UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sistemas elípticos com pesos envolvendo o expoente crítico de Hardy-Sobolev

Rodrigo da Silva Rodrigues

São Carlos
Novembro/2007

Sistemas elípticos com pesos envolvendo o expoente crítico de Hardy-Sobolev

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sistemas elípticos com pesos envolvendo o expoente crítico de Hardy-Sobolev

Rodrigo da Silva Rodrigues

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Orientador: **Olímpio Hiroshi Miyagaki**

São Carlos
Novembro/2007

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

	Rodrigues, Rodrigo da Silva.
R696se	Sistemas elípticos com pesos envolvendo o expoente crítico de Hardy-Sobolev / Rodrigo da Silva Rodrigues. -- São Carlos : UFSCar, 2007.
	126 f.
	Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2007.
	1. Sistemas não-lineares. 2. Sistemas elípticos com pesos. 3. Sistemas positônicos. 4. Sistemas semipositônicos. 5. Princípio de máximo forte. 6. Expoente crítico de Hardy-Sobolev. I. Título.
	CDD: 003.75 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
UFV

Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento
DM - UFSCar

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
DM – UFSCar

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo
UNICAMP

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves
UNB

Aos meus pais,
Carmo Rodrigues e
Maria de Lourdes
Aos meus irmãos,
Leandro e Milene
E à minha esposa,
Taciana
dedico.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho agradeço:

À Deus pela vida, que a cada dia se renova e, ao se renovar, nos dá a possibilidade de vivenciar novas ações e experiências, nos propicia a cada manhã a escolha entre chorar ou vender lenços e a cada noite nos faz ter mais casos pra contar.

Aos meus amados pais e irmãos que, com amor, me apoiam, incentivam e sempre estão presentes em todos os momentos da minha vida. Pela excelente educação e por serem os exemplos da minha vida, pessoas que eu me orgulho e admiro muito por tudo que são e representam para mim.

À minha esposa Taciana, companheira de todas as horas, por todo carinho e compreensão, pela generosidade e paciência em ajudar a enfrentar as dificuldades encontradas pelo caminho. E principalmente, por todo amor e felicidade que trouxe à minha vida.

À minha família e à família de minha esposa, avós, tios, cunhados e primos pelo grande incentivo.

Aos Profs. José Valdo, Djairo, Arnaldo e Jorge por gentilmente terem aceito o convite para compor a banca examinadora.

Ao Professor Olímpio Hiroshi Miyagaki, por ter sido, não apenas, um excelente Orientador, mas também, um verdadeiro amigo e um mestre nos conselhos. Agradeço, também, pela confiança desprendida, acreditando sempre no meu trabalho, pela paciência e exigência necessárias.

Aos professores e funcionários do departamento de matemática da universidade federal de São Carlos.

Aos professores de graduação e pós-graduação, que acreditando em meu trabalho, incentivaram-me e participaram do meu desenvolvimento, auxiliando-me sempre. Em especial ao professor José Carlos Rodrigues (FCT-UNESP) e a professora Sueli Mieko Tanaka Aki (ICMC-USP).

Aos colegas e amigos da pós-graduação da UFSCar e USP, pela troca de experiências e risos, numa convivência prazerosa. Sucesso a todos!

À CAPES pelo apoio financeiro.

"Grandes realizações não são
feitas por impulso, mas por
uma soma de pequenas
realizações."
(Vincent Van Gogh)

Resumo

Neste trabalho, estudaremos a existência e inexistência de solução fraca positiva para duas classes de sistemas elípticos com pesos. A primeira classe envolverá não linearidades do tipo positônico e semipositônico. Provaremos um princípio de máximo forte, e obteremos algumas propriedades da primeira autofunção do problema de autovalor associado ao nosso operador, e também provaremos o método de sub e supersolução. A segunda classe que consideraremos terá uma perturbação não linear. Usaremos os métodos variacionais para estudar tanto a situação subcrítica quanto à situação crítica, e sob certas hipóteses, mostraremos a existência de uma segunda solução fraca.

Palavras-Chave: Sistemas elípticos com pesos, positônico, semipositônico, princípio de máximo forte, solução positiva, expoente crítico de Hardy-Sobolev.

Abstract

In this work, we will study the existence and nonexistence of positive weak solutions for two classes of elliptic systems with weights. The first class will involve nonlinearities of the type positone and semipositone. We will prove a strong maximum principle, and we will obtain some properties of the first eigenfunction of the eigenvalue problem associated to our operator, and also we will prove the sub and supersolution method. The second class will involve a nonlinear perturbation. We will use the variational methods to study the subcritical and critical situations, and under certain hypotheses, we will show the existence of a second weak solution.

Keywords: Elliptic sistems with weights, positone, semipositone, strong maximum principle, positive solution, critical Hardy-Sobolev exponent.

Sumário

1 Introdução **12**

2 Sistemas elípticos positônicos/semipositônicos **15**

2.1 Introdução 15

2.2 Estudo da primeira autofunção 18

2.3 Teorema de sub e supersolução 24

2.4 Prova do teorema 2.1 29

2.5 Prova do teorema 2.2 33

2.6 Prova do teorema 2.3 37

2.7 Prova do teorema 2.4 38

2.8 Prova do corolário 2.1 39

2.9 Exemplos e observações 40

3 Sistemas perturbados com expoentes subcríticos **42**

3.1 Introdução 42

3.2 Resultados preliminares 45

3.3 Prova do teorema 3.1 54

3.4 Prova do teorema 3.2 58

4 Sistemas perturbados com expoentes críticos **61**

4.1 Introdução 61

4.2 Resultados preliminares 64

4.3 Prova do teorema 4.1 78

4.4 Prova do teorema 4.2 79

4.5 Prova do teorema 4.3 84

5 Multiplicidade de soluções para sistemas com expoentes críticos 86

5.1 Introdução 86

5.2 Resultados preliminares 87

5.3 Prova do teorema 5.1 95

5.4 Prova do teorema 5.2 99

6 Apêndice 102

6.1 Desigualdades 102

6.2 Resultados básicos 102

6.3 Operadores diferenciáveis 107

6.4 Propriedades dos espaços $L^l(\Omega, |x|^\alpha)$ e $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ 110

6.4.1 O espaço $L^l(\Omega, |x|^\alpha)$ 110

6.4.2 O espaço $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ 111

6.4.3 Convergência pontual do gradiente 116

Referências Bibliográficas 121

Capítulo

1

Introdução

Nosso objetivo neste trabalho é estudar condições que garantam a existência e inexistência de soluções fracas para alguns sistemas elípticos quase lineares com pesos, da forma

$$\left\{\begin{array}{rcll} -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) & = & g_1(x,u,v) & \text{em} \quad \Omega, \\ -div(|x|^{-bq}|\nabla v|^{q-2}\nabla v) & = & g_2(x,u,v) & \text{em} \quad \Omega, \\ u=v & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

onde Ω é um domínio suave de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $1 < p,q < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$, $-\infty < b < (N-q)/q$ e $g_1, g_2 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções satisfazendo certas hipóteses.

O interesse em estudar sistemas decorre do grande número de aplicações que além das aplicações já conhecidas para o caso escalar, por exemplo, em mecânica dos fluidos, problemas de reação-difusão, elasticidade não linear, extração de petróleo, astronomia, glaciologia, etc, os sistemas envolvem outros fenômenos, como os modelos de competição em dinâmica populacional. Neste caso, a solução fraca (u,v), onde cada componente é não trivial e não negativa, é dita "estado de coexistência", ver [16, 17, 18, 36] e suas referências. Tecnicamente, os sistemas se comportam em um certo sentido como no caso escalar. Mas é claro que existem dificuldades adicionais provenientes da ação mútua das variáveis u e v nas não linearidades g_1, g_2, por exemplo, a possibilidade de existir semi-soluções, ou seja, soluções fracas do tipo $(u,0)$ e $(0,v)$, veja [45] e suas referências.

Inúmeros autores têm dedicado seus esforços no estudo do caso regular do sistema (1.1), isto é, quando $a=b=0$, e nós gostaríamos de citar alguns deles [1, 2, 5, 9, 10, 16, 18, 23, 35, 29, 30, 62, 64, 65] e suas referências. Porém, ao tratar sistemas com pesos, tanto no caso degenerado, isto é, quando $a<0$, quanto o caso singular, isto é, quando $a>0$, existem várias dificuldades adicionais, por exemplo, temos que trabalhar em um espaço com peso ao invés dos usuais espaços de Sobolev, obter resultados sobre o comportamento da primeira autofunção associada ao primeiro autovalor relacionado com nosso operador, princípio de máximo forte, princípio da comparação, etc.

As principais restrições que estaremos impondo sobre os expoentes estão relacionadas com a seguinte desigualdade de Hardy-Sobolev devido a Caffarelli, Kohn e Nirenberg [14]

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ep^*}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C_{a,e}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right),\ \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

onde $1 < p < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$, $a \leq e \leq a+1$, $d = 1+a-e$, $p^* := p^*(a,e) = Np/(N-dp)$ denota o expoente crítico de Hardy-Sobolev e $C_{a,e}$ é uma constante positiva. Chamaremos a desigualdade acima de desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg.

Consideremos Ω um domínio suave, não necessariamente limitado, de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $l \geq 1$, nós definimos $L^l(\Omega, |x|^\alpha)$ como sendo o espaço formado pelas funções Lebesgue mensuráveis, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, satisfazendo

$$||u||_{L^l(\Omega,|x|^\alpha)} := \left(\int_\Omega |x|^\alpha|u|^l dx\right)^{\frac{1}{l}} < \infty.$$

Se $1 < p < N$ e $-\infty < a < (N-p)/p$, definimos $W^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ (resp. $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$) como sendo o completamento de $C^\infty(\Omega)$ (resp. $C_0^\infty(\Omega)$), com respeito à norma $||\cdot||$ definida por

$$||u|| = ||u||_{W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})} := \left(\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se Ω for um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, nós obtemos por argumentos de aproximação que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq C\left(\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right),\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}),$$

onde $1 \leq r \leq Np/(N-p)$ e $\delta \leq (a+1)r + N\left[1-(r/p)\right]$, ou seja, a imersão $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \hookrightarrow L^r(\Omega, |x|^\delta)$ é contínua (veja [70, 71]). A desigualdade acima, também será chamada de desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Além disso, a constante

$C^*_{a,p} = C^*_{a,p}(\Omega)$ denotará a melhor constante de Hardy-Sobolev, a qual é caracterizada por

$$C^*_{a,p} = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})\setminus\{0\}} \left\{ \frac{\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx}{\left(\int_\Omega |x|^{-ep^*}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} \right\}. \tag{1.2}$$

Nós estudaremos o sistema (1.1) sobre o espaço $W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-bq})$ munido da norma

$$||(u,v)|| := ||u||_{W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})} + ||v||_{W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-bq})}.$$

Entretanto, por simplicidade, denotaremos $||u||$ e $||v||$ ao invés de $||u||_{W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})}$ e $||v||_{W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-bq})}$, respectivamente.

No capítulo 2, nós apresentaremos alguns resultados de existências e de inexistências de soluções fracas para o sistema (1.1) com não linearidades do tipo positônico $g_1(x,u,v) = \lambda|x|^{-(a+1)p-c_1}u^\alpha v^\gamma$ e $g_2(x,u,v) = \lambda|x|^{-(b+1)q-c_2}u^\delta v^\beta$ e com não linearidades do tipo semipositônico $g_1(x,u,v) = \lambda|x|^{-(a+1)p-c_1}k(x,u,v)$ e $g_2(x,u,v) = \lambda|x|^{-(b+1)q-c_2}h(x,u,v)$. Nossa principal ferramenta será um resultado abstrato de sub e supersolução.

No capítulo 3, estudaremos através de métodos variacionais o sistema (1.1) com não linearidades do tipo $g_1(x,u,v) = \lambda\theta|x|^{-\beta_1}u^{\theta-1}v^\delta + \mu\alpha|x|^{-\beta_2}u^{\alpha-1}v^\gamma$ e $g_2(x,u,v) = \lambda\delta|x|^{-\beta_1}u^\theta v^{\delta-1} + \mu\gamma|x|^{-\beta_2}u^\alpha v^{\gamma-1}$, onde, dentre outras hipóteses, os expoentes θ, δ, α e γ satisfazem a condição subcrítica, ou seja, $\theta/p^* + \delta/q^*$, $\alpha/p^* + \gamma/q^* < 1$.

No capítulo 4, nos dedicaremos ao estudo do sistema (1.1) com não linearidades similares as do capítulo 3, porém, com os expoentes satisfazendo a condição crítica $\theta/p^* + \delta/q^* < 1$, $\alpha/p^* + \gamma/q^* = 1$.

No capítulo 5, provaremos a exitência de duas soluções fracas para o sistema (1.1) com não linearidades similares as do capítulo 3, onde, dentre outras condições, Ω é um domínio suave arbitrário, $\theta/p + \delta q < 1$ e $\alpha/p^* + \gamma/q^* = 1$.

Por último, no capítulo 6, além de listarmos algumas desigualdades, resultados de minimização e de regularidade e um breve estudo sobre os espaços $L^l(\Omega,|x|^\alpha)$ e $W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})$, nós mostraremos a convergência pontual da seqüência formada pelos gradientes de uma seqüência de Palais Smale associada ao sistema crítico.

Capítulo

2

Sistemas elípticos positônicos/semipositônicos

2.1 Introdução

Neste capítulo, nós estudaremos através do método de sub e supersolução condições de existência e inexistência de solução fraca positiva para uma classe de sistemas elípticos quase lineares positônicos/semipositônicos com singularidades, da forma

$$\begin{cases} -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda|x|^{-(a+1)p+c_1}h(x,u,v) & \text{em} \quad \Omega, \\ -div(|x|^{-bq}|\nabla v|^{q-2}\nabla v) = \lambda|x|^{-(b+1)q+c_2}k(x,u,v) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $h, k : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e monótonas,

$$\Omega \ \text{ é um domínio suave e limitado de } \mathbb{R}^N \text{ com } 0 \in \Omega, \tag{H_Ω}$$

λ é um parâmetro positivo e os expoentes verificam as seguintes condições:

$$1 < p, q < N,\ 0 \leq a < (N-p)/p,\ 0 \leq b < (N-q)/q \text{ e } c_1, c_2 > 0. \tag{H_{exp}}$$

Os problemas positônicos, no caso escalar, surgiram a partir do artigo Keller-Cohen [48], onde eles estudaram um problema positônico, que significa o problema de Dirichlet envolvendo como não linearidade uma função monótona e positiva. Desde então, muitos autores têm estudado este tipo de problema, veja, por exemplo, Díaz e Saa [32].

Motivado pelos problemas positônicos, surgiu uma nova classe de problemas, a saber, os problemas semipositônicos, ou seja, a não linearidade na origem tem valor negativo, veja [16, 19, 21, 28, 59] e referências citadas neles. Castro, Hassanpour e Shivaji em [20], focaram suas atenções sobre o problema semipositônico

$$-\Delta u = \lambda f(u) \text{ em } \Omega \text{ e } u = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

onde Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, λ é um parâmetro positivo e $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e monótona satisfazendo as condições

$$f(0) < 0, \tag{f_0}$$

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = +\infty, \tag{f_1}$$

e também a condição sublinear no infinito, ou seja, $\lim_{s\to\infty} f(s)/s = 0$.

Recentemente, Chen em [23], usando o método de sub e supersolução, adquiriu resultados de existência e inexistência para uma classe de sistemas elípticos regulares positônicos, a saber, o sistema (2.1) com $a = b = 0$, $c_1 = p$, $c_2 = q$, $h(x, u, v) = u^\alpha v^\gamma$ e $k(x, u, v) = u^\delta v^\beta$. O método de sub e supersolução tem sido amplamente utilizado, ver [13, 16, 17, 18, 19, 21, 28, 49, 53, 55, 59]. O primeiro resultado que apresentaremos neste capítulo, e que será provado na seção (2.4), estende o resultado de existência de [23].

Teorema 2.1 *Além de (H_Ω) e (H_{exp}), suponha que $h(x, u, v) = u^\alpha v^\gamma$ e $k(x, u, v) = u^\delta v^\beta$ com $0 \leq \alpha < p - 1$, $0 \leq \beta < q - 1$, $\delta, \gamma > 0$ e $(p - 1 - \alpha)(q - 1 - \beta) - \gamma\delta > 0$. Então o sistema (2.1) possui uma solução fraca, onde cada componente é positiva e pertence a $C^{0,\rho}(\overline{\Omega}) \cap C^{1,\mu}(\Omega \setminus \{0\})$ com $\rho \in (0, 1]$ e $\mu > 0$, para cada $\lambda > 0$.*

Chhetri, Hai e Shivaji [43], usando teoria de grau, estudaram o sistema semipositônico envolvendo operadores $p-$laplaciano do tipo

$$(P_{pq}) : \quad \begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda f_1(v) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta_q v &= \lambda f_2(u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = v &= 0 \qquad\quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, λ é um parâmetro positivo e

$f_1, f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e monótonas satisfazendo (f_0), (f_1) e

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\max\{f_1(s), f_2(s)\}}{s^{p-1}} = 0. \tag{f_2}$$

Enquanto em [44], Hai e Shivaji provaram um resultado de existência para o sistema (P_{pq}) com a condição

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f_1(M(f_2(s))^{1/(p-1)})}{s^{p-1}} = 0, \text{para todo } M > 0, \tag{f_3}$$

ao invés da condição (f_2) acima mencionada. Eles aplicaram o método de sub e supersolução. Gostaríamos de mencionar que nos artigos acima foi considerado somente o caso autônomo com $p = q$.

Nossos próximos resultados, além de sistemas positônicos, envolvem os sistemas semipositônicos.

Teorema 2.2 *Além de* (H_Ω) *e* (H_{exp}), *assuma que* $h(x, u, v) = f_1(v)$ *e* $k(x, u, v) = f_2(u)$ *com* $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções contínuas e não decrescentes satisfazendo*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f_1(M(f_2(s))^{\frac{1}{q-1}})}{s^{p-1}} = 0,\ \forall\ M > 0,\ \ e\ \lim_{s\to\infty} f_i(s) = \infty,\ \ para\ i = 1, 2. \tag{H_1}$$

Então existe $\lambda_0 > 0$ *suficientemente grande tal que o sistema* (2.1) *possui uma solução fraca, onde cada componente é positiva, para cada* $\lambda \geq \lambda_0$.

O próximo resultado trata o caso não autônomo.

Teorema 2.3 *Assuma* (H_Ω), (H_{exp}) *e* $h(x, s, t), k(x, s, t)$ *funções contínuas e não decrescentes nas variáveis* s, t *satisfazendo*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{h(x, s, t)}{s^{p-1}} = 0 \text{ uniformemente em } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \tag{H_2}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{k(x, s, t)}{t^{q-1}} = 0 \text{ uniformemente em } (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}, \tag{H_3}$$

$$\lim_{(s,t)\to\infty} h(x, s, t) = \lim_{(s,t)\to\infty} k(x, s, t) = \infty \text{ uniformemente em } x \in \Omega. \tag{H_4}$$

Então existe $\lambda_0 > 0$ *suficientemente grande tal que o sistema* (2.1) *possui uma fraca solução, onde cada componente é positiva, para cada* $\lambda \geq \lambda_0$.

Concluíremos este capítulo provando dois resultados de inexistência.

Teorema 2.4 *Assuma* (H_Ω), (H_{exp}), $(a+1)p - c_1 = (b+1)q - c_2$,

$$|h(x,s,t)s| \leq k_1|s|^p + k_2|t|^q \text{ e } |k(x,s,t)t| \leq k_3|s|^p + k_4|t|^q,$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$ *e todo* $x \in \Omega$, *onde* k_1, k_2, k_3, k_4 *são números reais positivos. Então existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que o sistema* (2.1) *não possui nenhuma solução fraca, exceto a trivial, para cada* $0 < \lambda < \lambda_0$.

Corolário 2.1 *Além de* (H_Ω) *e* (H_{exp}), *suponha que* $h(x,u,v) = u^\alpha v^\gamma$ *e* $k(x,u,v) = u^\delta v^\beta$ *com* $0 \leq \alpha < p-1$, $0 \leq \beta < q-1$, $\delta, \gamma > 0$, $(p-1-\alpha)(q-1-\beta) - \gamma\delta = 0$, $p\gamma = q(p-1-\alpha)$ *e* $(a+1)p - c_1 = (b+1)q - c_2$. *Então existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que o sistema* (2.1) *não possui nenhuma solução fraca, exceto a trivial, para cada* $0 < \lambda < \lambda_0$.

2.2 Estudo da primeira autofunção

Nesta seção, nós estudaremos algumas propriedades da primeira autofunção do problema de autovalor

$$\begin{cases} -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda |x|^{-(a+1)p+c_1}|u|^{p-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde Ω é como em (H_Ω), $1 < p < N$, $0 \leq a < (N-p)/p$ e $c_1 > 0$. A priori, por Xuan [70], temos que existe o primeiro autovalor $\lambda_1 > 0$ de problema (2.2) o qual está associado a uma autofunção $\phi_1 \in C^{1,\alpha_1}(\Omega \setminus \{0\})$ com $\phi_1 > 0$ em $\Omega \setminus \{0\}$ e $\alpha_1 > 0$.

Definição 2.1 *Nós dizemos que um aberto e limitado* Ω *de* $\mathbb{R}^N$ *satisfaz a condição de esfera interior se para cada* $x_0 \in \partial\Omega$ *existe* $B(y_0, r) \subset \Omega$ *tal que* $x_0 \in \partial B(y_0, r)$ ($B(y_0, r)$ *é a bola de centro* y_0 *e raio* r). *Sabemos que todo domínio limitado* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *com fronteira de classe* $C^k (k \geq 2)$ *satisfaz a condição de esfera interior, ver [3, Lema 2.2].*

Definição 2.2 *Seja* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^N$. *Nós dizemos que* $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *é uma função de Carathéodory se* $f(x, \cdot)$ *é contínua para q.t.p. (quase todo ponto)* $x \in \Omega$ *e* $f(\cdot, z)$ *é Lebesgue mensurável para todo* $z \in \mathbb{R}^N$.

Nós usaremos um resultado de Pucci e Serrin, a saber [61, Teorema 8.1], para provarmos a seguinte versão do princípio de máximo forte.

Teorema 2.5 (Princípio de máximo forte) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *como em* (H_Ω), $1 < p < N$, $0 \leq a < (N-p)/p$ *e* $\Psi : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *uma função de Carathéodory não negativa. Se* $u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \cap C^0(\Omega) \cap C^1(\Omega \setminus \{0\})$ *e* $u \geq 0$ *satisfaz*

$$div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \Psi(x, u, \nabla u) \leq 0 \;\; em \; \Omega,$$

então, ou $u \equiv 0$ *em* Ω, *ou* $u > 0$ *em* Ω.

Demonstração. Suponhamos que $u \not\equiv 0$. Desde que $\Psi(x, s, \eta) \geq 0$ em Ω, temos

$$-\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi \, dx \leq 0, \; \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0.$$

Aplicando o teorema do princípio de máximo forte de Pucci-Serrin [61, Teorema 8.1] para $\overline{\Omega} := \Omega \setminus \overline{B(0, R/2)}$, onde $B(0, R) \subset \Omega$ e u é não trivial em $\Omega \setminus \overline{B(0, R/2)}$, obtemos $u > 0$ em $\Omega \setminus \overline{B(0, R/2)}$.

Note que, existe $\delta > 0$ com $\delta \leq u(x)$ para todo $x \in \partial B(0, R)$, pois u é contínua e positiva em $\Omega \setminus \overline{B(0, R/2)}$. Definindo $\overline{u} = u|_{B(0,R)}$ e $v \equiv \delta$ em $B(0, R)$, conseguimos que

$$\int_{B(0,R)} |x|^{-ap}|\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u} \nabla\phi \, dx \geq \int_{B(0,R)} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla\phi \, dx \tag{2.3}$$

para toda função $\phi \in C_0^\infty(B(0, R))$ com $\phi \geq 0$ em $B(0, R)$. Porém, como $C_0^\infty(B(0, R))$ é denso em $W_0^{1,p}(B(0, R), |x|^{-ap})$, para toda função $w \in W_0^{1,p}(B(0, R), |x|^{-ap})$ vale

$$\int_{B(0,R)} |x|^{-ap}|\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u} \nabla w \, dx \geq \int_{B(0,R)} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla w \, dx.$$

Logo, o teorema do princípio da comparação (teorema 6.6) implica que $0 < \delta = v(x) \leq u(x)$ para q.t.p. $x \in B(0, R)$. Como $u \in C^0(\Omega)$, concluímos que $u \geq \delta$ em $B(0, R)$ e $u > 0$ em Ω.

■

O próximo resultado será crucial no estudo do comportamento da primeira autofunção.

Teorema 2.6 *Suponha* Ω *como em* (H_Ω), $1 < p < N$, $0 \leq a < (N-p)/p$, $c > 0$ *e* $f : \Omega \times \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ *uma função de Carathéodory não negativa. Assuma que*

$u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \cap C^1(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ com $u > 0$ em Ω é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= |x|^{-(a+1)p+c}f(x,u,\nabla u) \quad em \quad \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Então existe $\sigma > 0$ tal que $|\nabla u(x)| \geq \sigma$ para todo $x \in \partial\Omega$.

Demonstração. Considere $x_0 \in \partial\Omega$. Como Ω satisfaz a condição de esfera interior, existe $B(y_0, r) \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B(y_0, r)$. Também, podemos supor $B(y_0, r) \subset \Omega \setminus \overline{B(0, R)}$, para algum $R > 0$, com $B(0, R) \subset \Omega$.

Defina a função $b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $b(x) = k(e^{-\alpha|x-y_0|^2} - e^{-\alpha r^2})$, onde α, k são constantes positivas que fixaremos depois.

Primeiramente, provaremos que

$$-div(|x|^{-ap}|\nabla b|^{p-2}\nabla b)(x) \leq 0, \ \forall x \in B(y_o, r) \setminus \overline{B(y_0, r/3)}, \tag{2.4}$$

se $\alpha > 0$ é suficientemente grande e independente de $k > 0$.

Não é difícil verificar que existem constantes positivas γ_0 e γ_1 satisfazendo as seguintes desigualdades

$$\sum_{i,j=1}^{N} \left| \frac{\partial}{\partial \eta_i}(|\eta|^{p-2}\eta_j) \right| \leq \gamma_0 |\eta|^{p-2}, \ \forall \ \eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \tag{2.5}$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \eta_i}(|\eta|^{p-2}\eta_j)\xi_i\xi_j \geq \gamma_1 |\eta|^{p-2}|\xi|^2, \ \forall \ \eta, \xi \in \mathbb{R}^N, \ \eta \neq 0. \tag{2.6}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{N} |\tfrac{\partial}{\partial \eta_i}(|\eta|^{p-2}\eta_j)| &= \sum_{i,j=1}^{N} ||\eta|^{p-2}\delta_{i,j} + (p-2)|\eta|^{p-4}\eta_i\eta_j| \\ &\leq (N + N^2|p-2|)|\eta|^{p-2}, \end{aligned}$$

onde $\delta_{i,j} = 1$ if $i = j$ e $\delta_{i,j} = 0$ se $i \neq j$.

Para provar a segunda desigualdade, consideraremos dois casos, a saber, $1 < p < 2$ e $2 \leq p < N$. Entretanto, observamos previamente que

$$\sum_{i,j=1}^{N} (\eta_i\eta_j\xi_i\xi_j) = \sum_{i=1}^{N}(\eta_i\xi_i)\sum_{j=1}^{N}(\eta_j\xi_j) = \left[\sum_{i=1}^{N}(\eta_i\xi_i)\right]^2 \geq 0,$$

e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i,j=1}^{N}(\eta_i\eta_j\xi_i\xi_j) \;=\; \left[\sum_{i=1}^{N}(\eta_i\xi_i)\right]^2 \leq |\eta|^2|\xi|^2.$$

Supondo que $1 < p < 2$, nós obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\eta_i}(|\eta|^{p-2}\eta_j)\xi_i\xi_j &= \sum_{i,j=1}^{N}(\delta_{i,j}|\eta|^{p-2}+(p-2)|\eta|^{p-4}\eta_i\eta_j)\xi_i\xi_j\\ &\geq |\eta|^{p-2}|\xi|^2+(p-2)|\eta|^{p-4}|\eta|^2|\xi|^2\\ &\geq (1+p-2)|\eta|^{p-2}|\xi|^2.\end{aligned}$$

Mas, assumindo que $2 \leq p < N$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\eta_i}(|\eta|^{p-2}\eta_j)\xi_i\xi_j &= \sum_{i,j=1}^{N}(\delta_{i,j}|\eta|^{p-2}+(p-2)|\eta|^{p-4}\eta_i\eta_j)\xi_i\xi_j\\ &\geq |\eta|^{p-2}|\xi|^2.\end{aligned}$$

Observemos que $b(x) = 0$ para todo $x \in \partial B(y_0, r)$,

$$\frac{\partial b}{\partial x_i}(x) = -2\alpha k(x_i - y_{0i})e^{-\alpha|x-y_0|^2} \tag{2.7}$$

e

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x_j\partial x_i}(x) = -2\alpha k e^{-\alpha|x-y_0|^2}\delta_{ij} + 4\alpha^2 k(x_i-y_{0i})(x_j-y_{0j})e^{-\alpha|x-y_0|^2}, \tag{2.8}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Também, existem constantes $K_1, K_2 > 0$ tais que

$$K_1 \leq |x|, |\nabla b|^{p-2}, e^{-\alpha|x-y_0|^2} \leq K_2,\ \forall x \in B(y_o, r)\setminus\overline{B(y_0, r/3)}. \tag{2.9}$$

Usando $(2.5)-(2.9)$, conseguimos

$$\begin{aligned}&div(|x|^{-ap}|\nabla b(x)|^{p-2}\nabla b(x))\\ &\quad=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|x|^{-ap}|\nabla b(x)|^{p-2}\frac{\partial b}{\partial x_i}(x)\right)\\ &\quad= -ap|\nabla b(x)|^{p-2}|x|^{-ap-2}\sum_{i=1}^{N}x_i\frac{\partial b}{\partial x_i}(x) + |x|^{-ap}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\eta_j}\left(|\nabla b(x)|^{p-2}\frac{\partial b(x)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2 b(x)}{\partial x_i\partial x_j}\end{aligned}$$

$$\geq 2apk\alpha e^{-\alpha|x-y_0|^2}|\nabla b(x)|^{p-2}\left[|x|^{-ap}-|x|^{-ap-1}|y_0|\right]-2\alpha k\gamma_0|x|^{-ap}e^{-\alpha|x-y_0|^2}|\nabla b(x)|^{p-2}$$

$$+4\alpha^2 k\gamma_1|x|^{-ap}e^{-\alpha|x-y_0|^2}|\nabla b(x)|^{p-2}|x-y_0|^2$$

$$\geq 0,\ \ \forall x\in B(y_o,r)\setminus\overline{B(y_0,r/3)},$$

para $\alpha>0$ suficientemente grande e independente de $k>0$. Isto prova (2.4).

Seja $\phi\in C_0^\infty(B(y_0,r)\setminus\overline{B(y_0,r/2)})$ com $\phi\geq 0$ em $B(y_0,r)\setminus\overline{B(y_0,r/2)}$, definimos $\overline{\phi}\in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})$ por

$$\overline{\phi}(x):=\begin{cases}\phi(x) & \text{se } x\in B(y_0,r)\setminus\overline{B(y_0,r/2)},\\ 0 & \text{se } \Omega\setminus(B(y_0,r)\setminus\overline{B(y_0,r/2)}),\end{cases}$$

logo

$$\nabla\overline{\phi}(x)=\begin{cases}\nabla\phi(x) & \text{se } x\in B(y_0,r)\setminus\overline{B(y_0,r/2)},\\ 0 & \text{se } \Omega\setminus(B(y_0,r)\setminus\overline{B(y_0,r/2)}).\end{cases}$$

Conseqüentemente, obtemos de (2.4) que

$$\begin{aligned}\int_{B(y_0,r)\setminus\overline{B(y_0,r/2)}}|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\,dx &= \int_\Omega|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\overline{\phi}\,dx\\ &= \int_\Omega|x|^{-(a+1)p+c}f(x,u,\nabla u)\overline{\phi}\,dx\\ &\geq 0\\ &\geq -\int_{B(y_0,r)\setminus\overline{B(y_0,r/2)}}div(|x|^{-ap}|\nabla b|^{p-2}\nabla b)\phi\,dx\\ &= \int_{B(y_0,r)\setminus\overline{B(y_0,r/2)}}|x|^{-ap}|\nabla b|^{p-2}\nabla b\nabla\phi\,dx.\end{aligned}$$

Por outro lado, já que $u\in C^1(\overline{\Omega}\setminus\{0\})$ e $u>0$ em Ω, existe $\delta>0$ tal que

$$\delta\leq u(x),\ \ \forall x\in\partial B(y_0,r/2);$$

escolhendo $k>0$ suficientemente pequeno, temos

$$b(x)\leq\delta\leq u(x),\ \ \forall x\in\partial B(y_0,r/2),$$

portanto

$$b(x)\leq u(x),\,\forall x\in\partial(B(y_0,r)\setminus\overline{B(y_0,r/2)}).$$

Então o teorema do princípio da comparação (teorema 6.6) implica

$$b(x) - u(x) \leq 0, \, \forall x \in B(y_0, r) \setminus \overline{B(y_0, r/2)}.$$

Além disso, $b(x_0) - u(x_0) = 0$, então

$$\frac{\partial b(x_0)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} \geq 0,$$

onde $\nu : \partial B(y_0, r) \to \mathbb{R}^N$, definido por $\nu(x) = \frac{x - y_0}{|x - y_0|}$, é o vetor unitário normal exterior a $\partial B(y_0, r)$. Logo, nós obtemos

$$\nabla u(x_0)\nu(x_0) = \tfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \leq \tfrac{\partial b}{\partial \nu}(x_0) = \nabla b(x)\tfrac{x_0 - y_0}{|x_0 - y_0|} = -2\alpha k r e^{-\alpha r^2} < 0.$$

Como $u \in C^1(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$, temos $\nabla u \in (C^0(\overline{\Omega} \setminus \{0\}))^N$. Então existe $\sigma > 0$ tal que

$$|\nabla u(x_0)| \geq \sigma, \; \forall \, x_0 \in \partial\Omega.$$

■

No próximo resultado, estudaremos algumas propriedades da primeira autofunção do problema (2.2).

Teorema 2.7 *Considere* Ω *como em* (H_Ω), $1 < p < N$, $0 \leq a < (N-p)/p$ *e* $c_1 > 0$. *Se* λ_1 *e* ϕ_1 *são o autovalor e a autofunção, respectivamente, do problema* (2.2), *então* $\phi_1 \in C^{0,\rho_1}(\overline{\Omega}) \cap C^{1,\mu_1}(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$, $\phi_1 > 0$ *em* Ω *e* $|\nabla \phi_1| \geq \sigma$ *em* $\partial\Omega$, *onde* $\rho_1 \in (0, 1]$ *e* $\mu_1, \sigma > 0$.

Demonstração. Sejam

$$p - 1 < \overline{q} < \min\left\{\tfrac{Np}{N-p} - 1; \, p - 1 + \tfrac{c_1}{N - p(a+1)}\right\}$$

e $g(x, s) := \lambda_1 s^{p-1}$, disto segue que

$$|g(x, s)| \leq C(1 + |s|^{\overline{q}}), \, \forall (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Portanto, pelo teorema 6.7 de regularidade, nós obtemos que $\phi_1 \in C^{0,\rho_1}(\overline{\Omega})$ para algum $\rho_1 \in (0, 1]$. Aplicando o teorema 6.8 com $\Omega_R = \Omega \setminus B(0, R)$, para todo $R > 0$ tal que

$B(0,R) \subset \Omega$, segue que $\phi_1 \in C^{1,\mu_1}(\Omega \setminus \{0\})$ para algum $\mu_1 \in (0,1]$. Daí, obtemos do teorema 6.9 de regularidade que $\phi_1 \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ para algum $\mu > 0$. Aplicando o princípio de máximo forte (teorema 2.5) segue que $\phi_1 > 0$ em Ω e concluímos pelo teorema 2.6 que $|\nabla\phi_1(x)| \geq \sigma > 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.

■

Nós também temos o seguinte lema:

Lema 2.1 *Assuma que Ω é como em (H_Ω), $1 < p < N$, $0 \leq a < (N-p)/p$, $c > 0$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory não negativa. Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \cap L^\infty(\Omega)$ é uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |x|^{-(a+1)p+c} f(x,u,\nabla u) & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

então u é não negativa para q.t.p. em Ω.

Demonstração. Definindo $v \equiv 0$ em Ω, obtemos para toda $w \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$, com $w \geq 0$ para q.t.p. em Ω, que

$$\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w\, dx \geq 0 \geq \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla w\, dx$$

e $u = 0 = v$ em $\partial\Omega$, logo, o princípio da comparação (teorema 6.6) implica que $u \geq 0$ para q.t.p. em Ω.

■

2.3 Teorema de sub e supersolução

Nossa principal ferramenta será um método geral de sub e supersolução. Este método, na situação escalar, tem sido usado por muitos autores, por exemplo, [13, 16, 23, 49] e [53]. A prova para o sistema segue como em [16] quando $a = b = 0$ e $p = q = c_1 = c_2$. Primeiramente, vamos introduzir algumas definições.

Definição 2.3 *Dizemos que o par $(\underline{u}, \underline{v})$, onde $\underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \cap L^\infty(\Omega)$ e $\underline{v} \in$*

$W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq}) \cap L^\infty(\Omega)$, *é uma subsolução fraca do sistema* (2.1) *se*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla\phi\, dx & \leq & \displaystyle\int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1}h(x,\underline{u},\underline{v})\phi\, dx, \\ \displaystyle\int_\Omega |x|^{-bq}|\nabla \underline{v}|^{q-2}\nabla \underline{v}\nabla\psi\, dx & \leq & \displaystyle\int_\Omega |x|^{-(b+1)q+c_2}k(x,\underline{u},\underline{v})\psi\, dx, \\ \underline{u},\underline{v} & \leq & 0 \ \ \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para todas as funções $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ *e* $\psi \in W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ *com* $\phi, \psi \geq 0$ *em* Ω.

Similarmente, definimos a supersolução fraca $(\overline{u}, \overline{v})$ do sistema (2.1) considerando as desigualdades contrárias na definição acima.

Notação: Se $u, v \in L^\infty(\Omega)$ com $u(x) \leq v(x)$ para q.t.p. $x \in \Omega$, nós denotamos por $[u, v]$ o conjunto $\{w \in L^\infty(\Omega) : u(x) \leq w(x) \leq v(x)$ para q.t.p. $x \in \Omega\}$.

Consideremos o sistema (2.1) com as não linearidades h, $k : \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo as condições:

(HK1): $h(x,s,t)$, $k(x,s,t)$ são funções de Carathéodory e são limitadas se s, t pertencem a conjuntos limitados.

(HK2): Existe uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, não decrescente, com $g(0) = 0$, $0 \leq g(s) \leq C(1 + |s|^{r-1})$, $\forall s \in \mathbb{R}$, onde $r = \min\{p, q\}$ e $C > 0$, e as aplicações $(s,t) \longmapsto h(x,s,t) + g(s)$, $(s,t) \longmapsto k(x,s,t) + g(t)$ são não decrescentes para q.t.p. $x \in \Omega$.

Observação 2.1 *Note que se* g *é como em* **(HK2)** *e* $l > r - 1$, *nós temos*

$$|g(t)| \leq C(1 + |t|^{r-1}) \leq A(1 + |t|^l), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Agora, estabeleceremos uma versão do método abstrato de sub e supersolução para nossa classe de sistemas.

Teorema 2.8 (Sub e supersolução) *Considere o sistema* (2.1) *sob as hipóteses* $(HK1)$ *e* $(HK2)$. *Suponha que* $(\underline{u}, \underline{v})$ *e* $(\overline{u}, \overline{v})$ *são, respectivamente, uma subsolução fraca e uma supersolução fraca do sistema* (2.1) *com* $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ *e* $\underline{v}(x) \leq \overline{v}(x)$, *para q.t.p.* $x \in \Omega$. *Então existe uma solução fraca minimal* (u_*, v_*) *(e, respectivamente, uma solução fraca maximal* (u^*, v^*)*) do sistema* (2.1) *no conjunto* $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$. *Em particular, toda solução* *fraca* $(u, v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$ *do sistema* (2.1) *satisfaz*

$$u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x) \text{ e } v_*(x) \leq v(x) \leq v^*(x),$$

para q.t.p. $x \in \Omega$.

Demonstração. Como em [16] (veja [13] para o caso escalar), consideramos o conjunto $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}] \subset L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ munido da topologia dada pela convergência q.t.p. em Ω. Sejam $p' > 1$ e $q' > 1$ os expoentes conjugados de p e q, respectivamente, ou seja, $1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1$.

Definimos o operador

$$S : [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}] \longrightarrow L^{p'}(\Omega, |x|^{-(a+1)p+c_1}) \times L^{q'}(\Omega, |x|^{-(b+1)q+c_2}) \equiv L_{p'q'},$$

$$S(u, v) := (h(\cdot, u(\cdot), v(\cdot)) + g(u(\cdot)),\ k(\cdot, u(\cdot), v(\cdot)) + g(v(\cdot))),$$

o qual por $(HK1)$ e $(HK2)$ está bem definido e cada componente é limitada e não decrescente em u e v. Sejam $\{(u_m, v_m)\} \subset [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$ e $(u, v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$ com $u_m(x) \to u(x)$ e $v_m(x) \to v(x)$, quando $m \to \infty$, para q.t.p. $x \in \Omega$, então

$$h(x, u_m(x), v_m(x)) + g(u_m(x)) \longrightarrow h(x, u(x), v(x)) + g(u(x)) \text{ quando } m \to \infty,$$

para q.t.p. $x \in \Omega$ e

$$|h(x, u_m, v_m) - g(u) - h(x, u, v) + g(u)|^{p'} \leq 2^{p'} |h(x, \bar{u}, \bar{v}) + g(\bar{u})|^{p'} \in L^1(\Omega, |x|^{-(a+1)p+c_1}),$$

logo, o teorema da convergência dominada de Lebesgue implica

$$\lim_{m \to \infty} \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} |h(x, u_m, v_m) + g(u_m) - h(x, u, v) - g(u)|^{p'}\, dx = 0$$

e do mesmo modo

$$\lim_{m \to \infty} \int_\Omega |x|^{-(b+1)q+c_2} |k(x, u_m, v_m) + g(v_m) - k(x, u, v) - g(v)|^{q'}\, dx = 0,$$

ou seja, o operador S é contínuo. Pelo teorema 6.5 (com $\psi(x,s)=g(s)$), vemos que o operador

$$T : L_{p'q'} \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq}),$$

$$T(f_1, f_2) := (T_p(f_1), T_q(f_2)),$$

está bem definido, o qual é contínuo e não decrescente em cada componente.

Definimos o operador $F : [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}] \to W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ dado por $F := T \circ S$, ou seja, para cada $(u,v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, temos que $F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v))$ é a única solução fraca do sistema

$$\begin{cases} -Le_{ap} + |x|^{-(a+1)p+c_1} g(e) &= |x|^{-(a+1)p+c_1}[h(x,u,v) + g(u)] \quad \text{em} \quad \Omega, \\ -Lw_{bq} + |x|^{-(b+1)q+c_2} g(w) &= |x|^{-(b+1)q+c_2}[k(x,u,v) + g(v)] \quad \text{em} \quad \Omega, \\ e = w &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $Le_{ap} \equiv div(|x|^{-ap}|\nabla e|^{p-2}\nabla e)$ e $Lw_{bq} \equiv div(|x|^{-bq}|\nabla w|^{q-2}\nabla w)$.

Escrevendo $(u_1, v_1) := F(\underline{u}, \underline{v})$ e $(u^1, v^1) := F(\overline{u}, \overline{v})$, para $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ com $\phi \geq 0$ para q.t.p. em Ω, nós conseguimos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla\phi \, dx + \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} g(u_1)\phi \, dx \\ &= \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1}[h(x,\underline{u},\underline{v}) + g(\underline{u})]\phi \, dx \\ &\geq \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u} \nabla\phi \, dx + \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} g(\underline{u})\phi \, dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u^1|^{p-2}\nabla u^1 \nabla\phi \, dx + \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} g(u^1)\phi \, dx \\ &\leq \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u} \nabla\phi \, dx + \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} g(\overline{u})\phi \, dx. \end{aligned}$$

Em adição, temos $u_1 = 0 \geq \underline{u}$ e $u^1 = 0 \leq \overline{u}$ em $\partial\Omega$; então pelo teorema do princípio da comparação (teorema 6.6) segue que $\underline{u}(x) \leq u_1(x)$ e $u^1(x) \leq \overline{u}(x)$, para q.t.p. $x \in \Omega$. Similarmente, $\underline{v}(x) \leq v_1(x)$ e $v^1(x) \leq \overline{v}(x)$, para q.t.p. $x \in \Omega$.

Observando que F_i, $i = 1, 2$, é não decrescente em u e v, obtemos

$$\begin{cases} \underline{u}(x) \leq u_1(x) \leq F_1(u,v) \leq u^1(x) \leq \overline{u}(x), \\ \underline{v}(x) \leq v_1(x) \leq F_2(u,v) \leq v^1(x) \leq \overline{v}(x), \end{cases}$$

para todo $(u,v) \in [\underline{u},\overline{u}] \times [\underline{v},\overline{v}]$ e q.t.p. $x \in \Omega$. Repetindo o mesmo raciocínio para as seqüências $\{(u_m,v_m)\}, \{(u^m,v^m)\} \subset [\underline{u},\overline{u}] \times [\underline{v},\overline{v}]$ dadas por

$$\begin{aligned}(u_0,v_0) &:= (\underline{u},\underline{v}), \quad (u_{m+1},v_{m+1}) := F(u_m v_m),\\ (u^0,v^0) &:= (\overline{u},\overline{v}), \quad (u^{m+1},v^{m+1}) := F(u^m v^m),\end{aligned}$$

conseguimos

$$\begin{cases} u_0 \le u_1 \le \cdots \le u_m \le F_{1,m}(u,v) \le u^m \le \cdots \le u^1 \le u^0,\\ v_0 \le v_1 \le \cdots \le v_m \le F_{2,m}(u,v) \le v^m \le \cdots \le v^1 \le v^0,\end{cases}$$

para todo $(u,v) \in [\underline{u},\overline{u}] \times [\underline{v},\overline{v}]$, para q.t.p. em Ω e todo $m \in \mathbb{N}$, onde $F_{i,m}, i = 1,2$, são definidos por recorrência

$$F_{i,1}(u,v) = F_i(u,v), ..., F_{i,m+1}(u,v) = F_i(F_{1,m}(u,v), F_{2,m}(u,v)), \text{ para } i = 1,2.$$

Em particular, supondo que $(u,v) \in [\underline{u},\overline{u}] \times [\underline{v},\overline{v}]$ é uma solução fraca do sistema (2.1) e escrevendo $(\hat{u},\hat{v}) = F(u,v)$, então, para cada $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})$ com $\phi \ge 0$ para q.t.p. em Ω, conseguimos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla\hat{u}|^{p-2}\nabla\hat{u}\nabla\phi\,dx + \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} g(\hat{u})\phi\,dx\\ &\quad= \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1}[h(x,u,v)+g(u)]\phi\,dx\\ &\quad= \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\,dx + \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} g(u)\phi\,dx.\end{aligned}$$

Conseqüentemente, como $\hat{u} = u = 0$ em $\partial\Omega$, o teorema do princípio da comparação (teorema 6.6) implica que $F_1(u,v) = \hat{u} = u$. Analogamente, $F_2(u,v) = \hat{v} = v$. Assim, segue que

$$\begin{cases} u_0 \le u_1 \le \cdots \le u_m \le u \le u^m \le \cdots \le u^1 \le u^0,\\ v_0 \le v_1 \le \cdots \le v_m \le v \le v^m \le \cdots \le v^1 \le v^0,\end{cases} \tag{2.10}$$

para q.t.p. em Ω.

Portanto, obtemos $u_m(x) \to u_*(x)$, $v_m(x) \to v_*(x)$, $u^m(x) \to u^*(x)$, e $v^m(x) \to v^*(x)$, quando $m \to \infty$, para q.t.p. $x \in \Omega$. Mas, como o operador F é contínuo, concluímos que

$$F(u_*,v_*) = (u_*,v_*) \text{ e } F(u^*,v^*) = (u^*,v^*),$$

logo, pela definição de F, vemos que (u_*, v_*) e (u^*, v^*) são soluções fracas do sistema (2.1), e segue de (2.10) que

$$u_* \leq u \leq u^* \text{ e } v_* \leq v \leq v^*,$$

para toda solução fraca (u, v) do sistema (2.1) com $(u, v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$.

■

2.4 Prova do teorema 2.1

Inicialmente, estabeleceremos a existência de uma supersolução fraca para o sistema (2.1), onde cada componente é positiva e pertence a $C^{0,\rho}(\overline{\Omega})$ para algum $\rho \in (0, 1]$.

Combinando o lema 2.1 com os teoremas 6.5 e 6.7, nós podemos escolher $e_i \in C^{0,\rho_i}(\overline{\Omega})$, para $i = 1, 2$, onde (e_1, e_2) é uma solução fraca do sistema (2.1) com $h = k \equiv 1/\lambda$ e cada componente é não negativa. Evidentemente e_1 e e_2 são não triviais. Aplicando o teorema 6.8 de regularidade com $\Omega_R = \Omega \setminus B(0, R)$, para todo $R > 0$ tal que $B(0, R) \subset \Omega$, segue que $e_i \in C^{1,\alpha_i}(\Omega \setminus \{0\})$ para algum $\alpha_i > 0$ e $i = 1, 2$. Então, pelo princípio de máximo forte (teorema 2.5), conseguimos $e_i > 0$ em Ω, $i = 1, 2$. Definimos

$$(z_1(x), z_2(x)) := (Ae_1(x), Be_2(x)),$$

onde A, B são constantes positivas que fixaremos depois. Tomemos $f_1 \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ e $f_2 \in W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ com $f_1, f_2 \geq 0$ para q.t.p. em Ω, então

$$\begin{aligned} \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla z_1|^{p-2} \nabla z_1 \nabla f_1 \, dx &= A^{p-1} \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla e_1|^{p-2} \nabla e_1 \nabla f_1 \, dx \\ &= A^{p-1} \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} f_1 \, dx \end{aligned} \tag{2.11}$$

e

$$\int_\Omega |x|^{-bq} |\nabla z_2|^{q-2} \nabla z_2 \nabla f_2 \, dx = B^{q-1} \int_\Omega |x|^{-(b+1)q+c_2} f_2 \, dx. \tag{2.12}$$

Se $l := ||e_1||_\infty, L := ||e_2||_\infty$, $0 \leq \alpha < p - 1$, $0 \leq \beta < q - 1$, $\lambda, \delta, \gamma > 0$ e $(p - 1 - \alpha)(q - 1 - \beta) - \gamma\delta > 0$ é fácil provar que existem constantes positivas A, B tais que

$$A^{p-1-\alpha} = \lambda B^\gamma l^\alpha L^\gamma \quad \text{e} \quad B^{q-1-\beta} = \lambda A^\delta l^\delta L^\beta. \tag{2.13}$$

Assim, obtemos por (2.13) que

$$\begin{aligned} &\lambda z_1^{\alpha}(x) z_2^{\gamma}(x) \leq \lambda A^{\alpha} B^{\gamma} l^{\alpha} L^{\gamma} \leq A^{p-1}, \ \forall x \in \Omega, \\ &\lambda z_1^{\delta}(x) z_2^{\beta}(x) \leq \lambda A^{\delta} B^{\beta} l^{\delta} L^{\beta} \leq B^{q-1}, \ \forall x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Logo, usando (2.11), (2.12) e (2.14), concluímos que

$$\int_{\Omega} |x|^{-ap} |\nabla z_1|^{p-2} \nabla z_1 \nabla f_1 \, dx \geq \lambda \int_{\Omega} |x|^{-(a+1)p+c_1} z_1^{\alpha} z_2^{\gamma} f_1 \, dx$$

e

$$\int_{\Omega} |x|^{-bq} |\nabla z_2|^{q-2} \nabla z_2 \nabla f_2 \, dx \geq \lambda \int_{\Omega} |x|^{-(b+1)q+c_2} z_1^{\delta} z_2^{\beta} f_2 \, dx,$$

ou seja, $(z_1, z_2) \in C^{0,\rho_1}(\overline{\Omega}) \times C^{0,\rho_2}(\overline{\Omega})$ é uma supersolução fraca do sistema (2.1), onde cada componente é positiva em Ω.

Agora, provaremos a existência de uma subsolução fraca para o sistema (2.1), onde cada componente é positiva e pertence a $C^{0,\rho}(\overline{\Omega})$ para algum $\rho \in (0, 1]$.

Aplicando o teorema 2.7 com $1 < p < N$, $0 \leq a < (N-p)/p$ e $c_1 > 0$, temos $\lambda_1 > 0$ e ϕ_1, respectivamente, o autovalor e a autofunção do problema (2.2) com ϕ_1 pertencente a $C^{0,\rho_1}(\overline{\Omega}) \cap C^{1,\mu_1}(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$, $\phi_1 > 0$ em Ω e $|\nabla \phi_1| \geq \sigma_1$ em $\partial\Omega$, para algumas constantes positivas σ_1, ρ_1 e $\mu_1 > 0$. Trocando $1 < p < N$, $0 \leq a < (N-p)/p$ e $c_1 > 0$ por $1 < q < N$, $0 \leq b < (N-q)/q$ e $c_2 > 0$, respectivamente, temos $\lambda_2 > 0$ e ϕ_2, respectivamente, o autovalor e a autofunção do problema (2.2) satisfazendo $\phi_2 \in C^{0,\rho_2}(\overline{\Omega}) \cap C^{1,\mu_2}(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$, $\phi_2 > 0$ em Ω e $|\nabla \phi_2| \geq \sigma_2$ em $\partial\Omega$, onde $\sigma_2, \rho_2 > 0$ e $\mu_2 > 0$. Definimos

$$(\psi_{1c}(x), \psi_{2c}(x)) := (c\phi_1^m(x), c^k \phi_2^n(x)),$$

a qual pertence a $(C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega} \setminus \{0\}))^2$, com $c > 0$ a ser fixada depois e k, m, n tais que

$$\tfrac{\delta}{q-1-\beta} < k < \tfrac{p-1-\alpha}{\gamma}, \ m = \tfrac{p}{p-1}, \ n = \tfrac{q}{q-1}, \tag{2.15}$$

já que $(p-1-\alpha)(q-1-\beta) - \gamma\delta > 0$, $p-1-\alpha > 0$ e $q-1-\beta > 0$.

Então, para quaisquer $f_1 \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ e $f_2 \in W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ com $f_1, f_2 \geq 0$ para q.t.p. em Ω, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla\psi_{1c}|^{p-2}\nabla\psi_{1c}\nabla f_1\,dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-ap}(cm)^{p-1}\phi_1^{(m-1)(p-2)+(m-1)}|\nabla\phi_1|^{p-2}\nabla\phi_1\nabla f_1\,dx \\
&= (cm)^{p-1}\int_\Omega |x|^{-ap}\nabla\phi_1|^{p-2}\nabla\phi_1[\nabla(\phi_1 f_1)-(\nabla\phi_1)f_1]\,dx \\
&= (cm)^{p-1}\int_\Omega \left[\lambda_1|x|^{-(a+1)p+c_1}\phi_1^p - |x|^{-ap}|\nabla\phi_1|^p\right] f_1\,dx.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Similarmente, conseguimos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |x|^{-bq}|\nabla\psi_{2c}|^{q-2}\nabla\psi_{2c}\nabla f_2\,dx \\
&= (c^k n)^{q-1}\int_\Omega \left[\lambda_2|x|^{-(b+1)q+c_2}\phi_2^q - |x|^{-bq}|\nabla\phi_2|^q\right] f_2\,dx.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Sendo $\phi_i = 0$ e $|\nabla\phi_i| \geq \sigma_i$ em $\partial\Omega$, para $i = 1,2$, existe $\eta > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega_\eta := \{x \in \Omega : dist(x,\partial\Omega) \leq \eta\}$, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_1|x|^{-(a+1)p+c_1}\phi_1^p(x) - |x|^{-ap}|\nabla\phi_1|^p(x) \leq 0,\\
\lambda_2|x|^{-(b+1)q+c_2}\phi_2^q(x) - |x|^{-bq}|\nabla\phi_2|^q(x) \leq 0.
\end{aligned}$$

Então, para cada $\lambda > 0$, conseguimos

$$\int_{\Omega_\eta} \left[\lambda_1|x|^{-(a+1)p+c_1}\phi_1^p - |x|^{-ap}|\nabla\phi_1|^p\right] f_1\,dx \leq 0 \leq \lambda\int_{\Omega_\eta} |x|^{-(a+1)p+c_1}\psi_{1c}^\alpha\psi_{2c}^\gamma f_1\,dx \tag{2.18}$$

e

$$\int_{\Omega_\eta} \left[\lambda_2|x|^{-(b+1)q+c_2}\phi_2^q - |x|^{-bq}|\nabla\phi_2|^q\right] f_2\,dx \leq 0 \leq \lambda\int_{\Omega_\eta} |x|^{-(b+1)q+c_2}\psi_{1c}^\delta\psi_{2c}^\beta f_2\,dx. \tag{2.19}$$

Agora, como $\phi_i > 0$ em Ω e ϕ_i é contínua, $i = 1,2$, então existe $\mu > 0$ tal que $\phi_i(x) \geq \mu$ para todo $x \in \Omega \setminus \Omega_\eta$ e $i = 1,2$. Portanto, obtemos de (2.15) que existe $a_0 > 0$ de modo que valem as desigualdades

$$\begin{aligned}
\lambda_2 n^{q-1}c^{k(q-1-\beta)-\delta}\phi_2^{q-n\beta}(x) \leq \lambda\mu^{m\delta} \leq \lambda\phi_1^{m\delta}(x),\ \forall\, x \in \Omega\setminus\Omega_\eta,\ \forall\, c \in (0,a_0),\\
\lambda_1 m^{p-1}c^{p-1-\alpha-k\gamma}\phi_1^{p-m\alpha}(x) \leq \lambda\mu^{n\gamma} \leq \lambda\phi_2^{n\gamma}(x),\ \forall\, x \in \Omega\setminus\Omega_\eta,\ \forall\, c \in (0,a_0).
\end{aligned}$$

Donde, temos

$$
\begin{aligned}
&(cm)^{p-1}(\lambda_1|x|^{-(a+1)p+c_1}\phi_1^p - |x|^{-ap}|\nabla\phi_1|^p)\\
&\quad \le |x|^{-(a+1)p+c_1}\lambda_1(cm)^{p-1}\phi_1^p\\
&\quad = |x|^{-(a+1)p+c_1}\lambda_1 m^{p-1}c^{p-1-\alpha-k\gamma}\phi_1^{p-m\alpha}[c^{k\gamma}c^{\alpha}\phi_1^{m\alpha}]\\
&\quad \le \lambda|x|^{-(a+1)p+c_1}\phi_2^{n\gamma}c^{k\gamma}c^{\alpha}\phi_1^{m\alpha}\\
&\quad = \lambda|x|^{-(a+1)p+c_1}\psi_{1c}^{\alpha}\psi_{2c}^{\gamma},\ \forall\, x\in\Omega\setminus\Omega_\eta,\ \forall\, c\in(0,a_0),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&(c^k n)^{q-1}(\lambda_2|x|^{-(b+1)q+c_2}\phi_2^q - |x|^{-bq}|\nabla\phi_2|^q)\\
&\quad \le \lambda|x|^{-(b+1)q+c_2}\psi_{1c}^{\delta}\psi_{2c}^{\beta},\ \forall\, x\in\Omega\setminus\Omega_\eta,\ \forall\, c\in(0,a_0).
\end{aligned}
$$

Logo, segue que

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_\eta}\left[\lambda_1|x|^{-(a+1)p+c_1}\phi_1^p - |x|^{-ap}|\nabla\phi_1|^p\right] f_1\,dx \le \lambda\int_{\Omega\setminus\Omega_\eta}|x|^{-(a+1)p+c_1}\psi_{1c}^{\alpha}\psi_{2c}^{\gamma}\,dx \tag{2.20}$$

e

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_\eta}\left[\lambda_2|x|^{-(b+1)q+c_2}\phi_2^q - |x|^{-bq}|\nabla\phi_2|^q\right] f_2\,dx \le \lambda\int_{\Omega\setminus\Omega_\eta}|x|^{-(b+1)q+c_2}\psi_{1c}^{\delta}\psi_{2c}^{\beta}\,dx. \tag{2.21}$$

Então, usando (2.18), (2.20) em (2.16) e (2.19), (2.21) em (2.17), segue que (ψ_{1c},ψ_{2c}) é uma subsolução fraca do sistema (2.1), onde cada componente é positiva, para cada $c\in(0,a_0)$.

Além disso, obtemos analogamente a (2.18) que

$$\int_{\Omega_\eta}\left[\lambda_1|x|^{-(a+1)p+c_1}\phi_1^p - |x|^{-ap}|\nabla\phi_1|^p\right] f_1\,dx \le \lambda\int_{\Omega_\eta}|x|^{-(a+1)p+c_1}z_1^{\alpha}z_2^{\gamma}f_1dx. \tag{2.22}$$

Por outro lado, podemos escolher $c_0\in(0,a_0)$ tal que

$$\psi_{1,c_0}(x)\le z_1(x)\ \text{ e }\ \psi_{2,c_0}(x)\le z_2(x),\ \forall\, x\in\Omega\setminus\Omega_\eta,$$

então, pela equação (2.20), obtemos

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_\eta}\left[\lambda_1|x|^{-(a+1)p+c_1}\phi_1^p - |x|^{-ap}|\nabla\phi_1|^p\right] f_1\,dx \le \lambda\int_{\Omega\setminus\Omega_\eta}|x|^{-(a+1)p+c_1}z_1^{\alpha}z_2^{\gamma}f_1dx. \tag{2.23}$$

Conseqüentemente, vemos por (2.16), (2.22) e (2.23) que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla\psi_{1c}|^{p-2}\nabla\psi_{1c}\nabla f_1 dx &\leq \lambda\int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} z_1^\alpha z_2^\gamma f_1 dx \\ &\leq \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla z_1|^{p-2}\nabla z_1 \nabla f_1 dx,\end{aligned}$$

para toda $f_1 \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ com $f_1 \geq 0$ para q.t.p. em Ω e algum $c_0 \in (0, a_0)$. Logo, pelo princípio da comparação (teorema 6.6) segue que $\overline{\psi}_{1c_0}(x) \leq z_1(x)$ para todo $x \in \Omega$. Analogamente, $\overline{\psi}_{2c_0}(x) \leq z_2(x)$ para todo $x \in \Omega$. Assim, obtemos do teorema 2.8 uma solução fraca (u_0, v_0) do sistema (2.1) com $\psi_{1c_0}(x) \leq u_0(x) \leq z_1(x)$ e $\psi_{2c_0}(x) \leq v_0(x) \leq z_2(x)$, para q.t.p. $x \in \Omega$.

Consideremos

$$p - 1 < \overline{q} < \min\left\{\tfrac{Np}{N-p} - 1;\, p - 1 + \tfrac{c_1}{N-p(a+1)}\right\}$$

e $g(x,s) := \lambda v_0^\gamma(x) s^\alpha$. Como $v_0 \in L^\infty(\Omega)$ é limitada e $0 \leq \alpha < p-1$, obtemos

$$|g(x,s)| \leq \lambda ||v_0||^\gamma_{L^\infty(\Omega)} |s|^\alpha \leq C(1 + |s|^{\overline{q}}),\ \forall s \in \mathbb{R} \text{ e uniformemente em } x \in \Omega.$$

Portanto, pelo teorema 6.7, concluímos que $u_0 \in C^{0,\rho_1}(\overline{\Omega})$ para algum $\rho_1 \in (0,1]$. Similarmente, temos $v_0 \in C^{0,\rho_2}(\overline{\Omega})$ para algum $\rho_2 \in (0,1]$. Pelo teorema 6.8 segue que $u_0 \in C^{1,\mu_1}(\Omega \setminus \{0\})$ e $v_0 \in C^{1,\mu_2}(\Omega \setminus \{0\})$, onde $\mu_1, \mu_2 > 0$. Sendo $\psi_{ic_0} > 0$ em Ω, $i = 1, 2$, obtemos que $u_0, v_0 > 0$ em Ω. ■

Observação 2.2 *Suponha $\Omega := B(0,R)$. Por um resultado em [27, Proposição 3.1] o problema* (2.2) *possui uma autofunção radial ϕ_1 em $C^2(B(0,R)) \cap C^{1,\mu_1}(\overline{B(0,R)})$, $\mu_1 > 0$, associada ao autovalor $\lambda_1 > 0$, se $1 < p < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$ e $c_1 > p-1$. Além disso, $\phi_1 > 0$ em $B(0,R)$ e $|\nabla\phi_1| > 0$ em $\partial\Omega$. Então, repetindo a prova acima, obtemos o teorema* 2.1 *com $\Omega := B(0,R)$, $1 < p, q < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$, $-\infty < b < (N-q)/q$, $c_1 > p-1$ e $c_2 > q-1$.*

2.5 Prova do teorema 2.2

Primeiramente, provaremos que o sistema (2.1) possui uma supersolução fraca, onde cada componente é positiva, para cada $\lambda > 0$ fixado.

Análogo ao início da prova do teorema 2.1, obtemos (e_1, e_2) uma solução fraca do sistema (2.1) com $h = k \equiv 1/\lambda$, $e_i \in C^{1,\alpha_i}(\Omega \setminus \{0\})$ e $e_i > 0$ em Ω para $\alpha_i > 0$ e $i = 1, 2$. Definimos

$$(z_{1c}(x), z_{2c}(x)) := \left(c\,\mu^{-1}\lambda^{\frac{1}{p-1}} e_1(x), [\lambda f_2(c\lambda^{\frac{1}{p-1}})]^{\frac{1}{q-1}} e_2(x)\right),$$

onde $\mu := \max\{||e_1||_\infty, ||e_2||_\infty\}$ e c é uma constante positiva que fixaremos depois. Notemos que $z_{ic} \in C^{0,\rho_i}(\overline{\Omega}) \cap C^{1,\alpha_i}(\Omega \setminus \{0\})$ para $i = 1, 2$.

Se $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ com $\varphi_1 \geq 0$ para q.t.p. em Ω, então

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla z_{1c}|^{p-2} \nabla z_{1c} \nabla \varphi_1 \, dx &= \lambda \left(\tfrac{c}{\mu}\right)^{p-1} \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla e_1|^{p-2} \nabla e_1 \nabla \varphi_1 \, dx \\ &= \lambda \left(\tfrac{c}{\mu}\right)^{p-1} \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} \varphi_1 \, dx.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Pela condição de monotonicidade sobre f_1 e por (H_1), existe uma constante $c_0 = c_0(\lambda) > 0$ suficientemente grande tal que

$$\begin{aligned}\lambda c^{p-1} &\geq \lambda \mu^{p-1} f_1(\mu[\lambda f_2(c\lambda^{\frac{1}{p-1}})]^{\frac{1}{q-1}}) \\ &\geq \lambda \mu^{p-1} f_1([\lambda f_2(c\lambda^{\frac{1}{p-1}})]^{\frac{1}{q-1}} e_2(x)) \\ &= \lambda \mu^{p-1} f_1(z_{2c}(x))\end{aligned} \tag{2.25}$$

para todo $x \in \Omega$ e cada $c \geq c_0$.

Conseqüentemente, por (2.24) e (2.25), encontramos

$$\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla z_{1c}|^{p-2} \nabla z_{1c} \nabla \varphi_1 \, dx \geq \lambda \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} f_1(z_{2c}) \varphi_1 \, dx, \ \forall c \geq c_0.$$

Desde que f_2 é monótona, para toda $\varphi_2 \in W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ com $\varphi_2 \geq 0$ para q.t.p. em Ω, nós temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-bq} |\nabla z_{2c}|^{q-2} \nabla z_{2c} \nabla \varphi_2 \, dx &= \lambda f_2(c\lambda^{\frac{1}{p-1}}) \int_\Omega |x|^{-bq} |\nabla e_2|^{q-2} \nabla e_2 \nabla \varphi_2 \, dx \\ &= \lambda f_2(c\lambda^{\frac{1}{p-1}}) \int_\Omega |x|^{-(b+1)q+c_2} \varphi_2 \, dx \\ &\geq \lambda \int_\Omega |x|^{-(b+1)q+c_2} f_2(c\lambda^{\frac{1}{p-1}} \mu^{-1} e_1) \varphi_2 \, dx \\ &= \lambda \int_\Omega |x|^{-(b+1)q+c_2} f_2(z_{1c}) \varphi_2 \, dx.\end{aligned}$$

Portanto, (z_{1c}, z_{2c}) é uma supersolução fraca do sistema (2.1) para cada $c \geq c_0$ e $\lambda > 0$ fixado. Além disso, como $\lim_{s\to\infty} f_2(s) = \infty$, obtemos que $z_{ic} > 0$ em Ω para $i = 1, 2$ e $c \geq c_0 = c_0(\lambda)$ suficientemente grande.

Agora, nós provaremos que o sistema (2.1) possui uma subsolução fraca para cada $\lambda \geq \lambda_0$, com $\lambda_0 > 0$ suficientemente grande.

Como no teorema 2.1, consideramos os autovalores λ_1, λ_2 e suas respectivas autofunções $\phi_1 \in C^{0,\rho_1}(\overline{\Omega}) \cap C^{1,\mu_1}(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ e $\phi_2 \in C^{0,\rho_2}(\overline{\Omega}) \cap C^{1,\mu_2}(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ tais que $\phi_i > 0$ em Ω e $|\nabla \phi_i| \geq \sigma_i > 0$ em $\partial\Omega$, para $i = 1, 2$. Também, podemos supor que $||\phi_i||_{L^\infty(\Omega)} = 1$ para $i = 1, 2$. Além disso, é fácil verificar que existem $m, \eta > 0$ de modo que

$$|x|^{-ap}|\nabla \phi_1|^p - \lambda_1 |x|^{-(a+1)p+c_1}\phi_1^p \geq m \ \text{ e } \ |x|^{-bq}|\nabla \phi_2|^q - \lambda_2 |x|^{-(b+1)q+c_2}\phi_2^q \geq m, \quad (2.26)$$

em $\Omega_\eta := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) \leq \eta\}$.

Como f_i é contínua e $\lim_{s\to\infty} f_i(s) = \infty$, existe $k_0 > 0$ tal que $f_i(s) \geq -k_0$ para todo $s \geq 0$ e $i = 1, 2$. Escolhemos $r > 0$ tal que

$$r \leq |x|^{-(a+1)p+c_1}, |x|^{-(b+1)q+c_2}, \ \forall x \in \Omega_\eta.$$

Definimos

$$(\Psi_{1_\lambda}(x), \Psi_{2_\lambda}(x)) := \Big((\tfrac{\lambda k_0 r}{m})^{\frac{1}{p-1}} (\tfrac{p-1}{p}) \phi_1^{\frac{p}{p-1}}(x), (\tfrac{\lambda k_0 r}{m})^{\frac{1}{q-1}} (\tfrac{q-1}{q}) \phi_2^{\frac{q}{q-1}}(x) \Big),$$

onde cada componente pertence a $C^0(\overline{\Omega})$.

Então, para $h_1 \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ com $h_1 \geq 0$ para q.t.p. em Ω, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla \Psi_{1_\lambda}|^{p-2}\nabla \Psi_{1_\lambda}\nabla h_1 \, dx \\
&= (\tfrac{\lambda k_0 r}{m}) \int_\Omega |x|^{-ap}\phi_1 |\nabla \phi_1|^{p-2}\nabla \phi_1 \nabla h_1 \, dx \\
&= (\tfrac{\lambda k_0 r}{m}) \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla \phi_1|^{p-2}\nabla \phi_1 [\nabla(\phi_1 h_1) - (\nabla \phi_1)h_1] \, dx \\
&= (\tfrac{\lambda k_0 r}{m}) \int_\Omega \left[\lambda_1 |x|^{-(a+1)p+c_1}\phi_1^p - |x|^{-ap}|\nabla \phi_1|^p\right] h_1 \, dx.
\end{aligned} \quad (2.27)$$

Sendo $\Psi_{i_\lambda} \geq 0$ em Ω para $i = 1, 2$, segue que

$$-k_0 r \leq |x|^{-(a+1)p+c_1} f_1(\Psi_{2_\lambda}(x)), \ \forall x \in \Omega_\eta. \tag{2.28}$$

Então, usando (2.26) e (2.28), conseguimos

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{\lambda k_0 r}{m}\right) \int_{\Omega_\eta} \left[\lambda_1 |x|^{-(a+1)p+c_1} \phi_1^p - |x|^{-ap} |\nabla \phi_1|^p\right] h_1 \, dx \\
&\leq -\lambda k_0 r \int_{\Omega_\eta} h_1 \, dx \\
&\leq \lambda \int_{\Omega_\eta} |x|^{-(a+1)p+c_1} f_1(\Psi_{2_\lambda}(x)) h_1 \, dx.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Por outro lado, existe $\mu > 0$ tal que $\phi_i(x) \geq \mu$ em $\Omega \setminus \Omega_\eta$ para $i = 1, 2$. Portanto, temos

$$\Psi_{2_\lambda}(x) \geq \left(\tfrac{\lambda k_0 r}{m}\right)^{\frac{1}{q-1}} \left(\tfrac{q-1}{q}\right) \mu^{\frac{q}{q-1}} \longrightarrow \infty, \tag{2.30}$$

quando $\lambda \to \infty$, uniformemente em $x \in \Omega \setminus \Omega_\eta$.

Por (2.30) e $\lim_{s\to\infty} f_1(s) = \infty$, obtemos $\lambda_0 > 0$ suficientemente grande tal que

$$\tfrac{\lambda_1 k_0 r}{m} \phi_1^p(x) \leq \tfrac{\lambda_1 k_0 r}{m} \leq f_1(\Psi_{2_\lambda}(x)), \tag{2.31}$$

para todo $x \in \Omega \setminus \Omega_\eta$ e cada $\lambda \geq \lambda_0$.

Daí, para cada $\lambda \geq \lambda_0$, segue de (2.31) que

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{\lambda k_0 r}{m}\right) \int_{\Omega \setminus \Omega_\eta} \left[\lambda_1 |x|^{-(a+1)p+c_1} \phi_1^p - |x|^{-ap} |\nabla \phi_1|^p\right] h_1 \, dx \\
&\leq \lambda \int_{\Omega \setminus \Omega_\eta} |x|^{-(a+1)p+c_1} \left(\tfrac{\lambda_1 k_0 r}{m}\right) \phi_1^p h_1 \, dx \\
&\leq \lambda \int_{\Omega \setminus \Omega_\eta} |x|^{-(a+1)p+c_1} f_1(\Psi_{2_\lambda}) h_1 \, dx.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Então, usando (2.27), (2.29) e (2.32), concluímos

$$\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla \Psi_{1_\lambda}|^{p-2} \nabla \Psi_{1_\lambda} \nabla h_1 \, dx \leq \lambda \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} f_1(\Psi_{2_\lambda}) h_1 \, dx$$

e da mesma forma

$$\int_\Omega |x|^{-bq}|\nabla\Psi_{2_\lambda}|^{q-2}\nabla\Psi_{2_\lambda}\nabla h_2\,dx \leq \lambda\int_\Omega |x|^{-(b+1)q+c_2} f_2(\Psi_{1_\lambda})h_2\,dx,$$

para quaisquer $h_1 \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ e $h_2 \in W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ com $h_1, h_2 \geq 0$ para q.t.p. em Ω e cada $\lambda \geq \lambda_0$, ou seja, $(\Psi_{1_\lambda}, \Psi_{2_\lambda}) \in C^0(\overline{\Omega}) \times C^0(\overline{\Omega})$ é uma subsolução fraca do sistema (2.1) para cada $\lambda \geq \lambda_0$ com $\lambda_0 > 0$ suficientemente grande.

Analogamente, mostramos que, para cada $\lambda \geq \lambda_0$, existe $c_1 \geq c_0(\lambda)$ suficientemente grande tal que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla\Psi_{1_\lambda}|^{p-2}\nabla\Psi_{1_\lambda}\nabla h_1\,dx &\leq \lambda\int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} f_1(z_{2c})h_1\,dx \\ &\leq \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla z_{1c}|^{p-2}\nabla z_{1c}\nabla h_1\,dx,\end{aligned}$$

para todo $c \geq c_1$. Logo, pelo princípio da comparação (teorema 6.6) segue que $\overline{\psi}_{1\lambda}(x) \leq z_{1c}(x)$ para todo $x \in \Omega$, para $c \geq c_1$. Igualmente, $\overline{\psi}_{2\lambda}(x) \leq z_{2c}(x)$ para todo $x \in \Omega$ e $c \geq c_1$. Assim, obtemos pelo teorema 2.8 uma solução fraca (u_0, v_0) do sistema (2.1) com $\psi_{1\lambda}(x) \leq u_0(x) \leq z_{1c}(x)$ e $\psi_{2\lambda}(x) \leq v_0(x) \leq z_{2c}(x)$, para q.t.p. $x \in \Omega$ e $c \geq c_1$. Em particular, $u_0, v_0 > 0$ para q.t.p. em Ω.

■

2.6 Prova do teorema 2.3

Primeiramente, provaremos que o sistema (2.1) possui uma supersolução positiva para cada $\lambda > 0$ fixado. Análogo ao início da prova do teorema 2.1, obtemos (e_1, e_2) uma solução fraca do sistema (2.1) com $h = k \equiv 1/\lambda$, $e_i \in C^{1,\alpha_i}(\Omega \setminus \{0\})$ e $e_i > 0$ em Ω para $\alpha_i > 0$ e $i = 1, 2$. Definimos

$$(z_{1_A}(x), z_{2_B}(x)) := (Ae_1(x), Be_2(x)),$$

onde A e B são constantes positivas que fixaremos depois.

Se $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ com $\varphi_1 \geq 0$ para q.t.p. em Ω, então

$$\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla z_{1_A}|^{p-2}\nabla z_{1_A}\nabla\varphi_1\,dx = A^{p-1}\int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1}\varphi_1\,dx. \tag{2.33}$$

Sendo h não decrescente nas variáveis s, t e contínua em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, temos

$$-k_0 \leq h(x, Ae_1(x), Be_2(x)) \leq h(x, A||e_1||_{L^\infty(\Omega)}, B||e_2||_{L^\infty(\Omega)}),$$

para algum $k_0 > 0$ e todo $x \in \Omega$. Usando esta desigualdade e a hipótese (H_2), obtemos $A_0 = A_0(\lambda) > 0$ tal que

$$\lambda h(x, z_{1_A}(x), z_{2_B}(x)) = \lambda h(x, Ae_1(x), Be_2(x)) \leq A^{p-1} \tag{2.34}$$

para cada $A \geq A_0$ e todo $(x, B) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Então, por (2.33) e (2.34), conseguimos

$$\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla z_{1_A}|^{p-2} \nabla z_{1_A} \nabla \varphi_1 \, dx \geq \lambda \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} h(x, z_{1_A}, z_{2_B}) \varphi_1 \, dx$$

para cada $A \geq A_0$ e todo $B \in \mathbb{R}$.

Similarmente, nós temos

$$\int_\Omega |x|^{-bq} |\nabla z_{2_B}|^{q-2} \nabla z_{2_B} \nabla \varphi_2 \, dx \geq \lambda \int_\Omega |x|^{-(b+1)q+c_2} k(x, z_{1_A}, z_{2_B}) \varphi_2 \, dx,$$

para toda $\varphi_2 \in W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ com $\varphi_2 \geq 0$ para q.t.p. em Ω, para cada $B \geq B_0 = B_0(\lambda) > 0$ e todo $A \in \mathbb{R}$. Portanto, (z_{1A}, z_{2B}) é uma supersolução fraca do sistema (2.1), onde cada componente é positiva, para cada $A \geq A_0$ e $B \geq B_0$.

A demonstração da existência de uma subsolução para o sistema (2.1) segue usando argumentos completamente similares ao que fizemos no teorema 2.2, denotaremos essa subsolução por $(\Psi_{1_\lambda}, \Psi_{2_\lambda}) \in C^0(\overline{\Omega}) \times C^0(\overline{\Omega})$ para cada $\lambda \geq \lambda_0$ com $\lambda_0 > 0$ suficientemene grande. Além disso, usando o princípio da comparação (teorema 6.6), temos que $\Psi_{1_\lambda} \leq z_{1_A}$ e $\Psi_{2_\lambda} \leq z_{2_B}$ em Ω para algum $A \geq A_0$ e $B \geq B_0$ suficientemente grande e cada $\lambda \geq \lambda_0$ fixado. Obtemos pelo teorema 2.8 de sub e supersolução que existe uma solução fraca do sistema (2.1), onde cada componente é positiva para q.t.p. em Ω. ■

2.7 Prova do teorema 2.4

Demonstraremos este resultado por contradição.

Consideremos λ_1 e λ_2 ser os autovalores provenientes do teorema 2.7 para $1 < p < N$,

$0 \leq a < (N-p)/p$, $c_1 > 0$ e $1 < q < N$, $0 \leq b < (N-q)/q$, $c_2 > 0$, respectivamente. Recordamos que eles são caracterizados por

$$\lambda_1 := \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla w|^p\,dx}{\int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1}|w|^p\,dx} : w \in W_0^{1p}(\Omega, |x|^{-ap}) \setminus \{0\} \right\} > 0,$$
$$\lambda_2 := \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |x|^{-bq}|\nabla w|^q\,dx}{\int_\Omega |x|^{-(b+1)q+c_2}|w|^q\,dx} : w \in W_0^{1q}(\Omega, |x|^{-bq}) \setminus \{0\} \right\} > 0.$$

Consideremos $\lambda_0 := \min\{\frac{\lambda_1}{k_1+k_3}, \frac{\lambda_2}{k_2+k_4}\}$. Supondo por absurdo que existe uma solução fraca não trivial (u,v) do sistema (2.1) com $0 < \lambda < \lambda_0$, então

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1}|u|^p\,dx &\leq \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p\,dx \\ &= \lambda \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} h(x,u,v)u\,dx \\ &\leq \lambda \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1} \left(k_1|u|^p + k_2|v|^q\right)\,dx \end{aligned} \tag{2.35}$$

e

$$\lambda_2 \int_\Omega |x|^{-(b+1)q+c_2}|v|^q\,dx \leq \lambda \int_\Omega |x|^{-(b+1)q+c_2} \left(k_3|u|^p + k_4|v|^q\right)\,dx. \tag{2.36}$$

Como $(a+1)p - c_1 = (b+1)q - c_2$, obtemos de (2.35) e (2.36) que

$$0 < [\lambda_1 - \lambda(k_1+k_3)] \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c_1}|u|^p + [\lambda_2 - \lambda(k_2+k_4)] \int_\Omega |x|^{-(b+1)q+c_2}|v|^q \leq 0,$$

o que é um absurdo.

■

2.8 Prova do corolário 2.1

Definimos

$$\mu_1 = p/(1+\alpha),\ \ \mu_2 = p/(p-1-\alpha),\ \ \theta_1 = q/(q-1-\beta)\ \text{ e }\ \theta_2 = q/(1+\beta).$$

Por hipótese $(p-1-\alpha)(q-1-\beta) - \gamma\delta = 0$ e $p\gamma = q(p-1-\alpha)$, então

$$\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} = \theta_1^{-1} + \theta_2^{-1} = 1,\ \ \mu_1(\alpha+1) = p,\ \ \mu_2\gamma = q,$$
$$\theta_1\delta = p,\ \ \theta_2(\beta+1) = q,\ \ \mu_1,\, \mu_2,\, \theta_1,\, \theta_2 > 1.$$

Daí, obtemos pela desigualdade de Young que

$$|s^{\alpha+1}t^{\gamma}| \leq \frac{|s|^p}{\mu_1} + \frac{|t|^q}{\mu_2} \text{ e } |s^{\delta}t^{\beta+1}| \leq \frac{|s|^p}{\theta_1} + \frac{|t|^q}{\theta_2}, \ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Conseqüentemente, aplicando o teorema 2.4, concluímos o corolário.

■

2.9 Exemplos e observações

Exemplo 2.1 *Consideremos*

$$f_1(x,s,t) = \begin{cases} c_1 t^{\delta} - k_1 & se\ t \geq 0, \\ -k_1 & se\ t < 0, \end{cases} \quad e \quad f_2(x,s,t) = \begin{cases} c_2 s^{\gamma} - k_2 & se\ s \geq 0, \\ -k_2 & se\ s < 0, \end{cases}$$

onde c_1, c_2, k_1, k_2 *são constantes positivas. Com essas não linearidades o sistema* (2.1) *é semipositônico e, se* $\delta, \gamma > 0$ *são tais que* $\delta\gamma < (p-1)(q-1)$, *podemos aplicar o teorema* 2.2.

Exemplo 2.2 *Sejam*

$$h(x,s,t) = \begin{cases} c_1^{\gamma} c(x) s^{\alpha} - k_1 & se & s \geq 0, t > c_1, \\ c(x) s^{\alpha} t^{\gamma} - k_1 & se & s \geq 0, t \in [0, c_1], \\ -k_1 & & caso\ contrário, \end{cases}$$

e

$$k(x,s,t) = \begin{cases} c_2^{\delta} d(x) t^{\beta} - k_2 & se & t \geq 0, s > c_2, \\ d(x) s^{\delta} t^{\beta} - k_2 & se & t \geq 0, s \in [0, c_2], \\ -k_2 & & caso\ contrário\ , \end{cases}$$

onde $c, d \in C(\bar{\Omega})$ *são funções positivas e* c_1, c_2, k_1, k_2 *são constantes positivas. Se* $0 \leq \gamma, \delta$, $0 < \alpha < p-1$ *e* $0 < \beta < q-1$, *então temos um exemplo no qual podemos aplicar o teorema* 2.3.

Exemplo 2.3 *Uma conseqüência do teorema* 2.4 *é que o sistema* (2.1) *com* $h(x,u,v) = \theta|u|^{\theta-2}|v|^{\delta}u$, $k(x,u,v) = \delta|u|^{\theta}|v|^{\delta-2}v$, $\theta, \delta > 1$, $\theta/p + \delta/q = 1$, *não possui nenhuma solução fraca, exceto a trivial, para todo* $\lambda > 0$ *suficientemente pequeno.*

Observação 2.3 *Nós podemos melhorar o teorema* 2.2 *trocando a monotonicidade global, assumida sobre as não linearidades, pela condição de monotonicidade no infinito; em outras palavras, existe* $M_0 > 0$ *tal que* $f_i(s)$ *é não decrescente para todo* $s \geq M_0$ *e* $i = 1, 2$*; e também requerendo* $(HK2)$.

Capítulo

3

Sistemas perturbados com expoentes subcríticos

3.1 Introdução

Nós usaremos o conhecido teorema do passo da montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz e também o princípio variacional de Ekeland para estabelecer condições de existência de soluções não triviais para o sistema com perturbação não linear

$$\begin{cases} -Lu_{ap} &= \lambda\theta|x|^{-\beta_1}u^{\theta-1}v^{\delta} + \mu\alpha|x|^{-\beta_2}u^{\alpha-1}v^{\gamma} & \text{em} & \Omega, \\ -Lv_{bq} &= \lambda\delta|x|^{-\beta_1}u^{\theta}v^{\delta-1} + \mu\gamma|x|^{-\beta_2}u^{\alpha}v^{\gamma-1} & \text{em} & \Omega, \\ u = v &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $Lw_{er} \equiv div(|x|^{-er}|\nabla w|^{r-2}\nabla w)$,

$$\Omega \ \text{ é um domínio suave e limitado de } \mathbb{R}^N \text{ com } 0 \in \Omega, \tag{H_Ω}$$

os parâmetros λ, μ são números reais positivos e os expoentes verificam

$$\begin{gathered} 1 < p, q < N,\ -\infty < a < (N-p)/p,\ -\infty < b < (N-q)/q, \\ a \le c_1 < a+1,\ b \le c_2 < b+1,\ d_1 = 1 + a - c_1,\ d_2 = 1 + b - c_2, \\ p^* = Np/(N - d_1 p),\ q^* = Nq/(N - d_2 q), \\ \alpha, \gamma, \theta, \delta > 1, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{$\mathbb{H}_{exp}$}$$

com uma das seguintes condições satisfeita

$$\tfrac{\theta}{p} + \tfrac{\delta}{q},\ \tfrac{\alpha}{p} + \tfrac{\gamma}{q} > 1 \text{ e } \tfrac{\theta}{p^*} + \tfrac{\delta}{q^*},\ \tfrac{\alpha}{p^*} + \tfrac{\gamma}{q^*} < 1; \tag{3.2}$$

$$\tfrac{\theta}{p} + \tfrac{\delta}{q} < 1 \text{ e } \tfrac{\alpha}{p} + \tfrac{\gamma}{q} < 1; \tag{3.3}$$

$$\tfrac{\theta}{p} + \tfrac{\delta}{q} = 1,\ \tfrac{\alpha}{p} + \tfrac{\gamma}{q} > 1 \text{ e } \tfrac{\alpha}{p^*} + \tfrac{\gamma}{q^*} < 1; \tag{3.4}$$

$$\tfrac{\theta}{p} + \tfrac{\delta}{q} = 1 \text{ e } \tfrac{\alpha}{p} + \tfrac{\gamma}{q} < 1; \tag{3.5}$$

$$\tfrac{\theta}{p} + \tfrac{\delta}{q} < 1,\ \tfrac{\alpha}{p} + \tfrac{\gamma}{q} > 1 \text{ e } \tfrac{\alpha}{p^*} + \tfrac{\gamma}{q^*} < 1. \tag{3.6}$$

No caso escalar, García e Peral em [37] mostraram que o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

não possui nenhuma solução fraca, exceto a trivial, para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Enquanto o problema subcrítico perturbado

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u + |u|^{q-2} u & \text{em} \quad \Omega, \\ u \geq 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma solução fraca não trivial para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno e $1 < q < m^*$ (veja também Ghoussoub e Yuan [41]). Aqui $m^* = Np/(N-p)$ denota o expoente crítico de Sobolev.

Isso motiva a seguinte questão: Será que perturbando as não linearidades apresentadas no exemplo 2.3 teremos uma solução fraca para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno? De fato, veremos que a resposta é sim.

Recentemente, Adriouch e Hamidi em [1] estudaram o sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p_1-2} u + (\alpha+1)|u|^{\alpha-1}|v|^{\beta+1} u \ \text{ em } \Omega, \\ -\Delta_q u = \lambda |v|^{q-2} v + (\beta+1)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta-1} v \quad \text{em } \Omega, \end{cases}$$

com condições de fronteira de Dirichlet ou mistas, supondo que os expoentes verificam a condição subcrítica $(\alpha+1)/p^* + (\beta+1)/q^* < 1$, $1 < p_1 < p$ e $1 < q < N$. Ainda no caso regular, ou seja, $\beta_1 = \beta_2 = a = b = 0$, para sistemas envolvendo operadores laplaciano ou $p-$laplaciano, citamos ao leitor os seguintes artigos [5, 29, 64] e o artigo de pesquisa e divulgação [35].

Os resultados que estudaremos neste capítulo são os seguintes.

Teorema 3.1 *Além de* (H_Ω) *e* $(\mathbb{H}_{exp})$, *assuma* $p_i \in (1, p^*)$, $q_i \in (1, q^*)$, $i = 1, 2$, *com* $\theta/p_1 + \delta/q_1 = \alpha/p_2 + \gamma/q_2 = 1$ *e*

$$\beta_i < \min\left\{(a+1)p_i + N\left(1 - \tfrac{p_i}{p}\right), (b+1)q_i + N\left(1 - \tfrac{q_i}{q}\right)\right\}, \; i = 1, 2. \tag{3.7}$$

i) *Então o sistema* (3.1) *possui uma solução fraca, onde cada componente é não trivial e não negativa, para cada* λ *não negativo e* μ *positivo, desde que uma das condições abaixo seja satisfeita:*

$$\textit{vale } (3.2),\ p_i \in (p, p^*) \textit{ e } q_i \in (q, q^*) \tag{$\mathbb{H}_{3.2}$}$$

ou

$$\textit{vale } (3.3),\ p_i \in (1, p) \textit{ e } q_i \in (1, q). \tag{$\mathbb{H}_{3.3}$}$$

ii) *Então existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que o sistema* (3.1) *possui uma solução fraca, onde cada componente é não trivial e não negativa, para cada* $0 \leq \lambda < \lambda_0$ *e* μ *positivo, desde que uma das condições abaixo seja satisfeita:*

$$\textit{vale } (3.4),\ p_1 = p, q_1 = q, p_2 \in (p, p^*) \textit{ e } q_2 \in (q, q^*) \tag{$\mathbb{H}_{3.4}$}$$

ou

$$\textit{vale } (3.5),\ p_1 = p, q_1 = q, p_2 \in (1, p) \textit{ e } q_2 \in (1, q). \tag{$\mathbb{H}_{3.5}$}$$

Teorema 3.2 *Além de* (H_Ω) *e* $(\mathbb{H}_{exp})$, *assuma que*

$$\textit{vale } (3.6),\ p_1 \in (1, p),\ q_1 \in (1, q),\ p_2 \in (p, p^*) \textit{ e } q_2 \in (q, q^*) \tag{$\mathbb{H}_{3.6}$}$$

com $\theta/p_1 + \delta/q_1 = \alpha/p_2 + \gamma/q_2 = 1$ *e* $\beta_i, i = 1, 2$, *como em* (3.7). *Suponha que* $\max\{p, q\} < \min\{p_2, q_2\}$. *Então, para cada* μ *positivo, existe* $\lambda_0 = \lambda_0(\mu)$ *positivo tal que o sistema* (3.1) *possui pelo menos duas soluções fracas, onde cada componente é não trivial e não negativa, para cada* $0 < \lambda < \lambda_0$.

3.2 Resultados preliminares

Nossa abordagem será variacional, ou seja, nós encontraremos os pontos críticos do funcional de Euler-Lagrange

$$I : W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dado por

$$\begin{aligned} I(u,v) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-bq}|\nabla v|^q dx \\ &\quad -\lambda \int_\Omega |x|^{-\beta_1} u_+^\theta v_+^\delta \, dx - \mu \int_\Omega |x|^{-\beta_2} u_+^\alpha v_+^\gamma \, dx, \end{aligned}$$

o qual está bem definido, desde que existam $p_i \in (1, p^*)$ e $q_i \in (1, q^*)$, $i = 1, 2$, satisfazendo $\theta/p_1 + \delta/q_1 = \alpha/p_2 + \gamma/q_2 = 1$ e β_i, $i = 1, 2$, como em (3.7). Além disso, I é de classe C^1 com derivada de Gâteaux dada por

$$\begin{aligned} \left\langle I'(u,v), (w,z) \right\rangle &= \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w \, dx + \int_\Omega |x|^{-bq}|\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla z \, dx \\ &\quad -\lambda \int_\Omega |x|^{-\beta_1}(\theta u_+^{\theta-1} v_+^\delta w + \delta u_+^\theta v_+^{\delta-1} z) \, dx \\ &\quad -\mu \int_\Omega |x|^{-\beta_2}(\alpha u_+^{\alpha-1} v_+^\gamma w + \gamma u_+^\alpha v^{\gamma-1} z) \, dx. \end{aligned}$$

Definição 3.1 *Dizemos que $\{(u_n, v_n)\} \subset W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ é uma seqüência de Palais Smale para o operador I no nível c (ou simplesmente, seqüência–$(PS)_c$) se*

$$I(u_n, v_n) \to c \ \text{ e } \ I'(u_n, v_n) \to 0, \ \text{ quando } n \to \infty.$$

Quando toda seqüência de Palais Smale para o operador I no nível c for pré-compacta (isto é, possui subseqüência fortemente convergente), para todo real c, nós diremos que o operador I satisfaz a condição de Palais Smale.

Lema 3.1 (Condição $(S)_+$) *Suponha Ω um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$ e $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ uma seqüência satisfazendo*

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \ \text{ quando } n \to \infty, \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u) dx \le 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

então $\{u_n\}$ *é pré-compacta em* $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$.

Demonstração. Primeiramente, observemos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u)\,dx \\
&\quad = \int_\Omega |x|^{-ap}\left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla(u_n - u)\,dx \\
&\quad\quad + \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n - u)\,dx.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Desde que o operador $\varphi_u : W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi_u(v) = \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\,dx,$$

é linear e, pela desigualdade de Hölder, contínuo, obtemos de (3.8) que $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ quando $n \to \infty$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n - u)\,dx = 0. \tag{3.10}$$

Agora, estudaremos a primeira parcela da soma em (3.9) em dois casos.

Caso 1. Seja $p \geq 2$. Conseguimos pelo lema 6.2 que

$$\int_\Omega |x|^{-ap}\left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla(u_n - u)\,dx \geq K||u_n - u||^p. \tag{3.11}$$

Conseqüentemente, tomando o limite superior em (3.9) e combinando (3.8), (3.10) e (3.11), obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} ||u_n - u||^p \leq 0.$$

Portanto, concluímos que u_n converge forte para u em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$.

Caso 2. Se $1 < p < 2$, pelo lema 6.2, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |x|^{-ap}\left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla\left(u_n - u\right)\,dx \\
&\quad \geq \frac{K\displaystyle\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n - \nabla u|^2\,dx}{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-ap}\left(|\nabla u_n| + |\nabla u|\right)^{2-p}\,dx}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Em virtude da convergência fraca existe $M > 0$ tal que $||u_n|| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, usando a desigualdade de Hölder, conseguimos

$$\begin{aligned} ||u_n - u||^p &\leq \left(\int_\Omega |x|^{-ap} dx\right)^{\frac{2-p}{2}} \left(\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq \overline{C} \left(\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}} \end{aligned} \tag{3.13}$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega |x|^{-ap} \left(|\nabla u_n| + |\nabla u|\right)^{2-p} dx &\leq \left(\int_\Omega |x|^{-ap} dx\right)^{\frac{2p-2}{p}} \left[2^{p-1}\left(||u_n||^p + ||u||^p\right)\right]^{\frac{2-p}{p}} \\ &\leq \underline{C} \left(M^p + ||u||^p\right)^{\frac{2-p}{p}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Portanto, usando as desigualdades (3.12), (3.13), (3.14) e o lema 6.2, concluímos que

$$\int_\Omega |x|^{-ap} \left(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) \nabla (u_n - u)\, dx \geq \frac{\tilde{K} ||u_n - u||^2}{\left(M^p + ||u||^p\right)^{\frac{2-p}{p}}}. \tag{3.15}$$

Então, tomando o limite superior em (3.15), segue como no primeiro caso que u_n converge forte para u em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$.

$\blacksquare$

Lema 3.2 *Considere* (H_Ω), $(\mathbb{H}_{exp})$, $\beta_i, i = 1, 2$, *como em* (3.7) *e* $\{(u_n, v_n)\}$ *uma seqüência*$-(PS)_c$ *em* $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$.

i) *Suponha que uma das condições:* $(\mathbb{H}_{3.2})$, *ou* $(\mathbb{H}_{3.3})$, *ou* $(\mathbb{H}_{3.6})$, *é satisfeita. Então* $\{(u_n, v_n)\}$ *é limitada em* $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ *para cada* λ *e* μ *não negativos.*

ii) *Suponha que uma das condições:* $(\mathbb{H}_{3.4})$ *ou* $(\mathbb{H}_{3.5})$, *é satisfeita. Então existe* λ_0 *positivo tal que* $\{(u_n, v_n)\}$ *é limitada em* $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ *para cada* $0 \leq \lambda < \lambda_0$ *e* μ *não negativo.*

Além disso, nos casos $(\mathbb{H}_{3.2})$, $(\mathbb{H}_{3.4})$ *e* $(\mathbb{H}_{3.6})$ *a limitação é independente de* μ.

Demonstração. Sejam $\theta_1 \in (1, p^*], \theta_2 \in (1, q^*]$ constantes que fixaremos depois. Como $\{(u_n, v_n)\}$ é uma seqüência$-(PS)_c$, nós obtemos

$$
\begin{aligned}
c + ||(u_n, v_n)|| + O_n(1) \;&\geq\; I(u_n, v_n) - \langle I'(u_n, v_n), (u_n/\theta_1, v_n/\theta_2)\rangle \\
&\geq\; (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1})||u_n||^p + (\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2})||v_n||^q \\
&\quad + \lambda(\tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} - 1)\int_\Omega |x|^{-\beta_1} u_{n_+}^\theta v_{n_+}^\delta dx \\
&\quad + \mu(\tfrac{\alpha}{\theta_1} + \tfrac{\gamma}{\theta_2} - 1)\int_\Omega |x|^{-\beta_2} u_{n_+}^\alpha v_{n_+}^\gamma dx,
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

onde $O_n(1) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Supondo $(\mathbb{H}_{3.2})$, nós fixamos $\theta_1 = \min\{p_1, p_2\}$ e $\theta_2 = \min\{q_1, q_2\}$, donde segue

$$\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1} > 0,\ \tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2} > 0,\ \tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} \geq 1 \ \text{ e } \ \tfrac{\alpha}{\theta_1} + \tfrac{\gamma}{\theta_2} \geq 1.$$

Então, por (3.16), obtemos

$$c + ||(u_n, v_n)|| + O_n(1) \geq (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1})||u_n||^p + (\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2})||v_n||^q. \tag{3.17}$$

Daí, supondo por contradição que a seqüência $\{(u_n, v_n)\}$ não é limitada no espaço $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ e observando que o lado direito da equação (3.17) cresce mais rápido que o lado esquerdo, obtemos a desigualdade contrária em (3.17) para algum n suficientemente grande, o que é um absurdo. Então concluímos que $\{(u_n, v_n)\}$ é uma seqüência limitada para cada λ não negativo e independentemente de μ não negativo.

Assuma que $(\mathbb{H}_{3.4})$ é satisfeita, então, tomando $\theta_1 = p_2$ e $\theta_2 = q_2$ em (3.16), conseguimos

$$\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1} > 0,\ \tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2} > 0,\ \tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} < 1,\ \tfrac{\alpha}{\theta_1} + \tfrac{\gamma}{\theta_2} = 1$$

e

$$
\begin{aligned}
c + ||(u_n, v_n)|| + O_n(1) \;&\geq\; (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1})||u_n||^p + (\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2})||v_n||^q \\
&\quad + \lambda(\tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} - 1)\int_\Omega |x|^{-\beta_1} u_{n_+}^\theta v_{n_+}^\delta dx \\
&\geq\; \left[(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1}) + \lambda(\tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} - 1)\tfrac{\theta C}{p}\right] ||u_n||^p \\
&\quad + \left[(\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2}) + \lambda(\tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} - 1)\tfrac{\delta C}{q}\right] ||v_n||^q.
\end{aligned}
$$

Então escolhendo λ_0 positivo tal que para todo $0 \leq \lambda < \lambda_0$ vale

$$\min\left\{(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1}) + \lambda(\tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} - 1)\tfrac{\theta C}{p}, (\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2}) + \lambda(\tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} - 1)\tfrac{\delta C}{q}\right\} > 0,$$

obtemos que $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ para $0 \leq \lambda < \lambda_0$ e independentemente de μ não negativo.

Consideremos $(\mathbb{H}_{3.5})$, $\theta_1 = p^*$ e $\theta_2 = q^*$, então

$$\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1} > 0,\ \tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2} > 0,\ \tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} < 1,\ \tfrac{\alpha}{\theta_1} + \tfrac{\gamma}{\theta_2} < 1$$

e

$$\begin{aligned} c + ||(u_n, v_n)|| + O_n(1) \ &\geq \ \left[(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1}) + (\tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} - 1)\tfrac{\lambda\theta C}{p}\right] ||u_n||^p \\ &+ \left[(\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2}) + (\tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} - 1)\tfrac{\lambda\delta C}{q}\right] ||v_n||^q \\ &+ \mu(\tfrac{\alpha}{\theta_1} + \tfrac{\gamma}{\theta_2} - 1)(\tfrac{\alpha C^{p_2/p}}{p_2}||u_n||^{p_2} + \tfrac{\gamma C^{q_2/q}}{q_2}||v_n||^{q_2}). \end{aligned}$$

Novamente, escolhemos $\lambda_0 > 0$ de modo que

$$\min\left\{(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1}) + \lambda(\tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} - 1)\tfrac{\theta C}{p}, (\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2}) + \lambda(\tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} - 1)\tfrac{\delta C}{q}\right\} > 0$$

para todo $0 \leq \lambda < \lambda_0$. Então, observando que $1 < p_2 < p$ e $1 < q_2 < q$, nós obtemos que $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ para todo $0 \leq \lambda < \lambda_0$ e todo μ não negativo.

Assuma que $(\mathbb{H}_{3.3})$ é satisfeita e fixe $\theta_1 = p^*$ e $\theta_2 = q^*$ em (3.16). Então temos

$$\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1} > 0,\ \tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2} > 0,\ \tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} < 1,\ \tfrac{\alpha}{\theta_1} + \tfrac{\gamma}{\theta_2} < 1$$

e

$$\begin{aligned} c + ||(u_n, v_n)|| + O_n(1) \ &\geq \ (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1})||u_n||^p + (\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2})||v_n||^q \\ &+ \lambda(\tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} - 1)(\tfrac{\theta C^{p_1/p}}{p_1}||u_n||^{p_1} + \tfrac{\delta C^{q_1/q}}{q_1}||v_n||^{q_1}) \\ &+ \mu(\tfrac{\alpha}{\theta_1} + \tfrac{\gamma}{\theta_2} - 1)(\tfrac{\alpha C^{p_2/p}}{p_2}||u_n||^{p_2} + \tfrac{\gamma C^{q_2/q}}{q_2}||v_n||^{q_2}). \end{aligned}$$

Portanto, como $p_i \in (1, p)$ e $q_i \in (1, q), i = 1, 2$, segue que $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ para todos λ e μ não negativos.

Por último, se vale $(\mathbb{H}_{3.6})$, nós fixamos $\theta_1 = p_2$ e $\theta_2 = q_2$ em (3.16), logo

$$\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1} > 0,\ \tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2} > 0,\ \tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} < 1,\ \tfrac{\alpha}{\theta_1} + \tfrac{\gamma}{\theta_2} = 1$$

e

$$\begin{aligned} c + ||(u_n, v_n)|| + O_n(1) \ &\geq \ (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\theta_1})||u_n||^p + (\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{\theta_2})||v_n||^q \\ &\quad + \lambda(\tfrac{\theta}{\theta_1} + \tfrac{\delta}{\theta_2} - 1)(\tfrac{\theta C^{p_1/p}}{p_1}||u_n||^{p_1} + \tfrac{\delta C^{q_1/q}}{q_1}||v_n||^{q_1}). \end{aligned}$$

Então, como $1 < p_1 < p$ e $1 < q_1 < q$, obtemos que $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ para λ não negativo e independentemente de μ não negativo.

■

Teorema 3.3 *Considere* (H_Ω), $(\mathbb{H}_{exp})$ *e* $\beta_i, i = 1, 2,$ *como em* (3.7).

i) *Suponha que uma das condições:* $(\mathbb{H}_{3.2})$, *ou* $(\mathbb{H}_{3.3})$, *ou* $(\mathbb{H}_{3.6})$, *é satisfeita. Então o operador* I *satisfaz a condição de Palais Smale para todo* λ *positivo e todo* μ *não negativo.*

ii) *Suponha que uma das condições:* $(\mathbb{H}_{3.4})$ *ou* $(\mathbb{H}_{3.5})$, *é satisfeita. Então existe* λ_0 *positivo tal que o operador* I *satisfaz a condição de Palais Smale para todo* $0 \leq \lambda < \lambda_0$ *e todo* μ *não negativo.*

Demonstração. Consideremos $\{(u_n, v_n)\}$ em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ uma $(PS)_c-$seqüência. Se vale uma das condições: $(\mathbb{H}_{3.2})$, ou $(\mathbb{H}_{3.3})$, ou $(\mathbb{H}_{3.6})$, então segue do lema 3.2 que $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ para todos λ e μ não negativos. Porém, para os casos $(\mathbb{H}_{3.4})$ e $(\mathbb{H}_{3.5})$, o lema 3.2 implica que existe λ_0 positivo tal que $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ para todo $0 \leq \lambda < \lambda_0$ e todo μ não negativo.

Assim, temos uma subseqüência de $\{(u_n, v_n)\}$, que denotaremos por $\{(u_n, v_n)\}$, e (u, v) pertencente a $W_0^{1,p}(\Omega, \|x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ tais que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega, \|x|^{-ap})$ e $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $W_0^{1,q}(\Omega, \|x|^{-bq})$, quando $n \to \infty$. Então o teorema 6.4 da imersão compacta implica que

$$u_n \longrightarrow u \text{ fortemente em } L^{p_1}(\Omega, |x|^{-\beta_1}) \cap L^{p_2}(\Omega, |x|^{-\beta_2}) \text{ quando } n \to \infty$$

e

$$v_n \longrightarrow v \text{ fortemente em } L^{q_1}(\Omega, |x|^{-\beta_1}) \cap L^{q_2}(\Omega, |x|^{-\beta_2}) \text{ quando } n \to \infty.$$

Em particular, $u_n(x) \to u(x)$ e $v_n(x) \to v(x)$, quando $n \to \infty$, para q.t.p. $x \in \Omega$. Também observamos que $u_{n_+}(x) \to u_+(x)$ e $v_{n_+}(x) \to v_+(x)$, quando $n \to \infty$, para q.t.p. $x \in \Omega$. Além disso, existem $f \in L^{p_1}(\Omega, |x|^{-\beta_1})$ e $g \in L^{q_1}(\Omega, |x|^{-\beta_1})$ tais que $|u_n|(x) \le f(x)$ e $|v_n|(x) \le g(x)$, para q.t.p. $x \in \Omega$. Conseqüentemente

$$[u_{n_+}^{\theta-1} v_{n_+}^{\delta}(u_n - u)](x) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty, \text{ para q.t.p. } x \in \Omega,$$

e

$$\begin{aligned} |u_{n_+}^{\theta-1} v_{n_+}^{\delta}(u_n - u)| &\le |u_{n_+}^{\theta} v_{n_+}^{\delta}| + |u_{n_+}^{\theta-1} v_{n_+}^{\delta} u| \\ &\le f^{\theta} g^{\delta} + f^{\theta-1} g^{\delta} u \in L^1(\Omega, |x|^{-\beta_1}). \end{aligned}$$

Daí, aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-\beta_1} u_{n_+}^{\theta-1} v_{n_+}^{\delta}(u_n - u)\, dx = 0. \tag{3.18}$$

e similarmente

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-\beta_2} u_{n_+}^{\alpha-1} v_{n_+}^{\gamma}(u_n - u)\, dx = 0. \tag{3.19}$$

Agora, tomando o limite superior na equação

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla(u_n - u)\, dx \\ &= \langle I'(u_n, v_n), (u_n - u, 0)\rangle + \int_\Omega [\lambda\theta |x|^{-\beta_1} u_{n_+}^{\theta-1} v_{n_+}^{\delta} + \mu\alpha |x|^{-\beta_2} u_{n_+}^{\alpha-1} v_{n_+}^{\gamma}](u_n - u)\, dx, \end{aligned}$$

usando os limites em (3.18), (3.19) e a definição de seqüência$-(PS)_c$, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla(u_n - u)\, dx = 0.$$

Conseqüentemente, pelo lema 3.1 (Condição $(S)_+$), temos que u_n é pré-compacta. Analogamente, $\{v_n\}$ é pré-compacta.

■

Teorema 3.4 *Além de* (H_Ω), $(\mathbb{H}_{exp})$, $(\mathbb{H}_{3.2})$-$(\mathbb{H}_{3.6})$ *e* $\beta_i, i = 1, 2$ *como em* (3.7), *assuma que* $(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ *é um ponto crítico do operador* I. *Então* (u_+, v_+) *é um ponto crítico do operador* I.

Demonstração. Como (u, v) é um ponto crítico do operador I, temos

$$0 = \left\langle I^{'}(u, v), (u_-, 0) \right\rangle = \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_- \, dx = -||u_-||^p$$

e também

$$||v_-||^q = 0.$$

Conseqüentemente, para cada $(w, z) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$, nós obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle I^{'}(u_+, v_+), (w, z) \right\rangle &= \left\langle I^{'}(u, v), (w, z) \right\rangle + \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u|^{p-2} \nabla u_- \nabla w \, dx \\ &\quad + \int_\Omega |x|^{-bq} |\nabla v|^{q-2} \nabla v_- \nabla z \, dx \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.20}$$

e similarmente

$$\begin{aligned} I(u_+, v_+) &= I(u, v) + \tfrac{1}{p} ||u_-||^p + \tfrac{1}{q} ||v_-||^q \\ &= I(u, v), \end{aligned}$$

ou seja, (u_+, v_+) é um ponto crítico de I. ■

A prova do próximo lema é baseada na demonstração de um resultado provado pela Mizoguchi [56, teorema 1], e é essencialmente uma versão local do conhecido princípio variacional de Ekeland.

Lema 3.3 (Mizoguchi) *Seja X um espaço de Banach real munido com a norma $||\cdot||_X$ e $\mathcal{C} \subset X$ um subconjunto fechado com interior não vazio ($\mathcal{C}^\circ \neq \emptyset$). Suponha $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ inferiormente limitado em $\mathcal{C}$ e*

$$F(w_X) < \inf_{\partial \mathcal{C}} F \text{ para algum } w_X \in \mathcal{C}^\circ.$$

Então existe uma seqüência $\{x_n\} \subset \mathcal{C}^\circ$ tal que

$$F(x_n) \to \inf_{\mathcal{C}} F \text{ e } F^{'}(x_n) \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Demonstração. Seja $\xi > 0$ tal que

$$0 < \xi < \inf_{\partial \mathcal{C}} F - \inf_{\mathcal{C}^\circ} F. \tag{3.21}$$

Pela definição de ínfimo, temos $w_0 \in \mathcal{C}$ de modo que

$$F(w_0) \leq \inf_{\mathcal{C}} F + \xi. \tag{3.22}$$

Então, aplicando o príncipio variacional de Ekeland (teorema 6.3) para o operador $F\,|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, obtemos $w_\xi \in \mathcal{C}$ tal que

$$F(w_\xi) \leq F(w_0) \tag{3.23}$$

e

$$F(w_\xi) < F(x) + ||x - w_\xi||_X, \, \forall\, x \in \mathcal{C} \setminus \{w_\xi\}. \tag{3.24}$$

Em particular, por (3.21), (3.22) e (3.23), conseguimos

$$F(w_\xi) \leq \inf_{\mathcal{C}} F + \xi \leq \inf_{\mathcal{C}^\circ} F + \xi < \inf_{\partial\mathcal{C}} F,$$

portanto $w_\xi \in \mathcal{C}^\circ$.

Definindo o operador $T : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ dado por

$$T(x) = F(x) + \xi ||x - w_\xi||_X,$$

nós obtemos de (3.24) que w_ξ é um mínimo local estrito de T e, portanto,

$$\frac{F(w_\xi + \eta x) - F(w_\xi)}{\eta} + \xi ||x||_X = \frac{T(w_\xi + \eta x) - T(w_\xi)}{\eta} \geq 0$$

para todo x na esfera unitária de X e η pequeno.

Logo, passando o limite em $\eta \to 0$, conseguimos

$$\langle F^{'}(w_\xi), x\rangle + \xi ||x||_X \geq 0,$$

portanto

$$||F^{'}(w_\xi)||_{X^*} \leq \xi.$$

■

3.3 Prova do teorema 3.1

Nós estudaremos os casos $(\mathbb{H}_{3.2})$ e $(\mathbb{H}_{3.4})$ usando o teorema do passo da montanha (teorema 6.1) e os casos $(\mathbb{H}_{3.5})$ e $(\mathbb{H}_{3.3})$ usando o princípio variacional de Ekeland (Corolário 6.1).

Primeiramente, mostraremos que nos casos $(\mathbb{H}_{3.2})$ e $(\mathbb{H}_{3.4})$ as condições geométricas do teorema do passo da montanha e a condição de Palais Smale são satisfeitas.

Assumindo $(\mathbb{H}_{3.2})$ satisfeita, nós tomamos $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ com $u_{0_+}.v_{0_+} \not\equiv 0$. Então, para cada λ não negativo e μ positivo, obtemos

$$I(t^{\frac{1}{p}}u_0, t^{\frac{1}{q}}v_0) \leq \left(\tfrac{1}{p}||u_0||^p + \tfrac{1}{q}||v_0||^q\right) t - \mu t^{\frac{\alpha}{p}+\frac{\gamma}{q}} \int_\Omega |x|^{-\beta_2} u_{0_+}^\alpha v_{0_+}^\gamma \, dx,$$

então

$$I(t^{\frac{1}{p}}u_0, t^{\frac{1}{q}}v_0) \to -\infty \text{ quando } t \to \infty. \tag{3.25}$$

Observemos que

$$s^{\theta_1} \leq s^{\theta_2}, \; \forall s \in [0,1], \text{ se } \theta_1 \geq \theta_2. \tag{3.26}$$

Por hipótese, temos $p_i \in (p, p^*)$ e $q_i \in (q, q^*)$, $i = 1, 2$, tais que $\theta/p_1 + \delta/q_1 = \alpha/p_2 + \gamma/q_2 = 1$. Assim, para $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ com $||(u,v)|| \leq 1$, usando as desigualdades (3.26), Young e Caffarelli-Kohn-Nirenberg, conseguimos

$$\begin{aligned}
I(u,v) \quad &\geq \quad (\tfrac{1}{p}||u||^p - \lambda\frac{\theta C^{p_1/p}}{p_1}||u||^{p_1} - \mu\frac{\alpha C^{p_2/p}}{p_2}||u||^{p_2}) \\
&\quad\quad +(\tfrac{1}{q}||v||^q - \lambda\frac{\delta C^{q_1/q}}{q_1}||v||^{q_1} - \mu\frac{\gamma C^{q_2/q}}{q_2}||v||^{q_2}) \\
&\overset{(3.26)}{\geq} \quad \tfrac{1}{p}||u||^p - (\lambda\frac{\theta C^{p_1/p}}{p_1} + \mu\frac{\alpha C^{p_2/p}}{p_2})||u||^{\min\{p_1,p_2\}} \\
&\quad\quad +\tfrac{1}{q}||v||^q - (\lambda\frac{\delta C^{q_1/q}}{q_1} + \mu\frac{\gamma C^{q_2/q}}{q_2})||v||^{\min\{q_1,q_2\}},
\end{aligned}$$

e como $p < \min\{p_1, p_2\}$ e $q < \min\{q_1, q_2\}$ existem $\rho, \rho \in (0,1)$ tais que

$$I(u,v) \geq \sigma \text{ se } ||(u,v)|| = \rho. \tag{3.27}$$

Assim, temos por (3.25) e (3.27) as condições geométricas do teorema do passo da montanha para este caso e pelo teorema 3.3 a condição de Palais Smale para cada λ não negativo e μ positivo.

Agora, consideremos o caso $(\mathbb{H}_{3.4})$. Procedendo igual ao caso $(\mathbb{H}_{3.2})$, temos

$$I(t^{\frac{1}{p}}u_0, t^{\frac{1}{q}}v_0) \to -\infty \text{ quando } t \to \infty \tag{3.28}$$

para todo λ não negativo e todo μ positivo.

Neste caso, temos $p_1 = p$, $q_1 = q$, $p_2 \in (p, p^*)$ e $q_2 \in (q, q^*)$ satisfazendo $\theta/p_1 + \delta/q_1 = \alpha/p_2 + \gamma/q_2 = 1$. Então, para $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$, usando as desigualdades de Young e Caffarelli-Kohn-Nirenberg, encontramos

$$I(u,v) \geq (\tfrac{1}{p} - \lambda\tfrac{\theta C}{p})||u||^p - \mu\tfrac{\alpha C^{p_2/p}}{p_2}||u||^{p_2} + (\tfrac{1}{q} - \lambda\tfrac{\delta C}{q})||v||^q - \mu\tfrac{\gamma C^{q_2/q}}{q_2}||v||^{q_2}.$$

Escolhemos λ_0 positivo de modo que

$$\min\{1 - \lambda\theta C, 1 - \lambda\delta C\} > 0 \tag{3.29}$$

para todo $0 \leq \lambda < \lambda_0$. Então, para cada $0 \leq \lambda < \lambda_0$ e μ positivo, obtemos $\rho, \sigma \in (0,1)$ satisfazendo

$$I(u,v) \geq \sigma \text{ se } ||(u,v)|| = \rho. \tag{3.30}$$

Conseqüentemente, por (3.28) e (3.30), temos as condições geométrias do teorema do passo da montanha para este caso. Além disso, trocando $\lambda_0 > 0$ por outro menor, se necessário, conseguimos pelo teorema 3.3 a condição de Palais Smale para cada $0 \leq \lambda < \lambda_0$ e μ positivo.

Em ambos os casos, o teorema do passo da montanha (teorema 6.1) implica que o operador I possui um ponto crítico $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ tal que

$$I(u,v) = c := \inf_{h\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(h(t)) \geq \sigma > 0,$$

onde

$$\Gamma = \{h \in C([0,1], W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})) : h(0) = 0, h(1) = e\},$$

com $I(e) \equiv I(t_0u_0, t_0v_0) < 0$, para algum $t_0 > 0$ suficientemente grande, e o teorema 3.4

implica que podemos supor $u, v \geq 0$ em Ω. Supondo por absurdo que $u \equiv 0$ para q.t.p. em Ω, então

$$0 = \langle I'(u,v), (u,0)\rangle = ||u||^p \text{ e } 0 = \langle I'(u,v), (0,v)\rangle = ||v||^q,$$

portanto

$$0 < c = I(u,v) = 0,$$

o que é absurdo, e portanto $u \not\equiv 0$. Similarmente, $v \not\equiv 0$.

Em particular, (u,v) é uma solução fraca do sistema (3.1), onde cada componente é não negativa e não trivial, o que conclui a prova do caso $(\mathbb{H}_{3.2})$ em **i)** e o caso $(\mathbb{H}_{3.4})$ em **ii)**.

Agora, mostraremos que nos casos $(\mathbb{H}_{3.3})$ e $(\mathbb{H}_{3.5})$ as hipóteses do princípio variacional de Ekeland e a condição de Palais Smale são satisfeitas.

Suponhamos que $(\mathbb{H}_{3.3})$ vale. Então $\alpha/p + \gamma/q < 1$ e, portanto, se (u_0, v_0) é como nos casos acima, conseguimos $t_0 \in (0,1)$ satisfazendo

$$I(t^{\frac{1}{p}}u_0, t^{\frac{1}{q}}v_0) \leq (\tfrac{1}{p}||u_0||^p + \tfrac{1}{q}||v_0||^q)t_0 - \mu t_0{}^{\frac{\alpha}{p}+\frac{\gamma}{q}} \int_\Omega |x|^{-\beta_2} u_{0_+}^{\alpha} v_{0_+}^{\gamma}\, dx < 0$$

para todo λ não negativo e todo μ positivo. Logo, segue que

$$M := \inf\left\{I(u,v) : (u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})\right\} < 0.$$

Por outro lado, temos $p_i \in (1,p)$ e $q_i \in (1,q), i = 1,2$, satisfazendo $\theta/p_1 + \delta/q_1 = \alpha/p_2 + \gamma/q_2 = 1$, então

$$\begin{aligned} I(u,v) \;\; &\geq \;\; (\tfrac{1}{p}||u||^p - \lambda\tfrac{\theta C^{p_1/p}}{p_1}||u||^{p_1} - \mu\tfrac{\alpha C^{p_2/p}}{p_2}||u||^{p_2}) \\ &\quad +(\tfrac{1}{q}||v||^q - \lambda\tfrac{\delta C^{q_1/q}}{q_1}||v||^{q_1} - \mu\tfrac{\gamma C^{q_2/q}}{q_2}||v||^{q_2}) \end{aligned}$$

para todo $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$. Conseqüentemente, nós obtemos

$$I(u,v) \to \infty \text{ quando } ||(u,v)|| \to \infty$$

para todo $0 \leq \lambda < \lambda_0$ e todo μ positivo.

Portanto, concluímos que I é inferiormente limitado e $-\infty < M < 0$ para todo $0 \leq \lambda < \lambda_0$ e todo μ positivo. Além disso, nós temos pelo teorema 3.3 a condição de Palais Smale para cada λ não negativo e μ positivo.

Consideremos $(\mathbb{H}_{3.5})$ satisfeita. Analogamente ao caso anterior, nós temos

$$M := \inf \left\{ I(u,v) : (u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq}) \right\} < 0$$

para cada λ não negativo e μ positivo. Também, temos $p_1 = p$, $q_1 = q$, $p_2 \in (1,p)$ e $q_2 \in (1,q)$ satisfazendo $\theta/p_1 + \delta/q_1 = \alpha/p_2 + \gamma/q_2 = 1$, donde segue a desigualdade

$$I(u,v) \geq (\tfrac{1}{p} - \lambda \tfrac{\theta C}{p})||u||^p - \mu \tfrac{\alpha C^{p_2/p}}{p_2}||u||^{p_2} + (\tfrac{1}{q} - \lambda \tfrac{\delta C}{q})||v||^q - \mu \tfrac{\gamma C^{q_2/q}}{q_2}||v||^{q_2},$$

portanto, tomando λ_0 positivo como em (3.29), segue que

$$I(u,v) \to \infty \text{ quando } ||(u,v)|| \to \infty.$$

Então, I é inferiormente limitado e $-\infty < M < 0$ para cada λ não negativo e μ positivo. Trocando λ_0 por outro menor, se necessário, nós temos pelo teorema 3.3 a condição de Palais Smale para cada $0 \leq \lambda < \lambda_0$ e μ positivo.

Em ambos os casos $(\mathbb{H}_{3.3})$ e $(\mathbb{H}_{3.5})$, segue do princípio variacional de Ekeland (corolário 6.1) que existe uma seqüência $\{(u_n, v_n)\} \subset W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ tal que

$$I(u_n, v_n) \to M \text{ e } I^{'}(u_n, v_n) \to 0, \text{ quando } \to \infty.$$

Então, como o operador I satisfaz a condição de Palais Smale, temos que existe uma subseqüência de $\{(u_n, v_n)\}$, que denotaremos por $\{(u_n, v_n)\}$, e $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ tais que $u_n \to u$ fortemente em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ e $v_n \to v$ fortemente em $W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$, quando $n \to \infty$. Logo, concluímos que

$$I(u,v) = M < 0 \text{ e } I^{'}(u,v) \equiv 0,$$

ou seja, (u,v) é um ponto crítico do operador I. Devido ao teorema 3.4, podemos supor $u, v \geq 0$ para q.t.p. em Ω. Além disso, como na primeira parte, obtemos que u e v não são triviais. Em particular, (u,v) é uma solução fraca do sistema (3.1), onde cada componente é não negativa e não trivial, o que conclui a prova do caso ($\mathbb{H}_{3.3}$) em **i)** e do caso ($\mathbb{H}_{3.5}$) em **ii)**.

■

3.4 Prova do teorema 3.2

Nós iniciamos esta demonstração observando que o teorema 3.3 implica que o operador I satisfaz a condição de Palais Smale para todos λ e μ positivos.

Provaremos a existência da primeira solução fraca através do teorema do passo da montanha.

Considerando (u_0, v_0) como na prova de teorema 3.1, nós conseguimos

$$I(t^{\frac{1}{p}}u_0, t^{\frac{1}{q}}v_0) \leq (\tfrac{1}{p}||u_0||^p + \tfrac{1}{q}||v_0||^q)t - \mu t^{\frac{\alpha}{p}+\frac{\gamma}{q}} \int_\Omega |x|^{-\beta_2} u_{0_+}^\alpha v_{0_+}^\gamma \, dx,$$

então

$$I(t^{\frac{1}{p}}u_0, t^{\frac{1}{q}}v_0) \longrightarrow -\infty \text{ quando } t \longrightarrow \infty, \tag{3.31}$$

para todos λ e μ positivos.

Da hipótese ($\mathbb{H}_{3.6}$), temos $p_1 \in (1,p)$, $q_1 \in (1,q)$, $p_2 \in (p,p^*)$ e $q_2 \in (q,q^*)$ tais que $\theta/p_1 + \delta/q_1 = \alpha/p_2 + \gamma/q_2 = 1$. Daí, se $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ com $||(u,v)|| \leq 1$, então

$$\begin{aligned}
I(u,v) \quad &\geq \quad \min\{\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{q}\}\,(||u||^p + ||v||^q) - \lambda(\tfrac{\theta}{p_1}C^{p_1/p} + \tfrac{\delta}{q_1}C^{q_1/q})(||u||^{p_1} + ||v||^{q_1}) \\
&\quad\quad -\mu(\tfrac{\alpha}{p_2}C^{p_2/p} + \tfrac{\gamma}{q_2}C^{q_2/q})(||u||^{p_2} + ||v||^{q_2}) \\
&\overset{(3.26)}{\geq} \quad \min\{\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{q}\}(||u||^{\max\{p,q\}} + ||v||^{\max\{p,q\}}) \\
&\quad\quad -\lambda(\tfrac{\theta}{p_1}C^{p_1/p} + \tfrac{\delta}{q_1}C^{q_1/q})\left(||u||^{\min\{p_1,q_1\}} + ||v||^{\min\{p_1,q_1\}}\right) \\
&\quad\quad -\mu(\tfrac{\alpha}{p_2}C^{p_2/p} + \tfrac{\gamma}{q_2}C^{q_2/q})(||u||^{\min\{p_2,q_2\}} + ||v||^{\min\{p_2,q_2\}}) \\
&\geq \quad ||(u,v)||^{\max\{p,q\}}\Big[2^{1-\max\{p,q\}}\min\{\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{q}\} \\
&\quad\quad -k_1(\lambda)||(u,v)||^{\min\{p_1,q_1\}-\max\{p,q\}} \\
&\quad\quad -k_2(\mu)||(u,v)||^{\min\{p_2,q_2\}-\max\{p,q\}} \quad \Big],
\end{aligned} \tag{3.32}$$

onde

$$k_1(\lambda) = 2\lambda(\tfrac{\theta}{p_1}C^{p_1/p} + \tfrac{\delta}{q_1}C^{q_1/q}) \text{ e } k_2(\mu) = 2\mu(\tfrac{\alpha C^{p_2/p}}{p_2} + \tfrac{\gamma C^{q_2/q}}{q_2}).$$

Definimos $f_{\lambda,\mu} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_{\lambda,\mu}(s) = k_1(\lambda)s^{\min\{p_1,q_1\}-\max\{p,q\}} + k_2(\mu)s^{\min\{p_2,q_2\}-\max\{p,q\}}.$$

Então, como $\min\{p_1, q_1\} < \max\{p, q\} < \min\{p_2, q_2\}$, o único ponto de mínimo de $f_{\lambda,\mu}$ é

$$s_{\lambda,\mu} = \left(\frac{(\max\{p,q\}-\min\{p_1,q_1\})k_1(\lambda)}{(\min\{p_2,q_2\}-\max\{p,q\})k_2(\mu)}\right)^{\frac{1}{\min\{p_2,q_2\}-\min\{p_1,q_1\}}},$$

para cada λ e μ positivos.

Portanto, para cada $\mu > 0$, podemos escolher $\lambda_0 = \lambda_0(\mu) > 0$ satisfazendo $0 < s_{\lambda,\mu} < 1$ e

$$\begin{aligned} 2^{1-\max\{p,q\}} \min\{\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{q}\} - f_{\lambda,\mu}(s_{\lambda,\mu}) &= 2^{1-\max\{p,q\}} \min\{\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{q}\} \\ &-k_1(\lambda)^{\frac{\min\{p_2,q_2\}-\max\{p,q\}}{\min\{p_2,q_2\}-\min\{p_1,q_1\}}} k_2(\mu)^{\frac{\max\{p,q\}-\min\{p_1,q_1\}}{\min\{p_2,q_2\}-\min\{p_1,q_1\}}} \\ &\times \left[\left(\frac{(\max\{p,q\}-\min\{p_1,q_1\})}{(\min\{p_2,q_2\}-\max\{p,q\})}\right)^{\frac{\min\{p_1,q_1\}-\max\{p,q\}}{\min\{p_2,q_2\}-\min\{p_1,q_1\}}}\right. \\ &+ \left.\left(\frac{(\max\{p,q\}-\min\{p_1,q_1\})}{(\min\{p_2,q_2\}-\max\{p,q\})}\right)^{\frac{\min\{p_2,q_2\}-\max\{p,q\}}{\min\{p_2,q_2\}-\min\{p_1,q_1\}}}\right] > 0 \end{aligned} \tag{3.33}$$

para todo $0 < \lambda < \lambda_0$.

Conseqüentemente, substituindo (3.33) em (3.32), obtemos

$$I(u, v) \geq (s_{\lambda,\mu})^{\max\{p,q\}}[2^{1-\max\{p,q\}} \min\{\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{q}\} - f_{\lambda,\mu}(s_{\lambda,\mu})] > 0, \tag{3.34}$$

para todo $(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ com $||(u, v)|| = s_{\lambda,\mu}$, onde $0 < \lambda < \lambda_0$.

Assim, temos de (3.31) e (3.34) as condições geométricas do teorema do passo da montanha, o qual implica que o operador I possui um ponto crítico $(\bar{u}, \bar{v}) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ tal que

$$I(\bar{u}, \bar{v}) = c := \inf_{h\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(h(t)) \geq \sigma > 0,$$

onde

$$\Gamma = \{h \in C([0,1], W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})) : h(0) = 0, h(1) = e\},$$

com $I(e) \equiv I(t_0 u_0, t_0 v_0) < 0$, para algum $t_0 > 0$ suficientemente grande, e o teorema 3.4 implica que podemos supor $\bar{u}, \bar{v} \geq 0$ para q.t.p. em Ω. Além disso, é fácil verificar que $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são não triviais.

Para obtermos a segunda solução fraca, nós usaremos o lema 3.3 da Mizoguchi.

O operador $I|_{\overline{B(0,s_{\lambda,\mu})}} : \overline{B(0, s_{\lambda,\mu})} \to \mathbb{R}$ é inferiormente limitado e contínuo, para cada $0 < \lambda < \lambda_0$, e por (3.34) temos

$$\inf_{\partial B(0,s_{\lambda,\mu})} I > 0.$$

Considerando (u_0, v_0) como na prova do teorema 3.1, obtemos das desigualdades $\theta/p + \delta/q < 1$ e

$$I(t^{\frac{1}{p}} u_0, t^{\frac{1}{q}} v_0) \leq \left(\tfrac{1}{p}||u_0||^p + \tfrac{1}{q}||v_0||^q\right) t - \lambda t^{\frac{\theta}{p}+\frac{\delta}{q}} \int_\Omega |x|^{-\beta_1} u_{0_+}^\theta v_{0_+}^\delta \, dx,$$

que

$$I(t_0^{\frac{1}{p}} u_0, t_0^{\frac{1}{q}} v_0) < 0 < \inf_{\partial B(0,s_{\lambda,\mu})} I,$$

para algum $t_0 \in (0,1)$ tal que $(t_0^{\frac{1}{p}} u_0, t_0^{\frac{1}{q}} v_0) \in B(0, s_{\lambda,\mu})$.

Então obtemos do lema 3.3 uma seqüência $\{(w_n, z_n)\}$ tal que

$$I(w_n, z_n) \to \inf_{B(0,s_{\lambda,\mu})} I < 0 \text{ e } I'(w_n, z_n) \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Daí, segue da condição de Palais Smale que existe uma subseqüência, que denotaremos por $\{(w_n, z_n)\}$, e $(w, z) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ tais que $w_n \to w$ fortemente em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ e $z_n \to z$ fortemente em $W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$, quando $n \to \infty$, logo

$$I(w, z) = \inf_{B(0,s_{\lambda,\mu})} I < 0 \text{ e } I'(w, z) = 0.$$

Devido ao teorema 3.4, podemos supor $w, z \geq 0$ para q.t.p. em Ω. Também, $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são não triviais.

Em particular, $(\bar{u}, \bar{v}) \not\equiv (w, z)$, pois $I(w, z) < 0 < I(\bar{u}, \bar{v})$. ■

Capítulo

4

Sistemas perturbados com expoentes críticos

4.1 Introdução

Neste capítulo, nós usaremos uma versão do teorema do passo da montanha e o princípio variacional de Ekeland para estabelecer condições de existência de solução fraca, onde cada componente é não trivial e não negativa, para o sistema com perturbação não linear

$$\begin{cases} -Lu_{ap} &= \lambda\theta|x|^{-\beta}u^{\theta-1}v^{\delta} + \mu\alpha|x|^{-c_1p^*}u^{\alpha-1}v^{\gamma} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ -Lv_{bq} &= \lambda\delta|x|^{-\beta}u^{\theta}v^{\delta-1} + \mu\gamma|x|^{-c_2q^*}u^{\alpha}v^{\gamma-1} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = v &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $Lw_{er} \equiv div(|x|^{-er}|\nabla w|^{r-2}\nabla w)$,

$$\Omega \ \text{ é um domínio suave e limitado de } \mathbb{R}^N \text{ com } 0 \in \Omega, \tag{H_Ω}$$

os parâmetros λ, μ são números reais positivos e os expoentes verificam

$$1 < p, q < N,\ -\infty < a < (N-p)/p,\ -\infty < b < (N-q)/q,$$

$$\begin{gathered} a \leq c_1 < a+1,\ b \leq c_2 < b+1,\ d_1 = 1 + a - c_1,\ d_2 = 1 + b - c_2, \\ p^* = Np/(N - d_1p),\ q^* = Nq/(N - d_2q), \\ c_1p^* = c_2q^*,\ \theta, \delta > 1, \beta \in \mathbb{R} \text{ e} \end{gathered} \tag{$\mathbb{H}^*_{exp}$}$$

$$\tfrac{\alpha}{p^*} + \tfrac{\gamma}{q^*} = 1,$$

com uma das seguintes condições satisfeita

$$\tfrac{\theta}{p} + \tfrac{\delta}{q} < 1; \qquad (p, q-\text{sublinear}) \tag{4.2}$$

$$\tfrac{\theta}{p} + \tfrac{\delta}{q} > 1 \text{ e } \tfrac{\theta}{p^*} + \tfrac{\delta}{q^*} < 1; \qquad (p, q-\text{superlinear}) \tag{4.3}$$

$$\tfrac{\theta}{p} + \tfrac{\delta}{q} = 1. \qquad (p, q-\text{linear}) \tag{4.4}$$

Considerando $p = q = 2$, $a = b = c_1 = c_2 = \beta = 0$ e $u = v$, então o sistema (4.1) se reduz ao caso escalar

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + u^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

o qual foi estudado no trabalho pioneiro de Brezis e Nirenberg [11], onde eles provaram que sob certas condições este problema possui pelo menos uma solução positiva, com $1 < q < 2^* = 2N/(N-2)$, $N \geq 3$. 2^* é dito expoente crítico de Sobolev e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ é um domínio suave e limitado. Em geral, a dificuldade principal neste tipo de problema é a falta de compacidade da inclusão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Essa dificuldade é superada provando que é possível obter uma sucessão de Palais Smale para o operador de Euler-Lagrange associado ao problema com o nível abaixo de um certo número, dito nível crítico, a saber, $(1/N)(C^*_{0,2})^{N/2}$, onde $C^*_{a,p}$, com $a = 0$, $e = 1$ e $p = 2$, é definida em (1.2).

García e Peral em [38] estenderam alguns resultados de Brezis e Nirenberg [11] para a classe de problemas envolvendo o operador $p-$laplaciano, a saber,

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{q-2}u + \mu |u|^{m^*-2}u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em domínios suaves e limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N > p^2)$ com $p \leq q < m^*$, onde $m^* = Np/(N-p)$ denota o expoente crítico de Sobolev, dado pela imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{m^*}(\Omega)$. Vários autores têm estudado os problemas regulares envolvendo o operador $p-$laplaciano e o expoente crítico de Sobolev, por exemplo, [4, 8, 24, 39, 41, 42, 54, 58, 60, 74]. Para operadores com maior generalidade, gostaríamos de citar os seguintes [2, 5, 22, 27, 29, 35, 40, 57, 64, 65, 69, 71, 72, 73] e suas referências.

Mesmo na situação regular, quando estamos trabalhando com sistemas envolvendo os operadores Δ_p e Δ_q, é difícil encontrar um nível crítico apropriado, principalmente, quando $p \neq q$. Na verdade, Adriouch e Hamid [2] afirmaram que esta é uma questão em aberto. Porém, mais recentemente, os autores Silva e Xavier em [62] trataram em um certo contexto o caso $p \neq q$. Para o caso particular $p = q$, Morais e Souto em [29] definiram o seguinte nível crítico S_H/p, onde

$$S_H = \inf_{W\setminus\{0\}} \left\{ \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^p + |\nabla v|^p dx}{\left(\int_\Omega H(u,v)dx\right)^{\frac{p}{m^*}}} \right\}$$

e H é uma não linearidade homogênea de grau $m^* = Np/(N-p)$.

Nossos resultados são os seguintes.

Teorema 4.1 *Além de* (H_Ω) *e* $(\mathbb{H}^*_{exp})$, *assuma que* $p_0 \in (1, p^*)$, $q_0 \in (1, q^*)$ *com* $\theta/p_0 + \delta/q_0 = 1$ *e*

$$\beta < \min\left\{(a+1)p_0 + N\left(1 - \tfrac{p_0}{p}\right), (b+1)q_0 + N\left(1 - \tfrac{q_0}{q}\right)\right\}. \tag{4.6}$$

Suponha que $\max\{p, q\} < \min\{p^*, q^*\}$ *e*

$$\textit{vale } (4.2),\ p_0 \in (1, p) \textit{ e } q_0 \in (1, q). \tag{$\mathbb{H}^{p,q}_{4.2}$}$$

Então, para cada μ *positivo, existe* $\lambda_0 = \lambda_0(\mu)$ *positivo tal que o sistema* (4.1) *possui uma solução fraca, onde cada componente é não trivial e não negativa, para cada* $0 < \lambda < \lambda_0$.

Teorema 4.2 *Além de* (H_Ω) *e* $(\mathbb{H}^*_{exp})$, *assuma que* $p = q$, $a = b \geq 0$, $p^* = q^*$, $p_0 \in (1, p^*)$ *satisfazendo* $\theta/p_0 + \delta/p_0 = 1$ *e* $\beta = (a+1)p_0 - c$ *com* $-N\,[1 - (p_0/p)] < c$.

i) *Suponha que*

$$\textit{vale } (4.3), p_0 \in (p, p^*) \textit{ e } c < \tfrac{(p_0-p+1)N-(a+1)p_0}{p-1} - \tfrac{(N-p-ap)(p_0-p)}{p(p-1)}. \tag{$\mathbb{H}_{4.3}$}$$

Então o sistema (4.1) *possui uma solução fraca, onde cada componente é não trivial e não negativa, para cada* λ *e* μ *positivos.*

ii) *Suponha que*

$$\textit{vale } (4.4), p_0 = p \textit{ e } c \leq \tfrac{N-p-ap}{p-1}. \tag{$\mathbb{H}_{4.4}$}$$

Então existe λ_0 *positivo tal que o sistema* (4.1) *possui uma solução fraca, onde cada componente é não trivial e não negativa, para cada* $0 < \lambda < \lambda_0$ *e* μ *positivo.*

Teorema 4.3 *Além de* (H_Ω) *e* $(\mathbb{H}^*_{exp})$, *assuma que* $p_0 \in (1, p^*)$ *e* $q_0 \in (1, q^*)$ *com* $\theta/p_0 + \delta/q_0 = 1$ *e* β *como em* (4.6).

i) *Suponha que*

$$\text{vale } (4.3),\ p_0 \in (p, p^*) \ \text{ e } \ q_0 \in (q, q^*). \tag{$\mathbb{H}^{p,q}_{4.3}$}$$

Então existe μ_0 *positivo tal que o sistema* (4.1) *possui uma solução fraca, onde cada componente é não trivial e não negativa, para cada* $\lambda > 0$ *e* $0 < \mu < \mu_0$.

ii) *Suponha que*

$$\text{vale } (4.4),\ p_0 = p \ \text{ e } \ q_0 = q. \tag{$\mathbb{H}^{p,q}_{4.4}$}$$

Então existem λ_0 *e* μ_0 *positivos tais que o sistema* (4.1) *possui uma solução fraca, onde cada componente é não trivial e não negativa, para cada* $0 < \lambda < \lambda_0$ *e* $0 < \mu < \mu_0$.

4.2 Resultados preliminares

Estudaremos os resultados apresentados na seção (4.1) com o auxílio do funcional de Euler-Lagrange

$$I : W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

dado por

$$I(u,v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-bq}|\nabla v|^q\, dx$$
$$-\lambda \int_\Omega |x|^{-\beta} u_+^\theta v_+^\delta dx - \mu \int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} u_+^\alpha v_+^\gamma\, dx,$$

o qual, sob as hipóteses dos teoremas previamente enunciados na seção (4.1), está bem definido e é de classe C^1, com derivada de Gâteaux dada por

$$\left\langle I'(u,v),(w,z)\right\rangle = \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w\, dx + \int_\Omega |x|^{-bq}|\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla z\, dx$$
$$-\lambda \int_\Omega |x|^{-\beta}(\theta u_+^{\theta-1} v_+^\delta w + \delta u_+^\theta v_+^{\delta-1} z)\, dx$$
$$-\mu \int_\Omega |x|^{-c_1 p^*}(\alpha u_+^{\alpha-1} v_+^\gamma w + \gamma u_+^\alpha v^{\gamma-1} z)\, dx.$$

No capítulo 3, obtivemos um ponto crítico para o funcional de Euler-Lagrange associado ao sistema (3.1) o qual é solução fraca do mesmo sistema. Entretanto, neste capítulo, as soluções fracas que obteremos não serão, necessariamente, pontos críticos do funcional de Euler-Lagrange associado ao sistema (4.1).

O próximo resultado é uma extensão do [5, teorema 5] e sua prova é completamente similar a prova do teorema citado (veja [29, lema 3] para $p \neq 2$).

Lema 4.1 *Suponha Ω um domínio suave, não necessariamente limitado, de $\mathbb{R}^N$, $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$, $a \leq c_1 < a+1$, $d_1 = 1 + a - c_1$, $p^* = Np/(N - d_1 p)$ e $\alpha + \gamma = p^*$, então*

$$\tilde{S} = \tilde{S}_\Omega := \inf_{(u,v) \in \tilde{W}} \left\{ \frac{\int_\Omega |x|^{-ap} \left(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p \right) dx}{\left(\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} |u|^\alpha |v|^\gamma dx \right)^{\frac{p}{p^*}}} \right\},$$

onde

$$\tilde{W} = \left\{ (u,v) \in \left(W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \right)^2 : |u||v| \not\equiv 0 \right\},$$

satisfaz

$$\tilde{S} = \left[(\alpha/\gamma)^{\gamma/p^*} + (\alpha/\gamma)^{-\alpha/p^*} \right] C^*_{a,p}.$$

Além disso, se $C^*_{a,p}$ é atingida por $w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$, então $\tilde{S}$ é atingida por (sw_0, tw_0) para todos $s, t > 0$ satisfazendo $s/t = (\alpha/\gamma)^{1/p}$.

Demonstração. Sejam $\{w_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ uma seqüência minimizante para $C^*_{a,p}$ e $u_n = sw_n$, $v_n = tw_n$ com s, t constantes positivas que fixaremos depois. Então temos

$$\begin{aligned} \frac{||u_n||^p + ||v_n||^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} |u_n|^\alpha |v_n|^\gamma dx \right)^{\frac{p}{p^*}}} &= \left[\frac{s^p + t^p}{\left(s^{\frac{p\alpha}{p^*}} t^{\frac{p\gamma}{p^*}} \right)} \right] \frac{||w_n||^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} |w_n|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}}} \\ &= \left[\left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{p\gamma}{p^*}} + \left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{-p\alpha}{p^*}} \right] \frac{\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla w_n|^p dx}{\left(\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} |w_n|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Observamos que o único ponto de mínimo da função $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(s) = s^{p\gamma/p^*} + s^{-p\alpha/p^*}$ é $s = (\alpha/\gamma)^{1/p}$.

Então, fixados $s, t > 0$ tais que $s/t = (\alpha/\gamma)^{1/p}$, nós obtemos de (4.7) que

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{p^*}} + \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{-\alpha}{p^*}} \right] \frac{||w_n||^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} |w_n|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}}} &= \frac{||u_n||^p + ||v_n||^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} |u_n|^\alpha |v_n|^\gamma dx \right)^{\frac{p}{p^*}}} \\ &\geq \tilde{S}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Conseqüentemente, tomando o limite em (4.8), temos

$$\left[\left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{p^*}} + \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{-\alpha}{p^*}} \right] C^*_{a,p} \geq \tilde{S}.$$

Por outro lado, considerando uma seqüência minimizante $\{(u_n, v_n)\} \subset \tilde{W}$ de $\tilde{S}$, então existe $\{s_n\} \subset (0,\infty)$ satisfazendo

$$\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*}|u_n|^{p^*}dx = s_n^{p^*}\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*}|v_n|^{p^*}dx. \tag{4.9}$$

Assim, definindo $z_n := s_n v_n$ e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*}|u_n|^{\alpha}|z_n|^{\gamma}\,dx \;\leq\; \frac{\alpha}{p^*}\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*}|u_n|^{p^*}dx + \frac{\gamma}{p^*}\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*}|z_n|^{p^*}dx. \tag{4.10}$$

Daí, pelas equações (4.9) e (4.10), temos

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*}|u_n|^{\alpha}|z_n|^{\gamma}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} &\leq \left(\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*}|u_n|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}}\\ &= \left(\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*}|z_n|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}},\end{aligned}$$

portanto, nós conseguimos

$$\begin{aligned}\frac{||u_n||^p+||v_n||^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-c_1p^*}|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\gamma}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} &= (s_n)^{\frac{p\gamma}{p^*}}\frac{\int_\Omega |x|^{-ap}(|\nabla u_n|^p+|\nabla v_n|^p)dx}{\left(\int_\Omega |x|^{-c_1p^*}|u_n|^{\alpha}|z_n|^{\gamma}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}\\ &\geq (s_n)^{\frac{p\gamma}{p^*}}\left[\frac{\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^p dx}{\left(\int_\Omega |x|^{-c_1p^*}|u_n|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}+\frac{\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla v_n|^p dx}{\left(\int_\Omega |x|^{-c_1p^*}|z_n|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}\right]\\ &= (s_n)^{\frac{p\gamma}{p^*}}\left[\frac{\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^p dx}{\left(\int_\Omega |x|^{-c_1p^*}|u_n|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}+\frac{s_n^{-p}\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla z_n|^p dx}{\left(\int_\Omega |x|^{-c_1p^*}|z_n|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}\right]\\ &\geq [(s_n)^{\frac{p\gamma}{p^*}}+(s_n)^{\frac{-p\alpha}{p^*}}]C^*_{a,p}\\ &\geq \left[\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{p^*}}+\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{-\alpha}{p^*}}\right]C^*_{a,p}.\end{aligned}$$

Então, tomando o limite na desigualdade acima, concluímos

$$\tilde{S} \geq \left[\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{p^*}}+\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{-\alpha}{p^*}}\right]C^*_{a,p}.$$

■

Lema 4.2 *Considere* (H_Ω), $(\mathbb{H}^*_{exp})$, β *como em* (4.6) *e* $\{(u_n, v_n)\}$ *uma seqüência*$-(PS)_c$ *em* $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$.

i) *Suponha que uma das condições:* $(\mathbb{H}^{p,q}_{4.2})$ *ou* $(\mathbb{H}^{p,q}_{4.3})$, *é satisfeita. Então a seqüência*

$\{(u_n, v_n)\}$ é limitda em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ para cada λ não negativo e independentemente de μ não negativo.

ii) *Suponha que $(\mathbb{H}_{4.4}^{p,q})$ é satisfeita. Então existe λ_0 positivo tal que a seqüência $\{(u_n, v_n)\}$ é limitda em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ para cada $0 \leq \lambda < \lambda_0$ e independentemente de μ não negativo.*

Demonstração. A prova deste resultado é inteiramente similar a prova do lema 3.2; mais exatamente, $(\mathbb{H}_{4.2}^{p,q})$ é similar a $(\mathbb{H}_{3.6})$, $(\mathbb{H}_{4.3}^{p,q})$ é similar a $(\mathbb{H}_{3.2})$ e $(\mathbb{H}_{4.4}^{p,q})$ é similar a $(\mathbb{H}_{3.4})$.

■

Teorema 4.4 *Considere (H_Ω), $(\mathbb{H}_{exp}^*)$, $p_0 \in (1, p^*)$, $q_0 \in (1, q^*)$ com $\theta/p_0 + \delta/q_0 = 1$, β como em (4.6) e $\{(u_n, v_n)\} \subset W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ uma seqüência$-(PS)_c$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ e $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$, quando $n \to \infty$. Então (u, v) é uma solução fraca do sistema (4.1).*

Observação 4.1 *O teorema 4.4 não assegura que essa solução seja não trivial.*

Demonstração do teorema 4.4. Aplicando o teorema da imersão compacta (teorema 6.4), temos que

$$u_n \to u \text{ fortemente em } L^{p_0}(\Omega, |x|^{-\beta}) \text{ quando } n \to \infty,$$

$$v_n \to v \text{ fortemente em } L^{q_0}(\Omega, |x|^{-\beta}) \text{ quando } n \to \infty.$$

Em particular, existem $f \in L^{p_0}(\Omega, |x|^{-\beta})$ e $g \in L^{q_0}(\Omega, |x|^{-\beta})$ tais que $|u_n|(x) \leq f(x)$ e $|v_n|(x) \leq g(x)$, para q.t.p. $x \in \Omega$. Além disso, a menos de uma subseqüência, temos que $u_n(x) \to u(x)$ e $v_n(x) \to v(x)$, quando $n \to \infty$, para q.t.p. $x \in \Omega$. Portanto, conseguimos

$$(u_{n+}^{\theta-1} v_{n+}^{\delta} w)(x) \to (u_{+}^{\theta-1} v_{+}^{\delta} w)(x) \text{ quando } n \to \infty,$$

$$|u_{n+}^{\theta-1} v_{n+}^{\delta} w| \leq f^{\theta-1} g^{\delta} |w| \in L^1(\Omega, |x|^{-\beta}).$$

Conseqüentemente, o teorema da convergência dominada de Lebesgue implica

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-\beta} u_{n+}^{\theta-1} v_{n+}^{\delta} w \, dx = \int_\Omega |x|^{-\beta} u_{+}^{\theta-1} v_{+}^{\delta} w \, dx, \; \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}). \tag{4.11}$$

Analogamente, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |x|^{-\beta}u_{n_+}^{\theta}v_{n_+}^{\delta-1}z\,dx = \int_\Omega |x|^{-\beta}u_+^{\theta}v_+^{\delta-1}z\,dx,\ \forall z\in W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-bq}). \tag{4.12}$$

Como a convergência fraca implica que a seqüência $\{(u_n,v_n)\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})\times W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-bq})$, temos que a seqüência $\{|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\}$ é limitada em $(L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega,|x|^{-ap}))^N$. Por outro lado, já que $\alpha/p^*+\gamma/q^*=1$, nós encontramos

$$\tfrac{\alpha-1}{p^*-1}+\tfrac{\gamma p^*}{q^*(p^*-1)}=\tfrac{\gamma-1}{q^*-1}+\tfrac{\alpha q^*}{p^*(q^*-1)}=1 \text{ e } \tfrac{p^*-1}{\alpha-1},\tfrac{q^*-1}{\gamma-1}>1,$$

então segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-c_1p^*}\left(u_{n_+}^{\alpha-1}v_{n_+}^{\gamma}\right)^{\frac{p^*}{p^*-1}}dx &= \int_\Omega |x|^{-c_1p^*}(u_{n_+}^{p^*})^{\frac{\alpha-1}{p^*-1}}(v_{n_+}^{q^*})^{\frac{\gamma p^*}{q^*(p^*-1)}}dx\\ &\le \left(\int_\Omega |x|^{-c_1p^*}u_{n_+}^{p^*}dx\right)^{\frac{\alpha-1}{p^*-1}}\left(\int_\Omega |x|^{-c_1p^*}v_{n_+}^{q^*}dx\right)^{\frac{\gamma p^*}{q^*(p^*-1)}},\end{aligned}$$

portanto, $\{{u_{n_+}}^{\alpha-1}{v_{n_+}}^{\gamma}\}$ é limitada em $L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(\Omega,|x|^{-c_1p^*})$. Além disso, nós provamos no apêndice (teorema 6.15) que $\nabla u_n(x)\to\nabla u(x)$ e $\nabla v_n(x)\to\nabla v(x)$, quando $n\to\infty$, para q.t.p. $x\in\Omega$. Logo, temos que $(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n)(x)\to(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)(x)$ e $(u_{n_+}^{\alpha-1}v_{n_+}^{\gamma})(x)\to(u_+^{\alpha-1}v_+^{\gamma})(x)$, quando $n\to\infty$, para q.t.p. $x\in\Omega$. Então, pelo lema 6.3, obtemos que

$$|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2}\nabla u \text{ fracamente em } (L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega,|x|^{-ap}))^N \text{ quando } n\to\infty$$

e

$$u_{n_+}^{\alpha-1}v_{n_+}^{\gamma}\rightharpoonup u_+^{\alpha-1}v_+^{\gamma} \text{ fracamente em } L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(\Omega,|x|^{-c_1p^*}) \text{ quando } n\to\infty.$$

Em particular, para todo $w\in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla w\,dx = \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w\,dx \tag{4.13}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |x|^{-c_1p^*}u_{n_+}^{\alpha-1}v_{n_+}^{\gamma}w\,dx = \int_\Omega |x|^{-c_1p^*}u_+^{\alpha-1}v_+^{\gamma}w\,dx. \tag{4.14}$$

Similarmente, para todo $z \in W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$, conseguimos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-bq} |\nabla v_n|^{q-2} \nabla v_n \nabla z \, dx = \int_\Omega |x|^{-bq} |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla z \, dx \tag{4.15}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} u_{n_+}^{\alpha} v_{n_+}^{\gamma-1} z \, dx = \int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} u_+^{\alpha} v_+^{\gamma-1} z \, dx. \tag{4.16}$$

Por último, usando a definição de seqüência$-(PS)_c$ e os limites (4.11) $-$ (4.16), nós concluímos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \langle I'(u_n, v_n), (w, z) \rangle \\ &= \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w dx + \int_\Omega |x|^{-bq} |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla z \, dx \\ &\quad -\lambda \int_\Omega |x|^{-\beta} \left(\theta u_+^{\theta-1} v_+^{\delta} w + \delta u_+^{\theta} v_+^{\delta-1} z \right) dx \\ &\quad -\mu \int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} \left(\alpha u_+^{\alpha-1} v_+^{\gamma} w + \gamma u_+^{\alpha} v_+^{\gamma-1} z \right) dx \end{aligned}$$

para todo $(w, z) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$, ou seja, (u, v) é uma solução fraca do sistema (4.1).

$\blacksquare$

A prova do próximo teorema que enunciaremos segue a mesma idéia do teorema 3.4.

Teorema 4.5 *Considere* (H_Ω), $(\mathbb{H}^*_{exp})$, $p_0 \in (1, p^*)$, $q_0 \in (1, q^*)$ *com* $\theta/p_0 + \delta/q_0 = 1$, β *como em* (4.6) *e* $\{(u, v)\} \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ *uma solução fraca do sistema* (4.1). *Então* (u_+, v_+) *é uma solução fraca do sistema* (4.1).

Teorema 4.6 *Considere* (H_Ω), $(\mathbb{H}^*_{exp})$, $p_0 \in (1, p^*)$, $q_0 \in (1, q^*)$ *com* $\theta/p_0 + \delta/q_0 = 1$, β *como em* (4.6) *e* $\{(u_n, v_n)\} \subset W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ *é uma seqüência*$-(PS)_c$ *com* $u_n \rightharpoonup u$ *fracamente em* $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ *e* $v_n \rightharpoonup v$ *fracamente em* $W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$, *quando* $n \to \infty$. *Então cada componente da solução fraca* (u, v) *do sistema* (4.1) *é não trivial, desde que uma das seguintes condições seja satisfeita:*

i) $c < 0$;

ii) $p = q$, $a = b$, $p^* = q^*$ *e* $0 < c < (\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}}$.

Demonstração. Primeiramente, observamos que em virtude do teorema 4.4, temos que

(u, v) é uma solução fraca do sistema (4.1). Suponhamos por contradição que $u(x) = 0$ para q.t.p. $x \in \Omega$. Usando o teorema da imersão compacta (teorema 6.4) e o teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-\beta} u_{n_+}^\theta v_{n_+}^\delta dx = 0.$$

Então, pela definição de seqüência$-(PS)_c$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \langle I'(u_n, v_n), (u_n, 0)\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(||u_n||^p - \mu\alpha \int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} u_{n_+}^\alpha v_{n_+}^\gamma dx \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \langle I'(u_n, v_n), (0, v_n)\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(||v_n||^q - \mu\gamma \int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} u_{n_+}^\alpha v_{n_+}^\gamma dx \right). \end{aligned}$$

Logo, existe $l \geq 0$ de modo que

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{||u_n||^p}{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{||v_n||^q}{\gamma} = \mu \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} u_{n_+}^\alpha v_{n_+}^\gamma dx.$$

Usando novamente a definição de seqüência$-(PS)_c$, conseguimos

$$c = \lim_{n\to\infty} I(u_n, v_n) = (\tfrac{\alpha}{p} + \tfrac{\gamma}{q} - 1)l \geq 0. \tag{4.17}$$

Assim, desde que $c < 0$ no item **i)**, o resultado segue por contradição.

Agora, no item **ii**), supondo $p = q$, $a = b$ e $p^* = q^*$, segue do lema 4.1 que a constante $\tilde{S}$ está bem definida e $\tilde{S} > 0$. Se $l = 0$, então $c = 0$, o que contradiz a hipótese $c > 0$. Suponhamos $l > 0$. Pela definição de $\tilde{S}$, encontramos

$$\left(\int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} u_{n_+}^\alpha v_{n_+}^\gamma dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \tilde{S} \leq ||u_n||^p + ||v_n||^p, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Conseqüentemente, tomando o limite na desigualdade acima, obtemos

$$\left(\tfrac{l}{\mu}\right)^{\frac{p}{p^*}} \tilde{S} \leq (\alpha + \gamma)l = p^* l,$$

portanto,

$$l \geq (\mu)^{\frac{-p}{p^*-p}} (p^*)^{\frac{-p^*}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}}. \tag{4.18}$$

Substituindo a equação (4.18) em (4.17), nós obtemos

$$\begin{aligned} c &\geq (\tfrac{\alpha}{p} + \tfrac{\gamma}{p} - 1)(\mu)^{\frac{-p}{p^*-p}} (p^*)^{\frac{-p^*}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}} \\ &= (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu)^{\frac{-p}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}} (p^*)^{1-\frac{p}{p^*-p}} \\ &= (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(p^*\mu)^{\frac{-p}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}}, \end{aligned}$$

o que é um absurdo, logo, concluímos a prova do item **ii)**.

■

Considere Ω um domínio suave, não necessariamente limitado, de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$, $a \leq c_1 < a+1$, $d_1 = 1 + a - c_1$ e $p^* = Np/(N - d_1 p)$. Definimos o espaço

$$W^{1,p}_{a,c_1}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p^*}(\Omega, |x|^{-c_1 p^*}) : |\nabla u| \in L^p(\Omega, |x|^{-ap}) \right\},$$

munido da norma

$$||u||_{W^{1,p}_{a,c_1}(\Omega)} = ||u||_{L^{p^*}(\Omega, |x|^{-c_1 p^*})} + ||\nabla u||_{L^p(\Omega, |x|^{-ap})}.$$

Nós consideramos a melhor constante de Hardy-Sobolev dada por

$$\tilde{S}_{a,p} = \inf_{W^{1,p}_{a,c_1}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u|^p dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} |u|^{p^*} dx \right)^{p/p^*}} \right\}.$$

Também, definimos $R^{1,p}_{a,c_1}(\Omega)$ como sendo o subespaço de $W^{1,p}_{a,c_1}(\Omega)$ formado pelas funções radiais, em outras palavras,

$$R^{1,p}_{a,c_1}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}_{a,c_1}(\Omega) : u(x) = u(|x|) \right\},$$

equipado com a norma induzida

$$||u||_{R^{1,p}_{a,c_1}(\Omega)} = ||u||_{W^{1,p}_{a,c_1}(\Omega)}.$$

Horiuchi em [46] provou que

$$\tilde{S}_{a,p,R} := \inf_{R^{1,p}_{a,c_1}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*}|u|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}} \right\}$$

é atingida pelas funções da forma

$$y_\epsilon(x) = k_{a,p}(\epsilon) U_{a,p,\epsilon}(x), \forall \epsilon > 0,$$

onde

$$k_{a,p}(\epsilon) = c\epsilon^{(N-d_1p)/d_1p^2} \text{ e } U_{a,p,\epsilon}(x) = \left(\epsilon + |x|^{\frac{d_1 p(N-p-ap)}{(p-1)(N-d_1p)}}\right)^{-\left(\frac{N-d_1p}{d_1p}\right)}.$$

Também, se $a \geq 0$, então $S_{a,p,R} = \tilde{S}_{a,p}$ (ver [46, lema 3.3]). Além disso, y_ϵ satisfaz

$$\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla y_\epsilon|^p \, dx = \int_\Omega |x|^{-c_1p^*}|y_\epsilon|^{p^*} dx. \tag{4.19}$$

Veja [27, proposição 1.4].

Lema 4.3 *Consideremos Ω um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$, $a \leq c_1 < a+1$, $d_1 = 1 + a - c_1$, $p^* = Np/(N - d_1p)$, $l \in [1, p^*)$, $k, k' \geq 1$ são expoentes conjugados com $kl \in [1, p^*]$ ($k' = \infty$ se $k = 1$) e $\beta \leq (a+1)kl + N[1 - (kl/p)]$. Sejam R_0, c_0 constantes positivas e $\psi \in C_0^\infty(B(0, 3R_0))$ com $\psi \equiv 1$ em $B(0, 2R_0)$, então a função dada por*

$$u_\epsilon(x) = \frac{\psi(x) U_{a,p,\epsilon}(x)}{||\psi(x) U_{a,p,\epsilon}(x)||_{L^{p^*}(\Omega, |x|^{-c_1p^*})}}$$

satisfaz $||u_\epsilon||^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega,|x|^{-c_1p^*})} = 1$, $||\nabla u_\epsilon||^p_{L^p(\Omega,|x|^{-ap})} \leq \tilde{S}_{a,p,R} + O(\epsilon^{(N-d_1p)/d_1p})$ *e*

$$||h^{1/l}\, u_\epsilon||^l_{L^l(\Omega,|x|^{-\beta})} \geq \begin{cases} O(\epsilon^{(N-d_1p)l/d_1p^2}) \text{ se } l < \frac{(N-\beta)(p-1)}{N-p-ap}, \\ O(\epsilon^{(N-d_1p)l/d_1p^2}|ln(\epsilon)|) \text{ se } l = \frac{(N-\beta)(p-1)}{N-p-ap}, \\ O\left(\epsilon^{\frac{(N-d_1p)(p-1)(N-\beta)}{d_1p(N-p-ap)} - \frac{(N-d_1p)(p-1)l}{d_1p^2}}\right) \\ \text{ se } l > \frac{(N-\beta)(p-1)}{N-p-ap}, \end{cases} \tag{4.20}$$

para toda $h \in L^{k'}(\Omega, |x|^{-\beta})$ com $\inf_{B(0,2R)} h > 0$ para algum $0 < R < R_0$ e $h \geq 0$ para *q.t.p. em* Ω. *Além disso, a desigualdade* (4.20) *é uniforme em* $h \in L^{k'}(\Omega, |x|^{-\beta})$, $h \geq 0$ *para q.t.p. em* Ω, *satisfazendo*

$$\frac{R^{N-\beta}(\inf_{B(0,2R)} h)}{(1+R^{d_1 p(N-a-ap)/(p-1)(N-d_1 p)})^{(N-d_1 p)l/d_1 p}} \geq c_0, \tag{4.21}$$

para algum $0 < R < R_0$.

Observação 4.2 *O lema acima continua verdadeiro para* Ω *ilimitado, desde que* $\beta = c_1 p^*$ *e* $kl = p^*$.

Demonstração do lema 4.3. Obtemos da equação (4.19) que

$$||\nabla y_\epsilon||^p_{L^p(\mathbb{R}^N,|x|^{-ap})} = (\tilde{S}_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)} = k_{a,p}(\epsilon)^p ||\nabla U_{a,p,\epsilon}||^p_{L^p(\mathbb{R}^N,|x|^{-ap})}$$

e

$$||y_\epsilon||^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N,|x|^{-c_1 p^*})} = (\tilde{S}_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)} = k_{a,p}(\epsilon)^{p^*} ||U_{a,p,\epsilon}||^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N,|x|^{-c_1 p^*})}.$$

Nós observamos que

$$\nabla(\psi(x)U_{a,p,\epsilon}(x)) = \begin{cases} \nabla U_{a,p,\epsilon}(x) \text{ se } |x| < 2R_0 \\ U_{a,p,\epsilon}(x)\nabla\psi(x) + \psi(x)\nabla U_{a,p,\epsilon}(x) \text{ se } 2R_0 \leq |x| < 3R_0 \\ 0 \text{ se } |x| \geq 3R_0 \end{cases}$$

e

$$\nabla U_{a,p,\epsilon}(x) = -\frac{N-p-ap}{p-1} \cdot \frac{|x|^{[d_1 p(N-p-ap)/(p-1)(N-d_1 p)]-2} x}{\left(\epsilon + |x|^{d_1 p(N-p-ap)/(p-1)(N-d_1 p)}\right)^{N/d_1 p}}.$$

Então

$$\begin{aligned} \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla(\psi U_{a,p,\epsilon})(x)|^p \, dx &= O(1) + \int_{|x|<R_0} |x|^{-ap} |\nabla U_{a,p,\epsilon}(x)|^p \, dx \\ &= O(1) + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla U_{a,p,\epsilon}(x)|^p \, dx \\ &= O(1) + (\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} (k_{a,p}(\epsilon))^{-p} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} |\psi(x) U_{a,p,\epsilon}(x)|^{p^*} dx &= O(1) + \int_{|x|<R_0} |x|^{-c_1 p^*} |U_{a,p,\epsilon}(x)|^{p^*} dx \\ &= O(1) + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} |U_{a,p,\epsilon}(x)|^{p^*} dx \\ &= O(1) + (\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} (k_{a,p}(\epsilon))^{-p^*}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_\epsilon(x)|^p\,dx &= \frac{||\nabla(\psi U_{a,p,\epsilon})||^p_{L^p(\Omega,|x|^{-ap})}}{||\psi U_{a,p,\epsilon}||^p_{L^{p^*}(\Omega,|x|^{-c_1 p^*})}} \\
&= \frac{O(1)+(\tilde{S}_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)}(k_{a,p}(\epsilon))^{-p}}{[O(1)+(\tilde{S}_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)}(k_{a,p}(\epsilon))^{-p^*}]^{p/p^*}} \\
&= \frac{k_{a,p}(\epsilon)^p[O(1)+(\tilde{S}_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)(k_{a,p}(\epsilon))^p}]}{[O(k_{a,p}(\epsilon)^p)+(\tilde{S}_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)}]^{p/p^*}} \\
&\le \tilde{S}_{a,p,R}+O(k_{a,p}(\epsilon)^p) \\
&= \tilde{S}_{a,p,R}+O(\epsilon^{(N-d_1p)/d_1p}).
\end{aligned}$$

Agora, provaremos que $||h^{1/l}u_\epsilon||^l_{L^l(\Omega,|x|^{-\beta})}$ é como em (4.20). Considerando a mudança de variável para coordenadas polares, nós obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |x|^{-\beta}h\,|\psi U_{a,p,\epsilon}|^l\,dx \\
&\ge \int_{B(0,2R)} |x|^{-\beta}h|U_{a,p,\epsilon}|^l\,dx \\
&\ge \inf_{B(0,2R)} h\left(\int_{B(0,2R)\setminus B(0,R)}|x|^{-\beta}|U_{a,p,\epsilon}|^l\,dx+\int_{B(0,R)}|x|^{-\beta}|U_{a,p,\epsilon}|^l\,dx\right) \\
&= \omega_N \inf_{B(0,2R)} h\left(\int_R^{2R} r^{-\beta+N-1}|U_{a,p,\epsilon}|^l dr+\int_0^R r^{-\beta+N-1}|U_{a,p,\epsilon}|^l dr\right).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Agora, estimaremos cada uma das integrais da soma acima. Deixe-nos considerar $\alpha=\frac{d_1p(N-p-ap)}{(p-1)(N-d_1p)}$, então

$$\begin{aligned}
\int_R^{2R} r^{-\beta+N-1}|U_{a,p,\epsilon}|^l dr &\ge \int_R^{2R}\frac{r^{-\beta+N-1}}{(1+r^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}}dr \\
&= \int_R^{2R}\frac{r^{-\beta+N-1-[\alpha(N-d_1p)l/d_1p]}}{(r^{-\alpha}+1)^{(N-d_1p)l/d_1p}}dr \\
&\ge (R^{-\alpha}+1)^{\frac{-(N-d_1p)l}{d_1p}}\int_R^{2R} r^{-\beta+N-1-\alpha\frac{(N-d_1p)l}{d_1p}}\,dr;
\end{aligned} \tag{4.23}$$

fazendo a mudança de variável $s=R^{-1}\epsilon^{-1/\alpha}r$ na segunda integral da soma em (4.22), conseguimos

$$\begin{aligned}
\int_0^R r^{-\beta+N-1}|U_{a,p,\epsilon}|^l dr &= (R^\alpha\epsilon)^{\frac{-(N-d_1p)l}{d_1p}+\frac{(N-\beta)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)}} \\
&\quad\times\int_0^{\epsilon^{-1/\alpha}}\frac{s^{-\beta+N-1}}{(R^{-\alpha}+s^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}}ds.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Se $l < (N-\beta)(p-1)/(N-p-ap)$, então

$$-\frac{(N-d_1p)l}{d_1p} + \frac{(N-\beta)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)} = \frac{(N-d_1p)(p-1)}{d_1p(N-p-ap)}\left[N-\beta-\alpha\frac{(N-d_1p)l}{d_1p}\right] > 0.$$

Conseqüentemente, obtemos por (4.22), (4.23) e (4.24) que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |x|^{-\beta} h\, |\psi U_{a,p,\epsilon}|^l dx \\
&\geq \omega_N \inf_{B(0,2R)} h \left[(R^{-\alpha}+1)^{\frac{-(N-d_1p)l}{d_1p}} \int_R^{2R} r^{-\beta+N-1-\alpha(N-d_1p)l/d_1p} dr\right. \\
&\quad \left. +(R^\alpha\epsilon)^{\frac{-(N-d_1p)l}{d_1p}+\frac{(N-\beta)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)}} \int_0^{\epsilon^{-1/\alpha}} \frac{s^{-\beta+N-1}}{(R^{-\alpha}+s^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}} ds\right] \\
&\geq \frac{\omega_N(\inf_{B(0,2R)} h)}{(R^{-\alpha}+1)^{(N-d_1p)l/d_1p}} \int_R^{2R} r^{-\beta+N-1-\alpha(N-d_1p)l/d_1p} dr \\
&\geq \inf_{B(0,2R)} h \left[\frac{\omega_N R^{-\beta+N-\alpha(N-d_1p)l/d_1p}\left(2^{-\beta+N-1-\alpha\frac{(N-d_1p)l}{d_1p}}-1\right)}{(R^{-\alpha}+1)^{(N-d_1p)l/d_1p}\left(-\beta+N-\alpha\frac{(N-d_1p)l}{d_1p}\right)}\right] \\
&\geq \left(\frac{w_N R^{N-\beta} \inf_{B(0,2R)} h}{(1+R^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}}\right) \frac{\left(2^{-\beta+N-1-\alpha\frac{(N-d_1p)l}{d_1p}}-1\right)}{\left(-\beta+N-\alpha\frac{(N-d_1p)l}{d_1p}\right)} \\
&= O(R,h),
\end{aligned}$$

então, se $h \in L^{k'}(\Omega, |x|^{-c_1p^*})$ com $h \geq 0$ para q.t.p. em Ω e $\inf_{B(0,2R)} h > 0$, conseguimos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-\beta} h\, |u_\epsilon|^l dx &= \frac{||h^{1/l}\psi U_{a,p,\epsilon}||^l_{L^l(\Omega,|x|^{-\beta})}}{||\psi U_{a,p,\epsilon}||^l_{L^{p^*}(\Omega,|x|^{-c_1p^*})}} \\
&\geq \frac{O(R,h)}{\left(O(1)+(S_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)}(k_{a,p}(\epsilon))^{-p^*}\right)^{l/p^*}} \\
&= \frac{O(R,h)}{(k_{a,p}(\epsilon))^{-l}\left(O(k_{a,p}(\epsilon)^{p^*})+(S_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)}\right)^{l/p^*}} \\
&= \frac{O(R,h)\,(k_{a,p}(\epsilon))^l}{\left(O(ka,p(\epsilon)^{p^*})+(S_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)}\right)^{l/p^*}} \\
&\geq \frac{O(R,h)\,(k_{a,p}(\epsilon))^l}{\left(O(1)+(S_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)}\right)^{l/p^*}} \\
&= O(R,h)O(\epsilon^{l(N-d_1p)/d_1p^2}).
\end{aligned}$$

Além disso, se h satisfaz (4.21), temos

$$O(R,h) \geq \omega_N c_0 \left[\frac{\left(2^{-\beta+N-\alpha\frac{(N-d_1p)l}{d_1p}}-1\right)}{\left(-\beta+N-\alpha\frac{(N-d_1p)l}{d_1p}\right)} \right] = \tilde{c_0} > 0,$$

portanto

$$\int_\Omega |x|^{-\beta} h\, |u_\epsilon|^l \, dx \geq O(\epsilon^{l(N-d_1p)/d_1p^2})$$

uniformemente em h satisfazendo (4.21).

Supondo $l = (N-\beta)(p-1)/(N-p-ap)$, então

$$-\frac{(N-d_1p)l}{d_1p} + \frac{(N-\beta)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)} = \frac{(N-d_1p)(p-1)}{d_1p(N-p-ap)} \left[N-\beta-\alpha\frac{(N-d_1p)l}{d_1p} \right] = 0.$$

Logo, por (4.22), (4.23) e (4.24), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-\beta} h\, |\psi U_{a,p,\epsilon}|^l \, dx &\geq \omega_N (\inf_{B(0,2R)} h) \int_0^{\epsilon^{-1/\alpha}} \frac{s^{-\beta+N-1}}{(R^{-\alpha}+s^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}} \, ds \\
&\geq \omega_N (\inf_{B(0,2R)} h) \int_1^{\epsilon^{-1/\alpha}} \frac{s^{-\beta+N-1-\alpha\frac{(N-d_1p)l}{d_1p}}}{((Rs)^{-\alpha}+1)^{(N-d_1p)l/d_1p}} \, ds \\
&\geq \frac{\omega_N \left(\inf_{B(0,2R)} h\right) R^{N-\beta-\alpha\frac{(N-d_1p)l}{d_1p}}}{(R^{-\alpha}+1)^{(N-d_1p)l/d_1p}} \int_1^{\epsilon^{-1/\alpha}} s^{-1} \, ds \\
&= \omega_N \frac{R^{N-\beta}\left(\inf_{B(0,2R)} h\right)}{(1+R^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}} \ln(\epsilon^{-1/\alpha}) \\
&= \frac{\omega_N}{\alpha} \frac{R^{N-\beta}\left(\inf_{B(0,2R)} h\right)}{(1+R^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}} |\ln(\epsilon)|.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-\beta} h\, |u_\epsilon|^l dx &= \frac{||h^{1/l}\, \psi U_{a,p,\epsilon}||^l_{L^l(\Omega,|x|^{-\beta})}}{||\psi U_{a,p,\epsilon}||^l_{L^{p^*}(\Omega,|x|^{-c_1p^*})}} \\
&\geq \frac{\frac{\omega_N}{\alpha} \frac{R^{N-\beta} \inf_{B(0,2R)} h}{(1+R^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}} |\ln(\epsilon)|}{\left(O(1)+(S_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)} k_{a,p}(\epsilon)^{-p^*}\right)^{l/p^*}} \\
&= \frac{\frac{\omega_N}{\alpha} \frac{R^{N-\beta} \inf_{B(0,2R)} h}{(1+R^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}} |\ln(\epsilon)|}{k_{a,p}(\epsilon)^{-l} \left(O(k_{a,p}(\epsilon)^{p^*})+(S_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)}\right)^{l/p^*}} \\
&\geq \frac{O(1) \left(\frac{R^{N-\beta} \inf_{B(0,2R)} h}{(1+R^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}}\right) \epsilon^{(N-d_1p)l/d_1p^2} |\ln(\epsilon)|}{\left(O(1)+(S_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)}\right)^{l/p^*}},
\end{aligned}$$

então, se $h \in L^{k'}(\Omega, |x|^{-\beta})$ com $h \geq 0$ para q.t.p. em Ω e $\inf_{B(0,2R)} h > 0$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-\beta} h\,|u_\epsilon|^l dx &\geq O(h,R)\epsilon^{(N-d_1p)l/d_1p^2}|\ln(\epsilon)| \\ &= O(\epsilon^{(N-d_1p)l/d_1p^2}|\ln(\epsilon)|),\end{aligned}$$

e se h satisfaz (4.21), segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-\beta} h\,|u_\epsilon|^l dx &\geq O(1)\epsilon^{(N-d_1p)l/d_1p^2}|\ln(\epsilon)| \\ &= O(\epsilon^{(N-d_1p)l/d_1p^2}|\ln(\epsilon)|).\end{aligned}$$

uniformemente em h.

Assumindo $l > (N-\beta)(p-1)/(N-p-ap)$, nós conseguimos

$$-\tfrac{(N-d_1p)l}{d_1p} + \tfrac{(N-\beta)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)} = \tfrac{(N-d_1p)(p-1)}{d_1p(N-p-ap)}\left[N-\beta-\alpha\tfrac{(N-d_1p)l}{d_1p}\right] < 0.$$

Então, por (4.22), (4.23) e (4.24), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-\beta} h|\psi U_{a,p,\epsilon}|^l dx &\geq \omega_N(\inf_{B(0,R)} h)(R^\alpha\epsilon)^{\frac{-(N-d_1p)l}{d_1p}+\frac{(N-\beta)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)}} \\ &\quad\times\int_{1/2}^1 \tfrac{s^{-\beta+N-1}}{(R^{-\alpha}+s^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}}ds \\ &\geq \omega_N \frac{R^{N-\beta}}{(1+R^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}}(\inf_{B(0,R)} h) \\ &\quad\times\epsilon^{\frac{-(N-d_1p)l}{d_1p}+\frac{(N-\beta)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)}}\int_{1/2}^1 s^{-\beta+N-1}ds \\ &\geq O(1)\tfrac{R^{N-\beta}(\inf_{B(0,R)} h)}{(1+R^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}}\epsilon^{\frac{-(N-d_1p)l}{d_1p}+\frac{(N-\beta)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)}}.\end{aligned}$$

Assim, concluímos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-\beta} h\,|u_\epsilon|^l dx &= \tfrac{||h^{1/l}\psi U_\epsilon||^l_{L^l(\Omega,|x|^{-\beta})}}{||\psi U_\epsilon||^l_{L^{p^*}(\Omega,|x|^{-c_1p^*})}} \\ &\geq \frac{O(1)\left(\frac{R^{N-\beta}(\inf_{B(0,R)} h)}{(1+R^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}}\,\epsilon^{\frac{-(N-d_1p)l}{d_1p}+\frac{(N-\beta)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)}}\right)}{\left(O(1)+(S_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)}(k_{a,p}(\epsilon))^{-p^*}\right)^{l/p^*}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{O(k_{a,p}(\epsilon)^l)\left(\frac{R^{N-\beta}(\inf_{B(0,R)} h)}{(1+R^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}}\,\epsilon^{\frac{-(N-d_1p)l}{d_1p}+\frac{(N-\beta)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)}}\right)}{\left(O(k_{a,p}(\epsilon)^{p^*})+(S_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)}\right)^{l/p^*}} \\
&\geq \frac{O\left(\epsilon^{l(N-d_1p)/d_1p^2}\right)\left(\frac{R^{N-\beta}(\inf_{B(0,R)} h)}{(1+R^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}}\,\epsilon^{\frac{-(N-d_1p)l}{d_1p}+\frac{(N-\beta)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)}}\right)}{\left(O(1)+(S_{a,p,R})^{p^*/(p^*-p)}\right)^{l/p^*}} \\
&= \frac{R^{N-\beta}(\inf_{B(0,R)} h)}{(1+R^\alpha)^{(N-d_1p)l/d_1p}} O\left(\epsilon^{\frac{(N-\beta)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)}-\frac{(N-d_1p)(p-1)l}{d_1p^2}}\right),
\end{aligned}
$$

então, se $h \in L^{k'}(\Omega, |x|^{-c_1p^*})$ com $h \geq 0$ para q.t.p. em Ω e $\inf_{B(0,2R)} h > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-\beta} h\,|u_\epsilon|^l dx &\geq O(h,R)O\left(\epsilon^{\frac{(N-d_1p)(p-1)(N-\beta)}{d_1p(N-p-ap)}-\frac{(N-d_1p)(p-1)l}{d_1p^2}}\right) \\
&= O\left(\epsilon^{\frac{(N-d_1p)(p-1)(N-\beta)}{d_1p(N-p-ap)}-\frac{(N-d_1p)(p-1)l}{d_1p^2}}\right),
\end{aligned}
$$

e para h satisfazendo (4.21)

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-\beta} h\,|u_\epsilon|^l dx &\geq O(1)O\left(\epsilon^{\frac{(N-d_1p)(p-1)(N-\beta)}{d_1p(N-p-ap)}-\frac{(N-d_1p)(p-1)l}{d_1p^2}}\right) \\
&= O\left(\epsilon^{\frac{(N-d_1p)(p-1)(N-\beta)}{d_1p(N-p-ap)}-\frac{(N-d_1p)(p-1)l}{d_1p^2}}\right).
\end{aligned}
$$

uniformemente em h.

■

4.3 Prova do teorema 4.1

Nós provaremos este resultado através de uma versão local do princípio variacional de Ekeland, a saber, o lema 3.3 (Mizoguchi). Na verdade, a demonstração deste resultado é similar à prova do teorema 3.2. Na verdade, analogamente ao teorema 3.2 temos que para cada μ positivo existem $\lambda_0, \sigma, \rho > 0$ tais que

$$I(u,v) \geq \sigma \text{ se } ||(u,v)|| = \rho,$$

e o operador $I|_{\overline{B(0,\rho)}} : \overline{B(0,\rho)} \to \mathbb{R}$ é inferiormente limitado, contínuo e satisfaz $I(u_{t_0}, v_{t_0}) < 0 < \inf_{\partial \overline{B(0,\rho)}} I$ para algum $(u_{t_0}, v_{t_0}) \in B(0,\rho)$.

Então o lema 3.3 (Mizoguchi) implica que existe uma seqüência, $\{(u_n, v_n)\} \subset B(0,\rho)$, de Palais Smale para o operador I no nível $\inf_{\overline{B(0,s_{\lambda\mu})}} I$. Segue do lema 4.2 que essa seqüência é limitada. Em particular, existe (u,v) tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ e $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$, quando $n \to \infty$. Então, pelo teorema 4.4, temos que (u,v) é uma solução fraca do sistema (4.1). Pelo teorema 4.5, podemos supor que cada componente de (u,v) é não negativa. Por último, desde que $\inf_{\overline{B(0,\rho)}} I < 0$, o teorema 4.6 implica que $u, v \neq 0$.

■

4.4 Prova do teorema 4.2

Nós utilizaremos na demonstração deste resultado uma versão do teorema do passo da montanha.

Iniciamos esta demonstração observando que as condições geométricas do teorema do passo da montanha sem a condição de Palais Smale (teorema 6.2) para os casos $(\mathbb{H}_{4.3})$ e $(\mathbb{H}_{4.4})$ seguem analogamente ao que fizemos na prova do teorema (3.1) para os casos $(\mathbb{H}_{3.2})$ e $(\mathbb{H}_{3.4})$, respectivamente, ou seja, no caso $(\mathbb{H}_{4.3})$ existem $\sigma, \rho > 0$ tais que

$$I(t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{p}}v) \to -\infty \text{ quando } t \to \infty, \tag{4.25}$$

se $(u,v) \in (W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}))^2 \setminus \{0\}$, e

$$I(u_t, v_t) \geq \sigma \ \text{ se } \ ||(u,v)|| = \rho, \tag{4.26}$$

para cada λ e μ positivos; e no caso $(\mathbb{H}_{4.4})$ existem $\sigma, \rho, \lambda_1 > 0$ tais que (4.25) e (4.26) são satisfeitas para cada $0 < \lambda < \lambda_1$ e μ positivo.

Antes de aplicarmos o teorema do passo da montanha sem a condição de Palais Smale, nós enunciaremos e provaremos uma afirmação que será crucial na verificação de que cada componente da solução fraca que vamos obter é não trivial.

Afirmação. Consideremos $s_0 = s_1/(s_1^{\alpha} t_1^{\gamma})^{\frac{1}{p^*}}$ e $t_0 = t_1/(s_1^{\alpha} t_1^{\gamma})^{\frac{1}{p^*}}$, onde $s_1, t_1 > 0$ e $s_1/t_1 = (\alpha/\gamma)^{1/p}$ como no lema 4.1, e u_ϵ é a função definida no lema 4.3. Então, tanto para **i)** quanto para **ii)**, existe $\epsilon > 0$ de modo que

$$\sup_{t \geq 0} I(t(s_0 u_\epsilon), t(t_0 u_\epsilon)) < \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*}\right)(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}}.$$

De fato. Devido às condições geométricas do teorema do passo da montanha sem a condição de Palais Smale, para cada $\epsilon > 0$, existe $t_\epsilon > 0$ tal que

$$0 < \sigma \leq \sup_{t\geq 0} I(t(s_0 u_\epsilon), t(t_0 u_\epsilon)) = I(t_\epsilon(s_0 u_\epsilon), t_\epsilon(t_0 u_\epsilon)).$$

Suponhamos por absurdo que existe uma subseqüência $\{t_{\epsilon_n}\}$ de $\{t_\epsilon\}$ com

$$t_{\epsilon_n} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Então

$$\begin{aligned} 0 &< \sigma \\ &\leq \sup_{t\geq 0} I(t(s_0 u_{\epsilon_n}), t(t_0 u_{\epsilon_n})) \\ &= I(t_{\epsilon_n}(s_0 u_{\epsilon_n}), t_{\epsilon_n}(t_0 u_{\epsilon_n})) \\ &\leq (\tfrac{t_{\epsilon_n}^p s_0^p}{p} + \tfrac{t_{\epsilon_n}^p t_0^p}{p})||u_{\epsilon_n}||^p \\ &\leq \tfrac{t_{\epsilon_n}^p}{p}(s_0^p + t_0^p)(\tilde{S}_{a,p,R} + O(\epsilon_n^{(N-d_1p)/d_1p})) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, o que é uma contradição. Portanto, existe $l > 0$ com $t_\epsilon \geq l$ para todo $\epsilon > 0$. Conseqüentemente, denotando $c_0 = l^{\theta+\delta} s_0^\theta t_0^\delta$, conseguimos

$$\begin{aligned} \sup_{t\geq 0} I(t(s_0 u_\epsilon), t(t_0 u_\epsilon)) &\leq \tfrac{t_\epsilon^p}{p}(s_0^p + t_0^p)||u_\epsilon||^p - \lambda l^{\theta+\delta} s_0^\theta t_0^\delta \int_\Omega |x|^{-\beta} u_\epsilon^{\theta+\delta} dx \\ &\quad -\mu t_\epsilon^{\alpha+\gamma} s_0^\alpha t_0^\gamma \int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} u_\epsilon^{\alpha+\gamma} dx \\ &= \tfrac{t_\epsilon^p}{p}\left(\frac{s_1^p + t_1^p}{\left(s_1^\alpha t_1^\gamma\right)^{\frac{p}{p^*}}}||u_\epsilon||^p\right) - \mu t_\epsilon^{p^*} \frac{s_1^\alpha t_1^\gamma}{\left(s_1^\alpha t_1^\gamma\right)^{\frac{\alpha+\gamma}{p^*}}} \int_\Omega |x|^{-c_1 p^*} u_\epsilon^{p^*} dx \qquad (4.27) \\ &\quad -\lambda l^{\theta+\delta} s_0^\theta t_0^\delta \int_\Omega |x|^{-\beta} u_\epsilon^{p_0} dx \\ &= \tfrac{t_\epsilon^p}{p}\left(\frac{s_1^p + t_1^p}{\left(s_1^\alpha t_1^\gamma\right)^{\frac{p}{p^*}}}||u_\epsilon||^p\right) - \mu t_\epsilon^{p^*} - \lambda c_0 \int_\Omega |x|^{-\beta} u_\epsilon^{p_0} dx. \end{aligned}$$

O único ponto de máximo da função $f_\epsilon : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_\epsilon(t) = \left(\frac{s_1^p + t_1^p}{(s_1^\alpha t_1^\gamma)^{\frac{p}{p^*}}}||u_\epsilon||^p\right) \frac{t^p}{p} - \mu t^{p^*},$$

é dado por

$$t_{1_\epsilon} = (\mu p^*)^{\frac{-1}{p^*-p}} \left(\frac{s_1^p + t_1^p}{(s_1^\alpha t_1^\gamma)^{p/p^*}}\right)^{\frac{1}{p^*-p}} ||u_\epsilon||^{\frac{p}{p^*-p}}. \tag{4.28}$$

Sabemos que

$$(A+B)^k \leq A^k + k(A+B)^{k-1}B \tag{4.29}$$

para todo $A, B \geq 0$ e $k \geq 1$ (ver [54]). Também observamos que

$$\begin{aligned} \left[\frac{s_1^p + t_1^p}{(s_1^\alpha t_1^\gamma)^{\frac{p}{p^*}}}\right] &= \left[\left(\frac{s_1}{t_1}\right)^{\frac{p\gamma}{p^*}} + \left(\frac{s_1}{t_1}\right)^{\frac{-p\alpha}{p^*}}\right] \\ &= \left[\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{p^*}} + \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{-\alpha}{p^*}}\right]. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Pela desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, temos que o espaço $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ está contido em $W_{a,c_1}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então

$$\tilde{S}_{a,p} \leq C_{a,p}^*. \tag{4.31}$$

Substituindo (4.28) em (4.27), usando (4.29), (4.30) e o lema 4.3, nós obtemos

$$\begin{aligned} &\sup_{t\geq 0} I(t(s_0 u_\epsilon), t(t_0 u_\epsilon)) \\ &\leq (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \left\{[(\tfrac{\alpha}{\gamma})^{\frac{\gamma}{p^*}} + (\tfrac{\alpha}{\gamma})^{\frac{-\alpha}{p^*}}]||u_\epsilon||^p\right\}^{\frac{p^*}{p^*-p}} - \lambda c_0 \int_\Omega |x|^{-\beta} u_\epsilon^{p_0} dx \\ &= (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \left\{[(\tfrac{\alpha}{\gamma})^{\frac{\gamma}{p^*}} + (\tfrac{\alpha}{\gamma})^{\frac{-\alpha}{p^*}}]\tilde{S}_{a,p,R} + O\left(\epsilon^{\frac{N-d_1 p}{d_1 p}}\right)\right\}^{\frac{p^*}{p^*-p}} - \lambda c_0 \int_\Omega |x|^{-\beta} u_\epsilon^{p_0} dx \\ &\leq (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \left\{[(\tfrac{\alpha}{\gamma})^{\frac{\gamma}{p^*}} + (\tfrac{\alpha}{\gamma})^{\frac{-\alpha}{p^*}}]\tilde{S}_{a,p,R}\right\}^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O\left(\epsilon^{\frac{N-d_1 p}{d_1 p}}\right) - \lambda c_0 \int_\Omega |x|^{-\beta} u_\epsilon^{p_0} dx \\ &= (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \left\{[(\tfrac{\alpha}{\gamma})^{\frac{\gamma}{p^*}} + (\tfrac{\alpha}{\gamma})^{\frac{-\alpha}{p^*}}]\tilde{S}_{a,p}\right\}^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O\left(\epsilon^{\frac{N-d_1 p}{d_1 p}}\right) - \lambda c_0 \int_\Omega |x|^{-\beta} u_\epsilon^{p_0} dx. \end{aligned}$$

Agora, usando (4.31) e o lema 4.1, conseguimos

$$\begin{aligned} &\sup_{t\geq 0} I(t(s_0 u_\epsilon), t(t_0 u_\epsilon)) \\ &\quad\leq (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \left\{[(\tfrac{\alpha}{\gamma})^{\frac{\gamma}{p^*}} + (\tfrac{\alpha}{\gamma})^{\frac{-\alpha}{p^*}}]C_{a,p}^*\right\}^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O\left(\epsilon^{\frac{N-d_1 p}{d_1 p}}\right) \\ &\quad -\lambda c_0 \int_\Omega |x|^{-\beta} u_\epsilon^{p_0} dx \\ &\quad= (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O\left(\epsilon^{\frac{N-d_1 p}{d_1 p}}\right) - \lambda c_0 \int_\Omega |x|^{-(a+1)p_0+c} u_\epsilon^{p_0} dx. \end{aligned} \tag{4.32}$$

No item **i)**, temos por hipótese que

$$c < \tfrac{(p_0-p+1)N-(a+1)p_0}{p-1} - \tfrac{(N-p-ap)(p_0-p)}{p(p-1)}.$$

Então, usando (4.32), considerando o lema 4.3 com $l = p_0$, $k = 1$, $h \equiv 1$, $\beta = (a+1)p_0 - c$, observando que

$$l > \tfrac{(N-\beta)(p-1)}{N-p-ap} \Leftrightarrow c < \tfrac{(p_0-p+1)N-(a+1)p_0}{p-1}$$

e

$$\tfrac{(N-p_0-ap_0+c)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)} - \tfrac{(N-d_1p)(p-1)p_0}{d_1p^2} < \tfrac{N-d_1p}{d_1p},$$

obtemos, para cada $\lambda > 0$, um real $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno satisfazendo

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} I(t(s_0u_\epsilon), t(t_0u_\epsilon)) &\leq (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O\left(\epsilon^{\frac{N-d_1p}{d_1p}}\right) \\
&\quad -O\left(\epsilon^{\frac{(N-d_1p)(p-1)(N-p_0-ap_0+c)}{d_1p(N-p-ap)} - \frac{(N-d_1p)(p-1)p_0}{d_1p^2}}\right) \\
&< (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}}.
\end{aligned}$$

No item **ii)**, temos que $p_0 = p$. Assumindo que

$$c = \tfrac{N-p-ap}{p-1}$$

e observando que,

$$l = \tfrac{(N-\beta)(p-1)}{N-p-ap},$$

onde $l = p$, $k = 1$, $h \equiv 1$, $\beta = (a+1)p - c$, então, do lema 4.3 e de (4.32), conseguimos, para cada $0 < \lambda < \lambda_1$, que existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} I(t(s_0u_\epsilon), t(t_0u_\epsilon)) &\leq (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O\left(\epsilon^{\frac{N-d_1p}{d_1p}}\right) \\
&\quad -O\left(\epsilon^{\frac{N-d_1p}{d_1p}} |ln(\epsilon)|\right) \\
&< (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}}.
\end{aligned}$$

Porém, considerando

$$c < \tfrac{N-p-ap}{p-1},$$

nós observamos que

$$\tfrac{(N-d_1p)(p-1)(N-p-ap+c)}{d_1p(N-p-ap)} - \tfrac{(N-d_1p)(p-1)p}{d_1p^2} < \tfrac{N-d_1p}{d_1}$$

e

$$l > \tfrac{(N-\beta)(p-1)}{N-p-ap},$$

onde $l = p$, $k = 1$, $h \equiv 1$, $\beta = (a+1)p - c$, então, do lema 4.3 e de (4.32), para cada $0 < \lambda < \lambda_0$, existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} I(t(s_0u_\epsilon), t(t_0u_\epsilon)) &\leq (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O\left(\epsilon^{\frac{N-d_1p}{d_1p}}\right)\\ &\quad -O\left(\epsilon^{\frac{(N-d_1p)(p-1)(N-p-ap+c)}{d_1p(N-p-ap)} - \frac{(N-d_1p)(p-1)p}{d_1p^2}}\right)\\ &< (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}}.\end{aligned}$$

Assim, concluímos a prova da afirmação.

Fixemos $\epsilon > 0$ como na afirmação acima, então o teorema do passo da montanha sem a condição de Palais Smale (teorema 6.2) implica que existe $\{(u_n, v_n)\}$ uma seqüência de Palais Smale para o operador I no nível $\tilde{c}$, onde

$$0 < \sigma \leq \tilde{c} = \inf_{g\in\Gamma} \max_{s\in[0,1]} I(g(s)) < (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}} \tag{4.33}$$

e

$$\Gamma := \left\{g \in C\left([0,1], (W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}))^2\right) : g(0) = 0 \text{ e } g(1) = (l_0(s_0u_\epsilon), l_0(t_0u_\epsilon))\right\},$$

onde $I(l_0(s_0u_\epsilon), l_0(t_0u_\epsilon)) < 0$ para algum $l_0 > 0$ suficientemente grande.

Pelo lema 4.2, se $(\mathbb{H}_{4.3})$ é satisfeita, temos que a seqüência $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada em $(W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}))^2$ para todos λ e μ positivos. Porém, se vale $(\mathbb{H}_{4.4})$, então existe $\lambda_0 \in (0, \lambda_1)$ tal que $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada em $(W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}))^2$, para todo $\mu > 0$ e $0 < \lambda < \lambda_0$. Logo, existe $(u, v) \in (W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}))^2$ com $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$, quando $n \to \infty$. Então, pelo teorema 4.4, (u, v) é uma solução fraca do sistema (4.1) e, pelo teorema 4.5, podemos assumir que cada componente é não negativa. Por último, tendo em vista a equação (4.33), o teorema 4.6 implica que $u, v \not\equiv 0$. ∎

4.5 Prova do teorema 4.3

Usaremos uma vez mais o teorema do passo da montanha para provar esse resultado.

Novamente, seguindo a prova nos casos $(\mathbb{H}_{3.2})$ e $(\mathbb{H}_{3.4})$ do teorema (3.1), mostramos que as condições geométricas do teorema 6.2 são satisfeitas para todo λ e μ positivos se valer $(\mathbb{H}^{p,q}_{4.3})$, e para todo $0<\lambda<\lambda_1$ e μ positivo se valer $(\mathbb{H}^{p,q}_{4.4})$, para algum λ_1 positivo. Logo, segue do teorema do passo da montanha sem a condição de Palais Smale (teorema 6.2) que existe $\{(u_n, v_n)\}$ uma seqüência$-(PS)_c$, onde

$$0<\sigma\leq c=\inf_{g\in\Gamma}\max_{s\in[0,1]}I(g(s))$$

e

$$\Gamma := \left\{g\in C\left([0,1], W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})\times W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-bq})\right) : g(0)=0 \text{ e } g(1)=e\right\},$$

para algum $e\in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})\times W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-bq})$ com $I(e)<0$.

Aplicando o lema 4.2, se $(\mathbb{H}^{p,q}_{4.3})$ é satisfeita, temos que a seqüência $\{(u_n,v_n)\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})\times W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-bq})$ para cada $\lambda>0$ e independentemente de $\mu>0$. Pelo mesmo lema, se vale $(\mathbb{H}^{p,q}_{4.4})$, então existe $\lambda_0\in(0,\lambda_1]$ tal que $\{(u_n,v_n)\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})\times W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-bq})$ para cada $0<\lambda<\lambda_0$ e independentemente de $\mu>0$. Assim, em ambos os casos, existe uma constante $M>0$ de modo que $||(u_n,v_n)||\leq M$, para todo $n\in\mathbb{N}$, independentemente de $\mu>0$. Portanto, obtemos

$$0<c=\lim_{n\to\infty}I(u_n,v_n)\leq \tfrac{1}{p}||u_n||^p+\tfrac{1}{q}||v_n||^q\leq\overline{M}. \tag{4.34}$$

Ainda pela limitação, existe $(u,v)\in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})\times W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-bq})$ com $u_n\rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap})$ e $v_n\rightharpoonup v$ fracamente em $W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-bq})$, quando $n\to\infty$. Logo, segue do teorema 4.4 que (u,v) é uma solução fraca do sistema (4.1) e devido ao teorema 4.5 cada componente é não negativa.

Concluiremos esse resultado mostrando que existe μ_0 positivo tal que $u,v\not\equiv 0$, desde que $0<\mu<\mu_0$. Supondo por absurdo que $u\equiv 0$ para q.t.p. em Ω e seguindo a mesma idéia que usamos no teorema 4.6, obtemos

$$0<l=\lim_{n\to\infty}\frac{||u_n||^p}{\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{||v_n||^q}{\gamma}=\mu\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|x|^{-c_1p^*}u_{n_+}^{\alpha}v_{n_+}^{\gamma}dx.$$

Logo, pela definição de seqüência$-(PS)_c$, conseguimos

$$c \;=\; \lim_{n\to\infty} I(u_n,v_n) = (\tfrac{\alpha}{p}+\tfrac{\gamma}{q}-1)l \geq 0. \tag{4.35}$$

Por outro lado, temos pelas definições de $C^*_{a,p}$ e $C^*_{b,q}$ que

$$\left(\int_\Omega |x|^{-c_1p^*}u_{n_+}^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} C^*_{a,p} \leq ||u_n||^p \text{ e } \left(\int_\Omega |x|^{-c_2q^*}v_{n_+}^{q^*}dx\right)^{\frac{q}{q^*}} C^*_{b,q} \leq ||v_n||^q$$

e usando a desigualdade de Young vem

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-c_1p^*}u_{n_+}^{\alpha}v_{n_+}^{\gamma}dx &\leq \tfrac{\alpha}{p^*}\int_\Omega |x|^{-c_1p^*}u_{n_+}^{p^*}dx + \tfrac{\gamma}{q^*}\int_\Omega |x|^{-c_2q^*}v_{n_+}^{q^*}dx \\ &\leq \tfrac{\alpha}{p^*}(C^*_{a,p})^{-p/p^*}||u_n||^{p^*} + \tfrac{\gamma}{q^*}(C^*_{b,q})^{-q/q^*}||v_n||^{q^*}.\end{aligned}$$

Passando o limite, obtemos

$$\begin{aligned}\tfrac{l}{\mu} &\leq \frac{\alpha^{(p^*+p)/p}}{p^*}(C^*_{a,p})^{-p^*/p}l^{p^*/p} + \frac{\gamma^{(q^*+q)/q}}{q^*}(C^*_{b,q})^{-q^*/q}l^{q^*/q} \\ &\leq \left(\frac{\alpha^{(p^*+p)/p}}{p^*}(C^*_{a,p})^{-p^*/p} + \frac{\gamma^{(q^*+q)/q}}{q^*}(C^*_{b,q})^{-q^*/q}\right)l^\tau,\end{aligned}$$

onde $\tau = \max\{p^*/p, q^*/q\}$ se $l>1$ e $\tau = \min\{p^*/p, q^*/q\}$ se $l \leq 1$. Portanto, obtemos

$$l \geq \left[\mu\left(\frac{\alpha^{(p^*+p)/p}}{p^*}(C^*_{a,p})^{-p^*/p} + \frac{\gamma^{(q^*+q)/q}}{q^*}(C^*_{b,q})^{-q^*/q}\right)\right]^{\frac{-1}{\tau-1}}. \tag{4.36}$$

Substituindo (4.36) em (4.35) e tomando $\mu_0>0$ suficientemente pequeno, temos

$$c \geq (\tfrac{\alpha}{p}+\tfrac{\gamma}{q}-1)\left[\mu\left(\frac{\alpha^{(p^*+p)/p}}{p^*}(C_{a,p})^{-p^*/p} + \frac{\gamma^{(q^*+q)/q}}{q^*}(C^*_{b,q})^{-q^*/q}\right)\right]^{\frac{-1}{\tau-1}} \geq \overline{M},$$

para todo $0<\mu<\mu_0$, o que contradiz (4.34). ∎

Capítulo

5

Multiplicidade de soluções para sistemas com expoentes críticos

5.1 Introdução

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} -Lu_{ap} & = & \theta|x|^{-c_1p^*}h\,u^{\theta-1}v^{\delta} + \mu\alpha|x|^{-c_1p^*}u^{\alpha-1}v^{\gamma} & \text{em} & \mathbb{R}^N, \\ -Lv_{bq} & = & \delta|x|^{-c_2q^*}h\,u^{\theta}v^{\delta-1} + \mu\gamma|x|^{-c_2q^*}u^{\alpha}v^{\gamma-1} & \text{em} & \mathbb{R}^N, \\ u,v & \geq & 0 \text{ e } u,v \not\equiv 0, & \text{em} & \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $Lw_{er} \equiv div(|x|^{-er}|\nabla w|^{r-2}\nabla w)$, μ é um parâmetro positivo e os expoentes verificam

$$\begin{gathered} 1 < p,q < N,\ -\infty < a < (N-p)/p,\ -\infty < b < (N-q)/q, \\ a \leq c_1 < a+1,\ b \leq c_2 < b+1,\ d_1 = 1+a-c_1,\ d_2 = 1+b-c_2, \\ p^* = Np/(N-d_1p),\ q^* = Nq/(N-d_2q),\ c_1p^* = c_2q^*, \\ \tfrac{\theta}{p} + \tfrac{\delta}{q} < 1 \text{ e } \tfrac{\alpha}{p^*} + \tfrac{\gamma}{q^*} = 1, \end{gathered} \tag{$\mathbb{H}^{**}_{exp}$}$$

existem $p_1 \in (1,p)$, $q_1 \in (1,q)$ e $k, k^{'} > 1$ tais que

$$\begin{cases} \frac{\theta}{p_1} + \frac{\delta}{q_1} = \frac{1}{k^{'}} + \frac{1}{k} = 1,\ kp_1 = p^*,\ kq_1 = q^*, \\ h \in L^{k^{'}}(\Omega, |x|^{-c_1p^*}),\ h \geq 0 \text{ para q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{5.2}$$

O estudo deste problema foi motivado pelo trabalho de Alves, Gonçalves e Miyagaki

[4] no qual eles mostraram que o problema escalar

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = h(x)u^q + u^{2^*} \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0,\ u \not\equiv 0,\ \int_{\mathbb{R}^N} a\, u^2\, dx < \infty, \end{cases}$$

onde $N \geq 3$, $0 < q < 1$, $a, h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é não negativa e h é mensurável, possui pelo menos duas soluções fracas distintas, desde que h satisfaça certas condições.

Antes de enunciar nossos resultados, introduziremos a seguinte definição.

Definição 5.1 *Considere* $1 < p < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$, $a \leq c_1 < a+1$, $d_1 = 1+a-c_1$, $p^* = Np/(N-d_1p)$, k, k', $p_1 = q_1 > 1$ *como em* (5.2)*. Fixados* c_0 *e* R_0 *constantes positivas, nós definimos o conjunto* $\mathbb{E}$ *como o subconjunto de* $L^{k'}(\mathbb{R}^N, |x|^{-c_1p^*})$ *dado pelas funções não negativas* $h \in L^{k'}(\mathbb{R}^N, |x|^{-c_1p^*})$ *satisfazendo*

$$\left(1 + R^{\frac{d_1p(N-p-ap)}{(p-1)(N-d_1p)}}\right)^{\frac{-(N-d_1p)p_1}{d_1p}} R^{N-c_1p^*} \inf_{B(0,2R)} h \geq c_0, \text{ para algum } R \in (0, R_0).$$

Também, para $\lambda > 0$, *considere* $\mathbb{E}_\lambda$ *o subconjunto de* $\mathbb{E}$ *formado por*

$$\mathbb{E}_\lambda = \left\{ h \in \mathbb{E} : ||h||_{L^{k'}(\mathbb{R}^N, |x|^{-c_1p^*})} < \lambda \right\}.$$

Teorema 5.1 *Além de* $(\mathbb{H}^{**}_{exp})$ *e* (5.2)*, assuma que* $p = q$, $a = b \geq 0$ *e* $p_1 = q_1$*. Então, para cada* $\mu > 0$, *existe* $\lambda_0 = \lambda_0(\mu) > 0$ *tal que o sistema* (5.1) *possui pelo menos duas soluções fracas, onde cada componente é não trivial e não negativa, para cada* $h \in \mathbb{E}_\lambda$, *desde que* $0 < \lambda < \lambda_0$.

Teorema 5.2 *Suponha* $(\mathbb{H}^{**}_{exp})$ *e* (5.2)*. Então existe* $\mu_0 > 0$ *tal que, para cada* $\mu \in (0, \mu_0)$, *existe* $\lambda_0 = \lambda_0(\mu)$ *positivo tal que o sistema* (5.1) *possui pelo menos duas soluções fracas, onde cada componente é não trivial e não negativa, para cada* $h \in \mathbb{E}_\lambda$ *com* $0 < \lambda < \lambda_0$.

5.2 Resultados preliminares

Consideremos o funcional de Euler-Lagrange

$$I : W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N, |x|^{-bq}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dado por

$$
\begin{aligned}
I(u,v) = {} & \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bq}|\nabla v|^q\,dx \\
& -\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1p^*} h\, u_+^\theta v_+^\delta\,dx - \mu\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1p^*} u_+^\alpha v_+^\gamma\,dx,
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

o qual, sob as hipóteses dos teoremas enunciados na seção (5.1), está bem definido e é de classe C^1 com derivada de Gâteaux dada por

$$
\begin{aligned}
\left\langle I'(u,v),(w,z)\right\rangle = {} & \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bq}|\nabla v|^{q-2}\nabla v\nabla z\,dx \\
& -\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1p^*} h\,(\theta u_+^{\theta-1} v_+^\delta w + \delta u_+^\theta v_+^{\delta-1} z)\,dx \\
& -\mu\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1p^*} (\alpha u_+^{\alpha-1} v_+^\gamma w + \gamma u_+^\alpha v^{\gamma-1} z)\,dx.
\end{aligned}
$$

Lema 5.1 *Seja $\lambda_0 > 0$. Além de $(\mathbb{H}^{**}_{exp})$ e (5.2), assuma que $\{(u_n,v_n)\}$ contida em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N,|x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N,|x|^{-bq})$ é uma seqüência$-(PS)_c$. Então $\{(u_{n_+},v_{n_+})\}$ é uma seqüência$-(PS)_c$, limitada em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N,|x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N,|x|^{-bq})$ independentemente de $\mu > 0$ e $h \in \mathbb{E}_\lambda$, com $0 < \lambda < \lambda_0$.*

Demonstração. Usando a definição de seqüência$-(PS)_c$ e a desigualdade de Young, nós obtemos

$$
\begin{aligned}
c + ||(u_n,v_n)|| + O_n(1) &\geq I(u_n,v_n) - \langle I'(u_n,v_n),(u_n/p^*, v_n/q^*)\rangle \\
&\geq (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})||u_n||^p + (\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{q^*})||v_n||^q \\
&\quad +\lambda_0 M(||u_n||^{p_1} + ||v_n||^{q_1}),
\end{aligned}
$$

onde $M = (\frac{\theta}{p^*} + \frac{\delta}{q^*} - 1)(\frac{\theta C^{p_1/p}}{p_1} + \frac{\delta C^{q_1/q}}{q_1})$. Portanto, como $p_1 \in (1,p)$ e $q_1 \in (1,q)$, temos que $\{(u_n,v_n)\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N,|x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N,|x|^{-bq})$ independentemente de $\mu > 0$ e $h \in \mathbb{E}_\lambda$, com $0 < \lambda < \lambda_0$. Em particular, as seqüências $\{(u_{n_-},v_{n_-})\}$ e $\{(u_{n_+},v_{n_+})\}$ são limitadas em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N,|x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N,|x|^{-bq})$. Então

$$
-||u_{n_-}||^p = \langle I'(u_n,v_n),(u_{n_-},0)\rangle \to 0 \;\text{ quando }\; n \to \infty \tag{5.4}
$$

e

$$
-||v_{n_-}||^q = \left\langle I'(u_n,v_n),(0,v_{n_-})\right\rangle \to 0 \;\text{ quando }\; n \to \infty. \tag{5.5}
$$

Obtemos para $(w,z) \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N,|x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N,|x|^{-bq})$ que

$$\begin{aligned}\langle I'(u_{n+},v_{n+}),(w,z)\rangle = \langle I'(u_n,v_n),(w,z)\rangle + \int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_{n-}\nabla w\,dx\\ +\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-bq}|\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_{n-}\nabla z\,dx.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Mas, por (5.4), (5.5) e pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_{n-}\nabla w\,dx\right| \leq ||u_{n-}||^{p-1}||w|| = O_n(1) \tag{5.7}$$

e

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-bq}|\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_{n-}\nabla z\,dx\right| \leq ||v_{n-}||^{q-1}||z|| = O_n(1), \tag{5.8}$$

onde $O_n(1) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Conseqüentemente, tomando o limite em (5.6) e usando as desigualdades (5.7) e (5.8), conseguimos

$$I'(u_{n_+},v_{n_+}) \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Similarmente, temos

$$\begin{aligned} I(u_{n_+},v_{n_+}) &= I(u_n,v_n) + \tfrac{1}{p}||u_{n-}||^p + \tfrac{1}{q}||v_{n-}||^q \\ &= I(u_n,v_n) + O_n(1), \end{aligned}$$

então

$$I(u_{n_+},v_{n_+}) \to c \text{ quando } n \to \infty.$$

■

Teorema 5.3 *Além de $(\mathbb{H}^{**}_{exp})$ e (5.2), assuma que $\{(u_n,v_n)\}$ em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N,|x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N,|x|^{-bq})$ é uma seqüência$-(PS)_c$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N,|x|^{-ap})$ e $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N,|x|^{-bq})$. Então (u,v) é uma solução fraca do sistema (5.1).*

Demonstração. Seja $(w,z) \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N,|x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N,|x|^{-bq})$. Usando os mesmos argumentos da prova do teorema 4.4, mostramos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla w\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w\,dx, \tag{5.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}u_{n_+}^{\alpha-1}v_{n_+}^{\gamma}w\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}u_{+}^{\alpha-1}v_{+}^{\gamma}w\,dx, \tag{5.10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-bq}|\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n\nabla z\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-bq}|\nabla v|^{q-2}\nabla v\nabla z\,dx \tag{5.11}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}u_{n_+}^{\alpha}v_{n_+}^{\gamma-1}z\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}u_{+}^{\alpha}v_{+}^{\gamma-1}z\,dx. \tag{5.12}$$

Conseguimos da desigualdade de Hölder generalizada e da desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}|u_{n_+}^{\theta-1}v_{n_+}^{\delta}w|^k dx &\leq ||u_n||^{(\theta-1)kp_0/p_0}_{L^{kp_0}(\mathbb{R}^N,|x|^{-c_1p^*})}||w||^{kp_0/p_0}_{L^{kp_0}(\mathbb{R}^N,|x|^{-c_1p^*})}||v_n||^{\delta kq_0/q_0}_{L^{kq_0}(\mathbb{R}^N,|x|^{-c_1p^*})}\\ &\leq M||u_n||^{k(\theta-1)}||w||^k||v_n||^{k\delta},\end{aligned}$$

logo, $\{u_{n_+}^{\theta-1}v_{n_+}^{\delta}w\}$ é limitada em $L^k(\mathbb{R}^N,|x|^{-c_1p^*})$. Analogamente, $\{u_{n_+}^{\theta}v_{n_+}^{\delta-1}z\}$ é limitada em $L^k(\mathbb{R}^N,|x|^{-c_1p^*})$. Então, do lema (6.3), $u_{n_+}^{\theta-1}v_{n_+}^{\delta}w \rightharpoonup u^{\theta-1}v^{\delta}w$ e $u_{n_+}^{\theta}v_{n_+}^{\delta-1}z \rightharpoonup u^{\theta}v^{\delta-1}z$ fracamente em $L^k(\mathbb{R}^N,|x|^{-c_1p^*})$, quando $n\to\infty$. Portanto, para cada $h\in L^{k'}(\mathbb{R}^N,|x|^{-c_1p^*})$ com $h\geq 0$ para q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}hu_{n_+}^{\theta-1}v_{n_+}^{\delta}w\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}hu_{+}^{\theta-1}v_{+}^{\delta}w\,dx. \tag{5.13}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}hu_{n_+}^{\theta}v_{n_+}^{\delta-1}z\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}hu_{+}^{\theta}v_{+}^{\delta-1}z\,dx. \tag{5.14}$$

Por último, usando a definição de seqüência$-(PS)_c$ e os limites $(5.9)-(5.14)$, nós concluímos

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to\infty}\langle I'(u_n,v_n),(w,z)\rangle\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w dx+\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-bq}|\nabla v|^{q-2}\nabla v\nabla z\,dx\\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}h\left(\theta u_+^{\theta-1}v_+^{\delta}w+\delta u_+^{\theta}v_+^{\delta-1}z\right)\,dx\\ &\quad -\mu\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}\left(\alpha u_+^{\alpha-1}v_+^{\gamma}w+\gamma u_+^{\alpha}v_+^{\gamma-1}z\right)\,dx,\end{aligned}$$

para todo $(w,z)\in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N,|x|^{-ap})\times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N,|x|^{-bq})$, ou seja, (u,v) é uma solução fraca do sistema (4.1). ∎

Lema 5.2 *Suponha* ($\mathbb{H}^{**}_{exp}$) *e* (5.2). *Se* $\{(u_n, v_n)\} \subset W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N, |x|^{-bq})$ *é uma seqüência limitada com* $u_n(x) \to u(x)$, $v_n(x) \to v(x)$, $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ *e* $\nabla v_n(x) \to \nabla v(x)$, *quando* $n \to \infty$, *para q.t.p.* $x \in \mathbb{R}^N$, *onde* $(u, v) \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N, |x|^{-bq})$. *Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*}|u_n|^\alpha |v_n|^\gamma dx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*}|\tilde{u}_n|^\alpha |\tilde{v}_n|^\gamma dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*}|u|^\alpha |v|^\gamma dx + O_n(1),$$

$$||u_n||^p = ||\tilde{u}_n||^p + ||u||^p + O_n(1)$$

e

$$||v_n||^q = ||\tilde{v}_n||^q + ||v||^q + O_n(1),$$

onde $\tilde{u}_n = u_n - u$, $\tilde{v}_n = v_n - v$ *e* $O_n(1) \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

Demonstração. Afirmamos que para todo $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ de modo que

$$|(s+a)^\alpha (t+b)^\gamma - s^\alpha t^\gamma| \leq \epsilon C(|s|^{p^*} + |t|^{q^*}) + C_\epsilon C(|a|^{p^*} + |b|^{q^*}), \tag{5.15}$$

onde C é uma constante positiva independente de ϵ.

De fato. Segue do teorema do valor médio que existe $\eta \in (0,1)$ satisfazendo

$$|(s+a)^\alpha (t+b)^\gamma - s^\alpha t^\gamma| \leq \alpha|s+\eta a|^{\alpha-1}|t+\eta b|^\gamma |a| + \gamma|s+\eta a|^\alpha |t+\eta b|^{\gamma-1}|b|.$$

Observando que

$$\tfrac{\alpha-1}{p^*-1} + \tfrac{\gamma p^*}{q^*(p^*-1)} = \tfrac{\gamma-1}{q^*-1} + \tfrac{\alpha q^*}{p^*(q^*-1)} = 1 \text{ e } \tfrac{p^*-1}{\alpha-1}, \tfrac{q^*-1}{\gamma-1} > 1,$$

e usando a desigualdade de Young, nós obtemos

$$\begin{aligned} |(s+a)^\alpha (t+b)^\gamma - s^\alpha t^\gamma| \leq {} & \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{p^*-1}|s+\eta a|^{p^*-1}|a| + \tfrac{\alpha\gamma p^*}{q^*(p^*-1)}|t+\eta b|^{\frac{q^*(p^*-1)}{p^*}}|a| \\ & + \tfrac{\alpha\gamma q^*}{p^*(q^*-1)}|s+\eta a|^{\frac{p^*(q^*-1)}{q^*}}|b| + \tfrac{\gamma(\gamma-1)}{q^*-1}|t+\eta b|^{q^*-1}|b|. \end{aligned}$$

Daí, dado $\epsilon > 0$, como

$$\tfrac{p^*-1}{p^*} + \tfrac{1}{p^*} = 1 \text{ e } \tfrac{q^*-1}{q^*} + \tfrac{1}{q^*} = 1,$$

obtemos da desigualdade de Young com ϵ que existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
&|(s+a)^\alpha (t+b)^\gamma - s^\alpha t^\gamma| \\
&\quad \le \epsilon\,[\tfrac{\alpha(\alpha-1)}{p^*-1}]|s+\eta a|^{p^*} + C_\epsilon[\tfrac{\alpha(\alpha-1)}{p^*-1}]|a|^{p^*} + \epsilon\,[\tfrac{\alpha\gamma p^*}{q^*(p^*-1)}]|t+\eta b|^{q^*} + C_\epsilon[\tfrac{\alpha\gamma p^*}{q^*(p^*-1)}]|a|^{p^*} \\
&\qquad +\epsilon\,[\tfrac{\alpha\gamma q^*}{p^*(q^*-1)}]|s+\eta a|^{p^*} + C_\epsilon[\tfrac{\alpha\gamma q^*}{p^*(q^*-1)}]|b|^{q^*} + \epsilon\,[\tfrac{\gamma(\gamma-1)}{q^*-1}]|t+\eta b|^{q^*} + C_\epsilon[\tfrac{\gamma(\gamma-1)}{q^*-1}]|b|^{q^*} \\
&\quad \le \epsilon\,[\tfrac{\alpha(\alpha-1)2^{p^*-1}}{p^*-1}]|s|^{p^*} + \epsilon\,[\tfrac{\alpha(\alpha-1)2^{p^*-1}}{p^*-1}]|a|^{p^*} + C_\epsilon[\tfrac{\alpha(\alpha-1)}{p^*-1}]|a|^{p^*} + \epsilon\,[\tfrac{\alpha\gamma p^* 2^{q^*-1}}{q^*(p^*-1)}]|t|^{q^*} \\
&\qquad +\epsilon\,[\tfrac{\alpha\gamma p^* 2^{q^*-1}}{q^*(p^*-1)}]|b|^{q^*} + C_\epsilon[\tfrac{\alpha\gamma p^*}{q^*(p^*-1)}]|a|^{p^*} + \epsilon\,[\tfrac{\alpha\gamma q^* 2^{p^*-1}}{p^*(q^*-1)}]|s|^{p^*} + \epsilon\,[\tfrac{\alpha\gamma q^* 2^{p^*-1}}{p^*(q^*-1)}]|a|^{p^*} \\
&\qquad +C_\epsilon[\tfrac{\alpha\gamma q^*}{p^*(q^*-1)}]|b|^{q^*} + \epsilon\,[\tfrac{\gamma(\gamma-1)2^{q^*-1}}{q^*-1}]|t|^{q^*} + \epsilon\,[\tfrac{\gamma(\gamma-1)2^{q^*-1}}{q^*-1}]|b|^{q^*} + C_\epsilon\tfrac{\gamma(\gamma-1)}{q^*-1}|b|^{q^*},
\end{aligned}
$$

donde segue (5.15).

Definimos a função real $g_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$
\begin{aligned}
g_n &:= ||u_n|^\alpha |v_n|^\gamma - |u_n - u|^\alpha |v_n - v|^\gamma - |u|^\alpha |v|^\gamma| \\
&\le |(u_n)^\alpha (v_n)^\gamma - (u_n-u)^\alpha (v_n - v)^\gamma| + |u|^\alpha |v|^\gamma.
\end{aligned}
$$

Fazendo $s = u_n - u$, $t = v_n - v$, $a = u$ e $b = v$ em (5.15), conseguimos

$$
|(u_n)^\alpha (v_n)^\gamma - (u_n-u)^\alpha (v_n-v)^\gamma| \le \epsilon\, C(|u_n-u|^{p^*} + |v_n - v|^{p^*}) + C_\epsilon C(|u|^{p^*} + |v|^{p^*}),
$$

portanto

$$
0 \le g_n \le \epsilon\, C(|u_n-u|^{p^*} + |v_n-v|^{p^*}) + C_\epsilon C(|u|^{p^*} + |v|^{p^*}) + \tfrac{\alpha}{p^*}|u|^{p^*} + \tfrac{\gamma}{q^*}|v|^{p^*}.
$$

Conseqüentemente, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 \le W_{n,\epsilon} &:= \left[g_n - \epsilon\, C(|u_n-u|^{p^*} + |v_n-v|^{p^*})\right]_+ \\
&\le C_\epsilon C(|u|^{p^*} + |v|^{p^*}) + \tfrac{\alpha}{p^*}|u|^{p^*} + \tfrac{\gamma}{q^*}|v|^{p^*} \in L^1(\Omega, |x|^{-c_1 p^*})
\end{aligned}
$$

e também, vemos que $W_{n,\epsilon}(x) \to 0$ quando $n \to \infty$ para q.t.p. $x \in \Omega$. Logo, segue do teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$
\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} W_{n,\epsilon}(x)dx = 0.
$$

Então, como $\{(u_n, v_n)\}$ é uma seqüência limitada, temos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}|g_n|\,dx &\leq \limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}\left|W_{n,\epsilon}+\epsilon\,C(|u_n-u|^{p^*}+|v_n-v|^{p^*})\right|\,dx\\ &\leq \epsilon\,C\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}(|u_n-u|^{p^*}+|v_n-v|^{p^*})\,dx\\ &\leq M\epsilon,\end{aligned}$$

onde M é uma constante positiva independente de ϵ.

Conseqüentemente, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}|g_n|\,dx = 0.$$

■

Teorema 5.4 *Suponha* $(\mathbb{H}^{**}_{exp})$ *e* (5.2). *Se* $p = q$, $0 \leq a = b < (N-p)/p$, $p_1 = q_1$ *e* $p^* = q^*$, *então toda seqüência*$-(PS)_c$ $\{(u_n, v_n)\}$ *em* $(W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}))^2$ *com* $u_n, v_n \geq 0$ *para q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$ *é pré-compacta, desde que*

$$c < (\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}}\tilde{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}} - K(h), \tag{5.16}$$

onde

$$K(h) = \left[1-(\tfrac{\theta+\delta}{p^*})\right]\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}h\,u_n^{\theta}v_n^{\delta}dx.$$

Demonstração. Pelo lema 5.1 segue que $\{(u_n, v_n)\}$ é uma seqüência limitada em $(W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}))^2$. Conseqüentemente, existe $(u,v) \in (W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}))^2$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap})$, quando $n \to \infty$. Pelo lema 6.4, passando a uma subseqüência se necessário, nós podemos admitir que $u_n(x) \to u(x)$ e $v_n(x) \to v(x)$, quando $n \to \infty$, para q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Também, segue do teorema 6.15 que $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ e $\nabla v_n(x) \to \nabla v(x)$, quando $n \to \infty$, para q.t.p. em $x \in \mathbb{R}^N$. Como $\theta/p_1 + \gamma/q_1 = 1$, segue das desigualdades de Young e Caffarelli-Kohn-Nirenberg que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}|u_n^{\theta}v_n^{\gamma}|^k dx &\leq \tfrac{\theta}{p_1}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}|u_n|^{kp_1}dx + \tfrac{\delta}{q_1}\int_{\Omega}|x|^{-c_1p^*}|v_n|^{kq_1}dx\\ &\leq \tfrac{\theta}{p_1}C^{kp_1/p}||u_n||^{kp_1} + \tfrac{\delta}{q_1}C^{kq_1/q}||v_n||^{kq_1},\end{aligned}$$

portanto, $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada em $L^k(\mathbb{R}^N, |x|^{-c_1 p^*})$. Assim, pelo lema 6.3, $u_n^\theta v_n^\delta \rightharpoonup u^\theta v^\delta$ fracamente em $L^k(\mathbb{R}^N, |x|^{-c_1 p^*})$ quando $n \to \infty$. Em particular, para toda função h pertencente ao espaço $L^{k'}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap})$ com $h \geq 0$ para q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} h\, u_n^\theta v_n^\delta dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} h\, u^\theta v^\delta dx. \tag{5.17}$$

Obtemos do teorema 5.3 que (u, v) é solução fraca do sistema (5.1), ou seja, $\langle I'(u,v), (w,z)\rangle = 0$ para todo $(w, z) \in (W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}))^2$. Portanto, segue de (5.17), do lema 5.2 e da definição de seqüência$-(PS)_c$ que

$$\begin{aligned}
&||\tilde{u}_n||^p - \mu\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} |\tilde{u}_n|^\alpha |\tilde{v}_n|^\gamma dx \\
&= ||u_n||^p - ||u||^p - \mu\alpha \left[\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} u_n^\alpha v_n^\gamma dx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} u^\alpha v^\gamma dx\right] + O_n(1) \\
&= \left\langle I'(u_n, v_n), (u_n, 0)\right\rangle - \left\langle I'(u, v), (u, 0)\right\rangle + O_n(1) \\
&= O_n(1).
\end{aligned}$$

Similarmente, obtemos

$$||\tilde{v}_n||^p - \mu\gamma \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} |\tilde{u}_n|^\alpha |\tilde{v}_n|^\gamma dx \;\; = \;\; O_n(1).$$

Assim, existe $l \geq 0$ satisfazendo

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{||\tilde{u}_n||^p}{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{||\tilde{v}_n||^p}{\gamma} = \mu \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} |\tilde{u}_n|^\alpha |\tilde{v}_n|^\gamma dx.$$

Conseqüentemente, se $l = 0$ então o resultado está provado. Suponhamos por absurdo que $l > 0$. Novamente, pela definição de seqüência$-(PS)_c$, conseguimos

$$\begin{aligned}
c + O_n(1) &= I(u_n, v_n) - \tfrac{1}{p^*}\langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle \\
&= (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(||\tilde{u}_n||^p + ||\tilde{v}_n||^p) + (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(||u||^p + ||v||^p) \\
&\quad + (\tfrac{\theta+\delta}{p^*} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} h\, u_n^\theta v_n^\delta dx + O_n(1) \\
&\geq (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\alpha + \gamma) l + (\tfrac{\theta+\delta}{p^*} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} h\, u_n^\theta v_n^\delta dx + O_n(1) \\
&= (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*}) p^* l + (\tfrac{\theta+\delta}{p^*} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} h\, u_n^\theta v_n^\delta dx + O_n(1).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Por outro lado, segue da definição de $\tilde{S}_\Omega$ que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} |\tilde{u}_n|^\alpha |\tilde{v}_n|^\gamma dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \tilde{S}_{\mathbb{R}^N} \leq ||\tilde{u}_n||^p + ||\tilde{v}_n||^p, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, tomando o limite, obtemos

$$\left(\frac{l}{\mu}\right)^{\frac{p}{p^*}} \tilde{S}_{\mathbb{R}^N} \leq (\alpha+\gamma) l = p^* l;$$

conseqüentemente

$$l \geq (\mu)^{\frac{-p}{p^*-p}} (p^*)^{\frac{-p^*}{p^*-p}} \tilde{S}_{\mathbb{R}^N}^{\frac{p^*}{p^*-p}}. \tag{5.19}$$

Substituindo (5.19) em (5.18) e tomando o limite, concluímos que

$$\begin{aligned} c &\geq \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*}\right) p^* (\mu)^{\frac{-p}{p^*-p}} (p^*)^{\frac{-p^*}{p^*-p}} \tilde{S}_{\mathbb{R}^N}^{\frac{p^*}{p^*-p}} - K(h) \\ &\geq \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*}\right) (\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} \tilde{S}_{\mathbb{R}^N}^{\frac{p^*}{p^*-p}} - K(h), \end{aligned}$$

o que contradiz (5.16).

■

5.3 Prova do teorema 5.1

A prova da existência da primeira solução fraca é, em parte, similar à prova do teorema 3.2. Na verdade, seguindo as mesmas idéias do teorema 3.2, obtemos que para cada $\mu > 0$ existem $\lambda_0 > 0$ e $\rho, \sigma \in (0,1)$ tais que

$$I(u,v) \geq \sigma \text{ se } ||(u,v)|| = \rho, \tag{5.20}$$

para todo $(u,v) \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N, |x|^{-bq})$ e $h \in \mathbb{E}_\lambda$ com $0 < \lambda < \lambda_0$. Também

$$I(t^{\frac{1}{p}} u, t^{\frac{1}{p}} v) \to -\infty \text{ quando } t \to \infty, \tag{5.21}$$

uniformemente em $h \in \mathbb{E}_\lambda$ com $0 < \lambda < \lambda_0$ e para todo $(u,v) \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N, |x|^{-bq})$ com $u_+ . v_+ \not\equiv 0$.

Afirmação. Consideremos $s_0 = s_1/(s_1^\alpha t_1^\gamma)^{\frac{1}{p^*}}$ e $t_0 = t_1/(s_1^\alpha t_1^\gamma)^{\frac{1}{p^*}}$, onde $s_1, t_1 > 0$ e

$s_1/t_1 = (\alpha/\gamma)^{1/p}$ como no lema 4.1, e u_ϵ é a função definida no lema 4.3. Então existem $\epsilon, \eta > 0$ tais que

$$\sup_{t\geq 0} I(t(s_0u_\epsilon), t(t_0u_\epsilon)) \leq \eta < (\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}}(\tilde{S}_{\mathbb{R}^N})^{\frac{p^*}{p^*-p}},$$

uniformemente em $h \in \mathbb{E}$.

De fato. Analogamente à prova do teorema 4.2, temos

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} I(t(s_0u_\epsilon), t(t_0u_\epsilon)) \leq (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}}(\tilde{S}_{\mathbb{R}^N})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O(\epsilon^{(N-d_1p)/d_1p}) \\ -c_0\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1p^*} h\, u_\epsilon^{p_1} dx.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Suponhamos que $p_1 < (N - c_1p^*)(p-1)/(N-p-ap)$, então

$$\tfrac{(N-d_1p)p_1}{d_1p^2} < \tfrac{N-d_1p}{d_1p}, \tag{5.23}$$

portanto, pelo lema 4.3, (5.22) e observação 4.2, conseguimos

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} I(t(s_0u_\epsilon), t(t_0u_\epsilon)) &\leq (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}}(\tilde{S}_{\mathbb{R}^N})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O(\epsilon^{(N-d_1p)/d_1p}) \\ &\quad -O(\epsilon^{(N-d_1p)p_1/d_1p^2}) \\ &\leq \eta < (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}}(\tilde{S}_{\mathbb{R}^N})^{\frac{p^*}{p^*-p}},\end{aligned}$$

uniformemente em $h \in \mathbb{E}$, para algum $\eta > 0$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Se $p_1 = (N - c_1p^*)(p-1)/(N-p-ap)$, por (5.22), (5.23), lema 4.3 e observação 4.2, nós podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} I(t(s_0u_\epsilon), t(t_0u_\epsilon)) &\leq (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}}(\tilde{S}_{\mathbb{R}^N})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O(\epsilon^{(N-d_1p)/d_1p}) \\ &\quad -O(\epsilon^{(N-d_1p)p_1/d_1p^2}|\ln(\epsilon)|) \\ &\leq \eta < (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}}(\tilde{S}_{\mathbb{R}^N})^{\frac{p^*}{p^*-p}},\end{aligned}$$

uniformemente em $h \in \mathbb{E}$, para algum $\eta > 0$.

Assuma que $p_1 > (N - c_1p^*)(p-1)/(N-p-ap)$, então temos

$$\tfrac{(N-c_1p^*)(p-1)(N-d_1p)}{d_1p(N-p-ap)} < \tfrac{(N-d_1p)p_1}{d_1p},$$

portanto, de (5.22), (5.23), lema 4.3 e observação 4.2, existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno satisfazendo

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} I(t(s_0u_\epsilon), t(t_0u_\epsilon)) &\leq (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}}(\tilde{S}_{\mathbb{R}^N})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O(\epsilon^{(N-d_1p)/d_1p}) \\ &\quad - O(\epsilon^{\frac{(N-d_1p)(p-1)(N-c_1p^*)}{d_1p(N-p-ap)} - \frac{(N-d_1p)p_1}{d_1p} + \frac{(N-d_1p)p_1}{d_1p^2}}) \\ &\leq \eta < (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}}(\tilde{S}_{\mathbb{R}^N})^{\frac{p^*}{p^*-p}},\end{aligned}$$

uniformemente em $h \in \mathbb{E}$, para algum $\eta > 0$. Assim, concluímos a prova da afirmação.

Fixemos $\epsilon > 0$ como na afirmação acima. Nós obtemos pela equação (5.21) um real $\tilde{t} > 0$ tal que

$$I(\tilde{t}(s_0u_\epsilon), \tilde{t}(t_0u_\epsilon)) < 0,$$

uniformemente em $h \in \mathbb{E}_\lambda$, para cada $0 < \lambda < \lambda_0$.

Aplicando o teorema do passo da montanha sem a condição de Palais Smale (teorema 6.2), conseguimos uma seqüência$-(PS)_c$ $\{(w_n, z_n)\}$ em $(W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}))^2$, onde

$$0 < \sigma \leq c = \inf_{g\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \tag{5.24}$$

e

$$\Gamma = \left\{g \in C([0,1], (W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}))^2) : g(0) = 0,\ g(1) = (\tilde{t}(s_0u_\epsilon), \tilde{t}(t_0u_\epsilon))\right\}. \tag{5.25}$$

Devido ao lema 5.1, podemos assumir que, independentemente de $\mu > 0$ e $h \in \mathbb{E}_\lambda$ com $0 < \lambda < \lambda_0$, $\{(w_n, z_n)\}$ é uma seqüência limitada e $w_n, z_n \geq 0$ para q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Também, trocando $\lambda_0 > 0$ por outro menor, se necessário, temos

$$0 < c \leq \sup_{0\leq t\leq\tilde{t}} I(t(s_0u_\epsilon), t(t_0u_\epsilon)) \leq \eta < (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}}(\tilde{S}_{\mathbb{R}^N})^{\frac{p^*}{p^*-p}} - K(h),$$

uniformemente em $h \in \mathbb{E}_\lambda$, se $0 < \lambda < \lambda_0$. Então obtemos do teorema 5.4 uma subseqüência de $\{(w_n, z_n)\}$, que denotaremos por $\{(w_n, z_n)\}$, e $(w, z) \in (W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}))^2$ satisfazendo $w_n \to w$ e $z_n \to z$ fortemente em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap})$, quando $n \to \infty$. Portanto, nós temos

$$I(w_n, z_n) \to I(w, z) = c \text{ e } I'(w_n, z_n) \to I'(w, z) \equiv 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Em particular, (w, z) é uma solução fraca do sistema (5.1) com $w, z \geq 0$ para q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Além disso, é fácil verificar que w e z são não triviais.

Agora, mostraremos a existência da segunda solução fraca usando o lema (3.3) da Mizoguchi. Consideremos o operador $I|_{\overline{B(0,\rho)}} : \overline{B(0,\rho)} \to \mathbb{R}$ o qual é inferiormente limitado e contínuo. Evidentemente, temos

$$\inf_{\partial B(0,\rho)} I > 0.$$

Mas, tomando $(u_0, v_0) \in (W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}))^2$ com $h.u_{0+}.v_{0+} \not\equiv 0$, nós conseguimos

$$I(t^{\frac{1}{p}} u_0, t^{\frac{1}{p}} v_0) \leq (\tfrac{1}{p}||u_0||^p + \tfrac{1}{p}||v_0||^p)t - t^{\frac{\theta+\delta}{p}} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} h\, u_{0+}^{\theta} v_{0+}^{\delta} dx$$

Logo, como $\theta/p + \delta/p < 1$, obtemos que

$$I(t_0^{\frac{1}{p}} u_0, t_0^{\frac{1}{p}} v_0) < 0 < \inf_{\partial B(0,\rho)} I$$

para algum $t_0 \in (0,1)$ tal que $(u_{t_0}, v_{t_0}) \in B(0,\rho)$. Então o lema 3.3 (Mizoguchi) implica que existe uma seqüência$-(PS)_M$ $\{(u_n, v_n)\}$ com $M = \inf_{\overline{B(0,\rho)}} I$. Pelo lema 5.1, podemos considerar que $\{(u_n, v_n)\}$ é uma seqüência limitada e $u_n, v_n \geq 0$ para q.t.p. em Ω. Além disso, temos

$$M < 0 < c \leq \sup_{0 \leq t \leq \tilde{t}} I(t(s_0 u_\epsilon), t(t_0 u_\epsilon)) \leq \eta < (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p^*})(\mu p^*)^{\frac{-p}{p^*-p}} (\tilde{S}_{\mathbb{R}^N})^{\frac{p^*}{p^*-p}} - K(h),$$

uniformemente em $h \in \mathbb{E}_\lambda$, se $0 < \lambda < \lambda_0$. Então o teorema 5.4 implica que exite $(u, v) \in (W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}))^2$ e uma subseqüência de $\{(u_n, v_n)\}$, que denotaremos por $\{(u_n, v_n)\}$, satisfazendo $u_n \to u$ e $v_n \to v$ fortemente em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap})$, quando $n \to \infty$. Logo, nós temos

$$I(u_n, v_n) \to I(u, v) = M \text{ e } I'(u_n, v_n) \to I'(u, v) \equiv 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Em particular, (u, v) é uma solução fraca do sistema (5.1) com $u, v \geq 0$ para q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Também, u e v são não triviais.

Evidentemente $(u, v) \neq (w, z)$, pois $I(u, v) < 0 < I(w, z)$.

■

5.4 Prova do teorema 5.2

Obtemos, seguindo a primeira parte da demonstração do teorema 5.1, que existe uma seqüência$-(PS)_c$ $\{(u_n, v_n)\}$ em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N, |x|^{-bq})$, onde

$$0 < \sigma \leq c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} I(g(s))$$

e

$$\Gamma := \left\{ g \in C\left([0,1], W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N, |x|^{-bq})\right) : g(0) = 0 \text{ e } g(1) = e \right\},$$

para algum $e \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N, |x|^{-bq})$ com $I(e) < 0$.

Aplicando o lema 5.1, podemos supor que $u_n, v_n \geq 0$ para q.t.p. em Ω e que $\{(u_n, v_n)\}$ é uma seqüência limitada em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N, |x|^{-bq})$ independentemente de $\mu > 0$ e $h \in \mathbb{E}_\lambda$ com $0 < \lambda < \overline{\lambda}_0$, ou seja, existe uma constante $M > 0$, independente de $\mu > 0$ e $h \in \mathbb{E}_\lambda$ com $0 < \lambda < \overline{\lambda}_0$, tal que $||(u_n, v_n)|| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, obtemos

$$0 < c = \lim_{n\to\infty} I(u_n, v_n) \leq \lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{p}||u_n||^p + \tfrac{1}{q}||v_n||^q) \leq \overline{M}. \tag{5.26}$$

Ainda pela limitação, nós temos que existe $(u, v) \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N, |x|^{-bq})$ com $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap})$ e $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N, |x|^{-bq})$, quando $n \to \infty$.

Afirmação. Existe $\mu_0 > 0$ de forma que as seqüências acima convergem fortemente, desde que $0 < \mu < \mu_0$. Em particular, segue que (u, v) é uma solução fraca do sistema (5.1) com $u, v \geq 0$ para q.t.p. em Ω, $u, v \not\equiv 0$ e $I(u, v) = c > 0$.

De fato. Sejam $\tilde{u}_n = u_n - u$ e $\tilde{v}_n = v_n - v$. Procedendo como na prova do teorema 5.4, nós temos

$$0 \leq l = \lim_{n\to\infty} \frac{||\tilde{u}_n||^p}{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{||\tilde{v}_n||^q}{\gamma} = \mu \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-c_1 p^*} \tilde{u}_{n_+}^\alpha \tilde{v}_{n_+}^\gamma \, dx.$$

Logo, basta provarmos que existe $\mu_0 > 0$ tal que $l = 0$, desde que $0 < \mu < \mu_0$. Supondo por absurdo que $l > 0$ para todo $\mu > 0$, então, pelo lema 5.2, pela definição de seqüência$-(PS)_c$ e como $h \in \mathbb{E}_\lambda$ com $0<\lambda<\overline{\lambda}_0$, conseguimos

$$\begin{aligned}
c+O_n(1) &= I(u_n,v_n)-\langle I'(u_n,v_n),(u_n/p^*,v_n/q^*)\rangle \\
&= (\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{p^*})||u_n||^p+(\tfrac{1}{q}-\tfrac{1}{q^*})||v_n||^q+(\tfrac{\theta}{p^*}+\tfrac{\delta}{q^*}-1)\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}h\,u_n^\theta v_n^\delta dx \\
&= (\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{p^*})(||\tilde{u}_n||^p+||u||^p)+(\tfrac{1}{q}-\tfrac{1}{q^*})(||\tilde{v}_n||^q+||v||^q) \\
&\quad +(\tfrac{\theta}{p^*}+\tfrac{\delta}{q^*}-1)\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-c_1p^*}h\,u_n^\theta v_n^\delta dx+O_n(1) \\
&\geq (\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{p^*})||\tilde{u}_n||^p+(\tfrac{1}{q}-\tfrac{1}{q^*})||\tilde{v}_n||^q \\
&\quad +(\tfrac{\theta}{p^*}+\tfrac{\delta}{q^*}-1)\frac{\theta C^{p_0/p}}{p_0}||h||_{L^{k'}(\mathbb{R}^N,|x|^{-c_1p^*})}||u_n||^{p_0} \\
&\quad +(\tfrac{\theta}{p^*}+\tfrac{\delta}{q^*}-1)\frac{\delta C^{q_0/q}}{q_0}||h||_{L^{k'}(\mathbb{R}^N,|x|^{-c_1p^*})}||v_n||^{q_0}+O_n(1) \\
&\geq (\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{p^*})\alpha l+(\tfrac{1}{q}-\tfrac{1}{q^*})\gamma l-M_1||h||_{L^{k'}(\mathbb{R}^N,|x|^{-c_1p^*})}+O_n(1) \\
&\geq (\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{p^*})\alpha l+(\tfrac{1}{q}-\tfrac{1}{q^*})\gamma l-\overline{\lambda}_0M_1+O_n(1),
\end{aligned} \tag{5.27}$$

onde $M_1>0$ é independente de $\mu>0$. Por outro lado, como no teorema 4.3, obtemos

$$l \geq \left[\mu\left(\frac{\alpha^{(p^*+p)/p}}{p^*}(C_{a,p}^*)^{-p^*/p}+\frac{\gamma^{(q^*+q)/q}}{q^*}(C_{b,q}^*)^{-q^*/q}\right)\right]^{\frac{-1}{\tau-1}}, \tag{5.28}$$

onde $\tau=\max\{p^*/p,q^*/q\}$ se $l>1$ e $\tau=\min\{p^*/p,q^*/q\}$ se $l\leq 1$. Portanto, substituindo (5.28) em (5.27), obtemos

$$\begin{aligned}
c+O_n(1) &\geq (\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{p^*})\alpha\left[\mu\left(\frac{\alpha^{(p^*+p)/p}}{p^*}(C_{a,p}^*)^{-p^*/p}+\frac{\gamma^{(q^*+q)/q}}{q^*}(C_{b,q}^*)^{-q^*/q}\right)\right]^{\frac{-1}{\tau-1}} \\
&\quad +(\tfrac{1}{q}-\tfrac{1}{q^*})\gamma\left[\mu\left(\frac{\alpha^{(p^*+p)/p}}{p^*}(C_{a,p}^*)^{-p^*/p}+\frac{\gamma^{(q^*+q)/q}}{q^*}(C_{b,q}^*)^{-q^*/q}\right)\right]^{\frac{-1}{\tau-1}} \\
&\quad -\lambda_0M_1+O_n(1).
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Daí, escolhendo $\mu_0,\overline{\overline{\lambda}}_0>0$ suficientemente pequenos e tomando o limite, concluímos por (5.29) que

$$c \geq \overline{M},\ \forall\, 0<\mu<\mu_0,\ \forall\, 0<\lambda<\overline{\overline{\lambda}}_0,$$

contradizendo a desigualdade (5.26), o que prova a afirmação, com $\lambda_0=\min\{\overline{\lambda}_0,\overline{\overline{\lambda}}_0\}$.

Agora, mostraremos a existência da segunda solução fraca. Procedendo de maneira similar a segunda parte da demonstração do teorema 5.1 obtemos uma seqüência$-(PS)_K$

$\{(w_n, z_n)\}$ em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N, |x|^{-bq})$, onde $K = \inf_{B(0,\rho)} I < 0$. Pelo lema 5.1, podemos considerar que $\{(w_n, z_n)\}$ é uma seqüência limitada, independente de $\mu > 0$ e $h \in \mathbb{E}_\lambda$ com $0 < \lambda < \lambda_0$, e $w_n, z_n \geq 0$ para q.t.p. em Ω. Logo, existe $M > 0$ independente de $\mu > 0$ tal que $||(w_n, z_n)|| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, os mesmos argumentos da afirmação acima, mostra que (w, z) é uma solução fraca do sistema (5.1) com $w, z \geq 0$ para q.t.p. em Ω, $w, z \not\equiv 0$ e $I(w, z) = K < 0$, desde que $0 < \mu < \mu_0$.

Evidentemente $(u, v) \not\equiv (w, z)$, pois $I(w, z) < 0 < I(u, v)$.

■

Capítulo

6

Apêndice

6.1 Desigualdades

Nesta seção listaremos as principais desigualdades utilizadas neste trabalho. Sejam A, B reais não negativos e $k, k' \geq 1$ expoentes conjugados. Então

1. Young: $AB \leq A^k/k + B^{k'}/k'$.

2. Young com ϵ: dado $\xi > 0$ existe $C_\xi > 0$ tal que $AB \leq \xi A^k + C_\xi B^{k'}$.

3. $(A+B)^k \leq 2^{k-1}(A^k + B^k)$.

4. Dado $\xi > 0$ existe $C_{\xi,k} > 0$ tal que $(A+B)^k \leq (1+\xi)A^k + C_{\xi,k}B^k$.

5. $(A+B)^k \leq A^k + k(A+B)^{k-1}B$.

6. Hölder: Se $f \in L^k(\Omega)$ e $g \in L^{k'}(\Omega)$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^N$, então

$$\int_\Omega |f||g|dx \leq ||f||_{L^k(\Omega)}||g||_{L^{k'}(\Omega)}.$$

6.2 Resultados básicos

Definição 6.1 *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que $E \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais Smale se toda seqüência $\{x_n\} \subset X$, com $\{E(x_n)\}$ limitada em X e $E'(x_n) \to 0$ em X^* quando $n \to \infty$, é pré-compacta.*

O primeiro resultado que enunciaremos nesta seção é o teorema do passo da montanha, o qual foi provado inicialmente por Ambrosetti e Rabinowitz [6].

Teorema 6.1 [Teorema do passo da montanha] *Sejam* X *um espaço de Banach e* $E \in C^1(X, \mathbb{R})$ *satisfazendo a condição de Palais Smale. Suponhamos que as seguintes condições geométricas sejam satifeitas:*

1. $E(0) = 0$,

2. $\exists\, \sigma, \rho > 0 : E(w) \geq \sigma > 0, \ \forall\, w \in X$ *tal que* $||w|| = \rho$,

3. $\exists\, e_0 \in X : ||e_0|| > \rho$ *e* $E(e_0) < 0$.

Defina

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e_0\}.$$

Então

$$0 < \sigma \leq c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} E(\gamma(t))$$

é um valor crítico do operador E.

O próximo resultado é uma variação do teorema do passo da montanha no qual nós não assusmiremos a condição de Palais Smale (veja, por exemplo, [11, teorema 2.2]).

Teorema 6.2 [Teorema do passo da montanha sem a condição de Palais Smale] *Sejam* X *um espaço de Banach e* $E \in C^1(X, \mathbb{R})$. *Suponhamos que as seguintes condições geométricas sejam satifeitas:*

1. $E(0) = 0$,

2. $\exists\, \sigma, \rho > 0 : E(w) \geq \sigma > 0, \ \forall w \in X$ *com* $||w|| = \rho$,

3. $\exists\, e_0 \in X : ||e_0|| > \rho$ *e* $E(e_0) < 0$.

Então existe uma seqüência $\{w_n\} \subset X$ *tal que*

$$E(w_n) \to c \ e \ E'(w_n) \to 0 \ em \ X^*, \ quando \ n \to \infty,$$

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} E(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e_0\}.$$

Agora, vamos enunciar o princípio variacional de Ekeland, cuja demonstração pode ser encontrada em Ekeland [33].

Teorema 6.3 [Princípio variacional de Ekeland] *Suponha M um espaço métrico completo com métrica d e $I : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um operador semi-contínuo inferiormente, $I \not\equiv +\infty$ e inferiormente limitado. Então, para todo $\epsilon, \delta > 0$ e todo $u \in M$ com*

$$I(u) \leq \inf_M I + \epsilon,$$

existe um elemento $v \in M$ o qual é um mínimo estrito do funcional

$$I_v(w) \equiv I(w) + \frac{\epsilon}{\delta} d(v, w).$$

Além disso, temos

$$I(v) \leq I(u) \ \text{ e } \ d(u, v) \leq \delta.$$

A prova do seguinte corolário pode ser encontrada em [33, corolário 2.3].

Corolário 6.1 *Se V é um espaço de Banach e $E \in C^1(V, \mathbb{R})$ é inferiormente limitado, então existe uma seqüência $\{x_n\} \subset V$ tal que*

$$E(x_n) \to \inf_V E \ \text{ e } \ E'(x_n) \to 0 \ \text{ em } V^*, \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Xuan [70, 71], provou um resultado de imersão compacta que generaliza o clássico teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov (ver [12]).

Teorema 6.4 [Teorema da imersão compacta] *Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado com $0 \in \Omega$, $1 < p < N$ e $-\infty < a < (N-p)/p$. Então a imersão $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \hookrightarrow L^r(\Omega, |x|^{-\delta})$ é compacta, desde que $1 \leq r < Np/(N-p)$ e $\delta < (1+a)r + N[1 - (r/p)]$.*

Os próximos resultados podem ser encontrados em [50], [63], [47] e [13], respectivamente.

Lema 6.1 *Suponha f_n uma seqüência de funções Lebesgue mensuráveis com $f_n(x) \to f(x)$, quando $n \to \infty$, para q.t.p. $x \in \Omega$. Então f é Lebesgue mensurável.*

Lema 6.2 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^N$. Então*

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle_e \geq \begin{cases} K|x-y|^p & se\ p \geq 2, \\ \dfrac{K|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & se\ 1 < p < 2, \end{cases}$$

onde $K = K(p)$ é uma constante positiva.

Lema 6.3 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $\{f_n\} \subset L^r(\Omega)$, com $1 < r < \infty$, uma seqüência limitada tal que $f_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$ para q.t.p. $x \in \Omega$. Então $f \in L^r(\Omega)$ e $f_n \rightharpoonup f$ em $L^r(\Omega)$ quando $n \to \infty$.*

Teorema 6.5 *Suponha Ω um domínio suave de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $p' > 1$ o expoente conjugado de p, $-\infty < a < (N-p)/p$ e $\Psi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory com $\Psi(x,0) = 0$ em Ω, $\Psi(x,\cdot)$ é não decrescente e $0 \leq \Psi(x,s) \leq C(1+|s|^{p-1})$ para algum $C > 0$. Então, para cada $f \in L^{p'}(\Omega, |x|^{-(a+1)p+c})$, o problema*

$$\begin{cases} -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |x|^{-(a+1)p+c}\Psi(x,u) &= |x|^{-(a+1)p+c} f \quad em \quad \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

admite uma única solução fraca $u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$. Além disso, o operador associado

$$T_p : L^{p'}(\Omega, |x|^{-(a+1)p+c}) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}),\ f \longmapsto u,$$

está bem definido o qual é contínuo e não decrescente.

Teorema 6.6 [Princípio da comparação] *Sejam Ω um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$, $c > 0$ e $\phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory tal que $\phi(x,0) = 0$ em Ω, $\phi(x,\cdot)$ é não decrescente e $0 \leq \phi(x,t) \leq C(1+|t|^{p-1})$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ e alguma constante $C > 0$. Assuma que $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \cap L^\infty(\Omega)$ são tais que*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left[|x|^{-ap}|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \nabla\psi + |x|^{-(a+1)p+c}\phi(x,u_2)\psi \right] dx \\ \qquad \leq \displaystyle\int_\Omega \left[|x|^{-ap}|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla\psi + |x|^{-(a+1)p+c}\phi(x,u_1)\psi \right] dx \\ e\ u_2 \leq u_1\ sobre\ \partial\Omega, \end{cases}$$

para toda $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$, $\psi \geq 0$ *para q.t.p. em* Ω. *Então* $u_2 \leq u_1$ *para q.t.p. em* Ω.

Teorema 6.7 *Sejam* Ω *um domínio suave e limitado de* $\mathbb{R}^N$ *com* $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$, $c > 0$ *e* $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de Carathéodory tal que* $|g(x,t)| \leq C(1 + |t|^q)$ *para todo* $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, *onde* $C > 0$ *e*

$$p - 1 < q < \min\{\tfrac{Np}{N-p} - 1; p - 1 + \tfrac{c}{N-p(a+1)}\}.$$

Suponha $u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ *uma solução fraca do problema*

$$-div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |x|^{-(a+1)p+c} g(x,u) \ \ em \ \Omega.$$

Então $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *para alguma constante* $\alpha \in (0,1]$.

Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$. Consideremos o problema

$$divA(x, u, \nabla u) + B(x, u\nabla u) = 0 \text{ em } \Omega, \tag{6.1}$$

onde $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ e $B : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

$$\sum_{i,j=1}^{N} \tfrac{\partial A_j}{\partial p_i}(x,z,p)\xi_i\xi_j \geq c(k + |p|)^{p-2}|\xi|^2, \tag{6.2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} |\tfrac{\partial A_j}{\partial p_i}(x,z,p)| \leq C(k + |p|)^{p-2}, \tag{6.3}$$

$$|B(x,z,p)| \leq C(k + |p|)^p, \tag{6.4}$$

onde k é uma constante não negativa e C, c são positivas.

Tolksdorf em [68], provou um resultado sobre regularidade das soluções fracas do problema (6.1).

Teorema 6.8 *Além de* (6.2) – (6.4), *assuma que*

$$A(x,z,0) = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \Big(|\tfrac{\partial A_j}{\partial x_i}(x,z,\eta)| + |\tfrac{\partial A_j}{\partial z}(x,z,\eta)|\Big) \leq C(1 + |\eta|)^{p-2}|\eta|.$$

Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \cap L^\infty(\Omega)$ *é uma solução fraca do problema* (6.1). *Então* $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ *para algum* $\alpha \in (0,1]$.

O próximo resultado, o qual foi provado por Lieberman [51, teorema 1], também trata da regularidade das soluções fracas do problema (6.1).

Teorema 6.9 *Além de* (6.2) – (6.4), *assuma que*

$$|A(x,z,p) - A(y,w,p)| \leq \Lambda(1+|p|)^{p-1}[|x-y|^\alpha + |z-w|^\alpha],$$

para todo $(x,z,p) \in \partial\Omega \times [-M,M] \times \mathbb{R}^N$, $(y,w) \in \Omega \times [-M,M]$ *e todo* $\xi \in \mathbb{R}^N$, *onde* $M > 0$ *e* $\alpha \in (0,1]$. *Se* $f \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ *com* $|f|_{1+\alpha} \leq L$ *e* u *é uma solução fraca do problema* (6.1) *com* $u = f$ *em* $\partial\Omega$ *e* $|u|(x) \leq M$ *para q.t.p. em* Ω. *Então existe uma constante positiva* $\beta = \beta(\alpha, \Lambda/\lambda, m, n)$ *tal que* $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$; *além disso*

$$|u|_{1+\beta} := \sup_{x\in\Omega}|u(x)| + \sup_{x\in\Omega}|\nabla u(x)| + \sup_{x\neq y\in\Omega}\frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq C(\alpha, \Lambda/\lambda, m, M, n, L, \Omega).$$

6.3 Operadores diferenciáveis

As definições e resultados que trataremos nesta seção podem ser encontrados no livro do Deimling [31]. A idéia de diferenciabilidade sobre um espaço vetorial arbitrário, segue a mesma idéia de diferenciabilidade que conhecemos sobre $\mathbb{R}^N$. Grosseiramente, são aproximações locais de um operador por operadores lineares com uma certa precisão. Nesta seção, denotaremos por X um espaço de Banach e por X^* seu espaço dual.

Definição 6.2 *Suponha* $U \subset X$ *um aberto e* $\phi : U \to \mathbb{R}$ *um operador. Dizemos que* ϕ *é diferenciálvel a Fréchet em* $x_0 \in U$ *com derivada de Fréchet* $\phi'(x_0) \in X^*$ *se*

$$\phi(x_0 + h) = \phi(x_0) + \langle \phi'(x_0), h\rangle + o(||h||),$$

onde $o(||h||)/||h|| \to 0$ *quando* $h \to 0$. *Além disso, dizemos que* $\phi \in C^1(U,\mathbb{R})$ *se* ϕ *a derivada de Fréchet existe e é contínua em* U.

Definição 6.3 *Suponha* $U \subset X$ *um aberto e* $\phi : U \to \mathbb{R}$ *um operador. Dizemos que* ϕ *é* *diferenciável a Gâteaux em* $x_0 \in U$ *com derivada de Gâteaux* $grad\,\phi(x_0) \in X^*$ *se*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}[\phi(x_0+th)-\phi(x_0)] = \langle grad\,\phi(x_0), h\rangle,\ \forall\, h \in X.$$

Proposição 6.1 *Se o operador* $\phi : U \to \mathbb{R}$ *tem derivada de Gâteaux contínua em* U, *então* $\phi \in C^1(U,\mathbb{R})$.

Teorema 6.10 *Considere* Ω *um domínio suave e limitado de* $\mathbb{R}^N$ *com* $0 \in \Omega$, $1 < p, q < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$, $-\infty < b < (N-q)/q$, $a \leq c_1 < a+1$, $b \leq c_2 < b+1$, $d_1 = 1 + a - c_1$, $d_2 = 1 + b - c_2$, $p^* = Np/(N-d_1p)$, $q^* = Nq/(N-d_2q)$, $\theta, \delta > 1$, $p_0 \in [1,p^*]$, $q_0 \in [1,q^*]$ *com* $\theta/p_0 + \delta/q_0 = 1$, $k, k' \geq 1$ *expoentes conjugados com* $kp_0 \in [1,p^*]$, $kq_0 \in [1,q^*]$, β *é tal que*

$$\beta \leq \min\{(a+1)kp_0 + N[1-(kp_0/p)], (b+1)kq_0 + N[1-(kq_0/q)]\}$$

e seja $h \in L^k(\Omega, |x|^{-\beta})$ *com* $h \geq 0$ *para q.t.p. em* Ω. *Então os operadores* $H_1, H_2 : W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \to \mathbb{R}$ *definidos por*

$$H_1(w) = \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla w|^p\,dx \ \ e\ \ H_2(w_+) = \int_\Omega |x|^{-\beta} h\, w_+^\theta v_+^\delta\,dx$$

são de classe C^1, *ou seja,* $H_1, H_2 \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{-ap}),\mathbb{R})$, *onde* v *pertencente a* $W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{-bq})$ *está fixada. Além disso, suas derivadas de Fréchet em* w *são dadas por*

$$\langle H_1'(w), u\rangle = p\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla u\,dx$$

e

$$\langle H_2'(w_+), u\rangle = \theta\int_\Omega |x|^{-\beta} h\, w_+^{\theta-1} v_+^\delta u\,dx.$$

Observação 6.1 *O resultado acima também é verdadeiro para domínios ilimitados* ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$), *desde que* $kp_0 = p^*$, $kq_0 = q^*$ *e* $\beta = c_1p^* = c_2q^*$.

Demonstração do teorema 6.10. Definimos as funções $F_1 : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ e $F_2 : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$F_1(x,y) = p\int_0^{|y|} s^{p-1}\,ds \ \text{ e } \ F_2(x,t) = \theta\int_0^t s^{\theta-1}v_+^\delta(x)\,ds.$$

Portanto, temos para $0 < t < 1$ que

$$\int_\Omega |x|^{-ap} \frac{|\nabla w + t\nabla u|^p - |\nabla w|^p}{t} dx = \int_\Omega |x|^{-ap} \frac{F_1(x, \nabla w + t\nabla u) - F_1(x, \nabla w)}{t} dx$$

e

$$\int_\Omega |x|^{-\beta} h \, \frac{(w+tu)^\theta v_+^\delta - w^\theta v_+^\delta}{t} dx = \int_\Omega |x|^{-\beta} h \, \frac{F_2(x, w+tu) - F_2(x,w)}{t} dx.$$

Dado $x \in \Omega$, o teorema do valor médio implica que existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{|F_1(x, \nabla w(x) + t\nabla u(x)) - F_1(x, \nabla w(x))|}{|t|} &\leq \frac{p|\nabla w(x) + \lambda t \nabla u(x)|^{p-1} |t \nabla u(x)|}{|t|} \\
&\leq p\left(|\nabla w(x)| + |\nabla u(x)|\right)^{p-1} |\nabla u(x)| \\
&\leq 2^{p-1} p \left(|\nabla w(x)|^p + |\nabla u(x)|^p\right) \\
&\quad \in L^1(\Omega, |x|^{-ap}),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
h \, \frac{|F_2(x, w(x) + tu(x)) - F_2(x, w(x))|}{|t|} &\leq h \, \frac{\theta |(w(x) + tu(x))^{\theta - 1} v_+^\delta(x)| |tu(x)|}{|t|} \\
&\leq \theta h \, |(w(x) + tu(x))^{\theta-1} v_+^\delta(x)| |u(x)| \\
&\leq 2^{\theta-1} \theta h \, (|w|^\theta(x) + |u(x)|^\theta) v_+^\delta(x)| \\
&\quad \in L^1(\Omega, |x|^{-\beta}).
\end{aligned}$$

Daí, obtemos do teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0^+} \int_\Omega |x|^{-ap} \frac{|\nabla w(x) + t\nabla u(x)|^p - |\nabla w(x)|^p}{t} \, dx &= \int_\Omega |x|^{-ap} \lim_{t \to 0^+} \frac{F_1(x, \nabla w(x) + t\nabla u(x)) - F_1(x, \nabla w(x))}{t} \, dx \\
&= p \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla w(x)|^{p-2} \nabla w(x) \nabla u(x) \, dx
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{t \to 0^+} \int_\Omega |x|^{-\beta} h \frac{(w+tu)^\theta v_+^\delta - w^\theta v_+^\delta}{t} dx = \theta \int_\Omega |x|^{-\beta} h w^{\theta-1} v_+^\delta u \, dx.$$

Por último, a desigualdade de Hölder implica

$$|\langle H_1'(w), u \rangle| \leq p||w||^{p-1}||u||^p$$

e

$$|\langle H_2'(w_+), u \rangle| \leq C(||h||_{L^{k'}(\Omega, |x|^{-\beta})} ||w||^{\theta-1} ||v||^\delta) ||u||,$$

ou seja, $H_1'(w)$ e $H_2'(w_+)$ são operadores lineares limitados. Portanto, segue da proposição 6.1 que $H_1, H_2 \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}), \mathbb{R})$.

■

6.4 Propriedades dos espaços $L^l(\Omega, |x|^\alpha)$ e $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$

Nesta seção, estudaremos algumas propriedades dos espaços $L^l(\Omega, |x|^\alpha)$ e $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$.

6.4.1 O espaço $L^l(\Omega, |x|^\alpha)$

Teorema 6.11 *Considerando Ω um domínio suave de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $l \geq 1$, então o espaço $L^l(\Omega, |x|^\alpha)$ é completo.*

Demonstração. Consideremos $\{f_n\} \subset L^l(\Omega, |x|^\alpha)$ uma seqüência de Cauchy. Então a seqüência $\{|x|^{\alpha/l} f_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em $L^l(\Omega)$. Logo, existe $g \in L^l(\Omega)$ tal que $|x|^{\alpha/l} f_n \to g$ em $L^l(\Omega)$ quando $n \to \infty$. Então, passando a uma subseqüência, se necessário, podemos supor que $|x|^{\alpha/l} f_n(x) \to g(x)$ quando $n \to \infty$ para q.t.p. $x \in \Omega$. Portanto, definindo $f = |x|^{-\alpha/l} g$, temos que $f_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$ para q.t.p. $x \in \Omega$. Assim, pelo lema 6.1, temos que f é Lebesgue mensurável e mais

$$\int_\Omega |x|^\alpha |f|^l \, dx = \int_\Omega |g|^l \, dx < \infty,$$

ou seja, $f \in L^l(\Omega, |x|^\alpha)$. Além disso, obtemos

$$||f_n - f||_{L^l(\Omega, |x|^\alpha)} = |||x|^{\alpha/l} f_n - g||_{L^l(\Omega)} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

ou seja, $L^l(\Omega, |x|^\alpha)$ é completo.

■

Teorema 6.12 *Considerando Ω um domínio suave de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $l > 1$, então o espaço $L^l(\Omega, |x|^\alpha)$ é reflexivo.*

Demonstração. Como essa demonstração é similar a provar da reflexibilidade dos usuais espaços $L^l(\Omega)$, nós faremos apenas um esboço da prova.

Caso 1. Consideremos $2 \leq l < \infty$ e $f, g \in L^l(\Omega, |x|^\alpha)$. Então $|x|^{\alpha/l} f, |x|^{\alpha/l} g \in L^l(\Omega)$ e pela desigualdade de Clarkson, obtemos

$$\begin{aligned}
||\tfrac{f+g}{2}||^l_{L^l(\Omega,|x|^\alpha)} + ||\tfrac{f-g}{2}||^l_{L^l(\Omega,|x|^\alpha)} &= ||\tfrac{|x|^{\alpha/l}(f+g)}{2}||^l_{L^l(\Omega)} + ||\tfrac{|x|^{\alpha/l}(f-g)}{2}||^l_{L^l(\Omega)} \\
&\leq \tfrac{1}{2}(|||x|^{\alpha/l} f||^l_{L^l(\Omega)} + |||x|^{\alpha/l} g||^l_{L^l(\Omega)}) \\
&= \tfrac{1}{2}(||f||^l_{L^l(\Omega,|x|^\alpha)} + ||g||^l_{L^l(\Omega,|x|^\alpha)}),
\end{aligned}$$

logo, $L^l(|x|^\alpha)$ é uniformemente convexo. Portanto, $L^l(\Omega, |x|^\alpha)$ é reflexivo.

Caso 2. Suponhamos $1 < l < 2$. Consideremos $l' > 2$ tal que $1/l + 1/l' = 1$ e a isometria

$$\begin{aligned}
T : L^l(\Omega, |x|^\alpha) &\longrightarrow (L^{l'}(\Omega, |x|^\alpha))^* \\
u &\longmapsto Tu
\end{aligned}$$

onde $Tu : L^{l'}(\Omega, |x|^\alpha) \to \mathbb{R}$ é definida por

$$(Tu, f) = \int_\Omega |x|^\alpha u f dx.$$

Então, como o teorema 6.11 implica que o espaço $L^l(\Omega, |x|^\alpha)$ é completo e sendo T uma isometria, temos que $T(L^l(\Omega, |x|^\alpha))$ é um subespaço fechado de $(L^{l'}(\Omega, |x|^\alpha))^*$. Além disso, $L^{l'}(\Omega, |x|^\alpha)$ é reflexivo, já que $2 < l' < \infty$. Logo, $(L^{l'}(\Omega, |x|^\alpha))^*$ também é reflexivo. Conseqüentemente, conseguimos que $T(L^l(\Omega, |x|^\alpha))$ é reflexivo e, portanto, $L^l(\Omega, |x|^\alpha)$ é reflexivo.

■

Corolário 6.2 *Considerando Ω um domínio suave de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $l > 1$, então o espaço $(L^l(\Omega, |x|^\alpha))^N$ é reflexivo.*

6.4.2 O espaço $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$

Evidentemente, segue da definição que o espaço $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ é completo.

Teorema 6.13 *Considerando Ω um domínio suave de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $1 < p < N$ e $-\infty < a < (N-p)/p$, então o espaço $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ é reflexivo.*

Demonstração. A prova deste resultado também segue as mesmas idéias usadas para os espaços de Sobolev. Consideremos a isometria

$$\begin{aligned} T : W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) &\rightarrow [(L^{p'}(\Omega, |x|^{-ap}))^N]^* \\ u &\mapsto Tu \end{aligned}$$

onde

$$(Tu, (f_1, \ldots, f_N)) = \int_\Omega |x|^{-ap} \nabla u (f_1, \ldots, f_N) dx.$$

Portanto, desde que $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ é completo, temos que $T(W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}))$ é um subespaço fechado em $[(L^{p'}(\Omega, |x|^{-ap}))^N]^*$. Porém, $[(L^{p'}(\Omega, |x|^{-ap}))^N]^*$ é reflexivo, logo, $T(W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}))$ é reflexivo. Conseqüentemente, sendo T uma isometria, concluímos que $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ é reflexivo.

■

A prova do próximo lema é uma simples adaptação de um argumento usado por Xuan em [70, teorema 1.1].

Lema 6.4 *Suponha Ω um domínio suave de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $1 < p < N$ e $-\infty < a < (N-p)/p$, $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ com $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ quando $n \to \infty$. Então, a menos de uma subseqüência, $u_n(x) \to u(x)$ quando $n \to \infty$ para q.t.p. $x \in \Omega$.*

Demonstração. Consideremos $\Omega \setminus \{0\} = \cup_{k \geq 1} \Omega_k$, onde $\Omega_k = \Omega \cap (B(0,k) \setminus \overline{B(0,1/k)})$ é aberto e limitado. Se $G \in (W^{1,p}(\Omega_k))^*$, então o funcional $\bar{G} : W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \to \mathbb{R}$ definido por $\bar{G}(w) = G(w_{|\Omega_k})$ é linear e contínuo, ou seja, $\bar{G} \in (W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}))^*$. Daí, obtemos

$$G(u_{n|\Omega_k}) \to G(u_{|\Omega_k}) \text{ quando } n \to \infty,$$

logo, $u_{n|\Omega_k} \rightharpoonup u_{|\Omega_k}$ fracamente em $W^{1,p}(\Omega_k)$ quando $n \to \infty$. Portanto, o teorema da imersão compacta de Rellich-Kondrachov implica que $u_n(x) \to u(x)$ quando $n \to \infty$ para q.t.p. $x \in \Omega_k$. Então, por um argumento de diagonalização, concluímos que $u_n(x) \to u(x)$ quando $n \to \infty$ para q.t.p. $x \in \Omega$.

■

Teorema 6.14 *Suponha Ω um domínio suave de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $1 < p < N$,*

$-\infty < a < (N-p)/p$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo uma das seguintes condições:

1. *$F \in C^1(\mathbb{R})$ e $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$,*

2. *$F \in C^0(\mathbb{R}) \cap W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R})$ e $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

Então $F(u) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$. Além disso, se $D = \{s \in \mathbb{R} : F'(s) \text{ não é contínua}\}$ é finito, então, para cada $i = 1, ..., N$, vale

$$\frac{\partial F \circ u}{\partial x_i} = \begin{cases} F'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} & \text{para q.t.p. em } \{x \in \Omega : u(x) \notin D\}, \\ 0 & \text{para q.t.p. em } \{x \in \Omega : u(x) \in D\}. \end{cases} \tag{6.5}$$

Demonstração. **Caso 1.** Por definição de $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ existe $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ fortemente em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ quando $n \to \infty$. Passando a uma subseqüência, que denotaremos por $\{u_n\}$, temos que $u_n(x) \to u(x)$ e $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$, quando $n \to \infty$, para q.t.p. $x \in \Omega$. Então, segue que

$$(F \circ u_n)(x) \to (F \circ u)(x) \text{ quando } n \to \infty \text{ para q.t.p. } x \in \Omega. \tag{6.6}$$

Por outro lado, temos

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(F \circ u_n)\right| \leq \left|F'(u_n).\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \leq ||F'||_{L^\infty(\Omega)} \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|,$$

donde segue que $\{F \circ u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$. Conseqüentemente, existe $v \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ com $F \circ u_n \rightharpoonup v$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ quando $n \to \infty$. Logo, pelo lema 6.4, temos que $(F \circ u_n)(x) \to v(x)$ quando $n \to \infty$ para q.t.p. $x \in \Omega$. Então, por (6.6), obtemos $v = F \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$.

Agora, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, conseguimos

$$\begin{aligned} &\left|\int_\Omega |x|^{-ap}[F'(u_n)\tfrac{\partial u_n}{\partial x_i} - F'(u)\tfrac{\partial u}{\partial x_i}]\varphi\, dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |x|^{-ap}|F'(u_n)||\tfrac{\partial u_n}{\partial x_i} - \tfrac{\partial u}{\partial x_i}||\varphi|dx + \int_\Omega |x|^{-ap}|F'(u_n) - F'(u)||\tfrac{\partial u}{\partial x_i}||\varphi|dx \\ &\leq ||F'||_{L^\infty(\Omega)}||\varphi||_{L^{p'}(\Omega,|x|^{-ap})}||u_n - u|| + \int_\Omega |x|^{-ap}|F'(u_n) - F'(u)||\tfrac{\partial u}{\partial x_i}||\varphi|dx. \end{aligned}$$

Evidentemente, a primeira parcela da soma acima converge a zero. Por outro lado, como $F'(u_n)(x) \to F'(u)(x)$ quando $n \to \infty$ para q.t.p. $x \in \Omega$ e $|F'(u_n) - F'(u)||\frac{\partial u}{\partial x_i}||\varphi| \leq$

$M|\frac{\partial u}{\partial x_i}||\varphi| \in L^1(\Omega, |x|^{-ap})$, então pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue a segunda parcela da soma acima converge a zero. Portanto, concluímos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-ap} F'(u) \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-ap} F'(u_n) \tfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-ap} \tfrac{\partial}{\partial x_i}(F \circ u_n) \varphi dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-ap} \tfrac{\partial}{\partial x_i}(F \circ u) \varphi dx,
\end{aligned}$$

o que prova (6.5).

Caso **2.** Consideremos $\{\rho_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ uma seqüência regularizante e defina $F_n = F * \rho_n \in C^1(\mathbb{R})$. Em particular, temos $F_n' = F * \rho_n'$. Observamos que

$$F_n'(s) = F * \rho_n'(s) = \int_{\mathbb{R}} F(t)\rho_n'(s-t)dt$$

e, por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
F' * \rho_n(s) &= \int_{\mathbb{R}} F'(t)\rho_n(s-t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} F'(t)\rho_{n_s}(t)dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}} F(t)(\rho_{n_s}(t))'dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}} F(t)(\rho_n(s-t))'dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} F(t)\rho_n'(s-t)dt,
\end{aligned}$$

logo $F_n' = F' * \rho_n$ e $||F_n'||_{L^\infty(\Omega)} \leq ||F'||_{L^\infty(\Omega)}||\rho_n||_{L^1(\Omega)} = ||F'||_{L^\infty(\Omega)}$.

Como $F_n \to F$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$ quando $n \to \infty$, temos que $F_n(s) \to F(s)$ quando $n \to \infty$ para q.t.p. $s \in \mathbb{R}$. Daí, obtemos $F_n(u)(x) \to F(u)(x)$ quando $n \to \infty$ para q.t.p. $x \in \Omega$. Pela primeira parte $\frac{\partial F_n \circ u}{\partial x_i} = F_n' \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Também, vemos que

$$|\tfrac{\partial}{\partial x_i}(F_n \circ u)| = |F_n'(u)\, \tfrac{\partial u}{\partial x_i}| \leq ||F'||_{L^\infty(\Omega)}|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}| \in L^p(\Omega, |x|^{-ap}),$$

ou seja, $\{F_n \circ u\}$ é uma seqüência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$. Portanto, existe $w \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ com $F \circ u_n \rightharpoonup w$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ quando $n \to \infty$. Daí, analogamente à primeira parte, obtemos que $w = F \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$.

Definimos $g_i : \Omega \to \mathbb{R}$, para $i = 1, ..., N$, por

$$g_i(x) = \begin{cases} F'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} & \text{para q.t.p. em } A := \{x \in \Omega : u(x) \notin D\}, \\ 0 & \text{para q.t.p. em } B := \{x \in \Omega : u(x) \in D\}. \end{cases}$$

Então, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega |x|^{-ap}[F_n'(u)\tfrac{\partial u}{\partial x_i} - g_i]\varphi \, dx \right| \\ &\leq \int_A |x|^{-ap}|F_n'(u)\tfrac{\partial u}{\partial x_i} - F'(u)\tfrac{\partial u}{\partial x_i}||\varphi| \, dx + \int_B |x|^{-ap}|F_n'(u)\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\varphi| \, dx. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Devido ao teorema da convergência dominada de Lebesgue

$$\int_A |x|^{-ap}|F_n'(u) - F'(u)||\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\varphi| dx \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Por outro lado, como D é finito, podemos assumir $F'|_D = 0$, então, como $F_n'(u(x)) = F' * \rho_n(u(x)) \to F'(u(x)) = 0$ quando $n \to \infty$, segue do teorema da convergência dominada de Lebesgue que a segunda integral da soma em (6.7) vale zero. Conseqüentemente, concluímos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |x|^{-ap}\tfrac{\partial}{\partial x_i}(F \circ u)\varphi \, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-ap}\tfrac{\partial}{\partial x_i}(F_n \circ u)\varphi \, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-ap} F_n'(u)\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\varphi \, dx \\ &= \int_\Omega |x|^{-ap} g_i \varphi \, dx, \end{aligned}$$

o que prova (6.5).

■

Corolário 6.3 *Suponha Ω um domínio suave de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$. Então as funções $u_+ = \max\{u, 0\}$ e $u_- = \max\{-u, 0\}$ pertencem a $W_0(\Omega, |x|^{-ap})$ e para $i = 1, ..., N$ vale*

$$\frac{\partial u_+}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} & \textit{para q.t.p. em } \{x \in \Omega : u(x) > 0\}, \\ 0 & \textit{para q.t.p. em } \{x \in \Omega : u(x) \leq 0\} \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial u_-}{\partial x_i} = \begin{cases} 0 & \textit{para q.t.p. em } \{x \in \Omega : u(x) \geq 0\}, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_i} & \textit{para q.t.p. em } \{x \in \Omega : u(x) < 0\}. \end{cases}$$

Corolário 6.4 *Suponha Ω um domínio suave de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$. Considere a família a um parâmetro de funções $\tau_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por*

$$\tau_\epsilon(s) = \begin{cases} s \textit{ se } |s| \leq \epsilon, \\ \epsilon \frac{s}{|s|} \textit{ se } |s| > \epsilon. \end{cases}$$

Então $\tau_\epsilon(u) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ e para $i = 1, ..., N$ vale

$$\frac{\partial \tau_\epsilon \circ u}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} & \textit{para q.t.p. em } \{x \in \Omega : |u(x)| < \epsilon\}, \\ 0 & \textit{para q.t.p. em } \{x \in \Omega : |u(x)| \geq \epsilon\}. \end{cases}$$

6.4.3 Convergência pontual do gradiente

Teorema 6.15 *Considere Ω um domínio suave de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $1 < p, q < N$, $-\infty < a < (N-p)/p$, $-\infty < b < (N-q)/q$, $a \leq c_1 < a+1$, $b \leq c_2 < b+1$, $d_1 = 1 + a - c_1$, $d_2 = 1 + b - c_2$, $p^* = Np/(N - d_1 p)$, $q^* = Nq/(N - d_2 q)$, $\{(u_n, v_n)\}$ em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ uma seqüência$-(PS)_c$ e $\{(u,v)\} \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \times W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$ tais que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ e $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $W_0^{1,q}(\Omega, |x|^{-bq})$, quando $n \to \infty$. Então, a menos de uma subseqüência, $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ e $\nabla v_n(x) \to \nabla v(x)$, quando $n \to \infty$, para q.t.p. $x \in \Omega$.*

Demonstração. Seja $\{\omega_j\}$ uma seqüência de subconjuntos relativamente compactos de Ω tais que $\omega_j \subset \Omega$ e $\Omega = \cup_{j \geq 1} \omega_j$. Por argumento de diagonalização, basta provarmos que $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ e $\nabla v_n(x) \to \nabla v(x)$, quando $n \to \infty$, para q.t.p. em ω_j.

Consideremos a seqüência

$$e_n(x) = \left\langle |x|^{-ap} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |x|^{-ap} |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla(u_n - u) \right\rangle_e (x),$$

que é não negativa (ver lema 6.2). Além disso, obtemos da desigualdade de Hölder, que $\{e_n\}$ é uniformentente limitada em $L^1(\Omega)$. Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $supp(\phi) \subset \omega_{j+1}$,

$0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi\big|_{\omega_j} \equiv 1$. Então, fazendo $\rho = -c_1$, conseguimos

$$\int_{\Omega} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\,dx \;=\; \int_{\{|x|^{\rho}|u|>k\}} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\,dx + \int_{\{|x|^{\rho}|u|\leq k\}} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\,dx. \tag{6.8}$$

Agora, vamos estimar a primeira integral da soma acima. Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\{|x|^{\rho}|u|>k\}} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\;dx \;&\leq\; \left(\int_{\{|x|^{\rho}|u|>k\}} e_n\;dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\{|x|^{\rho}|u|>k\}} \phi^{\frac{p}{p-1}}\;dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq\; \left(\int_{\Omega} e_n dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\{|x|^{\rho}|u|>k\}\cap\omega_{j+1}} \phi^{\frac{p}{p-1}}\;dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq\; M\left(\int_{\{|x|^{\rho}|u|>k\}\cap\omega_{j+1}} 1\;dx\right)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Porém, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\{|x|^{\rho}|u|>k\}\cap\omega_{j+1}} 1\;dx \;&\leq\; \int_{\{|x|^{\rho}|u|>k\}\cap\omega_{j+1}} (|x|^{\rho}|u|)/k\;dx \\
&\leq\; \left(\int_{\Omega} \frac{|x|^{-c_1 p^*}|u|^{p^*}}{k^{p^*}}\;dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{\omega_{j+1}} 1\;dx\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}} \\
&\leq\; \frac{C_j}{k},
\end{aligned}$$

logo,

$$\int_{\{|x|^{\rho}|u|>k\}} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\;dx \;\leq\; \frac{MC_j}{k^{(p-1)/p}}. \tag{6.10}$$

Agora, vamos estimar a segunda integral da soma em (6.8). Consideremos

$$\int_{\{|x|^{\rho}|u|\leq k\}} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\,dx = \int_{\{|x|^{\rho}|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|<\epsilon\}} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\,dx + \int_{\{|x|^{\rho}|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\geq\epsilon\}} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\,dx. \tag{6.11}$$

Daí, temos

$$\int_{\{|x|^{\rho}|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\geq\epsilon\}} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\;dx \;\leq\; \left(\int_{\{|x|^{\rho}|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\geq\epsilon\}} e_n\;dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\{|x|^{\rho}|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\geq\epsilon\}} \phi^{\frac{p}{p-1}}\;dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M\left(\int_{\{|x|^{\rho}|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\geq\epsilon\}\cap\omega_{j+1}} \phi^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\\
&\leq M\left|\{|x|^{\rho}|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\geq\epsilon\}\cap\omega_{j+1}\right|^{\frac{p-1}{p}}\\
&\leq M\left|\{|u_n-u|\geq\epsilon\}\cap\omega_{j+1}\right|^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Porém, como $|\omega_{j+1}| < \infty$ e $u_n(x) \to u(x)$ quando $n \to \infty$ para quase todo ponto $x \in \Omega$, segue que $\{u_n\big|_{\omega_{j+1}}\}$ converge em medida para u, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\{|u_n - u| \geq \epsilon/2\} \cap \omega_{j+1}| < \epsilon/2$ para todo $n \geq n_0$. Logo, como $\{|u_n - u| \geq \epsilon\}$ está contido em $\omega_{j+1} \subset \{|u_n - u| \geq \epsilon/2\} \cap \omega_{j+1}$, temos $|\{|u_n - u| \geq \epsilon\} \cap \omega_{j+1}| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, obtemos

$$
\limsup_{n\to\infty} \int_{\{|x|^{\rho}|u|\leq k\}\cap\{|u_n-u|\geq\epsilon\}} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\, dx \leq M\epsilon^{(p-1)/p}. \tag{6.12}
$$

Definindo $S_{k,n}^{\epsilon} = \omega_{j+1} \cap \{|x|^{\rho}|u| \leq k\} \cap \{|u_n - u| \leq \epsilon\}$, nós conseguimos

$$
\begin{aligned}
\int_{S_{k,n}^{\epsilon}} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\, dx &\leq \left(\int_{S_{k,n}^{\epsilon}} \phi\, e_n dx\right)^{1/p} \left(\int_{S_{k,n}^{\epsilon}} \phi dx\right)^{(p-1)/p}\\
&= C_j \left(\int_{S_{k,n}^{\epsilon}} \phi\, e_n dx\right)^{1/p}\\
&= C_j \left(\int_{S_{k,n}^{\epsilon}} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n-u)\phi dx\right.\\
&\qquad \left. - \int_{S_{k,n}^{\epsilon}} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n-u)\phi dx\right)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{6.13}
$$

Observando que o funcional linear $H : W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) \to \mathbb{R}$ definido por

$$
H(w) = \int_{S_{k,n}^{\epsilon}} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w\, \phi\, dx
$$

é contínuo e $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ quando $n \to \infty$, segue que

$$
\int_{S_{k,n}^{\epsilon}} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n-u)\, \phi\, dx \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{6.14}
$$

Também, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{S^{\epsilon}_{k,n}} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n-u)\phi dx &= \int_{S^{\epsilon}_{k,n}} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \tau_\epsilon(u_n-u)\phi dx \\
&\leq \int_{\Omega} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \tau_\epsilon(u_n-u)\phi dx \\
&= \int_{\Omega} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla[\phi \tau_\epsilon(u_n-u)] dx \\
&\quad -\int_{\Omega} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n (\nabla\phi) \tau_\epsilon(u_n-u) dx,
\end{aligned} \tag{6.15}
$$

mas,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n (\nabla\phi)\tau_\epsilon(u_n-u)dx\right| &\leq \left(\int_{\Omega}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-1}|\nabla\phi|dx\right)\epsilon \\
&\leq ||u_n||^{p-1}||\phi||\,\epsilon \\
&\leq C_j\,\epsilon
\end{aligned} \tag{6.16}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\Omega} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla[\phi\tau_\epsilon(u_n-u)]dx\right| \\
&= \left|\langle I'(u_n,v_n),(\phi\tau_\epsilon(u_n-u),0)\rangle + \theta\int_{\Omega}|x|^{-\beta}hu_{n_+}^{\theta-1}v_{n_+}^{\delta}\phi\tau_\epsilon(u_n-u)dx\right. \\
&\quad \left. +\alpha\int_{\Omega}|x|^{-c_1p^*}u_{n_+}^{\alpha-1}v_{n_+}^{\gamma}\phi\tau_\epsilon(u_n-u)dx\right| \\
&\leq |\langle I'(u_n,v_n),(\phi\tau_\epsilon(u_n-u),0)\rangle| + \left(\theta\int_{\Omega}|x|^{-\beta}hu_{n_+}^{\theta-1}v_{n_+}^{\delta}\phi dx\right. \\
&\quad \left. +\alpha\int_{\Omega}|x|^{-c_1p^*}u_{n_+}^{\alpha-1}v_{n_+}^{\gamma}\phi dx\right)\epsilon \\
&\leq O(1)_n + M\,\epsilon;
\end{aligned} \tag{6.17}
$$

então, tomando o limite superior na equação (6.15) e usando (6.16) e (6.17), conseguimos

$$
\limsup_{n\to\infty}\int_{S^{\epsilon}_{k,n}}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(u_n-u)\phi dx \leq O(\epsilon), \tag{6.18}
$$

Conseqüentemente, passando o limite superior na equação (6.13) e usando (6.14) e (6.18), concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{S^{\epsilon}_{k,n}} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\,dx \leq O(\epsilon). \tag{6.19}$$

Passando o limite superior na equação (6.11) e usando (6.12) e (6.19), obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\{|x|^{\rho}|u|\leq k\}} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\,dx \leq O(\epsilon), \tag{6.20}$$

então, usando (6.10) e (6.20) em (6.8), segue que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\,dx \leq O\left(\frac{1}{k^{(p-1)/p}}\right) + O(\epsilon),$$

portanto, fazendo $\epsilon \to 0$ e então, $k \to \infty$, concluímos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \phi\,(e_n)^{\frac{1}{p}}\,dx = 0,$$

logo, temos que $e_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$ para q.t.p. $x \in \omega_j$. Daí, obtemos do lema 6.2 que $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ quando $n \to \infty$ para q.t.p. $x \in \omega_j$.

Analogamente, provamos que $\nabla v_n(x) \to \nabla v(x)$ para q.t.p. $x \in \omega_j$ quando $n \to \infty$.

■

Referências Bibliográficas

[1] Adriouch, K.; El Hamidi, A.; *The Nehari manifold for systems of nonlinear elliptic equations*, Nonlinear Anal. TMA., v. 64, p. 2149-2167, 2006.

[2] Adriouch, K.; El Hamidi, A.; *On local compactness in quasilinear elliptic problems*, Diff. Int. Eqns., v. 20, p. 77-92, 2007.

[3] Aikawa, H.; Kilpeläinen, T.; Shanmugalingam, N.; Zhong, X.; *Boundary Harnack principle for p-harmonic functions in smooth euclidean domains*, preprint.

[4] Alves, C.O.; Gonçalves, J.V.; Miyagaki, O.H.; *Multiple positive solutions for semilinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$ *involving critical exponents*, Nonlinear Anal. TMA., v. 34, p. 593-615, 1998.

[5] Alves, C.O.; de Morais Filho, D.C.; Souto, M.A.S.; *On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. TMA. v. 42, p. 771-787, 2000.

[6] Ambrosetti, A.; Rabinowitz, P.H.; *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal., v. 14, p. 349-381, 1973.

[7] Assunção, R.B; Carrião, P.C.; Miyagaki, O.H.; *Multiplicity of solutions for critical singular problems*, Appl. Math. Letters, v. 19, p. 741-746, 2006.

[8] Ben-Naoun, A.K.; Troestler, C.; Willem, M.; *Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains*, Nonlinear Anal.TMA., v. 26, p. 823-833, 1996.

[9] Boccardo, L.; de Figueiredo, D.G.; *Some remarks on a system of quasilinear elliptic equations*, NoDEA-Nonl. Diff. Eqns. Appl., v. 9, p. 309-323, 2002.

[10] Bouchekif, M.; Serag, H.; Thélin, F.; *On maximum principle and existence of solutions for some nonlinear elliptic systems*, Rev. Mat. Apl., v. 16, p. 1-16, 1995.

[11] Brezis, H.; Nirenberg, L.; *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., v. 36, p. 437-477, 1983.

[12] Brezis, H.; *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[13] Brock, F.; Iturriaga, L.; Sánchez, J.; Ubilla, P.; *Existence of positive solutions for p-laplacian problems with weights*, Comm. Pure Appl. Anal., v. 5, p. 941-952, 2006.

[14] Caffarelli, L.; Kohn, R.; Nirenberg, L.; *First order interpolation inequalities with weights*, Compositio Mathematica v. 53, p. 259-275, 1984.

[15] Caldiroli, P.; Musina, R.; *On the existence of extremal functions for a weighted Sobolev embedding with critical exponent*, Calc. Var. PDE., v. 8, p. 365-387, 1999.

[16] Cañada, A.; Drábek, P.; Gámez, J.L.; *Existence of positive solutions for some problems with nonlinear diffusion*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 349, p. 4231-4249, 1997.

[17] Cañada, A.; Gámez, J.L.; *Some new applications of the method of lower and upper solutions to elliptic problems*, Appl. Math. Letters, v. 6, p. 41-45, 1993.

[18] Cañada, A.; Magal, P.; Montero, J.A.; *Optimal control of harvesting in a nonlinear elliptic system arising from population dynamics*, J. Math. Anal. Appl., v. 254, p. 571-586, 2001.

[19] Castro, A.; Chhetri, M.; Shivaji, R.; *Nonlinear eigenvalue problems with semipositone structure*, Electronic J. Diff. Eqns., Conf. 05, p. 33-49, 2000.

[20] Castro, A.; Hassanpour, M.; Shivaji, R.; *Uniqueness of non-negative solutions for a semipositone problems with concave nonlinearity*, Comm. Partial Diff. Eqns., v. 20, p. 1927-1936, 1995.

[21] Castro, A.; Shivaji, R.; *Nonnegative solutions for a class of nonpositone problems*, Proc. Royal Soc. Edin., 108 (A), p. 291-302, 1988.

[22] Catrina, F.; Wang, Z.Q.; *Positive bound states having prescribed symmetry for a class of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linèaire, v. 18, p. 157-178, 2001.

[23] Chen, C.; *On positive weak solutions for a class of quasilinear elliptic systems*, Nonlinear Anal. TMA., v. 62, p. 751-756, 2005.

[24] Chen, J.; Li, S.; *On multiple solutions of a singular quasilinear equation on unbounded domain*, J. Math. Anal. Appl., v. 275, p. 733-746, 2002.

[25] Chou, K.S.; Chu, C.W.; *On the best constant for a weighted Sobolev Hardy inequality*, J. London Math. Soc., v. 48, p. 137-151, 1993.

[26] Cîrstea, F.; Motreanu, D.; Rădulescu, V.; *Weak solutions of quasilinear problems with nonlinear boundary condition*, Nonlinear Anal. TMA., v. 43, p. 623-636, 2001.

[27] Clément, P.; de Figueiredo, D.G.; Mitidieri, E.; *Quasilinear elliptic equations with critical exponents*, Top. Meth. Nonlinear Anal., v. 7, p. 133-170, 1996.

[28] Costa, D.G.; Tehrani, H.; Yang, J.; *On a variational approach to existence and multiplicity results for semipositone problems*, Electronic J. Diff. Eqns., v. 2006(2006), n. 11, p. 1-10.

[29] de Morais Filho, D.C.; Souto, M.A.S.; *Systems of $p-$laplacian equations involving homogeneous nonlinearities with critical Sobolev exponent degrees*, Comm. Partial Diff. Eqns., v. 24, p. 1537-1553, 1999.

[30] de Nápoli, P.L.; Mariani, M.C.; *Quasilinear elliptic systems of resonant type and nonlinear eigenvalue problems*, Abstract Appl. Anal., v. 7, p. 155-167, 2002.

[31] Deimling, K.; *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.

[32] Díaz, J.I.; Saa, J.E.; *Existence et unicité de solutions positives pour certainés équations elliptiques quasilinéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, v. 305, p. 521-524, 1987.

[33] Ekeland, I.; *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., v. 47, p. 324-353, 1974.

[34] Felli, V.; Schneider, M.; *Perturbation results of critical elliptic equations of Caffarelli-Kohn-Nirenberg type*, J. Diff. Eqns., v. 191, p. 121-142, 2003.

[35] de Figueiredo, D.G.; *Nonlinear elliptic systems*, An. Acad. Brasil. Ciênc., v. 72, p. 453-469, 2000.

[36] Fleckinger, J.; Pardo, R.; Thélin, F.; *Four-parameter bifurcation for a p-laplacian system*, Electronic J. Diff. Eqns., v. 2001(2001), n. 06, p. 1-15.

[37] García Azorero, J.P.; Peral Alonso, I.; *Existence and nonuniqueness for the p−laplacian: Nonlinear eigenvalues*, Comm. Partial Diff. Eqns., v. 12, p. 1389-1430, 1987.

[38] García Azorero, J.P.; Peral Alonso, I.; *Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems*, J. Diff. Eqns., v. 144, p. 441-476, 1998.

[39] García Azorero, J.P.; Peral Alonso, I.; Manfredi, J.J.; Sobolov versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations, Comm. Contemp. Math., v. 2, p. 385-404, 2000.

[40] Ghergu, M.; Nicolaescu, L.I.; *Singular elliptic problems with lack of compactness*, Annali di Matematica, v. 185, p. 63-79, 2006.

[41] Ghoussoub, N.; Yuan, C.; *Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 352, p. 5703-5743, 2000.

[42] Gonçalves, J.V.; Alves, C.O.; *Existence of positive solutions for m-laplaciam equations in $\mathbb{R}^N$ involvong critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. TMA., v. 32, p. 53-70, 1998.

[43] Hai, D.D.; Chhetri, M.; Shivaji, R.; *An existence result for superlinear p-laplacian semipositone systems*, Diff. Int. Eqns., v. 14, p. 231-240, 2001.

[44] Hai, D.D.; Shivaji, R.; *An existence result on positive solutions for a class of p-laplacian systems*, Nonlinear Anal. TMA., v. 56, p. 1007-1010, 2004.

[45] Han, P.; *Multiple positive solutions of nonhomogeneous elliptic systems involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. TMA., v. 64, p. 869-886, 2006.

[46] Horiuchi, T.; *Best constant in weighted Sobolev inequality with weights being powers of distance from origin*, J. Inequal. Appl., v. 1, p. 275-292, 1997.

[47] Kavian, O.; *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[48] Keller, H.B.; Cohen, D.S.; *Some positone problems suggested by nonlinear heat generation*, J. Math. Mech., v. 16, p. 1361-1376, 1967.

[49] Kim, E.H.; *A steady state of morphogen gradients for semilinear elliptic systems*, Electronic J. Diff. Eqns., v. 2005(2005), n. 62, p. 1-9.

[50] Kolmogorov, A.N.; Fomin, S.V.; *Introductory real analysis*, Dover Publications, New York, 1975.

[51] Lieberman, G.M.; *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. TMA., v. 12, p. 1203-1219, 1998.

[52] Lima, E.L.; *Curso de análise*, Projeto Euclides, Impa, Rio de Janeiro, 2005.

[53] Marras, M.; Vernier-Piro, S.; *Upper and lower solutions in quasilinear parabolic boundary value problems*, Z. angew. Math. Phys., v. 56, p. 942-956, 2005.

[54] Miyagaki, O.H.; *On a class of semilinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth*, Nonlinear Anal. TMA., v. 29, p. 773-781, 1997.

[55] Miyagaki, O.H.; Rodrigues, R.S.; *On positive solutions for a class of singular quasilinear elliptic systems*, J. Math. Anal. Appl., v. 334, p. 818-833, 2007.

[56] Mizoguchi, N.; *Existence of nontrivial solutions of partial differential equations with discontinuous nonlinearities*, Nonlinear Anal. TMA., v. 16, p. 1025-1034, 1991.

[57] Nicolaescu, L.I.; *A weighted semilinear elliptic equation involving critical Sobolev exponents*, Diff. Int. Eqns., v. 3, p. 653-671, 1991.

[58] Noussair, E.S.; Swanson, C.A.; Yang, J.; *Quasilinear elliptic problem with critical exponents*, Nonlinear Anal. TMA., v. 20, p. 285-301, 1993.

[59] Oruganti, S.; Shivaji, R.; *Existence results for classes of p-laplacian semipositone equations*, Boundary Value Problems, v. 2006 (2006), Article ID 87483, p. 1-7.

[60] Pan, X.; *Positive solutions of the elliptic equation* $\Delta u + u^{(n+2)/(n-2)} + K(x)u^q = 0$ *in* $\mathbb{R}^n$ *and in ball*, J. Math. Anal. Appl., v. 172, p. 323-338, 1993.

[61] Pucci, P.; Serrin, J.; *The strong maximum principle revisited*, J. Diff. Eqns., v. 196, p. 1-66, 2004. Erratum: J. Diff. Eqns. v. 207, p. 226-227, 2004.

[62] Silva, E.A.B.; Xavier, M.S.; *Quasilinear elliptic system with coupling on non-homogeneous critical term*, Nonlinear Anal. TMA., to appear.

[63] Simon, J.; *Régularité de la solução dune équation non linéaire dans* $\mathbb{R}^N$, Jounées dAnalyse non linéarie (Proc. Conf. Besançon, 1977), Lecture Notes in Mathematics, 665, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[64] Stavrakakis, N.M.; Zographopoulos, N.B.; *Existence results for quasilinear elliptic systems in* $\mathbb{R}^N$, Electronic J. Diff. Eqns., v. 1999(1999), n. 39, p. 1-15.

[65] Stavrakakis, N.M.; Zographopoulos, N.B.; *Bifurcation results for quasilinear elliptic systems*, Adv. Diff. Eqns., v. 08, p. 315-336, 2003.

[66] Struwe, M.; *Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[67] Terracini, S.; *On positive entire solutions to a class of equations with a singular coefficient and critical exponent*, Adv. Diff. Eqns., v. 1, p. 241-264, 1996.

[68] Tolksdorf, P.; *Regularity for a general class of quasilinear elliptic equations*, J. Diff. Eqns., v. 51, p. 126-150, 1984.

[69] Wang, Z.Q.; Willem, M.; *Singular minimization problems*, J. Diff. Eqns., v. 161, p. 307-320, 2000.

[70] Xuan, B.; *The eigenvalue problem for a singular quasilinear elliptic equation*, Electronic J. Diff. Eqns., v. 2004(2004), n. 16, p. 1-11.

[71] Xuan, B.; *The solvability of quasilinear Brezis-Nirenberg-type problems with singular weights*, Nonlinear Anal. TMA., v. 62, p. 703-725, 2005.

[72] Xuan, B.; Su, S.; Yan, Y.; *Existence results for Brezis-Nirenberg problems with Hardy potential and singular coefficients*, Nonlinear Anal. TMA., v. 67, p. 2091-2106, 2007.

[73] Yang, J.; *On critical semilinear elliptic systems*, Adv. Diff. Eqns., v. 6, p. 769-798, 2001.

[74] Yang, J.; Zhu, X. *The quasilinear elliptic equation on unbounded domain involving critical Sobolev exponent*, J. Partial Diff. Eqns., v. 2, p. 53-64, 1989.