UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Juliano Damião Bittencourt de Godoi

Problemas de Autovalores de Steklov-Neumann e Aplicações

São Carlos - SP
Fevereiro de 2012

O presente trabalho teve suporte financeiro da Capes

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Problemas de Autovalores de Steklov-Neumann e Aplicações

Juliano Damião Bittencourt de Godoi
Orientador: Prof Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
Co-orientador: Prof Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues

Bolsista Capes

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática

São Carlos - SP
Fevereiro de 2012

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar

G588pa

Godoi, Juliano Damião Bittencourt de.
Problemas de autovalores de Steklov-Neumann e aplicações / Juliano Damião Bittencourt de Godoi. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
142p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Equações diferenciais parciais. 2. P-laplaciano. 3. Teorema do ponto fixo (Topologia). 4. Equações diferenciais elípticas. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
DM - UFJF

Rodrigo S. Rodrigues

Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues
DM - UFSCar

Prof. Dr. Ma To Fu
ICMC - USP

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo
DM - UFPB

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
UFPA

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter colocado em meu caminho tantas pessoas que me ajudaram e tornaram possível esse trabalho.

Agradeço especialmente à minha mãe Henriqueta, pelo apoio, pelo exemplo de vida, de superação e de força de vontade.

Às minhas sobrinhas Vanessa, Andressa e Karolayne, que sempre demonstraram muito carinho e apoio em tudo que eu fizesse.

Aos meus amigos do Departamento de Matemática: Aldo, Miguel, Rômel, Patrícia, Sandra, Sérgio, Zé, Silvestre, Luciano, "Jardel", Diogo, Patrícia e tantos outros.

À todos os meus professores, em especial aos da UFSM e os da UFSCar.

Agradeço também aos professores Peneireiro e Bidel, pelo incentivo e apoio.

Aos meus orientadores Olímpio e Rodrigo, pela maneira responsável e sempre visando o meu melhor, com a qual conduziram esse trabalho. A paciência, dedicação e profissionalismo de ambos sempre me servirão como modelo ao longo de toda a minha vida.

Por último, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Obteremos no presente trabalho quatro principais resultados de existência de solução fraca, três deles para sistemas de equações diferenciais parciais elípticas com condições de fronteira não lineares e o outro para equações diferenciais com condições de fronteira não lineares associadas ao operador p-laplaciano. Estes resultados serão obtidos quando houver uma certa interação entre as não linearidades de reação e o espectro de Neumann, e uma interação entre as não linearidades de fronteira e o espectro de Steklov, associados aos sistemas ou equações. A técnica que utilizaremos está, fundamentalmente, baseada em métodos de minimax da teoria do ponto crítico.

Abstract

In this work we will obtain four main results of existence of weak solution, three of them to elliptic partial differential systems with nonlinear boundary conditions and the other to elliptic partial differential equations with nonlinear boundary conditions associated with operator p-laplacian. These results will be obtained when there is a kind of interaction among the reaction nonlinearities and the Neumann spectra and an interaction among the boundary nonlinearities and the Steklov spectra, associated with the systems or equations. The tool that we will use is fundamentally based on minimax methods in critical point theory.

Índice de notações

$\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω;

$\partial\Omega$ é a fronteira de Ω;

$|A|$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto A de $\mathbb{R}^N$;

$|A|_\sigma$ é a σ-medida de um subconjunto A de $\mathbb{R}^{N-1}$;

$|U|_p^p = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} |u_i|^p$ e $|V| = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} |u_i|$, $\forall\ U = (u_1, \cdots, u_N) \in \mathbb{R}^N$, com $1 < p < \infty$.

$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u\ \textit{é continuamente k vezes diferenciável}\}$;

$C_c^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); \textit{supp}(u)\ \textit{é compacto}\}$;

$\|u\|_\infty = \inf\{a \geq 0; |\{x \in \Omega; |u(x)| > a\}| = 0\}$;

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u\ \textit{é mensurável e}\ \|u\|_\infty < \infty\}$;

$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ e $\|u\|_{p,\partial} = \left(\int_\Omega |u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}$;

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u\ \textit{é mensurável e}\ \|u\|_p < \infty\}$;

$L^p(\partial\Omega) = \{u : \partial\Omega \to \mathbb{R}; u\ \textit{é}\ \sigma - \textit{mensurável e}\ \|u\|_{p,\partial} < \infty\}$;

$[L^p(\Omega)]^2 = \{U = (u, v); u, v \in L^p(\Omega)\}$ e $[L^p(\partial\Omega)]^2 = \{U = (u, v); u, v \in L^p(\partial\Omega)\}$;

$\|U\|_p^p = \|u\|_p^p + \|v\|_p^p,\ \forall\ U = (u, v) \in [L^p(\Omega)]^2$;

$\|U\|_{p,\partial}^p = \|u\|_{p,\partial}^p + \|v\|_{p,\partial}^p,\ \forall\ U = (u, v) \in [L^p(\partial\Omega)]^2$;

$\langle u, v\rangle_2 = \int_\Omega uvdx,\ \forall\ u, v \in L^2(\Omega)$ e $\langle u, v\rangle_{2,\partial} = \int_{\partial\Omega} uvd\sigma,\ \forall\ u, v \in L^2(\partial)(\Omega)$;

$\langle U, V\rangle = U \cdot V = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} u_i v_i,\ \forall\ U = (u_1, \cdots, u_N), V = (v_1, \cdots, v_N) \in \mathbb{R}^N$;

$\langle U, V\rangle_2 = \int_\Omega U \cdot V dx,\ \forall\ U, V \in [L^2(\Omega)]^2$ e $\langle U, V\rangle_{2,\partial} = \int_{\partial\Omega} U \cdot V d\sigma,\ \forall\ U, V \in [L^2(\partial\Omega)]^2$;

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\ |\alpha| \leq 1\}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ é um multi-índice;

$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$ e $|\nabla u| = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|$;

$\nabla U = (\nabla u, \nabla v)$, para $U = (u, v)$;

$\|u\|_{1,p} = (\|u\|_p^p + \||\nabla u|\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$;

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$;

$\langle u, v\rangle_{H^1} = \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + uv]dx$;

$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}$, onde o fecho é tomado com relação a norma $\|\cdot\|_{1,2}$;

$H_0(\Omega) = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$;

$H(\Omega) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$;

$\langle U, V\rangle_H = \int_\Omega [U \cdot V + \nabla U \cdot \nabla V]dx, \ \forall \ U, V \in H(\Omega)$;

$\|U\|_H^2 = \langle U, U\rangle_H$;

$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{u \in L^2(\partial\Omega) : \exists \ v \in H^1(\Omega) \ tal \ que \ v \ |_{\partial\Omega} = u\}$;

$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}} = \inf\{\|v\|_{1,2} : v \in H^1(\Omega) \ e \ v \ |_{\partial\Omega} = u\}$;

$\triangle u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$;

$\triangle U = (\triangle u, \triangle v), \ para \ U = (u, v)$;

$\triangle_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$;

$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$;

X^* representa o espaço dual de $(X, \|\cdot\|)$, munido da norma $\|\cdot\|^*$;

$\sigma(X, X^*)$ representa a topologia fraca de X;

$u_n \to u$ em $(X, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u\| = 0 \Leftrightarrow u_n$ converge fortemente para u;

$u_n \rightharpoonup u$ em $(X, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |f(u_n) - f(u)| = 0, \ \forall \ f \in X^* \Leftrightarrow u_n$ converge fracamente para u.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudaremos quatro problemas de autovalores, a saber: auto-sistema de Steklov, auto-sistema de Neumann, problema de autovalor de Steklov para o p-laplaciano e o problema de autovalor de Neumann para o p-laplaciano. Além disso, usaremos os resultados provados para autovalores para estudar a existência de solução para uma classe de sistemas de equações elípticas não lineares com condição de fronteira não linear envolvendo o operador laplaciano e uma classe de equações elípticas não lineares com condição de fronteira não linear envolvendo o operador p-laplaciano. O primeiro problema de autovalor a ser estudado será o auto-sistema de Steklov

$$\textbf{(I)} \begin{cases} -\triangle U + C(x)U = 0, & se\ x \in \Omega \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = \mu U, & se\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

sob certas condições sobre Ω e $C(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & c(x) \end{pmatrix}$. Uma das dificuldades em lidar com esse tipo de problema é a necessidade de utilizarmos o operador traço. Inicialmente referimos o leitor aos artigos [7], [8], [9], [16], [23], [24] e [36], para o caso escalar. O segundo problema que estudaremos será o auto-sistema de Neumann

$$\textbf{(II)} \begin{cases} -\triangle U + C(x)U = \lambda U, & se\ x \in \Omega \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = 0, & se\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

com Ω e $C(x)$ satisfazendo certas condições, que serão vistas posteriormente. Em princípio, citamos, como referência ao leitor, para o caso escalar, [38], [39], [37], [53], e para o caso de sistema, [3] e [2]. O terceiro problema estudado é o auto-problema de Steklov envolvendo o operador p-laplaciano

$$\textbf{(III)} \begin{cases} -\triangle_p u + c(x)|u|^{p-2}u = 0, & se\ x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \mu |u|^{p-2}u, & se\ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

com Ω e $c(x)$ satisfazendo certas hipóteses, posteriormente mencionadas e $p \in (1, \infty)$. Para este problema encontramos certas dificuldades, pois o espaço em que lidamos não é mais um espaço de Hilbert, e sim, um espaço de Banach. Citamos, como referência ao leitor, [6], [37], [44], [50] e suas referências. O quarto problema que estudamos é o auto-problema de Neumann associado ao operador p-laplaciano

$$\textbf{(IV)} \begin{cases} -\triangle_p u + c(x)|u|^{p-2}u = \lambda |u|^{p-2}u, & se\ x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & se\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde, as hipótese sobre Ω e $c(x)$, serão ditas no momento oportuno e $p \in (1, \infty)$. Neste tipo de equação teremos dificuldades similares às encontradas no problema (III), dentre elas, lembramos que o espaço, no qual trabalharemos não é um espaço de Hilbert. Para o leitor interessado, citamos [11], [37], [12], [30], [27], [19], [13], [47], [54] e suas referências. Nos problemas I e II, garantimos a existência de sequências de autovalores ilimitadas. Já nos problemas III e IV, mostramos apenas a existência de um primeiro autovalor positivo. Como aplicações de I e II, obtemos três resultados de existência de solução fraca para a seguinte classe de sistemas elípticos não lineares com condições de fronteira não lineares

$$\mathbf{A} \begin{cases} -\triangle U + C(x)U = f(x, U), & se\ x \in \Omega \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = g(x, U), & se\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

sob certas condições sobre f, g e algumas relações impostas, que relacionarão o espectro do auto-sistema I com a não linearidade de fronteira, g, e o espectro do auto-sistema II com a não linearidade de reação, f. Ressaltamos que estes resultados foram inspirados no trabalho de [42], sendo que, estendemos os resultados deste artigo para sistemas. Notamos também que tal extensão não foi uma mera adaptação, pois tivemos algumas dificuldades na demonstração da condição de Palais-Smale, dentre outras. Por exemplo, tivemos que contornar e fazermos uso da condição de Cerami, em determinado momento. Sugerimos ao leitor os artigos [42], [14], [49], [17] e suas referências. Já, como aplicação de III e IV, estabelecemos a existência de uma solução fraca para uma classe de equações não lineares com condição de fronteira não linear, envolvendo o operador p-laplaciano, a saber,

$$\mathbf{B}\begin{cases} -\triangle_p u + c(x)|u|^{p-2}u = f(x,u), & se\ x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = g(x,u), & se\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

esta solução é obtida, quando relacionamos, de certo modo, a condição de fronteira g com o autovalor de Neumann associado ao problema IV, enquanto que a condição de reação f é relacianada ao autovalor de Steklov associado ao problema III. O resultado de existência de solução fraca que conseguimos estende o primeiro teorema do artigo de Mavinga-Nkashama [42], para o caso do operador p-laplaciano. Organizamos este trabalho como segue: No primeiro capítulo, resolvemos o problema I;

No segundo capítulo, resolvemos o problema II;

No terceiro capítulo, obtemos os três resultados de existência de solução fraca para o problema (A);

No quarto capítulo, resolvemos os problemas III e IV;

No quinto capítulo, provamos o resultado, o qual garante a existência de uma solução fraca para o problema (B);

No sexto capítulo, colecionamos uma série de resultados básicos, porém fundamentais para um bom entendimento deste trabalho.

Capítulo

1

Autovalores de Steklov para sistemas envolvendo o operador laplaciano

1.1 Definições e notações

Neste capítulo consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, um domínio, isto é, um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, conexo e não vazio. Nossa hipótese fundamental sobre Ω será:

(H) Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e $\partial\Omega$ é uma reunião disjunta de um número finito de superfícies de Lipschitz fechadas, tendo cada superfície, área de superfície finita. Quando a condição **(H)** for válida, existe um normal exterior unitário, η, para q.t.p. (quase todo ponto) da $\partial\Omega$ (veja [25]). Dizemos que o domínio Ω satisfaz o teorema de Rellich-Kondrachov (teorema **R-K**), se o mergulho de $H^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ for contínuo para $1 \leq p \leq p(N)$ e compacto quando a última desigualdade for estrita, sendo

$$p(N) = \begin{cases} \infty, & se\ N = 2 \\ \frac{2N}{N-2}, & se\ N \geq 3. \end{cases}$$

Observação 1: Existe uma série de resultados que nos dão condições suficientes para obtermos a validade do teorema **R-K** (veja [1], [5] e [22]). Um dentre estes resultados (teorema 1, seção 4.6 de [25]), nos garante que a condição **(H)** é suficiente para a validade do teorema **R-K**. Quando a condição **(H)** for válida, e $u \in H^1(\Omega)$, o traço de u sobre $\partial\Omega$, o qual denotaremos por Γu, está bem definido e é uma função Lebesgue integrável com respeito a σ (veja [25]). Dizemos que Ω satisfaz o teorema do traço compacto (teorema

T-C), se o ope- rador traço $\Gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ for compacto.

Observação 2: Em [25], foi mostrado que o operador Γ é contínuo, quando $\partial\Omega$ satisfaz a condição **(H)**. Já, em [26], o teorema 1.5.1.10 fornece uma desigualdade que garante a validade do teorema **T-C**, desde que a condição **(H)** seja válida. Em outras literaturas, tais como [22], obtém-se outras condições suficientes para a validade de tal teorema. No que segue, a menos que seja necessário, abusaremos da notação e denotaremos, por simplicidade, $u = \Gamma(u)$ e $\Sigma(U) \doteq (\Gamma(u), \Gamma(v)) = (u, v) = U$, sendo $U \in H(\Omega)$. Nossa hipótese geral, para este capítulo, será a validade da condição **(H)**, a qual nos garante, pelas observações 1 e 2, a validade dos teoremas **R-K** e **T-C**.

1.2 O auto-sistema de Steklov

Nesta seção, daremos algumas definições básicas, as quais estão relacionadas ao auto-sistema de Steklov

$$\begin{cases} -\triangle U + C(x)U = 0, & se\ x \in \Omega \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = \mu U, & se\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, satisfaz **(H)** e $C(x)$ deve satisfazer a condição

(P) $C(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & c(x) \end{pmatrix}$ é uma matriz positiva definida sobre $\mathbb{R}^2$, para q.t.p. $x \in \Omega$, com $a, b, c \in L^p(\Omega)$, para $p \geq \frac{N}{2}$, quando $N \geq 3$, ($p > 1$, quando $N = 2$).

Notamos, que em virtude da validade de **(P)**,

$$\int_\Omega \langle C(x)U, U\rangle dx > 0,\ se\ U \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

E mais, podemos mostrar que uma condição suficiente para a ocorrência de **(P)** é que

$$a(x) > 0\ e\ a(x)c(x) - b(x)^2 > 0,\ q.t.p.\ x \in \Omega.$$

Definição 1.1 *Encontrar uma solução fraca para o auto-sistema (1.1) é o mesmo que* *encontrar valores reais de μ tais que existe uma solução não trivial $U \in H(\Omega)$ de*

$$\int_\Omega [\nabla U \cdot \nabla V + \langle C(x)U, V\rangle]\, dx = \mu \int_{\partial\Omega} U \cdot V d\sigma, \ \forall\ V \in H(\Omega). \tag{1.2}$$

Neste caso, quando $U \in H(\Omega)\backslash\{0\}$, diremos que U é uma autofunção de Steklov associada ao autovalor de Steklov μ.

No transcorrer deste capítulo, generalizaremos algumas ideias de [7] e [8] para encontrarmos uma sequência de autovalores de Steklov. Primeiramente, provaremos a existência de um primeiro autovalor de Steklov. Para isso, definimos $\Upsilon_C, \beta : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, pondo

$$\Upsilon_C(U) = \int_\Omega [\nabla U \cdot \nabla V + \langle C(x)U, U\rangle]\, dx \ e \ \beta(U) = \|U\|^2_{2,\partial}, \ \forall\ U \in H(\Omega), \tag{1.3}$$

e

$$\mathbb{K} = \{U \in H(\Omega) : \Upsilon_C(U) \leq 1\}. \tag{1.4}$$

Utilizaremos técnicas variacionais para maximizar β sobre $\mathbb{K}$. Diante disso, seja

$$\alpha_1 = \sup\{\beta(U) : \ U \in \mathbb{K}\}. \tag{1.5}$$

Mostraremos que tal maximizador é uma autofunção de Steklov para o auto-sistema (1.1), correspondendo ao menor autovalor positivo de Steklov, μ_1, o qual satisfaz $\alpha_1 = \mu_1^{-1}$. Para provarmos isso, precisaremos de alguns resultados preliminares, os quais serão vistos na próxima seção.

1.3 Resultados preliminares

Nesta seção abordaremos alguns resultados que nos serão úteis para a construção da sequência de autovalores de Steklov associada ao auto-sistema (1.1). Suponhamos válidas as condições **(H)** e **(P)**. Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle_C : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, por

$$\langle U, V\rangle_C = \int_\Omega [\nabla U \cdot \nabla V + \langle C(x)U, V\rangle]\, dx.$$

Lema 1.1 *Se valerem **(H)** e **(P)**, então $\langle \cdot, \cdot \rangle_C$ define um produto interno em $H(\Omega)$.*

Prova: Graças à validade da condição **(P)**, temos, para $U \in H(\Omega)$,

$$\langle U, U\rangle_C \geq 0 \ e \ \langle U, U\rangle_C = 0 \Leftrightarrow U = 0 \ em \ H(\Omega).$$

Ainda, $\langle \cdot, \cdot \rangle_C$ é simétrico, pois a matriz $C(x)$ é simétrica. Por fim, a bilinearidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ é imediata. Logo $\langle \cdot, \cdot \rangle_C$ define um produto interno em $H(\Omega)$, como desejávamos.

■

Denotaremos a norma proveniente do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_C$ por $\| \cdot \|_C$. Provaremos, no que segue, que as normas $\| \cdot \|_C$, $\| \cdot \|_H$ são equivalentes em $H(\Omega)$. Para isso precisaremos de uma série de lemas, os quais referem-se aos funcionais $\tilde{A}, \tilde{C} : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $\tilde{B} : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, definidos por

$$\tilde{A}(u) = \int_\Omega a(x)u^2 dx, \ \tilde{C}(u) = \int_\Omega c(x)u^2 dx, \ \forall \ u \in H^1(\Omega)$$

e

$$\tilde{B}(u, v) = \int_\Omega b(x)uvdx, \ \forall \ u, v \in H^1(\Omega).$$

Lema 1.2 *Os funcionais $\tilde{A}$ e $\tilde{C}$ são contínuos.*

Prova: Mostraremos, inicialmente, a continuidade de $\tilde{A}$. Para isso consideremos (u_n) uma sequência em $H^1(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$ tais que

$$u_n \to u \ em \ (H^1(\Omega), \| \cdot \|_{1,2}). \tag{1.6}$$

Caso $N > 2$**:** Em razão da validade do teorema **R-K**, o mergulho $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínuo, para $1 \leq q \leq \frac{2N}{N-2}$. Por isso e por (1.6), vale

$$u_n \to u \ em \ (L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega), \| \cdot \|_{\frac{2N}{N-2}}). \tag{1.7}$$

Consequentemente, existe uma subsequência (u_{n_k}) da sequência (u_n) tal que

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \ em \ (\mathbb{R}, | \cdot |), \ q.t.p. \ x \in \Omega. \tag{1.8}$$

Agora, visto que $u_n, u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$, temos $u_n^2, u^2 \in L^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$. Além disso, em virtude de (1.7) e (1.8) valerem, ao aplicarmos o lema de Brezis-Lieb, concluímos que

$$\|u_{n_k}^2\|_{\frac{N}{N-2}} \to \|u^2\|_{\frac{N}{N-2}} \; em \; (\mathbb{R}, |\cdot|).$$

Assim, ao aplicarmos o teorema 6.8, segue que

$$\|u_{n_k}^2 - u^2\|_{\frac{N}{N-2}} \to 0 \; em \; (\mathbb{R}, |\cdot|). \tag{1.9}$$

Deste modo, se $u_n \to u$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2})$, então existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) tal que (1.9) vale.

Afirmação 1: $u_n^2 \to u^2$ em $(L^{\frac{N}{N-2}}(\Omega), \|\cdot\|_{\frac{N}{N-2}})$.

De fato, suponha que seja falsa tal afirmação, então existem $\epsilon > 0$ e subsequência (u_{n_j}) de (u_n), tais que $\|u_{n_j}^2 - u^2\|_{\frac{N}{N-2}} \geq \epsilon$, $\forall \; j \in \mathbb{N}$. Como (1.6) vale, segue, em particular, que $u_{n_j} \to u$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2})$. Por causa disso e dos argumentos iniciais, existe subsequência $(u_{n_{j_l}})$ de (u_{n_j}), tal que $u_{n_{j_l}}^2 - u^2 \to 0$ em $(L^{\frac{N}{N-2}}, \|\cdot\|_{\frac{N}{N-2}})$, o que gera uma contradição com nossa suposição. Ou seja, a afirmação 1 é válida. Finalmente, estamos aptos a provar a continuidade de $\tilde{A}$. Em razão de $a \in L^p(\Omega)$, com $p \geq \frac{N}{2}$, e à Ω ser um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, segue que $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Portanto, com o auxílio da desigualdade de Hölder,

$$\left|\tilde{A}(u_n) - \tilde{A}(u)\right| \leq \int_\Omega |a(x)||u_n^2 - u^2| dx \leq \|a\|_{\frac{N}{2}} \|u_n^2 - u^2\|_{\frac{N}{N-2}}.$$

Com isso e pela afirmação 1, segue a continuidade de $\tilde{A}$.

Caso $N = 2$**:** Neste caso, pelo teorema **R-K**, o mergulho $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínuo para $1 \leq q < \infty$. Assim, $u_n \to u$ em $(L^q(\Omega), \|\cdot\|_q)$, para qualquer $q \in [1, \infty)$. Com isso, ao argumentarmos como no caso $N > 2$, podemos mostrar que

$$u_n^2 \to u^2 \; em \; (L^q(\Omega), \|\cdot\|_q), \; \forall q \in [1, \infty) \tag{1.10}$$

Como $a \in L^p(\Omega)$, com $p > 1$, segue, da desigualdade de Hölder, que

$$\left|\tilde{A}(u_n) - \tilde{A}(u)\right| \leq \int_\Omega |a(x)||u_n^2 - u^2| dx \leq \|a\|_p \|u_n^2 - u^2\|_{p'}. \tag{1.11}$$

onde p' é o expoente conjugado de p, e claro, $p' \in [1,\infty)$, pois $p>1$. Daí, pela validade de (1.11) e de (1.10), concluímos que o funcional $\tilde{A}$ é contínuo. A prova de que $\tilde{C}$ é contínuo é análoga à demonstração da continuidade do funcional $\tilde{A}$, por isso a omitiremos.

■

Lema 1.3 *O funcional $\tilde{B}$ é contínuo.*

Prova: Em vista da caracterização do funcional $\tilde{B}$ e das propriedades de integração, temos que $\tilde{B}$ é bilinear. Deste modo, basta-nos mostrar que $\tilde{B}$ é contínuo em $0 \in H(\Omega)$. Com este intuito, consideremos (U_n) uma sequência em $H(\Omega)$, tal que $U_n \to 0$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Assim, ao denotarmos $U_n = (u_n, v_n)$ e $0 = (0,0)$, temos

$$u_n \to 0 \ e \ v_n \to 0, \ em \ (H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2}) \tag{1.12}$$

Caso $N > 2$: Pela validade do teorema **R-K**, o mergulho $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, é contínuo, para $1 \leq q \leq \frac{2N}{N-2}$. Com isso e graças à validade de 1.12, concluímos que

$$u_n \to 0 \ e \ v_n \to 0, \ em \ (L^{\frac{2N}{N-2}}, \|\cdot\|_{\frac{2N}{N-2}}). \tag{1.13}$$

Agora, ao aplicarmos a desigualdade de Hölder generalizada, notando que $b \in L^p(\Omega)$, com $p \geq \frac{N}{2}$, obtemos

$$|\tilde{B}(u_n, v_n)| \leq \int_\Omega |b(x)||u_n||v_n|dx \leq \|b\|_{\frac{N}{2}} \|u_n\|_{\frac{2N}{N-2}} \|v_n\|_{\frac{2N}{N-2}}.$$

Disso e da convergência dada em (1.13), segue a continuidade do funcional $\tilde{B}$.

Caso $N = 2$: Neste caso, em razão do teorema **R-K**,

$$u_n \to 0 \ e \ v_n \to 0 \ em \ (L^q(\Omega), \|\cdot\|_q), \ \forall q \in [1, \infty)\,. \tag{1.14}$$

Como $b \in L^p(\Omega)$, com $p > 1$, existe $r \in (0,1)$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \leq 1$. Logo, ao aplicarmos a desigualdade de Hölder generalizada,

$$|\tilde{B}(u_n, v_n)| \leq \textstyle\int_\Omega |b(x)||u_n||v_n|dx \leq \|b\|_p \|u_n\|_{\frac{2}{r}} \|v_n\|_{\frac{2}{r}}.$$

Combinando isso com a convergência dada em (1.14), segue a continuidade do funcional $\tilde{B}$, como desejávamos.

■

Lema 1.4 *Seja $\tilde{G} : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por $\tilde{G}(u) \doteq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$. Então $\tilde{G}$ é um funcional contínuo.*

Prova: Em [52] e [46], é mostrado que $\tilde{G} \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. Consequentemente, $\tilde{G}$ é contínuo.

■

Como consequência dos lemas anteriores temos a seguinte proposição.

Proposição 1.1 *Se valerem **(H)** e **(P)**, então o funcional $\Lambda_C : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por $\Lambda_C(U) = \|U\|_C$, é contínuo e convexo.*

Prova: Notemos que, para $U = (u, v) \in H(\Omega)$

$$\Lambda_C(U)^2 = \|U\|_C^2 = \Upsilon_C(U) \text{ e } \Upsilon_C(U) = \tilde{G}(u) + \tilde{G}(v) + \tilde{A}(u) + 2\tilde{B}(u,v) + \tilde{C}(v).$$

Afirmação 1: Υ_C é um funcional contínuo.

De fato, seja (U_n) uma sequência em $H(\Omega)$ tal que $U_n \to U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Então, se denotarmos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (u_n, v_n)$, $u_n \to u$ e $v_n \to v$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2})$. Por isso e pelos funcionais $\tilde{G}, \tilde{A}, \tilde{B}$ e $\tilde{C}$ serem contínuos,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \Upsilon_C(U_n) &= \lim_{n\to+\infty} \left[\tilde{G}(u_n) + \tilde{G}(v_n) + \tilde{A}(u_n) + 2\tilde{B}(u_n,v_n) + \tilde{C}(v_n)\right] \\ &= \tilde{G}(u) + \tilde{G}(v) + \tilde{A}(u) + 2\tilde{B}(u,v) + \tilde{C}(v) = \Upsilon_C(U), \end{aligned}$$

ou seja, o funcional Υ_C é contínuo, ficando, assim, justificada a afirmação 1. Devido à validade da afirmação 1 e à $\Lambda_C = \sqrt{\cdot} \circ \Upsilon_C$, segue a continuidade de Λ_C. Já, a prova da convexidade de Λ_C, é imediata, haja visto que $\|\cdot\|_C$ define uma norma em $H(\Omega)$. Com isso, finalizamos a prova da proposição 1.1.

■

Observação 1: Como o funcional Λ_C é contínuo e convexo, ele é fracamente sequencialmente contínuo em $H(\Omega)$. Consequentemente, toda sequência (U_n) tal que $U_m \rightharpoonup U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$, satisfaz

$$\liminf_{n\to+\infty} \Lambda_C(U_m) \geq \Lambda_C(U).$$

Proposição 1.2 *Suponhamos válidas as condições* ***(H)*** *e* ***(P)****. Então existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\Upsilon_C(U) \geq \delta\|U\|_2^2,\ \forall\ U \in H(\Omega). \tag{1.15}$$

Prova: Sejam $\mathbb{S} = \{U \in H(\Omega) : \|U\|_2 = 1\}$ e $\delta = \inf_{U\in\mathbb{S}} \Upsilon_C(U)$.
Afirmação 1: Existe $\widehat{U} \in \mathbb{S}$ tal que $\Upsilon_C(\widehat{U}) = \delta$.
De fato, da definição de ínfimo, conseguimos uma sequência em $\mathbb{S}$, (U_m), tal que

$$\Upsilon_C(U_m) \to \delta\ em\ (\mathbb{R}, |\cdot|)\ e\ \Upsilon_C(U_m) < \delta + 1. \tag{1.16}$$

Como $U_m \in \mathbb{S}$, $\|U_m\|_H^2 = \int_\Omega \nabla U_m \cdot \nabla U_m dx + \|U_m\|_2^2 = \int_\Omega \nabla U_m \cdot \nabla U_m dx + 1$. Assim, em virtude da validade de **(P)**, $\|U\|_C^2 = \Upsilon_C(U_m) \geq \|U_m\|_H^2 - 1$. Logo, por (1.16), $\|U_m\|_H^2 \leq \delta + 2$. Ou seja, a sequência (U_m) é limitada em $H(\Omega)$. Disso e em razão de $H(\Omega)$ ser um espaço reflexivo, existem subsequência (U_{m_k}) de (U_m) e $\widehat{U} \in H(\Omega)$, tais que $U_{m_k} \rightharpoonup \widehat{U}$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Consequentemente, por causa da validade do teorema **R-K**,

$$U_{m_k} \to \widehat{U},\ em\ \left(\left[L^2(\Omega)\right]^2, \|\cdot\|_2\right).$$

Com isso, por $U_{m_k} \in \mathbb{S}$ e pela continuidade da norma $\|\cdot\|_2$, $\widehat{U} \in \mathbb{S}$. Finalmente, como $U_{m_k} \rightharpoonup \widehat{U}$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$, segue, da observação 1, que

$$\|\widehat{U}\|_C \leq \liminf_{k\to+\infty} \|U_{m_k}\|_C = \delta^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, $\Upsilon_C(\widehat{U}) = \|\widehat{U}\|_C^2 \leq \delta$. Disso e do fato de $\widehat{U} \in \mathbb{S}$, concluímos que $\delta = \Upsilon_C(\widehat{U})$, ficando assim provada a afirmação 1.
Afirmação 2: $\delta > 0$.
De fato, pela afirmação 1, $\delta = \Upsilon_C(\widehat{U}) = \|\widehat{U}\|_C^2 \geq 0$. Se $\delta = 0$, então $\|\widehat{U}\|_C^2 = \Upsilon_C(\widehat{U}) = 0$, e assim $\widehat{U} = 0$ em $H(\Omega)$, o que é um absurdo, pois $\widehat{U} \in \mathbb{S}$. Logo, devemos ter

$\delta > 0$, justificando, desta maneira, a afirmação 2. Agora, estamos aptos a demonstrar a desigualdade (1.15). Caso $U \in H(\Omega)$ seja trivial em $H(\Omega)$, então a igualdade em (1.15) é facilmente verificada. Caso $U \in H(\Omega)$ seja não trivial, então, se definirmos $V = \dfrac{U}{\|U\|_2} \in H(\Omega)$, $V \in \mathbb{S}$, e assim, $\Upsilon_C(V) \geq \delta$. Com isso, e pelo fato de Υ_C ser 2-homogênea, temos

$$\frac{1}{\|U\|_2^2}\Upsilon_C(U) \geq \delta,$$

de onde segue que $\Upsilon_C(U) \geq \delta\|U\|_2^2$.

■

A próxima proposição nos garante a equivalência das normas $\|\cdot\|_C$ e $\|\cdot\|_H$ em $H(\Omega)$.

Proposição 1.3 *Suponhamos **(P)** e **(H)** válidas, então $\|\cdot\|_C, \|\cdot\|_H$ são normas equivalentes em $H(\Omega)$.*

Prova: Uma vez que Υ_C é 2-homogênea e contínua sobre $H(\Omega)$, existe constante $C_2 > 0$, tal que $\Upsilon_C(U) \leq C_2\|U\|_H^2$, $\forall\, U \in H(\Omega)$. Assim, como $\Upsilon_C(U) = \|U\|_C^2$,

$$\|U\|_C \leq \sqrt{C_2}\|U\|_H, \ \forall\, U \in H(\Omega). \tag{1.17}$$

Agora, devido à validade de **(P)**, $\|U\|_H^2 \leq \|U\|_C^2 + \|U\|_2^2$, $\forall\, U \in H(\Omega)$. Já, pela desigualdade (1.15), $\|U\|_H^2 \leq (1 + \frac{1}{\delta})\|U\|_C^2$, $\forall\, U \in H(\Omega)$. Portanto,

$$\|U\|_H \leq \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}\|U\|_C, \ \forall\, U \in H(\Omega). \tag{1.18}$$

Das desigualdades (1.17) e (1.18), segue a equivalência das normas $\|\cdot\|_H$ e $\|\cdot\|_C$.

■

Proposição 1.4 *O conjunto $\mathbb{K}$, como em (1.4), é fracamente compacto em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$.*

Prova: Inicialmente, lembremos que $\mathbb{K} = \{U \in H(\Omega) : \ \Upsilon_C(U) \leq 1\}$.

Afirmação 1: $\mathbb{K}$ é convexo.

De fato, como $\|\cdot\|_C$ define uma norma em $H(\Omega)$, segue, para $U, V \in \mathbb{K}$ e $t \in [0,1]$, que

$$\|(1-t)U + tV\|_C \leq (1-t)\|U\|_C + t\|V\|_C \leq 1 - t + t = 1.$$

Logo $(1-t)U + tV \in \mathbb{K}$, $\forall\, t \in [0,1]$, $\forall\, U, V \in \mathbb{K}$. Daí segue a convexidade de $\mathbb{K}$.

Afirmação 2: $\mathbb{K}$ é limitado em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$.

De fato, seja $U \in \mathbb{K}$. Então $\|U\|_C \leq 1$. Agora, como as normas $\|\cdot\|_C$ e $\|\cdot\|_H$ são equivalentes em $H(\Omega)$, existe constante $C_0 > 0$ tal que $\|U\|_C \geq C_0\|U\|_H$, $\forall\, U \in H(\Omega)$. Consequentemente, $\|U\|_H \leq \frac{1}{C_0}$, $\forall\, U \in \mathbb{K}$. Ou seja, $\mathbb{K}$ é limitado em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$, como desejávamos.

Afirmação 3: $\mathbb{K}$ é fechado em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$.

De fato, de acordo com a afirmação 1, da proposição (1.1), Υ_C é um funcional contínuo. Por isso e pelo fato de $\mathbb{K} = \Upsilon_C^{-1}\left((-\infty, 1]\right)$, concluímos que $\mathbb{K}$ é um subconjunto fechado em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$, ficando, assim, provada a afirmação 3. Finalmente, como $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$ é um espaço reflexivo e as afirmações $1, 2$ e 3 são válidas, podemos aplicar o teorema 6.6, o qual nos garante que $\mathbb{K}$ é fracamente compacto em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$.

∎

A próxima proposição nos fornece algumas propriedades para Υ_C e β.

Proposição 1.5 *Suponhamos válidas as condições **(H)** e **(P)**. Então β e Υ_C são elementos de $C^1((H(\Omega), \|\cdot\|_H), \mathbb{R})$, tendo como derivadas de Fréchet em $U \in H(\Omega)$,*

$$\Upsilon_C'(U)(V) = 2\langle U, V\rangle_C \ \textit{e}\ \beta'(U)(V) = 2\langle U, V\rangle_{2,\partial},\ \forall\, V \in H(\Omega).$$

Além disso, β é um funcional fracamente contínuo sobre $H(\Omega)$.

Prova: Primeiramente, provaremos que Υ_C é um elemento de $C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação 1: Para $U \in H(\Omega)$ fixado, $F_U : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por $F_U(V) = 2\langle U, V\rangle_C$, para $V \in H(\Omega)$, é um funcional linear e limitado.

De fato, a linearidade de F_U segue do fato de $\langle\cdot,\cdot\rangle_C$ ser um produto interno em $H(\Omega)$. Provemos, então, a limitação do funcional F_U. Ora, devido à equivalência das normas $\|\cdot\|_C$ e $\|\cdot\|_H$ em $H(\Omega)$, temos, para $V \in H(\Omega)$,

$$|F_U(V)| = 2|\langle U, V\rangle_C| \leq 2\|U\|_C\|V\|_C \leq 2C_1\|U\|_H\|V\|_H, \tag{1.19}$$

onde C_1 é uma constante positiva. Consequentemente, F_U é limitado.

Afirmação 2: Υ_C é Fréchet diferenciável em $H(\Omega)$, tendo como derivada de Fréchet em

$U \in H(\Omega)$, F_U.

De fato, antes, lembramos que pelo fato das normas $\|\cdot\|_C, \|\cdot\|_C$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, existe constante $C_0 > 0$ que satisfaz $\|W\|_C \leq C_0\|W\|_H$, $\forall\, W \in H(\Omega)$. Assim, para $U \in H(\Omega)$ fixado, $\epsilon > 0$ e $V \in H(\Omega)$, com $0 < \|V\|_H < \frac{\epsilon}{C_0^2}$, temos

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\|V\|_H}|\Upsilon_C(U+V) - \Upsilon_C(U) - F_U(V)| &= \tfrac{1}{\|V\|_H}\,|\|U+V\|_C^2 - \|U\|_C^2 - 2\langle U, V\rangle_C| \\
&= \tfrac{1}{\|V\|_H}\,|\langle U+V, U+V\rangle_C - \langle U, U\rangle_C - 2\langle U, V\rangle_C| \\
&\leq \tfrac{1}{\|V\|_H}|\langle V, V\rangle_C| \leq \tfrac{1}{\|V\|_H}\|V\|_C^2 \leq C_0^2\|V\|_H < \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, vale a afirmação 2.

Afirmação 3: O operador $\Upsilon_C' : H(\Omega) \to H(\Omega)^*$ é contínuo.

De fato, consideremos (U_n) uma sequência em $H(\Omega)$ e $U \in H(\Omega)$, tais que $U_n \to U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Daí, em virtude da desigualdade (1.19), temos

$$\begin{aligned}
\|\Upsilon_C'(U_n) - \Upsilon_C'(U)\|_H^* &= \sup\{|\Upsilon_C'(U_n) - \Upsilon_C'(U)(V)| : V \in H(\Omega) \ e \ \|V\|_H = 1\} \\
&\leq 2C_1\|U_n - U\|_H \to 0, \ em \ (\mathbb{R}, |\cdot|),
\end{aligned}$$

ficando assim justificada a afirmação 3. Por isso, e pela validade das afirmações 1 e 2, segue que $\Upsilon_C \in C^1((H(\Omega), \|\cdot\|_H), \mathbb{R})$. Passaremos, agora, a provar que $\beta \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação I: Para $U \in H(\Omega)$ fixado, $B_U : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por $B_U(V) = 2\langle U, V\rangle_{2,\partial}$, para $V \in H(\Omega)$, é um funcional linear e limitado.

De fato, a prova da linearidade é imediata. Provemos então a limitação de B_U. Ora, pelo teorema **T-C**, existe constante $A_0 > 0$, tal que $\|W\|_{2,\partial} \leq A_0\|W\|_H$, para $W \in H(\Omega)$. Consequentemente, para $V \in H(\Omega)$,

$$|B_U(V)| = 2|\langle U, V\rangle_{2,\partial}| \leq 2\|U\|_{2,\partial}\|V\|_{2,\partial} \leq 2A_0^2\|U\|_H\|V\|_H. \tag{1.20}$$

Daí segue a limitação do funcional B_U.

Afirmação II: O funcional β é Fréchet diferenciável, tendo como derivada de Fréchet em $U \in H(\Omega)$, B_U.

De fato, seja $U \in H(\Omega)$. Então, dado $\epsilon > 0$, temos, para $V \in H(\Omega)$, com $0 < \|V\|_H < \frac{\epsilon}{A_0}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|V\|_H}|\beta(U+V) - \beta(U) - B_U(V)| &= \frac{1}{\|V\|_H}\left|\|U+V\|^2_{2,\partial} - \|U\|^2_{2,\partial} - 2\langle U, V\rangle_{2,\partial}\right| \\
&= \frac{1}{\|V\|_H}\left|\langle U+V, U+V\rangle_{2,\partial} - \langle U, U\rangle_{2,\partial} - 2\langle U, V\rangle_{2,\partial}\right| \\
&\leq \frac{1}{\|V\|_H}|\langle V, V\rangle_{2,\partial}| \leq \frac{1}{\|V\|_H}\|V\|^2_{2,\partial} \leq A_0^2\|V\|_H < \epsilon.
\end{aligned}$$

Com isso, finalizamos a prova da afirmação II.

Afirmação III: O operador $\beta^{'} : H(\Omega) \to H(\Omega)^*$ é contínuo.

De fato, consideremos (U_n) uma sequência em $H(\Omega)$ e $U \in H(\Omega)$, tais que $U_n \to U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Por conseguinte, em razão da desigualdade (1.20),

$$\begin{aligned}
\|\beta^{'}(U_n) - \beta^{'}(U)\|^*_H &= \sup\{|\beta^{'}(U_n) - \beta^{'}(U)(V)| : V \in H(\Omega) \ e \ \|V\|_H = 1\} \\
&\leq 2A_0^2\|U_n - U\|_H \to 0, \ em \ (\mathbb{R}, |\cdot|).
\end{aligned}$$

Portanto, $\beta^{'}$ é um operador contínuo, como queríamos. Com isso e pela validade das afirmações I e II temos que $\beta \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$. Passaremos a provar, a partir de agora, que β é fracamente contínuo. Para tanto, sejam (U_m) uma sequência em $H(\Omega)$ e $U \in H(\Omega)$, tais que $U_m \rightharpoonup U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Uma vez que o teorema **T-C** é válido, temos $U_m \to U$ em $([L^2(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{2,\partial})$. Mas também, $\beta(U_m) - \beta(U) = \langle U_m - U, U_m\rangle_{2,\partial} - \langle U, U_m - U\rangle_{2,\partial}$. Assim,

$$|\beta(U_m) - \beta(U)| \leq \|U_m\|_{2,\partial}\|U_m - U\|_{2,\partial} + \|U\|_{2,\partial}\|U_m - U\|_{2,\partial}. \tag{1.21}$$

Ainda, como $U_m \to U$ em $([L^2(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{2,\partial})$, existe $T > 0$ tal que $\|U_m\|_{2,\partial} \leq T$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Por isso e por 1.21, $|\beta(U_m) - \beta(U)| \to 0$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, e assim, concluímos a prova de que β é fracamente contínuo.

■

Os próximos dois resultados, desta seção, referem-se, de algum modo, ao funcional $\Pi_U : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, o qual é definido por $\Pi_U(V) = \langle V, U\rangle_{2,\partial}$, onde $U \in H(\Omega)$ é fixado, e $V \in H(\Omega)$.

Proposição 1.6 *Suponhamos a condição **(H)** válida. Então, para cada $U \in H(\Omega)$ fixado,*

$\Pi_U \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$, *tendo como derivada de Fréchet em* $V \in H(\Omega)$, Π_U, *isto é,*

$$\Pi_U'(V)(W) = \langle W, U\rangle_{2,\partial}, \ \forall \ W \in H(\Omega).$$

Prova: Como a condição **(H)** é satisfeita, vale o teorema **T-C**. Consequentemente, existe $A_0 > 0$, tal que $\|W\|_{2,\partial} \leq A_0\|W\|_H, \ \forall \ W \in H(\Omega)$.

Afirmação 1: Π_U é funcional linear limitado.

De fato, a prova da linearidade de Π_U é imediata, deste modo, a omitiremos. Provemos a limitação de Π_U. Para isso, seja $V \in H(\Omega)$. Temos então

$$|\Pi_U(V)| = |\langle V, U\rangle_{2,\partial}| \leq \|V\|_{2,\partial}\|U\|_{2,\partial} \leq A^2\|V\|_H\|U\|_H.$$

Daí segue a limitação de Π_U. Agora, sabemos que todo operador linear e limitado, $T : (X, \| \cdot \|_X) \to (Y, \| \cdot \|_Y)$, é um elemento de $C^\infty(X, Y)$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in X$, $T'(u) = T$. Com isso e pela afirmação 1, segue a validade da proposição 1.6.

■

Sejam $W_1, W_2, \cdots, W_J$ elementos fixados de $H(\Omega)$. Definimos, para cada $J \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_J = \{U \in \mathbb{K} : \langle U, W_k\rangle_{2,\partial} = 0, \ para \ 1 \leq k \leq J\}$.

Proposição 1.7 *Suponhamos válidas as condições* ***(H)*** *e* ***(P)****. Então* $\mathbb{K}_J$ *fracamente compacto em* $(H(\Omega), \| \cdot \|_H)$.

Prova: Provaremos, inicialmente, que $\mathbb{K}_J$ é convexo, limitado e fechado em $(H(\Omega), \| \cdot \|_H)$.

• $\mathbb{K}_J$ é convexo em $(H(\Omega), \| \cdot \|_H)$.

Sejam $U, V \in \mathbb{K}_J$ e $t \in [0, 1]$. Então, $(1-t)U + tV \in H(\Omega)$. Ainda, como $\mathbb{K}$ é convexo em $(H(\Omega), \| \cdot \|_H)$, $(1-t)U + tV \in \mathbb{K}$. Além disso, para $k = 1, 2, \cdots, J$,

$$\langle (1-t)U + tV, W_k\rangle_{2,\partial} = (1-t)\langle U, W_k\rangle_{2,\partial} + t\langle V, W_k\rangle_{2,\partial} = 0,$$

pois $U, V \in \mathbb{K}_J$. Logo, $(1-t)U + tV \in \mathbb{K}_J$, e assim, $\mathbb{K}_J$ é convexo em $(H(\Omega), \| \cdot \|_H)$.

• $\mathbb{K}_J$ é limitado em $(H(\Omega), \| \cdot \|_H)$.

Como $\mathbb{K}_J \subset \mathbb{K}$ e devido a $\mathbb{K}$ ser limitado em $(H(\Omega), \| \cdot \|_H)$ (proposição 1.4), $\mathbb{K}_J$ também será limitado em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$.

• $\mathbb{K}_J$ é fechado em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$.

De fato, consideremos, para $1 \leq k \leq J$, os funcionais $\Pi_k \doteq \Pi_{W_k}$, os quais são contínuos, pela proposição 1.6. Por isso, por $\mathbb{K}_J$ poder ser reescrito como

$$\mathbb{K}_J = \mathbb{K} \cap \bigcap_{k=1}^{J} \Pi_k^{-1}(\{0\})$$

e por $\mathbb{K}$ ser um subconjunto fechado em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$, concluímos que $\mathbb{K}_J$ é um subconjunto fechado em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$, pois é uma intersecção de subconjuntos fechados de $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Finalmente, como $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$ é um espaço reflexivo, e $\mathbb{K}_J$ é um subconjunto convexo, limitado e fechado em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$, podemos aplicar o teorema 6.6. Daí segue que $\mathbb{K}_J$ é fracamente compacto em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$, como queríamos.

■

A seguir, daremos a definição de H-solução fraca, bem como, duas proposições que caracterizam elementos de $H_0(\Omega)$.

Definição 1.2 *Dizemos que $U \in H(\Omega)$ é uma H-solução fraca de*

$$-\triangle U + C(x)U = 0, \ \text{em } \Omega \tag{1.22}$$

quando $\langle U, \Theta\rangle_C = 0, \ \forall\ \Theta \in [C_c^1(\Omega)]^2$.

Para o que segue, definimos $\mathbb{W}$ como sendo o subespaço de $H(\Omega)$ que é C-ortogonal a $H_0(\Omega)$, isto é, $\mathbb{W} \doteq H_0(\Omega)^{\perp} = \{U \in H(\Omega) : \langle U, V\rangle_C = 0, \ \forall\ V \in H_0(\Omega)\}$.

Proposição 1.8 *Suponhamos válidas as condições **(H)** e **(P)**. Então $U \in H(\Omega)$ é uma H-solução fraca de (1.22) se, e somente se, $U \in \mathbb{W}$.*

Prova: Suponhamos que $U \in H(\Omega)$ seja uma H-solução fraca de (1.22) e seja $V \in H_0(\Omega)$. Assim, $V = (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. E como $C_c^1(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, na norma $\|\cdot\|_{1,2}$, existem sequências (φ_n), (ψ_n) em $C_c^1(\Omega)$, tais que $\varphi_n \to u$ e $\psi_n \to v$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2})$. Deste modo, ao definirmos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\Psi_n = (\varphi_n, \psi_n)$, $\Psi_n \to V$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Agora, em virtude das normas $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_C$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, segue que $\Psi_n \to V$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Por isso e pela continuidade do produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_C$, $\langle U, \Psi_n\rangle_C \to \langle U, V\rangle_C$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Finalmente, em virtude de U ser uma H-solução fraca de (1.22) e $\Psi \in [C_c^1(\Omega)]^2$, $\langle U, \Psi_n\rangle_C = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\langle U, V\rangle_C = 0$. Por conseguinte, devido a V ser um elemento arbitrário de $H_0(\Omega)$, temos que $U \in \mathbb{W}$. Reciprocamente, se $U \in \mathbb{W}$, então $U \in H(\Omega)$ e $\langle U, V\rangle_C = 0$, para qualquer $V \in H_0(\Omega)$. Ora, como $[C_c^1(\Omega)]^2 \subset H_0(\Omega)$, segue, em particular, que

$$\langle U, \Theta\rangle_C = 0,\ \forall\ \Theta \in \left[C_c^1(\Omega)\right]^2.$$

Ou seja, U é H-solução fraca de (1.22), como queríamos.

■

Proposição 1.9 *Se **(H)** e **(P)** forem válidas, então $U \in H(\Omega)$ e $\beta(U) = 0$ se, e somente se, $U \in H_0(\Omega)$.*

Prova: Suponhamos $U \in H(\Omega)$ e $\beta(U) = 0$. Consequentemente, $\|U\|_{2,\partial} = 0$, e assim, $U = 0$ em $[L^2(\partial\Omega)]^2$. Ou seja, se $U = (u, v)$, então $\Sigma(U) = (\Gamma(u), \Gamma(v)) = (0, 0)$. Por isso e pelo teorema 6.12 ($s = 1$, $p = 2$ e $l = 0$), concluímos que $u, v \in H_0^1(\Omega)$, de onde segue que $U \in H_0(\Omega)$. Reciprocamente, se $U \in H_0(\Omega)$, então, argumentando como na prova da proposição 1.8, conseguimos uma sequência (Ψ_n) em $[C_c^1(\Omega)]^2$, tal que $\Psi_n \to U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Com isso, pela continuidade de β e por $\beta(\Psi_n) = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, concluímos que $\beta(U) = 0$, como desejávamos.

■

A próxima proposição nos fornece uma decomposição para $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$.

Proposição 1.10 *Suponhamos válidas as condições **(H)** e **(P)**. Então, $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$ admite a seguinte decomposição em soma direta,*

$$H(\Omega) = H_0(\Omega) \oplus_C \mathbb{W}. \tag{1.23}$$

Prova: Em razão de $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$ ser um espaço de Hilbert, se mostrarmos que o subespaço $H_0(\Omega)$ é fechado em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, então, seguirá a decomposição dada em

(1.23). Provemos que $H_0(\Omega)$ é, de fato, fechado em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Para isso, sejam (U_n) uma sequência em $H_0(\Omega)$ e $U \in H(\Omega)$, tais que $U_n \to U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Assim, graças às normas $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_H$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, $U_n \to U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Consequentemente, $U \in H_0(\Omega)$, pois $H_0(\Omega)$ é um subespaço fechado de $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Daí segue a validade da proposição 1.10.

■

1.4 Construção do primeiro autovalor de Steklov

Nesta seção, mostraremos a existência de um primeiro autovalor de Steklov, bem como, algumas de suas propriedades.

Teorema 1.1 *Suponhamos válidas as condições **(H)** e **(P)**. Então*
(I) existe $U_1 \in \mathbb{K}$, tal que $\|U_1\|_C = 1$ e $\beta(U_1) = \alpha_1$. Além disso, $\alpha_1 > 0$;
(II) se $\mu_1 \doteq \alpha_1^{-1}$, o par (U_1, μ_1) satisfaz 1.2, ou seja, μ_1 é um autovalor de Steklov para o auto-sistema 1.1, tendo como autofunção de Steklov associada, U_1;
(III) μ_1 é o menor autovalor positivo de Steklov para 1.1.

Prova: Devido à proposição 1.4, $\mathbb{K}$ é fracamente compacto em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Já, pela proposição 1.5, β é fracamente contínuo. Logo, existe $U_1 \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha_1 = \beta(U_1)$.
Afirmação 1: $\|U_1\|_C = 1$.
De fato, como $U_1 \in \mathbb{K}$, $\|U_1\|_C^2 = \Upsilon_C(U_1) \leq 1$. Suponhamos $\|U_1\|_C < 1$. Então, existe $r > 1$ tal que $rU_1 \in \mathbb{K}$. Consequentemente $\beta(rU_1) = r^2\beta(U_1) > \beta(U_1)$, o que é um absurdo, pois $\alpha_1 = \sup_{U \in \mathbb{K}} \beta(U) = \beta(U_1)$. Portanto, devemos ter $\|U_1\|_C = 1$. Daí segue a validade da afirmação 1. Em razão da validade da afirmação 1, temos que $\Upsilon_C(U_1) = 1$. Assim, podemos ver U_1 como um extremo de β restrito ao conjunto

$$\mathbb{T} = \Upsilon_C^{-1}(\{\Upsilon_C(U_1)\}) = \{U \in H(\Omega) : \Upsilon_C(U) = 1\} \subset \mathbb{K}.$$

Além disso, pelo teorema 1.5, Υ_C e β são elementos de $C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$. Por conseguinte, devido ao teorema dos multiplicadores de Lagrange, a saber, o teorema 6.16, uma das duas condições abaixo deve valer:

(1) $\Upsilon'_C(U_1)(V) = 0$, para todo $V \in H(\Omega)$;

(2) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\beta'(U_1)(V) = \lambda \Upsilon'_C(U_1)(V)$, para todo $V \in H(\Omega)$.

A condição **(1)** não ocorre, pois $\Upsilon'_C(U_1)(U_1) = 2\|U_1\|_C^2 = 2$. Portanto, a condição **(2)** deve ocorrer, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\int_{\partial\Omega} U_1 \cdot V d\sigma = \lambda \int_{\Omega} \left[\nabla U_1 \cdot \nabla V + \langle C(x)U_1, V\rangle\right] dx, \ \forall\ V \in H(\Omega). \tag{1.24}$$

Afirmação 2: $\lambda > 0$ e $\lambda = \alpha_1$.

De fato, ao considerarmos $V = U_1$ em 1.24 e lembrarmos que $\|U_1\|_C = 1$, obtemos

$$\lambda = \langle U_1, U_1\rangle_{2,\partial} = \|U_1\|_{2,\partial}^2 = \alpha_1 \geq 0.$$

Suponhamos $\alpha_1 = \lambda = 0$. Daí, da definição de α_1, $\beta(U) = 0$, $\forall\ U \in \mathbb{K}$. Agora, todo funcional constante sobre Ω é um elemento de $H^1(\Omega)$, em particular, os funcionais $\varphi_1, \varphi_2 : \Omega \to \mathbb{R}$, definidos por $\varphi_1(x) = 1$ e $\varphi_2(x) = 0$, $\forall\ x \in \Omega$, são elementos de $H^1(\Omega)$. Consequentemente, $\Psi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H(\Omega)$. E mais,

$$\beta(\Psi) = \int_{\partial\Omega} \Psi \cdot \Psi d\sigma = \int_{\partial\Omega} \left[\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right] d\sigma = \int_{\partial\Omega} 1 d\sigma = |\partial\Omega|_\sigma > 0.$$

Portanto, ao considerarmos $\Phi = \frac{\Psi}{\|\Psi\|_C}$, temos $\Phi \in \mathbb{K}$ e $\beta(\Phi) = \frac{\beta(\Psi)}{\|\Psi\|_C^2} > 0$, o que gera uma contradição com nossa suposição. Daí segue a validade da afirmação 2. Como consequência da igualdade (1.24) e da validade da afirmação 2, temos que o par $(U_1, \lambda^{-1}) \in (H(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, é uma solução fraca para o auto-sistema 1.1. Ou seja, $\mu_1 \doteq \lambda_1$ é um autovalor de Steklov para o auto-sistema 1.1, tendo como autofunção de Steklov, U_1. Deste modo, para concluirmos a demonstração deste teorema, basta-nos mostrar que o autovalor $\mu_1 \doteq= \alpha_1^{-1}$ é o menor autovalor positivo de Steklov para o auto-sistema (1.1). Provemos isso. Se μ_1 não for o menor autovalor positivo de Steklov para o auto-sistema (1.1), então existem $\tilde{U} \in H(\Omega) \setminus \{0\}$ e $0 < \tilde{\mu} < \mu_1$, tais que $\langle \tilde{U}, V\rangle_C = \tilde{\mu}\langle \tilde{U}, V\rangle_{2,\partial}$, $\forall\ V \in H(\Omega)$. Assim, ao tomarmos $V = \frac{\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_C^2}$, $\tilde{\mu}\beta\left(\frac{\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_C}\right) = 1$. Daí, $\beta\left(\frac{\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_C}\right) = \frac{1}{\tilde{\mu}} > \frac{1}{\mu_1} = \alpha_1$, o que gera um absurdo, pois $\dfrac{\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_C} \in \mathbb{K}$. Com isso, finalizamos a demonstração do teorema 1.1.

■

A seguir, daremos uma consequência imediata da caracterização de μ_1.

Corolário 1.1 *Se forem válidas as condições **(H)** e **(P)**, então*

$$\|U\|_C^2 \geq \mu_1 \|U\|_{2,\partial}^2, \ \forall\, U \in H(\Omega). \tag{1.25}$$

Prova: Se $U = 0$, então a igualdade em (1.25) é facilmente verificada. Se $U \neq 0$, então, se $V = \frac{U}{\|U\|_C}$, temos $\|V\|_C = 1$. Logo $V \in \mathbb{K}$, e assim $\beta(V) \leq \alpha_1$. Mas também, $\beta(V) = \|V\|_{2,\partial}^2$. De outro modo, $\beta(V) = \frac{\|U\|_{2,\partial}^2}{\|U\|_C^2}$. Consequentemente, $\|U\|_{2,\partial}^2 \leq \alpha_1 \|U\|_C^2$, de onde segue que

$$\|U\|_C^2 \geq \frac{1}{\alpha_1}\|U\|_{2,\partial}^2 = \mu_1 \|U\|_{2,\partial}^2.$$

■

1.5 Construção da sequência de autovalores de Steklov

Vimos, através do teorema 1.1, que existe um primeiro autovalor de Steklov para o auto-sistema (1.1), o qual denotamos por μ_1, com autofunção de Steklov associada, U_1. Nesta seção, construiremos, por um processo de indução finita, uma sequência de autovalores de Steklov, a saber, (μ_j), que satisfaz algumas propriedades, que nos serão úteis no transcorrer do trabalho. O próximo teorema nos fornece tal sequência.

Teorema 1.2 *Suponhamos válidas as condições **(H)** e **(P)**. Então, existe uma sequência de pares $((U_j, \mu_j))$ em $[H(\Omega) \setminus \{0\}] \times \mathbb{R}$, os quais são soluções fracas para o auto-sistema (1.1), isto é, (μ_j) é uma sequência de autovalores de Steklov para o auto-sistema 1.1. Além disso, se definirmos, para cada $s \in \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$,*

$$\mathbb{K}_0 = \mathbb{K} \text{ e } \mathbb{K}_s = \{U \in \mathbb{K} : \ \langle U, U_k \rangle_{2,\partial} = 0, \ \text{para } 1 \leq k \leq s\},$$

então, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_j \doteq \sup_{U \in \mathbb{K}_{j-1}} \beta(U) = \beta(U_j) > 0 \text{ e } \mu_j = \alpha_j^{-1}.$$

Prova: Demonstraremos este teorema por indução em j. A validade do teorema 1.2 para $j = 1$ é garantida pelo teorema 1.1. Suponhamos que o teorema seja válido para $1 \leq j \leq J$ e verifiquemos a validade do mesmo para $J + 1$.

Afirmação 1: Existe $U_{J+1} \in \mathbb{K}_J$, tal que $\alpha_{J+1} = \sup_{U \in \mathbb{K}_J} \beta(U) = \beta(U_{J+1})$.

De fato, da proposição 1.7, $\mathbb{K}_J$ é fracamente compacto em $(H(\Omega), \| \cdot \|_H)$. Ainda, devido à proposição 1.5, β é fracamente contínuo. Diante disso, existe $U_{J+1} \in \mathbb{K}_J$ tal que $\beta(U_{J+1}) = \alpha_{J+1}$.

Afirmação 2: $\|U_{J+1}\|_C = 1$.

De fato, como $U_{J+1} \in \mathbb{K}_J$ e $\mathbb{K}_J \subset \mathbb{K}$, $U_{J+1} \in \mathbb{K}$. Logo, $\|U_{J+1}\|_C \leq 1$. Se $\|U_{J+1}\|_C < 1$, então existe $r > 1$ tal que $rU_{J+1} \in \mathbb{K}_{J+1}$. Consequentemente,

$$\beta(rU_{J+1}) = r^2 \beta(U_{J+1}) > \beta(U_{J+1}) = \alpha_{J+1},$$

o que contraria a afirmação 1. Portanto, devemos ter $\|U_{J+1}\|_C = 1$.

Afirmação 3: $\alpha_{J+1} > 0$.

De fato, pela hipótese de indução, existem $U_1, U_2, \cdots, U_J \in H(\Omega)$, tais que

$$\alpha_l = \sup_{U \in \mathbb{K}_{l-1}} \beta(U) = \beta(U_l) > 0, \ \textit{para}\ 1 \leq l \leq J.$$

Em razão do subespaço $[\Sigma(U_1), \Sigma(U_2), \cdots, \Sigma(U_J)]$, de $[L^2(\partial\Omega)]^2$, possuir dimensão finita e de $[L^2(\partial\Omega)]^2$ ser um espaço de Hilbert, temos

$$\left[L^2(\partial\Omega)\right]^2 = [\Sigma(U_1), \Sigma(U_2), \cdots, \Sigma(U_J)] \oplus [\Sigma(U_1), \Sigma(U_2), \cdots, \Sigma(U_J)]^{\perp}. \tag{1.26}$$

Agora, pelo teorema 6.11, o operador inclusão $i : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ é linear, injetor e contínuo. Assim, ao definirmos

$$H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{V \in [L^2(\partial\Omega)]^2 : \exists\ U \in H(\Omega)\ \textit{com}\ \Sigma(U) = V\},$$

o operador $\mathbb{I} = i \times i : H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to [L^2(\partial\Omega)]^2$, definido por $\mathbb{I}(U) = U$, $\forall\ U \in H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, também é linear, injetor e contínuo. Antes de provarmos a afirmação 3, precisaremos de um resultado auxiliar, a saber,

(RA) Existe $V \in H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $\mathbb{I}(V) = V \in [\Sigma(U_1), \Sigma(U_2), \cdots, \Sigma(U_J)]^{\perp}$.
Suponhamos que **(RA)** não valha e seja $V \in H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Assim, existe $U \in H(\Omega)$ tal que $\Sigma(U) = V \in [L^2(\partial\Omega)]^2$. Daí, por (1.26), existem escalares reais δ_i, com $i = 1, 2, \cdots, J$ e $\tilde{U} \in [\Sigma(U_1), \Sigma(U_2), \cdots, \Sigma(U_J)]^{\perp}$, tais que

$$\Sigma(U) = V = \delta_1 \Sigma(U_1) + \delta_2 \Sigma(U_2) + \cdots + \delta_J \Sigma(U_J) + \tilde{U}. \tag{1.27}$$

Em virtude da linearidade do operador Σ, da caracterização de $H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ e da igualdade (1.27), concluímos que $\tilde{U} \in H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ e $\tilde{U} = \mathbb{I}(\tilde{U})$. Mas também, $\tilde{U}$ é um elemento de $[\Sigma(U_1), \Sigma(U_2), \cdots, \Sigma(U_J)]^{\perp}$. Deste modo, devido à nossa suposição, $\tilde{U} = 0$. Por conseguinte, devido à 1.27, $V \in [\Sigma(U_1), \Sigma(U_2), \cdots, \Sigma(U_J)]$. Portanto, como V é arbitrário em $H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = [\Sigma(U_1), \Sigma(U_2), \cdots, \Sigma(U_J)]$, o que é um absurdo, pois a dimensão de $H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ é infinita (teorema 6.14). E assim, deve valer **(RA)**. Finalmente, provemos afirmação 3. Como $V \in H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, existe $W \in H(\Omega)$, tal que $\Sigma(W) = V$ e em razão de $V \neq 0$ em $H_*^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, $\beta(W) > 0$. Com efeito, se $\beta(W) = 0$, então $\|W\|_{2,\partial} = 0$, e assim, $\Sigma(W) = 0$ em $[L^2(\partial\Omega)]^2$. No entanto, $\Sigma(W) = V$. Logo, $V = 0$ em $[L^2(\partial\Omega)]^2$. E mais, visto que $V \in H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $\mathbb{I}$ é injetor e $\mathbb{I}(V) = 0 = \mathbb{I}(0)$, concluímos que $V = 0$ em $H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, o que é um absurdo. Também temos $W \neq 0$ em $H(\Omega)$. De fato, se $W = 0$ em $H(\Omega)$, então $V = \Sigma(W) = 0$, em $[L^2(\Omega)]^2$, e assim, $V = 0$ em $H_*^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, o que não é verdade. Deste modo, $\|W\|_C \neq 0$. Assim, podemos considerar $\tilde{W} = \frac{W}{\|W\|_C} \in H(\Omega)$. Por conseguinte, pela 2-homogeneidade de β, $\beta(\tilde{W}) = \frac{\beta(W)}{\|W\|_C^2} = \frac{\beta(V)}{\|W\|_C^2}$. Mas também, como $V = \Sigma(\tilde{W}) \in [\Sigma(U_1), \Sigma(U_2), \cdots, \Sigma(U_J)]^{\perp}$, $\langle \tilde{W}, U_k \rangle_{2,\partial} = 0$, para $1 \leq k \leq J$. Disso e devido à $\|\tilde{W}\|_C = 1$, $\tilde{W} \in \mathbb{K}_J$. Portanto,

$$\alpha_{J+1} = \sup_{U \in \mathbb{K}_J} \beta(U) \geq \beta(\tilde{V}) = \frac{\beta(V)}{\|\tilde{W}\|_C^2} > 0.$$

Com isso, concluímos a prova da afirmação 3. Em razão da validade da afirmação 3, tem sentido definirmos $\mu_{J+1} \doteq \alpha_{J+1}^{-1}$.
Afirmação 4: O par (U_{J+1}, μ_{J+1}) é solução fraca para o auto-sistema (1.1).
De fato, das afirmações 2 e 3, podemos ver $\beta(U_{J+1}) = \alpha_{J+1}$ como um extremo de β

restrito a

$$\mathbb{K}_J = \Upsilon_C^{-1}\left(\{\Upsilon_C(U_{J+1})\}\right) \cap \left[\bigcap_{k=1}^{J} \Pi_k^{-1}\left(\{\Pi_k(U_{J+1})\}\right)\right],$$

onde, para $k = 1, 2, \cdots, J$, $\Pi_k \doteq \Pi_{U_k}$, como em 1.6. Ainda, já vimos que os funcionais Υ_C, β e Π_k são elementos de $C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$, para $k = 1, 2, \cdots, J$. Deste modo, podemos aplicar o teorema 6.16, ou seja, uma das seguintes condições abaixo deve valer:

(L-1) Se

$$A(V_1, V_2, \cdots, V_{J+1}) = \begin{pmatrix} \Upsilon_C'(U_{J+1})(V_1) & \Upsilon_C'(U_{J+1})(V_2) & \cdots & \Upsilon_C'(U_{J+1})(V_{J+1}) \\ \Pi_1'(U_{J+1})(V_1) & \Pi_1'(U_{J+1})(V_2) & \cdots & \Pi_1'(U_{J+1})(V_{J+1}) \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ \Pi_J'(U_{J+1})(V_1) & \Pi_J'(U_{J+1})(V_2) & \cdots & \Pi_J'(U_{J+1})(V_{J+1}) \end{pmatrix},$$

então $\det(A(V_1, V_2, \cdots, V_{J+1})) = 0$ para quaisquer $V_1,\ V_2, \cdots, V_{J+1} \in H(\Omega)$;

(L-2) Existem $\lambda, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,\ 2, \cdots, J$ tais que

$$\beta'(U_{J+1})(V) = \lambda \Upsilon_C'(U_{J+1})(V) + \sum_{k=1}^{J} \lambda_k \Pi_k'(U_{J+1})(V),\ \forall\ V \in H(\Omega). \tag{1.28}$$

Mas também, sabemos que, para $U, V \in H(\Omega)$ e $k = 1, 2, \cdots, J$, valem

$$\Upsilon'(U)(V) = 2\langle U, V\rangle_C \ e \ \Pi_k'(U)(V) = \langle V, U_k\rangle_{2,\partial}.$$

Por isso, ao utilizarmos o fato de $U_{J+1} \in \mathbb{K}_J$ e a hipótese de indução, obtemos para $k, l = 1, 2, \cdots, J$ e $k \neq l$:

$\Upsilon_C'(U_{J+1})(U_{J+1}) = 2\langle U_{J+1}, U_{J+1}\rangle_C = 2\|U_{J+1}\|_C^2 = 2,$

$\Upsilon_C'(U_{J+1})(U_k) = 2\langle U_{J+1}, U_k\rangle_C = 2\mu_k\langle U_{J+1}, U_k\rangle_{2,\partial} = 0,$

$\Pi_k'(U_{J+1})(U_l) = \langle U_l, U_k\rangle_{2,\partial} = 0 \ e \ \Pi_k'(U_{J+1})(U_k) = \langle U_k, U_k\rangle_{2,\partial} = \|U_k\|_{2,\partial}^2 = \alpha_k.$

Consequentemente, $detA(U_{J+1}, U_1, U_2, \ldots, U_J) = 2\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_J > 0$. Logo **(L-2)** deve ocorrer. Para concluirmos a prova da afirmação 4, precisaremos de um outro resultado auxiliar, a saber,

(ORA) $\lambda_k = 0,\ \forall\ k \in \{1, 2, \cdots, J\}$.

De fato, ao considerarmos $V = U_s$, para $s \in \{1, 2, \cdots, J\}$, em (1.28), obtemos

$$2\langle U_{J+1}, U_s\rangle_{2,\partial} = 2\lambda\langle U_{J+1}, U_s\rangle_C + \sum_{k=1}^{J} \lambda_k \langle U_s, U_k\rangle_{2,\partial}.$$

Agora, ao utilizarmos o fato de $U_{J+1} \in \mathbb{K}_J$ e a hipótese de indução, segue que

$$0 = 2\lambda\mu_s\langle U_{J+1}, U_s\rangle_{2,\partial} + \lambda_s\langle U_s, U_s\rangle_{2,\partial} = 2\lambda_s\mu_s^{-1}\|U_s\|_c^2 = 2\lambda_s\mu_s^{-1}.$$

Finalmente, como $\mu_s \neq 0$, para qualquer $s \in \{1, 2, \cdots, J\}$ (hipótese de indução), concluímos que $\lambda_s = 0,\ \forall\ s = 1, 2, \cdots J$, ficando, deste modo, justificado **(ORA)**. Como consequência da validade de **(ORA)**, ao considerarmos $V = U_{J+1}$ em (1.28), obtemos

$$\alpha_{J+1} = \|U_{J+1}\|_{2,\partial}^2 = \langle U_{J+1}, U_{J+1}\rangle_{2,\partial} = \lambda\langle U_{J+1}, U_{J+1}\rangle_C = \lambda\|U_{J+1}\|_C^2 = \lambda.$$

Ainda, em razão da validade de **(ORA)**, temos $\langle U_{J+1}, V\rangle_{2,\partial} = \lambda\langle U_{J+1}, V\rangle_C$, $\forall\ V \in H(\Omega)$. Com isso e devido à $\lambda = \alpha_{J+1} > 0$ (afirmação 3), concluímos que

$$\alpha_{J+1}^{-1}\langle U_{J+1}, V\rangle_{2,\partial} = \langle U_{J+1}, V\rangle_C,\ \forall\ V \in H(\Omega), \tag{1.29}$$

de onde segue que o par $(U_{J+1}, \alpha_{J+1}^{-1}) = (U_{J+1}, \mu_{J+1})$ é solução fraca para o auto-sistema (1.1). Daí segue a validade da afirmação 4. Para finalizarmos a prova do teorema 1.2, notamos que, para $j \in \mathbb{N}$, $U_j \in \mathbb{K}_j \subset \mathbb{K}$. Logo, $\|U_j\|_C = 1$, ou seja, $U_j \in H(\Omega) \setminus \{0\}$. Com isso e pela validade das afirmações 1, 2, 3 e 4, segue a validade do teorema 1.2.

■

O próximo teorema nos fornece algumas propriedades para a sequência (μ_j).

Teorema 1.3 *Suponhamos válidas as condições **(H)** e **(P)**. Então a sequência de auto-valores de Steklov, (μ_j), satisfaz:*

(S-1) $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \cdots \leq \mu_j \leq \cdots$;

(S-2) $\langle U_j, U_k\rangle_{2,\partial} = \mu_j^{-1}\delta_{jk}$ *e* $\|U_j\|_C = 1$, *para quaisquer* $j, k \in \mathbb{N}$;

(S-3) $\lim_{j\to\infty} \mu_j = \infty$;

(S-4) A dimensão do autoespaço associado a cada autovalor μ_j é finita.

Prova: **(S-1)** Devido ao teorema 1.2, para $l \geq 1$, $\mu_l = \alpha_l^{-1}$ e $\alpha_l = \sup_{U \in \mathbb{K}_{l-1}} \beta(U)$. Logo, em razão de $\mathbb{K}_{j-1} \subset \mathbb{K}_{j-2}$, para $j \geq 2$, $\alpha_j \leq \alpha_{j-1}$. Assim, $\mu_{j-1} = \alpha_{j-1}^{-1} \leq \alpha_j^{-1} = \mu_j$, para qualquer $j \geq 2$. Com isso e pelo fato de $\mu_1 > 0$ (teorema 1.1), segue que

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_j \leq \cdots ,$$

como desejávamos.

(S-2) Pelo teorema 1.2, $U_j \in \mathbb{K}_{j-1} \subset \mathbb{K}$, $\forall\ j \in \mathbb{N}$. Logo, $\|U_j\|_C = 1$ e

$$\langle U_j, U_k \rangle_{2,\partial} = 0,\ para\ k < j.. \tag{1.30}$$

Caso $j < k$, ao trocarmos na igualdade (1.30), j por k, obtemos $\langle U_j, U_k \rangle_{2,\partial} = 0$. Finalmente, se $j = k$, então, pelo fato de U_j ser autofunção de Steklov associada ao autovalor μ_j, temos $\langle U_j, U_j \rangle_{2,\partial} = \mu_j^{-1} \langle U_j, U_j \rangle_C = \mu_j^{-1} \|U_j\|_C^2 = \mu_j^{-1}$. Daí segue a validade de **(S-2)**.

(S-3) Suponhamos tal condição falsa, ou seja, existe $K \in \mathbb{R}$, tal que $\mu_j \leq K$, $\forall\ j \in \mathbb{N}$. Consequentemente, ao definirmos, para cada $j \in \mathbb{N}$, $V_j = \frac{U_j}{\|U_j\|_{2,\partial}} \in H(\Omega)$ e ao utilizarmos o teorema 1.2, $\|V_j\|_C^2 = \frac{\|U_j\|_C^2}{\|U_j\|_{2,\partial}^2} = \frac{1}{\|U_j\|_{2,\partial}^2} = \mu_j \leq K$, $\forall\ j \in \mathbb{N}$. Logo, (V_j) é uma sequência limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. E como as normas $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_H$ são equivalentes em $H(\Omega)$, a sequência (V_j) também é limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Agora, visto que $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$ é reflexivo, existem uma subsequência (V_{j_k}) de (V_j) e $\tilde{V} \in H(\Omega)$, tais que $V_{j_k} \rightharpoonup \tilde{V}$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Por conseguinte, em razão da validade do teorema **T-C**, $V_{j_k} \to \tilde{V}$ em $([L^2(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{2,\partial})$. Deste modo, a sequência (V_{j_k}) é de Cauchy em $[L^2(\partial\Omega)]^2$. Entretanto, ao considerarmos j_k, j_l grandes, com $j_k \neq j_l$, obtemos, do fato das autofunções de Steklov satisfazerem a condição **(S-2)**,

$$\|V_{j_k} - V_{j_l}\|_{2,\partial}^2 = \left\| \frac{U_{j_k}}{\|U_{j_k}\|_{2,\partial}} - \frac{U_{j_l}}{\|U_{j_l}\|_{2,\partial}} \right\|_{2,\partial}^2 = \frac{\|U_{j_k}\|_{2,\partial}^2}{\|U_{j_k}\|_{2,\partial}^2} + \frac{\|U_{j_l}\|_{2,\partial}^2}{\|U_{j_l}\|_{2,\partial}^2} = 2,$$

o que é uma contradição com o fato da sequência (V_{j_k}) ser de Cauchy em $[L^2(\partial\Omega)]^2$. Portanto devemos ter $\lim_{j\to+\infty} \mu_j = +\infty$. Daí segue a validade da condição **(S-3)**.

(S-4) Suponhamos que exista $k \in \mathbb{N}$, tal que a dimensão do autoespaço associado ao autovalor μ_k seja infinita. Neste caso, podemos considerar uma sequência $\{W_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de autofunções de Steklov C-ortornormais em $H(\Omega)$ associadas ao autovalor μ_k. Consequentemente, para $r, s \in \mathbb{N}$, com $r \neq s$,

$$\langle W_r, W_s\rangle_{2,\partial} = \mu_k^{-1}\langle W_r, W_s\rangle_C = 0 \ e \ 1 = \|W_r\|_C^2 = \mu_k\|W_r\|_{2,\partial}^2.$$

Logo, ao definirmos, para $j \in \mathbb{N}$, $V_j = \frac{W_j}{\|W_j\|_{2,\partial}}$, concluímos que a sequência (V_j) é limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Por isso e pelo fato das normas $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_H$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, temos que a sequência (V_j) também é limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Por conseguinte, devido à reflexibilidade de $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$, (V_j) admite subsequência (V_{j_r}) fracamente convergente em $H(\Omega)$. De outro modo, existe $\tilde{V} \in H(\Omega)$ tal que $V_{j_r} \rightharpoonup \tilde{V}$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Segue, da validade do teorema **T-C**, que $V_{j_r} \to \tilde{V}$ em $\left([L^2(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{2,\partial}\right)$. E assim, a sequência (V_{j_r}) é de Cauchy em $[L^2(\partial\Omega)]^2$. Porém, ao considerarmos j_r, j_s grandes, com $j_r \neq j_s$, obtemos

$$\|V_{j_r} - V_{j_s}\|_{2,\partial}^2 = \left\| \frac{W_{j_r}}{\|W_{j_r}\|_{2,\partial}} - \frac{W_{j_s}}{\|W_{j_s}\|_{2,\partial}} \right\|_{2,\partial}^2 = \frac{\|W_{j_r}\|_{2,\partial}^2}{\|W_{j_r}\|_{2,\partial}^2} + \frac{\|W_{j_s}\|_{2,\partial}^2}{\|W_{j_s}\|_{2,\partial}^2} = 2,$$

o que é um absurdo, pois a sequência (V_{j_r}) é de Cauchy em $[L^2(\partial\Omega)]^2$. Portanto, a dimensão do autoespaço associado a cada autovalor de Steklov deve ser finita, ficando, assim, provada a condição **(S4)**.

■

1.6 Relações entre autofunções de Steklov e $H(\Omega)$

Nesta seção, descrevemos uma decomposição C-ortogonal de $H(\Omega)$ e mostramos que as autofunções de Steklov do auto-sistema (1.1), construídas na seção anterior, formam uma base de Hilbert para o C-complemento ortogonal de $H_0(\Omega)$, o qual denotaremos por $\mathbb{W}$. Assumimos, para o que segue, desta seção, a validade das condições **(H)** e **(P)**. Devido à validade de **(S-4)** (teorema 1.3), temos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$dimAut(\mu_k) = m_k < \infty,$$

sendo $Aut(\mu_k)$ o auto-espaço associado ao autovalor de Steklov μ_k.

Seja $\mathcal{M}_k = \{V_1^k, V_2^k, \cdots, V_{m_k}^k\}$, uma base de $Aut(\mu_k)$, C-ortonormal no espaço $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Ainda, se $U \in \mathcal{M}_l$ e $V \in \mathcal{M}_k$, com $l \neq k$, então, graças à condição **(S-2)**, dada no teorema 1.3, $\langle U, V\rangle_C = \mu_k \langle U, V\rangle_{2,\partial} = 0$. Consequentemente,

$$\mathcal{S} = \{V_1^1, \cdots, V_{m_1}^1, V_1^2, \cdots, V_{m_2}^2, \cdots, V_1^k, \cdots, V_{m_k}^k, \cdots\}$$

é um subconjunto C-ortonormal em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$.

Proposição 1.11 *Se, para cada $k \in \mathbb{N}$, denotarmos*

$$W_k = \begin{cases} V_k^1, & se\ 1 \leq k \leq m_1 \\ V_{k-m_j}^{j+1}, & se\ m_j < k \leq m_j + m_{j+1},\ j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

então $\tilde{\mathbb{O}} = (W_k)$ é uma sequência C-ortonormal total em $H_0(\Omega)^\perp = \mathbb{W}$.

Prova: Como $\tilde{\mathbb{O}} \subset \mathcal{S}$, $\tilde{\mathbb{O}}$ define uma sequência C-ortonormal em $H(\Omega)$. Provemos que $\tilde{\mathbb{O}} \subset H_0(\Omega)^\perp = \mathbb{W}$. Para tal, seja $U \in \tilde{\mathbb{O}}$. Devido à proposição 1.8, para provarmos que $U \in H_0(\Omega)^\perp$, basta-nos mostrar que U é uma H-solução fraca de (1.22), ou seja,

$$\langle U, \Theta\rangle_C = 0,\ \forall\ \Theta \in \left[C_c^1(\Omega)\right]^2. \tag{1.31}$$

Ora, visto que U é autofunção de Steklov, digamos, associada ao autovalor de Steklov, μ_k, temos $\langle U, \Theta\rangle_C = \mu_k \langle U, \Theta\rangle_{2,\partial}$. Além disso, $\langle U, \Theta\rangle_{2,\partial} = 0$, pois $\Theta \in \left[C_c^1(\Omega)\right]^2$. Daí segue a validade de (1.31), e assim $U \in H_0(\Omega)^\perp$. Agora, devido ao teorema 6.7 e ao fato de $H_0(\Omega)^\perp$ ser um subespaço de Hilbert de $H(\Omega)$ (pois é fechado), para concluirmos a prova da proposição 1.11, precisamos apenas mostrar que, se $\tilde{U} \in H_0(\Omega)^\perp$ for tal que $\tilde{U} \perp \tilde{\mathbb{O}}$, *em* $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, então $\tilde{U} = 0$. Suponhamos que isso não ocorra. Ou seja, existe $\tilde{U} \in H_0(\Omega)^\perp \setminus \{0\}$, tal que $\tilde{U} \perp \tilde{\mathbb{O}}$, em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Deste modo, se denotarmos $\tilde{V} = \frac{\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_C}$, então $\|\tilde{V}\|_C = 1$ e $\langle \tilde{V}, U\rangle_C = 0, \forall\ U \in \tilde{\mathbb{O}}$. Consequentemente, $\tilde{V} \in \mathbb{K}_\daleth, \forall\ j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, da definição de β, $\beta(\tilde{V}) \geq 0$. Se $\beta(\tilde{V}) = 0$, então, pela proposição 1.9, $\tilde{V} \in H_0(\Omega)$. E como $\tilde{V} \in H_0(\Omega)^\perp$, segue que $\tilde{V} = 0$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, o que é um absurdo, pois $\|\tilde{V}\|_C = 1$. Logo, devemos ter $\beta(\tilde{V}) > 0$. Finalmente, pela validade de **(S-**

3) (teorema 1.3), $\mu_j \to +\infty$, quando $j \to +\infty$. Por conseguinte, em razão de $\mu_j = \alpha_j^{-1}$, $\alpha_j \to 0$, quando $j \to +\infty$. Portanto, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $\beta(\tilde{V}) > \alpha_{J+1}$, o que contraria a definição de $\alpha_{J+1} = \sup\{\beta(U) : U \in \mathbb{K}_J\}$, pois $\tilde{V} \in \mathbb{K}_J$. Assim, devemos ter $\tilde{U} = 0$. Daí segue a validade da proposição 1.11.

∎

Observação 1: Como consequência da proposição 1.11, a sequência $\tilde{\mathbb{O}}$ define uma base de Hilbert para o espaço $H_0(\Omega)^{\perp}$, em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$.

Observação 2: Segue, devido à observação 1, que $U \in H_0(\Omega)^{\perp}$ é escrito de maneira única (a menos da ordem) como

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} \langle U, V_k \rangle_C V_k \ e \ \|U\|_C^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U, V_k \rangle_C|^2. \tag{1.32}$$

Observação 3: Da observação 2, da linearidade e continuidade de Σ e do fato de V_k ser autofunção de Steklov associada ao autovalor de Steklov σ_k, onde

$$\sigma_k = \begin{cases} \mu_1, & se\ 1 \leq k \leq m_1, \\ \mu_j, & se\ m_{j-1} < k \leq m_j, j \geq 2, \end{cases} \tag{1.33}$$

obtemos

$$\Sigma(U) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle U, V_k \rangle_C \Sigma(V_k),\ e\ \|\Sigma(U)\|_{2,\partial}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1} |\langle U, V_k \rangle_C|^2. \tag{1.34}$$

Observação 4: Se, para cada $j \in \mathbb{N}$, fixado, denotarmos

$$\mathbb{V}_j = \left[\bigcup_{k=1}^{j} \mathcal{M}_k \right],\ \mathbb{Y}_j = \overline{\left[\bigcup_{k=j+1}^{\infty} \mathcal{M}_k \right]}\ e\ \mathbb{X}_j = \mathbb{Y}_j \oplus_C H_0(\Omega),$$

então $H(\Omega) = \mathbb{V}_j \oplus_C \mathbb{X}_j$.

De fato. Seja $U \in H(\Omega)$. Então, como $H(\Omega) = H_0(\Omega) \oplus_C \mathbb{W}$ (proposição 1.10), existem únicos $U_0 \in H_0(\Omega)$ e $\overline{U} \in \mathbb{W}$, tais que $U = \overline{U} + U_0$. Mas também, devido à $\overline{U} \in \mathbb{W}$, existe uma única sequência (c_j) em $\mathbb{R}$, tal que $\overline{U} = c_1 V_1 + \cdots + c_j V_j + \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle U, V_k \rangle_C c_j V_j$.

E assim,

$$U = c_1 U_1 + c_2 U_2 + \cdots + c_j U_j + \lim_{n \to +\infty} S_n + U_0, \tag{1.35}$$

onde $S_n = \sum_{j=1}^{n} c_j U_j$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, ao denotarmos

$$V = c_1 U_1 + c_2 U_2 + \cdots + c_j U_j, Y = \lim_{k \to +\infty} S_k \; e \; X = Y + U_0,$$

temos, graças à igualdade (1.35), $U = V + X$, sendo $V \in \mathbb{V}_j$ e $X \in \mathbb{X}_j$, pois $Y \in \mathbb{Y}_j$ e $U_0 \in H_0(\Omega)$. Por conseguinte, em razão da unicidade de escrita de U, $H(\Omega) = \mathbb{V}_j \oplus_C \mathbb{X}_j$, como queríamos.

Observação 5: Da definição de $\mathbb{V}_j$, segue que $d \doteq dim \mathbb{V}_j = m_1 + m_2 + \cdots + m_j$. Assim, se $U \in \mathbb{V}_j$, então $U = \sum_{j=1}^{d} \langle U, V_j \rangle_C V_j$. Logo, devido às identidades dadas em (1.32) e (1.34), e à condição **(S-1)** do teorema 1.3, obtemos

$$\|U\|_{2,\partial}^2 \geq \mu_j^{-1} \|U\|_C^2, \; \forall \; U \in H(\Omega). \tag{1.36}$$

Agora, se $\overline{U} \in \mathbb{Y}_j \subset \mathbb{W}$, então, devido à observação 2,

$$\overline{U} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=j+1}^{n} c_k U_k, \; \|\overline{U}\|_{2,\partial}^2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=j+1}^{n} \mu_k^{-1} c_k^2$$

e

$$\|\overline{U}\|_C^2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=j+1}^{n} c_k^2.$$

Combinando estas identidades à condição **(S-1)**, dada no teorema 1.3, concluímos que

$$\|\overline{U}\|_{2,\partial}^2 \leq \mu_{j+1}^{-1} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=j+1}^{n} c_k^2 = \mu_{j+1}^{-1} \|\overline{U}\|_C^2, \; \forall \; \overline{U} \in \mathbb{Y}_j. \tag{1.37}$$

Com estas observações, finalizamos este capítulo.

Capítulo

2

Autovalores de Neumann para sistemas envolvendo o operador laplaciano

2.1 O auto-sistema de Neumann

Nesta seção, daremos algumas definições básicas, as quais estão relacionadas ao auto-sistema de Neumann

$$\begin{cases} -\triangle U + C(x)U = \lambda U, & se\ x \in \Omega \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = 0, & se\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, satisfaz a condição **(H)** e $C(x)$ satisfaz a condição **(P)**.

Definição 2.1 *Uma solução fraca para o auto-sistema de Neumann (2.1) é, por definição, um par $(U, \lambda) \in [H(\Omega) \setminus \{0\}] \times \mathbb{R}$, que satisfaz*

$$\int_\Omega [\nabla U \cdot \nabla V + \langle C(x)U, V \rangle]\, dx = \lambda \int_\Omega U \cdot V d\sigma,\ \forall\ V \in H(\Omega). \tag{2.2}$$

Neste caso, denominaremos U uma autofunção de Neumann associada ao autovalor de Neumann, λ, do auto-sistema (2.1).

Objetivamos encontrar uma sequência de autovalores de Neumann para o auto-sistema (2.1). Com este intuito, generalizaremos algumas ideias de [43]. Definimos $G : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, por $G(U) = \|U\|_2^2 - 1$ e $\mathbb{L} = \{U \in H(\Omega) : G(U) = 0\}$. Utilizaremos técnicas variacionais para minimizar Υ_C sobre $\mathbb{L}$. Por isso, consideramos

$$\rho_1 = \inf\{\Upsilon_C(U) : \ U \in \mathbb{L}\}. \tag{2.3}$$

Mostraremos que existe $U_1 \in \mathbb{L}$, tal que $\rho_1 = \Upsilon_C(U_1)$. Neste caso, veremos que U_1 é uma autofunção de Neumann para o auto-sistema (2.1), correspondendo ao menor autovalor de Neumann, $\lambda_1 \doteq \rho_1$. Para fazermos isso, precisaremos de alguns resultados preliminares, os quais enunciaremos e provaremos na próxima seção.

2.2 Resultados preliminares

Nesta seção, mostraremos duas proposições. A primeira delas, refere-se ao funcional $G_U : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por $G_U(V) = \langle V, U\rangle_2$, $\forall\ V \in H(\Omega)$, com $U \in H(\Omega)$ fixo.

Proposição 2.1 *Suponhamos válida a condição* ***(H)****. Então, para $U \in H(\Omega)$ fixado, $G_U \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $V \in H(\Omega)$, G_U, isto é,*

$$G_U'(V)(W) = \langle W, U\rangle_2, \ \forall\ W \in H(\Omega). \tag{2.4}$$

Prova: Como a condição **(H)** é satisfeita, o mergulho $H(\Omega) \hookrightarrow \left[L^2(\Omega)\right]^2$ é contínuo. E assim, existe constante $B_0 > 0$, tal que

$$\|W\|_2 \leq B_0 \|W\|_H, \ \forall\ W \in H(\Omega). \tag{2.5}$$

Afirmação 1: G_U é funcional linear limitado.
De fato, a prova da linearidade de G_U é imediata, assim, a omitiremos. Provemos a limitação de G_U. Para tanto, seja $V \in H(\Omega)$. Então,

$$|G_U(V)| = |\langle V, U\rangle_2| \leq \|V\|_2 \|U\|_2 \leq B_0^2 \|V\|_H \|U\|_H.$$

Daí segue a limitação de G_U. Agora, sabemos que todo operador linear e limitado, $T : (X, \| \cdot \|_X) \to (Y, \| \cdot \|_Y)$, é um elemento de $C^\infty(X, Y)$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in X$, $T^{'}(u) = T$. Com isso e pela afirmação 1, segue a validade da proposição 2.1.

■

Proposição 2.2 *Suponhamos válida a condição* ***(H)****, então* $G \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$*, tendo como derivada de Fréchet em* $U \in H(\Omega)$*,* $G^{'}(U)(V) = 2\langle U, V\rangle_2$*,* $\forall\ V \in H(\Omega)$*.*

Prova: Notemos, inicialmente, que $G = \tilde{P} + \tilde{Q}$, onde os funcionais $\tilde{P}$ e $\tilde{Q}$ são definidos por $\tilde{P}(U) \doteq \|U\|_2^2$ e $\tilde{Q}(U) = -1$, $\forall\ U \in H(\Omega)$. Como $\tilde{Q}$ é constante, $\tilde{Q} \in C^{\infty}(H(\Omega), \mathbb{R})$, e $\tilde{Q}^{'}(U) = 0$, $\forall\ U \in H(\Omega)$. Assim, para concluirmos a prova da proposição 2.2, devemos mostrar que $\tilde{P} \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$, e este deve ter derivada de Fréchet em $U \in H(\Omega)$, dada por $\tilde{P}^{'}(U)(V) = 2\langle U, V\rangle_2$, $\forall\ V \in H(\Omega)$. Provemos isso.

Afirmação I: Para $U \in H(\Omega)$ fixado, $N_U : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por $N_U(V) = 2\langle U, V\rangle_2$, $\forall\ V \in H(\Omega)$, é um funcional linear e limitado.

De fato, a prova da linearidade é imediata. Provemos a limitação do funcional N_U. Para isso, seja $V \in H(\Omega)$. Então,

$$|N_U(V)| = 2|\langle U, V\rangle_2| \leq 2\|U\|_2\|V\|_2 \leq 2B^2\|U\|_H\|V\|_H. \tag{2.6}$$

Daí segue a limitação do funcional N_U.

Afirmação II: O funcional $\tilde{P}$ é Fréchet diferenciável, tendo como derivada de Fréchet em $U \in H(\Omega)$, N_U.

De fato. Para $U \in H(\Omega)$, $\epsilon > 0$ e $V \in H(\Omega)$, com $0 < \|V\|_H < \frac{\epsilon}{B_0}$, temos

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\|V\|_H}|\tilde{P}(U+V) - \tilde{P}(U) - N_U(V)| &= \tfrac{1}{\|V\|_H}\,|\|U+V\|_2^2 - \|U\|_2^2 - 2\langle U, V\rangle_2| \\
&= \tfrac{1}{\|V\|_H}\,|\langle U+V, U+V\rangle_2 - \langle U, U\rangle_2 - 2\langle U, V\rangle_2| \\
&= \tfrac{1}{\|V\|_H}|\langle V, V\rangle_2| \leq \tfrac{1}{\|V\|_H}\|V\|_2^2 \leq B_0^2\|V\|_H < \epsilon.
\end{aligned}$$

Daí segue a validade da afirmação II.

Afirmação III: O operador $\tilde{P}^{'} : H(\Omega) \to H(\Omega)^*$ é contínuo.

De fato, sejam (U_n) uma sequência em $H(\Omega)$ e $U \in H(\Omega)$, tais que $U_n \to U$ em $(H(\Omega), \| \cdot$

$\|_H)$. Por isso e pela desigualdade (2.6), temos

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}'(U_n) - \tilde{P}'(U)\|_H^* &= \sup\{|\tilde{P}'(U_n - U)(V)| : V \in H(\Omega) \ e \ \|V\|_H = 1\} \\ &\leq 2B_0^2 \|U_n - U\|_H \to 0, \ em \ (\mathbb{R}, |\cdot|). \end{aligned}$$

Portanto $\tilde{P}'$ é um operador contínuo, ou seja, a afirmação III vale. Devido à validade das afirmações I,II e III, segue a prova da proposição 2.2.

■

2.3 Construção do primeiro autovalor de Neumann

Nesta seção, mostraremos a existência de um primeiro autovalor de Neumann, o qual denotaremos, posteriormente, por λ_1, e algumas de suas propriedades.

Teorema 2.1 *Suponhamos válidas as condições **(H)** e **(P)**. Então, existe um par (U_1, λ_1) em $[H(\Omega) \setminus \{0\}] \times \mathbb{R}$, o qual é solução fraca para o auto-sistema (2.1). Em outras palavras, λ_1 é um autovalor de Neumann para o auto-sistema (2.1).*

Prova: Seja $\rho_1 = \inf\{\Upsilon_C(U) : U \in \mathbb{L}\}$. Da definição de ínfimo, conseguimos uma sequência (U_j) em $\mathbb{L}$, tal que

$$\Upsilon_C(U_j) \to \rho_1 \ em \ (\mathbb{R}, |\cdot|) \ e \ \Upsilon_C(U_j) \leqslant \rho_1 + 1, \tag{2.7}$$

Uma vez que $\|U_j\|_C^2 = \Upsilon_C(U_j)$, segue, por (2.7), que a sequência (U_j) é limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Disso e devido às normas $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_C$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, (U_j) também é sequência limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Mas também, $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$ é reflexivo. Logo, existem $\overline{U} \in H(\Omega)$, e uma subsequência (U_{j_k}) de (U_j), tais que $U_{j_k} \rightharpoonup \overline{U}$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Ora, devido à validade da condição **(H)**, o teorema **R-K** vale. Por conseguinte, o mergulho $H(\Omega) \hookrightarrow [L^2(\Omega)]^2$ é compacto. Assim, $U_{j_k} \to \overline{U}$ em $([L^2(\Omega)]^2, \|\cdot\|_2)$. Consequentemente, $\|U_{j_k}\|_2 \to \|\overline{U}\|_2$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, pois $|\|U_{j_k}\|_2 - \|\overline{U}\|_2| \leq \|U_{j_k} - \overline{U}\|_2$, $\forall \ k \in \mathbb{N}$. Agora, por causa de $U_{j_k} \in \mathbb{L}$ e da continuidade da norma $\|\cdot\|_2$, $\|\overline{U}\|_2 = 1$, ou seja, $\overline{U} \in \mathbb{L}$. Mostremos que $\Upsilon_C(\overline{U}) = \rho_1$. Para isso, basta-nos mostrar que $\Upsilon_C(\overline{U}) \leq \rho_1$, pois a outra desigualdade segue, haja visto que $\overline{U} \in \mathbb{L}$. Devido à observação 1, da seção 3, do capítulo 1, e à (2.7), temos

$$\Upsilon_C(\overline{U})^{\frac{1}{2}} = \|\overline{U}\|_C \leq \liminf_{k\to+\infty} \|U_{j_k}\|_C = \rho_1^{\frac{1}{2}}.$$

Por conseguinte, $\Upsilon_C(\overline{U}) \leq \rho_1$. Logo, $\Upsilon_C(\overline{U}) = \rho_1$. Deste modo, podemos ver $\Upsilon_C(\overline{U})$ como um extremo de Υ_C restrito a $\mathbb{L} = G^{-1}\left(\{G(\overline{U})\}\right)$. Disso e devido à $G, \Upsilon_C \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$ (proposições 1.5 e 2.2), podemos aplicar o teorema dos multiplicadores de Lagrange (teorema 6.16), ou seja, uma das seguintes condições deve ocorrer:

(1) $G'(\overline{U}) = 0$;

(2) Existe $\mu \in \mathbb{R}$, tal que $\Upsilon_C'(\overline{U})(\Theta) = \mu G'(\overline{U})(\Theta)$, $\forall\ \Theta \in H(\Omega)$.

A condição **(1)** não é válida, pois $G'(\overline{U})(\overline{U}) = 2\|\overline{U}\|_2^2 = 2 \neq 0$. Logo, vale a condição **(2)**. Assim, ao considerarmos $\Theta = \overline{U}$ em **(2)**, obtemos $\rho_1 = \Upsilon_C(\overline{U}) = \|\overline{U}\|_C^2 = \mu\|\overline{U}\|_2^2 = \mu$, pois $\overline{U} \in \mathbb{L}$. Consequentemente, devido à validade de **(2)** e à $\|\overline{U}\|_2 = 1$, o par $(\overline{U}, \mu)$ é uma solução fraca para o auto-sistema (2.1). Se denotarmos $\lambda_1 = \mu$, e $U_1 = \overline{U}$, então λ_1 é um autovalor de Neumann para o auto-sistema 2.1, tendo como autofunção de Neumann associada, U_1. Além disso, λ_1 tem a seguinte caracterização variacional

$$\lambda_1 = \inf_{U\in H(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|U\|_C^2}{\|U\|_2^2} = \Upsilon_C(U_1). \tag{2.8}$$

■

O próximo resultado nos fornece algumas propriedades para λ_1.

Teorema 2.2 *Suponhamos válidas as condições **(H)** e **(P)**. Então, λ_1 satisfaz:*

(N1) $\lambda_1 > 0$.

(N2) *λ_1 é o menor autovalor positivo de Neumann para o auto-sistema (2.1).*

(N3) $\|U\|_C^2 \geq \lambda_1\|U\|_2^2$, $\forall\ U \in H(\Omega)$.

Prova: **(N1)** Já sabemos que $\lambda_1 = \rho_1 \geq 0$. Suponhamos $\lambda_1 = 0$, então $0 = \rho_1 = \Upsilon_C(\overline{U}) = \|\overline{U}\|_C^2$, de onde segue que $\overline{U} = 0$ em $H(\Omega)$, o que é um absurdo, pois $\overline{U} \in \mathbb{L}$. Portanto $\lambda_1 > 0$. Daí segue a validade de **(N1)**.

(N2) Se λ_1 não for o menor autovalor positivo do auto-sistema (2.1), então existem $\tilde{U} \in H(\Omega) \setminus \{0\}$, e $0 < \tilde{\lambda} < \lambda_1$ que satisfazem (2.2), ou seja, $\langle\tilde{U}, V\rangle_C = \tilde{\lambda}\langle\tilde{U}, V\rangle_2$,

$\forall\ V \in H(\Omega)$. Consequentemente, ao tomarmos $V = \frac{\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_2^2}$, $\Upsilon_C\left(\frac{\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_2}\right) = \tilde{\lambda}$. Agora, como $G\left(\frac{\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_2}\right) = 1$, segue que $\frac{\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_2} \in \mathbb{L}$. Logo, em virtude de $\lambda_1 = \rho_1$, $\lambda_1 \leq \Upsilon_C\left(\frac{\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_2}\right) = \tilde{\lambda}$, o que gera um absurdo, pois supomos $\tilde{\lambda} < \lambda_1$. Daí segue a validade de **(N2)**.

(N3) Se $U = 0$, então a igualdade em **(N3)** é facilmente verificada. Se $U \neq 0$, então, em razão de

$$\lambda_1 = \inf_{U \in H(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|U\|_C^2}{\|U\|_2^2} = \Upsilon_C(U_1),$$

a validade de **(N3)** fica justificada.

■

2.4 Construção da sequência de autovalores de Neumann

Nesta seção, objetivamos construir uma sequência de autovalores de Neumann, (λ_k), para o auto-sistema (2.1). Vimos, na seção anterior, a existência de um primeiro autovalor de Neumann, $\lambda_1 = \rho_1$, com autofunção de Neumann associada $U_1 = \overline{U}$. Com isso, iremos em busca de tal sequência, por um processo de indução finita. Também, nesta seção, daremos algumas propriedades da sequência (λ_k). Nosso primeiro resultado, nos fornece uma relação entre pares de soluções fracas do auto-sistema (2.1).

Proposição 2.3 *Suponhamos válidas as condições **(H)** e **(P)**. Se os pares $(U,\lambda), (W,\mu) \in H(\Omega)\times\mathbb{R}$ forem soluções fracas para o auto-sistema (2.1), com $\lambda \neq \mu$, então $\langle U, W\rangle_2 = 0$.*

Prova: Como (U,λ) é solução fraca para o auto-sistema (2.1), $\langle U,\Theta\rangle_C = \lambda\langle U,\Theta\rangle_2$, $\forall\ \Theta \in H(\Omega)$. Tomando $\Theta = W$, obtemos $\langle U,W\rangle_C = \lambda\langle U,W\rangle_2$. Argumentando de maneira análoga, só que agora, utilizando o fato de (W,μ) ser solução fraca para o auto-sistema (2.1), e fazendo $\Theta = U$, obtemos $\langle W,U\rangle_C = \mu\langle W,U\rangle_2$. Consequentemente, $(\lambda-\mu)\langle U,W\rangle_2 = \langle U,W\rangle_C - \langle W,U\rangle_C = 0$. Mas, como $\lambda \neq \mu$, $\langle U,W\rangle_2 = 0$, como desejávamos.

■

O próximo teorema nos fornece a sequência de autovalores de Neumann, (λ_k).

Teorema 2.3 *Suponhamos válidas as condições* ***(H)*** *e* ***(P)****. Então, existe uma sequência de pares* $((U_k, \lambda_k))$ *em* $[H(\Omega) \setminus \{0\}] \times \mathbb{R}$*, os quais são soluções fracas para o auto-sistema (2.1) e satisfazem:*

(1) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$.

(2) $\langle U_k, U_l \rangle_2 = \delta_{kl}$, $\forall\ k, l \in \mathbb{N}$.

(3) $\lambda_k = \inf\{\Upsilon_C(U) : U \in \mathbb{L}_{k-1}\}$, *sendo, para* $s \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{L}_0 \doteq \mathbb{L},\ \ e\ \mathbb{L}_s \doteq \{U \in \mathbb{L} : \langle U, U_i \rangle_2 = 0,\ \forall\ i = 1, 2, \cdots, s\},$$

Prova: Provaremos tal teorema por indução em k. Segue, do teorema 2.1, a validade do teorema 2.3 para $k = 1$. Suponhamos o teorema 2.3 válido para $1 \leq k \leq J$, e provemos que o mesmo continua válido para $J + 1$. Para isso, consideremos

$$\rho_{J+1} = \inf_{U \in \mathbb{L}_J} \Upsilon_C(U) = \inf_{U \in \mathbb{L}_J} \|U\|_C^2.$$

Afirmação 1: Existe $\widehat{U} \in \mathbb{L}_J$ tal que $\rho_{J+1} = \Upsilon_C(\widehat{U})$.
De fato, das definições de ρ_{J+1} e de ínfimo, existe uma sequência (U_n) em $\mathbb{L}_J$, tal que

$$\Upsilon_C(U_n) \to \rho_{J+1}\ em\ (\mathbb{R}, |\cdot|)\ e\ \Upsilon_C(U_n) \leq \rho_{J+1} + 1, \tag{2.9}$$

Assim, como $\Upsilon_C(U_n) = \|U_n\|_C^2 \leq \rho_{J+1} + 1$, a sequência (U_n) é limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Por isso e pelo fato das normas $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_H$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, temos que a sequência (U_n) também é limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Consequentemente, visto que $(H(\Omega), |\cdot\|_H)$ é um espaço reflexivo, existem $\widehat{U} \in H(\Omega)$ e uma subsequência (U_{n_l}) de (U_n), tais que $U_{n_l} \rightharpoonup \widehat{U}$, em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Com isso e devido à compacidade do mergulho $H(\Omega) \hookrightarrow [L^2(\Omega)]^2$ (isto segue do teorema **R-K**), temos $U_{n_l} \to \widehat{U}$ em $([L^2(\Omega)]^2, \|\cdot\|_2)$. Por conseguinte, em razão da desigualdade $|\|U_{n_l}\|_2 - \|\widehat{U}\|_2| \leq \|U_{n_l} - \widehat{U}\|_2$, $\|U_{n_l}\|_2 \to \|\widehat{U}\|_2$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Mas também, $\|U_{n_l}\|_2 = 1$, $\forall\ l \in \mathbb{N}$. Deste modo, pela continuidade da norma $\|\cdot\|_2$, segue que $\|\widehat{U}\|_2 = 1$, ou seja, $\widehat{U} \in \mathbb{L}$. Assim, para $\widehat{U}$ pertencer a $\mathbb{L}_J$, basta-nos mostrar que $\langle \widehat{U}, U_i \rangle_2 = 0$, para qualquer $i \in \{1, 2, \cdots, J\}$. Provemos isso. Temos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ é um funcional contínuo sobre $[L^2(\Omega)]^2 \times [L^2(\Omega)]^2$. Consequentemente, devido à cada $i \in \{1, 2, \cdots, J\}$, $(U_{n_l}, U_i) \to (\widehat{U}, U_i)$ em $[L^2(\Omega)]^2 \times [L^2(\Omega)]^2$, munido da norma

$\|\cdot\|_2 + \|\cdot\|_2$, $\langle U_{n_l}, U_i\rangle_2 \to \langle \widehat{U}, U_i\rangle_2$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Disso e do fato de $\langle U_{n_l}, U_i\rangle_2 = 0$, $\forall\, l \in \mathbb{N}$ $(U_{n_l} \in \mathbb{L}_J)$, temos $\langle \widehat{U}, U_i\rangle_2 = 0$, $\forall\, i = 1, 2, \cdots, J$. Portanto $\widehat{U} \in \mathbb{L}_J$. Logo, $\Upsilon_C(\widehat{U}) \geq \rho_{J+1}$. Mostremos que $\Upsilon_C(\widehat{U}) \leq \rho_{J+1}$. Ora, devido à observação 1 da seção 3, do capítulo 1, e à (2.9), temos

$$\Upsilon_C(\widehat{U})^{\frac{1}{2}} = \|\widehat{U}\|_C \leq \liminf_{l\to+\infty} \|U_{n_l}\|_C = \rho_{J+1}^{\frac{1}{2}},$$

de onde segue que, $\Upsilon_C(\widehat{U}) \leq \rho_{J+1}$. E assim, $\Upsilon_C(\widehat{U}) = \rho_{J+1}$, como queríamos.

Afirmação 2: Se denotarmos $U_{J+1} = \widehat{U}$, então o par (U_{J+1}, ρ_{J+1}) é solução fraca para o auto-sistema (2.1).

De fato, devido à hipótese de indução, para $1 \leq i \leq J$, os pares $(U_i, \lambda_i) \in (H(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ são soluções fracas para o auto-sistema (2.1) e satisfazem as condições **(1)**, **(2)** e **(3)**. Assim, tem sentido definirmos, para $1 \leq i \leq J$, o funcional $G_i : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por $G_i(U) = \langle U, U_i\rangle_2$, $\forall\, U \in H(\Omega)$. Tal funcional, de acordo com a proposição 2.1, é um elemento de $C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$, pois $G_i = G_{U_i}$, com $U_i \in H(\Omega)$ fixado, tendo como derivada de Fréchet em $U \in H(\Omega)$, $G_i'(U)(V) = \langle V, U_i\rangle_2$, $\forall\, V \in H(\Omega)$. Ainda, em razão da validade da afirmação 1, $\Upsilon_C(U_{J+1}) = \rho_{J+1}$ é um valor extremo de Υ_C restrito a

$$\mathbb{L}_J = G^{-1}\left(\{G(U_{J+1})\}\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{J} G_i^{-1}\left(\{G_i(U_{J+1})\}\right)\right].$$

Por isso e por $\Upsilon_C, G \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$ (proposições 1.5 e 2.2), as hipóteses do teorema 6.16 são verificadas. Consequentemente, uma das seguintes condições deve valer:

(I) Se

$$A(V_1, V_2, \cdots, V_{J+1}) = \begin{pmatrix} G'(U_{J+1})(V_1) & G'(U_{J+1})(V_2) & \dots & G'(U_{J+1})(V_{J+1}) \\ G_1'(U_{J+1})(V_1) & G_1'(U_{J+1})(V_2) & \dots & G_1'(U_{J+1})(V_{J+1}) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ G_J'(U_{J+1})(V_1) & G_J'(U_{J+1})(V_2) & \dots & G_J'(U_{J+1})(V_{J+1}) \end{pmatrix},$$

$\det(A(V_1, V_2, \cdots, V_{J+1})) = 0$ para quaisquer $V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_{J+1} \in H(\Omega)$;

(II) Existem $\lambda, \mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \cdots, J$ tais que

$$\Upsilon_C^{'}(U_{J+1})(V) = \lambda G^{'}(U_{J+1})(V) + \sum_{i=1}^{J} \mu_i G_i^{'}(U_{J+1})(V),\ \forall\ V \in H(\Omega).$$

Segue, da hipótese de indução, para $i = 1, 2, \cdots, J$, que $\|U_i\|_2 = 1$,
$G^{'}(U_{J+1})(U_{J+1}) = 2\langle U_{J+1}, U_{J+1}\rangle_2 = 2\|U_{J+1}\|_2^2 = 2$,
$G^{'}(U_{J+1})(U_i) = 2\langle U_{J+1}, U_i\rangle_2 = 0$,
$G_i^{'}(U_{J+1})(U_{J+1}) = \langle U_{J+1}, U_i\rangle_2 = 0$ *e* $G_i^{'}(U_{J+1})(U_i) = \langle U_i, U_i\rangle_2 = \|U_i\|_2^2 = 1$.
Por conseguinte, $detA(U_{J+1}, U_1, U_2, \cdots, U_J) = 2 \neq 0$. Assim, (II) deve valer. Logo, ao tomarmos, para cada $i = 1, 2, \cdots, J$, $V = U_i$ em (2), e lembrarmos que $\langle U_i, U_j\rangle_2 = \delta_{ij}$, para $i, j \in \{1, 2, \ldots, J\}$, $\Upsilon_C^{'}(U_{J+1})(U_i) = \lambda G^{'}(U_{J+1})(U_i) + \mu_i$. Além disso, para $1 \leq i \leq J$, $\Upsilon_C^{'}(U_{J+1})(U_i) = \Upsilon_C^{'}(U_i)(U_{J+1})$. E, devido à hipótese de indução, $\Upsilon_C^{'}(U_i)(U_{J+1}) = \lambda_i G^{'}(U_i)(U_{J+1})$, $\forall\ 1 \leq i \leq J$. De onde vem que

$$\mu_i = \lambda_i G^{'}(U_i)(U_{J+1}) - \lambda G^{'}(U_{J+1})(U_i),\ \forall\ 1 \leq i \leq J.$$

Mas também, para $1 \leq i \leq J$, $\langle U_{J+1}, U_i\rangle_2 = 0$, $\forall\ 1 \leq i \leq J$, pois $U_{J+1} \in \mathbb{L}_J$. De onde segue que $G^{'}(U_i)(U_{J+1}) = G^{'}(U_i)(U_{J+1}) = 0$, $\forall\ 1 \leq i \leq J$. Por conseguinte, $\mu_i = 0$, $\forall\ 1 \leq i \leq J$. Com isso e em razão da validade de (II),

$$\Upsilon_C^{'}(U_{J+1})(V) = \lambda G^{'}(U_{J+1})(V),\ \forall\ V \in H(\Omega). \tag{2.10}$$

Ao substituírmos as expressões de $\Upsilon_C^{'}$ e $G^{'}$ em (2.10), concluímos que o par (U_{J+1}, λ) é uma solução fraca para o auto-sistema (2.1). Deste modo, para finalizarmos a prova da afirmação 2, basta-nos mostrar que $\lambda = \rho_{J+1}$. Provemos isso. Ao considerarmos $V = U_{J+1}$ em (2.10), obtemos $2\|U_{J+1}\|_C^2 = 2\lambda\|U_{J+1}\|_2^2$. Mas, como $\|U_{J+1}\|_2 = 1$, segue que $\lambda = \|U_{J+1}\|_C^2 = \Upsilon_C(U_{J+1}) = \rho_{J+1}$. Daí segue a validade da afirmação 2. Deste modo, se $\lambda_{J+1} = \rho_{J+1}$, então λ_{J+1} é um autovalor de Neumann para o auto-sistema (2.1), tendo como autofunção de Neumann, U_{J+1}.

Afirmação 3: $\lambda_{J+1} \geq \lambda_J$.

De fato, como $\lambda_{J+1} = \rho_{J+1} = \inf_{U \in \mathbb{L}_J} \Upsilon_C(U) = \inf_{U \in \mathbb{L}_J} \|U\|_C^2$ e $\mathbb{L}_J \subset \mathbb{L}_{J-1}$, segue que

$$\lambda_{J+1} = \inf_{U \in \mathbb{L}_J} \Upsilon_C(U) \geq \inf_{U \in \mathbb{L}_{J-1}} \Upsilon_C(U) = \lambda_J.$$

Daí segue a validade da afirmação 3. Agora, por hipótese de indução, a condição **(1)**, nos garante que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_J.$$

Consequentemente, graças à validade da afirmação 3, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_J \leq \lambda_{J+1}$. Já, a validade da condição **(2)**, para quaisquer $k, l \in \mathbb{N}$, é imediata, por isso omitiremos sua prova. Com isso, finalizamos a demonstração do teorema 2.3.

∎

Construímos, deste modo, uma sequência de autovalores de Neumann, (λ_k), para o autosistema (2.1), cujas autofunções são ortogonais em $\left[L^2(\Omega)\right]^2$. O próximo teorema nos garante duas propriedades de tal sequência.

Teorema 2.4 *Suponhamos válidas as condições **(H)** e **(P)**. Então a sequência de autovalores de Neumann, (λ_j), satisfaz:*

(N-1) $\lim_{j \to \infty} \lambda_j = +\infty$*;*

(N-2) *A dimensão do autoespaço associado a cada autovalor λ_j é finita.*

Prova: **(N-1)** Suponhamos que tal condição não seja válida, ou seja, existe $K > 0$ tal que $\lambda_j \leq K$, $\forall\ j \in \mathbb{N}$. Como $\lambda_j = \Upsilon_C(U_j) = \|U_j\|_C^2$ e as normas $\|\cdot\|_C$ e $\|\cdot\|_H$ são equivalentes em $H(\Omega)$, a sequência (U_j) é limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Deste modo, devido à reflexibilidade de $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$, existem subsequência (U_{j_k}) da sequência (U_j) e $\widehat{U} \in H(\Omega)$, tais que $U_{j_k} \rightharpoonup \widehat{U}$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Assim, em virtude da compacidade do mergulho $H(\Omega) \hookrightarrow \left[L^2(\Omega)\right]^2$, temos $U_{j_k} \to \widehat{U}$ em $(\left[L^2(\Omega)\right]^2, \|\cdot\|_2)$. Por conseguinte, a sequência (U_{j_k}) é de Cauchy em $\left[L^2(\Omega)\right]^2$. Entretanto, ao considerarmos j_k, j_l grandes e distintos, temos, devido à condição **(2)** do teorema 2.3, $\|U_{j_k} - U_{j_l}\|_2^2 = \|U_{j_k}\|_2^2 + 2\langle U_{j_k}, U_{j_l}\rangle_2 + \|U_{j_l}\|_2^2 = 2$, e isso contraria o fato da sequência (U_{j_k}) ser de Cauchy em $\left[L^2(\Omega)\right]^2$. Portanto, devemos ter $\lambda_j \to +\infty$, quando $j \to +\infty$, como desejávamos.

(N-2) Suponhamos que exista $k \in \mathbb{N}$, tal que a dimensão do autoespaço associado ao autovalor de Neumann λ_k seja infinita. Neste caso, podemos considerar uma sequência (W_j) de autofunções de Neumann, C-ortornormais em $H(\Omega)$, associadas ao autovalor λ_k. Disso segue, para $k, l \in \mathbb{N}$, com $k \neq l$, que $\langle W_k, W_l \rangle_2 = \lambda_k^{-1} \langle W_k, W_l \rangle_C = 0$. Também, para $j \in \mathbb{N}$, temos $\|W_j\|_C^2 = \lambda_k \|W_j\|_2^2$. Deste modo, se definirmos, para cada $j \in \mathbb{N}$, $V_j = \frac{W_j}{\|W_j\|_2}$, então a sequência (V_j) é limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Com isso, e em razão das normas $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_H$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, concluímos que a sequência (V_j) é limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Consequentemente, existem subsequência (V_{j_k}) de (V_j) e $\widehat{V} \in H(\Omega)$, tais que $V_{j_k} \rightharpoonup \widehat{V}$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Por isso e pela compacidade do mergulho $H(\Omega) \hookrightarrow [L^2(\Omega)]^2$, $V_{j_k} \to \widehat{V}$ em $([L^2(\Omega)]^2, \|\cdot\|_2)$. Logo, a sequência (V_{j_k}) é de Cauchy em $[L^2(\partial\Omega)]^2$. No entanto, ao considerarmos j_k, j_l grandes, com $j_k \neq j_l$, temos

$$\|V_{j_k} - V_{j_l}\|_2^2 = \left\| \frac{W_{j_k}}{\|W_{j_k}\|_2} - \frac{W_{j_l}}{\|W_{j_l}\|_2} \right\|_2^2 = \frac{\|W_{j_k}\|_2^2}{\|W_{j_k}\|_2^2} + \frac{\|W_{j_l}\|_2^2}{\|W_{j_l}\|_2^2} = 2,$$

o que é uma contradição com o fato da sequência (V_{j_k}) ser de Cauchy em $[L^2(\Omega)]^2$. Portanto, a dimensão do autoespaço associado a cada autovalor de Neumann deve ser finita, ficando, assim, provada a condição **(N-2)**.

■

2.5 Relações entre autofunções de Neumann e $H(\Omega)$

Nesta seção, decomporemos $H(\Omega)$ como soma direta de dois subespaços, os quais estão relacionados às autofunções de Neumann, construídas na seção anterior, bem como, mencionaremos algumas consequências de tal decomposição. Assumiremos, para o que segue, a validade das condições **(H)** e **(P)**. Pela validade da condição **(N-2)** do teorema 2.4, temos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\tau_k \doteq dimAut(\lambda_k) < \infty,$$

sendo $Aut(\lambda_k)$ o auto-espaço associado ao autovalor de Neumann λ_k.

Seja $\mathcal{B}_k = \{U_1^k, U_2^k, \cdots, U_{\tau_k}^k\} \subset H(\Omega) \cap [L^2(\Omega)]^2$ uma base ortonormal, em $[L^2(\Omega)]^2$, de $Aut(\lambda_k)$. Tendo em vista a proposição 2.3, segue que os conjuntos $\mathcal{B}_k$ são mutuamente ortogonais em $[L^2(\Omega)]^2$, isto é, $\langle U, V\rangle_2 = 0$, $\forall\ U \in \mathcal{B}_k$, $\forall\ V \in \beta_l$, $k \neq l$. Deste modo, $\mathcal{N} = \{U_1^1, \cdots, U_{\tau_1}^1, U_1^2, \cdots, U_{\tau_2}^2, \cdots, U_1^k, \cdots, U_{\tau_k}^k, \cdots\}$ define um conjunto ortonormal em $[L^2(\Omega)]^2$. Consideremos, para $j \in \mathbb{N}$ fixado, $\mathbb{F}_j$, o subespaço gerado por

$$\mathbb{E}_j = \{U_1^1, \cdots, U_{\tau_1}, \cdots, U_1^j, \cdots U_{\tau_j}^j\}.$$

Tal subespaço possui dimensão finita e igual a $\tau \doteq \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_j$. Consequentemente, $\mathbb{F}_j$ é um subespaço fechado em $[L^2(\Omega)]^2$. Em particular, $\mathbb{F}_j$ é um subespaço de Hilbert de $[L^2(\Omega)]^2$. Por conseguinte $[L^2(\Omega)]^2 = \mathbb{F}_j \oplus \mathbb{F}_j^\perp$, onde

$$\mathbb{F}_j^\perp = \{U \in \left[L^2(\Omega)\right]^2 : \langle U, V\rangle_2 = 0,\ \forall\ V \in \mathbb{F}_j\}.$$

Para o que segue, necessitaremos do seguinte lema, cuja prova utiliza resultados básicos de álgebra linear, por isso, a omitiremos.

Lema 2.1 *Sejam $\mathbb{E}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ subespaços vetorias de $\mathbb{E}$, tais que $\mathbb{E} = \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$. Se $\mathbb{X}$ for um subespaço vetorial de $\mathbb{E}$ e $\mathbb{A}$ for um subespaço vetorial de $\mathbb{X}$, então $\mathbb{X} = \mathbb{A} \oplus (\mathbb{B} \cap \mathbb{X})$.*

Como consequência deste lema, ao considerarmos $\mathbb{E} = [L^2(\Omega)]^2$, $\mathbb{X} = H(\Omega)$, $\mathbb{A} = \mathbb{F}_j$ e $\mathbb{B} = \mathbb{F}_j^\perp$, temos $H(\Omega) = \mathbb{F}_j \oplus \left[\mathbb{F}_j^\perp \cap H(\Omega)\right]$. Se, para cada $k \in \mathbb{N}$, denotarmos

$$V_k = \begin{cases} U_k^{j+1}, & se\ 1 \leq k \leq \tau_{j+1} \\ U_{k-\tau_{j+l}}^{j+l+1}, & se\ \tau_{j+l} < k \leq \tau_{j+l} + \tau_{j+l+1},\ l \geq 1, \end{cases}$$

então $\mathbb{O} = (V_k)$ define uma sequência ortonormal em $\mathbb{F}_j^\perp \cap H(\Omega)$. Isto é imediato, pois $V_k \in \mathcal{N}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.4 *$\mathbb{O}$ é uma sequência ortonormal total em $\mathbb{F}_j^\perp \cap H(\Omega)$.*

Prova: De acordo com o teorema 6.7 e em razão de $\mathbb{F}_j^\perp \cap H(\Omega)$ ser um subespaço de Hilbert de $[L^2(\Omega)]^2$, basta-nos mostrar que, se $\tilde{U} \in \mathbb{F}_j^\perp \cap H(\Omega)$ for tal que $\tilde{U} \perp \mathbb{O}$ em $[L^2(\Omega)]^2$, então $\tilde{U} = 0$. Suponhamos que isso não ocorra, ou seja, existe $\tilde{U} \in \left(\mathbb{F}_j^\perp \cap H(\Omega)\right) \setminus \{0\}$, tal que $\tilde{U} \perp \mathbb{O}$ em $[L^2(\Omega)]^2$. Então, se denotarmos $\tilde{V} = \frac{\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_2}$, $\|\tilde{V}\|_2 = 1$ e $\langle \tilde{V}, U\rangle_2 = 0$,

$\forall\ U \in \mathbb{O}$. Disso, do fato de $\tilde{V} \in \mathbb{F}_j^{\perp}$ e da caracterização variacional de λ_k, concluímos que $\lambda_k \leq \|\tilde{V}\|_C^2$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo, pois, pelo teorema 2.4, $\lambda_k \to +\infty$, quando $k \to +\infty$. Portanto, $\tilde{U} = 0$. Daí segue a validade da proposição 2.4.

■

Observação 1: Como consequência da proposição 2.4, a sequência $\mathbb{O}$ define uma base de Hilbert para $\mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega) \subset [L^2(\Omega)]^2$.

Observação 2: Devido à observação 1, segue que, dado $U \in \mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega)$,

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} \langle U, V_k \rangle_2 V_k \ e \ \|U\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U, V_k \rangle_2|^2 . \tag{2.11}$$

Agora, para $k \in \mathbb{N}$ e $U \in H(\Omega)$, temos

$$\langle U, V \rangle_C = \lambda_k \langle U, V \rangle_2, \ \forall\ V \in \mathcal{B}_k. \tag{2.12}$$

Deste modo, podemos reescrever $\mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega)$ como

$$\mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega) = \{U \in H(\Omega) : \langle U, V \rangle_C = 0,\ \forall\ V \in \mathbb{F}_j\} \doteq (\mathbb{F}_j)_C^{\perp},$$

que representa o complemento ortogonal de $\mathbb{F}_j$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, o qual é um subespaço fechado de $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, e assim, um subespaço de Hilbert de $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Ainda, segue, por (2.12), que a sequência (V_k) é C-ortogonal em $(\mathbb{F}_j)_C^{\perp}$. Logo, ao denotarmos $W_k = \frac{V_k}{\|V_k\|_C}$, vemos que a sequência (W_k) é C-ortonormal em $(\mathbb{F}_j)_C^{\perp}$. Denotemos tal sequência por $\mathbb{O}_C$.

Proposição 2.5 *A sequência $\mathbb{O}_C$ é total em $(\mathbb{F}_j)_C^{\perp}$.*

Prova: Devido ao teorema 6.7 e à $(\mathbb{F}_j)_C^{\perp}$ ser um subespaço de Hilbert de $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, basta-nos mostrar que, se $\tilde{U} \in (\mathbb{F}_j)_C^{\perp}$ for tal que $\tilde{U} \perp \mathbb{O}_C$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, então $\tilde{U} = 0$. Suponhamos que isso não ocorra. Então, existe $\tilde{U} \in (\mathbb{F}_j)_C^{\perp} \setminus \{0\}$, tal que $\tilde{U} \perp \mathbb{O}_C$, em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Agora, para $k \in \mathbb{N}$, temos, devido à 2.12,

$$\langle \tilde{U}, W_k \rangle_C = 0 \Rightarrow \langle \tilde{U}, V_k \rangle_C = 0 \Rightarrow \langle \|\tilde{U}\|_2^{-1}\tilde{U}, V_k \rangle_C = 0 \Rightarrow \langle \|\tilde{U}\|_2^{-1}\tilde{U}, V_k \rangle_2 = 0.$$

Segue, assim, se denotarmos $\tilde{V} = \frac{\tilde{U}}{\|\tilde{U}\|_2}$, que $\|\tilde{V}\|_2 = 1$ e $\langle \tilde{V}, U\rangle_2 = 0$, $\forall\, U \in \mathbb{O}_C$. Com isso, pelo fato de $\tilde{V} \in \mathbb{F}_j^{\perp}$ e pela caracterização variacional de λ_k, concluímos que $\lambda_k \leq \|\tilde{V}\|_C^2$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, e isto gera uma contradição, pois devido ao teorema 2.4, $\lambda_k \to +\infty$, quando $k \to +\infty$. Portanto, $\tilde{U} = 0$, como desejávamos.

■

Observação 3: Como consequência do teorema anterior, a sequência $\mathbb{O}_C$ define uma base de Hilbert para $(\mathbb{F}_j)_C^{\perp} \subset H(\Omega)$, sendo este último espaço, munido da norma $\|\cdot\|_C$. Consequentemente, dado $U \in (\mathbb{F}_j)_C^{\perp} \cap H(\Omega)$,

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} \langle U, W_k\rangle_C W_k \ e \ \|U\|_C^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle U, W_k\rangle_C\right|^2. \tag{2.13}$$

Observação 4: Ao combinarmos as identidades dadas em (2.11) e (2.13) com (2.12), obtemos, para U em $\mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega) = (\mathbb{F}_j)_C^{\perp}$,

$$\|U\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-2} |\langle U, V_k\rangle_C|^2 \ e \ \|U\|_C^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1} |\langle U, V_k\rangle_C|^2,$$

onde

$$\sigma_k = \begin{cases} \lambda_{j+1}, & se\ 1 \leq k \leq \tau_{j+1}, \\ \lambda_{j+l+1}, & se\ \tau_{j+l} < k \leq \tau_{j+l} + \tau_{j+l+1}, l \geq 1. \end{cases}$$

Agora, como $0 < \lambda_{j+1} \leq \lambda_k$, $\forall\, k \geq j+1$, temos $\lambda_k^{-1} \leq \lambda_{j+1}^{-1}$, $\forall\, k \geq j+1$. De onde vem que $\sigma_k \leq \lambda_{j+1}^{-1}$, $\forall\, k \geq j+1$. E assim,

$$\|U\|_2^2 \leq \lambda_{j+1}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1} |\langle U, V_k\rangle_C|_C^2 = \lambda_{j+1}^{-1} \|U\|_C^2. \tag{2.14}$$

Obseravação 5: Seja $U \in \mathbb{F}_j$. Como $\bigcup_{k=1}^{j} \mathcal{B}_k$ é uma base para $\mathbb{F}_j$, ao denotarmos, para $1 \leq k \leq \tau$ e $1 \leq l \leq j-1$ (quando $j \geq 2$),

$$Z_k = \begin{cases} V_k^1, & se\ 1 \leq k \leq \tau_1, \\ V_{k-\tau_l}^{l+1}, & se\ \tau_l < k \leq \tau_l + \tau_{l+1}, \end{cases}$$

existem únicos escalares $c_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq \tau$, tais que $U = \sum_{k=1}^{\tau} c_k Z_k$. Além disso, como $\{Z_k : 1 \leq k \leq \tau\} \subset \mathcal{N}$, temos $\langle Z_k, Z_l \rangle_2 = 0$ e $\|Z_k\|_2 = 1$, $\forall\ 1 \leq k, l \leq \tau$, $k \neq l$. Logo,

$$\|U\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\tau} c_k^2. \tag{2.15}$$

Com isso e devido à (2.12), concluímos que $\langle Z_k, Z_l \rangle_C = 0$, $\forall\ 1 \leq k$, $l \leq \tau$, $k \neq l$. Deste modo,

$$\|U\|_C^2 = \sum_{k=1}^{\tau} c_k^2 \|Z_k\|_C^2. \tag{2.16}$$

Por fim, afirmamos que, para qualquer $U \in \mathbb{F}_j$, vale

$$\|U\|_2^2 \geq \lambda_j^{-1} \|U\|_C^2. \tag{2.17}$$

De fato. Se denotarmos, para $1 \leq k \leq \tau$ e $1 \leq l \leq j-1$ (quando $j \geq 2$),

$$\varsigma_k = \begin{cases} \lambda_1, & se\ 1 \leq k \leq \tau_1, \\ \\ \lambda_{l+1}, & se\ \tau_l < k \leq \tau_l + \tau_{l+1}, \end{cases}$$

então, ao utilizarmos (2.12) em (2.16),

$$\|U\|_C^2 = \sum_{k=1}^{\tau} c_k^2 \varsigma_k. \tag{2.18}$$

Finalmente, como $\lambda_k \leq \lambda_j$, $\forall\ 1 \leq k \leq j$, temos $\varsigma_k \leq \lambda_j$, $\forall\ 1 \leq k \leq \tau$. Combinando isso, (2.18) e (2.15), obtemos

$$\|U\|_C^2 \leq \lambda_j \sum_{k=1}^{\tau} c_k^2 = \lambda_j \|U\|_2^2.$$

Daí segue a validade da afirmação. A importância desta seção será observada no capítulo 3, onde utilizaremos as desigualdades (2.14) e (2.17), para obtermos resultados de existência de solução para uma classe de sistemas não lineares, com condições de fronteira não lineares.

Capítulo

3

Sistemas elípticos não lineares com condições de fronteira não lineares

3.1 Uma breve introdução

Neste capítulo, mostraremos a existência de solução fraca para o sistema de equações diferenciais parciais elípticas com condições de fronteira não lineares

$$\begin{cases} -\triangle U + C(x)U = f(x,U), & se\ x \in \Omega \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = g(x,U), & se\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, é um domínio limitado com fronteira, $\partial\Omega$, de classe $C^{0,1}$, e $\dfrac{\partial}{\partial\eta} \doteq \eta \cdot \nabla$ é a derivada normal exterior unitária sobre $\partial\Omega$. Assumiremos, neste capítulo, ao denotarmos $f = (f_1, f_2)$ e $g = (g_1, g_2)$, as seguintes condições:

(P) $C(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & c(x) \end{pmatrix}$ é uma matriz positiva definida sobre $\mathbb{R}^2$ para q.t.p. $x \in \Omega$, com $a, b, c \in L^p(\Omega)$, para $p \geq \frac{N}{2}$, quando $N \geq 3$ ($p > 1$, quando $N = 2$).

(H1) $F, G \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ são tais que, para qualquer $x \in \overline{\Omega}$,

$$\nabla_U F(x,U) = f(x,U)\ e\ \nabla_U G(x,U) = g(x,U),$$

onde $\nabla_U F \doteq \left(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}\right)$.

(G1) Existem constantes $A_1^i, A_2^i > 0$ tais que

$$|g_i(x,u,v)| \leq A_1^i + A_2^i \left[|u| + |v|\right]^s,$$

com $0 \leq s < \dfrac{N}{N-2}$, para $i = 1, 2$, $x \in \overline{\Omega}$ e $U = (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(F1) Existem constantes $B_1^i, B_2^i > 0$ tais que

$$|f_i(x,u,v)| \leq B_1^i + B_2^i \left[|u| + |v|\right]^t,$$

com $0 \leq t < \dfrac{N+2}{N-2}$, para $i = 1, 2$, $x \in \overline{\Omega}$ e $U = (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(LG) G satisfaz

$$\lim_{|U| \to +\infty} \left[\nabla_U G(x,U) \cdot U - 2G(x,U)\right] = +\infty$$

uniformemente para q.t.p. $x \in \partial\Omega$.

(LF) F satisfaz

$$\lim_{|U| \to +\infty} \left[\nabla_U F(x,U) \cdot U - 2F(x,U)\right] = +\infty$$

uniformemente para q.t.p. $x \in \Omega$.

Observação 1: Quando validarmos a condição **(H1)**, $f_i, g_i \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, para $i = 1, 2$.

Observação 2: O fato de $\partial\Omega$ ser de classe $C^{0,1}$ implica na validade da condição **(H)**, definida no capítulo 1 (veja o capítulo 4 de [1]). Consequentemente, quando supormos válida a condição **(P)**, os resultados obtidos nos capítulos 1 e 2 continuarão válidos. Lembremos dois destes resultados. No capítulo 1, vimos que o auto-sistema

$$\begin{cases} -\triangle U + C(x)U = 0, & se\ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = \mu U, & se\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

admite uma sequência de autovalores de Steklov, (μ_j), tal que

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_j \leq \cdots \to +\infty, \ quando\ j \to +\infty.$$

Além disso, cada autovalor μ_j possui autoespaço associado com dimensão finita. E, pela caracterização variacional de μ_1,

$$\mu_1\|U\|_{2,\partial}^2 \leq \|U\|_C^2, \ \forall\, U \in H(\Omega). \tag{3.3}$$

Já, no capítulo 2, vimos que o auto-sistema

$$\begin{cases} -\triangle U + C(x)U = \lambda U, & se\ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = 0, & se\ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

também possui uma sequência de autovalores, (λ_j), denominados autovalores de Neumann, tais que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots \to +\infty,\ quando\ j \to +\infty.$$

Além disso, cada autovalor λ_j possui autoespaço associdos com dimensão finita. Também, devido à caracterização variacional de λ_1,

$$\lambda_1\|U\|_2^2 \leq \|U\|_C^2, \ \forall\, U \in H(\Omega). \tag{3.5}$$

A validade dos resultados de existência de solução fraca para o sistema 3.1, que obtivemos, se dá quando relacionamos a não linearidade de fronteira, g, com o espectro de Steklov, e a não linearidade de reação, f, com o espectro de Neumann. A seguir, definimos o que vem a ser uma solução fraca para o sistema (3.1).

Definição 3.1 *$U \in H(\Omega)$ é dita uma solução fraca para o sistema (3.1) quando*

$$\int_\Omega [\nabla U \cdot \nabla V + \langle C(x)U, V\rangle]\, dx = \int_\Omega f(x,U)\cdot V dx + \int_{\partial\Omega} g(x,U)\cdot V d\sigma, \tag{3.6}$$

para qualquer $V \in H(\Omega)$.

3.2 Principais resultados

Nesta seção, enunciaremos os principais resultados deste capítulo, os quais serão provados nas seções 3.4, 3.5 e 3.6.

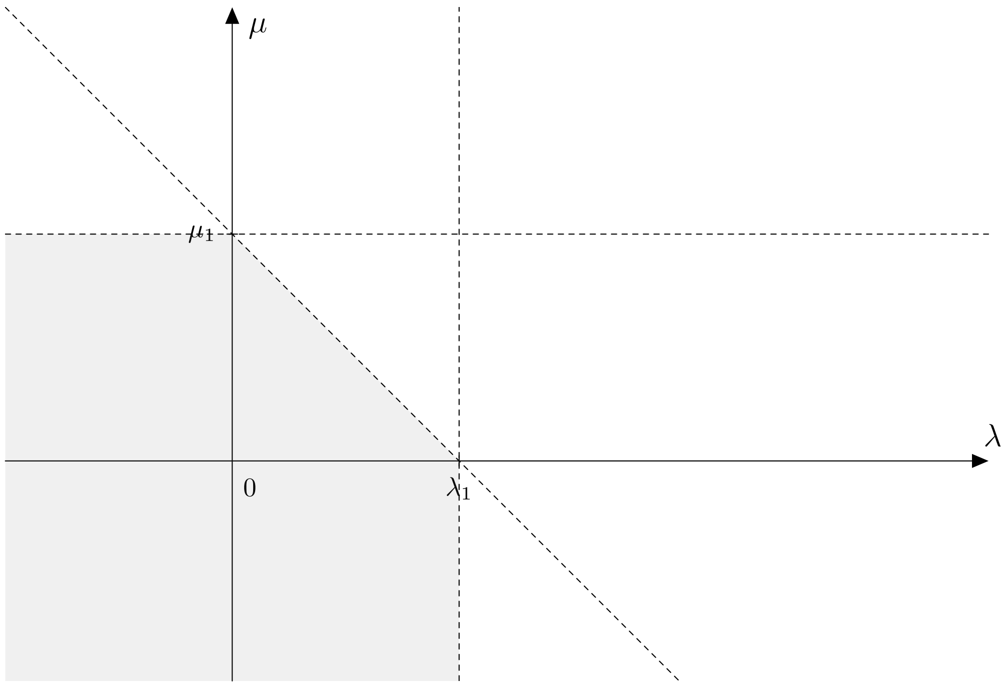
Teorema 3.1 *Suponhamos que as condições **(P)**, **(H1)**, **(G1)** e **(F1)** sejam satisfeitas. Além disso, suponhamos que a seguinte condição também seja válida:*

***(A1)** Existem constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\limsup_{|U|\to+\infty} \frac{2G(x,U)}{u^2+v^2} \leq \mu < \mu_1 \ e \ \limsup_{|U|\to+\infty} \frac{2F(x,U)}{u^2+v^2} \leq \lambda < \lambda_1,$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$, com $\lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \mu_1\lambda_1$. Então o sistema não linear (3.1) possui ao menos uma solução fraca $U \in H(\Omega)$.

A seguir, a região hachurada desenhada no plano $\lambda\mu$, representa $\lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \mu_1\lambda_1$.



Teorema 3.2 *Suponhamos que as condições **(P)**, **(H1)**, **(G1)**, **(F1)**, **(LG)**, **(LF)** sejam satisfeitas, e, ainda, que a seguinte condição também valha:*

(A2) *Existem constantes $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que*

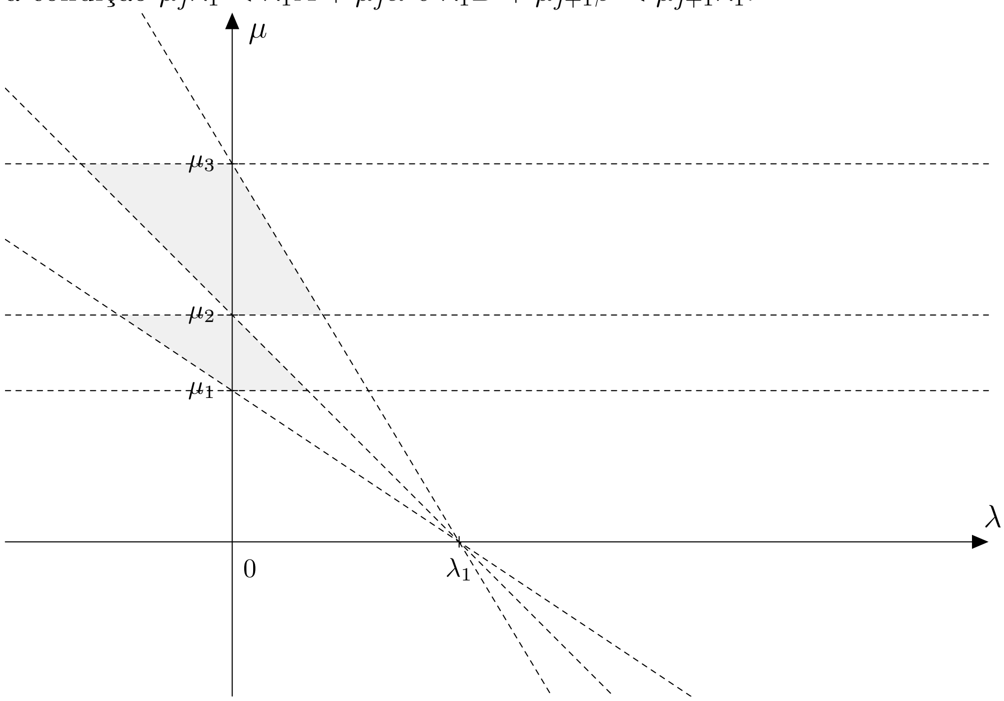
$$\mu_j < A \leq \liminf_{|U| \to +\infty} \frac{2G(x,U)}{u^2+v^2} \leq \limsup_{|U| \to +\infty} \frac{2G(x,U)}{u^2+v^2} \leq B < \mu_{j+1}$$

e

$$\alpha \leq \liminf_{|U| \to +\infty} \frac{2F(x,U)}{u^2+v^2} \leq \limsup_{|U| \to +\infty} \frac{2F(x,U)}{u^2+v^2} \leq \beta,$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$, com $\mu_j\lambda_1 < \lambda_1 A + \mu_j \alpha$ e $\lambda_1 B + \mu_{j+1}\beta < \mu_{j+1}\lambda_1$. Então o sistema não linear (3.1) tem ao menos uma solução fraca $U \in H(\Omega)$.

A região hachurada desenhada no plano $\lambda\mu$, representa o que significa, geometricamente, a condição $\mu_j\lambda_1 < \lambda_1 A + \mu_j \alpha$ e $\lambda_1 B + \mu_{j+1}\beta < \mu_{j+1}\lambda_1$.



Teorema 3.3 *Suponhamos que as condições **(P)**, **(H1)**, **(G1)**, **(F1)**, **(LG)**, **(LF)** sejam satisfeitas, e, ainda, que a seguinte condição também valha:*

(A3) *Existem constantes $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que*

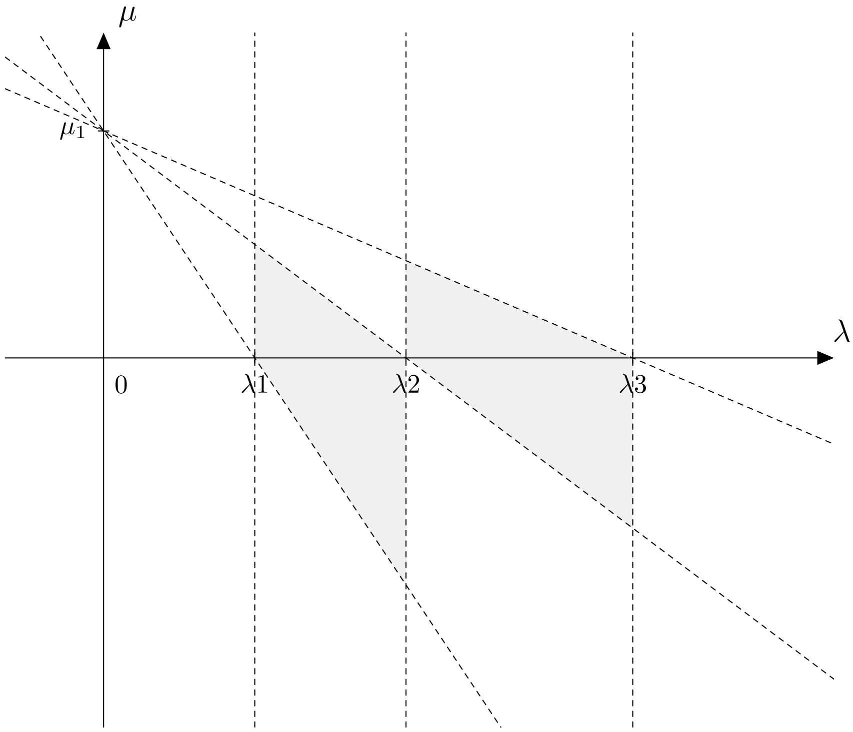
$$A \leq \liminf_{|U| \to +\infty} \frac{2G(x,U)}{u^2+v^2} \leq \limsup_{|U| \to +\infty} \frac{2G(x,U)}{u^2+v^2} \leq B$$

e

$$\lambda_j < \alpha \leq \liminf_{|U| \to +\infty} \frac{2F(x,U)}{u^2+v^2} \leq \limsup_{|U| \to +\infty} \frac{2F(x,U)}{u^2+v^2} \leq \beta < \lambda_{j+1},$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$, *com* $\lambda_j \mu_1 < \lambda_j A + \mu_1 \alpha$ *e* $\lambda_{j+1} B + \mu_1 \beta < \lambda_{j+1} \mu_1$. *Então o sistema não linear (3.1) admite ao menos uma solução fraca* $U \in H(\Omega)$.

A região hachurada desenhada no plano $\lambda\mu$, a seguir, representa o que significa, geometricamente, a condição $\lambda_j \mu_1 < \lambda_j A + \mu_1 \alpha$ e $\lambda_{j+1} B + \mu_1 \beta < \lambda_{j+1} \mu_1$.



Para demonstrarmos estes três teoremas, necessitaremos de alguns resultados preliminares sobre teoria de ponto crítico, os quais serão expostos na próxima seção.

3.3 Resultados Preliminares

Nesta seção, veremos os resultados necessários para a prova dos teoremas da seção anterior.

Proposição 3.1 *Se, para* $i = 1, 2$, $g_i \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *e existem constantes* $p, q \geq 1$, $a_i^1, a_i^2, a_i^3 \geq 0$, *tais que, para quaisquer* $x \in \overline{\Omega}, u, v \in \mathbb{R}$,

$$|g_i(x,u,v)| \leq a_i^1 + a_i^2 |u|^{\frac{p}{q}} + a_i^3 |v|^{\frac{p}{q}}, \tag{3.7}$$

então, $N_g : [L^p(\partial\Omega)]^2 \to [L^q(\partial\Omega)]^2$*, definido por* $N_g(u,v) = (g_1(x,u,v), g_2(x,u,v))$*, é um operador contínuo.*

Prova: Para o que segue, $i \in \{1,2\}$. Provemos, inicialmente, a boa definição de N_g. Para isso, seja $(u,v) \in [L^p(\partial\Omega)]^2$. Então $u, v \in L^p(\partial\Omega)$, e assim, tanto u, quanto v, são σ-mensuráveis. Por isso e pelo fato de $g_i \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, segue que $g_i(x,u,v)$ é σ-mensurável. Agora, mostremos que $\int_{\partial\Omega} |g_i(x,u,v)|^q d\sigma < \infty$. Ora, ao utilizarmos o teorema 6.1 e a desigualdade (3.7), obtemos

$$|g_i(x,u,v)|^q \leq \left(a_i^1 + a_i^2|u|^{\frac{p}{q}} + a_i^3|v|^{\frac{p}{q}}\right)^q \leq K\left(1 + |u|^p + |v|^p\right),$$

onde K é uma constante positiva. Consequentemente, como $u, v \in L^p(\partial\Omega)$ e $|\partial\Omega|_\sigma < \infty$ (Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$), a integral do início do parágrafo é finita. Segue assim, que $g_i(x,u,v) \in L^q(\partial\Omega)$. De onde vem, que $N_g(u,v) \in [L^q(\partial\Omega)]^2$. Com isso, finalizamos a prova da boa definição do operador N_g. Provemos, agora, a continuidade de N_g. Para isso, consideremos $U_n = (u_n, v_n)$ e $U = (u,v)$ em $[L^p(\partial\Omega)]^2$, tais que $U_n \to U$ em $([L^p(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{p,\partial})$, ou seja,

$$\|u_n - u\|_{p,\partial} + \|v_n - v\|_{p,\partial} \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Deste modo, $u_n \to u$ e $v_n \to v$ em $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial})$. Além disso, pelo teorema 6.13, existem subsequências (u_{n_k}), (v_{n_k}) das sequências (u_n), (v_n) e $h_i \in L^p(\partial\Omega)$, tais que

$$u_{n_k}(x) \to u(x), \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|) \text{ e } |u_{n_k}(x)| \leq h_1(x), \text{ q.t.p. } x \in \partial\Omega \tag{3.8}$$

e

$$v_{n_k}(x) \to v(x) \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|) \text{ e } |v_{n_k}(x)| \leq h_2(x), \text{ q.t.p. } x \in \partial\Omega. \tag{3.9}$$

Mas, por hipótese, $g_i \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Logo, $g_i(x, u_{n_k}(x), v_{n_k}(x)) \to g_i(x, u(x), v(x))$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, para q.t.p. $x \in \partial\Omega$. Ainda, ao combinarmos a desigualdade (3.7) com as desigualdades dadas em (3.8) e (3.9), concluímos que

$$|g_i(x, u_{n_k}(x), v_{n_k}(x))| \leq a_i^1 + a_i^2\left[h_1(x)\right]^{\frac{p}{q}} + a_i^3\left[h_2(x)\right]^{\frac{p}{q}} \doteq M_i(x), \text{ q.t.p. } x \in \partial\Omega. \tag{3.10}$$

Por conseguinte, devido ao teorema 6.1 e à $h_i \in L^p(\partial\Omega)$, $M_i \in L^q(\partial\Omega)$. Logo, ao aplicarmos o teorema da convergência dominada de Lebesgue, $g_i(x, u_{n_k}, v_{n_k}) \to g_i(x, u, v)$ em $(L^q(\partial\Omega), \|\cdot\|_{q,\partial})$, ou seja, $N_g(U_{n_k}) \to N_g(U)$ em $([L^q(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{q,\partial})$. Para concluirmos a prova em questão, devemos mostrar que $N_g(U_n) \to N_g(U)$, em $([L^q(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{q,\partial})$. Suponhamos que isso seja falso. Então, existem $\epsilon > 0$ e uma subsequência (U_{n_l}) da sequência (U_n), tais que

$$\|N_g(U_{n_l}) - N_g(U)\|_{q,\partial} \geq \epsilon, \ \forall\, l \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Como supomos, inicialmente, $U_n \to U$ em $([L^p(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{p,\partial})$, segue que $U_{n_l} \to U$ em $([L^p(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{p,\partial})$. Repetindo os argumentos iniciais para a sequência (U_{n_l}) ao invés da sequência (U_n), podemos mostrar que a primeira admite uma subsequência, $(U_{n_{l_k}})$, tal que $N_g(U_{l_k}) \to N_g(U)$ em $([L^q(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{q,\partial})$, o que gera uma contradição com a condição (3.11). Por conseguinte, devemos ter $N_g(U_n) \to N_g(U)$, em $([L^q(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{q,\partial})$. Portanto, o operador N_g é contínuo, como queríamos.

■

Observação 1: Se as condições **(H1)** e **(G1)** forem válidas, então, podemos mostrar, ao aplicarmos o teorema 6.1, que as hipóteses da proposição 3.1, com $p = s+1$ e $q = \frac{s+1}{s}$, são satisfeitas. Consequentemente, $N_g : [L^{s+1}(\partial\Omega)]^2 \to [L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega)]^2$, definido por $N_g(u,v) = g(x,u,v)$, é um operador contínuo. O próximo resultado possui prova análoga à da proposição 3.1, por isso a omitiremos.

Proposição 3.2 *Se, para $i = 1, 2$, $f_i \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e existem constantes $p, q \geq 1$, $b_i^1, b_i^2, b_i^3 \geq 0$, tais que, para quaisquer $x \in \overline{\Omega}, u, v \in \mathbb{R}$,*

$$|f_i(x,u,v)| \leq b_i^1 + b_i^2 |u|^{\frac{p}{q}} + b_i^3 |v|^{\frac{p}{q}}, \tag{3.12}$$

então, $N^f : [L^p(\Omega)]^2 \to [L^q(\Omega)]^2$, definido por $N^f(u,v) = (f_1(x,u,v), f_2(x,u,v))$, é um operador contínuo.

Observação 1: Se as condições **(H1)** e **(F1)** forem válidas, então, podemos mostrar, ao aplicarmos o teorema 6.1, que as hipóteses da proposição 3.2, com $p = t+1$ e $q = \frac{t+1}{t}$, são satisfeitas. Consequentemente, $N^f : [L^{t+1}(\Omega)]^2 \to [L^{\frac{t+1}{t}}(\Omega)]^2$, definido por $N^f(u,v) =$

$f(x,u,v)$, é um operador contínuo. Para o restante desta seção, suporemos $H(\Omega)$ munido da norma $\|\cdot\|_C$. Ainda, se forem válidas as condições **(P)**, **(H1)**, **(G1)** e **(F1)**, então o funcional energia associado ao sistema (3.1), $I : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, é definido por

$$I(U) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla U|^2 + \langle C(x)U, U\rangle\right] dx - \int_\Omega F(x,U)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,U)d\sigma. \tag{3.13}$$

A próxima proposição nos garante a boa definição de I.

Proposição 3.3 *Suponhamos válidas as condições **(P)**, **(H1)**, **(G1)** e **(F1)**. Então, $I(U) \in \mathbb{R}$, para todo $U \in H(\Omega)$.*

Prova: Segue, da validade de **(H)** e **(P)**, que

$$\left|\frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla U|^2 + \langle C(x)U, U\rangle\right] dx\right| = \frac{1}{2}\left|\langle U, U\rangle_C\right| \leq \frac{1}{2}\|U\|_C \cdot \|U\|_C < \infty, \ \forall\, U \in H(\Omega). \tag{3.14}$$

Afirmação I: $\left|\int_{\partial\Omega} G(x,U)d\sigma\right| < \infty$.

De fato, como **(H1)** é válida, $G \in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Logo, para $x \in \partial\Omega$ e $U = (u,v) \in H(\Omega)$,

$$G(x,u,v) = \int_0^u G_u(x,\xi,v)d\xi + \int_0^v G_v(x,0,\xi)d\xi + G(x,0,0).$$

Assim,

$$|G(x,u,v)| \leq \int_0^u |G_u(x,\xi,v)|d\xi + \int_0^v |G_v(x,0,\xi)|d\xi + |G(x,0,0)|.$$

Por isso, por $\nabla_U G = g$ e pela validade de **(G1)**, existe constante $E_1 > 0$, tal que

$$|G(x,u,v)| \ \ \leq E_1\left[\int_0^u \left[1 + (|\xi| + |v|)^s\right] d\xi + \int_0^v \left[1 + |\xi|^s\right] d\xi\right] + |G(x,0,0)|, \tag{3.15}$$

Ainda, como $\overline{\Omega}\times\{0\}\times\{0\}$ é compacto em $\mathbb{R}^{N+2}$, e G é contínuo sobre $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^2$, existe de $y_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $|G(x,0,0)| \leq |G(y_0,0,0)| \doteq Y_0$, $\forall\ x \in \overline{\Omega}$. Consequentemente, existe constante $E_2 > 0$, tal que $|G(x,u,v)| \leq E_2\Psi(u,v)$, $\forall\ U = (u,v) \in H(\Omega)$, onde

$$\Psi(u,v) = |u| + |v| + |u|^{s+1} + |v|^{s+1} + |u||v|^s + 1. \tag{3.16}$$

Segue, ao aplicarmos a desigualdade de Hölder em (3.16), que

$$\int_{\partial\Omega} \Psi(u,v)d\sigma \leq \|u\|_{1,\partial} + \|v\|_{1,\partial} + \|u\|_{s+1,\partial}^{s+1} + \|v\|_{s+1,\partial}^{s+1} + \|u\|_{s+1,\partial}\|v\|_{s+1,\partial}^{s} + |\partial\Omega|_{\sigma}. \quad (3.17)$$

Agora, da condição **(G1)**, $1 \leq s+1 < \frac{2N-2}{N-2}$. E assim, devido ao teorema 6.10, existe constante $A > 0$, tal que $\|w\|_{1,\partial} \leq A\|w\|_{1,2}$ e $\|w\|_{s+1,\partial} \leq A\|w\|_{1,2}$, $\forall\ w \in H^1(\Omega)$. Combinando estas desigualdades à desigualdade (3.17), concluímos que existe uma nova constante $E_3 > 0$, tal que

$$\int_{\partial\Omega} \Psi(u,v)d\sigma \leq \ E_3 \left[\|U\|_H + \|u\|_{1,2}^{s+1} + \|v\|_{1,2}^{s+1} + \|u\|_{1,2}\|v\|_{1,2}^{s} + |\partial\Omega|_{\sigma}\right].$$

Finalmente, como $U = (u,v) \in H(\Omega)$, $\|U\|_C < \infty$. Além disso, visto que $\|\cdot\|_C$ e $\|\cdot\|_H$ são normas equivalentes em $H(\Omega)$, $\max\{\|u\|_{1,2}, \|v\|_{1,2}\} \leq \|U\|_H < \infty$. Por conseguinte, $\int_{\partial\Omega} \Psi(u,v)d\sigma < \infty$, $\forall\ u,v \in H^1(\Omega)$. Portanto,

$$\int_{\partial\Omega} |G(x,u,v)|d\sigma \leq E_2 \int_{\partial\Omega} \Psi(u,v)d\sigma < \infty, \forall\ u,v \in H^1(\Omega).$$

Daí segue a validade da afirmação I.

Afirmação II: $\left|\int_{\Omega} F(x,U)dx\right| < \infty$.

A prova desta afirmação é análoga à demonstração da afirmação I, por isso, a omitiremos. Decorre das afirmações I e II, e da desigualdade (3.14), que

$$0 \leq |I(U)| \leq \frac{1}{2}\|U\|_2^2 + \left|\int_{\Omega} F(x,U)dx\right| + \left|\int_{\partial\Omega} G(x,U)d\sigma\right| < \infty, \ \forall U \in H(\Omega).$$

Ou seja, I está bem definido.

■

A seguir, veremos alguns lemas, necessários para a prova de que $I \in C^1(H(\Omega),\mathbb{R})$.

Lema 3.1 *Suponhamos válidas as condições **(P)**, **(H1)**, **(G1)** e **(F1)**. Então, para cada $U \in H(\Omega)$, arbitrário, porém fixado, o funcional $T_U : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, em que*

$$T_U(V) = \int_{\Omega} \left[\nabla U \cdot \nabla V + \langle C(x)U, V\rangle\right] dx - \int_{\Omega} f(x,U)\cdot V dx - \int_{\partial\Omega} g(x,U)\cdot V d\sigma, \ \forall\ V \in H(\Omega),$$

está bem definido, é linear e contínuo, ou seja, $T_U \in H(\Omega)^*$.

Prova: Seja $U = (u, v) \in H(\Omega)$.

• O funcional T_U está bem definido, isto é, $T_U(V) \in \mathbb{R}$, $\forall\ V \in H(\Omega)$.

De fato, seja $V = (u_1, v_1) \in H(\Omega)$. Então, devido à validade de **(H)** e **(P)**,

$$T_U(V) = \langle U, V\rangle_C - \int_\Omega f(x, U) \cdot V dx - \int_{\partial\Omega} g(x, U) \cdot V d\sigma.$$

Afirmação 1: $\left|\int_{\partial\Omega} g(x, U) \cdot V d\sigma\right| < \infty$.

De fato, temos $\left|\int_{\partial\Omega} g(x, U) \cdot V d\sigma\right| \leq \int_{\partial\Omega} |g_1(x, u, v)||u_1|d\sigma + \int_{\partial\Omega} |g_2(x, u, v)||v_1|d\sigma$. Por isso e pela validade de **(G1)**, existe constante $K_1 > 0$, tal que

$$\left|\int_{\partial\Omega} g(x, U) \cdot V d\sigma\right| \leq K_1 \int_{\partial\Omega} \left[|u_1| + (|u| + |v|)^s\, |u_1| + |v_1| + (|u| + |v|)^s\, |v_1|\right] d\sigma,$$

Se $\Phi = \left|\int_{\partial\Omega} g(x, U) \cdot V d\sigma\right|$, então, pelo teorema 6.1, existe constante $K_2 > 0$, tal que

$$\Phi \leq K_2 \left[\|u_1\|_{1,\partial} + \int_{\partial\Omega} \left(|u|^s|u_1| + |v|^s|u_1|\right) d\sigma + \|v_1\|_{1,\partial} + \int_{\partial\Omega} \left(|u|^s|v_1| + |v|^s|v_1|\right) d\sigma\right]. \tag{3.18}$$

Logo, ao aplicarmos a desigualdade Hölder,

$$\Phi \leq K_2 \left(S_U(u_1) + S_U(v_1), \right), \tag{3.19}$$

onde $S_U(w) \doteq \|w\|_{1,\partial} + \|u\|_{s+1,\partial}^s \|w\|_{s+1,\partial} + \|v\|_{s+1,\partial}^s \|w\|_{s+1,\partial}$, $\forall\ w \in H^1(\Omega)$. Agora, por **(G1)**, $1 \leq s + 1 < \frac{2N-2}{N-1}$. Assim, pelo teorema 6.10, existe constante $A > 0$, tal que $\|w\|_{1,\partial} \leq A\|w\|_{1,2}$, e $\|w\|_{s+1,\partial} \leq A\|w\|_{1,2}$, $\forall\ w \in H^1(\Omega)$. Por conseguinte, existe constante $K_3 > 0$, tal que $S_U(w) \leq K_3\|w\|_{1,2}P(s, U)$, para $w \in H^1(\Omega)$, onde $P(x, W) = 1 + \|w_1\|_{1,2}^x + \|w_2\|_{1,2}^x$, $\forall\ x \in [0, \infty)$, $\forall\ W = (w_1, w_2) \in H(\Omega)$. Por isso e pela desigualdade 3.19, concluímos que existe constante $K_4 > 0$, tal que

$$\Phi \leq K_4 \left(\|u_1\|_{1,2} + \|v_1\|_{1,2}\right) P(s, U). \tag{3.20}$$

Mas, como $V \in H(\Omega)$, $\|V\|_C < \infty$. E, devido às normas $\|\cdot\|_C$ e $\|\cdot\|_H$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, $\max\{\|u_1\|_{1,2}, \|v_1\|_{1,2}\} \leq \|V\|_H < \infty$. Consequentemente, ao lembrarmos que

$U \in H(\Omega)$ está fixado,

$$\left| \int_{\partial\Omega} g(x,U) \cdot V d\sigma \right| = \Phi \leq K_4 \left(\|u_1\|_{1,2} + \|v_1\|_{1,2} \right) P(s,U) < \infty.$$

Daí segue a validade da afirmação 1.

Afirmação 2: $\left| \int_\Omega f(x,U) \cdot V dx \right| < \infty.$

A prova desta afirmação é análoga à da afirmação 1. Na realidade, podemos mostrar que existe constante $L_4 > 0$, tal que

$$\left| \int_\Omega f(x,U) \cdot V dx \right| \leq L_4 \left(\|u_1\|_{1,2} + \|v_1\|_{1,2} \right) P(t,U) < \infty. \tag{3.21}$$

Daí segue a validade da afirmação 2. Com isso e pela validade da afirmação 1, temos

$$|T_U(V)| \leq \|U\|_C \|V\|_C + \left| \int_\Omega f(x,U) \cdot V dx \right| + \left| \int_{\partial\Omega} g(x,U) \cdot V d\sigma \right| < \infty.$$

Logo, $T_U(V) \in \mathbb{R}$, $\forall\ V \in H(\Omega)$, ou seja, T_U está bem definido. Já, a linearidade de T_U é imediata. Deste modo, para concluirmos a prova do lema 3.1, basta-nos mostrar a continuidade de T_U. Para isso, devido à T_U ser linear, devemos, apenas, verificar a continuidade de T_U em $0 \in H(\Omega)$. Com este intuito, seja (V_m) uma sequência em $H(\Omega)$, tal que

$$V_m \to 0 \ em\ (H(\Omega), \|\cdot\|_C). \tag{3.22}$$

Com isso e pelo fato das normas $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_C$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, $V_m \to 0$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Consequentemente, se denotarmos $V_m = (u_1^m, v_1^m)$,

$$u_1^m \to 0 \ e\ v_1^m \to 0 \ em\ (H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2}). \tag{3.23}$$

Agora, devido às desigualdades (3.21) e (3.20),

$$|T_U(V_m)| \leq \|U\|_C \|V_m\|_C + \left(\|u_1^m\|_{1,2} + \|v_1^m\|_{1,2} \right) \left(K_4 P(s,U) + L_4 P(t,U) \right).$$

Por conseguinte, em razão de (3.22) e (3.23), $T_U(V_m) \to 0$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, ou seja, T_U é contínuo. Com isso, concluímos a prova do lema 3.1.

■

Lema 3.2 *Suponhamos válidas as condições* ***(P)****,* ***(H1)****,* ***(G1)*** *e* ***(F1)****. Então o funcional I é Fréchet diferenciável, tendo como derivada de Fréchet em $U \in H(\Omega)$,*

$$I^{'}(U)V = T_U(V) = \langle U, V\rangle_C + \int_\Omega \langle C(x)U, V\rangle dx - \int_\Omega f(x,U)\cdot V dx - \int_{\partial\Omega} g(x,U)\cdot V d\sigma, \ \forall\, V \in H(\Omega).$$

Prova: Segue, do lema 3.1, que $T_U \in [H(\Omega)]^*$, e assim, T_U torna-se um candidato a derivada de Fréchet de I em $U \in H(\Omega)$. Se definirmos

$$J_1(U) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla U|^2 + \langle C(x)U, U\rangle\right] dx, \ J_2(U) = \int_\Omega F(x,U)dx \ e \ J_3(U) = \int_{\partial\Omega} G(x,U)d\sigma,$$

então $I(U) = J_1(U) - J_2(U) - J_3(U)$. Deste modo, se J_i for Fréchet diferenciável em $H(\Omega)$, para $i = 1,2,3$, então seguirá que I é Fréchet diferenciável, com derivada de Fréchet em $U \in H(\Omega)$, dada por $I^{'}(U)(V) = J_1^{'}(U)(V) - J_2^{'}(U)(V) - J_3^{'}(U)(V)$, $\forall\, V \in H(\Omega)$.
Afirmação 1: J_1 é Fréchet diferenciável, com derivada de Fréchet em $U \in H(\Omega)$,

$$J_1^{'}(U)(V) = \int_\Omega \nabla U \nabla V dx + \int_\Omega \langle C(x)U, V\rangle dx. \tag{3.24}$$

De fato, em razão de $J_1(U) = \frac{1}{2}\Upsilon_C(U)$, $\forall\, U \in H(\Omega)$, e de $\Upsilon_C \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $U \in H(\Omega)$, $\Upsilon_C^{'}(U)(V) = 2\langle U, V\rangle_C$, $\forall\, V \in H(\Omega)$ (proposição 1.5), a validade da afirmação 1, segue.
Afirmação 2: J_3 é Fréchet diferenciável, com derivada de Fréchet em $U \in H(\Omega)$,

$$J_3^{'}(U)(V) = \int_{\partial\Omega} g(x,U)\cdot V dx, \ \forall\, V \in H(\Omega).$$

Seja $U = (u,v) \in H(\Omega)$. Devemos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, U) > 0$, tal que, se $V = (u_1, v_1) \in H(\Omega)$ e $\|V\|_C \leq \delta$, então

$$\left| J_3(U+V) - J_3(U) - \int_{\partial\Omega} g(x,U)\cdot V d\sigma \right| \leq \epsilon \|V\|_C.$$

Ora, se $\Phi = |G(x, U+V) - G(x,U) - g(x,U)\cdot V|$, então

$$\left| J_3(U+V) - J_3(U) - \int_{\partial\Omega} g(x,U)\cdot V d\sigma \right| \leq \int_{\partial\Omega} \Phi d\sigma.$$

Agora, se definirmos $\mathcal{O}_1 = \{x \in \partial\Omega : |U(x)| \geq \tilde{\tau}\}$, $\mathcal{O}_2 = \{x \in \partial\Omega : |V(x)| \geq \tilde{\gamma}\}$ e $\mathcal{O}_3 = \{x \in \partial\Omega : |U(x)| \leq \tilde{\tau} \text{ e } |\mathrm{V(x)}| \leq \tilde{\gamma}\}$, com $\tilde{\tau}$ e $\tilde{\gamma}$ a serem determinados posteriormente, então $\partial\Omega \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3$. Consequentemente,

$$\int_{\partial\Omega} \Phi d\sigma \leq \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathcal{O}_i} \Phi d\sigma. \tag{3.25}$$

Como $G \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e $\nabla_U G(x,U) = g(x,U)$, pelo teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$, tal que $G(x, U+V) - G(x,U) = g(x, U+\theta V)\cdot V$. E assim,

$$\int_{\mathcal{O}_1} |G(x,U+V) - G(x,U)| d\sigma \leq \int_{\mathcal{O}_1} |g_1(x, U+\theta V)||V| d\sigma + \int_{\mathcal{O}_1} |g_2(x, U+\theta V)||V| d\sigma. \tag{3.26}$$

Por isso, por **(F1)**, por $\theta \in (0,1)$, pela desigualdade triangular, pelo teorema 6.1 e por $|V| = |u_1| + |v_1|$, podemos mostrar que existe constante $\tilde{K}_1 > 0$, tal que

$$\textstyle\int_{\mathcal{O}_1} |G(x,U+V) - G(x,U)| d\sigma \leq \tilde{K}_1 \left(\tilde{\Lambda}(u_1, V, s, U) + \tilde{\Lambda}(v_1, V, s, U) \right) \tag{3.27}$$

onde, $\tilde{\Lambda}(w, V, s, U) \doteq \int_{\mathcal{O}_1} (1 + |u|^s + |u_1|^s + |v|^s + |v_1|^s)|V| d\sigma$, para $w \in \{u_1, v_1\}$. Ainda, devido à $0 \leq s < \frac{N}{N-2}$, $\frac{s}{s+1} + \frac{N-2}{2N-2} < 1$. Por conseguinte, existe $\alpha > 1$, tal que $\frac{1}{\alpha} + \frac{s}{s+1} + \frac{N-2}{2N-2} = 1$. Consequentemente, pela desigualdade generalizada de Hölder, temos, para $w \in \{u_1, v_1\}$,

$$\tilde{\Lambda}(w, V, s, U) \leq \|w\|_{\frac{2N-2}{N-2}, \partial} \left[|\mathcal{O}_1|_{\sigma}^{\frac{N}{2N-2}} + |\mathcal{O}_1|_{\sigma}^{\frac{1}{\alpha}} \left(\|u\|_{s+1,\partial}^s + \|u_1\|_{s+1,\partial}^s + \|v\|_{s+1,\partial}^s + \|v_1\|_{s+1,\partial}^s \right) \right]. \tag{3.28}$$

Agora, em razão de $1 \leq s+1 < \frac{2N-2}{N-2}$, o teorema 6.10 nos garante a continuidade dos operadores traço de $H^1(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$ e de $H^1(\Omega)$ sobre $L^{\frac{2N-2}{N-2}}(\partial\Omega)$. Com isso e pela desigualdade (3.28), existe constante $\tilde{K}_2 > 0$, tal que, para $w \in \{u_1, v_1\}$

$$\tilde{\Lambda}(w, V, s, U) \leq \tilde{K}_2 \|w\|_{1,2} \left[|\mathcal{O}_1|_{\sigma}^{\frac{N}{2N-2}} + |\mathcal{O}_1|^{\frac{1}{\alpha}} \tilde{R}(U, V, s) \right], \tag{3.29}$$

onde $\tilde{R}(U,V,s)=\|u\|_{1,2}^{s}+\|u_1\|_{1,2}^{s}+\|v\|_{1,2}^{s}+\|v_1\|_{1,2}^{s}$. Segue, da desigualdade (3.29) e da equivalência das normas em $\mathbb{R}^2$, que existe constante $\tilde{K}_3>0$, tal que

$$\tilde{\Lambda}(u_1,V,s,U)+\Lambda(v_1,V,s,U)\leq \tilde{K}_3\|V\|_H\left[|\mathcal{O}_1|_{\sigma}^{\frac{N}{2N-2}}+|\mathcal{O}_1|_{\sigma}^{\frac{1}{\alpha}}\tilde{R}(U,V,s)\right]. \tag{3.30}$$

Mas também, pela desigualdade de Hölder, pelo teorema 6.10, pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^2$ e pela definição de $\mathcal{O}_1$, existem constantes positivas $\overline{K}_1,\overline{K}_2,\overline{K}_3$, tais que $\|U\|_H\geq \overline{K}_1\left(\|u\|_{1,2}+\|v\|_{1,2}\right)\geq \overline{K}_2\left(\|u\|_{2,\partial}+\|v\|_{2,\partial}\right)\geq \overline{K}_3\tilde{\tau}|\mathcal{O}_1|_{\sigma}^{\frac{1}{2}}$. Assim,

$$|\mathcal{O}_1|_{\sigma}^{\frac{1}{\alpha}}\leq\left(\frac{\|U\|_H}{\tilde{K}_1\tilde{\tau}}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\doteq\tilde{M}_1(\tilde{\tau})\ e\ |\mathcal{O}_1|_{\sigma}^{\frac{N}{2N-2}}\leq\left(\frac{\|U\|_H}{\tilde{K}_1\tilde{\tau}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\doteq\tilde{M}_2(\tilde{\tau}). \tag{3.31}$$

De onde segue, que $\tilde{M}_1(\tilde{\tau}),\tilde{M}_2(\tilde{\tau})\to 0$, quando $\tilde{\tau}\to+\infty$. Combinando as desigualdades (3.31) e (3.30), concluímos que

$$\tilde{\Lambda}(u_1,V,s,U)+\tilde{\Lambda}(v_1,V,s,U)\leq \tilde{K}_3\|V\|_H\left[\tilde{M}_2(\tilde{\tau})+\tilde{M}_1(\tilde{\tau})\tilde{R}(U,V,s)\right]. \tag{3.32}$$

Consequentemente, devido à (3.27), existe constante $\tilde{K}_4>0$, tal que

$$\int_{\mathcal{O}_1}|G(x,U+V)-G(x,U)|d\sigma\leq \tilde{K}_4\|V\|_H\left[\tilde{M}_2(\tilde{\tau})+\tilde{M}_1(\tilde{\tau})\tilde{R}(U,V,s)\right], \tag{3.33}$$

De maneira análoga, podemos mostrar que existe constante $\tilde{K}_5>0$, tal que

$$\int_{\mathcal{O}_1}|g(x,U)\cdot V|d\sigma\leq \tilde{K}_5\|V\|_H\left[\tilde{M}_2(\tilde{\tau})+\tilde{M}_1(\tilde{\tau})\tilde{R}(U,V,s)\right]. \tag{3.34}$$

Se $\tilde{K}_6=\tilde{K}_4+\tilde{K}_5$, então, pelas desigualdades (3.33), (3.34) e pela definição de Φ,

$$\int_{\mathcal{O}_1}\Phi d\sigma\leq \tilde{K}_6\|V\|_H\left[\tilde{M}_2(\tilde{\tau})+\tilde{M}_1(\tilde{\tau})\tilde{R}(U,V,s)\right]. \tag{3.35}$$

Agora, como as normas $\|\cdot\|_H$ e $\|\cdot\|_C$ são equivalentes em $H(\Omega)$, existe constante $A_0>0$, tal que

$$\|W\|_C\geq A_0\|W\|_H,\ \forall\ W\in H(\Omega). \tag{3.36}$$

Seja $V \in H(\Omega)$, com $\|V\|_C \leq \delta$, para $\delta \leq A_0$. Consequentemente, devido à 3.36, $\max\{\|u_1\|_{1,2}, \|v_1\|_{1,2}\} \leq \|V\|_H \leq \frac{1}{A_0}\|V\|_C \leq 1$. E assim, $\tilde{R}(U,V,s) \leq \|u\|_{1,2}^s + \|v\|_{1,2}^s + 2$. Por isso e pela desigualdade (3.35), segue que

$$\int_{\mathcal{O}_1} \Phi dx \leq \tilde{K}_6 \|V\|_H \left[\tilde{M}_2(\tilde{\tau}) + \tilde{M}_1(\tilde{\tau}) \left(\|u\|_{1,2}^s + \|v\|_{1,2}^s + 2\right)\right]. \tag{3.37}$$

Ora, como $U \in H(\Omega)$ é arbitrário, porém fixado, e $\tilde{M}_1(\tilde{\tau}), \tilde{M}_2(\tilde{\tau}) \to 0$, quando $\tilde{\tau} \to +\infty$, temos $\tilde{M}_2(\tilde{\tau}) + \tilde{M}_1(\tilde{\tau}) \left(\|u\|_{1,2}^s + \|v\|_{1,2}^s + 2\right) \to 0$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Por conseguinte, dado $\epsilon > 0$, existe $\tau > 0$ tal que, se $\tilde{\tau} \geq \tau$,

$$\tilde{M}_2(\tilde{\tau}) + \tilde{M}_1(\tilde{\tau}) \left(\|u\|_{1,2}^s + \|v\|_{1,2}^s + 2\right) \leq \frac{\epsilon A_0}{3\tilde{K}_6}. \tag{3.38}$$

Seja $\tilde{\tau} = \tau$. Desta forma, segue, pelas desigualdades (3.38),(3.37) e (3.36), que

$$\int_{\mathcal{O}_1} \Phi d\sigma \leq \frac{\epsilon}{3}\|V\|_C, \ \forall\ V \in H(\Omega),\ \textit{tal que}\ \|V\|_C \leq \delta \leq A_0. \tag{3.39}$$

Passaremos, agora, a analisar a integral de Φ ao longo de $\mathcal{O}_2$. Estimativas similares às anteriores nos garantem que existe constante $\tilde{D}_1 > 0$, tal que

$$\int_{\mathcal{O}_2} \Phi d\sigma \leq \tilde{D}_1 \left[\tilde{\rho}(u, u_1, s, V) + \tilde{\rho}(v, v_1, s, V)\right], \tag{3.40}$$

sendo, para $(w, w_1) \in \{(u, u_1), (v, v_1)\}$,

$$\tilde{\rho}(w, w_1, s, V) \doteq \int_{\mathcal{O}_2} \left[1 + (|w| + |w_1|)^s\right] |u_1| d\sigma + \int_{\mathcal{O}_2} \left[1 + (|w| + |w_1|)^s\right] |v_1| d\sigma.$$

Ao denotarmos por $\|\cdot\|_{p,\partial,\mathcal{O}_2}$ a norma p do espaço $L^p(\mathcal{O}_2)$ e utilizarmos a desigualdade de Hölder, obtemos, para $(w, w_1) \in \{(u, u_1), (v, v_1)\}$,

$$\tilde{\rho}(w, w_1, s, V) \leq \left[\int_{\mathcal{O}_2} \left[1 + (|w| + |w_1|)^s\right]^{\frac{s+1}{s}} d\sigma\right]^{\frac{s}{s+1}} \left(\|u_1\|_{s+1,\partial,\mathcal{O}_2} + \|v_1\|_{s+1,\partial,\mathcal{O}_2}\right).$$

Consequentemente, pelos teoremas 6.10 e 6.1, existe constante $\tilde{D}_2 > 0$, tal que, para $(w, w_1) \in \{(u, u_1), (v, v_1)\}$,

$$\tilde{\rho}(w, w_1, s, V) \leq \tilde{D}_2 \left(1 + \|w\|_{1,2}^s + \|w_1\|_{1,2}^s\right) \tilde{\Theta}(U, V, s), \tag{3.41}$$

onde $\tilde{\Theta}(U, V, s) \doteq \|u_1\|_{s+1,\partial,\mathcal{O}_2} + \|v_1\|_{s+1,\partial,\mathcal{O}_2}$ Agora, se $x \in \mathcal{O}_2$, então $|V(x)| \geq \tilde{\gamma}$. Assim, ao considerarmos $m = \frac{2N-2}{N-2}$, temos

$$\tilde{\Theta}(U, V, s) = \left(\int_{\mathcal{O}_2} |u_1|^{s+1} \left(\frac{|V|}{|V|}\right)^{m-(s+1)} d\sigma\right)^{\frac{1}{s+1}} + \left(\int_{\mathcal{O}_2} |v_1|^{s+1} \left(\frac{|V|}{|V|}\right)^{m-(s+1)} d\sigma\right)^{\frac{1}{s+1}}.$$

Ainda, graças à desigualdade de Hölder ($\frac{m}{s+1}$ e $\frac{m}{m-(s+1)}$ são expoentes conjugados), ao teorema 6.10 e à $m > s+1$, existe constante $\tilde{D}_3 > 0$, tal que

$$\left[\int_{\mathcal{O}_2} |u_1|^{s+1} \left(\frac{|u_1| + |v_1|}{|u_1| + |v_1|}\right)^{m-(s+1)} dx\right]^{\frac{1}{s+1}} \leq \tilde{D}_3 \tilde{\gamma}^{\frac{s+1-m}{s+1}} \|u_1\|_{1,2} \left(\|u_1\|_{1,2}^m + \|v_1\|_{1,2}^m\right)^{\frac{m-(s+1)}{m(s+1)}} \tag{3.42}$$

e

$$\left[\int_{\mathcal{O}_2} |v_1|^{s+1} \left(\frac{|u_1| + |v_1|}{|u_1| + |v_1|}\right)^{m-(s+1)} dx\right]^{\frac{1}{s+1}} \leq \tilde{D}_3 \tilde{\gamma}^{\frac{s+1-m}{s+1}} \|v_1\|_{1,2} \left(\|u_1\|_{1,2}^m + \|v_1\|_{1,2}^m\right)^{\frac{m-(s+1)}{m(s+1)}}, \tag{3.43}$$

Segue, de (3.40), (3.41), (3.42)e (3.43), que existe constante $\tilde{D}_4 > 0$, tal que

$$\int_{\mathcal{O}_2} \Phi d\sigma \leq \tilde{D}_4 \tilde{\gamma}^{\frac{s+1-m}{s+1}} \|V\|_H \tilde{\vartheta}(V, s) \tilde{\zeta}(U, V, s), \tag{3.44}$$

onde $\tilde{\vartheta}(V, s) \doteq \left(\|u_1\|_{1,2}^m + \|v_1\|_{1,2}^m\right)^{\frac{m-(s+1)}{m(s+1)}}$ e $\tilde{\zeta}(U, V, s) \doteq 2 + \|u\|_{1,2}^s + \|v\|_{1,2}^s + \|u_1\|_{1,2}^s + \|v_1\|_{1,2}^s$. Finalmente, devido às normas $\|\cdot\|_C$ e $\|\cdot\|_H$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, conseguimos uma nova constante positiva, digamos, $\tilde{D}_5$, tal que

$$\int_{\mathcal{O}_2} \Phi d\sigma \leq \tilde{D}_5 \tilde{\gamma}^{\frac{s+1-m}{s+1}} \|V\|_C \tilde{\vartheta}(V, s) \tilde{\zeta}(U, V, s). \tag{3.45}$$

Estimemos, agora, a integral de Φ ao longo de $\mathcal{O}_3$. Como $G \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $\nabla_U G = g$, temos que, dados $\overline{P}, \overline{Q} > 0$, existe $\overline{R} = \overline{R}(\overline{P}, \overline{Q}) > 0$, tal que, se $x \in \overline{\Omega}$, $|U(x)| \leq \tilde{\tau}$ e

$|V(x)| \leq \tilde{\gamma}$, então

$$|G(x, U+V) - G(x,U) - g(x,U) \cdot V| \leq \overline{P}|V|. \tag{3.46}$$

Deste modo, para $\overline{P} > 0$ (qualquer, por enquanto) e $\overline{Q} = \tilde{\tau} > 0$, garantimos a existência de $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\overline{P}, \tilde{\tau}) > 0$, tal que, se $x \in \overline{\Omega}$, $|U(x)| \leq \tilde{\tau}$ e $|V(x)| \leq \tilde{\gamma}$, então (3.46) vale. Consequentemente,

$$\int_{\mathcal{O}_3} \Phi d\sigma \leq \overline{P} \int_{\mathcal{O}_3} |V(x)| d\sigma = \overline{P} \left(\int_{\mathcal{O}_3} |u_1| d\sigma + \int_{\mathcal{O}_3} |v_1| d\sigma \right) \leq \overline{P} \left(\|u_1\|_{1,\partial} + \|v_1\|_{1,\partial} \right).$$

Por isso, pelo teorema 6.10 e pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^2$, bem como, das normas $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_H$ em $H(\Omega)$, existem constantes $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3 > 0$, tais que

$$\int_{\mathcal{O}_3} \Phi d\sigma \leq \overline{P}\tilde{E}_1 \left(\|u_1\|_{1,2} + \|v_1\|_{1,2} \right) \leq \overline{P}\tilde{E}_2 \|V\|_H \leq \overline{P}\tilde{E}_3 \|V\|_C. \tag{3.47}$$

Se escolhermos $\overline{P} > 0$ tal que $\overline{P}\tilde{E}_3 \leq \frac{\epsilon}{3}$, então, devido à desigualdade (3.47),

$$\int_{\mathcal{O}_3} \Phi dx \leq \frac{\epsilon}{3} \|V\|_C. \tag{3.48}$$

Passemos, agora, a provar a parte final da afirmação 2. Segue, ao combinarmos as desigualdades (3.39), (3.45), (3.48) com (3.25), que

$$\int_{\partial\Omega} \Phi d\sigma \leq \frac{2}{3}\epsilon \|V\|_C + \tilde{D}_5 \tilde{\gamma}^{\frac{s+1-m}{s+1}} \|V\|_C \tilde{\vartheta}(V,s) \tilde{\zeta}(U,V,s), \tag{3.49}$$

desde que $V \in H(\Omega)$ e $\|V\|_C \leq \delta \leq A_0$. Por isso e por (3.36), temos

$$\max\{\|u_1\|_{1,2}, \|v_1\|_{1,2}\} \leq \|V\|_H \leq \frac{\delta}{A_0} \leq 1.$$

De onde vem, que $\tilde{\vartheta}(V,s) \leq 2^{\frac{m-(s+1)}{m(s+1)}} \left(\frac{\delta}{A_1}\right)^{\frac{m-(s+1)}{s+1}}$ e $\tilde{\zeta}(U,V,s) \leq 4 + \|u\|_{1,2}^s + \|v\|_{1,2}^s$. Utilizando estas desigualdades em (3.49), obtemos

$$\int_{\partial\Omega} \Phi d\sigma \leq \frac{2\epsilon}{3} \|V\|_C + \tilde{D}_5 \tilde{\gamma}^{\frac{s+1-m}{s+1}} 2^{\frac{m-(s+1)}{m(s+1)}} \left(\frac{\delta}{A_0}\right)^{\frac{m-(s+1)}{s+1}} \left(4 + \|u\|_{1,2}^s + \|v\|_{1,2}^s\right) \|V\|_C. \tag{3.50}$$

Finalmente, ao escolhermos $\delta = \delta(\epsilon, U)$, que satisfaça $0 < \delta \leq A_0$, $\delta =$ e

$$\tilde{D}_5 \tilde{\gamma}^{\frac{s+1-m}{s+1}} 2^{\frac{m-(s+1)}{m(s+1)}} \left(\frac{\delta}{A_0}\right)^{\frac{m-(s+1)}{s+1}} \left(4 + \|u\|_{1,2}^s + \|v\|_{1,2}^s\right) \leq \frac{\epsilon}{3},$$

obtemos, com o auxílio da desigualdade (3.50), para $V \in H(\Omega)$, com $\|V\|_C \leq \delta$,

$$\int_{\partial\Omega} \Phi d\sigma \leq \epsilon \|V\|_C.$$

Portanto, J_3 é Fréchet diferenciável, tendo como derivada de Fréchet em U, (3.24).

Afirmação 3: J_2 é Fréchet diferenciável, com derivada de Fréchet em $U \in H(\Omega)$,

$$J_2'(U)(V) = \int_\Omega f(x, U) \cdot V dx.$$

A prova desta afirmação é muito semelhante à da afirmação 2, por isso a omitiremos. Da validade das afirmações 1,2 e 3, segue a validade do lema 3.2.

■

Proposição 3.4 *Se valerem **(P)**, **(H1)**, **(G1)** e **(F1)**, então $I \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$.*

Prova: Lembremos que $I = J_1 - J_2 - J_3$, sendo J_i, como no lema 3.2. Vimos, na prova do mesmo, que $J_1 \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$. Deste modo, para concluirmos a prova da proposição 3.4, devemos mostrar que $J_i \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$, para $i = 2, 3$.

Afirmação 1: $J_3 \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$.

De fato, na prova da afirmação 2 do lema 3.2, vimos que J_3 é Fréchet diferenciável e sua derivada de Fréchet em $U \in H(\Omega)$ é dada por $J_3'(U)(V) = \int_\Omega g(x, U) \cdot V d\sigma$, $\forall\ V$ em $H(\Omega)$. Deste modo, para provarmos a afirmação 2, basta-nos mostrar que o operador $J_3' : H(\Omega) \to H(\Omega)^*$ é contínuo. Para isso, sejam $U \in H(\Omega)$ e (U_m) uma sequência em $H(\Omega)$, tais que $U_m \to U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Com isso e pelas normas $\|\cdot\|_C$ e $\|\cdot\|_H$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, $U_m \to U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Assim, se $U_m = (u_m, v_m)$ e $U = (u, v)$, então $u_m \to u$ e $v_m \to v$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2})$. Mas também, pelo teorema 6.10, o operador traço de $H^1(\Omega)$ sobre $L^\iota(\partial\Omega)$, para qualquer ι, com $1 \leq \iota \leq \frac{2N-2}{N-2}$, é contínuo. Logo,

$u_m \to u$ e $v_m \to v$ em $(L^\iota(\partial\Omega), \|\cdot\|_\iota)$. Por conseguinte,

$$U_m \to U \ em \ \left([L^\iota(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_\iota\right), \ \forall \ \iota, \ com \ 1 \leq \iota \leq \frac{2N-2}{N-2}. \tag{3.51}$$

Provemos que $J_3'(U_m) \to J_3'(U)$ em $(H(\Omega)^*, \|\cdot\|_C^*)$. Temos,

$$\begin{aligned} \|J_3'(U_m) - J_3'(U)\|_C^* &= \sup_{\|V\|_C \leq 1} \left| \left[J_3'(U_m) - J_3'(U)\right](V) \right| \\ &\leq \sup_{\|V\|_C \leq 1} \int_{\partial\Omega} |g(x, U_m) - g(x, U)||V| d\sigma. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Agora, se $V = (u_1, v_1)$ e $\Psi_i^m \doteq |g_i(x, U_m) - g_i(x, U)|$, então

$$\int_{\partial\Omega} |g(x, U_m) - g(x, U)||V| d\sigma \ \ \leq \int_{\partial\Omega} \left[\Psi_1^m |u_1| + \Psi_1^m |v_1| + \Psi_2^m |u_1| + \Psi_2^m |v_1|\right] d\sigma, \tag{3.53}$$

Daí, pela desigualdade de Hölder e pelo teorema 6.10 ($1 \leq s+1 < \frac{2N-2}{N-2}$), existe constante $\tilde{K}_1 > 0$, tal que

$$\int_{\partial\Omega} |g(x, U_m) - g(x, U)||V| d\sigma \leq \tilde{K}_1 \left(\|\Psi_1^m\|_{\frac{s+1}{s}} + \|\Psi_2^m\|_{\frac{s+1}{s}}\right) (\|u_1\|_{1,2} + \|v_1\|_{1,2}) \tag{3.54}$$

Por isso, pelas normas em $\mathbb{R}^2$ serem equivalentes e pela equivalência das normas $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_C$ em $H(\Omega)$, existe constante $\tilde{K}_2 > 0$, tal que

$$\int_{\partial\Omega} |g(x, U_m) - g(x, U)||V| d\sigma \leq \tilde{K}_2 \left(\|\Psi_1^m\|_{\frac{s+1}{s}} + \|\Psi_2^m\|_{\frac{s+1}{s}}\right) \|V\|_C,$$

Por conseguinte, $\|J_3'(U_m) - J_3'(U)\|_C^* \leq \tilde{K}_2 \left(\|\Psi_1^m\|_{\frac{s+1}{s}} + \|\Psi_2^m\|_{\frac{s+1}{s}}\right)$. E assim, pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^2$, existe constante $\tilde{K}_3 > 0$, tal que

$$\|J_3'(U_m) - J_3'(U)\|_C^* \leq \tilde{K}_3 \left(\|\Psi_1^m\|_{\frac{s+1}{s}}^2 + \|\Psi_2^m\|_{\frac{s+1}{s}}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \tilde{K}_3 \|g(x, U_m) - g(x, U)\|_{\frac{s+1}{s}}. \tag{3.55}$$

Além disso, devido à validade de **(H1)** e **(G1)**, temos, pela observação 1, desta seção, que o operador $N_g : [L^{s+1}(\partial\Omega)]^2 \to [L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega)]^2$, definido por $N_g(u, v) = g(x, U)$, é contínuo. Consequentemente, como $s+1$ satisfaz $1 \leq s+1 < \frac{2N-2}{N-2}$ e em razão de (3.51), com $\iota = s+1$, $U_m \to U$ em $\left([L^{s+1}(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{s+1}\right)$. Logo, pela continuidade de N_g, $N_g(U_m) \to N_g(U)$ em $([L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{\frac{s+1}{s}})$. Deste modo, ao utilizarmos a desigualdade (3.55) e fazermos

$m \to +\infty$, obtemos

$$\|J_3'(U_m) - J_3'(U)\|_C^* \leq \tilde{K}_3 \|g(x,U_m) - g(x,U)\|_{\frac{s+1}{s}} = \tilde{K}_3 \|N_g(U_m) - N_g(U)\|_{s+1} \to 0, \quad (3.56)$$

de onde vem, que $J_3'(U_m) \to J_3'(U)$ em $(H(\Omega)^*, \|\cdot\|_C^*)$. Ou seja, o operador J_3' é contínuo. Decorre disso, que $J_3 \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação 3: $J_2 \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$.

A prova desta afirmação é muito semelhante à da afirmação 2, por isso, a omitiremos. Como consequência da validade das afirmações 2 e 3, $I \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$.

■

A próxima proposição nos fornece algumas propriedades relativas aos funcionais J_2, J_3 e aos operadores J_2', J_3'.

Proposição 3.5 *Suponhamos válidas as condições **(P)**, **(H1)**, **(G1)** e **(F1)**. Então os funcionais $J_i : H(\Omega) \to \mathbb{R}$, para $i = 2, 3$, definidos no lema 3.2, são fracamente contínuos. Além disso, os operadores J_2' e J_3' são compactos.*

Prova: Dividiremos a demonstração desta proposição em quatro etapas.

Etapa 1: J_3 é fracamente contínuo.

Sejam $(U_m = (u_m, v_m))$ uma sequência em $H(\Omega)$ e $U = (u, v) \in H(\Omega)$, tais que $U_m \rightharpoonup U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Por isso e pelas normas $\|\cdot\|_C$ e $\|\cdot\|_H$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, podemos mostrar que $U_m \rightharpoonup U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Consequentemente, $u_m \rightharpoonup u$ e $v_m \rightharpoonup v$ em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2})$. Agora, segue, de **(G1)**, que $1 \leq s+1 < \frac{2N-2}{N-2}$. Assim, pelo do teorema 6.10, o operador traço de $H^1(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$, é compacto. Logo, $u_m \to u$ e $v_m \to v$ em $(L^{s+1}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{s+1})$. Por conseguinte,

$$U_m \to U, \text{ em } \left(\left[L^{s+1}(\partial\Omega)\right]^2, \|\cdot\|_2\right) \quad (3.57)$$

Analisemos, agora, o funcional J_3. Por $J_3 \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$, segue, do teorema do Valor Médio, que existe $\theta \in (0,1)$, tal que $J_3(W) - J_3(U) = J_3'(\theta W + (1-\theta)U)(W - U)$. Daí $|J_3(U_m) - J_3(U)| = \left|\int_{\partial\Omega} g\left(x, \theta U_m + (1-\theta)U\right) \cdot (U_m - U)\, d\sigma\right|$. Se denotarmos $\Gamma_m(U) =$

$\theta U_m + (1-\theta)U$, então

$$|J_3(U_m) - J_3(U)| \leq \int_{\partial\Omega} |g\left(x, \Gamma_m(U)\right)||U_m - U| d\sigma. \tag{3.58}$$

Após expandirmos as expressões $|g(x, \Gamma_m(U))|$, $|U_m - U|$ em (3.58) e aplicarmos as desigualdades triangular e de Hölder, obtemos

$$|J_3(U_m) - J_3(U)| \leq \|g\left(x, \Gamma_m(U)\right)\|_{\frac{s+1}{s}} \|U_m - U\|_{s+1}. \tag{3.59}$$

Mas também, pela observação 1, desta seção, $N_g : [L^{s+1}(\partial\Omega)]^2 \to [L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega)]^2$, definido por $N_g(u,v) = g(x,U)$, é um operador contínuo. Por isso, pela definição de Γ_m e pela validade de (3.57), temos

$$\left(\Gamma_m(U) \to U \ em \ ([L^{s+1}(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_2)\right) \Rightarrow \left(N_g(\Gamma_m(U)) \to N_g(U) \ em \ ([L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_{\frac{s+1}{s}})\right).$$

Portanto, a sequência $(\|N_g(\Gamma_m(U))\|_{\frac{s+1}{s}})$ é limitada em $\mathbb{R}$. Consequentemente, devido à (3.57) e à (3.59), ao fazermos $m \to +\infty$,

$$|J_3(U_m) - J_3(U)| \leq \|N_g(\Gamma_m(U))\|_{\frac{s+1}{s}} \|U_m - U\|_{s+1} \to 0,$$

ou seja, J_3 é fracamente contínuo, como desejávamos mostrar.

Etapa 2: J_2 é fracamente contínuo.

A prova desta etapa é semelhante à feita na etapa 1, por isso a omitiremos.

Etapa 3: O operador J_3' é compacto.

De fato, seja (U_m) uma sequência limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Como $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$ é um espaço de Hilbert, ele é um espaço reflexivo. Consequentemente, existem $U \in H(\Omega)$ e uma subsequência (U_{m_k}) de (U_m), tais que $U_{m_k} \rightharpoonup U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Segue, em razão da prova da etapa 1 e da continuidade fraca de J_3, que $N_g(U_{m_k}) \to N_g(U)$ em $([L^{s+1}(\partial\Omega)]^2, \|\cdot\|_2)$ e $J_3(U_{m_k}) \to J_3(U)$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Além disso, devido à (3.56), obtemos, ao fazermos $m \to +\infty$,

$$\|J_3'(U_{m_k}) - J_3'(U)\|_C^* \leq \tilde{K}_3 \|N_g(U_{m_k}) - N_g(U)\|_{\frac{s+1}{s}} \to 0.$$

Portanto, $J_3'(U_{m_k}) \to J_3'(U)$ em $(H(\Omega)^*, \|\cdot\|_C^*)$. Daí segue a compacidade do operador J_3'.

Etapa 4: J_2' é um operador compacto.

A demonstração desta etapa é similar à da etapa 3, por isso não a faremos. Da validade das etapas 1, 2, 3 e 4, segue a prova da proposição 3.5.

■

O próximo resultado refere-se a condição de Palais-Smale (PS), a qual definimos a seguir.

Definição 3.2 *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e J um funcional em $C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que J satisfaz a condição de Palais-Smale, (PS), se toda sequência (u_m) em E, tal que*

(i) $(J(u_m))$ seja limitada,

(ii) $J'(u_m) \to 0$ em $(E^*, \|\cdot\|^*)$,

admite subsequência convergente em E.

Proposição 3.6 *Suponhamos válidas as condições **(P)**, **(H1)**, **(G1)** e **(F1)**. Se (U_m) for uma sequência limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, tal que $I'(U_m) \to 0$ em $(H(\Omega)^*, \|\cdot\|_C^*)$, então (U_m) admite uma subsequência convergente.*

Prova: Como, por hipótese, (U_m) é uma sequência limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, e este, é um espaço reflexivo, existem $U \in H(\Omega)$ e subsequência (U_{m_k}) de (U_m), tais que $U_{m_k} \rightharpoonup U$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Consequentemente, pelo fato dos operadores J_2' e J_3' serem compactos (proposição 3.5),

$$J_2'(U_{m_k}) \to J_2'(U) \text{ e } \mathrm{J}_3'(\mathrm{U}_{\mathrm{m_k}}) \to \mathrm{J}_3'(\mathrm{U}), \ \mathrm{em}(\mathrm{H}(\Omega)^*, \|\cdot\|_{\mathrm{C}}^*). \tag{3.60}$$

Para o que segue, definimos $T : (H(\Omega), \|\cdot\|_C) \to (H(\Omega)^*, \|\cdot\|_C^*)$, por

$$T(U)(V) \doteq \int_\Omega \nabla U \cdot \nabla V dx + \int_\Omega \langle C(x)U, V\rangle dx = \langle U, V\rangle_C, \ \forall\ V \in H(\Omega)$$

Este operador é linear, bijetor e contínuo. Com efeito, a linearidade é imediata, pois $T(U)(V) = \langle U, V\rangle_C$; a linearidade segue, pois notando que $T(U)(V) = \|U\|_C^2$, podemos mostrar que $Ker(T) = \{0\}$; a sobrejetividade segue do teorema de Riesz-Fréchet; para provarmos a continuidade de T, seja (U_m) uma sequência em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, tal que $U_m \to 0$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Assim, ao fazermos $m \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \|T(U_m)\|_C^* &= \sup_{\|V\|_C \leq 1} |T(U_m)(V)| = \sup_{\|V\|_C \leq 1} |\langle U_m, V\rangle_C| \\ &\leq \sup_{\|V\|_C \leq 1} \|U_m\|_C \|V\|_C \leq \|U_m\|_C \to 0. \end{aligned}$$

Portanto, $T(U_m) \to 0$ em $(H(\Omega)^*, \|\cdot\|_C^*)$. Daí segue a continuidade de T. Agora, como T é um operador linear contínuo e bijetor, segue, do teorema da aplicação aberta, que $T^{-1} : (H(\Omega)^*, \|\cdot\|_C^*) \to (H(\Omega), \|\cdot\|_C)$ também é um operador linear contínuo. Segue, ao lembrarmos que $I' = J_1' - J_2' - J_3'$ e $J_1' = T$, que para qualquer $U \in H(\Omega)$, $T^{-1}(I'(U)) = U - T^{-1}(J_2'(U)) - T^{-1}(J_3'(U))$. Em particular,

$$U_{m_k} = T^{-1}(I'(U_{m_k})) + T^{-1}(J_2'(U_{m_k})) + T^{-1}(J_3'(U_{m_k})),\ \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3.61}$$

Ainda, por hipótese, $I'(U_m) \to 0$ em $(H(\Omega)^*, \|\cdot\|_C^*)$. Por conseguinte, $I'(U_{m_k}) \to 0$ em $(H(\Omega)^*, \|\cdot\|_C^*)$. Por isso e devido à linearidade e continuidade de T^{-1},

$$T^{-1}(I'(U_{m_k})) \to T^{-1}(0) = 0 \ em\ (H(\Omega), \|\cdot\|_C). \tag{3.62}$$

Além disso, da validade de (3.60) e da continuidade de T^{-1}, concluímos que

$$T^{-1}(J_2'(U_{m_k})) \to T^{-1}(J_2'(U)) \ e\ T^{-1}(J_3'(U_{m_k})) \to T^{-1}(J_3'(U)) \ em\ (H(\Omega), \|\cdot\|_C). \tag{3.63}$$

Portanto, em razão da validade de (3.61), (3.62) e (3.63), temos

$$U_{m_k} \to T^{-1}(J_2'(U)) + T^{-1}(J_3'(U)) \ em\ (H(\Omega), \|\cdot\|_C),$$

ou seja, (U_m) admite uma subsequência convergente, como queríamos.

■

Os próximos resultados, desta seção, referem-se à uma condição de compacidade mais geral do que a condição (PS), a condição de Cerami, a qual foi introduzida em ([18]).

Definição 3.3 *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e J um funcional em $C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que J satisfaz a condição de Cerami no nível c ($c \in \mathbb{R}$), abrevidadamente, condição $(Ce)_c$, se toda sequência (u_m) em E, tal que*

(Ce-1) *$J(u_m) \to c$, quando $m \to +\infty$,*

(Ce-2) *$(1 + \|u_m\|)\|J^{'}(u_m)\|^* \to 0$, quando $m \to +\infty$,*

admite subsequência convergente em E.

Proposição 3.7 *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, $c \in \mathbb{R}$ e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ que goza das seguintes propriedades:*

(I) *Toda sequência limitada, (u_m), em E, tal que $J(u_m) \to c$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $J^{'}(u_m) \to 0$ em $(E^*, \|\cdot\|^*)$, admite uma subsequência convergente em E;*

(II) *Existem constantes $\delta, R, \alpha > 0$, tais que $\|J^{'}(u)\|^*\|u\| \geq \alpha$, para qualquer $u \in J^{-1}([c-\delta, c+\delta])$, com $\|u\| \geq R$.*

Então o funcional J satisfaz a condição de Cerami no nível c.

Prova: Seja (u_m) uma sequência em E, que satisfaça as condições **(Ce-1)** e **(Ce-2)**. Além disso, suponhamos válidas as condições **(I)** e **(II)**. Devemos mostrar que (u_m) admite uma subsequência convergente. Notemos que, ou $\|u_m\| \to +\infty$, quando $m \to +\infty$, ou existe constante positiva K tal que $\|u_m\| \leq K$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Caso ocorra $\|u_m\| \to +\infty$, quando $m \to +\infty$, então, para $R > 0$ (condição **(II)**), existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\|u_m\| \geq R$, $\forall\ m \geq N_0$. Ainda, por **(Ce-1)**, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, com $N_1 \geq N_0$, tal que $u_m \in J^{-1}([c-\delta, c+\delta])$, $\forall\ m \geq N_1$. Consequentemente, em razão da validade de **(II)**, $\|J^{'}(u_m)\|^*\|u_m\| \geq \alpha, \forall\, m \geq N_1$. Por isso e pela validade da condição **(Ce-2)**, ao fazermos $m \to +\infty$, obtemos

$$\alpha \leq \|J^{'}(u_m)\|^*\|u_m\| \leq \|J^{'}(u_m)\|^*(1 + \|u_m\|) \to 0,$$

ou seja, $\alpha \leq 0$, o que é um absurdo pela validade da condição **(II)**. Assim, deve existir constante positiva K, tal que

$$\|u_m\| \leq K,\ \forall\ m \in \mathbb{N}. \tag{3.64}$$

Afirmação 1: $J'(u_m) \to 0$ em $(E^*, \|\cdot\|^*)$.

De fato, suponhamos que tal afirmação não seja válida, ou seja, existem $\epsilon > 0$ e uma subsequência (u_{m_l}) da sequência (u_m), tais que $\|J'(u_{m_l})\|^* \geq \epsilon$, $\forall\, l \in \mathbb{N}$. Por conseguinte,

$$\epsilon(1 + \|u_{m_l}\|) \leq \|J'(u_{m_l})\|^*(1 + \|u_{m_l}\|), \ \forall\, l \in \mathbb{N}. \tag{3.65}$$

Mas também, devido à validade da condição (3.64), a sequência $(\|u_{m_l}\|)$ é limitada em $\mathbb{R}$, e assim, ela admite uma subsequência convergente em $\mathbb{R}$, que, por simplicidade, denotaremos por $(\|u_{m_l}\|)$, ou seja, existe $K_1 \in \mathbb{R}$, com $K_1 \geq 0$, tal que $\|u_{m_l}\| \to K_1$, quando $l \to +\infty$. Logo, ao fazermos $l \to +\infty$ em (3.65) e utilizarmos a condição **(Ce-2)**, $K_1\epsilon + \epsilon \leq 0$, o que é um absurdo, pois $\epsilon > 0$ e $K_1 \geq 0$. Daí segue a validade da afirmação 1. Finalmente, devido à validade de **(Ce-1)**, de (3.64) e da afirmação 1, segue de **(I)**, que a sequência $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente em E. Ou seja, vale a condição de Cerami no nível c, como queríamos.

■

A próxima proposição é uma versão estendida do teorema do Ponto de Sela (veja teorema 4.6 de [46]). Podemos encontrar a prova de tal proposição em [33] (teorema 7).

Proposição 3.8 *Sejam* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço de Banach e* $J \in C^1(E, \mathbb{R})$*. Suponhamos que* $E = \mathbb{V} \oplus \mathbb{X}$*, com* $dim\mathbb{V} < \infty$*, exista* $R > 0$ *tal que* $\sup_{u \in \partial\mathbb{D}} J(u) \leq \inf_{u \in \mathbb{X}} J(u)$ *e* J *satisfaça a condição* $(Ce)_c$*, onde*

$$c = \inf_{\gamma \in \mathbb{H}} \max_{u \in \mathbb{D}} J(\gamma(u)),$$

com $\mathbb{H} = \{\gamma \in C(\mathbb{D}, E) : \gamma\, |_{\partial\mathbb{D}} = id\}$*,* $\mathbb{D} = \{u \in \mathbb{V} : \|u\| \leq R\}$ *e* $\partial\mathbb{D} = \{u \in \mathbb{V} : \|u\| = R\}$*. Então* $c \geq \inf_{u \in \mathbb{X}} J(u)$ *e* c *é um valor crítico de* J*.*

3.4 Prova do teorema 3.1

No que segue, $U = (u, v)$. Observamos, inicialmente, que a condição **(A1)** implica que, dado $\epsilon > 0$, existe $r = r(\epsilon) > 0$ tal que, se $x \in \overline{\Omega}$ e $U \in \mathbb{R}^2$ com $|U| > r$, então

$$\frac{2G(x,U)}{u^2+v^2} \leq \mu + \epsilon \; e \; \frac{2F(x,U)}{u^2+v^2} \leq \lambda + \epsilon. \tag{3.66}$$

Ainda, em razão de Ω ser limitado em $\mathbb{R}^N$, $\overline{\Omega}$ é compacto em $\mathbb{R}^N$. Consequentemente, $\mathbb{A}(\epsilon) \doteq \overline{\Omega} \times \{U \in \mathbb{R}^2 : |U| \leq r = r(\epsilon)\}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{N+2}$. Combinando isso ao fato de $G, F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, concluímos que F e G assumem máximo e mínimo em $\mathbb{A}(\epsilon)$ (teorema de Weierstrass). Logo, existe constante $M_\epsilon > 0$, tal que

$$G(x,U) \leq M_\epsilon \; e \; F(x,U) \leq M_\epsilon, \;\; \forall (x,U) \in A(\epsilon) \tag{3.67}$$

Por conseguinte, ao combinarmos as desigualdades (3.66) e (3.67), obtemos

$$G(x,U) \leq \frac{1}{2}(\mu+\epsilon)(u^2+v^2) + M_\epsilon \; e \; F(x,U) \leq \frac{1}{2}(\lambda+\epsilon)(u^2+v^2) + M_\epsilon, \; \forall \, x \in \overline{\Omega}, \; \forall \, U \in \mathbb{R}^2. \tag{3.68}$$

Para provarmos que o sistema (3.1) possui ao menos uma solução fraca, é suficiente, de acordo com o teorema 6.15, mostrarmos que o funcional I é limitado inferiormente e que ele satisfaz a condição (PS), já que $I \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$ (proposição 3.4).

Afirmação 1: O funcional I é coercivo em $(H(\Omega), \| \cdot \|_C)$, isto é, $I(U) \to +\infty$, quando $\|U\|_C \to +\infty$.

De fato, suponhamos $\|U\|_C \to +\infty$, então, ao utilizarmos a continuidade do operador traço de $H^1(\Omega)$ sobre $L^2(\partial\Omega)$ e o fato das normas $\|\cdot\|_C$ e $\|\cdot\|_H$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, obtemos que, ou $\|U\|_{2,\partial} \to +\infty$, ou $\|U\|_{2,\partial} \leq K_1$, onde $K_1 > 0$ é uma constante. Em ambos casos, concluiremos que $I(U) \to +\infty$. Primeiramente, suponhamos $\|U\|_{2,\partial} \leq K_1$, onde $K_1 > 0$ é uma constante. Neste caso, da definição de I e da desigualdade (3.68), temos

$$\begin{aligned} I(U) &= \tfrac{1}{2}\|U\|_C^2 - \textstyle\int_\Omega F(x,U)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,U)d\sigma \\ &\geq \tfrac{1}{2}\|U\|_C^2 - \tfrac{1}{2}(\lambda+\epsilon)\|U\|_2^2 - \tfrac{1}{2}(\mu+\epsilon)\|U\|_{2,\partial}^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma). \end{aligned} \tag{3.69}$$

Se $\lambda < 0$, então, de (3.69), temos $I(U) \to +\infty$, quando $\|U\|_C \to +\infty$, basta tomarmos $\epsilon > 0$, tal que $\lambda + \epsilon > 0$.

Se $\lambda \geq 0$, então, devido às desigualdades (3.5) e (3.69), com $\epsilon > 0$, tal que $\lambda + \epsilon > 0$,

$$I(U) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|U\|_C^2 - \frac{1}{2}(\mu + \epsilon)\|U\|_{2,\partial}^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma). \tag{3.70}$$

Finalmente, como, por hipótese, $\lambda < \lambda_1$, temos $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$. Por conseguinte, podemos tomar $\epsilon > 0$, tal que (3.70) continue valendo, bem como, $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0$ ($\lambda \geq 0$). Por isso e pela desigualdade (3.70), $I(U) \to +\infty$, quando $\|U\|_C \to +\infty$. Agora, suponhamos $\|U\|_{2,\partial} \to +\infty$. Temos quatro casos a analisar.

Caso 1: $\lambda < 0$ e $\mu < 0$.

Neste caso, temos de (3.69), para $\epsilon > 0$, tal que $\lambda + \epsilon > 0$ e $\mu + \epsilon > 0$,

$$I(U) \geq \frac{1}{2}\|U\|_C^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma).$$

Com isso, segue imediatamente que, se $\|U\|_C \to +\infty$, então $I(U) \to +\infty$.

Caso 2: $\lambda < 0$ e $\mu \geq 0$.

Devido à desigualdade (3.3) e à (3.69), temos, para $\epsilon > 0$, tal que $\mu + \epsilon > 0$,

$$I(U) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1}\right)\|U\|_C^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma). \tag{3.71}$$

Como, por hipótese, $\mu < \mu_1$, temos $1 - \frac{\mu}{\mu_1} > 0$. Deste modo, ao considerarmos $\epsilon > 0$, tal que (3.71) continue valendo e $1 - \frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1} > 0$ ($\mu \geq 0$), $I(U) \to +\infty$, quando $\|U\|_C \to +\infty$.

Caso 3: $\lambda \geq 0$ e $\mu < 0$.

Como, por hipótese, $\lambda < \lambda_1$, concluímos que $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$. Por conseguinte, como $\lambda \geq 0$, existe $\epsilon > 0$, tal que $\lambda + \epsilon > 0$ e $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}$. Para este ϵ, obtemos, ao utilizarmos a desigualdade (3.5) e (3.69),

$$I(U) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|U\|_C^2 - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma).$$

Consequentemente, se $\|U\|_C \to +\infty$, $I(U) \to +\infty$.

Caso 4: $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$.

Neste caso, devido à desigualdade (3.5) e à (3.69), temos

$$I(U) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|U\|_C^2 - \frac{1}{2}(\mu + \epsilon)\|U\|_{2,\partial}^2 - C(\epsilon), \tag{3.72}$$

pois $\lambda + \epsilon > 0$ e $\mu + \epsilon > 0$, onde $C(\epsilon) \doteq M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma)$ é uma constante positiva. Como, por hipótese, $\lambda < \lambda_1$, temos $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$. Deste modo, para $\epsilon > 0$, tal que

$$1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0, \tag{3.73}$$

obtemos, devido à desigualdade (3.3) e à (3.72),

$$I(U) \geq \frac{\mu_1}{2}\left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\mu_1}\right) - \epsilon\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\mu_1}\right)\right]\|U\|_{2,\partial}^2 - C(\epsilon). \tag{3.74}$$

Agora, por hipótese, vale $\lambda\mu_1 + \mu\lambda_1 < \lambda_1\mu_1$. Logo, em razão de $\lambda_1 > 0$ e $\mu_1 > 0$, $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\mu_1} > 0$. Por conseguinte, ao escolhermos $\epsilon > 0$ que satisfaça (3.73) e

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\mu_1}\right) - \epsilon\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\mu_1}\right) > 0,$$

devido à (3.74), $I(U) \to +\infty$, quando $\|U\|_C \to +\infty$ (supomos $\|U\|_{2,\partial} \to +\infty$). Portanto, o funcional I é, de fato, coercivo, isto é, vale a afirmação 1.

Afirmação 2: O funcional I é limitado inferiormente.

De fato, devido à validade da afirmação 1, dado $1 > 0$, existe $R_1 > 0$, tal que

$$I(U) \geq 1, \ \forall\, U \in H(\Omega), \ \textit{com} \ \|U\|_C \geq R_1. \tag{3.75}$$

Agora, se $U \in H(\Omega)$ for tal que $\|U\|_C \leq R_1$, então, pelo fato das normas $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_H$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, existe constante $R_2 > 0$, tal que $\|U\|_H \leq R_2$. Por conseguinte, $\|u\|_{1,2} \leq R_2$ e $\|v\|_{1,2} \leq R_2$. E assim, ao utilizarmos os teoremas 6.10 e 6.9, conseguimos novas constantes positivas R_3 e R_4, tais que

$$\max\{\|u\|_2, \|v\|_2\} \leq R_3 \ \text{e} \ \max\{\|\mathrm{u}\|_{2,\partial}, \|\mathrm{v}\|_{2,\partial}\} \leq \mathrm{R}_4.$$

Consequentemente, $\|U\|_2 \leq R_5$ e $\|U\|_{2,\partial} \leq R_6$, sendo R_5 e R_6 constantes positivas. Por isso, pela validade de (3.69) e pelo fato de $\lambda < \lambda_1$ e $\mu < \mu_1$, temos, para $\epsilon > 0$ fixado,

$$I(U) \geq -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \epsilon)R_5^2 - \frac{1}{2}(\mu_1 + \epsilon)R_6^2 - M_\epsilon\left(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma\right) \doteq K(\epsilon).$$

Ou seja,

$$I(U) \geq K(\epsilon),\ \forall\ U \in H(\Omega),\ com\ \|U\|_C \leq R_1. \tag{3.76}$$

Das desigualdades (3.75) e (3.76), segue que $I(U) \geq \min\{1, K(\epsilon)\},\ \forall\ U \in H(\Omega)$, ou seja, I é limitado inferiormente, como desejávamos.

Afirmação 3: I satisfaz a condição de Palais-Smale (PS).

De fato, para provarmos tal afirmação, seja (U_m) uma sequência em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, tal que $(I(U_m))$ seja limitada em $\mathbb{R}$ e $I'(U_m) \to 0$ em $(H(\Omega)^*, \|\cdot\|_C^*)$. Afirmamos que a sequência (U_m) é limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Com efeito, se isso não ocorrer, então existe subsequência (U_{m_k}) de (U_m), tal que $\|U_{m_k}\|_C \to +\infty$, quando $k \to +\infty$. Consequentemente, devido à coercividade de I, $I(U_{m_k}) \to +\infty$, quando $k \to +\infty$, o que gera uma contradição com o fato da sequência $(I(U_m))$ ser limitada em $\mathbb{R}$. Logo, a sequência (U_m) é limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$. Finalmente, em razão de $I'(U_m) \to 0$ em $(H(\Omega)^*, \|\cdot\|_C^*)$ e da sequência (U_m) ser limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, as hipóteses da proposição 3.6 são satisfeitas. De onde segue, que (U_m) admite uma subsequência convergente em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C))$. Portanto, o funcional I satisfaz a condição (PS). Com isso, concluímos a prova da afirmação 3. Agora, visto que I é um elemento de $C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$, é limitado inferiormente e satisfaz a condição (PS), temos, ao aplicarmos o teorema 6.15, que I possui um ponto crítico $U \in H(\Omega)$, isto é, $I'(U) = 0$. E assim, U satisfaz a igualdade (3.6). Deste modo, de acordo com a definição (3.1), U é uma solução fraca para o sistema (3.1), como queríamos.

■

3.5 Prova do teorema 3.2

A ideia para a demonstração deste teorema é verificarmos a validade das hipóteses da proposição 3.8. Com isso, seguirá que I possui um ponto crítico, o qual será solução fraca para o sistema 3.1. Inicialmente, provaremos um lema técnico.

Lema 3.3 *Suponhamos válidas as hipóteses do teorema 3.2. Se existem* $c \in \mathbb{R}$ *e sequência* (U_n) *em* $H(\Omega)$*, tais que* $\|U_n\|_C \to +\infty$*,* $I(U_n) \to c$ *e* $\|I'(U_n)\|_C^* \|U_n\| \to 0$*, quando* $n \to +\infty$*, então existe* $\Omega_0 \subset \Omega$*, com* $|\Omega_0| > 0$*, tal que* $|U_n(x)| \to +\infty$*, quando* $n \to +\infty$*, para q.t.p.* $x \in \Omega_0$ *ou existe* $\Omega_1 \subset \partial\Omega$*, com* $|\Omega_1|_\sigma > 0$*, tal que* $|U_n(x)| \to +\infty$*, quando* $n \to +\infty$*, para q.t.p.* $x \in \Omega_1$*.*

Prova: Pela condição **(A2)**, temos que, dado $\epsilon > 0$, existe $R_1 > 0$, tal que

$$G(x,U) \leq \frac{1}{2}(B+\epsilon)(u^2+v^2), \ \forall\ x \in \overline{\Omega}, \ \forall\ U \in \mathbb{R}^2, \ com\ |U| > R_1. \tag{3.77}$$

Por isso, pela continuidade de G (condição **(H1)**) e por $\overline{\Omega}$ ser compacto em $\mathbb{R}^N$, existe constante $C_\epsilon > 0$, tal que

$$G(x,U) \leq \frac{1}{2}(B+\epsilon)(u^2+v^2) + C_\epsilon, \ \forall\ x \in \overline{\Omega}, \ \forall\ U \in \mathbb{R}^2. \tag{3.78}$$

Analogamente, podemos mostrar que existe constante $E_\epsilon > 0$, tal que

$$F(x,U) \leq \frac{1}{2}(\beta+\epsilon)(u^2+v^2) + E_\epsilon, \ \forall\ x \in \overline{\Omega}, \ \forall\ U \in \mathbb{R}^2. \tag{3.79}$$

Suponhamos, para o que segue, sem perda de generalidade, $\beta > 0$ em **(A2)**. Por hipótese, $\|U_n\|_C \to +\infty$. Assim, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\|U_n\|_C \neq 0$, $\forall\ n$, com $n \geq N_0$. Consequentemente, tem sentido definirmos $\widehat{U}_n = \frac{U_n}{\|U_n\|_C}$, para $n \geq N_0$. Claro, que a sequência $(\widehat{U}_n)_{n \geq N_0}$ é limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, pois $\|U_n\|_C = 1$, $\forall\ n \geq N_0$. Disso e do fato das normas $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_H$ serem equivalentes em $H(\Omega)$, concluímos que a sequência $(U_n)_{n \geq N_0}$ também é limitada em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Deste modo, em virtude de $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$ ser um espaço reflexivo, existem subsequência da sequência $(\widehat{U}_n)_{n \geq N_0}$, que suporemos, sem perda de generalidade, a mesma sequência, e $\widehat{U} \in H(\Omega)$, tais que $\widehat{U}_n \rightharpoonup \widehat{U}$ em $(H(\Omega), \|\cdot\|_H)$. Por conseguinte, ao utilizarmos os teoremas 6.10 e 6.9,

$$\widehat{U}_n \to \widehat{U}\ em\ (\left[L^2(\Omega)\right]^2, \|\cdot\|_2)\ e\ (\left[L^2(\partial\Omega)\right]^2, \|\cdot\|_{2,\partial}). \tag{3.80}$$

De onde segue que

$$\widehat{U}_n(x) \to \widehat{U}(x), \text{ quando } n \to +\infty, \text{ q.t.p. } x \in \Omega \tag{3.81}$$

e

$$\widehat{U}_n(x) \to \widehat{U}(x), \text{ quando } n \to +\infty, \text{ q.t.p. } x \in \partial\Omega. \tag{3.82}$$

Ainda, por hipótese, $I(U_n) \to c$, quando $n \to +\infty$. Devido à isso e às desigualdades (3.78), (3.79), (3.5) e (3.3) existe natural $N_1 \geq N_0$, tal que, se $n \geq N_1$, então

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\|U_n\|_C^2 &\leq (c+1) + \textstyle\int_\Omega F(x,U_n)dx + \int_{\partial\Omega} G(x,U_n)d\sigma \\ &\leq (c+1) + \tfrac{\beta}{2}\|U_n\|_2^2 + \tfrac{B}{2}\|U_n\|_{2,\partial}^2 + E_\epsilon|\Omega| + C_\epsilon|\partial\Omega|_\sigma + K_n(\epsilon), \end{aligned} \tag{3.83}$$

onde $K_n(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2}\left[\lambda_1^{-1}\|U_n\|_C^2 + \mu_1^{-1}\|U_n\|_C^2\right]$. Logo, ao multiplicarmos (3.83) por $\|U_n\|_C^{-2}$, obtemos

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c+\epsilon}{\|U_n\|_C^2} + \frac{\beta}{2}\|\widehat{U}_n\|_2^2 + \frac{B}{2}\|\widehat{U}_n\|_{2,\partial}^2 + \frac{\epsilon}{2}\left[\lambda_1^{-1} + \mu_1^{-1}\right], \tag{3.84}$$

Mas, ao fazermos $n \to +\infty$ e $\epsilon \to 0$ em (3.84), obtemos, devido à $\|U_n\|_C \to +\infty$, quando $n \to +\infty$ (hipótese), e à (3.80), $\frac{1}{2} \leq \frac{\beta}{2}\|\widehat{U}\|_2^2 + \frac{B}{2}\|\widehat{U}\|_{2,\partial}^2$. De onde vem que $|\Omega_0| > 0$ ou $|\Omega_1|_\sigma > 0$, sendo $\Omega_0 = \{x \in \Omega : \widehat{U}(x) \neq 0\}$ e $\Omega_1 = \{x \in \partial\Omega : \widehat{U}(x) \neq 0\}$. Combinando isso, (3.81) e (3.82), concluímos que $\widehat{U}_n(x) \neq 0$, para q.t.p. $x \in \Omega_0$ ou $\widehat{U}_n(x) \neq 0$, para q.t.p. $x \in \partial\Omega$, desde que $n \geq N_2$, sendo $N_2 \geq N_1$. Finalmente, pela definição de $\widehat{U}_n$, temos $U_n = \|U_n\|_C\widehat{U}_n$. Portanto, em razão de $\|U_n\|_C \to +\infty$, quando $n \to +\infty$, $|U_n(x)| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$, para q.t.p. $x \in \Omega_0$ ou $|U_n(x)| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$, para q.t.p. $x \in \Omega_1$. Com isso, finalizamos a prova do lema 3.3.

■

No próximo lema, mostraremos que I satisfaz a condição $(Ce)_c$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$.

Lema 3.4 *Suponhamos válidas as hipóteses do teorema 3.2, então o funcional I satisfaz a condição de Cerami $(C)_c$, para qualquer nível $c \in \mathbb{R}$.*

Prova: Temos que $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$ é um espaço de Banach e $I \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$. Deste modo, se provarmos, para qualquer $c \in \mathbb{R}$, a validade das condições **(I)** e **(II)** da proposição 3.7, seguirá, por esta, a validade do lema 3.4. A validade da condição **(I)**, para qualquer $c \in \mathbb{R}$ é consequência imediata da proposição 3.6. Assim, precisamos mostrar a validade da condição **(II)**, para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Suponhamos que tal condição não seja válida. Então, existem $c \in \mathbb{R}$ e uma sequência (U_n) em $H(\Omega)$, tais que

$$\|U_n\|_c \to +\infty,\ I(U_n) \to c\ e\ \|I^{'}(U_n)\|_C^{*}\|U_n\| \to 0,\ em\ \mathbb{R},\ quando\ n \to +\infty. \tag{3.85}$$

Ainda, temos

$$\int_{\Omega} [f(x,U_n) - 2F(x,U_n)]\,dx + \int_{\partial\Omega} [g(x,U_n) - 2G(x,U_n)]\,d\sigma = 2I(U_n) - I^{'}(U_n)(U_n).$$

Consequentemente, devido à (3.85),

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_{\Omega} [f(x,U_n) - 2F(x,U_n)]\,dx + \int_{\partial\Omega} [g(x,U_n) - 2G(x,U_n)]\,d\sigma\right] = 2c \tag{3.86}$$

Agora, pelas condições **(A2)**, **(G1)** e **(F1)**, concluímos que existe $M \in \mathbb{R}$, tal que

$$f(x,U_n)\cdot U_n - 2F(x,U_n) \geq M,\ uniformemente\ para\ q.t.p.\ x \in \Omega \tag{3.87}$$

e

$$g(x,U_n)\cdot U_n - 2F(x,U_n) \geq M,\ uniformemente\ para\ q.t.p.\ x \in \partial\Omega, \tag{3.88}$$

com $U \in \mathbb{R}^2$. Ora, como (3.85) vale, segue, do lema 3.3, que existe $\Omega_0 \subset \Omega$ com $|\Omega_0| > 0$, tal que $|U_n(x)| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$, para q.t.p. $x \in \Omega_0$ ou existe $\Omega_1 \subset \partial\Omega$ com $|\Omega_1|_\sigma > 0$, tal que $|U_n(x)| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$, para q.t.p. $x \in \Omega_1$. Por conseguinte, em razão da validade das condições **(LF)** e **(LG)**,

$$\lim_{n\to+\infty} [f(x,U_n(x))\cdot U_n(x) - 2F(x,U_n(x))] = +\infty,\ q.t.p.\ x \in \Omega_0, \tag{3.89}$$

ou

$$\lim_{n\to+\infty} [g(x,U_n(x))\cdot U_n(x) - 2G(x,U_n)(x)] = +\infty,\ q.t.p.\ x \in \Omega_1. \tag{3.90}$$

Caso (3.89) ocorra, temos, se denotarmos $P_n(x) = f(x,U_n(x))\cdot U_n(x) - 2F(x,U_n(x))$ e $Q_n(x) = g(x,U_n(x))\cdot U_n(x) - 2G(x,U_n(x))$, após aplicarmos o lema de Fatou e utilizarmos as desigualdades (3.87) e (3.88), que

$$\liminf_{n\to+\infty}\left[\int_{\Omega}P_n(x)dx+\int_{\partial\Omega}Q_n(x)d\sigma\right]\geq\liminf_{n\to+\infty}\int_{\Omega_0}P_n(x)dx+M\left(|\Omega\setminus\Omega_0|+|\partial\Omega|_\sigma\right)=+\infty, \tag{3.91}$$

o que gera uma contradição com (3.86). Logo, (3.90) deve valer. Entretanto, novamente com o auxílio do lema de Fatou e das desigualdades (3.87) e (3.88), obtemos

$$\liminf_{n\to+\infty}\left[\int_{\Omega}P_n(x)dx+\int_{\partial\Omega}Q_n(x)d\sigma\right]\geq\liminf_{n\to+\infty}\int_{\Omega_1}Q_n(x)d\sigma+M\left(|\Omega|+|\partial\Omega\setminus\Omega_1|_\sigma\right)=+\infty, \tag{3.92}$$

o que gera uma nova contradição, agora, com (3.86). Logo, a condição **(II)** da proposição 3.7 deve valer. Daí segue a validade do lema 3.4.

∎

Na seção 1.6, do capítulo 1, vimos, ao considerarmos $j\in\mathbb{N}$ fixado e ao denotarmos

$$\mathbb{V}_j=\left[\bigcup_{k=1}^{j}\mathcal{M}_k\right],\ \mathbb{Y}_j=\overline{\left[\bigcup_{k=j+1}^{\infty}\mathcal{M}_k\right]}\ e\ \mathbb{X}_j=\mathbb{Y}_j\oplus_C H_0(\Omega),$$

que $H(\Omega)=\mathbb{V}_j\oplus_C\mathbb{X}_j$, com $dim(\mathbb{V}_j)<\infty$. Assim, devido à veracidade do lema 3.4, se mostrarmos que existe uma constante $R>0$, tal que

$$\sup_{U\in\partial\mathbb{D}}I(U)\leq\inf_{V\in\mathbb{X}_j}I(V), \tag{3.93}$$

com $\mathbb{D}=\{U\in\mathbb{V}_j:\|U\|_C\leq R\}$, seguirá, pela proposição 3.8, a validade do teorema 3.2.

Afirmação 1: $-I$ é coercivo sobre $\mathbb{V}_j$.

De fato, pela condição **(A2)** e pela continuidade de G e F, dado $\epsilon>0$, existe constante $\tilde{C}>0$, tal que, se $x\in\overline{\Omega}$ e $U\in\mathbb{R}^2$, então

$$(A-\epsilon)\frac{(u^2+v^2)}{2}-\tilde{C}\leq G(x,U)\leq(B+\epsilon)\frac{(u^2+v^2)}{2}+\tilde{C} \tag{3.94}$$

e

$$(\alpha-\epsilon)\frac{(u^2+v^2)}{2}-\tilde{C}\leq F(x,U)\leq(\beta+\epsilon)\frac{(u^2+v^2)}{2}+\tilde{C}. \tag{3.95}$$

Consequentemente, para $U=(u,v)\in\mathbb{V}_j$,

$$\begin{aligned} I(U) &= \tfrac{1}{2}\|U\|_C^2 - \int_\Omega F(x,U)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,U)d\sigma \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|U\|_C^2 + P(x,U) + Q(x,U) + \widehat{C}, \end{aligned} \tag{3.96}$$

onde $\widehat{C}$ é uma constante positiva, $P(x,U) = -\frac{1}{2}(\alpha-\epsilon)\|U\|_2^2$ e $Q(x,U) = -\frac{1}{2}(A-\epsilon)\|U\|_{2,\partial}^2$. Agora, suponhamos, sem perda de generalidade, $\alpha \leq 0$ em **(A2)**. Por isso, por $A > \mu_j > 0$ (hipótese **(A2)**) e pelas desigualdades (3.5) e (1.36), temos, para $\epsilon > 0$, com $A-\epsilon > 0$, $P(x,U) \leq -\frac{1}{2}(\alpha-\epsilon)\lambda_1^{-1}\|U\|_C^2$ e $Q(x,U) \leq -\frac{1}{2}(A-\epsilon)\mu_j^{-1}\|U\|_C^2$. Por conseguinte, em razão da desigualdade (3.96),

$$I(U) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} - \frac{A}{\mu_j} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\mu_j}\right)\|U\|_C^2 + \widehat{C}. \tag{3.97}$$

Finalmente, como $\lambda_1\mu_j < \alpha\mu_j + A\lambda_1$, $\mu_j \geq \mu_1 > 0$ e $\lambda_1 > 0$, existe $\epsilon > 0$, tal que $A-\epsilon > 0$ e $1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} - \frac{A}{\mu_j} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\mu_j} < 0$. Combinando isso à desigualdade (3.97), concluímos que $I(U) \to -\infty$, quando $U \in \mathbb{V}_j$ e $\|U\|_C \to +\infty$. E assim, $-I(U) \to +\infty$, quando $U \in \mathbb{V}_j$ e $\|U\|_C \to +\infty$. Daí segue a validade da afirmação 1.

Afirmação 2: I é coercivo sobre $\mathbb{X}_j$.

De fato, seja $U \in \mathbb{X}_j$. Como $\mathbb{X}_j = \mathbb{Y}_j \oplus_C H_0(\Omega)$, existem únicos $U^0 \in H_0(\Omega)$ e $\overline{U} \in \mathbb{Y}_j$, tais que $U = U^0 + \overline{U}$. Com o auxílio das desigualdades (3.94) e (3.95), e do fato de U^0 e $\overline{U}$ serem C-ortogonais, podemos mostrar que existe constante $\overline{C} > 0$, tal que

$$\begin{aligned} I(U) &= \tfrac{1}{2}\|U^0\|_C^2 + \tfrac{1}{2}\|\overline{U}\|_C^2 - \int_\Omega F(x,U)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,U)d\sigma \\ &\geq \tfrac{1}{2}\|U^0\|_C^2 + \tfrac{1}{2}\|\overline{U}\|_C^2 - \tfrac{1}{2}(\beta+\epsilon)\|U\|_2^2 - \tfrac{1}{2}(B+\epsilon)\|U\|_{2,\partial}^2 - \overline{C}, \end{aligned}$$

Consideraremos, para o que segue, sem perda de generalidade, $\beta \geq 0$ em **(A2)**. Por isso, pela desigualdade (3.5), por $\|U\|_{2,\partial} = \|\overline{U}\|_{2,\partial}$ e por U^0 e $\overline{U}$ serem C-ortogonais, temos

$$I(U) \geq \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{\beta}{\lambda_1} - \tfrac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|U^0\|_C^2 + \tfrac{1}{2}\left[\left(1 - \tfrac{\beta}{\lambda_1} - \tfrac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|\overline{U}\|_C^2 - (B+\epsilon)\|\overline{U}\|_{2,\partial}^2\right] - \overline{C}. \tag{3.98}$$

Segue, ao combinarmos esta desigualdade à (1.37) e utilizarmos o fato de $B > 0$, que

$$I(U) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|U^0\|_C^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{B}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}}\right)\|\overline{U}\|_C^2 - \overline{C}. \quad (3.99)$$

Mas, por hipótese, $\beta\mu_{j+1} + B\lambda_1 < \lambda_1\mu_{j+1}$ e $B > \mu_j > 0$. Consequentemente, devido à $\lambda_1 > 0$, $\beta\mu_{j+1} < \lambda_1\mu_{j+1}$, e assim, como $\mu_{j+1} > 0$, $\beta < \lambda_1$. De onde vem que, para $\epsilon > 0$ pequeno,

$$M(\epsilon) \doteq 1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0. \quad (3.100)$$

Além disso, visto que $\beta\mu_{j+1} + B\lambda_1 < \lambda_1\mu_{j+1}$, podemos escolher $\epsilon > 0$, tal que (3.100) valha e $N(\epsilon) \doteq 1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{B}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}} > 0$. Deste modo, $\min\{M(\epsilon), N(\epsilon)\} > 0$. Com isso, em razão de (3.99) e de U^0 e $\overline{U}$ serem C-ortogonais,

$$I(U) \geq \min\{M(\epsilon), N(\epsilon)\}\left(\|U^0\|_C^2 + \|\overline{U}\|_C^2\right) = \min\{M(\epsilon), N(\epsilon)\}\|U\|_C^2. \quad (3.101)$$

Daí segue que $I(U) \to +\infty$, quando $U \in \mathbb{X}_j$ e $\|U\|_C \to +\infty$. Ou seja, a afirmação 2 é verdadeira.

Afirmação 3: Existe $R > 0$, tal que

$$\sup_{U \in \partial\mathbb{D}} I(U) \leq \inf_{V \in \mathbb{X}_j} I(V),$$

sendo $\mathbb{D} = \{U \in \mathbb{V}_j : \|U\|_C \leq R\}$.

De fato, pela afirmação 2, I é coercivo sobre $\mathbb{X}_j$. Logo, dado, digamos, $1 > 0$, existe $R_1 > 0$, tal que $I(U) \geq 1$, $\forall\ U \in \mathbb{X}_j$, com $\|U\|_C > R_1$. E mais, se $U \in \mathbb{X}_j$ satisfaz $\|U\|_C \leq R_1$, então, devido à parte final da prova da afirmação 2,

$$I(U) \geq \min\{M(\epsilon), N(\epsilon)\}\|U\|_C^2 \geq -\|U\|_C^2 \geq -R_1^2.$$

Portanto,

$$I(U) \geq \min\{1, -R_1^2\} = -R_1^2,\ \forall\ U \in \mathbb{X}_j. \quad (3.102)$$

Agora, devido à validade da afirmação 1, dado $R_2 < -R_1^2$, existe $R > 0$ tal que, para qualquer $U \in \mathbb{V}_j$, com $\|U\|_C \geq R$, $I(U) < R_2 < -R_1^2$. Consequentemente,

$$\sup_{U \in \partial \mathbb{D}} I(U) \leq R_2 < -R_1^2, \tag{3.103}$$

onde $\mathbb{D} = \{U \in \mathbb{V}_j : \|U\|_C \leq R\}$. Finalmente, devido às desigualdades (3.102) e (3.103), segue a veracidade da afirmação 3. Ora, em razão da validade da proposição 3.4, do lema 3.4 e da afirmação 3, as hipóteses do teorema 3.8 ficam verificadas, e assim, I possui um ponto crítico U, e este é uma solução fraca para o sistema (3.1), ou seja o teorema 3.2 vale.

■

3.6 Prova do teorema 3.3

Para começarmos tal prova, enunciaremos dois lemas, cujas demonstrações são semelhantes às dos lemas 3.3 e 3.4, por isso, as omitiremos.

Lema 3.5 *Suponhamos válidas as hipóteses do teorema 3.3. Se existem $c \in \mathbb{R}$ e sequência (U_n) em $(H(\Omega), \|\cdot\|_C)$, tais que $\|U_n\|_C \to +\infty$, $I(U_n) \to c$ e $\|I'(U_n)\|_C^* \|U_n\| \to 0$, quando $n \to +\infty$, então existe $\Omega_0 \subset \Omega$, com $|\Omega_0| > 0$, tal que $|U_n(x)| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$, para q.t.p. $x \in \Omega_0$ ou existe $\Omega_1 \subset \partial\Omega$, com $|\Omega_1|_\sigma > 0$, tal que $|U_n(x)| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$, para q.t.p. $x \in \Omega_1$.*

Lema 3.6 *Se valerem as hipóteses do teorema 3.3, então I satisfaz a condição $(Ce)_c$, em qualquer nível $c \in \mathbb{R}$.*

Em razão da validade da seção 2.5, do capítulo 2, $H(\Omega) = \mathbb{F}_j \oplus \left(\mathbb{F}_j^\perp \cap H(\Omega)\right)$, sendo $dim \mathbb{F}_j < \infty$ e $j \in \mathbb{N}$ fixado. Assim, com o intuito de aplicarmos o teorema 3.8, mostraremos a validade das hipóteses exigidas para a aplicação do mesmo. Ora, como o lema 3.6 é válido, precisamos provar apenas que existe $R > 0$ tal que

$$\sup_{U \in \partial \mathbb{D}} I(U) \leq \inf_{V \in \mathbb{F}_j^\perp \cap H(\Omega)} I(V), \tag{3.104}$$

sendo $\mathbb{D} = \{U \in \mathbb{F}_j : \|U\|_C \leq R\}$. Primeiramente, mostraremos que o funcional $-I$ é coercivo sobre $\mathbb{F}_j$, posteriormente que I é coercivo sobre $\mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega)$ e, logo a seguir, provaremos (3.104).

Afirmação 1': $-I$ é coercivo sobre $\mathbb{F}_j$.

De fato, devido à condição **(A3)** e à continuidade de G e F, segue que, dado $\epsilon > 0$, existe constante $\tilde{C} > 0$, tal que, se $x \in \overline{\Omega}$ e $U \in \mathbb{R}^2$,

$$(A-\epsilon)\frac{(u^2+v^2)}{2} - \tilde{C} \leq G(x,U) \leq (B+\epsilon)\frac{(u^2+v^2)}{2} + \tilde{C} \tag{3.105}$$

e

$$(\alpha-\epsilon)\frac{(u^2+v^2)}{2} - \tilde{C} \leq F(x,U) \leq (\beta+\epsilon)\frac{(u^2+v^2)}{2} + \tilde{C}. \tag{3.106}$$

Temos, deste modo, para $U \in \mathbb{F}_j$, que existe constante $\overline{C} > 0$, tal que

$$\begin{aligned} I(U) &= \tfrac{1}{2}\|U\|_C^2 - \textstyle\int_\Omega F(x,U)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,U)d\sigma \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|U\|_C^2 + \tilde{P}(x,U) + \tilde{Q}(x,U) + \overline{C}, \end{aligned} \tag{3.107}$$

onde $\tilde{P}(x,U) = -\frac{1}{2}(\alpha-\epsilon)\|U\|_2^2$ e $\tilde{Q}(x,U) = -\frac{1}{2}(A-\epsilon)\|U\|_{2,\partial}^2$. Logo, ao assumirmos, sem perda de generalidade, $A < 0$ em **(A3)**, obtemos, devido à $\alpha > \lambda_j > 0$ e às desigualdades (2.17) e (3.3), para $\epsilon > 0$, tal que $\alpha - \epsilon > 0$,

$$\tilde{P}(x,U) \leq -\frac{1}{2}(\alpha-\epsilon)\lambda_j^{-1}\|U\|_C^2 \text{ e } \tilde{Q}(x,U) \leq -\frac{1}{2}(A-\epsilon)\mu_1^{-1}\|U\|_C^2.$$

Agora, por hipótese, $\lambda_j\mu_1 < \lambda_j A + \mu_1\alpha$. Também sabemos que $\lambda_j \geq \lambda_1 > 0$ e $\mu_1 > 0$. Assim, ao escolhermos $\epsilon > 0$ tal que $\alpha - \epsilon > 0$ e $1 - \frac{A}{\mu_1} - \frac{\alpha}{\lambda_j} + \frac{\epsilon}{\lambda_j} + \frac{\epsilon}{\mu_1} < 0$ ocorram, concluímos, devido à (3.107), que

$$\begin{aligned} I(U) &\leq \tfrac{1}{2}\|U\|_C^2 - \tfrac{1}{2}(\alpha-\epsilon)\lambda_j^{-1}\|U\|_C^2 - \tfrac{1}{2}(A-\epsilon)\mu_1^{-1}\|U\|_C^2 + \overline{C} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{A}{\mu_1} - \tfrac{\alpha}{\lambda_j} + \tfrac{\epsilon}{\lambda_j} + \tfrac{\epsilon}{\mu_1}\right)\|U\|_C^2 + \overline{C}. \end{aligned} \tag{3.108}$$

Daí, $I(U) \to -\infty$, quando $U \in \mathbb{F}_j$ e $\|U\|_C \to +\infty$. Ou seja, $-I(U) \to +\infty$, quando $U \in \mathbb{F}_j$ e $\|U\|_C \to +\infty$. Portanto, a afirmação 1' é verdadeira.

Afirmação 2': I é coercivo sobre $\mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega)$.

De fato, seja $U \in \mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega)$. Então, devido às desigualdades (3.105) e (3.106), temos, para $\epsilon > 0$ e $x \in \overline{\Omega}$, que existe constante $\tilde{C} > 0$, tal que

$$\begin{aligned} I(U) &= \tfrac{1}{2}\|U\|_C^2 - \textstyle\int_\Omega F(x,U)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,U)d\sigma \\ &\geq \tfrac{1}{2}\|U\|_C^2 + P_1(x,U) + Q_1(x,U) + \tilde{C}, \end{aligned} \tag{3.109}$$

onde $P_1(x,U) = -\frac{1}{2}(\beta+\epsilon)\|U\|_2^2$ e $Q_1(x,U) = -\frac{1}{2}(B+\epsilon)\|U\|_{2,\partial}^2$. Consequentemente, ao assumirmos, sem perda de generalidade, $B \geq 0$ em **(A3)** e notarmos que $\beta > \lambda_1 > 0$, obtemos, das desigualdades (2.14) e (3.3), para $\epsilon > 0$, $P_1(x,U) \geq -\frac{1}{2}\lambda_{j+1}^{-1}(\beta+\epsilon)\|U\|_C^2$ e $Q_1(x,U) \geq -\frac{1}{2}\mu_1^{-1}(B+\epsilon)\|U\|_C^2$. Finalmente, por hipótese, $\lambda_{j+1}B + \mu_1\beta < \lambda_{j+1}\mu_1$. Deste modo, ao escolhermos $\epsilon > 0$, tal que $1 - \frac{B}{\mu_1} - \frac{\beta}{\lambda_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_{j+1}} > 0$, concluímos, por (3.109), que

$$\begin{aligned} I(U) &\geq \tfrac{1}{2}\|U\|_C^2 - \tfrac{1}{2}\lambda_{j+1}^{-1}(\beta+\epsilon)\|U\|_C^2 - \tfrac{1}{2}\mu_1^{-1}(B+\epsilon)\|U\|_C^2 + \tilde{C} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{B}{\mu_1} - \tfrac{\beta}{\lambda_{j+1}} - \tfrac{\epsilon}{\mu_1} - \tfrac{\epsilon}{\lambda_{j+1}}\right)\|U\|_C^2 + \tilde{C}. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Como consequência disso, ao fazermos $\|U\|_C \to +\infty$, com $U \in \mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega)$, $I(U) \to +\infty$, ou seja, I é coercivo sobre $\mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega)$, como desejávamos.

Afirmação 3': Existe $R > 0$ tal que

$$\sup_{U \in \partial\mathbb{D}} I(U) \leq \inf_{V \in \mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega)} I(V), \tag{3.111}$$

sendo $\mathbb{D} = \{U \in \mathbb{F}_j : \|U\|_C \leq R\}$.

De fato, pela afirmação 2', I é coercivo sobre $\mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega)$. Deste modo, dado, digamos, $1 > 0$, existe $R_1 > 0$, tal que $I(U) \geq 1$, $\forall\ U \in \mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega)$, com $\|U\|_C > R_1$. Além disso, se $U \in \mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega)$ satisfaz $\|U\|_C \leq R_1$, então, por (3.110), para $\epsilon > 0$, tal que $1 - \frac{B}{\mu_1} - \frac{\beta}{\lambda_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_{j+1}} > 0$, $I(U) \geq -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{B}{\mu_1} - \frac{\beta}{\lambda_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_{j+1}}\right)R_1^2 \doteq R_2$. Por conseguinte,

$$\inf_{U \in \mathbb{F}_j^{\perp} \cap H(\Omega)} I(U) \geq R_2. \tag{3.112}$$

Agora, devido à validade da afirmação 1', dado $R_3 < R_2$, existe $R > 0$, tal que, para qualquer $U \in \mathbb{F}_j$, com $\|U\|_C \geq R$, $I(U) < R_3 < R_2$. Consequentemente,

$$\sup_{U \in \partial \mathbb{D}} I(U) \leq R_3 < R_2, \tag{3.113}$$

onde $\mathbb{D} = \{U \in \mathbb{F}_j : \|U\|_C \leq R\}$. Finalmente, ao combinarmos as desigualdades (3.112) e (3.113), concluímos que a condição (3.111) é válida. Com isso, finalizamos a prova da afirmação 3'. Devido à validade da proposição 3.4, do lema 3.4 e da afirmação 3', as hipóteses do teorema 3.8 são satisfeitas. Logo, o funcional I possui um ponto crítico $U \in H(\Omega)$, o qual é uma solução fraca para o sistema (3.1). Com isso, finalizamos a prova do teorema 3.3.

∎

Capítulo

4

O primeiro autovalor de Steklov e de Neumann para equações envolvendo o operador p-laplaciano

Construiremos, neste capítulo, dois "primeiros" autovalores, um associado ao auto-problema

$$\begin{cases} -\triangle_p u + c(x)|u|^{p-2}u = 0, & se\ x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \mu|u|^{p-2}u, & se\ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

e outro, ao auto-problema

$$\begin{cases} -\triangle_p u + c(x)|u|^{p-2}u = \lambda|u|^{p-2}u, & se\ x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & se\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira, $\partial\Omega$, de classe $C^{0,1}$, $\triangle_p u$ é o p-laplaciano de u, $p \in (1, \infty)$, $\dfrac{\partial}{\partial \eta} = \eta \cdot \nabla$ é derivada normal (unitária) exterior a $\partial\Omega$ e $c : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte condição:

(PLP) $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq 0$, para q.t.p. $x \in \Omega$ e vale $\int_\Omega c(x)dx > 0$.

No transcorrer, deste capítulo, assumiremos estas hipóteses válidas. Na seção 1, provaremos alguns resultados preliminares, necessários para a construção de tais auto-valores. O primeiro, o qual denominaremos "primeiro autovalor de Steklov" associado ao auto-problema (4.1), será construído na seção 2. Já na seção 3, construiremos o segundo autovalor em questão, que denominaremos "primeiro autovalor de Neumann" associado ao auto-problema (4.2).

4.1 Resultados Preliminares

Inicialmente, lembremos que, para $p \in (1, \infty)$, $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ é um espaço de Banach, uniformemente convexo, logo reflexivo, onde

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega [|\nabla u|^p + |u|^p]\, dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.3}$$

Ainda, como $c : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição **(PLP)**, podemos mostrar que

$$\|u\|_c = \left(\int_\Omega [|\nabla u|^p + c(x)|u|^p]\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.4}$$

também define uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$. Veremos, no que segue, que tais normas são equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$. Com este intuito, mostraremos, antes, alguns lemas.

Lema 4.1 *O funcional $\phi : (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}) \to \mathbb{R}$, definido por $\phi(u) = \|u\|_c$, é contínuo e convexo.*

Prova: A prova da convexidade de ϕ é imediata, pois $\|\cdot\|_c$ define uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$. Provemos a continuidade de ϕ. Para isso, seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, por $c(x) \in L^\infty(\Omega)$,

$$\phi(u)^p = \|u\|_c^p = \||\nabla u|\|_p^p + \int_\Omega c(x)|u(x)|^p dx \leq \max\{1, \|c(x)\|_\infty\}\|u\|_{1,p}^p.$$

Portanto, ao denotarmos $A = \max\{1, \|c(x)\|_\infty\}^{\frac{1}{p}}$, que é uma constante positiva,

$$\|u\|_c \leq A\|u\|_{1,p}, \ \forall\ u \in W^{1,p}(\Omega), \tag{4.5}$$

Daí segue a continuidade de ϕ.

■

Observação 1: Como o funcional ϕ, definido no lema 4.1, é contínuo e convexo, segue que ele é fracamente sequencialmente contínuo em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$. Logo, toda sequência

(u_m), tal que $u_m \rightharpoonup u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ satisfaz

$$\liminf_{n\to+\infty} \phi(u_n) \geq \phi(u). \tag{4.6}$$

Lema 4.2 *Existe $\delta > 0$, tal que*

$$\|u\|_c^p \geq \delta \|u\|_p^p, \ \forall \ u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{4.7}$$

Prova: Sejam $S = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_p = 1\}$ e $\delta = \inf_{u\in S} \|u\|_c^p$.

Afirmação 1: Existe $\widehat{u} \in S$, tal que $\|\widehat{u}\|_c^p = \delta$.

De fato, da definição de ínfimo, existe sequência em S, (u_m), tal que

$$\|u_m\|_c^p \to \delta, \ \textit{quando} \ m \to +\infty \ \textit{e} \ \|u_m\|_c^p < \delta + 1. \tag{4.8}$$

Agora, visto que $\|u_m\|_{1,p}^p = \||\nabla u_m|\|_p^p + \|u_m\|_p^p$ e $u_m \in S$, $\|u_m\|_{1,p}^p = \||\nabla u_m|\|_p^p + 1$. Por conseguinte, em razão da validade de **(PLP)**, $\|u_m\|_c^p \geq \|u_m\|_{1,p}^p - 1$. De onde segue que $\|u_m\|_{1,p}^p \leq \delta + 2$, ou seja, a sequência (u_m) é limitada em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$. Com isso e pelo fato de $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ ser um espaço reflexivo, existem subsequência (u_{m_k}) de (u_m) e $\widehat{u} \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que

$$u_{m_k} \rightharpoonup \widehat{u} \ em \ (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}). \tag{4.9}$$

Por isso e por (4.8), segue, da observação 1, desta seção, que

$$\|\widehat{u}\|_c \leq \liminf_{k\to+\infty} \|u_{m_k}\|_c = \delta^{\frac{1}{p}}.$$

Ainda, pela validade de (4.9), concluímos, devido ao teorema 6.9, que $u_{m_k} \to \widehat{u}$ em $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$. Consequentemente, em razão de $u_{m_k} \in S$ e da continuidade da norma $\|\cdot\|_p$, $\widehat{u} \in S$. Com isso e por $\|\widehat{u}\|_c \leq \delta^{\frac{1}{p}}$, temos $\delta = \|\widehat{u}\|_c^p$, ficando assim provada a afirmação 1.

Afirmação 2: $\delta > 0$.

De fato, se $\delta = 0$, então, pela afirmação 1, $\|\widehat{u}\|_c^p = 0$. Consequentemente, $\widehat{u} = 0$ em

$W^{1,p}(\Omega)$, o que é um absurdo, pois $\widehat{u} \in S$. Daí segue a validade da afirmação 2. Agora, estamos aptos a demonstrar a desigualdade (4.7). Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ for tal que $u = 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, então a igualdade em (4.7) é facilmente verificada. Caso $u \in W^{1,p}(\Omega)$ seja não trivial, então consideremos $v = \frac{u}{\|u\|_p} \in W^{1,p}(\Omega)$. Assim, $\|v\|_p = 1$, ou seja, $v \in S$. Logo, $\|v\|_c^p \geq \delta$. De onde segue que $\|u\|_c^p \geq \delta \|u\|_p^p$. E isso conclui a demonstração da desigualdade (4.7).

∎

Proposição 4.1 *As normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ são equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Prova: Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, como $c(x)$ satisfaz a condição **(PLP)**, $\|u\|_{1,p}^p \leq \|u\|_c^p + \|u\|_p^p$. Consequentemente, devido à desigualdade (4.7), dada no lema 4.2, $\|u\|_{1,p}^p \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \|u\|_c^p$, de onde vem que

$$\|u\|_{1,p} \leq \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)} \|u\|_c.$$

Por isso e pela validade da desigualdade (4.5), segue a equivalência das normas $\|\cdot\|_{1,p}$, $\|\cdot\|_c$ em $W^{1,p}(\Omega)$.

∎

Observação 2: Como consequência imediada, da proposição anterior, temos que o espaço $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é um espaço de Banach. Nos próximos dois resultados, mostraremos duas propriedades, essenciais para o nosso trabalho, do espaço $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$.

Proposição 4.2 *O espaço $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é uniformemente convexo.*

Prova: Observamos, inicialmente, que devido a $c(x) \geq 0$, para q.t.p. $x \in \Omega$, temos para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\||\nabla u|\|_p^p + \|c(x)^{\frac{1}{p}} u\|_p^p = \|u\|_c^p$. Para o que segue, sejam $\epsilon > 0$ e u, v elementos de $W^{1,p}(\Omega)$, tais que

$$\|u\|_c \leq 1, \ \|v\|_c \leq 1 \text{ e } \|\mathrm{u} - \mathrm{v}\|_c > \epsilon. \tag{4.10}$$

Afirmação 1: $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é uniformemente convexo, quando $2 \leq p < \infty$.

De fato, pela primeira desigualdade de Clarkson em $L^p(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\|\tfrac{u+v}{2}\|_c^p + \|\tfrac{u-v}{2}\|_c^p &= \||\tfrac{\nabla(u+v)}{2}|\|_p^p + \||\tfrac{\nabla(u-v)}{2}|\|_p^p + \|\tfrac{c(x)^{\frac{1}{p}}(u+v)}{2}\|_p^p + \|\tfrac{c(x)^{\frac{1}{p}}(u-v)}{2}\|_p^p \\
&\leq \tfrac{1}{2}\left(\||\nabla u|\|_p^p + \||\nabla v|\|_p^p\right) + \tfrac{1}{2}\left(\|c(x)^{\frac{1}{p}}u\|_p^p + \|c(x)^{\frac{1}{p}}v\|_p^p\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\|u\|_c + \|v\|_c\right).
\end{aligned}$$

Por isso e por (4.10), $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_c^p < 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p$. Logo, ao tomarmos $\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0$, $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_c < 1 - \delta$. Portanto, a afirmação 1 é verdadeira.

Afirmação 2: $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é uniformemente convexo, quando $1 < p < 2$.

De fato, como $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ e $c(x) \in L^\infty(\Omega)$, temos, ao denotarmos $p' = \frac{p}{p-1}$, que

$$c(x)^{\frac{1}{(p-1)}}\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'},\ c(x)^{\frac{1}{(p-1)}}\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'},\ \left|\frac{\nabla u+\nabla v}{2}\right|^{p'},\ \left|\frac{\nabla u-\nabla v}{2}\right|^{p'} \in L^{p-1}(\Omega).$$

Como $1 < p < 2$, $0 < p-1 < 1$. Assim, pela desigualdade reversa de Minkowski,

$$\left\|c(x)^{\frac{1}{(p-1)}}\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1} + \left\|c(x)^{\frac{1}{(p-1)}}\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1} \leq \left\|c(x)^{\frac{1}{(p-1)}}\left(\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right)\right\|_{p-1} \tag{4.11}$$

e

$$\left\|\left|\frac{\nabla u+\nabla v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1} + \left\|\left|\frac{\nabla u-\nabla v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1} \leq \left\|\left|\frac{\nabla u+\nabla v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{\nabla u-\nabla v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1}. \tag{4.12}$$

Mas também,

$$\begin{aligned}
\|\tfrac{u+v}{2}\|_c^{p'} + \|\tfrac{u-v}{2}\|_c^{p'} &= \left(\left\|\left|\tfrac{\nabla(u+v)}{2}\right|\right\|_p^p + \left\|\tfrac{c(x)^{\frac{1}{p}}(u+v)}{2}\right\|_p^p\right)^{\frac{p'}{p}} + \\
&+ \left(\left\|\left|\tfrac{\nabla(u-v)}{2}\right|\right\|_p^p + \left\|\tfrac{c(x)^{\frac{1}{p}}(u-v)}{2}\right\|_p^p\right)^{\frac{p'}{p}}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Além disso, como $1 < p < 2$, temos $q = \frac{p'}{p} = \frac{1}{p-1} > 1$. Por conseguinte, $|\cdot|_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, dada por $|(x,y)|_q = (|x|^q + |y|^q)^{\frac{1}{q}}$, $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, define uma norma em $\mathbb{R}^2$. Consequentemente, ao denotarmos

$$A = \left(\left\| \left| \frac{\nabla u + \nabla v}{2} \right| \right\|_p^p , \left\| \left| \frac{\nabla u - \nabla v}{2} \right| \right\|_p^p \right) = (A_1, A_2)$$

e

$$B = \left(\left\| \frac{c(x)^{\frac{1}{p}}(u+v)}{2} \right\|_p^p , \left\| \frac{c(x)^{\frac{1}{p}}(u-v)}{2} \right\|_p^p \right) = (B_1, B_2),$$

$$\begin{aligned} \left\| \tfrac{u+v}{2} \right\|_c^{p'} + \left\| \tfrac{u-v}{2} \right\|_c^{p'} &= (A_1 + B_1)^q + (A_2 + B_2)^q = |A + B|_q^q \\ &\leq (|A|_q + |B|_q)^q = \left((A_1^q + A_2^q)^{\frac{1}{q}} + (B_1^q + B_2^q)^{\frac{1}{q}} \right)^q . \end{aligned} \tag{4.14}$$

Mas, por (4.11) e (4.12), temos

$$\begin{aligned} A_1^q + A_2^q &= \left[\int_\Omega \left| \tfrac{\nabla u + \nabla v}{2} \right|^p dx \right]^q + \left[\int_\Omega \left| \tfrac{\nabla u - \nabla v}{2} \right|^p dx \right]^q \\ &= \left[\int_\Omega \left| \tfrac{\nabla u + \nabla v}{2} \right|^{p'(p-1)} dx \right]^{\frac{1}{p-1}} + \left[\int_\Omega \left| \tfrac{\nabla u - \nabla v}{2} \right|^{p'(p-1)} dx \right]^{\frac{1}{p-1}} \\ &= \left\| \left| \tfrac{\nabla u + \nabla v}{2} \right|^{p'} \right\|_{p-1} + \left\| \left| \tfrac{\nabla u - \nabla v}{2} \right|^{p'} \right\|_{p-1} \leq \left\| \left| \tfrac{\nabla u + \nabla v}{2} \right|^{p'} + \left| \tfrac{\nabla u - \nabla v}{2} \right|^{p'} \right\|_{p-1} \end{aligned} \tag{4.15}$$

e

$$\begin{aligned} B_1^q + B_2^q &= \left[\int_\Omega c(x) \left| \tfrac{u+v}{2} \right|^p dx \right]^q + \left[\int_\Omega c(x) \left| \tfrac{u-v}{2} \right|^p dx \right]^q \\ &= \left[\int_\Omega c(x)^{\frac{p-1}{p-1}} \left| \tfrac{u+v}{2} \right|^{p'(p-1)} dx \right]^{\frac{1}{p-1}} + \left[\int_\Omega c(x)^{\frac{p-1}{p-1}} \left| \tfrac{u-v}{2} \right|^{p'(p-1)} dx \right]^{\frac{1}{p-1}} \\ &= \left\| c(x)^{\frac{1}{(p-1)}} \left| \tfrac{u+v}{2} \right|^{p'} \right\|_{p-1} + \left\| c(x)^{\frac{1}{(p-1)}} \left| \tfrac{u-v}{2} \right|^{p'} \right\|_{p-1} \\ &\leq \left\| c(x)^{\frac{1}{(p-1)}} \left(\left| \tfrac{u+v}{2} \right|^{p'} + \left| \tfrac{u-v}{2} \right|^{p'} \right) \right\|_{p-1} . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Ao combinarmos as desigualdades (4.15) e (4.16) com (4.14), concluímos que

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_c^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_c^{p'} &\leq \left\{ \left\| \left|\frac{\nabla u+\nabla v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{\nabla u-\nabla v}{2}\right|^{p'} \right\|_{p-1}^{p-1} + \right. \\
&\left. + \left\| c(x)^{\frac{1}{(p-1)}} \left(\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'} \right) \right\|_{p-1}^{p-1} \right\}^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \left\{ \int_\Omega \left(\left|\frac{\nabla u+\nabla v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{\nabla u-\nabla v}{2}\right|^{p'} \right)^{p-1} dx + \right. \\
&\left. + \int_\Omega c(x) \left(\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'} \right)^{p-1} dx \right\}^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Por isso e pela segunda desigualdade de Clarkson em $\mathbb{R}^N$,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_c^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_c^{p'} &\leq \left[\int_\Omega \frac{1}{2} \left(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p \right) dx + \int_\Omega \frac{c(x)}{2} \left(|u|^p + |v|^p \right) dx \right]^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\|u\|_c^p + \frac{1}{2}\|v\|_c^p \right)^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Daí, devido à (4.10), $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_c^{p'} < 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p'}$. Por conseguinte, $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_c < 1 - \delta$, sendo $\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} > 0$, $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_c < 1 - \delta$. Ou seja, $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é uniformemente convexo, quando $1 < p < 2$, como queríamos. Da validade das afirmações 1 e 2, segue a veracidade da proposição 4.2.

■

Proposição 4.3 *O espaço* $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ *é reflexivo.*

Prova: Pela proposição 4.2, o espaço $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é uniformemente convexo. Assim, em razão do teorema de Milmam-Pettis, $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é um espaço reflexivo.

■

O próximo resultado refere-se ao operador $\varphi : W^{1,p}(\Omega) \to [L^{p'}(\Omega)]^N$, definido por

$$
\varphi(u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \ \forall\ u \in W^{1,p}(\Omega), \tag{4.17}
$$

onde $W^{1,p}(\Omega)$ está munido da norma $\|\cdot\|_c$ e $[L^{p'}(\Omega)]^N$, da norma

$$
|||U|||_{p'} = \|u_1\|_{p'} + \cdots + \|u_N\|_{p'}, \ \forall\ U = (u_1, \cdots, u_N) \in [L^{p'}(\Omega)]^N.
$$

Além disso, $p^{'}$ representa o expoente conjugado de p. Claro que φ está bem definido, pois se u for um elemento em $W^{1,p}(\Omega)$, $|\nabla u| \in L^p(\Omega)$. De onde segue que $|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p^{'}}(\Omega)$, para $i = 1, 2, \cdots, N$. Ou seja, $\varphi(u) \in [L^{p^{'}}(\Omega)]^N$.

Lema 4.3 *O operador φ é contínuo.*

Prova: Primeiramente, notamos que, para $U = (u_1, \cdots, u_N) \in [L^{p^{'}}(\Omega)]^N$, em razão da equivalencia das normas em $\mathbb{R}^N$ e do teorema 6.1, existem constantes $K_1, K_2 > 0$, tais que

$$\begin{aligned} |||U|||_{p'}^{p^{'}} &= \left(\sum_{i=1}^{N} \|u_i\|_{p'}\right)^{p^{'}} \leq K_1 \sum_{i=1}^{N} \|u_i\|_{p'}^{p^{'}} = K_1 \int_\Omega [\sum_{i=1}^{N} |u_i|^{p^{'}}]^{\frac{p^{'}}{p^{'}}} dx \\ &= K_1 \int_\Omega |U|_{p'}^{p^{'}} dx \leq K_2 \int_\Omega |U|^{p^{'}} dx. \end{aligned}$$

Sejam (u_n) uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que

$$u_n \to u \textit{ em } (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c). \tag{4.18}$$

Mostremos que $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ em $([L^{p^{'}}(\Omega)]^N, |||\cdot|||_{p'})$. Temos dois casos a analisar.

Caso 1: $2 < p < \infty$.

Em razão do teorema 6.4,

$$\begin{aligned} |||\varphi(u_n) - \varphi(u)|||_{p'}^{p^{'}} &\leq K_2 \int_\Omega |\varphi(u_n) - \varphi(u)|^{p^{'}} dx = K_2 \int_\Omega ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{p^{'}} dx \\ &\leq K_2 \tilde{A}^{p^{'}} \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^{p^{'}} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p^{'}(p-2)} dx. \end{aligned}$$

Mas também, $|\nabla u_n - \nabla u|^{p^{'}} \in L^{\frac{p}{p^{'}}}(\Omega)$ e $(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p^{'}(p-2)} \in L^{\frac{p}{p^{'}(p-2)}}(\Omega)$. Logo, pela desigualdade de Hölder, se $K_3 = K_2 \tilde{A}^{p^{'}}$,

$$|||\varphi(u_n) - \varphi(u)|||_{p'}^{p^{'}} \leq K_3 |||\nabla(u_n - u)|||_p^{p^{'}} |||\nabla u_n| + |\nabla u|||_p^{p^{'}(p-2)}, \tag{4.19}$$

Agora, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos $|||\nabla u|||_p^p \leq \|u\|_c^p$. Deste modo, devido ao teorema 6.1, à (4.19) e à desigualdade de Minkowski, existe constante $K_4 > 0$, tal que

$$|||\varphi(u_n) - \varphi(u)|||_{p'}^{p^{'}} \leq K_4 \|u_n - u\|_c^{p^{'}} (\|u_n\|_c^{p^{'}(p-2)} + \|u\|_c^{p^{'}(p-2)}). \tag{4.20}$$

Por isso e por (4.18), $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$, em $([L^{p'}(\Omega)]^N, ||| \cdot |||_{p'})$. Ou seja, o operador φ é contínuo, quando $2 < p < \infty$.

Caso 2: $1 < p \leq 2$.

Segue, do teorema 6.4, que existe constante $K_4 = K_2 \tilde{B}^{p'} > 0$, tal que

$$\begin{aligned} |||\varphi(u_n) - \varphi(u)|||_{p'}^{p'} &\leq K_2 \int_\Omega |\varphi(u_n) - \varphi(u)|^{p'} dx = K_2 \int_\Omega ||\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u|^{p'} dx \\ &\leq K_2 \tilde{B}^{p'} \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^{p'(p-1)} dx = K_4 \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p dx \\ &= K_4 ||| \nabla (u_n - u) |||_p^p \leq K_4 \|u_n - u\|_c^p, \end{aligned}$$

Consequentemente, pela validade de (4.18), $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ em $([L^{p'}(\Omega)]^N, ||| \cdot |||_{p'})$.

∎

No próximo lema, mostramos a continuidade de $\Psi_c : (W^{1,p}(\Omega), \| \cdot \|_c) \to L^{p'}(\Omega)$ e $\Psi : (W^{1,p}(\Omega), \| \cdot \|_c) \to L^{p'}(\partial\Omega)$, os quais são operadores definidos por

$$\Psi_c(u) = c(x)|u|^{p-2}u \ e \ \Psi(u) = |u|^{p-2}u. \tag{4.21}$$

Tanto Ψ_c, quanto Ψ estão bem definidos. Com efeito, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$|c(x)|u|^{p-2}u|^{p'} \leq \|c(x)\|_\infty^{p'} |u|^p \ e \ ||u|^{p-2}u|^{p'} \leq |u|^p.$$

Consequentemente, em razão das normas $\| \cdot \|_c$, $\| \cdot \|_{1,p}$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$ e da validade do teorema 6.10, existem constantes positivas K, K_1, tais que

$$\|\Psi_c(u)\|_{p'} \leq \|c(x)\|_\infty^{\frac{p'}{p}} \|u\|_p \leq \|c(x)\|_\infty^{\frac{p'}{p}} \|u\|_{1,p} \leq K \|c(x)\|_\infty^{\frac{p'}{p}} \|u\|_c < \infty \tag{4.22}$$

e

$$\|\Psi(u)\|_{p'} \leq \|u\|_{p,\partial} \leq K_1 \|u\|_{1,p} \leq K K_1 \|u\|_c < \infty. \tag{4.23}$$

Daí segue a boa definição de Ψ_c e Ψ.

Lema 4.4 *Os operadores Ψ_c e Ψ são contínuos.*

Prova: Para provarmos a continuidade de Ψ_c e Ψ, sejam (u_n) uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que

$$u_n \to u \ em \ (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c). \tag{4.24}$$

Prova da continuidade de Ψ_c:

Caso 1: $2 < p < \infty$.

Graças à validade do teorema 6.4 e à $c \in L^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}\|\Psi_c(u_n) - \Psi_c(u)\|_{p'}^{p'} &= \int_\Omega c(x)^{p'} ||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u|^{p'} dx \\ &\leq \tilde{A}^{p'} \|c(x)\|_\infty^{p'} \int_\Omega |u_n - u|^{p'} (|u_n| + |u|)^{p'(p-2)} dx.\end{aligned}$$

Disso e do fato de $|u_n - u|^{p'} \in L^{\frac{p}{p'}}(\Omega)$ e $(|u_n| + |u|)^{p'(p-2)} \in L^{\frac{p}{p'(p-2)}}(\Omega)$, segue, pela desigualdade de Hölder, que

$$\|\Psi_c(u_n) - \Psi_c(u)\|_{p'}^{p'} \leq \tilde{A}^{p'} \|c(x)\|_\infty^{p'} \|u_n - u\|_p^{p'} \||u_n| + |u|\|_p^{p'(p-2)}. \tag{4.25}$$

Consequentemente, devido aos teoremas 6.1 e 6.9, à desigualdade de Minkowski e às normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, existe constante $K_2 > 0$, tal que

$$\|\Psi_c(u_n) - \Psi_c(u)\|_{p'}^{p'} \leq K_2 \|u_n - u\|_c^{p'} (\|u_n\|_c^{p'(p-2)} + \|u\|_c^{p'(p-2)}). \tag{4.26}$$

Por isso e por (4.24), concluímos que $\Psi_c(u_n) \to \Psi_c(u)$ em $(L^{p'}(\Omega), \|\cdot\|_{p'})$, ou seja, o operador Ψ_c é contínuo, quando $2 < p < \infty$.

Caso 2: $1 < p \leq 2$.

Segue, do teorema 6.4, que

$$\begin{aligned}\|\Psi_c(u_n) - \Psi_c(u)\|_{p'}^{p'} &= \int_\Omega c(x)^{p'} ||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u|^{p'} dx \\ &\leq \tilde{B}^{p'} \|c(x)\|_\infty^{p'} \int_\Omega |u_n - u|^{p'(p-1)} dx = K_3 \int_\Omega |u_n - u|^p dx \\ &= K_3 \|u_n - u\|_p^p \leq K_4 \|u_n - u\|_c^p,\end{aligned}$$

onde $K_3 = \tilde{B}^{p'} \|c(x)\|_\infty^{p'}, K_4$ são constantes positivas. Combinando isso à (4.24), obtemos $\Psi_c(u_n) \to \Psi_c(u)$ em $(L^{p'}(\Omega), \|\cdot\|_{p'})$. Logo, Ψ_c é contínuo, quando $1 < p \leq 2$. Por isso, e em virtude da validade do caso 1, segue que Ψ_c é um operador contínuo.

Prova da continuidade de Ψ:

Esta prova é uma simples adaptação da prova da continuidade de Ψ_c, basta considerarmos $c(x) = 1$ e $\partial\Omega$, $\|\cdot\|_{p,\partial}$ e teorema 6.10 ao invés de Ω, $\|\cdot\|_p$ e teorema 6.9. Daí segue a validade do lema em questão.

$\blacksquare$

O próximo resultado fornece propriedades para $\Upsilon_c, \tilde{\delta}, \beta : (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c) \to \mathbb{R}$, os quais são funcionais definidos por

$$\Upsilon_c(u) = \|u\|_c^p,\ \tilde{\delta}(u) = \|u\|_p^p - 1 \ e\ \beta(u) = \|u\|_{p,\partial}^p,\ \forall\ u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{4.27}$$

Proposição 4.4 *Os funcionais, definidos em (4.27), são elementos de $C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivadas de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$,*

$$\Upsilon_c'(u)(v) = p\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + c(x)|u|^{p-2}uv\right] dx, \tag{4.28}$$

$$\tilde{\delta}'(u)(v) = p\int_{\partial\Omega} |u|^{p-2}uvdx \ e\ \beta'(u)(v) = p\int_{\partial\Omega} |u|^{p-2}uvd\sigma,\ \forall\ v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{4.29}$$

Além disso, β é um funcional fracamente contínuo sobre $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$.

Prova: Provaremos esta proposição em três etapas, a saber:

Etapa 1: $\Upsilon_c \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a expressão (4.28).

De fato, temos, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\Upsilon_c(u) = A(u) + B(u)$, onde $A(u) \doteq \int_\Omega |\nabla u|^p dx$ e $B(u) \doteq \int_\Omega c(x)|u|^p dx$, $\forall\ u \in W^{1,p}(\Omega)$. Mostraremos, nas afirmações 1 e 2, a seguir, que A e B são elementos de $C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, daí seguirá a prova da etapa 1.

Afirmação 1: $A \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

De fato, seja $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definido por $F(x, y) = p\int_0^{|y|} s^{p-1}ds$, $\forall\ (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$. Assim, para $0 < h < 1$ e $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\frac{A(u + hv) - A(u)}{h} = \int_\Omega \frac{|\nabla u(x)+h\nabla v(x)|^p - |u(x)|^p}{h} dx = \int_\Omega \frac{F(x,\nabla u(x)+h\nabla v(x)) - F(x,\nabla u(x))}{h} dx$$

Ainda, dado $x \in \Omega$, pelo teorema do valor médio, existe $\lambda \in (0,1)$, tal que

$$\begin{aligned}
\frac{|F(x, \nabla u(x) + h\nabla v(x)) - F(x, \nabla u(x))|}{|h|} &\leq p|\nabla u(x) + \lambda h \nabla u(x)|^{p-1}|\nabla u(x)| \\
&\leq p\left(|\nabla u(x)| + |\nabla v(x)|\right)^{p-1}|\nabla v(x)| \\
&\leq 2^{p-1}p\left(|\nabla u(x)|^p + |\nabla v(x)|^p\right) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Logo, em razão do teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{A(u+hv)-A(u)}{h}\right] &= \lim_{h\to 0^+}\left[\int_\Omega \tfrac{|\nabla u(x)+h\nabla v(x)|^p - |\nabla v(x)|^p}{h}dx\right] \\
&= \int_\Omega \lim_{h\to 0^+}\left[\tfrac{F(x,\nabla u(x)+h\nabla v(x)) - F(x,\nabla u(x))}{h}\right]dx \\
&= p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx.
\end{aligned}$$

Argumentando de maneira semelhante, porém considerando $-1 < h < 0$, podemos mostrar que

$$\lim_{h\to 0^-}\left[\frac{A(u+hv)-A(u)}{h}\right] = p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx.$$

Portanto,

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{A(u+hv)-A(u)}{h}\right] = p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx,$$

Temos, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ fixado, que o funcional $T_u : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por $T_u(v) = p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v dx$, $\forall\, v \in W^{1,p}(\Omega)$, é linear e limitado. A linearidade de T_u é imediata. Provemos a limitação de T_u. Segue, das desigualdades de Schwarz em $\mathbb{R}^N$ e de Hölder, que

$$|T_u(v)| \leq p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-1}|\nabla v(x)|dx \leq p\||\nabla u|\|_p^{p-1}\||\nabla v|\|_p \leq p\|u\|_c^{p-1}\|v\|_c. \tag{4.30}$$

Consequentemente, T_u é limitado. E assim, o funcional A é diferenciável a Gateaux em $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tendo como derivada de Gateaux em u, $A^{'}(u) = T_u$. Finalmente, mostremos que $A^{'} : W^{1,p}(\Omega) \to [W^{1,p}(\Omega)]^*$, definido por $A^{'}(u) = T_u$, é um operador contínuo. Para isso, seja (u_n) uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que

$$u_n \to u \ em \ (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c). \tag{4.31}$$

Agora, para $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_N)$, como em (4.17), temos

$$\begin{aligned} |T_{u_n}(v) - T_u(v)| &\leq p \int_\Omega ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u||\nabla v| dx \\ &= p \int_\Omega |\varphi(u_n) - \varphi(u)||\nabla v| dx \end{aligned} \tag{4.32}$$

Mas também, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, existe $K > 0$, tal que

$$\||\varphi(u_n) - \varphi(u)|\|_{p'} \leq K\|\|\varphi(u_n) - \varphi(u)\|\|_{p'}, \tag{4.33}$$

Com efeito, devido ao teorema 6.1 e às normas em $\mathbb{R}^N$ serem equivalentes, conseguimos constantes positivas K_1, K, tais que

$$\begin{aligned} \||\varphi(u_n) - \varphi(u)|\|_{p'} &= \left[\int_\Omega |\varphi(u_n) - \varphi(u)|^{p'} dx\right]^{\frac{1}{p'}} = \{\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^N |\varphi_i(u_n) - \varphi_i(u)|\right]^{p'} dx\}^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq K_1 \left[\sum_{i=1}^N \|\varphi_i(u_n) - \varphi_i(u)\|_{p'}^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq K \sum_{i=1}^N \|\varphi_i(u_n) - \varphi_i(u)\|_{p'} = K\|\|\varphi(u_n) - \varphi(u)\|\|_{p'}. \end{aligned}$$

Deste modo, $|\varphi(u_n) - \varphi(u)| \in L^{p'}(\Omega)$ e claro que $|\nabla v| \in L^p(\Omega)$. Assim, ao aplicarmos a desigualdade de Hölder em (4.32) e utilizarmos a desigualdade (4.33), obtemos

$$|T_{u_n}(v) - T_u(v)| \leq p\||\varphi(u_n) - \varphi(u)|\|_{p'}\||\nabla v|\|_p \leq pK\|\varphi(u_n) - \varphi(u)\|_{p'}\||\nabla v|\|_p.$$

E, como $\||\nabla v|\|_p^p \leq \|v\|_c^p$, $|T_{u_n}(v) - T_u(v)| \leq pK\|\|\varphi(u_n) - \varphi(u)\|\|_{p'}\|v\|_c$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \|A'(u_n) - A'(u)\|_c^* &= \sup\{|A'(u_n) - A'(u)(v)| : v \in W^{1,p}(\Omega) \ e \ \|v\|_c = 1\} \\ &= \sup\{|T_{u_n}(v) - T_u(v)| : v \in W^{1,p}(\Omega) \ e \ \|v\|_c = 1\} \\ &\leq pK\|\|\varphi(u_n) - \varphi(u)\|\|_{p'}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Finalmente, por φ ser contínuo (lema 4.3) e por (4.31), $\|\|\varphi(u_n) - \varphi(u)\|\|_{p'} \to 0$, quando $n \to +\infty$. Portanto, de (4.34), $A'(u_n) \to A'(u)$ em $(W^{1,p}(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$, ou seja, o operador A' é contínuo. Com isso e devido à proposição 6.1, $A \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação 2: $B \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

De fato, para $0 < h < 1$ e $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\frac{B(u+hv) - B(u)}{h} = \int_\Omega c(x) \frac{|u(x)+hv(x)|^p - c(x)|u(x)|^p}{h} dx$$

Mas, dado $x \in \Omega$, pelo teorema do valor médio, existe $\lambda \in (0,1)$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{|c(x)|\,||u(x)+hv(x)|^p - |u(x)|^p|}{|h|} &= p|c(x)||u(x)+\lambda hv(x)|^{p-1}|v(x)| \\ &\leq p\|c(x)\|_\infty \left(|u(x)| + |v(x)|\right)^{p-1} |v(x)| \\ &\leq 2^{p-1} p\|c(x)\|_\infty \left(|u(x)|^p + |v(x)|^p\right) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Deste modo, devido ao teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \left[\frac{B(u+hv) - B(u)}{h}\right] &= \lim_{h\to 0^+} \left[\int_\Omega \tfrac{c(x)|u(x)+hv(x)|^p - c(x)|v(x)|^p}{h} dx\right] \\ &= \int_\Omega c(x) \lim_{h\to 0^+} \left[\tfrac{|u(x)+hv(x)|^p - |v(x)|^p}{h}\right] dx \\ &= p\int_\Omega c(x)|u(x)|^{p-2}u(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

De maneira análoga, porém, considerando $-1 < h < 0$, podemos mostrar que

$$\lim_{h\to 0^-} \left[\frac{B(u+hv) - B(u)}{h}\right] = p\int_\Omega c(x)|u(x)|^{p-2}u(x)v(x)dx.$$

Consequentemente,

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{B(u+hv) - B(u)}{h}\right] = p\int_\Omega c(x)|u(x)|^{p-2}u(x)v(x)dx,$$

Ainda, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ fixado, o funcional $S_u : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $S_u(v) = p\int_\Omega c(x)|u|^{p-2}uvdx$, $\forall\ v \in W^{1,p}(\Omega)$, é linear e limitado. A linearidade é imediata e a limitação segue da desigualdade de Hölder, pois

$$|S_u(v)| \leq p\|c(x)\|_\infty \int_\Omega |u(x)|^{p-1}|v(x)|dx \leq p\|c(x)\|_\infty \|u\|_p^{p-1}\|v\|_p \leq p\|c(x)\|_\infty \|u\|_c^{p-1}\|v\|_c.$$

Logo, o funcional B é diferenciável a Gateaux em $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tendo como derivada de Gateaux em u, $B'(u) = S_u$. Provemos que o operador $B' : W^{1,p}(\Omega) \to [W^{1,p}(\Omega)]^*$, definido por $B'(u) = S_u$, $\forall\ u \in W^{1,p}(\Omega)$ é contínuo. Para isso, sejam (u_n) uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que

$$u_n \to u \ em \ (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c). \tag{4.35}$$

Também, para $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e Ψ_c como em (4.21), temos, devido à desigualdade de Hölder, ao teorema 6.9 e às normas $\|\cdot\|_{1,p}$, $\|\cdot\|_c$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, que existe constante $D_1 > 0$, tal que

$$|S_{u_n}(v) - S_u(v)| \leq p\|\Psi_c(u_n) - \Psi_c(u)\|_{p'}\|v\|_p \leq pD_2\|\Psi_c(u_n) - \Psi_c(u)\|_{p'}\|v\|_c. \tag{4.36}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|B'(u_n) - B'(u)\|_c^* &= \sup\{|B'(u_n) - B'(u)(v)| : v \in W^{1,p}(\Omega) \ e \ \|v\|_c = 1\} \\ &= \sup\{|S_{u_n}(v) - S_u(v)| : v \in W^{1,p}(\Omega) \ e \ \|v\|_c = 1\} \\ &\leq pD_2\|\Psi_c(u_n) - \Psi_c(u)\|_{p'}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Por conseguinte, pela continuidade de Ψ_c (lema 4.4) e por (4.35), $\|\Psi_c(u_n) - \Psi_c(u)\|_{p'} \to 0$, quando $n \to +\infty$. E assim, de 4.37, $B'(u_n) \to B'(u)$ em $(W^{1,p}(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$. Daí segue a continuidade de B'. Com isso e pela proposição 6.1, concluímos que $B \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

Etapa 2: β e $\tilde{\delta}$ são elementos de $C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivadas de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$, as expressões dadas em (4.29).

Para provarmos que $\beta \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, repetimos a prova feita na afirmação 2 da etapa 1, considerando $c(x) = 1$ e $\partial\Omega$, $\|\cdot\|_{p,\partial}$, $\|\cdot\|_{p',\partial}$, β, Ψ e teorema 6.10 no lugar de Ω, $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_{p'}$, B, Ψ_c e teorema 6.9, respectivamente. Já, para a prova de que $\tilde{\delta} \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, notamos que $\tilde{\delta} = \|c(x)u\|_p^p - 1$, onde $c(x) = 1$. Daí segue, também pela afirmação 2 da etapa 1 e pelos funcionais constantes serem de classe C^∞, o resultado desejado.

Etapa 3: β é um funcional fracamente contínuo sobre $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$.

De fato, sejam (u_m) uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que $u_m \rightharpoonup u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Por isso e pela compacidade do operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^p(\partial\Omega)$ (teorema 6.10),

$$u_m \to u, \ em \ (L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial}). \tag{4.38}$$

Daí, $u_m(x) \to u(x)$, quando $m \to +\infty$, para q.t.p. $x \in \partial\Omega$. Com isso e devido à sequência (u_n) ser limitada em $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial})$ (por (4.38)), segue, pelo lema de Brézis-Lieb, que

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{\partial\Omega} [|u_m - u|^p + |u_m|^p - |u|^p]\, d\sigma = 0.$$

Por conseguinte, ainda por (4.38),

$$\lim_{m\to+\infty} |\beta(u_m) - \beta(u)| = \left| \lim_{m\to+\infty} \left[\int_{\partial\Omega} (|u_m - u|^p + |u_m|^p - |u|^p)\, d\sigma + \|u_m - u\|_{p,\partial}^p \right] \right| = 0.$$

Portanto, $\beta(u_m) \to \beta(u)$ em $\mathbb{R}$, quando $m \to +\infty$. Daí segue a prova da etapa 3.

■

Findamos esta seção, provando a compacidade fraca de um subconjunto de $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposição 4.5 *Seja* $\mathbb{K} = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_c \leq 1\}$. *Então,* $\mathbb{K}$ *é convexo, limitado e fechado em* $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. *Além disso,* $\mathbb{K}$ *é fracamente compacto em* $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$.

Prova: Pela proposição 4.4, Υ_c é um elemento de $C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. Consequentemente, Υ_c é um funcional contínuo. E, como $\Upsilon_c(u) = \|u\|_c^p$, temos $\mathbb{K} = \Upsilon_c^{-1}((-\infty, 1]) \subset W^{1,p}(\Omega)$, o qual, devido à continuidade de Υ_c, é fechado em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. As provas da convexidade e limitação de $\mathbb{K}$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ são imediatas, pois $\|\cdot\|_c$ define uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$. Finalmente, em razão da proposição 4.3, $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é um espaço reflexivo, e em razão de $\mathbb{K}$ ser um subconjunto convexo, limitado e fechado em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$, podemos aplicar o teorema 6.6, o qual nos garante que $\mathbb{K}$ é fracamente compacto em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$, o que finda a prova da proposição 4.5.

■

4.2 Construção do primeiro autovalor de Steklov associado ao problema (4.1)

Nesta seção, construiremos o primeiro autovalor positivo de Steklov para o autoproblema (4.1) e provaremos algumas de suas propriedades. Uma solução fraca para o auto-problema (4.1) é, por definição, um par (u,μ) em $W^{1,p}(\Omega)\times\mathbb{R}$ que satisfaz

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v + c(x)|u|^{p-2}uv\right]dx = \mu\int_{\partial\Omega}|u|^{p-2}uv d\sigma,\ \forall\ v\in W^{1,p}(\Omega). \tag{4.39}$$

Se o par $(u,\mu)\in W^{1,p}(\Omega)\times\mathbb{R}$ for uma solução fraca para o auto-problema (4.1) e, além disso, $u\neq 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, diremos que μ é um autovalor de Steklov do problema (4.1), tendo como autofunção de Steklov associada, u. Generalizaremos algumas ideias de [8] para encontrarmos um "primeiro" autovalor positivo de Steklov. Utilizaremos técnicas variacionais, essencialmente, o teorema dos multiplicadores de Lagrange, para maximizar β sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}=\{u\in W^{1,p}(\Omega):\Upsilon_c(u)\leq 1\}$. Com este intuito, definimos

$$\alpha_1 = \sup\{\beta(u): u\in\mathbb{K}\}. \tag{4.40}$$

Na proposição, a seguir, garantimos que existe $u_1\in\mathbb{K}$, tal que $\beta(u_1)=\alpha_1$. Posteriormente, veremos que u_1 é, de fato, uma autofunção de Steklov, correspondendo ao menor autovalor de Steklov, $\mu_1\doteq\alpha_1^{-1}$, para o auto-problema (4.1).

Proposição 4.6 *Existe $u_1\in\mathbb{K}$, tal que $\alpha_1=\beta(u_1)$. Além disso, $\|u_1\|_c=1$.*

Prova: Da proposição 4.5, segue que $\mathbb{K}$ é fracamente compacto em $(W^{1,p}(\Omega),\|\cdot\|_c)$. Ainda, pela proposição 4.4, β é um funcional fracamente contínuo sobre $(W^{1,p}(\Omega),\|\cdot\|_c)$. Deste modo, concluímos que existe $u_1\in\mathbb{K}$ tal que $\alpha_1=\beta(u_1)$. Provemos que $\|u_1\|_c=1$. Ora, como $u_1\in\mathbb{K}$, $\|u_1\|_c^p=\Upsilon_c(u_1)\leq 1$. Suponhamos que $\|u_1\|_c<1$. Então existe $r>1$, tal que $ru_1\in\mathbb{K}$, e assim, $\beta(ru_1)=r^p\beta(u_1)>\beta(u_1)$, o que é um absurdo, pois

$$\alpha_1=\sup_{u\in\mathbb{K}}\beta(u)=\beta(u_1).$$

Portanto, devemos ter $\|u_1\|_c=1$.

■

Teorema 4.1 *Valem as seguintes propriedades para α_1:*

(1) *$\alpha_1>0$;*

(2) *α_1^{-1} é um autovalor de Steklov do problema (4.1), com autofunção de Steklov, u_1;*

(3) *α_1^{-1} é o menor autovalor positivo de Steklov associado ao problema (4.1).*

Prova: Seja $\mathbb{T} = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \Upsilon_c(u) = 1\} \subset \mathbb{K}$. Como $\alpha_1 = \beta(u_1)$ e $\|u_1\|_c = 1$, temos que u_1 é um extremo de β restrito a $\mathbb{T} = \Upsilon_c^{-1}(\Upsilon_c(u_1))$. Também, pela proposição 4.4, Υ_c e β são elementos de $C^1(W_c^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. Logo, podemos aplicar o teorema dos multiplicadores de Lagrange, a saber, o teorema 6.16, ou seja, uma das duas condições abaixo deve valer:
(I) $\Upsilon_c^{'}(u_1)(v) = 0$, para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$;
(II) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\beta^{'}(u_1)(v) = \lambda \Upsilon_c^{'}(u_1)(v), \ \forall \ v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{4.41}$$

A condição (I) não ocorre, pois $\Upsilon_c^{'}(u_1)(u_1) = p\|u_1\|_c^p = p \neq 0$. Portanto, a condição (II) deve valer. Substituindo as expressões de $\beta^{'}$ e $\Upsilon_c^{'}$, dadas na proposição 4.4, em (4.41), obtemos

$$\int_{\partial\Omega} |u_1|^{p-2} u_1 v d\sigma = \lambda \int_{\Omega} \left[|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \cdot \nabla v + c(x)|u_1|^{p-2} u_1 v \right] dx, \ \forall \ v \in W^{1,p}(\Omega) \tag{4.42}$$

Consequentemente, ao tomarmos $v = u_1$ em (4.42), $\alpha_1 = \|u_1\|_{p,\partial}^p = \lambda \|u_1\|_c^p = \lambda$.
Afirmação 1: $\lambda = \alpha_1 > 0$.
De fato, visto que $\alpha_1 = \|u_1\|_{p,\partial}^p$, $\alpha_1 \geq 0$. Suponhamos $\alpha_1 = 0$. Então, da definição de α_1, vemos que $\beta(u) = 0$, para qualquer $u \in \mathbb{K}$. Agora, o funcional $\varphi_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, definido por $\varphi_1(x) = 1$, $\forall \ x \in \Omega$ é um elemento de $W^{1,p}(\Omega)$. Além do mais, temos $\beta(\varphi_1) = |\partial\Omega|_\sigma > 0$. Assim, tem sentido definirmos $\phi_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|_c}$, de onde segue que $\phi_1 \in \mathbb{K}$ e $\beta(\phi_1) = \frac{\beta(\varphi_1)}{\|\varphi_1\|_c^p} > 0$, o que é um absurdo, pois contraria nossa suposição. Deste modo a afirmação 1 é válida. Devido à igualdade (4.42), e à validade da afirmação 1, concluímos que o par (u_1, α_1^{-1}), pertencente ao conjunto $(W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, é uma solução fraca para o auto-problema 4.1. De modo que, para concluirmos a demonstração do teorema 4.1, falta-nos apenas mostrar que o autovalor $\mu_1 \doteq \dfrac{1}{\alpha_1}$ é o menor autovalor positivo de Steklov do problema (4.1). Suponhamos que μ_1 não seja o menor autovalor positivo de Steklov do problema (4.1). Então existe um par $(\tilde{u}, \tilde{\mu}) \in (W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, com $0 < \tilde{\mu} < \mu_1$, que satisfaz (4.39). Por conseguinte, ao considerarmos $v = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_c^p}$ em (4.39), $\tilde{\mu}\beta\left(\frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_c}\right) = 1$. Daí, $\beta\left(\frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_c}\right) = \frac{1}{\tilde{\mu}} > \frac{1}{\mu_1} = \alpha_1$, o que gera um absurdo, pois $\dfrac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_c} \in \mathbb{K}$. Com isso, finalizamos a prova do teorema 4.1.

■

O teorema 4.1 nos garante a existência de um primeiro autovalor de Steklov para o problema (4.1), que denotaremos por $\mu_1 = \alpha_1^{-1}$. A seguir, daremos uma consequência imediata da caracterização de μ_1.

Corolário 4.1 *Vale a seguinte desigualdade:*

$$\|u\|_p^p \geq \mu_1 \|u\|_{p,\partial}^p, \ \forall \ u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{4.43}$$

Prova: Se $u = 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, então a igualdade em (4.43) é imediata. Se $u \neq 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, então, ao considerarmos $v = \frac{u}{\|u\|_c}$, temos $\|v\|_c = 1$. Logo, $v \in \mathbb{K}$, e assim,

$$\frac{\|u\|_{p,\partial}^p}{\|u\|_c^p} = \beta(v) \leq \alpha_1.$$

De onde segue que $\|u\|_c^p \geq \frac{1}{\alpha_1}\|u\|_{p,\partial}^p = \mu_1 \|u\|_{p,\partial}^p$, como queríamos.

■

4.3 Construção do primeiro autovalor de Neumann associado ao problema (4.2)

Nesta seção, mostraremos a existência de um primeiro autovalor positivo de Neumann para o auto-problema (4.2), bem como, algumas de suas propriedades. Uma solução fraca para o problema (4.2) é, por definição, um par (u, λ) em $W^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + c(x)|u|^{p-2}uv\right] dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}uv dx, \ \forall \ v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{4.44}$$

Se o par $(u, \lambda) \in W^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ for uma solução fraca para o problema (4.2) e além disso, $u \neq 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, diremos que λ é um autovalor de Neumann associado ao problema (4.2), tendo como autofunção de Neumann associada, u. Utilizaremos, no que segue, o teorema dos multiplicadores de Lagrange (teorema 6.16), para encontrarmos uma solução fraca para o auto-problema (4.2). Com este pensamento, consideremos $\rho_1 = \inf\limits_{u \in \mathbb{L}} \Upsilon_c(u)$, onde $\mathbb{L} = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \tilde{\delta}(u) = 0\}$. Na próxima proposição, veremos que existe $\overline{u} \in \mathbb{L}$, tal que $\Upsilon_c(\overline{u}) = \rho_1$. Posteriormente, mostraremos que $\overline{u}$ é uma autofunção de Neumann para o auto-problema (4.2), correspondendo ao menor autovalor positivo de Neumann, $\lambda_1 \doteq \rho_1$.

Proposição 4.7 *Existe $\overline{u} \in \mathbb{L}$, tal que $\rho_1 = \Upsilon_c(\overline{u})$.*

Prova: Como $\rho_1 = \inf\limits_{u \in \mathbb{L}} \Upsilon_c(u)$, conseguimos uma sequência (u_j) em $\mathbb{L}$, tal que

$$\Upsilon_c(u_j) \to \rho_1 \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|) \text{ e } \Upsilon_c(u_j) \leq \rho_1 + 1. \tag{4.45}$$

Ainda, visto que $\|u_j\|_c^p = \Upsilon_c(u_j)$, por (4.45), segue que a sequência (u_j) é limitada em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Utilizando o fato das normas $\|\cdot\|_c$, $\|\cdot\|_{1,p}$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, concluímos que a sequência (u_j) também é limitada em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$. Agora, devido à $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ ser reflexivo, existem $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ e uma subsequência (u_{j_k}) de (u_j), tais que

$$u_{j_k} \rightharpoonup \overline{u} \text{ em } (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}). \tag{4.46}$$

Por isso e pelo mergulho $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ ser compacto (teorema 6.9), $u_{j_k} \to \overline{u}$ em $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$. Assim, devido à $|\|u_{j_k}\|_p - \|\overline{u}\|_p| \leq \|u_{j_k} - \overline{u}\|_p$, $\|u_{j_k}\|_p \to \|\overline{u}\|_p$, quando $k \to +\infty$. Com isso e pelo fato de $u_{j_k} \in \mathbb{L}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, concluímos que $\|\overline{u}\|_p = 1$, ou seja, $\overline{u} \in \mathbb{L}$. Mostremos que $\Upsilon_c(\overline{u}) = \rho_1$. Para isso, basta mostrarmos que $\Upsilon_c(\overline{u}) \leq \rho_1$, pois a outra desigualdade segue, haja visto que $\overline{u} \in \mathbb{L}$. Ora, por (4.45), (4.46) e pela observação 1, da seção 4.1, deste capítulo, segue que $\Upsilon_c(\overline{u}) = \|\overline{u}\|_c^p \leq \liminf\limits_{k \to +\infty} \|u_{j_k}\|_c^p = \rho_1$. Por conseguinte, $\Upsilon_c(\overline{u}) = \rho_1$, como queríamos.

∎

Teorema 4.2 *Valem as seguintes propriedades para ρ_1:*

(1) *$\rho_1 > 0$;*

(2) *ρ_1 é um autovalor de Neumann associado ao problema (4.2), tendo como autofunção de Neumann associada, $\overline{u}$;*

(3) *ρ_1 é o menor autovalor positivo de Neumann associado ao problema (4.2).*

Prova: Em razão de $\mathbb{L} = \tilde{\delta}^{-1}(\{\tilde{\delta}(\overline{u})\})$, de $\rho_1 = \inf\limits_{u\in\mathbb{L}} \Upsilon_c(u) = \Upsilon_c(\overline{u})$ e de $\Upsilon_c, \tilde{\delta}$ serem elementos de $C^1(W^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$, as hipóteses do teorema dos multiplicadores de Lagrange 6.16 são verificadas. Logo, uma das duas condições, a seguir, deve valer:

(A) $\tilde{\delta}'(\overline{u})(v) = 0$, para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$;

(B) Existe $\mu \in \mathbb{R}$, tal que

$$\Upsilon_c'(\overline{u})(v) = \mu\tilde{\delta}'(\overline{u})(v), \ \forall \ v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{4.47}$$

A condição (A) não é válida, pois $\tilde{\delta}'(\overline{u})(\overline{u}) = p\|\overline{u}\|_p^p = p \neq 0$. Portanto, (B) deve valer.

Afirmação 1: $\mu = \rho_1$.

De fato, tomando $v = \overline{u}$ em (4.47), obtemos $\rho_1 = \Upsilon_c(\overline{u}) = \|\overline{u}\|_c^p = \mu\|\overline{u}\|_p^p = \mu$, sendo a última igualdade válida, pois $\overline{u} \in \mathbb{L}$. Com isso fica provada a afirmação 1. Agora, pela validade da condição (B), ao substituírmos as expressões de Υ_c' e $\tilde{\delta}'$ em (4.47), obtemos (4.44), com $\overline{u}$ em lugar de u e ρ_1 em lugar de λ. Deste modo, o par $(\overline{u}, \rho_1)$ é uma solução fraca para o auto-problema (4.2). Além disso, visto que $\|\overline{u}\|_{1,p} = 1$, temos $\overline{u} \neq 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, ficando assim provado o ítem **(2)** do teorema 4.2. Já, a validade de **(1)**, é imediata, pois $\rho_1 = \Upsilon_c(\overline{u}) = \|\overline{u}\|_c^p$ e $\|\overline{u}\|_{1,p} = 1$. Logo, para finalizarmos a prova do teorema 4.2, basta-nos mostrar que o autovalor ρ_1 é o menor autovalor positivo de Neumann associado ao auto-problema (4.2). Suponhamos que ρ_1 não seja o menor autovalor positivo de Neumann para o auto-problema (4.2). Então existem $\tilde{u} \in W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, e $0 < \tilde{\mu} < \rho_1$ que satisfazem (4.44). Entretanto, ao considerarmos $v = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_{1,p}^p}$ em (4.44), obtemos $\tilde{\mu} = \Upsilon_c\left(\frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_{1,p}}\right) \geq \inf\limits_{u\in\mathbb{L}} \Upsilon_c(u) = \rho_1$, o que é um absurdo, pois supomos $\tilde{\mu} < \rho_1$. Daí segue a validade de **(3)**. Com isso, finalizamos a demonstração do teorema 4.2.

■

Devido à proposição 4.2, existte um menor autovalor positivo de Neumann associado ao auto-problema (4.2), o qual denotaremos por $\lambda_1 = \rho_1$. A seguir, daremos uma consequência imediata da caracterização de λ_1.

Corolário 4.2 *Vale a seguinte desigualdade:*

$$\|u\|_c^p \geq \lambda_1\|u\|_p^p, \ \forall \ u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{4.48}$$

Prova: Caso $u = 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, a igualdade em (4.48) é facilmente verificada. Caso $u \neq 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Então, ao considerarmos $v = \frac{u}{\|u\|_{1,p}}$, temos $\|v\|_{1,p} = 1$. Logo $v \in \mathbb{L}$ e assim,

$$\frac{\|u\|_c^p}{\|u\|_{1,p}^p} = \Upsilon_c(v) \geq \rho_1. \tag{4.49}$$

De onde segue a validade da desigualdade (4.48), como desejávamos.

■

Capítulo

5

Equações elípticas não lineares envolvendo o operador p-Laplaciano

Objetivamos neste capítulo estender um dos teoremas vistos em [42] para o caso p-laplaciano, $p \in (1, \infty)$. Para isso, consideremos

$$\begin{cases} -\triangle_p u + c(x)|u|^{p-2}u = f(x,u), & \text{se x} \in \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = g(x,u), & \text{se x} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, é um domínio limitado, cuja fronteira, $\partial\Omega$, é de classe $C^{0,1}$, e $\dfrac{\partial}{\partial \eta} \doteq \eta \cdot \nabla$ é a derivada normal exterior unitária sobre $\partial\Omega$. Serão assumidas, em diversos resultados deste capítulo, as seguintes condições, para a função $c : \Omega \to \mathbb{R}$, e para as não linearidades $f, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(PLP) $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq 0$, para q.t.p. $x \in \Omega$ e $\int_\Omega c(x)dx > 0$.

(P2) $f, g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(P3) Existem constantes $a_1, a_2 > 0$, tais que

$$|g(x,u)| \leq a_1 + a_2|u|^s, \ \forall\ (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

com $0 < s < p_*^1(N) - 1$, onde

$$p_*^1(N) = \begin{cases} \frac{(N-1)p}{N-p}, & \text{se p} < \text{N} \\ \infty, & \text{se p} \geq \text{N}. \end{cases}$$

(P3') Existem constantes $b_1, b_2 > 0$, tais que

$$|f(x,u)| \leq b_1 + b_2|u|^t, \ \forall\ (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

com $0 < t < p_*(N) - 1$, onde

$$p_*(N) = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & \text{se p} < \text{N} \\ \infty, & \text{se p} \geq \text{N}. \end{cases}$$

Observação 1: Notamos que, ao validarmos as hipóteses acima, os resultados do capítulo 4 continuarão válidos, ou seja, existem autovalores μ_1 para o auto-problema (4.1) e λ_1 para o auto-problema (4.2). Neste capítulo, obteremos resultados de existência de solução fraca para o pro- blema (5.1), quando relacionarmos a não linearidade de fronteira, g, com μ_1, e a não linearidade de reação, f, com λ_1.

Definição 5.1 *Dizemos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca para o problema (5.1) se*

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + c(x)|u|^{p-2}uv\right] dx = \int_\Omega f(x,u)v dx + \int_{\partial\Omega} g(x,u)\cdot v d\sigma, \ \forall\ v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{5.2}$$

Enunciamos, a seguir, nosso principal resultado, o qual garante existência de uma solução fraca para o problema (5.1).

Teorema 5.1 *Suponhamos que as condições* ***(PLP)***, ***(P2)***, ***(P3)*** *e* ***(P3')*** *sejam válidas. Além disso, que as funções $F, G : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$ e $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$, satisfaçam a seguinte condição:*
(P4) *existem constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\limsup_{|u|\to+\infty} \frac{pG(x,u)}{|u|^p} \leq \mu < \mu_1 \ e \ \limsup_{|u|\to+\infty} \frac{pF(x,u)}{|u|^p} \leq \lambda < \lambda_1,$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$, com $\lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \mu_1\lambda_1$. Então, a equação não linear (5.1) possui ao menos uma solução fraca $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Na seção 2, provaremos alguns resultados auxiliares, necessários para provarmos o teorema 5.1, o qual será mostrado na seção 3.

5.1 Resultados preliminares

Nesta seção mostraremos alguns resultados necessários para a demonstração do principal teorema deste capítulo.

Proposição 5.1 *Seja $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e suponhamos que existam constantes $a, b \geq 1$, $a_1, a_2 \geq 0$, tais que, para quaisquer $x \in \overline{\Omega}, u \in \mathbb{R}$,*

$$|g(x,u)| \leq a_1 + a_2 |u|^{\frac{a}{b}}. \tag{5.3}$$

Então, o operador $N_g : L^a(\partial\Omega) \to L^b(\partial\Omega)$, definido por $N_g(u) = g(x,u)$, é contínuo.

Prova: Provemos, inicialmente, a boa definição de tal operador. Se $u \in L^a(\partial\Omega)$, então u é σ-mensurável. E, como $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g(x, u(x))$ também é σ-mensurável. Já, pelo teorema 6.1, pelo fato de $b \geq 1$, $a_1, a_2 \geq 0$ e pela desigualdade (5.3), temos

$$|g(x,u)|^b \leq \left(a_1 + a_2 |u|^{\frac{a}{b}}\right)^b \leq 2^{b-2}\left(a_1^b + a_2^b |u|^a\right). \tag{5.4}$$

Como $u \in L^a(\partial\Omega)$ e $|\partial\Omega|_\sigma < \infty$, segue da desigualdade (5.4) e do começo desta demonstração que $g(x,u) \in L^b(\partial\Omega)$. Daí segue a boa definição do operador N_g. Provemos a continuidade de tal operador. Para tanto, sejam (u_n) uma sequência em $L^a(\partial\Omega)$ e $u \in L^a(\partial\Omega)$, tais que

$$u_n \to u \text{ em } (L^a(\partial\Omega), \|\cdot\|_{a,\partial}). \tag{5.5}$$

Assim, em razão do teorema 6.13 ($|\partial\Omega|_\sigma < \infty$), existem subsequência (u_{n_k}) da sequência (u_n) e $h \in L^a(\partial\Omega)$, tais que

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|) \text{ e } |u_{n_k}(x)| \leq h(x), \text{ q.t.p. } x \in \partial\Omega. \tag{5.6}$$

Mas também, por hipótese, $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Portanto,

$$g(x, u_{n_k}(x)) \to g(x, u(x)), \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|). \tag{5.7}$$

Agora, devido às desigualdades dadas em (5.3) e (5.6),

$$|g(x, u_{n_k}(x))| \leq a_1 + a_2 \left[h(x)\right]^{\frac{a}{b}} \doteq M(x), \; q.t.p. \; x \in \partial\Omega.$$

Com isso, ao utilizarmos o teorema 6.1 e o fato de $h \in L^a(\partial\Omega)$, podemos mostrar que M é elemento de $L^b(\partial\Omega)$. Por isso e por (5.7), concluímos, ao aplicarmos o teorema da convergência dominada de Lebesgue, que $g(x, u_{n_k}) \to g(x, u)$, em $(L^b(\partial\Omega), \|\cdot\|_{b,\partial})$, ou seja, $N_g(u_{n_k}) \to N_g(u)$ em $(L^b(\partial\Omega), \|\cdot\|_{b,\partial})$. Para finalizarmos a prova, mostremos que $N_g(u_n) \to N_g(u)$ em $(L^b(\partial\Omega), \|\cdot\|_{b,\partial})$. Suponhamos que isso não ocorra. Então, existem $\epsilon > 0$ e uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n), tais que

$$\|N_g(u_{n_k}) - N_g(u)\|_{b,\partial} \geq \epsilon, \; \forall \; k \in \mathbb{N}. \tag{5.8}$$

No entanto, por (5.5), $u_{n_k} \to u$ em $(L^a(\partial\Omega), \|\cdot\|_{a,\partial})$. Deste modo, ao repetirmos o argumento inicial para (u_{n_k}) ao invés de (u_n), vemos que (u_{n_k}) admite uma subsequência $(u_{n_{k_l}})$, tal que $N_g(u_{n_{k_l}}) \to N_g(u)$, em $(L^b(\partial\Omega), \|\cdot\|_{b,\partial})$, o que gera uma contradição com (5.8). Logo, $N_g(u_n) \to N_g(u)$ em $(L^b(\partial\Omega), \|\cdot\|_{b,\partial})$, e assim, segue a continuidade de N_g.

■

A seguir, enunciamos uma proposição, semelhante à anterior, porém considerando Ω ao invés de $\partial\Omega$, cuja demonstração encontra-se em [46] (Apêndice B).

Proposição 5.2 *Seja $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, e suponhamos que existam constantes $d, e \geq 1$, $b_1, b_2 \geq 0$, tais que, para quaisquer $x \in \overline{\Omega}, u \in \mathbb{R}$, $|f(x,u)| \leq b_1 + b_2|u|^{\frac{d}{e}}$. Então, o operador $N^f : L^d(\Omega) \to L^e(\Omega)$, definido por $N^f(u) = f(x,u)$, é contínuo.*

Observação 1: Se validarmos as condições **(P2)**, **(P3)** e **(P3')**, segue, imediatamente, das proposições 5.1 e 5.2, que $N_g : L^{s+1}(\partial\Omega) \to L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega)$ e $N^f : L^{s+1}(\Omega) \to L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)$, são operadores contínuos. Agora, se supormos válidas as condições **(PLP)**, **(P2)**, **(P3)** e **(P3')**, então, definimos o funcional energia $I_p : (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c) \to \mathbb{R}$, associado à equação (5.1), por

$$I_p(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega \left[|\nabla u|^p + c(x)|u|^p\right] dx - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma, \; \forall \; u \in W^{1,p}(\Omega), \tag{5.9}$$

onde $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$ e $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$.

Proposição 5.3 *O funcional I_p está bem definido, isto é, $I_p(u) \in \mathbb{R}$, $\forall\ u \in W^{1,p}(\Omega)$.*

Prova: Ora, $I_p(u) = \frac{1}{p}\|u\|_c^2 - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma$, $\forall\ u \in W^{1,p}(\Omega)$. Assim, a boa definição de I_p seguirá, se mostrarmos que

$$\left|\int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma\right| < \infty \ e \ \left|\int_\Omega F(x,u)dx\right| \leq \infty.$$

Afirmação 1: $\left|\int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma\right| < \infty$.
De fato, devido à definição de G e à condição **(P3)**, existe constante $\tilde{K}_1 > 0$, tal que

$$|G(x,u)| \leq \int_0^u [a_1 + a_2|\xi|^s]d\xi \leq \tilde{K}_1\left(|u| + |u|^{s+1}\right), \tag{5.10}$$

Consequentemente,

$$\int_{\partial\Omega} |G(x,u)|d\sigma \leq \tilde{K}_1 \int_{\partial\Omega}\left[|u| + |u|^{s+1}\right]d\sigma = \tilde{K}_1\left[\|u\|_{1,\partial} + \|u\|_{s+1,\partial}^{s+1}\right]. \tag{5.11}$$

Ainda, pela condição **(P3)**, $1 < s+1 < p_*^1(N)$. Assim, graças ao teorema 6.10, os operadores traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^1(\partial\Omega)$ e de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$ são lineares e contínuos. Por conseguinte, existe constante positiva $\tilde{K}_2$, tal que

$$\int_{\partial\Omega} |G(x,u)|d\sigma \leq \tilde{K}_2\left[\|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,p}^{s+1}\right] \tag{5.12}$$

Finalmente, como $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_c < \infty$. E, visto que $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ são normas equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_{1,p} < \infty$. Por isso e pela desigualdade (5.12), concluímos que

$$0 \leq \left|\int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma\right| \leq \int_{\partial\Omega} |G(x,u)|d\sigma < \infty.$$

Deste modo, fica justificada a afirmação 1.
Afirmação 2: $\left|\int_\Omega F(x,u)dx\right| \leq \infty$.
A prova desta afirmação segue um raciocínio similar ao feito na prova da afirmação 1.

∎

Proposição 5.4 *Suponhamos válidas as condições* ***(PLP)***, ***(P2)***, ***(P3)*** *e* ***(P3')***. *Então* $I_p \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, *tendo como derivada de Fréchet em* $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$I_p'u(v) = \int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + c(x)|u|^{p-2}uv\right] dx - \int_\Omega f(x,u)vdx - \int_{\partial\Omega} g(x,u)vd\sigma,$$

para qualquer $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Prova: Notemos, inicialmente, que $I_p(u) = L_1(u) - L_2(u) - L_3(u)$, $\forall\ u \in W^{1,p}(\Omega)$, onde $L_1(u) = \frac{1}{p}\Upsilon_c(u)$, $L_2(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$ e $L_3(u) = \int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma$. Pela proposição 4.4, segue que $\Upsilon_c \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet em $u \in \Omega$ é dada por $\Upsilon_c'(u)(v) = p\int_\Omega[|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + c(x)|u|^{p-2}uv]dx$, $\forall\ v \in W^{1,p}(\Omega)$. Consequentemente, como $L_1(u) = \frac{1}{p}\Upsilon_c(u)$, $L_1 \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é dada por

$$L_1'(u)(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega c(x)|u|^{p-2}uvdx,\ \forall\ v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{5.13}$$

Afirmação 1: L_3 é um elemento de $C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $L_3'(u)(v) = \int_{\partial\Omega} g(x,u)vd\sigma$, $\forall\ v \in W^{1,p}(\Omega)$.
De fato, para $0 < h < 1$ e $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\frac{L_3(u+hv) - L_3(u)}{h} = \int_{\partial\Omega} \frac{G(x,u(x)+hv(x)) - G(x,u(x))}{h} d\sigma.$$

Ainda, dado $x \in \partial\Omega$, pelo teorema do valor médio, existe $\lambda \in (0,1)$, tal que

$$\begin{aligned}\frac{|G(x,u(x)+hv(x)) - G(x,u(x))|}{|h|} &= |g(x,u(x)+\lambda v(x))||v(x)| \\ &\leq [a_1 + a_2|u(x)+\lambda v(x)|^s]\,|v(x)| \\ &\leq K_1\left[|v(x)| + |u(x)|^s|v(x)| + |v(x)|^{s+1}\right] \doteq P(u,v),\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde K_1 é uma constante positiva. Agora, como $1 < p < p_*^1(N)$, o operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^p(\partial\Omega)$ é contínuo. Por conseguinte, existe constante $\widehat{K} > 0$, tal que

$$\int_{\partial\Omega} |v|d\sigma \leq |\Omega|_\sigma^{p'}\|v\|_{p,\partial} \leq \widehat{K}|\Omega|_\sigma^{p'}\|v\|_{1,p}.$$

Com isso e pela equivalência das normas $\|\cdot\|_c$, $\|\cdot\|_{1,p}$ em $W^{1,p}(\Omega)$, existe constante $\widehat{K}_1 > 0$, tal que

$$\int_{\partial\Omega} |v| d\sigma \leq \widehat{K}_1 |\Omega|_{\sigma}^{p'} \|v\|_c < \infty \tag{5.15}$$

Já, pela hipótese **(P3)**, $1 < s+1 < p_*^1(N)$. Logo, o operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$ é contínuo (teorema 6.10). Assim, pela desigualdade de Hölder e pelo fato das normas $\|\cdot\|_c$, $\|\cdot\|_{1,p}$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, existem constantes positivas $\widehat{K}_2, \widehat{K}_3, \widehat{K}_4, \widehat{K}_5$, tais que

$$\int_{\partial\Omega} |u|^s |v| d\sigma \leq \|u\|_{s+1,\partial}^{\frac{s}{s+1}} \|v\|_{s+1,\partial} \leq \widehat{K}_2 \|u\|_{1,p}^{\frac{s}{s+1}} \|v\|_{1,p} \leq \widehat{K}_3 \|u\|_c^{\frac{s+1}{s}} \|v\|_c < \infty. \tag{5.16}$$

e

$$\int_{\partial\Omega} |v|^{s+1} d\sigma = \|v\|_{s+1}^{s+1} \leq \widehat{K}_4 \|v\|_{1,p}^{s+1} \leq \widehat{K}_5 \|v\|_c^{s+1} < \infty. \tag{5.17}$$

Devido à validade de (5.15), (5.16) e (5.17), concluímos que $P(u,v) \in L^1(\partial\Omega)$. Segue assim, por (5.14), ao aplicarmos o teorema da convergência dominada de Lebesgue, que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \left[\frac{L_3(u+hv) - L_3(u)}{h}\right] &= \lim_{h\to 0^+} \left[\int_{\partial\Omega} \tfrac{G(x,u(x)+hv(x)) - G(x,u(x))}{h} d\sigma\right] \\ &= \int_{\partial\Omega} \lim_{h\to 0^+} \left[\tfrac{G(x,u(x)+hv(x)) - G(x,u(x))}{h}\right] d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} g(x,u(x)) v(x) d\sigma. \end{aligned}$$

Analogamente, porém considerando $-1 < h < 0$, podemos mostrar que

$$\lim_{h\to 0^-} \left[\frac{L_3(u+hv) - L_3(u)}{h}\right] = \int_{\partial\Omega} g(x,u(x)) v(x) d\sigma.$$

Portanto, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \left[\frac{L_3(u+hv) - L_3(u)}{h}\right] = \int_{\partial\Omega} g(x,u(x)) v(x) d\sigma$. No que segue, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ fixado, definimos o funcional $S_u : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, por $S_u(v) = \int_{\partial\Omega} g(x,u) v d\sigma$, $\forall\, v \in W^{1,p}(\Omega)$. Este funcional, é linear e limitado. Com efeito, a linearidade de S_u é imediata. Provemos a limitação de S_u. Ora, devido à desigualdade de Hölder, à continuidade do operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$, à boa definição do operador N_g (consequência da observação 1, desta seção) e ao fato das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ serem equivalentes em

$W^{1,p}(\Omega)$, existe constante $\tilde{K} > 0$, tal que

$$\begin{aligned} |S_u(v)| &\leq \int_{\partial\Omega} |g(x,u(x))||v(x)|d\sigma = \int_{\partial\Omega} |N_g(u)||v(x)|d\sigma \\ &\leq \|N_g(u)\|_{\left(\frac{s+1}{s}\right),\partial} \|v\|_{s+1,\partial} \leq \tilde{K}\|N_g(u)\|_{\left(\frac{s+1}{s}\right),\partial}\|v\|_c, \end{aligned} \tag{5.18}$$

De onde segue a limitação de S_u. Deste modo, o funcional L_3 é diferenciável a Gateaux em $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tendo como derivada de Gateaux em u, $L_3^{'}(u) = S_u$. Provaremos, agora, a continuidade do operador $L_3^{'} : W^{1,p}(\Omega) \to [W^{1,p}(\Omega)]^*$, o qual é definido por $L_3^{'}(u) = S_u$, $\forall\ u \in W^{1,p}(\Omega)$. Para isso, consideremos (u_n) uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que $u_n \to u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Daí, pelo fato das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, $u_n \to u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$. Por isso e pela continuidade do operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$ (teorema 6.10), $u_n \to u$ em $(L^{s+1}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{s+1,\partial})$. Assim, por causa da continuidade operador $N_g : L^{s+1}(\partial\Omega) \to L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega)$, $N_g(u_n) \to N_g(u)$ em $(L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{\left(\frac{s+1}{s}\right),\partial})$. Deste modo, existe constante positiva $\tilde{K}_1$, tal que

$$\begin{aligned} \|L_3^{'}(u_n) - L_3^{'}(u)\|_c^* &= \sup_{\|v\|_c=1} |L_3^{'}(u_n) - L_3^{'}(u)| \\ &\leq \sup_{\|v\|_c=1} \int_{\partial\Omega} |g(x,u_n) - g(x,u)||v|d\sigma \\ &\leq \sup_{\|v\|_c=1} \|N_g(u_n) - N_g(u)\|_{\left(\frac{s+1}{s}\right),\partial}\|v\|_{s+1,\partial} \\ &\leq \tilde{K}_1 \sup_{\|v\|_c=1} \|N_g(u_n) - N_g(u)\|_{\left(\frac{s+1}{s}\right),\partial}\|v\|_c \\ &= \tilde{K}_1\|N_g(u_n) - N_g(u)\|_{\left(\frac{s+1}{s}\right),\partial} \to 0,\ \textit{quando}\ n \to +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, $L_3^{'}$ é um operador contínuo. E assim, segue, da proposição 6.1, que L_3 é um elemento de $C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in \Omega$, S_u, como desejávamos.

Afirmação 2: $L_2 \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é dada por $L_2^{'}(u)(v) = \int_\Omega f(x,u)vdx$, $\forall\ v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Esta afirmação tem prova semelhante à da afirmação 1. Deste modo, a omitiremos. Devido à validade das afirmações 1 e 2, e à validade de (5.13), a proposição 5.4 fica justificada.

■

A próxima proposição garante a validade de algumas propriedades relativas aos funcionais L_2 e L_3, os quais são elementos de $C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ (proposição 5.4).

Proposição 5.5 *Suponhamos válidas as hipóteses da proposição 5.4. Então os funcionais* $L_i : (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c) \to \mathbb{R}$*, com* $i = 2, 3$*, definidos por*

$$L_2(u) = \int_\Omega F(x,u)dx \ e \ L_3(u) = \int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma$$

são fracamente contínuos. Além disso, $L_2^{'}$ *e* $L_3^{'}$ *são operadores compactos.*

Prova: Dividiremos a demonstração desta proposição em quatro etapas. Da validade destas seguirá a veracidade da proposição 5.5.

Etapa 1: L_3 é fracamente contínuo.

De fato, consideremos (u_m), uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que $u_m \rightharpoonup u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Por isso e pelas normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$,

$$u_m \rightharpoonup u \ em \ (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}). \tag{5.19}$$

Mas também, por hipótese (condição **(P3)**), $1 < s+1 < p_*^1(N)$. Consequentemente, pelo teorema 6.10, o operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$ é linear e compacto. Deste modo, devido à validade de (5.19),

$$u_m \to u, \ em \ (L^{s+1}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{s+1,\partial}). \tag{5.20}$$

Passemos, agora, a analisar o funcional L_3. Como $L_3 \in C^1(H(\Omega), \mathbb{R})$, segue do teorema do Valor Médio, que existe $\theta \in (0,1)$, tal que

$$L_3(w) - L_3(u) = L_3^{'}(\theta w + (1-\theta)u)(w-u), \ \forall \ w \in W^{1,p}(\Omega).$$

Por conseguinte, $|L_3(u_m) - L_3(u)| = \left|\int_{\partial\Omega} g(x, u_m + (1-\theta)u)(u_m - u)d\sigma\right|$. Deste modo, se denotarmos $\Gamma_m(u) = \theta u_m + (1-\theta)u, \ para \ u \in W^{1,p}(\Omega)$, então

$$|L_3(u_m) - L_3(u)| \le \int_{\partial\Omega} |g(x, \Gamma_m(u))||u_m - u|d\sigma$$

Daí, pela desigualdade de Hölder, e pela observação 1, desta seção,

$$|L_3(u_m) - L_3(u)| \leq \|g(x, \Gamma_m(u))\|_{(\frac{s+1}{s}),\partial}\|u_m - u\|_{s+1,\partial} = \|N_g(\Gamma_m(u))\|_{(\frac{s+1}{s}),\partial}\|u_m - u\|_{s+1,\partial}. \tag{5.21}$$

Ainda, como consequência de (5.20), temos $\Gamma_m(u) \to u$ em $(L^{s+1}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{s+1,\partial})$. Por isso e pela continuidade do operador N_g,

$$N_g(\Gamma_m(u)) \to N_g(u) \ em \ (L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{(\frac{s+1}{s}),\partial}).$$

Logo, a sequência $(\|N_g(\Gamma_m(u))\|_{(\frac{s+1}{s}),\partial})$ é limitada em $\mathbb{R}$. E assim, devido à (3.57) e à (5.21), segue que $L_3(u_m) \to L_3(u)$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Daí segue a validade da etapa 1.

Etapa 2: L_2 é fracamente contínuo.

Omitiremos a prova desta etapa, pois essa é semelhante à demonstração da etapa 1.

Etapa 3: O operador $L_3^{'}$ é compacto.

De fato, seja (u_m) uma sequência limitada em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Com isso e devido à $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ ser um espaço reflexivo (proposição 4.3), existem $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e subsequência (u_{m_k}) de (u_m), tais que $u_{m_k} \rightharpoonup u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Diante disso, da compacidade e linearidade do operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$ e de L_3 ser fracamente contínuo, temos

$$u_{m_k} \to u \ em \ (L^{s+1}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{s+1,\partial}) \ e \ L_3(u_{m_k}) \to L_3(u), \ em \ (\mathbb{R}, |\cdot|).$$

Ainda, pela validade das condições **(P2)** e **(P3)**, segue, da observação 1, desta seção, que $N_g(u_{m_k}) \to N_g(u)$, em $(L^{s+1}s(\partial\Omega), \|\cdot\|_{(\frac{s+1}{s}),\partial})$. Consequentemente, ao utilizarmos a desigualdade de Hölder, a equivalência das normas $\|\cdot\|_c$, $\|\cdot\|_{1,p}$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e, logo a seguir, fazermos $m \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \|L_3^{'}(u_{m_k}) - L_3^{'}(u)\|_c^* &\leq \tilde{K}_2\|g(\cdot, u_{m_k}) - g(\cdot, u)\|_{(\frac{s+1}{s}),\partial} \\ &= \|N_g(u_{m_k}) - N_g(u)\|_{(\frac{s+1}{s}),\partial} \to 0, \end{aligned}$$

onde $\tilde{K}_2$ é uma constante positiva. Portanto, $L_3^{'}(u_{m_k}) \to L_3^{'}(u)$ em $(W^{1,p}(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$. Daí segue a compacidade do operador $L_3^{'}$.

Etapa 4: $L_2^{'}$ é um operador compacto.

A prova desta etapa é análoga a da etapa 3, por isso, a omitiremos.

■

O próximo resultado nos auxiliará na demonstração da validade da condição de Palais-Smale (PS), para o funcional I_p.

Proposição 5.6 *Suponhamos válidas as condições* ***(PLP)****,* ***(P2)****,* ***(P3)*** *e* ***(P3')****. Se* (u_m) *for uma sequência limitada em* $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$*, tal que* $\lim\limits_{m\to\infty} I^{'}(u_m) = 0$*, então* (u_m) *admite uma subsequência convergente.*

Prova: Seja (u_m) uma sequência limitada em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$, com $\lim\limits_{m\to\infty} I^{'}(u_m) = 0$. Como $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é um espaço reflexivo (proposição 4.3), existem subsequência (u_{m_k}) de (u_m) e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \text{ em } (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c). \tag{5.22}$$

Agora, pela proposição 5.5, os operadores $L_2^{'}$ e $L_3^{'}$ são compactos. Logo, existe subsequência $(u_{m_{k_l}})$ de (u_{m_k}), que, por simplicidade, denotaremos por (u_{m_k}), tal que $L_2^{'}(u_{m_k}) \to L_2^{'}(u)$ e $L_3^{'}(u_{m_k}) \to L_3^{'}(u)$ em $(W^{1,p}(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$. Assim, as sequências $(\|L_i^{'}(u_{m_k})\|_c^*)$, para $i = 2, 3$, são limitadas em $\mathbb{R}$. Mas também, $I_p = L_1 - L_2 - L_3$ e $L_1^{'} = I_p^{'} + L_2^{'} + L_3^{'}$.

Afirmação I: $L_1^{'}(u_{m_k})(u_{m_k} - u) \to 0$, em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

De fato, por hipótese, $\lim\limits_{m\to+\infty} I_p^{'}(u_m) = 0$. Desta forma, ao fazermos $k \to +\infty$, temos

$$L_1^{'}(u_{m_k}) = I_p^{'}(u_{m_k}) + L_2^{'}(u_{m_k}) + L_3^{'}(u_{m_k}) \to L_2^{'}(u) + L_3^{'}(u) \text{ em } (W^{1,p}(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*). \tag{5.23}$$

Se denotarmos $E = L_2^{'}(u) + L_3^{'}(u)$, então, por (5.22) e (5.23),

$$L_1^{'}(u_{m_k}) - E \to 0 \text{ em } (W^{1,p}(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*) \tag{5.24}$$

e

$$u_k - u \rightharpoonup 0, \text{ em } (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c). \tag{5.25}$$

Consequentemente,

$$(L_1'(u_{m_k}) - E)(u_{m_k} - u) \to 0 \ em \ (\mathbb{R}, |\cdot|). \tag{5.26}$$

Finalmente, devido à (5.26) e (5.25), e do fato de $E \in W^{1,p}(\Omega)^*$, obtemos

$$L_1'(u_{m_k})(u_{m_k} - u) = (L_1'(u_{m_k}) - E)(u_{m_k} - u) + E(u_{m_k} - u) \to 0 \ em \ (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

Com isso, finalizamos a prova da afirmação I. Ainda, visto que $L_1'(u)(v) = \int_\Omega [|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + c(x)|u|^{p-2}uv]dx$, para u, v em $W^{1,p}(\Omega)$,

$$L_1'(u)(u) = \|u\|_c^p. \tag{5.27}$$

Além disso, devido à desigualdade de Hölder, ao teorema 6.3 e à $c(x) = c(x)^{\frac{p-1}{p}} c(x)^{\frac{1}{p}}$, para q.t.p. $x \in \Omega$, concluímos que

$$\begin{aligned} |L_1'(u)(v)| &\le \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v|dx + \int_\Omega c(x)|u|^{p-1}|v|dx \\ &\le \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega c(x)|u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega c(x)|v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\int_\Omega [|\nabla u|^p + c(x)|u|^p] \, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega [|\nabla v|^p + c(x)|v|^p] \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_c^{p-1}\|v\|_c. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Já, da validade da afirmação I e de (5.22), temos, ao fazermos $k \to +\infty$, que

$$P_k \doteq L_1'(u_{m_k})(u_{m_k} - u) - L_1'(u)(u_{m_k} - u) \to 0. \tag{5.29}$$

Combinando isso à desigualdade (5.28) e à identidade (5.27), ao utilizarmos o teorema 6.2, obtemos

$$\begin{aligned} P_k &= L_1'(u_{m_k})(u_{m_k}) - L_1'(u_{m_k})(u) - L_1'(u)(u_{m_k}) + L_1'(u)(u) \\ &\ge \|u_{m_k}\|_c^p + \|u\|_c^p - \|u_{m_k}\|_c\|u\|_c^{p-1} - \|u\|_c\|u_{m_k}\|_c^{p-1} \\ &= (\|u_{m_k}\|_c^{p-1} - \|u\|_c^{p-1})(\|u_{m_k}\|_c - \|u\|_c) \ge 0. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Ora, devido à (5.29) e (5.30), temos $\|u_{m_k}\|_c \to \|u\|_c$, quando $k \to +\infty$. Por isso, por (5.22) e pela proposição 4.2, vemos que as hipóteses do teorema 6.5 são satisfeitas. Logo,

$u_{m_k} \to u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Daí segue a validade da proposição 5.6.

■

5.2 Prova do teorema 5.1

Observamos, inicialmente, que a condição **(P4)** implica que, dado $\epsilon > 0$, existe $r = r(\epsilon) > 0$, tal que, se $x \in \overline{\Omega}$ e $u \in \mathbb{R}$, com $|u| \geq r$,

$$\frac{pG(x,U)}{|u|^p} \leq \mu + \epsilon \; e \; \frac{pF(x,U)}{|u|^p} \leq \lambda + \epsilon, \tag{5.31}$$

E mais, em razão de Ω ser limitado em $\mathbb{R}^N$, $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ é compacto. De onde vem que $\overline{\Omega} \times [-r, r]$ é compacto em $\mathbb{R}^{N+1}$. Combinando isso ao fato de $G, F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, concluímos que F e G assumem máximo e mínimo em $\overline{\Omega} \times [-r, r]$. Deste modo, existe constante $M_\epsilon > 0$ tal que, se $x \in \overline{\Omega}$ e $u \in \mathbb{R}$, com $|u| \leq r$,

$$G(x,u) \leq M_\epsilon \; e \; F(x,u) \leq M_\epsilon, \tag{5.32}$$

Por conseguinte, ao combinarmos as desigualdades (5.31) e (5.32),

$$G(x,u) \leq \frac{1}{p}(\mu + \epsilon)|u|^p + M_\epsilon \; e \; F(x,u) \leq \frac{1}{p}(\lambda + \epsilon)|u|^p + M_\epsilon, \; \forall \; x \in \overline{\Omega}, \; \forall \; u \in \mathbb{R}. \tag{5.33}$$

Afirmação 1: O funcional I_p é coercivo em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$, isto é,

$$I_p(u) \to +\infty, \; quando \; \|u\|_c \to +\infty. \tag{5.34}$$

De fato, suponhamos $\|u\|_c \to +\infty$. Então, utilizando a continuidade do operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^p(\partial\Omega)$ e o fato das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, concluímos que, ou $\|u\|_{p,\partial} \to +\infty$, ou $\|u\|_{p,\partial} \leq \tilde{K}_1$, onde $\tilde{K}_1$ é uma constante positiva. Em ambos casos, concluiremos que $I_p(u) \to +\infty$.

Caso 1: Existe constante $\tilde{K}_1 > 0$, tal que $\|u\|_{p,\partial} \leq \tilde{K}_1$.

Neste caso, da definição de I_p e da desigualdade (5.33), temos

$$\begin{aligned} I_p(u) &= \tfrac{1}{p}\|u\|_c^p - \textstyle\int_\Omega F(x,u)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma \\ &\geq \tfrac{1}{p}\|u\|_c^p - \tfrac{1}{p}(\lambda+\epsilon)\|u\|_p^p - \tfrac{1}{p}(\mu+\epsilon)\|u\|_{p,\partial}^p - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma). \end{aligned} \tag{5.35}$$

Se $\lambda < 0$, então, de (5.35), é imediato que $I_p(u) \to +\infty$, quando $\|u\|_c \to +\infty$. Se $\lambda \geq 0$, então, ao utilizarmos as desigualdades (4.48) e (5.35), obtemos

$$I(u) \geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|_c^p - \frac{1}{p}(\mu+\epsilon)\|u\|_{p,\partial}^p - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma).$$

Mas também, por hipótese, $\lambda < \lambda_1$. Logo, $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$. Deste modo, ao conside- rarmos $\epsilon > 0$, tal que $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \dfrac{\epsilon}{\lambda_1} > 0$, concluímos que $I_p(u) \to +\infty$, quando $\|u\|_c \to +\infty$.

Caso 2: $\|u\|_{p,\partial} \to +\infty$.

Temos quatro subcasos a considerar.

• $\lambda < 0$ e $\mu < 0$.

Neste caso, temos de (5.35), para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$I_p(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|_c^p - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma).$$

Desta desigualdade, segue que, se $\|u\|_c \to +\infty$, então $I_p(u) \to +\infty$

• $\lambda < 0$ e $\mu \geq 0$.

Devido à desigualdade (4.43) e à (5.35), temos, para $\epsilon > 0$, tal que $\lambda + \epsilon < 0$, ,

$$\begin{aligned} I_p(u) &\geq \tfrac{1}{p}\|u\|_c^p - \tfrac{1}{p}(\tfrac{\mu}{\mu_1} + \tfrac{\epsilon}{\mu_1})\|u\|_c^p - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma) \\ &= \tfrac{1}{p}\left(1 - \tfrac{\mu}{\mu_1} - \tfrac{\epsilon}{\mu_1}\right)\|u\|_c^p - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma). \end{aligned}$$

Mas, por hipótese, $\mu < \mu_1$. Assim, $1 - \frac{\mu}{\mu_1} > 0$. Logo, ao considerarmos $\epsilon > 0$, tal que $\lambda + \epsilon < 0$ e $1 - \frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1} > 0$, $I_p(u) \to +\infty$, quando $\|u\|_c \to +\infty$.

• $\lambda \geq 0$ e $\mu < 0$.

Por hipótese $\lambda < \lambda_1$. Logo, $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$. E assim, ao escolhermos $\epsilon > 0$, tal que $\mu + \epsilon < 0$ e $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0$, obtemos, devido às desigualdades (4.48) e (5.35),

$$I_p(u) \geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|_c^p - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma).$$

De onde concluímos que, se $\|u\|_c \to +\infty$, então $I_p(u) \to +\infty$.

• $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$.

Devido às desigualdades (4.48) e (5.35), temos, para $C(\epsilon) \doteq M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma)$,

$$\begin{aligned} I_p(u) &\geq \tfrac{1}{p}\|u\|_c^p - \tfrac{1}{p}\left(\tfrac{\lambda}{\lambda_1} + \tfrac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|_c^p - \tfrac{1}{p}(\mu+\epsilon)\|u\|_{p,\partial}^p - C(\epsilon) \\ &= \tfrac{1}{p}\left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda_1} - \tfrac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|_c^p - \tfrac{1}{p}(\mu+\epsilon)\|u\|_{p,\partial}^p - C(\epsilon), \end{aligned} \tag{5.36}$$

Ainda, por hipótese, $\lambda < \lambda_1$. Assim, $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$. Logo, tomando $\epsilon > 0$ pequeno, tal que

$$1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0, \tag{5.37}$$

obtemos, pelas desigualdades (4.43) e (5.36),

$$\begin{aligned} I_p(u) &\geq \tfrac{\mu_1}{p}\left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda_1} - \tfrac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|_{p,\partial}^p - \tfrac{1}{p}(\mu+\epsilon)\|u\|_{p,\partial}^p - C(\epsilon) \\ &= \tfrac{\mu_1}{p}\left[\left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda_1} - \tfrac{\mu}{\mu_1}\right) - \epsilon\left(\tfrac{1}{\lambda_1} + \tfrac{1}{\mu_1}\right)\right]\|u\|_{p,\partial}^p - C(\epsilon). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Mas também, por hipótese, $\lambda\mu_1 + \mu\lambda_1 < \lambda_1\mu_1$. Disso e do fato de $\lambda_1 > 0$ e $\mu_1 > 0$, temos $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\mu_1} > 0$. Consequentemente, escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, que satisfaça (5.37) e

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\mu_1}\right) - \epsilon\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\mu_1}\right) > 0,$$

concluímos, de (5.38) e de nossa suposição inicial ($\|u\|_{p,\partial} \to +\infty$), que $I_p(u) \to +\infty$, quando $\|u\|_c \to +\infty$. Portanto o funcional I_p é, de fato, coercivo, como queríamos.

Afirmação 2: O funcional I_p é limitado inferiormente.

De fato, devido à validade da afirmação 1, dado $1 > 0$, existe $R_1 > 0$, tal que

$$I_p(u) \geq 1,\ \forall\ u \in W^{1,p}(\Omega),\ com\ \|u\|_c \geq R_1. \tag{5.39}$$

Consideremos, agora, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $\|u\|_c \leq R_1$. Por isso e pelo fato das normas $\|\cdot\|_c$, $\|\cdot\|_{1,p}$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, existe constante $R_2 > 0$, tal que $\|u\|_{1,p} \leq R_2$. Consequentemente, ao fazermos uso dos teoremas 6.9 e 6.10, conseguimos novas constantes positivas R_3 e R_4, tais que $\|u\|_p \leq R_3$ e $\|u\|_{p,\partial} \leq R_4$. Disso, da validade de (5.35) e da hipótese de $\lambda < \lambda_1$ e $\mu < \mu_1$, segue, para $\epsilon > 0$ fixado, que

$$I_p(u) \geq -\frac{1}{p}(\lambda_1 + \epsilon)R_3^p - \frac{1}{p}(\mu_1 + \epsilon)R_4^p - M_\epsilon\left(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma\right) \doteq K(\epsilon).$$

Ou seja,

$$I_p(u) \geq K(\epsilon), \;\forall\; u \in W^{1,p}(\Omega), \;\text{com}\; \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{c}} \leq \mathrm{R}_1. \tag{5.40}$$

Finalmente, devido às desigualdades (5.39) e (5.40), concluímos que

$$I_p(u) \geq \min\{1, K(\epsilon)\} = K(\epsilon), \;\forall\; u \in W^{1,p}(\Omega).$$

E assim, I_p é limitado inferiormente, como desejávamos.

Afirmação 3: I_p satisfaz a condição de Palais-Smale (PS).

De fato, para provarmos tal afirmação, seja (u_m) uma sequência em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$, tal que

(i) $(I_p(u_m))$ seja limitada em $\mathbb{R}$;

(ii) $I_p^{'}(u_m) \to 0$ em $(W^{1,p}(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$.

Com isso, afirmamos que (u_m) deve limitada em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Com efeito, se isso não for verdade, então existe subsequência (u_{m_k}) de (u_m), tal que $\|u_{m_k}\|_c \to +\infty$, quando $k \to +\infty$. Logo, devido à coercividade do funcional I_p, $I_p(u_{m_k}) \to +\infty$, quando $k \to +\infty$, o que é um absurdo, pois contraria **(i)**. Deste modo, a sequência (u_m) é limitada em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Diante disso e da validade da condição **(ii)**, podemos aplicar a proposição 5.6. Daí, segue que (u_m) admite uma subsequência convergente em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Portanto, o funcional I_p satisfaz a condição (PS), ficando assim, provada a afirmação 3. Agora, visto que I_p é um elemento de $C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, é limitado inferiormente e satisfaz a condição (PS), temos, ao aplicarmos o teorema 6.15, que I_p possui um ponto crítico $u \in W^{1,p}(\Omega)$, isto é, $I_p^{'}(u) = 0$. E assim, u satisfaz a igualdade (5.2). Deste modo, de acordo com a definição (5.1), u é uma solução fraca para a equação (5.1). Daí segue a validade do teorema 5.1.

∎

Capítulo

6

APÊNDICE

Neste capítulo, mencionamos alguns dos resultados, bem como referências de suas provas, utilizados nos capítulos anteriores.

6.1 Algumas desigualdades

Teorema 6.1 *Se $0 \leq p < \infty$, $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então existe constante positiva $K(p)$ ($K(p) = 1$, se $0 \leq p \leq 1$ e $K(p) = 2^{p-1}$, se $1 \leq p < \infty$), tal que $(a+b)^p \leq K(p)(a^p + b^p)$.*

Prova: Veja [1].

Teorema 6.2 *Sejam $A \geq 0$ e $B \geq 0$. Então, se $\alpha > 0$, $(A^\alpha - B^\alpha)(A - B) \geq 0$*

Prova: É imediata, basta argumentar por absurdo e utilizar o fato da função x^α ser crescente em $[0, \infty)$.

Teorema 6.3 *Sejam A, B, C, D números reais positivos, e $\alpha, \beta \geq 0$ tais que $\alpha + \beta = 1$, então $A^\alpha B^\beta + C^\alpha D^\beta \leq (A + C)^\alpha (B + D)^\beta$.*

Prova: Veja [28]

Teorema 6.4 *Temos:*

(1) *Se $2 \leq p < \infty$, então existe constante positiva $\tilde{A}$, tal que*

$$||X|^{p-2}X - |Y|^{p-2}Y| \leq \tilde{A}|X - Y| \left(|X| + |Y|\right)^{p-2}, \ \forall \ X, Y \in \mathbb{R}^N;$$

(2) Se $1 < p \leq 2$*, então existe constante positiva* $\tilde{B}$ *tal que*

$$||X|^{p-2}X - |Y|^{p-2}Y| \leq \tilde{B}|X - Y|^{p-1}, \ \forall \ X, Y \in \mathbb{R}^N.$$

Prova: Veja [31].

6.2 Resultados básicos

Destinamos esta seção a alguns resultados de análise funcional, essenciais, para um melhor entendimento do nosso trabalho.

Teorema 6.5 *Seja* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço de Banach uniformemente convexo, e* (x_n) *uma sequência em* E*, tal que* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $(E, \|\cdot\|)$*, que satisfaz* $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$*, então* $x_n \to x$ *em* $(E, \|\cdot\|)$*.*

Prova: Veja [15].

Teorema 6.6 *Seja* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço de Banach reflexivo e seja* $\mathbb{K} \subset E$ *um subconjunto limitado, fechado e convexo. Então* $\mathbb{K}$ *é fracamente compacto em* E*, isto é,* $\mathbb{K}$ *é compacto na topologia fraca de* E $(\sigma(E, E^*))$*.*

Prova: Veja [15].

Teorema 6.7 *Seja* M *um subconjunto de um espaço com produto interno* X*. Então, se* X *for completo, e não existir* $x \in X \setminus \{0\}$ *que seja ortogonal a todo elemento de* M*, então* M *é total em* X*.*

Prova: Veja [34].

Teorema 6.8 *Seja* (u_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *satisfazendo:*
(i) $u_n(x) \to u(x)$*, para q.t.p.* $x \in \Omega$*;*
(ii) $\|u_n\|_p \to \|u\|_p$*, quando* $n \to +\infty$*.*
Então $\|u_n - u\|_p \to 0$*, quando* $n \to +\infty$*.*

Prova: Veja [31].

Teorema 6.9 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio de classe $C^{0,1}$, $N \geq 2$. Se $p \in [1, \infty)$, então o mergulho*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

é contínuo, desde que:
(1) $p < N$ *e* $1 \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$.
(2) $p \geq N$ *e* $q \in [1, \infty)$.
E mais, caso $p < N$ *e* $1 \leq q < \frac{np}{n-kp}$ *ou* $p \geq N$ *e* $q \in [1, \infty)$, *então o mergulho* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *é compacto.*

Prova: Veja [35].

6.3 Operadores traço

Veremos, no que segue, alguns resultados referentes ao operador traço e ao espaço fracionário $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$. Tais resultados, bem como, suas demonstrações, são comumente encontrados em diversas literaturas, dentre estas [1],[26] e [35].

Teorema 6.10 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, com fronteira de classe $C^{0,1}$, $N \geq 2$ e $p \in [0, \infty)$. Então a existe um único operador, denominado operador traço de $W^{1,p}$ sobre $L^q(\partial\Omega)$,*

$$\Gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega)$$

contínuo, desde que:
(1) $p < N$ *e* $1 \leq q \leq \frac{(N-1)p}{N-p}$.
(2) $p \geq N$ *e* $q \in [1, \infty)$.
E mais, caso $p < N$ *e* $1 \leq q < \frac{(N-1)p}{N-p}$ *ou* $p \geq N$ *e* $q \in [1, \infty)$, *então o operador* Γ *é compacto.*

Teorema 6.11 *Seja Ω um domínio limitado de Lipschitz (fronteira de classe $C^{0,1}$) em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$. Então, a inclusão $i : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ é linear e contínua.*

Teorema 6.12 *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, com fronteira de classe $C^{k,1}$. Assuma que $s \leq k+1$ e que $s - \frac{1}{p}$ não é um inteiro. Seja ainda, $s - \frac{1}{p} = l + \sigma$,*

$0 < \sigma < 1$ *e* l *um inteiro* ≥ 0. *Então* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *se, e somente se,* $u \in W^{s,p}(\Omega)$ *e*

$$\Gamma(u) = \Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \cdots = \Gamma\left(\frac{\partial^l u}{\partial \eta^l}\right) = 0.$$

Teorema 6.13 *Suponhamos válidas as hipóteses do teorema 6.11. Sejam, ainda,* (u_n) *uma sequência em* $L^p(\partial\Omega)$ *e* $u \in L^p(\partial\Omega)$, *tais que* $u_n \to u$ *em* $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial})$. *Então existem uma subsequência* (u_{n_k}) *de* (u_n) *e* $h \in L^p(\partial\Omega)$, *tais que*

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|) \text{ e } |u_{n_k}| \leq h, \text{ q.t.p. } x \in \partial\Omega.$$

Por fim, um resultado, talvez básico, porém, necessário.

Teorema 6.14 *Se assumirmos as hipóteses do teorema 6.11, então* $dim H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \infty$.

Prova: Seja $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ um subconjunto enumerável da $\partial\Omega$. Tal subconjunto existe, pois Ω é um domínio limitado. Agora, devido à normalidade de $\mathbb{R}^N$, existem bolas abertas $B(x_i, r_i)$, com $r_i > 0$, para $i \in \mathbb{N}$, mutuamente disjuntas. Ora, temos $B_i \doteq B[x_i, \frac{r_i}{2}] \subset B(x_i, r_i)$. Logo, ao aplicarmos o lema de Uryhson (veja [45]) para B_i e $\mathbb{R}^N \setminus B(x_i, r_i)$, existe, para cada $i \in \mathbb{N}$, uma função de classe C^1, $\phi_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, tal que $\phi_i(x) = 1$, se $x \in B_i$ e $\phi_i(x) = 0$, se $x \notin B(x_i, r_i)$. Com isso, afirmamos que o conjunto $\mathcal{L} = \{\Gamma(\varphi_1), \ldots, \Gamma(\varphi_n), \ldots\}$, o qual é enumerável, é linearmente independente em $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Com efeito, se existem escalares reais α_j, com $1 \leq j \leq k$, tais que

$$\alpha_1 \Gamma(\varphi_{i_1}) + \cdots + \alpha_j \Gamma(\varphi_{i_j}) + \cdots \alpha_k \Gamma(\varphi_{i_k}) = 0,$$

então, ao tomarmos $x \in B_{i_j} \cap \partial\Omega$, obtemos da igualdade acima, $\alpha_j = 0$. Consequentemente, o conjunto $\mathcal{L}$ é linearmente independente em $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, de onde segue a validade do teorema 6.14.

■

6.4 Resultados de teoria do ponto crítico

Nesta seção, citamos dois resultados clássicos de teoria do ponto crítico, ambos, são encontrados em diversos textos, tais como [52], [31], [46] e [32].

Proposição 6.1 *Sejam X um espaço de Banach e U um subconjunto aberto de X. Se o funcional $\phi : U \to \mathbb{R}$ possui derivada de Gateaux contínua em U, então $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$*

Teorema 6.15 *Seja E um espaço de Banach real. Se $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição (PS) e é limitado inferiormente, então $c \doteq \inf_E I$ é um valor crítico de I.*

6.5 Teorema dos multiplicadores de Lagrange

Nesta seção apenas enunciamos o teorema dos multiplicadores de Lagrange, o qual é essencial para provarmos os resultados dos capítulos 1, 2 e 4. A prova de tal teorema pode ser vista em [51].

Teorema 6.16 *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e F, G_1, G_2, $\ldots$,G_N funcionais em $C^1(E, \mathbb{R})$. Se y_0 for um extremo de F restrito ao conjunto $\bigcap_{i=1}^{N} G_i^{-1}(\{G_i(y_0)\})$, então uma das duas alternativas ocorre:*

(1) *Se*

$$A(v_1, v_2, \ldots, v_N) = \begin{pmatrix} G_1'(y_0)(v_1) & G_1'(y_0)(v_2) & \cdots & G_1'(y_0)(v_N) \\ G_2'(y_0)(v_1) & G_2'(y_0)(v_2) & \cdots & G_2'(y_0)(v_N) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ G_N'(y_0)(v_1) & G_N'(y_0)(v_2) & \cdots & G_N'(y_0)(v_N) \end{pmatrix},$$

$\det(A(v_1, v_2, \ldots, v_N)) = 0$ *para quaisquer* $v_1,\ v_2, \ldots,\ v_N \in E$;

(2) *Existem $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ 2, \ldots,\ N$, tais que $F'(y_0)(v) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i G_i'(y_0)(v)$, para todo $v \in E$.*

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R.A., FOURNIER, J.J.F.: *Sobolev Spaces*; second ed., Academic Press, New York, 2003.

[2] AFROUZI, G. A., HEIDARKHANI, S., O'REGAN D.: *Three solutions to a class of Neumann doubly eigenvalue elliptic systems driven by a* $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$*-laplacian*; Bull. Korean Math. Soc., n. 6, p. 1235-1250, 2010.

[3] AMANN, H.: *Maximum Principles and Principal Eigenvalues*; Ten Mathematical Essays on Approximation in Analysis and Topology, J. Ferrera, J. López-Gómez, F. R. Ruíz del Portal (editors), Elsevier, p. 1-60, 2005.

[4] AMBROSETTI, A., PRODI, G.: *A primer of Nonlinear Analysis*; Cambridge University Press, 1993.

[5] AMICK, C.J.: *Some remarks on Rellich's theorem and the Poincaré inequality*; J. London Math. Soc., 18 (2), p. 81-93, 1973.

[6] ANANE, A., CHAKRONE, O., KARIM, B., ZEROUALI, A.: *An asymmetric Steklov problem with weights the singular case*; Bol. Soc. Paran. de Mat., v. 27, n. 2, p. 35-42, 2009.

[7] AUCHMUTY, G.: *Finite Energy Solutions of Mixed Elliptic Boundary Value Problems*; Math. Methods for the Applied Sciences, v. 33, p. 1446-1462, 2010.

[8] AUCHMUTY, G.: *Steklov eigenproblems and the representation of solutions of elliptic boundary value problems*; Numerical Functional Analysis and Optimization, v. 25, p. 321-348, 2004.

[9] AUCHMUTY, G.: *Spectral characterization of the trace spaces* $H^s(\partial\Omega)$; SIAM J. Math. Analysis, v. 38 (3), p. 894-905, 2006.

[10] BARTOLO, P., BENCI, V., FORTUNATO, D.: *Abstract Critical Point Theorems and Applications to Some Nonlinear Problems with Strong Resonance at Infinity*; Nonlinear Analysis TMA v. 7, p. 981-1012, 1983.

[11] BINDING, P., DRÁBEK, P., HUANG, Y.X.: *On Neumann boundary value problems for some quasilinear elliptic equations*; Electronic Journal of Differential Equations, v. 1942, n. 05, p. 1-11, 1997.

[12] BINDING, P., HUANG, Y.X.: *Existence and nonexistence of positive eigenfunctions for the p-laplacian*; Proceedings of the american math. Soc., v. 123, n. 6, 1995.

[13] BONANO, G., CANDITO, P.: *Three solutions to a Neumann problem for elliptic equations involving the p-laplacian*; Arch. Math., n. 80, p. 424-429, 2003.

[14] BONDER, J.F., MARTÍNEZ, S., ROSSI, J.D.: *Existence results for gradient elliptic systems with nonlinear boundary conditions*; Nonlinear Differential Equations Appl., v. 14, n. 1-2, p. 153-179, 2007.

[15] BREZIS, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*; Springer, New York, 2011.

[16] BROCK, F.: *An isoperimetric inequality for eigenvalues of the Stekloff problem*; ZAMM Z. Angew. Math. Mech., v. 81, p. 69-71, 2001.

[17] BROWN, K.J., WU, T.F.: *A semilinear elliptic system involving nonlinear boundary condition and sign-changing weight function*; J. Math. Anal. Appl., v. 337, p. 1326-1336, 2008.

[18] CERAMI, G.: *Un Criterio de Esistenza per i Punti Critici su Varietà Ilimitate*; Rc. Ist. Lomb. Sci. Lett., 112, p. 332-336, 1978.

[19] DERLET, A., GOSSEZ, J.P., TAKÁC, P.: *Minimization of eigenvalues for a quasilinear elliptic Neumann with indefinite weight*; J. Math. Anal. Appl., v. 371, n. 1, p. 69-79, 2010.

[20] COSTA, D.G., MAGALHÃES, C.A.: *Variational elliptic problems which are non-quadratic at infinity*; Journal Nonlinear Analysis TMA, v. 23, p. 1401-1412, 1994.

[21] DE PAIVA, F.O.V., FURTADO, M.F.: *Multiplicity of solutions for resonant elliptic systems*; J. Math. Anal. Appl. 319, p. 435-449, 2006.

[22] DI BENEDETTO, E.: *Real Analysis*; Birkhauser, Boston, 2001.

[23] ESCOBAR, J.F.: *An isoperimetric inequality and the first Steklov eigenvalue*; Journal of Functional Analysis, v. 165, p. 101-116, 1999.

[24] ESCOBAR, J.F.: *A comparison theorem for the first non-zero Steklov eingenvalue*; Journal of Functional Analysis, v. 178, p. 143-155, 2000.

[25] EVANS, L.C., GARIEPY, R.F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*; CRC Press, Boca Raton, 1992.

[26] GRISVARD, P.: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*; Pitman, Boston, 1985.

[27] EL HABIB, S., TSOULI, N.: *On the spectrum of the p-laplacian operator for Neumann eigenvalue problems with weights*; Electronic Journal of Differential Equations, Conference 14, p. 181-190, 2006.

[28] HARDY, G.H., LITTLEWOOD, J.E., PÓLYA, G.: *Inequalities*; Cambridge The University Press, London, 1934.

[29] HILLE, E., PHILLIPS, R.S.: *Functional Analysis and Semi-Groups*; American Mathematical Society, Colloquium Publications, v. 31, 2000.

[30] HUANG, Y.X.: *On eigenvalue problems of the p-laplacian with Neumann boundary conditions*; Proceedins of the american math. soc., v. 109, n. 1, 1990.

[31] KAVIAN, O.: *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*; Springer-Verlag, Paris, 1993.

[32] KESAVAN, S.: *Nonlinear Function Analysis*; Hindustan Book Agency (India), New Dehli, 1993.

[33] KOUROGENIS, N.C., PAPAGEORGIOU, N.S.: *Nonsmooth critical point theory and nonlinear elliptic equations at resonance*; J. Austral. Math. Soc. (Series A), 69, p. 245-271, 2000.

[34] KREYZIG, E.: Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley, New York, 1978.

[35] KUFNER A., JOHN O., FUCIK, S.: *Function Spaces*; Academia, Praha & Noordhoff International Publishing, Layden, 1977.

[36] LAMBERTI, P.D.: *Steklov-type eigenvalues associated with best Sobolev trace constants: domain perturbation and overdetermined systems*; Complex Variables and Elliptic Equations, 2011.

[37] LÊ, A.: *Eigenvalue problems for the p-Laplacian*; Nonlinear Analysis, v. 64, p. 1057-1099, 2006.

[38] LI, C.: *The existence of infinitely many solutions of a class of nonlinear elliptic equations with Neumann boundary condition for both resonance and oscillation problems*; Nonlinear Analysis, v. 54, p. 441-443, 2003.

[39] LI, C., LI, S.: *Multiple solutions and sign-changing solutions of a class of nonlinear elliptic equations with Neumann boundary condition*; J. Math. Anal. Appl., v. 298, p. 14-32, 2004.

[40] LIMA, E.L.: *Análise no Espaço* $\mathbb{R}^n$; Primeira Edição (terceira impressão), IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[41] MARTÍNEZ, S., ROSSI, J. D.: *Isolation and simplicity for the first eigenvalue of the p-Laplacian with a nonlinear boundary condition*; Abstr. Appl. Anal., v. 7, p. 287-293, 2002.

[42] MAVINGA, N., NKASHAMA, M.N.: *Steklov-Neumann eigenproblems and nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions*; J. Differential Equations, v. 248, p. 1212-1229, 2010.

[43] MCOWEN, R.C.: *Partial Differential Equations: Methods and Applications*; Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

[44] MOTREANU, D., WINKERT, P.: *On the Fucik spectrum for the p-laplacian with Robin boundary condition*; Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, v. 74, p. 4671-4681, 2011.

[45] NEVES, V.: *Variedades Diferenciais-Introdução breve*; Notas sobre Variedades Diferenciais, Dep. de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal, 2011.

[46] RABINOWICZ, P.H.: *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*; Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[47] ROBINSON, S.B.: *On the second eigenvalue for nonhomogeneous quasilinear operators*; Siam J. Math. Anal., v. 35, n. 5, p. 1241-1249, 2004.

[48] RUDIN, W.: *Principles of mathematical analysis*; McGraw-Hill, New York, 1976.

[49] SCHECHTER, M., ZOU, W.: *An infinite dimensional theorem and applications*; J. Differential Equations, v. 201, p. 325-350, 2004.

[50] TORNÉ, O.: *Steklov problem with an indefinite weight for the p-laplacian*; Electronic Journal of Differential Equation, v. 2005, n. 87, p. 1-8, 2005.

[51] TROUTMAN J.L.: *Variational Calculus and Optimal Control*; Springer, New York, 1995.

[52] WILLEM, M.: *Minimax theory*; Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhauser, 24, Boston, MA, 1996.

[53] ZHANG, J., LI, S., WANG, Y., XUE, X.: *Multiple solutions for semilinear elliptic equations with Neumann boundary condition and jumping nonlinearities*; J. Math. Anal. Appl., v. 371, p. 682-690, 2010.

[54] ZHANG, J., XUE, X.: *Multiple solutions of p-laplacian with Neumann and Robin boundary condition for both resonance and oscillation problem*; Hindaws Publishing Corporation, Boundary Value Problems, 2011.