

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FRANCISCO BRAUN

INJETIVIDADE DE APLICAÇÕES POLINOMIAIS VIA  
RESOLUBILIDADE DE CAMPOS VETORIAIS

SÃO CARLOS  
2010

**INJETIVIDADE DE APLICAÇÕES POLINOMIAIS VIA  
RESOLUBILIDADE DE CAMPOS VETORIAIS**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FRANCISCO BRAUN

INJETIVIDADE DE APLICAÇÕES POLINOMIAIS VIA  
RESOLUBILIDADE DE CAMPOS VETORIAIS

Tese apresentada ao Programa  
de Pós-Graduação em Mate-  
mática como parte dos requi-  
sitos para a obtenção do título  
de Doutor em Matemática.

*Orientação: Prof. Dr. José  
Ruidival Soares dos Santos Fi-  
lho.*

SÃO CARLOS  
2010

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

B825ia

Braun, Francisco.

Injetividade de aplicações polinomiais via resolubilidade de campos vetoriais / Francisco Braun. -- São Carlos : UFSCar, 2010.

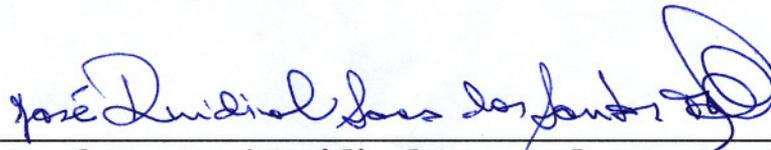
57 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Análise matemática. 2. Campos vetoriais. 3. Campos hamiltonianos. 4. Topologia. 5. Geometria. I. Título.

CDD: 515 (20<sup>a</sup>)

**Banca Examinadora:**



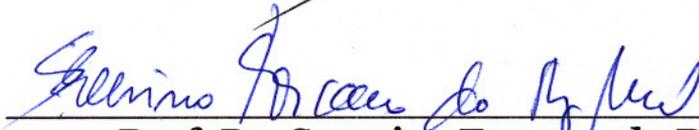
---

**Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho**  
DM - UFSCar



---

**Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie**  
DM - UFSCar



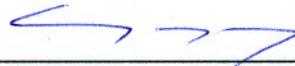
---

**Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo**  
IME - USP



---

**Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira**  
IMECC - UNICAMP



---

**Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo**  
IME - USP

*Para minha esposa Meire*

# Agradecimentos

Agradeço ao Senhor, por permitir que descubramos as sutilezas da Matemática;

à minha querida esposa, a matemática Meire, por muito me apoiar durante todo o projeto de Doutorado;

aos meus pais, os professores Inácio e Elice, por todo o incentivo na minha formação;

ao meu orientador, Professor José Ruidival, por ter me guiado desde o Mestrado até aqui de maneira esplêndida, pela escolha do fascinante tema e por todos os seus muitos ensinamentos matemáticos;

ao Professor Xavier, pela hospitalidade com que me recebeu na University of Notre Dame e pelos seus conselhos matemáticos;

aos professores Grotta Ragazzo, Hounie, Melo e Teixeira, por aceitarem o convite para fazerem parte da banca examinadora;

a todos os demais professores que tive até agora (em especial aos professores aqui do DM), pela minha formação;

aos amigos do DM, pelo companheirismo e pelas muitas conversas matemáticas e não matemáticas;

e à Fapesp, pelo apoio financeiro.

# Resumo

Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação polinomial tal que a aplicação derivada  $DF(x)$  seja invertível em cada ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ . Neste trabalho, usando técnicas de resolubilidade de certos campos de vetores, investigamos o papel do grau de  $F$  na sua injetividade. Em  $\mathbb{R}^2$ , mostramos que se o grau de uma das componentes de  $F$  é menor ou igual a 3, então  $F$  é injetora. Em  $\mathbb{R}^n$ , discutimos a injetividade de aplicações do tipo  $F(x) = x + H(x)$ , em que  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação polinomial homogênea de grau 3 e  $\det DF(x) = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , propondo uma nova maneira de abordar este problema. Demonstramos que temos a injetividade quando  $n = 3$ .

**Palavras-chave:** Análise Matemática. Campos vetoriais. Injetividade.

# Abstract

Let  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  be a polynomial map such that the derivative map  $DF(x)$  be invertible for each  $x \in \mathbb{R}^n$ . In this work, using techniques of solvability of suitable vector fields, we investigate the role of the degree of  $F$  in its injectivity. In  $\mathbb{R}^2$ , we show that if the degree of one of the components of  $F$  is less or equal 3, then  $F$  is injective. In  $\mathbb{R}^n$ , we discuss the injectivity of the maps  $F(x) = x + H(x)$ , where  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  is a homogeneous polynomial map of degree 3 and  $\det DF(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Here we propose a new way to approach this problem. We show the injectivity when  $n = 3$ .

**Keywords:** Mathematical Analysis. Vector fields. Injectivity.

# Lista de Figuras

1.2.1 A curva integral $\gamma_{L(t_0)}$ cortando $K$ . . . . .	17
1.2.2 A componente conexa $R$ . . . . .	17
1.2.3 As duas possibilidades para a curva integral $\gamma_{x_n}$ se $\gamma_{x_n}(t_n) \in B(a, r)$ . . . . .	19
1.3.1 Definição de mcR . . . . .	22
2.2.1 Configuração típica de $p^{-1}\{0\}$ . . . . .	28
3.2.1 Curvas de nível de $\tilde{p}(x, y) = \kappa + x(1 + xy)$ . . . . .	34
3.2.2 Curvas de nível de $p(x, y) = x^2y^2 - x$ . . . . .	37

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Resolubilidade global e injetividade</b>	<b>11</b>
1.1 Resolubilidade global e injetividade em $\mathbb{R}^n$	11
1.2 Resolubilidade global e injetividade em $\mathbb{R}^2$	15
1.3 Meia-componente de Reeb	22
<b>2 Polinômios de grau 3 no plano</b>	<b>24</b>
2.1 Um polinômio especial	24
2.2 Primeira demonstração	26
2.3 Segunda demonstração	29
<b>3 Condições integrais para resolubilidade e injetividade</b>	<b>32</b>
3.1 Condições integrais de resolubilidade numa meia-componente de Reeb	32
3.2 Um caso particular: polinômios de grau 3	34
3.3 Conjectura jacobiana e Conjectura jacobiana real	37
<b>4 Conjectura jacobiana reduzida</b>	<b>41</b>
4.1 Redução do grau	41
4.2 Uma ideia para a Conjectura jacobiana reduzida	42
4.3 Conjectura jacobiana reduzida em $\mathbb{R}^3$	44
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>49</b>
<b>A Demonstração das Proposições 4.8 e 4.10</b>	<b>51</b>

# Introdução

Consideremos  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^\infty$  tal que a aplicação derivada  $DF(x)$  seja invertível em cada ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ . Sabemos que  $F$  é um difeomorfismo local, mas não, necessariamente, global. Nem mesmo no caso de  $F$  ser polinomial. De fato, em 1994, Sergey Pinchuk ([20]) apresentou como contraexemplo uma aplicação polinomial  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , em que o grau de  $f$  é 10 e o grau de  $g$  é 25.

Recentemente José Ruidival dos Santos Filho, em [9], e em parceria com Joaquim Tavares, em [10], associou  $n$  campos de vetores à aplicação  $F$ , e demonstrou que a resolubilidade global de  $n - 1$  deles garante a sua injetividade. No caso do plano, os dois campos coincidem com os campos hamiltonianos  $H_f$  e  $H_g$ , associados a  $f$  e  $g$ , respectivamente, se denotamos  $F = (f, g)$ .

No presente trabalho, tratamos de aplicações polinomiais utilizando os campos vetoriais introduzidos por Santos Filho, procurando entender qual o papel do grau das componentes da aplicação na sua injetividade.

Primeiramente, no caso de  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , demonstramos que se o grau de  $f$  é menor ou igual a 3, então  $F$  é injetora, independentemente do polinômio  $g$  considerado. É interessante observar aqui que, relacionado com o exemplo de Pinchuk, temos o problema em aberto de saber qual o menor grau de  $f$  ou  $g$  para termos exemplos de  $F$  não injetoras. O nosso resultado garante que, para possíveis exemplos, os graus de  $f$  e  $g$  precisam ser, no mínimo, iguais a 4.

Passando para o problema em  $\mathbb{R}^n$ , o resultado bidimensional nos levou a considerar a injetividade de  $F(x) = x + H(x)$ , em que  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação polinomial homogênea de grau 3 e  $\det DF(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Tal consideração é relevante devido ao trabalho de Hyman Bass, Edwin H. Connell e David Wright, [2], que mostra que a injetividade de  $F$  com essa forma especial para todos  $n \in \mathbb{N}$  garante a validade da famosa Conjectura jacobiana, que afirma que  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , polinomial e tal que  $\det DF(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , é injetora. Nessa parte do trabalho, nossa contribuição foi mais na direção da introdução de uma técnica que usa os campos vetoriais de Santos Filho (mencionados acima) na análise do problema. Demonstramos que temos a injetividade quando  $n = 3$ , ilustrando o funcionamento de nossa técnica nesse caso.

O texto encontra-se dividido em quatro capítulos. No primeiro deles, apresentamos as definições e os conceitos básicos de resolubilidade global de campos vetoriais, introduzimos os campos de Santos Filho e apresentamos a relação entre a resolubilidade global deles e a injetividade de aplicações. No caso de  $\mathbb{R}^2$ , caracterizando a resolubilidade global do campo  $H_f$  em termos da conexidade das curvas de nível de  $f$ , apresentamos uma demonstração do resultado de Santos Filho. Mais ainda, apresentamos o conceito de “Meia-componente de Reeb” e sua relação com resolubilidade global de campos.

No Capítulo 2, tratamos de classificar todas as submersões polinomiais de grau menor ou igual a 3,  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , em termos de resolubilidade global de  $H_p$ , provando que, a menos de mudança de coordenadas afim, se  $H_p$  não é globalmente resolúvel, então  $p(x) = x_1(1 + x_1x_2)$ .

No Capítulo 3, obtemos certas condições integrais numa meia-componente de Reeb de um campo hamiltoniano  $H_f$ , para garantir ou não solução global do problema  $H_f g = h$ , com  $h$  dada. Depois, mostramos que tais condições sempre se verificam no caso do polinômio especial obtido no Capítulo 2. Daí, juntando este resultado com os resultados do Capítulo 1, mostramos que se o grau de  $f$  é menor ou igual a 3, então  $F = (f, g)$  é sempre injetora independentemente de qual for o polinômio  $g$ , que é o nosso resultado em  $\mathbb{R}^2$  mencionado acima.

Finalmente, no Capítulo 4, tratamos do problema da injetividade de  $F(x) = x + H(x)$  em  $\mathbb{R}^n$ . Propomos uma possível técnica para investigar tal problema utilizando o Teorema de Baouendi-Tréves. A técnica é aplicada no caso de  $\mathbb{R}^3$ . Os cálculos extensos, envolvendo polinômios de grau elevado são deixados para o Apêndice.

# Capítulo 1

## Resolubilidade global e injetividade. Primeiros resultados

### 1.1 Resolubilidade global e injetividade em $\mathbb{R}^n$

Nesta secção, daremos a motivação inicial do nosso trabalho, explicando como se chega à conexão entre a injetividade de uma aplicação e a resolubilidade de campos de vetores. Começamos com algumas considerações e notações, e a definição de um campo de vetores globalmente resolúvel. Sejam  $M$  uma variedade  $C^\infty$  e  $X : M \rightarrow TM$  um campo de vetores de classe  $C^\infty$ . Denotando por  $C^\infty(M)$  o espaço das funções de classe  $C^\infty$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos considerar  $X$  como um operador diferencial parcial  $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  definindo  $X(f)(x) = X(x)(f)$ , para  $f \in C^\infty(M)$  e  $x \in M$ . Quando a variedade for o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , podemos escrever  $Xf(x) = \sum X_i(x)\partial_i f(x)$ , em que  $X_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são as coordenadas de  $X$  relativas às coordenadas usuais de  $\mathbb{R}^n$ . Por vezes, identificaremos um campo em  $\mathbb{R}^n$  com sua função coordenada  $(X_1(x), \dots, X_n(x))$ . Escreveremos  $\gamma_x$  para a curva integral de  $X$  tal que  $\gamma_x(0) = x$ , e denotaremos  $I_x = (\omega^-, \omega^+)$  o seu intervalo maximal de definição.

**Definição 1.1.** Dizemos que um campo de vetores  $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  é *globalmente resolúvel* se for sobrejetor. Isto é, se satisfizer a propriedade de que para toda  $h \in C^\infty(M)$ , existe  $f \in C^\infty(M)$  tal que  $Xf = h$ .

Dada  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiremos agora  $n$  campos de vetores que são a nossa ferramenta básica para o estudo da injetividade de  $F$ . Sejam  $\mathcal{V}_{F,i} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , definidos por

$$\mathcal{V}_{F,i}(\phi) = \det(D(f_1 \dots f_{i-1}, \phi, f_{i+1} \dots f_n)), \quad (1.1.1)$$

em que  $f_j$ 's são as funções coordenadas de  $F$  e  $D$  é o operador derivada. Observemos que para definir cada  $\mathcal{V}_{F,i}$  só precisamos de  $n - 1$  funções  $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Além disso, desenvolvendo o determinante acima pela Regra de Cramer com relação à linha  $i$ , obtemos

que cada coordenada de  $\mathcal{V}_{F,i}$  é o determinante, a menos de sinal, de um dos menores  $(n-1) \times (n-1)$  da matriz

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_{i-1} & \cdots & \partial_n f_{i-1} \\ \partial_1 f_{i+1} & \cdots & \partial_n f_{i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n & \cdots & \partial_n f_n \end{pmatrix}.$$

Duas propriedades óbvias e muito importantes de  $\mathcal{V}_{F,i}$  são:  $\mathcal{V}_{F,i}(f_j) = 0$ , para todos  $j \neq i$  (isto é, o campo  $\mathcal{V}_{F,i}$  possui naturalmente  $n-1$  integrais primeiras) e  $\mathcal{V}_{F,i}(f_i) = \det DF$ .

O resultado seguinte, devido a José Ruidival dos Santos Filho, em [9], e depois, em colaboração com Joaquim Tavares, em [10], faz a ligação entre a injetividade de  $F$  e a resolubilidade dos campos acima definidos.

**Teorema 1.2.** *Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^\infty$  tal que  $\det DF(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Se existem  $n-1$  índices distintos,  $i_1, \dots, i_{n-1}$ , para os quais  $\mathcal{V}_{F,i_j}$  são campos globalmente resolúveis, então  $F$  é injetora.*

Esse resultado foi uma das motivações iniciais para o desenvolvimento de nosso Doutorado. Procuramos, primeiramente, entender melhor o conceito de resolubilidade global para posterior aplicação na busca por injetividade. Um resultado que vem clarear um pouco tal conceito é a seguinte série de equivalências à resolubilidade global de um campo de vetores, devidas a Johannes Jisse Duistermaat e Lars Hörmander em [12]:

**Teorema 1.3.** *São equivalentes:*

1.  $X$  é globalmente resolúvel;
2.  $(X + g)(C^\infty(M)) = C^\infty(M)$ ,  $\forall g \in C^\infty(M)$ ;
3. Existe  $\varphi \in C^\infty(M)$  tal que  $\varphi^{-1}\{(-\infty, c]\}$  é compacto para todo  $c \in \mathbb{R}$ , e  $X^2\varphi > 0$ ;
4. (a) Nenhuma curva integral de  $X$  é relativamente compacta;  
(b)  $\forall K$  compacto,  $\exists K'$  compacto tal que se  $x, y \in K$  estão em uma mesma curva integral de  $X$ ,  $\gamma$ , então  $[x, y] \subset K'$ , onde  $[x, y]$  é o intervalo da curva  $\gamma$  entre  $x$  e  $y$ ;
5.  $X$  não possui curvas integrais periódicas, e

$$R = \{(y_1, y_2) \in M \times M \mid y_1 \text{ e } y_2 \text{ estão na mesma curva integral de } X\}$$

é uma subvariedade  $C^\infty$ , fechada, de  $M \times M$ ;

6. *Existem uma variedade  $C^\infty$   $M_0$ , uma vizinhança aberta  $M_1$  de  $M_0 \times \{0\}$  em  $M_0 \times \mathbb{R}$ , que é convexa na direção de  $\mathbb{R}$ , e um difeomorfismo  $M \rightarrow M_1$  levando  $X$  no operador  $\partial/\partial t$ , se denotarmos os pontos de  $M_0 \times \mathbb{R}$  por  $(y_0, t)$ .*

Não demonstraremos o Teorema 1.3. Ao invés disso, na Secção 1.2, analisaremos especificamente o caso de  $M = \mathbb{R}^2$  e adicionaremos mais um item a ele no caso de  $X$  ser um campo hamiltoniano (Teorema 1.10). Esse, na verdade, será nosso primeiro resultado da tese. Como consequência, obteremos o Teorema 1.2, no caso de  $\mathbb{R}^2$ , de maneira independente e autocontida, bem como a sua recíproca, que *não* vale em geral (conforme veremos naquela secção), nos casos em que  $F$  é sobrejetora ou polinomial. Antes disso, porém, veremos algumas propriedades dos campos  $\mathcal{V}_{F,i}$  definidos acima, bem como uma aplicação dos Teoremas 1.3 e 1.2 a uma demonstração alternativa de um caso especial do Teorema de Hadamard (Corolário 1.7 abaixo).

**Observação 1.** O item 2 do Teorema 1.3 significa a sobrejetividade do operador  $X + g : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  definido por  $(X + g)f = Xf + gf$ .

**Exemplo 1.** Pelo item 4, nenhum campo em uma variedade compacta pode ser globalmente resolúvel.

**Observação 2.** A propriedade 4b do Teorema 1.3 é classicamente conhecida como *X-convexidade* de  $M$ . Dizemos, equivalentemente, que  $M$  é *convexa em relação a  $X$* . Na secção 1.3, estudaremos o conceito de meia-componente de Reeb de um campo  $X$  em  $\mathbb{R}^2$ : veremos que quando  $X$  tem meias-componentes de Reeb, então  $\mathbb{R}^2$  *não* é convexo em relação a  $X$ .

**Observação 3.** Se  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  for como no Teorema 1.2, isto é, se  $\det DF(x) \neq 0$  para todos  $x \in \mathbb{R}^n$ , então a  $\mathcal{V}_{F,i}$ -convexidade de  $\mathbb{R}^n$  é equivalente à resolubilidade global de  $\mathcal{V}_{F,i}$ . De fato, pelo item 4 do Teorema 1.3, basta mostrarmos que  $\mathcal{V}_{F,i}$  não possui curvas integrais relativamente compactas. Tal fato segue do Lema 1.6 abaixo.

Vejamos algumas propriedades das curvas integrais dos campos  $\mathcal{V}_{F,i}$  relacionadas com conjuntos de níveis de funções. Primeiramente, um resultado geral.

**Lema 1.4.** *Dada  $F = (f, g) : N \rightarrow L \times M$  um homeomorfismo local, com  $L, M$  e  $N$  variedades  $C^\infty$  ( $\dim N = \dim L + \dim M$ ) e  $M$  conexa, seja  $\lambda$  uma componente conexa de  $f^{-1}\{x\}$ ,  $x \in L$ . Se  $\lambda$  for compacta, então  $M$  também o será.*

*Demonstração.* Da conexidade de  $M$  e da compacidade de  $g(\lambda)$ , basta mostrar que  $g(\lambda)$  é aberto, pois daí  $M = g(\lambda)$ , um compacto. Vejamos. Dado  $z \in \lambda$ , temos que existem  $A \subset L$ ,  $B \subset M$  e  $C \subset N$  vizinhanças de  $x = f(z)$ ,  $y = g(z)$  e  $z$ , respectivamente tais que

$F|_C : C \rightarrow A \times B$  é um homeomorfismo. Podemos supor que  $C$  não intercepte nenhuma outra componente conexa de  $f^{-1}\{x\}$ . Agora, dado  $b \in B$ , temos que existe  $c \in C$  tal que  $F(c) = (x, b)$ . Em particular,  $c \in \lambda$ , seguindo que  $B = g(\lambda \cap C)$ . Cobrindo  $\lambda$  por vizinhanças como essas, temos que  $g(\lambda)$  é aberto.  $\square$

**Lema 1.5.** *Seja  $f = (f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  uma submersão. Então as componentes conexas não vazias de*

$$\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j^{-1}\{c_j\}, \quad c_j \in \mathbb{R},$$

*são as curvas integrais do campo  $\mathcal{V}_{F,i}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\gamma_x$  a curva integral do campo  $\mathcal{V}_{F,i}$  que passa por  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $C_x$  a componente conexa de  $\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j^{-1}\{f_j(x)\}$  que contém  $x$ . Temos que

$$(f_j \circ \gamma_x)(0) = f_j(x) \quad \text{e} \quad (f_j \circ \gamma_x)'(t) = \mathcal{V}_{F,i}(f_j)(\gamma_x(t)) = 0, \quad \forall j \neq i,$$

seguindo que  $(f_j \circ \gamma_x)(t) = f_j(x)$ , para todos  $t \in I_x$  e  $j \neq i$ . Assim,  $\gamma_x \subset C_x$ .

Desde que o Teorema da Função Implícita garante que  $C_x$  é uma variedade (conexa) de dimensão 1 e o campo  $\mathcal{V}_{F,i}$  não tem singularidades (observe que as coordenadas de  $\mathcal{V}_{F,i}$  são os menores  $(n-1) \times (n-1)$  da matriz jacobiana de  $f$ ), a maximalidade de  $\gamma_x$  garante que  $\gamma_x = C_x$ .  $\square$

**Lema 1.6.** *Dada  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\det DF(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , consideremos as curvas integrais  $\gamma_x(t)$  do campo  $\mathcal{V}_{F,i}$ . Temos que as semiórbitas positivas e negativas de  $\gamma_x$ ,*

$$\gamma_x^{+(-)} = \{\gamma_x(t), t \geq 0 \ (t \leq 0)\},$$

*são ilimitadas.*

*Demonstração.* Ponhamos  $f = (f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n)$  e  $g = f_i$ , em que  $f_j$ 's são as funções coordenadas de  $F$ . Dessa forma, as hipóteses dos Lemas 1.4 e 1.5 estão satisfeitas, seguindo que  $\gamma_x$  não é um conjunto limitado. Mais ainda, como  $\gamma_x = C_x$  é um conjunto fechado, o  $w$  e o  $\alpha$ -limites de  $\gamma_x$  são vazios, seguindo que  $\gamma_x^+$  e  $\gamma_x^-$  são ilimitados.  $\square$

Uma condição suficiente e necessária para que um homeomorfismo local seja um homeomorfismo é que ele seja próprio. Esse resultado é classicamente conhecido como Condição de Hadamard (para referências, ver, por exemplo, [21], onde é feita uma extensa discussão envolvendo injetividade e propriedades topológicas de uma aplicação). No Corolário abaixo, aplicamos os dois teoremas principais desta secção (1.2 e 1.3) para obter tal resultado em um caso especial:

**Corolário 1.7** (Condição de Hadamard). *Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação  $C^\infty$  tal que  $\det DF \equiv d$ ,  $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Então  $F$  é um difeomorfismo se, e somente se,  $F$  é própria.*

*Demonstração.* É claro que se  $F$  for um difeomorfismo, ela é própria. Para a recíproca, o ponto chave é a injetividade de  $F$ , uma vez que a sobrejetividade segue facilmente do fato de que o conjunto  $F(\mathbb{R}^n)$  é aberto e fechado em  $\mathbb{R}^n$ . Portanto, investiguemos a injetividade da aplicação. Como  $F$  é própria, a função  $\varphi(x) \doteq |F(x)|^2 = \sum_{i=1}^n f_i(x)^2$  é tal que  $\varphi^{-1}\{(-\infty, c]\}$  é um conjunto compacto, para qualquer  $c \in \mathbb{R}$ . Observemos que

$$\mathcal{V}_{F,i}^2(\varphi) = \mathcal{V}_{F,i}(2df_i) = 2d^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

seguindo do item 3 do Teorema 1.3 que os  $\mathcal{V}_{F,i}$ 's são todos globalmente resolúveis, e, portanto, pelo Teorema 1.2,  $F$  é injetora.  $\square$

## 1.2 Resolubilidade global e injetividade em $\mathbb{R}^2$

Nesta secção, particularizemos as considerações da secção anterior para o caso de  $\mathbb{R}^2$ . Começemos, para fixar a notação, com a definição do usual campo hamiltoniano associado a uma função.

**Definição 1.8.** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Definimos o *campo hamiltoniano* associado a  $f$  por

$$H_f(\phi) = -\partial_2 f \partial_1 \phi + \partial_1 f \partial_2 \phi,$$

para  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

Como um primeiro resultado, caracterizaremos, no Teorema 1.10 abaixo, a resolubilidade global de  $H_f$  pela conexidade de todos os conjuntos de nível de  $f$ . Obteremos daí, como já adiantado acima, o Teorema 1.2 de forma independente. Discutiremos a recíproca deste Teorema e provaremos nos Corolários 1.13 e 1.15 abaixo que ela vale em casos especiais. Antes disso, porém, façamos algumas considerações

Seja  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação. Observemos que  $\mathcal{V}_{F,1} = -H_g$  e  $\mathcal{V}_{F,2} = H_f$ . Dessa forma, vemos que os campos  $\mathcal{V}_{F,i}$  definidos acima são uma generalização para mais variáveis dos hamiltonianos de  $\mathbb{R}^2$ . Logo, pelo Teorema 1.2, somos motivados a estudar campos hamiltonianos para conhecer a injetividade de aplicações. Notemos, porém, que tais “hamiltonianos generalizados” *não* coincidem, para dimensões maiores do que 2, com os campos hamiltonianos que estamos acostumados a definir em dimensões pares.

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^\infty$ . Pelo Lema 1.5, se  $H_f$  nunca se anula ( $\Leftrightarrow \nabla f$  nunca se anula), então as componentes conexas dos conjuntos de nível de  $f$  são as curvas integrais de  $H_f$ . Mais ainda, em  $\mathbb{R}^2$  temos um resultado quase análogo ao Lema 1.6: é o

Lema 1.9 abaixo, que é mais forte do que o referido resultado, uma vez que só depende das propriedades sobre uma única função  $f$ . Sua demonstração é uma consequência imediata do Teorema de Poincaré-Bendixon, uma vez que em um campo que nunca se anula, em  $\mathbb{R}^2$ , não há curvas integrais limitadas.

**Lema 1.9.** *Se  $\nabla f$  nunca se anula, então os conjuntos  $\omega$  e  $\alpha$ -limites de qualquer curva integral do campo  $H_f$  são vazios. Em particular,  $\gamma_x^+$  e  $\gamma_x^-$  são ilimitados.*

**Observação 4.** Assim como na Observação 3, se  $H_f$  nunca se anula, esse último Lema e o item 4 do Teorema 1.3 nos mostram que a  $H_f$ -convexidade de  $\mathbb{R}^2$  é equivalente à resolubilidade global de  $H_f$ .

Vejamos, agora, o resultado mencionado acima:

**Teorema 1.10.** *Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $H_f$  nunca se anule. Então  $H_f$  é globalmente resolúvel se, e somente se, o conjunto de nível  $f^{-1}\{c\}$  é conexo para todo  $c \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Primeiro, demonstraremos ( $\Rightarrow$ ). Suponhamos, por contradição, que exista  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sejam duas componentes conexas distintas de  $f^{-1}\{c\}$ . Mostraremos que  $\mathbb{R}^2$  não é convexo em relação a  $H_f$ , chegando a uma contradição com a hipótese e a Observação 4.

Tomemos  $a \in \Gamma_1$  e  $b \in \Gamma_2$ . Do Lema 1.9, segue que  $\Gamma_1 = \gamma_a$  e  $\Gamma_2 = \gamma_b$ , e que  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  separam o plano em três regiões ilimitadas e conexas. Chamemos  $R$  a região conexa cuja fronteira é  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Seja  $L : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva  $C^\infty$  sem autointerseções tal que  $L(0) = a$ ,  $L(1) = b$  e  $L((0, 1)) \subset R$ , e chamemos  $K = L([0, 1])$ . Notemos que  $K$  separa  $R$  em duas regiões ilimitadas e conexas  $R_1$  e  $R_2$ . Definamos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\doteq \{ \gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow R \mid \forall r > 0, \exists t_1 < t_2 \in I : |\gamma(t)| > r, \forall t < t_1, \forall t > t_2 \in I \}, \\ \mathcal{C}_1^j &\doteq \{ \gamma \in \mathcal{C} \mid \exists t' < t'' \in I : \gamma(t) \in R_j, \forall t < t', \forall t > t'' \in I \}, \quad j = 1, 2, \quad \text{e} \\ \mathcal{C}_2 &\doteq \mathcal{C} \setminus (\mathcal{C}_1^1 \cup \mathcal{C}_1^2). \end{aligned}$$

Temos a união disjunta  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1^1 \cup \mathcal{C}_1^2 \cup \mathcal{C}_2$ . Mais ainda, do Lema 1.9 e do Teorema do Fluxo Tubular, temos que para todo  $x \in R$ , a curva integral  $\gamma_x$  de  $H_f$  é um elemento de  $\mathcal{C}$ . Consideremos a função  $h(t) \doteq f(L(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ . Desde que  $h(0) = h(1)$  e  $h$  não é constante (as curvas integrais do campo são as componentes conexas das curvas de nível de  $f$ , conforme Lema 1.5), trocando  $f$  por  $-f$  (se necessário), podemos assumir que  $h$  tem um máximo global em um ponto  $t_0 \in (0, 1)$ , com, obviamente,  $h(t_0) > h(0)$ .

Afirmamos que  $\gamma_{L(t_0)} \subset R_1 \cup K$  ou  $\gamma_{L(t_0)} \subset R_2 \cup K$ . Em particular,  $\gamma_{L(t_0)} \in \mathcal{C}_1^1$  ou  $\gamma_{L(t_0)} \in \mathcal{C}_1^2$ , respectivamente. De fato, se as duas alternativas fossem falsas, existiriam  $s_1 \neq s_2 \in I_{L(t_0)}$  tais que  $\gamma_{L(t_0)}(s_1) \in R_1$  e  $\gamma_{L(t_0)}(s_2) \in R_2$  (Figura 1.2.1). Então, como

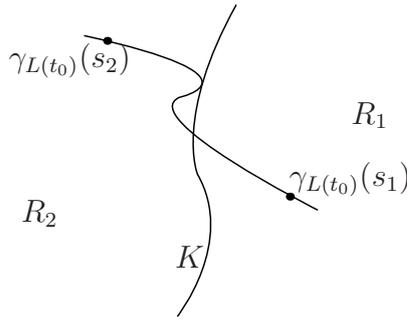


Figura 1.2.1: A curva integral  $\gamma_{L(t_0)}$  cortando  $K$ .

$\nabla f \neq 0$ , seguiria por dependência contínua dos dados iniciais que existiria  $t' \in (0, 1)$  tal que

$$h(t') = f(L(t')) > f(L(t_0)) = h(t_0),$$

uma contradição com o fato de  $t_0$  ser um ponto de máximo global de  $h$ . Suponhamos agora, sem perda de generalidade, que

$$t_0 = \inf \{t \in (0, 1) \mid t \text{ é um máximo global de } h\},$$

e que  $\gamma_{L(t_0)} \subset R_1 \cup L$  (assim  $\gamma_{L(t_0)} \in \mathcal{C}_1^1$ ). Observe a Figura 1.2.2, em que temos uma configuração típica para a região  $R$  e a curva  $\gamma_{L(t_0)}$ . Definindo

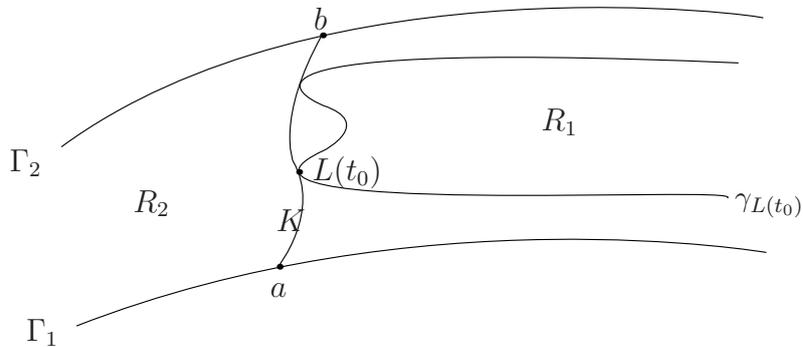


Figura 1.2.2: A componente conexa  $R$ .

$$t_1 \doteq \inf \{t \in (0, 1) \mid \gamma_{L(t)} \in \mathcal{C}_1^1\},$$

há três possibilidades para  $t_1$ :

1.  $t_1 = 0$ ;
2.  $t_1 = t_0$ ;
3.  $t_1 \in (0, t_0)$ .

Analisaremos abaixo essas três possibilidades. Para cada uma delas, mostraremos a não-convexidade de  $\mathbb{R}^2$  em relação a  $H_f$ , encerrando a demonstração de  $(\Rightarrow)$ .

Se ocorrer 1, então existe uma sequência  $t_n \rightarrow 0$  tal que  $\gamma_{L(t_n)} \in \mathcal{C}_1^1$ . Considerando o compacto  $K$  dado acima, se  $K' \subset \mathbb{R}^2$  é qualquer outro compacto, existem  $y \in \Gamma_1$  e  $\varepsilon > 0$  tais que  $B(y, \varepsilon) \cap (K \cup K') = \emptyset$  e  $B(y, \varepsilon) \cap R_2 \neq \emptyset$ , onde  $B(y, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < \varepsilon\}$  é a bola de centro  $y$  e raio  $\varepsilon$ . Seja  $s_y \in I_a$  tal que  $\gamma_a(s_y) = y$ . Temos por dependência contínua dos dados iniciais que existe  $\delta > 0$  tal que  $|x - a| < \delta \implies |\gamma_x(s_y) - y| < \varepsilon$ . Assim, tomando  $t_{n_\varepsilon}$  tal que  $|L(t_{n_\varepsilon}) - a| < \delta$ , segue que  $\gamma_{L(t_{n_\varepsilon})}(s_y) \notin K'$ . Desde que  $\gamma_{L(t_{n_\varepsilon})} \in \mathcal{C}_1^1$ , existe  $s' \in I_{L(t_{n_\varepsilon})}$  tal que  $s_y$  está contido no intervalo definido por 0 e  $s'$ , e  $\gamma_{L(t_{n_\varepsilon})}(s') \in K$ . Chamando  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = s_y$  e  $s_3 = s'$  segue que  $\gamma_{L(t_{n_\varepsilon})}(s_i) \in K$ ,  $i = 1, 3$ , e  $\gamma_{L(t_{n_\varepsilon})}(s_2) \notin K'$ . Isso mostra que  $\mathbb{R}^2$  não é  $H_f$ -convexo.

Se ocorrer 2, para todo  $t \in (0, t_1)$ , temos que  $\gamma_{L(t)} \in \mathcal{C}_1^2 \cup \mathcal{C}_2$ . Novamente considerando o compacto  $K$  dado acima, se  $K' \subset \mathbb{R}^2$  é qualquer outro compacto, existem  $s' < 0 < s'' \in I_{L(t_0)}$  e  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(\gamma_{L(t_0)}(s'), \varepsilon) \cap (K \cup K') = \emptyset$  e  $B(\gamma_{L(t_0)}(s''), \varepsilon) \cap (K \cup K') = \emptyset$ . Então temos que existe  $\delta > 0$  tal que  $|x - L(t_0)| < \delta \implies |\gamma_x(s') - \gamma_{L(t_0)}(s')| < \varepsilon$  e  $|\gamma_x(s'') - \gamma_{L(t_0)}(s'')| < \varepsilon$ . Tomando  $t \in (0, t_0)$  tal que  $|L(t) - L(t_0)| < \delta$ , segue que  $\gamma_{L(t)}(s')$ ,  $\gamma_{L(t)}(s'') \notin K'$ . Se  $\gamma_{L(t)} \in \mathcal{C}_1^2$ , existem pelo menos dois pontos  $s_1 < s' < s'' < s_3 \in I_{L(t)}$  tais que  $\gamma_{L(t)}(s_i) \in K$ ,  $i = 1, 3$ . Nesse caso, tomamos  $s_2 = s'$ . Por outro lado, se  $\gamma_{L(t)} \in \mathcal{C}_2$ , existe ao menos um ponto  $\bar{s} \in I_{L(t)}$ ,  $\bar{s} < s'$ , ou  $\bar{s} > s''$  tal que  $\gamma_{L(t)}(\bar{s}) \in K$ . Nesse caso, tomamos  $s_1 = \bar{s}$  e  $s_3 = 0$ , ou  $s_1 = 0$  e  $s_3 = \bar{s}$ , de forma que  $s_1 < s_3$ , e tomamos  $s_2 = s'$  ou  $s_2 = s''$ , respectivamente. Então, nos dois casos acima, teremos  $s_1 < s_2 < s_3$  tais que  $\gamma_{L(t)}(s_i) \in K$ ,  $i = 1, 3$  e  $\gamma_{L(t)}(s_2) \notin K'$ . Isso mostra a não-convexidade de  $\mathbb{R}^2$  em relação a  $H_f$ .

Se ocorrer 3, temos três casos:  $\gamma_{L(t_1)} \in \mathcal{C}_2$ ,  $\gamma_{L(t_1)} \in \mathcal{C}_1^1$  ou  $\gamma_{L(t_1)} \in \mathcal{C}_1^2$ . No primeiro, basta repetir os argumentos da demonstração do caso 1 acima (trocando  $\Gamma_1 = \gamma_a$  por  $\gamma_{L(t_1)}$ ), enquanto que no segundo, repetimos os argumentos da demonstração do caso 2 acima (trocando  $\gamma_{L(t_0)}$  por  $\gamma_{L(t_1)}$ ) para mostrar que  $\mathbb{R}^2$  não é convexo em relação a  $H_f$ . Agora o terceiro caso não pode ocorrer, porque se pudesse, tomaríamos  $s' < s'' \in I_{L(t_1)}$  tais que  $\gamma_{L(t_1)}(s) \in R_2$ , para todos  $s \leq s'$  e  $s \geq s''$ ,  $s \in I_{L(t_1)}$ , e  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(\gamma_{L(t_1)}(s'), \varepsilon)$ ,  $B(\gamma_{L(t_1)}(s''), \varepsilon) \subset R_2$ , e  $B(\gamma_{L(t_1)}(s'), \varepsilon) \cap B(\gamma_{L(t_1)}(s''), \varepsilon) = \emptyset$ . Pela definição de  $t_1$  e por dependência contínua, existiria  $t > t_1$  tal que

$$\gamma_{L(t)} \in \mathcal{C}_1^1 \text{ e } \begin{cases} \gamma_{L(t)}(s') \in B(\gamma_{L(t_1)}(s'), \varepsilon) \\ \gamma_{L(t)}(s'') \in B(\gamma_{L(t_1)}(s''), \varepsilon) \end{cases}.$$

Desde que  $\gamma_{L(t)} \in \mathcal{C}_1^1$ , existiriam  $s_1 < s' < s'' < s_2$  tais que  $\gamma_{L(t)}(s_i) \in L$ ,  $i = 1, 2$ , e  $\gamma_{L(t)}(s) \in R_1$  para todos  $s < s_1$ ,  $s > s_2$ ,  $s \in I_{L(t)}$ . Mas isso seria uma contradição com a definição de  $t_1$  (pois teríamos  $\gamma_{L(t)}(s_i) = L(t_2)$ , com  $t_2 < t_1$ , para  $i = 1$  ou  $i = 2$ ).

Agora demonstraremos ( $\Leftarrow$ ). Suponhamos, por contradição, que  $H_f$  não é globalmente resolúvel. Encontraremos um conjunto de nível de  $f$  com duas componentes conexas distintas.

Pela Observação 4 e pela parte 4b do Teorema 1.3, existe um compacto  $K \subset \mathbb{R}^2$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existem  $x_n \in K$  e  $0 < s_n < t_n \in I_{x_n}$  tais que  $\gamma_{x_n}(t_n) \in K$  mas  $\gamma_{x_n}(s_n) \notin B(0, n)$ . Tomando uma subsequência, podemos assumir que  $x_n \rightarrow a \in K$  e  $\gamma_{x_n}(t_n) \rightarrow b \in K$ . Pela continuidade de  $f$  (as curvas integrais do campo são as componentes conexas das curvas de nível de  $f$ ), segue que

$$f(a) = f(b).$$

Notemos que  $\gamma_a$  separa o plano em duas regiões conexas ilimitadas  $R_1$  e  $R_2$ . Do Teorema do Fluxo Tubular, existe  $r > 0$  tal que as partes de curvas integrais no interior de  $B(a, r)$  têm todas a mesma orientação de  $\gamma_a$ . Tomando outra subsequência (se necessário), podemos assumir que  $x_n \in R_1 \cap B(a, r)$ , e como uma consequência  $\gamma_{x_n} \subset R_1$  para todos  $n \in \mathbb{N}$ . Mais ainda, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\gamma_{x_n}(s_n) \notin B(a, r)$  para todos  $n \geq n_0$ .

Afirmamos que  $\gamma_{x_n}(t_n) \notin B(a, r)$ ,  $\forall n \geq n_0$ . De fato, se  $\gamma_{x_n}(t_n) \in B(a, r)$ , então, neste ponto,  $\gamma_{x_n}$  seria orientada como  $\gamma_a$ , o que contradiria  $\gamma_{x_n}^+$  e  $\gamma_{x_n}^-$  serem conjuntos ilimitados (observemos as duas possibilidades na Figura 1.2.3).

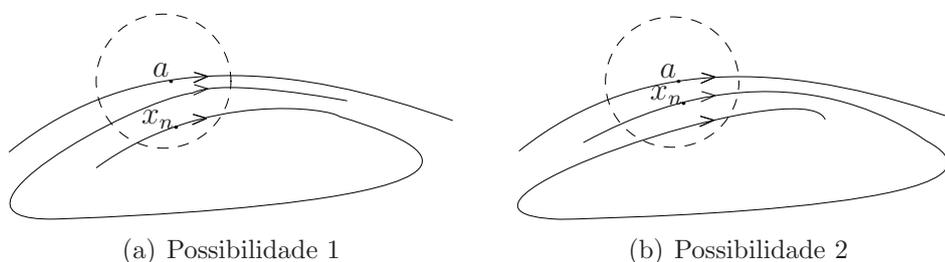


Figura 1.2.3: As duas possibilidades para a curva integral  $\gamma_{x_n}$  se  $\gamma_{x_n}(t_n) \in B(a, r)$ .

Assim,  $b \notin B(a, r/2)$ , e temos duas possibilidades para  $b$ :  $b \in \gamma_a$  ou  $b \in R_1$ . Se  $b \in \gamma_a$ , existe  $0 < t_0 \in I_a$  tal que  $\gamma_a(t_0) = b$ . Então usamos o Teorema de Fluxo Tubular para construir uma vizinhança tubular  $T$  ao redor do intervalo de curva compacto  $\{\gamma_a(t) \mid t \in [0, t_0]\}$ , suficientemente pequeno para ter sua parte inicial no interior de  $B(a, r)$  (isto assegurará que cada curva integral  $\gamma_z$  passando pelo tubo o faz somente uma única vez). Mas então  $\gamma_{x_n}(s_n) \in T$ ,  $\forall n \geq n_0$ , uma contradição com  $T$  ser limitado. Assim  $b \in R_1$ , e  $\gamma_a$  e  $\gamma_b$  são duas componentes conexas distintas do conjunto de nível  $f^{-1}\{f(a)\}$ . Isso encerra a demonstração de ( $\Leftarrow$ ), e, portanto, do Teorema.  $\square$

Agora, como consequência imediata do Teorema 1.10 e do Lema 1.12 abaixo, obtemos o corolário seguinte, que é o Teorema 1.2 no caso de  $\mathbb{R}^2$ :

**Corolário 1.11.** *Seja  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação de classe  $C^\infty$  tal que  $\det DF$  nunca se anule. Se  $H_f$  ou  $H_g$  é globalmente resolúvel, então  $F$  é injetora.*

**Lema 1.12.** *Seja  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de classe  $C^\infty$ , tal que  $\det DF$  nunca se anule. Se o conjunto de nível  $f^{-1}\{c\}$  é conexo para todo  $c \in \mathbb{R}$ , então  $F$  é injetora. O mesmo vale se os conjuntos de nível de  $g$  forem conexos.*

*Demonstração.* Suponhamos que os conjuntos de nível de  $f$  são conexos. Sejam  $a \neq b \in \mathbb{R}^2$  tais que  $f(a) = f(b)$ . Consideremos  $\varphi(t)$  a curva que parametriza  $f^{-1}\{f(a)\}$  como curva integral de  $H_f$  (conforme o Lema 1.5). Temos que  $(g \circ \varphi)'(t) = H_f(g) = \det DF(\varphi(t)) \neq 0$ . Assim,  $g$  é estritamente monótona ao longo de  $\varphi$ , implicando que  $g(a) \neq g(b)$ . Logo,  $F$  é injetora.  $\square$

A recíproca desse Lema, e, portanto, também a recíproca do Corolário 1.11, são falsas, como mostra o segundo dos seguintes exemplos:

**Exemplo 2.** Seja  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $F(x, y) = ((1 - x^2)e^y, -xe^y)$ . Temos que  $\det DF(x, y) = (1 + x^2)e^{2y} > 0$ . Como os conjuntos de nível de  $g$  são conexos,  $F$  é injetora pelo Lema 1.12. Mas o conjunto de nível  $f^{-1}\{0\}$  é formado por duas componentes conexas.

**Exemplo 3.** Em [14], Carlos Gutierrez, Xavier Jarque, Jaume Llibre e Marco Antonio Teixeira constroem o seguinte exemplo: Sejam  $I = (0, 1)$ ,  $\varepsilon = 1/10$  e  $G = (g_1, g_2) : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$g_1(x, y) = (y - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 x^2 \quad \text{e} \quad g_2(x, y) = (y - 1 + \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 x^2.$$

Dado  $H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ , afirmamos que  $F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $F = G \circ H^{-1}$  é tal que  $\det DF$  nunca se anula, é (globalmente) injetora, e os conjuntos de nível  $f_1^{-1}\{0\}$  e  $f_2^{-1}\{0\}$  são ambos desconexos. De fato, uma vez que  $H^{-1}$  é um difeomorfismo, basta mostrar que essas propriedades valem para  $G$ . Notemos que  $\det DG(x, y) = 4\varepsilon^2(1 - 2\varepsilon)x$ , que não se anula em  $I \times I$ . Além disso, impondo  $G(x, y) = G(x', y')$ , com simples cálculos concluímos que  $x = x'$  e  $y = y'$ , seguindo que  $G$  é injetora. Para finalizar, não é difícil de ver que o conjunto de nível  $g_1^{-1}\{0\}$  é formado pelas duas componentes conexas disjuntas a seguir, escritas como funções de  $y$ :

$$x = \frac{1}{\varepsilon}(y - \varepsilon), \quad y \in (\varepsilon, 2\varepsilon) \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon - y), \quad y \in (0, \varepsilon).$$

Analogamente, vemos que o conjunto de nível  $g_2^{-1}\{0\}$  é formado pelas componentes conexas

$$x = \frac{1}{\varepsilon}(y - 1 + \varepsilon), \quad y \in (1 - \varepsilon, 1) \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{\varepsilon}(-y + 1 - \varepsilon), \quad y \in (1 - 2\varepsilon, 1 - \varepsilon),$$

o que encerra o exemplo.

Agora, conforme poderíamos esperar, quando temos a sobrejetividade de  $F$  tudo funciona bem: vejamos o seguinte

**Corolário 1.13.** *Seja  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^\infty$ , tal que  $\det DF$  nunca se anule. Se  $F$  for sobrejetora, então são equivalentes:*

1.  $F$  é injetora;
2.  $H_f$  e  $H_g$  são globalmente resolúveis;
3.  $H_f$  ou  $H_g$  é globalmente resolúvel.

*Demonstração.* Se  $F$  é bijetora, então  $f^{-1}\{c\} = F^{-1}(\{c\} \times \mathbb{R})$  é conexo (pois  $F$  é um difeomorfismo). O mesmo para  $g$ . Logo, pelo Teorema 1.10,  $H_f$  e  $H_g$  são globalmente resolúveis, mostrando que  $1 \implies 2$ .  $2 \implies 3$  é trivial, enquanto que  $3 \implies 1$  segue do Teorema 1.2. □

Para terminar esta secção, enunciaremos um resultado de Andrzej Białynicki-Birula e Maxwell Rosenlicht ([3]), que nos permitirá retirar a sobrejetividade das hipóteses do Corolário 1.13 para o caso de aplicações polinomiais (Corolário 1.15). Mais tarde, ao falarmos sobre a conjectura jacobiana, faremos nova menção a este resultado.

**Teorema 1.14.** *Seja  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  uma aplicação polinomial. Se  $F$  é injetora, então  $F$  é sobrejetora.*

O Teorema 1.14 foi primeiramente demonstrado para  $\mathbb{R}^2$  por Donald J. Newman em [18]. Para o caso  $\mathbb{C}^n$ , Walter Rudin deu uma demonstração mais elementar do que a original em [23]. Conforme dito acima, esse Teorema nos permite concluir o seguinte:

**Corolário 1.15.** *Seja  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial tal que  $\det DF$  nunca se anule. São equivalentes:*

1.  $F$  é injetora;
2.  $F$  é bijetora;
3.  $H_f$  e  $H_g$  são globalmente resolúveis;
4.  $H_f$  ou  $H_g$  é globalmente resolúvel.

*Demonstração.* Basta combinar o Teorema 1.14 com os Corolários 1.13 e 1.11. □

### 1.3 Meia-componente de Reeb

Nesta secção, introduziremos o conceito de meia-componente de Reeb de uma folheação de  $\mathbb{R}^2$ . Veremos que se a folheação dada por um campo sem singularidades possui uma meia-componente de Reeb, então tal campo não é globalmente resolúvel. Esta secção, portanto, liga conceitos analíticos a conceitos topológicos.

**Definição 1.16** (mcR).<sup>1</sup> Sejam  $h_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h_0(x, y) = xy$  e

$$B = \{(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2] \mid 0 < x + y \leq 2\}.$$

Dada  $\Gamma$  uma folheação  $C^0$  de  $\mathbb{R}^2$ , dizemos que  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  é uma *meia-componente de Reeb* (ou, simplesmente, uma *mcR*) de  $\Gamma$  se existe um homeomorfismo  $T : B \rightarrow \mathcal{A}$  que conjugua topologicamente a folheação determinada pelas curvas integrais de  $H_{h_0}$  (o campo hamiltoniano de  $h_0$ ) restrita a  $\overset{\circ}{B}$  e a folheação  $\Gamma$  restrita a  $\overset{\circ}{\mathcal{A}}$ , satisfazendo:

- O segmento  $\{(x, y) \in B \mid x + y = 2\}$  é levado por  $T$  em um segmento que intersecta as folhas de  $\Gamma$  transversalmente (a menos do ponto  $T(1, 1)$ ). Diremos que este é o *lado compacto* de  $\mathcal{A}$ .
- Os segmentos  $\{(x, y) \in B \mid x = 0\}$  e  $\{(x, y) \in B \mid y = 0\}$  são levados por  $T$  em semitrajetórias de  $\Gamma$ . Diremos que estes são os *lados não compactos* de  $\mathcal{A}$ . (Vide Figura 1.3.1.)

Dizemos que um campo de vetores que não se anula (em  $\mathbb{R}^2$ ) *tem uma mcR* se a folheação dada por suas curvas integrais tem uma mcR.

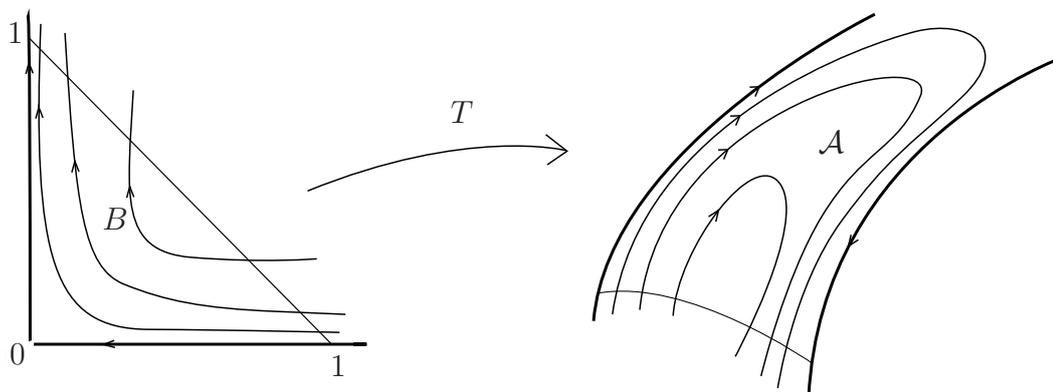


Figura 1.3.1: Definição de mcR

<sup>1</sup>Esta definição aparece, por exemplo, no trabalho [8], de Milton Cobo, Carlos Gutierrez e Jaume Llibre.

**Observação 5.** Notemos que dada uma mcR  $\mathcal{A}$  de uma folheação  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^2$ , sempre é possível modificar a posição do seu lado compacto para obter outra mcR com as mesmas propriedades de  $\mathcal{A}$ . De fato, consideremos  $\phi_p$  e  $\phi_q$  as duas folhas de  $\Gamma$  que contêm os lados não compactos de  $\mathcal{A}$ . Tomemos qualquer segmento que comece em  $\phi_p$  e termine em  $\phi_q$  de tal forma que intercepte transversalmente, a menos de um ponto, todas as folhas de  $\Gamma$  na componente conexa de  $\mathbb{R}^2$  determinada por  $\phi_p$  e  $\phi_q$ . Tal segmento divide a componente conexa determinada por  $\phi_p$  e  $\phi_q$  em duas regiões. A região que contém a parte não compacta de  $\mathcal{A}$  certamente é uma mcR de  $\Gamma$ . *Não diferenciaremos duas mcRs como essas.*

Dados  $X : C^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2)$  um campo de vetores *sem singularidades* e  $\mathcal{A}$  uma sua mcR, mostremos que  $\mathbb{R}^2$  não é  $X$ -convexo, seguindo que  $X$  não é globalmente resolúvel (pelo Teorema de Poincaré-Bendixon e pelo item 4 do Teorema 1.3). De fato, tomando  $K$  igual ao lado compacto de  $\mathcal{A}$ , observamos que para qualquer compacto  $K' \subset \mathbb{R}^2$ , existe (pela definição de mcR) uma curva integral  $\gamma$  de  $X$  tal que  $x, y \in K \cap \gamma$ , mas  $[x, y] \setminus K' \neq \emptyset$ , onde  $[x, y]$  é o intervalo da curva  $\gamma$  entre  $x$  e  $y$ .

# Capítulo 2

## Polinômios de grau 3 no plano

Este capítulo lida exclusivamente com a classe das funções polinomiais de grau menor ou igual a 3 do plano. Nosso objetivo é classificar, a menos de mudanças de coordenadas afins, todas as submersões polinomiais de grau menor ou igual a 3,  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , em termos da resolubilidade global do campo hamiltoniano associado a  $p$  (Teorema 2.1 abaixo). Observemos que a classe acima mencionada é invariante por mudanças de coordenadas afins. O capítulo está dividido em três seções: na primeira delas estabelecemos o resultado e começamos a sua demonstração, e nas outras duas finalizamos a demonstração de duas maneiras diferentes.

### 2.1 Um polinômio especial

Denotemos pontos do  $\mathbb{R}^2$  por  $(x, y)$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ . O objetivo principal desta seção é o estabelecimento do seguinte Teorema:

**Teorema 2.1.** *Seja  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  um polinômio de grau menor ou igual a 3. Se  $H_p$  não se anula em nenhum ponto de  $\mathbb{R}^2$  e não é globalmente resolúvel, então existem  $T$ , uma mudança de coordenadas afim, e  $\alpha \neq 0$  tais que se  $\tilde{p} = \alpha p \circ T^{-1}$ , então*

$$\tilde{p}(x, y) = \kappa + x(1 + xy), \quad (2.1.1)$$

com  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

Pelo Teorema 1.10, a conexidade de todas as curvas de nível de uma submersão  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é equivalente à resolubilidade global do campo hamiltoniano associado a  $f$ ,  $H_f$ . Utilizaremos essa ferramenta para demonstrar o Teorema 2.1. Consideremos, inicialmente, o seguinte resultado, baseado no Lema 1 do trabalho [13], de Armengol Gasull, Jaume Llibre e Li Ren Sheng:

**Lema 2.2.** *Seja  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  um polinômio de grau menor ou igual a 3. Então existem  $T$ , uma mudança de coordenadas afim, e  $\alpha \neq 0$  tais que  $\alpha p \circ T^{-1}$  é igual a um dos dez*

polinômios abaixo:

$$\begin{array}{ll}
 (I) & p_1(x, y) = y + \frac{1}{2}xy^2 + g(x), & (VI) & p_6(x, y) = y + x^2y + g(x), \\
 (II) & p_2(x, y) = \frac{1}{2}xy^2 + g(x), & (VII) & p_7(x, y) = x^2y + g(x), \\
 (III) & p_3(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + x^2y + g(x), & (VIII) & p_8(x, y) = xy + g(x), \\
 (IV) & p_4(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + g(x), & (IX) & p_9(x, y) = y + g(x), \\
 (V) & p_5(x, y) = -y + x^2y + g(x), & (X) & p_{10}(x, y) = g(x),
 \end{array}$$

com  $g(x) = \kappa + l_2x + l_1x^2 + l_0x^3$ .

*Demonstração.* Nesta demonstração, mudaremos de variáveis uma série de vezes, mas sempre denotaremos o polinômio  $p$  usando  $x$  e  $y$ . Além disso, os coeficientes do polinômio também serão sempre denotados com as mesmas letras. Consideremos, pois,

$$p(x, y) = a + l_2x + l_1x^2 + l_0x^3 + d_2y + d_1y^2 + d_0y^3 + mxy + n_1x^2y + n_2xy^2.$$

Através de uma mudança de variáveis linear, podemos sempre assumir que  $p$  não tem o termo  $y^3$ . De fato, se  $d_0 \neq 0$  e  $l_0 = 0$ , consideremos a mudança de variáveis  $x_1 = y$ ,  $y_1 = x$ , que transforma  $p$  em um polinômio sem o termo  $y^3$ . Por outro lado, se  $d_0 \neq 0$  e  $l_0 \neq 0$ , tomemos  $r \neq 0$  tal que

$$l_0 + n_1r + n_2r^2 + d_0r^3 = 0,$$

e consideremos a mudança de variáveis linear  $x_1 = y - rx$ ,  $y_1 = y$ . Tal mudança leva  $p$  num polinômio sem o termo  $y^3$ . Assim, podemos, de fato, considerar

$$p(x, y) = a + l_2x + l_1x^2 + l_0x^3 + d_2y + d_1y^2 + mxy + n_1x^2y + n_2xy^2. \quad (2.1.2)$$

Se  $n_2 \neq 0$ , tomemos a mudança afim  $x_1 = x + d_1n_2^{-1}$ ,  $y_1 = y$ , que transforma  $p$  em um polinômio sem o termo  $y^2$ :  $p(x, y) = a + l_2x + l_1x^2 + l_0x^3 + d_2y + mxy + n_1x^2y + n_2xy^2$ . Agora, a mudança  $x_1 = x$ ,  $y_1 = m + n_1x + 2n_2y$ , leva  $p$  num polinômio especial sem os termos  $xy$  e  $x^2y$ , isto é,  $p(x, y) = a + l_2x + l_1x^2 + l_0x^3 + d_2y + xy^2/(4n_2)$ , que é transformado, pela mudança de coordenadas  $x_1 = (4n_2)^{-1}x$ ,  $y_1 = y$ , no polinômio

$$p(x, y) = a + l_2x + l_1x^2 + l_0x^3 + d_2y + xy^2.$$

Se  $d_2 \neq 0$ , tomemos a mudança  $x_1 = 2d_2^{-2}x$ ,  $y_1 = d_2y$ , que transforma  $p$  num polinômio do tipo (I). Se, por outro lado,  $d_2 = 0$ , fazemos  $x_1 = 2x$ ,  $y_1 = y$  para obter um polinômio do tipo (II).

Se  $n_2 = 0$  e  $d_1 \neq 0$  em (2.1.2), a mudança  $x_1 = x$ ,  $y_1 = d_2 + mx + 2d_1y$  transforma  $p$  num polinômio que, multiplicado por  $2d_1$ , é

$$p(x, y) = a + l_2x + l_1x^2 + l_0x^3 + n_1x^2y + \frac{1}{2}y^2.$$

Se, nesse polinômio,  $n_1 \neq 0$ , a mudança  $x_1 = n_1x$ ,  $y_1 = n_1y$  o leva num polinômio que, multiplicado por  $n_1^2$ , é do tipo (III). Por outro lado, se  $n_1 = 0$ ,  $p$  é do tipo (IV).

Agora, se  $n_2 = d_1 = 0$  em (2.1.2), ficamos com

$$p(x, y) = a + l_2x + l_1x^2 + l_0x^3 + d_2y + mxy + n_1x^2y. \quad (2.1.3)$$

Se  $n_1 \neq 0$ , tomemos  $k = m^2 - 4n_1d_2$ . Se  $k \neq 0$ , a mudança  $x_1 = |k|^{-1/2}(2n_1x + m)$ ,  $y_1 = y$  leva  $p$  num polinômio que, multiplicado por  $4n_1/|k|$  é do tipo (V) ou (VI), conforme  $k$  é positivo ou negativo, respectivamente. Se  $k = 0$ , a mudança  $x_1 = x + (2n_1)^{-1}m$ ,  $y_1 = y$  leva  $p$  no polinômio  $p(x, y) = a + l_2x + l_1x^2 + l_0x^3 + n_1x^2y$ , que, com a mudança  $x_1 = x$ ,  $y_1 = n_1y$ , dá um polinômio do tipo (VII).

Se  $n_1 = 0$  e  $m \neq 0$  em (2.1.3), então a mudança  $x_1 = mx + d_2$ ,  $y_1 = y$  leva  $p$  num polinômio do tipo (VIII).

Se  $n_1 = m = 0$  e  $d_2 \neq 0$  em (2.1.3), a mudança  $x_1 = x$ ,  $y_1 = d_2y$  leva  $p$  num polinômio do tipo (IX). Se, por fim,  $d_2 = 0$ , temos o tipo (X).  $\square$

Agora, comecemos com a demonstração do Teorema 2.1 analisando cada um dos casos do Lema 2.2. Notemos que ambos os polinômios  $p_1$ , com  $l_0 = l_1 = l_2 = 0$ , e  $p_7$ , com  $l_2 \neq 0$ , satisfazem as hipóteses do Teorema 2.1 (pois nos dois casos,  $H_{p_i}$  nunca se anula e o conjunto de nível  $p_i^{-1}\{\kappa\}$  tem três componentes conexas distintas, seguindo que  $H_{p_i}$  não é globalmente resolúvel pelo Teorema 1.10). O primeiro deles é transformado no polinômio (2.1.1) pela mudança linear  $x_1 = y$ ,  $y_1 = x/2$ . Já o segundo é levado no polinômio (2.1.1) pela mudança de coordenadas afim  $x_1 = l_2x$ ,  $y_1 = l_2^{-2}(l_1 + l_0x + y)$ . Mostraremos abaixo que os outros casos do Lema 2.2 não satisfazem as hipóteses do Teorema 2.1, completando, assim, a sua demonstração. Conforme já mencionado, daremos duas demonstrações distintas para esse fato em cada uma das secções seguintes. Cada uma das demonstrações é interessante por si só.

## 2.2 Primeira demonstração

Como dito acima, mostraremos que todos os outros polinômios do Lema 2.2 produzem campos hamiltonianos globalmente resolúveis ou que se anulam em um ponto. Nessa primeira demonstração, faremos uso de resultados básicos de equações do terceiro grau para analisar alguns dos polinômios. Antes disso, analisemos os casos que podem ter uma abordagem mais direta. É simples ver que  $H_{p_i}(x, y) = 0$  para algum  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , para  $i = 3, 5$  e  $8$ , e para  $i = 7$ , com  $l_2 = 0$ . Por outro lado, para  $i = 6$  e  $9$ ,  $H_{p_i}$  nunca se anula, mas nos dois casos a equação  $p_i(x, y) = c$  define uma única função  $y = y(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , para cada  $c \in \mathbb{R}$ . Dessa forma, todos os conjuntos de nível de  $p_i$ ,  $i = 6$  e  $9$ , são conexos, seguindo que  $H_{p_i}$  é globalmente resolúvel pelo Teorema 1.10. Mais ainda, se  $H_{p_{10}}$  nunca

se anula, então  $g'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , seguindo que  $p_{10}(x, y) = c$  define uma (única) linha vertical para cada  $c \in \mathbb{R}$ , o que significa que  $H_{p_{10}}$  é globalmente resolúvel (Teorema 1.10). Para  $p_i, i = 1, 2$  e  $4$ , suponhamos que  $H_{p_i}$  nunca se anule. Assim, se  $l_0 = 0$ , é fácil ver que  $l_1 = 0$  (para  $p_i, i = 1, 2$  e  $4$ ). Com tais hipóteses, no caso de  $p_1$  é necessário que  $l_2 \geq 0$ . O caso  $l_2 = 0$  já foi considerado acima (ele se transforma em (2.1.1) por uma mudança linear) e, no caso  $l_2 > 0$ , para cada  $c \in \mathbb{R}$  a equação  $p_1(x, y) = c$  define uma (única) função  $x = x(y), y \in \mathbb{R}$ , seguindo que  $H_{p_1}$  é globalmente resolúvel. Para  $p_i, i = 2$  e  $4$ , é necessário que  $l_2 > 0$  e  $l_2 \neq 0$ , respectivamente. Dessa forma, a equação  $p_i(x, y) = c$  define uma função  $x = x(y), y \in \mathbb{R}$ , e daí  $H_{p_i}$  é globalmente resolúvel para  $i = 2$  e  $4$ . Para  $p_i, i = 1, 2$  e  $4$ , quando  $l_0 \neq 0$ , usaremos o lema abaixo para concluir que se  $H_{p_i}$  nunca se anula, então é globalmente resolúvel. Começamos com o seguinte resultado sobre equações cúbicas. Sejam  $A, B, C \in \mathbb{R}$ . Consideremos a equação

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

e tomemos  $P = B - A^2/3$  e  $Q = C - AB/3 + 2A^3/27$ . O *discriminante* da equação acima é definido por  $D = Q^2/4 + P^3/27$ . Vale o seguinte:<sup>1</sup>

- se  $D < 0$ , a equação tem três soluções reais e distintas,
- se  $D = 0$ , a equação tem três soluções reais, sendo duas delas iguais,
- se  $D > 0$ , a equação tem uma solução real e duas soluções complexas conjugadas.

Como consequência, temos o seguinte

**Lema 2.3.** *Seja  $p(x, y) = x^3 + A(y)x^2 + B(y)x + C(y)$  uma submersão em que  $A, B$  e  $C$  são polinômios. Se o discriminante  $D(y) = \sum_{i=0}^k a_i y^i$  da equação  $p(x, y) = 0$  é tal que  $a_k > 0$  e  $k$  é par, então  $p^{-1}\{0\}$  é conexo.*

*Demonstração.* Como  $p(x, y) = 0$  é uma equação cúbica em  $x$ , temos que para cada  $y \in \mathbb{R}$  existe um  $x = x(y) \in \mathbb{R}$  tal que  $p(x, y) = 0$ . Mais especificamente, temos por hipótese que existe um intervalo  $[a, b]$  tal que  $D(y) > 0, \forall y \notin [a, b]$ . Daí, pelo resultado sobre equações cúbicas visto acima, segue que para cada  $y \notin [a, b]$ , existe uma *única* raiz real  $x = x(y)$  de  $p(x, y) = 0$ . Por outro lado, definindo  $\|f\|_\infty = \sup_{y \in [a, b]} |f(y)|$ , para uma função  $f \in C^0([a, b])$ , consideremos

$$R = 1 + 3\|A\| + \sqrt{3\|B\|} + \sqrt[3]{3\|C\|}.$$

Se  $|x| > R$ , temos que

$$\left| \frac{A(y)}{x} + \frac{B(y)}{x^2} + \frac{C(y)}{x^3} \right| < 1, \forall y \in [a, b].$$

<sup>1</sup>Uma demonstração deste resultado, bem como alguns fatos históricos e pitorescos sobre equações cúbicas, podem ser encontrados em [17].

Daí, para  $y \in [a, b]$  e  $x \notin [-R, R]$ ,

$$p(x, y) = x^3 \left( 1 + \frac{A(y)}{x} + \frac{B(y)}{x^2} + \frac{C(y)}{x^3} \right) \neq 0.$$

Assim, consideremos  $C$  uma componente conexa de  $p^{-1}\{0\}$  que passa por um ponto  $(x, y) \in [-R, R] \times [a, b]$ . Pelos Lemas 1.5 e 1.9,  $C$  é uma curva ilimitada nas suas duas direções, devendo, portanto, escapar para os semiplanos  $y < a$  e  $y > b$ . Mas daí segue que não podemos ter outra componente de  $p^{-1}\{0\}$  além de  $C$ . (Uma ilustração pode ser vista na Figura 2.2.1).  $\square$

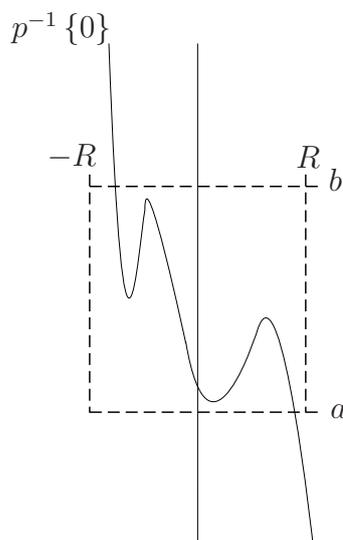


Figura 2.2.1: Configuração típica de  $p^{-1}\{0\}$ .

Para aplicar o Lema 2.3, primeiro adequemos os polinômios  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_4$ , com  $l_0 \neq 0$ , às suas hipóteses. Observemos que se  $H_{p_1}$  nunca se anula, então  $l_0 > 0$  (para ver isso, basta tomar  $y = -1/x$  e notar que se  $l_0 < 0$ ,  $H_{p_1}(x, y) = 0$ , para algum  $x$ ). Tomemos a mudança de coordenadas  $x_1 = \sqrt[3]{l_0}x$ ,  $y_1 = y$  para transformar  $p_1$  no polinômio (com a mesma notação)  $p_1(x, y) = x^3 + l'_1x^2 + (l'_2 + l_3y^2)x + y + \kappa$ , com  $l_3 = 1/(2\sqrt[3]{l_0}) > 0$ . Calculando  $D(y)$  para a equação cúbica  $p_1 - c = 0$ , temos que  $D(y) = \sum_{i=0}^6 a_iy^i$ , com  $a_6 = l_3^3/27$ . Assim, segue do Lema 2.2.1 que todos os conjuntos de nível de  $p_1$  são conexos. Logo  $H_{p_1}$  é globalmente resolúvel (se nunca se anula).

No caso de  $p_2$ , temos que  $l_0 > 0$  se  $H_{p_2}$  nunca se anula. Logo, a mudança de coordenadas  $x_1 = \sqrt[3]{l_0}x$ ,  $y_1 = (2\sqrt[3]{l_0})^{-1/2}y$  leva  $p_2$  no polinômio (novamente com a mesma notação)  $p_2(x, y) = x^3 + l'_1x^2 + (l'_2 + y^2)x + \kappa$ . Aqui, o discriminante  $D(y)$  para a equação cúbica  $p_2 - c = 0$  é  $D(y) = \sum_{i=0}^6 a_iy^i$ , com  $a_6 = 1/27$ . Logo, como antes, segue que  $H_{p_2}$  é globalmente resolúvel (se nunca se anula).

Finalmente, para  $p_4$ , a mudança  $x_1 = \sqrt[3]{l_0}x$ ,  $y_1 = y$  leva  $p_4$  no polinômio  $p_4(x, y) =$

$x^3 + l'_1x^2 + l'_2x + y^2/2 + \kappa$ . Aqui,  $D(y) = \sum_{i=0}^4 a_i y^i$ , com  $a_4 = 1/16$ , seguindo que  $H_{p_4}$  é globalmente resolúvel (se nunca se anula).

### 2.3 Segunda demonstração

A outra forma de mostrarmos que os polinômios do Lema 2.2, salvo  $p_7$ , com  $l_2 \neq 0$ , e  $p_1$ , com  $l_0 = l_1 = l_2 = 0$ , não satisfazem as hipóteses do Teorema 2.1 é fazermos uso do Corolário 1.15.

Primeiro eliminemos os polinômios que tem gradiente nulo em algum ponto qualquer que seja  $g$ . Restam para serem analisados, então,  $p_1$  (se  $g'$  não identicamente nula),  $p_2$ ,  $p_4$ ,  $p_6$ ,  $p_9$  e  $p_{10}$ . Para cada um deles, suporemos que seu gradiente nunca se anule e exibiremos um polinômio linear  $q(x, y) = \alpha x + \beta y$ , com  $\alpha$  ou  $\beta$  não nulo, tal que  $(\det D(p_i, q) =) H_{p_i, q} > 0$ . Assim sendo, como  $H_q$  é globalmente resolúvel (o que segue do Teorema 1.10, por exemplo), teremos do Corolário 1.15 que os  $H_{p_i}$  em questão serão globalmente resolúveis.

Para  $p_2$ ,  $p_4$  e  $p_{10}$  é fácil vermos que  $g'(x) > 0$  (para que  $\nabla p_i$  nunca se anule). Daí, basta tomar  $q(x, y) = -y$  para obtermos  $H_{p_i, q} > 0$ . Para  $p_6$  e  $p_9$ , basta tomar  $q(x, y) = x$ . Para  $p_1$ , precisaremos de um cálculo mais elaborado para a escolha de  $q$ . Antes de colocarmos o problema, vejamos um simples Lema de cálculo:

**Lema 2.4.** *Sejam  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Para que a função quadrática*

$$k(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

*seja estritamente positiva, é necessário e suficiente que valha um dos seguintes itens:*

1.  $b^2 - ac = 0$ ,  $bd - ae = 0$  e  $d^2 - 4af < 0$ ;
2.  $b^2 - ac < 0$  e  $(bd - ae)^2 - (b^2 - ac)(d^2 - 4af) < 0$ .

*Demonstração.* Observemos que, para cada  $y$ ,  $k = ax^2 + (2by + d)x + cy^2 + ey + f$  é um polinômio de segundo grau em  $x$ . Tal é estritamente positivo se, e somente se,  $4(b^2 - ac)y^2 + 4(bd - ae)y + d^2 - 4af < 0$ , para cada  $y$ , pois  $a > 0$ . Isso é equivalente a valer o item 1 ou o item 2. □

Substituamos, sem perder a generalidade,  $l_1$  por  $l_1/2$  e  $l_0$  por  $l_0/3$  em  $p_1$ . Temos, por hipótese, que  $H_{p_1}$  nunca se anula, o que, fazendo  $y = -1/x$  e substituindo em  $H_{p_1}(x, y)$ , dá que  $-1/(2x^2) - l_2 - l_1x - l_0x^2 \neq 0, \forall x \neq 0$ . Isso é equivalente a

$$r(x) = \frac{1}{2} + l_2x^2 + l_1x^3 + l_0x^4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.3.1)$$

Se  $l_0 = 0$ , então  $l_1 = 0$  e  $l_2 > 0$  (pois  $g$  não é identicamente nula). Nesse caso, basta tomar  $q(x, y) = -y$  para obter  $H_{p_1}q > 0$ .

Se  $l_0 > 0$ , podemos supor  $l_1 \geq 0$  (pois se  $l_1 < 0$ ,  $r(-x) = 1/2 + l_2x^2 + (-l_1)x^3 + l_0x^4 > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ). Queremos achar  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $H_{p_1}q > 0$ , com  $q(x, y) = \alpha x + \beta y$ . Notemos que é necessário que  $\beta \neq 0$ , seguindo que podemos tomar  $\beta = -1$  e daí procurar  $\alpha$  tal que

$$l_0x^2 + \alpha xy + \frac{1}{2}y^2 + l_1x + l_2 + \alpha > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.3.2)$$

Se  $l_1 = 0$ , tomemos  $\alpha = \sqrt{2l_0}$ . Pelo Lema 2.4, (2.3.2) vale se e somente se  $l_2 + \sqrt{2l_0} > 0$ , o que é verdade pela hipótese sobre  $r(x)$  em (2.3.1).

Se  $l_1 > 0$ , o Lema 2.4 garante que (2.3.2) é equivalente a encontrar  $\alpha$  tal que

$$\begin{cases} \alpha^2 < 2l_0 & \text{e} \\ N(\alpha) \doteq -\alpha^3 - l_2\alpha^2 + 2l_0\alpha - \frac{l_1^2 - 4l_0l_2}{2} > 0. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Temos que  $N'(\alpha) = -3\alpha^2 - 2l_2\alpha + 2l_0$  tem dois zeros reais distintos:

$$\alpha_1 = \frac{-l_2 - \sqrt{l_2^2 + 6l_0}}{3} < 0 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{-l_2 + \sqrt{l_2^2 + 6l_0}}{3} > 0.$$

Além disso, como  $N(-\sqrt{2l_0}) = -l_1^2/2 = N(\sqrt{2l_0})$ , segue que existe  $\alpha_0 \in (-\sqrt{2l_0}, \sqrt{2l_0})$  tal que  $N'(\alpha_0) = 0$ , e obtemos que  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$  está em  $(-\sqrt{2l_0}, \sqrt{2l_0})$ . Desde que se  $l_1^2 - 4l_0l_2 \leq 0$  então existe  $\alpha$  próximo de zero que satisfaz (2.3.3), vamos supor, a partir de agora, que  $l_1^2 - 4l_0l_2 > 0$ . Daí, como  $N$  é crescente em 0 e  $N(-\sqrt{2l_0}) < 0$ , segue que existe  $\alpha$  como em (2.3.3) se, e somente se,

$$\alpha_2 < \sqrt{2l_0} \quad \text{e} \quad N(\alpha_2) > 0. \quad (2.3.4)$$

(Para se convencer disso, faça um esboço do gráfico de  $N$ ). Substituindo o valor de  $\alpha_2$ , verificamos que  $\alpha_2 < \sqrt{2l_0} \iff l_2 + \sqrt{2l_0} > 0$ .

Por outro lado,

$$N(\alpha_2) = \frac{2}{27} (l_2^2 + 6l_0)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{27} l_2^3 + \frac{4}{3} l_0 l_2 - \frac{1}{2} l_1^2 = N_1 - N_2,$$

com

$$N_1 \doteq \frac{2}{27} (l_2^2 + 6l_0)^{\frac{3}{2}} \quad \text{e} \quad N_2 \doteq \frac{2}{27} l_2^3 - \frac{4}{3} l_0 l_2 + \frac{1}{2} l_1^2.$$

Se  $N_2 < 0$ , então já teremos  $N(\alpha_2) > 0$ . Se não,  $N(\alpha_2) > 0$  se, e somente se,  $N_1^2 - N_2^2 > 0$ , o que equivale a

$$\left( 2l_0l_2^4 - 8l_0^2l_2^2 + 8l_0^3 - \frac{1}{2}l_1^2l_2^3 + 9l_0l_1^2l_2 - \frac{27}{16}l_1^4 \right) > 0. \quad (2.3.5)$$

Assim, (2.3.4) estará satisfeito se valer  $l_2 + \sqrt{2l_0}$  e (2.3.5).

Agora, analisando a função  $r(x)$ , temos que  $r'(x) = 0$  se, e somente se,  $x = 0$  ou  $x =$

$\left(-3l_1 + \iota\sqrt{9l_1^2 - 32l_0l_2}\right)/(8l_0)$ , com  $\iota = \pm 1$  (que são números reais, pois estamos supondo  $9l_1^2 - 32l_0l_2 = l_1^2 + 8(l_1^2 - 4l_0l_2) > 0$ , por hipótese). Assim, a hipótese em (2.3.1) vale se, e somente se,

$$r \left( \frac{-3l_1 + \iota\sqrt{9l_1^2 - 32l_0l_2}}{8l_0} \right) > 0,$$

o que é equivalente a

$$r_1 \doteq (256l_0^3 + 144l_0l_1^2l_2 - 128l_0^2l_2^2 - 27l_1^4) > -\iota l_1 (9l_1^2 - 32l_0l_2)^{\frac{3}{2}} \doteq r_2.$$

Em particular, considerando  $\iota = -1$ , obtemos que  $r_1 > 0$ , isto é,  $128l_0^2(2l_0 - l_2^2) > l_1^2(27l_1^2 - 144l_0l_2)$ . Isso dá que  $2l_0 - l_2^2 > 0$  no caso de  $l_2 \leq 0$ , o que implica que  $l_2 + \sqrt{2l_0} > 0$  (qualquer que seja  $l_2$ ), que, como vimos, é uma das condições em (2.3.4). Além disso, obtemos que  $r_1^2 - r_2^2 > 0$ , o que é equivalente a (2.3.5). Dessa forma, chegamos a (2.3.4), finalizando a procura por  $q$  para o caso de  $p_1$ . Isso conclui o objetivo desta secção.

Observemos que os argumentos apresentados nesta secção nos permitem concluir a seguinte

**Proposição 2.5.** *Dado  $p$  um polinômio de grau menor ou igual a 3, se  $H_p$  é globalmente resolúvel, então existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que*

$$H_p q(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

com  $q(x, y) = \alpha x + \beta y$ .

# Capítulo 3

## Condições integrais para resolubilidade e injetividade

Este capítulo faz uma ligação entre os dois capítulos anteriores. A primeira secção trabalha com campos hamiltonianos  $H_f$  não globalmente resolúveis que têm mcRs, procurando responder quando temos ou não solução  $g$  para o problema  $H_f g = h$ , com  $h$  dada. Na segunda secção, particularizamos tal estudo para o caso em que  $f$  é um polinômio de grau 3, utilizando o que foi estudado no Capítulo 2. Isso é feito para que na última secção possamos analisar a injetividade de  $F = (f, g)$ , em que  $f$  é um polinômio de grau 3, utilizando os resultados do Capítulo 1. Culminaremos mostrando a injetividade de  $F$  no caso dela ser polinomial e  $f$  ter grau menor ou igual a 3. Nesta última secção, também apresentaremos uma discussão da Conjectura jacobiana.

### 3.1 Condições integrais de resolubilidade numa meia-componente de Reeb

Sejam  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma submersão e  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  uma mcR de  $H_f$ . Como  $H_f$  não é globalmente resolúvel, certamente existe uma função  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  tal que  $H_f g \neq h$  em  $\mathbb{R}^2$ , para todas  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Podemos, então, perguntar que tipo de hipóteses precisamos impor em  $h$  para que esteja na imagem de  $H_f$ . O objetivo desta secção é dar uma condição necessária para que  $h$  faça parte dessa imagem. Tal condição é dada pelo Teorema 3.1. Mais tarde, aplicaremos tal resultado para mostrar a injetividade de uma aplicação polinomial especial.

Sejam  $\phi_p^+$  e  $\phi_q^-$  os lados não compactos de  $\mathcal{A}$  e  $\gamma : [1, 3] \rightarrow \mathcal{A}$  uma parametrização do lado compacto de  $\mathcal{A}$ , tal que  $\gamma(1) = p$ ,  $\gamma(3) = q$  e todas as órbitas de  $H_f$  sejam transversais a  $\gamma$ , exceto em  $\gamma(2)$ , conforme Definição 1.16. Podemos sempre supor, trocando  $f$  por  $-f$ , se necessário, que  $\nabla f$  aponta para dentro de  $\mathcal{A}$  ao longo de  $\phi_p^+ \cup \phi_q^-$ . Vale o seguinte:

**Teorema 3.1.** *Sejam  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma submersão de classe  $C^2$ ,  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  uma mcR de  $H_f$  e  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto tal que  $\mathcal{A} \subset U$ . Se  $h : U \rightarrow [0, \infty)$  é uma função mensurável tal que*

$$\int_{\mathcal{A}} h = \infty,$$

*então não existe uma função diferenciável  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  que resolve  $H_f g = h$  em  $U$ .*

*Demonstração.* Consideremos  $\mathcal{A}$  e  $\gamma : [1, 3] \rightarrow \mathcal{A}$  uma parametrização do lado compacto de  $\mathcal{A}$  conforme considerações acima. Temos que para todos  $s \in (1, 2)$ , existem  $t_s > 0$  e  $r_s \in (2, 3)$  tais que  $\phi_{\gamma(s)}(t_s) = \gamma(r_s)$ . Definamos  $B_s$  como o conjunto aberto limitado pelos arcos  $\gamma([s, r_s])$  e  $\phi_{\gamma(s)}([0, t_s])$ . Notemos que tais conjuntos satisfazem

$$B_s \subset B_{s'} \quad \forall s > s' \quad \text{e} \quad \bigcup_{s \in (1, 2)} \overline{B_s} = \mathcal{A}.$$

Consideremos  $(s_n) \subset (1, 2)$  uma sequência decrescente, com  $s_n \rightarrow 1$ . Pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\int_{\mathcal{A}} h = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{s_n}} h. \quad (3.1.1)$$

Suponhamos, por absurdo, que exista  $g$  satisfazendo  $H_f g = h$ . Nosso objetivo abaixo é mostrar que existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{B_{s_n}} h \leq M$ , uma clara contradição com (3.1.1) e a hipótese sobre  $h$ . Isso encerrará a demonstração. Como

$$H_f g = \partial_1(-g\partial_2 f) - \partial_2(-g\partial_1 f),$$

segue do Teorema de Green que

$$\int_{B_{s_n}} h = \int_{s_n}^{r_{s_n}+1} -g(\beta(t)) (\partial_1 f(\beta(t))\beta'_1(t) + \partial_2 f(\beta(t))\beta'_2(t)) dt, \quad (3.1.2)$$

onde  $\beta : [s_n, r_{s_n} + 1] \rightarrow \partial B_{s_n}$  é a seguinte parametrização (positiva) de  $\partial B_{s_n}$ :

$$\beta(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [s_n, r_{s_n}]; \\ \phi_{\gamma(s_n)}(-t_{s_n}t + t_{s_n}(r_{s_n} + 1)), & t \in [r_{s_n}, r_{s_n} + 1]. \end{cases}$$

Desde que para  $t \in [r_{s_n}, r_{s_n} + 1]$   $\beta'(t)$  é um múltiplo de  $H_f(\beta(t))$ , o integrando do lado direito de (3.1.2) é nulo nesse intervalo. Dessa forma, precisamos somente nos preocupar com o intervalo  $[s_n, r_{s_n}]$ . Definindo, pois,

$$M = 2 \max_{t \in [1, 3]} \{|g(\gamma(t)) \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle |\},$$

segue de (3.1.2) que

$$\int_{B_{s_n}} h \leq M,$$

para todos  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Observação 6.** O uso do Teorema de Green na demonstração acima foi baseado em um uso similar feito em [19].

### 3.2 Um caso particular: polinômios de grau 3

O objetivo, aqui, é mostrar que o Teorema 3.1 sempre se aplica quando  $f = p$  for um polinômio de grau menor ou igual a 3 tal que  $H_f$  não seja globalmente resolúvel e  $h$  for uma função polinomial estritamente positiva (Corolário 3.4). Faremos isso primeiramente para o polinômio (2.1.1)  $\tilde{p} = \kappa + x(1 + xy)$ . Depois aplicaremos o Teorema 2.1 para concluir o caso geral.

Temos que  $\tilde{p} = \kappa$  tem as seguintes três componentes conexas:  $x = 0$ ,  $y = -1/x$ ,  $x > 0$  e  $y = -1/x$ ,  $x < 0$ . Não é difícil de ver, então, que

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1 \text{ e } -\frac{1}{x} \leq y \leq -1 \right\} \cup \{(0, y) \mid y \leq -1\} \quad (3.2.1)$$

é uma mcR de  $H_{\tilde{p}}$  com lados não compactos  $\{(0, y) \mid y \leq -1\}$  e  $\{(x, -1/x) \mid x \in (0, 1]\}$ , e lado compacto  $\{(x, -1) \mid x \in [0, 1]\}$  (ver a representação de  $\mathcal{A}$  na figura 3.2.1). Temos

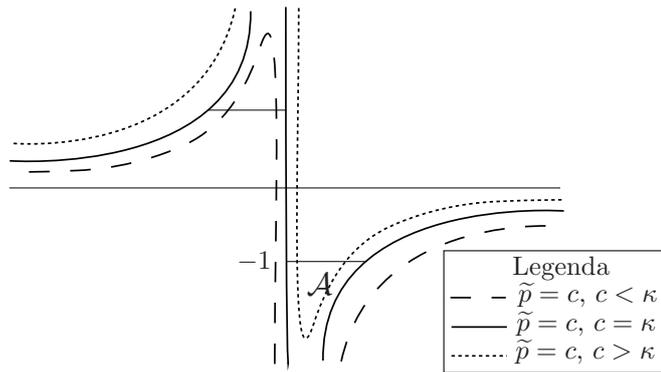


Figura 3.2.1: Curvas de nível de  $\tilde{p}(x, y) = \kappa + x(1 + xy)$ .

a seguinte

**Proposição 3.2.** *Se  $\mathcal{A}$  é a mcR (3.2.1) de  $H_{\tilde{p}}$ , então  $\int_{\mathcal{A}} h = \infty$ , para toda  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$  polinomial.*

*Demonstração.* Consideremos

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \text{ e } -\frac{1}{x} < y < 0 \right\}.$$

Desde que  $\mathcal{A} \subset \overline{B}$  e  $\overline{B} \setminus \mathcal{A}$  é limitado, é suficiente mostrar que  $\int_B h = \infty$  para concluir a demonstração. Para calcular tal integral, vamos introduzir uma mudança de variáveis. Definamos  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$F(x, y) = (x(1 + xy), 1 + xy),$$

e coloquemos  $a = x(1 + xy)$  e  $b = 1 + xy$ . As equivalências

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x} < y < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < b < 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 < a < b \\ 0 < b < 1 \end{array} \right\}$$

mostram que

$$F(B) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < b < 1 \text{ e } 0 < a < b\}.$$

É fácil verificar que a aplicação

$$(a, b) \mapsto \left( \frac{a}{b}, \frac{b}{a}(b-1) \right),$$

definida em  $F(B)$ , é a inversa de  $F = F|_B$ . Logo,  $F : B \rightarrow F(B)$  é um difeomorfismo<sup>1</sup>.

Desde que  $\det(DF^{-1}(a, b)) = 1/a$ , segue que

$$\int_B h(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^b \frac{h \circ F^{-1}(a, b)}{a} da db, \quad (3.2.2)$$

Como  $h$  é polinomial, isto é,  $h(x, y) = \sum_{|\alpha| \leq M} c_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$ , temos que a função integrando do lado direito de (3.2.2) fica

$$\bar{h}(a, b) \doteq \frac{h \circ F^{-1}(a, b)}{a} = \sum_{|\alpha| \leq M} c_\alpha a^{\alpha_1 - \alpha_2 - 1} b^{\alpha_2 - \alpha_1} (b-1)^{\alpha_2}.$$

Definindo

$$\tau_h \doteq \min_{|\alpha| \leq M} \{\alpha_1 - \alpha_2 - 1 \mid c_\alpha \neq 0\}, \quad (3.2.3)$$

concluimos que

$$\bar{h}(a, b) = \left( b^{-\tau_h - 1} \sum_{\substack{|\alpha| \leq M \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 1 = \tau_h}} c_\alpha (b-1)^{\alpha_2} \right) a^{\tau_h} + r(a, b), \quad (3.2.4)$$

onde

$$r(a, b) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq M \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 1 > \tau_h}} c_\alpha a^{\alpha_1 - \alpha_2 - 1} b^{\alpha_2 - \alpha_1} (b-1)^{\alpha_2} = \sum_{i=\tau_h+1}^m u_i(b) a^i,$$

para algum  $m \in \mathbb{N}$ , e  $u_i$  funções racionais de  $b$ . Concluiremos a demonstração após o lema abaixo.  $\square$

**Lema 3.3.** *Suponhamos que  $k_1 \leq k_2 \in \mathbb{Z}$  e  $h(t) = \sum_{i=k_1}^{k_2} A_i t^i$ , com  $A_i \in \mathbb{R}$  e  $A_{k_1} \neq 0$ . Se  $h(t) > 0$  para todo  $t \in (0, c)$ , para algum  $c > 0$ , então*

1.  $A_{k_1} > 0$ ;
2. Se  $k_1 < 0$ , então  $\int_0^c h(t) dt = \infty$ .

---

<sup>1</sup>Na verdade,  $F$  lineariza  $H_p$  em  $B$ .

*Demonstração.* Observemos que

$$t^{-k_1}h(t) = \sum_{i=0}^{k_2-k_1} A_{k_1+i}t^i. \quad (3.2.5)$$

Assim, desde que  $h(t) > 0$ ,  $\forall t \in (0, c)$ , segue que  $A_{k_1} > 0$ , mostrando o item (1). Se, agora,  $k_1 < 0$  ( $\Leftrightarrow k_1 \leq -1$ ) e  $\int_0^c h(t)dt < \infty$ , então (pela Desigualdade de Hölder)  $\int_0^c t^{-k_1-1}h(t)dt < \infty$ , seguindo de (3.2.5) que

$$A_{k_1} \int_0^c t^{-1}dt + \int_0^c \sum_{i=1}^{k_2-k_1} A_{k_1+i}t^{i-1}dt < \infty,$$

uma contradição, pois  $A_{k_1} > 0$ . Assim, vale o item (2), terminando a demonstração do Lema.  $\square$

*Conclusão da demonstração da Proposição 3.2.* Observemos que

$$s(b) \doteq \sum_{\substack{|\alpha| \leq M \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 1 = \tau_h}} c_\alpha (b-1)^{\alpha_2}$$

não é identicamente 0. Pois se fosse, desde que é um polinômio na variável  $b-1$ ,  $c_\alpha = 0$ , para todos os  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq M$ , tais que  $\alpha_1 - \alpha_2 - 1 = \tau_h$ , uma contradição com a definição de  $\tau_h$  em (3.2.3). Assim, existe  $b_1 \in \mathbb{R}$ ,  $0 < b_1 < 1$ , tal que  $s(b)$  não se anula no intervalo  $(0, b_1)$ . Mais ainda, como  $h$  é positiva,  $c_{(0,0)} > 0$ , seguindo que  $\tau_h \leq 0 - 0 - 1 = -1 < 0$ . Portanto, de (3.2.4) e do item (2) do Lema 3.3, temos que, para cada  $b \in (0, b_1)$  fixado,  $\int_0^b \bar{h}(a, b)da = \infty$ . Assim, como

$$\int_0^1 \int_0^b \bar{h}(a, b)dadb \geq \int_0^{b_1} \int_0^b \bar{h}(a, b)dadb,$$

segue de (3.2.2) que  $\int_B h = \infty$ .  $\square$

**Observação 7.** O campo  $H_{\tilde{p}}$ , com  $\tilde{p} = \kappa + x(1 + xy)$ , tem exatamente mais uma mcR além daquela em (3.2.1): é o conjunto fechado limitado pelas curvas  $x = 0$ ,  $y = -1/x$  para  $x < 0$  e um segmento horizontal compacto ligando essas duas curvas (ver Observação 5). De fato, para ver que tal conjunto é uma mcR, basta olhar para os conjuntos de nível de  $\tilde{p}$  como feito no início desta secção (observar também a figura 3.2.1). Agora, para concluir que não há outra mcR, suponhamos  $\kappa = 0$  e observemos que para todos  $c \neq 0$ , o conjunto de nível  $\tilde{p} = c$  é formado pelas duas componentes conexas curvas  $y = (c - x)/x^2$ ,  $x > 0$  e  $y = (c - x)/x^2$ ,  $x < 0$ . Se tivéssemos outra mcR, cada lado não compacto dela estaria contido em cada uma das curvas de um nível  $c \neq 0$ , respectivamente. Mas notemos que o conjunto compreendido entre essas duas curvas é cortado pela reta  $x = 0$  (que faz parte do nível  $\tilde{p} = 0$ ). Sendo assim, não poderíamos ter, por definição, uma mcR.

Como a outra mcR de  $H_{\bar{p}}$  (dada pela observação acima) é meramente uma reflexão da mcR (3.2.1) em torno da reta  $y = x$ , temos o seguinte:

**Corolário 3.4.** *Seja  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma submersão polinomial de grau menor ou igual a 3 tal que  $H_p$  não é globalmente resolúvel. Se  $\mathcal{A}$  é uma mcR de  $H_p$  e  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$  é uma função polinomial, valem os seguintes:*

1.  $\int_{\mathcal{A}} h = \infty$ .
2. Não existe  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que resolve  $H_p g = h$  em vizinhança de  $\mathcal{A}$ .

*Demonstração.* O item 1 é consequência da observação acima, do Teorema 2.1 e da Proposição 3.2. Já o item 2 é consequência do item 1 e do Teorema 3.1.  $\square$

**Observação 8.** Conclusão como a do item 1 do Corolário 3.4 não pode ser esperada se aumentamos o grau de  $p$ . Para um exemplo, consideremos  $p(x, y) = x^2 y^2 - x$ . Observemos que o conjunto de nível  $p = 0$  é formado pelas três curvas  $x = 0$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ;  $y = 1/\sqrt{x}$ ,  $x > 0$ ; e  $y = -1/\sqrt{x}$ ,  $x > 0$ . É fácil ver que as regiões  $\mathcal{A}$  limitada pelas curvas  $\{(0, y) \mid y \geq 1\}$ ,  $\{(x, 1/\sqrt{x}) \mid 0 < x \leq 1\}$  e  $\{(x, 1) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ , e  $\mathcal{B}$  limitada pelas curvas  $\{(0, y) \mid y \leq -1\}$ ,  $\{(x, -1/\sqrt{x}) \mid 0 < x \leq 1\}$  e  $\{(x, -1) \mid 0 \leq x \leq 1\}$  são mcRs de  $H_p$ , mas  $\int_{\mathcal{A}} 1 = \int_{\mathcal{B}} 1 = 1$ . Mais ainda, analisando os outros conjuntos de nível de  $p$ , vemos que  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são as únicas mcRs de  $H_p$  (veja a Figura 3.2.2). Portanto, não existe mcR de  $H_p$  com a propriedade do item 1 do Corolário 3.4.

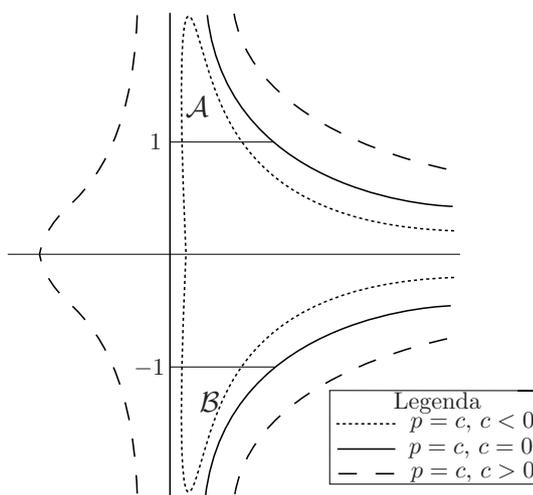


Figura 3.2.2: Curvas de nível de  $p(x, y) = x^2 y^2 - x$ .

### 3.3 Conjectura jacobiana e Conjectura jacobiana real

Nesta secção, apresentaremos a conhecida Conjectura jacobiana em suas duas versões: Conjectura jacobiana e Conjectura jacobiana real. Daremos alguns exemplos e apre-

sentaremos a nossa contribuição para a Conjectura jacobiana real (Teorema 3.7 abaixo) utilizando resultados das duas últimas secções e do Capítulo 1. No capítulo seguinte, trataremos especificamente da Conjectura jacobiana.

Aqui, a letra  $\mathbb{K}$  denotará  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Suporemos sempre que  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$  e, no caso de  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , estará sempre implícito que  $F$  é *holomorfa* e a derivada  $DF$  será sempre a derivada complexa<sup>2</sup>. Seja, pois,  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  satisfazendo

$$\det DF(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{K}^n. \quad (3.3.1)$$

O Teorema da Aplicação Inversa garante que  $F$  é um difeomorfismo local (um biholomorfismo local no caso complexo<sup>3</sup>). É claro que, em geral, não podemos esperar que  $F$  seja um difeomorfismo global (biholomorfismo global no caso complexo), como podemos ver nos seguintes exemplos:

**Exemplo 4.** Sejam  $E : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $G : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$  definidas por

$$E(z) = e^z, \quad F(x_1, x_2) = (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2) \quad \text{e} \quad G(x_1, x_2) = (x_1 e^{-x_2}, e^{x_2}).$$

Temos que  $E'(z) = e^z \neq 0$ ,  $\det DF(x_1, x_2) = e^{2x_1} > 0$  e  $\det DG(x_1, x_2) = 1$ , mas  $E$ ,  $F$  e  $G$  não são nem injetoras nem sobrejetoras.

Mas, e se supusermos  $F$  polinomial? Em 1939, Ott-Heinrich Keller ([16]) conjecturou que uma aplicação polinomial  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  satisfazendo a hipótese (3.3.1) deveria ser um difeomorfismo (curiosamente, ele exigia que os coeficientes dos polinômios fossem inteiros). Pelo Teorema 1.14, para obtermos uma possível demonstração deste resultado, é suficiente mostrar a injetividade de  $F$ . Desde que, para funções polinomiais em  $\mathbb{C}^n$ , a hipótese (3.3.1) é equivalente a  $\det DF = cte \neq 0$ , podemos colocar o problema de Keller em duas diferentes versões, em um contexto mais geral:

### Conjectura jacobiana:

(CJ)<sub>n</sub>: Seja  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  polinomial tal que  $\det DF = cte \neq 0$ . Então  $F$  é injetora.

### Conjectura jacobiana real:

(CJR)<sub>n</sub>: Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  polinomial satisfazendo (3.3.1). Então  $F$  é injetora.

Até hoje (final de Julho de 2010), não existe na literatura matemática nem uma demonstração e nem um contraexemplo para (CJ)<sub>n</sub>, mesmo para o caso  $n = 2$ . Por outro lado,

<sup>2</sup>Para o caso de aplicações de  $\mathbb{C}^n$  em  $\mathbb{C}^n$  não holomorfas, devemos “quebrá-las” em parte real e parte imaginária e tratá-las como aplicações reais de  $\mathbb{R}^{2n}$  em  $\mathbb{R}^{2n}$ .

<sup>3</sup>Para o caso complexo, o Teorema da Aplicação Inversa pode ser encontrado em [22], Teorema 2.5 da página 22.

$(CJR)_n$  é falsa para todo  $n \geq 2$ , como veremos no seguinte exemplo, de 1994, devido a Sergey Pinchuk, [20]:

**Exemplo 5.** Sejam

$$t = xy - 1, \quad h = t(xt + 1) \quad \text{e} \quad f = (xt + 1)^2(t^2 + y).$$

Definamos os polinômios  $p = h + f$  e

$$q = 170fh + 91h^2 + 195fh^2 + 69h^3 + 75fh^3 + \frac{75}{4}h^4,$$

e tomemos  $F = (p, q)^4$ . Com alguns cálculos (que não serão apresentados aqui) podemos mostrar que  $\det DF > 0$ . Mas analisemos o conjunto de nível  $p = 0$ , que é o conjunto de pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $(xt + 1)(t + (xt + 1)(t^2 + y)) = 0$ . Tal conjunto é uma variedade unidimensional que contém, pelo menos, as duas curvas determinadas por  $xt + 1 = 0$ , isto é,  $y = (x - 1)/x^2$ . Assim,  $p = 0$  é desconexo, seguindo do Teorema 1.10, que  $H_p$  não é globalmente resolúvel. Isso não pode ocorrer se  $(p, q)$  for injetora, de acordo com o Corolário 1.15.

É fácil ver que no exemplo acima o grau de  $p$  é 10 e o grau de  $q$  é 25. Assim, surge naturalmente a seguinte questão: Qual é o menor grau de  $p$  e/ou  $q$  num contraexemplo para  $(CJR)_2$ ? Uma primeira resposta pode ser dada até em termos mais gerais (para  $(CJ)_n$  e  $(CJR)_n$ ), como podemos ver no Teorema seguinte, devido inicialmente a Stuart Sui Sheng Wang, em 1980 e depois com uma demonstração muito simples, que apresentaremos aqui, a Susumu Oda e Ken-ichi Yoshida, em 1983. Tais informações, bem como a demonstração que apresentaremos, aparecem no trabalho [2], de Hyman Bass, Edwin H. Connel e David Wright.

**Teorema 3.5.**  $(CJ)_n$  e  $(CJR)_n$  são verdadeiras se o grau de  $F$  é menor ou igual a 2.

*Demonstração.* Dado  $a \in \mathbb{K}^n$ , definamos  $G(x) = F(x + a) - F(a)$ . Escrevamos  $G = G_1 + G_2$ , em que  $G_i$  é a parte homogênea de grau  $i$  de  $G$  (a parte homogênea de grau 0 é nula, pois  $G(0) = 0$ ). Temos o seguinte:

$$\begin{aligned} G(x) &= G_1(x) + 2\frac{1}{2}G_2(x) = \frac{d}{dt}(tG_1(x) + t^2G_2(x)) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt}(G(tx)) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \\ &= DF\left(\frac{1}{2}x + a\right) \cdot x. \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Esta aplicação é apenas uma escolha dentre as aplicações de Pinchuk, que apresentam  $p = h + f$  fixo e  $q$  que varia para cada diferente aplicação. O  $q$  escolhido aqui é o que possui menor grau dentre as aplicações de Pinchuk. Para mais detalhes, pode-se consultar, por exemplo, os trabalhos [7] ou [6], de Louis Andrew Campbell.

Tomando  $x = b - a$ , segue que

$$F(b) - F(a) = DF\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a),$$

que mostra que  $F$  é injetora, uma vez que  $\det DF$  nunca se anula.  $\square$

Voltando para  $\mathbb{R}^2$ , uma resposta um pouco melhor foi dada por Janusz Gwoździewicz, em 2001, no trabalho [15]. É o seguinte

**Teorema 3.6.**  $(CJR)_2$  é verdadeira se o grau de  $F$  é menor ou igual a 3.

Melhoramos este resultado utilizando os Corolários 1.15 e 3.4:

**Teorema 3.7.** Sendo  $F = (f, g)$ , então  $(CJR)_2$  é verdadeira se o grau de  $f$  ou o grau de  $g$  é menor ou igual a 3.

*Demonstração.* Suponhamos que o grau de  $f$  é menor ou igual a 3 e que  $\det DF(x) > 0$ , para todos  $x \in \mathbb{R}^2$ . Se  $H_f$  não for globalmente resolúvel, então o item 2 do Corolário 3.4 garante que não existe nenhuma função diferenciável  $\bar{g}$  que resolve globalmente o problema  $H_f \bar{g} = \det DF$ , uma vez que  $\det DF$  é uma função polinomial e  $f$  é uma submersão polinomial de grau menor ou igual a 3. Mas isso é um absurdo com a identidade  $H_f g = \det DF$ . Logo  $H_f$  é globalmente resolúvel, seguindo do Corolário 1.15 que  $F$  é um difeomorfismo.  $\square$

O Teorema 3.7 é o resultado principal do trabalho [5], que publicamos juntamente com José Ruidival dos Santos Filho no início do corrente ano.

Ao final desta secção, fica claro que temos um problema em aberto: sabemos que se o grau de uma das componentes de uma função polinomial  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo (3.3.1) for menor ou igual a 3,  $F$  é necessariamente injetora. Também temos um exemplo de uma função não injetora em que o grau de uma de suas componentes é 10. Dessa forma, temos uma “falha” de 3 para 10 em que não sabemos se o grau de uma das componentes de  $F$  pertencer ao intervalo  $(3, 10)$  garante necessariamente a sua injetividade.

# Capítulo 4

## Conjectura jacobiana reduzida

### 4.1 Redução do grau

Consideremos a Conjectura jacobiana  $(CJ)_n$  discutida no último capítulo. No já citado trabalho [2], seus autores mostram o

**Teorema 4.1.** *Demonstrar  $(CJ)_n$ , para todos  $n \in \mathbb{N}$ , é equivalente a demonstrar o seguinte: Seja  $H = (h_1, \dots, h_n) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  uma aplicação polinomial homogênea de grau 3. Então, para todos  $n \in \mathbb{N}$ , a aplicação*

$$F(x) = x + H(x), \quad \text{com} \quad \det DF(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{K}^n, \quad (4.1.1)$$

é injetora

Ao problema de mostrar que aplicações da forma (4.1.1) são injetoras damos o nome de *Conjectura jacobiana reduzida*.

A ideia básica para demonstrar o Teorema 4.1 é começar com uma aplicação polinomial  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  tal que  $\det DF = 1$  e inserir novas variáveis para definir  $\tilde{F} : \mathbb{K}^{n+m} \rightarrow \mathbb{K}^{n+m}$  que tem a forma (4.1.1) e que é injetora se, e somente se, a  $F$  original o é. O número  $m$  depende de  $n$  e do grau de  $F$ , e é por isso que devemos mostrar a injetividade de  $F$  como em (4.1.1) *para todas as dimensões*. Podemos ir ainda mais além nas simplificações de  $(CJ)_n$ , para todos  $n \in \mathbb{N}$ . O “survey” [11], de Ludwik M. Drużkowski, nos informa que para verificar a Conjectura jacobiana reduzida, basta fazê-lo para aplicações do tipo *lineares cúbicas*, isto é, que são do tipo (4.1.1), com<sup>1</sup>

$$h_j(x) = \left( \sum_{i=1}^n a_j^i x_i \right)^3.$$

Aqui, novamente “paga-se o preço” da introdução de mais variáveis. No mesmo trabalho, o autor nos informa dos esforços de Engelbert Hubbers, que, em sua tese de doutoramento,

---

<sup>1</sup>A demonstração para tal redução encontra-se em trabalhos do próprio autor, citados em [11], mas não aqui.

mostrou a injetividade das aplicações lineares cúbicas para  $n = 1, \dots, 7$ . Não consideraremos esta última forma de ver o problema. Ficaremos com a formulação mais geral da Conjectura jacobiana reduzida dada por (4.1.1). Na secção seguinte, apresentaremos uma possível nova ideia para lidar com o problema. A viabilidade dessa ideia para o caso de  $n$  qualquer é deixada como um problema em aberto. Na Secção 4.3, trataremos do caso de  $n = 3$ .

## 4.2 Uma ideia para a Conjectura jacobiana reduzida

Apresentamos aqui, como dito acima, uma possível nova forma de lidar com a conjectura jacobiana reduzida. Introduzimos os campos vetoriais  $\mathcal{V}_{F,i}$  considerados no Capítulo 1 na análise desse problema. Preocupamo-nos, nesta secção, mais com a discussão informal desta nova ideia, procurando apenas motivar um tratamento mais analítico do problema da conjectura jacobiana reduzida. Na última secção, apresentaremos o caso de  $\mathbb{R}^3$  para ilustrar o funcionamento de nossa técnica. A motivação para as ideias aqui discutidas vem do trabalho [1], em que Kiyoshi Baba e Yoshikazu Nakai mostram, entre outras coisas, que, no caso de  $n = 2$ , a hipótese (4.1.1) garante que  $h_2 = \alpha h_1$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$  (se  $h_1$  não for identicamente nulo). Daí, considerando  $T(x) = (x_1, x_2 - \alpha x_1)$ , temos que  $\bar{F} = T \circ F \circ T^{-1} = (x_1 + \bar{h}_1, x_2)$ , com  $\bar{h}_1$  um polinômio homogêneo de grau 3 e  $\det D\bar{F} = 1$ . É evidente que  $\bar{F}$  é injetora. Quando estudamos tal trabalho, observamos que, diferentemente da técnica usada por Baba e Nakai, poderíamos utilizar o conhecido Teorema de Baouendi-Tréves<sup>2</sup> (Teorema 4.2 abaixo) para mostrar o mesmo resultado, com a vantagem de nosso argumento possivelmente se aplicar para dimensões maiores (a argumentação em [1] é estritamente bidimensional). Eis a versão do Teorema de Baouendi-Tréves que utilizaremos:

**Teorema 4.2.** *Dados um campo de vetores de classe  $C^\infty$ ,  $X : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , que não se anula em uma vizinhança de um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , e  $n - 1$  funções de classe  $C^\infty$ ,  $g_1, \dots, g_{n-1}$  tais que o conjunto  $\{\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_{n-1}(x_0)\}$  é linearmente independente. Se  $Xg_i = 0$ , para todos  $i = 1, \dots, n - 1$ , então para toda função de classe  $C^\infty$ ,  $f$ , tal que  $Xf = 0$ , existem uma vizinhança de  $x_0$ ,  $U$ , e uma função de classe  $C^\infty$ ,  $G : A \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $f(x) = G(g_1(x), \dots, g_{n-1}(x))$ ,  $\forall x \in U$ , em que  $A$  é um conjunto aberto. Mais ainda,  $G$  é dada como um limite uniforme de polinômios.*

Vejamos a demonstração do resultado acima discutido via Teorema 4.2:

Suponhamos que  $h_1$  não é identicamente nulo. A hipótese (4.1.1) garante que  $H_{h_1}h_2 = 0$  (em que  $H_{h_1}$  é o campo hamiltoniano associado a  $h_1$ ). Como o campo  $H_{h_1}$  não é

<sup>2</sup>Uma referência é o livro [4], de Shiferaw Berhanu, Paulo D. Cordaro e Jorge Hounie.

identicamente nulo e  $H_{h_1}h_1 = 0$ , segue do Teorema 4.2 que em uma vizinhança de um ponto em que  $H_{h_1}$  não é nulo,  $h_2 = f(h_1)$ , para uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida em um certo intervalo. Como  $h_1$  e  $h_2$  são funções homogêneas de grau 3, segue que  $f$  é uma função homogênea de grau 1, e, portanto, é do tipo  $f(t) = \alpha t$ , para um  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Logo,  $h_2 = \alpha h_1$  em uma vizinhança de um ponto e, como são funções polinomiais, tal relação vale em  $\mathbb{R}^2$  (veja o Lema 4.6).

Dada a simplicidade do argumento acima, é natural nos perguntarmos se esse não seria o caso geral. Conjecturamos, portanto, o seguinte:

Dada uma aplicação  $F$  como em (4.1.1), sempre é verdade que  $h_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \alpha_i h_i$ , para algum  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Em sendo essa conjectura verdadeira, consideremos as seguintes transformações lineares invertíveis:

$$T(x) = \left( x_1, \dots, x_{j-1}, x_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \alpha_i x_i, x_{j+1}, \dots, x_n \right) \text{ e} \quad (4.2.1)$$

$$L(x) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_n, x_{j+1}, \dots, x_j). \quad (4.2.2)$$

É fácil ver que, se  $G = LTF^{-1}L^{-1}$ , então  $G(x) = x + (\overline{h_1}(x), \dots, \overline{h_{n-1}}(x), 0)$ , com  $\overline{h_i}$ 's polinômios homogêneos de grau 3 e  $\det DG = 1$ . Assim, bastaria demonstrarmos que funções do tipo de  $G$  são injetoras. Vejamos onde reside a dificuldade de se obter tal resultado:

Fixemos  $n \in \mathbb{N}$  e suponhamos que  $h_1, \dots, h_{n-1}$  são linearmente independentes, isto é, que um não é combinação linear dos outros. Sendo assim, podemos demonstrar que  $\nabla h_1, \dots, \nabla h_{n-1}$  são linearmente independentes (isso não é difícil, veja o Lema 4.5 abaixo, que demonstra essa afirmação no caso  $n = 3$ . O caso geral tem demonstração análoga). É fácil ver que a hipótese (4.1.1) garante que  $\mathcal{V}_{H,n}(h_n) = \det DH = 0$ . Como  $\mathcal{V}_{H,n}(h_j) = 0$ , para todos  $j = 1, \dots, n - 1$ , segue do Teorema de Baouendi-Tréves que existe  $G : A \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h_n = G(h_1, \dots, h_{n-1})$ . Chegaremos ao nosso objetivo se mostrarmos que  $G$  é uma função linear (pois daí  $h_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i h_i$  vale em  $\mathbb{R}^n$  pelo Lema 4.6). É justamente nessa passagem que está a dificuldade: como garantir que  $G$  é linear? Na secção seguinte, mostramos a linearidade de  $G$  no caso de  $n = 3$ .

Assim, se a conjectura acima for verdadeira, obtemos, a menos de conjugação com a transformação (4.2.1),

$$F = x + (h_1, \dots, h_{n-1}, 0).$$

A ideia seria continuar a simplificação de  $F$  usando o Teorema 4.2 novamente: da hipótese

$\det DF = 1$ , obtemos que

$$\det \begin{pmatrix} \nabla h_1 \\ \vdots \\ \nabla h_{n-1} \\ (0, \dots, 1) \end{pmatrix} = 0.$$

Definindo  $\tilde{H} = (h_1, \dots, h_{n-1}, x_n^3)$ , obtemos da  $n$ -linearidade da função determinante que  $\mathcal{V}_{\tilde{H}, n-1} h_{n-1} = 0$ . Aplicando Baouendi-Tréves como antes, obtemos que  $h_{n-1} = G(h_1, \dots, h_{n-1}, x_n^3)$ . Daí, como antes, se formos aptos a mostrar a linearidade da aplicação  $G$ , teremos  $h_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i h_i + \alpha_n x_n^3$ . Conjugando com a aplicação (4.2.1), obtemos

$$F(x) = x + (h_1, \dots, h_{n-2}, \alpha_n x_n^3, 0).$$

Continuando o processo acima de maneira indutiva, obteremos, a menos de conjugação com uma aplicação linear invertível,

$$F(x) = x + (h_1, \dots, h_{n-1}, 0),$$

com

$$h_j = \sum_{i=j+1}^n \alpha_i^j x_i^3, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

em que  $\alpha_i^j \in \mathbb{R}$ . Não é difícil de ver que uma  $F$  assim é injetora.

### 4.3 Conjectura jacobiana reduzida em $\mathbb{R}^3$

O Teorema seguinte é a conjectura apresentada na secção anterior para o caso  $\mathbb{R}^3$ . Demonstrá-lo-emos como consequência do Teorema de Baouendi-Tréves e de uma série de Lemas e Proposições.

**Teorema 4.3.** *Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  da forma  $F(x) = x + (h_1(x), h_2(x), h_3(x))$ , com  $h_1, h_2, h_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  polinômios homogêneos de grau 3, tal que  $\det DF \equiv 1$ . Então existe uma transformação linear invertível  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $TFT^{-1}(x) = x + (k_1(x), k_2(x), 0)$ , com  $k_1, k_2$  polinômios homogêneos de grau 3.*

Tal Teorema já garante a injetividade de  $F$  se o combinarmos com a seguinte

**Proposição 4.4.** *Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação polinomial de grau 3 tal que  $F_3(x) = x_3$ . Se  $\det DF \neq 0$ , então  $F$  é injetora.*

*Demonstração.* Basta mostrar que, para cada  $x_3 \in \mathbb{R}$  fixo, a aplicação  $F_{x_3} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $F_{x_3}(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3))$  é injetora. Notemos que  $F_{x_3}$  é uma aplicação polinomial de grau 3, e que  $\det DF_{x_3} = \det DF \neq 0$ . Logo, do Teorema 3.7, segue que  $F_{x_3}$  é injetora.  $\square$

Iniciemos a demonstração do Teorema 4.3 com os dois lemas seguintes. O primeiro deles é um resultado geral para funções homogêneas, já o segundo é uma propriedade de polinômios bastante útil que nos permite passar de propriedades locais para propriedades globais. Utilizaremos nesta secção, com o intuito de simplificar a notação, o símbolo  $f_{x_i}$  no lugar de  $\partial_i f$ .

**Lema 4.5.** *Sejam  $u, v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  funções homogêneas de grau  $k \neq 0$ . Então  $\nabla u(x)$  e  $\nabla v(x)$  são linearmente dependentes em um aberto conexo  $U \subset \mathbb{R}^3$  em que  $u$  nunca se anule, se, e somente se, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $u(x) = \alpha v(x)$ ,  $\forall x \in U$ .*

*Demonstração.*  $(\Leftarrow)$  é trivial. Para demonstrar  $(\Rightarrow)$ , consideremos

$$M_1 \doteq \begin{pmatrix} u_{x_1} & u_{x_2} \\ v_{x_1} & v_{x_2} \end{pmatrix}, M_2 \doteq \begin{pmatrix} u_{x_1} & u_{x_3} \\ v_{x_1} & v_{x_3} \end{pmatrix}, M_3 \doteq \begin{pmatrix} u_{x_2} & u_{x_3} \\ v_{x_2} & v_{x_3} \end{pmatrix}.$$

Com a notação  $|M| = \det M$ , onde  $M$  é alguma matriz quadrada, temos que  $|M_1| = |M_2| = |M_3| = 0$  em  $U$ . Tomemos  $\tilde{u} = 1/u$ . Temos da equação de Euler que

$$-k\tilde{u} = x_1\tilde{u}_{x_1} + x_2\tilde{u}_{x_2} + x_3\tilde{u}_{x_3} \quad \text{e} \quad kv = x_1v_{x_1} + x_2v_{x_2} + x_3v_{x_3}.$$

Daí, substituindo  $\tilde{u}$  e  $v$  em  $\tilde{u}_{x_1}v + \tilde{u}v_{x_1} = (\tilde{u}v)_{x_1}$ , obtemos que

$$(\tilde{u}v)_{x_1} = \frac{-1}{ku^2}(x_2|M_1| + x_3|M_2|) = 0 \quad \text{em } U.$$

Analogamente,  $(\tilde{u}v)_{x_2} = (\tilde{u}v)_{x_3} = 0$  em  $U$ , seguindo que  $v = \alpha u$  em  $U$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ . □

**Lema 4.6.** *Sejam  $p, q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  polinômios tais que  $p(x) = q(x)$ ,  $\forall x \in U$ , com  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto. Então  $p(x) = q(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .*

*Demonstração.* Fórmula de Taylor. □

Consideremos, assim,  $F(x) = x + (h_1(x), h_2(x), h_3(x))$ . Lembremos que basta mostrarmos que existem  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  constantes tais que  $h_3 = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$  (pois daí conjugamos com uma aplicação como em (4.2.1), finalizando a demonstração). Podemos supor que os  $h_i$ 's não são identicamente nulos (pois senão já teríamos alcançado o objetivo, a menos de trocar  $h_1$  ou  $h_2$  por  $h_3$ ). Além disso, podemos supor que  $h_2$  não é nenhum múltiplo de  $h_1$ , isto é, que não existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $h_2 = \alpha h_1$  (pois senão novamente já teríamos o resultado). Consideremos, agora, o campo de vetores  $\mathcal{V}_{H,3}$  conforme notação estabelecida em (1.1.1). Temos que  $\mathcal{V}_{H,3}(h_i) \equiv 0$  para  $i = 1$  e  $2$ . Como  $\det DF = 1 + p_2 + p_4 + p_6$ , onde

$$\begin{aligned} p_2 &= h_{1x_1} + h_{2x_2} + h_{3x_3}, \\ p_4 &= h_{1x_1}h_{2x_2} - h_{1x_2}h_{2x_1} + h_{2x_2}h_{3x_3} - h_{2x_3}h_{3x_2} + h_{1x_1}h_{3x_3} - h_{1x_3}h_{3x_1} \quad \text{e} \\ p_6 &= \det D(h_1, h_2, h_3) \end{aligned}$$

são polinômios homogêneos de graus 2, 4 e 6, respectivamente, devemos necessariamente ter  $p_2 \equiv p_4 \equiv p_6 \equiv 0$ . Desde que  $p_6 = \mathcal{V}_{H,3}(h_3)$ , e o campo  $\mathcal{V}_{H,3}$  não pode se anular identicamente (pois isso implicaria que  $|M_1| \equiv |M_2| \equiv |M_3| \equiv 0$  – conforme a notação da demonstração do Lema 4.5, com  $u = h_1$  e  $v = h_2$  –, seguindo que  $\nabla h_1$  e  $\nabla h_2$  são linearmente dependentes), o Lema 4.5 e o Teorema 4.2 garantem que existe  $G : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , tal que  $h_3(x) = G(h_1(x), h_2(x))$ , em uma vizinhança de algum ponto  $x_0$ . Da homogeneidade de  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$ , segue que  $G$  é homogênea de grau 1, seguindo da equação de Euler que existe  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  definida em algum intervalo aberto  $I$ , tal que

$$h_3(x) = h_1(x)f(t), \text{ com } t = \frac{h_2(x)}{h_1(x)},$$

em alguma vizinhança de  $x_0$ . Obteremos o Teorema 4.3 se mostrarmos que  $f$  é uma função afim, pois daí  $h_3$  é combinação linear de  $h_1$  e  $h_2$ .

De  $p_2 \equiv p_4 \equiv 0$ , é fácil ver que chegamos às duas equações abaixo (para todo  $x$  em uma vizinhança de  $x_0$ ), onde usamos a notação da demonstração do Lema 4.5 com  $u = h_1$  e  $v = h_2$ :

$$h_{1x_1} + h_{2x_2} + h_{1x_3}f(t) + (h_{2x_3} - h_{1x_3}t)f'(t) = 0 \text{ e} \quad (4.3.1)$$

$$|M_1| - |M_3|f(t) + (|M_2| + |M_3|t)f'(t) = 0. \quad (4.3.2)$$

**Observação 9.** Notemos da última equação que não podemos ter  $|M_2| = |M_3| = 0$ . Pois senão  $|M_1| = 0$ , seguindo que  $\nabla h_1$  e  $\nabla h_2$  são linearmente dependentes (como já mencionado acima).

Observemos que as equações (4.3.1) e (4.3.2) podem ser escritas na forma matricial  $AY = D$ , com

$$A = \begin{pmatrix} h_{1x_3} & h_{2x_3} - h_{1x_3}t \\ -|M_3| & |M_2| + |M_3|t \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} -h_{1x_1} - h_{2x_2} \\ -|M_1| \end{pmatrix}.$$

**Lema 4.7.**  $\det A \neq 0$  em uma vizinhança de  $x_0$ .

*Demonstração.* Temos que  $\det A = h_{1x_3}|M_2| + h_{2x_3}|M_3|$ . Suponhamos, por absurdo que tal determinante seja nulo. *Afirmamos que  $h_{1x_3}$  é não nulo.* De fato, se  $h_{1x_3} = 0$ , então  $h_{2x_3}|M_3| = 0$ . Como  $h_{2x_3} \neq 0$  (pois senão, da definição de  $|M_i|$ ,  $|M_2| = |M_3| = 0$ , o que não pode ocorrer segundo a Observação 9), seguiria que  $|M_3| = 0$  e, portanto, que  $h_{1x_2} = 0$ . Daí, as equações (4.3.1) e (4.3.2) nos garantiriam que  $h_{1x_1} = 0$ . Mas em sendo assim, teríamos que  $h_1 \equiv 0$ , o que não é verdade.

Assim,

$$|M_2| = -h_{2x_3}/h_{1x_3}|M_3|, \quad (4.3.3)$$

o que, substituindo em (4.3.2), dá que

$$|M_1| - |M_3|f(t) - \frac{|M_3|}{h_{1x_3}}(h_{2x_3} - h_{1x_3}t)f'(t) = 0.$$

Substituindo (4.3.1) nessa última equação, obtemos que  $h_{1x_3}|M_1| + (h_{1x_1} + h_{2x_2})|M_3| = 0$ , que pode ser escrito como

$$h_{1x_2}|M_2| + h_{2x_2}|M_3| = 0.$$

Substituindo (4.3.3) nessa última identidade, obtemos que  $|M_3|^2 = 0$ . Daí, de (4.3.3), segue que  $|M_2| = 0$ , o que dá um absurdo com a Observação 9. Logo  $\det A \neq 0$ .  $\square$

Pelo lema, então, podemos inverter a matriz  $A$ , chegando à seguinte relação:

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} |M_2| + |M_3|t & h_{1x_3}t - h_{2x_3} \\ |M_3| & h_{1x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h_{1x_1} - h_{2x_2} \\ -|M_1| \end{pmatrix}. \quad (4.3.4)$$

Fazendo a multiplicação do lado direito de (4.3.4) e definindo

$$\begin{aligned} a &= h_{1x_1}|M_2| + h_{2x_1}|M_3|, \\ b &= h_{1x_2}|M_2| + h_{2x_2}|M_3| \text{ e} \\ c &= h_{1x_3}|M_2| + h_{2x_3}|M_3|, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{b}{c}t - \frac{a}{c} \text{ e} \\ f'(t) &= -\frac{b}{c}. \end{aligned}$$

Portanto, alcançaremos o objetivo de mostrar que  $f$  é afim se mostrarmos que  $b/c$  e  $a/c$  são constantes. Derivando a primeira equação acima em  $x_i$ , e substituindo a segunda no resultado, chegamos às seguintes equações:

$$(cb_{x_i} - bc_{x_i})t + (ca_{x_i} - ac_{x_i}) = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3. \quad (4.3.6)$$

Antes de continuar, faremos uma redução baseada na seguinte

**Proposição 4.8.** *Dado um polinômio homogêneo de grau 3,  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , temos que, a menos de uma mudança de variável linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que*

$$T(x) = (x_1, T_2(x), T_3(x)),$$

*$h$  tem uma das formas abaixo. Mais precisamente, existe uma transformação como acima*

tal que  $h \circ T^{-1}$  tem uma das seguintes formas:

$$\begin{array}{ll}
 (I) & x_1^2 x_3 + x_2 x_3^2 + g(x_1, x_2) & (VI) & x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + g(x_1, x_2) \\
 (II) & x_2 x_3^2 + g(x_1, x_2) & (VII) & x_2^2 x_3 + g(x_1, x_2) \\
 (III) & \beta x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + g(x_1, x_2) & (VIII) & x_1 x_2 x_3 + g(x_1, x_2) \\
 (IV) & \beta x_1 x_3^2 + g(x_1, x_2) & (IX) & x_1^2 x_3 + g(x_1, x_2) \\
 (V) & -x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + g(x_1, x_2) & (X) & g(x_1, x_2),
 \end{array}$$

com  $g(x_1, x_2) = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_4 x_1^2 x_2 + a_6 x_1 x_2^2$  e  $|\beta| = 1$ .

*Demonstração.* A demonstração é similar à demonstração do Lema 2.2 e encontra-se no Apêndice A. □

**Proposição 4.9.** *Se o Teorema 4.3 vale quando  $h_1$  é um dos polinômios da Proposição 4.8, então ele vale em geral.*

*Demonstração.* Seja  $F$  como nas hipóteses do Teorema 4.3, e consideremos a transformação  $T$  dada na Proposição 4.8. Temos que  $\overline{h_1} = h_1 \circ T^{-1}$  é de um dos dez tipos daquela Proposição e  $G \doteq T \circ F \circ T^{-1} = x + (\overline{h_1}, k_2, k_3)$ , com  $k_2, k_3$  polinômios homogêneos de grau 3 e  $\det DG = 1$ . Daí, pela hipótese, existe uma transformação linear invertível  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $L \circ G \circ L^{-1} = x + (l_1, l_2, 0)$ , com  $l_1, l_2$  polinômios homogêneos de grau 3. Logo,  $(L \circ T) \circ F \circ (L \circ T)^{-1} = x + (l_1, l_2, 0)$ . □

Assim, para concluirmos a demonstração do Teorema 4.3, basta mostrarmos que  $a/c$  e  $b/c$  são constantes quando  $h_1$  for cada um dos polinômios da Proposição 4.8 e  $h_2$  for um polinômio homogêneo de grau 3 satisfazendo as equações (4.3.6). Isso é alcançado pela proposição seguinte.

**Proposição 4.10.** *Consideremos  $h_1$  um dos dez polinômios dados na Proposição 4.8. Somente para os polinômios (II), (VII) e (X) (com certas restrições em  $a_1, a_2, a_4$  e  $a_6$ ) existe um polinômio homogêneo de grau 3,  $h_2$ , tal que  $c \neq 0$  e valem as equações (4.3.6). Mais ainda, nesses 3 casos,  $a/c$  e  $b/c$  são constantes.*

*Demonstração.* A demonstração está no apêndice. □

# Referências Bibliográficas

- [1] BABA, Kiyoshi; NAKAI, Yoshikazu. A generalization of Magnu's Theorem. *Osaka Journal of Mathematics*, v. 14, p. 403–409, 1977.
- [2] BASS, Hyman; CONNELL, Edwin H.; WRIGHT, David. The jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 7, p. 287–330, 1982.
- [3] BIALYNICKI-BIRULA, Andrzej; ROSENLICHT, Maxwell. Injective morphisms of real algebraic varieties. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 13, p. 200–203, 1962.
- [4] BERHANU, Shiferaw; CORDARO, Paulo D.; HOUNIE, Jorge G. *An introduction to involutive structures*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. (New Mathematical Monographs, 6). 392 p.
- [5] BRAUN, Francisco; DOS SANTOS FILHO, José Ruidival. The real Jacobian conjecture on  $\mathbb{R}^2$  is true when one of the components has degree 3. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*, v. 26, p. 75–87, 2010.
- [6] CAMPBELL, Louis Andrew. Partial Properness and Real Planar Maps. *Applied Mathematics Letters*, v. 9, p. 99–105, 1996.
- [7] CAMPBELL, L. A. The asymptotic variety of a Pinchuk map as a polynomial curve. *arXiv:math.AG/1001.3318v3*.
- [8] COBO, Milton; GUTIERREZ, Carlos; LLIBRE, Jaume. On the injectivity of  $C^1$  maps of the real plane. *Canadian Journal of Mathematics*, v. 54, p. 1187–1201, 2002.
- [9] DOS SANTOS FILHO, José Ruidival. Injective mappings and solvable vector fields of euclidean spaces. *Topology and its Applications*, v. 136, p. 261–274, 2004.
- [10] DOS SANTOS FILHO, José Ruidival; TAVARES, Joaquim. Injective mappings and solvable vector fields, (Aceito para publicação nos *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 2010).

- [11] DRUŻKOWSKI, Ludwik M. On the global asymptotic stability problem and the Jacobian conjecture. *Control and Cybernetics*, v. 34, p. 747–762, 2005.
- [12] DUISTERMAAT, Johannes Jisse; HÖRMANDER, Lars. Fourier integral operators II. *Acta Mathematicae*, v. 128, p. 183–269, 1972.
- [13] GASULL, Armengol; LLIBRE, Jaume; SHENG, Li Ren. Chordal quadratic systems. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, v. 16, p. 751–782, 1986.
- [14] GUTIERREZ, Carlos et al. Global injectivity of  $C^1$  maps of the real plane, inseparable leaves and the Palais-Smale condition. *Canadian Mathematical Bulletin*, v. 50, p. 377–389, 2007.
- [15] GWOŹDZIEWICZ, Janusz. The real jacobian conjecture for polynomials of degree 3. *Annales Polonici Mathematici*, v. 76, p. 121–125, 2001.
- [16] KELLER, Ott-Heinrich. Ganze Cremona-Transformationen. *Monatshefte für Mathematik*, v. 47, p. 299–306, 1939.
- [17] LIMA, Elon Lages. A equação do terceiro grau. *Matemática Universitária*, v. 5, p. 9–23, 1987.
- [18] NEWMAN, Donald Joseph. One-one polynomial maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 11, p. 867–870, 1960.
- [19] OLECH, Czesław. On the global stability of an autonomous system on the plane. *Contributions to Differential Equations*, v. 1, p. 389–400, 1963.
- [20] PINCHUK, Sergey. A counterexample to the strong real jacobian conjecture. *Mathematische Zeitschrift*, v. 217, p. 1–4, 1994.
- [21] PLASTOCK, Roy. Homeomorphisms between Banach spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 200, p. 169–183, 1974.
- [22] RANGE, R. Michael. *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, New York: Springer-Verlag, 1986. (Graduate Texts in Mathematics, 108). 386 p.
- [23] RUDIN, Walter. Injective polynomial maps are automorphisms. *American Mathematical Monthly*, v. 102, p. 540–543, 1995.

# Apêndice A

## Demonstração das Proposições 4.8 e 4.10

*Demonstração da Proposição 4.8.* A demonstração segue o cerne da demonstração do Lema 2.2, com as modificações adequadas:

Consideremos  $h = a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_3^3 + a_4x_1^2x_2 + a_5x_1^2x_3 + a_6x_1x_2^2 + a_7x_2^2x_3 + a_8x_1x_3^2 + a_9x_2x_3^2 + a_{10}x_1x_2x_3$ . Podemos assumir que  $a_3 = 0$ ; caso contrário, se  $a_2 \neq 0$ , consideremos um  $r \neq 0$  dado por

$$a_2 + a_7r + a_9r^2 + a_3r^3 = 0.$$

Daí, é fácil ver que a mudança de variáveis  $(y_1, y_2, y_3) = T(x_1, x_2, x_3) \doteq (x_1, x_3 - rx_2, x_3)$  é tal que  $h \circ T^{-1}(y)$  é um polinômio em que o coeficiente de  $y_3^3$  é nulo. Se  $a_2 = 0$  acima, então uma transformação do tipo  $y_1 = x_1, y_2 = x_3, y_3 = x_2$  leva  $h_1$  em um polinômio sem o termo  $y_3^3$ . Estamos, pois, aptos a supor que

$$h = a_5x_1^2x_3 + a_7x_2^2x_3 + a_8x_1x_3^2 + a_9x_2x_3^2 + a_{10}x_1x_2x_3 + g(x_1, x_2), \quad (\text{A.0.1})$$

com  $g(x_1, x_2)$  um polinômio homogêneo de grau 3 nas variáveis  $x_1$  e  $x_2$ .

Se  $a_9 \neq 0$  em (A.0.1), a mudança  $y_1 = x_1, y_2 = x_2 + a_8a_9^{-1}x_1, y_3 = x_3$  leva  $h$  a um polinômio do tipo (utilizando as mesmas variáveis)  $a_5x_1^2x_3 + a_7x_2^2x_3 + a_9x_2x_3^2 + a_{10}x_1x_2x_3 + g(x_1, x_2)$ , com  $a_9 \neq 0$ . Agora, a mudança  $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = a_{10}x_1 + a_7x_2 + 2a_9x_3$  transforma este último em um polinômio (novamente denotado com as mesmas variáveis) do tipo  $a_5x_1^2x_3 + a_9x_2x_3^2 + g(x_1, x_2)$ , com  $a_9$  não nulo, que, com a mudança  $y_1 = x_1, y_2 = a_9x_2, y_3 = x_3$  é transformado em um polinômio do tipo  $a_5x_1^2x_3 + x_2x_3^2 + g(x_1, x_2)$ . Se  $a_5 \neq 0$ , a mudança  $y_1 = x_1, y_2 = a_5^{-2}x_2, y_3 = a_5x_3$  termina de transformar  $h$  em um polinômio do tipo (I). Se  $a_5 = 0$ , temos o tipo (II).

Se, por outro lado,  $a_9 = 0$  em (A.0.1), temos o polinômio

$$h = a_5x_1^2x_3 + a_7x_2^2x_3 + a_8x_1x_3^2 + a_{10}x_1x_2x_3 + g(x_1, x_2). \quad (\text{A.0.2})$$

Se  $a_8 \neq 0$  em (A.0.2), a mudança  $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = a_5x_1 + a_{10}x_2 + 2a_8x_3$  leva  $h$  a um polinômio (denotado com as mesmas variáveis) do tipo  $h = a_7x_2^2x_3 + a_8x_1x_3^2 + g(x_1, x_2)$ ,

com  $a_8 \neq 0$ . Se  $a_7 \neq 0$ , a mudança  $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = a_7x_3$  simplifica para  $h = x_2^2x_3 + a_8x_1x_3^2 + g(x_1, x_2)$ , com  $a_8 \neq 0$ . Se  $a_8 > 0$ , então a mudança  $y_1 = x_1, y_2 = a_8^{-1/4}x_2, y_3 = a_8^{1/2}x_3$  transforma  $h$  em (com as mesmas variáveis)  $x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + g(x_1, x_2)$ . Já se  $a_8 < 0$ , a transformação  $y_1 = x_1, y_2 = (-a_8)^{-1/4}x_2, y_3 = (-a_8)^{1/2}x_3$  leva  $h$  em  $x_2^2x_3 - x_1x_3^2 + g(x_1, x_2)$ . Estes dois últimos polinômios dão os dois casos inseridos em (III). Se  $a_7 = 0$ , então, agindo como acima com relação a  $a_8$ , chegamos aos dois casos do item (IV).

Por outro lado, se  $a_8 = 0$  em (A.0.2), ficamos com

$$h = a_5x_1^2x_3 + a_7x_2^2x_3 + a_{10}x_1x_2x_3 + g(x_1, x_2). \quad (\text{A.0.3})$$

Se  $a_7 \neq 0$  em (A.0.3), tomemos  $k = a_{10}^2 - 4a_5a_7$ . Se  $k \neq 0$ , consideremos a mudança  $y_1 = x_1, y_2 = |k|^{-1/2}(2a_7x_2 + a_{10}x_1), y_3 = x_3$ . Esta transforma  $h$  no polinômio  $-k/(4a_7)x_1^2x_3 + |k|/(4a_7)x_2^2x_3 + g(x_1, x_2)$ , que, com a mudança  $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = |k|/(4a_7)x_3$  fica  $h = -k/|k|x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + g(x_1, x_2)$ , que dá o tipo *V* ou o tipo *VI*, conforme  $k$  é positivo ou negativo. Se, por outro lado,  $k = 0$ , a transformação  $y_1 = x_1, y_2 = x_2 + (2a_7)^{-1}a_{10}x_1, y_3 = x_3$  leva  $h$  no polinômio  $a_7x_2^2x_3 + g(x_1, x_2)$ , com  $a_7 \neq 0$ . Daí, absorvendo  $a_7$  na variável  $x_3$ , obtemos o tipo (*VII*).

Se, agora,  $a_7 = 0$  em (A.0.3), temos o polinômio

$$h = a_5x_1^2x_3 + a_{10}x_1x_2x_3 + g(x_1, x_2).$$

Se  $a_{10} \neq 0$ , a transformação  $y_1 = x_1, y_2 = a_5x_1 + a_{10}x_2, y_3 = x_3$  leva  $h$  em um polinômio do tipo (*VIII*). Se  $a_{10} = 0$  e  $a_5 \neq 0$ , podemos absorver  $a_5$  na variável  $x_3$  para obter o caso (*IX*). Se, por fim  $a_{10} = a_5 = 0$ , obtemos (*X*).  $\square$

*Demonstração da Proposição 4.10.* Transformemos, primeiramente, as equações (4.3.6) em equações polinomiais (multiplicando-as por  $h_1$ ). Para posterior menção, enunciemo-las aqui:

$$\begin{aligned} (cb_{x_1} - bc_{x_1})h_2 + (ca_{x_1} - ac_{x_1})h_1 &= 0 \\ (cb_{x_2} - bc_{x_2})h_2 + (ca_{x_2} - ac_{x_2})h_1 &= 0 \\ (cb_{x_3} - bc_{x_3})h_2 + (ca_{x_3} - ac_{x_3})h_1 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.0.4})$$

Daí, imponhamos tais equações para  $h_1$ , quando  $h_1$  for cada caso da Proposição 4.8 e para o polinômio genérico

$$h_2 = b_1x_1^3 + b_2x_2^3 + b_3x_3^3 + b_4x_1^2x_2 + b_5x_1^2x_3 + b_6x_1x_2^2 + b_7x_2^2x_3 + b_8x_1x_3^2 + b_9x_2x_3^2 + b_{10}x_1x_2x_3.$$

Para verificarmos as equações A.0.4, devemos escrevê-las da forma

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3} = 0, \quad (\text{A.0.5})$$

e zerar todos os coeficientes  $c_\alpha$  (tais coeficientes dependem, obviamente, dos coeficientes de  $h_1$  e  $h_2$ ). Como tais polinômios têm grau 14, é difícil de lidar manualmente com eles. Faremos uso do software Maple V para nos auxiliar com as simplificações algébricas na escrita dos polinômios em (A.0.4) na forma (A.0.5). Abaixo, descrevemos cada passo dos cálculos feitos com o Maple V, primeiramente mostrando que os casos (I), (III), (IV), (V), (VI), (VIII) e (IX) não satisfazem as equações (A.0.4) juntamente com a hipótese de  $c \neq 0$ , e, depois, que tais hipóteses podem ser satisfeitas nos casos (II), (VII) e (X). Para simplificar a notação, escreveremos  $(i, j, k)_l$ , com  $i, j, k \in \{n \in \mathbb{N} \mid i + j + k = 14\}$  e  $l \in \{1, 2, 3\}$ , para denotar o coeficiente  $c_{(i,j,k)}$  no polinômio que aparece na  $l$ -ésima equação de (A.0.4). Como vimos, todos tais coeficientes devem ser nulos. Coloquemos

$$h_1 = a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_4x_1^2x_2 + a_5x_1^2x_3 + a_6x_1x_2^2 + a_7x_2^2x_3 + a_8x_1x_3^2 + a_9x_2x_3^2 + a_{10}x_1x_2x_3.$$

No caso (I), isto é, quando  $a_5 = a_9 = 1$  e  $a_7 = a_8 = a_{10} = 0$ , primeiramente supomos  $b_3 \neq 0$ . Daí,  $(0, 0, 14)_1 = 0$  garante que  $b_{10} = (2b_8b_9 - 6b_3)/(3b_3)$ ,  $(0, 0, 14)_2 = 0$  dá que  $b_8 = 3b_3b_7 - b_9^2$ , enquanto que  $(0, 1, 13)_2 = 0$  garante que  $b_2 = (b_9b_7 - 3a_6b_3 - 1)/(9b_3)$ . Agora,  $(1, 0, 13)_1 = 0$ ,  $(0, 1, 13)_1 = 0$ ,  $(1, 0, 13)_2 = 0$ ,  $(0, 2, 12)_1 = 0$  e  $(4, 0, 10)_1 = 0$  dão, respectivamente e em seqüência, que  $b_4 = (3b_3b_7 + b_5b_9 - 9a_1b_3 - b_9^2)/(3b_3)$ ,  $b_5 = 3b_3b_7^2 - b_7b_9^2 - 3a_4b_3 - 3b_3b_6 - b_9$ ,  $b_6 = (3b_3b_7b_9 - 3b_3b_9 - 9a_4b_3^2 - b_9^4)/(9b_3^2)$ ,  $b_7 = (b_9^2 - 3a_1b_3)/(3b_3)$  e  $a_1 = 0$ . Mas daí,  $(1, 1, 12)_1 = 0$  e  $(3, 0, 11)_1 = 0$  dão, respectivamente,  $b_1 = -2$  e  $b_1 = -4/3$ , um absurdo. Assim, devemos ter  $b_3 = 0$ . Obtemos de  $(0, 3, 11)_1 = 0$  que  $b_8 = 0$  e de  $(4, 2, 8)_3 = 0$  que  $(b_5 - b_9)b_9 = 0$ . Suponhamos que  $b_9 \neq 0$ . Daí  $b_5 = b_9$ , e  $(3, 3, 8)_1 = 0$  e  $(0, 6, 8)_1 = 0$  dão, respectivamente,  $b_{10} = 0$  e  $b_7 = 0$ . Mais ainda,  $(0, 8, 6)_1 = 0$ ,  $(2, 6, 6)_1 = 0$  e  $(4, 4, 6)_1 = 0$  nos levam, respectivamente, a  $b_6 = a_6b_9 + 3a_2b_9^2 - 3b_2b_9$ ,  $b_4 = a_4b_9 + 3b_2b_9^2 - 3a_2b_9^3$  e  $b_1 = a_1b_9 + a_2b_9^4 - b_2b_9^3$ . Mas daí, obtemos que  $c = 0$ . Suponhamos, pois,  $b_3 = b_8 = b_9 = 0$ . Daí, de  $(3, 3, 8)_1 = 0$ ,  $(1, 6, 7)_3 = 0$ ,  $(4, 4, 6)_1 = 0$ ,  $(12, 2, 0)_1 = 0$ ,  $(6, 4, 4)_1 = 0$  e  $(6, 5, 3)_1 = 0$ , obtemos, respectivamente, que  $b_5 = 0$ ,  $b_{10} = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_4 = 0$ ,  $b_7 = 0$  e  $b_6 = 0$ . Mas daí,  $c = 0$ . Portanto, o caso (I) não satisfaz  $c \neq 0$  e as equações (A.0.4). Nas análises seguintes, para simplificar a notação, escreveremos  $(i, j, k)_l$  no lugar de  $(i, j, k)_l = 0$ .

Para o caso (III),  $a_5 = a_9 = a_{10} = 0$ ,  $a_7 = 1$  e  $|a_8| = 1$ . Temos de  $(0, 1, 13)_1$  que  $b_3 = 0$ , e, de  $(0, 4, 10)_1$  e  $(1, 2, 11)_1$ , que  $b_9 = 0$ . Agora, de  $(0, 6, 8)_1$ ,  $(0, 8, 6)_1$ ,  $(0, 10, 4)_1$ ,  $(2, 6, 6)_1$  e  $(2, 8, 4)_1$ , obtemos, respectivamente,  $b_7 = b_8/a_8$ ,  $b_{10} = 0$ ,  $b_6 = (3a_2b_8^2 + a_6a_8b_8 - 3a_8b_2b_8)/a_8^2$ ,  $b_5 = 0$  e  $b_4 = (a_4a_8^2b_8 + 3a_8b_2b_8^2 - 3a_2b_8^3)/a_8^3$ . Mais ainda, de  $c \neq 0$  e  $(2, 11, 1)_1$ , obtemos que  $b_2 = a_2b_8/a_8$ . Mas daí  $(4, 6, 4)_1$  leva a  $c = 0$ .

Analisemos o caso (IV), isto é, quando  $a_5 = a_7 = a_9 = a_{10} = 0$  e  $|a_8| = 1$ . Primeiramente, suponhamos  $b_3 \neq 0$ . Da seqüência  $(0, 2, 12)_1$ ,  $(1, 0, 13)_1$ ,  $(1, 1, 12)_1$ ,  $(1, 2, 11)_1$ ,  $(1, 3, 10)_1$ ,  $(3, 1, 10)_2$ ,  $(2, 0, 12)_1$ ,  $(4, 0, 10)_3$ ,  $(5, 0, 9)_1$ ,  $(4, 1, 9)_3$ ,  $(8, 0, 6)_3$ ,  $(8, 2, 4)_3$ ,  $(4, 3, 7)_3$ , obtemos

a sequência  $a_2 = 0$ ,  $b_9 = a_8$ ,  $a_6 = 2a_8b_7/(3b_3)$ ,  $b_2 = 2a_8b_7/(3b_3)$ ,  $b_7 = 0$ ,  $a_4 = 2a_8b_{10}/(3b_3)$ ,  $b_8 = 0$ ,  $b_4 = (9a_1b_3 - 4a_8b_5)/(3b_3)$ ,  $b_5 = 0$ ,  $a_1 = b_{10}^2/(12a_8)$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_{10} = 0$ ,  $b_6 = 0$ . Seguindo que  $c = 0$ . Se  $b_3 = 0$ ,  $(3, 0, 11)_2$  dá que  $b_8b_9 = 0$ . Suponhamos primeiro que  $b_9 \neq 0$ . Daí  $b_8 = 0$ , e a sequência  $(2, 1, 11)_2$ ,  $(1, 4, 9)_2$ ,  $(4, 0, 10)_2$ ,  $(4, 1, 9)_1$ ,  $(2, 2, 10)_1$ ,  $(3, 2, 9)_1$ ,  $(2, 3, 9)_1$ ,  $(1, 3, 10)_1$ ,  $(1, 4, 9)_1$  fabrica a sequência  $b_9 = a_8$ ,  $a_2 = 0$ ,  $b_5 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_{10} = 0$ ,  $a_1 = b_4$ ,  $a_4 = b_6$ ,  $b_7 = 0$ ,  $a_6 = b_2$ . Mas isso leva a  $c = 0$ . Assim, podemos supor que  $b_3 = b_9 = 0$ . De  $(1, 5, 8)_1$ ,  $(3, 2, 9)_1$ ,  $(6, 0, 8)_3$  e  $(3, 4, 7)_1$ , obtemos, respectivamente, que  $b_7 = b_{10} = b_5 = 0$  e  $b_6 = (a_6a_8b_8 + 3a_2b_8^2 - 3a_8b_2b_8)/a_8^2$ . De  $(4, 5, 5)_1$ , obtemos  $(a_8^3b_4 + a_2b_8^3 - a_4a_8^2b_8 - 3a_8b_2b_8^2)a_2 = 0$ . Daí, analisando  $(6, 3, 5)_1$  e  $c \neq 0$ , obtemos que  $a_2 = 0$ . De  $(6, 4, 4)_3$ , temos  $(a_4a_8b_8 - a_8^2b_4 + 3b_2b_8^2)b_2 = 0$ ; e uma rápida analisada em  $(4, 7, 3)_1$  e em  $c \neq 0$  nos garante  $b_2 = 0$ . Ainda,  $(5, 4, 5)_1$  dá que  $(a_8b_4 - a_4b_8)a_6 = 0$ , seguindo de  $(7, 2, 5)_1$  e  $c \neq 0$  que  $a_6 = 0$ . De  $(6, 3, 5)_1$ , segue  $(a_4b_8 - a_8b_4)a_4 = 0$ , e, daí,  $(9, 0, 5)_2$  e  $c \neq 0$  dão que  $a_4 = 0$ . Agora,  $(10, 1, 3)_2$  leva a  $b_4 = 0$ , e  $(8, 0, 6)_3$  dá que  $a_1b_8 - a_8b_1 = 0$ , seguindo que  $c = 0$ .

Passemos aos casos (V) e (VI) analisados ao mesmo tempo. Isto é, consideremos  $|a_5| = 1$ ,  $a_7 = 1$  e  $a_8 = a_9 = a_{10} = 0$ . Suponhamos primeiramente  $b_3 \neq 0$ . Temos que a sequência  $(1, 2, 11)_3$ ,  $(0, 3, 11)_3$ ,  $(0, 4, 10)_3$ ,  $(1, 3, 10)_3$ ,  $(0, 6, 8)_3$ ,  $(0, 4, 10)_1$ ,  $(0, 5, 9)_1$ ,  $(1, 2, 11)_1$  leva à sequência  $b_{10} = (2b_8b_9 - 6a_5b_3)/(3b_3)$ ,  $b_7 = b_9^2/(3b_3)$ ,  $b_2 = (b_9^3 + 3b_3b_8 - 9a_6b_3^2)/(27b_3^2)$ ,  $b_6 = (b_8b_9^2 - 3a_5b_3b_9 - 9a_4b_3^2)/(9b_3^2)$ ,  $a_2 = (4a_5b_9 - 3a_4b_3)/(9a_5b_3)$ ,  $b_5 = b_8^2/(3b_3)$ ,  $b_4 = (b_8^2b_9 - 3a_5b_3b_8 - 9a_5a_6b_3^2)/(9b_3^2)$ ,  $b_8 = (9a_1b_3 - 3a_5a_6b_3)/(2a_5)$ . Mas daí,  $(1, 3, 10)_1$  leva ao absurdo  $a_5b_3 = 0$ . Se  $b_3 = 0$ ,  $(0, 5, 9)_2$  e  $(0, 7, 7)_1$  levam, respectivamente, a  $b_9 = b_8 = 0$ . Combinando  $(0, 10, 4)_2$  e  $(1, 9, 4)_2$ , obtemos  $b_{10} = 0$ . Agora, a sequência  $(0, 12, 2)_1$ ,  $(2, 8, 4)_1$ ,  $(2, 10, 2)_1$ ,  $(4, 8, 2)_1$  leva à sequência  $b_6 = 3a_2b_7^2 + a_6b_7 - 3b_2b_7$ ,  $b_5 = a_5b_7$ ,  $b_4 = a_4b_7 + 3b_2b_7^2 - 3a_2b_7^3$ ,  $b_1 = (a_1 + a_2b_7^2 - b_2b_7^2)b_7$ , levando a  $c = 0$ .

Analisemos o caso (VIII), isto é, quando temos  $a_5 = a_7 = a_8 = a_9 = 0$  e  $a_{10} = 1$ . Primeiramente, vamos supor  $a_2 \neq 0 \neq b_3$ . Da sequência  $(0, 4, 10)_1$ ,  $(0, 5, 9)_3$ ,  $(0, 6, 8)_3$ ,  $(2, 1, 11)_1$  obtemos a sequência  $b_{10} = 2b_8b_9/(3b_3)$ ,  $b_7 = (2b_9^2 - 3b_3)/(6b_3)$ ,  $b_2 = (2b_9^3 - 3b_3b_9 - 18a_6b_3^2)/(54b_3^2)$ ,  $b_6 = (2b_8b_9^2 + 3b_3b_8 - 18a_4b_3^2)/(18b_3^2)$ . Mas daí  $(0, 5, 9)_1$  dá que  $a_2b_3 = 0$ , um absurdo. Suponhamos agora que  $a_2 \neq 0 = b_3$ . De  $(0, 8, 6)_3$  e  $(6, 1, 7)_3$  segue, respectivamente, que  $b_9 = b_8 = 0$ . Uma análise em  $(0, 13, 1)_3$  nos permite concluir que  $b_7 = 0$ , e, conseqüentemente,  $(5, 5, 4)_1$  e  $(7, 5, 2)_1$  nos dão que  $b_5 = 0$  e  $b_1 = (a_4b_{10} + 3a_1 - b_4)b_{10}/3$ . Mais ainda,  $(7, 6, 1)_3$  garante que  $(a_6b_{10}^2 + a_4b_{10} - b_6b_{10} - b_4)b_{10}$ . Se  $b_{10} \neq 0$ , isolemos  $b_4$  na última equação, e, olhando para  $(8, 6, 0)_1$  e  $c \neq 0$ , teremos que  $b_6 = a_6b_{10}$ , dando um absurdo com  $(5, 7, 2)_2$  e  $c \neq 0$ . Se, agora,  $b_{10} = 0$ ,  $(6, 7, 1)_3$  e  $(4, 9, 1)_3$  dão que  $b_4 = b_6 = 0$ , levando a  $c = 0$ . Suponhamos, então,  $a_2 = 0$ . Segue de  $(1, 3, 10)_1$  que  $b_3 = 0$ . Além disso,  $(1, 6, 7)_1$  e  $(6, 1, 7)_3$  garantem que  $b_9 = b_8 = 0$ . Agora,  $(10, 0, 4)_2$ ,  $(10, 1, 3)_3$  e  $(1, 9, 4)_1$  dão que  $b_5 = 0$ . Continuando,  $(5, 6, 3)_3$  dá que  $b_7b_{10} = 0$ . Se  $b_{10} \neq 0$ , então

$b_7 = 0$ , e  $(9, 4, 1)_3$ ,  $(3, 9, 2)_1$  e  $(6, 7, 1)_3$  dão, nessa ordem, que  $b_1 = (a_4 b_{10} + 3a_1 - b_4) b_{10} / 3$ ,  $b_6 = (a_6 - 3b_2) b_{10}$  e  $b_4 = (a_4 + 3b_2 b_{10}) b_{10}$ , levando a  $c = 0$ . Se, por outro lado,  $b_{10} = 0$ ,  $(7, 5, 2)_1$  leva a  $b_1 = 0$ . De  $(1, 9, 4)_1$  obtemos  $b_7(b_7 - 1) = 0$ . Suponhamos que  $b_7 = 1$ . Nesse caso,  $(2, 9, 3)_1$ ,  $(3, 8, 3)_1$  e  $(2, 11, 1)_3$  dão, nessa ordem, que  $b_6 = a_4$ ,  $b_4 = a_1$  e  $b_2 = a_6$ , seguindo que  $c = 0$ . Supondo, por outro lado, que  $b_7 = 0$ ,  $(5, 7, 2)_1$  e  $(4, 9, 1)_3$  levam a  $b_4 = b_6 = 0$ , seguindo que  $c = 0$ .

No caso (IX), temos  $a_5 = 1$ ,  $a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = 0$ . Suponhamos inicialmente que  $a_2 \neq 0 \neq b_3$ . Segue da sequência  $(0, 4, 10)_2$ ,  $(0, 5, 9)_2$ ,  $(0, 8, 6)_3$  a sequência  $b_7 = b_9^2 / (3b_3)$ ,  $a_6 = (b_9^3 - 27b_2 b_3^2) / (9b_3^2)$ ,  $b_{10} = 2b_8 b_9 / (3b_3)$ . Daí, de  $(0, 4, 10)_1$ , chegamos ao absurdo  $a_2 b_3 = 0$ . Suponhamos, agora, que  $a_2 \neq 0 = b_3$ . De  $(0, 7, 7)_2$ , obtemos que  $b_9 = 0$ . Mais ainda, de  $(0, 13, 1)_3$  e  $(0, 11, 3)_1$ , obtemos que  $b_7 = 0$ . Por fim, a sequência  $(2, 7, 5)_1$ ,  $(2, 11, 1)_1$ ,  $(7, 7, 0)_3$ ,  $(9, 5, 0)_3$  leva na sequência  $b_8 = 0$ ,  $b_{10} = 0$ ,  $b_6 = (3a_2 b_5 + a_6 - 3b_2) b_5$ ,  $b_4 = (a_4 + 3b_2 b_5 - 3a_2 b_5^2) b_5$ , e  $(11, 3, 0)_3$  dá  $c = 0$ . Suponhamos, ainda,  $a_2 = 0 \neq b_3$ . Segue de  $(1, 7, 6)_1$  que  $a_6 = 0$ . De  $(4, 0, 10)_2$ , temos que  $(3a_4 b_3 - b_9)(3b_3 b_7 - b_9^2) = 0$ . Suponhamos primeiramente que  $3a_4 b_3 - b_9 \neq 0$ . Logo  $b_7 = b_9^2 / (3b_3)$ , e a sequência  $(5, 0, 9)_3$ ,  $(4, 1, 9)_2$ ,  $(5, 0, 9)_2$  dá a sequência  $b_{10} = (2b_8 b_9 - 6b_3) / (3b_3)$ ,  $b_2 = b_9^3 / (27b_3^2)$ ,  $b_6 = (b_8 b_9^2 - 3b_3 b_9 - 9a_4 b_3^2) / (9b_3^2)$ . Daí, isolando  $b_4$  em  $(5, 0, 9)_1$ , obtemos um absurdo com  $(5, 1, 8)_1$  e  $3a_4 b_3 - b_9 \neq 0$ . Logo, temos  $b_9 = 3a_4 b_3$ , e  $(4, 3, 7)_3$  leva a  $b_7 = 3a_4^2 b_3$ . Analisando  $(4, 4, 6)_1$  e  $(5, 3, 6)_2$ , obtemos que  $b_2 = a_4^3 b_3$ . Olhando com cuidado para  $(6, 0, 8)_1$ , obtemos que  $b_{10} = 2 + 2a_4 b_8$ . Daí,  $(7, 0, 7)_2$  dá que  $b_6 = (2 + a_4 b_8) a_4$ , e  $(7, 0, 7)_1$  dá que  $b_8 = (9a_1 + 3a_4 b_5 - 3b_4) b_3$ . Mas, assim,  $(7, 1, 6)_1$  leva ao absurdo  $b_3 = 0$ . Por fim, quando  $a_2 = 0 = b_3$ , temos de  $(4, 2, 8)_3$  que  $b_9 = 0$ . De  $(4, 7, 3)_3$  e  $(1, 13, 0)_1$ , obtemos que  $b_7 = 0$ . De  $(6, 2, 6)_1$ , obtemos que  $a_6 b_8 = 0$ . Suponhamos que  $b_8 \neq 0$ . Daí  $a_6 = 0$ , e  $(4, 9, 1)_1$  dá que  $b_2 = 0$ . De  $(8, 0, 6)_1$ , temos que  $(6 + 2a_4 b_8 - b_{10})(3 + 4a_4 b_8 - 2b_{10}) = 0$ . Se  $3 + 4a_4 b_8 - 2b_{10} \neq 0$ ,  $b_{10} = 6 + 2a_4 b_8$ , e  $(8, 1, 5)_1$  e  $(9, 0, 5)_1$  dão que  $b_6 = (a_4^2 b_8^2 + 6a_4 b_8 - 12) / b_8$  e  $a_1 = (6b_5 + a_4 b_5 b_8 - b_4 b_8) / (6b_8)$ , levando ao absurdo de  $b_8 = 0$ , dado por  $(9, 0, 5)_2$ . Logo,  $b_{10} = (3 + 4a_4 b_8) / 2$ . Daí,  $b_6$ ,  $b_4$  e  $b_1$  isolados, respectivamente, em  $(9, 0, 5)_2$ ,  $(10, 0, 4)_3$  e  $(11, 0, 3)_3$  levam ao absurdo de  $27/8 = 0$  dado por  $(9, 1, 4)_2$ . Assim, podemos voltar e supor que  $a_2 = b_3 = b_9 = b_7 = b_8 = 0$ . De  $(10, 0, 4)_2$ , temos que  $b_5 b_{10} = 0$ . Se  $b_5 \neq 0$ , então  $b_{10} = 0$ , e  $(9, 4, 1)_3$  e  $(11, 2, 1)_3$  levam a  $b_6 = (a_6 - 3b_2) b_5$  e  $b_4 = (a_4 + 3b_2 b_5) b_5$ , o que dá um absurdo com  $(13, 0, 1)_3$  e  $c \neq 0$ . Assim,  $b_5 = 0$ , e  $(8, 2, 4)_1$  e  $(9, 2, 3)_3$  dão que  $b_{10} = 0$  ou  $1$ . Se  $b_{10} = 1$ , então  $(10, 1, 3)_1$ ,  $(9, 2, 3)_1$ ,  $(8, 3, 3)_1$  e  $(8, 3, 3)_2$  levam a  $b_1 = 0$ ,  $b_4 = a_1$ ,  $b_6 = a_4$  e  $b_2 = a_6$ , respectivamente, o que dá  $c = 0$ . Logo,  $b_{10} = 0$ . Mas daí  $(9, 4, 1)_3$ ,  $(11, 2, 1)_3$  e  $(13, 0, 1)_3$  levam, respectivamente, a  $b_6 = b_4 = b_1 = 0$ , o que dá  $c = 0$ .

Analisemos o caso (II), em que  $a_5 = a_7 = a_8 = a_{10} = 0$  e  $a_9 = 1$ . Suponhamos primeiramente que  $b_3 \neq 0$ . A sequência  $(0, 1, 13)_3$ ,  $(1, 0, 13)_3$ ,  $(0, 2, 12)_3$ ,  $(2, 0, 12)_3$ ,  $(0, 1, 13)_1$ ,

$(1, 0, 13)_2$ ,  $(1, 1, 12)_2$ ,  $(2, 0, 12)_2$  leva na sequência  $b_8 = 3b_3b_7 - b_9^2$ ,  $b_{10} = 2b_8b_9/(3b_3)$ ,  $b_2 = (b_7b_9 - 3a_6b_3)/(9b_3)$ ,  $a_1 = (b_5b_9 - 3b_3b_4)/(9b_3)$ ,  $b_5 = 3b_3b_7^2 - b_7b_9^2 - 3b_3b_6 - 3a_4b_3$ ,  $b_6 = (3b_3b_7b_9^2 - b_9^4 - 9a_4b_3^2)/(9b_3^2)$ ,  $b_4 = (9b_3^2b_7^2b_9 + b_9^5 - 6b_3b_7b_9^3)/(9b_3^2)$ ,  $b_1 = (9b_3b_7b_9^4 + 27b_2^3b_3^3 - b_9^6 - 27b_3^2b_7^2b_9^2)/(27b_1b_3^2)$ . Daí, uma análise em  $(0, 3, 11)_1$  e em  $(1, 3, 10)_1$  dá que  $b_7 = b_9^2/(3b_3)$ . Além disso,  $(1, 3, 10)_1$  e  $(1, 7, 6)_1$  levam, respectivamente, a  $a_4 = a_6 = 0$ . Daí obtemos que  $b/c = b_9/(3b_3)$  e  $a/c = 0$ . Por outro lado, se  $b_3 = 0$ , temos de  $(0, 3, 11)_1$  que  $b_8 = 0$ . Analisando  $(0, 6, 8)_1$ ,  $(2, 4, 8)_1$  e  $(1, 6, 7)_1$ , obtemos que  $b_{10} = 0$ . De  $(6, 1, 7)_1$ ,  $b_5 = 0$ , e, de  $(0, 5, 9)_2$ ,  $b_7b_9 = 0$ . Suponhamos  $b_9 \neq 0$ . Daí  $b_7 = 0$ , e  $(0, 8, 6)_3$  e  $(2, 5, 7)_2$  dão que  $b_6 = (3a_2b_9 + a_6 - 3b_2)b_9$  e  $b_4 = (a_4 + 3b_2b_9 - 3a_2b_9^2)b_9$ , respectivamente. Agora, a sequência  $(1, 10, 3)_1$ ,  $(4, 5, 5)_1$ ,  $(5, 4, 5)_1$ ,  $(7, 4, 3)_1$ ,  $(4, 3, 7)_2$  dá, analisada junto com  $c \neq 0$ , a sequência  $b_2 = a_2b_9$ ,  $a_4 = -a_6b_9$ ,  $a_1 = a_6b_9^2/3$ ,  $a_6 = 0$ ,  $b_1 = 0$ . Mas daí chegamos a  $c = 0$ . Logo  $b_9 = 0$ . Analisando  $(0, 8, 6)_1$ ,  $(1, 7, 6)_1$ ,  $(6, 6, 2)_3$ ,  $(5, 9, 0)_1$ ,  $(4, 10, 0)_2$ ,  $(3, 9, 2)_1$ ,  $(0, 9, 5)_1$  e  $(0, 8, 6)_2$  (com algum detalhe a fazer) obtemos  $b_7 = 0$ . De  $(7, 3, 4)_3$ , obtemos  $b_1 = 0$ . Olhando para  $(4, 6, 4)_3$  e  $(3, 6, 5)_1$ , vemos que  $b_4 = 0$ . Daí,  $(5, 7, 2)_3$  e  $c \neq 0$  garante que  $a_1 = 0$ , seguindo de  $(0, 9, 5)_1$  e de  $(1, 9, 4)_3$  que  $b_6 = 0$ , o que dá  $c = 0$ . No caso (VII), isto é, quando  $a_7 = 1$  e  $a_5 = a_8 = a_9 = a_{10} = 0$ , suponhamos primeiramente  $b_3 \neq 0$ . A sequência  $(0, 3, 11)_3$ ,  $(0, 2, 12)_1$ ,  $(0, 3, 11)_1$ ,  $(1, 2, 11)_1$ ,  $(0, 4, 10)_3$ ,  $(0, 6, 8)_3$ ,  $(0, 4, 10)_1$ ,  $(1, 4, 9)_1$ ,  $(0, 5, 9)_1$ ,  $(0, 6, 8)_2$  nos leva à sequência  $b_7 = b_9^2/(3b_3)$ ,  $b_{10} = 2b_8b_9/(3b_3)$ ,  $a_4 = (b_8b_9^2 - 9b_3^2b_6)/(9b_3^2)$ ,  $a_1 = (b_5b_9 - 3b_3b_4)/(9b_3)$ ,  $b_2 = (b_9^3 + 3b_3b_8 - 9a_6b_3^2)/(27b_3^2)$ ,  $b_6 = b_8b_9^2/(9b_3^2)$ ,  $b_5 = b_8^2/(3b_3)$ ,  $b_1 = b_8^3/(27b_3^2)$ ,  $b_4 = b_8^2b_9/(9b_3^2)$ ,  $b_8 = 3a_6b_3$ . Daí,  $b/c = b_9/(3b_3)$  e  $a/c = a_6$ . Agora, se  $b_3 = 0$ , a sequência  $(0, 5, 9)_2$ ,  $(1, 6, 7)_2$ ,  $(0, 10, 4)_1$ ,  $(3, 7, 4)_1$  leva à sequência  $b_9 = b_8 = b_{10} = b_5 = 0$ . Daí  $(0, 12, 2)_2$ ,  $(2, 10, 2)_2$  e  $(4, 8, 2)_2$  analisados juntamente com  $c \neq 0$  dão que  $b_7 = 0$ . Então  $(7, 7, 0)_3$ ,  $(4, 10, 0)_3$  e  $(1, 13, 0)_3$  levam a  $b_1 = b_4 = b_6 = 0$ , o que leva a  $c = 0$ .

Para o caso  $X$ , onde teremos  $a_5 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = 0$ , vamos supor primeiramente que  $a_2 \neq 0 \neq b_3$ . Daí a sequência  $(0, 4, 10)_1$ ,  $(0, 4, 10)_2$ ,  $(0, 5, 9)_1$ ,  $(1, 4, 9)_1$ ,  $(0, 5, 9)_2$ ,  $(0, 7, 7)_1$ ,  $(0, 8, 6)_2$ ,  $(0, 8, 6)_1$ ,  $(1, 7, 6)_1$  leva à sequência  $b_{10} = 2b_8b_9/(3b_3)$ ,  $b_7 = b_9^2/(3b_3)$ ,  $b_6 = (b_8b_9^2 - 9a_4b_3^2)/(9b_3^2)$ ,  $a_1 = (b_5b_9 - 3b_3b_4)/(9b_3)$ ,  $b_2 = (b_9^3 - 9a_6b_3^2)/(27b_3^2)$ ,  $b_5 = b_8^2/(3b_3)$ ,  $a_4 = a_6^2/(3a_2)$ ,  $b_4 = (a_2^2b_8^2b_9 - a_6^3b_3^2)/(9a_2^2b_3^2)$ ,  $b_1 = (3a_2^3b_8^3 - a_6^4b_3^3)/(81a_2^3b_3^3)$ , e obtemos  $b/c = b_9/(3b_3)$  e  $a/c = b_8/(3b_3)$ . Quando  $a_2 \neq 0 = b_3$ ,  $(0, 7, 7)_2$  dá que  $b_9 = 0$ , e  $(0, 13, 1)_3$  e  $(2, 8, 4)_2$  dão que  $b_7 = 0$ . Mais ainda,  $(3, 7, 4)_3$ ,  $(3, 11, 0)_3$  e  $(7, 7, 0)_3$  dão, nesta ordem, que  $b_8 = b_{10} = b_5 = 0$ . Mas daí chegamos a  $c = 0$ . Agora, quando  $a_2 = 0 \neq b_3$ , obtemos de  $(1, 7, 6)_1$  que  $a_6 = 0$ . De  $(4, 1, 9)_3$  e  $c \neq 0$ , temos que  $b_7 = b_9^2/(3b_3)$ . Da sequência  $(5, 0, 9)_3$ ,  $(5, 0, 9)_1$ ,  $(4, 2, 8)_3$ ,  $(5, 1, 8)_3$ , obtemos a sequência  $b_{10} = 2b_8b_9/(3b_3)$ ,  $a_1 = (b_5b_9 - 3b_3b_4)/(9b_3)$ ,  $b_2 = b_9^3/(27b_3^2)$ ,  $b_6 = (b_8b_9^2 - 9a_4b_3^2)/(9b_3^2)$ . Mas daí, de  $(6, 3, 5)_3$ , segue que  $a_4 = 0$ , levando a  $c = 0$ . Por fim, quando  $a_2 = 0 = b_3$ ,  $(1, 10, 3)_1$ ,  $(4, 3, 7)_2$  e  $c \neq 0$  garantem que  $b_9 = 0$ . Além disso,  $(1, 13, 0)_1$ ,  $(4, 8, 2)_2$  e  $c \neq 0$  garantem que  $b_7 = 0$ .

É fácil também observar que  $(5, 4, 5)_1$  e  $(6, 4, 4)_3$  levam a  $a_6 b_8 = 0$ . Daí,  $(8, 1, 5)_1$  e  $c \neq 0$  garantem que  $b_8 = 0$ . Além disso,  $(7, 6, 1)_3$  dá que  $a_6 b_{10} = 0$  e, daí,  $(9, 3, 2)_2$  e  $c \neq 0$  garantem que  $b_{10} = 0$ . Mais ainda,  $(10, 4, 0)_3$  e  $c \neq 0$  garantem que  $a_6 = 0$ , e, finalmente,  $(13, 1, 0)_3$  dá que  $a_4 b_5 = 0$ , levando a  $c = 0$ .  $\square$

# Índice Remissivo

$C^\infty(M)$  - Espaço das funções de classe  $C^\infty$ ,  
11

$H_f$  - Campo de vetores hamiltoniano associado à função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , 15

$M_j$  - Matriz associada às funções homogêneas  $u, v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , 45

$\mathcal{V}_{F,i}$  - Campos de vetores associados à aplicação  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 11

$\gamma_x$  - Curva integral passando por  $x$ , 11

$\gamma_x^{+(-)}$  - Semiórbitas positiva e negativa, 14,  
16

$(\text{CJR})_n$  - Conjectura jacobiana real, 38

$(\text{CJ})_n$  - Conjectura jacobiana, 38

mcR - Meia-componente de Reeb, 22

$|M|$  - O determinante da matriz  $M$ , 45

$X$ -convexidade, 13

Campo de vetores globalmente resolúvel, 11

Campo de vetores hamiltoniano, 15

Conjectura jacobiana reduzida, 41

Convexo em relação a, 13

Meia-componente de Reeb, 22

Lado compacto de uma, 22

Lados não compactos de uma, 22

Pinchuk, Sergey, 39

Teorema de Baouendi-Tréves, 42