mathcal{A}$ atrai $\gamma(\phi_x)$. Visto que $\gamma(\phi_x)$ é negativamente invariante, dado $\varepsilon > 0$, $x \in O_\varepsilon(\mathcal{A})$. Portanto $x \in \mathcal{A}$ e $W^u(Z(\mathcal{G})) \subset \mathcal{A}$. ∎

## 3.3 O $\varphi-$Atrator Global

Nesta seção introduzimos um novo grupo de definições que chamaremos de "$\varphi$-conceitos", mais precisamente, adicionaremos o prefixo $\varphi$ as palavras atração, dissipatividade, limitação, etc, em ordem para indicar que não estamos supondo que o tempo em tais definições seja uniformemente escolhido em qualquer sentido. Um dos nossos principais resultados neste trabalho verifica que, se um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ é $\varphi$-assintóticamente compacto e possui uma função de Lyapunov, então existe um $\varphi$-atrator global fechado minimal $\widehat{N}$ para $\mathcal{G}$ e $\widehat{N}$ coincide com o conjunto das soluções estacionárias $\mathcal{G}$, veja Teorema 3.82.

**Definição 3.65** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e $A \in P(X)$. Definimos*

$$\omega_\varphi(A) \doteq \bigcup_{\varphi \in \mathcal{G}, \varphi(0) \in A} \omega(\varphi).$$

**Definição 3.66**

*(a) Sejam $A, M \in P(X)$. Dizemos que $A$ **$\varphi$-atrai** $M$ se para qualquer $\varepsilon > 0$ e $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in M$, existe um $t_0 = t_0(\varphi, \varepsilon) \geq 0$ tal que $\varphi(t) \in O_\varepsilon(A)$, $\forall\, t \geq t_0$. Dizemos que $A$ $\varphi$-atrai $x$ se $A$ $\varphi$-atrai $\{x\}$.*

*(b) Dizemos que $A$ é um **$\varphi$-atrator global** se $A$ $\varphi-$atrai todos os pontos $x \in X$.*

*(c) Dizemos que $\mathcal{G}$ é **eventualmente $\varphi$-limitado** se para qualquer $\varphi \in \mathcal{G}$, existe $t_0 = t_0(\varphi) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t_0}(\varphi) \in B(X)$.*

*(d) Dizemos que $\mathcal{G}$ é **$\varphi$-assintóticamente compacto** se, para qualquer $\varphi \in \mathcal{G}$ e para qualquer seqüência $t_j \to +\infty$, a seqüência $\{\varphi(t_j)\}$ tem uma subseqüência convergente em $X$.*

*(e) Dizemos que $\mathcal{G}$ é **$\varphi$-condicionalmente assintóticamente compacto** se para cada $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\gamma^+_{\tau_0}(\varphi) \in B(X)$ para algum $\tau_0 = \tau_0(\varphi) \geq 0$, cada seqüência $\{\varphi(t_n)\}$ com $t_n \to +\infty$, tem uma subseqüência convergente em $X$.*

**Observação 3.67** *Temos*

*(i) $\mathcal{G}$ é $\varphi$-dissipativo $\Leftrightarrow$ existe um $\varphi$-atrator global limitado para $\mathcal{G}$.*

*(ii) B-atração $\Rightarrow$ Ponto atração $\Rightarrow$ $\varphi$-atração.*

*(iii) $\mathcal{G}$ assintóticamente compacto $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ é $\varphi$-assintóticamente compacto.*

*(iv) $\mathcal{G}$ eventualmente limitado $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ é eventualmente $\varphi$-limitado.*

*(v) $\mathcal{G}$ é $\varphi$-assintóticamente compacto $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ é $\varphi$-condicionalmente assintóticamente compacto e eventualmente $\varphi$-limitado.*

**Lema 3.68** *Seja $F \in C(X)$. Se $F$ $\varphi$-atrai $A \in P(X)$, então $\omega(\varphi) \subset F$, para cada $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in A$, portanto $\overline{\omega_\varphi(A)} \subset F$. Em particular, se $\omega_\varphi(A)$ $\varphi$-atrai $A$, então $\overline{\omega_\varphi(A)}$ será o conjunto minimal fechado que $\varphi$-atrai $A$.*

**Demonstração:** Seja $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in A$. Visto que $F$ $\varphi$-atrai $A$, dado qualquer $k > 0$, existe $t_k = t_k(\varphi) \geq 0$ tal que $\varphi(t) \in O_{1/2k}(F)$, $\forall\, t \geq t_k$. Seja $z \in \omega(\varphi)$. Então

$z = \lim_{j\to+\infty}\varphi(t_j)$ com $t_j \to +\infty$. Podemos extrair uma subseqüência $t^k_{j_\ell}$ tal que $t^k_{j_\ell} \geq t_k$, $\forall\ \ell \in \mathbb{N}$, e $z = \lim_{\ell\to+\infty}\varphi(t^k_{j_\ell})$. Então, $z \in \bigcap_{k>0} O_{1/k}(F) = F$. Portanto $\omega(\varphi) \subset F$ e $\overline{\omega_\varphi(A)} \subset F$. ■

**Lema 3.69** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado, $A, M \in P(X)$, e $x \in X$. Então as seguintes sentenças são equivalentes:*

*1. $A$ $\varphi$-atrai $M$;*

*2. Para qualquer $\varepsilon > 0$, e $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in M$, existe um $t(\varphi,\varepsilon) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t(\varphi,\varepsilon)}(\varphi) \subset O_\varepsilon(A)$;*

*3. $\lim_{t\to+\infty} d(\varphi(t), A) = 0$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in M$.*

*4. Para qualquer $\tau \geq 0$, $A$ $\varphi$-atrai $\gamma^+_\tau(M)$.*

(Compare com o Lemma 4.9 em [31])

**Demonstração:** Pela definição de $A$ $\varphi$-atrair $M$, (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) são claras.

(1) $\Rightarrow$ (4) : Seja $\tau \geq 0$ e $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in \gamma^+_\tau(M)$. Então existe uma $\psi \in \mathcal{G}$ com $\psi(0) \in M$ tal que $\varphi(0) = \psi(t_0)$, para algum $t_0 \geq \tau$. Seja

$$\theta(\ell) \doteq \begin{cases} \psi(\ell) & \text{for } \ \ell \in [0, t_0] \\ \varphi(\ell - t_0) & \text{for } \ \ell \in (t_0, +\infty) \end{cases}$$

Por $(H_3)$, $\theta \in \mathcal{G}$ e $\theta(0) = \psi(0) \in M$. Pela hipótese, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $t(\theta,\varepsilon) \geq 0$ tal que $\theta(t) \in O_\varepsilon(A)$, $\forall\ t \geq t(\theta,\varepsilon)$. Seja $t_1 \doteq \max\{t_0, t(\theta,\varepsilon)\}$. Se $t > t_1 \geq t_0$, então existe $\ell_t > t_1$ ($\ell_t \doteq t_0 + t \geq t > t_1$) tal que $t = \ell_t - t_0$. Portanto $\varphi(t) = \theta(\ell_t) \in O_\varepsilon(A)$, $\forall\, t \geq t_1$. Portanto $A$ $\varphi$-atrai $\gamma^+_\tau(M)$.

(4) $\Rightarrow$ (1) : Suponhamos que $A$ $\varphi$-atrai $\gamma^+_\tau(M)$ para algum $\tau \geq 0$. Seja $\varepsilon > 0$ e seja $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in M$. Considere $\phi \doteq \varphi^\tau$. Por $(H_2)$, $\phi \in \mathcal{G}$ e temos $\phi(0) = \varphi(\tau) \in \gamma^+_\tau(M)$. Logo, por hipótese existe $t(\phi,\varepsilon) = t(\varphi,\varepsilon) \geq 0$ tal que $\phi(t) \in O_\varepsilon(A)$, $\forall\ t \geq t(\phi,\varepsilon)$. Se $t \geq t(\phi,\varepsilon) + \tau$, então existe $\ell_t \geq 0$ tal que $t = \ell_t + t(\phi,\varepsilon) + \tau$. Portanto $\varphi(t) = \varphi(\ell_t + t(\phi,\varepsilon) + \tau) = \phi(\ell_t + t(\phi,\varepsilon)) \in O_\varepsilon(A)$, $\forall\ t \geq t(\phi,\varepsilon) + \tau$. Portanto $A$ $\varphi$-atrai $M$. ■

**Observação 3.70** *Observe que, para provar que* (4) $\Rightarrow$ (1) *foi suficiente supor que* $A$ *$\varphi$-atrai* $\gamma_\tau^+(M)$ *para algum* $\tau \geq 0$.

**Lema 3.71** *Seja* $\mathcal{G}$ *um semifluxo generalizado. Então para qualquer* $A \neq \emptyset$ *e para qualquer* $\tau \geq 0$, *temos* $\omega_\varphi(\gamma_\tau^+(A)) = \omega_\varphi(A)$.

(Compare com o Lema 4.8 em [31])

**Demonstração:** Seja $\tau \geq 0$ arbitrário. Seja $y \in \omega_\varphi(A) = \bigcup_{\varphi\in\mathcal{G},\varphi(0)\in A} \omega(\varphi)$. Então $y \in \omega(\varphi)$ para alguma $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in A$. Então $y = \lim_{n\to+\infty} \varphi(t_n)$ com $t_n \to +\infty$. Podemos extrair uma subseqüência $\{t_{n_k}\}$ tal que $t_{n_k} \geq \tau$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Por $(H_2)$, $\phi \doteq \varphi^\tau \in \mathcal{G}$ e temos $\phi(0) = \varphi(\tau) \in \gamma_\tau^+(A)$. Daí, para cada $k \in \mathbb{N}$, considere $\ell_k \doteq t_{n_k} - \tau \geq 0$. Então,
$y = \lim_{k\to+\infty} \varphi(t_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} \varphi(\ell_k + \tau) = \lim_{k\to+\infty} \phi(\ell_k)$ e $\ell_k \to +\infty$. Portanto $y \in \omega(\phi) \subset \bigcup_{\varphi\in\mathcal{G},\varphi(0)\in\gamma_\tau^+(A)} \omega(\varphi) = \omega_\varphi(\gamma_\tau^+(A))$.

Por outro lado, se $z \in \omega_\varphi(\gamma_\tau^+(A))$, então $z \in \omega(\varphi)$ para algum $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in \gamma_\tau^+(A)$. Então existe uma $\psi \in \mathcal{G}$ com $\psi(0) \in A$ tal que $\varphi(0) = \psi(t_0)$, para algum $t_0 \geq \tau$. Seja

$$\theta(\ell) \doteq \begin{cases} \psi(\ell) & \text{se } \ \ell \in [0, t_0] \\ \varphi(\ell - t_0) & \text{se } \ \ell \in (t_0, +\infty) \end{cases}$$

Por $(H_3)$, $\theta \in \mathcal{G}$ e $\theta(0) = \psi(0) \in A$. Temos $z = \lim_{n\to+\infty} \varphi(t_n)$ com $t_n \to +\infty$. Podemos extrair uma subseqüência $\{t_{n_k}\}$ tal que $t_{n_k} \to +\infty$ e $t_{n_k} > 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Então, considerando $\ell_k \doteq t_{n_k} + t_0$, temos $\ell_k \to +\infty$ e $\ell_k > t_0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Logo $z = \lim_{k\to+\infty} \varphi(t_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} \varphi(\ell_k - t_0) = \lim_{k\to+\infty} \theta(\ell_k)$. Portanto $z \in \omega(\theta) \subset \bigcup_{\varphi\in\mathcal{G},\varphi(0)\in A} \omega(\varphi) = \omega_\varphi(A)$.

Portanto $\omega_\varphi(\gamma_\tau^+(A)) = \omega_\varphi(A)$. ∎

**Teorema 3.72** *(i) Se* $F \subset X$ *é um $\varphi$-atrator global fechado, então* $\overline{\bigcup_{x\in X} \omega_\varphi(x)} \subset F$. *Em particular, se* $\overline{\bigcup_{x\in X} \omega_\varphi(x)}$ *é um $\varphi$-atrator global, então ele será o único $\varphi$-atrator global fechado minimal* $\widehat{N}$.

*(ii) Se para cada $x \in X$, $\omega_\varphi(x)$ $\varphi$-atrai $x$, então $\mathcal{G}$ possui o único $\varphi$-atrator global fechado minimal $\widehat{N}$ e $\widehat{N} = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega_\varphi(x)} = \overline{\omega_\varphi(X)}$.*

**Demonstração:** (i) Visto que $F$ é um $\varphi$-atrator global fechado, ele $\varphi$-atrai cada $x \in X$. Logo, pelo Lema 3.68, $\omega_\varphi(x) \subset F$, $\forall\, x \in X$. Portanto
$\overline{\bigcup_{x \in X} \omega_\varphi(x)} \subset F$.

(ii) Seja $\xi \in X$. Visto que $\omega_\varphi(\xi)$ $\varphi$-atrai $\xi$, temos que $\overline{\bigcup_{x \in X} \omega_\varphi(x)}$ $\varphi$-atrai $\xi$. Portanto $\overline{\bigcup_{x \in X} \omega_\varphi(x)}$ é um $\varphi$-atrator global. Logo, por $(i)$, $\overline{\bigcup_{x \in X} \omega_\varphi(x)}$ é o único $\varphi$-atrator global fechado minimal $\widehat{N}$. ■

**Lema 3.73** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e $K \in K(X)$. Se $\varphi \in \mathcal{G}$ é tal que $d(\varphi(t), K) \to 0$ quando $t \to +\infty$, então cada seqüência $\{\varphi(t_n)\}$, com $t_n \to +\infty$, contém uma subseqüência convergente em $X$, e o limite pertence a $K$.*

A demonstração deste lema é trivial.

**Teorema 3.74** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e $A \in P(X)$. Se para cada $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in A$, cada seqüência $\{\varphi(t_n)\}$ com $t_n \to +\infty$ contém uma subseqüência convergente em $X$, então $\omega_\varphi(A)$ é um conjunto não-vazio, $\varphi$-atrai $A$ e $\omega_\varphi(A)$ é quasi-invariante. O conjunto $\overline{\omega_\varphi(A)}$ é o minimal fechado que $\varphi$-atrai $A$. Além disso, cada $\omega(\varphi)$ com $\varphi \in \mathcal{G}$ e $\varphi(0) \in A$, é um conjunto não-vazio compacto e quasi-invariante, e* $\lim_{t \to +\infty} d(\varphi(t), \omega(\varphi)) = 0$.

(Compare este resultado com o Lema 3.32, e note que não temos necessariamente que $\omega_\varphi(A)$ seja compacto).

**Demonstração:** Seja $x \in A$, por $(H_1)$, existe $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) = x \in A$. Tome uma seqüência $t_n \to +\infty$. Por hipótese $\{\varphi(t_n)\}$ possui uma subseqüência convergente $\varphi(t_{n_k}) \to \xi \in \omega(\varphi) \subset \omega_\varphi(A)$. Portanto $\omega(\varphi) \neq \emptyset$ e consequentemente $\omega_\varphi(A) \neq \emptyset$. Vamos provar que $\omega_\varphi(A)$ $\varphi$-atrai $A$. Assuma, por contradição, que $\omega_\varphi(A)$ não $\varphi$-atraia $A$, então existe $\varepsilon_0 > 0$ e $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in A$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(t_n) \notin O_{\varepsilon_0}(\omega_\varphi(A))$ para algum $t_n > n$. Por hipótese $\{\varphi(t_n)\}$ contém uma subseqüência convergente, $\varphi(t_{n_k}) \to \zeta \in \omega(\varphi) \subset \omega_\varphi(A)$, o que é impossível. Portanto, $\omega_\varphi(A)$ $\varphi$-atrai $A$. Além disso, do Lema 3.68 temos que $\overline{\omega_\varphi(A)}$ é o conjunto minimal fechado que $\varphi$-atrai $A$.

Em ordem para provar que $\omega(\varphi)$, com $\varphi \in \mathcal{G}$ e $\varphi(0) \in A$, é quasi-invariante procedemos como foi feito no Lema 3.4, (i), [3], e construímos uma órbita completa $\psi$ através de $z$ e $\psi(t) \in \omega(\varphi)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Isto também implica que $\omega_\varphi(A)$ é quasi-invariante.

Agora seja $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \omega(\varphi)$, $\varphi(0) \in A$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n > n$ tal que $d(\varphi(t_n), y_n) < 1/n$. Visto que $\{\varphi(t_n)\}$ contém uma subseqüência convergindo para algum ponto $\zeta \in \omega(\varphi)$, $\{y_n\}$ tem uma subseqüência que converge para $\zeta \in \omega(\varphi)$. Portanto $\omega(\varphi)$ é compacto. Agora provaremos que $\lim_{t\to+\infty} d(\varphi(t), \omega(\varphi)) = 0$, para $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in A$. Assuma, por contradição, que isto não acontece. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ $d(\varphi(t_n), \omega(\varphi)) > \varepsilon_0$ para algum $t_n > n$. Mas isto contradiz a hipótese e a definição de $\omega(\varphi)$. ∎

Como uma conseqüência imediata dos dois resultados acima temos

**Lema 3.75** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e seja $x \in X$ e $K \in K(X)$. Se para cada $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) = x$, $d(\varphi(t), K) \to 0$ quando $t \to +\infty$, então $\omega_\varphi(x)$ é um conjunto não-vazio, quasi-invariante que $\varphi$-atrai $x$. O conjunto $\overline{\omega_\varphi(x)}$ é o conjunto minimal fechado que $\varphi$-atrai $x$.*

**Observação 3.76** *As sentenças (ii) e (iii) do Lema 3.36 permanecem válidas se somente supormos que $\mathcal{G}$ é $\varphi$-assintóticamente compacto.*

**Proposição 3.77** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado. Se $\mathcal{G}$ é $\varphi$-dissipativo, então $\mathcal{G}$ é eventualmente $\varphi$-limitado e $\omega_\varphi(X) \in B(X)$. Por outro lado, se $\mathcal{G}$ é $\varphi$-assintóticamente compacto e $\omega_\varphi(X) \in B(X)$, então $\mathcal{G}$ é $\varphi$-dissipativo.*

**Demonstração:** Se $\mathcal{G}$ é $\varphi$-dissipativo então existe $B_0 \in B(X)$ tal que para qualquer $\varphi \in \mathcal{G}$ existe $t_0(\varphi) \geq 0$ tal que $\varphi(t) \in B_0$, $\forall\, t \geq t_0(\varphi)$. Logo $\gamma^+_{t_0(\varphi)}(\varphi) \subset B_0 \in$

$B(X)$ e portanto $\mathcal{G}$ é eventualmente $\varphi$-limitado. Note que $\omega(\varphi) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(\varphi)} \subset \overline{\gamma_{t_0(\varphi)}^+(\varphi)} \subset \overline{B_0}$. Então $\omega_\varphi(X) = \bigcup_{x\in X} \omega_\varphi(x) = \bigcup_{\varphi\in\mathcal{G},\, \varphi(0)\in X} \omega(\varphi) \subset \overline{B_0} \in B(X)$.

Por outro lado, se $\mathcal{G}$ é $\varphi$-assintóticamente compacto e $\omega_\varphi(X) \in B(X)$, então segue do Teorema 3.74, que $\omega_\varphi(X) = \bigcup_{x\in X} \omega_\varphi(x)$ é um $\varphi$-atrator global limitado. Portanto $\mathcal{G}$ é $\varphi$-dissipativo. ■

**Observação 3.78** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado, $A \in P(X)$, e $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in A$. Se $\overline{\gamma^+(\varphi)} \in K(X)$, ou se $\mathcal{G}$ é um semifluxo generalizado $\varphi$-condicionalmente assintóticamente compacto e $\gamma^+(\varphi) \in B(X)$, então cada seqüência $\{\varphi(t_n)\}$ com $t_n \to +\infty$ contém uma subseqüência convergente. Se isto acontece para cada $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in A$, então podemos aplicar o Teorema 3.74.*

**Teorema 3.79** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado com B-ACP e $A \in P(X)$. Se existe $\tau \geq 0$ tal que $\gamma_\tau^+(A) \in B(X)$, então $\omega_\varphi(A)$ é um conjunto não-vazio, quasi-invariante e $\varphi$-atrai $A$.*

**Demonstração:** Seja $B \doteq \gamma_\tau^+(A)$. Então $\gamma_\tau^+(B) = \gamma_{2\tau}^+(A) \subset \gamma_\tau^+(A) \in B(X)$. Seja $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in B$ e considere uma seqüência arbitrária com $t_j \to +\infty$. Do Lema 3.38, obtemos que $\{\varphi(t_j)\}$ tem uma subseqüência convergente. Logo, pelo Teorema 3.74, $\omega_\varphi(B)$ é um conjunto não-vazio, quasi-invariante e $\varphi$-atrai $B$. Mas, pelo Lema 3.71, $\omega_\varphi(A) = \omega_\varphi(\gamma_\tau^+(A)) = \omega_\varphi(B)$. Portanto $\omega_\varphi(A)$ é um conjunto não-vazio, quasi-invariante e $\varphi$-atrai $B = \gamma_\tau^+(A)$. Então pelo Lema 3.69 (4) $\Rightarrow$ (1), $\omega_\varphi(A)$ $\varphi$-atrai $A$.

■

**Teorema 3.80** *Se $\mathcal{G}$ é um semifluxo generalizado $\varphi$-assintóticamente compacto, então $\mathcal{G}$ possui o único $\varphi$-atrator global fechado minimal não-vazio $\widehat{N}$ e*

$$\widehat{N} = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega_\varphi(x)} = \overline{\omega_\varphi(X)}.$$

**Demonstração:** Seja $\overline{x} \in X$ e seja $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) = \overline{x}$. Considere uma seqüência arbitrária $t_j \to +\infty$. Visto que $\mathcal{G}$ é $\varphi$-assintóticamente compacto, a seqüência $\{\varphi(t_j)\}$ tem uma subseqüência convergente. Logo, pelo Teorema 3.74, $\omega_\varphi(\overline{x})$ é um conjunto não-vazio, quasi-invariante e $\varphi$-atrai $\overline{x}$. Assim, pelo Teorema 3.72 $(ii)$, $\mathcal{G}$ possui o único $\varphi$-atrator global fechado minimal $\widehat{N}$ e $\widehat{N} = \overline{\bigcup_{x\in X}\omega_\varphi(x)} = \overline{\omega_\varphi(X)} \supset \omega_\varphi(\overline{x}) \neq \emptyset$.

■

**Proposição 3.81** *Se $\mathcal{G}$ é um semifluxo generalizado assintóticamente compacto e $\varphi$-dissipativo, então seu $\varphi$-atrator global fechado minimal $\widehat{N} = \overline{\omega_\varphi(X)}$ pode ser caracterizado por $\widehat{N} = \overline{\omega_\varphi(B_1)}$, onde $B_1 \in B(X)$ é o conjunto do Lema 3.47.*

**Demonstração:** Seja $B_1 \in B(X)$ como no Lema 3.47 e seja $D \doteq \overline{\omega_\varphi(B_1)}$. Visto que $\mathcal{G}$ é assintóticamente compacto, o Teorema 3.74 implica que $\omega_\varphi(B_1)$ é um conjunto não-vazio, quasi-invariante e $\varphi$-atrai $B_1$. Sabemos, pelo Teorema 3.80, $\widehat{N} = \overline{\bigcup_{x\in X}\omega_\varphi(x)}$ é o único $\varphi$-atrator global fechado minimal não-vazio. Resta mostrar que $\widehat{N} = D$. Temos $D = \overline{\omega_\varphi(B_1)} \subset \overline{\bigcup_{x\in X}\omega_\varphi(x)} = \widehat{N}$.

Por outro lado, se $y \in \bigcup_{x\in X}\omega_\varphi(x)$, então $y \in \omega_\varphi(x)$, para algum $x \in X$. Então $y \in \omega(\varphi)$, para algum $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) = x$. Pelo Lema 3.36, $\omega(\varphi)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante, e $\lim_{t\to+\infty} d(\varphi(t), \omega(\varphi)) = 0$. Então se $K \doteq \omega(\varphi) \in K(X)$ temos do Lema 3.47 que existe $\varepsilon(K) > 0$, $t_1 = t_1(K) > 0$, tal que $T(t)O_{\varepsilon(K)}(K) \subset B_1$ para todo $t \geq t_1$. Seja $0 < \varepsilon < \varepsilon(K)$. Então existe um $t(\varphi,\varepsilon) \geq 0$ tal que $\varphi(t) \in O_\varepsilon(K)$, $\forall\ t \geq t(\varphi,\varepsilon)$. Então $\varphi^{t(\varphi,\varepsilon)}(t) \in T(t)O_\varepsilon(K) \subset T(t)O_{\varepsilon(K)}(K) \subset B_1$, $\forall\ t \geq t_1$. Visto que $\mathcal{G}$ é assintóticamente compacto, para qualquer $\psi \in \mathcal{G}$ com $\psi(0) \in B_1$ e para qualquer seqüência $t_j \to +\infty$, temos que a seqüência $\{\psi(t_j)\}$ tem uma subseqüência convergente. Então, pelo Teorema 3.74, $\omega_\varphi(B_1)$ $\varphi$-atrai $B_1$. Logo, existe $\tau(\varphi, t_1, \varepsilon) \geq 0$ tal que $\varphi^{t_1+t(\varphi,\varepsilon)}(t) \in O_\varepsilon(\omega_\varphi(B_1)) \subset O_\varepsilon(D)$, $\forall\ t \geq \tau(\varphi, t_1, \varepsilon)$. Então $\gamma^+_{t_1+t(\varphi,\varepsilon)+\tau(\varphi,t_1,\varepsilon)}(\varphi) \subset O_\varepsilon(D)$. Considere $t_0 \doteq t_1 + t(\varphi,\varepsilon) + \tau(\varphi, t_1, \varepsilon)$. Então $\omega(\varphi) = \bigcap_{t\geq 0}\overline{\gamma^+_t(\varphi)} \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(\varphi)} \subset \overline{O_\varepsilon(D)}$. Logo $y \in \omega(\varphi) \subset \bigcap_{0<\varepsilon<\varepsilon(K)}\overline{O_\varepsilon(D)} = D$. Portanto $\bigcup_{x\in X}\omega_\varphi(x) \subset D$. Então $\widehat{N} = \overline{\bigcup_{x\in X}\omega_\varphi(x)} \subset \overline{D} = D$. Portanto $\widehat{N} = D \doteq \overline{\omega_\varphi(B_1)}$. ■

Os próximos dois resultados são os principais resultados desta seção. No caso unívoco a Ladyzhenskaya mostrou que se um semigrupo de classe $k$, ou semigrupo contínuo de classe $AK$, possui uma "boa função de Lyapunov", então seu atrator global de pontos $\widehat{M}$ é não-vazio e coincide com o conjunto $Z$ de todos os pontos estacionários. No caso multívoco não temos isso, mas provamos:

**Teorema 3.82** *Se $\mathcal{G}$ é um semifluxo generalizado $\varphi$-assintóticamente compacto e possui uma função de Lyapunov $V : X \to \mathbb{R}$, então seu $\varphi$-atrator global fechado minimal $\widehat{N}$ é não-vazio e $\widehat{N} = Z(\mathcal{G})$.*

**Demonstração:** Seja $\varphi \in \mathcal{G}$. Pela Observação 3.76 sabemos que $\omega(\varphi)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante e $\lim_{t\to+\infty} d(\varphi(t), \omega(\varphi)) = 0$.

Seja $\{t_j\}$ tal que $t_j \to +\infty$ quando $j \to +\infty$ e $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_j < \ldots$. Pelo Lema 3.73, $\{\varphi(t_j)\}$ tem uma subseqüência convergente $\{\varphi(t_{j_\ell})\}$ e portanto $\{V(\varphi(t_{j_\ell}))\}$ converge também. Da Definição 3.61 (ii) obtemos que $\{V(\varphi(t_{j_\ell}))\}$ é uma seqüência não crescente, $V(\varphi(t_{j_{\ell+1}})) \leq V(\varphi(t_{j_\ell})) \leq \ldots \leq V(\varphi(0))$. Logo $\{V(\varphi(t_{j_\ell}))\}$ converge para seu ínfimo,

$$\lim_{\ell\to+\infty} V(\varphi(t_{j_\ell})) = c \doteq \; inf\{V(\varphi(t_{j_\ell})),\ \ell \in \mathbb{N}\}.$$

e este limite não depende da seqüência $\{t_j\}$ escolhida.

Seja $y \in \omega(\varphi)$. Então $y = \lim_{j\to+\infty} \varphi(t_j),\ t_j \to +\infty$. Logo $\lim_{j\to+\infty} V(\varphi(t_j)) = V(y) = c$. Visto que $\omega(\varphi)$ é quasi-invariante, então existe uma órbita completa $\widetilde{\psi}$ através de $y$ tal que $\widetilde{\psi}(t) \in \omega(\varphi),\ \forall\ t \in \mathbb{R}$ e $V(\widetilde{\psi}(t)) = c = V(y),\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, então $\widetilde{\psi}$ é estacionária. Portanto $y \in Z(\mathcal{G})$ e $\omega(\varphi) \subset Z(\mathcal{G})$.

Como temos $\lim_{t\to+\infty} d(\varphi(t), \omega(\varphi)) = 0$ e $\omega(\varphi) \subset Z(\mathcal{G}),\ \forall\ \varphi \in \mathcal{G}$, concluímos que $Z(\mathcal{G})$ é um $\varphi$-atrator global. Pelo Teorema 3.80, $\emptyset \neq \widehat{N} \subset Z(\mathcal{G})$.

Por outro lado, se $z \in Z(\mathcal{G})$ então existe uma órbita completa $\psi$ com $\psi(t) = z,\ \forall\ t \in \mathbb{R}$. Considere $\varphi \doteq \psi_{|\mathbb{R}^+} \in \mathcal{G}$. Visto que $\widehat{N}$ é um $\varphi$-atrator global, dado $\varepsilon > 0$, existe um $t_0 = t_0(\varepsilon, \varphi) \geq 0$ tal que $z = \varphi(t) \in O_\varepsilon(\widehat{N}),\ \forall\ t \geq t_0$. Então $z \in \overline{\widehat{N}} = \widehat{N}$. Portanto $Z(\mathcal{G}) \subset \widehat{N}$. ∎

**Observação 3.83** *Quando estivermos lidando com um problema parabólico sem unicidade que tenha um semifluxo generalizado associado satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.82, concluímos que o problema elítico associado tem no minímo uma solução e o conjunto de todas as soluções estacionárias* $Z(\mathcal{G}) = \widehat{N} = \overline{\omega_\varphi(X)}$.

**Teorema 3.84** *Se* $\mathcal{G}$ *é um semifluxo generalizado assintóticamente compacto, então existem* $\widehat{N}$, $\widehat{M}$, $M$ *e* $\widehat{N} \subset \widehat{M} \subset M$. *Se* $\widehat{N} \in B(X)$, *então para qualquer* $\delta > 0$ *temos* $M = \omega(O_\delta(\widehat{N}))$, $M$ *é o subconjunto maximal compacto invariante de* $X$ *e* $\widehat{N}$ *e* $\widehat{M}$ *são conjuntos compactos. Além disso, se* $\mathcal{G}$ *possui uma função de Lyapunov* $V : X \to \mathbb{R}$, *então para qualquer* $\delta > 0$, $M = \omega\Big(O_\delta(Z(\mathcal{G}))\Big)$.

**Demonstração:** Visto que $\mathcal{G}$ é assintóticamente compacto, pelo Lema 3.36, para cada $B \in B(X)$, $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante e atrai $B$. Logo, pelo Teorema 3.28 $(ii)$ e Teorema 3.29 $(ii)$, $\mathcal{G}$ possui o único atrator global de pontos fechado minimal $\widehat{M}$ e possui o único B-atrator global fechado minimal M e $\widehat{M} = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$, $M = \overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)}$. Visto que $\mathcal{G}$ assintóticamente compacto implica $\mathcal{G}$ $\varphi$-assintóticamente compacto, pelo Teorema 3.80, $\mathcal{G}$ possui o único $\varphi$-atrator global fechado minimal não-vazio $\widehat{N} = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega_\varphi(x)}$, e $\widehat{N} \subset \widehat{M} \subset M$.

Se $\widehat{N} \in B(X)$, então $\mathcal{G}$ é $\varphi$-dissipativo, daí se considerarmos $B_1 \doteq \gamma^+_{\tau(\widehat{N},\delta)}(O_\delta(\widehat{N}))$ concluímos pela Observação 3.48, como no Teorema 3.55, que $M = \omega(B_1)$ é o subconjunto maximal compacto invariante de X e $M = \omega(O_\delta(\widehat{N}))$. Além disso, se $\mathcal{G}$ possui uma função de Lyapunov, pelo Teorema 3.82, $\widehat{N} = Z(\mathcal{G})$, portanto $M = \omega(O_\delta(\widehat{N})) = \omega\Big(O_\delta(Z(\mathcal{G}))\Big)$. ∎

# Capítulo 4

# Semicontinuidade Superior de Atratores para um Sistema de Inclusões Diferenciais Governadas pelo $p$-Laplaciano

Neste capítulo consideramos sistemas acoplados de inclusões diferenciais da forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - div(D_1|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u \in F(u,v) & t > 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - div(D_2|\nabla v|^{q-2}\nabla v) + |v|^{q-2}v \in G(u,v) & t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(t,x) = \dfrac{\partial v}{\partial n}(t,x) = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, & t \geq 0 \\ (u(0), v(0)) \text{ em } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), & \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, conexo e suave, $p, q > 2$, $D_1, D_2 \in L^\infty(\Omega)$, $D_i(x) \geq \sigma > 0$ q.t.p. em $\Omega$, $i = 1, 2$, e $F$ e $G$ são operadores multívocos limitados, semicontínuos superiormente e satisfazendo uma condição de sublinearidade descrita na Seção 4.1.

A existência de solução global é garantida pelo Teorema 4.2, que é obtido através de uma simples reformulação do principal resultado de Diaz e Vrabie, desenvolvido para operadores de difusão em meios porosos em [18], onde os autores já anunciam a possibilidade de uma adaptação simples e direta para o $p$-laplaciano e outras classes de operadores monótonos. Este resultado de existência está feito com detalhes para sistemas envolvendo o $p$-laplaciano com condições de fronteira de Dirichlet homogênea em [34].

Mostramos que, para cada par $(D_1, D_2)$ nas condições acima, a dinâmica descrita por este sistema é dada por um semifluxo generalizado $\mathbb{G}_{(D_1,D_2)}$ em $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ o qual tem um $B$-atrator global compacto invariante $\mathcal{A}_{(D_1,D_2)}$. Além disso, mostramos que a família de atratores $\{\mathcal{A}_{(D_1,D_2)}\}$ é semicontínua superiormente com relação a $(D_1, D_2)$ desde que estes estejam em subconjuntos limitados de $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ e posicionados a uma distância positiva $\sigma$ da origem.

Para obter a semicontinuidade superior dos atratores bastam uma certa continuidade no fluxo e um conjunto de estimativas uniformes para as soluções. As propriedades de continuidade com relação aos dados iniciais e coeficientes de difusão foram demonstradas com o auxílio de um teorema de compacidade que desempenhou um papel importante neste trabalho, tendo sido usado sucessivas vezes ao longo deste capítulo e do Capítulo 5. Neste texto usamos não apenas a forma original deste resultado, o Teorema de Baras, que encontra-se demonstrada em [40], mas também uma ligeira variação dela dedutível exatamente da mesma forma, na qual admitimos variação dos dados iniciais do sistema em um conjunto pre-compacto. Foi também necessário lançar mão de um teorema de compacidade mais geral que este, no qual admite-se variação dos operadores que governam o sistema, cuja demonstração apresentamos na íntegra neste capítulo.

## 4.1 Um Sistema de Inclusões Diferenciais Governadas pelo p-Laplaciano

### 4.1.1 Existência de Soluções Globais

O teorema de existência de solução que apresentaremos nesta seção pode ser obtido através de uma simples reformulação do principal resultado em [18], onde os autores já haviam anunciado que o resultado poderia ser aplicado para o operador $p$-laplaciano. As mudanças necessárias para realizar isso são apontadas abaixo. Consideremos o sistema

$$(P)\begin{cases} u_t + Au \in F(u,v) \\ v_t + Bv \in G(u,v) \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, \end{cases}$$

sendo que $A$ e $B$ são operadores unívocos, os quais são subdiferenciais de funções não-negativas, convexas, próprias e s.c.i., $\psi_A$, $\psi_B$, respectivamente, definidas num espaço de Hilbert real $H$, com $\psi_A(0) = \psi_B(0) = 0$. Também suponhamos que $A$ e $B$ geram semigrupos compactos, $u_0 \in \overline{D(A)} = H$, $v_0 \in \overline{D(B)} = H$ e $F$,$G$: $H \times H \to P(H)$ são semicontínuas superiormente e levam limitados de $H \times H$ em limitados de $H$.

**Definição 4.1** *Uma solução forte [solução fraca] de $(P)$ é um par $(u,v)$ satisfazendo: $u, v \in C([0,T];H)$ para os quais existem $f, g \in L^1(0,T;H)$, $f(t) \in F(u(t),v(t))$, $g(t) \in G(u(t),v(t))$ q.t.p. em $(0,T)$, e tais que $(u,v)$ é uma solução forte [solução fraca, no sentido da Definição 1.26] para o sistema $(P_1)$ abaixo:*

$$(P_1)\begin{cases} u_t + Au = f \\ v_t + Bv = g \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \end{cases}$$

Para o propósito de conseguir o resultado de existência de solução, a principal ferramenta necessária é o Teorema do Ponto Fixo (Teorema 1.46). A idéia é mostrar que uma aplicação multívoca definida adequadamente tem pelo menos um ponto fixo cuja existência é equivalente à existência de pelo menos uma solução fraca local de $(P)$.

**Teorema 4.2** *Sejam $A$ e $B$ operadores unívocos que são subdiferenciais de funções não-negativas, convexas, próprias e s.c.i., $\psi_A$, $\psi_B$, respectivamente, definidas num espaço de Hilbert real $H$, com $\psi_A(0) = \psi_B(0) = 0$. Também suponha que $A$ e $B$*

*geram semigrupos compactos, e que* $F, G : H \times H \to P(H)$ *são semicontínuas superiormente e que levam limitados de* $H \times H$ *em limitados de* $H$*. Então dado um subconjunto limitado* $B_0 \subset H \times H$*, existe* $T_0 > 0$ *tal que para cada* $(u_0, v_0) \in B_0$ *existe pelo menos uma solução forte* $(u, v)$ *de* $(P)$ *definida em* $[0, T_0]$*.*

**Demonstração:** Sejam $(u_0, v_0) \in B_0$ e escolha $m > 0$ tal que $\| u_0 \|_H +1 \leq m$, $\| v_0 \|_H +1 \leq m$. Assim, segue por hipótese que existe $r > 0$ tal que $\max\{\| w_1 \|_H, \| w_2 \|_H\} \leq m \Rightarrow \max\{\| z \|_H, \| \overline{z} \|_H\} \leq r$, $\forall\, (z, \overline{z}) \in F(w_1, w_2) \times G(w_1, w_2)$. Sem perda de generalidade podemos supor $r > 1$.

Seja $T_0 > 0$ tal que $T_0\, r^2 \leq 1$, e considere o conjunto

$$K \doteq \{(f, g); f, g \in L^2(0, T_0; H), \| f(t) \|_{L^2(0,T_0;H)} \leq r, \| g(t) \|_{L^2(0,T_0;H)} \leq r\}.$$

É fácil verificar que $K \subset L^2(0, T_0; H) \times L^2(0, T_0; H)$ é fracamente compacto e não vazio. Definimos

$$P_{T_0} : K \to C([0, T_0]; H) \times C([0, T_0]; H)$$

por $P_{T_0}(f, g) = (u, v)$, onde $(u, v)$ é a única solução sobre $[0, T_0]$ de $(P_1)$. Não é difícil verificar que

$$\| u(t) \|_H \leq m \qquad \text{e} \qquad \| v(t) \|_H \leq m, \quad \text{para todo } t \in [0, T_0].$$

Daí o Teorema do Ponto Fixo (Teorema 1.46) pode ser aplicado ao operador

$$\varphi : K \to P(K)$$

$$(f, g) \mapsto \text{Sel } F(u, v) \times \text{Sel } G(u, v)$$

sendo que $(u, v) = P_{T_0}(f, g)$. Podemos verificar que $\varphi$ tem valores convexos e fechados. Para mais detalhes veja a dissertação [34] e o artigo [18].

O único fato que precisa ser garantido é que o gráfico de $\varphi$, $Graf(\varphi)$, é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado em $K$, mas isto segue dos Teorema 1.27, Teorema 1.35, Proposição 1.29 e Teorema 1.44.

Portanto podemos concluir que existe $(f, g) \in K$ tal que $(f, g) \in \varphi(f, g)$, e consequentemente $(u, v) = P_{T_0}(f, g)$ é uma solução fraca de $(P_1)$. Visto que $(f, g) \in K \subset L^2(0, T_0; H) \times L^2(0, T_0; H)$, o Teorema 1.30, garante que $(u, v) = P_{T_0}(f, g)$ é na verdade uma solução forte de $(P_1)$. ∎

Para conseguir soluções globais impomos condições convenientes nos termos $F$ e $G$.

**Definição 4.3** *Diremos que um par $(F, G)$ de operadores $F, G : H \times H \to \mathcal{P}(H)$ (conjunto das partes de $H$) duas aplicações possivelmente multívocas que levam limitados de $H \times H$ em limitados de $H$ é positivamente sublinear se existem $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ e $m_0 > 0$ tais que para cada $(u, v) \in H \times H$ com $\|u\|_H > m_0$ ou $\|v\|_H > m_0$ para os quais existe $f_0 \in F(u, v)$ com $\langle u, f_0 \rangle > 0$ ou existe $g_0 \in G(u, v)$ com $\langle v, g_0 \rangle > 0$, tem-se simultaneamente:*

$$\|f\|_H \leq a\|u\|_H + b\|v\|_H + c$$

*e*

$$\|g\|_H \leq a\|u\|_H + b\|v\|_H + c$$

*para cada $f \in F(u, v)$ e cada $g \in G(u, v)$.*

A condição acima definida, que chamaremos de sublinearidade positiva, pode ser melhor explicada da seguinte forma:

Se $(u, v) \in H \times H$ e

$$\|u\|_H \leq m_0 \qquad \text{e} \qquad \|v\|_H \leq m_0 \tag{4.1}$$

não exigimos nada de $F(u, v)$ e $G(u, v)$, uma vez que $F, G$ levam limitados em limitados e portanto os produtos escalares $\langle f, u \rangle$ e $\langle g, v \rangle$ são limitados quaisquer que sejam $f \in F(u, v)$ e $g \in G(u, v)$. Se (4.1) não vale para um determinado par $(u, v)$, então $\|u\| > m_0$ ou $\|v\| > m_0$. Neste caso, também não há necessidade de impor nada à $F(u, v)$ e $G(u, v)$ se

$$\langle u, f \rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle g, v \rangle \leq 0, \qquad \text{para todo } f \in F(u, v) \text{ e } g \in G(u, v). \tag{4.2}$$

No entanto, se ambos (4.1) e (4.2) não são satisfeitas, isto é, se $\|u\| > m_0$ ou $\|v\| > m_0$ e $\langle u, f_0 \rangle > 0$ ou $\langle v, g_0 \rangle > 0$ para algum $f_0 \in F(u,v)$ ou algum $g_0 \in G(u,v)$ então impomos a condição que

$$\|f\| \leq a\|u\| + b\|v\| + c$$

e

$$\|g\| \leq a\|u\| + b\|v\| + c$$

para cada $f \in F(u,v)$ e cada $g \in G(u,v)$.

**Observação 4.4** *Seja $T > 0$ arbitrário. Por argumentos padrões podemos provar que cada solução de $(P)$, a qual está definida em $[0, T_0]$, $T_0 \leq T$ pode ser estendida ao intervalo $[0, T]$ se o par $(F, G)$ é suposto ser positivamente sublinear em $H \times H$. A demonstração é muito similar daquela em [18].*

De fato, primeiro observamos que, sob estas hipóteses, pode-se mostrar através do Lema de Zorn que cada solução local ou é não continuável ou pode ser estendida a uma solução $(u^*, v^*)$ não continuável, definida ou em $[0, T_m]$ ou em $[0, T_m)$ para algum $T_m \leq T$. Para completar a prova é suficiente mostrar que a última situação não pode ocorrer. Com esta finalidade, assumimos por contradição que $(u^*, v^*)$ é uma solução não continuável de (P) definida em $[0, T_m)$, onde $T_m \leq T$.

Fazendo o produto interno em ambos os lados da equação

$$\frac{du^*}{dt} + Au^* = f^*$$

com $u^*$ e integrando de 0 a $t$, $t \leq T_m$, obtemos

$$\frac{1}{2} \parallel u^*(t) \parallel_H^2 \leq \frac{1}{2} \parallel u_0 \parallel_H^2 + \int_0^t < f^*(s), u^*(s) > ds.$$

Agora, o par $(F, G)$ é positivamente sublinear e $f^* \in F(u^*, v^*)$. Assim, seja $m_0 > 0$ como na Definição 4.3 e seja $D \subset [0, T_m)$ definido da seguinte forma: $s \in D$ se e somente se

$$\|u^*(s)\|_H \leq m_0 \qquad \text{e} \qquad \|v^*(s)\|_H \leq m_0$$

ou

$$\langle u^*(s), f^*(s)\rangle \leq 0 \qquad \text{e} \qquad \langle v^*(s), g^*(s)\rangle \leq 0.$$

Como $f^*, g^* \in L^1([0,T_m];H)$, $f^*(s) \in F(u^*(s), v^*(s))$ e $g^*(s) \in G(u^*(s), v^*(s))$ é claro que $D$ é um conjunto mensurável.

Defina $\widetilde{D} \doteq D \cap (0,t)$ e $\widetilde{\widetilde{D}} \doteq D^C \cap (0,t)$. Ambos são mensuráveis como intersecção de mensuráveis.

Assim, temos que existe $M_0 > 0$ tal que

$$\int_{\widetilde{D}} \langle u^*(s), f^*(s)\rangle ds \ \leq \ M_0.$$

Da sublinearidade positiva de $(F,G)$ temos que em $\widetilde{\widetilde{D}}$

$$\langle u^*(s), f^*(s)\rangle \leq \|u^*(s)\|_H \|f^*(s)\|_H \leq \|u^*(s)\|_H [a\|u^*(s)\|_H + b\|v^*(s)\|_H + c]$$

com $a, b, c > 0$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\| u^*(t) \|_H^2 &\leq \| u_0 \|_H^2 + 2\int_{\widetilde{D}\cup\widetilde{\widetilde{D}}} \langle f^*(s), u^*(s)\rangle ds \\
&\leq \| u_0 \|_H^2 + 2\int_{\widetilde{D}} \langle f^*(s), u^*(s)\rangle ds \\
&+ 2\int_{\widetilde{\widetilde{D}}} \langle f^*(s), u^*(s)\rangle ds \\
&\leq \| u_0 \|_H^2 + 2M_0 + 2\int_{\widetilde{\widetilde{D}}} [a\|u^*(s)\|_H + b\|v^*(s)\|_H + c]\|u^*(s)\|_H ds \\
&\leq \| u_0 \|_H^2 + 2M_0 + 2a\int_{\widetilde{\widetilde{D}}} \|u^*(s)\|^2 ds \\
&+ 2b\int_{\widetilde{\widetilde{D}}} \|v^*(s)\|_H \|u^*(s)\|_H ds \\
&+ 2c\int_{\widetilde{\widetilde{D}}} \|u^*(s)\| ds \\
&\leq \| u_0 \|_H^2 + 2M_0 + 2a\int_0^t \|u^*(s)\|_H^2 ds \\
&+ 2b\int_0^t \|v^*(s)\|_H \|u^*(s)\|_H ds \\
&+ 2c\int_0^t \|u^*(s)\|_H ds.
\end{aligned}$$

Assim, existem constantes positivas $\alpha, \beta, \gamma$ e $C = C(u_0)$ tais que

$$\begin{aligned}\| u^*(t) \|_H^2 &\leq C^2 + 2\int_0^t [\alpha \| u^*(s) \|_H \\ &+ \beta \| v^*(s) \|_H + \gamma] \| u^*(s) \|_H \, ds.\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Gronwall obtemos

$$\begin{aligned}\| u^*(t) \|_H &\leq C + \gamma T \\ &+ \int_0^t [\alpha \| u^*(s) \|_H + \beta \| v^*(s) \|_H] ds.\end{aligned}$$

Ou seja, existe $M$ independente de $t$ tal que

$$\| u^*(t) \|_H \leq M + \int_0^t [\alpha \| u^*(s) \|_H + \beta \| v^*(s) \|_H] ds.$$

Analogamente existe $\widetilde{M}$ independente de $t$ tal que

$$\| v^*(t) \|_H \leq \widetilde{M} + \int_0^t [\beta \| u^*(s) \|_H + \alpha \| v^*(s) \|_H] ds.$$

Somando estas duas desigualdades e denotando por $K \doteq M + \widetilde{M}$ e $\rho \doteq \alpha + \beta$ temos

$$\| u^*(t) \|_H + \| v^*(t) \|_H \leq K + \rho \int_0^t [\| u^*(s) \|_H + \| v^*(s) \|_H] ds$$

e da desigualdade de Gronwall- Bellman vem que

$$\| u^*(t) \|_H + \| v^*(t) \|_H \leq K e^{\rho T}$$

para todo $t \in [0, T_m)$.

Como $F$ e $G$ levam limitados de $H \times H$ em limitados de $H$ existe $L > 0$ tal que

$$\| z \|_H \leq L \qquad \text{e} \qquad \| \overline{z} \|_H \leq L$$

sempre que $z \in F(u^*(t), v^*(t))$ e $\overline{z} \in G(u^*(t), v^*(t))$, qualquer que seja $t \in [0, T_m)$.

Assim, sejam $(f^*, g^*)$, $f^*(t) \in F(u^*(t), v^*(t))$ e $g^*(t) \in G(u^*(t), v^*(t))$ qtp em $[0, T_m)$, tais que $u^*$ e $v^*$ são soluções de

$$\begin{cases} \dfrac{du^*}{dt} + Au^* = f^* \\ \dfrac{dv^*}{dt} + Bv^* = g^* \end{cases}$$

respectivamente em $[0, T_m)$. Em vista das observações acima, tanto $f^*$ quanto $g^*$ pertencem a $L^1([0, T_m], H)$. Logo, pelo Teorema 1.27, o problema

$$(P_*) \begin{cases} \dfrac{dw_1}{dt} + Aw_1 = f^* \\ \dfrac{dw_2}{dt} + Bw_2 = g^* \\ w_1(0) = u_0, w_2(0) = v_0 \end{cases}$$

tem uma única solução $(w_1, w_2) : [0, T_m] \to H \times H$, a qual deve coincidir com $(u^*, v^*)$ em $[0, T_m)$, e portanto,

$$\lim_{t \to T_m} u^*(t) = \lim_{t \to T_m} w_1(t) = w_1(T_m).$$

Analogamente

$$\lim_{t \to T_m} v^*(t) = \lim_{t \to T_m} w_2(t) = w_2(T_m).$$

Como $w_1(T_m)$ e $w_2(T_m)$ pertencem a $H$, usando a parte de existência local podemos concluir que as soluções $u^*$ e $v^*$ podem ser continuadas a direita de $T_m$ se $T_m < T$, ou pelo menos até $T_m$ se $T_m = T$, contrariando a maximalidade de $u^*$ e $v^*$.

Portanto cada solução é não continuável.

Agora, com o mesmo procedimento usado acima, prova-se que se $(u, v)$ é uma solução não continuável de $(P)$, então $(u, v)$ está definida no intervalo todo $[0, T]$. $\blacksquare$

### 4.1.2 O Semifluxo Generalizado Associado com o Sistema de Inclusões Diferenciais

Pela seção anterior concluímos que a hipótese $(H1)$ da definição de Semifluxo Generalizado é satisfeita.

Seja $D(u_0, v_0)$ o conjunto de todas as soluções de $(P)$ com dado inicial $(u_0, v_0)$ e considere $\mathbb{G} \doteq \bigcup_{(u_0,v_0)\in H\times H} D(u_0, v_0)$.

Não é difícil provar que o conjunto $\mathbb{G}$ de todas as soluções de $(P)$ satisfaz $(H2)$ e $(H3)$. A condição de semicontinuidade superior $(H4)$ pode ser obtida de um resultado que é uma pequena adaptação do Teorema de Baras, Teorema 1.35, que é provado pelos mesmos argumentos, onde a diferença é que os dados iniciais podem variar em um subconjunto precompacto $\{(u_{0n}, v_{0n})\} \subset H \times H$:

Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$(P_{f_n}) \begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n \\ u_n(0) = u_{0_n} \end{cases}$$

onde $A$ é maximal monótono em um espaço de Hilbert $H$, $f_n \in K \subset L^1(0,T;H)$ e $u_{0_n} \in H$.

Fazendo $f_n$ e $u_{0_n}$ variar obtemos uma família de problemas e portanto uma família de soluções. Defina

$$M(K) \doteq \{u_n; u_n \text{ é a única solução fraca de } (P_{f_n}),\ \text{com } (f_n, u_{0_n}) \in K \times H\}.$$

Estabelecemos condições para que o conjunto $M(K)$ possua alguma propriedade de compacidade. O próximo teorema é uma consequência direta do Teorema 2.3.2, p.46 em [40] e do Lema 1.34.

**Teorema 4.5** *Se $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to P(H)$ é um operador maximal monótono que gera um semigrupo compacto, $\{u_{0_n}\} \subset H$, com $u_{0_n} \to u_0$, e $K = \{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto uniformemente integrável em $L^1([0,T];H)$, então o conjunto $M(K)$ é relativamente compacto em $C([0,T];H)$.*

Agora, considere $\{\varphi_n\} \subset \mathbb{G}$ com $\varphi_n(0) \to z$ quando $n \to +\infty$. Então $\varphi_n = (u_n, v_n)$, $\varphi_n(0) = (u_{0_n}, v_{0_n})$, $z = (u_0, v_0)$, e $(u_n, v_n)$ satisfaz o problema

$$(P_n) \begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n = f_n & \text{em } (0,T] \\ \dfrac{dv_n}{dt} + Bv_n = g_n & \text{em } (0,T] \\ u_n(0) = u_{0_n}, v_n(0) = v_{0_n} \end{cases}$$

Considere $K \doteq \{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ e $\widetilde{K} \doteq \{g_n; n \in \mathbb{N}\}$, $f_n \in$ Sel $F(u_n, v_n)$, $g_n \in$ Sel $G(u_n, v_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Usando a sublinearidade positiva do par $(F, G)$, mostra-se que as soluções $\{(u_n, v_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ são uniformemente limitadas em $[0,T]$. Daí, usando o fato que $F, G$ levam limitados de $H \times H$ em limitados de $H$, concluímos que os conjuntos $K$ e $\widetilde{K}$ são uniformemente limitados em $[0, T]$, e portanto, uniformemente integráveis em $L^1([0, T]; H)$. Então segue do Teorema 4.5 que $M(K)$ e $M(\widetilde{K})$ são relativamente compactos em $C([0, T]; H)$. Então $(H4)$ segue do Teorema 1.44 e da Proposição 1.29. Assim, obtemos o seguinte

**Teorema 4.6** *Se $F, G : H \times H \to P(H)$ são semicontínuas superiormente, levam limitados de $H \times H$ em limitados de $H$ e o par $(F, G)$ for positivamente sublinear, então $\mathbb{G}$ é um semifluxo generalizado em $H \times H$.*

### 4.1.3 Existência de Atratores

Seja $T > 0$ fixo arbitrariamente grande, $\mathcal{B} \subset H \times H$, $\mathbb{G}$ o semifluxo generalizado associado com (P), e $P_T(f, g) = (u, v)$ como na demonstração do Teorema 4.2, e $\widetilde{K}(\mathcal{B}) \doteq \{(f, g) \in \text{Sel } F(u, v) \times \text{Sel } G(u, v); (u, v) = P_T(f, g), \text{ e } (u(0), v(0)) \in \mathcal{B}\}$.

**Observação 4.7** *Os mesmos argumentos usados para assegurar a existência global de soluções mostram que, se $\mathcal{B}$ é um subconjunto limitado de $H \times H$, então $\widetilde{K}(\mathcal{B})$ é um subconjunto limitado de $L^1(0, T; H) \times L^1(0, T; H)$, isto é, existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|f\|_{L^1(0,T;H)} + \|g\|_{L^1(0,T;H)} \leq C$, $\forall\ (f, g) \in \tilde{K}(\mathcal{B})$.*

**Teorema 4.8** *Se o semifluxo generalizado $\mathbb{G}$ associado com $(P)$ é eventualmente limitado então $\mathbb{G}$ é assintóticamente compacto.*

**Demonstração:** Seja $\{\varphi_j\} \subset \mathbb{G}$ com $\{\varphi_j(0)\}$ limitado em $H \times H$, e $\{\varphi_j(t_j)\}$ uma seqüência em $H \times H$ com $t_j \to +\infty$. Queremos mostrar que $\{\varphi_j(t_j)\}$ tem uma subseqüência convergente. Segue da definição de $\mathbb{G}$ que $\varphi_j = (u_j, v_j)$, $\varphi_j(0) = (u_j(0), v_j(0)) \in H \times H$. Como $t_j \to +\infty$, podemos supor $t_j \geq 1$, $\forall j \in \mathbb{N}$, e como $\mathbb{G}$ é um semifluxo generalizado $\widetilde{\varphi_j} \doteq \varphi_j^{t_j - 1} = (u_j^{t_j-1}, v_j^{t_j-1}) \in \mathbb{G}$. Então para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $f_j,\ g_j \in L^1(0, 1; H)$, $f_j \in \text{Sel } F(u_j^{t_j-1}, v_j^{t_j-1})$, $g_j \in \text{Sel } G(u_j^{t_j-1}, v_j^{t_j-1})$, e $(u_j^{t_j-1}, v_j^{t_j-1}) = P_1(f_j, g_j)$.

Seja $K_i \doteq \pi_i(\widetilde{K}(\{\widetilde{\varphi}_j(0)\}))$, $i = 1,2$, $M(K_1)(t) \doteq \{u_j^{t_j-1}(t), j \in \mathbb{N}\}$ e $M(K_2)(t) \doteq \{v_j^{t_j-1}(t), j \in \mathbb{N}\}$, $t \in [0,1]$, e $\{S(t),\ t \geq 0\}$ o semigrupo compacto gerado por $A$ em $H$. Visto que $\mathbb{G}$ é eventualmente limitado, $\{\widetilde{\varphi_j}(0)\} = \{\varphi_j(t_j - 1)\}$ é um subconjunto limitado de $H \times H$ se $j$ é grande o suficiente.

Agora, seja $h > 0$ tal que $1 - h \in [0,1]$. Definimos

$$T_h : M(K_1)(1) \to H$$

por $u_j^{t_j-1}(1) \mapsto T_h(u_j^{t_j-1}(1)) \doteq S(h)u_j^{t_j-1}(1-h)$. Visto que $M(K_1)(1-h)$ é um subconjunto limitado de $H$, então $T_h$ é um operador compacto. Também temos pelo Lema 1.34 que

$$\| S(h)u_j^{t_j-1}(1-h) - u_j^{t_j-1}(1) \| \leq \int_{1-h}^{1} \| f_j(s) \| \, ds, \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Pela Observação 4.7 temos que $K_1 = \{f_j, j \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto limitado de $L^1(0,1;H)$, e portanto $K_1$ é uniformemente integrável em $L^1(0,1;H)$. Assim, temos $\lim_{h\to 0} T_h = I$, uniformemente em $M(K_1)(1)$. Portanto $I : M(K_1)(1) \to M(K_1)(1)$ é um operador compacto e então, $M(K_1)(1)$ é relativamente compacto em $H$. Os mesmos argumentos mostram que $M(K_2)(1)$ é relativamente compacto em $H$, portanto $\{\varphi_j(t_j)\}$ tem uma subseqüência convergente em $H \times H$. ■

Assim, de acordo com os Teoremas 3.50 e 4.8, para assegurar a existência de um B-atrator global compacto e invariante para o problema $(P)$, é suficiente impor condições em $F, G$ para garantir que o semifluxo generalizado $\mathbb{G}$ definido por $(P)$ seja $B$-dissipativo e portanto, eventualmente limitado e $\varphi-$dissipativo.

Para mostrar a $B-$dissipatividade vamos nos restringir a sistemas onde $A$ e $B$ são os operadores $p,q-$laplaciano perturbados em $H = L^2(\Omega)$ com condições de fronteira Neumann homogêneas, isto é, vamos provar $B-$dissipatividade para o seguinte sistema:

$$(P_N)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - div(D_1|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u \in F(u,v) & \text{em } (0,T)\times\Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - div(D_2|\nabla v|^{q-2}\nabla v) + |v|^{q-2}v \in G(u,v) & \text{em } (0,T)\times\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(t,x) = \dfrac{\partial v}{\partial n}(t,x) = 0 & \text{em } (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), v(0,x) = v_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases}$$

sendo que $\Omega$ é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira suave $\partial\Omega$, $p, q > 2$, $D_1, D_2 \in L^\infty(\Omega), D_i(x) \geq \sigma > 0$ q.t.p. em $\Omega$, $i = 1,2$, $u_0$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ $F, G$ são operadores multívocos que levam limitados de $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ em limitados de $L^2(\Omega)$, semicontínuos superiormente e positivamente sublinear em $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial n} \doteq D_1|\nabla u|^{p-2}\langle\nabla u, \overrightarrow{\eta}\rangle$, e $\overrightarrow{\eta}$ é o vetor normal unitário apontando para fora. Observe que sempre olhamos o problema $(P_N)$ como um problema de valor inicial, e a condição de fronteira Neumann aparece, num sentido fraco, na definição do operador $p-$laplaciano perturbado, onde tudo está bem definido.

No caso particular $(P_N)$ onde $A$ e $B$ são os operadores $p, q-$laplaciano perturbados em $H = L^2(\Omega)$ para condições de fronteira Neumann homogêneas (note que aqui $D^\lambda = D_1,\ \forall\ \lambda$, mas havíamos definido o operador de uma forma mais geral porque mais para frente pretendemos provar semicontinuidade superior de atratores), as mesmas condições impostas em $F, G$ para conseguir existência global de soluções também serão suficientes para provar que o semifluxo generalizado $\mathbb{G}_N$ definido por $(P_N)$ é B-dissipativo. Temos o seguinte:

**Teorema 4.9** *Se $F, G : H\times H \to P(H)$ são semicontínuas superiormente, levam limitados de $H\times H$ em limitados de $H$ e o par $(F, G)$ for positivamente sublinear, então existe um conjunto limitado $B_0$ em $H\times H$ e $t_0 > 0$ tais que para qualquer $\varphi \in \mathbb{G}_N$, $\varphi(t) \in B_0$, $\forall\ t \geq t_0$. Em particular, o semifluxo generalizado $\mathbb{G}_N$ definido por $(P_N)$ é B-dissipativo.*

**Demonstração:** De fato, se $\varphi = (u, v) \in \mathbb{G}_N$ é uma solução de $(P_N)$ então existe $(f, g) \in$ Sel $F(u, v)\times$ Sel $G(u, v)$, $f, g \in L^1(0, T, H)$ para cada $T > 0$ tal que $u, v$

satisfazem o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - div(D_1|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u = f & \text{em } (0,T)\times\Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - div(D_2|\nabla v|^{q-2}\nabla v) + |v|^{q-2}v = g & \text{em } (0,T)\times\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(t,x) = \dfrac{\partial v}{\partial n}(t,x) = 0 & \text{em } (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), v(0,x) = v_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $u$, e a segunda por $v$ e supondo, sem perda de generalidade que $p \geq q$, obtemos

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 & \leq & -\delta\|u(t)\|_H^p + \langle f(t), u(t)\rangle \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2 & \leq & -\widetilde{\delta}\|v(t)\|_H^q + \langle g(t), v(t)\rangle \end{cases}$$

sendo que $\delta, \widetilde{\delta}$ são números reais positivos dependendo de $D_1, D_2, \sigma, \Omega, p, q$. Usando a Definição 4.3, Cauchy-Schwartz, a Desigualdade de Young e somando as equações obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u(t)\|_H^2 + \|v(t)\|_H^2) &\leq -C_1(\|u(t)\|_H^q + \|v(t)\|_H^q) + C_2 \\ &= -C_1(\|u(t)\|_H^{2^{q/2}} + \|v(t)\|_H^{2^{q/2}}) + C_2 \\ &\leq -C_1\frac{1}{2^{q/2}}(\|u(t)\|_H^2 + \|v(t)\|_H^2)^{q/2} + C_2, \end{aligned}$$

sendo que $C_1, C_2$ são números reais positivos dependendo de $D_1, D_2, \sigma, \Omega, p, q$.

Daí a demonstração segue do Lema 1.5. ■

Usando os Teoremas 3.50, 4.8, 4.9, concluímos que $\mathbb{G}_N$ tem um $B-$atrator global compacto e invariante $\mathcal{A}^N_{(D_1,D_2)}$. O $B-$atrator global $\mathcal{A}^N_{(D_1,D_2)}$ é único e é dado por

$$\mathcal{A}^N_{(D_1,D_2)} = \bigcup_{B\in B(H\times H)} \omega(B) = \omega_B(H\times H).$$

Além disso, $\mathcal{A}^N_{(D_1,D_2)}$ é o subconjunto maximal compacto invariante de $H\times H$, e é o minimal entre todos os $B-$atratores globais fechados, e usando o Teorema 3.60, também temos que $\mathcal{A}^N_{(D_1,D_2)}$ é a união de todas as órbitas completas limitadas em $H\times H$.

Como $\mathbb{G}_N$ assintóticamente compacto implica $\mathbb{G}_N$ $\varphi$-assintóticamente compacto, pelo Teorema 3.80 temos que $\mathbb{G}_N$ possui o único $\varphi$-atrator global fechado minimal não-vazio $\widehat{N}_{(D_1,D_2)}$ e $\widehat{N}_{(D_1,D_2)} = \overline{\bigcup_{x\in H\times H}\omega_\varphi(x)} = \overline{\omega_\varphi(H\times H)}$.

**Observação 4.10** *Observe que a existência do semifluxo generalizado foi feita de uma forma abstrata e o único momento em que fizemos uma restrição foi para provar a B-dissipatividade. Também podemos provar $B-$dissipatividade, da mesma maneira como foi feito no Teorema 4.9, quando $A$ e $B$ são os operadores $p,q-$laplaciano em $H = L^2(\Omega)$ com condições de fronteira Dirichlet homogêneas, i.é., para sistemas como o seguinte:*

$$(P_D)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - div(D_1|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \in F(u,v) & em\ (0,T)\times\Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - div(D_2|\nabla v|^{q-2}\nabla v) \in G(u,v) & em\ (0,T)\times\Omega \\ u(t,x) = v(t,x) = 0 & em\ (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), v(0,x) = v_0(x) & em\ \Omega \end{cases}$$

*sendo que $\Omega$ é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira suave $\partial\Omega$, $p,q > 2$, $D_1, D_2 \in L^\infty(\Omega), D_i(x) \geq \sigma > 0$ q.t.p. em $\Omega$, $i = 1,2$, $u_0$, $v_0 \in L^2(\Omega)$, e $F,G$ são operadores multívocos definidos em $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ com as mesmas condições dadas anteriormente. (Também olhamos o problema como um problema de valor inicial, mas a condição de fronteira Dirichlet homogênea aparece no domínio do operador). Assim, também podemos concluir que o problema $(P_D)$ (ou seu semifluxo generalizado associado $\mathbb{G}_D$) tem o $B-$atrator global maximal compacto invariante $\mathcal{A}^D_{(D_1,D_2)}$, e tem o único $\varphi$-atrator global fechado minimal não-vazio $\widehat{N}_{(D_1,D_2)}$.*

## 4.2 Dependência de Parâmetros

Nesta seção consideramos o problema

$$(P_{N_\lambda})\begin{cases} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial t} - div(D_1^\lambda|\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda) + |u_\lambda|^{p-2}u_\lambda \in F(u_\lambda, v_\lambda) & \text{em } (0,T)\times\Omega \\ \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial t} - div(D_2^\lambda|\nabla v_\lambda|^{q-2}\nabla v_\lambda) + |v_\lambda|^{q-2}v_\lambda \in G(u_\lambda, v_\lambda) & \text{em } (0,T)\times\Omega \\ \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial n}(t,x) = \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial n}(t,x) = 0 & \text{em } (0,T)\times\partial\Omega \\ u_\lambda(0,x) = u_{0,\lambda}(x), v_\lambda(0,x) = v_{0,\lambda}(x) & \text{em } \Omega \end{cases}$$

sendo que $u_{0,\lambda},\ v_{0,\lambda} \in L^2(\Omega)$, $D_1^\lambda, D_2^\lambda \in L^\infty(\Omega)$, $D_i^\lambda(x) \geq \sigma > 0$ q.t.p. em $\Omega$, $i = 1,2$, $\lambda \in [0,\lambda_0]$ e $D_i^\lambda \to D_i^0$, em $L^\infty(\Omega)$ quando $\lambda \to 0$, $i = 1,2$. $\Omega$, $p,q$ e $F,G$ satisfazem as mesmas condições da seção 4.1.3, portanto para cada $\lambda \in [0,\lambda_0]$ podemos associar um semifluxo generalizado $\mathbb{G}_\lambda$ o qual tem um $B$-atrator global compacto invariante $\mathcal{A}_\lambda$, conforme foi provado na seção 4.1.3.

O que precisamos para obter a semicontinuidade superior de $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\lambda_0]}$ em $\lambda = 0$ é uma certa continuidade no fluxo e estimativas uniformes para as soluções. Para conseguir continuidade no fluxo, primeiramente estabelecemos um resultado de compacidade. Depois disso mostramos que as condições impostas em $(P_{N_\lambda})$ são suficientes para garantir estimativas uniformes e portanto semicontinuidade superior de atratores.

Nesta seção denotaremos

$A^{D_1^\lambda}(\theta) \doteq -div(D_1^\lambda|\nabla\theta|^{p-2}\nabla\theta) + |\theta|^{p-2}\theta,\ B^{D_2^\lambda}(\theta) \doteq -div(D_2^\lambda|\nabla\theta|^{q-2}\nabla\theta) + |\theta|^{q-2}\theta,$

$S^{D_1^\lambda}$ o semigrupo gerado por $A^{D_1^\lambda}$ e $T_\lambda$ o semigrupo multívoco definido por $\mathbb{G}_\lambda$.

### 4.2.1 Um Argumento de Compacidade

Seja $\Lambda$ um conjunto de índices munido de uma métrica e considere $(P_\lambda)$ o seguinte problema de Cauchy:

$$(P_\lambda)\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A^\lambda u_\lambda \ni f_\lambda \\ u_\lambda(0) = u_0 \in H \end{cases}$$

sendo que $f_\lambda \in L^1(0,T;H),\ \forall\ \lambda \in \Lambda$, $A^\lambda$ é um operador maximal monótono num espaço de Hilbert $H$, $A^\lambda = \partial\phi^\lambda$ é a subdiferencial de uma função não-negativa, convexa, própria e s.c.i. $\phi^\lambda : H \to \mathbb{R}$, e suponhamos $\overline{\cap_{\lambda\in\Lambda} D(\phi^\lambda)} = H$ e que para cada $u \in \cap_{\lambda\in\Lambda} D(\phi^\lambda)$ existe uma constante $k(u) > 0$ tal que $\phi^\lambda(u) \leq k(u)$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$. Seja $\{S^\lambda(t)\}$ o semigrupo gerado por $A^\lambda$ em $H$.

**Lema 4.11** *Para cada $u_0 \in H$ fixado, $\{S^\lambda(.)u_0\}_{\lambda\in\Lambda} \subset C([0,T];H)$ é equicontínua em $t_0 = 0$.*

**Demonstração:** Seja $h > 0$. Primeiro suponha $u_0 \in \cap_{\lambda\in\Lambda} D(\phi^\lambda)$. Do Teorema 2.1.1 em [40], temos

$$\|S^\lambda(h)u_0 - u_0\|_H \leq 3\|u_0 - J_h^\lambda u_0\|_H, \text{ sendo que } J_h^\lambda = (I + h\partial\phi^\lambda)^{-1}.$$

Também, da Proposição 2.11 em [7], segue que

$$\frac{1}{2h}\|u_0 - J_h^\lambda u_0\|_H^2 \leq \phi^\lambda(u_0) \leq k(u_0), \ \forall\, \lambda \in \Lambda.$$

Então

$$\|S^\lambda(h)u_0 - u_0\|_H \leq 6hk(u_0), \ \forall\, \lambda \in \Lambda,$$

e isto garante a equicontínuidade da família $\{S^\lambda(.)u_0\}_{\lambda\in\Lambda}$ em $t_0 = 0$. Agora seja $u_0 \in H$, e considere uma seqüência $\{u_0^n\} \subset \cap_{\lambda\in\Lambda} D(\phi^\lambda)$ tal que $u_0^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_0$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_0^{N_0} - u_0\|_H \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Então

$$\begin{aligned}\|S^\lambda(h)u_0 - u_0\|_H &\leq \|S^\lambda(h)u_0 - S^\lambda(h)u_0^{N_0}\| + \|S^\lambda(h)u_0^{N_0} - u_0^{N_0}\| + \|u_0^{N_0} - u_0\| \\ &\leq \ 2\|u_0^{N_0} - u_0\|_H + 6hk(u_0^{N_0}), \ \forall\, \lambda \in \Lambda.\end{aligned}$$

Tomando $\delta \doteq \frac{\varepsilon}{12k(u_0^{N_0})} > 0$, obtemos que $|h| < \delta$ implica

$$\|S^\lambda(h)u_0 - u_0\|_H < \varepsilon, \ \forall\, \lambda \in \Lambda.$$

$\blacksquare$

Seja $K \doteq \{f_\lambda, \ \lambda \in \Lambda\}$ um subconjunto uniformemente integrável de $L^1([0,T];H)$ e seja

$$M(K) \doteq \{u_\lambda; u_\lambda \text{ é a única solução fraca de } (P_\lambda) \text{ em } [0,T], \lambda \in \Lambda\}.$$

Temos

**Teorema 4.12** *Se para cada* $t \in [0,T]$, $M(K)(t) \doteq \{u_\lambda(t); u_\lambda \in M(K)\}$ *é relativamente compacto em* $H$, *então* $M(K)$ *é relativamente compacto em* $C([0,T];H)$.

Este resultado pode ser provado da mesma maneira como o Teorema 2.3.1 em [40] (veja Teorema 1.33). A principal diferença é que permitimos que o operador $A^\lambda$ varie com $\lambda$. Neste caso precisamos usar o Lema 4.11 para provar que $M(K)$ é equicontínua em $t_0 = 0$. O resto é análogo.

O próximo lema é similar ao Lemma 2.3.1 em [40] (veja Lema 1.34).

**Lema 4.13** *Seja* $f_\lambda \in L^1(0,T;H)$ *e* $u_\lambda$ *satisfazendo* $(P_\lambda)$ *em* $[0,T]$. *Então para cada* $t \in (0,T]$, $s \in [0,T)$ *e* $h > 0$ *com* $t-h \in [0,T]$, $s+h \in [0,T]$ *temos*

$$\| S^\lambda(h)u_\lambda(t-h) - u_\lambda(t) \| \leq \int_{t-h}^{t} \| f_\lambda(s) \| \, ds$$

*e*

$$\| S^\lambda(h)u_\lambda(s) - u_\lambda(s+h) \| \leq \int_{s}^{s+h} \| f_\lambda(s) \| \, ds.$$

**Teorema 4.14** *Suponha que* $K \doteq \{f_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ *é um subconjunto uniformemente integrável de* $L^1([0,T];H)$. *Se para cada* $t \in (0,T]$ *e* $h > 0$ *tal que* $t-h \in (0,T]$, *o operador* $T_h : M(K)(t) \to H$ *definido por*

$$T_h u_\lambda(t) = S^\lambda(h)u_\lambda(t-h)$$

*é um operador compacto, então* $M(K) = \{u_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ *é relativamente compacto em* $C([0,T];H)$.

**Demonstração:** A prova segue o Teorema 2.3.3 em [40]. Usando o Lema 4.13 e o fato de $K$ ser uniformemente integrável, temos que $\lim_{h\to 0} T_h = I$ uniformemente em $M(K)(t)$. Portanto o operador identidade $I : M(K)(t) \to M(K)(t)$ é um operador compacto e então visto que $M(K)(t)$ é um conjunto limitado em $H$ temos que $M(K)(t)$ é relativamente compacto para cada $t \in (0,T]$. Note que $M(K)(0) = \{u_0\}$ é relativamente compacto em $H$. Daí o resultado segue do Teorema 4.12. ∎

### 4.2.2 Semicontinuidade Superior de Atratores

Para cada $\lambda \in \Lambda := [0, \lambda_0]$ seja $\mathcal{A}_\lambda$ o $B$-atrator global compacto invariante associado com o semifluxo generalizado $\mathbb{G}_\lambda$ definido por $(P_{N_\lambda})$. Nosso objetivo nesta seção é provar que a família de atratores $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em $\lambda = 0$. Para fazer isto usaremos o Teorema 1.2 em [28], no contexto de semifluxos generalizados:

**Teorema 4.15** *: Seja $\Lambda$ um espaço métrico, $\lambda_1$ um ponto não-isolado e seja $\{\mathbb{G}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de semifluxos generalizados no espaço de Banach $X$ satisfazendo:*
*(i) Para cada $\lambda \in \Lambda$, $\mathbb{G}_\lambda$ tem um B-atrator global compacto invariante $\mathcal{A}_\lambda$ e*
$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda \in B(X)$;
*(ii) A aplicação multívoca definida por $\mathbb{G}_\lambda$, $\lambda \mapsto T_\lambda(t)(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} \doteq \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda}$, é fracamente semicontínua superiormente em $\lambda_1$ para $t$ grande, i.e., existe $t_0 > 0$ tal que para cada $t \geq t_0$ fixado, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $T_\lambda(t)(\mathcal{A}) \subset O_\varepsilon(T_{\lambda_1}(t)(\mathcal{A}))$, $\forall\, \lambda \in O_\delta(\lambda_1)$.*
*Então $dist(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_1}) \to 0$ quando $\lambda \to \lambda_1$.*

Primeiramente precisamos obter algumas estimativas uniformes para as soluções $(u_\lambda, v_\lambda)$ do problema $(P_{N_\lambda})$. Temos o seguinte:

**Lema 4.16** *Se $(u_\lambda, v_\lambda)$ é uma solução de $(P_{N_\lambda})$, então existem números positivos $r_0$ e $t_0$ tais que $\|(u_\lambda(t), v_\lambda(t))\|_{H\times H} = \|u_\lambda(t)\|_H + \|v_\lambda(t)\|_H \leq r_0$, para cada $t \geq t_0$ e $\lambda \in \Lambda$.*

**Demonstração:** De fato, se $(u_\lambda, v_\lambda)$ satisfaz $(P_{N_\lambda})$, então existe
$(f_\lambda, g_\lambda) \in F(u_\lambda, v_\lambda) \times G(u_\lambda, v_\lambda)$ tal que

$$(P_\lambda^1)\begin{cases} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial t} - div(D_1^\lambda|\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda) + |u_\lambda|^{p-2}u_\lambda = f_\lambda \\ \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial t} - div(D_2^\lambda|\nabla v_\lambda|^{q-2}\nabla v_\lambda) + |v_\lambda|^{q-2}v_\lambda = g_\lambda \end{cases}$$

Os mesmos argumentos usados para provar o Teorema 4.9 podem também ser aplicados aqui, observando que as constantes $\delta, \widetilde{\delta}, C_1, C_2$ podem ser escolhidas uniformemente para $\lambda \in \Lambda = [0, \lambda_0]$, porque $D_i^\lambda(x) \geq \sigma > 0$ q.t.p. em $\Omega$, $i = 1, 2$, $\forall\, \lambda \in [0, \lambda_0]$

e $D_i^\lambda \to D_i^0$, em $L^\infty(\Omega)$ quando $\lambda \to 0$, e portanto temos que existe uma constante positiva $M_i > 0$ tal que $\|D_i^\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_i, \forall\ \lambda \in \Lambda$. Assim, existem números positivos $r_0$ e $t_0$ tais que tais que $\|(u_\lambda(t), v_\lambda(t))\|_{H\times H} \leq r_0$, para cada $t \geq t_0$ e $\lambda \in \Lambda$.

■

**Observação 4.17** *As constantes* $r_0,\ t_0$ *do Lema 4.16 independem dos dados iniciais e de* $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

**Observação 4.18** *Se* $(u_\lambda, v_\lambda)$ *é uma solução de* $(P_{N_\lambda})$, *então existe uma constante positiva* $K = K(u_{0,\lambda}, v_{0,\lambda}, t_0)$ *tal que* $\|u_\lambda(t)\|_H + \|v_\lambda(t)\|_H \leq K(u_{0,\lambda}, v_{0,\lambda}, t_0),\ \forall\ t \in [0, t_0]$. *Se os dados iniciais estão todos num conjunto limitado de* $H \times H$ *ou se* $u_\lambda(0) = u_0, v_\lambda(0) = v_0,\ \forall\ \lambda \in [0, \lambda_0]$, *então temos* $K$ *uniforme com relação a* $\lambda \in [0, \lambda_0]$, *isto é, temos que* $\|u_\lambda(t)\|_H + \|v_\lambda(t)\|_H \leq K,\ \forall\ \lambda \in [0, \lambda_0]$ *e* $\forall\ t \in [0, t_0]$. *Neste caso podemos considerar* $t_0 = 0$ *no Lema 4.16.*

Para demonstrar esta observação basta usar a hipótese que o par $(F, G)$ é positivamente sublinear e aplicar as desigualdades de Gronwall e Gronwall-Bellman (Veja a demonstração da Observação 5.17).

**Lema 4.19** *Existe um conjunto limitado* $B_0$ *em* $H \times H$ *tal que* $\mathcal{A}_\lambda \subset B_0,\ \forall\ \lambda \in [0, \lambda_0]$.

**Demonstração:** Seja $(x_\lambda, y_\lambda) \in \mathcal{A}_\lambda$. Visto que $\mathcal{A}_\lambda = T_\lambda(t_0)\mathcal{A}_\lambda$, sendo que $T_\lambda$ é o semigrupo multívoco definido por $\mathbb{G}_\lambda$, então pelo Lema 4.16, temos $\|(x_\lambda, y_\lambda)\|_{H\times H} \leq r_0$. ■

Assim, a família $\{\mathbb{G}_\lambda\}_{\lambda \in [0,\lambda_0]}$ satisfaz a condição $(i)$ do Teorema 4.15.

Agora, usando o Lema 4.16 e o fato que $F$ e $G$ levam limitados de $H \times H$ em limitados de $H$, podemos repetir os mesmos argumentos que foram feitos no Lema 2.2 em [22] para cada equação em $(P_\lambda^1)$, e obtemos:

**Lema 4.20** *Se* $\varphi_\lambda \doteq (u_\lambda, v_\lambda) \in \mathbb{G}_\lambda$, *então existem constantes positivas* $k > 0$ *e* $t_1 > t_0$, *independentes de* $\lambda$, *tal que*

$\|\varphi_\lambda(t)\|_{W^{1,p}\times W^{1,q}} = \|u_\lambda(t)\|_{W^{1,p}} + \|v_\lambda(t)\|_{W^{1,q}} < k$, *para todo* $t \geq t_1$ *e* $\lambda \in [0, \lambda_0]$, *sendo que* $t_0$ *é a constante positiva do Lema 4.16.*

**Demonstração:** Seja $(u_\lambda, v_\lambda)$ solução de $(P_{N_\lambda})$, então existe $(f_\lambda, g_\lambda) \in F(u_\lambda, v_\lambda) \times G(u_\lambda, v_\lambda)$ tal que

$$(P_\lambda^1)\begin{cases} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial t} - div(D_1^\lambda|\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda) + |u_\lambda|^{p-2}u_\lambda = f_\lambda \\ \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial t} - div(D_2^\lambda|\nabla v_\lambda|^{q-2}\nabla v_\lambda) + |v_\lambda|^{q-2}v_\lambda = g_\lambda \end{cases}$$

Consideremos

$$\varphi^{D_1^\lambda}(v) \doteq \begin{cases} \dfrac{1}{p}\left[D_1^\lambda \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p dx + \int_\Omega |v|^p dx\right], & v \in W^{1,p}(\Omega) \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $\varphi^{D_1^\lambda}$ é uma aplicação convexa, própria e semicontínua inferiormente e $A^{D_1^\lambda} = \partial\varphi^{D_1^\lambda}$ é maximal monótono em $L^2(\Omega)$. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau)) &= \langle \partial\varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau)), \frac{\partial u_\lambda(\tau)}{\partial\tau}\rangle = \langle f_\lambda(\tau) - \frac{\partial u_\lambda(\tau)}{\partial\tau}, \frac{\partial u_\lambda(\tau)}{\partial\tau}\rangle \\ &= \langle f_\lambda(\tau) - \frac{\partial u_\lambda(\tau)}{\partial\tau}, \frac{\partial u_\lambda(\tau)}{\partial\tau} - f_\lambda(\tau) + f_\lambda(\tau)\rangle \\ &= -\|f_\lambda(\tau) - \frac{\partial u_\lambda(\tau)}{\partial\tau}\|_H^2 + \langle f_\lambda(\tau) - \frac{\partial u_\lambda(\tau)}{\partial\tau}, f_\lambda(\tau)\rangle, \end{aligned}$$

para $\tau > 0$ *q.t.p.*. Logo

$$\begin{aligned} &\|f_\lambda(\tau) - \frac{\partial u_\lambda(\tau)}{\partial\tau}\|_H^2 + \frac{d}{d\tau}\varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau)) \leq \|f_\lambda(\tau) - \frac{\partial u_\lambda(\tau)}{\partial\tau}\|_H \|f_\lambda(\tau)\|_H \\ \leq\ & \frac{1}{2}\|f_\lambda(\tau) - \frac{\partial u_\lambda(\tau)}{\partial\tau}\|_H^2 + \frac{1}{2}\|f_\lambda(\tau)\|_H^2, \end{aligned}$$

para $\tau > 0$ *q.t.p.*. Portanto

$$\frac{1}{2}\|f_\lambda(\tau) - \frac{\partial u_\lambda(\tau)}{\partial\tau}\|_H^2 + \frac{d}{d\tau}\varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau)) \leq \frac{1}{2}\|f_\lambda(\tau)\|_H^2$$

para $\tau > 0$ *q.t.p.*. Usando o Lema 4.16 e o fato que $F$ e $G$ levam limitados de $H \times H$ em limitados de $H$, obtemos que existe uma constante positiva $C_0$ tal que $\|f_\lambda(\tau)\|_H \leq C_0$, $\forall\, t \geq t_0$ e $\forall\, \lambda \in [0, \lambda_0]$. Assim, obtemos em particular, que

$$\frac{d}{d\tau}\varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau)) \leq \frac{1}{2}\|f_\lambda(\tau)\|_H^2 \leq \frac{1}{2}C_0^2,\ \forall\, \lambda \in [0, \lambda_0] \text{ e } \tau \geq t_0 \text{ } q.t.p.. \tag{4.3}$$

Pela definição de subdiferencial temos a seguinte desigualdade

$$\varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau)) \leq \langle \partial\varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau)), u_\lambda(\tau)\rangle \tag{4.4}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(\tau)\|_H^2 + \varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau)) &= \langle \frac{\partial u_\lambda(\tau)}{\partial t}, u_\lambda(\tau)\rangle + \varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau)) \\
&\leq \langle \frac{\partial u_\lambda(\tau)}{\partial t}, u_\lambda(\tau)\rangle + \langle \partial\varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau)), u_\lambda(\tau)\rangle \\
&= \langle f_\lambda(\tau), u_\lambda(\tau)\rangle \\
&\leq \|f_\lambda(\tau)\|_H \|u_\lambda(\tau)\|_H \leq C_0 r_0, \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

$\forall\ \lambda \in [0, \lambda_0]$ e $\tau \geq t_0$ *q.t.p.*.

Fixando $r > 0$ e integrando a desigualdade (4.5) de $t$ a $t+r$, $t \geq t_0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+r} \varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau))\, d\tau &\leq \frac{1}{2}\|u_\lambda(t+r)\|_H^2 + \int_t^{t+r} \varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau))\, d\tau \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_\lambda(t)\|_H^2 + C_0 r_0 r \leq \frac{1}{2}r_0^2 + C_0 r_0 r \doteq a_3, \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

$\forall\ \lambda \in [0, \lambda_0]$.

Considerando $y_\lambda(\tau) \doteq \varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau))$, $g \equiv 0$ e $h \equiv \frac{1}{2}C_0^2$ temos $\int_t^{t+r} g(\tau)\, d\tau = 0 \doteq a_1$, $\int_t^{t+r} h(\tau))\, d\tau = \frac{1}{2}C_0^2 r \doteq a_2$ e $\int_t^{t+r} y_\lambda(\tau)\, d\tau = \int_t^{t+r} \varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau))\, d\tau \leq a_3, \forall\ \lambda \in [0, \lambda_0]$. Logo pelo Lema Uniforme de Gronwall, temos que

$$y_\lambda(t+r) \leq (\frac{a_3}{r} + a_2)e^0 \doteq \widetilde{r_1},\ \forall\ t \geq t_0 \text{ e } \forall\ \lambda \in [0, \lambda_0]. \tag{4.7}$$

Fazendo $\ell = t + r$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\|u_\lambda(\ell)\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p &= \frac{1}{p}[\|\nabla u_\lambda(\ell)\|_p^p + \|u_\lambda(\ell)\|_p^p] \qquad (4.8) \\
&\equiv \varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\ell)) = y_\lambda(\ell) \leq \widetilde{r_1},\ \forall\ \ell \geq t_0 + r \text{ e } \forall\ \lambda \in [0, \lambda_0]. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Considerando $r_1 \doteq (p\widetilde{r_1})^{1/p}$ e $t_1 \doteq t_0 + r$, concluímos que $\|u_\lambda(\ell)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq r_1$, para cada $\ell \geq t_1$ e $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

Analogamente mostra-se que existe $r_2 > 0$ tal que $\|v_\lambda(\ell)\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq r_2$, para cada $\ell \geq t_1$ e $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Considerando $k \doteq r_1 + r_2$, concluímos a demonstração. ■

**Observação 4.21** *Se* $(u_\lambda, v_\lambda) \in \mathbb{G}_\lambda$ *com os dados iniciais todos num conjunto limitado de* $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ *ou se* $u_\lambda(0) = u_0, v_\lambda(0) = v_0,\ \forall\ \lambda \in [0, \lambda_0]$, *então existe uma constante positiva* $\tilde{K}$ *tal que* $\|u_\lambda(t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|v_\lambda(t)\|_{W^{1,q}(\Omega)} \le \tilde{K},\ \forall\ \lambda \in [0, \lambda_0]$ *e* $\forall\ t \in [0, t_1]$. *Neste caso podemos considerar* $t_1 = 0$ *no Lema 4.20.*

De fato, seja $(u_\lambda, v_\lambda)$ solução de $(P_{N_\lambda})$ em $(0, t_1)$. Logo, existem $f_\lambda, g_\lambda \in L^1(0, t_1; H)$, com $(f_\lambda, g_\lambda) \in F(u_\lambda, v_\lambda) \times G(u_\lambda, v_\lambda)$ tais que $(u_\lambda, v_\lambda)$ é uma solução do sistema $(\tilde{I})$ abaixo:

$$(\tilde{I}) \begin{cases} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial t} - div(D_1^\lambda |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda) + |u_\lambda|^{p-2} u_\lambda = f_\lambda & \text{em } (0, t_1) \\ \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial t} - div(D_2^\lambda |\nabla v_\lambda|^{q-2} \nabla v_\lambda) + |v_\lambda|^{q-2} v_\lambda = g_\lambda & \text{em } (0, t_1) \\ u_\lambda(0) = u_{0,\lambda}, v_\lambda(0) = v_{0,\lambda} & \end{cases}$$

Fazendo o produto interno da primeira equação em $(\tilde{I})$ com $\frac{\partial u_\lambda(t)}{\partial t}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\frac{\partial u_\lambda(t)}{\partial t}\|_H^2 + \frac{d}{dt}\varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(t)) &= \langle f_\lambda(t), \frac{\partial u_\lambda(t)}{\partial t} \rangle \\ &\le \|f_\lambda(t)\|_H \|\frac{\partial u_\lambda(t)}{\partial t}\|_H \\ &\le \frac{1}{2}\|f_\lambda(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|\frac{\partial u_\lambda(t)}{\partial t}\|_H^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Logo

$$\frac{1}{2}\|\frac{\partial u_\lambda(t)}{\partial t}\|_H^2 + \frac{d}{dt}\varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(t)) \le \frac{1}{2}\|f_\lambda(t)\|_H^2.$$

Em particular,

$$\frac{d}{dt}\varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(t)) \le \frac{1}{2}\|f_\lambda(t)\|_H^2. \tag{4.11}$$

Usando a Observação 4.18 e o fato que $F$ e $G$ levam limitados de $H \times H$ em limitados de $H$, obtemos que existe uma constante positiva $C$, independente de $\lambda \in [0, \lambda_0]$, tal que $\|f_\lambda(t)\|_H^2 \le C,\ \forall\ t \in [0, t_1]$ e $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Integrando de 0 a $\tau,\ \tau \in [0, t_1]$ em (4.11), obtemos

$$\begin{aligned} \|u_\lambda(\tau)\|_{W^{1,p}(\Omega)} &\equiv \varphi^{D_1^\lambda}(u_\lambda(\tau)) \le \varphi^{D_1^\lambda}(u_{0,\lambda}) + \frac{1}{2}\int_0^\tau \|f_\lambda(t)\|_H^2 dt \\ &\le \|u_{0,\lambda}\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_0^{t_1} \|f_\lambda(t)\|_H^2 dt \\ &\le \|u_{0,\lambda}\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{2}Ct_1. \end{aligned} \tag{4.12}$$

$\forall\, \tau \in [0, t_1]$ e $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Analogamente prova-se que

$$\|v_\lambda(\tau)\|_{W^{1,q}(\Omega)} \equiv \varphi^{D_2^\lambda}(v_\lambda(\tau)) \leq \|v_{0,\lambda}\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \frac{1}{2}Ct_1,\ \forall\, \tau \in [0, t_1] \text{ e } \lambda \in [0, \lambda_0].$$

Visto que $t_1$ independe das condições iniciais, podemos concluir que nestas condições temos

$$\|u_\lambda(t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|v_\lambda(t)\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C,\ \forall\, \lambda \in [0, \lambda_0] \text{ e } t \geq 0,$$

onde $C > 0$ é constante. ∎

Como conseqüência do Lema 4.20 temos que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ é um subconjunto limitado de $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ e portanto podemos concluir o seguinte:

**Lema 4.22** $\mathcal{A} := \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda}$ *é um subconjunto compacto de* $H \times H$.

Agora mostramos o seguinte:

**Teorema 4.23** *A aplicação* $\lambda \mapsto T_\lambda(t)(\mathcal{A})$ *é fracamente semicontínua superiormente em* $\lambda_1 \doteq 0$ *para cada* $t > 0$.

**Demonstração:** Suponhamos, por contradição, que existe $t_0 > 0$ tal que a aplicação $\lambda \mapsto T_\lambda(t_0)(\mathcal{A})$ não é fracamente semicontínua superiormente em $\lambda_1 \doteq 0$. Portanto, existe uma $\gamma$-vizinhança $O_\gamma(T_0(t_0)(\mathcal{A}))$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $0 \leq \lambda_n < \min\{\lambda_0, \frac{1}{n}\}$ e $\xi_{\lambda_n} \in T_{\lambda_n}(t_0)(\mathcal{A})$ com $\xi_{\lambda_n} \notin O_\gamma(T_0(t_0)(\mathcal{A}))$. ( Note que $\lambda_n \to \lambda_1 = 0$ quando $n \to +\infty$ ). Então $\xi_{\lambda_n} = (u_{\lambda_n}(t_0), v_{\lambda_n}(t_0))$, $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n}) \in \mathbb{G}_{\lambda_n}$, $(u_{\lambda_n}(0), v_{\lambda_n}(0)) \in \mathcal{A}$.

É suficiente mostrar que existe uma subseqüência $\{\xi_{\lambda_{n_k}}\}$ de $\{\xi_{\lambda_n}\}$ com $\xi_{\lambda_{n_k}} \to \xi_0 \in T_0(t_0)(\mathcal{A})$, assim obtendo uma contradição.

De fato, temos que $\varphi_{\lambda_n} = (u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$ é uma solução do problema $(P_{N_\lambda})$ com $(u_{\lambda_n}(0), v_{\lambda_n}(0)) \in \mathcal{A}$. Logo, existem $f_{\lambda_n}, g_{\lambda_n} \in L^1(0, T; H)$, com

$$f_{\lambda_n}(t) \in F(u_{\lambda_n}(t), v_{\lambda_n}(t)),\ g_{\lambda_n}(t) \in G(u_{\lambda_n}(t), v_{\lambda_n}(t)) \ q.t.p. \text{ em } (0, T),$$

e tais que $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$ é uma solução em $(0,T)$ do sistema $(P^1_{\lambda_n})$ abaixo:

$$(P^1_{\lambda_n})\begin{cases} \dfrac{\partial u_{\lambda_n}}{\partial t} - div(D_1^{\lambda_n}|\nabla u_{\lambda_n}|^{p-2}\nabla u_{\lambda_n}) + |u_{\lambda_n}|^{p-2}u_{\lambda_n} = f_{\lambda_n} & \text{em } (0,T) \\ \dfrac{\partial v_{\lambda_n}}{\partial t} - div(D_2^{\lambda_n}|\nabla v_{\lambda_n}|^{q-2}\nabla v_{\lambda_n}) + |v_{\lambda_n}|^{q-2}v_{\lambda_n} = g_{\lambda_n} & \text{em } (0,T) \\ u_{\lambda_n}(0) = u_{0,\lambda_n}, v_{\lambda_n}(0) = v_{0,\lambda_n} \end{cases}$$

Podemos supor $t_0 \in (0,T)$. Como $\mathcal{A}$ é compacto existe $(u_0,v_0) \in \mathcal{A}$ com $(u_{\lambda_n}(0), v_{\lambda_n}(0)) \to (u_0,v_0)$ em $H \times H$.

Denotemos $u_{\lambda_n}(\cdot) \doteq I(u_{0,\lambda_n})f_{\lambda_n}(\cdot)$ e $v_{\lambda_n}(\cdot) \doteq I(v_{0,\lambda_n})g_{\lambda_n}(\cdot)$ e também denotemos por $z_{\lambda_n}(\cdot) \doteq I(u_0)f_{\lambda_n}(\cdot)$ e $w_{\lambda_n}(\cdot) \doteq I(v_0)g_{\lambda_n}(\cdot)$ como sendo as soluções dos problemas

$$(P_{f_{\lambda_n},u_0})\begin{cases} \dfrac{\partial z_{\lambda_n}}{\partial t} - div(D_1^{\lambda_n}|\nabla z_{\lambda_n}|^{p-2}\nabla z_{\lambda_n}) + |z_{\lambda_n}|^{p-2}z_{\lambda_n} = f_{\lambda_n} \\ z_{\lambda_n}(0) = u_0 \end{cases}$$

e

$$(P_{g_{\lambda_n},v_0})\begin{cases} \dfrac{\partial w_{\lambda_n}}{\partial t} - div(D_2^{\lambda_n}|\nabla w_{\lambda_n}|^{q-2}\nabla w_{\lambda_n}) + |w_{\lambda_n}|^{q-2}w_{\lambda_n} = g_{\lambda_n} \\ w_{\lambda_n}(0) = v_0, \end{cases}$$

respectivamente.

Sabemos que $u_{\lambda_n}$ é uma solução de

$$\frac{\partial u_{\lambda_n}}{\partial t} - div(D_1^{\lambda_n}|\nabla u_{\lambda_n}|^{p-2}\nabla u_{\lambda_n}) + |u_{\lambda_n}|^{p-2}u_{\lambda_n} = f_{\lambda_n}.$$

Fazendo o produto interno desta equação com $u_{\lambda_n}$ e integrando de 0 a $t$, $t \leq T$, obtemos

$$\frac{1}{2} \parallel u_{\lambda_n}(t) \parallel_H^2 \leq \frac{1}{2} \parallel u_{0,\lambda_n} \parallel_H^2 + \int_0^t \langle f_{\lambda_n}(s), u_{\lambda_n}(s)\rangle ds.$$

Como $\{u_{0,\lambda_n}\}$ é uma seqüência convergente temos que existe uma constante positiva $R$ tal que $\parallel u_{0,\lambda_n} \parallel_H^2 \leq R^2$. Assim,

$$\frac{1}{2} \parallel u_{\lambda_n}(t) \parallel_H^2 \leq \frac{1}{2}R^2 + \int_0^t \langle f_{\lambda_n}(s), u_{\lambda_n}(s)\rangle ds.$$

Usando a hipótese que o par $(F,G)$ é positivamente sublinear e a desigualdade de Gronwall obtemos que existem constantes positivas $\alpha, \beta$, $\gamma$ e $C$ tais que

$$\parallel u_{\lambda_n}(t) \parallel_H \quad \leq \quad C + \gamma T + \textstyle\int_0^t [\alpha \parallel u_{\lambda_n}(s) \parallel_H + \beta \parallel v_{\lambda_n}(s) \parallel_H] ds.$$

Portanto, existe uma constante positiva $M$ independente de $t$ tal que

$$\| u_{\lambda_n}(t) \|_H \leq M + \int_0^t [\alpha \| u_{\lambda_n}(s) \|_H + \beta \| v_{\lambda_n}(s) \|_H] ds.$$

Analogamente, existe uma constante positiva $\widetilde{M}$ independente de $t$ tal que

$$\| v_{\lambda_n}(t) \|_H \leq \widetilde{M} + \int_0^t [\beta \| u_{\lambda_n}(s) \|_H + \alpha \| v_{\lambda_n}(s) \|_H] ds.$$

Somando estas duas desigualdades e denotando por $N \doteq M + \widetilde{M}$ e $\rho \doteq \alpha + \beta$ temos

$$\| u_{\lambda_n}(t) \|_H + \| v_{\lambda_n}(t) \|_H \leq N + \rho \int_0^t [\| u_{\lambda_n}(s) \|_H + \| v_{\lambda_n}(s) \|_H] ds$$

e daí segue da desigualdade de Gronwall-Bellman que

$$\| u_{\lambda_n}(t) \|_H + \| v_{\lambda_n}(t) \|_H \leq N e^{\rho T}$$

para todo $t \in [0, T]$, e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $F$ e $G$ levam conjuntos limitados de $H \times H$ em conjuntos limitados de $H$, existe $L > 0$ tal que

$$\| f_{\lambda_n}(t) \|_H \leq L \quad \text{e} \quad \| g_{\lambda_n}(t) \|_H \leq L, \quad \text{para todo } t \in [0, T], \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Considere $K \doteq \{f_{\lambda_n}; n \in \mathbb{N}\}$, $\widetilde{K} \doteq \{g_{\lambda_n}; n \in \mathbb{N}\}$, $M(K) \doteq \{z_{\lambda_n}; n \in \mathbb{N}\}$ e $M(\widetilde{K}) \doteq \{w_{\lambda_n}; n \in \mathbb{N}\}$. Uma vez que $K$ e $\widetilde{K}$ são conjuntos limitados, é fácil ver que eles são subconjuntos uniformemente integráveis.

Dados $t \in (0, T]$ e $h > 0$ tais que $t - h \in (0, T]$, consideremos o operador $T_h : M(K)(t) \to H$ definido por $T_h z_{\lambda_n}(t) = S^{\lambda_n}(h) z_{\lambda_n}(t - h)$.

**Afirmação 1:** O operador $T_h : M(K)(t) \to H$ é compacto.

De fato, seja $\mathcal{B}$ um subconjunto limitado de $M(K)(t)$, consideremos o conjunto

$$S \doteq \{S^{\lambda_n}(h) z_{\lambda_n}(t - h); n \in \mathbb{N} \text{ tal que } z_{\lambda_n}(t) \in \mathcal{B}\}.$$

Queremos mostrar que o conjunto $S$ é relativamente compacto em $H$. Como $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset H \doteq L^2(\Omega)$, é suficiente mostrarmos que $S$ é um subconjunto limitado de $W^{1,p}(\Omega)$.

Seja $z_{\lambda_n}(t) \in M(K)(t)$ e definimos

$$v_{\lambda_n} : [t-h, t] \to H$$

por $v_{\lambda_n}(\tau) = S^{\lambda_n}(\tau - (t-h))z_{\lambda_n}(t-h)$, para todo $\tau \in [t-h, t]$.

Observe que $v_{\lambda_n}$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dv_{\lambda_n}}{d\tau}(\tau) + \partial\varphi^{D_1^{\lambda_n}}(v_{\lambda_n}(\tau)) = 0 & t-h \leq \tau \leq t \\ v_{\lambda_n}(t-h) = z_{\lambda_n}(t-h) \end{cases}$$

com

$$\varphi^{D_1^{\lambda_n}}(v) \doteq \begin{cases} \dfrac{1}{p}\left[D_1^{\lambda_n}\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p dx + \int_\Omega |v|^p dx\right], & v \in W^{1,p}(\Omega) \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\varphi^{D_1^{\lambda_n}}(v_{\lambda_n}(\ell)) &= \langle \partial\varphi^{D_1^{\lambda_n}}(v_{\lambda_n}(\ell)), \frac{\partial v_{\lambda_n}}{\partial\tau}(\ell)\rangle = -\langle \frac{\partial v_{\lambda_n}}{\partial\tau}(\ell), \frac{\partial v_{\lambda_n}}{\partial\tau}(\ell)\rangle \\ &= -\parallel \frac{\partial v_{\lambda_n}}{\partial\tau}(\ell) \parallel_H^2 \leq 0, \text{ q.t.p. em } [t-h, t]. \end{aligned}$$

Então, integrando de $t-h$ a $t$, obtemos

$$\frac{1}{p}\parallel v_{\lambda_n}(t)\parallel_{W^{1,p}}^p \leq \varphi^{D_1^{\lambda_n}}(v_{\lambda_n}(t)) \leq \varphi^{D_1^{\lambda_n}}(v_{\lambda_n}(t-h)) = \varphi^{D_1^{\lambda_n}}(z_{\lambda_n}(t-h)).$$

Assim, nosso trabalho é mostrar que $\{\varphi^{D_1^{\lambda_n}}(z_{\lambda_n}(t-h))\}$ é um conjunto limitado, uma vez que $S = \{v_{\lambda_n}(t); n \in \mathbb{N} \text{ tal que } z_{\lambda_n}(t) \in \mathcal{B}\}$.

Já sabemos que existe $L > 0$ tal que

$$\parallel f_{\lambda_n}(\tau) \parallel_H \leq L \text{ e } \parallel g_{\lambda_n}(\tau) \parallel_H \leq L, \text{ para todo } 0 \leq \tau \leq T \text{ e para todo } n \in \mathbb{N},$$

e $z_{\lambda_n}$ e $w_{\lambda_n}$ satisfazem

$$\parallel z_{\lambda_n}(\ell) \parallel_{L^2(\Omega)} \leq \parallel u_0 \parallel_{L^2(\Omega)} + \int_0^\ell \parallel f_{\lambda_n}(\tau) \parallel_{L^2(\Omega)} d\tau, \ \forall\, \ell \in [0, T]$$

e

$$\parallel w_{\lambda_n}(\ell) \parallel_{L^2(\Omega)} \leq \parallel v_0 \parallel_{L^2(\Omega)} + \int_0^\ell \parallel g_{\lambda_n}(\tau) \parallel_{L^2(\Omega)} d\tau, \ \forall\, \ell \in [0, T].$$

Então,

$$\parallel z_{\lambda_n}(\ell) \parallel_{L^2(\Omega)} \leq \parallel u_0 \parallel_{L^2(\Omega)} + L.T, \ \forall\, \ell \in [0, T] \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

e

$$\| w_{\lambda_n}(\ell) \|_{L^2(\Omega)} \leq \| v_0 \|_{L^2(\Omega)} + L.T, \ \forall\, \ell \in [0,T] \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Visto que $t-h>0$ então existe $r>0$ tal que $t-h>r$. Usando o Lema Uniforme de Gronwall, mostra-se (veja a conta feita no Lema 4.20) que existe $\widetilde{r_1}>0$ tal que

$$\varphi^{D_1^{\lambda_n}}(z_{\lambda_n}(\theta+r)) \leq \widetilde{r_1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ e } \theta > 0.$$

Em particular, para $\theta = t-h-r$, temos

$$\varphi^{D_1^{\lambda_n}}(z_{\lambda_n}(t-h)) \leq \widetilde{r_1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Isto conclui a demonstração da Afirmação 1.

Assim, temos pelo Teorema 4.14 que o conjunto $M(K)$ é relativamente compacto em $C([0,T];H)$ e portanto existe $z \in C([0,T];H)$ e existe uma subseqüência, que continuaremos chamando do mesmo modo, $\{z_{\lambda_n}(\cdot)\}$ tal que $z_{\lambda_n} \to z$ em $C([0,T];H)$.

Como cada $z_{\lambda_n}$ é uma solução de $(P_{f_{\lambda_n},u_0})$, então $z_{\lambda_n}$ verifica

$$\frac{1}{2} \| z_{\lambda_n}(t)-\theta \|_H^2 \leq \frac{1}{2} \| z_{\lambda_n}(s)-\theta \|_H^2 + \int_s^t \langle f_{\lambda_n}(\tau) - y_{\lambda_n}, z_{\lambda_n}(\tau) - \theta \rangle d\tau \qquad (4.13)$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(A^{D_1^{\lambda_n}}) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset H$ e $y_{\lambda_n} = A^{D_1^{\lambda_n}}(\theta)$ e para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Analogamente, podemos mostrar que existe $w \in C([0,T];H)$ e existe uma subseqüência $\{w_{\lambda_n}(\cdot)\}$ tal que $w_{\lambda_n} \to w$ em $C([0,T];H)$, verificando

$$\frac{1}{2} \| w_{\lambda_n}(t)-\theta \|^2 \leq \frac{1}{2} \| w_{\lambda_n}(s)-\theta \|^2 + \int_s^t \langle g_{\lambda_n}(\tau) - y_{\lambda_n}, w_{\lambda_n}(\tau) - \theta \rangle d\tau \qquad (4.14)$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(B^{D_2^{\lambda_n}}) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset H$ e $y_{\lambda_n} = B^{D_2^{\lambda_n}}(\theta)$ e para todo $0 \leq s \leq t \leq T$. Como $\| f_{\lambda_n}(\tau) \|_H \leq L$ e $\| g_{\lambda_n}(\tau) \|_H \leq L$, para todo $0 \leq \tau \leq T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que existe uma constante positiva $\widetilde{L}$ tal que

$$\| f_{\lambda_n} \|_{L^2(0,T;H)} \leq \widetilde{L} \qquad \text{e} \qquad \| g_{\lambda_n} \|_{L^2(0,T;H)} \leq \widetilde{L}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $L^2(0,T;H)$ é um espaço de Banach reflexivo, existem $f,g \in L^2(0,T;H)$ e subseqüências, que continuaremos chamando do mesmo modo, $\{f_{\lambda_n}\}$ e $\{g_{\lambda_n}\}$ tais que $f_{\lambda_n} \rightharpoonup f$ e $g_{\lambda_n} \rightharpoonup g$ em $L^2(0,T;H)$. Consequentemente $f_{\lambda_n} \rightharpoonup f$ e $g_{\lambda_n} \rightharpoonup g$ em $L^1(0,T;H)$.

**Afirmação 2:** $u_{\lambda_n} \to z$ e $v_{\lambda_n} \to w$ em $C([0,T];H)$ e além disso $f(t) \in F(z(t),w(t))$ e $g(t) \in G(z(t),w(t))$ q.t.p. em $[0,T]$.

De fato, seja $t \in [0,T]$. Temos

$$\| u_{\lambda_n}(t) - z(t) \|_H \leq \| u_{\lambda_n}(t) - z_{\lambda_n}(t) \|_H + \| z_{\lambda_n}(t) - z(t) \|_H \,.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} \| u_{\lambda_n}(t) - z(t) \|_H &\leq \sup_{t\in[0,T]} \| I(u_{0,\lambda_n})f_{\lambda_n}(t) - I(u_0)f_{\lambda_n}(t) \|_H \\
&+ \sup_{t\in[0,T]} \| z_{\lambda_n}(t) - z(t) \|_H \\
&\leq \| u_{0,\lambda_n} - u_0 \|_H + \sup_{t\in[0,T]} \| z_{\lambda_n}(t) - z(t) \|_H \to 0
\end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$.

Portanto $u_{\lambda_n} \to z$ em $C([0,T];H)$. Analogamente mostra-se que $v_{\lambda_n} \to w$ em $C([0,T];H)$.

Logo, pelo Teorema 1.44, $f(t) \in F(z(t),w(t))$ e $g(t) \in G(z(t),w(t))$ q.t.p. em $[0,T]$. Como queríamos demonstrar.

Observemos que

$$f_{\lambda_n} \rightharpoonup f \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H) \Longrightarrow f_{\lambda_n} \rightharpoonup f \quad \text{em} \quad L^2(s,t;H), \forall\, 0 \leq s \leq t \leq T;$$

e

$$z_{\lambda_n} \to z \text{ em } C([0,T];H) \Longrightarrow z_{\lambda_n} \to z \text{ em } C([s,t];H)$$

e consequentemente

$$z_{\lambda_n} \to z \quad \text{em} \quad L^2(s,t;H),\ \forall\, 0 \leq s \leq t \leq T;$$

então

$$\langle f_{\lambda_n} - h, z_{\lambda_n} - \theta \rangle_{L^2(s,t;H)} \to \langle f - h, z - \theta \rangle_{L^2(s,t;H)}$$

para todo $\theta, h \in H$.

Agora consideremos $\overline{\theta} \in \mathcal{D}(A^{D_1^0}) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset H$ e seja $\overline{h} \doteq A^{D_1^0}(\overline{\theta}) \in H$. Consideremos $y_{\lambda_n} \doteq A^{D_1^{\lambda_n}}(\overline{\theta}) = -div(D_1^{\lambda_n}|\nabla\overline{\theta}|^{p-2}\nabla\overline{\theta}) + |\overline{\theta}|^{p-2}\overline{\theta}$. Notemos que $\mathcal{D}(A^{D_1^{\lambda_n}}) = \mathcal{D}(A^{D_1^0})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Por (4.13) sabemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \parallel z_{\lambda_n}(t) - \overline{\theta} \parallel^2 \;&\leq\; \frac{1}{2} \parallel z_{\lambda_n}(s) - \overline{\theta} \parallel^2 + \int_s^t \langle f_{\lambda_n}(\tau) - y_{\lambda_n}, z_{\lambda_n}(\tau) - \overline{\theta}\rangle d\tau \\
&=\; \frac{1}{2} \parallel z_{\lambda_n}(s) - \overline{\theta} \parallel^2 + \int_s^t \langle f_{\lambda_n}(\tau) - \overline{h} + \overline{h} - y_{\lambda_n}, z_{\lambda_n}(\tau) - \overline{\theta}\rangle d\tau \\
&=\; \frac{1}{2} \parallel z_{\lambda_n}(s) - \overline{\theta} \parallel^2 + \int_s^t \langle f_{\lambda_n}(\tau) - \overline{h}, z_{\lambda_n}(\tau) - \overline{\theta}\rangle d\tau \\
&+\; \int_s^t \langle \overline{h} - y_{\lambda_n}, z_{\lambda_n}(\tau) - \overline{\theta}\rangle d\tau
\end{aligned} \tag{4.15}$$

**Afirmação 3:** $\int_s^t \langle \overline{h} - y_{\lambda_n}, z_{\lambda_n}(\tau) - \overline{\theta}\rangle d\tau \to 0$ quando $n \to +\infty$.

De fato, consideremos a função $B^n(x) \doteq D_1^0(x) - D_1^{\lambda_n}(x)$. Temos por hipótese que $\|B^n\|_{L^\infty(\Omega)} = \|D_1^0 - D_1^{\lambda_n}\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ quando $n \to \infty$. Usando a desigualdade de Hölder, obtemos para cada $\tau \geq 0$, que vale a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\langle \overline{h} - y_{\lambda_n}, z_{\lambda_n}(\tau) - \overline{\theta}\rangle \;&=\; \langle \overline{h}, z_{\lambda_n}(\tau) - \overline{\theta}\rangle - \langle y_{\lambda_n}, z_{\lambda_n}(\tau) - \overline{\theta}\rangle \\
&=\; \langle B^n|\nabla\overline{\theta}|^{p-2}\nabla\overline{\theta}, \nabla(z_{\lambda_n}(\tau)) - \nabla\overline{\theta}\rangle \\
&\leq\; \|B^n\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla\overline{\theta}|^{p-2}|\nabla\overline{\theta}||\nabla(z_{\lambda_n}(\tau)) - \nabla\overline{\theta}|dx \\
&\leq\; \|B^n\|_{L^\infty(\Omega)} \Big[\int_\Omega |\nabla\overline{\theta}|^{p-1}|\nabla(z_{\lambda_n}(\tau))|dx + \int_\Omega |\nabla\overline{\theta}|^p dx\Big] \\
&\leq\; \|B^n\|_{L^\infty(\Omega)} \Big(\|\nabla\overline{\theta}\|_p \|\nabla(z_{\lambda_n}(\tau))\|_p + \|\nabla\overline{\theta}\|_p^p\Big),
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Usando o Lema 4.20 e a Observação 4.21, temos que

$$\Big(\|\nabla\overline{\theta}\|_p \|\nabla(z_{\lambda_n}(\tau))\|_p + \|\nabla\overline{\theta}\|_p^p\Big)$$

é uniformemente limitado para $\lambda_n \in [0, \lambda_0]$ e $\tau \geq 0$, isto é, existe uma constante positiva $C$, independente de $\lambda_n \in [0, \lambda_0]$, tal que

$$\Big(\|\nabla\overline{\theta}\|_p \|\nabla(z_{\lambda_n}(\tau))\|_p + \|\nabla\overline{\theta}\|_p^p\Big) \leq C, \; \forall\, \tau \geq 0 \text{ e } \lambda_n \in [0, \lambda_0].$$

Logo

$$\int_s^t \langle \overline{h} - y_{\lambda_n}, z_{\lambda_n}(\tau) - \overline{\theta} \rangle d\tau \leq \int_s^t \|B^n\|_{L^\infty(\Omega)} C d\tau \leq \|B^n\|_{L^\infty(\Omega)} CT \to 0$$

quando $n \to +\infty$. Como queríamos demonstrar.

Assim, tomando o limite em (4.15) quando $n \to +\infty$, obtemos

$$\frac{1}{2} \| z(t) - \overline{\theta} \|^2 \leq \frac{1}{2} \| z(s) - \overline{\theta} \|^2 + \int_s^t \langle f(\tau) - \overline{h}, z(\tau) - \overline{\theta} \rangle d\tau + \varepsilon, \ \forall \, \varepsilon > 0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \| z(t) - \overline{\theta} \|^2 \leq \frac{1}{2} \| z(s) - \overline{\theta} \|^2 + \int_s^t \langle f(\tau) - \overline{h}, z(\tau) - \overline{\theta} \rangle d\tau$$

para todo $\overline{\theta} \in \mathcal{D}(A^{D_1^0})$ e $\overline{h} \doteq A^{D_1^0}(\overline{\theta})$ e para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Da mesma maneira podemos mostrar que

$$\frac{1}{2} \| w(t) - \overline{\theta} \|^2 \leq \frac{1}{2} \| w(s) - \overline{\theta} \|^2 + \int_s^t \langle g(\tau) - \overline{h}, w(\tau) - \overline{\theta} \rangle d\tau$$

para todo $\overline{\theta} \in D(B^{D_2^0})$ e $\overline{h} \doteq B^{D_2^0}(\overline{\theta})$ e para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Portanto $(z, w) \in \mathbb{G}_0$ com $(z(0), w(0)) = (u_0, v_0) \in \mathcal{A}$. Então,

$$(z(t), w(t)) \in T_0(t)(\mathcal{A}), \ \forall \, t \geq 0.$$

Assim, definindo $\xi_0 \doteq (z(t_0), w(t_0)) \in T_0(t_0)(\mathcal{A})$, obtemos

$$\begin{aligned} \| \xi_{\lambda_n} - \xi_0 \|_{H \times H} &= \| u_{\lambda_n}(t_0) - z(t_0) \|_H + \| v_{\lambda_n}(t_0) - w(t_0) \|_H \\ &\leq \sup_{\tau \in [0,T]} \| u_{\lambda_n}(\tau) - z(\tau) \|_H + \sup_{\tau \in [0,T]} \| v_{\lambda_n}(\tau) - w(\tau) \|_H \to 0, \end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$.

Isto é uma contradição, e portanto concluímos que a aplicação

$$[0, \lambda_0] \ni \lambda \mapsto T_\lambda(t)(\mathcal{A})$$

é fracamente semicontínua superiormente em $\lambda_1 \doteq 0$ para cada $t > 0$. ■

Assim, concluímos que a família $\{\mathbb{G}_\lambda\}_{\lambda \in [0,\lambda_0]}$ satisfaz a condição $(ii)$ do Teorema 4.15. Portanto, obtemos imediatamente, pelo Teorema 4.15, o seguinte resultado:

**Teorema 4.24** *A família de atratores* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in [0,\lambda_0]}$ *associada com o problema* $(P_{N_\lambda})$ *é semicontínua superiormente em* $\lambda_1 = 0$.

# Capítulo 5

# Difusão Grande e Dinâmica Assintótica Descrita por Inclusões Diferenciais Ordinárias

Vários autores têm lidado com a questão de reduzir o estudo de uma equação diferencial parcial ao estudo de uma equação diferencial ordinária, entre eles mencionamos [11], [15], [17], [25], [26] e [27]. Conforme [11], observa-se que a questão de encontrar pontos de equilíbrio para um problema parabólico com um polinômio não-linear pode ser uma tarefa muito dura ou até mesmo intocável. No entanto, se este problema pode ser associado com uma EDO esta questão tem muito mais chances de ser respondida.

O principal teorema em [17] diz que existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que para cada $t > 0$

$$\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2} \leq c_1 e^{-\sigma t} \;\; e \;\; \|u(\cdot,t) - \overline{u}(t)\|_{L^2} \leq c_2 e^{-\sigma t},$$

sendo que $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ n \geq 1$, é a solução do seguinte sistema de equações de reação-difusão

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\triangle u + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} A_j(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_j} + f(u), & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(t,x) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, é um domínio suave com fronteira razoavelmente suave, $\partial\Omega$, $D > 0$ é uma matriz diagonal com os componentes sendo constantes positivas, e $A_j$'s são funções matriciais contínuas, $\overline{u}$ é a média de $u$ em $\Omega$, e é a solução de uma EDO, e $\sigma = d\lambda - M - a\sqrt{m\lambda}$ onde $\lambda$ é o menor autovalor (positivo) de $-\triangle$ em $\Omega$ com condição de fronteira Neumann homogênea, $a \doteq \max\{|A_j(x,u)| : x \in \overline{\Omega}, u \in \Sigma, 1 \leq j \leq m\}$, com $\Sigma = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \{u \in \mathbb{R}^n : a_k \leq u_k \leq b_k\}$, onde $-\infty < a_k < b_k < \infty$, $d$ denota o menor autovalor da matriz $D$, e $M \doteq \max\{|df(u)| : u \in \Sigma\}$. Note que se $d$ fica grande, então $\sigma$ fica grande. Assim, para cada $t > 0$ fixo o gradiente da u fica pequeno e u vai para sua média quando o parâmetro de difusão fica grande.

Provaremos algo similar neste trabalho, isto é, provaremos que existe $t_1 > 0$ tal que para cada $t \geq t_1$, $\|\nabla u^D(t)\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ quando $D \to +\infty$ e $u^D \to u$ em $C([0,T]; L^2(\Omega))$ quando $D \to +\infty$, sendo que $u^D$é a solução de uma EDP e $u$ é a solução do problema limite a ser determinado (que será uma EDO). Mostraremos que para cada parâmetro $D$ a EDP possui um B-atrator global compacto invariante $\mathcal{A}_D$ associado, e por final provaremos que a família de atratores $\{\mathcal{A}_D\}$ é semicontinua superiormente no infinito, isto é, que

$$\sup_{a^D \in \mathcal{A}_D} dist_H(a^D, \mathcal{A}^\infty) \to 0 \text{ quando } D \to +\infty,$$

sendo que $\mathcal{A}^\infty$ é o atrator do problema limite. O que precisamos para obter a semicontinuidade superior dessa família de atratores para difusão grande é uma certa continuidade no fluxo e estimativas uniformes para as soluções, e por final fazer a construção de uma órbita completa limitada. Faremos isto primeiramente para a equação

$$(P_D)\begin{cases} \dfrac{\partial u^D}{\partial t}(t) - D\triangle_p u^D(t) + |u^D(t)|^{p-2}u^D(t) = B(u^D(t)), \;\; t>0 \\ u^D(0) = u_0^D, \end{cases}$$

onde $B : H \to H$ é uma aplicação globalmente Lipschitz, e depois para o sistema acoplado

$$(I)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - div(D_1|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u \in F(u,v) & t>0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - div(D_2|\nabla v|^{q-2}\nabla v) + |v|^{q-2}v \in G(u,v) & t>0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(t,x) = \dfrac{\partial v}{\partial n}(t,x) = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, & t \geq 0 \\ (u(0),v(0)) \text{ em } L^2(\Omega)\times L^2(\Omega), \end{cases}$$

onde $D_1, D_2 \geq 1$, são constantes positivas, $p, q > 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, conexo e suave, com fronteira $\partial\Omega$ suave, e $F$ e $G$ são operadores multívocos limitados, semicontínuos superiormente e satisfazendo a condição de sublinearidade descrita na Seção 4.1 do Capítulo 4. Mostraremos que o problema limite quando $D \to +\infty$ de $(P_D)$ é

$$(P_L)\begin{cases} \dot{u}(t) + |u(t)|^{p-2}u(t) = \widetilde{B}(u(t)), \;\; t>0 \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

sendo que $\widetilde{B} \doteq B_{|\mathbb{R}}$, e que o problema limite quando $D_1, D_2 \to +\infty$ de $(I)$ é

$$(II)\begin{cases} \dot{u} + \phi_p(u) \in \widetilde{F}(u,v) \\ \dot{v} + \phi_q(v) \in \widetilde{G}(u,v) \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, \end{cases}$$

sendo que $\phi_p(s) \doteq |s|^{p-2}s$, $\widetilde{F} \doteq F_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}}, \widetilde{G} \doteq G_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$.

Uma vez que foram determinados os problemas limites e detectado que se tratam de EDO's cujas soluções também são soluções das EDP's (as soluções das EDO's são constantes na variável espacial), também obtemos semicontinuidade inferior da família dos atratores globais e de forma trivial, pois neste caso temos que o atrator do problema limite $\mathcal{A}^\infty$ está contido em cada atrator associado a EDP.

## 5.1 Equação Quasilinear com Termo Perturbativo não-Linear Globalmente Lipschitz

Consideremos o seguinte problema

$$(P_D)\begin{cases} \dfrac{\partial u^D}{\partial t}(t) - D\triangle_p u^D(t) + |u^D(t)|^{p-2}u^D(t) = B(u^D(t)), \;\; t > 0 \\ u^D(0) = u_0^D, \end{cases}$$

onde $\Omega$ é um domínio limitado com fronteira suave de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u_0^D \in H \doteq L^2(\Omega)$, $p > 2$, $D \geq 1$ é constante e $B : H \to H$ uma aplicação globalmente Lipschitz, com constante de Lipschitz $L \geq 0$.

Usando a definição e as propriedades do operador

$$A^D u \doteq -div(D|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u = -D\triangle_p u + |u|^{p-2}u,$$

com condição de fronteira Neumann conforme definido no capítulo 2, temos que $A^D$ é um operador maximal monótono em $H$, e pela Proposição 2.3 o problema $(P_D)$ determina um semigrupo contínuo de operadores não-lineares $S^D(t) : H \to H$, sendo que $S^D(t)u_0^D$ é a solução fraca global de $(P_D)$. Pelo Teorema 2.11, o semigrupo associado ao problema $(P_D)$ possui um B-atrator global maximal compacto invariante $\mathcal{A}_D$ em $H$.

Queremos mostrar que a dinâmica assintótica da EDP em $(P_D)$ é equivalente a dinâmica de uma certa EDO, se $D$ for suficientemente grande, específicamente da seguinte EDO:

$$(P_L)\begin{cases} \dot{u}(t) + |u(t)|^{p-2}u(t) = \widetilde{B}(u(t)), \;\; t > 0 \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

quando restrita ao subespaço das funções constantes, sendo que $\widetilde{B} \doteq B_{|\mathbb{R}}$.

Nosso objetivo final é provar que a família de atratores $\{\mathcal{A}_D\}_{D\geq 1}$ é semicontinua superiormente no infinito, isto é, que

$$\sup_{a^D \in \mathcal{A}_D} dist_H(a^D, \mathcal{A}^\infty) \to 0 \text{ quando } D \to +\infty,$$

sendo que $\mathcal{A}^\infty$ é o atrator do problema limite $(P_L)$, cuja existência será justificada nas próximas seções. Sendo assim, podemos sempre considerar $u_0^D \in \mathcal{A}_D \subset D(A^D)$. Consequentemente, pela Proposição 2.3, $S^D(t)u_0^D$ é uma solução forte global de $(P_D)$.

### 5.1.1 Estimativas Uniformes

Nesta seção obteremos algumas estimativas para as soluções $u^D$'s do problema $(P_D)$, uniformemente em $D \geq 1$. Estes limites uniformes serão úteis para obter semicontinuidade superior de atratores.

**Lema 5.1** *Se $u^D$ é uma solução de $(P_D)$ em $(0, \infty)$, então existem constantes positivas $r_0$, $t_0$ tais que $\|u^D(t)\|_H \leq r_0$, para cada $t \geq t_0$ e $D \geq 1$.*

**Demonstração:** Fazendo o produto interno da equação em $(P_D)$ com $u^D(\tau)$, vem que

$$\langle u_t^D(\tau), u^D(\tau)\rangle + \langle A^D u^D(\tau), u^D(\tau)\rangle = \langle B(u^D(\tau)), u^D(\tau)\rangle.$$

Logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^D(\tau)\|_H^2 + D\int_\Omega |\nabla u^D(\tau)(x)|^p dx + \int_\Omega |u^D(\tau)(x)|^p dx = \langle B(u^D(\tau)), u^D(\tau)\rangle.$$

Então

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^D(\tau)\|_H^2 + D \parallel \nabla u^D(\tau) \parallel_p^p + \parallel u^D(\tau) \parallel_p^p = \langle B(u^D(\tau)), u^D(\tau)\rangle = \\ = \;& \langle B(u^D(\tau)) - B(0), u^D(\tau)\rangle_H + \langle B(0), u^D(\tau)\rangle_H \\ \leq \;& \|B(u^D(\tau)) - B(0)\|_H \|u^D(\tau)\|_H + \|B(0)\|_H \|u^D(\tau)\|_H \\ \leq \;& L\|u^D(\tau)\|_H^2 + c\|u^D(\tau)\|_H, \end{aligned}$$

para $\tau > 0$ *q.t.p.*. Logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^D(\tau)\|_H^2 &\leq -D \parallel \nabla u^D(\tau) \parallel_p^p - \parallel u^D(\tau) \parallel_p^p + L\|u^D(\tau)\|_H^2 + c\|u^D(\tau)\|_H \\
&\leq - \parallel \nabla u^D(\tau) \parallel_p^p - \parallel u^D(\tau) \parallel_p^p + L\|u^D(\tau)\|_H^2 + c\|u^D(\tau)\|_H \\
&= - \parallel u^D(\tau) \parallel_{W^{1,p}(\Omega)}^p + L\|u^D(\tau)\|_H^2 + c\|u^D(\tau)\|_H \\
&\leq -C_p^{-p} \parallel u^D(\tau) \parallel_H^p + L\|u^D(\tau)\|_H^2 + c\|u^D(\tau)\|_H,
\end{aligned}$$

para $\tau > 0$ *q.t.p.*, sendo que $C_p = C(p, \Omega) > 0$ é a constante de imersão de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e $c = \|B(0)\|_H$ é constante. Usando a desigualdade de Young obtemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^D(\tau)\|_H^2 \leq -\frac{C_p^{-p}}{2}\|u^D(\tau)\|_H^p + c_1,$$

para $\tau > 0$ *q.t.p.*, sendo que $c_1 = c_1(p) > 0$ é um número real. Portanto, a função $y^D(\tau) \doteq \|u^D(\tau)\|_H^2$ satisfaz a desigualdade

$$\frac{d}{dt}y^D(\tau) \leq -C_p^{-p}\Big(y^D(\tau)\Big)^{p/2} + 2c_1,$$

para $\tau > 0$ *q.t.p.*. Daí, segue do Lema 1.5 que

$$\|u^D(t)\|_H^2 \leq \Big(\frac{2c_1}{C_p^{-p}}\Big)^{2/p} + \left(\frac{1}{(C_p)^p}\Big(\frac{p}{2} - 1\Big)t\right)^{-\frac{2}{p-2}}, \ \forall\, t > 0.$$

Fixe $t_0 > 0$ (por exemplo $t_0 \doteq 1$) e escolha

$$r_0 \doteq \left[\Big(\frac{2c_1}{C_p^{-p}}\Big)^{2/p} + \left(\frac{1}{(C_p)^p}\Big(\frac{p}{2} - 1\Big)t_0\right)^{-\frac{2}{p-2}}\right]^{1/2}.$$

Então, temos que $\|u^D(t)\|_H \leq r_0$, sempre que $t \geq t_0$. ■

**Observação 5.2** *Observe que as constantes $r_0$, $t_0$ do Lema 5.1 independem dos dados iniciais e de $D$.*

**Observação 5.3** *Para cada $D \geq 1$ fixo existe uma constante positiva $\widetilde{r_0}(u_0^D, t_0)$ tal que $\|u^D(t)\|_H < \widetilde{r_0}(u_0^D, t_0)$, $\forall\, t \in [0, t_0]$. Se os dados iniciais estão todos num conjunto limitado de $H$ ou se $u_0^D = u_0$, $\forall\, D \geq 1$, então temos $\widetilde{r_0}$ uniforme com relação a $D$, isto é, temos que $\|u^D(t)\|_H < \widetilde{r_0}$, $\forall\, D \geq 1$ e $\forall\, t \in [0, t_0]$.*

De fato, fazendo o produto interno da equação $(P_D)$ com $u^D(\tau)$, vem que

$$\langle u_t^D(\tau), u^D(\tau)\rangle + \langle A^D u^D(\tau), u^D(\tau)\rangle = \langle B(u^D(\tau)), u^D(\tau)\rangle.$$

Pela monotocidade do operador $A^D$ temos que

$$\langle A^D u^D(\tau), u^D(\tau)\rangle = \langle A^D u^D(\tau) - A^D(0), u^D(\tau) - 0\rangle \geq 0.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^D(\tau)\|_H^2 &= \langle u_t^D(\tau), u^D(\tau)\rangle \leq \langle B(u^D(\tau)), u^D(\tau)\rangle \\
&= \langle B(u^D(\tau)) - B(0), u^D(\tau)\rangle + \langle B(0), u^D(\tau)\rangle \\
&\leq \|B(u^D(\tau)) - B(0)\|_H \|u^D(\tau)\|_H + \|B(0)\|_H \|u^D(\tau)\|_H \\
&\leq L\|u^D(\tau)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|B(0)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u^D(\tau)\|_H^2 \\
&= \frac{1}{2}\|B(0)\|_H^2 + \Big(L + \frac{1}{2}\Big)\|u^D(\tau)\|_H^2.
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a $t$, $t \in [0, t_0]$, obtemos que

$$\|u^D(t)\|_H^2 \leq \|u_0^D\|_H^2 + \|B(0)\|_H^2 t_0 + \int_0^t (2L+1)\|u^D(s)\|_H^2\, ds, \ \forall\, t \in [0, t_0].$$

Daí, por Gronwall-Bellman segue que

$$\|u^D(t)\|_H^2 \leq (\|u_0^D\|_H^2 + \|B(0)\|_H^2 t_0)e^{(2L+1)t_0}, \ \forall\, t \in [0, t_0]. \tag{5.1}$$

Tome $\widetilde{r_0}(u_0^D, t_0) \doteq \left((\|u_0^D\|_H^2 + \|B(0)\|_H^2 t_0)e^{(2L+1)t_0}\right)^{1/2}$ ■

**Lema 5.4** *Existe um conjunto limitado $B_0$ em $H$ tal que $\mathcal{A}_D \subset B_0$, $\forall\, D \geq 1$.*

**Demonstração:** Seja $x_D \in \mathcal{A}_D$. Visto que $\mathcal{A}_D = S^D(t_0)\mathcal{A}_D$, então pelo Lema 5.1, temos $\|x_D\|_H \leq r_0$. ■

**Observação 5.5** *Como $B$ é globalmente Lipschitz em $H$ segue do Lema 5.1 que se $u^D$ é uma solução de $(P_D)$, então existe constante estritamente positiva $k_1$, tal que $\|B(u^D(t))\|_H < k_1$, $\forall\ D \geq 1$ e $t \geq t_0$. Além disso, usando a Observação 5.3 temos que para cada $D \geq 1$ fixo existe uma constante positiva $\widetilde{k_1} = \widetilde{k_1}(u_0^D, t_0)$ tal* *que* $\|B(u^D(t))\|_H < \widetilde{k_1}(u_0^D, t_0),\ \forall\ t \in [0, t_0]$. *Se os dados iniciais estão todos num conjunto limitado de* $H$ *ou se* $u_0^D = u_0,\ \forall\ D \geq 1$, *então temos* $\widetilde{k_1}$ *uniforme com relação a condições iniciais, isto é, temos que* $\|B(u^D(t))\|_H < \widetilde{k_1},\ \forall\ D \geq 1$ *e* $\forall\ t \in [0, t_0]$.

Agora, usando o Lema 5.1, Observação 5.5 e o Lema Uniforme de Gronwall, podemos repetir os mesmos argumentos usados no Lema 2.2 em [22] e obtemos:

**Lema 5.6** *Se* $u^D$ *é uma solução de* $(P_D)$ *em* $(0, \infty)$, *então existem constantes positivas* $r_1 > 0$ *e* $t_1 > t_0$ *tais que* $\|u^D(t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq r_1$, *para cada* $t \geq t_1$ *e* $D \geq 1$, *com* $t_0$ *como no Lema 5.1.*

**Demonstração:** Consideremos

$$\varphi^D(v) \doteq \begin{cases} \dfrac{1}{p}\left[D\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p dx + \int_\Omega |v|^p dx\right], & v \in W^{1,p}(\Omega) \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $\varphi^D$ é uma aplicação convexa, própria e semicontínua inferiormente e $A^D = \partial\varphi^D$ é maximal monótono em $L^2(\Omega)$. Seja $u^D$ uma solução da equação $(P_D)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\varphi^D(u^D(\tau)) &= \langle \partial\varphi^D(u^D(\tau)), u_\tau^D(\tau)\rangle = \langle B(u^D(\tau)) - u_\tau^D(\tau), u_\tau^D(\tau)\rangle \\
&= \langle B(u^D(\tau)) - u_\tau^D(\tau), u_\tau^D(\tau) - B(u^D(\tau)) + B(u^D(\tau))\rangle \\
&= -\|B(u^D(\tau)) - u_\tau^D(\tau)\|_H^2 + \langle B(u^D(\tau)) - u_\tau^D(\tau), B(u^D(\tau))\rangle,
\end{aligned}$$

para $\tau > 0$ *q.t.p.*. Logo

$$\begin{aligned}
\|B(u^D(\tau)) - u_\tau^D(\tau)\|_H^2 &+ \frac{d}{d\tau}\varphi^D(u^D(\tau)) \\
&\leq \|B(u^D(\tau)) - u_\tau^D(\tau)\|_H \|B(u^D(\tau))\|_H \\
&\leq \frac{1}{2}\|B(u^D(\tau)) - u_\tau^D(\tau)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|B(u^D(\tau))\|_H^2,
\end{aligned}$$

para $\tau > 0$ *q.t.p.*. Portanto

$$\frac{1}{2}\|B(u^D(\tau)) - u_\tau^D(\tau)\|_H^2 + \frac{d}{d\tau}\varphi^D(u^D(\tau)) \leq \frac{1}{2}\|B(u^D(\tau))\|_H^2$$

para $\tau > 0$ $q.t.p.$. Em particular

$$\frac{d}{d\tau}\varphi^D(u^D(\tau)) \leq \frac{1}{2}\|B(u^D(\tau))\|_H^2 < \frac{1}{2}k_1^2,\ \forall\ D \geq 1 \text{ e } \tau \geq t_0\ q.t.p., \tag{5.2}$$

com $k_1$ como na Observação 5.5.

Pela definição de subdiferencial temos a seguinte desigualdade

$$\varphi^D(u^D(\tau)) \leq \langle \partial\varphi^D(u^D(\tau)), u^D(\tau)\rangle \tag{5.3}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^D(\tau)\|_H^2 + \varphi^D(u^D(\tau)) &= \langle u_t^D(\tau), u^D(\tau)\rangle + \varphi^D(u^D(\tau)) \\
&\leq \langle u_t^D(\tau), u^D(\tau)\rangle + \langle \partial\varphi^D(u^D(\tau)), u^D(\tau)\rangle \\
&= \langle B(u^D(\tau)), u^D(\tau)\rangle \\
&\leq \|B(u^D(\tau))\|_H \|u^D(\tau)\|_H \leq k_1 r_0, \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

$\forall\ D \geq 1$ e $\tau \geq t_0$ $q.t.p.$.

Fixando $r > 0$ e integrando a desigualdade 5.4 de $t$ a $t+r,\ t \geq t_0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+r} \varphi^D(u^D(\tau))\, d\tau &\leq \frac{1}{2}\|u^D(t+r)\|_H^2 + \int_t^{t+r} \varphi^D(u^D(\tau))\, d\tau \\
&\leq \frac{1}{2}\|u^D(t)\|_H^2 + k_1 r_0 r \leq \frac{1}{2}r_0^2 + k_1 r_0 r \doteq a_3,\ \forall\ D \geq 1 \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

Considerando $y^D(\tau) \doteq \varphi^D(u^D(\tau)),\ g \equiv 0$ e $h \equiv \frac{1}{2}k_1^2$ temos $\int_t^{t+r} g(\tau)\ d\tau = 0 \doteq a_1$, $\int_t^{t+r} h(\tau))\ d\tau = \frac{1}{2}k_1^2 r \doteq a_2$ e $\int_t^{t+r} y^D(\tau)\ d\tau = \int_t^{t+r} \varphi^D(u^D(\tau))\ d\tau \leq a_3, \forall\ D \geq 1$. Logo pelo Lema Uniforme de Gronwall, temos que

$$y^D(t+r) \leq (\frac{a_3}{r} + a_2)e^0 \doteq \widetilde{r_1},\ \forall\ t \geq t_0 \text{ e } \forall\ D \geq 1. \tag{5.6}$$

Fazendo $\ell = t + r$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\|u^D(\ell)\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p &= \frac{1}{p}[\|\nabla u^D(\ell)\|_p^p + \|u^D(\ell)\|_p^p] \\
&\leq \frac{1}{p}[D\|\nabla u^D(\ell)\|_p^p + \|u^D(\ell)\|_p^p] \\
&= \varphi^D(u^D(\ell)) = y^D(\ell) \leq \widetilde{r_1},\ \forall\ \ell \geq t_0 + r \text{ e } \forall\ D \geq 1. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Considerando $r_1 \doteq (p\widetilde{r_1})^{1/p}$ e $t_1 \doteq t_0 + r$, concluímos que $\|u^D(\ell)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq r_1$, para cada $\ell \geq t_1$ e $D \geq 1$. ■

Como conseqüência do Lema 5.6 temos que $\bigcup_{D\geq 1} \mathcal{A}_D$ é um subconjunto limitado de $W^{1,p}(\Omega)$ e como $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$, podemos concluir o seguinte:

**Lema 5.7** $\mathcal{A} \doteq \overline{\bigcup_{D\geq 1} \mathcal{A}_D}$ *é um subconjunto compacto de* $H$*.*

### 5.1.2 O Problema Limite e Propriedades de Convergência

Conforme [38], fisicamente, difusão grande implica em uma rápida redistribuição na não-homogeneidade espacial, e assim esperamos para valores grandes de $D$, que as soluções de $(P_D)$ sejam aproximadamente constantes na variável espacial. Nosso objetivo é comparar o fluxo da equação $(P_D)$ e da equação limite quando $D \to +\infty$. Para obter a equação limite provamos primeiramente o

**Lema 5.8** *Se para cada* $D \geq 1$, $u^D$ *é a solução de* $(P_D)$ *em* $(0, \infty)$, *então para cada* $t > t_1$, *a seqüência de números reais* $\{\|\nabla u^D(t)\|_H\}_{D\geq 1}$ *possui uma subseqüência* $\{\|\nabla u^{D_\ell}(t)\|_H\}$ *que converge para zero quando* $\ell \to +\infty$, *sendo que* $t_1$ *é a constante positiva do Lema 5.6.*

**Demonstração:** Seja $t_1$ como no Lema 5.6 e considere $t > t_1$ fixo. Escolha $T > t_1$ fixado arbitrariamente grande de modo que $t_1 < t < T$. Fazendo o produto interno da equação em $(P_D)$ com $u^D(\tau)$, vem que

$$\langle u_t^D(\tau), u^D(\tau)\rangle + \langle A^D u^D(\tau), u^D(\tau)\rangle = \langle B(u^D(\tau)), u^D(\tau)\rangle.$$

Logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^D(\tau)\|_H^2 + D\int_\Omega |\nabla u^D(\tau)(x)|^p dx + \int_\Omega |u^D(\tau)(x)|^p dx = \langle B(u^D(\tau)), u^D(\tau)\rangle.$$

Então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^D(\tau)\|_H^2 + D \parallel \nabla u^D(\tau) \parallel_p^p + \parallel u^D(\tau) \parallel_p^p = \langle B(u^D(\tau)), u^D(\tau)\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \langle B(u^D(\tau)) - B(0), u^D(\tau)\rangle_H + \langle B(0), u^D(\tau)\rangle_H \\
&\leq \|B(u^D(\tau)) - B(0)\|_H \|u^D(\tau)\|_H + \|B(0)\|_H \|u^D(\tau)\|_H \\
&\leq L\|u^D(\tau)\|_H^2 + c\|u^D(\tau)\|_H \leq k_2,\ \tau - q.t.p. \text{ em } (t_1, T) \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

com $k_2 > 0$ constante independente de $D$.

Integrando a desigualdade (5.8) de $t_1$ a $T$, obtemos

$$\frac{1}{2}\|u^D(T)\|_H^2 + D\int_{t_1}^{T} \parallel \nabla u^D(\tau) \parallel_p^p d\tau + \int_{t_1}^{T} \parallel u^D(\tau) \parallel_p^p d\tau \leq$$

$$\leq \int_{t_1}^{T} k_2 d\tau + \frac{1}{2}\|u^D(t_1)\|_H^2 \leq k_2 T + \frac{1}{2} r_0^2 \doteq k_3(T).$$

Em particular

$$D\int_{t_1}^{T} \parallel \nabla u^D(\tau) \parallel_p^p d\tau \leq k_3(T),$$

o que implica

$$\int_{t_1}^{T} \parallel \nabla u^D(\tau) \parallel_p^p d\tau \leq \frac{1}{D} k_3(T) \to 0 \text{ quando } D \to +\infty,$$

ou seja,

$$\| \parallel \nabla u^D(\tau) \parallel_p^p - 0\|_{L^1(t_1,T;\mathbb{R})} = \int_{t_1}^{T} | \parallel \nabla u^D(\tau) \parallel_p^p - 0| d\tau \to 0 \text{ quando } D \to +\infty.$$

Logo existe uma subseqüência $\{\parallel \nabla u^{D_\ell}(\tau) \parallel_p^p\}$ tal que

$$\parallel \nabla u^{D_\ell}(\tau) \parallel_p^p \to 0 \text{ quando } \ell \to +\infty,\ \tau - q.t.p. \text{ em } (t_1, T).$$

Logo existe um conjunto $J \subset (t_1, T)$ com $m((t_1, T)/J) = 0$ tal que

$$\parallel \nabla u^{D_\ell}(\tau) \parallel_p^p \to 0 \text{ quando } \ell \to +\infty,\ \forall\, \tau \in J.$$

Visto que $m(J) \leq m((t_1, T)) = T - t_1 < \infty$, temos pelo Teorema de Egoroff que existe um conjunto $E_t \subset J$ tal que $m(J - E_t) < \varepsilon' \doteq t - t_1$ e

$$\parallel \nabla u^{D_\ell}(\tau) \parallel_p^p \to 0 \text{ quando } \ell \to +\infty$$

uniformemente em $E_t$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\ell_0 = \ell_0(\varepsilon) > 0$ tal que se $\ell > \ell_0$ então

$$\| \nabla u^{D_\ell}(\tau) \|_p^p < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall\, \tau \in E_t.$$

Note que sempre existe $s \in E_t$ com $s < t$, caso contrário teríamos $(t_1, t) \subset E_t^C$, o que implicaria que $m(E_t^C) = m(J - E_t) \geq t - t_1$, o que dá uma contradição. Então tome um $s \in E_t$ com $s < t$ e considere $h = t - s$.

Consideremos

$$\varphi^{D_\ell}(v) \doteq \begin{cases} \dfrac{1}{p}\left[D_\ell \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p dx + \int_\Omega |v|^p dx\right], & v \in W^{1,p}(\Omega) \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $\varphi^{D_\ell}$ é uma aplicação convexa, própria e semicontínua inferiormente e $A^{D_\ell} = \partial \varphi^{D_\ell}$ é maximal monótono em $L^2(\Omega)$.

Sabemos que $u^{D_\ell}$ é solução da equação

$$(P_{D_\ell}) \begin{cases} \dfrac{\partial u^{D_\ell}}{\partial t}(\tau) - D_\ell \triangle_p u^{D_\ell}(\tau) + |u^{D_\ell}(\tau)|^{p-2} u^{D_\ell}(\tau) = B(u^{D_\ell}(\tau)), \ \ \tau > 0 \\ u^{D_\ell}(0) = u_0^{D_\ell} \in H \doteq L^2(\Omega), \end{cases}$$

logo $u^{D_\ell}(\tau) \in D(A^{D_\ell}) \subseteq W^{1,p}(\Omega), \ \ \tau - q.t.p.$ em $(0, T)$.

Temos que

$$\frac{d}{d\tau}\varphi^{D_\ell}(u^{D_\ell}(s+\tau)) = \langle \partial \varphi^{D_\ell}(u^{D_\ell}(s+\tau)), u_\tau^{D_\ell}(s+\tau) \rangle, \ \ \tau - q.t.p. \text{ em } (0, T).$$

Logo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p}[D_\ell \|\nabla u^{D_\ell}(s+h)\|_p^p + \|u^{D_\ell}(s+h)\|_p^p] - \frac{1}{p}[D_\ell \|\nabla u^{D_\ell}(s)\|_p^p + \|u^{D_\ell}(s)\|_p^p] \\ = \ & \varphi^{D_\ell}(u^{D_\ell}(s+h)) - \varphi^{D_\ell}(u^{D_\ell}(s)) \\ = \ & \int_0^h \frac{d}{d\tau}\varphi^{D_\ell}(u^{D_\ell}(s+\tau))\, d\tau = \int_0^h \langle \partial \varphi^{D_\ell}(u^{D_\ell}(s+\tau)), u_\tau^{D_\ell}(s+\tau) \rangle\, d\tau \\ = \ & \int_0^h \langle B u^{D_\ell}(s+\tau) - u_\tau^{D_\ell}(s+\tau), u_\tau^{D_\ell}(s+\tau) \rangle\, d\tau \\ = \ & \int_0^h \langle B u^{D_\ell}(s+\tau), u_\tau^{D_\ell}(s+\tau) \rangle\, d\tau - \int_0^h \langle u_\tau^{D_\ell}(s+\tau), u_\tau^{D_\ell}(s+\tau) \rangle\, d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^h \|Bu^{D_\ell}(s+\tau)\|_H \|u_\tau^{D_\ell}(s+\tau)\|_H \, d\tau - \int_0^h \|u_\tau^{D_\ell}(s+\tau)\|_H^2 \, d\tau \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^h \|Bu^{D_\ell}(s+\tau)\|_H^2 \, d\tau + \frac{1}{2}\int_0^h \|u_\tau^{D_\ell}(s+\tau)\|_H^2 \, d\tau - \int_0^h \|u_\tau^{D_\ell}(s+\tau)\|_H^2 \, d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^h \|Bu^{D_\ell}(s+\tau)\|_H^2 \, d\tau - \frac{1}{2}\int_0^h \|u_\tau^{D_\ell}(s+\tau)\|_H^2 \, d\tau \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^h \|Bu^{D_\ell}(s+\tau)\|_H^2 \, d\tau \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^h k_1 d\tau = \frac{1}{2}k_1 h.
\end{aligned}
$$

sendo que $k_1$ é a constante positiva que aparece na Observação 5.5.

Assim,

$$
D_\ell \|\nabla u^{D_\ell}(s+h)\|_p^p \leq D_\ell \|\nabla u^{D_\ell}(s)\|_p^p + \|u^{D_\ell}(s)\|_p^p + \frac{p}{2}k_1 h \tag{5.9}
$$

Logo,

$$
\|\nabla u^{D_\ell}(s+h)\|_p^p \leq \|\nabla u^{D_\ell}(s)\|_p^p + \frac{1}{D_\ell}\|u^{D_\ell}(s)\|_p^p + \frac{p}{2D_\ell}k_1 h \tag{5.10}
$$

e portanto,

$$
\|\nabla u^{D_\ell}(s+h)\|_p^p \leq \|\nabla u^{D_\ell}(s)\|_p^p + \frac{1}{D_\ell}r_1^p + \frac{p}{2D_\ell}k_1|T-t_1|, \tag{5.11}
$$

onde $r_1$ é a constante positiva que aparece no Lema 5.6.

Assim, escolha $\ell_1 = \ell_1(\varepsilon)$ grande o suficiente para que

$$
\frac{1}{D_\ell}r_1^p + \frac{p}{2D_\ell}k_1|T-t_1| < \varepsilon/2,
$$

sempre que $\ell > \ell_1$ e, além disso, consideramos $\ell_2 = \ell_2(\varepsilon) = \max\{\ell_0, \ell_1\}$. Para $\ell > \ell_2$ temos

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u^{D_\ell}(t)\|_p^p &= \|\nabla u^{D_\ell}(s+t-s)\|_p^p \\
&\leq \|\nabla u^{D_\ell}(s)\|_p^p + \frac{1}{D_\ell}r_1^p + \frac{p}{2D_\ell}k_1|T-t_1| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Como $p > 2$,

$$
\| \nabla u^{D_\ell}(t) \|_H^p \leq m(\Omega)^{1/2-1/p} \| \nabla u^{D_\ell}(t) \|_p^p \leq m(\Omega)^{1/2-1/p}\varepsilon.
$$

Portanto,

$$\| \nabla u^{D_\ell}(t) \|_H \to 0 \ \text{ quando } \ell \to +\infty.$$

■

O Lema 5.8 nos diz que a equação $(P_L)$ é um bom candidato para o problema limite.

**Lema 5.9** *O problema $(P_L)$ possui uma única solução global.*

**Demonstração:** Consideremos $\phi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $\phi_p(v) \doteq |v|^{p-2}v$ e $\psi(v) \doteq \int_0^v |s|^{p-2}s \, ds$, respectivamente.

Temos que $\psi$ é uma função convexa, própria e contínua, em particular, s.c.i., logo, $\partial\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é maximal monótono (veja Exemplo 1.16). Pelo Segundo Teorema Fundamental do Cálculo temos que $\psi'(v) = |v|^{p-2}v = \phi_p(v)$. Usando a definição de subdiferencial e de derivadas laterais obtemos que $\partial\psi(v) = \psi'(v) = \phi_p(v)$. Portanto $\phi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um operador maximal monótono com $\mathcal{D}(\phi_p) = \mathbb{R}$.

Como $\widetilde{B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é globalmente Lipschitz, usando o Teorema 3.17 e Observação 3.14 das páginas 105-106 em [7] podemos concluir que o problema $(P_L)$ possui uma única solução global. ■

**Teorema 5.10** *O problema $(P_L)$ define um semigrupo de classe $\mathcal{K}$ e é B-dissipativo, e portanto existe um B-atrator global $\mathcal{A}^\infty$ associado ao problema $(P_L)$. Além disso, o atrator $\mathcal{A}^\infty$ é igual a união de todas as trajetórias completas limitadas em $\mathbb{R}$.*

**Demonstração:** Definimos $S(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $S(t)v_0 = v(t)$, com $v$ sendo a única solução global do problema $(P_L)$ com $v(0) = v_0$. É fácil ver que $S(t)$ verifica as propriedades de semigrupo.

Mostremos que $S(t)$ é de classe $\mathcal{K}$ e é B-dissipativo. De fato, multiplicando a equação $v_t + \phi_p(v) = \widetilde{B}(v)$ por $v$ e usando a desigualdade de Young obtemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v(t)|^2 \leq -\frac{1}{2}|v(t)|^p + c,$$

onde $c > 0$ é uma constante. Portanto, a função $y(t) \doteq |v(t)|^2$ satisfaz a desigualdade

$$\frac{d}{dt}y(t) \leq -(y(t))^{p/2} + 2c.$$

Daí, segue do Lema 1.5 que

$$|v(t)|^2 \leq \left(\frac{2c}{1}\right)^{2/p} + \left(1\left(\frac{p}{2}-1\right)t\right)^{-\frac{2}{p-2}}, \ \forall\, t > 0.$$

Fixe $\tau_0 \doteq 1$ e escolha $s_0 \doteq \left[\left(\frac{2c}{1}\right)^{2/p} + \left(1\left(\frac{p}{2}-1\right)\tau_0\right)^{-\frac{2}{p-2}}\right]^{1/2}$. Então, temos que

$$|v(t)| \leq s_0, \text{ sempre que } t \geq \tau_0 = 1. \tag{5.12}$$

A desigualdade (5.12) garante que o semigrupo é B-dissipativo.

Agora, novamente multiplicando a equação $v_t + \phi_p(v) = \widetilde{B}(v)$ por $v$, vem que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v(t)|^2 + \phi_p(v(t))v(t) = \widetilde{B}(v(t))v(t).$$

Visto que $\phi_p(v(t))v(t) = |v(t)|^p \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v(t)|^2 &\leq \left|\widetilde{B}(v(t)) - \widetilde{B}(0)\right||v(t) - 0| + |\widetilde{B}(0)||v(t)| \\ &\leq L|v(t)|^2 + \frac{1}{2}|\widetilde{B}(0)|^2 + \frac{1}{2}|v(t)|^2, \ \forall\, t > 0,\end{aligned}$$

onde $L$ é a constante de Lipschitz de $\widetilde{B}$. Integrando de 0 a $\tau$, $\tau \in [0, \tau_0]$, obtemos que

$$|v(\tau)|^2 \leq |v_0|^2 + |\widetilde{B}(0)|^2 + \int_0^\tau (2L+1)|v(t)|^2\, dt, \ \forall\, \tau \in [0, \tau_0].$$

Daí, pelo Lema de Gronwall-Bellman segue que

$$|v(\tau)|^2 \leq (|v_0|^2 + |\widetilde{B}(0)|^2)e^{(2L+1)}, \ \forall\, \tau \in [0, \tau_0]. \tag{5.13}$$

Usando (5.12) e (5.13) concluímos que para cada $t > 0$, $S(t)$ leva limitados em limitados. Como todo limitado da reta é precompacto, concluímos que $\{S(t)\}$ é de classe $\mathcal{K}$, ou seja, para cada $t > 0$ o operador $S(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é compacto.

Assim, o Teorema 2.2 e a Proposição 2.2 em [29], garantem que o semigrupo $S(t)$ possui um B-atrator global maximal compacto invariante $\mathcal{A}^\infty$, dado como união de todas as trajetórias completas limitadas em $\mathbb{R}$. ∎

O próximo resultado garante que $(P_L)$ é de fato o problema limite para $(P_D)$, quando $D \to +\infty$.

**Teorema 5.11** *Para cada $D \geq 1$, seja $u^D$ a solução de $(P_D)$ com $u^D(0) = u_0^D$ e seja $u$ a solução de $(P_L)$ com $u(0) = u_0$. Se $u_0^D \to u_0$ em $H$ quando $D \to +\infty$, então para cada $T > 0$, $u^D \to u$ em $C([0,T];\ H)$ quando $D \to +\infty$.*

**Demonstração:** Seja $T > 0$ fixo. Para cada $D \geq 1$, seja $u^D$ a solução de

$$(P_D)\begin{cases} \dfrac{du^D}{dt}(t) + A^D u^D(t) = B(u^D(t)) \ \text{ em } (0,T) \\ u^D(0) = u_0^D \in H \doteq L^2(\Omega), \end{cases}$$

com $A^D u^D(t) = -D\triangle_p u^D(t) + |u^D(t)|^{p-2} u^D(t)$ e seja $u$ a solução de

$$(P_L)\begin{cases} \dot{u}(t) + |u(t)|^{p-2}u(t) = \widetilde{B}(u(t)) \ \text{ em } (0,T) \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Suponhamos que $u_0^D \to u_0$ em $H$ quando $D \to +\infty$.

Subtraindo as duas equações e fazendo o produto interno com $u^D - u$ obtemos

$$\langle u_t^D - u_t, u^D - u\rangle_H + \langle A^D u^D - \phi_p(u), u^D - u\rangle_H = \langle B(u^D) - B(u), u^D - u\rangle_H.$$

Usando a Desigualdade de Tartar obtemos que existem constantes $C_1, C_2 \geq 0$ independentes de $D$ tais que

$$\langle A^D u^D - \phi_p(u), u^D - u\rangle \geq DC_1\|\nabla u^D - \nabla u\|_p^p + C_2\|u^D - u\|_p^p \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^D - u\|_H^2 &= \langle u_t^D - u_t, u^D - u\rangle \\ &\leq \langle B(u^D) - B(u), u^D - u\rangle \\ &\leq \|B(u^D) - B(u)\|_H \|u^D - u\|_H \\ &\leq L\|u^D - u\|_H^2, \ \text{q.t.p. em } (0,T). \end{aligned}$$

Integrando de 0 a $t,\ t \leq T$, obtemos

$$\|u^D(t) - u(t)\|_H^2 \leq \|u_0^D - u_0\|_H^2 + \int_0^t 2L\|u^D(s) - u(s)\|_H^2\, ds$$

Daí, pelo Lema de Gronwall-Bellman obtemos que

$$\begin{aligned}\|u^D(t) - u(t)\|_H^2 &\leq \|u_0^D - u_0\|_H^2 e^{\int_0^t 2L ds}\\ &\leq \|u_0^D - u_0\|_H^2 e^{2Lt}\\ &\leq \|u_0^D - u_0\|_H^2 e^{2LT},\ \forall\, t \in [0,T].\end{aligned}$$

Portanto $u^D \to u$ em $C([0,T];\ H)$ quando $D \to +\infty$, sempre que $u_0^D \to u_0$ em $H$ quando $D \to +\infty$. ■

### 5.1.3 Semicontinuidade Superior de Atratores

Precisamos do seguinte lema técnico:

**Lema 5.12** *Se para cada $D \geq 1$ $u_0^D \in \mathcal{A}_D$ e $u_0 \doteq \lim_{D\to+\infty} u_0^D$ em $H$, então $u_0$ é uma função constante.*

**Demonstração:** Seja $\{u_0^D\}$ uma seqüência com $u_0^D \in \mathcal{A}_D$, para cada $D \geq 1$, e seja $u_0 \doteq \lim_{D\to+\infty} u_0^D$ em $H$. Como cada $\mathcal{A}_D \subset W^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$, pela Desigualdade de Poincaré-Wirtinger (p.194 em [8]) temos

$$\|u_0^D - \overline{u_0^D}\|_H \leq C\|\nabla u_0^D\|_H,$$

sendo que $C > 0$ é uma constante e $\overline{u_0^D} \doteq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0^D(x)\, dx$.

Pela invariância dos atratores, $\mathcal{A}_D = S^D(\tau)\mathcal{A}_D,\ \forall\, \tau \geq 0$. Considere $t_1 > 0$ como no Lema 5.6 e seja $\bar{t} > t_1$. Logo, para cada $D \geq 1$,

$$u_0^D = u^D(\bar{t}) \doteq S^D(\bar{t})(v_0),\ \text{com } v_0 \in \mathcal{A}_D.$$

Daí, pelo Lema 5.8, a seqüência de números reais $\{\|\nabla u^D(\bar{t})\|_H\}_{D\geq 1}$ possui uma subseqüência $\{\|\nabla u^{D_\ell}(\bar{t})\|_H\}$ que converge para zero quando $\ell \to +\infty$. Logo

$$\|\nabla u_0^{D_\ell}\|_H = \|\nabla u^{D_\ell}(\bar{t})\|_H \to 0 \ \text{ quando } \ell \to +\infty.$$

Portanto

$$\|u_0^{D_\ell} - \overline{u_0^{D_\ell}}\|_H \to 0 \text{ quando } \ell \to +\infty.$$

Então, usando a desigualdade triangular, concluímos que

$$\|u_0 - \overline{u_0^{D_\ell}}\|_H \to 0 \text{ quando } \ell \to +\infty.$$

Visto que $u_0^{D_\ell} \to u_0$ em $H$ implica $u_0^{D_\ell} \rightharpoonup u_0$ em $H$, e considerando a função característica $\chi_\Omega \in L^2(\Omega)$ ($\Omega$ é limitado), obtemos que $\overline{u_0^{D_\ell}} \to \overline{u_0}$ (convergência de números reais). Logo, olhando como funções constantes, isto implica que $\overline{u_0^{D_\ell}} \to \overline{u_0}$ em $H = L^2(\Omega)$.

Portanto, pela unicidade do limite em $H$, concluímos que $u_0 = \overline{u_0}$. Portanto, $u_0$ é uma função constante. ■

Agora enunciamos o principal resultado desta seção:

**Teorema 5.13** *A família dos B-atratores globais $\{\mathcal{A}_D; D \geq 1\}$ do problema $(P_D)$ é semicontínua superiormente no infinito, na topologia de $H = L^2(\Omega)$.*

**Demonstração:** Seja $\{u_0^D\}$ uma seqüência qualquer com $u_0^D \in \mathcal{A}_D$, para cada $D \geq 1$, e $D \to +\infty$. Usando o Lema 1.7, para obtermos semicontinuidade superior da família dos B-atratores globais é suficiente garantirmos que $\{u_0^D\}$ tem uma subseqüência convergente e que o limite pertence ao B-atrator $\mathcal{A}^\infty$ do problema limite. Pelo Lema 5.7, $\mathcal{A} \doteq \overline{\bigcup_{D \geq 1} \mathcal{A}_D}$ é um subconjunto compacto de $H$. Logo existe uma subseqüência $\{u_0^{D_j}\}$ de $\{u_0^D\}$ tal que $u_0^{D_j} \to u_0$ em $H$ quando $j \to +\infty$. Pelo Lema 5.12, $u_0 \in \mathbb{R}$.

Nosso objetivo é mostrar que $u_0 \in \mathcal{A}^\infty$. Usando a Proposição 2.2 em [29], é suficiente mostrar que passa uma trajetória completa limitada $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $u_0$. Nosso trabalho se resume então a fazer a construção dessa trajetória $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sejam $\{S^D(\tau)\}$ e $\{S(\tau)\}$ os semigrupos associados aos problemas $(P_D)$ e $(P_L)$, respectivamente. Consideremos também os semifluxos correspondentes $\mathcal{G}^D$ e $\mathcal{G}$ e os semigrupos multívocos $T_D$ e $T$ definidos por $\mathcal{G}^D$ e $\mathcal{G}$ respectivamente (Veja capítulo 3).

Para cada $j \in \mathbb{N}$, considere $t_j > j$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_j < \ldots$. Pela invariância dos atratores, existem $x_j \in \mathcal{A}_{D_j}$ e uma solução $\varphi_{x_j}^{D_j} \in \mathcal{G}^{D_j}$ com $\varphi_{x_j}^{D_j}(0) = x_j$ tal que $\varphi_{x_j}^{D_j}(t_j) = u_0^{D_j} \to u_0$ em $H$ quando $j \to +\infty$. Note que $\varphi_{x_j}^{D_j}(t_j) \in T_{D_j}(t_j)(x_j) \in \mathcal{A}_{D_j}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$.

Usando a condição $(H_2)$ da definição de semifluxo generalizado, temos que para cada $j \in \mathbb{N}$, as transladadas $\left(\varphi_{x_j}^{D_j}\right)^{t_j}$ também são soluções, e temos $\left(\varphi_{x_j}^{D_j}\right)^{t_j}(0) \to u_0$ em $H$ quando $j \to +\infty$.

Pelo Teorema 5.11, obtemos que

$$\left(\varphi_{x_j}^{D_j}\right)^{t_j}(t) \to g_0(t) \doteq S(t)u_0 \;\text{ em } H \;\text{ quando }\; j \to +\infty,\ \forall\, t \geq 0.$$

Agora consideremos a seqüência $\{\varphi_{x_j}^{D_j}(t_j - 1)\}$. Note que

$$\varphi_{x_j}^{D_j}(t_j - 1) \in T_{D_j}(t_j - 1)(x_j) \subset \bigcup_{D \geq 1} \mathcal{A}_D$$

que é um subconjunto precompacto em $H$, logo temos que, passando para uma subseqüência se necessário,

$$\left(\varphi_{x_j}^{D_j}\right)^{(t_j - 1)}(0) = \varphi_{x_j}^{D_j}(t_j - 1) \to z_1 \;\text{ em } H \;\text{ quando }\; j \to +\infty.$$

Como para cada $j \in \mathbb{N}$, $\varphi_{x_j}^{D_j}$ é uma solução que começou no atrator $\mathcal{A}_{D_j}$, obtemos pela invariância dos atratores que a seqüência de dados iniciais $\varphi_{x_j}^{D_j}(t_j - 1) \in \mathcal{A}_{D_j}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 5.12, $z_1 \in \mathbb{R}$. Novamente pelo Teorema 5.11, obtemos que

$$\left(\varphi_{x_j}^{D_j}\right)^{(t_j - 1)}(t) \to g_1(t) \doteq S(t)z_1 \;\text{ em } H \;\text{ quando }\; j \to +\infty,\ \forall\, t \geq 0.$$

Agora note que $g_1^1 = g_0$, pois para cada $t \geq 0$, temos

$$g_1^1(t) = g_1(t+1) = \lim_{j \to +\infty} (\varphi_{x_j}^{D_j})^{(t_j - 1)}(t+1) = \lim_{j \to +\infty} (\varphi_{x_j}^{D_j})^{t_j}(t) = g_0(t).$$

Procedendo assim indutivamente, encontramos para cada $r = 0, 1, 2, \cdots$, uma solução $g_r \in \mathcal{G}$ com $g_r(0) = z_r$ tal que $g_{r+1}^1 = g_r$. Dado $t \in \mathbb{R}$, definimos $g(t)$ como o valor comum de $g_r(t + r)$ para $r > -t$. Então temos que $g$ é uma órbita completa para $\mathcal{G}$ com $g(0) = g_0(0) = u_0$. Note que para cada $t \geq 0$, $r = 0, 1, 2, \cdots$, temos que cada

$$g_r(t) = \lim_{j \to +\infty} \left(\varphi_{x_j}^{D_j})\right)^{(t_j - r)}(t) \text{ e } \left(\varphi_{x_j}^{D_j}\right)^{(t_j - r)}(t) \in \mathcal{A}_{D_j}, \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Usando o Lema 5.12, concluímos que cada $g_r(t)$ independe de $x$. Consequentemente, obtemos que $g(t)$ é uma função constante em $x$. Como $\mathcal{A}_{D_j} \subset \overline{\bigcup_{D \geq 1} \mathcal{A}_D}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$, obtemos que existe uma constante $C > 0$ tal que $\|g_r(t)\|_H \leq C$, $\forall\, t \geq 0$ e $r = 0, 1, 2, \cdots$. Assim, em particular, temos que $g(t)$ é limitada em $H$. Daí, existe uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$|g(t)| = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \|g(t)\|_H \leq \tilde{C}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, concluímos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma órbita completa limitada para $\mathcal{G}$ passando pelo ponto $u_0$. Isto implica que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma trajetória completa limitada para $\{S(\tau)\}$. De fato, sejam $s \in \mathbb{R}$ e $\tau \geq 0$. Como $g$ é uma órbita completa para $\mathcal{G}$, temos que a transladada $g^s \in \mathcal{G}$, isto é, $g^s(\tau) = S(\tau)g(s)$. Portanto, $g(s + \tau) = g^s(\tau) = S(\tau)g(s)$. Isto conclui a nossa demonstração. ■

**Observação 5.14** *Notemos que cada órbita completa limitada do problema limite* $(P_L)$ *é uma órbita completa limitada do problema* $(P_D)$*. Logo* $\mathcal{A}^\infty \subset \mathcal{A}_D$, $\forall\, D \geq 1$*. Consequentemente obtemos que a família de atratores* $\{\mathcal{A}_D; D \geq 1\}$ *do problema* $(P_D)$ *é semicontínua superiormente no infinito, na topologia de* $H = L^2(\Omega)$*, isto é, que*

$$\sup_{x \in \mathcal{A}^\infty} dist_H(x, \mathcal{A}_D) \to 0 \ \textit{quando}\ D \to +\infty.$$

Assim, usando o Teorema 5.13 e a Observação 5.14, obtemos que a família de atratores $\{\mathcal{A}_D; D \geq 1\}$ do problema $(P_D)$ é contínua no infinito, na topologia de $H = L^2(\Omega)$, isto é, que é semicontínua superiormente e semicontínua inferiormente no infinito, na topologia de $H$.

## 5.2 Sistemas de Inclusões diferenciais

Nesta seção consideramos o seguinte problema

$$(I)\begin{cases} \dfrac{\partial u^{D_1}}{\partial t} - D_1 \triangle_p u^{D_1} + |u^{D_1}|^{p-2} u^{D_1} \in F(u^{D_1}, v^{D_2}) & \text{em } (0,T)\times\Omega \\ \dfrac{\partial v^{D_2}}{\partial t} - D_2 \triangle_q v^{D_2} + |v^{D_2}|^{q-2} v^{D_2} \in G(u^{D_1}, v^{D_2}) & \text{em } (0,T)\times\Omega \\ \dfrac{\partial u^{D_1}}{\partial n}(t,x) = \dfrac{\partial v^{D_2}}{\partial n}(t,x) = 0 & \text{em } (0,T)\times\partial\Omega \\ u^{D_1}(0,x) = u_0^{D_1}(x), v^{D_2}(0,x) = v_0^{D_2}(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde $D_1,\ D_2 \geq 1$, são constantes positivas, $p,\ q > 2$, $\Omega$ é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n,\ n \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega$ suave, $u_0^{D_1},\ v_0^{D_2} \in H = L^2(\Omega)$ e $F, G$ satisfazem as mesmas condições como na seção 4.1.3. Portanto para cada par $(D_1, D_2)$, podemos associar um semifluxo generalizado $\mathbb{G}(D_1, D_2)$ o qual tem um $B$-atrator global compacto invariante $\mathcal{A}_{(D_1,D_2)}$, conforme foi provado na seção 4.1.3.

Nosso objetivo final é provar que a família de atratores $\{\mathcal{A}_{(D_1,D_2)}\}_{D_1,D_2\geq 1}$ é semicontinua superiormente no infinito, isto é, em $(\infty,\infty)$. O que precisamos para obter a semicontinuidade superior dessa família de atratores para difusão grande é uma certa continuidade no fluxo e estimativas uniformes para as soluções, e por final fazer a construção de uma órbita completa limitada.

Levando-se em consideração a seção anterior podemos dizer que um bom candidato para o problema limite é

$$(II)\begin{cases} \dot{u} + \phi_p(u) \in \widetilde{F}(u,v) \\ \dot{v} + \phi_q(v) \in \widetilde{G}(u,v) \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, \end{cases}$$

sendo que $\phi_p(s) \doteq |s|^{p-2}s,\ \ \widetilde{F} \doteq F_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}}, \widetilde{G} \doteq G_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$.

Nas próximas seções vamos obter as estimativas uniformes, a continuidade do fluxo e a compacidade necessária para a demonstração da semicontinuidade superior dos atratores.

### 5.2.1 Estimativas Uniformes

Nesta seção obteremos algumas estimativas para as soluções $(u^{D_1}, v^{D_2})$ do problema $(I)$, uniformemente em $D_1, D_2 \geq 1$.

**Lema 5.15** *Se* $(u^{D_1}, v^{D_2})$ *é uma solução de* $(I)$, *então existem constantes positivas* $r_0$, $t_0$ *tais que* $\|(u^{D_1}(t), v^{D_2}(t))\|_{H\times H} = \|u^{D_1}(t)\|_H + \|v^{D_2}(t)\|_H \leq r_0$, *para cada* $t \geq t_0$ *e* $D_1, D_2 \geq 1$.

**Demonstração:** Seja $(u^{D_1}, v^{D_2})$ uma solução do problema $(I)$. Logo, existem $f, g \in L^1(0, T; H)$, com

$$f(t) \in F(u^{D_1}(t), v^{D_2}(t)),\ g(t) \in G(u^{D_1}(t), v^{D_2}(t))\ q.t.p. \text{ em } (0, T),$$

e tais que $(u^{D_1}, v^{D_2})$ é uma solução do sistema:

$$(\widetilde{I}) \begin{cases} \dfrac{\partial u^{D_1}}{\partial t} - D_1 \triangle_p u^{D_1} + |u^{D_1}|^{p-2} u^{D_1} = f & \text{em } (0,T) \\ \dfrac{\partial v^{D_2}}{\partial t} - D_2 \triangle_q v^{D_2} + |v^{D_2}|^{q-2} v^{D_2} = g & \text{em } (0,T) \\ u^{D_1}(0) = u_0^{D_1}, v^{D_2}(0) = v_0^{D_2} \end{cases}$$

Fazendo o produto interno da primeira equação de $(\widetilde{I})$ com $u^{D_1}(t)$, vem que

$$\langle u_t^{D_1}(t), u^{D_1}(t)\rangle + \langle A^{D_1} u^{D_1}(t), u^{D_1}(t)\rangle = \langle f(t), u^{D_1}(t)\rangle.$$

Logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^{D_1}(t)\|_H^2 + D_1 \int_\Omega |\nabla u^{D_1}(t)(x)|^p dx + \int_\Omega |u^{D_1}(t)(x)|^p dx = \langle f(\tau), u^{D_1}(t)\rangle.$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^{D_1}(t)\|_H^2 &= -D_1 \parallel \nabla u^{D_1}(t) \parallel_p^p - \parallel u^{D_1}(t) \parallel_p^p + \langle f(t), u^{D_1}(t)\rangle \\ &\leq - \parallel \nabla u^{D_1}(t) \parallel_p^p - \parallel u^{D_1}(t) \parallel_p^p + \langle f(\tau), u^{D_1}(t)\rangle \\ &= - \parallel u^{D_1}(t) \parallel_{W^{1,p}}^p + \langle f(t), u^{D_1}(t)\rangle \\ &\leq -C_p^{-p} \parallel u^{D_1}(t) \parallel_H^p + \langle f(t), u^{D_1}(t)\rangle, \end{aligned} \tag{5.14}$$

sendo que $C_p > 0$ é a constante de imersão de $W^{1,p}(\Omega)$ em $H$. Análogamente, mostra-se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^{D_2}(t)\|_H^2 \leq -C_q^{-q} \parallel v^{D_2}(t) \parallel_H^q + \langle g(t), v^{D_2}(t)\rangle_H, \tag{5.15}$$

Agora usando a Definição 4.3, Cauchy-Schwartz, a Desigualdade de Young, supondo sem perda de generalidade que $p \geq q$ e somando as equações (5.14) e (5.15) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u^{D_1}(t)\|_H^2 + \|v^{D_2}(t)\|_H^2\Big) &\leq \frac{-1}{2(C_q)^q}\Big(\|u^{D_1}(t)\|_H^{2^{q/2}} + \|v^{D_2}(t)\|_H^{2^{q/2}}\Big) + C_1\\ &\leq \frac{-1}{2^{1+q/2}(C_q)^q}\Big(\|u^{D_1}(t)\|_H^2 + \|v^{D_2}(t)\|_H^2\Big)^{q/2} + C_1\end{aligned}$$

sendo que $C_1 = C_1(p, q, \Omega) > 0$ é uma constante que não depende de $(D_1, D_2)$. Assim, usando o Lema 1.5, obtemos que existem constantes positivas $r_0,\ t_0$ tais que $\|(u^{D_1}(t), v^{D_2}(t))\|_{H\times H} = \|u^{D_1}(t)\|_H + \|v^{D_2}(t)\|_H \leq r_0$, para cada $t \geq t_0$ e $D_1, D_2 \geq 1$. ∎

**Observação 5.16** *As constantes* $r_0,\ t_0$ *do Lema 5.15 independem dos dados iniciais e dos pares* $(D_1, D_2)$ *.*

**Observação 5.17** *Para cada par* $(D_1, D_2)$ *fixos existe uma constante positiva* $K = K(u_0^{D_1}, v_0^{D_2}, t_0)$ *tal que* $\|u^{D_1}(t)\|_H + \|v^{D_2}(t)\|_H \leq K(u_0^{D_1}, v_0^{D_2}, t_0)$, $\forall\ t \in [0, t_0]$. *Se os dados iniciais estão todos num conjunto limitado de* $H \times H$ *ou se* $u^{D_1}(0) = u_0, v^{D_2}(0) = v_0$, $\forall\ D_1,\ D_2 \geq 1$, *então temos* $K$ *uniforme com relação a* $(D_1, D_2)$*, isto é, temos que* $\|u^{D_1}(t)\|_H + \|v^{D_2}(t)\|_H \leq K$, $\forall\ D_1, D_2 \geq 1$ *e* $\forall\ t \in [0, t_0]$. *Neste caso podemos considerar* $t_0 = 0$ *no Lema 5.15.*

De fato, seja $(u^{D_1}, v^{D_2})$ uma solução do problema $(I)$ em $(0, t_0)$. Logo, existem $f, g \in L^1(0, t_0; H)$, com

$$f(t) \in F(u^{D_1}(t), v^{D_2}(t)),\ g(t) \in G(u^{D_1}(t), v^{D_2}(t))\ q.t.p. \text{ em } (0, t_0),$$

e tais que $(u^{D_1}, v^{D_2})$ é uma solução do sistema $(\tilde{I})$ abaixo:

$$(\tilde{I})\begin{cases}\dfrac{\partial u^{D_1}}{\partial t} - D_1\Delta_p u^{D_1} + |u^{D_1}|^{p-2}u^{D_1} = f & \text{em } (0, t_0)\\ \dfrac{\partial v^{D_2}}{\partial t} - D_2\Delta_q v^{D_2} + |v^{D_2}|^{q-2}v^{D_2} = g & \text{em } (0, t_0)\\ u^{D_1}(0) = u_0^{D_1}, v^{D_2}(0) = v_0^{D_2} & \end{cases}$$

Fazendo o produto interno da primeira equação com $u^{D_1}$ e integrando de 0 a $t$, $t \leq t_0$, obtemos

$$\frac{1}{2} \| u^{D_1}(t) \|_H^2 \leq \frac{1}{2} \| u_0^{D_1} \|_H^2 + \int_0^t \langle f(s), u^{D_1}(s) \rangle ds.$$

Usando a hipótese que o par $(F, G)$ é positivamente sublinear e a desigualdade de Gronwall obtemos que existem constantes positivas $\alpha, \beta$, $\gamma$ e $C = C(u_0^{D_1})$ tais que

$$\| u^{D_1}(t) \|_H \quad \leq \quad C + \gamma \, t_0 + \textstyle\int_0^t [\alpha \| u^{D_1}(s) \|_H + \beta \| v^{D_2}(s) \|_H] ds.$$

Portanto, existe uma constante positiva $M = M(u_0^{D_1}, t_0)$ tal que

$$\| u^{D_1}(t) \|_H \leq M + \int_0^t [\alpha \| u^{D_1}(s) \|_H + \beta \| v^{D_2}(s) \|_H] ds.$$

Analogamente, existe uma constante positiva $\widetilde{M} = \widetilde{M}(v_0^{D_2}, t_0)$ tal que

$$\| v^{D_2}(t) \|_H \leq \widetilde{M} + \int_0^t [\beta \| u^{D_1}(s) \|_H + \alpha \| v^{D_2}(s) \|_H] ds.$$

Somando estas duas desigualdades e denotando por $N \doteq M + \widetilde{M}$ e $\rho \doteq \alpha + \beta$ temos

$$\| u^{D_1}(t) \|_H + \| v^{D_2}(t) \|_H \leq N + \rho \int_0^t [\| u^{D_1}(s) \|_H + \| v^{D_2}(s) \|_H] ds$$

e daí segue da desigualdade de Gronwall-Bellman que

$$\| u^{D_1}(t) \|_H + \| v^{D_2}(t) \|_H \leq N e^{\rho t_0} \doteq K(u_0^{D_1}, v_0^{D_2}, t_0), \text{ para todo } t \in [0, t_0].$$

Se os dados iniciais estão todos num conjunto limitado de $H \times H$ ou se $u^{D_1}(0) = u_0, v^{D_2}(0) = v_0$, $\forall\ D_1,\ D_2 \geq 1$, então temos $K$ uniforme com relação a $(D_1, D_2)$, isto é, temos que $\|u^{D_1}(t)\|_H + \|u^{D_2}(t)\|_H \leq K$, $\forall\ D_1, D_2 \geq 1$ e $\forall\ t \in [0, t_0]$. Assim, considerando $\widetilde{r_0} \doteq \max\{r_0, K\}$ segue que

$$\|(u^{D_1}(t), v^{D_2}(t))\|_{H \times H} \leq \widetilde{r_0}, \text{ para cada } t \geq 0 \text{ e } D_1, D_2 \geq 1.$$

Visto que $t_0$ não depende das condições iniciais, a constante $\widetilde{r_0}$ é uniforme com relação as condições iniciais em subconjuntos limitados de $H \times H$. Neste caso podemos considerar $t_0 = 0$ no Lema 5.15. ■

**Lema 5.18** *Existe um conjunto limitado $B_0$ em $H \times H$ tal que $\mathcal{A}_{(D_1,D_2)} \subset B_0$, $\forall\, D_1, D_2 \geq 1$.*

**Demonstração:** Seja $(x_{D_1}, y_{D_2}) \in \mathcal{A}_{(D_1,D_2)}$. Visto que $\mathcal{A}_{(D_1,D_2)} = T_{(D_1,D_2)}(t_0)\mathcal{A}_{(D_1,D_2)}$, sendo que $T_{(D_1,D_2)}$ é o semigrupo multívoco definido por $\mathbb{G}(D_1, D_2)$, então pelo Lema 5.15, temos $\|(x_{D_1}, y_{D_2})\|_{H\times H} \leq r_0$. ■

Agora, usando o Lema 5.15 e o fato que $F$ e $G$ levam limitados de $H \times H$ em limitados de $H$, podemos repetir os mesmos argumentos que foram feitos no Lema 2.2 em [22] para cada equação em $(\widetilde{I})$ (veja as contas nas demonstrações dos Lemas 4.20 e 5.6), e obtemos:

**Lema 5.19** *Se $(u^{D_1}, v^{D_2})$ é uma solução de $(I)$, então existem constantes positivas $r_1 > 0$ e $t_1 > t_0$ tais que $\|(u^{D_1}(t), v^{D_2}(t))\|_{W^{1,p}\times W^{1,q}} = \|u^{D_1}(t)\|_{W^{1,p}} + \|v^{D_2}(t)\|_{W^{1,q}} \leq r_1$, para cada $t \geq t_1$ e $D_1, D_2 \geq 1$, com $t_0$ como no Lema 5.15.*

Como conseqüência do Lema 5.19 temos que $\displaystyle\bigcup_{D_1,D_2\geq 1} \mathcal{A}_{(D_1,D_2)}$ é um subconjunto limitado de $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ e portanto podemos concluir o seguinte:

**Lema 5.20** $\mathcal{A} \doteq \overline{\displaystyle\bigcup_{D_1,D_2\geq 1} \mathcal{A}_{(D_1,D_2)}}$ *é um subconjunto compacto de $H \times H$.*

### 5.2.2 O Problema Limite e Propriedades de Convergência

Para obter a equação limite provamos primeiramente o

**Lema 5.21** *Se $(u^{D_1}, v^{D_2})$ é uma solução de $(I)$, então para cada $t > t_1$, as seqüências de números reais $\{\|\nabla u^{D_1}(t)\|_H\}_{D_1\geq 1}$ e $\{\|\nabla v^{D_2}(t)\|_H\}_{D_2\geq 1}$ possuem subseqüências $\{\|\nabla u^{D_{1\ell}}(t)\|_H\}$ e $\{\|\nabla v^{D_{2\ell}}(t)\|_H\}$ que convergem para zero quando $\ell \to +\infty$, sendo que $t_1$ é a constante positiva do Lema 5.19.*

**Demonstração:** Seja $t_1$ a constante positiva do Lema 5.19 e considere $t > t_1$ fixo. Escolha $T > t_1$ fixado arbitrariamente grande de modo que $t_1 < t < T$. Seja

$(u^{D_1}, v^{D_2})$ uma solução do problema $(I)$. Logo, existem $f, g \in L^1(0,T;H)$, com

$$f(t) \in F(u^{D_1}(t), v^{D_2}(t)),\ g(t) \in G(u^{D_1}(t), v^{D_2}(t))\ \ q.t.p. \text{ em } (0,T),$$

e tais que $(u^{D_1}, v^{D_2})$ é uma solução do sistema:

$$(\widetilde{I}) \begin{cases} \dfrac{\partial u^{D_1}}{\partial t} - D_1 \triangle_p u^{D_1} + |u^{D_1}|^{p-2} u^{D_1} = f & \text{em } (0,T) \\ \dfrac{\partial v^{D_2}}{\partial t} - D_2 \triangle_q v^{D_2} + |v^{D_2}|^{q-2} v^{D_2} = g & \text{em } (0,T) \\ u^{D_1}(0) = u_0^{D_1}, v^{D_2}(0) = v_0^{D_2} \end{cases}$$

Fazendo o produto interno da primeira equação de $(\widetilde{I})$ com $u^{D_1}(\tau)$, vem que

$$\langle u_t^{D_1}(\tau), u^{D_1}(\tau)\rangle + \langle A^{D_1} u^{D_1}(\tau), u^{D_1}(\tau)\rangle = \langle f(\tau), u^{D_1}(\tau)\rangle.$$

Logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^{D_1}(\tau)\|_H^2 + D_1 \int_\Omega |\nabla u^{D_1}(\tau)(x)|^p dx + \int_\Omega |u^{D_1}(\tau)(x)|^p dx = \langle f(\tau), u^{D_1}(\tau)\rangle.$$

Então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^{D_1}(\tau)\|_H^2 + D_1 \parallel \nabla u^{D_1}(\tau) \parallel_p^p + \parallel u^{D_1}(\tau) \parallel_p^p = \langle f(\tau), u^{D_1}(\tau)\rangle. \tag{5.16}$$

Análogamente, mostra-se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^{D_2}(\tau)\|_H^2 + D_2 \parallel \nabla v^{D_2}(\tau) \parallel_q^q + \parallel v^{D_2}(\tau) \parallel_q^q = \langle g(\tau), v^{D_2}(\tau)\rangle. \tag{5.17}$$

Consideremos $\theta \doteq q/2,\ s \doteq q/q'$ ( $q'$ significa expoente conjugado, isto é, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$). Usando a sublinearidade positiva do par $(F, G)$ e a Desigualdade de Young prova-se que

$$\begin{aligned} \langle f(\tau), u^{D_1}(\tau)\rangle &\leq \Big(\frac{2}{q} + \frac{2}{q}\Big)\|u^{D_1}(\tau)\|_H^q + \frac{1}{s'}\Big(\frac{1}{q'} b^{q'}\Big)^{s'} + \frac{1}{s}\|v^{D_2}(\tau)\|_H^q \\ &+ \Big(\frac{1}{\theta'} a^{\theta'} + \frac{1}{q'} c^{q'}\Big) + C_1 m_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle g(\tau), v^{D_2}(\tau)\rangle &\leq \Big(\frac{2}{q} + \frac{2}{q}\Big)\|v^{D_2}(\tau)\|_H^q + \frac{1}{s'}\Big(\frac{1}{q'} a^{q'}\Big)^{s'} + \frac{1}{s}\|u^{D_1}(\tau)\|_H^q \\ &+ \Big(\frac{1}{\theta'} a^{\theta'} + \frac{1}{q'} c^{q'}\Big) + C_1 m_0, \end{aligned}$$

sendo que $C_1 > 0$ é uma constante que não depende de $(D_1, D_2)$, e $a, b, c$ e $m_0$ são as constantes que aparecem na Definição 4.3.

Então, somando as equações (5.16) e (5.17), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u^{D_1}(\tau)\|_H^2 + \|v^{D_2}(\tau)\|_H^2\Big) + D_1 \parallel \nabla u^{D_1}(\tau) \parallel_p^p + D_2 \parallel \nabla v^{D_2}(\tau) \parallel_q^q \\ + & \parallel u^{D_1}(\tau) \parallel_p^p + \parallel v^{D_2}(\tau) \parallel_q^q = \langle f(\tau), u^{D_1}(\tau)\rangle + \langle g(\tau), v^{D_2}(\tau)\rangle \leq \\ \leq & \Big(\frac{2}{q} + \frac{2}{q} + \frac{1}{s}\Big)\Big(\|u^{D_1}(\tau)\|_H^q + \|v^{D_2}(\tau)\|_H^q\Big) + C_2, \end{aligned}$$

sendo que $C_2 > 0$ é uma constante que não depende de $(D_1, D_2)$. Usando o Lema 5.15, obtemos que existe uma constante $C_3 > 0$ que não depende de $(D_1, D_2)$, tal que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u^{D_1}(\tau)\|_H^2 + \|v^{D_2}(\tau)\|_H^2\Big) + D_1 \parallel \nabla u^{D_1}(\tau) \parallel_p^p + D_2 \parallel \nabla v^{D_2}(\tau) \parallel_q^q \\ + & \parallel u^{D_1}(\tau) \parallel_p^p + \parallel v^{D_2}(\tau) \parallel_q^q \leq C_3,\ q.t.p. \text{ em } (t_1, T). \end{aligned}$$

Como $\parallel u^{D_1}(\tau) \parallel_p^p + \parallel v^{D_2}(\tau) \parallel_q^q \geq 0$, temos em particular que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u^{D_1}(\tau)\|_H^2 + \|v^{D_2}(\tau)\|_H^2\Big) + D_1 \parallel \nabla u^{D_1}(\tau) \parallel_p^p + D_2 \parallel \nabla v^{D_2}(\tau) \parallel_q^q \leq C_3, \quad (5.18)$$

$q.t.p.$ em $(t_1, T)$.

Integrando a desigualdade (5.18) de $t_1$ a $T$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Big(\|u^{D_1}(T)\|_H^2 + \|v^{D_2}(T)\|_H^2\Big) & + D_1 \int_{t_1}^{T} \parallel \nabla u^{D_1}(\tau) \parallel_p^p d\tau \\ & + D_2 \int_{t_1}^{T} \parallel \nabla v^{D_2}(\tau) \parallel_q^q d\tau \\ & \leq \int_{t_1}^{T} C_3 d\tau + \frac{1}{2}\Big(\|u^{D_1}(t_1)\|_H^2 + \|v^{D_2}(t_1)\|_H^2\Big) \\ & \leq C_3 T + r_0^2 \doteq k(T). \end{aligned}$$

Em particular

$$D_1 \int_{t_1}^{T} \parallel \nabla u^{D_1}(\tau) \parallel_p^p d\tau \leq k(T)$$

e

$$D_2 \int_{t_1}^{T} \parallel \nabla v^{D_2}(\tau) \parallel_q^q d\tau \leq k(T),$$

o que implica

$$\int_{t_1}^{T} \| \nabla u^{D_1}(\tau) \|_p^p \, d\tau \leq \frac{1}{D_1} k(T) \to 0 \text{ quando } D_1 \to +\infty,$$

ou seja,

$$\| \, \| \nabla u^{D_1}(\tau) \|_p^p - 0 \|_{L^1(t_1,T;\,\mathbb{R})} = \int_{t_1}^{T} | \, \| \nabla u^{D_1}(\tau) \|_p^p - 0 | d\tau \to 0 \text{ quando } D_1 \to +\infty.$$

Logo existe uma subseqüência $\{\| \nabla u^{D_{1\ell}}(\tau) \|_p^p\}$ tal que

$$\| \nabla u^{D_{1\ell}}(\tau) \|_p^p \to 0 \text{ quando } \ell \to +\infty, \; q.t.p. \text{ em } (t_1, T).$$

Logo existe um conjunto $J \subset (t_1, T)$ com $m((t_1, T)/J) = 0$ tal que

$$\| \nabla u^{D_{1\ell}}(\tau) \|_p^p \to 0 \;\; \text{quando } \ell \to +\infty, \; \forall \, \tau \in J.$$

Visto que $m(J) \leq m((t_1, T)) = T - t_1 < \infty$, temos pelo Teorema de Egoroff que existe um conjunto $E_t \subset J$ tal que $m(J - E_t) < \varepsilon' \doteq t - t_1$ e

$$\| \nabla u^{D_{1\ell}}(\tau) \|_p^p \to 0 \;\; \text{quando } \ell \to +\infty$$

uniformemente em $E_t$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\ell_0 = \ell_0(\varepsilon) > 0$ tal que se $\ell > \ell_0$ então

$$\| \nabla u^{D_{1\ell}}(\tau) \|_p^p < \frac{\varepsilon}{2}, \; \forall \, \tau \in E_t.$$

Note que sempre existe $s \in E_t$ com $s < t$, caso contrário teríamos $(t_1, t) \subset E_t^C$, o que implicaria que $m(E_t^C) = m(J - E_t) \geq t - t_1$, o que dá uma contradição. Então tome um $s \in E_t$ com $s < t$ e considere $h = t - s$.

Consideremos

$$\varphi^{D_{1\ell}}(v) \doteq \begin{cases} \dfrac{1}{p}\left[D_{1\ell} \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p dx + \int_\Omega |v|^p dx\right], & v \in W^{1,p}(\Omega) \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $\varphi^{D_{1\ell}}$ é uma aplicação convexa, própria e semicontínua inferiormente e $A^{D_{1\ell}} = \partial\varphi^{D_{1\ell}}$ é maximal monótono em $L^2(\Omega)$.

Sabemos que $u^{D_{1\ell}}$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial u^{D_{1\ell}}}{\partial t} - D_1 \triangle_p u^{D_{1\ell}} + |u^{D_{1\ell}}|^{p-2} u^{D_{1\ell}} = f \qquad \text{em } (0, T)$$

com

$$f(t) \in F(u^{D_{1\ell}}(t), v^{D_{2\ell}}(t)), \quad q.t.p. \text{ em } (0,T),$$

logo $u^{D_{1\ell}}(\tau) \in D(A^{D_{1\ell}}) \subseteq W^{1,p}(\Omega), \quad q.t.p.$ em $(0,T)$.

Usando o Lema 5.15 e que $F$ e $G$ levam limitados de $H \times H$ em limitados de $H$, obtemos que existe uma constante positiva $K$, independente dos pares $(D_1, D_2)$, tal que $\|f(\zeta)\|_H^2 \leq K$, $\forall\, \zeta \geq t_0$.

Temos que

$$\frac{d}{d\tau}\varphi^{D_{1\ell}}(u^{D_{1\ell}}(s+\tau)) = \langle \partial\varphi^{D_{1\ell}}(u^{D_{1\ell}}(s+\tau)), u_\tau^{D_{1\ell}}(s+\tau)\rangle, \quad \tau - q.t.p. \text{ em } (0,T).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{p} & \quad [D_{1\ell}\|\nabla u^{D_{1\ell}}(s+h)\|_p^p + \|u^{D_{1\ell}}(s+h)\|_p^p] \\
- & \quad \frac{1}{p}[D_{1\ell}\|\nabla u^{D_{1\ell}}(s)\|_p^p + \|u^{D_{1\ell}}(s)\|_p^p] \\
= & \quad \varphi^{D_{1\ell}}(u^{D_{1\ell}}(s+h)) - \varphi^{D_{1\ell}}(u^{D_{1\ell}}(s)) \\
= & \quad \int_0^h \frac{d}{d\tau}\varphi^{D_{1\ell}}(u^{D_{1\ell}}(s+\tau))\, d\tau \\
= & \quad \int_0^h \langle \partial\varphi^{D_{1\ell}}(u^{D_{1\ell}}(s+\tau)), u_\tau^{D_{1\ell}}(s+\tau)\rangle\, d\tau \\
= & \quad \int_0^h \langle f(s+\tau) - u_\tau^{D_{1\ell}}(s+\tau), u_\tau^{D_{1\ell}}(s+\tau)\rangle\, d\tau \\
= & \quad \int_0^h \langle f(s+\tau), u_\tau^{D_{1\ell}}(s+\tau)\rangle\, d\tau - \int_0^h \langle u_\tau^{D_{1\ell}}(s+\tau), u_\tau^{D_{1\ell}}(s+\tau)\rangle\, d\tau \\
\leq & \quad \int_0^h \|f(s+\tau)\|_H \|u_\tau^{D_{1\ell}}(s+\tau)\|_H\, d\tau - \int_0^h \|u_\tau^{D_{1\ell}}(s+\tau)\|_H^2\, d\tau \\
\leq & \quad \frac{1}{2}\int_0^h \|f(s+\tau)\|_H^2\, d\tau + \frac{1}{2}\int_0^h \|u_\tau^{D_{1\ell}}(s+\tau)\|_H^2\, d\tau \\
- & \quad \int_0^h \|u_\tau^{D_{1\ell}}(s+\tau)\|_H^2\, d\tau \\
= & \quad \frac{1}{2}\int_0^h \|f(s+\tau)\|_H^2\, d\tau - \frac{1}{2}\int_0^h \|u_\tau^{D_{1\ell}}(s+\tau)\|_H^2\, d\tau \\
\leq & \quad \frac{1}{2}\int_0^h \|f(s+\tau)\|_H^2\, d\tau \\
\leq & \quad \frac{1}{2}\int_0^h K d\tau = \frac{1}{2}Kh.
\end{aligned}$$

Assim,

$$D_{1\ell}\|\nabla u^{D_{1\ell}}(s+h)\|_p^p \leq D_{1\ell}\|\nabla u^{D_{1\ell}}(s)\|_p^p + \|u^{D_{1\ell}}(s)\|_p^p + \frac{p}{2}Kh \tag{5.19}$$

Logo,

$$\|\nabla u^{D_{1\ell}}(s+h)\|_p^p \leq \|\nabla u^{D_{1\ell}}(s)\|_p^p + \frac{1}{D_{1\ell}}\|u^{D_{1\ell}}(s)\|_p^p + \frac{p}{2D_{1\ell}}Kh \tag{5.20}$$

e portanto,

$$\|\nabla u^{D_{1\ell}}(s+h)\|_p^p \leq \|\nabla u^{D_{1\ell}}(s)\|_p^p + \frac{1}{D_{1\ell}}r_1^p + \frac{p}{2D_{1\ell}}K|T-t_1|, \tag{5.21}$$

onde $r_1$ é a constante positiva que aparece no Lema 5.19.

Assim, escolha $\ell_1 = \ell_1(\varepsilon)$ grande o suficiente para que

$$\frac{1}{D_{1\ell}}r_1^p + \frac{p}{2D_{1\ell}}K|T-t_1| < \varepsilon/2,$$

sempre que $\ell > \ell_1$ e, além disso, consideramos $\ell_2 = \ell_2(\varepsilon) = \max\{\ell_0, \ell_1\}$. Para $\ell > \ell_2$ temos

$$\begin{aligned} \|\nabla u^{D_{1\ell}}(t)\|_p^p &= \|\nabla u^{D_{1\ell}}(s+t-s)\|_p^p \\ &\leq \|\nabla u^{D_{1\ell}}(s)\|_p^p + \frac{1}{D_{1\ell}}r_1^p + \frac{p}{2D_{1\ell}}K|T-t_1| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $p > 2$,

$$\| \nabla u^{D_{1\ell}}(t) \|_H^p \leq m(\Omega)^{1/2-1/p} \| \nabla u^{D_{1\ell}}(t) \|_p^p \leq m(\Omega)^{1/2-1/p}\varepsilon.$$

Portanto,

$$\| \nabla u^{D_{1\ell}}(t) \|_H \to 0 \text{ quando } \ell \to +\infty.$$

Análogamente conclui-se que

$$\| \nabla v^{D_{2\ell}}(t) \|_H \to 0 \text{ quando } \ell \to +\infty.$$

$\blacksquare$

**Observação 5.22** *Se $(u^{D_1}, v^{D_2})$ é uma solução do problema $(I)$ em $(0, t_1)$, então para cada $t \in [0, t_1]$, as seqüências de $n^o$s reais $\{\|\nabla u^{D_1}(t)\|_p^p\}_{D_1 \geq 1}$ e $\{\|\nabla v^{D_2}(t)\|_p^p\}_{D_2 \geq 1}$ ficam limitadas quando $D_1, D_2 \to +\infty$ sempre que os dados iniciais estiverem num* *conjunto limitado de* $W^{1,p}(\Omega)\times W^{1,q}(\Omega)$. *Se os dados iniciais forem iguais a uma mesma constante, ou seja, se* $(u^{D_1}(0),v^{D_2}(0))=(u_0,v_0)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \forall\ D_1,\ D_2\geq 1$, *então temos que para cada* $t\in[0,t_1]$, *as seqüências de nºs reais* $\{\|\nabla u^{D_1}(t)\|_p^p\}_{D_1\geq 1}$ *e* $\{\|\nabla v^{D_2}(t)\|_p^p\}_{D_2\geq 1}$ *convergem para zero quando* $D_1,D_2\to+\infty$, *respectivamente.*

De fato, seja $(u^{D_1},v^{D_2})$ uma solução do problema $(I)$ em $(0,t_1)$. Logo, existem $f^{(D_1,D_2)},g^{(D_1,D_2)}\in L^1(0,t_1;H)$, com

$$f^{(D_1,D_2)}(t)\in F(u^{D_1}(t),v^{D_2}(t)),\ g^{(D_1,D_2)}(t)\in G(u^{D_1}(t),v^{D_2}(t))\ q.t.p. \text{ em } (0,t_1),$$

e tais que $(u^{D_1},v^{D_2})$ é uma solução do sistema $(\tilde{I})$ abaixo:

$$(\tilde{I})\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial u^{D_1}}{\partial t}-D_1\Delta_p u^{D_1}+|u^{D_1}|^{p-2}u^{D_1}=f^{(D_1,D_2)} & \text{em } (0,t_1)\\ \dfrac{\partial v^{D_2}}{\partial t}-D_2\Delta_q v^{D_2}+|v^{D_2}|^{q-2}v^{D_2}=g^{(D_1,D_2)} & \text{em } (0,t_1)\\ u^{D_1}(0)=u_0^{D_1},v^{D_2}(0)=v_0^{D_2} & \end{array}\right.$$

Fazendo o produto interno da primeira equação com $\frac{\partial u^{D_1}(t)}{\partial t}$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial u^{D_1}(t)}{\partial t}\|_H^2+\frac{d}{dt}\varphi^{D_1}(u^{D_1}(t)) &= \langle f^{(D_1,D_2)}(t),\frac{\partial u^{D_1}(t)}{\partial t}\rangle\\ &\leq \|f^{(D_1,D_2)}(t)\|_H\|\frac{\partial u^{D_1}(t)}{\partial t}\|_H\\ &\leq \frac{1}{2}\|f^{(D_1,D_2)}(t)\|_H^2+\frac{1}{2}\|\frac{\partial u^{D_1}(t)}{\partial t}\|_H^2. \quad (5.22)\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{1}{2}\|\frac{\partial u^{D_1}(t)}{\partial t}\|_H^2+\frac{d}{dt}\varphi^{D_1}(u^{D_1}(t))\leq\frac{1}{2}\|f^{(D_1,D_2)}(t)\|_H^2.$$

Em particular,

$$\frac{d}{dt}\varphi^{D_1}(u^{D_1}(t))\leq\frac{1}{2}\|f^{(D_1,D_2)}(t)\|_H^2. \quad (5.23)$$

Usando a Observação 5.17 e o fato que $F$ e $G$ levam limitados de $H\times H$ em limitados de $H$, obtemos que existe uma constante positiva $C$ tal $\|f^{(D_1,D_2)}(t)\|_H^2\leq$

$C$, $\forall\, t \in [0, t_1]$ e $\forall\, D_1, D_2 \geq 1$. Integrando de 0 a $\tau$, $\tau \in [0, t_1]$ em (5.23), obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p}\Big(D_1\|\nabla u^{D_1}(\tau)\|_p^p + \|u^{D_1}(\tau)\|_p^p\Big) &= \varphi^{D_1}(u^{D_1}(\tau)) \\
&\leq \varphi^{D_1}(u_0^{D_1}) + \frac{1}{2}\int_0^{\tau} \|f^{(D_1,D_2)}(t)\|_H^2 dt \\
&\leq \varphi^{D_1}(u_0^{D_1}) + \frac{1}{2}\int_0^{t_1} \|f^{(D_1,D_2)}(t)\|_H^2 dt \\
&\leq \varphi^{D_1}(u_0^{D_1}) + \frac{1}{2}Ct_1 \\
&\leq \frac{1}{p}\Big(D_1\|\nabla u_0^{D_1}\|_p^p + \|u_0^{D_1}\|_p^p\Big) + \frac{1}{2}Ct_1, \qquad (5.24)
\end{aligned}
$$

$\forall\, \tau \in [0, t_1]$ e $\forall\, D_1 \geq 1$. Logo,

$$
\|\nabla u^{D_1}(\tau)\|_p^p \leq \|\nabla u_0^{D_1}\|_p^p + \frac{1}{D_1}\Big(\|u_0^{D_1}\|_p^p + \frac{p}{2}Ct_1\Big), \qquad (5.25)
$$

$\forall\, \tau \in [0, t_1]$ e $\forall\, D_1 \geq 1$. Analogamente prova-se que

$$
\|\nabla v^{D_2}(\tau)\|_q^q \leq \|\nabla v_0^{D_2}\|_q^q + \frac{1}{D_2}\Big(\|v_0^{D_2}\|_q^q + \frac{q}{2}Ct_1\Big), \qquad (5.26)
$$

$\forall\, \tau \in [0, t_1]$ e $\forall\, D_2 \geq 1$. ■

O Lema 5.21 confirma que a equação $(II)$ é um bom candidato para o problema limite.

**Lema 5.23** *O problema $(II)$ possui uma solução global.*

**Demonstração:** Mostramos no Lema 5.9 que $\phi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é subdiferencial de uma função não-negativa, convexa, própria e s.c.i., $\psi$, definidas no espaço de Hilbert $\mathbb{R}$ com $\psi(0) = 0$. Consequentemente, concluímos que $\phi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um operador maximal monótono com $D(\phi_p) = \mathbb{R}$. Uma vez que qualquer operador maximal monótono $A$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com $A(0) = 0$ gera um semigrupo compacto, concluímos que $\phi_p$ e $\phi_q$ satisfazem todas as condições exigidas no Teorema 4.2. Aplicando este teorema com $H = \mathbb{R}$ obtemos a existência de uma solução forte local para o problema $(II)$.

Como o par $(F, G)$ é positivamente sublinear em $H \times H$, temos que o par $(\widetilde{F}, \widetilde{G})$ é positivamente sublinear em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e daí prova-se a existência de solução global de modo inteiramente análogo ao que foi feito na Observação 4.4. ■

**Teorema 5.24** *O problema* $(II)$ *define um semifluxo generalizado* $\mathbb{G}^\infty$ *que possui um B-atrator global* $\mathcal{A}^\infty$.

**Demonstração:** O Lema 5.23 garante que a condição $(H_1)$ da definição de semifluxo generalizado é satisfeita. Seja $D(u_0, v_0)$ o conjunto das soluções de $(II)$ com dados iniciais $(u_0, v_0)$ e considere $\mathbb{G}^\infty \doteq \bigcup_{(u_0,v_0)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}} D(u_0, v_0)$. Note que $A = \phi_p$, $B = \phi_q$ com $H = \mathbb{R}$, satisfazem as condições do início da seção 4.1.1, i.e., $A$ e $B$ são operadores unívocos, os quais são subdiferenciais de funções não-negativas, convexas, próprias e s.c.i., $\psi_A$, $\psi_B$, respectivamente, definidas num espaço de Hilbert real $H$, $\psi_A(0) = \psi_B(0) = 0$, com $A$ e $B$ gerando semigrupos compactos. Portanto, podemos aplicar os resultados abstratos das seções 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3.

Aplicando o Teorema 4.6 para $A = \phi_p$, $B = \phi_q$, $H = \mathbb{R}$, podemos concluir que $\mathbb{G}^\infty$ é um semifluxo generalizado em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Precisamos do seguinte

**Teorema 5.25** *Existe um conjunto limitado* $B_0$ *em* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *e* $t_0 > 0$ *tais que para qualquer* $\varphi \in \mathbb{G}^\infty$, $\varphi(t) \in B_0$, $\forall\, t \geq t_0$. *Em particular,* $\mathbb{G}^\infty$ *é B-dissipativo.*

**Demonstração:** Procedimento análogo ao Teorema 4.9. ■

Usando o Teorema 4.8 temos que $\mathbb{G}^\infty$ é assintóticamente compacto e $\varphi-$dissipativo. Daí, o Teorema 3.50 garante que $\mathbb{G}^\infty$ possui um B-atrator global $\mathcal{A}^\infty$.

Isto conclui a demonstração do Teorema 5.24. ■

Provemos agora que $(II)$ é de fato o problema limite para $(I)$, quando $D_1, D_2 \to +\infty$.

**Teorema 5.26** *Seja* $(u^{D_{1n}}, v^{D_{2n}})$ *uma solução do problema* $(I)$. *Suponha que os dados iniciais* $(u^{D_{1n}}(0), v^{D_{2n}}(0)) = (u_0^{D_{1n}}, v_0^{D_{2n}}) \to (u_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *em* $H \times H$ *quando* $n \to +\infty$. *Então existe uma solução* $(u, v)$ *do problema* $(II)$ *satisfazendo* $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ *e uma subseqüência* $\{(u^{D_{1n_j}}, v^{D_{2n_j}})\}_j$ *de* $\{(u^{D_{1n}}, v^{D_{2n}})\}_n$ *tal que, para cada* $T > 0$, $u^{D_{1n_j}} \to u$, $v^{D_{2n_j}} \to v$ *em* $C([0, T]; H)$ *quando* $j \to +\infty$.

**Demonstração:** Seja $T > 0$ fixo arbitrariamente grande. Seja $(u^{D_{1n}}, v^{D_{2n}})$ uma solução do problema $(I)$ com $(u^{D_{1n}}(0), v^{D_{2n}}(0)) = (u_0^{D_{1n}}, v_0^{D_{2n}}) \to (u_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em $H \times H$ quando $n \to +\infty$. Logo, existem $f_n, g_n \in L^1(0,T;H)$, com

$$f_n(t) \in F(u^{D_{1n}}(t), v^{D_{2n}}(t)),\ g_n(t) \in G(u^{D_{1n}}(t), v^{D_{2n}}(t))\ \ q.t.p. \text{ em } (0,T),$$

e tais que $(u^{D_{1n}}, v^{D_{2n}})$ é uma solução do sistema $(P_n^1)$ abaixo:

$$(P_n^1)\begin{cases} \dfrac{\partial u^{D_{1n}}}{\partial t} - D_{1n}\Delta_p u^{D_{1n}} + |u^{D_{1n}}|^{p-2}u^{D_{1n}} = f_n & \text{em } (0,T) \\ \dfrac{\partial v^{D_{2n}}}{\partial t} - D_{2n}\Delta_q v^{D_{2n}} + |v^{D_{2n}}|^{q-2}v^{D_{2n}} = g_n & \text{em } (0,T) \\ u^{D_{1n}}(0) = u_0^{D_{1n}}, v^{D_{2n}}(0) = v_0^{D_{2n}} \end{cases}$$

Denotemos $u^{D_{1n}}(\cdot) \doteq I(u_0^{D_{1n}})f_n(\cdot)$ e $v^{D_{2n}}(\cdot) \doteq I(v_0^{D_{2n}})g_n(\cdot)$ e também denotemos por $z^{D_{1n}}(\cdot) \doteq I(u_0)f_n(\cdot)$ e $w^{D_{2n}}(\cdot) \doteq I(v_0)g_n(\cdot)$ como sendo as soluções dos problemas

$$(P_{f_n,u_0})\begin{cases} \dfrac{\partial z^{D_{1n}}}{\partial t} - D_{1n}\Delta_p z^{D_{1n}} + |z^{D_{1n}}|^{p-2}z^{D_{1n}} = f_n \\ z^{D_{1n}}(0) = u_0 \end{cases}$$

e

$$(P_{g_n,v_0})\begin{cases} \dfrac{\partial w^{D_{2n}}}{\partial t} - D_{2n}\Delta_q + |w^{D_{2n}}|^{q-2}w^{D_{2n}} = g_n \\ w^{D_{2n}}(0) = v_0, \end{cases}$$

respectivamente.

Fazendo o produto interno da primeira equação em $(P_n^1)$ com $u^{D_{1n}}$ e integrando de 0 a $t$, $t \leq T$, obtemos

$$\frac{1}{2} \parallel u^{D_{1n}}(t) \parallel_H^2 \leq \frac{1}{2} \parallel u_0^{D_{1n}} \parallel_H^2 + \int_0^t \langle f_n(s), u^{D_{1n}}(s)\rangle ds.$$

Como $\{u_0^{D_{1n}}\}$ é uma seqüência convergente temos que existe uma constante positiva $R$ tal que $\parallel u_0^{D_{1n}} \parallel_H^2 \leq R^2$. Assim,

$$\frac{1}{2} \parallel u^{D_{1n}}(t) \parallel_H^2 \leq \frac{1}{2}R^2 + \int_0^t \langle f_n(s), u^{D_{1n}}(s)\rangle ds.$$

Usando a hipótese que o par $(F,G)$ é positivamente sublinear e a desigualdade de Gronwall obtemos que existem constantes positivas $\alpha, \beta$, $\gamma$ e $C$ tais que

$$\parallel u^{D_{1n}}(t) \parallel_H \ \leq \ C + \gamma\, T + \textstyle\int_0^t [\alpha \parallel u^{D_{1n}}(s) \parallel_H + \beta \parallel v^{D_{2n}}(s) \parallel_H] ds.$$

Portanto, existe uma constante positiva $M$ independente de $t \in [0,T]$ tal que

$$\| u^{D_{1n}}(t) \|_H \leq M + \int_0^t [\alpha \| u^{D_{1n}}(s) \|_H + \beta \| v^{D_{2n}}(s) \|_H] ds.$$

Analogamente, existe uma constante positiva $\widetilde{M}$ independente de $t \in [0,T]$ tal que

$$\| v^{D_{2n}}(t) \|_H \leq \widetilde{M} + \int_0^t [\beta \| u^{D_{1n}}(s) \|_H + \alpha \| v^{D_{2n}}(s) \|_H] ds.$$

Somando estas duas desigualdades e denotando por $N \doteq M + \widetilde{M}$ e $\rho \doteq \alpha + \beta$ temos

$$\| u^{D_{1n}}(t) \|_H + \| v^{D_{2n}}(t) \|_H \leq N + \rho \int_0^t [\| u^{D_{1n}}(s) \|_H + \| v^{D_{2n}}(s) \|_H] ds$$

e daí segue da desigualdade de Gronwall-Bellman que

$$\| u^{D_{1n}}(t) \|_H + \| v^{D_{2n}}(t) \|_H \leq N e^{\rho T},$$

para todo $t \in [0,T]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $F$ e $G$ levam conjuntos limitados de $H \times H$ em conjuntos limitados de $H$, segue da desigualdade acima que existe $L > 0$ tal que

$$\| f_n(t) \|_H \leq L \quad \text{e} \quad \| g_n(t) \|_H \leq L, \quad \text{para todo } t \in [0,T] \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Considere $K \doteq \{f_n; n \in \mathbb{N}\}$, $\widetilde{K} \doteq \{g_n; n \in \mathbb{N}\}$, $M(K) \doteq \{z^{D_{1n}}; n \in \mathbb{N}\}$ e $M(\widetilde{K}) \doteq \{w^{D_{2n}}; n \in \mathbb{N}\}$. Uma vez que $K$ e $\widetilde{K}$ são conjuntos limitados em $H$, é fácil ver que eles são subconjuntos uniformemente integráveis em $L^1(0,T;H)$.

Dados $t \in (0,T]$ e $h > 0$ tais que $t - h \in (0,T]$, consideremos o operador $T_h : M(K)(t) \to H$ definido por $T_h z^{D_{1n}}(t) = S^{D_{1n}}(h) z^{D_{1n}}(t-h)$.

**Afirmação 1:** O operador $T_h : M(K)(t) \to H$ é compacto.

A prova é inteiramente análoga ao que foi feito na demonstração da Afirmação 1 do Teorema 4.23.

Logo, pelo Teorema 4.14, temos que o conjunto $M(K)$ é relativamente compacto em $C([0,T];H)$ e portanto existe $z \in C([0,T];H)$ e existe uma subseqüência $\{z^{D_{1n_j}}(\cdot)\}$ de $\{z^{D_{1n}}(\cdot)\}$ tal que $z^{D_{1n_j}} \to z$ em $C([0,T];H)$.

Como cada $z^{D_{1n_j}}$ é uma solução de $(P_{f_n,u_0})$ em $(0,T)$, então pela Proposição 3.6 em [7], $z^{D_{1n_j}}$ verifica

$$\frac{1}{2} \parallel z^{D_{1n_j}}(t) - \theta \parallel^2 \leq \frac{1}{2} \parallel z^{D_{1n_j}}(s) - \theta \parallel^2 + \int_s^t \langle f_{n_j}(\tau) - y_j, z^{D_{1n_j}}(\tau) - \theta \rangle d\tau \quad (5.27)$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(A^{D_{1n_j}}) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset H$, $y_j = A^{D_{1n_j}}(\theta)$ e para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Analogamente, podemos mostrar que existe $w \in C([0,T];H)$ e existe uma subseqüência $\{w^{D_{2n_j}}(\cdot)\}$ de $\{w^{D_{2n}}(\cdot)\}$ tal que $w^{D_{2n_j}} \to w$ em $C([0,T];H)$, verificando

$$\frac{1}{2} \parallel w^{D_{2n_j}}(t) - \theta \parallel^2 \leq \frac{1}{2} \parallel w^{D_{2n_j}}(s) - \theta \parallel^2 + \int_s^t \langle g_{n_j}(\tau) - y_j, w^{D_{2n_j}}(\tau) - \theta \rangle d\tau \quad (5.28)$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(B^{D_{2n_j}}) \subset W^{1,q}(\Omega) \subset H$, $y_j = B^{D_{2n_j}}(\theta)$ e para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Como $\parallel f_{n_j}(\tau) \parallel_H \leq L$ e $\parallel g_{n_j}(\tau) \parallel_H \leq L$, para todo $0 \leq \tau \leq T$ e para todo $j \in \mathbb{N}$, concluímos que existe uma constante positiva $\widetilde{L}$ tal que

$$\parallel f_{n_j} \parallel_{L^2(0,T;H)} \leq \widetilde{L} \qquad \text{e} \qquad \parallel g_{n_j} \parallel_{L^2(0,T;H)} \leq \widetilde{L}, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Como $L^2(0,T;H)$ é um espaço de Banach reflexivo, existem $f, g \in L^2(0,T;H)$ e subseqüências, que continuaremos chamando do mesmo modo, $\{f_{n_j}\}$ e $\{g_{n_j}\}$ tal que $f_{n_j} \rightharpoonup f$ e $g_{n_j} \rightharpoonup g$ em $L^2(0,T;H)$. Consequentemente $f_{n_j} \rightharpoonup f$ e $g_{n_j} \rightharpoonup g$ em $L^1(0,T;H)$.

**Afirmação 2:** $u^{D_{1n_j}} \to z$ e $v^{D_{2n_j}} \to w$ em $C([0,T];H)$ e além disso $f(t) \in F(z(t), w(t))$ e $g(t) \in G(z(t), w(t))$ q.t.p. em $[0,T]$.

De fato, seja $t \in [0,T]$. Temos

$$\parallel u^{D_{1n_j}}(t) - z(t) \parallel_H \leq \parallel u^{D_{1n_j}}(t) - z^{D_{1n_j}}(t) \parallel_H + \parallel z^{D_{1n_j}}(t) - z(t) \parallel_H .$$

Então,

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} \parallel u^{D_{1n_j}}(t) - z(t) \parallel_H &\leq \sup_{t\in[0,T]} \parallel I(u_0^{D_{1n_j}}) f_{n_j}(t) - I(u_0) f_{n_j}(t) \parallel_H \\ &+ \sup_{t\in[0,T]} \parallel z^{D_{1n_j}}(t) - z(t) \parallel_H \\ &\leq \parallel u_0^{D_{1n_j}} - u_0 \parallel_H + \sup_{t\in[0,T]} \parallel z^{D_{1n_j}}(t) - z(t) \parallel_H \to 0 \end{aligned}$$

quando $j \to +\infty$.

Portanto $u^{D_{1n_j}} \to z$ em $C([0,T];H)$ quando $j \to +\infty$. Analogamente mostra-se que $v^{D_{2n_j}} \to w$ em $C([0,T];H)$ quando $j \to +\infty$.

Logo, pelo Teorema 1.44, $f(t) \in F(z(t),w(t))$ e $g(t) \in G(z(t),w(t))$ t-q.t.p. em $[0,T]$.

Observe que

$$f_{n_j} \rightharpoonup f \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H) \Longrightarrow f_{n_j} \rightharpoonup f \quad \text{em} \quad L^2(s,t;H), \forall\, 0 \le s \le t \le T;$$

e

$$z^{D_{1n_j}} \to z \text{ em } C([0,T];H) \Longrightarrow z^{D_{1n_j}} \to z \text{ em } C([s,t];H)$$

e consequentemente

$$z^{D_{1n_j}} \to z \quad \text{em} \quad L^2(s,t;H),\ \forall\, 0 \le s \le t \le T;$$

então

$$\langle f_{n_j} - \eta, z^{D_{1n_j}} - \theta\rangle_{L^2(s,t;H)} \to \langle f - \eta, z - \theta\rangle_{L^2(s,t;H)}$$

para todo $\theta, \eta \in H$.

Agora considere $\overline{\theta} \in \mathbb{R} \subset H$ e seja $\overline{h} \doteq \phi_p(\overline{\theta}) \in \mathbb{R} \subset H$. Consideremos $y_j \doteq A^{D_{1n_j}}(\overline{\theta}) = -D_{1n_j}\Delta_p\overline{\theta} + |\overline{\theta}|^{p-2}\overline{\theta}$. Note que $D(A^{D_{1n_j}}) \supset \mathbb{R}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$ e $y_j = \overline{h}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$, pois $\nabla\overline{\theta} = 0$, visto que $\overline{\theta}$ é função constante.

Por (5.27) sabemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \parallel z^{D_{1n_j}}(t) - \overline{\theta} \parallel^2 &\le \frac{1}{2} \parallel z^{D_{1n_j}}(s) - \overline{\theta} \parallel^2 + \int_s^t \langle f_{n_j}(\tau) - y_j, z^{D_{1n_j}}(\tau) - \overline{\theta}\rangle d\tau \\
&= \frac{1}{2} \parallel z^{D_{1n_j}}(s) - \overline{\theta} \parallel^2 + \int_s^t \langle f_{n_j}(\tau) - \overline{h}, z^{D_{1n_j}}(\tau) - \overline{\theta}\rangle d\tau.
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $j \to +\infty$, obtemos

$$\frac{1}{2} \parallel z(t) - \overline{\theta} \parallel^2 \le \frac{1}{2} \parallel z(s) - \overline{\theta} \parallel^2 + \int_s^t \langle f(\tau) - \overline{h}, z(\tau) - \overline{\theta}\rangle d\tau \tag{5.29}$$

para todo $\overline{\theta} \in \mathbb{R}$, $\overline{h} \doteq \phi_p(\overline{\theta})$ e para todo $0 \le s \le t \le T$.

Da mesma maneira podemos mostrar que

$$\frac{1}{2} \parallel w(t) - \overline{\theta} \parallel^2 \leq \frac{1}{2} \parallel w(s) - \overline{\theta} \parallel^2 + \int_s^t \langle g(\tau) - \overline{h}, w(\tau) - \overline{\theta} \rangle d\tau$$

para todo $\overline{\theta} \in \mathbb{R}$, $\overline{h} \doteq \phi_q(\overline{\theta})$ e para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

**Afirmação 3:** $z(t)$ e $w(t)$ independem de $x$, para cada $t > 0$.

De fato, seja $t > 0$. Já sabemos que $z^{D_{1n_j}}(t) \to z(t)$ em $H$. Visto que $z^{D_{1n}}(0) = u_0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, então pela Observação 5.22 e Lema 5.21 temos que $\|\nabla z^{D_{1n_j}}(t)\|_H \to 0$ quando $j \to +\infty$. Também temos que $z^{D_{1n_j}}(t) \in \mathcal{D}(A^{D_{1n_j}}) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$. Daí, pela Desigualdade de Poincaré-Wirtinger

$$\|z^{D_{1n_j}}(t) - \overline{z^{D_{1n_j}}(t)}\|_H \leq C\|\nabla z^{D_{1n_j}}(t)\|_H \to 0 \text{ quando } j \to +\infty.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|z(t) - \overline{z(t)}\|_H &= \|z(t) - z^{D_{1n_j}}(t) + z^{D_{1n_j}}(t) - \overline{z^{D_{1n_j}}(t)} + \overline{z^{D_{1n_j}}(t)} - \overline{z(t)}\|_H \\
&\leq \|z(t) - z^{D_{1n_j}}(t)\|_H + \|z^{D_{1n_j}}(t) - \overline{z^{D_{1n_j}}(t)}\|_H \\
&+ \|\overline{z^{D_{1n_j}}(t)} - \overline{z(t)}\|_H \to 0 \text{ quando } j \to +\infty.
\end{aligned}$$

Portanto $z(t) = \overline{z(t)} \doteq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega z(t)(x)\, dx$.

Analogamente, mostra-se que $w(t) = \overline{w(t)}$. Como queríamos demonstrar.

Já mostramos na Afirmação 2 que $f(t) \in F(z(t), w(t))$ e $g(t) \in G(z(t), w(t))$ q.t.p. em $(0, T)$. Logo $f(t)$ e $g(t)$ independem de $x$ t-q.t.p. em $(0, T)$.

Assim, de (5.29)

$$\frac{1}{2}|z(t) - \overline{\theta}|^2|\Omega| \leq \frac{1}{2}|z(s) - \overline{\theta}|^2|\Omega| + \int_s^t \int_\Omega (f(\tau) - \overline{h})(z(\tau) - \overline{\theta})\, dx\, d\tau$$

Portanto

$$\frac{1}{2}|z(t) - \overline{\theta}|^2 \leq \frac{1}{2}|z(s) - \overline{\theta}|^2 + \int_s^t (f(\tau) - \overline{h})(z(\tau) - \overline{\theta})\, d\tau$$

para todo $\overline{\theta} \in \mathbb{R}$, $\overline{h} \doteq \phi_p(\overline{\theta})$ e para todo $0 \leq s < t \leq T$.

Se $t = s = 0$, temos $z(0) = \lim_{j \to +\infty} z^{D_{1n_j}}(0) = \lim_{j \to +\infty} u_0 = u_0$. Logo $\frac{1}{2}|z(0) - \overline{\theta}|^2 = \frac{1}{2}|u_0 - \overline{\theta}|^2$.

Portanto

$$\frac{1}{2}|z(t)-\overline{\theta}|^2 \quad \leq \quad \frac{1}{2}|z(s)-\overline{\theta}|^2+\int_s^t (f(\tau)-\overline{h})(z(\tau)-\overline{\theta})\, d\tau$$

para todo $\overline{\theta} \in \mathbb{R}$, $\overline{h} \doteq \phi_p(\overline{\theta})$ e para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Do mesmo modo,

$$\frac{1}{2}|w(t)-\overline{\theta}|^2 \leq \frac{1}{2}|w(s)-\overline{\theta}|^2+\int_s^t (g(\tau)-\overline{h})(w(\tau)-\overline{\theta})\, d\tau$$

para todo $\overline{\theta} \in \mathbb{R}$, $\overline{h} \doteq \phi_q(\overline{\theta})$ e para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Portanto pela Proposição 3.6 em [7], concluímos que $(z, w)$ é uma solução fraca do problema $(II)$ com $(z(0), w(0)) = (u_0, v_0)$, mas como $f, g \in L^2(0, T; H)$ temos na verdade que $(z, w)$ é uma solução forte do problema $(II)$. ■

**Observação 5.27** *O Teorema 5.26 continua válido sem a hipótese que* $(u_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *desde que* $(u_0^{D_{1n}}, v_0^{D_{2n}}) \in \mathcal{A}_{(D_{1n}, D_{2n})}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, *pois neste caso prova-se, analogamente como foi feito no Lema 5.12, que* $u_0$ *e* $v_0$ *independem de* $x$.

### 5.2.3 Semicontinuidade Superior de Atratores

No caso da equação, para provar semicontinuidade superior de atratores fizemos a construção de uma trajetória completa limitada. Também faremos a construção de uma órbita completa limitada neste caso de sistema acoplado.

**Teorema 5.28** *A família de atratores* $\{\mathcal{A}_{(D_1, D_2)}\}_{D_1, D_2 \geq 1}$ *associada com o problema* $(I)$ *é semicontínua superiormente no infinito, na topologia de* $H \times H$.

**Demonstração:** Seja $\{(u_0^{D_{1j}}, v_0^{D_{2j}})\}_{D_{1j}, D_{2j} \geq 1}$ uma seqüência qualquer com

$$(u_0^{D_{1j}}, v_0^{D_{2j}}) \in \mathcal{A}_{(D_{1j}, D_{2j})},\ \forall\ D_{1j}, D_{2j} \geq 1 \text{ e } D_{1j}, D_{2j} \to +\infty \ \text{ quando } j \to +\infty.$$

Pelo Lema 5.20, existe uma subseqüência, que continuaremos chamando do mesmo jeito tal que $(u_0^{D_{1j}}, v_0^{D_{2j}}) \to (u_0, v_0)$ em $H \times H$ quando $j \to +\infty$. Novamente usando o Lema 1.7, nosso trabalho se resume a provar que $(u_0, v_0) \in \mathcal{A}^{\infty}$.

Usando a invariância dos atratores, o Lema 5.21 e a desigualdade de Poincaré-Wirtinger, prova-se analogamente ao Lema 5.12, que $(u_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, considere $t_j > j$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_j < \ldots$. Pela invariância dos atratores, existem $(x_j, y_j) \in \mathcal{A}_{(D_{1j}, D_{2j})}$ e soluções $\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})} = (\varphi_1^{D_{1j}}, \varphi_2^{D_{2j}}) \in \mathbb{G}(D_{1j}, D_{2j})$ com $\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}(0) = (x_j, y_j)$ tal que $\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}(t_j) = (u_0^{D_{1j}}, v_0^{D_{2j}}) \to (u_0, v_0)$ em $H \times H$ quando $j \to +\infty$. Note que $\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}(t_j) \in T_{(D_{1j}, D_{2j})}(t_j)(x_j, y_j) \in \mathcal{A}_{(D_{1j}, D_{2j})}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$.

Usando a condição $(H_2)$ da definição de semifluxo generalizado, temos que para cada $j \in \mathbb{N}$, as transladadas $\left(\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}\right)^{t_j}$ também são soluções, e temos $\left(\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}\right)^{t_j}(0) \to (u_0, v_0)$ em $H \times H$ quando $j \to +\infty$.

Usando o Teorema 5.26, obtemos que existe uma solução $g_0$ do problema limite $(II)$ com $g_0(0) = (u_0, v_0)$ e uma subseqüência de
$\left\{ \left(\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}\right)^{t_j} \right\}_j$, que continuaremos chamando do mesmo modo, tal que

$$\left(\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}\right)^{t_j}(t) \to g_0(t) \ \text{ em } H \times H \ \text{ quando } \ j \to +\infty, \ \forall\, t \geq 0.$$

Agora consideremos a seqüência $\{\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}(t_j - 1)\}$. Note que

$$\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}(t_j - 1) \in T_{(D_{1j}, D_{2j})}(t_j - 1)(x_j, y_j) \subset \bigcup_{D_1, D_2 \geq 1} \mathcal{A}_{(D_1, D_2)}$$

que é um subconjunto precompacto em $H \times H$, logo temos que, passando para uma subseqüência se necessário,

$$\left(\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}\right)^{(t_j - 1)}(0) = \varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}(t_j - 1) \to z_1 \ \text{ em } H \times H \ \text{ quando } \ j \to +\infty.$$

Como para cada $j \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}$ é uma solução que começou no atrator $\mathcal{A}_{(D_{1j}, D_{2j})}$, obtemos pela invariância dos atratores que a seqüência de dados iniciais $\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}(t_j - 1) \in \mathcal{A}_{(D_{1j}, D_{2j})}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$. Daí usando a Observação 5.27 e o Teorema 5.26, obtemos que existe uma solução $g_1$ do problema limite $(II)$ com $g_1(0) = z_1$ e uma subseqüência de $\left\{ \left(\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}\right)^{(t_j - 1)} \right\}_j$, que continuaremos chamando do mesmo modo, tal que

$$\left(\varphi^{(D_{1j}, D_{2j})}\right)^{(t_j - 1)}(t) \to g_1(t) \ \text{ em } H \times H \ \text{ quando } \ j \to +\infty, \ \forall\, t \geq 0.$$

Agora note que $g_1^1 = g_0$, pois para cada $t \geq 0$, temos

$$g_1^1(t) = g_1(t+1) = \lim_{j \to +\infty} (\varphi^{(D_{1j},D_{2j})})^{(t_j-1)}(t+1) = \lim_{j \to +\infty} (\varphi^{(D_{1j},D_{2j})})^{t_j}(t) = g_0(t).$$

Procedendo assim indutivamente, encontramos para cada $r = 0, 1, 2, \cdots$, uma solução $g_r \in \mathcal{G}^\infty$ com $g_r(0) = z_r$ tal que $g_{r+1}^1 = g_r$. Dado $t \in \mathbb{R}$, definimos $g(t)$ como o valor comum de $g_r(t+r)$ para $r > -t$. Então temos que $g$ é uma órbita completa para $\mathcal{G}^\infty$ com $g(0) = g_0(0) = (u_0, v_0)$.

Note que para cada $t \geq 0$, $r = 0, 1, 2, \cdots$, temos que cada

$$g_r(t) = \lim_{j \to +\infty} \left(\varphi^{(D_{1j},D_{2j})}\right)^{(t_j-r)}(t) \text{ e } \left(\varphi^{(D_{1j},D_{2j})}\right)^{(t_j-r)}(t) \in \mathcal{A}_{(D_{1j},D_{2j})}, \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Usando a invariância dos atratores, o Lema 5.21 e a desigualdade de Poincaré-Wirtinger, trabalhando com as funções coordenadas, prova-se analogamente ao Lema 5.12, que cada $g_r(t)$ independe de $x$. Consequentemente, obtemos que $g(t)$ é uma função constante em $x$. Como $\mathcal{A}_{(D_{1j},D_{2j})} \subset \overline{\bigcup_{D_1,D_2 \geq 1} \mathcal{A}_{(D_1,D_2)}}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$, obtemos que existe uma constante $C > 0$ tal que $\|g_r(t)\|_{H \times H} \leq C$, $\forall\, t \geq 0$ e $r = 0, 1, 2, \cdots$. Assim, em particular, temos que $g(t)$ é limitada em $H \times H$. Daí, existe uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$|g(t)|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \|g(t)\|_{H \times H} \leq \tilde{C}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, concluímos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é uma órbita completa limitada para $\mathcal{G}^\infty$ passando pelo ponto $(u_0, v_0)$.

Usando o Teorema 3.60, obtemos que $(u_0, v_0) \in \mathcal{A}^\infty$. ■

**Observação 5.29** *É interessante observar que a construção da órbita completa limitada foi inspirada na técnica do Ball, [3], mas não foi possível aplicar essa técnica aqui, pois a condição* $(H_4)$ *só pode ser usada para cada parâmetro fixo. Sendo assim, tivemos que encontrar uma nova condição que pudesse "substituir"a condição* $(H_4)$ *na técnica. A nova condição foi o Teorema 5.26 no caso do sistema acoplado e o Teorema 5.11 para o caso da equação.*

**Observação 5.30** *Notemos que cada órbita completa limitada do problema limite* $(II)$ *é uma órbita completa limitada do problema* $(I)$. *Logo* $\mathcal{A}^{\infty} \subset \mathcal{A}_{(D_1,D_2)}$, $\forall\, D_1, D_2 \geq 1$. *Consequentemente obtemos que a família de atratores* $\{\mathcal{A}_{(D_1,D_2)}\}_{D_1,D_2 \geq 1}$ *associada com o problema* $(I)$ *é semicontínua inferiormente no infinito, na topologia de* $H \times H$, *isto é, que*

$$\sup_{x \in \mathcal{A}^{\infty}} dist_{H\times H}(x, \mathcal{A}_{(D_1,D_2)}) \to 0 \;\; quando\; D_1, D_2 \to +\infty.$$

Assim, usando o Teorema 5.28 e a Observação 5.30, obtemos que a família de atratores $\{\mathcal{A}_{(D_1,D_2)}\}_{D_1,D_2 \geq 1}$ associada com o problema $(I)$ é contínua no infinito, na topologia de $H \times H$, isto é, que é semicontínua superiormente e semicontínua inferiormente no infinito, na topologia de $H \times H$.

# Referências Bibliográficas


[1] ADAMS, R. A. *Sobolev spaces.* Academic Press, 1975.

[2] ARINO, O.; GAUTHIER, S.; PENOT, J. P. A fixed point theorem for sequentially continuous mapping with applications to ordinary differential equations. *Funkcial Ekvac.* v. 27, p. 273-279, 1984.

[3] BALL, J. M., Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations, J. Nonlinear Sci. v. 7, no. 5, p. 475-502, 1997.

[4] BALL, J. M., Global attractors for damped semilinear wave equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems v. 10, no. 1-2, p. 31-52, 2004.

[5] BARBU, V. *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach space.* Noordhoff International, 1976.

[6] BECKENSTEIN, E.; NARICI, L. *Topological vector spaces.* New York: Marcel Dekker, 1985.

[7] BRÈZIS, H. *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1973.

[8] BRÈZIS, H. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications.* Paris: Masson, 1983.

[9] BROWDER, F. Nonlinear elliptic boundary value problems. Bull. Amer. Math. Soc., v. 69, p. 862-874, 1963.

[10] CARABALLO, T., MARÍN-RUBIO, P., ROBINSON, J. C., A comparison between two theories for multi-valued semiflows and their asymptotic behaviour, Set-Valued Anal, v. 11 , no. 3, p. 297-322, 2003.

[11] CARVALHO, A. N. Infinite dimensional dynamics described by ordinary differential equations, J. Differential Equations V. 116, P. 338-404, 1995.

[12] CARVALHO, A. N., CHOLEWA, J. W., DLOTKO T. Global attractors for problems with monotone operators, Bolletino U.M.I., v. 2, no. 3, p. 693-706, 1999.

[13] CARVALHO, A. N., GENTILE, C. B., Comparison results for nonlinear parabolic equations with monotone principal part, J. Math. Anal. Appl. v. 259 , no. 1, p. 319-337, 2001.

[14] CARVALHO, A. N., GENTILE, C. B., Asymptotic behaviour of non-linear parabolic equations with monotone principal part, J. Math. Anal. Appl. v. 280, no. 2, p. 252-272, 2003.

[15] CARVALHO, A. N., HALE, J. K., Large diffusion with dispersion, Nonlinear Analysis-Theory, Methods and Applications v. 17, no. 12, p. 1139-1151, 1991.

[16] CARVALHO, A. N., PISKAREV, S., A general approximation scheme for attractors of abstract parabolic problems, Cadernos De Matemática v. 05, p. 71-120, 2004.

[17] CONWAY, E.; Hoff, D.; Smoller, J. Large time behavior of solutions of systems of non-linear reaction-diffusion equations, SIAM J. Appl. Math. v. 35, no.1, p. 1-16, 1978.

[18] DÌAZ, J. I.; VRABIE, I. I. Existence for reaction diffusion systems: a compactness method approach. J. Math. Anal. Appl. v. 188, p. 521-540, 1994.

[19] DIBENEDETTO, E. *Degenerate parabolic equations.* New York: Springer-Verlag, 1993.

[20] EDWARDS, R. E. *Functional analysis: theory and applications.* Holt: Rinehart and Winston, 1965.

[21] GENTILE, C. B. *Problemas parabólicos quasi-lineares com parte principal monótona: comparação e existência de atrator.* Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Matemática, USP/ICMC, São Carlos, 1999.

[22] GENTILE, C. B., PRIMO, M. R. T., Parameter dependent quasi-linear parabolic equations, Nonlinear Anal. v. 59, no. 5, p. 801–812, 2004.

[23] GENTILE, C. B., PRIMO, M. R. T., A compactness result in quasi-linear parabolic equations, Atas do $59^0$ SBA, p. 299–306.

[24] HALE, J. K. *Asymptotic behavior of dissipative systems.* Providence, RI: AMS, 1988.

[25] HALE, J. K. Large diffusivity and asymptotic behavior in parabolic systems, J. Math. Anal. Appl. v. 118, p. 455-466, 1986.

[26] HALE, J. K.; ROCHA, C. Varying boundary conditions with large diffusivity, J. Math. Pures Appl. v. 66, p. 139-158, 1987.

[27] HALE, J. K.; ROCHA, C. Interaction of diffusion and boundary conditions, Nonlinear Analysis - Theory, Methods and Applications v. 11, p. 633-649, 1987.

[28] KAPUSTIAN, A. V., VALERO, J., Attractors of multivalued semiflows generated by differential inclusions and their approximations, Abstr. Appl. Anal. v. 5, no. 1, p. 33–46, 2000.

[29] LADYSHENSKAYA, O. *Attractors for semigroups and evolution equations.* Lezioni Lincee, Cambridge University Press, 1991.

[30] LIONS, J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Etudes Mathematiques, Paris, 1969.

[31] LIU, DE: The critical forms of the attractors for semigroups and the existence of critical attractors, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* v. 454, p. 2157-2171, 1998.

[32] MELNIK, V.S.; VALERO, J. On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions, Set-Valued Anal. v. 6, no. 1, p. 83-111, 1998.

[33] MINTY, G. *On a monotonicity method for the solution of nonlinear equations em Banach spaces.* Proc. Nat. Acad. Sci. . USA, 1963.

[34] PEREIRA, A.C. *Sistemas de inclusões diferenciais governadas pelo p-laplaciano.* Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFSCar, São Carlos, 2004.

[35] RODRIGUES-BERNAL, A., On the construction of inertial manifolds under symmetry constraints, Nonlinear Anal. v. 19, no. 7, p. 687–700, 1992.

[36] SIMSEN, J., GENTILE, C. B., On attractors for multivalued semigroups defined by generalized semiflows, to appear in Set-Valued Analysis.

[37] TEMAM, R. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[38] VERA, L. C.; RUAS-FILHO, J. G. Continuity of the attractors in a singular problem arising in composite materials, Nonlinear Anal. v. 65, p. 1285-1305, 2006.

[39] VRABIE, I.I. *Compactness methods for nonlinear evolutions.* London: Longman Scientific and Technical, 1987.

[40] VRABIE, I. I., *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, Second Edition, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, New York, 1995.