

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Sincronização e continuidade em um problema parabólico governado pelo $p$ -laplaciano

Ana Claudia Pereira

São Carlos - SP

2009

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Sincronização e continuidade em um problema parabólico  
governado pelo  $p$ -laplaciano**

Ana Claudia Pereira

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, área de concentração: Análise Matemática.

**São Carlos - SP  
Fevereiro de 2009**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

P436sc

Pereira, Ana Cláudia.

Sincronização e continuidade em um problema parabólico governado pelo p-laplaciano / Ana Cláudia Pereira. -- São Carlos : UFSCar, 2009.

113 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Sincronização. 2. Continuidade de atratores. 3. Continuidade de equilíbrios. 4. P-laplaciano. I. Título.

CDD: 515.355 (20<sup>a</sup>)

**Banca Examinadora:**

*Cláudia Buttarello Gentile*

---

**Profa. Dra. Cláudia Buttarello Gentile**  
DM - UFSCar

*Simone Mazzini Bruschi*

---

**Profa. Dra. Simone Mazzini Bruschi**  
IGCE - UNESP

*José Ruidival Soares dos Santos Filho*

---

**Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho**  
ICMC - USP

*Antonio Luiz Pereira*

---

**Prof. Dr. Antonio Luiz Pereira**  
IME - USP

*Claudianor Oliveira Alves*

---

**Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves**  
UFCG

Orientadora

---

Profa. Dra. Cláudia Buttarello Gentile

Co-orientador

---

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Aos meus pais Oliveira e Maria Concebida, com todo amor,  
gratidão e admiração.

# Agradecimentos

Sempre tive muitos motivos para agradecer. Hoje, em especial, gostaria de agradecer a Deus o privilégio de fazer parte de uma bela família e a oportunidade de ter conhecido e convivido com grandes pessoas. Agradeço também a Deus por ter me dado a serenidade necessária para concluir este trabalho.

Quero agradecer meus pais, Oliveira e Maria Concebida, pela educação que me deram, o carinho, o amor, a compreensão, a paciência. Por todos os sacrifícios que fizeram para que eu pudesse estudar e ter melhores oportunidades na vida.

Meus sinceros agradecimentos à Professora Dra. Cláudia Buttarello Gentile pela enorme paciência que teve comigo, por sua compreensão, todos os ensinamentos, pela honestidade e amizade.

Ao Professor Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki pelas oportunidades que me proporcionou ao longo de minha vida acadêmica, pelos conselhos, pelo apoio, incentivo e amizade.

Aos professores Antonio, Claudianor, Sérgio, José Ruidival, Arnaldo e Simone que gentilmente aceitaram participar de minha banca de doutorado.

Aos Professores e Funcionários do Departamento de Matemática da UFSCar e da UFV, e também a todos os amigos do Cefet - Varginha. Em especial gostaria de agradecer a professora Lana (UFV) com quem iniciei meus estudos científicos, a professora Vera Carbone (UFSCar) por dedicar parte de seu tempo a assistir nossos seminários, ao professor Marcos Roberto (UEM) pelas sugestões e conselhos e ao professor José Ruidival (UFSCar) que gentilmente nos dedicou parte do seu tempo e ensinamentos.

À toda minha família, pelo apoio, carinho e torcida. Em especial aos meus tios Hélio, Domingos, Silvana e Leoneza que me acolheram e tornaram possível a minha formação acadêmica.

Quero agradecer ao Ricardo Edem, que com muito carinho tornou minha vida mais leve, principalmente nos momentos difíceis. Obrigada pela sua paciência e compreensão.

A todos os meus amigos, por compartilharem comigo os momentos difíceis e as vitórias, em especial à Aline, Tatiana, Mariza, Adriana, Taísa, Gilze, Lucy, Jacson, Gustavo, Laércio e Ricardo Menezes pelo apoio e amizade.

À Irma por estar sempre pronta a nos ajudar.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

E a todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

Obrigada!

# Resumo

Neste trabalho estudamos um problema de reação e difusão governado pelo  $p$ -laplaciano com  $p > 2$  e analisamos propriedades de continuidade do conjunto equilíbrio com relação ao parâmetro de difusão. Além disso consideramos sistemas não identicamente acoplados e obtemos propriedades de sincronicidade e a continuidade da família de atratores com relação ao parâmetro de acoplamento.

# Abstract

In this work we study a reaction diffusion problem governed by the  $p$ -laplacian with  $p > 2$  and we analyze properties of the continuity of the set of equilibria with respect to the diffusion parameter. We also consider coupled non-identical systems and we obtain properties about the synchronicity. Moreover we prove the convergence of the attractors with respect to the coupling parameter.

# Sumário

<b>1</b>	<b>O Problema de Takeuchi e Yamada</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Propriedades de Continuidade de <math>(P_\epsilon)</math></b>	<b>20</b>
2.1	Existência e semicontinuidade superior dos atratores . . . . .	20
2.1.1	Semicontinuidade superior de atratores . . . . .	27
2.2	Continuidade do conjunto de equilíbrios . . . . .	31
2.2.1	Semicontinuidade superior do conjunto de equilíbrios . . . . .	31
2.2.2	Semicontinuidade inferior do conjunto de equilíbrios . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Considerações sobre semicontinuidade inferior de atratores</b>	<b>50</b>
3.1	Equi-atração de vizinhança de pontos de $A_{\epsilon_0}$ . . . . .	56
3.2	Considerações finais . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Continuidade e sincronização em sistemas acoplados</b>	<b>61</b>
4.1	Sobre o sistema com parâmetros distintos . . . . .	61
4.1.1	Existência de solução . . . . .	61
4.1.2	Existência de atrator . . . . .	69
4.1.3	Existência de Funcional de Lyapunov para $S(t)$ . . . . .	78
4.1.4	Semicontinuidade superior dos atratores $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . . . . .	82
4.2	O Sistema limite - parâmetros iguais . . . . .	91
4.2.1	O conjunto equilíbrio . . . . .	92
4.2.2	Comparação de soluções . . . . .	93
4.2.3	Sincronicidade em $L^2$ . . . . .	95
4.2.4	Sobre a continuidade dos atratores quando o parâmetro $k$ varia . . . . .	96
4.3	$\epsilon$ -sincronização . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Apêndice</b>	<b>108</b>

# Introdução

No início da década de 70, os matemáticos Chafee e Infante descreveram completamente em [9] o esquema de bifurcação e o quadro de estabilidade dos equilíbrios do problema semilinear

$$(CI) \begin{cases} u_t - \epsilon u_{xx} = u - u^3, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 < t < +\infty \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Através do método “time-map”, que ajusta a velocidade inicial de um problema de Cauchy a fim de garantir as condições de fronteira desejadas, provaram que para valores fixos de  $\epsilon > 0$ , as soluções estacionárias de  $(CI)$  são finitas e bifurcam da solução nula aos pares em cada ponto de uma seqüência decrescente  $\{\epsilon_n\}$ , cada novo par simétrico com relação ao eixo das abscissas e contendo uma raiz a mais que o par anterior, de forma que quando  $\epsilon_n \rightarrow 0$  o número de soluções estacionárias de  $(CI)$  tende a infinito. Sendo  $(CI)$  pertencente a uma classe de problemas na qual as trajetórias tendem assintoticamente para pontos de equilíbrio quando  $t \rightarrow \infty$ , e também quando  $t \rightarrow -\infty$  no caso de trajetórias completas, o conhecimento detalhado das soluções estacionárias é um trunfo no entendimento do atrator que, para esta classe de problemas, os sistemas gradientes [15], é exatamente o conjunto de todos os equilíbrios reunidos com as trajetórias completas que os conectam. Além das propriedades de estabilidade de cada solução estacionária, sabe-se ainda que o número de oscilações (o “lap-number”) de cada solução de  $(CI)$  é não crescente ao longo de órbitas [22], de forma que é conhecido também o sentido das trajetórias que conectam dois equilíbrios e, tão detalhado é o entendimento que se tem deste problema que, D.Henry, ao citá-lo como um exemplo em [17], refere-se a ele como a “jóia de sua coleção”.

Mais recentemente os matemáticos Takeuchi e Yamada fizeram em [28] uma descrição igualmente detalhada do esquema de bifurcação e do quadro de estabilidade dos equilíbrios do problema quasilinear

$$(P_\epsilon) \begin{cases} u_t - \epsilon(|u_x|^{p-2} u_x)_x = |u|^{q-2} u(1 - |u|^r), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & 0 < t < +\infty \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1) \end{cases}$$

onde  $p > 2$ ,  $q \geq 2$ ,  $r > 0$  e  $\epsilon > 0$ , levando em consideração as relações entre  $p$  e  $q$ . Denotando por  $E_\epsilon$  o conjunto de equilíbrios do problema quasilinear  $(P_\epsilon)$  que também descreve um

sistema gradiente, tem-se que

- se  $p > q$ ,  $E_\epsilon$  é um conjunto infinito qualquer que seja  $\epsilon > 0$  e é discreto apenas para valores suficientemente grandes de  $\epsilon$ ;
- se  $p \leq q$ ,  $E_\epsilon$  é um conjunto finito para valores grandes de  $\epsilon$  e infinito para  $\epsilon$  suficientemente pequeno.

No caso particular em que  $p = q$  existem semelhanças notáveis entre os dois problemas, especialmente no que se refere às propriedades de estabilidade dos equilíbrios. Em ambos os casos a solução nula é assintoticamente estável para valores grandes o suficiente do parâmetro de difusão  $\epsilon$  e passa a ser instável assim que bifurcam as primeiras soluções não nulas. Estas por sua vez são assintoticamente estáveis enquanto existirem, e as demais soluções estacionárias são instáveis nos demais casos.

A principal diferença entre os dois problemas é que, embora o número de elementos no conjunto equilíbrio de  $(CI)$  tenda a infinito quando a difusão vai a zero, ele permanece discreto, pois os equilíbrios bifurcam da solução nula dois a dois. Já no caso quasilinear o conjunto equilíbrio pode conter componentes conexas com a cardinalidade do continuum se o coeficiente de difusão não for suficientemente grande. Isso ocorre porque as soluções do problema estacionário associado a  $(P_\epsilon)$  podem atingir seus extremos em 1 e  $-1$ , que anulam o lado direito da equação em  $(P_\epsilon)$ . Sendo assim, as soluções equilíbrio podem formar patamares quando atingirem estes valores e, embora a soma dos comprimentos de todos os patamares deva ser constante, ela pode ser livremente distribuída entre eles. Dessa forma pode haver um continuum de possibilidades para as soluções equilíbrio com um mesmo número de raízes. Isso não ocorre no problema semilinear porque o “x-tempo” que um equilíbrio de  $(CI)$  levaria para atingir seus extremos em 1 ou  $-1$  não é finito.

Apesar disso, sabe-se que também em  $(P_\epsilon)$ , para cada valor fixo de  $\epsilon$  existem finitas componentes conexas de  $E_\epsilon$ , cada componente contendo soluções com o mesmo número de raízes, as componentes bifurcam aos pares da solução nula, e o atrator é a reunião (finita) dos conjuntos instáveis das componentes conexas de  $E_\epsilon$ , ou seja, o atrator é neste caso também a reunião de  $E_\epsilon$  e as trajetórias completas que conectam suas partes conexas, [28, 18]. Foi também provado em [13] que o “lap-number” de cada solução de  $(P_\epsilon)$  é não crescente ao longo de órbitas se os dados iniciais são funções contínuas e em [5] mostra-se que, de fato, o problema  $(CI)$  pode ser obtido como um limite do problema  $(P_\epsilon)$  quando  $p \downarrow 2$  e que, para cada valor fixo de  $\epsilon$  o conjunto  $E_\epsilon$  se comporta continuamente com relação a  $p$ , passando sempre a ser discreto a uma distância positiva de  $p = 2$ .

Assim, dada a profusão de questões interessantes que podem ser feitas acerca do problema  $(P_\epsilon)$  com inspiração em  $(CI)$ , o texto [28] cujo conteúdo apresentamos sucintamente no primeiro capítulo deste texto, foi a base do trabalho que a partir de agora passamos a descrever. Primeiramente investigamos as propriedades de continuidade de  $(P_\epsilon)$

com relação a  $\epsilon$  e mostramos que o fluxo é contínuo e os atratores são semicontínuos superiormente nas topologias de  $L^2(0, 1)$  e  $W_0^{1,p}(0, 1)$ . Além disso os conjuntos de equilíbrios  $\{E_\epsilon\}$  comportam-se continuamente com relação a  $\epsilon$ , exceto no caso particular em que  $p < q$ , no qual a semicontinuidade inferior deixa de ocorrer à direita em cada ponto de uma sequência  $\{\lambda_l(a^*)\}_{l \geq 1}$ , onde bifurcam pares de equilíbrios isolados com  $l$  raízes.

Todas as propriedades de continuidade descritas acima são motivadas pela pergunta: os atratores deste problema comportam-se continuamente com relação ao parâmetro  $\epsilon$ ? Procuramos concentrar nossa atenção no caso particular  $p = q$ , com o parâmetro de difusão restrito a um intervalo dentro do qual todos os problemas  $(P_\epsilon)$  possuem apenas três equilíbrios. Nossa idéia era buscar a semicontinuidade inferior através de uma propriedade de equi-atratividade, conforme é sugerido em [10], onde prova-se que, sob determinadas hipóteses no fluxo, uma família de atratores a um parâmetro  $\epsilon$  será contínua se o tempo de atração de cada limitado puder ser escolhido uniformemente em  $\epsilon$ . Infelizmente não obtivemos uma resposta para esta questão, mas apresentamos brevemente no Capítulo 3 uma demonstração de que, com exceção do único equilíbrio instável (o equilíbrio nulo), todos os pontos possuem vizinhanças que são equi-atraídas. Assim, para concluir a continuidade dos atratores neste exemplo específico, deve-se questionar se existe uma vizinhança do zero que seja também equi-atraída. Claramente uma resposta afirmativa para esta questão poderia ser obtida através de um processo de linearização ao redor da origem e a obtenção de uma propriedade local de continuidade do conjunto instável do zero, como usualmente se faz nos problemas semilineares. No entanto orientamos nossa investigação na busca de uma solução alternativa e, embora tenhamos atingido uma compreensão significativa do problema, não alcançamos a sua conclusão.

O quarto capítulo deste texto pode ser lido quase que isoladamente embora envolva algumas referências aos capítulos anteriores. No entanto essencialmente ele é auto-contido. Nesta parte do trabalho nossa atenção se volta para um sistema envolvendo duas equações como as que foram consideradas anteriormente, mas entrelaçadas por um termo de acoplamento. Mais precisamente consideramos um problema da forma

$$(S_n) \begin{cases} u_t^n = \epsilon_1^n (|u_x^n|^{p_1^n - 2} u_x^n)_x + |u^n|^{q_1^n - 2} u^n (1 - |u^n|^{r_1^n}) - k(u^n - v^n) \\ v_t^n = \epsilon_2^n (|v_x^n|^{p_2^n - 2} v_x^n)_x + |v^n|^{q_2^n - 2} v^n (1 - |v^n|^{r_2^n}) + k(u^n - v^n) \end{cases}$$

em  $W_0^{1,p_1}(0, 1) \times W_0^{1,p_2}(0, 1)$ , onde  $\epsilon_i^n$ ,  $k$  são constantes positivas,  $q_i^n \geq 2$ ,  $r_i^n \geq q_i^n - 2$  e  $p_i^n > 2$ , para  $i = 1, 2$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Nossa preocupação ao analisar  $(S_n)$  foi constatar se o sistema apresenta o fenômeno conhecido por  $\epsilon$ -sincronização [6], ou seja, se fazendo  $\epsilon_i^n \rightarrow \epsilon$ ,  $p_i^n \rightarrow p$ ,  $q_i^n \rightarrow q$ ,  $r_i^n \rightarrow r$ , quando  $n \rightarrow \infty$  para  $i = 1, 2$ , dado  $\eta > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u^n(t) - v^n(t)\|_{L^2(0,1)} < \eta \quad \forall n \geq n_0$$

o que de fato ocorre. Este ajuste no tempo em sistemas acoplados foi descrito em um grande

número de trabalhos, entre os quais citamos [26, 16, 6].

Neste texto, nós primeiramente exibimos um resultado de existência de solução global para  $(S_n)$ , mostramos que se trata de um sistema gradiente, e que os atratores que portanto existem são semicontínuos superiormente com relação à  $n$ , sendo que o sistema limite é dado por

$$(SL) \begin{cases} u_t = \epsilon(|u_x|^{p-2} u_x)_x + |u|^{q-2} u(1 - |u|^r) - k(u - v) \\ v_t = \epsilon(|v_x|^{p-2} v_x)_x + |v|^{q-2} v(1 - |v|^r) + k(u - v) \end{cases}$$

A  $\epsilon$ -sincronização em  $(S_n)$  é demonstrada usando-se a semicontinuidade superior dos atratores de  $(S_n)$  com relação a  $n$  e a sincronicidade propriamente dita em  $(SL)$ . Este último sistema  $(SL)$  está fortemente conectado com o problema  $(P_\epsilon)$ . Nós mostramos que o conjunto das soluções estacionárias  $E_{\epsilon,k}$  de  $(SL)$  é dado pela diagonal de  $E_\epsilon \times E_\epsilon$ , onde  $E_\epsilon$  é o conjunto equilíbrio de  $(P_\epsilon)$ , para cada valor de  $\epsilon$  e para qualquer  $k$  suficientemente grande, isto é,  $E_{\epsilon,k} = \{(\phi, \phi), \phi \in E_\epsilon\}$  e as propriedades de estabilidade de  $\phi$  são herdadas pelo equilíbrio  $(\phi, \phi)$  de  $(SL)$ . Além disso mostramos que a família de atratores é contínua com relação ao parâmetro de acoplamento  $k$ .

No final deste texto encontra-se um apêndice com os principais resultados usados ao longo do trabalho.

Abaixo segue a notação que utilizaremos:

- $L^p$  denota o espaço das funções  $L^p(0, 1)$ , para  $p \geq 1$ ;
- $\|\cdot\|_p$  denota a norma em  $L^p(0, 1)$ ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno em  $L^2(0, 1)$ ;
- $W_0^{1,p}$  denota o espaço de Sobolev  $W_0^{1,p}(0, 1)$  munido da norma  $\|u_x\|_p$ ;
- $\psi_\epsilon(u)$  é uma aplicação convexa, própria e semicontínua inferiormente, de  $L^2$  em  $(-\infty, +\infty]$  dada por  $\frac{\epsilon}{p} \int_0^1 |u_x(x)|^p dx$  e a subdiferencial de  $\psi_\epsilon$  é  $\partial\psi_\epsilon(u) = -\epsilon\Delta_p(u)$ .

# Capítulo 1

## O Problema de Takeuchi e Yamada

Em [28] os autores consideram o seguinte problema

$$(P_\epsilon) \begin{cases} u_t = \epsilon(|u_x|^{p-2} u_x)_x + |u|^{q-2} u(1 - |u|^r), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & 0 < t < +\infty \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1) \end{cases}$$

onde  $p > 2$ ,  $q \geq 2$ ,  $r > 0$  e  $\epsilon > 0$ , e também o problema estacionário associado a  $(P_\epsilon)$

$$(SP_\epsilon) \begin{cases} \epsilon(|\phi_x|^{p-2} \phi_x)_x + |\phi|^{q-2} \phi(1 - |\phi|^r) = 0, & x \in (0, 1) \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases}$$

Neste trabalho primeiramente mostra-se que o problema  $(P_\epsilon)$  gera um sistema dinâmico em  $L^2$  e que, para cada  $u_0 \in L^2$ , o conjunto  $\omega$ -limite de  $u_0$ ,  $\omega(u_0)$ , está contido no conjunto  $E_\epsilon$  das soluções de  $(SP_\epsilon)$ . Em seguida os autores analisam a estrutura do conjunto de todas as soluções estacionárias para cada valor real do parâmetro  $\epsilon$ . Este estudo é feito pelo método time-map que consiste basicamente em adequar a velocidade inicial em um problema de valores iniciais a fim de realizar a condição de fronteira em  $(SP_\epsilon)$ . Ou seja, considera-se o problema

$$(p.v.i) \begin{cases} \epsilon(|\phi_x|^{p-2} \phi_x)_x + |\phi|^{q-2} \phi(1 - |\phi|^r) = 0, & x \in (0, +\infty) \\ \phi(0) = 0, & |\phi_x(0)|^{q-2} \phi_x(0) = \alpha \end{cases}$$

e procura-se determinar os possíveis valores de  $\alpha$  para que a solução do  $(p.v.i.)$  satisfaça  $\phi(1) = 0$  e conseqüentemente seja uma solução do problema de valor de fronteira  $(SP_\epsilon)$ . Faremos uma descrição bastante sucinta dos resultados em [28] com o objetivo de apresentar o trabalho e estabelecer a notação que será usada posteriormente, em especial no Capítulo 2, Seção 2.2, onde faremos um estudo das propriedades de continuidade dos conjuntos de equilíbrios com relação a  $\epsilon$ .

Assim, multiplicando a equação  $(SP_\epsilon)$  por  $\phi_x$  e integrando de 0 a  $x$  obtemos a equação de energia

$$\frac{\epsilon(p-1)}{p} |\phi_x|^p + F(\phi) = \alpha^{\frac{p}{p-1}} \frac{\epsilon(p-1)}{p}$$

onde  $F(u) = \int_0^u f(s) ds$  e  $f(s) = |s|^{q-2} s(1 - |s|^r)$ .

É fácil ver que se  $\phi$  é solução de  $(SP_\epsilon)$  então  $-\phi$  também é, e se  $\phi \neq 0$  é solução de  $(SP_\epsilon)$  então  $\phi_x(0) \neq 0$ . E como procura-se por soluções de  $(SP_\epsilon)$  não nulas é suficiente estudar soluções do  $(p.v.i.)$  com  $\phi_x(0) > 0$ .

Analisando a equação de energia, para cada  $\epsilon > 0$  encontramos um valor  $\alpha_\epsilon$  tal que só é possível encontrar solução de  $(SP_\epsilon)$  se  $\alpha \leq \alpha_\epsilon$ .

Seja  $\phi(\cdot, \alpha)$  uma solução do  $(p.v.i.)$  com “velocidade inicial”  $|\phi_x(0)|^{q-2} \phi_x(0) = \alpha$ . Define-se a aplicação time-map de  $(0, \alpha_\epsilon]$  em  $(0, +\infty]$  por

$$\begin{aligned} X(\alpha) &= \inf\{x \in (0, +\infty); \phi_x(x, \alpha) = 0\} \\ &= \left(\frac{\epsilon(p-1)}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^{\phi_\alpha} \frac{dt}{(F(\phi_\alpha) - F(t))^{\frac{1}{p}}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde  $\phi_\alpha$  e  $\alpha_\epsilon$  são dados por

$$F(1) = \frac{\epsilon(p-1)}{p} |\alpha_\epsilon|^{\frac{p}{p-1}} \quad (1.2)$$

e

$$F(\phi_\alpha) = \frac{\epsilon(p-1)}{p} |\alpha|^{\frac{p}{p-1}} \quad (1.3)$$

com  $0 < \phi_\alpha \leq 1$ .

Em palavras,  $\phi_\alpha$  é o valor máximo que a solução do  $(p.v.i.)$ ,  $\phi(\cdot, \alpha)$ , atinge e  $\alpha_\epsilon$  é a “velocidade inicial” necessária para a solução do  $(p.v.i.)$  atingir o máximo em 1. Já  $X(\alpha)$  é o  $x$ -tempo necessário para que a solução  $\phi(\cdot, \alpha)$  atinja seu primeiro ponto de máximo.

Desta forma é conveniente estudar a aplicação

$$I(a) \doteq \int_0^a (F(a) - F(t))^{\frac{-1}{p}} dt$$

para  $a \in (0, 1]$ .

Temos o seguinte resultado

**Lema 1.1** *Para qualquer  $p > 2$  e  $q \geq 2$ ,  $I(\cdot)$  é contínuo em  $(0, 1]$ . Em particular,  $I(1) = \lim_{a \rightarrow 1^-} I(a)$  é finito. Além disso,  $I(\cdot)$  tem as seguintes propriedades:*

i) *Para  $p > q$ ,  $I(\cdot)$  é estritamente monótona crescente e*

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} I(a) = 0$$

ii) *Para  $p = q$ ,  $I(\cdot)$  é estritamente monótona crescente e*

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} I(a) = I_0 = p^{\frac{1}{p}} \int_0^1 (1 - t^p)^{\frac{-1}{p}} dt$$

iii) *Para  $p < q$ , existe  $a^* \in (0, 1)$  tal que  $I(\cdot)$  é estritamente monótona decrescente em  $(0, a^*)$  e estritamente monótona crescente em  $(a^*, 1)$ . Além disso,  $I(\cdot)$  satisfaz*

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} I(a) = +\infty$$

**Observação 1.1**  $a^*$  independe de  $\epsilon$ , e  $\alpha_\epsilon$ .

Seja  $Y(\alpha)$  a distância entre dois zeros adjacentes de  $\phi(\cdot, \alpha)$ .

Se  $\alpha \in (0, \alpha_\epsilon)$  temos

$$Y(\alpha) = 2X(\alpha) = 2 \left( \frac{\epsilon(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(\phi_\alpha)$$

e se  $\alpha = \alpha_\epsilon$ ,  $\phi(\cdot, \alpha_\epsilon)$  é expresso da seguinte forma

$$\begin{cases} \phi(x, \alpha_\epsilon) = 0, & \text{para } x = 0 \text{ e } x = 2X(\alpha_\epsilon) + b \\ 0 < \phi(x, \alpha_\epsilon) < 1, & \text{para } x \in (0, X(\alpha_\epsilon)) \cup (X(\alpha_\epsilon) + b, 2X(\alpha_\epsilon) + b) \\ \phi(x, \alpha_\epsilon) = 1, & \text{para } x \in [X(\alpha_\epsilon), X(\alpha_\epsilon) + b] \end{cases}$$

onde  $b > 0$  é qualquer.

Logo é natural pensar que  $Y(\alpha_\epsilon)$  é multívoco com

$$Y(\alpha_\epsilon) \in [2C_{\epsilon,p}I(1), +\infty)$$

onde  $C_{\epsilon,p} = \left( \frac{\epsilon(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}}$ .

Usa-se  $Y(\alpha)$  para procurar as soluções estacionárias.

Veja a Figura 1.1, um esboço de  $Y(\alpha)$  quando  $p > q$ ,  $p = q$  e  $p < q$ , onde  $y_0 = 2C_{\epsilon,p}I_0$  e  $\bar{Y} = 2C_{\epsilon,p}I(1)$ .

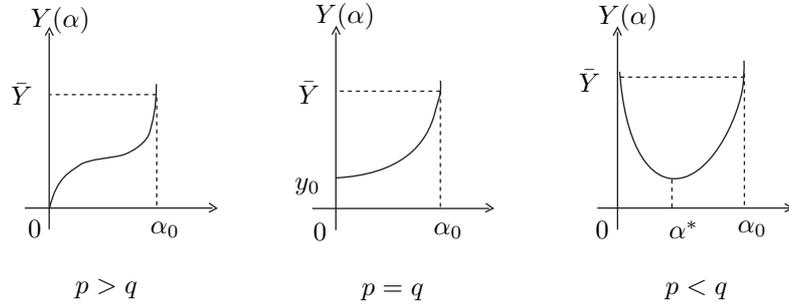


Figura 1.1:

**Observação 1.2**  $\alpha_\epsilon$  e  $\alpha^*$  dependem de  $\epsilon$ , sendo que  $\alpha^*$  é tal que  $\phi_{\alpha^*} = a^*$  (altura máxima atingida por um equilíbrio com velocidade inicial  $\alpha^*$ ), e  $a^*$  independe de  $\epsilon$ .

Denotamos por

$$E_\epsilon^l \doteq \{\phi \in E_\epsilon; \phi \text{ tem } l \text{ raízes em } (0, 1) \text{ e } \phi_x(0) > 0\}$$

e

$$-E_\epsilon^l \doteq \{\phi \in E_\epsilon; \phi \text{ tem } l \text{ raízes em } (0, 1) \text{ e } \phi_x(0) < 0\} = \{-\phi; \phi \in E_\epsilon^l\}$$

para  $l = 0, 1, \dots$  e

$$\lambda_k(a) = \frac{p}{p-1} (2(k+1)I(a))^{-p}$$

com  $a \in (0, 1]$  e  $k = 0, 1, \dots$

**Observação 1.3** Como  $I(1) < +\infty$  e  $f(\pm 1) = 0$ , se  $\phi(\cdot, \alpha_\epsilon)$  atinge 1 ou  $-1$ , então  $\phi(\cdot, \alpha_\epsilon)$  pode permanecer igual a 1 por um tempo arbitrário.

Dessa forma se  $\phi \in E_\epsilon$  então  $\phi$  deve oscilar entre  $[-1, 1]$  de acordo com sua quantidade de raízes, desde que  $\phi(0) = \phi(1) = 0$ .

Assim se denotarmos por  $n$  o número de raízes de  $\phi$  em  $(0, 1)$ , então a seguinte relação deve ser satisfeita

$$2(n+1)X(\alpha_\epsilon) + TP = 1 \quad (1.4)$$

onde  $TP$  denota o tempo de parada, ou seja a medida do conjunto  $\{x; |\phi(x)| = 1\}$ .

**Lema 1.2**  $\phi(\cdot, \alpha) \in E_\epsilon^l$  se, e somente se, existem constantes  $C_i \in Y(\alpha)$ , para  $i = 1, 2, \dots, l+1$  de modo que  $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$ , para todo  $l \in \mathbb{N}^*$ .

**Teorema 1.1** Seja  $p > q$ . Para cada  $\epsilon > 0$  temos

$$E_\epsilon = \{0\} \cup \bigcup_{l=0}^{\infty} \{\pm E_\epsilon^l\}$$

onde cada  $E_\epsilon^l$  satisfaz as seguintes propriedades:

- $E_\epsilon^0 = \{\phi_\epsilon^0\}$ , para  $\epsilon > 0$ ;
- se  $\epsilon \geq \lambda_l(1)$  para  $l = 1, 2, \dots$ , então  $E_\epsilon^l = \{\phi_\epsilon^l\}$ ;
- se  $0 < \epsilon < \lambda_l(1)$  para  $l = 1, 2, \dots$ , então existe uma bijeção entre  $E_\epsilon^l$  e  $[0, 1]^l$ .

**Observação 1.4** Note que para todo  $\epsilon > 0$  e para cada  $l = 1, 2, \dots$ , existe  $\alpha$  tal que  $\phi(\cdot, \alpha) = \phi_\epsilon^l \in E_\epsilon$ .

**Teorema 1.2** Seja  $p = q$  e defina

$$\lambda_k = \frac{p}{p-1} (2(k+1)I_0)^{-p}$$

para  $k = 0, 1, \dots$ . Então temos

- se  $\epsilon \geq \lambda_0$  então  $E_\epsilon = \{0\}$ ;
- se  $\lambda_{k+1} \leq \epsilon < \lambda_k$  então

$$E_\epsilon = \{0\} \cup \bigcup_{l=0}^k \{\pm E_\epsilon^l\}$$

onde  $E_\epsilon$  tem as propriedades do Teorema 1.1.

**Teorema 1.3** Seja  $p < q$  e  $a^*$  a constante dada no Lema 1.1. Então

- se  $\epsilon > \lambda_0(a^*)$ , então  $E_\epsilon = \{0\}$ ;

- se  $\lambda_k(a^*) \geq \epsilon > \lambda_{k+l}(a^*)$  então

$$E_\epsilon = \{0\} \cup \bigcup_{l=0}^k \{\pm E_\epsilon^l\}$$

onde  $E_\epsilon^l = \{\psi_\epsilon^l\} \cup F_\epsilon^l$  e  $F_\epsilon^l$  tem as seguintes propriedades para  $l = 1, 2, \dots, k$ ,

- a) se  $\epsilon = \lambda_l(a^*)$ , então  $F_\epsilon^l = \{\psi_\epsilon^l\}$ ;
- b) se  $\lambda_l(a^*) > \epsilon \geq \lambda_l(1)$ , então  $F_\epsilon^l$  consiste de um único elemento  $\phi_\epsilon^l$ ;
- c) se  $\lambda_l(1) > \epsilon > 0$ , então existe uma bijeção entre  $F_\epsilon^l$  e  $[0, 1]^l$ .

A terceira e última parte do artigo trata da estabilidade de cada solução estacionária. Temos

**Teorema 1.4** 1. Para  $p > q$ , a solução trivial é instável.

2. Para  $p = q$ , a solução trivial é assintoticamente estável para  $\lambda \geq \lambda_0$  e instável para  $\lambda < \lambda_0$ .

3. Para  $p < q$ , a solução trivial é assintoticamente estável.

**Teorema 1.5** 1. Para cada  $p > 2$  e  $q \geq 2$ ,  $\phi_\lambda^0$  é assintoticamente estável para  $\lambda > \lambda_0(1)$  e atrativa para  $\lambda \leq \lambda_0(1)$ .

2. Para  $p < q$ ,  $\psi_\lambda^0$  é instável para  $\lambda \leq \lambda_0(a^*)$ .

**Teorema 1.6** Qualquer  $\psi_\lambda^l$ ,  $\phi_\lambda^l$  e  $G_\lambda^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$  é instável.

## Capítulo 2

# Propriedades de Continuidade de $(P_\epsilon)$

Neste capítulo mostramos primeiramente que o semigrupo  $\{S_\epsilon(t)\}$  associado a  $(P_\epsilon)$  é contínuo com relação a  $\epsilon$ , possui atrator global compacto  $\mathcal{A}_\epsilon$  e a família  $\{\mathcal{A}_\epsilon\}$  é semicontínua superiormente em  $L^2$  e  $W_0^{1,p}$  em cada  $\epsilon > 0$ . Em seguida, na Seção 2.2 analisamos a continuidade do conjunto das soluções estacionárias  $E_\epsilon$  e verificamos que a semicontinuidade superior sempre ocorre, qualquer que seja  $\epsilon > 0$  e qualquer que seja a relação entre  $p$  e  $q$ . No entanto a semicontinuidade inferior à direita do conjunto dos equilíbrios deixa de ocorrer no caso em que  $p < q$  em cada ponto da sequência  $\{\lambda_l(a^*)\}_{l \geq 1}$  que determina o surgimento de um equilíbrio isolado com  $l$  raízes conforme descrito no Teorema 1.3.

### 2.1 Existência e semicontinuidade superior dos atratores

Sejam  $\hat{\epsilon}, \tilde{\epsilon}$  números reais positivos e considere o intervalo fechado  $[\hat{\epsilon}, \tilde{\epsilon}] \subset (0, +\infty)$ . Os próximos dois lemas exibem limitações para as soluções de  $(P_\epsilon)$  em  $L^2$  e  $W_0^{1,p}$ , uniformes em  $[\hat{\epsilon}, \tilde{\epsilon}]$ . Estas estimativas serão usadas posteriormente para se obter existência de atrator, continuidade do fluxo e semicontinuidade superior dos atratores.

**Lema 2.1** *Seja  $u^\epsilon$  solução de  $(P_\epsilon)$  com dado inicial  $u_0 \in L^2$ . Então para cada  $\delta > 0$  existe uma constante positiva  $K(\delta)$  tal que*

$$\|u^\epsilon(t)\|_2 \leq K(\delta)$$

*para todo  $t \geq \delta$ ,  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \tilde{\epsilon}]$  e para todo dado inicial  $u_0 \in L^2$ . Além disso, dado  $B \subset L^2$  limitado, existe  $K_1 > 0$  tal que*

$$\|u^\epsilon(t)\|_2 \leq K_1$$

*para todo  $t \geq 0$ ,  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \tilde{\epsilon}]$  e  $u_0 \in B$ .*

**Demonstração:** Se  $u^\epsilon$  é solução de  $(P_\epsilon)$  então

$$u_t^\epsilon(x, t) = \epsilon(|u_x^\epsilon(x, t)|^{p-2} u_x^\epsilon(x, t))_x + |u^\epsilon(x, t)|^{q-2} u^\epsilon(x, t)(1 - |u^\epsilon(x, t)|^r)$$

para  $(x, t)$  qtp em  $(0, 1) \times (0, +\infty)$ . Assim, dado qualquer  $s > 0$ , multiplicando a equação acima por  $u^\epsilon(s)$  obtém-se com o auxílio da Desigualdade de Young que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|u^\epsilon(s)\|_2^2 \leq -\epsilon \|u^\epsilon(s)\|_{W_0^{1,p}}^p + \frac{r}{q+r}. \quad (2.1)$$

Então pelo Lema 5.2

$$\|u^\epsilon(t)\|_2 \leq \left( \frac{r}{\hat{\epsilon}(q+r)} \right)^{\frac{2}{p}} + \left( \frac{1}{\hat{\epsilon}(p-2)\delta} \right)^{\frac{2}{p-2}}$$

para todo  $t \geq \delta$  e podemos definir  $K(\delta) = \left( \frac{r}{\hat{\epsilon}(q+r)} \right)^{\frac{2}{p}} + \left( \frac{1}{\hat{\epsilon}(p-2)\delta} \right)^{\frac{2}{p-2}}$ . Observe que  $K(\delta)$  independe dos dados iniciais e é uniformemente escolhido para  $\epsilon$  em  $[\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$ .

Por outro lado para se obter uma estimativa em  $L^2$  que seja válida para todo  $t \geq 0$ , deve-se proceder da seguinte forma: integrando (2.1) de 0 a  $t$ , com  $t \leq \delta$  obtém-se

$$\|u^\epsilon(t)\|_2 \leq \left\{ \|u_0\|_2^2 + \frac{2r\delta}{(q+r)} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \bar{K}_1.$$

Observe que  $\bar{K}_1$  pode ser tomado uniforme para dados iniciais em limitados de  $L^2$ ,  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$  e  $t \in [0, \delta]$ . Defina  $K_1 \doteq \max \{K(\delta), \bar{K}_1\}$ . Portanto dado  $B \subset L^2$  limitado,  $\|u^\epsilon(t)\|_2 \leq K_1$ , para todo  $t \geq 0$ , uniformemente em  $[\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$  e para dados iniciais em  $B$ . ■

Para obtermos uma estimativa em  $W_0^{1,p}$  considere as aplicações  $\varphi_\epsilon^1$  e  $\varphi^2$  definidas respectivamente por

$$\varphi_\epsilon^1 u \doteq \begin{cases} \frac{\epsilon}{p} \int_0^1 |u_x(x)|^p dx + \frac{1}{q+r} \int_0^1 |u(x)|^{q+r} dx, & u \in W_0^{1,p} \\ +\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$\varphi^2 u \doteq \begin{cases} \frac{1}{q} \int_0^1 |u(x)|^q dx, & u \in L^q \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O Problema  $(P_\epsilon)$  pode ser colocado na forma abstrata

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial\varphi_\epsilon^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) = 0 \quad (2.2)$$

onde  $\partial\varphi_\epsilon^1$  e  $\partial\varphi^2$  são as subdiferenciais de  $\varphi_\epsilon^1$  e  $\varphi^2$  respectivamente.

**Observação 2.1** *Existem constantes  $0 < c_0 < 1$  e  $c > 0$  dependendo apenas de  $q$  e  $r$  tais que*

$$\varphi^2(u) \leq c_0 \varphi_\epsilon^1(u) + c$$

qualquer que seja  $u \in W_0^{1,p}$ , e para todo  $\epsilon > 0$ . De fato, através da Desigualdade de Young é fácil ver que para  $u \in W_0^{1,p}$  e  $\eta > 0$  qualquer,

$$\begin{aligned} \varphi^2(u) &= \frac{1}{q} \|u\|_q^q \\ &\leq \frac{r}{(q+r)(\eta q)^{\frac{q+r}{r}}} + q\eta^{\frac{q+r}{q}} \left( \frac{\epsilon}{p} \|u\|_{W_0^{1,p}}^p + \frac{1}{q+r} \|u\|_{q+r}^{q+r} \right). \end{aligned}$$

Agora basta escolher  $\eta$  tal que  $0 < \eta < \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{q}{q+r}}$  e definir  $c_0 \doteq q\eta^{\frac{q+r}{q}}$  e  $c \doteq \frac{r}{(q+r)(q\eta)^{\frac{q+r}{r}}}$ .

**Lema 2.2** *Seja  $u^\epsilon$  solução de  $(P_\epsilon)$  com dado inicial  $u_0 \in W_0^{1,p}$ . Dado  $B \subset W_0^{1,p}$  limitado, existe uma constante  $K_2 > 0$ , independente de  $\epsilon$ , tal que*

$$\|u^\epsilon(t)\|_{W_0^{1,p}} \leq K_2$$

para todo  $t \geq 0$ ,  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$ , e  $u_0 \in B$ .

**Demonstração:** Se  $u^\epsilon$  é solução de  $(P_\epsilon)$  multiplicando (2.2) por  $\frac{du^\epsilon}{dt}(t)$  e integrando de 0 a  $t$  obtém-se com o auxílio da observação anterior a desigualdade

$$\int_0^t \|u_\tau^\epsilon(\tau)\|^2 d\tau + (1 - c_0)\varphi_\epsilon^1(u^\epsilon(t)) \leq \varphi_\epsilon^1(u_0) + c$$

para todo  $\epsilon > 0$  e portanto,

$$\|u^\epsilon(t)\|_{W_0^{1,p}} \leq \left\{ \frac{(\varphi_\epsilon^1(u_0) + c)p}{\hat{\epsilon}(1 + c_0)} \right\}^{\frac{1}{p}} \doteq K_2$$

onde  $K_2$  é uma constante positiva dependendo apenas de  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $\hat{\epsilon}$ , e da norma do dado inicial. Observe que  $K_2$  pode ser tomada uniformemente para dados iniciais em limitados de  $W_0^{1,p}$  e  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$ . ■

**Observação 2.2** *Segue do Lema 5.3 que dado  $B \subset L^2$  limitado e  $\delta > 0$  existe uma constante  $\tilde{K}_2 = \tilde{K}_2(B, \delta) > 0$ , independente de  $\epsilon$ , tal que*

$$\|u^\epsilon(t)\|_{W_0^{1,p}} \leq \tilde{K}_2$$

para todo  $t \geq \delta$ ,  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$ , e  $u_0 \in B$ .

**Observação 2.3** *Segue do Lema 5.3 e da primeira afirmação do Lema 2.1 que dado  $\delta > 0$  existe uma constante positiva  $\tilde{K}_3 = \tilde{K}_3(\delta) > 0$  tal que*

$$\|u^\epsilon(t)\|_{W_0^{1,p}} \leq \tilde{K}_3$$

para todo  $t \geq \delta$ ,  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$  e qualquer que seja o dado inicial  $u_0 \in L^2$ .

O próximo passo será mostrar que existe atrator para o problema  $(P_\epsilon)$  em  $L^2$  e em  $W_0^{1,p}$ . Pelo Teorema 5.1 podemos definir uma família de aplicações  $\{S_\epsilon(t) : L^2 \rightarrow L^2; t \geq 0\}$  como segue

$$S_\epsilon(t) : u_0 \mapsto u(t; u_0)$$

para cada  $u_0 \in L^2$ , onde  $u(\cdot; u_0)$  denota a solução forte de  $(P_\epsilon)$  com  $u(0) = u_0$  em  $[0, +\infty)$ . Segue do Lema 5.4 que  $\{S_\epsilon(t) : L^2 \rightarrow L^2; t \geq 0\}$  é um semigrupo associado ao problema  $(P_\epsilon)$ , e então por [19], veja Teorema 5.2, para garantir a existência de atrator em  $L^2$  basta provarmos que  $\{S_\epsilon(t)\}$  é de classe  $k$  e dissipativo. O Lema 2.1 garante a dissipatividade de  $\{S_\epsilon(t)\}$  em  $L^2$  e portanto resta apenas mostrar que o semigrupo é de classe  $k$ . Começamos enunciando o seguinte lema cuja demonstração encontra-se em [8].

**Lema 2.3** *Seja  $K$  uma aplicação contínua em um espaço métrico  $X$  e  $W$  um subconjunto denso de  $X$ . Então as seguintes condições são equivalentes:*

- *i) para cada bola aberta  $B_X(r)$  a imagem  $K(B_X(r) \cap W)$  é precompacta em  $X$ ;*
- *ii) para cada subconjunto limitado  $B$  de  $X$ , a imagem  $K(B)$  é precompacta em  $X$ .*

Usaremos também o seguinte lema para obtenção da compacidade:

**Lema 2.4** *Seja  $f$  definida em  $A \subset L^2$  dada por  $f(s) = |s|^{q-2}s - |s|^{q+r-2}s$ , com  $q \geq 2, r > 0$  e  $A$  tal que  $f(A) \subset L^2$ . Então quaisquer que sejam  $u, v \in L^2$ ,  $\langle f(u) - f(v), u - v \rangle \leq C \|u - v\|_2^2$  onde  $C = \frac{r(q-1)^{\frac{q+r-2}{r}}}{q+r-2}$ .*

**Demonstração:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(s) = |s|^{q-2}s - |s|^{q+r-2}s$ . Derivando  $f$  obtemos

$$f'(s) = (q-1)|s|^{q-2} - (q+r-1)|s|^{q+r-2} \quad (2.3)$$

Usando a Desigualdade de Young no primeiro fator em (2.3) temos

$$\begin{aligned} f'(s) &= (q-1)|s|^{q-2} - (q+r-1)|s|^{q+r-2} \\ &\leq \frac{r}{q+r-2}(q-1)^{\frac{q+r-2}{r}} + \frac{q-2}{q+r-2}|s|^{q+r-2} - (q+r-1)|s|^{q+r-2} \\ &= \frac{r}{q+r-2}(q-1)^{\frac{q+r-2}{r}} + \frac{(-q^2-r^2-2qr+4q+3r-4)}{q+r-2}|s|^{q+r-2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Agora observe que

1.  $q^2 - 4q + 4 = (q-2)^2 \geq 0$ , portanto  $q^2 + 4 \geq 4q$
2.  $3 \leq 2q \leq 2q + r$  pois  $r > 0$  e  $q \geq 2$ . Logo  $3r \leq r(2q + r) = r^2 + 2qr$

Segue das observações feitas acima que  $4q + 3r \leq q^2 + 4 + r^2 + 2qr$  e portanto

$$4q + 3r - q^2 - 4 - r^2 - 2qr \leq 0 \quad (2.5)$$

Assim, de (2.4) e (2.5) temos

$$\begin{aligned} f'(s) &\leq \frac{r}{q+r-2}(q-1)^{\frac{q+r-2}{r}} + \frac{(-q^2-r^2-2qr+4q+3r-4)}{q+r-2}|s|^{q+r-2} \\ &\leq \frac{r}{q+r-2}(q-1)^{\frac{q+r-2}{r}} \doteq C \end{aligned} \quad (2.6)$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

Logo pelo Teorema do Valor Médio, dado  $x \in (0, 1)$ , se  $u, v$  estão definidas em  $x$ , existe  $\sigma_x \in (\min\{u(x), v(x)\}, \max\{u(x), v(x)\})$  tal que  $f(u(x)) - f(v(x)) \leq f'(\sigma_x)(u(x) - v(x))$  e portanto

$$\begin{aligned} \langle f(u) - f(v), u - v \rangle &= \int_0^1 (f(u(x)) - f(v(x)))(u(x) - v(x)) dx \\ &= \int_0^1 f'(\sigma_x)(u(x) - v(x))^2 dx \\ &\leq \int_0^1 C(u(x) - v(x))^2 dx \\ &= C \|u - v\|_2^2 \end{aligned}$$

■

A demonstração do próximo lema é baseada na demonstração do Lema 15, [12].

**Lema 2.5** *Seja  $\{S_\epsilon(t)\}$  o semigrupo associado ao problema  $(P_\epsilon)$  em  $L^2$ . Então*

$$S_\epsilon(t) : L^2 \rightarrow L^2$$

*é uma aplicação compacta para cada  $t > 0$ .*

**Demonstração:** Seja  $r > 0$  qualquer e considere o conjunto

$$B \doteq B_{L^2}(0, r) \cap W_0^{1,p}.$$

Dado  $t > 0$ , fixe  $\delta$  e  $T$  tais que  $0 < \delta < t < T$  e defina o subconjunto

$$\tilde{B} \doteq \{S_\epsilon(\cdot)u_0; u_0 \in B\} \subset C([0, T]; L^2).$$

Defina o novo espaço

$$V \doteq \left\{ v; v \in L^p(\delta, T; W_0^{1,p}) \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dt} \in L^{p'}(\delta, T; W^{-1,p'}) \right\}$$

munido com a norma

$$\|v\|_V \doteq \|v\|_{L^p(\delta, T; W_0^{1,p})} + \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{L^{p'}(\delta, T; W^{-1,p'})}.$$

$V$  munido com esta norma é um espaço de Banach. Mostremos que  $\tilde{B}$  é limitado em  $V$ . De fato, para todo  $S_\epsilon(\cdot)u_0 \in \tilde{B}$  temos

$$\begin{aligned} \|S_\epsilon(\cdot)u_0\|_V &= \|u(\cdot, u_0)\|_V = \|u\|_{L^p(\delta, T; W_0^{1,p})} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^{p'}(\delta, T; W^{-1,p'})} \\ &= \left( \int_\delta^T \|u(t)\|_{W_0^{1,p}}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_\delta^T \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{W^{-1,p'}}^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Agora, visto que  $u$  é solução de  $(P_\epsilon)$  então

$$\langle u_t(t), u(t) \rangle + \langle -\epsilon \Delta_p u(t), u(t) \rangle = \langle |u(t)|^{q-2} u(t) - |u(t)|^{q+r-2} u(t), u(t) \rangle$$

e conseqüentemente, pelo Lema 2.4

$$\epsilon \|u_x(t)\|_p^p \leq \frac{-1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 + C \|u(t)\|_2^2$$

onde  $C \doteq \sup\{f'(s); s \in (-\infty, \infty)\} < \infty$ , e  $f(s) = |s|^{q-2}s - |s|^{q+r-2}s$ . Integrando de  $\delta$  a  $T$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_\delta^T \|u(t)\|_{W_0^{1,p}}^p dt &\leq \int_0^T \|u(t)\|_{W_0^{1,p}}^p dt \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon} \|u_0\|_2^2 + \int_0^T \frac{C}{\epsilon} \|u(t)\|_2^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon} r^2 + \frac{C}{\epsilon} K_1^2 T \doteq M_1, \end{aligned}$$

onde  $K_1$  é como no Lema 2.1. Além disso,

$$\|u_t(t)\|_{W^{-1,p'}} - \|-\epsilon \Delta_p u(t)\|_{W^{-1,p'}} \leq \|u_t(t) - \epsilon \Delta_p u(t)\|_{W^{-1,p'}} = \|f(u(t))\|_{W^{-1,p'}}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
\|u_t(t)\|_{W^{-1,p'}}^{p'} &\leq (\|f(u(t))\|_{W^{-1,p'}} + \|\epsilon \Delta_p u(t)\|_{W^{-1,p'}})^{p'} \\
&\leq 2^{p'-1} (\|f(u(t))\|_{W^{-1,p'}}^{p'} + \|\epsilon \Delta_p u(t)\|_{W^{-1,p'}}^{p'}) \\
&\leq 2^{p'-1} \|f(u(t))\|_2^{p'} + 2^{p'-1} \tilde{\epsilon} \|u(t)\|_{W_0^{1,p}}^p \\
&\leq 2^{p'-1} C(\delta) \|u(t)\|_2^{p'} + 2^{p'-1} \tilde{\epsilon} \|u(t)\|_{W_0^{1,p}}^p \\
&\leq 2^{p'-1} C(\delta) K_1^{p'} + 2^{p'-1} \tilde{\epsilon} \|u(t)\|_{W_0^{1,p}}^p
\end{aligned}$$

onde  $C(\delta) \doteq \sup \left\{ |f'(s)|; s \in [-\tilde{K}_2, +\tilde{K}_2] \right\}$ ,  $\tilde{K}_2$  como na Observação 2.2.

Logo

$$\begin{aligned}
\int_\delta^T \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{W^{-1,p'}}^{p'} dt &\leq 2^{p'-1} C(\delta) K_1^{p'} T + 2^{p'-1} \tilde{\epsilon} \int_\delta^T \|u(t)\|_{W_0^{1,p}}^p dt \\
&\leq 2^{p'-1} C(\delta) K_1^{p'} T + 2^{p'-1} \tilde{\epsilon} M_1 \doteq M_2
\end{aligned}$$

e basta tomarmos  $M_0 \doteq M_1^{\frac{1}{p}} + M_2^{\frac{1}{p}}$  para que

$$\|S_\epsilon(\cdot)u_0\|_V \leq M_0$$

Concluimos então que  $\tilde{B}$  é limitado na norma de  $V$  e segue do Teorema 5.4, que  $\tilde{B}$  é precompacto em  $L^p(\delta, T; L^2)$ .

Seja  $\{u_n\} \subset B$  arbitrária, e considere a sequência

$$\{S_\epsilon(\cdot)u_n\} \subset \tilde{B}.$$

Como  $\tilde{B}$  é precompacto em  $L^p(\delta, T; L^2)$  existe  $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$  e  $v_0 \in L^p(\delta, T; L^2)$  tal que

$$S_\epsilon(\cdot)u_{n_j} \rightarrow v_0$$

em  $L^p(\delta, T; L^2)$  quando  $j \rightarrow \infty$ , ou seja, a sequência  $\{\|u(\cdot, u_{n_j}) - v_0(\cdot)\|_2\}$  converge para 0 em  $L^p(\delta, T; \mathbb{R})$ . Em particular existe uma subsequência ainda denotada por  $\{\|u(\cdot, u_{n_j}) - v_0(\cdot)\|_2\}$  tal que

$$\|u(t, u_{n_j}) - v_0(t)\|_2 \rightarrow 0$$

qtp em  $(\delta, T)$ . Assim, existe  $\tau \in (\delta, t)$  tal que

$$\|u(\tau, u_{n_j}) - v_0(\tau)\|_2 \rightarrow 0$$

e pela propriedade de semigrupo temos

$$S_\epsilon(t)u_{n_j} = S_\epsilon(t - \tau + \tau)u_{n_j} = S_\epsilon(t - \tau)S_\epsilon(\tau)u_{n_j} \rightarrow S_\epsilon(t - \tau)v_0(\tau)$$

quando  $j \rightarrow \infty$ .

Logo a sequência  $\{S_\epsilon(t)u_n\}$  possui uma subsequência convergente em  $L^2$ . Mas  $\{u_n\}$  foi tomado arbitrariamente em  $B$ , logo  $S_\epsilon(t)B$  é precompacto em  $L^2$ . E pelo Lema 2.3,  $i) \Rightarrow ii)$ , para todo  $A \subset L^2$  limitado,  $S_\epsilon(t)A$  é precompacto em  $L^2$ . Portanto a aplicação  $S_\epsilon(t) : L^2 \rightarrow L^2$  é compacta. ■

Uma vez que o semigrupo  $\{S_\epsilon(t) : L^2 \rightarrow L^2; t \geq 0\}$  é de classe  $k$  e dissipativo, segue pelo Teorema 5.2 que  $\{S_\epsilon(t); L^2\}$  tem um atrator global minimal,  $\mathcal{A}_2$ , o qual é compacto e invariante.

Vamos agora passar à prova de existência do atrator em  $W_0^{1,p}$ .

É conhecido que semigrupos gerados por operadores do tipo subdiferencial têm um efeito regularizante sobre os dados iniciais, que vão do fecho para o interior do domínio do operador assim que o processo de evolução se inicia. Sendo o  $p$ -laplaciano pertencente a esta classe de operadores, o mesmo efeito pode ser observado no semigrupo  $\{S_\epsilon(t)\}$  associado à  $(P_\epsilon)$ , isto é,  $\mathcal{R}(S_\epsilon(t)) \subset W_0^{1,p}$ , para todo  $t > 0$ , veja Lema 5.4. Logo faz sentido considerarmos a aplicação

$$\begin{aligned} S_\epsilon(t) &: W_0^{1,p} \rightarrow W_0^{1,p} \\ u_0 &\mapsto u(t, u_0). \end{aligned}$$

Segue do Teorema 5.1, que fixado  $u_0 \in W_0^{1,p}$  a aplicação  $t \mapsto S_\epsilon(t)u_0$  é contínua, de  $(0, \infty)$  em  $W_0^{1,p}$ . A unicidade da solução, também determinada no Teorema 5.1, permite verificar a propriedade do semigrupo. Resta mostrar a continuidade dos operadores  $S_\epsilon(t)$  em  $W_0^{1,p}$ .

**Lema 2.6** *Se  $\{u_0^n\}$  é uma sequência limitada em  $W_0^{1,p}$  e  $u_0^n \rightarrow u_0$  em  $L^2$ , então*

$$S_\epsilon(t)u_0^n \rightarrow S_\epsilon(t)u_0$$

*em  $W_0^{1,p}$  qualquer que seja  $t > 0$  para todo  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$ .*

**Demonstração:** Considere  $\{u_0^n\} \subset W_0^{1,p}$  tal que  $u_0^n \rightarrow u_0$  em  $L^2$ , e denote por  $u^n$  e  $u^0$  as soluções de  $(P_\epsilon)$  com dados iniciais  $u_0^n$  e  $u_0$ , respectivamente. Segue dos Lemas 5.3 e 2.2, e da limitação de  $\|u_t^n(t)\|_2$  para todo  $t \in [\delta, T]$ , onde  $\delta$  e  $T$  são constantes positivas arbitrárias, que  $u^n(t) \rightarrow u^0(t)$  em  $W_0^{1,p}$ , qualquer que seja  $t > 0$ . ■

Portanto, podemos considerar o semigrupo

$$S_\epsilon(t) : W_0^{1,p} \rightarrow W_0^{1,p}$$

e pela Observação 2.3 temos que  $\{S_\epsilon(t)\}$  é dissipativo. Para obtermos a existência de atrator em  $W_0^{1,p}$  resta provar que  $\{S_\epsilon(t)\}$  é de classe  $k$  em  $W_0^{1,p}$ .

**Lema 2.7** *Para cada  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$ , e para cada  $t > 0$ , a aplicação*

$$S_\epsilon(t) : W_0^{1,p} \rightarrow W_0^{1,p}$$

*é compacta.*

**Demonstração:** Devemos mostrar que se  $B \subset W_0^{1,p}$  é limitado então  $S_\epsilon(t)B$  é relativamente compacto em  $W_0^{1,p}$ . Seja  $B \subset W_0^{1,p}$  um conjunto limitado, e  $\{u_n\} \subset B$  uma sequência

arbitrária. Queremos mostrar que  $S_\epsilon(t)u_n$  possui subsequência convergente em  $W_0^{1,p}$ . Como  $W_0^{1,p}$  está compactamente imerso em  $L^2$  existe  $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$  e  $u_0 \in L^2$  tal que

$$u_{n_k} \rightarrow u_0$$

em  $L^2$ . Logo pelo Lema 2.6  $S_\epsilon(t)u_{n_k} \rightarrow S_\epsilon(t)u_0$  em  $W_0^{1,p}$ . Portanto a aplicação  $S_\epsilon(t) : W_0^{1,p} \rightarrow W_0^{1,p}$  é compacta, para cada  $t > 0$  e para todo  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$ . ■

Assim, segue do Teorema 5.2 que  $\{S_\epsilon(t); W_0^{1,p}\}$  tem um atrator global minimal,  $\mathcal{A}_W$ , o qual é compacto e invariante. É fácil ver que  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_W$ . Isto segue da invariância e compacidade de  $\mathcal{A}_2$  em  $L^2$  e de  $\mathcal{A}_W$  em  $W_0^{1,p}$ .

### 2.1.1 Semicontinuidade superior de atratores

Nesta seção denotaremos o atrator do semigrupo  $\{S_\epsilon(t)\}$  por  $\mathcal{A}_\epsilon$  e mostraremos que

$$\sup_{x_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon} d(x_\epsilon, \mathcal{A}_{\epsilon_0}) \rightarrow 0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow \epsilon_0,$$

propriedade que é denominada semicontinuidade superior de  $\mathcal{A}_\epsilon$  em  $\epsilon_0$ .

A semicontinuidade superior de atratores em geral é bastante simples de se obter e depende basicamente da continuidade do fluxo e de estimativas uniformes. Nesta seção vamos obter a continuidade de  $S_\epsilon(t)$  com relação a  $\epsilon$  em  $L^2$  e  $W_0^{1,p}$  e em seguida, lançando mão das estimativas já obtidas na seção anterior, vamos concluir que  $\mathcal{A}_\epsilon \rightarrow \mathcal{A}_{\epsilon_0}$  no sentido acima. Por simplicidade vamos nos restringir a dados iniciais em  $W_0^{1,p}$ , o que será suficiente para nossas considerações posteriores, já que o problema  $(P_\epsilon)$  possui um caráter regularizante e estamos interessados na continuidade do fluxo em tempo grande.

**Lema 2.8** *Seja  $u^\epsilon$  solução de  $(P_\epsilon)$  com dado inicial  $u_0^\epsilon \in W_0^{1,p}$ , e suponha que  $\{u_0^\epsilon\}_\epsilon$  é um subconjunto limitado de  $W_0^{1,p}$ . Então*

$$\int_0^t |(\epsilon - \epsilon_0)|u_x^\epsilon(s)|^{p-2}u_x^\epsilon(s), u_x^{\epsilon_0}(s) - u_x^\epsilon(s)||ds \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ , para cada  $t > 0$ .

#### Demonstração:

Usando a Desigualdade de Young e o Lema 2.2 temos

$$\begin{aligned} & |(\epsilon - \epsilon_0)|u_x^\epsilon(s)|^{p-2}u_x^\epsilon(s), u_x^{\epsilon_0}(s) - u_x^\epsilon(s)|| \\ & \leq |\epsilon - \epsilon_0| \int_0^1 |u_x^\epsilon(s, x)|^{p-1} |u_x^{\epsilon_0}(s, x) - u_x^\epsilon(s, x)| dx \\ & \leq |\epsilon - \epsilon_0| \int_0^1 \left[ \frac{1}{p'} (|u_x^\epsilon(s, x)|^{p-1})^{p'} + \frac{1}{p} |u_x^{\epsilon_0}(s, x) - u_x^\epsilon(s, x)|^p \right] dx \\ & \leq |\epsilon - \epsilon_0| \left( \frac{1}{p'} K_2^p + \frac{1}{p} 2^p K_2^p \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ . A constante  $K_2$  acima é a mesma obtida no Lema 2.2. Logo pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\int_0^t |(\epsilon - \epsilon_0)|u_x^\epsilon(s)|^{p-2}u_x^\epsilon(s), u_x^{\epsilon_0}(s) - u_x^\epsilon(s)||ds \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ , para cada  $t > 0$ . ■

**Lema 2.9** *Seja  $u^\epsilon$  solução de  $(P_\epsilon)$  com dado inicial  $u_0^\epsilon \in W_0^{1,p}$ , e suponha que  $\{u_0^\epsilon\} \doteq B$  é um subconjunto limitado de  $W_0^{1,p}$  e  $u_0^\epsilon \rightarrow u_0^{\epsilon_0}$  em  $L^2$  quando  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ . Então para cada  $t > 0$*

$$\|u^\epsilon(t) - u^{\epsilon_0}(t)\|_2 \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ , e uniformemente em subconjuntos limitados de  $[0, \infty)$ .

**Demonstração:** Seja  $T > 0$ . Pela Desigualdade de Tartar 5.5, Lema 2.2 e Lema 2.4

$$\begin{aligned} & \langle u_t^{\epsilon_0}(s) - u_t^\epsilon(s), u^{\epsilon_0}(s) - u^\epsilon(s) \rangle \\ &= \langle \epsilon_0(|u_x^{\epsilon_0}(s)|^{p-2}u_x^{\epsilon_0}(s))_x - \epsilon(|u_x^\epsilon(s)|^{p-2}u_x^\epsilon(s))_x, u^{\epsilon_0}(s) - u^\epsilon(s) \rangle \\ &+ \langle f(u^{\epsilon_0}(s)) - f(u^\epsilon(s)), u^{\epsilon_0}(s) - u^\epsilon(s) \rangle \\ &\leq -\epsilon_0\gamma_0\|u^{\epsilon_0}(s) - u^\epsilon(s)\|_{W_0^{1,p}}^p + C\|u^{\epsilon_0}(s) - u^\epsilon(s)\|_2^2 \\ &+ \langle (\epsilon - \epsilon_0)|u_x^\epsilon(s)|^{p-2}u_x^\epsilon(s), u_x^{\epsilon_0}(s) - u_x^\epsilon(s) \rangle \\ &\leq \langle (\epsilon - \epsilon_0)|u_x^\epsilon(s)|^{p-2}u_x^\epsilon(s), u_x^{\epsilon_0}(s) - u_x^\epsilon(s) \rangle + C\|u^{\epsilon_0}(s) - u^\epsilon(s)\|_2^2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^{\epsilon_0}(s) - u^\epsilon(s)\|_2^2 &\leq |\langle (\epsilon - \epsilon_0)|u_x^\epsilon(s)|^{p-2}u_x^\epsilon(s), u_x^{\epsilon_0}(s) - u_x^\epsilon(s) \rangle| \\ &+ C\|u^{\epsilon_0}(s) - u^\epsilon(s)\|_2^2 \end{aligned}$$

Integrando de 0 a  $t$ ,  $t \in (0, T]$ , e usando a Desigualdade de Gronwall-Bellman obtemos

$$\begin{aligned} \|u^{\epsilon_0}(t) - u^\epsilon(t)\|_2^2 &\leq e^{2CT} \{ \|u_0^{\epsilon_0} - u_0^\epsilon\|_2^2 \\ &+ 2 \int_0^T |\langle (\epsilon - \epsilon_0)|u_x^\epsilon(s)|^{p-2}u_x^\epsilon(s), u_x^{\epsilon_0}(s) - u_x^\epsilon(s) \rangle| ds \} \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T]$ . E pelo Lema 2.8,

$$\|u^{\epsilon_0}(t) - u^\epsilon(t)\|_2 \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ , para cada  $t \in [0, T]$ . ■

**Lema 2.10** *Seja  $u^\epsilon$  solução de  $(P_\epsilon)$  com dado inicial  $u_0^\epsilon \in W_0^{1,p}$ , e suponha que  $\{u_0^\epsilon\} \doteq B$  é um subconjunto limitado de  $W_0^{1,p}$  e  $u_0^\epsilon \rightarrow u_0^{\epsilon_0}$  em  $L^2$ . Então*

$$\|u^\epsilon(t) - u^{\epsilon_0}(t)\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ , para cada  $t > 0$ .

**Demonstração:** Pelos Lemas 2.2 e 2.9 cada sequência em  $\{u^\epsilon(t); \epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]\}$  é limitada e portanto possui subsequência  $\{u^{\epsilon_n}(t)\}$  que converge fracamente para  $u^{\epsilon_0}(t)$  em  $W_0^{1,p}$  quando  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ . Ainda que tenhamos passado a uma subsequência no procedimento acima, como o limite independe da subsequência escolhida, concluímos que a sequência toda converge, o que justifica manter a notação  $u^\epsilon(t) \rightharpoonup u^{\epsilon_0}(t)$ .

Nosso próximo passo será mostrar que para qualquer  $t > 0$ , quando  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$

$$\|u^{\epsilon_n}(t)\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow \|u^{\epsilon_0}(t)\|_{W_0^{1,p}}$$

o que será suficiente para concluir a demonstração.

Segue de (2.7) que

$$\begin{aligned} & \|u^{\epsilon_0}(s) - u^\epsilon(s)\|_{W_0^{1,p}}^p \\ & \leq \frac{1}{\epsilon_0\gamma_0} \langle -\epsilon_0\Delta_p u^{\epsilon_0}(s) + \epsilon\Delta_p u^\epsilon(s), u^{\epsilon_0}(s) - u^\epsilon(s) \rangle \\ & + \frac{1}{\epsilon_0\gamma_0} \langle (\epsilon - \epsilon_0)|u_x^\epsilon(s)|^{p-2}u_x^\epsilon(s), u_x^{\epsilon_0}(s) - u_x^\epsilon(s) \rangle \end{aligned}$$

Tomando  $T > 0$  e integrando de 0 a  $T$  obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|u^{\epsilon_0}(s) - u^\epsilon(s)\|_{W_0^{1,p}}^p ds \\ & \leq \frac{1}{2\epsilon_0\gamma_0} \|u_0^{\epsilon_0} - u_0^\epsilon\|_2^2 \\ & + \frac{C}{\epsilon_0\gamma_0} \int_0^T \|u^{\epsilon_0}(s) - u^\epsilon(s)\|_2^2 ds \\ & + \frac{1}{\epsilon_0\gamma_0} \int_0^T |(\epsilon - \epsilon_0)|u_x^\epsilon(s)|^{p-2}u_x^\epsilon(s), u_x^{\epsilon_0}(s) - u_x^\epsilon(s)| ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ , uma vez que  $u^\epsilon$  e  $u^{\epsilon_0}$  são soluções de  $(P_\epsilon)$  e  $(P_{\epsilon_0})$  com dados iniciais  $u_0^\epsilon$  e  $u_0^{\epsilon_0}$  respectivamente.

Portanto, existe  $\{u^{\epsilon_n}\} \subset \{u^\epsilon\}$  tal que

$$\|u^{\epsilon_0}(s) - u^{\epsilon_n}(s)\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow 0$$

qtp em  $[0, T]$ . Vamos provar que a sequência converge para todo  $t \in [0, T]$ . De fato, se  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |\psi_n u^{\epsilon_n}(t) - \psi_0 u^{\epsilon_0}(t)| & \leq |\psi_n u^{\epsilon_n}(t) - \psi_n u^{\epsilon_n}(\theta)| \\ & + |\psi_n u^{\epsilon_n}(\theta) - \psi_0 u^{\epsilon_0}(\theta)| \\ & + |\psi_0 u^{\epsilon_0}(\theta) - \psi_0 u^{\epsilon_0}(t)| \end{aligned}$$

para qualquer  $\theta \in [0, T]$ , onde  $\psi_n(u) = \frac{\epsilon_n}{p} \int_0^1 |u_x(x)|^p dx$  se  $u \in W_0^{1,p}$ .

Mas observe que

$$\begin{aligned} |\psi_n u^{\epsilon_n}(t) - \psi_n u^{\epsilon_n}(\theta)| & = \left| \int_\theta^t \frac{d}{ds} \psi_n u^{\epsilon_n}(s) ds \right| \\ & \leq \int_\theta^t |\langle \partial \psi_n u^{\epsilon_n}(s), u_t^{\epsilon_n}(s) \rangle| ds \\ & = \int_\theta^t | \langle -u_t^{\epsilon_n}(s) + f(u^{\epsilon_n}(s)), u_t^{\epsilon_n}(s) \rangle | ds \\ & \leq \int_\theta^t (\|u_t^{\epsilon_n}(s)\|_2^2 + \|f(u^{\epsilon_n}(s))\|_2 \|u_t^{\epsilon_n}(s)\|_2) ds \end{aligned} \tag{2.8}$$

e uma vez que o lado direito de (2.8) é uniformemente limitado e  $\theta$  pode ser escolhido suficientemente próximo de  $t$  de forma que  $|\psi_n u^{\epsilon_n}(\theta) - \psi_0 u^{\epsilon_0}(\theta)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , concluímos que

$$\|u^{\epsilon_n}(t)\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow \|u^{\epsilon_0}(t)\|_{W_0^{1,p}}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , para cada  $t > 0$ . Mas  $u^\epsilon(t) \rightarrow u^{\epsilon_0}(t)$  em  $W_0^{1,p}$ , logo podemos concluir que

$$u^{\epsilon_n}(t) \rightarrow u^{\epsilon_0}(t)$$

em  $W_0^{1,p}$  qualquer que seja  $t > 0$ . ■

Agora estamos em condições de provar o teorema a seguir, cuja demonstração segue as idéias do Corolário 3.1, [14]:

**Teorema 2.1** *A família de atratores globais*

$$\{\mathcal{A}_\epsilon; \hat{\epsilon} \leq \epsilon \leq \check{\epsilon}\}$$

é semicontínua superiormente em  $\epsilon_0$  na topologia de  $W_0^{1,p}$ .

**Demonstração:** Queremos mostrar que

$$d(\mathcal{A}_\epsilon, \mathcal{A}_{\epsilon_0}) \doteq \sup_{x_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon} d(x_\epsilon, \mathcal{A}_{\epsilon_0}) \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ .

Pela Observação 2.3 existe  $K_3 > 0$  tal que

$$\|u^\epsilon(t)\|_{W_0^{1,p}} \leq K_3$$

para todo  $t \geq 1$ ,  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$  e qualquer que seja  $u_0 \in W_0^{1,p}$ . Defina  $B \doteq B(0, K_3) \subset W_0^{1,p}$ . Sabemos que  $B$  absorve limitados de  $W_0^{1,p}$  por  $S_\epsilon(t)$ , para todo  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$ , na topologia de  $W_0^{1,p}$ .

Como  $\mathcal{A}_\epsilon$  é limitado e invariante segue que

$$\mathcal{A}_\epsilon = S_\epsilon(1)\mathcal{A}_\epsilon \subset B$$

para todo  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$ , logo

$$\cup_{\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]} \mathcal{A}_\epsilon \subset B.$$

Mas  $\mathcal{A}_{\epsilon_0}$  atrai limitados de  $W_0^{1,p}$  e em particular atrai  $B$ . Assim dado  $\eta > 0$ , existe  $t_0 = t_0(B, \eta) > 0$  tal que

$$S_{\epsilon_0}(t)B \subset \mathcal{O}_{\frac{\eta}{2}}(\mathcal{A}_{\epsilon_0})$$

para todo  $t \geq t_0$ . Em particular, para todo  $x_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon$  e  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$

$$d(S_{\epsilon_0}(t_0)x_\epsilon, \mathcal{A}_{\epsilon_0}) < \frac{\eta}{2}$$

o que implica que

$$\sup_{x_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon, \epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]} d(S_{\epsilon_0}(t_0)x_\epsilon, \mathcal{A}_{\epsilon_0}) \leq \frac{\eta}{2}.$$

Pelo Lema 2.10

$$\|S_\epsilon(t)a - S_{\epsilon_0}(t)a\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$  em limitados de  $W_0^{1,p}$  para cada  $t > 0$ . Em particular para  $t = t_0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|\epsilon - \epsilon_0| < \delta$  implica

$$\|S_\epsilon(t_0)a - S_{\epsilon_0}(t_0)a\|_{W_0^{1,p}} < \frac{\eta}{2}$$

para todo  $a \in B$ . Assim se  $|\epsilon - \epsilon_0| < \delta$  então

$$\begin{aligned} d(S_\epsilon(t_0)x_\epsilon, \mathcal{A}_{\epsilon_0}) &= \inf_{y \in \mathcal{A}_{\epsilon_0}} \|S_\epsilon(t_0)x_\epsilon - y\|_{W_0^{1,p}} \\ &\leq \inf_{y \in \mathcal{A}_{\epsilon_0}} (\|S_\epsilon(t_0)x_\epsilon - S_{\epsilon_0}(t_0)x_\epsilon\|_{W_0^{1,p}} + \|S_{\epsilon_0}(t_0)x_\epsilon - y\|_{W_0^{1,p}}) \\ &= \|S_\epsilon(t_0)x_\epsilon - S_{\epsilon_0}(t_0)x_\epsilon\|_{W_0^{1,p}} + d(S_{\epsilon_0}(t_0)x_\epsilon, \mathcal{A}_{\epsilon_0}) \\ &< \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \end{aligned}$$

para todo  $x_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon$  e  $|\epsilon - \epsilon_0| < \delta$ .

Logo,

$$\begin{aligned} d(\mathcal{A}_\epsilon, \mathcal{A}_{\epsilon_0}) &= d(S_\epsilon(t_0)\mathcal{A}_\epsilon, \mathcal{A}_{\epsilon_0}) \\ &= \sup_{x_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon, |\epsilon - \epsilon_0| < \delta} d(S_\epsilon(t_0)x_\epsilon, \mathcal{A}_{\epsilon_0}) \\ &\leq \eta \end{aligned}$$

Portanto  $\{\mathcal{A}_\epsilon; \epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]\}$  é semicontínua superiormente em  $\epsilon_0$ . ■

## 2.2 Continuidade do conjunto de equilíbrios

Nesta seção mostraremos que o conjunto de equilíbrios do problema  $(P_\epsilon)$

$$\{E_\epsilon; \epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]\}$$

é contínuo na topologia de  $W_0^{1,p}$  exceto no caso  $p < q$  no qual mostramos que a semicontinuidade inferior não ocorre à direita nos pontos da sequência  $\{\lambda_l(a^*)\}_{l \geq 1}$ .

**Definição 2.1** *Por semicontinuidade superior e inferior de uma família de conjuntos  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  em  $\lambda = \lambda_0$  entendemos o seguinte*

- Dizemos que  $\{A_\lambda\}$  é semicontínua superiormente em  $\lambda_0$  se  $\sup_{x_\lambda \in A_\lambda} d(x_\lambda, A_{\lambda_0}) \rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ ;
- Dizemos que  $\{A_\lambda\}$  é semicontínua inferiormente em  $\lambda_0$  se  $\sup_{x \in A_{\lambda_0}} d(x, A_\lambda) \rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ .

Temos a continuidade de uma família de conjuntos quando existe a semicontinuidade superior e inferior desta família.

### 2.2.1 Semicontinuidade superior do conjunto de equilíbrios

Denotaremos por  $E_\epsilon$  o conjunto de equilíbrios do problema  $(P_\epsilon)$ , e por  $\phi^\epsilon$  os elementos de  $E_\epsilon$ . De acordo com o primeiro item do Lema 5.6, para demonstrarmos a semicontinuidade

superior da família  $\{E_\epsilon\}$  em  $\epsilon_0$ , basta mostrarmos que toda sequência  $\{\phi^{\epsilon_n}\}$ , com  $\phi^{\epsilon_n} \in E_{\epsilon_n}$  e  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$  tem subsequência convergente com limite pertencendo a  $E_{\epsilon_0}$ . Assim, basta provarmos o seguinte:

**Lema 2.11** *Seja  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$ . Cada sequência  $\{\phi^{\epsilon_n}\}$ , com  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ , e  $\phi^{\epsilon_n}$  equilíbrio de  $(P_{\epsilon_n})$ , possui uma subsequência convergente,*

$$\phi^{\epsilon_{n_k}} \rightarrow \phi^{\epsilon_0}$$

em  $W_0^{1,p}$ , onde  $\phi^{\epsilon_0}$  é algum equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$ .

**Demonstração:** Se  $\phi^\epsilon$  é um equilíbrio de  $(P_\epsilon)$  então  $\phi^\epsilon$  satisfaz

$$0 = \epsilon \left( |\phi_x^\epsilon|^{p-2} \phi_x^\epsilon \right)_x + |\phi^\epsilon|^{q-2} \phi^\epsilon (1 - |\phi^\epsilon|^r) \quad (2.9)$$

qtp em  $(0, 1)$ .

Multiplicando a equação (2.9) por  $\phi^\epsilon$ , integrando de 0 a 1 e usando as Desigualdades de Holder e Young obtemos

$$\epsilon \int_0^1 |\phi_x^\epsilon(x)|^p dx \leq \frac{r}{q+r} + \frac{q}{q+r} \|\phi^\epsilon\|_{q+r}^{q+r} - \|\phi^\epsilon\|_{q+r}^{q+r}.$$

Logo,

$$\|\phi^\epsilon\|_{W_0^{1,p}} < \left[ \frac{r}{(q+r)\hat{\epsilon}} \right]^{\frac{1}{p}} \doteq K_6$$

qualquer que seja o equilíbrio  $\phi^\epsilon$  de  $(P_\epsilon)$ , independente de  $\epsilon \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$ .

Seja  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ . Então a sequência  $\{\phi^{\epsilon_n}\}$  é limitada em  $W_0^{1,p}$  e portanto possui uma subsequência que converge fracamente na topologia de  $W_0^{1,p}$ ,

$$\phi^{\epsilon_{n_k}} \rightharpoonup \tilde{\phi}$$

para algum  $\tilde{\phi} \in W_0^{1,p}$ . Consequentemente é possível extrair uma subsequência, ainda denotada por  $\{\phi^{\epsilon_{n_k}}\}$ , tal que

$$\phi^{\epsilon_{n_k}}(x) \rightarrow \tilde{\phi}(x)$$

qtp em  $(0, 1)$ .

Por outro lado, como  $\{\phi^{\epsilon_{n_k}}\}$  é limitada em  $W_0^{1,p}$ , existe  $K_7 > 0$  tal que para cada  $x \in (0, 1)$  e para todo  $k \in \mathbb{N}$

$$|\phi^{\epsilon_{n_k}}(x)| \leq K_7.$$

Assim usando o Teorema da Convergência Dominada temos

$$\begin{aligned} \epsilon_{n_k} \|\phi^{\epsilon_{n_k}}\|_{W_0^{1,p}}^p &= \int_0^1 \left( |\phi^{\epsilon_{n_k}}(x)|^q - |\phi^{\epsilon_{n_k}}(x)|^{q+r} \right) dx \\ &\rightarrow \int_0^1 \left( |\tilde{\phi}(x)|^q - |\tilde{\phi}(x)|^{q+r} \right) dx \end{aligned}$$

quando  $k \rightarrow \infty$ .

O próximo objetivo é mostrar que  $\tilde{\phi}$  é um equilíbrio de  $(P_{e_0})$ . Com este intuito mostraremos que

$$\|\phi^{\epsilon_{n_k}}\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow \|\tilde{\phi}\|_{W_0^{1,p}}$$

quando  $k \rightarrow +\infty$ . A demonstração será baseada nas idéias de Boccardo e Murat, [2].

Primeiro observe que  $\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi} \in W_0^{1,p}$  uma vez que  $\phi^{\epsilon_{n_k}}, \tilde{\phi} \in W_0^{1,p}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

É fácil ver que  $\phi^{\epsilon_{n_k}}(x) - \tilde{\phi}(x) \rightarrow 0$  qtp em  $(0,1)$ . E através do Teorema da Convergência Dominada temos que  $\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi} \rightarrow 0$  em  $L^p$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . E ainda  $\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi} \rightarrow 0$  em  $W_0^{1,p}$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Sabemos que, para cada  $k \in \mathbb{N}$

$$-\epsilon_{n_k} \left( \left| \phi_x^{\epsilon_{n_k}} \right|^{p-2} \phi_x^{\epsilon_{n_k}} \right)_x = |\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q-2} \phi^{\epsilon_{n_k}} (1 - |\phi^{\epsilon_{n_k}}|^r)$$

qtp em  $(0,1)$ .

Multiplicando por  $\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}$  e integrando de 0 a 1 obtemos

$$\begin{aligned} -\epsilon_{n_k} \int_0^1 \left( \left| \phi_x^{\epsilon_{n_k}} \right|^{p-2} \phi_x^{\epsilon_{n_k}} \right)_x (\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}) dx &= \int_0^1 |\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q-2} \phi^{\epsilon_{n_k}} (\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}) dx \\ &- \int_0^1 |\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q+r-2} \phi^{\epsilon_{n_k}} (\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}) dx \end{aligned} \quad (2.10)$$

Os dois termos do lado direito da equação tendem a zero quando  $k \rightarrow \infty$ . De fato, pela Desigualdade de Holder

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 |\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q-2} \phi^{\epsilon_{n_k}} (\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}) dx \right| &\leq \int_0^1 |\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q-1} |\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}| dx \\ &\leq \|\phi^{\epsilon_{n_k}}\|_{W_0^{1,p}}^{q-1} \|\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}\|_q \\ &\leq K_6^{q-1} \|\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}\|_q \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e analogamente

$$\int_0^1 |\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q+r-2} \phi^{\epsilon_{n_k}} (\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}) dx \rightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Logo,

$$\epsilon_{n_k} \int_0^1 \left( \left| \phi_x^{\epsilon_{n_k}} \right|^{p-2} \phi_x^{\epsilon_{n_k}} \right)_x (\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}_x) dx \rightarrow 0$$

e como  $\epsilon_{n_k} \in [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$  segue que

$$\int_0^1 \left( \left| \phi_x^{\epsilon_{n_k}} \right|^{p-2} \phi_x^{\epsilon_{n_k}} \right)_x (\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}_x) dx \rightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow \infty$ .

Por outro lado,

$$\int_0^1 \left| \tilde{\phi}_x \right|^{p-2} \tilde{\phi}_x (\phi_x^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}_x) dx = -\Delta_p(\tilde{\phi})(\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi})$$

e como  $-\Delta_p(\tilde{\phi}) \in W^{-1,p'}$  e  $\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi} \rightarrow 0$  em  $W_0^{1,p}$  segue que

$$\int_0^1 \left( \left| \tilde{\phi}_x \right|^{p-2} \tilde{\phi}_x \right)_x (\phi_x^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}_x) dx = -\Delta_p(\tilde{\phi})(\phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi}) \rightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Assim, pela Desigualdade de Tartar, veja Lema 5.5, existe  $\gamma_0 > 0$  tal que

$$\begin{aligned} & \gamma_0 \int_0^1 \left| \phi_x^{\epsilon_{n_k}}(x) - \tilde{\phi}_x(x) \right|^p dx \\ & \leq \int_0^1 \left( \left| \phi_x^{\epsilon_{n_k}}(x) \right|^{p-2} \phi_x^{\epsilon_{n_k}}(x) - \left| \tilde{\phi}_x(x) \right|^{p-2} \tilde{\phi}_x(x) \right) (\phi_x^{\epsilon_{n_k}}(x) - \tilde{\phi}_x(x)) dx \\ & = \int_0^1 \left( \left| \phi_x^{\epsilon_{n_k}}(x) \right|^{p-2} \phi_x^{\epsilon_{n_k}}(x) (\phi_x^{\epsilon_{n_k}}(x) - \tilde{\phi}_x(x)) \right) dx \\ & - \int_0^1 \left( \left| \tilde{\phi}_x(x) \right|^{p-2} \tilde{\phi}_x(x) (\phi_x^{\epsilon_{n_k}}(x) - \tilde{\phi}_x(x)) \right) dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e portanto,

$$\left\| \phi^{\epsilon_{n_k}} - \tilde{\phi} \right\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Consequentemente,

$$\epsilon_{n_k} \left\| \phi^{\epsilon_{n_k}} \right\|_{W_0^{1,p}}^p \rightarrow \epsilon_0 \left\| \tilde{\phi} \right\|_{W_0^{1,p}}^p$$

e pela unicidade do limite segue que

$$\epsilon_0 \left\| \tilde{\phi} \right\|_{W_0^{1,p}}^p = \int_0^1 \left| \tilde{\phi} \right|^q dx - \int_0^1 \left| \tilde{\phi} \right|^{q+r} dx.$$

Note que  $\tilde{\phi}(0) = 0$  e  $\tilde{\phi}(1) = 0$  pois  $\tilde{\phi} \in W_0^{1,p}$ . Resta mostrar que  $\tilde{\phi}$  satisfaz a equação (2.9)  $qtp$  em  $(0, 1)$ .

Considere para cada  $k \in \mathbb{N}$  a equação

$$\frac{du}{dt} - \Delta_p u = \frac{1}{\epsilon_{n_k}} (|\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q-2} \phi^{\epsilon_{n_k}} - |\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q+r-2} \phi^{\epsilon_{n_k}}).$$

Sabemos que  $\phi^{\epsilon_{n_k}}$  é uma solução forte desta equação uma vez que  $\phi^{\epsilon_{n_k}}$  não depende de  $t$  e

$$-\epsilon_{n_k} \Delta_p \phi^{\epsilon_{n_k}} = (|\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q-2} \phi^{\epsilon_{n_k}} - |\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q+r-2} \phi^{\epsilon_{n_k}})$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Mostraremos que  $\tilde{\phi}$  é uma solução fraca de

$$\frac{du}{dt} - \Delta_p u = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \left| \tilde{\phi} \right|^{q-2} \tilde{\phi} - \left| \tilde{\phi} \right|^{q+r-2} \tilde{\phi} \right).$$

Primeiro observe que  $\frac{1}{\epsilon_{n_k}} (|\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q-2} \phi^{\epsilon_{n_k}} - |\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q+r-2} \phi^{\epsilon_{n_k}}) \in L^1(0, T; L^2)$ . Além disso,  $\frac{1}{\epsilon_{n_k}} (|\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q-2} \phi^{\epsilon_{n_k}} - |\phi^{\epsilon_{n_k}}|^{q+r-2} \phi^{\epsilon_{n_k}}) \rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \left( \left| \tilde{\phi} \right|^{q-2} \tilde{\phi} - \left| \tilde{\phi} \right|^{q+r-2} \tilde{\phi} \right)$  em  $L^1(0, T; L^2)$ .

Como  $\phi^{\epsilon_{n_k}} \rightarrow \tilde{\phi}$  em  $W_0^{1,p}$  e consequentemente em  $C([0, T]; L^2)$  segue da definição de solução fraca, veja Definição 5.1, que  $\tilde{\phi}$  é solução fraca de

$$\frac{du}{dt} - \Delta_p u = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \left| \tilde{\phi} \right|^{q-2} \tilde{\phi} - \left| \tilde{\phi} \right|^{q+r-2} \tilde{\phi} \right).$$

Mas  $\frac{1}{\epsilon_0} \left( \left| \tilde{\phi} \right|^{q-2} \tilde{\phi} - \left| \tilde{\phi} \right|^{q+r-2} \tilde{\phi} \right) \in L^2(0, T; L^2)$ , logo pelo Teorema 5.5,  $\tilde{\phi}$  é uma solução forte de

$$\frac{du}{dt} - \Delta_p u = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \left| \tilde{\phi} \right|^{q-2} \tilde{\phi} - \left| \tilde{\phi} \right|^{q+r-2} \tilde{\phi} \right)$$

e como  $\tilde{\phi}$  não depende de  $t$  segue que

$$-\Delta_p \tilde{\phi} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \left| \tilde{\phi} \right|^{q-2} \tilde{\phi} - \left| \tilde{\phi} \right|^{q+r-2} \tilde{\phi} \right)$$

logo,

$$0 = \epsilon_0 \left( \left| \tilde{\phi}_x \right|^{p-2} \tilde{\phi}_x \right)_x + \left| \tilde{\phi} \right|^{q-2} \tilde{\phi} \left( 1 - \left| \tilde{\phi} \right|^r \right).$$

Portanto  $\tilde{\phi}$  é um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$ . ■

### 2.2.2 Semicontinuidade inferior do conjunto de equilíbrios

O objetivo nesta seção é mostrar que todo equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$  é limite de equilíbrios de  $(P_{\epsilon_n})$  com  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ . Assim, pelo segundo item do Lema 5.6 temos a semicontinuidade inferior de  $E_\epsilon$  em  $\epsilon = \epsilon_0$ . Veremos que esta continuidade é sempre possível exceto no caso particular  $p < q$ ,  $\epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$  e  $\epsilon_n > \epsilon_0$ .

A notação que usaremos para indicar os equilíbrios nesta seção é diferente da notação usada na seção anterior. Isso porque para a análise que faremos é essencial indicar o número de raízes das soluções estacionárias. Assim, no que segue denotaremos por  $\phi_{\epsilon_n}^l$  um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_n})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ . Sem perda de generalidade consideraremos apenas equilíbrios com velocidade inicial positiva, uma vez que a análise de equilíbrios com velocidade inicial negativa segue de forma inteiramente análoga.

Dividiremos a demonstração em três casos de acordo com a relação entre os parâmetros  $p$  e  $q$ . Antes porém, mostraremos que, exceto no caso  $p = q$  e  $\epsilon_0 = \lambda_l$ , uma sequência de equilíbrios sem patamares, todos com  $l$  raízes em  $(0, 1)$  só pode convergir para um equilíbrio com  $l$  raízes.

Seja  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}$  uma sequência de equilíbrios, sem patamares. Suponha que  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ . Então pelo Lema 2.11, existe uma subsequência, a qual ainda denotaremos por  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}$ , tal que  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \phi_{\epsilon_0}^k$  em  $W_0^{1,p}$  onde  $\phi_{\epsilon_0}^k$  é um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$  com  $k$  raízes em  $(0, 1)$ .

**Lema 2.12** *Com a notação acima, ou  $\phi_{\epsilon_0}^k \equiv 0$  ou  $k = l$ , onde 0 denota o equilíbrio nulo.*

**Demonstração:**

Como  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \phi_{\epsilon_0}^k$  em  $W_0^{1,p}$ , então  $\phi_{\epsilon_n}^l(x) \rightarrow \phi_{\epsilon_0}^k(x)$ , para todo  $x \in (0, 1)$ , e portanto para cada  $x \in (0, 1)$ , ou  $\phi_{\epsilon_0}^k(x) = 0$  ou  $\phi_{\epsilon_0}^k(x) > 0$  e  $\phi_{\epsilon_n}^l(x) > 0$  têm o mesmo sinal, para  $n$  suficientemente grande.

Em particular, para todo  $m = 1, 2, 3, \dots, l$ ,

$$\phi_{\epsilon_n}^l \left( \frac{m}{l+1} \right) \rightarrow \phi_{\epsilon_0}^k \left( \frac{m}{l+1} \right).$$

Uma vez que as raízes de  $\phi_{\epsilon_n}^l$  são todos os pontos da forma  $x = \frac{m}{l+1}$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots, l$ , segue que  $\phi_{\epsilon_n}^l \left( \frac{m}{l+1} \right) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo  $\phi_{\epsilon_0}^k \left( \frac{m}{l+1} \right) = 0$ , para todo  $m = 1, 2, \dots, l$ . Assim ou  $\phi_{\epsilon_0}^k \equiv 0$  ou  $k \geq l$ .

Se  $\phi_{\epsilon_0}^k \equiv 0$ , o lema fica provado. Suponha então que  $\phi_{\epsilon_0}^k \neq 0$  e  $k > l$ . Então existe  $m_0 \in \{1, 2, \dots, l+1\}$  e  $\bar{x} \in \left( \frac{m_0-1}{l+1}, \frac{m_0}{l+1} \right)$  tal que  $\phi_{\epsilon_0}^k(\bar{x}) = 0$ .

Consequentemente existe  $\bar{x} \in \left[ \frac{m_0 - 1}{l + 1}, \frac{m_0}{l + 1} \right] \setminus \{\bar{x}\}$  tal que  $\phi_{\epsilon_0}^k(x) \neq 0$ , para todo  $x$  entre  $\bar{x}$  e  $\bar{x}$ , com  $\phi_{\epsilon_0}^k(x)$  e  $\phi_{\epsilon_n}^l(x)$  tendo sinais opostos neste intervalo. Veja Figura 2.1.

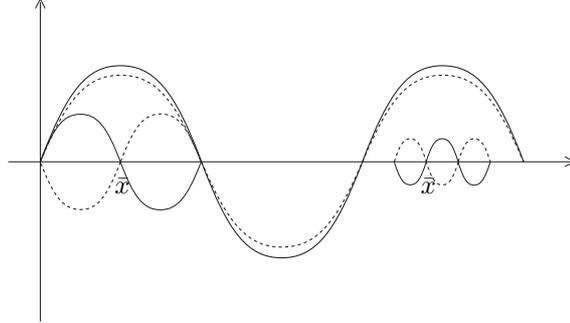


Figura 2.1:

Mas isto é um absurdo pois  $\phi_{\epsilon_n}^l(x) \rightarrow \phi_{\epsilon_0}^k(x)$  para todo  $x \in (0, 1)$ . Portanto não podemos ter  $k > l$ . Logo, ou  $\phi_{\epsilon_0}^k \equiv 0$  ou  $k = l$ . ■

**Observação 2.4** Note que o mesmo raciocínio demonstra que se,  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$  então qualquer sequência da forma  $\{\phi_{\epsilon_n}^0\}$  tem subsequência convergente ou para  $\phi_{\epsilon_0}^0$  ou para o equilíbrio nulo,  $\{\phi_{\epsilon_n}^0\}$  admitindo patamar ou não.

**Lema 2.13** Se  $p \neq q$  então  $\phi_{\epsilon_0}^k \neq 0$  no Lema 2.12. Logo só temos a possibilidade  $k = l$ .

**Demonstração:**

De fato, se  $\phi_{\epsilon_n}^l$  convergisse para 0 em  $W_0^{1,p}$  então  $\phi_{\epsilon_n}^l(x) \rightarrow 0$  para todo  $x \in (0, 1)$ . Em particular, a altura máxima,  $\phi_{\alpha_n}$ , atingida pelo equilíbrio  $\phi_{\epsilon_n}^l$  convergiria para 0. Assim,

$$\phi_{\alpha_n} = \phi_{\epsilon_n}^l \left( \frac{1}{2(l+1)} \right) \rightarrow 0 \quad (2.11)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Consequentemente, o x-tempo necessário,  $X(\alpha_n) = \left( \frac{\epsilon_n(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(\phi_{\alpha_n})$ , para o equilíbrio  $\phi_{\epsilon_n}^l$  atingir sua altura máxima dado na equação (1.1), seria tal que:

- Se  $p < q$

$$X(\alpha_n) = \left( \frac{\epsilon_n(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(\phi_{\alpha_n}) \rightarrow +\infty$$

pois  $\{\epsilon_n\}$  é limitado e  $I(\phi_{\alpha_n}) \rightarrow +\infty$  pelo Lema 1.1.

- Se  $p > q$

$$X(\alpha_n) = \left( \frac{\epsilon_n(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(\phi_{\alpha_n}) \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , pois  $\{\epsilon_n\}$  é limitado e  $I(\phi_{\alpha_n}) \rightarrow 0$  pelo Lema 1.1.

Observe que em ambos os casos temos um absurdo pois desde que os equilíbrios  $\phi_{\epsilon_n}^l$  não possuem patamares o x-tempo necessário para que os equilíbrios atinjam sua altura máxima é dado por  $X(\alpha_n) = \frac{1}{2(l+1)}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $\phi_{\epsilon_0}^k \neq 0$ . ■

**Lema 2.14** *Se  $p = q$ ,  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow 0$  em  $W_0^{1,p}$  no Lema 2.12, se e somente se  $\epsilon_0 = \lambda_l$  onde*

$$\lambda_l = \frac{p}{p-1} (2(l+1)I_0)^{-p}.$$

**Demonstração:** De fato, se  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow 0$  em  $W_0^{1,p}$  então  $\phi_{\epsilon_n}^l(x) \rightarrow 0$  para todo  $x \in (0, 1)$  e em particular,

$$\phi_{\alpha_n} = \phi_{\epsilon_n}^l \left( \frac{1}{2(l+1)} \right) \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Assim,

$$X(\alpha_n) = \left( \frac{\epsilon_n(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(\phi_{\alpha_n}) \rightarrow \left( \frac{\epsilon_0(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I_0.$$

Mas  $X(\alpha_n) = \frac{1}{2(l+1)}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  pois  $\phi_{\epsilon_n}^l$  não possui patamar, logo pela unicidade do limite

$$\frac{1}{2(l+1)} = \left( \frac{\epsilon_0(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I_0$$

e portanto

$$\epsilon_0 = \frac{p}{(p-1)(2(l+1)I_0)^p} = \lambda_l.$$

Reciprocamente, se  $\epsilon_n \rightarrow \lambda_l$  com  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \phi_{\lambda_l}$  então  $\phi_{\lambda_l} \equiv 0$ , uma vez que pelo Lema 2.12, ou  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \phi_{\lambda_l}^l$  ou  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow 0$ , mas o problema  $(P_{\lambda_l})$  não possui equilíbrios com  $l$  raízes. Logo,  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow 0$  quando  $\epsilon_n \rightarrow \lambda_l$ . ■

Passemos agora à demonstração da semicontinuidade inferior do conjunto de equilíbrios. Para tal tomaremos um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ , e mostraremos que este equilíbrio pode ser aproximado, na topologia de  $W_0^{1,p}$ , por uma sequência de equilíbrios  $\phi_{\epsilon_n}^l$ , cada um contendo  $l$  raízes em  $(0, 1)$ .

Porém quando  $\epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$ ,  $p < q$  e  $\epsilon_n$  se aproxima de  $\epsilon_0$  pela direita isto não ocorre, o que é natural, uma vez que se  $\epsilon_n > \epsilon_0$  então o problema  $(P_{\epsilon_n})$  não possui equilíbrios com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ , e desta forma não conseguimos uma sequência convergindo para um equilíbrio  $\phi_{\epsilon_0}^l$ , qualquer que seja  $l \in \mathbb{N}$ .

Como foi dito anteriormente dividiremos a demonstração em três casos de acordo com a relação entre os parâmetros  $p$  e  $q$ .

**Lema 2.15** *Seja  $p > q$  e considere um equilíbrio  $\phi_{\epsilon_0}^l$  de  $(P_{\epsilon_0})$ , com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ . Então  $\phi_{\epsilon_0}^l$  é limite, em  $W_0^{1,p}$ , de uma sequência de equilíbrios  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}$ , onde cada  $\phi_{\epsilon_n}^l$  é um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_n})$ , com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ , e  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ .*

**Demonstração:** A demonstração será dividida em duas partes. Na primeira consideraremos apenas equilíbrios  $\phi_{\epsilon_0}^l$  sem patamares e na segunda apenas equilíbrios com patamares.

Seja  $\phi_{\epsilon_0}^l$  um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$  e que não possui patamar. Como  $\phi_{\epsilon_0}^l$  não possui patamar então  $\epsilon_0 \geq \lambda_l(1)$ .

Considere uma sequência  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ . Se  $\epsilon_0 > \lambda_l(1)$  podemos considerar sem perda de generalidade que  $\epsilon_n > \lambda_l(1)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo para cada  $n$  existe apenas um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_n})$ , com velocidade inicial positiva e  $l$  raízes em  $(0, 1)$ .

Considere a sequência  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}_{n \in \mathbb{N}}$  formada por tais equilíbrios. Pelos Lemas 2.11, 2.12 e 2.13  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}$  possui uma subsequência convergente cujo limite, em  $W_0^{1,p}$ , é um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ .

Mas  $\epsilon_0 > \lambda_l(1)$ , o que garante que  $(P_{\epsilon_0})$  possui apenas um equilíbrio com velocidade inicial positiva e  $l$  raízes em  $(0, 1)$ . Portanto existe sequência  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}$  tal que

$$\phi_{\epsilon_0}^l = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\epsilon_n}^l.$$

Se  $\epsilon_0 = \lambda_l(1)$ , não existe outro equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$  com velocidade inicial positiva e  $l$  raízes em  $(0, 1)$ , que não seja  $\phi_{\epsilon_0}^l$ . Vamos então considerar dois casos, quando  $\epsilon_n$  se aproxima de  $\epsilon_0$  pela direita e quando  $\epsilon_n$  se aproxima de  $\epsilon_0$  pela esquerda. Se  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^+$  então  $\epsilon_n \geq \lambda_l(1)$ , e a demonstração segue de forma análoga a anterior uma vez que existe apenas um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_n})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ .

Se  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^-$  então  $\epsilon_n < \lambda_l(1)$  o que garante que qualquer equilíbrio  $\phi_{\epsilon_n}^l$  de  $(P_{\epsilon_n})$ , com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ , possui patamar e portanto existe um continuum de equilíbrios com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\phi_{\epsilon_n}^l$  atinge 1 e -1 e portanto o x-tempo necessário para  $\phi_{\epsilon_n}^l$  atingir o seu valor máximo é tal que

$$X(\alpha_n) = \left( \frac{\epsilon_n(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(1) \rightarrow \left( \frac{\epsilon_0(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(1) = X(\alpha_{\epsilon_0}) \quad (2.12)$$

onde  $X(\alpha_{\epsilon_0})$  é o x-tempo necessário para  $\phi_{\epsilon_0}^l$  atingir seu valor máximo.

Uma vez que  $\epsilon_n < \epsilon_0$ , segue que  $X(\alpha_n) < X(\alpha_{\epsilon_0})$  e por (1.4)

$$2(l+1)X(\alpha_n) + TP_n = 1 = 2(l+1)X(\alpha_{\epsilon_0}) \quad (2.13)$$

Logo, por (1.4) e (2.12)  $TP_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Defina, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$d^n = 2(X(\alpha_{\epsilon_0}) - X(\alpha_n)) > 0. \quad (2.14)$$

Observe que  $d^n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , e além disso,

$$\begin{aligned} (l+1)d^n &= 2(l+1)X(\alpha_{\epsilon_0}) - 2(l+1)X(\alpha_n) \\ &= 1 - 2(l+1)X(\alpha_n). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Logo por (2.13) e (2.15),  $TP_n = (l+1)d^n$ , e por (2.14),  $2X(\alpha_n) + d^n = 2X(\alpha_{\epsilon_0}) = \frac{1}{l+1}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado segue por (1.2) que

$$\frac{\epsilon_n(p-1)}{p} |\alpha_n|^{\frac{p}{p-1}} = F(1) = \frac{\epsilon_0(p-1)}{p} |\alpha_{\epsilon_0}|^{\frac{p}{p-1}} \quad (2.16)$$

onde  $F(u) = \int_0^u (|s|^{q-2} s(1 - |s|^r)) ds$  e como  $\epsilon_n < \epsilon_0$  temos  $\alpha_n > \alpha_{\epsilon_0}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $\phi_{\epsilon_n}^l$  possui velocidade inicial maior que  $\phi_{\epsilon_0}^l$ .

Considere para cada  $n \in \mathbb{N}$  o equilíbrio  $\phi_{\epsilon_n}^l$  representado por  $(d^n, d^n, \dots, d^n)$ , ou seja, o equilíbrio de  $(P_{\epsilon_n})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ , e  $l + 1$  patamares de comprimento  $d^n$ . Veja Figura 2.2.

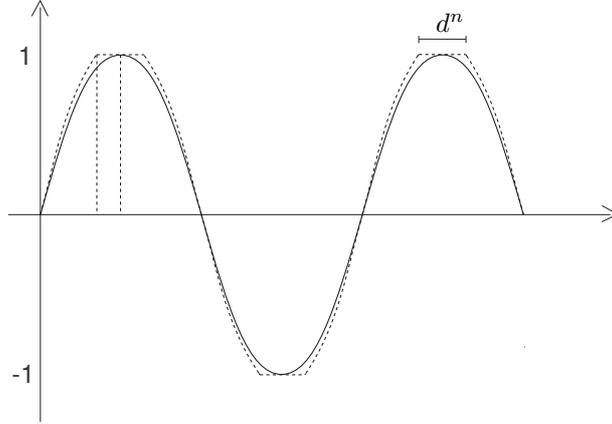


Figura 2.2:

Seja  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}_{n \in \mathbb{N}}$  a sequência formada por tais equilíbrios, pelo Lema 2.11, existe uma subsequência ainda denotada por  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}$ , e um equilíbrio  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  de  $(P_{\epsilon_0})$ , com  $k$  raízes em  $(0, 1)$  tal que

$$\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$$

em  $W_0^{1,p}$ .

O objetivo é mostrar que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k = \phi_{\epsilon_0}^l$ , onde  $\phi_{\epsilon_0}^l$  é o equilíbrio tomado no início da demonstração. Note que, por construção,  $2X(\alpha_n) + d^n = \frac{1}{l+1}$  e ainda

$$\phi_{\epsilon_n}^l \left( \frac{m}{l+1} \right) = 0$$

uma vez que  $\frac{m}{l+1}$  é raiz de  $\phi_{\epsilon_n}^l$  para todo  $m = 1, 2, \dots, l$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  em  $W_0^{1,p}$  segue que

$$\phi_{\epsilon_n}^l \left( \frac{m}{l+1} \right) \rightarrow \tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k \left( \frac{m}{l+1} \right)$$

para cada  $m = 1, 2, \dots, l$  e portanto

$$\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k \left( \frac{m}{l+1} \right) = 0$$

para qualquer  $m = 1, 2, \dots, l$  o que mostra que temos duas possibilidades: ou  $k \geq l$  ou  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(x) = 0$ , para todo  $x \in (0, 1)$ .

Mostremos que a última possibilidade não pode ocorrer. De fato, observe que para todo  $n \in \mathbb{N}$  o ponto  $X(\alpha_n) + \frac{1}{2}d^n = \frac{1}{2(l+1)}$  pertence ao primeiro patamar, logo  $\phi_{\epsilon_n}^l \left( \frac{1}{2(l+1)} \right) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Mas

$$\phi_{\epsilon_n}^l \left( \frac{1}{2(l+1)} \right) \rightarrow \tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k \left( \frac{1}{2(l+1)} \right)$$

e portanto temos que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k \left( \frac{1}{2(l+1)} \right) = 1$ . Logo  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k \neq 0$  e  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  atinge seus extremos em 1 e -1. Logo  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  e  $\phi_{\epsilon_0}^l$  gastam o mesmo x-tempo,  $X(\alpha_{\epsilon_0})$ , para atingir o valor máximo.

Sabemos que  $TP_{\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k} \geq TP_{\phi_{\epsilon_0}^l}$  pois  $TP_{\phi_{\epsilon_0}^l} = 0$  visto que  $\phi_{\epsilon_0}^l$  não possui patamar.

Logo

$$2(k+1)X(\alpha_{\epsilon_0}) \leq 2(l+1)X(\alpha_{\epsilon_0})$$

ou seja  $k \leq l$ .

Consequentemente  $k = l$ , e como  $\epsilon_0 = \lambda_l(1)$ , existe apenas um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$  e velocidade inicial positiva, logo  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k \equiv \phi_{\epsilon_0}^l$  e o resultado segue.

Agora vamos considerar o caso em que  $\phi_{\epsilon_0}^l$  é um equilíbrio com patamar.

Neste caso  $0 < \epsilon_0 < \lambda_l(1)$  independente da relação entre  $p$  e  $q$ . Seja  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ . Sem perda de generalidade podemos assumir  $0 < \epsilon_n < \lambda_l(1)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Suponha que  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^-$  e que a distribuição de patamares de  $\phi_{\epsilon_0}^l$  seja  $(d_1, d_2, \dots, d_{l+1})$  onde  $d_i \geq 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, l+1$ . Como  $\phi_{\epsilon_0}^l$  possui patamar, o x-tempo necessário para  $\phi_{\epsilon_0}^l$  atingir 1 é dado por  $X(\alpha_{\epsilon_0}) = \left( \frac{\epsilon_0(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(1)$ . E uma vez que  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^-$  segue que

$$X(\alpha_n) = \left( \frac{\epsilon_n(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(1) \rightarrow \left( \frac{\epsilon_0(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(1) = X(\alpha_{\epsilon_0})$$

onde  $X(\alpha_n)$  é o tempo que  $\phi_{\epsilon_n}^l$  necessita para atingir seu primeiro máximo, visto que  $\phi_{\epsilon_n}^l$  também possui patamar.

Consequentemente  $TP_n \rightarrow TP_{\phi_{\epsilon_0}^l}$  pois

$$2(l+1)X(\alpha_n) + TP_n = 1 = 2(l+1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + TP_{\phi_{\epsilon_0}^l}.$$

Defina para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\delta_n = 2(X(\alpha_{\epsilon_0}) - X(\alpha_n)) > 0$$

e  $d_i^n = \delta_n + d_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, l+1$ .

Assim  $d_i^n > 0$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, l+1$  e  $n \in \mathbb{N}$  e ainda

$$\sum_{i=1}^{l+1} d_i^n = \sum_{i=1}^{l+1} (\delta_n + d_i) = (l+1)\delta_n + TP_{\phi_{\epsilon_0}^l} = TP_n.$$

Logo  $(d_1^n, d_2^n, \dots, d_{l+1}^n)$  é uma possível distribuição de patamares para um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_n})$ , com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ .

De agora em diante vamos considerar para cada  $n \in \mathbb{N}$  apenas o equilíbrio  $\phi_{\epsilon_n}^l$  com a distribuição de patamares  $(d_1^n, d_2^n, \dots, d_{l+1}^n)$  dada acima.

Observe que uma vez que  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^-$  então certamente  $\delta_n \rightarrow 0$  e consequentemente  $d_i^n = \delta_n + d_i \rightarrow d_i$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo, para cada  $i = 1, 2, \dots, l+1$

$$2X(\alpha_n) + d_i^n = 2 \left( \frac{\epsilon_n(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(1) + \delta_n + d_i = 2X(\alpha_{\epsilon_0}) + d_i$$

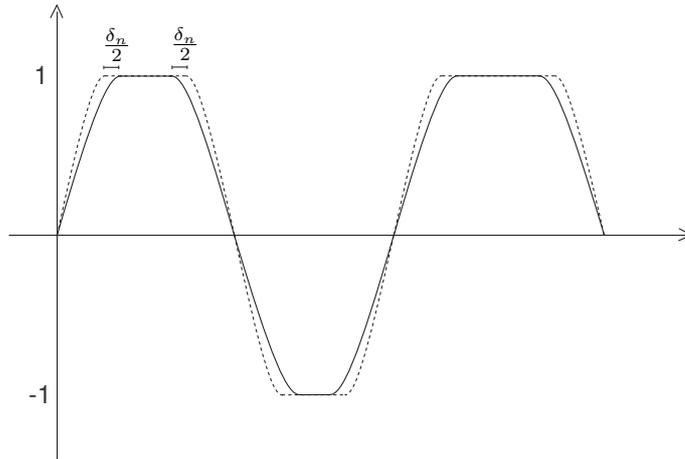


Figura 2.3:

ou seja,  $\phi_{\epsilon_n}^l$  e  $\phi_{\epsilon_0}^l$  têm as mesmas raízes em  $(0, 1)$ . Agora sim podemos fazer um esboço destes equilíbrios, veja Figura 2.3:

O objetivo, neste momento, é mostrar que  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \phi_{\epsilon_0}^l$  em  $W_0^{1,p}$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Segue do Lema 2.11 que  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}$  possui uma subsequência, ainda denotada por  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}$  tal que  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  em  $W_0^{1,p}$ , onde  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  é um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$ .

Desde que as raízes de  $\phi_{\epsilon_n}^l$  coincidem para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  em  $W_0^{1,p}$  segue que ou  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k \equiv 0$  ou  $k \geq l$ . Mas

$$X(\alpha_n) + \frac{\delta_n}{2} = X(\alpha_{\epsilon_0})$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e portanto,  $X(\alpha_{\epsilon_0})$  pertence ao primeiro patamar de  $\phi_{\epsilon_n}^l$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Logo  $\phi_{\epsilon_n}^l(X(\alpha_{\epsilon_0})) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e como  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  em  $W_0^{1,p}$  segue que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(X(\alpha_{\epsilon_0})) = 1$  e portanto  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k \neq 0$  e como  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  atinge 1 temos que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  e  $\phi_{\epsilon_0}^l$  precisam do mesmo x-tempo para atingir seu valor máximo 1, logo  $X(\alpha_{\epsilon_0})$  é comum para  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  e  $\phi_{\epsilon_0}^l$ .

Portanto só temos a possibilidade  $k \geq l$ . Mostremos que  $k = l$ . Com este intuito definimos os seguintes conjuntos:

$$\tilde{A}^s = \left\{ x \in (0, 1); \tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(x) = 1 \right\} \quad \tilde{A}^i = \left\{ x \in (0, 1); \tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(x) = -1 \right\}$$

$$A_0^s = \left\{ x \in (0, 1); \phi_{\epsilon_0}^l(x) = 1 \right\} \quad A_0^i = \left\{ x \in (0, 1); \phi_{\epsilon_0}^l(x) = -1 \right\}$$

$$A_n^s = \left\{ x \in (0, 1); \phi_{\epsilon_n}^l(x) = 1 \right\} \quad A_n^i = \left\{ x \in (0, 1); \phi_{\epsilon_n}^l(x) = -1 \right\}$$

Por construção  $A_0^s \subset A_n^s$  e  $A_0^i \subset A_n^i$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto,  $A_0^s \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^s$  e  $A_0^i \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^i$ . E por outro lado, se  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^s$  então  $\phi_{\epsilon_n}^l(x) = 1$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  e conseqüentemente  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(x) = 1$  o que mostra que  $x \in \tilde{A}^s$ . Analogamente temos que se  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^i$  então  $x \in \tilde{A}^i$ .

Portanto  $A_0^s \subset \tilde{A}^s$  e  $A_0^i \subset \tilde{A}^i$  o que implica que  $TP_{\phi_{\epsilon_0}^l} \leq TP_{\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k}$  onde  $TP_{\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k}$  é o tempo de parada de  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$ .

Uma vez que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  e  $\phi_{\epsilon_0}^l$  são equilíbrios de  $(P_{\epsilon_0})$  segue que

$$2(l+1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + TP_{\phi_{\epsilon_0}^l} = 1 = 2(k+1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + TP_{\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k}$$

e como  $TP_{\phi_{\epsilon_0}^l} \leq TP_{\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k}$ , temos que  $l \geq k$ . E portanto  $k = l$ .

Mas se  $k = l$  e  $X(\alpha_{\epsilon_0})$  é comum para  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  e  $\phi_{\epsilon_0}^l$  então obrigatoriamente  $TP_{\phi_{\epsilon_0}^l} = TP_{\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k}$ . Assim,  $A_0^s = \tilde{A}^s$  e  $A_0^i = \tilde{A}^i$  o que mostra que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  possui a mesma distribuição de patamares que  $\phi_{\epsilon_0}^l$ .

Como só existe um equilíbrio com esta distribuição de patamares,  $(d_1, d_2, \dots, d_{l+1})$ , segue que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k \equiv \phi_{\epsilon_0}^l$ . Portanto  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \phi_{\epsilon_0}^l$  em  $W_0^{1,p}$ .

Vejam agora o que acontece quando  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^+$ .

Suponha que o tempo de parada de  $\phi_{\epsilon_0}^l$  seja  $TP_{\phi_{\epsilon_0}^l} = \sum_{i=1}^{l+1} d_i$  com  $d_i \geq 0$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, l+1$ . Então

$$X(\alpha_n) = \left( \frac{\epsilon_n(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(1) \rightarrow \left( \frac{\epsilon_0(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(1) = X(\alpha_{\epsilon_0})$$

e como

$$2(l+1)X(\alpha_n) + TP_n = 1 = 2(l+1)X(\alpha_0) + TP_{\phi_{\epsilon_0}^l}$$

segue que  $TP_n \rightarrow TP_{\phi_{\epsilon_0}^l}$ .

Seja  $i \in \{1, 2, \dots, l+1\}$  tal que  $d_i = \max_{1 \leq j \leq l+1} d_j$  e defina para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\delta_n = TP_{\phi_{\epsilon_0}^l} - TP_n$ .

Note que  $\delta_n \rightarrow 0^+$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,  $\delta_n < d_i$ . Defina, para cada  $n \geq n_0$ ,

$$d_j^n = \begin{cases} d_j, & \text{se } j \neq i \\ d_i - \delta_n, & \text{se } j = i. \end{cases}$$

Observe que  $\sum_{j=1}^{l+1} d_j^n = \sum_{j=1}^{l+1} d_j - \delta_n = TP_n$  o que mostra que  $(d_1, \dots, d_{i-1}, d_i - \delta_n, d_{i+1}, \dots, d_{l+1})$  é uma possível distribuição de patamares para um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_n})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ .

De agora em diante considere a sequência  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}$  formada por tais equilíbrios. Pelo Lema 2.11 existe uma subsequência ainda denotada por  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}$  e  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$  tal que  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  em  $W_0^{1,p}$ .

Note que

$$(2i-1)X(\alpha_n) + \sum_{j=1}^{i-1} d_j^n \geq (2i-1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^{i-1} d_j$$

e

$$(2l-2i+1)X(\alpha_n) + \sum_{j=i+1}^{l+1} d_j^n \geq (2l-2i+1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=i+1}^{l+1} d_j$$

pois  $X(\alpha_n) \geq X(\alpha_{\epsilon_0})$  e  $d_j^n = d_j$  para todo  $j \neq i$ .

Isto implica que o intervalo

$$I_n \doteq \left[ (2i-1)X(\alpha_n) + \sum_{j=1}^{i-1} d_j^n, (2i-1)X(\alpha_n) + \sum_{j=1}^i d_j^n \right]$$

está contido no intervalo

$$I_0 \doteq \left[ (2i-1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^{i-1} d_j, (2i-1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^i d_j \right]$$

para todo  $n \geq n_0$ , e por construção

$$I_{n_0} \subset I_{n_0+1} \subset \dots \subset I_n \subset \dots \subset I_0.$$

Veja a Figura 2.4.

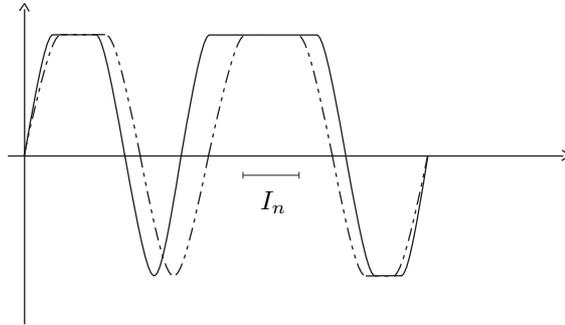


Figura 2.4:

Assim, se  $x_0 \in I_{n_0}$  então  $x_0 \in I_n$ , para todo  $n \geq n_0$  e então  $\phi_{\epsilon_n}^l(x_0) = (-1)^{i+1}$  qualquer que seja  $n \geq n_0$ . Como  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  em  $W_0^{1,p}$ , segue que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(x_0) = (-1)^{i+1}$  para todo  $x_0 \in I_{n_0}$ . Logo  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  é um equilíbrio que possui patamar, pois  $n_0$  foi escolhido de modo que  $|I_{n_0}| > 0$ , e como a “velocidade inicial”,  $\alpha_{\epsilon_0}$ , é dada por

$$F(1) = \frac{\epsilon_0(p-1)}{p} |\alpha_{\epsilon_0}|^{\frac{p}{p-1}}$$

então as velocidades de  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  e  $\phi_{\epsilon_0}^l$  coincidem. Além disso, o x-tempo necessário para atingir o valor máximo

$$X(\alpha_{\epsilon_0}) = \left( \frac{\epsilon_0(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} I(1)$$

também deve coincidir para  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  e  $\phi_{\epsilon_0}^l$ .

Observe também que quando  $n \rightarrow \infty$

$$2iX(\alpha_n) + \sum_{j=1}^i d_j^n \rightarrow 2iX(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^i d_j$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, l+1$ , ou seja, as raízes de  $\phi_{\epsilon_n}^l$  convergem para as raízes de  $\phi_{\epsilon_0}^l$ , conseqüentemente para cada  $i = 1, 2, \dots, l+1$  existe  $n_i \in \mathbb{N}$  tal que

$$\begin{aligned} & \max \left\{ 2iX(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=0}^i d_j, 2iX(\alpha_n) + \sum_{j=0}^i d_j^n \right\} \\ & < \min \left\{ 2(i+1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=0}^{i+1} d_j, 2(i+1)X(\alpha_n) + \sum_{j=0}^{i+1} d_j^n \right\} \end{aligned}$$

para todo  $n \geq n_i$ , com  $d_0 = 0, d_0^n = 0$  e  $i = 1, 2, \dots, l+1$ . Seja  $N_0 = \max \{n_i; i = 1, 2, \dots, l+1\}$ . Então para cada  $i = 1, 2, \dots, l+1$ , existe  $\tilde{n}_i \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left| 2i(X(\alpha_n) - X(\alpha_{\epsilon_0})) + \sum_{j=1}^i (d_j^n - d_j) \right| < \frac{X(\alpha_{\epsilon_0})}{2N_0} \quad (2.17)$$

para todo  $n \geq \tilde{n}_i$ . Defina  $N = \max \{N_0, \tilde{n}_i; i = 1, 2, \dots, l+1\}$  então (2.17) vale para todo  $n \geq N$  e para cada  $i = 1, 2, \dots, l+1$ .

Observe que se  $i$  é par, então para todo

$$x \in R_i \doteq (\max\{2iX(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=0}^i d_j, 2iX(\alpha_n) + \sum_{j=0}^i d_j^n\}, \min\{2(i+1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=0}^{i+1} d_j, 2(i+1)X(\alpha_n) + \sum_{j=0}^{i+1} d_j^n\})$$

$\phi_{\epsilon_n}^l(x) \geq 0$  para todo  $n \geq N$  o que implica que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(x) \geq 0$  para todo  $x \in R_i$ .

Se  $i$  é ímpar, então para todo  $x \in R_i$ ,  $\phi_{\epsilon_n}^l(x) \leq 0$  para todo  $n \geq N$  e consequentemente  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(x) \leq 0$  para cada  $x \in R_i$ .

Isso mostra que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  possui no mínimo  $l$  raízes em  $(0, 1)$ .

Suponha, por absurdo,  $k > l$ . Então existe  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$  tal que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  possui mais de uma raiz no intervalo

$$J_i \doteq (\min\{2iX(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^i d_j, 2iX(\alpha_n) + \sum_{j=1}^i d_j^n\}, \max\{2iX(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^i d_j, 2iX(\alpha_n) + \sum_{j=1}^i d_j^n\}).$$

Note que se existisse  $m$  raízes em  $J_i$ , com  $m \geq 2$ , então

$$|J_i| \geq 2(m-1)X(\alpha_{\epsilon_0})$$

visto que a distância entre duas raízes adjacentes é no mínimo  $2X(\alpha_{\epsilon_0})$ . Mas

$$\begin{aligned} |J_i| &= |2iX(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^i d_j - 2iX(\alpha_n) - \sum_{j=1}^i d_j^n| \\ &= |2i(X(\alpha_n) - X(\alpha_{\epsilon_0})) + \sum_{j=1}^i (d_j^n - d_j)| \\ &< \frac{X(\alpha_{\epsilon_0})}{2N_0} < X(\alpha_{\epsilon_0}) \end{aligned}$$

o que resulta em um absurdo.

Portanto  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  possui apenas uma raiz em  $J_i$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, l$ , o que mostra que  $k = l$ .

O próximo passo é mostrar que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  possui a mesma distribuição de patamares de  $\phi_{\epsilon_0}^l$ .

Pela construção de  $\phi_{\epsilon_n}^l$  temos que

$$(2i-1)X(\alpha_n) + \sum_{j=1}^i d_j^n \rightarrow (2i-1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^i d_j$$

e

$$(2i-1)X(\alpha_n) + \sum_{j=1}^{i-1} d_j^n \rightarrow (2i-1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^{i-1} d_j$$

quando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $i = 1, 2, \dots, l+1$ , ou seja, as extremidades dos patamares de  $\phi_{\epsilon_n}^l$  convergem para as extremidades dos patamares de  $\phi_{\epsilon_0}^l$ .

Sabemos que  $\alpha_{\epsilon_0}$ ,  $X(\alpha_{\epsilon_0})$  e o número de raízes de  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  e  $\phi_{\epsilon_0}^l$  coincidem, e portanto  $TP_{\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k} = TP_{\phi_{\epsilon_0}^l}$ . Suponha, por absurdo, que a distribuição de patamares seja diferente, isto é,

$$(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_{l+1}) \neq (d_1, d_2, \dots, d_{l+1})$$

onde  $(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_{l+1})$  representa a distribuição de patamares de  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  e  $(d_1, d_2, \dots, d_{l+1})$  representa a distribuição de patamares de  $\phi_{\epsilon_0}^l$ .

Seja  $\sigma = \min\{1, 2, \dots, l+1\}$  tal que  $\tilde{d}_\sigma \neq d_\sigma$ . Se  $\tilde{d}_\sigma < d_\sigma$ , então  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(x) = \phi_{\epsilon_0}^l(x)$ , para todo  $x \in [0, (2\sigma - 1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^{\sigma} \tilde{d}_j]$ .

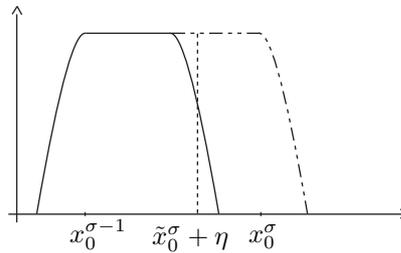


Figura 2.5:

Defina  $\tilde{x}_0^\sigma = (2\sigma - 1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^{\sigma} \tilde{d}_j$ ,  $x_0^\sigma = (2\sigma - 1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^{\sigma} d_j$  e  $x_0^{\sigma-1} = (2\sigma - 1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^{\sigma-1} d_j$ . Seja  $\eta > 0$  pequeno o suficiente para que  $|\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(\tilde{x}_0^\sigma + \eta)| < 1$  e  $x_0^{\sigma-1} < \tilde{x}_0^\sigma + \eta < x_0^\sigma$ .

Como

$$x_n^\sigma \doteq 2(\sigma - 1)X(\alpha_n) + \sum_{j=1}^{\sigma} d_j^n \rightarrow (2\sigma - 1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^{\sigma} d_j \doteq x_0^\sigma$$

e

$$x_n^{\sigma-1} \doteq 2(\sigma - 1)X(\alpha_n) + \sum_{j=1}^{\sigma-1} d_j^n \rightarrow (2\sigma - 1)X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^{\sigma-1} d_j \doteq x_0^{\sigma-1}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , existe  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq \tilde{n}$ ,

$$x_n^{\sigma-1} < \tilde{x}_0^\sigma + \eta < x_n^\sigma$$

o que implica que para todo  $n \geq \tilde{n}$ ,  $\phi_{\epsilon_n}^l(\tilde{x}_0^\sigma + \eta) = (-1)^{\sigma+1}$  e portanto  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(\tilde{x}_0^\sigma + \eta) = (-1)^{\sigma+1}$  o que é uma contradição pois  $|\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(\tilde{x}_0^\sigma + \eta)| < 1$ . Assim,  $\tilde{d}_\sigma \geq d_\sigma$ .

Suponha, por absurdo que  $\tilde{d}_\sigma > d_\sigma$ . Sem perda de generalidade podemos assumir que os  $\sigma$ -ésimos patamares de  $\phi_{\epsilon_0}^l$  e  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  são patamares superiores.

Sejam  $y_\sigma \doteq 2\sigma X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^{\sigma} d_j$ , e  $\tilde{y}_\sigma \doteq 2\sigma X(\alpha_{\epsilon_0}) + \sum_{j=1}^{\sigma} \tilde{d}_j$  as  $\sigma$ -ésimas raízes de  $\phi_{\epsilon_0}^l$  e  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$ , respectivamente. Como estamos supondo  $\tilde{d}_\sigma > d_\sigma$ , então  $y_\sigma < \tilde{y}_\sigma$ . Seja  $\eta > 0$  pequeno o suficiente para que  $2\eta < X(\alpha_{\epsilon_0})$  e  $y_\sigma + \eta < \tilde{y}_\sigma$ . Assim  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(y_\sigma + \eta) = \delta > 0$ , veja Figura 2.6.

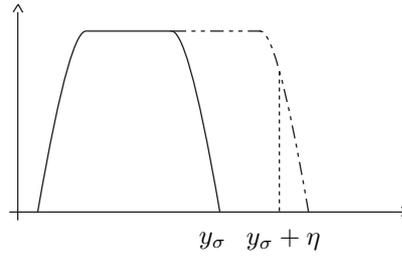


Figura 2.6:

Como  $y_{\sigma_n} \doteq 2\sigma X(\alpha_n) + \sum_{j=1}^{\sigma} d_j^n \rightarrow y_{\sigma} = 2\sigma X(\alpha_0) + \sum_{j=1}^{\sigma} d_j$  quando  $n \rightarrow \infty$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,  $y_{\sigma_n} \in (y_{\sigma} - \eta, y_{\sigma} + \eta)$ .

E sendo  $X(\alpha_n) > X(\alpha_{\epsilon_0}) > 2\eta$ , temos que existe apenas uma raiz de  $\phi_{\epsilon_n}^l$  em  $(y_{\sigma} - \eta, y_{\sigma} + \eta)$ . Logo para todo  $x \in (y_{\sigma_n}, y_{\sigma} + \eta)$ ,  $\phi_{\epsilon_n}^l(x) < 0$ . Em particular  $\phi_{\epsilon_n}^l(y_{\sigma} + \eta) < 0$ , para todo  $n \geq n_0$ . Consequentemente,

$$\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(y_{\sigma} + \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\epsilon_n}^l(y_{\sigma} + \eta) \leq 0.$$

Mas isto é um absurdo pois  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k(y_{\sigma} + \eta) = \delta > 0$ .

Raciocínio análogo pode ser feito se os  $\sigma$ -ésimos patamares de  $\phi_{\epsilon_0}^l$  e  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  forem patamares inferiores. Logo  $\tilde{d}_{\sigma} = d_{\sigma}$ , ou seja, não existe  $\sigma \in \{1, 2, \dots, l+1\}$  tal que  $d_{\sigma} \neq \tilde{d}_{\sigma}$ . Isso significa que  $\phi_{\epsilon_0}^l$  e  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k$  além de terem a mesma velocidade, o mesmo número de raízes e o mesmo x-tempo para atingirem seu máximo, ainda tem a mesma distribuição de patamares. E como existe um único equilíbrio com tais propriedades segue que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^k \equiv \phi_{\epsilon_0}^l$ .

Portanto,

$$\phi_{\epsilon_0}^l = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\epsilon_n}^l$$

e isto completa a prova da semicontinuidade inferior do conjunto de equilíbrios em  $\epsilon_0$ , quando  $p > q$ . ■

**Lema 2.16** *Seja  $p = q$  e considere um equilíbrio  $\phi_{\epsilon_0}^l$  de  $(P_{\epsilon_0})$ , com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ . Então  $\phi_{\epsilon_0}^l$  é limite, em  $W_0^{1,p}$ , de uma sequência de equilíbrios  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}$ , onde cada  $\phi_{\epsilon_n}^l$  é um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_n})$ , com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ , e  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ .*

A demonstração do Lema 2.16 segue exatamente igual à demonstração do Lema 2.15. Devemos lembrar que no caso  $p = q$  duas sequências de parâmetros são relevantes: a primeira,  $\{\lambda_l\}_{l \geq 1}$ , que determina as bifurcações de equilíbrios com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ , e a segunda,  $\{\lambda_l(1)\}_{l \geq 1}$ , que determina se equilíbrios com  $l$  raízes possuem patamar ou não. Porém o surgimento da sequência  $\{\lambda_l\}$  não afeta a demonstração do resultado.

O caso  $p < q$  é certamente o mais curioso. Assim como no caso  $p = q$  temos duas sequências de parâmetros relevantes. Uma  $\{\lambda_l(a^*)\}_{l \geq 1}$  determina o número máximo de raízes que um equilíbrio pode ter. A outra  $\{\lambda_l(1)\}_{l \geq 1}$  determina se equilíbrios com  $l$  raízes possuem patamar ou não. Quando  $\epsilon = \lambda_l(a^*)$  bifurcam espontaneamente dois equilíbrios

com  $l$  raízes em  $(0, 1)$  um com velocidade inicial positiva e o outro com velocidade inicial negativa, simétricos. Porém quando  $\epsilon < \lambda_l(a^*)$  surgem quatro componentes conexas de equilíbrios com  $l$  raízes, duas contendo equilíbrios com velocidade inicial positiva, e duas contendo equilíbrios com velocidade inicial negativa. Uma das componentes conexas que contém equilíbrios com velocidade inicial positiva é sempre discreta, e a outra é discreta apenas quando  $\epsilon \geq \lambda_l(1)$ . A componente discreta tem a propriedade de nunca atingir  $\pm 1$ . O mesmo ocorre no caso de componentes conexas de equilíbrios com velocidade inicial negativa.

Embora a estrutura do conjunto de equilíbrios seja distinta com relação ao caso  $p \geq q$  veremos que a semicontinuidade do conjunto de equilíbrios continua valendo, exceto no caso em que  $\epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$  e  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^+$ , o que é natural uma vez que se  $\epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$  existem dois equilíbrios  $\psi_{\epsilon_0}^l$  e  $-\psi_{\epsilon_0}^l$  de  $(P_{\epsilon_0})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$  e se  $\epsilon_n > \lambda_l(a^*)$ ,  $(P_{\epsilon_n})$  não possui equilíbrios com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ .

**Lema 2.17** *Seja  $p < q$  e considere um equilíbrio  $\phi_{\epsilon_0}^l$  de  $(P_{\epsilon_0})$ , com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ . Então  $\phi_{\epsilon_0}^l$  é limite, em  $W_0^{1,p}$ , de uma sequência de equilíbrios  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}$ , onde cada  $\phi_{\epsilon_n}^l$  é um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_n})$ , com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ , e  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ .*

**Demonstração:** Seja  $\phi_{\epsilon_0}^l$  um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ . Se  $\phi_{\epsilon_0}^l$  possui patamar a demonstração segue exatamente igual à demonstração do Lema 2.15. Suponha então que  $\phi_{\epsilon_0}^l$  não possua patamar. Assim,  $\lambda_l(1) \leq \epsilon_0 \leq \lambda_l(a^*)$  e temos três casos a considerar:  $\epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$ ,  $\lambda_l(1) < \epsilon_0 < \lambda_l(a^*)$  e  $\epsilon_0 = \lambda_l(1)$ .

Suponha inicialmente  $\lambda_l(1) < \epsilon_0 < \lambda_l(a^*)$ .

Neste caso  $(P_{\epsilon_0})$  tem dois equilíbrios,  $\psi_{\epsilon_0}^l$  e  $\phi_{\epsilon_0}^l$ , com velocidade inicial positiva e  $l$  raízes em  $(0, 1)$ .

Seja  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ , podemos assumir sem perda de generalidade que  $\epsilon_n \in (\lambda_l(1), \lambda_l(a^*))$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  o que implica que  $(P_{\epsilon_n})$  tem exatamente dois equilíbrios,  $\psi_{\epsilon_n}^l$  e  $\phi_{\epsilon_n}^l$  com velocidade inicial positiva,  $l$  raízes em  $(0, 1)$  e sem patamares.

Considere a sequência  $\{\psi_{\epsilon_n}^l\}$ . Então  $\alpha_n \leq \alpha_{\epsilon_n}^*$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $\psi_{\epsilon_n}^l$  possui velocidade inicial  $\alpha_n$  e  $\alpha_{\epsilon_n}^*$  é como em (1.3) e Observação 1.2. Pelos Lemas 2.11, 2.12 e 2.13,  $\psi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \phi_{\epsilon_0}$  em  $W_0^{1,p}$ , onde  $\phi_{\epsilon_0}$  é equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ . Logo,

$$\psi_{\epsilon_n}^l \left( \frac{m}{2(l+1)} \right) \rightarrow \phi_{\epsilon_0} \left( \frac{m}{2(l+1)} \right)$$

para todo  $m = 1, 2, \dots, l$  o que implica que a altura máxima atingida por  $\psi_{\epsilon_n}^l$ ,  $\phi_{\alpha_{\epsilon_n}}$ , é tal que  $\phi_{\alpha_{\epsilon_n}} \rightarrow \phi_{\alpha}$ , onde  $\phi_{\alpha} = \phi_{\epsilon_0} \left( \frac{1}{2(l+1)} \right)$ , altura máxima atingida por  $\phi_{\epsilon_0}$ .

Como  $F$  é contínua

$$\frac{\epsilon_n(p-1)}{p} |\alpha_{\epsilon_n}|^{\frac{p}{p-1}} = F(\phi_{\alpha_{\epsilon_n}}) \rightarrow F(\phi_{\alpha}) = \frac{\epsilon_0(p-1)}{p} |\alpha|^{\frac{p}{p-1}}$$

e portanto  $\alpha_{\epsilon_n} \rightarrow \alpha$ . Mas  $\psi_{\epsilon_n}^l = \phi(\cdot, \alpha_{\epsilon_n})$  é tal que  $\alpha_{\epsilon_n} \leq \alpha_{\epsilon_n}^*$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e por (1.3) segue que  $\alpha_{\epsilon_n}^* \rightarrow \alpha_{\epsilon_0}^*$  e portanto  $\alpha \leq \alpha_{\epsilon_0}^*$ .

Como temos apenas dois equilíbrios com velocidade inicial positiva e  $l$  raízes em  $(0, 1)$ ,

$$\psi_{\epsilon_0}^l = \phi(\cdot, \alpha_{\epsilon_0}), \quad \alpha_{\epsilon_0} \leq \alpha_{\epsilon_0}^* \quad \text{e} \quad \phi_{\epsilon_0}^l = \phi(\cdot, \hat{\alpha}_{\epsilon_0}), \quad \hat{\alpha}_{\epsilon_0} \geq \alpha_{\epsilon_0}^*$$

temos que  $\alpha = \alpha_{\epsilon_0}$ . Portanto  $\psi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \psi_{\epsilon_0}^l$  em  $W_0^{1,p}$ .

Com raciocínio análogo mostramos que  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \phi_{\epsilon_0}^l$  em  $W_0^{1,p}$ .

Observe que  $\alpha_{\epsilon_0} \neq \alpha_{\epsilon_0}^*$  e  $\hat{\alpha}_{\epsilon_0} \neq \alpha_{\epsilon_0}^*$  uma vez que  $\epsilon_0 \neq \lambda_l(a^*)$ .

Agora vamos considerar  $\epsilon_0 = \lambda_l(1)$ . Neste caso ainda temos apenas dois equilíbrios de  $(P_{\epsilon_0})$  com velocidade inicial positiva e  $l$  raízes em  $(0, 1)$ .

Se  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^+$ , então  $\epsilon_n > \epsilon_0 = \lambda_l(1)$ . Sem perda de generalidade assumimos  $\lambda_l(1) < \epsilon_n < \lambda_l(a^*)$  e o resultado segue como no caso anterior.

Se  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^-$ , então  $\epsilon_n < \epsilon_0 = \lambda_l(1)$ . Neste caso, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe um continuum de equilíbrios de  $(P_{\epsilon_n})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ , e um equilíbrio  $\psi_{\epsilon_n}^l$  sem patamar. A prova de que  $\psi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \psi_{\epsilon_0}^l$  em  $W_0^{1,p}$  é feita como no caso anterior. Vamos então nos preocupar apenas com o equilíbrio  $\phi_{\epsilon_0}^l$  e o continuum. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  vamos selecionar um equilíbrio,  $\phi_{\epsilon_n}^l$ , de  $(P_{\epsilon_n})$ , com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ . O equilíbrio selecionado será aquele com distribuição de patamar dada por  $(d^n, d^n, \dots, d^n)$ , com  $d^n = 2(X(\alpha_{\epsilon_0}) - X(\alpha_{\epsilon_n}))$ . E a prova de que  $\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \phi_{\epsilon_0}^l$  em  $W_0^{1,p}$  é feita como no caso  $p > q$ . Note que  $\phi_{\epsilon_n}^l$  não converge para  $\psi_{\epsilon_0}^l$  pois  $\hat{\alpha}_{\epsilon_n} \geq \alpha_{\epsilon_n}^*$  e  $\alpha_{\epsilon_0} < \alpha_{\epsilon_0}^*$  onde  $\hat{\alpha}_{\epsilon_n}$  e  $\alpha_{\epsilon_0}$  são tais que  $\phi_{\epsilon_n}^l = \phi(\cdot, \hat{\alpha}_{\epsilon_n})$  e  $\psi_{\epsilon_0}^l = \phi(\cdot, \alpha_{\epsilon_0})$ .

O último caso a considerar será o caso  $\epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$ . Se  $\epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$  então existe um único equilíbrio  $\psi_{\epsilon_0}^l$  de  $(P_{\epsilon_0})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$  e velocidade inicial positiva. Seja  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ .

Se  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^-$  então  $\epsilon_n < \epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$ . Considere a sequência  $\{\psi_{\epsilon_n}^l\}$ , com  $\psi_{\epsilon_n}^l \in E_{\epsilon_n}$ . Segue dos Lemas 2.11, 2.12, e 2.13 que  $\psi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \tilde{\phi}_{\epsilon_0}^l$  em  $W_0^{1,p}$ , onde  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^l$  é um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$ . Como existe um único equilíbrio,  $\psi_{\epsilon_0}^l$ , de  $(P_{\epsilon_0})$  com  $l$  raízes em  $(0, 1)$  segue que  $\tilde{\phi}_{\epsilon_0}^l = \psi_{\epsilon_0}^l$ . Portanto,  $\psi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \psi_{\epsilon_0}^l$  em  $W_0^{1,p}$ .

Para finalizar provaremos que o único caso onde não ocorre a semicontinuidade inferior do conjunto de equilíbrios é quando  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^+$  e  $\epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$ .

De fato, se  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^+$  então  $\epsilon_n > \epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$  e sem perda de generalidade podemos supor  $\lambda_l(a^*) < \epsilon_n < \lambda_{l-1}(a^*)$ . Neste caso,  $(P_{\epsilon_n})$  possui equilíbrios com, no máximo,  $l - 1$  raízes em  $(0, 1)$ . Suponha, por absurdo, que exista uma sequência  $\{\phi_{\epsilon_n}\}$  com  $\phi_{\epsilon_n} \rightarrow \psi_{\epsilon_0}^l$  em  $W_0^{1,p}$ . Podemos supor cada  $\phi_{\epsilon_n} = \phi_{\epsilon_n}^k$  com  $k$  raízes,  $k \leq l - 1$ . Se  $\{\phi_{\epsilon_n}^k\}$  não possui patamar, isto é  $\lambda_k(1) \leq \epsilon_n$  então pelos Lemas 2.11, 2.12 e 2.13,  $\phi_{\epsilon_n}^k \rightarrow \phi_{\epsilon_0}^k$  em  $W_0^{1,p}$ , onde  $\phi_{\epsilon_0}^k$  é um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$  com  $k$  raízes. Absurdo, pela unicidade do limite.

Se  $\lambda_l(a^*) < \epsilon_n < \lambda_k(1)$ , então todo equilíbrio de  $(P_{\epsilon_n})$  com  $k$  raízes em  $(0, 1)$  possui patamar. Como  $\epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$  segue que  $\psi_{\epsilon_0}^l = \phi(\cdot, \alpha_{\epsilon_0}^*)$  e  $\alpha_{\epsilon_0}^* < \alpha_{\epsilon_0}$ , onde  $\alpha_{\epsilon_0}$  é a velocidade inicial necessária para um equilíbrio de  $(P_{\epsilon_0})$  atingir  $\pm 1$ . Logo a máxima altura atingida por  $\psi_{\epsilon_0}^l$ ,  $\phi_{\alpha_{\epsilon_0}^*}$ , é tal que  $\phi_{\alpha_{\epsilon_0}^*} < 1$ , e portanto existe  $\delta > 0$  tal que  $\phi_{\alpha_{\epsilon_0}^*} + \delta < 1$ .

Como  $\phi_{\epsilon_n} \rightarrow \psi_{\epsilon_0}^l$  em  $W_0^{1,p}$  então  $\phi_{\epsilon_n} \rightarrow \psi_{\epsilon_0}^l$  em  $C([0,1])$ . Assim existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,  $|\phi_{\epsilon_n}(x) - \psi_{\epsilon_0}^l(x)| < \delta$  para todo  $x \in [0,1]$ . Logo,

$$-\delta - \phi_{\alpha_{\epsilon_0}^*} \leq -\delta + \psi_{\epsilon_0}^l(x) \leq \phi_{\epsilon_n}(x) \leq \psi_{\epsilon_0}^l(x) + \delta \leq \phi_{\alpha_{\epsilon_0}^*} + \delta$$

para todo  $x \in [0,1]$ . Absurdo, pois para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\phi_{\epsilon_n}$  atinge 1 e  $-1$ . Portanto não existe  $\phi_{\epsilon_n}$  com  $\phi_{\epsilon_n} \rightarrow \psi_{\epsilon_0}^l$  em  $W_0^{1,p}$ . ■

**Observação 2.5** *Concluimos assim que a menos do caso,  $p < q$ ,  $\epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$  e  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^+$ , qualquer que seja o equilíbrio  $\phi_{\epsilon_0}^l$  de  $(P_{\epsilon_0})$  com  $l$  raízes em  $(0,1)$ , existe uma sequência  $\{\phi_{\epsilon_n}^l\}$ , onde  $\phi_{\epsilon_n}^l$  é equilíbrio de  $(P_{\epsilon_n})$  tal que*

$$\phi_{\epsilon_n}^l \rightarrow \phi_{\epsilon_0}^l$$

em  $W_0^{1,p}$  desde que  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ .

A não semicontinuidade inferior do conjunto de equilíbrios no caso em que  $p < q$ ,  $\epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$  e  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0^+$  dá indícios de que a semicontinuidade inferior dos atratores também deixa de ocorrer nesse caso.

Quando  $\epsilon_0 = \lambda_0(a^*)$  isto é facilmente observado pois se  $\epsilon > \epsilon_0$  então  $E_\epsilon = \{0\}$  e consequentemente  $\mathcal{A}_\epsilon = \{0\}$ . Por outro lado  $E_{\epsilon_0} = \{0, \psi_{\epsilon_0}^0, -\psi_{\epsilon_0}^0\}$ , e  $E_{\epsilon_0} \subset \mathcal{A}_{\epsilon_0}$ . Mas  $\psi_{\epsilon_0}^0$  e  $-\psi_{\epsilon_0}^0$  não são aproximados por nenhuma sequência de elementos  $u_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon$ , com  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ .

## Capítulo 3

# Considerações sobre semicontinuidade inferior de atratores

O problema da semicontinuidade inferior de atratores para semigrupos gerados por equações de evolução tem sido frequentemente estudado. Em sua grande maioria os problemas estudados são semilineares, e investigar a semicontinuidade inferior dos atratores se resume a verificar a semicontinuidade inferior dos conjuntos instáveis dos equilíbrios.

Em 2004, os autores de [10] investigaram a propriedade de equi-atração de uma família de atratores  $\{A_\epsilon\}_{\epsilon \in \Lambda}$  de sistemas dinâmicos  $S_\epsilon(t)$  com parâmetro  $\epsilon \in \Lambda$ , e provaram que sob condições apropriadas a equi-atratividade da família  $\{A_\epsilon\}_{\epsilon \in \Lambda}$  é equivalente à continuidade de  $\{A_\epsilon\}_{\epsilon \in \Lambda}$  em  $\epsilon$  com relação à distância de Hausdorff.

Dizemos que uma família  $\{A_\epsilon\}_{\epsilon \in \Lambda}$  equi-atrai um subconjunto limitado  $B$  se dado  $\eta > 0$  existe  $\tau = \tau(B, \eta) > 0$  independente de  $\epsilon \in \Lambda$ , tal que para todo  $\epsilon \in \Lambda$  e  $t \geq \tau$

$$d(S_\epsilon(t)B, A_\epsilon) < \eta.$$

Se  $\{A_\epsilon\}_{\epsilon \in \Lambda}$  equi-atrai cada subconjunto limitado  $B$  então dizemos que  $\{A_\epsilon\}_{\epsilon \in \Lambda}$  é equi-atraente.

Neste capítulo mostraremos que no caso particular em que  $p = q$  e o parâmetro  $\epsilon$  varia num intervalo  $[\hat{\epsilon}, \tilde{\epsilon}] \subset [\lambda_1, \lambda_0)$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_0$  são elementos da sequência que determina as bifurcações dos equilíbrios do problema  $(P_\epsilon)$ , mostrar a semicontinuidade inferior dos atratores  $\{A_\epsilon\}_{\epsilon \in \Lambda}$  associados aos problemas  $(P_\epsilon)$  se reduz a mostrar a equi-atratividade de uma pequena vizinhança do equilíbrio nulo.

Lembramos que se  $\epsilon \in [\lambda_1, \lambda_0)$  então o conjunto dos equilíbrios de  $(P_\epsilon)$ ,  $E_\epsilon$ , contém apenas três equilíbrios,  $0$ ,  $+\phi_\epsilon^0$  e  $-\phi_\epsilon^0$ , dentre os quais o equilíbrio nulo é o único equilíbrio

instável. Todo o estudo será feito usando a teoria de  $m$ -semifluxos multívocos. Por isso torna-se necessário entender algumas definições, para maiores detalhes veja [23] e [27].

Seja  $X$  um espaço métrico completo,  $\Gamma$  um subgrupo não trivial do grupo aditivo dos números reais,  $\Gamma_+ = \Gamma \cap \mathbb{R}_+$  e  $\mathcal{P}(X)$  o conjunto de todos os subconjuntos de  $X$ . Denota-se o domínio de uma aplicação multívoca  $F : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  por  $D(F) = \{x \in X; F(x) \neq \emptyset\}$ .

**Definição 3.1** *A aplicação  $G : \Gamma_+ \times X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  é um  $m$ -semifluxo se*

1.  $G(0, \cdot)$  é a aplicação identidade  $I$ ;
2.  $G(t_1 + t_2, x) \subset G(t_1, G(t_2, x))$ , para todo  $t_1, t_2 \in \Gamma_+$ , e para todo  $x \in X$ ,

onde  $G(t, B) = \cup_{x \in B} G(t, x)$ , para  $B \subset X$ .

**Definição 3.2** *A aplicação  $x : \Gamma_+ \rightarrow X$  é uma trajetória do  $m$ -semifluxo  $G$  correspondente à condição inicial  $x_0$  se  $x(t + \tau) \in G(t, x(\tau))$ , para todo  $t, \tau \in \Gamma_+$  e  $x(0) = x_0$ .*

**Definição 3.3** *Dizemos que o conjunto  $A \subset X$  atrai o conjunto  $B$  com a ajuda do  $m$ -semifluxo  $G$  se  $d(G(t, B), A) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . O conjunto  $M$  é dito ser atraente por  $G$  se ele atrai cada subconjunto limitado  $B$  de  $X$ .*

Para cada  $M \subset X$  denotamos

$$\gamma_t^+(M) = \cup_{\tau \geq t} G(\tau, M) \quad \text{e} \quad \gamma_0^+(M) = \gamma_0^+(M).$$

O conjunto  $w(M) = \cap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(M)}$  é chamado de conjunto omega limite ( $\omega$ -limite) de  $M$ . É fácil mostrar que o conjunto  $w(M)$  consiste dos limites de todas as seqüências convergentes  $\{\xi_n\}$ , onde  $\xi_n \in G(t_n, M)$ , com  $t_n \rightarrow +\infty$ .

**Definição 3.4** *O  $m$ -semifluxo  $G$  é chamado condicionalmente assintoticamente compacto se, para todo  $B \subset X$  limitado tal que para algum  $t(B) \in \Gamma_+$ ,  $\gamma_{t(B)}^+(B)$  é limitado, qualquer seqüência  $\xi_n \in G(t_n, B)$ , com  $t_n \rightarrow +\infty$ , é precompacta em  $X$ .*

**Observação 3.1** *A propriedade “condicionalmente assintoticamente compacto” é também conhecida por “assintoticamente semicompacto superiormente”, veja [23]. Porém usaremos a nomenclatura de [27] por considerarmos esta mais adequada.*

Considere o intervalo  $\Lambda \doteq [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}] \subset [\lambda_1, \lambda_0)$ .

Seja  $S_\epsilon(t) : L^2 \rightarrow L^2$  definido por  $S_\epsilon(t)x_0 = u^\epsilon(t, x_0)$  o semigrupo associado a  $(P_\epsilon)$ , com  $\epsilon \in \Lambda$ , onde  $u^\epsilon(t, x_0)$  denota a solução de  $(P_\epsilon)$  com dado inicial  $x_0$  no instante  $t$ .

A partir da família  $\{S_\epsilon(t)\}_{\epsilon \in \Lambda}$  de semigrupos defina a aplicação

$$S^\Lambda : \mathbb{R}_+ \times L^2 \rightarrow \mathcal{P}(L^2)$$

por  $S^\Lambda(t, u_0) \doteq \cup_{\epsilon \in \Lambda} \{S_\epsilon(t)u_0\}$ . Note que

- $S^\Lambda(0)u_0 = \cup_{\epsilon \in \Lambda} \{S_\epsilon(0)u_0\} = u_0$ , para todo  $u_0 \in L^2$ .

Portanto  $S^\Lambda(0) = I$ .

- Sejam  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ ,  $u_0 \in L^2$  arbitrários. Então

$$\begin{aligned} S^\Lambda(t_1 + t_2)u_0 &= \cup_{\epsilon \in \Lambda} \{S_\epsilon(t_1 + t_2)u_0\} = \cup_{\epsilon \in \Lambda} \{S_\epsilon(t_1)S_\epsilon(t_2)u_0\} \\ &\subseteq \cup_{\epsilon \in \Lambda} S_\epsilon(t_1)S^\Lambda(t_2)u_0 = S^\Lambda(t_1)S^\Lambda(t_2)u_0 \end{aligned}$$

para todo  $u_0 \in L^2$  e  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ .

Portanto  $S^\Lambda$  é um m-semifluxo.

**Observação 3.2** Podemos também definir o m-semifluxo  $S^\Lambda$  de  $\mathbb{R}_+ \times W_0^{1,p}$  em  $\mathcal{P}(W_0^{1,p})$  visto que  $\mathcal{R}(S_\epsilon(t)) \subset W_0^{1,p}$ , para todo  $\epsilon \in \Lambda$  e  $t > 0$ , veja Lema 5.4.

**Lema 3.1** O m-semifluxo  $S^\Lambda$  é condicionalmente assintoticamente compacto, na topologia de  $L^2$ .

**Demonstração:** Seja  $B \subset L^2$  limitado tal que existe  $t(B) \geq 0$  com  $\gamma_{t(B)}^+(B)$  limitado em  $L^2$ . Considere  $\xi_n = S_{\epsilon_n}(t_n)b_n \in S^\Lambda(t_n, B)$ , com  $t_n \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon_n \in \Lambda$  e  $b_n \in B$ , arbitrários.

Pelo Lema 3.2  $\|u^\epsilon(t)\|_{W_0^{1,p}} \leq k_2$ , para todo  $t \geq t_0$ , para algum  $t_0 > 0$ ,  $\epsilon \in \Lambda$  e  $u_0 \in B$ , e em particular  $\|\xi_n\|_{W_0^{1,p}} = \|u^{\epsilon_n}(t_n, b_n)\|_{W_0^{1,p}} \leq k_2$ , ou seja,  $\{\xi_n\}$  é limitada em  $W_0^{1,p}$  e como  $W_0^{1,p}$  está compactamente imerso em  $L^2$ , segue que  $\{\xi_n\}$  é precompacta em  $L^2$ . Uma vez que  $B$  foi tomado arbitrariamente segue que  $S^\Lambda$  é condicionalmente assintoticamente compacto. ■

**Observação 3.3** As boas condições de dissipatividade de  $S_\epsilon(t)$  demonstradas no Lema 3.1 e Observação 3.3 garantem que para qualquer  $B \subset L^2$  limitado, existe  $t(B) \geq 0$  tal que  $\gamma_{t(B)}^+(B)$  é limitado em  $W_0^{1,p}$ .

O próximo lema mostra que o m-semifluxo  $\{S^\Lambda\}$  é condicionalmente assintoticamente compacto em  $W_0^{1,p}$ . Mostraremos inicialmente que o m-semifluxo é de classe B-k, visto que ser de classe B-k é uma condição suficiente para ser condicionalmente assintoticamente compacto.

**Definição 3.5** Dizemos que o m-semifluxo  $\{S^\Lambda(t)\}$  é de classe B-k se para cada  $B \subset W_0^{1,p}$  limitado existe  $t_0 = t_0(B) \geq 0$  tal que  $S^\Lambda(t)B$  é relativamente compacto em  $W_0^{1,p}$ , para cada  $t \geq t_0$ .

**Lema 3.2** O m-semifluxo  $\{S^\Lambda\}$  é condicionalmente assintoticamente compacto em  $W_0^{1,p}$ .

**Demonstração:** Basta mostrar que o m-semifluxo  $\{S^\Lambda(t) : W_0^{1,p} \rightarrow \mathcal{P}(W_0^{1,p})\}_{t \geq 0}$  é de classe B-k.

De fato, pela Observação 3.3 se  $B$  é limitado em  $W_0^{1,p}$  existe  $t(B) \geq 0$  tal que  $\gamma_{t(B)}^+(B)$  é limitado em  $W_0^{1,p}$ . Logo se o  $m$ -semifluxo é de classe B-k,  $S^\Lambda(t)\gamma_{t(B)}^+(B)$  é relativamente compacto em  $W_0^{1,p}$ , para todo  $t \geq t_0(\gamma_{t(B)}^+(B))$ . Em particular, se  $t_1 \doteq t(B) + t_0(\gamma_{t(B)}^+(B))$ , então qualquer sequência da forma  $\xi_n = S_{\epsilon_n}(t_n)b_n$  com  $b_n \in B$ ,  $\epsilon_n \in \Lambda$  e  $t_n \geq t_1$ , possui subsequência convergente em  $W_0^{1,p}$  visto que  $S^\Lambda(t_0)(\gamma_{t(B)}^+(B))$  é relativamente compacto em  $W_0^{1,p}$ .

Vamos então provar que  $\{S^\Lambda(t) : W_0^{1,p} \rightarrow \mathcal{P}(W_0^{1,p})\}_{t \geq 0}$  é de classe B-k.

Seja  $B \subset W_0^{1,p}$  limitado e  $t > 0$ . Considere  $\{\zeta_n\}$  uma sequência arbitrária em  $S^\Lambda(t)B$ . Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\zeta_n = S_{\epsilon_n}(t)b_n$  onde  $b_n \in B$  e  $\epsilon_n \in \Lambda$ , e como  $B$  é limitado em  $W_0^{1,p}$  e  $\Lambda$  é compacto em  $\mathbb{R}$ , existem subsequências de  $\{b_n\}$  e  $\{\epsilon_n\}$ , as quais ainda denotaremos por  $\{b_n\}$  e  $\{\epsilon_n\}$ , e  $b_0 \in L^2$  e  $\bar{\epsilon} \in \Lambda$  tais que  $b_n \rightarrow b_0$  em  $L^2$  e  $\epsilon_n \rightarrow \bar{\epsilon}$ .

Logo, pelo Lema 2.10,  $S_{\epsilon_n}(t)b_n \rightarrow S_{\bar{\epsilon}}(t)b_0$  em  $W_0^{1,p}$ , ou seja,  $S^\Lambda(t)B$  é relativamente compacto em  $W_0^{1,p}$ .

Como  $t$  foi tomado arbitrariamente em  $(0, +\infty)$  segue que  $S^\Lambda(t)B$  é relativamente compacto em  $W_0^{1,p}$ , para cada  $t > 0$ . Portanto  $S^\Lambda$  é de classe B-k e consequentemente o  $m$ -semifluxo  $S^\Lambda$  é condicionalmente assintoticamente compacto em  $W_0^{1,p}$ . ■

De agora em diante denotaremos por  $w^\Lambda(B)$  o conjunto  $\omega$ -limite de um conjunto  $B$  através do  $m$ -semifluxo  $S^\Lambda(t)$ .

Segue do Teorema 1.1, [23], que para qualquer  $B \subset W_0^{1,p}$  limitado,  $w^\Lambda(B) \neq \emptyset$ ,  $w^\Lambda(B)$  é compacto em  $W_0^{1,p}$  e  $w^\Lambda(B)$  é o conjunto fechado minimal que atrai  $B$  por  $S^\Lambda$ .

O próximo passo será mostrar que por qualquer ponto do conjunto  $w^\Lambda(B)$  passa uma órbita completa que está inteiramente contida em  $w^\Lambda(B)$ . Tal propriedade é conhecida como quasi-invariância.

**Definição 3.6** *Um conjunto  $A$  é quasi-invariante para o  $m$ -semifluxo  $S^\Lambda$ , se para cada  $z \in A$  existe uma órbita completa,  $\psi$ , por  $z$  e  $\psi(t) \in A$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

Embora a demonstração siga os passos da prova do Lema 9, [27], demonstraremos novamente uma vez que em [27] ela é feita para semigrupos generalizados.

**Lema 3.3** *Para qualquer  $B \subset W_0^{1,p}$  limitado,  $w^\Lambda(B)$  é quasi-invariante.*

**Demonstração:** Tome  $z \in w^\Lambda(B)$  arbitrário, mas fixo. Vamos construir uma órbita completa por  $z$  inteiramente contida em  $w^\Lambda(B)$ .

Por definição  $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t_n)b_n$  com  $t_n \rightarrow +\infty$ ,  $\epsilon_n \in \Lambda$  e  $b_n \in B$ . Note que para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$S_{\epsilon_n}(t_n)b_n = S_{\epsilon_n}(0)S_{\epsilon_n}(t_n)b_n = S_{\epsilon_n}(0)b_n^0$$

onde  $b_n^0 \doteq S_{\epsilon_n}(t_n)b_n$ . Logo  $b_n^0 \rightarrow z$  em  $W_0^{1,p}$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Por outro lado,  $\{\epsilon_n\} \subset \Lambda$  e  $\Lambda$  é compacto, logo existe uma subsequência, ainda denotada por  $\{\epsilon_n\}$  e  $\bar{\epsilon} \in \Lambda$  tal que  $\epsilon_n \rightarrow \bar{\epsilon}$ . Pela continuidade do fluxo em  $W_0^{1,p}$  segue que

$$\|u^{\epsilon_n}(t, b_n^0) - u^{\bar{\epsilon}}(t, z)\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ , para todo  $t \geq 0$ . Portanto,

$$S_{\epsilon_n}(t)b_n^0 \rightarrow S_{\bar{\epsilon}}(t)z$$

em  $W_0^{1,p}$ .

Note que  $S_{\bar{\epsilon}}(0)z = z$ , e para cada  $t \in \mathbb{R}_+$

$$S_{\bar{\epsilon}}(t)z = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t)b_n^0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t+t_n)b_n \in w^\Lambda(B)$$

pois  $\epsilon_n \in \Lambda$ ,  $b_n \in B$  e  $t+t_n \rightarrow +\infty$ .

Defina a aplicação  $\psi_0 : [0, +\infty) \rightarrow W_0^{1,p}$  por  $\psi_0(t) \doteq S_{\bar{\epsilon}}(t)z$ , e considere a sequência  $\{b_n^{-1} \doteq S_{\epsilon_n}(t_n - 1)b_n\} \subset W_0^{1,p}$  como uma nova sequência de dados iniciais.

Sem perda de generalidade podemos tomar  $t_n \geq 1$ , pois  $t_n \rightarrow +\infty$ . Como  $S^\Lambda$  é condicionalmente assintoticamente compacto, existe uma subsequência ainda denotada por  $\{b_n^{-1}\}$  e  $z_{-1} \in W_0^{1,p}$  tal que  $b_n^{-1} \rightarrow z_{-1}$  em  $W_0^{1,p}$ .

Como  $\epsilon_n \rightarrow \bar{\epsilon}$  qualquer subsequência de  $\{\epsilon_n\}$  também converge para  $\bar{\epsilon}$  e pela continuidade do fluxo, para cada  $t \geq 0$

$$\|u^{\epsilon_n}(t, b_n^{-1}) - u^{\bar{\epsilon}}(t, z_{-1})\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ . Portanto

$$S_{\epsilon_n}(t)b_n^{-1} \rightarrow S_{\bar{\epsilon}}(t)z_{-1}$$

em  $W_0^{1,p}$ , para todo  $t \geq 0$ .

Defina  $\psi_1 : [0, +\infty) \rightarrow W_0^{1,p}$  por  $\psi_1(t) \doteq S_{\bar{\epsilon}}(t)z_{-1}$ . Então

$$S_{\epsilon_n}(t)b_n^{-1} \rightarrow \psi_1(t)$$

em  $W_0^{1,p}$ , para todo  $t \geq 0$ , e

$$\begin{aligned} \psi_1^1(t) &\doteq \psi_1(t+1) = S_{\bar{\epsilon}}(t+1)z_{-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t+1)b_n^{-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t+t_n)b_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t)b_n^0 \\ &= S_{\bar{\epsilon}}(t)z = \psi_0(t) \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$  e além disso

$$\psi_1(t) = S_{\bar{\epsilon}}(t)z_{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t)b_n^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t+t_n-1)b_n \in w^\Lambda(B)$$

uma vez que  $t_n \rightarrow +\infty$ ,  $\epsilon_n \in \Lambda$  e  $b_n \in B$ . Portanto  $\psi_1(t) \in w^\Lambda(B)$ , para cada  $t \geq 0$ .

Assim, para cada  $r \geq 2$  inteiro, defina  $b_n^{-r} \doteq S_{\epsilon_n}(t_n - r)b_n$  onde  $t_n \geq r$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{\epsilon_n\}$ ,  $\{t_n\}$  e  $\{b_n\}$  são tomados como a sequência que aparece no passo anterior.

Como  $S^\Lambda$  é condicionalmente assintoticamente compacto, existe uma subsequência, ainda denotada por  $\{b_n^{-r}\}$  e  $z_{-r} \in W_0^{1,p}$  tal que  $b_n^{-r} \rightarrow z_{-r}$  em  $W_0^{1,p}$ .

Novamente pela continuidade do fluxo em  $W_0^{1,p}$ , obtemos

$$\|u^{\epsilon_n}(t, b_n^{-r}) - u^{\bar{\epsilon}}(t, z_{-r})\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ . Portanto, para todo  $t \geq 0$

$$S_{\epsilon_n}(t)b_n^{-r} \rightarrow S_{\bar{\epsilon}}(t)z_{-r}$$

em  $W_0^{1,p}$ .

Defina  $\psi_r : [0, +\infty) \rightarrow W_0^{1,p}$  por  $\psi_r(t) \doteq S_{\bar{\epsilon}}(t)z_{-r}$ . Então

$$S_{\epsilon_n}(t)b_n^{-r} \rightarrow \psi_r(t)$$

em  $W_0^{1,p}$ , para todo  $t \geq 0$ , e

$$\begin{aligned} \psi_r^r(t) &\doteq \psi_r(t+r) = S_{\bar{\epsilon}}(t+r)z_{-r} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t+r)b_n^{-r} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t+t_n)b_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t)b_n^0 \\ &= S_{\bar{\epsilon}}(t)z = \psi_0(t) \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$  e além disso

$$\psi_r(t) = S_{\bar{\epsilon}}(t)z_{-r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t)b_n^{-r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t+t_n-r)b_n \in w^\Lambda(B)$$

pois  $t_n \rightarrow +\infty$ ,  $\epsilon_n \in \Lambda$  e  $b_n \in B$ . Portanto  $\psi_r(t) \in w^\Lambda(B)$ , para cada  $t \geq 0$ .

Para finalizar a demonstração defina

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow W_0^{1,p}$$

associando  $\psi(t)$  ao valor comum de  $\psi_r(t+r)$  para  $r \geq -t$ . Note que

$$\psi(0) = \psi_0(0) = S_{\bar{\epsilon}}(0)z = z$$

$$\begin{aligned} \psi(t+s) &= \psi_r(t+s+r) = S_{\bar{\epsilon}}(t+s+r)z_{-r} \\ &= S_{\bar{\epsilon}}(t)\psi_r(s+r) = S_{\bar{\epsilon}}(t)\psi(s) \in S^\Lambda(t)\psi(s) \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$  e  $s \in \mathbb{R}$ .

Portanto  $\psi$  é uma órbita completa por  $z$  através de  $S^\Lambda$ . Resta provar que  $\psi(t) \in w^\Lambda(B)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . De fato, tome  $t \in \mathbb{R}$  e  $r \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $r \geq -t$ . Então  $\psi(t) = \psi_r(t+r) \in w^\Lambda(B)$ .

Logo  $w^\Lambda(B)$  é quasi-invariante. ■

**Lema 3.4** A órbita  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow W_0^{1,p}$ , construída no Lema 3.3 é uma órbita completa por  $z$  através de  $S_{\bar{\epsilon}}$  com  $\bar{\epsilon} \in \Lambda$ .

**Demonstração:** Vimos que  $\psi(0) = \psi_0(0) = S_{\bar{\epsilon}}(0)z = z$  e para todo  $t \geq 0$  e  $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} S_{\bar{\epsilon}}(t)\psi(s) &= S_{\bar{\epsilon}}(t)\psi_r(s+r) \\ &= S_{\bar{\epsilon}}(t)S_{\bar{\epsilon}}(s+r)z_{-r} \\ &= \psi_r(t+s+r) = \psi(t+s) \end{aligned}$$

Portanto  $\psi$  é uma órbita completa por  $z$  através de  $S_{\bar{\epsilon}}$ ,  $\bar{\epsilon} \in \Lambda$ . ■

Uma vez que  $\{\psi(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \subset w^\Lambda(B)$  e  $w^\Lambda(B)$  é limitado em  $W_0^{1,p}$ , temos que  $\psi$  é uma órbita completa e limitada por  $z$  através de  $S_{\bar{\epsilon}}$ . E como  $A_{\bar{\epsilon}}$  é a união de todas as órbitas completas e limitadas através de  $S_{\bar{\epsilon}}$  segue que  $\{\psi(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \subset A_{\bar{\epsilon}}$  e em particular  $z \in A_{\bar{\epsilon}}$ .

Assim concluímos que  $w^\Lambda(B) \subset \cup_{\epsilon \in \Lambda} A_\epsilon$ , para todo  $B \subset W_0^{1,p}$  limitado.

**Definição 3.7** Um conjunto  $A$  é negativamente semi-invariante se  $A \subset S^\Lambda(t)A$ , para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Lema 3.5** Para cada  $B \subset W_0^{1,p}$  limitado  $w^\Lambda(B)$  é negativamente semi-invariante.

**Demonstração:** Queremos provar que  $w^\Lambda(B) \subset S^\Lambda(t)w^\Lambda(B)$  para todo  $t \geq 0$ . Tome  $z \in w^\Lambda(B)$  arbitrário. Como  $w^\Lambda(B)$  é quasi-invariante existe,  $\psi$ , órbita completa por  $z$ , através de  $S^\Lambda$ , inteiramente contida em  $w^\Lambda(B)$ .

Assim, para qualquer  $t \geq 0$

$$z = \psi(0) = \psi(t-t) \in S^\Lambda(t)\psi(-t) \subset S^\Lambda(t)(w^\Lambda(B))$$

visto que  $\psi(s) \in w^\Lambda(B)$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

Como  $z$  foi tomado arbitrariamente em  $w^\Lambda(B)$  segue que  $w^\Lambda(B) \subset S^\Lambda(t)(w^\Lambda(B))$ , para cada  $t \geq 0$ . ■

### 3.1 Equi-atração de vizinhança de pontos de $A_{\epsilon_0}$

Nesta seção provaremos que dado  $x_0 \in A_{\epsilon_0} \setminus \{0\}$ , existe uma vizinhança de  $x_0$  que é equi-atraída, ou seja, dado  $\eta > 0$  existe um tempo, que pode ser tomado uniformemente para qualquer  $\epsilon$  suficientemente próximo de  $\epsilon_0$  e que depende apenas de  $\eta$  e da vizinhança de  $x_0$ , a partir do qual a solução de  $(P_\epsilon)$  com dado inicial nesta vizinhança do ponto entra na  $\eta$ -vizinhança de  $A_\epsilon$ , para qualquer  $\epsilon$  suficientemente próximo de  $\epsilon_0$ .

Sabemos, por [28], que a cada problema  $(P_\epsilon)$  está associado um Funcional de Lyapunov  $V_\epsilon$  dado por  $V_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{p} \|x\|_{W_0^{1,p}}^p - \frac{1}{q} \|x\|_q^q + \frac{1}{q+r} \|x\|_{q+r}^{q+r}$ . Mostraremos que a família de funcionais  $\{V_\epsilon\}$  é contínua com relação ao parâmetro  $\epsilon$ . Esta informação auxiliará na demonstração de que vizinhança de pontos de  $A_{\epsilon_0}$  são equi-atraídas.

**Lema 3.6** Para cada  $x \in W_0^{1,p}$ ,

$$V_\epsilon(x) \rightarrow V_{\bar{\epsilon}}(x)$$

quando  $\epsilon \rightarrow \bar{\epsilon}$ .

**Demonstração:** De fato, se  $x \in W_0^{1,p}$

$$\begin{aligned} |V_\epsilon(x) - V_{\bar{\epsilon}}(x)| &= \left| \frac{\epsilon}{p} \|x\|_{W_0^{1,p}}^p - \frac{1}{q} \|x\|_q^q + \frac{1}{q+r} \|x\|_{q+r}^{q+r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{\epsilon}}{p} \|x\|_{W_0^{1,p}}^p + \frac{1}{q} \|x\|_q^q - \frac{1}{q+r} \|x\|_{q+r}^{q+r} \right| \\ &= |\epsilon - \bar{\epsilon}| \frac{1}{p} \|x\|_{W_0^{1,p}}^p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Portanto  $V_\epsilon(x) \rightarrow V_{\bar{\epsilon}}(x)$  quando  $\epsilon \rightarrow \bar{\epsilon}$  para cada  $x \in W_0^{1,p}$ . ■

**Observação 3.4** Note que esta convergência é uniforme em limitados de  $W_0^{1,p}$ .

**Lema 3.7** Se  $x_\epsilon \rightarrow x_{\bar{\epsilon}}$  em  $W_0^{1,p}$ , então

$$V_\epsilon(x_\epsilon) \rightarrow V_{\bar{\epsilon}}(x_{\bar{\epsilon}})$$

quando  $\epsilon \rightarrow \bar{\epsilon}$ .

**Demonstração:** De fato, se  $x_\epsilon \rightarrow x_{\bar{\epsilon}}$  em  $W_0^{1,p}$ , então a sequência  $\{x_\epsilon\}$  é limitada em  $W_0^{1,p}$ .

Assim,

$$\begin{aligned} |V_\epsilon(x_\epsilon) - V_{\bar{\epsilon}}(x_{\bar{\epsilon}})| &\leq |V_\epsilon(x_\epsilon) - V_{\bar{\epsilon}}(x_\epsilon)| + |V_{\bar{\epsilon}}(x_\epsilon) - V_{\bar{\epsilon}}(x_{\bar{\epsilon}})| \\ &= \left| \frac{\epsilon}{p} \|x_\epsilon\|_{W_0^{1,p}}^p - \frac{1}{q} \|x_\epsilon\|_q^q + \frac{1}{q+r} \|x_\epsilon\|_{q+r}^{q+r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{\epsilon}}{p} \|x_\epsilon\|_{W_0^{1,p}}^p + \frac{1}{q} \|x_\epsilon\|_q^q - \frac{1}{q+r} \|x_\epsilon\|_{q+r}^{q+r} \right| \\ &\quad + \left| \frac{\bar{\epsilon}}{p} \|x_\epsilon\|_{W_0^{1,p}}^p - \frac{1}{q} \|x_\epsilon\|_q^q + \frac{1}{q+r} \|x_\epsilon\|_{q+r}^{q+r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{\epsilon}}{p} \|x_{\bar{\epsilon}}\|_{W_0^{1,p}}^p + \frac{1}{q} \|x_{\bar{\epsilon}}\|_q^q - \frac{1}{q+r} \|x_{\bar{\epsilon}}\|_{q+r}^{q+r} \right| \\ &\leq |\epsilon - \bar{\epsilon}| \frac{1}{p} \|x_\epsilon\|_{W_0^{1,p}}^p + \frac{\bar{\epsilon}}{p} \left| \|x_\epsilon\|_{W_0^{1,p}}^p - \|x_{\bar{\epsilon}}\|_{W_0^{1,p}}^p \right| \\ &\quad + \frac{1}{q+r} \left| \|x_\epsilon\|_{q+r}^{q+r} - \|x_{\bar{\epsilon}}\|_{q+r}^{q+r} \right| \\ &\quad + \frac{1}{q} \left| \|x_\epsilon\|_q^q - \|x_{\bar{\epsilon}}\|_q^q \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $\epsilon \rightarrow \bar{\epsilon}$ , uma vez que  $x_\epsilon \rightarrow x_{\bar{\epsilon}}$  em  $W_0^{1,p}$ .

Portanto  $V_\epsilon(x_\epsilon) \rightarrow V_{\bar{\epsilon}}(x_{\bar{\epsilon}})$ . ■

Seja  $\epsilon_0 \in \Lambda = [\hat{\epsilon}, \check{\epsilon}]$ . Nessa seção mostraremos que no caso particular em que  $p = q$  e  $\Lambda \subset [\lambda_1, \lambda_0)$  existem vizinhanças dos pontos do atrator  $A_{\epsilon_0}$  que são equi-atraídas.

**Lema 3.8** Seja  $x_0 \in A_{\epsilon_0} \setminus \{0\}$ . Existe  $\delta > 0$  tal que se  $|\epsilon - \epsilon_0| < \delta$  então  $w^\epsilon(x_0) \neq 0$ , onde 0 denota o equilíbrio nulo.

**Demonstração:** Sabemos que para todo  $\epsilon \in \Lambda$ ,  $E_\epsilon = \{0, +\phi_\epsilon^0, -\phi_\epsilon^0\}$ . Como  $x_0 \in A_{\epsilon_0} \setminus \{0\}$  e  $p = q$  segue que  $w^{\epsilon_0}(x_0) \neq 0$ . De fato, se tivéssemos  $w^{\epsilon_0}(x_0) = 0$  então teríamos uma

órbita homoclínica, uma vez que  $+\phi_\epsilon^0$  e  $-\phi_\epsilon^0$  são equilíbrios instáveis de  $(P_{\epsilon_0})$  e o sistema é gradiente.

Queremos provar que existe  $\delta > 0$  tal que  $|\epsilon - \epsilon_0| < \delta$  implica  $w^\epsilon(x_0) \neq 0$ .

Suponha que isto não ocorra. Então para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe  $\epsilon_n \in \Lambda$  tal que

$$w^{\epsilon_n}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad |\epsilon_n - \epsilon_0| < \frac{1}{n}$$

Assim,

$$V_{\epsilon_n}(x_0) > V_{\epsilon_n}(w^{\epsilon_n}(x_0)) = V_{\epsilon_n}(0) = 0$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e tomando o limite quando  $n \rightarrow +\infty$  obtemos  $V_{\epsilon_0}(x_0) \geq 0$ .

Mas  $x_0 \in A_{\epsilon_0} \setminus \{0\}$  e portanto

$$V_{\epsilon_0}(x_0) < V_{\epsilon_0}(\alpha_\psi(x_0)) = V_{\epsilon_0}(0) = 0$$

onde  $\alpha_\psi(x_0)$  denota o alfa-limite ( $\alpha$ -limite) de  $x_0$  através de uma órbita completa e limitada,  $\psi$ , o que é um absurdo.

Portanto existe  $\delta > 0$  tal que  $|\epsilon - \epsilon_0| < \delta$  implica  $w^\epsilon(x_0) \neq 0$  ■

**Teorema 3.1** *Seja  $x_0 \in A_{\epsilon_0} \setminus \{0\}$ . Dado  $\eta > 0$  existe  $\Lambda_{x_0} \subset \Lambda$ ,  $\mathcal{O}_{x_0}(x_0)$  e  $\tau_{x_0} > 0$  tal que*

$$S_\epsilon(t)(\mathcal{O}_{x_0}(x_0)) \in \mathcal{O}_\eta(A_\epsilon)$$

para todo  $\epsilon \in \Lambda_{x_0}$  e  $t \geq \tau_{x_0}$ .

**Demonstração:** Se  $x_0 \in A_{\epsilon_0} \setminus \{0\}$  então por  $x_0$  passa uma órbita completa e limitada totalmente contida em  $A_{\epsilon_0}$ , conseqüentemente o  $\alpha$ -limite de  $x_0$  por esta órbita é o equilíbrio nulo.

Seja  $\eta_0 = V_{\epsilon_0}(x_0) < V_{\epsilon_0}(0) = 0$ , onde  $V_\epsilon$  denota o Funcional de Lyapunov associado ao problema  $(P_\epsilon)$ .

Defina  $I_0 \doteq \left(\frac{3}{2}\eta_0, \frac{1}{2}\eta_0\right)$ . Como  $I_0$  é aberto em  $\mathbb{R}$  e a aplicação

$$V : (0, +\infty) \times W_0^{1,p} \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por  $V(\epsilon, x) = V_\epsilon(x)$  é contínua, veja Lemas 3.6 e 3.7, existe  $\sigma > 0$  tal que se  $(\epsilon, x) \in \Lambda \times W_0^{1,p}$  satisfaz

$$|(\epsilon, x) - (\epsilon_0, x_0)| \doteq |\epsilon - \epsilon_0| + \|x - x_0\|_{W_0^{1,p}} < \sigma \quad (3.1)$$

então  $V_\epsilon(x) \in I_0$  e portanto  $V_\epsilon(x) < \frac{\eta_0}{2} < 0$ .

Suponha, por absurdo, que o teorema seja falso. Então existe  $\gamma > 0$  tal que para qualquer  $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ ,  $\tilde{\mathcal{O}}(x_0)$  e  $k \in \mathbb{N}$  existe  $t_k > k$ ,  $x_k \in \tilde{\mathcal{O}}(x_0)$  e  $\epsilon_k \in \tilde{\Lambda}$  com

$$S_{\epsilon_k}(t_k)x_k \notin \mathcal{O}_\gamma(A_{\epsilon_k}).$$

Em particular para  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\Lambda_k = \left\{ \epsilon; |\epsilon - \epsilon_0| < \frac{\sigma}{2k} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{O}_k(x_0) = \left\{ x; \|x - x_0\|_{W_0^{1,p}} < \frac{\sigma}{2k} \right\}$$

existe  $t_k > k$ ,  $\epsilon_k \in \Lambda_k$  e  $x_k \in \mathcal{O}_k(x_0)$  tal que  $S_{\epsilon_k}(t_k)x_k \notin \mathcal{O}_\gamma(A_{\epsilon_k})$ . Note que as sequências formadas acima são tais que  $\epsilon_k \rightarrow \epsilon_0$ ,  $x_k \rightarrow x_0$  e  $t_k \rightarrow +\infty$ .

Uma vez que  $S^\Lambda$  é condicionalmente assintoticamente compacto em  $W_0^{1,p}$ , existe  $y \in W_0^{1,p}$  tal que

$$S_{\epsilon_k}(t_k)x_k \rightarrow y$$

em  $W_0^{1,p}$  e portanto  $y \in w^{\Lambda_0}(\mathcal{O}_1(x_0))$ , onde  $\Lambda_0 = \{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{\epsilon_0\}$ .

Como  $w^{\Lambda_0}(\mathcal{O}_1(x_0))$  é quasi-invariante, existe uma órbita completa e limitada,  $\varphi$ , por  $y$  através de  $S^{\Lambda_0}$ , a qual é uma órbita completa e limitada por  $S_{\epsilon_0}$ , veja Lemas 3.3 e 3.4.

Mas o atrator  $A_\epsilon$  é a união de todas as órbitas completas e limitadas por  $S_{\epsilon_0}$ . Logo  $y \in A_{\epsilon_0}$ , e portanto temos duas possibilidades: ou  $\alpha_\varphi^{\epsilon_0}(y) = 0$  ou  $y$  é um dos equilíbrios assintoticamente estáveis,  $+\phi_{\epsilon_0}^0$  ou  $-\phi_{\epsilon_0}^0$ .

Se  $\alpha_\varphi^{\epsilon_0}(y) = 0$  então  $0 \in w^{\Lambda_0}(\mathcal{O}_1(x_0))$  e portanto

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_n}(t_n)x_n$$

com  $x_n \in \mathcal{O}_1(x_0)$ ,  $t_n \rightarrow +\infty$  e  $\epsilon_n \in \Lambda_0$ .

Sendo  $\Lambda_0$  compacto, existe  $\bar{\epsilon} \in \Lambda_0$  tal que  $\epsilon_n \rightarrow \bar{\epsilon}$ , e para todo  $n \in \mathbb{N}$ , segue de (3.1) que

$$|(\epsilon_n, x_n) - (\epsilon_0, x_0)| \doteq |\epsilon_n - \epsilon_0| + \|x_n - x_0\|_{W_0^{1,p}} < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma \quad (3.2)$$

e portanto  $V_{\epsilon_n}(x_n) \in I_0$  o que implica que  $V_{\epsilon_n}(x_n) < \frac{\eta_0}{2} < 0$ .

Assim,

$$V_{\epsilon_n}(S_{\epsilon_n}(t_n)x_n) < V_{\epsilon_n}(x_n) < \frac{\eta_0}{2} < 0$$

e fazendo  $n \rightarrow +\infty$  temos

$$V_{\bar{\epsilon}}(0) \leq \frac{\eta_0}{2} < 0$$

o que é um absurdo pois  $V_{\bar{\epsilon}}(0) = 0$ .

Portanto,  $\alpha_\varphi^{\epsilon_0}(y) \neq 0$  e consequentemente  $y \in E_{\epsilon_0} \setminus \{0\}$ .

Por outro lado, sabemos que a família  $\{E_\epsilon\}_{\epsilon \in \Lambda}$  é contínua em  $\epsilon_0$ . Então existe  $\delta > 0$  tal que

$$\max\{d(E_\epsilon, E_{\epsilon_0}), d(E_{\epsilon_0}, E_\epsilon)\} < \frac{\gamma}{2}$$

se  $|\epsilon - \epsilon_0| < \delta$ .

Logo para todo  $\epsilon$  tal que  $|\epsilon - \epsilon_0| < \delta$

$$\mathcal{O}_{\frac{\gamma}{2}}(y) \subset \mathcal{O}_{\frac{\gamma}{2}}(E_{\epsilon_0}) \subset \mathcal{O}_\gamma(E_\epsilon) \subset \mathcal{O}_\gamma(A_\epsilon) \quad (3.3)$$

e como  $y = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_{\epsilon_k}(t_k)x_k$  existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k \geq k_0$

$$S_{\epsilon_k}(t_k)x_k \in \mathcal{O}_{\frac{\gamma}{2}}(y) \subset \mathcal{O}_\gamma(A_\epsilon) \quad (3.4)$$

para todo  $\epsilon \in (\epsilon_0 - \delta, \epsilon_0 + \delta)$ .

Uma vez que  $\epsilon_k \rightarrow \epsilon_0$  segue que

$$S_{\epsilon_k}(t_k)x_k \in \mathcal{O}_\gamma(A_{\epsilon_k})$$

para  $k$  suficientemente grande, o que contradiz nossa suposição.

Portanto, dado  $\eta > 0$  e  $x_0 \in A_{\epsilon_0} \setminus \{0\}$  existe uma vizinhança de  $x_0$  que é equi-atraída. ■

## 3.2 Considerações finais

Observe que dado  $\eta > 0$  é possível obter uma vizinhança,  $\mathcal{O}_x(x)$ , para cada ponto  $x$  de  $A_{\epsilon_0} \setminus \{0\}$ , a qual é equi-atraída. Assim, para qualquer vizinhança  $\mathcal{O}_0(0)$  de 0 a família  $\{\mathcal{O}_x(x)\}_{x \in A_{\epsilon_0}}$  forma uma cobertura aberta do atrator  $A_{\epsilon_0}$ .

Como o atrator é compacto em  $W_0^{1,p}$  podemos extrair uma subcobertura finita tal que  $A_{\epsilon_0} \subset \cup_{i=1}^n \mathcal{O}_{x_i}(x_i)$ .

Se a vizinhança de 0 fosse equi-atraída poderíamos tomar

$$\tau = \max\{\tau_{x_i}, i = 1, 2, \dots, n\} \quad \text{e} \quad \Lambda' = \cap_{i=1}^n \Lambda_{x_i}$$

com  $\tau_{x_i}$  e  $\Lambda_{x_i}$  como definido no Lema 3.1. Assim, para todo  $u_0 \in A_{\epsilon_0}$ , teríamos  $u_0 \in \mathcal{O}_{x_i}(x_i)$  para algum  $i = 1, 2, \dots, n$ . Logo para todo  $t \geq \tau$  e  $\epsilon \in \Lambda'$  teríamos

$$S_\epsilon(t)u_0 \subset S_\epsilon(t)(\mathcal{O}_{x_i}(x_i)) \subset \mathcal{O}_\eta(A_\epsilon)$$

e portanto a família  $\{A_\epsilon\}_{\epsilon \in \Lambda'}$  seria equi-atraente e pelo Teorema 2.9, [10], concluiríamos que a família  $\{A_\epsilon\}_{\epsilon \in \Lambda'}$  é contínua em  $\epsilon_0$ .

Isso mostra que o problema se reduz a mostrar que existe pelo menos uma vizinhança do equilíbrio nulo que é equi-atraída. Note que isto poderia ser resolvido mostrando que a família  $\{A_\epsilon\}_{\epsilon \in \tilde{\Lambda}}$  é uniformemente estável para algum  $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ .

## Capítulo 4

# Continuidade e sincronização em sistemas acoplados

### 4.1 Sobre o sistema com parâmetros distintos

Considere o seguinte sistema com um termo de acoplamento à direita

$$(S_n) \begin{cases} u_t^n = \epsilon_1^n (|u_x^n|^{p_1^n - 2} u_x^n)_x + |u^n|^{q_1^n - 2} u^n (1 - |u^n|^{r_1^n}) - k(u^n - v^n) \\ v_t^n = \epsilon_2^n (|v_x^n|^{p_2^n - 2} v_x^n)_x + |v^n|^{q_2^n - 2} v^n (1 - |v^n|^{r_2^n}) + k(u^n - v^n) \end{cases}$$

onde  $(u^n(0, t), v^n(0, t)) = (0, 0)$  e  $(u^n(1, t), v^n(1, t)) = (0, 0)$  para todo  $t \in (0, +\infty)$  e  $(u^n(x, 0), v^n(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ ,  $\epsilon_i^n$ ,  $k$ , são constantes positivas,  $q_i^n \geq 2$ ,  $p_i^n > 2$  e  $r_i^n \geq q_i^n - 2$ , para  $i = 1, 2$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

O objetivo deste capítulo é considerar  $\epsilon_i^n \rightarrow \epsilon$ ,  $p_i^n \rightarrow p$ ,  $q_i^n \rightarrow q$ ,  $r_i^n \rightarrow r$ , quando  $n \rightarrow \infty$  para  $i = 1, 2$ , e mostrar que dado  $\eta > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u^n(t) - v^n(t)\|_2 < \eta \quad \forall n \geq n_0$$

o que é conhecido como  $\epsilon$ -sincronização, veja [6].

O capítulo se divide em três seções, na primeira seção provamos a existência de solução para o sistema  $(S_n)$ , a existência de atrator e de um Funcional de Lyapunov para  $(S_n)$ , e concluímos com a semicontinuidade superior dos atratores associados a  $(S_n)$ . Na segunda analisamos o sistema limite (parâmetros iguais), e na terceira seção provamos a  $\epsilon$ -sincronização.

#### 4.1.1 Existência de solução

Nesta seção mostraremos a existência e unicidade de solução para o sistema acoplado

$$(S) \begin{cases} u_t = \epsilon_1 (|u_x|^{p_1 - 2} u_x)_x + |u|^{q_1 - 2} u (1 - |u|^{r_1}) - k(u - v) \\ v_t = \epsilon_2 (|v_x|^{p_2 - 2} v_x)_x + |v|^{q_2 - 2} v (1 - |v|^{r_2}) + k(u - v) \end{cases}$$

com  $(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)) \in W_0^{1,p_1}(0, 1) \times W_0^{1,p_2}(0, 1)$ , e para  $i = 1, 2$ ,  $\epsilon_i > 0$ ,  $p_i > 2$ ,  $q_i \geq 2$ ,  $r_i > q_i - 2$ , e  $k > 0$ .

Considere os problemas

$$(P_1) \begin{cases} u_t^1 = \epsilon_1(|u_x^1|^{p_1-2} u_x^1)_x + |u^1|^{q_1-2} u^1(1 - |u^1|^{r_1}) - k u^1 \\ u^1(0, t) = 0, u^1(1, t) = 0 & t > 0 \\ u^1(0) = u_0 \in W_0^{1,p_1}(0, 1) \end{cases}$$

e

$$(\tilde{P}_1) \begin{cases} v_t^1 = \epsilon_2(|v_x^1|^{p_2-2} v_x^1)_x + |v^1|^{q_2-2} v^1(1 - |v^1|^{r_2}) - k v^1 \\ v^1(0, t) = 0, v^1(1, t) = 0 & t > 0 \\ v^1(0) = v_0 \in W_0^{1,p_2}(0, 1) \end{cases}$$

É fácil ver que a aplicação definida por

$$\varphi_i^1(u) = \frac{\epsilon_i}{p_i} \int_0^1 |u_x(x)|^{p_i} dx + \int_0^1 \int_0^{u(x)} |v|^{q_i+r_i-2} v dv dx + k \int_0^1 \int_0^{u(x)} v dv dx$$

se  $u \in W_0^{1,p_i}(0, 1)$  e  $\varphi_i^1(u) = +\infty$  se  $u \in L^2(0, 1) \setminus W_0^{1,p_i}(0, 1)$  é convexa, própria e semicontínua inferiormente em  $L^2(0, 1)$ , para  $i = 1, 2$ . Consequentemente a subdiferencial  $\partial\varphi_i^1$  é um operador maximal monótono em  $L^2(0, 1)$ , para  $i = 1, 2$ , veja [4].

Considere o operador  $A_i$  definido em  $W_0^{1,p_i}$  que a cada elemento  $u \in W_0^{1,p_i}$  associa o elemento de  $W^{-1,p'_i}$  dado por  $A_i u = -\epsilon_i \Delta_{p_i} u + |u|^{q_i+r_i-2} u + k u$ . Ou seja, para cada  $u \in W_0^{1,p_i}$  definimos  $A_i u : W_0^{1,p_i} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $A_i u(v) = \int_0^1 A_i u v dx$ , para todo  $v \in W_0^{1,p_i}$ .

Temos que  $A_i u$  está bem definido, isto é, se  $u \in W_0^{1,p_i}$  então  $A_i u \in W^{-1,p'_i}$  e além disso,  $A_i$  é monótono, coercivo, hemicontínuo, e portanto  $A_i$  é maximal monótono de acordo com [4], Exemplo 2.3.7. Como  $A_i \subset \partial\varphi_i^1$  então  $A_i \equiv \partial\varphi_i^1$ , para  $i = 1, 2$ .

Agora defina  $\varphi_i^2 : L^2(0, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  por

$$\varphi_i^2 u = \int_0^1 \int_0^{u(x)} |v|^{q_i-2} v dv dx$$

se  $v \in L^{q_i}(0, 1)$ , e  $\varphi_i^2 u = +\infty$  se  $v \in L^2(0, 1) \setminus L^{q_i}(0, 1)$ .

Certamente  $\varphi_i^2$  é convexa, própria e semicontínua inferiormente em  $L^2(0, 1)$  e portanto  $\partial\varphi_i^2$  é maximal monótono em  $L^2(0, 1)$ .

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, definindo  $B_i : L^{q_i}(0, 1) \rightarrow (L^{q_i})'$  por  $B_i u = |u|^{q_i-2} u$ , com  $B_i u : L^{q_i}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $B_i u(v) = \int_0^1 B_i u v dx$ , temos que  $B_i$  está bem definido, é monótono, coercivo e hemicontínuo, e como  $B_i u \in \partial\varphi_i^2 u$  para todo  $u \in L^{q_i}(0, 1)$  segue da maximalidade de  $B_i$  e de  $\partial\varphi_i^2$  em  $L^2(0, 1)$  que  $B_i = \partial\varphi_i^2$ .

Dessa forma podemos escrever os problemas  $(P_1)$  e  $(\tilde{P}_1)$  como segue

$$(P_1) \begin{cases} u_t^1 + \partial\varphi_1^1 u^1 = \partial\varphi_1^2 u^1 \\ u^1(0) = u_0 \in W_0^{1,p_1}(0, 1) \end{cases}$$

e

$$(\tilde{P}_1) \begin{cases} v_t^1 + \partial\varphi_2^1 v^1 = \partial\varphi_2^2 v^1 \\ v^1(0) = v_0 \in W_0^{1,p_2}(0, 1) \end{cases}$$

Cálculos simples mostram que

- Para cada  $L < +\infty$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\{u \in L^2(0, 1); \varphi_i^1(u) + \|u\|_{L^2(0,1)} \leq L\}$  é compacto em  $L^2(0, 1)$ ,
- $\mathcal{D}(\varphi_i^1) \subset \mathcal{D}(\partial\varphi_i^2)$ ,
- $0 \in \mathcal{D}(\varphi_i^1)$ ,
- $\langle \partial\varphi_i^2 u, u \rangle_{L^2(0,1)} \leq K\varphi_i^1(u) + C(\|u\|_{L^2(0,1)}^2 + 1)$ ,  $0 \leq K < 1$ , para todo  $u \in \mathcal{D}(\varphi_i^1)$ ,  $i = 1, 2$ ,
- $\|\partial\varphi_i^2 u\|_{L^2(0,1)} \leq M(\|u\|_{L^2(0,1)})(1 + (\varphi_i^1 u)^{1-\gamma})$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ , para todo  $u \in \mathcal{D}(\varphi_i^1)$ , onde  $M(\cdot)$  é uma função monótona crescente localmente limitada em  $[0, +\infty)$ ,  $i = 1, 2$ ,

com  $K$ ,  $C$ ,  $\gamma$  e  $M(\cdot)$  independentes de  $\epsilon_i$  e  $p_i$ .

Segue do Teorema 5.3, [24], a existência de soluções fortes  $u^1(t)$  e  $v^1(t)$  em  $[0, T]$  de  $(P_1)$  e  $(\tilde{P}_1)$ , respectivamente, para cada  $T > 0$ , tais que

1.  $\sqrt{t} \frac{du^1(t)}{dt}, \sqrt{t} \frac{dv^1(t)}{dt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$
2.  $\varphi_1^2(u^1(t)), \varphi_1^1(u^1(t)), \varphi_2^1(v^1(t)), \varphi_2^2(v^1(t)) \in L^1(0, T)$
3.  $t\varphi_1^2(u^1(t)), t\varphi_1^1(u^1(t)), t\varphi_2^1(v^1(t)), t\varphi_2^2(v^1(t)) \in L^\infty(0, T)$
4.  $\varphi_1^2(u^1(t)), \varphi_1^1(u^1(t)), \varphi_2^1(v^1(t)), \varphi_2^2(v^1(t))$  são absolutamente contínuas em  $(0, T]$
5.  $\partial\varphi_1^1(u^1(t)), \partial\varphi_2^1(v^1(t)) \in L^2(\delta, T; L^2(0, 1)), \forall \delta > 0$
6.  $\partial\varphi_1^2(u^1(t)), \partial\varphi_2^2(v^1(t)) \in L^\infty(\delta, T; L^2(0, 1)) \cap L^1(0, T; L^2(0, 1)), \forall \delta > 0$ .

Num segundo passo considere os problemas

$$(P_2) \begin{cases} u_t^2 + \partial\varphi_1^1 u^2 = \partial\varphi_1^2 u^2 + kv^1 \\ u^2(0) = u_0 \in W_0^{1,p_1}(0, 1) \end{cases}$$

e

$$(\tilde{P}_2) \begin{cases} v_t^2 + \partial\varphi_2^1 v^2 = \partial\varphi_2^2 v^2 + ku^1 \\ v^2(0) = v_0 \in W_0^{1,p_2}(0, 1) \end{cases}$$

Note que sendo  $u^1$  e  $v^1$  soluções fortes em  $[0, T]$  de  $(P_1)$  e  $(\tilde{P}_1)$ , respectivamente, então  $v^1, u^1 \in C([0, T]; L^2(0, 1))$  e conseqüentemente  $kv^1, ku^1 \in L^2([0, T]; L^2(0, 1))$ , para todo  $k > 0$ .

E novamente pelo Teorema 5.3, [24], existem soluções fortes  $u^2(t), v^2(t)$  de  $(P_2)$ ,  $(\tilde{P}_2)$ , que também possuem as seis propriedades listadas acima.

Assim, indutivamente construímos seqüências  $\{u^n\}$  e  $\{v^n\}$  onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u^n$  e  $v^n$  são respectivamente soluções fortes dos problemas  $(P_n)$  e  $(\tilde{P}_n)$  abaixo:

$$(P_n) \begin{cases} u_t^n + \partial\varphi_1^1 u^n = \partial\varphi_1^2 u^n + kv^{n-1} \\ u^n(0) = u_0 \in W_0^{1,p_1}(0, 1) \end{cases}$$

e

$$\left(\tilde{P}_n\right) \begin{cases} v_t^n + \partial\varphi_2^1 v^n = \partial\varphi_2^2 v^n + k u^{n-1} \\ v^n(0) = v_0 \in W_0^{1,p_2}(0,1) \end{cases}$$

O próximo passo é mostrar que a sequência  $\{(u^n, v^n)\}$  converge para um par  $(u, v)$  que é solução do sistema  $(S)$ . Para isso usaremos um resultado de compacidade, devido a Baras (veja [30], Teorema 2.5.3). Primeiramente devemos concluir que o conjunto

$$\{f_n \doteq |u^n|^{q_1-2} u^n - |u^n|^{q_1+r_1-2} u^n + k v^{n-1} - k u^{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

é uniformemente integrável em  $L^1(0, T_0; L^2(0, 1))$ , ou seja, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\int_E \|f_n(t)\|_2 dt \leq \epsilon$$

para cada subconjunto mensurável  $E$  em  $[0, T_0]$  cuja medida de Lebesgue é menor que  $\delta(\epsilon)$ , e uniformemente para  $f_n$ .

**Lema 4.1** *Existe  $T_0 > 0$ , tal que a sequência  $\{\|u^n(t)\|_2 + \|v^n(t)\|_2\}$  é limitada, para todo  $n \in \mathbb{N}$  e para todo  $t \in [0, T_0]$ .*

**Demonstração:** Seja  $n = 1$ . Como  $u^1$  é solução de  $(P_1)$ , multiplicando a equação  $(P_1)$  por  $u^1$  obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^1(t)\|_2^2 + \epsilon_1 \|u^1(t)\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \|u^1(t)\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} + k \|u^1(t)\|_2^2 = \|u^1(t)\|_{q_1}^{q_1}$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^1(t)\|_2^2 &\leq -\|u^1(t)\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} + \|u^1(t)\|_{q_1}^{q_1} \\ &\leq \frac{r_1}{q_1+r_1} \end{aligned}$$

Seja  $T_0$  fixo mas arbitrário. Integrando de 0 a  $t$ , com  $t \leq T_0$ , obtemos

$$\|u^1(t)\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 + \frac{2r_1 T_0}{q_1+r_1} \leq m + \frac{2r_1 T_0}{q_1+r_1} \doteq M_1$$

onde  $m = \max\{\|u_0\|_2^2, \|v_0\|_2^2\}$ .

Analogamente,  $\|v^1(t)\|_2^2 \leq M_2$ , para todo  $t \in [0, T_0]$  onde  $M_2 \doteq m + \frac{2r_2 T_0}{q_2+r_2}$ .

Se  $n = 2$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^2(t)\|_2^2 &\leq \|u^2(t)\|_{q_1}^{q_1} - \|u^2(t)\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} + \frac{k}{2} \|v^1(t)\|_2^2 \\ &\quad + \frac{k}{2} \|u^2(t)\|_2^2 - k \|u^2(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{r_1}{q_1+r_1} + \frac{k}{2} \|v^1(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{r_1}{q_1+r_1} + \frac{kM}{2} \end{aligned}$$

onde  $M \doteq \max\{M_1, M_2\}$ .

Integrando de 0 a  $t$  obtemos

$$\begin{aligned} \|u^2(t)\|_2^2 &\leq \|u_0\|_2^2 + \frac{2r_1 T_0}{q_1+r_1} + k M T_0 \\ &\leq m + \frac{2r_1 T_0}{q_1+r_1} + k M T_0 \\ &\leq M + k M T_0 \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T_0]$ . Analogamente,  $\|v^2(t)\|_2^2 \leq M + kMT_0$ , para todo  $t \in [0, T_0]$ .

Suponha que

$$\max\{\|u^n(t)\|_2^2, \|v^n(t)\|_2^2\} \leq M + M(kT_0 + k^2T_0^2 + \dots + k^{n-1}T_0^{n-1})$$

para todo  $t \in [0, T_0]$ . Então, sendo  $u^{n+1}$  solução de  $(P_{n+1})$  temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^{n+1}(t)\|_2^2 &\leq \frac{r_1}{q_1 + r_1} + \frac{k}{2} \|v^n(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{r_1}{q_1 + r_1} + \frac{k}{2} [M + M(kT_0 + k^2T_0^2 + \dots + k^{n-1}T_0^{n-1})] \end{aligned}$$

e novamente integrando de 0 a  $t$  obtemos

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}(t)\|_2^2 &\leq \|u_0\|_2^2 + \frac{2r_1T_0}{q_1 + r_1} + k[M + M(kT_0 + \dots + k^{n-1}T_0^{n-1})]T_0 \\ &\leq m + \frac{2r_1T_0}{q_1 + r_1} + kMT_0 + k^2MT_0^2 + \dots + k^nMT_0^n \\ &\leq M + M(kT_0 + k^2T_0^2 + \dots + k^nT_0^n) \end{aligned}$$

e analogamente  $\|v^{n+1}(t)\|_2^2 \leq M + M(kT_0 + k^2T_0^2 + \dots + k^nT_0^n)$  para todo  $t \in [0, T_0]$ .

Portanto para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $t \in [0, T_0]$

$$\|u^n(t)\|_2^2 \leq M + M(kT_0 + k^2T_0^2 + \dots + k^{n-1}T_0^{n-1})$$

e

$$\|v^n(t)\|_2^2 \leq M + M(kT_0 + k^2T_0^2 + \dots + k^{n-1}T_0^{n-1}).$$

Tome  $T_0$  de modo que  $kT_0 < 1$ , então pelo Teste da Raiz, existe  $N > 0$  tal que  $N = \lim_{n \rightarrow \infty} kT_0 + k^2T_0^2 + \dots + k^nT_0^n$  e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \|u^n(t)\|_2^2 &\leq M + M(kT_0 + k^2T_0^2 + \dots + k^nT_0^n) \\ &\leq M + MN = N_1 \end{aligned}$$

e  $\|v^n(t)\|_2^2 \leq N_1$  para todo  $t \in [0, T_0]$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Portanto existe uma constante  $N_1 > 0$  dependendo de  $\|u_0\|_2, \|v_0\|_2, T_0, r_i, q_i$  e  $k$ , tal que

$$\|u^n(t)\|_2^2 + \|v^n(t)\|_2^2 \leq N_1$$

para todo  $t \in [0, T_0]$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

A seguir vamos obter uma estimativa similar para as normas de  $u$  e  $v$  em  $W_0^{1,p_1}$  e  $W_0^{1,p_2}$ , respectivamente.

**Lema 4.2** *Existe uma constante  $N_2 > 0$  tal que*

$$\|u^n(t)\|_{W_0^{1,p_1}} + \|v^n(t)\|_{W_0^{1,p_2}} \leq N_2$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $t \in [0, T_0]$ , se  $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p_1}(0, 1) \times W_0^{1,p_2}(0, 1)$  e  $T_0$  como no Lema anterior.

**Demonstração:** De fato, sendo  $u^n$  solução de  $(P_n)$  temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_1^1 u^n(t) &\leq \frac{d}{dt} \varphi_1^2 u^n(t) + \frac{k^2}{2} \|v^{n-1}(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{d}{dt} \varphi_1^2 u^n(t) + \frac{k^2 N_1}{2} \end{aligned}$$

Integrando de 0 a  $t$ ,  $t \leq T_0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_1^1 u^n(t) - \varphi_1^1 u_0 &\leq \varphi_1^2 u^n(t) - \varphi_1^2 u_0 + \frac{k^2 N_1 T_0}{2} \\ &\leq c_0^1 \varphi_1^1 u^n(t) + c^1 + \frac{k^2 N_1 T_0}{2} \end{aligned}$$

que implica em

$$\begin{aligned} \|u^n(t)\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} &\leq \frac{1}{(1-c_0^1)} \|u_0\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \frac{p_1}{(q_1+r_1)\epsilon_1(1-c_0^1)} \|u_0\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} \\ &+ \frac{p_1 k}{\epsilon_1(1-c_0^1)} \|u_0\|_2^2 + \frac{p_1 c^1}{\epsilon_1(1-c_0^1)} + \frac{p_1 k^2 N_1 T_0}{2(1-c_0^1)\epsilon_1} \end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned} \|v^n(t)\|_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} &\leq \frac{1}{(1-c_0^2)} \|v_0\|_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} + \frac{p_2}{(q_2+r_2)\epsilon_2(1-c_0^2)} \|v_0\|_{q_2+r_2}^{q_2+r_2} \\ &+ \frac{p_2 k}{\epsilon_2(1-c_0^2)} \|u_0\|_2^2 + \frac{p_2 c^2}{\epsilon_2(1-c_0^2)} + \frac{p_2 k^2 N_1 T_0}{2(1-c_0^2)\epsilon_2} \end{aligned}$$

Então

$$\|u^n(t)\|_{W_0^{1,p_1}} + \|v^n(t)\|_{W_0^{1,p_2}} \leq N_2$$

para todo  $t \in [0, T_0]$  e  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $N_2$  depende de  $\|u_0\|_{W_0^{1,p_1}}$ ,  $\|v_0\|_{W_0^{1,p_2}}$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $k$ ,  $T_0$ ,  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . ■

Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $t \in [0, T_0]$  temos  $|u^n(t, x)| + |v^n(t, x)| \leq N_2$  para todo  $x \in [0, 1]$ .

Denotando por  $f^i$  a função  $f^i(s) = |s|^{q_i-2}s - |s|^{q_i+r_i-2}s$ , para  $i = 1, 2$ , é fácil ver que

$$\|f^1(u^n(t))\|_2^2 \leq N_3 \|u^n(t)\|_2^2$$

onde  $N_3$  independe de  $(n, t, x) \in \mathbb{N} \times [0, T_0] \times [0, 1]$ .

**Lema 4.3** *A aplicação*

$$f_n^1 \doteq |u^n|^{q_1-2} u^n - |u^n|^{q_1+r_1-2} u^n + k v^{n-1} - k u^n \quad (4.1)$$

pertence a  $L^1(0, T_0; L^2(0, 1))$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \|f_n^1(t)\|_2 dt &= \int_0^{T_0} \|f^1 u^n(t) - k u^n(t) + k v^{n-1}(t)\|_2 dt \\ &\leq \int_0^{T_0} \|f^1 u^n(t)\|_2 dt + k \int_0^{T_0} \|u^n(t)\|_2 dt \\ &+ k \int_0^{T_0} \|v^{n-1}(t)\|_2 dt \\ &\leq T_0 N_1^{\frac{1}{2}} (N_3 + 2k) \end{aligned}$$

o que mostra que  $f_n^1 \in L^1(0, T_0; L^2(0, 1))$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Lema 4.4** *O subconjunto  $\{f_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$ , com  $f_n^1$  como definido em (4.1), é uniformemente integrável em  $L^1(0, T_0; L^2(0, 1))$ .*

**Demonstração:** Com efeito, dado  $\eta > 0$  tome  $\delta = \frac{\eta}{N_4}$ , onde  $N_4 = N_1^{\frac{1}{2}}(N_3 + 2k)$ . Assim se  $E \subset [0, T_0]$  é tal que  $|E| < \delta$  então

$$\int_E \|f_n(t)\|_2 dt < |E| N_1^{\frac{1}{2}}(N_3 + 2k) < \delta N_4 < \eta.$$

■

Segue do Teorema de Baras que o conjunto

$$\{u^n; n \in \mathbb{N} \text{ e } u^n \text{ é solução de } (P_n)\}$$

é relativamente compacto em  $C([0, T_0]; L^2(0, 1))$ . Da mesma forma mostra-se que o conjunto

$$\{v^n; n \in \mathbb{N} \text{ e } v^n \text{ é solução de } (\tilde{P}_n)\}$$

também é relativamente compacto em  $C([0, T_0]; L^2(0, 1))$ .

Logo existe uma subsequência ainda denotada por  $\{(u^n, v^n)\}$  e um elemento  $(u, v) \in C([0, T_0]; L^2(0, 1)) \times C([0, T_0]; L^2(0, 1))$  tal que

$$(u^n, v^n) \rightarrow (u, v) \text{ em } C([0, T_0]; L^2(0, 1)) \times C([0, T_0]; L^2(0, 1)).$$

Mostremos que  $(u, v)$  é solução de (S).

**Lema 4.5** *Sejam  $f_n^1(t) \doteq f^1 u^n(t) - k u^n(t) + k v^{n-1}(t)$  e  $\tilde{f}_1(t) \doteq f^1 u(t) - k u(t) + k v(t)$ . Então  $f_n^1 \rightarrow \tilde{f}_1$  em  $L^1(0, T_0; L^2(0, 1))$ .*

**Demonstração:** A demonstração é direta visto que  $f^1$  é uma aplicação contínua em  $L^2(0, 1)$  e  $(u^n, v^n) \rightarrow (u, v)$  em  $C([0, T_0]; L^2(0, 1)) \times C([0, T_0]; L^2(0, 1))$ . ■

Segue também que se  $f_n^2(t) \doteq f^2 v^n(t) - k v^n(t) + k u^{n-1}(t)$  e  $\tilde{f}_2(t) \doteq f^2 v(t) - k v(t) + k u(t)$ , então  $f_n^2 \rightarrow \tilde{f}_2$  em  $L^1(0, T_0; L^2(0, 1))$ . Logo  $u$  e  $v$  são soluções fracas de

$$\frac{dw}{dt} - \epsilon_1 \Delta_{p_1} w = f^1 u - k(u - v) \quad (4.2)$$

e

$$\frac{d\bar{w}}{dt} - \epsilon_2 \Delta_{p_2} \bar{w} = f^2 v + k(u - v) \quad (4.3)$$

respectivamente.

**Lema 4.6** *As aplicações  $\tilde{f}_1$  e  $\tilde{f}_2$  definidas acima pertencem a  $L^2(0, T_0; L^2(0, 1))$ .*

**Demonstração:** Uma vez que  $u^n(t) \rightarrow u(t)$  e  $v^n(t) \rightarrow v(t)$  em  $L^2(0, 1)$  e  $\|u^n(t)\|_2^2 + \|v^n(t)\|_2^2 \leq N_1$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $t \in [0, T_0]$ , segue que  $\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2 \leq N_1$  e o resultado se verifica. ■

Sendo  $u$  e  $v$  soluções fracas de (4.2) e (4.3), segue do Teorema 5.5, que  $u$  e  $v$  são, de fato, soluções fortes de (4.2) e (4.3), respectivamente.

Agora observe que  $u(0) = u_0$  e  $v(0) = v_0$  pois  $u^n(0) = u_0$  e  $v^n(0) = v_0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso, segue do Lema 4.2, que

$$\|u(t)\|_{W_0^{1,p_1}} \leq \liminf \|u^n(t)\|_{W_0^{1,p_1}} \leq N_2$$

e

$$\|v(t)\|_{W_0^{1,p_2}} \leq \liminf \|v^n(t)\|_{W_0^{1,p_2}} \leq N_2$$

o que garante que

$$(u(t), v(t)) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$$

para todo  $t \in [0, T_0]$ . Uma vez que  $(u, v)$  satisfazem (4.2) e (4.3) isto finaliza a prova da existência local de soluções.

Provemos que tal solução é, de fato, uma solução global. Tome

$$(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = (u(T_0), v(T_0)) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}.$$

O sistema  $(S)$  com dados iniciais  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$  tem solução  $(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ , para todo  $t \in [0, T_0]$ , com  $(\bar{u}(t), \bar{v}(t)) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ .

Observe que o mesmo  $T_0$  pode ser tomado novamente, uma vez que  $T_0$  depende apenas de  $k$ . Defina, para todo  $t \in [0, T_0]$

$$u(t + T_0) \doteq \bar{u}(t) \quad \text{e} \quad v(t + T_0) \doteq \bar{v}(t)$$

Assim,  $(u(t + T_0), v(t + T_0)) = (\bar{u}(t), \bar{v}(t))$  satisfaz as equações de  $(S)$  com as condições de fronteira. Consequentemente,

$$(u(t), v(t)) \doteq \begin{cases} (u(t), v(t)), & \text{se } t \in [0, T_0] \\ (\bar{u}(t - T_0), \bar{v}(t - T_0)) & \text{se } t \in [T_0, 2T_0] \end{cases}$$

é uma solução de  $(S)$  com dado inicial  $(u_0, v_0)$  definida em  $[0, 2T_0]$ .

Considerando o novo dado inicial  $(u(2T_0), v(2T_0)) \in W_0^{1,p_1}(0, 1) \times W_0^{1,p_2}(0, 1)$  podemos estender o domínio de  $(u, v)$  ao intervalo  $[0, 3T_0]$ . E este raciocínio pode ser repetido infinitas vezes, e portanto a solução  $(u, v)$  de  $(S)$  com dado inicial  $(u_0, v_0)$  está definida em  $[0, nT_0]$  com  $n \rightarrow \infty$ . Logo a solução  $(u, v)$  está globalmente definida.

O próximo lema garante a unicidade da solução.

**Lema 4.7** *Sejam  $(u, v)$  e  $(\bar{u}, \bar{v})$  soluções de  $(S)$  com dados iniciais  $(u_0, v_0)$  e  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ , respectivamente, e  $k > N_3$ . Se  $u_0 = \bar{u}_0$  e  $v_0 = \bar{v}_0$  então  $\bar{u} = u$  e  $\bar{v} = v$ .*

**Demonstração:**

$$\langle u_t - \bar{u}_t, u - \bar{u} \rangle + \langle -\epsilon_1 \Delta_{p_1} u + \epsilon_1 \Delta_{p_1} \bar{u}, u - \bar{u} \rangle = \langle f^1 u - f^1 \bar{u}, u - \bar{u} \rangle - k \langle u - v - \bar{u} + \bar{v}, u - \bar{u} \rangle$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - \bar{u}\|_2^2 &\leq N_3 \|u - \bar{u}\|_2^2 - k \|u - \bar{u}\|_2^2 \\ &\quad + k \langle v - \bar{v}, u - \bar{u} \rangle \\ &\leq \frac{k}{2} \|v - \bar{v}\|_2^2 + \frac{k}{2} \|u - \bar{u}\|_2^2 \end{aligned}$$

uma vez que  $k > N_3$ . Analogamente,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v - \bar{v}\|_2^2 \leq \frac{k}{2} \|v - \bar{v}\|_2^2 + \frac{k}{2} \|u - \bar{u}\|_2^2$$

e portanto

$$\frac{d}{dt} (\|u - \bar{u}\|_2^2 + \|v - \bar{v}\|_2^2) \leq 2k (\|v - \bar{v}\|_2^2 + \|u - \bar{u}\|_2^2)$$

Integrando de 0 a  $t$  e usando a desigualdade de Gronwall-Bellmann obtemos

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v(t) - \bar{v}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq (\|u_0 - \bar{u}_0\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v_0 - \bar{v}_0\|_{L^2(0,1)}^2) e^{2kt}$$

Se  $(u_0, v_0) = (\bar{u}_0, \bar{v}_0)$  então  $u(t) = \bar{u}(t)$  e  $v(t) = \bar{v}(t)$ , para todo  $t > 0$ . ■

Com isto podemos associar a  $(S)$  um semigrupo,  $\{S(t)\}$ , de  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$  em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ .

#### 4.1.2 Existência de atrator

Nesta seção vamos obter a existência de um atrator global em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$  para o semigrupo associado a  $(S)$ . É conhecido que, para a existência de um atrator são suficientes compacidade assintótica e dissipatividade do semigrupo, veja [15].

Os dois próximos Lemas garantem a dissipatividade em  $L^2 \times L^2$  e  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ , respectivamente.

**Lema 4.8** *Se  $(u, v)$  é solução de  $(S)$  então existe uma constante  $N_4 > 0$  tal que*

$$\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2 \leq N_4$$

para todo  $t \geq 0$ .

**Demonstração:** Multiplicando a primeira equação de  $(S)$  por  $u$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 &\leq \|u(t)\|_{q_1}^{q_1} - \|u(t)\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} - k \|u(t)\|_2^2 \\ &\quad + k \|u(t)\|_2 \|v(t)\|_2 \\ &\leq \|u(t)\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} - \|u(t)\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} - k \|u(t)\|_2^2 \\ &\quad + k \|u(t)\|_2 \|v(t)\|_2 \\ &\leq \frac{r_1}{q_1+r_1} + \frac{q_1}{q_1+r_1} \|u(t)\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} - \|u(t)\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} \\ &\quad - k \|u(t)\|_2^2 + k \|u(t)\|_2 \|v(t)\|_2 \\ &\leq \frac{r_1}{q_1+r_1} - \frac{r_1}{q_1+r_1} \|u(t)\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} - k \|u(t)\|_2^2 \\ &\quad + k \|u(t)\|_2 \|v(t)\|_2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 &+ \frac{r_1}{q_1 + r_1} \|u(t)\|_2^{q_1+r_1} \\ &\leq \frac{r_1}{q_1 + r_1} - k \|u(t)\|_2^2 + k \|u(t)\|_2 \|v(t)\|_2 \end{aligned}$$

Analogamente, multiplicando a segunda equação de (S) por  $v$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_2^2 &+ \frac{r_2}{q_2 + r_2} \|v(t)\|_2^{q_2+r_2} \\ &\leq \frac{r_2}{q_2 + r_2} - k \|v(t)\|_2^2 + k \|u(t)\|_2 \|v(t)\|_2 \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade assumamos  $q_1 + r_1 \leq q_2 + r_2$ , assim, por Holder,

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_2^{q_1+r_1} &\leq \frac{q_2 + r_2 - q_1 - r_1}{q_2 + r_2} + \frac{q_1 + r_1}{q_2 + r_2} \|v(t)\|_2^{q_2+r_2} \\ &< \frac{q_2 + r_2 - q_1 - r_1}{q_2 + r_2} + \|v(t)\|_2^{q_2+r_2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_2^2 &+ \frac{r_2}{q_2 + r_2} \|v(t)\|_2^{q_1+r_1} + \frac{r_2(q_1 + r_1 - q_2 - r_2)}{(q_2 + r_2)^2} \\ &< \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_2^2 + \frac{r_2}{q_2 + r_2} \|v(t)\|_2^{q_2+r_2} \\ &\leq \frac{r_2}{q_2 + r_2} - k \|v(t)\|_2^2 + k \|u(t)\|_2 \|v(t)\|_2 \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2) &+ \frac{r_1}{q_1 + r_1} \|u(t)\|_2^{q_1+r_1} + \frac{r_2}{q_2 + r_2} \|v(t)\|_2^{q_1+r_1} \\ &+ \frac{r_2(q_1 + r_1 - q_2 - r_2)}{(q_2 + r_2)^2} \\ &< \frac{r_1}{q_1 + r_1} - k \|u(t)\|_2^2 + \frac{r_2}{q_2 + r_2} \\ &- k \|v(t)\|_2^2 + 2k \|u(t)\|_2 \|v(t)\|_2 \end{aligned}$$

Seja  $\bar{m} \doteq \min \left\{ \frac{r_1}{q_1 + r_1}, \frac{r_2}{q_2 + r_2} \right\}$ . Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2) &+ \bar{m} (\|u(t)\|_2^{q_1+r_1} + \|v(t)\|_2^{q_1+r_1}) \\ &< \frac{r_2(q_2 + r_2 - q_1 - r_1)}{(q_2 + r_2)^2} + \frac{r_1}{q_1 + r_1} + \frac{r_2}{q_2 + r_2} \\ &- k (\|u(t)\|_2 - \|v(t)\|_2)^2 \\ &\leq \frac{r_2(q_2 + r_2 - q_1 - r_1)}{(q_2 + r_2)^2} \\ &+ \frac{r_1}{q_1 + r_1} + \frac{r_2}{q_2 + r_2} \doteq N_5 \end{aligned}$$

Como  $q_1 + r_1 > 2$  temos pelo Lema 2.2, [1], que

$$(\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2)^{\frac{q_1+r_1}{2}} \leq 2^{\frac{q_1+r_1-2}{2}} ((\|u(t)\|_2^2)^{\frac{q_1+r_1}{2}} + (\|v(t)\|_2^2)^{\frac{q_1+r_1}{2}})$$

e então

$$\frac{d}{dt} (\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2) + \frac{2\bar{m}}{2^{\frac{q_1+r_1-2}{2}}} (\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2)^{\frac{q_1+r_1}{2}} \leq 2N_5$$

Segue do Lema 5.2, que para todo  $t \geq 0$

$$\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2 \leq \left( \frac{N_5}{m} 2^{\frac{q_1+r_1-2}{2}} \right)^{\frac{2}{q_1+r_1}} + \left( \frac{2^{\frac{q_1+r_1-2}{2}}}{m(q_1+r_1-2)t} \right)^{\frac{2}{q_1+r_1-2}}.$$

Seja  $T_1 > 0$  tal que para todo  $t \geq T_1$

$$\left( \frac{2^{\frac{q_1+r_1-2}{2}}}{m(q_1+r_1-2)t} \right)^{\frac{2}{q_1+r_1-2}} \leq 1$$

Assim se  $t \geq T_1$

$$\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2 \leq \left( \frac{N_5}{m} 2^{\frac{q_1+r_1-2}{2}} \right)^{\frac{2}{q_1+r_1}} + 1$$

Agora considere  $t \in [0, T_1]$ . Temos

$$\frac{d}{dt} (\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2) \leq 2N_5$$

Integrando de 0 a  $t$ , com  $t \leq T_1$  obtemos

$$\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 + \|v_0\|_2^2 + 2N_5T_1 \leq N_6$$

Note que  $N_6$  pode ser tomado uniformemente para dados iniciais em limitados de  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ . Logo,

$$\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2 \leq N_4$$

para todo  $t \geq 0$ , onde  $N_4$  é uma constante positiva dependendo apenas de  $\|u_0\|_2$ ,  $\|v_0\|_2$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $r_1$  e  $r_2$ . ■

**Observação 4.1**  $N_4$  pode ser tomado uniformemente para dados iniciais em limitados de  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ ,  $q_i$  e  $r_i$  em limitados de  $\mathbb{R}_+$ , e independente de  $k$  e  $p_i$ .

**Lema 4.9** Se  $(u, v)$  é solução de (S) então existe uma constante positiva  $N_7$  tal que

$$\|u(t)\|_{W_0^{1,p_1}} + \|v(t)\|_{W_0^{1,p_2}} \leq N_7$$

para todo  $t \geq 0$ .

**Demonstração:** Tome  $T > 0$ . Se  $(u, v)$  é solução de (S) temos

$$\frac{d}{dt} \varphi_1^1 u(t) \leq \frac{d}{dt} \varphi_1^2 u(t) + \frac{k^2}{2} \|v(t)\|_2^2$$

Integrando de 0 a  $t$ , com  $t \leq T$ , obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_1^1 u(t) &\leq \varphi_1^1 u_0 + \varphi_1^2 u(t) - \varphi_1^2 u_0 + \frac{k^2 N_4 T}{2} \\ &\leq \varphi_1^1 u_0 + c_0^1 \varphi_1^1 u(t) + c^1 + \frac{k^2 N_4 T}{2} \end{aligned}$$

Assim, para cada  $t \in [0, T]$  temos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{W_0^{1,p_1}} &\leq \left\{ \frac{p_1}{\epsilon_1(1-c_0^1)} \left[ \frac{\epsilon_1}{p_1} \|u_0\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \frac{1}{q_1+r_1} \|u_0\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k}{2} \|u_0\|_2^2 + c^1 + \frac{k^2 N_4 T}{2} \right] \right\}^{\frac{1}{p_1}} \leq N_8 \end{aligned}$$

Observe que  $N_8$  pode ser tomado uniforme se  $q_i, r_i, p_i, \epsilon_i$  e  $k$  forem tomados em limitados de  $\mathbb{R}_+^*$  e  $u_0$  em limitados de  $W_0^{1,p_M}$ , sendo  $p_M \doteq \max\{p_i\}$ .

Sem perda de generalidade vamos tomar  $T = 2T_1$ , onde  $T_1$  é como no lema anterior.

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi_1^1 u(t) &= \langle \partial\varphi_1^1 u(t), u_t(t) \rangle \\
&= \langle -u_t(t) + \partial\varphi_1^2 u(t) + kv(t), u_t(t) \rangle \\
&\leq -\|u_t(t)\|_2^2 + \|\partial\varphi_1^2 u(t)\|_2 \|u_t(t)\|_2 \\
&\quad + k\|v(t)\|_2 \|u_t(t)\|_2 \\
&\leq -\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\partial\varphi_1^2 u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 \\
&\quad + \frac{k^2}{2}\|v(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|u(t)\|_{2q_1-2}^{2q_1-2} + \frac{k^2 N_4}{2} \\
&\leq \frac{1}{2}\|u(t)\|_{q_1+r_1}^{2q_1-2} + \frac{k^2 N_4}{2} \\
&\leq (q_1 - 1)\varphi_1^1 u(t) + \frac{2 - q_1 + r_1}{2(q_1 + r_1)} + \frac{k^2 N_4}{2} \\
&\leq (q_1 - 1)\varphi_1^1 u(t) + N_9
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde  $N_9$  depende apenas de  $q_i, r_i, k$  e  $T_1$ , e independe do dado inicial pois  $t > T_1$ .

Por outro lado como  $\varphi_1^1(0) = 0$ , segue da definição de subdiferencial que  $\varphi_1^1 u(t) \leq \langle \partial\varphi_1^1 u(t), u(t) \rangle$  o que implica em

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 + \varphi_1^1 u(t) &\leq \langle u_t(t), u(t) \rangle + \langle \partial\varphi_1^1 u(t), u(t) \rangle \\
&= \langle \partial\varphi_1^2 u(t), u(t) \rangle + k\langle v(t), u(t) \rangle \\
&\leq \|u(t)\|_{q_1}^{q_1} + \frac{k}{2}\|v(t)\|_2^2 + \frac{k}{2}\|u(t)\|_2^2 \\
&\leq N_{10} + N_{11}\varphi_1^1 u(t)
\end{aligned}$$

onde  $N_{10} = \frac{kN_4}{2} + \frac{r_1}{(q_1 + r_1)\eta^{\frac{q_1+r_1}{r_1}}}$ ,  $N_{11} = q_1\eta^{\frac{q_1+r_1}{q_1}}$ , com  $\eta$  escolhido pequeno o suficiente para que  $N_{11} < 1$ . Observe que  $\eta$  pode ser tomado uniforme para  $q_i$  e  $r_i$  em limitados de  $\mathbb{R}_+^*$ .

Assim para todo  $t \geq T_1$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 + (1 - N_{11})\varphi_1^1 u(t) \leq N_{10}$$

Integrando de  $t$  a  $t + T_1$  obtemos

$$\int_t^{t+T_1} \varphi_1^1 u(s) ds \leq \frac{N_{10}T_1}{1 - N_{11}} + \frac{N_4}{2(1 - N_{11})}$$

para todo  $t \geq T_1$ .

Então pelo Lema 5.1, e por (4.4)

$$\varphi_1^1 u(t) \leq \left( \frac{N_9 + 2N_{10}T_1}{2T_1(1 - N_{11})} + N_9T_1 \right) e^{(q_1-1)T_1}$$

para todo  $t \geq 2T_1$ , o que implica que

$$\|u(t)\|_{W_0^{1,p_1}} \leq \left\{ \frac{p_1}{\epsilon_1} \left( \frac{N_9 + 2N_{10}T_1}{2T_1(1 - N_{11})} + N_9T_1 \right) e^{(q_1-1)T_1} \right\}^{\frac{1}{p_1}} \leq N_{12}$$

para todo  $t \geq 2T_1$ . Observe que  $N_{12}$  é uniforme para  $p_i, \epsilon_i, q_i, r_i$  e  $k$  em limitados de  $\mathbb{R}_+^*$ .

De modo inteiramente análogo temos que

$$\|v(t)\|_{W_0^{1,p_2}} \leq N_8$$

se  $t \in [0, 2T_1]$  e

$$\|v(t)\|_{W_0^{1,p_2}} \leq N_{12}$$

se  $t \geq 2T_1$ . Portanto,

$$\|u(t)\|_{W_0^{1,p_1}} + \|v(t)\|_{W_0^{1,p_2}} \leq N_7$$

para todo  $t \geq 0$ , onde  $N_7$  depende de  $p_i, q_i, r_i, \epsilon_i, k, \|u_0\|_{W_0^{1,p_1}}$  e  $\|v_0\|_{W_0^{1,p_2}}$ .  $\blacksquare$

**Observação 4.2** *Seguindo os passos da demonstração anterior é fácil ver que fixado  $\delta > 0$  existe uma constante,  $N(\delta) > 0$ , tal que*

$$\|u(t)\|_{W_0^{1,p_1}} + \|v(t)\|_{W_0^{1,p_2}} \leq N(\delta)$$

para todo  $t \geq \delta$  e independente dos dados iniciais.

Nos três próximos lemas vamos estabelecer a continuidade do semigrupo associado a  $(S)$  com relação a  $t$  em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$  e com relação aos dados iniciais em  $L^2 \times L^2$  e em seguida em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ .

**Lema 4.10** *Para cada  $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$  a aplicação  $t \mapsto (u(t), v(t))$  é contínua.*

**Demonstração:** De fato, fixe  $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ . Seja  $(u(t), v(t))$  solução de  $(S)$  com dado inicial  $(u_0, v_0)$  no instante  $t$ . Considere a função  $\sigma_1$  de  $[0, T]$  em  $\mathbb{R}^+$  definida por  $\sigma_1(t) = \psi u(t) \doteq \frac{\epsilon_1}{p_1} \|u(t)\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1}$ . Note que

$$\begin{aligned} \int_0^T |\psi u(t)| dt &= \int_0^T \frac{\epsilon_1}{p_1} \|u(t)\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} dt \\ &\leq \int_0^T \frac{\epsilon_1}{p_1} N_7^{p_1} dt \end{aligned}$$

logo  $\sigma_1 \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ .

Por outro lado,

$$\frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{d}{dt} \varphi_1^1 u(t) \leq \frac{d}{dt} \varphi_1^2 u(t) + \frac{k^2}{2} \|v(t)\|_2^2$$

Integrando de 0 a  $T$  obtemos

$$\int_0^T \|u_t(t)\|_2^2 dt \leq \epsilon_1 \|u_0\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \|u_0\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} + k \|u_0\|_2^2 + 2c^1 + k^2 N_4 T$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left| \frac{d}{dt} \psi u(t) \right| dt &= \int_0^T |\langle \partial \psi u(t), u_t(t) \rangle| dt \\
&= \int_0^T |\langle -u_t(t) + f^1 u(t) - k(u(t) - v(t)), u_t(t) \rangle| dt \\
&\leq \int_0^T \|u_t(t)\|_2^2 + \int_0^T |\langle f^1 u(t) - k(u(t) - v(t)), u_t(t) \rangle| dt \\
&\leq \int_0^T \|u_t(t)\|_2^2 dt + \int_0^T \|f^1 u(t) - k(u(t) - v(t))\|_2 \|u_t(t)\|_2 dt
\end{aligned}$$

o que garante que  $\frac{d\sigma_1}{dt} \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ . Portanto  $\sigma_1 \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{R})$ . E pela Proposição A.3, [4], segue que  $\sigma_1$  é absolutamente contínua.

Portanto a aplicação  $t \mapsto \|u(t)\|_{W_0^{1,p_1}}$  é contínua. Assim, seja  $t_n \rightarrow t_0$ . Pelo que provamos acima

$$\|u(t_n)\|_{W_0^{1,p_1}} \rightarrow \|u(t_0)\|_{W_0^{1,p_1}}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Mas

$$\|u(t)\|_{W_0^{1,p_1}} + \|v(t)\|_{W_0^{1,p_2}} \leq N_7$$

para todo  $t \geq 0$ . Logo existe uma subsequência ainda denotada por  $\{u(t_n)\}$  tal que  $u(t_n) \rightharpoonup w$  em  $W_0^{1,p_1}$ , para alguma função  $w \in W_0^{1,p_1}$ .

Como  $u(t_n) \rightarrow u(t_0)$  em  $L^2(0, 1)$ , visto que  $u \in C([0, T]; L^2(0, 1))$ , temos que  $w = u(t_0)$ . De modo análogo temos que  $v(t_n) \rightharpoonup v(t_0)$  em  $W_0^{1,p_2}$ .

Portanto

$$(u(t_n), v(t_n)) \rightarrow (u(t_0), v(t_0))$$

em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ . ■

**Lema 4.11** *Se  $(u_0^n, v_0^n) \rightarrow (u_0, v_0)$  em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , então para todo  $t > 0$*

$$(u_n(t), v_n(t)) \rightarrow (u(t), v(t))$$

em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  onde  $(u_n(\cdot), v_n(\cdot))$  e  $(u(\cdot), v(\cdot))$  são soluções de (S) com dados iniciais  $(u_0^n, v_0^n)$  e  $(u_0, v_0)$ , respectivamente.

**Demonstração:** De forma análoga ao que foi feito na demonstração do Lema 4.7 temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_n - u\|_2^2 + \|v_n - v\|_2^2) \leq C (\|u_n - u\|_2^2 + \|v_n - v\|_2^2)$$

onde  $C \doteq \max\{C_1, C_2\}$  e  $C_i \doteq \frac{r_i(q_i - 1) \frac{q_i + r_i - 2}{r_i}}{q_i + r_i - 2}$ ,  $i = 1, 2$ . Integrando de 0 a  $t$  obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u(t)\|_2^2 &+ \|v_n(t) - v(t)\|_2^2 \\
&\leq (\|u_0^n - u_0\|_2^2 + \|v_0^n - v_0\|_2^2) \\
&+ \int_0^t 2C (\|u_n(s) - u(s)\|_2^2 + \|v_n(s) - v(s)\|_2^2) ds
\end{aligned}$$

Por Gronwall,

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\|_2^2 + \|v_n(t) - v(t)\|_2^2 \\ \leq (\|u_0^n - u_0\|_2^2 + \|v_0^n - v_0\|_2^2)e^{2Ct} \end{aligned}$$

o que garante que

$$\|u_n(t) - u(t)\|_2^2 + \|v_n(t) - v(t)\|_2^2 \rightarrow 0$$

para cada  $t > 0$ .

Portanto  $(u_n(t), v_n(t)) \rightarrow (u(t), v(t))$  em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , para todo  $t > 0$ . ■

**Lema 4.12** *Se  $(u_0^n, v_0^n) \rightarrow (u_0, v_0)$  em  $W_0^{1,p_1}(0, 1) \times W_0^{1,p_2}(0, 1)$ , então para todo  $t > 0$*

$$(u_n(t), v_n(t)) \rightarrow (u(t), v(t))$$

em  $W_0^{1,p_1}(0, 1) \times W_0^{1,p_2}(0, 1)$  onde  $(u_n(\cdot), v_n(\cdot))$  e  $(u(\cdot), v(\cdot))$  são soluções de (S) com dados iniciais  $(u_0^n, v_0^n)$  e  $(u_0, v_0)$ , respectivamente.

**Demonstração:** Note que pela Desigualdade de Tartar,

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \gamma_1 \|u_n(s) - u(s)\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} &\leq -\epsilon_1 \int_0^1 \langle \Delta_{p_1} u_n(s) - \Delta_{p_1} u(s), u_n(s) - u(s) \rangle dx \\ &\leq -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(s) - u(s)\|_2^2 \\ &\quad + C \|u_n(s) - u(s)\|_2^2 \\ &\quad - k \|u_n(s) - u(s)\|_2^2 \\ &\quad + \frac{k}{2} \|u_n(s) - u(s)\|_2^2 + \frac{k}{2} \|v_n(s) - v(s)\|_2^2 \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} \epsilon_2 \gamma_2 \|v_n(s) - v(s)\|_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} &\leq -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_n(s) - v(s)\|_2^2 \\ &\quad + C \|v_n(s) - v(s)\|_2^2 \\ &\quad - k \|v_n(s) - v(s)\|_2^2 \\ &\quad + \frac{k}{2} \|u_n(s) - u(s)\|_2^2 + \frac{k}{2} \|v_n(s) - v(s)\|_2^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \gamma_1 \|u_n(s) - u(s)\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \epsilon_2 \gamma_2 \|v_n(s) - v(s)\|_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} \\ \leq -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_n(s) - u(s)\|_2^2 + \|v_n(s) - v(s)\|_2^2) \\ + C (\|u_n(s) - u(s)\|_2^2 + \|v_n(s) - v(s)\|_2^2) \end{aligned}$$

Integrando de 0 a  $t$  obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \gamma_1 \int_0^t \|u_n(s) - u(s)\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} ds + \epsilon_2 \gamma_2 \int_0^t \|v_n(s) - v(s)\|_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} ds \\ \leq \frac{1}{2} (\|u_0^n - u_0\|_2^2 + \|v_0^n - v_0\|_2^2) \\ + \int_0^t C \|u_n(s) - u(s)\|_2^2 ds \\ + \int_0^t C \|v_n(s) - v(s)\|_2^2 ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Portanto,

$$\int_0^t \|u_n(s) - u(s)\|_{W_0^{1,p_1}(0,1)}^{p_1} ds \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_0^t \|v_n(s) - v(s)\|_{W_0^{1,p_2}(0,1)}^{p_2} ds \rightarrow 0$$

ou seja,  $u_n \rightarrow u$  em  $L^{p_1}(0, T; W_0^{1,p_1})$  e  $v_n \rightarrow v$  em  $L^{p_2}(0, T; W_0^{1,p_2})$ . Logo existe uma subsequência ainda denotada por  $\{(u_n, v_n)\}$  tal que

$$(u_n(t), v_n(t)) \rightarrow (u(t), v(t)) \quad \text{em} \quad W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$$

qtp em  $[0, T]$ .

Vamos agora mostrar que  $(u_n(t), v_n(t)) \rightarrow (u(t), v(t))$  em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ , para todo  $t$  em  $[0, T]$ . Denote por  $A$  o subconjunto de  $[0, T]$  tal que

$$(u_n(t), v_n(t)) \rightarrow (u(t), v(t)) \quad \text{em} \quad W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$$

para todo  $t \in A$ . Tome  $t_0 \in [0, T] \setminus A$ . Vamos mostrar que

$$\|u_n(t_0)\|_{W_0^{1,p_1}} \rightarrow \|u(t_0)\|_{W_0^{1,p_1}} \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

De fato, seja  $\psi_1 x \doteq \frac{\epsilon_1}{p_1} \|x\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1}$ , para todo  $x \in L^2(0, 1)$ , então

$$\begin{aligned} |\psi_1 u_n(t) - \psi_1 u(t)| &\leq |\psi_1 u_n(t) - \psi_1 u_n(\theta)| \\ &\quad + |\psi_1 u_n(\theta) - \psi_1 u(\theta)| \\ &\quad + |\psi_1 u(\theta) - \psi_1 u(t)| \\ &\leq \left| \int_\theta^t \left\langle \partial \psi_1 u_n(s), \frac{d}{dt} u_n(s) \right\rangle ds \right| \\ &\quad + |\psi_1 u_n(\theta) - \psi_1 u(\theta)| \\ &\quad + \left| \int_\theta^t \left\langle \partial \psi_1 u(s), \frac{d}{dt} u(s) \right\rangle ds \right| \end{aligned}$$

Escolhendo  $\theta$  suficientemente próximo de  $t$  de modo que  $\psi_1 u_n(\theta) \rightarrow \psi_1 u(\theta)$  podemos concluir que  $\psi_1 u_n(t) \rightarrow \psi_1 u(t)$  para todo  $t \in [0, T]$ , uma vez que  $\left\langle \partial \psi_1 u_n(s), \frac{d}{dt} u_n(s) \right\rangle$  é uniformemente limitado. Resultado análogo pode ser mostrado para  $\{v_n\}$ .

Por outro lado temos que  $(u_n(t), v_n(t)) \rightarrow (u(t), v(t))$  em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ , para todo  $t \geq 0$ , uma vez que  $\|u(t)\|_{W_0^{1,p_1}} + \|v(t)\|_{W_0^{1,p_2}} \leq N_7$  e  $(u_n(t), v_n(t)) \rightarrow (u(t), v(t))$  em  $L^2 \times L^2$ , para todo  $t \geq 0$ .

Portanto  $(u_n(t), v_n(t)) \rightarrow (u(t), v(t))$  em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ , em  $[0, T]$ . ■

Agora podemos definir o semigrupo associado ao sistema (S). Com esta finalidade, defina para cada  $t \in \mathbb{R}_+$  fixo, a aplicação  $S(t) : W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2} \rightarrow W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$  por  $S(t)(u_0, v_0) = (u(t), v(t))$  onde  $(u(t), v(t))$  é a solução do sistema (S) com dado inicial  $(u_0, v_0)$ , no instante  $t$ . Como vimos anteriormente, para cada  $t > 0$  fixo, a aplicação  $S(t)$  é contínua, e a unicidade de solução garante que a família  $\{S(t); t \in \mathbb{R}_+\}$  possui a propriedade do semigrupo. Assim a família  $\{S(t); t \in \mathbb{R}_+\}$  define um semigrupo pontualmente contínuo, segundo [19].

**Lema 4.13** *O semigrupo  $\{S(t); t \in \mathbb{R}_+\}$  pertence à classe  $K$ , ou seja, para cada  $t > 0$  o operador  $S(t)$  é compacto.*

**Demonstração:** Com efeito, seja  $B \subset W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$  um subconjunto limitado, arbitrário. Então existe  $N > 0$  tal que para todo  $(x, y) \in B$

$$\|x\|_{W_0^{1,p_1}} + \|y\|_{W_0^{1,p_2}} \leq N$$

Queremos mostrar que  $S(t)B$  é precompacto para todo  $t > 0$ .

Seja  $\{(u_0^n, v_0^n)\} \subset B$  uma sequência arbitrária. Como  $\|u_0^n\|_{W_0^{1,p_1}} \leq N$  e  $\|v_0^n\|_{W_0^{1,p_2}} \leq N$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe uma subsequência, ainda denotada por  $\{(u_0^n, v_0^n)\}$  e um elemento  $(u_0, v_0) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  tal que

$$(u_0^n, v_0^n) \rightarrow (u_0, v_0) \quad \text{em} \quad L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$$

e

$$(u_0^n, v_0^n) \rightharpoonup (u_0, v_0) \quad \text{em} \quad W_0^{1,p_1}(0, 1) \times W_0^{1,p_2}(0, 1).$$

Segue da continuidade da aplicação  $S(t)$  que

$$S(t)(u_0^n, v_0^n) \rightarrow S(t)(u_0, v_0) \quad \text{em} \quad L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$$

e além disso

$$S(t)(u_0^n, v_0^n) \rightharpoonup S(t)(u_0, v_0) \quad \text{em} \quad W_0^{1,p_1}(0, 1) \times W_0^{1,p_2}(0, 1)$$

uma vez que  $\{(u_n(t), v_n(t))\}$  é limitado em  $W_0^{1,p_1}(0, 1) \times W_0^{1,p_2}(0, 1)$ .

Logo,

$$\begin{aligned} & \tilde{\epsilon}\tilde{\gamma}(\|u_n(s) - u(s)\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \|v_n(s) - v(s)\|_{W_0^{1,p_2}}^{p_2}) \\ & \leq -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_n(s) - u(s)\|_2^2 + \|v_n(s) - v(s)\|_2^2) \\ & + C(\|u_n(s) - u(s)\|_2^2 + \|v_n(s) - v(s)\|_2^2) \end{aligned}$$

onde  $\tilde{\epsilon}\tilde{\gamma} \doteq \min\{\epsilon_1\gamma_1, \epsilon_2\gamma_2\}$ .

Integrando de 0 a  $t$  obtemos

$$\begin{aligned} & \tilde{\epsilon}\tilde{\gamma} \int_0^t (\|u_n(s) - u(s)\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \|v_n(s) - v(s)\|_{W_0^{1,p_2}}^{p_2}) ds \\ & \leq \frac{1}{2} (\|u_0^n(s) - u_0(s)\|_2^2 + \|v_0^n(s) - v_0(s)\|_2^2) \\ & + \int_0^t C(\|u_n(s) - u(s)\|_2^2 + \|v_n(s) - v(s)\|_2^2) \end{aligned}$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\int_0^t (\|u_n(s) - u(s)\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \|v_n(s) - v(s)\|_{W_0^{1,p_2}}^{p_2}) \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Assim existe uma subsequência ainda denotada por  $(u_n, v_n)$  tal que

$$\|u_n(t) - u(t)\|_{W_0^{1,p_1}} + \|v_n(t) - v(t)\|_{W_0^{1,p_2}} \rightarrow 0$$

qtp em  $[0, T]$ . Usando o mesmo argumento usado no Lema 4.12 temos que

$$\|u_n(t) - u(t)\|_{W_0^{1,p_1}} + \|v_n(t) - v(t)\|_{W_0^{1,p_2}} \rightarrow 0$$

para todo  $t \in (0, T]$ .

Portanto, dado  $\{(u_0^n, v_0^n)\} \subset B$  existe uma subsequência ainda denotada por  $\{(u_0^n, v_0^n)\}$  e  $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p_1}(0, 1) \times W_0^{1,p_2}(0, 1)$  tal que

$$S(t)(u_0^n, v_0^n) \rightarrow S(t)(u_0, v_0)$$

em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ , ou seja,  $\{S(t)B\}$  é precompacto em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ , para todo  $t > 0$ . ■

Uma vez provado que o semigrupo  $\{S(t); t \in \mathbb{R}_+\}$  é de classe  $K$  e dissipativo, segue do Teorema 5.2, a existência de um atrator global minimal,  $\mathcal{A}$ , em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ , para o semigrupo  $\{S(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ . Tal atrator é ainda compacto e invariante.

**Observação 4.3** Denotaremos por  $\mathcal{A}_n$  o atrator de  $\{S_n(t)\}$  associado ao sistema  $(S_n)$ , com parâmetros  $\epsilon_i^n, p_i^n, q_i^n, r_i^n$  e  $k$ , onde  $i = 1, 2$ .

### 4.1.3 Existência de Funcional de Lyapunov para $S(t)$

Os sistemas gradientes formam uma classe especial de sistemas, para os quais a estrutura do fluxo no atrator global pode ser descrita com mais detalhe, [15]. Esta subseção tem por objetivo provar que o semigrupo associado ao sistema  $(S)$  é um sistema gradiente. Com isto será possível garantir a existência de solução para o sistema elíptico

$$(SEL) \begin{cases} -\epsilon_1(|u_x|^{p_1-2} u_x)_x = |u|^{q_1-2} u(1 - |u|^{r_1}) - k(u - v) \\ -\epsilon_2(|v_x|^{p_2-2} v_x)_x = |v|^{q_2-2} v(1 - |v|^{r_2}) + k(u - v) \end{cases}$$

Começaremos definindo um sistema gradiente. No que segue considere  $X$  um espaço métrico completo, e para mais detalhes veja [15].

**Definição 4.1** Um  $C^r$ -semigrupo fortemente contínuo  $T(t) : X \rightarrow X$ ,  $t \geq 0$ ,  $r \geq 1$ , é um sistema gradiente se

1. Cada órbita positiva limitada é precompacta.
2. Existe um Funcional de Lyapunov para  $T(t)$ ; isto é, existe uma função contínua  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  com as seguintes propriedades
  - $V(x)$  é limitada inferiormente,
  - $V(x) \rightarrow +\infty$  quando  $|x| \rightarrow +\infty$ ,
  - $V(T(t)x)$  é não crescente em  $t$  para cada  $x \in X$ ,

- se  $x$  é tal que  $T(t)x$  está definido para  $t \in \mathbb{R}$  e  $V(T(t)x) = V(x)$  para  $t \in \mathbb{R}$ , então  $x$  é um ponto de equilíbrio.

Primeiramente vamos construir um Funcional de Lyapunov para o semigrupo associado ao sistema  $(S)$ . Defina a aplicação  $V : W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$V(\omega, \bar{\omega}) = \varphi_1^1(\omega) + \varphi_2^1(\bar{\omega}) - \varphi_1^2(\omega) - \varphi_2^2(\bar{\omega}) - k\langle \omega, \bar{\omega} \rangle_{L^2}$$

onde  $\varphi_i^1$  e  $\varphi_i^2$  são definidas na seção 4.1.1, para  $i = 1, 2$ .

Vamos provar que  $V$  é um Funcional de Lyapunov para o semigrupo  $\{S(t)\}$  associado ao sistema  $(S)$  da seção 4.1.1.

**Lema 4.14**  $V$  é uma aplicação contínua.

**Demonstração:** De fato, seja  $\{(\omega_n, \bar{\omega}_n)\} \subset W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$  e  $(\omega, \bar{\omega}) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$  tal que

$$(\omega_n, \bar{\omega}_n) \rightarrow (\omega, \bar{\omega})$$

em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ . Queremos mostrar que  $V(\omega_n, \bar{\omega}_n) \rightarrow V(\omega, \bar{\omega})$ . Temos

$$\|\omega_n - \omega\|_{W_0^{1,p_1}} + \|\bar{\omega}_n - \bar{\omega}\|_{W_0^{1,p_2}} = \|(\omega_n, \bar{\omega}_n) - (\omega, \bar{\omega})\|_{W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}} \rightarrow 0$$

consequentemente

$$\omega_n \rightarrow \omega \quad \text{e} \quad \bar{\omega}_n \rightarrow \bar{\omega}$$

em  $L^s(0, 1)$  para qualquer  $s \geq 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_1^1(\omega_n) &= \frac{\epsilon_1}{p_1} \|\omega_n\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \frac{1}{q_1 + r_1} \|\omega_n\|_{q_1 + r_1}^{q_1 + r_1} + \frac{k}{2} \|\omega_n\|_2^2 \\ &\rightarrow \frac{\epsilon_1}{p_1} \|\omega\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \frac{1}{q_1 + r_1} \|\omega\|_{q_1 + r_1}^{q_1 + r_1} + \frac{k}{2} \|\omega\|_2^2 = \varphi_1^1(\omega) \end{aligned}$$

e

$$\varphi_1^2(\omega_n) = \frac{1}{q_1} \|\omega_n\|_{q_1}^{q_1} \rightarrow \frac{1}{q_1} \|\omega\|_{q_1}^{q_1} = \varphi_1^2(\omega)$$

Analogamente,  $\varphi_2^1(\bar{\omega}_n) \rightarrow \varphi_2^1(\bar{\omega})$  e  $\varphi_2^2(\bar{\omega}_n) \rightarrow \varphi_2^2(\bar{\omega})$ . E ainda

$$\langle \omega_n, \bar{\omega}_n \rangle_{L^2} \rightarrow \langle \omega, \bar{\omega} \rangle_{L^2}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto  $V$  é contínua. ■

**Lema 4.15**  $V$  é limitada inferiormente.

**Demonstração:** Para qualquer  $(\omega, \bar{\omega}) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$  temos, usando a Desigualdade de

Young

$$\begin{aligned}
V(\omega, \bar{\omega}) &= \varphi_1^1(\omega) + \varphi_2^1(\bar{\omega}) - \varphi_1^2(\omega) - \varphi_2^2(\bar{\omega}) - k\langle \omega, \bar{\omega} \rangle_{L^2} \\
&= \frac{\epsilon_1}{p_1} \|\omega\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \frac{1}{q_1 + r_1} \|\omega\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} + \frac{k}{2} \|\omega\|_2^2 \\
&+ \frac{\epsilon_2}{p_2} \|\bar{\omega}\|_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} + \frac{1}{q_2 + r_2} \|\bar{\omega}\|_{q_2+r_2}^{q_2+r_2} + \frac{k}{2} \|\bar{\omega}\|_2^2 \\
&- \frac{1}{q_1} \|\omega\|_{q_1}^{q_1} - \frac{1}{q_2} \|\bar{\omega}\|_{q_2}^{q_2} - k\langle \omega, \bar{\omega} \rangle_{L^2} \\
&\geq \frac{\epsilon_1}{p_1} \|\omega\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \frac{\epsilon_2}{p_2} \|\bar{\omega}\|_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} \\
&+ \frac{1}{q_1 + r_1} \|\omega\|_{q_1+r_1}^{q_1+r_1} + \frac{k}{2} \|\omega\|_2^2 + \frac{1}{q_2 + r_2} \|\bar{\omega}\|_{q_2+r_2}^{q_2+r_2} \\
&+ \frac{k}{2} \|\bar{\omega}\|_2^2 - \frac{1}{q_1} \|\omega\|_{q_1}^{q_1} - \frac{1}{q_2} \|\bar{\omega}\|_{q_2}^{q_2} - k|\langle \omega, \bar{\omega} \rangle_{L^2}| \\
&\geq \frac{\epsilon_1}{p_1} \|\omega\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \frac{\epsilon_2}{p_2} \|\bar{\omega}\|_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} - \frac{r_1}{q_1(q_1 + r_1)} - \frac{r_2}{q_2(q_2 + r_2)} \\
&\geq -\frac{r_1}{q_1(q_1 + r_1)} - \frac{r_2}{q_2(q_2 + r_2)}
\end{aligned}$$

Portanto  $V$  é limitada inferiormente. ■

**Lema 4.16**  $V(\omega, \bar{\omega}) \rightarrow \infty$  se  $\|(\omega, \bar{\omega})\|_{W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}} \rightarrow \infty$ .

**Demonstração:** De fato, segue da demonstração do Lema 4.15 que para qualquer  $(\omega, \bar{\omega}) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$

$$V(\omega, \bar{\omega}) \geq \frac{\epsilon_1}{p_1} \|\omega\|_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} + \frac{\epsilon_2}{p_2} \|\bar{\omega}\|_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} - \frac{r_1}{q_1(q_1 + r_1)} - \frac{r_2}{q_2(q_2 + r_2)} \rightarrow \infty$$

se  $\|(\omega, \bar{\omega})\|_{W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}} \rightarrow \infty$ . ■

**Lema 4.17**  $V(S(t)(u_0, v_0))$  é não crescente em  $t$  para cada  $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ .

**Demonstração:** Seja  $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$  fixo, mas arbitrário. Denotando por  $(u(t), v(t)) \doteq S(t)(u_0, v_0)$  temos

$$\begin{aligned}
\frac{V(u(t+h), v(t+h)) - V(u(t), v(t))}{h} &= \frac{(\varphi_1^1 u(t+h) - \varphi_1^1 u(t))}{h} \\
&+ \frac{(\varphi_2^1 v(t+h) - \varphi_2^1 v(t))}{h} \\
&- \frac{(\varphi_1^2 u(t+h) - \varphi_1^2 u(t))}{h} \\
&- \frac{(\varphi_2^2 v(t+h) - \varphi_2^2 v(t))}{h} \\
&- k \frac{\langle u(t+h) - u(t), v(t+h) \rangle}{h} \\
&- k \frac{\langle u(t), v(t+h) - v(t) \rangle}{h}
\end{aligned}$$

Fazendo  $h \rightarrow 0$  obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(u(t+h), v(t+h)) - V(u(t), v(t))}{h} &= \frac{d}{dt} \varphi_1^1(u(t)) - \frac{d}{dt} \varphi_2^1(v(t)) - \frac{d}{dt} \varphi_1^2(u(t)) - \frac{d}{dt} \varphi_2^2(v(t)) \\
&- k \langle u_t(t), v(t) \rangle - k \langle u(t), v_t(t) \rangle \\
&= -\|u_t(t)\|_2^2 - \|v_t(t)\|_2^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Portanto existe  $\frac{d}{dt}V(u(t), v(t))$  e  $\frac{d}{dt}V(u(t), v(t)) \leq 0$ . Logo  $V(u(t), v(t))$  é não crescente em  $t$  para cada  $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ . ■

**Lema 4.18** *Se  $(u_0, v_0)$  é tal que  $S(t)(u_0, v_0)$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}_+$  e*

$$V(S(t)(u_0, v_0)) = V(u_0, v_0)$$

*para cada  $t \in \mathbb{R}_+$  então  $(u_0, v_0)$  é um ponto de equilíbrio.*

**Demonstração:** Seja  $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$  nas condições do enunciado. Então a aplicação  $V(u(t), v(t))$  é constante em  $t$  e portanto  $\frac{d}{dt}V(u(t), v(t)) = 0$ . Mas

$$\frac{d}{dt}V(u(t), v(t)) = -\|u_t(t)\|_2^2 - \|v_t(t)\|_2^2$$

o que implica que  $u_t = 0$  e  $v_t = 0$  para cada  $t \in \mathbb{R}_+$ . Logo  $(u(t), v(t))$  é constante em  $t$ , ou seja  $(u(t), v(t)) = (u_0, v_0)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ . ■

Concluimos assim que  $V$  é um Funcional de Lyapunov para  $S(t)$ . O próximo passo será mostrar que cada órbita positiva limitada é precompacta.

**Lema 4.19** *Para cada  $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ ,  $\{S(t)(u_0, v_0)\}_{t \geq 0}$  é limitado em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ .*

**Demonstração:** Fixe  $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$  arbitrário. Segue dos Lemas 4.15 e 4.17 que para todo  $t > 0$

$$-\frac{r_1}{q_1(q_1 + r_1)} - \frac{r_2}{q_2(q_2 + r_2)} \leq V(S(t)(u_0, v_0)) \leq V(u_0, v_0)$$

ou seja,  $\{V(S(t)(u_0, v_0))\}_{t \geq 0}$  é limitado em  $\mathbb{R}$ .

Suponha, por absurdo, que  $\{S(t)(u_0, v_0)\}_{t \geq 0}$  não é limitado em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ . Então existe uma sequência  $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$  tal que

$$\|S(t_n)(u_0, v_0)\|_{W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}} \rightarrow \infty$$

e pelo Lema 4.16

$$V(S(t_n)(u_0, v_0)) \rightarrow \infty$$

o que é um absurdo pois  $\{V(S(t)(u_0, v_0))\}_{t \geq 0}$  é limitado.

Portanto  $\{S(t)(u_0, v_0)\}_{t \geq 0}$  é limitado, para cada  $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ . ■

Para concluir que  $\{S(t)\}$  é um sistema gradiente resta provar que cada órbita positiva limitada, por  $S(t)$ , é precompacta.

**Lema 4.20** *Para cada  $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ ,  $\{S(t)(u_0, v_0)\}_{t \geq 0}$  é precompacto em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ .*

**Demonstração:** De fato, seja  $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$  uma sequência arbitrária. Se  $\{t_n\}$  é uma sequência limitada, então existe  $t_0 \in \mathbb{R}_+$  e uma subsequência ainda denotada por  $\{t_n\}$  tal que  $t_n \rightarrow t_0$ . Pela continuidade da aplicação  $S(\cdot)(u_0, v_0)$  temos que  $S(t_n)(u_0, v_0) \rightarrow S(t_0)(u_0, v_0)$  e portanto a sequência  $S(t_n)(u_0, v_0)$  tem subsequência convergente em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ .

Se  $\{t_n\}$  não é limitada, então existe uma subsequência ainda denotada por  $\{t_n\}$  tal que  $t_n \rightarrow \infty$ . Por outro lado, dado  $l \in \mathbb{N}$ , existe  $t_l = t(l, (u_0, v_0))$  tal que

$$S(t)(u_0, v_0) \in \mathcal{O}_{\frac{1}{l}}(A) \quad \forall t \geq t_l$$

onde  $A$  é o atrator de  $S(t)$ .

Como  $t_n \rightarrow \infty$ , para cada  $l \in \mathbb{N}$  podemos tomar  $t_{n_l} \in \{t_n\}$  tal que  $t_{n_l} \geq t_l$  e  $(\omega_l, \bar{\omega}_l) \in A$  tal que

$$\|S(t_{n_l})(u_0, v_0) - (\omega_l, \bar{\omega}_l)\|_{W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}} < \frac{1}{l}$$

e sem perda de generalidade podemos escolher

$$t_{n_1} < t_{n_2} < t_{n_3} < \dots < t_{n_l} < \dots$$

Desta forma obtemos sequências  $t_{n_l} \rightarrow \infty$  e  $\{(\omega_l, \bar{\omega}_l)\} \subset A$ . Mas  $A$  é compacto em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ , logo existe uma subsequência ainda denotada por  $(\omega_l, \bar{\omega}_l)$  e  $(\omega_0, \bar{\omega}_0)$  tal que

$$(\omega_l, \bar{\omega}_l) \rightarrow (\omega_0, \bar{\omega}_0)$$

em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|S(t_{n_l})(u_0, v_0) - (\omega_0, \bar{\omega}_0)\|_{W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}} &\leq \|S(t_{n_l})(u_0, v_0) - (\omega_l, \bar{\omega}_l)\|_{W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}} \\ &+ \|(\omega_l, \bar{\omega}_l) - (\omega_0, \bar{\omega}_0)\|_{W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}} \\ &\leq \frac{1}{l} + \|(\omega_l, \bar{\omega}_l) - (\omega_0, \bar{\omega}_0)\|_{W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $l \rightarrow \infty$ . Concluimos assim que  $\{S(t)(u_0, v_0)\}_{t \geq 0}$  é precompacto em  $W_0^{1,p_1} \times W_0^{1,p_2}$ .

■

Portanto o semigrupo  $\{S(t)\}$  é um sistema gradiente. E segue do Lema 3.8.2, [15], e do Teorema 2.3, [19], que o sistema  $(SEI)$  possui solução.

#### 4.1.4 Semicontinuidade superior dos atratores $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Nesta seção provaremos que a família de atratores  $\{\mathcal{A}_n\}$  é semicontínua superiormente, quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,

$$d(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_L) \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ , onde  $\mathcal{A}_L$  é o atrator associado ao sistema limite  $(SL)$  dado por

$$(SL) \begin{cases} u_t = \epsilon(|u_x|^{p-2} u_x)_x + |u|^{q-2} u(1 - |u|^r) - k(u - v) \\ v_t = \epsilon(|v_x|^{p-2} v_x)_x + |v|^{q-2} v(1 - |v|^r) + k(u - v) \end{cases}$$

Esta informação nos auxiliará a provar posteriormente a  $\epsilon$ -sincronicidade. Para garantir tal continuidade, mostraremos inicialmente a continuidade do fluxo.

**Lema 4.21** *Seja  $\{S_n^i(t) : L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1); t \geq 0\}$  o semigrupo gerado por  $-\epsilon_i^n \Delta_{p_i^n}$ , e  $(u^n, v^n)$  solução de  $(S_n)$ . Então*

$$\|S_n^1(h)u^n(t) - u^n(t)\|_2 \rightarrow 0 \quad e \quad \|S_n^2(h)v^n(t) - v^n(t)\|_2 \rightarrow 0$$

quando  $h \rightarrow 0$  uniformemente para  $n \in \mathbb{N}$ , para cada  $t > 0$ . Além disso, se  $T > 0$  obtemos

$$\|u^n(T-h) - S_n^1(h)u^n(T-h)\|_2 \rightarrow 0$$

e

$$\|v^n(T-h) - S_n^2(h)v^n(T-h)\|_2 \rightarrow 0$$

quando  $h \rightarrow 0$ , uniformemente para  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Segue do Teorema 2.1.1, [30], que

$$\|S_n^1(h)u^n(t) - u^n(t)\|_2 \leq 3\|J_h^n u^n(t) - u^n(t)\|_2 \quad (4.5)$$

onde  $J_h^n$  é o resolvente de  $-\epsilon_1^n \Delta_{p_1^n}$ . Pela Proposição 2.11, [4],

$$\frac{h}{2} \|(\partial \psi_n^1)_h u^n(t)\|_2^2 + \psi_n^1(J_h^n u^n(t)) \equiv \min_{y \in L^2(0,1)} \left\{ \frac{1}{2h} \|y - u^n(t)\|_2^2 + \psi_n^1(y) \right\}$$

e em particular para  $y = u^n(t)$

$$\|J_h^n u^n(t) - u^n(t)\|_2 \leq \sqrt{2hR_1} \quad (4.6)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $h > 0$  uma vez que  $\{\|u^n(t)\|_{W_0^{1,p_1^n}}\}$  é limitado, pelo Lema 4.9. De (4.5) e (4.6) segue que

$$\|S_n^1(h)u^n(t) - u^n(t)\|_2 \leq 3\sqrt{2hR_1} \rightarrow 0 \quad (4.7)$$

quando  $h \rightarrow 0$  uniformemente para  $n \in \mathbb{N}$ . Do mesmo modo mostra-se que

$$\|S_n^2(h)v^n(t) - v^n(t)\|_2 \rightarrow 0$$

quando  $h \rightarrow 0$  uniformemente para  $n \in \mathbb{N}$ . A prova de que

$$\|u^n(T-h) - S_n^1(h)u^n(T-h)\|_2 \rightarrow 0$$

e

$$\|v^n(T-h) - S_n^2(h)v^n(T-h)\|_2 \rightarrow 0$$

quando  $h \rightarrow 0$ , uniformemente para  $n \in \mathbb{N}$  segue de forma inteiramente análoga. ■

**Teorema 4.1** *O conjunto  $M^n \doteq \{(u^n, v^n); (u^n, v^n) \text{ é solução de } (S_n), n \in \mathbb{N}\}$  é relativamente compacto em  $C([0, T]; L^2(0,1)) \times C([0, T]; L^2(0,1))$ .*

**Demonstração:** Seja  $t \in [0, T)$  e  $h > 0$  tal que  $T - h, t + h \in [0, T]$ . Temos,

$$\begin{aligned} \|u^n(t+h) - u^n(t)\|_2 &\leq \|u^n(t+h) - S_n^1(h)u^n(t)\|_2 \\ &+ \|S_n^1(h)u^n(t) - u^n(t)\|_2 \end{aligned}$$

Seja  $v_h^n : [t, t+h] \rightarrow L^2(0, 1)$  a única solução de

$$\begin{cases} \frac{dv_h^n}{d\tau}(\tau) - \epsilon_n^1 \Delta_{p_1^n} v_h^n(\tau) = 0 & t \leq \tau \leq t+h \\ v_h^n(t) = u^n(t) \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_h^n(s) - u^n(s)\|_2^2 &\leq \|f_n^1 u^n(s) - k(u^n(s) - v^n(s))\|_2 \|v_h^n(s) - u^n(s)\|_2 \\ &\leq N_4^{\frac{1}{2}} (\bar{C} + 2k) \|v_h^n(s) - u^n(s)\|_2 \end{aligned}$$

Integrando de  $t$  a  $t+h$  e usando a Desigualdade de Gronwall obtemos

$$\|v_h^n(t+h) - u^n(t+h)\|_2 \leq R_2 h \quad (4.8)$$

com  $R_2 \doteq N_4^{\frac{1}{2}} (\bar{C} + 2k)$ . De (4.7) e (4.8) segue que

$$\begin{aligned} \|u^n(t+h) - u^n(t)\|_2 &\leq \|u^n(t+h) - S_n^1(h)u^n(t)\|_2 \\ &+ \|S_n^1(h)u^n(t) - u^n(t)\|_2 \\ &\leq R_2 h + 3\sqrt{2hR_1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $h \rightarrow 0$  uniformemente para  $n \in \mathbb{N}$ .

Do mesmo modo mostra-se que

$$\|u^n(T-h) - u^n(T)\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|v^n(T-h) - v^n(T)\|_2 \rightarrow 0$$

quando  $h \rightarrow 0$  uniformemente para  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto o conjunto

$$M^n \doteq \{(u^n, v^n); (u^n, v^n) \text{ é solução de } (S_n), n \in \mathbb{N}\}$$

é equicontínuo em  $[0, T]$ .

O próximo passo será provar que para cada  $t \in (0, T]$ , o conjunto

$$M^n(t) \doteq \{(u^n(t), v^n(t)); (u^n, v^n) \text{ é solução de } (S_n), n \in \mathbb{N}\}$$

é relativamente compacto em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

Com efeito, pelo Lema 4.9

$$\|u^n(t)\|_{W_0^{1,p_1^n}} + \|v^n(t)\|_{W_0^{1,p_2^n}} \leq N_7$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\|u^n(t)\|_{W_0^{1,2}} + \|v^n(t)\|_{W_0^{1,2}} \leq N_7$  e como  $W_0^{1,2}$  está compactamente imerso em  $L^2(0, 1)$ , segue que  $\{(u^n(t), v^n(t))\}$  é relativamente compacto em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

Finalmente, observando que  $M^n(0, 0) = \{(u_0, v_0)\}$  é relativamente compacto em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , concluímos pelo Teorema de Ascoli-Arzelá que  $M^n$  é relativamente compacto em  $C([0, T]; L^2(0, 1)) \times C([0, T]; L^2(0, 1))$ . ■

**Teorema 4.2** *Sejam  $(u^n, v^n)$  e  $(u, v)$  soluções de  $(S_n)$  e  $(SL)$ , respectivamente, com dado inicial  $(u_0, v_0) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ . Então para cada  $t > 0$*

$$\|(u^n(t), v^n(t)) - (u(t), v(t))\|_{2 \times 2} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ .

**Demonstração:** Tome  $(u_0, v_0) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ . Sabemos que existe uma solução fraca de  $(S_n)$  com dado inicial  $(u_0, v_0)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  e para  $(SL)$  também.

Fixe  $\delta > 0$  arbitrário. Como  $\delta \neq 0$  existe  $M > 0$  tal que

$$\|u^n(t)\|_{W_0^{1,p_1^n}} + \|v^n(t)\|_{W_0^{1,p_2^n}} \leq M$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $t \geq \delta$ , e além disso,  $(u^n(\delta), v^n(\delta)) \in W_0^{1,p_1^n} \times W_0^{1,p_2^n}$ . Considere os novos sistemas

$$(S_n) \begin{cases} \bar{u}_t^n = \epsilon_1^n (|\bar{u}_x^n|^{p_1^n-2} \bar{u}_x^n)_x + |\bar{u}^n|^{q_1^n-2} \bar{u}^n (1 - |\bar{u}^n|^{r_1^n}) - k(\bar{u}^n - \bar{v}^n) \\ \bar{v}_t^n = \epsilon_2^n (|\bar{v}_x^n|^{p_2^n-2} \bar{v}_x^n)_x + |\bar{v}^n|^{q_2^n-2} \bar{v}^n (1 - |\bar{v}^n|^{r_2^n}) + k(\bar{u}^n - \bar{v}^n) \\ (\bar{u}^n(0), \bar{v}^n(0)) = (u^n(\delta), v^n(\delta)) \end{cases}$$

e

$$(SL) \begin{cases} \bar{u}_t = \epsilon (|\bar{u}_x|^{p-2} \bar{u}_x)_x + |\bar{u}|^{q-2} \bar{u} (1 - |\bar{u}|^r) - k(\bar{u} - \bar{v}) \\ \bar{v}_t = \epsilon (|\bar{v}_x|^{p-2} \bar{v}_x)_x + |\bar{v}|^{q-2} \bar{v} (1 - |\bar{v}|^r) + k(\bar{u} - \bar{v}) \\ (\bar{u}(0), \bar{v}(0)) = (u(\delta), v(\delta)) \end{cases}$$

e suas soluções fortes  $(\bar{u}^n, \bar{v}^n)$  e  $(\bar{u}, \bar{v})$ .

Pelo Teorema 4.1 existe  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in C([0, T]; L^2(0, 1)) \times C([0, T]; L^2(0, 1))$  e uma subsequência ainda denotada por  $\{(\bar{u}^n, \bar{v}^n)\}$  tal que

$$(\bar{u}^n, \bar{v}^n) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \text{em} \quad C([0, T]; L^2(0, 1)) \times C([0, T]; L^2(0, 1)).$$

Queremos provar que  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  é solução de  $(SL)$  com dado inicial  $(u(\delta), v(\delta))$ .

Uma vez que  $(\bar{u}^n, \bar{v}^n)$  é solução de  $(S_n)$  segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\bar{u}^n(t) - x\|_2^2 &\leq \frac{1}{2} \|\bar{u}^n(s) - x\|_2^2 \\ &+ \int_s^t \langle |\bar{u}^n(\tau)|^{q_1^n-2} \bar{u}^n(\tau) - |\bar{u}^n(\tau)|^{q_1^n+r_1^n-2} \bar{u}^n(\tau), \bar{u}^n(\tau) - x \rangle d\tau \\ &- \int_s^t \langle k(\bar{u}^n(\tau) - \bar{v}^n(\tau)) + y, \bar{u}^n(\tau) - x \rangle d\tau \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathcal{D}(-\epsilon_1^n \Delta_{p_1^n})$  e  $y = -\epsilon_1^n \Delta_{p_1^n} x$ , e para todo  $0 \leq s \leq t \leq T$ .

Vamos provar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\tilde{u}(t) - x\|_2^2 &\leq \frac{1}{2} \|\tilde{u}(s) - x\|_2^2 \\ &+ \int_s^t \langle |\tilde{u}(\tau)|^{q-2} \tilde{u}(\tau) - |\tilde{u}(\tau)|^{q+r-2} \tilde{u}(\tau), \tilde{u}(\tau) - x \rangle d\tau \\ &- \int_s^t \langle k(\tilde{u}(\tau) - \tilde{v}(\tau)) + y, \tilde{u}(\tau) - x \rangle d\tau \end{aligned} \quad (4.9)$$

para todo  $x \in \mathcal{D}(-\epsilon\Delta_p)$ ,  $y = -\epsilon\Delta_p x$  e  $0 \leq s \leq t \leq T$ , e em seguida concluir pela Proposição 3.6, [4], que  $\tilde{u}$  é solução fraca da equação  $\frac{dw}{dt} - \epsilon\Delta_p w = f$  onde

$$f(t) \doteq |\tilde{u}(t)|^{q-2}\tilde{u}(t) - |\tilde{u}(t)|^{q+r-2}\tilde{u}(t) - k\tilde{u}(t) + k\tilde{v}(t).$$

Tome  $x \in \mathcal{D}(-\epsilon\Delta_p) \subset W_0^{1,p}$ . Como  $W_0^{1,p}(0,1)$  é o fecho de  $C_c^\infty(0,1)$  em  $W^{1,p}$ , existe uma sequência  $\{x_l\} \subset C_c^\infty(0,1)$  com  $x_l \rightarrow x$  em  $W^{1,p}$ , quando  $l \rightarrow \infty$ . Note que para cada  $l \in \mathbb{N}$ ,  $x_l \in W_0^{1,s}$ , qualquer que seja  $s \geq 1$ .

Considere  $y_l^n = -\epsilon_1^n \Delta_{p_1^n} x_l$ , para cada  $l \in \mathbb{N}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\bar{u}^n(t) - x_l\|_2^2 &\leq \frac{1}{2} \|\bar{u}^n(s) - x_l\|_2^2 \\ &+ \int_s^t \langle |\bar{u}^n(\tau)|^{q_1^n-2}\bar{u}^n(\tau) - |\bar{u}^n(\tau)|^{q_1^n+r_1^n-2}\bar{u}^n(\tau), \bar{u}^n(\tau) - x_l \rangle d\tau \\ &- \int_s^t \langle k(\bar{u}^n(\tau) - \bar{v}^n(\tau)) + y_l^n, \bar{u}^n(\tau) - x_l \rangle d\tau \end{aligned}$$

para todo  $0 \leq s \leq t \leq T$ .

Certamente, quando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\|\bar{u}^n(\tau) - x_l\|_2 \rightarrow \|\tilde{u}(\tau) - x_l\|_2$$

uniformemente em  $[0, T]$ , e

$$\int_s^t \langle k\bar{u}^n(\tau) - k\bar{v}^n(\tau), \bar{u}^n(\tau) - x_l \rangle d\tau \rightarrow \int_s^t \langle k\tilde{u}(\tau) - k\tilde{v}(\tau), \tilde{u}(\tau) - x_l \rangle d\tau$$

visto que  $(\bar{u}^n, \bar{v}^n) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$  em  $C([0, T]; L^2(0, 1)) \times C([0, T]; L^2(0, 1))$ .

Além disso,

$$\begin{aligned} &\int_s^t \langle |\bar{u}^n(\tau)|^{q_1^n-2}\bar{u}^n(\tau) - |\bar{u}^n(\tau)|^{q_1^n+r_1^n-2}\bar{u}^n(\tau), \bar{u}^n(\tau) - x_l \rangle d\tau \\ &\rightarrow \int_s^t \langle |\tilde{u}(\tau)|^{q-2}\tilde{u}(\tau) - |\tilde{u}(\tau)|^{q+r-2}\tilde{u}(\tau), \tilde{u}(\tau) - x_l \rangle d\tau \end{aligned}$$

uma vez que a aplicação  $f_n^1$  é Lipschitz contínua, para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $\{p_1^n\}$  é limitada.

Resta provar que  $\int_s^t \langle y_l^n, \bar{u}^n(\tau) - x_l \rangle d\tau \rightarrow \int_s^t \langle y_l, \tilde{u}(\tau) - x_l \rangle d\tau$ , quando  $n \rightarrow \infty$  para cada  $l \in \mathbb{N}$ , onde  $y_l = -\epsilon\Delta_p x_l$ .

Começaremos provando que  $\{y_l^n\}$  é fracamente convergente em  $L^2(0, 1)$ . De fato,

$$\begin{aligned} \|y_l^n\|_2 &= \|-\epsilon_1^n \Delta_{p_1^n} x_l\|_2 \\ &= \epsilon_1^n \|(p_1^n - 1)|x_l'|^{p_1^n-2} x_l''\|_2 \\ &\leq C_l \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $C_l$  é uma constante positiva que depende de  $l$ . Note que esta limitação é possível pois as sequências  $\{\epsilon_1^n\}$  e  $\{p_1^n\}$  são limitadas em  $\mathbb{R}_+^*$ , e  $x_l \in C_c^\infty$ .

Logo a sequência  $\{y_l^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada em  $L^2(0, 1)$  e portanto podemos extrair uma subsequência ainda denotada por  $\{y_l^n\}$  que converge fracamente para algum  $y_l \in L^2(0, 1)$ .

Provemos que  $y_l = -\epsilon\Delta_p x_l$ .

Sabemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_l^n = -\epsilon_1^n \Delta_{p_1^n} x_l$ , e portanto para todo  $\xi \in L^2(0, 1)$ ,

$$\frac{\epsilon_1^n}{p_1^n} \|\xi\|_{W_0^{1,p_1^n}}^{p_1^n} \geq \frac{\epsilon_1^n}{p_1^n} \|x_l\|_{W_0^{1,p_1^n}}^{p_1^n} + \langle y_l^n, \xi - x_l \rangle$$

Mas  $\langle y_l^n, \xi - x_l \rangle \rightarrow \langle y_l, \xi - x_l \rangle$  uma vez que  $y_l^n \rightharpoonup y_l$  em  $L^2(0, 1)$ . E por outro lado, como  $x_l \in C_c^\infty$ , segue que  $|x_l'(x)|$  é limitado para todo  $x \in (0, 1)$ . Logo pelo Teorema da Convergência Dominada, e lembrando que  $\epsilon_1^n \rightarrow \epsilon$  e  $p_1^n \rightarrow p$  temos que

$$\frac{\epsilon_1^n}{p_1^n} \|x_l\|_{W_0^{1,p_1^n}}^{p_1^n} \rightarrow \frac{\epsilon}{p} \|x_l\|_{W_0^{1,p}}^p$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Agora temos que considerar dois casos:

O primeiro deles será  $\xi \in L^2 \setminus W_0^{1,p}$ . Neste caso,  $\frac{\epsilon}{p} \|\xi\|_{W_0^{1,p}}^p = \infty$ , e certamente

$$\frac{\epsilon}{p} \|\xi\|_{W_0^{1,p}}^p \geq \frac{\epsilon}{p} \|x_l\|_{W_0^{1,p}}^p + \langle y_l, \xi - x_l \rangle$$

No segundo caso  $\xi \in W_0^{1,p}$ . Se  $\xi \in W_0^{1,p}$ , existe uma sequência  $\{\xi_n\} \subset C_c^\infty$  com  $\xi_n \rightarrow \xi$  em  $W^{1,p}$ . Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\xi_n \in W_0^{1,s}$ , para todo  $s \geq 1$ , e, em particular  $\xi_n \in W_0^{1,p_1^n}$ , logo

$$\frac{\epsilon_1^n}{p_1^n} \|\xi_n\|_{W_0^{1,p_1^n}}^{p_1^n} \geq \frac{\epsilon_1^n}{p_1^n} \|x_l\|_{W_0^{1,p_1^n}}^{p_1^n} + \langle y_l^n, \xi_n - x_l \rangle \quad (4.10)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Note que

$$\langle y_l^n, \xi_n - x_l \rangle \rightarrow \langle y_l, \xi - x_l \rangle$$

pois  $y_l^n \rightharpoonup y_l$  e  $\xi_n \rightarrow \xi$  em  $L^2(0, 1)$ . Além disso, é fácil ver, usando o Teorema da Convergência Dominada, que  $\|\xi_n\|_{W_0^{1,p_1^n}}^{p_1^n} \rightarrow \|\xi\|_{W_0^{1,p}}^p$ .

Consequentemente fazendo  $n \rightarrow \infty$  em (4.10) obtemos

$$\frac{\epsilon}{p} \|\xi\|_{W_0^{1,p}}^p \geq \frac{\epsilon}{p} \|x_l\|_{W_0^{1,p}}^p + \langle y_l, \xi - x_l \rangle$$

Concluimos assim que  $y_l = \partial\psi(x_l) = -\epsilon\Delta_p x_l$ , sendo  $\psi(\xi) = \frac{\epsilon}{p} \|\xi\|_{W_0^{1,p}}^p$ .

Portanto  $-\epsilon_1^n \Delta_{p_1^n} x_l \rightharpoonup -\epsilon\Delta_p x_l$  em  $L^2(0, 1)$ , o que garante que

$$\langle y_l^n, \bar{u}^n(\tau) - x_l \rangle \rightarrow \langle y_l, \tilde{u}(\tau) - x_l \rangle$$

para todo  $\tau$ .

Provamos assim que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\tilde{u}(t) - x_l\|_2^2 &\leq \frac{1}{2} \|\tilde{u}(s) - x_l\|_2^2 \\ &+ \int_s^t \langle |\tilde{u}(\tau)|^{q-2} \tilde{u}(\tau) - |\tilde{u}(\tau)|^{q+r-2} u(\tau), \tilde{u}(\tau) - x_l \rangle d\tau \\ &- \int_s^t \langle k(\tilde{u}(\tau) - \tilde{v}(\tau)) + y_l, \tilde{u}(\tau) - x_l \rangle d\tau \end{aligned} \quad (4.11)$$

para todo  $l \in \mathbb{N}$ .

A fim de provar (4.9) fazemos  $l \rightarrow \infty$  em (4.11). Como  $x_l \rightarrow x$  em  $W^{1,p}$ , precisamos apenas provar que  $y_l \rightarrow y$  em  $W^{-1,p'}$  (0, 1), com  $y = -\epsilon \Delta_p x$ .

Note que

$$\|y_l\|_{W^{-1,p'}} = \epsilon \| -\Delta_p x_l \|_{W^{-1,p'}} \leq \|x_l\|_{W_0^{1,p}}^{p-1}$$

e como  $\{x_l\}$  é limitada em  $W^{1,p}$  segue que  $\{y_l\}$  é limitada em  $W^{-1,p'}$ . E sendo  $W^{-1,p'}$  reflexivo é possível extrair uma subsequência ainda denotada por  $\{y_l\}$  que converge na topologia fraca estrela para algum  $y \in W^{-1,p'}$ . Logo

$$\langle y_l, \tilde{u}(\tau) - x_l \rangle \rightarrow \langle y, \tilde{u}(\tau) - x \rangle$$

para todo  $\tau$ . Para concluir (4.9) é preciso provar ainda que  $y = -\epsilon \Delta_p x$ .

Sabemos que para todo  $\xi \in L^2(0, 1)$  e para todo  $l \in \mathbb{N}$

$$\frac{\epsilon}{p} \|\xi\|_{W_0^{1,p}}^p \geq \frac{\epsilon}{p} \|x_l\|_{W_0^{1,p}}^p + \langle y_l, \xi - x_l \rangle.$$

Se  $\xi \in W_0^{1,p}$ ,  $\xi - x_l \rightarrow \xi - x$  em  $W_0^{1,p}$  e portanto fazendo  $l \rightarrow \infty$ , temos

$$\frac{\epsilon}{p} \|\xi\|_{W_0^{1,p}}^p \geq \frac{\epsilon}{p} \|x\|_{W_0^{1,p}}^p + \langle y, \xi - x \rangle.$$

Se  $\xi \in L^2 \setminus W_0^{1,p}$ ,  $\|\xi\|_{W_0^{1,p}} = \infty$ , e

$$\frac{\epsilon}{p} \|\xi\|_{W_0^{1,p}}^p \geq \frac{\epsilon}{p} \|x\|_{W_0^{1,p}}^p + \langle y, \xi - x \rangle.$$

Portanto  $y = \partial \psi x = -\epsilon \Delta_p x$ . Como  $x$  foi tomado arbitrariamente em  $\mathcal{D}(-\epsilon \Delta_p)$ , fica provado que  $\tilde{u}$  satisfaz (4.9).

Pela Proposição 3.6, [4],  $\tilde{u}$  é solução fraca da equação

$$\frac{dw}{dt} - \epsilon \Delta_p w = |\tilde{u}|^{q-2} \tilde{u} - |\tilde{u}|^{q+r-2} \tilde{u} - k(\tilde{u} - \tilde{v})$$

e como  $\| |\tilde{u}(t)|^{q-2} \tilde{u}(t) - |\tilde{u}(t)|^{q+r-2} \tilde{u}(t) - k(\tilde{u}(t) - \tilde{v}(t)) \|_2^2$  é limitado para todo  $t \in [0, T]$ , segue que  $|\tilde{u}|^{q-2} \tilde{u} - |\tilde{u}|^{q+r-2} \tilde{u} - k(\tilde{u} - \tilde{v}) \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$ . Portanto pelo Teorema 5.5,  $\tilde{u}$  é, de fato, solução forte. Analogamente provamos que  $\tilde{v}$  é solução forte da equação

$$\frac{dw}{dt} - \epsilon \Delta_p w = |\tilde{v}|^{q-2} \tilde{v} - |\tilde{v}|^{q+r-2} \tilde{v} + k(\tilde{u} - \tilde{v}).$$

Logo  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  é solução forte do sistema limite (SL), com dado inicial  $(u(\delta), v(\delta))$ , e pela unicidade da solução temos que  $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\bar{u}, \bar{v})$ . Assim,

$$(\bar{u}^n, \bar{v}^n) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v}) \quad \text{em} \quad C([0, T]; L^2(0, 1)) \times C([0, T]; L^2(0, 1)).$$

Suponha, por absurdo, que para algum  $t_0 > 0$ ,  $(u^n(t_0), v^n(t_0))$  não convirja para  $(u(t_0), v(t_0))$  em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , onde  $(u^n, v^n)$  e  $(u, v)$  são soluções de  $(S_n)$  e  $(SL)$ , respectivamente, com dado inicial  $(u_0, v_0) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ . Então tome  $0 < \delta < t_0$  e

fixe-o. Considere os sistemas  $(S_n)$  e  $(SL)$  com dados iniciais  $(u^n(\delta), v^n(\delta))$  e  $(u(\delta), v(\delta))$ , respectivamente, e soluções  $(\bar{u}^n, \bar{v}^n)$  e  $(\bar{u}, \bar{v})$ . Sabemos que

$$(\bar{u}^n, \bar{v}^n) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v}) \quad \text{em} \quad C([0, T]; L^2(0, 1)) \times C([0, T]; L^2(0, 1)).$$

Seja  $s > 0$  tal que  $t_0 = \delta + s$ . Assim

$$(\bar{u}^n(s), \bar{v}^n(s)) \rightarrow (\bar{u}(s), \bar{v}(s)) \quad \text{em} \quad L^2(0, 1) \times L^2(0, 1).$$

Mas pela unicidade da solução  $\bar{u}^n(s) = u^n(t_0)$ ,  $\bar{v}^n(s) = v^n(t_0)$ ,  $\bar{u}(s) = u(t_0)$  e  $\bar{v}(s) = v(t_0)$ .

Logo,

$$(u^n(t_0), v^n(t_0)) \rightarrow (u(t_0), v(t_0)) \quad \text{em} \quad L^2(0, 1) \times L^2(0, 1).$$

Concluimos assim que se  $(u_0, v_0) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  então para cada  $t > 0$

$$\|(u^n(t), v^n(t)) - (u(t), v(t))\|_{2 \times 2} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ , onde  $(u^n, v^n)$  e  $(u, v)$  são soluções de  $(S_n)$  e  $(SL)$ , respectivamente, com dado inicial  $(u_0, v_0)$ . ■

Uma vez provada a continuidade do fluxo para cada  $t > 0$  vamos provar que esta continuidade é uniforme para dados iniciais em compactos de  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

**Lema 4.22** *Seja  $K \subset L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  compacto. Então para cada  $t > 0$*

$$\|(u^n(t), v^n(t)) - (u(t), v(t))\|_{2 \times 2} \rightarrow 0$$

*uniformemente em  $K$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , onde  $(u^n, v^n)$  e  $(u, v)$  são soluções de  $(S_n)$  e  $(SL)$ , respectivamente, com dado inicial  $(u_0, v_0) \in K$ .*

**Demonstração:** Fixe  $t > 0$ , e defina para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função:

$$\begin{aligned} h^n : L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) &\longrightarrow L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \\ (u_0, v_0) &\longmapsto (u^n(t, (u_0, v_0)), v^n(t, (u_0, v_0))) \end{aligned}$$

Observe que fixado  $(u_0, v_0) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , segue do Lema 4.11 que se  $(u_0, v_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u_0^k, v_0^k)$  em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  então

$$\|(u^n(t, (u_0^k, v_0^k)), v^n(t, (u_0^k, v_0^k))) - (u^n(t, (u_0, v_0)), v^n(t, (u_0, v_0)))\|_{2 \times 2} \rightarrow 0$$

uniformemente em  $n \in \mathbb{N}$  quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Além disso podemos também definir

$$\begin{aligned} h : L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) &\longrightarrow L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \\ (u_0, v_0) &\longmapsto (u(t, (u_0, v_0)), v(t, (u_0, v_0))) \end{aligned}$$

Logo a família de funções  $\{h, h^1, h^2, h^3, \dots\}$  é equicontínua em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

Seja  $K$  um subconjunto compacto de  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  e  $D = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$  um subconjunto enumerável e denso de  $K$ , onde cada  $y_i$  é da forma  $(u_0^i, v_0^i) \in K$ . Provaremos que existe uma subsequência de  $\{h^n\}$  que converge simplesmente em  $K$ .

Considere a sequência inicial  $\{h^n\}$ , então  $\{h^n(y_1)\}$  é uma sequência em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , que pelo Teorema 4.2, possui uma subsequência  $\{h^{1n}(y_1)\}$  que converge para  $h(y_1)$ .

Considere a sequência de funções  $\{h^{1n}\}$ , então  $\{h^{1n}(y_2)\}$  é uma sequência em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , que pelo Teorema 4.2, possui uma subsequência  $\{h^{2n}(y_2)\}$  que converge para  $h(y_2)$ . Observe que a sequência  $\{h^{2n}\}$  é tal que

$$h^{2n}(y_1) \rightarrow h(y_1) \quad \text{e} \quad h^{2n}(y_2) \rightarrow h(y_2)$$

visto que é subsequência de  $\{h^{1n}\}$ .

Repita este raciocínio para cada  $y_i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Note que a subsequência  $\{h^{jn}\}$  obtida no passo  $j$  é tal que

$$h^{jn}(y_i) \rightarrow h(y_i)$$

para  $i = 1, 2, \dots, j$ .

Considere a sequência diagonal  $\{h^{nn}\}$ , observe que se  $n > i$ ,  $h^{nn}(y_i) \rightarrow h(y_i)$ . Suponha, por absurdo, que para algum  $i_0 \in \mathbb{N}$   $h^{nn}(y_{i_0})$  não convirja para  $h(y_{i_0})$ . Tome  $n > i_0$  e pelo processo anterior temos que  $h^{nn}(y_{i_0}) \rightarrow h(y_{i_0})$ .

Portanto, a sequência diagonal  $\{h^{nn}\}$  é tal que  $h^{nn}(y_i) \rightarrow h(y_i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Segue da Proposição 5.1 que  $\{h^{nn}\}$  converge uniformemente em  $K$ . ■

**Observação 4.4** Como  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  é um conjunto limitado em  $W_0^{1,2} \times W_0^{1,2}$  e portanto é relativamente compacto em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , podemos tomar no lema anterior  $K = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n}$ , onde o fecho é tomado em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ . Assim, temos que a continuidade do fluxo é uniforme em  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

**Teorema 4.3** Considere a família  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dos atratores associados aos semigrupos  $\{S_n(t); t \geq 0\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Quando  $n \rightarrow \infty$

$$d_{L^2 \times L^2}(A_n, A_L) \rightarrow 0$$

onde  $A_L$  é o atrator associado ao sistema limite (SL).

**Demonstração:** Pelo Lema 4.9 existe  $T_2 \doteq 2T_1$  e uma constante positiva  $N_7$  tal que

$$\|u^n(t)\|_{W_0^{1,p_1}^n} + \|v^n(t)\|_{W_0^{1,p_2}^n} \leq N_7$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \geq T_2$  e qualquer que seja o dado inicial  $(u_0, v_0) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

Defina  $B \doteq B((0, 0); N_7) \subset L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ . Sabemos que  $B$  absorve limitados de  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  por  $S_n(t)$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , na topologia de  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

Como  $A_n$  é limitado e invariante segue que

$$A_n = S_n(T_2)A_n \subset B$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Logo  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset B$ .

Mas  $A_L$  atrai limitados de  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  e em particular atrai  $B$ . Assim dado  $\eta > 0$ , existe  $t_0 = t(B, \eta) > 0$  tal que

$$S_0(t)B \subset \mathcal{O}_{\frac{\eta}{2}}(A_L)$$

para todo  $t \geq t_0$ , onde  $\{S_0(t)\}$  é o semigrupo associado ao sistema limite  $(SL)$ .

Em particular para todo  $(u_n, v_n) \in A_n$

$$d(S_0(t_0)(u_n, v_n), A_L) < \frac{\eta}{2}$$

o que implica que

$$\sup_{\substack{(u_n, v_n) \in A_n \\ n \in \mathbb{N}}} d(S_0(t_0)(u_n, v_n), A_L) \leq \frac{\eta}{2}$$

Segue da continuidade uniforme do fluxo em compactos de  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  a existência de  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$

$$\|S_n(t_0)(x, y) - S_0(t_0)(x, y)\|_{2 \times 2} < \frac{\eta}{2}$$

para todo  $(x, y) \in \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

Assim, para cada  $n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} d(S_n(t_0)(u_n, v_n), A_L) &= \inf_{(u_0, v_0) \in A_L} \|S_n(t_0)(u_n, v_n) - (u_0, v_0)\|_{2 \times 2} \\ &\leq \|S_n(t_0)(u_n, v_n) - S_0(t_0)(u_n, v_n)\|_{2 \times 2} \\ &\quad + d_{L^2 \times L^2}(S_0(t_0)(u_n, v_n), A_L) \\ &< \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \end{aligned}$$

para cada  $(u_n, v_n) \in A_n$ . Logo

$$d(A_n, A_L) \leq \eta$$

Portanto  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é semicontinua superiormente quando  $n \rightarrow \infty$ . ■

## 4.2 O Sistema limite - parâmetros iguais

Vimos na seção anterior que quando  $n \rightarrow \infty$  o sistema  $(S_n)$  se aproxima do sistema limite

$$(SL) \begin{cases} u_t = \epsilon(|u_x|^{p-2} u_x)_x + |u|^{q-2} u(1 - |u|^r) - k(u - v) \\ v_t = \epsilon(|v_x|^{p-2} v_x)_x + |v|^{q-2} v(1 - |v|^r) + k(u - v) \end{cases}$$

Para garantir a  $\epsilon$ -sincronicidade estudaremos o atrator,  $A_L$ , do semigrupo associado ao sistema  $(SL)$ . Provaremos que para  $k$  suficientemente grande cada elemento deste atrator é da forma  $(u, u)$ , com  $u \in W_0^{1,p}(0, 1)$ .

Por ser muito interessante não nos limitaremos apenas a caracterizar o atrator do sistema limite, mas exibiremos o conjunto dos equilíbrios, e o quadro de estabilidade de tais equilíbrios. Além disso analisaremos o que ocorre com tais atratores quando fazemos o parâmetro  $k$  tender ao infinito.

### 4.2.1 O conjunto equilíbrio

Considere o sistema

$$(SE) \begin{cases} -\epsilon(|u_x|^{p-2} u_x)_x = |u|^{q-2} u(1 - |u|^r) - k(u - v) \\ -\epsilon(|v_x|^{p-2} v_x)_x = |v|^{q-2} v(1 - |v|^r) + k(u - v) \end{cases}$$

Se  $(u, v)$  é solução de  $(SE)$  fazendo a diferença entre as duas equações do sistema, multiplicando por  $u - v$  e usando a Desigualdade de Tartar obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma_0 \epsilon \|u - v\|_{W_0^{1,p}}^p \\ &\leq -\epsilon \langle \Delta_p u - \Delta_p v, u - v \rangle \\ &\leq \langle |u|^{q-2} u - |u|^{q+r-2} u - |v|^{q-2} v + |v|^{q+r-2} v, u - v \rangle \\ &\quad - \langle k(u - v) + k(u - v), u - v \rangle \\ &\leq C \|u - v\|_2^2 - 2k \|u - v\|_2^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

onde  $C = \frac{r(q-1)^{\frac{q+r-2}{r}}}{q+r-2}$  e  $k$  é escolhido de modo que  $k > C$ . Logo,  $\|u - v\|_{W_0^{1,p}} = 0$  e portanto  $u = v$ .

Denote por  $E_{\epsilon,k}$  o conjunto de equilíbrios de  $(SE)$ .

**Lema 4.23** *O conjunto  $E_{\epsilon,k}$  é formado por todos os pares  $(\phi, \phi) \in W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ , tais que  $\phi$  é equilíbrio de  $(P_\epsilon)$  (veja Capítulo 1).*

**Demonstração:** Suponha que  $(\alpha, \alpha) \in W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$  seja uma solução de  $(SE)$ . Então  $\alpha$  satisfaz  $-\epsilon(|\alpha_x|^{p-2} \alpha_x)_x = |\alpha|^{q-2} \alpha(1 - |\alpha|^r) - k(\alpha - \alpha)$  e consequentemente  $\alpha$  satisfaz a equação  $-\epsilon(|\alpha_x|^{p-2} \alpha_x)_x = |\alpha|^{q-2} \alpha(1 - |\alpha|^r)$ , ou seja,  $\alpha$  é um equilíbrio de  $(P_\epsilon)$ .

Reciprocamente, se  $\alpha$  é equilíbrio de  $(P_\epsilon)$  então  $\alpha$  satisfaz cada equação de  $(SE)$ . Portanto  $(\alpha, \alpha)$  é solução de  $(SE)$ . ■

Note que o conjunto de equilíbrios  $E_{\epsilon,k}$  é determinado pelo parâmetro  $\epsilon$  e não por  $k$ . Logo, desde que  $k$  seja suficientemente grande ( $k > C$ ) o conjunto  $E_{\epsilon,k}$  não varia, se mantivermos  $\epsilon$  fixo.

Assim, segue do Teorema 5.3, [19], que o atrator de pontos de  $(SL)$ ,  $\widehat{A}_{\epsilon,k}$ , é não vazio e coincide com o conjunto  $E_{\epsilon,k}$ , dos pontos de equilíbrio de  $(SL)$ . Como  $E_{\epsilon,k}$  não varia quando  $\epsilon$  está fixo, temos que  $\widehat{A}_{\epsilon,k} = E_{\epsilon,k}$ , para  $k$  suficientemente grande, ou seja, o atrator de pontos é o mesmo independente do valor de  $k$ .

**Observação 4.5** *É fácil ver que se  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$  então  $E_{\epsilon_n, k} \rightarrow E_{\epsilon_0, k}$ , segundo a distância de Hausdorff. Basta associarmos a cada elemento  $(\phi_j, \phi_j) \in E_{\epsilon_j, k}$  o elemento  $\phi_j \in E_{\epsilon_j}$ , e lembrarmos que  $E_{\epsilon_n} \rightarrow E_{\epsilon_0}$  quando  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$ , exceto, é claro, no caso em que  $\epsilon_0 = \lambda_l(a^*)$ ,  $p < q$  e  $\epsilon_n > \epsilon_0$  (veja Lema 2.17).*

#### 4.2.2 Comparação de soluções

O objetivo dessa seção é provar um resultado de comparação de soluções para o sistema (SL). Este resultado nos auxiliará na demonstração da estabilidade dos equilíbrios de (SL). Começaremos introduzindo um conceito de ordem em um espaço de Banach.

**Definição 4.2** *Um espaço de Banach ordenado é um par  $(X, \leq)$ , onde  $X$  é um espaço de Banach e  $\leq$  é uma relação de ordem em  $X$  satisfazendo:*

- 1)  $x \leq y$  implica  $x + z \leq y + z$ , para  $x, y, z \in X$
- 2)  $x \leq y$  implica  $\lambda x \leq \lambda y$ , para  $x, y \in X$  e  $\lambda > 0$
- 3) O cone positivo  $C = \{x \in X; x \geq 0\}$  é fechado em  $X$

**Definição 4.3** *Sejam  $(X, \leq)$  e  $(Y, \preceq)$  espaços de Banach ordenados. Dizemos que uma aplicação  $T : X \rightarrow Y$  é crescente se e só se  $x \leq y$  implica  $T(x) \preceq T(y)$ . Dizemos que  $T$  é positiva se e só se  $x \geq 0$  implica  $T(x) \succeq 0$ .*

Considere em  $L^2(0, 1)$  a seguinte relação de ordem: se  $u, v \in L^2(0, 1)$  então

$$u \geq v \Leftrightarrow u(x) \geq v(x) \quad \text{qtp em } (0, 1)$$

**Teorema 4.4** *Sejam  $(u_0, v_0)$  e  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \in L^2 \times L^2$  tais que  $u_0 \leq \bar{u}_0$  e  $v_0 \leq \bar{v}_0$ . Então  $u(t) \leq \bar{u}(t)$  e  $v(t) \leq \bar{v}(t)$ , para todo  $t > 0$ , onde  $(u, v)$  e  $(\bar{u}, \bar{v})$  são soluções de (SL) com dados iniciais  $(u_0, v_0)$  e  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ , respectivamente.*

**Demonstração:** Defina para cada  $t \geq 0$  as funções  $\alpha(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ ,  $\beta(t) = v(t) - \bar{v}(t)$ ,  $\alpha^+(x, t) = \max\{\alpha(x, t), 0\}$  e  $\beta^+(x, t) = \max\{\beta(x, t), 0\}$  e os conjuntos  $\tilde{A}_t \doteq \{x \in [0, 1]; \alpha^+(x, t) = 0\}$ ,  $A_t \doteq \tilde{A}_t^c$ ,  $\tilde{B}_t \doteq \{x \in [0, 1]; \beta^+(x, t) = 0\}$  e  $B_t \doteq \tilde{B}_t^c$ .

Note que para todo  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|\alpha^+(t)\|_2^2 &= \int_0^1 |\alpha^+(x, t)|^2 dx \\ &= \int_{A_t} |u(x, t) - \bar{u}(x, t)|^2 dx \\ &= \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{L^2(A_t)}^2 \end{aligned}$$

e analogamente,  $\|\beta^+(t)\|_2^2 = \|v(t) - \bar{v}(t)\|_{L^2(B_t)}^2$ .

Temos ainda que se  $u_0 \leq \bar{u}_0$  então  $\alpha(x, 0) \leq 0$  qtp em  $(0, 1)$  e portanto  $|A_0| = 0$ . Do mesmo modo  $v_0 \leq \bar{v}_0$  implica  $|B_0| = 0$ . Como  $(u, v)$  e  $(\bar{u}, \bar{v})$  são soluções de  $(SL)$  com dados iniciais  $(u_0, v_0)$  e  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$  respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 (u_t(x, t) - \bar{u}_t(x, t))\alpha^+(x, t)dx &+ \int_0^1 (-\epsilon\Delta_p u(x, t) + \epsilon\Delta_p \bar{u}(x, t))\alpha^+(x, t)dx \\ &\leq \int_0^1 (fu(x, t) - f\bar{u}(x, t))\alpha^+(x, t)dx \\ &- k \int_0^1 \alpha(x, t)\alpha^+(x, t)dx \\ &+ k \int_0^1 \beta^+(x, t)\alpha^+(x, t)dx \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $f(s) = |s|^{q-2}s - |s|^{q+r-2}s$ , e portanto, segue de (4.12) que

$$\frac{d}{dt}\|\alpha^+(t)\|_2^2 \leq k(\|\alpha^+(t)\|_2^2 + \|\beta^+(t)\|_2^2) \quad (4.13)$$

Seguindo o mesmo raciocínio obtemos

$$\frac{d}{dt}\|\beta^+(t)\|_2^2 \leq k(\|\alpha^+(t)\|_2^2 + \|\beta^+(t)\|_2^2) \quad (4.14)$$

Somando (4.13) e (4.14) e usando a desigualdade de Gronwall obtemos

$$\|\alpha^+(t)\|_2^2 + \|\beta^+(t)\|_2^2 \leq (\|\alpha^+(0)\|_2^2 + \|\beta^+(0)\|_2^2)e^{2kt}.$$

Como  $\|\alpha^+(0)\|_2^2 = 0 = \|\beta^+(0)\|_2^2$  segue que  $\|\alpha^+(t)\|_2^2 = 0 = \|\beta^+(t)\|_2^2$  e portanto  $u(t) \leq \bar{u}(t)$  e  $v(t) \leq \bar{v}(t)$  para todo  $t \geq 0$ . ■

O Teorema 4.4 mostra que o semigrupo  $\{S_0(t)\}_{t \geq 0}$  preserva ordem.

Vamos então provar que o quadro de estabilidade dos equilíbrios do sistema  $(SL)$  é exatamente igual ao quadro de estabilidade dos equilíbrios de  $(P_\epsilon)$ .

O próximo lema mostra que a instabilidade de um equilíbrio  $\phi$  de  $(P_\epsilon)$  implica na instabilidade do equilíbrio  $(\phi, \phi)$  de  $(SL)$ .

**Lema 4.24** *Se  $\phi$  é um equilíbrio instável de  $(P_\epsilon)$  então  $(\phi, \phi)$  é um equilíbrio instável de  $(SL)$ .*

**Demonstração:** Sabemos que  $(\alpha, \beta)$  é equilíbrio de  $(SL)$  se e somente se  $\alpha = \beta$  e  $\alpha$  é equilíbrio de  $(P_\epsilon)$ .

Seja  $(\phi, \phi)$  é um equilíbrio  $(SL)$  tal que  $\phi$  é um equilíbrio instável de  $(P_\epsilon)$ . Então existe um  $\eta_0 > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  existem  $u_0 \in L^2$  e  $t_0 > 0$  tais que

$$\|u_0 - \phi\|_\infty < \delta \quad \text{e} \quad \|u(t_0, u_0) - \phi\|_\infty > \eta_0$$

Assim, para todo  $\eta > 0$  seja  $\delta = \frac{\eta}{2}$ , então existe  $u_0$  e  $t_0$  como acima, e

$$\|(u_0, u_0) - (\phi, \phi)\|_{\infty \times \infty} = \|u_0 - \phi\|_\infty + \|u_0 - \phi\|_\infty < \eta$$

e

$$\|(u(t_0, u_0), u(t_0, u_0)) - (\phi, \phi)\|_{\infty \times \infty} = \|u(t_0, u_0) - \phi\|_{\infty} + \|u(t_0, u_0) - \phi\|_{\infty} > \eta_0.$$

Mas  $(u, u)$  é solução de  $(SL)$  com dado inicial  $(u_0, u_0)$ . Portanto  $(\phi, \phi)$  é um equilíbrio instável de  $(SL)$ . ■

O Lema 4.24 permite concluir que os equilíbrios  $(0, 0)$  (quando  $p > q$  ou  $p = q$  e  $\epsilon < \lambda_0$ ),  $(\psi_{\epsilon}^0, \psi_{\epsilon}^0)$  (quando  $p < q$  e  $\epsilon \leq \lambda_l(a^*)$ ),  $(\psi_{\epsilon}^l, \psi_{\epsilon}^l)$ ,  $(\phi_{\epsilon}^l, \phi_{\epsilon}^l)$  e  $(G_{\epsilon}^l, G_{\epsilon}^l)$  são instáveis, para todo  $l = 1, 2, \dots$ . A estabilidade e atratividade dos demais equilíbrios segue de forma exatamente análoga a feita em [28], construindo soluções superiores (inferiores) e usando o resultado de comparação para concluir o raciocínio.

### 4.2.3 Sincronicidade em $L^2$

Quando analisamos o sistema  $(SL)$  é possível observar que se  $(u, v)$  é solução de  $(SL)$  com dado inicial  $(u_0, v_0)$  então  $u(t)$  e  $v(t)$  se aproximam para cada  $t > 0$ , quando o termo de acoplamento  $k$  se torna suficientemente grande. Do mesmo modo se mantivermos  $k$  fixo e fizermos  $t$  tender ao infinito então  $u(t)$  e  $v(t)$  se aproximam independentemente dos dados iniciais. Esta propriedade é conhecida como Sincronização, veja [6].

Provaremos que o fenômeno de sincronicidade está presente no sistema  $(SL)$  e ele será de fundamental importância para provarmos a  $\epsilon$ -sincronicidade para os sistemas  $(S_n)$ .

**Teorema 4.5** *Seja  $(u, v)$  solução do sistema  $(SL)$ . Para cada  $t > 0$ ,*

$$k\|u(t) - v(t)\|_2 \rightarrow 0$$

*quando  $k \rightarrow \infty$ . Em particular,  $\|u(t) - v(t)\|_2 \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .*

**Demonstração:** Fazendo a diferença das equações do sistema  $(SL)$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (k^2 \|u(t) - v(t)\|_2^2) &= k^2 \langle u_t(t) - v_t(t), u(t) - v(t) \rangle \\ &= k^2 \langle \epsilon \Delta_p u(t) - \epsilon \Delta_p v(t), u(t) - v(t) \rangle \\ &+ k^2 \langle f u(t) - f v(t), u(t) - v(t) \rangle \\ &+ k^2 \langle -k(u(t) - v(t)) - k(u(t) - v(t)), u(t) - v(t) \rangle \\ &\leq (C - 2k) k^2 \|u(t) - v(t)\|_2^2 \end{aligned}$$

Faça  $y(t) = k^2 \|u(t) - v(t)\|_2^2$  e  $\bar{C} = 2C - 4k$ . Então

$$\frac{d}{dt} y(t) \leq \bar{C} y(t) \tag{4.15}$$

e multiplicando (4.15) por  $e^{-\bar{C}t}$  obtemos

$$\frac{d}{dt} (e^{-\bar{C}t} y(t)) \leq 0. \tag{4.16}$$

Integrando (4.16) de 0 a  $t$  obtemos

$$k^2 \|u(t) - v(t)\|_2^2 \leq e^{(2C-4k)t} k^2 \|u_0 - v_0\|_2^2$$

Mas para cada  $t > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^2 e^{(2C-4k)t} = 0$$

Assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^2 \|u(t) - v(t)\|_2^2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} e^{(2C-4k)t} k^2 \|u_0 - v_0\|_2^2 = 0$$

o que prova o teorema. ■

**Observação 4.6** *Fixando  $k$  e fazendo  $t \rightarrow \infty$  temos*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k^2 e^{(2C-4k)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k^2}{e^{(4k-2C)t}} = 0$$

logo para cada  $k$ ,

$$\|u(t) - v(t)\|_2 \rightarrow 0$$

quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto mostra que para cada  $k$  fixo, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $u(t)$  e  $v(t)$  tem o mesmo limite em  $L^2$ . E isto faz sentido uma vez que  $\omega((u_0, v_0)) \subset E_{\epsilon, k}$  e os elementos de  $E_{\epsilon, k}$  tem as duas coordenadas idênticas.

**Lema 4.25** *Seja  $A_L$  o atrator associado ao sistema (SL). Se  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \in A_L$ , então  $\bar{u}_0 = \bar{v}_0$ .*

**Demonstração:** De fato, se  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \in A_L$  então para cada  $t > 0$ ,  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = S_0(t)(u_0^t, v_0^t)$  com  $(u_0^t, v_0^t) \in A_L$ . Assim dado  $\sigma > 0$ , existe  $\tilde{t} > 0$  tal que para todo  $t \geq \tilde{t}$ ,

$$\|\bar{u}_0 - \bar{v}_0\|_2 = \|u(t) - v(t)\|_2 < \sigma$$

com  $(u(t), v(t)) = S_0(t)(u_0^t, v_0^t)$  e  $(u_0^t, v_0^t) \in A_L$ . Note na Observação 4.6 que  $\tilde{t}$  pode ser tomado uniforme para dados iniciais no atrator, uma vez que o atrator é limitado.

Como  $\|\bar{u}_0 - \bar{v}_0\|_2 < \sigma$  para todo  $\sigma > 0$ , segue que  $\bar{u}_0 = \bar{v}_0$ . ■

#### 4.2.4 Sobre a continuidade dos atratores quando o parâmetro $k$ varia

Considere para cada  $k \in \mathbb{N}$  e  $\epsilon > 0$  o sistema

$$(S_{\epsilon, k}) \begin{cases} u_t = \epsilon(|u_x|^{p-2} u_x)_x + |u|^{q-2} u(1 - |u|^r) - k(u - v) \\ v_t = \epsilon(|v_x|^{p-2} v_x)_x + |v|^{q-2} v(1 - |v|^r) + k(u - v) \\ (u(0), v(0)) = (u_{0k}, v_{0k}) \end{cases}$$

Neste momento nossa intenção é estudar a continuidade dos atratores associados aos sistemas  $(S_{\epsilon, k})$  quando o parâmetro  $\epsilon$  está fixo e o parâmetro  $k$  tende ao infinito.

Provaremos que para cada  $t > 0$ , se  $(u_{0k}, v_{0k}) \rightarrow (u_0, u_0)$ , então  $(u(t), v(t)) \rightarrow (w(t), w(t))$ , quando  $k \rightarrow \infty$ , onde  $w(t)$  é solução de

$$(P_\epsilon) \begin{cases} w_t = \epsilon(|w_x|^{p-2} w_x)_x + |w|^{q-2} w(1 - |w|^r) \\ w(0) = u_0 \end{cases}$$

Para evitar confusão denotaremos, nesta subseção, o semigrupo associado a  $(P_\epsilon)$  por  $\{T_\epsilon(t)\}$ .

**Lema 4.26** *Para cada  $t > 0$ ,*

$$\|S_{\epsilon,k}(t)(u_{0k}, v_{0k}) - (T_\epsilon(t)u_0, T_\epsilon(t)u_0)\|_{2 \times 2} \rightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow \infty$ , se  $(u_{0k}, v_{0k}) \rightarrow (u_0, u_0)$  em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , onde  $S_{\epsilon,k}(t)$  é o semigrupo associado ao sistema  $(S_{\epsilon,k})$  e  $T_\epsilon(t)$  é o semigrupo associado ao problema  $(P_\epsilon)$ .

**Demonstração:** Denote por  $(u(t), v(t)) = S_{\epsilon,k}(t)(u_{0k}, v_{0k})$  e  $w(t) = T_\epsilon(t)u_0$ . Subtraindo da primeira equação de  $(S_{\epsilon,k})$  a equação de  $(P_\epsilon)$  e multiplicando por  $u - w$ , e depois subtraindo da segunda equação de  $(S_{\epsilon,k})$  a equação de  $(P_\epsilon)$  e multiplicando por  $v - w$  obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - w(t)\|_2^2 \leq C \|u(t) - w(t)\|_2^2 - k \langle u(t) - v(t), u(t) - w(t) \rangle \quad (4.17)$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t) - w(t)\|_2^2 \leq C \|v(t) - w(t)\|_2^2 - k \langle u(t) - v(t), w(t) - v(t) \rangle \quad (4.18)$$

Somando (4.17) e (4.18) temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(t) - w(t)\|_2^2 + \|v(t) - w(t)\|_2^2) \\ & \leq C (\|u(t) - w(t)\|_2^2 + \|v(t) - w(t)\|_2^2) - k \|u(t) - v(t)\|_2^2 \\ & \leq C (\|u(t) - w(t)\|_2^2 + \|v(t) - w(t)\|_2^2) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Integrando (4.19) de 0 a  $t$ , usando a desigualdade de Gronwall, e em seguida fazendo  $k \rightarrow \infty$  obtemos

$$\|u(t) - w(t)\|_2^2 + \|v(t) - w(t)\|_2^2 \leq (\|u_{0k} - u_0\|_2^2 + \|v_{0k} - u_0\|_2^2) e^{2Ct} \rightarrow 0$$

o que garante que

$$\|S_{\epsilon,k}(t)(u_{0k}, v_{0k}) - (T_\epsilon(t)u_0, T_\epsilon(t)u_0)\|_{2 \times 2} \rightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow \infty$ , para cada  $t > 0$ . ■

Agora considere o sistema não acoplado

$$(SN) \begin{cases} u_t = \epsilon(|u_x|^{p-2} u_x)_x + |u|^{q-2} u(1 - |u|^r) \\ v_t = \epsilon(|v_x|^{p-2} v_x)_x + |v|^{q-2} v(1 - |v|^r) \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \in L^2 \times L^2 \end{cases}$$

Observe que resolver o sistema  $(SN)$  equivale a resolver cada equação separadamente, ou seja,  $(u, v)$  é solução de  $(SN)$  se e somente se  $u$  e  $v$  são soluções de

$$\begin{cases} u_t = \epsilon(|u_x|^{p-2} u_x)_x + |u|^{q-2} u(1 - |u|^r) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} v_t = \epsilon(|v_x|^{p-2} v_x)_x + |v|^{q-2} v(1 - |v|^r) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

respectivamente.

Como existe uma única solução para cada equação temos que existe uma única solução para o sistema  $(SN)$ . Vimos que à equação  $u_t = \epsilon(|u_x|^{p-2} u_x)_x + |u|^{q-2} u(1 - |u|^r)$  está associado um semigrupo  $\{T_\epsilon(t)\}$ . As propriedades de continuidade com relação ao tempo e ao dado inicial permite definir um semigrupo

$$T(t) : L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$$

associado à  $(SN)$ , por  $T(t)(u_0, v_0) = (T_\epsilon(t)u_0, T_\epsilon(t)v_0)$ . Segue da dissipatividade de  $\{T_\epsilon(t)\}$  que  $\{T(t)\}$  é dissipativo. Além disso,  $\{T(t)\}$  é de classe  $k$ , uma vez que  $\{T_\epsilon(t)\}$  é de classe  $k$ . Logo, pelo Teorema 5.2,  $\{T(t)\}$  tem um atrator global minimal,  $A$ , o qual é compacto e invariante.

Considere o conjunto  $A_\epsilon \times A_\epsilon$ , onde  $A_\epsilon$  é o atrator de  $\{T_\epsilon(t)\}$ . Uma vez que  $A_\epsilon$  é compacto em  $W_0^{1,p}$ , segue que  $A_\epsilon \times A_\epsilon$  é compacto em  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ . Além disso, para cada  $t \geq 0$

$$T(t)(A_\epsilon \times A_\epsilon) = (T_\epsilon(t)A_\epsilon, T_\epsilon(t)A_\epsilon) = A_\epsilon \times A_\epsilon$$

ou seja,  $A_\epsilon \times A_\epsilon$  é invariante por  $T(t)$ . Pela maximalidade de  $A$ , segue que  $A_\epsilon \times A_\epsilon \subset A$ .

Agora, seja  $B = B_1 \times B_2 \subset L^2 \times L^2$  limitado e arbitrário. Então existe uma constante positiva,  $M$ , tal que para todo  $(b_1, b_2) \in B$ ,

$$\|(b_1, b_2)\|_{2 \times 2} \leq M$$

como  $A_\epsilon$  atrai limitados de  $L^2$ , dado  $\eta > 0$ , existe  $t_i = t_i(\eta, B_i) > 0$  tal que para todo  $t \geq t_i$

$$T_\epsilon(t)B_i \subset \mathcal{O}_\eta(A_\epsilon)$$

para  $i = 1, 2$ . Seja  $t_0 = \max\{t_1, t_2\}$ . Então para todo  $t \geq t_0$ ,  $T_\epsilon(t)B_i \subset \mathcal{O}_\eta(A_\epsilon)$  para  $i = 1, 2$  e portanto

$$T(t)B = T_\epsilon(t)B_1 \times T_\epsilon(t)B_2 \subset \mathcal{O}_{2\eta}(A_\epsilon \times A_\epsilon)$$

ou seja,  $A_\epsilon \times A_\epsilon$  atrai limitados de  $L^2 \times L^2$ . Mas  $A$  é o minimal com esta propriedade, logo  $A \subset A_\epsilon \times A_\epsilon$ .

Portanto,  $A = A_\epsilon \times A_\epsilon$ .

### Semicontinuidade inferior dos atratores $\{A_{\epsilon,k}\}$ quando $k \rightarrow \infty$

Considere o conjunto  $A_\infty \doteq \{(u, u); u \in A_\epsilon\}$  e denote por  $A_{\epsilon,k}$  o atrator de  $\{S_{\epsilon,k}(t)\}$ . Note que  $A_\infty \subset A$ , propriamente. Nesta subseção mostraremos que a família de atratores  $\{A_{\epsilon,k}\}$  se aproxima do conjunto  $A_\infty$ , quando  $k \rightarrow \infty$ , no sentido da semicontinuidade inferior de atratores, isto é,

$$d(A_\infty, A_{\epsilon,k}) \rightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow \infty$ .

Seja  $(\bar{w}, \bar{w}) \in A_\infty$ , arbitrário. Então, pela definição de  $A_\infty$ ,  $\bar{w} \in A_\epsilon$ . Assim existe,  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow W_0^{1,p}$ , órbita completa e limitada, por  $\bar{w}$ , através de  $\{T_\epsilon(t)\}$ .

Vamos definir, a partir de  $\psi$ , uma órbita completa e limitada, por  $(\bar{w}, \bar{w})$ , através de  $\{S_{\epsilon,k}(t)\}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , onde  $\{S_{\epsilon,k}(t)\}$  é o semigrupo associado ao sistema  $(S_{\epsilon,k})$ , com parâmetros  $\epsilon$  e  $k$ . Deste modo defina, para cada  $k$ ,  $\psi_k : \mathbb{R} \rightarrow W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$  por  $\psi_k(t) = (\psi(t), \psi(t))$ . Temos,

$$\psi_k(0) = (\psi(0), \psi(0)) = (\bar{w}, \bar{w}).$$

Resta provar que  $S_{\epsilon,k}(t)\psi_k(s) = \psi_k(t+s)$ , para todo  $t \geq 0$  e  $s \in \mathbb{R}$ . Note que

$$S_{\epsilon,k}(t)\psi_k(s) = S_{\epsilon,k}(t)(\psi(s), \psi(s))$$

e

$$\psi_k(t+s) = (\psi(t+s), \psi(t+s)) = (T_\epsilon(t)\psi(s), T_\epsilon(t)\psi(s)) = T(t)(\psi(s), \psi(s)).$$

Segue da demonstração do Lema 4.26 que

$$\begin{aligned} \|u(t) - w(t)\|_2^2 + \|v(t) - w(t)\|_2^2 &\leq (\|u(0) - w(0)\|_2^2 + \|v(0) - w(0)\|_2^2)e^{2Ct} \\ &= (\|\psi(s) - \psi(s)\|_2^2 + \|\psi(s) - \psi(s)\|_2^2)e^{2Ct} \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde  $(u(t), v(t)) = S_{\epsilon,k}(t)(\psi(s), \psi(s))$  e  $(w(t), w(t)) = T(t)(\psi(s), \psi(s))$ . Logo  $u(t) = w(t)$  e  $v(t) = w(t)$ , para todo  $t > 0$ , o que implica que

$$S_{\epsilon,k}(t)(\psi(s), \psi(s)) = (u(t), v(t)) = (w(t), w(t)) = T(t)(\psi(s), \psi(s)).$$

Portanto  $S_{\epsilon,k}(t)\psi_k(s) = \psi_k(t+s)$ , para todo  $t \geq 0$  e  $s \in \mathbb{R}$  o que mostra que  $\psi_k$  é uma órbita completa por  $(\bar{w}, \bar{w})$ . Além disso, para cada  $s \in \mathbb{R}$

$$\|\psi_k(s)\|_{W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}} \doteq \|(\psi(s), \psi(s))\|_{W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}} = 2\|\psi(s)\|_{W_0^{1,p}}$$

e como  $\psi$  é limitada em  $W_0^{1,p}$ , segue que  $\psi_k$  é limitada em  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ .

Consequentemente  $(\bar{w}, \bar{w}) \in A_{\epsilon,k}$  para cada  $k$ . Como  $(\bar{w}, \bar{w})$  foi tomado arbitrariamente em  $A_\infty$ , segue que  $A_\infty \subset A_{\epsilon,k}$ , e a semicontinuidade inferior segue.

### Semicontinuidade superior dos atratores $\{A_{\epsilon,k}\}$ quando $k \rightarrow \infty$

Com o objetivo de provar a semicontinuidade superior dos atratores  $\{A_{\epsilon,k}\}$  quando  $k \rightarrow \infty$ , provaremos inicialmente que existe uma constante  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k \geq k_0$ ,

$$A_{\epsilon,k} \subset B_{W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}}((0,0), M)$$

onde  $B_{W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}}((0,0), M)$  é a bola aberta de centro  $(0,0)$  e raio  $M$  em  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ , sendo  $M$  independente do parâmetro  $k$ .

Começaremos provando que  $\cup_k A_{\epsilon,k}$  é limitada em  $L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ . Com efeito, seja  $(u_0, v_0) \in \cup_k A_{\epsilon,k}$  um elemento arbitrário. Então  $(u_0, v_0) \in A_{\epsilon, \bar{k}}$  para algum  $\bar{k}$ . Como  $A_{\epsilon, \bar{k}}$  é invariante por  $S_{\epsilon, \bar{k}}$ , existe  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \in A_{\epsilon, \bar{k}}$  tal que

$$(u_0, v_0) = S_{\epsilon, \bar{k}}(T_1)(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$$

onde  $T_1$  é a constante escolhida na demonstração do Lema 4.8. Assim, novamente pelo Lema 4.8,

$$\|u_0\|_2^2 + \|v_0\|_2^2 \leq N_4$$

onde  $N_4$  depende apenas de  $p, q, r$  e  $\epsilon$ .

Portanto, para todo  $(u, v) \in \cup_k A_{\epsilon,k}$ ,  $\|(u, v)\|_{2 \times 2} \leq 2N_4^{\frac{1}{2}}$  onde  $N_4$  depende de  $k$ .

Passemos agora à demonstração de que  $\cup_k A_{\epsilon,k}$  é limitada em  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ . Seja  $\psi$  tal que  $\partial\psi u = -\epsilon\Delta_p u + |u|^{q+r-2}u$ . Usando as Desigualdades de Young, Holder e a demonstração do Teorema 4.5 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi u(t) + \psi v(t)) &= \frac{d}{dt}\psi u(t) + \frac{d}{dt}\psi v(t) \\ &= \langle \partial\psi u(t), u_t(t) \rangle + e \langle \partial\psi v(t), v_t(t) \rangle \\ &= \langle -u_t(t) + |u(t)|^{q-2}u(t) - k(u(t) - v(t)), u_t(t) \rangle \\ &\quad + \langle -v_t(t) + |v(t)|^{q-2}v(t) + k(u(t) - v(t)), v_t(t) \rangle \\ &\leq \frac{1}{2} \| |u(t)|^{q-2}u(t) - k(u(t) - v(t)) \|_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \| |v(t)|^{q-2}v(t) + k(u(t) - v(t)) \|_2^2 \\ &\leq \| |u(t)|^{q-2}u(t) \|_2^2 + \| |v(t)|^{q-2}v(t) \|_2^2 \\ &\quad + 2k^2 \| u(t) - v(t) \|_2^2 \\ &\leq \frac{2(2-q+r)}{q+r} + \frac{2q-2}{q+r} \| u(t) \|_{q+r}^{q+r} \\ &\quad + \frac{2q-2}{q+r} \| v(t) \|_{q+r}^{q+r} + 2e^{(2C-4k)t} k^2 \| u_0 - v_0 \|_2^2 \end{aligned}$$

Mas note que

$$\frac{1}{q+r} \| u(t) \|_{q+r}^{q+r} \leq \frac{1}{q+r} \| u(t) \|_{q+r}^{q+r} + \frac{\epsilon}{p} \| u(t) \|_{W_0^{1,p}}^p = \psi u(t)$$

e como para todo  $t \geq T_1$ ,  $2e^{(2C-4k)t} \leq 2e^{(2C-4k)T_1}$ , e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^2 e^{(2C-4k)T_1} = 0$$

segue que dado  $D_1 \doteq \frac{2(2-q+r)}{q+r}$ , existe  $k_0$  tal que para todo  $k \geq k_0$

$$2e^{(2C-4k)t} k^2 \|u_0 - v_0\|_2^2 \leq D_1$$

para todo  $t \geq T_1$  e  $(u_0, v_0)$  em limitados de  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

Considere  $(u_0, v_0) \in \cup_k A_{\epsilon, k}$ ,  $k \geq k_0$  e defina  $D_2 \doteq 2q - 2$ . Temos

$$\frac{d}{dt}(\psi u(t) + \psi v(t)) \leq 2D_1 + D_2(\psi u(t) + \psi v(t))$$

Segue da definição de subdiferencial que  $\psi u(t) \leq \langle \partial \psi u(t), u(t) \rangle$ , e portanto usando as desigualdades de Holder e Young obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2) + \psi u(t) + \psi v(t) \\ & \leq \langle u_t(t) + \partial \psi u(t), u(t) \rangle + \langle v_t(t) + \partial \psi v(t), v(t) \rangle \\ & = \langle |u(t)|^{q-2} u(t) - k(u(t) - v(t)), u(t) \rangle \\ & + \langle |v(t)|^{q-2} v(t) + k(u(t) - v(t)), v(t) \rangle \\ & \leq \frac{2r}{(q+r)\eta^{\frac{q+r}{r}}} + q\eta^{\frac{q+r}{q}} (\psi u(t) + \psi v(t)) \end{aligned}$$

Escolha  $\eta > 0$  pequeno o suficiente para que

$$D_3 \doteq 1 - q\eta^{\frac{q+r}{q}} > 0.$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2) + D_3(\psi u(t) + \psi v(t)) \leq D_4 \quad (4.20)$$

onde  $D_4 \doteq \frac{2r}{(q+r)\eta^{\frac{q+r}{r}}}$ . Note que  $D_3$  e  $D_4$  dependem apenas de  $q$  e  $r$ . Integrando (4.20) de  $t$  a  $t + T_1$  com  $t \geq T_1$

$$\int_t^{t+T_1} (\psi u(s) + \psi v(s)) ds \leq \frac{N_4}{2D_3} + \frac{D_4 T_1}{D_3} \doteq D_5$$

para todo  $t \geq T_1$ . Segue do Lema 5.1 que

$$\|u(t)\|_{W_0^{1,p}} \leq \left[ \left( \frac{D_5}{T_1} + 2D_1 T_1 \right) \frac{e^{D_2 T_1} p}{\epsilon} \right]^{\frac{1}{p}} \doteq D_6$$

e  $\|v(t)\|_{W_0^{1,p}} \leq D_6$  para todo  $t \geq T_1$  onde  $D_6$  é uma constante positiva que depende apenas de  $p, q, r, T_1$  e  $\epsilon$ .

Portanto, se  $(u_0, v_0) \in \cup_k A_{\epsilon, k}$ , existe  $k_0$  tal que para todo  $k \geq k_0$  e  $t \geq T_1$

$$\|(u(t), v(t))\|_{W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}} \leq 2D_6.$$

Tome  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \cup_{k \geq k_0} A_{\epsilon, k}$ , arbitrário. Então  $(\bar{u}, \bar{v}) \in A_{\epsilon, \bar{k}}$  para algum  $\bar{k} \geq k_0$ . Pela invariância de  $A_{\epsilon, \bar{k}}$  existe  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \in A_{\epsilon, \bar{k}}$  tal que  $(\bar{u}, \bar{v}) = S_{\epsilon, \bar{k}}(T_1)(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ . Logo

$$\|(\bar{u}, \bar{v})\|_{W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}} \leq 2D_6.$$

Portanto existe  $k_0$  tal que, para todo  $k \geq k_0$ ,  $\cup_{k \geq k_0} A_{\epsilon, k}$  é limitada em  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ .

Para provar a semicontinuidade superior dos atratores  $\{A_{\epsilon,k}\}$  usaremos o Lema 5.6.

Seja  $k_n \rightarrow \infty$  e  $\{(u_{k_n}, u_{k_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência arbitrária tal que  $(u_{k_n}, u_{k_n}) \in A_{\epsilon,k_n}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\cup_{k \geq k_0} A_{\epsilon,k}$  é limitada em  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ , segue que  $\cup_{k \geq k_0} A_{\epsilon,k}$  é precompacto em  $L^2 \times L^2$ . Logo existe uma subsequência ainda denotada por  $\{(u_{k_n}, u_{k_n})\}$  e  $(u_0, u_0) \in L^2 \times L^2$  tal que  $(u_{k_n}, u_{k_n}) \rightarrow (u_0, u_0)$  em  $L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ . O próximo passo será mostrar que  $(u_0, u_0) \in A_\infty$ .

Sabemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(u_{k_n}, u_{k_n}) \in A_{\epsilon,k_n}$ , logo existe pelo menos uma órbita completa limitada  $\psi_{k_n}$  por  $(u_{k_n}, u_{k_n})$  através de  $S_{\epsilon,k_n}(t)$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , selecione uma órbita completa limitada,  $\psi_{k_n}$ , por  $(u_{k_n}, u_{k_n})$ . Em seguida defina a aplicação

$$\psi_0 : [0, \infty) \rightarrow L^2(0,1) \times L^2(0,1)$$

dada por  $\psi_0(t) \doteq T(t)(u_0, u_0)$ . Note que

$$\psi_0(0) = T(0)(u_0, u_0) = (u_0, u_0)$$

e

$$\|\psi_0(t)\|_{2 \times 2} = \|T(t)(u_0, u_0)\|_{2 \times 2} = \|T_\epsilon(t)u_0\|_2 + \|T_\epsilon(t)u_0\|_2 \leq 2K_1.$$

Agora considere a sequência  $\{(u_{k_n}^{-1}, u_{k_n}^{-1})\} \doteq \{\psi_{k_n}(-1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Sabemos que  $\{\psi_{k_n}^{-1}\} \subset \cup_{k \geq k_0} A_{\epsilon,k}$ , logo  $\{\psi_{k_n}(-1)\}$  é limitado em  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ , e portanto podemos extrair uma subsequência ainda denotada por  $\{(u_{k_n}^{-1}, u_{k_n}^{-1})\}$  tal que

$$(u_{k_n}^{-1}, u_{k_n}^{-1}) \rightarrow (u_0^{-1}, u_0^{-1})$$

em  $L^2(0,1) \times L^2(0,1)$  para algum  $(u_0^{-1}, u_0^{-1}) \in L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ . Defina

$$\psi_1 : [0, \infty) \rightarrow L^2(0,1) \times L^2(0,1)$$

dada por  $\psi_1(t) \doteq T(t)(u_0^{-1}, u_0^{-1})$ . É fácil ver que  $\psi_1^1(t) = \psi_1(t+1) = \psi_0(t)$  e que  $\psi_1(t)$  é limitado.

Assim, para cada  $r \geq 2$  inteiro, defina  $\{(u_{k_n}^{-r}, u_{k_n}^{-r})\} \doteq \{\psi_{k_n}(-r)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Novamente existe  $(u_0^{-r}, u_0^{-r}) \in L^2(0,1) \times L^2(0,1)$  tal que

$$(u_{k_n}^{-r}, u_{k_n}^{-r}) \rightarrow (u_0^{-r}, u_0^{-r})$$

em  $L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ . E mais uma vez podemos definir a aplicação

$$\psi_r : [0, \infty) \rightarrow L^2(0,1) \times L^2(0,1)$$

dada por  $\psi_r(t) \doteq T(t)(u_0^{-r}, u_0^{-r})$ . É fácil ver que  $\psi_r^r(t) = \psi_r(t+r) = \psi_0(t)$  e que  $\psi_r(t)$  é limitado. Além disso,  $\psi_r(t+1) = \psi_{r-1}(t)$ , para todo  $t \geq 0$ .

Agora defina  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  por

$$\psi(t) \doteq \text{valor comum de } \psi_r(t+r) \text{ para } r \geq -t.$$

Note que  $\psi(0) = \psi_0(0) = (u_0, u_0)$ ,  $\psi(t+s) = \psi_r(t+s+r) = T(t)\psi(s)$ , para todo  $t \geq 0$  e  $s \in \mathbb{R}$ . E para cada  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\|_{2 \times 2} &= \|\psi_r(t+r)\|_{2 \times 2} \\ &= \|T(t+r)(u_0^{-r}, u_0^{-r})\|_{2 \times 2} \leq 2N^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Observe que  $N$  é uniforme pois os dados iniciais  $(u_{k_n}^{-r}, u_{k_n}^{-r}) \in A_{\epsilon, k_n} \subset \cup_{k \geq k_0} A_{\epsilon, k_n}$  e  $\cup_{k \geq k_0} A_{\epsilon, k_n}$  é limitado em  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ . Além disso,  $\psi_r(t+r) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\epsilon, k_n}(t+r)(u_{k_n}^{-r}, u_{k_n}^{-r})$ , e como  $\{S_{\epsilon, k_n}(t+r)(u_{k_n}^{-r}, u_{k_n}^{-r})\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitado em  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$  visto que está contido na união dos atratores então existe um elemento  $(\alpha, \beta) \in W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$  tal que

$$\{S_{\epsilon, k_n}(t+r)(u_{k_n}^{-r}, u_{k_n}^{-r})\} \rightharpoonup (\alpha, \beta)$$

na topologia de  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ . Pela unicidade do limite fraco temos que  $(\alpha, \beta) = \psi_r(t+r)$ .

Logo,

$$\|\psi(t)\|_{W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|S_{k_n}(t+r)(u_{k_n}^{-r}, u_{k_n}^{-r})\|_{W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}} \leq M$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$  e conseqüentemente  $\psi(t) \in W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

Concluimos assim que por  $(u_0, u_0)$  passa uma órbita completa e limitada,  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$  dada por  $\psi(t) = \psi_r(t+r) = T(t+r)(u_0^{-r}, u_0^{-r})$ . Logo,  $(u_0, u_0) \in A = A_\epsilon \times A_\epsilon$ , ou seja  $(u_0, u_0) \in A_\infty$ . Portanto  $\{A_{\epsilon, k}\}_k$  é semicontinua superiormente quando  $k \rightarrow \infty$ , na topologia de  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

**Observação 4.7** Até o momento mostramos que

$$d_{W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}}(A_\infty, A_{\epsilon, k}) \rightarrow 0 \quad e \quad d_{L^2(0,1) \times L^2(0,1)}(A_{\epsilon, k}, A_\infty) \rightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow \infty$ , ou seja, a família  $\{A_{\epsilon, k}\}$  converge para o conjunto  $A_\infty$ , quando  $k \rightarrow \infty$ , na topologia de  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

Para finalizar o capítulo provaremos que tal continuidade ocorre também na topologia de  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ . Começamos provando que a continuidade do fluxo também é válida na topologia de  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ . Considere a sequência  $\{(u_{k_n}, u_{k_n})\}$ , a qual mostramos que converge para  $(u_0, u_0)$  em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ . Como  $(u_{k_n}, u_{k_n}) \in A_{\epsilon, k_n}$ , e  $\cup A_{\epsilon, k_n}$  é limitada em  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$  podemos extrair uma subsequência ainda denotada por  $\{(u_{k_n}, u_{k_n})\}$  de modo que  $(u_{k_n}, u_{k_n}) \rightharpoonup (u_0, u_0)$  em  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ . Segue da limitação de  $\cup A_{\epsilon, k_n}$  em  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ , que toda a sequência converge fraco. Para garantir a continuidade do fluxo em  $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$  resta provar que quando  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\|u_{k_n}\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow \|u_0\|_{W_0^{1,p}}.$$

De fato, como  $(u_{k_n}, u_{k_n}) \in A_{\epsilon, k_n}$ , segue pela invariância de  $A_{\epsilon, k_n}$ , que fixado  $t > 0$ , existe, para cada  $k_n \in \mathbb{N}$ ,  $(\bar{u}_{k_n}, \bar{u}_{k_n}) \in A_{\epsilon, k_n}$  tal que

$$(u_{k_n}, u_{k_n}) = S_{\epsilon, k_n}(t)(\bar{u}_{k_n}, \bar{u}_{k_n})$$

e por outro lado, como  $(\bar{u}_{k_n}, \bar{u}_{k_n}) \in A_{\epsilon, k_n}$ , existe  $(\bar{u}_0, \bar{u}_0) \in A_\infty$  e uma subsequência ainda denotada por  $(\bar{u}_{k_n}, \bar{u}_{k_n})$  tal que

$$(\bar{u}_{k_n}, \bar{u}_{k_n}) \rightarrow (\bar{u}_0, \bar{u}_0)$$

em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ . Pela continuidade do fluxo em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$

$$S_{\epsilon, k_n}(t)(\bar{u}_{k_n}, \bar{u}_{k_n}) \rightarrow T(t)(\bar{u}_0, \bar{u}_0)$$

Mas  $S_{\epsilon, k_n}(t)(\bar{u}_{k_n}, \bar{u}_{k_n}) = (u_{k_n}, u_{k_n}) \rightarrow (u_0, u_0)$  em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , logo  $T(t)(\bar{u}_0, \bar{u}_0) = (u_0, u_0)$ , pela unicidade do limite.

Por motivo de simplicidade vamos denotar  $(\bar{u}_{k_n}, \bar{u}_{k_n})$  por  $(\bar{u}_n, \bar{u}_n)$ ,  $S_{\epsilon, k_n}(t)(\bar{u}_{k_n}, \bar{u}_{k_n})$  por  $(u(t), u(t))$  e  $T(t)(\bar{u}_0, \bar{u}_0)$  por  $(w(t), w(t))$ . Assim,

$$\begin{aligned} \langle u_t - w_t, u - w \rangle &+ \langle -\epsilon \Delta_p u + \epsilon \Delta_p w, u - w \rangle \\ &= \langle f u - f w, u - w \rangle \\ &+ \langle -k(u - w), u - w \rangle \end{aligned}$$

e obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - w\|_2^2 + \epsilon \gamma_0 \|u - w\|_{W_0^{1,p}}^p \leq C \|u - w\|_2^2$$

Integrando de 0 a  $t$ , com  $t \leq t_0$  temos

$$\epsilon \gamma_0 \int_0^t \|u(s) - w(s)\|_{W_0^{1,p}}^p ds \leq \frac{1}{2} \|\bar{u}_k - \bar{u}_0\|_2^2 + \int_0^t C \|u(s) - w(s)\|_2^2 ds$$

e como

$$\|u(s) - w(s)\|_2^2 \rightarrow 0$$

pela continuidade do fluxo em  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  segue que

$$\|u(\cdot) - w(\cdot)\|_{W_0^{1,p}}^p \rightarrow 0$$

em  $L^1(0, t_0; \mathbb{R})$  e portanto existe uma subsequência ainda denotada por  $(u_k, u_k)$  tal que

$$\|u(s) - w(s)\|_{W_0^{1,p}}^p \rightarrow 0$$

qtp em  $[0, t_0]$ . Denote por  $A$  o subconjunto de  $[0, t_0]$  onde

$$\|u(s) - w(s)\|_{W_0^{1,p}}^p \rightarrow 0.$$

Vamos provar que essa convergência ocorre para todo  $s \in (0, t_0)$ . Seja  $t \in (0, t_0) \setminus A$ , fixo mas arbitrário, e  $0 < t_1 < t < t_0$ . Temos

$$\begin{aligned} |\psi u(t) - \psi w(t)| &\leq |\psi u(t) - \psi u(\theta)| \\ &+ |\psi u(\theta) - \psi w(\theta)| \\ &+ |\psi w(\theta) - \psi w(t)| \end{aligned}$$

Analisaremos primeiramente  $|\psi w(\theta) - \psi w(t)|$ . Note que

$$\begin{aligned} |\psi w(\theta) - \psi w(t)| &= \left| \int_t^\theta \frac{d}{ds} \psi w(s) ds \right| \\ &\leq \frac{3}{2} \int_t^\theta \|w_t(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{2} \int_t^\theta \|fw(s)\|_2^2 ds \end{aligned} \quad (4.21)$$

mas

$$\begin{aligned} \|fw(s)\|_2^2 &= \int_0^1 |w(s)|^{q-2} w(s) - |w(s)|^{q+r-2} w(s) dx \\ &\leq \|w(s)\|_{W_0^{1,p}}^{2q-2} + \|w(s)\|_{W_0^{1,p}}^{2q+2r-2} \leq C_2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

para todo  $s \geq 0$ . Além disso, multiplicando a equação  $w_t - \epsilon \Delta_p w = fw$  por  $w_t$  obtemos

$$\|w_t(t)\|_2^2 + \frac{d}{dt} \varphi_\epsilon^1 w(t) = \frac{d}{dt} \varphi^2 w(t)$$

a qual integrando de 0 a  $t_0$  nos dá

$$\int_0^{t_0} \|w_t(t)\|_2^2 \leq \frac{\epsilon}{p} \|\bar{u}_0\|_{W_0^{1,p}}^p + \frac{1}{q+r} \|\bar{u}_0\|_{q+r}^{q+r} + c \doteq C_3$$

onde  $C_3$  é uma constante positiva dependendo apenas de  $\epsilon, p, q, r$ , e  $\|\bar{u}_0\|_{W_0^{1,p}}$ .

Temos ainda

$$\begin{aligned} &\langle w_t(t+h) - w_t(t), w(t+h) - w(t) \rangle \\ &+ \langle -\epsilon \Delta_p w(t+h) + \epsilon \Delta_p w(t), w(t+h) - w(t) \rangle \\ &= \langle fw(t+h) - fw(t), w(t+h) - w(t) \rangle \end{aligned}$$

que integrando de  $s$  a  $t$  e usando a desigualdade de Gronwall resulta em

$$\|w(t+h) - w(t)\|_2^2 \leq \|w(s+h) - w(s)\|_2^2 e^{2Ct_0}. \quad (4.23)$$

Multiplicando (4.23) por  $\frac{1}{h^2}$  e fazendo  $h \rightarrow 0$  obtemos

$$\|w_t(t)\|_2^2 \leq \|w_t(s)\|_2^2 e^{2Ct_0}. \quad (4.24)$$

Fixe  $t$  e integre (4.24) de 0 a  $t$ . Assim temos

$$t \|w_t(t)\|_2^2 \leq \int_0^t \|w_t(s)\|_2^2 e^{2Ct_0} ds \leq C_3 e^{2Ct_0}. \quad (4.25)$$

Portanto  $\|w_t(t)\|_2^2$  é limitado por uma constante que depende de  $t_0, C, \epsilon, p, q, r$ , e  $\|\bar{u}_0\|_{W_0^{1,p}}$ .

Segue de (4.21), (4.25) e (4.22) que

$$|\psi w(\theta) - \psi w(t)| \leq C_4 |t - \theta|$$

onde  $C_4$  é uma constante positiva. Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\psi u(t) - \psi u(\theta)| &\leq \int_\theta^t 2 \|u_t(s)\|_2^2 ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_\theta^t \|fu(s)\|_2^2 ds \end{aligned} \quad (4.26)$$

Como em (4.22) é fácil ver que  $\|fu(s)\|_2^2$  é limitada. Além disso, multiplicando a primeira equação de  $(S_{\epsilon,k})$  por  $u_t$  obtemos

$$\|u_t\|_2^2 + \frac{d}{dt}\varphi_\epsilon^1 u(t) = \frac{d}{dt}(\varphi^2 u(t)) \quad (4.27)$$

Integrando de  $t_1$  a  $t_0$  temos

$$\int_{t_1}^{t_0} \|u_t(s)\|_2^2 ds \leq c + \frac{\epsilon}{p} \|u(t_1)\|_{W_0^{1,p}}^p + \frac{1}{q+r} \|u(t_1)\|_{q+r}^{q+r} \quad (4.28)$$

Como  $\|(u(t), u(t))\|_{W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}}$  é uniformemente limitada para todo  $t \geq 0$  segue que  $\int_{t_1}^{t_0} \|u_t(s)\|_2^2 ds$  é limitada por uma constante que depende apenas de  $\epsilon, p, q, r$  e  $k_1$ .

Por outro lado, é fácil ver que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t+h) - u(t)\|_2^2 \leq C \|u(t+h) - u(t)\|_2^2 \quad (4.29)$$

o qual integrando de  $s$  a  $t$ , com  $t_1 < s < t < t_0$  e usando a desigualdade de Gronwall resulta em

$$\|u(t+h) - u(t)\|_2^2 \leq \|u(s+h) - u(s)\|_2^2 e^{2C(t_0-t_1)} \quad (4.30)$$

Multiplicando (4.30) por  $\frac{1}{h^2}$  e fazendo  $h \rightarrow 0$  temos

$$\|u_t(t)\|_2^2 \leq \|u_t(s)\|_2^2 e^{2Ct_0} \quad (4.31)$$

Agora fixe  $t$  e integre de  $t_1$  a  $t_0$ . Segue de (4.28) que  $\|u_t(t)\|_2^2$  é limitada para todo  $t \in (t_1, t_0)$  e portanto a convergência em (4.26) fica provada.

Assim

$$\psi u(t) \rightarrow \psi w(t)$$

para todo  $t \in (0, t_0)$  e portanto

$$\|u(t)\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow \|w(t)\|_{W_0^{1,p}}$$

como queríamos demonstrar.

**Observação 4.8** Concluimos assim que dada uma sequência  $\{(u_k, u_k)\}$  com  $(u_k, u_k) \in A_{\epsilon,k}$  para cada  $k$  existe  $(u_0, u_0) \in A_\infty$  e uma subsequência ainda denotada por  $\{(u_k, u_k)\}$  tal que

$$(u_k, u_k) \rightarrow (u_0, u_0)$$

em  $W_0^{1,p}(0,1) \times W_0^{1,p}(0,1)$ . Logo pelo Lema 5.6 segue que a família de atratores  $\{A_{\epsilon,k}\}$  é semicontinua superiormente quando  $k \rightarrow \infty$ , na topologia de  $W_0^{1,p}(0,1) \times W_0^{1,p}(0,1)$ .

Portanto podemos dizer que a família  $\{A_{\epsilon,k}\}$  se comporta continuamente quando  $k \rightarrow \infty$ , e seu limite é o conjunto  $A_\infty$ , ou seja, o limite em  $W_0^{1,p}(0,1) \times W_0^{1,p}(0,1)$  de  $\{A_{\epsilon,k}\}$  é um subconjunto do atrator do problema limite, a saber

$$A_\infty = \{(u, u); u \in A_\epsilon\} \subset A_\epsilon \times A_\epsilon = A.$$

### 4.3 $\epsilon$ -sincronização

O Teorema a seguir é o principal resultado deste capítulo. Provamos neste teorema que o sistema  $(S_n)$ , veja introdução do Capítulo 4,  $\epsilon$ -sincroniza.

**Teorema 4.6** *Considere o sistema*

$$(S_n) \begin{cases} u_t^n = \epsilon_1^n (|u_x^n|^{p_1^n - 2} u_x^n)_x + |u^n|^{q_1^n - 2} u^n (1 - |u^n|^{r_1^n}) - k(u^n - v^n) \\ v_t^n = \epsilon_2^n (|v_x^n|^{p_2^n - 2} v_x^n)_x + |v^n|^{q_2^n - 2} v^n (1 - |v^n|^{r_2^n}) + k(u^n - v^n) \end{cases}$$

onde  $(u^n(0, t), v^n(0, t)) = (0, 0)$  e  $(u^n(1, t), v^n(1, t)) = (0, 0)$  para todo  $t \in (0, +\infty)$  e  $(u^n(x, 0), v^n(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ ,  $\epsilon_i^n$ ,  $k$  são constantes positivas,  $q_i^n \geq 2$  e  $p_i^n > 2$  e  $r_i^n \geq q_i^n - 2$ , para  $i = 1, 2$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $(\epsilon_i^n, p_i^n, q_i^n, r_i^n) \rightarrow (\epsilon, p, q, r)$  quando  $n \rightarrow +\infty$  então, para  $k$  suficientemente grande a solução de  $(S_n)$   $\epsilon$ -sincroniza.

**Demonstração:** Pela semicontinuidade superior dos atratores  $A_n$ , dado  $\eta > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$

$$d(A_n, A_L) < \frac{\eta}{10}$$

Considere  $(u_0, v_0) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ . Como  $A_n$  é atrator, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $t_n > 0$  tal que

$$S_n(t)(u_0, v_0) \in \mathcal{O}_{\frac{\eta}{10}}(A_n)$$

para todo  $t \geq t_n$ . Assim, para cada  $t \geq t_n$ , existe  $(u_n^t, v_n^t) \in A_n$  com

$$\|(u^n(t), v^n(t)) - (u_n^t, v_n^t)\|_{2 \times 2} < \frac{\eta}{10}$$

sendo  $(u^n(t), v^n(t)) = S_n(t)(u_0, v_0)$ .

Tome  $n \geq n_0$ . Então para todo  $t \geq t_n$  existe  $(u_0^t, v_0^t) \in A_0$  tal que

$$\|(u_n^t, v_n^t) - (u_0^t, v_0^t)\|_{2 \times 2} < \frac{\eta}{10}.$$

Logo, se  $n \geq n_0$  e  $t \geq t_n$  temos

$$\begin{aligned} \|u^n(t) - v^n(t)\|_2 &\leq \|u^n(t) - u_n^t\|_2 + \|u_n^t - u_0^t\|_2 \\ &+ \|u_0^t - v_n^t\|_2 + \|v_n^t - v^n(t)\|_2 \\ &< \frac{\eta}{2} \end{aligned}$$

o que garante a  $\epsilon$ -sincronicidade. ■

# Capítulo 5

## Apêndice

Este capítulo contém os principais resultados e definições usados nos capítulos anteriores.

**Lema 5.1 (Lema 1.1, [29])** *Sejam  $g, h, y$ , três funções positivas localmente integráveis em  $(t_0, +\infty)$  tais que  $y'$  é localmente integrável em  $(t_0, +\infty)$ , e satisfaz*

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h$$

para  $t \geq t_0$ , onde  $\int_t^{t+r} g(s)ds \leq a_1$ ,  $\int_t^{t+r} h(s)ds \leq a_2$ ,  $\int_t^{t+r} y(s)ds \leq a_3$ , para  $t \geq t_0$ , onde  $r, a_1, a_2$ , e  $a_3$  são constantes positivas. Então

$$y(t+r) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) \exp(a_1)$$

para todo  $t \geq t_0$ .

**Lema 5.2 (Lema 5.1, [29])** *Seja  $y$  uma função positiva absolutamente contínua em  $(0, +\infty)$  satisfazendo*

$$y' + \gamma y^p \leq \delta$$

com  $p > 1$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\delta \geq 0$ . Então, para  $t \geq 0$ ,

$$y(t) \leq \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{p}} + (\gamma(p-1)t)^{\frac{-1}{(p-1)}}.$$

**Lema 5.3 (Lema 2.1, [28])** (i) *Sejam  $u$  e  $v$  soluções fortes de  $(P_\epsilon)$  em  $[0, T]$  com  $u(0) = u_0$  e  $v(0) = v_0$ , respectivamente. Então as seguintes desigualdades valem:*

$$\|u(t) - v(t)\|_2^2 + 2^{3-p}\epsilon \int_0^t \|u_x(s) - v_x(s)\|_p^p ds \leq e^{2C_0 t} \|u_0 - v_0\|_2^2$$

para  $t \in [0, T]$ , onde  $C_0 = \sup \{f'(u); u \in (-\infty, +\infty)\} < +\infty$ .

(ii) *Cada solução forte  $u$  de  $(P_\epsilon)$  em  $[0, T]$  com  $u(0) = u_0$  satisfaz*

$$\epsilon t \|u_x(t)\|_p^p + p \int_0^t s \|u_t(s)\|_2^2 ds \leq C_1(t + \|u_0\|_2^2)$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Em particular, se  $u_0 \in W_0^{1,p}$ , então

$$\epsilon \|u_x(t)\|_p^p + p \int_0^t \|u_t(s)\|_2^2 ds \leq \epsilon \|u_{0x}\|_p^p + C_2 \|u_0\|_{q+r}^{q+r} + C_3$$

para todo  $t \in [0, T]$ , onde  $C_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) são constantes positivas dependendo apenas de  $p, q$  e  $r$ .

**Teorema 5.1 (Teorema 2.1, [28])** Para qualquer  $u_0 \in L^2$ , existe uma única solução forte  $u(\cdot)$  de  $(P_\epsilon)$  em  $[0, +\infty)$  com  $u(0) = u_0$  satisfazendo

$$\begin{aligned} u &\in C((0, +\infty); W_0^{1,p}) \\ t^{\frac{1}{2}} u_t &\in L^2(0, T; L^2) \quad \text{para cada } T > 0. \end{aligned}$$

**Lema 5.4 (Lema 2.2, [28])** A família  $\{S(t) : L^2 \rightarrow L^2; t \geq 0\}$  tem as seguintes propriedades:

- (i) Para cada  $t > 0$ ,  $R(S(t)) \subset W_0^{1,p}$ ;
- (ii) Para cada  $t \geq 0$ ,  $S(t)$  é contínuo de  $L^2$  em  $L^2$ ;
- (iii) Para cada  $u_0 \in L^2$ ,  $S(\cdot)u_0$  é contínuo de  $[0, +\infty)$  em  $L^2$ ;
- (iv)  $S(0) = I$ , onde  $I$  denota o operador identidade;
- (v)  $S(t)(S(\tau)u_0) = S(t + \tau)u_0$  para todo  $u_0 \in L^2$  e  $t, \tau \geq 0$ .

**Lema 5.5 (Desigualdade de Tartar)** Seja  $p \geq 2$ . Então, para todo  $a, b \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$

$$\langle \|a\|^{p-2} a - \|b\|^{p-2} b, a - b \rangle \geq \gamma_0 \|a - b\|^p$$

onde  $\gamma_0$  é positivo e depende apenas de  $p$  e de  $m$ .

Se  $1 < p < 2$  então para todo  $a, b \in \mathbb{R}^m$

$$\langle \|a\|^{p-2} a - \|b\|^{p-2} b, a - b \rangle \leq \gamma_1 \|a - b\|^p$$

onde  $\gamma_1$  depende apenas de  $p$  e de  $m$ .

**Teorema 5.2 (Teorema 2.2, [19])** Seja  $\{V_t; t \in \mathbb{R}, X\}$  um semigrupo de classe  $k$ . Suponha que ele é ou dissipativo ou limitado e ponto dissipativo. Então  $\{V_t; t \in \mathbb{R}, X\}$  tem um atrator global minimal  $\mathcal{M}$ , o qual é compacto e invariante.

**Teorema 5.3 (Teorema 2.3, [19])** Suponha que o semigrupo  $\{V_t; t \in \mathbb{R}, X\}$  pertence à classe  $k$  e  $\gamma^+(x)$  é limitado para qualquer  $x \in X$ . Se para este semigrupo existe uma “boa” função de Lyapunov, então o atrator global minimal  $\widehat{\mathcal{M}}$  é não-vazio e coincide com o conjunto  $Z$  de todos os pontos estacionários.

**Teorema 5.4 (Teorema 5.1, [21])** Sejam  $A_0, A, A_1$  espaços de Banach com  $A_0$  e  $A_1$  reflexivos e a imersão  $A_0 \rightarrow A$  compacta. Se  $1 < p_0, p_1 < +\infty$ , então a imersão de  $V$  em  $L^{p_0}(0, T; A)$  é compacta, onde o espaço

$$V \doteq \left\{ v \in L^{p_0}(0, T; A_0) \quad e \quad \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; A_1) \right\}$$

é munido da norma  $\|v\|_V \doteq \|v\|_{L^{p_0}(0, T; A_0)} + \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{L^{p_1}(0, T; A_1)}$  e  $T$  é finito.

**Definição 5.1 (Definição 3.1, [4])** *Seja  $A$  um operador de  $H$  e  $f \in L^1(0, T; H)$ . Chamamos de solução forte da equação  $\frac{du}{dt} + Au \ni f$  toda função  $u \in C([0, T]; H)$ , absolutamente contínua sobre todo compacto de  $(0, T)$ , verificando  $u(t) \in \mathcal{D}(A)$  e  $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$  qtp em  $(0, T)$ .*

*Dizemos que  $u \in C([0, T]; H)$  é solução fraca da equação  $\frac{du}{dt} + Au \ni f$  se existem seqüências  $f_n \in L^1(0, T; H)$  e  $u_n \in C([0, T]; H)$  tais que  $u_n$  é uma solução forte da equação  $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$ ,  $f_n \rightarrow f$  em  $L^1(0, T; H)$  e  $u_n \rightarrow u$  uniformemente em  $[0, T]$ .*

**Teorema 5.5 (Teorema 3.6, [4])** *Seja  $f \in L^2(0, T; H)$ , então toda solução fraca da equação  $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ , onde  $A$  é um operador maximal monótono, é uma solução forte e  $\sqrt{t} \frac{du}{dt}(t) \in L^2(0, T; H)$ .*

**Definição 5.2 (Definição 1.1, [7])** *Por semicontinuidade superior e inferior de uma família de conjuntos  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  em  $\lambda = \lambda_0$  entendemos o seguinte*

- *Dizemos que  $\{A_\lambda\}$  é semicontínua superiormente em  $\lambda_0$  se  $\sup_{x_\lambda \in A_\lambda} d(x_\lambda, A_{\lambda_0}) \rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ ;*
- *Dizemos que  $\{A_\lambda\}$  é semicontínua inferiormente em  $\lambda_0$  se  $\sup_{x \in A_{\lambda_0}} d(x, A_\lambda) \rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ .*

**Lema 5.6 (Lema 1.1, [7])** *Seja  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  como na definição 5.2*

- *Se qualquer seqüência  $\{x_{\lambda_n}\}$  com  $x_{\lambda_n} \in A_{\lambda_n}$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , tem uma subsequência convergente com limite pertencendo a  $A_{\lambda_0}$ , então  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  é semicontínua superiormente em  $\lambda_0$ ;*
- *Se  $A_{\lambda_0}$  é compacto e para qualquer  $x \in A_{\lambda_0}$  existe uma seqüência  $\{x_{\lambda_n}\}$  com  $x_{\lambda_n} \in A_{\lambda_n}$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , que converge para  $x$ , então  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  é semicontínua inferiormente em  $\lambda_0$ .*

**Proposição 5.1 (Proposição 14, [20])** *Dada uma seqüência equicontínua de aplicações  $f_n : M \rightarrow N$ , onde  $M$  e  $N$  são espaços métricos, suponhamos que, para cada  $x \in M$ , o conjunto  $\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\}$  tenha fecho completo em  $N$ . Se  $(f_n)$  converge simplesmente num subconjunto denso  $D \subset M$  então  $(f_n)$  converge uniformemente em cada parte compacta de  $M$ .*

# Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R.A.; FOURNIER, J.J.F. *Sobolev spaces*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] BOCCARDO, L.; MURAT F. Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations. *Nonlinear Analysis*. v.19, n.6, 581–597, 1992.
- [3] BRÉZIS, H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Matrise. Masson, Paris, 1983.
- [4] BRÉZIS, H. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. American Elsevier Publishing, New York, 1973.
- [5] BRUSCHI, S.M.; GENTILE C.B.; PRIMO, M.R.T. Continuity on equilibria and upper semicontinuity, preprint.
- [6] CARVALHO, A.N.; RODRIGUES, H. M.; DLOTKO, T. Upper semicontinuity of attractors and synchronization. *Journal of mathematical analysis and applications*. v.220, n.1, 13–41, 1998.
- [7] CARVALHO, A. N.; PISKAREV, S. A general approximation scheme for attractors of abstract parabolic problems. *Numerical functional analysis and optimization*. v.27, n. 7-8, 785–829, 2006.
- [8] CARVALHO, A. N.; CHOLEWA, J. W.; DLOTKO, T. Global attractors for problems with monotone operators. *Bollettino della Unione Matematica Italiana*. v.2, n. 3, 693–706, 1999.
- [9] CHAFEE, N.; INFANTE, E. F. A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type. *Bulletin of the American Mathematical Society*. v.4, ,17–37, 1974.
- [10] DESHENG, L.; KLOEDEN, P.E. Equi-attraction and the continuous dependence of attractors on parameters. *Glasgow Mathematical Journal* . v.46, 131 - 141, 2004.

- [11] DIBENEDETTO, E. *Degenerate parabolic equations*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [12] GENTILE, C. B. *Problemas parabólicos quasilineares com parte principal monótona: comparação e existência de atrator*. Tese de Doutorado, Usp-São Carlos, 1999.
- [13] GENTILE, C. B.; BRUSCHI, S.M. Lap number properties for  $p$ -Laplacian problems investigated by Lyapunov methods. *Nonlinear Analysis*. v.66, n.5, 1005–1015, 2007.
- [14] GENTILE, C. B.; PRIMO, M. R. T. Parameter dependent quasi-linear parabolic equations. *Nonlinear Analysis*. v.59, 801-812, 2004.
- [15] HALE, J. *Asymptotic behavior of dissipative systems*. Mathematical Surveys and Monographs, 25. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [16] HALE, J., Diffusive coupling, dissipation, and synchronization. *Journal of Dynamics and Differential Equations*. v.9, n.1, 1–52, 1997.
- [17] HENRY, D. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Lecture Notes in Mathematics, 840. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.
- [18] JUNGES, T. *Propriedades assintóticas de uma equação de reação e difusão com  $p$ -laplaciano degenerado*, Dissertação de Mestrado, UFSCar, 2006.
- [19] LADYZHENSKAYA, O. *Attractors for semigroups and evolution equations*. Cambridge University Press, 1991.
- [20] LIMA, E. L. *Espaços métricos*. Projeto Euclides, Impa, 2007.
- [21] LIONS, J. L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. (French) Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [22] MATANO, H., Nonincrease of the lap-number of a solution for a one-dimensional semilinear parabolic equation. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math*. v.29, n. 2, 401–441, 1982.
- [23] MELNIK, V.S.; VALERO, J. On attractor of multivalued semi-flows and differential inclusions. *Set-Valued Analysis*. v.6, 83-111, 1998.
- [24] ÔTANI, M. On existence of strong solutions for  $\frac{du}{dt}(t) + \partial\phi^1(u(t)) - \partial\phi^2(u(t)) \ni f(t)$ . *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math*. v.24, n. 3, 575–605, 1977.
- [25] ÔTANI, M. Existence and asymptotic stability of strong solutions of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials. *Qualitative theory of*

*differential equations*, Vol. I, II (Szeged, 1979), pp. 795–809, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 30, North-Holland, Amsterdam-New York, 1981.

- [26] RODRIGUES, H. M. Abstract methods for synchronization and applications. *Applicable Analysis*. v.62, n.3-4, 263–296, 1996.
- [27] SIMSEN J.; GENTILE, C.B. On attractors for multivalued semigroups defined by generalized semiflows. *Set-Valued Analysis*. v.16, 105-124, 2008.
- [28] TAKEUCHI, S.; YAMADA, Y. Asymptotic properties of a reaction-diffusion equation with degenerate p-Laplacian. *Nonlinear Analysis*. v.42, 41-61, 2000.
- [29] TEMAM, R. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. Applied Mathematical Sciences, 68. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [30] VRABIE, I. I. *Compactness methods for nonlinear evolutions* John Wiley & Sons, New York, 1995.