

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CCET — CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

IMERSÕES ISOMÉTRICAS EM PRODUTOS DE DUAS FORMAS ESPACIAIS

Bruno Mendonça Rey dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Jr.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

São Carlos – SP

Abril de 2012.

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

S237ii

Santos, Bruno Mendonça Rey dos.

Imersões isométricas em produtos de duas formas
espaciais / Bruno Mendonça Rey dos Santos. -- São Carlos :
UFSCar, 2012.

126 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,
2012.

1. Geometria. 2. Imersões isométricas. 3. Variedades
diferenciáveis. 4. Espaços de curvatura constante. 5.
Subvariedades umbílicas. 6. Subvariedades paralelas. I.
Título.

CDD: 516 (20^a)

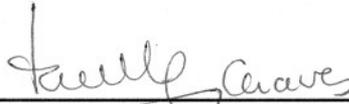
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Júnior
DM - UFSCar



Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira
UFC



Profa. Dra. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves
IME - USP



Prof. Dr. Irene Ignazia Onnis
ICMC - USP



Prof. Dr. Marcos Dajczer
IMPA

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Ruy Tojeiro que me orientou dedicadamente durante este trabalho.

Agradeço a minha esposa Silvia, por sua compreensão e apoio.

A meus pais, que também me apoiaram, desde sempre.

A meus irmãos, que se alegraram com minha conquista.

A meus amigos, que me acompanharam de perto durante os anos de doutorado.

Agradeço ao financiamento da FAPESP e da CAPES.

E agradeço, principalmente, a Deus, que sempre está perto e me ajuda ir mais longe.

Resumo

Nesta tese são estudadas as imersões isométricas em produtos de duas formas espaciais utilizando a abordagem introduzida por Lira *et al* em [18]. As imersões isométricas paralelas em produtos de duas formas espaciais com curvaturas seccionais não nulas são classificadas, e a classificação das imersões isométricas umbílicas $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, com $m \geq 3$ e $k_1 + k_2 \neq 0$, é reduzida àquela das imersões isométricas umbílicas de codimensão dois em $\mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$, $k < 0$, em que \mathbb{O}_k^n denota a forma espacial de curvatura seccional k e dimensão n . Para isso, são provados alguns teoremas de redução de codimensão com interesse próprio para imersões isométricas em produtos de duas formas espaciais.

Abstract

In this thesis we study isometric immersions into products of two space forms using the approach introduced by Lira *et al* in [18]. Parallel isometric immersions into products of two space forms with nonzero sectional curvatures are classified, and the classification of umbilical isometric immersions $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, with $m \geq 3$ and $k_1 + k_2 \neq 0$, is reduced to that of umbilical isometric immersions of codimension two into $\mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$, $k < 0$, where \mathbb{O}_k^n denotes the space form with dimension n and sectional curvature k . To accomplish this, we prove some results of independent interest on reduction of codimension of isometric immersions into products of two space forms.

Sumário

Introdução	iv
1 Imersões isométricas umbílicas em formas espaciais pseudoriemannianas	1
1.1 Notações e Definições	1
1.2 Imersões isométricas umbílicas em formas espaciais	2
2 Subvariedades de rotação em \mathbb{R}_t^n	12
2.1 Subvariedades de rotação em \mathbb{R}_t^n	13
2.2 Prova do Teorema 2.1	23
3 Imersões isométricas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$	40
3.1 A inclusão $\iota: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$	41
3.2 Os tensores \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T}	43
3.3 Produtos de imersões isométricas	47
3.4 Somas com pesos de imersões	50
3.5 Uma soma com pesos particular	52
3.6 Redução de codimensão em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$	58
4 Imersões isométricas paralelas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$	63
4.1 Resultados preliminares	64
4.2 Caso $\mathbf{S} = 0$	65
4.3 Caso $\Phi = 0$	66
4.4 Classificação das imersões totalmente geodésicas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$	67
5 Imersões isométricas umbílicas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$	72
5.1 Preliminares	73
5.2 Caso $\mathbf{S} = 0$	73
5.3 Caso $\ker \mathbf{S} = \{0\}$	74
5.4 Caso em que $\dim(\ker \mathbf{S}) \in (0, \dim M)$	76
5.5 Prova do Teorema 5.1	80
6 Imersões isométricas umbílicas em $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$	86
6.1 Imersões umbílicas $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$ com $\mathbf{S} \neq 0$ e $n \in \{m, m + 1\}$	87
6.2 Os tensores \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T} em $\mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$	94
6.3 Imersões de rotação umbílicas em $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$	95
6.4 Classificação das imersões umbílicas em $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$	104

A	Alguns resultados utilizados	112
A.1	Resultados de Cálculo	112
A.1.1	O conjunto $I := \{x \in \mathbb{R} : (p - x^2)^2 - q > 0\}$	112
A.1.2	Uma integral	112
A.1.3	Soluções de uma EDO	114
A.2	Resultados de Álgebra Linear	115
A.3	Resultados de Variedades Diferenciáveis e de Geometria Riemanniana	117
	Referências Bibliográficas	123
	Índice Remissivo	125

Introdução

As **formas espaciais** são as variedades riemannianas completas com curvatura seccional constante. Neste trabalho, uma forma espacial será também simplesmente conexa. Existem, a menos de isometrias, três tipos de formas espaciais: as esferas \mathbb{S}_k^n , que são as formas espaciais com curvatura seccional $k > 0$; os espaços euclidianos \mathbb{E}^n , que têm curvatura seccional igual a 0; e os espaços hiperbólicos \mathbb{H}_k^n , que são as formas espaciais com curvatura seccional $k < 0$.

Formas espaciais e produtos de formas espaciais são exemplos de espaços simétricos. Um **espaço simétrico** é uma variedade riemanniana completa M para a qual, dado qualquer ponto $p \in M$, a função $x \mapsto \exp_p(-(\exp_p^{-1}x))$ é uma isometria de M , sendo \exp_p a função exponencial em p .

As subvariedades mais simples de uma variedade riemanniana são aquelas cuja segunda forma fundamental é o tensor nulo, chamadas de subvariedades **totalmente geodésicas**. Existem duas generalizações bem conhecidas para o conceito de subvariedade totalmente geodésica: as subvariedades umbílicas e as paralelas. Uma subvariedade $M \subset N$ é dita **umbílica** quando $\alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle \eta$, para quaisquer $X, Y \in TM$, em que α é a segunda forma fundamental de M com valores no fibrado normal e η é o vetor curvatura média de M . Dessa forma, M é totalmente geodésica quando é umbílica e $\eta = 0$.

Uma subvariedade $M \subset N$ é dita **paralela** quando o tensor segunda forma fundamental é paralelo, ou seja, quando

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) := \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) = 0,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, em que ∇ é a conexão riemanniana em M e ∇^\perp é a conexão no fibrado normal $T^\perp M$.

Muito se conhece a respeito das subvariedades de uma forma espacial. Em particular, as subvariedades totalmente geodésicas, umbílicas e paralelas das formas espaciais já estão totalmente classificadas. A classificação das subvariedades umbílicas das formas espaciais pode ser encontrada em [5], [6] e [2]. Já a classificação das subvariedades paralelas das formas espaciais é mais complexa e pode ser encontrada em [15], [14], [27] e [19].

Embora as subvariedades de uma forma espacial sejam muito estudadas, o conhecimento a respeito das subvariedades de outras variedades riemannianas é bem menor. Mesmo as subvariedades de produtos de duas formas espaciais não são tão conhecidas.

Em [21] mostrou-se que uma subvariedade umbílica M de um espaço simétrico N é de fato uma subvariedade umbílica de um produto \tilde{M} de formas espaciais mergulhado em N de modo totalmente geodésico. Foram também classificados os possíveis pares (\tilde{M}, N) . Além disso, mostrou-se que uma subvariedade umbílica $M^m \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ com $m \geq 3$, quando vista como subvariedade de $\mathbb{R}_{\varepsilon_1}^{N_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2}^{N_2}$, pode ser obtida como a interseção $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ com o espaço osculador de M em um ponto genérico. No entanto, não foi obtida uma classificação de tais subvariedades, assim como uma descrição da geometria de uma tal interseção como subvariedade de $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$.

Em [20], dentre diversos resultados, foram determinadas as funções definidas em um aberto de \mathbb{H}^2 , em que \mathbb{H}^2 é o espaço hiperbólico de curvatura seccional -1 , cujos gráficos são superfícies umbílicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Souam e Toubiana, em [26], conseguiram classificar (globalmente) as superfícies umbílicas nos espaços $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Eles provaram que as superfícies umbílicas de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ são superfícies de rotação sobre uma curva. Tal curva é obtida via soluções de sistemas de EDOs.

Em [28] e [3], foram classificadas as hipersuperfícies semi-paralelas e paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, respectivamente. Também foram classificadas localmente as hipersuperfícies umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Em tal classificação das hipersuperfícies umbílicas, foi provado que uma hipersuperfície umbílica de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ ou de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ é, localmente, uma hipersuperfície de rotação sobre uma curva. Tal curva é obtida utilizando as soluções de uma EDO.

Destacamos ainda o trabalho de Daniel [10] que, com o intuito de estudar superfícies mínimas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, demonstra em um teorema tipo Bonnet para imersões de variedades riemannianas n -dimensionais em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Tal teorema fornece condições necessárias e suficientes para que uma variedade riemanniana n -dimensional possa ser isometricamente imersa em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, e essas condições são dadas em termos das primeira e segunda formas fundamentais da imersão e em termos das projeções em TM e em $T^\perp M$ de um campo unitário tangente ao segundo fator de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ ou de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

O resultado de Daniel foi generalizado em [18] por Lira, Tojeiro e Vitória, que provaram um teorema tipo Bonnet para produtos de duas formas espaciais. Nesse novo resultado, a codimensão da imersão pode ser qualquer e as condições para a existência da imersão são dadas em termos das primeira e segunda formas fundamentais, em termos da conexão em $T^\perp M$ e em termos dos tensores \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T} definidos pelos autores.

Neste trabalho, estudamos as imersões isométricas em produtos $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ de formas espaciais, sendo $\mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ uma forma espacial de dimensão n_i e curvatura seccional k_i . Como principal ferramenta em tal estudo, utilizamos os tensores \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T} definidos em [18]. Demonstramos novos resultados envolvendo tais tensores e os utilizamos para estudar as imersões totalmente geodésicas, paralelas e umbílicas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$.

Classificamos as imersões paralelas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ quando $k_1 + k_2 \neq 0$ e reduzimos a classificação das imersões umbílicas $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, com $m \geq 3$ e $k_1 + k_2 \neq 0$, à classificação das imersões umbílicas com codimensão dois em $\mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$. Além disso, mostramos que as imersões umbílicas em $\mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$ são imersões de rotação sobre uma curva e obtemos uma descrição da curva a partir de soluções de um sistema de EDOs. Para o caso $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$, descrevemos tanto a curva como a imersão de rotação através de funções simples, generalizando assim as classificações das superfícies umbílicas de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e das hipersuperfícies umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, feitas, respectivamente, em [26] e [28].

Cabe aqui observar que, enquanto escrevamos nossos resultados, as subvariedades paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ e de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^m$ foram independentemente classificadas em [17].

Começamos nosso texto com um capítulo no qual introduzimos algumas notações e descrevemos os teoremas de classificação das imersões isométricas umbílicas nas formas espaciais pseudoriemannianas. Tais resultados, já bem conhecidos, foram muito utilizados neste trabalho e por essa razão dedicamos a eles o primeiro capítulo.

No segundo capítulo, definimos as subvariedades de rotação em \mathbb{R}_t^n (espaço euclidiano \mathbb{R}^n com índice t). Tal definição é essencialmente a mesma dada por Dajczer, Tojeiro e Florit em [9] para subvariedades de rotação no espaço euclidiano \mathbb{E}^n . Provamos também, além de diversos resultados técnicos, uma proposição que dá condições suficientes para que uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana em \mathbb{R}_t^n seja uma subvariedade de rotação. Essa proposição

generaliza um resultado de [9] para imersões em \mathbb{E}^n .

O Capítulo 3 é dedicado a um estudo inicial das imersões isométricas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. Nesse capítulo é apresentada a definição dos tensores \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T} e são vistas as fórmulas de Gauss, Codazzi e Ricci das imersões isométricas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ utilizando esses tensores. Em seguida são demonstradas algumas fórmulas já conhecidas (provadas em [18]) envolvendo tais tensores. Apresentamos novos resultados envolvendo os tensores \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T} e exemplos úteis de imersões em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. Em particular, dados dois números reais k_1 e k_2 com $k_1 k_2 > 0$, exibimos um exemplo de uma imersão isométrica totalmente geodésica $g: \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^n \longrightarrow \mathbb{O}_{k_1}^n \times \mathbb{O}_{k_2}^n$.

Ao final do Capítulo 3, definimos o conceito de redução de codimensão à esquerda (e à direita) e demonstramos um correspondente teorema de redução de codimensão, inspirado no teorema de redução de codimensão para imersões em espaços de curvatura constante que aparece em [8]. Nosso teorema dá condições necessárias e suficientes para que uma imersão $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ possa reduzir sua codimensão à esquerda ou à direita. Também obtemos condições suficientes para que uma subvariedade esteja contida na imagem da imersão totalmente geodésica g mencionada acima.

No Capítulo 4 estudamos as imersões paralelas e totalmente geodésicas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. Em particular, apresentamos a classificação das imersões totalmente geodésicas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ e obtemos uma classificação das imersões paralelas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ quando $k_1 + k_2 \neq 0$.

No quinto capítulo são estudadas as imersões umbílicas $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. O principal teorema do quinto capítulo reduz a classificação das imersões umbílicas $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, com $m \geq 3$ e $k_1 + k_2 \neq 0$, à classificação das imersões umbílicas com codimensão dois em $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ e em $\mathbb{H}_k^n \times \mathbb{R}$. Como consequência desse teorema, concluímos que, se $m > \max\{n_1, n_2\}$ e $k_1 + k_2 \neq 0$, então as únicas imersões umbílicas $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ são as totalmente geodésicas.

No sexto e último capítulo são classificadas as imersões umbílicas em $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$.

Ao final do trabalho, acrescentamos um apêndice com alguns resultados conhecidos e utilizados ao longo do texto. Tais resultados aparecem acompanhados de demonstração ou de referência bibliográfica.

Capítulo 1

Imersões isométricas umbílicas em formas espaciais pseudorriemannianas

Este primeiro capítulo apresenta uma classificação (feita em [5], [6] e [2]) das imersões isométricas umbílicas de variedades pseudorriemannianas nas formas espaciais pseudorriemannianas. Tal classificação será utilizada explicitamente em capítulos posteriores.

1.1 Notações e Definições

Seja V um espaço vetorial com produto interno. A notação $V = V_1 \oplus V_2$ indica que: (1) V_1 e V_2 são subespaços vetoriais de V , (2) $V_1 \perp V_2$ e (3) V se decompõe em soma direta $V = V_1 \oplus V_2$.

Denotaremos por \mathbb{R}^n o espaço vetorial formado pelas n -uplas de números reais, por \mathbb{E}^n o espaço \mathbb{R}^n munido com o produto interno euclidiano e por \mathbb{R}_t^n o espaço \mathbb{R}^n munido com o produto interno com sinal:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, \dots, x_n); (y_1, \dots, y_n)) &\mapsto \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle, \end{aligned}$$

em que

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle := - \sum_{i=1}^t x_i y_i + \sum_{i=t+1}^n x_i y_i.$$

O número natural $t \in \{0, \dots, n\}$ será chamado de **índice** de \mathbb{R}_t^n ou índice da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Outras notações:

$$\mathbb{L}^n := \mathbb{R}_1^n;$$

$$\|x\|^2 := \langle x, x \rangle;$$

$$\|x\| := \sqrt{|\|x\|^2|} = \sqrt{|\langle x, x \rangle|};$$

$$\mathbb{S}(c, r) := \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}_t^n : \|x - c\|^2 = r^2\}, & \text{se } r > 0, \\ \{x \in \mathbb{R}_t^n : \|x - c\|^2 = -r^2\}, & \text{se } r < 0; \end{cases}$$

$$\mathcal{L} := \{x \in \mathbb{R}_t^n : \|x\|^2 = 0\};$$

$$\mathbb{S}^n := \mathbb{S}(0, 1) \subset \mathbb{E}^{n+1};$$

$$\mathbb{S}_k^n := \mathbb{S}(0, k^{-1/2}) \subset \mathbb{E}^{n+1}, \text{ para } k > 0;$$

$$\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{S}(0, -1) \subset \mathbb{L}^{n+1} : \langle x, e_1 \rangle < 0\}, \text{ em que } e_1 := (1, 0, \dots, 0);$$

$$\mathbb{H}_k^n := \{x \in \mathbb{S}(0, -|k|^{-1/2}) \subset \mathbb{L}^{n+1} : \langle x, e_1 \rangle < 0\}, \text{ em que } e_1 := (1, 0, \dots, 0) \text{ e } k < 0;$$

$$\mathbb{O}_k^n := \begin{cases} \mathbb{S}_k^n, & \text{se } k > 0, \\ \mathbb{H}_k^n, & \text{se } k < 0, \\ \mathbb{E}^n, & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

É fato conhecido que uma forma espacial de dimensão n e curvatura seccional k é isométrica a \mathbb{O}_k^n . Por isso trabalharemos sempre com os modelos \mathbb{E}^n , $\mathbb{S}_k^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ e $\mathbb{H}_k^n \subset \mathbb{L}^{n+1}$ de formas espaciais.

Uma forma espacial pseudoriemanniana é uma variedade pseudoriemanniana (conexa, completa e simplesmente conexa) com curvatura seccional constante. Denotaremos por $\mathbb{O}_{t,k}^n$ a forma espacial pseudoriemanniana de índice t e curvatura seccional k . Também é conhecido o fato de que $\mathbb{O}_{t,k}^n$ é isométrico a \mathbb{R}_t^n , se $k = 0$; ou a uma das componentes conexas de $\mathbb{S}(0, \frac{1}{\sqrt{k}})$ em \mathbb{R}_t^{n+1} , se $k > 0$; ou a uma das componentes conexas de $\mathbb{S}(0, \frac{-1}{\sqrt{-k}})$ em \mathbb{R}_{t+1}^{n+1} , se $k < 0$.

Dado $x \in \mathbb{R}_t^n$, diremos que x é **tipo espaço** quando $\|x\|^2 > 0$, que x é **tipo tempo** quando $\|x\|^2 < 0$, e que x é **tipo luz** quando $\|x\|^2 = 0$.

Seja $V \subset \mathbb{R}_t^n$ um subespaço vetorial. V será dito **tipo espaço** quando o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{V \times V}$ for positivo definido, será dito **tipo tempo** quando $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{V \times V}$ for não degenerado e não for positivo definido, e será dito **tipo luz** quando $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{V \times V}$ for degenerado. Quando $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{V \times V}$ for não degenerado, diremos que V é **não degenerado**.

O espaço \mathbb{L}^n será chamado de **Espaço de Lorentz** ou **Espaço Lorentziano**. O conjunto \mathcal{L} será chamado de **cone de luz**.

Dada uma variedade riemanniana M , denotaremos por ∇ a conexão de Levi-Civita em M . A conexão de Levi-Civita em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ será denotada por $\bar{\nabla}$, e aquela de \mathbb{R}_t^n por $\tilde{\nabla}$. Se $f: M \rightarrow N$ for uma imersão isométrica entre duas variedades, denotaremos por ∇^\perp a conexão normal de f .

Deve ficar subentendido ao leitor que, salvo em algum caso em que seja dito o contrário, cada variedade diferenciável que aparecer no texto é sempre de classe C^∞ e conexa.

1.2 Imersões isométricas umbílicas em formas espaciais

O objetivo desta seção é apresentar os teoremas de classificação das imersões isométricas umbílicas de variedades riemannianas nas formas espaciais. Para isso, e sem esforço adicional, apresentaremos os teoremas de classificação das imersões isométricas umbílicas de variedades pseudoriemannianas em formas espaciais pseudoriemannianas. Para tanto, precisaremos de alguns resultados preliminares.

Lema 1.1. *Sejam M_s^m uma variedade pseudoriemanniana e $f: M_s^m \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ uma imersão isométrica umbílica com vetor curvatura média η . Se $m \geq 2$, então η é paralelo na conexão normal de f . Além disso, valem as seguintes afirmações:*

- (I) $A_\eta = \|\eta\|^2 \text{Id}$.
- (II) $\|\eta\|^2$ é constante em M .
- (III) Se $\|\eta\|^2 = 0$ em algum ponto de M , então η é constante em M .
- (IV) $L := f_*TM \oplus \text{ger}\{\eta\}$ é uma distribuição paralela em \mathbb{R}_t^n .
- (V) $f(M) \subset f(x_0) + L$, para qualquer $x_0 \in M$.
- (VI) Se $\|\eta\|^2 \neq 0$ em algum ponto de M , então $c := f + \frac{\eta}{\|\eta\|^2}$ é constante em M .

Demonstração. Pela equação de Codazzi,

$$\begin{aligned} \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) &= \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z) \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla_X^\perp \langle Y, Z \rangle \eta - \langle \nabla_X Y, Z \rangle \eta - \langle Y, \nabla_X Z \rangle \eta &= \nabla_Y^\perp \langle X, Z \rangle \eta - \langle \nabla_Y X, Z \rangle \eta - \langle X, \nabla_Y Z \rangle \eta \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle Y, Z \rangle \nabla_X^\perp \eta &= \langle X, Z \rangle \nabla_Y^\perp \eta. \end{aligned}$$

Como $m \geq 2$, então podemos escolher $Y = Z$ unitário e $X \perp Y$. Dessa forma a última igualdade se torna $\nabla_X^\perp \eta = 0$. •

(I): Sejam $X, Y \in \Gamma(TM)$, logo

$$\langle A_\eta X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle = \langle X, Y \rangle \|\eta\|^2.$$

Portanto $A_\eta = \|\eta\|^2 \text{Id}$. •

(II): Seja $x \in M$ qualquer, logo

$$d\|\eta\|^2(x)X = X \langle \eta, \eta \rangle (x) = 2 \langle \nabla_X^\perp \eta, \eta \rangle (x) = 0.$$

Portanto $\|\eta\|^2$ é constante em M . •

(III): Suponhamos que $\|\eta\|^2 = 0$ em algum ponto de M . Nessas condições, $\|\eta\|^2 = 0$ em todos os pontos de M , pelo item (II). Dessa forma,

$$\tilde{\nabla}_X \eta = -f_* A_\eta X + \nabla_X^\perp \eta = -\|\eta\|^2 f_* X = 0.$$

Portanto η é constante. •

(IV): Seja $f_* Y + \beta \eta \in \Gamma(f_* TM \oplus \text{ger}\{\eta\})$, logo

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X (f_* Y + \beta \eta) &= f_* \nabla_X Y + \alpha(X, Y) + X(\beta)\eta + \beta \tilde{\nabla}_X \eta = \\ &= f_* \nabla_X Y + [\langle X, Y \rangle + X(\beta)] \eta - \beta f_* A_\eta X + \beta \nabla_X^\perp \eta = \\ &= f_* [\nabla_X Y - \beta \|\eta\|^2 X] + [\langle X, Y \rangle + X(\beta)] \eta \in f_* TM \oplus \text{ger}\{\eta\}. \end{aligned}$$

Resta mostrar que $L = f_* TM \oplus \text{ger}\{\eta\}$ tem dimensão constante. Se $\|\eta\|^2 \neq 0$ em algum ponto de M , então $\|\eta\|^2 \neq 0$ em todos os pontos de M , pelo item (III). Portanto $f_* TM \oplus \text{ger}\{\eta\}$ tem dimensão constante igual a $m + 1$.

Suponhamos que $\eta(x) = 0$ para algum $x \in M$. Nesse caso, pelo item (III), $\eta = 0$ em qualquer ponto de M . Portanto $f_* TM \oplus \text{ger}\{\eta\} = f_* TM$ tem dimensão constante.

Por último, suponhamos que exista $x \in M$ tal que $\eta(x) \neq 0$ e $\|\eta(x)\|^2 = 0$. Nesse caso $\|\eta\| = 0$ em todo ponto de M e η é constante em M (pelos itens (II) e (III)). Logo $f_* TM \oplus \text{ger}\{\eta\}$ tem dimensão constante igual a $m + 1$. •

(V): Seja $x_0 \in M$ um ponto qualquer. Como $L = f_* TM \oplus \text{ger}\{\eta\}$ é paralelo em \mathbb{R}_t^n , segue (pelo Lema A.14) que L^\perp também é paralelo em \mathbb{R}_t^n . Concluimos, pelo Lema A.12, que L e L^\perp não dependem de x , ou seja, são subespaços constantes em \mathbb{R}_t^n .

Seja $\xi \in L^\perp$ um vetor qualquer fixado, logo $X \langle f, \xi \rangle = \langle f_* X, \xi \rangle = 0$. Portanto $\langle f, \xi \rangle$ é constante e $\langle f - f(x_0), \xi \rangle = 0$, ou seja, $f(M) \subset f(x_0) + L$. •

(VI): Se $\|\eta\|^2 \neq 0$ em algum ponto de M , então $\|\eta\|^2 \neq 0$ em todos os pontos de M , pelo item (II). Dessa forma

$$\begin{aligned} d\left(f + \frac{\eta}{\|\eta\|^2}\right)X &= f_*X - \frac{2\langle \nabla_X^\perp \eta, \eta \rangle}{\langle \eta, \eta \rangle^2} \eta + \frac{1}{\|\eta\|^2} \tilde{\nabla}_X \eta = \\ &= f_*X + \frac{1}{\|\eta\|^2} (-f_*A_\eta X + \nabla_X^\perp \eta) = f_*X - \frac{1}{\|\eta\|^2} f_*\|\eta\|^2 X = 0. \end{aligned}$$

Portanto $f + \frac{\eta}{\|\eta\|^2}$ é constante em M . • □

Lema 1.2. *Sejam M_s^m uma variedade pseudoriemanniana (com índice s) e $f: M_s^m \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ uma imersão isométrica umbílica com vetor curvatura média η . Suponhamos que η seja não nulo, tipo luz e paralelo na conexão normal de f e sejam $L := f_*TM \oplus \text{ger}\{\eta\}$, $V \subset L$ um espaço vetorial m -dimensional não degenerado qualquer e $\tilde{\eta} \perp V$ um vetor tipo luz de \mathbb{R}_t^n tal que $\langle \eta, \tilde{\eta} \rangle = 1$. Nessas condições, existe um único campo diferenciável tipo luz $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ tal que*

$$(I) \quad \xi \perp f_*TM, \quad \xi \in L \oplus \text{ger}\{\tilde{\eta}\} \quad \text{e} \quad \langle \xi, \eta \rangle = 1.$$

Além disso

$$(II) \quad \xi \text{ é paralelo na conexão normal de } f, \quad A_\xi \equiv \text{Id} \quad \text{e} \quad p := f + \xi \text{ é constante em } M.$$

Demonstração. Pelo Lema anterior, sabemos que L é um subespaço constante em \mathbb{R}_t^n . Dessa forma, existem um subespaço vetorial m -dimensional não degenerado $V \subset L$ e um vetor tipo luz $\tilde{\eta} \perp V$ tal que $\langle \eta, \tilde{\eta} \rangle = 1$. Além disso, como $L = f_*TM \oplus \text{ger}\{\eta\}$, então V tem índice s , ou seja $V = V_s^m$.

(I): Para cada $x \in M$ fixado podemos escolher uma base ortonormal $\{e_1(x), \dots, e_m(x)\}$ de T_xM e definir

$$v_i(x) := df(x)e_i(x) \quad \text{e} \quad \xi(x) := -\sum_{i=1}^m \langle v_i(x), \tilde{\eta} \rangle v_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle v_i(x), \tilde{\eta} \rangle^2 \eta + \tilde{\eta}.$$

Claramente $\xi(x) \in L \oplus \text{ger}\{\tilde{\eta}\}$. Afirmamos que $\xi(x) \perp f_*T_xM$, que $\langle \xi(x), \eta \rangle = 1$ e que $\xi(x)$ é tipo luz. De fato,

$$\begin{aligned} \langle \xi(x), f_*e_j(x) \rangle &= \left\langle -\sum_{i=1}^m \langle v_i(x), \tilde{\eta} \rangle v_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle v_i(x), \tilde{\eta} \rangle^2 \eta + \tilde{\eta}, v_j(x) \right\rangle = \\ &= -\langle v_j(x), \tilde{\eta} \rangle + \langle \tilde{\eta}, v_j(x) \rangle = 0, \\ \langle \xi(x), \eta \rangle &= \left\langle -\sum_{i=1}^m \langle v_i(x), \tilde{\eta} \rangle v_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle v_i(x), \tilde{\eta} \rangle^2 \eta + \tilde{\eta}, \eta \right\rangle = \langle \tilde{\eta}, \eta \rangle = 1, \\ \langle \xi(x), \xi(x) \rangle &= \sum_{i=1}^m \langle v_i(x), \tilde{\eta} \rangle^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^m \langle v_i(x), \tilde{\eta} \rangle^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle v_i(x), \tilde{\eta} \rangle^2 = 0. \end{aligned}$$

Suponhamos que ζ seja um outro campo tipo luz (não necessariamente diferenciável) tal que $\zeta(x) \in T_x^\perp M$, $\langle \zeta(x), \eta \rangle = 1$ e $\zeta(x) \in L \oplus \text{ger}\{\tilde{\eta}\}$, para qualquer $x \in M$, afirmamos que $\zeta \equiv \xi$.

De fato, como

$$\zeta(x) \in L \oplus \text{ger}\{\tilde{\eta}\} = f_*T_xM \oplus \text{ger}\{\eta, \tilde{\eta}\},$$

então $\zeta(x) = \sum_{i=1}^m a_i(x)v_i(x) + a(x)\eta + b(x)\tilde{\eta}$, para certos $a_i(x), a(x), b(x) \in \mathbb{R}$. Mas

$$1 = \langle \zeta(x), \eta \rangle = b(x) \langle \tilde{\eta}, \eta \rangle = b(x) \Rightarrow \zeta(x) = \sum_{i=1}^m a_i(x)v_i(x) + a(x)\eta + \tilde{\eta}.$$

Fazendo o produto interno de $\zeta(x)$ por $v_j(x)$, obtemos:

$$0 = \langle \zeta(x), v_j(x) \rangle = a_j(x) + \langle \tilde{\eta}, v_j(x) \rangle \Rightarrow a_j(x) = -\langle v_j(x), \tilde{\eta} \rangle.$$

Assim

$$\zeta(x) = -\sum_{i=1}^m \langle v_i(x), \tilde{\eta} \rangle v_i(x) + a(x)\eta + \tilde{\eta}.$$

Por último,

$$0 = \langle \zeta(x), \zeta(x) \rangle = \sum_{i=1}^m \langle v_i(x), \tilde{\eta} \rangle^2 - 2 \sum_{i=1}^m \langle v_i(x), \tilde{\eta} \rangle^2 + 2a(x) \Rightarrow a(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle v_i(x), \tilde{\eta} \rangle^2,$$

ou seja, $\zeta(x) = \xi(x)$. Portanto está provado que ξ é o único campo tipo luz normal a M que satisfaz $\xi \in L \oplus \text{ger} \{\eta, \tilde{\eta}\}$ e $\langle \xi, \eta \rangle = 1$.

Para cada $x \in M$, se escolhermos uma outra base $\{\tilde{e}_1(x), \dots, \tilde{e}_m(x)\}$ de $T_x M$ e definirmos

$$\begin{aligned} \tilde{v}_i(x) &:= df(x)\tilde{e}_i(x) \quad \text{e} \\ \tilde{\xi}(x) &:= -\sum_{i=1}^m \langle \tilde{v}_i(x), \tilde{\eta} \rangle \tilde{v}_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle \tilde{v}_i(x), \tilde{\eta} \rangle^2 \eta + \tilde{\eta}, \end{aligned}$$

então (repetindo as contas anteriores feitas para ξ) sabemos que $\tilde{\xi}$ é um campo tipo luz normal a M e tal que $\tilde{\xi}(x) \in L \oplus \text{ger} \{\tilde{\eta}\}$ e $\langle \tilde{\xi}(x), \eta \rangle = 1$. Dessa forma, pela unicidade do campo ξ , $\tilde{\xi} \equiv \xi$, ou seja, o campo ξ não depende da base ortonormal escolhida em cada $T_x M$.

Como ξ não depende da base escolhida, em cada $T_x M$ podemos escolher campos tangentes e_1, \dots, e_m , definidos em uma vizinhança U de x , tais $\{e_1(y), \dots, e_m(y)\}$ seja uma base ortonormal de $T_y M$, para cada $y \in U$. Dessa forma,

$$\xi(y) = -\sum_{i=1}^m \langle v_i(y), \tilde{\eta} \rangle v_i(y) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle v_i(y), \tilde{\eta} \rangle^2 \eta + \tilde{\eta},$$

em que $v_i(y) = f_* e_i(y)$, logo ξ é diferenciável. •

(III): Sabemos que

$$\langle \alpha(X, Y), \xi \rangle = \langle \langle X, Y \rangle \eta, \xi \rangle = \langle X, Y \rangle,$$

portanto $A_\xi \equiv \text{Id}$.

Por outro lado $\xi(x) \in L \oplus \text{ger} \{\tilde{\eta}\}$ e $L \oplus \text{ger} \{\tilde{\eta}\} = f_* TM \oplus \text{ger} \{\eta, \xi\}$, logo

$$\nabla_X^\perp \xi = \langle \nabla_X^\perp \xi, \eta \rangle \xi + \langle \nabla_X^\perp \xi, \xi \rangle \eta = -\langle \xi, \nabla_X^\perp \tilde{\eta} \rangle \xi = 0.$$

Calculemos $d(f + \xi)$ em um vetor $X \in T_x M$:

$$d(f + \xi)X = f_* X + \tilde{\nabla}_X \xi = f_* X - f_* X = 0.$$

Portanto $p := f + \xi$ é constante em M . •

□

A classificação das imersões isométricas umbílicas em \mathbb{R}_t^n , dada pelo próximo teorema, nada mais é do que um corolário dos Lemas 1.1 e 1.2. Essa classificação pode ser encontrada em [2].

Notação 1.3. Seja $\tau(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0; \\ 0, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Teorema 1.4. *Sejam M_s^m uma variedade pseudoriemanniana, com $m \geq 2$, e $f: M_s^m \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ uma imersão isométrica umbílica com vetor curvatura média η . Nessas condições, $k := \|\eta\|^2$ é constante e $f = h \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M_s^m \rightarrow \mathbb{O}_{s,k}^{m+1}$ é uma isometria local e $h: \mathbb{O}_{s,k}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ é uma imersão isométrica umbílica. Além disso:*

- (I) *Se $\eta = 0$, então existem um ponto $p \in \mathbb{R}_t^n$ e uma aplicação linear isométrica $H: \mathbb{R}_s^m \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ tais que $h(x) := p + H(x)$.*
- (II) *Se $k \neq 0$ (ie., η é tipo espaço ou tipo tempo), então existem um ponto $p \in \mathbb{R}_t^n$ e uma aplicação linear isométrica $H: \mathbb{R}_{s+\tau(k)}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ tais que $h(x) := p + H(x)$. Além disso*

$$f(M) \subset p + \mathbb{S}(0, \varepsilon r) \cap H\left(\mathbb{R}_{s+\tau(k)}^{m+1}\right),$$

em que $r := \|\eta\|^{-1}$ e $\varepsilon := \frac{k}{|k|}$.

- (III) *Se f não é totalmente geodésica e $k = 0$ (η tipo luz), então existem um subespaço vetorial não degenerado $V_s^m \subset \mathbb{R}_t^n$, vetores tipo luz $a, b \perp V$ e um ponto $p \in \mathbb{R}_t^n$ tais que $\langle a, b \rangle = 1$,*

$$f(M) \subset p + a + \left\{ v - \frac{\|v\|^2}{2} b : v \in V \right\},$$

e $h: \mathbb{R}_s^m \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ é dada por

$$h(x) := p + a + H(x) - \frac{\|x\|^2}{2} b,$$

em que $H: \mathbb{R}_s^m \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ é uma aplicação linear isométrica tal que $H(\mathbb{E}_s^m) = V$.

O teorema anterior classifica todas as imersões isométricas totalmente geodésicas em \mathbb{R}_t^n , inclusive as curvas. Isso ocorre porque, se f é totalmente geodésica, então $\eta = 0$ é paralelo na conexão normal de f e, sendo η paralelo, as conclusões do Lema 1.1 continuam válidas, inclusive para $m = 1$.

Observações 1.5. (I) *Pelo Lema 1.1, $L := f_*T_xM \oplus \text{ger}\{\eta(x)\}$ é um subespaço constante de \mathbb{R}_t^n .*

- (II) *No item (I) do teorema anterior, o ponto p é dado por $p := f(x_0)$, em que $x_0 \in M$ é um ponto fixado qualquer, e a função \bar{f} é dada por*

$$\bar{f}(x) = H^{-1}(f(x) - p),$$

em que $H: \mathbb{R}_s^m \rightarrow L$ é uma isometria linear.

- (III) *Já no item (II) do teorema anterior, o ponto p é dado por $p := f + \frac{\eta}{\|\eta\|^2}$ e a função \bar{f} é dada por*

$$\bar{f}(x) = H^{-1}(f(x) - p),$$

em que $H: \mathbb{R}_{s+\tau(\varepsilon)}^{m+1} \rightarrow L$ é uma isometria linear e ε é o sinal de η .

(IV) Por último, no item (III) do teorema anterior, podemos tomar $V_s^m \subset L^{m+1}$ um subespaço vetorial não degenerado qualquer. Nesse caso os vetores a, b e o ponto p são dados por $a := -\tilde{\eta}$, $b := -\eta$ e $p := f + \xi$, em que ξ e $\tilde{\eta}$ são como no Lema 1.2. Além disso, a função \bar{f} é dada por

$$\bar{f}(x) := H^{-1} [\Pi(f(x) - p - \tilde{\eta})],$$

em que $H: \mathbb{R}_s^m \rightarrow V$ é a isometria linear e $\Pi: \mathbb{R}_t^n \rightarrow V$ é uma projeção ortogonal.

Prova do Teorema 1.4. Pelo Lema 1.1, η é paralelo na conexão normal de f , $k := \|\eta\|^2$ é constante, $L := L(x) := f_*T_xM \ominus \text{ger} \{\eta(x)\}$ é um subespaço vetorial fixo de \mathbb{R}_t^n e $f(M) \subset f(x_0) + L$, sendo $x_0 \in M$ um ponto fixado qualquer de M .

(I): Suponhamos que $\eta = 0$. Assim, $L = f_*TM \ominus \text{ger} \{\eta\} = f_*TM$ e $\dim L = m$. Portanto $f(M)$ é um subconjunto aberto de $p + L$, com $p := f(x_0)$.

Seja $H: \mathbb{R}_s^m \rightarrow L$ uma isometria linear. Dessa forma, a função $\bar{f}: M_s^m \rightarrow \mathbb{R}_s^m$ dada por

$$\bar{f}(x) := H^{-1}(f(x) - p)$$

é uma isometria local e $f = p + H \circ \bar{f}$. •

Suponhamos agora que f não seja totalmente geodésica.

(II): Caso $k \neq 0$ (η tipo espaço ou tipo tempo).

Neste caso, como $k = \|\eta\|^2$ é constante, então η é tipo espaço (ou tipo tempo) em todos os pontos de M . Afirmamos que $f(M)$ é um subconjunto aberto de $p + \mathbb{S}(0, \varepsilon r) \cap L$, em que $\varepsilon = \frac{k}{|k|}$, $r = \frac{1}{\|\eta\|}$ e $p = f(x) + \frac{\eta}{\|\eta\|^2}$ são constantes.

De fato, ε , $p = f(x) + \frac{\eta}{\|\eta\|^2}$ e r são constantes pelo Lema 1.1. Assim $f(x) \in \mathbb{S}(p, \varepsilon r)$. Além disso, como L é uma distribuição paralela em \mathbb{R}_t^n , o mesmo vale para L^\perp . Dessa forma, se $\{\xi_{m+2}, \dots, \xi_n\}$ é uma base ortonormal de L^\perp , então $X \langle f(x), \xi_i \rangle = 0$ e $\langle f(x), \xi_i \rangle = c_i$ é constante.

Concluimos que $f(M) \subset \mathbb{S}(p, \varepsilon r) \cap (a + L)$, para qualquer $a \in \mathbb{R}_t^n$ que satisfaça $\langle a, \xi_i \rangle = c_i$. Mas $\langle p, \xi_i \rangle = \langle f(x) + \frac{\eta(x)}{\|\eta(x)\|^2}, \xi_i \rangle = \langle f(x), \xi_i \rangle = c_i$. Portanto $f(M)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{S}(p, \varepsilon r) \cap (p + L)$, pois $m = \dim M = \dim [\mathbb{S}(p, \varepsilon r) \cap (p + L)]$.

Seja $H: \mathbb{R}_{s+\tau(\varepsilon)}^{m+1} \rightarrow L$ uma isometria linear. Se $\mathbb{S}(0, \varepsilon r) \subset \mathbb{R}_{s+\tau(\varepsilon)}^{m+1}$ não for conexo, tomemos como modelo de $\mathbb{O}_{s,k}^m$ a componente conexa de $\mathbb{S}(0, \varepsilon r)$ tal que $f(M) \subset p + H(\mathbb{O}_{s,k}^m)$. Dessa forma, a função $\bar{f}: M_s^m \rightarrow \mathbb{O}_{s,k}^m$, dada por

$$\bar{f}(x) := H^{-1}(f(x) - p),$$

é uma isometria local e $f = p + H \circ \bar{f}$. •

(III): Caso $k = 0$ (η tipo luz).

Neste caso η é constante em M , pelo Lema 1.1. Já pelo Lema 1.2, dados $V_s^m \subset L$ um subespaço vetorial não degenerado qualquer e $\tilde{\eta} \perp V$ um vetor tipo luz de \mathbb{R}_t^n tal que $\langle \eta, \tilde{\eta} \rangle = 1$, existe um único campo diferenciável tipo luz $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ tal que

$$\langle \xi, \eta \rangle = 1 \quad \text{e} \quad \xi \in L + \text{ger} \{\tilde{\eta}\}.$$

Além disso ξ é paralelo na conexão normal de f , $A_\xi \equiv \text{Id}$ e $f + \xi = p$ é constante em M .

Como $\xi \in f_*TM \oplus \text{ger} \{\eta, \tilde{\eta}\}$ e $\langle \xi, \eta \rangle = 1$, então

$$\xi = f_*v + \beta\eta + \gamma\tilde{\eta} \quad \text{e} \quad 1 = \langle \xi, \eta \rangle = \gamma \langle \tilde{\eta}, \eta \rangle = \gamma.$$

Logo $\xi = f_*v + \beta\eta + \tilde{\eta}$.

Afirmção 1: $f(M) \subset p - \tilde{\eta} + L$, em que $p = f + \xi$ é constante (pelo Lema 1.2).

Basta mostrar que $f(x) - p + \tilde{\eta} \in L$, para qualquer $x \in M$. Mas

$$f - p + \tilde{\eta} = -\xi + \tilde{\eta} = -f_*v - \beta\eta - \tilde{\eta} + \tilde{\eta} = -f_*v - \beta\eta.$$

Portanto $f(x) - p + \tilde{\eta} \in L$. \checkmark

Afirmção 2: $f(M) \subset p + \mathcal{L} \cap (-\tilde{\eta} + L) = p - \tilde{\eta} + \left\{v + \frac{\|v\|^2}{2}\eta : v \in V\right\}$.

Já sabemos, pela afirmção anterior, que $f - p \in -\tilde{\eta} + L$. Por outro lado, $\xi = f - p \in \mathcal{L}$, logo $f - p \in \mathcal{L} \cap (-\tilde{\eta} + L)$. Além disso, $\mathcal{L} \cap (-\tilde{\eta} + L) = -\tilde{\eta} + \left\{v + \frac{\|v\|^2}{2}\eta : v \in V\right\}$. \checkmark

Seja $\Pi: \mathbb{R}_t^n \rightarrow V$ a projeção ortogonal. Assim, pela Afirmção 2,

$$f(x) = p - \tilde{\eta} + \Pi(f(x) - p) + \frac{\|\Pi(f(x) - p)\|^2}{2}\eta.$$

Sejam $H: \mathbb{R}_s^m \rightarrow V$ uma isometria linear e $\bar{f}: M_s^m \rightarrow \mathbb{R}_s^m$ e $h: \mathbb{R}_s^m \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ dadas por

$$\bar{f}(x) := (H^{-1} \circ \Pi)(f(x) - p) \quad \text{e} \quad h(x) := p - \tilde{\eta} + H(x) + \frac{\|x\|^2}{2}\eta,$$

então \bar{f} é uma isometria local e

$$f(x) = p - \tilde{\eta} + H(\bar{f}(x)) + \frac{\|\bar{f}(x)\|^2}{2}\eta = (h \circ \bar{f})(x). \quad \bullet \quad \square$$

Lema 1.6. Sejam $\mathbb{S}(c, \varepsilon r) \subset \mathbb{R}_t^n$ (com $\varepsilon = \pm 1$ e $r > 0$), M_s^m uma variedade pseudoriemanniana e $f: M_s^m \rightarrow \mathbb{S}(c, \varepsilon r)$ uma imersão isométrica umbílica com vetor curvatura média η . Nessas condições, se $\iota: \mathbb{S}(c, \varepsilon r) \hookrightarrow \mathbb{R}_t^n$ é a inclusão e $F := \iota \circ f$, então η é paralelo na conexão normal de f se, e somente se, $\sigma := \iota_*\eta - \frac{\varepsilon}{r^2}(F - c)$ é paralelo na conexão normal de F .

Demonstração. Sejam $X \in \Gamma(TM)$ e $k := \frac{\varepsilon}{r^2}$. Assim

$$\tilde{\nabla}_X \sigma = \tilde{\nabla}_X [\iota_*\eta - k(F - c)] = \iota_*\tilde{\nabla}_X \eta - kF_*X = -F_* (A_\eta^f X + kX) + \iota_*\nabla_X^\perp \eta.$$

Portanto η é paralelo na conexão normal de f se, e somente se, σ é paralelo na conexão normal de F . \square

Corolário 1.7. Sejam $\mathbb{S}(c, \varepsilon r) \subset \mathbb{R}_t^n$ (com $\varepsilon = \pm 1$ e $r > 0$), M_s^m uma variedade pseudoriemanniana e $f: M_s^m \rightarrow \mathbb{S}(c, \varepsilon r)$ uma imersão isométrica umbílica com vetor curvatura média η . Nessas condições, $k := \|\eta\|^2 + \varepsilon/r^2$ é constante e $f = h \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M_s^m \rightarrow \mathbb{O}_{s,k}^m$ é uma isometria local e $h: \mathbb{O}_{s,k}^m \rightarrow \mathbb{S}(c, \varepsilon r)$ é uma imersão isométrica umbílica. Além disso,

(I) Se $k \neq 0$, então existem um subespaço vetorial não degenerado $L_{s+\tau(k)}^{m+1} \subset \mathbb{R}_t^n$ e um vetor $Y \perp L$ tais que

$$\|Y\|^2 = \frac{\|\eta\|^2}{k}, \quad f(M) \subset \mathbb{S}(c, \varepsilon r) \cap (c + Y + L)$$

e $h: \mathbb{O}_{s,k}^m \rightarrow \mathbb{S}(c, \varepsilon r)$ é dada por $h(x) := c + Y + H(x)$, em que $H: \mathbb{R}_{s+\tau(k)}^{m+1} \rightarrow L_{s+\tau(k)}^{m+1}$ é uma isometria linear.

(II) Se $k = 0$, então existem um subespaço vetorial não degenerado $V_s^m \subset \mathbb{R}_t^n$, vetores tipo luz $a, b \perp V$ e um ponto $p \in \mathcal{L} \cap (V \oplus \text{ger}\{b\})^\perp$ tais que

$$\langle p, a \rangle = \frac{\varepsilon}{r^2}, \quad f(M) \subset c + p + a + \left\{ v - \frac{\|v\|^2}{2}b : v \in V \right\}$$

e $h: \mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{S}(c, \varepsilon r)$ é dada por

$$h(x) = c + p + a + H(x) - \frac{\|x\|^2}{2}b,$$

em que $H: \mathbb{E}^m \rightarrow V$ é uma isometria linear.

Prova do Corolário 1.7. Seja $\iota: \mathbb{S}(c, \varepsilon r) \hookrightarrow \mathbb{R}_t^n$ a inclusão umbílica, logo, pelo Lema A.11, a aplicação $F = \iota \circ f$ também é umbílica com vetor curvatura média σ dado por

$$\sigma = \iota_*\eta - \frac{\varepsilon}{r^2}(F - c) = \iota_*\eta - \tilde{k}(F - c),$$

em que $\tilde{k} := \varepsilon/r^2$ é a curvatura seccional de $\mathbb{S}(c, \varepsilon r)$.

Calculemos $\|\sigma\|^2$:

$$\|\sigma\|^2 = \|\iota_*\eta - \tilde{k}(F - c)\|^2 = \|\eta\|^2 + \tilde{k}^2\|F - c\|^2 = \|\eta\|^2 + \tilde{k} = k.$$

Pelo Teorema 1.4, $F = \tilde{h} \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{s,k}^m$ é uma isometria local e $\tilde{h}: \mathbb{O}_{s,k}^m \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ é uma imersão isométrica umbílica. Sejam $h: \mathbb{O}_{s,k}^m \rightarrow \mathbb{S}(c, \varepsilon r)$ dada por $h(x) := \tilde{h}(x)$, ζ o vetor curvatura média de \tilde{h} e $Y, Z \in \Gamma(T\mathbb{O}_{s,k}^m)$. Assim

$$\alpha_{\tilde{h}}(Y, Z) = \langle Y, Z \rangle \zeta = \iota_*\alpha_h(Y, Z) + \alpha_\iota(h_*Y, h_*Z) = \iota_*\alpha_h(Y, Z) - \langle Y, Z \rangle \tilde{k}(\tilde{h} - c).$$

Portanto h é umbílica com vetor curvatura média ξ dado por $\iota_*\xi := \zeta + \tilde{k}(\tilde{h} - c)$ e $f = h \circ \bar{f}$.

(I): Suponhamos que $k \neq 0$.

Neste caso, pelo item (II) do Teorema 1.4, sabemos que

$$F(M) \subset \tilde{p} + \mathbb{S}(0, R) \cap L_{\tau(k)}^{m+1},$$

e que $R := \frac{k}{|k|\sqrt{|k|}}$, $\tilde{h}: \mathbb{O}_k^m \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ é a imersão isométrica umbílica dada por $\tilde{h}(x) = \tilde{p} + H(x)$ e $H: \mathbb{R}_{\tau(k)}^{m+1} \rightarrow L_{\tau(k)}^{m+1}$ é uma isometria linear. Além disso, pelas Observações 1.5, o ponto \tilde{p} é dado por

$$\tilde{p} = F + \frac{\sigma}{\|\sigma\|^2} = c + (F - c) + \frac{\sigma}{\|\sigma\|^2}.$$

Seja Y o vetor constante dado por $Y := F - c + \frac{\sigma}{\|\sigma\|^2}$.

Afirmção 1: $Y = 0$ se, e somente se, $\eta = 0$.

$$\begin{aligned} \|Y\|^2 &= \left\| F - c + \frac{\sigma}{\|\sigma\|^2} \right\|^2 = \frac{1}{k} + 2 \left\langle F - c, \frac{\sigma}{\|\sigma\|^2} \right\rangle + \frac{1}{\|\sigma\|^2} = \\ &= \frac{1}{\tilde{k}} + \frac{2 \left\langle F - c, \iota_*\eta - \tilde{k}(F - c) \right\rangle + 1}{k} = \frac{1}{\tilde{k}} - \frac{1}{k} = \\ &= \frac{k - \tilde{k}}{\tilde{k}k} = \frac{\|\eta\|^2}{\tilde{k}k}. \end{aligned}$$

Logo, $Y = 0$ implica $\eta = 0$. Por outro lado, se $\eta = 0$, então $\sigma = -\tilde{k}(F - c)$, assim $Y = F - c - \frac{\tilde{k}(F-c)}{\tilde{k}} = 0$. ✓

Afirmção 2: $Y \perp L$.

$$\begin{aligned}\langle Y, F_*X \rangle &= \left\langle (F - c) + \frac{\sigma}{\|\sigma\|^2}, F_*X \right\rangle = 0, \\ \langle Y, \sigma \rangle &= \langle (F - c), \sigma \rangle + \left\langle \frac{\sigma}{\|\sigma\|^2}, \sigma \right\rangle = \\ &= \langle (F - c), \iota_*\eta - \tilde{k}(F - c) \rangle + 1 = -1 + 1 = 0.\end{aligned}$$

Logo $Y \perp L$. ✓

Como $Y \perp L$ e $\tilde{p} = c + (F - c) + \frac{\sigma}{\|\sigma\|^2} = c + Y$, então

$$\begin{aligned}f(M) &\subset \mathbb{S}(\tilde{p}, R) \cap (\tilde{p} + L) \cap \mathbb{S}(c, \varepsilon r) = \mathbb{S}(c, \varepsilon r) \cap (c + Y + L) \quad \text{e} \\ h(x) &= c + Y + H(x).\end{aligned}$$

Portanto vale o item (I). •

(II): Suponhamos agora que $k = 0$.

Neste caso σ é constante, pelo Lema 1.1. Além disso, pelo item (III) do Teorema 1.4, sabemos que

$$F(M) \subset \tilde{p} + a + \left\{ v - \frac{\|v\|^2}{2}b : v \in V \right\}$$

e que $\tilde{h}: \mathbb{R}_s^m \rightarrow \mathbb{R}_t^{n+1}$ é dada por

$$\tilde{h}(x) = \tilde{p} + a + H(x) - \frac{\|x\|^2}{2}b,$$

em que $H: \mathbb{R}_s^m \rightarrow V$ é uma isometria linear. Além disso, pelas Observações 1.5, $V = V_s^m$ é um subespaço não degenerado qualquer de $L^{m+1} = F_*TM \oplus \text{ger} \{ \sigma \}$, $a = -\tilde{\sigma}$, $b = -\sigma$ e $\tilde{p} = F + \xi$, em que ξ e $\tilde{\sigma}$ são como no Lema 1.2.

Fixado um ponto $x_0 \in M$, podemos supor que $V = F_*T_{x_0}M$. Além disso, como o vetor σ é um vetor fixo de \mathbb{R}_t^n , então

$$\sigma = \sigma(x_0) = \iota_*\eta(x_0) - \tilde{k}(F(x_0) - c).$$

Como, pelo Lema 1.2, $\tilde{\sigma}$ é um vetor tipo luz qualquer que satisfaz $\tilde{\sigma} \perp V$ e $\langle \tilde{\sigma}, \sigma \rangle = 1$, podemos então supor que $\tilde{\sigma}$ é dado pela seguinte fórmula:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma} &:= \frac{\iota_*\eta(x_0) + \tilde{k}(F(x_0) - c)}{\|\eta\|^2 - \tilde{k}} = \frac{\iota_*\eta(x_0) - \tilde{k}(F(x_0) - c) + 2\tilde{k}(F(x_0) - c)}{-2\tilde{k}} = \\ &= -\frac{\sigma + 2\tilde{k}(F(x_0) - c)}{2\tilde{k}} = -\frac{\sigma}{2\tilde{k}} - F(x_0) + c.\end{aligned}$$

Dessa forma, se $\{e_1, \dots, e_m\}$ é um referencial ortonormal de TM em uma vizinhança de x_0 , então

$$\tilde{p} = F + \xi = F - \sum_{i=1}^m \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle f_*e_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle^2 \sigma + \tilde{\sigma} = F(x_0) + \tilde{\sigma}.$$

Tomando $p := \tilde{p} - c = F(x_0) - c + \tilde{\sigma}$, a função \tilde{h} é dada por

$$\tilde{h}(x) = c + p - \tilde{\sigma} + H(x) + \frac{\|x\|^2}{2}\sigma.$$

Resta mostrar que $p \in \mathcal{L} \cap (V \oplus \text{ger}\{\sigma\})^\perp$ e que $\langle p, \tilde{\sigma} \rangle = -\frac{1}{2k}$.

$$\|p\|^2 = \|F(x_0) - c\|^2 + 2\langle F(x_0) - c, \tilde{\sigma} \rangle = \frac{1}{k} + 2\left\langle F(x_0) - c, \frac{\iota_*\eta + \tilde{k}(F(x_0) - c)}{-2\tilde{k}} \right\rangle = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = 0.$$

$$\langle p, F_*X(x_0) \rangle = \langle F(x_0) - c + \tilde{\sigma}, F_*X(x_0) \rangle = 0.$$

$$\langle p, \sigma \rangle = \langle F(x_0) - c + \tilde{\sigma}, \sigma \rangle = \left\langle F(x_0) - c, \iota_*\eta - \tilde{k}(F(x_0) - c) \right\rangle + 1 = -1 + 1 = 0.$$

$$\langle p, \tilde{\sigma} \rangle = \langle F(x_0) - c + \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma} \rangle = \left\langle F(x_0) - c, \frac{\iota_*\eta + \tilde{k}(F(x_0) - c)}{-2\tilde{k}} \right\rangle = -\frac{1}{2k}.$$

Portanto $p \in \mathcal{L} \cap (V \oplus \text{ger}\{\sigma\})^\perp$ e $\langle p, \tilde{\sigma} \rangle = -\frac{1}{2k}$. □

Observação 1.8. O Teorema 1.4 e o Corolário 1.7 classificam todas as imersões isométricas umbílicas de variedades pseudorriemannianas em formas espaciais pseudorriemannianas. Para ver isso, basta tomarmos como modelo de $\mathbb{O}_{t,k}^n$ o espaço \mathbb{R}_t^n , caso $k = 0$; ou uma componente conexa de $\mathbb{S}(0, \varepsilon r)$, em que $\varepsilon := \frac{k}{|k|}$, $r := \frac{1}{\sqrt{|k|}}$ e $\mathbb{S}(0, \varepsilon r) \subset \mathbb{R}_{t+\tau(\varepsilon)}^{n+1}$, caso $k \neq 0$. Esses resultados também classificam todas as imersões isométricas totalmente geodésicas de variedades pseudorriemannianas em formas espaciais pseudorriemannianas, inclusive as curvas totalmente geodésicas.

Capítulo 2

Subvariedades de rotação em \mathbb{R}_t^n

Sejam $\mathbb{R}^{n-q-1} \subset \mathbb{R}^{n-q}$ dois subespaços vetoriais de \mathbb{R}_t^n , com $1 \leq q \leq n - 2$. Denotemos por $O_t(n)$ o grupo de todas as isometrias lineares de \mathbb{R}_t^n e por $O(q + 1)$ o subgrupo do grupo $O_t(n)$ que fixa os pontos de \mathbb{R}^{n-q-1} . Consideremos $f: N^{m-q} \rightarrow \mathbb{R}^{n-q}$ uma imersão tal que $f(N) \cap \mathbb{R}^{n-q-1} = \emptyset$. Nessas condições, uma **subvariedade de rotação** sobre f é a união das órbitas dos pontos de $f(N)$ sob a ação do grupo $O(q + 1)$, ou seja, é o conjunto

$$\{A(f(x)): x \in N \text{ e } A \in O(q + 1)\}.$$

O subespaço \mathbb{R}^{n-q-1} é chamado de **eixo de rotação**.

No caso euclidiano ($\mathbb{R}_t^n = \mathbb{E}^n$), a definição acima coincide com a definição dada em [9]. Uma definição mais geral de subvariedade de rotação em \mathbb{E}^n pode ser encontrada em [16], e ainda mais geral é a definição de "*extrinsic warped products*" feita em [22]. Em [13] Dajczer e do Carmo definem hipersuperfícies de rotação em formas espaciais e em [12] Dillen *et al* definem hipersuperfícies de rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

A primeira seção deste capítulo faz um estudo preliminar das subvariedades de rotação em \mathbb{R}_t^n e caracteriza algumas dessas subvariedades de rotação através de uma imersão que será chamada de imersão de rotação. Utilizando essa imersão de rotação, a primeira seção também classifica todas as subvariedades de rotação em \mathbb{L}^n (ver Proposição 2.2 e Corolário 2.7).

Sejam M_s^m e N_t^n variedades pseudoriemannianas e $f: M_s^m \rightarrow N_t^n$ uma imersão isométrica. Dado um vetor $\eta \in T_x^\perp M$, definimos o espaço **normalidade conforme** de η em x por $E_\eta(x) := \{X \in T_x M: \alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle \eta, \forall Y \in T_x M\}$. Dizemos que $\eta \in \Gamma(T^\perp M)$ é uma **normal principal** de f se $\dim E_\eta(x) \geq 1$, para todo $x \in M$. Se η for uma normal principal, E_η tiver dimensão constante e η for paralelo na conexão normal de f ao longo de E_η , então η será chamado de **normal de Dupin**. Neste caso, o número $\dim E_\eta$ será chamado de **multiplicidade** de η .

Uma distribuição \mathcal{D} em uma variedade riemanniana M^n é dita **umbílica** se existe um campo $\varphi \in \Gamma(\mathcal{D}^\perp)$ tal que $\nabla_X^h Y = \langle X, Y \rangle \varphi$, para quaisquer $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$, em que $\nabla_X^h Y$ é a projeção ortogonal de $\nabla_X Y$ sobre \mathcal{D}^\perp . Neste caso o vetor φ é chamado de **vetor curvatura média** de \mathcal{D} . Se \mathcal{D} é uma distribuição umbílica e seu vetor curvatura média é nulo em todo ponto ($\varphi \equiv 0$), então a distribuição \mathcal{D} é chamada de **totalmente geodésica**. \mathcal{D} é dita **esférica** se \mathcal{D} é umbílica e $\nabla_X^h \varphi = 0$, para qualquer $X \in \Gamma(\mathcal{D})$.

O principal objetivo deste capítulo é generalizar um resultado de [9] que fornece condições suficientes para que uma imersão em \mathbb{E}^n seja uma subvariedade de rotação. Essa generalização, provada na segunda seção, é o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Sejam M^m uma variedade riemanniana, $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ uma imersão isométrica e η uma normal de Dupin de f com multiplicidade q tal que $\eta \neq 0$ em todo ponto de M . Suponhamos que E_η^\perp seja totalmente geodésica em M^m . Nessas condições, existe uma subvariedade de rotação g tal que $f(M)$ é um subconjunto aberto da imagem de g . Além disso, ocorre um dos casos abaixo.*

- (I) *Existe uma decomposição ortogonal $\mathbb{R}_t^n = \mathbb{E}^{q+1} \oplus \mathbb{R}_t^{m-q-1}$ tal que $g: N^{m-q} \times \mathbb{S}^q \rightarrow \mathbb{E}^{q+1} \oplus \mathbb{R}_t^{m-q-1}$ é dada por*

$$g(x, y) = p + r(x)y + h(x),$$

em que $p \in \mathbb{R}_t^n$ é um ponto fixo, $r(x) > 0$, $r(x)y \in \mathbb{E}^{q+1}$, $h(x) \in \mathbb{R}_t^{m-q-1}$ e \mathbb{R}_t^{m-q-1} é o eixo de rotação.

- (II) *Existe uma decomposição ortogonal $\mathbb{R}_t^n = \mathbb{L}^{q+1} \oplus \mathbb{R}_{t-1}^{m-q-1}$ tal que $g: N^{m-q} \times \mathbb{S}(0, -1) \rightarrow \mathbb{L}^{q+1} \oplus \mathbb{R}_{t-1}^{m-q-1}$ é dada por*

$$g(x, y) = p + r(x)y + h(x),$$

em que $p \in \mathbb{R}_t^n$ é um ponto fixo, $\mathbb{S}(0, -1) \subset \mathbb{L}^{q+1}$, $r(x) > 0$, $r(x)y \in \mathbb{L}^{q+1}$, $h(x) \in \mathbb{R}_{t-1}^{m-q-1}$ e \mathbb{R}_{t-1}^{m-q-1} é o eixo de rotação.

- (III) *Existem vetores tipo luz $e_1, e_2 \in \mathbb{R}_t^n$ e uma decomposição ortogonal $\mathbb{R}_t^n = \text{ger}\{e_1, e_2\} \oplus \mathbb{E}^q \oplus \mathbb{R}_{t-2}^{n-q-2}$ tais que $\langle e_1, e_2 \rangle = 1$ e $g: N^{m-q} \times \mathbb{E}^q \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ é dada por*

$$g(x, y) = q + g_1(x)e_1 + \left[g_2(x) - g_1(x) \frac{\|y\|^2}{2} \right] e_2 + g_1(x)y + g_3(x),$$

em que $q \in \mathbb{R}_t^n$ é um ponto fixo, $g_1(x) > 0$, $g_3(x) \in \mathbb{R}_{t-s-2}^{n-q-2}$ e $\text{ger}\{e_2\} \oplus \mathbb{R}_{t-2}^{n-q-2}$ é o eixo de rotação.

2.1 Subvariedades de rotação em \mathbb{R}_t^n

Denotaremos $\mathcal{L} \setminus \{0\}$ por \mathcal{L}_* , ou seja,

$$\mathcal{L}_* := \mathcal{L} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R}_t^n : \|x\|^2 = 0 \text{ e } x \neq 0\}.$$

A seguinte proposição caracteriza algumas das subvariedades de rotação em \mathbb{R}_t^n através de uma imersão, que será chamada de imersão de rotação.

Proposição 2.2. *Sejam $\mathbb{R}^{n-q-1} \subset \mathbb{R}^{n-q}$ dois subespaços vetoriais de \mathbb{R}_t^n e $f: N^{m-q} \rightarrow \mathbb{R}^{n-q}$ uma imersão tal que $f(N) \cap \mathbb{R}^{n-q-1} = \emptyset$. Sejam também M a subvariedade de rotação sobre f , com eixo \mathbb{R}^{n-q-1} .*

- (I) *Suponhamos que \mathbb{R}^{n-q-1} tenha índice s (ie. $\mathbb{R}^{n-q-1} = \mathbb{R}_s^{n-q-1}$) e sejam $\mathbb{R}_{t-s}^{q+1} := (\mathbb{R}_s^{n-q-1})^\perp$ e $\pi: \mathbb{R}_t^n \rightarrow \mathbb{R}_s^{n-q-1}$ a projeção ortogonal de $\mathbb{R}_t^n = \mathbb{R}_{t-s}^{q+1} \oplus \mathbb{R}_s^{n-q-1}$ sobre \mathbb{R}_s^{n-q-1} .*

- (I.1) *Se \mathbb{R}^{n-q} tem índice s ($\mathbb{R}^{n-q} = \mathbb{R}_s^{n-q}$), sejam $\mathbb{S}(0, 1) \subset \mathbb{R}_{t-s}^{q+1}$ e $X_1 \in \mathbb{R}_s^{n-q} \cap (\mathbb{R}_s^{n-q-1})^\perp$ um vetor unitário tipo espaço. Neste caso, definamos \bar{M} e $g: N \times \mathbb{S}(0, 1) \rightarrow \bar{M}$ por*

$$\bar{M} := \{f_1(x)\xi + \pi(f(x)) : x \in N \text{ e } \xi \in \mathbb{S}(0, 1)\} \quad \text{e} \quad g(x, \xi) := f_1(x)\xi + \pi(f(x)),$$

em que $f_1(x) := \langle f(x), X_1 \rangle$.

(I.2) Se $\mathbb{R}^{n-q} = \mathbb{R}_{s+1}^{n-q}$, sejam $\mathbb{S}(0, -1) \subset \mathbb{R}_{t-s}^{q+1}$ e $X_1 \in \mathbb{R}_{s+1}^{n-q} \cap (\mathbb{R}_s^{n-q-1})^\perp$ um vetor unitário tipo tempo. Neste caso, definamos \bar{M} e $g: N \times \mathbb{S}(0, -1) \rightarrow \bar{M}$ por

$$\bar{M} := \{f_1(x)\xi + \pi(f(x)) : x \in N \text{ e } \xi \in \mathbb{S}(0, -1)\} \quad \text{e} \quad g(x, \xi) := f_1(x)\xi + \pi(f(x)),$$

em que $f_1(x) := -\langle f(x), X_1 \rangle$.

(I.3) Se \mathbb{R}^{n-q} é tipo luz (degenerado), sejam $\mathcal{L}_* \subset \mathbb{R}_{t-s}^{q+1}$ e $X_1 \in \mathbb{R}^{n-q} \cap (\mathbb{R}_s^{n-q-1})^\perp$ um vetor tipo luz. Neste caso, definamos \bar{M} e $g: N \times \mathcal{L}_* \rightarrow \bar{M}$ por

$$\bar{M} := \{f_1(x)\xi + \pi(f(x)) : x \in N \text{ e } \xi \in \mathcal{L}_*\} \quad \text{e} \quad g(x, \xi) := f_1(x)\xi + \pi(f(x)),$$

em que $f_1(x)$ é a componente de $f(x)$ na direção de X_1 , ou seja, $f(x) = f_1(x)X_1 + \pi(f(x))$.

(II) Suponhamos que \mathbb{R}^{n-q-1} seja tipo luz (degenerado) e que existam subespaços vetoriais não degenerados $U, V \subset \mathbb{R}_t^n$ e vetores tipo luz X_1 e X_2 tais que $\langle X_1, X_2 \rangle = 1$, $\mathbb{R}^{n-q-1} = \text{ger}\{X_2\} \oplus U$ e $\mathbb{R}_t^n = \text{ger}\{X_1, X_2\} \oplus U \oplus V$. Neste caso, seja $\pi: \text{ger}\{X_1\} \oplus V \oplus \mathbb{R}^{n-q-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-q-1}$ a projeção.

(II.1) Se $\mathbb{R}^{n-q} = \text{ger}\{X_1, X_2\} \oplus U$, definamos \bar{M} e $g: N \times V \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ por

$$\bar{M} := \left\{ f_1(x) \left(X_1 + v - \frac{\|v\|^2}{2} X_2 \right) + \pi(f(x)) : x \in N \text{ e } v \in V \right\} \quad \text{e}$$

$$g(x, v) := f_1(x) \left(X_1 + v - \frac{\|v\|^2}{2} X_2 \right) + \pi(f(x)),$$

em que $f_1(x) = \langle f(x), X_2 \rangle$.

(II.2) Se $\mathbb{R}^{n-q} = \text{ger}\{w, X_2\} \oplus U$, em que $w \in V$ é um vetor unitário, consideremos $\varepsilon := \|w\|^2$ e $\mathbb{S}(0, \varepsilon) \subset V$ e definamos \bar{M} e $g: N \times \mathbb{S}(0, \varepsilon) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ por

$$\bar{M} := \{f_1(x)(\lambda X_2 + \xi) + \pi(f(x)) : x \in N, \xi \in \mathbb{S}(0, \varepsilon) \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{e}$$

$$g(x, \xi, \lambda) := f_1(x)(\lambda X_2 + \xi) + \pi(f(x)),$$

em que $f_1(x) = \varepsilon \langle f(x), w \rangle$.

Em qualquer caso $M = \bar{M}$. Além disso g é uma imersão nos casos (I.1), (I.2) e (II.1). Com a hipótese adicional de que N é uma variedade riemanniana e f é uma imersão isométrica, g também é uma imersão nos casos (I.3) e (II.2).

Demonstração do caso (I) da Proposição 2.2. Seja $M := \{A(f(x)) : x \in N \text{ e } A \in O(q+1)\}$ a subvariedade de rotação sobre f . Mostraremos que $M = \bar{M}$ e que f é uma imersão.

(I.1): Suponhamos que $\mathbb{R}^{n-q} = \mathbb{R}_s^{n-q}$. Como \mathbb{R}_s^{n-q-1} é um subespaço vetorial de \mathbb{R}_s^{n-q} , então existe um vetor unitário tipo espaço $X_1 \in \mathbb{R}_s^{n-q} \cap (\mathbb{R}_s^{n-q-1})^\perp$. Dessa forma, $f(x) = f_1(x)X_1 + \pi(f(x))$, em que $f_1(x) := \langle f(x), X_1 \rangle$.

Afirmção 1: $M \subset \bar{M}$.

De fato, dado $A \in O(q+1)$, valem as seguintes igualdades:

$$A(f(x)) = A(f_1(x)X_1 + \pi(f(x))) = f_1(x)A(X_1) + A(\pi(f(x))).$$

Por outro lado,

$$A(\pi(f(x))) = \pi(f(x)) \quad \text{e} \quad \langle A(X_1), Y \rangle = \langle A(X_1), A(Y) \rangle = \langle X_1, Y \rangle = 0,$$

para todo $Y \in \mathbb{R}_s^{n-q-1}$, pois A fixa os pontos de \mathbb{R}_s^{n-q-1} .

Como $A(X_1) \perp \mathbb{R}_s^{n-q-1}$ e $\|A(X_1)\|^2 = \|X_1\|^2 = 1$, então $A(X_1) \in \mathbb{S}(0, 1) \subset \mathbb{R}_{n-s}^{q+1} \perp \mathbb{R}_s^{n-q-1}$. Portanto $A(f(x)) = f_1(x)A(X_1) + \pi(f(x)) \in \{f_1(x)\xi + \pi(f(x)) : x \in N \text{ e } \xi \in \mathbb{S}^q\}$. ✓

Afirmção 2: $\bar{M} \subset M$.

Sejam $x \in N$ e $\xi \in \mathbb{S}(0, 1) \subset \mathbb{R}_{t-s}^{q+1} \perp \mathbb{R}_s^{n-q-1}$. Consideremos também $\{X_1, X_2, \dots, X_{q+1}\}$ e $\{\xi, Y_2, \dots, Y_{q+1}\}$ duas bases ortogonais de \mathbb{R}_{t-s}^{q+1} tais que $\|X_i\|^2 = \|Y_i\|^2$. Se $\{X_{q+2}, \dots, X_n\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}_s^{n-q-1} , então podemos definir $A \in O_t(n)$ por

$$A(X_i) = \begin{cases} \xi, & \text{se } i = 1; \\ Y_i, & \text{se } i = 2, \dots, q+1; \\ X_i, & \text{se } i = q+2, \dots, n. \end{cases}$$

Dessa forma $A \in O(q+1)$ e $f_1(x)\xi + \pi(f(x)) = f_1(x)A(X_1) + A(\pi(f(x))) = A(f(x))$. ✓

Afirmção 3: A função g é uma imersão.

De fato,

$$\begin{aligned} dg(x, \xi)(v_1, v_2) &= df_1(x)v_1 \cdot \xi + f_1(x) \cdot v_2 + d\pi(f(x))(df(x)v_1) = \\ &= \langle df(x)v_1, X_1 \rangle \xi + \langle f(x), X_1 \rangle v_2 + \pi(df(x)v_1). \end{aligned}$$

Se $dg(x, \xi)(v_1, v_2) = 0$, então $\langle df(x)v_1, X_1 \rangle \xi = 0$, $\langle f(x), X_1 \rangle v_2 = 0$ e $\pi(df(x)v_1) = 0$, pois $v_2 \perp \xi$ e $\xi, v_2 \in \mathbb{R}_{t-s}^{q+1} \perp \mathbb{R}_s^{n-q-1}$. Dessa forma

$$\begin{cases} \langle df(x)v_1, X_1 \rangle = 0, & \text{pois } \xi \neq 0; \\ v_2 = 0, & \text{pois } f(x) \notin \mathbb{R}_s^{n-q-1}, \text{ ou seja, } \langle f(x), X_1 \rangle \neq 0; \text{ e} \\ \pi(df(x)v_1) = 0. \end{cases}$$

Portanto

$$\langle df(x)v_1, X_1 \rangle X_1 + \pi(df(x)v_1) = df(x)v_1 = 0.$$

Concluimos então que $(v_1, v_2) = 0$ e g é uma imersão. ✓ •

(I.2): A prova desse caso é inteiramente análoga à do caso (I). •

(I.3): Suponhamos que \mathbb{R}^{n-q} seja tipo luz (degenerado). Como \mathbb{R}_s^{n-q-1} é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^{n-q} , então existe um vetor não nulo tipo luz $X_1 \in \mathbb{R}^{n-q} \cap (\mathbb{R}_s^{n-q-1})^\perp$. Dessa forma, $f(x) = f_1(x)X_1 + \pi(f(x))$.

Afirmção 1: $M \subset \bar{M}$.

A demonstração dessa afirmação é análoga à da Afirmção 1 do caso (I). ✓

Afirmção 2: $\bar{M} \subset M$.

Sejam $x \in N$ e $\xi \in \mathcal{L}_* \subset \mathbb{R}_{t-s}^{q+1} = (\mathbb{R}_s^{n-q-1})^\perp$ e consideremos $\{X_1, X_2, \dots, X_{q+1}\}$ e $\{\xi, Y_2, \dots, Y_{q+1}\}$ duas bases de \mathbb{R}_{t-s}^{q+1} tais que

- X_1, X_2, ξ e Y_2 são tipo luz;

- $\langle X_1, X_2 \rangle = 1 = \langle \xi, Y_2 \rangle$;
- $\{X_3, \dots, X_{q+1}\}$ e $\{Y_3, \dots, Y_{q+1}\}$ conjuntos são ortonormais; e
- $\{X_1, X_2\} \perp \{X_3, \dots, X_{q+1}\}$ e $\{\xi, Y_2\} \perp \{Y_3, \dots, Y_{q+1}\}$.

Se $\{X_{q+2}, \dots, X_n\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}_s^{n-q-1} , então podemos definir $A \in O_t(n)$ por

$$A(X_i) = \begin{cases} \xi, & \text{se } i = 1; \\ Y_i, & \text{se } i \in \{2, \dots, q+1\}; \\ X_i, & \text{se } i \in \{q+2, \dots, n\}. \end{cases}$$

Dessa forma $A \in O(q+1)$ e $f_1(x)\xi + \pi(f(x)) = f_1(x)A(X_1) + A(\pi(f(x))) = A(f(x))$. ✓

Afirmção 3: *A função g é uma imersão, se N for uma variedade riemanniana e f for uma imersão isométrica.*

De fato,

$$\begin{aligned} dg(x, \xi)(v_1, v_2) &= df_1(x)v_1 \cdot \xi + f_1(x) \cdot v_2 + d\pi(f(x))(df(x)v_1) = \\ &= \langle df(x)v_1, X_2 \rangle \xi + \langle f(x), X_2 \rangle v_2 + \pi(df(x)v_1), \end{aligned}$$

em que $X_2 \in \mathbb{R}_{t-s}^{q+1}$ é um vetor tipo luz tal que $\langle X_1, X_2 \rangle = 1$.

Suponhamos que $dg(x)(v_1, v_2) = 0$, assim $\langle df(x)v_1, X_2 \rangle \xi + \langle f(x), X_2 \rangle v_2 = 0$ e $\pi(df(x)v_1) = 0$, pois $\xi, v_2 \in \mathbb{R}_{t-s}^{q+1} \perp \mathbb{R}_s^{n-q-1}$ e $\pi(f(x)) \in \mathbb{R}_s^{n-q-1}$.

Como N é riemanniana e f é uma imersão isométrica, então $df(x)v_1$ ou é nulo ou é tipo espaço. Mas $df(x)v_1 = \langle df(x)v_1, X_2 \rangle X_1 + \pi(df(x)v_1) = \langle df(x)v_1, X_2 \rangle X_1$, ou seja, $df(x)v_1$ não é tipo espaço. Portanto $df(x)v_1 = 0$ e $v_1 = 0$, pois f é uma imersão.

Dessa forma $dg(x, \xi)(v_1, v_2) = f_1(x)v_2 = 0$ e, como $f_1(x) \neq 0$, pois $f(N) \cap \mathbb{R}_s^{n-q-1} = \emptyset$, concluímos que g é uma imersão. ✓ • □

Observação 2.3. *No caso (I.3) da Proposição 2.2, se trocarmos a hipótese de que f é uma imersão isométrica e N é uma variedade riemanniana pela hipótese de que $f_*TN \cap \text{ger}\{X_1\} = \{0\}$, então g continuará sendo uma imersão. Para ver isso basta repetir as contas feitas na Afirmção 3 da demonstração e verificar que*

$$\begin{aligned} dg(x, \xi)(v_1, v_2) = 0 &\Rightarrow \langle df(x)v_1, X_2 \rangle \xi + \langle f(x), X_2 \rangle v_2 = 0 \quad \text{e} \quad \pi(df(x)v_1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle df(x)v_1, X_2 \rangle \xi + \langle f(x), X_2 \rangle v_2 = 0 \quad \text{e} \quad df(x)v_1 = \langle df(x)v_1, X_2 \rangle X_1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_1 = 0 \quad \text{e} \quad v_2 = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\text{ger}\{X_1\} \subset f_*TN$ e $df(x)v_1 = X_1$, então

$$\begin{aligned} dg(x, \xi)(\langle f(x), X_2 \rangle v_1, -\xi) &= \langle f(x), X_2 \rangle \langle df(x)v_1, X_2 \rangle \xi - \langle f(x), X_2 \rangle \xi + \pi(df(x)v_1) = \\ &= \langle f(x), X_2 \rangle \xi - \langle f(x), X_2 \rangle \xi = 0. \end{aligned}$$

Portanto f não é injetora nesse caso. Conclusão: g é injetora se, e somente se, $f_*TN \cap \text{ger}\{X_1\} = \{0\} \Leftrightarrow \mathbb{R}^{n-q} \cap (\mathbb{R}^{n-q})^\perp \cap f_*(TN) = \{0\}$.

Precisamos de alguns resultados adicionais para provarmos o caso (II) da Proposição 2.2.

Sejam X_1 e X_2 dois vetores tipo luz de \mathbb{R}_t^n tais que $\langle X_1, X_2 \rangle = 1$ e suponhamos que

$$\mathbb{R}_t^n = \text{ger} \{X_1, X_2\} \oplus U \oplus V,$$

em que U e V são subespaços vetoriais não degenerados. Consideremos o subespaço vetorial tipo luz W de \mathbb{R}_t^n dado por $W := \text{ger} \{X_2\} \oplus U$ e sejam $O(V)$ o grupo de isometrias lineares de V e $O(V) \ltimes V$ o grupo de isometrias de V . Podemos definir as funções $\mathcal{I}: V \rightarrow \text{ger} \{X_1, X_2\} \oplus V$ e $\Phi: O(V) \ltimes V \rightarrow O_t(n)$ por

$$\mathcal{I}(x) := X_1 + x - \frac{\|x\|^2}{2} X_2 \quad \text{e} \quad (2.1)$$

$$\Phi(B, x)(v + v^\perp) := v^\perp - \left(\langle Bv, x \rangle + \frac{\langle X_2, v^\perp \rangle}{2} \|x\|^2 \right) X_2 + Bv + \langle X_2, v^\perp \rangle x, \quad (2.2)$$

para todo $v + v^\perp \in V \oplus V^\perp = \mathbb{R}_t^n$.

Lema 2.4 (feito em [22]). *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (I) $\mathcal{I}: V \rightarrow \mathcal{I}(V)$ é uma isometria.
- (II) $\Phi: O(V) \ltimes V \rightarrow \mathcal{W}$ é um isomorfismo de grupos, em que \mathcal{W} é subgrupo do grupo $O_t(n)$ que fixa W .
- (III) \mathcal{W} é o grupo de isometrias de $\mathcal{I}(V) = \left\{ X_1 + x - \frac{\|x\|^2}{2} X_2 : x \in V \right\}$.

Demonstração. (I): Sejam $v_1, v_2 \in V$ dois vetores quaisquer. Assim $d\mathcal{I}(x)v_i = v_i - \langle x, v_i \rangle X_2$, dessa forma

$$\langle d\mathcal{I}(x)v_1, d\mathcal{I}(x)v_2 \rangle = \langle v_1 - \langle x, v_1 \rangle X_2, v_2 - \langle x, v_2 \rangle X_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Portanto $\mathcal{I}: V \rightarrow \mathcal{I}(V) \subset \mathbb{R}_t^n$ é uma isometria. •

(II): Seja $(B, x) \in O(V) \ltimes V$.

Afirmção 1: $\Phi(B, x) \in O_t(n)$.

Claramente $\Phi(B, x)$ é linear. Resta mostrar que $\|\Phi(B, x)(v + v^\perp)\|^2 = \|v + v^\perp\|^2$, para todo $v + v^\perp \in \mathbb{R}_t^n$.

$$\begin{aligned} \|\Phi(B, x)(v + v^\perp)\|^2 &= \left\| v^\perp - \left(\langle Bv, x \rangle + \frac{\langle X_2, v^\perp \rangle}{2} \|x\|^2 \right) X_2 \right\|^2 + \|Bv + \langle X_2, v^\perp \rangle x\|^2 = \\ &= \|v^\perp\|^2 - 2 \left(\langle Bv, x \rangle + \frac{\langle X_2, v^\perp \rangle}{2} \|x\|^2 \right) \langle v^\perp, X_2 \rangle + \|v\|^2 + 2 \langle X_2, v^\perp \rangle \langle Bv, x \rangle + \\ &\quad + \langle X_2, v^\perp \rangle^2 \|x\|^2 = \\ &= \|v^\perp\|^2 - 2 \langle Bv, x \rangle \langle v^\perp, X_2 \rangle - \langle X_2, v^\perp \rangle^2 \|x\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle Bv, x \rangle \langle X_2, v^\perp \rangle + \\ &\quad + \langle X_2, v^\perp \rangle^2 \|x\|^2 = \|v + v^\perp\|^2. \end{aligned}$$

Portanto $\Phi(B, x) \in O_t(n)$. ✓

Afirmção 2: $\Phi(B, x) \in \mathcal{W}$.

Para provarmos a Afirmção 2, precisamos apenas mostrar que $\Phi(B, x)$ fixa todos os pontos de U e fixa X_2 . Seja então $u \in U$, logo

$$\Phi(B, x)(u) = u - \left(\langle B(0), x \rangle + \frac{\langle X_2, u \rangle}{2} \|x\|^2 \right) X_2 + B(0) + \langle X_2, u \rangle x = u.$$

$$\Phi(B, x)(X_2) = X_2 - \left(\langle B(0), x \rangle + \frac{\langle X_2, X_2 \rangle}{2} \|x\|^2 \right) X_2 + B(0) + \langle X_2, X_2 \rangle x = X_2.$$

Portanto $\Phi(B, x) \in \mathcal{W}$. \checkmark

Afirmção 3: Consideremos as projeções ortogonais $P: \mathbb{R}_t^n \rightarrow V$ e $Q: \mathbb{R}_t^n \rightarrow U$. Afirmamos que, para quaisquer $A \in \mathcal{W}$, $v \in V$ e $v^\perp \in V^\perp$, valem as seguintes fórmulas:

$$A(v) = \langle Av, X_1 \rangle X_2 + P(Av) \in \text{ger} \{X_2\} \oplus V, \quad (2.3)$$

$$A(X_1) - X_1 = -\frac{\|PA(X_1)\|^2}{2} X_1 + PA(X_1), \quad (2.4)$$

$$A(v^\perp) - v^\perp = \langle v^\perp, X_2 \rangle (AX_1 - X_1). \quad (2.5)$$

Seja $v \in V$, assim

$$\begin{aligned} Av &= \langle Av, X_2 \rangle X_1 + \langle Av, X_1 \rangle X_2 + PAv + QAv = \\ &= \langle Av, AX_2 \rangle X_1 + \langle Av, X_1 \rangle X_2 + PAv + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \langle Av, u_i \rangle u_i, \end{aligned}$$

em que $\{u_1, \dots, u_r\}$ é uma base ortonormal de U e $\varepsilon_i := \|u_i\|^2 = \pm 1$. Dessa forma

$$\begin{aligned} Av &= \langle v, X_2 \rangle X_1 + \langle Av, X_1 \rangle X_2 + PAv + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \langle Av, Au_i \rangle u_i = \\ &= \langle Av, X_1 \rangle X_2 + PA(v) \in \text{ger} \{X_2\} \oplus V. \end{aligned}$$

Calculemos $A(X_1)$.

$$\begin{aligned} A(X_1) &= \langle AX_1, X_2 \rangle X_1 + \langle AX_1, X_1 \rangle X_2 + PA(X_1) + QA(X_1) = \\ &= \langle AX_1, AX_2 \rangle X_1 + \langle AX_1, X_1 \rangle X_2 + PA(X_1) + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \langle AX_1, u_i \rangle u_i = \\ &= X_1 + \langle AX_1, X_1 \rangle X_2 + PA(X_1) + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \langle AX_1, Au_i \rangle u_i = \\ &= X_1 + \langle AX_1, X_1 \rangle X_2 + PA(X_1). \\ \therefore AX_1 - X_1 &= \langle AX_1, X_1 \rangle X_2 + PA(X_1) \Rightarrow \|AX_1 - X_1\|^2 = \|PA(X_1)\|^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2 \langle AX_1, X_1 \rangle = \|PA(X_1)\|^2. \\ \therefore AX_1 - X_1 &= -\frac{\|PA(X_1)\|^2}{2} X_1 + PA(X_1). \end{aligned}$$

Seja $v^\perp \in V^\perp = \text{ger} \{X_1, X_2\} \oplus U$, assim

$$\begin{aligned} v^\perp &= \langle v^\perp, X_2 \rangle X_1 + \langle v^\perp, X_1 \rangle X_2 + u, \text{ para algum } u \in U. \\ \therefore A(v^\perp) &= \langle v^\perp, X_2 \rangle A(X_1) + \langle v^\perp, X_1 \rangle A(X_2) + A(u) = \\ &= \langle v^\perp, X_2 \rangle \left(X_1 - \frac{\|PA(X_1)\|^2}{2} X_1 + PA(X_1) \right) + \langle v^\perp, X_1 \rangle X_2 + u = \\ &= \langle v^\perp, X_2 \rangle X_1 + \langle v^\perp, X_2 \rangle \left(-\frac{\|PA(X_1)\|^2}{2} X_1 + PA(X_1) \right) + \langle v^\perp, X_1 \rangle X_2 + u = \\ &= v^\perp + \langle v^\perp, X_2 \rangle (AX_1 - X_1). \end{aligned}$$

Portanto valem a fórmulas (2.3) a (2.5). \checkmark

Afirmção 4: Φ é um homomorfismo de grupos.

Precisamos mostrar que

$$\Phi((C, y) \circ (B, x)) = \Phi(C, Y) \circ \Phi(B, x),$$

para quaisquer $(C, y), (B, x) \in \text{O}(V) \times V$. Calculemos então $\Phi((C, y) \circ (B, x))$.

$$\begin{aligned} \Phi((C, y) \circ (B, x)) (v + v^\perp) &= \Phi(C \circ B, C(x) + y) (v + v^\perp) = \\ &= v^\perp - \left[\langle (C \circ B)v, C(x) + y \rangle + \frac{\langle X_2, v^\perp \rangle}{2} \|C(x) + y\|^2 \right] X_2 + (C \circ B)v + \\ &\quad + \langle X_2, v^\perp \rangle [C(x) + y] = \\ &= v^\perp - \left[\langle Bv, x \rangle + \langle (C \circ B)v, y \rangle + \frac{\langle X_2, v^\perp \rangle}{2} (\|x\|^2 + 2 \langle Cx, y \rangle + \|y\|^2) \right] X_2 + (C \circ B)v + \\ &\quad + \langle X_2, v^\perp \rangle [C(x) + y] = \\ &= v^\perp - \left(\langle Bv, x \rangle + \frac{\langle X_2, v^\perp \rangle}{2} \|x\|^2 \right) X_2 - \left[\langle C(Bv + \langle X_2, v^\perp \rangle x), y \rangle + \frac{\langle X_2, v^\perp \rangle}{2} \|y\|^2 \right] X_2 + \\ &\quad + C(Bv + \langle X_2, v^\perp \rangle x) + \langle X_2, v^\perp \rangle y = \\ &= \Phi(C, y) \left(Bv + \langle X_2, v^\perp \rangle x + v^\perp - \left(\langle Bv, x \rangle + \frac{\langle X_2, v^\perp \rangle}{2} \|x\|^2 \right) X_2 \right) = \\ &= \Phi(C, y) \left(\Phi(B, x) (v + v^\perp) \right) = (\Phi(C, y) \circ \Phi(B, x)) (v + v^\perp). \end{aligned}$$

Portanto Φ é um homomorfismo de grupos. \checkmark

Afirmção 5: Φ é injetora.

De fato, suponhamos que $\Phi(B, x) = \text{Id}$, para algum $(B, x) \in \text{O}(V) \times V$, dessa forma, $\Phi(B, x) (v + v^\perp) = v + v^\perp$, para qualquer $v + v^\perp \in V \oplus V^\perp = \mathbb{R}_t^n$. Assim, tomando $v \in V$,

$$\begin{aligned} v &= \Phi(B, x)(v) = 0 - \left(\langle Bv, x \rangle + \frac{\langle X_2, 0 \rangle}{2} \|x\|^2 \right) X_2 + Bv + \langle X_2, 0 \rangle x. \\ \therefore v &= -\langle Bv, x \rangle X_2 + Bv \Rightarrow Bv = v \text{ e } \langle Bv, x \rangle = 0, \text{ para qualquer } v \in V \Rightarrow \\ &\Rightarrow B = \text{Id} \text{ e } x = 0 \Rightarrow (B, x) = (\text{Id}, 0). \end{aligned}$$

Portanto Φ é injetora. \checkmark

Afirmção 6: Φ é sobrejetora.

Sejam $A \in \mathcal{W}$, $P: \mathbb{R}_t^n \rightarrow V$ a projeção ortogonal, $x := PA(X_1)$ e $B := P \circ A|_V: V \rightarrow V$. Dessa forma, dados $v, w \in V$, temos:

$$\langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle \stackrel{(2.3)}{=} \langle \langle Av, X_1 \rangle X_2 + PAv, \langle Aw, X_1 \rangle X_2 + PAw \rangle = \langle PAv, PAw \rangle = \langle Bv, Bw \rangle.$$

Portanto $B \in O(V)$.

Mostraremos que $\Phi(B, x) = A$. Mas $\Phi(B, x)$ coincide com A em $\text{ger}\{X_2\} \oplus U$, pois $\Phi(B, x) \in \mathcal{W}$. Resta mostrar que $\Phi(B, x)$ é igual a A em $\text{ger}\{X_1\} \oplus V$.

$$\begin{aligned} \Phi(B, x)(v) &\stackrel{(2.2)}{=} -\langle Bv, x \rangle X_2 + Bv = -\langle PAv, PAX_1 \rangle X_2 + PAv = -\langle PAv, AX_1 \rangle X_2 + PAv = \\ &\stackrel{(2.3)}{=} -\langle Av - \langle Av, X_1 \rangle X_2, AX_1 \rangle X_2 + PAv = \langle Av, X_1 \rangle X_2 + PAv \stackrel{(2.3)}{=} Av. \end{aligned}$$

$$\Phi(B, x)(X_1) \stackrel{(2.2)}{=} X_1 - \frac{\|x\|^2}{2} X_2 + x = X_1 - \frac{\|PA(X_1)\|^2}{2} X_2 + PA(X_1) \stackrel{(2.4)}{=} AX_1.$$

Portanto $\Phi(B, x) = A$ e Φ é sobrejetora. \checkmark

(III):

Afirmção 7: $\mathcal{I} \circ (B, x) = \Phi(B, x) \circ \mathcal{I}$.

Sejam $(B, x) \in O(V) \times V$ e $v \in V$. Calculemos $(\mathcal{I} \circ (B, x))(v)$ e $(\Phi(B, x) \circ \mathcal{I})(v)$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{I} \circ (B, x))(v) &= \mathcal{I}(Bv + x) = X_1 + Bv + x - \frac{\|Bv + x\|^2}{2} X_2 = \\ &= X_1 + Bv + x - \left(\frac{\|v\|^2 + \|x\|^2}{2} + \langle Bv, x \rangle \right) X_2. \\ (\Phi(B, x) \circ \mathcal{I})(v) &= \Phi(B, x) \left(X_1 + v - \frac{\|v\|^2}{2} X_2 \right) = \\ &= X_1 - \frac{\|v\|^2}{2} X_2 - \left(\langle Bv, x \rangle + \frac{1}{2} \left\langle X_2, X_1 - \frac{\|v\|^2}{2} X_2 \right\rangle \|x\|^2 \right) X_2 + \\ &\quad + Bv + \left\langle X_2, X_1 - \frac{\|v\|^2}{2} X_2 \right\rangle x = \\ &= X_1 - \frac{\|v\|^2}{2} X_2 - \left(\langle Bv, x \rangle + \frac{\|x\|^2}{2} \right) X_2 + Bv + x. \end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{I} \circ (B, x) = \Phi(B, x) \circ \mathcal{I}$. \checkmark

Afirmção 8: \mathcal{W} fixa $\mathcal{I}(V)$.

De fato, dados $\mathcal{I}(v) \in \mathcal{I}(V)$ e $\Phi(B, x) \in \mathcal{W}$, sabemos pela Afirmção 7 que $\Phi(B, x)(\mathcal{I}(v)) = \mathcal{I}((B, x)(v)) \in \mathcal{I}(V)$. Portanto \mathcal{W} fixa $\mathcal{I}(V)$. \checkmark

Afirmção 9: \mathcal{W} é o grupo de isometrias de $\mathcal{I}(V)$.

Seja $\varphi: \mathcal{I}(V) \rightarrow \mathcal{I}(V)$ uma isometria, logo $\psi := \mathcal{I}^{-1} \circ \varphi \circ \mathcal{I}: V \rightarrow V$ também é uma isometria, pelo Item (I). Dessa forma existe $(B, x) \in O(V) \times V$ tal que $\psi = (B, x)$. Assim

$$\varphi \circ \mathcal{I} = \mathcal{I} \circ \psi = \mathcal{I} \circ (B, x) = \Phi(B, x) \circ \mathcal{I},$$

pela Afirmção 7. Portanto $\varphi = \Phi(B, x)|_{\mathcal{I}(V)}$ e podemos concluir que o grupo de isometrias de $\mathcal{I}(V)$ é o conjunto $\{A|_{\mathcal{I}(V)}: A \in \mathcal{W}\}$. \checkmark □

Prova do caso (II) da Proposição 2.2. Suponhamos que \mathbb{R}^{n-q-1} seja tipo luz e que existam um subespaço vetorial não degenerado $U \subset \mathbb{R}_t^n$ e um vetor tipo luz $X_2 \in \mathbb{R}_t^n$ tais que $\mathbb{R}^{n-q-1} = \text{ger}\{X_2\} \oplus U$.

Nesse caso, sabemos que existem um vetor tipo luz $X_1 \in \mathbb{R}_t^n$ e um subespaço não degenerado $V \subset \mathbb{R}_t^n$ tais que

$$\mathbb{R}_t^n = \text{ger}\{X_1, X_2\} \oplus U \oplus V, \quad \langle X_1, X_2 \rangle = 1 \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^{n-q} = \text{ger}\{w, X_2\} \oplus U,$$

em que ou $w \in V$, ou $w = X_1$.

Sejam $A \in O(q+1)$ e $x \in N$, logo

$$A(f(x)) = A(f_1(x)w + \pi(f(x))) = f_1(x)A(w) + \pi(f(x)).$$

Como $w \in U^\perp$ e A fixa os pontos do subespaço tipo luz $\mathbb{R}^{n-q-1} = U \oplus \text{ger}\{X_2\}$, então, pelo Lema 2.4, existem uma isometria B de V e um vetor $v \in V$ tais que $A = \Phi(B, v)$.

(II.1): Suponhamos que $\mathbb{R}^{n-q} = \mathbb{R}_s^{n-q} = \text{ger}\{X_1, X_2\} \oplus U$. Neste caso, $f_1(x) = \langle f(x), X_2 \rangle$ e podemos escrever $f(x) = f_1(x)X_1 + \pi(f(x))$. Assim,

$$A(f(x)) = f_1(x)A(X_1) + \pi(f(x)).$$

Por outro lado

$$A(X_1) = \Phi(B, v)(X_1) \stackrel{(2.2)}{=} X_1 - \frac{\|v\|^2}{2}X_2 + v \Rightarrow A(f(x)) = f_1(x) \left(X_1 - \frac{\|v\|^2}{2}X_2 + v \right) + \pi(f(x)).$$

Assim $M \subset \bar{M}$.

Seja $f_1(x) \left(X_1 - \frac{\|v\|^2}{2}X_2 + v \right) + \pi(f(x)) \in \bar{M}$. Dado $B \in O(V)$ qualquer, sabemos (pelo Lema 2.4) que $\Phi(B, v) \in O(q+1)$. Além disso $\Phi(B, v)(X_1) = X_1 - \frac{\|v\|^2}{2}X_2 + v$, portanto

$$f_1(x) \left(X_1 - \frac{\|v\|^2}{2}X_2 + v \right) + \pi(f(x)) = f_1(x)\Phi(B, v)(X_1) + \pi(f(x)) = \Phi(B, v)(f(x)) \in M.$$

Concluimos que $M = \bar{M}$.

Para mostrar que $g(x, v) := f_1(x) \left(X_1 - \frac{\|v\|^2}{2}X_2 + v \right) + \pi(f(x))$ é uma imersão, calculemos $dg(x, v)$.

$$\begin{aligned} dg(x, v)(v_1, v_2) &= df_1(x)v_1 \cdot \left(X_1 - \frac{\|v\|^2}{2}X_2 + v \right) + f_1(x) (-\langle v, v_2 \rangle X_2 + v_2) + \\ &\quad + d\pi(f(x))(df(x)v_1) = \\ &= \langle df(x)v_1, X_2 \rangle \cdot \left(X_1 - \frac{\|v\|^2}{2}X_2 + v \right) + f_1(x) (-\langle v, v_2 \rangle X_2 + v_2) + \pi(df(x)v_1) = \\ &= \langle df(x)v_1, X_2 \rangle X_1 - \left(\langle df(x)v_1, X_2 \rangle \frac{\|v\|^2}{2} + f_1(x) \langle v, v_2 \rangle \right) X_2 + \pi(df(x)v_1) + \\ &\quad + \langle df(x)v_1, X_2 \rangle v + f_1(x)v_2. \end{aligned}$$

Dessa forma, se $dg(x, v)(v_1, v_2) = 0$, então

$$\begin{cases} \langle df(x)v_1, X_2 \rangle X_1 = 0, \\ - \left(f_1(x) \langle v, v_2 \rangle + \langle df(x)v_1, X_2 \rangle \frac{\|v\|^2}{2} \right) X_2 + \pi(df(x)v_1) = 0, \\ \langle df(x)v_1, X_2 \rangle v + f_1(x)v_2 = 0, \end{cases}$$

pois $v, v_2 \in V \perp \mathbb{R}^{n-q}$, $\mathbb{R}^{n-q} = \text{ger} \{X_1, X_2\} \oplus U$ e $\pi(f(x)) \in \mathbb{R}^{n-q-1} = \text{ger} \{X_2\} \oplus U$.

Da primeira equação do sistema anterior, concluímos que $\langle df(x)v_1, X_2 \rangle = 0$. Substituindo isso na terceira equação, obtemos $f_1(x)v_2 = 0$, e disso segue que $v_2 = 0$, pois $f(x) \notin \mathbb{R}^{n-q-1}$. Substituindo $\langle df(x)v_1, X_2 \rangle = 0$ e $v_2 = 0$ na segunda equação, concluímos que $\pi(df(x)v_1) = 0$. Como $\langle df(x)v_1, X_2 \rangle = 0$ e $\pi(df(x)v_1) = 0$, então $df(x)v_1 = 0$ e $v_1 = 0$. Portanto f é uma imersão. •

(II.2): Suponhamos que $\mathbb{R}^{n-q} = \text{ger} \{w\} \oplus \mathbb{R}^{n-q-1} = \text{ger} \{w, X_2\} \oplus U$, para algum $w \in V$ unitário. Neste caso $f_1 = \varepsilon \langle f(x), w \rangle$, em que $\varepsilon = \|w\|^2$. Assim

$$A(f(x)) = f_1(x)\Phi(B, v)(w) + \pi(f(x)) \stackrel{(2.2)}{=} f_1(x)(-\langle Bw, v \rangle X_2 + Bw) + \pi(f(x)).$$

Como $\|Bw\|^2 = \|w\|^2$ e chamando $\lambda := -\langle Bw, v \rangle$, concluímos que $M \subset \bar{M}$. Seja agora $f_1(x)(\lambda X_2 + \xi) + \pi(f(x)) \in \bar{M}$ e sejam $B \in O(V)$ e $v \in V$ tais que $Bw = \xi$ e $\langle \xi, v \rangle = -\lambda$, assim

$$\begin{aligned} f_1(x)(\lambda X_2 + \xi) + \pi(f(x)) &= f_1(x)(-\langle Bw, v \rangle X_2 + Bw) + \pi(f(x)) = \\ &= f_1(x)\Phi(B, v)(w) + \pi(f(x)) = \Phi(B, v)(f(x)). \end{aligned}$$

Portanto $f_1(x)(\lambda X_2 + \xi) + \pi(f(x)) \in M$.

Para verificarmos que g é uma imersão, calculemos $dg(x, \xi, \lambda)$

$$\begin{aligned} dg(x, \xi, \lambda)(v_1, v_2, r) &= df_1(x)v_1 \cdot (\lambda X_2 + \xi) + f_1(x) \cdot (rX_2 + v_2) + \pi(df(x)v_1) = \\ &= \varepsilon \langle df(x)v_1, w \rangle \cdot (\lambda X_2 + \xi) + f_1(x) \cdot (rX_2 + v_2) + \pi(df(x)v_1) = \\ &= [\varepsilon \langle df(x)v_1, w \rangle \xi + f_1(x)v_2] + [\varepsilon \langle df(x)v_1, w \rangle \lambda + f_1(x)r] X_2 + \pi(df(x)v_1). \end{aligned}$$

Dessa forma, se $dg(x, \xi, \lambda)(v_1, v_2, r) = 0$, então

$$\begin{cases} \varepsilon \langle df(x)v_1, w \rangle \xi + f_1(x)v_2 = 0, \\ [\varepsilon \langle df(x)v_1, w \rangle \lambda + f_1(x)r] X_2 + \pi(df(x)v_1) = 0, \end{cases}$$

pois $\xi, v_2 \in V$ e $X_2, \pi(df(x)v_1) \in V^\perp$.

Como $\xi \in \mathbb{S}(0, \varepsilon)$ e $\xi \perp v_2$, segue que $\langle df(x)v_1, w \rangle = 0$ e $v_2 = 0$, pois $f(x) \notin \mathbb{R}^{n-q-1}$. Logo, $f_1(x)rX_2 + \pi(df(x)v_1) = 0$. Supondo f uma imersão isométrica e N uma variedade riemanniana, segue que g é uma imersão. • \square

Observação 2.5. Pelas contas feitas logo acima para o caso (II.2) da Proposição 2.2, sabemos que

$$dg(x, \xi, \lambda)(v_1, v_2, r) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \langle df(x)v_1, w \rangle = 0, \\ v_2 = 0, \\ f_1(x)rX_2 + \pi(df(x)v_1) = 0. \end{cases}$$

Dessa forma, g é uma imersão se, e somente se, $f_*(TN) \cap \text{ger} \{X_2\} = \{0\} \Leftrightarrow \mathbb{R}^{n-q} \cap (\mathbb{R}^{n-q})^\perp \cap f_*(TN) = \{0\}$.

Definição 2.6. A imersão g dada na Proposição 2.2 é chamada de **imersão de rotação** da subvariedade de rotação M .

Corolário 2.7. A Proposição 2.2 classifica todas subvariedades de rotação em \mathbb{L}^n sobre uma imersão f de acordo com o contradomínio de f e com o eixo de rotação.

Demonstração. Sejam $f: N^{m-q} \rightarrow \mathbb{R}^{n-q} \subset \mathbb{L}^n$ uma imersão e M uma subvariedade de rotação sobre f com eixo $\mathbb{R}^{n-q-1} \subset \mathbb{R}^{n-q}$. Nessas condições, as únicas possibilidades para \mathbb{R}^{n-q-1} e \mathbb{R}^{n-q} são:

- (I) \mathbb{R}^{n-q-1} e \mathbb{R}^{n-q} são ambos tipo espaço ou ambos tipo tempo, ie., ambos têm o mesmo índice (igual a ± 1);
- (II) \mathbb{R}^{n-q-1} é tipo espaço e \mathbb{R}^{n-q} é tipo tempo, ie., \mathbb{R}^{n-q-1} tem índice 0 e \mathbb{R}^{n-q} tem índice 1;
- (III) \mathbb{R}^{n-q-1} é tipo espaço e \mathbb{R}^{n-q} é tipo luz;
- (IV) \mathbb{R}^{n-q-1} é tipo luz e \mathbb{R}^{n-q} é tipo tempo;
- (V) \mathbb{R}^{n-q-1} e \mathbb{R}^{n-q} são ambos tipo luz.

Mas todos esses casos possíveis para o eixo \mathbb{R}^{n-q-1} de M e o contradomínio \mathbb{R}^{n-q} de f já foram analisados na Proposição 2.2. \square

Observações 2.8. *Pelas Observações 2.3 e 2.5, se M é uma subvariedade de rotação em \mathbb{L}^n sobre $f: N \rightarrow \mathbb{R}^{n-q}$ e \mathbb{R}^{n-q} é tipo luz, então g é uma imersão se, e somente se, $\mathbb{R}^{n-q} \cap (\mathbb{R}^{n-q})^\perp \cap \varphi_*(TN) = \{0\}$, ou seja, g é uma imersão se, e somente se, N é uma variedade riemanniana com a métrica induzida pela imersão f .*

2.2 Prova do Teorema 2.1

Para provarmos o Teorema 2.1 precisamos de alguns resultados adicionais, cujas versões euclidianas foram provadas em [9].

Lema 2.9. *Sejam $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ uma imersão isométrica e η uma normal principal de f . Então, para quaisquer $X \in E_\eta(x)$ e $\xi, \zeta \in T_x^\perp M$ tais que $\xi \perp \eta$ e $\langle \zeta, \eta \rangle = 1$, valem as seguintes fórmulas:*

$$A_\eta X = \|\eta\|^2 X, \quad A_\xi X = 0 \quad \text{e} \quad A_\zeta X = X. \quad (2.6)$$

Seja \mathcal{D} uma distribuição em M tal que $\mathcal{D}(x) \subset E_\eta(x)$, para todo $x \in M$.

- (I) *Se η é paralelo na conexão normal de f ao longo de \mathcal{D} , então $\nabla\|\eta\|^2 \in \Gamma(\mathcal{D}^\perp)$, em que $\nabla\|\eta\|^2$ é o vetor gradiente da função $\|\eta\|^2$. Além disso valem as seguintes igualdades:*

$$(\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) \nabla_X Y = \frac{\langle X, Y \rangle}{2} \nabla\|\eta\|^2, \quad (2.7)$$

$$\langle A_\xi \nabla_X Y, Z \rangle = \langle X, Y \rangle \langle \nabla_Z^\perp \xi, \eta \rangle, \quad (2.8)$$

$$\langle (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X Y, Z \rangle = -\langle X, Y \rangle \langle \nabla_Z^\perp \zeta, \eta \rangle, \quad (2.9)$$

- para para quaisquer $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$, $Z \in \Gamma(\mathcal{D}^\perp)$ e $\xi, \zeta \in \Gamma(T^\perp M)$ tais que $\xi \perp \eta$ e $\langle \zeta, \eta \rangle = 1$.
- (II) *Se \mathcal{D} é uma distribuição umbílica com vetor curvatura média φ , então*

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = f_* \nabla_X^v Y + \langle X, Y \rangle \sigma, \quad \forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}), \quad (2.10)$$

em que $\sigma := f_* \varphi + \eta$ e $\nabla_X^v Y$ é a projeção ortogonal de $\nabla_X Y$ sobre \mathcal{D} .

(III) Com as mesmas hipóteses de (I) e (II),

$$(\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) \varphi = \frac{1}{2} \nabla (\|\eta\|^2), \quad (2.11)$$

$$\langle A_\xi \varphi, Z \rangle = \langle \nabla_{\frac{1}{2} \xi} \eta, \eta \rangle, \quad (2.12)$$

$$\langle (\text{Id} - A_\zeta) \varphi, Z \rangle = - \langle \nabla_{\frac{1}{2} \zeta} \eta, \eta \rangle, \quad (2.13)$$

$$\langle \nabla_X \varphi, (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) Z \rangle = 0, \quad (2.14)$$

$$\langle \nabla_X \varphi, A_\xi Z \rangle = 0, \quad (2.15)$$

$$\langle \nabla_X \varphi, (\text{Id} - A_\zeta) Z \rangle = 0, \quad (2.16)$$

para quaisquer $X \in \Gamma(\mathcal{D})$, $Z \in \Gamma(\mathcal{U}^\perp)$ e $\xi, \zeta \in \Gamma(T^\perp M)$ tais que $\xi \perp \eta$ e $\langle \zeta, \eta \rangle = 1$.

Demonstração. Sejam $X \in E_\eta(x)$, $Y \in T_x M$ e $\xi, \zeta \in T_x^\perp M$ tais que $\xi \perp \eta$ e $\langle \zeta, \eta \rangle = 1$. Então

$$\begin{aligned} \langle A_\eta X, Y \rangle &= \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle = \langle \langle X, Y \rangle \eta, \eta \rangle = \|\eta\|^2 \langle X, Y \rangle, \\ \langle A_\xi X, Y \rangle &= \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle = \langle X, Y \rangle \langle \eta, \xi \rangle = 0, \\ \langle A_\zeta X, Y \rangle &= \langle \alpha(X, Y), \zeta \rangle = \langle X, Y \rangle \langle \eta, \zeta \rangle = \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Portanto $A_\eta X = \|\eta\|^2 X$, $A_\xi X = 0$ e $A_\zeta X = X$. •

Sejam $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$, $Z \in \Gamma(\mathcal{D}^\perp)$ e $\xi, \zeta \in \Gamma(T_f^\perp M)$ tais que $\xi \perp \eta$ e $\langle \xi, \zeta \rangle = 1$.

(I): Como η é paralelo na conexão normal de f ao longo de \mathcal{D} , então

$$X(\|\eta\|^2) = 0 \Rightarrow \langle X, \nabla \|\eta\|^2 \rangle = 0.$$

Portanto $\nabla \|\eta\|^2 \in \Gamma(\mathcal{D}^\perp)$.

Pela equação de Codazzi,

$$\begin{aligned} \nabla_X A_\eta Z - A_\eta \nabla_X Z - A_{\nabla_X \eta} Z &= \nabla_Z A_\eta X - A_\eta \nabla_Z X - A_{\nabla_Z \eta} X \Rightarrow \\ &\stackrel{(2.6)}{\Rightarrow} \nabla_X A_\eta Z - A_\eta \nabla_X Z = \nabla_Z (\|\eta\|^2 X) - A_\eta \nabla_Z X - A_{\nabla_Z \eta} X \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla_X A_\eta Z - A_\eta \nabla_X Z = Z(\|\eta\|^2) X + (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) \nabla_Z X - A_{\nabla_Z \eta} X. \end{aligned}$$

Fazendo o produto interno nos dois lados da última igualdade por Y , resulta

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X A_\eta Z, Y \rangle - \langle A_\eta \nabla_X Z, Y \rangle &= Z(\|\eta\|^2) \langle X, Y \rangle + \langle (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) \nabla_Z X, Y \rangle - \\ &\quad - \langle A_{\nabla_Z \eta} X, Y \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \nabla_X A_\eta Z, Y \rangle - \langle \nabla_X Z, A_\eta Y \rangle &= Z(\|\eta\|^2) \langle X, Y \rangle + \langle \nabla_Z X, (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) Y \rangle - \\ &\quad - \langle \alpha(X, Y), \nabla_Z \eta \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow X \langle A_\eta Z, Y \rangle - \langle A_\eta Z, \nabla_X Y \rangle - \langle \nabla_X Z, \|\eta\|^2 Y \rangle &= Z(\|\eta\|^2) \langle X, Y \rangle - \langle X, Y \rangle \langle \eta, \nabla_Z \eta \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow X \langle Z, \|\eta\|^2 Y \rangle - \langle Z, A_\eta \nabla_X Y \rangle + \langle Z, \|\eta\|^2 \nabla_X Y \rangle &= \frac{\langle X, Y \rangle}{2} \langle \nabla \|\eta\|^2, Z \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle Z, (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) \nabla_X Y \rangle &= \frac{\langle X, Y \rangle}{2} \langle \nabla \|\eta\|^2, Z \rangle. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sabemos que, se $K \in \mathcal{D}$, então $\langle (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) \nabla_X Y, K \rangle = \langle \nabla_X Y, (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) K \rangle = 0$, ou seja, $(\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) \nabla_X Y$ só tem componente em \mathcal{D}^\perp . Portanto da igualdade (2.17) segue a fórmula (2.7).

Utilizando a equação de Codazzi novamente,

$$\begin{aligned}
 \nabla_X A_\xi Z - A_\xi \nabla_X Z - A_{\nabla_X^\perp \xi} Z &= \nabla_Z A_\xi X - A_\xi \nabla_Z X - A_{\nabla_Z^\perp \xi} X \Rightarrow \\
 \Rightarrow \langle \nabla_X A_\xi Z, Y \rangle - \langle A_\xi \nabla_X Z, Y \rangle - \langle A_{\nabla_X^\perp \xi} Z, Y \rangle &= -\langle A_\xi \nabla_Z X, Y \rangle - \langle A_{\nabla_Z^\perp \xi} X, Y \rangle \Rightarrow \\
 \Rightarrow \langle \nabla_X A_\xi Z, Y \rangle - \langle \nabla_X Z, A_\xi Y \rangle - \langle \alpha(Z, Y), \nabla_X^\perp \xi \rangle &= -\langle \nabla_Z X, A_\xi Y \rangle - \\
 - \langle \alpha(X, Y), \nabla_Z^\perp \xi \rangle &\Rightarrow \\
 \Rightarrow X \langle A_\xi Z, Y \rangle - \langle A_\xi Z, \nabla_X Y \rangle &= -\langle X, Y \rangle \langle \eta, \nabla_Z^\perp \xi \rangle \Rightarrow \\
 \Rightarrow X \langle Z, A_\xi Y \rangle - \langle A_\xi Z, \nabla_X Y \rangle &= -\langle X, Y \rangle \langle \eta, \nabla_Z^\perp \xi \rangle \Rightarrow \\
 \Rightarrow \langle Z, A_\xi \nabla_X Y \rangle = \langle X, Y \rangle \langle \eta, \nabla_Z^\perp \xi \rangle.
 \end{aligned}$$

Portanto vale a fórmula (2.8).

Por último, seja $\zeta \in \Gamma(T_f^\perp M)$ tal que $\langle \xi, \zeta \rangle = 1$. Assim

$$\begin{aligned}
 \nabla_X A_\zeta Z - A_\zeta \nabla_X Z - A_{\nabla_X^\perp \zeta} Z &= \nabla_Z A_\zeta X - A_\zeta \nabla_Z X - A_{\nabla_Z^\perp \zeta} X \Rightarrow \\
 \Rightarrow \nabla_X A_\zeta Z - A_\zeta \nabla_X Z - A_{\nabla_X^\perp \zeta} Z &= (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_Z X - A_{\nabla_Z^\perp \zeta} X \Rightarrow \\
 \Rightarrow \langle \nabla_X A_\zeta Z, Y \rangle - \langle A_\zeta \nabla_X Z, Y \rangle - \langle A_{\nabla_X^\perp \zeta} Z, Y \rangle &= \langle (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_Z X, Y \rangle - \langle A_{\nabla_Z^\perp \zeta} X, Y \rangle \Rightarrow \\
 \Rightarrow X \langle A_\zeta Z, Y \rangle - \langle A_\zeta Z, \nabla_X Y \rangle - \langle \nabla_X Z, A_\zeta Y \rangle - \langle \alpha(Z, Y), \nabla_X^\perp \zeta \rangle &= \\
 = \langle \nabla_Z X, (\text{Id} - A_\zeta) Y \rangle - \langle \alpha(X, Y), \nabla_Z^\perp \zeta \rangle &\Rightarrow \\
 \Rightarrow X \langle Z, A_\zeta Y \rangle - \langle Z, A_\zeta \nabla_X Y \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle &= -\langle X, Y \rangle \langle \eta, \nabla_Z^\perp \zeta \rangle \Rightarrow \\
 \Rightarrow \langle Z, (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X Y \rangle = -\langle X, Y \rangle \langle \eta, \nabla_Z^\perp \zeta \rangle.
 \end{aligned}$$

Portanto vale a fórmula (2.9). •

(II): Suponhamos que \mathcal{D} seja uma distribuição umbílica com vetor curvatura média φ . Dessa forma

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_X f_* Y &= f_* \nabla_X Y + \alpha(X, Y) = f_* \nabla_X^v Y + f_* \nabla_X^h Y + \langle X, Y \rangle \eta = \\
 &= f_* \nabla_X^v Y + \langle X, Y \rangle f_* \varphi + \langle X, Y \rangle \eta = f_* \nabla_X^v Y + \langle X, Y \rangle \sigma. \bullet
 \end{aligned}$$

(III): Pela fórmula (2.7),

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \nabla \|\eta\|^2 &= (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) \nabla_X X = (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) (\nabla_X^v X + \nabla_X^h X) = \\
 &= (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) \nabla_X^h X, \text{ pois } \nabla_X^v X \text{ é a projeção ortogonal de } \nabla_X X \text{ sobre } \mathcal{D}, \\
 &= (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) \varphi, \text{ pois } \mathcal{D} \text{ é uma distribuição umbílica com vetor curvatura média } \varphi.
 \end{aligned}$$

Portanto vale a fórmula (2.11).

Analogamente,

$$-\langle \nabla_Z^\perp \zeta, \eta \rangle \stackrel{(2.9)}{=} \langle (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X X, Z \rangle \stackrel{(2.6)}{=} \langle (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X^h X, Z \rangle = \langle (\text{Id} - A_\zeta) \varphi, Z \rangle.$$

Portanto vale a fórmula (2.13).

Por outro lado, pela fórmula (2.8),

$$\langle \nabla_Z^\perp \xi, \eta \rangle = \langle A_\xi \nabla_X X, Z \rangle = \langle A_\xi \nabla_X^h X, Z \rangle = \langle A_\xi \varphi, Z \rangle.$$

Portanto vale a igualdade (2.12).

Consideremos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \varphi, (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) Z \rangle &= X \langle \varphi, (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) Z \rangle - \langle \varphi, \nabla_X (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) Z \rangle = \\ &= X \langle (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) \varphi, Z \rangle - \langle \varphi, \nabla_X (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) Z \rangle = \\ &\stackrel{(2.11)}{=} \frac{1}{2} X \langle \nabla \|\eta\|^2, Z \rangle - \langle \varphi, \nabla_X (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) Z \rangle. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pela equação de Codazzi,

$$\begin{aligned} \nabla_X A_\eta Z - A_\eta \nabla_X Z - A_{\nabla_X^\perp \eta} Z &= \nabla_Z A_\eta X - A_\eta \nabla_Z X - A_{\nabla_Z^\perp \eta} X \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla_X A_\eta Z - A_\eta \nabla_X Z &= \nabla_Z \|\eta\|^2 X - A_\eta \nabla_Z X - A_{\nabla_Z^\perp \eta} X = \\ &= Z (\|\eta\|^2) X + \|\eta\|^2 \nabla_Z X - A_\eta \nabla_Z X - A_{\nabla_Z^\perp \eta} X \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \nabla_X A_\eta Z, \varphi \rangle - \langle A_\eta \nabla_X Z, \varphi \rangle &= Z (\|\eta\|^2) \langle X, \varphi \rangle + \langle \|\eta\|^2 \nabla_Z X, \varphi \rangle - \langle A_\eta \nabla_Z X, \varphi \rangle - \\ &- \langle A_{\nabla_Z^\perp \eta} X, \varphi \rangle = \langle \|\eta\|^2 \nabla_Z X, \varphi \rangle - \langle \nabla_Z X, A_\eta \varphi \rangle - \langle \alpha(X, \varphi), \nabla_Z^\perp \eta \rangle \Rightarrow \\ \stackrel{(2.11)}{\Rightarrow} \langle \nabla_X A_\eta Z, \varphi \rangle - \langle \nabla_X Z, \|\eta\|^2 \varphi - \frac{1}{2} \nabla \|\eta\|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \langle \nabla_Z X, \nabla \|\eta\|^2 \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \nabla_X (A_\eta - \|\eta\|^2 \text{Id}) Z, \varphi \rangle &= -\frac{1}{2} \langle \nabla_X Z, \nabla \|\eta\|^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla_Z X, \nabla \|\eta\|^2 \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} \langle [X, Z], \nabla \|\eta\|^2 \rangle = -\frac{1}{2} [XZ (\|\eta\|^2) - ZX (\|\eta\|^2)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \nabla_X (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) Z, \varphi \rangle &= \frac{1}{2} XZ (\|\eta\|^2) = \frac{1}{2} X \langle Z, \nabla \|\eta\|^2 \rangle. \end{aligned}$$

Substituindo a fórmula anterior em (2.18), resulta na igualdade (2.14).

Como η é paralelo na conexão normal de f ao longo de \mathcal{D} e $\xi \perp \eta$, então $\langle \nabla_X^\perp \xi, \eta \rangle = -\langle \xi, \nabla_X^\perp \eta \rangle = 0$, ou seja, $\nabla_X^\perp \xi \perp \eta$. Assim

$$\begin{aligned} \nabla_X A_\xi Z - A_\xi \nabla_X Z - A_{\nabla_X^\perp \xi} Z &= \nabla_Z A_\xi X - A_\xi \nabla_Z X - A_{\nabla_Z^\perp \xi} X \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \nabla_X A_\xi Z, \varphi \rangle - \langle A_\xi \nabla_X Z, \varphi \rangle - \langle A_{\nabla_X^\perp \xi} Z, \varphi \rangle &= -\langle A_\xi \nabla_Z X, \varphi \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow X \langle A_\xi Z, \varphi \rangle - \langle A_\xi Z, \nabla_X \varphi \rangle - \langle A_\xi \nabla_X^h Z, \varphi \rangle - \langle Z, A_{\nabla_X^\perp \xi} \varphi \rangle &= \\ &= -\langle A_\xi \nabla_Z^h X, \varphi \rangle \Rightarrow \\ \stackrel{(2.12)}{\Rightarrow} X \langle \nabla_Z^\perp \xi, \eta \rangle - \langle A_\xi Z, \nabla_X \varphi \rangle - \langle \nabla_{\nabla_X^\perp \xi}^\perp Z, \eta \rangle - \langle \nabla_Z^\perp \nabla_X^\perp \xi, \eta \rangle &= -\langle \nabla_{\nabla_Z^\perp X}^\perp \xi, \eta \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \nabla_X^\perp \nabla_Z^\perp \xi, \eta \rangle + \langle \nabla_Z^\perp \xi, \nabla_X^\perp \eta \rangle - \langle \nabla_Z^\perp \nabla_X^\perp \xi, \eta \rangle - \langle \nabla_{\nabla_X^\perp Z}^\perp \xi, \eta \rangle &= \langle A_\xi Z, \nabla_X \varphi \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle A_\xi Z, \nabla_X \varphi \rangle = \langle \nabla_X^\perp \nabla_Z^\perp \xi - \nabla_Z^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Z]}^\perp \xi, \eta \rangle &= \\ &= \langle \nabla_X^\perp \nabla_Z^\perp \xi - \nabla_Z^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Z]}^\perp \xi, \eta \rangle = \langle \mathcal{R}^\perp(X, Z)\xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela equação de Ricci, $\langle \mathcal{R}^\perp(X, Z)\zeta, \eta \rangle = 0$. Portanto vale a fórmula (2.15).

Como η é paralelo na conexão normal de f ao longo de \mathcal{D} e $\langle \zeta, \eta \rangle = 1$, então $\langle \nabla_X^\perp \zeta, \eta \rangle = -\langle \zeta, \nabla_X^\perp \eta \rangle = 0$, ou seja, $\nabla_X^\perp \zeta \perp \eta$. Assim

$$\begin{aligned}
 \nabla_X A_\zeta Z - A_\zeta \nabla_X Z - A_{\nabla_X^\perp \zeta} Z &= \nabla_Z A_\zeta X - A_\zeta \nabla_Z X - A_{\nabla_Z^\perp \zeta} X = \\
 &= \nabla_Z X - A_\zeta \nabla_Z X - A_{\nabla_Z^\perp \zeta} X \Rightarrow \\
 \Rightarrow \nabla_X (A_\zeta - \text{Id}) Z + (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X Z - A_{\nabla_X^\perp \zeta} Z &= (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_Z X - A_{\nabla_Z^\perp \zeta} X \Rightarrow \\
 \Rightarrow \langle \nabla_X (A_\zeta - \text{Id}) Z, \varphi \rangle + \langle (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X Z, \varphi \rangle - \langle A_{\nabla_X^\perp \zeta} Z, \varphi \rangle &= \\
 &= \langle (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_Z X, \varphi \rangle - \langle A_{\nabla_Z^\perp \zeta} X, \varphi \rangle \Rightarrow \\
 \Rightarrow \langle \nabla_X (A_\zeta - \text{Id}) Z, \varphi \rangle + \langle (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X^h Z, \varphi \rangle - \langle Z, A_{\nabla_X^\perp \zeta} \varphi \rangle &= \\
 &= \langle (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_Z^h X, \varphi \rangle - \langle X, \varphi \rangle \langle \eta, \nabla_Z^\perp \zeta \rangle \Rightarrow \\
 \stackrel{(2.12)}{\Rightarrow} \langle \nabla_X (A_\zeta - \text{Id}) Z, \varphi \rangle + \langle \nabla_X^h Z, (\text{Id} - A_\zeta) \varphi \rangle - \langle \nabla_Z^\perp \nabla_X^\perp \zeta, \eta \rangle &= \langle \nabla_Z^h X, (\text{Id} - A_\zeta) \varphi \rangle \Rightarrow \\
 \stackrel{(2.13)}{\Rightarrow} \langle \nabla_X (A_\zeta - \text{Id}) Z, \varphi \rangle - \langle \nabla_{\nabla_X^h \zeta}^\perp \zeta, \eta \rangle - \langle \nabla_Z^\perp \nabla_X^\perp \zeta, \eta \rangle &= -\langle \nabla_{\nabla_Z^h X}^\perp \zeta, \eta \rangle \Rightarrow \\
 \Rightarrow X \langle (A_\zeta - \text{Id}) Z, \varphi \rangle - \langle \nabla_Z^\perp \nabla_X^\perp \zeta, \eta \rangle - \langle \nabla_{[X, Z]}^\perp \zeta, \eta \rangle &= \langle (A_\zeta - \text{Id}) Z, \nabla_X \varphi \rangle \Rightarrow \\
 \Rightarrow -X \langle Z, (\text{Id} - A_\zeta) \varphi \rangle - \langle \nabla_Z^\perp \nabla_X^\perp \zeta, \eta \rangle - \langle \nabla_{[X, Z]}^\perp \zeta, \eta \rangle &= \langle (A_\zeta - \text{Id}) Z, \nabla_X \varphi \rangle \Rightarrow \\
 \stackrel{(2.13)}{\Rightarrow} \langle (A_\zeta - \text{Id}) Z, \nabla_X \varphi \rangle = X \langle \nabla_Z^\perp \zeta, \eta \rangle - \langle \nabla_Z^\perp \nabla_X^\perp \zeta, \eta \rangle - \langle \nabla_{[X, Z]}^\perp \zeta, \eta \rangle &= \\
 &= \langle \mathcal{R}^\perp(X, Z)\zeta, \eta \rangle.
 \end{aligned}$$

Como $\langle \mathcal{R}^\perp(X, Z)\zeta, \eta \rangle = 0$, pela equação de Ricci, então vale a fórmula (2.16). • \square

Corolário 2.10. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ uma imersão isométrica. Se η é uma normal de Dupin não nula de f e E_η é uma distribuição umbílica com vetor curvatura média φ , então E_η é uma distribuição esférica e valem as fórmulas do Lema 2.9*

Demonstração. Tomando $\mathcal{D} := E_\eta$, então valem as fórmulas do Lema 2.9. Resta mostrar que E_η é esférica, ou seja, que $\nabla_X \varphi(x) \in E_\eta(x)$, para quaisquer $x \in M$ e $X \in E_\eta(x)$. Mas, pelo Lema A.17, isso é equivalente a mostrar que

$$(A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id}) \nabla_X \varphi(x) = 0,$$

para todo $\psi \in T_x^\perp M$ e todo $x \in M$.

Sejam então $x \in M$, um ponto qualquer e $\psi \in T_x^\perp M$ um vetor normal qualquer.

Caso $\eta(x)$ seja tipo tempo ou tipo espaço:

Como $\eta(x)$ é tipo tempo ou tipo espaço, então $\|\eta(x)\|^2 \neq 0$. Dessa forma

$$\begin{aligned}
 A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id} &= A_{\psi - \langle \psi, \eta \rangle \frac{\eta}{\|\eta\|^2}} + \langle \psi, \eta \rangle A_{\frac{\eta}{\|\eta\|^2}} - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id} = \\
 &= A_{\psi - \langle \psi, \eta \rangle \frac{\eta}{\|\eta\|^2}} + \langle \psi, \eta \rangle \left(A_{\frac{\eta}{\|\eta\|^2}} - \text{Id} \right) = A_\xi + \langle \psi, \eta \rangle \left(A_{\frac{\eta}{\|\eta\|^2}} - \text{Id} \right),
 \end{aligned}$$

em que $\xi := \psi - \langle \psi, \eta \rangle \frac{\eta}{\|\eta\|^2} \perp \eta$. Assim, se $Z \in E_\eta^\perp(x)$, então

$$\langle (A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id}) \nabla_X \varphi, Z \rangle = \langle A_\xi \nabla_X \varphi, Z \rangle + \langle \psi, \eta \rangle \left\langle \left(A_{\frac{\eta}{\|\eta\|^2}} - \text{Id} \right) \nabla_X \varphi, Z \right\rangle.$$

Por outro lado, pelas igualdades (2.14) e (2.15),

$$\langle \nabla_X \varphi, A_\xi Z \rangle = 0 = \langle \nabla_X \varphi, (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) Z \rangle.$$

Portanto $\langle (A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id}) \nabla_X \varphi, Z \rangle = 0$. Resta provar que $\langle (A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id}) \nabla_X \varphi(x), Y \rangle = 0$, para $Y \in E_\eta(x)$. Mas

$$\langle (A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id}) \nabla_X \varphi(x), Y \rangle = \langle \nabla_X \varphi, A_\xi Y \rangle + \langle \psi, \zeta \rangle \left\langle \nabla_X \varphi, \left(A_{\frac{\eta}{\|\eta\|^2}} - \text{Id} \right) Y \right\rangle \stackrel{(2.6)}{=} 0.$$

Caso $\eta(x)$ seja tipo luz e não nulo:

Como $\eta(x)$ é tipo luz e não nulo, então existe um vetor tipo luz $\zeta \in T_x^\perp M$ tal que $\langle \eta, \zeta \rangle = 1$. Dessa forma,

$$A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id} = A_{\psi - \langle \psi, \eta \rangle \zeta} + \langle \psi, \eta \rangle A_\zeta - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id} = A_\xi + \langle \psi, \eta \rangle (A_\zeta - \text{Id}),$$

em que $\xi := \psi - \langle \psi, \eta \rangle \zeta \perp \eta$. Assim, para $Z \in E_\eta^\perp(x)$,

$$\langle (A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id}) \nabla_X \varphi, Z \rangle = \langle A_\xi \nabla_X \varphi, Z \rangle + \langle \psi, \eta \rangle \langle (A_\zeta - \text{Id}) \nabla_X \varphi(x), Z \rangle.$$

Por outro lado, pelas igualdades (2.15) e (2.16),

$$\langle \nabla_X \varphi, A_\xi Z \rangle = 0 = \langle \nabla_X \varphi, (\text{Id} - A_\zeta) Z \rangle.$$

Portanto $\langle (A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id}) \nabla_X \varphi, Z \rangle = 0$. Resta provar que $\langle (A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id}) \nabla_X \varphi, Y \rangle = 0$, para $Y \in E_\eta(x)$. Mas

$$\langle (A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id}) \nabla_X \varphi, Y \rangle = \langle \nabla_X \varphi, A_\xi Y \rangle + \langle \psi, \eta \rangle \langle \nabla_X \varphi, (A_\zeta - \text{Id}) Y \rangle \stackrel{(2.6)}{=} 0. \quad \square$$

Proposição 2.11. *Sejam M^m uma variedade riemanniana e $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ uma imersão isométrica com normal principal não nula η .*

- (I) *Se $\dim E_\eta$ é constante e $\dim E_\eta \geq 2$, então η é paralelo na conexão normal de f ao longo de E_η , isto é, η é uma normal de Dupin.*
- (II) *Se $\mathcal{D} \subset E_\eta$ é uma distribuição esférica em M^m cujas folhas são subconjuntos abertos de*
 - (II.1) *elipsoides q -dimensionais do tipo $\mathbb{S}(c, r) \cap (c + L) \subset \mathbb{R}_t^n$, em que L é um subespaço vetorial $(q + 1)$ -dimensional tipo espaço de \mathbb{R}_t^n ;*
 - (II.2) *ou hiperboloides q -dimensionais do tipo $\mathbb{S}(c, -r) \cap (c + L) \subset \mathbb{R}_t^n$, em que L é um subespaço vetorial $(q + 1)$ -dimensional tipo tempo de \mathbb{R}_t^n ;*
 - (II.3) *ou paraboloides q -dimensionais do tipo $[\mathcal{L}_* \cap (c + L)] + d \subset \mathbb{R}_t^n$, em que $L = \text{ger} \{w\} \oplus V$ é um subespaço vetorial $(q + 1)$ -dimensional tipo luz de \mathbb{R}_t^n (com V tipo espaço e w tipo luz), $c \perp V$ é tipo luz e $\langle c, w \rangle \neq 0$;*

então η é paralelo na conexão normal de f ao longo da distribuição \mathcal{D} .

- (III) *Se η é uma normal de Dupin com multiplicidade q , então E_η é uma distribuição esférica em M^m .*

Sejam $x \in M$, N uma folha da distribuição E_η que passa por x e $\sigma := f_ \varphi + \eta$, em que φ é o vetor curvatura média da distribuição E_η .*

- (III.1) *Se $\sigma(x)$ é tipo espaço, então $f(N)$ é um subconjunto aberto de um elipsoide q -dimensional em \mathbb{R}_t^n do tipo $\mathbb{S}(c, r) \cap (c + L)$, em que L é um subespaço tipo espaço $(q + 1)$ -dimensional de \mathbb{R}_t^n .*

(III.2) Se $\sigma(x)$ é tipo tempo, então $f(N)$ é um subconjunto aberto de um hiperboloide q -dimensional em \mathbb{R}_t^n do tipo $\mathbb{S}(c, -r) \cap (c + L)$, em que L é um subespaço tipo tempo $(q + 1)$ -dimensional de \mathbb{R}_t^n .

(III.3) Se $\sigma(x)$ é tipo luz e não nulo, então $f(N)$ é um subconjunto aberto de um paraboloides q -dimensional em \mathbb{R}_t^n do tipo $c + \left\{v + \frac{\|v\|^2}{2}a : v \in V(x)\right\}$, em que $V \subset \mathbb{R}_t^n$ é um subespaço q -dimensional tipo espaço e $a \perp V$ é tipo luz.

Observações 2.12. Pela demonstração feita mais adiante, nos itens (III.1) e (III.2) da Proposição 2.11

$$c = f(x) + \frac{\sigma(x)}{\|\sigma(x)\|^2}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{\|\sigma(x)\|^2}} \quad e \quad L(x) = f_*E_\eta(x) \oplus \text{ger} \{\sigma(x)\}$$

são constantes em cada folha de E_η .

Já no item (III.3), os paraboloides que contêm as folhas de E_η são dados por $p(x) + (-\tilde{\sigma}(x) + L) \cap \mathcal{L} = p(x) - \tilde{\sigma}(x) + \left\{v + \frac{\|v\|^2}{2}\sigma(x) : v \in V(x)\right\}$, em que $L(x) = f_*E_\eta(x) \oplus \text{ger} \{\sigma(x)\}$ é constante em cada folha de E_η , $V(x) \subset L(x)$ é um subespaço tipo espaço m -dimensional qualquer, $\tilde{\sigma}(x)$ é um vetor tipo luz qualquer que satisfaz $\langle \sigma(x), \tilde{\sigma}(x) \rangle = 1$ e $\tilde{\sigma}(x) \perp V$, $p(x) = f(x) + \xi(x)$ é constante em cada folha de E_η e $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ é o único campo que satisfaz $\xi(x) \in L(x) \oplus \text{ger} \{\tilde{\sigma}(x)\}$ e $\langle \sigma(x), \xi(x) \rangle = 1$. Além disso, se $\{e_1, \dots, e_q\}$ é uma base ortonormal de $E_\eta(x)$, então $\xi(x)$ é dado por

$$\xi(x) := - \sum_{i=1}^q \langle df(x)e_i, \tilde{\sigma}(x) \rangle df(x)e_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \langle df(x)e_i, \tilde{\sigma}(x) \rangle^2 \sigma(x) + \tilde{\sigma}(x).$$

Prova da proposição 2.11. Sejam X^v e X^h as projeções ortogonais de $X \in \Gamma(TM)$ sobre \mathcal{D} e \mathcal{D}^\perp , respectivamente. Analogamente, denotemos por $\nabla_X^v Y$ e $\nabla_X^h Y$ as projeções ortogonais de $\nabla_X Y$ sobre \mathcal{D} e \mathcal{D}^\perp , respectivamente.

(I): Sejam $\mathcal{D} := E_\eta$, $X, Y \in \Gamma(E_\eta)$ e $\xi, \zeta \in \Gamma(T^\perp M)$ tais que $\xi \perp \eta$ e $\langle \zeta, \eta \rangle = 1$. Pela Equação de Codazzi

$$\begin{aligned} \nabla_X A_\xi Y - A_\xi \nabla_X Y - A_{\nabla_X^\perp \xi} Y &= \nabla_Y A_\xi X - A_\xi \nabla_Y X - A_{\nabla_Y^\perp \xi} X \Rightarrow \\ &\stackrel{(2.6)}{\Rightarrow} A_\xi \nabla_X Y + A_{\nabla_X^\perp \xi} Y = A_\xi \nabla_Y X + A_{\nabla_Y^\perp \xi} X. \end{aligned}$$

Como $\dim E_\eta \geq 2$, então podemos supor que $X \perp Y$ e que $\|Y\|^2 = 1$. Assim, fazendo o produto interno em ambos os lados da igualdade acima por Y ,

$$\begin{aligned} \langle A_\xi \nabla_X Y, Y \rangle + \langle A_{\nabla_X^\perp \xi} Y, Y \rangle &= \langle A_\xi \nabla_Y X, Y \rangle + \langle A_{\nabla_Y^\perp \xi} X, Y \rangle \Rightarrow \\ &\stackrel{(2.6)}{\Rightarrow} \langle \alpha(Y, Y), \nabla_X^\perp \xi \rangle = \langle \alpha(X, Y), \nabla_X^\perp \xi \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_X^\perp \eta, \xi \rangle = 0. \end{aligned}$$

Utilizando novamente a fórmula de Codazzi,

$$\begin{aligned} \nabla_X A_\zeta Y - A_\zeta \nabla_X Y - A_{\nabla_X^\perp \zeta} Y &= \nabla_Y A_\zeta X - A_\zeta \nabla_Y X - A_{\nabla_Y^\perp \zeta} X \Rightarrow \\ &\stackrel{(2.6)}{\Rightarrow} (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X Y - A_{\nabla_X^\perp \zeta} Y = (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_Y X - A_{\nabla_Y^\perp \zeta} X \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X Y - A_{\nabla_X^\perp \zeta} Y, Y \rangle = \langle (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_Y X - A_{\nabla_Y^\perp \zeta} X, Y \rangle \Rightarrow \\ &\stackrel{(2.6)}{\Rightarrow} \langle \alpha(Y, Y), \nabla_X^\perp \zeta \rangle = \langle \alpha(X, Y), \nabla_Y^\perp \zeta \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_X^\perp \eta, \zeta \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como $\langle \nabla_X^\perp \eta, \xi \rangle = 0$ e $\langle \nabla_X^\perp \eta, \zeta \rangle = 0$, para quaisquer $\xi, \zeta \in \Gamma(T^\perp M)$ tais que $\xi \perp \eta$ e $\langle \zeta, \eta \rangle = 1$, então $\nabla_X^\perp \eta = 0$. •

(II.1) e (II.2): Suponhamos que as folhas de \mathcal{D} sejam subconjuntos abertos de elipsoides ou hiperboloides q -dimensionais do tipo $\mathbb{S}(c, \varepsilon r) \cap (c + L) \subset \mathbb{R}_t^n$, em que L é um subespaço $(q+1)$ -dimensional tipo espaço ou tipo tempo de \mathbb{R}_t^n e $\varepsilon = 1$, caso L seja tipo espaço, ou $\varepsilon = -1$, caso L seja tipo tempo.

Seja $N \subset M$ uma folha (subvariedade integral) de \mathcal{D} , logo $f(N) \subset \mathbb{S}(c, \varepsilon r) \cap (c + L) \subset \mathbb{R}_t^n$, para certos $c \in \mathbb{R}_t^n$, $r > 0$ e L^{q+1} um subespaço vetorial de \mathbb{R}_t^n de tipo espaço ou tipo tempo. Definamos o campo $\sigma: N \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ por $\sigma(x) := -\varepsilon \frac{f(x) - c}{r^2}$ e seja $X \in \Gamma(\mathcal{D})$, assim

$$\begin{aligned} \|\sigma\|^2 &= \frac{\varepsilon^2}{r^4} \|f(x) - c\|^2 = \frac{\varepsilon^3 r^2}{r^4} = \frac{\varepsilon}{r^2} \quad \text{e} \\ \langle \sigma, f_* X \rangle &= -\varepsilon \left\langle \frac{f(x) - c}{r^2}, f_* X \right\rangle = -\varepsilon r^2 \left\langle -\varepsilon \frac{f(x) - c}{r^2}, -\varepsilon \frac{f_* X}{r^2} \right\rangle = -r^2 \varepsilon \langle \sigma, \sigma_* X \rangle = 0, \end{aligned}$$

ou seja, σ é um campo normal a N e $\|\sigma\|^2 = \frac{\varepsilon}{r^2}$ é constante em N .

Calculemos $\tilde{\nabla}_X f_* Y$, em que $Y \in \Gamma(\mathcal{D})$.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X f_* Y &\stackrel{\mathcal{D} \subset E_\eta}{=} f_* \nabla_X Y + \langle X, Y \rangle \eta = f_* \nabla_X^v Y + f_* \nabla_X^h Y + \langle X, Y \rangle \eta = \\ &= f_* \nabla_X^v Y + f_* \langle X, Y \rangle \varphi + \langle X, Y \rangle \eta, \quad \text{pois } \mathcal{D} \text{ é uma distribuição esférica,} \\ \therefore \tilde{\nabla}_X f_* Y &= f_* \nabla_X^v Y + \langle X, Y \rangle (f_* \varphi + \eta). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $c + L$ é totalmente geodésica em \mathbb{R}_t^n , $f(N) \subset \mathbb{S}(c, \varepsilon r) \cap (c + L) \subset \mathbb{R}_t^n$ e ∇^v é a conexão de Levi-Civita de N , então

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = f_* \nabla_X^v Y - \langle X, Y \rangle \varepsilon \frac{f - c}{r^2} = f_* \nabla_X^v Y + \langle X, Y \rangle \sigma$$

Igualando as duas últimas fórmulas, concluímos que $\sigma = f_* \varphi + \eta$, portanto $\eta = \sigma - f_* \varphi$. Assim

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \eta &= \tilde{\nabla}_X \sigma - \tilde{\nabla}_X f_* \varphi = -\tilde{\nabla}_X \varepsilon \frac{f - c}{r^2} - f_* \nabla_X \varphi - \cancel{\alpha(X, \varphi)} = \\ &= -\frac{\varepsilon}{r^2} f_* X - f_* \nabla_X \varphi, \quad \text{pois } X \in \mathcal{D} \subset E_\eta. \end{aligned}$$

Portanto $\nabla_X^\perp \eta = 0$. •

(II.3): Suponhamos agora que as folhas de \mathcal{D} sejam subconjuntos abertos de paraboloides do tipo $[\mathcal{L} \cap (L + c)] + d \subset \mathbb{R}_t^n$, em que $L = \text{ger}\{w\} \oplus V$ é um subespaço vetorial $(q+1)$ -dimensional tipo luz de \mathbb{R}_t^n (com V tipo espaço e w e tipo luz), $c \perp V$ é tipo luz e $\langle c, w \rangle \neq 0$.

Seja N uma folha de \mathcal{D} . Como $[\mathcal{L} \cap (L + c)] + d \subset \text{ger}\{c, w\} \oplus V + d \subset \mathbb{R}_t^n$, e $\text{ger}\{c, w\} \oplus V + d$ é totalmente geodésica em \mathbb{R}_t^n , então podemos considerar $f|_N: N \rightarrow \text{ger}\{c, w\} \oplus V + d$.

Como $f - d \in \mathcal{L}$, então $f - d$ é um campo normal a N . Seja $\{w, X_1, \dots, X_q\}$ uma base de L tal que $\{X_1, \dots, X_q\}$ seja uma base ortonormal de V . Dessa forma $\text{ger}\{c, w\} \oplus V = L + \text{ger}\{c\} = \text{ger}\{w, \tilde{w}, X_1, \dots, X_q\}$, em que $\{w, \tilde{w}\}$ é uma base pseudo-ortonormal de $\text{ger}\{w, c\}$. Podemos supor que $c = b\tilde{w}$.

Afirmamos que $\langle f - d, \frac{w}{b} \rangle = 1$. De fato, como $f(x) - d \in L + c$, então

$$f(x) - d = a(x)w + b\tilde{w} + \sum_{i=1}^q x_i(x)X_i \Rightarrow \left\langle f - d, \frac{w}{b} \right\rangle = 1.$$

Dessa forma, $w \perp N$.

Como $f - d$ e $\frac{w}{b}$ são ortogonais a N e $f(N) \subset \text{ger} \{c, w\} \oplus V + d$, então

$$\begin{aligned} \alpha_{f|N}(X, Y) &= \left\langle \alpha_{f|N}(X, Y), f - d \right\rangle \frac{w}{b} + \left\langle \alpha_{f|N}(X, Y), \frac{w}{b} \right\rangle (f - d) = \\ &= \left\langle A_{f-d} X, Y \right\rangle \frac{w}{b} + \left\langle A_{\frac{w}{b}} X, Y \right\rangle (f - d). \end{aligned}$$

Mas $\tilde{\nabla}_X \frac{w}{b} = 0$ e $\tilde{\nabla}_X (f - d) = f_* X$. Portanto $\alpha_{f|N}(X, Y) = -\langle X, Y \rangle \frac{w}{b}$.

Pelas mesmas contas feitas para (II.1) e (II.2), $\tilde{\nabla}_X f_* Y = f_* \nabla_X^u Y + \langle X, Y \rangle (f_* \varphi + \eta)$. Logo

$$\begin{aligned} -\frac{w}{b} &= f_* \varphi + \eta \Rightarrow \eta = -\frac{w}{b} - f_* \varphi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{\nabla}_X \eta = -\tilde{\nabla}_X (f_* \varphi) = -f_* \nabla_X \varphi - \langle X, \varphi \rangle \eta = -f_* \nabla_X \varphi. \end{aligned}$$

Portanto $\nabla_X^\perp \eta = 0$, para todo $X \in \mathcal{D}$. •

(III): Se considerarmos a distribuição $\mathcal{D} := E_\eta$, então, Pelo Lema 2.9, valem as fórmulas (2.6) a (2.9).

Afirmção 1: Se $X, Y \in \Gamma(E_\eta)$ e $X \perp Y$, então $\nabla_X Y \in \Gamma(E_\eta)$.

De fato, dados $Z \in \Gamma(E_\eta^\perp)$ e $\xi, \zeta \in \Gamma(T^\perp M)$ tais que $\xi \perp \eta$ e $\langle \zeta, \eta \rangle = 1$, valem as fórmulas

$$\begin{aligned} (\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) \nabla_X Y &\stackrel{(2.7)}{=} \frac{\langle X, Y \rangle}{2} \nabla \|\eta\|^2 = 0 \Rightarrow \|\eta\|^2 \nabla_X Y = A_\eta \nabla_X Y; \quad (2.19) \\ \langle A_\xi \nabla_X Y, Z \rangle &\stackrel{(2.8)}{=} \langle X, Y \rangle \langle \nabla_Z \xi, \eta \rangle = 0 \Rightarrow A_\xi \nabla_X Y \in \Gamma(E_\eta); \\ \langle (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X Y, Z \rangle &\stackrel{(2.9)}{=} -\langle X, Y \rangle \langle \nabla_Z^\perp \zeta, \eta \rangle = 0 \Rightarrow (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X Y \in \Gamma(E_\eta). \end{aligned}$$

Por outro lado, dado $W \in E_\eta$,

$$\begin{cases} \langle A_\xi \nabla_X Y, W \rangle = \langle \nabla_X Y, A_\xi W \rangle \stackrel{(2.6)}{=} 0; \\ \langle (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X Y, W \rangle = \langle \nabla_X Y, (\text{Id} - A_\zeta) W \rangle \stackrel{(2.6)}{=} 0. \end{cases}$$

Portanto

$$A_\xi \nabla_X Y = 0 \quad \text{e} \quad (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X Y = 0, \quad (2.20)$$

para quaisquer $\xi, \zeta \in \Gamma(T^\perp M)$ tais que $\xi \perp \eta$ e $\langle \zeta, \eta \rangle = 1$.

Seja $x \in M$ um ponto qualquer e $\psi \in T_x^\perp M$ um vetor normal qualquer. Se $\eta(x)$ for tipo tempo ou tipo espaço, então $\|\eta(x)\|^2 \neq 0$, logo

$$(A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id}) \nabla_X Y = A_{\psi - \langle \psi, \eta \rangle \frac{\eta}{\|\eta\|^2}} \nabla_X Y - \langle \psi, \eta \rangle \left(\text{Id} - A_{\frac{\eta}{\|\eta\|^2}} \right) \nabla_X Y \stackrel{(2.19), (2.20)}{=} 0.$$

Já se $\eta(x)$ for tipo luz, então existe um vetor tipo luz $\zeta \in T_x^\perp M$ tal que $\langle \eta(x), \zeta \rangle = 1$. Neste caso,

$$(A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id}) \nabla_X Y = A_{\psi - \langle \psi, \eta \rangle \zeta} \nabla_X Y - \langle \psi, \eta \rangle (\text{Id} - A_\zeta) \nabla_X Y \stackrel{(2.19), (2.20)}{=} 0.$$

Como $(A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id}) \nabla_X Y = 0$ então, pelo Lema A.17, $\nabla_X Y \in E_\eta$. ✓

Afirmção 2: E_η é umbílica.

Para mostrarmos essa afirmação, devemos mostrar que existe $\varphi \in \Gamma(E_\eta^\perp)$ tal que $\nabla_X^h Y = \langle X, Y \rangle \varphi$, para qualquer par de campos $X, Y \in \Gamma(E_\eta)$. Mas a função $(X, Y) \mapsto \nabla_X^h Y$ é bilinear

em E_η pois, para qualquer $Z \in \Gamma(E_\eta^\perp)$, $\langle \nabla_X^h Y, Z \rangle = -\langle Y, \nabla_X Z \rangle$. Além disso, pela Afirmação 1, $X \perp Y \Rightarrow \nabla_X^h Y = 0$. Podemos aplicar o Lema A.9 e concluir a existência de φ .

Se tomarmos um campo unitário diferenciável $X \in E_\eta$, então $\varphi = \nabla_X^h X$. Portanto φ é diferenciável. ✓

Afirmiação 3: E_η é uma distribuição esférica e valem as fórmulas de Lema 2.9.

Essa afirmação é verdadeira pelo Corolário 2.10. ✓

Seja $N \subset M$ é uma folha da distribuição E_η que passa por x . Devemos mostrar que $f(N)$ é um subconjunto aberto de um elipsoide q -dimensional do tipo $\mathbb{S}\left(c(x); \frac{1}{\|\sigma(x)\|}\right) \cap (c(x) + L(x))$, ou de um hiperboloide q -dimensional do tipo $\mathbb{S}\left(c(x); -\frac{1}{\|\sigma(x)\|}\right) \cap (c(x) + L(x))$, ou de um parabolóide q -dimensional do tipo $p(x) + (-\tilde{\sigma}(x) + L(x)) \cap \mathcal{L} = p(x) - \tilde{\sigma}(x) + \left\{v + \frac{\|v\|^2}{2}\sigma(x) : v \in V(x)\right\}$. Para isso, pelo Teorema 1.4, basta mostrarmos que $f|_N : \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão isométrica umbílica com vetor curvatura média σ , o que está feito pela fórmula (2.10). • □

Definição 2.13. Seja \mathcal{D} uma distribuição umbílica em uma variedade riemanniana M . O **tensor de decomposição** C associado a \mathcal{D} é dado por $C_X Z := -\nabla_Z^h X$, para $X \in \Gamma(\mathcal{D})$ e $Z \in \Gamma(\mathcal{D}^\perp)$, em que $\nabla_Z^h X$ é a projeção ortogonal de $\nabla_Z X$ sobre \mathcal{D}^\perp .

Observação 2.14. Dado um referencial ortonormal $\{w_1, \dots, w_k\}$ de \mathcal{D}^\perp , segue que

$$C_X Z = -\nabla_Z^h X = -\sum_{i=1}^k \langle \nabla_Z^h X, w_i \rangle w_i = \sum_{i=1}^k \langle X, \nabla_Z w_i \rangle w_i.$$

Portanto $C_{f \cdot X} g \cdot Z = f \cdot g \cdot C_X Z$, para quaisquer funções diferenciáveis $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ e quaisquer campos $X \in \Gamma(\mathcal{D})$ e $Z \in \Gamma(\mathcal{D}^\perp)$. Portanto C é um tensor.

Lema 2.15 (feito em [9]). Seja \mathcal{D} uma distribuição umbílica em M com vetor curvatura média φ . Então, dados $X, Y \in \mathcal{D}$ e $W, Z \in \mathcal{D}^\perp$, valem as seguintes igualdades:

$$(\nabla_X^h C_Y) W = C_Y C_X W + C_{\nabla_X^v Y} W - \mathcal{R}^h(X, W)Y + \langle X, Y \rangle (\langle W, \varphi \rangle - \nabla_W^h \varphi), \quad (2.21)$$

$$(\nabla_W^h C_X) Z - (\nabla_Z^h C_X) W = C_{\nabla_W^v X} Z - C_{\nabla_Z^v X} W - \mathcal{R}^h(W, Z)X - \langle [W, Z], X \rangle \varphi, \quad (2.22)$$

em que $\mathcal{R}^h(X, W)Y$ é a projeção ortogonal de $\mathcal{R}(X, W)Y$ sobre \mathcal{D}^\perp .

Se $\mathcal{D} \subset E_\eta$, então

$$(\nabla_X^h C_Y) W = C_Y C_X W + C_{\nabla_X^v Y} W + \langle X, Y \rangle (A_\eta W + \langle W, \varphi \rangle \varphi - \nabla_W^h \varphi), \quad (2.23)$$

$$(\nabla_W^h C_X) Z - (\nabla_Z^h C_X) W = C_{\nabla_W^v X} Z - C_{\nabla_Z^v X} W - \langle [W, Z], X \rangle \varphi. \quad (2.24)$$

Se η é uma normal principal de $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \subset E_\eta$ e \mathcal{D}^\perp é uma distribuição totalmente geodésica, então

$$\nabla_W^h \varphi = A_\eta W + \langle W, \varphi \rangle \varphi. \quad (2.25)$$

Demonstração. Sejam $X, Y \in \mathcal{D}$ e $W, Z \in \mathcal{D}^\perp$.

Fórmula (2.21):

$$\begin{aligned} (\nabla_X^h C_Y) W &= \nabla_X^h C_Y W - C_Y \nabla_X^h W = -\nabla_X^h \nabla_W^h Y - C_Y \nabla_X^h W = \\ &= -\nabla_X^h \nabla_W Y + \nabla_X^h \nabla_W^v Y - C_Y \nabla_X^h W = -\nabla_X^h \nabla_W Y + \langle X, \nabla_W^v Y \rangle \varphi - C_Y \nabla_X^h W. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\nabla_X^h \nabla_W Y &= \mathcal{R}^h(X, W)Y + \nabla_W^h \nabla_X Y + \nabla_{[X, W]}^h Y = \\
&= \mathcal{R}^h(X, W)Y + \nabla_W^h \nabla_X^v Y + \nabla_W^h \nabla_X^h Y + \nabla_{[X, W]^v}^h Y + \nabla_{[X, W]^h}^h Y = \\
&= \mathcal{R}^h(X, W)Y - C_{\nabla_X^v Y} W + \nabla_W^h \langle X, Y \rangle \varphi + \langle [X, W], Y \rangle \varphi + \nabla_{\nabla_X^h W}^h Y - \nabla_{\nabla_W^h X}^h Y = \\
&= \mathcal{R}^h(X, W)Y - C_{\nabla_X^v Y} W + \langle \nabla_W X, Y \rangle \varphi + \langle X, \nabla_W Y \rangle \varphi + \langle X, Y \rangle \nabla_W^h \varphi + \\
&\quad + \langle \nabla_X W, Y \rangle \varphi - \langle \nabla_W X, Y \rangle \varphi - C_Y \nabla_X^h W + C_Y \nabla_W^h X = \\
&= \mathcal{R}^h(X, W)Y - C_{\nabla_X^v Y} W + \langle X, \nabla_W^v Y \rangle \varphi - \langle W, \nabla_X^h Y \rangle \varphi + \langle X, Y \rangle \nabla_W^h \varphi - \\
&\quad - C_Y \nabla_X^h W - C_Y C_X W = \\
&= \mathcal{R}^h(X, W)Y - C_{\nabla_X^v Y} W + \langle X, \nabla_W^v Y \rangle \varphi - \langle X, Y \rangle \langle W, \varphi \rangle \varphi + \langle X, Y \rangle \nabla_W^h \varphi - \\
&\quad - C_Y \nabla_X^h W - C_Y C_X W = \\
&= \mathcal{R}^h(X, W)Y - C_{\nabla_X^v Y} W + \langle X, \nabla_W^v Y \rangle \varphi - \langle X, Y \rangle (\langle W, \varphi \rangle \varphi - \nabla_W^h \varphi) - C_Y \nabla_X^h W - \\
&\quad - C_Y C_X W.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^h C_Y) W &= -\mathcal{R}^h(X, W)Y + C_{\nabla_X^v Y} W - \langle X, \nabla_W^v Y \rangle \varphi + \langle X, Y \rangle (\langle W, \varphi \rangle \varphi - \nabla_W^h \varphi) + \\
&\quad + C_Y \nabla_X^h W + C_Y C_X W + \langle X, \nabla_W^v Y \rangle \varphi - C_Y \nabla_X^h W = \\
&= C_Y C_X W + C_{\nabla_X^v Y} W - \mathcal{R}^h(X, W)Y + \langle X, Y \rangle (\langle W, \varphi \rangle \varphi - \nabla_W^h \varphi). \bullet
\end{aligned}$$

Fórmula (2.22):

$$\begin{aligned}
(\nabla_W^h C_X) Z &= \nabla_W^h C_X Z - C_X \nabla_W^h Z = -\nabla_W^h \nabla_Z^h X + \nabla_{\nabla_W^h Z}^h X = \\
&= -\nabla_W^h \nabla_Z X + \nabla_W^h \nabla_Z^v X + \nabla_{\nabla_W^h Z}^h X = -\nabla_W^h \nabla_Z X - C_{\nabla_Z^v X} W + \nabla_{\nabla_W^h Z}^h X.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
(\nabla_W^h C_X) Z - (\nabla_Z^h C_X) W &= -\nabla_W^h \nabla_Z X - C_{\nabla_Z^v X} W + \nabla_{\nabla_W^h Z}^h X + \\
&\quad + \nabla_Z^h \nabla_W X + C_{\nabla_W^v X} Z - \nabla_{\nabla_Z^h W}^h X = \\
&= C_{\nabla_W^v X} Z - C_{\nabla_Z^v X} W - \nabla_W^h \nabla_Z X + \nabla_Z^h \nabla_W X + \nabla_{\nabla_W^h Z - \nabla_Z^h W}^h X = \\
&= C_{\nabla_W^v X} Z - C_{\nabla_Z^v X} W - \mathcal{R}^h(W, Z)X - \nabla_{\nabla_W^h Z - \nabla_Z^h W}^h X = \\
&= C_{\nabla_W^v X} Z - C_{\nabla_Z^v X} W - \mathcal{R}^h(W, Z)X - \langle [W, Z], X \rangle \varphi. \bullet
\end{aligned}$$

Fórmulas (2.23) e (2.24): Pela fórmula de Gauss,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X, W)Y &= A_{\alpha(W, Y)}X - A_{\alpha(X, Y)}W = \langle Y, W \rangle A_\eta X - \langle X, Y \rangle A_\eta W = -\langle X, Y \rangle A_\eta W, \\
\mathcal{R}(W, Z)X &= A_{\alpha(Z, X)}W - A_{\alpha(W, X)}Z = \langle X, Z \rangle A_\eta W - \langle X, W \rangle A_\eta Z = 0.
\end{aligned}$$

As fórmulas (2.23) e (2.24) resultam da substituição das duas igualdades acima nas fórmulas (2.21) e (2.22). •

Fórmula (2.25): Como \mathcal{D}^\perp é totalmente geodésica, $\langle -\nabla_Z^h X, W \rangle = \langle X, \nabla_Z^v W \rangle = 0$, para quaisquer $X \in \mathcal{D}$ e $Z, W \in \mathcal{D}^\perp$. Assim $C_X Z = -\nabla_Z^h X = 0$, para quaisquer $X \in \mathcal{D}$ e $Z \in \mathcal{D}^\perp$. Dessa forma, fazendo $X = Y$ unitário, a equação (2.23) se torna

$$0 = A_\eta W + \langle W, \varphi \rangle \varphi - \nabla_W^h \varphi.$$

Portanto $\nabla_W^h \varphi = A_\eta W + \langle W, \varphi \rangle \varphi$. • □

Agora já podemos provar o Teorema 2.1.

Prova do Teorema 2.1. Tomando $\mathcal{D}(x) = E_\eta(x)$, o item (III) da Proposição 2.11 e o item (I) do Lema 2.9 garantem que E_η é uma distribuição esférica e $\nabla(\|\eta\|^2) \in E_\eta^\perp$. Seja então φ o vetor curvatura média de E_η e $\sigma := f_*\varphi + \eta$.

Afirmção 1: Vale a seguinte fórmula:

$$\tilde{\nabla}_Z \sigma = \langle Z, \varphi \rangle \sigma, \quad \forall Z \in E_\eta^\perp. \quad (2.26)$$

Pelos Lemas 2.9 e 2.15, as igualdades (2.12) e (2.25) são válidas, ou seja,

$$\langle \nabla_Z^\perp \eta, \xi \rangle = -\langle \alpha(Z, \varphi), \xi \rangle \quad \text{e} \quad \nabla_Z^h \varphi = A_\eta Z + \langle Z, \varphi \rangle \varphi,$$

para quaisquer $Z \in E_\eta^\perp$ e $\xi \perp \eta$.

Por (2.11), $(\|\eta\|^2 \text{Id} - A_\eta) \varphi = \frac{1}{2} \nabla \|\eta\|^2$, e disso segue que

$$\|\eta\|^2 \langle \varphi, Z \rangle - \langle A_\eta Z, \varphi \rangle = \frac{1}{2} Z(\|\eta\|^2), \quad \forall Z \in E_\eta^\perp. \quad (2.27)$$

Agora já podemos calcular $\tilde{\nabla}_Z \sigma$:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_Z \sigma &= \tilde{\nabla}_Z (f_*\varphi + \eta) = f_* (\nabla_Z^v \varphi + \nabla_Z^h \varphi) + \alpha(\varphi, Z) - f_* A_\eta Z + \nabla_Z^\perp \eta = \\ &\stackrel{E_\eta^\perp \text{ geodésica, (2.25)}}{=} f_* [A_\eta Z + \langle Z, \varphi \rangle \varphi] + \alpha(\varphi, Z) - f_* A_\eta Z + \nabla_Z^\perp \eta = \\ &= \langle Z, \varphi \rangle f_*\varphi + \alpha(\varphi, Z) + \nabla_Z^\perp \eta. \end{aligned}$$

Logo

$$\langle \tilde{\nabla}_Z \sigma, \xi \rangle = \langle \alpha(\varphi, Z) + \nabla_Z^\perp \eta, \xi \rangle = 0, \quad \forall \xi \perp \eta \text{ em } T_f^\perp M.$$

Suponhamos η seja tipo espaço ou tipo tempo (em algum ponto), então

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_Z \sigma &= \langle Z, \varphi \rangle f_*\varphi + \langle \alpha(Z, \varphi) + \nabla_Z^\perp \eta, \eta \rangle \frac{\eta}{\|\eta\|^2} = \\ &= \langle Z, \varphi \rangle f_*\varphi + \left[\langle A_\eta Z, \varphi \rangle + \frac{1}{2} Z(\|\eta\|^2) \right] \frac{\eta}{\|\eta\|^2} = \\ &\stackrel{(2.27)}{=} \langle Z, \varphi \rangle f_*\varphi + \|\eta\|^2 \langle \varphi, Z \rangle \frac{\eta}{\|\eta\|^2} = \langle Z, \varphi \rangle (f_*\varphi + \eta) = \langle Z, \varphi \rangle \sigma. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que η seja tipo luz em $x \in M$. Neste caso existe $\zeta \in T_x^\perp M$ tipo luz tal que $\langle \eta(x), \zeta \rangle = 1$. Logo, em x , valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_Z \sigma &= \langle Z, \varphi \rangle f_*\varphi + \langle \alpha(\varphi, Z) + \nabla_Z^\perp \eta, \zeta \rangle \eta = \\ &= \langle Z, \varphi \rangle f_*\varphi + \left[\langle A_\zeta \varphi, Z \rangle - \langle \eta, \nabla_Z^\perp \zeta \rangle \right] \eta = \\ &\stackrel{(2.13)}{=} \langle Z, \varphi \rangle [f_*\varphi + \eta] = \langle \varphi, Z \rangle \sigma. \end{aligned}$$

Portanto vale a fórmula (2.26). ✓

Afirmção 2: $\tilde{\nabla}_Z f_* X = f_* \nabla_Z^v X$, $\forall X \in E_\eta$ e todo $Z \in E_\eta^\perp$.

De fato, como E_η^\perp é totalmente geodésica, então

$$\langle \nabla_Z X, W \rangle = -\langle X, \nabla_Z W \rangle = -\langle X, \nabla_Z^v W \rangle = 0,$$

para quaisquer $X \in \Gamma(E_\eta)$ e $Z, W \in \Gamma(E_\eta^\perp)$, ou seja, $\nabla_Z X \in E_\eta$. Dessa forma,

$$\tilde{\nabla}_Z X = f_* \nabla_Z X + \alpha(Z, X) = f_* \nabla_Z^v X.$$

Portanto vale a afirmação. \checkmark

Afirmção 3: A distribuição $L := f_* E_\eta \oplus [\sigma]$ é paralela em \mathbb{R}_t^n ao longo de M , ou seja, $L = f_* E_\eta \oplus [\sigma]$ é um subespaço vetorial constante em \mathbb{R}_t^n .

De fato, se $X \in E_\eta$ e $f_* Y + \beta\sigma \in f_* E_\eta \oplus [\sigma]$, então

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X (f_* Y + \beta\sigma) &= f_* \nabla_X Y + \alpha(X, Y) + X(\beta)\sigma + \beta \tilde{\nabla}_X (f_* \varphi + \eta) = \\ &= f_* \nabla_X^v Y + f_* \nabla_X^h Y + \langle X, Y \rangle \eta + X(\beta)\sigma + \beta [f_* \nabla_X \varphi + \overline{\alpha}(X, \varphi) - f_* A_\eta X + \nabla_X^\perp \eta] = \\ &= f_* \nabla_X^v Y + \langle X, Y \rangle (f_* \varphi + \eta) + X(\beta)\sigma + \beta [f_* \nabla_X^v \varphi + f_* \nabla_X^h \varphi - \|\eta\|^2 f_* X] = \\ &= f_* [\nabla_X^v Y - \beta (\|\varphi\|^2 + \|\eta\|^2) X] + [\langle X, Y \rangle + X(\beta)] \sigma, \text{ pois } E_\eta \text{ é esférica.} \end{aligned}$$

Como E_η^\perp é totalmente geodésica, então $\langle \nabla_Z^h Y, W \rangle = -\langle Y, \nabla_Z^v W \rangle = 0$, para quaisquer $Y \in \Gamma(E_\eta)$ e $W, Z \in \Gamma(E_\eta^\perp)$, ou seja, $\nabla_Z^h Y = 0$. Sabendo disso, calculemos $\tilde{\nabla}_Z (f_* Y + \beta\sigma)$, para $Z \in E_\eta^\perp$.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_Z (f_* Y + \beta\sigma) &= f_* \nabla_Z Y + \alpha(Z, Y) + Z(\beta)\sigma + \beta \tilde{\nabla}_Z \sigma = \\ &\stackrel{(2.26)}{=} f_* \nabla_Z^v Y + f_* \nabla_Z^h Y + Z(\beta)\sigma + \beta \langle Z, \varphi \rangle \sigma = \\ &= f_* \nabla_Z^v Y + [Z(\beta) + \beta \langle Z, \varphi \rangle] \sigma. \end{aligned}$$

Portanto L é uma distribuição paralela em \mathbb{R}_t^n ao longo de M . \checkmark

Como L é constante e $f_* E_\eta$ é tipo espaço, então ou L e σ são tipo espaço em todo ponto de M , ou L e σ são tipo tempo em todo ponto de M , ou L e σ são tipo luz em todo ponto de M .

Caso 1: Suponhamos que σ seja tipo espaço.

Neste caso, pelo item (III.1) da Proposição 2.11 e pelas Observações 2.12, as folhas de E_η são elipsoides q -dimensionais em \mathbb{R}_t^n dados por $\mathbb{S}\left(c(x); \frac{1}{\|\sigma(x)\|}\right) \cap (c(x) + L)$, em que $\|\sigma(x)\|^2$ e $c(x) = f(x) + \frac{\sigma(x)}{\|\sigma(x)\|^2}$ são constantes em cada folha de E_η .

Afirmamos que $c_* TM \perp L$. De fato, como c é constante nas folhas de E_η , segue que $c_* X = 0$, para $X \in E_\eta$. Seja então $Z \in E_\eta^\perp$, logo

$$\begin{aligned} c_* Z &= f_* Z - 2 \frac{\langle \tilde{\nabla}_Z \sigma, \sigma \rangle}{\langle \sigma, \sigma \rangle^2} \sigma + \frac{1}{\langle \sigma, \sigma \rangle} \tilde{\nabla}_Z \sigma = \\ &\stackrel{(2.26)}{=} f_* Z - 2 \frac{\langle Z, \varphi \rangle \langle \sigma, \sigma \rangle}{\langle \sigma, \sigma \rangle^2} \sigma + \frac{\langle Z, \varphi \rangle}{\langle \sigma, \sigma \rangle} \sigma = f_* Z - \frac{\langle Z, \varphi \rangle}{\|\sigma\|^2} \sigma. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\langle c_* Z, f_* X \rangle = 0$ e $\langle c_* Z, \sigma \rangle = \langle f_* Z, \sigma \rangle - \langle Z, \varphi \rangle = \langle Z, \varphi \rangle - \langle Z, \varphi \rangle = 0$. Logo $c_* TM \perp L$.

Consideremos a variedade $N^{m-q} := M/\sim$, em que \sim é a relação de equivalência dada por

$$x \sim y \equiv x \text{ e } y \text{ estão em uma mesma folha da distribuição } E_\eta.$$

Como $c(x) = f(x) + \frac{\sigma(x)}{\|\sigma\|^2}$ é constante em cada folha de E_η , então podemos definir as funções $\bar{c}, \bar{\sigma}: N \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ por $\bar{c}(\bar{x}) := c(x)$ e $\bar{\sigma}(\bar{x}) := \sigma(x)$, em que \bar{x} é a classe de equivalência de x .

Seja $\Pi: \mathbb{R}_t^n \rightarrow L$ a projeção ortogonal. Assim, $\Pi \circ c$ e $\Pi \circ \bar{c}$ são constantes em M e N respectivamente, pois $c_*TM \perp L$. Dessa forma,

$$f(x) = c(x) - \frac{\sigma(x)}{\|\sigma\|^2} = p + h(\bar{x}) - r(\bar{x}) \frac{\sigma(x)}{\|\sigma(x)\|},$$

em que $r(\bar{x}) := \frac{1}{\|\sigma(x)\|}$, $p := \Pi(c(x))$ e $h(\bar{x})$ é a projeção ortogonal de $\bar{c}(\bar{x})$ sobre L^\perp .

Conclusão: $\bar{f}(M)$ é um subconjunto aberto da subvariedade de rotação com eixo L^\perp sobre a imersão $\bar{f}: N \rightarrow L^\perp \oplus \text{ger}\{\xi\}$, dada por $\bar{f}(\bar{x}) := \bar{h}(\bar{x}) + \bar{r}(\bar{x})\xi$, em que $\xi \in \mathbb{S}(0, 1) \subset L$ é um vetor fixo. A parametrização de rotação é a função $g: N \times \mathbb{S}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ dada por $g(\bar{x}, y) := p + h(\bar{x}) + r(\bar{x})y$. •

Caso 2: Suponhamos que σ seja tipo tempo.

Análoga ao caso anterior, $\bar{f}(M)$ é um subconjunto aberto da subvariedade de rotação com eixo L^\perp sobre a imersão $\bar{f}: N \rightarrow L^\perp \oplus \text{ger}\{\xi\}$, dada por $\bar{f}(\bar{x}) := \bar{h}(\bar{x}) + \bar{r}(\bar{x})\xi$, em que $\xi \in \mathbb{S}(0, -1) \subset L$ é um vetor fixo, $N := M/\sim$ e \sim é a relação de equivalência dada pelo caso anterior. A parametrização de rotação é a função $g: N \times \mathbb{S}(0, -1) \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ dada por $g(\bar{x}, y) := p + h(\bar{x}) + r(\bar{x})y$, $\mathbb{S}(0, -1) \subset L$. •

Caso 3: Suponhamos que σ seja tipo luz.

Como $\sigma(x)$ é tipo luz, então $L = E_\eta \oplus \text{ger}\{\sigma\}$ é um subespaço tipo luz de \mathbb{R}_t^n .

Afirmiação 4: Se $x_0 \in M$ e $\sigma_0 = \sigma(x_0)$, então $\sigma(x) = \frac{1}{r(x)}\sigma_0$, para alguma função diferenciável $r: M \rightarrow \mathbb{R}$.

De fato, como L é constante, se $x_0 \in M$ e $\{X_1, \dots, X_m\}$ é uma base ortonormal de $T_{x_0}M$, então $L = \text{ger}\{X_1, \dots, X_m, \sigma(x_0)\}$. Dessa forma $\sigma(x) = a_1(x)X_1 + \dots + a_m(x)X_m + \frac{1}{r(x)}\sigma_0$ e $0 = \|\sigma(x)\|^2 = \sum_{i=1}^m a_i^2(x)$. Logo $a_1(x) = \dots = a_m(x) = 0$ e $\sigma(x) = \frac{1}{r(x)}\sigma_0$.

Sejam $V \subset L$ um subespaço vetorial tipo espaço e $\tilde{\sigma}_0$ um vetor tipo luz tal que $\tilde{\sigma}_0 \perp V$ e $\langle \sigma_0, \tilde{\sigma}_0 \rangle = 1$. Nessas condições, $\frac{1}{r(x)} = \langle \sigma(x), \tilde{\sigma}_0 \rangle$ é diferenciável. ✓

Podemos definir $\tilde{\sigma}(x) = r(x)\tilde{\sigma}_0$. Dessa forma, $\tilde{\sigma}$ é um campo diferenciável tipo luz tal que $\tilde{\sigma} \perp V$ e $\langle \sigma, \tilde{\sigma} \rangle = 1$. Além disso, $\mathbb{R}_t^n = \text{ger}\{\sigma, \tilde{\sigma}\} \oplus U \oplus V = \text{ger}\{\sigma_0, \tilde{\sigma}_0\} \oplus U \oplus V$, em que $U = (\text{ger}\{\sigma, \tilde{\sigma}\} \oplus V)^\perp$ é um subespaço vetorial não degenerado de $L^\perp \subset \mathbb{R}_t^n$.

Utilizando $\tilde{\sigma}$, definimos

$$\xi(x) := - \sum_{i=1}^q \langle v_i(x), \tilde{\sigma}(x) \rangle v_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \langle v_i(x), \tilde{\sigma}(x) \rangle^2 \sigma(x) + \tilde{\sigma}(x),$$

em que $v_i(x) = f_*e_i(x)$ e $\{e_1(x), \dots, e_q(x)\}$ é uma base ortonormal de $E_\eta(x)$. Assim, pelos mesmos argumentos feitos na demonstração do Lema 1.2, ξ é um campo diferenciável tipo luz, $\xi \perp E_\eta$, $\xi \in L \oplus \text{ger}\{\tilde{\sigma}\} = L \oplus \text{ger}\{\tilde{\sigma}_0\}$ e $\langle \xi, \sigma \rangle = 1$.

Dessa forma, pelo item (III.3) da Proposição 2.11 e pelas Observações 2.12,

$$f(x) \in p(x) + (-\tilde{\sigma}(x) + L) \cap \mathcal{L} = p(x) - \tilde{\sigma}(x) + \left\{ v + \frac{\|v\|^2}{2} \sigma(x) : v \in V \right\},$$

em que $p(x) = f(x) + \xi(x)$ é constante em cada folha de E_η .

Sejam $P: \mathbb{R}_t^n \rightarrow V$ a projeção ortogonal e $v(x) = P(f(x) - p(x))$. Assim $f(x) - p(x) \in \text{ger} \{\tilde{\sigma}, \sigma\} \oplus V$ e

$$f(x) = p(x) - \tilde{\sigma}(x) + v(x) + \frac{\|v(x)\|^2}{2}\sigma(x) = p(x) + r(x) \left(-\tilde{\sigma}_0 + w(x) + \frac{\|w(x)\|^2}{2}\sigma_0 \right),$$

em que $w(x) := \frac{v(x)}{r(x)}$.

Afirmção 5: $\{v_*e_1, \dots, v_*e_q\}$ é uma base ortonormal de V .

De fato, como σ , $\tilde{\sigma}$ e p são constantes nas folhas de E_η , então $f_*e_i = v_*e_i + \langle v, v_*e_i \rangle \sigma$. Assim, $\langle v_*e_i, v_*e_j \rangle = \langle f_*e_i, f_*e_j \rangle$ e $\{v_*e_1, \dots, v_*e_q\}$ é uma base ortonormal de V . ✓

Afirmção 6: $\tilde{\nabla}_Z \tilde{\sigma} = -\langle Z, \varphi \rangle \tilde{\sigma}$, para todo $Z \in E_\eta^\perp$.

De fato, pela equação (2.26),

$$\langle Z, \varphi \rangle \sigma = \tilde{\nabla}_Z \sigma = \tilde{\nabla}_Z \frac{\sigma_0}{r} = -\frac{Z(r)}{r^2} \sigma_0 = -\frac{Z(r)}{r} \sigma.$$

Logo $\varphi = -\frac{\nabla r}{r}$ e $\nabla r = -r\varphi$.

Dessa forma, $\tilde{\nabla}_Z \tilde{\sigma} = \tilde{\nabla}_Z r \tilde{\sigma}_0 = Z(r) \tilde{\sigma}_0 = \langle Z, \nabla r \rangle \tilde{\sigma}_0 = \langle Z, -r\varphi \rangle \tilde{\sigma}_0 = -\langle Z, \varphi \rangle \tilde{\sigma}$. ✓

Consideremos a projeção $\Pi: (\text{ger} \{\sigma\} \oplus U) \oplus (\text{ger} \{\tilde{\sigma}\} \oplus V) \rightarrow \text{ger} \{\tilde{\sigma}\} \oplus V$ e calculemos $d(\Pi \circ p)(x)X$, para $X \in M$.

Como p é constante nas folhas de E_η , então $d(\Pi \circ p)(x)X = 0$, para qualquer $X \in E_\eta$. Seja então $Z \in E_\eta^\perp$, logo

$$d(\Pi \circ p)(x)Z = \Pi(\tilde{\nabla}_Z p(x)) = \Pi[\tilde{\nabla}_Z(f + \xi)(x)].$$

Mas,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_Z(f + \xi) &= f_*Z + \tilde{\nabla}_Z \xi = f_*Z + \tilde{\nabla}_Z \left(-\sum_{i=1}^q \langle v_i, \tilde{\sigma} \rangle v_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \langle v_i, \tilde{\sigma} \rangle^2 \sigma + \tilde{\sigma} \right) = \\ &= f_*Z + \tilde{\nabla}_Z \tilde{\sigma} - \sum_{i=1}^q \left[\left(\langle \tilde{\nabla}_Z v_i, \tilde{\sigma} \rangle + \langle v_i, \tilde{\nabla}_Z \tilde{\sigma} \rangle \right) v_i + \langle v_i, \tilde{\sigma} \rangle \tilde{\nabla}_Z v_i \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \left[2 \langle v_i, \tilde{\sigma} \rangle \left(\langle \tilde{\nabla}_Z v_i, \tilde{\sigma} \rangle + \langle v_i, \tilde{\nabla}_Z \tilde{\sigma} \rangle \right) \sigma + \langle v_i, \tilde{\sigma} \rangle^2 \tilde{\nabla}_Z \sigma \right] = \\ &= f_*Z - \langle Z, \varphi \rangle \tilde{\sigma} - \sum_{i=1}^q \left(\langle \tilde{\nabla}_Z f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle f_*e_i - \langle Z, \varphi \rangle \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle f_*e_i + \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle \tilde{\nabla}_Z f_*e_i \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \left[2 \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle \left(\langle \tilde{\nabla}_Z f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle - \langle Z, \varphi \rangle \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle \right) \sigma + \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle^2 \langle Z, \varphi \rangle \sigma \right] = \\ &\stackrel{\text{Afirmção 3}}{=} f_*Z - \sum_{i=1}^q \left(\langle f_* \nabla_Z^v e_i, \tilde{\sigma} \rangle - \langle Z, \varphi \rangle \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle \right) f_*e_i - \sum_{i=1}^q \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle f_* \nabla_Z^v e_i + \\ &\quad + \sum_{i=1}^q \left(\langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle \langle f_* \nabla_Z^v e_i, \tilde{\sigma} \rangle - \frac{1}{2} \langle Z, \varphi \rangle \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle^2 \right) \sigma - \langle Z, \varphi \rangle \tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $X \in E_\eta$ e $Z \in E_\eta^\perp$, então

$$\begin{aligned}\Pi(f_*Z) &= \sum_{i=1}^q \langle f_*Z, v_*e_i \rangle v_*e_i + \langle f_*Z, \sigma \rangle \tilde{\sigma} = \\ &= \sum_{i=1}^q (\langle \cancel{f_*Z, f_*e_i} \rangle - \langle f_*Z, \langle v, v_*e_i \rangle \sigma \rangle) v_*e_i + \langle f_*Z, f_*\varphi + \eta \rangle \tilde{\sigma} = \\ &= -\langle Z, \varphi \rangle v + \langle Z, \varphi \rangle \tilde{\sigma}; \\ \Pi(f_*X) &= \Pi(v_*X + \langle v, v_*X \rangle \sigma) = v_*X; \\ \Pi(\tilde{\sigma}) &= \tilde{\sigma} \quad \text{e} \quad \Pi(\sigma) = 0.\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\Pi[\tilde{\nabla}_Z(f + \xi)(x)] &= \Pi(f_*Z) - \sum_{i=1}^q (\langle f_*\nabla_Z^v e_i, \tilde{\sigma} \rangle - \langle Z, \varphi \rangle \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle) \Pi(f_*e_i) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^q \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle \Pi(f_*\nabla_Z^v e_i) - \langle Z, \varphi \rangle \Pi(\tilde{\sigma}) = \\ &= -\langle Z, \varphi \rangle v + \cancel{\langle Z, \varphi \rangle \tilde{\sigma}} - \sum_{i=1}^q (\langle f_*\nabla_Z^v e_i, \tilde{\sigma} \rangle - \langle Z, \varphi \rangle \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle) v_*e_i - \\ &\quad - \sum_{i=1}^q \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle v_*\nabla_Z^v e_i - \cancel{\langle Z, \varphi \rangle \tilde{\sigma}} = \\ &= -\langle Z, \varphi \rangle v - \sum_{i=1}^q (\langle f_*\nabla_Z^v e_i, \tilde{\sigma} \rangle - \langle Z, \varphi \rangle \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle) v_*e_i - \sum_{i=1}^q \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle v_*\nabla_Z^v e_i.\end{aligned}$$

Mas

$$\nabla_Z^v e_i = \sum_{j=1}^q \langle \nabla_Z^v e_i, e_j \rangle e_j \quad \Rightarrow \quad \langle f_*\nabla_Z^v e_i, \tilde{\sigma} \rangle = \sum_{j=1}^q \langle \nabla_Z^v e_i, e_j \rangle \langle f_*e_j, \tilde{\sigma} \rangle.$$

Logo

$$\begin{aligned}\Pi[\tilde{\nabla}_Z(f + \xi)(x)] &= -\langle Z, \varphi \rangle v - \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \langle \nabla_Z^v e_i, e_j \rangle \langle f_*e_j, \tilde{\sigma} \rangle v_*e_i + \\ &\quad + \langle Z, \varphi \rangle \sum_{i=1}^q \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle v_*e_i - \sum_{i=1}^q \langle f_*e_i, \tilde{\sigma} \rangle \sum_{j=1}^q \langle \nabla_Z^v e_i, e_j \rangle v_*e_j = \\ &= -\langle Z, \varphi \rangle v - \sum_{i,j=1}^q \langle \nabla_Z^v e_i, e_j \rangle \cancel{\langle f_*e_j, \tilde{\sigma} \rangle} v_*e_i + \langle Z, \varphi \rangle \sum_{i=1}^q \langle v_*e_i + \langle v, v_*e_i \rangle \sigma, \tilde{\sigma} \rangle v_*e_i - \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^q \langle f_*e_j, \tilde{\sigma} \rangle \cancel{\langle \nabla_Z^v e_j, e_i \rangle} v_*e_i = -\langle Z, \varphi \rangle v + \langle Z, \varphi \rangle v = 0.\end{aligned}$$

Dessa forma, $q = \Pi(p(x))$ é constante.

Sejam $N := M / \sim$, em que \sim é a relação de equivalência dada no Caso 1, e $\pi: \mathbb{R}_t^n \rightarrow \text{ger}\{\sigma\} \oplus U$ dada por $\pi := \text{Id} - \Pi$. Assim,

$$f(x) = q + \pi(p(x)) - \tilde{\sigma}(x) + v(x) + \frac{\|v(x)\|^2}{2} \sigma(x) = q + h(\bar{x}) + \bar{r}(\bar{x}) \left(-\tilde{\sigma}_0 + w(x) + \frac{\|w(x)\|^2}{2} \sigma_0 \right),$$

em que $h: N \rightarrow \text{ger } \{\tilde{\sigma}_0\} \oplus U$ e $r: N \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas $h(\bar{x}) = \pi(q(x))$ e $\bar{r}(\bar{x}) = r(x)$.

Concluimos que $f(M)$ é um subconjunto aberto da variedade de rotação sobre a imersão $\bar{f}: N \rightarrow \text{ger } \{\tilde{\sigma}_0, \sigma_0\} \oplus U$, dada por $\bar{f}(\bar{x}) := h(\bar{x}) - \bar{r}(\bar{x})\tilde{\sigma}_0$, com eixo $\text{ger } \{\sigma_0\} \oplus U$. A parametrização de rotação $g: N \times V \rightarrow \mathbb{R}_t^n$, é dada por

$$g(\bar{x}, w) := q + h(\bar{x}) + \bar{r}(\bar{x}) \left(-\tilde{\sigma}_0 + w + \frac{\|w\|^2}{2} \sigma_0 \right) . \bullet \quad \square$$

Capítulo 3

Imersões isométricas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$

O presente capítulo tem por objetivo fornecer algumas ferramentas úteis ao estudo de imersões isométricas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. Utilizamos de modo sistemático o fato de que $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ admite uma imersão isométrica canônica $\iota: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ cuja codimensão é 1 ou 2 (conforme $k_1 k_2 = 0$ ou $k_1 k_2 \neq 0$, respectivamente) e \mathbb{R}^n está munido com uma métrica com curvatura seccional zero cujo índice é o número de elementos negativos em $\{k_1, k_2\}$. Na primeira seção desse capítulo apresentamos algumas propriedades básicas da inclusão ι .

Em [18], Lira, Tojeiro e Vitória definem os tensores $\mathbf{R}: TM \rightarrow TM$, $\mathbf{S}: TM \rightarrow T^\perp M$ e $\mathbf{T}: T^\perp M \rightarrow T^\perp M$, associados a uma imersão isométrica $f: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, e provam um teorema tipo Bonnet para produtos de formas espaciais. Por esse teorema, uma imersão isométrica em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ fica inteiramente determinada (a menos de movimento rígido em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$) pelas primeira e segunda formas fundamentais, pela conexão em $T^\perp M$ e pelos tensores \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T} associados à imersão. Apresentamos na segunda seção as definições dos tensores \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T} e diversas fórmulas encontradas em [18] para tais tensores.

Nas terceira e quarta seções, estudamos (respectivamente) imersões produto $f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, em que cada $f_i: M_i \rightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma imersão isométrica, e as somas com pesos de imersões isométricas. Caracterizamos tais imersões em termos dos tensores \mathbf{R} e \mathbf{S} .

Na quinta seção é estudada uma imersão isométrica totalmente geodésica $g: \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^n \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^n \times \mathbb{O}_{k_2}^n$, que é um caso particular de uma soma com pesos de imersões isométricas. Provamos a Proposição 3.23 que dá condições suficientes para que uma imersão isométrica $f: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ possa ser escrita por $f = (j_1 \times j_2) \circ g \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^n$ é uma imersão isométrica e cada $j_i: \mathbb{O}_{k_i}^n \hookrightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma inclusão totalmente geodésica.

Na sexta e última seção deste capítulo, definimos o significado de redução de codimensão à esquerda (e à direita) e utilizamos os tensores \mathbf{S} e \mathbf{T} para provar um correspondente teorema de redução de codimensão, ou seja, provamos um teorema que dá condições necessárias e suficientes para que a imagem de uma imersão isométrica $f: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ esteja contida em algum produto totalmente geodésico $\mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m_2} \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, sendo $m_1 \leq n_1$ e $m_2 \leq n_2$. Esse teorema de redução de codimensão é análogo ao critério de redução de codimensão para imersões isométricas em formas espaciais (ver [7] e [8]).

3.1 A inclusão $\iota: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$

Sejam k_1 e k_2 números reais e $v, \tau: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ funções dadas por

$$v(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \end{cases} \quad \text{e} \quad \tau(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0; \\ 0, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Existe uma inclusão canônica $\iota: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \hookrightarrow \mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{n_1+v(k_1)} \times \mathbb{R}_{\tau(k_2)}^{n_2+v(k_2)}$ dada por $\iota(x, y) = (x, y)$, em que $x \in \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \subset \mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{n_1+v(k_1)}$ e $y \in \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \subset \mathbb{R}_{\tau(k_2)}^{n_2+v(k_2)}$. Por simplicidade, denotaremos $\mathbb{R}^{N_i} := \mathbb{R}_{\tau(k_i)}^{n_i+v(k_i)}$ e $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$.

Lema 3.1. *Se $(x, y) \in \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ então*

$$T_{(x,y)}(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}) = \begin{cases} \{(X, Y) \in \mathbb{R}^n : X \perp x \text{ e } Y \perp y\}, & \text{se } k_1 \neq 0 \text{ e } k_2 \neq 0; \\ \{(X, Y) \in \mathbb{R}^n : X \perp x\}, & \text{se } k_1 \neq 0 \text{ e } k_2 = 0; \\ \{(X, Y) \in \mathbb{R}^n : Y \perp y\}, & \text{se } k_1 = 0 \text{ e } k_2 \neq 0; \\ \mathbb{R}^n = \mathbb{E}^n, & \text{se } k_1 = k_2 = 0. \end{cases}$$

Demonstração. Provaremos apenas o caso em que $k_1 k_2 \neq 0$, pois os outros casos são análogos.

Sejam $(x, y) \in \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ e $(X, Y) \in T_{(x,y)}(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2})$. Assim, existe uma curva diferenciável $\beta: I \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ tal que $\beta(0) = (x, y)$ e $\beta'(0) = (X, Y)$.

Como $\beta: I \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, segue que

$$\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) \quad \text{e} \quad \|\beta_i(t)\|^2 = \frac{1}{k_i} \Rightarrow \langle \beta_i(t), \beta_i'(t) \rangle = 0.$$

Portanto $\langle x, X \rangle = \langle \beta_1(0), \beta_1'(0) \rangle = 0$ e $\langle y, Y \rangle = \langle \beta_2(0), \beta_2'(0) \rangle = 0$ e concluímos que

$$T_{(x,y)}(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}) \subset \{(X, Y) \in \mathbb{R}^n : X \perp x \text{ e } Y \perp y\}.$$

Por outro lado $\{(X, Y) \in \mathbb{R}^n : X \perp x \text{ e } Y \perp y\} = \{x\}^\perp \times \{y\}^\perp$, em que $\{x\}^\perp$ é o complemento ortogonal de ger $\{x\}$ em \mathbb{R}^{N_1} e $\{y\}^\perp$ é o complemento ortogonal de ger $\{y\}$ em \mathbb{R}^{N_2} . Dessa forma, $T_{(x,y)}(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^n : X \perp x \text{ e } Y \perp y\}$, pois ambos têm dimensão igual a $n_1 + n_2$. \square

Lema 3.2. *Sejam $\pi_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\pi_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ as projeções ortogonais dadas por $\pi_1(x, y) = (x, 0)$ e $\pi_2(x, y) = (0, y)$, em que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$. Nessas condições, os campos*

$$k_1 \pi_1|_{\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}} = k_1(\pi_1 \circ \iota) \quad \text{e} \quad k_2 \pi_2|_{\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}} = k_2(\pi_2 \circ \iota)$$

são normais a $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$.

Demonstração. Se $k_j = 0$ então $k_j \cdot (\pi_j \circ \iota) = 0$ é normal a $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. Para o caso em que $k_1 \neq 0$, seja $(X, Y) \in T_{(x,y)}(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2})$ um vetor tangente, logo (pelo lema anterior) $X \perp x$. Assim

$$\langle k_1(\pi_1 \circ \iota)(x, y), (X, Y) \rangle = k_1 \langle (x, 0), (X, Y) \rangle = k_1 \langle x, X \rangle = 0.$$

Portanto $k_1(\pi_1 \circ \iota)$ é um campo normal a $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, e o mesmo vale para $k_2(\pi_2 \circ \iota)$. \square

Como a codimensão de $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ em \mathbb{R}^n é igual a $v(k_1) + v(k_2)$, então

$$T_{(x,y)}^\perp (\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}) = \text{ger} \{k_1(x, 0), k_2(0, y)\} = \begin{cases} \text{ger} \{(x, 0), (0, y)\}, & \text{se } k_1 \neq 0 \text{ e } k_2 \neq 0; \\ \text{ger} \{(x, 0)\}, & \text{se } k_1 \neq 0 \text{ e } k_2 = 0; \\ \text{ger} \{(0, y)\}, & \text{se } k_1 = 0 \text{ e } k_2 \neq 0; \\ \{0\}, & \text{se } k_1 = k_2 = 0. \end{cases}$$

Sejam agora $\bar{\nabla}$ a conexão riemanniana em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, $\tilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita em \mathbb{R}^n , α_ι a segunda forma fundamental de ι , $\bar{\mathcal{R}}$ o tensor curvatura de $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ e A_η^ι o operador forma na direção normal η dado por $\langle A_\eta^\iota X, Y \rangle = \langle \alpha_\iota(X, Y), \eta \rangle$.

Lema 3.3. *Sejam $X, Y \in T(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2})$, então*

$$\alpha_\iota(X, Y) = - \sum_{j=1}^2 \langle \pi_j X, Y \rangle k_j(\pi_j \circ \iota) \quad \text{e} \quad A_{k_j(\pi_j \circ \iota)}^\iota = -k_j \pi_j.$$

Demonstração. Sejam $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ e $X = (X_1, X_2) \in T_x \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, assim $X_1 \perp x_1$ e $X_2 \perp x_2$. Dessa forma

$$k_1 \pi_1 X = k_1(X_1, 0) \in T_x(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}) \quad \text{e} \quad k_2 \pi_2 X = k_2(0, X_2) \in T_x(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}).$$

Por outro lado,

$$\tilde{\nabla}_X k_j(\pi_j \circ \iota)(x) = k_j d\pi_j(\iota(x))(d\iota(x)X) = k_j \pi_j \iota_* X = \iota_* k_j \pi_j X \Rightarrow A_{k_j(\pi_j \circ \iota)}^\iota = -k_j \pi_j.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \alpha_\iota(X, Y) &= \sum_{j=1}^2 \left\langle \tilde{\nabla}_X \iota_* Y, k_j(\pi_j \circ \iota) \right\rangle \frac{k_j(\pi_j \circ \iota)}{\|k_j(\pi_j \circ \iota)\|^2} = - \sum_{j=1}^2 \left\langle \iota_* Y, \tilde{\nabla}_X(\pi_j \circ \iota) \right\rangle k_j(\pi_j \circ \iota) = \\ &= - \sum_{j=1}^2 \langle Y, \pi_j X \rangle k_j(\pi_j \circ \iota). \end{aligned} \quad \square$$

Lema 3.4. $\bar{\mathcal{R}}(X, Y)Z = k_1(X \wedge Y - \pi_2 X \wedge Y - X \wedge \pi_2 Y)Z + (k_1 + k_2)(\pi_2 X \wedge \pi_2 Y)Z$, em que $(X \wedge Y)Z := \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y$.

Demonstração. Pela Equação de Gauss,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}(X, Y)Z &= A_{\alpha_\iota(Y, Z)}^\iota X - A_{\alpha_\iota(X, Z)}^\iota Y = \\ &= A_{-\langle \pi_1 Y, Z \rangle k_1(\pi_1 \circ \iota)} X + A_{-\langle \pi_2 Y, Z \rangle k_2(\pi_2 \circ \iota)} X - A_{-\langle \pi_1 X, Z \rangle k_1(\pi_1 \circ \iota)} Y - A_{-\langle \pi_2 X, Z \rangle k_2(\pi_2 \circ \iota)} Y = \\ &= \langle \pi_1 Y, Z \rangle k_1 \pi_1 X + \langle \pi_2 Y, Z \rangle k_2 \pi_2 X - \langle \pi_1 X, Z \rangle k_1 \pi_1 Y - \langle \pi_2 X, Z \rangle k_2 \pi_2 Y = \\ &= k_1 [\langle \pi_1 Y, Z \rangle \pi_1 X - \langle \pi_1 X, Z \rangle \pi_1 Y] + k_2 [\langle \pi_2 Y, Z \rangle \pi_2 X - \langle \pi_2 X, Z \rangle \pi_2 Y] = \\ &= k_1 [\langle Y, Z \rangle X - \langle Y, Z \rangle \pi_2 X - \langle \pi_2 Y, Z \rangle \pi_1 X - \langle \pi_1 X, Z \rangle \pi_1 Y] + k_2 (\pi_2 X \wedge \pi_2 Y)Z = \\ &= k_1 [\langle Y, Z \rangle X - \langle Y, Z \rangle \pi_2 X - \langle \pi_2 Y, Z \rangle \pi_1 X - \langle X, Z \rangle Y + \langle X, Z \rangle \pi_2 Y + \langle \pi_2 X, Z \rangle \pi_1 Y] + \\ &\quad + k_2 (\pi_2 X \wedge \pi_2 Y)Z = \\ &= k_1 [(X \wedge Y)Z - \langle Y, Z \rangle \pi_2 X - \langle \pi_2 Y, Z \rangle \pi_1 X + \langle X, Z \rangle \pi_2 Y + \langle \pi_2 X, Z \rangle \pi_1 Y] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + k_2(\pi_2 X \wedge \pi_2 Y)Z = \\
 & = k_1[(X \wedge Y)Z - \langle Y, Z \rangle \pi_2 X - \langle \pi_2 Y, Z \rangle X + \langle \pi_2 Y, Z \rangle \pi_2 X + \langle X, Z \rangle \pi_2 Y + \langle \pi_2 X, Z \rangle Y - \\
 & \quad - \langle \pi_2 X, Z \rangle \pi_2 Y] + k_2(\pi_2 X \wedge \pi_2 Y)Z = \\
 & = k_1[(X \wedge Y)Z - (\pi_2 X \wedge Y)Z - (X \wedge \pi_2 Y)Z + (\pi_2 X \wedge \pi_2 Y)Z] + k_2(\pi_2 X \wedge \pi_2 Y)Z = \\
 & = k_1(X \wedge Y - \pi_2 X \wedge Y - X \wedge \pi_2 Y)Z + (k_1 + k_2)(\pi_2 X \wedge \pi_2 Y)Z. \quad \square
 \end{aligned}$$

3.2 Os tensores \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T}

Consideremos M^m uma variedade riemanniana e $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica. Chamemos de \mathcal{R} e \mathcal{R}^\perp os tensores de curvatura nos fibrados tangente (TM) e normal ($T^\perp M$) de f , respectivamente. Chamemos também de $\alpha := \alpha_f: (TM \times TM) \rightarrow T_f^\perp M$ a segunda forma fundamental de f e de $A_\eta := A_\eta^f: TM \rightarrow TM$ o operador forma na direção normal η , dado por $\langle A_\eta X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle$, para quaisquer $X, Y \in TM$.

Definição 3.5. Sejam $\mathbf{L}: TM \rightarrow T(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2})$, $\mathbf{K}: T^\perp M \rightarrow T(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2})$, $\mathbf{R}: TM \rightarrow TM$, $\mathbf{S}: TM \rightarrow T^\perp M$ e $\mathbf{T}: T^\perp M \rightarrow T^\perp M$ dados por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} & := \mathbf{L}^f := \pi_2 \circ f_*; & \mathbf{K} & := \mathbf{K}^f := \pi_2|_{T^\perp M}; \\
 \mathbf{R} & := \mathbf{R}^f := \mathbf{L}^t \mathbf{L}; & \mathbf{S} & := \mathbf{S}^f := \mathbf{K}^t \mathbf{L}; \\
 \mathbf{T} & := \mathbf{T}^f := \mathbf{K}^t \mathbf{K}.
 \end{aligned}$$

Observemos que os tensores \mathbf{R} e \mathbf{T} são auto-adjuntos. Além disso, dados $X \in T_x M$, $\xi \in T_x^\perp M$ e $Z \in T_{f(x)}(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2})$, então

$$\begin{cases} \langle \mathbf{L}^t Z, X \rangle = \langle Z, \mathbf{L}X \rangle = \langle Z, \pi_2 f_* X \rangle = \langle \pi_2 Z, f_* X \rangle = \langle (\pi_2 Z)^T, f_* X \rangle & \text{e} \\ \langle \mathbf{K}^t Z, \xi \rangle = \langle Z, \mathbf{K}\xi \rangle = \langle Z, \pi_2 \xi \rangle = \langle \pi_2 Z, \xi \rangle = \langle (\pi_2 Z)^\perp, \xi \rangle, \end{cases}$$

em que $(\pi_2 Z)^T$ e $(\pi_2 Z)^\perp$ são as projeções ortogonais de $\pi_2 Z$ sobre TM e $T^\perp M$, respectivamente. Dessa forma $f_* \mathbf{L}^t Z = (\pi_2 Z)^T$ e $\mathbf{K}^t Z = (\pi_2 Z)^\perp$, e disso segue que

$$\begin{aligned}
 f_* \mathbf{R}X & = f_* \mathbf{L}^t \mathbf{L}X = (\pi_2 \mathbf{L}X)^T = (\mathbf{L}X)^T, & \mathbf{S}X & = \mathbf{K}^t \mathbf{L}X = (\pi_2 \mathbf{L}X)^\perp = (\mathbf{L}X)^\perp, \\
 f_* \mathbf{S}^t \xi & = f_* \mathbf{L}^t \mathbf{K}\xi = (\pi_2 \mathbf{K}\xi)^T = (\mathbf{K}\xi)^T, & \mathbf{T}\xi & = \mathbf{K}^t \mathbf{K}\xi = (\pi_2 \mathbf{K}\xi)^\perp = (\mathbf{K}\xi)^\perp.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\pi_2 f_* X = \mathbf{L}X = f_* \mathbf{R}X + \mathbf{S}X \quad \text{e} \quad \pi_2 \xi = \mathbf{K}\xi = f_* \mathbf{S}^t \xi + \mathbf{T}\xi. \quad (3.1)$$

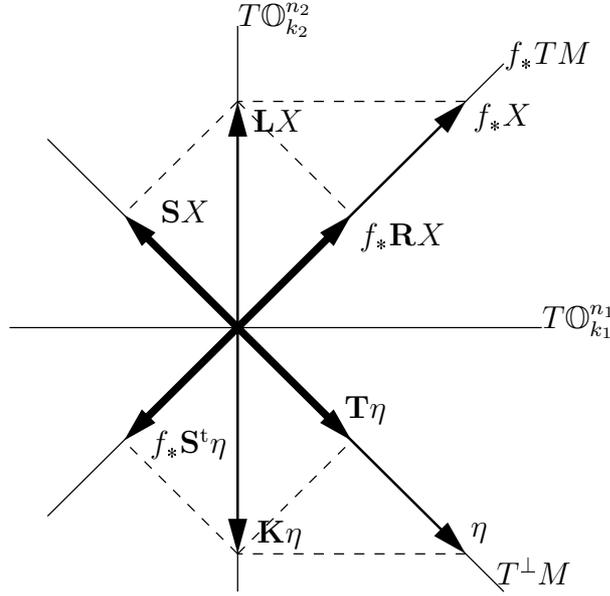
Observação 3.6. Os tensores \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T} foram definidos utilizando a projeção $\pi_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que $\pi_2(\mathbb{R}^n) = \{0\} \times \mathbb{R}^{N_2}$. É possível definir tensores \mathbf{R}' , \mathbf{S}' e \mathbf{T}' , análogos aos anteriores, utilizando a projeção $\pi_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ em que $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{N_1} \times \{0\}$. Dessa forma,

$$\pi_1 f_* X = f_* \mathbf{R}'X + \mathbf{S}'X \quad \text{e} \quad \pi_1 \xi = f_* \mathbf{S}'^t \xi + \mathbf{T}'\xi,$$

para quaisquer $X \in TM$ e $\xi \in T^\perp M$. Assim, como $\pi_1 = \text{Id} - \pi_2$, então

$$\pi_1 f_* X = f_* X - \pi_2 f_* X = f_*(\text{Id} - \mathbf{R})X - \mathbf{S}X \quad \text{e} \quad \pi_1 \xi = \xi - \pi_2 \xi = -f_* \mathbf{S}^t \xi + (\text{Id} - \mathbf{T})\xi.$$

Portanto $\mathbf{R}' = (\text{Id} - \mathbf{R})$, $\mathbf{S}' = -\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}' = (\text{Id} - \mathbf{T})$.

Figura 3.1: Tensores \mathbf{K} , \mathbf{L} , \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T} .

Lema 3.7. Valem as seguintes igualdades

$$\mathbf{S}^t\mathbf{S} = \mathbf{R}(\text{Id} - \mathbf{R}), \quad \mathbf{T}\mathbf{S} = \mathbf{S}(\text{Id} - \mathbf{R}) \quad \text{e} \quad \mathbf{S}\mathbf{S}^t = \mathbf{T}(\text{Id} - \mathbf{T}). \quad (3.2)$$

Demonstração. Sejam $X, Y \in TM$ e $\xi \in T^\perp M$. Assim

$$\begin{aligned} f_*\mathbf{R}X + \mathbf{S}X &= \pi_2 f_*X = \pi_2^2 f_*X = \pi_2(f_*\mathbf{R}X + \mathbf{S}X) = f_*\mathbf{R}^2X + \mathbf{S}\mathbf{R}X + f_*\mathbf{S}^t\mathbf{S}X + \mathbf{T}\mathbf{S}X. \\ \therefore \begin{cases} \mathbf{R}X &= \mathbf{R}^2X + \mathbf{S}^t\mathbf{S}X \\ \mathbf{S}X &= \mathbf{S}\mathbf{R}X + \mathbf{T}\mathbf{S}X \end{cases} \Rightarrow \mathbf{S}^t\mathbf{S} = \mathbf{R}(\text{Id} - \mathbf{R}) \quad \text{e} \quad \mathbf{T}\mathbf{S} = \mathbf{S}(\text{Id} - \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} f_*\mathbf{S}^t\xi + \mathbf{T}\xi &= \pi_2\xi = \pi_2^2\xi = \pi_2(f_*\mathbf{S}^t\xi + \mathbf{T}\xi) = f_*\mathbf{R}\mathbf{S}^t\xi + \mathbf{S}\mathbf{S}^t\xi + f_*\mathbf{S}^t\mathbf{T}\xi + \mathbf{T}^2\xi. \\ \therefore \begin{cases} \mathbf{S}^t\xi &= \mathbf{R}\mathbf{S}^t\xi + \mathbf{S}^t\mathbf{T}\xi \\ \mathbf{T}\xi &= \mathbf{S}\mathbf{S}^t\xi + \mathbf{T}^2\xi \end{cases} \Rightarrow \mathbf{S}\mathbf{S}^t = \mathbf{T}(\text{Id} - \mathbf{T}). \quad \square \end{aligned}$$

Observação 3.8. Seja λ um autovalor de \mathbf{R} e X um autovetor não associado a λ , dessa forma,

$$\lambda(1 - \lambda)\|X\|^2 = \langle \mathbf{R}(\text{Id} - \mathbf{R})X, X \rangle \stackrel{(3.2)}{=} \langle \mathbf{S}^t\mathbf{S}X, X \rangle = \|\mathbf{S}X\|^2 \geq 0.$$

Portanto $\lambda \in [0, 1]$. Do mesmo modo, utilizando a terceira equação em (3.2), concluímos que os autovalores de \mathbf{T} também devem estar no intervalo $[0, 1]$.

Lema 3.9. O tensor $\pi_2: T(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}) \rightarrow T(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2})$ é paralelo, ou seja,

$$(\nabla_X \pi_2)Y = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(T(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2})).$$

Demonstração. Sejam $X, Y \in \Gamma(T(\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}))$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \iota_* \pi_2 \bar{\nabla}_X Y &= \pi_2 [\iota_* \bar{\nabla}_X Y] = \pi_2 [\tilde{\nabla}_X \iota_* Y] - \pi_2 [\alpha_\iota(X, Y)] = \\
 &= \pi_2 [d(\iota \circ Y)X] - \pi_2 \left[- \sum_{j=1}^2 \langle \pi_j X, Y \rangle k_j(\pi_j \circ \iota) \right] = \\
 &= d(\pi_2 \circ \iota \circ Y) \cdot X + \langle \pi_2 X, Y \rangle k_2(\pi_2 \circ \iota) = \tilde{\nabla}_X(\pi_2 \circ \iota)_* Y + \langle \pi_2 X, Y \rangle k_2(\pi_2 \circ \iota) = \\
 &= \tilde{\nabla}_X(\iota \circ \pi_2)_* Y + \langle \pi_2 X, Y \rangle k_2(\pi_2 \circ \iota) = \iota_* \bar{\nabla}_X \pi_2 Y + \alpha_\iota(X, \pi_2 Y) + \langle \pi_2 X, Y \rangle k_2(\pi_2 \circ \iota) = \\
 &= \iota_* \bar{\nabla}_X \pi_2 Y - \cancel{\langle \pi_2 X, \pi_2 Y \rangle k_2(\pi_2 \circ \iota)} + \cancel{\langle \pi_2 X, Y \rangle k_2(\pi_2 \circ \iota)} = \iota_* \bar{\nabla}_X \pi_2 Y. \quad \square
 \end{aligned}$$

Lema 3.10. Valem as seguintes igualdades:

$$(\nabla_X \mathbf{R})Y = A_{\mathbf{S}Y}X + \mathbf{S}^t \alpha(X, Y), \quad (3.3)$$

$$(\nabla_X \mathbf{S})Y = \mathbf{T} \alpha(X, Y) - \alpha(X, \mathbf{R}Y), \quad (3.4)$$

$$(\nabla_X \mathbf{S}^t) \xi = A_{\mathbf{T}\xi}X - \mathbf{R}A_\xi X, \quad (3.5)$$

$$(\nabla_X \mathbf{T}) \xi = -\mathbf{S}A_\xi X - \alpha(X, \mathbf{S}^t \xi). \quad (3.6)$$

Demonstração. Sejam $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$. Assim

$$\begin{aligned}
 0 &= (\nabla_{f_* X} \pi_2) f_* Y = \bar{\nabla}_{f_* X} \pi_2 f_* Y - \pi_2 \bar{\nabla}_{f_* X} f_* Y = \\
 &= \bar{\nabla}_X (f_* \mathbf{R}Y + \mathbf{S}Y) - \pi_2 [f_* \nabla_X Y + \alpha(X, Y)] = \\
 &= \bar{\nabla}_X f_* \mathbf{R}Y + \bar{\nabla}_X \mathbf{S}Y - f_* \mathbf{R} \nabla_X Y - \mathbf{S} \nabla_X Y - f_* \mathbf{S}^t \alpha(X, Y) - \mathbf{T} \alpha(X, Y) = \\
 &= f_* \nabla_X \mathbf{R}Y + \alpha(X, \mathbf{R}Y) - f_* A_{\mathbf{S}Y}X + \nabla_X^\perp \mathbf{S}Y - f_* [\mathbf{R} \nabla_X Y + \mathbf{S}^t \alpha(X, Y)] - \\
 &\quad - \mathbf{S} \nabla_X Y - \mathbf{T} \alpha(X, Y) = \\
 &= f_* [(\nabla_X \mathbf{R})Y - A_{\mathbf{S}Y}X - \mathbf{S}^t \alpha(X, Y)] + \alpha(X, \mathbf{R}Y) + (\nabla_X \mathbf{S})Y - \mathbf{T} \alpha(X, Y).
 \end{aligned}$$

Portanto

$$(\nabla_X \mathbf{R})Y = A_{\mathbf{S}Y}X + \mathbf{S}^t \alpha(X, Y) \quad \text{e} \quad (\nabla_X \mathbf{S})Y = \mathbf{T} \alpha(X, Y) - \alpha(X, \mathbf{R}Y).$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 0 &= (\nabla_{f_* X} \pi_2) \xi = \bar{\nabla}_{f_* X} \pi_2 \xi - \pi_2 \bar{\nabla}_{f_* X} \xi = \bar{\nabla}_{f_* X} (f_* \mathbf{S}^t \xi + \mathbf{T} \xi) - \pi_2 (-f_* A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi) = \\
 &= \bar{\nabla}_X f_* \mathbf{S}^t \xi + \bar{\nabla}_X \mathbf{T} \xi + f_* \mathbf{R}A_\xi X + \mathbf{S}A_\xi X - f_* \mathbf{S}^t \nabla_X^\perp \xi - \mathbf{T} \nabla_X^\perp \xi = \\
 &= f_* \nabla_X \mathbf{S}^t \xi + \alpha(X, \mathbf{S}^t \xi) - f_* A_{\mathbf{T}\xi}X + \nabla_X^\perp \mathbf{T} \xi - f_* (\mathbf{S}^t \nabla_X^\perp \xi - \mathbf{R}A_\xi) + \mathbf{S}A_\xi X - \mathbf{T} \nabla_X^\perp \xi = \\
 &= f_* [(\nabla_X \mathbf{S}^t) \xi - A_{\mathbf{T}\xi}X + \mathbf{R}A_\xi X] + \alpha(X, \mathbf{S}^t \xi) + (\nabla_X \mathbf{T}) \xi + \mathbf{S}A_\xi X.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$(\nabla_X \mathbf{S}^t) \xi = A_{\mathbf{T}\xi}X - \mathbf{R}A_\xi X \quad \text{e} \quad (\nabla_X \mathbf{T}) \xi = -\mathbf{S}A_\xi X - \alpha(X, \mathbf{S}^t \xi). \quad \square$$

Comparando o produto interno por ξ em ambos os lados de (3.4) com o produto interno em ambos os lados de (3.5) por Y , concluímos que as igualdades (3.4) e (3.5) são equivalentes. Mas decidimos numerar ambas para podermos utilizar a forma mais conveniente.

Pelo Lema 3.4, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci de f

$$f_*\mathcal{R}(X, Y)Z = (\bar{\mathcal{R}}(f_*X, f_*Y)f_*Z)^T + f_*A_{\alpha(Y, Z)}X - f_*A_{\alpha(X, Z)}Y \quad \text{Equação de Gauss}$$

$$\left. \begin{aligned} (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z) &= (\bar{\mathcal{R}}(f_*X, f_*Y)f_*Z)^\perp \\ f_*(\nabla_Y A)(X, \xi) - f_*(\nabla_X A)(Y, \xi) &= (\bar{\mathcal{R}}(f_*X, f_*Y)\xi)^T \end{aligned} \right\} \quad \text{Equação de Codazzi}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}^\perp(X, Y)\xi &= (\bar{\mathcal{R}}(f_*X, f_*Y)\xi)^\perp + \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y) \\ \langle \bar{\mathcal{R}}(f_*X, f_*Y)\xi, \zeta \rangle &= \langle \mathcal{R}^\perp(X, Y)\xi, \zeta \rangle - \langle [A_\xi, A_\zeta]X, Y \rangle \end{aligned} \right\} \quad \text{Equação de Ricci}$$

se tornam, respectivamente,

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = [k_1(X \wedge Y - X \wedge \mathbf{R}Y - \mathbf{R}X \wedge Y) + (k_1 + k_2)\mathbf{R}X \wedge \mathbf{R}Y]Z + A_{\alpha(Y, Z)}X - A_{\alpha(X, Z)}Y; \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z) &= \langle \Phi X, Z \rangle \mathbf{S}Y - \langle \Phi Y, Z \rangle \mathbf{S}X \\ (\nabla_Y A)(X, \xi) - (\nabla_X A)(Y, \xi) &= \langle \mathbf{S}X, \xi \rangle \Phi Y - \langle \mathbf{S}Y, \xi \rangle \Phi X \end{aligned} \right\}, \quad (3.8)$$

em que $\Phi := k_1 \text{Id} - (k_1 + k_2)\mathbf{R}$;

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}^\perp(X, Y)\xi &= \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y) + (k_1 + k_2)(\mathbf{S}X \wedge \mathbf{S}Y)\xi \\ \langle \bar{\mathcal{R}}(f_*X, f_*Y)\xi, \zeta \rangle &= (k_1 + k_2) \langle (\mathbf{S}X \wedge \mathbf{S}Y)\xi, \zeta \rangle + \langle [A_\xi, A_\zeta]X, Y \rangle \end{aligned} \right\}. \quad (3.9)$$

As duas equações chamadas de equação de Codazzi são equivalentes. Também são equivalentes as duas equações chamadas de equações de Ricci. Explicitamos as duas formas da Equação de Codazzi e da Equação de Ricci para podermos utilizar a forma mais conveniente.

Consideremos a imersão $F := \iota \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que $\iota: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ é a inclusão canônica. Então, pelo Lema 3.2, os vetores $\nu_1 := -k_1(\pi_1 \circ F)$ e $\nu_2 := -k_2(\pi_2 \circ F)$ são normais a F . Além disso

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \nu_1 &= -k_1 \pi_1 F_* X = -k_1 \iota_* \pi_1 f_* X = -k_1 \iota_* [f_*(\text{Id} - \mathbf{R})X - \mathbf{S}X], \\ \tilde{\nabla}_X \nu_2 &= -k_2 \pi_2 F_* X = -k_2 \iota_* \pi_2 f_* X = -k_2 \iota_* (f_* \mathbf{R}X + \mathbf{S}X). \end{aligned}$$

Dessa forma, se $\bar{\nabla}^\perp$ é a conexão normal de $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, então

$$\bar{\nabla}_X^\perp \nu_1 = k_1 \iota_* \mathbf{S}X, \quad A_{\nu_1}^F = k_1(\text{Id} - \mathbf{R}), \quad (3.10)$$

$$\bar{\nabla}_X^\perp \nu_2 = -k_2 \iota_* \mathbf{S}X, \quad A_{\nu_2}^F = k_2 \mathbf{R}. \quad (3.11)$$

Lema 3.11. *Seja $\vartheta := \nu_1 - \nu_2$, logo $A_\vartheta^F = \Phi$ e $\bar{\nabla}_X^\perp \vartheta = (k_1 + k_2)\iota_* \mathbf{S}X$, para todo $X \in TM$, em que $\Phi = k_1 \text{Id} - (k_1 + k_2)\mathbf{R}$.*

Demonstração. Segue diretamente das fórmulas (3.10) e (3.11). \square

Lema 3.12. $\alpha_F(X, Y) = \iota_* \alpha_f(X, Y) + \langle (\text{Id} - \mathbf{R})X, Y \rangle \nu_1 + \langle \mathbf{R}X, Y \rangle \nu_2$, para quaisquer $X, Y \in TM$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} \alpha_F(X, Y) &= \iota_* \alpha_f(X, Y) + \alpha_\iota(f_* X, f_* Y) = \\ &\stackrel{\text{Lema 3.3}}{=} \iota_* \alpha_f(X, Y) - \langle \pi_1 f_* X, f_* Y \rangle k_1(\pi_1 \circ F) - \langle \pi_2 f_* X, f_* Y \rangle k_2(\pi_2 \circ F) = \\ &= \iota_* \alpha_f(X, Y) + \langle (\text{Id} - \mathbf{R})X, Y \rangle \nu_1 + \langle \mathbf{R}X, Y \rangle \nu_2. \end{aligned} \quad \square$$

3.3 Produtos de imersões isométricas

Exemplos triviais de imersões isométricas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ são obtidos compondo uma imersão isométrica $f: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ com o mergulho totalmente geodésico $\iota_1^z: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ dado por $\iota_1^z(x) := (x, z)$, em que $z \in \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é um ponto fixado. Analogamente, podemos construir exemplos triviais de imersões isométricas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ compondo uma imersão em $\mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ com um mergulho totalmente geodésico $\iota_2^z: \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ dado por $\iota_2^z(y) := (z, y)$.

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} & \xrightarrow{\iota_1^z} & \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} & & M & \xrightarrow{f} & \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} & \xrightarrow{\iota_2^z} & \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & (f(x), z) & & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & (z, f(x)) \end{array}$$

Lema 3.13. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão. Nessas condições*

- (I) $f(M) \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \{z\}$ para algum $z \in \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ se, e somente se, $\mathbf{R} = 0$ e
- (II) $f(M) \subset \{z\} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ para algum $z \in \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ se, e somente se, $(\text{Id} - \mathbf{R}) = 0$.

Demonstração. Mostraremos apenas o item (I), pois o item (II) tem demonstração análoga. Sabemos que $f(M) \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \{z\}$ se, e somente se, $\mathbf{L} = \pi_2 f_* = 0$. Por outro lado, $\mathbf{L} = 0$ se, e somente se, $\mathbf{R} = \mathbf{L}^\dagger \mathbf{L} = 0$. \square

Outros exemplos simples de imersões isométricas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ são as imersões produto $f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, dadas por $(f_1 \times f_2)(x, y) := (f_1(x), f_2(y))$, em que cada $f_i: M_i \rightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma imersão isométrica. Para estudarmos tais imersões, provaremos antes alguns resultados.

Lema 3.14. $\ker \mathbf{S} = \ker \mathbf{R} \oplus \ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ e $\mathbf{R}(\ker \mathbf{S}) = \ker(\text{Id} - \mathbf{R})$.

Demonstração. Sabemos, pelo Lema A.4, que $\ker \mathbf{S} = \ker \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S}$. Por outro lado,

$$\ker \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} \stackrel{(3.2)}{=} \ker[\mathbf{R}(\text{Id} - \mathbf{R})] = \{X \in T_x M : \mathbf{R}X = \mathbf{R}^2 X\}.$$

Dessa forma $\ker \mathbf{R} \subset \ker \mathbf{S}$ e $\ker(\text{Id} - \mathbf{R}) \subset \ker \mathbf{S}$.

Afirmção 1: $\mathbf{R}(\ker \mathbf{S}) \subset \ker \mathbf{S}$.

De fato,

$$X \in \ker \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{R}X = \mathbf{R}^2 X \Rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{R}X) = \mathbf{R}(\mathbf{R}^2 X) = \mathbf{R}^2(\mathbf{R}X),$$

ou seja, $\mathbf{R}X \in \ker \mathbf{S}$. \checkmark

Como $\mathbf{R}(\ker \mathbf{S}) \subset \ker \mathbf{S}$, então $\mathbf{R}|_{\ker \mathbf{S}} = \mathbf{R}^2|_{\ker \mathbf{S}}$, ou seja, $\mathbf{R}|_{\ker \mathbf{S}}$ é uma projeção ortogonal. Logo $\ker \mathbf{S} = \ker \mathbf{R}|_{\ker \mathbf{S}} \oplus \mathbf{R}(\ker \mathbf{S})$. Resta mostrar que $\mathbf{R}(\ker \mathbf{S}) = \ker(\text{Id} - \mathbf{R})$.

De fato,

$$Y \in \mathbf{R}(\ker \mathbf{S}) \Rightarrow Y = \mathbf{R}X \text{ e } X \in \ker \mathbf{S} \Rightarrow Y = \mathbf{R}X \text{ e } \mathbf{R}X = \mathbf{R}^2 X \Rightarrow (\text{Id} - \mathbf{R})Y = 0.$$

$$Y \in \ker(\text{Id} - \mathbf{R}) \Rightarrow Y = \mathbf{R}Y \text{ e } Y \in \ker \mathbf{S} \Rightarrow Y \in \mathbf{R}(\ker \mathbf{S}). \quad \square$$

Lema 3.15. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica. Se $\mathbf{S} = 0$, então $\ker \mathbf{R}$ e $\ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ têm dimensão constante em M .*

Demonstração. Como $\mathbf{S} = 0$ então, pelo Lema 3.14,

$$TM = \ker \mathbf{S} = \ker \mathbf{R} \oplus \ker(\text{Id} - \mathbf{R}) = \ker \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}(TM).$$

Sejam $\ell \in \{0, \dots, m\}$ e $A_\ell := \{x \in M : \dim(\ker \mathbf{R}|_{T_x M}) = \ell\}$.

Afirmiação 1: A_ℓ é um conjunto aberto

Se $A_\ell = \emptyset$, então A_ℓ é aberto. Suponhamos então que $\dim(\ker \mathbf{R}|_{T_p M}) = \ell$, para algum $p \in M$.

Se $\ell = 0$, então existem campos X_1, \dots, X_m , definidos em uma vizinhança U de p , tais que $\mathbf{R}X_1, \dots, \mathbf{R}X_m$ são LI em U . Dessa forma, $\mathbf{R}(T_x M) = T_x M$, para todo $x \in U$, ou seja, $\dim(\ker \mathbf{R}|_{T_x M}) = 0$, para qualquer $x \in U$.

Se $\ell = m$, então $\dim[\ker(\text{Id} - \mathbf{R})|_{T_p M}] = 0$. Dessa forma existem campos X_1, \dots, X_m , definidos em uma vizinhança U de p , tais que $(\text{Id} - \mathbf{R})X_1, \dots, (\text{Id} - \mathbf{R})X_m$ são LI em U . Logo $\dim[\ker(\text{Id} - \mathbf{R})|_{T_x M}] = m$, para todo $x \in U$, ou seja, $\dim(\ker \mathbf{R}|_{T_x M}) = 0$, para todo $x \in U$.

Suponhamos agora que $0 < \ell < m$. Nesse caso existem campos X_1, \dots, X_m , definidos em uma vizinhança U de p , tais que $(\text{Id} - \mathbf{R})X_1, \dots, (\text{Id} - \mathbf{R})X_\ell$ são LI em U e $\mathbf{R}X_{\ell+1}, \dots, \mathbf{R}X_m$ também são LI em U . Dessa forma, $\dim(\ker \mathbf{R}|_{T_x M}) \geq \ell$ e $\dim[\ker(\text{Id} - \mathbf{R})|_{T_x M}] \geq m - \ell$, para todo $x \in U$. Logo $\dim(\ker \mathbf{R}|_{T_x M}) = \ell$, para todo $x \in U$.

Portanto A_ℓ é aberto, para qualquer $\ell \in \{0, \dots, m\}$. \checkmark

Como $M = \bigcup_{j=0}^m A_j$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, então $M = A_\ell$, para algum $\ell \in \{0, \dots, m\}$, ou seja, $\ker \mathbf{R}$ tem dimensão constante em M . \square

Proposição 3.16. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica. Nessas condições, são equivalentes:*

- (I) M é localmente (isométrica a) uma variedade produto $M_1^\ell \times M_1^{m-\ell}$, com $0 < \ell < m$, e f é localmente uma imersão produto $f|_{M_1 \times M_2} = f_1 \times f_2$, em que cada $f_i: M_i \rightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma imersão isométrica.
- (II) $\mathbf{S} = 0$ e $\dim(\ker \mathbf{R}) = \ell \in (0, m)$.

Além disso, se M é completa e simplesmente conexa, $\mathbf{S} = 0$ e $\dim(\ker \mathbf{R}) = \ell \in (0, 1)$, então M é globalmente isométrica a um produto $M_1^\ell \times M_2^{m-\ell}$ e f é globalmente uma imersão produto.

Demonstração. **(I) \Rightarrow (II):** Suponhamos que M^m seja localmente (isométrica a) uma variedade produto $M_1^\ell \times M_2^{m-\ell}$, com $0 < \ell < m$, e f seja (localmente) uma imersão produto $f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. Assim, $T_{(x,y)}M = i_{1*}^y T_x M_1 \oplus i_{2*}^x T_y M_2$, em que $i_1^y: M_1 \rightarrow M$ e $i_2^x: M_2 \rightarrow M$ são dadas por $i_1^y(z) = (z, y)$ e $i_2^x(z) = (x, z)$.

Se $X \in i_{1*}^y T_x M_1$, então

$$\pi_2 f_* X = \pi_2 f_* i_{1*}^y \tilde{X} = \pi_2 (f_{1*} \tilde{X}, 0) = 0 \Rightarrow \mathbf{R}X = 0.$$

Do mesmo modo, $(\text{Id} - \mathbf{R})Y = 0$, se $Y \in i_{2*}^x T_y M_2$. Portanto,

$$T_{(x,y)}M = i_{1*}^y T_x M_1 \oplus i_{2*}^x T_y M_2 = \ker \mathbf{R}|_{T_{(x,y)}M} \oplus \ker(\text{Id} - \mathbf{R})|_{T_{(x,y)}M}.$$

Dessa forma $\dim(\ker \mathbf{R}) = \ell$ e $\mathbf{S} = 0$, pois $\ker \mathbf{S} = \ker \mathbf{R} \oplus \ker(\text{Id} - \mathbf{R})$. \bullet

(II) \Rightarrow (I): Suponhamos agora que $\mathbf{S} = 0$ e que $\dim(\ker \mathbf{R}) = \ell \in (0, m)$. Assim, pelos Lemas 3.14 e 3.15, $TM = \ker \mathbf{R} \oplus \ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ e $\ker \mathbf{R}$ e $(\ker \mathbf{R})^\perp = \ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ são distribuições em M .

Afirmção 1: *As distribuições $\ker \mathbf{R}$ e $\ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ são paralelas.*

Sejam $Y \in \Gamma(\ker \mathbf{R})$ e $X \in \Gamma(TM)$. Como o tensor \mathbf{R} é paralelo, pela primeira fórmula em (3.2), então $\mathbf{R}\nabla_X Y = \nabla_X \mathbf{R}Y = 0$. Portanto $\ker \mathbf{R}$ é uma distribuição paralela e o mesmo vale para $(\ker \mathbf{R})^\perp = \ker(\text{Id} - \mathbf{R})$. \checkmark

Para cada $x \in M$, sejam $L_1^\ell(x)$ e $L_2^{m-\ell}(x)$ subvariedades integrais das distribuições $\ker \mathbf{R}$ e $(\ker \mathbf{R})^\perp$, respectivamente, que passam por x . Como $\ker \mathbf{R}$ e $(\ker \mathbf{R})^\perp$ são paralelas, então, pelo Teorema de De Rham (Lema A.22), para cada $x \in M$, existem uma vizinhança U de x e abertos M_1^ℓ e $M_2^{m-\ell}$ de $L_1^\ell(x)$ e $L_2^{m-\ell}(x)$ (respectivamente) e existe uma isometria $\psi: M_1 \times M_2 \rightarrow U$ tais que $x \in U \cap M_1 \cap M_2$ e para cada $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$, $\psi(M_1 \times \{x_2\})$ é uma folha de $\ker \mathbf{R}$ e $\psi(\{x_1\} \times M_2)$ é uma folha de $(\ker \mathbf{R})^\perp$.

Assim, podemos identificar U com $M_1^\ell \times M_2^{m-\ell}$, $\ker \mathbf{R}$ com TM_1 e $(\ker \mathbf{R})^\perp$ com TM_2 e considerar as aplicações $f: M_1^\ell \times M_2^{m-\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ e $F = \iota \circ f: M_1^\ell \times M_2^{m-\ell} \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que $\iota: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ é a inclusão canônica.

Afirmção 2: *Se $X \in \ker \mathbf{R}$ e $Y \in (\ker \mathbf{R})^\perp$ então $\alpha_F(X, Y) = 0$.*

Como $Y \in \mathbf{R}(TM)$, então $Y = \mathbf{R}Z$, para algum $Z \in TM$. Dessa forma

$$\alpha_f(X, Y) = \alpha_f(X, \mathbf{R}Z) \stackrel{(3.4)}{=} \mathbf{T}\alpha_f(X, Z) = \alpha_f(\mathbf{R}X, Z) = 0.$$

Assim

$$\alpha_F(X, Y) = \iota_* \alpha_f(X, Y) + \langle (\text{Id} - \mathbf{R})X, Y \rangle \nu_1 + \langle \mathbf{R}X, Y \rangle \nu_2 = 0.$$

Portanto a afirmação é válida. \checkmark

Como $\alpha_F(X, Y) = 0$, para quaisquer $X \in \ker \mathbf{R}$ e $Y \in (\ker \mathbf{R})^\perp$, então (pelo Lema de Moore, Lema A.21) existem uma decomposição ortogonal $\mathbb{R}^n = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$ e um vetor $v_0 \in V_0$ tais que $F: M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por $F(x, y) = (v_0, F_1(x), F_2(y))$. Além disso,

$$\begin{aligned} V_1 &= \text{ger} \{F_*(p)X : p \in M_1 \times M_2 \text{ e } X \in \ker \mathbf{R}|_{T_p M}\}, \\ V_2 &= \text{ger} \{F_*(p)Y : p \in M_1 \times M_2 \text{ e } Y \in \mathbf{R}(T_p M)\} \end{aligned}$$

e $F_i(M_i) \subset V_i$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \text{ger} \{F_*(p)X : p \in M_1 \times M_2 \text{ e } X \in \ker \mathbf{R}|_{T_p M}\} &\subset \mathbb{R}^{N_1} \quad \text{e} \\ \text{ger} \{F_*(p)Y : p \in M_1 \times M_2 \text{ e } Y \in \mathbf{R}(T_p M)\} &\subset \mathbb{R}^{N_2}, \end{aligned}$$

pois $\pi_2 f_*(\ker \mathbf{R}) = \{0\}$ e $\pi_1 f_*(\ker(\text{Id} - \mathbf{R})) = \{0\}$, portanto $F_j(M_j) \subset \mathbb{R}^{N_j}$. Dessa forma, definindo $f_j: M_j \rightarrow \mathbb{R}^{N_j}$ por

$$f_1(x) := \pi_1(v_0) + F_1(x) \quad \text{e} \quad f_2(y) = \pi_2(v_0) + F_2(y),$$

segue que $f(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$, ou seja, $f = f_1 \times f_2$.

Para o caso em que M é completa e simplesmente conexa, o Lema de De Rham nos garante que M é (globalmente) isométrica a $L_1 \times L_2$, em que L_1 e L_2 são folhas de $\ker \mathbf{R}$ e $(\ker \mathbf{R})^\perp$ (respectivamente) passando por um mesmo ponto. Nesse caso, considerando $f: L_1 \times L_2 \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, as contas acima nos garantem que f é globalmente do tipo $f = f_1 \times f_2$. \square

3.4 Somas com pesos de imersões

Sejam $k_1, k_2, a, b \in \mathbb{R}$, com a e b não nulos e tais que $a^2 + b^2 = 1$. Tomemos $\tilde{k}_1 := a^2 k_1$ e $\tilde{k}_2 := b^2 k_2$. Assim, dadas duas imersões isométricas $f_1: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{\tilde{k}_1}^{n_1}$ e $f_2: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{\tilde{k}_2}^{n_2}$, podemos definir a aplicação $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{\tilde{k}_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{\tilde{k}_2}^{n_2}$ por $f(x) := (af_1(x), bf_2(x))$. Definida dessa forma, a aplicação f é uma imersão isométrica, pois

$$\langle f_*X, f_*Y \rangle = a^2 \langle f_{1*}X, f_{1*}Y \rangle + b^2 \langle f_{2*}X, f_{2*}Y \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

A imersão f é chamada de **soma com pesos** das imersões f_1 e f_2 e os números a e b são chamados de **pesos** da soma f .

Consideremos a inclusão $\iota: \mathbb{O}_{\tilde{k}_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{\tilde{k}_2}^{n_2} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ e a aplicação $F := \iota \circ f$. Sabemos que os campos $\nu_i := -k_i(\pi_i \circ F)$ são normais a F e que

$$\mathbb{R}^n = F_*TM \oplus \iota_*T^\perp M \oplus \text{ger} \{ \nu_1, \nu_2 \},$$

em que $T_x^\perp M \subset T_{f(x)}\mathbb{O}_{\tilde{k}_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{\tilde{k}_2}^{n_2}$ é o espaço normal da aplicação f no ponto x .

Como $F_*T_xM = \{(af_{1*}X, bf_{2*}X) : X \in T_xM\}$, então $\{(-bf_{1*}X, af_{2*}X) : X \in T_xM\}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n ortogonal a $F_*T_xM \oplus \text{ger} \{ \nu_1, \nu_2 \}$, portanto

$$\{(-bf_{1*}X, af_{2*}X) : X \in T_xM\} \subset \iota_*T_x^\perp M = T_x^\perp M.$$

Queremos determinar os tensores α , \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T} da imersão f .

Afirmção 1: $\mathbf{R} = b^2 \text{Id}$ e $\mathbf{S}X = ab(-bf_{1*}X, af_{2*}X)$.

De fato,

$$\pi_2 f_*X = (0, bf_{2*}X) = b(a^2 + b^2)(0, f_{2*}X) = b^2(af_{1*}X, bf_{2*}X) + ab(-bf_{1*}X, af_{2*}X).$$

Portanto $\mathbf{R} = b^2 \text{Id}$ e $\mathbf{S}X = ab(-bf_{1*}X, af_{2*}X)$. \checkmark

Da Afirmção 1 concluí-se que $\mathbf{S}(T_xM) = \{(-bf_{1*}X, af_{2*}X) : X \in T_xM\}$. Além disso, por (3.2), $\mathbf{T}\mathbf{S} = \mathbf{S}(\text{Id} - \mathbf{R}) = a^2\mathbf{S}$.

Lema 3.17. $\alpha_f(X, Y) = (a\alpha_{f_1}(X, Y), b\alpha_{f_2}(X, Y))$.

Demonstração. Sejam $\tilde{\iota}_j: \mathbb{O}_{\tilde{k}_j}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}^{n_j}$ e $\iota_j: \mathbb{O}_{k_j}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}^{n_j}$ as inclusões canônicas e sejam $\iota_j^0: \mathbb{R}^{N_j} \rightarrow \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ as imersões totalmente geodésicas dadas por $\iota_1^0(x) := (x, 0)$ e $\iota_2^0(y) := (0, y)$. Dessa forma, ι_j e $\tilde{\iota}_j$ são restrições da aplicação identidade $I_j: \mathbb{R}^{N_j} \rightarrow \mathbb{R}^{N_j}$ e $T_x\mathbb{O}_{\tilde{k}_j}^{n_j} = T_{ax}\mathbb{O}_{k_j}^{n_j}$, logo, dado $X \in T_x\mathbb{O}_{\tilde{k}_1}^{n_1}$, $\tilde{\iota}_{1*}X = I_j * X = \iota_{1*}X$.

Além disso, se $\iota: \mathbb{O}_{\tilde{k}_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{\tilde{k}_2}^{n_2} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ é a inclusão canônica, então $\iota = (\iota_1 \times \iota_2)$ e

$$F_*X = \iota_*(af_{1*}X, bf_{2*}X) = (\iota_{1*}af_{1*}X, \iota_{2*}bf_{2*}X) = (a\tilde{\iota}_{1*}f_{1*}X, b\tilde{\iota}_{2*}f_{2*}X).$$

Denotemos por $\tilde{\nabla}^1$ e $\tilde{\nabla}^2$ as conexões de Levi-Civita em \mathbb{R}^{N_1} e \mathbb{R}^{N_2} , respectivamente e cal-

culemos $\tilde{\nabla}_X F_* Y$.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_X F_* Y &= \tilde{\nabla}_X (a \tilde{i}_1_* f_{1*} Y, b \tilde{i}_2_* f_{2*} Y) = \tilde{\nabla}_X [a \cdot \iota_1^0 \tilde{i}_1_* f_{1*} Y + b \cdot \iota_2^0 \tilde{i}_2_* f_{2*} Y] = \\
 &= a \cdot \iota_1^0 \tilde{\nabla}_X^1 (\tilde{i}_1 \circ f_1)_* Y + b \cdot \iota_2^0 \tilde{\nabla}_X^2 (\tilde{i}_2 \circ f_2)_* Y = \\
 &= a \cdot \iota_1^0 \tilde{i}_1_* [f_{1*} \nabla_X Y + \alpha_{f_1}(X, Y)] + a \cdot \iota_1^0 \alpha_{\tilde{i}_1}(f_{1*} X, f_{1*} Y) + \\
 &\quad + b \cdot \iota_2^0 \tilde{i}_2_* [f_{2*} \nabla_X Y + \alpha_{f_2}(X, Y)] + b \cdot \iota_2^0 \alpha_{\tilde{i}_2}(f_{2*} X, f_{2*} Y) = \\
 &= (a \tilde{i}_1_* f_{1*} \nabla_X Y, 0) + (a \tilde{i}_1_* \alpha_{f_1}(X, Y), 0) - a \langle X, Y \rangle (\tilde{k}_1 f_1, 0) + \\
 &\quad + (0, b \tilde{i}_2_* f_{2*} \nabla_X Y) + (0, b \tilde{i}_2_* \alpha_{f_2}(X, Y)) - b \langle X, Y \rangle (0, \tilde{k}_2 f_2) = \\
 &= (\iota_1_* a f_{1*} \nabla_X Y, \iota_2_* b f_{2*} \nabla_X Y) + (\iota_1_* a \alpha_{f_1}(X, Y), \iota_2_* b \alpha_{f_2}(X, Y)) - \\
 &\quad - \langle X, Y \rangle [(a^3 k_1 f_1, 0) - (0, b^3 k_2 f_2)] = \\
 &= F_* \nabla_X Y + \iota_* (a \alpha_{f_1}(X, Y), b \alpha_{f_2}(X, Y)) - \langle X, Y \rangle [a^2 k_1 (\pi_1 \circ F) + b^2 k_2 (\pi_2 \circ f)].
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_X F_* Y &= F_* \nabla_X Y + \iota_* \alpha_f(X, Y) + \langle (\text{Id} - \mathbf{R})X, Y \rangle \nu_1 + \langle \mathbf{R}X, Y \rangle \nu_2 = \\
 &= F_* \nabla_X Y + \iota_* \alpha_f(X, Y) - \langle X, Y \rangle [a^2 k_1 (\pi_1 \circ F) + b^2 k_2 (\pi_2 \circ F)]. \quad \square
 \end{aligned}$$

Corolário 3.18. *São equivalentes:*

- (I) $f := (af_1, bf_2)$ é umbílica.
- (II) $F := \iota \circ f$ é umbílica.
- (III) f_1 e f_2 são umbílicas.

Demonstração. É consequência direta do lema anterior. □

A proposição a seguir caracteriza as somas com pesos em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$.

Proposição 3.19. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica. Nessas condições, são equivalentes:*

- (I) f é uma soma com pesos $\sqrt{1 - \lambda}$ e $\sqrt{\lambda}$ de imersões isométricas.
- (II) $\mathbf{R} = \lambda \text{Id}$, para algum $\lambda \in (0, 1)$.

Demonstração. Se $f: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é uma soma com pesos de imersões isométricas e $a = \sqrt{1 - \lambda}$ e $b = \sqrt{\lambda}$ são os pesos, já vimos que $\mathbf{R} = b^2 \text{Id}$ e $b^2 = \lambda \in (0, 1)$.

Suponhamos agora que $\mathbf{R} = \lambda \text{Id}$, para algum $\lambda \in (0, 1)$. Sejam também $a := \sqrt{1 - \lambda}$ e $b := \sqrt{\lambda}$. Dessa forma, como $\mathbf{R} = \mathbf{L}^t \mathbf{L}$, então $\pi_2 \circ f$ é uma semelhança de razão b e $f_2 := b^{-1}(\pi_2 \circ f)$ é uma imersão isométrica em $\mathbb{R}^{N_2} \supset \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$.

Sejam $\tilde{k}_1 := a^2 k_1$ e $\tilde{k}_2 := b^2 k_2$. Assim, se $k_2 = 0$ então $\tilde{k}_2 = 0$, $\mathbb{O}_{k_2}^{n_2} = \mathbb{E}^{N_2}$ e $f_2(x) \in \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. Já se $k_2 \neq 0$, então $\|f_2(x)\|^2 = \frac{1}{b^2 k_2}$ e $f_2(x) \in \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \subset \mathbb{R}^{N_2}$. Analogamente, $f_1 := a^{-1}(\pi_1 \circ f): M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é uma imersão isométrica.

Como $f = (af_1, bf_2)$, então f é uma soma com pesos de imersões isométricas. □

3.5 Uma soma com pesos particular

Sejam k_1 e k_2 números reais tais que $k_1 k_2 > 0$ e definamos $\varepsilon := \frac{|k_1|}{k_1} = \frac{|k_2|}{k_2}$, $a := \sqrt{\frac{k_2}{k_1+k_2}}$, $b := \sqrt{\frac{k_1}{k_1+k_2}}$. Dessa forma,

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{k}_1 = a^2 k_1 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = b^2 k_2 = \tilde{k}_2.$$

Assim, dados $T_1, T_2 \in O_{\tau(k_1)}(n+1)$, as restrições $T_j|_{\mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}}^n} : \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}}^n \rightarrow \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}}^n$ são isometrias, logo a função

$$g : \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}}^n \longrightarrow \mathbb{O}_{k_1}^n \times \mathbb{O}_{k_2}^n \\ x \longmapsto (aT_1(x), bT_2(x))$$

é uma soma de imersões isométricas com pesos a e b .

Pelo Lema 3.17, a imersão g é totalmente geodésica. Além disso, vimos na seção anterior que

$$\mathbf{R} = b^2 \text{Id}, \quad \mathbf{S}X = ab(-bT_1 X, aT_2 X), \quad \mathbf{T}\mathbf{S} = a^2 \mathbf{S} \quad \text{e} \\ \mathbf{S}(T_x M) = \{(-bT_{1*} X, aT_{2*} X) : X \in T_x M\}.$$

Como a codimensão de g em $\mathbb{O}_{k_1}^n \times \mathbb{O}_{k_2}^n$ é n , então $T^\perp M = \mathbf{S}(TM)$. Dessa forma, se $\xi \in T^\perp M$, então $\xi = \mathbf{S}X$, para algum X tangente, logo $\mathbf{T}\xi = \mathbf{T}\mathbf{S}X = a^2 \mathbf{S}X = a^2 \xi$, ou seja, $\mathbf{T} = a^2 \text{Id}$.

Consideremos a aplicação $G: \mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{2\tau(k_1)}^{2n+2}$ dada por $G(x) := (aT_1(x), bT_2(x))$. Mostra-se facilmente que G é uma imersão isométrica linear, logo $V := G\left(\mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{n+1}\right)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}_{2\tau(k_1)}^{2n+2}$ e V é isomorfo a \mathbb{L}^{n+1} quando k_1 e k_2 forem negativos. Assim, pelo Lema 3.20 (abaixo),

$$V \cap \mathbb{S} \left(0, \varepsilon \sqrt{\frac{|k_1 + k_2|}{k_1 k_2}} \right) \subset \mathbb{O}_{k_1}^n \times \mathbb{O}_{k_2}^n.$$

Portanto, como G é uma isometria, então

$$g \left(\mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}}^n \right) = G \left(\mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}}^n \right) \subset V \cap \mathbb{S} \left(0, \varepsilon \sqrt{\frac{|k_1 + k_2|}{k_1 k_2}} \right) \subset \mathbb{O}_{k_1}^n \times \mathbb{O}_{k_2}^n.$$

Lema 3.20. *Sejam $k_1 k_2 > 0$, $\varepsilon := \frac{k_1}{|k_1|}$, $a := \sqrt{\frac{k_2}{k_1+k_2}}$, $b := \sqrt{\frac{k_1}{k_1+k_2}}$ e $V^{n+1} \subset \mathbb{R}_{2\tau(k_1)}^{2n+2}$ um subespaço vetorial. Suponhamos ainda que V seja isomorfo a \mathbb{L}^{n+1} , quando k_1 e k_2 forem negativos. Nessas condições, são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (I) $V \cap \mathbb{S} \left(0, \varepsilon \sqrt{\frac{|k_1+k_2|}{k_1 k_2}} \right) \subset \mathbb{O}_{k_1}^n \times \mathbb{O}_{k_2}^n$.
- (II) $\pi_1|_V$ é uma semelhança de razão a e $\pi_2|_V$ é uma semelhança de razão b .
- (III) Existem isometrias lineares $T_1, T_2 \in O_{\tau(k_1)}(n+1)$ tais que

$$V = \left\{ (aT_1(x), bT_2(x)) : x \in \mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{n+1} \right\}.$$

Demonstração. Como $k_1 k_2 > 0$, então k_1 e k_2 são ambos positivos ou k_1 e k_2 ambos negativos, ou seja,

$$\tau(k_1) = \tau(k_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } k_1 > 0; \\ 1, & \text{se } k_1 < 0. \end{cases}$$

Prova de que as afirmações (I) e (II) são equivalentes:

Caso $\tau(k_1) = 0$:

Neste caso $\varepsilon = 1$, $\mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{2n+2} = \mathbb{E}^{2n+2}$ é o espaço euclidiano e

$$V \cap \mathbb{S} \left(0, \varepsilon \sqrt{\frac{|k_1 + k_2|}{k_1 k_2}} \right) = \left\{ \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}} \cdot \frac{x}{\|x\|} : x \in V \setminus \{0\} \right\}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} V \cap \mathbb{S} \left(0, \varepsilon \sqrt{\frac{|k_1 + k_2|}{k_1 k_2}} \right) &\subset \mathbb{O}_{k_1}^n \times \mathbb{O}_{k_2}^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}} \cdot \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{O}_{k_1}^n \times \mathbb{O}_{k_2}^n, \forall x \in V \setminus \{0\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \cdot \frac{\|\pi_1 x\|^2}{\|x\|^2} = \frac{1}{k_1} \text{ e } \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \cdot \frac{\|\pi_2 x\|^2}{\|x\|^2} = \frac{1}{k_2}, \forall x \in V \setminus \{0\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|\pi_1 x\|^2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \cdot \|x\|^2 \text{ e } \|\pi_2 x\|^2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot \|x\|^2, \forall x \in V. \end{aligned}$$

Portanto as afirmações (I) e (II) são equivalentes.

Caso $\tau(k_1) = 1$:

Neste caso $\varepsilon = -1$, $\mathbb{R}_{2\tau(k_1)}^{2n+2} = \mathbb{R}_2^{2n+2}$ e $\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} < 0$. Além disso,

$$V \cap \mathbb{S} \left(0, \varepsilon \sqrt{\frac{|k_1 + k_2|}{k_1 k_2}} \right) = \left\{ \sqrt{\frac{|k_1 + k_2|}{k_1 k_2}} \cdot \frac{x}{\|x\|} : x \in V \text{ e } x \text{ é tipo tempo} \right\}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} V \cap \mathbb{S} \left(0, \varepsilon \sqrt{\frac{|k_1 + k_2|}{k_1 k_2}} \right) &\subset \mathbb{O}_{k_1}^n \times \mathbb{O}_{k_2}^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{|k_1 + k_2|}{k_1 k_2}} \cdot \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{O}_{k_1}^n \times \mathbb{O}_{k_2}^n, \forall x \in V \text{ tipo tempo} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{|k_1 + k_2|}{k_1 k_2} \cdot \frac{\|\pi_1 x\|^2}{\|x\|^2} = \frac{1}{k_1} \text{ e } \frac{|k_1 + k_2|}{k_1 k_2} \cdot \frac{\|\pi_2 x\|^2}{\|x\|^2} = \frac{1}{k_2}, \forall x \in V \text{ tipo tempo} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|\pi_1 x\|^2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \cdot \|x\|^2 \text{ e } \|\pi_2 x\|^2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot \|x\|^2, \forall x \in V \text{ tipo tempo.} \end{aligned}$$

Se $\pi_1|_V$ e $\pi_2|_V$ são semelhanças de razões a e b , respectivamente, então, pelas equivalências acima, $V \cap \mathbb{S} \left(0, \varepsilon \sqrt{\frac{|k_1 + k_2|}{k_1 k_2}} \right) \subset \mathbb{O}_{k_1}^n \times \mathbb{O}_{k_2}^n$.

Suponhamos agora que $V \cap \mathbb{S} \left(0, \varepsilon \sqrt{\frac{|k_1+k_2|}{k_1 k_2}} \right) \subset \mathbb{O}_{k_1}^n \times \mathbb{O}_{k_2}^n$. Queremos mostrar que $\pi_1|_V$ e $\pi_2|_V$ são semelhanças de razões a e b , respectivamente.

Seja $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ uma base ortonormal de V com e_1 tipo tempo. Como e_1 é tipo tempo, então $\|\pi_1 e_1\|^2 = -a^2$ e $\|\pi_2 e_1\|^2 = -b^2$. Consideremos então $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $-\alpha^2 + \beta^2 < 0$, e seja $i \in \{2, \dots, n+1\}$. Assim $\alpha e_1 + \beta e_i$ é tipo tempo, logo, $\|\pi_1(\alpha e_1 + \beta e_i)\|^2 = a^2(-\alpha^2 + \beta^2)$, pelas equivalências anteriores.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\pi_1(\alpha e_1 + \beta e_i)\|^2 &= \alpha^2 \|\pi_1 e_1\|^2 + 2\alpha\beta \langle \pi_1 e_1, \pi_1 e_i \rangle + \beta^2 \|\pi_1 e_i\|^2 = \\ &= -a^2 \alpha^2 + 2\alpha\beta \langle \pi_1 e_1, \pi_1 e_i \rangle + \beta^2 \|\pi_1 e_i\|^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} -a^2 \alpha^2 + 2\alpha\beta \langle \pi_1 e_1, \pi_1 e_i \rangle + \beta^2 \|\pi_1 e_i\|^2 &= a^2(-\alpha^2 + \beta^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\alpha\beta \langle \pi_1 e_1, \pi_1 e_i \rangle + \beta^2 \|\pi_1 e_i\|^2 &= a^2 \beta^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \pi_1 e_1, \pi_1 e_i \rangle &= \frac{\beta}{2\alpha} (a^2 - \|\pi_1 e_i\|^2), \text{ sempre que } |\alpha| > |\beta|. \end{aligned}$$

Dessa forma, tomando primeiramente $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ e depois tomando $\alpha = 2$ e $\beta = -1$, valem as igualdades

$$\langle \pi_1 e_1, \pi_1 e_i \rangle = \frac{1}{4} (a^2 - \|\pi_1 e_i\|^2) \quad \text{e} \quad \langle \pi_1 e_1, \pi_1 e_i \rangle = \frac{-1}{4} (a^2 - \|\pi_1 e_i\|^2).$$

Portanto $\langle \pi_1 e_1, \pi_1 e_i \rangle = 0$ e $\|\pi_1 e_i\|^2 = a^2$.

Sejam agora α, β e γ números reais tais que $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, e sejam $i \neq j$ elementos do conjunto $\{2, \dots, n+1\}$. Dessa forma,

$$a^2(-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \|\pi_1(\alpha e_2 + \beta e_i + \gamma e_j)\|^2 = a^2(-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\langle \pi_1 e_i, \pi_1 e_j \rangle.$$

Portanto $\|\pi_1 e_i\|^2 = a^2 \|e_i\|^2$ e $\langle \pi_1 e_i, \pi_1 e_j \rangle = 0$, para quaisquer $i \neq j$ em $\{1, \dots, n+1\}$. Concluimos, pelo Lema A.6, que $\pi_1|_V$ é uma semelhança de razão a . Analogamente prova-se que $\pi_2|_V$ é uma semelhança de razão b . •

Prova de que as afirmações (II) e (III) são equivalentes.

Suponhamos que $\pi_1|_V$ e $\pi_2|_V$ sejam semelhanças de razões a e b , respectivamente, logo (pelo Corolário A.7) $a^{-1}\pi_1|_V$ e $b^{-1}\pi_2|_V$ são isometrias lineares sobre suas imagens.

Dada uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ de V , seja $G: \mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{n+1} \rightarrow V$ a isometria linear que leva o vetor e_i , da base canônica de $\mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{n+1}$ em v_i . Definamos então os operadores T_1 e T_2 por

$$T_1 := a^{-1} \cdot (P_1 \circ G) \quad \text{e} \quad T_2 := b^{-1} \cdot (P_2 \circ G),$$

em que P_1 é a projeção de $\mathbb{R}_{2\tau(k_1)}^{2n+2} = \mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{n+1} \times \mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{n+1}$ no primeiro fator e P_2 a projeção no segundo fator.

Como

$$\begin{aligned} (a^{-1} \cdot \pi_1) \circ G &= a^{-1} \cdot (P_1 \circ G, 0) = (T_1, 0) \quad \text{e} \\ (b^{-1} \cdot \pi_2) \circ G &= b^{-1} \cdot (0, P_2 \circ G) = (0, T_2), \end{aligned}$$

então T_1 e T_2 são isometrias lineares e

$$V = \left\{ G(x) : x \in \mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{n+1} \right\} = \left\{ (aT_1(x), bT_2(x)) : x \in \mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{n+1} \right\}.$$

Reciprocamente, suponhamos existam $T_1, T_2 \in \mathcal{O}_{\tau(k_1)}(n+1)$ para as quais vale a igualdade

$$V = \left\{ (aT_1(x), bT_2(x)) : x \in \mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{n+1} \right\}$$

e seja $G: \mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{2\tau(k_2)}^{2n+2}$ dada por $G(x) = (aT_1(x), bT_2(x))$.

Afirmção 1: G é uma isometria linear sobre V .

De fato, $\langle Gx, Gy \rangle = a^2 \langle T_1x, T_1y \rangle + b^2 \langle T_2x, T_2y \rangle = (a^2 + b^2) \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$. ✓

Dessa forma,

$$\pi_1(Gx) = \pi_1(aT_1(x), bT_2(x)) = a(T_1(x), 0) \Rightarrow \langle \pi_1G(x), \pi_1G(y) \rangle = a^2 \langle x, y \rangle = a^2 \langle Gx, Gy \rangle.$$

Portanto $\pi_1|_V$ é uma semelhança de razão a e, analogamente, $\pi_2|_V$ é uma semelhança de razão b . • □

Queremos relacionar a imersão g , dada no início dessa seção, com o tensor $\Phi = k_1 \text{Id} - (k_1 + k_2) \text{Id}$. Para isso, precisamos do seguinte resultado:

Definição 3.21. Sejam $f: M \rightarrow N$ uma imersão isométrica. O **primeiro espaço normal** de f em x , é o conjunto $\mathcal{N}_1(x) := \text{ger} \{ \alpha(X, Y) : X, Y \in T_x M \}$.

Proposição 3.22. Seja $f: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica com $k_1 k_2 \neq 0$. Nessas condições, se $\Phi = 0$, então valem as seguintes afirmações:

- (I) $k_1 + k_2 \neq 0$.
- (II) $\mathbf{R} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \text{Id}$ e $(\text{Id} - \mathbf{R}) = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \text{Id}$.
- (III) $k_1 k_2 > 0$.
- (IV) \mathbf{L} é uma semelhança de razão $\sqrt{\frac{k_1}{k_1 + k_2}}$.
- (V) $\|\pi_1 F\|^2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \|F\|^2$ e $\|\pi_2 F\|^2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \|F\|^2$.
- (VI) $\mathcal{N}_1 \perp \mathbf{S}(TM)$.
- (VII) Se \mathcal{N}_1 é paralelo na conexão normal de f , então $\pi_1|_{\mathcal{N}_1}$ é uma semelhança de razão $\sqrt{\frac{k_2}{k_1 + k_2}}$ e $\pi_2|_{\mathcal{N}_1}$ é uma semelhança de razão $\sqrt{\frac{k_1}{k_1 + k_2}}$.

Demonstração.

(I): Se $k_1 + k_2 = 0$, então $\Phi = k_1 \text{Id} = 0$, logo $k_1 = 0$ o que contradiz $k_1 k_2 \neq 0$. •

(II): Como $\Phi = k_1 \text{Id} - (k_1 + k_2) \mathbf{R} = 0$, segue que $\mathbf{R} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \text{Id}$ e $(\text{Id} - \mathbf{R}) = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \text{Id}$. •

(III): Sejam $X, Y \in TM$, logo

$$\langle \mathbf{S}X, \mathbf{S}Y \rangle = \langle \mathbf{S}^t \mathbf{S}X, Y \rangle \stackrel{(3.2)}{=} \langle \mathbf{R}(\text{Id} - \mathbf{R})X, Y \rangle \stackrel{(II)}{=} \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \langle X, Y \rangle.$$

Assim $\|\mathbf{S}X\|^2 = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \|X\|^2 \geq 0$, portanto $k_1 k_2 > 0$. •

(IV): Como $\mathbf{L}^t\mathbf{L} = \mathbf{R} = \frac{k_1}{k_1+k_2}\text{Id}$, então $\langle \mathbf{L}X, \mathbf{L}Y \rangle = \frac{k_1}{k_1+k_2} \langle X, Y \rangle$. Portanto \mathbf{L} é uma semelhança de razão $\sqrt{\frac{k_1}{k_1+k_2}}$. •

(V):

$$\|\pi_1 F\|^2 = \frac{1}{k_1} = \frac{k_2}{k_1+k_2} \cdot \frac{k_1+k_2}{k_1 k_2} = \frac{k_2}{k_1+k_2} \|F\|^2.$$

Analogamente, $\|\pi_2 F\|^2 = \frac{k_1}{k_1+k_2} \|F\|^2$. •

(VI): Consideremos a aplicação trilinear $\beta: T_x M \times T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\beta(X, Y, Z) = \langle \alpha_f(X, Y), \mathbf{S}Z \rangle$. Definida dessa forma, β é evidentemente simétrica nas duas primeiras variáveis.

Afirmção 1: β é antissimétrica nas duas últimas variáveis.

Pela equação (3.3), sabemos que

$$\begin{aligned} \nabla_X \mathbf{R}Y - \mathbf{R}\nabla_X Y &= A_{\mathbf{S}Y}X + \mathbf{S}^t \alpha(X, Y) \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla_X \frac{k_1}{k_1+k_2} Y - \frac{k_1}{k_1+k_2} \nabla_X Y &= A_{\mathbf{S}Y}X + \mathbf{S}^t \alpha(X, Y) \Rightarrow A_{\mathbf{S}Y}X = -\mathbf{S}^t \alpha(X, Y). \end{aligned}$$

Dessa forma, $\langle A_{\mathbf{S}Y}X, Z \rangle = -\langle \mathbf{S}^t \alpha(X, Y), Z \rangle$, logo $\langle \alpha_f(X, Z), \mathbf{S}Y \rangle = -\langle \alpha_f(X, Y), \mathbf{S}Z \rangle$. ✓

Como β é uma aplicação trilinear simétrica nas duas primeiras variáveis e antissimétrica nas duas últimas, então, pelo Lema A.10, $\beta = 0$. Portanto $\alpha_f(X, Y) \perp \mathbf{S}(T_x M)$. •

(VII): Pela equação (3.4),

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_X \mathbf{S})Y, \alpha(W, Z) \rangle &= \langle \mathbf{T}\alpha(X, Y) - \alpha(X, \mathbf{R}Y), \alpha(W, Z) \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \nabla_X^\perp \mathbf{S}Y - \mathbf{S}\nabla_X Y, \alpha(W, Z) \rangle &= \left\langle \mathbf{T}\alpha(X, Y) - \frac{k_1}{k_1+k_2} \alpha(X, Y), \alpha(W, Z) \right\rangle \Rightarrow \\ \stackrel{(VI)}{\Rightarrow} \langle \nabla_X^\perp \mathbf{S}Y, \alpha(W, Z) \rangle &= \langle \mathbf{T}\alpha(X, Y), \alpha(W, Z) \rangle - \frac{k_1}{k_1+k_2} \langle \alpha(X, Y), \alpha(W, Z) \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow -\langle \mathbf{S}Y, \nabla_X^\perp \alpha(W, Z) \rangle &= \langle \mathbf{T}\alpha(X, Y), \alpha(W, Z) \rangle - \frac{k_1}{k_1+k_2} \langle \alpha(X, Y), \alpha(W, Z) \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \mathbf{T}\alpha(X, Y), \alpha(W, Z) \rangle &= \frac{k_1}{k_1+k_2} \langle \alpha(X, Y), \alpha(W, Z) \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{k_1}{k_1+k_2} \langle \alpha(X, Y), \alpha(W, Z) \rangle &= \langle \pi_2 \alpha(X, Y), \alpha(Z, W) \rangle = \langle \pi_2 \alpha(X, Y), \pi_2 \alpha(W, Z) \rangle. \end{aligned}$$

Disso, segue que

$$\begin{aligned} \langle \pi_1 \alpha(X, Y), \pi_1 \alpha(Z, W) \rangle &= \langle (\text{Id} - \pi_2) \alpha(X, Y), \alpha(Z, W) \rangle = \\ &= \langle \alpha(X, Y), \alpha(Z, W) \rangle - \langle \pi_2 \alpha(X, Y), \pi_2 \alpha(W, Z) \rangle = \\ &= \left(1 - \frac{k_1}{k_1+k_2} \right) \langle \alpha(X, Y), \alpha(W, Z) \rangle = \frac{k_2}{k_1+k_2} \langle \alpha(X, Y), \alpha(W, Z) \rangle. \bullet \end{aligned}$$

É consequência direta das igualdades acima que $\pi_1|_{\mathcal{N}_1}$ é uma semelhança de razão $\sqrt{\frac{k_2}{k_1+k_2}}$ e $\pi_2|_{\mathcal{N}_1}$ é uma semelhança de razão $\sqrt{\frac{k_1}{k_1+k_2}}$. • □

Proposição 3.23. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica com $k_1 k_2 \neq 0$. Suponhamos ainda que \mathcal{N}_1 seja um subfibrado paralelo de $T^\perp M$ com dimensão ℓ . Nessas condições, se $\Phi = 0$, então $k_1 k_2 > 0$, $m + \ell \leq \min\{n_1, n_2\}$ e $f = (j_1 \times j_2) \circ g \circ \bar{f}$, em que cada $j_i: \mathbb{O}_{k_i}^{m+\ell} \hookrightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma inclusão totalmente geodésica, $g: \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{m+\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m+\ell} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m+\ell}$ é a imersão totalmente geodésica dada no início dessa seção e $\bar{f}: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{m+\ell}$ é uma imersão isométrica.*

Demonstração. Do item (III) do proposição anterior, resulta que $k_1 k_2 > 0$.

Sejam $\iota: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ a inclusão canônica, $F = \iota \circ f$ e consideremos o fibrado vetorial $V := F_* TM \oplus \iota_* \mathcal{N}_1^f \oplus \text{ger}\{F\}$ com dimensão constante igual a $m + \ell + 1$.

Afirmção 1: V é um subespaço constante em \mathbb{R}^n .

Pelo Lema A.12, basta mostrar que V é paralelo na conexão de \mathbb{R}^n , o que equivale a mostrar que V^\perp é paralelo na conexão de \mathbb{R}^n . Mas $V^\perp = \iota_* \mathcal{N}_1^\perp \oplus \text{ger}\{\vartheta\}$, em que $\vartheta = \nu_1 - \nu_2$. Assim,

$$\tilde{\nabla}_X \vartheta = -F_* A_\vartheta^F X + \bar{\nabla}_X^\perp \vartheta \stackrel{\text{Lema 3.11}}{=} -F_* \Phi X + (k_1 + k_2) \iota_* \mathbf{S}X = (k_1 + k_2) \iota_* \mathbf{S}X.$$

Como $\mathbf{S}(TM) \subset \mathcal{N}_1^\perp$, pelo item (VI) da Proposição 3.22, então $\tilde{\nabla}_X \vartheta \in \iota_* \mathcal{N}_1^\perp$.

Seja agora $\xi \in \mathcal{N}_1^\perp$, logo

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \iota_* \xi &= \iota_* \bar{\nabla}_X \xi + \alpha_\iota(f_* X, \xi) = -F_* A_\xi^f X + \iota_* \nabla_X^\perp \xi + \langle \pi_1 f_* X, \xi \rangle \nu_1 + \langle \pi_2 f_* X, \xi \rangle \nu_2 = \\ &= \iota_* \nabla_X^\perp \xi - \langle \mathbf{S}X, \xi \rangle \nu_1 + \langle \mathbf{S}X, \xi \rangle \nu_2 = \iota_* \nabla_X^\perp \xi - \langle \mathbf{S}X, \xi \rangle \vartheta. \end{aligned}$$

Como \mathcal{N}_1 é paralelo na conexão normal de f , então \mathcal{N}_1^\perp também o é. Portanto $\nabla_X^\perp \xi \in \mathcal{N}_1^\perp$ e $\tilde{\nabla}_X \iota_* \xi \in V^\perp$. ✓

Sendo V um subespaço constante em \mathbb{R}_t^n e $F_*(TM) \subset V$, então $F(M) \subset F(x_0) + V$, para qualquer $x_0 \in M$ fixo, pois $X \langle F - F(x_0), \xi \rangle = \langle F_* X, \xi \rangle = 0$, para todo ξ constante em V^\perp . Mas $\text{ger}\{F\} \subset V$, logo $F(M) \subset V$.

Fixado $x_0 \in M$, então $V = \text{ger}\left\{\frac{F(x_0)}{\|F(x_0)\|}\right\} \oplus F_* T_{x_0} M \oplus \iota_* \mathcal{N}_1(x_0)$.

Afirmção 2: $\pi_1|_V$ e $\pi_2|_V$ são semelhanças com razões a e b , respectivamente.

Sejam $X, Y, Z \in T_{x_0} M$. Logo

$$\begin{aligned} \langle \pi_1 F(x_0), \pi_1 F_* X \rangle &= \langle \pi_1 F(x_0), F_* X \rangle = 0; \\ \langle \pi_1 F(x_0), \pi_1 \iota_* \alpha_f(X, Y) \rangle &= \langle \pi_1 F(x_0), \iota_* \alpha_f(X, Y) \rangle = 0; \\ \langle \pi_1 F_* X, \pi_1 \iota_* \alpha_f(Y, Z) \rangle &= \langle -\mathbf{S}X, \alpha_f(Y, Z) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo $\pi_1|_V = \pi_1|_{\text{ger}\{F(x_0)\}} \times \pi_1|_{F_* T_{x_0} M} \times \pi_1|_{\mathcal{N}_1^f(x_0)}$. Analogamente, $\pi_2|_V = \pi_2|_{\text{ger}\{F\}} \times \pi_2|_{F_* T_{x_0} M} \times \pi_2|_{\mathcal{N}_1(x_0)}$.

Mas, pelos itens (IV), (V) e (VII) da Proposição 3.22, sabemos que $\pi_i|_{\text{ger}\{F(x_0)\}}$, $\pi_i|_{F_* T_{x_0} M}$ e $\pi_i|_{\mathcal{N}_1^f(x_0)}$ são semelhanças de razão a , se $i = 1$, ou de razão b , se $i = 2$. Portanto $\pi_1|_V$ e $\pi_2|_V$ são semelhanças com razões a e b , respectivamente. ✓

Consideremos $\mathbb{R}^{m+\ell+1} \times \{0\} = \pi_1(V)$ e $\{0\} \times \mathbb{R}^{m+\ell+1} = \pi_2(V)$. Assim $V \subset \mathbb{R}^{m+\ell+1} \times \mathbb{R}^{m+\ell+1}$. Por outro lado, como $\pi_1|_V$ e $\pi_2|_V$ são semelhanças de razões a e b respectivamente, então, pelo Lema 3.20, $V \cap \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{2m+2\ell+1} \subset \mathbb{O}_{k_1}^{m+\ell} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m+\ell}$.

Mas $f(M) \subset V \cap \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{2m+2\ell+1}$, ou seja, $f(M) \subset \mathbb{O}_{k_1}^{m+\ell} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m+\ell}$. Portanto, $f = (j_1 \times j_2) \circ \tilde{f}$, em que $j_1: \mathbb{O}_{k_1}^{m+\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ e $j_2: \mathbb{O}_{k_2}^{m+\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ são inclusões e $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m+\ell} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m+\ell}$ é uma imersão isométrica com $\tilde{f}(M) \subset V \cap \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{2m+2\ell+1}$.

Seja $g: \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{m+\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m+\ell} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m+\ell}$ a imersão isométrica totalmente geodésica dada no início dessa seção com T_1 e T_2 dados pelo Lema 3.20 para o V que temos. Dessa forma $V \cap \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{2m+2\ell+1}$ é a imagem de g . Seja então $\bar{f} := g^{-1} \circ \tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{m+\ell}$. Assim \bar{f} é uma imersão isométrica e $f = (j_1 \times j_2) \circ g \circ \bar{f}$. \square

3.6 Redução de codimensão em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$

Dizemos que a codimensão de $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ **se reduz à esquerda** em ℓ , se existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ tal que $n_1 - m_1 = \ell$ e $f(M) \subset \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. De maneira análoga podemos definir o significado de redução de codimensão à direita.

Lema 3.24. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica. Então valem:*

- (I) $\mathbf{S}(TM)^\perp$ é invariante por \mathbf{T} e se decompõe ortogonalmente em $\mathbf{S}(TM)^\perp = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, em que $\mathcal{U} := \ker \mathbf{T}$ e $\mathcal{V} := \ker(\text{Id} - \mathbf{T})$.
- (II) $\nabla^\perp(\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp) \subset \mathcal{U}$ e $\nabla^\perp(\mathcal{V} \cap \mathcal{N}_1^\perp) \subset \mathcal{V}$.
- (III) π_1 fixa os pontos de \mathcal{U} e π_2 fixa os pontos de \mathcal{V} .

Demonstração.

(I): Da segunda equação em (3.2) decorre que $\mathbf{T}[\mathbf{S}(TM)] \subset \mathbf{S}(TM)$. Dessa forma, se $\xi \in \mathbf{S}(TM)$ e $\zeta \in \mathbf{S}(TM)^\perp$, então $\langle \xi, \mathbf{T}\zeta \rangle = \langle \mathbf{T}\xi, \zeta \rangle = 0$. Portanto \mathbf{T} deixa $\mathbf{S}(TM)^\perp$ invariante.

Segue, da terceira equação em (3.2), que $\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}$ em $\mathbf{S}(TM)^\perp$, ou seja, $\mathbf{T}|_{\mathbf{S}(TM)^\perp}$ é uma projeção ortogonal e $\mathbf{S}(TM)^\perp = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, em que $\mathcal{U} := \ker \mathbf{T}|_{\mathbf{S}(TM)^\perp}$ e $\mathcal{V} := \ker(\text{Id} - \mathbf{T})|_{\mathbf{S}(TM)^\perp}$.

Por outro lado, ainda pela terceira equação em (3.2),

$$\ker[\mathbf{T}(\text{Id} - \mathbf{T})] = \ker \mathbf{S}\mathbf{S}^t \stackrel{\text{Lema A.4}}{=} \ker \mathbf{S}^t = \mathbf{S}(TM)^\perp.$$

Além disso, $\ker \mathbf{T}$ e $\ker(\text{Id} - \mathbf{T})$ são subconjuntos de $\ker[\mathbf{T}(\text{Id} - \mathbf{T})] = \mathbf{S}(TM)^\perp$, portanto $\ker \mathbf{T} = \ker \mathbf{T}|_{\mathbf{S}(TM)^\perp}$ e $\ker(\text{Id} - \mathbf{T}) = \ker(\text{Id} - \mathbf{T})|_{\mathbf{S}(TM)^\perp}$. •

(II): Se $\xi \in \Gamma(\mathcal{V} \cap \mathcal{N}_1^\perp)$, então

$$\nabla_X^\perp \xi - \mathbf{T}\nabla_X^\perp \xi = \nabla_X^\perp \mathbf{T}\xi - \mathbf{T}\nabla_X^\perp \xi \stackrel{(3.6)}{=} 0, \quad \forall X \in \Gamma(TM).$$

Assim $\nabla_X^\perp \xi \in \ker(\text{Id} - \mathbf{T}) = \mathcal{V}$.

Já se $\xi \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp$, então

$$-\mathbf{T}\nabla_X^\perp \xi = \nabla_X^\perp \mathbf{T}\xi - \mathbf{T}\nabla_X^\perp \xi \stackrel{(3.6)}{=} 0, \quad \forall X \in \Gamma(TM).$$

Portanto $\nabla_X^\perp \xi \in \ker \mathbf{T} = \mathcal{U}$. •

(III): Seja $\xi \in \mathcal{U} = \ker \mathbf{T} \cap \mathcal{N}_1^\perp$. Assim,

$$\pi_1 \xi = (\text{Id} - \pi_2)\xi = -\mathbf{S}^t \xi + (\text{Id} - \mathbf{T})\xi = \xi,$$

pois $\mathcal{U} \subset \mathbf{S}(TM)^\perp$. Analogamente, $\pi_2(\zeta) = \zeta$, para todo $\zeta \in \mathcal{V}$. • \square

Para cada $i \in \{1, 2\}$, seja $\mathbb{O}_{k_i}^{m_i} \subset \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ uma subvariedade totalmente geodésica. Sejam também $\mathbb{R}_{\tau(k_i)}^{m_i+v(k_i)} \subset \mathbb{R}^{N_i}$ tais que $\mathbb{O}_{k_i}^{m_i} \subset \mathbb{R}_{\tau(k_i)}^{m_i+v(k_i)}$ e $\mathbb{O}_{k_i}^{n_i} \subset \mathbb{R}^{N_i}$ e consideremos a projeção ortogonal $\Pi_2: \mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{m_1+v(k_1)} \times \mathbb{R}_{\tau(k_2)}^{m_2+v(k_2)} \rightarrow \mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{m_1+v(k_1)} \times \mathbb{R}_{\tau(k_2)}^{m_2+v(k_2)}$ dada por $\Pi_2(x, y) := (0, y)$. Assim Π_2 é a restrição de π_2 a $\mathbb{R}_{\tau(k_1)}^{m_1+\sigma(k_1)} \times \mathbb{R}_{\tau(k_2)}^{m_2+\sigma(k_2)}$.

Sejam agora $\tilde{f}: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m_2}$ uma imersão isométrica e $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ dada por $f := (j_1 \times j_2) \circ \tilde{f}$, em que cada $j_i: \mathbb{O}_{k_i}^{m_i} \hookrightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma inclusão totalmente geodésica. Nessas condições,

$$\begin{aligned} \pi_2 f_* X &= (j_1 \times j_2)_* \Pi_2 \tilde{f}_* X \Rightarrow f_* \mathbf{R}^f X + \mathbf{S}^f X = f_* \mathbf{R}^{\tilde{f}} X + (j_1 \times j_2)_* \mathbf{S}^{\tilde{f}} X. \\ \pi_2 (j_1 \times j_2)_* \xi &= (j_1 \times j_2)_* \Pi_2 \xi \Rightarrow \\ \Rightarrow f_* (\mathbf{S}^f)^t (j_1 \times j_2)_* \xi + \mathbf{T}^f (j_1 \times j_2)_* \xi &= f_* (\mathbf{S}^{\tilde{f}})^t \xi + (j_1 \times j_2)_* \mathbf{T}^{\tilde{f}} \xi. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^f &= \mathbf{R}^{\tilde{f}}, & \mathbf{S}^f &= (j_1 \times j_2)_* \mathbf{S}^{\tilde{f}}, \\ (\mathbf{S}^f)^t (j_1 \times j_2)_* \xi &= (\mathbf{S}^{\tilde{f}})^t \xi, & \mathbf{T}^f (j_1 \times j_2)_* \xi &= (j_1 \times j_2)_* \mathbf{T}^{\tilde{f}} \xi. \end{aligned} \quad (3.12)$$

No restante da seção, provaremos alguns resultados a respeito de redução de codimensão à esquerda. Mas, trocando \mathcal{U} por \mathcal{V} , pode-se demonstrar resultados análogos a respeito de redução de codimensão à direita.

Teorema 3.25. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica. Nessas condições, as duas afirmações abaixo são equivalentes.*

(I) *A codimensão de f se reduz à esquerda em ℓ .*

(II) *Existe um subfibrado paralelo (na conexão normal de f) $L^\ell \subset T^\perp M$, tal que $L^\ell \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp$.*

Demonstração.

(I) \Rightarrow (II): Como a codimensão de f se reduz à esquerda em ℓ , então existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$, com $n_1 - m_1 = \ell$, e tal que $f(M) \subset \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. Assim, existe uma imersão isométrica $\tilde{f}: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ tal que $f = (j_1 \times \text{Id}) \circ \tilde{f}$, em que $j_1: \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \hookrightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é uma inclusão totalmente geodésica e $\text{Id}: \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é a identidade.

Consideremos então o subfibrado $L \subset T_f^\perp M$ cuja fibra em cada x é dada por

$$L(x) := \left((j_1 \times \text{Id})_* T_{\tilde{f}(x)} \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \right)^\perp = \left(T_{(\pi_1 \circ \tilde{f})(x)} \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \right)^\perp \times \{0\}.$$

Obviamente $\dim L = n_1 - m_1 = \ell$ e $\pi_1(L) = L$.

Por (3.12), sabemos que $\mathbf{S} = (j_1 \times \text{Id})_* \mathbf{S}^{\tilde{f}}$, dessa forma

$$\mathbf{S}(TM) \subset (j_1 \times \text{Id})_* T_{\tilde{f}} \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \Rightarrow L \subset \mathbf{S}(TM)^\perp \Rightarrow L \subset \pi_1 [\mathbf{S}(TM)^\perp].$$

Por outro lado, pelo Lema 3.24, $\mathbf{S}(TM)^\perp = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ e $\mathcal{U} = \pi_1(\mathcal{U}) = \pi_1 [\mathbf{S}(TM)^\perp]$. Logo, $L \subset \mathcal{U}$.

Como $(j_1 \times \text{Id}): \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é totalmente geodésica, então $\mathcal{N}_1^f = (j_1 \times \text{Id})_* \mathcal{N}_1^{\tilde{f}}$. Dessa forma,

$$L = \left((j_1 \times \text{Id})_* T_{\tilde{f}} \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \right)^\perp \subset \left[(j_1 \times \text{Id})_* \mathcal{N}_1^{\tilde{f}} \right]^\perp \Rightarrow L \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^{f^\perp}.$$

Por último, sejam $\xi \in \Gamma(L)$ e $\zeta = (j_1 \times \text{Id})_* \tilde{\zeta} \in \Gamma((j_1 \times \text{Id})_* T_{\tilde{f}} \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2})$. Assim,

$$\langle \nabla_X^\perp \xi, \zeta \rangle = -\langle \xi, \bar{\nabla}_X (j_1 \times \text{Id})_* \tilde{\zeta} \rangle = \langle \xi, (j_1 \times \text{Id})_* \bar{\nabla}_X \tilde{\zeta} \rangle = 0.$$

Portanto $\nabla^\perp L \subset L$. •

(II) \Rightarrow (I): Sejam $\iota: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ a inclusão, $F := \iota \circ f$ e $\tilde{L} := \iota_* L$.

Afirmção 1: \tilde{L} é um subespaço constante de \mathbb{R}^n .

Seja $\xi \in \Gamma(L)$. Como $L \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp$, então $A_\xi = 0$ e $\pi_1(\xi) = \xi$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \iota_* \xi &= \iota_* \bar{\nabla}_X \xi + \alpha_\iota(f_* X, \xi) \stackrel{\text{Lema 3.3}}{=} \\ &= -F_* A_\xi X + \iota_* \nabla_X^\perp \xi + \langle f_* X, \pi_1 \xi \rangle \nu_1 + \langle f_* X, \pi_2 \xi \rangle \nu_2 = \iota_* \nabla_X^\perp \xi. \end{aligned}$$

Como L é paralelo, segue que $\tilde{\nabla}_X \iota_* \xi \in \tilde{L}$. ✓

Afirmção 2: $\pi_1 \tilde{L} = \tilde{L}$.

Como $\pi_1(L) = L$ e $\pi_1 \iota_* = \iota_* \pi_1$, então vale a afirmação. ✓

Consideremos P_1 a projeção de $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ sobre \mathbb{R}^{N_1} e P_2 a projeção de $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ sobre \mathbb{R}^{N_2} . Dessa forma, $\pi_1(x) = (P_1(x), 0)$ e $\pi_2(x) = (0, P_2(x))$. Sejam então

$$\bar{L}_1 := P_1(\tilde{L}_1^\perp) = [P_1(\tilde{L}_1)]^\perp \quad \text{e} \quad f_1 := P_1 \circ f.$$

Dessa forma, $f_{1*} X = P_1 f_* X$ e $f(M) \subset (\bar{L}_1 + f_1(x_0)) \times \mathbb{R}^{N_2}$, em que x_0 é um ponto fixado qualquer de M .

Suponhamos que $k_1 \neq 0$. Neste caso $f_1(x_0) \perp P_1(\tilde{L}_1(x_0)) = P_1(\tilde{L}_1)$, portanto $f_1(x_0) \in \bar{L}_1$. Além disso, como \tilde{L}_1 é um subespaço tipo espaço, então $P_1(\tilde{L}_1)$ é tipo espaço e $f_1(M) \subset \bar{L}_1 \cap \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} = \mathbb{O}_{k_1}^{m_1}$, sendo $m_1 = n_1 - \ell_1$. Já se $k_1 = 0$, então $\mathbb{R}^{N_1} = \mathbb{E}^{n_1}$ e $f_1(M) \subset \bar{L}_1 + f_1(x_0)$. Podemos então identificar $\bar{L}_1 + f_1(x_0) = \mathbb{E}^{m_1}$ de forma que $f_1(M) \subset \mathbb{E}^{m_1}$, em que $m_1 = n_1 - \ell_1$. Concluimos que $f(M) \subset \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m_2} \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. □

Cabe aqui observar que, se a codimensão à esquerda de $f: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ pode ser reduzida em ℓ_1 e a codimensão à direita em ℓ_2 , então $f(M) \subset \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m_2}$, para alguma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m_2} \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ com $m_1 = n_1 - \ell_1$ e $m_2 = n_2 - \ell_2$.

Corolário 3.26. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica e suponhamos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp$ seja um subfibrado de $T^\perp M$ com dimensão ℓ . Nessas condições, se $\nabla^\perp(\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp) \subset \mathcal{N}_1^\perp$, então a codimensão substancial à esquerda de f se reduz em ℓ .*

Demonstração. Pelo teorema anterior, basta mostrar que $L := \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp$ é paralelo na conexão normal de f . Por outro lado, pelo item (II) do Lema 3.24, sabemos que $\nabla^\perp L \subset \mathcal{U}$. Mas $\nabla^\perp L \subset \mathcal{N}_1^\perp$, por hipótese, logo L é paralelo. □

Teorema 3.27. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica e suponhamos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp$ seja um subfibrado de $T_f^\perp M$. Nessas condições, $\nabla^\perp(\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp) \subset \mathcal{N}_1^\perp$ se, e somente se,*

- (I) $\nabla^\perp \mathcal{R}^\perp|_{\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp} = 0$,
- (II) $\nabla^\perp(\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp) \subset \{\eta\}^\perp$, em que η é o vetor curvatura média de f .

Demonstração.

(\Rightarrow): Como $\mathcal{N}_1^\perp \subset \{\eta\}^\perp$ e $\nabla^\perp(\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp) \subset \mathcal{N}_1^\perp$, então $\nabla^\perp(\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp) \subset \{\eta\}^\perp$. Resta provar o item (I).

Pelo item (I) do Lema 3.24, $\mathbf{S}(TM)^\perp = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Dessa forma, pela equação de Ricci (3.9),

$$\mathcal{R}^\perp(X, Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y) + (k_1 + k_2)(\mathbf{S}X \wedge \mathbf{S}Y)\xi = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp. \quad (3.13)$$

Logo, dado $\xi \in \Gamma(\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp)$, vale a seguinte igualdade:

$$(\nabla_Z^\perp \mathcal{R}^\perp)(X, Y, \xi) = \nabla_Z^\perp \mathcal{R}^\perp(X, Y)\xi - \mathcal{R}^\perp(\nabla_Z X, Y)\xi - \mathcal{R}^\perp(X, \nabla_Z Y)\xi - \mathcal{R}^\perp(X, Y)\nabla_Z^\perp \xi = 0,$$

pois $\nabla_Z^\perp \xi \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp$. Portanto vale o item (I). •

(\Leftarrow): Suponhamos agora que valham (I) e (II). Mostraremos que $\nabla^\perp(\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp) \subset \mathcal{N}_1^\perp$.

Seja $\xi \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp \subset \{\eta\}^\perp$, logo $\mathcal{R}^\perp(X, Y)\xi = 0$, por (3.13). Além disso, por (I), as seguintes igualdades são válidas:

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_Z^\perp \mathcal{R}^\perp)(X, Y, \xi) = \nabla_Z^\perp \mathcal{R}^\perp(X, Y)\xi - \mathcal{R}^\perp(\nabla_Z X, Y)\xi - \mathcal{R}^\perp(X, \nabla_Z Y)\xi - \mathcal{R}^\perp(X, Y)\nabla_Z^\perp \xi = \\ &= -\mathcal{R}^\perp(X, Y)\nabla_Z^\perp \xi. \end{aligned}$$

Sabemos, pelo Lema 3.24, que $\nabla_X^\perp \xi \in \mathcal{U} \subset \mathbf{S}(TM)^\perp$. Dessa forma, pela equação de Ricci (3.9),

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{R}^\perp(X, Y)\nabla_Z^\perp \xi = \alpha(X, A_{\nabla_Z^\perp \xi} Y) - \alpha(A_{\nabla_Z^\perp \xi} X, Y) + (k_1 + k_2)(\mathbf{S}X \wedge \mathbf{S}Y)\nabla_Z^\perp \xi = \\ &= \alpha(X, A_{\nabla_Z^\perp \xi} Y) - \alpha(A_{\nabla_Z^\perp \xi} X, Y). \\ \therefore 0 &= \left\langle \alpha(X, A_{\nabla_Z^\perp \xi} Y), \zeta \right\rangle - \left\langle \alpha(A_{\nabla_Z^\perp \xi} X, Y), \zeta \right\rangle, \quad \forall \zeta \perp M \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= \left\langle A_\zeta X, A_{\nabla_Z^\perp \xi} Y \right\rangle - \left\langle A_\zeta A_{\nabla_Z^\perp \xi} X, Y \right\rangle = \left\langle [A_{\nabla_Z^\perp \xi}, A_\zeta] X, Y \right\rangle, \quad \forall \zeta \in T^\perp M. \\ \therefore [A_{\nabla_Z^\perp \xi}, A_{\nabla_W^\perp \xi}] &= 0, \quad \text{para quaisquer } W, Z \in TM. \end{aligned}$$

Como $[A_{\nabla_Z^\perp \xi}, A_{\nabla_W^\perp \xi}] = 0$, para quaisquer $W, Z \in \Gamma(TM)$, então para cada $x \in M$ existe uma base ortonormal $\{E_1(x), \dots, E_m(x)\}$ de $T_x M$ que diagonaliza simultaneamente todos os elementos do conjunto $\{A_{\nabla_X^\perp \xi}: X \in T_x M\}$.

Mostraremos que $\nabla_X^\perp \xi \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp$. Para isso, seja $\ell_{k,i}$ o autovalor de $A_{\nabla_{E_k}^\perp \xi}$ associado ao autovetor $E_i(x)$, para cada par $i, k \in \{1, \dots, m\}$. Assim

$$\left\langle \alpha(E_i, E_j), \nabla_{E_k}^\perp \xi \right\rangle = \left\langle A_{\nabla_{E_k}^\perp \xi} E_i, E_j \right\rangle = \ell_{k,i} \langle E_i, E_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ \ell_{k,i}, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Utilizando a segunda equação em (3.8) resulta

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}X, \xi \rangle \Phi Y - \langle \mathbf{S}Y, \xi \rangle \Phi X &= \nabla_Y A_\xi X - A_\xi \nabla_Y X - A_{\nabla_Y^\perp \xi} X - \nabla_X A_\xi Y + A_\xi \nabla_X Y + A_{\nabla_X^\perp \xi} Y \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= -A_{\nabla_Y^\perp \xi} X + A_{\nabla_X^\perp \xi} Y \Rightarrow A_{\nabla_X^\perp \xi} Y = A_{\nabla_Y^\perp \xi} X, \quad \text{para quaisquer } X, Y \in \Gamma(TM). \end{aligned}$$

Dessa forma, $A_{\nabla_{E_i}^\perp \xi} E_j = A_{\nabla_{E_j}^\perp \xi} E_i \Rightarrow \ell_{i,j} E_j = \ell_{j,i} E_i \Rightarrow \ell_{i,j} = 0$, se $i \neq j$. Logo

$$\left\langle \alpha(E_i, E_j), \nabla_{E_k}^\perp \xi \right\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \text{ ou } i \neq k, \\ \ell_{i,i}, & \text{se } i = j = k. \end{cases}$$

Por outro lado

$$\langle \alpha(E_i, E_i), \nabla_{E_i}^\perp \xi \rangle = \sum_{j=1}^m \langle \alpha(E_j, E_j), \nabla_{E_i}^\perp \xi \rangle = m \langle \eta, \nabla_{E_i}^\perp \xi \rangle = 0,$$

pois $\nabla^\perp (\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp) \subset \{\eta\}^\perp$. Logo $\nabla_{E_i}^\perp \xi \in \mathcal{N}_1^\perp$. □

Capítulo 4

Imersões isométricas paralelas em

$$\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$$

Uma imersão isométrica $f: M^m \rightarrow N^n$ entre duas variedades pseudoriemannianas é dita **paralela** quando sua segunda forma fundamental é paralela, ou seja, quando

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) := \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) = 0,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Neste capítulo são classificadas todas as imersões paralelas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ com $k_1 k_2 \neq 0$, ou seja, provamos o seguinte teorema:

Teorema 4.1. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ imersão isométrica com $k_1 k_2 \neq 0$. Nessas condições, f é paralela se, e somente se, um dos casos abaixo ocorre:*

- (I) $f = v_1^z \circ \bar{f}$ em que $v_1^z: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \{z\} \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é o mergulho totalmente geodésico e $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é uma imersão isométrica paralela.
- (II) $f = v_2^z \circ \bar{f}$ em que $v_2^z: \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \rightarrow \{z\} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é o mergulho totalmente geodésico e $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é uma imersão isométrica paralela.
- (III) M é localmente (isométrica a) uma variedade produto $M_1^\ell \times M_2^{m-\ell}$ e $f|_{M_1 \times M_2} = f_1 \times f_2$, em que cada $f_i: M_i \rightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma imersão isométrica paralela.
- (IV) $m \leq \min\{n_1, n_2\}$ e $f = (j_1 \times j_2) \circ g \circ \bar{f}$, em que cada $j_i: \mathbb{O}_{k_i}^{m+\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma inclusão totalmente geodésica, $g: \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{m+\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m+\ell} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m+\ell}$ é a imersão dada na Seção 3.5, $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{m+\ell}$ é uma imersão isométrica paralela e $\ell = \dim \mathcal{N}_1$.

Além disso, se M é simplesmente conexa e o item (III) é verdadeiro, então M é (isométrica a) uma variedade produto $M_1 \times M_2$ e $f = f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, em que cada $f_i: M_i \rightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma imersão isométrica paralela.

Observemos que o item (IV) do Teorema 4.1 não pode ocorrer se $n_1 < m$ ou $n_2 < m$. Já se $n_1 \geq m$, $n_2 = m$ e f é como no item (IV) do Teorema 4.1, então f é totalmente geodésica.

Obtivemos também uma classificação das imersões totalmente geodésicas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$.

Teorema 4.2. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica com $k_1 \neq 0$. Nessas condições, f é totalmente geodésica se, e somente se, um dos casos abaixo é verdadeiro.*

- (I) $f = v_1^z \circ \bar{f}$ em que $v_1^z: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \{z\} \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é o mergulho totalmente geodésico e $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é uma imersão isométrica totalmente geodésica.

- (II) $f = \iota_2^z \circ \bar{f}$ em que $\iota_2^z: \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \rightarrow \{z\} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é o mergulho totalmente geodésico e $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é uma imersão isométrica totalmente geodésica.
- (III) $f = (j_1 \times j_2) \circ \bar{f}$ em que $(j_1 \times j_2): \mathbb{O}_{k_1}^\ell \times \mathbb{O}_{k_2}^{m-\ell} \hookrightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é uma inclusão totalmente geodésica e $\bar{f}: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^\ell \times \mathbb{O}_{k_2}^{m-\ell}$ é uma isometria local.
- (IV) $k_1 k_2 > 0$, $m \leq \min\{n_1, n_2\}$ e $f = (j_1 \times j_2) \circ g \circ \bar{f}$, em que cada $j_i: \mathbb{O}_{k_i}^m \hookrightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma inclusão, $g: \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^m \times \mathbb{O}_{k_2}^m$ é a imersão dada na Seção 3.5, $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^m$ é uma isometria local.
- (V) $k_2 = 0$, $n_2 \geq m$ e $f = (j_1 \times j_2) \circ h \circ \bar{f}$, em que $j_1: \mathbb{O}_{k_1}^1 \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ e $j_2: \mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{E}^{n_2}$ são inclusões totalmente geodésicas, $\bar{f}: M^m \rightarrow \mathbb{E}^m$ é uma isometria local e $h: \mathbb{R} \times \mathbb{E}^{m-1} \rightarrow (\mathbb{O}_{k_1}^1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{E}^{m-1} = \mathbb{O}_{k_1}^1 \times \mathbb{E}^m$ é a imersão isométrica totalmente geodésica dada por $h(t, y) = (\gamma(t), y)$, sendo $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^1 \times \mathbb{R}$ uma geodésica.

4.1 Resultados preliminares

Provaremos nesta seção que se $k_1 k_2 \neq 0$ e $f: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é uma imersão isométrica paralela, então ou $\Phi = 0$ em M , ou $\mathbf{S} = 0$ em M . Feito isso, poderemos analisar separadamente os casos em que $\Phi = 0$ e em que $\mathbf{S} = 0$.

Lema 4.3. *Se $f: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é uma imersão isométrica paralela e $k_1 k_2 \neq 0$, então ou $\mathbf{S} = 0$ em todo ponto de M , ou $\Phi = 0$ em todo ponto de M .*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista $x \in M$ tal que $\mathbf{S}|_{T_x M} \neq 0$ e $\Phi|_{T_x M} \neq 0$. Seja então $A \in T_x M$ tal que $\Phi A \neq 0$. Segue, da Fórmula de Codazzi (3.8) e do fato de f ser paralela, que

$$\langle \Phi A, Y \rangle \mathbf{S}X = \langle \Phi X, Y \rangle \mathbf{S}A, \quad \forall X, Y \in T_x M,$$

ou seja, $\mathbf{S}(T_x M) = \text{ger}\{\mathbf{S}A\}$.

Como $\mathbf{S}(T_x M) = \text{ger}\{\mathbf{S}A\}$, então, pelo Lema A.8, $\mathbf{S}X = \langle X, B \rangle \mathbf{S}B$, em que $B \in (\ker \mathbf{S})^\perp$ é um vetor unitário.

Utilizando a outra equação em (3.8), segue que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}X, \mathbf{S}B \rangle \Phi Y &= \langle \mathbf{S}Y, \mathbf{S}B \rangle \Phi X, \quad \forall X, Y \in T_x M \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle X, B \rangle \|\mathbf{S}B\|^2 \Phi Y &= \langle Y, B \rangle \|\mathbf{S}B\|^2 \Phi X, \quad \forall X, Y \in T_x M \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle X, B \rangle \Phi B &= \Phi X, \quad \forall X \in T_x M. \end{aligned}$$

Como $k_1 X - (k_1 + k_2)\mathbf{R}X = \langle X, B \rangle \Phi B$, para qualquer $X \in T_x M$, então $\mathbf{R}|_{\{B\}^\perp} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \text{Id}|_{\{B\}^\perp}$ e $\mathbf{S}|_{\{B\}^\perp} = 0$. Assim, pela primeira fórmula (3.2),

$$0 = \mathbf{S}^t \mathbf{S}|_{\{B\}^\perp} = \mathbf{R}(\text{Id} - \mathbf{R})|_{\{B\}^\perp} = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \text{Id}|_{\{B\}^\perp} \Rightarrow k_1 = 0 \text{ ou } k_2 = 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, para cada $x \in M$, ou $\Phi|_{T_x M} = 0$, ou $\mathbf{S}|_{T_x M} = 0$.

Sejam $A := \{x \in M: \mathbf{S}|_{T_x M} \neq 0\}$ e $B := \{x \in M: \Phi|_{T_x M} \neq 0\}$. Evidentemente, A e B são subconjuntos abertos e disjuntos de M e $M = A^c \cup B^c$.

Afirmção 1: $A^c \cap B^c = \emptyset$.

Suponhamos, por absurdo, que exista $x \in A^c \cap B^c$. Logo $\Phi|_{T_x M} = 0$ e $\mathbf{S}|_{T_x M} = 0$. Assim, pela definição de Φ , e como $k_1 k_2 \neq 0$, então $k_1 + k_2 \neq 0$ e valem as seguintes igualdades:

$$\mathbf{R}|_{T_x M} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \text{Id}|_{T_x M} \quad \text{e} \quad (\text{Id} - \mathbf{R})|_{T_x M} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \text{Id}|_{T_x M}.$$

Por outro lado, pela primeira fórmula em (3.2), $0 = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \text{Id}|_{T_x M}$, ou seja $k_1 = 0$ ou $k_2 = 0$. Mas isso contradiz a hipótese de que $k_1 k_2 \neq 0$. Portanto $A^c \cap B^c = \emptyset$. \checkmark

Como $A^c \cup B^c = M$, então $A^c = B$ e $B^c = A$. Portanto A e B são simultaneamente abertos e fechados disjuntos, logo $M = A$ ou $M = B$. \square

4.2 Caso $\mathbf{S} = 0$

Seja $f: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica paralela com $\mathbf{S} = 0$. Temos três casos a considerar: (1) o caso em que $\mathbf{R} = 0$, (2) o caso em que $\mathbf{R} = \text{Id}$ e (3) o caso em que $\mathbf{S} = 0$, mas $\mathbf{R} \neq 0$ e $\mathbf{R} \neq \text{Id}$.

Quando $\mathbf{R} = 0$, o Lema 3.13 nos garante que $f = \iota_1^z \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é uma imersão isométrica e $\iota_1^z: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é o mergulho totalmente geodésico dado por $\iota_1^z(x) = (x, z)$. Como f e ι_1^z são totalmente geodésicas, então \bar{f} é paralela. Analogamente, se $\mathbf{R} = \text{Id}$, então $f = \iota_2^z \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é uma imersão isométrica paralela e $\iota_2^z: \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é o mergulho totalmente geodésico dado por $\iota_2^z(y) = (z, y)$.

No caso em que $\mathbf{S} = 0$, mas $\mathbf{R} \neq 0$ e $\mathbf{R} \neq \text{Id}$, sabemos (pelo Lema 3.14) que

$$\dim(\ker \mathbf{R}) + \dim[\ker(\text{Id} - \mathbf{R})] = m.$$

Já pelo Lema 3.15, $\dim(\ker \mathbf{R}) = \ell \in (0, m)$ é constante. Assim, pela Proposição 3.16, M é localmente uma variedade produto $M_1^\ell \times M_2^{m-\ell}$ e $f|_{M_1 \times M_2} = f_1 \times f_2$, em que cada $f_i: M_i \rightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma imersão isométrica. Além disso, se M é simplesmente conexa, então M é globalmente uma variedade produto e f é uma imersão produto globalmente. Logo, pelo Lema A.16, f é paralela se, e só se, f_1 e f_2 são paralelas.

Podemos então enunciar a seguinte proposição:

Proposição 4.4. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica paralela com $\mathbf{S} = 0$. Nessas condições, um dos itens abaixo é verdadeiro.*

- (I) $f = \iota_1^z \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é um imersão isométrica paralela.
- (II) $f = \iota_2^z \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é um imersão isométrica paralela.
- (III) M é localmente (isométrica a) uma variedade produto $M_1^\ell \times M_2^{m-\ell}$ e $f|_{M_1 \times M_2} = f_1 \times f_2$ em que cada $f_i: M_i \rightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma imersão isométrica paralela.

Se M é completa e simplesmente conexa e o caso (III) é verdadeiro, então M é globalmente uma variedade produto e f é globalmente uma imersão produto.

Proposição 4.5. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica totalmente geodésica com $\mathbf{S} = 0$. Nessas condições, um dos itens abaixo é verdadeiro:*

- (I) $f = \iota_1^z \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é um imersão isométrica totalmente geodésica.
- (II) $f = \iota_2^z \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é um imersão isométrica totalmente geodésica.

(III) $f = (j_1 \times j_2) \circ \bar{f}$, em que $(j_1 \times j_2): \mathbb{O}_{k_1}^\ell \times \mathbb{O}_{k_2}^{m-\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é uma inclusão totalmente geodésica e $\bar{f}: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^\ell \times \mathbb{O}_{k_2}^{m-\ell}$ é uma isometria local.

Demonstração. De forma análoga à feita para as imersões paralelas, sabemos que o item (I) ocorre quando $\mathbf{R} = 0$ e que o item (II) é válido e se $\mathbf{R} = \text{Id}$. Suponhamos então que $\mathbf{R} \neq 0$ e $\mathbf{R} \neq \text{Id}$.

Neste caso, $\dim(\ker \mathbf{R}) = \ell \in (0, m)$ é constante. Pela Proposição 3.16, para cada $x \in M$, existem uma vizinhança U_x de x e uma isometria $\varphi_x: U_x \rightarrow M_{1,x}^\ell \times M_{2,x}^{m-\ell}$ tais que $f \circ \varphi_x^{-1} = f_{1,x} \times f_{2,x}$, em que $f_{i,x}: M_{i,x} \rightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma imersão isométrica totalmente geodésica. Dessa forma, para cada $x \in M$, existem subvariedades completas e totalmente geodésicas $N_{1,x}^\ell \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ e $N_{2,x}^{m-\ell} \subset \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ tais que $f_{i,x}(M_{i,x}) \subset N_{i,x}$.

Afirmção 1: $N_{i,x}$ não depende de x .

Sejam $p \in M$ um ponto fixado e $q \in M$ um ponto qualquer. Consideremos $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ uma curva suave ligando os pontos p a q . Dessa forma, para cada $t \in [a, b]$, existe um $\varepsilon_t > 0$ tal que $\gamma((t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \cap [a, b]) \subset U_{\gamma(t)}$.

Como $[a, b]$ é compacto, então existem $t_1 := a < t_2 < \dots < t_k \leq b$ tais que $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^k (t_i - \varepsilon_{t_i}, t_i + \varepsilon_{t_i})$.

Sejam, para cada $j \in \{1, 2\}$ e cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $U_i := U_{\gamma(t_i)}$, $M_{j,i} := M_{j,\gamma(t_i)}$, $N_{j,i} := N_{j,\gamma(t_i)}$, $\varphi_i := \varphi_{\gamma(t_i)}$, $f_{j,i} := f_{j,\gamma(t_i)}$ e $\varepsilon_i := \varepsilon_{t_i}$. Logo, $\pi_j(f(U_i)) \subset N_{j,i}$.

Por outro lado, para cada, $i \in \{1, \dots, k-1\}$, existe um $\bar{t}_i \in (t_i, t_i + \varepsilon_i) \cap (t_{i+1} - \varepsilon_{i+1}, t_{i+1})$. Portanto $\gamma(\bar{t}_i) \in U_i \cap U_{i+1}$. Assim, como $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, então existe um aberto $\bar{M}_{1,i} \times \bar{M}_{2,i} \subset M_{1,i+1} \times M_{2,i+1}$ tal que $\varphi_{i+1}^{-1}(\bar{M}_{1,i} \times \bar{M}_{2,i}) \subset U_i \cap U_{i+1}$. Logo

$$f_{j,i+1}(\bar{M}_{j,i}) = \pi_j[(f \circ \varphi_{i+1}^{-1})(\bar{M}_{1,i} \times \bar{M}_{2,i})] \subset N_{j,i} \cap N_{j,i+1}.$$

Dessa forma, como $f_{j,i+1}$ é uma imersão isométrica, então $f_{j,i+1}(\bar{M}_{j,i})$ é um subconjunto aberto de $N_{j,i}$ e de $N_{j,i+1}$. Portanto $N_{j,i} = N_{j,i+1}$, e disso segue que $N_{j,p} = N_{j,q}$. \checkmark

Denotemos $\mathbb{O}_{k_1}^\ell := N_{1,p}$ e $\mathbb{O}_{k_2}^{m-\ell} := N_{2,p}$. Como $f(U_x) \subset N_{1,x} \times N_{2,x} = N_{1,p} \times N_{2,p} = \mathbb{O}_{k_1}^\ell \times \mathbb{O}_{k_2}^{m-\ell}$, para todo $x \in M$, então $f(M) \subset \mathbb{O}_{k_1}^\ell \times \mathbb{O}_{k_2}^{m-\ell}$.

Sejam $j_1: \mathbb{O}_{k_1}^\ell \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ e $j_2: \mathbb{O}_{k_2}^{m-\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ as inclusões e $\bar{f}: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^\ell \times \mathbb{O}_{k_2}^{m-\ell}$ dada por $\bar{f}(x) := f(x)$. Dessa forma \bar{f} é uma isometria local e $f = (j_1 \times j_2) \circ \bar{f}$. \square

4.3 Caso $\Phi = 0$

Suponhamos agora que $f: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ seja uma imersão isométrica paralela (ou totalmente geodésica) com $\Phi = 0$ e k_1 e k_2 não ambos nulos.

Se $k_1 = 0$, então $k_2 \neq 0$. Logo

$$0 = \Phi = k_1 \text{Id} - (k_1 + k_2)\mathbf{R} = -k_2\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R} = 0.$$

Nesse caso, pela Proposição 4.4, $f(x) = (f_1(x), z)$, em que f_1 é uma imersão isométrica paralela (ou totalmente geodésica) e $z \in \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é constante. Analogamente, se $k_2 = 0$, então $\text{Id} - \mathbf{R} = 0$ e $f(y) = (z, f_2(y))$, em que f_2 é uma imersão isométrica paralela (ou totalmente geodésica) e $z \in \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é constante.

Suponhamos agora que $k_1 k_2 \neq 0$. Nessas condições, como f é paralela (ou totalmente geodésica), então \mathcal{N}_1 é paralelo e $\dim \mathcal{N}_1 = \ell$ é constante (pelo Lema A.13). Podemos então aplicar a Proposição 3.23 e concluir que $f = (j_1 \times j_2) \circ g \circ \bar{f}$, em que $j_1: \mathbb{O}_{k_1}^{m+\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ e $j_2: \mathbb{O}_{k_2}^{m+\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$

são inclusões, $g: \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{m+\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m+\ell} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m+\ell}$ é a imersão totalmente geodésica dada na Seção 3.5 e $\bar{f}: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{m+\ell}$ é a imersão isométrica paralela (ou totalmente geodésica).

Podemos resumir tudo isso com a seguinte proposição.

Proposição 4.6. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica paralela (ou totalmente geodésica) tal que $\Phi = 0$ e $k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$. Nessas condições,*

- (I) *se $k_1 = 0$, então $n_1 \geq m$ e $f(x) = (f_1(x), z)$, em que f_1 é uma imersão isométrica paralela (ou totalmente geodésica) e $z \in \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é fixo;*
- (II) *se $k_2 = 0$, então $n_2 \geq m$ e $f(y) = (z, f_2(y))$, em que f_2 é uma imersão isométrica paralela (ou totalmente geodésica) e $z \in \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é fixo;*
- (III) *se $k_1 k_2 \neq 0$, então $k_1 k_2 > 0$, $m \leq \min\{n_1, n_2\}$ e $f = (j_1 \times j_2) \circ g \circ \bar{f}$, em que $j_1: \mathbb{O}_{k_1}^{m+\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ e $j_2: \mathbb{O}_{k_2}^{m+\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ são inclusões, $g: \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{m+\ell} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m+\ell} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m+\ell}$ é a imersão totalmente geodésica dada na Seção 3.5, $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{m+\ell}$ é uma imersão isométrica paralela (ou totalmente geodésica) e $\ell = \dim \mathcal{N}_1$.*

Já podemos provar o Teorema 4.1.

Prova do Teorema 4.1. Se f é como em um dos casos (I) a (IV) do Teorema 4.1, então f é paralela, pois é a composta de uma imersão isométrica paralela com imersões totalmente geodésicas.

Suponhamos agora que f seja paralela. Neste caso, pelo Lema 4.3, ou $\mathbf{S} = 0$ em M , ou $\Phi = 0$ em M . Se $\Phi = 0$, a Proposição 4.6 mostra válido o item (IV) do Teorema 4.1. Já se $\mathbf{S} = 0$, então a Proposição 4.4 garante que vale um dos outros itens. \square

4.4 Classificação das imersões totalmente geodésicas em

$$\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$$

O objetivo desta seção é provar o Teorema 4.2. Para isso, precisamos de mais alguns resultados.

Proposição 4.7. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{E}^{n_2}$ uma imersão isométrica totalmente geodésica. Se $\mathbf{S} \neq 0$, então $\mathbf{S}|_{T_x M} \neq 0$ e $\Phi|_{T_x M} \neq 0$, para qualquer $x \in M$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathbf{S} \neq 0$. Dessa forma, existe $p \in M$ tal que $\mathbf{S}|_{T_p M} \neq 0$. Como $\mathbf{S}|_{T_p M} \neq 0$, então existe uma vizinhança conexa U de p tal que $\mathbf{S}|_{T_x M} \neq 0$, para todo $x \in U$. Suponhamos que U seja a maior vizinhança conexa de p tal que $\mathbf{S}|_{T_x M} \neq 0$, para todo $x \in U$.

Afirmção 1: Φ é não nulo em todos os pontos de U .

Suponhamos, por absurdo, que $\Phi|_{T_x M} = 0$, para algum $x \in U$. Nesse caso, pela definição de Φ , $k_1 \text{Id}|_{T_x M} - k_1 \mathbf{R}|_{T_x M} = 0$, ou seja, $\mathbf{R}|_{T_x M} = \text{Id}|_{T_x M}$. Assim, pela primeira fórmula em (3.2), $\mathbf{S}|_{T_x M} = 0$, o que contradiz o fato de \mathbf{S} ser não nulo em todos os pontos de U . \checkmark

Como f é totalmente geodésica e \mathbf{S} e Φ são não nulos em U , então, pela primeira versão da Equação de Codazzi (3.8),

$$\langle \Phi X, Z \rangle \mathbf{S}Y = \langle \Phi Y, Z \rangle \mathbf{S}X, \text{ para quaisquer } X, Y, Z \in T_x M \text{ e todo } x \in U.$$

Assim \mathbf{S} tem posto igual a 1, em todo ponto de U . Dessa forma, pelo Lema A.8, para cada $x \in U$, existe um vetor $B \in T_x M$ tal que $\mathbf{S}X = \langle X, B \rangle \mathbf{S}B$.

Substituindo a fórmula encontrada para $\mathbf{S}X$ na segunda versão da Equação de Codazzi (3.8), resulta a seguinte igualdade

$$\Phi X = \langle X, B \rangle \Phi B, \text{ para qualquer } X \in T_x M \text{ e todo } x \in U,$$

e disso segue que,

$$\mathbf{R}X = X - \frac{\langle X, B \rangle}{k_1} \Phi B, \text{ para qualquer } X \in T_x M \text{ e todo } x \in U.$$

Afirmção 2: $\Phi B = \lambda B$.

Sejam $x \in U$ e $X \perp B$ um vetor de $T_x M$. Como $X \perp B$, então $\mathbf{R}X = X$, logo

$$\langle X, \Phi B \rangle = \langle X, k_1 B - k_1 \mathbf{R}B \rangle = -k_1 \langle X, \mathbf{R}B \rangle = -k_1 \langle \mathbf{R}X, B \rangle = 0.$$

Portanto $\Phi B = \lambda B$. \checkmark

Como $\Phi(T_x M) = \text{ger} \{B\}$, para todo $x \in U$, então, para cada $x \in U$, existem uma vizinhança $\tilde{U}_x \subset U$ de x e um campo $Y \in \Gamma(T\tilde{U})$ tais que $\Phi Y \neq 0$ em todo ponto de \tilde{U} . Dessa forma, podemos supor que, em \tilde{U} , o campo B é dado por $B = \frac{\Phi Y}{\|\Phi Y\|}$. Assim $\lambda = \langle \Phi B, B \rangle = \frac{\langle \Phi^2 Y, \Phi Y \rangle}{\|\Phi Y\|^2}$ é uma função diferenciável em U .

Por outro lado, $\langle \mathbf{R}B, B \rangle = \frac{k_1 - \lambda}{k_1}$. Calculemos $X \langle \mathbf{R}B, B \rangle$.

$$\begin{aligned} X \langle \mathbf{R}B, B \rangle &= \langle \nabla_X \mathbf{R}B, B \rangle + \langle \mathbf{R}B, \nabla_X B \rangle = \langle \nabla_X \mathbf{R}B, B \rangle + \frac{k_1 - \lambda}{k_1} \langle B, \nabla_X B \rangle = \\ &\stackrel{\|B\|=1}{=} \langle \nabla_X \mathbf{R}B, B \rangle \stackrel{\nabla_X B \perp B}{=} \langle \nabla_X \mathbf{R}B - \mathbf{R} \nabla_X B, B \rangle = \langle (\nabla_X \mathbf{R}) B, B \rangle. \end{aligned}$$

Como \mathbf{R} é um tensor paralelo, pela fórmula (3.3), então $X \langle \mathbf{R}B, B \rangle = 0$, para qualquer vetor $X \in TU$, ou seja, $\frac{k_1 - \lambda}{k_1}$ é constante em U , e portanto λ é constante em U .

Sabendo que \mathbf{R} é paralelo, então $(\text{Id} - \mathbf{R})$ também é paralelo, logo

$$(\text{Id} - \mathbf{R}) \nabla_X Y = \nabla_X (\text{Id} - \mathbf{R}) Y = 0, \quad \forall X \in TU \text{ e todo } Y \in \Gamma[\ker(\text{Id} - \mathbf{R})] = \Gamma(\{B\}^\perp).$$

Concluimos então que $\ker(\text{Id} - \mathbf{R}) = \{B\}^\perp$ e $\text{ger} \{B\}$ são distribuições paralelas em U .

Sejam $q \in M$ um ponto qualquer e $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ uma curva suave tal que $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. Consideremos também $t_0 := \sup \{t \in [a, b]: \gamma([a, t]) \subset U\}$ e $\bar{B}(t)$ o transporte paralelo de $B(p) \in T_p M$ ao longo da curva γ .

Afirmção 3: $\gamma([a, t_0]) \subset U$.

Seja $t \in [a, t_0)$. Logo existe $t_1 \in (t, t_0]$ tal que $\gamma([a, t_1]) \subset U$. Logo $\gamma(t) \in U$. Como t foi escolhido de forma genérica, então $\gamma([a, t_0]) \subset U$. \checkmark

Afirmção 4: $\mathbf{S}(\bar{B}(t_0)) \neq 0$.

Como $\bar{B}(t)$ é o transporte paralelo de B ao longo de γ , $\gamma([a, t_0]) \subset U$ e $\text{ger} \{B\}$ é uma distribuição paralela em U , então (pelo Lema A.18) $\bar{B}(t) = \pm B(\gamma(t))$, para cada $t \in [a, t_0)$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{S} \bar{B}(t)\|^2 &= \frac{d}{dt} \langle \mathbf{S}^t \mathbf{S} \bar{B}(t), \bar{B}(t) \rangle \stackrel{(3.2)}{=} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{R}(\text{Id} - \mathbf{R}) \bar{B}(t), \bar{B}(t) \rangle = \\ &= \frac{d}{dt} \langle (\text{Id} - \mathbf{R}) \bar{B}(t), \mathbf{R} \bar{B}(t) \rangle = \frac{\lambda(k_1 - \lambda)}{k_1^2} \cdot \frac{d}{dt} \langle \bar{B}(t), \bar{B}(t) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto $\|\mathbf{S}(\bar{B}(t))\|^2$ é constante em $[a, t_0)$, e disso segue que $\mathbf{S}(\bar{B}(t_0)) \neq 0$. \checkmark

Afirmção 5: $\gamma(b) \in U$.

Como $\mathbf{S}|_{T_{\gamma(t_0)}M} \neq 0$, pela afirmação anterior, então existe uma vizinhança conexa W de $\gamma(t_0)$ na qual \mathbf{S} não se anula. Dessa forma, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma((t_0 - \varepsilon, t_0]) \subset W$. Logo $\gamma((t_0 - \varepsilon, t_0)) \subset U \cap W$, ou seja, $U \cup W$ é uma vizinhança conexa de p na qual \mathbf{S} não se anula. Portanto $W \subset U$, pois U é a maior dessas vizinhanças conexas de p , e disso segue que $\gamma(t_0) \in U$.

Se $t_0 \neq b$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $t_0 + \varepsilon < b$ e $\gamma([a, t_0 + \varepsilon)) \subset U$, o que contradiz o fato de t_0 ser o supremo. Portanto $t_0 = b$ e $\gamma(b) \in U$. \checkmark

Como $\gamma(b) \in U$, então $q \in U$. Mas q é um elemento qualquer de M , portanto $M = U$, ou seja, $\mathbf{S}|_{T_x M} \neq 0$ e $\Phi|_{T_x M} \neq 0$, para todo $x \in M$. \square

Lema 4.8. $\mathbf{S}(TM)$ tem dimensão constante em M se, e somente se, $\mathcal{U} := \ker \mathbf{T}$ e $\mathcal{V} := \ker(\text{Id} - \mathbf{T})$ têm dimensão constante.

Demonstração. Se \mathcal{U} e \mathcal{V} têm dimensão constante, então $\mathbf{S}(TM)^\perp$ também tem dimensão constante, pois $\mathbf{S}(TM)^\perp = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, pelo Lema 3.24. Portanto $\mathbf{S}(TM)$ também tem dimensão constante.

Por outro lado, se $\mathbf{S}(TM)$ tem dimensão constante, então $\mathbf{S}(TM)^\perp = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ também tem dimensão constante. Como $\mathcal{U} = \ker \mathbf{T}$ e $\mathcal{V} = \ker(\text{Id} - \mathbf{T})$ então, para cada $x \in M$, existe uma vizinhança conexa de x na qual $\dim \mathcal{U} \leq \dim \mathcal{U}(x)$ e $\dim \mathcal{V} \leq \dim \mathcal{V}(x)$. Portanto $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{U}(x)$ e $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{V}(x)$ em uma vizinhança conexa de x . Como \mathcal{U} e \mathcal{V} têm dimensão constante em uma vizinhança de cada ponto de M e M é conexa, então as dimensões de \mathcal{U} e de \mathcal{V} são constantes em M . \square

Proposição 4.9. Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_k^{n_1} \times \mathbb{E}^{n_2}$ uma imersão isométrica totalmente geodésica. Se $\mathbf{S} \neq 0$, então $n_2 \geq m$ e $f = (j_1 \times j_2) \circ h \circ \bar{f}$, em que $j_1: \mathbb{O}_k^1 \rightarrow \mathbb{O}_k^{n_1}$ e $j_2: \mathbb{E}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{E}^{m-1} \rightarrow \mathbb{E}^{n_2}$ são inclusões totalmente geodésicas, $\bar{f}: M^m \rightarrow \mathbb{E}^m$ é uma isometria local e $h: \mathbb{R} \times \mathbb{E}^{m-1} \rightarrow \mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{E}^m = (\mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{E}^{m-1}$ é uma imersão isométrica totalmente geodésica dada por $h(t, y) = (\gamma(t), y)$, sendo $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{R}$ uma geodésica.

Demonstração. Suponhamos que $\mathbf{S} \neq 0$. Assim, pela Proposição 4.7, sabemos que \mathbf{S} e Φ não se anulam em nenhum ponto de M . Além disso, utilizando a demonstração da Proposição 4.7, sabemos que, para cada $x \in M$, existe um campo diferenciável e unitário B , definido em uma vizinhança \tilde{U} de x , tal que

$$\mathbf{S}X = \langle X, B \rangle \mathbf{S}B \quad \text{e} \quad \mathbf{R}X = X - \langle X, B \rangle \frac{\lambda}{k_1} B, \quad \text{para todo } X \in T_y M \text{ e todo } y \in \tilde{U},$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}$ um número fixo.

Como $\mathbf{S}(TM) = \text{ger} \{B\}$ tem dimensão constante e igual a 1, então (pelo Lema 4.8) \mathcal{U} e \mathcal{V} também têm dimensão constante. Sejam $\ell_1 := \dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp$ e $\ell_2 := \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{V} \cap \mathcal{N}_1^\perp$. Dessa forma, $\ell_1 + \ell_2 = n_1 + n_2 - m - 1$ e, pelo Corolário 3.26, a codimensão à esquerda de f pode ser reduzida em ℓ_1 e a codimensão à direita de f pode ser reduzida em ℓ_2 . Dessa forma, existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{O}_k^{m_1} \times \mathbb{E}^{m_2} \subset \mathbb{O}_k^{n_1} \times \mathbb{E}^{n_2}$ tal que $f(M) \subset \mathbb{O}_k^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m_2}$, com $\ell_i = n_i - m_i$.

Seja então $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_k^{m_1} \times \mathbb{E}^{m_2}$ dada por $\tilde{f}(x) := f(x)$. Por (3.12), $\mathbf{R}^{\tilde{f}} = \mathbf{R}$ e $(j_1 \times j_2)_* \mathbf{S}^{\tilde{f}} = \mathbf{S}$. Dessa forma

$$\mathbf{S}^{\tilde{f}} X = \langle X, B \rangle \mathbf{S}^{\tilde{f}} B \quad \text{e} \quad \mathbf{R}^{\tilde{f}} X = X - \langle X, B \rangle \frac{\lambda}{k_1} B, \quad \text{para todo } X \in TM.$$

Por outro lado, como $\mathbf{R}|_{\{B\}^\perp} = \text{Id}|_{\{B\}^\perp}$ e $\mathbf{S}B \neq 0$, então

$$\dim[\pi_2(TM)] \geq m \quad \text{e} \quad \dim[\pi_1(TM)] \geq 1,$$

ou seja, $m_2 \geq m$ e $m_1 \geq 1$. Como $\ell_1 + \ell_2 = n_1 + n_2 - m - 1$, segue que $m_1 = 1$ e $m_2 = m$.

$$\begin{array}{c} M^m \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{E}^m \xrightarrow{j_1 \times j_2} \mathbb{O}_k^{n_1} \times \mathbb{E}^{n_2} \\ \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad f = (j_1 \times j_2) \circ \tilde{f} \end{array}$$

Sejam $\iota: \mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{E}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{E}^m = \mathbb{R}^{m+2}$ a inclusão canônica e $\tilde{F} := \iota \circ \tilde{f}$.

Afirmção 2: $\tilde{F}_*\{B\}^\perp$ é um subespaço constante de $\mathbb{R}^{m+2} \supset \mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{E}^m$.

De fato, sejam $X \in TM$ e $Y \in \Gamma(\{B\}^\perp)$. Consideremos também $\tilde{\nu}_1 = -k_1(\tilde{\pi}_1 \circ \tilde{f})$, em que $\tilde{\pi}_1: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{E}^m$ é a projeção ortogonal no primeiro fator. Assim

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{F}_* Y &= \tilde{F}_* \nabla_X Y + \alpha_{\tilde{F}}(X, Y) = \tilde{F}_* \nabla_X Y + \langle X, A_{\tilde{\nu}_1}^{\tilde{F}} Y \rangle \frac{\tilde{\nu}_1}{\|\tilde{\nu}_1\|^2} = \\ &\stackrel{(3.10)}{=} \tilde{F}_* \nabla_X Y + k_1 \langle X, (\text{Id} - \mathbf{R})Y \rangle \frac{\nu_1}{\|\nu_1\|^2} = \tilde{F}_* \nabla_X Y. \end{aligned}$$

Novamente pela demonstração da Proposição 4.7, sabemos que as distribuições $\{B\}^\perp$ e $\text{ger}\{B\}$ são paralelas em M , logo $\nabla_X Y \in \{B\}^\perp$ e $\tilde{\nabla}_X \tilde{F}_* Y \in \tilde{F}_*\{B\}^\perp$. ✓

Afirmção 3: M é localmente um produto $I \times M_1^{m-1}$.

De fato, como $\text{ger}\{B\}$ e $\{B\}^\perp$ são distribuições paralelas, então, pelo Teorema de De Rham, M é localmente um produto $I \times M_1^{m-1}$, em que I é um intervalo aberto de \mathbb{R} e M_1^{m-1} é uma folha da distribuição $\{B\}^\perp$. ✓

Seja σ uma curva integral de B e $\gamma = \tilde{f} \circ \sigma$, assim γ é uma geodésica de $\mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{E}^m$, pois $\tilde{\nabla}_B \tilde{f}_* B = \tilde{f}_* \nabla_B B = 0$.

Como $\alpha_{\tilde{F}}(X, Y) = 0$, sempre que $Y \in \{B\}^\perp$, então $\alpha_{\tilde{F}}(X, Y) = 0$, sempre que $X \in \text{ger}\{B\}$ e $Y \in \{B\}^\perp$. Dessa forma, podemos aplicar o Lema de Moore e concluir que localmente \tilde{F} pode ser dada por $\tilde{F}(t, y) = (\gamma(t), \tilde{f}_2(y))$, em que $\tilde{f}_2(y) \in V_2 := \text{ger}\{\tilde{F}_* X : X \in \{B\}^\perp\}$, $\gamma(t) \in V_1 := \text{ger}\{\tilde{F}_* B(x) : x \in M\}$ e $\gamma'(t) = \tilde{F}_* B(\gamma(t))$.

Pela Afirmção 2, $\dim V_2 = m - 1$, assim podemos denotar $\mathbb{E}^{m-1} =: V_2$ e $\mathbb{R} =: V_1 \subset \mathbb{E}^m$. Dessa forma, como γ é uma geodésica de $\mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{E}^m$ e $\gamma(I) \subset \mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{R}$, então γ é uma geodésica de $\mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{R}$. Além disso, como $\dim V_2 = m - 1$, segue que \tilde{f}_2 é uma isometria local.

Resumindo o que conseguimos, para cada $x \in M$ existe uma vizinhança U_x de x tal que U_x é isométrica a um produto do tipo $I_x \times M_{2,x}$, em que I_x é um intervalo aberto e $\tilde{f}|_{I_x \times M_{2,x}}(t, x) = (\gamma_x(t), \tilde{f}_{2,x}(y))$, sendo $\gamma_x: I_x \rightarrow \mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{R}$ uma geodésica e $\tilde{f}_{2,x}: M_{2,x} \rightarrow \mathbb{E}^{m-1}$ uma isometria local.

Seja $p \in M$ fixado. Como $\gamma_p: I_p \rightarrow \mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{R}$ é uma geodésica, então podemos estender o domínio de γ_p a \mathbb{R} , ou seja, existe uma geodésica $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{R}$, tal que $\gamma_p = \gamma|_{I_p}$.

Afirmção 4: $\tilde{f}(M) \subset \gamma(\mathbb{R}) \times \mathbb{E}^m$.

Consideremos as projeções ortogonais $\Pi_1: \mathbb{R}^{m+2} \rightarrow \mathbb{R}^3 \supset \mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{R}$ e $\Pi_2: \mathbb{R}^{m+2} \rightarrow \mathbb{E}^{m-1}$, em que $\mathbb{E}^{m-1} = \tilde{F}_*\{B\}^\perp$. Dessa forma, para provarmos que $\tilde{f}(M) \subset \gamma(\mathbb{R}) \times \mathbb{E}^{m-1}$, basta mostrarmos que $\Pi_1 \tilde{f}(x) \subset \gamma(\mathbb{R})$, para todo $x \in M$.

Seja $q \in M$ um ponto qualquer e $\beta: [a, b] \rightarrow M$ uma curva suave ligando os pontos p a q .

Sabemos que, para cada $s \in [a, b]$, existe um $\varepsilon_s > 0$ tal que $\gamma((s - \varepsilon_s, s + \varepsilon_s) \cap [a, b]) \subset U_{\beta(s)}$. Como $[a, b]$ é um conjunto compacto, então existem $s_1 := a < s_2 < \dots < s_k \leq b$ tais que $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^k (s_i - \varepsilon_i, s_i + \varepsilon_i)$, em que $\varepsilon_i := \varepsilon_{s_i}$.

Sejam $U_i := U_{\beta(s_i)}$, $I_i := I_{\beta(s_i)}$, $M_{2,i} := M_{2,\beta(s_i)}$ e $\gamma_i := \gamma_{\beta(s_i)}$. Dessa forma, para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$, existe um $\bar{s}_i \in (s_i, s_i + \varepsilon_i) \cap (s_{i+1} - \varepsilon_{i+1}, s_{i+1})$. Assim, para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $\beta(\bar{s}_i) \in U_i \cap U_{i+1}$.

Como $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, segue que $\Pi_1[\tilde{f}(U_i \cap U_{i+1})] \subset \gamma_i(I_i) \cap \gamma_{i+1}(I_{i+1})$. Além disso, existe um aberto não vazio $\bar{U}_i \subset U_i \cap U_{i+1}$ tal que \bar{U}_i é isométrico a $\bar{I}_i \times \bar{M}_{2,i} \subset I_{i+1} \times M_{2,i+1}$. Portanto

$$\gamma_{i+1}(\bar{I}_i) = (\Pi_1 \circ \tilde{f})(\bar{U}_i) \subset \Pi_1(\tilde{f}(U_i \cap U_{i+1})) \subset \gamma_i(I_i).$$

Como $\gamma_{i+1}(\bar{I}_i) \subset \gamma_i(I_i)$, então $\gamma_i(\mathbb{R}) = \gamma_{i+1}(\mathbb{R})$. Dessa forma, $(\Pi_1 \circ \tilde{f})(q) \in \gamma_1(\mathbb{R}) = \gamma(\mathbb{R})$.
 ✓

Sabemos que a imersão $h: \mathbb{R} \times \mathbb{E}^{m-1} \rightarrow (\mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{E}^{m-1} = \mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{E}^m$, dada por $h(t, x) := (\gamma(t), x)$, é uma imersão totalmente geodésica em $\mathbb{O}_k^1 \times \mathbb{E}^m$. Além disso, h é uma isometria sobre $\gamma(\mathbb{R}) \times \mathbb{E}^{m-1}$, portanto, se $\bar{f} := h^{-1} \circ \tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{E}^m$, então \bar{f} é uma isometria local e $\tilde{f} = h \circ \bar{f}$. \square

Prova do Teorema 4.2. Se f é como em um dos casos (I) a (V) do Teorema 4.2, então f é totalmente geodésica, pois é a composta de imersões totalmente geodésicas.

Inversamente, suponhamos então que f seja totalmente geodésica. Se $\mathbf{S} = 0$, então, pela Proposição 4.5, sabemos que um dos itens (I) a (III) do Teorema 4.2 é válido. Se $\mathbf{S} \neq 0$ e $k_1 k_2 \neq 0$, então, pelo Lema 4.3 e pela Proposição 4.6, vale o item (IV) do teorema. Por último, se $\mathbf{S} \neq 0$ e $k_2 = 0$, então, pela Proposição 4.9, vale o item (V) do Teorema 4.2. \square

Capítulo 5

Imersões isométricas umbílicas em

$$\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$$

O presente capítulo apresenta um estudo das imersões isométricas umbílicas em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. Como consequência dos resultados aqui obtidos, provamos o seguinte teorema:

Teorema 5.1. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica umbílica e não totalmente geodésica com $k_1 + k_2 \neq 0$ e $m \geq 3$. Nessas condições, ocorre um dos casos abaixo:*

- (I) $m < n_1$ e $f = \iota_1^z \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é uma imersão isométrica umbílica e $\iota_1^z: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é o mergulho totalmente geodésico dado por $\iota_1^z(x) := (x, z)$.
- (II) $m < n_2$ e $f = \iota_2^z \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é uma imersão isométrica umbílica e $\iota_2^z: \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é o mergulho totalmente geodésico dado por $\iota_2^z(y) := (z, y)$.
- (III) $m \leq \min\{n_1, n_2\}$, $2m < n_1 + n_2$ e existem $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e imersões isométricas umbílicas $f_i: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ tais que $a^2 + b^2 = 1$ e $f(x) = (af_1(x), bf_2(x))$, em que $\tilde{k}_1 = a^2k_1$ e $\tilde{k}_2 = b^2k_2$.
- (IV) $m \leq n_1$, $k_2 > 0$ (respectivamente $k_2 \leq 0$) e $f \circ \bar{\Pi} = (j_1 \times j_2) \circ \Pi \circ \bar{f}$ (respec. $f = (j_1 \times j_2) \circ \Pi \circ \bar{f}$), em que $\bar{\Pi}: \bar{M} \rightarrow M$ é o recobrimento universal de M , $(j_1 \times j_2): \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^1 \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é a inclusão totalmente geodésica, $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{R}$ (respec. $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{R}$) é uma imersão isométrica umbílica com $m_1 \in \{m, m+1\}$ e $\Pi: \mathbb{O}_{k_2}^{m_1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^1$ é uma aplicação de recobrimento localmente isométrica (respec. é uma isometria).
- (V) $m \leq n_2$, $k_1 > 0$ (respectivamente $k_1 \leq 0$) e $f \circ \bar{\Pi} = (j_1 \times j_2) \circ \Pi \circ \bar{f}$ (respec. $f = (j_1 \times j_2) \circ \Pi \circ \bar{f}$), em que $\bar{\Pi}: \bar{M} \rightarrow M$ é o recobrimento universal de M , $(j_1 \times j_2): \mathbb{O}_{k_1}^1 \times \mathbb{O}_{k_2}^{m_2} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é a inclusão totalmente geodésica, $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m_2}$ (respec. $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m_2}$) é uma imersão isométrica umbílica com $m_2 \in \{m, m+1\}$ e $\Pi: \mathbb{R} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m_2} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^1 \times \mathbb{O}_{k_2}^{m_2}$ é uma aplicação de recobrimento localmente isométrica (respec. é uma isometria).

Cabe aqui ressaltar que o próximo capítulo dá continuidade a este estudando os casos (IV) e (V) do teorema acima e apresentando uma classificação das imersões isométricas umbílicas em $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$.

Como consequência direta do Teorema 5.1, constata-se que não existem imersões isométricas umbílicas e não totalmente geodésicas $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ com $m > \max\{n_1, n_2\}$ e $k_1 + k_2 \neq 0$. Assim, se $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ for uma hipersuperfície umbílica e não totalmente geodésica, então $(n_1, n_2) \in \{(m, 1); (1, m)\}$ e f é descrita pelos casos (IV) e (V) do Teorema 5.1.

5.1 Preliminares

Sejam M^m uma variedade riemanniana e $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica umbílica. Denotemos por η o vetor curvatura média de f . Por ser f umbílica, as fórmulas (3.3) a (3.6) se tornam, respectivamente,

$$(\nabla_X \mathbf{R})Y = \langle \mathbf{S}Y, \eta \rangle X + \langle X, Y \rangle \mathbf{S}^t \eta, \quad (5.1)$$

$$(\nabla_X \mathbf{S})Y = \langle X, Y \rangle \mathbf{T}\eta - \langle X, \mathbf{R}Y \rangle \eta, \quad (5.2)$$

$$(\nabla_X \mathbf{S}^t) \xi = \langle \mathbf{T}\xi, \eta \rangle X - \langle \xi, \eta \rangle \mathbf{R}X, \quad (5.3)$$

$$(\nabla_X \mathbf{T})\xi = -\langle \xi, \eta \rangle \mathbf{S}X - \langle X, \mathbf{S}^t \xi \rangle \eta. \quad (5.4)$$

Já as equações de Gauss (3.7), Codazzi (3.8) e Ricci (3.9) de f ficam dadas, respectivamente, por

$$\mathcal{R}(X, Y) = k_1(X \wedge Y - X \wedge \mathbf{R}Y - \mathbf{R}X \wedge Y) + (k_1 + k_2)\mathbf{R}X \wedge \mathbf{R}Y + \|\eta\|^2 X \wedge Y, \quad (5.5)$$

$$\langle Y, Z \rangle \nabla_X^\perp \eta - \langle X, Z \rangle \nabla_Y^\perp \eta = \langle \Phi X, Z \rangle \mathbf{S}Y - \langle \Phi Y, Z \rangle \mathbf{S}X, \quad (5.6)$$

$$\langle \xi, \nabla_Y^\perp \eta \rangle X - \langle \xi, \nabla_X^\perp \eta \rangle Y = \langle \mathbf{S}X, \xi \rangle \Phi Y - \langle \mathbf{S}Y, \xi \rangle \Phi X, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{R}^\perp(X, Y)\xi = (k_1 + k_2)(\mathbf{S}X \wedge \mathbf{S}Y)\xi. \quad (5.8)$$

5.2 Caso $\mathbf{S} = 0$

Provaremos nesta seção a seguinte proposição:

Proposição 5.2. *Se $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é uma imersão isométrica umbílica (e não totalmente geodésica) com $\mathbf{S} = 0$ em todo ponto de M , então*

- (I) *ou $f = \iota_1^z \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é uma imersão isométrica umbílica e $\iota_1^z: \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é o mergulho totalmente geodésico dado por $\iota_1^z(x) = (x, z)$;*
- (II) *ou $f = \iota_2^z \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é uma imersão isométrica umbílica e $\iota_2^z: \mathbb{O}_{k_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é o mergulho totalmente geodésico dado por $\iota_2^z(y) = (z, y)$.*

Para demonstrar a proposição acima, basta (pelo Lema 3.13) mostrar que $\mathbf{R} = 0$ em todos os pontos de M , ou que $\mathbf{R} = \text{Id}$ em todos os pontos de M . Consideremos então uma imersão isométrica umbílica e não totalmente geodésica $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ tal que $\mathbf{S} = 0$ em todos os pontos de M . Como f é umbílica e não totalmente geodésica, então existe um ponto $p \in M$ tal que $\eta(p) \neq 0$, em que η é o vetor curvatura média de f .

Seja então U a maior vizinhança conexa de p na qual η é não nulo.

Afirmção 1: $\mathbf{R}|_{T_x M}$ é um múltiplo da identidade, para qualquer $x \in U$.

De fato, como $\mathbf{S} = 0$, então $\langle X, Y \rangle \mathbf{T}\eta = \langle X, \mathbf{R}Y \rangle \eta$, por (5.2). Dessa forma,

$$\langle X, Y \rangle \frac{\langle \mathbf{T}\eta, \eta \rangle}{\|\eta\|^2} = \langle X, \mathbf{R}Y \rangle, \quad \forall X, Y \in T_x M \text{ e todo } x \in U,$$

ou seja, $\mathbf{R}|_{T_x M} = \lambda(x) \text{Id}|_{T_x M}$, em que $\lambda(x) := \frac{\langle \mathbf{T}\eta(x), \eta(x) \rangle}{\|\eta(x)\|^2}$. ✓

Afirmção 2: \mathbf{R} é uma projeção ortogonal.

Como $\mathbf{S} = 0$, então $\mathbf{R} = \mathbf{R}^2$, pela primeira fórmula em (3.2). Dessa forma, sabendo que \mathbf{R} é auto-adjunta, segue que \mathbf{R} é uma projeção ortogonal. ✓

Afirmção 3: Ou $\mathbf{R}|_{T_x M} = 0$, para todo $x \in U$; ou $\mathbf{R}|_{T_x M} = \text{Id}|_{T_x M}$, para todo $x \in U$.

Sendo \mathbf{R} uma projeção ortogonal, então os únicos autovalores possíveis para \mathbf{R} são 0 e 1. Mas $\mathbf{R} = \lambda \text{Id}$ em U . Portanto, para cada $x \in U$, $\lambda(x) = 0$ ou $\lambda(x) = 1$.

Como λ é contínua e U é conexo, então λ é constante. Logo $\mathbf{R}|_{T_x M} = \text{Id}|_{T_x M}$, para qualquer $x \in U$; ou $\mathbf{R}|_{T_x M} = 0$, para qualquer $x \in U$. ✓

Consideremos os mergulhos totalmente geodésicos $v_j^z: \mathbb{O}_{k_j}^{n_j} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ dados por

$$v_1^z(x) := (x, z) \quad \text{e} \quad v_2^z(y) := (z, y),$$

em que z é um ponto fixado em $\mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$, no primeiro caso, ou em $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$, no segundo caso.

Afirmção 4: $f|_U = v_j^z \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{O}_{k_j}^{n_j}$ é uma imersão isométrica umbílica e $z \in \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ é um ponto fixo, quando $j = 1$, ou $z \in \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é um ponto fixo, quando $j = 2$

Suponhamos que $\mathbf{R} = 0$ em U . Assim, pelo Lema 3.13, $f|_U = v_1^z \circ \bar{f}$, para algum $z \in \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ fixo, em que $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é uma imersão isométrica. Além disso, como f é umbílica e v_1^z é totalmente geodésica, então \bar{f} é umbílica.

O caso em que $\mathbf{R} = \text{Id}$ em U é análogo. ✓

Afirmção 5: $U = M$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f|_U = v_1^z \circ \bar{f}$, em que $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ é uma imersão isométrica umbílica, e seja $\bar{\eta}$ o vetor curvatura média de \bar{f} . Assim, como $\eta = v_{1*}^z \bar{\eta}$ é não nulo em U , então (pelo Corolário 1.7) $\|\bar{\eta}(x)\|^2$ é um número positivo e constante em U .

Sejam agora $q \in M$ um ponto de acumulação de U . Dessa forma, existe uma sequência $(x_n) \subset U$ tal que $x_n \rightarrow q$. Logo, $\|\eta(x_n)\| \rightarrow \|\eta(q)\|$.

Por outro lado, como $\|\eta\|$ é uma constante positiva em U , então $\eta(q) \neq 0$ e existe uma vizinhança conexa V de q na qual η não se anula. Mas $U \cup V$ é uma vizinhança conexa de p e η é não nulo em $U \cup V$, logo $V \subset U$, pois U é a maior de tais vizinhanças conexas. Assim $q \in U$.

Como os pontos de acumulação de U são pontos de U , então U é aberto e fechado, ou seja, $U = M$. ✓

5.3 Caso $\ker \mathbf{S} = \{0\}$

O objetivo desta seção é provar a seguinte proposição:

Proposição 5.3. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica umbílica, com $k_1 + k_2 \neq 0$ e $m \geq 3$, tal que $\ker \mathbf{S}|_{T_{x_0} M} = \{0\}$, para algum $x_0 \in M$. Nessas condições, $m \leq \min\{n_1, n_2\}$ e existem números reais positivos a e b e imersões isométricas umbílicas $f_i: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ tais que $a^2 + b^2 = 1$ e $f(x) = (af_1(x), bf_2(x))$, em que $\tilde{k}_1 = a^2 k_1$, $\tilde{k}_2 = b^2 k_2$.*

Para provar essa proposição, mostraremos inicialmente que $\mathbf{R} = \lambda \text{Id}$, para algum $\lambda \in (0, 1)$ fixo. Feito isso, a Proposição 5.3 decorre da Proposição 3.19.

Lema 5.4. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica umbílica com $k_1 + k_2 \neq 0$ e $m \geq 3$. Se $\ker \mathbf{S} = \{0\}$ em todos os pontos de M , então $\mathbf{R} = \lambda \text{Id}$, para algum $\lambda \in (0, 1)$ fixo.*

Demonstração. Sabemos que os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, de \mathbf{R} , são funções contínuas definidas globalmente em M e que existe um subconjunto aberto e denso U de M no qual os esses autovalores são diferenciáveis (ver [25] e [4]). Além disso, em cada componente conexa \bar{U} de U , os autoespaços associados a tais autovalores são distribuições diferenciáveis.

Seja então \bar{U} uma componente conexa de U . Dessa forma, existe um referencial ortonormal $\{X_1, \dots, X_m\}$ definido localmente em \bar{U} e formado por autovetores de \mathbf{R} associados aos autovalores (não necessariamente distintos) $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, respectivamente.

Calculemos ΦX_i .

$$\Phi X_i = [k_1 \text{Id} - (k_1 + k_2)\mathbf{R}] X_i = [k_1 - (k_1 + k_2)\lambda_i] X_i.$$

Por outro lado, pela equação (5.6),

$$\begin{aligned} \langle X_j, X_j \rangle \nabla_{X_i}^\perp \eta - \langle X_i, X_j \rangle \nabla_{X_j}^\perp \eta &= \langle \Phi X_i, X_j \rangle \mathbf{S}X_j - \langle \Phi X_j, X_j \rangle \mathbf{S}X_i = \\ &= [k_1 - (k_1 + k_2)\lambda_i] \cdot \langle X_i, X_j \rangle \mathbf{S}X_j - [k_1 - (k_1 + k_2)\lambda_j] \cdot \langle X_j, X_j \rangle \mathbf{S}X_i. \\ \therefore \nabla_{X_i}^\perp \eta &= [(k_1 + k_2)\lambda_j - k_1] \mathbf{S}X_i. \end{aligned}$$

Escolhendo i, j e k dois a dois distintos em $\{1, \dots, m\}$, obtemos as seguintes igualdades:

$$\nabla_{X_i}^\perp \eta = [(k_1 + k_2)\lambda_j - k_1] \mathbf{S}X_i = [(k_1 + k_2)\lambda_k - k_1] \mathbf{S}X_i \Rightarrow (k_1 + k_2)\lambda_j = (k_1 + k_2)\lambda_k.$$

Como $k_1 + k_2 \neq 0$, concluímos que $\lambda_j = \lambda_k$ e $\mathbf{R} = \lambda \text{Id}$.

Por outro lado, pela equação (5.1),

$$\begin{aligned} \nabla_{X_i} \mathbf{R}X_j - \mathbf{R} \nabla_{X_i} X_j &= \langle \mathbf{S}X_j, \eta \rangle X_i + \langle X_i, X_j \rangle \mathbf{S}^t \eta \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla_{X_i} \lambda X_j - \lambda \nabla_{X_i} X_j &= \langle \mathbf{S}X_j, \eta \rangle X_i \Rightarrow X_i(\lambda) X_j = \langle \mathbf{S}X_j, \eta \rangle X_i. \end{aligned}$$

Fazendo o produto interno em ambos os lados da igualdade anterior por X_j , resulta $X_i(\lambda) = 0$. Logo λ é constante.

Como $\mathbf{R} = \lambda \text{Id}$ e λ é constante em cada componente conexa de U e U é denso em M , então $\mathbf{R} = \lambda \text{Id}$ em M . Além disso $\lambda \in (0, 1)$, pois $\mathbf{S} \neq 0$. \square

Lema 5.5. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica umbílica com $k_1 + k_2 \neq 0$ e $m \geq 3$. Nessas condições, se $\ker \mathbf{S}|_{T_{x_0}M} = \{0\}$, para algum $x_0 \in M$, então $\ker \mathbf{S}|_{T_xM} = \{0\}$, para todo $x \in M$.*

Demonstração. Como $\ker \mathbf{S}|_{T_{x_0}M} = \{0\}$, então existe uma vizinhança conexa U de x_0 tal que, para todo $x \in U$, $\ker \mathbf{S}|_{T_xM} = \{0\}$. Podemos supor que U é a maior vizinhança conexa de x_0 na qual o núcleo de \mathbf{S} é o espaço nulo. Assim, pelo lema anterior, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $\mathbf{R}|_{T_xM} = \lambda \text{Id}|_{T_xM}$, para qualquer $x \in U$.

Seja y um ponto de acumulação de U e $X \in T_yM$. Como y é um ponto de acumulação de U , então existe uma sequência $(x_n) \subset U$ tal que $x_n \rightarrow y$. Consideremos também os vetores $X_n \in T_{x_n}M$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$. Dessa forma,

$$\mathbf{R}X = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{R}X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda X_n = \lambda X.$$

Como $\mathbf{R}|_{T_yM} = \lambda \text{Id}$, então $\ker \mathbf{R}|_{T_yM} = \{0\}$ e $\ker(\text{Id} - \mathbf{R})|_{T_yM} = \{0\}$, logo $\ker \mathbf{S}|_{T_yM} = \{0\}$. Portanto existe uma vizinhança conexa V de y na qual $\ker \mathbf{S} = \{0\}$. Como $U \cup V$ é um vizinhança conexa de x_0 na qual $\ker \mathbf{S} = \{0\}$, então $V \subset U$, pois U é a maior de tais vizinhanças. Logo $y \in U$.

Dessa forma, provamos que U é um subconjunto aberto e fechado de M e $x_0 \in U$, logo $M = U$. \square

Prova da proposição 5.3. Pelo Lema 5.5, se $\ker \mathbf{S}|_{T_{x_0}M} = \{0\}$ em algum ponto $x_0 \in M$, então $\ker \mathbf{S} = \{0\}$ em todo ponto de M . Assim, pelo Lema 5.4, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $\mathbf{R} = \lambda \text{Id}$, em todo ponto de M . Assim, pela Proposição 3.19, se $a := \sqrt{1 - \lambda}$, $b := \sqrt{\lambda}$, $\tilde{k}_1 := a^2 k_2$ e $\tilde{k}_2 := b^2 k_2$, então $f(x) = (af_1(x), bf_2(x))$ em que cada $f_i: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma imersão isométrica.

Por outro lado, como f é umbílica, podemos aplicar o Corolário 3.18 para concluir que f_1 e f_2 também são umbílicas. \square

Na Proposição 5.3, se $n_1 = n_2 = m$, então f_1 e f_2 são totalmente geodésicas e o mesmo vale para f , pelo Lema 3.17.

Trocando $m \geq 3$ por $m = 2$ nas hipóteses da Proposição 5.3, então o Lema 3.14 não garante que $\mathbf{R} = \lambda \text{Id}$ para algum $\lambda \in (0, 1)$ fixo. Por isso não é possível aplicar a Proposição 3.19.

Um caso particular dessa proposição ocorre quando $k_1 k_2 \neq 0$ e $\Phi = 0$. Neste caso, a Proposição 3.22 nos garante que $k_1 k_2 > 0$ e que $\mathbf{R} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \text{Id}$, por isso é possível aplicar a Proposição 3.19 e concluir que f é uma soma com pesos de imersões isométricas, inclusive para $m = 2$. Por outro lado, utilizando as proposições 3.22 e 3.23, podemos dar outra demonstração para esse caso (inclusive para $m = 2$). De fato, prova-se o seguinte resultado:

Proposição 5.6. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica umbílica (e não totalmente geodésica) com $k_1 k_2 \neq 0$. Se $\Phi = 0$, então $k_1 k_2 > 0$, $\min\{n_1, n_2\} \geq m$ e $f = (j_1 \times j_2) \circ g \circ \bar{f}$, em que cada $j_i: \mathbb{O}_{k_i}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{O}_{k_i}^{n_i}$ é uma inclusão totalmente geodésica, $g: \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{m+1} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m+1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m+1}$ é a imersão totalmente geodésica da Seção 3.5 e $\bar{f}: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}^{m+1}$ é uma imersão isométrica umbílica.*

5.4 Caso em que $\dim(\ker \mathbf{S}) \in (0, \dim M)$

No caso em que $\ker \mathbf{S}$ tem dimensão constante $k \in (0, m)$, em que $m = \dim M$, provaremos que $k = m - 1$ e que $\ker \mathbf{S} = \ker \mathbf{R}$ ou $\ker \mathbf{S} = \ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ em todos os pontos de M . No primeiro caso, provaremos a seguinte proposição, valendo no segundo um resultado análogo.

Proposição 5.7. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica umbílica, com $k_1 + k_2 \neq 0$, tal que $\dim(\ker \mathbf{S}) = m - 1$ e $\ker \mathbf{R} = \ker \mathbf{S}$. Nessas condições, $f = (j_1 \times j_2) \circ \bar{f}$, em que $j_1: \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1}$ e $j_2: \mathbb{O}_{k_2}^1 \rightarrow \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ são inclusões totalmente geodésicas e $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^1$ é uma imersão isométrica umbílica com $m_1 \in \{m, m + 1\}$.*

Provaremos primeiro a afirmação feita no início da seção. Para isso necessitamos do seguinte lema:

Lema 5.8. *Suponhamos $\ker \mathbf{R}|_{T_x M} \neq \{0\}$, então valem as seguintes fórmulas:*

$$\nabla_X^\perp \eta = 0, \quad \forall X \in \ker \mathbf{R}|_{T_x M}; \quad (5.9)$$

$$\nabla_Y^\perp \eta = -k_1 \mathbf{S}Y, \quad \forall Y \in (\ker \mathbf{R}|_{T_x M})^\perp. \quad (5.10)$$

Demonstração. Aplicando (5.6) para $X \in \ker \mathbf{R}|_{T_x M}$ e $Y = Z \perp X$ com $\|Y\| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_X^\perp \eta - \langle X, Y \rangle \nabla_Y^\perp \eta &= \langle \Phi X, Y \rangle \mathbf{S}Y - \langle \Phi Y, Y \rangle \mathbf{S}X = \\ &= \langle [k_1 \text{Id} - (k_1 + k_2) \mathbf{R}]X, Y \rangle \mathbf{S}Y = k_1 \langle X, Y \rangle \mathbf{S}Y = 0. \end{aligned}$$

Aplicando novamente (5.6) para $Z = X \in \ker \mathbf{R}|_{T_x M}$ com $\|X\| = 1$ e $Y \in (\ker \mathbf{R})^\perp$,

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle \nabla_X^\perp \eta - \nabla_Y^\perp \eta &= \langle \Phi X, X \rangle \mathbf{S}Y - \langle \Phi Y, X \rangle \mathbf{S}X = k_1 \|X\|^2 \mathbf{S}Y \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla_Y^\perp \eta &= -k_1 \mathbf{S}Y. \end{aligned} \quad \square$$

Lema 5.9. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica umbílica, com $k_1 + k_2 \neq 0$, tal que $\dim(\ker \mathbf{S}) \in (0, m)$ seja constante. Nessas condições, $\dim(\ker \mathbf{S}) = m - 1$ e ou $\ker \mathbf{R} = \ker \mathbf{S}$ em todos os pontos de M , ou $\ker(\text{Id} - \mathbf{R}) = \ker \mathbf{S}$ em todos os pontos de M .*

Demonstração. Começemos com a seguinte afirmação:

Afirmção 1: $\ker \mathbf{R}$ e $\ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ têm dimensão constante.

Seja $x \in M$ e $V \subset M$ uma vizinhança de x na qual $\dim(\ker \mathbf{R}) \leq \dim(\ker \mathbf{R}|_{T_x M})$ e $\dim[\ker(\text{Id} - \mathbf{R})|_{T_x M}] \leq \dim[\ker(\text{Id} - \mathbf{R})]_{T_x M}$. Como $\ker \mathbf{S} = \ker \mathbf{R} \oplus \ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ e $\ker \mathbf{S}$ tem dimensão constante, segue que $\ker \mathbf{R}$ e $\ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ também têm dimensão constante em V . Uma vez que $\ker \mathbf{R}$ e $\ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ têm dimensão constante em uma vizinhança de cada ponto de M , então $\ker \mathbf{R}$ e $\ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ têm dimensão constante em M . \checkmark

Como $\mathbf{S} \neq 0$, então $\mathbf{R} \neq 0$ e $(\text{Id} - \mathbf{R}) \neq 0$. Além disso, como $\ker \mathbf{S} \neq \{0\}$, então ou $\ker \mathbf{R} \neq \{0\}$ em M , ou $\ker(\text{Id} - \mathbf{R}) \neq \{0\}$ em M . Supondo que $\ker \mathbf{R} \neq \{0\}$ em M , provaremos que $\dim(\ker \mathbf{S}) = m - 1$ e que $\ker \mathbf{R} = \ker \mathbf{S}$. Analogamente, prova-se que $\ker \mathbf{S} = \ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ supondo que $\ker(\text{Id} - \mathbf{R}) \neq \{0\}$ em M .

Dado $X \in TM$, denotemos por X^v a projeção ortogonal de X sobre $\ker \mathbf{R}$ e por X^h a projeção ortogonal de X sobre $(\ker \mathbf{R})^\perp$. Dessa forma $X = X^v + X^h$ com $X^v \perp X^h$.

Seja então $Y \in \Gamma(TM)$ um campo tal que $\mathbf{S}Y \neq 0$. Por (5.10), sabemos que $\nabla_Y^\perp \eta = -k_1 \mathbf{S}Y$, assim, por (5.7),

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}Y, \nabla_Y^\perp \eta \rangle X - \langle \mathbf{S}Y, \nabla_X^\perp \eta \rangle Y &= \langle \mathbf{S}X, \mathbf{S}Y \rangle \Phi Y - \|\mathbf{S}Y\|^2 \Phi X \Rightarrow \\ \Rightarrow -k_1 \|\mathbf{S}Y\|^2 X - \langle \mathbf{S}Y, \nabla_{X^v}^\perp \eta + \nabla_{X^h}^\perp \eta \rangle Y &= \\ = \langle \mathbf{S}X, \mathbf{S}Y \rangle [k_1 Y - (k_1 + k_2) \mathbf{R}Y] - \|\mathbf{S}Y\|^2 [k_1 X - (k_1 + k_2) \mathbf{R}X] &\Rightarrow \\ \Rightarrow -\langle \mathbf{S}Y, -k_1 \mathbf{S}X^h \rangle Y = \langle \mathbf{S}X, \mathbf{S}Y \rangle [k_1 Y - (k_1 + k_2) \mathbf{R}Y] + (k_1 + k_2) \|\mathbf{S}Y\|^2 \mathbf{R}X &\Rightarrow \\ \Rightarrow k_1 \langle \mathbf{S}Y, \mathbf{S}X \rangle Y = \langle \mathbf{S}X, \mathbf{S}Y \rangle [k_1 Y - (k_1 + k_2) \mathbf{R}Y] + \|\mathbf{S}Y\|^2 (k_1 + k_2) \mathbf{R}X &\Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{R}X = \frac{\langle \mathbf{S}X, \mathbf{S}Y \rangle}{\|\mathbf{S}Y\|^2} \mathbf{R}Y, \text{ para todo } X \in \Gamma(M). \end{aligned}$$

Como $\mathbf{R}Y \neq 0$, então \mathbf{R} tem posto 1 em M . Dessa forma $\dim(\ker \mathbf{R}) = m - 1$ em M . Como $\ker \mathbf{R} \subset \ker \mathbf{S}$ e $\mathbf{S} \neq 0$, então $\ker \mathbf{R} = \ker \mathbf{S}$ e $\dim(\ker \mathbf{S}) = m - 1$. \square

Lema 5.10. *Nas hipóteses da Proposição 5.7, $\ker \mathbf{R}$ é uma distribuição esférica, $(\ker \mathbf{R})^\perp$ é uma distribuição unidimensional totalmente geodésica e $\mathbf{S}(TM) + \mathcal{N}_1$ tem dimensão constante. Além disso, se $B \in (\ker \mathbf{R})^\perp$ é um campo unitário diferenciável definido localmente e μB é o vetor curvatura média da distribuição $\ker \mathbf{R}$, então*

$$\mathbf{R}X = \lambda \langle X, B \rangle B, \quad \mathbf{S}X = \langle X, B \rangle \mathbf{S}B, \quad \mu = -\frac{\langle \mathbf{S}B, \eta \rangle}{\lambda} \quad (5.11)$$

$$\nabla_X^\perp \eta = -\langle X, B \rangle k_1 \mathbf{S}B, \quad \mathbf{T}\eta = -\mu \mathbf{S}B, \quad \nabla_X^\perp \mathbf{S}B = -\langle X, B \rangle (\mu \mathbf{S}B + \lambda \eta), \quad (5.12)$$

Demonstração. Como $\ker \mathbf{R} = \ker \mathbf{S}$ e $\dim(\ker \mathbf{S}) = m - 1$, então $\dim(\ker \mathbf{R}) = m - 1$. Dessa forma, pelo Lema A.8,

$$\mathbf{R}X = \langle X, B \rangle \mathbf{R}B \quad \text{e} \quad \mathbf{S}X = \langle X, B \rangle \mathbf{S}B, \quad \forall x \in M \text{ e } X \in T_x M,$$

em que $B \in (\ker \mathbf{R}|_{T_x M})^\perp$ é um vetor unitário.

Seja $Y \in \ker \mathbf{R}|_{T_x M}$, dessa forma $\langle Y, \mathbf{R}B \rangle = \langle \mathbf{R}Y, B \rangle = 0$. Portanto $\mathbf{R}B = \lambda(x)B$, em que $\lambda(x) = \langle \mathbf{R}B, B \rangle$. Assim, dado Z um campo unitário, definido em uma vizinhança de x , tal que $\mathbf{R}Z \neq 0$, podemos tomar $B := \frac{\mathbf{R}Z}{\|\mathbf{R}Z\|}$. Portanto B é um campo unitário definido em uma vizinhança de x e valem as duas primeiras fórmulas em (5.11).

Como $\mathbf{S}X = \langle X, B \rangle \mathbf{S}B$, então

$$\langle \mathbf{S}^t \xi, X \rangle = \langle \xi, \mathbf{S}X \rangle = \langle X, B \rangle \langle \mathbf{S}B, \xi \rangle \Rightarrow \mathbf{S}^t \xi = \langle \xi, \mathbf{S}B \rangle B.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \nabla_X \mathbf{R}Y &= X(\lambda) \langle Y, B \rangle B + \lambda \langle \nabla_X Y, B \rangle B + \lambda \langle Y, \nabla_X B \rangle B + \lambda \langle Y, B \rangle \nabla_X B. \\ \therefore (\nabla_X \mathbf{R})Y &= X(\lambda) \langle Y, B \rangle B + \lambda \langle Y, \nabla_X B \rangle B + \lambda \langle Y, B \rangle \nabla_X B. \end{aligned}$$

Por outro lado, por (5.1),

$$\begin{aligned} (\nabla_X \mathbf{R})Y &= \langle \mathbf{S}Y, \eta \rangle X + \langle X, Y \rangle \mathbf{S}^t \eta = \langle Y, B \rangle \langle \mathbf{S}B, \eta \rangle X + \langle X, Y \rangle \langle \mathbf{S}B, \eta \rangle B. \\ \therefore X(\lambda) \langle Y, B \rangle B + \lambda \langle Y, \nabla_X B \rangle B + \lambda \langle Y, B \rangle \nabla_X B &= \langle \mathbf{S}B, \eta \rangle (\langle Y, B \rangle X + \langle X, Y \rangle B). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Colocando $X = Y = B$ em (5.13), resulta $B(\lambda) = 2 \langle \mathbf{S}B, \eta \rangle$ e $\nabla_B B = 0$. Portanto $\text{ger } \{B\} = (\ker \mathbf{R})^\perp$ é uma distribuição totalmente geodésica. Já para $Y \in \ker \mathbf{R} = \{B\}^\perp$, a equação (5.13) se torna

$$\lambda \langle Y, \nabla_X B \rangle B = \langle \mathbf{S}B, \eta \rangle \langle X, Y \rangle B \Rightarrow \langle \nabla_X Y, B \rangle = -\frac{\langle \mathbf{S}B, \eta \rangle}{\lambda} \langle X, Y \rangle.$$

Portanto $\ker \mathbf{R}$ é uma distribuição umbílica com vetor curvatura média $\varphi = \mu B$, em que $\mu = -\frac{\langle \mathbf{S}B, \eta \rangle}{\lambda}$. Se $X \in \ker \mathbf{R}$ e $Y = B$, então as equações (5.1) e (5.2) se tornam $\nabla_X \mathbf{R}B = \langle \mathbf{S}B, \eta \rangle X$ e $\nabla_X^\perp \mathbf{S}B = 0$, respectivamente. Dessa forma

$$X(\mu) = \frac{X(\lambda)}{\lambda^2} \langle \mathbf{S}B, \eta \rangle - \frac{\langle \nabla_X^\perp \mathbf{S}B, \eta \rangle + \langle \mathbf{S}B, \nabla_X^\perp \eta \rangle}{\lambda} \stackrel{(5.9)}{=} \frac{X \langle \mathbf{R}B, B \rangle}{\lambda^2} = \frac{\langle \nabla_X \mathbf{R}B, B \rangle}{\lambda^2} = 0.$$

Portanto $\ker \mathbf{R}$ é esférica e vale a última fórmula em (5.11).

Por (5.9) e (5.10), dado W um vetor tangente qualquer,

$$\nabla_W^\perp \eta = -\langle W, B \rangle k_1 \mathbf{S}B,$$

ou seja, a primeira fórmula em (5.12) é válida. Por outro lado, tomando $Y = X \perp B$ unitário, a igualdade (5.2) se torna

$$\mathbf{T}\eta = -\langle \nabla_X X, B \rangle \mathbf{S}B = -\langle \varphi, B \rangle \mathbf{S}B = -\mu \mathbf{S}B.$$

Assim a segunda fórmula em (5.12) também é válida.

Ainda por (5.2),

$$\nabla_W^\perp \mathbf{S}B = \langle W, B \rangle (\mathbf{T}\eta - \lambda \eta) = -\langle W, B \rangle (\mu \mathbf{S}B + \lambda \eta).$$

Logo vale a última fórmula em (5.12). Resta mostrar que $\mathbf{S}(TM) + \mathcal{N}_1$ tem dimensão constante.

Consideremos a função $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) := \|\eta(x)\|^2 \cdot \|\mathbf{S}B(x)\|^2 - \langle \eta, \mathbf{S}B \rangle^2(x).$$

Dessa forma, $h(x) = 0$ se, e somente se, η e \mathbf{SB} são LD em x .

Como valem as fórmulas (5.12), então

$$\begin{aligned} Z(h) &= 2 \langle \nabla_{\frac{1}{Z}} \eta, \eta \rangle \|\mathbf{SB}\|^2 + 2\|\eta\|^2 \langle \nabla_{\frac{1}{Z}} \mathbf{SB}, \mathbf{SB} \rangle - 2 \langle \eta, \mathbf{SB} \rangle \left(\langle \nabla_{\frac{1}{Z}} \eta, \mathbf{SB} \rangle + \langle \eta, \nabla_{\frac{1}{Z}} \mathbf{SB} \rangle \right) = \\ &\stackrel{(5.12)}{=} -2 \langle Z, B \rangle k_1 \langle \mathbf{SB}, \eta \rangle \|\mathbf{SB}\|^2 - 2\|\eta\|^2 \langle Z, B \rangle \langle \mu \mathbf{SB} + \lambda \eta, \mathbf{SB} \rangle + \\ &\quad + 2 \langle \eta, \mathbf{SB} \rangle \langle Z, B \rangle k_1 \|\mathbf{SB}\|^2 + 2 \langle \eta, \mathbf{SB} \rangle \langle Z, B \rangle \langle \eta, \mu \mathbf{SB} + \lambda \eta \rangle = \\ &= -2 \langle Z, B \rangle \left(\|\eta\|^2 \mu \|\mathbf{SB}\|^2 + \|\eta\|^2 \lambda \langle \eta, \mathbf{SB} \rangle - \langle \eta, \mathbf{SB} \rangle \lambda \|\eta\|^2 - \langle \eta, \mathbf{SB} \rangle^2 \mu \right) = \\ &= - \langle Z, B \rangle \mu \left(\|\eta\|^2 \|\mathbf{SB}\|^2 - \langle \eta, \mathbf{SB} \rangle^2 \right) = - \langle Z, B \rangle \mu h. \end{aligned}$$

Para cada $p \in M$, sejam $L_1(p)$ e $L_2(p)$ folhas das distribuições $(\ker \mathbf{R})^\perp$ e $\ker \mathbf{R}$, respectivamente, que passam por p . Dessa forma, pelo Lema A.23, existem abertos $V \subset M$, $U_1 \subset L_1$ e $U_2 \subset L_2$ e existem uma função diferenciável $\rho: U_1 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e uma isometria $\psi: U_1 \times_\rho U_2 \rightarrow V$ tais que $p \in V \cap U_1 \cap U_2$ e, para cada $(x, y) \in U_1 \times_\rho U_2$, $\psi(U_1 \times \{y\})$ e $\psi(\{x\} \times U_2)$ são folhas de $(\ker \mathbf{R})^\perp$ e $\ker \mathbf{R}$, respectivamente, que passam por $\psi(x, y)$.

Podemos então considerar $\tilde{h}: U_1 \times_\rho U_2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada por $\tilde{h} := h \circ \psi$. Como $X(h) = 0$ sempre que $X \in \ker \mathbf{R}$, então $X(\tilde{h}) = 0$, para qualquer $X \in TU_2$, ou seja, \tilde{h} depende apenas da primeira variável. Além disso, como $(\ker \mathbf{R})^\perp$ é unidimensional, então U_1 é isométrico a um intervalo I . Podemos então supor que ψ seja uma função de $I \times_\rho U_2$ em V tal que $\psi(0, p) = p$, $\tilde{h}(t, x) = \tilde{h}(t)$ e $\tilde{h}'(t) = -\mu(t)\tilde{h}(t)$.

Dessa forma, $\tilde{h}(t) = \tilde{h}(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^t \mu(s) ds}$, portanto ou $\tilde{h} \equiv 0$ em I se, e somente se, ou $\tilde{h}(t_0) = 0$. Logo, $h|_V = 0$ se, e somente se, $h(x) = 0$ para algum $x \in V$. Portanto o conjunto $\{x \in M: h(x) = 0\}$ é aberto e fechado, ou seja, ou $h = 0$ em M ou h não se anula em nenhum ponto de M . Conclusão: ou η e \mathbf{SB} são LI em todos os pontos de M , ou η e \mathbf{SB} são LD em todos os pontos de M , ou seja, $\mathbf{S}(TM) + \text{ger } \{\eta\}$ tem dimensão constante em M . \square

Prova da Proposição 5.7. Pelo Lema 5.10, $\ker \mathbf{R}$ é uma distribuição esférica, $(\ker \mathbf{R})^\perp = \text{ger } \{B\}$ é uma distribuição totalmente geodésica unidimensional, $\mathbf{S}(TM) = \text{ger } \{\mathbf{SB}\}$ é unidimensional e $\mathbf{S}(TM) + \mathcal{N}_1$ têm dimensão constante. Assim, pelo Lema 4.8, \mathcal{U} e \mathcal{V} também têm dimensão constante.

Afirmção 1: $\eta \in \mathcal{U} \oplus \mathbf{S}(TM)$.

Pelo Lema 5.10, sabemos que $\mathbf{T}\eta = -\mu \mathbf{SB}$, em que μB é o vetor curvatura média da distribuição $\ker \mathbf{R}$.

Por outro lado, como $T^\perp M = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathbf{S}(TM) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \oplus \text{ger } \{\mathbf{SB}\}$, então

$$\eta = \eta_{\mathcal{U}} + \eta_{\mathcal{V}} + \frac{\langle \eta, \mathbf{SB} \rangle}{\|\mathbf{SB}\|^2} \mathbf{SB} \stackrel{(3.2)}{=} \eta_{\mathcal{U}} + \eta_{\mathcal{V}} + \frac{\langle \eta, \mathbf{SB} \rangle}{\lambda(1-\lambda)} \mathbf{SB},$$

em que $\eta_{\mathcal{U}}$ e $\eta_{\mathcal{V}}$ são as projeções ortogonais de η sobre \mathcal{U} e \mathcal{V} , respectivamente. Dessa forma,

$$\mathbf{T}\eta \stackrel{\text{Lema 3.24}}{=} \eta_{\mathcal{V}} + \frac{\langle \eta, \mathbf{SB} \rangle}{\lambda(1-\lambda)} \mathbf{T}\mathbf{SB} \stackrel{(3.2)}{=} \eta_{\mathcal{V}} + \frac{\langle \eta, \mathbf{SB} \rangle}{\lambda} \mathbf{SB}.$$

Igualando a expressão anterior com $\mathbf{T}\eta = -\mu \mathbf{SB}$, concluímos que $\eta_{\mathcal{V}} = 0$. \checkmark

Como $\mathbf{S}(TM) + \mathcal{N}_1$ tem dimensão constante, então ou \mathbf{SB} e η são LD em todos os pontos de M , ou \mathbf{SB} e η são LI em todos os pontos de M , ou seja, ou $\eta_{\mathcal{U}} = 0$ em todos os pontos de M , ou $\eta_{\mathcal{U}} \neq 0$ em todos os pontos de M .

Por outro lado, $\mathcal{V} \subset \{\eta\}^\perp$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp = \{\zeta \in \mathcal{U} : \zeta \perp \eta_\mathcal{U}\}$. Portanto $\dim \mathcal{V} \cap \mathcal{N}_1^\perp = \dim \mathcal{V}$ é constante e $\dim \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp = \dim \mathcal{U} - 1$, se $\eta_\mathcal{U} \neq 0$, ou $\dim \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp = \dim \mathcal{U}$, se $\eta_\mathcal{U} = 0$.

Afirmção 2: $\nabla^\perp (\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp) \subset \mathcal{N}_1^\perp$ e $\nabla^\perp (\mathcal{V} \cap \mathcal{N}_1^\perp) \subset \mathcal{N}_1^\perp$.

Sejam $\xi \in \Gamma (\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp)$ e $\zeta \in \Gamma (\mathcal{N}_1)$, assim, pela primeira fórmula em (5.12),

$$\langle \nabla_X^\perp \xi, \zeta \rangle = -\langle \xi, \nabla_X^\perp \zeta \rangle = 0,$$

ou seja, $\nabla^\perp (\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp) \subset \mathcal{N}_1^\perp$. Analogamente $\nabla^\perp (\mathcal{V} \cap \mathcal{N}_1^\perp) \subset \mathcal{N}_1^\perp$. ✓

Pela Afirmção 2, e sabendo que $\dim \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp$ e $\dim \mathcal{V} \cap \mathcal{N}_1^\perp$ são constantes, podemos aplicar o Corolário 3.26 para concluir que $f(M) \subset \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m_2}$, em que $m_1 = n_1 - \dim \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp$ e $m_2 = n_2 - \dim \mathcal{V} \cap \mathcal{N}_1^\perp = n_2 - \dim \mathcal{V}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \pi_1 \eta &= -f_* \mathbf{S}^t \eta + (\text{Id} - \mathbf{T})\eta = -\langle \eta, \mathbf{SB} \rangle f_* B + \eta_\mathcal{U} + \frac{\langle \eta, \mathbf{SB} \rangle}{\lambda(1-\lambda)} \mathbf{SB} - \frac{\langle \eta, \mathbf{SB} \rangle}{\lambda} \mathbf{SB} = \\ &= \frac{\langle \eta, \mathbf{SB} \rangle}{1-\lambda} [(\lambda-1)f_* B + \mathbf{SB}] + \eta_\mathcal{U}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \pi_1 (f_* TM \oplus \text{ger} \{\eta\}) &= \pi_1 (f_* (\ker \mathbf{R}) \oplus \text{ger} \{f_* B\} \oplus \text{ger} \{\eta\}) = \\ &= f_* (\ker \mathbf{R}) + \text{ger} \{\pi_1 f_* B\} + \text{ger} \{\pi_1 \eta\} = \\ &= f_* (\ker \mathbf{R}) \oplus \text{ger} \{(1-\lambda)f_* B - \mathbf{SB}, \eta_\mathcal{U}\}. \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\dim [\pi_1 (f_* TM \oplus \text{ger} \{\eta\})] = \begin{cases} m+1, & \text{se } \eta \text{ e } \mathbf{SB} \text{ são LI;} \\ m, & \text{se } \eta \text{ e } \mathbf{SB} \text{ são LD.} \end{cases}$$

Portanto $m_1 \geq m+1$, se η e \mathbf{SB} são LI, e $m_1 \geq m$, se η e \mathbf{SB} são LD.

Como $m_1 = n_1 - \dim [\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_1^\perp]$ e $m_2 = n_2 - \dim \mathcal{V}$, então

$$m_1 + m_2 = \begin{cases} n_1 + n_2 - (n_1 + n_2 - m - 2) = m + 2, & \text{se } \mathbf{SB} \text{ e } \eta \text{ são LI;} \\ n_1 + n_2 - (n_1 + n_2 - m - 1) = m + 1, & \text{se } \mathbf{SB} \text{ e } \eta \text{ são LD;} \end{cases}$$

ou seja,

$$(m_1, m_2) = \begin{cases} (m+1, 1), & \text{se } \mathbf{SB} \text{ e } \eta \text{ são LI;} \\ (m, 1), & \text{se } \mathbf{SB} \text{ e } \eta \text{ são LD.} \end{cases} \quad \square$$

5.5 Prova do Teorema 5.1

Antes de provarmos o Teorema 5.1, precisamos de alguns resultados.

Lema 5.11 (Provado em [21]). *Sejam M^m uma variedade riemanniana e N^n uma subvariedade umbílica de M .*

(I) *Se N_1 é outra subvariedade umbílica de M tal que $p \in N_1 \cap N$, $T_p N_1 = T_p N$ e $\eta_1(p) = \eta(p)$, em que η_1 e η denotam os vetores curvatura média de N_1 e de N , respectivamente, então N_1 e N coincidem em uma vizinhança de p .*

(II) Se \tilde{M} é uma subvariedade totalmente geodésica de M tal que $p \in \tilde{M} \cap N$ e $T_p N \oplus \text{ger} \{\eta(p)\} \subset T_p \tilde{M}$, então existe uma vizinhança A de p em N tal que $A \subset \tilde{M}$.

Demonstração.

(I): Para cada vetor unitário $X_p \in T_p N$, consideremos $\gamma = (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ a geodésica em N tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X_p$. Sejam $Y_{2p}, \dots, Y_{np} \in T_p N$ campos unitários tais que $\{X_p, Y_{2p}, \dots, Y_{np}\}$ seja uma base ortonormal de $T_p N$ e denotemos por X, Y_2, \dots, Y_n os transportes paralelos de $X_p, Y_{2p}, \dots, Y_{np}$, em N , ao longo da curva γ , respectivamente.

Sejam ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões riemannianas em N e em M , respectivamente. Assim, como γ é uma geodésica, então $X = \gamma'$, $\nabla_X X = 0$ e $\nabla_X Y_i = 0$, para cada $i \in \{2, \dots, n\}$. Dessa forma, $\bar{\nabla}_X X = \eta$ e $\bar{\nabla}_X Y_i = 0$, para cada $i \in \{2, \dots, n\}$.

Por outro lado, $\bar{\nabla}_X \eta = -A_\eta X + \nabla_X^\perp \eta = -\|\eta\|^2 X + \nabla_X^\perp \eta$. Sejam $\bar{\mathcal{R}}$ e \mathcal{R} os tensores de curvatura em M e em N , respectivamente. Dessa forma, pela equação de Codazzi,

$$(\bar{\mathcal{R}}(X, Y_2)Y_2)^\perp = \langle Y_2, Y_2 \rangle \nabla_X^\perp \eta - \langle X, Y_2 \rangle \nabla_{Y_2}^\perp \eta = \nabla_X^\perp \eta.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}(X, Y_2)Y_2 &= \langle \bar{\mathcal{R}}(X, Y_2)Y_2, X \rangle X + \sum_{i=2}^n \langle \bar{\mathcal{R}}(X, Y_2)Y_2, Y_i \rangle Y_i + \nabla_X^\perp \eta \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla_X^\perp \eta = \bar{\mathcal{R}}(X, Y_2)Y_2 - \langle \bar{\mathcal{R}}(X, Y_2)Y_2, X \rangle X - \sum_{i=3}^n \langle \bar{\mathcal{R}}(X, Y_2)Y_2, Y_i \rangle Y_i. \end{aligned}$$

Denotando por $\eta(t) := \eta(\gamma(t))$, temos o seguinte sistema de equações com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} \gamma' = X; \\ \bar{\nabla}_X X = \eta; \\ \bar{\nabla}_X Y_i = 0; \quad i \in \{2, \dots, n\}; \\ \bar{\nabla}_X \eta = -\|\eta\|^2 X + \bar{\mathcal{R}}(X, Y_2)Y_2 - \langle \bar{\mathcal{R}}(X, Y_2)Y_2, X \rangle X - \sum_{i=3}^m \langle \bar{\mathcal{R}}(X, Y_2)Y_2, Y_i \rangle Y_i; \\ \gamma(0) = p, \quad X(0) = X_p, \quad Y_i(0) = Y_{ip}, \quad \eta(0) = \eta(p). \end{cases} \quad (5.14)$$

Seja $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ um sistema de coordenadas de M tal que $p \in U$ e $\varphi(p) = 0$. Dessa forma, diminuindo ε se necessário, $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$. Definamos $\bar{\gamma} := \varphi \circ \gamma$ e sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ tais que $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$.

Consideremos agora $\bar{X} := \varphi_* X$, $\bar{Y}_i := \varphi_* Y_i$ e $\bar{\eta} = \varphi_* \eta$. Assim, escrevendo

$$X(t) = \sum_{i=1}^m x_i(t) \frac{\partial}{\partial u_i}(\gamma(t)), \quad Y_i(t) = \sum_{j=1}^m y_{ji}(t) \frac{\partial}{\partial u_i}(\gamma(t)) \quad \text{e} \quad \eta(t) = \sum_{i=1}^m h_i(t) \frac{\partial}{\partial u_i}(\gamma(t)),$$

então

$$\bar{X}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)), \quad \bar{Y}_i(t) = (y_{1i}(t), \dots, y_{mi}(t)) \quad \text{e} \quad \bar{\eta}(t) = (h_1(t), \dots, h_m(t)).$$

Sejam agora

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \frac{\partial}{\partial u_k} &= \sum_{l=1}^m \bar{\mathcal{R}}_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial u_l}, & \Gamma_{ij}^k(t) &:= \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)), \\ \mathcal{R}_{ijk}^l(t) &:= \bar{\mathcal{R}}_{ijk}^l(\gamma(t)), & g_{ij}(t) &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right\rangle(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Dessa forma, aplicando φ_* em ambos os lados do sistema (5.14), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\gamma}' = \bar{X}; \\ \sum_{k=1}^m \left(x'_k + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k x_i x_j \right) e_k = \bar{\eta}; \\ \sum_{k=1}^m \left(y'_{kl} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k x_i y_{jl} \right) e_k = 0, \quad l \in \{2, \dots, n\}; \\ \sum_{k=1}^m \left(h'_k + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k x_i h_j \right) e_k = - \left(\sum_{i,j=1}^m h_i h_j g_{ij} \right) \bar{X} + \sum_{i,j,k,l=1}^m x_i y_j y_{k2} \mathcal{R}_{ijk}^l e_l - \\ - \left(\sum_{i,j,k,l,o=1}^m x_i y_j y_{k2} x_o \mathcal{R}_{ijk}^l g_{lo} \right) \bar{X} - \sum_{q=3}^m \left[\sum_{i,j,k,l,o=1}^m x_i y_j y_{k2} y_{oq} \mathcal{R}_{ijk}^l g_{lo} \right] \bar{Y}_q; \\ \bar{\gamma}(0) = 0, \quad \bar{X}(0) = \varphi_* X_p, \quad \bar{Y}_i(0) = \varphi_* Y_{ip}, \quad \bar{\eta}(0) = \varphi_* \eta(p); \end{array} \right.$$

em que $\{e_1, \dots, e_m\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^m . Mas o sistema acima é equivalente ao seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\gamma}' = \bar{X}; \\ \bar{X}' = \bar{\eta} - \sum_{i,j,l=1}^m \Gamma_{ij}^l x_i x_j e_l; \\ \bar{Y}_l = - \sum_{i,j,k=1}^m \Gamma_{ij}^k x_i y_{jl} e_k, \quad l \in \{2, \dots, n\}; \\ \bar{\eta}' = - \sum_{l,o=1}^m g_{lo} \left(h_l h_o + \sum_{i,j,k=1}^m x_i y_j y_{k2} x_o \mathcal{R}_{ijk}^l \right) \bar{X} + \\ + \sum_{i,j,l=1}^m x_i \left(\sum_{k=1}^m y_j y_{k2} \mathcal{R}_{ijk}^l - h_j \Gamma_{ij}^l \right) e_l - \sum_{q=3}^m \left(\sum_{i,j,k,l,o=1}^m x_i y_j y_{k2} y_{oq} \mathcal{R}_{ijk}^l g_{lo} \right) \bar{Y}_q; \\ \bar{\gamma}(0) = 0, \quad \bar{X}(0) = \varphi_* X_p, \quad \bar{Y}_i(0) = \varphi_* Y_{ip}, \quad \bar{\eta}(0) = \varphi_* \eta(p). \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Como as soluções do sistema 5.15 são únicas, então também são únicas as soluções do sistema 5.14.

Seja agora $\beta: (-\delta, \delta) \rightarrow N_1$ uma geodésica tal que $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = X_p$ e sejam \tilde{X}, \tilde{Y}_i os transportes paralelos, em N_1 , dos vetores X_p e Y_{ip} ao longo de β . Assim, pelas mesmas contas feitas para γ , sabemos que $\beta, \tilde{X}, \tilde{Y}_i$ e $\tilde{\eta} := \eta_1 \circ \beta$, também satisfazem o sistema (5.14), portanto $\gamma = \beta$ em $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$.

Como o vetor unitário $X_p \in T_p M$ é qualquer, então as geodésicas de N e que passam por p e as geodésicas de N_1 que passam por p coincidem. Logo existe $r > 0$ tal que $\exp_p^N: B(0, r) \rightarrow N$ e $\exp_p^{N_1}: B(0, r) \rightarrow N_1$ são difeomorfismos sobre suas imagens, em que \exp_p^N é a função exponencial de N em p e $\exp_p^{N_1}$ é a função exponencial de N_1 em p . Porém, como as geodésicas de N e de N_1 coincidem, então $\exp_p^N = \exp_p^{N_1}$ em $B(0, r)$. Dessa forma, $A := \exp_p^N(B(0, r)) = \exp_p^{N_1}(B(0, r))$ é um subconjunto aberto de N e de N_1 . •

(II): Sejam $\tilde{m} = \dim \tilde{M}$ e suponhamos inicialmente que exista uma subvariedade umbílica $\tilde{N} \subset \tilde{M}^{\tilde{m}}$ tal que $p \in \tilde{N}$, $T_p \tilde{N} = T_p N$ e $\tilde{\eta}(p) = \eta(p)$, em que $\tilde{\eta}$ é o vetor curvatura média de \tilde{N} .

Sejam agora $\{X_p, Y_{2p}, \dots, Y_{np}\}$ uma base ortonormal de $T_p N$, $\tilde{\gamma}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \tilde{N}$ uma geodésica tal que $\tilde{\gamma}'(0) = X_p$. Consideremos \tilde{X} e \tilde{Y}_i os transportes paralelos de X_p e Y_{ip} , em \tilde{N} , ao longo de $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\eta}(t) := \tilde{\eta}(\tilde{\gamma}(t))$, dessa forma, por contas análogas às feitas no item (I),

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma' = \tilde{X}; \\ \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{X} = \tilde{\eta}; \\ \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}_i = 0; \quad i \in \{2, \dots, n\}; \\ \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{\eta} = -\|\tilde{\eta}\|^2 \tilde{X} + \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{X}, \tilde{Y}_2) \tilde{Y}_2 - \langle \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{X}, \tilde{Y}_2) \tilde{Y}_2, \tilde{X} \rangle \tilde{X} - \sum_{i=3}^m \langle \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{X}, \tilde{Y}_2) \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_i \rangle \tilde{Y}_i; \\ \gamma(0) = p, \quad \tilde{X}(0) = X_p, \quad \tilde{Y}_i(0) = Y_{ip}, \quad \tilde{\eta}(0) = \eta(p); \end{array} \right. \quad (5.16)$$

em que $\tilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita em \tilde{M} e $\tilde{\mathcal{R}}$ é o tensor curvatura média de \tilde{M} .

Seja agora $\tilde{\varphi}: U \subset \tilde{M} \rightarrow \tilde{\varphi}(U) \subset \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ um sistema de coordenadas de \tilde{M} tal que $\tilde{\varphi}(p) = 0$ e $\tilde{\gamma}(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$. Dessa forma, se $\tilde{\gamma} := \varphi \circ \tilde{\gamma}$, $\tilde{X} := \tilde{\varphi}_* \tilde{X}$, $\tilde{Y}_i := \tilde{\varphi}_* \tilde{Y}_i$, $\tilde{\eta} := \tilde{\varphi}_* \tilde{\eta}$ e $\mathcal{R}_{ijk}^l(t) := \tilde{\mathcal{R}}_{ijk}^l(\tilde{\gamma}(t))$, então vale o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\gamma}' = \tilde{X}; \\ \tilde{X}' = \tilde{\eta}_1 - \sum_{i,j,l=1}^{\tilde{m}} \Gamma_{ij}^l x_i x_j e_l; \\ \tilde{Y}_k = - \sum_{i,j,l=1}^{\tilde{m}} \Gamma_{ij}^l x_i y_{jk} e_l, \quad k \in \{2, \dots, n\}; \\ \tilde{\eta}'_1 = - \sum_{l,o=1}^{\tilde{m}} g_{lo} \left(h_l h_o + \sum_{i,j,k=1}^{\tilde{m}} x_i y_{j2} y_{k2} x_o \mathcal{R}_{ijk}^l \right) \tilde{X} + \\ \quad + \sum_{i,j,l=1}^{\tilde{m}} x_i \left(\sum_{k=1}^{\tilde{m}} y_{j2} y_{k2} \mathcal{R}_{ijk}^l - h_j \Gamma_{ij}^l \right) e_l - \sum_{p=3}^{\tilde{m}} \left[\sum_{i,j,k,l,o=1}^{\tilde{m}} x_i y_{j2} y_{k2} y_{op} \mathcal{R}_{ijk}^l g_{lo} \right] \tilde{Y}_p; \\ \tilde{\gamma}(0) = 0, \quad \tilde{X}(0) = \varphi_* X_p, \quad \tilde{Y}_i(0) = \varphi_* Y_{ip}, \quad \tilde{\eta}_1(0) = \varphi_* \eta_p; \end{array} \right. \quad (5.17)$$

em que $\tilde{X} = \sum_{l=1}^{\tilde{m}} x_l \frac{\partial}{\partial u_l}$, $\tilde{Y}_i = \sum_{l=1}^{\tilde{m}} y_{li} \frac{\partial}{\partial u_l}$ e $\tilde{\eta} = \sum_{l=1}^{\tilde{m}} h_l \frac{\partial}{\partial u_l}$.

Mas, para cada base ortonormal $\{X_p, Y_{2p}, \dots, Y_{np}\}$ de V , o sistema (5.17) tem uma única solução, portanto, para cada base $\{X_p, Y_{2p}, \dots, Y_{np}\}$ de V , o sistema (5.16) também possui uma única solução.

Seja então $\iota: \tilde{M} \hookrightarrow M$ a inclusão e $(\tilde{\gamma}, \tilde{X}, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n, \tilde{\eta})$ uma solução do sistema 5.16. Dessa forma, como \tilde{M} é totalmente geodésica em M , então $\gamma := \iota \circ \tilde{\gamma}$, $X := \iota_* \tilde{X}$, $Y_i := \iota_* \tilde{Y}_i$ e $\eta_i := \iota_* \tilde{\eta}$ são uma solução do sistema (5.14). Portanto γ é uma geodésica de N , pela unicidade das soluções do sistema (5.14).

Assim, para cada $X_p \in T_p N$ unitário, a geodésica de N tangente a X_p é uma curva em \tilde{M} . Conclusão: existe uma vizinhança A de p em M tal que $A \subset \tilde{M}$. \square

Corolário 5.12. *Sejam M^m uma variedade riemanniana e $\tilde{M} \subset M$ uma subvariedade totalmente geodésica e completa. Se $N^n \subset M^m$ é uma subvariedade umbílica tal que $p \in N \cap \tilde{M}$ e $T_p N \oplus \text{ger} \{\eta(p)\} \subset T_p \tilde{M}$, em que η é o vetor curvatura média de N , então $N \subset \tilde{M}$.*

Demonstração. Pela segunda parte do Lema anterior, existe uma vizinhança U de p em N tal que $U \subset \tilde{M}$. Suponhamos que U seja a maior vizinhança conexa de p em N tal que $U \subset \tilde{M}$. Mostraremos que $U = M$.

Suponhamos, por absurdo, que $\partial U \neq \emptyset$ e seja $y \in \partial U$ um ponto da fronteira de U em N . Dessa forma, existe uma seqüência $(x_n) \subset U$ tal que $x_n \rightarrow U$. Sendo N é completa, $y \in N$. Por outro lado, $(T_{x_n}N \text{ ger } \{\eta(x_n)\}) \perp (T_{x_n}\tilde{M})^\perp$. Dessa forma, por continuidade, $(T_yN \oplus \text{ger } \{\eta(y)\}) \perp (T_y\tilde{M})^\perp$, ou seja, $T_yN \oplus \text{ger } \{\eta(y)\} \subset T_y\tilde{M}$. Aplicando novamente o lema anterior, concluímos que existe uma vizinhança conexa V de y em N tal que $V \subset \tilde{M}$. Dessa forma, $V \subset U$ contradizendo o fato de y ser um ponto de fronteira de U .

Portanto $\partial U = \emptyset$, ou seja, $U = N$. \square

Agora podemos provar o Teorema 5.1.

Prova do Teorema 5.1. Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ uma imersão isométrica umbílica e não totalmente geodésica com $k_1 + k_2 \neq 0$ e $m \geq 3$. Se $\ker \mathbf{S} = \{0\}$ em algum ponto de M , então, pela Proposição 5.3, vale o item (III) do Teorema 5.1. Suponhamos que $\ker \mathbf{S} \neq \{0\}$ em todos os pontos de M .

Se $\mathbf{S} = 0$ em todos os pontos de M , então, aplicando a Proposição 5.2, concluímos que ou vale o item (I) do Teorema 5.1, ou vale o item (II) do mesmo teorema.

Suponhamos agora que $\mathbf{S}|_{T_{x_0}M} \neq 0$, para algum $x_0 \in M$. Neste caso, existe uma vizinhança U de x_0 na qual $\mathbf{S} \neq 0$.

Afirmção 1: O vetor curvatura média η de f não se anula em nenhum subconjunto aberto de M .

De fato, se $\eta = 0$ em algum subconjunto aberto $A \subset M$, então, pelo Teorema 4.2, $f(A)$ é um subconjunto aberto de uma subvariedade totalmente geodésica e completa $N^m \subset \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. Dessa forma, pelo Corolário 5.12, $f(M) \subset N^m$, ou seja, $f(M)$ é totalmente geodésica, o que é uma contradição. \checkmark

Pela Afirmção 1, podemos supor, diminuindo U se necessário, que η não se anula em nenhum ponto de U .

Afirmção 2: $\dim(\ker \mathbf{S}) = m - 1$ em U .

Seja $z \in U$ um ponto tal que, para todo $x \in U$, $\dim(\ker \mathbf{S}|_{T_xM}) \leq \dim(\ker \mathbf{S}|_{T_zM})$. Dessa forma, existe uma vizinhança V de z na qual a $\dim(\ker \mathbf{S})$ é constante. Logo, pelo Lema 5.9, $\dim(\ker \mathbf{S}) = m - 1$ em V .

Assim, $\dim(\ker \mathbf{S}|_{T_xM}) \geq m - 1$, para todo $x \in U$. Mas, como $\mathbf{S} \neq 0$ em U e $\ker \mathbf{S} \neq \{0\}$ em M , então $\dim(\ker \mathbf{S}) = m - 1$ em todo ponto de U . \checkmark

Ainda pelo Lema 5.9, sabemos que ou $\ker \mathbf{S} = \ker \mathbf{R}$ em U , ou $\ker \mathbf{S} = \ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ em U . Suponhamos que $\ker \mathbf{S} = \ker \mathbf{R}$ em U , neste caso provaremos que vale o item (IV) do Teorema 5.1. Analogamente, o item (V) do Teorema 5.1 é válido quando $\ker \mathbf{S} = \ker(\text{Id} - \mathbf{R})$ em U .

Pela Proposição 5.7, sabemos que $f(U) \subset \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^1$, em que $m_1 \in \{m, m + 1\}$ e $\mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^1$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$. Assim, pelo Corolário 5.12, $f(M) \subset \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^1$.

Suponhamos que $k_2 > 0$, sendo os outros casos análogos. Neste caso sejam $\bar{\Pi}: \bar{M} \rightarrow M$ o recobrimento universal e $\Pi: \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{m_2}$ a aplicação de recobrimento localmente isométrica dada por

$$\Pi(x, t) = \left(x; \left(\frac{\cos(\sqrt{k_2}t)}{\sqrt{k_2}}, \frac{\sin(\sqrt{k_2}t)}{\sqrt{k_2}} \right) \right).$$

Sejam também $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^1$, dada por $\tilde{f}(x) = f(x)$, e $(j_1 \times j_2): \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^1 \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}$ a inclusão totalmente geodésica.

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{M} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{R} \\
 \downarrow \bar{\Pi} & & \downarrow \Pi \\
 M & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^1 \xrightarrow{(j_1 \times j_2)} \mathbb{O}_{k_1}^{n_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^{n_2}.
 \end{array}$$

Como \bar{M} é simplesmente conexa e Π uma aplicação de recobrimento localmente isométrica, então existe uma imersão isométrica umbílica $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{R}$ tal que $\Pi \circ \bar{f} = \tilde{f} \circ \bar{\Pi}: \bar{M} \rightarrow \mathbb{O}_{k_1}^{m_1} \times \mathbb{O}_{k_2}^1$. Dessa forma,

$$f(M) = ((j_1 \times j_2) \circ \tilde{f} \circ \bar{\Pi})(\bar{M}) = ((j_1 \times j_2) \circ \Pi \circ \bar{f})(\bar{M}).$$

Portanto vale o item (IV) do Teorema 5.1. □

Capítulo 6

Imersões isométricas umbílicas em $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$

Consideremos o conjunto $\mathcal{I} := \left\{ (p, q) \in \mathbb{R}^2 : \left(p - \frac{1}{k}\right)^2 \leq q < p^2 \right\}$.

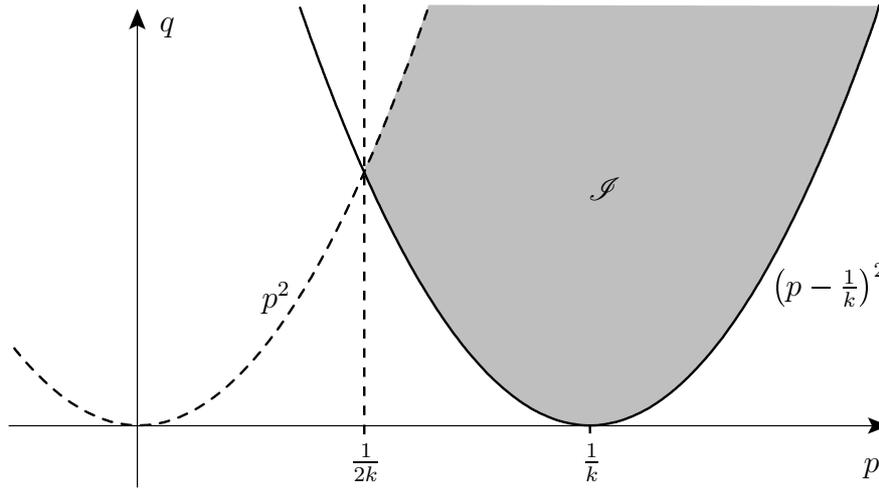


Figura 6.1: Conjunto \mathcal{I} .

Para cada $(p, q) \in \mathcal{I}$, sejam

$$J_{p,q} := \left(-\sqrt{p - \sqrt{q}}, \sqrt{p - \sqrt{q}} \right) \quad \text{e} \quad \bar{J}_{p,q} := \left[-\sqrt{p - \sqrt{q}}, \sqrt{p - \sqrt{q}} \right].$$

Dado $n \in \{m, m + 1\}$, definamos as funções $h_{p,q}: \bar{J}_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}$ e $Y_{p,q}: J_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ por

$$h_{p,q}(s) := \sqrt{p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - q}} \quad \text{e} \quad (6.1)$$

$$Y_{p,q}(s, x) := \begin{cases} \left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left[h_{p,q}(s) + \frac{\frac{1}{k} - p}{h_{p,q}(s)} \right], \frac{\sqrt{q - \left(p - \frac{1}{k}\right)^2}}{\sqrt{2} h_{p,q}(s)}, \frac{\ln(h_{p,q}(s))}{\sqrt{k}} \right), & \text{se } n = m + 1; \\ \left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left[h_{p,q}(s) + \frac{\frac{1}{k} - p}{h_{p,q}(s)} \right], \frac{\ln(h_{p,q}(s))}{\sqrt{k}} \right), & \text{se } n = m; \end{cases}$$

em que $q = \left(\frac{1}{k} - p\right)^2$ no caso em que $n = m$. Se $q \neq 0$, então podemos estender $Y_{p,q}$ a $\bar{J}_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1}$

e definir $Z_{p,q}: \bar{J}_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ por

$$Z_{p,q}(s, x) := \begin{cases} \left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{(\frac{1}{k}-p)h_{p,q}(s)}{\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right], \frac{\sqrt{q-(p-\frac{1}{k})^2}h_{p,q}(s)}{\sqrt{2q}}, \frac{c-\ln(h_{p,q}(s))}{\sqrt{k}} \right), & \text{se } n = m + 1; \\ \left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{(\frac{1}{k}-p)h_{p,q}(s)}{\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right], \frac{c-\ln(h_{p,q}(s))}{\sqrt{k}} \right), & \text{se } n = m; \end{cases}$$

em que $c := \ln(\sqrt{q})$ e, no caso em que $n = m$, $q = (p - \frac{1}{k})^2$.

Neste capítulo, provaremos que cada conjunto $M_{p,q}$, dado por

$$M_{p,q} := \begin{cases} Y_{p,q}(\mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}) \cup Z_{p,q}(\bar{J}_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1}), & \text{se } q \neq 0; \\ Y_{p,q}(J_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1}), & \text{se } q = 0; \end{cases}$$

é uma subvariedade umbílica completa de $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$. Feito isso, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 6.1. *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica. Nessas condições, f é umbílica e não totalmente geodésica se, e somente se, ocorre um dos itens abaixo.*

- (I) $f = \iota_1^t \circ \bar{f}$, em que $\iota_1^t: \mathbb{S}_k^n \rightarrow \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ é o mergulho totalmente geodésico dado por $\iota_1^t(x) := (x, t)$ e $\bar{f}: M^m \rightarrow \mathbb{S}_k^n$ é uma imersão isométrica umbílica.
- (II) A menos de um movimento rígido de $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$, $f = (j_1 \times \text{Id}) \circ \mathcal{I} \circ \bar{f}$, em que $(j_1 \times \text{Id}): \mathbb{S}_k^{m+1} \times \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ é uma inclusão totalmente geodésica, $\mathcal{I}: M_{p,q} \hookrightarrow \mathbb{S}_k^{m+1} \times \mathbb{R}$ é a inclusão umbílica e $f: M^m \rightarrow M_{p,q}$ é uma isometria local.

Para provarmos esse teorema, dividimos o capítulo em 4 seções. Na primeira seção são estudadas as imersões umbílicas $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$ com $n \in \{m, m+1\}$ e provamos que tais imersões (com algumas hipóteses adicionais) são imersões de rotação sobre uma curva e a curva é descrita como solução de um sistema de EDOs.

A segunda seção é bem curta e apresenta apenas alguns resultados básicos (feitos em [18]) que mostram como são os tensores \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T} das imersões em $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$.

Na terceira seção as imersões de rotação umbílicas em $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ com codimensão 1 ou 2 são estudadas e na quarta são classificadas as imersões umbílicas em $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ generalizando a classificação das superfícies umbílicas em $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ feita em [26] e a classificação local das hipersuperfícies umbílicas em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ feita em [28].

6.1 Imersões umbílicas $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$ com $\mathbf{S} \neq 0$ e $n \in \{m, m+1\}$

Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica umbílica com $n \in \{m, m+1\}$, $\iota: \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ a inclusão e $F := \iota \circ f$. É consequência direta do Lema 3.12 para f umbílica a seguinte fórmula para a segunda forma fundamental de F :

$$\alpha_F(X, Y) = \langle X, Y \rangle (\iota_* \eta + \nu_1) - \langle \mathbf{R}X, Y \rangle \nu_1. \quad (6.2)$$

Suponhamos que $\mathbf{S} \neq 0$ em todos os pontos de M . Neste caso, provaremos que $F(M)$ é um subconjunto aberto de uma subvariedade de rotação sobre uma curva γ . Além disso descreveremos a imersão de rotação e encontraremos um sistema de EDOs que descreve γ . Para mostrarmos que $F(M)$ é um subconjunto aberto de uma subvariedade de rotação, mostraremos que $\eta_1 := \iota_* \eta + \nu_1$ é uma normal de Dupin de F e que $E_{\eta_1}^\perp$ é uma distribuição totalmente geodésica unidimensional. Feito isso, aplicaremos o Teorema 2.1

Lema 6.2. *Sejam $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica umbílica, η o vetor curvatura média de f , $F := \iota \circ f$ e $\eta_1 := \iota_*\eta + \nu_1$. Nessas condições $\ker \mathbf{R}|_{T_x M} = E_{\eta_1}(x)$, em que*

$$E_{\eta_1}(x) := \{X \in T_x M : \alpha_F(X, Y) = \langle X, Y \rangle \eta_1, \forall Y \in T_x M\}.$$

Além disso, se $\mathbf{S} \neq 0$ em todos os pontos de M , então η_1 é uma normal de Dupin de F .

Demonstração.

$$X \in E_{\eta_1}(x) \Leftrightarrow \alpha_F(X, Y) = \langle X, Y \rangle \eta_1, \forall Y \in T_x M \stackrel{(6.2)}{\Leftrightarrow} X \in \ker \mathbf{R}|_{T_x M}.$$

Se $\mathbf{S} \neq 0$ em todos os pontos de M , então \mathbf{S} tem posto 1, pois $f_*\mathbf{R}X + \mathbf{S}X = \pi_2 f_*X$ e $\pi_2: T(\mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R})$ tem posto 1. Pelo mesmo argumento, \mathbf{R} tem posto 1. Além disso, como $\ker \mathbf{R} \subset \ker \mathbf{S}$, então $\ker \mathbf{R} = \ker \mathbf{S}$.

Dessa forma, E_{η_1} tem dimensão constante e igual a $m-1$. Resta mostrar que η_1 é paralelo na conexão normal de F . Seja então $X \in \ker \mathbf{R} = E_{\eta_1}$. Logo

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X^\perp \eta_1 &= \bar{\nabla}_X^\perp \iota_*\eta + \bar{\nabla}_X^\perp \nu_1 \stackrel{(3.10)}{=} \iota_*\nabla_X^\perp \eta + \alpha_\iota(f_*X, \eta) + k_1 \iota_*\mathbf{S}X = \\ &\stackrel{(5.9), \text{Lema 3.3}}{=} -\langle \pi_1 f_*X, \eta \rangle \nu_1 - \langle \pi_2 f_*X, \eta \rangle \nu_2 = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Proposição 6.3. *Sejam $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica umbílica com $k \neq 0$ e η o vetor curvatura média de f . Se $\mathbf{S} \neq 0$ em todos os pontos de M , então um dos dois itens abaixo é verdadeiro.*

- (I) *Existem uma decomposição ortogonal $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_{\tau(\varepsilon)}^m \oplus \mathbb{R}^{n+1-m}$ e uma imersão de rotação $g: I \times \mathbb{O}_\varepsilon^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$ tais que $f(M) \subset g(I \times \mathbb{O}_\varepsilon^{m-1})$ e g é dada por*

$$g: \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{O}_\varepsilon^{m-1} & \longrightarrow & \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R} \\ (t, \xi) & \longmapsto & ((\gamma_1(t)\xi, \gamma_2(t)); \gamma_3(t)), \end{array}$$

em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, $\varepsilon = \pm 1$, $\gamma_1(t) > 0$, $\gamma_1(t)\xi \in \mathbb{R}_{\tau(\varepsilon)}^m$, $\gamma_2(t) \in \mathbb{R}^{n+1-m}$, $(\gamma_1(t)\xi, \gamma_2(t)) \in \mathbb{O}_k^n$ e $\gamma_3(t) \in \mathbb{R}$.

- (II) *$k_1 < 0$ e existem uma decomposição ortogonal $\mathbb{L}^{n+1} = \mathbb{L}^2 \oplus \mathbb{E}^{m-1} \oplus \mathbb{E}^{n-m}$ e uma imersão de rotação $g: I \times \mathbb{E}^{m-1} \rightarrow \mathbb{L}^{n+1} \times \mathbb{R}$ tais que $f(M) \subset g(I \times \mathbb{E}^{m-1})$ e g é dada por*

$$g: \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{E}^{m-1} & \longrightarrow & \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R} \\ (s, v) & \longmapsto & \left((\gamma_1(s), \gamma_2(s) - \gamma_1(s) \frac{\|v\|^2}{2}, \gamma_1(s)v, \gamma_3(s)); \gamma_4(s) \right), \end{array}$$

em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, as duas primeiras coordenadas são uma base pseudo-ortogonal de \mathbb{L}^2 , $\gamma_1(s)v \in \mathbb{E}^{m-1}$, $\gamma_3(s) \in \mathbb{E}^{n-m}$ e $\gamma_4(s) \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Pelo Lema 6.2, $E_{\eta_1} = \ker \mathbf{R}$ e $\eta_1 = \iota_*\eta + \nu_1$ é uma normal de Dupin de multiplicidade $m-1$ de F , ou seja, $\ker \mathbf{R} = E_{\eta_1}$ tem dimensão constante e igual a $m-1$. Além disso, como $k \neq 0$, então η_1 não se anula em M . Por outro lado, pelo Lema 5.10, E_{η_1} é uma distribuição umbílica e $E_{\eta_1}^\perp = (\ker \mathbf{R})^\perp$ é uma distribuição totalmente geodésica. Podemos então aplicar o Teorema 2.1 e concluir que $f(M)$ é um subconjunto aberto de uma subvariedade de rotação sobre uma curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{n-m+1}$ (subvariedade de dimensão $m - \dim E_{\eta_1} = 1$) em algum subespaço $\mathbb{R}^{n-m+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, em que $\mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+2}$.

Além disso, pela demonstração do Teorema 2.1, $L := f_*E_{\eta_1} \oplus \text{ger} \{\sigma\}$ é um subespaço constante em \mathbb{R}^{n+2} , em que $\sigma := F_*\varphi + \eta_1$ e φ é o vetor curvatura média da distribuição E_{η_1} .

Afirmção 1: $\pi_2(L) = \{0\}$, ou seja, $L \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}$.

Como $E_{\eta_1} = \ker \mathbf{R} \neq \{0\}$, então $F_*E_{\eta_1} \perp \{0\} \times \mathbb{R}$. Resta mostrar que $\pi_2(\sigma) = 0$.

$$\begin{aligned} \pi_2(\sigma) &= \pi_2(F_*\varphi + \eta_1) = \pi_2[F_*\varphi + \iota_*\eta - k_1(\pi_1 \circ f)] = \iota_*\pi_2(f_*\varphi + \eta) = \\ &= \iota_*\pi_2[f_*\nabla_X^h X + \alpha_f(X, X)], \text{ para algum } X \in E_{\eta_1} \text{ unitário,} \\ &= \iota_*\pi_2[f_*\nabla_X^h X + f_*\nabla_X^v X + \alpha_f(X, X)] = \iota_*\pi_2(\bar{\nabla}_X f_*X) = \\ &= \langle \bar{\nabla}_X f_*X, e_{n+2} \rangle e_{n+2} = X \langle f_*X, e_{n+2} \rangle e_{n+2} = X \langle \pi_2 f_*X, e_{n+2} \rangle e_{n+2} = 0, \end{aligned}$$

em que e_{n+2} é um vetor unitário tangente ao segundo fator de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+2}$. ✓

(I): Suponhamos que o vetor $\sigma = F_*\varphi + \eta_1$ seja tipo espaço ou tipo tempo.

Neste caso, acompanhando a demonstração do Teorema 2.1, sabemos que $f(M)$ pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned} g: I \times \mathbb{O}_\varepsilon^{m-1} &\rightarrow \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R} \\ g(t, \xi) &\mapsto p + r(t)\xi + h(t), \end{aligned}$$

em que I é um intervalo, $\varepsilon = \pm 1$, $r(t) > 0$, $\mathbb{O}_\varepsilon^{m-1} \subset L$, $h(t) \in L^\perp$ e $p \in L$.

Afirmção 2: $p = 0$.

Sabemos que p é a projeção ortogonal de $c = F + \frac{\sigma}{\|\sigma\|^2}$ sobre L . Mostraremos que $c \perp L$. Seja $X \in E_{\eta_1}$.

$$\begin{aligned} \left\langle F + \frac{\sigma}{\|\sigma\|^2}, F_*X \right\rangle &= \langle F, \pi_1 F_*X \rangle = 0. \\ \left\langle F + \frac{\sigma}{\|\sigma\|^2}, \sigma \right\rangle &= \langle F, \sigma \rangle + 1 = \langle F, F_*\varphi + \iota_*\eta + \tilde{\nu}_1 \rangle + 1 = -k \langle F, (\pi_1 \circ F) \rangle + 1 = \\ &= -k \frac{1}{k} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Portanto $p = 0$. ✓

Denotando $\gamma_1(t) := r(t)$, $\gamma_2(t) := \pi_1(h(t))$, $\gamma_3(t) := \pi_2(h(t))$, $\mathbb{R}^m := L$, $\mathbb{R}^{n+1-m} := \pi_1(L^\perp)$, então $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n+1-m}$ e

$$g(t, \xi) = ((\gamma_1(t)\xi, \gamma_2(t)); \gamma_3(t)),$$

em que $\gamma_1(t) > 0$, $\gamma_1(t)\xi \in \mathbb{R}^m$, $\gamma_2(t) \in \mathbb{R}^{n+1-m}$, $(\gamma_1(t)\xi, \gamma_2(t)) \in \mathbb{O}_k^n$ e $\gamma_3(t) \in \mathbb{R}$.

(II): Suponhamos agora que o vetor σ seja tipo luz.

Neste caso, pela demonstração do Teorema 2.1, $f(M)$ pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned} g: I \times V &\rightarrow \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R} \\ (t, v) &\mapsto q + h(t) + r(t) \left(-\tilde{\sigma}_0 + v + \frac{\|v\|^2}{2}\sigma_0 \right), \end{aligned}$$

em que $V \subset L$ é um subespaço tipo espaço qualquer, $L = V \oplus \text{ger} \{\sigma_0\}$, $h(t) \in U \oplus \text{ger} \{\sigma_0\}$ e $U = (V \oplus \text{ger} \{\sigma_0, \tilde{\sigma}_0\})^\perp$. Além disso, $\tilde{\sigma}_0$ é um vetor tipo luz qualquer que satisfaz $\tilde{\sigma}_0 \perp V$ e $\langle \tilde{\sigma}_0, \sigma_0 \rangle = 1$.

Como $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$, pela Afirmação 1, então $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{L}^{n+1}$ e $V \oplus \text{ger} \{\tilde{\sigma}\} \subset \mathbb{L}^{n+1}$. Assim, como $\tilde{\sigma}_0$ é um vetor tipo luz qualquer que satisfaz $\tilde{\sigma}_0 \perp V$ e $\langle \tilde{\sigma}_0, \sigma_0 \rangle = 1$, podemos escolher $\tilde{\sigma}_0 \in \mathbb{L}^{n+1}$.

Queremos mostrar que $q = 0$. Mas q é a projeção de $F + \xi$ sobre $V \oplus \text{ger} \{\tilde{\sigma}_0\}$, em que

$$\xi = - \sum_{i=1}^{m-1} \langle f_* e_i, \tilde{\sigma} \rangle f_* e_i + \sum_{i=1}^{m-1} \langle f_* e_i, \tilde{\sigma} \rangle^2 \sigma + \tilde{\sigma}$$

e $\{e_1, \dots, e_{m-1}\}$ é uma base ortonormal de E_{η_1} . Dessa forma $q = 0$ se, e só se, $F + \xi \perp V$ e $F + \xi \perp \sigma$.

Como V é um subespaço tipo espaço de L qualquer, então podemos tomar $x_0 \in M$ fixo e escolher $V := F_* E_{\eta_1}(x_0)$. Dessa forma, se $\{e_1, \dots, e_{m-1}\}$ é uma base ortonormal de $E_{\eta_1}(x_0)$, então $\{f_* e_1, \dots, f_* e_{m-1}\}$ é uma base ortonormal de V . Logo

$$\begin{aligned} \langle F + \xi, f_* e_i \rangle &= \langle F(x_0), f_* e_i \rangle + \langle \xi(x_0), f_* e_i \rangle = \\ &= \left\langle - \sum_{j=1}^{m-1} \langle f_* e_j, \tilde{\sigma}(x_0) \rangle f_* e_j + \sum_{j=1}^{m-1} \langle f_* e_j, \tilde{\sigma}(x_0) \rangle^2 \sigma(x_0) + \tilde{\sigma}(x_0), f_* e_i \right\rangle = \\ &= - \langle f_* e_i, \tilde{\sigma}(x_0) \rangle + \langle \tilde{\sigma}(x_0), f_* e_i \rangle = 0. \\ \langle F + \xi, \sigma \rangle &= \left\langle F - \sum_{j=1}^{m-1} \langle f_* e_j, \tilde{\sigma} \rangle f_* e_j + \sum_{j=1}^{m-1} \langle f_* e_j, \tilde{\sigma} \rangle^2 \sigma + \tilde{\sigma}, \sigma \right\rangle = \\ &= \langle F, F_* \varphi + \iota_* \eta + \tilde{\nu}_1 \rangle + 1 = -k \frac{1}{k} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Como $q = 0$, então $g(t, v) = r(t) \left(-\tilde{\sigma}_0 + v + \frac{\|v\|^2}{2} \sigma_0 \right) + h(t)$. Denotemos $\gamma_1(t) := r(t)$.

Sabendo que $h(t) \in U \oplus \text{ger} \{\sigma_0\}$, segue que $h(t) = -\gamma_2(t) \sigma_0 + \gamma_3(t) + \gamma_4(t)$, em que

$$\gamma_2(t) := \langle h(t), -\tilde{\sigma}_0 \rangle, \quad \gamma_3(t) := \pi_1(h(t)) + \gamma_2(t) \sigma_0 \in \mathbb{L}^{n+1} \quad \text{e} \quad \gamma_4(t) := \pi_2(h(t)) \in \mathbb{R}.$$

Assim $\gamma_3(t), \gamma_4(t) \perp V \oplus \text{ger} \{\tilde{\sigma}_0, \sigma_0\}$ e, como $\pi_2(L) = \{0\}$ e $\pi_2(\tilde{\sigma}_0) = 0$, então

$$g(t, v) = \left(\left(\gamma_1(t), \gamma_2(t) - \gamma_1(t) \frac{\|v\|^2}{2}, \gamma_1(t)v, \gamma_3(t) \right); \gamma_4(t) \right),$$

em que as duas primeiras coordenadas são a base pseudo-ortogonal $\{-\tilde{\sigma}_0, -\sigma_0\}$ de $\mathbb{L}^2 := \text{ger} \{\tilde{\sigma}_0, \sigma_0\}$, $\gamma_1(t)v \in \mathbb{E}^{m-1} := V$, $\gamma_3(t) \in \mathbb{E}^{n-m} := (V \oplus \text{ger} \{\tilde{\sigma}_0, \sigma_0\})^\perp \cap \mathbb{L}^{n+1}$ e $\gamma_4(t) \in \mathbb{R}$. \square

Proposição 6.4. *Seja $k \neq 0$ e $n \in \{m, m+1\}$.*

(I) *Consideremos $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_{\tau(\varepsilon)}^m \oplus \mathbb{R}^{n+1-m}$ uma decomposição ortogonal e $g: I \times \mathbb{O}_\varepsilon^{m-1} \rightarrow \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$ uma imersão de rotação (em \mathbb{R}^{n+2}) dada por*

$$g(t, \xi) := \left((\gamma_1(t)\xi, \gamma_2(t)); \gamma_3(t) \right),$$

em que $\varepsilon = \pm 1$, I é um intervalo, $\gamma_1(t) > 0$, $\gamma_1(t)\xi \in \mathbb{R}_{\tau(\varepsilon)}^m$, $\gamma_2(t) \in \mathbb{R}^{n+1-m}$, $(\gamma_1(t)\xi, \gamma_2(t)) \in \mathbb{O}_k^n$ e $\gamma_3(t) \in \mathbb{R}$.

Nessas condições, se g é umbílica, então $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e $\varphi := \varepsilon \gamma_1'^2 + \|\gamma_2'\|^2 + \gamma_3'^2$ satisfazem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \gamma_1'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_1' + \frac{\varepsilon \varphi}{\gamma_1} - k \gamma_3'^2 \gamma_1 = 0; \\ \gamma_2'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_2' - k \gamma_3'^2 \gamma_2 = 0; \\ \gamma_3'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_3' = 0; \\ \varepsilon \gamma_1^2 + \|\gamma_2\|^2 = \frac{1}{k}, \text{ se } k \neq 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

(II) Consideremos agora $k < 0$, e $\mathbb{L}^{n+1} = \mathbb{L}^2 \oplus \mathbb{E}^{m-1} \oplus \mathbb{E}^{n-m}$ uma decomposição ortogonal e $g: I \times \mathbb{E}^{m+1} \rightarrow \mathbb{H}_k^n \times \mathbb{R}$ uma imersão de rotação (em \mathbb{R}^n) dada por

$$g(t, v) := \left(\left(\gamma_1(t), \gamma_2(t) - \gamma_1(t) \frac{\|v\|^2}{2}, \gamma_1(t)v, \gamma_3(t) \right); \gamma_4(t) \right),$$

em que as duas primeiras coordenadas são uma base pseudo-ortogonal de \mathbb{L}^2 , $\gamma_1(t)v \in \mathbb{E}^{m-1}$, $\gamma_3(t) \in \mathbb{E}^{n-m}$ e $\gamma_4(t) \in \mathbb{R}$.

Nessas condições, se g é umbílica, então $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ e $\varphi := -2\gamma_1'\gamma_2' + \gamma_3'^2 + \gamma_4'^2$ satisfazem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \gamma_1'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_1' - k\gamma_4'^2 \gamma_1 = 0; \\ \gamma_2'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_2' - k\gamma_4'^2 \gamma_2 + \frac{\varphi}{\gamma_1} = 0; \\ \gamma_3'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_3' - k\gamma_4'^2 \gamma_3 = 0; \\ \gamma_4'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_4' = 0; \\ 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k}. \end{cases} \quad (6.4)$$

Demonstração.

(I): Localmente, g pode ser parametrizada por $g: I \times U \rightarrow \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$, em que $g(s, u) = (\gamma_1(s)X(u), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$, $U \subset \mathbb{R}^{m-1}$ é um subconjunto aberto, $X: U \rightarrow \mathbb{O}_\varepsilon^{m-1}$ é uma parametrização ortogonal, $(\gamma_1(s)X(u), \gamma_2(s)) \in \mathbb{O}_k^n$ e $\gamma_3(s) \in \mathbb{R}$.

Como $g(I \times U) \subset \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$ e X é uma parametrização de $\mathbb{O}_\varepsilon^{m-1}$, então $k(\pi_1 \circ g)$ é um campo ortogonal a g , $\|X\|^2 = \varepsilon$ e $\varepsilon\gamma_1^2 + \|\gamma_2\|^2 = \frac{1}{k}$.

Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{O}_k^{n-m+1} \times \mathbb{R}$ a curva dada por $\gamma(s) := (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$, em que a primeira coordenada é um vetor cujo produto interno dele por si mesmo é ε . Assim,

$$\begin{aligned} g_{u_i} &= (\gamma_1 X_{u_i}, 0, 0); & g_s &= (\gamma_1' X, \gamma_2', \gamma_3'); \\ g_{u_i u_j} &= (\gamma_1 X_{u_i u_j}, 0, 0); & g_{ss} &= (\gamma_1'' X, \gamma_2'', \gamma_3''); \\ k(\pi_1 \circ g) &= k(\gamma_1 X, \gamma_2, 0); & \|k(\pi_1 \circ g)\|^2 &= k; \\ \|g_{u_i}\|^2 &= \gamma_1^2 \|X_{u_i}\|^2; & \|g_s\|^2 &= \varepsilon\gamma_1'^2 + \|\gamma_2'\|^2 + \gamma_3'^2 = \|\gamma'\|^2; \\ \langle g_{u_i}, g_s \rangle &= \gamma_1 \gamma_1' \langle X, X_{u_i} \rangle = 0; & \langle g_{u_i u_i}, g_{u_j} \rangle &= \gamma_1^2 \langle X_{u_i u_i}, X_{u_j} \rangle; \\ \langle g_{u_i u_i}, g_s \rangle &= \gamma_1 \gamma_1' \langle X_{u_i u_i}, X \rangle = -\gamma_1 \gamma_1' \|X_{u_i}\|^2; & \langle g_{ss}, g_{u_i} \rangle &= \gamma_1'' \gamma_1 \langle X_{u_i}, X \rangle = 0; \\ \langle g_{ss}, g_s \rangle &= \varepsilon\gamma_1'' \gamma_1' + \langle \gamma_2'', \gamma_2' \rangle + \gamma_3'' \gamma_3' = \langle \gamma'', \gamma' \rangle = \left[\frac{\|\gamma'\|^2}{2} \right]'; \\ \langle g_{u_i u_i}, k(\pi_1 \circ g) \rangle &= k\gamma_1^2 \langle X_{u_i u_i}, X \rangle = -k\gamma_1^2 \|X_{u_i}\|^2; \\ \langle g_{ss}, k(\pi_1 \circ g) \rangle &= k(\varepsilon\gamma_1'' \gamma_1 + \langle \gamma_2'', \gamma_2' \rangle) = -k(\varepsilon\gamma_1'^2 + \|\gamma_2'\|^2). \end{aligned}$$

Dessa forma, como g é umbílica, existe um campo normal η tal que

$$\begin{cases} g_{u_i u_i} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle g_{u_i u_i}, g_{u_j} \rangle}{\|g_{u_j}\|^2} g_{u_j} - \frac{\langle g_{u_i u_i}, g_s \rangle}{\|g_s\|^2} g_s - \langle g_{u_i u_i}, k(\pi_1 \circ g) \rangle \frac{k(\pi_1 \circ g)}{\|k(\pi_1 \circ g)\|^2} &= \langle g_{u_i}, g_{u_i} \rangle \eta; \\ g_{ss} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle g_{ss}, g_{u_j} \rangle}{\|g_{u_j}\|^2} g_{u_j} - \frac{\langle g_{ss}, g_s \rangle}{\|g_s\|^2} g_s - \langle g_{ss}, k(\pi_1 \circ g) \rangle \frac{k(\pi_1 \circ g)}{\|k(\pi_1 \circ g)\|^2} &= \langle g_s, g_s \rangle \eta. \end{cases}$$

Mas as igualdades acima são equivalentes às seguintes igualdades:

$$\begin{cases} g_{u_i u_i} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\gamma_1' \langle X_{u_i u_i}, X_{u_j} \rangle}{\gamma_1' \|X_{u_j}\|^2} g_{u_j} + \frac{\gamma_1 \gamma_1' \|X_{u_i}\|^2}{\|\gamma'\|^2} g_s + k \gamma_1^2 \|X_{u_i}\|^2 (\pi_1 \circ g) & = \gamma_1^2 \|X_{u_i}\|^2 \eta; \\ g_{ss} - \left[\frac{\|\gamma'\|^2}{2} \right]' \frac{g_s}{\|\gamma'\|^2} + k (\varepsilon \gamma_1'^2 + \|\gamma_2'\|^2) (\pi_1 \circ g) & = \|\gamma'\|^2 \eta. \end{cases}$$

Assim, chamando $\varphi := \|g_s\|^2 = \|\gamma'\|^2$, conclui-se que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma_1^2 \|X_{u_i}\|^2} \left[g_{u_i u_i} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle X_{u_i u_i}, X_{u_j} \rangle}{\|X_{u_j}\|^2} g_{u_j} + \frac{\gamma_1 \gamma_1' \|X_{u_i}\|^2}{\varphi} g_s \right] + k (\pi_1 \circ g) = \\ & = \frac{1}{\varphi} \left[g_{ss} - \frac{\varphi'}{2\varphi} g_s + k (\varepsilon \gamma_1'^2 + \|\gamma_2'\|^2) (\pi_1 \circ g) \right] = \frac{1}{\varphi} \left[g_{ss} - \frac{\varphi'}{2\varphi} g_s - k \gamma_3'^2 (\pi_1 \circ g) \right] + k (\pi_1 \circ g), \end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma_1^2 \|X_{u_i}\|^2} \left[g_{u_i u_i} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle X_{u_i u_i}, X_{u_j} \rangle}{\|X_{u_j}\|^2} g_{u_j} + \frac{\gamma_1 \gamma_1' \|X_{u_i}\|^2}{\varphi} g_s \right] = \\ & = \frac{1}{\varphi} \left[g_{ss} - \frac{\varphi'}{2\varphi} g_s - k \gamma_3'^2 (\pi_1 \circ g) \right]. \quad (6.5) \end{aligned}$$

Podemos desenvolver separadamente cada lado da igualdade acima.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma_1^2 \|X_{u_i}\|^2} \left[g_{u_i u_i} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle X_{u_i u_i}, X_{u_j} \rangle}{\|X_{u_j}\|^2} g_{u_j} + \frac{\gamma_1 \gamma_1' \|X_{u_i}\|^2}{\varphi} g_s \right] = \\ & = \frac{1}{\gamma_1^2 \|X_{u_i}\|^2} \left[(\gamma_1 X_{u_i u_i}, 0, 0) - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle X_{u_i u_i}, X_{u_j} \rangle}{\|X_{u_j}\|^2} (\gamma_1 X_{u_j}, 0, 0) + \frac{\gamma_1 \gamma_1' \|X_{u_i}\|^2}{\varphi} (\gamma_1' X, \gamma_2', \gamma_3') \right] = \\ & = \frac{1}{\gamma_1^2 \|X_{u_i}\|^2} \left[\gamma_1 \left(X_{u_i u_i} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle X_{u_i u_i}, X_{u_j} \rangle}{\|X_{u_j}\|^2} X_{u_j}, 0, 0 \right) + \frac{\gamma_1 \gamma_1' \|X_{u_i}\|^2}{\varphi} (\gamma_1' X, \gamma_2', \gamma_3') \right] = \\ & = \frac{1}{\gamma_1 \|X_{u_i}\|^2} (-\varepsilon \|X_{u_i}\|^2 X, 0, 0) + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 \varphi} (\gamma_1' X, \gamma_2', \gamma_3') = \frac{1}{\varphi} \left(\left[\frac{\gamma_1'^2}{\gamma_1} - \frac{\varepsilon \varphi}{\gamma_1} \right] X, \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_2', \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_3' \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi} \left[g_{ss} - \frac{\varphi'}{2\varphi} g_s - k \gamma_3'^2 (\pi_1 \circ g) \right] = \frac{1}{\varphi} \left[(\gamma_1'' X, \gamma_2'', \gamma_3'') - \frac{\varphi'}{2\varphi} (\gamma_1' X, \gamma_2', \gamma_3') - k \gamma_3'^2 (\gamma_1' X, \gamma_2', 0) \right] = \\ & = \frac{1}{\varphi} \left(\left[\gamma_1'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_1' - k \gamma_3'^2 \gamma_1 \right] X, \gamma_2'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_2' - k \gamma_3'^2 \gamma_2, \gamma_3'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_3' \right). \end{aligned}$$

Juntando os lados da igualdade (6.5) que foram desenvolvidos separadamente temos:

$$\begin{cases} \frac{\gamma_1'^2 - \varepsilon \varphi}{\gamma_1} & = \gamma_1'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_1' - k \gamma_3'^2; \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_2' & = \gamma_2'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_2' - k \gamma_3'^2 \gamma_2; \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_3' & = \gamma_3'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_3'. \end{cases}$$

Juntando o sistema acima com a condição $\varepsilon\gamma_1^2 + \|\gamma_2\|^2 = \frac{1}{k}$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \gamma_1'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1}\right) \gamma_1' - k\gamma_3'^2 \gamma_1 + \frac{\varepsilon\varphi}{\gamma_1} = 0; \\ \gamma_2'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1}\right) \gamma_2' - k\gamma_3'^2 \gamma_2 = 0; \\ \gamma_3'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1}\right) \gamma_3' + k_2\gamma_3'^2 \gamma_3 = 0; \\ \varepsilon\gamma_1^2 + \|\gamma_2\|^2 = \frac{1}{k}. \end{cases}$$

(II): Como $g(I \times V) \subset \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$, então $k(\pi_1 \circ g)$ é um campo ortogonal a g e $2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k}$.

Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{O}_k^{n-m+1} \times \mathbb{R}$ a curva dada por $\gamma(s) := (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), \gamma_4(s))$, em que as duas primeiras coordenadas são vetores tipo luz cujo produto interno é 1. Logo,

$$\begin{aligned} g_{u_i} &= (0, -\gamma_1 \langle v, u_i \rangle, \gamma_1 u_i, 0, 0); & g_s &= \left(\gamma_1', \gamma_2' - \gamma_1' \frac{\|v\|^2}{2}, \gamma_1' v, \gamma_3', \gamma_4' \right); \\ g_{u_i u_j} &= \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ (0, -\gamma_1, 0, 0, 0), & i = j; \end{cases} & g_{ss} &= \left(\gamma_1'', \gamma_2'' - \gamma_1'' \frac{\|v\|^2}{2}, \gamma_1'' v, \gamma_3'', \gamma_4'' \right); \\ k(\pi_1 \circ g) &= k \left(\gamma_1, \gamma_2 - \gamma_1 \frac{\|v\|^2}{2}, \gamma_1 v, \gamma_3, 0 \right); & \|k(\pi_1 \circ g)\|^2 &= k; \\ \|g_{u_i}\|^2 &= \gamma_1^2; & \langle g_{u_i}, g_s \rangle &= -\gamma_1 \gamma_1' \langle v, u_i \rangle + \gamma_1 \gamma_1' \langle v, u_i \rangle = 0; \\ \langle g_{u_i u_i}, g_{u_j} \rangle &= 0; & \langle g_{u_i u_i}, g_s \rangle &= -\gamma_1 \gamma_1'; \\ \langle g_{u_i u_i}, k(\pi_1 \circ g) \rangle &= -k\gamma_1^2; & \langle g_{u_i u_i}, k_2(\pi_2 \circ g) \rangle &= 0; \\ \|g_s\|^2 &= 2\gamma_1' \gamma_2' - \cancel{\gamma_1'^2 \|v\|^2} + \cancel{\gamma_1'^2 \|v\|^2} + \gamma_3'^2 + \gamma_4'^2 = \|\gamma'\|^2; \\ \langle g_{ss}, g_{u_i} \rangle &= -\gamma_1'' \gamma_1 \langle v, u_i \rangle + \gamma_1'' \gamma_1 \langle v, u_i \rangle = 0; \\ \langle g_{ss}, g_s \rangle &= \gamma_1'' \gamma_2' + \gamma_1' \gamma_2'' - \cancel{\gamma_1'' \gamma_1' \|v\|^2} + \cancel{\gamma_1' \gamma_1'' \|v\|^2} + \gamma_3'' \gamma_3' + \langle \gamma_4'', \gamma_4' \rangle = \left[\frac{\|\gamma'\|^2}{2} \right]'; \\ \langle g_{ss}, k(\pi_1 \circ g) \rangle &= k \left(\gamma_1'' \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2'' - \cancel{\gamma_1'' \gamma_1 \|v\|^2} + \cancel{\gamma_1' \gamma_1'' \|v\|^2} + \gamma_3'' \gamma_3 \right) = \\ &= -k \left(2\gamma_1' \gamma_2' + \gamma_3'^2 \right). \end{aligned}$$

Assim, como g é umbílica, existe um campo normal η tal que

$$\begin{cases} g_{u_i u_i} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle g_{u_i u_i}, g_{u_j} \rangle}{\|g_{u_j}\|^2} g_{u_j} - \frac{\langle g_{u_i u_i}, g_s \rangle}{\|g_s\|^2} g_s - \langle g_{u_i u_i}, k(\pi_1 \circ g) \rangle \frac{k(\pi_1 \circ g)}{\|k(\pi_1 \circ g)\|^2} = \langle g_{u_i}, g_{u_i} \rangle \eta; \\ g_{ss} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle g_{ss}, g_{u_j} \rangle}{\|g_{u_j}\|^2} g_{u_j} - \frac{\langle g_{ss}, g_s \rangle}{\|g_s\|^2} g_s - \langle g_{ss}, k(\pi_1 \circ g) \rangle \frac{k(\pi_1 \circ g)}{\|k(\pi_1 \circ g)\|^2} = \langle g_s, g_s \rangle \eta. \end{cases}$$

Mas as igualdades acima são equivalentes às seguintes igualdades:

$$\begin{cases} g_{u_i u_i} + \frac{\gamma_1 \gamma_1'}{\|\gamma'\|^2} g_s + k\gamma_1^2 (\pi_1 \circ g) = \gamma_1^2 \eta; \\ g_{ss} - \left[\frac{\|\gamma'\|^2}{2} \right]' \frac{g_s}{\|\gamma'\|^2} + k \left(2\gamma_1' \gamma_2' + \gamma_3'^2 \right) (\pi_1 \circ g) = \|\gamma'\|^2 \eta. \end{cases}$$

Assim, se $\varphi := \|g_s\|^2 = \|\gamma'\|^2$, conclui-se que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_1^2} \left[g_{u_i u_i} + \frac{\gamma_1 \gamma_1'}{\varphi} g_s \right] + k(\pi_1 \circ g) &= \frac{1}{\varphi} \left[g_{ss} - \frac{\varphi'}{2\varphi} g_s + k \left(2\gamma_1' \gamma_2' + \gamma_3'^2 \right) (\pi_1 \circ g) \right] = \\ &= \frac{1}{\varphi} \left[g_{ss} - \frac{\varphi'}{2\varphi} g_s - k\gamma_4'^2 (\pi_1 \circ g) \right] + k(\pi_1 \circ g), \end{aligned}$$

ou melhor,

$$\frac{1}{\gamma_1^2} \left[g_{u_i u_i} + \frac{\gamma_1 \gamma_1'}{\varphi} g_s \right] = \frac{1}{\varphi} \left[g_{ss} - \frac{\varphi'}{2\varphi} g_s + \gamma_4'^2 (k_2(\pi_2 \circ g) - k(\pi_1 \circ g)) \right]. \quad (6.6)$$

Podemos desenvolver separadamente cada lado da igualdade acima.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_1^2} \left[g_{u_i u_i} + \frac{\gamma_1 \gamma_1'}{\varphi} g_s \right] &= \frac{1}{\gamma_1^2} \left[(0, -\gamma_1, 0, 0, 0) + \frac{\gamma_1 \gamma_1'}{\varphi} \left(\gamma_1', \gamma_2' - \gamma_1' \frac{\|v\|^2}{2}, \gamma_1' v, \gamma_3', \gamma_4' \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\varphi} \left(\frac{\gamma_1'^2}{\gamma_1}, \frac{\gamma_1' \gamma_2'}{\gamma_1} - \frac{\|v\|^2 \gamma_1'^2}{2\gamma_1} - \frac{\varphi}{\gamma_1}, \frac{\gamma_1'^2}{\gamma_1} v, \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_3', \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_4' \right). \\ \frac{1}{\varphi} \left[g_{ss} - \frac{\varphi'}{2\varphi} g_s + \gamma_4'^2 (k_2(\pi_2 \circ g) - k(\pi_1 \circ g)) \right] &= \\ &= \frac{1}{\varphi} \left\{ \left(\gamma_1'', \gamma_2'' - \gamma_1'' \frac{\|v\|^2}{2}, \gamma_1'' v, \gamma_3'', \gamma_4'' \right) - \frac{\varphi'}{2\varphi} \left(\gamma_1', \gamma_2' - \gamma_1' \frac{\|v\|^2}{2}, \gamma_1' v, \gamma_3', \gamma_4' \right) - \right. \\ &\quad \left. - k \left(\gamma_1, \gamma_2 - \gamma_1 \frac{\|v\|^2}{2}, \gamma_1 v, \gamma_3, 0 \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{\varphi} \left(\gamma_1'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_1' - k\gamma_4'^2 \gamma_1, \gamma_2'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_2' - k\gamma_4'^2 \gamma_2 - \left[\gamma_1'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_1' - k\gamma_4'^2 \gamma_1 \right] \frac{\|v\|^2}{2}, \right. \\ &\quad \left. \left[\gamma_1'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_1' - k\gamma_4'^2 \gamma_1 \right] v, \gamma_3'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_3' - k\gamma_4'^2 \gamma_3, \gamma_4'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_4' \right). \end{aligned}$$

Juntando os lados da igualdade (6.6) que foram desenvolvidos separadamente temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma_1'^2}{\gamma_1} = \gamma_1'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_1' - k\gamma_4'^2 \gamma_1, \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_2' - \frac{\gamma_1'^2}{\gamma_1} \cdot \frac{\|v\|^2}{2} - \frac{\varphi}{\gamma_1} = \gamma_2'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_2' - k\gamma_4'^2 \gamma_2 - \left[\gamma_1'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_1' - k\gamma_4'^2 \gamma_1 \right] \frac{\|v\|^2}{2}, \\ \frac{\gamma_1'^2}{\gamma_1} v = \left[\gamma_1'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_1' - k\gamma_4'^2 \gamma_1 \right] v, \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_3' = \gamma_3'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_3' - k\gamma_4'^2 \gamma_3, \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_4' = \gamma_4'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_4', \end{array} \right.$$

ou melhor,

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_1' - k\gamma_4'^2 \gamma_1 = 0, \\ \gamma_2'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_2' - k\gamma_4'^2 \gamma_2 + \frac{\varphi}{\gamma_1} = 0, \\ \gamma_3'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_3' - k\gamma_4'^2 \gamma_3 = 0, \\ \gamma_4'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_4' = 0; \\ 2\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k}. \end{array} \right.$$

□

6.2 Os tensores \mathbf{R} , \mathbf{S} e \mathbf{T} em $\mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$

Sejam $f: M^m \rightarrow \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica e $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{n+2} \supset \mathbb{O}_k^n \times \mathbb{R}$. Assim,

$$\pi_2(f_* X) = \langle f_* X, e_{n+2} \rangle e_{n+2} \quad \text{e} \quad \pi_2(\zeta) = \langle \zeta, e_{n+2} \rangle e_{n+2},$$

para quaisquer $X \in TM$ e $\zeta \in T^\perp M$.

Sejam também $T(x)$ a projeção ortogonal de e_{n+2} sobre $T_x M$ e $\xi(x)$ a projeção ortogonal de e_{n+2} sobre $T_x^\perp M$, ou seja, $f_* T := (e_{n+2})^T$ e $\xi := (e_{n+2})^\perp$. Dessa forma

$$\pi_2(f_* X) = \langle X, T \rangle f_* T + \langle X, T \rangle \xi \quad \text{e} \quad \pi_2(\zeta) = \langle \zeta, \xi \rangle f_* T + \langle \zeta, \xi \rangle \xi.$$

Portanto

$$\mathbf{R}(X) = \langle X, T \rangle T, \quad \mathbf{S}(X) = \langle X, T \rangle \xi, \quad \mathbf{S}^t(\zeta) = \langle \zeta, \xi \rangle T, \quad \mathbf{T}(\zeta) = \langle \zeta, \xi \rangle \xi,$$

para quaisquer $X \in TM$, $\zeta \in T^\perp M$.

6.3 Imersões de rotação umbílicas em $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$

Sejam $n \in \{m, m+1\}$, $\mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{R}$ e $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ uma base ortonormal de \mathbb{E}^{n+2} tal que $\{0\} \times \mathbb{R} = \text{ger}\{e_{n+2}\}$. Consideremos

$$\mathbb{E}^{n-m+2} := \begin{cases} \text{ger}\{e_{m+1}, e_{m+2}\} = \text{ger}\{e_{n+1}, e_{n+2}\}, & \text{se } n = m; \\ \text{ger}\{e_{m+1}, e_{m+2}, e_{m+3}\} = \text{ger}\{e_n, e_{n+1}, e_{n+2}\}, & \text{se } n = m+1; \end{cases}$$

e $\mathbb{E}^{n-m+3} := \text{ger}\{e_1\} \oplus \mathbb{E}^{n-m+2}$ dois subespaços vetoriais de \mathbb{E}^{n+2} . Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^{n-m+3}$ uma curva suave dada por

$$\gamma(s) = \begin{cases} (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)), & \text{se } n = m; \\ (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), \gamma_4(s)), & \text{se } n = m+1; \end{cases}$$

em que $\gamma_1(s) := \langle \gamma(s), e_1 \rangle e_1$ e $\gamma_i(s) := \langle \gamma(s), e_{m+i-1} \rangle e_{m+i-1}$, para $i > 1$.

Suponhamos que $\gamma_1(s) > 0$ e que $\gamma'(s) \neq 0$, para qualquer $s \in I$, e seja $g: I \times \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n+2}$ a imersão de rotação sobre a curva γ cujo eixo de rotação é o espaço \mathbb{E}^{n-m+2} , ou seja,

$$g(s, x) := \begin{cases} (\gamma_1(s)x, \gamma_2(s), \gamma_3(s)), & \text{se } n = m; \\ (\gamma_1(s)x, \gamma_2(s), \gamma_3(s), \gamma_4(s)), & \text{se } n = m+1; \end{cases}$$

em que $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$.

Lema 6.5. *A imersão g é totalmente geodésica se, e somente se, reparametrizando γ se necessário, g é dada por*

$$g(s, x) = \begin{cases} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{k}} x, 0, \pm s + b \right), & \text{se } n = m; \\ \left(\pm \frac{1}{\sqrt{k}} x, 0, 0, \pm s + b \right), & \text{se } n = m+1; \end{cases} \quad (6.7)$$

ou por

$$g(s, x) = \begin{cases} \left(\frac{\cos(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}} x, \frac{\sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}}, b \right), & \text{se } n = m; \\ \left(\frac{\cos(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}} x, \frac{\sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}} \cdot (\cos r, \sin r), b \right), & \text{se } n = m+1. \end{cases} \quad (6.8)$$

Demonstração. Faremos apenas o caso em que $n = m + 1$, sendo o outro caso análogo e mais simples.

Se γ é dada como em (6.7) então $g = (g_1(x), g_2(s))$, em que $g_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma geodésica e $g_1(\mathbb{S}^{m-1}) \subset \mathbb{S}_k^n$ é totalmente geodésica. Já se g é dada por (6.8), então g parametriza uma subvariedade totalmente geodésica em $\mathbb{S}_k^n \times \{b\} \subset \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$.

Inversamente, suponhamos que g seja totalmente geodésica. Assim, com contas análogas às feitas na Proposição 6.4, e sendo $\varphi := \|\gamma'\|^2$, podemos ver que γ satisfaz o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma_1'^2 - \varphi}{\gamma_1} + k\gamma_1 = 0 \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_2' + k\gamma_2 = 0 \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_3' + k\gamma_3 = 0 \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_4' = 0 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_1' - k\gamma_4'^2 \gamma_1 + k\gamma_1; \\ \gamma_2'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_2' - k\gamma_4'^2 \gamma_2 + k\gamma_2; \\ \gamma_3'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_3' - k\gamma_4'^2 \gamma_3 + k\gamma_3; \\ \gamma_4'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_4'; \\ \gamma_4'' - \frac{\varphi'}{2\varphi} \gamma_4'; \end{array} \right.$$

Supondo γ ppca., o sistema anterior é equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma_1'^2 - 1}{\gamma_1} + k\gamma_1 = 0 \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_2' + k\gamma_2 = 0 \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_3' + k\gamma_3 = 0 \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_4' = 0 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1'' - k\gamma_4'^2 \gamma_1 + k\gamma_1; \\ \gamma_2'' - k\gamma_4'^2 \gamma_2 + k\gamma_2; \\ \gamma_3'' - k\gamma_4'^2 \gamma_3 + k\gamma_3; \\ \gamma_4''; \\ \gamma_4''; \end{array} \right. \quad (6.9)$$

Da penúltima linha conclui-se que $\gamma_4(s) = as + b$ e que ou γ_1 é constante em I , ou γ_4 é constante em I .

Caso γ_1 seja constante: Neste caso o sistema, pelo sistema (6.9),

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\gamma_1} + k\gamma_1 = 0 \\ k\gamma_2 = 0 \\ k\gamma_3 = 0 \\ as + b = \gamma_4 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} -ka^2\gamma_1 + k\gamma_1; \\ \gamma_2'' - ka^2\gamma_2 + k\gamma_2; \\ \gamma_3'' - ka^2\gamma_3 + k\gamma_3; \\ \gamma_4; \\ \gamma_4; \end{array} \right. \Leftrightarrow \gamma(s) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{k}}, 0, 0, \pm s + b \right).$$

Caso γ_4 seja constante: Neste caso o sistema, pelo sistema (6.9),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma_1'^2 - 1}{\gamma_1} + k\gamma_1 = 0 \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_2' + k\gamma_2 = 0 \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_3' + k\gamma_3 = 0 \\ \gamma_4 = b \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1'' + k\gamma_1; \\ \gamma_2'' + k\gamma_2; \\ \gamma_3'' + k\gamma_3; \\ b; \\ \frac{1}{k}. \end{array} \right.$$

As equações $\gamma_i'' + k\gamma_i = 0$, são equivalentes a $\gamma_i = a_i \cos(\sqrt{k}s) + b_i \sin(\sqrt{k}s)$, para $i \in \{1, 2, 3\}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_1'^2 - 1}{\gamma_1} + k\gamma_1 = 0 &\Leftrightarrow k \left[a_1^2 \sin^2(\sqrt{k}s) + b_1^2 \cos^2(\sqrt{k}s) - a_1 b_1 \sin(2\sqrt{k}s) \right] - 1 + \\ &+ k \left[a_1^2 \cos^2(\sqrt{k}s) + b_1^2 \sin^2(\sqrt{k}s) + a_1 b_1 \sin(2\sqrt{k}s) \right] = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + b_1^2 = \frac{1}{k} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_1 = \frac{\cos(t)}{\sqrt{k}} \quad \text{e} \quad b_1 = -\frac{\sin(t)}{\sqrt{k}}, \quad \text{para algum } t \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\gamma_1(s) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{k}} \cos(\sqrt{k}s) - \frac{\sin(t)}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}s) = \frac{\cos(t + \sqrt{k}s)}{\sqrt{k}},$$

ou seja, podemos reparametrizar a curva γ de forma que

$$\gamma_1(s) = \frac{\cos(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}}.$$

Com essa reparametrização,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \gamma_i' + k\gamma_i &= 0 \Leftrightarrow -k \sin(\sqrt{k}s) \left[-a_i \sin(\sqrt{k}s) + b_i \cos(\sqrt{k}s) \right] + \\ &+ k \cos(\sqrt{k}s) \left[a_i \cos(\sqrt{k}s) + b_i \sin(\sqrt{k}s) \right] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_i \sin^2(\sqrt{k}s) - b_i \sin(\sqrt{k}s) \cos(\sqrt{k}s) + a_i \cos^2(\sqrt{k}s) + \\ &+ b_i \sin(\sqrt{k}s) \cos(\sqrt{k}s) = 0 \Leftrightarrow a_i = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\gamma_i = b_i \sin(\sqrt{k}s)$, para $i \in \{2, 3\}$.

Como $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k}$, então $\frac{1}{k} \cos^2(\sqrt{k}s) + (b_2^2 + b_3^2) \sin^2(\sqrt{k}s) = \frac{1}{k}$, ou seja, $b_2^2 + b_3^2 = \frac{1}{k}$. Portanto,

$$g(s, x) = \left(\frac{\cos(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}} \cdot x, \frac{\sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}} \cdot (\cos r, \sin r), b \right). \quad \square$$

Corolário 6.6. *Se g é totalmente geodésica, então $\mathbf{S} = 0$.*

Demonstração. Pelo lema anterior, se g é totalmente geodésica, então ou

$$g(s, x) = \begin{cases} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{k}} x, 0, \pm s + b \right), & \text{se } n = m; \\ \left(\pm \frac{1}{\sqrt{k}} x, 0, 0, \pm s + b \right), & \text{se } n = m + 1; \end{cases}$$

ou

$$g(s, x) = \begin{cases} \left(\frac{\cos(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}} \cdot x, \frac{\sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}}, b \right), & \text{se } n = m; \\ \left(\frac{\cos(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}} \cdot x, \frac{\sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}} \cdot (\cos r, \sin r), b \right), & \text{se } n = m + 1. \end{cases}$$

No primeiro caso, $\pi_2 \left(\frac{\partial}{\partial s} g(s, x) \right) = \frac{\partial}{\partial s} g(s, x)$. Já no segundo caso, $\pi_2 \left(\frac{\partial}{\partial s} g(s, x) \right) = 0$. Além disso, em ambos os casos, $\pi_2 g_* X = 0$, para qualquer $X \in T_x \mathbb{S}^{m-1}$. Portanto $\mathbf{S} = 0$. \square

Lema 6.7. *Suponhamos que g seja umbílica e que γ_3 não seja constante, se $n = m$, ou que γ_4 não seja constante, se $n = m + 1$. Nessas condições, g é totalmente geodésica se, e somente se, γ_1 é constante em algum intervalo aberto $J \subset I$.*

Demonstração. Pelo Lema 6.5, se g é totalmente geodésica, $n = m + 1$ e γ_4 não é constante, então γ_1 é constante. O mesmo vale se g é totalmente geodésica, $n = m$ e γ_3 não é constante.

Suponhamos agora que g seja umbílica e que γ_1 seja constante. Suponhamos também que $n = m + 1$, sendo o outro caso análogo e mais simples. Nessas condições, pela Proposição 6.4, vale o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \gamma_1'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_1' + \frac{\varphi}{\gamma_1} - k\gamma_4'^2 \gamma_1 = 0; \\ \gamma_2'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_2' - k\gamma_4'^2 \gamma_2 = 0; \\ \gamma_3'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_3' - k\gamma_4'^2 \gamma_3 = 0; \\ \gamma_4'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) \gamma_4' = 0; \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Como γ_1 é constante, e supondo γ ppca., então o sistema anterior é equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1(s) = c; \\ \frac{1}{c} - k\gamma_4'^2 c = 0; \\ \gamma_2'' - k\gamma_4'^2 \gamma_2 = 0; \\ \gamma_3'' - k\gamma_4'^2 \gamma_3 = 0; \\ \gamma_4'' = 0; \\ c^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k}. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1(s) = c; \\ \gamma_4(s) = \pm \frac{s}{\sqrt{k}c} + b; \\ \gamma_2(s) = a_2 e^{s/c} + b_2 e^{-s/c}; \\ \gamma_3(s) = a_3 e^{s/c} + b_3 e^{-s/c}; \\ c^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k}. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1(s) = c = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}; \\ \gamma_2(s) = 0; \\ \gamma_3(s) = 0; \\ \gamma_4(s) = \pm s + b. \end{array} \right.$$

Dessa forma, pelo Lema 6.5, g é totalmente geodésica.

Suponhamos agora γ_1 seja constante em um intervalo aberto $J \subset I$. Neste caso, a imersão g restrita a $J \times \mathbb{S}^n$ é totalmente geodésica. Dessa forma, pelo Lema 6.5,

$$\gamma(s) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{k}}, 0, 0, \pm s + b \right), \quad \forall s \in J.$$

Por outro lado, pela unicidade das soluções do sistema (6.3),

$$\gamma(s) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{k}}, 0, 0, \pm s + b \right), \quad \forall s \in I.$$

Portanto, novamente pelo Lema 6.5, g é totalmente geodésica em $I \times \mathbb{S}^n$. \square

Proposição 6.8. *Suponhamos que g seja umbílica e não totalmente geodésica e que γ_4 não seja constante, se $n = m + 1$, ou que γ_3 não seja constante, se $n = m$. Nessas condições, para cada intervalo $J \subset I$ no qual γ_1' não se anula, existem $\theta \in \mathbb{R}$ e $(p, q) \in \mathcal{S}$ tais que $\gamma|_J$ pode ser reparametrizada por*

$$\gamma(s) = \begin{cases} \left(s, \frac{a_2}{h_{p,q}(s)} + b_2 h_{p,q}(s), \frac{a_3}{h_{p,q}(s)} + b_3 h_{p,q}(s), \pm \frac{\ln(h_{p,q}(s))}{\sqrt{k}} + b \right), & \text{se } n = m + 1; \\ \left(s, \frac{a_2}{h_{p,(p-1/k)^2}(s)} + b_2 h_{p,(p-1/k)^2}(s), \pm \frac{\ln(h_{p,(p-1/k)^2}(s))}{\sqrt{k}} + b \right), & \text{se } n = m; \end{cases} \quad (6.10)$$

em que $J \subset (0, \sqrt{p - \sqrt{q}})$, $h_{p,q}$ é dada por (6.1) e

$$\begin{aligned} a_2 &:= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(\frac{1}{k} - p \right) \cos \theta \mp \sqrt{q - \left(p - \frac{1}{k} \right)^2} \sin \theta \right], \\ a_3 &:= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(\frac{1}{k} - p \right) \sin \theta \pm \sqrt{q - \left(p - \frac{1}{k} \right)^2} \cos \theta \right], \\ (b_2, b_3) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \theta, \sin \theta) \quad e \quad n = m \Rightarrow \theta = 0. \end{aligned}$$

Demonstração. Faremos apenas o caso em que $n = m + 1$ e γ_4 não é constante, sendo o outro caso análogo e mais simples.

Pelo Lema 6.7, γ_1 não é constante em nenhum intervalo aberto. Assim, para cada intervalo aberto $J \subset I$ no qual γ_1' não se anula, podemos reparametrizar $\gamma|_J$ de forma que $\gamma_1(s) = s > 0$.

Mas o sistema (6.3) com $\gamma_1(s) = s$ é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \gamma_1(s) = s; \\ \frac{\varphi'}{2\varphi} + kc^2s^3\varphi + \frac{1-\varphi}{s} = 0; \\ \gamma_2'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{1}{s} \right) \gamma_2' - kc^2s^2\varphi\gamma_2 = 0; \\ \gamma_3'' - \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{1}{s} \right) \gamma_3' - kc^2s^2\varphi\gamma_3 = 0; \\ \gamma_4' = c \cdot s\sqrt{\varphi}; \\ s^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k}. \end{cases} \quad (6.11)$$

Observação: $c \neq 0$, pois γ_4 não é constante.

Utilizando a segunda equação do sistema acima obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'}{2\varphi} + kc^2\varphi s^3 + \frac{1-\varphi}{s} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\varphi'}{2\varphi} + \left(kc^2s^3 - \frac{1}{s} \right) \varphi + \frac{1}{s} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\varphi'}{\varphi^2} + \frac{2}{s\varphi} = -2kc^2s^3 + \frac{2}{s} &\Leftrightarrow -(\varphi^{-1})' + \frac{2}{s}\varphi^{-1} = -2kc^2s^3 + \frac{2}{s} \Leftrightarrow \\ \stackrel{y=\varphi^{-1}}{\Leftrightarrow} y' - \frac{2y}{s} = 2kc^2s^3 - \frac{2}{s} &\Leftrightarrow \frac{y'}{s^2} - \frac{2y}{s^3} = 2kc^2s - \frac{2}{s^3} \Leftrightarrow \\ \stackrel{u=y/s^2}{\Leftrightarrow} u' = 2kc^2s - \frac{2}{s^3} &\Leftrightarrow u = kc^2s^2 + \frac{1}{s^2} + c_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = kc^2s^4 + c_2s^2 + 1 &\Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{kc^2s^4 + c_2s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Assim

$$\gamma_4' = cs\sqrt{\varphi} \Leftrightarrow \gamma_4' = \frac{cs}{\sqrt{kc^2s^4 + c_2s^2 + 1}} \Leftrightarrow \gamma_4 = \int \frac{cs}{\sqrt{kc^2s^4 + c_2s^2 + 1}} ds.$$

Chamando $p := -\frac{c_2}{2kc^2}$ e $q := p^2 - \frac{1}{kc^2}$, a última equação acima se torna

$$\gamma_4 = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \int \frac{s}{\sqrt{s^4 - 2ps^2 + p^2 - q}} ds = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \int \frac{s}{\sqrt{(p - s^2)^2 - q}} ds. \quad (6.12)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\varphi' &= -\frac{4kc^2s^3 + 2c_2s}{(kc^2s^4 + c_2s^2 + 1)^2} \Rightarrow \frac{\varphi'}{2\varphi} = -\frac{4kc^2s^3 + 2c_2s}{(kc^2s^4 + c_2s^2 + 1)^2} \cdot \frac{kc^2s^4 + c_2s^2 + 1}{2} = \\ &= -\frac{2kc^2s^3 + c_2s}{kc^2s^4 + c_2s^2 + 1} = -\frac{2s^3 - 2ps}{(p-s^2)^2 - q}.\end{aligned}$$

Dessa forma, a terceira e a quarta equações do sistema (6.11) se tornam

$$\begin{aligned}\gamma_i'' - \left(\frac{1}{s} - \frac{2s^3 - 2ps}{(p-s^2)^2 - q} \right) \cdot \gamma_i' - \frac{kc^2s^2}{kc^2s^4 + c_2s^2 + 1} \cdot \gamma_i &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma_i'' - \frac{s^4 - 2ps^2 + p^2 - q - 2s^4 + 2ps^2}{s[(p-s^2)^2 - q]} \cdot \gamma_i' - \frac{s^2}{(p-s^2)^2 - q} \cdot \gamma_i &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow s[(p-s^2)^2 - q] \gamma_i'' + (s^4 - p^2 + q) \gamma_i' - s^3 \gamma_i &= 0.\end{aligned}$$

Até agora, mostramos apenas que o sistema (6.11) é equivalente a

$$\begin{cases} \gamma_1(s) = s; \\ \varphi(s) = \|\gamma'(s)\|^2 = \frac{p^2 - q}{(p-s^2)^2 - q}; \\ s[(p-s^2)^2 - q] \gamma_2'' + (s^4 - p^2 + q) \gamma_2' - s^3 \gamma_2 = 0; \\ s[(p-s^2)^2 - q] \gamma_3'' + (s^4 - p^2 + q) \gamma_3' - s^3 \gamma_3 = 0; \\ \gamma_4 = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds; \\ s^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad q < p^2. \end{cases}$$

Aplicando o Lema A.2, o sistema acima fica equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \gamma_1(s) = s; \\ \varphi(s) = \|\gamma'(s)\|^2 = \frac{p^2 - q}{(p-s^2)^2 - q}; \\ \gamma_2(s) = a_2 e^{\int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds} + b_2 e^{-\int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds}; \\ \gamma_3(s) = a_3 e^{\int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds} + b_3 e^{-\int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds}; \\ \gamma_4 = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds; \\ s^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad q < p^2. \end{cases} \quad (6.13)$$

Substituindo γ_2 e γ_3 na última equação resulta

$$s^2 + (a_2^2 + a_3^2) e^{2\int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds} + 2(a_2b_2 + a_3b_3) + (b_2^2 + b_3^2) e^{-2\int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds} = \frac{1}{k},$$

ou seja,

$$s^2 + Ae^{\int \frac{2s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds} + B + Ce^{-\int \frac{2s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds} = 0,$$

em que

$$A := a_2^2 + a_3^2, \quad B := 2(a_2b_2 + a_3b_3) - \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad C := b_2^2 + b_3^2.$$

Dessa forma, se $u := s^2 - p$ e $E := -B - p$, então

$$Ae^{\int \frac{1}{\sqrt{u^2-q}} du} + Ce^{-\int \frac{1}{\sqrt{u^2-q}} dx} = -u + E. \quad (6.14)$$

Afirmação 1: $q \geq 0$.

De fato, se $q < 0$, então a integral $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-q}} du = \ln(u + \sqrt{u^2-q})$ está definida em todo o conjunto dos números reais (ver as contas da Subseção A.1.2). Dessa forma, por (6.14),

$$\begin{aligned} A(u + \sqrt{u^2-q}) + C(u + \sqrt{u^2-q})^{-1} &= -u + E \Rightarrow \\ \Rightarrow A(u + \sqrt{u^2-q})^2 + C &= (-u + E) \cdot (u + \sqrt{u^2-q}) \Rightarrow \\ \Rightarrow A(2u^2 + 2u\sqrt{u^2-q} - q) + C &= -u^2 + Eu + (E-u)\sqrt{u^2-q} \Rightarrow \\ \Rightarrow (2A+1)u^2 - Eu - Aq + C &= [E - (2A+1)u] \cdot \sqrt{u^2-q} \Rightarrow \\ \Rightarrow (2A+1)^2 u^4 - 2(2A+1)Eu^3 + [2(2A+1)(C-Aq) + E^2]u^2 - 2(C-Aq)Eu + \\ + (C-Aq)^2 &= [E^2 - 2(2A+1)Eu + (2A+1)^2 u^2] \cdot (u^2-q) \\ \Rightarrow \cancel{(2A+1)^2 u^4} - \cancel{2(2A+1)Eu^3} + [2(2A+1)(C-Aq) + E^2]u^2 - 2(C-Aq)Eu + \\ + (C-Aq)^2 &= \cancel{(2A+1)^2 u^4} - \cancel{2(2A+1)Eu^3} + [E^2 - (2A+1)^2 q]u^2 + 2(2A+1)Equ - E^2 q. \\ \therefore \begin{cases} 2(C-Aq) = -(2A+1)q; \\ (C-Aq)E = -(2A+1)Eq; \\ (C-Aq)^2 = -E^2 q. \end{cases} \end{aligned}$$

Dessa forma, se $E = 0$, então $C = Aq$ e $2A + 1 = 0$, o que contradiz o fato de $A \geq 0$. Já se $E \neq 0$, então $C - Aq = -(2A + 1)q$ e $2(C - Aq) = -(2A + 1)q$, o que também é uma contradição. \checkmark

Afirmação 2: $p > 0$.

De fato, se $p \leq 0$, então $u = s^2 - p$ é sempre positivo. Além disso, no intervalo (\sqrt{q}, ∞) , $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-q}} dx = \ln(u + \sqrt{u^2-q})$ (ver as contas da Subseção A.1.2). Assim, podemos chegar a uma contradição utilizando as mesmas contas da Afirmação 1. \checkmark

Sabendo que $q \geq 0$ e que $p > 0$, seja γ uma solução do sistema (6.13).

Caso $q = 0$:

Neste caso, para $u > 0$ e pela equação (6.14),

$$Au + Cu^{-1} = -u + E \Leftrightarrow (A+1)u^2 - Eu + C = 0 \Leftrightarrow C = 0, \quad E = 0 \quad \text{e} \quad A = -1.$$

Mas $A = a_2^2 + a_3^2$, logo u não pode ser maior do que 0, ou seja, $s^2 - p < 0$. Portanto devemos tomar s apenas dentro do intervalo $(-\sqrt{p}, \sqrt{p})$.

Para $s \in (-\sqrt{p}, \sqrt{p})$, sabemos que $u < 0$ e, pela equação (6.14),

$$-Au^{-1} - Cu = -u + E \Rightarrow (C-1)u^2 + Eu + A = 0 \Rightarrow A = 0, \quad E = 0 \quad \text{e} \quad C = 1.$$

Dessa forma $a_2 = a_3 = 0$, $B = -p = -\frac{1}{k}$ e existe θ tal que $(b_2, b_3) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Assim, utilizando a Tabela A.2, a função γ é dada por

$$\gamma(s) = \left(s, \sqrt{\frac{1}{k} - s^2} (\cos \theta, \sin \theta), \pm \frac{\ln \sqrt{\frac{1}{k} - s^2}}{\sqrt{k}} + d \right),$$

e o intervalo de definição de γ deve estar contido em $(0, \frac{1}{\sqrt{k}})$.

Neste caso, $(p, q) = (\frac{1}{k}, 0) \in \mathcal{I}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{h_{\frac{1}{k},0}(s)} + b_2 h_{\frac{1}{k},0}(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta \sqrt{2 \left(\frac{1}{k} - s^2 \right)} + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right) \cos \theta \mp \sqrt{0 - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right)^2} \sin \theta \right] \cdot \left[\sqrt{2 \left(\frac{1}{k} - s^2 \right)} \right]^{-1} = \\ &= \cos \theta \sqrt{\frac{1}{k} - s^2}. \end{aligned}$$

Analogamente, $\frac{a_3}{h_{\frac{1}{k},0}(s)} + b_3 h_{\frac{1}{k},0}(s) = \sin \theta \sqrt{\frac{1}{k} - s^2}$. Portanto a solução do sistema (6.13) é da forma dita no enunciado.

Caso $q > 0$:

Neste caso, por um argumento análogo ao feito na Afirmação 2, não podemos ter u positivo na equação (6.14). Assim, para $u < 0$, $s \in (0, \sqrt{p - \sqrt{q}})$ e, pela equação (6.14), vale a igualdade

$$\begin{aligned} A \left(\sqrt{u^2 - q} - u \right)^{-1} + C \left(\sqrt{u^2 - q} - u \right) &= -u + E \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A + C \left(\sqrt{u^2 - q} - u \right)^2 &= (E - u) \left(\sqrt{u^2 - q} - u \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A + C \left(2u^2 - q - 2u\sqrt{u^2 - q} \right) &= u^2 - Eu - (u - E)\sqrt{u^2 - q} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2C - 1)u^2 + Eu + A - qC &= [(2C - 1)u + E] \sqrt{u^2 - q} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cancel{(2C - 1)^2 u^4} + \cancel{2(2C - 1)Eu^3} + \left[E^2 + 2(2C - 1)(A - qC) \right] u^2 &+ 2(A - qC)Eu + \\ + (A - qC)^2 &= [(2C - 1)^2 u^2 + 2(2C - 1)Eu + E^2] \cdot (u^2 - q) = \\ = \cancel{(2C - 1)^2 u^4} + \cancel{2(2C - 1)Eu^3} + \left[E^2 - q(2C - 1)^2 \right] u^2 - 2q(2C - 1)Eu - qE^2. \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} 2(2C - 1)(A - qC) &= -q(2C - 1)^2, \\ (A - qC)E &= -q(2C - 1)E, \\ (A - qC)^2 &= -qE^2. \end{cases} \stackrel{q > 0}{\Rightarrow} \begin{cases} E = 0, \\ A = qC, \\ C = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{q}{2}. \end{cases}$$

Como $E = 0$ então, pela definição de E , valem as igualdades

$$-B - p = 0 \Rightarrow \frac{1}{k} - 2(a_2 b_2 + a_3 b_3) - p = 0 \Rightarrow a_2 b_2 + a_3 b_3 = \frac{1}{2k} - \frac{p}{2}.$$

Portanto

$$a_2 b_2 + a_3 b_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - p \right), \quad a_2^2 + a_3^2 = \frac{q}{2} \quad \text{e} \quad b_2^2 + b_3^2 = \frac{1}{2}.$$

Seja θ tal que $(b_2, b_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta, \sin \theta)$ e definamos $v := (\cos \theta, \sin \theta)$ e $w := (-\sin \theta, \cos \theta)$.

Dessa forma $\langle (a_2, a_3), v \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{k} - p \right)$, assim

$$a_2^2 + a_3^2 = \frac{q}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - p \right)^2 + \langle (a_2, a_3), w \rangle^2 \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{k} - p \right)^2 \leq q & \text{e} \\ \langle (a_2, a_3), w \rangle = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p \right)^2}. \end{cases}$$

Por outro lado, pelo sistema (6.13), $q < p^2$, logo

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{k} - p\right)^2 \leq q < p^2 \text{ e} \\ (a_2, a_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(\frac{1}{k} - p\right) (\cos \theta, \sin \theta) \pm \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p\right)^2} (-\sin \theta, \cos \theta) \right]. \end{cases}$$

Portanto $(p, q) \in \mathcal{I}$ e γ está definida como no enunciado. \square

Corolário 6.9. *Suponhamos que g seja umbílica e não totalmente geodésica e que γ_4 não seja constante, se $n = m + 1$, ou que γ_3 não seja constante, se $n = m$. Nessas condições, para cada intervalo aberto $J \subset I$ em que γ'_1 não se anula, existem $(p, q) \in \mathcal{I}$ tais que, a menos de um movimento rígido de $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ e reparametrizando $\gamma|_J$ se necessário, $g|_{J \times \mathbb{S}^{m-1}}$ é dada por*

$$g(s, x) = \begin{cases} \left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left[h_{p,q}(s) + \frac{\frac{1}{k} - p}{h_{p,q}(s)} \right], \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p\right)^2}}{h_{p,q}(s)}, \frac{\ln(h_{p,q}(s))}{\sqrt{k}} \right), & \text{se } n = m + 1; \\ \left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left[h_{p,q}(s) + \frac{\frac{1}{k} - p}{h_{p,q}(s)} \right], \frac{\ln(h_{p,q}(s))}{\sqrt{k}} \right), & \text{se } n = m \text{ e } q = \left(\frac{1}{k} - p\right)^2. \end{cases}$$

Demonstração. Faremos apenas o caso em que γ_4 não é constante e $n = m + 1$, sendo o outro caso análogo e mais simples. Pela proposição anterior, para cada intervalo $J \subset I$ no qual γ'_1 não se anula, existem $\theta \in \mathbb{R}$ e $(p, q) \in \mathcal{I}$ tais que $\gamma|_J$ é dada por

$$\left(s, \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(h_{p,q}(s) + \frac{\frac{1}{k} - p}{h_{p,q}(s)} \right) (\cos \theta, \sin \theta) \pm \frac{\sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p\right)^2}}{h_{p,q}(s)} (-\sin \theta, \cos \theta) \right], \pm \frac{\ln(h_{p,q}(s))}{\sqrt{k}} + b \right).$$

Seja A a isometria linear de $\mathbb{R}^{n+2} \supset \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ dada por

$$A(e_i) := \begin{cases} e_i, & \text{se } i \in \{1, \dots, m\}; \\ \cos \theta e_{m+1} + \sin \theta e_{m+2}, & \text{se } i = m + 1; \\ \mp \sin \theta e_{m+1} \pm \cos \theta e_{m+2}, & \text{se } i = m + 2; \\ \pm e_{m+3}, & \text{se } i = m + 3. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$A^{-1}g(s, x) - b e_{m+3} = \left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[h_{p,q}(s) + \frac{\frac{1}{k} - p}{h_{p,q}(s)} \right], \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p\right)^2}}{h_{p,q}(s)}, \frac{\ln(h_{p,q}(s))}{\sqrt{k}} \right).$$

Portanto o corolário é válido. \square

Corolário 6.10. *Seja g a imersão isométrica umbílica e não totalmente geodésica dada pelo corolário anterior. Nessas condições*

- (I) *A imersão g tem codimensão substancial igual a 1 se, e só se, $q = \left(\frac{1}{k} - p\right)^2$.*
- (II) *Se a codimensão de g é 1, ie. $q = \left(\frac{1}{k} - p\right)^2$, então,*

$$g(s, x) = \left(sx, \pm \sqrt{\frac{1}{k} - s^2}, 0, \frac{\ln(h_{p,(\frac{1}{k}-p)^2}(s)})}{\sqrt{k}} \right).$$

(III) $q = 0$ se, e só se, $q = \left(p - \frac{1}{k}\right)^2 = 0$.

Demonstração.

(I): Se $n = m$ então $q = \left(\frac{1}{k} - p\right)^2$ e a codimensão da imersão g é um. Suponhamos então que $n = m + 1$. Neste caso a codimensão substancial de g é um se, e somente se, existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{S}_k^m \subset \mathbb{S}_k^{m+1}$ tal que $g(s, x) \in \mathbb{S}_k^m \times \mathbb{R}$, para quaisquer (s, x) . Mas isso é equivalente a dizer que os os vetores

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left[h_{p,q}(s) + \frac{\left(\frac{1}{k} - p\right)}{h_{p,q}(s)} \right] e_{m+1} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p\right)^2}}{\sqrt{2} h_{p,q}(s)} e_{m+2}$$

são LD para todo s , ou seja, que $q = \left(\frac{1}{k} - p\right)^2$. •

(II): Precisamos mostrar apenas que

$$s^2 + \frac{1}{2} \left[h_{p,(p-1/k)^2}(s) + \frac{\frac{1}{k} - p}{h_{p,(p-1/k)^2}(s)} \right]^2 = \frac{1}{k}.$$

Mas

$$\begin{aligned} s^2 + \frac{1}{2} \left[h_{p,(p-1/k)^2}(s) + \frac{\frac{1}{k} - p}{h_{p,(p-1/k)^2}(s)} \right]^2 &= \frac{1}{k} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2s^2 + h_{p,(p-1/k)^2}^2(s) + \frac{2}{k} - 2p + \frac{\left(\frac{1}{k} - p\right)^2}{h_{p,(p-1/k)^2}^2(s)} &= \frac{2}{k} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2s^2 + p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - \left(p - \frac{1}{k}\right)^2} - 2p + \frac{\left(\frac{1}{k} - p\right)^2}{p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - \left(p - \frac{1}{k}\right)^2}} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[s^2 - p + \sqrt{(p - s^2)^2 - \left(p - \frac{1}{k}\right)^2} \right] \cdot \left[p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - \left(p - \frac{1}{k}\right)^2} \right] + & \\ + \left(\frac{1}{k} - p\right)^2 = 0 \Leftrightarrow -\cancel{(p - s^2)^2} + \cancel{(p - s^2)^2} - \cancel{\left(p - \frac{1}{k}\right)^2} + \cancel{\left(\frac{1}{k} - p\right)^2} &= 0. \end{aligned}$$

Como a última fórmula é verdadeira, então o item (II) também o é. •

(III): Como $q \geq \left(p - \frac{1}{k}\right)^2$, então $q = 0$ se, e somente se, $q = \left(p - \frac{1}{k}\right)^2 = 0$. • □

6.4 Classificação das imersões umbílicas em $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$

Para cada $(p, q) \in \mathcal{I} = \left\{ (p, q) \in \mathbb{R}^2 : \left(p - \frac{1}{k}\right)^2 \leq q < p^2 \right\}$ consideremos o intervalo $I_{p,q} := \left[-\sqrt{\frac{p^2 - q}{2p}}, \sqrt{\frac{p^2 - q}{2p}} \right]$.

Lema 6.11. Para cada $(p, q) \in \mathcal{I}$, $I_{p,q} \subset J_{p,q}$.

Demonstração. De fato, dado $(p, q) \in \mathcal{I}$, então $q < p^2$ logo

$$\sqrt{q} < p \Rightarrow p + \sqrt{q} < 2p \Rightarrow 0 < \sqrt{\frac{p + \sqrt{q}}{2p}} < 1 \Rightarrow \sqrt{p - \sqrt{q}} \cdot \sqrt{\frac{p + \sqrt{q}}{2p}} < \sqrt{p - \sqrt{q}}.$$

Portanto $\sqrt{\frac{p^2 - q}{2p}} < \sqrt{p - \sqrt{q}}$ e $I_{p,q} \subset J_{p,q}$. \square

Observação 6.12. Seja $\Psi: \mathbb{E}^{m+3} \rightarrow \mathbb{E}^{m+3}$ a isometria dada por

$$\Psi(x_1, \dots, x_{m+3}) = \left(x_1, \dots, x_m, A(x_{m+1}, x_{m+2}), -x_{m+3} + \frac{c}{\sqrt{k}} \right),$$

em que A é a isometria linear dada pela matriz

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{k} - p & \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p\right)^2} \\ \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p\right)^2} & -\left(\frac{1}{k} - p\right) \end{bmatrix}.$$

Dessa forma $A = A^{-1}$ e

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\left(\frac{1}{k} - p\right) h_{p,q}(s)}{\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right] \\ \frac{\sqrt{q - \left(p - \frac{1}{k}\right)^2} h_{p,q}(s)}{\sqrt{2q}} \end{bmatrix} &= \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \frac{\left(\frac{1}{k} - p\right)^2 h_{p,q}(s)}{q} + \frac{\frac{1}{k} - p}{h_{p,q}(s)} + h_{p,q}(s) - \frac{\left(\frac{1}{k} - p\right)^2 h_{p,q}(s)}{q} \\ \frac{\left(\frac{1}{k} - p\right) \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p\right)^2} h_{p,q}(s)}{q} + \frac{\sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p\right)^2}}{h_{p,q}(s)} - \frac{\left(\frac{1}{k} - p\right) \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p\right)^2} h_{p,q}(s)}{q} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} h_{p,q}(s) + \frac{\frac{1}{k} - p}{h_{p,q}(s)} \\ \frac{\sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p\right)^2}}{h_{p,q}(s)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto $Y_{p,q} = \Psi \circ Z_{p,q}$ e $Z_{p,q} = \Psi^{-1} \circ Y_{p,q} = \Psi \circ Y_{p,q}$.

Proposição 6.13. Sejam $n \in \{m, m + 1\}$, $Y_{p,q}$ e $Z_{p,q}$ como no início do capítulo e

$$M_{p,q} := \begin{cases} Y_{p,q}(\mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}) \cup Z_{p,q}(\bar{J}_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1}), & \text{se } q \neq 0; \\ Y_{p,q}(J_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1}), & \text{se } q = 0. \end{cases}$$

Então:

- (I) $M_{p,q}$ é uma subvariedade umbílica, completa e não totalmente geodésica de $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$.
- (II) $M_{p,q}$ tem codimensão substancial igual a 1 se, e só se, $q = \left(\frac{1}{k} - p\right)^2$.
- (III) Se $(p, q) = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$, então $M_{p,q}$ é difeomorfa a \mathbb{R}^m . Em todos os outros casos $M_{p,q}$ é difeomorfa à esfera \mathbb{S}^m .
- (IV) Se $q = \left(\frac{1}{k} - p\right)^2$ e $M_{p,q} \subset \mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$, em que $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{S}^n$ é uma subvariedade totalmente geodésica, então $M_{p,q}$ é homotópica a um ponto em $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ quando $p \leq \frac{1}{k}$, e não é homotópica a um ponto quando $p > \frac{1}{k}$.
- (V) $M_{p,q}$ e $M_{p',q'}$ são congruentes se, e somente se, $(p, q) = (p', q')$.

Demonstração. Provaremos apenas o caso em que $n = m + 1$, sendo o outro análogo e mais simples.

(I): Seja $\varphi: \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1} \setminus \{0\}$ o difeomorfismo conforme dado por $\varphi(x, t) := e^{\sqrt{k}t} \cdot x$. Calculemos $\varphi \circ Y_{p,q}$ e $\varphi \circ Z_{p,q}$

$$\begin{aligned} (\varphi \circ Y_{p,q})(s, x) &= h_{p,q}(s) \left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left[h_{p,q}(s) + \frac{1}{k} - p \right], \frac{\sqrt{q - \left(p - \frac{1}{k}\right)^2}}{\sqrt{2}h_{p,q}(s)} \right) = \\ &= \left(sh_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2} \left[h_{p,q}^2(s) + \frac{1}{k} - p \right], \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{q - \left(p - \frac{1}{k}\right)^2} \right) = \\ &= \left(sh_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2} [h_{p,q}^2(s) - p], 0 \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q - \left(p - \frac{1}{k}\right)^2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi \circ Z_{p,q})(s, x) &= \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[\frac{\left(\frac{1}{k} - p\right) h_{p,q}(s)}{\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right], \frac{\sqrt{q - \left(p - \frac{1}{k}\right)^2} h_{p,q}(s)}{\sqrt{2}q} \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{q}sx}{h_{p,q}(s)}, \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{1}{k} - p + \frac{q}{h_{p,q}^2(s)} \right], \frac{\sqrt{q - \left(p - \frac{1}{k}\right)^2}}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \left(s\bar{h}_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2} [\bar{h}_{p,q}^2(s) - p], 0 \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q - \left(p - \frac{1}{k}\right)^2} \right), \end{aligned}$$

em que $\bar{h}_{p,q}(s) := \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)}$. Além disso,

$$p - s^2 - \sqrt{(p - s^2)^2 - q} = \frac{q}{p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - q}} \Rightarrow \bar{h}_{p,q}(s) = \sqrt{p - s^2 - \sqrt{(p - s^2)^2 - q}}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \left\| \left(sh_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2} [h_{p,q}^2(s) - p], 0 \right) \right\|^2 &= s^2 h_{p,q}^2(s) + \frac{[h_{p,q}^2(s) - p]^2}{2} = \\ &= s^2 \left(p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - q} \right) + \frac{\left(p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - q} - p \right)^2}{2} = \\ &= -s^4 + ps^2 + s^2 \sqrt{(p - s^2)^2 - q} + \frac{s^4 - 2s^2 \sqrt{(p - s^2)^2 - q} + (p - s^2)^2 - q}{2} = \\ &= \cancel{-s^4} + \cancel{ps^2} + s^2 \sqrt{(p - s^2)^2 - q} + \cancel{s^4} - \cancel{s^2 \sqrt{(p - s^2)^2 - q}} - \cancel{ps^2} + \frac{p^2 - q}{2} = \\ &= \frac{p^2 - q}{2}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left(s\bar{h}_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2} [\bar{h}_{p,q}^2(s) - p], 0 \right) \right\|^2 = s^2 \bar{h}_{p,q}^2(s) + \frac{[\bar{h}_{p,q}^2(s) - p]^2}{2} = \\
 & = s^2 \left(p - s^2 - \sqrt{(p - s^2)^2 - q} \right) + \frac{\left(p - s^2 - \sqrt{(p - s^2)^2 - q} - p \right)^2}{2} = \\
 & = -s^4 + ps^2 - s^2 \sqrt{(p - s^2)^2 - q} + \frac{s^4 + 2s^2 \sqrt{(p - s^2)^2 - q} + (p - s^2)^2 - q}{2} = \\
 & = \cancel{-s^4} + \cancel{ps^2} - \cancel{s^2 \sqrt{(p - s^2)^2 - q}} + \cancel{s^4} + \cancel{s^2 \sqrt{(p - s^2)^2 - q}} - \cancel{ps^2} + \frac{p^2 - q}{2} = \\
 & = \frac{p^2 - q}{2}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, se $\mathbb{R}^{m+1} := \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$, então

$$\begin{aligned}
 (\varphi \circ Y_{p,q})(J_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1}) \cup (\varphi \circ Z_{p,q})(J_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1}) \subset \\
 \subset \left[\mathbb{S} \left(0, \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} \right) \cap \mathbb{R}^{m+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p \right)^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Afirmação 1: $0 \in \left[\mathbb{S} \left(0, \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} \right) \cap \mathbb{R}^{m+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p \right)^2} \right) \right]$ se, e somente se, $q = \left(\frac{1}{k} - p \right)^2 = 0$.

De fato,

$$\begin{aligned}
 0 \in \left[\mathbb{S} \left(0, \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} \right) \cap \mathbb{R}^{m+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p \right)^2} \right) \right] & \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 0 \in \mathbb{S} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p \right)^2} \right); \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} \right) & \text{ e} \\
 0 \in \left\{ x \in \mathbb{E}^{n+1} : x_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p \right)^2} \right\} & \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \left\| \frac{\sqrt{2}}{2} \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p \right)^2} \right) \right\|^2 = \frac{p^2 - q}{2} & \text{ e } q = \left(\frac{1}{k} - p \right)^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{2p}{k} - \frac{1}{k^2} & \text{ e } q = \left(\frac{1}{k} - p \right)^2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{k} \text{ e } q = \left(\frac{1}{k} - p \right)^2.
 \end{aligned}$$

Portanto a afirmação é verdadeira. \checkmark

Como

$$\left[\mathbb{S} \left(0, \frac{\sqrt{p^2 - q}}{\sqrt{2}} \right) \cap \mathbb{R}^{m+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p \right)^2} \right) \right] \setminus \{0\},$$

é uma subvariedade umbílica e completa de $\mathbb{E}^{n+1} \setminus \{0\}$, então

$$\varphi^{-1} \left(\left[\mathbb{S} \left(0, \frac{\sqrt{p^2 - q}}{\sqrt{2}} \right) \cap \mathbb{R}^{m+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p \right)^2} \right) \right] \setminus \{0\} \right),$$

é uma subvariedade umbílica e completa de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Suponhamos que $(p, q) = \left(\frac{1}{k}, 0 \right)$. Neste caso

$$J_{\frac{1}{k}, 0} = \left(-\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \quad \text{e} \quad h_{\frac{1}{k}, 0}(s) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{k} - s^2}.$$

Assim,

$$(\varphi \circ Y_{\frac{1}{k}, 0})(s, x) = \left(\sqrt{2} s \sqrt{\frac{1}{k} - s^2} \cdot x, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{k} - 2s^2 \right), 0 \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(0, \frac{1}{k}, 0 \right).$$

Como a função $s \mapsto \left(\sqrt{2} s \sqrt{\frac{1}{k} - s^2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{k} - 2s^2 \right) \right)$, com s variando em $\bar{J}_{\frac{1}{k}, 0}$, é uma parametrização de um círculo com centro na origem e raio $\frac{\sqrt{2}}{2k}$ em \mathbb{E}^2 , então

$$\left\{ (\varphi \circ Y_{\frac{1}{k}, 0})(s, x) : s \in J_{\frac{1}{k}, 0} \text{ e } x \in \mathbb{S}^{m-1} \right\} = \left[\mathbb{S} \left(0, \frac{1}{\sqrt{2k}} \right) \cap \mathbb{R}^{m+1} + \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2k}, 0 \right) \right] \setminus \{0\},$$

ou seja, $M_{\frac{1}{k}, 0}$ é a imagem inversa por φ de uma subvariedade umbílica e completa de $\mathbb{E}^{n+1} \setminus \{0\}$. Portanto $\bar{M}_{\frac{1}{k}, 0}$ também é uma subvariedade umbílica e completa de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Suponhamos agora que $(p, q) \neq \left(\frac{1}{k}, 0 \right)$ e sejam $s \xrightarrow{\beta_1} \left(sh_{p,q}(s), \frac{\sqrt{2}}{2} [h_{p,q}^2(s) - p] \right)$ e $s \xrightarrow{\beta_2} \left(s\bar{h}_{p,q}(s), \frac{\sqrt{2}}{2} [\bar{h}_{p,q}^2(s) - p] \right)$, com s variando em $\bar{J}_{p,q}$, duas curvas em \mathbb{E}^2 .

Afirmção 2: $\beta_1(\bar{J}_{p,q}) \cup \beta_2(\bar{J}_{p,q}) = \mathbb{S} \left(0, \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} \right) \subset \mathbb{E}^2$.

Já sabemos que $\beta_i(\bar{J}_{p,q}) \subset \mathbb{S} \left(0, \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} \right)$. Por outro lado,

$$\beta_1 \left(-\sqrt{p - \sqrt{q}} \right) = \left(-\sqrt{p\sqrt{q} - q}, \frac{\sqrt{q} - p}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\beta_2 \left(-\sqrt{p - \sqrt{q}} \right) = \left(-\sqrt{p\sqrt{q} - q}, \frac{\sqrt{q} - p}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\beta_1(0) = \left(0, \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} \right),$$

$$\beta_2(0) = \left(0, -\sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} \right),$$

$$\beta_1 \left(\sqrt{p - \sqrt{q}} \right) = \left(\sqrt{p\sqrt{q} - q}, \frac{\sqrt{q} - p}{\sqrt{2}} \right), \quad \beta_2 \left(\sqrt{p - \sqrt{q}} \right) = \left(\sqrt{p\sqrt{q} - q}, \frac{\sqrt{q} - p}{\sqrt{2}} \right).$$

Dessa forma, como β_1 e β_2 são contínuas, então $\beta_1(\bar{J}_{p,q}) \cup \beta_2(\bar{J}_{p,q}) = \mathbb{S} \left(0, \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} \right)$. \checkmark

Como $\beta_1(\bar{J}_{p,q}) \cup \beta_2(\bar{J}_{p,q}) = \mathbb{S}\left(0, \sqrt{\frac{p^2-q}{2}}\right) \subset \mathbb{E}^2$, então

$$\begin{aligned} (\varphi \circ Y_{p,q})(\bar{J}_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1}) \cup (\varphi \circ Z_{p,q})(\bar{J}_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1}) &= \\ &= \mathbb{S}\left(0, \sqrt{\frac{p^2-q}{2}}\right) \cap \mathbb{R}^{m+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p\right)^2}\right). \end{aligned}$$

Conclusão: $M_{p,q}$ é uma subvariedade umbílica e completa de $\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{R}$. Além disso, como a imersão $Y_{p,q}$ não é totalmente geodésica (pelo Corolário 6.9), então $M_{p,q}$ também não é totalmente geodésica, para nenhum $(p, q) \in \mathcal{I}$. •

(II): Suponhamos que $M_{p,q}$ tenha codimensão substancial igual a 1. Neste caso a imersão $Y_{p,q}: \mathbb{S}^{m-1} \times I_{p,q} \rightarrow \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ tem codimensão substancial igual a 1 e, pelo Corolário 6.10, $q = \left(\frac{1}{k} - p\right)^2$.

Suponhamos agora que $q = \left(\frac{1}{k} - p\right)^2$. Neste caso, pela definição de $Y_{p,q}$ e de $Z_{p,q}$, $M_{p,q}$ tem codimensão substancial igual a 1. •

(III): Se $(p, q) = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$, então a $M_{p,q}$ é a imagem inversa pelo difeomorfismo φ do conjunto

$$\left[\left[\mathbb{S}\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2k}\right) \cap \mathbb{R}^{m+1} \right] + \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2k}, 0\right) \right] \setminus \{0\},$$

portanto $M_{\frac{1}{k}, 0}$ é difeomorfa a \mathbb{R}^m . Em todos os outros casos $M_{p,q}$ é a imagem inversa de uma m -esfera, portanto em todos os outros casos $M_{p,q}$ é difeomorfa a uma m -esfera. •

(IV): Como $q = \left(\frac{1}{k} - p\right)^2$, então $Y_{p,q}(J_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1}) \subset \mathbb{S}_k^m \times \mathbb{R}$, em que $\mathbb{S}_k^m = \{x \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} = 0\}$. Do mesmo modo, $Z_{p,q}(J_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1}) \subset \mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$. Dessa forma

$$(\varphi \circ Y_{p,q})(J_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1}) \subset \mathbb{R}^{m+1} \quad \text{e} \quad (\varphi \circ Z_{p,q})(J_{p,q} \times \mathbb{S}^{m-1}) \subset \mathbb{R}^{m+1},$$

em que $\mathbb{R}^{m+1} = \{x \in \mathbb{R}^{m+2} : x_{m+2} = 0\}$.

Como $\varphi(M_{p,q}) \subset \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ é uma esfera com centro em $\frac{\sqrt{2}}{2}(0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0)$ e raio $\sqrt{\frac{p^2-q}{2}}$, então $\varphi(M_{p,q})$ é homotópica a um ponto quando $\sqrt{\frac{p^2-q}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2k}$, e não é homotópica a um ponto quando $\sqrt{\frac{p^2-q}{2}} > \frac{\sqrt{2}}{2k}$. Mas

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{p^2-q}{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{p^2 - p^2 + \frac{2p}{k} - \frac{1}{k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left(2p - \frac{1}{k}\right) \frac{1}{k}}. \\ \therefore \sqrt{\frac{p^2-q}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2k} &\Leftrightarrow \sqrt{\left(2p - \frac{1}{k}\right) \frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \Leftrightarrow 2p - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p \leq \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Portanto $M_{p,q}$ é homotópica a 0 quando $p \in \left[\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}\right]$, e não é homotópica a 0 quando $p > \frac{1}{k}$. •

(V): Suponhamos que $M_{p,q}$ e $M_{p',q'}$ sejam congruentes, logo existe uma isometria $\phi: \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ tal que $M_{p',q'} = \phi(M_{p,q})$. Por outro lado, pelo Lema A.19, as isometrias de $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ são

do tipo $\phi_1 \times \phi_2$, em que $\phi_1: \mathbb{S}_k^n \rightarrow \mathbb{S}_k^n$ é uma transformação ortogonal e $\phi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\phi_2(t) = \pm t + a$.

Pela observação 6.12, sabemos que $\Psi(M_{p,q}) = M_{p,q}$, ou seja, $\phi(M_{p,q}) = (\phi \circ \Psi)(M_{p,q})$. Dessa forma, se $\phi_2(t) = -t + a$, então podemos trocar ϕ por $\tilde{\phi} := \phi \circ \Psi$ de forma que $\tilde{\phi}_2 = \phi_2 \circ \Psi_2 = t + \tilde{a}$, em que $\tilde{a} = a - \frac{\ln \sqrt{q}}{\sqrt{k}}$. Portanto podemos sempre supor que $\phi_2(t) = t + a$.

Por outro lado,

$$(\varphi \circ \phi \circ \varphi^{-1})(e^{\sqrt{k}t}x) = (\varphi \circ \phi)(x, t) = \varphi(Tx, t + a) = e^{\sqrt{k}a} \left(T e^{\sqrt{k}t} x \right),$$

em que $T \in O(n)$. Como $\phi(M_{p,q}) = M_{p',q'}$, então

$$e^{\sqrt{k}a} \cdot T \left[\mathbb{S} \left(0, \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} \right) \cap \mathbb{R}^{m+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p \right)^2} \right) \right] = \mathbb{S} \left(0, \sqrt{\frac{p'^2 - q'}{2}} \right) \cap \mathbb{R}^{m+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q' - \left(\frac{1}{k} - p' \right)^2} \right). \quad (6.15)$$

Da fórmula acima deduzimos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} e^{\sqrt{k}a} \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} = \sqrt{\frac{p'^2 - q'}{2}}, \\ e^{\sqrt{k}a} T \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p \right)^2} \right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(0, \frac{1}{k}, \sqrt{q' - \left(\frac{1}{k} - p' \right)^2} \right), \\ T(\mathbb{R}^{m+1}) = \mathbb{R}^{m+1}. \end{cases}$$

Por outro lado, $\mathbb{R}^{m+1} = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : x_{n+1} = 0\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$. Assim, das duas últimas equações do sistema acima segue que

$$\begin{cases} e^{\sqrt{k}a} T \left(0, \frac{1}{k}, 0 \right) = \left(0, \frac{1}{k}, 0 \right), \\ e^{\sqrt{k}a} T \left(0, 0, \sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p \right)^2} \right) = \left(0, 0, \sqrt{q' - \left(\frac{1}{k} - p' \right)^2} \right). \end{cases}$$

Logo $a = 0$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$, $T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$, $\sqrt{q - \left(\frac{1}{k} - p \right)^2} = \sqrt{q' - \left(\frac{1}{k} - p' \right)^2}$ e $\sqrt{p^2 - q} = \sqrt{p'^2 - q'}$. Portanto

$$q - p^2 - \frac{1}{k} + \frac{2p}{k} = q' - p'^2 - \frac{1}{k} + \frac{2p'}{k} \Rightarrow p = p' \Rightarrow q = q'. \quad \square$$

Prova do Teorema 6.1.

(\Rightarrow): Suponhamos que f seja uma imersão isométrica umbílica e não totalmente geodésica.

Afirmção 1: $\ker \mathbf{S} \neq \{0\}$ e $\ker \mathbf{R} \neq \{0\}$.

De fato, como $\mathbf{S}X = \langle X, T \rangle \xi$ e $\mathbf{R}X = \langle X, T \rangle T$, então $\ker \mathbf{S} \neq \{0\}$ e $\ker \mathbf{R} \neq \{0\}$ em todo ponto de M . \checkmark

Se $\mathbf{S} = 0$, então vale o item (I) pela Proposição 5.2, do contrário existe um aberto $U \subset M$ no qual \mathbf{S} é não nula, $\ker \mathbf{S} \neq \{0\}$ e $\ker \mathbf{R} \neq \{0\}$.

Como $\mathbf{S} \neq 0$, $\ker \mathbf{S} \neq \{0\}$, $\ker \mathbf{R} \neq \{0\}$ e $\eta_1 = \iota_* \eta + \nu_1 \neq 0$ em todos os pontos de U , então (pelas Proposições 5.7 e 6.3) $f|_U = (j_1 \times \text{Id}) \circ \tilde{f}$ em que $j_1: \mathbb{S}_k^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ é uma inclusão totalmente

geodésica, $\text{Id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a identidade, $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{S}_k^{m_1} \times \mathbb{R}$ é uma imersão isométrica umbílica e $\tilde{f}(U) = g(I \times B)$, em que g é dada por

$$g: I \times B \rightarrow \mathbb{S}_k^{m_1} \times \mathbb{R} \\ (t, \xi) \mapsto ((\gamma_1(t)\xi, \gamma_2(t)); \gamma_3(t)),$$

sendo $m_1 \in \{m, m+1\}$, $B \subset \mathbb{S}^{m-1}$ um subconjunto aberto, I um intervalo, $\gamma_1(t) > 0$, $\gamma_1(t)\xi \in \mathbb{E}^m$, $\gamma_2(t) \in \mathbb{E}^{m_1+1-m}$, $(\gamma_1(t)\xi, \gamma_2(t)) \in \mathbb{S}_k^{m_1}$ e $\gamma_3(t) \in \mathbb{R}$.

Provaremos apenas o caso em que $m_1 = m+1$, sendo o outro caso análogo. Como $m_1 = m+1$, então $\gamma_2(t)$ é um vetor com duas coordenadas em \mathbb{E}^2 . Dessa forma,

$$g(t, \xi) = ((\gamma_1(t)\xi, \gamma_2(t), \gamma_3(t)); \gamma_4(t)),$$

em que $\gamma_1(t) > 0$, $\gamma_1(t)\xi \in \mathbb{E}^m$, $(\gamma_2(t), \gamma_3(t)) \in \mathbb{E}^2 = \mathbb{E}^{m_1+1-m}$, $(\gamma_1(t)\xi, \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \in \mathbb{S}_k^{m_1}$ e $\gamma_4(t) \in \mathbb{R}$.

Como γ_4 não é constante, pois $\mathbf{S} \neq 0$, então podemos aplicar o Corolário 6.9. Logo existem $(p, q) \in \mathcal{S}$ tais que (restringindo U e B e reparametrizando a curva γ se necessário, e a menos de um movimento rígido em $\mathbb{S}_k^{m_1} \times \mathbb{R}$)

$$\tilde{f}(U) = \{Y_{p,q}(s, x) : x \in B \text{ e } s \in J\},$$

em que $J \subset J_{p,q}$ é um intervalo aberto. Dessa forma, $\tilde{f}(U) \subset M_{p,q}$ e $f(U) \subset (j_1 \times \text{Id})(M_{p,q}) \subset \mathbb{S}_k^{m_1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$.

Seja $\varphi: \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1} \setminus \{0\}$ o difeomorfismo conforme dado por $\varphi(x, t) = e^{\sqrt{k}t}x$. Logo $(\varphi \circ f)(U) \subset (\varphi \circ (j_1 \times \text{Id}))(M_{p,q}) = (j \circ \tilde{\varphi})(M_{p,q})$, em que $j: \mathbb{E}^{m_1+1} = \varphi(\mathbb{S}_k^{m_1} \times \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ é a inclusão e $\tilde{\varphi}: \mathbb{S}_k^{m_1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{m_1+1}$ é o difeomorfismo conforme dado por $\tilde{\varphi}(x, t) = e^{\sqrt{k}t} \cdot x$.

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{S}_k^{m_1} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{j_1 \times \text{Id}} & \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{E}^{n+1} \\ & & & \searrow \tilde{\varphi} & & \nearrow j & \\ & & & & & & \mathbb{E}^{m_1+1} \end{array}$$

Por outro lado, sabemos, pela Proposição 6.13, que $M_{p,q}$ é uma subvariedade umbílica e completa de $\mathbb{S}_k^{m_1} \times \mathbb{R}$ e que $\varphi(M_{p,q})$ é uma subvariedade umbílica e completa de $\mathbb{E}^{n+1} \setminus \{0\}$. Portanto $(\varphi \circ f)(M) \subset (\varphi \circ (j_1 \times \text{Id}))(M_{p,q})$ e $\tilde{f}(M) \subset M_{p,q}$.

Assim, denotando por $\mathcal{I}: M_{p,q} \hookrightarrow \mathbb{S}_k^{m_1} \times \mathbb{R}$ a inclusão umbílica, então $\tilde{f} = \mathcal{I} \circ \bar{f}$ em que $\bar{f}: M \rightarrow M_{p,q}$ é a isometria local dada por $\bar{f}(x) = \tilde{f}(x)$. Portanto $f = (j_1 \times \text{Id}) \circ \mathcal{I} \circ \bar{f}$ como no enunciado do Teorema. •

(\Leftarrow): Suponhamos agora que f seja como nos itens (I) ou (II). Se f é como no item (I), então claramente f é umbílica, senão f é umbílica pela Proposição 6.13. \square

Apêndice A

Alguns resultados utilizados

Neste apêndice colocamos diversos resultados utilizados durante a tese mas que não são demonstrados no texto principal. Separamos esses resultados em três seções conforme o assunto. A primeira seção apresenta alguns resultados de Cálculo: o estudo de um subconjunto de \mathbb{R} , a integral (primitiva) de uma função e as soluções de uma EDO linear de segunda ordem não homogênea. Na segunda seção são apresentados alguns resultados de álgebra linear. Na terceira e última seção do apêndice são colocados resultados referentes às Variedades Diferenciáveis e à Geometria Riemanniana (e Pseudo-Riemanniana). Alguns resultados da última seção não são demonstrados aqui, mas são dadas referências nas quais tais resultados podem ser consultados.

A.1 Resultados de Cálculo

A.1.1 O conjunto $I := \{x \in \mathbb{R} : (p - x^2)^2 - q > 0\}$

Sejam p e q números reais para os quais o conjunto $I := \{x \in \mathbb{R} : (p - x^2)^2 - q > 0\}$ é não vazio. A tabela abaixo nos dá o conjunto I de acordo com os p e q escolhidos.

Tabela A.1: Conjunto I .

I	Condições sobre p e q
\mathbb{R}	$p \leq 0$ e $p^2 > q$, ou $q < 0$
$(-\infty, -\sqrt{p + \sqrt{q}}) \cup (\sqrt{p + \sqrt{q}}, \infty)$	$p^2 \leq q$
$(-\infty, -\sqrt{p + \sqrt{q}}) \cup (-\sqrt{p - \sqrt{q}}, \sqrt{p - \sqrt{q}}) \cup (\sqrt{p + \sqrt{q}}, \infty)$	$p > 0$ e $0 \leq q < p^2$

A.1.2 Uma integral

Queremos encontrar uma primitiva da função $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}}$.

Caso $q = 0$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} dx \stackrel{u:=x^2-p}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{|u|} du = \begin{cases} \frac{\ln(x^2-p)}{2}, & \text{se } p \leq 0; \\ \frac{\ln(x^2-p)}{2}, & \text{se } p > 0 \text{ e } x \notin (-\sqrt{p}, \sqrt{p}); \\ -\frac{\ln(p-x^2)}{2}, & \text{se } p > 0 \text{ e } x \in (-\sqrt{p}, \sqrt{p}). \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Caso $q < 0$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} dx &\stackrel{u:=x^2-p}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - q}} du \stackrel{c:=\sqrt{-q}}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + c^2}} du = \\ &\stackrel{\tan \theta := \frac{u}{c}}{=} \frac{1}{2} \int \sec \theta d\theta = \frac{1}{2} \ln(\sec \theta + \tan \theta) = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{u^2 + c^2} + u). \\ \therefore \int \frac{x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} dx &= \frac{1}{2} \ln\left(x^2 - p + \sqrt{(p-x^2)^2 - q}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Caso $q > 0$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} dx &\stackrel{u:=x^2-p}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - q}} du \stackrel{c:=\sqrt{q}}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} du = \\ \cos \theta := \frac{c}{|u|} \text{ e } \theta \cdot u > 0 &\frac{1}{2} \int \sec \theta d\theta = \frac{1}{2} \ln(\sec \theta + \tan \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 - c^2}), & \text{se } u > c; \\ \frac{1}{2} \ln(-u - \sqrt{u^2 - c^2}), & \text{se } u < -c. \end{cases} \end{aligned}$$

Observação A.1. Para $u < -c$,

$$\begin{aligned} -u - \sqrt{u^2 - c^2} &= \frac{c^2}{-u + \sqrt{u^2 - c^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln(-u - \sqrt{u^2 - c^2}) &= \ln\left(\frac{c^2}{-u + \sqrt{u^2 - c^2}}\right) = -\ln(-u + \sqrt{u^2 - c^2}) + \ln(c^2). \end{aligned}$$

Logo

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} du = \ln(-u - \sqrt{u^2 - c^2}) = -\ln(-u + \sqrt{u^2 - c^2}) + K.$$

Portanto

$$\int \frac{x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln\left(x^2 - p + \sqrt{(p-x^2)^2 - q}\right), & \text{se } p \leq 0, \text{ ou se } p > 0 \text{ e} \\ & x^2 > p + \sqrt{q}; \\ -\frac{1}{2} \ln\left(p - x^2 + \sqrt{(p-x^2)^2 - q}\right), & \text{se } p > 0 \text{ e } x^2 < p - \sqrt{q}. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Podemos resumir tudo o que foi visto até agora com a seguinte tabela:

Tabela A.2: Integral

$\int \frac{x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} dx$	Domínio da primitiva	Condições sobre p e q
$\frac{1}{2} \ln \left(x^2 - p + \sqrt{(p-x^2)^2 - q} \right)$	\mathbb{R}	$p \leq 0$ e $p^2 > q$, ou $q < 0$
	$(-\infty, -\sqrt{p + \sqrt{q}}) \cup$ $\cup (\sqrt{p + \sqrt{q}}, \infty)$	$p^2 \leq q$, ou $p > 0$ e $0 \leq q < p^2$
$-\frac{1}{2} \ln \left(p - x^2 + \sqrt{(p-x^2)^2 - q} \right)$	$(-\sqrt{p - \sqrt{q}}, \sqrt{p - \sqrt{q}})$	$p > 0$ e $0 \leq q < p^2$

A.1.3 Soluções de uma EDO

Consideremos a EDO

$$x \cdot \left[(p - x^2)^2 - q \right] \cdot y'' + (x^4 - p^2 + q) \cdot y' - x^3 \cdot y = 0. \quad (\text{A.4})$$

Lema A.2. *Seja I um intervalo no qual $(p - x^2)^2 - q > 0$. Nessas condições, o conjunto de soluções, definidas em I , da EDO (A.4) são combinações lineares das funções*

$$e^{\int \frac{x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} dx} \quad e^{-\int \frac{x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} dx}. \quad (\text{A.5})$$

Demonstração. Para provarmos isso basta mostrar que cada uma das funções acima satisfaz a EDO (A.4).

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := e^{\pm \int \frac{x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} dx}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \pm \frac{x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} \cdot e^{\pm \int \frac{x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} dx} = \pm \frac{x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} \cdot f(x), \\ f''(x) &= \pm \frac{\sqrt{(p-x^2)^2 - q} - x \frac{2(p-x^2)(-2x)}{2\sqrt{(p-x^2)^2 - q}}}{(p-x^2)^2 - q} \cdot f(x) + \frac{x^2}{(p-x^2)^2 - q} \cdot f(x) = \\ &= \left[(p-x^2)^2 - q \right]^{-1} \cdot \left(\pm \frac{x^4 - 2px^2 + p^2 - q - 2x^4 + 2px^2}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} + x^2 \right) \cdot f(x) = \\ &= \left[(p-x^2)^2 - q \right]^{-1} \cdot \left(\mp \frac{x^4 - p^2 + q}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} + x^2 \right) \cdot f(x). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} x \cdot \left[(p-x^2)^2 - q \right] \cdot f''(x) + (x^4 - p^2 + q) \cdot f'(x) - x^3 \cdot f(x) &= \\ = \left(\mp \frac{x^5 - (p^2 - q)x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} + x^3 \pm \frac{x^5 - (p^2 - q)x}{\sqrt{(p-x^2)^2 - q}} - x^3 \right) \cdot f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Conclusão: as soluções da EDO (A.4) no intervalo I são combinações lineares das funções definidas em (A.5). \square

Corolário A.3. *Seja I o maior intervalo no qual a EDO (A.4) está definida. Nessas condições, as soluções da EDO (A.4) definidas em I e o intervalo I são dados pela seguinte tabela:*

Tabela A.3: Soluções da EDO (A.4)

Solução da EDO	Intervalo I	Condições sobre p e q
$c_1 \left(x^2 - p + \sqrt{(p - x^2)^2 - q} \right)^{\frac{1}{2}} +$ $+c_2 \left(x^2 - p + \sqrt{(p - x^2)^2 - q} \right)^{-\frac{1}{2}}$	\mathbb{R}	$p \leq 0$ e $p^2 > q$, ou $q < 0$
	$(-\infty, -\sqrt{p + \sqrt{q}})$ ou $(\sqrt{p + \sqrt{q}}, \infty)$	$p^2 \leq q$, ou $p > 0$ e $0 \leq q < p^2$
$c_1 \left(p - x^2 + \sqrt{(p - x^2)^2 - q} \right)^{-\frac{1}{2}} +$ $+c_2 \left(p - x^2 + \sqrt{(p - x^2)^2 - q} \right)^{\frac{1}{2}}$	$(-\sqrt{p - \sqrt{q}}, \sqrt{p - \sqrt{q}})$	$p > 0$ e $0 \leq q < p^2$

Demonstração. A Tabela A.3 é obtida juntando o Lema (A.2) com a Tabela A.2. \square

A.2 Resultados de Álgebra Linear

Lema A.4. *Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais com produto interno positivo definido, então $\ker T^t T = \ker T$.*

Demonstração.

$$X \in \ker T^t T \Leftrightarrow \langle T^t T X, Y \rangle = 0, \forall Y \in V \Leftrightarrow \langle T X, T Y \rangle = 0, \forall Y \in V \Leftrightarrow X \in \ker T.$$

Portanto $\ker T^t T = \ker T$. \square

Definição A.5. Sejam V e W dois espaços vetoriais com produto interno não degenerado. Dizemos que uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é uma **semelhança** se existe $\lambda > 0$ tal que $\|T(x)\| = \lambda^2 \|x\|^2$, para todo $x \in V$. O número real λ é chamado de **razão** da semelhança T e T é dita uma semelhança de razão λ .

Lema A.6. *Sejam V e W dois espaços vetoriais com produto interno não degenerado. Nessas condições, se $T: V \rightarrow W$ é uma semelhança com razão λ e B é uma base ortonormal de V , então $\lambda^{-1} \cdot T(B)$ é um subconjunto ortonormal de W . Além disso, T leva vetores tipo espaço em vetores tipo espaço, vetores tipo tempo em vetores tipo tempo e leva vetores tipo luz em vetores tipo luz.*

Inversamente suponhamos que exista uma base ortonormal B de V tal que $\lambda^{-1} \cdot T(B)$ seja um subconjunto ortonormal de W . Nessas condições, se T leva vetores tipo espaço em vetores tipo espaço, vetores tipo tempo em vetores tipo tempo e vetores tipo luz em vetores tipo luz, então T é uma semelhança de razão λ .

Demonstração. Suponhamos que T seja uma semelhança com razão λ e seja $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de V . Nessas condições,

$$\langle Tx, Ty \rangle = \frac{\|T(x+y)\|^2 - \|Tx\|^2 - \|Ty\|^2}{2} = \lambda^2 \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \lambda^2 \langle x, y \rangle.$$

Dessa forma

$$\langle \lambda^{-1} \cdot Tv_i, \lambda^{-1} \cdot Tv_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle.$$

Portanto $\lambda^{-1} \cdot T(B) = \{\lambda^{-1} \cdot Tv_1, \dots, \lambda^{-1} \cdot Tv_n\}$ é um subconjunto ortonormal de W . Além disso, como $\|Tx\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$, então T leva vetores tipo espaço em vetores tipo espaço, vetores tipo tempo em vetores tipo tempo e leva vetores tipo luz em vetores tipo luz.

Suponhamos agora que T leva vetores tipo espaço em vetores tipo espaço, vetores tipo tempo em vetores tipo tempo e vetores tipo luz em vetores tipo luz e que $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ seja uma base ortonormal de V tal que $\lambda^{-1} \cdot T(B)$ seja um subconjunto ortonormal de W . Seja $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ um elemento qualquer de V . Nessas condições

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \lambda^2 \cdot \|\lambda^{-1} \cdot Tx\|^2 = \lambda^2 \cdot \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \cdot \langle \lambda^{-1} \cdot Tv_i, \lambda^{-1} \cdot Tv_j \rangle = \lambda^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 \|\lambda^{-1} \cdot Tv_i\|^2 = \\ &= \lambda^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 \|v_i\|^2 = \lambda^2 \cdot \|x\|^2. \end{aligned}$$

Portanto T é uma semelhança de razão λ . □

Corolário A.7. $T: V \rightarrow W$ é uma semelhança de razão λ se, e somente se, $\lambda^{-1} \cdot T: V \rightarrow T(V)$ é uma isometria linear.

Lema A.8. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno positivo definido. Se a transformação linear $T: V \rightarrow W$ tem posto igual a 1, então $T(x) = \langle x, v \rangle T(v)$, para todo $x \in V$, em que $v \in (\ker T)^\perp$ é um vetor unitário.

Demonstração. Seja $n := \dim V$. Como o posto de T é 1, então $\dim(\ker T) = n - 1$. Tomemos então $v \in (\ker T)^\perp$ unitário e seja $x \in V$ um vetor qualquer. Assim, $x - \langle x, v \rangle v \in \{v\}^\perp = \ker T$, portanto

$$T(x) = T(x - \langle x, v \rangle v) + \langle x, v \rangle T(v) = \langle x, v \rangle T(v). \quad \square$$

Lema A.9. Sejam V e W dois espaços vetoriais de dimensão finita e com produto interno não degenerado. Se $\beta: V \times V \rightarrow W$ é uma aplicação bilinear tal que $\beta(X, Y) = 0$ sempre que $X \perp Y$, então existe um vetor $Z \in W$ tal que $\beta(X, Y) = \langle X, Y \rangle Z$, para quaisquer $X, Y \in V$.

Demonstração. Sejam $n := \dim V$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de V . Se $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e $Y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, então

$$\beta(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \beta(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \beta(e_i, e_i). \quad (\text{A.6})$$

Por outro lado, se $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e $i \neq j$, então $0 = \beta(e_i + e_j, e_i - e_j) = \beta(e_i, e_i) - \beta(e_j, e_j)$. Portanto $\beta(e_i, e_i) = \beta(e_j, e_j)$, quaisquer que sejam os $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Tomando $Z := \beta(e_1, e_1)$ e substituindo em (A.6), segue o que queríamos provar. □

Lema A.10. Se $\beta: V \times V \times V \rightarrow W$ é uma aplicação trilinear simétrica nas duas primeiras variáveis e antissimétrica nas duas últimas variáveis, então β é a aplicação nula.

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in V$, logo

$$\begin{aligned} \beta(X, Y, Z) &= -\beta(X, Z, Y) = -\beta(Z, X, Y) = \beta(Z, Y, X) = \beta(Y, Z, X) = -\beta(Y, X, Z) = \\ &= -\beta(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Portanto $\beta = 0$. □

A.3 Resultados de Variedades Diferenciáveis e de Geometria Riemanniana

Lema A.11. Sejam $f: M \rightarrow N$ e $g: N \rightarrow O$ duas imersões umbílicas entre variedades riemannianas (ou pseudoriemannianas) com vetores curvatura média ξ e ζ respectivamente, então $g \circ f: M \rightarrow O$ também é umbílica e o vetor curvatura média de $g \circ f$ é $g_*\xi + \zeta \circ f$.

Demonstração. Sejam $\tilde{\nabla}$ a conexão riemanniana em O , $\bar{\nabla}$ a conexão riemanniana em N e ∇ a conexão em M . Logo

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(g \circ f)_*Y(x) &= g_*\bar{\nabla}_X f_*Y(x) + \alpha_g(f_*X, f_*Y)(f(x)) = \\ &= (g \circ f)_*\nabla_X Y(x) + g_*\alpha_f(X, Y)(x) + \langle f_*X, f_*Y \rangle \zeta(f(x)) = \\ &= (g \circ f)_*\nabla_X Y(x) + \langle X, Y \rangle(x)g_*\xi(x) + \langle X, Y \rangle \zeta(f(x)). \end{aligned}$$

Portanto $\alpha_{g \circ f}(X, Y) = \langle X, Y \rangle (g_*\xi + \zeta \circ f)$ e $g \circ f$ é uma imersão isométrica umbílica com vetor curvatura média $g_*\xi + \zeta \circ f$. □

Lema A.12. Seja M^m uma subvariedade conexa de \mathbb{R}_t^n e seja $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in M} \{(x, v) : v \in V_x\}$ um fibrado vetorial em M contido em $M \times \mathbb{R}_t^n$. Se \mathcal{U} for paralelo em \mathbb{R}_t^n ao longo de M , então V_x é um subespaço vetorial constante de \mathbb{R}_t^n .

Demonstração. Sejam $x_0 \in M$ um ponto fixo, $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ um referencial de \mathcal{U} em uma vizinhança de x_0 e $\{\zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n\}$ uma base de $V_{x_0}^\perp$. Dessa forma, $\xi_i(x) = (x, \zeta_i(x))$ e

$$X \langle \xi_i(x), (x, \zeta_j) \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \zeta_i(x), \zeta_j \rangle = 0,$$

para quaisquer $X \in T_x M$, $i \in \{1, \dots, k\}$ e $j \in \{k+1, \dots, n\}$. Portanto $\langle \zeta_i(x), \zeta_j \rangle = a_{i,j}$ é constante, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ e cada $j \in \{k+1, \dots, n\}$.

Por outro lado, $\langle \xi_i(x_0), (x_0, \zeta_j) \rangle = \langle \zeta_i(x_0), \zeta_j \rangle = 0$, para quaisquer $i \in \{1, \dots, k\}$ e $j \in \{k+1, \dots, n\}$, ou seja,

$$\zeta_i(x) \in \bigcap_{j=k+1}^n \{\zeta_j\}^\perp \Rightarrow V_x = \bigcap_{j=k+1}^n \{\zeta_j\}^\perp. \quad \square$$

Lema A.13. Sejam M uma variedade riemanniana conexa e $f: M \rightarrow N$ uma imersão isométrica. Se f é paralela, então \mathcal{N}_1 tem dimensão constante e é paralelo na conexão normal de f .

Demonstração. Dados $Y, W, Z \in \Gamma(TM)$ campos quaisquer, valem as igualdades

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_Y^\perp \alpha)(W, Z) = \nabla_Y^\perp \alpha(W, Z) - \alpha(\nabla_Y W, Z) - \alpha(W, \nabla_Y Z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla_Y^\perp \alpha(W, Z) = \alpha(\nabla_Y W, Z) + \alpha(W, \nabla_Y Z) \in \mathcal{N}_1. \end{aligned}$$

Portanto \mathcal{N}_1 é paralelo na conexão normal de f .

Suponhamos que $\dim \mathcal{N}_1(x) = k$, nesse caso existem $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k \in T_x M$ tais que $\mathcal{N}_1(x) = \text{ger} \{ \alpha(X_1, Y_1), \dots, \alpha(X_k, Y_k) \}$ e $\alpha(X_1, Y_1), \dots, \alpha(X_k, Y_k)$ são LI.

Seja $y \in M$ um ponto qualquer de M e $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ um caminho suave tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$. Consideremos então $X_i(t)$ e $Y_i(t)$ os transportes paralelos dos vetores X_i e Y_i ao longo da curva γ e $X = \gamma'$. Dessa forma,

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(X_i, Y_i) = \nabla_X^\perp \alpha(X_i, Y_i) - \alpha(\nabla_X X_i, Y_i) - \alpha(X_i, \nabla_X Y_i) = \nabla_X^\perp \alpha(X_i, Y_i) = 0.$$

Logo

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha(X_i, Y_i), \alpha(X_j, Y_j) \rangle = \langle \nabla_{\gamma'(t)}^\perp \alpha(X_i, Y_i), \alpha(X_j, Y_j) \rangle + \langle \alpha(X_i, Y_i), \nabla_{\gamma'(t)}^\perp \alpha(X_j, Y_j) \rangle = 0.$$

Pelas igualdades acima, o produto interno $\langle \alpha(X_i(t), Y_i(t)), \alpha(X_j(t), Y_j(t)) \rangle$ é constante ao longo da curva γ . Portanto os vetores normais $\alpha(X_1(b), Y_1(b)), \dots, \alpha(X_k(b), Y_k(b))$ são LI, ou seja, $\dim \mathcal{N}_1(y) \geq k = \dim \mathcal{N}_1(x)$. Analogamente, podemos demonstrar que $\dim \mathcal{N}_1(x) \geq \dim \mathcal{N}_1(y)$ e concluímos que \mathcal{N}_1 tem dimensão constante em M . □

Lema A.14. *Sejam M uma variedade riemanniana e L um subfibrado vetorial de $M \times \mathbb{R}_t^n$. Nesse condições, L é um fibrado paralelo se, e somente se L^\perp também o é.*

Demonstração. Basta mostrar que se L é paralelo então L^\perp também o é. Sejam então $\xi \in \Gamma(L^\perp)$. Mostraremos que $\tilde{\nabla}_X \xi \in L^\perp$, para qualquer $X \in TM$. Seja então $\zeta \in \Gamma(L)$, assim

$$0 = X \langle \xi, \zeta \rangle \Rightarrow \langle \tilde{\nabla}_X \xi, \zeta \rangle = - \langle \xi, \tilde{\nabla}_X \zeta \rangle = 0,$$

pois L é paralelo. Portanto $\tilde{\nabla}_X \xi \in L^\perp$, para quaisquer $\xi \in \Gamma(L^\perp)$ e $X \in TM$. □

Lema A.15. *Seja $f = f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow N_1 \times N_2$ uma imersão produto. Definamos também, para cada $(p, q) \in M_1 \times M_2$, as inclusões totalmente geodésicas $i_1^q, i_2^p, I_1^{f_2(q)}$ e $I_2^{f_1(p)}$:*

$$\begin{aligned} i_1^q: M_1 &\rightarrow M_1 \times M_2 & i_2^p: M_2 &\rightarrow M_1 \times M_2 \\ x &\mapsto (x, q) & y &\mapsto (p, y) \\ I_1^{f_2(q)}: N_1 &\rightarrow N_1 \times N_2 & I_2^{f_1(p)}: N_2 &\rightarrow N_1 \times N_2 \\ x &\mapsto (x, f_2(q)) & y &\mapsto (f_1(p), y) \end{aligned}$$

Nessas condições, para quaisquer $X, Y \in T_{(p,q)} M_1 \times M_2$, existem $X_1, Y_1 \in T_p M_1$ e $X_2, Y_2 \in T_q M_2$ tais que

$$\alpha_f(X, Y) = I_1^{f_2(q)} \ast \alpha_{f_1}(X_1, Y_1) + I_2^{f_1(p)} \ast \alpha_{f_2}(X_2, Y_2).$$

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times M_2 & \xrightarrow{f=f_1 \times f_2} & N_1 \times N_2 \\ \uparrow i_1^y & & \downarrow \Pi_1 \\ M_1 & \xrightarrow{f_1 = \Pi_1 \circ f \circ i_1^y} & N_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M_1 \times M_2 & \xrightarrow{f=f_1 \times f_2} & N_1 \times N_2 \\ \uparrow i_1^y & \nearrow f \circ i_1^y = I_1^{f_2(y)} \circ f_1 & \uparrow I_1^{f_2(y)} \\ M_1 & \xrightarrow{f_1} & N_1 \end{array}$$

Demonstração. Sejam $\pi_i: M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ e $\Pi_i: N_1 \times N_2 \rightarrow N_i$ as projeções. Assim $\pi_1 \circ \iota_1^y = \text{Id}|_{M_1}$ e $\pi_2 \circ \iota_2^x = \text{Id}|_{M_2}$.

Por outro lado, para quaisquer $(x, y) \in M_1 \times M_2$, valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \Pi_1 \circ f \circ \iota_1^y &= f_1, & \Pi_2 \circ f \circ \iota_2^x &= f_2, \\ f \circ \iota_1^y &= I_1^{f_2(y)} \circ f_1, & f \circ \iota_2^x &= I_2^{f_1(x)} \circ f_2. \end{aligned}$$

Sejam agora $X, Y \in T_{(p,q)}M_1 \times M_2$. Como $T_{(p,q)}M_1 \times M_2 = \iota_1^q T_p M_1 \oplus \iota_2^p T_q M_2$, então existem campos $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_1)$ e $X_2, Y_2 \in \Gamma(TM_2)$ tais que

$$\iota_1^q X_1(p) + \iota_2^p X_2(q) = X \quad \text{e} \quad \iota_1^q Y_1(p) + \iota_2^p Y_2(q) = Y.$$

Consideremos $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2 \in \Gamma(TM)$ os campos dados por

$$\begin{aligned} \pi_{1*} \bar{X}_1 &= X_1, & \pi_{2*} \bar{X}_1 &= 0, & \pi_{1*} \bar{X}_2 &= 0, & \pi_{2*} \bar{X}_2 &= X_2, \\ \pi_{1*} \bar{Y}_1 &= Y_1, & \pi_{2*} \bar{Y}_1 &= 0, & \pi_{1*} \bar{Y}_2 &= 0, & \pi_{2*} \bar{Y}_2 &= Y_2. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} f_* \bar{X}_1(x, y) &= f_* \iota_1^y X_1(x) = I_1^{f_2(y)} f_* X_1(x) \Rightarrow \Pi_{1*} f_* \bar{X}_1 = f_{1*} X_1 \quad \text{e} \quad \Pi_{2*} f_* \bar{X}_1 = 0. \\ f_* \bar{X}_2(x, y) &= f_* \iota_2^x X_2(y) = I_2^{f_1(x)} f_* X_2(y) \Rightarrow \Pi_{1*} f_* \bar{X}_2 = 0 \quad \text{e} \quad \Pi_{2*} f_* \bar{X}_2 = f_{2*} X_2. \end{aligned}$$

Calculemos $\alpha_f(X, Y)$.

$$\begin{aligned} \alpha_f(X, Y) &= \alpha(\bar{X}_1 + \bar{X}_2, \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2)(p, q) = \left[\bar{\nabla}_{f_*(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)} f_*(\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2)(p, q) \right]^\perp = \\ &= \left[\bar{\nabla}_{I_1^{f_2(q)} f_{1*} X_1} I_1^{f_2(q)} f_{1*} Y_1(p) + \bar{\nabla}_{I_2^{f_1(p)} f_{2*} X_2} I_2^{f_1(p)} f_{2*} Y_2(q) \right]^\perp = \\ &= \left[I_1^{f_2(q)} \bar{\nabla}_{f_{1*} X_1}^1 f_{1*} Y_1(p) + I_2^{f_1(p)} \bar{\nabla}_{f_{2*} X_2}^2 f_{2*} Y_2(p) \right]^\perp = \\ &= \left[I_1^{f_2(q)} f_{1*} \nabla_{X_1}^1 Y_1(p) + I_1^{f_2(q)} \alpha_{f_1}(X_1, Y_1)(p) + \right. \\ &\quad \left. + I_2^{f_1(p)} f_{2*} \nabla_{X_2}^2 Y_2(q) + I_2^{f_1(p)} \alpha_{f_2}(X_2, Y_2)(q) \right]^\perp = \\ &= \left[f_* \iota_1^q \nabla_{X_1}^1 Y_1(p) + I_1^{f_2(q)} \alpha_{f_1}(X_1, Y_1)(p) + f_* \iota_2^p \nabla_{X_2}^2 Y_2(q) + I_2^{f_1(p)} \alpha_{f_2}(X_2, Y_2)(q) \right]^\perp = \\ &= I_1^{f_2(q)} \alpha_{f_1}(X_1, Y_1)(p) + I_2^{f_1(p)} \alpha_{f_2}(X_2, Y_2)(q). \quad \square \end{aligned}$$

Lema A.16. *Seja $f = f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow N_1 \times N_2$ uma imersão produto. Nessas condições*

- (I) *f é totalmente geodésica se, e somente se, f_1 e f_2 são totalmente geodésicas e*
- (II) *f é paralela se, e somente se, f_1 e f_2 são paralelas.*

Demonstração.

(I): Decorre diretamente da fórmula obtida no Lema A.15. •

(II): Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Como $\nabla^\perp \alpha_f$ é um tensor, então $(\nabla_X^\perp \alpha_f)(Y, Z)(p, q)$ depende apenas dos valores de X, Y e Z no ponto $(p, q) \in M_1 \times M_2$ e sejam então $X_1, Y_1, Z_1 \in \Gamma(TM_1)$, $X_2, Y_2, Z_2 \in \Gamma(TM_2)$ e $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \Gamma(TM)$ tais que

$$\begin{aligned} X(p, q) &= \iota_1^q X_1(p) + \iota_2^p X_2(q), & \bar{X}(x, y) &= \iota_1^y X_1(x) + \iota_2^x X_2(y) \\ Y(p, q) &= \iota_1^q Y_1(p) + \iota_2^p Y_2(q), & \bar{Y}(x, y) &= \iota_1^y Y_1(x) + \iota_2^x Y_2(y) \\ Z(p, q) &= \iota_1^q Z_1(p) + \iota_2^p Z_2(q), & \bar{Z}(x, y) &= \iota_1^y Z_1(x) + \iota_2^x Z_2(y). \end{aligned}$$

em que i_1^q e i_2^p são as inclusões totalmente geodésicas dadas no Lema A.15. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^\perp \alpha_f)(Y, Z)(p, q) &= (\nabla_{\bar{X}}^\perp \alpha_f)(\bar{Y}, \bar{Z})(p, q) = \\
&= \nabla_{\bar{X}}^\perp \alpha_f(\bar{Y}, \bar{Z})(p, q) + \alpha_f(\nabla_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z})(p, q) + \alpha_f(\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}} \bar{Z})(p, q) = \\
&= \left[\bar{\nabla}_{f_* i_{1*}^q X_1(p) + f_* i_{2*}^p X_2(q)} \left(I_1^{f_2(q)} \alpha_{f_1}(Y_1, Z_1)(p) + I_2^{f_1(p)} \alpha_{f_2}(Y_2, Z_2)(p) \right) \right]^\perp + \\
&\quad + \alpha_f \left(\nabla_{i_{1*}^q X_1(p) + i_{2*}^p X_2(q)} [i_{1*}^q Y_1(p) + i_{2*}^p Y_2(q)], i_{1*}^q Z_1(p) + i_{2*}^p Z_2(q) \right) + \\
&\quad + \alpha_f \left(i_{1*}^q Y_1(p) + i_{2*}^p Y_2(q), \nabla_{i_{1*}^q X_1(p) + i_{2*}^p X_2(q)} (i_{1*}^q Z_1(p) + i_{2*}^p Z_2(q)) \right) = \\
&= \left[\bar{\nabla}_{I_1^{f_2(q)} f_{1*} X_1(p) + I_2^{f_1(p)} f_{2*} X_2(q)} \left(I_1^{f_2(q)} \alpha_{f_1}(Y_1, Z_1)(p) + I_2^{f_1(p)} \alpha_{f_2}(Y_2, Z_2)(p) \right) \right]^\perp + \\
&\quad + \alpha_f \left(i_{1*}^q \nabla_{X_1}^1 Y_1(p) + i_{2*}^p \nabla_{X_2}^2 Y_2(q), i_{1*}^q Z_1(p) + i_{2*}^p Z_2(q) \right) + \\
&\quad + \alpha_f \left(i_{1*}^q Y_1(p) + i_{2*}^p Y_2(q), i_{1*}^q \nabla_{X_1}^1 X_2(p) + i_{2*}^p \nabla_{X_2}^2 Z_2(q) \right) = \\
&= \left[I_1^{f_2(q)} \bar{\nabla}_{f_{1*} X_1}^1 \alpha_{f_1}(Y_1, Z_1)(p) + I_2^{f_1(p)} \bar{\nabla}_{f_{2*} X_2}^2 \alpha_{f_2}(Y_2, Z_2)(p) \right]^\perp + \\
&\quad + I_1^{f_2(q)} \alpha_{f_1}(\nabla_{X_1}^1 Y_1, Z_1)(p) + I_2^{f_1(p)} \alpha_{f_2}(\nabla_{X_2}^2 Y_2, Z_2)(q) + \\
&\quad + I_1^{f_2(q)} \alpha_{f_1}(Y_1, \nabla_{X_1}^1 Z_1)(p) + I_2^{f_1(p)} \alpha_{f_2}(Y_2, \nabla_{X_2}^2 Z_2)(q) = \\
&= I_1^{f_2(q)} \nabla_{X_1}^{1\perp} \alpha_{f_1}(Y_1, Z_1)(p) + I_2^{f_1(p)} \nabla_{X_2}^{2\perp} \alpha_{f_2}(Y_2, Z_2)(p) + \\
&\quad + I_1^{f_2(q)} \alpha_{f_1}(\nabla_{X_1}^1 Y_1, Z_1)(p) + I_2^{f_1(p)} \alpha_{f_2}(\nabla_{X_2}^2 Y_2, Z_2)(q) + \\
&\quad + I_1^{f_2(q)} \alpha_{f_1}(Y_1, \nabla_{X_1}^1 Z_1)(p) + I_2^{f_1(p)} \alpha_{f_2}(Y_2, \nabla_{X_2}^2 Z_2)(q) = \\
&= I_1^{f_2(q)} \nabla_{X_1}^\perp \alpha_{f_1}(Y_1, Z_1)(p) + I_2^{f_1(p)} \nabla_{X_2}^\perp \alpha_{f_2}(Y_2, Z_2)(q).
\end{aligned}$$

Portanto f é paralela se, e somente se, f_1 e f_2 são paralelas. \square

Lema A.17. $E_\eta(x) = \bigcap_{\psi \in T_x^\perp M} \ker(A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id})$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
X \in E_\eta(x) &\Leftrightarrow \alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle \eta, \forall Y \in T_x M \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \langle A_\psi X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle \langle \eta, \psi \rangle, \forall Y \in T_x M, \forall \psi \in T_x^\perp M \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow A_\psi X = \langle \eta, \psi \rangle X, \forall \psi \in T_x^\perp M \Leftrightarrow (A_\psi - \langle \psi, \eta \rangle \text{Id}) X = 0, \forall \psi \in T_x^\perp M. \quad \square
\end{aligned}$$

Lema A.18. *Sejam M uma variedade riemanniana, N uma distribuição em M , $B \in N(p)$ e $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ uma curva suave. Suponhamos que $\gamma(a) = p$ e que $B(t)$ seja o transporte paralelo de B ao longo de γ . Nessas condições, se N é paralela, então $B(t) \in N(\gamma(t))$, para todo $t \in [a, b]$.*

Lema A.19. *Seja $\phi: \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ uma isometria. Nessas condições, existem isometrias $\phi_1: \mathbb{S}_k^n \rightarrow \mathbb{S}_k^n$ e $\phi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\phi = \phi_1 \times \phi_2$.*

Demonstração. Seja $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ um ponto. Consideremos $T_p \mathbb{S}_k^n := i_{p_1}^{p_2} T_{p_1} \mathbb{S}_k^n \subset T_p \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$.

Afirmção 1: $\pi_2(\phi_* T_p \mathbb{S}_k^n) = \{0\}$.

Sejam $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ e $v \in T_p \mathbb{S}_k^n$ um vetor tangente ao primeiro fator e $\gamma: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{S}_k^n$ uma geodésica fechada tal que $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma'(0) = v$. Como γ é uma geodésica, então $\phi \circ (\gamma, p_2)$ também é uma geodésica em $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$, em que $(\gamma, p_2)(t) := (\gamma(t), p_2)$. Logo $\pi_2 \circ \phi \circ (\gamma, p_2)$ é constante ou é uma geodésica.

Como γ é uma geodésica fechada, então $\pi_2(\phi(\gamma(-\varepsilon), p_2)) = \pi_2(\phi(\gamma(\varepsilon), p_2))$, portanto $\pi_2 \circ \phi \circ (\gamma, p_2)$ é constante, pois não existem geodésicas fechadas em \mathbb{R} . Dessa forma, $\pi_2 \phi_* v = 0$. \checkmark

Como $\pi_2(\phi_* T_p \mathbb{S}_k^n) = \{0\}$, então $\phi_* T_p \mathbb{S}_k^n = T_{\phi(p)} \mathbb{S}_k^n$, logo $\phi_* T\mathbb{R} = T\mathbb{R}$. Sejam então $(x, y) = \phi(p)$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de $T_x \mathbb{S}_k^n$. Tomemos também $\phi_1 \in O(n)$ tal que $\phi_1(p_1) = x$ e $\phi_1(v_i) = \phi_* v_i$ e $\phi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi_2(t) := \begin{cases} t - p_2 + y, & \text{se } \phi_* e_{n+2} = e_{n+2}; \\ -t + p_2 + y, & \text{se } \phi_* e_{n+2} = -e_{n+2}; \end{cases}$$

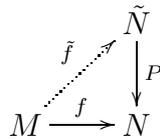
em que $e_{n+2} = (0, \dots, 1) \in \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{R}$. Dessa forma, $\phi_1 \times \phi_2: \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ é uma isometria tal que $\phi(p) = (\phi_1 \times \phi_2)(p)$, $\phi_* v_i = (\phi_1 \times \phi_2)_* v_i$ e $\phi_* e_{n+2} = (\phi_1 \times \phi_2)_* e_{n+2}$.

Seja agora $q \in \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ um ponto qualquer. Como $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ é completa, então $q = \exp_p v$, para algum $v \in T_p \mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \phi(q) &= \phi(\exp_p v) = \exp_{\phi(p)} \phi_*(p)v = \exp_{(\phi_1 \times \phi_2)(p)} (\phi_1 \times \phi_2)_*(p)v = \\ &= (\phi_1 \times \phi_2)(\exp_p v) = (\phi_1 \times \phi_2)(q). \end{aligned}$$

Portanto $\phi = \phi_1 \times \phi_2$. \square

Lema A.20 (ver [1]). *Sejam M, N e \tilde{N} variedades riemannianas e $P: \tilde{N} \rightarrow N$ uma aplicação de recobrimento e isometria local. Se $f: M \rightarrow N$ é uma imersão isométrica umbílica e M é conexa e simplesmente conexa, então existe uma imersão isométrica umbílica e $\tilde{f}: M \rightarrow \tilde{N}$ tal que $f = P \circ \tilde{f}$.*



Lema A.21 (Lema de Moore, ver [8]). *Sejam $M = M_1 \times M_2$ uma variedade riemanniana e $f: M \rightarrow \mathbb{R}_t^n$ uma imersão isométrica. Se $\alpha(X, Y) = 0$, sempre que $X \in \Gamma(TM_1)$ e $Y \in \Gamma(TM_2)$, então existem uma decomposição ortogonal $\mathbb{R}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}_t^n$, um vetor $v_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, e imersões isométricas $f_j: M_j \rightarrow \mathbb{R}^{n_j}$ tais que $f(x_1, x_2) = (v_0, f_1(x_1), f_2(x_2))$.*

Além disso $\mathbb{R}^{n_j} = \text{ger} \{f_* X: X \in T_x M_j \text{ e } x \in M\}$, para $j \in \{1, 2\}$, e $v_0 = \pi_0(f(x))$, em que $\pi_0: \mathbb{R}_t^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_0}$ é a projeção ortogonal e $\mathbb{R}^{n_0} = (\mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2})^\perp$.

Lema A.22 (Teorema de De Rham, ver [11], [23]). *Sejam M uma variedade riemanniana e \mathcal{D} uma distribuição em M . Suponhamos ainda que \mathcal{D} e \mathcal{D}^\perp sejam totalmente geodésicas e denotemos por N_1 e N_2 as folhas das distribuições \mathcal{D} e \mathcal{D}^\perp , respectivamente. Nessas condições, para cada $p \in M$, existem abertos $U \subset M$, $U_1 \subset N_1$ e $U_2 \subset N_2$ e existe uma isometria $\psi: U_1 \times U_2 \rightarrow U$ tais que: $p \in U \cap U_1 \cap U_2$ e, para cada $(x, y) \in U_1 \times U_2$, $\psi(U_1 \times \{y\})$ é uma folha de $\mathcal{D}(\psi(x, y))$ e $\psi(\{x\} \times U_2)$ é uma folha de $\mathcal{D}^\perp(\psi(x, y))$.*

Lema A.23 (ver [23] e [24]). *Sejam M uma variedade riemanniana e \mathcal{D} uma distribuição totalmente geodésica em M . Suponhamos ainda que $\mathcal{E} := \mathcal{D}^\perp$ seja uma distribuição esférica e denotemos por N_1 e N_2 as folhas das distribuições \mathcal{D} e \mathcal{E} , respectivamente. Nessas condições, para cada $p \in M$, existem abertos $U \subset M$, $U_1 \subset N_1$ e $U_2 \subset N_2$ e existem uma função diferenciável $\rho: U_1 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e uma isometria $\psi: U_1 \times_\rho U_2 \rightarrow U$ tais que: $p \in U \cap U_1 \cap U_2$ e, para cada $(x, y) \in U_1 \times_\rho U_2$, $\psi(U_1 \times \{y\})$ é uma folha de $\mathcal{D}(\psi(x, y))$ e $\psi(\{x\} \times U_2)$ é uma folha de $\mathcal{E}(\psi(x, y))$.*

Referências Bibliográficas

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Covering_space. 121
- [2] AHN, S.-S., KIM, D.-S., AND KIM, Y. H. Totally umbilic lorentzian submanifolds. *Journal of the Korean Mathematical Society* 33, 3 (1996), 507 – 511.
http://www.kms.or.kr/home/kor/article/journal/abstract_view.asp?articleid={1AE75BC8-DCE4-423E-897A-310B2029E87A}. iv, 1, 6
- [3] CALVARUSO, G., KOWALKZYK, D., AND VAN DER VEKEN, J. On extrinsically symmetric hypersurfaces of $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 82 (2010), 390 – 400. v
- [4] CECIL, T. E., AND RYAN, P. J. Focal sets of submanifolds. *Pacific Journal of Mathematics* 78, 1 (1978), 27 – 39.
<http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.pjm/1102806296>. 75
- [5] CHEN, B.-Y. *Geometry of submanifolds and its application*. Sience University of Tokyo, Tokyo, 1981. iv, 1
- [6] CHEN, B.-Y. *Total mean curvature and submanifolds of finite type*. Series in Pure Mathematics. World scientific, New Jersey and Singapore, 1984. iv, 1
- [7] DAJCZER, M. Reduction of the codimension of regular isometric immersions. *Mathematische Zeitschrift* 179 (1982), 263 – 286. 40
- [8] DAJCZER, M., ET AL. *Submanifolds and Isometric Immersions*. Publish or Perish, Houston, 1990. vi, 40, 121
- [9] DAJCZER, M., FLORIT, L., AND TOJEIRO, R. On a class of submanifolds carrying an extrinsic totally umbilical foliation. *Israel Journal of Mathematics* 125 (2001), 203 – 220. v, vi, 12, 23, 32
- [10] DANIEL, B. Isometric immersions into $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society* 361 (2009), 6255 – 6282. v
- [11] DE RHAM, G. Sur la reductibilité d'un espace de riemann. *Commentarii Mathematici Helvetici* 26 (1952), 328 – 344.
http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=PPN358147735_0026&DMDID=dmdlog25. 121
- [12] DILLEN, F., FASTENAKELS, J., AND DER VEKEN, J. V. Rotation hypersurfaces in $\mathbb{S}_k^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Note di Matematica* 29 (2009), 41 – 54. 12

- [13] DO CARMO, M., AND DAJCZER, M. Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature. *Transactions of the American Mathematical Society* 277 (1983), 685 – 709. 12
- [14] FERUS, D. Immersions with parallel second fundamental form. *Mathematische Zeitschrift* 140 (1974), 87 – 93. iv
- [15] FERUS, D. Symmetric submanifolds of euclidean space. *Mathematische Annalen* 427 (1980), 83 – 89. iv
- [16] GUO, Z., AND LIN, L. Generalized rotation submanifolds in a space form. *Results in Mathematics* 52, 3 – 4 (2008), 289 – 298. 12
- [17] JENTSCH, T. Parallel submanifolds of the real 2-grassmannian.
<http://de.arxiv.org/pdf/1107.5761.pdf> . v
- [18] LIRA, J. H., TOJEIRO, R., AND VITÓRIO, F. A bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms. *Archiv der Mathematik* 95 (2010), 469 – 479. i, v, vi, 40, 87
- [19] LOBOS, G. Classificação das imersões paralelas em formas espaciais. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas/SP – Brasil, 1994. iv
- [20] MONTALDO, S., AND ONNIS, I. I. A note on surfaces in $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* 8, 10B (2007), 939 – 950. v
- [21] NICOLAEVSKII, Y. A. Totally umbilical submanifolds of symmetric spaces. *Mat. Fiz. Anal. Geom.* 1 (1994), 314 – 357. iv, 80
- [22] NÖLKER, S. Isometric immersions of warped products. *Differential Geometry and its Applications* 6 (1996), 1 – 30. 12, 17
- [23] RECKZIEGEL, H., AND SCHAAF, M. Decomposition theorems in differential geometry. *General Mathematics* 5 (1997), 347 – 369.
<http://depmath.ulbsibiu.ro/genmath/gm/vol5/reck.html> . 121, 122
- [24] RECKZIEGEL, H., AND SCHAAF, M. De rham decomposition of netted manifolds. *Results in Mathematics* 35, 1 – 2 (1999), 175 – 191. 122
- [25] RYAN, P. J. Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces. *Tohoku Mathematical Journal* 21 (1969), 363 – 388.
<http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.tmj/1178242949> . 75
- [26] SOUAM, R., AND TOUBIANA, E. Totally umbilic surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Commentarii Mathematici Helvetici* 84, 3 (2009), 673 – 704. v, 87
- [27] TAKEUCHI, M. *In Manifolds and Lie groups (Papers in honor of Y. Matsushima)*. Birkhauser, Department of Mathematics Yamaguchi University Yamaguchi, 753 Japan, 1981, ch. Parallel submanifolds of space forms. iv
- [28] VAN DER VEKEN, J., AND VRANCKEN, L. Parallel and semi-parallel hypersurfaces of $S_k^n \times \mathbb{R}$. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society* 39, 3 (2008), 355 – 370. v, 87

Índice Remissivo

- $J_{p,q}$, 86
- $Y_{p,q}$, 86
- $Z_{p,q}$, 87
- \mathbf{K} , 43
- \mathbf{L} , 43
- \mathbf{R} , 43
- \mathbf{S} , 43
- \mathbf{T} , 43
- \mathbb{E}^n , 1
- Φ , 46
- \mathbb{R}^n , 1
- \mathbb{R}_t^n , 1
- \mathcal{L} , 1
- \mathcal{L}_* , 13
- \exp_p , iv
- \mathbb{H}^n , 1
- \mathbb{H}_k^n , 2
- \mathbb{L}^n , 1
- \mathbb{O}_k^n , 2
- $\mathbb{S}(c, r)$, 1
- \mathbb{S}_k^n , 1
- $O_t(n)$, 12
- \mathcal{I} , 86
- $\bar{\nabla}$, 2
- $\bar{\nabla}^\perp$, 46
- ∇^\perp , 2
- $\tilde{\nabla}$, 2
- \oplus , 1
- ϑ , 46
- $h_{p,q}$, 86
- \mathbb{S}^n , 1
- índice, 1
- cone de luz, 2
- curvatura média
 - vetor –, 12
- distribuição
 - esférica, 12
 - totalmente geodésica, 12
- umbílica, 12
- Dupin
 - normal de –, 12
- eixo de rotação, 12
- esférica
 - distribuição –, 12
- espaço
 - Euclidiano, 1
 - de Lorentz, ou Lorentziano, 2
 - nulidade conforme, 12
 - pseudoeuclidiano, 1
 - simétrico, iv
- forma espacial, iv
- imersão
 - de rotação, 22
 - paralela, 63
- não degenerado
 - subespaço vetorial –, 2
- normal
 - de Dupin, 12
 - principal, 12
- nulidade conforme
 - espaço –, 12
- paralela
 - imersão –, 63
 - subvariedade –, iv
- primeiro espaço normal, 55
- razão de uma semelhança, 115
- rotação
 - eixo de –, 12
 - imersão de –, 22
 - subvariedade de –, 12
- semelhança, 115
- soma com pesos, 50
- subespaço vetorial

- não degenerado, 2
 - tipo espaço, 2
 - tipo luz, 2
 - tipo tempo, 2
- subvariedade
- de rotação, 12
 - paralela, iv
 - umbílica, iv
- tensor
- Φ , 46
 - de decomposição, 32
- tipo espaço
- subespaço vetorial –, 2
 - vetor –, 2
- tipo luz
- subespaço vetorial –, 2
 - vetor –, 2
- tipo tempo
- subespaço vetorial –, 2
 - vetor –, 2
- totalmente geodésica
- distribuição –, 12
- umbílica
- distribuição –, 12
 - subvariedade –, iv
- vetor
- curvatura média, 12
 - tipo espaço, 2
 - tipo luz, 2
 - tipo tempo, 2