

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

João Biesdorf

Mínimos locais de funcionais com dependência espacial
via Γ -convergência: com e sem vínculo

SÃO CARLOS
2011

**Mínimos locais de funcionais com dependência espacial
via Γ -convergência: com e sem vínculo**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

João Biesdorf

Mínimos locais de funcionais com dependência espacial
via Γ -convergência: com e sem vínculo

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento

SÃO CARLOS
2011

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

B586mL

Biesdorf, João.

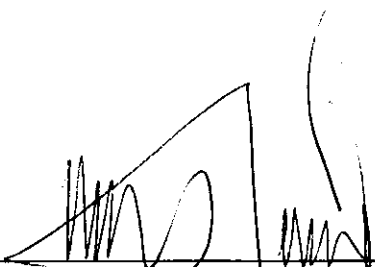
Mínimos locais de funcionais com dependência especial via Γ -convergência: com e sem vínculo / João Biesdorf. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
84p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

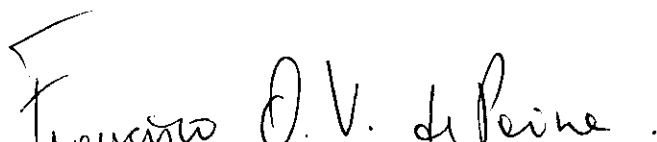
1. Cálculo das variações. 2. Gama convergência. 3. Solução estacionária estável. 4. Mínimos de funcionais. 5. Desigualdade isoperimétrica. 6. Equações de reação de difusão (Matemática) I. Título.

CDD: 515.64 (20^a)

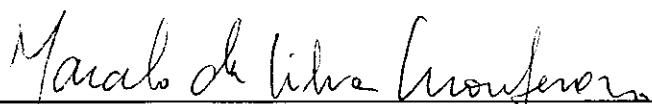
Banca Examinadora:




Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento
DM - UFSCar



Prof. Dr. Francisco Odair Vieira Paiva
DM - UFSCar



Prof. Dr. Marcelo Montenegro
IMECC- UNICAMP



Prof. Dr. Alexandre Nolasco Carvalho
ICMC - USP



Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares
ICMC - USP

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela vida, saúde, vocação à matemática e pela força para me dedicar a este projeto.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento, pelo seu profissionalismo em me propor este trabalho, pela sua paciência e disponibilidade em me orientar e sanar minhas dúvidas desde o mestrado.

Aos demais membros da banca de defesa pública, Prof. Dr. Francisco Odair V. de Paiva, Prof. Dr. Alexandre Nolasco Carvalho, Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares e Prof. Dr. Marcelo Montenegro, por aceitarem compor a banca examinadora e, principalmente, pelas valiosas sugestões.

À Profa. Dra. Janete Crema pelas colaborações na orientação do trabalho.

Ao colega Francisco Braun pela amizade e auxílios nos comandos do Latex.

Aos demais professores que, além de sua amizade, de uma forma ou de outra, participaram de minha formação acadêmica.

Aos colegas do departamento pela ajuda, coleguismo e amizade.

Aos meus pais, Inês e Irineo, primeiramente pela vida, pelo incentivo e por me darem a oportunidade de caminhar até aqui.

À esposa e companheira Rosane por me apoiar e demonstrar muita paciência nas minhas dificuldades.

Aos meus irmãos Luís, Miguel e Terezinha e suas respectivas famílias, por sempre terem me apoiado.

A todos os amigos, distantes ou próximos, novos ou antigos, cada um do seu jeito, que sempre me apoiaram e incentivaram.

Resumo

Na primeira parte deste trabalho, abordamos a existência de soluções estacionárias estáveis para uma classe de equações de reação-difusão com dependência espacial em domínios limitados 2 e 3-dimensionais. Esta abordagem foi feita via existência de mínimos locais dos funcionais de energia correspondentes. Para tal, foi suficiente encontrar condições no coeficiente de difusão e no termo de reação que garantam existência de mínimos isolados do funcional Γ -limite da família de funcionais de energia. Na segunda parte, aproveitamos as técnicas desenvolvidas na primeira parte para minimizar funcionais em retângulos e paralelepípedos, com e sem vínculo, resolvendo de forma bem mais geral este problema, originalmente proposto em 1989 por Robert Kohn e Peter Sternberg.

Palavras-chave: Gama convergência, solução estacionária e estável, mínimos de funcionais, desigualdade isoperimétrica, equação de reação-difusão.

Abstract

We address the question of existence of stationary stable solutions to a class of reaction-diffusion equations with spatial dependence in 2 and 3-dimensional bounded domains. The approach consists of proving the existence of local minimizer of the corresponding energy functional. For existence, it was enough to give sufficient conditions on the diffusion coefficient and on the reaction term to ensure the existence of isolated minima of the Γ -limit functional of the energy functional family. In the second part we take the techniques developed in the first part to minimize functional in 2 and 3-dimensional rectangles, with and without constraint, solving in a more general form this problem, which was originally proposed in 1989 by Robert Kohn and Peter Sternberg.

Keywords: Gamma convergence, stationary and stable solution, minimisers of functional isoperimetric inequality, reaction-diffusion equation.

Sumário

1	Introdução	17
2	Pré-requisitos	23
2.1	Tópicos de teoria geométrica de medida	23
2.2	Gama-convergência e propriedades da função distância com sinal	27
3	Generalização do Teorema de Kohn e Sternberg	33
3.1	Resultados usados na demonstração do Teorema 3.1	34
3.2	Demonstração do Teorema 3.1	38
4	Uma desigualdade isoperimétrica	51
4.1	Resultados técnicos	52
4.2	Demonstração do Teorema 4.1	59
5	Existência de soluções estacionárias estáveis	61
5.1	Demonstração do Teorema 5.1	63
6	Problemas variacionais com e sem vínculo em cilindros	75
6.1	Problemas variacionais sem vínculo em cilindros	76
6.2	Problemas variacionais com vínculo em cilindros	77
	Referências Bibliográficas	83

Capítulo 1

Introdução

Um dos focos desta tese é a busca de condições suficientes para a existência de soluções estacionárias e estáveis não constantes para o problema

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = \epsilon^2 \operatorname{div}(a(x)\nabla u_\epsilon) + f(x, u_\epsilon), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u_\epsilon(0, x) = \phi(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro positivo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) um domínio limitado de fronteira C^3 , ν vetor normal interior em $\partial\Omega$ e $a \in C^1(\overline{\Omega})$ estritamente positiva. Além disso $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$: é tal que existem $\theta, g_1, g_2 \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazendo

$$(f_1) \quad g_1(x) < \theta(x) < g_2(x), \quad f(x, \cdot) \text{ tem exatamente três raízes com } f(x, g_1(x)) = f(x, \theta(x)) = f(x, g_2(x)) \equiv 0 \text{ e } \partial_2 f(x, g_1(x)) < 0, \partial_2 f(x, g_2(x)) < 0 \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

$$(f_2) \quad \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, \xi) d\xi = 0 \text{ (condição de igualdade de área).}$$

$$(f_3) \quad \text{Existem constantes } c_1, c_2, s_0 \text{ e um número } p \geq 2 \text{ tal que } c_1|s|^p \leq F(x, s) \leq c_2|s|^p \text{ para todo } s \text{ satisfazendo } |s| \geq s_0, \text{ onde } F(x, v) = -\frac{1}{2} \int_{g_1(x)}^v f(x, s) ds.$$

$$(f_4) \quad \sqrt{a(\cdot)F(\cdot, \cdot)} \in C^1.$$

A função $F(x, \cdot)$ assim definida satisfaz $F \geq 0$ para cada $x \in \overline{\Omega}$, e tem como únicas raízes $g_1(x)$ e $g_2(x)$.

Na busca de soluções estacionárias estáveis de (1.1), muitos resultados serão obtidos na generalidade descrita acima, mas alguns, devido a dificuldades técnicas, serão obtidas para os casos $n = 2, 3$ e g_1, g_2 funções constantes. Consideramos o funcional de energia $\mathcal{E}_\epsilon : L^1(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ associado à equação parabólica (1.1) dado por

$$(1.2) \quad \mathcal{E}_\epsilon(v) := \begin{cases} \int_\Omega [\epsilon a(x) |\nabla v|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, v)] dx, & \text{se } v \in H^1(\Omega) \\ \infty, & \text{no caso contrário,} \end{cases}$$

onde $F(\cdot, \cdot)$ é como descrita no Problema (1.1). Sob certas condições, um mínimo local de \mathcal{E}_ϵ é uma solução estacionária e estável de (1.1). Portanto é suficiente encontrar condições suficientes para a existência de mínimos locais de \mathcal{E}_ϵ . Ou seja, a questão inicial de encontrar condições que garantam a existência de soluções estacionárias estáveis de (1.1) é, sem muito esforço, transformado num problema variacional.

No contexto de problemas variacionais de encontrar condições suficientes para a existência de mínimos locais da família de funcionais $(\mathcal{E}_\epsilon)_{\epsilon>0}$, a nossa abordagem será via Γ -convergência, ou seja, calcularemos o Γ -limite da família $\{\mathcal{E}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, o qual é dado por

$$(1.3) \quad \mathcal{E}_0(v) = \begin{cases} \int_{\Omega} h(x) |D\chi_{v=g_2}|, & \text{se } v \in BV(\Omega; \{g_1, g_2\}); \\ \infty & \text{nos demais casos,} \end{cases}$$

onde

$$h(x) := 2 \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{a(x)F(x, s)} ds$$

e $F(\cdot, \cdot)$ como acima. O funcional em (1.3), pode ser interpretado como funcional de perímetro com peso $h(\cdot)$.

Exibindo um mínimo local isolado u_0 na norma $L^1(\Omega)$ para \mathcal{E}_0 , o Teorema de De Giorgi (Teorema 2.1 de [12]) nos garante sob certas condições a existência de família de mínimos locais $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ de \mathcal{E}_ϵ para ϵ suficientemente pequeno. Além disso, $\|u_\epsilon - u_0\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Desta forma, o objetivo passa a ser encontrar condições suficientes para obter mínimos locais isolados na norma $L^1(\Omega)$ para \mathcal{E}_0 . Em outras palavras, encontrar $u_0 \in L^1(\Omega)$ e $\rho > 0$ tal que se

$$(1.4) \quad 0 < \|u - u_0\|_{L^1(\Omega)} < \rho$$

então

$$(1.5) \quad \mathcal{E}_0(u_0) < \mathcal{E}_0(u).$$

Se u_0 é mínimo local isolado não constante de \mathcal{E}_0 , então u_0 assume exatamente os dois valores g_1 e g_2 . Sejam Ω_1, Ω_2 os conjuntos em Ω onde u_0 assume respectivamente g_1 e g_2 . Seja S a fronteira de Ω_1 em Ω ou equivalentemente a fronteira de Ω_2 em Ω , então no caso da independência espacial de a, f, g_1 e g_2 , S é uma hipersuperfície cujo fecho necessariamente intercepta a fronteira de Ω . Interceptando a fronteira de Ω ou não, a hipersuperfície S acima é conhecida como interface do mínimo u_0 .

Uma vez obtido o Γ -limite $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0$ como em (1.3), para encontrar os mínimos locais isolados do mesmo, nos restringiremos às dimensões $n = 2, 3$, e $g_1(x)$ e $g_2(x)$ funções constantes iguais a α e β respectivamente. Superficialmente, a abordagem será

da seguinte forma: vamos considerar uma hipersuperfície suave sem fronteira $S \subset \Omega$, de modo que, $\Lambda : S \times I_\delta \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Lambda(y, s) := h(y + s\nu(y)) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - s\kappa_i(y)),$$

tem mínimo isolado em $s = 0$ para todo $y \in S$, onde $\nu(y)$ e $\kappa_i(y)$ são respectivamente o vetor normal unitário e as curvaturas principais de S em y . $I_\delta := (-\delta, \delta)$, sendo $\delta > 0$ de modo que para todo $x \in S_\delta = \{y + s\nu(y) : y \in S, s \in I_\delta\}$ existe um único $y \in S$ tal que $x = y + s\nu(y)$ para algum $s \in I_\delta$.

Sendo $S \subset \Omega$ uma hipersuperfície sem fronteira, S particiona Ω em duas regiões que denominamos Ω_α e Ω_β respectivamente. Então mostramos que $u_0 = \alpha\chi_{\Omega_\alpha} + \beta\chi_{\Omega_\beta}$ é um mínimo local isolado de \mathcal{E}_0 em $L^1(\Omega)$, isto é, determinamos $\rho > 0$ tal que se $u \in L^1(\Omega)$ e satisfaz (1.4) então vale (1.5). Notemos que pelas observações acima, para a existência do mínimo local isolado não constante de \mathcal{E}_0 , é indispensável que $a(\cdot)$ ou $f(\cdot, s)$ não sejam constantes em Ω . Mais especificamente, esta dependência aparece na condição de $h^*(y, s)$ ter mínimo local isolado em $s = 0$ para todo $y \in S$.

Denotando por S_δ a δ -vizinhança tubular de S , por razões técnicas, mostramos a desigualdade (1.5) em $L^1(S_\delta)$, obtendo facilmente a mesma em $L^1(\Omega)$. Ressaltamos que demonstrar a desigualdade (1.5) em $L^1(S_\delta)$ é um dos principais resultados desta tese.

Para $n = 2$, versões da desigualdade (1.5) em $L^1(S_\delta)$ são encontrados por exemplo em [12] e de forma mais geral em [5]. A saber, em [12] a Proposição 2.4, na p. 74, é um caso particular para $n = 2$ desta desigualdade. Já em [5], uma versão mais geral, mas ainda para $n = 2$, deste resultado é dado pelo Teorema 2.3 na p. 82. As demonstrações em [12] e [5], apesar de os resultados serem levemente distintos, são bastante análogas. Em ambos os casos os autores dividem as funções admissíveis $u \in BV(\Omega; \{\alpha, \beta\})$ em quatro classes. Numa destas classes, estes autores supõem, na notação desta tese, que para \mathcal{L}^1 q.t.p., $s \in (\frac{\delta}{2}, \delta)$ $u(\cdot, s)$ não é constante em S . Como $n = 2$, S é uma curva, $\mathcal{H}^{n-2} = \mathcal{H}^0$ é a medida de contagem. Denotando por $\partial_* A$ a fronteira de medida teórica de A (ver a Definição 2.10), então pela classe de funções u consideradas, eles obtêm $\partial_*\{u = \alpha\} \cap \partial_*\{u = \beta\} \neq \emptyset$, e assim $\mathcal{H}^0(\partial_*\{u = \alpha\} \cap \partial_*\{u = \beta\}) \geq 1$, conseqüentemente

$$\begin{aligned} \int_S h|Du(\cdot, s)| &= (\beta - \alpha) \int_{\partial_*\{u=\alpha\} \cap \partial_*\{u=\beta\}} h d\mathcal{H}^0 \\ &\geq (\beta - \alpha) \inf_{y \in S} \{h(y + s\nu(y))\} \mathcal{H}^0(\partial_*\{u = \alpha\} \cap \partial_*\{u = \beta\}) \\ (1.6) \quad &\geq (\beta - \alpha) \inf_{y \in S} \{h(y + s\nu(y))\}. \end{aligned}$$

Desta maneira, eles obtêm um limitante inferior positivo para $\int_S h|Du(\cdot, s)|$ independente de u na classe de funções consideradas.

A menos de um fator multiplicativo, este limitante inferior que aparece à direita da última desigualdade em (1.6) define o raio $\rho > 0$ considerado em (1.4). Em outras palavras, para a obtenção do raio $\rho > 0$ é indispensável que o limitante inferior citado seja positivo e não dependa de u .

Para $n > 2$ (no caso desta tese, $n = 3$) \mathcal{H}^{n-2} não é a medida de contagem e procedendo de maneira similar obtém-se

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \int_S h|Du(\cdot, \pm s)| &= (\beta - \alpha) \int_{\partial_*\{u=\alpha\} \cap \partial_*\{u=\beta\}} h d\mathcal{H}^{n-2} \\ &\geq (\beta - \alpha) \inf_{y \in S} \{h(y \pm s\nu(y))\} \mathcal{H}^{n-2}(\partial_*\{u = \alpha\} \cap \partial_*\{u = \beta\}). \end{aligned}$$

Neste caso n -dimensional, a medida $\mathcal{H}^{n-2}(\partial_*\{u = \alpha\} \cap \partial_*\{u = \beta\})$, nas classes de funções consideradas, pode ser limitada inferiormente apenas por zero ao contrário dos casos bidimensionais. Consequentemente a obtenção de $\rho > 0$ considerado em (1.4) não é possível por este método, exigindo assim, uma demonstração alternativa, cuja motivação advém do caso $n = 3$ mas também contemplará o caso $n = 2$.

Na demonstração alternativa citada acima, desenvolvemos alguns resultados técnicos dos quais podemos destacar uma certa desigualdade isoperimétrica. Esta por sua vez nos diz superficialmente que, dado $\delta > 0$ e $M \subset \mathbb{R}^2$ um domínio Lipschitz, limitado, conexo ou $M \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado, então existe $\tilde{\rho} > 0$ tal que dado $A \subset M \times (\frac{\delta}{2}, \delta)$ com $\mathcal{H}^n(A) < \tilde{\rho}$, existe $s \in (\frac{\delta}{2}, \delta)$ de tal modo que

$$(1.8) \quad \mathcal{H}^{n-1}((M \times \{s\}) \cap A) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial_* A \setminus (\partial_* A \cap \partial_*(M \times [s, \delta])).$$

Das propriedades da medida de Hausdorff e da definição de perímetro de conjuntos em abertos, sabe-se

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* A \setminus (\partial_* A \cap \partial_*(M \times [s, \delta])) = \text{Per}_{M \times [s, \delta]}(A).$$

De posse de (1.8) a demonstração da existência de mínimo isolado do funcional Γ -limite \mathcal{E}_0 baseia-se em particionar S em porções S_k , ($k = 1, \dots, k_0$) de tal modo que cada S_k seja difeomorfo a um conjunto $M_k \subset \mathbb{R}^{n-1}$ com M_k satisfazendo as hipóteses descritas para M em (1.8). Correspondentemente a $\tilde{\rho} > 0$ para M de modo que (1.8) seja válido, obtém-se $\tilde{\rho}_k > 0$ para M_k . Como consequência natural do sistema de coordenadas principais, esta partição de S determina uma partição correspondente em S_δ associando a cada $S_k \subset S$, o conjunto $S_{k,\delta} \subset S_\delta$, onde $S_{k,\delta} = \{y + s\nu(y) : y \in S_k, s \in (-\delta, \delta)\}$ e $\nu(y)$ é o vetor normal unitário de S em $y \in S_k$. Assim $S_{k,\delta}$ e $M_k \times (-\delta, \delta)$ são trivialmente difeomorfos.

Ainda no intuito de obter a desigualdade (1.5) em $L^1(S_\delta)$ vamos mostrar a mesma em $L^1(S_{k,\delta})$ para cada k , ($k = 1, \dots, k_0$). Em outras palavras, vamos determinar $\rho_k > 0$ tal que se

$$(1.9) \quad 0 < \|u - u_0\|_{L^1(S_{k,\delta})} < \rho_k$$

então

$$(1.10) \quad \mathcal{E}_0(u_0) < \mathcal{E}_0(u)$$

em $L^1(S_{k,\delta})$. Consequentemente, tomando $\rho = \min\{\rho_k\}$ então se

$$(1.11) \quad 0 < \|u - u_0\|_{L^1(S_\delta)} < \rho,$$

obtemos

$$(1.12) \quad \mathcal{E}_0(u_0) < \mathcal{E}_0(u)$$

em $L^1(S_\delta)$.

O raio ρ_k da vizinhança em $L^1(S_{k,\delta})$ do mínimo isolado u_0 em (1.9), a menos de um fator multiplicativo, será o próprio $\tilde{\rho}_k > 0$. Então, a menos de alguns detalhes técnicos, a desigualdade (1.5) em $L^1(S_{k,\delta})$ decorre da Desigualdade (1.8) e da condição imposta à função peso $h^*(y, \cdot)$ tenha mínimo isolado em $s = 0 \forall y \in S$.

Consequentemente, como já observado acima, pelo Teorema de De Giorgi, obtêm-se uma sequência $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ de mínimos locais para $(\mathcal{E}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ que converge em $L^1(\Omega)$ para u_0 . Como consequência desta convergência e da definição de $u_0 = \alpha\chi_{\Omega_\alpha} + \beta\chi_{\Omega_\beta}$, u_ϵ muda de valores próximos de α para valores próximos a β numa vizinhança de S . Quando isto acontece, dizemos que S é a interface de u_ϵ . De forma resumida, em busca de soluções estacionárias estáveis para (1.1), resolveremos problemas variacionais que garantem a existência de mínimos locais para os funcionais \mathcal{E}_ϵ . Neste caso as soluções u_ϵ tem interface S que por hipótese é sem fronteira.

O outro foco desta tese consiste de dois problemas variacionais de existência de mínimos de funcionais em $L^1(\Omega)$. Estes problemas não tem origem em problemas parabólicos como no caso descrito acima. O conjunto Ω será um cilindro da forma $\Omega := M \times (-\delta, \delta)$, onde $\delta > 0$ fixado e $M \subset \mathbb{R}^{n-1}$ é também, como descrito acima. Desta forma Ω não se enquadra nas hipóteses atribuídas a Ω em (1.1), onde a suavidade de Ω é indispensável para concluir que mínimos locais dos funcionais de energia são soluções estacionárias estáveis do problema parabólico correspondente.

Destes dois problemas variacionais um terá vínculo enquanto o outro não. As expressões dos funcionais \mathcal{E}_ϵ e consequentemente também do funcional Γ -limite \mathcal{E}_0 serão como descritos acima, com a diferença que no caso de problemas com vínculo, o domínio dos funcionais será restrito à

$$\{v \in L^1(\Omega) : \int_{\Omega} v \, d\mathcal{L}^n = m\}$$

com $m = \frac{\mathcal{L}^n(\Omega)}{2}(\alpha + \beta)$. A interface S será tomada como sendo $S := M \times \{0\}$, particionando Ω em Ω^- e Ω^+ , onde

$$\Omega^- = \{(x, s) \in M \times (-\delta, 0)\}$$

e

$$\Omega^+ = \{(x, s) \in M \times (0, \delta)\}.$$

Observa-se aqui que $\partial S \subset \partial\Omega$, enquanto no problema variacional oriundo do problema parabólico (1.1), $\partial S \cap \partial\Omega = \emptyset$. Este problema variacional com vínculo em cilindro responde de forma bem mais geral algumas problemas de minimizar funcionais em retângulos propostos por [12].

Na busca de condições suficientes para garantir a existência de mínimos locais para os funcionais \mathcal{E}_ϵ , com os mesmos argumentos apresentados acima, será suficiente obter condições suficientes para que o Γ -limite \mathcal{E}_0 tenha mínimos locais isolados. Obteremos condições suficientes para que $u_0 = \alpha\chi_{\Omega^-} + \beta\chi_{\Omega^+}$ seja um mínimo isolado do funcional Γ -limite \mathcal{E}_0 .

Este texto contém seis capítulos, sendo esta introdução, o primeiro. O segundo capítulo está reservado para algumas definições e resultados específicos conhecidos que serão usados no decorrer do texto. No Capítulo 3 apresentaremos o cálculo do gama-limite \mathcal{E}_0 da família $\{\mathcal{E}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. No Capítulo 4 será desenvolvida a desigualdade isoperimétrica descrita acima, que será utilizada no Capítulo 5 para demonstrar a existência de mínimos isolados u_0 de \mathcal{E}_0 no caso do problema variacional oriundo do problema parabólico (1.1). No Capítulo 6 abordaremos as duas classes de problemas variacionais em cilindros, cujas soluções tem interface com fronteira, uma com vínculo e outra sem.

Capítulo 2

Pré-requisitos

Conceitos e resultados básicos vistos em Teoria da Medida são pré-requisitos para uma melhor compreensão desta tese. A complementação destes pré-requisitos no sentido de facilitar a leitura desta tese será feita neste capítulo. Esta complementação ocorrerá basicamente em Tópicos de Teoria Geométrica de Medida, Gama-convergência e propriedades da função distância com sinal. Neste sentido também aproveitaremos para fazer rápidas generalizações quando necessário. Cada um dos assuntos acima será uma seção do corrente capítulo.

2.1 Tópicos de teoria geométrica de medida

O conteúdo das três próximas definições podem ser encontradas em [9].

Definição 2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio Lipschitz limitado e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ definimos*

$$\begin{aligned} |Du|(\Omega) &:= \int_{\Omega} |Du| \\ &:= \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx : g = (g_1, \dots, g_n) \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \text{ e } |g(x)| \leq 1 \text{ para } x \in \Omega \right\}, \end{aligned}$$

onde $\operatorname{div} g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$. Aqui $|Du|(\Omega)$ é dito variação total de u em Ω .

Definição 2.2 *Se $\int_{\Omega} |u| \, dx < \infty$, $\int_{\Omega} |Du| < \infty$ e $u(\Omega) \subset B$, dizemos que $u \in BV(\Omega; B)$. O espaço de todas as funções em BV é dito o espaço das funções de variação limitada em Ω .*

Ainda em [9] encontramos a definição de perímetro para conjuntos borelianos em abertos de \mathbb{R}^n dado da seguinte forma.

Definição 2.3 *Seja A um conjunto boreliano em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Definimos perímetro de A em Ω como sendo*

$$\operatorname{Per}_{\Omega}(A) := |D\chi_A|(\Omega).$$

Denotamos $Per_{\mathbb{R}^n}(A)$ como $P(A)$.

Mas para nosso texto, esta definição não é suficiente, precisamos tirar a hipótese de que Ω é aberto. Denotando $\text{int}(\Omega)$ como sendo o interior topológico do conjunto Ω , adotamos a seguinte definição de perímetro.

Definição 2.4 *Seja A um conjunto boreliano em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω não necessariamente aberto. Definimos perímetro de A em Ω como sendo*

$$Per_{\Omega}(A) := |D\chi_A|(\text{int}(\Omega)).$$

A medida de Lebesgue n-dimensional mede subconjuntos borelianos n-dimensionais de \mathbb{R}^n , mas, ela em dimensões menores não mede diretamente conjuntos de dimensões menores de natureza muito simples, como por exemplo certas curvas, superfícies ou fronteiras de conjuntos muito simples. Com este intuito definimos a medida de Hausdorff dada pela definição a seguir.

Definição 2.5 *Seja*

$$\mathcal{H}_{\delta}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(n) \left(\frac{\text{diam}(C_i)}{2} \right)^n : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, \text{diam}(C_i) \leq \delta \right\}$$

$$\text{onde } \alpha(n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n)}, \text{ e } \Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Então definimos a medida de Hausdorff com sendo

$$\mathcal{H}^n(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^n(A).$$

A definição de medida de Hausdorff e alguns resultados podem ser encontrados em [7]. Vejamos umas propriedades.

Proposição 2.6 *\mathcal{H}^n é uma medida de Borel e coincide com \mathcal{L}^n em conjuntos \mathcal{L}^n -mensuráveis.*

Observamos também que a medida de Hausdorff 0-dimensional é a medida de contagem.

O próximo resultado pode ser encontrado nas primeiras páginas de [9].

Proposição 2.7 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ limitado com fronteira C^2 . Então $|D\chi_A|(\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \text{int}(\Omega))$. No caso que $\Omega = \mathbb{R}^n$, $|D\chi_A|(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A)$.*

A nomenclatura e a Proposição 2.7 nos sugere medir via medida de Hausdorff "fronteiras" de conjuntos e comparar com a definição de perímetro dada pela Definição (2.4). Claro que se a fronteira topológica for C^2 , a Proposição 2.7 responde esta questão. Mas infelizmente a hipótese de suavidade da fronteira é indispensável. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.8 *Sejam $\Omega = \mathbb{R}^2$, $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ e $A' = A \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \text{ e } 0 < x_1 < 1\}$. Denotando $\partial(A)$ como sendo a fronteira topológica de A , então $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ e $\partial A' = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \text{ e } 0 \leq x_1 < 1\}$, assim pela Proposição 2.6 temos que $\mathcal{H}^1(\partial A') = \mathcal{H}^1(\partial A) + 1$. Mas por outro lado, $\mathcal{L}^2(\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \text{ e } 0 < x_1 < 1\}) = 0$, conseqüentemente pela Definição 2.1 temos, $|D\chi_A|(\Omega) = |D\chi_{A'}|(\Omega)$, o que mostra que desta forma não funciona, em geral, relacionar a medida de Hausdorff da fronteira topológica de um conjunto com seu perímetro.*

No intuito de fazer valer esta relação dada pela igualdade da Proposição 2.7, evocaremos uma definição de fronteira de modo que as fronteiras de A e A' sejam iguais e, portanto, ao menos neste caso esta igualdade continua valendo. Mas, antes disso, vamos precisar de uma definição auxiliar.

Definição 2.9 *Dizemos que um conjunto Boreliano E é de Caccioppoli se E tem perímetro localmente finito.*

Definição 2.10 *Sejam E um conjunto de Caccioppoli, dizemos que $x \in \partial_* E$, a fronteira de medida teórica de E , se*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{r^n} > 0$$

e

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)}{r^n} > 0.$$

Neste caso pelo Teorema Gauss-Green Generalizado na página 209 de [7], temos

$$(2.1) \quad \begin{aligned} |D\chi_E| &= \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial_* E \text{ e conseqüentemente para todo aberto } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ |D\chi_E|(\Omega) &= \mathcal{H}^{n-1} \llcorner (\partial_* E \cap \Omega), \end{aligned}$$

e em particular a igualdade, dada pela Proposição 2.7, continua valendo para este caso mais geral. Lembrando que a densidade de um ponto x em um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))}$$

e como $\mathcal{L}^n(B(x, r)) = \alpha(n)r^n$, onde $\alpha(n)$ é como na Definição 2.5, podemos dizer que a fronteira de medida teórica de um conjunto E são os pontos x onde a densidade em E não 0 e nem 1. Também pela definição de ∂E , a fronteira topológica de E , temos que $\partial_* E \subset \partial E$. Só para registrar aqui, também existe a fronteira reduzida de um conjunto E a qual comumente é denotada por $\partial^* E$, e, neste caso temos $\partial^* E \subset \partial_* E \subset \partial E$. Além disso, o vetor normal existe em cada $x \in \partial^* E$, e $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$. Para mais propriedades destas fronteiras, veja [7].

Definição 2.11 Um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é chamado um conjunto de Lipschitz se para todo $P \in \partial\Omega$ existem um sistema de coordenadas retangulares (x, s) , $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $s \in \mathbb{R}$, uma vizinhança $U = U(P) \subset \mathbb{R}^n$ e função $\varphi_P := \varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$i) |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C_P |x - y| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^{n-1}, C_P < \infty;$$

$$ii) U \cap \Omega = \{(x, s) : s > \varphi(x)\} \cap U.$$

Os dois próximos resultados são versões da fórmula da co área e o primeiro deles pode ser encontrado em [7], p. 117.

Proposição 2.12 Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $n \geq m$, então para cada \mathcal{L}^n -integrável função $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g|_{f^{-1}(y)}$ é \mathcal{H}^{n-m} -integrável para \mathcal{L}^m q.t.p. $y \in \mathbb{R}^m$ e

$$\int_{\Omega} g(x) J(f)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{f^{-1}(y)} g d\mathcal{H}^{n-m} \right] dy.$$

Proposição 2.13 Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $u \in BV(\Omega)$ e f uma função contínua em Ω , então

$$\int_{\Omega} f |Du| = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{\Omega \cap \partial_* \{u > \xi\}} f d\mathcal{H}^{n-1} \right\} d\xi.$$

Demonstração: Pelo Teorema 1.23 de [9], temos

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} |Du| = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{\Omega} |D\chi_{\{u(x) < t\}}| \right\} dt.$$

Mas por (2.1), (2.2) pode ser reescrito como

$$\int_{\Omega} |Du| = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{\Omega \cap \partial_* \{u > t\}} d\mathcal{H}^{n-1} \right\} dt.$$

Desta forma se f é uma função simples, o resultado é consequência imediata desta última igualdade, e no caso geral, é só aproximar f superiormente e inferiormente por funções simples e tomar o limite. ■

Lema 2.14 (Desigualdade isoperimétrica) Existe uma constante positiva $c_1(n)$ que depende somente de $n \geq 1$ tal que para todo conjunto limitado de Caccioppoli $E \subset \mathbb{R}^n$ e limitado, vale que

$$\mathcal{H}^n(E)^{\frac{n-1}{n}} \leq c_1(n) \mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E).$$

Demonstração: Se $n \geq 2$, pelo Corolário (1.29) de [9] e por (2.1) temos respectivamente $\mathcal{H}^n(E)^{\frac{n-1}{n}} \leq c_1(n) \int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_E| = c_1(n) \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$, mostrando a desigualdade proposta pelo Lema quando $n \geq 2$.

Se $n = 1$ e $\mathcal{L}(E) > 0$ o resultado acima é imediato para $c_1(1) = \frac{1}{2}$.

Definição 2.15 *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dizemos $L \in \mathbb{R}^m$ é o limite aproximado de f quando $y \rightarrow x$, e escrevemos*

$$\text{ap } \lim_{y \rightarrow x} f(y) = L,$$

se para cada $\epsilon > 0$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{|f - L| \geq \epsilon\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0.$$

Se além disso, $L = f(x)$ então dizemos que f é aproximadamente contínua em x .

Observamos que o limite L acima é único, portanto a Definição (2.15) está bem posta. Além disso se f é \mathcal{L}^n -mensurável, então f é aproximadamente contínua \mathcal{L}^n -qtp. Estas observações, são encontrados por exemplo em [7].

Tem muitas definições de ordem de magnitude, mas neste texto nos referiremos aquela dada pela definição a seguir.

Definição 2.16 *Dado uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos $f(x, t) = O(g(t))$ uniformemente em x qdo $t \rightarrow a$ se existe $k > 0$ tal que $|f(x, t)| \leq k|g(t)|$ numa vizinhança de a e todo $x \in \Omega$. Neste caso, quando não houver ambiguidade, simplesmente escrevemos $f = O(g)$.*

2.2 Gama-convergência e propriedades da função distância com sinal

Gama-convergência é uma técnica muito usada para obter resultados sobre o Problema (1.1). Vejamos por exemplo em [19], onde o autor calcula o Gama-limite de uma certa família de funcionais, que na verdade se trata de um caso particular daquela a ser abordada neste trabalho. Já em [2], os autores abordam várias propriedades desta convergência, enquanto em [1], [3], [5]; os autores se limitaram a somente usar o Gama-limite. Contudo, neste trabalho, como descrito na introdução, o Capítulo 3 será dedicado inteiramente para calcular o Gama-limite de uma certa família $\{\mathcal{E}_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$. Como acontece em geral com as definições em matemática, existem várias versões equivalentes da definição de Gama-convergência, a por nós adotada é aquela encontrada em [19] ou [5] dada por:

Definição 2.17 *Seja $\{\mathcal{E}_\epsilon\}_{\epsilon > 0} : L^1(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ uma família de funcionais reais estendidos. Dizemos $\{\mathcal{E}_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ Γ -converge (gama-converge) a \mathcal{E}_0 quando $\epsilon \rightarrow 0$ se*

(i) *para cada $u \in L^1(\Omega)$ e toda sequência $\{u_\epsilon\}$ em $L^1(\Omega)$, convergindo em $L^1(\Omega)$ a u então $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(u_\epsilon) \geq \mathcal{E}_0(u)$;*

(ii) *para cada $u \in L^1(\Omega)$, existe uma sequência $\{v_{\epsilon_j}\}$ em $L^1(\Omega)$ satisfazendo:*

(ii.1) $v_{\epsilon_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u$ em $L^1(\Omega)$ e

$$(ii.2) \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\epsilon_j}(v_{\epsilon_j}) = \mathcal{E}_0(u).$$

Neste caso também dizemos que \mathcal{E}_0 é o Γ -limite (gama-limite) da família $\{\mathcal{E}_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ e escrevemos $\mathcal{E}_0 = \Gamma\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon$.

Uma definição mais geral de Gama-limite pode ser encontrada em p. 33 de [2].

Em [5] encontramos a seguinte definição de solução estacionária e estável.

Definição 2.18 *Seja \tilde{v} solução uma da equação parabólica (1.1) em $H^1(\Omega)$. Dizemos que \tilde{v} é uma solução estacionária e estável de (1.1) se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $\phi \in H^1(\Omega)$, $\|\phi - \tilde{v}\|_{H^1(\Omega)} < \delta$ então a solução $v(x, t)$ de (1.1) com $v(x, 0) = \phi$ existe para todo $t > 0$ e satisfaz $\|v(\cdot, t) - \tilde{v}\|_{H^1(\Omega)} < \epsilon$. Se além disso, $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = \tilde{v}(x)$ então dizemos que \tilde{v} é fortemente estável.*

Toda argumentação apresentada neste trabalho relaciona a existência de mínimo isolado do funcional Γ -limite \mathcal{E}_0 com os mínimos dos funcionais de energia \mathcal{E}_ϵ dos quais \mathcal{E}_0 é o Γ -limite. Esta relação é dada pelo Teorema 2.19 a seguir, que apresentaremos na versão para as famílias de funcionais deste texto. Originalmente, este é o Teorema de De Giorgi. O Teorema 2.1 de [12] é uma versão do mesmo para funcionais, como apresentado abaixo mas com a hipótese adicional que

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & \text{toda família } \{v_\epsilon\}_{\epsilon > 0} \text{ no domínio dos funcionais de energia } \mathcal{E}_\epsilon \\ & \text{tal que } \mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \leq C < \infty \text{ é compacta em } L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Mas pela hipótese (f_3) de crescimento polinomial da função de poço duplo definida em (1.1), e do fato que o domínio dos funcionais é $L^1(\Omega)$, então pela Proposição 3 de [19] podemos omitir a hipótese (2.3) acima. Basicamente a hipótese (2.3) é obtida do fato que $BV(\Omega)$ está compactamente contido em $L^1(\Omega)$. Outras referências também usaram esta hipótese, como por exemplo [5], [15], [12].

Teorema 2.19 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio Lipschitz e limitado. Sejam \mathcal{E}_ϵ e \mathcal{E}_0 como em 1.2 1.3 respectivamente. Suponha que \mathcal{E}_0 é o Γ -limite da família $\{\mathcal{E}_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ como na Definição 2.17. Suponha também que u_0 é um mínimo $L^1(\Omega)$ -local isolado de \mathcal{E}_0 . Então existe $\epsilon_0 > 0$ e uma família $\{u_\epsilon\}_{\epsilon < \epsilon_0}$ tal que*

u_ϵ é um mínimo $L^1(\Omega)$ -local de \mathcal{E}_ϵ e

$$\|u_\epsilon - u_0\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Outra ferramenta importante usada no cálculo do Gama-limite é a função distância com sinal. Mas seu uso não se restringe a esta aplicação; por exemplo, dependendo da "geometria" do domínio (ambiente) do problema (1.1), esta função também é usada na

obtenção do mínimo isolado de \mathcal{E}_0 (veja Capítulo 4 desta tese). Outra aplicação muito importante para a mesma ocorre nas expansões assintóticas de u_ϵ desenvolvidas em [16], onde u_ϵ pode ser vista como solução do Problema (1.1). Mas antes de dar algumas propriedades da mesma, vamos defini-la.

Definição 2.20 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ limitado com fronteira C^2 , tomemos função distância definida por:*

$$d(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, \partial A), & \text{se } x \in A \\ -\text{dist}(x, \partial A), & \text{se } x \in A^c \end{cases}$$

Já nas primeiras páginas de [2], vemos que

$$(2.4) \quad \begin{cases} d \text{ é Lipschitz com constante de Lipschitz igual a } 1; \\ \text{diferenciável } \mathcal{L}^n \text{ q.t.p}; \\ |\nabla d(x)| = 1; \\ \text{existe } \delta > 0, \text{ tal que } d \text{ é } C^1 \text{ em } (\partial A)_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n; |d(x)| < \delta\}. \\ \text{Aqui } (\partial A)_\delta \text{ é definida como sendo a } \delta\text{-vizinhança tubular de } \partial A. \end{cases}$$

A seguir, apresentaremos a definição generalizada de Jacobiano encontrada em [7]. Para isto, dada uma matriz M , denotaremos por M^* a sua adjunta.

Definição 2.21 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $[Df]$ a sua diferencial na forma matricial. Então definimos o Jacobiano de f com sendo*

$$J(f)(x) = \begin{cases} \sqrt{|\det([Df(x)]^* \circ [Df(x)])|}, & \text{se } n \leq m; \\ \sqrt{|\det([Df(x)] \circ [Df(x)]^*)|}, & \text{se } n \geq m. \end{cases}$$

Seja d como na Definição 2.20, então como $|\nabla d(x)| = 1$, temos que $J(d) = 1$. Pelo Lema 2 da seção 3.4.1 de [7] e como d é Lipschitz pois $|\nabla d(x)| = 1$, temos:

Proposição 2.22 *Seja d como na Definição 2.20, então a aplicação $t \rightarrow \mathcal{H}^{n-1}(d(x) = t)$ é contínua em $(\partial A)_\delta$.*

Nos Apêndices de [9] e ou de [8] temos a seguinte construção um tanto canônica para definir o vetor normal e as curvaturas principais, mas esta não é a única forma de definir estes elementos associados a uma hiperfície.

Definição 2.23 *Sejam $d, (\partial A)_\delta$ como na Definição 2.20, e $S = \partial A$, dado $x_0 \in S_\delta$, então existe único $y_0 \in \partial A$ tal que $x_0 = y_0 + s\nu(y_0)$ onde $\nu(y)$ é o vetor normal unitário interior a $d^{-1}(0)$ em y e $s = d(x_0)$. Fazendo as rotações necessárias no sistema cartesiano, podemos assumir que o último eixo do mesmo está na direção de $\nu(y_0)$, e $y_0 = 0$. Para alguma vizinhança V_{y_0} de y_0 , existe $\varphi \in C^\infty(T_{y_0}d^{-1}(0) \cap V_{y_0})$ tal que $(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})) \in d^{-1}(0) \forall x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in V_{y_0}$, com $\nabla\varphi(y'_0) = 0$,*

sendo $y'_0 = \pi_n(y_0)$ onde $\pi_n(y) = \pi_n(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) := (y_1, \dots, y_{n-1})$, e no que segue, denotaremos $y' := \pi_n(y)$. Denotando $[D^2\varphi]|_{y'} = (\varphi_{x_i x_j}(y'))_{(n-1) \times (n-1)}$, então os autovalores $\kappa_i(y'_0)$ ($i = 1, \dots, n-1$) de $[D^2\varphi]|_{y'_0}$ são chamados de curvaturas principais e os respectivos autovetores de direções principais. O conjunto destes autovetores com o vetor normal formam uma base, a qual é chamada de sistema de coordenadas principal.

Observação 2.24 *Sejam $\nu, y_0, y'_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ como acima, então na base do sistema de coordenadas principal temos:*

$$(2.5) \quad (D\nu)|_{y'_0} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & -\kappa_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir destas convenções, definimos a seguinte função

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Xi_0 &: ((T_{y_0}\partial A) \cap V_{y_0}) \times I_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \Xi_0(x', s) &= (x', \varphi(x') + s\nu(x', \varphi(x'))), \end{aligned}$$

onde x' é como definido acima, e $I_\delta := (-\delta, \delta)$. Assim, por (2.5) temos:

$$(D\Xi)|_{(y'_0, s)} = \begin{pmatrix} 1 - s\kappa_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 - s\kappa_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e portanto

$$(2.7) \quad J(\Xi_0)(y'_0, s) = \prod_{i=1}^{n-1} \{1 - s\kappa_i((y'_0, \varphi(x'_0)))\}.$$

Tomando δ suficientemente pequeno temos $J(\Xi_0)$ é positivo e portanto Ξ_0 define um difeomorfismo entre $((T_{y_0}S) \cap V_{y_0}) \times I_\delta$ e $\{(x', \varphi(x') + s\nu(x', \varphi(x'))) : x' \in (T_{y_0}S) \cap V_{y_0} \text{ e } s \in I_\delta\}$. Além disso, pela demonstração do Lema 14.16 de [8] $d(x)$ e $y(x)$ relacionadas por $x = y(x) + d(x)\nu(y(x))$ são funções de classe C^1 de x .

Aplicando a observação acima para cada ponto de S , o próximo lema é uma consequência natural, o qual também pode ser encontrado em [15].

Lema 2.25 *Na notação da Observação 2.23, se S for compacto, então existe $\delta > 0$ de tal modo que a função*

$$\begin{aligned} \Xi &: S \times I_\delta \rightarrow S_\delta \\ (y, s) &\rightarrow y + s\nu(y) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo e

$$(2.8) \quad J(\Xi)(x, s) = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - s\kappa_i(y)).$$

Como vimos, a função distância com sinal tem boas propriedades numa vizinhança tubular da fronteira de conjuntos cuja fronteira é C^2 , o que não vale em geral. Mas o próximo resultado é o Lema 1 de [19] e nos auxilia quando fronteira do conjunto não é C^2 . Denotamos $B\Delta A$ como sendo a diferença simétrica entre os conjuntos A e B , ou seja,

$$B\Delta A = (B^c \cap A) \cup (A^c \cap B).$$

Lema 2.26 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e de Lipschitz. Seja $A \subset \Omega$ um subconjunto de perímetro finito em Ω com $0 < \mathcal{L}^n(A) < \mathcal{L}^n(\Omega)$. Então existe uma sequência de abertos A_h tal que*

- i) ∂A_h é de classe C^2 ,*
- ii) $\mathcal{L}^n((A_h \cap \Omega)\Delta A) \rightarrow 0$ qdo $h \rightarrow \infty$,*
- iii) $Per_\Omega(A_h) \rightarrow Per_\Omega(A)$,*
- iv) $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A_h \cap \partial\Omega) = 0$,*
- v) $\mathcal{L}^n(A_h \cap \Omega) = \mathcal{L}^n(A)$ para h suficientemente grande.*

Capítulo 3

Generalização do Teorema de Kohn e Sternberg

Pelo Teorema 2.19 (De Giorgi), a existência de mínimos isolados do funcional Γ -limite \mathcal{E}_0 da família $\{\mathcal{E}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ nos garante a existência de mínimos dos funcionais \mathcal{E}_ϵ correspondentes. O objetivo deste capítulo é encontrar o Γ -limite da família de funcionais \mathcal{E}_ϵ descritos por

$$(3.1) \quad \mathcal{E}_\epsilon(u) := \begin{cases} \int_{\Omega} [\epsilon a(x) |\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, u)] dx, & \text{se } u \in H^1(\Omega) \\ \infty, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$$

Aqui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e Lipschitz. O potencial biestável F é definido como sendo

$$(3.2) \quad F(x, v) = -\frac{1}{2} \int_{g_1(x)}^v f(x, s) ds,$$

onde $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ é de tal que existem $\theta, g_1, g_2 \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazendo

$$(f_1) \quad g_1(x) < \theta(x) < g_2(x), \quad f(x, \cdot) \text{ tem exatamente três raízes com } f(x, g_1(x)) = f(x, \theta(x)) = f(x, g_2(x)) \equiv 0 \text{ e } \partial_2 f(x, g_1(x)) < 0, \partial_2 f(x, g_2(x)) < 0 \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

$$(f_2) \quad \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, \xi) d\xi = 0 \text{ (condição de igualdade de área).}$$

$$(f_3) \quad \text{Existem constantes } c_1, c_2, s_0 \text{ e um número } p \geq 2 \text{ tal que } c_1 |s|^p \leq F(x, s) \leq c_2 |s|^p \text{ para todo } s \text{ satisfazendo } |s| \geq s_0, \text{ onde } F(x, v) = -\frac{1}{2} \int_{g_1(x)}^v f(x, s) ds.$$

$$(f_4) \quad \sqrt{a(\cdot)F(\cdot, \cdot)} \in C^1.$$

A função $F(x, \cdot)$ assim definida satisfaz $F \geq 0$ para cada $x \in \overline{\Omega}$, e tem como únicas raízes $g_1(x)$ e $g_2(x)$. Sejam também $\epsilon > 0$ um parâmetro positivo pequeno; $a \in C^1(\overline{\Omega})$ positiva. Com estas definições enunciaremos o teorema central deste capítulo.

Teorema 3.1 *Seja $\mathcal{E}_\epsilon : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$, uma família de funcionais como em 3.1 Então para toda $v \in L^1(\Omega)$, tem-se*

$$\Gamma\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(v) = \begin{cases} \int_{\Omega} h(x) |D\chi_{v=g_2}|, & \text{se } v \in BV(\Omega; \{g_1, g_2\}); \\ \infty & \text{nos demais casos,} \end{cases}$$

onde

$$h(x) := 2 \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{a(x)F(x, s)} ds.$$

Observemos que o funcional Γ -limite é o funcional perímetro com peso h .

Para os casos particulares em que

i) $a = 1$, e $F(x, u) = W(u)$ com g_1 e g_2 constantes,

ou,

ii) $a = 1$, $F(x, u) = (u - g_1(x))^2(u - g_2(x))^2$ com g_1 e g_2 como nesta tese,

o cálculo do Γ -limite acima foi feito em [19].

No que se segue, denotaremos

$$(3.3) \quad \mathcal{E}_0 := \Gamma\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon.$$

3.1 Resultados usados na demonstração do Teorema 3.1

Nesta seção veremos alguns resultados técnicos, simples, que serão usados na demonstração do Teorema 3.1. Optamos em separar tais resultados técnicos para tornar mais clara a demonstração do Teorema 3.1.

Lema 3.2 *Dadas $v \in BV(\Omega; \{g_1, g_2\})$ e $v_\epsilon \in H^1(\Omega)$ com $v_\epsilon \rightarrow v$ em $L^1(\Omega)$, então existe uma família $\{v_\epsilon^*\}_\epsilon$ tal que:*

i) $v_\epsilon^* \in H^1(\Omega)$ e $g_1(x) \leq v_\epsilon^*(x) \leq g_2(x)$,

ii) $v_\epsilon^* \rightarrow v$ em $L^1(\Omega)$,

iii) $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon^*)$.

Demonstração: Definamos

$$v_\epsilon^*(x) := \begin{cases} g_1(x), & \text{se } x \in \{x : v_\epsilon(x) < g_1(x)\}, \\ v_\epsilon(x), & \text{se } x \in \{x : g_1(x) \leq v_\epsilon(x) \leq g_2(x)\}, \\ g_2(x), & \text{se } x \in \{x : v_\epsilon(x) > g_2(x)\}. \end{cases}$$

Desta forma o item (i) deste lema é satisfeito pela definição de v_ϵ^* . Seja $\Omega_i := \{x \in \Omega : v(x) = g_i(x)\}$; ($i = 1, 2$). Em particular, $\Omega = \bigcup_{i=1}^2 \Omega_i$, sendo esta união disjunta. Além disso

$$(3.4) \quad v_\epsilon \rightarrow g_i \text{ em } L^1(\Omega_i) \text{ para } i = 1, 2.$$

Assim para mostrar (ii), devemos mostrar que $v_\epsilon^* \rightarrow g_i$ em $L^1(\Omega_i)$ para $i = 1, 2$. Observe-mos que se $i = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |v_\epsilon^*(x) - g_1(x)| dx &= \int_{\{x \in \Omega_1 : v_\epsilon(x) < g_1(x)\}} |v_\epsilon^*(x) - g_1(x)| dx \\ &+ \int_{\{x \in \Omega_1 : v_\epsilon(x) > g_2(x)\}} |v_\epsilon^*(x) - g_1(x)| dx \\ &+ \int_{\{x \in \Omega_1 : g_1(x) \leq v_\epsilon(x) \leq g_2(x)\}} |v_\epsilon^*(x) - g_1(x)| dx \\ &= \int_{\{x \in \Omega_1 : v_\epsilon(x) > g_2(x)\}} |g_2(x) - g_1(x)| dx \\ &+ \int_{\{x \in \Omega_1 : g_1(x) \leq v_\epsilon(x) \leq g_2(x)\}} |v_\epsilon^*(x) - g_1(x)| dx. \end{aligned}$$

Mas por (3.4) e da definição de v_ϵ^* , segue que a última parcela acima vai a zero, restando mostrar que

$$\int_{\{x \in \Omega_1 : v_\epsilon(x) > g_2(x)\}} |g_2(x) - g_1(x)| dx \rightarrow 0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

De fato, $v_\epsilon \rightarrow g_1$ em $L^1(\Omega_1)$ significa dizer que dado $\delta > 0$ existe $\epsilon_0(\delta) > 0$ tal que para todo $\epsilon < \epsilon_0(\delta)$ se verifica $\mathcal{L}^n(\{x \in \Omega_1 : |v_\epsilon(x) - g_1(x)| \geq \delta\}) < \delta$. Assim para todo $0 < \delta < \inf_{x \in \Omega} (g_2(x) - g_1(x))$ existe $\epsilon_0(\delta) > 0$ tal que se $\epsilon < \epsilon_0(\delta)$ então $\mathcal{L}^n(\{x \in \Omega_1 : v_\epsilon(x) \geq g_2(x)\}) \leq \mathcal{L}^n(\{x \in \Omega_1 : |v_\epsilon(x) - g_1(x)| \geq \delta\}) < \delta$. Consequentemente

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \Omega_1 : v_\epsilon(x) > g_2(x)\}} |g_2(x) - g_1(x)| dx &\leq \sup_{x \in \Omega} (g_2(x) - g_1(x)) \mathcal{L}^n(\{x \in \Omega_1 : v_\epsilon(x) \geq g_2(x)\}) \\ &< \delta \sup_{x \in \Omega} (g_2(x) - g_1(x)). \end{aligned}$$

Como δ é arbitrariamente pequeno, temos mostrado que

$$\int_{\{x \in \Omega_1 : v_\epsilon(x) > g_2(x)\}} |g_2(x) - g_1(x)| dx \rightarrow 0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0,$$

e portanto $v_\epsilon^* \rightarrow g_1$ em $L^1(\Omega_1)$. Para $i = 2$ as contas são análogas das feitas para $i = 1$. Assim temos mostrado o item (ii) da tese deste Lema. Para mostrar (iii) observemos primeiro que

$$v_\epsilon^* = [-(v_\epsilon - g_2)^- + (g_2 - g_1)]^+ + g_1,$$

onde

$$f^+ = \begin{cases} f, & \text{se } f > 0, \\ 0, & \text{se } f \leq 0 \end{cases}$$

e

$$f^- = \begin{cases} -f, & \text{se } f < 0, \\ 0, & \text{se } f \geq 0. \end{cases}$$

E como $g_1, g_2 \in C^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ e $v_\epsilon \in H^1(\Omega)$ segue que $v_\epsilon^* \in H^1(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon^*) &= \int_\Omega \left[\epsilon a(x) |\nabla v_\epsilon^*|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, v_\epsilon^*) \right] dx \\ &= \int_{\{x \in \Omega: v_\epsilon(x) < g_1(x)\} \cup \{x \in \Omega: v_\epsilon(x) > g_2(x)\}} \left[\epsilon a(x) |\nabla v_\epsilon^*|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, v_\epsilon^*) \right] dx \\ &\quad + \int_{\{x \in \Omega: g_1(x) \leq v_\epsilon(x) \leq g_2(x)\}} \left[\epsilon a(x) |\nabla v_\epsilon^*|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, v_\epsilon^*) \right] dx \\ &= \epsilon \int_{\{x \in \Omega: v_\epsilon(x) < g_1(x)\} \cup \{x \in \Omega: v_\epsilon(x) > g_2(x)\}} [a(x) |\nabla v_\epsilon^*|^2] dx \\ &\quad + \int_{\{x \in \Omega: g_1(x) \leq v_\epsilon(x) \leq g_2(x)\}} \left[\epsilon a(x) |\nabla v_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, v_\epsilon) \right] dx \\ &\quad (\text{ pois } F(x, g_i(x)) = 0 \text{ para } i = 1, 2) \text{ (e pela definição de } v_\epsilon^* \text{) respectivamente.} \end{aligned}$$

Mas

$$\epsilon \int_{\{x \in \Omega: v_\epsilon(x) < g_1(x)\} \cup \{x \in \Omega: v_\epsilon(x) > g_2(x)\}} [a(x) |\nabla v_\epsilon^*|^2] dx \rightarrow 0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0,$$

pois $v_\epsilon^* = g_i$ em Ω_i . Por outro lado,

$$\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \geq \int_{\{x \in \Omega: g_1(x) \leq v_\epsilon(x) \leq g_2(x)\}} \left[\epsilon a(x) |\nabla v_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, v_\epsilon) \right] dx.$$

Isto mostra que $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon^*)$, mostrando (iii) deste lema e concluindo assim a demonstração do mesmo. ■

Em [13], pg 145, encontramos o seguinte resultado:

Lema 3.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : \Omega \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais contínuas $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : \Omega \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $g : \Omega \rightarrow [a, b]$ de classe C^1 . Então $\varphi(x) = \int_a^{g(x)} f(x, t) dt$ é de classe C^1 e suas derivadas parciais são expressas pela fórmula*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt + \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) f(x, g(x))$$

Proposição 3.4 *Dados*

$v \in BV(\Omega; \{g_1, g_2\})$, $\{v_h\}_{h \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ com $g_1(x) \leq v_h(x) \leq g_2(x)$ e $v_h \rightarrow v$ em $L^1(\Omega)$;

$\mathcal{B} := \{\sigma \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n); |\sigma(x)| \leq 1 \ \forall x \in \Omega\}$,

a e F são como no Teorema 3.1.

Então vale

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sup_{\sigma \in \mathcal{B}} \left\{ - \int_{\Omega} \left[\int_{g_1(x)}^{v_h(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \operatorname{div} \sigma + \left\langle \int_{g_1(x)}^{v_h(x)} \nabla_x \sqrt{a(x)F(x,s)} ds, \sigma \right\rangle \right] dx \right\} \right) \\ &= \sup_{\sigma \in \mathcal{B}} \left\{ - \int_{\Omega} \left[\int_{g_1(x)}^{v(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \operatorname{div} \sigma + \left\langle \int_{g_1(x)}^{v(x)} \nabla_x \sqrt{a(x)F(x,s)} ds, \sigma \right\rangle \right] dx \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração: Fixado $\sigma \in \mathcal{B}$, seja $\tilde{\phi}(x, t) := \int_{g_1(x)}^t \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \operatorname{div} \sigma + \left\langle \int_{g_1(x)}^t \nabla_x \sqrt{a(x)F(x,s)} ds, \sigma \right\rangle$. Da hipóteses de suavidade (f_4), existe $L > 0$ tal que $|\tilde{\phi}(x, t_2) - \tilde{\phi}(x, t_1)| \leq L|t_2 - t_1|$ para todo $t_1, t_2 \in [g_1(x), g_2(x)]$ e todo $x \in \Omega$. Desta forma obtem-se

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \tilde{\phi}(x, v_h) dx - \int_{\Omega} \tilde{\phi}(x, v) dx \right| \\ & \leq \int_{\Omega} |\tilde{\phi}(x, v_h) - \tilde{\phi}(x, v)| dx \leq \int_{\Omega} L|v_h - v| dx. \end{aligned}$$

Mas isto mostra que para cada $\sigma \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow \infty} - \int_{\Omega} \left[\int_{g_1(x)}^{v_h(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \operatorname{div} \sigma + \left\langle \int_{g_1(x)}^{v_h(x)} \nabla_x \sqrt{a(x)F(x,s)} ds, \sigma \right\rangle \right] dx \\ &= - \int_{\Omega} \left[\int_{g_1(x)}^{v(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \operatorname{div} \sigma + \left\langle \int_{g_1(x)}^{v(x)} \nabla_x \sqrt{a(x)F(x,s)} ds, \sigma \right\rangle \right] dx. \end{aligned}$$

em especial esta igualdade se mantém para o supremo em \mathcal{B} , concluindo assim esta demonstração. \blacksquare

Proposição 3.5 *Dados $v, g_1, g_2, \mathcal{B}, a$ e F como na Proposição 3.4. Então vale*

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \cdot \sigma(x) \right) \\ &= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \operatorname{div} \sigma + \left\langle \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \nabla_x \sqrt{a(x)F(x,s)} ds, \sigma \right\rangle \end{aligned}$$

Demonstração: Das regras básicas de diferenciação obtemos:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \cdot \sigma(x) \right) \\ &= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \operatorname{div} \sigma + \left\langle \nabla_x \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds, \sigma \right\rangle \\ &= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \operatorname{div} \sigma + \left\langle \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \nabla_x \sqrt{a(x)F(x,s)} ds, \sigma \right\rangle \end{aligned}$$

(pelo Lema 3.3 e observando que $\sqrt{a(x)F(x, g_i(x))} \nabla v_h(x) = 0$ ($i = 1, 2$)).

■

Lema 3.6 *Sejam \mathcal{B} , a e F como na Proposição 3.4. Então, dado $\sigma \in \mathcal{B}$ e $v_h \in H^1(\Omega)$, vale,*

$$(3.5) \quad \int_{\Omega} \langle \sqrt{a(x)F(x, v_h)} \nabla v_h, \sigma \rangle dx \\ = - \int_{\Omega} \left[\int_{g_1(x)}^{v_h(x)} \sqrt{a(x)F(x, s)} ds \operatorname{div} \sigma + \langle \int_{g_1(x)}^{v_h(x)} \nabla_x \sqrt{a(x)F(x, s)} ds, \sigma \rangle \right] . dx$$

Demonstração: Seja $\phi(x, t) = \int_{g_1(x)}^t \sqrt{a(x)F(x, s)} ds$. Pelo Lema 3.3 e observando que $\sqrt{a(x)F(x, g_1(x))} \nabla v_h(x) = 0$, temos

$$\nabla \phi(x, v_h) = \int_{g_1(x)}^{v_h(x)} \nabla_x \sqrt{a(x)F(x, s)} ds + \sqrt{a(x)F(x, v_h(x))} \nabla v_h(x),$$

de onde concluímos esta demonstração. ■

Proposição 3.7 *Dados a , F , g_1 , g_2 como no Teorema 3.1 e $\theta \in C^1(\Omega)$ satisfazendo $g_1(x) \leq \theta(x) \leq g_2(x)$ então o PVI*

$$(3.6) \quad \begin{cases} \frac{dZ}{ds} = \sqrt{(a)^{-1}(x)F(x, s)} \\ Z(x, 0) = \theta(x) \end{cases}$$

tem uma e única solução em $\Omega \times \mathbb{R}$, satisfazendo:

$$g_1(x) < Z(x, s) < g_2(x); \text{ para } s \in \mathbb{R}; |\nabla_x Z(x, s)| \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}).$$

E além disso, existem constantes positivas k_1, k_2, a, b tal que:

para s suficientemente grande, $g_2(x) - Z(s, x) \leq k_1 e^{-as}$ e portanto, $\lim_{s \rightarrow \infty} Z(x, s) = g_2(x)$;

para $-s$ suficientemente grande, $Z(s, x) \leq g_1(x) k_2 e^{bs}$ e portanto, $\lim_{s \rightarrow -\infty} Z(x, s) = g_1(x)$.

Demonstração: A demonstração segue naturalmente da existência e unicidade de soluções de EDO como pode ser vista em [18]. ■

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Nesta seção, inspirados em [19], faremos a demonstração do Teorema 3.1.

Demonstração do Teorema 3.1: Pela Definição 2.17 é suficiente mostrar que se dada $v \in L^1(\Omega)$ então

$$(3.1.i) \quad \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(v_{\epsilon_j}) \geq \mathcal{E}_0(v) \text{ para toda sequência } \{v_{\epsilon_j}\} \text{ convergindo em } L^1(\Omega) \text{ a } v;$$

(3.1.ii) e existe uma sequência $\{v_{\epsilon_j}\}$ convergindo em $L^1(\Omega)$ a v satisfazendo $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\epsilon_j}(v_{\epsilon_j}) \leq \mathcal{E}_0(v)$.

Seja $v \in L^1(\Omega)$ dada. Mostraremos inicialmente (3.1.i). Tomemos $\{v_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ uma família com $v_\epsilon \rightarrow v$ em $L^1(\Omega)$. Se $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon)$ for infinito, a desigualdade em (3.1: i) está trivialmente satisfeita. Assim vamos supor que $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon)$ é finito, e portanto podemos achar $(v_h)_{h \in \mathbb{N}}$ com $v_h = v_{\epsilon_h}$, tal que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\epsilon_h}(v_h) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(x, v_h) dx &\leq \int_{\Omega} [\epsilon_h^2 a(x) |\nabla v_h|^2 + F(x, v_h)] dx \\ &= \epsilon_h \mathcal{E}_{\epsilon_h}(v_h), \end{aligned}$$

segue que

$$\epsilon_h \mathcal{E}_{\epsilon_h}(v_h) \rightarrow 0 \text{ qdo } h \rightarrow \infty.$$

Portanto pelo lema de Fatou

$$\int_{\Omega} F(x, v) dx = 0 \text{ e assim } v(x) \in \{g_1(x), g_2(x)\} \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Neste caso, pelo Lema 3.2 podemos supor $g_1(x) \leq v_h(x) \leq g_2(x)$.

Agora usando a desigualdade $a^2 + b^2 \geq 2ab$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, e \mathcal{B} e ϕ como na Proposição 3.4, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\epsilon_h}(v_h) &= \int_{\Omega} \left[\epsilon_h a(x) |\nabla v_h|^2 + \frac{1}{\epsilon_h} F(x, v_h) \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\epsilon_h (\sqrt{a(x)} |\nabla v_h|)^2 + \frac{1}{\epsilon_h} (\sqrt{F(x, v_h)})^2 \right] dx \\ &\geq 2 \int_{\Omega} |\nabla v_h| \sqrt{a(x) F(x, v_h)} dx \quad (\text{pois } a^2 + b^2 \geq 2ab) \\ &\geq \sup_{\sigma \in \mathcal{B}} \left\{ 2 \int_{\Omega} \sqrt{a(x) F(x, v_h)} \langle \nabla v_h, \sigma \rangle dx \right\} \\ &= \sup_{\sigma \in \mathcal{B}} \left\{ -2 \int_{\Omega} \left[\int_{g_1(x)}^{v_h(x)} \sqrt{a(x) F(x, s)} ds \operatorname{div} \sigma \right. \right. \\ (3.7) \quad &\left. \left. + \langle \int_{g_1(x)}^{v_h(x)} \nabla_x \sqrt{a(x) F(x, s)} ds, \sigma \rangle \right] dx \right\} \quad (\text{pelo Lema 3.6}). \end{aligned}$$

Passando o limite $h \rightarrow \infty$ em (3.7) e usando a proposição 3.4 temos,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\epsilon_h}(v_h) &\geq \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\sup_{\sigma \in \mathcal{B}} \left\{ -2 \int_{\Omega} \left[\int_{g_1(x)}^{v_h(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \operatorname{div} \sigma \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left\langle \int_{g_1(x)}^{v_h(x)} \nabla_x \sqrt{a(x)F(x,s)} ds, \sigma \right\rangle \right] dx \right\} \right) \\
&= \sup_{\sigma \in \mathcal{B}} \left\{ -2 \int_{\Omega} \left[\int_{g_1(x)}^{v(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \operatorname{div} \sigma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left\langle \int_{g_1(x)}^{v(x)} \nabla_x \sqrt{a(x)F(x,s)} ds, \sigma \right\rangle \right] dx \right\} \quad (\text{pela Proposição 3.4}) \\
&= \sup_{\sigma \in \mathcal{B}} \left\{ -2 \int_{\Omega} \chi_{v=g_2}(x) \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \operatorname{div} \sigma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left\langle \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \nabla_x \sqrt{a(x)F(x,s)} ds, \sigma \right\rangle \right] dx \right\} \quad (\text{pois } v \in BV(\Omega; \{g_1, g_2\})) \\
&= \sup_{\sigma \in \mathcal{B}} \left\{ -2 \int_{\Omega} \chi_{v=g_2}(x) \operatorname{div} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds \cdot \sigma(x) \right) dx \right\} \\
&\quad (\text{pela Proposição 3.5}) \\
&= 2 \int_{\Omega} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{a(x)F(x,s)} ds |D\chi_{v=g_2}| \\
(3.8) \quad &= \int_{\Omega} h(x) |D\chi_{v=g_2}| = \mathcal{E}_0(v)
\end{aligned}$$

Com (3.8) completamos a prova da condição (3.1.i).

Para provar (3.1.ii), é suficiente mostrar que dada $v \in L^1(\Omega)$, existe uma sequência positiva $\{\epsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ com $\epsilon_i \rightarrow 0$ e $\rho_{\epsilon_i} \xrightarrow{L^1(\Omega)} v$ tal que

$$(3.9) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\epsilon_i}(\rho_{\epsilon_i}) \leq \mathcal{E}_0(v).$$

Primeiramente se $v \notin BV(\Omega; \{g_1(x), g_2(x)\})$, então pela definição de $\mathcal{E}_0(v)$, $\mathcal{E}_0(v) = \infty$ e portanto (3.9) está trivialmente satisfeita.

Suponhamos $v \in BV(\Omega; \{g_1(x), g_2(x)\})$. Seja $A = \{x \in \Omega; v(x) = g_2(x)\}$. Suponhamos que ∂A é C^2 -suave. Seja d a função distância como na Definição 2.20 relativo ao conjunto A aqui definido.

Seja Z a solução de (3.6) e definimos,

$$g_{\epsilon}(x, s) := \begin{cases} g_2(x), & \text{se } s > 2\sqrt{\epsilon}; \\ [g_2(x) - Z(x, 1/\sqrt{\epsilon})] \frac{(s-2\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}} + g_2(x), & \text{se } \sqrt{\epsilon} \leq s \leq 2\sqrt{\epsilon}; \\ Z(x, s/\epsilon), & \text{se } |s| < \sqrt{\epsilon}; \\ [Z(x, -1/\sqrt{\epsilon}) - g_1(x)] \frac{(s+2\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}} + g_1(x), & \text{se } -2\sqrt{\epsilon} \leq s \leq -\sqrt{\epsilon}; \\ g_1(x), & \text{se } s < -2\sqrt{\epsilon}. \end{cases}$$

Definimos também $\rho_\epsilon(x) := g_\epsilon(x, d(x))$. Queremos mostrar que $\rho_{\epsilon_i} \xrightarrow{L^1(\Omega)} v$ e que (3.9) é satisfeito. Como $v(x) = g_1(x)\chi_{\Omega \setminus A} + g_2(x)\chi_A(x)$, temos

$$(3.10) \quad \int_{\Omega} |\rho_\epsilon(x) - v(x)| dx = \int_{|d| < 2\sqrt{\epsilon}} |\rho_\epsilon - v| dx.$$

Para x satisfazendo $\sqrt{\epsilon} < d(x) < 2\sqrt{\epsilon}$ e conseqüentemente $x \in A$, temos,

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \int_{\sqrt{\epsilon} < d < 2\sqrt{\epsilon}} |\rho_\epsilon - v| dx &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_{\sqrt{\epsilon} < d < 2\sqrt{\epsilon}} |(g_2(x) - Z(x, 1/\sqrt{\epsilon}))(d(x) - 2\sqrt{\epsilon})| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_{\sqrt{\epsilon} < d < 2\sqrt{\epsilon}} |(g_2(x) - Z(x, 1/\sqrt{\epsilon}))(d(x) - 2\sqrt{\epsilon})| J(d)(x) dx, \end{aligned}$$

pois pela Definição 2.21, $J(d)(x) = \sqrt{|\nabla d(x)|^2} = 1$, para x satisfazendo $|d(x)| < 2\sqrt{\epsilon}$, e ϵ suficientemente pequeno. Pela Proposição (2.12), tomando $m = 1$, $f = d$, e $g(x) = |(g_2(x) - Z(x, 1/\sqrt{\epsilon}))(d(x) - 2\sqrt{\epsilon})|$, (3.11) é equivalente a

$$(3.12) \quad \int_{\sqrt{\epsilon} < d < 2\sqrt{\epsilon}} |\rho_\epsilon - v| dx = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_{\sqrt{\epsilon}}^{2\sqrt{\epsilon}} |t - 2\sqrt{\epsilon}| \int_{d^{-1}(t)} |g_2(x) - Z(x, 1/\sqrt{\epsilon})| d\mathcal{H}^{n-1} dt.$$

Como A é limitado, o mesmo vale $\{x \in \Omega : \sqrt{\epsilon} < d(x) < 2\sqrt{\epsilon}\}$. Pela Proposição 2.22 segue que $\mathcal{H}^{n-1}(d^{-1}(t)) \leq k$ para um certo $k < \infty$ e todo $\sqrt{\epsilon} < t < 2\sqrt{\epsilon}$. Pela Proposição 3.7, obtemos, $|g_2(x) - Z(x, 1/\sqrt{\epsilon})| < g_2(x)$. Assim,

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \int_{\sqrt{\epsilon} < d < 2\sqrt{\epsilon}} |\rho_\epsilon - v| dx &\leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} k \sup_{x \in \Omega} g_2(x) \int_{\sqrt{\epsilon}}^{2\sqrt{\epsilon}} |t - 2\sqrt{\epsilon}| dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} k \sup_{x \in \Omega} g_2(x) \left[-\frac{(2\sqrt{\epsilon} - t)^2}{2} \right] \Big|_{\sqrt{\epsilon}}^{2\sqrt{\epsilon}} \\ &= \frac{k}{2} \sup_{x \in \Omega} g_2(x) \epsilon^{\frac{1}{2}} = O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Analogamente

$$(3.14) \quad \int_{-2\sqrt{\epsilon} < d < \sqrt{\epsilon}} |\rho_\epsilon - v| dx \leq O(\epsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Assim, por (3.10), (3.10) e (3.10) temos que

$$(3.15) \quad \int_{\Omega} |\rho_\epsilon(x) - v(x)| dx = \int_{|d| < \sqrt{\epsilon}} |\rho_\epsilon(x) - v(x)| dx + O(\sqrt{\epsilon}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0$$

Para $\{x \in \Omega : 0 < d(x) < \sqrt{\epsilon}\}$, temos:

$$(3.16) \quad \int_{0 < d < \sqrt{\epsilon}} |\rho_\epsilon - v| dx = \int_{0 < d < \sqrt{\epsilon}} [g_1(x) - Z(x, d(x)/\epsilon)] dx$$

Logo, usando a Proposição 2.12 em (3.16), tomando $m = 1$, $f = d$, $g(x) = g_2(x) - Z(x, d(x)/\epsilon)$ e ainda $s = t/\epsilon$, temos:

$$(3.17) \quad \int_{0 < d < \sqrt{\epsilon}} |\rho_\epsilon - v| dx = \int_0^{1/\sqrt{\epsilon}} \int_{d=\epsilon s} |g_2(x) - Z(x, s)| d\mathcal{H}^{n-1} \epsilon ds \\ \leq \epsilon \sup_{\{t: 0 \leq t \leq \sqrt{\epsilon}\}} \mathcal{H}^{n-1}(d(x) = t) \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sup_{x \in \Omega} (g_2(x) - g_1(x)) = O(\sqrt{\epsilon}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0.$$

Analogamente

$$(3.18) \quad \int_{0 < d < \sqrt{\epsilon}} |\rho_\epsilon - v| dx = O(\sqrt{\epsilon}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0.$$

Logo, por (3.15), (3.17) e (3.18) temos que $\rho_\epsilon \xrightarrow{L^1(\Omega)} v$ $O(\sqrt{\epsilon})$ qdo $\epsilon \rightarrow 0$.

O próximo passo é mostrar que ρ_ϵ satisfaz (3.9).

$$(3.19) \quad \mathcal{E}_\epsilon(\rho_\epsilon) = \int_{\Omega} \left[\epsilon a(x) |\nabla \rho_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) \right] dx \\ = \int_{|d| > 2\sqrt{\epsilon}} \left[\epsilon a(x) |\nabla \rho_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) \right] dx \\ + \int_{|d| \leq 2\sqrt{\epsilon}} \left[\epsilon a(x) |\nabla \rho_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) \right] dx$$

Mas

$$(3.20) \quad \int_{|d| > 2\sqrt{\epsilon}} \left[\epsilon a(x) |\nabla \rho_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) \right] dx \\ = \int_{|d| > 2\sqrt{\epsilon}} \left[\epsilon a(x) |\nabla g_2(x)|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, g_2(x)) \right] dx \\ = \epsilon \int_{|d| > 2\sqrt{\epsilon}} a(x) |\nabla g_2(x)|^2 dx = O(\epsilon) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0.$$

Logo, por (3.19) e (3.20), temos

$$(3.21) \quad \mathcal{E}_\epsilon(\rho_\epsilon) = \int_{|d| \leq 2\sqrt{\epsilon}} \left[\epsilon a(x) |\nabla \rho_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) \right] dx + O(\epsilon) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0.$$

Em $\{x \in \Omega : \sqrt{\epsilon} < d(x) < 2\sqrt{\epsilon}\}$, temos:

$$\nabla \rho_\epsilon(x) = \left[\nabla g_2(x) - \nabla_x Z(x, \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) \right] \frac{d(x) - 2\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}} + \frac{\nabla d(x)}{\sqrt{\epsilon}} \left[g_2(x) - Z(x, \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) \right] + \nabla g_2(x)$$

Mas $\left| \frac{d(x) - 2\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}} \right| \leq 1$ e portanto $\left[\nabla g_2(x) - \nabla_x Z(x, \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) \right] \frac{d(x) - 2\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}}$ é limitado em ϵ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Como consequência imediata da Proposição 3.7 temos que $\frac{\nabla d(x)}{\sqrt{\epsilon}} \left[g_2(x) - Z(x, \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) \right]$

é limitado em ϵ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Ainda por hipótese $\nabla g_2(x)$ é limitado. Como consequência destas observações, temos

$$(3.22) \quad \int_{\sqrt{\epsilon} < d(x) < 2\sqrt{\epsilon}} \epsilon a(x) |\nabla \rho_\epsilon|^2 dx = O(\epsilon^{\frac{3}{2}}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0.$$

Logo,

$$(3.23) \quad \int_{\sqrt{\epsilon} < d(x) < 2\sqrt{\epsilon}} \left[\epsilon a(x) |\nabla \rho_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) \right] dx = \int_{\sqrt{\epsilon} < d(x) < 2\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) dx + O(\epsilon^{\frac{3}{2}}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0.$$

Usando a Proposição 2.12, fazendo $m = 1$, $f(x) = d(x)$ e

$$g(x) = \frac{1}{\epsilon} F \left(x, [g_2(x) - Z(x, 1/\sqrt{\epsilon})] \frac{(d(x) - 2\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}} + g_2(x) \right)$$

a primeira parcela de (3.23) fica

$$(3.24) \quad \int_{\sqrt{\epsilon} < d(x) < 2\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) dx = \int_{\sqrt{\epsilon}}^{2\sqrt{\epsilon}} \int_{d(x)=t} \frac{1}{\epsilon} F \left(x, [g_2(x) - Z(x, 1/\sqrt{\epsilon})] \frac{(d(x) - 2\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}} + g_2(x) \right) d\mathcal{H}^{n-1} dt.$$

Usando k_1 como na Proposição 3.7, definindo

$$k := k_1 \sup \{ \partial_2 F(x, s) : x \in \Omega \text{ e } g_2(x) \leq s \leq g_2(x) + k_1 e^{-a/\sqrt{\epsilon}} \}$$

e $\tilde{k} := k^{(n-1)} \sup_{\sqrt{\epsilon} \leq t \leq 2\sqrt{\epsilon}} \mathcal{H}^{n-1}(\{x : d(x) = t\})$, então (3.24) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \int_{\sqrt{\epsilon} < d(x) < 2\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) dx \\ & \leq \int_{\sqrt{\epsilon}}^{2\sqrt{\epsilon}} \int_{d(x)=t} \frac{1}{\epsilon} F \left(x, [k_1 e^{-a/\sqrt{\epsilon}}] 1 + g_2(x) \right) d\mathcal{H}^{n-1} dt \\ & \leq \int_{\sqrt{\epsilon}}^{2\sqrt{\epsilon}} \int_{d(x)=t} \frac{1}{\epsilon} \sup \{ \partial_2 F(x, s) : x \in \Omega \text{ e } g_2(x) \leq s \leq g_2(x) + k_1 e^{-a/\sqrt{\epsilon}} \} [k_1 e^{-a/\sqrt{\epsilon}}] d\mathcal{H}^{n-1} dt \\ & = \int_{\sqrt{\epsilon}}^{2\sqrt{\epsilon}} \int_{d(x)=t} \frac{1}{\epsilon} [k e^{-a/\sqrt{\epsilon}}] d\mathcal{H}^{n-1} dt = \sqrt{\epsilon} \epsilon^{-(n-1)} \tilde{k} e^{-(n-1)a/\sqrt{\epsilon}} \end{aligned}$$

(3.25)

$$= O(\epsilon^m) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0 \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Assim, por (3.25) e (3.23), segue que

$$(3.26) \quad \int_{\sqrt{\epsilon} < d(x) < 2\sqrt{\epsilon}} \left[\epsilon a(x) |\nabla \rho_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) \right] dx = O(\epsilon^{\frac{3}{2}}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0$$

Analogamente

$$(3.27) \quad \int_{-2\sqrt{\epsilon} < d(x) < -\sqrt{\epsilon}} \left[\epsilon a(x) |\nabla \rho_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) \right] dx = O(\epsilon^{\frac{3}{2}}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0.$$

Portanto, por (3.21), (3.26) e (3.27), segue que

$$(3.28) \quad \mathcal{E}_\epsilon(\rho_\epsilon) = \int_{|d| \leq \sqrt{\epsilon}} \left[\epsilon a(x) |\nabla \rho_\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) \right] dx + O(\epsilon) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0.$$

Vejamos agora o caso em que $|d(x)| < \sqrt{\epsilon}$, sendo neste caso $\rho_\epsilon(x) = Z(x, d(x)/\epsilon)$. Denotando $\partial_2 Z(x, t) := \frac{d}{dt} Z(x, t)$, temos por hipótese:

$$(3.29) \quad \partial_2 Z(x, t) = \frac{\sqrt{F(Z(x, t))}}{\sqrt{a(x)}} \text{ e portanto, } \sqrt{a} \partial_2 Z = \sqrt{F}.$$

Assim

$$\begin{aligned} & \int_{|d(x)| < \sqrt{\epsilon}} \left[\frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon(x)) + \epsilon a(x) |\nabla \rho_{\epsilon(x)}|^2 \right] dx \\ &= \int_{|d(x)| < \sqrt{\epsilon}} \left[\frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon(x)) + \epsilon a(x) \left| \nabla_x Z(x, d(x)/\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} \nabla d(x) \partial_2 Z(x, d(x)/\epsilon) \right|^2 \right] dx \\ &= \int_{|d(x)| < \sqrt{\epsilon}} \left[\frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon(x)) + \epsilon \left| \sqrt{a(x)} \nabla_x Z(x, d(x)/\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} \nabla d(x) \sqrt{F(x, \rho_\epsilon(x))} \right|^2 \right] dx \\ &= \int_{|d(x)| < \sqrt{\epsilon}} \left[\frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon(x)) + \epsilon a(x) |\nabla_x Z(x, d(x)/\epsilon)|^2 \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{2a(x)} \nabla_x Z(x, d(x)/\epsilon) \nabla d(x) \sqrt{F(x, \rho_\epsilon(x))} + \frac{1}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon(x)) \right] dx \\ (3.30) \quad &= \int_{|d| < \sqrt{\epsilon}} \left[\frac{2}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) + \epsilon a |\nabla_x Z|^2 + 2\sqrt{a} \nabla_x Z \nabla d \sqrt{F(x, \rho_\epsilon)} \right] dx. \end{aligned}$$

Mas $\epsilon a |\nabla_x Z|^2 + 2a \nabla_x Z \nabla d \sqrt{F(\rho_\epsilon)}$ é limitado em $\{x \in \Omega : |d(x)| < \sqrt{\epsilon}\}$ qdo $\epsilon \rightarrow 0$ e portanto

$$(3.31) \quad \int_{|d(x)| < \sqrt{\epsilon}} \left[\epsilon a |\nabla_x Z|^2 + 2\sqrt{a} \nabla_x Z \nabla d \sqrt{F(x, \rho_\epsilon)} \right] dx = O(\epsilon^{1/2}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0.$$

Logo, por (3.31) e (3.30), juntamente com (3.28), obtemos

$$(3.32) \quad \mathcal{E}_\epsilon(\rho_\epsilon) = \int_{|d| \leq \sqrt{\epsilon}} \frac{2}{\epsilon} F(x, \rho_\epsilon) dx + O(\sqrt{\epsilon}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0.$$

Por outro lado, pela Proposição 2.12 e tomando $s = \frac{t}{\epsilon}$, temos

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\epsilon} \int_{|d(x)| < \sqrt{\epsilon}} F(x, \rho_\epsilon(x)) |\nabla d(x)| dx \\
 &= \frac{2}{\epsilon} \int_{|t| < \sqrt{\epsilon}} \int_{d(x)=t} F(x, Z(x, t/\epsilon)) d\mathcal{H}^{n-1} dt \\
 (3.33) \quad &= 2 \int_{|\epsilon s| < \sqrt{\epsilon}} \int_{d(x)=\epsilon s} F(x, Z(x, s)) d\mathcal{H}^{n-1} ds.
 \end{aligned}$$

Sejam δ, ν, κ_i como na Definição 2.23. Deste que ϵ é tal que $2\sqrt{\epsilon} < \delta$ e tomando $t = d(x)$, fazendo $s = t/\epsilon$ e dado $x : d(x) < \sqrt{\epsilon}$ temos $x = x(y, s) = y + \epsilon s \nu(y)$ e portanto $y = x - \epsilon s \nu(y)$. Consequentemente, por (2.7) obtemos

$$J(y)|_{(x,s)} = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i).$$

Com estas notações, (3.33) se transforma em

$$(3.34) \quad 2 \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} F(x(y, s), Z(x(y, s), s)) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) d\mathcal{H}^{n-1} ds.$$

Pelo Lema 3.3, temos

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial s} \int_{g_1(x(y, s))}^{Z(x(y, s), s)} \sqrt{a(x(y, s))} \sqrt{F(x(y, s), t)} dt \\
 &= \int_{g_1(x(y, s))}^{Z(x(y, s), s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(\sqrt{a(x(y, s))} \sqrt{F(x(y, s), t)} \right) dt \\
 &+ \sqrt{a(x(y, s))} \sqrt{F(x(y, s), Z(x(y, s), s))} \frac{\partial}{\partial s} Z(x(y, s), s) \\
 &= \int_{g_1(x(y, s))}^{Z(x(y, s), s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(\sqrt{a(x(y, s))} \sqrt{F(x(y, s), t)} \right) dt \\
 &+ \sqrt{a(x(y, s))} \sqrt{F(x(y, s), Z(x(y, s), s))} \nabla_x Z(x(y, s), s) \epsilon \nu(y) \\
 (3.35) \quad &+ \sqrt{a(x(y, s))} \sqrt{F(x(y, s), Z(x(y, s), s))} \partial_2 Z(x(y, s), s).
 \end{aligned}$$

Por (3.6), $F(x(y, s), Z(x(y, s), s)) = \sqrt{a(x(y, s))} \sqrt{F(x(y, s), Z(x(y, s), s))} \partial_2 Z(x(y, s), s)$.

Logo, por (3.35), segue que

$$\begin{aligned}
 F(x(y, s), Z(x(y, s), s)) &= \frac{\partial}{\partial s} \int_{g_1(x(y, s))}^{Z(x(y, s), s)} \sqrt{a(x(y, s))} \sqrt{F(x(y, s), t)} dt \\
 &- \epsilon \sqrt{a(x(y, s))} \sqrt{F(x(y, s), Z(x(y, s), s))} \frac{\partial}{\partial \nu} Z(x(y, s), s) \\
 (3.36) \quad &- \int_{g_1(x(y, s))}^{Z(x(y, s), s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(\sqrt{a(x(y, s))} \sqrt{F(x(y, s), t)} \right) dt.
 \end{aligned}$$

Denominado respectivamente de I_1, I_2, I_3 as parcelas de (3.36), estimamos

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} F(Z(x(y, s), s)) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) d\mathcal{H}^{n-1} ds \\
&= 2 \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} I_1 \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) d\mathcal{H}^{n-1} ds \\
&+ 2 \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} I_2 \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) d\mathcal{H}^{n-1} ds \\
(3.37) \quad &+ 2 \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} I_3 \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) d\mathcal{H}^{n-1} ds.
\end{aligned}$$

Como $\sqrt{a(x(y, s))} \sqrt{F(x(y, s), Z(x(y, s), s))} \frac{\partial}{\partial \nu} Z(x(y, s), s)$ é limitado segue que

$$(3.38) \quad \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} I_2 \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) d\mathcal{H}^{n-1} = O(\sqrt{\epsilon}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} I_3 \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) d\mathcal{H}^{n-1} ds \\
&= \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) \int_{g_1(x(y, s))}^{Z(x(y, s), s)} \frac{\partial}{\partial s} \left(\sqrt{a(x(y, s))} \sqrt{F(x(y, s), t)} \right) dt d\mathcal{H}^{n-1} ds \\
&= \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) \int_{g_1(x(y, s))}^{Z(x(y, s), s)} \epsilon \nu(y) \nabla_x \left(\sqrt{a(x(y, s))} \sqrt{F(x(y, s), t)} \right) dt d\mathcal{H}^{n-1} ds \\
&= \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} \epsilon \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) \int_{g_1(x(y, s))}^{Z(x(y, s), s)} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sqrt{a(x)} \sqrt{F(x, t)} \right) \Big|_{x=x(y, s)} dt d\mathcal{H}^{n-1} ds \\
(3.39) \quad &= O(\sqrt{\epsilon}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0, \text{ pois } |\nabla_x \sqrt{aF}|_{L^\infty(\Omega \times (\inf_{x \in \Omega} g_1(x), \sup_{x \in \Omega} g_2(x)))} < \infty.
\end{aligned}$$

Assim, por (3.32), (3.33), (3.34), (3.37), (3.38) e (3.39) obtemos que

$$(3.40) \quad \mathcal{E}_\epsilon(\rho_\epsilon) = 2 \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} I_1 \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) d\mathcal{H}^{n-1} ds + O(\sqrt{\epsilon}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0.$$

E finalmente

$$\begin{aligned}
 & \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} I_1 \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) d\mathcal{H}^{n-1} ds \\
 &= \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) \frac{\partial}{\partial s} \int_{g_1(x(y,s))}^{Z(x(y,s),s)} \sqrt{a(x(y,s))} \sqrt{F(x(y,s),t)} dt d\mathcal{H}^{n-1} ds \\
 &= \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) \int_{g_1(x(y,s))}^{Z(x(y,s),s)} \sqrt{a(x(y,s))} \sqrt{F(x(y,s),t)} dt \right) \right] d\mathcal{H}^{n-1} ds \\
 & \quad - \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \int_{d(y)=0} \epsilon \left[\sum_{j=1}^{n-1} \left(-\lambda_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) \right) \int_{g_1(x(y,s))}^{Z(x(y,s),s)} \sqrt{a(x(y,s))} \sqrt{F(x(y,s),t)} dt \right] d\mathcal{H}^{n-1} ds
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

Denominando de I_I e I_{II} respectivamente as parcelas de (3.41), temos

$$|I_{II}| = O(\sqrt{\epsilon}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0,
 \tag{3.42}$$

pois

$$\left[\sum_{j=1}^{n-1} \left(-\lambda_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) \right) \int_{g_1(x(y,s))}^{Z(x(y,s),s)} \sqrt{a(x(y,s))} \sqrt{F(x(y,s),t)} dt \right]$$

é limitado quando $\epsilon \rightarrow 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 I_I &= \int_{|s| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \frac{\partial}{\partial s} \int_{d(y)=0} \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) \int_{g_1(x(y,s))}^{Z(x(y,s),s)} \sqrt{a(x(y,s))} \sqrt{F(x(y,s),t)} dt \right) \right] d\mathcal{H}^{n-1} ds \\
 &= \int_{d(y)=0} \left[\prod_{i=1}^{n-1} (1 - \epsilon s \kappa_i) \int_{g_1(x(y,s))}^{Z(x(y,s),s)} \sqrt{a(x(y,s))} \sqrt{F(x(y,s),t)} dt \right] d\mathcal{H}^{n-1} \Big|_{s=-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}}^{s=\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \\
 &= \int_{d(y)=0} \left[\prod_{i=1}^{n-1} (1 - \sqrt{\epsilon} \kappa_i) \int_{g_1(x(y, \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}))}^{Z(x(y, \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}), \frac{1}{\sqrt{\epsilon}})} \sqrt{a(x(y, 1/\sqrt{\epsilon}))} \sqrt{F(x(y, 1/\sqrt{\epsilon}), t)} dt \right] d\mathcal{H}^{n-1} \\
 & \quad - \int_{d(y)=0} \left[\prod_{i=1}^{n-1} (1 + \sqrt{\epsilon} \kappa_i) \int_{g_1(x(y, -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}))}^{Z(x(y, -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}), -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})} \sqrt{a(x(y, -1/\sqrt{\epsilon}))} \sqrt{F(x(y, -1/\sqrt{\epsilon}), t)} dt \right] d\mathcal{H}^{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{3.43}$$

Logo, por (3.40), (3.41), (3.42), (3.43) temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\epsilon(\rho_\epsilon) &= 2 \int_{d(y)=0} \left[\prod_{i=1}^{n-1} (1 - \sqrt{\epsilon} \kappa_i) \int_{g_1(x(y, \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}))}^{Z(x(y, \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}), \frac{1}{\sqrt{\epsilon}})} \sqrt{a(x(y, 1/\sqrt{\epsilon}))} \sqrt{F(x(y, 1/\sqrt{\epsilon}), t)} dt \right] d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\quad - 2 \int_{d(y)=0} \left[\prod_{i=1}^{n-1} (1 + \sqrt{\epsilon} \kappa_i) \int_{g_1(x(y, -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}))}^{Z(x(y, -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}), -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})} \sqrt{a(x(y, -1/\sqrt{\epsilon}))} \sqrt{F(x(y, -1/\sqrt{\epsilon}), t)} dt \right] d\mathcal{H}^{n-1} \\
(3.44) \quad &+ O(\sqrt{\epsilon}) \text{ qdo } \epsilon \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Mas

$$(3.45) \quad \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \sqrt{\epsilon} \kappa_i) &= 1 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \sqrt{\epsilon} \kappa_i) &= 1 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(y, \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) &= y \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z(x(y, \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}), \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) &= g_2(y) \text{ (pela Proposição 3.7)} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z(x(y, -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}), -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) &= g_1(y) \text{ (pela Proposição 3.7)} \end{cases} .$$

Agora por (3.44) e (3.45), juntamente com Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(\rho_\epsilon) &= \int_{d(y)=0} \left[2 \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \sqrt{a(y)F(y, t)} dt \right] d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \int_{d(y)=0} h(y) d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial A} h(y) d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\Omega} h(y) |D\chi_A| = \int_{\Omega} h(y) |D\chi_{\{v=g_2\}}| \\
(3.46) \quad &= \mathcal{E}_0(v).
\end{aligned}$$

Por outro lado, se ∂A não for C^2 -suave, mas A é de perímetro finito, as hipóteses do Lema 2.26 estão satisfeitas para A acima e assim existe uma sequência de abertos A_j como na tese do Lema 2.26. Pelo ítem (ii) do mesmo, segue que dado $m \in \mathbb{N}$, existe $j_1(m)$ tal que $|\chi_{A_j} - \chi_A|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{2m}$ para todo $j \geq j_1(m)$. Agora pelo ítem (iii) e como $\|h\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, temos que dado $m \in \mathbb{N}$, existe $j_2(m)$ tal que $|\mathcal{E}_0(\chi_{A_j}) - \mathcal{E}_0(\chi_A)| < \frac{1}{2m}$ para todo $j \geq j_2(m)$. Seja $j(m) = \max\{j_1(m), j_2(m)\}$. Pelo ítem (i), os cálculos aqui apresentados para obter (3.46) valem para cada A_j . Seja $\rho_{\epsilon, j} \rightarrow \chi_{A_j}$ em $L^1(\Omega)$ aquela sequência procurada para cada A_j . Assim, dado $m \in \mathbb{N}$ existe $\epsilon_1(m)$ tal que $|\rho_{\epsilon, j(m)} - \chi_{A_{j(m)}}| < \frac{1}{2m}$ para $\epsilon \leq \epsilon_1(m)$. Pelo mesmo motivo, dado $m \in \mathbb{N}$ existe $\epsilon_2(m)$ tal que $|\mathcal{E}_\epsilon(\rho_{\epsilon, j(m)}) - \mathcal{E}_0(\chi_{A_{j(m)}})| < \frac{1}{2m}$ para todo $\epsilon \leq \epsilon_2(m)$. Seja $\epsilon(m) = \min\{\epsilon_1(m), \epsilon_2(m)\}$. Tome $v_m = \rho_{\epsilon(m), j(m)}$. Afirmanos que $v_m \xrightarrow{L^1(\Omega)} \chi_A$ e $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ satisfaz (3.9). De fato,

$$\begin{aligned}
|v_m - \chi_A|_{L^1(\Omega)} &= |\rho_{\epsilon(m), j(m)} - \chi_A|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq |\rho_{\epsilon(m), j(m)} - \chi_{A_{j(m)}}|_{L^1(\Omega)} + |\chi_{A_{j(m)}} - \chi_A|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{m}, \text{ e} \\
|\mathcal{E}_{\epsilon(m)}(v_m) - \mathcal{E}_0(\chi_A)| &= |\mathcal{E}_{\epsilon(m)}(\rho_{\epsilon(m), j(m)}) - \mathcal{E}_0(\chi_A)|
\end{aligned}$$

$$(3.47) \quad \leq \left| \mathcal{E}_{\epsilon(m)}(\rho_{\epsilon(m),j(m)}) - \mathcal{E}_0(\chi_{A_{j(m)}}) \right| + \left| \mathcal{E}_0(\chi_{A_{j(m)}}) - \mathcal{E}_0(\chi_A) \right| < \frac{1}{m}.$$

A cadeia de desigualdades (3.47) demonstra a afirmação acima e, portanto, segue a tese do Teorema 3.1 para o caso em que A é limitado. Isto conclui a demonstração do Teorema 3.1

Capítulo 4

Uma desigualdade isoperimétrica

Como descrito no Capítulo 1, a argumentação de que uma certa $u_0 \in BV(\Omega; \{\alpha, \beta\})$ é o mínimo isolado de \mathcal{E}_0 para o caso 3-dimensional não é possível via generalização das versões 2-dimensionais encontrados em [5] e [12]. Esta impossibilidade nos levou a desenvolver uma demonstração que faz uso de uma versão (tipo) de desigualdade isoperimétrica dada pelo Teorema 4.1 a seguir. A demonstração deste último é o principal objetivo deste capítulo.

Lembramos que as aplicações de existência de mínimos isolados dos funcionais Γ -limite nesta tese ocorrem na existência de soluções estacionárias estáveis do problema parabólico (1.1) e também na existência de mínimos para os funcionais com vínculo em cilindros. Estes últimos respondem de forma bem mais geral algumas problemas de minimizar funcionais em retângulos propostos por [12].

Teorema 4.1 *Sejam $r > 0$, $\Omega = M \times (-\delta, \delta)$ com $\delta > 0$ dado, $M \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto conexo, não necessariamente aberto, mas Lipschitz, limitado, cuja fronteira é C^1 a menos de uma quantidade finita de pontos se $n = 3$ ou $M \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado se $n = 2$. Então existe $\rho' > 0$ tal que:*

(4.1-i) *dado $A^+ \subset M \times (\frac{\delta}{2}, \delta)$ com $\mathcal{H}^n(A^+) < \rho'$ e $Per_\Omega(A^+) < \infty$, então existe $l \in (\frac{\delta}{2}, \delta)$ de tal modo que $\mathcal{H}^{n-1}((M \times \{l\}) \cap A^+) \leq \frac{1}{r} Per_{M \times (l, \delta)}(A^+)$ e $\mathcal{H}^{n-1}((M \times \{l\}) \cap A^+) \leq \frac{1}{4} \mathcal{H}^{n-1}(M)$;*

(4.1-ii) *dado $A^- \subset M \times (-\delta, -\frac{\delta}{2})$ com $\mathcal{H}^n(A^-) < \rho'$ e $Per_\Omega(A^-) < \infty$, então existe $l' \in (-\delta, -\frac{\delta}{2})$ de tal modo que $\mathcal{H}^{n-1}((M \times \{l'\}) \cap A^-) \leq \frac{1}{r} Per_{M \times (-\delta, l')}(A^-)$ e $\mathcal{H}^{n-1}((M \times \{l'\}) \cap A^-) \leq \frac{1}{4} \mathcal{H}^{n-1}(M)$.*

A constante $r > 0$ bem como a última desigualdade de (4.1.i) e (4.1.ii) foram inseridas por razões técnicas que surgirão nas aplicações deste resultado. Nas aplicações, M será a hipersuperfície que separa os dois valores de $u_0 \in BV(\Omega; \{\alpha, \beta\})$ onde u_0 será o candidato a mínimo isolado do funcional E_0 . A constante $\delta > 0$ será tomado como

em (2.4). Dada $u \in BV(\Omega; \{\alpha, \beta\})$, A^+ e A^- serão tomados como sendo os conjuntos onde $u = \alpha$ se $u_0 = \beta$, e $u = \beta$ se $u_0 = \alpha$ respectivamente. $\rho' > 0$ será, a menos fator multiplicativo, o raio da L^1 -vizinhança de u_0 . Também por razões técnicas nas aplicações, este resultado é apresentado para os conjuntos $M \times (\frac{\delta}{2}, \delta)$ e $M \times (-\delta, -\frac{\delta}{2})$.

O Teorema 4.1 será obtido nas versões $n = 2$ e $n = 3$. Para obtermos este teorema em versões $n > 3$ somente é preciso obter o Lema 4.3 também nas versões $n > 3$, pois nos demais resultados usados para obter o Teorema 4.1, apesar de apresentados nas versões $n = 2, 3$, valem também para $n \geq 4$ com as mesmas demonstrações. Ao final da demonstração do Lema 4.3 comentaremos a barreira encontrada para esta generalização na dimensão.

Apesar de que os resultados aqui apresentados serem válidos para $n = 2$, eles realmente se justificam para $n = 3$, pois para $n = 2$ a argumentação de que tal u_0 é mínimo isolado do funcional \mathcal{E}_0 é feita pelo Teorema 2.3 de [5]. Contudo, adotamos a fazer valer a mesma demonstração para as duas dimensões. Por outro lado, a demonstração do Teorema 4.1 na versão 2-dimensional também ficaria bem mais simples.

4.1 Resultados técnicos

Os resultados técnicos desta seção serão usados para demonstrar o Teorema 4.1.

O primeiro resultado, apesar de muito simples, não foi encontramos referência para o mesmo.

Lema 4.2 *Sejam $L \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ um conjunto compacto e $N \subset L$ finito de pontos; $f : (L \times L) \setminus \{(P, P) : P \in N\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ contínua tal que $\liminf_{(x,y) \rightarrow (P,P)} f(x, y) = c_P > 0$ para todo $P \in N$. Então existe $c > 0$ tal que $f \geq c$.*

Demonstração: Pela definição de \liminf , para cada $P \in N$ existe uma vizinhança U_P de P tal que $f(x, y) \geq \frac{c_P}{2}$ para todo $(x, y) \in (L \times L) \cap U_P$. Por outro lado, $(L \times L) \setminus \bigcup_{P \in N} U_P$ é compacto e portanto existe $(x_0, y_0) \in (L \times L) \setminus \bigcup_{P \in N} U_P$ tal que $0 < f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in (L \times L) \setminus \bigcup_{P \in N} U_P$, onde a primeira desigualdade está na hipótese do lema. Assim, para concluir a tese deste lema, basta tomar $c = \min\{f(x_0, y_0), \frac{c_P}{2} : P \in N\}$. ■

No enunciado do Teorema 4.1 aparecem desigualdades envolvendo a Definição 2.4 de perímetro de conjuntos em abertos. Por outro lado (2.1) compara este perímetro com a medida de Hausdorff $(n - 1)$ -dimensional da fronteira de medida teórica do conjunto no aberto. O que queremos no próximo lema é comparar inferiormente o perímetro do conjunto no aberto com seu perímetro em \mathbb{R}^n . Na prática, esta comparação será feita em uma dimensão a menos que no enunciado do Teorema 4.1 ou seja em $M \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e a demonstração deste último será obtido via integração em s nas secções paralelas de M

dadas por $M \times \{s\}$. Como comentado acima, o próximo lema será restrito às dimensões 2 e 3.

Lema 4.3 *Sejam M como no Teorema 4.1. Então existe $\theta > 0$ tal que para todo conjunto Caccioppoli $E \subset M$ satisfazendo $0 < \mathcal{H}^{n-1}(E) < \frac{1}{2}\mathcal{H}^{n-1}(M)$, verifica-se*

$$(4.1) \quad 0 < \theta \leq \frac{Per_M(E)}{Per(E)}.$$

Na demonstração a seguir, abreviaremos componente conexa (ou componentes conexas) por c.c..

Demonstração: A fim de dar uma intuição geométrica da corrente prova, ressaltamos que por (2.1), (4.1) significa

$$0 < \theta \leq \frac{\mathcal{H}^{n-2}(\partial_* E \setminus \partial_* M)}{\mathcal{H}^{n-2}(\partial_* E)}.$$

Obtendo $\theta > 0$ satisfazendo (4.1) para qualquer cada de E , (4.1) valerá também para E . Assim é suficiente obter $\theta > 0$ que satisfaça (4.1) para o caso em que E é conexo. Se $n = 2$, então $\mathcal{H}^{n-2}(\cdot)$ é simplesmente a medida de contagem e como neste caso temos $\mathcal{H}^0(\partial_* E) = 2$ e $\mathcal{H}^0(\partial_* E \setminus \partial_* M) \geq 1$, portanto $\theta = \frac{1}{2r}$ serve, concluindo desta forma a demonstração para $n = 2$.

No que segue nesta demonstração, $n = 3$. Seja N_M o conjunto dos pontos onde $\partial_* M$ não é C^1 . Tal conjunto pode ser vazio e, neste caso, se ignora o mesmo, mas por hipótese ele é finito. Seja $\gamma : (\partial_* M \times \partial_* M) \setminus \{(P', P') : P' \in N_M\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$\gamma(P, Q) = \begin{cases} \min\{\mathcal{H}^1(C_i(P, Q)) : C_i(P, Q) \text{ é c.c. de } \partial_* M \setminus \{P, Q\}\} & \text{se } P \neq Q, \\ 0, & \text{se } P = Q, \end{cases}$$

Observamos que $\partial_* M \setminus \{P, Q\}$ tem exatamente duas c.c. quando $P \neq Q$. Assim γ está bem definida e é contínua por definição. E a partir de γ definimos $\sigma : (\partial_* M \times \partial_* M) \setminus \{(P', P') : P' \in N_M\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$\sigma(P, Q) = \begin{cases} \frac{|P-Q|}{\gamma(P, Q) + |P-Q|} & \text{se } P \neq Q, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } P = Q, \end{cases}$$

Como consequência da definição de conjunto de Lipschitz dada na Definição 2.11

$$(4.2) \quad \lim_{(P, Q) \rightarrow (P', P')} \inf \sigma(P, Q) > 0 \text{ para todo } P' \in N_M.$$

Mas $\partial_* M$ é compacto e além disso, σ é contínua. Portanto, σ está nas hipóteses do Lema 4.2 e conseqüentemente existe $m_\sigma > 0$ tal que

$$(4.3) \quad \sigma \geq m_\sigma > 0 \text{ em } (\partial_* M \times \partial_* M) \setminus \{(P', P') : P' \in N_M\}$$

Com $c_1 := c_1(2)$ a constante isoperimétrica dada pelo Lema 2.14 e m_σ como em (4.3) definimos

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ m_\sigma, \frac{m_\sigma \sqrt{2} \mathcal{H}^2(M)^{1/2}}{m_\sigma \sqrt{2} \mathcal{H}^2(M)^{1/2} + 2c_1 \text{Per}(M)} \right\}.$$

Assim $1 > \theta > 0$ e afirmamos que θ satisfaz (4.1) para todo $E \subset M$ nas hipóteses acima. De fato, dado $E \subset M$ nestas hipóteses, então ocorre um dos três casos a seguir:

(i): $\mathcal{H}^1(\partial_* E \cap \partial_* M) = 0$. Neste caso, $\text{Per}_M(E) = \text{Per}(E)$ e conseqüentemente $\frac{\text{Per}_M(E)}{\text{Per}(E)} = 1 > \theta$.

(ii): $0 < \mathcal{H}^1(\partial_* E \cap \partial_* M) < \text{Per}(M)$. Neste caso dizemos que P e Q , com $P \neq Q$ e $P, Q \in \partial_* E \cap \partial_* M$ são pontos extremos de $\partial_* E \cap \partial_* M$ se $\partial_* E \cap \partial_* M \setminus \{P, Q\}$ está contido uma das duas c.c. de $\partial_* M \setminus \{P, Q\}$.

(ii-a) Existe um par de pontos P e Q , extremos de $\partial_* E \cap \partial_* M$ tal que $(\partial_* E) \cap (\partial_* M)$ está contido na menor c.c. de $\partial_* M \setminus \{P, Q\}$. Neste caso, usando o fato que $|P - Q| \leq \text{Per}_M(E)$ e se a, b e c são números estritamente positivos com $a \leq b$, então $\frac{a}{c+a} \leq \frac{b}{b+c}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Per}_M(E)}{\text{Per}(E)} &= \frac{\text{Per}_M(E)}{\text{Per}_M(E) + \mathcal{H}^1(\partial_* E \cap \partial_* M)} \geq \frac{\text{Per}_M(E)}{\text{Per}_M(E) + \gamma(P, Q)} \\ &\geq \frac{|P - Q|}{|P - Q| + \gamma(P, Q)} = \sigma(P, Q) \geq m_\sigma \geq \theta. \end{aligned}$$

Observemos que até agora não foi usado o fato que $\mathcal{H}^2(E) < \frac{1}{2} \mathcal{H}^2(M)$ e isto será usado nos argumentos a seguir.

(ii-b) Para todo par de pontos P e Q , extremos de $\partial_* E \cap \partial_* M$, $(\partial_* E) \cap (\partial_* M)$ está contido na maior c.c. de $\partial_* M \setminus \{P, Q\}$. Neste caso, cada c.c. de $M \setminus E$ se enquadra no caso ((ii);a) e portanto $\frac{\text{Per}_M(M \setminus E)}{\text{Per}(M \setminus E)} \geq m_\sigma$. Agora sim vamos usar a hipótese observada acima, obtendo $\mathcal{H}^2(M \setminus E) > \frac{1}{2} \mathcal{H}^2(M)$. Assim usando a Desigualdade isoperimétrica dada pelo Lema 2.14 temos:

$$\text{Per}_M(E) = \text{Per}_M(M \setminus E) \geq m_\sigma \text{Per}(M \setminus E) \geq m_\sigma \frac{1}{c_1} \mathcal{H}^2(M \setminus E)^{1/2} > m_\sigma \frac{1}{c_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{H}^2(M)^{1/2}.$$

Portanto, neste caso,

$$\begin{aligned} \frac{\text{Per}_M(E)}{\text{Per}(E)} &\geq \frac{\text{Per}_M(E)}{\text{Per}_M(E) + \text{Per}(M)} > \frac{m_\sigma \frac{1}{c_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{H}^2(M)^{1/2}}{m_\sigma \frac{1}{c_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{H}^2(M)^{1/2} + \text{Per}(M)} \\ &= \frac{m_\sigma \sqrt{2} \mathcal{H}^2(M)^{1/2}}{m_\sigma \sqrt{2} \mathcal{H}^2(M)^{1/2} + 2c_1 \text{Per}(M)} \geq \theta. \end{aligned}$$

(iii): $\mathcal{H}^1(\partial_* E \cap \partial_* M) = \text{Per}(M)$. Neste caso, cada c.c. de $M \setminus E$ se enquadra no caso (i) e como $m_\sigma < 1$ o mesmo argumento feito em ((ii);b) se aplica aqui, concluindo assim a demonstração para $n = 3$. ■

Em busca de generalizar o Lema 4.3 para dimensões $n > 3$, um caminho natural seria fazer as mesmas generalizações para cada argumento na demonstração. De fato isto é possível, com a ressalva de que cada par de pontos P, Q usados acima termos uma subvariedade $(n - 3)$ -dimensional em $\partial_* M$ compacta e sem bordo. Por exemplo, para $n = 4$ teríamos curvas fechadas. O domínio da função equivalente a σ na demonstração acima, seria o conjunto destas subvariedades $(n - 3)$ -dimensionais em $\partial_* M$ compactas e sem bordo. É então que surge o problema: como obter um limitante inferior $m_\sigma > 0$ para σ , pois o argumento de compacidade usado na demonstração acima não funciona. Mas é um caminho a ser estudado. Outro argumento seria usar o caso $(n - 1)$ -dimensional para obter o caso n -dimensional via integração sobre as secções transversais. É verdade que para cada secção transversal, o Lema 4.3 se aplica e neste caso a seção transversal seria M onde o resultado estaria provado para o caso $(n - 1)$ -dimensional. Mas o problema é que em cada seção transversal M obtemos $\theta_M > 0$ sem a garantia que $\liminf_M \{\theta_M\} > 0$.

Poderia se questionar se o Lema 4.3 não tem excesso de hipóteses em M , para responder esta questão, vejamos os exemplos 4.4, 4.5 e 4.6.

A condição do conjunto M ser de Lipschitz é necessária, como ilustrado no Exemplo 4.4.

Exemplo 4.4 *Seja $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 > 1; (x-1)^2 + y^2 > 1 \text{ e } x^2 + (y-1)^2 < 1\}$, é fácil de ver que M não é Lipschitz em $(0, 0)$. Seja $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 > 1; (x-1)^2 + y^2 > 1 \text{ e } 0 < y < \frac{1}{n}\}$. Então*

$$\begin{aligned} Per_M(E_n) &= \mathcal{H}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 > 1; (x-1)^2 + y^2 > 1 \text{ e } y = \frac{1}{n}\}) \text{ (por (2.1))} \\ (4.4) \quad &= 2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right), \end{aligned}$$

onde esta ultima igualdade é consequência da Proposição 2.6 e das propriedades elementares de trigonometria. Pelos mesmos argumentos usados em (4.4) é fácil verificar que

$$(4.5) \quad Per(E_n) > \frac{2}{n}.$$

Usando algumas propriedades elementares de limites reais em especial a Regra de L'Hospital, concluímos que

$$(4.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)}{\frac{2}{n}} = 0$$

Agora por (4.5)

$$(4.7) \quad \frac{Per_M(E_n)}{Per(E_n)} < \frac{Per_M(E_n)}{\frac{2}{n}}.$$

Desta forma, por (4.7) e (4.6) temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Per_M(E_n)}{Per(E_n)} = 0$$

provando que não existe $\theta > 0$ satisfazendo (4.1). Portanto a hipótese de o conjunto M ser Lipschitz é de fato necessária.

A hipótese de que $\mathcal{H}^{n-1}(E) < \frac{1}{2}\mathcal{H}^{n-1}(M)$ poderia ser substituída por $\mathcal{H}^{n-1}(E) < m\mathcal{H}^{n-1}(M)$ com $0 < m < 1$ obtendo possivelmente valores diferentes para θ , mas não poderia ser excluída. Veja o Exemplo 4.5.

Exemplo 4.5 *Sejam $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < y < 1\}$ e $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < y < 1 \text{ com } \frac{1}{n} < |x|\}$ De forma similar ao Exemplo 4.4, pode se ver que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Per_M(E_n)}{Per(E_n)} = 0$$

provando que não existe $\theta > 0$ satisfazendo (4.1), provando a necessidade da hipótese $\mathcal{H}^{n-1}(E) < \frac{1}{2}\mathcal{H}^{n-1}(M)$.

Também é necessário que o conjunto M seja limitado, como mostra o Exemplo 4.6.

Exemplo 4.6 *Sejam $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x, 0 < y < \frac{1}{x^2}\}$ e $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : n < x, 0 < y < \frac{1}{x^2}\}$. Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{Per_M(E_n)}{Per(E_n)} = 0.$$

A conexidade do conjunto M é uma hipótese meramente simplificadora, pois poderia se fazer o mesmo raciocínio em cada componente conexa e tomar o menor dos $\theta > 0$, desde é claro, que a quantidade de componentes fosse finita.

O próximo resultado é um exercício simples de EDO, e sua aplicação se dará especificadamente no Lema 4.8.

Lema 4.7 *Sejam $r > 0$, $\Omega = M \times (-\delta, \delta)$ como no Teorema 4.1, $c_1 := c_1(n-1)$ a constante isoperimétrica dada pelo Lema 2.14 e $\theta > 0$ dado pelo Lema 4.3. Então existe $\xi \in (\frac{\delta}{2}, \delta)$ e função real contínua; $\eta : [\frac{\delta_0}{2}, \xi] \rightarrow [0, \infty)$, satisfazendo*

$$(4.8) \quad \begin{cases} \eta(t) = \frac{\theta}{c_1 r} \int_t^\xi \eta(s)^{\frac{n-2}{n-1}} ds \\ \eta(\xi) = 0 \\ \eta(\frac{\delta}{2}) \leq \frac{1}{4} \mathcal{H}^{n-1}(M) \\ \eta > 0 \text{ em } [\frac{\delta_0}{2}, \xi]. \end{cases}$$

Demonstração: Notemos que $\eta(t) = \left(\frac{\theta}{(n-1)c_1 r}\right)^{n-1} (\xi - t)^{n-1}$ ($n = 2, 3$) é solução de (4.8) onde $\xi \in (\frac{\delta}{2}, \delta)$ deve ser tomado suficientemente próximo de $\frac{\delta}{2}$ para que a condição $\eta(\frac{\delta}{2}) \leq \frac{1}{4}\mathcal{H}^{n-1}(M)$ seja satisfeita. ■

O enunciado do Lema 4.7 foi restringido ao seu uso no Lema 4.8, mas, caso necessário, as constantes $\frac{\theta}{c_1 r}$ bem como $\frac{1}{4}\mathcal{H}^{n-1}(M)$ poderiam ser substituídas por quaisquer outras constantes positivas. O enunciado do Lema 4.7 foi restringido para $n = 2, n = 3$, mas vale pelo mesmo argumento para todo $n \geq 2$ natural.

O Lema 4.8 juntamente com o Lema 4.3 nos dão respectivamente duas desigualdades essenciais para a demonstração do Teorema 4.1.

Lema 4.8 *Sejam $r > 0$, $\Omega = M \times (-\delta, \delta)$ como no Teorema 4.1, $c_1 := c_1(n-1)$ a constante isoperimétrica dada pelo Lema 2.14 e $\theta > 0$ dado pelo Lema 4.3. Então existe $\rho' > 0$ tal que para toda função \mathcal{L} -mensurável $\psi : [\frac{\delta}{2}, \delta] \rightarrow (0, \mathcal{H}^{n-1}(M)]$ satisfazendo $\int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \psi(s) d\mathcal{H}^1 < \rho'$, existe $l \in (\frac{\delta}{2}, \delta) \setminus I$, onde $I = \{t \in [\frac{\delta}{2}, \delta] : \psi(t) \geq \frac{1}{4}\mathcal{H}^{n-1}(M)\}$, tal que*

$$(4.9) \quad \psi(l) < \frac{\theta}{c_1 r} \int_{[l, \delta] \setminus I} \psi(s)^{\frac{n-2}{n-1}} ds.$$

A função ψ do enunciado Lema 4.8 em sua aplicação na demonstração do Teorema 4.1 aparece como $\psi(s) = \mathcal{H}^{(n-1)}(A^+ \cap (M \times \{s\}))$. Desta forma ψ não é necessariamente contínua. Com esta função ψ em (4.9), a constante c_1 bem como o expoente $\frac{n-2}{n-1}$ aparecem para usar a desigualdade isoperimétrica dada pelo Lema 2.14 na demonstração do Teorema 4.1. Também em (4.9), θ aparece para usar o Lema 4.3 na demonstração do Teorema 4.1 e este também é um dos motivos que o conjunto I , introduzido no enunciado do Lema 4.8, se fez necessário, pois no Lema 4.3, para obter a condição (4.1) foi usado o fato que $\mathcal{H}^{n-1}(E) < \frac{1}{2}\mathcal{H}^{n-1}(M)$. Adiantando, $\rho' > 0$ apresentado no Teorema 4.1 será tomado como ρ' a ser obtido no Lema 4.8. Basicamente a demonstração do Lema 4.8 se faz comparando ψ com η dada pelo Lema 4.7, observando que se $\psi = \eta$, para qualquer $l \in (\frac{\delta}{2}, \delta)$ teríamos igualdade em (4.9). Mas como ψ não é necessariamente contínua, alguns cuidados adicionais se fizeram necessários.

Demonstração: Sejam η e ξ como no Lema 4.7 e definimos

$$(4.10) \quad \rho' = \min\left\{\int_{\delta/2}^{\xi} \eta(t) dt, \frac{(\delta - \xi)}{4} \mathcal{H}^{n-1}(M)\right\},$$

onde $n = 2, 3$. Dada ψ e I assim como nas hipóteses deste Lema, definimos

$$\mathcal{O} = \left\{t \in \left[\frac{\delta}{2}, \delta\right] \setminus I : \exists s \in \left[\frac{\delta}{2}, t\right] \setminus I \text{ com } \mathcal{L}([0, s] \setminus I) = \mathcal{L}([0, t] \setminus I)\right\}$$

$\tilde{I} = I \cup \mathcal{O}$, $\vartheta = \mathcal{L}([0, \delta] \setminus I)$ e $\zeta : [\frac{\delta}{2}, \delta] \setminus \tilde{I} \rightarrow [\frac{\delta}{2}, \vartheta]$ dada por

$$\zeta(t) = \mathcal{L}([0, t] \setminus \tilde{I}).$$

Notemos que $\mathcal{L}(\mathcal{O}) = 0$ e que \mathcal{O} foi introduzido para tornar ζ injetiva. Segue que ζ é uma função mensurável e bijetora. Assim podemos definir uma função \mathcal{L} -mensurável $g : [\frac{\delta}{2}, \vartheta] \rightarrow (0, \frac{1}{4}\mathcal{H}^{n-1}(M))$ dada por

$$g = \psi \circ \zeta^{-1}$$

que, com as hipóteses sobre ψ , satisfaz

$$(4.11) \quad \int_{\delta/2}^{\vartheta} g(s) ds < \int_{\delta/2}^{\xi} \eta(t) dt.$$

Afirmção: $\exists l_0 \in (\frac{\delta}{2}, \vartheta)$ tal que $g(l_0) < \frac{\theta}{c_1 r} \int_{l_0}^{\vartheta} g(s)^{\frac{n-2}{n-1}} ds$.

Inicialmente provemos que $\vartheta > \xi$; para isto, pela definição de ϑ é suficiente provar que $\mathcal{L}(I) < \delta - \xi$. Argumentando por contradição, temos:

$$\begin{aligned} \rho' &\leq \frac{(\delta - \xi)}{4} \mathcal{H}^{n-1}(M) \text{ (pela definição de } \rho') \\ &\leq \frac{1}{4} \mathcal{H}^{n-1}(M) \mathcal{L}(I) \text{ (hipótese de contradição)} \\ &< \int_I \psi(s) ds \text{ (da definição de } I) \\ &< \int_{\delta/2}^{\delta} \psi(s) ds \text{ (pois } I \subset [\frac{\delta}{2}, \delta] \text{)} \\ &\leq \rho' \text{ (da definição de } \rho') \end{aligned}$$

Segue que $\vartheta > \xi$ e com isso podemos definir o conjunto

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ s \in [\frac{\delta}{2}, \xi) : g \text{ é aproximadamente contínua em } s \text{ and } g(s) \leq \eta(s) \right\}.$$

Note que g é aproximadamente contínua q.t.p. em $[\frac{\delta}{2}, \xi]$ (cf. [7], p.47). Também $\Delta \neq \emptyset$, pois do contrário, $\bar{\xi} = \delta/2$ e então pela definição de Δ teremos $g > \eta$ q.t.p. em $[\delta/2, \xi)$ e portanto $\int_{\delta/2}^{\vartheta} g > \int_{\delta/2}^{\xi} g > \int_{\delta/2}^{\xi} \eta$, contradizendo (4.9). Portanto $\delta/2 < \bar{\xi}$ e consequentemente $\Delta \neq \emptyset$.

Há dois casos a serem analisados:

i) $\sup \Delta = \xi$.

Neste caso $\inf \{g(s) : s \in [\frac{\delta}{2}, \xi] : g \text{ aprox. contínua em } s\} = 0$. Por outro lado como $g^{\frac{n-2}{n-1}} > 0$ temos $\int_{\xi}^{\vartheta} g^{\frac{n-2}{n-1}} ds > 0$ e isto implica na existência de $l_0 \in [\frac{\delta}{2}, \xi]$ tal que g é aprox. contínua em l_0 e

$$g(l_0) \leq \frac{\theta}{c_1 r} \int_{\xi}^{\vartheta} g(s)^{\frac{n-2}{n-1}} ds \leq \frac{\theta}{c_1 r} \int_{l_0}^{\vartheta} g(s)^{\frac{n-2}{n-1}} ds.$$

ii) $\sup \Delta = \bar{\xi} \neq \xi$.

Neste caso como $\bar{\xi} < \xi$, segue da definição de Δ que $\int_{\bar{\xi}}^{\xi} g(t)^{\frac{n-2}{n-1}} dt > \int_{\bar{\xi}}^{\xi} \eta(t)^{\frac{n-2}{n-1}} dt$. Também $\vartheta > \xi$, $g > 0$ e g aproximadamente contínua q.t.p. em $[\delta/2, \xi)$ onde $\delta/2 < \bar{\xi} < \xi$.

Com estes fatos é possível tomar $l_0 \in (\frac{\delta}{2}, \bar{\xi}]$ satisfazendo

- g é aproximadamente contínua em l_0 ;
- $g(l_0) \leq \eta(l_0)$;
- $\int_{l_0}^{\bar{\xi}} \eta(s)^{\frac{n-2}{n-1}} ds < \int_{\xi}^{\vartheta} g(s)^{\frac{n-2}{n-1}} ds$;
- $\int_{\bar{\xi}}^{\xi} g(t)^{\frac{n-2}{n-1}} dt > \int_{\bar{\xi}}^{\xi} \eta(t)^{\frac{n-2}{n-1}} dt$.

Se g é contínua podemos definir $l_0 = \tilde{\xi}$. Das quatro propriedades acima de l_0 e com o Lema 4.7, temos

$$\begin{aligned}
g(l_0) \leq \eta(l_0) &= \frac{\theta}{c_1 r} \int_{l_0}^{\xi} \eta(s)^{\frac{n-2}{n-1}} ds \\
&= \frac{\theta}{c_1 r} \int_{l_0}^{\bar{\xi}} \eta(s)^{\frac{n-2}{n-1}} ds + \frac{\theta}{c_1 r} \int_{\bar{\xi}}^{\xi} \eta(s)^{\frac{n-2}{n-1}}(s) ds \\
&< \frac{\theta}{c_1 r} \int_{\xi}^{\vartheta} g(s)^{\frac{n-2}{n-1}} ds + \frac{\theta}{c_1 r} \int_{\bar{\xi}}^{\xi} g(s)^{\frac{n-2}{n-1}} ds \\
&= \frac{\theta}{c_1 r} \int_{\bar{\xi}}^{\vartheta} g(s)^{\frac{n-2}{n-1}} ds \\
&\leq \frac{\theta}{c_1 r} \int_{l_0}^{\vartheta} g(s)^{\frac{n-2}{n-1}} ds,
\end{aligned}$$

provando nossa afirmação.

Agora para completar a demonstração do lema, tomamos $l = \zeta^{-1}(l_0)$. ■

4.2 Demonstração do Teorema 4.1

Finalmente com os Lemas 4.3 e 4.8 e ainda com a desigualdade isoperimétrica dada pelo Lema 2.14 podemos demonstrar o Teorema 4.1.

Demonstração do Teorema 4.1: Sejam $r > 0$, $\delta > 0$, $\Omega = M \times (-\delta, \delta)$ como no Teorema 4.1, $\rho' > 0$ como no Lema 4.8 e A^+ como em (4.1-i). Se $\mathcal{H}^{(n-1)}(A^+ \cap (M \times \{s\})) = 0$ para algum $s \in (\frac{\delta}{2}, \delta)$, então tal s serve para l como em (4.1.i). Caso contrário, seja $\psi : [\frac{\delta}{2}, \delta] \rightarrow (0, \mathcal{H}^{n-1}(M)]$ dada por $\psi(s) = \mathcal{H}^{(n-1)}(A^+ \cap (M \times \{s\}))$. Como $\text{Per}_{\Omega}(A^+) < \infty$, pela definição de perímetro, A^+ é \mathcal{L}^n -mensurável e conseqüentemente pelo Teorema de Fubini-Tonelli ψ é \mathcal{L}^{n-1} -mensurável. Portanto ψ é como no Lema 4.8. Definindo I como

no enunciado do mesmo temos que existe $l \in (\frac{\delta}{2}, \delta) \setminus I$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{(n-1)}(A^+ \cap (M \times \{l\})) &\leq \frac{\theta}{c_1 r} \int_{[l, \delta] \setminus I} (\mathcal{H}^{(n-1)}(A^+ \cap (M \times \{s\})))^{\frac{n-2}{n-1}} d\mathcal{H}(s) \\
&\leq \frac{\theta}{r} \int_{[l, \delta] \setminus I} \mathcal{H}^{(n-2)}(\partial_*(A^+ \cap (M \times \{s\}))) d\mathcal{H}(s) \text{ (pelo Lema 2.14)} \\
&\leq \frac{1}{r} \int_{[l, \delta] \setminus I} \text{Per}_{(M \times \{s\})}(A^+ \cap (M \times \{s\})) d\mathcal{H}(s) \text{ (pelo Lema 4.3)} \\
&\leq \frac{1}{r} \int_{[l, \delta]} \text{Per}_{(M \times \{s\})}(A^+ \cap (M \times \{s\})) d\mathcal{H}(s) \\
&\leq \frac{1}{r} \mathcal{H}^{(n-1)}(\partial_*(A^+ \cap (M \times [l, \delta])) \setminus \partial_*(M \times [l, \delta])) \\
(4.12) \quad &= \frac{1}{r} \text{Per}_{M \times (l, \delta)}(A^+) \text{ (por (2.1)).}
\end{aligned}$$

Como $l \in (\frac{\delta}{2}, \delta) \setminus I$, (4.12) mostra as duas desigualdades de (4.1.i) do Teorema 4.1. Já o caso (4.1.ii) é exatamente análogo ao caso (4.1.i), claro, adaptando os Lemas 4.3 e 4.8 para este caso. ■

Capítulo 5

Existência de soluções estacionárias estáveis

O objetivo do presente capítulo é encontrar condições suficientes à existência de soluções estacionárias estáveis do problema parabólico (1.1). Para isto, o foco central deste capítulo será a investigação de condições suficientes para a existência de mínimos locais isolados para o funcional \mathcal{E}_0 como em (1.3). Ou seja,

$$(5.1) \quad \mathcal{E}_0(v) = \begin{cases} \int_{\Omega} h(x) |D\chi_{v=\beta}|, & \text{se } v \in BV(\Omega; \{\alpha, \beta\}); \\ \infty & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

onde

$$h(x) := 2 \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a(x)F(x, s)} ds.$$

Aqui $\epsilon > 0$ é um parâmetro positivo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) um domínio limitado de fronteira C^3 , ν vetor normal interior em $\partial\Omega$ e $a \in C^1(\overline{\Omega})$ estritamente positiva. Além disso $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$: é tal que existem $\theta \in C^1(\overline{\Omega})$ e α, β , satisfazendo

$$(f_1) \quad \alpha < \theta(x) < \beta, \quad f(x, \cdot) \text{ tem exatamente três raízes com } f(x, \alpha) = f(x, \theta(x)) = f(x, \beta) \equiv 0 \text{ e } \partial_2 f(x, \alpha) < 0, \partial_2 f(x, \beta) < 0 \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

$$(f_2) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \xi) d\xi = 0 \text{ (condição de igualdade de área).}$$

$$(f_3) \quad \text{Existem constantes } c_1, c_2, s_0 \text{ e um número } p \geq 2 \text{ tal que } c_1|s|^p \leq F(x, s) \leq c_2|s|^p \text{ para todo } s \text{ satisfazendo } |s| \geq s_0, \text{ onde } F(x, v) = -\frac{1}{2} \int_{g_1(x)}^v f(x, s) ds.$$

$$(f_4) \quad \sqrt{a(\cdot)F(\cdot, \cdot)} \in C^1.$$

As hipóteses (f_1) , (f_2) , (f_3) e (f_4) são inspiradas em trabalhos como [19], [1], [3], [5], [12] e [16].

Começaremos descrevendo as condições de suficiência para a existência de mínimo local isolado u_0 para o funcional \mathcal{E}_0 acima mencionado. Seja $S \subset \Omega$ uma hipersuperfície suave compacta sem fronteira com curvaturas principais em $y \in S$ denotadas por $\kappa_i(y)$ ($i = 1, \dots, n-1$), curvatura média por $H(y)$ e o campo de vetores normal interior a S por $\nu(\cdot)$.

Com estas notações definimos

$$\Lambda : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(5.2) \quad \Lambda(y, s) := h(y + s\nu(y)) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - s\kappa_i(y))$$

Suponha que para cada $y \in S$ fixado, Λ tem mínimo local isolado em $s = 0$. Das hipóteses sobre S , temos que S divide Ω em duas regiões, que denominaremos Ω_α e Ω_β respectivamente. Com estas descrições, podemos enunciar o teorema principal deste capítulo.

Teorema 5.1 *Suponha que como na notação e hipóteses acima, para todo $y \in S$ fixado, $\Lambda(y, s)$ tem mínimo isolado em $s = 0$. Então*

$$v_0(x) = \alpha\chi_{\Omega_\alpha}(x) + \beta\chi_{\Omega_\beta}(x), \quad x \in \Omega$$

é um mínimo L^1 -isolado e local de \mathcal{E}_0 definido em (5.1).

Denotamos por $H(y)$ a curvatura média de S em y . Uma condição suficiente para que o Teorema 5.1 seja válido é dada pelo Lema 5.2 a seguir.

Lema 5.2 *Seja, para cada $y = (y', \varphi(y')) \in S$,*

$$\lambda_y(s) := h(y + s\nu(y)).$$

Então para que o Teorema 5.1 seja válido é suficiente que

$$(5.3) \quad \lambda'_y(0) = (n-1)h(y)H(y)$$

e

$$(5.4) \quad \lambda''_y(0) > h(y) \left\{ 2(n-1)^2 H^2(y) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(y) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \kappa_j(y) \right) \right\}.$$

Se $n = 2$, $S = \gamma(t)$, $t \in [0, C]$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e neste caso (5.3) e (5.4) podem ser simplificadas em

$$(5.5) \quad \begin{cases} \lambda'_y(0) = h(\gamma(t))\kappa(t), \quad \forall t \in [0, C]; \\ \lambda''_y(0) > 2h(\gamma(t))\kappa^2(t), \quad \forall t \in [0, C]. \end{cases}$$

Demonstração: Se Λ tem mínimo local isolado em $s = 0$, então $\Lambda'(0) = 0$ e $\Lambda''(0) > 0$. Seja $\lambda_y(s)$ como neste lema. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}\Lambda(y', s) &= \lambda_y(s) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - s\kappa_i(y)); \\ \Lambda'(y', s) &= \lambda'_y(s) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - s\kappa_i(y)) + \lambda_y(s) \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ -\kappa_i(y) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (1 - s\kappa_j(y)) \right\}; \\ \Lambda''(y', s) &= \lambda''_y(s) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - s\kappa_i(y)) + 2\lambda'_y(s) \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ -\kappa_i(y) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (1 - s\kappa_j(y)) \right\} \\ &\quad + \lambda_y(s) \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ -\kappa_i(y) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \left\{ -\kappa_j(y) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^{n-1} (1 - s\kappa_k(y)) \right\} \right\}.\end{aligned}$$

Lembrando que $\lambda_y(0) = h(y)$, e $\sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i(y) = (n-1)H(y)$, então da hipótese $\Lambda'(0) = 0$ resulta

$$(5.6) \quad \lambda'_y(0) = (n-1)h(y)H(y).$$

Agora usando (5.6) e os dois lembretes que antecedem a mesma, e a hipótese de que $\Lambda''(0) > 0$, obtemos que

$$(5.7) \quad \lambda''_y(0) > h(y) \left\{ 2(n-1)^2 H^2(y) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(y) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \kappa_j(y) \right) \right\}.$$

Para $n = 2$, $S = \gamma(t)$, $t \in [0, C]$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Neste caso (5.6) e (5.7) podem ser simplificadas em

$$\begin{cases} \lambda'_y(0) = h(\gamma(t))\kappa(t), \quad \forall t \in [0, C]; \\ \lambda''_y(0) > 2h(\gamma(t))\kappa^2(t), \quad \forall t \in [0, C]. \end{cases}$$

■

As condições (5.5) são exatamente a hipótese (H_1) de [5]. Desta forma, o resultado aqui apresentado é uma generalização na dimensão $n = 2$ para $n = 2, 3$. do Teorema 2.3 de [5].

5.1 Demonstração do Teorema 5.1

Como motivado na Introdução desta tese bem como no Capítulo 4, utilizaremos o Teorema 4.1 para demonstrar o Teorema 5.1. Mas, antes disso, apresentaremos o Lema 5.3

que será utilizado para fazer a ligação entre o Teorema 4.1 e a demonstração do Teorema 5.1.

Lema 5.3 *Seja S como descrita no Teorema 5.1, ou seja, $S \subset \Omega$ uma hipersuperfície suave compacta sem fronteira. Então S é de tal modo que seja possível tomar uma quantidade finita de conjuntos S_k ; ($k = 1, \dots, k_0$) tal que para cada S_k existem $M_k \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e $\psi_k : M_k \rightarrow S_k$ um difeomorfismo $(n-1)$ -dimensional tal que:*

(5.3-i) M_k satisfaz as hipóteses como M no Teorema 4.1;

(5.3-ii) $J(\psi_k)$ é limitado inferiormente e superiormente por dois números estritamente positivos em M_k ;

(5.3-iii) $e \bigcup_{k=1}^{k_0} S_k = S$ é uma união disjunta.

Lembramos que as hipóteses de M no Teorema 4.1 são que $M \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto conexo, não necessariamente aberto, mas Lipschitz limitado cuja fronteira é C^1 a menos de uma quantidade finita de pontos se $n = 3$ ou $M \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado se $n = 2$. O Lema 5.3 deve ser conhecido por especialistas da área. Como não encontramos nenhuma referência, optamos por elaborar uma demonstração.

Demonstração do Lema 5.3: A demonstração será separada em dois casos: $n = 2$ e $n = 3$.

Se $n = 2$ e como S é uma variedade compacta unidimensional conexa e sem fronteira, pelo Teorema do Apêndice de [14], S é difeomorfo à S^1 . Neste caso S é uma curva compacta, e portanto o difeomorfismo entre S e S^1 tem seu jacobiano limitado inferiormente e superiormente por um par de números estritamente positivos. Desta forma é suficiente mostrar o lema para o caso em que $S = S^1$. Porém neste caso, a tese do lema se traduz em afirmar que S^1 pode ser particionado em uma quantidade finita de S_k ($k = 1, \dots, k_0$) de modo que existam intervalos $I_k \subset \mathbb{R}$ e difeomorfismos ψ_k entre I_k e S_k com $J(\psi_k)$ sendo limitado inferiormente e superiormente por dois números estritamente positivos em I_k . Por exemplo tomando $S_1 = \{(cos(s), sen(s)) : 0 \leq s \leq \pi\}$ e $S_2 = \{(cos(s), sen(s)) : \pi < s < 2\pi\}$ com $\psi_k(s) = (cos(s), sen(s))$ nos respectivos intervalos, temos mostrado o lema para o caso em que $S = S^1$ e portanto para o caso geral quando $n = 2$.

Se $n = 3$ o Teorema 3.5 p. 204 de [11] nos diz que S nas hipóteses acima é uma superfície de genus p para algum $p \geq 0$ inteiro. Pelo Teorema 1.6 p. 192 juntamente com a definição de genus dada no segundo parágrafo p. 191, ambos de [11] uma superfície suave orientada, compacta e sem bordo de genus $p \geq 0$ é difeomorfa a uma esfera S^2 com p alças. Assim, S é difeomorfa à uma esfera unitária bidimensional com p alças para algum $p \geq 0$. Neste caso S é compacta, e portanto o difeomorfismo entre S e S^2 tem seus jacobianos limitado inferiormente e superiormente por um par de números estritamente

positivos. Desta forma é suficiente mostrar o lema para o caso em que S é uma esfera 2-dimensional com p alças. Se $p = 0$, podemos por exemplo tomar

- $S_1 = \{(x, y, z) \in S^2 : z \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$, $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$, com ψ_1 tal que $\psi_1^{-1}(x, y, z) = (x, y)$;
- $S_2 = \{(x, y, z) \in S^2 : z \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$, $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$, com ψ_2 tal que $\psi_2^{-1}(x, y, z) = (x, y)$;
- $S_3 = \{(\cos(s), \sin(s), z) \in S^2 : 0 \leq s \leq \pi, -\frac{\sqrt{2}}{2} < z < \frac{\sqrt{2}}{2}\}$, $M_3 = \{(s, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq \pi, -\frac{\sqrt{2}}{2} < z < \frac{\sqrt{2}}{2}\}$, com $\psi_3(s, z) = (\cos(s), \sin(s), z)$;
- $S_4 = \{(\cos(s), \sin(s), z) \in S^2 : \pi < s < 2\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2} < z < \frac{\sqrt{2}}{2}\}$, $M_4 = \{(s, z) \in \mathbb{R}^2 : \pi < s < 2\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2} < z < \frac{\sqrt{2}}{2}\}$, com $\psi_4(s, z) = (\cos(s), \sin(s), z)$.

Se $p \geq 1$ então podemos separar as alças da esfera, obtendo p alças e uma esfera com $2p$ buracos. Pelo Teorema 1.6 p. 192 de [11], podemos supor que estes buracos não interceptam as fronteiras de S_k , ($k = 1, \dots, 4$) obtidas no caso $p = 0$ e neste caso toma-se S_k como acima, excluindo-se os buracos que houver. Por fim, cada alça será difeomorfa à $S^1 \times I$ para algum intervalo I e neste caso se procede de maneira similar aos conjuntos S_3 e S_4 acima. ■

Usando o Lema 5.3, demonstraremos o Teorema 5.1.

Demonstração do Teorema 5.1: Seja S como no Teorema 5.1. Com abuso de notação, consideramos como difeomorfismo a restrição no domínio e imagem de difeomorfismos. Neste sentido, apresentaremos dois difeomorfismos, que serão fundamentais na demonstração deste teorema. O primeiro é uma restrição daquele que relaciona o sistema de coordenadas principais e a vizinhança tubular como no Lema 2.25, ou seja,

$$\begin{aligned} \Xi : S \times I_\delta &\rightarrow S_\delta \\ (y, s) &\rightarrow (y + s\nu(y)), \end{aligned}$$

onde $I_\delta = (-\delta, \delta)$, $S_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, S) < \delta\}$, $\nu(y)$ é o vetor normal a S em $y \in S$. Aqui δ é tomado suficientemente pequeno para que $J(\Xi)$ seja limitado inferiormente e superiormente por dois números estritamente positivos. Como S é compacto, por (2.8), existe $\delta > 0$ nestas condições. No restante da demonstração, $\delta > 0$ será sempre tomado como aqui definido. Sejam S_k , ($k = 1, \dots, k_0$) como no Lema 5.3 e $S_{k,\delta} := \{y + s\nu(y) : y \in S_k \text{ e } s \in I_\delta\}$. Restringindo o domínio e o contradomínio do difeomorfismo acima, obtemos o seguinte difeomorfismo

$$\begin{aligned} \Xi : S_k \times I_\delta &\rightarrow S_{k,\delta} \\ (y, s) &\rightarrow (y + s\nu(y)). \end{aligned}$$

Para definir o segundo difeomorfismo citado acima como um dos pilares desta demonstração, sejam ψ_k e M_k , ($k = 1, \dots, k_0$) como no Lema 5.3. Começamos definindo $\underline{\psi} : M_k \times I_\delta \rightarrow S_k \times I_\delta$ por $\underline{\psi}(x', s) = (\psi_k(x'), s)$, temos que $\underline{\psi}$ é um difeomorfismo e $J(\underline{\psi})(x', s) = J(\psi_k)(x')$ para todo $(x', s) \in M_k \times I_\delta$. Agora consideremos o segundo difeomorfismo dado por $\Xi_k = \Xi \circ \underline{\psi}$. Portanto, pelo Lema 5.3 $J(\Xi_k)$ também é limitado inferiormente e superiormente por dois números estritamente positivos. Por outro lado Ξ_k pode ser escrita como

$$\begin{cases} \Xi_k : M_k \times I_\delta \rightarrow S_{k,\delta} \\ (x', s) \rightarrow (\psi_k(x') + s\nu(\psi(x'))). \end{cases}$$

Consequentemente, temos

$$(5.8) \quad \begin{aligned} & J(\Xi_k) \text{ é limitado inferiormente e superiormente por dois números positivos;} \\ & M_k := \Xi_k^{-1}(S_k) \text{ satisfaz as hipóteses de } M \text{ no Teorema 4.1;} \\ & \bigcup_{k=1}^{k_0} S_k = S \text{ é uma união disjunta.} \end{aligned}$$

Seja δ como descrito acima. Podemos supor que $S_\delta \subset \Omega$ (pois do contrário, como Ω é aberto, basta diminuir δ). Assim, para toda $u \in L^1(\Omega)$ e tomando \hat{u} sua restrição a S_δ , ou seja, $\hat{u} \in L^1(S_\delta)$, temos que $\|\hat{u}\|_{L^1(S_\delta)} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}$. Portanto, é suficiente demonstrar o Teorema 5.1 com $\Omega = S_\delta$.

Desta forma, o que queremos mostrar é que existe $\rho > 0$ tal que dada uma função admissível $v \in BV(S_\delta; \{\alpha, \beta\})$ satisfazendo $0 < \|v - v_0\|_{L^1(S_\delta)} < \rho$, temos $\int_{S_\delta} h|Dv| > \int_{S_\delta} h|Dv_0|$. Mas por (5.8) é suficiente mostrar que para todo $k = (1, \dots, k_0)$ existe $\rho_k > 0$ tal que dada uma função admissível $v \in BV(S_{k,\delta}; \{\alpha, \beta\})$ satisfazendo $0 < \|v - v_0\|_{L^1(S_{k,\delta})} < \rho_k$ temos $\int_{S_{k,\delta}} h|Dv| > \int_{S_{k,\delta}} h|Dv_0|$ e neste caso se toma $\rho = \min\{\rho_1, \dots, \rho_{k_0}\}$. Assim, no restante da demonstração demonstraremos a existência de ρ_k como aqui descrito. Para tanto usaremos a notação acima desenvolvida. Começaremos a avaliar o funcional em v_0 . Sem perda de generalidade supomos que

$$(5.9) \quad v_0(x', s) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } s < 0 \\ \beta, & \text{se } s > 0 \end{cases}$$

Usando a formula da co-área 2.13, e o fato que $(S_{k,\delta}) \cap \partial_*\{v_0 > \xi\} = S_k$ para $\xi \in (\alpha, \beta)$, calculamos $\int_{S_{k,\delta}} h|Dv_0|$ como segue:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \int_{S_{k,\delta}} h|Dv_0| &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_{k,\delta} \cap \partial_*\{v_0 > \xi\}} h d\mathcal{H}^{n-1}(x) d\xi \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{S_k} h d\mathcal{H}^{n-1}(x) d\xi = (\beta - \alpha) \int_{S_k} h d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Para simplificar a notação, denotaremos $M := M_k$ bem como $\tilde{g} := g \circ \Xi_k$ e $\tilde{h} := g \circ \Xi$ para toda função g com domínio igual a $S_{k,\delta}$. Em busca de definir $\rho_k > 0$ como descrito acima, definimos $J_{k,m}$ como segue

$$(5.11) \quad J_{k,m} := \inf\{J(\Xi_k)(x', s) : (x', s) \in M \times I_\delta\}.$$

Respectivamente das hipóteses em a e f do Problema 5.1 e por (5.8) temos que \tilde{h} , $J(\Xi_k)$ são limitados inferiormente e superiormente por dois números estritamente positivos. Portanto existe r' tal que $0 < r' < \infty$ e $\sup_{y' \in M} \tilde{h}(y', 0)J(\Xi_k)(y', 0) < r' \inf_{(y', s) \in M \times I_\delta} \tilde{h}(y', s)J(\Xi_k)(y', s)$. Tomemos $r = 2r'$. Por (5.8) M está nas hipóteses do Teorema 4.1 e portanto temos $\rho' > 0$ como no mesmo. Definimos o raio da $L^1(S_{k,\delta})$ vizinhança como sendo $\rho_k := \min\{J_{k,m}(\beta - \alpha)\rho', \frac{\delta}{2}J_{k,m}(\beta - \alpha)\mathcal{H}^{n-1}(M)\}$. Tomemos uma função admissível $v \in BV(S_{k,\delta}; \{\alpha, \beta\})$ satisfazendo $0 < \|v - v_0\|_{L^1(S_{k,\delta})} < \rho_k$. Devemos mostrar que $\int_{S_{k,\delta}} h|Dv| > \int_{S_{k,\delta}} h|Dv_0|$, ou seja, por (5.10)

$$(5.12) \quad \int_{S_{k,\delta}} h|Dv| > (\beta - \alpha) \int_{S_k} h d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Note que fixando $s \in (-\delta, \delta)$ o traço de $\tilde{v}(\cdot, s)$ está bem definido em cada seção transversal $M^s := M \times \{s\}$. Sejam

- $A_v^+ := \{x \in M \times (\frac{\delta}{2}, \delta) : \tilde{v}(x) = \alpha\}$
- $A_v^- := \{x \in M \times (-\delta, -\frac{\delta}{2}) : \tilde{v}(x) = \beta\}$.

Deste que por (5.9) $A_v^+ \subset \{v \neq v_0\}$ e $A_v^- \subset \{v \neq v_0\}$, pela definição de ρ_k , temos:

$$\begin{aligned} J_{k,m}(\beta - \alpha)\rho' &\geq \rho_k > \|v - v_0\|_{L^1(S_{k,\delta})} = \int_{S_{k,\delta}} |v - v_0| d\mathcal{L}^n \\ &= \int_{M \times I_\delta} |\tilde{v} - \tilde{v}_0| J(\Xi_k) d\mathcal{L}^n \\ &\geq \int_{M \times (\frac{\delta}{2}, \delta)} |\tilde{v} - \tilde{v}_0| J(\Xi_k) d\mathcal{L}^n \\ &\geq J_{k,m} \int_{M \times (\frac{\delta}{2}, \delta)} |\tilde{v} - \tilde{v}_0| d\mathcal{L}^n \\ &= J_{k,m}(\beta - \alpha)\mathcal{L}^n \left(\left\{ (x', s) \in M \times \left(\frac{\delta}{2}, \delta\right) : v(x', s) = \alpha \right\} \right) \\ &= J_{k,m}(\beta - \alpha)\mathcal{L}^n(A_v^+) = J_{k,m}(\beta - \alpha)\mathcal{H}^n(A_v^+). \end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{H}^n(A_v^+) < \rho'$. De forma análoga $\mathcal{H}^n(A_v^-) < \rho'$. Consequentemente A_v^+ e A_v^- são como A^+ e A^- em (4.1.i) e em (4.1.ii), respectivamente.

Desta forma, pelo Teorema 4.1 e por (2.1) existem $l \in (\frac{\delta}{2}, \delta)$ e $l' \in (-\delta, -\frac{\delta}{2})$ tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{n-1}(A_v^+ \cap (M \times \{l\})) &\leq \frac{1}{r} \mathcal{H}^{n-1}(\partial_*(A_v^+ \cap (M \times [l, \delta])) \setminus \partial_*(M \times [l, \delta])); \\ \mathcal{H}^{n-1}(A_v^+ \cap (M \times \{l\})) &\leq \frac{1}{4} \mathcal{H}^{n-1}(M); \\ \mathcal{H}^{n-1}(A_v^- \cap (M \times \{l'\})) &\leq \frac{1}{r} \mathcal{H}^{n-1}(\partial_*(A_v^- \cap (M \times [-\delta, l'])) \setminus \partial_*(M \times [-\delta, l'])); \\ \mathcal{H}^{n-1}(A_v^- \cap (M \times \{l'\})) &\leq \frac{1}{4} \mathcal{H}^{n-1}(M).\end{aligned}$$

Fixados l e l' como acima, então para simplificar a notação definimos

$$\begin{aligned}M_v &= \{x' \in M : (x', l) \in A_v^+\} \cup \{x' \in M : (x', l') \in A_v^-\}, \\ S_k^v &= \Xi_k(M_v) \\ A_v^{[l, \delta]} &= \partial_*(A_v^+ \cap (M \times [l, \delta])) \setminus \partial_*(M \times [l, \delta]) \quad \text{e} \\ A_v^{[-\delta, l']} &= \partial_*(A_v^- \cap (M \times [-\delta, l'])) \setminus \partial_*(M \times [-\delta, l'])\end{aligned}$$

obtendo

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{n-1}(M_v) &\leq \frac{1}{2r'} \left(\mathcal{H}^{n-1}(A_v^{[l, \delta]}) + \mathcal{H}^{n-1}(A_v^{[-\delta, l']}) \right) \quad \text{e} \\ (5.13) \quad \mathcal{H}^{n-1}(M_v) &\leq \frac{1}{2} \mathcal{H}^{n-1}(M).\end{aligned}$$

Observemos que somente aqui, de forma sutil, foi usado o Teorema 4.1. Denotaremos $\text{int}(A)$ como sendo o interior do conjunto A

A desigualdade (5.12) será obtida calculando as integrais correspondentes ao funcional \mathcal{E}_0 em partes especiais dos conjuntos envolvidos. Denotando $\kappa_i(y); (i = 1, \dots, n-1)$ as curvaturas principais de S em $y \in S$, temos:

$$\begin{aligned}(\beta - \alpha) &\int_{\text{int}(\Xi((S_k \setminus S_k^v) \times [l', l])) \cap \partial_* \{v=\alpha\}} h d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= (\beta - \alpha) \int_{\text{int}((S_k \setminus S_k^v) \times [l', l]) \cap \partial_* \{\tilde{v}=\alpha\}} \tilde{h} J(\Xi) d\mathcal{H}^{n-1} \quad (\text{mudança de coordenadas por } \Xi) \\ &= (\beta - \alpha) \int_{\text{int}((S_k \setminus S_k^v) \times [l', l]) \cap \partial_* \{\tilde{v}=\alpha\}} \tilde{h} \prod_{i=1}^{n-1} (1 - s\kappa_i(y)) d\mathcal{H}^{n-1} \quad (\text{Lema 2.25}) \\ &= (\beta - \alpha) \int_{\text{int}((S_k \setminus S_k^v) \times [l', l]) \cap \partial_* \{\tilde{v}=\alpha\}} \Lambda(y, s) d\mathcal{H}^{n-1} \quad (\text{definição de } \Lambda) \\ &\geq (\beta - \alpha) \int_{S_k \setminus S_k^v} \Lambda(y, 0) d\mathcal{H}^{n-1} \quad (\Lambda \text{ tem mínimo isolado em } s = 0) \\ (5.14) \quad &= (\beta - \alpha) \int_{S_k \setminus S_k^v} h(y) d\mathcal{H}^{n-1} \quad (\text{definição de } \Lambda).\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
& (\beta - \alpha) \int_{S_k^v} h(y) d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= (\beta - \alpha) \int_{M_v} \tilde{h}(y', 0) J(\Xi_k)(y', 0) d\mathcal{H}^{n-1} \text{ (mudança de coordenadas por } \Xi_k \text{)} \\
&\leq (\beta - \alpha) \sup_{y' \in M_v} \tilde{h}(y', 0) J(\Xi_k)(y', 0) \mathcal{H}^{n-1}(M_v) \text{ (definição de supremo)} \\
&\leq (\beta - \alpha) \sup_{y' \in M} \tilde{h}(y', 0) J(\Xi_k)(y', 0) \mathcal{H}^{n-1}(M_v) \text{ (} M_v \subset M \text{)} \\
&\leq (\beta - \alpha) r' \inf_{(y', s) \in M \times I_\delta} \tilde{h}(y', s) J(\Xi_k)(y', s) \mathcal{H}^{n-1}(M_v) \text{ (por definição de } r' \text{)} \\
&\leq (\beta - \alpha) r' \inf_{(y', s) \in M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta))} \tilde{h}(y', s) J(\Xi_k)(y', s) \mathcal{H}^{n-1}(M_v) \\
&\quad \text{(pois } M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta)) \subset M \times I_\delta \text{)} \\
&\leq \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \inf_{(y', s) \in M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta))} \tilde{h}(y', s) J(\Xi_k)(y', s) \left[\mathcal{H}^{(n-1)}(A_v^{[l, \delta]}) + \mathcal{H}^{(n-1)}(A_v^{[-\delta, l']}) \right] \\
&\quad \text{(por 5.13)} \\
&\leq \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \int_{A_v^{[l, \delta]} \cup A_v^{[-\delta, l']}} \tilde{h}(y', s) J(\Xi_k)(y', s) d\mathcal{H}^{n-1} \text{ (por definição de ínfimo)} \\
&\leq (\beta - \alpha) \int_{A_v^{[l, \delta]} \cup A_v^{[-\delta, l']}} \tilde{h}(y', s) J(\Xi_k)(y', s) d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\text{(cuja desigualdade é estrita se } \mathcal{H}^{n-1}(A_v^{[l, \delta]} \cup A_v^{[-\delta, l']}) > 0 \text{)} \\
(5.15) \quad &= (\beta - \alpha) \int_{\text{int}(\Xi_k(M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta)))) \cap \partial_* \{v = \alpha\}} h d\mathcal{H}^{n-1} \text{ (por definição de } A_v^{[l, \delta]} \cup A_v^{[-\delta, l']}) \text{)}.
\end{aligned}$$

Afirmção 1: Ao menos uma das desigualdades em (5.14) e (5.15) é estrita.

Para demonstrar a Afirmção 1, é suficiente provar que se a desigualdade da cadeia (5.14) for uma igualdade então necessariamente a penúltima desigualdade de (5.15) é estrita. Mas pela observação feita na mesma, é suficiente mostrar que se a desigualdade da cadeia (5.14) for uma igualdade então necessariamente

$$(5.16) \quad \mathcal{H}^{n-1}(A_v^{[l, \delta]} \cup A_v^{[-\delta, l']}) > 0.$$

De fato, se a desigualdade em (5.14) for uma igualdade e da hipótese que $\Lambda(y, \cdot)$ tem, para todo $y \in S$, mínimo isolado em $s = 0$, temos que a menos de um conjunto de medida \mathcal{H}^{n-1} nula, $\text{int}((S_k \setminus S_k^v) \times [l', l]) \cap \partial_* \{\tilde{v} = \alpha\} = S_k \setminus S_k^v$. Equivalentemente $\text{int}((M \setminus M_v) \times [l', l]) \cap \partial_* \{\tilde{v} = \alpha\} = M \setminus M_v$. Consequentemente a menos de um conjunto de medida \mathcal{H}^n nula, um e somente um dos seguintes casos devem ocorrer:

$$\tilde{v}(x', s) = \begin{cases} \beta, & \text{se } (x', s) \in (M \setminus M_v) \times (0, l) \\ \alpha, & \text{se } (x', s) \in (M \setminus M_v) \times (l', 0) \end{cases}$$

ou

$$\tilde{v}(x', s) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } (x', s) \in (M \setminus M_v) \times (0, l) \\ \beta, & \text{se } (x', s) \in (M \setminus M_v) \times (l', 0). \end{cases}$$

Ocorrendo a segunda opção, temos:

$$\begin{aligned} \rho_k &> \|v - v_0\|_{\mathcal{L}^1(S_{k,\delta})} = \int_{S_{k,\delta}} |v - v_0| d\mathcal{L}^n \text{ (definições de } \rho_k \text{ e } \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(S_{k,\delta})} \text{ respectivamente)} \\ &= \int_{M \times I_\delta} |\tilde{v} - \tilde{v}_0| J(\Xi_k) d\mathcal{L}^n \text{ (mudança de coordenadas por } \Xi_k) \\ &\geq \int_{(M \setminus M_v) \times (l', l)} |\tilde{v} - \tilde{v}_0| J(\Xi_k) d\mathcal{L}^n \text{ (pois } (M \setminus M_v) \times (l', l) \subset M \times I_\delta) \\ &= \int_{(M \setminus M_v) \times (l', l)} |\tilde{v} - \tilde{v}_0| J(\Xi_k) d\mathcal{H}^n \text{ (pois } \mathcal{L}^n \text{ e } \mathcal{H}^n \text{ coincidem)} \\ &\geq J_{k,m}(\beta - \alpha) \mathcal{H}^n((M \setminus M_v) \times (l', l)) \text{ (pela definição de } J_{k,m}) \\ &\geq J_{k,m}(\beta - \alpha) \mathcal{H}^n\left((M \setminus M_v) \times \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)\right) \text{ (pois } \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) \subset (l', l)) \\ &= J_{k,m}(\beta - \alpha) \delta \mathcal{H}^{n-1}(M \setminus M_v) \\ &\geq J_{k,m}(\beta - \alpha) \frac{\delta}{2} \mathcal{H}^{n-1}(M) \text{ (por (5.13))} \\ (5.17) & \\ &\geq \rho_k \text{ (pela definição de } \rho_k). \end{aligned}$$

Mas (5.17) gera um absurdo e portanto a segunda opção citada acima não pode ocorrer, restando só a primeira, da qual com (5.9) concluímos que

$$(5.18) \quad \|\tilde{v} - \tilde{v}_0\|_{L^1(M \setminus M_v \times [l', l])} = 0.$$

Queremos mostrar que (5.18) implica em (5.16). De fato se por absurdo (5.16) não ocorre, então de (5.13), $\mathcal{H}^{n-1}(M_v) = 0$. Esta última igualdade com a hipótese sobre a função admissível $v \in BV(S_{k,\delta}; \{\alpha, \beta\})$ satisfazendo $|v - u_0|_{\mathcal{L}^1((-\delta, \delta) \times M)} > 0$, (5.18) e da definição de A_v^+ , A_v^- concluímos que

$$(5.19) \quad 0 < |\tilde{v} - \tilde{v}_0|_{\mathcal{L}^1(M \times ((-\delta, l'] \cup [l, \delta)))} = (\beta - \alpha) \mathcal{H}^n(A_v^+ \cup A_v^-).$$

Ainda continuando a supor que a desigualdade (5.16) não ocorre, temos:

$$(5.20) \quad \mathcal{H}^{n-2}(\partial_*((A_v^+ \cup A_v^-) \cap (M \times \{t\})) \setminus \partial_*(M \times \{t\})) = 0 \text{ } \mathcal{H}^1 \text{q.t.p. em } (-\delta, l'] \cup [l, \delta).$$

Agora pelo Lema 4.3 e por (5.20) concluímos que

$$(5.21) \quad \mathcal{H}^{n-2}(\partial_*((A_v^+ \cup A_v^-) \cap (M \times \{t\}))) = 0 \text{ } \mathcal{H}^1 \text{q.t.p. em } (-\delta, l'] \cup [l, \delta)$$

e ainda da desigualdade isoperimétrica dada pelo Lema 2.14 obtemos de (5.21),

$$\mathcal{H}^{n-1}(((A_v^+ \cup A_v^-) \cap (\{t\} \times M))) = 0 \text{ } \mathcal{H}^1 \text{q.t.p. em } (-\delta, l'] \cup [l, \delta)$$

e conseqüentemente $\mathcal{H}^n(A_v^+ \cup A_v^-) = 0$ contradizendo (5.19) e provando (5.16) de onde partimos por absurdo supondo que (5.16) não seria válido. Agora, pela observação feita no início da demonstração da Afirmação 1, temos que ao menos uma desigualdade é estrita nas cadeias (5.14) e (5.15), provando assim a afirmação em questão.

Observando que pela definição de M_v ,

$$\tilde{v}(x', l) = \tilde{v}_0(x', l) = \beta \text{ e } \tilde{v}(x', l') = \tilde{v}_0(x', l') = \beta \text{ q.t.p. } M \setminus M_v.$$

Conseqüentemente pela definição de S_k^v

$$(5.22) \quad \tilde{v}(x', l) = \tilde{v}_0(x', l) = \beta \text{ e } \tilde{v}(x', l') = \tilde{v}_0(x', l') = \beta \text{ q.t.p. } S_k \setminus S_k^v.$$

Por (5.22), a menos de excluir em $S_{k,\delta}$ conjuntos de medida \mathcal{H}^n nula temos:

$$(5.23) \quad \text{int}(S_{k,\delta}) \cap \partial_*\{v > \xi\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \xi \leq \alpha, \\ \text{int}(S_{k,\delta}) \cap \partial_*\{v = \alpha\} & \text{se } \alpha < \xi < \beta, \\ \emptyset & \text{se } \beta \leq \xi. \end{cases}$$

É claro que em (5.23) $\text{int}(S_{k,\delta}) \cap \partial_*\{v = \alpha\}$ poderia ser substituído por $\text{int}(S_{k,\delta}) \cap \partial_*\{v = \beta\}$. Finalmente de (5.15), (5.14) e a Afirmação 1 (a qual é essencial aqui) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{S_{k,\delta}} h|Dv| = \int_{\text{int}(S_{k,\delta})} h|Dv| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\text{int}(S_{k,\delta}) \cap \partial_*\{v > \xi\}} h d\mathcal{H}^{n-1} d\xi \text{ (pela Proposição 2.13)} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\text{int}(S_{k,\delta}) \cap \partial_*\{v = \alpha\}} h d\mathcal{H}^{n-1} d\xi \text{ (por (5.23))} \\ &= (\beta - \alpha) \int_{\text{int}(S_{k,\delta}) \cap \partial_*\{v = \alpha\}} h d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= (\beta - \alpha) \int_{\text{int}(\Xi((S_k) \times [l', l])) \cap \partial_*\{v = \alpha\}} h d\mathcal{H}^{n-1} \\ &+ (\beta - \alpha) \int_{\text{int}(\Xi_k(M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta)))) \cap \{v = \alpha\}} h d\mathcal{H}^{n-1} \text{ (por definição de } \Xi \text{ e } \Xi_k) \\ &\geq (\beta - \alpha) \int_{\text{int}(\Xi((S_k \setminus S_k^v) \times [l', l])) \cap \partial_*\{v = \alpha\}} h d\mathcal{H}^{n-1} \\ &+ (\beta - \alpha) \int_{\text{int}(\Xi_k(M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta)))) \cap \{v = \alpha\}} h d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad (\text{pois } \text{int}(\Xi((S_k \setminus S_k^v) \times [l', l])) \subset \text{int}(\Xi((S_k) \times [l', l]))) \\ &> (\beta - \alpha) \int_{S_k \setminus S_k^v} h(y) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &+ (\beta - \alpha) \int_{S_k^v} h(y) d\mathcal{H}^{n-1} \text{ (por (5.14), (5.15) e a Afirmação 1)} \end{aligned}$$

$$(5.24) \quad = (\beta - \alpha) \int_{S_k} h(y) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Por (5.12), (5.24) mostra o Teorema 5.1. ■

Obtido um mínimo local isolado u_0 de \mathcal{E}_0 como acima, consideremos o problema 1.1 dado por

$$(5.25) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = \epsilon^2 \operatorname{div}(a(x) \nabla u_\epsilon) + f(x, u_\epsilon), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u_\epsilon(0, x) = \phi(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Aqui $\epsilon > 0$, Ω , ν , a , α , β e f são como em (5.1). Consideremos a família de funcionais reais estendidos $\mathcal{E}_\epsilon : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$, dado por

$$(5.26) \quad \mathcal{E}_\epsilon(v) := \begin{cases} \int_\Omega [\epsilon a(x) |\nabla v|^2 + \frac{1}{\epsilon} W(x, v)] dx, & \text{se } v \in H^1(\Omega) \\ \infty, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$$

Sendo u_0 um mínimo local isolado de \mathcal{E}_0 como acima, então pela definição de \mathcal{E}_0 em (5.1), $u_0 \in BV(\Omega; \{\alpha, \beta\})$. Seja $S = \partial_* \{u_0 = \beta\} \cap \partial_* \{u_0 = \alpha\}$. Em outras palavras, S é uma hipersuperfície onde u_0 muda rapidamente de um valor para outro, mantendo-se "praticamente" constante "longe" de S . Quando isto acontece, dizemos que S é a interface de u_0 . Conhecendo um mínimo local isolado u_0 de \mathcal{E}_0 , então pelos Teoremas 3.1 e 2.19, existe $\epsilon_0 > 0$ e uma família $\{v_\epsilon\}_{\epsilon < \epsilon_0}$ tal que

- v_ϵ é um mínimo $L^1(\Omega)$ -local de \mathcal{E}_ϵ e
- $\|v_\epsilon - u_0\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Em outras palavras, teremos uma família de $\{v_\epsilon\}$ que desenvolvem camadas de transição interna quando $\epsilon \rightarrow 0$ com interface S . Como já é conhecido, \mathcal{E}_ϵ dado em (5.26) é o funcional de energia do problema parabólico (1.1) também citado em (5.25).

Neste caso, como v_ϵ é um mínimo local do funcional de energia \mathcal{E}_ϵ , a segunda variação do funcional de energia em v_ϵ é não-negativa. Assim, v_ϵ além de ser uma solução estacionária, também é uma solução estável do problema parabólico (1.1). De fato se $\lambda_1(v_\epsilon)$ é o primeiro autovalor do problema parabólico (1.1) linearizado em torno v_ϵ e se $\lambda_1(v_\epsilon) < 0$, este resultado é bem conhecido. Se $\lambda_1(v_\epsilon) = 0$, o resultado continua valendo pelo Teorema 6.2.1 de [10]. Resumidamente falando, neste caso 0 é um autovalor simples (a suavidade de Ω é crucial aqui) segue que existe uma variedade unidimensional crítica local invariante $W(v_\epsilon)$ tangente à autofunção principal do autovalor 0 tal que se v_ϵ é estável em $W(v_\epsilon)$ então também é estável em $H^1(\Omega)$. Mas a estabilidade de v_ϵ em $W(v_\epsilon)$ segue da existência de um funcional de Lyapunov e do fato de $W(v_\epsilon)$ ser unidimensional.

Reunindo as observações acima, temos a seguinte proposição.

Proposição 5.4 *Seja v_ϵ mínimo local de \mathcal{E}_ϵ , como obtido acima. Então v_ϵ é uma solução estacionária e estável do problema parabólico (1.1).*

Com a Proposição 5.4 garantimos a existência de soluções estacionária do problema parabólico (1.1).

Capítulo 6

Problemas variacionais com e sem vínculo em cilindros

Neste capítulo abordaremos duas famílias de problemas variacionais de existência de mínimos de funcionais em $L^1(\Omega)$. O conjunto Ω é um cilindro da forma $\Omega := M \times I_\delta$, onde $\delta > 0$ fixado e $M \subset \mathbb{R}^{n-1}$ como nas hipóteses do Teorema 4.1, ou seja, $M \subset \mathbb{R}^2$ um domínio de Lipschitz, limitado se $n = 3$ ou $M \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado se $n = 2$. Estas duas famílias de problemas serão uma sem e outra com vínculo. As expressões dos funcionais \mathcal{E}_ϵ e conseqüentemente também do funcional Γ -limite \mathcal{E}_0 serão iguais aos funcionais correspondentes do Capítulo 5, só no caso de problemas com vínculo, o domínio dos funcionais será restrito à

$$\{v \in L^1(\Omega) : \int_{\Omega} v \, d\mathcal{L}^n = m\}$$

onde $m = \frac{\mathcal{L}^n(\Omega)}{2}(\alpha + \beta)$. A interface S será tomada como sendo $S := M \times \{0\}$, particionando Ω em Ω^- e Ω^+ , onde

$$\Omega^- = \{(x, s) \in M \times (-\delta, 0)\}$$

e

$$\Omega^+ = \{(x, s) \in M \times (0, \delta)\}.$$

Observa-se aqui que $\partial S \subset \partial\Omega$, enquanto no problema variacional oriundo do problema parabólico (1.1), $\partial S \cap \partial\Omega = \emptyset$. Este problema variacional com vínculo em cilindro responde de forma bem mais geral algumas problemas de minimizar funcionais em retângulos propostos por [12].

6.1 Problemas variacionais sem vínculo em cilindros

O objetivo desta seção é obter condições que garantam a existência de mínimos para a família de funcionais

$$(6.1) \quad \mathcal{E}_\epsilon(v) := \begin{cases} \int_\Omega [\epsilon a(x) |\nabla v|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(x, v)] dx, & \text{se } v \in H^1(\Omega) \\ \infty, & \text{no caso contrário,} \end{cases}$$

onde ϵ , a e F são como no funcional 5.26, com a ressalva que $g_1 = \alpha$, $g_2 = \beta$ fixados e Ω um cilindro como descrito acima. Pelos mesmos argumentos usados no capítulo anterior, ou seja, pelos teoremas 3.1 e 2.19, basta obter condições que garantam a existência de mínimos isolados do funcional Γ -limite \mathcal{E}_0 dado por

$$(6.2) \quad \mathcal{E}_0(v) = \begin{cases} \int_\Omega h(x) |D\chi_{v=\beta}|, & \text{se } v \in BV(\Omega; \{\alpha, \beta\}); \\ \infty & \text{nos demais casos,} \end{cases}$$

onde

$$h(x) := 2 \int_\alpha^\beta \sqrt{a(x) F(x, s)} ds.$$

Este é o conteúdo do Teorema 6.1, a seguir. A demonstração do mesmo se fará usando a demonstração do Teorema 5.1.

Teorema 6.1 *Suponha que com a notação acima, para todo $x' \in S = M \times \{0\}$ fixado, $h(x', s)$ tem mínimo local isolado em $s = 0$. Então*

$$v_0(x) = \alpha \chi_{\Omega^-}(x) + \beta \chi_{\Omega^+}(x), \quad x \in \Omega$$

é um mínimo L^1 -isolado e local de \mathcal{E}_0 em $L^1(\Omega)$.

Demonstração: Notemos que usando a notação da demonstração do Teorema 5.1, o mesmo foi essencialmente demonstrado para $S_{k,\delta} := \{y + s\nu(y) : y \in S_k \text{ e } s \in I_\delta\}$. Ou seja, foi mostrado que existe $\rho_k > 0$ tal que dada uma função admissível $v \in BV(S_{k,\delta}; \{\alpha, \beta\})$ satisfazendo $0 < \|v - v_0\|_{L^1(S_{k,\delta})} < \rho_k$ temos $\int_{S_{k,\delta}} h |Dv| > \int_{S_{k,\delta}} h |Dv_0|$. Voltando ao Teorema 6.1, a seguinte identificação:

- $M := M_k$;
- $\rho := \rho_k$;
- $S := S_k$.

Consequentemente como $S = M \times \{0\}$,

- $\Omega = M \times I_\delta = S \times I_\delta := S_{k,\delta}$;

- todos os difeomorfismos que aparecem na demonstração do Teorema 5.1 aqui se reduzem a funções identidades e portanto podem ser desconsiderados;
- as curvaturas principais de S são nulas e o campo vetorial ν normal a S está na direção da última coordenada.

Com as identificações acima, h deste teorema é exatamente a função Λ do Teorema 5.1. E como $S = M \times \{0\}$, h está exatamente nas hipóteses de Λ do mesmo. Portanto pela demonstração daquele, temos que se $v \in BV(\Omega; \{\alpha, \beta\})$ satisfazendo $0 < \|v - v_0\|_{L^1(\Omega)} < \rho$ então $\int_{\Omega} h|Dv| > \int_{\Omega} h|Dv_0|$, concluindo assim esta demonstração. ■

Observemos aqui que em aplicações, o fato de Ω ter sido tomado como $\Omega = M \times I_{\delta}$ é simplesmente para continuarmos com a mesma notação do texto, não tendo nenhuma importância técnica e pelos mesmos argumentos o mesmo resultado valeria para $\Omega = I_{\delta} \times M$. Claro que agora h seria da forma $h(\cdot, \cdot)$ onde a primeira variável estaria em I_{δ} e a segunda em M e a hipótese correspondente seria de $h(\cdot, x')$ atingir, para cada $x' \in M$ um mínimo isolado em $s = 0$ na primeira variável. Também em aplicações, $f(x, u)$ pode aparecer como $f(x, u) := b(x)f(u)$ com $b > 0$ uma função de classe C^1 . Pode ocorrer que uma das duas funções a ou b seja constante, então, a menos de uma constante, h é exatamente a raiz quadrada da outra, como por exemplo se a é constante então $h(x) = K\sqrt{b(x)}$ para uma certa constante K .

6.2 Problemas variacionais com vínculo em cilindros

O objetivo desta seção é obter condições que garantam a existência de mínimos para a família de funcionais dados por (6.1) com domínio

$$\{v \in L^1(\Omega) : \int_{\Omega} v \, d\mathcal{L}^n = m\}$$

com $m = \frac{\mathcal{L}^n(\Omega)}{2}(\alpha + \beta)$. Pelos mesmos argumentos usados na seção acima, basta obter condições que garantam a existência de mínimos isolados do funcional Γ -limite \mathcal{E}_0 como em (6.2) mas com vínculo $\int_{\Omega} v \, d\mathcal{L}^n = m$. Este é conteúdo do Teorema 6.2, a seguir.

Teorema 6.2 *Suponha que como na notação acima, para todo $x' \in S = M \times \{0\}$ fixado, $h(x', s)$ tem mínimo local não necessariamente isolado em $s = 0$. Então*

$$(6.3) \quad v_0(x) = \alpha\chi_{\Omega^-}(x) + \beta\chi_{\Omega^+}(x), \quad x \in \Omega$$

é L^1 -isolado mínimo local de $\mathcal{E}_0 : \{v \in L^1(\Omega) : \int_{\Omega} v \, d\mathcal{L}^n = m\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ dado por

$$\mathcal{E}_0(v) = \begin{cases} \int_{\Omega} h(x) |D\chi_{v=\beta}|, & \text{se } v \in BV(\Omega; \{\alpha, \beta\}); \\ \infty & \text{nos demais casos,} \end{cases}$$

onde $h(x) := 2 \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a(x)F(x, s)} ds$ e $m = \frac{\mathcal{L}^n(\Omega)}{2}(\alpha + \beta)$.

Notemos que m é tomado de forma que $v_0(x) = \alpha\chi_{\Omega^-}(x) + \beta\chi_{\Omega^+}(x)$, candidata à mínimo isolado de \mathcal{E}_0 satisfaça a condição $\int_{\Omega} v_0 d\mathcal{L}^n = m$. A correlação entre m e α, β , dada por $m = \frac{\mathcal{L}^n(\Omega)}{2}(\alpha + \beta)$ poderia ser alterada mudando o ponto de mínimo de $h(x', \cdot)$ para $s_1 \neq 0$ e a interface de v_0 de $s = 0$ para $s = s_1$.

Observemos que neste teorema a hipótese que para todo $x' \in S = M \times \{0\}$ fixado, $h(x', s)$ tem mínimo local não necessariamente isolado em $s = 0$ é mais fraca que a hipótese correspondente no Teorema 6.1 onde tal mínimo é necessariamente isolado. O enfraquecimento desta hipótese aceita funções h constantes com

$$h(x) := 2 \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a(x)F(x, s)} ds.$$

Ou seja, o Teorema 6.2 inclui os funcionais com a e F espacialmente independentes, o que não era possível nos funcionais tratados neste texto até aqui. Utilizando e seguindo a demonstração do Teorema 5.1 obteríamos um mínimo para \mathcal{E}_0 o qual seria não necessariamente isolado. Lembremos que no Teorema 2.19, o qual está sendo usado especificamente para garantir a existência de mínimos para o Funcional 6.1, a condição do mínimo ser isolado é essencial. Outra observação é que na demonstração do Teorema 5.1 não usamos o fato que $\int_{\Omega} v d\mathcal{L}^n = m$, e tendo mínimo para \mathcal{E}_0 não é imediato que este fato nos garante que tal mínimo seja isolado. Desta forma faremos a demonstração deste teorema não usando a demonstração do Teorema 5.1, mas sim adaptando-a. Nesta demonstração também será possível sentir o grau de simplificação gerado em relação a demonstração do Teorema 5.1 quando os difeomorfismos envolvidos são meramente funções identidades e não aparecem.

Demonstração: Queremos mostrar que existe $\rho > 0$ tal que dada uma função $v \in \{v \in L^1(\Omega) : \int_{\Omega} v d\mathcal{L}^n = m\}$ satisfazendo $0 < \|v - v_0\|_{L^1(\Omega)} < \rho$, então $\int_{\Omega} h|Dv| > \int_{\Omega} h|Dv_0|$. Pela definição de \mathcal{E}_0 , é suficiente mostrar a afirmação acima, substituindo $L^1(\Omega)$ por $BV(\Omega; \{\alpha, \beta\})$. Começaremos a avaliar o funcional em v_0 . Usando a formula da co-área 2.13, e o fato que $\Omega \cap \partial_*\{v_0 > \xi\} = M$ para $\xi \in (\alpha, \beta)$, calculamos $\int_{\Omega} h|Dv_0|$ como segue:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h|Dv_0| &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega \cap \partial_*\{v_0 > \xi\}} h d\mathcal{H}^{n-1}(x) d\xi \\ (6.4) \qquad &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_M h d\mathcal{H}^{n-1}(x) d\xi = (\beta - \alpha) \int_M h d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Das hipóteses em a e F do Problema 6.1 temos que h é limitada inferiormente e superiormente por dois números estritamente positivos. Portanto existe r' tal que $0 < r' < \infty$ e $\sup_{y' \in M} h(y', 0) < r' \inf_{(y', s) \in M \times I_{\delta}} h(y', s)$. Tomemos $r = 2r'$. Por hipótese do Problema 6.1, M está nas hipóteses do Teorema 4.1 e portanto temos $\rho' > 0$ como no mesmo. Definimos o raio da $L^1(\Omega)$ vizinhança como sendo $\rho := (\beta - \alpha)\rho'$. Denotaremos $\text{int}(A)$ como sendo o interior do conjunto A . Tomemos uma função admissível

$v \in BV(\Omega; \{\alpha, \beta\}) \cap \{\int_{\Omega} v \, d\mathcal{L}^n = m\}$ satisfazendo $0 < \|v - v_0\|_{L^1(\Omega)} < \rho$. Devemos mostrar que $\int_{\Omega} h|Dv| > \int_{\Omega} h|Dv_0|$, ou seja, por (5.10)

$$\int_{\Omega} h|Dv| > (\beta - \alpha) \int_M h d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Porém, pelos mesmos argumentos usados em (5.10) e o fato que $\Omega \cap \partial_* \{v > \xi\} = \partial_* \{v = \beta\} \cap \text{int}(\Omega)$ para $\xi \in (\alpha, \beta)$, temos que $\int_{\Omega} h|Dv| = (\beta - \alpha) \int_{\partial_* \{v = \beta\} \cap \text{int}(\Omega)} h d\mathcal{H}^{n-1}$. Portanto, para mostrar a desigualdade acima, é suficiente mostrar que

$$(\beta - \alpha) \int_{\partial_* \{v = \beta\} \cap \text{int}(\Omega)} h d\mathcal{H}^{n-1} > (\beta - \alpha) \int_M h d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Como por hipótese $(\beta - \alpha) > 0$, e pelos argumentos acima, para demonstrar este teorema é suficiente mostrar

$$(6.5) \quad \int_{\partial_* \{v = \beta\} \cap \text{int}(\Omega)} h d\mathcal{H}^{n-1} > \int_M h d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Note que fixando $s \in (-\delta, \delta)$ o traço de $v(\cdot, s)$ está bem definido em cada secção transversal $M^s = M \times \{s\}$. Sejam

- $A_v^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \times (\frac{\delta}{2}, \delta) : v(x) = \alpha\}$
- $A_v^- \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \times (-\delta, -\frac{\delta}{2}) : v(x) = \beta\}$.

Desde que por (6.3) $A_v^+ \subset \{v \neq v_0\}$ e pela definição de ρ , temos

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)\rho' &\geq \rho > \|v - v_0\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |v - v_0| d\mathcal{L}^n \\ &= \int_{M \times I_{\delta}} |v - v_0| d\mathcal{L}^n \\ &\geq \int_{M \times (\frac{\delta}{2}, \delta)} |v - v_0| d\mathcal{L}^n \\ &= (\beta - \alpha)\mathcal{L}^n \left(\left\{ (x', s) \in M \times \left(\frac{\delta}{2}, \delta\right) : v(x', s) = \alpha \right\} \right) \\ &= (\beta - \alpha)\mathcal{L}^n(A_v^+) = (\beta - \alpha)\mathcal{H}^n(A_v^+). \end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{H}^n(A_v^+) < \rho'$. Também por (6.3), $A_v^- \subset \{v \neq v_0\}$ e portanto de forma análoga $\mathcal{H}^n(A_v^-) < \rho'$. Consequentemente A_v^+ e A_v^- são como A^+ e A^- em (4.1.i) e em (4.1.ii), respectivamente.

Desta forma, pelo Teorema 4.1 e por (2.1) existem $l \in (\frac{\delta}{2}, \delta)$ e $l' \in (-\delta, -\frac{\delta}{2})$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(A_v^+ \cap (M \times \{l\})) &\leq \frac{1}{r} \mathcal{H}^{n-1}(\partial_*(A_v^+ \cap (M \times [l, \delta])) \setminus \partial_*(M \times [l, \delta])); \\ \mathcal{H}^{n-1}(A_v^- \cap (M \times \{l'\})) &\leq \frac{1}{r} \mathcal{H}^{n-1}(\partial_*(A_v^- \cap (M \times [-\delta, l'])) \setminus \partial_*(M \times [-\delta, l'])). \end{aligned}$$

Fixados l e l' como acima, então para simplificar a notação definimos

$$\begin{aligned} M_v &= \{x' \in M : (x', l) \in A_v^+\} \cup \{x' \in M : (x', l') \in A_v^-\}, \\ A_v^{[l, \delta]} &= \partial_*(A_v^+ \cap (M \times [l, \delta])) \setminus \partial_*(M \times [l, \delta]) \quad \text{e} \\ A_v^{[-\delta, l']} &= \partial_*(A_v^- \cap (M \times [-\delta, l'])) \setminus \partial_*(M \times [-\delta, l']) \end{aligned}$$

obtendo

$$(6.6) \quad \mathcal{H}^{n-1}(M_v) \leq \frac{1}{2r'} \left(\mathcal{H}^{n-1}(A_v^{[l, \delta]}) + \mathcal{H}^{n-1}(A_v^{[-\delta, l']}) \right).$$

Observemos que somente para obter a desigualdade em (6.6) o Teorema 4.1 foi usado de forma sutil.

A desigualdade (6.5) será obtida calculando as integrais correspondentes ao funcional \mathcal{E}_0 em partes especiais dos conjuntos envolvidos. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\text{int}((M \setminus M_v) \times [l', l]) \cap \partial_* \{v=\alpha\}} h d\mathcal{H}^{n-1} \\ & \geq \int_{M \setminus M_v} h(y', 0) d\mathcal{H}^{n-1} \quad (h \text{ tem mínimo em } s = 0) \\ (6.7) \quad & = \int_{M \setminus M_v} h(y) d\mathcal{H}^{n-1} \quad (\text{tomando } y := (y', 0)). \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} & \int_{M_v} h(y) d\mathcal{H}^{n-1} \\ & = \int_{M_v} h(y', 0) d\mathcal{H}^{n-1} \quad (\text{tomando } (y', 0) := y) \\ & \leq \sup_{y' \in M_v} h(y', 0) \mathcal{H}^{n-1}(M_v) \quad (\text{definição de supremo}) \\ & \leq \sup_{y' \in M} h(y', 0) \mathcal{H}^{n-1}(M_v) \quad (M_v \subset M) \\ & \leq r' \inf_{(y', s) \in M \times I_\delta} h(y', s) \mathcal{H}^{n-1}(M_v) \quad (\text{por definição de } r') \\ & \leq r' \inf_{(y', s) \in M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta))} h(y', s) \mathcal{H}^{n-1}(M_v) \\ & \quad (\text{pois } M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta)) \subset M \times I_\delta) \\ & \leq \frac{1}{2} \inf_{(y', s) \in M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta))} h(y', s) \left[\mathcal{H}^{(n-1)}(A_v^{[l, \delta]}) + \mathcal{H}^{(n-1)}(A_v^{[-\delta, l']}) \right] \\ & \quad (\text{por 6.6}) \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{A_v^{[l, \delta]} \cup A_v^{[-\delta, l']}} h(y', s) d\mathcal{H}^{n-1} \quad (\text{por definição de ínfimo}) \\ & = \frac{1}{2} \int_{\text{int}((M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta)))) \cap \partial_* \{v=\alpha\}} h d\mathcal{H}^{n-1} \quad (\text{por definição de } A_v^{[l, \delta]} \cup A_v^{[-\delta, l']}) \\ (6.8) \quad & \leq \int_{\text{int}((M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta)))) \cap \partial_* \{v=\alpha\}} h d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Para obter (6.5), a desigualdade (6.7) sera analisada em três casos como descritos a seguir:

(6.7.i) A desigualdade (6.7) é estrita;

(6.7.ii) A desigualdade (6.7) é uma igualdade, neste caso, necessariamente $\partial_*\{v = \beta\} \cap (\text{int}(M \setminus M_v) \times (l', l))$ e $M \setminus M_v$ estão em seções transversais paralelas. Neste caso há dois casos a serem analisados:

(6.7.ii-a) $\mathcal{H}^{n-1}(M_v) > 0$;

(6.7.ii-b) $\mathcal{H}^{n-1}(M_v) = 0$ e neste caso como $\partial_*\{v = \beta\} \cap (\text{int}(M \setminus M_v) \times (l', l))$ e $M \setminus M_v$ estão em seções transversais paralelas, $\|v - v_0\|_{L^1(\Omega)} > 0$ e $\int_{\Omega} v \, dx = m$ temos necessariamente $\mathcal{H}^n(\{v \neq v_0\} \cap (M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta)))) > 0$. Portanto pela definição de M_v , $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_*\{v = \beta\} \cap (M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta)))) > 0$. Aqui entrou de forma bem discreta a hipótese que $\int_{\Omega} v \, dx = m$. Afirmamos que nos três casos, obtemos (6.5). De fato, para o caso (6.7.i) então por (6.7) e (6.8) temos

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial_*\{v=\beta\} \cap \text{int}(\Omega)} h d\mathcal{H}^{n-1} \\
 &= \int_{\partial_*\{v=\beta\} \cap \text{int}(M \times ((l', l) \cup ((-\delta, l') \cup (l, \delta))))} h d\mathcal{H}^{n-1} \\
 &\geq \int_{\partial_*\{v=\beta\} \cap \text{int}((M \setminus M_v) \times (l', l))} h d\mathcal{H}^{n-1} \\
 &+ \int_{\partial_*\{v=\beta\} \cap \text{int}(M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta)))} h d\mathcal{H}^{n-1} \\
 &> \int_{M \setminus M_v} h d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{M_v} h d\mathcal{H}^{n-1} \\
 (6.9) \quad &= \int_M h d\mathcal{H}^{n-1},
 \end{aligned}$$

mostrando (6.5) para o caso em que a desigualdade em (6.7) é uma desigualdade estrita.

No caso (6.7.ii-a), por (6.8) temos

$$\begin{aligned}
 & \int_{M_v} h(y) d\mathcal{H}^{n-1} \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{\text{int}((M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta)))) \cap \{v=\alpha\}} h d\mathcal{H}^{n-1} \\
 (6.10) \quad &< \int_{\text{int}((M \times ((-\delta, l') \cup (l, \delta)))) \cap \{v=\alpha\}} h d\mathcal{H}^{n-1}.
 \end{aligned}$$

e assim por (6.7) e (6.10) obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial_*\{v=\beta\} \cap \text{int}(\Omega)} h d\mathcal{H}^{n-1} \\
 &= \int_{\partial_*\{v=\beta\} \cap \text{int}(M \times ((l', l) \cup ((-\delta, l') \cup (l, \delta))))} h d\mathcal{H}^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_{\partial_*\{v=\beta\}\cap\text{int}((M\setminus M_v)\times(l',l))} hd\mathcal{H}^{n-1} \\
&+ \int_{\partial_*\{v=\beta\}\cap\text{int}(M\times((-\delta,l')\cup(l,\delta)))} hd\mathcal{H}^{n-1} \\
&> \int_{\partial_*\{v=\beta\}\cap\text{int}((M\setminus M_v)\times(l',l))} hd\mathcal{H}^{n-1} \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\partial_*\{v=\beta\}\cap\text{int}(M\times((-\delta,l')\cup(l,\delta)))} hd\mathcal{H}^{n-1} \\
&\geq \int_{M\setminus M_v} hd\mathcal{H}^{n-1} + \int_{M_v} hd\mathcal{H}^{n-1} \\
(6.11) \quad &= \int_M hd\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Mas (6.11) mostra (6.5) para o caso em que a desigualdade em (6.7) é uma igualdade e $\mathcal{H}^{n-1}(M_v) > 0$. E para o caso (6.7.ii-b), como $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_*\{v\beta\}\cap(\text{int}(M)\times((-\delta,l')\cup(l,\delta)))) > 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial_*\{v=\beta\}\cap\text{int}(\Omega)} hd\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{\partial_*\{v=\beta\}\cap(\text{int}(M)\times((-\delta,l')\cup(l,\delta)))} hd\mathcal{H}^{n-1} \\
&+ \int_{\partial_*\{v=\beta\}\cap(\text{int}(M)\times(l',l))} hd\mathcal{H}^{n-1} \\
&> \int_{\partial_*\{v=\beta\}\cap(\text{int}(M)\times(l',l))} hd\mathcal{H}^{n-1} \\
(6.12) \quad &= \int_M hd\mathcal{H}^{n-1},
\end{aligned}$$

mostrando assim (6.5) para o caso em que a desigualdade em (6.7) for uma igualdade e $\mathcal{H}^{n-1}(M_v) = 0$.

Juntas (6.12), (6.11) e (6.9) mostram (6.5) e pela observação feita quando propomos (6.5), temos concluído esta demonstração. ■

Referências Bibliográficas

- [1] ALBERTI, G.; BOUCHITTÉ, G.; SEPPECHER, P. *Phase transition with the line-tension effect*. Arch. Rational Mech. Anal, Vol. 144, p. 1-46. 1998.
- [2] AMBROSIO, L.; DANCER, N. **Calculus of variations and partial differential equations: topics on geometrical evolution problems and degree theory**. Berlin: Springer, 2000. 347 p.
- [3] CHOKSI, R.; STERNBERG, P. *Periodic phase separation: the periodic cahn-hilliard and isoperimetric problems*. Interfaces and Free Boundaries; v. 8. p. 371-392. 2006.
- [4] DO CARMO, M. P. **Differential geometry of curves and surfaces**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976. 503 p.
- [5] DO NASCIMENTO, A.S. *Stable stationary solutions induced by spatial inhomogeneity via Gamma-convergence*. Boletim da Sociedade Brasileira de. Matematica, v. 29, p. 75-97. 1998.
- [6] EVANS, L. C. **Partial differential equations**. Providence: American Mathematical Society, 1998. 662p.
- [7] EVANS, L.C.; GARIEPY, R. F. **Measure theory and fine properties of functions**. Boca Raton: CRC Press, 1992. 268 p.
- [8] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. 2 ed. Berlin: Springer-Verlag, 1983. 513 p.
- [9] GIUSTI, E. **Minimal surfaces and functions of bounded variation**. Stuttgart: Birkhauser, 1984. 238 p.
- [10] HENRY, D. **Geometric theory of semilinear parabolic equations**. Berlin / New York: Springer-Verlag, 1981. 348 p.
- [11] HIRSCH, M. W. **Differential topology** New York: Springer-Verlag, 1976. 221 p.

Referências Bibliográficas

- [12] KOHN, R. V.; STERNBERG, P. *Local minimisers and singular perturbations*. Royal Society of Edinburgh, v. 111A, p. 69-84. 1989.
- [13] LIMA, E. L. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1989. vol. 2. 547 p.
- [14] MILNOR, J. W. **Topology from the differentiable viewpoint** Charlottes-Ville: The University Press of Virginia, 1978. 64 p.
- [15] MODICA, L. *The Gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion* Arch. Rational Mech. Anal. 98, 1987. 123-142.
- [16] NAKAMURA, K. I.; MATANO, H.; HILHORST, D.; SCHÄTZLE, R. *Singular limit of a reaction-diffusion equation with a spatially inhomogeneous reaction term*. Journal of Statistica Physics, v. 95, p. 1165-1184. 1999.
- [17] PAO, C. V. **Nonlinear parabolic and elliptic equations**. New York: Plenum Press, 1992. 777 p.
- [18] SOTOMAYOR, J. M. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. 327 p.
- [19] STERNBERG, P. *The effect of a singular perturbations on nonconvex variational problems*. Arch. Rational Mech. Anal., V. 101, p. 209-260. 1998.