

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Confinamento de partículas quânticas a curvas do
espaço**

Alessandra Aparecida Verri

SÃO CARLOS

2010

Confinamento de partículas quânticas a curvas do
espaço

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Confinamento de partículas quânticas a curvas do
espaço**

Alessandra Aparecida Verri

Orientador: Prof. Dr. César Rogério de Oliveira.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

SÃO CARLOS

2010

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

V554cp

Verri, Alessandra Aparecida.

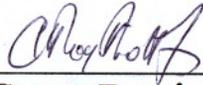
Confinamento de partículas quânticas a curvas do espaço
/ Alessandra Aparecida Verri. -- São Carlos : UFSCar, 2010.
97 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,
2010.

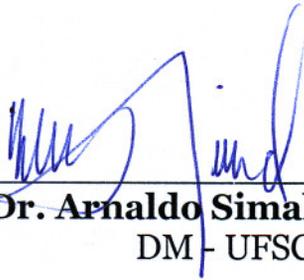
1. Teoria espectral (Matemática). 2. Átomo de hidrogênio.
3. Coulomb, Potencial de. 4. Redução de dimensão. I. Título.

CDD: 515.7222 (20^a)

Banca Examinadora:



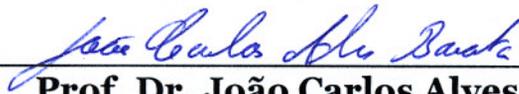
Prof. Dr. Cesar Rogério de Oliveira
DM - UFSCar



Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento
DM - UFSCar



Prof. Dr. Túlio de Oliveira Carvalho
DMA - UEL



Prof. Dr. João Carlos Alves Barata
DFMA - USP



Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga
ICMC - USP

Aos meus pais, com todo amor e carinho.

Agradecimentos

A Deus por escolher para mim este caminho e torna-lo incrivelmente alegre.

Ao meu orientador pela sua paciência infinita, sua compreensão, suas sábias orientações, sua dedicação, pela confiança e motivação a este trabalho.

Aos meus pais, modelos de luta e motivo de orgulho sem fim, sem os quais não seria possível realizar este sonho.

Aos amigos do departamento, pela amizade, pelo carinho, pelas risadas e por estarem sempre prontos a ajudar.

A todos que de uma maneira ou de outra estiveram comigo, ocasionalmente ou constantemente, nesses últimos anos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos reduções de dimensões em alguns sistemas quânticos; tais reduções ocorrem devido ao confinamento do movimento de partículas, inicialmente em tubos no espaço, a curvas. Nosso principal objetivo é encontrar o operador efetivo que descreve o movimento da partícula após o confinamento. (1) Na primeira situação estudamos um tubo infinito gerado por uma curva com torção e curvaturas não-triviais. Aqui as seções transversais possuem sempre o mesmo diâmetro. (2) Estudamos também tubos no espaço deformados de uma forma específica, ou seja, o diâmetro das seções transversais possui um único máximo global. Tais tubos também apresentam curvatura e torção não-triviais. (3) Finalmente analisamos a questão de qual extensão auto-adjunta do átomo de hidrogênio unidimensional seria fisicamente relevante. Consideramos tal átomo num tubo tridimensional e estudamos o limite de quando o tubo converge ao eixo- x , e isso mostrou que a extensão de Dirichlet foi sempre obtida após o confinamento.

Abstract

In this work we study dimensional reductions in some quantum systems; such reductions occur due to confinement of the particle from a tube in space to a curve. Our main goal is to find the effective hamiltonian operator that describes the motion of the particle after confinement. We consider three particular situations. (1) In the first situation, we study an infinitely long tube generated by a curve with non-trivial torsion and curvature. Here the tube cross sections always have the same diameter. (2) We also study tubes in space deformed in a specific way, i.e., the diameter of the cross sections have a unique global maximum. Such tubes also have non-trivial torsion and curvature. (3) Finally, we analyze the question of which self-adjoint extension of the one-dimensional hydrogen atom would be physically relevant. We consider such atom in a three-dimensional tube and take the limit as the tube converges to the x axis, and it is shown that the Dirichlet (at the origin) extension is always obtained after such confinement.

Sumário

1	Introdução	10
2	Revisão de Γ-Convergência	17
2.1	Definições e propriedades	17
2.2	Γ -convergência e convergência dos resolventes	19
3	Γ-Convergência e a partícula livre	21
3.1	Geometria do domínio	22
3.2	Partícula livre	23
3.3	Mudança de variáveis	24
3.4	Alguns resultados	27
4	Γ-Convergência e o potencial de Coulomb	30
4.1	O caso repulsivo	32
4.2	O caso atrativo	39
5	Convergência uniforme - Partícula livre	45
5.1	Definições	46
5.2	Convergência Uniforme	48
6	Convergência uniforme - Coulomb atrativo	55
6.1	Redução de dimensão	56

6.2	Convergência uniforme	60
7	O Laplaciano em tubos deformados	63
7.1	Geometria do domínio	64
7.2	Forma quadrática	65
7.3	Redução de dimensão	68
7.4	Caso Dirichlet	76
7.5	Demonstração do Teorema 7.6	78
7.6	Caso Neumann	81
7.7	Caso $I = \mathbb{R}$	83
7.8	O espectro discreto no caso $I = \mathbb{R}$	86
A		89
A.1	A extensão de Dirichlet e sua forma quadrática	89
A.2	Um resultado sobre convergência uniforme	91
A.3	A desigualdade de Hardy	93
A.4	Os Laplacianos de Dirichlet e Neumann	94
A.5	Teorema da Convergência Dominada para operadores	95

Capítulo 1

Introdução

De forma geral, nesta tese estudamos algumas reduções de dimensão em certos sistemas quânticos; tal redução ocorre devido ao confinamento do movimento da partícula, inicialmente restrito a um tubo em \mathbb{R}^3 , a uma curva. Nosso principal objetivo é encontrar o operador efetivo que descreve o movimento da partícula após o confinamento.

Claramente tal confinamento é um processo singular e, assim, deve ser considerado com muito cuidado; por exemplo, devido ao princípio de incerteza a redução de alguma dimensão implica em que os momentos (nas direções que “somem”) diverjam e isso deve ser compensado (“renormalizado”). Deveremos tratar tais limites de forma apropriada, tanto no sentido dos resolventes como no uso da Γ -convergência; como este último conceito não é de uso comum entre os estudiosos da matemática da mecânica quântica, devotaremos algum espaço no início da tese a ele.

Análises de tais reduções tem sido comuns no estudo de grafos quânticos [8], mas aqui consideramos situações diferentes. Consideraremos três situações, com resultados originais em cada uma delas.

1. Na primeira situação temos um tubo infinito gerado por uma curva com torção e curvaturas não-triviais. Nosso ponto de partida neste tópico foi a referência [1], a qual estudou o caso de tubos compactos. Para tubos infinitos existem re-

sultados usando Γ -convergência e convergência forte no sentido dos resolventes [5]. No Capítulo 5 conseguimos a convergência uniforme dos resolventes. Aqui as seções transversais possuem sempre o mesmo diâmetro.

2. Estudamos também tubos deformados de uma forma específica, ou seja, o diâmetro das seções transversais possui um único máximo global (com certas características). Nosso ponto de partida neste tópico foram os trabalhos [9] e [10], nos quais tubos planares e sem curvatura foram considerados. No Capítulo 7 consideramos tubos similares mas no espaço \mathbb{R}^3 e com curvatura e torção não-triviais.
3. Finalmente analisamos a questão de qual extensão auto-adjunta do átomo de hidrogênio unidimensional seria fisicamente relevante. Para isso consideramos esse átomo num tubo tridimensional e estudamos o limite de quando o tubo converge ao eixo- x , procurando selecionar alguma extensão do caso em uma dimensão. Nosso ponto de partida foram as caracterizações dessas extensões discutidas em [6], e a extensão de Dirichlet foi sempre obtida após o confinamento. Esses resultados aparecem nos Capítulos 4 e 6 da tese.

No que segue procuramos apresentar um pouco mais de detalhes do que é discutido nesta tese.

Seja I o operador identidade e $0 \leq T_j$ uma sequência de operadores positivos e auto-adjuntos atuando em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . A monotonicidade da sequência dos operadores resolventes $R_{-\lambda}(T_j) := (T_j + \lambda I)^{-1}$ ($\lambda > 0$) implica a monotonicidade da correspondente sequência de formas sesquilineares e vice-versa. Devido à monotonicidade, em algumas situações temos a existência de limites, como convergência forte dos resolventes (veja Seção 10.4 em [4]). Supondo situações mais gerais, a princípio não é clara a relação entre convergência forte dos resolventes e convergência das respectivas formas quadráticas, ou seja, o que acontece quando supomos que essas formas são apenas, por exemplo, limitadas inferiormente? Esta questão está diretamente relacionada com o conceito de Γ -convergência que é o assunto do Ca-

pítulo 2. Nele apresentamos a definição de Γ -convergência e algumas propriedades básicas. Dentre eles a relação com respeito à convergência forte dos resolventes.

Como uma aplicação da Γ -convergência de formas, consideremos o caso de uma partícula se movendo em um tubo em \mathbb{R}^3 sem a influência de qualquer potencial. A esta situação vamos chamar simplesmente de partícula livre em um tubo em \mathbb{R}^3 . Fazendo esse tubo “encolher” a uma curva suave, a questão é encontrar o operador limite sobre essa curva. Mais precisamente, o operador inicial associado ao problema é o Laplaciano de Dirichlet

$$\psi \mapsto -\Delta_\varepsilon \psi, \quad \psi \in H^2(\Omega_\varepsilon) \cap H_0^1(\Omega_\varepsilon),$$

em que $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto gerado por uma seção transversal $S_\varepsilon = \varepsilon S$ ($S \subset \mathbb{R}^2$) o qual rotaciona ao longo de uma curva $r(s) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. No entanto, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ a região Ω_ε torna-se cada vez mais estreita e as oscilações transversais da partícula ficam muito rápidas. Conseqüentemente, a energia total do sistema diverge e vai a infinito quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Para enxergarmos melhor esta situação consideremos o seguinte exemplo bidimensional. Uma partícula se move livremente em $\Sigma_\varepsilon := [0, \pi] \times [0, \varepsilon\pi]$. As autofunções e os respectivos autovalores do Laplaciano de Dirichlet associados ao intervalo $[0, \varepsilon\pi]$ são

$$u_n^\varepsilon(y) = \text{sen} \left(\frac{ny}{\varepsilon} \right), \quad \lambda_n^\varepsilon = \frac{n^2}{\varepsilon^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Fica claro que quando a região Σ_ε se reduz ao intervalo $[0, \pi]$ para $\varepsilon \rightarrow 0$, as energias do estado transversal tendem a infinito. Assim, voltando ao caso tridimensional, seja λ_0 o primeiro autovalor do Laplaciano de Dirichlet restrito à S e u_0 a autofunção correspondente. O estudo é então feito com formas quadráticas, não somente do Laplaciano de Dirichlet em Ω_ε , mas sim da família

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left(|\nabla_x \phi|^2 - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} |\phi|^2 \right) dx, \quad \phi \in H_0^1(\Omega_\varepsilon). \quad (1.1)$$

De fato, vimos que as energias do estado transversal tendem a infinito no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. O fator $-\lambda_0/\varepsilon^2$ em (1.1) tem a finalidade de impedir que essa divergência

ocorra e assim somente a dinâmica sobre a curva permaneça neste limite. O domínio da forma quadrática limite também está diretamente relacionado com este fato, veremos que tal conjunto é $\{wu_0 : w \in H^1(\mathbb{R})\}$.

Na definição de Ω_ε , o caso em que I é um intervalo limitado foi analisado em [1]. Foi mostrado que os autovalores $\{\lambda_i^\varepsilon : i \in \mathbb{N}\}$ de $-\Delta_\varepsilon$ em Ω_ε com a condição de Dirichlet na fronteira, tem o seguinte comportamento:

$$\lambda_i^\varepsilon = \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} + \mu_i^\varepsilon, \quad \mu_i^\varepsilon \rightarrow \mu_i,$$

em que μ_i são autovalores de um problema unidimensional

$$-w''(s) + q(s)w(s) = \mu w(s), \quad w \in H_0^1(I).$$

O potencial $q(s)$ depende dos efeitos geométricos do tubo. Mais tarde alguns resultados foram obtidos para tubos ilimitados [5]. No Capítulo 3 apresentamos um resumo dos principais resultados desses dois trabalhos, ou seja, [1] e [5].

Agora, para apresentarmos alguns dos objetivos do trabalho, consideremos o operador de Schrödinger com potencial de Coulomb $V(x) = -\frac{\kappa}{|x|}$, $0 \neq \kappa \in \mathbb{R}$. Independentemente da dimensão considerada, chamamos este modelo de **átomo de hidrogênio**. Ainda mais, chamamos de caso atrativo se $\kappa > 0$ e caso repulsivo caso contrário. Para o caso tridimensional, consideremos

$$(\dot{H}\psi)(x) = -(\Delta\psi)(x) - \frac{\kappa}{|x|}\psi(x), \quad \text{dom } \dot{H} = C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

O Teorema de Kato Rellich [4] nos diz que este operador é essencialmente auto-adjunto, ou seja, possui uma única extensão auto-adjunta. No caso unidimensional o operador é

$$(\dot{H}w)(s) = -w''(s) - \frac{\kappa}{|s|}w(s), \quad \text{dom } \dot{H} = C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}). \quad (1.2)$$

É conhecido que \dot{H} têm índices de deficiências iguais a 2 e, conseqüentemente, possui infinitas extensões auto-adjuntas [6]. Na introdução do Capítulo 4 há uma descrição de todas essas extensões. Diferentemente da versão 3D, a singularidade do

potencial de Coulomb 1D exige condições de contorno na origem para as extensões. Um exemplo de uma extensão auto-adjunta de \hat{H} é

$$(H_D w)(s) = -w''(s) - \frac{\kappa}{|s|} w(s) \quad (1.3)$$

em que

$$\text{dom } H_D = \{w \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : w(0^-) = 0 = w(0^+)\}.$$

Chamamos H_D de extensão de Dirichlet do operador (1.2).

Discussões sobre qual extensão auto-adjunta melhor representa o átomo de hidrogênio unidimensional tem aparecido bastante na literatura [11, 13]. Um argumento apresentado em [13], para o caso $\kappa > 0$, para adotar a condição de contorno de Dirichlet na origem é o seguinte: considere os operadores unidimensionais

$$(H_a w)(s) = -w''(s) - \kappa \frac{w(s)}{|s| + a}, \quad a > 0.$$

Foi mostrado que a sequência H_a converge para H_D no sentido uniforme dos resolventes quando $a \rightarrow 0$.

Juntando o problema de selecionar extensões auto-adjuntas de (1.2) e as idéias de [1] e [5] apresentadas acima, nossa proposta nesta tese é a seguinte: considerar o átomo de hidrogênio se movendo em um tubo em \mathbb{R}^3 e saber qual das extensões é selecionada no processo de confinamento. No entanto, para que recuperemos o átomo de hidrogênio unidimensional no limite $\varepsilon \rightarrow 0$ a região Ω_ε deve ser gerada pela curva $r(s) = (s, 0, 0)$. Para o caso repulsivo aplicamos a teoria de Γ -convergência; já para o caso atrativo analisamos a monotonicidade das formas quadráticas. Como principal resultado de nossos estudos, a extensão de Dirichlet é selecionada no processo de confinamento em ambos os casos acima. Estes resultados são apresentados no Capítulo 4.

Desde que a teoria de Γ -convergência nos permite tirar conclusões sobre convergência forte dos resolventes, no Capítulo 6 consideramos uma situação similar a acima e conseguimos uma convergência uniforme dos resolventes no processo de confinamento. Como era de se esperar a extensão de Dirichlet foi a selecionada. A

diferença é que nesse caso em cada região Ω_ε nós consideramos o potencial perturbado

$$V_\varepsilon(x) := -\frac{\kappa}{|x| + \varepsilon^\alpha}, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Voltando ao caso da partícula livre, veremos na Seção 3.4 do Capítulo 3 que os resultados de [5] garantem a convergência forte no sentido dos resolventes dos operadores associados as formas (1.1) no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Aqui, nossa principal contribuição é a convergência uniforme dos resolventes. Este resultado é apresentado no Capítulo 3.

Outra situação de confinamento que consideramos é a seguinte. Seja $h(s)$ uma função contínua definida em $I = [-a, b]$, $0 \leq a, b \leq \infty$, e suponhamos que

- (i) $s = 0$ é o único ponto de máximo global de h em I ;
- (ii) $h \in C^1$ em $I \setminus \{0\}$ e numa vizinhança de $s = 0$ admite a expansão

$$h(s) = \begin{cases} M - c_+ s^m + O(s^{m+1}) & \text{se } s > 0; \\ M - c_- |s|^m + O(|s|^{m+1}) & \text{se } s < 0 \end{cases}$$

em que M, m, c_\pm são números reais e $M, c_\pm > 0, m \geq 1$. Consideremos uma partícula se movendo livremente na seguinte região de \mathbb{R}^2

$$\Omega_\varepsilon = \{(s, y) \in \mathbb{R}^2 : s \in I, 0 \leq y \leq \varepsilon h(s)\}.$$

O caso em que I é um intervalo limitado foi analisado em [9] e o caso $I = \mathbb{R}$ em [10]. Resumidamente, em ambos os casos, foi mostrado que no limite $\varepsilon \rightarrow 0$ os autovalores $l_j(\varepsilon)$ do Laplaciano de Dirichlet em Ω_ε tem o seguinte comportamento assintótico:

$$\mu_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\beta} \left(l_j(\varepsilon) - \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 M^2} \right), \quad \beta = \frac{2}{m+2},$$

em que μ_j são os autovalores do operador em $L^2(\mathbb{R})$ (isso mesmo, em $L^2(\mathbb{R})$, independente se I for limitado ou não) dado por

$$(Hu)(s) = -u''(s) + q(s)u(s), \quad q(s) = \begin{cases} 2\pi^2 M^{-3} c_+ s^m & \text{se } s > 0 \\ 2\pi^2 M^{-3} c_- |s|^m & \text{se } s < 0 \end{cases}.$$

No Capítulo 7 nós generalizamos esses resultados para: a partícula livre se movendo agora em um tubo em \mathbb{R}^3 e a seção transversal desse tubo é multiplicada pela mesma função $h(s)$ acima. Um fato adicional no nosso estudo, além da dimensão, é que a região pode apresentar curvatura e torção não-nulas. Nossas conclusões finais obtidas são similares às obtidas em [9, 10], tanto para tubos limitados quanto para tubos ilimitados. O mais surpreendente é que veremos que os efeitos como curvatura e torção não influenciam o operador limite efetivo sobre a curva.

Terminamos assim uma visão geral desta tese; os detalhes são apresentados nos capítulos seguintes.

Agora algumas notações e observações que serão usadas ao longo de todo o trabalho. Para $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ escrevemos $y^2 := y_1^2 + y_2^2$. Sejam $z, z' \in \mathbb{R}^2$, o produto interno $\langle z, z' \rangle$ às vezes é denotado por $z \cdot z'$. Em todo o trabalho os espaços de Hilbert são reais embora muitos dos resultados possam ser generalizados para espaços de Hilbert complexos. Sempre que nos referimos ao operador Laplaciano estamos assumindo que é o Laplaciano negativo, ou seja, $-\Delta$. Se Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , os espaços $H^m(\Omega)$ ($m = 1, 2$) denotam os espaços de Sobolev. Lembremos que $H_0^m(\Omega)$ denota o conjunto das funções em $H^m(\Omega)$ com a hipótese adicional de que se anulam na fronteira $\partial\Omega$.

Capítulo 2

Revisão de Γ -Convergência

Neste capítulo apresentamos apenas uma noção da teoria de Γ -convergência; para um tratamento mais detalhado indicamos [3]. As definições e resultados apresentados aqui serão muito úteis para os próximos capítulos.

2.1 Definições e propriedades

Seja (T_ε) uma sequência de operadores auto-adjuntos com domínio $\text{dom} T_\varepsilon$ em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Denotamos por b_ε as respectivas formas sesquilineares associadas a estes operadores. Vamos pensar em $\varepsilon \rightarrow 0$ e analisar o limite T (resp. b) de (T_ε) (resp. (b_ε)). O domínio de T não será suposto necessariamente denso em \mathcal{H} e seu fecho será denotado por $\mathcal{H}_0 = \overline{\text{dom} T}$ (com $\text{img } T \subset \mathcal{H}_0$).

A função $\zeta \mapsto b(\zeta, \zeta)$ será simplesmente denotada por $b(\zeta)$ e chamada de forma quadrática associada. Vamos assumir também que b é positiva (ou seja, $b(\zeta) \geq 0$, $\forall \zeta \in \text{dom } b$) e $b(\zeta) = \infty$ se $\zeta \in \mathcal{H} \setminus \text{dom } b$. Assim, garantimos que b é semi-contínua inferiormente, o qual é equivalente a dizer que a forma quadrática b é gerada por um operador auto-adjunto e positivo T , ou seja,

$$b(\zeta, \eta) = \langle T^{1/2}\zeta, T^{1/2}\eta \rangle, \quad \zeta, \eta \in \text{dom } b = \text{dom } T^{1/2};$$

veja Teorema 9.3.11 em [4]. Se $\lambda \in \mathbb{R}$, então $b + \lambda$ indica a forma sesquilinear

$(b + \lambda)(\zeta, \eta) := b(\zeta, \eta) + \lambda \langle \zeta, \eta \rangle$ cuja correspondente forma quadrática é $b(\zeta) + \lambda \|\zeta\|^2$.

É conhecido que (Lema 10.4.4 em [4]), para $\lambda > 0$, tem-se $b_{\varepsilon_1} \leq b_{\varepsilon_2}$ se, e somente se, $R_\lambda(T_{\varepsilon_2}) \leq R_\lambda(T_{\varepsilon_1})$, ou seja, a sequência de formas quadráticas é monótona se, e somente se, a correspondente sequência de operadores resolventes é monótona. Esta situação tem sido muito explorada na literatura, uma vez que é possível obter convergência forte dos resolventes através do estudo dessas formas quadráticas (por exemplo, veja Seção 10.4 em [4]). Para sequências mais gerais de operadores a convergência forte dos resolventes não é assim tão direta e relaciona-se com um conceito chamado de Γ -convergência [3]. O conceito de Γ -convergência não é restrito apenas à formas quadráticas e pode ser aplicado a espaços topológicos mais gerais. No entanto, aqui neste capítulo, vamos restringir a discussão em espaços de Hilbert e formas sesquilineares semi-contínuas inferiormente. A teoria geral pode ser encontrada em [3]. Aqui, \mathcal{H} sempre denota um espaço de Hilbert real e $B(\zeta; \delta)$ a bola aberta de centro $\zeta \in \mathcal{H}$ e raio $\delta > 0$. Definimos também $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definição 2.1 O Γ -limite inferior de uma sequência de funções semi-contínuas inferiormente $f_\varepsilon : \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é a função $f^- : \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$f^-(\zeta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \{f_\varepsilon(\eta) : \eta \in B(\zeta; \delta)\}, \quad \zeta \in \mathcal{H}.$$

O Γ -limite superior $f^+(\zeta)$ de f_ε é definido substituindo \liminf acima por \limsup . Se $f^- = f^+ := f$, dizemos que tal função é o Γ -limite de f_ε e será denotado por

$$f = \Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon.$$

Foi assumido na definição acima que a topologia de \mathcal{H} é a topologia da norma usual e neste caso falamos de Γ -convergência forte. Se a topologia fraca é considerada, as bolas devem ser substituídas pelos conjuntos abertos da topologia fraca, e assim falamos de Γ -convergência fraca.

Exemplo 2.1 A sequência $f_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\varepsilon(x) = \sin(x/\varepsilon)$, Γ -converge à função constante -1 quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Este simples exemplo ilustra bem a “convergência do mínimo” que foi uma motivação para introdução da Γ -convergência.

Observação 2.1 Alguns fatos sobre Γ -convergência:

- (i) em geral $\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon \neq -\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-f_\varepsilon)$;
- (ii) assumamos que $f = \Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon$ e $g = \Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon$. Pode acontecer de $f_\varepsilon + g_\varepsilon$ não ser Γ -convergente;
- (iii) não é necessário restringir a definição de Γ -convergência a funções semi-contínuas inferiormente. Por exemplo, se $f_\varepsilon = f$, para todo ε , e f não é semi-contínua inferiormente, então, o $\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f$ é a maior função semi-contínua majorada por f , e assim, diferente de f .

Em [3] aparece a demonstração da seguinte proposição.

Proposição 2.2 Sejam $f_\varepsilon : \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma sequência de funções semi-contínuas inferiormente e $f : \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. A sequência f_ε Γ -converge fortemente a f se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) para cada $\zeta \in \mathcal{H}$ e toda sequência $\zeta_\varepsilon \rightarrow \zeta$ em \mathcal{H} tem-se

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(\zeta_\varepsilon) \geq f(\zeta).$$

- (ii) para cada $\zeta \in \mathcal{H}$ existe uma sequência $\zeta_\varepsilon \rightarrow \zeta$ em \mathcal{H} de forma que

$$f(\zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(\zeta_\varepsilon).$$

Observação 2.2 Se em vez da convergência forte $\zeta_\varepsilon \rightarrow \zeta$ for considerada a convergência fraca $\zeta_\varepsilon \rightharpoonup \zeta$ na proposição acima, então dizemos que f_ε Γ -converge fracamente a f .

2.2 Γ -convergência e convergência dos resolventes

Vamos enunciar o principal resultado sobre Γ -convergência e convergência forte dos resolventes. Veja [3] para detalhes e demonstrações.

Teorema 2.3 Sejam b_ε, b formas sesquilineares fechadas e positivas em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Sejam T_ε, T os respectivos operadores auto-adjuntos e positivos associados. São equivalentes:

- (i) b_ε Γ -converge fortemente a b e para cada $\zeta \in \mathcal{H}$ tem-se $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} b_\varepsilon(\zeta_\varepsilon) \geq b(\zeta)$, para toda sequência $\zeta_\varepsilon \rightharpoonup \zeta$.
- (ii) b_ε Γ -converge fortemente e fracamente a b .
- (iii) $b_\varepsilon + \lambda$ Γ -converge fortemente e fracamente a $b + \lambda$, para algum $\lambda > 0$ (e assim, para todo $\lambda \geq 0$).
- (iv) Para cada $\eta \in \mathcal{H}$ e $\lambda > 0$, a sequência

$$\min_{\zeta \in \mathcal{H}} [b_\varepsilon(\zeta) + \lambda \|\zeta\|^2 + \langle \zeta, \eta \rangle]$$

converge a

$$\min_{\zeta \in \mathcal{H}} [b(\zeta) + \lambda \|\zeta\|^2 + \langle \zeta, \eta \rangle].$$

- (v) T_ε converge a T no sentido forte dos resolventes em $\mathcal{H}_0 = \overline{\text{dom} T} \subset \mathcal{H}$, ou seja,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{-\lambda}(T_\varepsilon)\zeta = R_{-\lambda}(T)P_0\zeta, \quad \forall \zeta \in \mathcal{H}, \forall \lambda > 0,$$

em que P_0 é o projetor ortogonal em \mathcal{H}_0 .

Capítulo 3

Γ -Convergência e a partícula livre

Neste capítulo vamos discutir o caso de uma partícula quântica livre se movendo em um tubo Ω em \mathbb{R}^3 . Mais precisamente, o Laplaciano de Dirichlet em Ω .

Dado Ω , um parâmetro ε é acrescentado de modo que a sequência de tubos Ω_ε se reduza a uma curva em \mathbb{R}^3 quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por exemplo, se $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1\}$ é um cilindro de \mathbb{R}^3 , a sequência $\Omega_\varepsilon = \{(x, \varepsilon y, \varepsilon z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in \Omega\}$ se aproxima de uma reta em \mathbb{R}^3 (eixo x) quando $\varepsilon \rightarrow 0$. O objetivo é analisar o comportamento do Hamiltoniano da partícula no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Desde que nesse limite as regiões Ω_ε se aproximam do eixo x , identificamos este último com o espaço unidimensional \mathbb{R} e chamamos este acontecimento de *redução de dimensão*.

Na primeira seção vamos construir detalhadamente a região em que a partícula se encontra confinada. De fato, as regiões podem ser bem mais gerais do que cilindros de \mathbb{R}^3 . Na segunda seção vamos discutir o comportamento da partícula quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Na terceira seção vamos definir as formas quadráticas associadas ao Laplaciano de Dirichlet em Ω_ε . Veremos que essas formas estão diretamente relacionadas com a geometria de Ω_ε . Na última seção vamos apresentar resultados já conhecidos sobre o assunto e que usaremos em outros capítulos.

Os resultados apresentados neste capítulo já são conhecidos e se baseiam, principalmente, nas referências [1] e [5]. Tais resultados formam o ponto de partida para

nossos próprios resultados e problemas que resolvemos pesquisar; desta maneira, este capítulo pode ser visto como uma preparação para o que segue nesta tese.

3.1 Geometria do domínio

Seja $I = [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, um intervalo de \mathbb{R} e $r : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva simples C^2 em \mathbb{R}^3 parametrizada pelo comprimento de arco s . A curvatura de r no ponto s é denotada por $k(s)$. Os vetores

$$T(s) = r'(s), \quad N(s) = \frac{1}{k(s)}T'(s), \quad B(s) = T(s) \times N(s),$$

denotam, respectivamente, os vetores tangente, normal e binormal a curva no ponto $r(s)$. Vamos assumir que as equações de Frenet são satisfeitas:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

em que $\tau(s)$ é a torção da curva no ponto s .

Seja S um subconjunto aberto, limitado, simplesmente conexo e não-vazio de \mathbb{R}^2 . O conjunto

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = r(s) + y_1N(s) + y_2B(s), s \in I, y = (y_1, y_2) \in S\}$$

é obtido transladando-se a região S ao longo da curva.

Ω ainda pode ser deformada de modo que em cada ponto $r(s)$ a região S faz uma rotação de ângulo $\alpha(s)$. A nova região é dada por

$$\Omega^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = r(s) + y_1N_\alpha(s) + y_2B_\alpha(s), s \in I, y = (y_1, y_2) \in S\},$$

em que

$$\begin{aligned} N_\alpha(s) &:= \cos \alpha(s)N(s) + \sin \alpha(s)B(s), \\ B_\alpha(s) &:= -\sin \alpha(s)N(s) + \cos \alpha(s)B(s). \end{aligned}$$

Com a construção acima, vamos considerar o parâmetro $\varepsilon > 0$ em S e a região

$$\Omega_\varepsilon^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = r(s) + \varepsilon y_1 N_\alpha(s) + \varepsilon y_2 B_\alpha(s), s \in I, y = (y_1, y_2) \in S\}. \quad (3.1)$$

Assim, $\Omega_\varepsilon^\alpha$ é “esprimida” à curva $r(s)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.2 Partícula livre

Vamos considerar o caso de uma partícula quântica se movendo livremente na região $\Omega_\varepsilon^\alpha$ definida na seção anterior. Vamos impor a condição de Dirichlet na fronteira de $\Omega_\varepsilon^\alpha$. Mais precisamente, se $-\Delta_\varepsilon^\alpha$ denota o Laplaciano de Dirichlet em $\Omega_\varepsilon^\alpha$, vamos estudar as formas quadráticas associadas a esses operadores, ou seja,

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega_\varepsilon^\alpha} |\nabla \varphi|^2 dx, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega_\varepsilon^\alpha),$$

em que ∇ denota o gradiente de φ nas coordenadas usuais de \mathbb{R}^3 . Para cada $\varepsilon > 0$ consideremos o seguinte problema de autovalores:

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \lambda^\varepsilon u_\varepsilon \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon^\alpha). \end{cases} \quad (3.2)$$

Consideremos o caso particular em que I é um intervalo limitado. Assim, como $\Omega_\varepsilon^\alpha$ é limitado, o espectro σ_ε do problema (3.2) é discreto. Mais precisamente, $\sigma_\varepsilon = \{\lambda_i^\varepsilon; i \in \mathbb{N}\}$ em que $0 < \lambda_0^\varepsilon < \lambda_1^\varepsilon \leq \lambda_2^\varepsilon \leq \dots$ são números reais, positivos e podem ser arrumados de modo que formem uma sequência crescente. Quando $I = \mathbb{R}$ o espectro do problema (3.2) não é necessariamente discreto.

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$ a região $\Omega_\varepsilon^\alpha$ torna-se cada vez mais estreita. Se uma partícula livre é obrigada a permanecer numa região espacial muito pequena sua energia tende a infinito. O que ocorre são oscilações transversais muito rápidas quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Conseqüentemente, a energia total do sistema diverge e vai a infinito quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por este motivo, devemos retirar “algo” da forma quadrática como uma forma de impedir esta “explosão” no limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

A princípio não é claro qual expressão deve ser subtraída da forma quadrática. Analisemos o seguinte caso: seja λ_0 o primeiro autovalor (ou seja, o menor) do operador de Laplace com condições de Dirichlet na região S , ou seja,

$$-\Delta u_0 = \lambda_0 u_0, \quad u_0 \in H_0^1(S), \quad \lambda_0 > 0, \quad \int_S |u_0|^2 ds = 1.$$

A autofunção u_0 está diretamente relacionada às oscilações transversais. Devido a este fato, vamos subtrair os termos da forma λ_0/ε^2 como um caminho de contornar o problema.

Passamos agora a observar a sequência de formas quadráticas

$$F_\varepsilon(\varphi) := \int_{\Omega_\varepsilon^\alpha} \left(|\nabla \varphi|^2 - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} |\varphi|^2 \right) dx, \quad (3.3)$$

definidas em $H_0^1(\Omega_\varepsilon^\alpha)$. Lembremos que, da teoria de operadores lineares, λ_0 é um autovalor simples.

Resumidamente, o que queremos é saber o que ocorre quando $\varepsilon \rightarrow 0$ com a sequência de formas quadráticas acima. Podemos dizer que o que fizemos, ao subtrair os termos da forma λ_0/ε^2 , foi separar a dinâmica rápida (oscilações) da dinâmica lenta (na curva). Isto está diretamente relacionado com o princípio da incerteza em mecânica quântica.

3.3 Mudança de variáveis

Como em (3.3) a região de integração depende do parâmetro ε , o objetivo desta seção é fazer uma mudança de variáveis de modo que a região de integração independa de $\varepsilon > 0$.

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^\alpha : \quad I \times S &\rightarrow \Omega_\varepsilon^\alpha \\ (s, y_1, y_2) &\mapsto r(s) + \varepsilon y_1 N_\alpha(s) + \varepsilon y_2 B_\alpha(s). \end{aligned}$$

Vamos supor que $\|k\|_\infty, \|\tau\|_\infty, \|\alpha'\|_\infty < \infty$. Essas condições vão garantir que, para ε suficientemente pequeno, f_ε^α seja um difeomorfismo.

Como antes, ∇ denota o gradiente usual nas coordenadas cartesianas (x, y, z) . Vamos fazer uma mudança de variáveis, a partir de f_ε^α , e passar a forma quadrática usual nas coordenadas (x, y, z) ,

$$b_\varepsilon^\alpha(\psi) = \int_{\Omega_\varepsilon^\alpha} |\nabla\psi|^2 dx, \quad \text{dom } b_\varepsilon^\alpha = H_0^1(\Omega_\varepsilon^\alpha),$$

para as coordenadas (s, y_1, y_2) de $I \times S$. Assim, passamos a trabalhar em um domínio fixo para todo $\varepsilon > 0$. Por outro lado, o preço a pagar é uma métrica Riemanniana $G = G_\varepsilon^\alpha$ não-trivial a qual é induzida pelo difeomorfismo f_ε^α , ou seja,

$$G = (G_{ij}), \quad G_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = G_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

em que

$$e_1 = \frac{\partial f_\varepsilon^\alpha}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{\partial f_\varepsilon^\alpha}{\partial y_1}, \quad e_3 = \frac{\partial f_\varepsilon^\alpha}{\partial y_2}.$$

O referencial de Frenet é dado por

$$J = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon & -\varepsilon(\tau + \alpha')\langle z_\alpha^\perp, y \rangle & \varepsilon(\tau + \alpha')\langle z_\alpha, y \rangle \\ 0 & \varepsilon \cos \alpha & \varepsilon \sin \alpha \\ 0 & -\varepsilon \sin \alpha & \varepsilon \cos \alpha \end{pmatrix}$$

em que

$$\beta_\varepsilon(s, y) = 1 - \varepsilon k(s)\langle z_\alpha, y \rangle, \quad z_\alpha := (\cos \alpha, -\sin \alpha), \quad z_\alpha^\perp := (\sin \alpha, \cos \alpha).$$

A matriz inversa de J é

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_\varepsilon} & \frac{(\tau + \alpha')y_2}{\cos \alpha} & -\frac{(\tau + \alpha')y_1}{\sin \alpha} \\ 0 & \frac{\varepsilon}{\sin \alpha} & \frac{\varepsilon}{\cos \alpha} \\ 0 & \frac{\varepsilon}{\varepsilon} & \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Notemos que $JJ^t = G$ e $\det J = |\det G|^{1/2} = \varepsilon^2 \beta_\varepsilon(s, y)$. Desde que k é uma função limitada, para ε suficientemente pequeno, β_ε não se anula em $I \times S$. Assim, $\beta_\varepsilon > 0$ e f_ε^α é um difeomorfismo local. Exigindo que f_ε^α seja injetora (ou seja, que o tubo não se auto-intercepta) obtemos um difeomorfismo global para ε pequeno.

Introduzindo a notação

$$\|\psi\|_G^2 = \int_{I \times S} |\psi(s, y_1, y_2)|^2 \varepsilon^2 \beta_\varepsilon(s, y) ds dy,$$

obtemos a sequência de formas quadráticas

$$\tilde{b}_\varepsilon^\alpha(\psi) := \int_{I \times S} |J^{-1} \nabla \psi|^2 \varepsilon^2 \beta_\varepsilon(s, y) dy ds, \quad \text{dom } \tilde{b}_\varepsilon^\alpha = H_0^1(I \times S, G),$$

e agora $\nabla = (\partial_s, \nabla_y)$ (∂_s é da derivada com respeito a s e $\nabla_y = (\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2)$). Mais precisamente, a mudança de coordenadas acima foi obtida pela transformação unitária

$$\begin{aligned} U_\varepsilon^\alpha : L^2(\Omega_\varepsilon^\alpha) &\rightarrow L^2(I \times S, G) \\ \phi &\mapsto \phi \circ f_\varepsilon^\alpha \end{aligned}$$

No entanto, continuaremos denotando $U_\varepsilon^\alpha \psi$ por ψ .

Como discutido na seção anterior, vamos subtrair o termo $(\lambda_0/\varepsilon^2)\|\psi\|_G^2$ e passar a estudar a sequência de formas quadráticas

$$\hat{a}_\varepsilon^\alpha(\psi) := \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\| |J^{-1} \nabla \psi| \|_G^2 - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} \|\psi\|_G^2 + c \|\psi\|_G^2 \right), \quad (3.4)$$

em que $c := \| |k(s)^2/4| \|_\infty$. Como veremos na próxima seção, somar a constante $c > 0$, assim definida, implica que as formas quadráticas sejam todas positivas.

Alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned} \hat{a}_\varepsilon^\alpha(\psi) = \int_{I \times S} &\left[\frac{1}{\beta_\varepsilon} |\psi' + (\nabla_y \psi \cdot Ry)(\tau + \alpha')\psi|^2 \right. \\ &\left. + \beta_\varepsilon \left(\frac{|\nabla_y \psi|^2}{\varepsilon^2} - \lambda_0 \frac{|\psi|^2}{\varepsilon^2} \right) + \beta_\varepsilon c |\psi|^2 \right] dy ds, \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que $\text{dom } \hat{a}_\varepsilon^\alpha = H_0^1(I \times S)$. Denotamos por ψ' a derivada de ψ em relação a s , $\nabla_y \psi$ o gradiente de ψ em relação a $y = (y_1, y_2)$ e R é a matriz de rotação

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observação 3.1 É muito importante que $\beta_\varepsilon(s, y) \rightarrow 1$ uniformemente para $\varepsilon \rightarrow 0$. De fato, seja $\|\cdot\|$ denotando a norma usual em $L^2(\mathbb{R} \times S)$. Existem funções β_ε^- e β_ε^+ de modo que

$$\beta_\varepsilon^- \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_G \leq \beta_\varepsilon^+ \|\cdot\|,$$

e $\beta_\varepsilon^-(s, y) \rightarrow 1$, $\beta_\varepsilon^+(s, y) \rightarrow 1$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Basta tomarmos $\beta_\varepsilon^-(s, y) = \inf_{(s, y) \in \mathbb{R} \times S} \beta_\varepsilon(s, y)$ e $\beta_\varepsilon^+(s, y) = \sup_{(s, y) \in \mathbb{R} \times S} \beta_\varepsilon(s, y)$. Esta propriedade implica que os espaços $L^2(\mathbb{R} \times S, \beta_\varepsilon(s, y))$ coincidem algebricamente com $L^2(\mathbb{R} \times S)$. Assim, podemos trabalhar livremente em $L^2(\mathbb{R} \times S)$.

3.4 Alguns resultados

Em [1] é considerado o caso particular em que I é um intervalo limitado. O principal resultado daquele artigo é:

Teorema 3.1 Seja $\Omega_\varepsilon^\alpha$ definido por (3.1) em que I é um intervalo limitado. Seja $\{\lambda_j(\varepsilon)\}_{j=1}^\infty$ a sequência não-decrescente de autovalores do Laplaciano de Dirichlet em $H_0^1(\Omega_\varepsilon^\alpha)$. Então,

$$\lambda_j(\varepsilon) = \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} + \mu_j + o(1), \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

em que $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ denota a sequência não-decrescente de autovalores do operador de Schrödinger

$$-w''(s) + \left[C(S)(\tau(s) + \alpha'(s)) - \frac{k(s)^2}{4} \right] w(s) \quad \text{em} \quad L^2(I). \quad (3.6)$$

Aqui $C(S)$ é uma constante não-negativa dependendo somente da região S .

Veremos agora que a influência da curvatura no operador efetivo (3.6) não é apenas devido ao termo $\beta_\varepsilon(s, y) = 1 - \varepsilon k(s)(z_\alpha \cdot y)$.

Como em [1], para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$, consideremos o seguinte problema perturbado:

$$-\text{div}[(1 - (\xi \cdot y))\nabla_y u] = \lambda(1 - (\xi \cdot y))u, \quad u \in H_0^1(S).$$

Tomando $\xi = \varepsilon k(s)z_\alpha$, para ε suficientemente pequeno, o operador perturbado é positivo e com resolvente compacto. Denotamos por $\lambda(\xi) > 0$ seu primeiro autovalor, ou seja,

$$\lambda(\xi) = \inf_{\{u \in H_0^1(S): u \neq 0\}} \frac{\int_S (1 - (\xi \cdot y)) |\nabla_y u|^2 dy}{\int_S (1 - (\xi \cdot y)) |u|^2 dy}.$$

Assim, para $v \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_S \beta_\varepsilon(s, y) (|\nabla_y v|^2 - \lambda_0 |v|^2) dy \geq \gamma_\varepsilon(s) \int_S \beta_\varepsilon(s, y) |v|^2 dy \quad \text{q.t.p.}[s], \quad (3.7)$$

em que

$$\gamma_\varepsilon(s) := \frac{\lambda(\varepsilon k(s) z_\alpha(s)) - \lambda_0}{\varepsilon^2}.$$

Usando o fato de que $k(s)$ é limitada, em [1] demonstra-se que

Proposição 3.2 $\gamma_\varepsilon(s) \rightarrow -k(s)^2/4$ uniformemente quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

A proposição acima será muito útil nos próximos capítulos. Com a ajuda dela e desde que $c = \|k(s)^2/4\|_\infty$ fica claro que as formas quadráticas (3.5) são todas positivas.

Como vimos no Capítulo 2 a Γ -convergência foi motivada pela “convergência do mínimo”. A desigualdade (3.7) e a Proposição 3.2 ajudam a esclarecer o aparecimento do fator $-k(s)^2/4$ no operador limite.

Novamente, para $\xi \in \mathbb{R}^2$ fixo, consideremos o problema

$$-\Delta u_\xi - \lambda_0 u_\xi = -\xi \cdot \nabla_y u_0, \quad u_\xi \perp u_0. \quad (3.8)$$

A existência de u_ξ é garantida pela alternativa de Fredholm. Denotamos por χ_1 e χ_2 as soluções de (3.8) para $\xi_1 = (1, 0)$ e $\xi_2 = (0, 1)$, respectivamente. Por linearidade, para $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, a solução de (3.8) é dada por

$$u_\xi = \xi_1 \chi_1 + \xi_2 \chi_2.$$

Um ponto importante na demonstração da Proposição 3.2 é o seguinte lema que se encontra em [1]:

Lema 3.3 Para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\inf_{u \in H_0^1(S)} \int_S (|\nabla_y u|^2 - \lambda_0 |u|^2 + 2(\xi \cdot \nabla_y u_0)u) dy = -\frac{|\xi|^2}{4}.$$

Ainda mais, o ínfimo acima é atingido por u_ξ dado por (3.8).

Um dos pontos que demonstram o Teorema 3.1 é o fato de que a sequência de formas quadráticas

$$b_\varepsilon(\psi) := \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\|J^{-1}\nabla\psi\|_G^2 - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} \|\psi\|_G^2 \right),$$

Γ -converge fortemente a

$$b_0(w) = \int_I \left[|w'|^2 + \left(C(S)(\tau(s) + \alpha'(s))^2 - \frac{k(s)^2}{4} \right) |w|^2 \right] ds.$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Notemos que ocorreu uma redução de dimensão no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Mas esse fato vai ficar mais claro no próximo capítulo.

Em [5] é considerado o caso $I = \mathbb{R}$ e um dos objetivos é aplicar o Teorema 2.3, ou seja, mostrar que a sequência de formas quadráticas b_ε Γ -converge fortemente e também fracamente a b_0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (lembramos que a Γ -convergência forte não implica, necessariamente na Γ -convergência fraca). No caso em que I é um intervalo limitado, como em [1], é necessário mostrar apenas a Γ -convergência forte. De fato, se I é limitado, a convergência fraca e forte são equivalentes em $H_0^1(I \times S)$. Desde que isso não ocorre quando $I = \mathbb{R}$, nesse caso é necessário mostrar a Γ -convergência fraca também. A demonstração é apresentada em [5].

Destacamos que os efeitos geométricos descritos em [1] e [4] são muito específicos para a condição de Dirichlet na fronteira $\partial\Omega_\varepsilon$. Tais efeitos desapareceriam, por exemplo, se a condição de Dirichlet fosse substituída pela condição de Neumann.

Lembramos que a combinação das Γ -convergências forte e fraca implicam apenas a convergência forte dos resolventes dos operadores associados. Nada se pode afirmar sobre a convergência de autovalores como no Teorema 3.1. Quando $I = \mathbb{R}$ os autovalores podem nem existir [14].

Capítulo 4

Γ -Convergência e o potencial de Coulomb

Como já mencionado na Introdução deste trabalho, chamamos de Hamiltoniano do átomo de hidrogênio o operador com ação

$$-\Delta - \frac{\kappa}{|x|} \quad (0 \neq \kappa \in \mathbb{R}).$$

Inicialmente vamos discutir o caso unidimensional, ou seja, $x = s \in \mathbb{R}$. Consideremos o operador \dot{H} definido por (1.2) na página 13. O seu adjunto H^* tem a mesma ação mas com domínio (veja referência [6])

$$\text{dom } H^* = \left\{ w \in L^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : w, w' \in \text{AC}(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \left(-w'' - \frac{\kappa}{|s|} w \right) \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

em que $\text{AC}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ denota o conjunto das funções absolutamente contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A singularidade em $s = 0$ é motivo de muitas discussões, principalmente devido a questão de como a partícula se comporta próximo à origem. Desde que \dot{H} tem índices de deficiência iguais a 2, existem infinitas extensões auto-adjuntas candidatas a operador energia. Seguindo [6] como referência, vamos fazer um resumo da caracterização de tais extensões.

Se $w \in \text{dom } H^*$, então os limites laterais $w(0^\pm) = \lim_{s \rightarrow 0^\pm} w(s)$ existem e são

finitos. Para $\kappa \neq 0$, os limites

$$\tilde{w}(0^\pm) := \lim_{s \rightarrow 0^\pm} (w'(s) \pm \kappa w(s) \ln(\pm|\kappa|s)),$$

também existem e são finitos. As extensões auto-adjuntas H_U de \dot{H} são caracterizadas por matrizes unitárias 2×2 , ou seja, dada uma matriz unitária U , $\text{dom } H_U$ é composto por todas as funções de $\text{dom } H^*$ que satisfazem

$$(I - U) \begin{pmatrix} \tilde{w}(0^+) \\ \tilde{w}(0^-) \end{pmatrix} = -i(I + U) \begin{pmatrix} -w(0^+) \\ w(0^-) \end{pmatrix},$$

em que I denota a matriz identidade 2×2 . H_U tem a mesma ação que \dot{H} . Por exemplo, se $U = I$ obtemos o operador (1.3) definido na página 14, ou seja, a extensão de Dirichlet.

Conhecendo-se todas as extensões auto-adjuntas de \dot{H} , outra questão é saber qual delas melhor representa o átomo de hidrogênio unidimensional. Em [11], para o caso $\kappa > 0$, foi considerado a seguinte sequência de Hamiltonianos:

$$(H_\varepsilon w)(s) = -w''(s) - \frac{\kappa}{|s| + \varepsilon} w(s), \quad \text{dom } H_\varepsilon = H^2(\mathbb{R}),$$

e demonstrado que

Teorema 4.1 H_ε converge para H_D no sentido forte dos resolventes quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Mais tarde, em [13], foi demonstrado que

Teorema 4.2 H_ε converge para H_D no sentido uniforme dos resolventes quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

O nosso objetivo é encontrar outro argumento a fim de selecionar uma extensão auto-adjunta de \dot{H} . De fato, um argumento que consideramos mais conveniente fisicamente. Juntamente esta questão com as idéias apresentadas no Capítulo 3, nossa proposta é considerar o átomo de hidrogênio em um tubo em \mathbb{R}^3 e no processo de confinamento, o qual esperamos recuperar o átomo de hidrogênio unidimensional,

analisar qual das extensões de \dot{H} é selecionada (se alguma for selecionada!). Assim, nossa análise é voltada para o estudo da sequência de formas quadráticas

$$F_\varepsilon(\phi) := \int_{\Omega_\varepsilon} \left(|\nabla\phi|^2 - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2}|\phi|^2 - \kappa \frac{|\phi|^2}{|x|} \right) dx, \quad \text{dom } F_\varepsilon = H_0^1(\Omega_\varepsilon^\alpha),$$

em que $\Omega_\varepsilon^\alpha$ é a região definida por (3.1) (veja pág.23). No entanto, para esta situação, vamos assumir que a curva que dá origem à $\Omega_\varepsilon^\alpha$ é $r(s) := (s, 0, 0)$. Assim, recuperamos o átomo de hidrogênio unidimensional ao longo do eixo x no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Para o caso $\kappa < 0$, aplicamos a teoria de Γ -convergência para obter a convergência forte dos resolventes dos operadores associados as formas quadráticas F_ε . Para o caso $\kappa > 0$, vamos usar a monotonicidade da sequência F_ε para obter essa convergência forte. Concluiremos que, em ambos os casos, no processo de confinamento, a extensão de Dirichlet é selecionada, e esta é a nossa principal contribuição neste capítulo.

4.1 O caso repulsivo

Nesta seção vamos analisar o caso repulsivo, ou seja, $\kappa < 0$. Aqui a curva que dá origem à $\Omega_\varepsilon^\alpha$ é $r(s) = (s, 0, 0)$ e, por simplicidade, vamos tomar $\kappa = -1$. Fazendo uma mudança de variáveis, como na Seção 3.3, obtemos

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(v) &:= \frac{1}{\varepsilon^2} F_\varepsilon(v) \\ &= \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|v' + \nabla_y v \cdot Ry\alpha'|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} (|\nabla_y v|^2 - \lambda_0 |v|^2) + \frac{|v|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2}} \right) ds dy, \end{aligned}$$

em que $\text{dom } G_\varepsilon = H_0^1(\mathbb{R} \times S)$. Lembremos que v' é a derivada de v em relação a s , $\nabla_y v$ é o gradiente de v em relação a $y = (y_1, y_2)$ e R é a matriz de rotação definida na página 26. Como observado na Introdução deste trabalho $y^2 := y_1^2 + y_2^2$.

Denotamos por H_ε os respectivos operadores auto-adjuntos associados as formas quadráticas G_ε . Notemos que $\text{dom } H_\varepsilon = H_0^1(\mathbb{R} \times S) \cap H^2(\mathbb{R} \times S)$ para todo $\varepsilon > 0$ (veja Seção 7.5.1 em [4]).

Estendemos G_ε colocando $G_\varepsilon(v) = \infty$ para $v \in L^2(\mathbb{R} \times S) \setminus H_0^1(\mathbb{R} \times S)$. Definimos também

$$G(v) = \begin{cases} G_0(\omega) & \text{se } v = wu_0, \quad \omega \in \text{dom } G_0 \\ \infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

em que

$$G_0(w) = \int_{\mathbb{R}} \left(|w'(s)|^2 + (\alpha'(s))^2 C(S) |w(s)|^2 + \frac{|w(s)|^2}{|s|} \right) ds,$$

e

$$\text{dom } G_0 = \{w \in H^1(\mathbb{R}) : w(0^+) = w(0^-)\}.$$

O parâmetro geométrico $C(S)$ é definido por

$$C(S) := \int_S |\langle \nabla_y u_0, Ry \rangle|^2 dy,$$

e ele depende somente da seção transversal S . Denotamos por H_0 o operador auto-adjunto associado a G_0 . O domínio de H_0 será discutido no final desta seção.

Nosso objetivo é mostrar que G_ε Γ -converge a G no sentido forte e fraco. Mas antes listamos algumas propriedades a serem usadas adiante.

(1) Para $v \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$ vale

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_S (|\nabla_y v(s, \cdot)|^2 - \lambda_0 |v(s, \cdot)|^2) dy \geq 0 \quad \text{q.t.s.}[s].$$

(2) A condição de Dirichlet na fronteira ∂S implica $\int_S \nabla_y |u_0|^2 dy = 0$. Como consequência

$$\int_S (u_0 \nabla_y u_0 \cdot Ry) dy = 0.$$

(3) Seja $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ em $L^2(\mathbb{R} \times S)$ e $(G_\varepsilon(v_\varepsilon))_\varepsilon$ uma sequência limitada em $L^2(\mathbb{R} \times S)$. Então, $(v'_\varepsilon)_\varepsilon$ e $(\nabla_y v_\varepsilon)_\varepsilon$ são sequências limitadas em $L^2(\mathbb{R} \times S)$. Ainda mais, $v'_\varepsilon \rightharpoonup v'$, $\nabla_y v_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_y v$ fracamente em $L^2(\mathbb{R} \times S)$ e $v \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$.

De fato, basta observarmos que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} |v'_\varepsilon + \nabla_y v_\varepsilon \cdot Ry \alpha'|^2 dy ds \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq C,$$

para alguma constante $C > 0$, e

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} |\nabla_y v_\varepsilon|^2 dy ds &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R} \times S} (|\nabla_y v_\varepsilon|^2 - \lambda_0 |v_\varepsilon|^2) dy ds + \lambda_0 \int_{\mathbb{R} \times S} |v_\varepsilon|^2 dy ds \right) \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} C\varepsilon^2 + \lambda_0 \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} |v_\varepsilon|^2 dy ds < \infty. \end{aligned}$$

Como $\alpha' \in L^\infty(\mathbb{R})$, segue que $(v'_\varepsilon, \nabla_y v_\varepsilon)$ é uma sequência limitada em $L^2(\mathbb{R} \times S)$. Portanto, $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\mathbb{R} \times S)$ e desde que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ seguem as afirmações.

(4) Seja $v_\varepsilon \rightarrow v$ em $L^2(\mathbb{R} \times S)$ de forma que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) < \infty$. Então, podemos escrever $v(s, y) = w(s)u_0(y)$ com $w \in H^1(\mathbb{R})$.

De fato, pelo ítem anterior $\nabla_y v_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_y v$ fracamente em $L^2(\mathbb{R} \times S)$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times S} |\nabla_y v|^2 dy ds &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} |\nabla_y v_\varepsilon|^2 dy ds \\ &\leq \lambda_0 \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} |v_\varepsilon|^2 dy ds = \lambda_0 \int_{\mathbb{R} \times S} |v|^2 dy ds. \end{aligned}$$

Este fato junto com a propriedade (1) nos diz que

$$\int_{\mathbb{R} \times S} (|\nabla_y v|^2 - \lambda_0 |v|^2) dy ds = 0.$$

Seja $f(s) = \int_S (|\nabla_y v(s, \cdot)|^2 - \lambda_0 |v(s, \cdot)|^2) dy$. Desde que $f(s) \geq 0$ a igualdade acima implica que $f = 0$ q.t.p. [s]. Portanto, $v(s, \cdot)$ é um autovetor associado a λ_0 e então proporcional a u_0 . Assim, podemos escrever $v(s, y) = w(s)u_0(y)$ com $w \in H^1(\mathbb{R})$ (desde que $v \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$).

Agora temos condições de demonstrar as seguintes proposições.

Proposição 4.3 A sequência G_ε Γ -converge fortemente para G .

Demonstração: Passo 1. (demonstrar o ítem (i) da Proposição 2.2) Seja $v_\varepsilon \rightarrow v$ em $L^2(\mathbb{R} \times S)$. Se $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) = \infty$, então $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq G(v)$. Suponhamos $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) < \infty$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) < \infty$. Pelas propriedades (3) e (4) acima segue que

$v \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$, $v'_\varepsilon \rightharpoonup v'$, $\nabla_y v_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_y v$ fracamente em $L^2(\mathbb{R} \times S)$ e $v(s, y) = w(s)u_0(y)$ para algum $w \in H^1(\mathbb{R})$. Em particular, desde que $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R})$, temos

$$v'_\varepsilon + \nabla_y v_\varepsilon \cdot Ry\alpha' \rightharpoonup v' + \nabla_y v \cdot Ry\alpha'.$$

Novamente, passando a uma subsequência, se necessário, como $v_\varepsilon \rightarrow v$ em $L^2(\mathbb{R} \times S)$, temos que

$$v_\varepsilon(s, y) \rightarrow w(s)u_0(y) \quad \text{q.t.p.}[(s, y)].$$

Assim,

$$\frac{|v_\varepsilon(s, y)|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2}} \rightarrow \frac{|w(s)u_0(y)|^2}{|s|} \quad \text{q.t.p.}[(s, y)].$$

Pelo Lema de Fatou

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} \frac{|v_\varepsilon(s, y)|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2}} dy ds &\geq \int_{\mathbb{R} \times S} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|v_\varepsilon(s, y)|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2}} dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R} \times S} \frac{|w(s)u_0(y)|^2}{|s|} dy ds. \end{aligned}$$

Logo, aplicando a propriedade (1) e a desigualdade acima,

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|v'_\varepsilon + \nabla_y v_\varepsilon \cdot Ry\alpha'|^2 + \frac{|v_\varepsilon|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2}} \right) dy ds \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} |v'_\varepsilon + \nabla_y v_\varepsilon \cdot Ry\alpha'|^2 dy ds + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} \frac{|v_\varepsilon|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2}} dy ds \\ &\geq \int_{\mathbb{R} \times S} |w'u_0 + w\nabla_y u_0 \cdot Ry\alpha'|^2 dy ds + \int_{\mathbb{R} \times S} \frac{|wu_0|^2}{|s|} dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} (|w'|^2 + (\alpha'(s))^2 C(S) |w|^2) ds + \int_{\mathbb{R}} \frac{|w|^2}{|s|} ds. \end{aligned}$$

Desde que $w \in H^1(\mathbb{R})$ e estamos supondo $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) < \infty$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|w|^2}{|s|} ds < \infty.$$

Consequentemente $w(0^+) = 0 = w(0^-)$, ou seja, $w \in \text{dom } G_0$. Portanto,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq G_0(w) = G(v).$$

Passo 2. (demonstrar o ítem (ii) da Proposição 2.2) Para $v(s, y) = w(s)u_0(y)$, $w \in \text{dom}G_0$, tomemos $v_\varepsilon = v$, para todo ε . Assim, $v_\varepsilon \rightarrow v$ em $L^2(\mathbb{R} \times S)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|w'u_0 + w \nabla_y u_0 \cdot Ry\alpha'|^2 + \frac{|wu_0|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2}} \right) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|w'u_0 + w \nabla_y u_0 \cdot Ry\alpha'|^2 + \frac{|wu_0|^2}{|s|} \right) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(|w'(s)|^2 + (\alpha')^2 C(S) |w(s)|^2 + \frac{|w(s)|^2}{|s|} \right) ds = G_0(w) = G(v). \end{aligned}$$

Agora tomemos $v \neq wu_0$, $w \in \text{dom}G_0$. Seja $v_\varepsilon \rightarrow v$ em $L^2(\mathbb{R} \times S)$. Por definição $G(v) = \infty$. Por outro lado, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) = \infty$. De fato, suponhamos $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \infty$. Por resultados acima deveríamos ter $v = wu_0$ com $w \in \text{dom}G_0$, o que não ocorre. Portanto, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) = \infty = G(v)$. \blacksquare

Proposição 4.4 A sequência G_ε Γ -converge fracamente para G .

Demonstração: Passo 1. (demonstrar o ítem (i) da Proposição 2.2) Seja $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ fracamente em $L^2(\mathbb{R} \times S)$. Se $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) = \infty$, então $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq G(v)$. Suponhamos $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) < \infty$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) < \infty$. Pela propriedade **(3)** resulta que $v \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$, $v'_\varepsilon \rightharpoonup v'$ e $\nabla_y v_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_y v$ fracamente em $L^2(\mathbb{R} \times S)$.

Caso 1. Vamos supor $v(s, y) = w(s)u_0(y)$ com $w \in \text{dom}G_0$.

Dado $a > 0$ definimos, para $v \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$,

$$G_\varepsilon^a(v) = \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|v' + \nabla_y v \cdot Ry\alpha'|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} (|\nabla_y v|^2 - \lambda_0 |v|^2) + \frac{|v|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + a}} \right) dy ds.$$

Desde que S é uma região limitada, segue que

$$\frac{1}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + a}} \rightarrow \frac{1}{|s| + a}$$

uniformemente em $\mathbb{R} \times S$. Assim,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} \frac{|v_\varepsilon|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + a}} dy ds = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} \frac{|v_\varepsilon|^2}{|s| + a} dy ds.$$

Como $\frac{1}{|s|+a} \in L^\infty(\mathbb{R} \times S)$, obtemos

$$\frac{1}{|s|+a} v_\varepsilon \rightharpoonup \frac{1}{|s|+a} v$$

fracamente em $L^2(\mathbb{R} \times S)$. Assim,

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon^a(v_\varepsilon) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|v'_\varepsilon + \nabla_y v_\varepsilon \cdot Ry\alpha'|^2 + \frac{|v_\varepsilon|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + a}} \right) dy ds \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} |v'_\varepsilon + \nabla_y v_\varepsilon \cdot Ry\alpha'|^2 dy ds + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} \frac{|v_\varepsilon|^2}{|s|+a} dy ds \\ &\geq \int_{\mathbb{R} \times S} |v' + \nabla_y v \cdot Ry\alpha'|^2 dy ds + \int_{\mathbb{R} \times S} \frac{|v|^2}{|s|+a} dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} (|w'(s)|^2 + (\alpha'(s))^2 C(S) |w(s)|^2) ds + \int_{\mathbb{R}} \frac{|w(s)|^2}{|s|+a} ds. \end{aligned}$$

Desde que

$$\frac{|v_\varepsilon|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2}} \geq \frac{|v_\varepsilon|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + a}},$$

temos

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon^a(v_\varepsilon) \geq \int_{\mathbb{R}} (|w'(s)|^2 + (\alpha'(s))^2 C(S) |w(s)|^2) ds + \int_{\mathbb{R}} \frac{|w(s)|^2}{|s|+a} ds.$$

Como $a > 0$ é arbitrário,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\int_{\mathbb{R}} (|w'(s)|^2 + (\alpha'(s))^2 C(S) |w(s)|^2) ds + \int_{\mathbb{R}} \frac{|w(s)|^2}{|s|+a} ds \right).$$

Desde que $w \in \text{dom } G_0$, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \int_{\mathbb{R}} (|w'(s)|^2 + (\alpha'(s))^2 C(S) |w(s)|^2) ds + \int_{\mathbb{R}} \frac{|w(s)|^2}{|s|} ds = G_0(w) = G(v).$$

Caso 2. Suponhamos $v \notin A := \{wu_0 : w \in H_0^1(\mathbb{R})\}$. Por definição, $G(v) = \infty$.

Seja P o projetor ortogonal sobre A^\perp . Segue que, $\|Pv\| > 0$ e $Pv_\varepsilon \rightharpoonup Pv$. Consequentemente,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Pv_\varepsilon\| \geq \|Pv\| > 0.$$

Observemos que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R} \times S} (|\nabla_y v_\varepsilon|^2 - \lambda_0 |v_\varepsilon|^2) dy ds.$$

Vamos estimar o limite à direita. Para $\phi \in H_0^1(\mathbb{R})$, denotamos por $\phi^{(0)}$ a componente de ϕ em $[u_0]$. Seja Q o projetor ortogonal sobre $[u_0]^\perp$ em $H_0^1(S)$. Observemos que para $\varphi \in [u_0]^\perp$ temos $\int_S |\nabla \varphi|^2 \geq \lambda_1 \int_S |\varphi|^2$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R} \times S} (|\nabla_y v_\varepsilon|^2 - \lambda_0 |v_\varepsilon|^2) dy ds \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\|\nabla_y v_\varepsilon(s)\|_{L^2(S)}^2 - \lambda_0 \|v_\varepsilon(s)\|_{L^2(S)}^2 \right) ds \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\|v_\varepsilon(s)\|_{H_0^1(S)}^2 - (\lambda_0 + 1) \|v_\varepsilon(s)\|_{L^2(S)}^2 \right) ds \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\|Qv_\varepsilon(s)\|_{H_0^1(S)}^2 + \|v_\varepsilon^{(0)}\|_{H_0^1(S)}^2 - (\lambda_0 + 1) \|v_\varepsilon(s)\|_{L^2(S)}^2 \right) ds \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\|\nabla_y Qv_\varepsilon(s)\|_{L^2(S)}^2 + \|Qv_\varepsilon(s)\|_{L^2(S)}^2 + \|\nabla_y v_\varepsilon^{(0)}(s)\|_{L^2(S)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|v_\varepsilon^{(0)}(s)\|_{L^2(S)}^2 - \lambda_0 \|v_\varepsilon(s)\|_{L^2(S)}^2 - \|v_\varepsilon(s)\|_{L^2(S)}^2 \right) ds \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\|\nabla_y Qv_\varepsilon(s)\|_{L^2(S)}^2 + \|\nabla_y v_\varepsilon^{(0)}(s)\|_{L^2(S)}^2 - \lambda_0 \|v_\varepsilon(s)\|_{L^2(S)}^2 \right) ds \\
&\geq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\lambda_1 \|Qv_\varepsilon(s)\|_{L^2(S)}^2 + \lambda_0 \|v_\varepsilon^{(0)}(s)\|_{L^2(S)}^2 - \lambda_0 \|v_\varepsilon(s)\|_{L^2(S)}^2 \right) ds \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} (\lambda_1 - \lambda_0) \|Qv_\varepsilon(s)\|_{L^2(S)}^2 \\
&= \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)}{\varepsilon^2} \|Pv_\varepsilon\|^2 \geq \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)}{\varepsilon^2} \|Pv\|^2.
\end{aligned}$$

Lembrando que $\lambda_0 < \lambda_1$ e $\|Pv\| > 0$, temos

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R} \times S} (|\nabla_y v_\varepsilon|^2 - \lambda_0 |v_\varepsilon|^2) dy ds \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)}{\varepsilon^2} \|Pv\|^2 = \infty.$$

Portanto,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq G(v).$$

Caso 3. Agora suponhamos $v = wu_0$ com $w \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \text{dom } G_0$. Então, $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) = \infty$. De fato, suponhamos $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) < \infty$. Passando a uma subsequência, se necessário, e como no **Caso 1**,

$$\infty > \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\int_{\mathbb{R}} |w' + \nabla_y w \cdot Ry\alpha'|^2 ds + \int_{\mathbb{R}} \frac{|w|^2}{|s| + a} ds \right).$$

Desde que $w \in H_0^1(\mathbb{R}) \setminus \text{dom } G_0$,

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{|w|^2}{|s| + a} ds = \infty,$$

ou seja, temos uma contradição.

Passo 2. Agora devemos mostrar que dado $v \in L^2(\mathbb{R} \times S)$, existe uma sequência $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ de forma que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ em $L^2(\mathbb{R} \times S)$ e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon) = G(v)$. Mas este passo é similar ao passo 2 da demonstração da proposição anterior. ■

Lembremos que $\text{dom} G_0 = \{w \in H^1(\mathbb{R}) : w(0^+) = 0 = w(0^-)\}$. Denotamos por $D := \{wu_0 : w \in \text{dom} G_0\}$.

O operador auto-adjunto H_0 associado a G_0 é o operador (1.3) da página 14, ou seja, a extensão auto-adjunta de \dot{H} com condições de Dirichlet na origem. Essa demonstração se encontra na Seção A.1 do Apêndice.

Lembremos que H_ε denotam os respectivos operadores auto-adjuntos associados as formas G_ε . Aplicando o Teorema 2.3 podemos concluir nosso principal resultado desta seção:

Teorema 4.5 A família de operadores H_ε converge para H_0 no sentido forte dos resolventes quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Mais precisamente, seja P a projeção ortogonal no fecho de D em $L^2(\mathbb{R} \times S)$, então

$$s - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (H_\varepsilon + iI)^{-1} \psi = (H_0 + iI)^{-1} P\psi, \quad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R} \times S).$$

Concluimos que no processo de confinamento do átomo de hidrogênio no caso repulsivo, a extensão auto-adjunta de (1.2) (veja pág.13) selecionada (segundo nossos argumentos acima) é a de Dirichlet.

4.2 O caso atrativo

Nesta seção vamos analisar o caso atrativo, ou seja, $\kappa > 0$. Por simplicidade vamos considerar $\kappa = 1/4$. No entanto, os resultados se generalizam para todo $\kappa > 0$. Inicialmente consideremos a família de operadores auto-adjuntos

$$H_\varepsilon \psi = -\Delta \psi - \frac{1}{4|x|} \psi + a\psi, \quad \text{dom} H_\varepsilon = H^2(\Omega_\varepsilon) \cap H_0^1(\Omega_\varepsilon), \quad (4.1)$$

em que a é uma constante conveniente a ser escolhida mais adiante. Nesta seção Ω_ε é região (3.1) (veja pág.23) com $r(s) = (s, 0, 0)$ e $\alpha(s) = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. As formas quadráticas associadas, já com a mudança de variáveis e regularizações necessárias, são

$$b^\varepsilon(\psi) = \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|\psi'|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} (|\nabla_y \psi|^2 - \lambda_0 |\psi|^2) - \frac{1}{4} \frac{|\psi|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2}} + a |\psi|^2 \right) dy ds$$

em que $\text{dom } b^\varepsilon = H_0^1(\mathbb{R} \times S)$.

Sejam $u_j \in H_0^1(S)$ e $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ($j \in \mathbb{N}$) as autofunções normalizadas e os autovalores correspondentes do Laplaciano (negativo) restrito à região S com condições de Dirichlet na fronteira ∂S . É conhecido que $0 < \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Lembremos que λ_0 é um autovalor simples.

Lema 4.6 Seja $\psi(s, y) = w(s)u_j(y)$ com $w \in H^1(\mathbb{R})$ e $j \geq 0$. O limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b^\varepsilon(\psi)$$

existe e é finito se, e somente se, $j = 0$ e $w(0^+) = 0 = w(0^-)$.

Demonstração: Seja $\psi = wu_0$ com $w \in H^1(\mathbb{R})$. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b^\varepsilon(wu_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|w'|^2 |u_0|^2 - \frac{1}{4} \frac{|w|^2 |u_0|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2}} + a |w|^2 |u_0|^2 \right) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 - \frac{1}{4} \frac{|w|^2}{|s|} + a |w|^2 \right) ds \end{aligned}$$

se, e somente se, $w(0^+) = 0 = w(0^-)$. Caso contrário, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b^\varepsilon(wu_0) = -\infty$.

Agora suponhamos $\psi = wu_j$ com $w \in H^1(\mathbb{R})$ e $j \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b^\varepsilon(wu_j) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|w'|^2 |u_j|^2 + \frac{(\lambda_j - \lambda_0)}{\varepsilon^2} |w|^2 |u_j|^2 - \frac{1}{4} \frac{|w|^2 |u_j|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2}} + a |w|^2 |u_j|^2 \right) dy ds. \end{aligned}$$

O terceiro termo converge a $-\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{|w|^2}{|s|}$ se $w(0^+) = 0 = w(0^-)$ ou diverge tanto quanto $(-1/\varepsilon)$ caso contrário. Em ambos os casos, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b^\varepsilon(wu_j) = +\infty$. ■

Seja $A := \{wu_0 : w \in H^1(\mathbb{R}), w(0^\pm) = 0\}$ e $\mathcal{H}_0 := \overline{A}$, ou seja, o fecho de A com a norma induzida de $L^2(\mathbb{R} \times S)$. Devido aos comportamentos dos limites na demonstração do lema acima das formas quadráticas (ou seja, $\pm\infty$), de agora em diante nós restringimos nossa análise ao espaço de Hilbert \mathcal{H}_0 .

Algumas observações:

(1) A constante $a > 0$, na definição de (4.1), é tomada de modo que $\frac{1}{4|s|} \leq \frac{1}{4|s|^2} + a$, para todo $s \neq 0$. A forma quadrática

$$b(w) := \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 - \frac{1}{4} \frac{|w|^2}{|s|} + a|w|^2 \right) ds$$

com

$$\text{dom } b = \{w \in H^1(\mathbb{R}) : w(0^-) = 0 = w(0^+)\}$$

é positiva e fechada. O fato de ser positiva se deve a desigualdade de Hardy (veja Seção A.3 do Apêndice).

(2) Para cada $\varepsilon > 0$ e $w \in H^1(\mathbb{R})$,

$$b^\varepsilon(wu_0) = \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|w'|^2 |u_0|^2 - \frac{1}{4} \frac{|w|^2 |u_0|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2}} + a|w|^2 |u_0|^2 \right) dy ds$$

e de agora em diante $\text{dom } b^\varepsilon = A$.

(3) A forma quadrática b^ε é fechada para cada $\varepsilon > 0$. De fato, seja $(w_n u_0) \subset \text{dom } b^\varepsilon$ de modo que $w_n u_0 \rightarrow \psi$ em \mathcal{H}_0 e $b^\varepsilon(w_n u_0 - w_m u_0) \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$). Necessariamente $\psi = w u_0$ com $w \in H^1(\mathbb{R})$. Também temos $w_n \rightarrow w$ em $L^2(\mathbb{R})$. Observemos que $(w_n) \subset \text{dom } b$,

$$b^\varepsilon(w_n u_0 - w_m u_0) \geq b(w_n - w_m) \geq 0$$

e conseqüentemente $b(w_n - w_m) \rightarrow 0$, $m, n \rightarrow \infty$. Desde que b é fechada, temos $w \in \text{dom } b$. Portanto, $wu_0 \in \text{dom } b^\varepsilon$. Agora é só observar que $b^\varepsilon(w_n u_0 - w u_0) \rightarrow 0$.

(4) $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow b^{\varepsilon_1} < b^{\varepsilon_2}$.

(5) Para cada $\varepsilon > 0$ existe um operador $T_\varepsilon \geq 0$, auto-adjunto, associado a b^ε e com $\text{dom } T_\varepsilon \subset A$.

(6) Definimos

$$b^0(wu_0) = \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|w'|^2 |u_0|^2 - \frac{1}{4} \frac{|w|^2 |u_0|^2}{|s|} + a |w|^2 |u_0|^2 \right) dy ds$$

$\text{dom } b^0 = A$. $b^0 \geq 0$ e b^0 é fechada. Existe um operador $T_0 \geq 0$, auto-adjunto, associado a b^0 e com $\text{dom } T_0 \subset A$. Observe que podemos identificar a forma quadrática b^0 com b pela aplicação $w \mapsto wu_0$ ($w \in \text{dom } b$).

(7) Para cada $\varepsilon \geq 0$, estendemos as formas quadráticas b^ε colocando $b^\varepsilon(\psi) = +\infty$ se $\psi \in \mathcal{H}_0 \setminus A$.

(8) Seja P_1 a projeção ortogonal sobre A . Para cada $\varepsilon \geq 0$, denotamos

$$\tilde{R}_\lambda(T_\varepsilon) = (T_\varepsilon + \lambda I)^{-1} P_1 \quad (\lambda > 0).$$

Passemos então ao nosso principal resultado desta seção.

Teorema 4.7 $\tilde{R}_{-\lambda}(T_\varepsilon)$ converge fortemente a $\tilde{R}_{-\lambda}(T_0)$ em \mathcal{H}_0 .

Demonstração: Passo 1. Pelo Lema 4.6, para $wu_0 \in A$ vale

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b^\varepsilon(wu_0) = b^0(wu_0).$$

Passo 2. Pelo **Passo 1** e desde que $0 \leq b^{\varepsilon_1} \leq b^{\varepsilon_2}$ (para $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$) temos que $0 \leq b^0 \leq b^{\varepsilon_1} \leq b^{\varepsilon_2}$. Tomemos $\lambda > 0$. Pelo Lema 10.4.4 em [4]

$$0 \leq \tilde{R}_{-\lambda}(T_{\varepsilon_2}) \leq \tilde{R}_{-\lambda}(T_{\varepsilon_1}) \leq \tilde{R}_{-\lambda}(T_0).$$

Assim,

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \tilde{R}_{-\lambda}(T_\varepsilon) \varphi, \varphi \rangle = \sup_{\varepsilon} \langle \tilde{R}_{-\lambda}(T_\varepsilon) \varphi, \varphi \rangle \leq \langle \tilde{R}_{-\lambda}(T_0) \varphi, \varphi \rangle$$

e o limite é finito para cada $\varphi \in \mathcal{H}_0$. Por polarização, existe o limite

$$t(\varphi, \psi) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \tilde{R}_{-\lambda}(T_\varepsilon) \varphi, \psi \rangle, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}_0.$$

Como

$$t(\varphi, \varphi) \leq \langle \tilde{R}_{-\lambda}(T_0) \varphi, \varphi \rangle \leq \| \tilde{R}_{-\lambda}(T_0) \| \| \varphi \|^2, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_0,$$

segue que t é uma forma sesquilinear limitada. Assim, existe um único operador limitado e auto-adjunto $C \in B(\mathcal{H}_0)$ de forma que $\langle C\varphi, \psi \rangle = t(\varphi, \psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}_0$, ou seja,

$$\langle C\varphi, \psi \rangle = t(\varphi, \psi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \tilde{R}_{-\lambda}(T_\varepsilon)\varphi, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}_0.$$

Algumas observações:

(i) $\langle C\varphi, \psi \rangle \leq \langle \tilde{R}_{-\lambda}(T_0)\varphi, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{H}_0$.

(ii) C é invertível. De fato, suponhamos $C\varphi = 0$ para algum $\varphi \in \mathcal{H}_0$. Para $\varepsilon_0 > 0$ fixado, temos $0 = \langle C\varphi, \varphi \rangle \geq \langle \tilde{R}_{-\lambda}(T_{\varepsilon_0})\varphi, \varphi \rangle$. Seja $\phi = \tilde{R}_{-\lambda}(T_{\varepsilon_0})\varphi$. Desde que T_{ε_0} é positivo, temos $0 \geq \langle \phi, (T_{\varepsilon_0} + \lambda I)\phi \rangle \geq \lambda \|\phi\|^2$. Assim, $\phi = 0$ e consequentemente $\varphi = 0$.

Seja b^S a forma sesquilinear gerada por $S := C^{-1} - \lambda I$. Da relação $\tilde{R}_{-\lambda}(T_\varepsilon) \leq C \leq \tilde{R}_{-\lambda}(T_0)$ temos $b^0 \leq b^S \leq b^\varepsilon$. Pelo **Passo 1** segue que $b^S = b^0$, ou seja, $T_0 = S$. Assim,

$$\langle \tilde{R}_{-\lambda}(T_0)\varphi, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \tilde{R}_{-\lambda}(T_\varepsilon)\varphi, \psi \rangle, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}_0,$$

e concluimos que $\tilde{R}_{-\lambda}(T_\varepsilon)$ converge fracamente a $\tilde{R}_{-\lambda}(T_0)$ em \mathcal{H}_0 .

Passo 3. Vamos mostrar a convergência forte dos resolventes. Definimos

$$A_\varepsilon := \tilde{R}_{-\lambda}(T_0) - \tilde{R}_{-\lambda}(T_\varepsilon), \quad \text{dom } A_\varepsilon = \mathcal{H}_0,$$

e notemos que (A_ε) é uma sequência de operadores positivos, auto-adjuntos e que convergem fracamente a zero. Definimos

$$a^\varepsilon(\varphi, \psi) = \langle \varphi, A_\varepsilon \psi \rangle \quad \varphi, \psi \in \mathcal{H}_0.$$

a^ε é a forma sesquilinear positiva gerada por A_ε . Observemos que $\|a^\varepsilon\| \leq \frac{2}{|\lambda|}$. Por Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon \varphi\|^4 &= |a^\varepsilon(A_\varepsilon \varphi, \varphi)|^2 \leq |a^\varepsilon(\varphi)| |a^\varepsilon(A_\varepsilon \varphi)| \\ &\leq |\langle A_\varepsilon \varphi, \varphi \rangle| \|a^\varepsilon\| \|A_\varepsilon \varphi\|^2 \leq \frac{2}{|\lambda|} |\langle A_\varepsilon \varphi, \varphi \rangle| \|A_\varepsilon \varphi\|^2, \end{aligned}$$

consequentemente

$$\|A_\varepsilon \varphi\|^2 \leq \frac{2}{|\lambda|} |\langle A_\varepsilon \varphi, \varphi \rangle| \rightarrow 0$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para toda $\varphi \in \mathcal{H}_0$. Portanto, $\tilde{R}_{-\lambda}(T_\varepsilon)$ converge fortemente a $\tilde{R}_{-\lambda}(T_0)$ em \mathcal{H}_0 . ■

Concluimos que no processo de confinamento do átomo de hidrogênio no caso atrativo, a extensão auto-adjunta de (1.2) (veja pág.13) selecionada (segundo nossos argumentos acima) é a de Dirichlet.

Capítulo 5

Convergência uniforme - Partícula livre

Seja $\Omega_\varepsilon^\alpha$ a região definida por (3.1) na página 23 . Neste capítulo vamos analisar o comportamento de uma partícula livre se movendo em $\Omega_\varepsilon^\alpha$ com $I = \mathbb{R}$. Nossa análise será voltada para o estudo da família de formas quadráticas definidas por (3.5), ou seja,

$$\hat{a}_\varepsilon(\psi) = \int_{\mathbb{R} \times S} \left[\frac{1}{\beta_\varepsilon} |\psi'| + (\nabla_y \psi \cdot Ry)(\tau + \alpha')|^2 + \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2} (|\nabla_y \psi|^2 - \lambda_0 |\psi|^2) + \beta_\varepsilon c |\psi|^2 \right] dy ds.$$

Em [5] foi mostrado que a sequência \hat{a}_ε Γ -converge fortemente e fracamente a

$$b_0(w) = \int_{\mathbb{R}} \left[|w'|^2 + \left(C(S)(\tau(s) + \alpha'(s))^2 - \frac{k(s)^2}{4} + c \right) |w|^2 \right] ds,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como consequência deste fato, tem-se a convergência forte dos resolventes dos operadores associados. A nossa contribuição neste capítulo é mostrar que a convergência acima pode ser substituída pela convergência uniforme dos resolventes. A técnica usada aqui não é mais a Γ -convergência. De fato, o Teorema 2.3 garante apenas a convergência forte dos resolventes. No entanto, a idéia de redução de dimensão é fortemente utilizada.

5.1 Definições

Relembremos as formas quadráticas definidas por (3.5) (veja página 26):

$$\hat{a}_\varepsilon(\psi) = \int_{\mathbb{R} \times S} \left[\frac{1}{\beta_\varepsilon} |\psi' + (\nabla_y \psi \cdot Ry)(\tau + \alpha')|^2 + \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2} (|\nabla_y \psi|^2 - \lambda_0 |\psi|^2) + \beta_\varepsilon c |\psi|^2 \right] dy ds,$$

$$\text{dom } a_\varepsilon = H_0^1(\mathbb{R} \times S).$$

Introduzimos

$$a_\varepsilon(\psi) := \int_{\mathbb{R} \times S} \left[|\psi' + (\nabla_y \psi \cdot Ry)(\tau + \alpha')|^2 + \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2} (|\nabla_y \psi|^2 - \lambda_0 |\psi|^2) + c |\psi|^2 \right] dy ds,$$

$\text{dom } a_\varepsilon = H_0^1(\mathbb{R} \times S)$. A diferença entre \hat{a}_ε e a_ε está apenas no fator $1/\beta_\varepsilon$ multiplicando o primeiro termo dentro da integral e o fator β_ε multiplicando o último termo dentro da integral.

Definimos também a forma quadrática “unidimensional”

$$b(w) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ |w'|^2 + \left[(\tau(s) + \alpha'(s))^2 C(S) - \frac{k(s)^2}{4} + c \right] |w|^2 \right\} ds,$$

$$\text{dom } b = H^1(\mathbb{R}).$$

Denotamos por \hat{A}_ε , A_ε e B os operadores auto-adjuntos associados as formas quadráticas \hat{a}_ε , a_ε e b , respectivamente. Desde que \hat{A}_ε , A_ε e B são operadores positivos, para cada $\xi > 0$, temos $-\xi \in \rho(\hat{A}_\varepsilon)$, $-\xi \in \rho(A_\varepsilon)$ e $-\xi \in \rho(B)$, ou seja, $-\xi$ pertence ao conjunto resolvente dos operadores.

A proposição abaixo é uma aproximação que segue basicamente do fato de que β_ε converge uniformemente a 1 quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proposição 5.1 Dado $\xi > 0$, existem $\varepsilon'_0 > 0$ e $C_5 > 0$ de forma que

$$\|(\hat{A}_\varepsilon + \xi I)^{-1} - (A_\varepsilon + \xi I)^{-1}\| \leq C_5 \varepsilon, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon'_0.$$

Demonstração: Como $\beta_\varepsilon \rightarrow 1$ uniformemente quando $\varepsilon \rightarrow 0$, existem $\varepsilon_1 > 0$ e constantes $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ de modo que $\sigma_1 \leq \beta_\varepsilon \leq \sigma_2$, $\forall \varepsilon < \varepsilon_1$. Assim,

$$(\hat{a}_\varepsilon + \xi)(\psi) \geq \sigma_1 \xi \|\psi\|^2 \quad \text{e} \quad (a_\varepsilon + \xi)(\psi) \geq \xi \|\psi\|^2,$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon_1$. Consequentemente,

$$\|(\hat{A}_\varepsilon + \xi I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\sigma_1 \xi} \quad \text{e} \quad \|(A_\varepsilon + \xi I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\xi},$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Desde que $k \in L^\infty(\mathbb{R})$, $y \in S$ e S é uma região limitada, existem $\varepsilon_0 > 0$ ($\varepsilon_0 < \varepsilon_1$) e constantes $C_1, C_2 > 0$ de modo que

$$\left| \left(\frac{1}{\beta_\varepsilon} - 1 \right) \right| = \left| \frac{\varepsilon k(s)(y \cdot z_\alpha(s))}{\beta_\varepsilon} \right| \leq C_1 \varepsilon,$$

e

$$(c + \xi)|(\beta_\varepsilon - 1)| \leq C_2 \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$. Nestas condições

$$\begin{aligned} & |(\hat{a}_\varepsilon + \xi)(\psi) - (a_\varepsilon + \xi)(\psi)| \\ & \leq \int_{\mathbb{R} \times S} \left| \left(\frac{1}{\beta_\varepsilon} - 1 \right) \right| |\psi' + (\nabla_y \psi \cdot Ry)(\tau + \alpha')|^2 dy ds \\ & + \int_{\mathbb{R} \times S} (c + \xi)|(\beta_\varepsilon - 1)| |\psi|^2 dy ds \\ & \leq C_1 \varepsilon \int_{\mathbb{R} \times S} |\psi' + (\nabla_y \psi \cdot Ry)(\tau + \alpha')|^2 + C_2 \varepsilon \int_{\mathbb{R} \times S} |\psi|^2 dy ds \\ & \leq C_3 \varepsilon (a_\varepsilon + \xi)(\psi) \end{aligned}$$

para alguma constante $C_3 > 0$. Sendo assim,

$$(1 - C_3 \varepsilon)(a_\varepsilon + \xi)(\psi) \leq (\hat{a}_\varepsilon + \xi)(\psi) \leq (1 + C_3 \varepsilon)(a_\varepsilon + \xi)(\psi),$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$. A primeira desigualdade implica que é possível encontrar $\varepsilon'_0 > 0$ ($\varepsilon'_0 < \varepsilon_0$) e uma constante $C_4 > 0$ de modo que

$$(a_\varepsilon + \xi)(\psi) \leq C_4 (\hat{a}_\varepsilon + \xi)(\psi),$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon'_0$.

Denotamos por $\hat{a}_\varepsilon(\psi_1, \psi_2)$ e $a_\varepsilon(\psi_1, \psi_2)$ as formas bilineares associadas as formas quadráticas \hat{a}_ε e a_ε respectivamente. A desigualdade de Schwarz para formas bilineares diz que

$$|(\hat{a}_\varepsilon + \xi)(\psi_1, \psi_2)| \leq [(\hat{a}_\varepsilon + \xi)(\psi_1)]^{1/2} [(\hat{a}_\varepsilon + \xi)(\psi_2)]^{1/2},$$

$$|(a_\varepsilon + \xi)(\psi_1, \psi_2)| \leq [(a_\varepsilon + \xi)(\psi_1)]^{1/2} [(a_\varepsilon + \xi)(\psi_2)]^{1/2},$$

para toda $\psi_1, \psi_2 \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$. Assim, usando as estimativas acima, para cada $\psi_1, \psi_2 \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$ temos

$$\begin{aligned} & |\langle (\hat{A}_\varepsilon + \xi I)^{1/2} \psi_1, (\hat{A}_\varepsilon + \xi I)^{1/2} \psi_2 \rangle - \langle (A_\varepsilon + \xi I)^{1/2} \psi_1, (A_\varepsilon + \xi I)^{1/2} \psi_2 \rangle| \\ &= |(\hat{a}_\varepsilon + \xi)(\psi_1, \psi_2) - (a_\varepsilon + \xi)(\psi_1, \psi_2)| \\ &\leq C_3 \varepsilon [(a_\varepsilon + \xi)(\psi_1)]^{1/2} [(a_\varepsilon + \xi)(\psi_2)]^{1/2} \\ &\leq C_3 \sqrt{C_4} \varepsilon [(a_\varepsilon + \xi)(\psi_1)]^{1/2} [(\hat{a}_\varepsilon + \xi)(\psi_2)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Tomando $\psi_1 = (A_\varepsilon + \xi I)^{-1} f$, $\psi_2 = (\hat{A}_\varepsilon + \xi I)^{-1} g$, em que $f, g \in L^2(\mathbb{R} \times S)$ são arbitrárias, obtemos

$$\begin{aligned} |\langle (\hat{A}_\varepsilon + \xi I)^{-1} f, g \rangle - \langle (A_\varepsilon + \xi I)^{-1} f, g \rangle| &\leq C_3 \sqrt{C_4} \varepsilon \left[\langle (\hat{A}_\varepsilon + \xi I)^{-1} g, g \rangle \langle (A_\varepsilon + \xi I)^{-1} g, g \rangle \right]^{1/2} \\ &\leq \frac{C_3 \sqrt{C_4}}{\xi \sqrt{\sigma_1}} \varepsilon \|f\| \|g\|, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon'_0$. Portanto,

$$\|(\hat{A}_\varepsilon + \xi I)^{-1} - (A_\varepsilon + \xi I)^{-1}\| \leq C_5 \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon'_0$, em que $C_5 = \frac{C_3 \sqrt{C_4}}{\xi \sqrt{\sigma_1}}$. ■

Devido ao teorema acima, de agora em diante, vamos analisar a sequência de formas quadráticas $(a_\varepsilon)_\varepsilon$ em vez de $(\hat{a}_\varepsilon)_\varepsilon$, simplificando os cálculos no processo de redução de dimensão.

5.2 Convergência Uniforme

Consideremos a seguinte função:

$$\varphi_0(s, y) := k(s) (\cos \alpha(s)) \chi_1(y) - k(s) (\sin \alpha(s)) \chi_2(y), \quad (5.1)$$

em que χ_1 e χ_2 são soluções de (3.8) (veja pág.28) para $\xi_1 = (1, 0)$ e $\xi_2 = (0, 1)$ respectivamente.

Para cada $\varepsilon > 0$, seja \mathcal{L}_ε o subespaço de $L^2(\mathbb{R} \times S)$ gerado pelas funções da forma

$$\psi(s, y) = w(s)u_0(y) + \varepsilon w(s)\varphi_0(s, y), \quad w \in L^2(\mathbb{R}).$$

Lembremos que u_0 é a autofunção correspondente ao primeiro autovalor do Laplaciano de Dirichlet em $H_0^1(S)$.

Para cada $\varepsilon > 0$ definimos as seguintes formas quadráticas em $\mathcal{L}_\varepsilon \cap H_0^1(\mathbb{R} \times S)$:

$$b_\varepsilon(wu_0 + \varepsilon w\varphi_0) := b(w), \quad w \in H^1(\mathbb{R}).$$

Assim, para $\psi \in \mathcal{L}_\varepsilon \cap H_0^1(\mathbb{R} \times S)$, usaremos a notação $b(\psi)$ em vez de $b(w)$ ou $b_\varepsilon(\psi)$. Consideremos também o seguinte subespaço de $L^2(\mathbb{R} \times S)$:

$$\mathcal{L} := \{wu_0 : w \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Nosso principal resultado neste capítulo é uma redução de dimensão restrita na seguinte convergência de operadores:

Teorema 5.2 Dado $\xi > 0$, existem $\varepsilon_2 > 0$ e $D_{10} > 0$ de modo que

$$\|((A_\varepsilon + \xi I)^{-1} \oplus 0_1) - ((B + \xi I)^{-1} \oplus 0_2)\| \leq D_{10}\varepsilon, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_2,$$

em que 0_1 é o operador nulo no subespaço $\mathcal{L}_\varepsilon^\perp$ e 0_2 é o operador nulo em \mathcal{L}^\perp .

Demonstração: Tomemos $\psi \in \mathcal{L}_\varepsilon \cap H_0^1(\mathbb{R} \times S)$. Escrevemos

$$\psi(s, y) = w(s)u_0(y) + \varepsilon w(s)\varphi_0(s, y),$$

com $w \in H^1(\mathbb{R})$. Pela definição de $\varphi_0(s, y)$ podemos ver que

$$\int_S \varphi_0(s, y)u_0(y)dy = 0 \quad \text{e} \quad \int_S \varphi_0'(s, y)u_0(y)dy = 0. \quad (5.2)$$

Levando em conta que $\int_S u_0 \langle \nabla_y u_0, Ry \rangle dy = 0$ e as igualdades em (5.2), alguns cálculos mostram que

$$\int_{\mathbb{R} \times S} |\psi' + \langle \nabla_y \psi, Ry \rangle (\tau + \alpha')|^2 dy ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R} \times S} |w'u_0 + \varepsilon w'\varphi_0 + \varepsilon w\varphi'_0 + w\langle \nabla_y u_0, Ry \rangle(\tau + \alpha') + \varepsilon w\langle \nabla_y \varphi_0, Ry \rangle(\tau + \alpha')|^2 dy ds \\
&= \int_{\mathbb{R} \times S} dy ds \left(|w'|^2 |u_0|^2 + \varepsilon^2 |w'|^2 |\varphi_0|^2 + \varepsilon^2 |w|^2 |\varphi'_0|^2 + |w|^2 |\langle \nabla_y u_0, Ry \rangle|^2 (\tau + \alpha')^2 \right. \\
&\quad + \varepsilon^2 |w|^2 |\langle \nabla_y \varphi_0, Ry \rangle|^2 (\tau + \alpha')^2 + 2\varepsilon w' w u_0 \langle \nabla_y \varphi_0, Ry \rangle (\tau + \alpha') \\
&\quad + 2\varepsilon^2 w' w \varphi_0 \varphi'_0 + 2\varepsilon w' w \varphi_0 \langle \nabla_y u_0, Ry \rangle (\tau + \alpha') \\
&\quad + 2\varepsilon^2 w' w \varphi_0 \langle \nabla_y \varphi_0, Ry \rangle (\tau + \alpha') + 2\varepsilon |w|^2 \varphi'_0 \langle \nabla_y u_0, Ry \rangle (\tau + \alpha') \\
&\quad + 2\varepsilon^2 |w|^2 \varphi'_0 \langle \nabla_y \varphi_0, Ry \rangle (\tau + \alpha') \\
&\quad \left. + 2\varepsilon |w|^2 \langle \nabla_y u_0, Ry \rangle \langle \nabla_y \varphi_0, Ry \rangle (\tau + \alpha')^2 \right).
\end{aligned}$$

Observemos que todas as integrais na variável y são funções limitadas na variável s . Por exemplo, a função

$$\begin{aligned}
g(s) &:= \int_S \varphi_0(s, y) \langle \nabla_y u_0, Ry \rangle dy \\
&= k(s) \cos \alpha(s) \int_S \chi_1(y) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y_1} y_2 - \frac{\partial u_0}{\partial y_2} y_1 \right) dy \\
&\quad - k(s) \sin \alpha(s) \int_S \chi_2(y) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y_1} y_2 - \frac{\partial u_0}{\partial y_2} y_1 \right) dy
\end{aligned}$$

é limitada em \mathbb{R} desde que $\|k\|_\infty < \infty$.

Como $\int_S |u_0|^2 dy = 1$ e $C(S) = \int_S |\langle \nabla_y u_0, Ry \rangle|^2 dy$, escrevemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} (|w'|^2 + (\tau(s) + \alpha'(s))^2 C(S) |w|^2) ds \\
&= \int_{\mathbb{R} \times S} (|w'|^2 |u_0|^2 + |w|^2 |\langle \nabla_y u_0, Ry \rangle|^2 (\tau(s) + \alpha'(s))^2) dy ds.
\end{aligned}$$

Usando a igualdade acima e fatos como o que ocorreram com a função g , podemos ver que existem constantes $D_1, D_2, D_2 > 0$ de modo que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R} \times S} |\psi' + \langle \nabla_y \psi, Ry \rangle(\tau + \alpha')|^2 dy ds - \int_{\mathbb{R}} |w'|^2 + (\tau(s) + \alpha'(s))^2 C(S) |w|^2 ds \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R} \times S} dy ds \left(\varepsilon^2 |w'|^2 |\varphi_0|^2 + \varepsilon^2 |w|^2 |\varphi'_0|^2 + \varepsilon^2 |w|^2 |\langle \nabla_y \varphi_0, Ry \rangle|^2 (\tau + \alpha')^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\varepsilon w' w u_0 \langle \nabla_y \varphi_0, Ry \rangle (\tau + \alpha') \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\varepsilon^2 w' w \varphi_0 \varphi_0' + 2\varepsilon w' w \varphi_0 \langle \nabla_y u_0, Ry \rangle (\tau + \alpha') \\
& + 2\varepsilon^2 w' w \varphi_0 \langle \nabla_y \varphi_0, Ry \rangle (\tau + \alpha') + 2\varepsilon |w|^2 \varphi_0' \langle \nabla_y u_0, Ry \rangle (\tau + \alpha') \\
& + 2\varepsilon^2 |w|^2 \varphi_0' \langle \nabla_y \varphi_0, Ry \rangle (\tau + \alpha') \\
& + 2\varepsilon |w|^2 \langle \nabla_y u_0, Ry \rangle \langle \nabla_y \varphi_0, Ry \rangle (\tau + \alpha')^2 \Big| \\
\leq & D_1 \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |w'|^2 ds + D_2 \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |w|^2 ds + D_3 \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}} |w|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |w'|^2 ds \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, uma substituição direta, usando a definição de $\varphi_0(s, y)$, mostra que

$$\int_{\mathbb{R} \times S} [(|\nabla_y \varphi_0|^2 - \lambda_0 |\varphi_0|^2) + 2k(s) z_\alpha(s) \cdot \nabla_y u_0 \varphi_0] |w|^2 dy ds = - \int_{\mathbb{R}} \frac{k(s)^2}{4} |w|^2 ds.$$

Com a igualdade acima, podemos ver que existe uma constante $D_4 > 0$ de modo que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R} \times S} \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2} (|\nabla_y \psi|^2 - \lambda_0 |\psi|^2) dy ds + \int_{\mathbb{R}} \frac{k(s)^2}{4} |w|^2 ds \right| \\
= & \left| \int_{\mathbb{R} \times S} \beta_\varepsilon(s, y) [(|\nabla_y \varphi_0|^2 - \lambda_0 |\varphi_0|^2) + 2k(s) z_\alpha(s) \cdot \nabla_y u_0 \varphi_0] |w|^2 dy ds \right. \\
& \left. + \int_{\mathbb{R}} \frac{k(s)^2}{4} |w|^2 ds \right| \\
= & \left| \int_{\mathbb{R} \times S} \varepsilon k(s) \langle y, z_\alpha(s) \rangle [(|\nabla_y \varphi_0|^2 - \lambda_0 |\varphi_0|^2) + 2k(s) z_\alpha(s) \cdot \nabla_y u_0 \varphi_0] |w|^2 dy ds \right| \\
\leq & D_4 \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |w|^2 ds.
\end{aligned}$$

Novamente usamos o fato de que

$$h(s) := k(s) \int_S \langle y, z_\alpha(s) \rangle [(|\nabla_y \varphi_0|^2 - \lambda_0 |\varphi_0|^2) + 2k(s) z_\alpha(s) \cdot \nabla_y u_0 \varphi_0] dy,$$

é uma função limitada em \mathbb{R} .

Com as estimativas acima, existem constantes $D_5, D_6, D_7 > 0$ de modo que

$$\begin{aligned}
& |(a_\varepsilon + \xi)(\psi) - (b + \xi)(\psi)| \\
= & \left| \int_{\mathbb{R} \times S} |\psi' + \langle \nabla_y \psi, Ry \rangle (\tau + \alpha')|^2 dy ds - \int_{\mathbb{R}} (|w'|^2 + (\tau(s) + \alpha'(s))^2 C(S) |w|^2) ds \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathbb{R} \times S} \frac{\beta_\varepsilon(s, y)}{\varepsilon^2} (|\nabla_y \psi|^2 - \lambda_0 |\psi|^2) dy ds + \int_{\mathbb{R}} \frac{k(s)^2}{4} |w|^2 ds \\
& + \left| \int_{\mathbb{R} \times S} (c + \xi) |\psi|^2 dy ds - \int_{\mathbb{R}} (c + \xi) |w|^2 ds \right| \\
& \leq D_5 \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |w'|^2 ds + D_6 \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |w|^2 ds + D_7 \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}} |w|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |w'|^2 ds \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Agora observemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |w'|^2 ds \leq (b + \xi)(w) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} |w|^2 ds = \frac{1}{\xi} \int_{\mathbb{R}} \xi |w|^2 ds \leq \frac{1}{\xi} (b + \xi)(w).$$

Assim, existe uma constante $D_8 > 0$, de forma que

$$\begin{aligned}
& |(a_\varepsilon + \xi)(\psi) - (b + \xi)(\psi)| \\
& \leq D_5 \varepsilon (b + \xi)(\psi) + \frac{D_6}{\xi} \varepsilon (b + \xi)(\psi) + \frac{D_7}{\xi^{1/2}} \varepsilon ((b + \xi)(\psi))^{1/2} ((b + \xi)(\psi))^{1/2} \\
& \leq D_8 \varepsilon (b + \xi)(\psi),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(1 - D_8 \varepsilon)(b + \xi)(\psi) \leq (a_\varepsilon + \xi)(\psi) \leq (1 + D_8 \varepsilon)(b + \xi)(\psi).$$

Olhando para a primeira desigualdade acima, é possível encontrar $\varepsilon_2 > 0$ de modo que

$$(b + \xi)(\psi) \leq D_9^2 (a_\varepsilon + \xi)(\psi), \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_2,$$

para alguma constante $D_9 > 0$. Logo,

$$|(a_\varepsilon + \xi)(\psi) - (b + \xi)(\psi)| \leq D_8 D_9 \varepsilon ((b + \xi)(\psi))^{1/2} ((a_\varepsilon + \xi)(\psi))^{1/2}.$$

Lembremos que podemos olhar b como uma forma quadrática em $\mathcal{L}_\varepsilon \cap H_0^1(\mathbb{R} \times S)$.

Se $a_\varepsilon(\psi_1, \psi_2)$ e $b(\psi_1, \psi_2)$ denotam as formas bilineares associadas as formas quadráticas a_ε e b respectivamente, a desigualdade de Schwarz diz que

$$|(a_\varepsilon + \xi)(\psi_1, \psi_2)| \leq [(a_\varepsilon + \xi)(\psi_1)]^{1/2} [(a_\varepsilon + \xi)(\psi_2)]^{1/2},$$

$$|(b + \xi)(\psi_1, \psi_2)| \leq [(b + \xi)(\psi_1)]^{1/2} [(b + \xi)(\psi_2)]^{1/2},$$

para toda $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}_\varepsilon \cap H_0^1(\mathbb{R} \times S)$. Assim, para cada $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}_\varepsilon \cap H_0^1(\mathbb{R} \times S)$, temos

$$\begin{aligned} & | \langle (A_\varepsilon + \xi I)^{1/2} \psi_1, (A_\varepsilon + \xi I)^{1/2} \psi_2 \rangle - \langle (B + \xi I)^{1/2} \psi_1, (B + \xi I)^{1/2} \psi_2 \rangle | \\ &= | (a_\varepsilon + \xi)(\psi_1, \psi_2) - (b + \xi)(\psi_1, \psi_2) | \\ &\leq D_8 D_9 \varepsilon [(a_\varepsilon + \xi)(\psi_1)]^{1/2} [(b + \xi)(\psi_2)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Tomando $\psi_1 = (B + \xi I)^{-1} f$, $\psi_2 = (A_\varepsilon + \xi I)^{-1} g$, em que f, g são funções arbitrárias do conjunto imagem do operador A_ε , obtemos

$$\begin{aligned} | \langle (A + \xi I)^{-1} f, g \rangle - \langle (B + \xi I)^{-1} f, g \rangle | &\leq D_8 D_9 \varepsilon [\langle (A_\varepsilon + \xi I)^{-1} g, g \rangle \langle (B + \xi I)^{-1} f, f \rangle]^{1/2} \\ &\leq D_8 D_9 \varepsilon \| (A_\varepsilon + \xi I)^{-1} \|^{1/2} \| (B + \xi I)^{-1} \|^{1/2} \| f \| \| g \| \\ &\leq D_{10} \varepsilon \| f \| \| g \|, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon_2$, em que $D_{10} = D_8 D_9 / \xi$. Portanto,

$$\| (A_\varepsilon + \xi I)^{-1} \oplus 0_1 - (B + \xi I)^{-1} \oplus 0_2 \| \leq D_{10} \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon_2$. ■

Observação 5.1 A forma quadrática $a_\varepsilon(\psi)$ restrita ao subespaço $\mathcal{L} \cap H_0^1(\mathbb{R} \times S)$ possui ação dada por

$$a_\varepsilon(wu_0) = \int_{\mathbb{R}} (|w'|^2 + C(S)(\tau(s) + \alpha'(s))|w|^2 + c|w|^2) ds,$$

logo não depende do parâmetro ε e pode ser identificada como uma forma quadrática em $H^1(\mathbb{R})$. Pelos resultados obtidos em [5] sabemos que a forma quadrática limite obtida pela Γ -convergência forte e fraca da sequência \hat{a}_ε é

$$b(w) = \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 + C(S)(\tau(s) + \alpha'(s))|w|^2 - \frac{k(s)^2}{4}|w|^2 + c|w|^2 \right) ds.$$

Logo, nossa análise não poderia ser restrita apenas ao subespaço $\mathcal{L} \cap H_0^1(\mathbb{R} \times S)$.

Levando em conta o fato de que

$$\int_{\mathbb{R} \times S} [(|\nabla_y \varphi_0|^2 - \lambda_0 |\varphi_0|^2) + 2k(s)z_\alpha(s) \cdot \nabla_y u_0 \varphi_0] |w|^2 dy ds = - \int_{\mathbb{R}} \frac{k(s)^2}{4} |w|^2 ds,$$

em que φ_0 é a função definida em (5.1), foi conveniente restringir a análise aos subespaços $\mathcal{L}_\varepsilon \cap H_0^1(\mathbb{R} \times S)$. De certa forma, nos aproximamos de $\mathcal{L} \cap H_0^1(\mathbb{R} \times S)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, mas “herdamos” dos subespaços $\mathcal{L}_\varepsilon \cap H_0^1(\mathbb{R} \times S)$ o termo $-k(s)^2/4$.

Capítulo 6

Convergência uniforme - Coulomb atrativo

Neste capítulo voltamos a analisar o Hamiltoniano $-\Delta - \kappa/|x|$ especificamente com $\kappa > 0$. O objetivo é encontrar resultados mais fortes do que os do Capítulo 4. A situação é basicamente a mesma: o elétron se move na região (3.1) (veja página 23) gerada pela curva $r(s) = (s, 0, 0)$ e vamos analisar o limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Por simplicidade, vamos supor que a seção S possui uma rotação de ângulo nula. No entanto, nossa análise será com uma classe de potenciais perturbados $-\kappa/(|x| + \varepsilon^\alpha)$, em que α é uma constante positiva. A sequência de formas quadráticas a ser analisada é

$$F_\varepsilon(\phi) = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(|\nabla\phi|^2 - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2}|\phi|^2 - \kappa \frac{|\phi|^2}{|x| + \varepsilon^\alpha} + a|\phi|^2 \right) dx, \quad \text{dom } F_\varepsilon = H_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

A constante $a > 0$ é escolhida de forma conveniente e como na Seção 4.2 do Capítulo 4 ela está diretamente relacionada com a desigualdade de Hardy.

Vamos mostrar que é possível uma convergência uniforme dos resolventes dos operadores associados às formas quadráticas F_ε quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Uma primeira aproximação mostra que essa convergência só pode ocorrer no subespaço $\{wu_0 : w \in H^1(\mathbb{R})\}$ de $H_0^1(\mathbb{R} \times S)$. Nossa análise se restringe então à sequência de formas

quadráticas unidimensionais

$$q_\varepsilon(w) = \int_{\mathbb{R}} (|w'|^2 + V_\varepsilon(s)|w|^2 + a|w|^2) ds, \quad V_\varepsilon(s) := -\kappa \int_S \frac{|u_0|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2} + \varepsilon^\alpha} dy,$$

em que $\text{dom } q_\varepsilon = H^1(\mathbb{R})$. Observemos que, dentre outras características que veremos ao longo do capítulo, tem-se $V_\varepsilon(s) \rightarrow -\kappa/|s|$ q.t.p. $[s]$.

Finalmente, usando um resultado de [13] sobre convergência uniforme dos resolventes, o operador efetivo obtido no limite $\varepsilon \rightarrow 0$ é a extensão de Dirichlet do operador (1.2) definido na página 13.

6.1 Redução de dimensão

Seja \mathcal{L} o subespaço de $L^2(\mathbb{R} \times S)$ gerado por todas as funções da forma

$$\psi_w(s, y) = w(s)u_0(y), \quad w \in L^2(\mathbb{R}).$$

Lembremos que u_0 é a autofunção associada ao autovalor λ_0 do Laplaciano em $H_0^1(S)$. Consideremos a decomposição ortogonal : $L^2(\mathbb{R} \times S) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$. Assim, se $\psi \in L^2(\mathbb{R} \times S)$, podemos escrever

$$\psi = \psi_w + U, \quad w \in L^2(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{L}^\perp.$$

Tomemos agora $U \in \mathcal{L}^\perp \cap H_0^1(\mathbb{R} \times S)$. Então,

$$\int_S U(s, y)u_0(y)dy = 0 \quad \text{e} \quad \int_S U'(s, y)u_0(y)dy = 0 \quad \text{q.t.p.}[s],$$

em que $U'(s, y)$ denota a derivada de U com relação a s . Usando as Identidades de Green, também podemos ver que

$$\int_S \langle \nabla_y U, \nabla_y u_0 \rangle dy = 0, \quad \text{q.t.p.}[s].$$

Seja λ_1 o segundo autovalor do Laplaciano em $H_0^1(S)$. Desde que $U \perp u_0$ em $L^2(S)$, temos

$$\int_S |\nabla_y U|^2 dy \geq \lambda_1 \int_S |U|^2 dy, \quad \text{q.t.p.}[s].$$

Consequentemente

$$\int_S (|\nabla_y U|^2 - \lambda_0 |U|^2) dy \geq (\lambda_1 - \lambda_0) \int_S |U|^2 dy, \quad \text{q.t.p.}[s].$$

No caso particular de uma função $w \in H^1(\mathbb{R})$ temos que $\psi_w \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$. Portanto, para $\psi \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$, escrevemos $\psi = \psi_w + U$ com $w \in H^1(\mathbb{R})$ e $U \in \mathcal{L}^\perp \cap H_0^1(\mathbb{R} \times S)$.

Neste capítulo

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (s, \varepsilon y_1, \varepsilon y_2), s \in \mathbb{R}, (y_1, y_2) \in S\} \quad (\varepsilon > 0).$$

Seja $-\Delta_\varepsilon$ o Laplaciano de Dirichlet em Ω_ε e I o operador identidade. Vamos analisar o Hamiltoniano

$$-\Delta_\varepsilon - \frac{\kappa}{|x| + \varepsilon^\alpha} I - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} I + aI \quad (\kappa > 0), \quad (6.1)$$

em que a é uma constante positiva escolhida como segue: considere $a' > 0$ de forma que $\frac{\kappa}{|x|} \leq \frac{1}{4|x|^2} + a'$, para todo $x \in \Omega_\varepsilon$. A desigualdade de Hardy (veja Seção A.3 do Apêndice) garante que

$$\left\langle \left(-\Delta_\varepsilon - \frac{\kappa}{|x| + \varepsilon^\alpha} I + a'I \right) \psi, \psi \right\rangle \geq 0,$$

para toda $\psi \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$. Tomemos $a > a'$, se necessário, de modo que exista $d > 0$ e valha

$$\left\langle \left(-\Delta_\varepsilon - \frac{\kappa}{|x| + \varepsilon^\alpha} I + aI \right) \psi, \psi \right\rangle \geq d \int_{\Omega_\varepsilon} |\psi|^2 dx,$$

para toda $\psi \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$.

A forma quadrática associada ao operador (6.1), já com a mudança de variáveis e regularizações necessárias, é

$$a_\varepsilon(\psi) := \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|\psi'|^2 + \frac{|\nabla_y \psi|^2}{\varepsilon^2} - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} |\psi|^2 - \kappa \frac{|\psi|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^\alpha}} + a|\psi|^2 \right) dy ds,$$

em que $\text{dom } a_\varepsilon = H_0^1(\mathbb{R} \times S)$. Denotamos por A_ε o operador auto-adjunto associado a a_ε .

Para $\psi = \psi_w$, com $w \in H^1(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(\psi_w) &= \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|\psi_w'|^2 + \frac{|\nabla_y \psi_w|^2}{\varepsilon^2} - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} |\psi_w|^2 - \kappa \frac{|\psi_w|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^\alpha}} + a |\psi_w|^2 \right) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|w'|^2 |u_0|^2 - \kappa \frac{|w|^2 |u_0|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^\alpha}} + a |w|^2 |u_0|^2 \right) dy ds. \end{aligned}$$

Usando a mesma notação da Seção A.2 do Apêndice, definimos

$$q_\varepsilon(w) := a_\varepsilon(\psi_w) = \int_{\mathbb{R}} (|w'|^2 + V_\varepsilon(s) |w|^2 + a |w|^2) ds, \quad (6.2)$$

em que

$$V_\varepsilon(s) = - \int_S \kappa \frac{|u_0|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^\alpha}} dy.$$

O operador associado a forma quadrática q_ε é denotado por Q_ε e $\text{dom} Q_\varepsilon = H^2(\mathbb{R})$.

Teorema 6.1 Suponhamos que $0 < \kappa < (\lambda_1 - \lambda_0)$ e $0 < \alpha < 1$. Então, existe uma constante $C > 0$ de modo que, para ε suficientemente pequeno,

$$\|A_\varepsilon^{-1} - Q_\varepsilon^{-1} \oplus 0\| \leq C\varepsilon^2, \quad (6.3)$$

em que 0 é o operador nulo em \mathcal{L}^\perp .

Demonstração: Como já discutido acima, para $\psi \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$, escrevemos $\psi(s, y) = \psi_w(s, y) + U(s, y)$ com $w \in H^1(\mathbb{R})$ e $U \in H_0^1(\mathbb{R} \times S) \cap \mathcal{L}^\perp$. Assim,

$$a_\varepsilon(\psi) = q_\varepsilon(w) + b_\varepsilon(U) + 2m_\varepsilon(\psi_w, U),$$

em que $q_\varepsilon(w)$ é dado por (6.2),

$$b_\varepsilon(U) := \int_{\mathbb{R} \times S} \left(|U'|^2 + \frac{|\nabla_y U|^2}{\varepsilon^2} - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} |U|^2 - \kappa \frac{|U|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^\alpha}} + a |U|^2 \right) dy ds$$

e

$$m_\varepsilon(\psi_w, U) := - \int_{\mathbb{R} \times S} 2\kappa \left(\frac{w u_0 U}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^\alpha}} \right) dy ds.$$

Vamos mostrar que q_ε , b_ε e m_ε satisfazem as condições (A.5), (A.6), (A.7) e (A.8) (veja Seção A.2 do Apêndice). Por construção,

$$q_\varepsilon(w) \geq d \int_{\mathbb{R}} |w|^2 ds$$

para alguma constante $d > 0$. Definimos $c(\varepsilon) := d$. Assim, (A.5) é satisfeita. Por outro lado, desde que $U \in H_0^1(\mathbb{R} \times S) \cap \mathcal{L}^\perp$,

$$\begin{aligned}
b_\varepsilon(U) &\geq \int_{\mathbb{R} \times S} \left(\frac{|\nabla_y U|^2}{\varepsilon^2} - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} |U|^2 - \kappa \frac{|U|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^\alpha}} \right) dy ds \\
&\geq \int_{\mathbb{R} \times S} \left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_0)}{\varepsilon^2} |U|^2 - \kappa \frac{|U|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^\alpha}} \right) dy ds \\
&\geq \int_{\mathbb{R} \times S} \left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_0)}{\varepsilon^2} |U|^2 - \kappa \frac{|U|^2}{\varepsilon^\alpha} \right) dy ds \\
&\geq \int_{\mathbb{R} \times S} \frac{(\lambda_1 - \lambda_0 - \kappa)}{\varepsilon^2} |U|^2 dy ds.
\end{aligned}$$

Por hipótese $\kappa < \lambda_1 - \lambda_0$, e então $p(\varepsilon) := \frac{(\lambda_1 - \lambda_0 - \kappa)}{\varepsilon^2} \rightarrow \infty$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Observemos que $c(\varepsilon) = O(p(\varepsilon))$. Assim, (A.6) e (A.7) são satisfeitas.

Finalmente, existe uma constante $C > 0$ de modo que

$$\begin{aligned}
|m_\varepsilon(\psi_w, U)| &\leq 2\kappa \left| \int_{\mathbb{R} \times S} \frac{\psi_w U}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^\alpha}} dy ds \right| \\
&\leq \frac{2\kappa}{\varepsilon^\alpha} \int_{\mathbb{R} \times S} |\psi_w| |U| dy ds \\
&\leq \frac{2\kappa}{\varepsilon^\alpha} \left(\int_{\mathbb{R} \times S} |\psi_w|^2 dy ds \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R} \times S} |U|^2 dy ds \right)^{1/2} \\
&= \frac{2\kappa}{\varepsilon^\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}} |w|^2 dy ds \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R} \times S} |U|^2 dy ds \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon^\alpha} (q_\varepsilon(w))^{1/2} \varepsilon (b_\varepsilon(U))^{1/2} \\
&\leq q(\varepsilon) (q_\varepsilon(w))^{1/2} (a_\varepsilon(\psi))^{1/2},
\end{aligned}$$

em que $q(\varepsilon) := C\varepsilon^{1-\alpha} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (lembramos que por hipótese $0 < \alpha < 1$). A condição (A.8) também é satisfeita. Aplicando o Proposição (A.1), (6.3) fica demonstrado. ■

6.2 Convergência uniforme

Para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$(H_\varepsilon w)(s) := -w''(s) + W_\varepsilon(s)w(s), \quad \text{dom } H_\varepsilon = H^2(\mathbb{R}), \quad (6.4)$$

em que W_ε é um potencial de forma que o operador acima esteja bem definido e seja auto-adjunto. Suponha que o limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_\varepsilon(s)$ exista q.t.p.. Seja $W_0(s) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_\varepsilon(s)$. Suponhamos também que $W_0(s)$ seja um potencial com uma singularidade na origem e que o operador

$$(H_0 w)(s) := -w''(s) + W_0(s)w(s), \quad \text{dom } H_0 = \{H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : w(0^\pm) = 0\},$$

seja auto-adjunto.

Em [13] o seguinte teorema é demonstrado; usaremos tal resultado adiante.

Teorema 6.2 Seja H_ε como em (6.4) e $W_\varepsilon(s)$ satisfazendo:

(i) existe uma constante $c > 0$ de modo que

$$|W_\varepsilon(s)| \leq c \left(\frac{1}{|s|^\gamma} + \frac{1}{|s|^\beta} \right), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

em que $\beta > 0$ e $0 < \gamma < 2$;

(ii) $W_\varepsilon(s) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$;

(iii) $W_\varepsilon(s) \rightarrow W_0(s)$ q.t.p. quando $\varepsilon \rightarrow 0$;

(iv) $\int_b^{-b} W_\varepsilon(s) ds \rightarrow -\infty$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ para algum $b > 0$;

(v) $\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)} \frac{\int_b^{-b} |W_\varepsilon(s)| ds}{\left| \int_b^{-b} W_\varepsilon(s) ds \right|} < \infty$.

Então, H_ε converge para H_0 no sentido uniforme dos resolventes quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

A demonstração do Teorema acima é muito longa e técnica e por este motivo não será repetida aqui. Agora, temos condições de demonstrar o seguinte resultado,

o qual é a nossa principal contribuição neste capítulo. Seja H_D o operador (1.3) definido na página 13, ou seja, a extensão auto-adjunta com condições de Dirichlet na origem do operador (1.2). Lembremos do operador Q_ε associado a forma quadrática (6.2) definida na página 58.

Teorema 6.3 $(Q_\varepsilon - aI)$ converge para H_D no sentido uniforme dos resolventes quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração: Vamos mostrar que $V_\varepsilon(s) = -\kappa \int_S \frac{|u_0|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2} + \varepsilon^\alpha} dy$ satisfaz as condições (i)-(v) do Teorema 6.2. Assim, o teorema ficará demonstrado.

Para mostrar (i) basta observarmos que

$$|V_\varepsilon(s)| \leq \kappa \int_S \frac{|u_0|^2}{|s| + \varepsilon^\alpha} dy = \frac{\kappa}{|s| + \varepsilon^\alpha} \leq \frac{\kappa}{|s|},$$

e então tomar $c = \kappa/2$ e $\gamma = \beta = 1$.

Claramente $V_\varepsilon \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e (ii) é satisfeita. Para provar (iii), aplicamos o Teorema da Convergência Dominada obtendo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S \frac{|u_0|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2} + \varepsilon^\alpha} dy &= \int_S \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|u_0|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 y^2} + \varepsilon^\alpha} dy \\ &= \int_S \frac{|u_0|^2}{|s|} dy = \frac{1}{|s|}, \end{aligned}$$

ou seja, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_\varepsilon(s) \rightarrow -\frac{\kappa}{|s|} = V(s)$.

Agora vamos provar (iv). Desde que S é uma região limitada, existe uma constante $K > 0$ de modo que $y^2 \leq K$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 V_\varepsilon(s) ds &\leq -\kappa \int_{-1}^1 \int_S \frac{|u_0|^2}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 K} + \varepsilon^\alpha} dy ds \\ &= -\kappa \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 K} + \varepsilon^\alpha} ds. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 V_\varepsilon(s) ds = -\infty.$$

A condição (v) é claramente satisfeita. O resultado final segue aplicando o Teorema 6.2. ■

Segundo nossos argumentos, ou seja, os Teoremas 6.1 e 6.3, concluímos que: no processo de confinamento do átomo de hidrogênio a extensão auto-adjunta de (1.2) selecionada foi a de Dirichlet.

Capítulo 7

O Laplaciano em tubos deformados

Neste capítulo vamos analisar o comportamento de uma partícula livre se movendo em tubo como no Capítulo 5. No entanto, a região S que dá origem ao tubo vai ser “deformada” em cada ponto $s \in \mathbb{R}$. Tal deformação é feita multiplicando a seção transversal por uma função apropriada $h(s)$.

Em [9] foi considerado o caso de uma partícula se movendo livremente em uma faixa bidimensional. Mais precisamente, o Laplaciano de Dirichlet $-\Delta_\varepsilon$ no subconjunto

$$\Omega_\varepsilon = \{(s, y) \in \mathbb{R}^2; s \in I, 0 < y < \varepsilon h(s)\}, \quad \varepsilon > 0,$$

em que $I = [-a, b]$, $0 < a, b, < \infty$, e $h(s)$ é uma função positiva satisfazendo certas condições, por exemplo, h possui um único ponto de máximo global em I . O principal resultado desse artigo diz que, para $\varepsilon \rightarrow 0$, o comportamento assintótico dos autovalores $l_j(\varepsilon)$ de $-\Delta_\varepsilon$ em Ω_ε dependem dos autovalores de certo operador de Schrödinger unidimensional definido em todo \mathbb{R} . Isto foi obtido através de uma convergência uniforme dos resolventes.

Algum tempo depois em [10], os mesmo autores obtiveram resultados similares considerando $I = \mathbb{R}$. No entanto, nesse caso o espectro do Laplaciano de Dirichlet em Ω_ε não é necessariamente discreto e algumas estimativas para o espectro essencial também foram encontradas. Outro problema analisado em [10] foi o caso em que I

é um intervalo finito mas com a condição de Dirichlet na parte vertical da fronteira $\partial\Omega_\varepsilon$ substituída pela condição de Neumann. Resultados similares aos de [9] foram obtidos.

A contribuição deste capítulo é uma generalização dos resultados de [9] e [10] para tubos no espaço \mathbb{R}^3 . Mais precisamente, agora a partícula se move em um tubo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e sua seção transversal é multiplicada por $h(s)$. Outra novidade é que a curva em \mathbb{R}^3 que dá origem à Ω pode ter curvatura e torção não-nulas. Mostraremos que, em geral com escolhas adequadas de h , a curvatura não influencia o operador efetivo no limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

7.1 Geometria do domínio

Nesta seção vamos mostrar uma construção detalhada da região em que a partícula se move livremente.

Seja $I = [-a, b]$ em que $0 < a, b \leq \infty$. Seja $h(s) > 0$ uma função contínua definida em I . Assumimos que:

- (i) $s = 0$ é o único ponto de máximo global de h em I ;
- (ii) $h \in C^1$ em $I \setminus \{0\}$ e numa vizinhança de $s = 0$ admite a expansão

$$h(s) = \begin{cases} M - c_+ s^m + O(s^{m+1}) & \text{se } s > 0; \\ M - c_- |s|^m + O(|s|^{m+1}) & \text{se } s < 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

em que M, m, c_\pm são números reais e $M, c_\pm > 0, m \geq 1$.

Considerando o caso particular em que $h(s)$ é C^∞ em todo I , então, necessariamente m é par e $c_- = c_+$. Outro caso interessante é quando $m = 1$ que também é conhecido como “linha quebrada”.

Para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon^\alpha := \{x \in \mathbb{R}^3 : x = r(s) + \varepsilon h(s) y_1 N_\alpha(s) + \varepsilon y_2 h(s) B_\alpha(s), s \in I, y = (y_1, y_2) \in S\},$$

em que $N_\alpha(s)$ e $B_\alpha(s)$ são dados por

$$\begin{aligned} N_\alpha(s) &:= \cos \alpha(s)N(s) + \operatorname{sen} \alpha(s)B(s) \\ B_\alpha(s) &:= -\sin \alpha(s)N(s) + \cos \alpha(s)B(s) \end{aligned}$$

e $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞ . Podemos pensar em $\Lambda_\varepsilon^\alpha$ como sendo a região $\Omega_\varepsilon^\alpha$, definida no Capítulo 3, mas agora com a seção transversal “deformada”, ou seja, multiplicada por $h(s)$. Inicialmente, a condição imposta na fronteira de $\Lambda_\varepsilon^\alpha$ é a de Dirichlet.

Vamos analisar o comportamento de uma partícula livre se movendo na nova região, mais precisamente estudar a família de formas quadráticas

$$b_\varepsilon^\alpha(\psi) = \int_{\Lambda_\varepsilon^\alpha} |\nabla \psi|^2 dx, \quad \operatorname{dom} b_\varepsilon^\alpha = H_0^1(\Lambda_\varepsilon^\alpha), \quad (7.2)$$

associadas aos operadores Laplacianos $-\Delta_\varepsilon^\alpha$ em $\Lambda_\varepsilon^\alpha$. Como antes, ∇ denota o gradiente nas coordenadas usuais de \mathbb{R}^3 .

7.2 Forma quadrática

De forma similar a Seção 3.3 (pág.24) vamos fazer uma mudança de variáveis de modo que a região de integração em (7.2) independa de $\varepsilon > 0$. Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^\alpha : \quad I \times S &\rightarrow \Lambda_\varepsilon^\alpha \\ (s, y_1, y_2) &\rightarrow r(s) + \varepsilon h(s)y_1 N_\alpha(s) + \varepsilon h(s)y_2 B_\alpha(s). \end{aligned}$$

Vamos supor que $\|k\|_\infty, \|\tau\|_\infty, \|\alpha'\|_\infty < \infty$. Essas condições vão garantir que f_ε^α seja um difeomorfismo. Assim, podemos fazer uma mudança de variáveis e passar a forma quadrática usual nas coordenadas (x, y, z) ,

$$b_\varepsilon^\alpha(\psi) = \int_{\Lambda_\varepsilon^\alpha} |\nabla \psi|^2 dx, \quad \operatorname{dom} b_\varepsilon^\alpha = H_0^1(\Lambda_\varepsilon^\alpha),$$

para as coordenadas (s, y_1, y_2) de $I \times S$. Passamos a trabalhar em um domínio fixo para todo $\varepsilon > 0$. Por outro lado, o preço a pagar é uma métrica Riemanniana

$G = G_\varepsilon^\alpha$ não-trivial a qual é induzida pelo difeomorfismo f_ε^α , ou seja,

$$G = (G_{ij}), \quad G_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = G_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

em que

$$e_1 = \frac{\partial f_\varepsilon^\alpha}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{\partial f_\varepsilon^\alpha}{\partial y_1}, \quad e_3 = \frac{\partial f_\varepsilon^\alpha}{\partial y_2}.$$

Alguns cálculos mostram que o referencial de Frenet é dado por

$$J = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon & -\varepsilon h(\tau + \alpha') \langle z_\alpha^\perp, y \rangle + \varepsilon h' \langle z_\alpha, y \rangle & \varepsilon h(\tau + \alpha') \langle z_\alpha, y \rangle + \varepsilon h' \langle z_\alpha^\perp, y \rangle \\ 0 & \varepsilon h \cos \alpha & \varepsilon h \sin \alpha \\ 0 & -\varepsilon h \sin \alpha & \varepsilon h \cos \alpha \end{pmatrix}$$

em que

$$\beta_\varepsilon(s, y) = 1 - \varepsilon h(s)k(s) \langle z_\alpha, y \rangle, \quad z_\alpha := (\cos \alpha, -\sin \alpha), \quad z_\alpha^\perp := (\sin \alpha, \cos \alpha).$$

A matriz inversa de J é

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_\varepsilon} & \frac{1}{\beta_\varepsilon} \left[(\tau + \alpha')y_2 - \frac{h'}{h}y_1 \right] & \frac{1}{\beta_\varepsilon} \left[-(\tau + \alpha')y_1 - \frac{h'}{h}y_2 \right] \\ 0 & \frac{\cos \alpha}{\varepsilon h} & \frac{-\sin \alpha}{\varepsilon h} \\ 0 & \frac{\sin \alpha}{\varepsilon h} & \frac{\cos \alpha}{\varepsilon h} \end{pmatrix}.$$

Notemos que $JJ^t = G$ e $\det J = |\det G|^{1/2} = \varepsilon^2 h^2(s) \beta_\varepsilon(s, y)$. Como k e h são funções limitadas, para ε suficientemente pequeno, β_ε não se anula em $I \times S$. Assim, $\beta_\varepsilon > 0$ e f_ε^α é um difeomorfismo local. Exigindo que f_ε^α seja injetora (ou seja, que o tubo não se auto-intercepta) obtemos um difeomorfismo global.

Introduzindo a notação

$$\|\psi\|_G^2 = \int_{I \times S} |\psi(s, y)|^2 \varepsilon^2 h^2(s) \beta_\varepsilon(s, y) ds dy,$$

obtemos a sequência de formas quadráticas

$$\tilde{b}_\varepsilon^\alpha(\psi) := \|\mathcal{J}^{-1} \nabla \psi\|_G, \quad \text{dom } \tilde{b}_\varepsilon^\alpha = H_0^1(I \times S, G),$$

em que $\nabla = (\partial_s, \nabla_y)$. Mais precisamente, a mudança de coordenadas acima foi obtida pela transformação unitária

$$\begin{aligned} U_\varepsilon^\alpha : L^2(\Lambda_\varepsilon^\alpha) &\rightarrow L^2(I \times S, G) \\ \phi &\rightarrow \phi \circ f_\varepsilon^\alpha \end{aligned}$$

No entanto, continuaremos denotando $U_\varepsilon^\alpha \psi$ por ψ .

De forma similar a Seção 3.2 (pág.23) poderíamos pensar em eliminar o termo $\lambda_0/\varepsilon^2 h(s)^2$ das formas quadráticas. No entanto, vamos eliminar os termos da forma $\lambda_0/\varepsilon^2 M^2$, ou seja, desde que $0 < h(s) < M$, para todo $s \in I$, eliminamos a “menor energia” possível.

Vamos estudar a sequência de formas quadráticas

$$\tilde{l}_\varepsilon^\alpha(\psi) := \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\|J^{-1} \nabla \psi\|_G^2 - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 M^2} \|\psi\|_G^2 + c \|\psi\|_G^2 \right),$$

em que c é uma constante positiva a ser escolhida mais adiante.

Alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned} \tilde{l}_\varepsilon^\alpha(\psi) &= \int_{I \times S} \left(\frac{1}{\beta_\varepsilon^2(s, y)} \left| \psi' + \nabla_y \psi \cdot Ry(\tau + \alpha')(s) - \nabla_y \psi \cdot y \frac{h'(s)}{h(s)} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\nabla_y \psi|^2}{\varepsilon^2 h(s)^2} - \frac{|\psi|^2}{\varepsilon^2 M^2} + c |\psi|^2 \right) h(s)^2 \beta_\varepsilon(s, y) dy ds. \end{aligned}$$

em que $\text{dom } \tilde{l}_\varepsilon^\alpha = H_0^1(I \times S)$ é visto como um subespaço de $L^2(I \times S, h(s)^2 \beta_\varepsilon(s, y))$. No entanto, será conveniente trabalharmos em $L^2(I \times S, \beta_\varepsilon(s, y))$. Consideremos então a isometria

$$\begin{aligned} V : L^2(I \times S, \beta_\varepsilon) &\rightarrow L^2(I \times S, h(s)^2 \beta_\varepsilon) \\ v &\mapsto v h^{-1} \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis acima, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{l}_\varepsilon^\alpha(v) &:= \int_{I \times S} \left(\frac{1}{\beta_\varepsilon(s, y)} \left| v' - v \frac{h'(s)}{h(s)} + \nabla_y v \cdot Ry(\tau + \alpha')(s) - \nabla_y v \cdot y \frac{h'(s)}{h(s)} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_\varepsilon(s, y)}{\varepsilon^2 h(s)^2} |\nabla_y v|^2 - \frac{\beta_\varepsilon(s, y)}{\varepsilon^2 M^2} |v|^2 + c \beta_\varepsilon(s, y) |v|^2 \right) dy ds. \end{aligned}$$

Agora, $\text{dom } \hat{l}_\varepsilon^\alpha = H_0^1(I \times S)$ é visto como um subespaço de $L^2(I \times S, \beta_\varepsilon(s, y))$.

Como observado no Capítulo 3, é muito importante o fato de que $\beta_\varepsilon(s, y) \rightarrow 1$ uniformemente quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim, podemos trabalhar em $L^2(I \times S)$ desde que, para ε suficientemente pequeno, os espaços $L^2(I \times S, \beta_\varepsilon(s, y))$ coincidem algebricamente com $L^2(I \times S)$.

Definimos

$$l_\varepsilon^\alpha(v) := \int_{I \times S} \left(\left| v' - v \frac{h'(s)}{h(s)} + \nabla_y v \cdot Ry(\tau + \alpha')(s) - \nabla_y v \cdot y \frac{h'(s)}{h(s)} \right|^2 + \frac{\beta_\varepsilon(s, y)}{\varepsilon^2 h(s)^2} |\nabla_y v|^2 - \frac{\beta_\varepsilon(s, y)}{\varepsilon^2 M^2} |v|^2 + c|v|^2 \right) dy ds,$$

em que $\text{dom } l_\varepsilon = H_0^1(I \times S)$.

Observemos que a diferença entre l_ε^α e $\hat{l}_\varepsilon^\alpha$ é apenas o fator $1/\beta_\varepsilon(s, y)$ multiplicando o primeiro termo dentro da integral e $\beta_\varepsilon(s, y)$ multiplicando o último termo dentro da integral. Como $\beta_\varepsilon(s, y) \rightarrow 1$ uniformemente quando $\varepsilon \rightarrow 0$, podemos estudar a sequência $(l_\varepsilon^\alpha)_\varepsilon$ em vez de $(\hat{l}_\varepsilon^\alpha)_\varepsilon$.

De agora em diante não usaremos a notação com índice α , por exemplo, l_ε^α será simplesmente denotado por l_ε .

Sejam \hat{L}_ε e L_ε os operadores auto-adjuntos associados as formas quadráticas \hat{l}_ε e l_ε respectivamente. Como observado acima:

Teorema 7.1 Para ε suficientemente pequeno, existe uma constante $C > 0$ de modo que

$$\|\hat{L}_\varepsilon^{-1} - L_\varepsilon^{-1}\| \leq C\varepsilon.$$

Demonstração: Similar a do Teorema 5.1. □

7.3 Redução de dimensão

Seja \mathcal{L} o subespaço gerado pelas funções da forma wu_0 com $w \in L^2(I)$. Lembremos que $u_0(y)$ é a autofunção correspondente ao primeiro autovalor λ_0 do Laplaciano em $H_0^1(S)$. Fazendo a decomposição ortogonal $L^2(\mathbb{R} \times S) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$, para

$\psi \in L^2(\mathbb{R} \times S)$, podemos escrever

$$\psi(s, y) = w(s)u_0(y) + U(s, y),$$

com $w \in L^2(I)$ e $U \in \mathcal{L}^\perp$. Observemos que $U \in \mathcal{L}^\perp$ implica

$$\int_S u_0(y)U(s, y)dy = 0, \quad \text{q.t.p.}[s].$$

Temos também que $wu_0 \in H_0^1(I \times S)$ se $w \in H_0^1(I)$. Portanto, para $\psi \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$, escrevemos $\psi = wu_0 + U$ com $w \in H_0^1(I)$ e $U \in H_0^1(\mathbb{R} \times S) \cap \mathcal{L}^\perp$.

Inicialmente vamos analisar a forma quadrática l_ε restrita ao subespaço $H_0^1(I \times S) \cap \mathcal{L}$. Para $w \in H_0^1(I)$ alguns cálculos mostram que

$$l_\varepsilon(wu_0) = \int_I \left[|w'|^2 + v(s)|w|^2 + \zeta_\varepsilon(s, y) \left(\frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 h^2(s)} - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 M^2} \right) |w|^2 + c|w|^2 \right] ds,$$

em que

$$v(s) = C_1(S)(\tau(s) + \alpha'(s))^2 + (C_2(S) - 1) \left(\frac{h'(s)}{h(s)} \right)^2 - 2C_3(S)(\tau(s) + \alpha'(s)) \frac{h'(s)}{h(s)}$$

e

$$\zeta_\varepsilon(s, y) = 1 - \varepsilon k(s)h(s)\langle z_\alpha(s), B(S) \rangle.$$

As constantes $C_1(S)$, $C_2(S)$ e $C_3(S)$ que aparecem na definição de v dependem somente da região S e são dadas por

$$C_1(S) := \int_S |\langle \nabla_y u_0, Ry \rangle|^2 dy; \quad C_2(S) := \int_S |\langle \nabla_y u_0, y \rangle|^2 dy;$$

$$C_3(S) = \int_S \langle \nabla_y u_0, Ry \rangle \langle \nabla_y u_0, y \rangle dy.$$

O vetor $B(S) = (B_1(S), B_2(S))$ na definição de ζ_ε também depende somente da região S e é dado por

$$B_1(S) = \int_S y_1 |u_0|^2 dy \quad \text{e} \quad B_2(S) = \int_S y_2 |u_0|^2 dy.$$

Com esta restrição obtemos formas quadráticas definidas em $H_0^1(I)$

$$q_\varepsilon(w) := \int_I (|w'|^2 + W_\varepsilon(s)|w|^2) ds,$$

em que

$$W_\varepsilon(s) := v(s) + c + \zeta_\varepsilon(s, y) \left(\frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 h^2(s)} - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 M^2} \right). \quad (7.3)$$

A constante $c > 0$ é tomada de modo que $c > \|v\|_\infty + (1/M^2)\|k(s)^2/4\|_\infty$.

Como $k(s)$ e $h(s)$ são funções limitadas, existem $\varepsilon_1 > 0$ e $\delta > 0$ de modo que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$,

$$1 - \varepsilon k(s)h(s)\langle z_\alpha(s), B(S) \rangle > \delta \quad \text{e} \quad 1 - \varepsilon k(s)h(s)\langle z_\alpha(s), y \rangle > \delta$$

para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_1$. Portanto, até o fim deste capítulo, vamos sempre considerar $\varepsilon < \varepsilon_1$.

O operador auto-adjunto associado a q_ε em $L^2(I)$ é

$$(Q_\varepsilon w)(s) := -w''(s) + W_\varepsilon(s)w(s), \quad \text{dom } Q_\varepsilon = H_0^2(I).$$

De agora em diante denotamos por $-\Delta_\varepsilon^c$ o operador $-\Delta_\varepsilon^\alpha + c$ e omitiremos o símbolo α .

O que faremos agora é mostrar que o operador resolvente $\left(-\Delta_\varepsilon^c - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 M^2} I\right)^{-1}$ pode ser aproximado por $Q_\varepsilon^{-1} \oplus 0$, em que 0 é o operador nulo no subespaço \mathcal{L}^\perp . Com este resultado fica clara idéia de redução de dimensão.

Lema 7.2 Suponhamos que I seja um intervalo limitado, então existe uma constante $R_1 > 0$ de modo que

$$q_\varepsilon(w) \geq R_1^{-1} \varepsilon^{-2\beta} \int_I |w|^2 ds, \quad \forall w \in H_0^1(I), \quad \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Demonstração: Relembrando a definição de $W_\varepsilon(s)$ (veja (7.3)) temos

$$\frac{\varepsilon^2 W_\varepsilon(s)}{|s|^m} \geq \frac{\lambda_0}{|s|^m} \delta \left(\frac{1}{h(s)^2} - \frac{1}{M^2} \right).$$

A função do lado direito da desigualdade é estritamente positiva em I e contínua em $[-a, 0]$ e em $[0, b]$. Assim, desde que I é limitado, existe uma constante $\sigma > 0$ de modo que

$$W_\varepsilon(s) \geq \sigma \varepsilon^{-2} |s|^m, \quad \forall \varepsilon > 0, s \in I. \quad (7.4)$$

O operador $-d^2/ds^2 + \sigma|s|^m$ em $L^2(\mathbb{R})$ é positivo. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} (|w'(s)|^2 + \sigma|s|^m|w|^2) ds \geq R_1^{-1} \int_{\mathbb{R}} |w(s)|^2 ds, \quad \forall w \in H^1(\mathbb{R}),$$

para algum número positivo R_1 . Fazendo a mudança de variável $s \mapsto \varepsilon^{-\beta}s$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} (|w'(s)|^2 + \sigma\varepsilon^{-2}|s|^m|w|^2) ds \geq R_1^{-1}\varepsilon^{-2\beta} \int_{\mathbb{R}} |w(s)|^2 ds, \quad \forall w \in H^1(\mathbb{R}).$$

Em particular, esta desigualdade é satisfeita para cada função $w \in H_0^1(I)$ (estendida por zero em $\mathbb{R} \setminus I$). Segue então que

$$q_\varepsilon(w) \geq R_1^{-1}\varepsilon^{-2\beta} \int_I |w|^2 ds, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_1, \forall w \in H_0^1(I).$$

■

O lema abaixo vale tanto para o caso em que o intervalo I é limitado ou $I = \mathbb{R}$.

Lema 7.3 Para $U \in H_0^1(I \times S) \cap \mathcal{L}^\perp$, existe uma constante P_1 de modo que, para ε suficientemente pequeno, vale

$$l_\varepsilon(U) \geq \frac{P_1}{\varepsilon^2 M^2} \int_{I \times S} |U|^2 dy ds.$$

Demonstração: Seja λ_1 o segundo autovalor do Laplaciano em $H_0^1(S)$ e $U \in H_0^1(\mathbb{R} \times S) \cap \mathcal{L}^\perp$.

Desde que $h(s) \leq M$, para todo $s \in I$, temos

$$\int_S \beta_\varepsilon(s, y) \left(\frac{|\nabla_y U|^2}{\varepsilon^2 h(s)^2} - \lambda_1 \frac{|U|^2}{\varepsilon^2 M^2} \right) dy \geq \int_S \beta_\varepsilon(s, y) \left(\frac{|\nabla_y U|^2}{\varepsilon^2 M^2} - \lambda_1 \frac{|U|^2}{\varepsilon^2 M^2} \right) dy.$$

Uma propriedade similar a (3.7) (veja pág.28) implica que

$$\int_S \beta_\varepsilon(s, y) \left(\frac{|\nabla_y U|^2}{\varepsilon^2 M^2} - \lambda_1 \frac{|U|^2}{\varepsilon^2 M^2} \right) dy \geq \frac{\gamma_\varepsilon(s)}{M^2} \int_S \beta_\varepsilon(s, y) |U|^2 dy.$$

Como $\gamma_\varepsilon(s) \rightarrow -k(s)^2/4$ uniformemente para $\varepsilon \rightarrow 0$, existe uma constante $F \in \mathbb{R}$ de modo que, para ε suficientemente pequeno,

$$\frac{\gamma_\varepsilon(s)}{M^2} \geq F, \quad \forall s \in I.$$

Assim,

$$\frac{\gamma_\varepsilon(s)}{M^2} \int_S \beta_\varepsilon(s, y) |U|^2 dy \geq F \int_S \beta_\varepsilon(s, y) |U|^2 dy.$$

Portanto,

$$\int_{I \times S} \beta_\varepsilon(s, y) \left(\frac{|\nabla_y U|^2}{\varepsilon^2 h(s)^2} - \lambda_1 \frac{|U|^2}{\varepsilon^2 M^2} \right) dy ds \geq F \int_{I \times S} \beta_\varepsilon(s, y) |U|^2 dy ds.$$

Somando e subtraindo o termo $\frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 M^2} \int_{I \times S} |U|^2 dy$ no lado esquerdo da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{I \times S} \beta_\varepsilon(s, y) \left(\frac{|\nabla_y U|^2}{\varepsilon^2 h(s)^2} - \lambda_0 \frac{|U|^2}{\varepsilon^2 M^2} \right) dy ds \\ & \geq F \int_{I \times S} \beta_\varepsilon(s, y) |U|^2 dy + \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)}{\varepsilon^2 M^2} \int_{I \times S} \beta_\varepsilon(s, y) |U|^2 dy ds. \end{aligned}$$

Portanto, para ε suficientemente pequeno, existe uma constante P'_1 de forma que

$$\begin{aligned} l_\varepsilon(U) & \geq \int_{I \times S} \beta_\varepsilon(s, y) \left(\frac{|\nabla_y U|^2}{\varepsilon^2 h(s)^2} - \lambda_0 \frac{|U|^2}{\varepsilon^2 M^2} \right) dy ds + c \int_{I \times S} |U|^2 dy ds \\ & \geq F\delta \int_{I \times S} |U|^2 dy ds + \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)}{\varepsilon^2 M^2} \int_{I \times S} \beta_\varepsilon(s, y) |U|^2 dy ds + c \int_{I \times S} |U|^2 dy ds \\ & \geq \frac{P'_1}{\varepsilon^2 M^2} \int_{I \times S} \beta_\varepsilon(s, y) |U|^2 dy ds \\ & \geq \frac{P'_1}{\varepsilon^2 M^2} \delta \int_{I \times S} |U|^2 dy ds. \end{aligned}$$

Agora, basta tomar $P_1 = P'_1 \delta$ e o lema fica demonstrado. ■

Nossa principal contribuição nesta seção já pode ser demonstrada.

Teorema 7.4 Existe uma constante $R_0 > 0$ de modo que, para ε suficientemente pequeno,

$$\left\| \left(-\Delta_\varepsilon^c - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 M^2} I \right)^{-1} - (Q_\varepsilon^{-1} \oplus 0) \right\| \leq R_0 \varepsilon^{3\beta},$$

em que 0 denota o operador nulo no subespaço \mathcal{L}^\perp .

Demonstração: Para $\psi \in H_0^1(\mathbb{R} \times S)$ escrevemos

$$\psi(s, y) = w(s)u_0(y) + U(s, y),$$

com $w \in H_0^1(I)$ e $U \in H_0^1(\mathbb{R} \times S) \cap \mathcal{L}^\perp$. Assim, a forma quadrática $l_\varepsilon(\psi)$ pode ser reescrita como

$$l_\varepsilon(\psi) = q_\varepsilon(w) + b_\varepsilon(U) + 2m_\varepsilon(wu_0, U),$$

em que $q_\varepsilon(w) = l_\varepsilon(wu_0)$, $b_\varepsilon(U) = l_\varepsilon(U)$ e

$$\begin{aligned} m_\varepsilon(wu_0, U) &= \int_{I \times S} dy ds \left(w'u_0 - wu_0 \frac{h'}{h} + w \nabla_y u_0 \cdot Ry(\tau + \alpha') - w \nabla_y u_0 \cdot y \frac{h'}{h} \right) \\ &\times \left(U' - U \frac{h'}{h} + \nabla_y U \cdot Ry(\tau + \alpha') - \nabla_y U \cdot y \frac{h'}{h} \right) \\ &- \int_{I \times S} k(s)h(s)\langle z_\alpha, y \rangle w \left(\frac{\nabla_y u_0 \nabla_y U}{\varepsilon h^2} - \lambda_0 \frac{u_0 U}{\varepsilon M^2} \right) dy ds. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $q_\varepsilon(w)$, $b_\varepsilon(U)$ e $m_\varepsilon(wu_0, U)$ satisfazem as condições (A.5), (A.6), (A.7) e (A.8) (veja Seção A.2 do Apêndice) e assim o teorema ficará demonstrado.

As condições (A.5), (A.6) e (A.7) são satisfeitas aplicando os Lemas 7.2 e 7.3. Precisamos apenas verificar a condição (A.8), ou seja, que existe uma função $q(\varepsilon)$ de modo que para cada $\psi \in H_0^1(I \times S)$

$$|m_\varepsilon(wu_0, U)|^2 \leq q(\varepsilon)^2 q_\varepsilon(wu_0) b_\varepsilon(U), \quad q(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (7.5)$$

Escrevemos

$$m_\varepsilon(wu_0, U) = m_\varepsilon^1(wu_0, U) - m_\varepsilon^2(wu_0, U) + m_\varepsilon^3(wu_0, U) - m_\varepsilon^4(wu_0, U) - m_\varepsilon^5(wu_0, U)$$

em que

$$\begin{aligned} m_\varepsilon^1(wu_0, U) &:= \int_{\mathbb{R} \times S} w'u_0 \left(U' - U \frac{h'}{h} + \nabla_y U \cdot Ry(\tau + \alpha') - \nabla_y U \cdot y \frac{h'}{h} \right) ds dy \\ m_\varepsilon^2(wu_0, U) &:= \int_{\mathbb{R} \times S} wu_0 \frac{h'}{h} \left(U' - U \frac{h'}{h} + \nabla_y U \cdot Ry(\tau + \alpha') - \nabla_y U \cdot y \frac{h'}{h} \right) ds dy \\ m_\varepsilon^3(wu_0, U) &:= \int_{\mathbb{R} \times S} w \nabla_y u_0 \cdot Ry(\tau + \alpha') \left(U' - U \frac{h'}{h} + \nabla_y U \cdot Ry(\tau + \alpha') - \nabla_y U \cdot y \frac{h'}{h} \right) dy ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_\varepsilon^4(wu_0, U) &:= \int_{\mathbb{R} \times S} w \nabla_y u_0 \cdot y \frac{h'}{h} \left(U' - U \frac{h'}{h} + \nabla_y U \cdot Ry(\tau + \alpha') - \nabla_y U \cdot y \frac{h'}{h} \right) ds dy \\
m_\varepsilon^5(wu_0, U) &:= \int_{I \times S} \frac{k(s)h(s)\langle z_\alpha, y \rangle}{\varepsilon} w \left(\frac{\nabla_y u_0 \nabla_y U}{h^2} - \lambda_0 \frac{u_0 U}{M^2} \right) dy ds.
\end{aligned}$$

Agora vamos analisar cada termo acima. Sejam

$$H_1 := \left\| \frac{h'}{h} \right\|_\infty, \quad H_2 := \|\tau + \alpha'\|_\infty$$

e lembremos que

$$C_1(S) = \int_S |\langle \nabla_y u_0, Ry \rangle|^2 dy \quad \text{e} \quad C_2(S) = \int_S |\langle \nabla_y u_0, y \rangle|^2 dy.$$

Usando as Identidades de Green, alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned}
\int_S u_0 \langle \nabla_y U, Ry \rangle dy &= - \int_S \langle \nabla_y u_0, Ry \rangle U dy, \\
\int_S u_0 \langle \nabla_y U, y \rangle dy &= - \int_S \langle \nabla_y u_0, y \rangle U dy.
\end{aligned}$$

Assim,

- $$\begin{aligned}
|m_\varepsilon^1(wu_0, U)| &\leq H_2 C_1(S) \left(\int_I |w'|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{I \times S} |U|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + H_1 C_2(S) \left(\int_I |w'|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{I \times S} |U|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq K \varepsilon q_\varepsilon(w)^{1/2} b_\varepsilon(U)^{1/2};
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
|m_\varepsilon^2(wu_0, U)| &\leq \left(\int_{I \times S} |w|^2 |u_0|^2 \left(\frac{h'}{h} \right)^2 dy ds \right)^{1/2} b_\varepsilon(U)^{1/2} \\
&\leq H_1 \left(\int_I |w|^2 ds \right)^{1/2} b_\varepsilon(U)^{1/2} \\
&\leq \frac{H_1}{R_1^{1/2}} \varepsilon^\beta q_\varepsilon(w)^{1/2} b_\varepsilon(U)^{1/2};
\end{aligned}$$
- $$|m_\varepsilon^3(wu_0, U)| \leq \left(\int_{I \times S} |w|^2 |\langle \nabla_y u_0, Ry \rangle|^2 (\tau + \alpha')^2 dy ds \right)^{1/2} b_\varepsilon(U)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_{I \times S} |w|^2 C_1(S) (\tau + \alpha')^2 ds \right)^{1/2} b_\varepsilon(U)^{1/2} \\
&\leq C_1(S)^{1/2} H_2 \left(\int_I |w|^2 ds \right)^{1/2} b_\varepsilon(U)^{1/2} \\
&\leq C_1(S)^{1/2} \frac{H_2}{R_1^{1/2}} \varepsilon^\beta q_\varepsilon(w)^{1/2} b_\varepsilon(U)^{1/2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad |m_\varepsilon^4(wu_0, U)| &\leq \left(\int_{I \times S} |w|^2 |\langle \nabla_y u_0, y \rangle|^2 \left(\frac{h'}{h} \right)^2 dy ds \right)^{1/2} b_\varepsilon(U)^{1/2} \\
&= \left(\int_{I \times S} |w|^2 C_2(S) \left(\frac{h'}{h} \right)^2 ds \right)^{1/2} b_\varepsilon(U)^{1/2} \\
&\leq C_2(S)^{1/2} H_1 \left(\int_I |w|^2 ds \right)^{1/2} b_\varepsilon(U)^{1/2} \\
&\leq C_2(S)^{1/2} \frac{H_1}{R_1^{1/2}} \varepsilon^\beta q_\varepsilon(w)^{1/2} b_\varepsilon(U)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Mais alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned}
\int_S y_1 \langle \nabla_y u_0, \nabla_y U \rangle &= - \int_S g(y) U dy ds, \\
\int_S y_2 \langle \nabla_y u_0, \nabla_y U \rangle &= - \int_S h(y) U dy ds,
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
g(y) &:= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_1^2} + y_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_2^2} \right), \\
h(y) &:= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_2^2} + y_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_1^2} \right).
\end{aligned}$$

Sendo assim, existem constantes K_1 e K_2 de forma que

$$\begin{aligned}
|m_\varepsilon^5(wu_0, U)| &\leq \left| \int_{I \times S} k(s) \cos \alpha(s) y_1 w \frac{\nabla_y u_0 \nabla_y U}{\varepsilon h} dy ds \right| \\
&+ \left| \int_{I \times S} k(s) h(s) \cos \alpha(s) y_1 \lambda_0 w \frac{u_0 U}{\varepsilon M^2} dy ds \right| \\
&+ \left| \int_{I \times S} k(s) \sin \alpha(s) y_1 w \frac{\nabla_y u_0 \nabla_y U}{\varepsilon h} dy ds \right| \\
&+ \left| \int_{I \times S} k(s) h(s) \sin \alpha(s) y_1 \lambda_0 w \frac{u_0 U}{\varepsilon M^2} dy ds \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{K_1}{\varepsilon} \left(\int_{\mathbb{R}} |w|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R} \times S} |U|^2 dy ds \right)^{1/2} \\
&\leq K_2 \varepsilon^\beta q_\varepsilon(w)^{1/2} b_\varepsilon(U)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Com as estimativas acima vemos que existe uma constante K de modo que

$$|m_\varepsilon(wu_0, U)|^2 \leq K \varepsilon^{2\beta} q_\varepsilon(w) b_\varepsilon(U)$$

e assim (7.5) fica demonstrado. Aplicando a Proposição A.1 do Apêndice, existe uma constante R_0 de modo que, para ε suficientemente pequeno, vale

$$\left\| \left(-\Delta_\varepsilon^c - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 M^2} I \right)^{-1} - (Q_\varepsilon^{-1} \oplus 0) \right\| \leq R_0 \varepsilon^{3\beta}.$$

■

7.4 Caso Dirichlet

Nesta seção vamos supor que I é um intervalo limitado. Assim, o espectro de $-\Delta_\varepsilon^c$ em $\Lambda_\varepsilon^\alpha$ é puramente discreto. Vamos denotar por $l_j^c(\varepsilon)$ seus autovalores. O objetivo desta seção é encontrar o comportamento assintótico de $l_j^c(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Mais precisamente, mostrar que o teorema abaixo, demonstrado em [9] para o caso bidimensional e com π^2 no lugar de λ_0 , também vale para o nosso caso.

Teorema 7.5 Seja $\beta = \frac{2}{m+2}$. Então, os limites

$$\mu_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\beta} \left(l_j^c(\varepsilon) - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 M^2} \right) \quad (7.6)$$

existem em que μ_j são os autovalores do operador em $L^2(\mathbb{R})$ dado por

$$(Hu)(s) = -u''(s) + q(s)u(s), \quad q(s) = \begin{cases} 2\lambda_0 M^{-3} c_+ s^m & \text{se } s > 0 \\ 2\lambda_0 M^{-3} c_- |s|^m & \text{se } s < 0 \end{cases}. \quad (7.7)$$

No teorema acima, para o caso particular em que $m = 2$ e $c_- = c_+$ o operador H é o oscilador harmônico.

Introduzimos a família de segmentos

$$I_\varepsilon = (-a\varepsilon^{-\beta}, b\varepsilon^{-\beta}), \quad \varepsilon > 0,$$

e definimos o operador isométrico $J_\varepsilon : L^2(I) \rightarrow L^2(I_\varepsilon)$ gerado pela dilatação $s = s'\varepsilon^\beta$.

Identificamos $L^2(I_\varepsilon)$ com o subespaço

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}) : u(s) = 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R} \setminus I_\varepsilon\},$$

e definimos

$$\hat{Q}_\varepsilon := \varepsilon^{2\beta} J_\varepsilon Q_\varepsilon J_\varepsilon^{-1}, \quad (7.8)$$

o qual é um operador auto-adjunto atuando em $L^2(I_\varepsilon)$.

A teorema abaixo foi demonstrado em [9] para o caso bidimensional, mas também se adapta ao nosso caso.

Teorema 7.6 Temos

$$\left\| \hat{Q}_\varepsilon^{-1} \oplus 0 - H^{-1} \right\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

em que 0 é o operador nulo no subespaço $L^2(\mathbb{R} \setminus I_\varepsilon)$.

A demonstração do Teorema 7.6 será apresentada na próxima seção.

Demonstração o Teorema (7.5): Sejam $l_j(Q_\varepsilon)$ e $l_j(\hat{Q}_\varepsilon)$ denotando os autovalores de Q_ε e \hat{Q}_ε respectivamente. Observemos que os autovalores de $Q_\varepsilon^{-1} \oplus 0$ são os mesmos de Q_ε^{-1} . Aplicando o Teorema 7.4, temos

$$\begin{aligned} \left| \left(l_j^c(\varepsilon) - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 M^2} \right)^{-1} - l_j^{-1}(Q_\varepsilon) \right| &\leq \left\| \left(-\Delta_\varepsilon^c - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 M^2} I \right)^{-1} - Q_\varepsilon^{-1} \oplus 0 \right\| \\ &\leq R_0 \varepsilon^{3\beta}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^{2\beta} (l_j^c(\varepsilon) - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 M^2})} - \frac{1}{\varepsilon^{2\beta} l_j(Q_\varepsilon)} \right| \leq R_0 \varepsilon^\beta.$$

Desde que $l_j(\hat{Q}_\varepsilon) = \varepsilon^{2\beta} l_j(Q_\varepsilon)$, pelo Teorema 7.6, segue que

$$\varepsilon^{2\beta} l_j(Q_\varepsilon) \rightarrow \mu_j \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

e a igualdade (7.6) está demonstrada. ■

7.5 Demonstração do Teorema 7.6

Para a demonstração do Teorema 7.6 vamos utilizar dois resultados preliminares também utilizados em [9] para o caso bidimensional.

Proposição 7.7 (1) Seja $V(s) \geq 0$ uma função mensurável em \mathbb{R} de modo que $V(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$. Seja $\{I_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < 1}$ uma família de intervalos de modo que

$$I_{\varepsilon_1} \subset I_{\varepsilon_2} \quad (\varepsilon_1 > \varepsilon_2) \quad \text{e} \quad \bigcup_{0 < \varepsilon < 1} I_\varepsilon = \mathbb{R}.$$

Consideremos a forma quadrática

$$z_V(u) = \int_{\mathbb{R}} (|u'|^2 + V|u|^2) ds, \quad u \in \theta_V := \{H^1(\mathbb{R}) : z_V(u) < \infty\},$$

e a família de suas restrições z_{V,I_ε} no domínio

$$\theta_{V,I_\varepsilon} = \{u \in \theta_V |_{\partial I_\varepsilon = 0}\}.$$

Sejam Z_V e Z_{V,I_ε} os operadores auto-adjuntos em $L^2(\mathbb{R})$ associados a z_V e z_{V,I_ε} respectivamente. Então,

$$\|Z_{V,I_\varepsilon}^{-1} - Z_V^{-1}\| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (7.9)$$

(2) Seja $V_0(s) \geq 0$ um potencial fixado de forma que $V_0(s) \rightarrow \infty$ quando $|s| \rightarrow \infty$. Então, a convergência em (7.9) é uniforme na classe de todos os potenciais V que satisfazem

$$V(s) \geq V_0(s) \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

Demonstração: **(1)** Sob as hipóteses da proposição vale que $Z_{V,I_\varepsilon}^{-1} \rightarrow Z_V^{-1}$ no sentido forte (Proposição 10.1.18 em [4]). Para cada ε temos $\theta_{V,I_\varepsilon} \subset \theta_V$ e $z_{V,I_\varepsilon}(u) = z_V(u)$, para todo $u \in \theta_{V,I_\varepsilon}$. Isso significa que $Z_{V,I_\varepsilon} \geq Z_V$ e, pelo Lema 10.4.4 em [4], $Z_{V,I_\varepsilon}^{-1} \leq Z_V^{-1}$. Desde que $V(s) \rightarrow \infty$ quando $|s| \rightarrow \infty$, o operador Z_V^{-1} é compacto (Corolário 11.5.7 em [4]).

Aplicando o Teorema 2.16 em [16] (em particular, esse teorema diz que se T_ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, é uma família de operadores compactos e auto-adjuntos de modo

que $T_\varepsilon \rightarrow T$ fortemente e existe um operador compacto nao-negativo, de modo que $\|T_\varepsilon\| \leq T_0$, para cada ε , então $\|T_\varepsilon - T\| \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$) concluimos que (7.9) vale.

(2) Consequência do Teorema 2.16 em [16]. ■

Cada operador Z_{V,I_ε} pode ser escrito como soma direta de dois operadores:

$$Z_{V,I_\varepsilon} = Z_{V,intI_\varepsilon} \oplus Z_{V,extI_\varepsilon},$$

em que $Z_{V,intI_\varepsilon}$ e $Z_{V,extI_\varepsilon}$ tem a mesma expressão que Z_{V,I_ε} e com condições de Dirichlet na fronteira ∂I_ε .

Corolário 7.8 A proposição anterior ainda é válida se cada operador Z_{V,I_ε}^{-1} for substituído por $Z_{V,int(I_\varepsilon)} \oplus 0$, em que 0 é o operador nulo no subespaço $\{u \in L^2(\mathbb{R}) : u = 0 \text{ em } \mathbb{R} \setminus I_\varepsilon\}$.

Demonstração: Segue do fato de que $\langle Z_{V,ext(I_\varepsilon)}u, u \rangle \geq \inf_{s \in \mathbb{R} \setminus I_\varepsilon} V(s)$ e assim $\|Z_{V,ext(I_\varepsilon)}^{-1}\| \rightarrow 0$ para $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Agora temos condições de demonstrar o Teorema 7.6.

Demonstração do Teorema (7.6): Seja W_ε a função definida em (7.3) (pág.70) e

$$V_\varepsilon(s) := \varepsilon^{2\beta} W_\varepsilon(\varepsilon^\beta s).$$

A forma quadrática do operador (7.8) (pág.77) é

$$\hat{q}_\varepsilon(w) = \int_{\mathbb{R}} (|w'|^2 + V_\varepsilon(s)|w|^2) ds.$$

A condição (7.1) (pág.64) nos permite escrever, para $s > 0$,

$$h(s) = M - c_+ s^m + \rho(s) s^{m+1},$$

para alguma função $\rho \in L^\infty(0, b)$. Assim,

$$\left(\frac{1}{h^2(s)} - \frac{1}{M^2} \right) = 2c_+ M^{-3} s^m + \rho_1(s) s^{m+1},$$

para alguma função $\rho_1 \in L^\infty(0, b)$. Portanto, para $s \in (0, b\varepsilon^{-\beta})$,

$$V_\varepsilon(s) = \zeta_\varepsilon(\varepsilon^\beta s, y) [q(s) + \lambda_0 \rho_1(\varepsilon^\beta s) s^{m+1} \varepsilon^\beta] + \varepsilon^{2\beta} v(\varepsilon^\beta s) + \varepsilon^{2\beta} c.$$

Uma igualdade similar vale para $s \in (-\varepsilon^{-\beta} a, 0)$.

Consideremos a família de intervalos $\{I'_\varepsilon\}$ definidos por

$$I'_\varepsilon = (-\varepsilon^{-c}, \varepsilon^{-c}).$$

A condição sobre c é $c(m+1) < \beta$. Assim, para cada $\eta > 0$ existe um número $\varepsilon(\eta) > 0$ de forma que

$$|V_\varepsilon(s) - q(s)| < \eta, \quad \forall s \in I'_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon(\eta). \quad (7.10)$$

Relembrando (7.4) (pág.70) temos

$$V_\varepsilon(s) \geq \sigma |s|^m, \quad \forall s \in I_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon < 1. \quad (7.11)$$

Estendemos a função $V_\varepsilon(s)$ em todo \mathbb{R} tomando $V_\varepsilon(s) = \sigma |s|^m$ para $t \notin I_\varepsilon$. A cada função estendida V_ε associamos três operadores: H_ε em $L^2(\mathbb{R})$, \hat{Q}_ε em $L^2(I_\varepsilon)$ e \hat{Q}'_ε em $L^2(I'_\varepsilon)$. Cada operador atua como $-d^2/ds^2 + V_\varepsilon(s)$; os últimos dois com condições de Dirichlet na fronteira.

Tomemos

$$H_\varepsilon = Z_{V_\varepsilon}; \quad \hat{Q}_\varepsilon = Z_{V_\varepsilon, \text{int}(I_\varepsilon)}, \quad \hat{Q}'_\varepsilon = Z_{V_\varepsilon, \text{int}(I'_\varepsilon)}.$$

Em particular, \hat{Q}_ε é o operador (7.8). Pela segunda parte da Proposição 7.7 temos

$$\|\hat{Q}_\varepsilon^{-1} \oplus 0 - H_\varepsilon^{-1}\| \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|\hat{Q}'_\varepsilon^{-1} \oplus 0 - H_\varepsilon^{-1}\| \rightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e, portanto,

$$\|\hat{Q}_\varepsilon^{-1} \oplus 0 - \hat{Q}'_\varepsilon^{-1} \oplus 0\| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (7.12)$$

Agora consideremos a família de operadores $H'_\varepsilon := Z_{q(s), \text{int}(I'_\varepsilon)}$, atuando em $L^2(I'_\varepsilon)$ como

$$(H'_\varepsilon u)(s) = -u''(s) + q(s)u(s),$$

com condições de Dirichlet em $\partial I'_\varepsilon$. Desta vez o potencial não envolve o parâmetro ε . Assim, pela primeira parte da Proposição 7.7

$$\|H'_\varepsilon{}^{-1} \oplus 0 - H^{-1}\| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (7.13)$$

Aplicando a segunda equação dos resolventes, escrevemos

$$\hat{Q}'_\varepsilon{}^{-1} - H'_\varepsilon{}^{-1} = -\hat{Q}'_\varepsilon{}^{-1}(V_\varepsilon(s) - q(s))H'_\varepsilon{}^{-1}. \quad (7.14)$$

Agora observemos que existe uma constante $C > 0$ de modo que

$$\|\hat{Q}'_\varepsilon{}^{-1}\| \leq C \quad \text{e} \quad \|\hat{H}'_\varepsilon{}^{-1}\| \leq C. \quad (7.15)$$

(7.10), (7.14) e (7.15) implicam que

$$\left\| \hat{Q}'_\varepsilon{}^{-1} - H'_\varepsilon{}^{-1} \right\| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (7.16)$$

E então o resultado segue por (7.12),(7.13) e (7.16). ■

7.6 Caso Neumann

Nesta seção continuamos considerando o caso em que I é um intervalo limitado. No entanto, a condição de Dirichlet na parte vertical da fronteira $\partial(I \times S)$ é substituída pela condição de Neumann. O objetivo é mostrar que existem resultados similares ao do caso Dirichlet. Isto também foi feito em [10] para o caso bidimensional.

Consideremos a forma quadrática

$$q_{\varepsilon,N}(w) := \int_I |w'|^2 + W_\varepsilon(s)|w|^2 ds, \quad \text{dom } q_{\varepsilon,N} = H^1(I),$$

em que $W_\varepsilon(s)$ é dado por (7.3) (pág.70). Denotamos por $Q_{\varepsilon,N}$ o operador auto-adjunto associado a $q_{\varepsilon,N}$.

Como os potenciais W_ε são todos positivos, a demonstração do lema abaixo é similar a feita em [10] e por isso não será repetida aqui.

Lema 7.9

$$\|Q_{\varepsilon,N}^{-1} - Q_\varepsilon^{-1}\| = O(\varepsilon^2).$$

Lema 7.10 Existe uma constante $R_1 > 0$ de modo que, para ε suficientemente pequeno,

$$\|Q_{\varepsilon,N}^{-1}\| \leq R_1 \varepsilon^{2\beta}.$$

Demonstração: Pelo Lema 7.2, existe uma constante R_1 de forma que $\|Q_\varepsilon^{-1}\| \leq R_1 \varepsilon^{2\beta}$ para ε suficientemente pequeno. Como $\beta \leq 2/3$, o Lema 7.9 garante que a mesma estimativa vale para $Q_{\varepsilon,N}^{-1}$. ■

Teorema 7.11 Existe uma constante $R_0 > 0$ de modo que, para ε suficientemente pequeno,

$$\left\| \left(-\Delta_{\varepsilon,DN}^c - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 M^2} I \right)^{-1} - (Q_{\varepsilon,N}^{-1} \oplus 0) \right\| \leq R_0 \varepsilon^{3\beta},$$

em que 0 denota o operador nulo no subespaço \mathcal{L}^\perp .

Levando em conta o Lema 7.10 e o Lema 7.3, a demonstração do teorema acima é similar a do Teorema 7.6.

Como na Seção 7.4, introduzimos a família de segmentos $I_\varepsilon = (-a\varepsilon^{-\beta}, b\varepsilon^{-\beta})$ ($\varepsilon > 0$) e definimos o operador isométrico $J_\varepsilon : L^2(I) \rightarrow L^2(I_\varepsilon)$ gerado pela dilatação $s = s'\varepsilon^\beta$. Identificamos $L^2(I_\varepsilon)$ com o subespaço

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}) : u(s) = 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R} \setminus I_\varepsilon\}.$$

Definimos $\hat{Q}_{\varepsilon,N} := \varepsilon^{2\beta} J_\varepsilon Q_{\varepsilon,N} J_\varepsilon^{-1}$, o qual é um operador auto-adjunto atuando em $L^2(I_\varepsilon)$.

Teorema 7.12 Temos

$$\left\| \hat{Q}_{\varepsilon,N}^{-1} \oplus 0 - H^{-1} \right\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

em que 0 é o operador nulo no subespaço $L^2(\mathbb{R} \setminus I_\varepsilon)$.

Demonstração: Observemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \hat{Q}_{\varepsilon, N}^{-1} \oplus 0 - H^{-1} \right\| &\leq \left\| \hat{Q}_{\varepsilon, N}^{-1} \oplus 0 - \hat{Q}_{\varepsilon}^{-1} \oplus 0 \right\| + \left\| \hat{Q}_{\varepsilon}^{-1} \oplus 0 - H^{-1} \right\| \\
&= \left\| \hat{Q}_{\varepsilon, N}^{-1} - \hat{Q}_{\varepsilon}^{-1} \right\| + \left\| \hat{Q}_{\varepsilon}^{-1} \oplus 0 - H^{-1} \right\| \\
&= \varepsilon^{-2\beta} \left\| Q_{\varepsilon, N}^{-1} - Q_{\varepsilon}^{-1} \right\| + \left\| \hat{Q}_{\varepsilon}^{-1} \oplus 0 - H^{-1} \right\|.
\end{aligned}$$

Como $\beta \leq 2/3$, aplicando o Lema 7.10 e o Teorema 7.6, o teorema fica demonstrado.

■

Em virtude do teorema acima, o Teorema 7.5 também vale para o caso Neumann.

7.7 Caso $I = \mathbb{R}$

Nesta seção vamos estudar o caso $I = \mathbb{R}$. Agora o espectro do Laplaciano $-\Delta_{\varepsilon}^c$ em $\Lambda_{\varepsilon}^{\alpha}$ não é mais necessariamente discreto e veremos que o espectro essencial depende do comportamento de h no infinito. Além das condições (i) e (ii) (veja pág.64), vamos assumir que h satisfaz:

$$(iii) \limsup_{|s| \rightarrow \infty} h(s) < M;$$

$$(iv) \frac{h'(s)}{h(s)} \in L^{\infty}(\mathbb{R}).$$

O objetivo desta seção é mostrar que valem resultados análogos aos Teoremas 7.4, 7.5 e 7.6 quando $I = \mathbb{R}$. Em [10] esses teoremas são demonstrados tomando $I = \mathbb{R}$ no caso bidimensional. Vamos mostrar que as demonstrações podem ser adaptadas ao nosso caso tridimensional.

Lema 7.13 Existe uma constante $R_1 > 0$ de modo que, para ε suficientemente pequeno,

$$q_{\varepsilon}(w) \geq R_1^{-1} \varepsilon^{-2\beta} \int_{\mathbb{R}} |w|^2 ds, \quad \forall w \in H^1(\mathbb{R}).$$

A demonstração do lema acima será feita no final desta seção.

Teorema 7.14 Seja $I = \mathbb{R}$ e h satisfazendo (i)-(iv). Então, existe uma constante $R_0 > 0$ de modo que, para ε suficientemente pequeno,

$$\left\| \left(-\Delta_\varepsilon^c - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 M^2} I \right)^{-1} - (Q_\varepsilon^{-1} \oplus 0) \right\| \leq R_0 \varepsilon^{3\beta},$$

em que 0 denota o operador nulo no subespaço \mathcal{L}^\perp .

A demonstração deste teorema é similar a do Teorema 7.4 levando em consideração o Lema 7.13 (ao invés do Lema 7.2) e o Lema 7.3.

Como na seção anterior, consideremos os operadores auto-adjuntos

$$\hat{Q}_\varepsilon := \varepsilon^{2\beta} J_\varepsilon Q_\varepsilon J_\varepsilon^{-1},$$

em que $J_\varepsilon : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ é a isometria gerada pela dilatação $s = s'\varepsilon^\beta$.

Teorema 7.15 Temos que para $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\left\| \hat{Q}_\varepsilon^{-1} - H^{-1} \right\| \rightarrow 0,$$

em que H é o operador (7.7) introduzido na página 76.

A condição (iii) implica que os potenciais $W_\varepsilon(s)$ podem ser limitados e então o item (2) da Proposição 7.7 não se aplica neste caso. Assim, para demonstrar o Teorema 7.15, vamos enunciar um resultado similar a Proposição 7.7. Z_V denota o operador $-d^2/ds^2 + V(s)$ em $L^2(\mathbb{R})$ com V sendo um potencial não-negativo.

Proposição 7.16 Sejam $V(s)$ e $V_\varepsilon(s)$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, funções mensuráveis não-negativas em \mathbb{R} de forma que $V(s) \rightarrow \infty$ quando $|s| \rightarrow \infty$ e

$$V_\varepsilon(s) \rightarrow V(s), \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (7.17)$$

uniformemente em subconjuntos compactos de \mathbb{R} . Suponhamos que

$$V_\varepsilon(s) \geq V_\varepsilon^0(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

em que $V_\varepsilon^0(s)$ é outra família de funções mensuráveis em \mathbb{R} a qual é monótona em ε , ou seja,

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Rightarrow V_{\varepsilon_1}^0 \leq V_{\varepsilon_2}^0, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos também que

$$c(\varepsilon) := \liminf_{|s| \rightarrow \infty} V_\varepsilon^0(s) \rightarrow \infty$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Então,

$$\|Z_{V_\varepsilon}^{-1} - Z_V^{-1}\| \rightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração: Definimos $T := Z_V^{-1}$ e $T_\varepsilon = Z_{V_\varepsilon}^{-1}$. Seja T_ε^0 o inverso do operador de Schrödinger com potencial $V_\varepsilon^0(s)$. A hipótese (7.17) implica que $Z_{V_\varepsilon} u \rightarrow Z_V u$ para cada $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. O Teorema 8.15 em [12] garante que $T_\varepsilon \rightarrow T$ fortemente.

Fixemos $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0)$. Então, para $\varepsilon < \varepsilon^*$, as condições da Proposição A.5 do Apêndice são satisfeitas com $T_0 = T_{\varepsilon^*}^0$. Desta proposição, concluímos que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|T_\varepsilon - T\| \leq c(\varepsilon^*)^{-1}.$$

O resultado é obtido tomando $\varepsilon^* \rightarrow 0$. ■

Demonstração do Teorema 7.15: Consideremos o potencial

$$V_\varepsilon(s) = \varepsilon^{2\beta} W_\varepsilon(\varepsilon^\beta s)$$

em que $W_\varepsilon(s)$ é a função definida em (7.3) (pág.70). Com uma demonstração similar àquela do Teorema 7.6, podemos escrever

$$V_\varepsilon(s) = \zeta_\varepsilon(\varepsilon^\beta s, y) [q(s) + \lambda_0 \rho(\varepsilon^\beta s) s^{m+1} \varepsilon^\beta] + \varepsilon^{2\beta} v(\varepsilon^\beta s) + \varepsilon^{2\beta} c,$$

em que $\rho(s)$ é uma função limitada em cada intervalo finito $(-a, a)$ de \mathbb{R} . Observemos que $V_\varepsilon(s) \rightarrow q(s)$ uniformemente em cada subconjunto compacto de \mathbb{R} .

Para $|s| \geq 1$, vale

$$\zeta_\varepsilon(s, y) \left(\frac{\lambda_0}{h(s)^2} - \frac{\lambda_0}{M^2} \right) \geq c_0,$$

para alguma constante $c_0 > 0$. Isto segue do fato de que existe $\delta > 0$ de forma que $\zeta_\varepsilon(s, y) \geq \delta$, para ε suficientemente pequeno, e também do comportamento de h próximo a origem (veja ítem (i) na pág.64).

No intervalo $[-1, 1]$ a desigualdade $W_\varepsilon(s) \geq \sigma\varepsilon^{-2}|s|^m$ é satisfeita para alguma constante $\sigma > 0$ (veja demonstração do Lema 7.2). Assim,

$$W_\varepsilon(s) \geq \sigma_1\varepsilon^{-2} \min(|s|^m, 1), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0,$$

para alguma constante $\sigma_1 > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(s) &\geq \sigma_1 \min(\varepsilon^{-2+2\beta+m\beta}|s|^m, \varepsilon^{-2+2\beta}) \\ &= \sigma_1 \min(|s|^m, \varepsilon^{-2+2\beta}). \end{aligned}$$

Defina

$$V_\varepsilon^0(s) = \sigma_1 \min(|s|^m, \varepsilon^{-2+2\beta}).$$

A sequência $V_\varepsilon^0(s)$ satisfaz as condições da Proposição 7.16. Assim, o teorema fica demonstrado. ■

Demonstração do Lema (7.13): O Teorema 7.15 garante que

$$\varepsilon^{-2\beta} \|Q_\varepsilon^{-1}\| \rightarrow \|H^{-1}\| \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

ou seja, existe uma constante $C > 0$ de modo que

$$\|Q_\varepsilon^{-1}\| \leq C\varepsilon^{2\beta}.$$

■

O Teorema 7.5 também vale para o caso $I = \mathbb{R}$. Basta aplicar o Teorema 7.15.

7.8 O espectro discreto no caso $I = \mathbb{R}$

Definimos $\nu(\varepsilon) := \inf \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_\varepsilon^c)$ e denotamos por $l_j^c(\varepsilon)$ os autovalores de $-\Delta_\varepsilon^c$. Se $-\Delta_\varepsilon^c$ tem espectro essencial vazio escrevemos $\nu(\varepsilon) = \infty$. Denotamos por $n(\varepsilon)$, $n(\varepsilon) \leq \infty$, o número de autovalores $l_j^c(\varepsilon) \leq \nu(\varepsilon)$.

Teorema 7.17 Seja $I = \mathbb{R}$, h satisfazendo as condições (i)-(iv) e a curvatura satisfazendo

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} k(s) = 0. \quad (7.18)$$

Então,

$$\nu(\varepsilon) \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Demonstração: Seja $N := \limsup_{|s| \rightarrow \infty} h(s) < M$ e $\hat{I} = [-a, a]$. Definimos

$$\Omega_{a,\varepsilon} = \{(s, y) : s \in \hat{I}\} \quad \text{e} \quad \Omega'_{a,\varepsilon} = \{(s, y) : s \notin \hat{I}\}.$$

Sejam $-\Delta_{a,\varepsilon,D}^c$ e $-\Delta_{a,\varepsilon,D}^{c'}$ os Laplacianos de Dirichlet em $\Omega_{a,\varepsilon}$ e $\Omega'_{a,\varepsilon}$ respectivamente. Sejam $-\Delta_{a,\varepsilon,DN}^c$ e $-\Delta_{a,\varepsilon,DN}^{c'}$ os Laplacianos acima mas com a condição de Dirichlet na parte vertical das fronteiras de $\Omega_{a,\varepsilon}$ e $\Omega'_{a,\varepsilon}$ substituída pela condição de Neumann. Observemos que

$$-\Delta_{a,\varepsilon,DN}^c + \left(-\Delta_{a,\varepsilon,DN}^{c'}\right) < -\Delta_\varepsilon^c < -\Delta_{a,\varepsilon,D}^c + \left(-\Delta_{a,\varepsilon,D}^{c'}\right). \quad (7.19)$$

Nestas condições $\inf \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_\varepsilon^c) \geq \inf \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{a,\varepsilon,DN}^{c'})$.

Seja $Q'_{a,\varepsilon,DN}$ a forma quadrática associada ao operador $-\Delta_{a,\varepsilon,DN}^{c'}$. Observemos que

$$\begin{aligned} Q'_{a,\varepsilon,DN}(\psi) &\geq \left(\inf_{(s,y) \in \mathbb{R} \times S} \frac{\beta_\varepsilon(s, y)}{\varepsilon^2 h(s)} \right) \int_{(\mathbb{R} \setminus \hat{I}) \times S} |\nabla_y \psi|^2 dy ds \\ &\geq \lambda_0 \left(\inf_{(s,y) \in \mathbb{R} \times S} \frac{\beta_\varepsilon(s, y)}{\varepsilon^2 h(s)} \right) \int_{(\mathbb{R} \setminus \hat{I}) \times S} |\psi|^2 dy ds \\ &\geq \lambda_0 \left(\inf_{(s,y) \in \mathbb{R} \times S} \frac{\beta_\varepsilon(s, y)}{\varepsilon^2 h(s)} \right) \frac{1}{\sup_{(s,y) \in \mathbb{R} \times S} \beta_\varepsilon(s, y)} \int_{(\mathbb{R} \setminus \hat{I}) \times S} \beta_\varepsilon(s, y) |\psi|^2 dy ds, \end{aligned}$$

para toda $\psi \in \text{dom } Q'_{a,\varepsilon,DN}$. Desde que k satisfaz (7.18), podemos observar que o espectro essencial de $-\Delta_{a,\varepsilon,DN}^{c'}$ é estimado inferiormente por λ_0 vezes uma função que tende a $\frac{1}{\varepsilon^2 N}$ quando $a \rightarrow \infty$. Como o espectro essencial é um subconjunto fechado segue que $\nu(\varepsilon) \geq \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 N^2}$ e conseqüentemente $\nu(\varepsilon) \rightarrow \infty$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

O próximo teorema é uma forma alternativa de demonstrar a igualdade (7.6).

Teorema 7.18 Sob as mesmas condições do teorema anterior, para ε suficientemente pequeno, o espectro discreto de $-\Delta_\varepsilon^c$ em $\Lambda_\varepsilon^\alpha$ é não-vazio e vale a igualdade (7.6).

Demonstração: Que o espectro de $-\Delta_\varepsilon^c$ é não-vazio, para ε suficientemente pequeno, segue da convergência uniforme do Teorema 7.16 e do fato de que o espectro discreto de H é não-vazio. Devido a (7.19), os autovalores $l_j^c(\varepsilon)$ de $-\Delta_\varepsilon^c$ abaixo de $\frac{\lambda_0}{\varepsilon^2 N^2}$ satisfazem

$$l_j^c(-\Delta_{a,\varepsilon,DN}^c) \leq l_j^c(\varepsilon) \leq l_j^c(-\Delta_{a,\varepsilon,D}^c).$$

O comportamento assintótico dos autovalores $l_j^c(-\Delta_{a,\varepsilon,DN}^c)$ e $l_j^c(-\Delta_{a,\varepsilon,D}^c)$ implicam que o número $n(\varepsilon)$ cresce indefinidamente e os autovalores $l_j^c(\varepsilon)$ tem o comportamento assintótico dado por (7.6). ■

Concluimos que para ε suficientemente pequeno, o espectro discreto de $-\Delta_\varepsilon^c$ é não-vazio. Este fato independe dos efeitos geométricos do tubo como curvatura, torção ou rotação de ângulo. O operador limite dado por (7.2) (veja pág.7.2), o qual o comportamento assintótico dos autovalores de $-\Delta_\varepsilon^c$ são associados, também não é influenciado por esses efeitos.

Apêndice A

A.1 A extensão de Dirichlet e sua forma quadrática

Consideremos o operador auto-adjunto $(\mathbf{h}w)(s) = -w''(s)$,

$$\text{dom } \mathbf{h} = \{w \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : w(0^+) = 0 = w(0^-)\}.$$

Este operador é associado a forma sesquilinear

$$b_{\mathbf{h}}(w, \varphi) = \langle w', \varphi' \rangle, \quad w, \varphi \in \text{dom } b_{\mathbf{h}},$$

em que $\text{dom } b_{\mathbf{h}} = \{w \in H^1(\mathbb{R}) : w(0^+) = 0 = w(0^-)\}$, ou seja, $\text{dom } b_{\mathbf{h}}$ é o domínio de forma de \mathbf{h} (para mais detalhes consulte Seção 4.2 em [4]).

O domínio de forma do operador multiplicação $V(s) = -\frac{\kappa}{|s|}$, $s, \kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa \neq 0$, é

$$\text{dom } b_V = \left\{ w \in L^2(\mathbb{R}) : \frac{w(s)}{\sqrt{|s|}} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Afirmção: V é $b_{\mathbf{h}}$ -limitado e o $b_{\mathbf{h}}$ -limite de V é menor do que 1. De fato, notemos que $\text{dom } b_{\mathbf{h}} \subset \text{dom } b_V$. Dado $a > 0$, escolhemos $\delta > 0$ de forma que $\frac{1}{|s|} \leq \frac{a}{4} \frac{1}{|s|^2}$ para todo $|s| \leq \delta$. Pela desigualdade de Hardy, para $w \in \text{dom } b_{\mathbf{h}}$, temos

$$\begin{aligned} |b_V(w)| &= |\kappa| \int_{\mathbb{R}} \frac{|w(s)|^2}{|s|} ds \\ &= |\kappa| \int_{|s| \leq \delta} \frac{|w(s)|^2}{|s|} ds + |\kappa| \int_{|s| \geq \delta} \frac{|w(s)|^2}{|s|} ds \\ &\leq |\kappa| \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{|w(s)|^2}{|s|^2} ds + \frac{|\kappa|}{\delta} \int_{\mathbb{R}} |w(s)|^2 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\kappa|a \int_{\mathbb{R}} |w(s)'|^2 ds + \frac{|\kappa|}{\delta} \int_{\mathbb{R}} |w(s)|^2 ds \\
&= a |\kappa| b_{\mathbf{h}}(w) + \frac{|\kappa|}{\delta} \|w\|^2.
\end{aligned}$$

Como $a > 0$ é arbitrário, segue o resultado.

Desde que

$$b_{\kappa}^0(w) = b_{\mathbf{h}}(w) + b_V(w)$$

com $\text{dom } b_{\kappa}^0 = \text{dom } b_{\mathbf{h}}$, pelo Teorema KLMN em [4], existe um único operador auto-adjunto H com $\text{dom } H \subset \text{dom } b_{\mathbf{h}}$, cujo domínio de forma é $\text{dom } b_{\mathbf{h}}$, de modo que

$$\langle \varphi, Hw \rangle = b_{\kappa}^0(\varphi, w), \quad \forall \varphi \in \text{dom } b_{\mathbf{h}}, \forall w \in \text{dom } H. \quad (\text{A.1})$$

É conhecido que $\text{dom } H$ é denso em $\text{dom } b_{\mathbf{h}}$ com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_+ := b_{\kappa}^0(\cdot, \cdot) + \langle \cdot, \cdot \rangle$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual em $L^2(\mathbb{R})$.

Seja H_D a extensão auto-adjunta de (1.2) com condições de Dirichlet na origem. Notemos que $\text{dom } H_D$ é denso em $(\text{dom } b_{\mathbf{h}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_+)$. De fato, desde que $\text{dom } b_{\mathbf{h}}$ é o domínio de forma de \mathbf{h} , para cada $w \in \text{dom } b_{\mathbf{h}}$ existe uma sequência $(w_n) \subset \text{dom } \mathbf{h} = \text{dom } H_D$ de modo que

$$b_{\mathbf{h}}(w_n - w) + \|w_n - w\|^2 \rightarrow 0. \quad (\text{A.2})$$

Tomando $a > 0$ como acima, e novamente pela desigualdade de Hardy,

$$|b_V(w)| \leq d (b_{\mathbf{h}}(w) + \|w\|^2), \quad (\text{A.3})$$

em que $d = \max\{a|\kappa|, |\kappa|/\delta\}$. Assim, por (A.2) and (A.3), $b_V(w_n - w) \rightarrow 0$. Aqui

$$\langle w_n - w, w_n - w \rangle_+ \rightarrow 0,$$

ou seja, $\text{dom } H_D$ é denso em $(\text{dom } b_{\mathbf{h}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_+)$. Uma integração por partes mostra que a condição (A.1) também vale com H substituído por H_D ; assim, por unicidade, segue que $H = H_D$.

A.2 Um resultado sobre convergência uniforme

Seja $\{\mathcal{H}_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ uma família de espaços de Hilbert separáveis. Vamos considerar apenas o caso real. Seja $\mathcal{L}_\varepsilon \subset \mathcal{H}_\varepsilon$ um subespaço fechado de \mathcal{H}_ε . Denotamos por $\mathcal{L}_\varepsilon^\perp$ o complemento ortogonal de \mathcal{L}_ε em \mathcal{H}_ε , ou seja,

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon \oplus \mathcal{L}_\varepsilon^\perp.$$

Sejam P_ε e P^ε as projeções ortogonais em \mathcal{H}_ε nos subespaços \mathcal{L}_ε e $\mathcal{L}_\varepsilon^\perp$ respectivamente. Assim, para cada elemento $\psi \in \mathcal{H}_\varepsilon$ escrevemos

$$\psi_\varepsilon = P_\varepsilon \psi, \quad \psi^\varepsilon = P^\varepsilon \psi.$$

Seja $a_\varepsilon(\psi_1, \psi_2)$ uma forma bilinear simétrica em \mathcal{H}_ε com domínio denso em \mathcal{H}_ε . Suponhamos que a correspondente forma quadrática $a_\varepsilon(\psi) := a_\varepsilon(\psi, \psi)$ é não-negativa e fechada. Seja A_ε o operador auto-adjunto associado a a_ε . Suponhamos também que

$$\psi \in \text{dom } a_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \psi_\varepsilon \in \text{dom } a_\varepsilon.$$

Consequentemente,

$$\psi \in \text{dom } a_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \psi^\varepsilon \in \text{dom } a_\varepsilon.$$

Então, os conjuntos

$$d_\varepsilon := \{\psi_\varepsilon : \psi \in \text{dom } a_\varepsilon\}, \quad d^\varepsilon := \{\psi^\varepsilon : \psi \in \text{dom } a_\varepsilon\},$$

são densos em \mathcal{L}_ε e $\mathcal{L}_\varepsilon^\perp$ respectivamente.

Vamos considerar a família $q_\varepsilon := a_\varepsilon \upharpoonright d_\varepsilon$ e $b_\varepsilon := a_\varepsilon \upharpoonright d^\varepsilon$ de formas quadráticas em \mathcal{L}_ε e $\mathcal{L}_\varepsilon^\perp$ respectivamente. Ambos q_ε e b_ε são formas quadráticas fechadas. Denotamos por Q_ε e B_ε os correspondentes operadores auto-adjuntos.

A forma quadrática a_ε pode ser escrita como

$$a_\varepsilon(\psi) = q_\varepsilon(\psi_\varepsilon) + b_\varepsilon(\psi^\varepsilon) + 2m_\varepsilon(\psi_\varepsilon, \psi^\varepsilon). \quad (\text{A.4})$$

Agora vamos supor as seguintes condições para cada termo da expressão acima:

$$q_\varepsilon(\psi_\varepsilon) \geq c(\varepsilon)\|\psi_\varepsilon\|^2, \quad \forall \psi_\varepsilon \in \mathcal{L}_\varepsilon, \quad c(\varepsilon) \geq c_0 > 0; \quad (\text{A.5})$$

$$b_\varepsilon(\psi^\varepsilon) \geq p(\varepsilon)\|\psi^\varepsilon\|^2, \quad \forall \psi^\varepsilon \in \mathcal{L}_\varepsilon^\perp; \quad (\text{A.6})$$

$$p(\varepsilon) \rightarrow \infty, \quad c(\varepsilon) = O(p(\varepsilon)); \quad (\text{A.7})$$

$$|m_\varepsilon(\psi_\varepsilon, \psi^\varepsilon)|^2 \leq q(\varepsilon)^2 q_\varepsilon(\psi_\varepsilon) b_\varepsilon(\psi^\varepsilon), \quad \forall \psi \in h_\varepsilon, \quad q(\varepsilon) \rightarrow 0. \quad (\text{A.8})$$

Proposição A.1 Para ε suficientemente pequeno, o operador A_ε é definido positivo e tem-se

$$\|A_\varepsilon^{-1} - Q_\varepsilon^{-1} \oplus 0\| \leq p(\varepsilon)^{-1} + Cq(\varepsilon)c(\varepsilon)^{-1}. \quad (\text{A.9})$$

Demonstração: Inicialmente vamos analisar a forma quadrática

$$h_\varepsilon(\psi) := q_\varepsilon(\psi_\varepsilon) + b_\varepsilon(\psi^\varepsilon), \quad \psi \in \text{dom } a_\varepsilon.$$

Por (A.5) e (A.6), h_ε é positiva. h_ε também é fechada pois q_ε e b_ε são fechadas. Seja H_ε o operador auto-adjunto associado a h_ε . Por (A.7), para ε suficientemente pequeno,

$$\|H_\varepsilon^{-1}\| \leq Cc(\varepsilon)^{-1},$$

para alguma constante $C > 0$. Além disso, (A.8) implica que

$$|m_\varepsilon(\psi_\varepsilon, \psi^\varepsilon)| \leq q(\varepsilon)h_\varepsilon(\psi).$$

Consequentemente

$$|a_\varepsilon(\psi) - h_\varepsilon(\psi)| = 2|m_\varepsilon(\psi_\varepsilon, \psi^\varepsilon)| \leq 2q(\varepsilon)h_\varepsilon(\psi).$$

Para ε suficientemente pequeno, de forma que $q(\varepsilon) \leq 1/4$, a igualdade acima implica que

$$1/2h_\varepsilon(\psi) \leq a_\varepsilon(\psi) \leq 3/2h_\varepsilon(\psi), \quad \forall \psi \in \text{dom } a_\varepsilon.$$

Assim, para ε suficientemente pequeno, A_ε é positivo e

$$\|A_\varepsilon^{-1}\| \leq 2Cc(\varepsilon)^{-1}.$$

Notemos também que (A.6) é equivalente a

$$\|B_\varepsilon^{-1}\| \leq p(\varepsilon)^{-1}. \quad (\text{A.10})$$

Para $\psi_1, \psi_2 \in \text{dom } a_\varepsilon$ e ε suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} & |\langle A_\varepsilon^{1/2}\psi_1, A_\varepsilon^{1/2}\psi_2 \rangle - \langle H_\varepsilon^{1/2}\psi_1, H_\varepsilon^{1/2}\psi_2 \rangle| \\ &= |a_\varepsilon(\psi_1, \psi_2) - h_\varepsilon(\psi_1, \psi_2)| \\ &\leq 2q(\varepsilon) (h_\varepsilon(\psi_1)h_\varepsilon(\psi_2))^{1/2} \\ &\leq 2\sqrt{2}q(\varepsilon) (h_\varepsilon(\psi_1)a_\varepsilon(\psi_2))^{1/2}. \end{aligned}$$

Tomando $\psi_1 = H_\varepsilon^{-1}f$, $\psi_2 = A_\varepsilon^{-1}g$, em que f, g são elementos arbitrários de \mathcal{H}_ε , temos

$$\begin{aligned} & |\langle H_\varepsilon^{-1}f, g \rangle - \langle A_\varepsilon^{-1}f, g \rangle| \\ &\leq 2\sqrt{2}q(\varepsilon) (\langle A_\varepsilon^{-1}g, g \rangle \langle H_\varepsilon^{-1}f, f \rangle)^{1/2} \leq 4Cq(\varepsilon)c(\varepsilon)^{-1}\|f\| \|g\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|A_\varepsilon^{-1} - H_\varepsilon^{-1}\| \leq 4Cq(\varepsilon)c(\varepsilon)^{-1}. \quad (\text{A.11})$$

Desde que $H_\varepsilon^{-1} = Q_\varepsilon^{-1} \oplus B_\varepsilon^{-1}$, concluimos que

$$\|H_\varepsilon^{-1} - Q_\varepsilon^{-1} \oplus 0\| = \|B_\varepsilon^{-1}\|.$$

Juntando (A.10) e (A.11) chegamos a (A.9). ■

A.3 A desigualdade de Hardy

Lema A.2 (Desigualdade de Hardy) Para $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(x)|^2}{|x|^2} dx.$$

Demonstração: [4] ■

Similarmente, a desigualdade de Hardy vale em \mathbb{R} . No entanto, com uma restrição: se $w \in H^1(\mathbb{R})$ e satisfaz $w(0^\pm) = 0$, então

$$\int_{\mathbb{R}} |w'|^2 ds \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{|w|^2}{|s|^2} ds.$$

A.4 Os Laplacianos de Dirichlet e Neumann

Como referência para esta seção indicamos [15].

Seja Ω uma região aberta de \mathbb{R}^m . O Laplaciano de Dirichlet em Ω , $-\Delta_{\Omega}^D$, é o único operador auto-adjunto em $L^2(\Omega, dx^m)$ cuja forma quadrática é o fecho da forma $q(f, g) = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dx^m$ e o domínio é $C_0^\infty(\Omega)$. O Laplaciano de Neumann em Ω , $-\Delta_{\Omega}^N$, é o único operador auto-adjunto em $L^2(\Omega, dx^m)$ cuja forma quadrática é $q(f, g) = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dx^m$ no domínio

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \nabla f \in L^2(\mathbb{R}^m)\},$$

em que ∇f denota o gradiente de f no sentido das distribuições.

Seja D o operador fecho do gradiente em $C_0^\infty(\Omega)$. Então, $-\Delta_{\Omega}^D = D^*D$ enquanto $-\Delta_{\Omega}^N = DD^*$.

Parece estranho que o operador $-\Delta_{\Omega}^N$ não mencione condições de Neumann na fronteira $\partial\Omega$. Intuitivamente, como $-\Delta_{\Omega}^N = DD^*$ tem-se que, para f no domínio de $-\Delta_{\Omega}^N = DD^*$, necessariamente D^*f pertence ao domínio de D . O domínio deste último, consiste de funções que se anulam na fronteira $\partial\Omega$.

As demonstrações das próximas proposições podem ser encontradas em [15].

Proposição A.3 Sejam Ω_1 e Ω_2 subconjuntos abertos de modo que $L^2(\Omega_1 \cup \Omega_2) = L^2(\Omega_1) \oplus L^2(\Omega_2)$. Então,

$$-\Delta_{\Omega_1 \cup \Omega_2}^D = -\Delta_{\Omega_1}^D \oplus -\Delta_{\Omega_2}^D,$$

$$-\Delta_{\Omega_1 \cup \Omega_2}^N = -\Delta_{\Omega_1}^N \oplus -\Delta_{\Omega_2}^N.$$

Proposição A.4 (i) Se $\Omega \subset \Omega'$, então $0 \leq -\Delta_D^{\Omega'} \leq -\Delta_D^\Omega$.

(ii) Para cada Ω , $0 \leq -\Delta_N^\Omega \leq -\Delta_D^\Omega$.

(iii) Sejam Ω_1 e Ω_2 subconjuntos abertos e disjuntos de um conjunto aberto Ω de modo que $\text{int}(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}) = \Omega$ e $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ tem medida nula. Então,

$$0 \leq -\Delta_D^\Omega \leq -\Delta_D^{\Omega_1 \cup \Omega_2},$$

$$0 \leq -\Delta_N^{\Omega_1 \cup \Omega_2} \leq -\Delta_N^\Omega.$$

A.5 Teorema da Convergência Dominada para operadores

Seja \mathcal{C} o ideal de todos os operadores compactos. A demonstração da seguinte proposição pode ser encontrada em [10].

Proposição A.5 Sejam $T \geq 0$ e $T_\varepsilon \geq 0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, operadores auto-adjuntos e limitados num espaço de Hilbert separável \mathcal{H} . Suponhamos que $T_\varepsilon \rightarrow T$ fortemente quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Suponhamos também que existe um operador limitado e auto-adjunto T_0 de modo que $T_\varepsilon \leq T_0$, para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, e

$$\text{dist}(T_0, \mathcal{C}) := \inf\{\|T_0 - T\| : T \in \mathcal{C}\} = m, \quad m \geq 0.$$

Então,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|T_\varepsilon - T\| \leq m.$$

Referências Bibliográficas

- [1] Bouchitté, G., Mascarenhas, M. L. and Trabucho, L.: On the curvature and torsion effects in one dimensional waveguides. *ESAIM: COCV* **13**, 793-808 (2007)
- [2] Chenaud, B., Duclos, P., Freitas, P. and Krejcirik, D.: Geometrically induced discrete spectrum in curved tubes, *Differential Geom. Appl.* **23**, no. 2, 95-105 (2005)
- [3] Dal Maso, G.: *An Introduction to Γ -convergence*. Birkhauser, Basel (1993)
- [4] de Oliveira, C. R.: *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*. Birkhäuser, Basel (2009)
- [5] de Oliveira, C. R.: Quantum singular operator limits of thin Dirichlet tubes via Γ -convergence. Preprint, DM-UFSCar.
- [6] de Oliveira, C. R. and Verri, A. A.: Self-Adjoint extensions of Coulomb system in 1, 2 and 3 dimensions. *Ann. Phys.* **324**, 251-266 (2009)
- [7] de Oliveira, C. R. and Verri, A. A.: Predominance of Dirichlet boundary condition for the one-dimensional Coulomb potential. Preprint, DM-UFSCar.
- [8] Exner, P. and Post, O. Approximation of quantum graph vertex couplings by scaled Schrödinger operators on thin branched manifolds, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42** (41) 415305.
- [9] Friedlander, L. and Solomyak, M.: On the spectrum of the Dirichlet laplacian in a narrow strip, *Israel J. Math.*, **170**, 337-354(2009)

- [10] Friedlander, F. and Solomyak, M.: On the spectrum of the Dirichlet laplacian in a narrow infinity strip, Amer. Math. Soc. Transl., (2) **225**, 103-116(2008)
- [11] Gesztesy, F.: On the one-dimensional Coulomb Hamiltonian, J. Phys. A: Math. Gen. **13**, 867–875 (1980)
- [12] Kato, T.: Perturbation Theory for Linear Operators, second Edition, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1976.
- [13] Klaus, M.: Removing cut-offs from one-dimensional Schrödinger operators, J. Phys. A: Math. Gen. **13**, L295–L298 (1980)
- [14] Krejciřík, D.: Twisting versus bending in quantum waveguides, Analysis on Graphs and Applications (Cambridge 2007), Proc. Sympos. Pure Math., vol. **77**, 617-636, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [15] Reed, M. e Simon, B.: Methods of Modern Mathematical Physics IV. Fourier Analysis, Self-Adjointness. San Diego: Academic Press, 1972.
- [16] Simon, B.: Trace Ideals and theirs Applications, London Math. Soc. Lecture Notes Series 35, Cambridge University Press, 1979.