UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Conjuntos minimais de pontos fixos e coincidências de aplicações fibradas

Weslem Liberato Silva

São Carlos
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Conjuntos minimais de pontos fixos e coincidências de aplicações fibradas

Weslem Liberato Silva

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo.
Co-orientador: Prof. Dr. João Peres Vieira- UNESP - Rio Claro.

São Carlos
2012

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

S586cm

Silva, Weslem Liberato.
Conjuntos minimais de pontos fixos e coincidências de aplicações fibradas / Weslem Liberato Silva. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
213 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Topologia algébrica. 2. Coincidência. 3. Fíbrado. 4. Aplicação que preserva fibra. 5. Teoria do ponto fixo. I. Título.

CDD: 514.2 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo
DM - UFSCar

Profa. Dra. Denise de Mattos
ICMC – USP

Prof. Dr. Dirceu Penteado
DM - UFSCar

Profa. Dra. Alice Kimie MiwaLibardi
UNESP – RC

Daciberg Lima Gonçalves

Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves
IME - USP

Agradecimentos

À Deus por tudo.

Aos meus pais José Carlos Deus e Silva e Josefina Liberato Silva pelo apoio de sempre.

Ao meu orientador Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo pela ajuda, incentivo e suas sugestões que me fizeram crescer durante o doutorado.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. João Peres Vieira da UNESP - RC pelo apoio e colaboração.

Ao Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves do IME - USP pelo incentivo durante o mestrado e doutorado.

Ao Departamento de Matématica da UFSCar pela oportunidade.

À minha esposa Elisângela Rosemeri Martins Silva pelo companheirismo e seu apoio principalmente durante os momentos em que estava longe.

Ao Prof. Dr. Peter N. S. Wong do Department of Mathematics, Bates College, USA pela sugestão do principal artigo que usamos na segunda parte da tese.

Aos meus amigos e colegas pela motivação.

Por fim, a CAPES pela bolsa concedida.

Resumo

Esta tese foi desenvolvida em duas partes. Inicialmente, consideramos um par de aplicações que preserva fibra, $f_1, f_2 : M \to M$, em um fibrado com base S^1 e fibra garrafa de Klein. Utilizando-se de um sistema algébrico de equações, descobrimos em que situações o conjunto minimal de coincidências sobre S^1 do par (f_1, f_2) é vazio. Na segunda parte, motivado por esse problema, consideramos uma aplicação que preserva fibra, $f : M \to M$, em um fibrado com base S^1 e fibra toro. Usando a teoria algébrica de ponto fixo a 1-parâmetro estudamos o conjunto minimal dos pontos fixos sobre S^1 da aplicação f. Em alguns fibrados foi possível obter uma classificação completa desses conjuntos.

Palavras-chave: coincidência, fibrado, aplicação que preserva fibra, teoria do ponto fixo a 1-parâmetro.

Abstract

This thesis was developed in two parts. Firstly, we consider a pair of fiber-preserving maps $f_1, f_2 : M \to M$ in a fiber bundle with base S^1 and fiber Klein bottle. Using an algebraic system of equations we found in what situations the minimal coincidence set over S^1 of the pair (f_1, f_2) is empty. In the second part, motivated by this problem, we consider a fiber-preserving map $f : M \to M$ in a fiber bundle with base S^1 and fiber torus. Using the one-parameter fixed point theory we studied the minimal fixed point set over S^1 of the map f. In some fiber bundle we classified completely this sets.

Keywords: coincidence, fiber bundle, fiber-preserving map, one-parameter fixed point theory.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A teoria de coincidência de Nielsen tem sido estendida para espaços fibrados em duas direções. A primeira, é considerar fibrados $M_1 \xrightarrow{p_1} B_1$, $M_2 \xrightarrow{p_2} B_2$ e aplicações $f_1, f_2 : M_1 \to M_2$ que preservam fibra, isto é, se $x, x^{'} \in M_1$ com $p_1(x) = p_1(x^{'})$ então devemos ter $p_2(f_i(x)) = p_2(f_i(x^{'}))$, $i = 1, 2$. Note que cada aplicação, $f_i : M_1 \to M_2$, induz uma única aplicação, $\bar{f}_i : B_1 \to B_2$, satisfazendo; $p_2 \circ f_i = \bar{f}_i \circ p_1$, para cada $i = 1, 2$.

Com a notação acima estuda-se o conjunto minimal de coincidências dentre todos os pares de aplicações homotópicos ao par (f_1, f_2) por homotopias que preservam fibra. Mais precisamente estuda-se o número mínimo; $MC_{B_1B_2}[f_1, f_2] = min\{\#coin(f_1^{'}, f_2^{'})|$ $f_1^{'} \sim f_1, f_2^{'} \sim f_2\}$, onde $coin(f_1^{'}, f_2^{'}) = \{x \in M_1 | f_1^{'}(x) = f_2^{'}(x)\}$ e o símbolo "$\sim$" significa uma homotopia que preserva fibra em cada nível.

A outra direção é considerar na situação acima, $B_1 = B_2 = B$ e estudar o número mínimo $MC_B[f_1, f_2]$, sob a hipótese de que as aplicações $\bar{f}_i : B \to B$, induzidas pelas aplicações $f_i : M_1 \to M_2$, para cada $i = 1, 2$, é a identidade. Neste caso, dizer que cada uma das aplicações, $f_i : M_1 \to M_2$, preserva fibra é equivalente a escrever a seguinte relação: $p_2 \circ f_i = p_1$, $i = 1, 2$. Para um estudo da teoria de coincidência usando a primeira direção veja, por exemplo, [35]. Agora, usando a segunda direção veja [25] e [32]. Neste trabalho consideramos a segunda direção.

Se tomarmos $M_1 = M_2 = M$, $f_2 = Id$ e consideramos apenas homotopias que preservam fibra da aplicação $f_1 : M \to M$ então recaimos no estudo do número mínimo $MF_B[f_1] = min\{\#Fix(f^{'})|f^{'} \sim f_1\}$. O conjunto dos pontos fixos de uma aplicação fibrada tem sido estudado por vários autores. Por exemplo, considerando a primeira direção veja [4], [5] e [7]. Agora, para um estudo considerando a segunda direção veja

[11], [19], [26], [27] e [28].

Quando o par, $f_1, f_2 : M_1 \to M_2$, pode ser deformado, por uma homotopia que preserva fibra, a um par de aplicações $(f_1^{'}, f_2^{'})$ livre de coincidências então obtemos; $MC_B[f_1, f_2] = 0$. Tomando, $M_1 = M_2$, fibrado com base S^1 e fibra garrafa de Klein então esse último problema foi estudado em [42]. Dada uma aplicação $f : M \to M$ em um fibrado com base e fibra sendo variedades fechadas então o problema de descobrir se o número $MF_B[f]$ é zero tem sido considerado por vários autores dentres eles veja [11], [19], [26] e [27].

Consideremos um par de aplicações $(f_1, f_2) : M \to M \times_{S^1} M$, onde M é um fibrado sobre o círculo S^1 e a fibra é uma superfície fechada S. Esses fibrados são obtidos do espaço $S \times [0, 1]$ identificando os pontos $(x, 0)$ com $(\phi(x), 1)$, onde ϕ é um homeomorfismo da superfície S.

Esta tese está organizada em 6 capítulos e um apêndice. Inicialmente, consideramos um fibrado, $M = M(\phi) = \frac{K \times I}{(x,0)\sim(\phi(x),1)}$, com base S^1 e fibra $S = K$, garrafa de Klein e investigamos quando um par de aplicações $(f_1, f_2) : M(\phi) \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, que preserva fibra sobre S^1, pode ser deformado, por uma homotopia que preserva fibra, a um par de aplicações $(f_1^{'}, f_2^{'})$ livre de coincidências. Em seguida, consideramos um fibrado, M, com base S^1 e fibra $S = T$, Toro e estudamos o conjunto minimal dos pontos fixos de uma aplicação que preserva fibra, $f : M \to M$.

No primeiro capítulo, apresentamos uma equivalência da nossa primeira questão, relacionando-a a existência de uma secção. Isso é dado pelo teorema 1.3.1. Mostramos que encontrar essa secção é equivalente a encontrar um levantamento em um diagrama algébrico, proposição 1.3.4. Também apresentamos o número de Nielsen de um par de aplicações na garrafa de Klein.

No segundo capítulo, classificamos todos os K-fibrados sobre S^1, proposição 2.1.2, e apresentamos as classes de homotopia dos pares (f_1, f_2), sobre S^1, com $N(f_{1|_K}, f_{2|_K}) = 0$, teorema 2.1.1.

No terceiro capítulo, apresentamos uma condição necessária e suficiente para a existência do levantamento do diagrama 1.4. Essa condição está relacionada a existência de solução de um sistema de equações, que envolvem as presentações dos grupos dados no apêndice.

No quarto capítulo, obtivemos resultados no seguinte contexto: dado um par de aplicações $f_1, f_2 : M(\phi) \to M(\phi)$ então, como veremos na proposição 2.1.4, os homomorfismos $f_{i\#} : \pi_1(M(\phi)) \to \pi_1(M(\phi))$, para cada $i = 1, 2$, são dados por;

$$f_{i\#}: \quad \begin{array}{rcl} \alpha & \longmapsto & \alpha^{r_i} \\ \beta & \longmapsto & \alpha^{s_i}\beta^{t_i} \\ c_0 & \longmapsto & \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}c_0 \end{array} \quad ,$$

onde α, β e c_0 são geradores do grupo, $\pi_1(M(\phi))$, dados pela proposição 2.1.2. Se t_1, t_2 são ímpares então apresentamos uma classificação completa, no teorema 4.1.1, de quando podemos deformar o par (f_1, f_2), por uma homotopia que preserva fibra, a um par livre de coincidências. Esses resultados foram publicados em [42].

O problema acima nos levou a seguinte questão: se não é possível deformar o par (f_1, f_2) a um par livre de coincidências, por uma homotopia que preserva fibra, então quem é o número mínimo $MC_{S^1}[f_1, f_2]$? Em [25] e [32] esse número foi estudado usando técnicas de bordismo normal. Aqui, o interesse está em descobrir esse número diretamente em termos do homomorfismo $(f_1, f_2)_\#$. Em geral o número $MC_{S^1}[f_1, f_2]$ é infinito, assim o interesse está em descobrir o número de componentes por caminhos do conjunto minimal de coincidências do par (f_1, f_2).

Estudamos, nos capítulos 5 e 6 desta tese, o conjunto minimal dos pontos fixos de uma aplicação que preserva fibra $f : M \to M$, onde M é um fibrado com base S^1 e fibra $S = T$, Toro. Para mais detalhes desses fibrados veja [26].

Estudar o conjunto minimal de pontos fixos de aplicações em fibrados com base S^1 e fibra Toro, nos levou ao estudo do conjunto minimal de pontos fixos de homotopias do Toro. Nesse contexto usamos o traço a 1-parâmetro algébrico desenvolvido por Ross Geoghegan e Andrew Nicas em [16]. O conjunto dos pontos fixos de homotopias também tem sido estudado por outros autores dentre eles veja [9], [21], [22], [38] e [39].

No quinto capítulo, apresentamos alguns preliminares algébricos necessários para o estudo do traço a 1-parâmetro. Em particular, apresentamos a homologia de um grupo G, com coeficiente em um $\mathbb{Z}G$-módulo e a homologia de Hochschild.

No sexto capítulo, usamos a homologia de Hochschild e o traço a 1-parâmetro para estudar o conjunto minimal dos pontos fixos de uma aplicação $f : M \to M$. Em alguns fibrados classificamos esses conjuntos completamente. Esses resultados se encontram no teorema 6.6.1

No apêndice, colocamos o cálculo do grupo fundamental dos espaços $M(\phi)$, $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ e $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$, onde Δ é a diagonal em $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, pullback de $p : M(\phi) \to S^1$ por $p : M(\phi) \to S^1$. Esses cálculos também se encontram em [27].

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar uma descrição detalhada do nosso problema inicial, e mostrar que resolve-lo é equivalente a encontrar um levantamento em um diagrama algébrico, proposição 1.3.4. Começaremos, descrevendo um pouco sobre noções da teoria de coincidência.

1.1 Teoria de Coincidência

Sejam $f, g : X \to Y$ aplicações entre CW complexos finitos. Denotemos por $Coin(f, g)$ o conjunto $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$. Suponha que x_1 e x_2 pertençam a $Coin(f, g)$. Dizemos que x_1 e x_2 são *Nielsen equivalentes* com respeito a f e g se existe um caminho $\sigma : [0, 1] \to X$ tal que $\sigma(0) = x_1$, $\sigma(1) = x_2$ e $f \circ \sigma$ é homotópica a $g \circ \sigma$ relativamente aos pontos finais.

Temos que a relação definida acima é uma relação de equivalência. Assim, podemos particionar o conjunto $Coin(f, g)$ em classes de equivalência dessa relação, chamadas de classes de coincidências.

A partir da relação acima define-se o índice de uma classe de coincidência. Não entraremos nos detalhes dessa definição devido sua dificuldade. Uma classe de coincidência é dita essencial se seu índice é diferente de zero. O número Nielsen coincidência, $N(f, g)$, de f e g é definido como sendo o número de classes de coincidências essenciais.

Temos que $N(f,g)$ é um invariante homotópico, finito e é um limitante inferior para o conjunto $Coin(f^{'},g^{'})$ das aplicações $f^{'},g^{'}$ homotópicas a f e g respectivamente. Para uma melhor descrição do assunto, por exemplo, veja [20] e [10]. Neste trabalho usamos alguns resultados da teoria de coincidência demonstrados em [10].

Uma das generalizações da teoria de coincidência, é considerar coincidências de aplicações, $f,g : M \to M$, que preservam fibra, isto é, $p \circ f = p$, $p \circ g = p$, em um fibrado $F \to M \xrightarrow{p} B$. Neste caso consideramos homotopias sobre B. Note que quando $B = \{pt\}$, recaimos no caso considerado acima. Esse problema tem sido considerado por muitos autores. Para a definição de classes de coincidências e número de Nielsen sobre B, por exemplo, veja [25].

A seguir, descreveremos um resultado sobre extensão de grupo que usaremos ao longo deste trabalho.

1.2 Extensão de Grupo

Sejam A e G grupos com presentações dadas por; $A =< Y|S >$ e $G =< X|R >$. Seja

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{l} \tilde{G} \xrightarrow{v} G \longrightarrow 1$$

uma extensão fixada de G por A.

Sejam $\tilde{Y} = \{\tilde{y} = l(y)|y \in Y\}$ e $\tilde{S} = \{\tilde{s}|s \in S\}$ o conjunto das palavras em $\tilde{Y}$ obtida de S trocando y por $\tilde{y}$ quando ele aparecer. Para cada $x \in X$ escolhemos $\tilde{x}$ pertencente a $\tilde{G}$ tal que $v(\tilde{x}) = x$. Tomemos $\tilde{X} = \{\tilde{x}|x \in X\}$ onde $\tilde{x}$ foi escolhido anteriormente.

Consideremos também para cada $r \in R$ a palavra $\tilde{r}$ em $\tilde{X}$ obtida de r trocando x por $\tilde{x}$. Agora v anula cada $\tilde{r}$, pois por hipótese temos $v(\tilde{x}) = x$. Portanto, para cada $r \in R$ temos que $\tilde{r} \in Ker(v) = Im(l)$. Como $Im(l)$ é gerado pelo conjunto $\tilde{Y}$ então, cada $\tilde{r}$ pode ser escrito como uma palavra, digamos v_r, em $\tilde{y}$. Coloquemos $\tilde{R} = \{\tilde{r}v_r^{-1}|r \in R\}$.

Como $Im(l)$ é um subgrupo normal de $\tilde{G}$, então cada conjugado $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1}$, onde $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, pertence a $Im(l)$. Portanto, $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1}$ é uma palavra $w_{x,y}$ em $\tilde{y}$. Coloquemos $\tilde{T} = \{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1}w_{x,y}^{-1}|x \in X, y \in Y\}$.

Teorema 1.2.1. *Com a notação acima temos que o grupo $\tilde{G}$ possui a seguinte presentação: $\tilde{G} =< \tilde{X}, \tilde{Y} | \tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{T} >$.*

A demonstração do teorema acima se encontra no capítulo 13 de [31].

1.3 O problema geral.

Seja (F, M, S^1, p) um fibrado onde, M, F são variedades fechadas, e sejam $f, g : M \to M$ aplicações que preservam fibra sobre S^1, isto é, $p \circ f = p$, $p \circ g = p$. Queremos saber: quando o par (f, g) pode ser deformado sobre S^1 a um par de aplicações (f', g') livre de coincidência, por uma homotopia que preserva fibra ?

Nesta seção daremos uma formulação desse problema através de um diagrama geométrico e depois através de um diagrama algébrico. Trabalharemos com a formulação algébrica do problema. Começaremos definindo alguns espaços que foram utilizados neste trabalho.

Seja $M \times_{S^1} M \to M$ o pullback de $p : M \to S^1$ por $p : M \to S^1$. Esse espaço é dado por $M \times_{S^1} M = \{(x, y) \in M \times M | p(x) = p(y)\}$. De [46], temos que a inclusão $M \times_{S^1} M - \Delta \hookrightarrow M \times_{S^1} M$, onde Δ é a diagonal em $M \times_{S^1} M$, pode ser trocada por uma fibração $q : E_{S^1}(M) \to M \times_{S^1} M$, cuja fibra sobre um ponto b_0 denotaremos por $\mathcal{F}$, tal que $\pi_n(E_{S^1}(M)) \approx \pi_n(M \times_{S^1} M - \Delta)$. Aqui temos $E_{S^1}(M) = \{(x, \omega) \in B \times A^I | i(x) = \omega(0)\}$, onde $A = M \times_{S^1} M$, $B = M \times_{S^1} M - \Delta$ e q é dada por $q(x, \omega) = \omega(1)$.

A seguinte proposição relaciona o nosso problema com um diagrama geométrico.

Proposição 1.3.1. *Com a notação acima temos que o par de aplicações $(f, g) : M \to M \times_{S^1} M$ pode ser deformado a um par de aplicações (f', g') livre de coincidência, por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 se, e somente se, existir uma aplicação $h : M \to M \times_{S^1} M - \Delta$ que torna o diagrama abaixo homotópico comutativo.*

$$
\begin{tikzcd}
 & M \times_{S^1} M - \Delta \arrow[d, hook, "i"] \\
M \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "(f,g)"'] & M \times_{S^1} M
\end{tikzcd}
\tag{1.1}
$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que exista uma homotopia $H = (F, G) : M \times I \to M \times_{S^1} M$ tal que; $p \circ H_t(x) = p(x)$ $\forall x \in M$, $\forall t \in I$, com $H_0(x) = (f(x), g(x))$ e $H_1(x) = (f^{'}(x), g^{'}(x))$, onde $f^{'}(x) \neq g^{'}(x)$ $\forall x \in M$. Defina $h : M \to M \times_{S^1} M$ por $h(x) = (f^{'}(x), g^{'}(x))$. Como $p \circ f^{'}(x) = p(x)$, $p \circ g^{'}(x) = p(x)$ e $f^{'}(x) \neq g^{'}(x)$, $\forall x \in M$, então $h(x)$ pertence a $M \times_{S^1} M - \Delta$.

($\Leftarrow$) Suponha que exista $h : M \to M \times_{S^1} M - \Delta$, com $h(x) = (\alpha(x), \beta(x))$ e uma homotopia $H : M \times I \to M \times_{S^1} M$ que torna o diagrama acima comutativo. Temos; $\alpha(x) \neq \beta(x)$, $\forall x \in M$. Supondo $H_0 = (f, g)$ e $H_1 = (i \circ \alpha, i \circ \beta)$ então obtemos o resultado, já que $i \circ \alpha(x) \neq i \circ \beta(x)$, $\forall x \in M$. $\square$

Podemos trocar o diagrama acima por outro que também é uma equivalência do nosso problema:

Teorema 1.3.1. *Um par de aplicações $(f, g) : M \to M \times_{S^1} M$, sobre S^1, pode ser deformado a um par de aplicações $(f^{'}, g^{'})$ livre de coincidência, por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 se, e somente se, existir uma secção σ no diagrama abaixo;*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[d] \\
 & E_{S^1}(f,g) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & E_{S^1}(M) \arrow[d, "q"] \\
M \arrow[ur, dashed, "\sigma"] \arrow[r, "1"] & M \arrow[r, "(f,g)"] & M \times_{S^1} M
\end{tikzcd}
\tag{1.2}
$$

onde $p_1 : E_{S^1}(f, g) \to M$ é a fibração induzida de q por (f, g).

Demonstração. Se existir σ no diagrama acima, então teremos uma aplicação $\theta : M \to E_{S^1}(M)$ dada por $\theta = p_2 \circ \sigma$, e portanto, pela proposição 2.4 de [11], o par de aplicações (f, g) pode ser deformado a um par de aplicações livre de coincidências por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1.

Suponha agora que exista, $H : M \times I \to M \times_{S^1} M$, homotopia com $H_1 = (f, g)$ e $H_0 = (f', g')$, onde $f'(x) \neq g'(x)\ \forall x \in M$ e $p \circ H = p$. Temos que $G_0(x) = (H_0(x), c_{H_0(x)})$ pertence a $(M \times_{S^1} M - \Delta) \times (M \times_{S^1} M)^I$, e $q \circ G_0(x) = c_{H_0(x)}(1) = H_0(x)$, onde $c_{H_0(x)}$ é o caminho constante em $M \times_{S^1} M - \Delta \subset M \times_{S^1} M$ dado por $c_{H_0(x)}(t) = H_0(x)$. Como q é uma fibração então existe uma homotopia $G : M \times I \to E_{S^1}(M)$ que levanta H. Logo, existe σ no diagrama acima, ou seja, basta definir $\sigma(x) = (x, G_1(x))$. Temos que $\sigma(x)$ pertence a $E_{S^1}(f, g)$, pois $q \circ G_1(x) = H_1(x) = (f, g)(x)$. $\square$

Trabalhamos nesse problema com o espaço M sendo um fibrado sobre S^1 e fibra, K, garrafa de Klein. Para isso obtivemos modelos dos fibrados com base S^1 e fibra K usando homeomorfismos de K.

1.3.1 Fibrados com base S^1 e fibra garrafa de Klein

Seja $\phi : K \to K$ um homeomorfismo que possui um ponto fixo, digamos x_0. Veremos abaixo, na demonstração do corolário 1.3.1, que não há perda de generalidade em assumir essa hipótese.

Denotemos por, $M(\phi)$, o espaço quociente obtido de $K \times I$ pela relação $(x, 0) \sim (\phi(x), 1)$. Denotaremos a classe de um elemento em $M(\phi)$ por $< x, t >$. Temos que, $K \to M(\phi) \xrightarrow{p} S^1$ é um fibrado, localmente trivial, onde a aplicação de projeção, p, é dada por; $p(< x, t >) =< t >$. Aqui, estamos considerando S^1 como o espaço quociente obtido de I, intervalo unitário, pela relação $0 \sim 1$.

De fato, podemos escolher abertos $\{U, V\}$ que cobrem S^1. Se um aberto digamos $V \subset S^1$ não contém $< 0 >$ então, a aplicação $\psi : V \times K \to p^{-1}(V)$ definida por; $\psi(< t >, x) =< x, t >$ é um homeomorfismo. Agora, dado um aberto $U \subset S^1$ contendo $< 0 >$, então U pode ser visto como $U = U_1 \cup U_2$, onde $U_1 = [0, \epsilon)$, e $U_2 = (1 - \delta, 1]$.

Assim, basta definir $\psi : U \times K \to p^{-1}(U)$ por;

$$\psi(< t >, x) = \begin{cases} < x, t >, & se \quad t \in U_1 \cup \{U_2 - 1\} \\ < \phi(x), 1 >, & se \qquad t = 1 \end{cases}$$

e $\psi' : p^{-1}(U) \to U \times K$ por;

$$\psi'(< x, t >) = \begin{cases} (< t >, x), & se \quad t \in U_1 \cup \{U_2 - 1\} \\ (< 1 >, \phi^{-1}(x)), & se \qquad t = 1 \end{cases}$$

Temos que ψ e ψ' estão bem definidas são contínuas e uma é inversa da outra. Portanto, ψ é um homeomorfismo e $p \circ \psi(< t >, x) =< t >$.

Proposição 1.3.2. *Se $\phi_1, \phi_2 : K \to K$ são homeomorfismos, então $M(\phi_1)$ é homeomorfo a $M(\phi_2)$, por um homeomorfismo que preserva fibra sobre S^1 se, e somente se, ϕ_1 é isotópico a um conjugado de ϕ_2.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponha que exista uma isotopia $H : K \times I \to K$, e um homeomorfismo $h : K \to K$, tal que $H_0(x) = \phi_1(x)$, $H_1(x) = h \circ \phi_2 \circ h^{-1}(x)$ e H_t seja um homemorfismo de K para cada $t \in I$. Temos que o homeomorfismo $\theta : K \times I \to K \times I$, definido por $\theta(x, t) = (h^{-1} \circ H_t(x), t)$, induz um homeomorfismo $\bar{\theta} : M(\phi_1) \to M(\phi_2)$ dado por $\bar{\theta}(< x, t >) =< \theta(x, t) >$, pois $\theta(x, 0) = (h^{-1} \circ H_0(x), 0) = (h^{-1} \circ \phi_1(x), 0)$.

Observemos que $\theta(\phi_1(x), 1) = (h^{-1} \circ H_1 \circ \phi_1(x), 1) = (h \circ h^{-1} \circ \phi_2 \circ h^{-1} \circ \phi_1(x), 1) = (\phi_2 \circ h^{-1} \circ \phi_1(x), 1)$. Portanto, em $M(\phi_2)$ temos $\theta(x, 0) \sim \theta(\phi_1(x), 1)$. Note que $p \circ \bar{\theta}(< x, t >) = p(< h^{-1} \circ H_t(x), t >) =< t >= p(< x, t >)$. Assim, $\bar{\theta}$ é um homeomorfismo que preserva fibra.

($\Rightarrow$) Se $\psi : M(\phi_1) \to M(\phi_2)$ é um homeomorfismo que preserva fibra sobre S^1, então ψ deve ser da forma; $\psi(< x, t >) =< \psi_t(x), t >$, onde para cada t, ψ_t é um homeomorfismo.

Devemos ter $\psi(< x, 0 >) =< \psi_0(x), 0 >= \phi(< \phi_1(x), 1 >) =< \psi_1 \circ \phi_1(x), 1 >$, pois temos $(x, 0) \sim (\phi_1(x), 1)$ em $M(\phi_1)$. Como $(\psi_0(x), 0) \sim (\phi_2 \circ \psi_0(x), 1)$ em $M(\phi_2)$, então devemos ter $\psi_1 \circ \phi_1 = \phi_2 \circ \psi_0$, ou seja, $\psi_1 = \phi_2 \circ \psi_0 \circ \phi_1^{-1}$. Agora, definindo $H : K \times I \to K$ por $H_t(x) = \psi_0^{-1} \circ \psi_t \circ \phi_1(x)$, então temos que H é uma isotopia e, além disso temos, $H_0(x) = \psi_0^{-1} \circ \psi_0 \circ \phi_1(x) = \phi_1(x)$ e $H_1(x) = \psi_0^{-1} \circ \psi_1 \circ \phi_1(x) = \psi_0^{-1} \circ \phi_2 \circ \psi_0 \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_1(x) = \psi_0^{-1} \circ \phi_2 \circ \psi_0(x)$. □

Da proposição acima, podemos classificar os fibrados, $M(\phi)$, por classes de isotopias de K. Faremos isso no próximo corolário. No capítulo 2, apresentaremos uma classificação mais detalhada dos fibrados $M(\phi)$.

Corolário 1.3.1. *As classes dos K - fibrados sobre S^1 são classificadas por classes de conjugação de classes de isotopia de K que preservam ponto base.*

Demonstração. Seja $\phi : K \to K$ um homeomorfismo com $\phi(x_1) = y_1$. Pelo lema 5.4 do capítulo 5 de [45] temos que existe um homeomorfismo $h : K \to K$ isotópico a identidade, tal que $h(y_1) = x_1$.

Seja $H : K \times I \to K$ isotopia entre h e Id com $H_0 = h$ e $H_1 = Id$. Definindo $G : K \times I \to K$ por $G_t(x) = H_t(\phi(x))$, então temos que G é uma isotopia entre $h \circ \phi$ e ϕ. Observemos que $h \circ \phi(x_1) = h(y_1) = x_1$. Portanto, todo homeomorfismo $\phi : K \to K$ é isotópico a um homeomorfismo que preserva ponto base. Agora, pela proposição acima, concluímos a demonstração do corolário. □

1.3.2 Relacionando o problema com um diagrama algébrico

Mostraremos nesta subseção que nosso problema é equivalente a encontrar um levantamento em um diagrama algébrico.

Como a fibra, K, garrafa de Klein, é uma superfície com característica de Euler igual a zero, então pelas proposições abaixo, nosso problema se reduz a construir uma secção sobre o $2-$ esqueleto de $M(\phi)$. Temos que $M(\phi)$ é um CW-complexo, pois é quociente do CW-complexo $P = K \times I$ pelo sub CW-complexo Q dado por $Q = \{(x, 0) \sim (\phi(x), 1) | x \in K\}$.

Proposição 1.3.3. *Se $M = M(\phi)$ e $\chi(F) \leq 0$, então existe uma secção σ no diagrama 1.2, sobre M, se e somente se, ela existir sobre o $2-$esqueleto.*

Demonstração. Uma direção é clara. Suponha que temos uma secção sobre o 2−esqueleto. De [11] temos; $\pi_{j-1}(\mathcal{F}) \approx \pi_j(F, F - x_0)$ para todo j. Visto que $\chi(F) \leq 0$, então temos $\pi_j(F, F - x_0) = 0$ para $j \geq 3$.

Se X_n denota o n-ésimo esqueleto de $M(\phi)$, então do capítulo VI de [46], temos que a obstrução para estender a secção σ de X_n para X_{n+1} pertence a $H^{n+1}(X_{n+1}, X_n; \pi_n(\mathcal{F}))$, que se anula para $n \geq 2$. Portanto, para $n \geq 2$ sempre é possível estender σ, definida parcialmente sobre X_n, para X_{n+1}.

Observemos que, como $M(\phi)$ é conexo por caminhos, então definida σ sobre X_0, pelo teorema 5.2 do capítulo VI de [46], sempre é possível estender σ para X_1. Assim, σ existe se, e somente se, é possível estende-la de X_1 para X_2, ou seja se, e somente se, ela existe sobre o 2-esqueleto. □

A seguir enunciaremos o teorema 4.3.1, página 265 de [1], que dá uma equivalência entre encontrar uma secção sobre o 2-esqueleto e encontrar um levantamento em um diagrama algébrico.

Teorema 1.3.2. *(Critério para 2-estendabilidade) Seja (X, L) um CW-complexo relativo e $p : \tilde{X} \to X$ uma fibração com fibra $F \subset \tilde{X}$. Consideremos X, L e F conexos por caminhos. Uma secção $u : L \to \tilde{L}$, $\tilde{L} = p^{-1}(L)$, pode ser estendida a uma secção u' sobre o 2-esqueleto, $X_2 = L \cup X^2$, exatamente quando $i_\# : \pi_1(F) \to \pi_1(\tilde{X})$ for injetor e quando existir um homomorfismo θ que torna o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\tilde{L}) \arrow[r] & \pi_1(\tilde{X}) \arrow[dr, "p_\#"] & \\
\pi_1(L) \arrow[u, "u_\#"] \arrow[r] & \pi_1(X) \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "Id"] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

Podemos escolher u' tal que $u'_\# = \theta$.

Dado $q : E \to Y$ uma fibração com fibra F conexa por caminhos e $f : X \to Y$ uma aplicação, então formamos o pullback geométrico $E^* = \{(x, y) \in X \times E | f(x) = q(y)\}$.

$$\begin{tikzcd}
E^* \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"] & E \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Podemos também formar o pullback algébrico $\pi_1(X) \sqcup \pi_1(E) = \{(\alpha, \beta) \in \pi_1(X) \times \pi_1(E) |\, f_\#(\alpha) = q_\#(\beta)\}$. O lema seguinte nos dá condições para que $\pi_1(E^*)$ seja isomorfo a $\pi_1(X) \sqcup \pi_1(E)$.

Lema 1.3.1. *Com a notação anterior temos que se i_1, dado pela sequência de homotopia da fibração, q, $\ldots \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{i_1} \pi_1(E) \xrightarrow{q_\#} \pi_1(Y) \longrightarrow \ldots$ é injetor, então $\pi_1(E^*)$ é isomorfo a $\pi_1(X) \sqcup \pi_1(E)$.*

Demonstração. De fato, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(F) \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & \pi_1(E^*) \arrow[r, "q_{1\#}"] \arrow[d, "(q_{1\#}, q_{2\#})"', "\approx"] & \pi_1(X) \arrow[d, "Id"] \\
\pi_1(F) \arrow[r, "i_2"] & \pi_1(X) \sqcup \pi_1(E) \arrow[r, "p_1"] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

Usando que i_1 é injetor, então temos que $(q_{1\#}, q_{2\#}) : \pi_1(E^*) \to \pi_1(X) \sqcup \pi_1(E)$ é injetor. Rapidamente vemos que $(q_{1\#}, q_{2\#})$ é sobrejetor, e portanto um isomorfismo. Observemos que as outras aplicações do diagrama acima são dadas por $i_2(\beta) = (1, i_1(\beta))$ e $p_1(\alpha, \beta) = \alpha$. $\square$

A seguinte proposição dá uma equivalência entre o nosso problema e encontrar um levantamento num diagrama algébrico.

Proposição 1.3.4. *Existe uma secção σ no diagrama (1.2) sobre o $2-$esqueleto de $M(\phi)$ se, e somente se, o seguinte diagrama admite um levantamento ψ :*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(\mathcal{F}) \simeq \pi_2(K, K - x_0) \arrow[d] \\
 & \pi_1(E_{S^1}(M(\phi))) \arrow[d, "q_\#"'] \\
\pi_1(M(\phi)) \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "(f,g)_\#"'] & \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi))
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Demonstração. Primeiramente, observemos que existe um homomorfismo ψ que torna o diagrama abaixo comutativo se, e somente se, existe um homomorfismo θ que torna o mesmo diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(E_{S^1}(f,g)) \arrow[r, "p_{2\#}"] \arrow[d, "p_{1\#}"] & \pi_1(E_{S^1}(M(\phi))) \arrow[d, "q_\#"] \\
\pi_1(M(\phi)) \arrow[r, "Id"] \arrow[ur, dashed, "\theta"] & \pi_1(M(\phi)) \arrow[r, "(f,g)_\#"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi))
\end{tikzcd}$$

Visto que $M(\phi)\times_{S^1}M(\phi)$ é $K(\pi,1)$, então pelo lema anterior temos que $\pi_1(E_{S^1}(f,g))$ é isomorfo a $\pi_1(M(\phi)) \sqcup \pi_1(E_{S^1}(M(\phi)))$. Portanto, se existir ψ, então basta definir $\theta(x) = (x, \psi(x))$. Supondo que exista uma secção σ no diagrama (1.2), então existe $\theta = \sigma_\#$ no diagrama acima, e logo existe ψ.

Agora, suponhamos que temos um homomorfismo, ψ, dado no enunciado do teorema. Pela observação acima, existe um homomorfismo θ que torna o diagrama comutativo. Pelo teorema 1.3.2 existe uma secção σ no diagrama (1.2). $\square$

Observemos que nosso problema é equivalente ao problema algébrico dado pela proposição 1.3.4. Nossa técnica consistirá em; calcular os homomorfismos e os grupos do diagrama abaixo, e a partir daí descobrir em que situações existe o homomorfismo ψ.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] \\
 & \pi_1(\mathcal{F}) \simeq \pi_2(K, K - x_0) \arrow[d] \\
 & \pi_1(E_{S^1}(M(\phi))) \simeq \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta) \arrow[d, "q_\#"'] \\
\pi_1(M(\phi)) \arrow[r, "(f,g)_\#"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)) \arrow[d] \\
 & 1
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Consideremos $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ o pullback de $p : M(\phi) \to S^1$ por $p : M(\phi) \to S^1$ e $p_i : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) \to M(\phi), i = 1, 2$, as projeções na primeira e segunda coordenadas, respectivamente.

Observemos que, se $(< x, t_1 >, < y, t_2 >)$ pertence a $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, então devemos ter $p(< x, t_1 >) = p(< y, t_2 >)$, ou seja, $< t_1 >=< t_2 >$. Se $t_i \neq 0, 1$, $i = 1, 2$, então temos $< t_i >= t_i$, e nesse caso, deveremos ter $t_1 = t_2$. Se $t_i = 0$ ou 1 então temos $< t_i >= \{0, 1\}$. Mas em $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ temos $< x, 0 >=< \phi(x), 1 >$ portanto, nesse caso podemos considerar $t_1 = t_2$. Assim, $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ é dado pelos pares da forma; $(< x, t >, < y, t >)$, onde x, y pertence a K.

A partir de agora, calcularemos os grupos dados no diagrama (1.4). Inicialmente, demonstraremos um lema que usaremos no decorrer do texto.

Lema 1.3.2. *Dados x_1, x_2 pertencentes a K então temos,* $\pi_1(K, K - x_2, x_1) = 1$.

Demonstração. Dado $\rho : (D^1, \partial D^1, s_0) \to (K, K - x_2, x_1)$ um caminho em K, então tomemos um caminho $\gamma : D^1 \to K - x_2$ ligando x_1 a $\rho(1)$, ponto final da curva ρ.

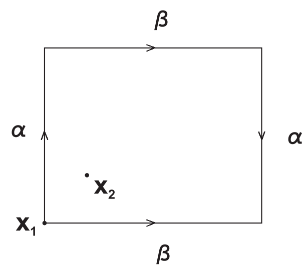


Figura 1.1: Garrafa de Klein

O caminho fechado $\rho * \gamma^{-1}$ pertence a $\pi_1(K, x_1) = < \alpha, \beta | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1 >$, logo $\rho * \gamma^{-1} = \gamma_K$, onde γ_K é um caminho da forma $\alpha^m \beta^n$. Observemos que γ_K não intersecta x_2. Portanto, temos $\rho \sim \gamma_K * \gamma$, e o caminho $\gamma_K * \gamma$ não intersecta x_2, ou seja, temos $\pi_1(K, K - x_2, x_1) = 1$. $\square$

O grupo $\pi_2(K, K - x_0)$ é dado pela sequência longa de homotopia do par $(K, K - x_0)$. De fato, como K é $K(\pi, 1)$, então temos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \to \pi_2(K, K - x_0) \to \pi_1(K - x_0) \xrightarrow{j_\#} \pi_1(K) \to 1$$

Logo, $\pi_2(K, K - x_0)$ é isomorfo ao núcleo de $j_\#$. Sabemos que $\pi_1(K) =< a, b|abab^{-1} = 1 >$ e $\pi_1(K - x_0) =< \bar{a}, \bar{b} >$. Portanto, $\pi_2(K, K - x_0)$ é isomorfo a $N(R)$, onde $N(R)$ é o menor subgrupo normal de $\pi_1(K - x_0)$ contendo $R = \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$.

Proposição 1.3.5. *A sequência exata curta:*

$$1 \to \pi_1(K) \to \pi_1(M(\phi)) \to \pi_1(S^1) \to 1,$$

cinde, e a ação $\mathbb{Z} \to Aut(\pi_1(K))$ *que vem da secção* $s_0 : S^1 \to M(\phi)$, $s_0(< t >) =< x_0, t >$, *é dada por* $c.\alpha = c\alpha c^{-1} = \phi_\#(\alpha)$, *onde* $c = p_\# < s_0 >$ *é o gerador de* $\pi_1(S^1)$. *Portanto,* $\pi_1(M(\phi)) \cong \pi_1(K) \rtimes \mathbb{Z}$ *produto semi-direto.*

Demonstração. Sabemos que $K \xrightarrow{i} M(\phi) \xrightarrow{p} S^1$ é um fibrado. Como S^1 é paracompacto, então p é uma fibração. Da fibração $K \xrightarrow{i} M(\phi) \xrightarrow{p} S^1$ e do fato de S^1 ser $K(\pi, 1)$ obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \pi_1(K) \xrightarrow{i_\#} \pi_1(M(\phi)) \xrightarrow{p_\#} \pi_1(S^1) \longrightarrow 1$$

Como $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, então a sequência acima cinde. Logo, podemos concluir, usando o teorema $V.9.16$ capítulo 5 de [13], que $\pi_1(M(\phi)) \cong \pi_1(K) \rtimes \mathbb{Z}$ produto semi-direto.

Agora, consideremos a aplicação $s_0 : S^1 \to M(\phi)$ dada por; $s_0(< t >) =< x_0, t >$, onde x_0 é um ponto de K, tal que $\phi(x_0) = x_0$. Temos; $p \circ s_0(< t >) = p(< x_0, t >) = < t >$. Portanto, s_0 é uma secção. Também temos que $p_\#(< s_0 >) = c$ é um gerador de $\pi_1(S^1)$. Em relação a essa secção temos a seguinte ação:

$$\pi_1(S^1) \xrightarrow{\Gamma} Aut(\pi_1(K))$$
$$c \mapsto \theta_0(c)$$

onde, $\theta_0(c)(\rho) =< s_0 > \rho < s_0 >^{-1}$.

Consideremos o caminho, $\gamma : I \longrightarrow K \times I$, dado por $\gamma(t) = (x_0, t)$. Temos que o laço obtido pela justaposição dos caminhos $\gamma * (\phi(\alpha), 1) * \gamma^{-1}$ é homotópico ao laço $(\phi(\alpha), 0)$. De fato, a homotopia entre esses caminhos é dada por:

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma(3t) = (x_0, 3t) & se \quad 0 \le t \le \frac{s}{3} \\ (\phi(\alpha), s) & se \quad \frac{s}{3} \le t \le \frac{3-s}{3} \\ \gamma(3(1-t)) = (x_0, 3(1-t)) & se \quad \frac{3-s}{3} \le t \le 1, \end{cases}$$

onde $s \in I$. Temos $H(t,0) = (\phi(\alpha), 0)$ e $H(t,1) = \gamma * (\phi(\alpha), 1) * \gamma^{-1}$.

No espaço quociente $M(\phi)$ obtemos; $< \gamma * (\alpha, 0) * \gamma^{-1} >=< \gamma * (\phi(\alpha), 1) * \gamma^{-1} >=$ $< (\phi(\alpha), 0) >$. Logo, obtemos $c\alpha c^{-1} = \phi_{\#}(\alpha)$. Observe que na última igualdade usamos c no lugar de $< s_0 >$, fizemos isso para simplificar a notação. □

Observemos que, pela proposição acima, um conjunto de geradores para $\pi_1(M(\phi))$ é dado por $\{i_{\#}(\alpha), i_{\#}(\beta), (s_0)_{\#}(c)\}$, que é representado pelas classes de caminhos $\{< \alpha(t), 0 >, < \beta(t), 0 >, < x_0, t >\}$. Pelo teorema 1.2.1 e da ação dada na proposição acima, temos que $\pi_1(M(\phi))$ tem a seguinte presentação: $\pi_1(M(\phi)) =< \alpha, \beta, c | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1, c\alpha c^{-1} = \phi_{\#}(\alpha),\ c\beta c^{-1} = \phi_{\#}(\beta) >$.

Proposição 1.3.6. *O grupo fundamental $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi))$ é isomorfo ao produto semidireto $\pi_1(K) \rtimes \pi_1(M(\phi))$ e a ação $\pi_1(M(\phi)) \to Aut(\pi_1(K))$ que vem da secção $s_1 : \pi_1(M(\phi)) \to \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi))$, $s_1 = (s_0 \circ p, 1_{M(\phi)})_{\#}$, é dada por; $\beta.\alpha = \beta\alpha\beta^{-1} = p_{\#}(\beta) \cdot \alpha$. A última ação é a que vem do fibrado $p : M(\phi) \longrightarrow S^1$, ou seja, esta ação é dada pela composição :*

$$\pi_1(M(\phi)) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_1(S^1) \xrightarrow{\Gamma} Aut(\pi_1(K)).$$

Se denotarmos por c o gerador de $\pi_1(S^1)$, então teremos; $\Gamma(c) = \phi$, de tal modo que, se $p_{\#}(\beta) = c^k$ então obteremos; $p_{\#}(\beta) \circ \alpha = \phi(\alpha)^k$.

Demonstração. Considerando a fibração; $p_2 : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) \longrightarrow M(\phi)$, dada por; $p_2(< x, t >, < y, t >) =< y, t >$, e usando o fato de $M(\phi)$ ser $K(\pi, 1)$, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \to \pi_1(K) \xrightarrow{i_{1\#}} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)) \xrightarrow{p_{2\#}} \pi_1(M(\phi)) \to 1$$

onde $i_{1\#}$ é a induzida da aplicação $i_1 : K \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ dada por $i_1(x) = (< x, 0 >, < x_0, 0 >)$. A sequência acima cinde, pois $p_{2\#} \circ s_1 = Id$. Assim concluímos que $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi))$ é isomorfo ao produto semidireto $\pi_1(K) \rtimes \pi_1(M(\phi))$. Portanto, a ação que vem da secção s_1 é dada por:

$$\pi_1(M(\phi)) \longrightarrow Aut(\pi_1(K))$$
$$\beta \mapsto \theta_1(\beta)$$

onde, $\theta_1(\beta)(\rho) = s_1(\beta)\rho s_1(\beta)^{-1}$, conjugação por $s_1(\beta)$. Como $p \circ p_1 = p \circ p_2$, então temos que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(K) \arrow[r, "i_{1\#}"] \arrow[d, "Id"] & \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)) \arrow[r, "p_{2\#}"] \arrow[d, "p_{1\#}"] & \pi_1(M(\phi)) \arrow[r] \arrow[d, "p_\#"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(K) \arrow[r, "i_\#"] & \pi_1(M(\phi)) \arrow[r, "p_\#"] & \pi_1(S^1) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Assim, como $s_{0\#} \circ p_\# = p_{1\#} \circ s_1$, obtemos $\theta_1(\beta) = \theta_0(p_\#(\beta))$. $\square$

A proposição abaixo também é satisfeita para toda superfície fechada S diferente de S^2 e RP^2.

Proposição 1.3.7. *O grupo fundamental, $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta)$, é isomorfo ao produto semidireto $\pi_1(K \times K - \Delta) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ para alguma ação θ.*

Demonstração. Temos que a projeção na segunda coordenada, $p_2 : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) \to M(\phi)$ é uma fibração. De fato, a aplicação $p : M(\phi) \to S^1$ é uma fibração, e p_2 sendo o pullback de fibrações é uma fibração. Agora, da proposição 2.1 de [11] temos que $p_{2|} : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta \to M(\phi)$, onde Δ é a diagonal em $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, é uma fibração. Como a composta de fibrações é fibração, então $p \circ p_{2|} : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta \to S^1$ é uma fibração. Usando a sequência exata de homotopia da fibração acima, e o fato de S^1 ser $K(\pi, 1)$, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \to \pi_1(K \times K - \Delta) \to \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta) \xrightarrow{p \circ p_{2|\#}} \mathbb{Z} \to 1$$

Como $\mathbb{Z}$ é livre, então a sequência acima cinde. Portanto, $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta)$ é isomorfo ao produto semidireto $\pi_1(K \times K - \Delta) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ para alguma ação θ. $\square$

Para uma presentação detalhada dos grupos do diagrama 1.4 veja o apêndice A.

1.4 Os geradores de $\pi_1(K, x_0)$ e o número de Nielsen do par $f, g : K \to K$

Consideremos em $\mathbb{R}^2$ a relação de equivalência que é gerada pelas seguintes relações: $(x, y) \sim (x, y + 1)$ e $(x, y) \sim (x + 1, 1 - y)$. O espaço quociente de $\mathbb{R}^2$ por essa relação é a garrafa de Klein K. Fixado um ponto x_0 em K, então temos que $\pi_1(K, x_0)$ é um grupo em dois geradores, α e β, com relação $\alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1$.

Observemos que cada elemento de $\pi_1(K, x_0)$ pode ser representado por uma palavra da forma $\alpha^r\beta^s$ onde, r, s pertencem a $\mathbb{Z}$. Isso segue da igualdade $\beta^m\alpha^n = \alpha^{(-1)^m n}\beta^m$ onde, $m, n \in \mathbb{Z}$. Essa igualdade segue das igualdades; $\alpha^n = \beta(\alpha^{-1})^n\beta^{-1}$ e $\beta^m\alpha = \alpha^{(-1)^m}\beta^m$, válidas para quaisquer m, n pertencente a $\mathbb{Z}$. Essas igualdades são demonstradas usando indução matemática.

Usando o fato acima, temos que dois elementos w_1, w_2 pertencentes a $\pi_1(K, x_0)$, satisfazem a relação $w_1w_2w_1w_2^{-1} = 1$ se, e somente se, $w_1 = 1$ e $w_2 = \alpha^p\beta^{2q}$, ou $w_1 = \alpha^r$ e $w_2 = \alpha^p\beta^{2q+1}$. Para mostrarmos isso vamos escrever $w_1 = \alpha^r\beta^s$ e $w_2 = \alpha^p\beta^u$. Da relação $w_1w_2w_1w_2^{-1} = 1$ obtemos; $\alpha^r\beta^s\alpha^p\beta^u\alpha^r\beta^s\beta^{-u}\alpha^{-p} = 1$, que implica $\alpha^r\alpha^{(-1)^s p}\beta^s\beta^u\alpha^r\beta^s\beta^{-u}\alpha^{-p} = 1$. Disso temos $\alpha^{r+(-1)^s p}\beta^{s+u}\alpha^r\beta^{s-u}\alpha^{-p} = 1$. Daí temos $\alpha^{r+(-1)^s p}\alpha^{(-1)^{s+u} r}\beta^{2s}\alpha^{-p} = 1$, e logo $\alpha^{r+(-1)^s p}\alpha^{(-1)^{s+u} r}\alpha^{-p}\beta^{2s} = 1$. Essa relação implica $r + (-1)^s p + (-1)^{s+u} r - p = 0$ e $2s = 0$, que é equivalente a $r(1 + (-1)^u) = 0$ e $s = 0$.

Observemos que se $u = 2q$ então teremos $r = 0$. Isso implica $w_1 = 1$ e $w_2 = \alpha^p\beta^{2q}$. Por outro lado, se tivermos $u = 2q+1$ então teremos $w_1 = \alpha^r$ e $w_2 = \alpha^p\beta^{2q+1}$. Note que se w_1 e w_2 são dados pela maneira acima, então podemos mostrar que eles satisfazem $w_1w_2w_1w_2^{-1} = 1$.

Tomemos $f : K \to K$ uma aplicação contínua e, $f_\# : \pi_1(K) \to \pi_1(K)$, o homomorfismo induzido. Da relação $\alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1$ devemos ter $f_\#(\alpha\beta\alpha\beta^{-1}) = 1$, e logo, $f_\#(\alpha)f_\#(\beta)f_\#(\alpha)f_\#(\beta)^{-1} = 1$. Chamando $w_1 = f_\#(\alpha)$, $w_2 = f_\#(\beta)$ e usando a observação feita no parágrafo anterior, concluímos que, se $f : K \to K$ é uma aplicação contínua então, $f_\# : \pi_1(K) \to \pi_1(K)$, é um homomorfismo da forma:

$$\begin{cases} Tipo1; & f_\#(\alpha) = 1, \quad f_\#(\beta) = \alpha^p\beta^{2q} \\ Tipo2; & f_\#(\alpha) = \alpha^r, \quad f_\#(\beta) = \alpha^p\beta^{2q+1} \end{cases}$$

Em geral não distinguiremos entre os dois tipos de homomorfismos.

Dada uma aplicação contínua, $f : K \to K$, com o homomorfismo induzido, $f_\# : \pi_1(K) \to \pi_1(K)$, satisfazendo $f_\#(\alpha) = \alpha^r$ e $f_\#(\beta) = \alpha^s\beta^t$, então representaremos $f_\#$

pelo símbolo "$f(s, r, t)$" onde s, r, t são as potência de α e β dadas anteriormente. Com essa notação, temos o seguinte resultado cuja demontração está em [10].

Teorema 1.4.1. *Se* $f_1, f_2 : K \to K$ *são aplicações contínuas com* $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i)$, $i = 1, 2$, *então* $N(f_1, f_2) = |t_1 - t_2| max\{|r_1|, |r_2|\}$.

Também temos a seguinte proposição cuja demonstração se encontra em [23].

Proposição 1.4.1. *Se* $f_1, f_2 : K \to K$ *são aplicações contínuas tal que* $N(f_1, f_2) = 0$, *então podemos deformar o par* (f_1, f_2) *a um par* (g_1, g_2) *livre de coincidência.*

Capítulo 2

Reduções na garrafa de Klein

Neste capítulo mostraremos que, a menos de homeomorfismos que preservam fibra, existem apenas quatro fibrados com base S^1 e fibra garrafa de Klein, esta afirmação é o resultado da proposição 2.1.2. Classficaremos, pelas classes de homotopia, os pares de aplicações (f_1, f_2) no fibrado $M(\phi)$, isso é o resultado do teorema 2.1.1.

2.1 Classificação dos $K-$fibrados sobre S^1

Nesta seção, usaremos alguns homeomorfismos da garrafa de Klein para descrever todos os $K-$fibrados sobre S^1, a menos de homeomorfismo que preserva fibra.

Tomemos em $\mathbb{R}^2$ a relação de equivalência gerada pelas seguintes relações: $(x, y) \sim (x, y+1)$ e $(x, y) \sim (x+1, 1-y)$. Sabemos que o espaço quociente de $\mathbb{R}^2$ por essa relação é a garrafa de Klein K. Denotaremos por (x, y) e $[(x, y)]$ os elementos de $\mathbb{R}^2$ e de K, respectivamente.

Seja $\phi : K \to K$ um homeomorfismo tal que $\phi([(0,0)]) = [(0,0)] = x_2$. Como no capítulo anterior, consideraremos $M(\phi)$ o espaço quociente de $K \times [0,1]$, pela relação $([(x, y)], 0) \sim (\phi([(x, y)], 1)$. A classe do elemento $([(x, y)], t)$ no quociente será denotada por $< [(x, y)], t >$.

Como vimos no primeiro capítulo, o espaço $M(\phi)$ é um fibrado sobre o círculo S^1, onde a fibra é a garrafa de Klein K. A aplicação de projeção, $p : M(\phi) \to S^1$, é dada por $p(<[(x,y)],t>)=<t>$, onde $<t>\in[0,1]/_{0\sim 1}\simeq S^1$.

Consideremos agora a questão levantada no capítulo anterior. Dadas, $f_1,f_2 : M(\phi)\to M(\phi)$, aplicações sobre S^1, isto é $p\circ f_1=p$, $p\circ f_2=p$, queremos saber quando o par (f_1,f_2) pode ser deformado a um par de aplicações, (g_1,g_2), livre de coincidências, por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1?

Primeiramente, analisaremos o que acontece com as restrições das aplicações f_1,f_2 à fibra K. Para isso, denotemos por $f_{i|_K}(s_i,r_i,t_i):\alpha\to\alpha^{r_i},\beta\to\alpha^{s_i}\beta^{t_i}$, $i=1,2$ o homomorfismo induzido das aplicações $f_{i|_K}$ no grupo fundamental da fibra K e por

$$\phi_p(\epsilon,\eta):=\begin{cases}\alpha\to\alpha^{\epsilon}\\ \beta\to\alpha^p\beta^{\eta},\end{cases}$$

o isomorfismo induzido de um homeomorfismo $\phi:K\to K$ no grupo fundamental da fibra K. Antes de analisarmos os homomorfismos acima, demonstraremos alguns resultados que ultilizaremos posteriormente.

Lema 2.1.1. *Se $\pi_1(K,x_2)=<\alpha,\beta|\alpha\beta\alpha\beta^{-1}=1>$, então temos*

$$(\alpha^r\beta^s)^t=\begin{cases}\alpha^{\frac{t}{2}[r(1+(-1)^s)]}\beta^{st}, & \textit{se } t \textit{ é par}\\ \alpha^{\frac{t-1}{2}[r(1+(-1)^s)]+r}\beta^{st}, & \textit{se } t \textit{ é ímpar}\end{cases}$$

para quaisquer $s,r,t\in\mathbb{Z}$.

Demonstração. Na última seção, do primeiro capítulo, vimos que $\beta^n\alpha^m=\alpha^{(-1)^n m}\beta^n$, para quaisquer $m,n\in\mathbb{Z}$. Usaremos esse fato para demonstrar o lema.

Temos; $(\alpha^r\beta^s)^t=\underbrace{\alpha^r\beta^s\dots\alpha^r\beta^s}_{t-vezes}$, mas $\alpha^r\beta^s\alpha^r\beta^s=\alpha^r(\alpha^{(-1)^s})^r\beta^{2s}$. Portanto, se t é par e s é ímpar teremos; $(\alpha^r\beta^s)^t=\beta^{st}=\alpha^{\frac{t}{2}[r(1+(-1)^s)]}\beta^{st}$. Agora, se t é par e s é par obteremos; $(\alpha^r\beta^s)^t=\alpha^{rt}\beta^{st}=\alpha^{\frac{t}{2}[r(1+(-1)^s)]}\beta^{st}$.

Suponha agora que t é ímpar. Como $t-1$ é par, então podemos usar o caso já feito. Se s é ímpar então obteremos; $(\alpha^r\beta^s)^t=\alpha^r\beta^s(\alpha^r\beta^s)^{t-1}=\alpha^r\beta^s\beta^{s(t-1)}=\alpha^r\beta^{st}=\alpha^{\frac{t-1}{2}[r(1+(-1)^s)]+r}\beta^{st}$. Se s é par então teremos; $(\alpha^r\beta^s)^t=\alpha^r\beta^s(\alpha^r\beta^s)^{t-1}=\alpha^r\beta^s\alpha^{r(t-1)}\beta^{s(t-1)}=\alpha^r\alpha^{r(t-1)}\beta^s\beta^{s(t-1)}=\alpha^{r(t-1)+r}\beta^{st}=\alpha^{\frac{t-1}{2}[r(1+(-1)^s)]+r}\beta^{st}$. □

Note que se, $\phi_p(\epsilon,\eta) : \pi_1(K,x_2) \to \pi_1(K,x_2)$, é um isomorfismo induzido por um homeomorfismo, $\phi : K \to K$, então temos uma restrição sobre os inteiros ϵ e η dada no lema abaixo.

Lema 2.1.2. *Se $\phi_p(\epsilon,\eta) : \pi_1(K,x_2) \to \pi_1(K,x_2)$ é um isomorfismo então devemos ter; $\epsilon = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$.*

Demonstração. Consideremos, $\pi_1(K,x_2) =< \alpha,\beta|\alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1 >$. Do lema anterior temos:

$$(\alpha^p\beta^\eta)^t = \begin{cases} \alpha^{\frac{t}{2}[p(1+(-1)^\eta)]}\beta^{\eta t}, & \text{se t é par} \\ \alpha^{\frac{t-1}{2}[p(1+(-1)^\eta)]+p}\beta^{\eta t}, & \text{se t é ímpar} \end{cases}$$

Visto que todo elemento em $\pi_1(K,x_2)$ pode ser escrito na forma $\alpha^s\beta^t$, onde $s,t \in \mathbb{Z}$, então obtemos a seguinte relação:

$$\phi_p(\epsilon,\eta)(\alpha^s\beta^t) = (\alpha^\epsilon)^s(\alpha^p\beta^\eta)^t = \begin{cases} \alpha^{\epsilon s+\frac{t}{2}[p(1+(-1)^\eta)]}\beta^{\eta t}, & \text{se t é par} \\ \alpha^{\epsilon s+\frac{t-1}{2}[p(1+(-1)^\eta)]+p}\beta^{\eta t}, & \text{se t é ímpar} \end{cases}$$

Portanto, devemos ter $\eta = \pm 1$. De fato, se $\eta \neq \pm 1$, então temos $\eta t \neq \pm 1$ $\forall t$ pertencente a $\mathbb{Z}$. Assim, não existem $s,t \in \mathbb{Z}$ tais que $\phi_p(\epsilon,\eta)(\alpha^s\beta^t) = \beta^{\pm 1}$, ou seja, o elemento $\beta^{\pm 1}$ não pertence a imagem de $\phi_p(\epsilon,\eta)$, o que é um absurdo, pois $\phi_p(\epsilon,\eta)$ é um isomorfismo. Logo, devemos ter $\eta = \pm 1$. Substituindo $\eta = \pm 1$ na equação acima obteremos;

$$\phi_p(\epsilon,\eta)(\alpha^s\beta^t) = (\alpha^\epsilon)^s(\alpha^p\beta^\eta)^t = \begin{cases} \alpha^{\epsilon s}\beta^{\eta t}, & \text{se t é par} \\ \alpha^{\epsilon s+p}\beta^{\eta t}, & \text{se t é ímpar} \end{cases}$$

Logo, devemos ter $\epsilon = \pm 1$. De fato, se $\epsilon \neq \pm 1$, então temos $\epsilon s \neq \pm 1$ $\forall s$ pertencente a $\mathbb{Z}$. Observemos que não existem $s,t \in \mathbb{Z}$ tais que $\phi_p(\epsilon,\eta)(\alpha^s\beta^t) = \alpha^{\pm 1}$, pois se isso acontecesse teríamos;

$$\alpha^{\pm 1} = \phi_p(\epsilon,\eta)(\alpha^s\beta^t) = (\alpha^\epsilon)^s(\alpha^p\beta^\eta)^t = \begin{cases} \alpha^{\epsilon s}\beta^{\eta t}, & \text{se t é par} \\ \alpha^{\epsilon s+p}\beta^{\eta t}, & \text{se t é ímpar} \end{cases}$$

e assim, teríamos $\eta t = 0$ que implica $t = 0$, ou seja, t par. Mas disso deveríamos ter; $\epsilon s = \pm 1$, que contradiz a hipótese. Assim, temos que o elemento $\alpha^{\pm 1}$ não pertence a imagem de $\phi_p(\epsilon, \eta)$, que é um absurdo, pois $\phi_p(\epsilon, \eta)$ é um isomorfismo. Portanto, devemos ter $\epsilon = \pm 1$. $\square$

Podemos representar o conjunto das classes de conjugação de isomorfismos de $\pi_1(K, x_2)$ por um conjunto com quatro elementos. Isso é o que diz a próxima proposição.

Proposição 2.1.1. *O número de classes conjugadas de isomorfismos de* $\pi_1(K, x_2)$ *é quatro, e um conjunto de representantes é dado por;* $\{\phi_0(1,1), \phi_0(1,-1), \phi_1(1,1), \phi_1(1,-1)\}$.

Demonstração. Pelo lema 2.1.2 devemos ter; $\epsilon = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$. Assim, os isomorfismos de $\pi_1(K, x_2)$ são da forma; $\phi_p(\pm 1, \pm 1)$. Sejam α e β os geradores de $\pi_1(K, x_2)$. Considerando $p = 0, 1$ então temos as seguintes conjungações:

$$\phi_0(1,1) = \beta\phi_0(-1,1)\beta^{-1}, \qquad \phi_0(1,-1) = \beta\phi_0(-1,-1)\beta^{-1},$$
$$\phi_1(1,1) = \alpha\beta\phi_1(-1,1)\beta^{-1}\alpha^{-1}, \qquad \phi_1(1,-1) = \alpha\beta\phi_1(-1,-1)\beta^{-1}\alpha^{-1}.$$

Agora, $\phi_0(1,1)$ e $\phi_0(1,-1)$ não são conjugados. De fato, se existisse $\alpha^m\beta^n$ em $\pi_1(K, x_2)$ tal que, $\phi_0(1,1) = \alpha^m\beta^n\phi_0(1,-1)\beta^{-n}\alpha^{-m}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, então teríamos $\phi_0(1,1)(x) = \alpha^m\beta^n\phi_0(1,-1)(x)\ \beta^{-n}\alpha^{-m}$, $\forall x$ pertencente a $\pi_1(K, x_2)$.

Tomando $x = \alpha$ na relação acima obteremos; $\alpha = \alpha^m\beta^n\alpha\beta^{-n}\alpha^{-m} = \alpha^m\alpha^{(-1)^n}\beta^n$ $\beta^{-n}\alpha^{-m} = \alpha^m\alpha^{(-1)^n}\alpha^{-m} = \alpha^{(-1)^n}$. Logo n deve ser par, digamos $n = 2k$. Agora, tomando $x = \beta$ obteremos; $\beta = \alpha^m\beta^n\beta^{-1}\beta^{-n}\alpha^{-m} = \alpha^m\beta^{-1}\alpha^{-m} = \alpha^m\alpha^m\beta^{-1}$. Portanto, temos $\beta^2 = \alpha^{2m}$.

Das equações acima, devemos ter $\alpha^m\beta^n = \alpha^m\beta^{2k} = \alpha^m(\beta^2)^k = \alpha^m(\alpha^{2m})^k = \alpha^m\alpha^{2mk} = \alpha^{m+2km}$. Assim, temos $m = n = 0$, que implica $\alpha^m\beta^n = 1$. Portanto teremos $\phi_0(1,1)(x) = \phi_0(1,-1)(x)$, $\forall x$ pertencente a $\pi_1(K, x_2)$, que é um absurdo. Logo, $\phi_0(1,1)$ e $\phi_0(1,-1)$ não são conjugados. Analogamente, mostramos que os isomorfismos $\phi_0(1,1), \phi_0(1,-1), \phi_1(1,1)$ e $\phi_1(1,-1)$ não são conjugados.

Se $p \neq 0, 1$ então, $\phi_p(\pm 1, \pm 1)$, é conjugado de um dos elementos do conjunto

$\{\phi_0(1,1), \phi_0(1,-1), \phi_1(1,1), \phi_1(1,-1)\}$. As relações são:

$$
\begin{aligned}
&\phi_{2q}(1,1) = \alpha^q \phi_0(1,1)\alpha^{-q}, && \phi_{2q}(1,-1) = \alpha^q \phi_0(1,-1)\alpha^{-q},\\
&\phi_{2q}(-1,1) = \alpha^q \phi_0(-1,1)\alpha^{-q}, && \phi_{2q}(-1,-1) = \alpha^q \phi_0(-1,-1)\alpha^{-q},\\
&\phi_{2q+1}(1,1) = \alpha^q \beta^2 \phi_1(1,1)\beta^{-2}\alpha^{-q}, && \phi_{2q+1}(1,-1) = \alpha^q \beta^2 \phi_1(1,-1)\beta^{-2}\alpha^{-q},\\
&\phi_{2q+1}(-1,1) = \alpha^q \beta^2 \phi_1(-1,1)\beta^{-2}\alpha^{-q}, && \phi_{2q+1}(-1,-1) = \alpha^q \beta^2 \phi_1(-1,-1)\beta^{-2}\alpha^{-q},
\end{aligned}
$$

para todo $q \in \mathbb{Z}$. Note que nos casos, $\phi_{2q+1}(\pm 1, \pm 1)$, devemos considerar $q \neq 0$. $\square$

Na próxima proposição usaremos a mesma notação, $\phi_p(\epsilon, \eta)$, tanto para um homeomorfismo de K quanto para seu homomorfismo induzido no grupo fundamental de K.

Proposição 2.1.2. *Se $M(\phi_p(\epsilon,\eta))$ é um fibrado sobre S^1 e fibra K então temos;*

(1) $\pi_1(M(\phi_p(\epsilon,\eta)), \mathbf{0}) = \langle \alpha, \beta, c_0 | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1, c_0\alpha c_0^{-1} = \alpha^\epsilon, c_0\beta c_0^{-1} = \alpha^p\beta^\eta \rangle$, *onde* $\mathbf{0} =< [(0,0)], 0 >$.

(2) *Existem quatro classes de isotopias de homeomorfismos de K, onde um conjunto de representantes é dado por;* $\{\phi_0(1,1), \phi_1(1,1), \phi_0(1,-1), \phi_1(1,-1)\}$.

(3) *Para cada homeomorfismo, $\phi : K \to K$, o fibrado $M(\phi)$ é homeomorfo, sobre S^1, a algum fibrado $M(\phi_p(1,\eta))$, onde $\phi_p(1,\eta)$ é dado pelo item 2. Além disso, dados dois homemorfismos diferentes; $\phi_p(1,\eta)$ e $\phi_{p'}(1,\eta')$ como no item 2, então os fibrados; $M(\phi_p(1,\eta))$, $M(\phi_{p'}(1,\eta'))$ não são homeomorfos.*

Demonstração.

(1) Pela proposição 1.3.5 obtemos; $\pi_1(M(\phi_p(\epsilon,\eta)), \mathbf{0}) \cong \pi_1(K) \rtimes \mathbb{Z}$, e da ação $\mathbb{Z} \to Aut(\pi_1(K))$ obtemos; $c_0\alpha c_0^{-1} = \phi_p(\epsilon,\eta)(\alpha) = \alpha^\epsilon$, $c_0\beta c_0^{-1} = \phi_p(\epsilon,\eta)(\beta) = \alpha^p\beta^\eta$. Portando, $\pi_1(M(\phi_p(\epsilon,\eta)), \mathbf{0})$ é dado como no enunciado.

(2) Visto que K é uma superfície, então se existir uma homotopia entre dois homeomorfismos de K, ϕ e ψ, então existe uma isotopia entre ϕ e ψ. Como K é $K(\pi,1)$ então pelo teorema 4.3 do capítulo V de [46], a aplicação $\varphi : [K;K] \longrightarrow Hom(\pi_1(K), \pi_1(K))$, onde $\varphi([\theta]) = \theta_\#$, é um isomorfismo. Assim, podemos identificar as classes cujos representantes pertence ao conjunto, $\{\phi_0(1,1), \phi_0(1,-1), \phi_1(1,1), \phi_1(1,-1)\}$, com as classes de isotopia de K.

(3) Dado $\phi : K \to K$ homeomorfismo, então pela parte (2) temos que ϕ é isotópico a algum $\phi_p(1, \eta)$ e portanto, pela proposição 1.3.2, temos que $M(\phi)$ é homeomorfo, sobre S^1 a $M(\phi_p(1, \eta))$. Assim, obtemos a primeira parte de (3).

Agora, usando as relações dos grupos $\pi_1(M(\phi_p(1, \eta)), 0)$ mostramos que eles não são isomorfos para quaisquer dois $\phi_p(1, \eta)$ diferentes dados pela parte (2). De fato, tomemos $\phi_0(1, -1)$ e $\phi_1(1, 1)$. Se existisse um isomorfismo $f : \pi_1(M(\phi_0(1, -1)), 0) \to \pi_1(M(\phi_1(1, 1)), 0)$, então denotando por $\bar{\alpha} = f(\alpha)$, $\bar{\beta} = f(\beta)$, $\bar{c_0} = f(c_0)$, e usando as relações desses grupos dadas anteriormente, obteríamos duas presentações para o grupo $\pi_1(M(\phi_1(1, 1)), 0)$ que são dadas, respectivamente, por: $< \alpha, \beta, c_0 | \alpha\beta\alpha\ \beta^{-1} = 1, c_0\alpha c_0^{-1} = \alpha, c_0\beta c_0^{-1} = \alpha\beta >$, $< \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{c_0} | \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\beta}^{-1} = 1, \bar{c_0}\bar{\alpha}\bar{c_0}^{-1} = \bar{\alpha}, \bar{c_0}\bar{\beta}\bar{c_0}^{-1} = \bar{\beta}^{-1} >$.

Note que, devido as duas últimas relações dadas nas presentações acima, temos um absurdo. Portanto, os grupos $\pi_1(M(\phi_0(1, -1)), 0)$ e $\pi_1(M(\phi_1(1, 1)), 0)$ não podem ser isomorfos. Da mesma forma, fazemos para os outros grupos. Assim, concluímos que os fibrados $M(\phi_p(1, \eta))$ não podem ser homeomorfos para quaisquer dois homeomorfismos, $\phi_p(1, \eta)' s$, diferentes dados pela parte (2). □

Pelo resultado acima e pelo corolário 1.3.1, concluímos que existem, a menos de homeomorfismo, quatro fibrados com base S^1 e fibra garrafa de Klein. Esses fibrados são da forma; $M(\phi_p(1, \eta))$, $p = 0, 1$ e $\eta = \pm 1$. Pelo resto dessa seção estudaremos a forma de um homomorfismo de $\pi_1(M(\phi_p(1, \eta)))$.

Proposição 2.1.3. *Sejam $f_1, f_2 : M(\phi) \to M(\phi)$ aplicações tais que $(f_{i|_K})_\# = f_{i|_K}(s_i, r_i, t_i)$, $i = 1, 2$. Suponhamos que o par (f_1, f_2) seja deformado, por uma homotopia que preserva fibra, a um par de aplicações (g_1, g_2) livre de coincidências. Então o número de Nielsen, $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$, de f_1 e f_2 restritas a fibra K é zero e disso temos que o homomorfismo induzido, $f_{i|_K}(s_i, r_i, t_i)$, é da forma $f_{i|_K}(s_i, 0, t_i)$ ou $f_{i|_K}(s_i, r_i, t)$, para cada $i = 1, 2$.*

Demonstração. Se o par (f_1, f_2) é deformado a um par (g_1, g_2) livre de coincidências sobre S^1, então o par $(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ é deformado ao par livre de coincidências $(g_{1|_K}, g_{2|_K})$. Se o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ fosse diferente de zero, então $(g_{1|_K}, g_{2|_K})$ por ser uma deformação de $(f_{1|_K}, f_{2|_K})$, deveria possuir pelo menos um ponto de coincidência, o que é um absurdo. Portanto, devemos ter $N(f_{1|_K}, f_{2|_K}) = 0$. Pelo teorema 1.4.1 temos; $0 = N(f_{1|_K}, f_{2|_K}) = |t_1 - t_2|max\{|r_1|, |r_2|\}$. Logo, devemos ter $r_1 = r_2 = 0$ ou $t_1 = t_2$. □

Com a notação da proposição acima observemos que se o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ é diferente de zero, então não é possível deformar o par (f_1, f_2) a um par de aplicações (g_1, g_2) livre de coincidências. Portanto, de agora em diante vamos sempre supor que o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ é zero.

De agora em diante, denotaremos pelo símbolo "$f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$ " o homomorfismo de $\pi_1(M(\phi_q(1,\eta)))$ que envia;

$$\begin{aligned} \alpha &\longmapsto \alpha^{r_i} \\ \beta &\longmapsto \alpha^{s_i}\beta^{t_i} \quad , \\ c_0 &\longmapsto \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}c_0 \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2$. Veremos que devido as relações no grupo, $\pi_1(M(\phi_q(1,\eta)))$, $r_i, s_i, t_i, c_{1i}, c_{2i}$, devem satisfazer algumas equações. Essas equações são dadas pela proposição abaixo.

Proposição 2.1.4. *Sejam $f_i : M(\phi_q(1,\eta)) \to M(\phi_q(1,\eta))$ aplicações, sobre S^1, onde $q \in \{0,1\}$ e $\eta = \pm 1$. Se o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ é zero, então $f_{1\#}, f_{2\#} : \pi_1(M(\phi_q(1,\eta))) \to \pi_1(M(\phi_q(1,\eta)))$ possui a forma $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, $i = 1, 2$, onde:*

$$\begin{array}{llcl} i) & (-1)^{c_{2i}}r_i & = & r_i \\ ii) & 2c_{1i}(\frac{1-(-1)^{t_i}}{2}) & = & s_i[(\eta)^{(\frac{1+(-1)^{t_i}}{2})} - (-1)^{c_{2i}}] + q[r_i - (-1)^{c_{2i}}(\frac{1-(-1)^{t_i}}{2})] \\ iii) & t_1 = t_2 & ou & r_i = 0 \end{array}$$

para cada $i = 1, 2$. Reciprocamente, dados homomorfismos $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i}) : \pi_1(M(\phi_q(1,\eta)) \longrightarrow \pi_1(M(\phi_q(1,\eta)))$, com $q \in \{0,1\}$, $\eta = \pm 1$, e $s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i}, q$ satisfazendo as condições i), ii) e iii) acima, então existem aplicações $f_i : M(\phi_q(1,\eta)) \to M(\phi_q(1,\eta))$, sobre S^1, tais que $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, $i = 1, 2$. Além disso, o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ é zero.

Demonstração. Como $f_i : M(\phi_q(1,\eta)) \to M(\phi_q(1,\eta))$ são aplicações, sobre S^1, ou seja, $p \circ f_i = p$, então para cada $i = 1,2$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(K) \arrow[r, "i_\#"] \arrow[d, "(f_i|_K)_\#"'] & \pi_1(M(\phi_q(1,\eta))) \arrow[r, "p_\#"] \arrow[d, "f_{i\#}"'] & \pi_1(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & \pi_1(K) \arrow[r, "i_\#"] & \pi_1(M(\phi_q(1,\eta))) \arrow[r, "p_\#"] & \pi_1(S^1) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Visto que o número de Nielsen $N(f_1|_K, f_2|_K)$ é zero, então da proposição anterior obtemos que $(f_i|_K)_\#$ é da forma $f_i(s_i, r_i, t_i)$ para alguns $s_i, r_i, t_i \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $r_i = 0$, $i = 1,2$ ou $t_1 = t_2$.

Do diagrama comutativo temos; $f_{i\#}(i_\#(\alpha)) = i_\#((f_i|_K)_\#(\alpha))$, que implica $f_{i\#}(\alpha) = (f_i|_K)_\#(\alpha) = \alpha^{r_i}$. Analogamente, obtemos $f_{i\#}(\beta) = (f_i|_K)_\#(\beta) = \alpha^{s_i}\beta^{t_i}$. Agora, como $\pi_1(M(\phi_q(1,\eta))) \cong \pi_1(K) \rtimes \pi_1(S^1)$, então devemos ter $f_{i\#}(c_0) = \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}{c_0}^{\lambda_i}$ para alguns $c_{1i}, c_{2i}, \lambda_i \in \mathbb{Z}$. Da igualdade $p_\# \circ f_{i\#}(c_0) = p_\#(c_0)$, obtemos $c_0^{\lambda_i} = c_0$, e assim devemos ter $\lambda_i = 1$. Portanto, temos que $f_{i\#}$ é da forma $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$. Demonstraremos agora, as equações $i)$ e $ii)$.

Vimos que $\pi_1(M(\phi_q(1,\eta))) =< \alpha, \beta, c_0; \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1, c_0\alpha c_0^{-1} = \alpha, c_0\beta c_0^{-1} = \alpha^q\beta^\eta >$. Assim, devemos ter $f_{i\#}(c_0\alpha c_0^{-1}) = f_{i\#}(\alpha)$ e $f_{i\#}(c_0\beta c_0^{-1}) = f_{i\#}(\alpha^q\beta^\eta)$. Pelo Lema 2.1.1 temos;

$$(\alpha^r\beta^s)^t = \begin{cases} \alpha^{\frac{t}{2}[r(1+(-1)^s)]}\beta^{st}, & \text{se t é par} \\ \alpha^{\frac{t-1}{2}[r(1+(-1)^s)]+r}\beta^{st}, & \text{se t é ímpar} \end{cases}$$

para quaisquer $s, r, t \in \mathbb{Z}$. De $f_{i\#}(c_0\alpha c_0^{-1}) = f_{i\#}(\alpha)$ obtemos;

$$\begin{aligned}
\alpha^{r_i} &= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}c_0\alpha^{r_i}c_0^{-1}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\
&= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}\alpha^{r_i}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\
&= \alpha^{c_{1i}}(\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{r_i}\beta^{c_{2i}}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\
&= (\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{r_i},
\end{aligned}$$

e portanto, $(-1)^{c_{2i}}r_i = r_i$. Temos $q = 0,1$ e $\eta = \pm 1$. De $f_{i\#}(c_0\beta c_0^{-1}) = f_{i\#}(\alpha^q\beta^\eta)$ obtemos;

$$\begin{aligned}
(\alpha^{r_i})^q(\alpha^{s_i}\beta^{t_i})^\eta &= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}c_0\alpha^{s_i}\beta^{t_i}c_0^{-1}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\
&= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}c_0\alpha^{s_i}c_0^{-1}c_0\beta^{t_i}c_0^{-1}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\
&= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}\alpha^{s_i}(\alpha^q\beta^\eta)^{t_i}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}}.
\end{aligned}$$

Se t_i é par, então da igualdade acima obtemos;

$$\begin{aligned}
\alpha^{qr_i}\alpha^{(\eta-1)s_i+s_i}\beta^{\eta t_i} &= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}\alpha^{s_i}\beta^{\eta t_i}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\
&= \alpha^{c_{1i}}(\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{s_i}\beta^{c_{2i}}\beta^{\eta t_i}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\
&= \alpha^{c_{1i}}(\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{s_i}\alpha^{-c_{1i}}\beta^{\eta t_i} \\
&= (\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{s_i}\beta^{\eta t_i}.
\end{aligned}$$

Logo, $s_i[\eta-(-1)^{c_{2i}}]+qr_i=0$. Se t_i é ímpar, então obtemos;

$$\begin{aligned}
\alpha^{qr_i}\alpha^{s_i}\beta^{\eta t_i} &= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}\alpha^{s_i}\alpha^{q}\beta^{\eta t_i}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\
&= \alpha^{c_{1i}}(\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{s_i+q}\beta^{c_{2i}}\beta^{\eta t_i}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\
&= \alpha^{c_{1i}}(\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{s_i+q}\alpha^{c_{1i}}\beta^{\eta t_i}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos $2c_{1i}=s_i[1-(-1)^{c_{2i}}]+q[r_i-(-1)^{c_{2i}}]$. Desses resultados seguem as equações $i)$ e $ii)$. Demonstraremos agora, a recíproca.

Suponha que para cada $i=1,2$, sejam dados homomorfismos $f_i(s_i,r_i,t_i,c_{1i},c_{2i}):\pi_1(M(\phi_q(1,\eta))\longrightarrow\pi_1(M(\phi_q(1,\eta)))$, com $q\in\{0,1\}$, $\eta=\pm1$, e $s_i,r_i,t_i,c_{1i},c_{2i},q$, satisfazendo as condições $i)$, $ii)$ e $iii)$. Vimos que esse homomorfismo envia; $\alpha\to\alpha^{r_i}$, $\beta\to\alpha^{s_i}\beta^{t_i}$ e $c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}c_0$ para cada $i=1,2$.

Observemos que $p_{\#}\circ f_i(s_i,r_i,t_i,c_{1i},c_{2i})=p_{\#}$. De fato, $p_{\#}\circ f_i(s_i,r_i,t_i,c_{1i},c_{2i})(\alpha)=p_{\#}(\alpha^{r_i})=0=p_{\#}(\alpha)$, pois $p(<[(x,y)],t>)=<t>$. Da mesma maneira, obtemos $p_{\#}\circ f_i(s_i,r_i,t_i,c_{1i},c_{2i})(\beta)=p_{\#}(\beta)$ e $p_{\#}\circ f_i(s_i,r_i,t_i,c_{1i},c_{2i})(c_0)=p_{\#}(c_0)$.

Como todos os espaços são $K(\pi,1)$, então pelo teorema 4.3 do capítulo V de [46], a aplicação $\varphi:[M(\phi_p(1,\eta));M(\phi_p(1,\eta))]\longrightarrow Hom(\pi_1(M(\phi_p(1,\eta))),\pi_1(M(\phi_p(1,\eta))))$, onde $\varphi([\theta])=\theta_{\#}$, é um isomorfismo. Portanto, para cada $i=1,2$ existe $g_i:M(\phi_q(1,\eta))\to M(\phi_q(1,\eta))$ e uma homotopia, $H_i:(M(\phi_q(1,\eta))\times I,x_1\times I)\to(S^1,1)$, satisfazendo; $H_i(x,0)=p\circ g_i(x)$, $H_i(x,1)=p(x)$ e $g_{i\#}=f_i(s_i,r_i,t_i,c_{1i},c_{2i})$.

Para cada $i=1,2$, $G_i:(x_1\times I\cup M(\phi_q(1,\eta))\times 0,x_1\times I)\to(M(\phi_q(1,\eta)),x_2)$, definida por; $G_i(x,0)=g_i(x)$ e $G_i(x_1\times I)=x_2$ torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(x_1\times I\cup M(\phi_q(1,\eta))\times 0,x_1\times I) \arrow[r, "G_i"] \arrow[d, "i"'] & (M(\phi_q(1,\eta)),x_2) \arrow[d, "p"] \\
(M(\phi_q(1,\eta))\times I,x_1\times I) \arrow[r, "H_i"'] \arrow[ur, dashed, "L_i"] & (S^1,1)
\end{tikzcd}$$

onde x_i representa o ponto $< x_i, 0 >$ em $M(\phi_p(1,\eta))$, para cada $i = 1, 2$. Assim, temos $p(< x_i, 0 >) =< 0 >=< 1 >$. Já vimos que $p : (M(\phi_q(1,\eta)), x_2) \to (S^1, 1)$ é uma fibração, daí segue que para cada $i = 1, 2$ existe $L_i : (M(\phi_q(1,\eta)) \times I, x_1 \times I) \to (M(\phi_q(1,\eta)), x_2)$, levantamento de H_i, tal que $p \circ L_i = H_i$.

Observemos que as aplicações $f_i = L_i(-, 1) : (M(\phi_q(1,\eta)), x_1) \to (M(\phi_q(1,\eta)), x_2)$, preservam fibra e o homomorfismo induzido por elas no grupo fundamental coincide com $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$. De fato, $p \circ f_i = p \circ L_i(-, 1) = H_i(-, 1) = p$ e $f_{i\#} = L_i(-, 1)_\# = g_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$. Como $s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i}, q$, satisfazem as equações $i)$, $ii)$, $iii)$ e $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, então o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ é zero. Com isso, terminamos a prova da proposição. $\square$

Para facilitar cálculos futuros, explicitaremos os homomorfismos induzidos pelo par de aplicações $f_1, f_2 : M(\phi_p(1,\eta)) \to M(\phi_p(1,\eta))$, no grupo $\pi_1(M(\phi_p(1,\eta)))$.

Teorema 2.1.1. *Sejam $f_1, f_2 : M(\phi_q(1,\eta)) \to M(\phi_q(1,\eta))$ aplicações sobre S^1, onde $q \in \{0, 1\}$ e $\eta = \pm 1$. Se o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ de f_1 e f_2 restritas a cada fibra é zero, então $f_{i\#} : \pi_1(M(\phi_q(1,\eta))) \to \pi_1(M(\phi_q(1,\eta)))$ é dado pelas tabelas abaixo, onde na primeira tabela temos o caso $t_1 = t_2 = t$, e na segunda tabela temos o caso $r_1 = r_2 = 0$.*

Caso I	$I.1)$ $f_i(s_i,r_i,2l,c_{1i},2k_i):\alpha\to\alpha^{r_i},\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	$I.2)$ $f_i(0,0,2l,c_{1i},2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\beta^{2l},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
	$I.3)$ $f_i(s_i,r_i,2l+1,0,2k_i):\alpha\to\alpha^{r_i},\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0\to\beta^{2k_i}c_0$
$\phi_0(1,1)$	$I.4)$ $f_i(s_i,0,2l+1,s_i,2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0\to\alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
Caso II	$II.1)$ $f_i(s_i,0,2l,c_{1i},2k_i):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	$II.2)$ $f_i(0,0,2l,c_{1i},2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\beta^{2l},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
	$II.3)$ $f_i(s_i,2c_{1i}+1,2l+1,c_{1i},2k_i):\alpha\to\alpha^{2c_{1i}+1},\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l+1},$
$\phi_1(1,1)$	$c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
Caso III	$III.1)$ $f_i(s_i,r_i,2l,c_{1i},2k_i):\alpha\to\alpha^{r_i},\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	$III.2)$ $f_i(0,0,2l,c_{1i},2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\beta^{2l},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
	$III.3)$ $f_i(s_i,r_i,2l+1,0,2k_i):\alpha\to\alpha^{r_i},\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0\to\beta^{2k_i}c_0$
$\phi_0(1,-1)$	$III.4)$ $f_i(s_i,0,2l+1,s_i,2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0\to\alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
Caso IV	$IV.1)$ $f_i(s_i,2s_i,2l,c_{1i},2k_i):\alpha\to\alpha^{2s_i},\ \beta\to\alpha_{s_i}\beta^{2l},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	$IV.2)$ $f_i(0,0,2l,c_{1i},2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\beta^{2l},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
	$IV.3)$ $f_i(s_i,2c_{1i}+1,2l+1,c_{1i},2k_i):\alpha\to\alpha^{2c_{1i}+1},\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l+1},$
$\phi_1(1,-1)$	$c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$

Nesta tabela temos $r_i,s_i,c_{1i},k_i,l\in\mathbb{Z}$.

Caso I	$I.1)$ $f_i(s_i,0,2l_i,c_{1i},2k_i):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l_i},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	$I.2)$ $f_i(0,0,2l_i,c_{1i},2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\beta^{2l_i},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
	$I.3)$ $f_i(s_i,0,2l_i+1,0,2k_i):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0\to\beta^{2k_i}c_0$
$\phi_0(1,1)$	$I.4)$ $f_i(s_i,0,2l_i+1,s_i,2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0\to\alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
Caso II	$II.1)$ $f_i(s_i,0,2l_i,c_{1i},2k_i):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l_i},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	$II.2)$ $f_i(0,0,2l_i,c_{1i},2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\beta^{2l_i},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
$\phi_1(1,1)$	
Caso III	$III.1)$ $f_i(s_i,0,2l_i,c_{1i},2k_i):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l_i},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	$III.2)$ $f_i(0,0,2l_i,c_{1i},2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\beta^{2l_i},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
	$III.3)$ $f_i(s_i,0,2l_i+1,0,2k_i):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0\to\beta^{2k_i}c_0$
$\phi_0(1,-1)$	$III.4)$ $f_i(s_i,0,2l_i+1,s_i,2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0\to\alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
Caso IV	$IV.1)$ $f_i(0,0,2l_i,c_{1i},2k_i):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l_i},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	$IV.2)$ $f_i(s_i,0,2l_i,c_{1i},2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\beta^{2l_i},\ c_0\to\alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
$\phi_1(1,-1)$	

Nesta tabela temos $s_i,c_{1i},k_i,l_i\in\mathbb{Z}$.

As tabelas acima são dadas para cada $i=1,2$. Portanto, os pares $(f_{1\#},f_{2\#})$ são combinações de cada um dos casos, em cada tabela. Por exemplo, na primeira tabela, no caso I, temos 16 possibilidades. Como $Coin(f_1, f_2) = Coin(f_2, f_1)$, então podemos reduzir os casos a serem analizados.

Demonstração. A demonstração dessa proposição se faz usando as relações (i), (ii) e $iii)$ dadas pela proposição 2.1.4. □

Para facilitar a leitura desta tese, resolvemos colocar os cálculos dos grupos $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_i, 0 >)), i = 1, 2$ e $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta,$ $(< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$ no apêndice A. Caso o leitor ainda não tenha visto os cálculos desses grupos sugerimos, antes da leitura do capítulo 3, a leitura do apêndice A.

Capítulo 3

O problema do levantamento

Dadas aplicações $f_1, f_2 : M(\phi_p(1,\eta)) \to M(\phi_p(1,\eta))$, sobre S^1, queremos saber quando o par (f_1, f_2) pode ser deformado a um par livre de coincidências, por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1. Pelo diagrama 1.4 e pelos resultados obtidos no capítulo anterior, temos que esse problema é equivalente a existência de um levantamento para o diagrama abaixo, ou seja, (f_1, f_2) pode ser deformado a um par livre de coincidências se, e somente se, existir um levantamento ψ no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] \\
 & \pi_2(K, K - x_2, x_1) \arrow[d, "j_{2\#} \circ \partial_2"] \\
 & \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \arrow[d, "q_\#"] \\
\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \arrow[r, "(f_1,f_2)_\#"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >)) \arrow[d] \\
 & 1
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Mostraremos nesse capítulo que esse problema é equivalente a resolver um sistema algébrico. Apresentaremos também, algumas reduções que podem facilitar o estudo desse sistema. Começaremos descrevendo os homomorfismos do diagrama 3.1.

3.1 Equivalência do problema a um sistema algébrico

Temos que o homomorfismo $j_{2\#}$ no diagrama acima é induzido pela aplicação,

$$j_2 : (K - x_2, x_1) \to (M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)),$$

que é dada por $j_2(y) = (< x_2, 0 >, < y, 0 >)$, e o homomorfismo, ∂_2, é o homomorfismo de conexão da sequência exata de homotopia do par $(K, K - x_2)$. Essa sequência é dada por; $1 \to \pi_2(K, K - x_2; x_1) \xrightarrow{\partial_2} \pi_1(K - x_2; x_1) \xrightarrow{j_\pi} \pi_1(K; x_1) \to 1$. Também temos que o homomorfismo,

$$\begin{array}{c} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \\ \Big\downarrow q_\# \\ \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >)), \end{array}$$

é dado pela composição dos seguintes homomorfismos:

$$\begin{array}{c} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \\ \Big\downarrow \kappa \\ \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \\ \simeq \Big\downarrow \bar{\nu} \\ \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >)). \end{array}$$

Consideremos a aplicação $\nu : I \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ dada por $\nu(t) = (< x_2, 0 >, < \sigma(t), 0 >)$, onde $\sigma : I \to K$ é um caminho ligando x_2 a x_1 que está dentro de uma pequena vizinhança contendo x_1 e x_2. Temos que o homomorfismo κ no diagrama anterior, é o homomorfismo que envia;

$$\kappa := \begin{cases} \tilde{\alpha} \to \alpha_1 \\ \tilde{\beta} \to \beta_1 \\ \tilde{c_0} \to c_{01} \\ \tilde{a} \to u_1 \\ \tilde{b} \to v_1 \end{cases}$$

Também temos que o homomorfismo, $\bar{\nu}$, é dado por; $\bar{\nu}(\eta) = \nu^{-1}\eta\nu$.

Lema 3.1.1. *A sequência vertical do diagrama 3.1 é exata curta.*

Demonstração. De [11] temos o seguinte isomorfismo: $\pi_n(K, K - x_2, x_1) \overset{h_*}{\approx} \pi_n(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$. Para simplificar a notação denotaremos; $X = M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, $Y = M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$, $\xi_1 =< x_1, 0 >$ e $\xi_2 =< x_2, 0 >$. Com essa notação temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_2(K, K - x_2, x_1) & \xrightarrow{\partial_2} & \pi_1(K - x_2, x_1) & \xrightarrow{j_\pi} & \pi_1(K, x_1) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle h_*} & & \downarrow{\scriptstyle j_{2\#}} & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \pi_2(X, Y, (\xi_2, \xi_1)) & \xrightarrow{\partial_2'} & \pi_1(Y, (\xi_2, \xi_1)) & \xrightarrow{q_\#} & \pi_1(X, (\xi_2, \xi_2)) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Como ∂_2' é injetor e h_* é um isomorfismo, então temos que, $j_{2\#} \circ \partial_2 = \partial_2' \circ h_*$, é injetor. Observemos que $q_\# \circ (j_{2\#} \circ \partial_2) = q_\# \circ (\partial_2' \circ h_*) = (q_\# \circ \partial_2') \circ h_* = 0$. Portanto, $\mathrm{Im}(j_{2\#} \circ \partial_2) \subset \mathrm{Ker}(q_\#)$. Agora, se $q_\#(x) = 0$, então existe $y \in \pi_2(X, Y)$, tal que $x = \partial_2'(y)$. Tomando $z = h_*^{-1}(y)$, temos $j_{2\#} \circ \partial_2(z) = \partial_2' \circ h_*(z) = \partial_2'(y) = x$. Portanto, $\mathrm{Ker}(q_\#) \subset Im(j_{2\#} \circ \partial_2)$. □

Agora, calcularemos $\bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_\#$. Para isso, devemos determinar o homomorfismo $(f_1, f_2)_\#$, onde $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$ é dado pelas tabelas do teorema 2.1.1. O homomorfismo $\bar{\nu}^{-1}$ é dado por $\bar{\nu}^{-1}(\eta) = \nu\eta\nu^{-1}$.

Pela proposição 2.1.2 e pelos teoremas A.1.1 e A.2.1, temos; $\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) = \langle \alpha, \beta, c_0 | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1, c_0\alpha c_0^{-1} = \alpha^\epsilon, c_0\beta c_0^{-1} = \alpha^p\beta^\eta \rangle$,

$\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) = \langle \alpha_1, \beta_1, c_{01}, u_1, v_1 | u_1v_1u_1v_1^{-1} = 1, \alpha_1\beta_1\alpha_1 \beta_1^{-1} = 1, c_{01}\alpha_1c_{01}^{-1}\alpha_1^{-\epsilon} = 1, c_{01}\beta_1c_{01}^{-1}\beta_1^{-\eta}\alpha_1^{-p} = 1, \alpha_1u_1\alpha_1^{-1} = u_1, \alpha_1v_1\alpha_1^{-1} = v_1, \beta_1u_1\beta_1^{-1} = u_1, \beta_1v_1\beta_1^{-1} = v_1, c_{01}u_1c_{01}^{-1} = u_1^\epsilon, c_{01}v_1c_{01}^{-1} = u_1^pv_1^\eta \rangle$,

$\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) = \langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}, \tilde{b} | \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1} = B$, $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-\epsilon} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha}^{-\epsilon}$, $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-\eta}\tilde{\alpha}^{-p} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta})\tilde{\beta}^{-\eta}\tilde{\alpha}^{-p}$, $\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}B^{-1}$, $\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}$, $\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}$, $\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}$, $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{a})$, $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{b}) \rangle$ e

$\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >)) = \langle \alpha_2, \beta_2, c_{02}, u_2, v_2 | u_2 v_2 u_2 v_2^{-1} = 1, \alpha_2 \beta_2 \alpha_2 \beta_2^{-1} = 1, c_{02}\alpha_2 c_{02}^{-1}\alpha_2^{-1} = 1, c_{02}\beta_2 c_{02}^{-1}\beta_2^{-\eta}\alpha_2^{-p} = 1, \alpha_2 u_2 \alpha_2^{-1} = u_2, \alpha_2 v_2 \alpha_2^{-1} = v_2, \beta_2 u_2 \beta_2^{-1} = u_2, \beta_2 v_2 \beta_2^{-1} = v_2, c_{02} u_2 c_{02}^{-1} = u_2, c_{02} v_2 c_{02}^{-1} = u_2^p v_2^\eta \rangle$, onde, $p \in \{0, 1\}$ e $\eta = \pm 1$.

Temos; $(f_1, f_2)_\#(< \alpha(t) >) =< (f_1, f_2) \circ \alpha(t) >=< f_1 \circ \alpha(t), f_2 \circ \alpha(t)) >$. Mas observemos que $(f_1 \circ \alpha(t), f_2 \circ \alpha(t)) \simeq_{\partial I} (f_1 \circ \alpha(t), < x_2, 0 >) * (< x_2, 0 >, f_2 \circ \alpha(t))$. De fato, como α pertence a $\pi_1(K)$, $\pi_1(K \times K) \approx \pi_1(K) \oplus \pi_1(K)$, e $f_{i\#}(\alpha) = \alpha^{r_i}$ pertence a $\pi_1(K)$, então em $\pi_1(K \times K)$ temos $(f_1 \circ \alpha(t), f_2 \circ \alpha(t)) \simeq_{\partial I} (f_1 \circ \alpha(t), x_2) * (x_2, f_2 \circ \alpha(t))$. Portanto, em $M(\phi)$ temos; $(f_1 \circ \alpha(t), f_2 \circ \alpha(t)) \simeq_{\partial I} (f_1 \circ \alpha(t), < x_2, 0 >) * (< x_2, 0 >, f_2 \circ \alpha(t))$. Visto que $f_{i\#}(\alpha) = \alpha^{r_i}$, para $i = 1, 2$, então temos;

$$\begin{aligned}
(f_1, f_2)_\#(< \alpha >) &= < (f_1, f_2) \circ \alpha >=< (f_1 \circ \alpha, f_2 \circ \alpha) > \\
&= < (f_1 \circ \alpha, < x_2, 0 >) >< (< x_2, 0 >, f_2 \circ \alpha) > \\
&= < (\alpha^{r_1}, < x_2, 0 >) >< (< x_2, 0 >, \alpha^{r_2}) > \\
&= \alpha_2^{r_1} u_2^{r_2}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, usando que, $f_{i\#}(\beta) = \alpha^{s_i}\beta^{t_i}$, obtemos;

$$\begin{aligned}
(f_1, f_2)_\#(< \beta >) &= < (f_1, f_2) \circ \beta >=< (f_1 \circ \beta, f_2 \circ \beta) > \\
&= < (f_1 \circ \beta, < x_2, 0 >) >< (< x_2, 0 >, f_2 \circ \beta) > \\
&= < (\alpha^{s_1}\beta^{t_1}, < x_2, 0 >) >< (< x_2, 0 >, \alpha^{s_2}\beta^{t_2}) > \\
&= \alpha_2^{s_1}\beta_2^{t_1} u_2^{s_2} v_2^{t_2}.
\end{aligned}$$

Também temos; $(f_1, f_2)_\#(< c_0 >) =< (f_1, f_2) \circ c_0 >=< (f_1 \circ c_0, f_2 \circ c_0) >$. Mas como, $f_{i\#}(c_0) = \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}} c_0$, então obtemos; $(f_1 \circ c_0, f_2 \circ c_0) = (\alpha^{c_{11}}\beta^{c_{21}}, \alpha^{c_{12}}\beta^{c_{22}}) * (c_0, c_0) \simeq_{\partial I} (\alpha^{c_{11}}, < x_2, 0 >) * (< x_2, 0 >, \alpha^{c_{12}}) * (\beta^{c_{21}}, < x_2, 0 >) * (< x_2, 0 >, \beta^{c_{22}}) * (c_0, c_0)$. Portanto, temos; $(f_1, f_2)_\#(c_0) = \alpha_2^{c_{11}} u_2^{c_{12}} \beta_2^{c_{21}} v_2^{c_{22}} c_{02} = \alpha_2^{c_{11}} \beta_2^{c_{21}} u_2^{c_{12}} v_2^{c_{22}} c_{02}$.

A última equivalência acima vem do seguinte caso particular $(\alpha c_0, \beta c_0) = (\alpha, \beta) * (c_0, c_0)$. De fato, temos $c_0(t) =< x_2, t >$, $\alpha(t) =< \alpha(t), 0 >$ e $\beta(t) =< \beta(t), 0 >$. Observemos que;

$$(\alpha c_0)(t) = \begin{cases} < \alpha(2t), 0 > & para \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ < x_2, 2t - 1 > & para \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$(\beta c_0)(t) = \begin{cases} < \beta(2t), 0 > & para \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ < x_2, 2t-1 > & para \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$(\alpha, \beta) * (c_0, c_0)(t) = \begin{cases} (< \alpha(2t), 0 >, < \beta(2t), 0 >) & para \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (< x_2, 2t-1 >, < x_2, 2t-1 >) & para \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \quad e \end{cases}$$

$$(\alpha c_0, \beta c_0)(t) = \begin{cases} (< \alpha(2t), 0 >, < \beta(2t), 0 >) & para \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (< x_2, 2t-1 >, < x_2, 2t-1 >) & para \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Assim, em qualquer caso, se $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, então o homomorfismo $(f_1, f_2)_\#$ envia;

$$\begin{cases} \alpha \to \alpha_2^{r_1} u_2^{r_2} \\ \beta \to \alpha_2^{s_1} \beta_2^{t_1} u_2^{s_2} v_2^{t_2} \\ c_0 \to \alpha_2^{c_{11}} \beta_2^{c_{21}} u_2^{c_{12}} v_2^{c_{22}} c_{02} \end{cases}$$

Agora, para o homomorfismo $\bar{\nu} : \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \to \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >))$ temos;

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(\alpha_1) &= \nu^{-1} \alpha_1 \nu \\ &= (< x_2, 0 >, < \sigma^{-1}, 0 >)(\alpha, < x_1, 0 >)(< x_2, 0 >, < \sigma, 0 >) \\ &= (\alpha, < x_2, 0 >) \\ &= \alpha_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(\beta_1) &= \nu^{-1} \beta_1 \nu \\ &= (< x_2, 0 >, < \sigma^{-1}, 0 >)(\beta, < x_1, 0 >)(< x_2, 0 >, < \sigma, 0 >) \\ &= (\beta, < x_2, 0 >) \\ &= \beta_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(c_{01}) &= \nu^{-1} c_{01} \nu \\ &= (< x_2, 0 >, < \sigma^{-1}, 0 >)(c_0, < x_1, t >)(< x_2, 0 >, < \sigma, 0 >) \\ &= (c_0, < x_2, t >) \\ &= c_{02}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\nu}(u_1) &= \nu^{-1}u_1\nu \\
&= (< x_2, 0 >, < \sigma^{-1}, 0 >)(< x_2, 0 >, a_1)(< x_2, 0 >, < \sigma, 0 >) \\
&= (< x_2, 0 >, \sigma^{-1}a_1\sigma) \\
&= (< x_2, 0 >, a_2) \\
&= u_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\nu}(v_1) &= \nu^{-1}v_1\nu \\
&= (< x_2, 0 >, < \sigma^{-1}, 0 >)(< x_2, 0 >, b_1)(< x_2, 0 >, < \sigma, 0 >) \\
&= (< x_2, 0 >, \sigma^{-1}b_1\sigma) \\
&= (< x_2, 0 >, b_2) \\
&= v_2.
\end{aligned}
$$

Portanto, em todos os casos se, $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, então o homomorfismo $\bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_\# : \pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \to \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$ é dado por;

$$
\begin{cases}
\bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_\#(\alpha) = \bar{\nu}^{-1}(\alpha_2^{r_1}u_2^{r_2}) = \alpha_1^{r_1}u_1^{r_2} \\
\bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_\#(\beta) = \bar{\nu}^{-1}(\alpha_2^{s_1}\beta_2^{t_1}u_2^{s_2}v_2^{t_2}) = \alpha_1^{s_1}\beta_1^{t_1}u_1^{s_2}v_1^{t_2} \\
\bar{\nu}^{-1} \circ (1, f)_\#(c_0) = \bar{\nu}^{-1}(\alpha_2^{c_{11}}\beta_2^{c_{21}}u_2^{c_{12}}v_2^{c_{22}}c_{02}) = \alpha_1^{c_{11}}\beta_1^{c_{21}}u_1^{c_{12}}v_1^{c_{22}}c_{01}
\end{cases}
$$

Agora, para obtermos uma descrição dos homomorfismos do diagrama 3.1 demonstraremos o teorema abaixo.

Teorema 3.1.1. *Sejam, $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, para $i = 1, 2$, homomorfismos dados em cada um dos casos das tabelas do teorema 2.1.1. Tomemos α, β, c_0 laços em $M(\phi)$ baseados em $< x_2, 0 >$ dados, respectivamente, por $\alpha =< \rho_{21}\rho_{22}, 0 >, \beta =< \rho_{22}^{-1}, 0 >$, $c_0(t) =< x_2, t >$. Tomemos também $a_1 = \rho_{11}\rho_{12}, b_1 = \rho_{12}^{-1}$ laços em $K - x_2$ baseados em x_1 e $a_2 = \rho_{21}\rho_{22}$, $b_2 = \rho_{22}^{-1}$ laços em $K - x_1$ baseados em x_2, onde ρ_{ij} são dados como nas figuras abaixo;*

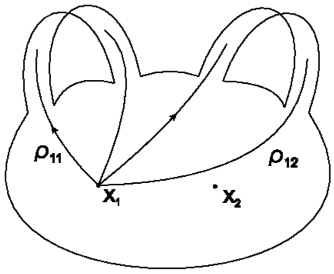


Fig.1. As tranças ρ_{11} e ρ_{12}

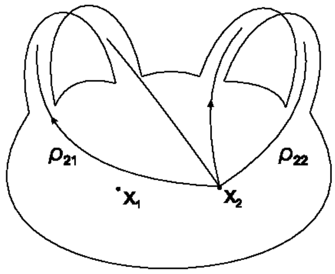


Fig.2. As tranças ρ_{21} e ρ_{22}

Figura 3.1: Tranças puras em $K - D$

Com a notação acima temos;

(1) O homomorfismo, $(f_1, f_2)_{\#} : \pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \to \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi),$ $(< x_2, 0 >, < x_2, 0 >))$*, envia;*

$$\begin{cases} \alpha \to \alpha_2^{r_1} u_2^{r_2} \\ \beta \to \alpha_2^{s_1} \beta_2^{t_1} u_2^{s_2} v_2^{t_2} \\ c_0 \to \alpha_2^{c_{11}} \beta_2^{c_{21}} u_2^{c_{12}} v_2^{c_{22}} c_{02} \end{cases}$$

(2) O homomorfismo,

$$\begin{array}{c} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \\ \Big\downarrow q_{\#} \\ \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >)), \end{array}$$

é dado pela composição dos seguintes homomorfismos:

$$\begin{array}{c} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \\ \Big\downarrow \kappa \\ \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \\ \simeq \Big\downarrow \bar{\nu} \\ \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >)), \end{array}$$

onde o caminho, $\nu : I \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$*, é dado por;* $\nu(t) = (< x_2, 0 >, < \sigma(t), 0 >)$, $\sigma : I \to K$ *é um caminho ligando* x_2 *a* x_1 *e o homomorfismo* κ *é dado por;* $\kappa(\tilde{\alpha}) = \alpha_1, \kappa(\tilde{\beta}) = \beta_1, \kappa(\tilde{c_0}) = c_{01}, \kappa(\tilde{a}) = u_1$ *e* $\kappa(\tilde{b}) = v_1$*. Aqui, temos* $\bar{\nu}(\eta) = \nu^{-1}\eta\nu$.

(3) O homomorfismo do levantamento de $(f_1, f_2)_\#$, no diagrama 3.1, $\psi : \pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \to \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$, existe se, e somente se, podemos encontrar elementos; Z_1, Z_2, Z_3 pertencentes a $\pi_2(K, K - x_2, x_1)$, e elementos A, F, C pertencentes a $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$, de tal modo que a imagem de α, β e c_0 pelo homomorfismo, ψ, sejam dadas por;

$$\psi := \begin{cases} \alpha \to Z_1 A \quad com \quad \kappa(A) = \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2} \quad se \quad f_{i\#}(\alpha) = \alpha^{r_i} \\ \beta \to Z_2 F \quad com \quad \kappa(F) = \alpha_1^{s_1} \beta_1^{t_1} u_1^{s_2} v_1^{t_2} \quad se \quad f_{i\#}(\beta) = \alpha^{s_i} \beta^{t_i} \\ c_0 \to Z_3 C \quad com \quad \kappa(C) = \alpha_1^{c_{11}} \beta_1^{c_{21}} u_1^{c_{12}} v_1^{c_{22}} c_{01} \quad se \quad f_{i\#}(c_0) = \alpha^{c_{1i}} \beta^{c_{2i}} c_0 \end{cases}$$

onde, $i = 1, 2$. Se existir o homomorfismo do levantamento, ψ, então devemos ter; $\psi(\alpha\beta\alpha\beta^{-1}) = 1$, $\psi(c_0 \alpha c_0^{-1} \alpha^{-\epsilon}) = 1$ e $\psi(c_0 \beta c_0^{-1}\ \beta^{-\eta} \alpha^{-p}) = 1$, onde $p \in \{0, 1\}, \epsilon = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$.

Demonstração. (1) e (2) já foram feitos antes de enunciarmos o teorema. Assim, demonstraremos apenas o item (3).

Primeiramente, observemos que se $\psi(\alpha) = x$, então $\kappa(x) = \bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_\#(\alpha) = \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2}$ se $f_\#(\alpha) = \alpha^{r_i}$. De fato, se $\psi(\alpha) = x$, então de $q_\# \circ \psi(\alpha) = (f_1, f_2)_\#(\alpha)$ temos $\bar{\nu} \circ \kappa(x) = (f_1, f_2)_\#(\alpha)$. Logo, obtemos $\kappa(x) = \bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_\#(\alpha)$. Agora, se $f_{i\#}(\alpha) = \alpha^{r_i}$, então obteremos $\kappa(x) = \bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_\#(\alpha) = \bar{\nu}^{-1}(\alpha_2^{r_1} u_2^{r_2}) = \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2}$. Por outro lado, se $\kappa(A) = \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2}$, então temos $xA^{-1} = Z_1$, onde Z_1 pertence ao núcleo de κ. Logo, temos que Z_1 pertence a $\pi_2(K, K - x_2;, x_1)$. Analogamente fazemos para β e c_0.

Suponha que exista o homomorfismo ψ do enunciado do teorema. Logo, temos $\psi(\alpha) = x$, $\psi(\beta) = y$ e $\psi(c_0) = z$. Tomando $A = x, F = y, C = z$ e $Z_1 = Z_2 = Z_3 =$ elemento neutro, então temos que $Z_1, Z_2, Z_3,\ A, F, C$ satisfazem as condições acima. Agora, supondo que existem $Z_1, Z_2, Z_3 \in \pi_2(K, K - x_2, x_1)$ e $A, F, C \in \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$ satisfazendo a condição da hipótese do teorema, então basta extender ψ por linearidade. Das relações de, $\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >)$, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{cases} \psi(\alpha\beta\alpha\beta^{-1}) = 1 \\ \psi(c_0\alpha c_0^{-1}\alpha^{-\epsilon}) = 1 \\ \psi(c_0\beta c_0^{-1}\beta^{-\eta}\alpha^{-p}) = 1 \end{cases}$$

□

A seguir, obteremos algumas equações que Z_1, Z_2, Z_3, A, F, C, devem satisfazer para que exista um levantamento, $\psi : \pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \to \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$ $(< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$, em cada um dos casos dado pelo teorema 2.1.1. Do teorema acima, temos que se, $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, então o homomorfismo, ψ, deve enviar;

$$\begin{cases} \alpha \to Z_1 A \quad com \quad \kappa(A) = \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2} \\ \beta \to Z_2 F \quad com \quad \kappa(F) = \alpha_1^{s_1} \beta_1^{t_1} u_1^{s_2} v_1^{t_2} \\ c_0 \to Z_3 C \quad com \quad \kappa(C) = \alpha_1^{c_{11}} \beta_1^{c_{21}} u_1^{c_{12}} v_1^{c_{22}} c_{01} \end{cases}$$

e ainda, ψ, deve satisfazer as seguintes equações: $\psi(\alpha\beta\alpha\beta^{-1}) = 1, \psi(c_0\alpha c_0^{-1}\alpha^{-1}) = 1$ e $\psi(c_0\beta c_0^{-1}\beta^{-\eta}\alpha^{-p}) = 1$, onde $p \in \{0, 1\}$ e $\eta = \pm 1$. Logo, existe o levantamento, ψ se, e somente se, o sistema abaixo, na variável Z_j, possui uma solução.

$$\begin{cases} Z_1 A Z_2 F Z_1 A F^{-1} Z_2^{-1} & = & 1 \\ Z_3 C Z_1 A C^{-1} Z_3^{-1} (A^{-1} Z_1^{-1}) & = & 1 \\ Z_3 C Z_2 F C^{-1} Z_3^{-1} (F^{-1} Z_2^{-1})^{\eta} (A^{-1} Z_1^{-1})^{p} & = & 1 \end{cases}$$

Como $\eta = \pm 1$, então temos; $(F^{-1}Z_2^{-1})^{-\eta} = F^{\frac{-\eta-1}{2}} Z_2^{\eta} F^{\frac{1+\eta}{2}}$. Também temos que $p \in \{0, 1\}$, assim temos; $(A^{-1}Z_1^{-1})^p = A^{-p}Z_1^{-p}$. Portanto, o sistema acima para $\phi_p(1, \eta)$ e $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, dado na tabela do teorema 2.1.1, é equivalente ao sistema abaixo:

$$(I) \quad \begin{cases} Z_1(AZ_2A^{-1})(AFAF^{-1})(FA^{-1}Z_1AF^{-1})Z_2^{-1} & = & 1 \\ Z_3(CZ_1C^{-1})(CAC^{-1}A^{-1})(AZ_3^{-1}A^{-1})Z_1^{-1} & = & 1 \\ Z_3(CZ_2C^{-1})(CFC^{-1}F^{-\eta}A^{-p})(A^pF^{\eta}Z_3^{-1}F^{-\eta}A^{-p}) & & \\ (A^pF^{\frac{\eta-1}{2}}Z_2^{-\eta}F^{\frac{1-\eta}{2}}A^{-p})Z_1^{-p} & = & 1 \end{cases}$$

De agora em diante, nos referiremos ao sistema (I) como o sistema gerado pela entrada de dados $(A, F, C; s_i, r_i, t_i, (c_{1i}, c_{2i}))$, onde $\kappa(A) = \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2}, \kappa(F) = \alpha_1^{s_1} \beta_1^{t_1} u_1^{s_2} v_1^{t_2}$ e $\kappa(C) = \alpha_1^{c_{11}} u_1^{c_{12}} \beta_1^{c_{21}} v_1^{c_{22}} c_{01}$, com $i = 1, 2$.

A notação acima, poderia ser simplificada, ou seja, ao invés de escrevermos, sistema gerado pela entrada de dados $(A, F, C; s_i, r_i, t_i, (c_{1i}, c_{2i}))$, poderíamos escrever apenas, sistema gerado pela entrada de dados $(A, F, C; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$. Isso segue do fato de que a última notação, caracteriza completamente o par de homomorfismos $(f_{1\#}, f_{2\#})$ dados no sistema (I). As vezes usaremos essa outra nomenclatura.

De fato, suponha que temos um sistema gerado pela entrada de dados $(A', F', C'; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$, com $f_{1\#} = f_1(s_1', r_1', t_1', c_{11}', c_{21}')$. Pela nossa notação temos, $f_{2\#} = f_2(s_2, r_2, t_2, c_{12}, c_{22})$. Agora, das equações $\kappa(A') = \kappa(A)$, $\kappa(F') = \kappa(F)$, $\kappa(C') = \kappa(C)$, obtemos $s_1' = s_1$, $r_1' = r_1$, $t_1' = t_1$, $c_{11}' = c_{11}$ e $c_{21}' = c_{21}$. Assim, temos $f_{1\#} = f_1(s_1, r_1, t_1, c_{11}, c_{21})$.

Observemos que no sistema (I) cada equação é um produto de fatores, onde cada fator é um conjugado de Z_i, exceto um. O fator que não é um conjugado de Z_i chamaremos de termo constante da equação. Esses termos são: $AFAF^{-1}, CAC^{-1}A^{-1}$ e $CFC^{-1}F^{-\eta}A^{-p}$. Como cada variável Z_j pertence ao subgrupo normal $\pi_2(K, K-x_2, x_1)$ de $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$, então todos os fatores, incluindo os termos constante, pertencem a $\pi_2(K, K - x_2, x_1)$.

3.2 Reduções no sistema

Nesta seção conjugaremos o sistema (I) por uma palavra, q, em $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$, de modo a reduzir uma entrada de dados quaisquer a uma entrada de dados fixada. Começaremos esta seção apresentando uma equivalência do sistema (I) em relação aos elementos A, F, C, dada pelo teorema abaixo. Esse teorema será usado posteriormente no estudo de soluções para o sistema (I).

Teorema 3.2.1. *Existe solução para algum sistema gerado pela entrada de dados* $(A_1, F_1, C_1;\ s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$ *se, e somente se, existir solução para todo sistema gerado pela entrada de dados* $(A, F, C; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$, *onde* $\kappa(A_1) = \kappa(A)$, $\kappa(F_1) = \kappa(F)$ *e* $\kappa(C_1) = \kappa(C)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que X_1, X_2 e X_3 seja uma solução para o sistema gerado pela entrada de dados $(A_1, F_1, C_1; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$, ou seja, suponhamos que temos;

$$\begin{cases} X_1A_1X_2F_1X_1A_1F_1^{-1}X_2^{-1} & = & 1 \\ X_3C_1X_1A_1C_1^{-1}X_3^{-1}A_1^{-1}X_1^{-1} & = & 1 \\ X_3C_1X_2F_1C_1^{-1}X_3^{-1}(F_1^{-1}X_2^{-1})^{\eta}(A_1^{-1}X_1^{-1})^{p} & = & 1 \end{cases}$$

Das condições $\kappa(A_1) = \kappa(A)$, $\kappa(F_1) = \kappa(F)$ e $\kappa(C_1) = \kappa(C)$ obtemos $A_1A^{-1} = Y_1, F_1F^{-1} = Y_2$ e $C_1C^{-1} = Y_3$, onde Y_1, Y_2 e Y_3 pertencem ao núcleo de κ. Podemos então, escrever $A_1 = Y_1A, F_1 = Y_2F$ e $C_1 = Y_3C$. Substituindo isso no sistema acima obteremos;

$$\begin{cases} X_1Y_1AX_2Y_2FX_1Y_1AF^{-1}Y_2^{-1}X_2^{-1} & = & 1 \\ X_3Y_3CX_1Y_1AC^{-1}Y_3^{-1}X_3^{-1}A^{-1}Y_1^{-1}X_1^{-1} & = & 1 \\ X_3Y_3CX_2Y_2FC^{-1}Y_3^{-1}X_3^{-1}(F^{-1}Y_2^{-1}X_2^{-1})^{\eta}(A^{-1}Y_1^{-1}X_1^{-1})^{p} & = & 1 \end{cases}$$

Escrevendo $Z_1 = X_1Y_1, Z_2 = X_2Y_2$ e $Z_3 = X_3Y_3$, temos que Z_1, Z_2 e Z_3 é uma solução para o sistema gerado pela entrada de dados $(A, F, C; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$.

($\Leftarrow$) Se existe solução para todo sistema gerado pela entrada de dados $(A, F, C; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$, então em particular existe solução para o sistema gerado pela entrada de dados $(A_1, F_1, C_1; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$. □

Agora, conjugaremos as equações do sistema acima por uma palavra, q, em $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$. Note que não acrescentaremos $\tilde{c_0}$ à palavra q pois, no caso $M(\phi_0(1,1))$, conjugar, as equações do sistema, por uma palavra em $\tilde{c_0}$ não muda o sistema, já que $\tilde{c_0}$ comuta com todos os outros elementos. Quando ϕ é diferente da identidade, então não sabemos o que acontece. Isso será feito num outro momento.

Observemos que, como $\kappa(\tilde{\alpha}) = \alpha_1$, $\kappa(\tilde{\beta}) = \beta_1$, $\kappa(\tilde{a}) = u_1$ e $\kappa(\tilde{b}) = v_1$, então $\kappa(q)$ é uma palavra em α_1, β_1, u_1, e v_1. Temos que $\kappa(q) = \alpha_1^m\beta_1^n u_1^k v_1^l$, onde $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$. Isso segue do fato de que em $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$, α_1 comuta com u_1 e v_1, β_1 comuta com u_1 e v_1, e das relações $\alpha_1\beta_1\alpha_1\beta_1^{-1} = 1$ e $u_1v_1u_1v_1^{-1} = 1$ obtemos;

$$(\alpha_1^r\beta_1^s)^t = \begin{cases} \alpha_1^{\frac{t}{2}[r(1+(-1)^s)]}\beta_1^{st}, & \text{se t é par} \\ \alpha_1^{\frac{t-1}{2}[r(1+(-1)^s)]+r}\beta_1^{st}, & \text{se t é ímpar} \end{cases}$$

$$(u_1^r v_1^s)^t = \begin{cases} u_1^{\frac{t}{2}[r(1+(-1)^s)]} v_1^{st}, & \text{se t é par} \\ u_1^{\frac{t-1}{2}[r(1+(-1)^s)]+r} v_1^{st}, & \text{se t é ímpar} \end{cases}$$

para quaisquer $s, r, t \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.2.2. *Seja $\phi = \phi_p(1,\eta)$ um dos quatro casos dados nas tabelas do teorema 2.1.1, onde $p \in \{0,1\}$ e $\eta = \pm 1$. Seja q uma palavra em $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ tal que $\kappa(q) = \alpha_1^m \beta_1^n u_1^k v_1^l$, onde $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$. Então, tomando a conjugação por q nas equações do sistema (I) gerado pela entrada de dados $(A, F, C; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$, obteremos um novo sistema que é gerado pela entrada de dados $(A', F', C'; k[1-(-1)^{t_2}] + (-1)^l s_2$, $(-1)^l r_2$, $t_2, k[1-(-1)^{c_{22}+(1-\eta)l}] + (-1)^{c_{22}+l}(\frac{1-(-1)^l}{2})p + (-1)^l c_{12}, (1-\eta)l + c_{22})$, onde $A' = qAq^{-1}, F' = qFq^{-1}$ e $C' = qCq^{-1}$. Além disso, temos que se (Z_1, Z_2, Z_3) for uma solução para o sitema (I), então $(Z_1' = qZ_1q^{-1}, Z_2' = qZ_2q^{-1}, Z_3' = qZ_3q^{-1})$ será uma solução para o novo sistema.*

Demonstração. Basta calcular $\kappa(A'), \kappa(F')$ e $\kappa(C')$ e analisar as potências de α_1, β_1, u_1 e v_1. Para calcular $\kappa(A'), \kappa(F')$ e $\kappa(C')$ usaremos as relações de $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$. Os cálculos seguem abaixo.

$$\begin{aligned}
\kappa(A') = \kappa(qAq^{-1}) &= \alpha_1^m \beta_1^n u_1^k v_1^l \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2} v_1^{-l} u_1^{-k} \beta_1^{-n} \alpha_1^{-m} \\
&= \alpha_1^m \beta_1^n \alpha_1^{r_1} \beta_1^{-n} \alpha_1^{-m} u_1^k v_1^l u_1^{r_2} v_1^{-l} u_1^{-k} \\
&= \alpha_1^m \alpha_1^{(-1)^n r_1} \beta_1^n \beta_1^{-n} \alpha_1^{-m} u_1^k u_1^{(-1)^l r_2} v_1^l v_1^{-l} u_1^{-k} \\
&= \alpha_1^{(-1)^n r_1} u_1^{(-1)^l r_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa(F') = \kappa(qFq^{-1}) &= \alpha_1^m \beta_1^n u_1^k v_1^l \alpha_1^{s_1} \beta_1^{t_1} u_1^{s_2} v_1^{t_2} v_1^{-l} u_1^{-k} \beta_1^{-n} \alpha_1^{-m} \\
&= \alpha_1^m \beta_1^n \alpha_1^{s_1} \beta_1^{t_1} \beta_1^{-n} \alpha_1^{-m} u_1^k v_1^l u_1^{s_2} v_1^{t_2} v_1^{-l} u_1^{-k} \\
&= \alpha_1^m \alpha_1^{(-1)^n s_1} \beta_1^n \beta_1^{t_1} \beta_1^{-n} \alpha_1^{-m} u_1^k u_1^{(-1)^l s_2} v_1^l v_1^{t_2} v_1^{-l} u_1^{-k} \\
&= \alpha_1^m \alpha_1^{(-1)^n s_1} \beta_1^{t_1} \alpha_1^{-m} u_1^k u_1^{(-1)^l s_2} v_1^{t_2} u_1^{-k} \\
&= \alpha_1^m \alpha_1^{(-1)^n s_1} \alpha_1^{-(-1)^{t_1} m} \beta_1^{t_1} u_1^k u_1^{(-1)^l s_2} u_1^{-(-1)^{t_2} k} v_1^{t_2} \\
&= \alpha_1^{m[1-(-1)^{t_1}] + (-1)^n s_1} \beta_1^{t_1} u_1^{k[1-(-1)^{t_2}] + (-1)^l s_2} v_1^{t_2},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \kappa(C') = \kappa(qCq^{-1}) \\
= \ & \alpha_1^m \beta_1^n u_1^k v_1^l \alpha_1^{c_{11}} \beta_1^{c_{21}} u_1^{c_{12}} v_1^{c_{22}} c_{01} v_1^{-l} u_1^{-k} \beta_1^{-n} \alpha_1^{-m} \\
= \ & \alpha_1^m \beta_1^n \alpha_1^{c_{11}} \beta_1^{c_{21}} u_1^k v_1^l u_1^{c_{12}} v_1^{c_{22}} c_{01} v_1^{-l} c_{01}^{-1} c_{01} u_1^{-k} c_{01}^{-1} c_{01} \beta_1^{-n} c_{01}^{-1} c_{01} \alpha_1^{-m} c_{01}^{-1} c_{01} \\
= \ & \alpha_1^m \alpha_1^{(-1)^n c_{11}} \beta_1^n \beta_1^{c_{21}} u_1^k u_1^{(-1)^l c_{12}} v_1^l v_1^{c_{22}} (u_1^p v_1^\eta)^{-l} u_1^{-k} (\alpha_1^p \beta_1^\eta)^{-n} \alpha_1^{-m} c_{01} \\
= \ & \alpha_1^{m+(-1)^n c_{11}} \beta_1^{n+c_{21}} u_1^{k+(-1)^l c_{12}} v_1^{l+c_{22}} (u_1^p v_1^{-\eta})^l u_1^{-k} (\alpha_1^p \beta_1^{-\eta})^n \alpha_1^{-m} c_{01} \\
= \ & \alpha_1^{m+(-1)^n c_{11}} \beta_1^{n+c_{21}} u_1^{k+(-1)^l c_{12}} v_1^{l+c_{22}} u_1^{(\frac{1-(-1)^l}{2})p} v_1^{-\eta l} u_1^{-k} \alpha_1^{(\frac{1-(-1)^n}{2})p} \beta_1^{-\eta n} \alpha_1^{-m} c_{01} \\
= \ & \alpha_1^{m+(-1)^n c_{11}} \beta_1^{n+c_{21}} u_1^{k+(-1)^l c_{12}} v_1^{l+c_{22}} u_1^{(\frac{1-(-1)^l}{2})p} u_1^{-(-1)^{-\eta l} k} v_1^{-\eta l} \alpha_1^{(\frac{1-(-1)^n}{2})p} \\
& \alpha_1^{-(-1)^{-\eta n} m} \beta_1^{-\eta n} c_{01} \\
= \ & \alpha_1^{m+(-1)^n c_{11}} \alpha_1^{(-1)^{n+c_{21}}[(\frac{1-(-1)^n}{2})p-(-1)^{-\eta n} m]} \beta_1^{n+c_{21}} \beta_1^{-\eta n} u_1^{k+(-1)^l c_{12}} \\
& u_1^{(-1)^{l+c_{22}}[(\frac{1-(-1)^l}{2})p-(-1)^{-\eta l} k]} v_1^{l+c_{22}} v_1^{-\eta l} c_{01} \\
= \ & \alpha_1^{m+(-1)^n c_{11}} \alpha_1^{(-1)^{n+c_{21}}[(\frac{1-(-1)^n}{2})p-(-1)^{-\eta n} m]} \beta_1^{(1-\eta)n+c_{21}} u_1^{k+(-1)^l c_{12}} \\
& u_1^{(-1)^{l+c_{22}}[(\frac{1-(-1)^l}{2})p-(-1)^{-\eta l} k]} v_1^{(1-\eta)l+c_{22}} c_{01} \\
= \ & \alpha_1^{m[1-(-1)^{(1-\eta)n+c_{21}}]+(-1)^{n+c_{21}}(\frac{1-(-1)^n}{2})p+(-1)^n c_{11}} \beta_1^{(1-\eta)n+c_{21}} \\
& u_1^{k[1-(-1)^{(1-\eta)l+c_{22}}]+(-1)^{l+c_{22}}(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12}} v_1^{(1-\eta)l+c_{22}} c_{01}.
\end{aligned}
$$

□

Lema 3.2.1. *Com a mesma notação do teorema acima, temos que se $t_1 = 2l_1 + 1$ e $t_2 = 2l_2 + 1$, então existe um levantamento para os pares de homomorfismos:*

$$(f_1(s_1, r_1, 2l_1 + 1, c_{11}, 2k_1), f_2(s_2, r_2, 2l_2 + 1, c_{12}, 2k_2)),$$

$$(f_1(s_1, r_1, 2l_1 + 1, c_{12}, 2k_1), f_2(s_2, r_2, 2l_2 + 1, c_{12}, 2k_2 + 1)),$$

$$(f_1(s_1, r_1, 2l_1 + 1, c_{12}, 2k_1 + 1), f_2(s_2, r_2, 2l_2 + 1, c_{12}, 2k_2)),$$

$$(f_1(s_1, r_1, 2l_1 + 1, c_{12}, 2k_1 + 1), f_2(s_2, r_2, 2l_2 + 1, c_{12}, 2k_2 + 1)),$$

se, e somente se, existir um levantamento para os seguintes pares de homomorfismos, respectivamente :

$$(f_1(2m + (-1)^n s_1, (-1)^n r_1, 2l_1 + 1, -(\frac{1-(-1)^n}{2})p + (-1)^n c_{11}, (1-\eta)n + 2k_1),$$

$$f_2(2k + (-1)^l s_2, (-1)^l r_2, 2l_2 + 1, -(\frac{1-(-1)^l}{2})p + (-1)^l c_{12}, (1-\eta)l + 2k_2)),$$

$$(f_1(2m+(-1)^n s_1,(-1)^n r_1,2l_1+1,-(\frac{1-(-1)^n}{2})p+(-1)^n c_{11},(1-\eta)n+2k_1),$$

$$f_2(2k+(-1)^l s_2,(-1)^l r_2,2l_2+1,2k+(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12},(1-\eta)l+2k_2+1)),$$

$$(f_1(2m+(-1)^n s_1,(-1)^n r_1,2l_1+1,2m+(\frac{1-(-1)^n}{2})p+(-1)^n c_{11},(1-\eta)n+2k_1+1),$$

$$f_2(2k+(-1)^l s_2,(-1)^l r_2,2l_2+1,-(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12},(1-\eta)l+2k_2)),$$

$$(f_1(2m+(-1)^n s_1,(-1)^n r_1,2l_1+1,2m+(\frac{1-(-1)^n}{2})p+(-1)^n c_{11},(1-\eta)n+2k_1+1),$$

$$f_2(2k+(-1)^l s_2,(-1)^l r_2,2l_2+1,2k+(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12},(1-\eta)l+2k_2+1)).$$

Demonstração. Denotemos por $(A',F',C',s_2',r_2',t_2',c_{12}',c_{22}')$ o novo sistema dado pelo teorema 3.2.2. Para demonstrarmos o lema basta calcular s_2',r_2',t_2',c_{12}' e c_{22}'. Faremos o cálculo apenas para o homomorfismo, f_2, ou seja, analisaremos os casos em que temos $t_2=2l_2+1$ e $c_{22}=2k_2$ ou $t_2=2l_2+1$ e $c_{22}=2k_2+1$. O caso para o homomorfismo, f_1, é análogo.

No primeiro caso, temos $t_2=2l_2+1$ e $c_{22}=2k_2$. Nesse caso, temos $s_2'=k[1-(-1)^{t_2}]+(-1)^l s_2=2k+(-1)^l s_2$, $r_2'=(-1)^l r_2$, $t_2'=t_2$, $c_{22}'=(1-\eta)l+2k_2$ e, $c_{12}'=k[1-(-1)^{c_{22}+(1-\eta)l})]+[(-1)^{l+c_{22}}(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}=[1-(-1)^{2k_2+(1-\eta)l})]k$ $+[(-1)^{l+2k_2}(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}$. Como η é ímpar, então $(1-\eta)l$ é par. Assim, temos $[1-(-1)^{2k_2+(1-\eta)l})]k+[(-1)^{l+2k_2}(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}=[(-1)^l(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}=(\frac{(-1)^l-(-1)^{2l}}{2})p+(-1)^l c_{12}=-(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12}$.

No segundo caso, temos $t_2=2l_2+1$ e $c_{22}=2k_2+1$. Nesse caso, temos $s_2'=k[1-(-1)^{t_2}]+(-1)^l s_2=2k+(-1)^l s_2$, $r_2'=(-1)^l r_2$, $t_2'=t_2$, $c_{22}'=(1-\eta)l+2k_2+1$ e, $c_{12}'=[1-(-1)^{c_{22}+(1-\eta)l})]k+[(-1)^{l+c_{22}}(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}=[1-(-1)^{2k_2+1+(1-\eta)l})]k$ $+[(-1)^{l+2k_2+1}(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}$. Como η é ímpar, então $2k_2+1+(1-\eta)l$ é ímpar, já que $(1-\eta)$ é par. Assim, temos $[1-(-1)^{2k_2+1+(1-\eta)l})]k+[(-1)^{l+2k_2+1}(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}=2k+[-1(-1)^l(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}=2k+[(-1)(-1)(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}=2k+(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12}$. □

Corolário 3.2.1. *Quando t_1 e t_2 são ímpares então podemos tomar $s_1^{'}, s_2^{'} \in \{0,1\}$ e $r_1^{'}, r_2^{'} \geq 0$. Se $\eta = -1$ então podemos tomar $c_{2i}^{'} \in \{-1,1\}$ se c_{2i} for ímpar e $c_{2i}^{'} \in \{0,2\}$ se c_{2i} for par, onde $i \in \{1,2\}$.*

Demonstração. Vamos usar apenas o seguinte par de homomorfismos dado pelo lema anterior:

$$(f_1(2m + (-1)^n s_1, (-1)^n r_1, 2l_1 + 1, -(\frac{1-(-1)^n}{2})p + (-1)^n c_{11}, (1-\eta)n + 2k_1),$$

$$f_2(2k + (-1)^l s_2, (-1)^l r_2, 2l_2 + 1, 2k + (\frac{1-(-1)^l}{2})p + (-1)^l c_{12}, (1-\eta)l + 2k_2 + 1)),$$

A demonstração para os outros casos é análoga. Consideraremos primeiro, o homomorfismo, f_2.

Podemos escrever $k_2 = 2\bar{k_2}$ ou $2\bar{k_2} - 1$, $\bar{k_2} \in \mathbb{Z}$. Se $r_2 \geq 0$ então basta tomar $l = -2\bar{k_2}$. Assim, obteremos $r_2^{'} = (-1)^l r_2 = r_2 \geq 0$. Temos $s_2^{'} = 2k + (-1)^l s_2 = 2k + s_2$. Se $s_2 = 2j$, $j \in \mathbb{Z}$, então basta tomar $k = -j$, e, logo teremos $s_2^{'} = 0$. Agora, se $s_2 = 2j+1$, $j \in \mathbb{Z}$, então tomando $k = -j$, teremos $s_2^{'} = 1$. Mais ainda, se $\eta = -1$ então obteremos;

$$c_{22}^{'} = 2l + c_{22} = 2l + 2k_2 + 1 = \begin{cases} 1 & se \quad k_2 = 2\bar{k_2} \\ -1 & se \quad k_2 = 2\bar{k_2} - 1. \end{cases}$$

Se $r_2 \leq 0$ então bastar tomar $l = -2\bar{k_2} - 1$ se $k_2 = 2\bar{k_2}$, e $l = -2\bar{k_2} + 1$ se $k_2 = 2\bar{k_2} - 1$. Em qualquer situação obteremos $r_2^{'} = (-1)^l r_2 = -r_2 \geq 0$. Temos então, $s_2^{'} = 2k - s_2$, se $s_2 = 2j$ ou $s_2 = 2j+1$, $j \in \mathbb{Z}$, então tomando $k = -j$ obteremos $s_2^{'} = 0$ ou 1. Também obteremos;

$$c_{22}^{'} = 2l + c_{22} = 2l + 2k_2 + 1 = \begin{cases} -1 & se \quad k_2 = 2\bar{k_2} \\ 1 & se \quad k_2 = 2\bar{k_2} - 1. \end{cases}$$

Se tomarmos o homomorfismo, f_1, então a redução é completamente análoga. Nessa situação obteremos $c_{21}^{'} \in \{0,2\}$ visto que c_{21} é par. □

Portanto, no caso em que t_1 e t_2 são ímpares podemos conjugar o sistema (I) por uma palavra, q, em $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$, tal que $\kappa(q) = \alpha_1^m \beta_1^n u_1^k v_1^l$, onde m, n, k, l são escolhidos da maneira acima, de tal modo a obtermos um sistema gerado pela entrada de dados $(A^{'}, F^{'}, C^{'}; s_2^{'}, r_2^{'}, t_2^{'}, (c_{12}^{'}, c_{22}^{'}))$, onde $r_1^{'}, r_2^{'} \geq 0$ e $s_1^{'}, s_2^{'} \in \{0,1\}$. No caso em que $\eta = -1$, então podemos tomar $c_{2i}^{'} \in \{-1,1\}$ se c_{2i} for ímpar e $c_{2i}^{'} \in \{0,2\}$ se c_{2i} for par, onde $i \in \{1,2\}$.

Observação 3.2.1. *Note que no caso em que $\eta = -1$ e $p = 1$ podemos tomar $c_{2i}^{'} = 0$, $i = 1,2$. Por exemplo, fazendo essa redução no homomorfismo $(f_1(2m + (-1)^n s_1, (-1)^n r_1, 2l_1 + 1, -(\frac{1-(-1)^n}{2})p + (-1)^n c_{11}, (1-\eta)n + 2k_1)$, então obteremos $c_{11}^{'} = c_{11}$ se n é par e $c_{11}^{'} = -1 - c_{11}$ se n é ímpar. Em algumas situações usaremos essa redução para estudar nosso sistema de equações.*

3.3 Propriedades do sistema abelianizado

Nesta seção apresentaremos um isomorfismo entre o abelianizado do grupo, $\pi_2(K, K - x_2, x_1) = \pi_2$, e o anel de grupo, $\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$. Observemos que as soluções do teorema 3.2.2 estão em π_2. Assim, começaremos no próximo capítulo, olhando as equações daquele sistema no abelianizado de π_2 que é: $(\pi_2)_{ab} = \frac{\pi_2}{[\pi_2, \pi_2]}$.

O objetivo de olhar essas equações no abelianizado, $(\pi_2)_{ab}$, é que se elas não possuem solução no abelianizado, então podemos inferir que o sistema original não possui solução. Se o sistema de equações possuir solução no abelianizado, então tentaremos encontrar uma solução no sistema original a partir da solução dada no sistema abelianizado.

Para ver se as equações no abelianizado, $(\pi_2)_{ab}$, não tem solução, projetaremos o sistema original a um sistema de equações em $\mathbb{Z}$ usando o homomorfismo aumentação $\mathcal{E} : (\pi_2)_{ab} \longrightarrow \mathbb{Z}$ e, a partir daí, decidiremos se o sistema de equações correspondente não tem solução.

Como vimos, no capítulo 3, π_2 é o núcleo da aplicação $j_\pi : \pi_1(K - x_2, x_1) =< w, v >\to \pi_1(K, x_1) =< \bar{w}, \bar{v} | \bar{w}^{-1}\bar{v}^{-1}\bar{w}^{-1}\bar{v} = 1 >$, onde $\bar{w} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}$ e $\bar{v} = \bar{a}\bar{b}$. Temos $\bar{a} = \bar{v}^{-1}\bar{w}^{-1}\bar{v}$, $\bar{b} = \bar{v}^{-1}\bar{w}\bar{v}^2$ e $\bar{w}^{-1}\bar{v}^{-1}\bar{w}^{-1}\bar{v} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}\bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$. Denotaremos por, $B = w^{-1}v^{-1}w^{-1}v$, onde w, v são dados pela observação

A.2.1 do apêndice A.

Teorema 3.3.1. *Para o grupo π_2 temos as seguintes afirmações:*

(1) O homomorfismo abelianização $\mathcal{A} : \pi_2 \to (\pi_2)_{ab}$, é, tal que $\mathcal{A}(p_1(w,v)\ Bp_1(w,v)^{-1}) = \mathcal{A}(p_2(w,v)Bp_2(w,v)^{-1})$, se $[j_\pi(p_1(w,v))] = [j_\pi(p_2(w,v))] = [p(\bar{w},\bar{v})]$, onde $p_i(w,v)$, $i = 1,2$ é uma palavra em w, v e, $p(\bar{w},\bar{v})$ é uma palavra em $\bar{w},\bar{v}$.

(2) Existe um isomorfismo $(\pi_2)_{ab} \cong \mathbb{Z}[\pi_1(K)]$, onde $\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ é o anel de grupo do grupo fundamental da garrafa de Klein.

Demonstração.

(1) Se $[j_\pi(p_1(w,v))] = [j_\pi(p_2(w,v))]$, então temos $[j_\pi(p_1(w,v)p_2(w,v)^{-1})] = 1$. Portanto, temos $p_1(w,v)p_2(w,v)^{-1} = \lambda(w,v) \in \pi_2$. Disso, temos $p_1(w,v)Bp_1(w,v)^{-1} = \lambda(w,v)[p_2(w,v)\ Bp_2(w,v)^{-1}]\lambda(w,v)^{-1}$, e logo obtemos; $\mathcal{A}(p_1(w,v)Bp_1(w,v)^{-1}) = \mathcal{A}(\ p_2(w,v)Bp_2(w,v)^{-1})$.

(2) O homorfismo $\theta : (\pi_2)_{ab} \to \mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ definido por $\theta(\mathcal{A}(B)) = 1.1$ e $\theta(\mathcal{A}(p(w,v)Bp(w,v)^{-1})) = 1.[p(\bar{w},\bar{v})]$, onde $[p(\bar{w},\bar{v})] = j_\pi(p(w,v))$, é um isomorfismo. De fato, por definição, temos que π_2 é gerado pelo conjunto $\{p(w,v)B^t p(w,v)^{-1} | t \in \mathbb{Z}\}$. Por (1), temos que θ é injetor. Como j_π é sobrejetor, então temos que θ é sobrejetor.

Agora, considerando, $\mathcal{A} : \pi_2 \to (\pi_2)_{ab} \cong \mathbb{Z}(\pi_1(K))$, o homomorfismo abelianização, então visto que $j_\pi(p(\bar{w},\bar{v}))$ pertence a $\pi_1(K, x_1)$, temos; $j_\pi(p(\bar{w},\bar{v})) = \bar{w}^x\bar{v}^y$ com $x, y \in \mathbb{Z}$. Portanto, pelo isomorfismo acima temos $\theta(\mathcal{A}(p(w,v)B^t p(w,v)^{-1})) = t.(\bar{w}^x\bar{v}^y)$. □

Em algumas situações, para estudar o sistema abelianizado, aplicaremos o homomorfismo, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$, nas equações do sistema. Para simplificar a notação indentificaremos z com $\theta(z)$, onde z e $\theta(z)$ estão na situação do teorema anterior.

Capítulo 4

Estudando um sistema de equações

Dadas aplicações $f_1, f_2 : M(\phi_p(1,\eta)) \to M(\phi_p(1,\eta))$, sobre S^1, então temos homomorfismos $f_{1\#}, f_{2\#} : \pi_1(M(\phi_p(1,\eta))) \to \pi_1(M(\phi_p(1,\eta)))$, que pela nossa notação, são dados por $f_1(s_1, r_1, t_1, c_{11},\ c_{21})$ e $f_2(s_2, r_2, t_2, c_{12}, c_{22})$, respectivamente.

Supondo que o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ é zero, então como vimos no capítulo 3, nosso problema é equivalente a encontrar uma solução para um sistema de equações. Também vimos, no corolário 3.2.1, que se t_1 e t_2 são ímpares, então podemos supor que $s_1, s_2 \in \{0, 1\}$ e $r_1, r_2 \geq 0$.

O teorema principal deste capítulo, teorema 4.1.1, nos diz quando podemos deformar o par (f_1, f_2) a um par livre de coincidência se t_1 e t_2 são ímpares. Note que quando f_1 ou f_2 é a identidade então da equação, $N(f_{1|_K}, f_{2|_K}) = 0$, devemos ter $t_1 = t_2 = 1$, ou seja, os resultados obtidos neste capítulo inclui o problema do ponto fixo estudado em [27]. Começaremos o estudo do sistema de equações fazendo uma redução. Do teorema 2.1.1 e do corolário 3.2.1 temos o seguinte resultado:

Corolário 4.0.1. *Dado um par de aplicações $f_1, f_2 : M(\phi_p(1,\eta)) \to M(\phi_p(1,\eta))$, sobre S^1, então temos o par de homomorfismos $(f_1(s_1, r_1, t_1, c_{11},\ c_{21}), f_2(s_2, r_2, t_2, c_{12}, c_{22}))$. Suponha $t_1 = 2l_1 + 1$ e $t_2 = 2l_2 + 1$. Para estudar o problema de existência de solução do sistema dado pelo teorema 3.2.2 é suficiente resolver o problema gerado pela entrada de dados $(A, F, C; s_2, r_2, t_2, c_{12}, c_{22})$, onde os homomorfismos $f_1(s_1, r_1, t_1, c_{11}, c_{21})$*

e $f_2(s_2, r_2, t_2, c_{12}, c_{22})$ *são dados pelas tabelas abaixo. Nessas tabelas denotaremos por* $T.1$ *o caso em que temos* $t_1 = t_2$, *e por* $T.2$ *o caso em que temos* $r_1 = r_2 = 0$.

Caso $T.1$, ou seja, $t_1 = t_2 = 2l + 1$.

Caso I	$I.3)$ $f_i(s_i, r_i, 2l+1, 0, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{r_i},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0 \to \beta^{2k_i}c_0$ $I.4)$ $f_i(s_i, 0, 2l+1, s_i, 2k_i+1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0 \to \alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
$\phi_0(1,1)$	$s_i \in \{0,1\}, r_i \geq 0, k_i, l \in \mathbb{Z},\ i \in \{1,2\}$
Caso II	$II.3)$ $f_i(s_i, 2c_{1i}+1, 2l+1, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{2c_{1i}+1},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},$ $c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
$\phi_1(1,1)$	$s_i \in \{0,1\}, c_{1i} \geq 0, k_i, l \in \mathbb{Z},\ i \in \{1,2\}$
Caso III	$III.3)$ $f_i(s_i, r_i, 2l+1, 0, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{r_i},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0 \to \beta^{2k_i}c_0$ $III.4)$ $f_i(s_i, 0, 2l+1, s_i, 2k_i+1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0 \to \alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
$\phi_0(1,-1)$	$s_i \in \{0,1\}, r_i \geq 0, k_i, l \in \mathbb{Z},\ i \in \{1,2\}$
Caso IV	$IV.3)$ $f_i(s_i, 2c_{1i}+1, 2l+1, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{2c_{1i}+1},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},$ $c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
$\phi_1(1,-1)$	$s_i \in \{0,1\}, k_i = 0, c_{1i}, l \in \mathbb{Z},\ i \in \{1,2\}$

Caso $T.2$, isto é, $r_1 = r_2 = 0$.

Caso I	$I.3)$ $f_i(s_i, 0, 2l_i+1, 0, 2k_i) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0 \to \beta^{2k_i}c_0$ $I.4)$ $f_i(s_i, 0, 2l_i+1, s_i, 2k_i+1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0 \to \alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
$\phi_0(1,1)$	$s_i \in \{0,1\}, l_i, k_i \in \mathbb{Z},\ i \in \{1,2\}$
Caso III	$III.3)$ $f_i(s_i, 0, 2l_i+1, 0, 2k_i) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0 \to \beta^{2k_i}c_0$ $III.4)$ $f_i(s_i, 0, 2l_i+1, s_i, 2k_i+1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0 \to \alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
$\phi_0(1,-1)$	$s_i \in \{0,1\}, l_i, k_i \in \mathbb{Z},\ i \in \{1,2\}$

Demonstração. Para obter as tabelas acima basta usar o teorema 2.1.1 nos casos em que t_1, t_2 são ímpares e usar a redução obtida após corolário 3.2.1. $\square$

Se $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, $i = 1, 2$, são os homomorfismos, induzidos pelas aplicações f_1, f_2, em $\pi_1(M(\phi(1, \eta)))$, então do teorema 3.2.1 os termos do sistema de equações (I) podem ser dados por $A = \tilde{\alpha}^{r_1} w^{r_2}$, $r_i \in \mathbb{Z}$, $F = \tilde{\alpha}^{s_1} \tilde{\beta}^{t_1} w^{s_2} (vw)^{t_2}$ e $C = \tilde{\alpha}^{c_{11}} \tilde{\beta}^{c_{21}} w^{c_{12}}$ $(vw)^{c_{22}} \tilde{c_0}$.

De fato, como $\kappa(\tilde{a}) = u_1$, $\kappa(\tilde{b}) = v_1$, $v = \tilde{a}\tilde{b}$, $w = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$ e $u_1 v_1 u_1 v_1^{-1} = 1$ em $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$, então temos $\kappa(v) = \kappa(\tilde{a}\tilde{b}) = u_1 v_1$, $\kappa(w) = \kappa(\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}) = u_1(v_1 u_1^{-1} v_1^{-1} u_1^{-1}) = u_1$. Portanto, temos $\kappa(A') = \kappa(\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{a}^{r_2}) = \kappa(\tilde{\alpha}^{r_1} w^{r_2}) = \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2} = \kappa(A)$. Também temos $\kappa(F') = \kappa(\tilde{\alpha}^{s_1}\tilde{\beta}^{t_1}\ w^{s_2}\ (vw)^{t_2}) = \alpha_1^{s_1}\beta_1^{t_1} u_1^{s_2}$ $(u_1 v_1 u_1)^{t_2} = \alpha_1^{s_1}\beta_1^{t_1} u_1^{s_2} v_1^{t_2} = \kappa(F)$. Da mesma forma, obtemos $\kappa(C') = \kappa(\tilde{\alpha}^{c_{11}}\tilde{\beta}^{c_{21}}$ $w^{c_{12}}(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}) = \kappa(C)$.

Lema 4.0.1. *Se $m, n, q \in \mathbb{Z}$, então da tabela A.5 no apêndice A obtemos a seguinte tabela:*

$\tilde{\alpha}^n v^m \tilde{\alpha}^{-n} = (w^n v w^n)^m$	$\tilde{\alpha}^{-n} v^m \tilde{\alpha}^n = (w^{-n} v w^{-n})^m$
$\tilde{\alpha}^n w^m \tilde{\alpha}^{-n} = w^m$	$\tilde{\alpha}^{-n} w^m \tilde{\alpha}^n = w^m$
$\tilde{\alpha}^n B^m \tilde{\alpha}^{-n} = w^{-n} B^m w^n$	$\tilde{\alpha}^{-n} B^m \tilde{\alpha}^n = w^n B^m w^{-n}$
$\tilde{\beta}^n v^m \tilde{\beta}^{-n} = v^m$	$\tilde{\beta}^{-n} v^m \tilde{\beta}^n = v^m$
$\tilde{\beta}^n w^m \tilde{\beta}^{-n} = v^{-n} w^{(-1)^n m} v^n$	$\tilde{\beta}^{-n} w^m \tilde{\beta}^n = v^n w^{(-1)^n m} v^{-n}$
$\tilde{\beta}^n B^m \tilde{\beta}^{-n} =$ $= v^{-n} w^{(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})} B^{(-1)^n m} w^{-(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})} v^n$	$\tilde{\beta}^{-n} B^m \tilde{\beta}^n =$ $= v^n w^{(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})} B^{(-1)^n m} w^{-(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})} v^{-n}$
$\tilde{\beta}^n (w^{-q} v w^{-q})^m \tilde{\beta}^{-n} =$ $= v^{-n} (w^{(-1)^n(-q)} v w^{(-1)^n(-q)})^m v^n$	$\tilde{\beta}^{-n} (w^{-q} v w^{-q})^m \tilde{\beta}^n =$ $= v^n (w^{(-1)^n(-q)} v w^{(-1)^n(-q)})^m v^{-n}$
$\tilde{\alpha}^q (w^n v w^n)^m \tilde{\alpha}^{-q} = (w^{n+q} v w^{n+q})^m$	$\tilde{\alpha}^{-q} (w^n v w^n)^m \tilde{\alpha}^q = (w^{n-q} v w^{n-q})^m$

(4.1)

Demonstração. A tabela acima é obtida usando indução e a tabela A.5. Calcularemos apenas a conjugação $\tilde{\beta}^n B^m \tilde{\beta}^{-n}$. As outras conjugações são obtidas de modo análogo.

Da tabela A.5 temos $\tilde{\beta}B\tilde{\beta}^{-1} = v^{-1}wB^{-1}w^{-1}v$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^2B\tilde{\beta}^{-2} &= \tilde{\beta}v^{-1}wB^{-1}w^{-1}v\tilde{\beta}^{-1} \\
&= \tilde{\beta}v^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}w\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}w^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}v\tilde{\beta}^{-1} \\
&= v^{-1}v^{-1}w^{-1}vv^{-1}wBw^{-1}vv^{-1}wvv \\
&= v^{-2}Bv^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^3B\tilde{\beta}^{-3} &= \tilde{\beta}v^{-2}Bv^2\tilde{\beta}^{-1} \\
&= \tilde{\beta}v^{-2}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}B\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}v^2\tilde{\beta}^{-1} \\
&= v^{-2}v^{-1}wB^{-1}w^{-1}vv^2 \\
&= v^{-3}wB^{-1}w^{-1}v^3.
\end{aligned}$$

Suponha que temos $\tilde{\beta}^kB\tilde{\beta}^{-k} = v^{-k}w^{(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}B^{(-1)^k}\ w^{-(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}v^k$, para algum inteiro k positivo. Dessa hipótese temos,

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^{k+1}B\tilde{\beta}^{-k-1} &= \tilde{\beta}\tilde{\beta}^kB\tilde{\beta}^{-k}\tilde{\beta}^{-1} \\
&= \tilde{\beta}v^{-k}w^{(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}B^{(-1)^k}w^{-(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}v^k\tilde{\beta}^{-1} \\
&= \tilde{\beta}v^{-k}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}w^{(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}B^{(-1)^k}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}w^{-(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}v^k\tilde{\beta}^{-1} \\
&= v^{-k}v^{-1}w^{(-1)(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}vv^{-1}wB^{(-1)(-1)^k}w^{-1}vv^{-1}w^{-(-1)(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}vv^k \\
&= v^{-k-1}w^{(\frac{-1+(-1)^{k+2}}{2})}wB^{(-1)^{k+1}}w^{-1}w^{-(\frac{-1+(-1)^{k+2}}{2})}v^{k+1} \\
&= v^{-k-1}w^{(\frac{-1+2+(-1)^{k+2}}{2})}B^{(-1)^{k+1}}w^{-(\frac{-1+2+(-1)^{k+2}}{2})}v^{k+1} \\
&= v^{-k-1}w^{(\frac{1+(-1)^{k+2}}{2})}B^{(-1)^{k+1}}w^{-(\frac{1+(-1)^{k+2}}{2})}v^{k+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, por indução obtemos que $\tilde{\beta}^nB\tilde{\beta}^{-n} = v^{-n}w^{(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})}B^{(-1)^n}\ w^{-(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})}v^n$, para todo inteiro positivo n. O caso em que n é negativo se faz de modo análogo. Da última igualdade obtemos $\tilde{\beta}^nB^m\tilde{\beta}^{-n} = v^{-n}w^{(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})}B^{(-1)^nm}\ w^{-(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})}v^n$, para quaisquer inteiros n, m. $\square$

Observemos que para $\phi_p(1,\eta)$ e $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, dados no corolário 4.0.1, existe o homomorfismo do levantamento do diagrama 3.1 se, e somente se, o sistema abaixo possui uma solução:

$$(I)\quad \begin{cases} Z_1(AZ_2A^{-1})(AFAF^{-1})(FA^{-1}Z_1AF^{-1})Z_2^{-1} & = \ 1 \\ Z_3(CZ_1C^{-1})(CAC^{-1}A^{-1})(AZ_3^{-1}A^{-1})Z_1^{-1} & = \ 1 \\ Z_3(CZ_2C^{-1})(CFC^{-1}F^{-\eta}A^{-p})(A^pF^{\eta}Z_3^{-1}F^{-\eta}A^{-p}) & \\ (A^pF^{\frac{\eta-1}{2}}Z_2^{-\eta}F^{\frac{1-\eta}{2}}A^{-p})Z_1^{-p} & = \ 1, \end{cases}$$

onde $\kappa(A) = \alpha_1^{r_1}u_1^{r_2}$, $\kappa(F) = \alpha_1^{s_1}\beta_1^{t_1}u_1^{s_2}v_1^{t_2}$ e $\kappa(C) = \alpha_1^{c_{11}}\beta_1^{c_{21}}u_1^{c_{12}}v_1^{c_{22}}c_{01}$.

Sejam $Z_1 = \prod_i w^{u_i}v^{v_i}B^{t_1^i}v^{-v_i}w^{-u_i}$, $Z_2 = \prod_i w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i}$, $Z_3 = \prod_i w^{x_i}v^{y_i}B^{t_3^i}v^{-y_i}w^{-x_i}$ e $\bar{t_j} = \sum_i t_j^i$, onde t_j é o expoente de B no i-ésimo fator de Z_j. Note que $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(Z_j) = \bar{t_j}$, onde $j = 1, 2, 3$. Pelo teorema 3.3.1, os elementos Z_j, $j = 1, 2, 3$, acima, pertencentes a $\pi_2(K, K - x_2, x_1))$, são suficientes para estudarmos as soluções do nosso sistema, ou seja, basta considerar no sistema (I) soluções da forma dos elementos Z_j, $j = 1, 2, 3$.

Analisaremos na próxima proposição, o que acontece quando aplicamos o homomorfismo, $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$, e uma conjugação da variável, $Z = w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m}$, pelos elementos $\tilde{\alpha}^q$, $\tilde{\alpha}^{-q}$, $\tilde{\beta}^q$, $\tilde{\beta}^{-q}$ e $\tilde{c_0}$, com $q \in \mathbb{Z}$. Isso será feito em cada um dos casos de $\phi_p(1, \eta)$, onde B é dado por $B = w^{-1}v^{-1}w^{-1}v$.

Proposição 4.0.1. *Se $Z = w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m}$ e $q \in \mathbb{Z}$ então temos;*

(1) $$\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(Z) = k,$$

$$\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\alpha}^q Z \tilde{\alpha}^{-q}) = k, \qquad \mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\alpha}^{-q} Z \tilde{\alpha}^{q}) = k,$$

$$\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\beta}^q Z \tilde{\beta}^{-q}) = (-1)^q k \quad e \quad \mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\beta}^{-q} Z \tilde{\beta}^{q}) = (-1)^q k.$$

(2) Em cada caso de $\phi_p(1, \eta)$, temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{c_0} Z \tilde{c_0}^{-1}) = \eta k$.

Demonstração.

(1) Como $Z = w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m}$, então temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(Z) = k$. Usaremos as tabelas A.5 e 4.1 para demonstrar os outros casos. Da tabela 4.1 temos $\tilde{\alpha}^q B^k \tilde{\alpha}^{-q} = w^{-q} B^k w^q$.

Disso obtemos;

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}^q Z \tilde{\alpha}^{-q} &= \tilde{\alpha}^q w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m} \tilde{\alpha}^{-q} \\
&= \tilde{\alpha}^q w^m \tilde{\alpha}^{-q} \tilde{\alpha}^q v^n \tilde{\alpha}^{-q} \tilde{\alpha}^q B^k \tilde{\alpha}^{-q} \tilde{\alpha}^q v^{-n} \tilde{\alpha}^{-q} \tilde{\alpha}^q w^{-m} \tilde{\alpha}^{-q} \\
&= w^m (w^q v w^q)^n w^{-q} B^k w^q (w^q v w^q)^{-n} w^{-m}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}^q Z \tilde{\alpha}^{-q}) = k$. Usando a tabela 4.1 temos;

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^q Z \tilde{\beta}^{-q} &= \tilde{\beta}^q w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m} \tilde{\beta}^{-q} \\
&= \tilde{\beta}^q w^m \tilde{\beta}^{-q} \tilde{\beta}^q v^n \tilde{\beta}^{-q} \tilde{\beta}^q B^k \tilde{\beta}^{-q} \tilde{\beta}^q v^{-n} \tilde{\beta}^{-q} \tilde{\beta}^q w^{-m} \tilde{\beta}^{-q} \\
&= (v^{-q} w^{(-1)^q m} v^q) v^n v^{-q} w^{(\frac{1+(-1)^{q+1}}{2})} B^{(-1)^q k} w^{-(\frac{1+(-1)^{q+1}}{2})} v^q v^{-n} (v^{-q} w^{(-1)^q(-m)} v^q).
\end{aligned}$$

Logo, obtemos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^q Z \tilde{\beta}^{-q}) = (-1)^q k$. Agora,

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}^{-q} Z \tilde{\alpha}^q &= \tilde{\alpha}^{-q} w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m} \tilde{\alpha}^q \\
&= \tilde{\alpha}^{-q} w^m \tilde{\alpha}^q \tilde{\alpha}^{-q} v^n \tilde{\alpha}^q \tilde{\alpha}^{-q} B^k \tilde{\alpha}^q \tilde{\alpha}^{-q} v^{-n} \tilde{\alpha}^q \tilde{\alpha}^{-q} w^{-m} \tilde{\alpha}^q \\
&= w^m (w^{-q} v w^{-q})^n w^q B^k w^{-q} (w^{-q} v w^{-q})^{-n} w^{-m}.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}^{-q} Z \tilde{\alpha}^q) = k$. Também temos;

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^{-q} Z \tilde{\beta}^q &= \tilde{\beta}^{-q} w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m} \tilde{\beta}^q \\
&= \tilde{\beta}^{-q} w^m \tilde{\beta}^q \tilde{\beta}^{-q} v^n \tilde{\beta}^q \tilde{\beta}^{-q} B^k \tilde{\beta}^q \tilde{\beta}^{-q} v^{-n} \tilde{\beta}^q \tilde{\beta}^{-q} w^{-m} \tilde{\beta}^q \\
&= (v^q w^{(-1)^q m} v^{-q}) v^n v^q w^{(\frac{1+(-1)^{q+1}}{2})} B^{(-1)^q k} w^{-(\frac{1+(-1)^{q+1}}{2})} v^{-q} v^{-n} (v^q w^{(-1)^q - m} v^{-q}).
\end{aligned}$$

Portanto, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^{-q} Z \tilde{\beta}^q) = (-1)^q k$.

(2) Para fazer a demonstração deste item usaremos a tabela A.6.

Observemos que em todos os casos de, $\phi_p(1,\eta)$, temos $\tilde{c_0} B \tilde{c_0}^{-1} = B^\eta$. Logo, temos $\tilde{c_0} B^k \tilde{c_0}^{-1} = B^{\eta k}$. Tomando, $a = \frac{-1+\eta}{2}$, então obteremos $\tilde{c_0} w \tilde{c_0}^{-1} = v^a w^\eta v^{-a}$ e $\tilde{c_0} v \tilde{c_0}^{-1} = (w^p v)^\eta$, onde $p \in \{0, 1\}$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0} Z \tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0} w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m} \tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0} w^m \tilde{c_0}^{-1} \tilde{c_0} v^n \tilde{c_0}^{-1} \tilde{c_0} B^k \tilde{c_0}^{-1} \tilde{c_0} v^{-n} \tilde{c_0}^{-1} \tilde{c_0} w^{-m} \tilde{c_0}^{-1} \\
&= (v^a w^{\eta m} v^{-a})(w^p v)^{\eta n} B^{\eta k} (w^p v)^{-\eta n} (v^a w^{\eta m} v^{-a})^{-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{c_0} Z \tilde{c_0}^{-1}) = \eta k$. □

Demonstraremos agora algumas proposições que nos ajudarão a fazer alguns cálculos posteriormente.

Proposição 4.0.2. *Se, $B = w^{-1}v^{-1}w^{-1}v$, e $p(w,v)$ é uma palavra em w, v, então;*

i) Temos, $(p(w,v)B^{-1})^q = [\prod_{j=1}^{q} p(w,v)^j B^{-1} p(w,v)^{-j}]p(w,v)^q$, *para q inteiro positivo. Assim,* $(p(w,v)B^{-1})^q p(w,v)^{-q}$, *pertence a π_2. Além disso,* $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}((p(w,v)B^{-1})^q p(w,v)^{-q}) = -q$, *para q inteiro positivo.*

ii) Temos, $(Bp(w,v)^{-1})^q = p(w,v)^{-q}[\prod_{j=1}^{q} p(w,v)^{q-j+1} B p(w,v)^{-q+j-1}]$, *para q inteiro positivo. Portanto,* $p(w,v)^q(Bp(w,v)^{-1})^q$, *pertence a π_2. Além disso,* $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(p(w,v)^q(Bp(w,v)^{-1})^q) = q$, *para q inteiro positivo.*

iii) Temos, $\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1} = \prod_{j=1}^{2k}(v^{-2k+j}B^{-1}v^{2k-j}) = v^{-2k}(vB^{-1})^{2k} = v^{-2k}(wvw)^{2k}$, *para k inteiro positivo. Logo,* $\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1}$ *pertence a π_2. Além disso,* $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1}) = -2k$.

iv) Temos, $\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{-1} = \prod_{j=1}^{2k}(v^{2k-j+1}Bv^{-2k+j-1}) = v^{2k}(Bv^{-1})^{2k} = v^{2k}(wvw)^{-2k}$, *para k inteiro positivo. Assim,* $\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{-1}$ *pertence a π_2. Além disso,* $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}\ \tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{-1}) = 2k$, *para k inteiro positivo.*

Demonstração. $i)$ Primeiro, observemos que se, q, é um inteiro positivo então temos;

$$
\begin{aligned}
& (p(w,v)B^{-1})^q \\
= \ & \underbrace{p(w,v)B^{-1}p(w,v)B^{-1}\dots p(w,v)B^{-1}}_{q-vezes} \\
= \ & p(w,v)B^{-1}p(w,\ v)^{-1}p(w,v)^2B^{-1}p(w,v)^{-2}p(w,v)^3B^{-1}\dots p(w,v)^{-q+1} \\
& p(w,v)^qB^{-1}p(w,v)^{-q}p(w,v)^q \\
= \ & (p(w,v)B^{-1}p(w,v)^{-1})(p(w,v)^2B^{-1}p(w,v)^{-2})\dots(p(w,v)^qB^{-1}p(w,v)^{-q})p(w,v)^q \\
= \ & [\prod_{j=1}^{q}(p(w,v)^jB^{-1}p(w,v)^{-j})]p(w,v)^q.
\end{aligned}
$$

Portanto, obtemos $(p(w,v)B^{-1})^q p(w,v)^{-q} = \prod_{j=1}^{q}(p(w,v)^jB^{-1}p(w,v)^{-j})$. Assim, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}((p(w,v)B^{-1})^q p(w,v)^{-q}) = -q$.

$ii)$ Para demonstrarmos o item, $ii)$, procedemos de maneira análoga ao item $i)$.

iii) Faremos a demonstração usando indução. Da tabela 4.1 temos;

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\beta}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= (\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})B^{-1}\\
&= (\tilde{\beta}wBw^{-1}\tilde{\beta}^{-1})B^{-1}\\
&= (v^{-1}w^{-1}v\tilde{\beta}B\tilde{\beta}^{-1}v^{-1}wv)B^{-1}\\
&= (v^{-1}w^{-1}vv^{-1}wB^{-1}w^{-1}vv^{-1}wv)B^{-1}\\
&= (v^{-1}B^{-1}v)B^{-1}.
\end{aligned}$$

Também temos;

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^4\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-4}\tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\beta}^2\tilde{\beta}^2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^2(\tilde{\beta}^2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^2(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= (\tilde{\beta}^3\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-3})(\tilde{\beta}^2B^{-1}\tilde{\beta}^{-2})(\tilde{\beta}^2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1})\\
&= (\tilde{\beta}^3\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-3})(\tilde{\beta}^2B^{-1}\tilde{\beta}^{-2})(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})B^{-1}\\
&= (\tilde{\beta}^3wBw^{-1}\tilde{\beta}^{-3})(v^{-2}B^{-1}v^2)(v^{-1}B^{-1}v)B^{-1}\\
&= (v^{-3}w^{-1}v^3\tilde{\beta}^3B\tilde{\beta}^{-3}v^{-3}wv^3)(v^{-2}B^{-1}v^2)(v^{-1}B^{-1}v)B^{-1}\\
&= (v^{-3}w^{-1}v^3v^{-3}wB^{-1}w^{-1}v^3v^{-3}wv^3)(v^{-2}B^{-1}v^2)(v^{-1}B^{-1}v)B^{-1}\\
&= (v^{-3}B^{-1}v^3)(v^{-2}B^{-1}v^2)(v^{-1}B^{-1}v)B^{-1}.
\end{aligned}$$

Suponhamos, $\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1} = \prod_{j=1}^{k}(v^{-2(k-j)-1}B^{-1}v^{2(k-j)+1})(v^{-2(k-j)}B^{-1}v^{2(k-j)})$, para algum inteiro k positivo. Usando essa hipótese obteremos;

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^{2(k+1)}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2(k+1)}\tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\beta}^2\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^2(\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^2\prod_{j=1}^{k}(v^{-2(k-j)-1}B^{-1}v^{2(k-j)+1})(v^{-2(k-j)}B^{-1}v^{2(k-j)})\\
&\quad \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{\beta}^2 \prod_{j=1}^{k} (v^{-2(k-j)-1} B^{-1} v^{2(k-j)+1})(v^{-2(k-j)} B^{-1} v^{2(k-j)}) \tilde{\beta}^{-2} \\
&\quad \tilde{\beta}^2 \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^{-2} \tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \prod_{j=1}^{k} (v^{-2(k-j)-1} v^{-2} B^{-1} v^2 v^{2(k-j)+1})(v^{-2(k-j)} v^{-2} B^{-1} v^2 v^{2(k-j)}) \\
&\quad (v^{-1} B^{-1} v) B^{-1} \\
&= \prod_{j=1}^{k} (v^{-2(k+1-j)-1} B^{-1} v^{2(k+1-j)+1})(v^{-2(k+1-j)} B^{-1} v^{2(k+1-j)}) \\
&\quad (v^{-1} B^{-1} v) B^{-1} \\
&= \prod_{j=1}^{k+1} (v^{-2(k+1-j)-1} B^{-1} v^{2(k+1-j)+1})(v^{-2(k+1-j)} B^{-1} v^{2(k+1-j)}).
\end{aligned}
$$

Portanto, por indução, obtemos o resultado. Usando a proposição 4.0.1 obteremos; $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^{2k} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^{-2k} \tilde{\alpha}^{-1}) = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\prod_{j=1}^{k} (v^{-2(k-j)-1} B^{-1} v^{2(k-j)+1})(v^{-2(k-j)} B^{-1} v^{2(k-j)}))) = -2k.$

iv) Da tabela 4.1 temos;

$$
\begin{aligned}
\tilde{\beta}^{-2} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^2 \tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\beta}^{-2} \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \tilde{\alpha} \tilde{\alpha}^{-1} \tilde{\beta} \tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \tilde{\beta}^{-2} B \tilde{\beta}^2 \tilde{\beta}^{-1} \tilde{\alpha}^{-1} \tilde{\beta} \tilde{\alpha}^{-1} \\
&= (\tilde{\beta}^{-2} B \tilde{\beta}^2)(\tilde{\beta}^{-1} \tilde{\alpha}^{-1} B^{-1} \; \tilde{\alpha} \tilde{\beta}) \\
&= (v^2 B v^{-2})(\tilde{\beta}^{-1} w B^{-1} w^{-1} \tilde{\beta}) \\
&= (v^2 B v^{-2})(v w^{-1} v^{-1} \tilde{\beta}^{-1} B^{-1} \tilde{\beta} v w v^{-1}) \\
&= (v^2 B v^{-2})(v w^{-1} v^{-1} v w B w^{-1} v^{-1} v w v^{-1}) \\
&= (v^2 B v^{-2})(v B v^{-1}).
\end{aligned}
$$

Também temos;

$$
\begin{aligned}
\tilde{\beta}^{-4} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^4 \tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\beta}^{-2} (\tilde{\beta}^{-2} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^2 \tilde{\alpha}^{-1}) \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^2 \tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \tilde{\beta}^{-2} (\tilde{\beta}^{-2} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^2 \tilde{\alpha}^{-1}) \tilde{\beta}^2 (\tilde{\beta}^{-2} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^2 \tilde{\alpha}^{-1}) \\
&= \tilde{\beta}^{-2} (v^2 B v^{-2})(v B v^{-1}) \tilde{\beta}^2 (v^2 B v^{-2})(v B v^{-1}) \\
&= (v^2 \tilde{\beta}^{-2} B \tilde{\beta}^2 v^{-2})(v \tilde{\beta}^{-2} B \tilde{\beta}^2 v^{-1})(v^2 B v^{-2})(v B v^{-1}) \\
&= (v^2 v^2 B v^{-2} v^{-2})(v v^2 B v^{-2} v^{-1})(v^2 B v^{-2})(v B v^{-1}) \\
&= (v^4 B v^{-4})(v^3 B v^{-3})(v^2 B v^{-2})(v B v^{-1}).
\end{aligned}
$$

Assim, analogamente ao item anterior, podemos mostrar que; $\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{-1} = \prod_{j=1}^{k}(v^{2(k-j+1)}Bv^{-2(k-j+1)})(v^{2(k-j+1)-1}Bv^{-2(k-j+1)+1})$, para k inteiro positivo. Agora usando a proposição 4.0.1 obteremos; $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{-1}) = 2k$. $\square$

Corolário 4.0.2. *Para quaisquer, r e k, inteiros positivos temos;*

i) $\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{r}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-r} = v^{-2k}(w^{r}vw^{r})^{2k}$,

ii) $\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{r}\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{-r} = v^{2k}(w^{r}vw^{r})^{-2k}$.

Demonstração.

i) Da proposição anterior, obtemos o resultado para o caso $r = 1$. Suponha que o resultado seja válido para $r-1$. Desta hipótese obteríamos;

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{r}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-r} &= \tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{r-1}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-r+1}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= (\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1})\tilde{\alpha}(\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{r-1}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-r+1})\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{-2k}(wvw)^{2k}\tilde{\alpha}v^{-2k}(w^{r-1}vw^{r-1})^{2k}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{-2k}(wvw)^{2k}(wvw)^{-2k}(w^{r}vw^{r})^{2k}\\
&= v^{-2k}(w^{r}vw^{r})^{2k}.
\end{aligned}$$

Portanto, por indução obtemos o resultado. Para demonstrar o caso em que r é negativo basta usar o inverso do caso r positivo e as tabelas acima.

ii) A demonstração deste item é análoga ao anterior. $\square$

Proposição 4.0.3. *Dados, k e r, inteiros positivos, então obtemos;*

1) $[v^{2k}, w^{-1}] = \prod_{j=1}^{k}(v^{2(k-j+1)}Bv^{-2(k-j+1)})(v^{2(k-j+1)-1}wB^{-1}w^{-1}v^{-2(k-j+1)+1})$

2) $[v^{2k}, w] = \prod_{j=1}^{k}(v^{2(k-j)+1}w^{-1}vB^{-1}v^{-1}wv^{-2(k-j)-1})(v^{2(k-j)+1)-1}Bv^{-2(k-j)-1})$

3) $[v^{-2k}, w^{-1}] = \prod_{j=1}^{k}(v^{-2(k-j+1)+1}wBw^{-1}v^{2(k-j+1)-1})(v^{-2(k-j)}B^{-1}v^{2(k-j)})$

4) $[v^{-2k}, w] = \prod_{j=1}^{k}(v^{-2(k-j)-1}B^{-1}v^{2(k-j)+1})(v^{-2(k-j)}wBw^{-1}v^{2(k-j)})$

5) $[v^{2k}, w^{-r}] = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{k}(w^{-i+1}v^{2(k-j+1)}Bv^{-2(k-j+1)}w^{i-1})$
$(w^{-i+1}v^{2(k-j+1)-1}wB^{-1}w^{-1}v^{-2(k-j+1)+1}w^{i-1})$

6) $[v^{2k}, w^r] = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{k} (w^{i-1}v^{2(k-j)+1}w^{-1}vB^{-1}v^{-1}wv^{-2(k-j)-1}w^{1-i})$
$(w^{i-1}v^{2(k-j)+1}Bv^{-2(k-j)-1}w^{1-i})$

7) $[v^{-2k}, w^r] = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{k} (w^{i-1}v^{-2(k-j)-1}B^{-1}v^{2(k-j)-1}w^{1-i})$
$(w^{i-1}v^{-2(k-j)}wBw^{-1}v^{2(k-j)}w^{1-i})$

8) $[v^{-2k}, w^{-r}] = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{k} (w^{1-i}v^{-2(k-j)-1}wBw^{-1}v^{2(k-j)-1}w^{i-1})$
$(w^{1-i}v^{-2(k-j)}B^{-1}v^{2(k-j)}w^{i-1})$

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para o item 1). A demonstração dos outros itens são feitas de maneira análoga.

1) Para $k = 1$ temos;

$$\begin{aligned}
[v^2, w^{-1}] &= v^2w^{-1}v^{-2}w = v^2w^{-1}v^{-1}w^{-1}wv^{-1}w \\
&= v^2(w^{-1}v^{-1}w^{-1}v)v^{-1}wv^{-1}w \\
&= v^2Bv^{-1}wv^{-1}w = (v^2Bv^{-2})vwv^{-1}w \\
&= (v^2Bv^{-2})vw(v^{-1}wvw)w^{-1}v^{-1}w^{-1}w \\
&= (v^2Bv^{-2})(vwB^{-1}w^{-1}v^{-1}).
\end{aligned}$$

Agora, suponha que o resultado seja válido para algum inteiro positivo k. Assim, obteremos

$$\begin{aligned}
[v^{2(k+1)}, w^{-1}] &= v^2v^kw^{-1}v^{-k}v^{-2}w = v^2(v^kw^{-1}v^{-k}w)w^{-1}v^{-2}w \\
&= v^2[v^k, w^{-1}]v^{-2}v^2w^{-1}v^{-2}w \\
&= v^2[v^k, w^{-1}]v^{-2}[v^2, w^{-1}] \\
&= v^2\prod_{j=1}^{k}(v^{2(k-j+1)}Bv^{-2(k-j+1)})(v^{2(k-j+1)-1}wB^{-1}w^{-1}v^{-2(k-j+1)+1}) \\
&\quad v^{-2}[v^2, w^{-1}] \\
&= [\prod_{j=1}^{k} v^2(v^{2(k-j+1)}Bv^{-2(k-j+1)})v^{-2} \\
&\quad v^2(v^{2(k-j+1)-1}wB^{-1}w^{-1}v^{-2(k-j+1)+1})v^{-2}](v^2Bv^{-2})(vwB^{-1}w^{-1}v^{-1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [\prod_{j=1}^{k}(v^{2(k+1-j+1)}Bv^{-2(k+1-j+1)}) \\
&\quad (v^{2(k+1-j+1)-1}wB^{-1}w^{-1}v^{-2(k+1-j+1)+1})](v^2Bv^{-2})(vwB^{-1}w^{-1}v^{-1}) \\
&= \prod_{j=1}^{k+1}(v^{2(k+1-j+1)}Bv^{-2(k+1-j+1)}) \\
&\quad (v^{2(k+1-j+1)-1}wB^{-1}w^{-1}v^{-2(k+1-j+1)+1}).
\end{aligned}
$$

Portanto, por indução obtemos o resultado. □

Proposição 4.0.4. *Se t é ímpar então, $w^{-1}v^{-t}w^{-1}v^t$, pertence a π_2 e $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(w^{-1}v^{-t}w^{-1}v^t) = 1$.*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração apenas para o caso em que t é positivo, o caso em que t é negativo é análogo. Suponhamos $t = 2l + 1$, onde l é positivo. Primeiro, observemos que, $B = w^{-1}v^{-1}w^{-1}v$. Logo, o resultado é válido para $t = 1$. Suponhamos que o resultado seja válido para algum t. Disso obteremos;

$$
\begin{aligned}
w^{-1}v^{-t-2}w^{-1}v^{t+2} &= w^{-1}v^{-t}v^{-2}w^{-1}v^2v^t \\
&= w^{-1}v^{-t}(v^{-2}w^{-1}v^2w)w^{-1}v^t \\
&= (w^{-1}v^{-t}[v^{-2}, w^{-1}]v^tw)(w^{-1}v^{-t}w^{-1}v^t).
\end{aligned}
$$

Sabemos que $[v^{-2}, w^{-1}]$ pertence a π_2 e $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}([v^{-2}, w^{-1}]) = 0$. Assim, da igualdade acima, obtemos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(w^{-1}v^{-t-2}w^{-1}v^{t+2}) = 1$. Portanto, por indução, o resultado segue. □

Proposição 4.0.5. *Se, $r \in \mathbb{Z}$ e $r > 0$, então temos;*

i) $vw^{-r}v^{-1}w^{-r} = \prod_{j=1}^{r} w^{j-1}vBv^{-1}w^{1-j}$,

ii) $v^{-1}w^{-r}vw^{-r} = \prod_{j=1}^{r} w^jBw^{-j}$,

iii) $v^{-1}w^rvw^r = \prod_{j=1}^{r} w^{1-j}B^{-1}w^{j-1}$,

iv) $vw^rv^{-1}w^r = \prod_{j=1}^{r} w^{-j}vBv^{-1}w^j$.

Demonstração. $i)$ Para $r=1$ temos, $vw^{-1}v^{-1}w^{-1}=v(w^{-1}v^{-1}w^{-1}v)v^{-1}=vBv^{-1}$. Logo, a igualdade é satisfeita. Supondo que a igualdade é válida para algum $r>0$, então obteremos; $vw^{-r-1}v^{-1}w^{-r-1}=v(w^{-1}v^{-1}w^{-1}v)v^{-1}w(vw^{-r}v^{-1}w^{-r})w^{-1}=(vBv^{-1})\prod_{j=1}^{r}w^{j}vBv^{-1}w^{-j}=\prod_{j=1}^{r+1}w^{j-1}vBv^{-1}w^{1-j}$. A demonstração dos outros itens é análoga. $\square$

Proposição 4.0.6. *Se, $B=w^{-1}v^{-1}w^{-1}v$, e n,q são inteiros positivos com $n>0$, então;*

$$\begin{aligned} i)\quad (w^{n}vw^{n})^{q} &= [\prod_{j=1}^{q}(v^{j}B^{-1}v^{-j})(\prod_{i=1}^{n-1}v^{j}w^{-i}B^{-1}w^{i}v^{-j})]v^{q},\\ ii)\quad (w^{n}vw^{n})^{-q} &= v^{-q}[\prod_{j=1}^{q}(\prod_{i=1}^{n-1}v^{q+1-j}w^{-n+i}Bw^{n-i}v^{j-q-1})(v^{q-j+1}Bv^{-q+j-1})]. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}([(w^{n}vw^{n})^{q}]v^{-q})=-qn$ e $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(v^{q}[(w^{n}vw^{n})^{-q}])=qn$.

Demonstração. Primeiramente, observemos que $wvw=vB^{-1}$. Também temos $w^{2}vw^{2}=wvww^{-1}(v^{-1}wvw)w=(vB^{-1})w^{-1}B^{-1}w$. Suponha que $w^{n}vw^{n}=(vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1}w^{-i}B^{-1}w^{i})$. Temos; $w^{n+1}vw^{n+1}=(w^{n}vw^{n})\ w^{-n}v^{-1}wvww^{n}=(w^{n}vw^{n})(w^{-n}B^{-1}w^{n})=(vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1}w^{-i}B^{-1}w^{i})(w^{-n}B^{-1}w^{n})=(vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n}w^{-i}B^{-1}w^{i})$. Portanto, por indução obtemos $w^{n}vw^{n}=(vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1}w^{-i}B^{-1}w^{i})$ para todo inteiro positivo n.

$i)$ Observemos que, $(w^{n}vw^{n})^{q}=((vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1}w^{-i}B^{-1}w^{i}))^{q}$. Assim,

$$\begin{aligned} (w^{n}vw^{n})^{q} &= \underbrace{(vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1}w^{-i}B^{-1}w^{i})\dots(vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1}w^{-i}B^{-1}w^{i})}_{q-vezes}\\ &= [(vB^{-1}v^{-1})(v(\prod_{i=1}^{n-1}w^{-i}B^{-1}w^{i})v^{-1})(v^{2}B^{-1}v^{-2})(v^{2}(\prod_{i=1}^{n-1}w^{-i}B^{-1}w^{i})v^{-2})\\ &\quad \dots(v^{q}B^{-1}v^{-q})(v^{q}(\prod_{i=1}^{n-1}w^{-i}B^{-1}w^{i})v^{-q})]v^{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(vB^{-1}v^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1} vw^{-i}B^{-1}w^{i}v^{-1})(v^{2}B^{-1}v^{-2})(\prod_{i=1}^{n-1} v^{2}w^{-i}B^{-1}w^{i}v^{-2}) \\
&\quad \dots (v^{q}B^{-1}v^{-q})(\prod_{i=1}^{n-1} v^{q}w^{-i}B^{-1}w^{i}v^{-q})]v^{q} \\
&= [\prod_{j=1}^{q}(v^{j}B^{-1}v^{-j})(\prod_{i=1}^{n-1} v^{j}w^{-i}B^{-1}w^{i}v^{-j})]v^{q}.
\end{aligned}$$

ii) Note que, $(w^n v w^n)^{-q} = ((vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-i}B^{-1}w^{i}))^{-q} = ((\prod_{i=1}^{n-1} w^{-n+i}Bw^{n-i})(Bv^{-1}))^{q}$. Logo,

$$\begin{aligned}
(w^n v w^n)^{-q} &= \underbrace{(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-n+i}Bw^{n-i})(Bv^{-1})\dots(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-n+i}Bw^{n-i})(Bv^{-1})}_{q-vezes} \\
&= v^{-q}[(v^{q}(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-n+i}Bw^{n-i})v^{-q})(v^{q}Bv^{-q}) \\
&\quad (v^{q-1}(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-n+i}Bw^{n-i})v^{-q+1})(v^{q-1}Bv^{-q+1})\dots \\
&\quad (v(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-n+i}Bw^{n-i})v^{-1})(vBv^{-1})] \\
&= v^{-q}[(\prod_{i=1}^{n-1} v^{q}w^{-n+i}Bw^{n-i}v^{-q})(v^{q}Bv^{-q}) \\
&\quad (\prod_{i=1}^{n-1} v^{q-1}w^{-n+i}Bw^{n-i}v^{-q+1})(v^{q-1}Bv^{-q+1})\dots \\
&\quad (\prod_{i=1}^{n-1} vw^{-n+i}Bw^{n-i}v^{-1}))(vBv^{-1})] \\
&= v^{-q}[\prod_{j=1}^{q}(\prod_{i=1}^{n-1} v^{q+1-j}w^{-n+i}Bw^{n-i}v^{j-q-1})(v^{j}Bv^{-j})].
\end{aligned}$$

Portanto, dos resultados acima obtemos; $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}([(w^n v w^n)^q]v^{-q}) = q(-1-n+1) = -qn$ e $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(v^q[(w^n v w^n)^{-q}]) = q(n-1+1) = qn$. $\square$

Proposição 4.0.7. *Se t é ímpar, então $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t} = (wvw)^{-t}v^t$. Dessa igualdade obtemos; $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}) = t$.*

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para o caso t positivo. O caso em que t é negativo é análogo. Temos; $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} = B = w^{-1}v^{-1}w^{-1}v = (wvw)^{-1}v$.

Assim, para $t = 1$ o resultado é válido. Supondo que o resultado seja válido para $t-2$, obtemos;

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t} &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^2\tilde{\beta}^{t-2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t+2}\tilde{\beta}^{-2} \\
&= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^2\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{-2})\tilde{\beta}^2(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t-2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t+2})\tilde{\beta}^{-2} \\
&= B(v^{-1}Bv)\tilde{\beta}^2(wvw)^{-t+2}v^{t-2}\tilde{\beta}^{-2} \\
&= B(v^{-1}Bv)v^{-2}(wvw)^{-t+2}v^2v^{t-2} \\
&= Bv^{-1}Bv^{-1}(wvw)^{-t+2}v^t \\
&= (vB^{-1})^{-1}(vB^{-1})^{-1}(wvw)^{-t+2}v^t \\
&= (wvw)^{-1}(wvw)^{-1}(wvw)^{-t+2}v^t \\
&= (wvw)^{-t}v^t.
\end{aligned}$$

Logo, por indução, o resultado segue. Da proposição anterior temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}) = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(v^{-t}[v^t(wvw)^{-t}]v^t) = t$. □

Corolário 4.0.3. *Para quaisquer inteiros, r, e t ímpar, temos;* $\tilde{\alpha}^r\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^r\tilde{\beta}^{-t} = (w^rvw^r)^{-t}v^t$. *Portanto,* $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}^r\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^r\tilde{\beta}^{-t}) = rt$.

Demonstração. Faremos a demonstação apenas para o caso em que r é positivo. Para o caso em que r é negativo basta usar o inverso do resultado demonstrado, para o caso positivo, e as tabelas acima. Pela proposição anterior, o resultado é válido para $r = 1$. Supondo que o resultado seja válido para $r-1$, obteremos;

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}^r\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^r\tilde{\beta}^{-t} &= \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}^{r-1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r-1}\tilde{\beta}^{-t})\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t} \\
&= \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}^{r-1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r-1}\tilde{\beta}^{-t})\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}) \\
&= \tilde{\alpha}(w^{r-1}vw^{r-1})^{-t}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}v^t\tilde{\alpha}^{-1}(wvw)^{-t}v^t \\
&= (w^rvw^r)^{-t}(wvw)^t(wvw)^{-t}v^t \\
&= (w^rvw^r)^{-t}v^t.
\end{aligned}$$

Portanto, por indução matemática, o resultado segue. Além disso, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}^r\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^r\tilde{\beta}^{-t}) = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(v^{-t}[v^t(w^rvw^r)^{-t}]v^t) = rt$. □

4.1 Deformando o par (f_1, f_2) a um par livre de coincidências

Nesta seção demonstraremos o teorema principal deste capítulo, teorema 4.1.1, enunciado abaixo. Esse teorema classifica todos os pares de aplicações, dadas pelo corolário 4.0.1, que podem ser deformados, sobre S^1, a um par de aplicação livre de coincidências.

Teorema 4.1.1. *Seja $M(\phi)$ um fibrado com base S^1 e fibra K. Dadas aplicações que preservam fibra, $f_1, f_2 : M(\phi) \to M(\phi)$, de tal modo que o par de homomorfismos induzidos, $(f_{1\#}, f_{2\#})$, sejam igual a um dos pares de homomorfismos dados pelo corolário 4.0.1. Então podemos deformar o par, (f_1, f_2), por uma homotopia que preserva fibra, a um par livre de coincidências se, e somente se, o par de homomorfismos induzidos for igual a um dos pares de homomorfismos dados pelas tabelas abaixo.*

Caso $T.1$, ou seja, $t_1 = t_2 = 2l + 1$.

Caso I	$(f_1(s_1, r_1, 2l+1, 0, 2k), f_2(s_2, r_2, 2l+1, 0, 2k))$
$\phi_0(1,1)$	$s_i, r_i, k, k_i, l \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$.
Caso II	$(f_1(s_1, 2c_{11}+1, 2l+1, c_{11}, 2k), f_2(s_2, 2c_{12}+1, 2l+1, c_{12}, 2k))$
$\phi_1(1,1)$	$s_i, c_{1i}, k, l \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$.
Caso III	$(f_1(2s_1, r, 2l+1, 0, 4k_1), f_2(2s_2+1, r, 2l+1, 0, 4k_2))$
	$(f_1(2s_1, r, 2l+1, 0, 4k_1), f_2(2s_2+1, -r, 2l+1, 0, 4k_2+2))$
	$(f_1(2s_1, r_1, 2l+1, 0, 4k_1), f_2(s_2, 0, 2l+1, s_2, 2k_2+1))$
	$(f_1(2s_1, -r_1, 2l+1, 0, 4k_1+2), f_2(s_2, 0, 2l+1, s_2, 2k_2+1))$
	$(f_1(2s_1, r, 2l+1, 0, 4k_1+2), f_2(2s_2+1, r, 2l+1, 0, 4k_2+2))$
	$(f_1(2s_1+1, r, 2l+1, 0, 2k_1), f_2(s_2, 0, 2l+1, s_2, 2k_2+1))$
$\phi_0(1,-1)$	$s_i, r, r_1 > 0, k, l \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$.
Caso IV	$(f_1(2s_1, 2c_{11}+1, 2l+1, c_{11}, 4k_1), f_2(2s_2, 2c_{12}+1, 2l+1, c_{12}, 4k_2))$, se $c_{11} - c_{12} = 2r+1$.
	$(f_1(2s_1, 2c_{11}+1, 2l+1, c_{11}, 4k_1+2), f_2(2s_2, 2c_{12}+1, 2l+1, c_{12}, 4k_2+2))$, se $c_{11} - c_{12} = 2r+1$.
	$(f_1(2s_1, 2c_{11}+1, 2l+1, c_{11}, 4k_1+2), f_2(2s_2, 2c_{12}+1, 2l+1, c_{12}, 4k_2))$, se $c_{11} - c_{12} = 2r$.
	$(f_1(2s_1, 2c_{11}+1, 2l+1, c_{11}, 4k_1), f_2(2s_2+1, 2c_{12}+1, 2l+1, c_{12}, 4k_2))$, se $c_{11} - c_{12} = 2r$.
	$(f_1(2s_1, 2c_{11}+1, 2l+1, c_{11}, 4k_1+2), f_2(2s_2+1, 2c_{12}+1, 2l+1, c_{12}, 4k_2+2))$, se $c_{11} - c_{12} = 2r$.
	$(f_1(2s_1, 2c_{11}+1, 2l+1, c_{11}, 4k_1), f_2(2s_2+1, 2c_{12}+1, 2l+1, c_{12}, 4k_2+2))$, se $c_{11} - c_{12} = 2r+1$.
	$(f_1(2s_1, 2c_{11}+1, 2l+1, c_{11}, 4k_1+2), f_2(2s_2+1, 2c_{12}+1, 2l+1, c_{12}, 4k_2))$, se $c_{11} - c_{12} = 2r+1$.
	$(f_1(2s_1+1, 2c_{11}+1, 2l+1, c_{11}, 4k_1), f_2(2s_2+1, 2c_{12}+1, 2l+1, c_{12}, 4k_2))$, se $c_{11} - c_{12} = 2r+1$.
	$(f_1(2s_1+1, 2c_{11}+1, 2l+1, c_{11}, 4k_1+2), f_2(2s_2+1, 2c_{12}+1, 2l+1, c_{12}, 4k_2+2))$,
	se $c_{11} - c_{12} = 2r+1$.
	$(f_1(2s_1+1, 2c_{11}+1, 2l+1, c_{11}, 4k_1), f_2(2s_2+1, 2c_{12}+1, 2l+1, c_{12}, 4k_2+2))$, se $c_{11} - c_{12} = 2r$.
$\phi_1(1,-1)$	$s_i, c_{1i}, k_i, l, k \in \mathbb{Z}$, $i \in= 1, 2$.

Caso $T.2$, isto é, $r_1 = r_2 = 0$.

Caso I	$(f_1(2s_1, 0, 2l_1+1, 0, 2k_1), f_2(2s_2, 0, 2l_2+1, 0, 2k_2))$ se $l_2 - l_1$ dividir $k_2 - k_1$.
	$(f_1(2s_1, 0, 2l_1+1, 0, 2k_1), f_2(2s_2+1, 0, 2l_2+1, 0, 2k_2))$
	$(f_1(2s_1+1, 0, 2l_1+1, 0, 2s), f_2(2s_2+1, 0, 2l_2+1, 0, 2s))$
	$(f_1(2s_1, 0, 2l_1+1, 2s_1, 2k_1+1), f_2(2s_2+1, 0, 2l_2+1, 0, 2k_2))$
	$(f_1(2s_1, 0, 2l_1+1, 2s_1, 2k_1+1), f_2(2s_2, 0, 2l_2+1, 2s_2, 2k_2+1))$ se tivermos
	$l_2 - l_1 = 2^m l$ $k_2 - k_1 = 2^m k$ onde k e l são ímpares k divide l ou l divide k .
	$(f_1(2s_1, 0, 2l_1+1, 2s_1, 2k_1+1), f_2(2s_2+1, 0, 2l_2+1, 2s_1+1, 2k_2+1))$
	$(f_1(2s_1+1, 0, 2l_1+1, 2s_1+1, 2k_1+1), f_2(2s_2+1, 0, 2l_2+1, 2s_1+1, 2k_2+1))$
	se $k_2 - k_1 = l_2 - l_1$.
$\phi_0(1,1)$	s, s_i, l_i e $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$.
Caso III	$(f_1(2s_1, 0, 2l_1+1, 0, 2k_1), f_2(2s_2+1, 0, 2l_2+1, 0, 2k_2))$
	$(f_1(s_1, 0, 2l_1+1, 0, 2k_1), f_2(s_2, 0, 2l_2+1, s_2, 2k_2+1))$
	$(f_1(2s_1, 0, 2l_1+1, 2s_1, 2k_1+1), f_2(2s_2+1, 0, 2l_2+1, 2s_2+1, 2k_2+1))$
$\phi_0(1,-1)$	$s_i, l_i, k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$.

Demonstração.

Para demonstrar o teorema 4.1.1 usamos as seguintes técnicas: abelianizar o sistema de equações, (I), e ver se nessa situação o sistema possui ou não uma solução. Se o sistema de equações abelianizado não possuir solução então acabamos, caso contrário tentaremos achar uma solução para o sistema original. Começaremos com o caso $T.2$.

Caso $T.2$.

$I)$ $\phi_0(1,1)$.

No caso I temos as possíveis situações para os pares de homomorfismos $(f_{1\#}, f_{2\#})$:

$I.1$, $(f_1(s_1, 0, 2l_1+1, 0, 2k_1), f_2(s_2, 0, 2l_2+1, 0, 2k_2))$

$I.2$, $(f_1(s_1, 0, 2l_1+1, 0, 2k_1), f_2(s_2, 0, 2l_2+1, s_2, 2k_2+1))$

$I.3$, $(f_1(s_1, 0, 2l_1+1, s_1, 2k_1+1), f_2(s_2, 0, 2l_2+1, 0, 2k_2))$

$I.4$, $(f_1(s_1, 0, 2l_1+1, s_1, 2k_1+1), f_2(s_2, 0, 2l_2+1, s_2, 2k_2+1))$,

onde $s_i \in \{0, 1\}$ e $l_i, k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$.

Caso $I.1$ com $s_1 = s_2 = 0$.

Neste caso podemos tomar; $A = 1$, $F = w^{-1}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}c_0$.

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}w^{-1}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}w \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}w^{-1}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}w \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}w^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w \\
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}}v^{-c_{22}}w \\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}-c_{22}}w \\
&= [v^{c_{22}-c_{21}}, w^{-1}].
\end{aligned}$$

Portanto, se $c_{22} - c_{21} = 0$, então o sistema terá solução trivial. Agora, analisaremos o caso $c_{22} - c_{21} \neq 0$.

Afirmação 4.1.1. *Como $c_{22}-c_{21}$ e t_2-t_1 são pares, então podemos escrever $c_{22}-c_{21} = 2^n k$ e $t_2-t_1 = 2^m l$, onde k e l são ímpares. Se $m \geq n$ então o sistema não tem solução. Agora se $m < n$ então o sistema terá solução apenas quando l dividir k. Se tivermos $t_2 - t_1 = 0$, então o sistema não terá solução.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente, $c_{22} - c_{21} > 0$. Podemos escrever $c_{22} - c_{21} = 2^n k$, onde k é ímpar e positivo. Pelos resultados anteriores obtemos $\mathcal{A}([v^{c_{22}-c_{21}}, w^{-1}]) = \sum_{j=1}^{2^{n-1}k} \bar{v}^{2(2^{n-1}k-j+1)} - \bar{v}^{2(2^{n-1}k-j+1)-1}\bar{w} = \sum_{j=1}^{2^{n-1}k} \bar{v}^{2j} - \bar{v}^{2j-1}\bar{w}$. Temos;

$$\begin{aligned}
CZ_2C^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}c_0(\prod_i w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i})\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}(\prod_i w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i})v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}} \\
&= \prod_i v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}} \\
&= \prod_i v^{c_{22}}v^{-c_{21}}w^{m_i}v^{c_{21}}v^{n_i}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{t_2^i}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-n_i}v^{-c_{21}}w^{-m_i}v^{c_{21}}v^{-c_{22}} \\
&= \prod_i v^{c_{22}-c_{21}}w^{m_i}v^{c_{21}}v^{n_i}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{t_2^i}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-n_i}v^{-c_{21}}w^{-m_i}v^{c_{21}-c_{22}} \\
&= \prod_i v^{c_{22}-c_{21}}w^{m_i}v^{c_{21}}v^{n_i}v^{-c_{21}}B^{t_2^i}v^{c_{21}}v^{-n_i}v^{-c_{21}}w^{-m_i}v^{c_{21}-c_{22}} \\
&= \prod_i v^{c_{22}-c_{21}}w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i}v^{c_{21}-c_{22}}.
\end{aligned}$$

Logo, obteremos; $\mathcal{A}(CZ_2C^{-1}) = \sum_i t_2^i \bar{v}^{c_{22}-c_{21}} \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i} = \sum_i t_2^i \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i + c_{22} - c_{21}}$. Note que,

$$\begin{aligned}
FZ_3^{-1}F^{-1} &= w^{-1}\tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} (\prod_i w^{x_i} v^{y_i} B^{-t_3^i} v^{-y_i} w^{-x_i}) v^{-t_2} \tilde{\beta}^{-t_1} w \\
&= \prod_i w^{-1} v^{t_2} \tilde{\beta}^{t_1} w^{x_i} v^{y_i} B^{-t_3^i} v^{-y_i} w^{-x_i} \tilde{\beta}^{-t_1} v^{-t_2} w \\
&= \prod_i w^{-1} v^{t_2} v^{-t_1} w^{-x_i} v^{t_1} v^{y_i} \tilde{\beta}^{t_1} B^{-t_3^i} \tilde{\beta}^{-t_1} v^{-y_i} v^{-t_1} w^{x_i} v^{t_1} v^{-t_2} w \\
&= \prod_i w^{-1} v^{t_2 - t_1} w^{-x_i} v^{t_1} v^{y_i} v^{-t_1} w B^{t_3^i} w^{-1} v^{t_1} v^{-y_i} v^{-t_1} w^{x_i} v^{t_1 - t_2} w \\
&= \prod_i w^{-1} v^{t_2 - t_1} w^{-x_i} v^{y_i} w B^{t_3^i} w^{-1} v^{-y_i} w^{x_i} v^{t_1 - t_2} w.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{A}(FZ_3^{-1}F^{-1}) = \sum_i t_3^i \bar{w}^{-1} \bar{v}^{t_2 - t_1} \bar{w}^{-x_i} \bar{v}^{y_i} \bar{w} = \sum_i t_3^i \bar{w}^{-x_i - 1 + (-1)^{y_i}} \bar{v}^{y_i + t_2 - t_1}$. Como $Z_2 = \prod_i w^{m_i} v^{n_i} B^{t_2^i} v^{-n_i} w^{-m_i}$ e $Z_3 = \prod_i w^{x_i} v^{y_i} B^{t_3^i} v^{-y_i} w^{-x_i}$, então obtemos; $\mathcal{A}(Z_2) = \sum_i t_2^i \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i}$ e $\mathcal{A}(Z_3) = \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i} \bar{v}^{y_i}$.

Agora, aplicando o homomorfismo abelianização, $\mathcal{A}$, na terceira equação do sistema obteremos;

$$\begin{cases} \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i} \bar{v}^{y_i} + \sum_i t_3^i \bar{w}^{-x_i - 1 + (-1)^{y_i}} \bar{v}^{y_i + t_2 - t_1} + \sum_i t_2^i \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i + c_{22} - c_{21}} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i} + \\ \sum_{j=1}^{2^{n-1}k} \bar{v}^{2j} - \bar{v}^{2j-1} \bar{w} = 0. \end{cases}$$

Suponhamos $m \geq n$, e consideremos H o subanel de $\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ gerado pelo elemento $\bar{v}^{2^n}$. Projetanto a equação acima no subanel H obteremos;

$$\begin{cases} \sum_{\substack{i|x_i=0,\\ y_i=2^n j_i}} t_3^i \bar{v}^{y_i} + \sum_{\substack{i|x_i=0,\\ y_i=2^n j_i}} t_3^i \bar{v}^{y_i + 2^m l} + \sum_{\substack{i|m_i=0,\\ n_i=2^n \bar{j}_i}} t_2^i \bar{v}^{n_i + 2^n k} + \sum_{\substack{i|m_i=0,\\ n_i=2^n \bar{j}_i}} -t_2^i \bar{v}^{n_i} + \sum_{\substack{j=1,\\ j=2^{n-1}k'}}^{2^{n-1}k} \bar{v}^{2j} = 0. \end{cases}$$

onde $j_i, \bar{j}_i \in \mathbb{Z}$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E} : H \to \mathbb{Z}$ na equação acima obteremos; $2\Bigg(\sum_{\substack{i|x_i=0,\\ y_i=2^n j_i}} t_3^i \Bigg) + k = 0$. Mas isso é um absurdo, pois k é ímpar. Portanto, se $m \geq n$, então o sistema não possui solução.

Agora, suponha $m < n$. Temos; $c_{22} - c_{21} = 2^n k$ e $t_2 - t_1 = 2^m l$. Se $k = sl$, então

$$Z_1 = Z_2 = 1 \ e \ Z_3 = \prod_{j=1}^{2^{n-m}s-1} [w^{-1}, v^{2^m l j}]^{(-1)^{j+1}}$$

é uma solução para o sistema. Para ver que Z_1, Z_2 e Z_3 dados satisfazem as equações do sistema, usaremos as seguintes igualdades: $F[v^x, w^{-1}]F^{-1} = [w^{-1}, v^{t_2-t_1+x}][v^{t_2-t_1}, w^{-1}]$ e $F[w^{-1}, v^y]F^{-1} = [w^{-1}, v^{t_2-t_1}][v^{t_2-t_1+y}, w^{-1}]$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$. Como $Z_1 = 1$, então as duas primeiras equações do sistema são automaticamente satisfeitas. Como $Z_2 = 1$, então para ver a veracidade da terceira equação devemos calcular $Z_3(CFC^{-1}F^{-1})(FZ_3^{-1}F^{-1})$. Temos;

$$\begin{aligned}
Z_3(CFC^{-1}F^{-1})(FZ_3^{-1}F^{-1}) &= \prod_{j=1}^{2^{n-m}s-1} [w^{-1}, v^{2^m lj}]^{(-1)^{j+1}} [v^{2^n k}, w^{-1}] \\
&\quad F \prod_{j=1}^{2^{n-m}s-1} [v^{2^n k - 2^m lj}, w^{-1}]^{(-1)^{j+1}} F^{-1} \\
&= \prod_{j=1}^{2^{n-m}s-1} [w^{-1}, v^{2^m lj}]^{(-1)^{j+1}} [v^{2^n k}, w^{-1}] \\
&\quad [w^{-1}, v^{2^n k}][v^{2^m}, w^{-1}][w^{-1}, v^{2^m}][v^{2^n k - 2^m l}, w^{-1}] \cdots \\
&= \prod_{j=1}^{2^{n-m}s-1} [w^{-1}, v^{2^m lj}]^{(-1)^{j+1}} [v^{2^n k}, w^{-1}] \\
&\quad [w^{-1}, v^{2^n k}] \prod_{j=1}^{2^{n-m}s-1} [v^{2^n k - 2^m lj}, w^{-1}]^{(-1)^{j+1}} \\
&= Z_3 Z_3^{-1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto, Z_1, Z_2 e Z_3 dados acima é uma solução para o sistema.

Suponhams agora, que l não divide k. Mostraremos que nessa condição o sistema não possui solução. Suponha por contradição que o sistema tenha solução. Como anteriormente, olhando o sistema abelianizado temos a seguinte equação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i} \bar{v}^{y_i} + \sum_i t_3^i \bar{w}^{-x_i-1+(-1)^{y_i}} \bar{v}^{y_i+t_2-t_1} + \sum_i t_2^i \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i+c_{22}-c_{21}} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i} + \\ \sum_{j=1}^{2^{n-1}k} \bar{v}^{2j} - \bar{v}^{2j-1} \bar{w} = 0. \end{array} \right.$$

Projetando essa equação no subanel H gerado pelos elementos da forma $\bar{v}^{2j}$ obteremos;

$$\left\{ \sum_{\substack{i|x_i=0,\\ y_i=2j_i}} t_3^i \bar{v}^{y_i} + \sum_{\substack{i|x_i=0,\\ y_i=2j_i}} t_3^i \bar{v}^{y_i+2^m l} + \sum_{\substack{i|m_i=0,\\ n_i=2\bar{j}_i}} t_2^i \bar{v}^{n_i+2^n k} + \sum_{\substack{i|m_i=0,\\ n_i=2\bar{j}_i}} -t_2^i \bar{v}^{n_i} + \sum_{j=1}^{2^{n-1}k} \bar{v}^{2j} = 0, \right.$$

onde $j_i, \bar{j}_i \in \mathbb{Z}$, ou seja, temos a seguinte equação:

$$\left(\sum_{i|x_i=0} t_3^i \bar{v}^{2j_i}\right)(1+\bar{v}^{2^m l}) - \left(\sum_{i|m_i=0} t_2^i \bar{v}^{2\bar{j}_i}\right)(1-\bar{v}^{2^n k}) + \sum_{j=1}^{2^{n-1}k} \bar{v}^{2j} = 0,$$

onde $j_i, \bar{j}_i \in \mathbb{Z}$. Note que aplicando o homomorfismo, $\mathcal{E}$, nessa equação obteremos; $2\left(\sum_{i|x_i=0} t_3^i\right)+2^{n-1}k = 0$. Seja G o anel quociente de H pelo ideal $(1+\bar{v}^{2^m l})H$. Projetando a equação anterior em G obteremos;

$$\left(\sum_{i|m_i=0} t_2^i \bar{v}^{2\bar{j}_i}\right)(\bar{v}^{2^n k}-1) - \sum_{j=1}^{2^{n-1}k} \bar{v}^{2j} = 0.$$

Note que associando o elemento $\bar{v}$ a variável x então o anel H pode ser associado ao subanel dos polinômios de Laurent gerado apenas pelas potências pares. Mostraremos, usando a afirmação a seguir, que $\sum_{j=1}^{2^{n-1}k} \bar{v}^{2j}$ é diferente de zero em G.

Afirmação 4.1.2. *Se $p(x) = 1 + x^{2^m l}$ e $q(x) = \sum_{j=1}^{2^{n-1}k} x^{2j}$ polinômios com l, k ímpares, l não divide k, e $m < n$, então $p(x)$ não divide $q(x)$.*

Demonstração. Se $2^m l > 2^n k$, então $p(x)$ não divide $q(x)$. Agora, suporemos, $2^m l < 2^n k$. Assim, podemos escrever, $2^n k = s2^m l + r$, com $2 \leq r < 2^m l$. Note que podemos escrever, $q(x)$, da seguinte forma:

$$q(x) = \begin{cases} x^2 & + & x^4 & + & \cdots & + & x^{2^m l} & + \\ x^{2^m l+2} & + & x^{2^m l+4} & + & \cdots & + & x^{2^m l.2} & + \\ & & \vdots & & & & & \\ x^{2^m l.(s-1)+2} & + & x^{2^m l.(s-1)+4} & + & \cdots & + & x^{2^m l.s} & + \\ x^{2^m l.s+2} & + & x^{2^m l+4} & + & \cdots & +x^{2^m l.s+r}. & & \end{cases}$$

Observemos que, adicionando a primeira linha com segunda, então teremos um polinômio múltiplo de $p(x)$, e dessa forma continuamos o processo. Portanto, temos as seguintes situações: Se s é par então $q(x) = t(x)p(x) + r_1(x)$. Se s é ímpar então $q(x) = t(x)p(x) + r_2(x)$, onde $r_1(x) = x^{2^m l.s+2} + x^{2^m l+4} + \cdots + x^{2^m l.s+r}$ e $r_2(x) =$

$x^{2^m l.(s-1)+r+2} + x^{2^m l.(s-1)+r+4} + \cdots + x^{2^m l.s}$. Note que $r_1(x), r_2(x)$ não são mútiplos de $p(x)$. $\square$

Visto que l não divide k então podemos escrever $2^n k = s2^m l + r$, com $2 \leq r < 2^m l$. Pelo lema acima temos;

$$\sum_{j=1}^{2^{n-1}k} \bar{v}^{2j} = t(\bar{v}^2)(1 + v^{2^m l}) + r(\bar{v}^2),$$

onde $r(\bar{v}^2) = \bar{v}^{2^m l.s+2} + \bar{v}^{2^m l+4} + \cdots + \bar{v}^{2^m l.s+r}$ se s é par, $r(\bar{v}^2) = \bar{v}^{2^m l.(s-1)+r+2} + \bar{v}^{2^m l.(s-1)+r+4} + \cdots + \bar{v}^{2^m l.s}$ se s é ímpar e $t(\bar{v}^2)$ é um polinômio em $\bar{v}^2$. Logo, podemos escrever a nossa equação no anel G da seguinte forma:

$$-\left(\sum_{i|m_i=0} t_2^i \bar{v}^{2\bar{j}_i}\right)(1 - \bar{v}^{2^n k}) + r(\bar{v}^2) = 0,$$

onde $r(\bar{v}^2) = \bar{v}^{2^m l.s+2} + \bar{v}^{2^m l+4} + \cdots + \bar{v}^{2^m l.s+r}$ se s é par, e $r(\bar{v}^2) = \bar{v}^{2^m l.(s-1)+r+2} + \bar{v}^{2^m l.(s-1)+r+4} + \cdots + \bar{v}^{2^m l.s}$ se s é ímpar. Portanto, aplicando o homomorfismo, $\mathcal{E}$, na equação acima obteremos: $(\frac{r-2}{2}) + 1 = 0$ se s é par e $(\frac{2^m l - r - 2}{2}) + 1 = 0$ se s é ímpar. Em qualquer situação temos um absurdo. Assim, se $m < n$ e l não divide k, então o sistema não possui solução. O caso em que $c_{22} - c_{21} < 0$ é feito de modo análogo ao anterior. Com isso terminamos a afirmação inicial e o caso $I.1$ com $s_1 = s_2 = 0$. $\square$

Caso $I.1$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Neste caso, temos $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1} w(vw)^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Como t_2 é ímpar e c_{22} é par, então podemos tomar $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0}$. Da tabela 4.1, temos que $\tilde{\beta}$ comuta com v. Logo, $CFC^{-1}F^{-1} = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} \tilde{c_0}^{-1} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} v^{-t_2} \tilde{\beta}^{-t_1}$ $= 1$. Portanto, neste caso, $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 1$, é uma solução do sistema. Observemos que o caso, $I.1$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$, é equivalente ao caso $I.1$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 0$.

Caso $I.1$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Neste caso temos; $A = 1$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1} w(vw)^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Como t_2 é ímpar e c_{22} é par, então podemos tomar $A = 1$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0}$. Temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\alpha}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}(wvw)^{-c_{22}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}(wvw)^{-c_{22}}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}(wvw)^{-c_{22}}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}(wvw)^{c_{21}}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}(wvw)^{c_{21}-c_{22}}\\
&= \sum_{j=1}^{c_{22}-c_{21}}(v^{c_{22}-c_{21}+j}B^{-1}v^{c_{21}-c_{22}-j}).
\end{aligned}$$

Portanto, se $c_{22}-c_{21}=0$ então o sistema terá solução trivial. Suponhamos agora, $c_{22}-c_{21}\neq 0$. Temos;

$$\begin{aligned}
CZ_2C^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\prod_i w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\\
&= \prod_i \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\\
&= \prod_i v^{c_{22}-c_{21}}w^{m_i}v^{c_{21}+n_i}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{t_2^i}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-n_i-c_{21}}w^{-m_i}v^{-c_{22}+c_{21}}\\
&= \prod_i v^{c_{22}-c_{21}}w^{m_i}v^{c_{21}+n_i}v^{-c_{21}}B^{t_2^i}v^{c_{21}}v^{-n_i-c_{21}}w^{-m_i}v^{-c_{22}+c_{21}}\\
&= \prod_i v^{c_{22}-c_{21}}w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i}v^{-c_{22}+c_{21}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{A}(CZ_2C^{-1})=\sum_i t_2^i\bar{w}^{m_i}\bar{v}^{c_{22}-c_{21}+n_i}$. Também temos;

$$\begin{aligned}
FZ_3^{-1}F^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\prod_i w^{x_i}v^{y_i}B^{-t_3^i}v^{-y_i}w^{-x_i}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \prod_i \tilde{\alpha}v^{t_2-t_1}w^{-x_i}v^{y_i+t_1}\tilde{\beta}^{t_1}B^{-t_3^i}\tilde{\beta}^{-t_1}v^{-y_i-t_1}w^{x_i}v^{-t_2+t_1}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \prod_i (wvw)^{t_2-t_1}w^{-x_i}\tilde{\alpha}v^{y_i+t_1}v^{-t_1}wB^{t_3^i}w^{-1}v^{t_1}v^{-y_i-t_1}\tilde{\alpha}^{-1}w^{x_i}(wvw)^{-t_2+t_1}\\
&= \prod_i (wvw)^{t_2-t_1}w^{-x_i}\tilde{\alpha}v^{y_i}wB^{t_3^i}w^{-1}v^{-y_i}\tilde{\alpha}^{-1}w^{x_i}(wvw)^{-t_2+t_1}\\
&= \prod_i (wvw)^{t_2-t_1}w^{-x_i}(wvw)^{y_i}w\tilde{\alpha}B^{t_3^i}\tilde{\alpha}^{-1}w^{-1}(wvw)^{-y_i}w^{x_i}(wvw)^{-t_2+t_1}\\
&= \prod_i (wvw)^{t_2-t_1}w^{-x_i}(wvw)^{y_i}ww^{-1}B^{t_3^i}ww^{-1}(wvw)^{-y_i}w^{x_i}(wvw)^{-t_2+t_1}\\
&= \prod_i (wvw)^{t_2-t_1}w^{-x_i}(wvw)^{y_i}B^{t_3^i}(wvw)^{-y_i}w^{x_i}(wvw)^{-t_2+t_1}.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{A}(FZ_3^{-1}F^{-1}) = \sum_i t_3^i \bar{v}^{t_2-t_1}\bar{w}^{-x_i}\bar{v}^{y_i} = \sum_i t_3^i \bar{w}^{-x_i}\bar{v}^{t_2-t_1+y_i}$. Aplicando o homomorfismo, $\mathcal{A}$, na terceira equação obteremos;

$$\begin{cases} \sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i}\bar{v}^{n_i} + \sum_i t_2^i \bar{w}^{m_i}\bar{v}^{c_{22}-c_{21}+n_i} + \sum_i -t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i t_3^i \bar{w}^{-x_i}\bar{v}^{t_2-t_1+y_i} + \\ \sum_{j=1}^{c_{22}-c_{21}} \bar{v}^{c_{22}-c_{21}+j} = 0. \end{cases}$$

Aplicando o homomorfismo, $\mathcal{E}$, na equação acima obteremos $c_{22} - c_{21} = 0$, que é um absurdo. Portanto, se $c_{22} - c_{21} \neq 0$, então o sistema não possui solução.

Caso $I.3$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

Neste caso podemos tomar; $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1}w^{-1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Assim,

$$\begin{aligned} CFC^{-1}F^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{t_1}w^{-1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_2}w\tilde{\beta}^{-t_1} \\ &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{t_1}w^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w\tilde{\beta}^{-t_1} \\ &= v^{c_{22}}v^{-t_1}\tilde{\beta}^{c_{21}}wv^{t_1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{t_1}w\tilde{\beta}^{-t_1} \\ &= v^{c_{22}}v^{-t_1}v^{-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}}v^{t_1}v^{-c_{22}}v^{-t_1}w^{-1}v^{t_1} \\ &= v^{c_{22}-c_{21}-t_1}w^{-1}v^{c_{21}+t_1-c_{22}}v^{-t_1}w^{-1}v^{t_1} \\ &= (v^{c_{22}-c_{21}-t_1}w^{-1}v^{c_{21}+t_1-c_{22}}w)(w^{-1}v^{-t_1}w^{-1}v^{t_1}) \\ &= [v^{c_{22}-c_{21}-t_1}, w^{-1}](w^{-1}v^{-t_1}w^{-1}v^{t_1}). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(CFC^{-1}F^{-1}) = \mathcal{E}\circ\mathcal{A}([v^{c_{22}-c_{21}-t_1}, w^{-1}](w^{-1}v^{-t_1}w^{-1}v^{t_1})) = 0 + 1 = 1$. Aplicando o homomorfismo, $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$, na terceira equação do sistema obteremos; $0 = \mathcal{E}\circ\mathcal{A}(Z_3(CZ_2C^{-1})(CFC^{-1}F^{-1})(FZ_3^{-1}F^{-1})Z_2^{-1} = \bar{t}_3 - \bar{t}_2 + 1 + \bar{t}_3 - \bar{t}_2$, que implica $2(\bar{t}_3 - \bar{t}_2) + 1 = 0$, que é um absurdo. Assim, neste caso o sistema não possui solução.

Caso $I.3$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Neste caso temos; $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1}w(vw)^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Como t_2 é ímpar e c_{22} é par, então podemos tomar; $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Da tabela 4.1, temos que $\tilde{\beta}$ comuta com v. Assim, como $\tilde{c_0}$ comuta com $\tilde{\beta}$ e v, temos $CFC^{-1}F^{-1} = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1} = 1$. Portanto, neste caso o sistema possui solução trivial. Observemos que esse caso é equivalente ao caso $I.3$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 0$.

O caso $I.3$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$ é equivalente ao caso $I.2$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$. Assim, resolveremos apenas o caso $I.2$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Caso $I.2$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar; $A = 1$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c}_0$. Temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c}_0\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c}_0^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\alpha}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}(wvw)^{-c_{22}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}(wvw)^{-c_{22}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}(wvw)^{-c_{22}}v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}) \\
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}(vB^{-1})^{-c_{22}}v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}) \\
&= v^{-c_{21}}[v^{c_{22}}(Bv^{-1})^{c_{22}}]v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}).
\end{aligned}$$

Como c_{21} é par, então pela proposição 4.0.2 obtemos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CFC^{-1}F^{-1}) = c_{22} - c_{21}$. Note que, $CZ_2C^{-1} = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c}_0Z_2\tilde{c}_0^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}} = v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{c}_0Z_2\tilde{c}_0^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}})v^{-c_{22}}$, e

$$\begin{aligned}
FZ_3^{-1}F^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}Z_3^{-1}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \tilde{\alpha}v^{t_2}\tilde{\beta}^{t_1}Z_3^{-1}\tilde{\beta}^{-1}v^{-t_2}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \tilde{\alpha}v^{t_2}\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}Z_3^{-1}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1})\tilde{\alpha}v^{-t_2}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= (wvw)^{t_2}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}Z_3^{-1}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1})(wvw)^{-t_2}.
\end{aligned}$$

Assim, pela proposição 4.0.1, obtemos; $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CZ_2C^{-1}) = \bar{t_2}$ e $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(FZ_3^{-1}F^{-1}) = \bar{t_3}$. Agora, aplicando o homomorfismo, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$, na terceira equação do sistema obteremos; $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(1) = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(Z_3(CZ_2\ C^{-1})(CF\ C^{-1}F^{-1})(FZ_3^{-1}F^{-1})Z_2^{-1})$. Pelos resultados acima obtemos; $\bar{t_3} + \bar{t_2} + c_{22} - c_{21} + \bar{t_3} - \bar{t_2} = 0$. Disso resulta $c_{22} - c_{21} = -2\bar{t_3}$, que implica $2k_2 + 1 - 2k_1 = -2\bar{t_3}$, ou seja, $2k_2 + 1 = 2(-\bar{t_3} - k_1)$, que é um absurdo. Portanto, neste caso o sistema não possui solução. Como os casos $I.2$ e $I.3$ são equivalentes então, pelo resultados acima, esses dois casos estão resolvidos.

Caso $I.4$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

Neste caso podemos tomar; $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}w$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}w\tilde{c}_0$. Temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}w\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}w\tilde{c_0}^{-1}w^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-1}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1} \\
&= v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}ww^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-1}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1} \\
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-1}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1} \\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}-c_{22}}v^{t_2}\tilde{\beta}^{t_1}w^{-1}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1} \\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}-c_{22}}v^{t_2}v^{-t_1}wv^{t_1}\tilde{\beta}^{t_1}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1} \\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}-c_{22}}ww^{-1}v^{t_2-t_1}wv^{t_1-t_2} \\
&= [v^{c_{22}-c_{21}}, w^{-1}][w^{-1}, v^{t_2-t_1}].
\end{aligned}$$

Logo, se $c_{22} - c_{21} = t_2 - t_1$, então obteremos $CFC^{-1}F^{-1} = 1$, e portanto o sistema terá solução trivial. Vamos supor agora, $c_{22} - c_{21} \neq t_2 - t_1$.

Afirmação 4.1.3. *Como $c_{22} - c_{21} = 2(k_2 - k_1)$ e $t_2 - t_1 = 2(l_2 - l_1)$ são pares, então podemos escrever $c_{22} - c_{21} = 2^n k$ e $t_2 - t_1 = 2^m l$, onde k e l são ímpares.*

i) Se $c_{22} - c_{21} = 0$ ou $t_2 - t_1 = 0$ então o sistema não possui solução.

ii) Suponha $c_{22} - c_{21} \neq 0$ e $t_2 - t_1 \neq 0$. Se $m \neq n$ então o sistema não tem solução.

iii) Se $m = n$ então o sistema terá solução apenas quando l dividir k ou k dividir l.

Demonstração. Para fazer a demonstração, estudaremos o sistema abelianizado. Primeiramente, consideraremos $c_{22} - c_{21} > 0$ e $t_2 - t_1 > 0$. Veremos abaixo que os outros casos são análogos. Temos;

$$\mathcal{A}([v^{c_{22}-c_{21}}, w^{-1}]) = \sum_{j=1}^{k_2-k_1} \bar{v}^{2(2^{n-1}k-j+1)} - \bar{v}^{2(2^{n-1}k-j+1)-1}\bar{w} = \sum_{j=1}^{k_2-k_1} \bar{v}^{2j} - \bar{v}^{2j-1}\bar{w},$$

$$\mathcal{A}([w^{-1}, v^{t_2-t_1}]) = \sum_{j=1}^{l_2-l_1} \bar{v}^{2(2^{m-1}l-j+1)-1}\bar{w} - \bar{v}^{2(2^{m-1}l-j+1)} = \sum_{j=1}^{l_2-l_1} \bar{v}^{2j-1}\bar{w} - \bar{v}^{2j},$$

$$\begin{aligned}
CZ_2C^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}wc_0(\prod_i w^{m_i}v^{n_i}B_2^{t_i}v^{-n_i}w^{-m_i})\tilde{c_0}^{-1}w^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}w(\prod_i w^{m_i}v^{n_i}B_2^{t_i}v^{-n_i}w^{-m_i})w^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}} \\
&= \prod_i v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w^{1+m_i}v^{n_i}B_2^{t_i}v^{-n_i}w^{-1-m_i}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_i v^{c_{22}} v^{-c_{21}} w^{-1-m_i} v^{c_{21}} v^{n_i} \tilde{\beta}^{c_{21}} B^{t_2^i} \tilde{\beta}^{-c_{21}} v^{-n_i} v^{-c_{21}} w^{1+m_i} v^{c_{21}} v^{-c_{22}} \\
&= \prod_i v^{c_{22}-c_{21}} w^{-1-m_i} v^{c_{21}} v^{n_i} v^{-c_{21}} w B^{-t_2^i} w^{-1} v^{c_{21}} v^{-n_i} v^{-c_{21}} w^{1+m_i} v^{c_{21}-c_{22}} \\
&= \prod_i v^{c_{22}-c_{21}} w^{-1-m_i} v^{n_i} w B^{-t_2^i} w^{-1} v^{-n_i} w^{1+m_i} v^{c_{21}-c_{22}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{A}(CZ_2C^{-1}) = \sum_i -t_2^i \bar{v}^{c_{22}-c_{21}} \bar{w}^{-1-m_i} \bar{v}^{n_i} \bar{w} = \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-1-m_i+(-1)^{n_i}} \bar{v}^{n_i+c_{22}-c_{21}}$.
Observemos que;

$$\begin{aligned}
FZ_3^{-1}F^{-1} &= \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} w (\prod_i w^{x_i} v^{y_i} B^{-t_3^i} v^{-y_i} w^{-x_i}) w^{-1} v^{-t_2} \tilde{\beta}^{-t_1} \\
&= \prod_i v^{t_2} \tilde{\beta}^{t_1} w^{1+x_i} v^{y_i} B^{-t_3^i} v^{-y_i} w^{-1-x_i} \tilde{\beta}^{-t_1} v^{-t_2} \\
&= \prod_i v^{t_2} v^{-t_1} w^{-1-x_i} v^{t_1} v^{y_i} \tilde{\beta}^{t_1} B^{-t_3^i} \tilde{\beta}^{-t_1} v^{-y_i} v^{-t_1} w^{1+x_i} v^{t_1} v^{-t_2} \\
&= \prod_i v^{t_2-t_1} w^{-1-x_i} v^{t_1} v^{y_i} v^{-t_1} w B^{t_3^i} w^{-1} v^{t_1} v^{-y_i} v^{-t_1} w^{1+x_i} v^{t_1-t_2} \\
&= \prod_i v^{t_2-t_1} w^{-1-x_i} v^{y_i} w B^{t_3^i} w^{-1} v^{-y_i} w^{1+x_i} v^{t_1-t_2}.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{A}(FZ_3^{-1}F^{-1}) = \sum_i t_3^i \bar{v}^{t_2-t_1} \bar{w}^{-1-x_i} \bar{v}^{y_i} \bar{w} = \sum_i t_3^i \bar{w}^{-x_i-1+(-1)^{y_i}} \bar{v}^{y_i+t_2-t_1}$. Como $Z_2 = \prod_i w^{m_i} v^{n_i} B^{t_2^i} v^{-n_i} w^{-m_i}$ e $Z_3 = \prod_i w^{x_i} v^{y_i} B^{t_3^i} v^{-y_i} w^{-x_i}$, então obtemos; $\mathcal{A}(Z_2) = \sum_i t_2^i \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i}$ e $\mathcal{A}(Z_3) = \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i} \bar{v}^{y_i}$. Agora, aplicando o homomorfismo, $\mathcal{A}$, na terceira equação do sistema obteremos;

$$\begin{cases} \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i} \bar{v}^{y_i} + \sum_i t_3^i \bar{w}^{-x_i-1+(-1)^{y_i}} \bar{v}^{y_i+t_2-t_1} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-1-m_i+(-1)^{n_i}} \bar{v}^{n_i+c_{22}-c_{21}} + \\ \sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i} + \sum_{j=1}^{k_2-k_1} \bar{v}^{2j} - \bar{v}^{2j-1}\bar{w} + \sum_{j=1}^{l_2-l_1} \bar{v}^{2j-1}\bar{w} - \bar{v}^{2j} = 0. \end{cases}$$

i) Observemos que se $c_{22} - c_{21} = 0$ então devemos ter $k_2 = k_1$. Assim, fazendo uma conta análoga à anterior, a última equação se torna;

$$\begin{cases} \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i} \bar{v}^{y_i} + \sum_i t_3^i \bar{w}^{-x_i-1+(-1)^{y_i}} \bar{v}^{y_i+t_2-t_1} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-1-m_i+(-1)^{n_i}} \bar{v}^{n_i} + \\ \sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i} + \sum_{j=1}^{2^{m-1}l} \bar{v}^{2j-1}\bar{w} - \bar{v}^{2j} = 0. \end{cases}$$

Consideremos, H, o subanel de $\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ gerado pelo elemento $\bar{v}^{2^m}$. Projetanto a equação acima no subanel H obteremos;

$$\left\{ \sum_{\substack{i|x_i=0,\\ y_i=2^m j_i}} t_3^i \bar{v}^{y_i} + \sum_{\substack{i|x_i=0,\\ y_i=2^m j_i}} t_3^i \bar{v}^{y_i+2^m l} + \sum_{\substack{i|m_i=0,\\ n_i=2^m \bar{j}_i}} -t_2^i \bar{v}^{n_i} + \sum_{\substack{i|m_i=0,\\ n_i=2^m \bar{j}_i}} -t_2^i \bar{v}^{n_i} + \sum_{\substack{j=1,\\ j=2^{m-1}l'}}^{2^{m-1}l} -\bar{v}^{2j} = 0, \right.$$

onde $j_i, \bar{j}_i \in \mathbb{Z}$. Assim, obtemos a seguinte equação:

$$\left\{ \sum_{i|x_i=0} t_3^i \bar{v}^{2^m j_i} + \sum_{i|x_i=0} t_3^i \bar{v}^{2^m(j_i+l)} + \sum_{i|m_i=0} -t_2^i \bar{v}^{2^m \bar{j}_i} + \sum_{i|m_i=0} -t_2^i \bar{v}^{2^m \bar{j}_i} + \sum_{\substack{j=1,\\ j=2^{m-1}l'}}^{2^{m-1}l} -\bar{v}^{2j} = 0, \right.$$

onde $j_i, \bar{j}_i \in \mathbb{Z}$. Aplicando o homomorfismo, $\mathcal{E} : H \to \mathbb{Z}$, na equação acima obteremos;

$$2\Bigg(\sum_{\substack{i|x_i=0,\\ y_i=2^m j_i}} t_3^i \Bigg) - 2\Bigg(\sum_{\substack{i|m_i=0,\\ n_i=2^m \bar{j}_i}} t_2^i \Bigg) - l = 0.$$

Mas isso é um absurdo, pois l é ímpar. Portanto, se $c_{22} - c_{21} = 0$ então o sistema não possui solução. O caso em que $t_2 - t_1 = 0$ é análogo.

ii) Nesta situação temos $c_{22} - c_{21} = 2^n k$ e $t_2 - t_1 = 2^m l$, k e l ímpares. Primeiramente, suporemos $m < n$. Aplicando o homomorfismo, $\mathcal{A}$, na terceira equação do sistema obteremos;

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i} \bar{v}^{y_i} + \sum_i t_3^i \bar{w}^{-x_i-1+(-1)^{y_i}} \bar{v}^{y_i+t_2-t_1} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-1-m_i+(-1)^{n_i}} \bar{v}^{n_i+c_{22}-c_{21}} + \\ \displaystyle\sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i} + \sum_{j=1}^{k_2-k_1} \bar{v}^{2j} - \bar{v}^{2j-1}\bar{w} + \sum_{j=1}^{l_2-l_1} \bar{v}^{2j-1}\bar{w} - \bar{v}^{2j} = 0. \end{array} \right.$$

Projetando essa equação no subanel, H, gerado pelo elemento, $\bar{v}^{2^m}$, obteremos;

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i|x_i=0} t_3^i \bar{v}^{2^m j_i} + \sum_{i|x_i=0} t_3^i \bar{v}^{2^m(j_i+l)} + \sum_{i|m_i=0} -t_2^i \bar{v}^{2^m \bar{j}_i} + \sum_{i|m_i=0} -t_2^i \bar{v}^{2^m(2^{n-m}k+\bar{j}_i)} + \\ \displaystyle\sum_{\substack{j=1,\\ j=2^{n-1}k'}}^{2^{n-1}k} \bar{v}^{2j} + \sum_{\substack{j=1,\\ j=2^{m-1}l'}}^{2^{m-1}l} -\bar{v}^{2j} = 0. \end{array} \right.$$

onde $j_i, \bar{j}_i \in \mathbb{Z}$. Aplicando o homomorfismo, $\mathcal{E} : H \to \mathbb{Z}$, na equação acima obteremos;

$$2\Bigg(\sum_{\substack{i|x_i=0,\\ y_i=2^m j_i}} t_3^i \Bigg) - 2\Bigg(\sum_{\substack{i|m_i=0,\\ n_i=2^m \bar{j}_i}} t_2^i \Bigg) + 2^{n-m}k - l = 0.$$

Mas isso é um absurdo, pois l é ímpar e $2^{n-m}k$ é par, visto que $m < n$. Portanto, se $m < n$ então o sistema não possui solução. O caso em que $m > n$ é análogo.

iii) Agora, consideraremos $m = n$. Primeiramente, suporemos $k > l$ e que l não divide k. Para simplificar a notação chamaremos $a = 2^n k$ e $b = 2^n l$. Projetando a equação inicial no subanel, G, de $\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ gerado pelos elementos da forma $\bar{v}^{2j}, j \in \mathbb{Z}$ então obtemos;

$$\left(\sum_{i|x_i=0} t_3^i \bar{v}^{2^m j_i}\right)(1+\bar{v}^b) - \left(\sum_{i|m_i=0} t_2^i \bar{v}^{2^m \bar{j}_i}\right)(1+\bar{v}^a) = -\sum_{j=\frac{b}{2}+1}^{\frac{a}{2}} \bar{v}^{2j},$$

onde $j_i, \bar{j}_i \in \mathbb{Z}$. Consideremos o ideal, J, de G gerado pelos elementos $(1+\bar{v}^b)$, $(1+\bar{v}^a)$. Quocientando a equação acima pelo anel, G/J, obteremos uma contradição. De fato, como l não divide k, então o elemento $\sum_{j=\frac{b}{2}+1}^{\frac{a}{2}} \bar{v}^{2j}$ é não nulo em G/J. Assim, o lado esquerdo da equação será nulo enquanto o lado direito será não nulo. O caso em que $k < l$ e k não divide l é análogo ao caso anterior.

Se $k = sl$ então $Z_1 = Z_2 = 1$ e $Z_3 = \prod_{j=1}^{s-1}[w^{-1}, v^{j(t_2-t_1)}]^{(-1)^j}$ é uma solução do sistema. A verificação de que Z_1, Z_2 e Z_3 é solução segue das seguintes igualdades: $F[v^x, w^{-1}]F^{-1} = [v^{t_2-t_1}, w^{-1}][w^{-1}, v^{x+t_2-t_1}]$, $F[w^{-1}, v^x]F^{-1} = [v^{x+t_2-t_1}, w^{-1}][w^{-1}, v^{t_2-t_1}]$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Note que como $Z_3^{-1} = \prod_{j=1}^{s-1}[v^{(s-j)(t_2-t_1)}, w^{-1}]^{(-1)^{j+1}}$, então rapidamente obtemos; $FZ_3^{-1}F^{-1} = [v^{t_2-t_1}, w^{-1}][w^{-1}, v^{c_{22}-c_{21}}]Z_3^{-1}$.

Observemos que, como $Z_1 = Z_2 = 1$, então as primeira e segunda equações são satisfeitas automaticamente. Portanto, basta verificar a terceira equação. Pelo cálculo acima temos;

$$\begin{aligned}
Z_3(CFC^{-1}F^{-1})(FZ_3^{-1}F^{-1}) &= Z_3[v^{c_{22}-c_{21}}, w^{-1}][w^{-1}, v^{t_2-t_1}](FZ_3^{-1}F^{-1}) \\
&= Z_3[v^{c_{22}-c_{21}}, w^{-1}][w^{-1}, v^{t_2-t_1}][v^{t_2-t_1}, w^{-1}] \\
&\quad [w^{-1}, v^{c_{22}-c_{21}}]Z_3^{-1} \\
&= Z_3[v^{c_{22}-c_{21}}, w^{-1}][w^{-1}, v^{c_{22}-c_{21}}]Z_3^{-1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Se tivermos $l = tk$ então um cálculo semelhante ao anterior nos diz que $Z_1 = Z_2 = 1$ e $Z_3 = \prod_{j=1}^{t-1}[w^{-1}, v^{j(t_2-t_1)}]^{(-1)^{j+1}}$ é uma solução do sistema. $\square$

Caso $I.4$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar; $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Da tabela 4.1 temos que $\tilde{\beta}$ comuta com v. Assim, $CFC^{-1}F^{-1} = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1} = 1$. Portanto, $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 1$, é uma solução para o sistema. Observemos que esse caso é equivalente ao caso $I.4$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 0$.

Caso $I.4$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar; $A = 1$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Primeiramente, suporemos $c_{22} - c_{21} \geq 0$ e $t_2 - t_1 \geq 0$. Temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}v^{c_{22}}\tilde{\alpha}v^{t_2-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{t_1}(w^{-1}vw^{-1})^{-t_2}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}(w^{-1}vw^{-1})^{c_{22}}v^{t_2-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_1}(wvw)^{-t_2}v^{t_1}(\tilde{\beta}^{t_1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1}) \\
&= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}})\tilde{\beta}^{c_{21}}(w^{-1}vw^{-1})^{c_{22}}v^{t_2-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_1}(wvw)^{-t_2}v^{t_1}v^{-t_1}(wvw)^{t_1} \\
&= (wvw)^{-c_{21}}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}(wvw)^{c_{22}}v^{c_{21}}v^{t_2-c_{22}}v^{-t_1}(wvw)^{-t_2+t_1} \\
&= v^{c_{22}-c_{21}}(v^{c_{21}-c_{22}}(wvw)^{-c_{21}+c_{22}})v^{c_{21}-c_{22}}v^{t_2-t_1}(wvw)^{-t_2+t_1} \\
&= v^{c_{22}-c_{21}}\prod_{j=1}^{c_{22}-c_{21}}(v^{c_{21}-c_{22}+j}B^{-1}v^{c_{22}-c_{21}-j})v^{c_{21}-c_{22}}v^{t_2-t_1}(wvw)^{-t_2+t_1} \\
&= [\prod_{j=1}^{c_{22}-c_{21}}(v^jB^{-1}v^{-j})][\prod_{j=1}^{t_2-t_1}(v^{t_2-t_1-j+1}Bv^{t_1-t_2+j-1})].
\end{aligned}$$

Se $c_{22}-c_{21} = t_2-t_1$ então o sistema terá solução trivial. Agora, assumiremos $c_{22}-c_{21} \neq t_2-t_1$. Consideraremos primeiro, $c_{22}-c_{21} > t_2-t_1$. Fazendo o mesmo cálculo que fizemos no caso $I.1$ com $s_1 = s_2 = 1$ obteremos; $FZ_3^{-1}F^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\prod_i w^{x_i}v^{y_i}B^{-t_3^i}v^{-y_i}w^{-x_i}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1} = \prod_i (wvw)^{t_2-t_1}w^{-x_i}(wvw)^{y_i}B^{t_3^i}(wvw)^{-y_i}w^{x_i}(wvw)^{-t_2+t_1}$. Logo, $\mathcal{A}(FZ_3^{-1}F^{-1}) = \sum_i t_3^i\bar{w}^{-x_i}\bar{v}^{t_2-t_1+y_i}$. Também temos;

$$CZ_2C^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\prod_i w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-m_i}w^{-n_i}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_i \tilde{\alpha} v^{c_{22}-c_{21}} w^{-m_i} v^{n_i+c_{21}} \tilde{\beta}^{c_{21}} B^{t_2^i} \tilde{\beta}^{-c_{21}} v^{-n_i-c_{21}} w^{m_i} v^{c_{21}-c_{22}} \tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \prod_i (wvw)^{c_{22}-c_{21}} w^{-m_i} \tilde{\alpha} v^{n_i} w B^{-t_2^i} w^{-1} v^{-n_i} \tilde{\alpha}^{-1} w^{m_i} (wvw)^{c_{21}-c_{22}} \\
&= \prod_i (wvw)^{c_{22}-c_{21}} w^{-m_i} (wvw)^{n_i} w \tilde{\alpha} B^{-t_2^i} \tilde{\alpha}^{-1} w^{-1} (wvw)^{-n_i} w^{m_i} (wvw)^{c_{21}-c_{22}} \\
&= \prod_i (wvw)^{c_{22}-c_{21}} w^{-m_i} (wvw)^{n_i} B^{-t_2^i} (wvw)^{-n_i} w^{m_i} (wvw)^{c_{21}-c_{22}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\mathcal{A}(CZ_2C^{-1}) = \sum_i -t_2^i \bar{v}^{c_{22}-c_{21}} \bar{w}^{-m_i} \bar{v}^{n_i} = \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-m_i} \bar{v}^{c_{22}-c_{21}+n_i}$. Aplicando o homomorfismo, $\mathcal{A}$, na terceira equação do sistema obteremos;

$$
(I) : \begin{cases} \sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-m_i} \bar{v}^{c_{22}-c_{21}+n_i} + \sum_i -t_3^i \bar{w}^{x_i} \bar{v}^{y_i} + \sum_i t_3^i \bar{w}^{-x_i} \bar{v}^{t_2-t_1+y_i} + \\ \sum_{j=1}^{c_{22}-c_{21}} -\bar{v}^j + \sum_{j=1}^{t_2-t_1} \bar{v}^{t_2-t_1-j+1} = 0. \end{cases}
$$

Note que $\sum_{j=1}^{t_2-t_1} \bar{v}^{t_2-t_1-j+1} = \sum_{j=1}^{t_2-t_1} \bar{v}^j$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}$ na equação (I) obteremos; $-2\bar{t_2} = t_2 - t_1 - c_{22} + c_{21}$.

Denotemos, $c_{22}-c_{21} = a$, $t_2-t_1 = b$, $p(\bar{w}, \bar{v}) = \sum_i t_2^i \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i}$ e $q(\bar{w}, \bar{v}) = \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i} \bar{v}^{y_i}$. Note que por hipótese temos $a > b$. Assim, podemos reescrever a equação (I) na forma

$$
-p(\bar{w}, \bar{v})(\bar{v}^a + 1) + q(\bar{w}, \bar{v})(\bar{v}^b - 1) = \bar{v}^{b+1} + ... + \bar{v}^a.
$$

Escrevendo, $\bar{v}^{b+1} + ... + \bar{v}^a = (\bar{v}^a + 1) - 1 + \bar{v}^{a-1} + ... + \bar{v}^{b+1}$, e projetando essa equação no anel $G = \frac{H}{(1+\bar{v}^a)H}$, onde $H = \mathbb{Z}[\pi_1(K)]$, obteremos;

$$
q(\bar{w}, \bar{v})(\bar{v}^b - 1) - \bar{v}^{a-1} - ... - \bar{v}^{b+1} = -1.
$$

Se $q(\bar{w}, \bar{v})(\bar{v}^b - 1) - \bar{v}^{a-1} - ... - \bar{v}^{b+1}$ for zero em G, então já teremos um absurdo, pois -1 é não nulo em G. Mas, se $q(\bar{w}, \bar{v})(\bar{v}^b - 1) - \bar{v}^{a-1} - ... - \bar{v}^{b+1}$, não for zero em G, então aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}$, na equação acima obteremos; $-a + b + 1 = -1$, ou seja, $a - b = 2$, e portanto, teremos $-2 = t_2 - t_1 - c_{22} + c_{21}$, que implica $\bar{t_2} = 1$.

Observemos que, projetando a equação (I) no subanel gerado pelos elementos da forma $\bar{v}^{2j}, j \in \mathbb{Z}$ obteremos;

$$\begin{cases} \sum\limits_{\substack{i|m_i=0 \\ n_i=2j'}} -t_2^i \bar{v}^{n_i} + \sum\limits_{\substack{i|m_i=0 \\ n_i=2j'}} -t_2^i \bar{v}^{c_{22}-c_{21}+n_i} + \sum\limits_{\substack{i|x_i=0 \\ y_i=2j''}} -t_3^i \bar{w}^{x_i} \bar{v}^{y_i} + \sum\limits_{\substack{i|x_i=0 \\ y_i=2j''}} t_3^i \bar{v}^{t_2-t_1+y_i} + \\ \sum\limits_{\substack{j=t_2-t_1+1 \\ j=2j'''}}^{c_{22}-c_{21}} -\bar{v}^j = 0. \end{cases}$$

Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}$, nessa equação obtemos; $-2\left(\sum\limits_{\substack{i|m_i=0 \\ n_i=2j'}} t_2^i\right) - \frac{(a-b)}{2} = 0$. Mas como vimos acima, $-(a-b) = -2$, que implica $-\frac{(a-b)}{2} = -1$. Logo, na equação acima, temos uma contradição. Portanto, se $c_{22} - c_{21} > t_2 - t_1$, então o sistema não possui solução.

Suponhamos agora, $a = c_{22} - c_{21} < t_2 - t_1 = b$. Com essa hipótese e com a notação acima podemos reescrever a equação (I) da seguinte forma:

$$-p(\bar{w}, \bar{v})(\bar{v}^a + 1) + q(\bar{w}, \bar{v})(\bar{v}^b - 1) = -\bar{v}^{a+1} - ... - \bar{v}^b.$$

Escrevendo, $\bar{v}^{a+1} + ... + \bar{v}^b = -(\bar{v}^a + 1)\bar{v} - \bar{v} - \bar{v}^{a+2} - ... - \bar{v}^b$, então podemos reescrever a equação acima como;

$$-p(\bar{w}, \bar{v})(\bar{v}^a + 1) + (1 + \bar{v}^a)\bar{v} + q(\bar{w}, \bar{v})(\bar{v}^b - 1) + \bar{v}^{a+2} + ... + \bar{v}^b = -\bar{v}.$$

Projetando essa equação no anel, $G = \frac{H}{(1+\bar{v}^a)H}$, onde $H = \mathbb{Z}[\pi_1(K)]$, obteremos;

$$q(\bar{w}, \bar{v})(\bar{v}^b - 1) + \bar{v}^{a+2} + ... + \bar{v}^b = -\bar{v}.$$

Se $q(\bar{w}, \bar{v})(\bar{v}^b - 1) + \bar{v}^{a+2} + ... + \bar{v}^b$ for zero em G então já teremos um absurdo, pois $-\bar{v}$ é não nulo em G. Agora, se $q(\bar{w}, \bar{v})(\bar{v}^b - 1) + \bar{v}^{a+2} + ... + \bar{v}^b$ não for zero em G então aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}$, na equação acima obteremos; $b - a - 1 = -1$, ou seja, $a - b = 0$, que é um absurdo pois estamos supondo $a \neq b$. Portanto, neste caso o sistema possui solução se, e somente se, $c_{22} - c_{21} = t_2 - t_1$. O estudo das outras situações de $c_{22} - c_{21}$ e $t_2 - t_1$ é análogo aos anteriores.

$III)$ $\phi_0(1,-1)$.

No caso III temos as possíveis situações para os pares de homomorfismos $(f_{1\#}, f_{2\#})$:

$$\begin{array}{ll} III.1, & (f_1(s_1,0,2l_1+1,0,2k_1), f_2(s_2,0,2l_2+1,0,2k_2)) \\ III.2, & (f_1(s_1,0,2l_1+1,0,2k_1), f_2(s_2,0,2l_2+1,s_2,2k_2+1)) \\ III.3, & (f_1(s_1,0,2l_1+1,s_1,2k_1+1), f_2(s_2,0,2l_2+1,0,2k_2)) \\ III.4, & (f_1(s_1,0,2l_1+1,s_1,2k_1+1), f_2(s_2,0,2l_2+1,s_2,2k_2+1)), \end{array}$$

onde $s_i \in \{0,1\}$ e $l_i, k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$.

Caso $III.1$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

Neste caso podemos tomar $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} w$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c}_0$. Temos;

$$\begin{aligned} CFC^{-1}F &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c}_0 \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} w \tilde{c}_0{}^{-1} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} w \\ &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{\beta}^{-t_1} v^{-t_2} v^{-1} w^{-1} v v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} w \\ &= v^{c_{22}-t_2-1} \tilde{\beta}^{-t_1} v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{21}} \tilde{\beta}^{t_1} v^{1-c_{22}+t_2} w \\ &= v^{c_{22}-c_{21}-t_2-1} \tilde{\beta}^{-t_1} w^{-1} \tilde{\beta}^{t_1} v^{1+c_{21}-c_{22}+t_2} w \\ &= v^{c_{22}-c_{21}-t_2-1} v^{t_1} w v^{-t_1} v^{1+c_{21}-c_{22}+t_2} w \\ &= v^{c_{22}-c_{21}+t_1-t_2-1} w v^{c_{21}-c_{22}+t_2-t_1+1} w. \end{aligned}$$

Dessa igualdade obtemos; $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CFC^{-1}F) = -1$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$, na terceira equação obteremos; $0 = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(Z_3(CZ_2C^{-1})CFC^{-1}F(F^{-1}Z_3^{-1}F)F^{-1}Z_2F) = \bar{t}_3 - \bar{t}_2 - 1 + \bar{t}_3 - \bar{t}_2 = 2(\bar{t}_3 - \bar{t}_2) - 1$, que é um absurdo. Portanto, neste caso o sistema não possui solução.

Caso $III.1$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar; $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c}_0$. Temos;

$$\begin{aligned} CFC^{-1}F &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c}_0 \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} \tilde{c}_0{}^{-1} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} \\ &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{\beta}^{-t_1}\ v^{-t_2}\ v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}. \end{aligned}$$

Visto que $\tilde{\beta}$ e v comutam, então obteremos $CFC^{-1}F = 1$. Portanto, neste caso o sistema possui solução trivial. Observemos que esse caso é equivalente ao caso $III.1$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 0$.

Caso $III.1$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Neste caso temos $A = 1$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}w(vw)^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Como t_2 é ímpar e c_{22} é par, então podemos tomar; $A = 1$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$.

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}v^{-t_2}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2} \\
&= (v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}})v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}})v^{-c_{22}}v^{-t_2}(\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1})v^{t_2} \\
&= (v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}})v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})\tilde{\alpha}v^{-c_{22}-t_2}(\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1})v^{t_2} \\
&= (v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}})v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})(wvw)^{-c_{22}-t_2} \\
&\quad (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1})v^{t_2} \\
&= (v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}})v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})(Bv^{-1})^{c_{22}+t_2} \\
&\quad (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1})v^{t_2} \\
&= (v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}})v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})v^{-c_{22}-t_2} \\
&\quad [v^{c_{22}+t_2}(Bv^{-1})^{c_{22}+t_2})](\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1})v^{t_2} \\
&= (v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}})v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})v^{-c_{22}} \\
&\quad v^{-t_2}[v^{c_{22}+t_2}(Bv^{-1})^{c_{22}+t_2})](\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1})v^{t_2}.
\end{aligned}$$

Das proposições anteriores obtemos; $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(CFC^{-1}F) = -1+c_{22}-c_{21}+t_2-t_1$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$, na terceira equação do sistema obteremos; $0 = \mathcal{E}\circ\mathcal{A}(Z_3(CZ_2C^{-1})(CFC^{-1}F)\ (F^{-1}Z_3^{-1}F)(F^{-1}Z_2F)) = \bar{t_3} - \bar{t_2} - 1 + c_{22} - c_{21} + t_2 - t_1 + \bar{t_3} - \bar{t_2} = 2(\bar{t_3} - \bar{t_2}) - 1 + 2(k_2 - k_1) + 2(l_2 - l_1)$, que é um absurdo. Assim, neste caso o sistema não possui solução.

Caso $III.2$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

Neste caso podemos tomar; $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}w$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}w$. Temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}w\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}ww^{-1}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}w \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}w\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}w \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}v^{-1}w^{-1}v\tilde{\beta}^{-t_1}v^{-t_2}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}w \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}-1}w^{-1}v^{1-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w \\
&= v^{c_{22}-c_{21}-1}w^{-1}v^{c_{21}+1-c_{22}}w \\
&= [v^{c_{22}-c_{21}-1}, w^{-1}].
\end{aligned}$$

Neste caso temos; $c_{21} = 2k_1$ e $c_{22} = 2k_2 + 1$. Portanto, se $k_1 = k_2$ então obteremos $c_{22} - c_{21} - 1 = 0$, e logo o sistema terá solução trivial. Agora, se $k_1 \neq k_2$ então mostraremos que $Z_1 = 1$, $Z_2 = Z_3 = \prod_{j=1}^{k_2-k_1} (v^{2j}B^{-1}v^{-2j})$ é uma solução para o sistema. Primeiramente, suporemos $k_2 > k_1$, o outro caso é análogo. Visto que, $Z_1 = 1$, então as duas primeiras equações do sistema são satisfeitas. Substituindo Z_1, Z_2 e Z_3 na terceira equação obteremos;

$$\begin{aligned}
&Z_3(CZ_2C^{-1})(CFC^{-1}F)(F^{-1}Z_3^{-1}F)(F^{-1}Z_2F) = \\
&\prod_{j=1}^{k_2-k_1} (v^{2j}B^{-1}v^{-2j})(\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}w \prod_{j=1}^{k_2-k_1} (v^{2j}B^{-1}v^{-2j})w^{-1}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}})[v^{2(k_2-k_1)}, w^{-1}] = \\
&\prod_{j=1}^{k_2-k_1} (v^{2j}B^{-1}v^{-2j})(\prod_{j=1}^{k_2-k_1} v^{2(k_2-k_1)}w^{-1}v^{1-2j}Bv^{2j-1}wv^{-2(k_2-k_1)})[v^{2(k_2-k_1)}, w^{-1}] = \\
&\prod_{j=1}^{k_2-k_1} (v^{2j}B^{-1}v^{-2j})(\prod_{j=1}^{k_2-k_1} v^{2(k_2-k_1-j+1)})Bv^{-2(k_2-k_1-j+1)})[w^{-1}, v^{2(k_2-k_1)}]][v^{2(k_2-k_1)}, w^{-1}] = \\
&[w^{-1}, v^{2(k_2-k_1)}]][v^{2(k_2-k_1)}, w^{-1}] = 1.
\end{aligned}$$

Logo Z_1, Z_2 e Z_3 dados acima são uma solução para o sistema. Portanto, neste caso o sistema possui solução. Observemos que este caso é equivalente ao caso $III.3$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

Caso $III.2$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Neste caso temos $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1}w(vw)^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}w(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Como t_2 e c_{22} são ímpares, então podemos tomar; $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Analogamente ao caso anterior obteremos; $CFC^{-1}F = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\ \tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2} = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{-t_1}v^{-t_2}\ v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$. Visto que $\tilde{\beta}$ e v comutam, então obteremos $CFC^{-1}F = 1$. Logo, neste caso o sistema terá solução trivial. Observemos que este caso é equivalente ao caso $III.3$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 0$.

Caso $III.3$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Como demonstrado no caso anterior, temos $CFC^{-1}F = 1$. Portanto, neste caso o sistema possui solução trivial. Observemos que este caso é equivalente ao caso $III.2$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 0$.

Caso $III.2$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar; $A = 1$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$.

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}v^{-t_2}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}v^{-t_2}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}v^{-1}(wvw)\tilde{\alpha}v^{-t_2-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1})v^{t_2}\\
&= v^{c_{22}-1}\tilde{\beta}^{c_{21}}(wvw)^{-t_2-c_{22}+1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}(wvw)^{t_1}v^{-t_1}v^{t_2}\\
&= v^{c_{22}-1}v^{-c_{21}}(wvw)^{-t_2-c_{22}+1}v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})(wvw)^{t_1}v^{-t_1}v^{t_2}\\
&= v^{c_{22}-1-c_{21}}(wvw)^{-t_2-c_{22}+1}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}(wvw)^{c_{21}}(wvw)^{t_1}v^{-t_1+t_2}\\
&= v^{c_{22}-1-c_{21}}(wvw)^{t_1-t_2+c_{21}-c_{22}+1}v^{t_2-t_1}\\
&= v^{t_1-t_2}(v^{t_2-t_1+c_{22}-c_{21}-1}(wvw)^{t_1-t_2+c_{21}-c_{22}+1})v^{t_2-t_1}.
\end{aligned}$$

Chamando, $q = t_2 - t_1 + c_{22} - c_{21} - 1$, obteremos;

$$CFC^{-1}F = \begin{cases} v^{t_1-t_2}[\prod_{j=1}^{q}(v^{q-j+1}Bv^{-q+j-1})]v^{t_2-t_1} & se \quad q > 0\\ 1 & se \quad q = 0\\ v^{c_{22}-c_{21}-1}[\prod_{j=1}^{-q}(v^jB^{-1}v^{-j})]v^{c_{21}-c_{22}+1} & se \quad q < 0 \end{cases}$$

Portanto, se $t_2 - t_1 + c_{22} - c_{21} - 1 = 0$ então o sistema terá solução trivial. Note que em qualquer situação acima temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CFC^{-1}F) = t_2 - t_1 + c_{22} - c_{21} - 1$. A seguir suporemos $q > 0$. Temos;

$$\begin{aligned}
CZ_2C^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\prod_i w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\\
&= \prod_i \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}v^{-1}w^{-m_i}vv^{-n_i}B^{-t_2^i}v^{n_i}v^{-1}w^{m_i}vv^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\\
&= \prod_i v^{c_{22}-c_{21}-1}w^{-m_i}v^{1+c_{21}-n_i}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{-t_2^i}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{n_i-1-c_{21}}w^{m_i}v^{c_{21}-c_{22}+1}\\
&= \prod_i v^{c_{22}-c_{21}-1}w^{-m_i}v^{1-n_i}B^{-t_2^i}v^{n_i-1}w^{m_i}v^{c_{21}-c_{22}+1}.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{A}(CZ_2C^{-1}) = \sum_i -t_2^i \bar{v}^{c_{22}-c_{21}-1}\bar{w}^{-m_i}v^{1-n_i} = \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-m_i}\bar{v}^{c_{22}-c_{21}-n_i}$.

$$\begin{aligned}
F^{-1}Z_2F &= v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1}\prod_i w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\\
&= \prod_i v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}w^{m_i}(w^{-1}vw^{-1})^{n_i}wB^{t_2^i}w^{-1}(w^{-1}vw^{-1})^{-n_i}w^{m_i}\tilde{\beta}^{t_1}v^{-t_2}\\
&= \prod_i v^{t_1-t_2}w^{-m_i}(wvw)^{n_i}w^{-1}v^{-t_1}\tilde{\beta}^{-t_1}B^{t_2^i}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_1}w(wvw)^{-n_i}w^{m_i}v^{-t_1+t_2}\\
&= \prod_i v^{t_1-t_2}w^{-m_i}(wvw)^{n_i}B^{-t_2^i}(wvw)^{-n_i}w^{m_i}v^{-t_1+t_2}.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{A}(F^{-1}Z_2F) = \sum_i -t_2^i\bar{v}^{t_1-t_2}\bar{w}^{-m_i}(\bar{w}\bar{v}\bar{w})^{n_i} = \sum_i -t_2^i\bar{w}^{-m_i}\bar{v}^{t_1-t_2+n_i}$. De modo análogo obtemos; $\mathcal{A}(F^{-1}Z_3^{-1}F) = \sum_i t_3^i\bar{w}^{-x_i}\bar{v}^{t_1-t_2+y_i}$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{A}$, na terceira equação do sistema obteremos;

$$\begin{cases}
\sum_i t_3^i\bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i t_3^i\bar{w}^{-x_i}\bar{v}^{t_1-t_2+y_i} + \sum_i -t_2^i\bar{w}^{-m_i}\bar{v}^{c_{22}-c_{21}-n_i} + \sum_i -t_2^i\bar{w}^{-m_i}\bar{v}^{t_1-t_2+n_i} +\\
\sum_{j=1}^{q}\bar{v}^{c_{22}-c_{21}-j} = 0.
\end{cases}$$

Observemos que; $Z_1 = Z_3 = 1$ e $Z_2 = \prod_{j=1}^{\frac{q}{2}}(v^{\frac{q}{2}-j+1}Bv^{-\frac{q}{2}+j-1})$, onde $q = c_{22}-c_{21}+t_2-t_1-1$, é uma solução para a equação abelianizada. Para verificar que a solução acima é uma solução para o sistema principal, primeiro, observemos que; $CZ_2C^{-1} = \prod_{j=1}^{\frac{q}{2}}(v^{c_{22}-c_{21}-\frac{q}{2}+j-1}B^{-1}v^{c_{21}-c_{22}+\frac{q}{2}-j+1})$, $F^{-1}Z_2F = \prod_{j=1}^{\frac{q}{2}}(v^{t_1-t_2}(wvw)^{\frac{q}{2}-j+1}B^{-1}(wvw)^{-\frac{q}{2}+j-1}v^{t_2-t_1})$ e $CFC^{-1}F = \prod_{j=1}^{q}(v^{c_{22}-c_{21}-j}Bv^{c_{21}-c_{22}+j})$. Assim, obteremos;

$$\begin{aligned}
&(CZ_2C^{-1})(CFC^{-1}F)(F^{-1}Z_2F)\\
&= \prod_{j=1}^{\frac{q}{2}}(v^{c_{22}-c_{21}-\frac{q}{2}+j-1}B^{-1}v^{c_{21}-c_{22}+\frac{q}{2}-j+1})\prod_{j=1}^{q}(v^{c_{22}-c_{21}-j}Bv^{c_{21}-c_{22}+j})\\
&\quad \prod_{j=1}^{\frac{q}{2}}(v^{t_1-t_2}(wvw)^{\frac{q}{2}-j+1}B^{-1}(wvw)^{-\frac{q}{2}+j-1}v^{t_2-t_1})\\
&= \prod_{j=\frac{q}{2}+1}^{q}(v^{c_{22}-c_{21}-j}Bv^{c_{21}-c_{22}+j})\prod_{j=1}^{\frac{q}{2}}(v^{t_1-t_2}(vB^{-1})^{\frac{q}{2}-j+1}B^{-1}(vB^{-1})^{-\frac{q}{2}+j-1}v^{t_2-t_1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{j=\frac{q}{2}+1}^{q} (v^{c_{22}-c_{21}-j} B v^{c_{21}-c_{22}+j})(v^{t_1-t_2}(vB^{-1})^{\frac{q}{2}} v^{-\frac{q}{2}} v^{t_2-t_1})\\
&= \prod_{j=\frac{q}{2}+1}^{q} (v^{c_{22}-c_{21}-j} B v^{c_{21}-c_{22}+j}) \prod_{j=1}^{\frac{q}{2}} (v^{t_1-t_2+j} B^{-1} v^{t_2-t_1-j})\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Portanto Z_1, Z_2 e Z_3 dados acima são uma solução para o sistema. Se $q < 0$ então rapidamente vemos que, $Z_1 = Z_3 = 1$ e $Z_2 = \prod_{j=1}^{\frac{q}{2}} (v^{\frac{q}{2}-j+1} B^{-1} v^{-\frac{q}{2}+j-1})$, são uma solução para o sistema. Logo, neste caso o sistema possui solução.

Caso $III.4$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

Neste caso podemos tomar; $A = 1$, $F = w^{-1}\tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0} w$. Temos;

$$
\begin{aligned}
CFC^{-1}F &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0} w w^{-1} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} w^{-1} \tilde{c_0}^{-1} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{-1} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} w^{-1} \tilde{c_0}^{-1} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{-1} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{\beta}^{-t_1} v^{-t_2} v^{-1} w v v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{-1} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}\\
&= v^{c_{22}-t_2-1} \tilde{\beta}^{-t_1} \tilde{\beta}^{c_{21}} w v^{1-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{-1} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}\\
&= v^{c_{22}-t_2-1} \tilde{\beta}^{-t_1} v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{21}} v^{1-c_{22}} w^{-1} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}\\
&= v^{c_{22}-t_2-1-c_{21}} v^{t_1} w v^{-t_1} v^{c_{21}+1-c_{22}} \tilde{\beta}^{-t_1} w^{-1} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}\\
&= v^{c_{22}-t_2-1-c_{21}} v^{t_1} w v^{-t_1} v^{c_{21}+1-c_{22}} v^{t_1} w v^{-t_1} v^{t_2}\\
&= v^{t_1-t_2} (v^{c_{22}-1-c_{21}} w v^{c_{21}+1-c_{22}} w) v^{t_2-t_1}.
\end{aligned}
$$

Assim, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CFC^{-1}F) = -1$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$, na terceira equação do sistema obteremos; $0 = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(Z_3(CZ_2^{-1})(CFC^{-1}F)(F^{-1}Z_3^{-1}F)(F^{-1}Z_2F)) = \bar{t_3} + \bar{t_2} - 1 + \bar{t_3} - \bar{t_2} = 2\bar{t_3} - 1$, que é um absurdo. Portanto, neste caso o sistema não possui solução.

Caso $III.4$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar; $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0}$. Assim, obteremos; $CFC^{-1}F = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} \tilde{c_0}^{-1} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{\beta}^{-t_1} v^{-t_2} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} = 1$. Logo, neste caso o sistema possui solução trivial. Observemos que este caso é equivalente ao caso $III.4$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 0$.

Caso $III.4$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar; $A = 1$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c}_0$. Temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c}_0\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c}_0{}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2} \\
&= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}v^{-t_2}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2} \\
&= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}})\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}v^{c_{22}}B^{-1}\tilde{\alpha}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}} \\
&= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}})\tilde{\beta}^{c_{21}}(w^{-1}vw^{-1})^{c_{22}}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}} \\
&= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}})v^{-c_{21}}(wvw)^{c_{22}}v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}})v^{-c_{22}} \\
&= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}})v^{-c_{21}}(vB^{-1})^{c_{22}}v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}})v^{-c_{22}} \\
&= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}})v^{-c_{21}}[(vB^{-1})^{c_{22}}v^{-c_{22}}]v^{c_{21}}(v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}}).
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CFC^{-1}F) = c_{21} - c_{22} + 1$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$, na terceira equação obteremos; $0 = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(Z_3(CZ_2^{-1}C^{-1})(CFC^{-1}F)(F^{-1}Z_3^{-1}F)(F^{-1}Z_2F))$ $= \bar{t_3} - \bar{t_2} + c_{21} - c_{22} + 1 + \bar{t_3} + \bar{t_2} = 2\bar{t_3} + 2(k_1 - k_2) + 1$, que é um absurdo. Logo, neste caso o sistema não possui solução. Passaremos agora, a tabela do caso $T.1$

Caso T.1.

$I)$ Caso $\phi_0(1,1)$.

Neste caso, temos as possíveis situações para o par de homomorfismos $(f_{1\#}, f_{2\#})$:

$I.1$, $(f_1(s_1, r_1, 2l+1, 0, 2k_1), f_2(s_2, r_2, 2l+1, 0, 2k_2))$
$I.2$, $(f_1(s_1, r_1, 2l+1, 0, 2k_1), f_2(s_2, 0, 2l+1, s_2, 2k_2+1))$
$I.3$, $(f_1(s_1, 0, 2l+1, s_1, 2k_1+1), f_2(s_2, r_2, 2l+1, 0, 2k_2))$
$I.4$, $(f_1(s_1, 0, 2l+1, s_1, 2k_1+1), f_2(s_2, 0, 2l+1, s_2, 2k_2+1))$,

onde $s_i \in \{0,1\}$, $r_i \geq 0$, $k_i, l \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1,2\}$. Para facilitar a notação, escreveremos $t = 2l+1$.

Caso $I.1$ com $s_1 = s_2 = 0$.

Neste caso temos $A = \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}$, $F = \tilde{\beta}^t(vw)^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}(vw)^{c_{22}}\tilde{c}_0$. Como t é ímpar e

c_{22} é par, então podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}$, $F = \tilde{\beta}^t v^t w$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Temos;

$$\begin{aligned}
AFAF^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{\beta}^t v^t w\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t v^t\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}\\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}(\tilde{\alpha}^{-r_1}v^t\tilde{\alpha}^{r_1})\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\beta}^t w^{r_2}\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}\\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^t\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}w^{-r_2}v^t v^{-t}\\
&= w^{r_2}(\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-t})\tilde{\beta}^t(w^{-r_1}vw^{-r_1})^t\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}w^{-r_2}\\
&= w^{r_2}(\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-t})v^{-t}(w^{r_1}vw^{r_1})^t v^t v^{-t}w^{-r_2}\\
&= w^{r_2}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-t}v^t v^{-t}(w^{r_1}vw^{r_1})^t w^{-r_2}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CAC^{-1}A^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}}\tilde{\alpha}^{-r_1}w^{-r_2}\\
&= v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w^{r_2}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}}\tilde{\alpha}^{-r_1}w^{-r_2}\\
&= v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{21}}w^{r_2}v^{c_{21}-c_{22}}\tilde{\alpha}^{-r_1}w^{-r_2}\\
&= v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1})\tilde{\alpha}^{r_1}v^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1}w^{r_2}\tilde{\alpha}^{r_1}v^{c_{21}-c_{22}}\tilde{\alpha}^{-r_1}w^{-r_2}\\
&= v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1})(w^{r_1}vw^{r_1})^{-c_{21}}w^{r_2}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}-c_{22}}w^{-r_2}\\
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-c_{21}}w^{r_2}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}-c_{22}}w^{-r_2}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{r_2}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}-c_{22}}w^{-r_2}\\
&= (v^{c_{22}-c_{21}}w^{r_2}v^{c_{21}-c_{22}}w^{-r_2})w^{r_2}[v^{c_{22}-c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}-c_{22}}]w^{-r_2}\\
&= [v^{c_{22}-c_{21}}, w^{r_2}]w^{r_2}[v^{c_{22}-c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}-c_{22}}]w^{-r_2}.
\end{aligned}$$

Da última igualdade obtemos; $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = r_1(c_{21}-c_{22})$. Também temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^t v^t w\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= v^{c_{22}}v^t\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\beta}^t wv^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= v^{c_{22}+t}\tilde{\beta}^{c_{21}+t}wv^{-c_{22}}v^{c_{21}}w^{-1}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= v^{c_{22}+t}v^{-c_{21}-t}w^{-1}v^{c_{21}+t}v^{c_{21}-c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}+t}w^{-1}v^{-c_{21}-t}\tilde{\beta}^{-c_{21}-t}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}+t}v^{c_{21}-c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}+t}w^{-1}v^{-c_{21}-t}\tilde{\beta}^{-c_{21}-t}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}+t}v^{c_{21}-c_{22}}v^{-c_{21}-t}wv^{c_{21}+t}v^{-c_{21}-t}\tilde{\beta}^{c_{21}+t}\tilde{\beta}^{-c_{21}-t}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}+t}v^{-c_{22}-t}w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= v^{c_{22}-c_{21}} w^{-1} v^{c_{21}-c_{22}} w \\ &= [v^{c_{22}-c_{21}}, w^{-1}]. \end{aligned}$$

Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$, na segunda equação do sistema obteremos; $0 = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(Z_3(CZ_1C^{-1})(CAC^{-1}A^{-1})(AZ_3^{-1}A^{-1})Z_1^{-1}) = \bar{t_3} + \bar{t_1} + r_1(c_{21} - c_{22}) - \bar{t_3} - \bar{t_1}$ $= r_1(c_{21} - c_{22})$. Logo, devemos ter $c_{22} - c_{21} = 0$ ou $r_1 = 0$. Se tivermos $c_{22} - c_{21} = 0$ então teremos $CAC^{-1}A^{-1} = 1 = CFC^{-1}F^{-1}$, e portanto nessa situação o sistema terá solução trivial.

Agora, analisaremos o sistema quando tivermos $r_1 = 0$ e $c_{22} - c_{21} = 2^n k$, k ímpar. Estudaremos o sistema abelianizado. Note que pelos processos de redução feitos no capítulo anterior, podemos supor $r_2 \geq 0$. Temos;

$$\begin{aligned} CZ_1C^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0} \prod_i w^{u_i} v^{v_i} B^{t_1^i} v^{-v_i} w^{-u_i} \tilde{c_0}^{-1} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \\ &= \prod_i \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} w^{u_i} v^{v_i} B^{t_1^i} v^{-v_i} w^{-u_i} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \\ &= \prod_i v^{c_{22}-c_{21}} w^{u_i} v^{v_i} B^{t_1^i} v^{-v_i} w^{-u_i} v^{c_{21}-c_{22}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AZ_3^{-1}A^{-1} &= w^{r_2} \prod_i w^{x_i} v^{y_i} B^{-t_3^i} v^{-y_i} w^{-x_i} w^{-r_2} \\ &= \prod_i w^{x_i+r_2} v^{y_i} B^{-t_3^i} v^{-y_i} w^{-r_2-x_i}. \end{aligned}$$

Assim, pelos resultados obtidos no começo desse capítulo obtemos; $\mathcal{A}(CZ_1C^{-1}) = \sum_i t_1^i \bar{v}^{c_{22}-c_{21}} \bar{w}^{u_i} \bar{v}^{v_i} = \sum_i t_1^i \bar{w}^{u_i} \bar{v}^{v_i+c_{22}-c_{21}}$, $\mathcal{A}(AZ_3^{-1}A^{-1}) = \sum_i -t_3^i \bar{w}^{x_i+r_2} \bar{v}^{y_i}$ e $\mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = \mathcal{A}([v^{c_{22}-c_{21}}, w^{r_2}]) = \sum_{i=1}^{r_2} \sum_{j=1}^{2^{n-1}k} -\bar{w}^i \bar{v}^{2^n k-2(j+1)} + \bar{w}^{i-1} \bar{v}^{2^n k-2j+1}$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{A}$, na segunda equação do sistema obteremos;

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i} \bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_3^i \bar{w}^{x_i+r_2} \bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{u_i} \bar{v}^{v_i} + \sum_i t_1^i \bar{w}^{u_i} \bar{v}^{v_i+c_{22}-c_{21}} + \\ \sum_{i=1}^{r_2} \sum_{j=1}^{2^{n-1}k} -\bar{w}^i \bar{v}^{2^n k-2(j+1)} + \bar{w}^{i-1} \bar{v}^{2^n k-2j+1} = 0. \end{array} \right.$$

Projetando a equação acima no subgrupo, H, gerado pelos elementos da forma

$\bar{w}^x\bar{v}^{2j}$, $x, j \in \mathbb{Z}$ obteremos a seguinte equação:

$$\begin{cases} \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{2y_i} + \sum_i -t_3^i \bar{w}^{x_i+r_2}\bar{v}^{2y_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{2v_i} + \sum_i t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{2(v_i+2^{n-1}k)} + \\ \sum_{i=1}^{r_2}\sum_{j=1}^{2^{n-1}k} -\bar{w}^i\bar{v}^{2(2^{n-1}k-j)} = 0. \end{cases}$$

Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}$, na equação acima obteremos; $-(r_2(2^{n-1}k)) = 0$. Logo, devemos ter $r_2 = 0$. Mas a situação em que temos, $r_1 = r_2 = 0$, já foi resolvida no caso; $T.2$, $I.1$ com $s_1 = s_2 = 0$.

Caso $I.1$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar $A = \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}$, $F = \tilde{\beta}^t v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c}_0$. Temos;

$$\begin{aligned} AFAF^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{\beta}^t v^t\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t} \\ &= w^{r_2}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\alpha}^{-r_1}v^t\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{\beta}^{-t}v^{-t} \\ &= w^{r_2}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^t\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}w^{-r_2}v^tv^{-t} \\ &= w^{r_2}(\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-t})\tilde{\beta}^t(w^{-r_1}vw^{-r_1})^t\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}w^{-r_2} \\ &= w^{r_2}(\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-t})v^{-t}(w^{r_1}vw^{r_1})^tv^tv^{-t}w^{-r_2} \\ &= w^{r_2}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-t}v^tv^{-t}(w^{r_1}vw^{r_1})^tv^tv^{-t}w^{-r_2} \\ &= w^{r_2}w^{-r_2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

$CFC^{-1}F^{-1} = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c}_0\tilde{\beta}^tv^t\tilde{c}_0{}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t} = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\beta}^tv^tv^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t} = 1$, e analogamente ao caso anterior obteremos;

$$CAC^{-1}A^{-1} = [v^{c_{22}-c_{21}}, w^{r_2}]w^{r_2}[v^{c_{22}-c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}-c_{22}}]w^{-r_2}.$$

Semelhantemente ao caso anterior, devemos ter $r_1 = 0$ ou $c_{22} - c_{21} = 0$. Se tivermos $c_{22} - c_{21} = 0$ então o sistema terá solução trivial. Por outro lado, se tivermos $r_1 = 0$ e $c_{22} - c_{21} \neq 0$ então deveremos ter $r_2 = 0$, mas essa situação já foi resolvida no caso, $T.2$, $I.1$.

Caso $I.1$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$.

$$\begin{aligned}
AFAF^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\alpha}^{-r_1}v^t\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-t})\tilde{\beta}^t(w^{-r_1}vw^{-r_1})^t\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\beta}^t w^{r_2}\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-t})v^{-t}(w^{r_1}vw^{r_1})^t v^t v^{-t}w^{-r_2}v^t v^{-t}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}(w^{r_1}v^t w^{r_1})^{-t}v^t v^{-t}(w^{r_1}vw^{r_1})^t\tilde{\alpha}^{-1}w^{-r_2} \\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}w^{-r_2} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\alpha}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})\tilde{\alpha}v^{-c_{22}}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}(wvw)^{c_{21}}(wvw)^{-c_{22}} \\
&= v^{c_{22}-c_{21}}(vB^{-1})^{c_{21}-c_{22}} \\
&= v^{c_{22}-c_{21}}(Bv^{-1})^{c_{22}-c_{21}}.
\end{aligned}$$

Do caso anterior obtemos; $CAC^{-1}A^{-1} = [v^{c_{22}-c_{21}}, w^{r_2}]w^{r_2}[v^{c_{22}-c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}-c_{22}}]w^{-r_2}$. Como no caso anterior, aplicando o homomorfismo $\mathcal{A}\circ\mathcal{E}$, na segunda equação deveremos ter $c_{22} - c_{21} = 0$ ou $r_1 = 0$. Se tivermos $c_{22} - c_{21} = 0$ então o sistema terá solução trivial. No caso em que tivermos $r_1 = 0$ e $c_{22} - c_{21} \neq 0$ então obteremos $r_2 = 0$, e essa situação já foi resolvida no caso, $T.2$, $I.1$.

Caso $I.2$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1}$, $F = \tilde{\beta}^t v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$.

$$\begin{aligned}
CAC^{-1}A^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\alpha}^{r_1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1})\tilde{\alpha}^{r_1}v^{-c_{22}}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-c_{22}} \\
&= v^{c_{22}-c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}-c_{22}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = r_1(c_{22} - c_{21})$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$, na segunda equação do sistema obteremos; $\bar{t_3} + \bar{t_1} + r_1(c_{22} - c_{21}) - \bar{t_3} - \bar{t_1} = 0$, ou seja, $r_1(c_{22} - c_{21}) = 0$. Visto que $c_{22} - c_{21}$ é ímpar então devemos ter $r_1 = 0$. Portanto, o estudo de solução para esse caso se reduz ao estudo do caso, $T.2$, $I.1$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$, já resolvido.

Caso $I.2$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1}$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0}$.

Observemos que o elemento, $CFC^{-1}F^{-1}$, é mesmo que no caso, $T.2$, com $t_1 = t_2 = t$, por aquele caso obtemos; $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CFC^{-1}F^{-1}) = c_{22} - c_{21}$. Aplicando o homomorfismo, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$, na terceira equação do sistema obteremos; $2\bar{t_3} + c_{22} - c_{21} = 0$, ou seja, $2\bar{t_3} + 2k_2 - 2k_1 + 1 = 0$, que é um absurdo. Portanto, neste caso o sistema não possui solução. Observemos que esse caso é equivalente ao caso $I.3$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Caso $I.2$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 0$.

Neste caso podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1}$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t w^{-1} v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} w^{-1} v^{c_{22}} \tilde{c_0}$.

Se tivermos $r_1 = 0$ então teremos $A = 1$, logo, esse caso se reduz ao caso, $T.2$, $I.2$. Portanto, nesta situação o sistema possui solução. Suporemos agora, $r_1 > 0$. Temos;

$$\begin{aligned}
CAC^{-1}A^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}} w^{-1} v^{c_{22}} \tilde{c_0} \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{c_0}^{-1} v^{-c_{22}} w \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} w^{-1} v^{c_{22}} \tilde{\alpha}^{r_1} v^{-c_{22}} w \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} v^{-c_{22}} v^{-c_{21}} w v^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{21}} v^{c_{22}} (\tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1}) \tilde{\alpha}^{r_1} v^{-(c_{22}+c_{21})} w v^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{21}} v^{c_{22}} v^{-c_{21}} (w^{r_1} v w^{r_1})^{c_{21}} (w^{r_1} v w^{r_1})^{-(c_{22}+c_{21})} w \tilde{\alpha}^{r_1} v^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{22}} (w^{r_1} v w^{r_1})^{-c_{22}} w (w^{r_1} v w^{r_1})^{c_{21}} \\
&= v^{-c_{21}} w^{-1} (v^{c_{22}} (w^{r_1} v w^{r_1})^{-c_{22}}) w v^{c_{21}} v^{-c_{21}} ((w^{r_1} v w^{r_1})^{c_{21}} v^{-c_{21}}) v^{c_{21}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = r_1(c_{22} - c_{21})$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$, na segunda equação do sistema obteremos; $\bar{t_3} + \bar{t_2} + r_1(c_{22} - c_{21}) - \bar{t_3} - \bar{t_2} = 0$, ou seja, $r_1(c_{22} - c_{21}) = 0$. Como c_{21} é par e c_{22} é ímpar, então devemos ter $r_1 = 0$, mas isso é um absurdo devido a nossa hipótese. Portanto, se $r_1 > 0$, então o sistema não possui solução.

Caso $I.3$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

Neste caso podemos tomar; $A = w^{r_2}$, $F = \tilde{\beta}^t w^{-1} v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0}$. Temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0} \tilde{\beta}^t w^{-1} v^t \tilde{c_0}^{-1} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} v^{-t} w \tilde{\beta}^{-t} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{\beta}^t w^{-1} v^t v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} v^{-t} w \tilde{\beta}^{-t} \\
&= v^{c_{22}} \tilde{\beta}^{c_{21}+t} w^{-1} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w \tilde{\beta}^{-t} \\
&= v^{c_{22}} v^{-c_{21}-t} w^{-1} v^{c_{21}+t} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{c_{21}+t} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w \tilde{\beta}^{-t} \\
&= v^{c_{22}-c_{21}-t} w^{-1} v^{c_{21}+t-c_{22}} \tilde{\beta}^t w \tilde{\beta}^{-t} \\
&= (v^{c_{22}-c_{21}-t} w^{-1} v^{c_{21}+t-c_{22}} w^{-1})(w v^{-t} w^{-1} v^t) \\
&= [v^{c_{22}-c_{21}-t}, w^{-1}](w v^{-t} w^{-1} v^t).
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CFC^{-1}F^{-1}) = 1$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$ na terceira equação do sistema obteremos; $2(\bar{t_3} - \bar{t_2}) + 1 = 0$. Logo, neste caso o sistema não possui solução. Observemos que este caso é equivalente ao caso $I.2$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

O estudo de solução no caso $I.4$ é equivalente ao estudo do caso, $T.2$, $I.4$, pois neste caso temos; $r_1 = r_2 = 0$. Portanto, este caso está resolvido. Passaremos agora ao caso II.

$II)$ Caso $\phi_1(1,1)$

Neste caso temos uma única situação para o par de homomorfismos $(f_{1\#}, f_{2\#})$:

$$II.1, (f_1(s_1, 2c_{11}+1, 2l+1, c_{11}, 2k_1), f_2(s_2, 2c_{12}+1, 2l+1, c_{12}, 2k_2)),$$

onde $s_i \in \{0,1\}$, $c_{1i} \geq 0$, $k_i, l \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1,2\}$.

Caso $II.1$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1} w^{r_2}$, $F = \tilde{\beta}^t v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} \tilde{c_0}$. Temos;

$$\begin{aligned}
CAC^{-1}A^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} \tilde{c_0} \tilde{\alpha}^{r_1} w^{r_2} \tilde{c_0}^{-1} w^{-c_{12}} \tilde{\alpha}^{-c_{11}} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} \tilde{\alpha}^{r_1} w^{r_2} w^{-c_{12}} \tilde{\alpha}^{-c_{11}} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{\alpha}^{r_1} w^{r_2} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= v^{c_{22}} \tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{r_1} w^{r_2} \tilde{\beta}^{-c_{21}} v^{-c_{22}} w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= v^{c_{22}} \tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} v^{-c_{21}} w^{r_2} v^{c_{21}-c_{22}} \tilde{\alpha}^{-r_1} w^{-r_2} \\
&= v^{c_{22}} (\tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1})(\tilde{\alpha}^{r_1} v^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1}) w^{r_2} (\tilde{\alpha}^{r_1} v^{c_{21}-c_{22}} \tilde{\alpha}^{-r_1}) w^{-r_2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-c_{21}}w^{r_2}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}-c_{22}}w^{-r_2}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{r_2}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}-c_{22}}w^{-r_2}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{r_2}v^{c_{21}-c_{22}}w^{-r_2}(w^{r_2}v^{c_{22}-c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}-c_{22}}w^{-r_2})\\
&= [v^{c_{22}-c_{21}}, w^{r_2}](w^{r_2}v^{c_{22}-c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}-c_{22}}w^{-r_2}).
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = r_1(c_{21}-c_{22})$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$, na segunda equação obteremos; $\bar{t_3}+\bar{t_1}+r_1(c_{21}-c_{22})-\bar{t_3}-\bar{t_1}=0$. Assim, devemos ter $r_1(c_{21}-c_{22})=0$. Visto que $r_1 = 2c_{11}+1$, então devemos ter $c_{21}-c_{22}=0$. Disso obtemos $CAC^{-1}A^{-1}=1$. Usando $c_{21}=c_{22}$ obtemos;

$$
\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1}A^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{t}v^{t}\tilde{c_0}^{-1}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1})^{t}(wv)^{t}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}.
\end{aligned}
$$

Rapidamente, por indução, mostramos a seguinte igualdade:

$$
(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1})^{t} = [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(wvw)^{-2j}B^{-1}(wvw)^{2j}]\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t}.
$$

Assim, obteremos;

$$
\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1}A^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1})^{t}(wv)^{t}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(wvw)^{-2j}B^{-1}(wvw)^{2j}]\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t}(wv)^{t}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}\\
&\quad v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{21}}w^{c_{12}}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2j}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2j}]\\
&\quad \tilde{\alpha}^{c_{11}+1}\tilde{\beta}^{t}(wv)^{t}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= v^{c_{21}}v^{-c_{21}}w^{c_{12}}v^{c_{21}}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(v^{-c_{21}}w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2j}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}w^{-c_{11}}v^{c_{21}}\\
&\quad v^{-c_{21}}B^{-1}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}w^{c_{11}}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2j}]v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}\\
&\quad \tilde{\beta}^{t}(wv)^{t}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= w^{c_{12}}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2j}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2j}]\\
&\quad v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}\tilde{\beta}^{t}(wv)^{t}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= w^{c_{12}}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2j}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2j}] \\
&\quad v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}v^{-t}(w^{-1}v)^t w^{c_{12}}v^t\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{-c_{11}}\tilde{\beta}^{-t}v^{-c_{21}-t}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{c_{12}}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2j}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2j}] \\
&\quad v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}(\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}v^{-t}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1})(\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}(w^{-1}v)^t\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1})\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}w^{c_{12}} \\
&\quad v^t(\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{-c_{11}}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-c_{11}})(\tilde{\alpha}^{c_{11}}v^{-c_{21}-t}\tilde{\alpha}^{-c_{11}})\tilde{\alpha}^{c_{11}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{c_{12}}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2j}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2j}] \\
&\quad v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^t w^{c_{12}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1} \\
&\quad v^t v^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^t(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-t-c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{c_{12}}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2j}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2j}] \\
&\quad v^{c_{21}}v^{-c_{21}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^t w^{c_{12}}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1} \\
&\quad (w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}})\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1}w^{-r_2}.
\end{aligned}$$

Chamando

$$A_t = [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2j}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2j}](w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t}$$
$$(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^t w^{-1},$$

então podemos escrever, $CFC^{-1}F^{-1}A^{-1}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1}A^{-1} &= w^{c_{12}}A_t w^{c_{12}+1}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{21}} \\
&\quad (w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1}w^{-r_2} \\
&= w^{c_{12}}A_t w^{c_{12}+1}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-c_{21}}v^{-c_{21}}v^{c_{21}} \\
&\quad (w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{c_{21}}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1}w^{-r_2} \\
&= w^{c_{12}}A_t w^{c_{12}+1}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1}w^{-r_2} \\
&= w^{c_{12}}A_t w^{c_{12}+1}v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1})(\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}v^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1})w^{-r_2} \\
&= w^{c_{12}}A_t w^{c_{12}+1}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{c_{21}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-c_{21}}w^{-2c_{12}-1} \\
&= w^{c_{12}}A_t w^{-c_{12}}.
\end{aligned}$$

Agora, mostraremos por indução em t que $A_t = 1$ para todo $t = 2l+1$. Primeiramente,

$$\begin{aligned}
A_1 &= [\prod_{j=0}^{0}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2j}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2j}] \\
&\quad (w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-1}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})w^{-1} \\
&= w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-1}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})w^{-1} \\
&= w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}w^{-c_{11}-1}v^{-1}w^{-c_{11}-1}w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1}w^{-1} \\
&= w^{-c_{11}}B^{-1}(w^{-1}v^{-1}w^{-1}v)w^{c_{11}} \\
&= w^{-c_{11}}B^{-1}Bw^{c_{11}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Dado, $t = 2l + 1$, então temos;

$$\begin{aligned}
A_t &= [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2j}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2j}](w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t} \\
&\quad (w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{t}w^{-1} \\
&= [\prod_{j=0}^{\frac{t-3}{2}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2j}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2j}](w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2l} \\
&\quad w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2l}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2l-1}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{t}w^{-1} \\
&= [[\prod_{j=0}^{\frac{t-3}{2}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2j}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2j}](w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t+2} \\
&\quad (w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{t-2}w^{-1}]w(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{-t+2}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{t-2}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2l} \\
&\quad w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-1}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{t}w^{-1} \\
&= A_{t-2}\ \ w(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{-t+2}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{2l-1}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-2l}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}} \\
&\quad (w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-1}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{t}w^{-1} \\
&= A_{t-2}\ \ w(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{-t}w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1}w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-1}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}} \\
&\quad (w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-1}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{t}w^{-1} \\
&= A_{t-2}\ \ w(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{-t}w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1}w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1}w^{-c_{11}-1}v^{-1}w^{-c_{11}-1}w^{-c_{11}} \\
&\quad B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-1}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{t}w^{-1} \\
&= A_{t-2}\ \ w(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{-t}w^{c_{11}}vB^{-1}w^{c_{11}}w^{-c_{11}-1}v^{-1}w^{-c_{11}-1}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{t}w^{-1} \\
&= A_{t-2}\ \ w(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{-t}w^{c_{11}}vv^{-1}wvww^{c_{11}}w^{-c_{11}-1}v^{-1}w^{-c_{11}-1}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{t}w^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_{t-2}\ w(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{t}w^{-1}\\
&= A_{t-2}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelas igualdades acima, obteremos; $A_t = 1$ para todo $t = 2l+1$. Note que;

$$\begin{aligned}
AFAF^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{\beta}^{t}v^{t}\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{t}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\alpha}^{-r_1}v^{t}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\beta}^{t}w^{r_2}\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}\\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{t}\tilde{\alpha}^{r_1}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^{t}\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}w^{-r_2}v^{t}v^{-t}\\
&= w^{r_2}(\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{t}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-t})\tilde{\beta}^{t}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^{t}\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}w^{-r_2}\\
&= w^{r_2}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-t}v^{t}v^{-t}(w^{r_1}vw^{r_1})^{t}v^{t}v^{-t}w^{-r_2}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Assim, neste caso o sistema possui solução trivial. Observemos que este caso é equivalente ao caso $II.1$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 0$.

Caso $II.1$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

Neste caso podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}$, $F = \tilde{\beta}^{t}v^{t}w$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}\tilde{c_0}$. Temos;

$$\begin{aligned}
AFAF^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{\beta}^{t}v^{t}w\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{\beta}^{t}v^{t}\tilde{\alpha}^{r_1}ww^{r_2}w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{\beta}^{t}v^{t}\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= 1,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade vem do caso anterior. Observemos que, como os elementos, A e C, são os mesmos do caso anterior então obteremos; $CAC^{-1}A^{-1} = [v^{c_{22}-c_{21}}, w^{r_2}]$ $(w^{r_2}v^{c_{22}-c_{21}}(w^{r_1}vw^{-r_1})^{c_{21}-c_{22}}w^{-r_2})$. Portanto, $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = r_1(c_{21}-c_{22})$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$, na segunda equação do sistema obteremos; $\bar{t_3} + \bar{t_1} + r_1(c_{21}-c_{22}) - \bar{t_3} - \bar{t_1} = 0$. Logo, devemos ter $r_1(c_{21}-c_{22}) = 0$. Visto que $r_1 = 2c_{11}+1$, então devemos ter $c_{21}-c_{22} = 0$. Assim, obteremos $CAC^{-1}A^{-1} = 1$. Usando, $c_{21} = c_{22}$, temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1}A^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{t}v^{t}w\tilde{c_0}^{-1}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&\quad w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} (\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1})^t (wv)^t w w^{-c_{12}} \tilde{\alpha}^{-c_{11}} v^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{-1} v^{-t} \tilde{\beta}^{-t} \\
&\quad w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} (wvw)^{-2j} B^{-1} (wvw)^{2j}] \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^t (wv)^t w^{1-c_{12}} \tilde{\alpha}^{-c_{11}} \\
&\quad v^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{-1} v^{-t} \tilde{\beta}^{-t} w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= v^{c_{21}} \tilde{\beta}^{c_{21}} w^{c_{12}} [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^{-2j} w^{-c_{11}} B^{-1} w^{c_{11}} (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^{2j}] \\
&\quad \tilde{\alpha}^{c_{11}+1} \tilde{\beta}^t (wv)^t w^{1-c_{12}} \tilde{\alpha}^{-c_{11}} v^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{-1} v^{-t} \tilde{\beta}^{-t} w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{c_{12}} [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^{-2j} w^{-c_{11}} B^{-1} w^{c_{11}} (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^{2j}] \\
&\quad v^{c_{21}} \tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{c_{11}+1} \tilde{\beta}^t (wv)^t w^{1-c_{12}} \tilde{\alpha}^{-c_{11}} v^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{-1} v^{-t} \tilde{\beta}^{-t} w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1}.
\end{aligned}
$$

Chamando, $A_t = [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^{-2j} w^{-c_{11}} B^{-1} w^{c_{11}} (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^{2j}]$, obteremos;

$$
\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1}A^{-1} &= w^{c_{12}} A_t v^{c_{21}} \tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{c_{11}+1} \tilde{\beta}^t (wv)^t w^{1-c_{12}} \tilde{\alpha}^{-c_{11}} v^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{-1} v^{-t} \\
&\quad \tilde{\beta}^{-t} w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{c_{12}} A_t v^{c_{21}} \tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{c_{11}+1} v^{-t} (w^{-1} v)^t v^t v^{-t} w^{c_{12}-1} v^t \tilde{\beta}^t \tilde{\alpha}^{-c_{11}} v^{-c_{21}} \\
&\quad \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{-t} v^{-t} w v^t v^{-t} w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{c_{12}} A_t v^{c_{21}} \tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{c_{11}+1} v^{-t} (w^{-1} v)^t w^{c_{12}-1} v^t \tilde{\beta}^t \tilde{\alpha}^{-c_{11}} \tilde{\beta}^{-t} v^{-(t+c_{21})} \\
&\quad \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{1-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{c_{12}} A_t v^{c_{21}} \tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{c_{11}+1} v^{-t} (w^{-1} v)^t w^{c_{12}-1} v^t (\tilde{\beta}^t \tilde{\alpha}^{-c_{11}} \tilde{\beta}^{-t} \tilde{\alpha}^{-c_{11}}) \\
&\quad \tilde{\alpha}^{c_{11}} v^{-(t+c_{21})} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{1-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{c_{12}} A_t v^{c_{21}} \tilde{\beta}^{c_{21}} (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^{-t} (w^{c_{11}} v w^{c_{11}+1})^t w^{c_{12}-1} \tilde{\alpha}^{c_{11}+1} v^t \\
&\quad v^{-t} (w^{c_{11}} v w^{c_{11}})^t (w^{c_{11}} v w^{c_{11}})^{-(t+c_{21})} \tilde{\alpha}^{c_{11}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w^{1-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{c_{12}} A_t v^{c_{21}} \tilde{\beta}^{c_{21}} (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^{-t} (w^{c_{11}} v w^{c_{11}+1})^t w^{c_{12}-1} \tilde{\alpha}^{c_{11}+1} \\
&\quad (w^{c_{11}} v w^{c_{11}})^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{c_{11}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-c_{11}} w^{1-r_2} \tilde{\alpha}^{-c_{11}-1} \\
&= w^{c_{12}} A_t v^{c_{21}} v^{-c_{21}} (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^{-t} (w^{c_{11}} v w^{c_{11}+1})^t w^{c_{12}-1} v^{c_{21}} \tilde{\beta}^{c_{21}} \\
&\quad \tilde{\alpha}^{c_{11}+1} (w^{c_{11}} v w^{c_{11}})^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{c_{11}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-c_{11}} w^{1-r_2} \tilde{\alpha}^{-c_{11}-1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= w^{c_{12}}A_t(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^t w^{c_{12}-1}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}\\
&\quad (w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}})\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1}w^{1-r_2}\\
&= w^{c_{12}}A_t(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^t w^{c_{12}-1}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\\
&\quad v^{-c_{21}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-c_{21}}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1}w^{1-r_2}\\
&= w^{c_{12}}A_t(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^t w^{c_{12}-1}v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}\\
&\quad \tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1})(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-c_{21}}w^{1-r_2}\\
&= w^{c_{12}}A_t(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^t w^{c_{12}-1}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}\\
&\quad (w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{c_{21}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-c_{21}}w^{1-r_2}\\
&= w^{c_{12}}[A_t(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^t w^{-1}]w^{-c_{12}}.
\end{aligned}$$

Analogamente ao caso anterior obtemos, $[A_t(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^t w^{-1}] = 1$, para todo t. Assim, teremos $CFC^{-1}F^{-1}A^{-1} = 1$. Portanto, neste caso o sistema possui solução trivial.

Caso $II.1$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}\tilde{c}_0$. Temos;

$$\begin{aligned}
AFAF^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}^{r_1+1}\tilde{\beta}^t v^t\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}w^{-r_2}v^t v^{-t}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}^{r_1+1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^t\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-t})v^{-t}(w^{r_1}vw^{r_1})^t v^t v^{-t}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-t}v^t v^{-t}(w^{r_1}vw^{r_1})^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como os elementos, A e C, são os mesmos do caso anterior, então obteremos; $CAC^{-1}A^{-1}$ $= [v^{c_{22}-c_{21}}, w^{r_2}](w^{r_2}v^{c_{22}-c_{21}}(w^{r_1}vw^{-r_1})^{c_{21}-c_{22}}w^{-r_2})$. Portanto, $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = r_1(c_{21}-c_{22})$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$, na segunda equação obteremos; $\bar{t_3}+\bar{t_1}+r_1(c_{21}-c_{22})-\bar{t_3}-\bar{t_1} = 0$. Logo, devemos ter $r_1(c_{21}-c_{22}) = 0$. Visto que $r_1 = 2c_{11}+1$, então devemos ter; $c_{21}-c_{22} = 0$. Disso obtemos; $CAC^{-1}A^{-1} = 1$. Usando, $c_{21} = c_{22}$, obtemos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1}A^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t}v^{t}\tilde{c_0}^{-1}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1}w^{-r_2} \\
&\quad \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}w^{c_{12}}(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1})^{t}(wv)^{t}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}w^{-r_2} \\
&\quad \tilde{\alpha}^{-r_1-1} \\
&= v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w^{c_{12}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(wvw)^{-2j}B^{-1}(wvw)^{2j}]\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t}(wv)^{t}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}} \\
&\quad v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1-1} \\
&= v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w^{c_{12}}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-2j}w^{-c_{11}-1}B^{-1}w^{c_{11}+1} \\
&\quad (w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{2j}]\tilde{\alpha}^{c_{11}+2}v^{-t}(w^{-1}v)^{t}v^{t}v^{-t}w^{c_{12}}v^{t}\tilde{\beta}^{t}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}} \\
&\quad v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1-1}.
\end{aligned}$$

Chamando, $A_t = [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-2j}w^{-c_{11}-1}B^{-1}w^{c_{11}+1}(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{2j}]$, temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1}A^{-1} &= v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w^{c_{12}}A_t\tilde{\alpha}^{c_{11}+2}v^{-t}(w^{-1}v)^{t}w^{c_{12}}v^{t}\tilde{\beta}^{t}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}\tilde{\beta}^{-t}v^{-(t+c_{21})}\tilde{\beta}^{-c_{21}} \\
&\quad w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1-1} \\
&= v^{c_{21}}v^{-c_{21}}w^{c_{12}}A_tv^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-t}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+2})^{t}w^{c_{12}} \\
&\quad (w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{t}\tilde{\alpha}^{c_{11}+2}(\tilde{\beta}^{t}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-c_{11}})\tilde{\alpha}^{c_{11}}v^{-(t+c_{21})}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-r_2} \\
&\quad \tilde{\alpha}^{-r_1-1} \\
&= w^{c_{12}}A_tv^{c_{21}}v^{-c_{21}}(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-t}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+2})^{t}w^{c_{12}} \\
&\quad (w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{t}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+2}v^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-(t+c_{21})} \\
&\quad \tilde{\alpha}^{c_{11}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1-1} \\
&= w^{c_{12}}A_t(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-t}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+2})^{t}w^{c_{12}}(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{t} \\
&\quad v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-t}\tilde{\alpha}^{c_{11}+2}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}} \\
&\quad \tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}})w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-2} \\
&= w^{c_{12}}A_t(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-t}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+2})^{t}w^{c_{12}}(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{t} \\
&\quad v^{c_{21}}v^{-c_{21}}(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-t}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+2}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}} \\
&\quad v^{-c_{21}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{c_{21}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= w^{c_{12}}A_t(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-t}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+2})^t w^{c_{12}}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+2}\\
&\quad (w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-c_{21}}v^{-c_{21}}v^{c_{21}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{c_{21}}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-2}w^{-r_2}\\
&= w^{c_{12}}A_t(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-t}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+2})^t w^{c_{12}}v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+2}\\
&\quad \tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-2})(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-c_{21}}w^{-r_2}\\
&= w^{c_{12}}A_t(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-t}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+2})^t w^{c_{12}}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}\\
&\quad (w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{c_{21}}(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-c_{21}}w^{-r_2}\\
&= w^{c_{12}}[A_t(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-t}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+2})^t w^{-1}]w^{-c_{12}}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma como fizemos no caso anterior, podemos mostrar que, $[A_t(w^{c_{11}+2}vw^{c_{11}+2})^{-t}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+2})^t w^{-1}] = 1$, para todo t. Assim, obteremos $CFC^{-1}F^{-1}A^{-1} = 1$. Logo, o sistema terá solução trivial. Passaremos agora, ao caso $T.1$, III.

$III)$ Caso $\phi_0(1, -1)$.

Neste caso temos as seguintes situações para o par de homomorfismos $(f_{1\#}, f_{2\#})$:

$$\begin{aligned}
&III.1, \quad (f_1(s_1, r_1, t, 0, 2k_1), f_2(s_2, r_2, t, 0, 2k_2))\\
&III.2, \quad (f_1(s_1, r_1, t, 0, 2k_1), f_2(s_2, 0, t, s_2, 2k_2 + 1))\\
&III.3, \quad (f_1(s_1, 0, t, s_1, 2k_1 + 1), f_2(s_2, r_2, t, 0, 2k_2))\\
&III.4, \quad (f_1(s_1, 0, t, s_1, 2k_1 + 1), f_2(s_2, 0, t, s_2, 2k_2 + 1)),
\end{aligned}$$

onde $t = 2l + 1$, $s_i \in \{0, 1\}$, $r_i \geq 0$, k_i e $l \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, 2\}$.

Caso $III.1$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

Neste caso podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}$, $F = \tilde{\beta}^t v^t w$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^t v^t w\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\beta}^t v^t w\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}v^{-1}w^{-1}vv^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\beta}^t v^t w\\
&= v^{c_{22}-t-1}\tilde{\beta}^{c_{21}-t}w^{-1}\tilde{\beta}^{t-c_{21}}v^{1-c_{22}+t}w\\
&= v^{c_{22}-t-1}v^{t-c_{21}}wv^{c_{21}-t}v^{1-c_{22}+t}w\\
&= v^{c_{22}-c_{21}-1}wv^{c_{21}-c_{22}+1}w.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(CFC^{-1}F) = -1$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$, na terceira equação obteremos; $\bar{t_3} - \bar{t_2} - 1 + \bar{t_3} - \bar{t_2} = 0$, ou seja, $2(\bar{t_3} - \bar{t_2}) = 1$ que é um absurdo. Assim, neste caso o sistema não possui solução.

Caso $III.1$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1} w^{r_2}$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0}$. Temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t \tilde{c_0}^{-1} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} B^{-1} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t} v^{-t} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t \\
&= v^{c_{22}-c_{21}} B^{-1} v^{c_{21}} \tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t} v^{-t} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t \\
&= v^{c_{22}-c_{21}} B^{-1} v^{c_{21}} (\tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-1})(\tilde{\alpha} v^{-t-c_{22}} \tilde{\alpha}^{-1})(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t) v^t \\
&= v^{c_{22}-c_{21}} B^{-1} v^{c_{21}} v^{-c_{21}} (wvw)^{c_{21}} (wvw)^{-t-c_{22}} (wvw)^t v^{-t} v^t \\
&= v^{c_{22}-c_{21}} B^{-1} (wvw)^{c_{21}-c_{22}} \\
&= v^{c_{22}-c_{21}} v^{-1} (wvw)(wvw)^{c_{21}-c_{22}} \\
&= v^{c_{22}-c_{21}-1} (wvw)^{c_{21}-c_{22}+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CFC^{-1}F) = c_{22} - c_{21} - 1$. Agora, aplicando o homomorfismo $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$, na terceira equação obteremos; $\bar{t_3} - \bar{t_2} + c_{22} - c_{21} - 1 + \bar{t_3} - \bar{t_2} = 0$, ou seja, $2(\bar{t_3} - \bar{t_2} + k_2 - k_1) = 1$ que é um absurdo. Logo, neste caso o sistema não possui solução.

Caso $III.1$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Neste caso podemos tomar $A = \tilde{\alpha}^{r_1} w^{r_2}$, $F = \tilde{\beta}^t v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0}$. Temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0} \tilde{\beta}^t v^t \tilde{c_0}^{-1} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^t v^t \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{\beta}^{-t} v^{-t} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^t v^t \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AFAF^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1} w^{r_2} \tilde{\beta}^t v^t \tilde{\alpha}^{r_1} w^{r_2} v^{-t} \tilde{\beta}^{-t} \\
&= w^{r_2} \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^t \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\alpha}^{-r_1} v^t \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^{-t} \tilde{\beta}^t w^{r_2} \tilde{\beta}^{-t} v^{-t} \\
&= w^{r_2} \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^t \tilde{\alpha}^{r_1} (w^{-r_1} v w^{-r_1})^t \tilde{\beta}^{-t} v^{-t} w^{-r_2} v^t v^{-t} \\
&= w^{r_2} (\tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^t \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^{-t}) \tilde{\beta}^t (w^{-r_1} v w^{-r_1})^t \tilde{\beta}^{-t} v^{-t} w^{-r_2} \\
&= w^{r_2} (w^{r_1} v w^{r_1})^{-t} v^t v^{-t} (w^{r_1} v w^{r_1})^t v^t v^{-t} w^{-r_2} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CAC^{-1}A^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}(B^{-1}\tilde{\alpha})^{r_1}v^{-1}w^{-r_2}vv^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-r_1}\tilde{\beta}^{-1}v^{-1}w^{-r_2}v^{1-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-r_1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-r_1})\tilde{\alpha}^{r_1}v^{-1}w^{-r_2}v^{1-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1}w^{-r_2}\\
&= v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{-1}(w^{r_1}vw^{r_1})(w^{r_1}vw^{r_1})^{-1}w^{-r_2}(w^{r_1}vw^{r_1})^{1-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\\
&\quad (\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1})w^{-r_2}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}-1}w^{-r_2}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{1-c_{22}}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}}w^{-r_2}\\
&= (v^{c_{22}-c_{21}-1}w^{-r_2}v^{c_{21}-c_{22}+1}w^{-r_2})w^{r_2}(v^{c_{22}-c_{21}-1}(w^{r_1}vw^{r_1})^{c_{21}-c_{22}+1})w^{-r_2}.
\end{aligned}$$

Pelos processos de redução feitos anteriormente podemos tomar $c_{21}, c_{22} \in \{0, 2\}$. Se tivermos $c_{21} = c_{22}$ então teremos $CAC^{-1}A^{-1} = v^{-1}w^{-r_2}vw^{-r_2}w^{r_2}v^{-1}w^{r_1}vw^{r_1}\ w^{-r_2} = v^{-1}w^{r_1-r_2}vw^{r_1-r_2}$. Nesse caso se tivermos, $r_1 = r_2$, então o sistema terá solução trivial. Para analisar os outros casos estudaremos o sistema abelianizado. Primeiramente suporemos $c_{21} = c_{22}$ e $r_2 - r_1 > 0$. Temos;

$$\begin{aligned}
CZ_1C^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}(\prod_i w^{u_i}v^{v_i}B^{t_1^i}v^{-v_i}w^{-u_i})\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}(\prod_i v^{-1}w^{-u_i}vv^{-v_i}B^{-t_1^i}v^{v_i}v^{-1}w^{u_i}v)v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\\
&= \prod_i v^{c_{22}-c_{21}-1}w^{-u_i}v^{1-v_i}B^{-t_1^i}v^{v_i-1}w^{u_i}v^{c_{21}-c_{22}+1}\\
&= \prod_i v^{-1}w^{-u_i}v^{1-v_i}B^{-t_1^i}v^{v_i-1}w^{u_i}v.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{A}(CZ_1C^{-1}) = \sum_i -t_1^i\bar{w}^{u_i}\bar{v}^{-v_i}$. Observemos que,

$$\begin{aligned}
AZ_3^{-1}A^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}(\prod_i w^{x_i}v^{y_i}B^{-t_3^i}v^{-y_i}w^{-x_i})w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \prod_i w^{r_2+x_i}(w^{r_1}vw^{r_1})^{y_i}w^{-r_1}B^{-t_3^i}w^{r_1}\ (w^{r_1}vw^{r_1})^{-y_i}w^{-x_i-r_2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{A}(AZ_3^{-1}A^{-1}) = \sum_i -t_3^i\bar{w}^{r_2+x_i+(-1)^{y_i+1}r_1}\bar{v}^{y_i}$. Também temos; $\mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = \mathcal{A}(v^{-1}w^{-(r_2-r_1)}vw^{-(r_2-r_1)}) = \sum_{j=1}^{r_2-r_1}\bar{w}^j$. Agora, aplicando o homomorfismo $\mathcal{A}$, na segunda equação obteremos;

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_3^i \bar{w}^{r_2+x_i+(-1)^{y_i+1}r_1}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{-v_i} + \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{r_2-r_1} \bar{w}^j = 0. \end{cases}$$

Seja, H, o subgrupo de $\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ gerado pelos elementos da forma; $\bar{w}^{(r_2-r_1)j}, j \in \mathbb{Z}$. Projetando a equação acima em H obteremos;

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{i|y_i=0,\\ x_i=(r_2-r_1)\bar{x}_i}} t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_{\substack{i|y_i=0,\\ x_i=(r_2-r_1)\bar{x}_i}} -t_3^i \bar{w}^{r_2-r_1+x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_{\substack{i|v_i=0,\\ u_i=(r_2-r_1)\bar{u}_i}} -t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \\ \displaystyle\sum_{\substack{i|v_i=0,\\ u_i=(r_2-r_1)\bar{u}_i}} -t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{-v_i} + \bar{w}^{r_2-r_1} = 0. \end{cases}$$

Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}$, na equação acima obteremos;

$$-2\left(\sum_{\substack{i|v_i=0,\\ u_i=(r_2-r_1)l_i-1}} t_1^i\right) + 1 = 0,$$

que é um absurdo. Assim, nesta situação o sistema não possui solução. O caso em que $r_2 - r_1 < 0$, é análogo ao caso anterior. Logo, se tivermos $c_{21} = c_{22}$ e $r_2 \neq r_1$ então o sistema não terá solução.

Analisaremos agora, a situação $c_{22} = 2$ e $c_{21} = 0$. Nesta situação temos $CAC^{-1}A^{-1} = vw^{-(r_1+r_2)}v^{-1}w^{-(r_1+r_2)}$. Pelos processos de redução, estamos supondo $r_1 + r_2 > 0$. Assim temos; $\mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r_1+r_2} \bar{w}^{j-1}\bar{v}$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{A}$, na segunda equação do sistema obteremos;

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_3^i \bar{w}^{r_2+x_i+(-1)^{y_i+1}r_1}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{2-v_i} + \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{r_1+r_2} \bar{w}^{j-1}\bar{v} = 0. \end{cases}$$

Seja, H, o subgrupo de $\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ gerado pelos elementos da forma; $\bar{w}^{(r_1+r_2)j}\bar{v}, j \in \mathbb{Z}$.

Projetando a equação acima em H obteremos;

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{i|y_i=1,\\ x_i=(r_1+r_2)\bar{x}_i}} t_3^i\bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_{\substack{i|y_i=1,\\ x_i=(r_1+r_2)\bar{x}_i}} -t_3^i\bar{w}^{r_2+r_1+x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_{\substack{i|v_i=1,\\ u_i=(r_1+r_2)\bar{u}_i}} -t_1^i\bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \\ \displaystyle\sum_{\substack{i|v_i=1,\\ u_i=(r_1+r_2)\bar{u}_i}} -t_1^i\bar{w}^{u_i}\bar{v}^{2-v_i} + \bar{v} = 0. \end{cases}$$

Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}$, na equação acima obteremos;

$$-2\left(\sum_{\substack{i|v_i=1,\\ u_i=(r_1+r_2)l_i-1}} t_1^i\right) + 1 = 0,$$

que é um absurdo. Portanto, nesta situação o sistema também não possui solução.

Agora, estudaremos a situação; $c_{21} = 2$ e $c_{22} = 0$. Nesta situação temos;

$$\begin{aligned} CAC^{-1}A^{-1} &= (v^{-3}w^{-r_2}v^3w^{-r_2})w^{r_2}v^{-3}(w^{r_1}vw^{r_1})^3w^{-r_2} \\ &= v^{-1}[v^{-2}, w^{-r_2}]v(v^{-1}w^{-r_2}vw^{-r_2})w^{r_2}v^{-3}(w^{r_1}vw^{r_1})^3w^{-r_2}. \end{aligned}$$

Observemos que $\mathcal{A}(v^{-1}[v^{-2}, w^{-r_2}]v) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r_2}(\bar{w}^j\bar{v}^{-2} - \bar{w}^{j-1}\bar{v}^{-1})$, $\mathcal{A}(v^{-1}w^{-r_2}vw^{-r_2}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r_2}\bar{w}^j$ e $\mathcal{A}(w^{r_2}v^{-3}((w^{r_1}vw^{r_1})^3v^{-3})v^3w^{-r_2}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3}(-\bar{w}^{r_2}\bar{v}^{j-3} + \sum_{i=1}^{r_1-1} -\bar{w}^{r_2+(-1)^j i}\bar{v}^{j-3})$.
Assim, aplicando o homomorfismo $\mathcal{A}$, na segunda equação do sistema obteremos;

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_i t_3^i\bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_3^i\bar{w}^{r_2+x_i+(-1)^{y_i+1}r_1}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_1^i\bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \sum_i -t_1^i\bar{w}^{u_i}\bar{v}^{-2-v_i} + \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{r_2}(\bar{w}^j\bar{v}^{-2} - \bar{w}^{j-1}\bar{v}^{-1}) + \sum_{j=1}^{r_2}\bar{w}^j + \sum_{j=1}^{3}(-\bar{w}^{r_2}\bar{v}^{j-3} + \sum_{i=1}^{r_1-1} -\bar{w}^{r_2+(-1)^j i}\bar{v}^{j-3}) = 0. \end{cases}$$

Seja, H, o subgrupo de $\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ gerado pelos elementos da forma; $\bar{w}^{(r_1+r_2)j-1}\bar{v}^{-1}, j \in \mathbb{Z}$. Projetando a equação acima em H obteremos;

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{i|y_i=-1,\\ x_i=(r_1+r_2)j_i-1}} t_3^i\bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_{\substack{i|y_i=-1,\\ x_i=(r_1+r_2)j_i-1}} -t_3^i\bar{w}^{r_2+r_1+x_i}\bar{v}^{y_i} + \\ \displaystyle\sum_{\substack{i|v_i=-1,\\ u_i=(r_1+r_2)l_i-1}} -t_1^i\bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \sum_{\substack{i|v_i=-1,\\ u_i=(r_1+r_2)l_i-1}} -t_1^i\bar{w}^{u_i}\bar{v}^{-2-v_i} - \bar{w}^{r_1+r_2-1}\bar{v}^{-1} = 0. \end{cases}$$

Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}$, na equação acima obteremos;

$$-2\left(\sum_{\substack{i|v_i=-1,\\ u_i=(r_1+r_2)l_i-1}} t_1^i\right)-1=0,$$

que é um absurdo. Assim, nesta situação o sistema não possui solução.

Caso $III.2$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

Observemos que pelos processos de redução feitos anteriormente, podemos tomar $c_{22} = 1$ e $c_{21} \in \{0, 2\}$. Logo , nesse caso podemos tomar $A = \tilde{\alpha}^{r_1}$, $F = \tilde{\beta}^t v^t w$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v\tilde{c}_0 w$.

Note que se $r_1 = 0$ então teremos $A = 1$, nessa condição o problema já foi resolvido anteriormente no caso $T.2$, $III.2$. Assim, suporemos $r_1 > 0$. Nessa situação temos;

$$\begin{aligned}
AFAF^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t v^t w\tilde{\alpha}^{r_1} w^{-1} v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= \tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t v^t\tilde{\alpha}^{r_1} v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= \tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}(w^{-r_1} v w^{-r_1})^t\tilde{\beta}^{-t} v^{-t}\\
&= (\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-t})\tilde{\beta}^t(w^{-r_1} v w^{-r_1})^t\tilde{\beta}^{-t} v^{-t}\\
&= (w^{r_1} v w^{r_1})^{-t} v^t v^{-t}(w^{r_1} v w^{r_1})^t v^t v^{-t}\\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CAC^{-1}A^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v\tilde{c}_0 w\tilde{\alpha}^{r_1} w^{-1}\tilde{c}_0^{\,-1} v^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v\tilde{c}_0\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{c}_0^{\,-1} v^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v(B^{-1}\tilde{\alpha})^{r_1} v^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{-1})^{r_1} v^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-r_1}\tilde{\beta}^{-1} v^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-r_1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-r_1})(\tilde{\alpha}^{r_1} v^{-1}\tilde{\alpha}^{-r_1})\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v v^{-1}(w^{r_1} v w^{r_1})(w^{r_1} v w^{r_1})^{-1}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= v^{-c_{21}}(w^{r_1} v w^{r_1})^{c_{21}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
CFC^{-1}F &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v \tilde{c_0} w \tilde{\beta}^t v^t w w^{-1} \tilde{c_0}^{-1} v^{-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^t v^t w \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v v^{-1} w^{-1} v \tilde{\beta}^{-t} v^{-t} v^{-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^t v^t w \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} w^{-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} w \\
&= v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{21}} w \\
&= [v^{-c_{21}}, w^{-1}].
\end{aligned}
$$

Portanto, se tivermos $c_{21} = 0$ então o sistema terá solução trivial. Agora, analisaremos o caso $c_{21} = 2$. Olharemos para o sistema abelianizado. Temos;

$$
\begin{aligned}
AZ_2A^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1} (\prod_i w^{m_i} v^{n_i} B^{t_2^i} v^{-n_i} w^{-m_i}) \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \prod_i w^{m_i} (w^{r_1} v w^{r_1})^{n_i} w^{-r_1} B^{t_2^i} w^{r_1} (w^{r_1} v w^{r_1})^{-n_i} w^{-m_i}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{A}(AZ_2A^{-1}) = \sum_i t_2^i \bar{w}^{m_i + (-1)^{n_i+1} r_1} \bar{v}^{n_i}$. Também temos;

$$
\begin{aligned}
F^{-1}Z_2F &= w^{-1} v^{-t} \tilde{\beta}^{-t} (\prod_i w^{m_i} v^{n_i} B^{t_2^i} v^{-n_i} w^{-m_i}) \tilde{\beta}^t v^t w^1 \\
&= \prod_i w^{-1} v^{-t} v^t w^{-m_i} v^{-t} v^{n_i} v^t w B^{-t_2^i} w^{-1} v^{-t} v^{-n_i} v^t w^{m_i} v^{-t} v^t w \\
&= \prod_i w^{-1-m_i} v^{n_i} w B^{-t_2^i} w^{-1} v^{-n_i} w^{m_i+1}.
\end{aligned}
$$

Assim, $\mathcal{A}(F^{-1}Z_2F) = \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-m_i - 1 + (-1)^{n_i}} \bar{v}^{n_i}$.

$$
\begin{aligned}
CZ_2C^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v \tilde{c_0} w (\prod_i w^{m_i} v^{n_i} B^{t_2^i} v^{-n_i} w^{-m_i}) w^{-1} \tilde{c_0}^{-1} v^{-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \\
&= \prod_i \tilde{\beta}^{c_{21}} v v^{-1} w^{-1-m_i} v v^{-n_i} B^{-t_2^i} v^{n_i} v^{-1} w^{m_i+1} v v^{-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \\
&= \prod_i v^{-c_{21}} w^{-1-m_i} v^{c_{21}} v^{1-n_i} v^{-c_{21}} B^{-t_2^i} v^{c_{21}} v^{n_i-1} v^{-c_{21}} w^{m_i+1} v^{c_{21}} \\
&= \prod_i v^{-c_{21}} w^{-1-m_i} v^{1-n_i} B^{-t_2^i} v^{n_i-1} w^{m_i+1} v^{c_{21}}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{A}(CZ_2C^{-1}) = \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-1-m_i} \bar{v}^{-1-n_i}$, pois estamos no caso $c_{21} = 2$. Note que; $\mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = \mathcal{A}(v^{-2}((w^{r_1} v w^{r_1})^2 v^{-2}) v^2) = \sum_{j=1}^{2} (-\bar{v}^{j-2} + \sum_{i=1}^{r_1-1} -\bar{w}^{i(-1)^{j+1}} \bar{v}^{j-2})$, e

$[v^{-2}, w^{-1}] = (v^{-1}wBw^{-1}v)B^{-1}$. Portanto, aplicando o homomorfismo $\mathcal{A}$, na terceira equação do sistema obteremos;

$$\begin{cases} \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_3^i \bar{w}^{-(1+x_i)+(-1)^{y_i}}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-(1+m_i)}\bar{v}^{-(1+n_i)} + \\ \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-(1+m_i)+(-1)^{n_i}}\bar{v}^{n_i} + \bar{w}^{-1}\bar{v}^{-1} - 1 = 0. \end{cases}$$

Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}$, na equação acima obteremos; $-2\bar{t_2} = 0$, ou seja, $\bar{t_2} = 0$. Agora, consideremos H, o subgrupo de $\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ gerado pelos elementos da forma; $\bar{w}^x\bar{v}^{2y}, x, y \in \mathbb{Z}$. Projetando a equação acima em H obteremos;

$$\begin{cases} \sum_{i|y_i=2j'} t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_{i|y_i=2j'} -t_3^i \bar{w}^{-x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_{i|n_i=2j''+1} -t_2^i \bar{w}^{-(1+m_i)}\bar{v}^{-(1+n_i)} + \\ \sum_{i|n_i=2j''} -t_2^i \bar{w}^{-m_i}\bar{v}^{n_i} - 1 = 0. \end{cases}$$

Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}$, nessa equação obteremos; $\bar{t_2} = -1$, que é um absurdo, pois vimos acima que $\bar{t_2} = 0$. Portanto, neste caso o sistema não possui solução.

Caso $III.2$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Observemos que, pelos processos de redução feitos anteriormente, podemos tomar; $c_{22} = 1$ e $c_{21} \in \{0, 2\}$. Logo , neste caso podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1}$, $F = \tilde{\beta}^t v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v \tilde{c_0}$. Note que se $r_1 = 0$ então teremos $A = 1$, nessas condições o problema já foi resolvido anteriormente. Assim, suporemos, de agora em diante, $r_1 > 0$. Temos;

$$\begin{aligned} AFAF^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t v^t \tilde{\alpha}^{r_1} v^{-t}\tilde{\beta}^{-t} \\ &= (\tilde{\alpha}^{r_1} v^t \tilde{\alpha}^{-r_1})(\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-t})v^{-t} \\ &= (w^{r_1} v w^{r_1})^t (w^{r_1} v w^{r_1})^{-t} v^t v^{-t} \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CFC^{-1}F &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v \tilde{c_0} \tilde{\beta}^t v^t \tilde{c_0}^{-1} v^{-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^t v^t \\ &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v \tilde{\beta}^{-t} v^{-t} v^{-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^t v^t \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CAC^{-1}A^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v \tilde{c_0} \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{c_0}^{-1} v^{-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v (B^{-1}\tilde{\alpha})^{r_1} v^{-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v (\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{-1})^{r_1} v^{-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v (\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-r_1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-r_1})(\tilde{\alpha}^{r_1} v^{-1} \tilde{\alpha}^{-r_1}) \tilde{\beta}^{-c_{21}} (\tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1}) \\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}} v v^{-1} (w^{r_1} v w^{r_1})(w^{r_1} v w^{r_1})^{-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} v^{-c_{21}} (w^{r_1} v w^{r_1})^{c_{21}} \\
&= v^{-c_{21}} (w^{r_1} v w^{r_1})^{c_{21}}.
\end{aligned}$$

Logo, se tivermos $c_{21} = 0$ então o sistema terá solução trivial. Para estudar a situação $c_{21} = 2$, olharemos para o sistema abelianizado. Temos;

$$\begin{aligned}
CZ_1C^{-1} &= \tilde{\beta}^2 v \tilde{c_0} (\prod_i w^{u_i} v^{v_i} B^{t_1^i} v^{-v_i} w^{-u_i}) \tilde{c_0}^{-1} v^{-1} \tilde{\beta}^{-2} \\
&= \prod_i \tilde{\beta}^2 v v^{-1} w^{-u_i} v v^{-v_i} B^{-t_1^i} v^{v_i} v^{-1} w^{u_i} v v^{-1} \tilde{\beta}^{-2} \\
&= \prod_i v^{-2} w^{-u_i} v^{1-v_i} B^{-t_1^i} v^{v_i - 1} w^{u_i} v^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{A}(CZ_1C^{-1}) = \sum_i -t_1^i \bar{v}^{-2} \bar{w}^{-u_i} \bar{v}^{1-v_i} = \sum_i -t_1^i \bar{w}^{-u_i} \bar{v}^{-1-v_i}$. Analogamente ao caso anterior temos; $\mathcal{A}(AZ_3^{-1}A^{-1}) = \sum_i -t_3^i \bar{w}^{x_i + (-1)^{y_i+1} r_1} \bar{v}^{y_i}$. Observemos que o termo $CAC^{-1}A^{-1}$ é o mesmo que no caso anterior. Assim, temos $\mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = \sum_{j=1}^{2} (-\bar{v}^{j-2} + \sum_{i=1}^{r_1 - 1} -\bar{w}^{i(-1)^{j+1}} \bar{v}^{j-2})$.

$$\begin{aligned}
FA^{-1}Z_1AF^{-1} &= \tilde{\beta}^t v^t \tilde{\alpha}^{-r_1} (\prod_i w^{u_i} v^{v_i} B^{t_1^i} v^{-v_i} w^{-u_i}) \tilde{\alpha}^{r_1} v^{-t} \tilde{\beta}^{-t} \\
&= \prod_i \tilde{\beta}^t v^t w^{u_i} (w^{-r_1} v w^{-r_1})^{v_i} w^{r_1} B^{t_1^i} w^{r_1} (w^{-r_1} v w^{-r_1})^{-v_i} w^{-u_i} v^{-t} \tilde{\beta}^{-t} \\
&= \prod_i w^{-u_i} (w^{r_1} v w^{r_1})^{v_i} w^{1-r_1} B^{-t_1^i} w^{r_1 - 1} (w^{r_1} v w^{r_1})^{-v_i} w^{u_i}.
\end{aligned}$$

Logo, temos $\mathcal{A}(FA^{-1}Z_1AF^{-1}) = \sum_i -t_1^i \bar{w}^{-u_i} \bar{v}^{v_i} \bar{w}^{1-r_1} = \sum_i -t_1^i \bar{w}^{-u_i + (-1)^{v_i}(1-r_1)} \bar{v}^{v_i}$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{A}$ nas primeira e segunda equações do sistema, respectivamente, obteremos;

$$\begin{cases}
\sum_i t_1^i \bar{w}^{u_i} \bar{v}^{v_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{-u_i + (-1)^{v_i}(1-r_1)} \bar{v}^{v_i} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i} \bar{v}^{n_i} + \\
\sum_i t_2^i \bar{w}^{m_i + (-1)^{n_i+1} r_1} \bar{v}^{n_i} = 0.
\end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i} \bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_3^i \bar{w}^{x_i+(-1)^{y_i+1} r_1} \bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{u_i} \bar{v}^{v_i} + \\ \sum_i -t_1^i \bar{w}^{-u_i} \bar{v}^{-1-v_i} + \sum_{j=1}^{2} (-\bar{v}^{j-2} + \sum_{i=1}^{r_1-1} -\bar{w}^{i(-1)^{j+1}} \bar{v}^{j-2}) = 0. \end{cases}$$

Observemos que $Z_1 = \prod_{j=1}^{r_1} w^{1-j} B^{-1} w^{j-1} = v^{-1} w^{r_1} v w^{r_1}$, $Z_2 = Z_3 = 1$ é uma solução para sistema abelianizado, mais ainda, como $Z_2 = Z_3 = 1$ então a terceira equação do sistema é automaticamente satisfeita. Usando as contas acima e os resultados do começo deste capítulo obtemos; $FA^{-1} Z_1 A F^{-1} = \prod_{j=1}^{r_1} (w^{j-r_1} B w^{r_1-j}) = Z_1^{-1}$ e

$$\begin{aligned} & Z_3 (C Z_1 C^{-1}) C A C^{-1} A^{-1} (A Z_3^{-1} A^{-1}) Z_1^{-1} \\ = \ & \prod_{j=1}^{r_1} (v^{-2} w^{j-1} v B v^{-1} w^{1-j} v^2) v^{-2} (w^{r_1} v w^{r_1})^2 w^{-r_1} v^{-1} w^{-r_1} v \\ = \ & v^{-2} v w^{-r_1} v^{-1} w^{-r_1} v^2 v^{-2} w^{r_1} v w^{r_1} v \\ = \ & 1. \end{aligned}$$

Assim, Z_1, Z_2 e Z_3 dados acima são uma solução para o sistema.

Caso $III.2$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 0$.

Neste caso podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1}$, $F = \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^t v^t w$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v \tilde{c}_0 w$. Note que pelos processos de redução feitos no capítulo 3 podemos tomar $c_{22} = 1$ e $c_{21} \in \{0, 2\}$. De modo análogo ao caso $s_1 = s_2 = 0$ temos;

$$AFAF^{-1} = 1, \qquad CAC^{-1}A^{-1} = v^{-c_{21}} (w^{r_1} v w^{r_1})^{c_{21}} \quad e$$

$$\begin{aligned} CFC^{-1}F &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v \tilde{c}_0 w \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^t v^t w w^{-1} \tilde{c}_0^{-1} v^{-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^t v^t w \\ &= \tilde{\beta}^{c_{21}} v v^{-1} w^{-1} v B^{-1} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^{-t} v^{-t} v^{-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^t v^t w \\ &= \tilde{\beta}^{c_{21}} w^{-1} v \tilde{\beta} \tilde{\alpha}^{-1} \tilde{\beta}^{-1} \tilde{\beta}^{-t} v^{-t-1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^t v^t w \\ &= v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{21}} v \tilde{\beta}^{c_{21}+1} \tilde{\alpha}^{-1} \tilde{\beta}^{-(c_{21}+1)} v^{-t-1} \tilde{\beta}^{-t} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^t v^t w \\ &= v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{21}+1} (\tilde{\beta}^{c_{21}+1} \tilde{\alpha}^{-1} \tilde{\beta}^{-(c_{21}+1)} \tilde{\alpha}^{-1}) \tilde{\alpha} v^{-t-1} \tilde{\alpha}^{-1} (\tilde{\alpha} \tilde{\beta}^{-t} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^t) v^t w \\ &= v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{21}+1} v^{-(c_{21}+1)} (wvw)^{c_{21}+1} (wvw)^{-t-1} (wvw)^t v^{-t} v^t w \\ &= v^{-c_{21}} w^{-1} (wvw)^{c_{21}} w \\ &= [v^{-c_{21}}, w^{-1}] w^{-1} v^{-c_{21}} (wvw)^{c_{21}} w. \end{aligned}$$

Se tivermos $c_{21} = 0$ então o sistema terá solução trivial. Analisaremos agora, a situação, $c_{21} = 2$. Nesta situação temos; $CFC^{-1}F = -1 - \bar{w}^{-1}$ e $\mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = \sum_{j=1}^{2}(-\bar{v}^{-2+j} + \sum_{i=1}^{r_1-1} -\bar{w}^{i(-1)^{j+1}}\bar{v}^{-2+j})$. Olharemos agora, para o sistema abelianizado.

$$\begin{aligned}
CZ_1C^{-1} &= \tilde{\beta}^2 v\tilde{c}_0 w(\prod_i w^{u_i}v^{v_i}B^{t_1^i}v^{-v_i}w^{-u_i})w^{-1}\tilde{c}_0^{-1}v^{-1}\tilde{\beta}^{-2} \\
&= \prod_i \tilde{\beta}^2 vv^{-1}w^{-1-u_i}vv^{-v_i}B^{-t_1^i}v^{v_i}v^{-1}w^{1+u_i}vv^{-1}\tilde{\beta}^{-2} \\
&= \prod_i v^{-2}w^{-1-u_i}v^2v^{1-v_i}v^{-2}B^{-t_1^i}v^2v^{-1+v_i}v^{-2}w^{1+u_i}v^2 \\
&= \prod_i v^{-2}w^{-1-u_i}v^{1-v_i}B^{-t_1^i}v^{-1+v_i}w^{1+u_i}v^2.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{A}(CZ_1C^{-1}) = \sum_i -t_1^i\bar{v}^{-2}\bar{w}^{-1-u_i}\bar{v}^{1-v_i} = -t_1^i\bar{w}^{-1-u_i}\bar{v}^{-1-v_i}$.

$$\begin{aligned}
AZ_3^{-1}A^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1}\prod_i w^{x_i}v^{y_i}B^{-t_3^i}v^{-y_i}w^{-x_i}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \prod_i w^{x_i}(w^{r_1}vw^{r_1})^{y_i}w^{-r_1}B^{-t_3^i}w^{r_1}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-y_i}w^{-x_i}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{A}(AZ_3^{-1}A^{-1}) = \sum_i -t_3^i\bar{w}^{x_i+(-1)^{y_i+1}r_1}\bar{v}^{y_i}$.

$$\begin{aligned}
FA^{-1}Z_1AF^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t w\tilde{\alpha}^{-r_1}\prod_i w^{u_i}v^{v_i}B^{t_1^i}v^{-v_i}w^{-u_i}\tilde{\alpha}^{r_1}w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \prod_i \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t w^{1+u_i}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^{v_i}w^{r_1}B^{t_1^i}w^{-r_1}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^{-v_i}w^{-1-u_i} \\
&\quad v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \prod_i \tilde{\alpha}w^{-1-u_i}(w^{r_1}vw^{r_1})^{v_i}w^{1-r_1}B^{-t_1^i}w^{r_1-1}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-v_i}w^{1+u_i}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \prod_i w^{-1-u_i}(w^{r_1+1}vw^{r_1+1})^{v_i}w^{-r_1}B^{-t_1^i}w^{r_1}(w^{r_1+1}vw^{r_1+1})^{-v_i}w^{1+u_i}.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{A}(FA^{-1}Z_1AF^{-1}) = \sum_i -t_1^i\bar{w}^{-1-u_i}\bar{v}^{v_i}\bar{w}^{-r_1} = \sum_i -t_1^i\bar{w}^{-1-u_i+(-1)^{v_i+1}r_1}\bar{v}^{v_i}$.

$$\begin{aligned}
F^{-1}Z_2F &= w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1}\prod_i w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t w \\
&= \prod_i w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}w^{-m_i}(w^{-1}vw^{-1})^{n_i}wB^{t_2^i}w^{-1}(w^{-1}vw^{-1})^{-n_i}w^{m_i}\tilde{\beta}^t v^t w \\
&= \prod_i w^{m_i-1}(wvw)^{n_i}B^{-t_2^i}(wvw)^{-n_i}w^{-m_i+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{A}(F^{-1}Z_2F) = \sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i-1}\bar{v}^{n_i}$. De modo análogo temos; $\mathcal{A}(CZ_2C^{-1}) = -t_2^i \bar{w}^{-1-m_i}\bar{v}^{-1-n_i}$, $\mathcal{A}(AZ_2A^{-1}) = \sum_i t_2^i \bar{w}^{m_i+(-1)^{n_i+1}r_1}\bar{v}^{n_i}$ e $\mathcal{A}(F^{-1}Z_3^{-1}F) = \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i-1}\bar{v}^{y_i}$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{A}$, nas primeira, segunda e terceira equações do sistema, respectivamente, obteremos;

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_i t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{-1-u_i+(-1)^{v_i+1}r_1}\bar{v}^{v_i} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i}\bar{v}^{n_i} + \\ \sum_i t_2^i \bar{w}^{m_i+(-1)^{n_i+1}r_1}\bar{v}^{n_i} = 0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_3^i \bar{w}^{x_i+(-1)^{y_i+1}r_1}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{-1-u_i}\bar{v}^{-1-v_i} + \\ \sum_i -t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \sum_{j=1}^{2}(-\bar{v}^{-2+j} + \sum_{i=1}^{r_1-1} -\bar{w}^{i(-1)^{j+1}}\bar{v}^{-2+j}) = 0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i-1}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-1-m_i}\bar{v}^{-1-n_i} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i-1}\bar{v}^{n_i} \\ -1 - \bar{w}^{-1} = 0. \end{array}\right.$$

Observemos que $Z_1 = \prod_{j=1}^{r_1} w^{-j}B^{-1}w^j = w^{-1}v^{-1}w^{r_1}vw^{r_1}w$, $Z_2 = 1$ *e* $Z_3 = B$ são uma solução para o sistema abelianizado. Temos que Z_1, Z_2 e Z_3 também formam uma solução para o sistema. A seguir verificaremos a segunda equação. Das equações acima e dos resultados demonstrados no começo deste capítulo obtemos;

$$\begin{aligned} & Z_3(CZ_1C^{-1})CAC^{-1}A^{-1}(AZ_3^{-1}A^{-1})Z_1^{-1} \\ = \ & B\prod_{j=1}^{r_1}(v^{-2}w^{j-1}vBv^{-1}w^{1-j}v^2)v^{-2}(w^{r_1}vw^{r_1})^2w^{-r_1}B^{-1}w^{r_1}w^{-1}w^{-r_1}v^{-1}w^{-r_1}vw \\ = \ & Bv^{-2}vw^{-r_1}v^{-1}w^{-r_1}v^2v^{-2}w^{r_1}vw^{r_1}w^{r_1}vw^{r_1}w^{-r_1}B^{-1}w^{-1}v^{-1}w^{-r_1}vw \\ = \ & Bv^{-2}vw^{r_1}vB^{-1}w^{-1}v^{-1}w^{-r_1}vw \\ = \ & w^{-1}v^{-1}w^{-1}vv^{-2}vw^{r_1}vv^{-1}wvww^{-1}v^{-1}w^{-r_1}vw \\ = \ & w^{-1}v^{-1}w^{-1}w^{r_1}ww^{-r_1}vw \\ = \ & 1. \end{aligned}$$

A verificação das outras equações se faz modo análogo. Observemos que nesta situação estamos supondo $r_1 > 0$, pois o caso $r_1 = 0$ já foi resolvido no caso $T.2$.

Caso $III.2$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Observemos que, pelos processos de redução feitos anteriormente, podemos tomar; $c_{22} = 1$ e $c_{21} \in \{0, 2\}$. Logo, neste caso podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1}$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v \tilde{c}_0$. De modo análogo ao caso $III.2$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$ obteremos; $AFAF^{-1} = 1$ e $CAC^{-1}A^{-1} = v^{-c_{21}}(w^{r_1} v w^{r_1})^{c_{21}}$. Também, de modo análogo ao caso $III.1$ com $s_1 = s_2 = 1$ obteremos $CFC^{-1}F = v^{-c_{21}}(wvw)^{c_{21}}$. Portanto, se tivermos $c_{21} = 0$ então o sistema terá solução trivial. Agora, estudaremos a situação $c_{21} = 2$. Olharemos para o sistema abelianizado. Temos; $\mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = \sum_{j=1}^{2}(-\bar{v}^{-2+j} + \sum_{i=1}^{r_1-1} -\bar{w}^{i(-1)^{j+1}}\bar{v}^{-2+j})$ e $\mathcal{A}(CFC^{-1}F) = -\bar{v}^{-1} - 1$.

$$\begin{aligned}
CZ_1C^{-1} &= \tilde{\beta}^2 v \tilde{c}_0 \prod_i w^{u_i} v^{v_i} B^{t_1^i} v^{-v_i} w^{-u_i} \tilde{c}_0{}^{-1} v^{-1} \tilde{\beta}^{-2} \\
&= \prod_i \tilde{\beta}^2 v v^{-1} w^{-u_i} v v^{-v_i} B^{-t_1^i} v^{v_i} v^{-1} w^{u_i} v v^{-1} \tilde{\beta}^{-2} \\
&= \prod_i v^{-2} w^{-u_i} v^{1-v_i} B^{-t_1^i} v^{v_i-1} w^{u_i} v^2.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{A}(CZ_1C^{-1}) = \sum_i -t_1^i \bar{v}^{-2} \bar{w}^{-u_i} \bar{v}^{1-v_i} = \sum_i -t_1^i \bar{w}^{-u_i} \bar{v}^{-1-v_i}$. Analogamente aos casos anteriores temos; $AZ_3^{-1}A^{-1} = \prod_i w^{x_i}(w^{r_1} v w^{r_1})^{y_i} w^{-r_1} B^{-t_3^i} w^{r_1} (w^{r_1} v w^{r_1})^{-y_i} w^{-x_i}$. Portanto, $\mathcal{A}(AZ_3^{-1}A^{-1}) = \sum_i -t_3^i \bar{w}^{x_i + (-1)^{y_i+1} r_1} \bar{v}^{y_i}$.

$$\begin{aligned}
F^{-1}Z_3^{-1}F &= v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1} \prod_i w^{x_i} v^{y_i} B^{-t_3^i} v^{-y_i} w^{-x_i} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t \\
&= \prod_i v^{-t}\tilde{\beta}^{-t} w^{x_i} (w^{-1} v w^{-1})^{y_i} w B^{-t_3^i} w^{-1} (w^{-1} v w^{-1})^{-y_i} w^{-x_i} \tilde{\beta}^t v^t \\
&= \prod_i w^{-x_i} (wvw)^{y_i} B^{t_3^i} (wvw)^{-y_i} w^{-x_i}.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{A}(F^{-1}Z_3^{-1}F) = \sum_i t_3^i \bar{w}^{-x_i} \bar{v}^{y_i}$.

$$\begin{aligned}
FA^{-1}Z_1AF^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t \tilde{\alpha}^{-r_1} \prod_i w^{u_i} v^{v_i} B^{t_1^i} v^{-v_i} w^{-u_i} \tilde{\alpha}^{r_1} v^{-t} \tilde{\beta}^{-t} \tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \prod_i \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t w^{u_i} (w^{r_1} v w^{r_1})^{v_i} w^{r_1} B^{t_1^i} w^{-r_1} (w^{r_1} v w^{r_1})^{-v_i} w^{-u_i} v^{-t} \tilde{\beta}^{-t} \tilde{\alpha}^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_i \tilde{\alpha} w^{-u_i}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^{v_i} w^{-r_1} w B^{-t_1^i} w^{-1} w^{r_1}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^{-v_i} w^{u_i}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \prod_i w^{-u_i}(w^{1-r_1}vw^{1-r_1})^{v_i} w^{-r_1} B^{-t_1^i} w^{r_1}(w^{1-r_1}vw^{1-r_1})^{-v_i} w^{u_i}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\mathcal{A}(FA^{-1}Z_1AF^{-1}) = \sum_i -t_1^i \bar{w}^{-u_i}\bar{v}^{v_i}\bar{w}^{-r_1} = \sum_i -t_1^i \bar{w}^{-u_i+(-1)^{v_i+1}r_1}\bar{v}^{v_i}$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{A}$, nas primeira, segunda e terceira equações do sistema, respectivamente, obteremos;

$$
\begin{cases}
\sum_i t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{-u_i+(-1)^{v_i+1}r_1}\bar{v}^{v_i} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i}\bar{v}^{n_i} + \\
\sum_i t_2^i \bar{w}^{m_i+(-1)^{n_i+1}r_1}\bar{v}^{n_i} = 0.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_3^i \bar{w}^{x_i+(-1)^{y_i+1}r_1}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{-u_i}\bar{v}^{-1-v_i} + \\
\sum_{j=1}^{2}(-\bar{v}^{-2+j} + \sum_{i=1}^{r_1-1} -\bar{w}^{i(-1)^{j+1}}\bar{v}^{-2+j}) = 0.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_3^i \bar{w}^{-x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-m_i}\bar{v}^{n_i} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{-m_i}\bar{v}^{-1-n_i} + \\
-\bar{v}^{-1} - 1 = 0.
\end{cases}
$$

Observemos que $Z_1 = \prod_{j=1}^{r_1} w^{1-j}B^{-1}w^{j-1} = v^{-1}w^{r_1}vw^{r_1}$, $Z_2 = B^{-1}$ e $Z_3 = 1$ são uma solução para o sistema abelianizado. Note que Z_1, Z_2 e Z_3 dados também são uma solução para o sistema. De fato,

$$
\begin{aligned}
& Z_1(AZ_2A^{-1})(AFAF^{-1})(FA^{-1}Z_1AF^{-1})Z_2^{-1} \\
&= v^{-1}w^{r_1}vw^{r_1}w^{-r_1}B^{-1}w^{r_1}(\prod_{j=1}^{r_1} w^{j-1-r_1}Bw^{r_1+1-j})B \\
&= v^{-1}w^{r_1}vv^{-1}wvww^{r_1}w^{-r_1-1}v^{-1}w^{-r_1}vw^{-r_1}w^{r_1+1}w^{-1}v^{-1}w^{-1}v \\
&= v^{-1}w^{r_1}ww^{-r_1}vv^{-1}w^{-1}v \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, a primeira equação é satisfeita. A verificação das outras equações se faz de modo análogo.

No caso $III.4$ temos $r_1 = r_2 = 0$, portanto esse caso se reduz ao caso $T.2$, $III.4$, já resolvido. Passaremos agora ao caso IV.

$IV)$ Caso $\phi_1(1,-1)$.

Neste caso temos a única situação para o par de homomorfismos $(f_{1\#}, f_{2\#})$:

$$IV.1,\ (f_1(s_1, 2c_{11}+1, 2l+1, c_{11}, 2k_1), f_2(s_2, 2c_{12}+1, 2l+1, c_{12}, 2k_2)),$$

onde $s_i \in \{0,1\}$, l, c_{1i}, $k_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1,2\}$, $r_i = 2c_{1i}+1$, $t = 2l+1$ e $k_1 = k_2 = 0$.

Observação 4.1.1. *Em todos os casos abaixo usaremos o seguinte identidade: dado $t = 2l+1$ então;*

$$(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})^t = \tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1}[\prod_{j=0}^{l}(wvw)^{2(j-l)}B(wvw)^{-2(j-l)}].$$

Essa identidade segue rapidamente usando indução.

Caso $IV.1$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

Neste caso podemos tomar $A = \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}$, $F = \tilde{\beta}^t v^t w$ e $C = \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}\tilde{c_0}$. Temos;

$$AFAF^{-1} = 1,$$

$$\begin{aligned}
CAC^{-1}A^{-1} &= \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}\tilde{c_0}^{-1}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}(B^{-1}\tilde{\alpha})^{r_1}v^{-1}w^{-r_2}vw^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-r_1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-r_1})\tilde{\alpha}^{r_1}v^{-1}w^{-r_2}vw^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}v^{-1}(w^{r_1}vw^{r_1})(w^{r_1}vw^{r_1})^{-1}w^{-r_2}(w^{r_1}vw^{r_1})w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}w^{-r_2}\\
&= w^{c_{12}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-1}w^{-r_2}(w^{r_1+c_{11}}vw^{r_1+c_{11}})w^{-c_{12}}w^{-r_2}\\
&= w^{c_{12}}w^{-c_{11}}v^{-1}w^{-c_{11}}w^{-r_2}w^{r_1+c_{11}}vw^{r_1+c_{11}}w^{-c_{12}}w^{-r_2}\\
&= w^{c_{12}-c_{11}}(v^{-1}w^{r_1-r_2}vw^{r_1-r_2})w^{c_{11}-c_{12}}.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = r_2 - r_1$. Portanto, aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$, na segunda equação obteremos; $-2\bar{t_1} + r_2 - r_1 = 0$. Logo, se $r_2 - r_1$ for ímpar então o sistema não terá solução.

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}FA^{-1} &= \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^t v^t w\tilde{c_0}^{-1}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}\tilde{\beta}^t v^t ww^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})^t(v^{-1}w^{-1})^t v^{-1}w^{-1}vw^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}v^t\tilde{\beta}^t\\
&\quad \tilde{\alpha}^{-r_1}w^{1-r_2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= w^{c_{12}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1}[\prod_{j=0}^{l}(wvw)^{2(j-l)}B(wvw)^{-2(j-l)}](wv)^{-t}w \\
&\quad (w^{-1}v^{-1}w^{-1}v)w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}v^t\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{-r_1}w^{1-r_2} \\
&= w^{c_{12}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}\tilde{\beta}^{-t}[\prod_{j=0}^{l}v^{2(j-l)}wBw^{-1}v^{-2(j-l)}](vw^{-1})^{-t}wwBw^{-1} \\
&\quad w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-(c_{11}+1)}v^t\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{-r_1}w^{1-r_2} \\
&= w^{c_{12}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}[\prod_{j=0}^{l}v^{2(j-l)}v^tw^{-1}v^{-t}v^twB^{-1}w^{-1}v^{-t}v^twv^{-t}v^{-2(j-l)}]v^t \\
&\quad (vw)^{-t}v^{-t}v^tw^{-1}v^{-t}v^twB^{-1}w^{-1}v^{-t}v^tw^{1+c_{12}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-(c_{11}+1)}\tilde{\beta}^tv^t \\
&\quad \tilde{\alpha}^{-r_1}w^{1-r_2} \\
&= w^{c_{12}}[\prod_{j=0}^{l}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{2j+1}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-2j-1}] \\
&\quad (w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^t(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{-t}w^{-1}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}w^{c_{12}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-t}\tilde{\alpha}^{c_{11}} \\
&\quad (\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-(c_{11}+1)}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{-(c_{11}+1)})\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}v^t\tilde{\alpha}^{-r_1}w^{1-r_2}.
\end{aligned}
$$

Chamando, $X_t = \prod_{j=0}^{l}[(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{2j+1}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-2j-1}](w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^t$ $(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{-t}w^{-1}$, então obteremos;

$$
\begin{aligned}
&CFC^{-1}FA^{-1} \\
&= w^{c_{12}}X_tw^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}w^{c_{12}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-t}\tilde{\alpha}^{c_{11}}v^t \\
&\quad (w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}v^t\tilde{\alpha}^{-r_1}w^{1-r_2} \\
&= w^{c_{12}}X_tw^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}w^{c_{12}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-t}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}v^t \\
&\quad (w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}v^t\tilde{\alpha}^{-r_1}w^{1-r_2} \\
&= w^{c_{12}}X_tw^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}w^{c_{12}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^t \\
&\quad (w^{r_1}vw^{r_1})^{-t}\tilde{\alpha}^{r_1}v^t\tilde{\alpha}^{-r_1}w^{1-r_2} \\
&= w^{c_{12}}X_tw^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}w^{c_{12}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^t(w^{r_1}vw^{r_1})^{-t}(w^{r_1}vw^{r_1})^tw^{1-r_2} \\
&= w^{c_{12}}X_tw^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}w^{c_{12}}w^{1-r_2} \\
&= w^{c_{12}}X_tw^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}w^{-c_{12}}.
\end{aligned}
$$

Da mesma forma como fizemos caso II podemos mostrar que $X_t = 1$ para todo $t = 2l+1$. Disso obteremos; $CFC^{-1}FA^{-1} = (w^{c_{12}-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}-c_{12}})$ e portanto $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(CAC^{-1}FA^{-1}) = -1$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$, na terceira equação do sistema obteremos; $2(\bar{t_2}-\bar{t_3})+\bar{t_1}+1=0$. Substituindo $\bar{t_1}=\frac{r_2-r_1}{2}$ na equação acima obteremos; $2(\bar{t_2}-\bar{t_3})+\frac{r_2-r_1}{2}+1=0$. Portanto, se tivermos $r_2-r_1=4y$, $y\in\mathbb{Z}$ então o sistema não terá solução. Agora, olharemos as equações abelianizadas com, $r_2-r_1=4y+2,\ y\in\mathbb{Z}$. Temos;

$$\begin{aligned} AZ_2A^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}(\prod_i w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i})w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\ &= \prod_i w^{r_2+m_i}(w^{r_1}vw^{r_1})^{n_i}w^{-r_1}B^{t_2^i}w^{r_1}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-n_i}w^{-r_2-m_i}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{A}(AZ_2A^{-1})=\sum_i t_2^i\bar{w}^{r_2+m_i+(-1)^{n_i+1}r_1}\bar{v}^{n_i}$.

$$\begin{aligned} FA^{-1}Z_1AF^{-1} &= \tilde{\beta}^t v^t ww^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}(\prod_i w^{u_i}v^{v_i}B^{t_1^i}v^{-v_i}w^{-u_i})\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t} \\ &= \prod_i v^t\tilde{\beta}^t w^{1-r_2+u_i}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^{v_i}w^{r_1}B^{t_1^i}w^{-r_1}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^{-v_i} \\ &\quad w^{-1+r_2-u_i}\tilde{\beta}^t v^t \\ &= \prod_i w^{-1+r_2-u_i}(w^{r_1}vw^{r_1})^{v_i}w^{-r_1}B^{-t_1^i}w^{r_1}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-v_i} \\ &\quad w^{1-r_2+u_i}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{A}(FA^{-1}Z_1AF^{-1})=\sum_i -t_1^i\bar{w}^{r_2-1-u_i+(-1)^{v_i}(1-r_1)}\bar{v}^{v_i}$.

$$\begin{aligned} CZ_1C^{-1} &= \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}\tilde{c_0}(\prod_i w^{u_i}v^{v_i}B^{t_1^i}v^{-v_i}w^{-u_i})\tilde{c_0}^{-1}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}} \\ &= \prod_i w^{c_{12}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}v^{-1}w^{-u_i}v(v^{-1}w^{-1})^{v_i}B^{-t_1^i}(v^{-1}w^{-1})^{-v_i}v^{-1}w^{u_i}v\tilde{\alpha}^{-c_{11}} \\ &\quad w^{-c_{12}} \\ &= \prod_i w^{c_{12}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-1}w^{-u_i}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}})^{-v_i}w^{-c_{11}}B^{-t_1^i} \\ &\quad w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}})^{v_i}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-1}w^{u_i}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})w^{-c_{12}} \\ &= \prod_i w^{c_{12}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-1}w^{-u_i}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}})^{-v_i}w^{-c_{11}}B^{-t_1^i} \\ &\quad w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}})^{v_i}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-1}w^{u_i}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})w^{-c_{12}}. \end{aligned}$$

No abelianizado temos; $(\bar{w}\bar{v})^{-v_i}=\bar{w}^{\frac{1-(-1)^{v_i}}{2}}\bar{v}^{-v_i}$. Disso obtemos; $\mathcal{A}(CZ_1C^{-1})=$

$\sum_i -t_1^i \bar{w}^{c_{12}+u_i+(-1)^{v_i+1}c_{11}+\frac{1-(-1)^{v_i}}{2}}\bar{v}^{-v_i}$.

$$\begin{aligned}
AF^{-1}Z_3^{-1}FA^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}(\prod_i w^{x_i}v^{y_i}B^{-t_3^i}v^{-y_i}w^{-x_i})\tilde{\beta}^t v^t w w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&= \prod_i w^{r_2-1}\tilde{\alpha}^{r_1}v^{-t}v^t w^{-x_i}v^{-t}v^{y_i}v^t w B^{t_3^i}w^{-1}v^{-t}v^{-y_i}v^t w^{x_i}v^{-t}v^t\tilde{\alpha}^{-r_1}\\
&\quad w^{1-r_2}\\
&= \prod_i w^{r_2-1}\tilde{\alpha}^{r_1}w^{-x_i}v^{y_i}wB^{t_3^i}w^{-1}v^{-y_i}w^{x_i}\tilde{\alpha}^{-r_1}w^{1-r_2}\\
&= \prod_i w^{r_2-1-x_i}(w^{r_1}vw^{r_1})^{y_i}w^{1-r_1}B^{t_3^i}w^{-1+r_1}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-y_i}w^{1-r_2+x_i}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{A}(AF^{-1}Z_3^{-1}FA^{-1}) = \sum_i t_3^i\bar{w}^{r_2-1-x_i+(-1)^{y_i}(1-r_1)}\bar{v}^{y_i}$. De modo análogo aos casos anteriores obtemos; $\mathcal{A}(AZ_3^{-1}A^{-1}) = \sum_i -t_3^i\bar{w}^{r_2+x_i+(-1)^{y_i+1}r_1}\bar{v}^{y_i}$, $\mathcal{A}(CZ_2C^{-1}) = \sum_i -t_2^i\bar{w}^{c_{12}+m_i+(-1)^{n_i+1}c_{11}+\frac{1-(-1)^{n_i}}{2}}\bar{v}^{-n_i}$, $\mathcal{A}(AF^{-1}Z_2FA^{-1}) = \sum_i -t_2^i\bar{w}^{r_2-1-m_i+(-1)^{n_i}(1-r_1)}\bar{v}^{n_i}$. Agora, aplicando o homomorfismo $\mathcal{A}$, nas primeira, segunda e terceira equações do sistema, respectivamente, obteremos;

$$\begin{cases}
\sum_i t_1^i\bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \sum_i t_2^i\bar{w}^{r_2+m_i+(-1)^{n_i+1}r_1}\bar{v}^{n_i} + \sum_i -t_1^i\bar{w}^{r_2-1-u_i+(-1)^{v_i}(1-r_1)}\bar{v}^{v_i} +\\
\sum_i -t_2^i\bar{w}^{m_i}\bar{v}^{n_i} = 0.
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\sum_i t_3^i\bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_3^i\bar{w}^{r_2+x_i+(-1)^{y_i+1}r_1}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_1^i\bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} +\\
\sum_i -t_1^i\bar{w}^{c_{12}+u_i+(-1)^{v_i+1}c_{11}+\frac{1-(-1)^{v_i}}{2}}\bar{v}^{-v_i} + \sum_{j=1}^{r_1-r_2} -\bar{w}^{c_{12}-c_{11}+1-j} = 0.
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\sum_i t_3^i\bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i t_3^i\bar{w}^{r_2-1-x_i+(-1)^{y_i}(1-r_1)}\bar{v}^{y_i} +\\
\sum_i -t_2^i\bar{w}^{c_{12}+m_i+(-1)^{n_i+1}c_{11}+\frac{1-(-1)^{n_i}}{2}}\bar{v}^{-n_i} + \sum_i -t_2^i\bar{w}^{r_2-1-m_i+(-1)^{n_i}(1-r_1)}\bar{v}^{n_i} +\\
\sum_i -t_1^i\bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} - \bar{w}^{c_{12}-c_{11}} = 0.
\end{cases}$$

Primeiro, suponha $r_1 - r_2 = 4r + 2$ com $r_1 - r_2 \geq 0$. Observemos que $2r = \frac{r_1-r_2-2}{2}$ e que os elementos dados abaixo formam uma solução para o sistema abelianizado.

$$Z_1 = \prod_{j=0}^{\frac{r_1-r_2-2}{2}} (w^{-2j}B^{-1}w^{2j}), \quad Z_2 = B^{-1} \quad e \quad Z_3 = \prod_{j=0}^{\frac{r_1-r_2-2}{4}} (w^{-2j}B^{-1}w^{2j}).$$

Verifiquemos que Z_1, Z_2 e Z_3 dados também são uma solução para o sistema. Verificando a primeira equação.

$$\begin{aligned}
& Z_1(AZ_2A^{-1})(FA^{-1}Z_1AF^{-1})Z_2^{-1} \\
= \ & [\prod_{j=0}^{2r}(w^{-2j}B^{-1}w^{2j})](w^{r_2-r_1}B^{-1}w^{r_1-r_2})[\prod_{j=0}^{2r}(w^{r_2-r_1+2j}Bw^{r_1-r_2-2j})]B \\
= \ & [\prod_{j=0}^{2r+1}(w^{-2j}B^{-1}w^{2j})][\prod_{j=0}^{2r+1}(w^{r_2-r_1+2j}Bw^{r_1-r_2-2j})] \\
= \ & [\prod_{j=0}^{2r+1}(w^{-2j}B^{-1}w^{2j})][\prod_{j=0}^{2r+1}(w^{-2(2r+1-j)}Bw^{2(2r+1-j)})] \\
= \ & 1.
\end{aligned}$$

Verificando a segunda equação.

$$\begin{aligned}
& Z_3(CZ_1C^{-1})(CAC^{-1}A^{-1})(AZ_3^{-1}A^{-1}) \\
= \ & [\prod_{j=0}^{r}(w^{-2j}B^{-1}w^{2j})]w^{c_{12}-c_{11}}[\prod_{j=0}^{2r}(v^{-1}w^{2j}vBv^{-1}w^{-2j}v)](v^{-1}w^{r_1-r_2}vw^{r_1-r_2})w^{c_{11}-c_{12}} \\
& [\prod_{j=0}^{r}(w^{r_2-r_1-2(r-j)}Bw^{r_1-r_2+2(r-j)})][\prod_{j=0}^{2r}(w^{-2(2r-j)}Bw^{2(2r-j)})].
\end{aligned}$$

Usando $r_1 - r_2 = 4r + 2$ e $v^{-1}w^2vw = B^{-1}w^{-1}B^{-1}$ obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
i) \quad & [\prod_{j=0}^{r}(w^{r_2-r_1-2(r-j)}Bw^{r_1-r_2+2(r-j)})] = [\prod_{j=-r-1}^{-1}(w^{-2(2r-j)}Bw^{2(2r-j)})]. \\
ii) \quad & w^{c_{12}-c_{11}}[\prod_{j=0}^{2r}(v^{-1}w^{2j}vBv^{-1}w^{-2j}v)](v^{-1}w^{r_1-r_2}vw^{r_1-r_2})w^{c_{11}-c_{12}} \\
& = [\prod_{j=0}^{2r}(w^{-2(r+1+j)}B^{-1}w^{2(r+1+j)})]. \\
iii) \quad & [\prod_{j=0}^{r}(w^{-2j}B^{-1}w^{2j})] = [\prod_{j=-r-1}^{-1}(w^{-2(r+1+j)}B^{-1}w^{2(r+1+j)})].
\end{aligned}$$

Das igualdades acima obtemos;

$$
\begin{aligned}
& Z_3(CZ_1C^{-1})(CAC^{-1}A^{-1})(AZ_3^{-1}A^{-1}) \\
= & [\prod_{j=-r-1}^{-1}(w^{-2(r+1+j)}B^{-1}w^{2(r+1+j)})][\prod_{j=0}^{2r}(w^{-2(r+1+j)}B^{-1}w^{2(r+1+j)})] \\
& [\prod_{j=-r-1}^{-1}(w^{-2(2r-j)}Bw^{2(2r-j)})][\prod_{j=0}^{2r}(w^{-2(2r-j)}Bw^{2(2r-j)})] \\
= & [\prod_{j=-r-1}^{2r}(w^{-2(r+1+j)}B^{-1}w^{2(r+1+j)})][\prod_{j=-r-1}^{2r}(w^{-2(2r-j)}Bw^{2(2r-j)})] \\
= & 1.
\end{aligned}
$$

Verificando a terceira equação.

$$
\begin{aligned}
& Z_3(CZ_2C^{-1})(CFC^{-1}FA^{-1})(AF^{-1}Z_3^{-1}FA^{-1})(AF^{-1}Z_2FA^{-1})Z_1^{-1} \\
= & [\prod_{j=0}^{r}(w^{-2j}B^{-1}w^{2j})](w^{c_{12}-c_{11}}Bw^{c_{11}-c_{12}})(w^{c_{12}-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}-c_{12}}) \\
& [\prod_{j=0}^{2r}(w^{r_2-r_1+2(r-j)}B^{-1}w^{r_1-r_2-2(r-j)})](w^{r_2-r_1}B^{-1}w^{r_1-r_2})[\prod_{j=0}^{2r}w^{-2(2r-j)}Bw^{2(2r-j)}] \\
= & [\prod_{j=0}^{r}(w^{-2j}B^{-1}w^{2j})][\prod_{j=r+1}^{2r+1}(w^{-2j}B^{-1}w^{2j})][\prod_{j=0}^{2r+1}(w^{-2(2r+1-j)}Bw^{2(2r+1-j)})] \\
= & [\prod_{j=0}^{2r+1}(w^{-2j}B^{-1}w^{2j})][\prod_{j=0}^{2r+1}(w^{-2(2r+1-j)}Bw^{2(2r+1-j)})] \\
= & 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, Z_1, Z_2 e Z_3 dados acima são uma solução para o sistema. Se tivermos $r_1-r_2 = 4r+2$ com $r_1 - r_2 \leq 0$, então de modo análogo ao caso anterior podemos mostrar que

$$
Z_1 = \prod_{j=1}^{\frac{r_2-r_1}{2}}(w^{2j}Bw^{-2j}), \quad Z_2 = B^{-1} \quad e \quad Z_3 = \prod_{j=1}^{\frac{r_2-r_1-2}{4}}(w^{2j}Bw^{-2j})
$$

é uma solução para o sistema. Portanto, neste caso o sistema possui solução.

Caso $IV.1$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Neste caso, pelas reduções feitas anteriormente, podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}$, $F = \tilde{\beta}^t v^t$ e $C = \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}\tilde{c}_0$. Observemos que os elementos A e C são os mesmos que no caso anterior. Assim temos; $CAC^{-1}A^{-1} = w^{c_{12}-c_{11}}(v^{-1}w^{r_1-r_2}vw^{r_1-r_2})w^{c_{11}-c_{12}}$. Rapidamente obtemos; $AFAF^{-1} = 1$. Temos;

$$
\begin{aligned}
CFC^{-1}FA^{-1} &= \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}\tilde{c}_0\tilde{\beta}^t v^t \tilde{c}_0{}^{-1}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})^t(v^{-1}w^{-1})^t w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(wvw)^{2(j-l)}B(wvw)^{-2(j-l)}](wv)^{-t}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}}\tilde{\beta}^t \\
&\quad v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}\tilde{\beta}^{-t}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}v^{2(j-l)}wBw^{-1}v^{-2(j-l)}](vw^{-1})^{-t}w^{-c_{12}}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1}\tilde{\beta}^t \\
&\quad v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}}w^{c_{12}}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}v^{2(j-l)}v^t w^{-1}wB^{-1}w^{-1}wv^{-2(j-l)}v^{-t}]v^t(vw)^{-t}v^{-t}v^t w^{c_{12}} \\
&\quad v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1}\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{c_{12}}[\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{2j+1}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-2j-1}](w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^t \\
&\quad (w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{-t}w^{c_{12}}\tilde{\alpha}^{c_{11}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1}\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{c_{12}}X_t w^{c_{12}+1}\tilde{\alpha}^{c_{11}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1}\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1},
\end{aligned}
$$

onde $X_t = \prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}[(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{2j+1}w^{-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-2j-1}](w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^t$ $(w^{c_{11}}vw^{c_{11}+1})^{-t}w^{-1}$. Analogamente ao caso anterior, podemos mostrar que $X_t = 1$ para todo $t = 2l+1$. Assim, obteremos;

$$
\begin{aligned}
CFC^{-1}FA^{-1} &= w^{c_{12}}w^{c_{12}+1}\tilde{\alpha}^{c_{11}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1}\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{r_2}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-t}\tilde{\alpha}^{c_{11}}(\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{-c_{11}-1})\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{r_2}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-t}\tilde{\alpha}^{c_{11}}v^t(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^{-t}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+1})^t\tilde{\alpha}^{c_{11}+1} \\
&\quad w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{r_2}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-t}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^t\tilde{\alpha}^{c_{11}}\tilde{\alpha}^{c_{11}+1}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}^{r_1}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$, nas segunda e terceira equações do sistema, respectivamente, obteremos as seguintes equações: $2(\bar{t_3} - \bar{t_2}) = \bar{t_1}$ e $\bar{t_1} = \frac{r_2 - r_1}{2}$. Essas equações nos dizem que $r_2 - r_1$ deve ser da forma; $r_2 - r_1 = 4r, r \in \mathbb{Z}$. Analogamente ao caso anterior obtemos;

$$\begin{aligned} CZ_1C^{-1} &= \prod_i w^{c_{12}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-1}w^{-u_i}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}})^{-v_i}w^{-c_{11}}B^{-t_1^i} \\ & \quad w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}})^{v_i}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-1}w^{u_i}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})w^{-c_{12}}, \end{aligned}$$

$$AZ_2A^{-1} = \prod_i w^{r_2+m_i}(w^{r_1}vw^{r_1})^{n_i}w^{-r_1}B^{t_2^i}w^{r_1}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-n_i}w^{-r_2-m_i}.$$

Portanto, $\mathcal{A}(AZ_2A^{-1}) = \sum_i t_2^i \bar{w}^{r_2+m_i+(-1)^{n_i+1}r_1}\bar{v}^{n_i}$ e $\mathcal{A}(CZ_1C^{-1}) = \sum_i -t_1^i \bar{w}^{c_{12}+u_i+(-1)^{v_i+1}c_{11}+\frac{1-(-1)^{v_i}}{2}}\bar{v}^{-v_i}$. Também temos;

$$\begin{aligned} FA^{-1}Z_1AF^{-1} &= \tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}(\prod_i w^{u_i}v^{v_i}B^{t_1^i}v^{-v_i}w^{-u_i})\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t} \\ &= \prod_i \tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2+u_i}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^{v_i}w^{r_1}B^{t_1^i}w^{-r_1}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^{-v_i} \\ & \quad w^{-u_i+r_2}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t} \\ &= \prod_i w^{r_2-u_i}(w^{r_1}vw^{r_1})^{v_i}w^{-r_1}wB^{-t_1^i}w^{-1}w^{r_1}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-v_i}w^{u_i-r_2}. \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{A}(FA^{-1}Z_1AF^{-1}) = \sum_i -t_1^i \bar{w}^{r_2-u_i+(-1)^{v_i}(1-r_1)}\bar{v}^{v_i}$.

$$\begin{aligned} AF^{-1}Z_2FA^{-1} &= \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}(\prod_i w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i})\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\ &= \prod_i \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}v^{-t}v^t w^{-m_i}v^{n_i}wB^{-t_2^i}w^{-1}v^{-n_i}w^{m_i}v^{-t}v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\ &= \prod_i w^{r_2-m_i}(w^{r_1}vw^{r_1})^{n_i}ww^{-r_1}B^{-t_2^i}w^{r_1}w^{-1}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-n_i}w^{m_i-r_2}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{A}(AF^{-1}Z_2FA^{-1}) = \sum_i -t_2^i \bar{w}^{r_2-m_i+(-1)^{n_i}(1-r_1)}\bar{v}^{n_i}$.

Vimos anteriormente que se o sistema possuir solução então devemos ter $r_1 - r_2 = 4r, r \in \mathbb{Z}$. Primeiramente suporemos $r \geq 0$. Aplicando o homomorfismo $\mathcal{A}$, nas primeira, segunda e terceira equações do sistema, respectivamente, obteremos;

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_i t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \sum_i t_2^i \bar{w}^{r_2+m_i+(-1)^{n_i+1}r_1}\bar{v}^{n_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{r_2-u_i+(-1)^{v_i}(1-r_1)}\bar{v}^{v_i} + \\ \sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i}\bar{v}^{n_i} = 0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_3^i \bar{w}^{r_2+x_i+(-1)^{y_i+1}r_1}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \\ \sum_i -t_1^i \bar{w}^{c_{12}+u_i+(-1)^{v_i+1}c_{11}+\frac{1-(-1)^{v_i}}{2}}\bar{v}^{-v_i} + \sum_{j=1}^{r_1-r_2} -\bar{w}^{c_{12}-c_{11}+1-j} = 0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i t_3^i \bar{w}^{r_2-x_i+(-1)^{y_i}(1-r_1)}\bar{v}^{y_i} + \\ \sum_i -t_2^i \bar{w}^{c_{12}+m_i+(-1)^{n_i+1}c_{11}+\frac{1-(-1)^{n_i}}{2}}\bar{v}^{-n_i} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{r_2-m_i+(-1)^{n_i}(1-r_1)}\bar{v}^{n_i} + \\ \sum_i -t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} = 0. \end{array}\right.$$

Note que; $Z_1 = Z_3(w^{-3r}Z_3w^{3r})$, $Z_2 = 1$ *e* $Z_3 = \prod_{j=1}^{r}(w^{1-j}B^{-1}w^{j-1}) = v^{-1}w^r v w^r$ são uma solução para o sistema abelianizado. Esses elementos também formam uma solução para o sistema original. De fato, verificando a terceira equação.

$$\begin{aligned}
& Z_3(AF^{-1}Z_3^{-1}FA^{-1})Z_1^{-1} \\
= \; & v^{-1}w^r v w^r \prod_{j=1}^{r}(w^{r_2-j+r+1-r_1}B^{-1}w^{r_1-1+j-r-r_2})w^{-3r}w^{-r}v^{-1}w^{-r}vw^{3r}w^{-r}v^{-1}w^{-r}v \\
= \; & v^{-1}w^r v w^r w^{r_2+r-r_1}v^{-1}w^r v w^r w^{r_1-r-r_2}w^{-3r}w^{-r}v^{-1}w^{-r}vw^{3r}w^{-r}v^{-1}w^{-r}v \\
= \; & v^{-1}w^r v w^r w^{r_2+r-r_1}w^{3r}w^{-r}v^{-1}w^{-r}v \\
= \; & v^{-1}w^r v w^r w^{-r}v^{-1}w^{-r}v \\
= \; & 1.
\end{aligned}$$

De modo análogo verifica-se as outras equações. O caso em que r é negativo é análogo.

Caso $IV.1$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Neste caso, pelas reduções feitas anteriormente, podemos tomar; $A = \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}$, $F =$

$\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t$ e $C = \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} \tilde{c_0}$. Temos;

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}FA^{-1} &= \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} \tilde{c_0} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t \tilde{c_0}^{-1} w^{-c_{12}} \tilde{\alpha}^{-c_{11}} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} B^{-1} \tilde{\alpha} (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})^t (v^{-1}w^{-1})^t w^{-c_{12}} \tilde{\alpha}^{-c_{11}} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} B^{-1} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t} \tilde{\alpha}^{-1} [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} (wvw)^{2(j-l)} B (wvw)^{-2(j-l)}] (v^{-1}w^{-1})^t \\
&\quad w^{-c_{12}} \tilde{\alpha}^{-c_{11}} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} B^{-1} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t} [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} v^{2(j-l)} w B w^{-1} v^{-2(j-l)}] (vw^{-1})^{-t} w^{-c_{12}} \\
&\quad \tilde{\alpha}^{-c_{11}} \tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} B^{-1} \tilde{\alpha} [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} v^{2(j-l)} v^t w^{-1} w B^{-1} w^{-1} w v^{-t} v^{-2(j-l)}] v^t (vw)^{-t} w^{c_{12}} \\
&\quad v^{-t} (\tilde{\beta}^{-t} \tilde{\alpha}^{-c_{11}} \tilde{\beta}^t \tilde{\alpha}^{-c_{11}}) \tilde{\alpha}^{c_{11}} v^t w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} B^{-1} [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} (wvw)^{2j+1} w^{-1} B^{-1} w (wvw)^{-2j-1}] (wvw)^t (wvw^2)^{-t} \\
&\quad w^{c_{12}} \tilde{\alpha} v^{-t} v^t (w^{c_{11}} v w^{c_{11}})^{-t} \tilde{\alpha}^{c_{11}} v^t w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} B^{-1} [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} (wvw)^{2j+1} w^{-1} B^{-1} w (wvw)^{-2j-1}] (wvw)^t (wvw^2)^{-t} \\
&\quad w^{c_{12}} \tilde{\alpha} (w^{c_{11}} v w^{c_{11}})^{-t} (w^{c_{11}} v w^{c_{11}})^t \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= (\tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} B^{-1} w^{-c_{12}} \tilde{\alpha}^{-c_{11}}) \tilde{\alpha}^{c_{11}} w^{c_{12}} [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} (wvw)^{2j+1} w^{-1} B^{-1} w (wvw)^{-2j-1}] \\
&\quad (wvw)^t (wvw^2)^{-t} w^{c_{12}} \tilde{\alpha}^{c_{11}+1} w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= (w^{c_{12}-c_{11}} B^{-1} w^{-c_{12}+c_{11}}) w^{c_{12}} [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^{2j+1} w^{-c_{11}-1} B^{-1} w^{c_{11}+1} \\
&\quad (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^{-2j-1}] (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^t (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+2})^{-t} w^{c_{12}} \tilde{\alpha}^{c_{11}} \tilde{\alpha}^{c_{11}+1} \\
&\quad w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= (w^{c_{12}-c_{11}} B^{-1} w^{c_{11}-c_{12}}) w^{c_{12}} X_t w^{-c_{12}} w^{r_2} \tilde{\alpha}^{r_1} w^{-r_2} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= (w^{c_{12}-c_{11}} B^{-1} w^{c_{11}-c_{12}}) w^{c_{12}} X_t w^{-c_{12}},
\end{aligned}$$

onde, $X_t = [\prod_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^{2j+1} w^{-c_{11}-1} B^{-1} w^{c_{11}+1} (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^{-2j-1}] (w^{c_{11}+1} v w^{c_{11}+1})^t$

$(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}+2})^{-t}w^{-1}$. Analogamente aos casos anteriores podemos mostrar que $X_t = 1$ para todo $t = 2l+1$. Assim, obteremos; $CFC^{-1}FA^{-1} = w^{c_{12}-c_{11}}B^{-1}w^{c_{11}-c_{12}}$. Pelo caso anterior temos;

$$AFAF^{-1} = 1, \quad CAC^{-1}A^{-1} = w^{c_{12}-c_{11}}(v^{-1}w^{r_1-r_2}vw^{r_1-r_2})w^{c_{11}-c_{12}},$$

$$\begin{aligned} CZ_1C^{-1} &= \prod_i w^{c_{12}}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-1}w^{-u_i}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}})^{-v_i}w^{-c_{11}}B^{-t_1^i} \\ &\quad w^{c_{11}}(w^{c_{11}+1}vw^{c_{11}})^{v_i}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})^{-1}w^{u_i}(w^{c_{11}}vw^{c_{11}})w^{-c_{12}}, \\ AZ_2A^{-1} &= \prod_i w^{r_2+m_i}(w^{r_1}vw^{r_1})^{n_i}w^{-r_1}B^{t_2^i}w^{r_1}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-n_i}w^{-r_2-m_i}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{A}(AZ_2A^{-1}) = \sum_i t_2^i\bar{w}^{r_2+m_i+(-1)^{n_i+1}r_1}\bar{v}^{n_i}$ e $\mathcal{A}(CZ_1C^{-1}) = \sum_i -t_1^i\bar{w}^{c_{12}+u_i+(-1)^{v_i+1}c_{11}+\frac{1-(-1)^{v_i}}{2}}\bar{v}^{-v_i}$. Também temos;

$$\begin{aligned} FA^{-1}Z_1AF^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1}(\prod_i w^{u_i}v^{v_i}B^{t_1^i}v^{-v_i}w^{-u_i})\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1} \\ &= \prod_i \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2+u_i}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^{v_i}w^{r_1}B^{t_1^i}w^{-r_1}(w^{-r_1}vw^{-r_1})^{-v_i} \\ &\quad w^{-u_i+r_2}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1} \\ &= \prod_i \tilde{\alpha}w^{r_2-u_i}(w^{r_1}vw^{r_1})^{v_i}w^{-r_1}wB^{-t_1^i}w^{-1}w^{r_1}(w^{r_1}vw^{r_1})^{-v_i}w^{u_i-r_2}\tilde{\alpha}^{-1} \\ &= \prod_i w^{r_2-u_i}(w^{r_1+1}vw^{r_1+1})^{v_i}w^{-r_1}B^{-t_1^i}w^{r_1}(w^{r_1+1}vw^{r_1+1})^{-v_i}w^{u_i-r_2} \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{A}(FA^{-1}Z_1AF^{-1}) = \sum_i -t_1^i\bar{w}^{r_2-u_i+(-1)^{v_i+1}r_1}\bar{v}^{v_i}$.

$$\begin{aligned} & AF^{-1}Z_2FA^{-1} \\ = \; & \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\alpha}^{-1}(\prod_i w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\ = \; & \prod_i \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}w^{m_i}(w^{-1}vw^{-1})^{n_i}wB^{t_2^i}w^{-1}(w^{-1}vw^{-1})^{-n_i}w^{-m_i}\tilde{\beta}^t v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\ = \; & \prod_i \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}v^{-t}v^t w^{-m_i}(wvw)^{n_i}w^{-1}wB^{-t_2^i}w^{-1}w(wvw)^{-n_i}w^{m_i}v^{-t}v^t w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-r_1} \\ = \; & \prod_i w^{r_2-m_i}(w^{r_1+1}vw^{r_1+1})^{n_i}w^{-r_1}B^{-t_2^i}w^{r_1}(w^{r_1+1}vw^{r_1+1})^{-n_i}w^{m_i-r_2}. \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{A}(AF^{-1}Z_2FA^{-1}) = \sum_i -t_2^i \bar{w}^{r_2-m_i+(-1)^{n_i+1}r_1}\bar{v}^{n_i}$.

Aplicando o homomorfismo $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$, nas segunda e terceira equações do sistema, respectivamente, obteremos as seguintes equações: $2(\bar{t_3} - \bar{t_2}) = \bar{t_1} + 1$ e $\bar{t_1} = \frac{r_2-r_1}{2}$. Essas equações nos dizem que $r_2 - r_1$ deve ser da forma; $r_2 - r_1 = 4r + 2, r \in \mathbb{Z}$. Agora, aplicando o homomorfismo $\mathcal{A}$, nas primeira, segunda e terceira equações do sistema, respectivamente, obteremos;

$$\begin{cases} \sum_i t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \sum_i t_2^i \bar{w}^{r_2+m_i+(-1)^{n_i+1}r_1}\bar{v}^{n_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{r_2-u_i+(-1)^{v_i+1}r_1}\bar{v}^{v_i} + \\ \sum_i -t_2^i \bar{w}^{m_i}\bar{v}^{n_i} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_3^i \bar{w}^{r_2+x_i+(-1)^{y_i+1}r_1}\bar{v}^{y_i} + \sum_i -t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} + \\ \sum_i -t_1^i \bar{w}^{c_{12}+u_i+(-1)^{v_i+1}c_{11}+\frac{1-(-1)^{v_i}}{2}}\bar{v}^{-v_i} + \sum_{j=1}^{r_1-r_2} -\bar{w}^{c_{12}-c_{11}+1-j} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_i t_3^i \bar{w}^{x_i}\bar{v}^{y_i} + \sum_i t_3^i \bar{w}^{r_2-x_i+(-1)^{y_i+1}r_1}\bar{v}^{y_i} + \\ \sum_i -t_2^i \bar{w}^{c_{12}+m_i+(-1)^{n_i+1}c_{11}+\frac{1-(-1)^{n_i}}{2}}\bar{v}^{-n_i} + \sum_i -t_2^i \bar{w}^{r_2-m_i+(-1)^{n_i+1}r_1}\bar{v}^{n_i} + \\ \sum_i -t_1^i \bar{w}^{u_i}\bar{v}^{v_i} - \bar{w}^{c_{12}-c_{11}} = 0. \end{cases}$$

Analogamente ao caso $s_1 = s_2 = 0$ podemos mostrar que;

$$\begin{cases} Z_1 = \prod_{j=1}^{\frac{r_2-r_1}{2}} (w^{2j}Bw^{-2j}), \quad Z_2 = B^{-1}\, e \quad Z_3 = \prod_{j=1}^{\frac{r_2-r_1-2}{4}} (w^{2j}Bw^{-2j}), \quad se\ r \geq 0, \\ Z_1 = \prod_{j=0}^{\frac{r_1-r_2-2}{2}} (w^{-2j}B^{-1}w^{2j}), \quad Z_2 = B^{-1}\, e \quad Z_3 = \prod_{j=0}^{\frac{r_1-r_2-2}{4}} (w^{-2j}B^{-1}w^{2j}), \quad se\ r \leq 0, \end{cases}$$

formam uma solução para o sistema. Com isso terminamos a prova do teorema 4.1.1.

□

Capítulo 5

Preliminares Algébricos

Para estudarmos o problema de minimização de pontos fixos em fibrados com base S^1 e fibra Toro, necessitaremos de alguns preliminares algébricos que serão feitos neste capítulo.

5.1 Homologia de Grupos

5.1.1 Produto tensorial e o grupo de co-invariantes

Definição 5.1.1. *Seja M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. O produto tensorial de M e N sobre R, denotado por $M \otimes_R N$, é definido como sendo o grupo abeliano obtido como quociente do grupo abeliano livre sobre todos os símbolos, $m \otimes n$, $m \in M$ $n \in N$, pelo subgrupo gerado pelas relações:*

$$(m_1 + m_2) \otimes n - (m_1 \otimes n + m_2 \otimes n), m_1, m_2 \in M, n \in N$$

$$m \otimes (n_1 + n_2) - (m \otimes n_1 + m \otimes n_2), m \in M, n_1, n_2 \in N$$

$$mr \otimes n - m \otimes rn, r \in R, m \in M, n \in N$$

O produto tensorial possui algumas propriedades básicas que serão usadas ao longo deste texto. Para uma descrição detalhada dessas propriedades veja, por exemplo, [37].

Quando R é um anel de grupo $\mathbb{Z}G$ então podemos considerar uma ação à esquerda como uma ação à direita e vice-versa, basta usar o anti-automorfismo de G definido por $g \to g^{-1}$, ou seja, podemos considerar qualquer $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda M como um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita considerando a seguinte ação: $mg = g^{-1}m$, $g \in G, m \in M$. Nesse caso o produto tensorial de M e N, $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$, também denotado por $M \otimes_G N$, é de dois $\mathbb{Z}G$-módulos à esquerda.

Ao longo desse texto chamaremos um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda apenas por G-módulo à esquerda. Observemos que todo $\mathbb{Z}$-módulo pode ser considerado como um G-módulo com a ação trivial; $g.m = m$, para quaisquer $m \in M$ e $g \in G$.

Definição 5.1.2. *Seja G um grupo e M um G-módulo. O grupo de co-invariantes de M denotado por M_G é por definição o quociente de M pelo subgrupo aditivo gerado pelos elementos da forma; $gm - m$ onde $g \in G$ e $m \in M$.*

Lema 5.1.1. *Podemos descrever M_G por;*

$$M_G \approx \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \tag{5.1}$$

onde $\mathbb{Z}$ é considerado como um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita com G-ação trivial.

Demonstração. De fato, em $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ temos; $1 \otimes gm = 1.g \otimes m = 1 \otimes m$. Portanto, o homomorfismo $\varphi : M_G \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ dado por $\varphi(\bar{m}) = 1 \otimes m$, onde $\bar{m}$ é classe de um elemento $m \in M$, está bem definido. Pela propriedade universal do produto tensorial também podemos definir um homomorfismo $\psi : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to M_G$ por $\psi(a \otimes m) = a\bar{m}$. Esses homomorfismos são um inverso do outro. $\square$

A equação 5.1 juntamente com as propriedades básicas do produto tensorial produzem as seguintes propriedades:

i) Se $F^3 \to F^2 \to F^1 \to 0$ é uma sequência exata de G-módulos então $F^3_G \to F^2_G \to F^1_G \to 0$ também é uma sequência exata.

ii) Se F é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com base (e_i) então F_G é um $\mathbb{Z}$-módulo livre com base $(\bar{e}_i)$.

No produto tensorial $M \otimes_G N$ temos a seguinte relação: $g^{-1}m \otimes n = m \otimes gn$. Trocando m por gm nessa relação obteremos; $m \otimes n = gm \otimes gn$. Dessa última relação obtemos;

$$M \otimes_G N = (M \otimes N)_G.$$

5.1.2 Resoluções projetivas e a homologia de um grupo

Definição 5.1.3. *Um R-módulo à esquerda, M, é projetivo se, dados homomorfismos $\gamma : M \to N$ e $\epsilon : P \to N$, onde ϵ é sobrejetivo, existir um homomorfismo $\beta : M \to P$ talque $\epsilon \circ \beta = \gamma$, ou seja, M é projetivo se nas condições dadas existe $\beta : M \to P$ que faz o diagrama abaixo comutar.*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "\gamma"] \\ P \arrow[r, "\epsilon"] & N \end{tikzcd}$$

Definição 5.1.4. *Uma resolução de um R-módulo M sobre R consiste de um complexo*

$$C : \quad \cdots \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0 \tag{5.2}$$

e uma aplicação $\epsilon : C_0 \to M$, de tal modo que a sequência

$$\cdots \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0 \tag{5.3}$$

seja exata.

A equação 5.3 nos diz que o complexo 5.2 é acíclico, ou seja, temos $H_n(C) = 0$, $n > 0$ e $H_0(C) \approx M$. Denotaremos uma resolução de um R-módulo M sobre R por $\epsilon : C \to M$. A resolução de M é dita livre se cada C_n é livre, e projetiva se cada C_n é projetivo. Pelo lema 4.2 de [29] temos que para todo R-módulo M existe uma resolução projetiva.

Considerando $\mathbb{Z}$ como um G-módulo com G-ação trivial, então dado um espaço contrátil X temos uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ dada pela sequência abaixo:

$$\cdots \to C_n(X) \xrightarrow{\partial} \cdots \to C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

onde o homomorfismo ϵ é o homomorfismo aumentação definido para cada 0-célula, $v \in X$, por $\epsilon(v) = 1$.

Definição 5.1.5. *Sejam G um grupo e $\epsilon : C \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. O n-ésimo grupo de homologia do grupo G com coeficiente no anel $\mathbb{Z}$ é definido como sendo o n-ésimo grupo de homologia do complexo de cadeia $H_n(C_G)$, ou seja,*

$$H_n(G, \mathbb{Z}) := H_n(C_G).$$

Temos que a definição de $H_*(G)$ independe da escolha da resolução de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, uma demonstração desse fato se encontra na seção 1 do capítulo I de [3].

Se $\epsilon : C \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e M é um G-módulo então definimos o n-ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em M por;

$$H_n(G, M) = H_n(C \otimes_G M).$$

Pela proposição 5.2 de [34] temos $H_0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e $H_1(G, \mathbb{Z}) = G_{ab}$.

Exemplo 5.1.1. *Dado um espaço X conexo por caminhos que possui um recobrimento universal Y, então sabemos que o grupo G das transformações de recobrimento de Y age livremente sobre Y. Consideremos $C_*(X)$, $C_*(Y)$ complexos de cadeias singulares de X e Y respectivamente. Sabemos que $C_*(Y)$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Pela proposição 2.4 de [3] temos $C_*(X) \approx C_*(Y)_G$. Desses fatos obtemos; $H_*(X) \approx H_*(Y/G) \approx H_*(G)$.*

A seguir definiremos uma resolução de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ chamada de resolução "Bar".

Seja G um grupo. A resolução "Bar" de $\mathbb{Z}$ denotada por $B(G)$, é dada pela seguinte sequência:

$$\cdots \to B_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1} \to \cdots \to B_1 \xrightarrow{d_1} B_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0, \tag{5.4}$$

onde B_0 é o G-módulo livre em um único gerador e $\epsilon : B_0 \to \mathbb{Z}$ é o homomorfismo aumentação. Para $n \geq 1$, B_n é o G-módulo livre em n geradores com base denotada por todos os símbolos da forma $[x_1|x_2|\ldots|x_n]$, onde $x_i \in G$, $x_i \neq 1$ e o operador bordo

$d_n : B_n \to B_{n-1}$ é dado por;

$$\begin{aligned} d_n([x_1|x_2|\dots|x_n]) = \quad & x_1[x_2|\dots|x_n] \\ & + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[x_1|\dots|x_ix_{i+1}|\dots|x_n] \\ & +(-1)^n[x_1|x_2|\dots|x_{n-1}]. \end{aligned}$$

Dado um grupo G a resolução "Bar", $B(G)$, definida acima é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, veja o teorema 5.1 de [34]. Portanto, podemos usar essa resolução para calcular $H_*(G)$.

5.2 Homologia de Hochschild

Seja R um anel e M um $R-R$ bimódulo, ou seja, um R-módulo à esquerda e à direita satisfazendo; $(r_1m)r_2 = r_1(mr_2)$ para quaisquer $m \in M$ e $r_1, r_2 \in R$. O *complexo de cadeia de Hochschild* $\{C_*(R, M), d\}$ é dado por $C_n(R, M) = R^{\otimes n} \otimes M$, onde $R^{\otimes n}$ é o produto tensorial de n cópias de R tomado sobre os inteiros e o operador bordo dado por;

$$\begin{aligned} d_n(r_1 \otimes \dots \otimes r_n \otimes m) \quad = \quad & r_2 \otimes \dots r_n \otimes mr_1 \\ & + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i r_1 \otimes \dots \otimes r_ir_{i+1} \otimes \dots \otimes r_n \otimes m \\ & + (-1)^n r_1 \otimes \dots \otimes r_{n-1} \otimes r_nm. \end{aligned}$$

A $n-$ésima homologia deste complexo é a $n-$ésima *homologia de Hochschild de R com coeficientes no bimódulo M* e é denotada por $HH_n(R, M)$. Concentraremos em HH_1. Temos; $d_2(r_1 \otimes r_2 \otimes m) = r_2 \otimes mr_1 - r_1r_2 \otimes m + r_1 \otimes r_2m$ e $d_1(r \otimes m) = mr - rm$.

Lema 5.2.1. *Se $1 \in R$ é o elemento unidade e $m \in M$ então a 1-cadeia $1 \otimes m$ é homóloga a zero.*

Demonstração. Considerando a 2-cadeia $1 \otimes 1 \otimes m$ temos $d_2(1 \otimes 1 \otimes m) = 1 \otimes m - 1 \otimes m + 1 \otimes m = 1 \otimes m$. $\square$

Usamos a homologia de Hochschild na seguinte situação: seja G um grupo e $\phi : G \to G$ um endomorfismo. Denotemos também por ϕ o homomorfismo induzido em $R = \mathbb{Z}G$. Consideremos $M = (\mathbb{Z}G)^\phi$ o bimódulo cujo grupo abeliano básico é $\mathbb{Z}G$ e a estrutura de bimódulo é dada por; $g.m = gm$ e $m.g = m\phi(g)$.

Dados dois elementos g_1, g_2 em G então dizemos que eles são semiconjugados se, e somente se, existir $g \in G$ tal que $g_1 = gg_2\phi(g^{-1})$. Essa relação é de equivalência em G e portanto, podemos particionar G em classes semiconjugadas. Escrevemos $C(g)$ para a classe semiconjugada contendo g e G_ϕ para o conjunto das classes semiconjugadas.

A partição de G na união disjunta de suas classes semiconjugadas induz uma decomposição em soma direta de $HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)$ da seguinte maneira: cada cadeia em $C_n(R, M)$ é dada por uma combinação formal de cadeias "básicas" da forma $c = g_1 \otimes \ldots \otimes g_n \otimes m$. Por outro lado, cada cadeia "básica" $c = g_1 \otimes \ldots \otimes g_n \otimes m$ pode ser escrita na forma canônica $g_1 \otimes \ldots \otimes g_n \otimes g_n^{-1} \ldots g_1^{-1} g$, onde pensamos $g = g_1 \ldots g_n m \in G$ como "representando" uma classe semiconjugada.

Dada uma cadeia básica, c, cujo representante é g, usando a definição do operador bordo podemos verificar rapidamente que todas aquelas cadeias básicas que ocorrem no bordo de c, tem representantes em $C(g)$ quando vistas na forma canônica.

Para cada $C \in G_\phi$ seja $C_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)_C$ o subgrupo de $C_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)$ gerado por aquelas cadeias cujos representantes estão em C.

Observemos que o bimódulo $(\mathbb{Z}G)^\phi$ pode ser decomposto como soma direta de grupos abelianos da seguinte maneira: $(\mathbb{Z}G)^\phi \cong \bigoplus_{C \in G_\phi} \mathbb{Z}C$, basta notar que o grupo abeliano básico do bimódulo $(\mathbb{Z}G)^\phi$ é $\mathbb{Z}G$ e que G é reunião disjunta das classes semiconjugadas.

A decomposição acima determina naturalmente uma decomposição de complexo de cadeia; $C_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi) \cong \bigoplus_{C \in G_\phi} C_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)_C$. Observemos que esse isomorfismo induz um isomorfismo natural na homologia de Hochschild dado por;

$$HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi) \cong \bigoplus_{C \in G_\phi} HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)_C,$$

onde o somando $HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)_C$ corresponde aos ciclos das classes de homologia de Hochschild que são representados por elementos de C. Chamaremos o somando $HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)_C$, de $C-$componente.

Visto que $\mathbb{Z}G$ é uma álgebra, então podemos relacionar a homologia de Hochschild de um $\mathbb{Z}G - \mathbb{Z}G$ bimódulo com a homologia de um grupo, usando o complexo "Bar" da seguinte maneira: dado um $\mathbb{Z}G - \mathbb{Z}G$ bimódulo N consideremos o $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda $\overline{N}$ cujo grupo abeliano básico é N e ação à esquerda dada por $g\bullet m = g.m.g^{-1}$. Portanto, pela resolução "Bar" existe um ismorfismo natural;

$$HH_*(\mathbb{Z}G, N) \cong H_*(G, \overline{N}).$$

Os dethalhes desse isomorfismo se encontram no capítulo IX de [8].

Como nossa relação de equivalência entre dois elementos $g_1, g_2 \in G$ é dada por; $g_1 = gg_2\phi(g)^{-1}$, então podemos decompor $\overline{(\mathbb{Z}G)^\phi}$ em elementos de $\mathbb{Z}C$, ou seja, a aplicação $\beta : \overline{(\mathbb{Z}G)^\phi} \to \bigoplus_{C\in G_\phi} \mathbb{Z}C$ dada por $\beta(g) = [g]$ é um isomorfismo. Note que estamos considerando $\mathbb{Z}C$ com G-ação trivial. A aplicação acima leva a órbita de um elemento m na C-componente que contém o elemento m em $\bigoplus_{C\in G_\phi} \mathbb{Z}C$.

Usando a decomposição acima e a propriedade de decomposição de complexo de cadeia obtemos;

$$H_*(G, \overline{(\mathbb{Z}G)^\phi}) \cong \bigoplus_{C\in G_\phi} H_*(G, \mathbb{Z}C).$$

Para cada $h \in G$ consideremos o subgrupo de G, $Z(h)$, dado por; $Z(h) = \{g \in G | h = gh\phi(g^{-1})\}$. $Z(h)$ é chamado de semicentralizador de h em G.

Lema 5.2.2. *Escolhendo para cada C-componente um representante $g_C \in C$ então temos um isomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda;*

$$\mathbb{Z}C \cong \mathbb{Z}(G/Z(g_C)),$$

onde $\mathbb{Z}(G/Z(g_C))$ denota o grupo abeliano livre gerado pelas classes laterais à esquerda de $Z(g_C)$ em G.

Demonstração. De fato, para cada $g \in C$ existe $m \in G$ tal que $g = mg_C\phi(m)^{-1}$. Portanto basta definir $\alpha : \mathbb{Z}C \to \mathbb{Z}(G/Z(g_C))$ por $\alpha(g_C) = eZ(g_C)$, classe do elemento neutro, e $\alpha(g) = mZ(g_C)$. Estendemos α por linearidade para $\mathbb{Z}C$. A multiplição à esquerda em $\mathbb{Z}(G/Z(g_C))$ nos dá um homomorfismo de $\mathbb{Z}G-$módulo à esquerda.

O homomorfismo α está bem definido. Primeiramente, observemos que dados $u = gg_C\phi(g)^{-1}$ e $v = hg_C\phi(h)^{-1}$ com $u = v$ então dessa equação obtemos $g_C = h^{-1}gg_C\phi(h^{-1}g)^{-1}$. Assim, como $\alpha(g_C) = eZ(g_C)$, obtemos $gZ(g_C) = hZ(g_C)$. Agora, se tivermos $u = \sum_{i=1}^{k} m_i g_C\phi(m_i^{-1})$ e $v = \sum_{i=1}^{l} n_i g_C\phi(n_i^{-1})$, com $u = v$, então devemos ter $k = l$ e podemos supor, reordenando os índices, $m_i g_C\phi(m_i^{-1}) = n_i g_C\phi(n_i^{-1})$ para cada $i = 1, ..., k$. Pelo argumento anterior obtemos $m_i Z(g_C) = n_i Z(g_C)$ para cada $i = 1, ..., k$, e portanto $\alpha(u) = \alpha(v)$.

O homomorsfismo α é injetivo. Primeiro, dados $u = gg_C\phi(g)^{-1}$ e $v = hg_C\phi(h)^{-1}$ com $\alpha(u) = gZ(g_C) = hZ(g_C) = \alpha(v)$, então temos $h^{-1}g \in Z(g_C)$, ou seja, temos $g_C = h^{-1}gg_C\phi(h^{-1}g)^{-1} = h^{-1}u\phi(h^{-1})^{-1}$ que implica $u = hg_C\phi(h)^{-1} = v$. Analogamente, se $u = \sum_{i=1}^{k} m_i g_C\phi(m_i^{-1})$ e $v = \sum_{i=1}^{l} n_i g_C\phi(n_i^{-1})$, com $\alpha(u) = \alpha(v)$, então temos $\sum_{i=1}^{k} m_i Z(g_C) = \sum_{i=1}^{l} n_i Z(g_C)$. Dessa igualdade podemos supor $m_i Z(g_C) = n_i Z(g_C)$ para cada $i = 1, ..., k = l$. Assim, como fizemos no caso anterior concluimos que $u = v$. Claramente α é sobrejetivo e portanto um isomorfismo. □

Proposição 5.2.1 (Lema de Shapiro)**.** *Se H é um subgrupo de G e M um H-módulo, então existe um isomorfismo natural;*

$$H_*(H, M) \cong H_*(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M).$$

Uma demonstração do lema de Shapiro se encontra na página 73, proposição 6.2, de [3]. Tomando $M = \mathbb{Z}$ e $H = Z(g_C)$ na proposição acima obteremos o seguinte isomorfismo:

$$H_*(G, \mathbb{Z}(G/Z(g_C))) \cong H_*(Z(g_C)).$$

Resumimos o que fizemos anteriormente na seguinte proposição:

Proposição 5.2.2. *Escolhendo representantes g_C para cada classe semiconjugada $C \in$*

G_ϕ *então existe um isomorfismo* $HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi) \cong \bigoplus_{C \in G_\phi} H_*(Z(g_C))$, *onde cada somando* $H_*(Z(g_C))$ *corresponde à* $HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)_C$.

Pela proposição acima temos; $HH_0(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi) \cong \mathbb{Z}G_\phi$ e $HH_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi) \cong \bigoplus_{C \in G_\phi} H_1(Z(g_C))$, onde $H_1(Z(g_C)) \cong (Z(g_C))_{ab}$.

5.2.1 Traços na homologia de Hochschild

Nesta subseção descreveremos um pouco sobre traços na homologia de Hochschild e definiremos a homologia de Hochschild relativa.

Se A é uma $\mathbb{Z}G$-matriz quadrada então interpretaremos o traço de A como um elemento de $(\mathbb{Z}G)^\phi$, isto é, como um 0-ciclo na homologia de Hochschild. Desse modo denotaremos o traço de A por $T_0(A)$. Assim, temos $T_0(A) = \sum_i A_{ii} \in HH_0(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)$.

Se A é uma matriz $m \times n$ sobre o anel $\mathbb{Z}G$ e B é uma matriz $n \times m$ sobre o bimódulo $(\mathbb{Z}G)^\phi$ então definimos, $A \otimes B$, como sendo a matriz $m \times m$ com entradas no $\mathbb{Z}G-$módulo $\mathbb{Z}G \otimes (\mathbb{Z}G)^\phi$ dada por;

$$(A \otimes B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

O traço de $A \otimes B$ é: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{ki}$, que interpretaremos como uma 1-cadeia de Hochschild.

Lema 5.2.3. *A 1-cadeia, traço*$(A \otimes B)$*, é um 1-ciclo se, e somente se, traço*$(AB) =$ *traço*$(B\phi(A))$*, onde* $\phi(A) = (\phi(A))_{ij}$*. Quando traço*$(A \otimes B)$ *for um 1-ciclo, então denotaremos sua classe na homologia de Hochschild por;* $T_1(A \otimes B) \in HH_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)$.

Demonstração. Para cada i, k temos; $d_1(A_{ik} \otimes B_{ki}) = B_{ki}\phi(A_{ik}) - A_{ik}B_{ki}$. Assim, obteremos $d_1(\text{traço}(A \otimes B)) = d_1(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{ki}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} B_{ki}\phi(A_{ik}) - A_{ik}B_{ki} =$ traço$(B\phi(A))-$ traço(AB). □

Se traço$(A \otimes B) \in C_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)$ não for um 1-ciclo então nesse caso fazemos uma "relativização", ou seja, selecionamos $J \subset G_\phi$ de tal modo que sua $C-$componente $[\text{traço}(A \otimes B)]_C \in C_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)_C$ seja um 1-ciclo para todo $C \notin J$.

No próximo capítulo usaremos a homologia de Hochschild para estudar o conjunto de pontos fixos de uma homotopia $F : T \times I \to T$, usando o traço a 1-parâmetro. Esse por sua vez pertence a homologia relativa de Hochschild definida abaixo.

Definição 5.2.1.

$$HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi; J) := \bigoplus_{C \in G_\phi - J} HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)_C$$

onde $HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi; J)$ *é considerado como um subgrupo de* $HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)$. *Escrevemos* $T_1(A \otimes B; J)$ *para o elemento de* $HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi; J)$ *cuja* $C-$*componente é representada por* $[\text{traço}(A \otimes B)]_C \in C_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)_C$ *para cada* $C \in G_\phi - J$.

Capítulo 6

O Conjunto minimal de pontos fixos de aplicações em fibrados com base S^1 e fibra Toro

6.1 O problema geral

Na primeira parte desta tese trabalhamos com o seguinte problema: dados $K \to M \to S^1$, fibrado com base círculo e fibra garrafa de Klein, e aplicações que preservam fibra $f, g : M \to M$, queremos saber quando o par de aplicações (f, g) pode ser deformado, por uma homotopia que preserva fibra, à um par de aplicações livre de coincidências ?

Representando por $MC_{S^1}[f, g]$ o número mínimo de coincidências dentre todos os pares de aplicações homotópicos ao par (f, g) por homotopias que preservam fibra, então estudar o problema acima é equivalente a descobrir quando $MC_{S^1}[f, g] = 0$. Esse problema nos levou a fazer a seguinte pergunta: se $MC_{S^1}[f, g] \neq 0$ então quem é o conjunto minimal de coincidências dentre todos os pares de aplicações homotópicos ao par (f, g) por homotopias que preservam fibra ?

Neste capítulo consideramos uma aplicação $f : M \to M$ em um fibrado com base círculo e fibra Toro e estudamos o conjunto minimal dos pontos fixos sobre S^1. Ao logo de todo este capítulo denotaremos esse conjunto por $M_{S^1}[f]$. Note que $M_{S^1}[f]$ denotará o conjunto minimal enquanto $MF_{S^1}[f]$ o número mínimo de pontos fixos. Resultados sobre esses conjuntos se encontram no teorema principal deste capítulo teorema 6.6.1.

Estudar o conjunto minimal de pontos fixos de aplicações em fibrados com base S^1 e fibra Toro, nos levou ao estudo de pontos fixos de homotopias do Toro. Nesse contexto usamos o traço a 1-parâmetro algébrico desenvolvido por Ross Geoghegan e Andrew Nicas em [16]. O traço a 1-parâmetro por sua vez é uma 1-cadeia na homologia Hochschild de um $\mathbb{Z}G - \mathbb{Z}G$ bimódulo cujo grupo abeliano básico é $\mathbb{Z}G$, com $G = \pi_1(T, v)$. Suporemos ainda que $f_{|T}$ pode ser deformada a uma aplicação livre de ponto fixo, ou seja, $N(f_{|T}) = 0$.

Nosso problema, como veremos abaixo, consiste principalmente no estudo do conjunto de pontos fixos de homotopias $F : T \times I \to T$. O traço a 1-parâmetro, $R(F)$, de F é um 1-ciclo na homologia de Hochschild se, e somente se, o traço algébrico no caso clássico, $T_0(F_i)$, da aplicações $F_i : T \to T$, $i = 0, 1$, forem iguais. Esse traço como veremos abaixo é um 0-ciclo na homologia de Hochschild. Portanto, começaremos com uma revisão algébrica da teoria clássica de ponto fixo, isso também facilitará na compreensão da teoria do traço a 1-parâmetro.

6.2 Revisão da teoria clássica de ponto fixo

Seja X um CW complexo conexo, finito e $f : X \to X$ uma aplicação celular. Escolhemos um ponto base $v \in X$ e um caminho básico τ em X de v para $f(v)$. Tomemos $G = \pi_1(X, v)$ e $\phi : G \to G$ o homomorfismo dado por;

$$\phi([w]) = [\tau \circ f(w) \circ \tau^{-1}].$$

Como X é CW complexo finito então podemos tomar uma base para as k-cadeias $C_k(X)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Escolhemos também uma orientação para cada célula E de X.

Seja $p : (\tilde{X}, \tilde{v}) \to (X, v)$ o recobrimento universal de X. Para cada célula $E \in X$

escolhemos uma célula $\tilde{E}$ no recobrimento universal orientada compativelmente com E e satisfazendo $p(\tilde{E}) = E$. Tomemos também um levantamento $\tilde{\tau}$ de τ que começa em $\tilde{v} \in \tilde{X}$ e $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ o único levantamento de f que satisfaz $\tilde{f}(\tilde{v}) = \tilde{\tau}(1)$.

Devido a ação do grupo $\pi_1(X, v)$ em $\tilde{X}$, através das transformações de recobrimento, podemos considerar $C_*(\tilde{X})$ como um $\mathbb{Z}G$ complexo de cadeia à direita da seguinte forma: se $[g] \in \pi_1(X, v)$ então podemos tomar um levantamento $\tilde{g}$ para g começando em $\tilde{v}$. Dessa forma tomamos $\tilde{E}g^{-1} = h_{[g]}(\tilde{E})$, onde $h_{[g]}$ é a transformação de recobrimento que envia $\tilde{v}$ à $\tilde{g}(1)$. Se $\tilde{E}$ é uma k-célula então o lema abaixo nos diz que o homomorfismo $\tilde{f}_{\#}$ satisfaz; $\tilde{f}_{\#}(\tilde{E}g) = \tilde{f}_{\#}(\tilde{E})\phi(g)$.

Lema 6.2.1. *Seja $f : (W, w) \to (Y, y)$ aplicação entre dois CW complexos W e Y. Tomemos $\tilde{f} : (\tilde{W}, \tilde{w}) \to (\tilde{Y}, \tilde{y})$, levantamento de f no recobrimento universal $\tilde{W}$ para $\tilde{Y}$ e $f_{\#} = \phi : \pi_1(W, w) \to \pi_1(Y, y)$. O homomorfismo $\tilde{f}_{\#} : C_*(\tilde{W}; R) \to C_*(\tilde{Y}; R)$ é ϕ-linear, ou seja, satisfaz $\tilde{f}_{\#}(g\tilde{e}) = \phi(g)\tilde{f}_{\#}(\tilde{e})$.*

Demonstração. Tomando $\tilde{f} : (\tilde{W}, \tilde{w}) \to (\tilde{Y}, \tilde{y})$ o levantamento de f no recobrimento universal teremos seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{W}, \tilde{w}) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p_w"] & (\tilde{Y}, \tilde{y}) \arrow[d, "p_y"] \\
(W, w) \arrow[r, "f"] & (Y, y)
\end{tikzcd}$$

Denotemos por $G(\tilde{W}|W)$ o grupo das transformações de recobrimento de $\tilde{W}$. Escolhido o ponto base $\tilde{w} \in \tilde{W}$ e $h \in G(\tilde{W}|W)$ então pela unicidade do levantamento existe um único $\tilde{h} \in G(\tilde{Y}|Y)$ tal que; $\tilde{h}(\tilde{f}(\tilde{w})) = \tilde{f}(h(\tilde{w}))$. Defina o homomorfismo $\varphi : G(\tilde{W}|W) \to G(\tilde{Y}|Y)$ por $\varphi(h) = \tilde{h}$. Logo, para todo $h \in G(\tilde{W}|W)$ temos; $\tilde{f}(h) = \varphi(h)\tilde{f}$.

Sabemos que existe um isomorfismo $\chi_w : \pi_1(W, w) \to G(\tilde{W}|W)$ que associa a cada $[g] \in \pi_1(W, w)$ o elemento $h_{[g]}$, onde $h_{[g]}(\tilde{w}) = g.\tilde{w}$, ação do grupo fundamental em

$p^{-1}(w)$. Analogamente para Y. Portanto, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} G(\tilde{W}|W) \arrow[r, "\varphi"] & G(\tilde{Y}|Y) \\ \pi_1(W,w) \arrow[u, "\chi_w"] \arrow[r, "\phi"] & \pi_1(Y,y) \arrow[u, "\chi_y"'] \end{tikzcd}$$

Dos resultados acima podemos concluir que para cada $[g] \in \pi_1(W,w)$ temos $\varphi(h_{[g]}) = h_{[\phi(g)]}$, e portanto $\tilde{f}(h_{[g]}) = h_{[\phi(g)]}(\tilde{f})$. Logo, para cada k-célula $\tilde{e}$ de $\tilde{W}$ temos; $\tilde{f}(g\tilde{e}) = \phi(g)\tilde{f}(\tilde{e})$, onde $g\tilde{e} = h_{[g]}(\tilde{e})$. □

Pelo lema acima o homomorfismo $\tilde{f}_k : C_k(\tilde{X}) \to C_k(\tilde{X})$ satisfaz $\tilde{f}_k(\tilde{E}g) = \tilde{f}_k(\tilde{E})\phi(g)$. Visto que X é um CW complexo finito então $C_k(\tilde{X})$ é finitamente gerado. Assim, cada homomorfismo $\tilde{f}_k$ pode ser representado por uma matriz, $((\tilde{f}_k)_{ij})$, com entradas em $(\mathbb{Z}G)^{\phi}$ e definida por; $\tilde{f}_k(\tilde{E}_j) = \sum_i \tilde{E}_i(\tilde{f}_k)_{ij}$.

Definimos o operador $\tilde{f}_* := \oplus_k(-1)^k\tilde{f}_k : \oplus_k C_k(\tilde{X}) \to \oplus_k C_k(\tilde{X})$, que representa todas as matrizes $((\tilde{f}_k)_{ij})$ numa única matriz. Como foi feito no capítulo anterior o traço de $\tilde{f}_*$, $T_0(\tilde{f}_*)$, pertence a homologia de Hochschild; $HH_0(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^{\phi})$. Também podemos considerar $T_0(\tilde{f}_*) \in \mathbb{Z}G_{\phi}$. Este elemento também é conhecido como o *traço de Reidemeister*, $R(f)$, da aplicação $f : X \to X$.

Escrevendo $T_0(\tilde{f}_*) = \sum_{C \in G_{\phi}} i(f,C)C$, onde cada $i(f,C) \in \mathbb{Z}$, então os inteiros $i(f,C)$ são chamados de *índices de pontos fixos* de f. O número de índices não nulo é chamado de *número de Nielsen* , $N(f)$, de f. A soma $\sum_{C \in G_{\phi}} i(f,C)$ é o *número de Lefschetz*, $L(f)$, de f.

A definição acima é de natureza algébrica e usa o fato de X ser um CW complexo e a aplicação $f : X \to X$ celular. Existe uma definição geométrica da teoria de ponto fixo para uma aplicação contínua $f : X \to X$, onde o espaço X deve satisfazer algumas propriedades, por exemplo veja [6], [44], [45], [24] e [14]. Quando X é um espaço compacto, conexo por caminhos e ENR (retrato de vizinhança euclidiana), então as definições algébrica e geométrica são equivalentes como mostrado em [14].

Os números de Lefschetz e de Nielsen são invariantes homotópicos e possuem as propriedades descritas nos teoremas abaixo. A demonstração desses teoremas se encontram nas referências mencionadas anteriormente.

Teorema 6.2.1 (Lefschetz). *Dada uma aplicação $f : X \to X$ com $L(f) \neq 0$, então f possui pelo menos um ponto fixo.*

Teorema 6.2.2 (Nielsen-Wecken). *A aplicação $f : X \to X$ tem pelo menos $N(f)$ pontos fixos.*

6.3 Teoria do ponto fixo a 1-parâmetro

Nesta seção apresentaremos conceitos da teoria do ponto fixo a 1-parâmetro, introduzida por R.Geoghegan e A. Nicas em [16], bem como a definição do traço a 1-parâmetro para uma homotopia $F : X \times I \to X$ em um CW complexo conexo e finito X.

Seja X um CW complexo conexo, finito e seja I o intervalo $[0, 1]$ com sua usual estrutura de CW complexo, isto é, uma 1-célula e duas 0-células. Seja $F : X \times I \to X$ uma homotopia celular, ou seja, F é uma aplicação celular, onde $X \times I$ tem a estrutura produto de CW complexo e às suas células são dadas a orientação produto.

Definimos uma homotopia de cadeia $D_k : C_k(X) \to C_{k+1}(X)$, associada a F, da seguinte maneira: se E é uma k-célula orientada de X então $D_k(E)$ é definido como sendo a $(k + 1)$-cadeia; $(-1)^{k+1}F_k(E \times I) \in C_{k+1}(X)$, onde F_k é o homomorfismo induzido no nível de cadeia por F, e à célula $E \times I$ é dada a orientação produto.

Tomemos $(v, 0) \in X \times I$, ponto base, e escolhemos um caminho básico τ de v para $F(v, 0)$. Identificaremos $\pi_1(X \times I, (v, 0))$ com $\pi_1(X, v) \equiv G$ via o isomorfismo induzido pela projeção $p : X \times I \to X$. Também escreveremos $\phi : G \to G$ para a seguinte composta de homomorfismos:

$$\pi_1(X \times I, (v, 0)) \xrightarrow{F_\#} \pi_1(X, F(v, 0)) \xrightarrow{c_{\tau^{-1}}} \pi_1(X, v),$$

onde o homomorfismo $c_{\tau^{-1}}$ é o de mudança de ponto base.

Seja $\tilde{X}$ o recobrimento universal de X. Para cada célula $E \in X$ escolhemos um levantamento $\tilde{E} \in \tilde{X}$ e orientemos $\tilde{E}$ compatívelmente com E. Tomemos também um levantamento $\tilde{\tau}$ do caminho básico τ que começa no ponto base $\tilde{v} \in \tilde{X}$. Seja $\tilde{F}$ o único levantamento de F que aplica $(\tilde{v}, 0)$ a $\tilde{\tau}(1)$. A aplicação $\tilde{F} : \tilde{X} \times I \to \tilde{X}$ induz uma homotopia de cadeia $\tilde{D}_k : C_k(\tilde{X}) \to C_{k+1}(\tilde{X})$ definida por; $\tilde{D}_k(\tilde{E}) = (-1)^{k+1}\tilde{F}_k(\tilde{E} \times I)$.

Seja $\omega(t) = F(v, t)$. Considerando o caminho τ acima de v para $F(v, 0)$ então temos que $\tau\omega$ é um caminho de v para $F(v, 1)$, e este caminho que deve ser usado para determinar o levantamento $\tilde{F}_1$ de F_1. Mesmo que F_0 e F_1 sejam iguais é possível que $\tilde{F}_0$ e $\tilde{F}_1$ sejam diferentes. Também temos $\tilde{F}(\tilde{v}, 0) = \tilde{\tau}(1)$ e $\tilde{F}(\tilde{v}, 1) = \tilde{\tau}\tilde{\omega}(1)$.

Usaremos a seguinte convenção para o operador bordo: seja $E_{i,\epsilon}$ a face do cubo $I^k \equiv [0, 1]^k$ obtido mantendo a i-ésima coordenada em $\epsilon = \pm 1$. Defina o número de incidência; $[I^k : E_{i,0}] = (-1)^i = -[I^k : E_{i,1}]$. No nível de cadeia temos; $\partial_k I^k = \sum_{i,\epsilon} [I^k : E_{i,\epsilon}]E_{i,\epsilon}$. Essa convenção é para que apareça, $(-1)^{k+1}$, na definição de $\tilde{D}_k$.

Lema 6.3.1. *A homotopia de cadeia, $\tilde{D}_k : C_k(\tilde{X}) \to C_{k+1}(\tilde{X})$, definida sobre os geradores satisfaz; $(\tilde{D}_{k-1}\tilde{\partial}_k + \tilde{\partial}_{k+1}\tilde{D}_k)(\tilde{E}) = \tilde{F}_{0k}(\tilde{E}) - \tilde{F}_{1k}(\tilde{E})$.*

Demonstração. De fato, dado uma k-célula $\tilde{E}$ então pelo corolário 2.7.9 de [15] temos; $\tilde{\partial}(\tilde{E} \times I) = (-1)^{k+1}(\tilde{E} \times \{0\} - \tilde{E} \times \{1\}) + (\tilde{\partial}(\tilde{E})) \times I$. Portanto, temos;

$$\tilde{D}_{k-1}\tilde{\partial}_k(\tilde{E}) = (-1)^k \tilde{F}_{k-1}(\tilde{\partial}_k(\tilde{E}) \times I),$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\partial}_{k+1}\tilde{D}_k(\tilde{E}) &= (-1)^{k+1}\tilde{\partial}_{k+1}\tilde{F}_k(\tilde{E} \times I) \\
&= (-1)^{k+1}\tilde{F}_{k-1}\tilde{\partial}_{k+1}(\tilde{E} \times I) \\
&= (-1)^{k+1}\tilde{F}_{k-1}(\tilde{\partial}_k(\tilde{E}) \times I) + (-1)^{k+1}(-1)^{k+1}\tilde{F}_{0k}(\tilde{E}) - \tilde{F}_{1k}(\tilde{E}) \\
&= -\tilde{D}_{k-1}\tilde{\partial}_k(\tilde{E}) + \tilde{F}_{0k}(\tilde{E}) - \tilde{F}_{1k}(\tilde{E}).
\end{aligned}$$

□

Escolhido uma célula orientada $\tilde{E}$ em $\tilde{X}$, que se projeta na célula E de X, então podemos considerar $C_*(\tilde{X})$ como um $\mathbb{Z}G$ complexo de cadeia à direita da seguinte forma: $\tilde{E}[\omega]^{-1} = h_{[\omega]}(\tilde{E})$, onde ω é um laço no ponto base v, que se levanta a um caminho $\tilde{\omega}$ que começa em $\tilde{v}$ e $h_{[\omega]}$ é a transformação de recobrimento que envia $\tilde{v}$ a $\tilde{\omega}(1)$.

Temos que o operado bordo satisfaz; $\tilde{\partial}_k(\tilde{E}g) = \tilde{\partial}_k(\tilde{E})g$, pois qualquer aplicação contínua induz, no nível de cadeia, uma aplicação de cadeia. Por outro lado, a homotopia de cadeia $\tilde{D} : \tilde{X} \times I \to \tilde{X}$ é ϕ-linear pelo lema 6.2.1, ou seja, satisfaz; $\tilde{D}_k(\tilde{E}g) = \tilde{D}_k(\tilde{E})\phi(g)$. Agora, definimos os seguintes endomorfismos na soma direta $\oplus_k \tilde{C}_k(\tilde{X})$;

$$\tilde{D}_* := \oplus_k (-1)^{k+1} \tilde{D}_k,$$

$$\tilde{\partial}_* := \oplus_k \tilde{\partial}_k,$$

$$\tilde{F}_{0*} := \oplus_k (-1)^k \tilde{F}_{0k},$$

$$\tilde{F}_{1*} := \oplus_k (-1)^k \tilde{F}_{1k}.$$

Denotaremos as matrizes dos operadores acima pela mesma letra dos operadores. Reunindo as matrizes desses operadores numa única matriz chegaremos na seguinte equação matricial:

$$\tilde{D}_* \phi(\tilde{\partial}_*) - \tilde{\partial}_* \tilde{D}_* = \tilde{F}_{0*} - \tilde{F}_{1*} \tag{6.1}$$

O sinal de menos que apareceu no lado esquerdo da equação acima é devido a nossa convenção de sinais usada na definição de $\tilde{D}_k$. Pelo capítulo anterior podemos considerar o elemento; traço$(\tilde{\partial}_* \otimes \tilde{D}_*) \in HH_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^{\phi})$. Também vimos que traço$(\tilde{\partial}_* \otimes \tilde{D}_*)$ é uma 1-cadeia de Hochschild cujo bordo é:

$$\text{traço}(\tilde{D}_* \phi(\tilde{\partial}_*) - \tilde{\partial}_* \tilde{D}_*) = \text{traço}(\tilde{F}_{0*} - \tilde{F}_{1*})$$

Se traço$(\tilde{F}_{0*} - \tilde{F}_{1*}) \neq 0$ então traço$(\tilde{\partial}_* \otimes \tilde{D}_*)$ não poderá ser um ciclo. Entretanto, se F_0 e F_1 forem livres de pontos fixos então, pelo teorema 6.3.4 abaixo, traço$(\tilde{\partial}_* \otimes \tilde{D}_*)$ será um 1-ciclo visto que traço$(\tilde{F}_{0*}) =$ traço$(\tilde{F}_{1*}) = 0$. Usando a notação algébrica do capítulo anterior, denotaremos $T_1(\tilde{\partial}_* \otimes \tilde{D}_*) =$ traço$(\tilde{\partial}_* \otimes \tilde{D}_*)$.

Visto que F_0 e F_1 nem sempre são livres de pontos fixos, então consideramos o traço relativo, ou seja, removemos as influências de F_0 e F_1. Primeiro, consideremos $G_\phi(\partial F)$ o subconjunto $\{C_1, \ldots, C_k\}$ de G_ϕ consistindo das classes semiconjugadas associadas a pontos fixos de F_0 ou F_1, e assim tomamos $T_1(\tilde{\partial}_* \otimes \tilde{D}_*; G_\phi(\partial F)) \in$

$HH_1(\tilde{\partial}_* \otimes \tilde{D}_*; G_\phi(\partial F))$. Rapidamente obtemos o seguinte isomorfismo natural:

$$\begin{aligned} HH_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi; G_\phi(\partial F)) &\equiv \bigoplus_{C \in G_\phi - G_\phi(\partial F)} HH_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)_C \\ &\cong \bigoplus_{C \in G_\phi - G_\phi(\partial F)} H_1(Z(g_C)). \end{aligned}$$

Definição 6.3.1. *Com a notação anterior, temos que o traço a 1-parâmetro da homotopia $F : X \times I \to X$ é dado por;*

$$R(F) \equiv T_1(\tilde{\partial}_* \otimes \tilde{D}_*; G_\phi(\partial F)) \in \bigoplus_{C \in G_\phi - G_\phi(\partial F)} HH_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)_C.$$

Definição 6.3.2. *A C-componente de $R(F)$ denotada por $i(F, C) \in HH_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)_C \cong H_1(Z(g_C))$ será chamada de índice de ponto fixo de F correspondente à classe semiconjugada $C \in G_\phi$. O número não nulo de índices de pontos fixos é por definição o número de Nielsen a 1-parâmetro, $N(F)$, da homotopia F.*

Consideremos agora, o homomorfismo aumentação $\epsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$, definido por $\epsilon(\sum_j^n a_j g_j) = \sum_j^n a_j$, $a_j \in \mathbb{Z}$ e $g_j \in G$. Esse homomorfismo pode ser visto como um morfismo $\epsilon : (\mathbb{Z}G)^\phi \to \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}G - \mathbb{Z}G$ bimódulos onde a $\mathbb{Z}$ é dado a estrutura de bimódulo trivial. Isso decorre do grupo abeliano básico de $(\mathbb{Z}G)^\phi$ ser $\mathbb{Z}G$. Também podemos considerar $\epsilon : \overline{(\mathbb{Z}G)^\phi} \to \overline{\mathbb{Z}}$ como um morfismo de $\mathbb{Z}G$ módulos à esquerda, onde a $\overline{\mathbb{Z}}$ é dada a estrutura trivial. Com essa observação temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi) \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\cong"] & HH_*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \arrow[d, "\cong"] \\ H_*(G, \overline{(\mathbb{Z}G)^\phi}) \arrow[r, "\epsilon"] & H_*(G, \overline{\mathbb{Z}}), \end{tikzcd}$$

onde os isomorfismos das setas verticais são os isomorfismos do complexo "Bar". Assim, pelo do diagrama acima, podemos definir um homomorfismo; $\Theta : HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi) \to H_*(G, \overline{\mathbb{Z}})$.

Definição 6.3.3. *A classe a 1-parâmetro de Lefschetz, $L(F)$, é definida como sendo a imagem de $T_1(\tilde{\partial}_* \otimes \tilde{D}_*; G_\phi(\partial F))$ pelo homomorfismo Θ em $H_1(G)$. Pelo isomorfismo*

$HH_*(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^{\phi}) \cong \bigoplus_{C \in G_\phi} H_1(Z(g_C))$ *obtemos;*

$$L(F) = \sum_{C \in G_\phi - G_\phi(\partial F)} j_C(i(F, C)),$$

onde $j_C : H_1(Z(g_C)) \to H_1(G)$ *é a induzida pela inclusão* $Z(g_C) \hookrightarrow G$*.*

Uma apresentação geométrica das classes de pontos fixos para uma homotopia F é descrita a seguir. Dois pontos fixos de F, (x, t) e (y, t') estão na mesma classe de ponto fixo se, e somente se, existir um caminho ν de (x, t) para (y, t') tal que o laço $(p \circ \nu)(F \circ \nu)^{-1}$ é homotopicamente trivial. Esta relação é de equivalência sobre o conjunto $Fix(F)$.

Como no caso clássico existe uma função injetiva Φ do cojunto das classes de pontos fixos de F no conjunto das classes semiconjugadas G_ϕ. Esta função é definida do seguinte modo; a classe contendo (x, t) é aplicada na classe semiconjugada contendo $[(p \circ \mu)(F \circ \mu)^{-1}\tau]$, onde μ é um caminho do ponto base $(v, 0)$ para (x, t) e τ é o caminho básico de v para $F(v, 0)$.

Temos que a função Φ é bem definida, F tem um número finito de classes de pontos fixos e que pontos fixos que estão na mesma componente por caminhos de $Fix(F)$ estão na mesma classe de ponto fixo.

Agora, apresentaremos alguns teoremas fundamentais na teoria do ponto fixo a 1-parâmetro, a demonstração desses teoremas estão em [16].

Teorema 6.3.1 (Invariância)**.** *Sejam* $F, G : X \times I \to X$ *aplicações celulares de um CW-complexo conexo e finito* X*. Se* F *é homotópica à* G *relativo a* $X \times \{0, 1\}$ *então* $R(F) = R(G)$*.*

Teorema 6.3.2 (Teorema do ponto fixo de Lefschetz a 1-parâmetro)**.** *Dado* $F : X \times I \to X$ *uma aplicação celular de um CW-complexo conexo e finito* X *com* $L(F) \neq 0$ *então toda aplicação homotópica à* F *relativo a* $X \times \{0, 1\}$ *tem um ponto fixo que não está na mesma classe de ponto fixo de alguma das classes em* $X \times \{0, 1\}$*. Em particular, se* F_0 *e* F_1 *são livres de pontos fixos, então toda aplicação homotópica à* F *relativo a* $X \times \{0, 1\}$ *tem um ponto fixo.*

Teorema 6.3.3 (Teorema do ponto fixo de Nielsen-Wecken a 1-parâmetro)**.** *Seja $F : X \times I \to X$ uma aplicação celular de um CW-complexo conexo e finito X. Então toda aplicação homotópica à F relativo a $X \times \{0,1\}$ tem pelo menos $N(F)$ classes de pontos fixos mais aquelas classes que intersectam os conjuntos $X \times \{0,1\}$. Em particular, se F_0 e F_1 são livres de pontos fixos então toda aplicação homotópica à F relativo a $X \times \{0,1\}$ possui pelo menos $N(F)$ componentes por caminhos.*

Teorema 6.3.4. *Seja $f : X \to X$ uma aplicação celular de um CW complexo. Seja E uma k-célula de X e seja $d(\tilde{E}) = \sum_{g\in G} m_g g$, onde $m_g \in \mathbb{Z}$, a correspondente entrada na diagonal da $\mathbb{Z}G-$matriz de $\tilde{f}_k : \tilde{C}_k(\tilde{X}) \to \tilde{C}_k(\tilde{X})$. Para cada g tal que $m_g \neq 0$, a célula E contém um ponto fixo x_g tal que $\tilde{f}(\tilde{x_g}) = \tilde{x_g}g$, onde $\tilde{x_g}$ é o levantamento de x_g para $\tilde{E}$.*

O teorema acima possui uma versão para homotopia com uma hipótese sobre o CW complexo X. Dizemos que o CW complexo X é “well faced” quando dado uma $(n-1)$-célula $e^{n-1} \in X$ contida em uma n-célula $e^n \in X$ então existe uma aplicação característica $\varphi : B^n \to e^n$ cuja restrição a $(n-1)$-bola padrão é ainda uma aplicação característica. A demonstração do teorema abaixo está em [16].

Teorema 6.3.5. *Seja X um CW complexo conexo e “well faced”. Dados uma homotopia celular $F : X \times I \to X$, e $E^{q-1} \subset E^q$ células de X com dimensões indicadas, tomemos $d(\widetilde{E^{q-1}}, \tilde{E^q}) = \sum_{g\in G} m_g g$, $m_g \in \mathbb{Z}$, a correspondente entrada na $\mathbb{Z}G$-matriz de $\tilde{F}_q : C_q(\tilde{X} \times I) \to C_q(\tilde{X})$. Para cada $g \in G$ tal que $m_g \neq 0$, $E^{q-1} \times I$ contém um ponto fixo (x_g, t_g) satisfazendo $\tilde{F}(\tilde{x_g}, t_g) = \tilde{x_g}g$, onde $(\tilde{x_g}, t_g)$ é o levantamento de (x_g, t_g) para $\tilde{E}^{q-1} \times I$.*

A hipótese “well faced” no teorema acima é puramente técnica, veja, por exemplo, em [46] que todo CW complexo regular é um CW complexo “well faced”.

Agora, definiremos o traço a 1-parâmetro para homotopias contínuas num poliedro compacto. Sejam X um poliedro compacto e $F : X \times I \to X$ uma homotopia contínua. Seja K uma triangularização de X e seja J a triangularização padrão do intervalo I, ou seja, a triangularização consistindo de uma 1-célula e duas 0-células. Tomemos uma aproximação simplicial $E : Q \to K$ para F, onde Q é uma subdivisão de $K \times J$. Estamos considerando Q uma subdivisão obtida sem adicionar mais vértices. Como $|E| : |K| \times I \to |K|$ é celular, para a estrutura celular determinada por K, então podemos calcular $R(|E|)$ e $L(|E|)$. Da proposição 4.13 de [16] temos que o seguinte teorema:

Teorema 6.3.6. *Existe uma triangularização suficientemente fina, K, de X tal que $R(F)$ e $L(F)$ estão bem definidos por $R(|E|)$ e $L(|E|)$, respectivamente, ou seja, se K' é qualquer subdivisão de K e $E' : Q' \to K'$ é uma aproximação simplicial de F então $R(|E|) = R(|E'|)$ e $L(|E|) = L(|E'|)$. Além disso, se $F' : X \times I \to X$ é uma homotopia contínua homotópica a F relativo a $X \times \{0, 1\}$ então temos $R(F) = R(F')$ e $L(F) = L(F')$.*

Observação 6.3.1. *Quando X é uma variedade PL, orientada e conexa então toda aplicação $G : X \times I \to X$ é homotópica a uma aplicação $F : X \times I \to X$ cujo gráfico é transverso ao gráfico da projeção $P : X \times I \to X$, e assim temos $Fix(F) \cap X \times \{t\}$ finito para cada $t \in I$. Portanto, como mostrado na seção 6 de [16], $Fix(F)$ consiste de arcos e círculos orientados. Em particular se F_0 e F_1 são livres de pontos fixos então $Fix(F)$ consiste apenas de círculos orientados. Note que, $Fix(F)$, condiz com o conjunto de pontos fixos apresentado por H. Schirmer em [38] e [39].*

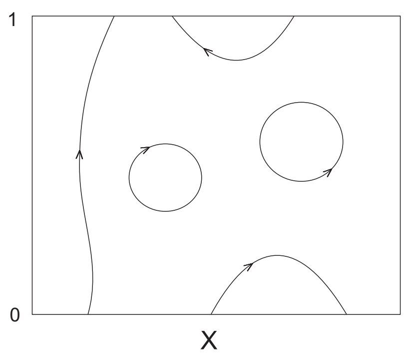


Figura 6.1: Conjunto dos pontos fixos de uma homotopia F

6.4 Fibrados com base S^1 e fibra Toro

Apresentaremos nessa seção uma breve descrição dos fibrados com base S^1 e fibra Toro, para mais detalhes desses fibrados veja [26].

Consideremos T, Toro, definido como o seguinte espaço quociente: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Denotaremos por (x, y) e por $[(x, y)]$ os elementos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e T respectivamente.

Seja A um homeomorfismo de T induzido por um operador em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que preserva $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. A é identificado com uma matriz com coeficientes inteiros e determinante 1 ou -1. Se $T \to M \xrightarrow{p} S^1$ é um fibrado com base S^1 e fibra Toro então o espaço total M é dado por; $M = MA$, onde

$$MA = \frac{T \times [0,1]}{([(x,y)], 0) \sim ([A \binom{x}{y}], 1)}.$$

A classe de $([(x, y)], t)$ em MA será denotada por $< [(x, y)], t >$. A aplicação de projeção, $p : MA \to S^1$, é dada por; $p(< [(x, y)], t >) =< t > \in [0, 1]/0 \simeq 1 \cong S^1$.

Consideremos em MA os seguintes laços com ponto base $0 = ([(0, 0)], 0)$; $a(t) =< [(t, 0)], 0 >$, $b(t) =< [(0, t)], 0 >$ e $c(t) =< [(0, 0)], t >$. Denotemos por B a matriz do homomorfismo induzido no grupo fundamental pela restrição da aplicação f a fibra T, e suponhamos que $f_{|T}$ pode ser deformada a uma aplicação livre de ponto fixo. Nesse contexto temos o seguinte teorema demonstrado em [26]:

Teorema 6.4.1. (1) $\pi_1(MA, 0) = \langle a, b, c | [a, b] = 1, cac^{-1} = a^{a_1} b^{a_2}, cbc^{-1} = a^{a_3} b^{a_4} \rangle$

(2) *O homomorfismo induzido em* $\pi_1(MA, 0)$, *é dado por;* $f_\#(a) = a^{b_1} b^{b_2}$, $f_\#(b) = a^{b_3} b^{b_4}$ *e* $f_\#(c) = a^{c_1} b^{c_2} c$.

(3) *As matrizes* A *e* B*, a menos de conjugação, devem ser como nos casos abaixo.*

Caso I	$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $a_3 \neq 0$
Caso II	$A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$ $a_3(b_4 - 1) = 0$
Caso III	$A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$ $a_3(b_4 - 1) = -2b_3$
Caso IV	$A = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$ $a_3(b_4 - 1) = 0$
Caso V	$A = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$ $a_3(b_4 - 1) = 2b_3$

Como a aplicação f preserva fibra então devemos ter $f(<[(x,y)],t>) = <[F(x,y,t)],t>$. Portanto, temos $Fix(f) = \{<[(x,y)],t> | f(<[(x,y)],t>) = <[(x,y)],t>\} = \{<[(x,y)],t> \mid <[F(x,y,t)],t> = <[(x,y)],t>\}$. Logo, $Fix(f)$ é determinado pelo conjunto dos pontos fixos da homotopia $F: T \times I \to T$ com $t \neq 0,1$, mais os pontos fixos de f em $t = 0,1$.

Observemos que, se A é uma das matrizes como no teorema 6.4.1, então para $t = 0$ teremos; $<[F(x,y,0)],0> = f(<[(x,y)],0>) = f(<[A\binom{x}{y}],1>) = <[F(A\binom{x}{y},1)],1> = <[A^{-1}F(A\binom{x}{y},1)],0>$. Assim, se para algum ponto $[(x,y)] \in T$ tivermos;

$$[(x,y)] = \begin{cases} [F(x,y,0)] \\ [A^{-1}F(A\binom{x}{y},1)] \end{cases}$$

então $<[(x,y)],0>$ será um ponto fixo de f para $t = 0$. Analogamente, se para algum ponto $[(x,y)] \in T$ tivermos;

$$[(x,y)] = \begin{cases} [F(x,y,1)] \\ [AF(A^{-1}\binom{x}{y},0)] \end{cases}$$

então $<[(x,y)],1>$ será um ponto fixo de f para $t = 1$. Essas são as únicas possibilidades de pontos fixos de f para $t = 0,1$.

Supondo que, $f_{|T}$, pode ser deformado a uma aplicação livre de pontos fixos, então podemos deformar a aplicação, f, sobre S^1, a uma aplicação f' que não tenha pontos fixos em $t = 0, 1$, isso será demonstrado na próxima seção. Para calcular o traço a 1-parâmetro tomaremos modelos para f de tal modo que essa condição já seja satisfeita. Assim, estudar o conjunto de pontos fixos da aplicação f será equivalente estudar o conjunto dos pontos fixos da homotopia $F : T \times I \to T$.

Primeiramente, concentraremos nos casos II e III do teorema 6.4.1. Dada uma aplicação $f : MA \to MA$ então temos condições algébricas necessária e suficientes, dadas pelo homomorfismo induzido, $f_{\#} : \pi_1(MA, 0) \to \pi_1(MA, 0)$, de tal modo termos $M_{S^1}[f] = \emptyset$. A demonstração desses resultados está em [26].

Teorema 6.4.2. *Se $f : MA \to MA$ uma aplicação que preserva fibra sobre S^1, então o conjunto $M_{S^1}[f]$ é vazio, nos casos II e III do teorema 6.4.1 se, e somente se, $c_1(b_4 - 1) - c_2 b_3 = 0$.*

6.5 Classes semiconjugadas no Toro

Nesta seção descreveremos algumas propriedades dos 1-ciclos de Hochschild e das classes semiconjugadas de uma homotopia do Toro. Começaremos com uma abordagem geral das classes semiconjugadas e depois focaremos no contexto dado pelo teorema 6.4.1.

Escolhendo $w = [(0, 0)] \in T$ como ponto base então temos que $G = \pi_1(T, [(0, 0)])$ é dado por; $G = \{u, v | uvu^{-1}v^{-1} = 1\}$, logo, cada elemento de G pode ser escrito da forma $u^m v^n, m, n \in \mathbb{Z}$. Sabemos que G age no recombrimento universal da seguinte forma; $u^m v^n.(x, y) = (x + m, y + n)$, identificaremos o anel de grupo $\mathbb{Z}G$ com o polinômio de Laurent $\mathbb{Z}[u, v]$. Portanto, cada 1-cadeia de Hochschild é gerada por 1-cadeias da forma; $u^k v^l \otimes u^m v^n$, onde $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$. Aqui tomaremos $u = p_{\#}(a)$ e $v = p_{\#}(b)$, onde a e b são os laços em T descritos antes do teorema 6.4.1.

Tomando $(w, 0) \in T \times I$ como ponto base e τ um caminho de w para $F(w, 0)$, onde $F : T \times I \to F$ é uma homotopia celular, então, como fizemos anteriormente, para construir o bimódulo $(\mathbb{Z}G)^{\phi}$ tomaremos o homomorfismo $\phi : G \to G$ dado pela composta dos seguintes homomorfismos:

$$\pi_1(T \times I, (v, 0)) \xrightarrow{F_\#} \pi_1(T, F(v, 0)) \xrightarrow{c_{[\tau]^{-1}}} \pi_1(T, v).$$

Visto que todo elemento em $G = \pi_1(T, w) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pode ser descrito da forma; $u^m v^n, m, n \in \mathbb{Z}$ então obtemos; $\phi(u) = u^{b_1} v^{b_2}$ e $\phi(v) = u^{b_3} v^{b_4}$. Disso obtemos; $\phi(u^m v^n) = u^{mb_1 + nb_3} v^{mb_2 + nb_4}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$. A matriz

$$[\phi] = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix}$$

será chamada matriz do homomorfismo $\phi : G \to G$. Note que podemos ver o homomorfismo ϕ como um homomorfismo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Como citado anteriormente, toda 1-cadeia básica em $C_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)$ é da forma $g = u^k v^l \otimes u^m v^n$. Logo, a classe semiconjugada, $C(g)$, é representada pelo elemento $g = u^k v^l u^m v^n$. Visto que G é abeliano, então podemos supor que toda classe semiconjugada é representada por elementos da forma $\bar{g} = u^r v^s$, $r, s \in \mathbb{Z}$.

Proposição 6.5.1. *Dois elementos $g_1 = u^{m_1} v^{n_1}$ e $g_2 = u^{m_2} v^{n_2}$ pertencentes a G representam a mesma classe semiconjugada se, e somente se, existir inteiros $m, n \in \mathbb{Z}$ satisfazendo as seguintes equações:*

$$\begin{cases} m(b_1 - 1) + nb_3 = m_2 - m_1 \\ mb_2 + n(b_4 - 1) = n_2 - n_1 \end{cases}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que exista $g = u^m v^n$ satisfazendo $g_1 = g g_2 \phi(g^{-1})$. Dessa equação obtemos; $u^{m_1} v^{n_1} = u^m v^n u^{m_2} v^{n_2} u^{-mb_1 - nb_3} v^{-mb_2 - nb_4} = u^{m_2 + m - mb_1 - nb_3}$ $v^{n_2 + n - mb_2 - nb_4}$, que implica $m_1 = m_2 + m - mb_1 - nb_3$ e $n_1 = n_2 + n - mb_2 - nb_4$.

($\Leftarrow$) Se existem $m, n \in \mathbb{Z}$ satisfazendo a equação acima, então o elemento $g = u^m v^n$ satisfaz $g_1 = g g_2 \phi(g^{-1})$. □

Se para cada $g = u^m v^n \in G$ associarmos o vetor $\Theta(g) = (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ então a proposição acima diz que dois elementos $g_1, g_2 \in G$ representam a mesma classe semiconjugada se, e somente se, existir um vetor $z \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfazendo a equação;

$([\phi]-I)z = \Theta(g_2g_1^{-1})$, onde I é a matriz identidade. Note que se tivermos $det([\phi]-I) \neq 0$ então teremos uma quantidade infinita de classes semiconjugadas no Toro.

De agora em diante, denotaremos por, $[\phi] - I : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, o homomorfismo cuja matriz é dada por $[\phi] - I$.

Corolário 6.5.1. *Dado um elemento $g = u^m v^n \in G$, então o semicentralizador de g em G, $Z(g)$, é isomorfo ao núcleo de, $[\phi] - I$, ou seja, $Z(g) \approx Ker([\phi] - I)$.*

Demonstração. Pela proposição 6.5.1 um elemento $h = u^k v^l \in G$ satisfaz a equação; $g = hg\phi(h^{-1})$ se, e somente se, o vetor $z = (k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfaz a seguinte equação: $([\phi] - I)z = 0$. □

Lema 6.5.1. *A 1-cadeia $u^k v^l \otimes u^m v^n$ é um 1-ciclo se, e somente se, o vetor $z = (k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pertencer a $Ker([\phi] - I)$.*

Demonstração. De fato, se $0 = d_1(u^k v^l \otimes u^m v^n) = u^m v^n \phi(u^k v^l) - u^k v^l u^m v^n = u^m v^n u^{kb_1+lb_3} v^{kb_2+lb_4} - u^k v^l u^m v^n = u^{m+kb_1+lb_3} v^{kb_2+lb_4+n} - u^{k+m} v^{l+n}$, então devemos ter $k(b_1 - 1) + lb_3 = 0$ e $kb_2 + l(b_4 - 1) = 0$, isso é equivalente a dizer que o vetor $z = (k, l)$ satisfaz a equação; $([\phi] - I)z = 0$. □

A seguinte observação será útil nos cálculos posteriores.

Observação 6.5.1. *Dada a 2-cadeia $u^s v^t \otimes u^k v^l \otimes u^m v^n$ então temos;*

$$\begin{aligned} & d_2(u^s v^t \otimes u^k v^l \otimes u^m v^n) = \\ = \ & u^k v^l \otimes u^m v^n \phi(u^s v^t) - u^{k+s} v^{l+t} \otimes u^m v^n + u^s v^t \otimes u^{k+m} v^{l+n} \\ = \ & u^k v^l \otimes u^{m+sb_1+tb_3} v^{n+sb_2+tb_4} - u^{k+s} v^{l+t} \otimes u^m v^n + u^s v^t \otimes u^{k+m} v^{l+n}. \end{aligned}$$

Proposição 6.5.2. *Dado $k \in \mathbb{Z}$, então toda 1-cadeia; $u^k \otimes u^m v^n$, $m, n \in \mathbb{Z}$, é homóloga a 1-cadeia; $ku \otimes u^{m+k-1} v^n$.*

Demonstração. A afirmação é clara para $k = 0, 1$. Suponha que para algum $s > 0 \in \mathbb{Z}$ temos; $u^s \otimes u^m v^n \sim su \otimes u^{m+s-1} v^n$. Tomando a 2-cadeia $u^s \otimes u \otimes u^m v^n$

então obtemos;

$$\begin{aligned} d_2(u^s \otimes u \otimes u^m v^n) &= u \otimes u^{m+s} v^n - u^{s+1} \otimes u^m v^n + u^s \otimes u^{1+m} v^n \\ &\sim u \otimes u^{m+s} v^n - u^{s+1} \otimes u^m v^n + su \otimes u^{1+m+s-1} v^n \\ &= (s+1) u \otimes u^{m+(s+1)-1} v^n - u^{s+1} \otimes u^m v^n. \end{aligned}$$

Assim temos; $(s+1)u \otimes u^{m+(s+1)-1}v^n \sim u^{s+1} \otimes u^m v^n$. Logo, por indução o resultado segue. Observemos que para $k > 0$ temos;

$$\begin{aligned} d_2(u^k \otimes u^{-k} \otimes u^m v^n) &= u^{-k} \otimes u^{m+k} v^n - 1 \otimes u^m v^n + u^k \otimes u^{m-k} v^n \\ &\sim u^{-k} \otimes u^{m+k} v^n + u^k \otimes u^{m-k} v^n \\ &\sim u^{-k} \otimes u^{m+k} v^n + ku \otimes u^{m-k+k-1} v^n. \end{aligned}$$

Refazendo essa conta com, $m-k$, no lugar de, m, obteremos; $u^{-k} \otimes u^m v^n \sim -ku \otimes u^{m-k-1} v^n$, que prova o caso em que k é negativo. □

Lema 6.5.2. *Toda 1-cadeia;* $\sum_{i=1}^{t} a_i u^{k_i} v^{l_i} \otimes u^{m_i} v^{n_i}$, *é homóloga a uma 1-cadeia;* $\sum_{i=1}^{\bar{t}} \bar{a}_i u^{\bar{k}_i} v^{\bar{l}_i} \otimes u^{\bar{m}_i} v^{\bar{n}_i}$, *onde todos os* $\bar{l}_i$, $i = 1, ..., \bar{t}$, *são positivos.*

Demonstração. Para facilitar a notação chamaremos $w_i = a_i u^{k_i} v^{l_i} \otimes u^{m_i} v^{n_i}$ e $\alpha = \sum_{i}^{t} a_i u^{k_i} v^{l_i} \otimes u^{m_i} v^{n_i}$. Se existe algum $l_i \leq 0$ então tomando a 2-cadeia $\gamma_i = a_i u^{k_i} v^{l_i} \otimes u^{k_i} v^{-l_i} \otimes u^{m_i - k_i} v^{n_i - l_i}$ obteremos; $d_2(\gamma_i) = w_i - g_i + h_i$, onde $g_i = -a_i u^{2k_i} \otimes u^{m_i - k_i} v^{n_i - l_i}$ e $h_i = a_i u^{k_i} v^{-l_i} \otimes u^{m_i + k_i(b_1 - 1) + l_i b_3} v^{n_i + k_i b_2 + l_i(b_4 - 1)}$. Logo, $w_i \sim g_i - h_i$, e as 1-cadeias g_i e h_i possuem a forma desejada. □

De agora em diante, dado uma 1-cadeia; $\sum_{i=1}^{t} a_i u^{k_i} v^{l_i} \otimes u^{m_i} v^{n_i}$, suporemos $l_i \geq 0$ para todo $i = 1, ..., t$.

Proposição 6.5.3. *Se a 1-cadeia de Hochschild;* $\sum_{i=1}^{t} a_i u^{k_i} v^{l_i} \otimes u^{m_i} v^{n_i}$, *for um 1-ciclo, então a 1-cadeia;* $\sum_{i=1}^{t} a_i u^{k_1 + ... + k_t} v^{l_1 + ... + l_t} \otimes u^m v^n$, *também será um 1-ciclo, para quaisquer* $m, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Dado a 1-cadeia, $\sum_i^t a_i u^{k_i} v^{l_i} \otimes u^{m_i} v^{n_i}$, com $d_1(\sum_i^t a_i u^{k_i} v^{l_i} \otimes u^{m_i} v^{n_i}) = \sum_i^t a_i u^{m_i+k_ib_1+l_ib_3} v^{l_ib_4+k_ib_2+n_i} - a_i u^{m_i+k_i} v^{l_i+n_i} = 0$, então chamando $e_i = u^{m_i+k_ib_1+l_ib_3} v^{l_ib_4+k_ib_2+n_i}$ e $f_i = u^{m_i+k_i} v^{l_i+n_i}$, obteremos a seguinte igualdade de elementos no anel de grupo $\mathbb{Z}G$:

$$\sum_i^t a_i e_i = \sum_i^t a_i f_i.$$

Assim, para cada i, $1 \leq i \leq t$ existe j, $1 \leq j \leq t$ tal que $a_i = a_j$ e $e_i = f_j$. Essa última igualdade implica na seguinte equação:

$$(I) \begin{cases} m_i + k_ib_1 + l_ib_3 = k_j + m_j \\ l_ib_4 + k_ib_2 + n_i = l_j + n_j \end{cases}$$

Se tivermos $i = j$ então a equação acima nos diz que o vetor (k_i, l_i) satisfaz a equação; $([\phi] - I)\binom{k_i}{l_i} = 0$, ou seja, pertence ao núcleo de $[\phi] - I$. Se $i \neq j$ então, fixado j, existe q, $1 \leq q \leq t$ tal que $a_j = a_q$ e $e_j = f_q$, que implica na seguinte equação:

$$(II) \begin{cases} m_j + k_jb_1 + l_jb_3 = k_q + m_q \\ l_jb_4 + k_jb_2 + n_j = l_q + n_q \end{cases}$$

Adicionando, respectivamente as primeiras e segundas linhas de (I) e (II), obteremos;

$$\begin{cases} (k_i + k_j)(b_1 - 1) + (l_i + l_j)b_3 = k_q - k_i + m_q - m_i \\ (k_i + k_j)b_2 + (l_i + l_j)(b_4 - 1) = l_q - l_i + n_q - n_i \end{cases}$$

Se $i = q$ então obteremos; $(k_i + k_j)(b_1 - 1) + (l_i + l_j)b_3 = 0$ e $(k_i + k_j)b_2 + (l_i + l_j)(b_4 - 1) = 0$, que é equivalente a dizer que o vetor, $(k_i + k_j, l_i + l_j)$, satisfaz a equação; $([\phi] - I)\binom{k_i+k_j}{l_i+l_j} = 0$, ou seja, está no núcleo de $[\phi] - I$. Em seguida tomamos um novo, $1 \leq i' \leq t$, e fazemos o mesmo processo.

Se tivermos $i \neq q$ então existe p, $1 \leq p \leq t$ com $a_q = a_p$ e $e_q = f_p$, onde da última relação obtemos a seguinte igualdade:

$$(III) \begin{cases} m_q + k_qb_1 + l_qb_3 = k_p + m_p \\ l_qb_4 + k_qb_2 + n_q = l_p + n_p \end{cases}$$

Assim, adicionando respectivamente as primeiras e segundas linhas de (I), (II)e (III), obteremos;

$$\begin{cases} (k_i + k_j + k_q)(b_1 - 1) + (l_i + l_j + lq)b_3 = k_q - k_i + m_q - m_i \\ (k_i + k_j + k_q)b_2 + (l_i + l_j + l_q)(b_4 - 1) = l_q - l_i + n_q - n_i \end{cases}$$

Analogamente ao caso anterior, se $i = p$ então concluiremos que vetor $(k_i + k_j + k_q, l_i + l_j + lq)$ pertence ao núcleo de $[\phi] - I$. Se $i \neq p$ então continuamos o processo e obtendo vetores da forma; $(\sum_{j'}^{t'} k_{j'}, \sum_{j'}^{t'} l_{j'})$, onde $1 \leq j', t' \leq t$, e concluindo que esse último vetor pertence ao núcleo de $[\phi] - I$.

Portanto, depois de fazermos o processo acima para todos os índices $1 \leq i \leq t$, basta adicionar todos os vetores e concluir que o vetor; $(\sum_{j}^{t} k_j, \sum_{j}^{t} l_j)$ pertence ao núcleo de $[\phi] - I$. Note que, pelos resultados acima, pertencer ao núcleo de $[\phi] - I$ é uma condição necessária e suficiente para que a 1-cadeia, $\sum_{i=1}^{t} a_i u^{k_1 + \ldots + k_t} v^{l_1 + \ldots + l_t} \otimes u^m v^n$, seja um 1-ciclo, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Classes semiconjugadas no caso particular do teorema 6.4.1

Agora, aplicaremos os resultados acima no caso particular, onde a matriz do homomorfismo ϕ é obtida pela homotopia, F, induzida por uma aplicação $f : MA \to MA$, como no teorema 6.4.1.

Dada $f : MA \to MA$, aplicação que preserva fibra, então temos; $f(< [(x, y)], t >) =< [F(x, y, t)], t >$. Fixado $t = 0$ obtemos; $f(< [(x, y)], 0 >) =< [F(x, y, 0)], 0 >$. Assim temos $F_{\#}(a) = f_{|T_{\#}}(a)$ e $F_{\#}(b) = f_{|T_{\#}}(b)$, onde a e b são os laços dados no teorema 6.4.1. Logo, pelo teorema 6.4.1, temos $\phi(a) = a$ e $\phi(b) = a^{b_3} b^{b_4}$. Portanto,

$$[\phi] = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix},$$

ou seja, com a notação anterior temos; $b_1 = 1$ e $b_2 = 0$. O termo, homotopia, F, induzida por f, significa que f é dada por; $f(< [(x, y)], t >) =< [F(x, y, t)], t >$.

Observação 6.5.2. *No caso I do teorema 6.4.1 toda aplicação $f : MA \to MA$, sobre S^1, pode ser deformada a uma aplicação livre de ponto fixo. Portanto, trabalharemos apenas com os outros casos, ou seja, a partir de agora em diante suporemos que pelo menos um dos inteiros b_3, $b_4 - 1$ é diferente de zero.*

Com as observações acima e com os resultados obtidos anteriormente temos; dado um elemento $g = u^m v^n$ então o semicentralizador de g em G, $Z(g)$, é dado por; $Z(g) = \{u^k | k \in \mathbb{Z}\} \approx \mathbb{Z}$. Temos que a 1-cadeia de Hochschild; $u^k v^l \otimes u^m v^n$ é um 1-ciclo se, e somente se, $l = 0$. Também temos que, dois elementos $g_1 = u^{m_1} v^{n_1}$ e $g_2 = u^{m_2} v^{n_2}$ representam a mesma classe semiconjugada se, e somente se, existir $n \in \mathbb{Z}$ satisfazendo as seguintes equações: $nb_3 = m_2 - m_1$ e $n(b_4 - 1) = n_2 - n_1$.

Pela última proposição temos que, se a 1-cadeia, $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} a_i u^{k_i} v^{l_i} \otimes u^{m_i} v^{n_i}$, for um 1-ciclo, então a 1-cadeia; $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} a_i u^{k_1 + \ldots + k_t} v^{l_1 + \ldots + l_t} \otimes u^m v^n$, também será um 1-ciclo, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$. Logo, nesta situação particular, devemos ter $l_1 + \ldots + l_t = 0$. Como estamos supondo $l_i \geq 0$, para todo $1 \leq i \leq t$ então devemos ter $l_i = 0$ para todo i. Assim, podemos concluir que todo 1-ciclo; $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} a_i u^{k_i} v^{l_i} \otimes u^{m_i} v^{n_i}$, é homólogo a um 1-ciclo da forma; $\displaystyle\sum_{i=1}^{\bar{t}} \bar{a}_i u \otimes u^{\bar{m}_i} v^{\bar{n}_i}$.

O resultado do parágrafo anterior nos diz que, $\{u \otimes u^m v^n | m, n \in \mathbb{Z}\}$, é um conjunto gerador para $HH_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi) \cong \bigoplus_{C \in G_\phi} H_1(Z(g_C)) \cong \bigoplus_{C \in G_\phi} \mathbb{Z}$. Observemos que $u \otimes u^{m-1} v^n \sim u^{-1} \otimes u^{m+1} v^n$, assim, em algumas situações, trabalharemos com o conjunto gerador da forma; $\{u^{-1} \otimes u^m v^n | m, n \in \mathbb{Z}\}$.

As próximas proposições serão usadas no cálculo do conjunto minimal de pontos fixos, $M_{S^1}[f]$, de uma aplicação $f : MA \to MA$.

Proposição 6.5.4. *Sejam $F : T \times I \to T$ homotopia induzida por $f : MA \to MA$, $f(< [(x,y)], t >) = < F([(x,y)], t), t >$, $P : T \to T$ um isomorfismo e $g : MA^1 \to MA^1$, aplicação que preserva fibra definida por; $g(< [(x,y)], t >) = < [P \circ F \circ (P^{-1} \times Id)((\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}), t)], t >$, onde P é um isomorfismo de fibrados, $P : MA \to$*

MA^1, dado por $P(<[(x,y)],t>) =<[P\binom{x}{y}],t>$ e $A^1 = P \circ A \circ P^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} MA \arrow[r, "f"] \arrow[d, "P"'] & MA \arrow[d, "P"] \\ MA^1 \arrow[r, "g"] & MA^1 \end{tikzcd}$$

Então, nas condições acima, temos $M_{S^1}[f] \approx M_{S^1}[g]$.

Demonstração. Primeiro, observemos que a homotopia, $G = P \circ F \circ (P^{-1} \times Id)$, induz uma aplicação em MA^1. De fato, como a homotopia F induz uma aplicação, f, em MA então devemos ter; $f(<[(x,y)],0>) = f(<[A\binom{x}{y}],1>)$, ou seja, $<A(F([(x,y)],0)),1> = <F([(x,y)],0),0> = <F([A\binom{x}{y}],1),1>$. Portanto, em T devemos ter; $[A(F((x,y),0))] = [F(A\binom{x}{y},1)]$.

Como P é um isomorfismo, então podemos escrever a igualdade acima na forma $[A(F(P^{-1}(x,y),0))] = [F(A(P^{-1}(x,y),1),1]$. Aplicando o isomorfismo, P, nessa igualdade obtemos; $[PAP^{-1}(PF(P^{-1}(x,y),0))] = [PFP^{-1}(PA(P^{-1}(x,y),1)),1]$, que é equivalente a $[A^1(G((x,y),0))] = [G(A^1\binom{x}{y}),1),1]$. Logo, em MA^1 obteremos; $<G([(x,y)],0),0> =<A^1(G([(x,y)],0)),1> =<G([A^1\binom{x}{y}],1),1>$. Essa última igualdade é equivalente à $g(<[(x,y)],0>) = g(<[A^1\binom{x}{y}],1>)$.

Dada uma homotopia $H : MA \times I \to MA$, sobre S^1, com $H(-,0) = f(-)$, então tomando $H' : MA^1 \times I \to MA^1$ dada por $H'_s = P \circ H_s \circ (P^{-1} \times Id)$ temos que H' é uma homotopia, sobre S^1, com $H'(-,0) = g(-)$. Como o isomorfismo P é dado por $P(<[(x,y)],t>) =<[P\binom{x}{y}],t>$, então a homotopia H'_s é de fato sobre S^1. Observemos que se a homotopia H é sobre S^1 então H deve ser da forma; $H(<[(x,y)],t>,s) =<[h_1(x,y,t,s),h_2(x,y,t,s)],t>$.

Tomando $s = 1$ na igualdade, $H'_s = P \circ H_s \circ (P^{-1} \times Id)$, obteremos; $P(Fix(H_1)) = Fix(H'_1)$. De fato, se $H_1(<w,t>) =<w,t>$ então obtemos; $H'_1(P(<w,t>)) = P \circ H_1 \circ P^{-1}(P(<w,t>)) = P \circ H_1(<w,t>) = P(<w,t>)$, e portanto $P(Fix(H_1)) \subset Fix(H'_1)$. Agora, se $H'_1(<w,t>) =<w,t>$ então rapidamente vemos que $P^{-1}(<w,t>)$ pertence a $Fix(H_1)$, e isso implica $P(Fix(H_1)) \supset Fix(H'_1)$. Disso obtemos $\#\{Fix(H_1)\} = \#\{Fix(H_1^{'})\}$, pois P é um homeomorfismo.

$$\begin{tikzcd} MA \times I \arrow[r, "H_s"] \arrow[d, "P\times Id"'] & MA \arrow[d, "P"] \\ MA^1 \times I \arrow[r, "H_s^{'}"] & MA^1 \end{tikzcd}$$

Reciprocamente, dada uma homotopia, $H_s^{'} : MA^1 \times I \to MA^1$, sobre S^1, com $H^{'}(-,0) = g(-)$, então definindo a homotopia $H_s : MA \times I \to MA$ por; $H_s = P^{-1} \circ H_s^{'} \circ (P \times Id)$, então H_s é sobre S^1, e ainda $(P^{-1} \times Id)(Fix(H_1^{'})) = Fix(H_1)$. Assim, $\#\{Fix(H_1^{'})\} = \#\{Fix(H_1)\}$.

Das afirmações acima obtemos; $min\{\#Fix(f^{'})|f^{'} \sim_{S^1} f\} = min\{\#Fix(g^{'})|g^{'} \sim_{S^1} g\}$, mais ainda, $M_{S^1}[f] \approx M_{S^1}[g]$, onde $g = P \circ f \circ P^{-1}$. $\square$

Dada uma homotopia $F : T \times I \to T$ e um isomorfismo $P : T \to T$ então o teorema acima sugere a seguinte pergunta: considerando a homotopia $G : T \times I \to T$ dada por, $G = P \circ F \circ (P^{-1} \times Id)$, então é verdade que $R(F) = R(G)$?

A resposta para a pergunta acima é desconhecida. Se considerarmos a mesma pergunta para uma homotopia $F : X \times I \to X$ em um CW complexo, conexo e finito X então a resposta é negativa, um contra-exemplo foi dado em [18].

Proposição 6.5.5. *Se MA é um fibrado como no teorema 6.4.1 então toda aplicação $f : MA \to MA$, sobre S^1, satisfazendo $N(f_{|T}) = 0$ é homotópica, sobre S^1, a uma aplicação, $g : MA \to MA$, onde $g(<[x,y],0>) : T \to T$ é livre de ponto fixo.*

Demonstração. Primeiro, observemos que $f : MA \to MA$ é dada pela seguinte expressão: $f(<(x,y),t>) =< (f_1(x,y,t), f_2(x,y,t)), t>$, pois f preserva fibra. Vamos chamar $F(x,y,t) = (f_1(x,y,t), f_2(x,y,t))$. Note que da igualdade $f(<(x,y),0>) = f(< A\binom{x}{y}, 1>)$ temos; $(F(x,y,0),0) \sim (F(A\binom{x}{y}),1),1)$.

Como o fibrado MA é localmente trivial então podemos tomar $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$ tal que $p^{-1}((\epsilon, 1-\epsilon)) \approx (\epsilon, 1-\epsilon) \times T$. Tomemos a homotopia $H : MA \times I \to MA$ definida por;

$$H(<[x,y],t>,s) = \begin{cases} <F(x,y,0),t> & se \quad 0 \leq t \leq s\epsilon \\ <F(x,y,\frac{1}{1-2s\epsilon}(t-s\epsilon)),t> & se \quad s\epsilon \leq t \leq 1-s\epsilon \\ <F(x,y,0),t> & se \quad 1-s\epsilon \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Visto que $N(f_{|_T}) = 0$ então existe uma homotopia $h : T \times I \to T$ tal que $h(x,y,1) = F(x,y,0)$ e a aplicação $h(x,y,0)$ é livre de ponto fixo. Assim, podemos tomar a homotopia $G : MA \times I \to MA$ definida por;

$$G(<[x,y],t>,s) = \begin{cases} <h(x,y,\frac{(t-\epsilon)}{\epsilon}s+1),t> & se \quad 0 \leq t \leq \epsilon \\ <F(x,y,\frac{1}{1-2\epsilon}(t-\epsilon)),t> & se \quad \epsilon \leq t \leq 1-\epsilon \\ <h(x,y,\frac{-(t-1+\epsilon)}{\epsilon}s+1),t> & se \quad 1-\epsilon \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Assim, tomando a homotopia $J : MA \times I \to MA$ definida por:

$$J(<[x,y],t>,s) = \begin{cases} H(<[x,y],t>,2s) & se \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(<[x,y],t>,2s-1) & se \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

então a função $f : MA \to MA$ é homotópica, sobre S^1, a função $g : MA \to MA$ dada abaixo;

$$g(<(x,y),t>) = \begin{cases} <h(x,y,\frac{t}{\epsilon}),t> & se \quad 0 \leq t \leq \epsilon \\ <F(x,y,\frac{1}{1-2\epsilon}(t-\epsilon)),t> & se \quad \epsilon \leq t \leq 1-\epsilon \\ <h(x,y,\frac{1}{\epsilon}(-t+1)),t> & se \quad 1-\epsilon \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Além disso, temos que, $g(<(x,y)>,0) = h(x,y,0)$, é livre de ponto fixo. □

6.6 Estudando o conjunto $M_{S^1}[f]$

Nesta seção demonstraremos o seguinte teorema:

Teorema 6.6.1. *Dada uma aplicação $f : MA \to MA$ que preserva fibra, então o homomorfismo $f_\# : \pi_1(MA) \to \pi_1(MA)$ é dado por; $f_\#(a) = a$, $f_\#(b) = a^{b_3}b^{b_4}$ e $f_\#(c) = a^{c_1}b^{c_2}c$, onde a,b,c são os geradores de $\pi_1(MA,0)$ descritos na seção anterior. Se o fibrado MA é igual a um dos fibrados dados abaixo.*

No caso II

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ e\ B=\begin{pmatrix}1&n(b_4-1)\\0&b_4\end{pmatrix}\quad ou\quad A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ e\ B=\begin{pmatrix}1&b_3\\0&-1\end{pmatrix}$$

No caso III

$$A=\begin{pmatrix}1&2k\\0&-1\end{pmatrix}\ e\ B=\begin{pmatrix}1&b_3\\0&b_4\end{pmatrix}\quad ou\quad A=\begin{pmatrix}1&a_3\\0&-1\end{pmatrix}\ e\ B=\begin{pmatrix}1&a_3\\0&-1\end{pmatrix}$$

onde $n,k,b_3,b_4,c_1,c_2,a_3\in\mathbb{Z}$*, então o conjunto minimal dos pontos fixos* $M_{S^1}[f]$*, é formado por* $|c_1(b_4-1)-c_2b_3|$ *círculos disjuntos.*

Demonstração

No caso II do teorema 6.4.1 temos;

$$A=\begin{pmatrix}1&a_3\\0&1\end{pmatrix}\quad e\quad B=\begin{pmatrix}1&b_3\\0&b_4\end{pmatrix},$$

e no caso III temos

$$A=\begin{pmatrix}1&a_3\\0&-1\end{pmatrix}\quad e\quad B=\begin{pmatrix}1&b_3\\0&b_4\end{pmatrix},$$

onde $a_3(b_4-1)=0$ no caso II, $a_3(b_4-1)=-2b_3$ no caso III e $c_1(b_4-1)-c_2b_3\neq 0$ em ambos os casos. Primeiramente, em ambos os casos, consideraremos a situação; $b_4-1\neq 0$ e $b_3=0$. Portanto, nessa situação devemos ter $a_3=0$ e $c_1(b_4-1)\neq 0$.

Tomemos a homotopia $F:T\times I\to T$ definida por:

$$F([(x,y)],t)=\begin{cases}[(x+2c_1t-\frac{1}{2},b_4y)] & ,0\leq t\leq\frac{1}{2}\\ [(x+\frac{2c_1-1}{2},b_4y+2c_2t-c_2)] & ,\frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$$

e a aplicação $f:T\times I\to T\times I$ definida por $f([(x,y)],t)=(F([(x,y)],t),t)$. Observemos que a aplicação f satisfaz a seguinte relação em MA: $f([(x,y)],0)\sim f([A\binom{x}{y}],1)$. Faremos apenas caso III, o caso II é análogo. De fato, no caso III temos; $f([(x,y)],0)=([(x-\frac{1}{2},b_4y)],0)=([(x+\frac{2c_1-1}{2},b_4y+c_2)],0)$, $f([A\binom{x}{y}],1)=([(x+\frac{2c_1-1}{2},-b_4y-c_2)],1)$.

Visto que em MA temos a seguinte equivalência: $(w,0) \sim (Aw,1)$ para todo $w \in T$, então temos $f([(x,y)],0) \sim f([A\binom{x}{y}],1)$ em MA. Essa última observação nos diz que a aplicação f induz uma aplicação natural em MA, que também denotaremos por f, definida por $f(<[(x,y)],t>) =< F([(x,y)],t),t>$. Note que o homomorfismo induzido por f satisfaz; $f_{\#}(a) = a$, $f_{\#}(b) = a^{b_3}b^{b_4}$ e $f_{\#}(c) = a^{c_1}b^{c_2}c$.

Nos casos II e III, com $b_3 = 0$ e $b_4 - 1 \neq 0$, a função f dada acima não tem pontos fixos para $t = 0, 1$. Isso segue rapidamente observando que as funções $F([(x,y)],0)$, $F([(x,y)],1)$, $AF([A^{-1}\binom{x}{y}],0)$ e $A^{-1}F([A\binom{x}{y}],1)$ são livres de pontos fixos. Assim, estudar o conjunto $Fix(f)$ é equivalente a estudar $Fix(F)$. Para esse último calcularemos o número de Nielsen a 1-parâmetro, $N(F)$, usando a teoria do ponto fixo a 1-parâmetro dada anteriormente.

Tomemos a decomposição celular para T que consiste de duas 0-células; $E_1^0 = \{[(0,0)]\}$, $E_2^0 = \{[(\frac{1}{2},0)]\}$, quatro 1-células; $E_1^1 = \{[(x,0)]|0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$, $E_2^1 = \{[(x,0)]|\frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$, $E_3^1 = \{[(0,y)]|0 \leq y \leq 1\}$, $E_4^1 = \{[(\frac{1}{2},y)]|0 \leq y \leq 1\}$, e duas 2-células; $E_1^2 = \{[(x,y)]|0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1\}$, $E_2^2 = \{[(x,y)]|\frac{1}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Orientemos as células acima como na figura abaixo. Note que, pela proposição 4.1 de [16] o traço a 1-parâmetro, $R(F)$, independe das escolhas de orientações das células e de seus levantamentos para o recobrimento universal. Observemos ainda que, para essa decomposição celular a aplicação F é celular.

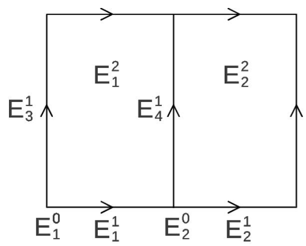


Figura 6.2: Decomposição celular para o Toro, caso $b_4 - 1 \neq 0$

Escolhemos no recobrimento universal, $\mathbb{R}^2$, a decomposição celular que consiste de duas 0-células; $\tilde{E}_1^0 = (0,0)$, $\tilde{E}_2^0 = (\frac{1}{2},0)$, quatro 1-células; $\tilde{E}_1^1 = \{(x,0)|0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$, $\tilde{E}_2^1 = \{(x,0)|\frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$, $\tilde{E}_3^1 = \{(0,y)|0 \leq y \leq 1\}$, $\tilde{E}_4^1 = \{(\frac{1}{2},y)|0 \leq y \leq 1\}$, e duas

2-células; $\tilde{E}_1^2 = \{(x,y)|0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1\}$, $\tilde{E}_2^2 = \{(x,y)|\frac{1}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Consideremos $w = [(0,0)]$ como ponto base e τ, caminho básico, como a classe do caminho linear ligando w a $F(w,0)$. Tomando os levantamentos $\tilde{w} = (0,0)$ e $\tilde{\tau}$ o caminho linear ligando $\tilde{w}$ ao ponto $(-\frac{1}{2}, 0)$, então o único levantamento $\tilde{F} : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2$ de F que envia $\tilde{w}$ a $\tilde{\tau}(1)$ é dado por;

$$\tilde{F}(x,y,t) = \begin{cases} (x + 2c_1 t - \frac{1}{2}, b_4 y) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (x + \frac{2c_1 - 1}{2}, b_4 y + 2c_2 t - c_2) & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Vimos anteriormente que $C_*(\mathbb{R}^2)$ pode ser considerado como um $\mathbb{Z}G$ complexo de cadeia à direita. $\tilde{F}$ induz uma homotopia de cadeia $\tilde{D}_k : C_k(\mathbb{R}^2) \to C_{k+1}(\mathbb{R}^2)$ dada por $\tilde{D}_k(\tilde{E}_j^i) = (-1)^{k+1}\tilde{F}_k(\tilde{E}_j^i \times I)$, onde a matriz de $\tilde{D}$ tem coeficientes em $(\mathbb{Z}G)^\phi$. Observemos que $C_*(\mathbb{R}^2)$ é concentrado em dimensões $0, 1, 2$. Primeiro, calcularemos a matriz do operador bordo, $\tilde{\partial}_*$, que é dado em termos dos operadores $\tilde{\partial}_j : C_j(\mathbb{R}^2) \to C_{j-1}(\mathbb{R}^2)$.

Temos; $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_1^1) = \tilde{E}_2^0 - \tilde{E}_1^0$, $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_2^1) = \tilde{E}_1^0 u^{-1} - \tilde{E}_2^0$, $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_3^1) = \tilde{E}_1^0 v^{-1} - \tilde{E}_1^0$ e $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_4^1) = \tilde{E}_2^0 v^{-1} - \tilde{E}_2^0$. Assim, a matriz $[\tilde{\partial}_1]$ do operador bordo $\tilde{\partial}_1 : C_1(\mathbb{R}^2) \to C_0(\mathbb{R}^2)$ é dada por;

$$[\tilde{\partial}_1] = \begin{pmatrix} -1 & u^{-1} & v^{-1} - 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & v^{-1} - 1 \end{pmatrix}$$

Também temos; $\tilde{\partial}_2(\tilde{E}_1^2) = \tilde{E}_3^1 + \tilde{E}_1^1 v^{-1} - \tilde{E}_4^1 - \tilde{E}_1^1$ e $\tilde{\partial}_2(\tilde{E}_2^2) = \tilde{E}_4^1 + \tilde{E}_2^1 v^{-1} - \tilde{E}_3^1 u^{-1} - \tilde{E}_2^1$. Portanto, a matriz $[\tilde{\partial}_2]$ do operador bordo $\tilde{\partial}_2 : C_2(\mathbb{R}^2) \to C_1(\mathbb{R}^2)$ é dada por;

$$[\tilde{\partial}_2] = \begin{pmatrix} v^{-1} - 1 & 0 \\ 0 & v^{-1} - 1 \\ 1 & -u^{-1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

O operador, $\tilde{\partial}_*$, é definido por; $\tilde{\partial}_* = \oplus_k \tilde{\partial}_k$, logo sua matriz é dada por;

$$[\tilde{\partial}_*] = \begin{pmatrix} [\tilde{\partial}_1] & 0 \\ 0 & [\tilde{\partial}_2] \end{pmatrix}$$

Dado um inteiro m então definimos;

$$\tilde{X}(m) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} u^{1-j} & , se \quad m > 0 \\ 0 & , se \quad m = 0 \\ \sum_{j=1}^{-m} -u^{j} & , se \quad m < 0 \end{cases}, \qquad \tilde{Y}(m) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} u^{2-j} & , se \quad m > 0 \\ 0 & , se \quad m = 0 \\ \sum_{j=1}^{-m} -u^{j+2} & , se \quad m < 0 \end{cases},$$

$$\tilde{W}(m) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} v^{1-j} & , se \quad m > 0 \\ 0 & , se \quad m = 0 \\ \sum_{j=1}^{-m} -v^{j} & , se \quad m < 0 \end{cases}$$

Com a definição acima, calculamos a matriz da homotopia de cadeia $\tilde{D}_k : C_k(\mathbb{R}^2) \to C_{k+1}(\mathbb{R}^2)$, para $k = 0, 1$. Temos;

$$\tilde{D}_0(\tilde{E}_1^0) = -\tilde{E}_1^1 \tilde{X}(c_1) - \tilde{E}_2^1 \tilde{Y}(c_1) - \tilde{E}_4^1 u^{1-c_1} \tilde{W}(c_2),$$

$$\tilde{D}_0(\tilde{E}_2^0) = -\tilde{E}_1^1 \tilde{X}(c_1) - \tilde{E}_2^1 \tilde{X}(c_1) - \tilde{E}_3^1 u^{-c_1} \tilde{W}(c_2).$$

Assim, a matriz $[\tilde{D}_0]$ da homotopia de cadeia, $\tilde{D}_0 : C_0(\mathbb{R}^2) \to C_1(\mathbb{R}^2)$, é dada por;

$$[\tilde{D}_0] = \begin{pmatrix} -\tilde{X}(c_1) & -\tilde{X}(c_1) \\ -\tilde{Y}(c_1) & -\tilde{X}(c_1) \\ 0 & -u^{-c_1} \tilde{W}(c_2) \\ -u^{1-c_1} \tilde{W}(c_2) & 0 \end{pmatrix}$$

Também temos;

$$\tilde{D}_1(\tilde{E}_1^1) = \tilde{E}_2^2 u^{1-c_1} \tilde{W}(c_2),$$

$$\tilde{D}_1(\tilde{E}_2^1) = \tilde{E}_1^2 u^{1-c_1} \tilde{W}(c_2),$$

$$\tilde{D}_1(\tilde{E}_3^1) = \tilde{E}_1^2 \tilde{X}(c_1) \tilde{W}(b_4) + \tilde{E}_2^2 \tilde{Y}(c_1) \tilde{W}(b_4) \qquad e$$

$$\tilde{D}_1(\tilde{E}_4^1) = \tilde{E}_1^2 \tilde{X}(c_1) \tilde{W}(b_4) + \tilde{E}_2^2 \tilde{X}(c_1) \tilde{W}(b_4).$$

Logo, a matriz $[\tilde{D}_1]$ da homotopia de cadeia, $\tilde{D}_1 : C_1(\mathbb{R}^2) \to C_2(\mathbb{R}^2)$, é dada por;

$$[\tilde{D}_1] = \begin{pmatrix} 0 & u^{1-c_1}\tilde{W}(c_2) & \tilde{X}(c_1)\tilde{W}(b_4) & \tilde{X}(c_1)\tilde{W}(b_4) \\ u^{1-c_1}\tilde{W}(c_2) & 0 & \tilde{Y}(c_1)\tilde{W}(b_4) & \tilde{X}(c_1)\tilde{W}(b_4) \end{pmatrix}$$

O operador $\tilde{D}_*$ é definido por $\tilde{D}_* = \oplus_k (-1)^{k+1}\tilde{D}_k$, logo sua matriz é dada por;

$$[\tilde{D}_*] = \begin{pmatrix} -[\tilde{D}_0] & 0 \\ 0 & [\tilde{D}_1] \end{pmatrix}$$

O traço a um parâmetro, $R(F)$, da homotopia F, é definido como sendo o traço da matriz quadrada;

$$[\tilde{\partial}_*] \otimes [\tilde{D}_*] = \begin{pmatrix} [\tilde{\partial}_1] \otimes -[\tilde{D}_0] & 0 \\ 0 & [\tilde{\partial}_2] \otimes [\tilde{D}_1] \end{pmatrix}$$

Visto que as aplicações F_0 e F_1 são livres de pontos fixos, então o traço $T_1(\tilde{\partial}_* \otimes \tilde{D}_*)$ é um 1-ciclo na homologia de Hochschild. Temos;

$$T_1([\tilde{\partial}_1] \otimes -[\tilde{D}_0]) = -1 \otimes \tilde{X}(c_1) + u^{-1} \otimes \tilde{Y}(c_1),$$

$$T_1([\tilde{\partial}_2] \otimes [\tilde{D}_1]) = -1 \otimes \tilde{X}(c_1) + 1 \otimes \tilde{Y}(c_1) + 1 \otimes \tilde{X}(c_1)\tilde{W}(b_4) - u^{-1} \otimes \tilde{Y}(c_1)\tilde{W}(b_4).$$

Portanto, o traço a um parâmetro de F é:

$$R(F) = u^{-1} \otimes \tilde{Y}(c_1) - 2 \otimes \tilde{X}(c_1) + 1 \otimes \tilde{Y}(c_1) + 1 \otimes \tilde{X}(c_1)\tilde{W}(b_4) - u^{-1} \otimes \tilde{Y}(c_1)\tilde{W}(b_4).$$

Como a 1-cadeia $1 \otimes m$ é um bordo para todo $m \in \mathbb{Z}G$, então obtemos;

$$R(F) \sim -u^{-1} \otimes \tilde{Y}(c_1)(\tilde{W}(b_4) - 1).$$

Neste caso, temos que dois elementos da forma; $u^{-1} \otimes u^m v^s$ e $u^{-1} \otimes u^n v^t$ representam a mesma classe semi-conjugada, para quaisquer $m, n, s, t \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, tivermos $m = n$ e $s = k(b_4 - 1) + t$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, o número de C-componentes, diferentes e não nulas, do 1-ciclo $R(F)$ é $c_1(b_4 - 1)$, ou seja, o número de Nielsen a 1-parâmetro de F é:

$$N(F) = |c_1(b_4 - 1)|.$$

Calculando o conjunto de pontos fixos, $Fix(F)$, diretamente da função F, então vemos que ele é composto de exatamente $|c_1(b_4-1)|$ círculos disjuntos. De fato, considerando primeiro c_1 e (b_4-1) positivos, então a equação;

$$[(x,y)] = F([(x,y)],t) = \begin{cases} [(x+2c_1t-\frac{1}{2}, b_4y)] & ,0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ [(x+\frac{2c_1-1}{2}, b_4y+2c_2t-c_2)] & ,\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

só possui solução para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. Assim, devemos ter $(x+2c_1t-\frac{1}{2}, b_4y) = (x+m, y+n)$. Observemos que as soluções dessa equação são: $m = 0, 1, ..., c_1-1$ e $n = 1, ..., b_4-1$, ou seja,

$$Fix(F) = \left\{[(x,y),t] | x \in [0,1], t = \frac{1}{4c_1}, \frac{3}{4c_1}, ..., \frac{2c_1-1}{4c_1} \ e \ y = \frac{1}{b_4-1}, \frac{2}{b_4-1}, ..., 1\right\}.$$

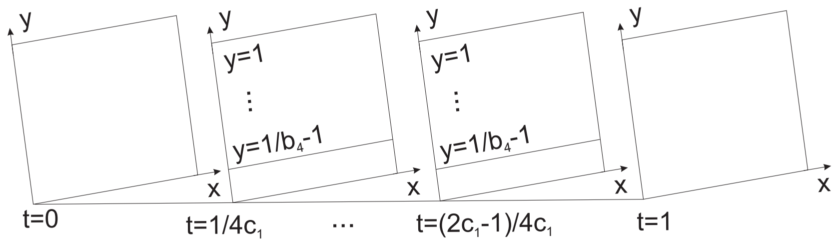


Figura 6.3: O conjunto $Fix(F)$ no caso $b_4-1 \neq 0$ e $b_3 = 0$

Portanto, neste caso o número de Nielsen a 1-parâmetro $N(F)$, é realizado pela própria homotopia F. Os outros casos de c_1, b_4-1 são análogos. Podemos dizer que, de certo modo, $MF[F] = N(F)$, ou seja, essa igualdade significa que o conjunto minimal dos pontos fixos da homotopia F é composto de exatamente $N(F)$ círculos disjuntos.

Vimos anteriormente que, $Fix(f) \sim Fix(F)$, logo podemos concluir que dada uma aplicação $f : MA \to MA$, sobre S^1, nos casos II e III, onde o homomorfismo induzido, $f_\#$, é dado por; $f_\#(a) = a$, $f_\#(b) = a^{b_3}b^{b_4}$ e $f_\#(c) = a^{c_1}b^{c_2}c$, com $b_4-1 \neq 0$ e $b_3 = 0$, então o conjunto $M_{S^1}[f]$ é composto de exatamente $|c_1(b_4-1)|$ círculos disjuntos e orientados. Passaremos agora, aos outros casos.

Agora, no caso II tomemos a homotopia $F : T \times I \to T$ definida por: $F([(x,y)],t) = [(x+b_3y+c_1t-\frac{1}{2}, b_4y+c_2t)]$ e a aplicação $f : MA \to MA$ definida por $f(<[(x,y)],t>$

$) =< F([(x,y)],t),t >$, na seguinte situação: $(b_4-1)\neq 0$, $b_3 = n(b_4-1)$, $n\in\mathbb{Z}$ e $c_1(b_4-1)-c_2b_3\neq 0$.

Visto que nesse caso $A = Id$, então rapidamente vemos que f está bem definida em MA, ou seja, satisfaz $f(<[(x,y)],0>) = f(<[A\binom{x}{y}],1>)$. Assim, pela proposição 6.5.4 podemos conjugar a função f por um isomorfismo de fibrados, $P : MA \to MA^1$, e obter uma função $g = P\circ f\circ P^{-1}$, no fibrado MA^1, $A^1 = P\circ A\circ P^{-1} = Id$, com $M_{S^1}[f]\approx M_{S^1}[g]$. Conjugaremos a função acima pelo isomorfismo de fibrados induzido pelo isomorfismo do Toro, $P : T\to T$, dado pela seguinte matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se conjugarmos a homotopia inicial, F, pelo isomorfismo P, obteremos a seguinte homotopia:

$$\begin{aligned}
G([(x,y)],t) &= P(F(P^{-1}([(x,y)]),t)) \\
&= P(F([(x+ny,y)],t)) \\
&= P([(x+ny+b_3y+c_1t-\tfrac{1}{2}, b_4y+c_2t)]) \\
&= [(x+(c_1-nc_2)t+(-n(b_4-1)+b_3)y-\tfrac{1}{2}, b_4y+c_2t)] \\
&= [(x+(c_1-nc_2)t-\tfrac{1}{2}, b_4y+c_2t)].
\end{aligned}$$

Considerando a aplicação $g : MA^1\to MA^1$ definida por $g := P\circ f\circ P^{-1}$, então o homomorfismo $g_{\#} : \pi_1(MA^1,0)\to\pi_1(MA^1,0)$ satisfaz; $g_{\#}(a) = a$, $g_{\#}(b) = b^{b_4}$ e $g_{\#}(c) = a^{c_1-nc_2}b^{c_2}c$. De fato, basta ver que $g(<[(x,y)],t>) =< [(x+(c_1-nc_2)t-\frac{1}{2}, b_4y+c_2t)],t>$. Observemos que G é homotópica, relativo a $T\times\{0,1\}$, a aplicação G' definida por:

$$G'([(x,y)],t) = \begin{cases} [(x+2(c_1-nc_2)t-\frac{1}{2}, b_4y)] & ,0\leq t\leq\frac{1}{2} \\ [(x+(c_1-nc_2)-\frac{1}{2}, b_4y+2c_2t-c_2)] & ,\frac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

De fato, usando a seguinte notação para, G, $G([(x,y)],t) = [(\alpha(x,y,t),\beta(x,y,t))]$, onde $\alpha(x,y,t) = x+(c_1-nc_2)t-\frac{1}{2}$ e $\beta(x,y,t) = b_4y+c_2t$. Então $H : T\times I\times I\to T$

definida por:

$$H([(x,y)],t,s)=\begin{cases}[(\alpha(x,y,t),\beta(x,y,t))] & se \quad 0\leq t\leq s\\ [(\alpha(x,y,2t-s),\beta(x,y,s))] & se \quad s\leq t\leq \frac{(1+s)}{2}\\ [(\alpha(x,y,1),\beta(x,y,2t-1))] & se \quad \frac{(1+s)}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$$

é uma homotopia, relativo a $T\times\{0,1\}$, entre G e $G^{'}$. Portanto, podemos usar o cálculo já feito anteriormente para obter:

$$R(G)=R(G^{'})\sim -u^{-1}\otimes\tilde{Y}(c_1-nc_2)(\tilde{W}(b_4)-1),$$

$$N(G)=|(c_1-nc_2)(b_4-1)|=|c_1(b_4-1)-c_2b_3|,$$

e que $MF[G]$ é formado por $|c_1(b_4-1)-c_2b_3|$ círculos disjuntos. Pela proposição 6.5.4 temos que $M_{S^1}[f]\approx M_{S^1}[g]$ é formado por $|c_1(b_4-1)-c_2b_3|$ círculos disjuntos.

No caso III temos $a_3(b_4-1)=-2b_3$. Assim, se $b_3\neq 0$ e a_3 é par então obtemos $b_3=-\frac{a_3}{2}(b_4-1)$. Note que estamos supondo $b_4-1\neq 0$, pois $b_4-1=0$ implica $b_3=0$, e portanto teríamos $c_1(b_4-1)-c_2b_3=0$ e nessa situação já sabemos que $M_{S^1}[f]=\emptyset$.

Tomemos a função $f:MA\to MA$ dada por; $f(<[(x,y)],t>)=<F([(x,y)],t),t>$, onde a homotopia $F:T\times I\to T$ é dada por; $F([(x,y)],t)=[(x+b_3y+c_1t-\frac{1}{2},b_4y+c_2t)]$. Rapidamente vemos que f está bem definida em MA, onde

$$A=\begin{pmatrix}1 & a_3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

e a_3 é par. Semelhantemente ao caso anterior, conjugaremos a função f por um isomorfismo de fibrados, P. Tomemos o isomorfismo de fibrados induzido pelo isomorfismo do Toro, $P:T\to T$, dado pela seguinte matriz:

$$P=\begin{pmatrix}1 & \frac{a_3}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Fazendo a conjugação pelo isomorfismo, P, na matriz A e na homotopia F obteremos;

$$A^1=P\circ A\circ P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{a_3}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a_3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{a_3}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad e$$

$$\begin{aligned}
G([(x,y)],t) &= P(F(P^{-1}([(x,y)]),t)) \\
&= P(F([(x-\tfrac{a_3}{2}y,y)],t)) \\
&= P([(x-\tfrac{a_3}{2}y+b_3y+c_1t-\tfrac{1}{2},b_4y+c_2t)]) \\
&= [(x+(c_1+\tfrac{a_3}{2}c_2)t+(\tfrac{a_3}{2}(b_4-1)+b_3)y-\tfrac{1}{2},b_4y+c_2t)] \\
&= [(x+(c_1+\tfrac{a_3}{2}c_2)t-\tfrac{1}{2},b_4y+c_2t)].
\end{aligned}$$

Observemos que a função $g : MA^1 \to MA^1$ é livre ponto fixo em $t = 0,1$, pois $G([(x,y)],0)$, $G([(x,y)],1)$, $A^1G([A^{1^{-1}}\binom{x}{y}],0)$ e $A^{1^{-1}}G([A^1\binom{x}{y}],1)$ são livres de pontos fixos. Para calcular o traço a 1-parâmetro da homotopia G consideramos a homotopia $G^{'}$ homotópica a G, relativo a $T\times\{0,1\}$, dada abaixo;

$$G^{'}([(x,y)],t)=\begin{cases}[(x+2(c_1+\frac{a_3}{2}c_2)t-\frac{1}{2},b_4y)] & ,0\leq t\leq \frac{1}{2}\\ [(x+(c_1+\frac{a_3}{2}c_2)-\frac{1}{2},b_4y+2c_2t-c_2)] & ,\frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$$

Pelo cálculo feito no caso II e III com $b_3=0$, obtemos que $M_{S^1}[g]$ é formado por $|(c_1+\frac{a_3}{2}c_2)(b_4-1)|=|c_1(b_4-1)-c_2b_3|$ círculos disjuntos. Pela proposição 6.5.4 temos $M_{S^1}[f]\approx M_{S^1}[g]$. Portanto, $M_{S^1}[f]$ é formado por $|c_1(b_4-1)-c_2b_3|$ círculos disjuntos.

Observação 6.6.1. *Dos resultados acima podemos caracterizar completamente o conjunto, $M_{S^1}[f]$, em um fibrado MA, onde*

$$A=\begin{pmatrix}1 & a_3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

e a_3 é par. De fato, dada uma aplicação $f : MA \to MA$ sabemos que $f_\#(a)=a$, $f_\#(b)=a^{b_3}b^{b_4}$ e $f_\#(c)=a^{c_1}b^{c_2}c$. Portanto, pelo teorema 6.4.1 e pelos cálculos acima obtemos; $M_{S^1}[f]=\emptyset$ se $c_1(b_4-1)-c_2b_3=0$, e que $M_{S^1}[f]$ é formado por $|c_1(b_4-1)-c_2b_3|$ círculos disjuntos se $c_1(b_4-1)-c_2b_3\neq 0$.

Note que quando $c_1(b_4-1)-c_2b_3=0$ então, escolhendo $0<\epsilon<1$ adequadamente, obteremos que a função $f : MA\to MA$, nos casos II e III, definida por; $f(<[(x,y)],t>)=<F([(x,y)],t),t>$, onde $F([(x,y)],t)=[(x+b_3y+c_1t+\epsilon,b_4y+c_2t+\epsilon)]$, é livre de ponto fixo para todo $0\leq t\leq 1$.

Agora, estudaremos os casos II e III na seguinte situação: $b_4 = -1$ e $b_3 = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$. Note que o caso em que $b_4 = -1$ e b_3 é par já foi resolvido anteriormente. Primeiramente, tomaremos $b_3 = 1$. Consideraremos, nessa situação, a função $f : MA \to MA$ definida por; $f(< [(x,y)], t >) = < F([(x,y)], t), t >$, onde a homotopia $F : T \times I \to T$ é dada por:

$$F([(x,y)],t) = \begin{cases} [(x + y + 2c_1 t + \frac{1}{2}, -y + \frac{1}{2})] & , 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ [(x + y + \frac{2c_1+1}{2}, -y + 2c_2 t - c_2 + \frac{1}{2})] & , \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Observemos que as funções $F([(x,y)],0)$, $F([(x,y)],1)$, $AF([A^{-1}\binom{x}{y}],0)$ e $A^{-1}F([A\binom{x}{y}],1)$ são livres de pontos fixos. De fato, tomemos a função $F([(x,y)],0)$. Assim, $F([(x,y)],0)$ $= [(x,y)]$ é equivalente a resolver o seguinte sistema em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} y & = & m - \frac{1}{2} \\ -2y & = & n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Desse sistema obtemos; $n - \frac{1}{2} + 2m - 1 = 0$, que é um absurdo. Os outros casos são análogos. Portanto, a função f não possui ponto fixo em $t = 0, 1$.

A seguir calcularemos o traço a 1-parâmetro da homotopia F, para isso tomaremos a decomposição celular para T que consiste de quatro 0-células; $E_1^0 = \{[(0,0)]\}$, $E_2^0 = \{[(\frac{1}{2},0)]\}$, $E_3^0 = \{[(0,\frac{1}{2})]\}$, $E_4^0 = \{[(\frac{1}{2},\frac{1}{2})]\}$, doze 1-células; $E_1^1 = \{[(x,0)] | 0 \le x \le \frac{1}{2}\}$, $E_2^1 = \{[(x,0)] | \frac{1}{2} \le x \le 1\}$, $E_3^1 = \{[(0,y)] | 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$, $E_4^1 = \{[(y,-y+\frac{1}{2})] | 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$, $E_5^1 = \{[(\frac{1}{2},y)] | 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$, $E_6^1 = \{[(y,-y+1)] | \frac{1}{2} \le y \le 1\}$, $E_7^1 = \{[(x,\frac{1}{2})] | 0 \le x \le \frac{1}{2}\}$, $E_8^1 = \{[(x,\frac{1}{2})] | \frac{1}{2} \le x \le 1\}$, $E_9^1 = \{[(0,y)] | \frac{1}{2} \le y \le 1\}$, $E_{10}^1 = \{[(y,-y+1)] | 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$, $E_{11}^1 = \{[(\frac{1}{2},y)] | \frac{1}{2} \le y \le 1\}$, e $E_{12}^1 = \{[(y+\frac{1}{2},-y+1)] | 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$, oito 2-células; $E_1^2 = \{[(x,y)] | 0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le -x+\frac{1}{2}\}$, $E_2^2 = \{[(x,y)] | 0 \le x \le \frac{1}{2}, -x+\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}\}$, $E_3^2 = \{[(x,y)] | \frac{1}{2} \le x \le 1, 0 \le y \le -x+1\}$, $E_4^2 = \{[(x,y)] | \frac{1}{2} \le x \le 1, -x+1 \le y \le \frac{1}{2}\}$, $E_5^2 = \{[(x,y)] | 0 \le x \le \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \le y \le -x+1\}$, $E_6^2 = \{[(x,y)] | 0 \le x \le \frac{1}{2}, -x+1 \le y \le 1\}$, $E_7^2 = \{[(x,y)] | \frac{1}{2} \le x \le 1, \frac{1}{2} \le y \le -x+\frac{3}{2}\}$, $E_8^2 = \{[(x,y)] | \frac{1}{2} \le x \le 1, -x+\frac{3}{2} \le y \le 1\}$.

Orientemos as 1-células de acordo com a figura abaixo, e as 2-células são orientadas no sentido anti-horário do plano cartesiano. Note que para essa decomposição celular a aplicação F é celular.

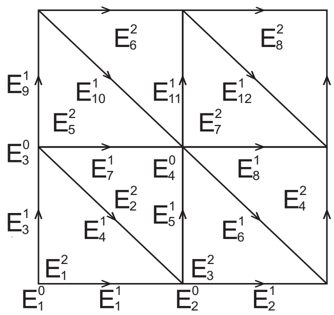


Figura 6.4: Decomposição celular para o Toro, caso $b_4 = -1$

Tomemos no recobrimento unversal $\mathbb{R}^2$ a decomposição celular que consiste de quatro 0-células; $\tilde{E}^0_1 = \{(0,0)\}$, $\tilde{E}^0_2 = \{(\frac{1}{2},0)\}$, $\tilde{E}^0_3 = \{(0,\frac{1}{2})\}$, $\tilde{E}^0_4 = \{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$, doze 1-células; $\tilde{E}^1_1 = \{(x,0)|0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$, $\tilde{E}^1_2 = \{(x,0)|\frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$, $\tilde{E}^1_3 = \{(0,y)|0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $\tilde{E}^1_4 = \{(y,-y+\frac{1}{2})|0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $\tilde{E}^1_5 = \{(\frac{1}{2},y)|0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $\tilde{E}^1_6 = \{(y,-y+1)|\frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$, $\tilde{E}^1_7 = \{(x,\frac{1}{2})|0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$, $\tilde{E}^1_8 = \{(x,\frac{1}{2})|\frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$, $\tilde{E}^1_9 = \{(0,y)|\frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$, $\tilde{E}^1_{10} = \{(y,-y+1)|0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $\tilde{E}^1_{11} = \{(\frac{1}{2},y)|\frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$, $\tilde{E}^1_{12} = \{(y+\frac{1}{2},-y+1)|0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, e oito 2-células; $\tilde{E}^2_1 = \{(x,y)|0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq -x+\frac{1}{2}\}$, $\tilde{E}^2_2 = \{(x,y)|0 \leq x \leq \frac{1}{2}, -x+\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $\tilde{E}^2_3 = \{(x,y)|\frac{1}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x+1\}$, $\tilde{E}^2_4 = \{(x,y)|\frac{1}{2} \leq x \leq 1, -x+1 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $\tilde{E}^2_5 = \{(x,y)|0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq y \leq -x+1\}$, $\tilde{E}^2_6 = \{(x,y)|0 \leq x \leq \frac{1}{2}, -x+1 \leq y \leq 1\}$, $\tilde{E}^2_7 = \{(x,y)|\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{2} \leq y \leq -x+\frac{3}{2}\}$, $\tilde{E}^2_8 = \{(x,y)|\frac{1}{2} \leq x \leq 1, -x+\frac{3}{2} \leq y \leq 1\}$.

Tomemos $w = [(0,0)]$ como ponto base e τ, caminho básico, o caminho linear ligando w a $F(w,0)$. Escolhendo $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ levantamento do ponto base $w \in T$ e $\tilde{\tau}$, caminho linear ligando o ponto $(0,0)$ ao ponto $(0,\frac{1}{2})$, como o levantamento do caminho básico τ, então o único levantamento $\tilde{F} : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2$ de $F : T \times I \to T$ que envia $(0,0)$ a $\tilde{\tau}(1)$ é dado por;

$$\tilde{F}((x,y),t) = \begin{cases} (x+y+2c_1t+\frac{1}{2}, -y+\frac{1}{2}) & ,0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (x+y+\frac{2c_1+1}{2}, -y+2c_2t-c_2+\frac{1}{2}) & ,\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Considerando $C_*(\mathbb{R}^2)$ como um $\mathbb{Z}G$ complexo de cadeia à direita, onde $G = \pi_1(T,[(0,0)]) = \{u,v|uvu^{-1}v^{-1} = 1\}$, então as matrizes dos operadores; $\tilde{D}_k : C_k(\mathbb{R}^2) \to C_{k+1}(\mathbb{R}^2)$, dado por $\tilde{D}_k(\tilde{E}^i_j) = (-1)^{k+1}\tilde{F}_k(\tilde{E}^i_j \times I)$, e o operador bordo $\tilde{\partial}_j : C_j(\mathbb{R}^2) \to$

$C_{j-1}(\mathbb{R}^2)$ são calculadas abaixo.

Temos; $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_1^1) = \tilde{E}_2^0 - \tilde{E}_1^0$, $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_2^1) = \tilde{E}_1^0 u^{-1} - \tilde{E}_2^0$, $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_3^1) = \tilde{E}_3^0 - \tilde{E}_1^0$, $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_4^1) = \tilde{E}_2^0 - \tilde{E}_3^0$, $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_5^1) = \tilde{E}_4^0 - \tilde{E}_2^0$, $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_6^1) = \tilde{E}_1^0 u^{-1} - \tilde{E}_4^0$, $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_7^1) = \tilde{E}_4^0 - \tilde{E}_3^0$, $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_8^1) = \tilde{E}_3^0 u^{-1} - \tilde{E}_4^0$, $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_9^1) = \tilde{E}_1^0 v^{-1} - \tilde{E}_3^0$, $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_{10}^1) = \tilde{E}_4^0 - \tilde{E}_1^0 v^{-1}$, $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_{11}^1) = \tilde{E}_2^0 v^{-1} - \tilde{E}_4^0$, $\tilde{\partial}_1(\tilde{E}_{12}^1) = \tilde{E}_3^0 u^{-1} - \tilde{E}_2^0 v^{-1}$. Portanto, a matriz do operador $\tilde{\partial}_1$ é dada por;

$$[\tilde{\partial}_1] = \begin{pmatrix} -1 & u^{-1} & -1 & 0 & 0 & u^{-1} & 0 & 0 & v^{-1} & -v^{-1} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v^{-1} & -v^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & u^{-1} & -1 & 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Também temos; $\tilde{\partial}_2(\tilde{E}_1^2) = \tilde{E}_1^1 - \tilde{E}_4^1 - \tilde{E}_3^1$, $\tilde{\partial}_2(\tilde{E}_2^2) = \tilde{E}_5^1 - \tilde{E}_7^1 + \tilde{E}_4^1$, $\tilde{\partial}_2(\tilde{E}_3^2) = \tilde{E}_2^1 - \tilde{E}_6^1 - \tilde{E}_5^1$, $\tilde{\partial}_2(\tilde{E}_4^2) = \tilde{E}_3^1 u^{-1} - \tilde{E}_8^1 + \tilde{E}_6^1$, $\tilde{\partial}_2(\tilde{E}_5^2) = \tilde{E}_7^1 - \tilde{E}_{10}^1 - \tilde{E}_9^1$, $\tilde{\partial}_2(\tilde{E}_6^2) = \tilde{E}_{10}^1 + \tilde{E}_{11}^1 - \tilde{E}_1^1 v^{-1}$, $\tilde{\partial}_2(\tilde{E}_7^2) = \tilde{E}_8^1 - \tilde{E}_{12}^1 - \tilde{E}_{11}^1$, $\tilde{\partial}_2(\tilde{E}_8^2) = \tilde{E}_9^1 u^{-1} - \tilde{E}_2^1 v^{-1} + \tilde{E}_{12}^1$. Assim, a matriz do operador $\tilde{\partial}_2$ é dada por;

$$[\tilde{\partial}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v^{-1} \\ -1 & 0 & 0 & u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos;

$$\tilde{D}_0(\tilde{E}_1^0) = -\tilde{E}_5^1 u^{-c_1} v^{-1} \tilde{W}(c_2) - \tilde{E}_7^1 u^{-c_1} \tilde{X}(c_1) - \tilde{E}_8^1 \tilde{X}(c_1) - \tilde{E}_{11}^1 u^{-c_1} \tilde{W}(c_2),$$

$$\tilde{D}_0(\tilde{E}_2^0) = -\tilde{E}_3^1 u^{-c_1-1} v^{-1} \tilde{W}(c_2) - \tilde{E}_7^1 u^{-1} \tilde{X}(c_1) - \tilde{E}_8^1 u^{-1} \tilde{X}(c_1) - \tilde{E}_9^1 u^{-c_1-1} \tilde{W}(c_2),$$

$$\tilde{D}_0(\tilde{E}_3^0) = -\tilde{E}_1^1 u^{-1} \tilde{X}(c_1) - \tilde{E}_2^1 u^{-1} \tilde{X}(c_1) - \tilde{E}_3^1 u^{-c_1-1} \tilde{W}(c_2) - \tilde{E}_9^1 u^{-c_1-1} \tilde{W}(c_2),$$

$$\tilde{D}_0(\tilde{E}_4^0) = -\tilde{E}_1^1 u^{-2}\tilde{X}(c_1) - \tilde{E}_2^1 u^{-1}\tilde{X}(c_1) - \tilde{E}_5^1 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) - \tilde{E}_{11}^1 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2).$$

Portanto,

$$[\tilde{D}_0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u^{-1}\tilde{X}(c_1) & -u^{-2}\tilde{X}(c_1) \\ 0 & 0 & -u^{-1}\tilde{X}(c_1) & -u^{-1}\tilde{X}(c_1) \\ 0 & -v^{-1}\tilde{W}(c_2) & -u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u^{-c_1}v^{-1}\tilde{W}(c_2) & 0 & 0 & -u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u^{-c_1}\tilde{X}(c_1) & -u^{-1}\tilde{X}(c_1) & 0 & 0 \\ -\tilde{X}(c_1) & -u^{-1}\tilde{X}(c_1) & 0 & 0 \\ 0 & -u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) & -u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u^{-c_1}\tilde{W}(c_2) & 0 & 0 & -u^{-c_1}\tilde{W}(c_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos;

$$\tilde{D}_1(\tilde{E}_1^1) = \tilde{E}_3^2 u^{-c_1}v^{-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_4^2 u^{-c_1}v^{-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_7^2 u^{-c_1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_8^2 u^{-c_1}\tilde{W}(c_2),$$

$$\tilde{D}_1(\tilde{E}_2^1) = \tilde{E}_1^2 u^{-c_1-1}v^{-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_2^2 u^{-c_1-1}v^{-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_5^2 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_6^2 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2),$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1(\tilde{E}_3^1) &= \tilde{E}_1^2 u^{-c_1}\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}_2^2 u^{-c_1}\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}_3^2(u^{-c_1}\tilde{X}(c_1) + u^{-c_1}v^{-1}\tilde{W}(c_2)) \\ &+ \tilde{E}_4^2(\tilde{X}(c_1) + u^{-c_1}\tilde{W}(c_2)) + \tilde{E}_7^2 u^{-c_1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_8^2 u^{-c_1}\tilde{W}(c_2), \end{aligned}$$

$$\tilde{D}_1(\tilde{E}_4^1) = \tilde{E}_1^2 u^{-c_1}\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}_2^2 u^{-c_1}\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}_3^2 u^{-c_1}\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}_4^2 u^{-c_1}\tilde{X}(c_1),$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1(\tilde{E}_5^1) &= \tilde{E}_1^2(u^{-2}\tilde{X}(c_1) + u^{-c_1-1}v^{-1}\tilde{W}(c_2)) + \tilde{E}_2^2(u^{-1}\tilde{X}(c_1) + u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2)) \\ &+ \tilde{E}_3^2 u^{-1}\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}_4^2 u^{-1}\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}_5^2 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_6^2 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2), \end{aligned}$$

$$\tilde{D}_1(\tilde{E}_6^1) = \tilde{E}_1^2 u^{-2}\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}_2^2 u^{-2}\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}_3^2 u^{-1}\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}_4^2 u^{-1}\tilde{X}(c_1),$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1(\tilde{E}_7^1) &= \tilde{E}_1^2 u^{-c_1-1}v^{-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_2^2 u^{-c_1-1}v^{-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_5^2 u^{-c_1-1}v^{-1}\tilde{W}(c_2) \\ &+ \tilde{E}_6^2 u^{-c_1-1}v^{-1}\tilde{W}(c_2), \end{aligned}$$

$$\tilde{D}_1(\tilde{E}_8^1) = \tilde{E}_1^2 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_2^2 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_5^2 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_6^2 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2),$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1(\tilde{E}_9^1) &= \tilde{E}_1^2 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_2^2 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}_5^2(u^{-2}v\tilde{X}(c_1) + u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2)) \\ &+ \tilde{E}_6^2(u^{-1}v\tilde{X}(c_1) + u^{-c_1-1}v\tilde{W}(c_2)) + \tilde{E}_7^2 u^{-1}v\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}_8^2 u^{-1}v\tilde{X}(c_1), \end{aligned}$$

$$\tilde{D}_1(\tilde{E}^1_{10}) = \tilde{E}^2_5 u^{-2}v\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}^2_6 u^{-2}v\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}^2_7 u^{-1}v\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}^2_8 u^{-1}v\tilde{X}(c_1),$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_1(\tilde{E}^1_{11}) &= \tilde{E}^2_3 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}^2_4 u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) + \tilde{E}^2_5 u^{-2}v\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}^2_6 u^{-2}v\tilde{X}(c_1)\\ &+ \tilde{E}^2_7(u^{-2}v\tilde{X}(c_1) + u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2)) + \tilde{E}^2_8(u^{-1}v\tilde{X}(c_1) + u^{-c_1-1}v\tilde{W}(c_2)),\end{aligned}$$

$$\tilde{D}_1(\tilde{E}^1_{12}) = \tilde{E}^2_5 u^{-2}v\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}^2_6 u^{-2}v\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}^2_7 u^{-2}v\tilde{X}(c_1) + \tilde{E}^2_8 u^{-2}v\tilde{X}(c_1).$$

Logo, com as informações acima podemos construir a matriz $[\tilde{D}_1]_{8\times 12}$ do operador $\tilde{D}_1$, onde o elemento $(\tilde{D}_1)_{ij}$ é o coeficiente da célula $\tilde{E}^2_i$ do elemento $\tilde{D}_1(\tilde{E}^1_j)$, $1 \leq i \leq 8$, $1 \leq j \leq 12$.

O traço a um parâmetro, $R(F)$, de F é definido como sendo o traço do operador $\tilde{\partial}_* \otimes \tilde{D}_* \in HH_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^\phi)$, cujas matrizes são dadas por;

$$[\tilde{\partial}_*] = \begin{pmatrix} [\tilde{\partial}_1] & 0 \\ 0 & [\tilde{\partial}_2] \end{pmatrix} \quad e \quad [\tilde{D}_*] = \begin{pmatrix} -[\tilde{D}_0] & 0 \\ 0 & [\tilde{D}_1] \end{pmatrix}.$$

Isso é equivalente a calcular o traço da matriz quadrada;

$$[\tilde{\partial}_*] \otimes [\tilde{D}_*] = \begin{pmatrix} [\tilde{\partial}_1] \otimes -[\tilde{D}_0] & 0 \\ 0 & [\tilde{\partial}_2] \otimes [\tilde{D}_1] \end{pmatrix}$$

Portanto, obtemos;

$$\begin{aligned} R(F) &= -1 \otimes u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2) - 1 \otimes u^{c_1}\tilde{W}(c_2) - 1 \otimes u^{c_1}\tilde{X}(c_1) + u^{-1} \otimes \tilde{X}(c_1)\\ &+ u^{-1} \otimes u^{-c_1}\tilde{W}(c_2) + 1 \otimes (u^{-1}\tilde{X}(c_1) + u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2)) - 1 \otimes u^{-1}\tilde{X}(c_1)\\ &- 1 \otimes (u^{-2}v\tilde{X}(c_1) + u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2)) + u^{-1} \otimes u^{-1}v\tilde{X}(c_1) + 1 \otimes u^{-2}v\tilde{X}(c_1)\\ &- 1 \otimes (u^{-2}v\tilde{X}(c_1) + u^{-c_1-1}\tilde{W}(c_2)).\end{aligned}$$

Visto que para todo $m \in \mathbb{Z}G$ a 1-cadeia $1 \otimes m$ é homóloga a zero, então obtemos;

$$R(F) \sim u^{-1} \otimes \tilde{X}(c_1) + u^{-1} \otimes u^{-c_1}\tilde{W}(c_2) + u^{-1} \otimes u^{-1}v\tilde{X}(c_1).$$

Neste caso, dois elementos, $u^{-1} \otimes u^{m_1}v^{n_1}$ e $u^{-1} \otimes u^{m_2}v^{n_2}$, representam a mesma classe semi-conjugada se, e somente se, existir $n \in \mathbb{Z}$ satisfazendo as seguintes equações: $n = m_2 - m_1$ e $-2n = n_2 - n_1$. Observemos que

$$R(F) \sim \sum_{i=1}^{sign(c_1)c_1} g_i + \sum_{j=1}^{sign(c_2)c_2} h_j + \sum_{k=1}^{sign(c_1)c_1} f_k,$$

onde

$$g_i = \begin{cases} u^{-1} \otimes u^{1-i} & se \quad c_1 > 0 \\ -u^{-1} \otimes u^{i} & se \quad c_1 < 0 \end{cases},$$

$$h_j = \begin{cases} u^{-1} \otimes u^{-c_1} v^{1-j} & se \quad c_2 > 0 \\ -u^{-1} \otimes u^{-c_1} v^{j} & se \quad c_2 < 0 \end{cases},$$

$$f_k = \begin{cases} u^{-1} \otimes u^{-k} v & se \quad c_1 > 0 \\ -u^{-1} \otimes u^{k-1} v & se \quad c_1 < 0 \end{cases},$$

e $sign(x) = 1$ se $x > 0$, $sign(x) = -1$ se $x < 0$.

Estudaremos agora, as classes semi-conjugadas de $R(F)$. Rapidamente vemos que g_i é equivalente à $g_{i'}$ se, e somente se, $i = i'$. De fato, devido a relação das classes semi-conjugadas dada acima, devemos ter $2(-i-(-i')) = 0$ e portanto $i = i'$. Analogamente mostramos esse fato para os elementos h_j e f_k.

Note que em qualquer situação temos que g_i não é equivalente a f_k para cada $1 \leq i, k \leq c_1$, pois caso contrário, das relações das classes semi-conjugadas, deveria existir $n \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $-2n = 1$, que é um absurdo.

Analisaremos agora, os elementos g_i e h_j. Primeiro, vamos supor c_1 e c_2 positivos. Nessa situação temos que, fixado i e j então g_i não é equivalente à h_j, pois caso contrário deveria existir $n \in \mathbb{Z}$ satisfazendo as seguintes equações: $-i + c_1 + 1 = n$ e $-(1-j) = -2n$. Disso teríamos $2c_1 + 2 - 2i = 1 - j$, ou seja, $j = -1 + 2(i - c_1)$. Visto que $i - c_1 \leq 0$ para todo i, então deveríamos ter $j \leq 0$ que é um absurdo, pois $j \geq 1$. Analogamente mostramos que os elementos g_i, h_j e f_k não equivalentes para quaisquer $1 \leq i, k \leq c_1$ e $1 \leq j \leq c_2$. Portanto, cada um dos elementos acima produz uma C-componente distinta e não nula de $R(F) \in HH_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^{\phi})$, ou seja, o número de C-componentes distintas e não nulas de $R(F)$ é: $|2c_1 + c_2|$.

Agora, vamos supor c_1 positivo e c_2 negativo. Nesta situação temos que g_i é equivalente à h_j se, e somente se, existir $n \in \mathbb{Z}$ satisfazendo; $i - (c_1 + 1) = n$ e $j = -2n$, disso obtemos; $j = 2(c_1 + 1 - i)$, $1 \leq i \leq c_1$. Analogamente temos que f_k é equivalente à h_j se e somente se existir $n \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $k - c_1 = n$ e $j - 1 = -2n$, que implica $j = 2(c_1 - k) + 1$, $1 \leq k \leq c_1$. Portanto, nesse caso temos que o número de

C-componentes distintas e não nulas é: $|2c_1 - (-c_2)| = |2c_1 + c_2|$. Os outros casos são análogos. Assim, em qualquer caso, obtemos que o número de Nielsen a 1-parâmetro da homotopia $F : T \times I \to T$ é dado por;

$$N(F) = |2c_1 + c_2| = |c_1(b_4 - 1) - c_2 b_3|.$$

Calculando o conjunto dos pontos fixos de F, $Fix(F)$, diretamente da função F, então vemos que ele é composto de exatamente $|c_1(b_4 - 1) - c_2 b_3|$ cículos disjuntos, ou seja, nesse caso temos $MF[F]$ é composto de exatamente $N(F)$ círculos disjuntos. Pela observação feita anteriormente temos que $M_{S^1}[f]$ é composto por $|c_1(b_4 - 1) - c_2 b_3|$ círculos disjuntos e orientados.

Para fazer o caso em que $b_4 = -1$ e $b_3 = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$ qualquer, tomaremos a função $f : MA \to MA$ definida por $f(< [(x,y)], t >) = < F([(x,y)], t), t >$, onde a homotopia $F : T \times I \to T$ é dada por; $F([(x,y)], t) = [(x + b_3 y + c_1 t + \frac{-k+1}{2}, -y + c_2 t + \frac{1}{2})]$. Conjugaremos a função $f : MA \to MA$ pelo isomorfismo de fibrados, $P : MA \to MA^1$, $A^1 = P \circ A \circ P^{-1}$, induzido pelo isomorfismo do Toro $P : T \to T$ dado pela matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Neste caso a função, $g = P \circ f \circ P^{-1}$, $g : MA^1 \to MA^1$ é dada por; $g(< [(x,y)], t >) =< G([(x,y)], t), t >$, onde a homotopia $G = P \circ F \circ (P^{-1} \times I)$ é dada por; $G([(x,y)], t) = [(x + y + (c_1 + kc_2)t + \frac{1}{2}, -y + c_2 t + \frac{1}{2})]$.

Analogamente ao caso anterior, podemos verificar que a função g é livre de ponto fixo em $t = 0, 1$. Também temos que $MF[G]$ é composto de exatamente: $N(G) = |2(c_1 + kc_2) + c_2| = |2c_1 + (2k+1)c_2| = |2c_1 + c_2 b_3| = |c_1(b_4 - 1) - c_2 b_3|$ círculos disjuntos. Assim, $M_{S^1}[g]$ é formado por $|c_1(b_4 - 1) - c_2 b_3|$ círculos disjuntos. Pela proposição 6.5.4 obtemos $M_{S^1}[f] \approx M_{S^1}[g]$. Portanto, $M_{S^1}[f]$ é formado por $|c_1(b_4 - 1) - c_2 b_3|$ círculos disjuntos e orientados. $\square$

Os resultados obtidos aqui devem ser comparados com os resultados obtidos por U. Koschorke em [32].

6.6.1 Considerações gerais

O teorema 6.6.1 nos diz que se $f : MA \to MA$ é uma aplicação que preserva fibra onde MA são fibrados descritos pelo teorema, com o homomorfismo induzido dado por; $f_{\#}(a) = a$, $f_{\#}(b) = a^{b_3}b^{b_4}$ e $f_{\#}(c) = a^{c_1}b^{c_2}c$, então o conjunto minimal dos pontos fixos $M_{S^1}[f]$ é composto de exatamente $|c_1(b_4 - 1) - c_2b_3|$ círculos disjuntos.

Note que a expressão algébrica $|c_1(b_4 - 1) - c_2b_3|$ é a mesma que aparece no teorema principal de [26]. O resultado de [26] diz apenas que se $|c_1(b_4 - 1) - c_2b_3| = 0$ então $M_{S^1}[f] = \emptyset$. Assim, o resultado demonstrado aqui, teorema 6.6.1, nos diz que a expressão algébrica $|c_1(b_4 - 1) - c_2b_3|$ possui mais informações sobre o conjunto minimal dos pontos fixos $M_{S^1}[f]$, do que o apresentado em [26].

A técnica usada para demonstrar o teorema principal de [26] foi a mesma técnica usada para demonstrar o teorema 4.1.1. Ainda não sabemos se as expressões algébricas do teorema 4.1.1 possui mais informações sobre o conjunto minimal de coincidências. Isso poderá ser tratado em pesquisas futuras.

Como consequência da demonstração do teorema 6.6.1 temos o seguinte resultado: dado $g \in G$, então de [16] temos a seguinte sequência de isomorfismos naturais: $HH_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^{\phi})_{C(g)} \to H_1(G, \mathbb{Z}(C(g))) \to H_1(G, \mathbb{Z}(G/Z(g))) \to H_1(Z(g))$, onde para cada $\beta \in Z(g)$, o 1-ciclo $\beta \otimes \beta^{-1}\gamma \in HH_1(\mathbb{Z}G, (\mathbb{Z}G)^{\phi})_{C(g)}$ é enviado na classe $\{\beta\} \in H_1(Z(g))$.

Se $F : T \times I \to T$ é uma homotopia induzida por uma aplicação que preserva fibra $f : MA \to MA$, onde MA é um fibrado como no teorema 6.6.1, então vimos que o traço a 1-parâmetro de F é escrito da seguinte forma: $R(F) = \sum_{i=1}^{m} a_i u^{-1} \otimes uu^{m_i}v^{n_i}$, com $a_i, m_i, n_i \in \mathbb{Z}$.

Pelos cálculados da demonstração do teorema 6.6.1 obtivemos; $R(F) = \sum_{i=1}^{m} \pm u^{-1} \otimes uu^{m_i}v^{n_i}, m_i, n_i \in \mathbb{Z}$. Se denotarmos por $\alpha = \{u^{-1}\} \in H_1(Z(g))$ então concluimos que; $L(F) = \pm N(F)\alpha$. Não sabemos se essa relação entre o número de Lefshetz e o número de Nielsen a 1-parâmetro vale para todas homotopias do Toro. Sabemos que dada uma função continua $f : T \to T$ então temos a seguinte igualdade: $|L(f)| = N(f)$. Uma demonstração desse fato se encontra em [2].

Outros resultados relacionado ao conjunto $M_{S^1}[f]$, usando a técnica acima, serão obtidos em um outro momento.

Apêndice A

Cálculo de alguns grupos

Neste apêndice apresentaremos cálculos de alguns grupos que foram usados no estudo do diagrama 1.4 do capítulo 1.

A.1 Cálculo de $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_i, 0 >)), i = 1, 2$.

Sejam $\phi : K \to K$ um homeomorfismo e $x_2 = [(0,0)]$ pertencente a K. Denotemos por $x_1 = [(q_1, q_2)]$ um ponto de K para q_1 e q_2 pequenos.

Sabemos que $\phi(x_2) = x_2$. Podemos escolher ϕ também satisfazendo $\phi(x_1) = x_1$. De fato, como ϕ é um homeomorfismo e $\phi(x_2) = x_2$, então existe V, vizinhança do ponto x_2, e um disco pequeno $D \subset V$ tal que $\phi(D) \subset V$. Portanto, em V podemos definir o grau de ϕ, veja [43]. Visto que ϕ é homeomorfismo, então temos que o grau de ϕ é 1 ou -1. Assim, podemos supor, em V, que ϕ é a identidade ou a reflexão em torno de um eixo que passa no centro de D. Desse modo, existe um ponto x_1 diferente de x_2 tal que $\phi(x_1) = x_1$.

Vimos, no primeiro capítulo, que a aplicação, $p_1 : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) \to M(\phi)$, dada por; $p_1(< x, t >, < y, t >) = < x, t >$ é uma fibração com fibra $K = p_1^{-1}(< x_2, 0 >)$. Como $M(\phi)$ é $K(\pi, 1)$, então a seguinte sequência é exata:

$1 \to \pi_1(K, x_i) \overset{l_\#}{\to} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_i, 0 >)) \overset{(p_1)_\#}{\to} \pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \to 1,$

onde, $l_\#$ é o homomorfismo induzido pela aplicação, $l : K \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, dada por; $l(x) = (< x_2, 0 >, < x, 0 >)$ e $(p_1)_\#$ é o homomorfismo induzido pela aplicação p_1. Essa sequência vem da sequência exata de homotopia da fibração p_1. A sequência cinde, pois a fibração p_1 admite uma secção que é aplicação $s_1^i : M(\phi) \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, dada por; $s_1^i(< x, t >) = (< x, t >, < x_i, t >)$, $i = 1, 2$.

Agora, definiremos um conjunto explícito de geradores para $\pi_1(K, x_i)$. Para isso, começaremos escolhendo um conjunto de elementos de $\pi_1(K - x)$. Esse conjunto também será usado na próxima seção.

Sejam ρ_{11}, ρ_{12} e ρ_{21}, ρ_{22} os elementos de $\pi_1(K - x_2, x_1)$ e $\pi_1(K - x_1, x_2)$, definidos como em [40]. Os ρ_{ij} estão representados na figura abaixo.

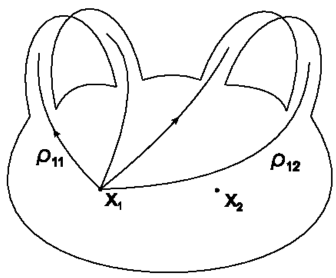


Fig.1. As tranças ρ_{11} e ρ_{12}

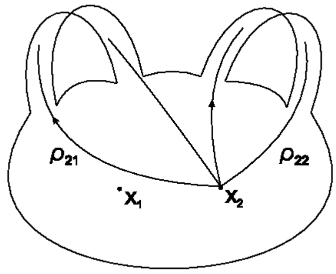


Fig.2. As tranças ρ_{21} e ρ_{22}

Se retirarmos de K um disco, D, de raio pequeno, em torno de x_2, então $K - \{D\}$ pode ser pensado como um disco colado com duas faixas "torcidas", exatamente como está na figura.

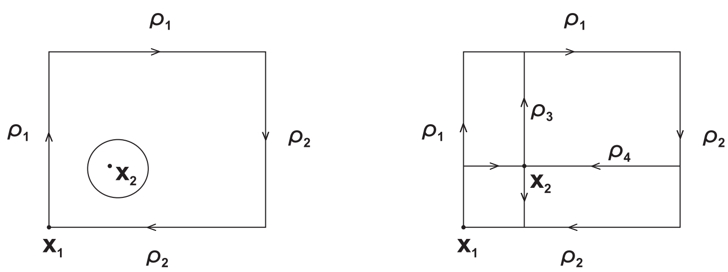


Figura A.1: Garrafa de Klein menos um disco

Da mesma maneira, fazemos retirando um disco de raio pequeno em torno de x_1, porém, nesse caso, consideraremos os elementos ρ_3, ρ_4, representados na figura acima. Denoteramos pela mesma letra, ρ_{ij}, os elementos de $\pi_1(K, x_i)$ que são imagem pela inclusão $K - x_j \hookrightarrow K$ dos ρ_{ij} definidos acima. Observemos que aqui estamos tomando para $\pi_1(K, x_i)$, $i = 1, 2$, a seguinte presentação: $\pi_1(K, x_i) =< \rho_{i1}, \rho_{i2} | \rho_{i1}^2 \rho_{i2}^2 = 1 >$.

Agora, consideremos as presentações; $\pi_1(K, x_i) =< a_i, b_i | a_i b_i a_i b_i^{-1} = 1 >$, onde $a_i = \rho_{i1}\rho_{i2}$, $b_i = \rho_{i2}^{-1}$ e $\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) =< \alpha, \beta, c_0 | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1, c_0\alpha c_0^{-1} = \alpha^{\epsilon}, c_0\beta c_0^{-1} = \alpha^p \beta^\eta >$, onde $\eta = \pm 1$ e $p \in \{0, 1\}$.

Observemos que para cada presentação de $\pi_1(K, x_i)$, escolhida acima, temos um conjunto de laços $\{\alpha, \beta, c_0\}$ que são geradores de $\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >)$. Quando $i = 1$, α e β começam no ponto x_1, já quando $i = 2$ eles começam no ponto x_2. Aqui, para efeito de notação, não faremos distinção entre os dois casos.

Denotemos por $\alpha_1, \beta_1, c_{01}, u_1, v_1$ respectivamente, as classes de homotopia dos laços dados pelos pares de laços $(\alpha(t), < x_1, 0 >), (\beta(t), < x_1, 0 >), (c_0(t), < x_1, t >)$, $(< x_2, 0 >, a_1(t)), (< x_2, 0 >, b_1(t))$. Observemos que como $\phi(x_1) = x_1$, então $< x_1, t >$ é um laço em $M(\phi)$. Da mesma forma, denotaremos por $\alpha_2, \beta_2, c_{02}, u_2, v_2$ as classes de homotopia dos laços dados, respectivamente, por; $(\alpha(t), < x_2, 0 >), (\beta(t), < x_2, 0 >)$, $(c_0(t), c_0(t)), (< x_2, 0 >, a_2(t)), (< x_2, 0 >, b_2(t))$. Com essa notação temos;

Teorema A.1.1. *Seja $\phi_p(1, \eta)$ um dos quatro casos dado pelo teorema 2.1.1 e $\alpha_i, \beta_i, c_{0i}$, u_i, v_i os elementos em $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_i, 0 >))$ definidos acima. Então, temos $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_i, 0 >)) =< \alpha_i, \beta_i, c_{0i}, u_i, v_i | u_i v_i u_i v_i^{-1} = 1, \alpha_i\beta_i\alpha_i\beta_i^{-1} = 1, c_{0i}\alpha_i c_{0i}^{-1}\alpha_i^{-1} = 1, c_{0i}\beta_i c_{0i}^{-1}\beta_i^{-\eta}\alpha_i^{-p} = 1, \alpha_i u_i \alpha_i^{-1} = u_i, \alpha_i v_i \alpha_i^{-1} = v_i$, $\beta_i u_i \beta_i^{-1} = u_i, \beta_i v_i \beta_i^{-1} = v_i, c_{0i} u_i c_{0i}^{-1} = u_i, c_{0i} v_i c_{0i}^{-1} = u_i^p v_i^\eta >$, para cada $i = 1, 2$.*

Demonstração. A demonstração desse teorema consiste em aplicar o teorema 1.2.1, pois já conhecemos as presentações de $\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >)$ e de $\pi_1(K, x_i)$.

Pelas observações feitas antes do enunciado do teorema temos; $a_2 : I \to K$, dado por; $a_2 = \rho_{21}\rho_{22}$, $b_2 : I \to K$, dado por; $b_2 = \rho_{22}^{-1}$, $\alpha, \beta, c_0 : I \to M(\phi)$ dados por; $\alpha(t) =< a_2(t), 0 >, \beta(t) =< b_2(t), 0 >$ e $c_0(t) =< x_2, t >$.

Tomemos, $s_1^i : M(\phi) \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, a secção da fibração, $K \xrightarrow{l} M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) \xrightarrow{p_1} M(\phi)$, dada por; $s_1^i(< x, t >) = (< x, t >, < x_i, t >)$. Com essa secção temos que, $\alpha_i, \beta_i, c_{0i}, u_i, v_i : I \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, são dados por; $\alpha_i(t) = s_1^i(\alpha(t)) = (\alpha(t), < x_i, 0 >), \beta_i(t) = s_1^i(\beta(t)) = (\beta(t), < x_i, 0 >)$ e

$$c_{0i}(t) = s_1^i(c_0(t)) = \begin{cases} (c_0(t), < x_1, t >) & \text{se i=1} \\ (c_0(t), c_0(t)) & \text{se i=2} \end{cases}$$

onde, p_1 é a fibração dada anteriormente.

Também temos $u_i(t) = l(a_i(t)) = (< x_2, 0 >, < a_i(t), 0 >)$ e $v_i(t) = l(b_i(t)) = (< x_2, 0 >, < b_i(t), 0 >)$, onde $l(x) = (< x_2, 0 >, < x, 0 >)$.

Como $\{a_i(t), b_i(t)\}$, é um conjunto gerador de $\pi_1(K, x_i)$, $\{\alpha(t), \beta(t), c_0(t)\}$, um conjunto gerador de $\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >)$ e $p_1(\alpha_i(t)) = \alpha(t), p_1(\beta_i(t)) = \beta(t), p_1(c_{0i}(t)) = c_{0i}(t)$, então pelo teorema 1.2.1, $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_i, 0 >))$ é gerado pelo conjunto $\{l(a_i(t)), l(b_i(t)), s_1^i(\alpha(t)), s_1^i(\beta(t)), s_1^i(c_0(t))\}$ com algumas relações, essas são dadas pelos cálculos abaixo. Considerando as classes dos caminhos acima temos;

$$\begin{aligned} u_i v_i u_i v_i^{-1} &= < u_i(t) >< v_i(t) >< u_i(t) >< v_i^{-1}(t) > \\ &= l_\#(< a_i(t) >) l_\#(< b_i(t) >) l_\#(< a_i(t) >) l_\#(< b_i^{-1}(t) >) \\ &= l_\#(a_i) l_\#(b_i) l_\#(a_i) l_\#(b_i^{-1}) \\ &= l_\#(a_i b_i a_i b_i^{-1}) \\ &= l_\#(1) \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_i \beta_i \alpha_i \beta_i^{-1} &= < \alpha_i(t) >< \beta_i(t) >< \alpha_i(t) >< \beta_i^{-1}(t) > \\ &= (s_1^i)_\#(< \alpha(t) >)(s_1^i)_\#(< \beta(t) >)(s_1^i)_\#(< \alpha(t) >)(s_1^i)_\#(< \beta^{-1}(t) >) \\ &= (s_1^i)_\#(\alpha)(s_1^i)_\#(\beta)(s_1^i)_\#(\alpha)(s_1^i)_\#(\beta^{-1}) \\ &= (s_1^i)_\#(\alpha\beta\alpha\beta^{-1}) \\ &= (s_1^i)_\#(1) \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_{0i}\alpha_i c_{0i}^{-1}\alpha_i^{-\epsilon} &= (s_1^i)_\#(c_0)(s_1^i)_\#(\alpha)(s_1^i)_\#(c_0^{-1})(s_1^i)_\#(\alpha^{-\epsilon}) \\
&= (s_1^i)_\#(c_0\alpha c_0^{-1}\alpha^{-\epsilon}) \\
&= (s_1^i)_\#(1) \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{0i}\beta_i c_{0i}^{-1}\beta_i^{-\eta}\alpha_i^{-p} &= (s_1^i)_\#(c_0)(s_1^i)_\#(\beta)(s_1^i)_\#(c_0^{-1})(s_1^i)_\#(\beta^{-\eta})(s_1^i)_\#(\alpha^{-p}) \\
&= (s_1^i)_\#(c_0\beta c_0^{-1}\beta^{-\eta}\alpha^{-p}) \\
&= (s_1^i)_\#(1) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

A aplicação, $h : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) \to M(\phi \times \phi)$, dada por; $h(< x, t >, < y, t >) = < x, y, t >$ é um homeomorfismo, onde $M(\phi \times \phi)$ é o espaço quociente obtido de $K \times K \times I$ pela relação; $(x, y, 0) \sim ((\phi \times \phi)(x, y), 1) = (\phi(x), \phi(y), 1)$.

De fato, h está bem definida. Se $(< w_1, t_1 >, < z_1, t_1 >) = (< w_2, t_2 >, < z_2, t_2 >)$, então devemos ter; $< w_1, t_1 >=< w_2, t_2 >$ e $< z_1, t_1 >=< z_2, t_2 >$. Se $t_1 \neq 0$, então pela definição das relações de equivalência devemos ter; $t_1 = t_2$, $w_1 = w_2$ e $z_1 = z_2.$ Agora, se $t_1 = 0$, então devemos ter $t_2 = 0, 1$. Se $t_2 = 0$, então acabamos. Se $t_2 = 1$, então devemos ter $w_2 = \phi(w_1)$ e $z_2 = \phi(z_1)$. Como $(w_1, z_1, 0) \sim (\phi(w_1), \phi(z_1), 1)$, então temos $< w_1, z_1, t_1 >=< w_2, z_2, t_2 >$, e logo h está bem definida.

Da mesma forma, a aplicação, $g : M(\phi \times \phi) \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, definida por; $g(< x, y, t >) = (< x, t >, < y, t >)$ está bem definida. Usando a topologia quociente de $M(\phi)$ e $M(\phi \times \phi)$ podemos mostrar que h e g são contínuas. Como $h \circ g = Id$, $g \circ h = Id$, então h é um homeomorfismo.

Assim, para cada $i = 1, 2$, os laços $\alpha_i, \beta_i, c_{0i}, u_i, v_i$ podem ser vistos em $M(\phi \times \phi)$ como $\alpha_i(t) =< a_2(t), x_i, 0 >$, $\beta_i(t) =< b_2(t), x_i, 0 >$,

$$
c_{0i}(t) = \begin{cases} < x_2, x_1, t > & \text{se i=1} \\ < x_2, x_2, t > & \text{se i=2} \end{cases}
$$

$u_i(t) =< x_2, a_i(t), 0 >$ e $v_i(t) =< x_2, b_i(t), 0 >$. Esses laços também podem ser vistos como classes de caminhos no pullback, $(K \times I) \times (K \times I)$, de $q \circ \pi : K \times I \to S^1$ por $q \circ \pi$, onde $\pi : K \times I \to M(\phi)$ dada por; $\pi(x, t) =< x, t >$ é a projeção natural e q é dada por; $q(< x, t >) =< t >$. De fato, $\alpha_i(t)$ pode ser visto como $(\pi \times \pi)((a_2(t), 0), (x_i, 0))$, analogamente, para os outros laços.

Consideremos em $(K \times I) \times (K \times I)$ os caminhos $\delta_i : I \to (K \times I) \times (K \times I)$ dados por; $\delta_i(t) = ((a_2(t), 0), (x_i, 0))$ e $\theta_1^i : I \to (K \times I) \times (K \times I)$ dado por $\theta_1^i(t) = ((x_2, 0), (a_i(t), 0))$. Temos; $< \delta_i >=< (a_2(t), 0), (x_i, 0) >=< a_2(t), x_i, 0 >= \alpha_i$, da mesma forma, obtemos $< \theta_1^i >=< (x_2, 0), (a_i(t), 0) >=< x_2, a_i(t), 0 >= u_i$. Daí concluimos que $\alpha_i u_i \alpha_i^{-1} =< \delta_i \theta_1^i \delta_i^{-1} >$.

Sabemos que se X e Y são espaços topológicos então $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \approx \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Disso segue que laços em $X \times \{y_0\}$ e em $\{x_0\} \times Y$ representam elementos comutativos em $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$. Dessa observação temos que os pares de laços $((a_2(t), 0), (x_i, 0))$, $((x_2, 0), (a_i(t), 0))$ são comutativos sob uma homotopia em $(K \times I) \times (K \times I)$, ou seja, $\delta_i \theta_1^i \delta_i^{-1}$ é homotópico a θ_1^i. Portanto, $\alpha_i u_i \alpha_i^{-1} =< \delta_i \theta_1^i \delta_i^{-1} >=< \theta_1^i >= u_i$.

Analogamente, considerando o caminho, $\theta_2^i : I \to (K \times I) \times (K \times I)$, dado por; $\theta_2^i(t) = ((x_2, 0), (b_i(t), 0))$ temos; $< \theta_2^i >=< ((x_2, 0), (b_i(t), 0)) >=< x_2, b_i(t), 0 >= v_i$. Logo, $\alpha_i v_i \alpha_i^{-1} =< \delta_i \theta_2^i \delta_i^{-1} >$. Como $\delta_i \theta_2^i \delta_i^{-1}$ é homotópico a θ_2^i, então obtemos $< \delta_i \theta_2^i \delta_i^{-1} >=< \theta_2^i >$. Portanto, $\alpha_i v_i \alpha_i^{-1} =< \delta_i \theta_2^i \delta_i^{-1} >=< \theta_2^i >= v_i$.

Semelhantemente, tomando o caminho, $\delta_i' : I \to (K \times I) \times (K \times I)$, dado por; $\delta_i'(t) = ((b_2(t), 0), (x_i, 0))$ teremos $< \delta_i' >=< ((b_2(t), 0), (x_i, 0)) >=< b_2(t), x_i, 0 >= \beta_i$. Portanto, $\beta_i u_i \beta_i^{-1} =< \delta_i' \theta_1^i (\delta_i')^{-1} >$. Como $\delta_i' \theta_1^i (\delta_i')^{-1}$ é homotópico a θ_1^i então obtemos $< \delta_i' \theta_1^i (\delta_i')^{-1} >=< \theta_1^i >$. Assim, $\beta_i u_i \beta_i^{-1} = < \delta_i' \theta_1^i (\delta_i')^{-1} >= < \theta_1^i >= u_i$.

Similarmente, temos $\beta_i v_i \beta_i^{-1} =< \delta_i' \theta_2^i (\delta_i')^{-1} >$. Como $\delta_i' \theta_2^i (\delta_i')^{-1}$ é homotópico a θ_2^i então; $< \delta_i' \theta_2^i (\delta_i')^{-1} >=< \theta_2^i >$. Portanto, $\beta_i v_i \beta_i^{-1} =< \delta_i' \theta_2^i (\delta_i')^{-1} >=< \theta_2^i >= v_i$.

Agora, consideremos o caminho, $\lambda_i : I \to (K \times I) \times (K \times I)$, dado por;

$$\lambda_i(t) = \begin{cases} ((x_2, t), (x_1, t)) & \text{se i=1} \\ ((x_2, t), (x_2, t)) & \text{se i=2} \end{cases}$$

e $\psi_1^i : I \to (K \times I) \times (K \times I)$ dado por; $\psi_1^i(t) = ((x_2, 1), (\phi(a_i(t)), 1))$. Note que

$$< \lambda_i(t) >= \begin{cases} < ((x_2, t), (x_1, t)) >= & < x_2, x_1, t >= & c_{01}(t) \quad \text{se i=1} \\ < ((x_2, t), (x_2, t)) >= & < x_2, x_2, t >= & c_{02}(t) \quad \text{se i=2,} \end{cases}$$

ou seja, $< \lambda_i(t) >= c_{0i}(t)$.

Como $(x_2, a_i(t), 0) \sim (x_2, \phi(a_i(t)), 1)$, em $M(\phi \times \phi)$, então temos $u_i =< \psi_1^i >$. Logo, $c_{0i} u_i c_{0i}^{-1} =< \lambda_i \psi_1^i \lambda_i^{-1} >$. Da mesma forma, como fizemos no final da prova da proposição 1.3.5, podemos mostrar que $\lambda_i((\phi \times \phi)(x_2, a_i), 1)\lambda_i^{-1}$ é homotópico a $((\phi \times \phi)(x_2, a_i), 0)$. Portanto, $\lambda_i \psi_1^i \lambda_i^{-1}$ será homotópico a $l(\phi(a_i(t)))$. Disso obteremos; $< \lambda_i \psi_1^i \lambda_i^{-1} >= < l(\phi(a_i(t))) >$.

No pullback, $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, temos $l(\phi(a_i(t))) = (< x_2, 0 >, < \phi(a_i(t)), 0 >)$. Como $M(\phi \times \phi)$ é homeomorfo a $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, então podemos olhar a classe de $l(\phi(a_i(t)))$ em $M(\phi \times \phi)$. Temos; $< l(\phi(a_i(t))) >=< x_2, \phi(a_i(t)), 0 > =< x_2, (a_i(t))^\epsilon, 0 > = u_i^\epsilon$. Portanto, obteremos $c_{0i} u_i c_{0i}^{-1} =< l(\phi(a_i(t))) >= u_i^\epsilon$.

Semelhantemente, tomando o caminho, $\psi_2^i : I \to (K \times I) \times (K \times I)$, dado por; $\psi_2^i(t) = ((x_2, 1), (\phi(b_i(t)), 1))$ teremos $c_{0i} v_i c_{0i}^{-1} =< \lambda_i \psi_2^i \lambda_i^{-1} >$. Como $\lambda_i \psi_2^i \lambda_i^{-1}$ é homotópico a $l(\phi(b_i(t)))$ então temos $< \lambda_i \psi_2^i \lambda_i^{-1} >=< l(\phi(b_i(t))) >= u_i^p v_i^\eta$. Logo, $c_{0i} v_i c_{0i}^{-1} =< l(\phi(b_i(t))) >= u_i^p v_i^\eta$.

Desse modo, obtemos todas as relações dadas no teorema 1.2.1. Portanto, pelo teorema 1.2.1, $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_i, 0 >))$ possui a presentação dada no enunciado do teorema. □

Agora, passaremos ao cálculo de $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$, usaremos na próxima seção as mesmas notações desta seção.

A.2 Cálculo de $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$

Tomaremos nesta seção; $x_2 = [(0, 0)]$, $x_1 = [(0, q)]$, q pequeno, e $K = \mathbb{R}^2/ \sim$ onde, $(x, y) \sim (x, y + 1)$ e $(x, y) \sim (x + 1, 1 - y)$. Também, tomaremos, $\phi : K \to K$, um homeomorfismo satisfazendo $\phi(x_i) = x_i$ para $i = 1, 2$. Vimos na seção anterior, que podemos fazer essa escolha.

Para calcular, $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$, consideraremos a seguinte fibração: $(K - x_2, x_1) \overset{j_2}{\to} (M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \overset{(p_{1|})}{\to} (M(\phi), < x_2, 0 >)$ onde, $j_2 : K - x_2 \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$ é dada por; $j_2(y) = (< x_2, 0 >, < y, 0 >)$ e $p_{1|} : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta \to M(\phi)$ é dada por; $p_{1|}(< x, t >, < y, t >) =< x, t >$, com $x \neq y$.

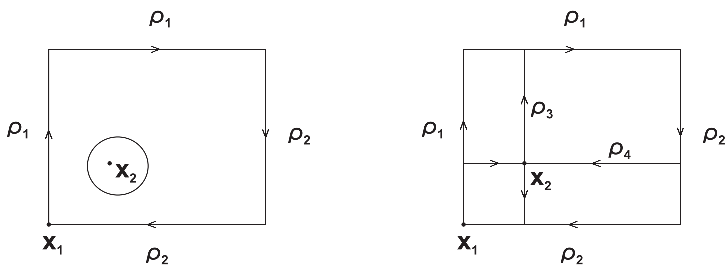
Da sequência acima, obtemos a sequência exata de homotopia da fibração $p_{1|}$. Como $M(\phi)$ é $K(\pi, 1)$, então obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \to \pi_1(K - x_2, x_1) \overset{j_{2\#}}{\to} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \overset{(p_{1|})_\#}{\to}$$

$$\to \pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \to 1$$

Consideraremos as seguintes presentações: $\pi_1(K - x_2, x_1) =< \bar{a}, \bar{b} >$, onde $< \bar{a}, \bar{b} >$ é o grupo livre gerado pelo conjunto, $\{\bar{a}, \bar{b}\}$, $\bar{a} = \rho_{11}\rho_{12}$, $\bar{b} = \rho_{12}^{-1}$ e $\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >)$ $=< \alpha, \beta, c_0 | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1, c_0\alpha c_0^{-1} = \alpha^{\epsilon}, c_0\beta c_0^{-1} = \alpha^p\beta^{\eta} >$, $\eta = \pm 1$, $p \in \{0, 1\}$.

Os elementos, ρ_{ij}, são definidos como na seção anterior. Também, suporemos que a inclusão dos elementos, ρ_{2i}, em K, não intersecta o ponto x_1, e que a inclusão dos elementos, ρ_{1i}, em K, não intersecta o ponto x_2, para $i = 1, 2$. Para isso, basta considerar os geradores de, $\pi_1(K - x)$, como na figura abaixo.



Os caminhos; $\alpha, \beta, c_0 : I \to M(\phi)$, são dados, respectivamente por $\alpha =< \rho_{21}\rho_{22}, 0 >$, $\beta =< \rho_{22}^{-1}, 0 >$ e $c_0 =< x_2, t >$. Note que estamos usando a mesma notação tanto para os elementos, ρ_{ij}, em $K - x_i$, quanto para sua inclusão em K.

Consideremos os elementos $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}, \tilde{b} : I \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$ dados por; $\tilde{\alpha} = (\alpha, < x_1, 0 >), \tilde{\beta} = (\beta, < x_1, 0 >), \tilde{c_0} = (c_0, < x_1, t >), \tilde{a} = (< x_2, 0 >, \bar{a})$ e

$\tilde{b} = (< x_2, 0 >, \bar{b})$. Visto que os elementos, ρ_{ij}, não intersectam x_j, então os elementos; $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}$ e $\tilde{b}$ pertencem a $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$. Observemos ainda que, $(p_{1|})_{\#}(\tilde{\alpha}) = \alpha, (p_{1|})_{\#}(\tilde{\beta}) = \beta, (p_{1|})_{\#}(\tilde{c_0}) = c_0, j_{2\#}(\bar{a}) = \tilde{a}$ e $j_{2\#}(\bar{b}) = \tilde{b}$.

Pelo teorema 1.2.1 existe uma presentação para o grupo $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$ que é dada por; $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) =< \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}, \tilde{b} | \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} = w_1(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-\epsilon} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-\eta}\tilde{\alpha}^{-p} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1} = w_4(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = w_5(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1} = w_6(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = w_7(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = w_8(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = w_9(\tilde{a}, \tilde{b}) >$, onde $w_j(\tilde{a}, \tilde{b}), j = 1, \ldots, 9$ são palavras em $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$. Mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema A.2.1. *Sejam, $\phi_p(1, \eta)$, um homeomorfismo, dado por um dos quatro casos do teorema 2.1.1, e $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}, \tilde{b}$ os elementos de $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$ definidos acima. Com essa notação temos;*

$\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) =< \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}, \tilde{b} | \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} = w_1(\tilde{a}, \tilde{b}), \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-\epsilon} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-\eta}\tilde{\alpha}^{-p} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1} = w_4(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = w_5(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1} = w_6(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = w_7(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = w_8(\tilde{a}, \tilde{b}), \ \ \tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = w_9(\tilde{a}, \tilde{b}) >$, onde, $w_j(\tilde{a}, \tilde{b}), j = 1, \ldots, 9$, são palavras em $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ dadas pelas tabelas abaixo;

Caso I $\phi_0(1, 1)$	$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{\alpha}$ $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}$	$\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{\beta}$ $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{b}$	
Caso II $\phi_1(1, 1)$	$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{\alpha}$ $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}$	$\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1} = B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{b}\tilde{a}^{-1}$	(A.1)
Caso III $\phi_0(1, -1)$	$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1} = B^{-1}\tilde{\alpha}$ $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}$	$\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{\beta}^{-1}$ $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$	
Caso IV $\phi_1(1, -1)$	$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1} = B^{-1}\tilde{\alpha}$ $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}$	$\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}$ $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = B\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$	

$\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} = B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$
$\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}B^{-1}$
$\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = B(\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1})B^{-1}$
$\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}$
$\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}$

(A.2)

Demonstração. Afim de simplificar, denotaremos; $\bar{\alpha} = \rho_{21}\rho_{22}$ e $\bar{\beta} = \rho_{22}^{-1}$. Como antes, temos $\bar{a} = \rho_{11}\rho_{12}$ e $\bar{b} = \rho_{12}^{-1}$. Note que $(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\beta}^{-1}, x_1) = (\rho_{21}\rho_{22}\rho_{22}^{-1}\rho_{21}\rho_{22}\rho_{22}, x_1) = (\rho_{21}^2\rho_{22}^2, x_1)$ é homotópico a $(x_2, \rho_{11}^2\rho_{12}^2) = (x_2, \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1})$, segue daí a seguinte relação: $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} = (\alpha\beta\alpha\beta^{-1}, < x_1, 0 >) = (< \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\beta}^{-1}, 0 >, < x_1, 0 >) = (< x_2, 0 >, < \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}, 0 >) = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$. Para ver que $(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\beta}^{-1}, x_1)$ é homotópico a $(x_2, \rho_{11}^2\rho_{12}^2)$, basta observar que as tranças da figura abaixo são homotópicas.

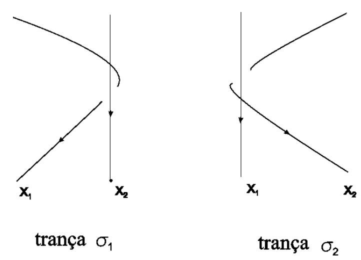


Figura A.2: As tranças σ_1 e σ_2 em K

Visto que, as projeções das tranças acima também são homotópicas, então obtemos o resultado. Note que as projeções de σ_1 e de σ_2 são, respectivamente, $B_{12} = \rho_{11}^2\rho_{12}^2$ e $B_{21}^{-1} = \rho_{21}^2\rho_{22}^2$, representados na figura abaixo.

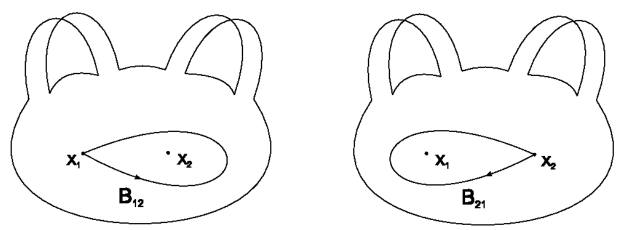


Figura A.3: Projeções das tranças σ_1 e σ_2 em $K - x$

Se denotarmos; $B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$, então pelo resultado acima, obteremos $B = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}$. Agora, para calcular $\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}, \tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}, \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}$ e $\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}$ consideraremos a seguinte presentação: $\pi_1(K, *) =< \rho_1, \rho_2 | \rho_1^2\rho_2^2 = 1 >$. Como $\mathbb{Z}$ é livre, então a seguinte sequência exata curta cinde:

$$1 \to \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \overset{i_\#}{\to} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \overset{(p \circ p_{1|})_\#}{\to}$$

$$\to \pi_1(S^1, < 0 >) \simeq \mathbb{Z} \to 1$$

onde $i_\#$ é a induzida da aplicação, $i : K \times K - \Delta_K \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$, dada por; $i(x, y) = (< x, 0 >, < y, 0 >)$.

Para de calcular $\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}, \tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}, \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}$ e $\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}$ como elementos do núcleo de $(p \circ p_{1|})_\#$, usando a sequência acima, precisaremos de uma presentação para $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$ e é o que faremos agora.

A.2.1 Uma presentação para $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$

Da fibração, $p_{1|} : K \times K - \Delta_K \to K$, dada por; $p_{1|}(x, y) = x$ e, usando o fato de K ser $K(\pi, 1)$, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \to \pi_1(K - x_2, x_1) \overset{(i_2)_\#}{\to} \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \overset{(p_{1|})_\#}{\to} \pi_1(K, x_2) \to 1$$

onde, $i_{2\#}$ é o homomorfismo induzido pela aplicação $i_2 : K - x_2 \to K \times K - \Delta_K$, dada por; $i_2(x) = (x_2, x)$.

Denotaremos por; $j_\# : \pi_1(K - x_2, x_1) \to \pi_1(K, x_1)$ e por $k_\# : \pi_1(K - x_1, x_2) \to \pi_1(K, x_2)$ os homomorfismos induzidos pelas inclusões $j : K - x_2 \to K$ e $k : K - x_1 \to K$, respectivamente.

Temos; $\bar{a} = \rho_{11}\rho_{12}, \bar{b} = \rho_{12}^{-1}, \bar{\alpha} = \rho_{21}\rho_{22}$ e $\bar{\beta} = \rho_{22}^{-1}$, onde ρ_{11}, ρ_{12} são geradores de $\pi_1(K - x_2, x_1)$ e ρ_{21}, ρ_{22} geradores de $\pi_1(K - x_1, x_2)$. Sejam $j_\#(\rho_{11}) = \rho_1, j_\#(\rho_{12}) = \rho_2$, $k_\#(\rho_{21}) = \rho_3$ e $k_\#(\rho_{22}) = \rho_4$. Os ρ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, são os mesmos definidos na seção anterior. Vimos que os conjuntos $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ e, $\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$ também são geradores de $\pi_1(K - x_2, x_1)$ e $\pi_1(K - x_1, x_2)$, respectivamente. Dessas observações temos;

$(p_{1|})_\#(\rho_{21}, x_1) = \rho_3$ e $(p_{1|})_\#(\rho_{22}, x_1) = \rho_4$. Também temos; $(i_2)_\#(\rho_{11}) = (x_2, \rho_{11})$ e $(i_2)_\#(\rho_{12}) = (x_2, \rho_{12})$, como classes de caminhos.

Agora, podemos usar o teorema 1.2.1 para dar uma presentação para $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$, considerando $\{\rho_{11}, \rho_{12}\}$ e $\{\rho_{21}, \rho_{22}\}$ como geradores de $\pi_1(K - x_2, x_1)$ e $\pi_1(K - x_1, x_2)$, respectivamente. Para fazer isto, consideraremos as tranças B_{12} e B_{21} definidas em [40] e já apresentadas na figura A.3.

Temos que, $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) = \mathcal{P}_2(K)$ grupo das tranças puras, é um subgrupo de $\mathcal{B}_2(K)$, o grupo das tranças em K baseado em duas cordas, veja [12]. Usaremos a presentação para $\mathcal{P}_2(K)$ dada em [40]. Usando [40] e a convenção de que o produto cd, de dois elementos em π_1, é a classe de um representante de c, seguida da classe de um represante de d, então o grupo; $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$ é gerado pelos elementos, $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}$, com as seguintes relações:

(1) $B_{12} = \rho_{11}^2 \rho_{12}^2$

(2) $B_{21}^{-1} = \rho_{21}^2 \rho_{22}^2$

(3) $\rho_{21}\rho_{11}\rho_{21}^{-1} = \rho_{11}B_{12}^{-1}$

(4) $\rho_{21}\rho_{12}\rho_{21}^{-1} = B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}\rho_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}$

(5) $\rho_{21}B_{12}\rho_{21}^{-1} = B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}$

(6) $\rho_{22}\rho_{11}\rho_{22}^{-1} = \rho_{11}$

(7) $\rho_{22}\rho_{12}\rho_{22}^{-1} = \rho_{12}B_{12}^{-1}$

(8) $\rho_{22}B_{12}\rho_{22}^{-1} = B_{12}\rho_{12}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{12}B_{12}^{-1}$

(9) $\rho_{21}^{-1}\rho_{11}\rho_{21} = \rho_{11}^2 B_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}$

(10) $\rho_{21}^{-1}\rho_{12}\rho_{21} = \rho_{11}B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}$

(11) $\rho_{21}^{-1}B_{12}\rho_{21} = \rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}$

(12) $\rho_{22}^{-1}\rho_{11}\rho_{22} = \rho_{11}$

(13) $\rho_{22}^{-1}\rho_{12}\rho_{22} = \rho_{12}^2 B_{12}^{-1}\rho_{12}^{-1}$

(14) $\rho_{22}^{-1}B_{12}\rho_{22} = \rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{12}^{-1}$.

Do teorema 1.2.1, essas são todas as relações de $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$. $\square$

Agora, se aplicarmos o teorema 1.2.1, para calcular $\pi_1(K \times K - \Delta, (x_2, x_1))$ usando os geradores $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ e $\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$, para $\pi_1(K - x_2, x_1)$ e $\pi_1(K - x_1, x_2)$, respectivamente, no lugar dos geradores, $\{\rho_{11}, \rho_{12}\}$, $\{\rho_{21}, \rho_{22}\}$, obteremos outras relações para $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$ que são calculadas usando as relações acima. Para fazer isso, tomaremos; $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ as imagens pela inclusão, $k : K - x_1 \to K$, de $\rho_{21}\rho_{22}$ e ρ_{22}^{-1}, respectivamente, e $\bar{a}, \bar{b}$ as imagens pela inclusão $j : K - x_2 \to K$ de $\rho_{11}\rho_{12}$ e ρ_{12}^{-1}, respectivamente. Consideremos ainda as aplicações $i_1(x) = (x, x_1)$ e $i_2(x) = (x_2, x)$.

$$\begin{tikzcd}
K & & K \times K - \Delta_K \arrow[ll, "p_{1|}"'] \arrow[rr, "p_{2|}"] & & K \\
K - x_1 \arrow[u, "k"] \arrow[urr, "i_1"] & & & & K - x_2 \arrow[u, "j"'] \arrow[ull, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

Da fibração $(K - x_2, x_1) \overset{i_2}{\to} (K \times K - \Delta, (x_2, x_1)) \overset{p_{1|}}{\to} (K, x_2)$, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \to \pi_1(K - x_2, x_1) \overset{(i_2)_\#}{\to} \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \overset{(p_{1|})_\#}{\to} \pi_1(K, x_2) \to 1.$$

Usando o teorema 1.2.1 obteremos; $\hat{a} = (i_2)_\#(\rho_{11}\rho_{12}), \hat{b} = (i_2)_\#(\rho_{12}^{-1}), \hat{\alpha} = (i_1)_\#(\rho_{21}\rho_{22})$ e $\hat{\beta} = (i_1)_\#(\rho_{22}^{-1})$ geradores de $(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$. Na nossa notação esses elementos são dados por; $\hat{a} = (i_2)_\#(\bar{a}), \hat{b} = (i_2)_\#(\bar{b}), \hat{\alpha} = (i_1)_\#(\bar{\alpha})$ e $\hat{\beta} = (i_1)_\#(\bar{\beta})$. Lembremos que, $i : (K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \to (M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), < x_2, 0 >, < x_1, 0 >)$, a aplicação de inclusão é dada por; $i(x, y) = (< x, 0 >, < y, 0 >)$. Aplicando o homomorfismo, $i_\#$, nos geradores acima obteremos;

$$i_\#(\hat{\alpha}) = i_\#(\rho_{21}\rho_{22}, x_1) = (< \rho_{21}\rho_{22}, 0 >, < x_1, 0 >) = (\alpha, < x_1, 0 >) = \tilde{\alpha},$$

$$i_\#(\hat{\beta}) = i_\#(\rho_{22}^{-1}, x_1) = (< \rho_{22}^{-1}, 0 >, < x_1, 0 >) = (\beta, < x_1, 0 >) = \tilde{\beta},$$

$$i_\#(\hat{a}) = i_\#(x_2, \rho_{11}\rho_{12}) = (< x_2, 0 >, < \rho_{11}\rho_{12}, 0 >) = (< x_2, 0 >, \bar{a}) = \tilde{a},$$

$$i_\#(\hat{b}) = i_\#(x_2, \rho_{12}^{-1}) = (< x_2, 0 >, < \rho_{12}^{-1}, 0 >) = (< x_2, 0 >, \bar{b}) = \tilde{b},$$

onde, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{a}$ e $\hat{b}$ são geradores de $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$. Portanto, se calcularmos as conjugações; $\hat{\alpha}\hat{a}\hat{\alpha}^{-1}, \hat{\beta}\hat{a}\hat{\beta}^{-1}, \hat{\alpha}\hat{b}\hat{\alpha}^{-1}, \hat{\beta}\hat{b}\hat{\beta}^{-1}$ e aplicarmos o homomorfismo, $i_\#$, obteremos as conjugações $\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}, \tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}, \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}$ e $\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}$. Calcularemos a seguir, as conjugações $\hat{\alpha}\hat{a}\hat{\alpha}^{-1}, \hat{\beta}\hat{a}\hat{\beta}^{-1}, \hat{\alpha}\hat{b}\hat{\alpha}^{-1}$ e $\hat{\beta}\hat{b}\hat{\beta}^{-1}$.

Temos; $\hat{\alpha}\hat{a}\hat{\alpha}^{-1}=(i_1)_{\#}(\rho_{21}\rho_{22})(i_2)_{\#}(\rho_{11}\rho_{12})(i_1)_{\#}(\rho_{22}^{-1}\rho_{21}^{-1})$. Assim, $\hat{\alpha}\hat{a}\hat{\alpha}^{-1}$ deve ser calculado em, $\pi_1(K\times K-\Delta_K,(x_2,x_1))$, através do produto de caminhos $\rho_{21}\rho_{22}\rho_{11}\rho_{12}\rho_{22}^{-1}$ ρ_{21}^{-1}. Usando as relações (3),(4),(5),(6) e (7) obteremos;

$$\begin{aligned}
\rho_{21}\rho_{22}\rho_{11}\rho_{12}\rho_{22}^{-1}\rho_{21}^{-1} &= \rho_{21}\rho_{22}\rho_{11}\rho_{22}^{-1}\rho_{22}\rho_{12}\rho_{22}^{-1}\rho_{21}^{-1}\\
&= \rho_{21}\rho_{11}\rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{21}^{-1}\\
&= \rho_{21}\rho_{11}\rho_{21}^{-1}\rho_{21}\rho_{12}\rho_{21}^{-1}\rho_{21}B_{12}^{-1}\rho_{21}^{-1}\\
&= \rho_{11}B_{12}^{-1}B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}\rho_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}B_{12}^{-1}\\
&= B_{12}\rho_{11}\rho_{12}B_{12}^{-1}\\
&= \hat{B}\hat{a}\hat{B}^{-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando o homomorfismo, $i_{\#}$, em ambos os lados da igualdade acima obteremos; $\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}=B\tilde{a}B^{-1}$. De maneira análoga a anterior, $\hat{\alpha}\hat{b}\hat{\alpha}^{-1}$, $\hat{\beta}\hat{a}\hat{\beta}^{-1}$ e $\hat{\beta}\hat{b}\hat{\beta}^{-1}$ devem ser calculados em $\pi_1(K\times K-\Delta_K)$, respectivamente, através dos produtos de caminhos; $\rho_{21}\rho_{22}\rho_{12}^{-1}\rho_{22}^{-1}\rho_{21}^{-1}$, $\rho_{22}^{-1}\rho_{11}\rho_{12}\rho_{22}$ e $\rho_{22}^{-1}\rho_{12}^{-1}\rho_{22}$. Usando as relações (1),(4),(5) e (7) obteremos;

$$\begin{aligned}
\rho_{21}\rho_{22}\rho_{12}^{-1}\rho_{22}^{-1}\rho_{21}^{-1} &= \rho_{21}B_{12}\rho_{12}^{-1}\rho_{21}^{-1}\\
&= \rho_{21}B_{12}\rho_{21}^{-1}\rho_{21}\rho_{12}^{-1}\rho_{21}^{-1}\\
&= B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{21}\rho_{12}^{-1}\rho_{21}^{-1}\\
&= B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}\rho_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}\\
&= B_{12}\rho_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}\\
&= B_{12}\rho_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}\rho_{12}^{-1}\rho_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\\
&= \hat{B}(\hat{a}^{-1}\hat{b}\hat{a}^{-1})\hat{B}^{-1}.
\end{aligned}$$

Da igualdade acima obtemos; $\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}=B(\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1})B^{-1}$. Usando as relações (1),(6) e (13) obteremos;

$$\begin{aligned}
\rho_{22}^{-1}\rho_{11}\rho_{12}\rho_{22} &= \rho_{11}\rho_{22}^{-1}\rho_{12}\rho_{22}\\
&= \rho_{11}\rho_{12}^{2}B_{12}^{-1}\rho_{12}^{-1}\\
&= \rho_{11}^{-1}\rho_{12}^{-1}\\
&= \rho_{12}\rho_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}\rho_{12}^{-1}\\
&= \hat{b}^{-1}\hat{a}^{-1}\hat{b}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos $\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}$. Usando a relação (13) teremos;

$$\begin{aligned}\rho_{22}^{-1}\rho_{12}^{-1}\rho_{22} &= \rho_{12}B_{12}\rho_{12}^{-1}\rho_{12}^{-1} \\ &= \hat{b}^{-1}(\hat{B}\hat{b})\hat{b}.\end{aligned}$$

Da igualdade acima obtemos; $\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}$.

Note que, obtivemos todas as relações da tabela A.2 do enunciado do teorema. Agora, calcularemos as relações dadas na tabela A.1. Para isso, consideremos a seguinte fibração: $(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \xrightarrow{i} (M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \xrightarrow{p \circ p_{1|}} S^1$, onde, $i(x, y) = (< x, 0 >, < y, 0 >)$. Dessa fibração obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \to \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \xrightarrow{i_\#} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \xrightarrow{p \circ p_{1|\#}}$$

$$\to \pi_1(S^1, < 0 >) \simeq \mathbb{Z} \to 1$$

A sequência acima cinde visto que $\mathbb{Z}$ é livre. Assim, $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta,$ $(< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$ é isomorfo ao produto semi-direto $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \rtimes \mathbb{Z}$.

Consideremos o homeomorfismo, $h : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) \to M(\phi \times \phi)$, sobre S^1, dado por; $h(< x, t >, < y, t >) =< x, y, t >$. Tomando a restrição de h a $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$ obteremos o seguinte homeomorfismo: $h_| : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta \to M(\phi \times \phi) - h(\Delta)$. Note que esse homeomorfismo preserva fibra.

Pelo homeomorfismo acima, os laços $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}, \tilde{b}$ podem ser vistos em $M(\phi \times \phi) - h(\Delta)$, como $\tilde{\alpha} =< \bar{\alpha}, x_1, 0 >, \tilde{\beta} =< \bar{\beta}, x_1, 0 >, \tilde{c_0} =< x_2, x_1, t >, \tilde{a} =< x_2, \bar{a}, 0 >$ e $\tilde{b} =< x_2, \bar{b}, 0 >$. Esses laços, podem ser vistos como representantes de classes de laços em $(K \times K - \Delta_K)$ de maneira natural, por exemplo, $\tilde{\alpha}$ seria visto como um par de laços em $K \times K - \Delta_K$, onde $\bar{\alpha}$ é o laço na primeira componente e x_1 é o laço constante na segunda componente.

Da mesma maneira, como foi feito acima, podemos olhar para os representantes dos laços $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}, \tilde{b}$ e interpretá-los da seguinte forma: os laços $\tilde{a}, \tilde{b}$ são elementos na primeira cópia de K em, $K \times K$, e os laços $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ são elementos na segunda cópia de K em $K \times K$.

Seja $\phi \times \phi$ um homeomorfismo de $K \times K$. Seja $M((\phi \times \phi)_|)$ o espaço quociente obtido de $K \times K - \Delta \times I$ pela relação $(x, y, 0) \sim ((\phi \times \phi)_|(x, y)), 1)$. Então, $M((\phi \times \phi)_|)$ é homeomorfo a $M(\phi \times \phi) - h(\Delta)$. De fato, a aplicação $g : M(\phi \times \phi) - h(\Delta) \to M((\phi \times \phi)_|)$ definida por; $g(< x, y, t >) =< x, y, t >$, com $x \neq y$ é um homeomorfismo. No espaço $M((\phi \times \phi)_|)$, com a secção $s_0 : S^1 \to M((\phi \times \phi)_|)$, dada por; $s_0(t) =< x_2, x_1, t >$, podemos mostrar;

$$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha}), \qquad \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta}),$$

$$\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{a}), \qquad \tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{b}).$$

Observemos que a conjugação acima resulta da ação conjugação de $\mathbb{Z} \to Aut(K \times K - \Delta)$, que vem da secção s_0, da mesma forma como fizemos na proposição 1.3.5. Pela nossa notação temos;

$$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-\epsilon} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha}^{-\epsilon} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b}),$$

$$\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-\eta}\tilde{\alpha}^{-p} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta})\tilde{\beta}^{-\eta}\tilde{\alpha}^{-p} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b}).$$

Nosso próximo objetivo é apresentar uma descrição para o homomorfismo; $(\phi \times \phi)_{|\#} : \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \to \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$. Para isso, faremos algumas considerações.

I) Consideremos o seguinte par de diagramas comutativos;

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(K - x_2, x_1) \arrow[r, "(\phi_|)_\#"] \arrow[d, "j_\#"'] & \pi_1(K - x_2, x_1) \arrow[d, "j_\#"] \\
\pi_1(K, x_1) \arrow[r, "\phi_\#"] & \pi_1(K, x_1)
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(K - x_2, x_1) \arrow[r, "(\phi_|)_\#"] \arrow[d, "(i_2)_\#"'] & \pi_1(K - x_2, x_1) \arrow[d, "(i_2)_\#"] \\
\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \arrow[r, "(\phi\times\phi)_{|\#}"] \arrow[d, "(p_{1|})_\#"'] & \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \arrow[d, "(p_{1|})_\#"] \\
\pi_1(K, x_2) \arrow[r, "\phi_\#"] & \pi_1(K, x_2)
\end{tikzcd}$$

onde $j_\#$ é o homomorfismo induzido pela inclusão, $j: K-x_2\to K$, $(i_2)_\#$ é o homomorfismo induzido pela aplicação, $i_2: K-x_2\to K\times K-\Delta_K$, dada por; $i_2(x)=(x_2,x)$, e, $(p_{1|})_\#$, é o homomorfismo induzido pela aplicação, $p_{1|}: K\times K-\Delta_K\to K$, dada por; $p_{1|}(x,y)=x$.

II) Se $\hat{a},\hat{b},\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são geradores de $\pi_1(K\times K-\Delta_K,(x_2,x_1))$ então temos; $i_\#(\hat{a})=\tilde{a}, i_\#(\hat{b})=\tilde{b}, i_\#(\hat{\alpha})=\tilde{\alpha}, i_\#(\hat{\beta})=\tilde{\beta}$, $i_{2\#}(\bar{a})=\hat{a}, i_{2\#}(\bar{b})=\hat{b}, i_{1\#}(\bar{\alpha})=\hat{\alpha}, i_{1\#}(\bar{\beta})=\hat{\beta}$.

III) Consideremos as seguintes identidades:

$$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}),$$

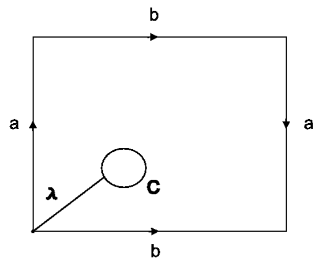
$$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}),$$

$$\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=(\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}),$$

$$\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=(\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}).$$

IV) Denotemos por $\pi_1(K,*)=<a,b|abab^{-1}=1>$ e $\pi_1(K-x,*)=<\bar{a},\bar{b}>$. Se $w_{\bar{a}}$, $w_{\bar{b}}\in\pi_1(K-x,*)$ são tais que $w_{\bar{a}}w_{\bar{b}}w_{\bar{a}}w_{\bar{b}}^{-1}=\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$ ou $w_{\bar{a}}w_{\bar{b}}w_{\bar{a}}w_{\bar{b}}^{-1}=\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}$, então existe um homeomorfismo $\phi: K\to K$ tal que $(\phi_|)_\#:\pi_1(K-x,*)\to\pi_1(K-x,*)$ envia $\bar{a}\mapsto w_{\bar{a}}$ e $\bar{b}\mapsto w_{\bar{b}}$. A seguir, daremos um esboço da demonstração do item IV, no caso em que $w_{\bar{a}}w_{\bar{b}}w_{\bar{a}}w_{\bar{b}}^{-1}=\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$.

Sejam $A=S^1$, $X=D^2$, $Y=S^1\vee S^1\vee\{c\cup\lambda\}$, onde c é um círculo de raio pequeno contido em K, e λ uma aresta ligando o ponto base ao círculo c.



K: Garrafa de Klein

Olharemos para, $X\cup_f Y$, onde $f: S^1\to Y$ é dada por $[f]=\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}\lambda c\lambda^{-1}$. Definimos $h: Y\subset X\cup_f Y\to K-\{disco\}$ por $h(\bar{a})\equiv$ uma curva que representa $w_{\bar{a}}$, $h(\bar{b})\equiv$ uma curva que representa $w_{\bar{b}}$, $h(\lambda) = \lambda$ e $h(c) = c$. Queremos saber se h se estende para $X \cup_f Y$.

Temos; $h_\# \circ f_\# : \pi_1(S^1) \to \pi_1(K - \{disco\})$. Como $\lambda c \lambda^{-1}$ é homotópico a $\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$, então se d é um gerador de, $\pi_1(S^1)$, obteremos $h_\# \circ f_\#(d) = 1$. Portanto, $h \circ f$ se estende para $X = D^2$ e, logo, existe $H : X \cup_f Y \to K - \{disco\}$ que estende h. Note que H é uma equivalência de homotopia. Logo, H é homotópica a um homeomorfismo $\bar{\phi} : K - \{disco\} \to K - \{disco\}$. Assim, existe $\phi : K \to K$ que estende $\bar{\phi}$. Por construção, $(\phi_|)_\#(\bar{a}) = w_{\bar{a}}$ e $(\phi_|)_\#(\bar{b}) = w_{\bar{b}}$. O caso em que temos $w_{\bar{a}} w_{\bar{b}} w_{\bar{a}} w_{\bar{b}}{}^{-1} = \bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}$ é análogo ao anterior. □

Agora, usaremos as considerações acima, em cada caso da tabela do teorema 2.1.1, para obtermos a tabela A.1 do teorema A.2.1.

Caso I) $\phi_0(1, 1)$.

Consideremos, $\phi : K \to K$, a identidade. Temos $(\phi_|)_\# : \bar{a} \to \bar{a}, \bar{b} \to \bar{b}$. De, I), obtemos; $\phi_\# = \phi_0(1, 1)$, $(\phi \times \phi)_{|\#} : \hat{a} \to \hat{a}, \hat{b} \to \hat{b}$. Portanto, $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{a}) = \tilde{a}$ e $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{b}) = \tilde{b}$. De $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}$ e $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{b}$ obtemos $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0} = \tilde{a}$ e $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{b}$. Logo, $\tilde{c_0}$ comuta com $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{a}^{-1}$ e $\tilde{b}^{-1}$. Sabemos que $B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$. Disso, temos que $\tilde{c_0}$ também comuta com B.

Usando a primeira identidade de, III), $w_2(\tilde{a}, \tilde{b}) = \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}$, a tabela A.2 e os fatos acima temos; $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$ que implica $\tilde{c_0}B\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a},\ \tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}w_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Disso, concluímos que $w_2(\tilde{a}, \tilde{b})$ deve satisfazer; $B\tilde{a}B^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b})B\ \tilde{a}B^{-1}w_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$.

Da mesma forma, usando a segunda identidade de III), $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\ \tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obteremos; $\tilde{c_0}B\tilde{a}^{-1}(\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}p_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Portanto, $w_2(\tilde{a}, \tilde{b})$ deve satisfazer; $B\tilde{a}^{-1}(\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{a}B^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b})B\tilde{a}^{-1}(\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{a}B^{-1}w_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Assim, $w_2(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$ é a solução.

Agora, usaremos a terceira e quarta identidades de III), $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\ \tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$ e $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, a tabela A.2 e $w_3(\tilde{a}, \tilde{b}) = \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}$ para encontrar um sistema de equações envolvendo a palavra $w_3(\tilde{a}, \tilde{b})$. De fato, de $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$ obtemos; $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\ \tilde{\beta}\tilde{a}\ \tilde{\beta}^{-1}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$, que implica $\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}$ $w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Portanto, $w_3(\tilde{a}, \tilde{b})$ deve satisfazer; $\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$.

De $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$ obtemos; $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{\beta}\tilde{b}$ $\tilde{\beta}^{-1}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$, que implica $\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Dessa forma, $w_3(\tilde{a}, \tilde{b})$ deve satisfazer; $\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Assim, $w_3(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$ é a solução.

Dos resultados acima obtemos; $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$ e $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-1} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b}) =$ 1. Como $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha}^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$ e $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta})\tilde{\beta}^{-1}$ $= w_3(\tilde{a}, \tilde{w}) = 1$, então $(\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$ e $(\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta}$.

Caso II) $\phi_1(1, 1)$.

Da consideração, IV), podemos tomar $\phi : K \to K$ tal que $(\phi_|)_\# : \bar{a} \to \bar{a}, \bar{b} \to \bar{b}\bar{a}^{-1}$. Portanto, de I) obtemos; $\phi_\# = \phi_1(1, 1)$, $(\phi \times \phi)_{|\#} : \hat{a} \to \hat{a}, \hat{b} \to \hat{b}\hat{a}^{-1}$. Assim, $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} =$ $(\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{a}) = \tilde{a}$ e $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{b}) = \tilde{b}\tilde{a}^{-1}$.

De $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{b}\tilde{a}^{-1}$, obtemos $\tilde{b} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}\tilde{a}^{-1}$, pois $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0} = \tilde{a}$. Logo, temos $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{b}\tilde{a}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\\
&= B.
\end{aligned}$$

Da identidade, $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\ \tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos; $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}$ $\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}w_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Daí temos; $\tilde{c_0}B\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b})B\tilde{a}B^{-1}w_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Note que $\tilde{c_0}B\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = B\tilde{a}B^{-1}$. Portanto, $w_2(\tilde{a}, \tilde{b})$ deve satisfazer; $B\tilde{a}B^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b})B\tilde{a}B^{-1}w_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$.

Da identidade, $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, temos; $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\ \tilde{c_0}^{-1} =$ $w_2(\tilde{a},\ \tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}w_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Logo, $\tilde{c_0}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a},\ \tilde{b})B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}w_2(\tilde{a},\ \tilde{b})^{-1}$. Observemos que $\tilde{c_0}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}$.

Portanto, $w_2(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer; $B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Assim, $w_2(\tilde{a},\tilde{b}) = 1$ é a solução.

Nesse caso temos; $w_3(\tilde{a},\tilde{b}) = \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}$. Da identidade, $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos; $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Portanto, $\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Das relações acima temos; $\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\ \tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}$ e

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}\\
&= B(\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1})B^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, $w_3(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer; $\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})B(\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1})B^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Agora, da identidade, $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos a igualdade; $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Temos;

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{a}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\\
&= \tilde{a}\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{b}\tilde{a}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}B\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}\\
&= B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}\\
&= B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1},
\end{aligned}$$

onde $B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$. Assim, $w_3(\tilde{a},\tilde{b})$ também deve satisfazer; $\tilde{a}\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{b}\tilde{a}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})$ $B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$ $(B\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Logo, $w_3(\tilde{a},\tilde{b}) = B^{-1}$ é a solução.

Portanto, dos resultados acima, temos $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b}) = 1$ e $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b}) = B^{-1}$. Como $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = (\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha}^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b}) = 1$ e $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = (\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{\beta})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b}) = B^{-1}$, então temos $(\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$ e $(\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{\beta}) = B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$, onde $B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$.

Caso III) $\phi_0(1,-1)$.

Da observação, *IV*), podemos tomar $\phi : K \to K$ tal que $(\phi_|)_\# : \bar{a} \to \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1} = \bar{a}\bar{E}^{-1}, \bar{b} \to \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1}\ \bar{a}^{-1} = \bar{E}\bar{b}^{-1}\bar{E}^{-1}$, onde $\bar{E} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$. De I), obtemos $\phi_\# = \phi_0(1,-1)$, $(\phi \times \phi)_{|\#} : \hat{a} \to \hat{a}\hat{b}\hat{a}^{-1}\hat{b}^{-1}\hat{a}^{-1} = \hat{a}\hat{E}^{-1}, \hat{b} \to \hat{a}\hat{b}\hat{a}\hat{b}^{-1}\hat{a}^{-1}\hat{b}^{-1}\ \hat{a}^{-1} = \hat{E}\hat{b}^{-1}\hat{E}^{-1}$, onde $\hat{E} = \hat{a}\hat{b}\hat{a}\hat{b}^{-1}$.

Portanto, $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{a}) = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}$ e $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{b})$ $= \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$, onde $B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$. Dessas igualdades temos; $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}$ e $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = B\tilde{b}B^{-1}$. Agora, visto que

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}B^{-1} \\
&= \tilde{a}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B^{-1} \\
&= \tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B^{-1} \\
&= B^{-1},
\end{aligned}$$

então temos $\tilde{a} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}B$. Portanto, $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}$. Também temos; $\tilde{b} = \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} = B^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}B$. Assim, $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}^{-1}\ \tilde{c_0} = B\tilde{b}B^{-1}$. Essa última igualdade implica $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$.

Da identidade, $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos a relação; $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\ B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}B^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Note que,

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}B\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{a}.
\end{aligned}$$

Assim, $w_2(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer; $\tilde{a} = w_2(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}B^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Agora, da identidade, $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos a equação; $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}$

$= w_2(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}w_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b})B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}w_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Como

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\alpha}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&\quad \tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1} \\
&\quad B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}B\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&\quad \tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= B^{-1}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}B^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}B^{-1}B \\
&= \tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b} \\
&= \tilde{b}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1} \\
&= \tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1},
\end{aligned}$$

então $w_2(\tilde{a}, \tilde{b})$ deve satisfazer; $\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b})B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}w_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Disso, concluimos que $w_2(\tilde{a}, \tilde{b}) = B^{-1}$ é a solução. Também, da identidade, $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos a equação; $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{a}B^{-1}.
\end{aligned}$$

Dessa igualdade obtemos; $\tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}B = \tilde{a}$. Portanto, $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta} = \tilde{a}B^{-1}$. Dessas equações, temos que $w_3(\tilde{a}, \tilde{b})$ deve satisfazer; $\tilde{a}B^{-1} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{a}B^{-1}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Agora, considerando a identidade, $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos $\tilde{c_0}\tilde{\beta}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Observemos que,

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\beta}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1} \\
&\quad \tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b} \\
&\quad \tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= B\tilde{b}B^{-1}B \\
&= B\tilde{b}.
\end{aligned}$$

Disso concluímos que; $\tilde{\beta}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = B^{-1}B\tilde{b}^{-1}B^{-1} = \tilde{a}^{-1}\,\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$. Logo, $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$. Dessa igualdade resulta $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$, que implica $B\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\,\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}B\tilde{a}^{-1} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$. Assim, $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta} = \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{a}B^{-1} = \tilde{b}^{-1}B^{-1}$. Portanto, $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta} = B\tilde{b}$.

Da equações acima, $w_3(\tilde{a}, \tilde{b})$, deve satisfazer $B\tilde{b} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})B\tilde{b}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Dessa forma, $w_3(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$ é a solução. Portanto, desses resultados, temos; $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha}^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b}) = B^{-1}$. Assim, $(\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha}) = B^{-1}\tilde{\alpha}$. Também temos; $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta})\tilde{\beta} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$. Logo, $(\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta}^{-1}$.

Caso IV) $\phi_1(1, -1)$.

Da observação, *IV*), podemos tomar $\phi : K \to K$ tal que $(\phi_|)_\# : \bar{a} \to \bar{a}\bar{E}^{-1}, \bar{b} \to \bar{E}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}$, onde $\bar{E} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$. De, I), obtemos $\phi_\# = \phi_1(1, -1)$, $(\phi \times \phi)_{|\#} : \hat{a} \to \hat{a}\hat{E}^{-1}, \hat{b} \to \hat{E}\hat{b}^{-1}\hat{a}^{-1}$, onde $\hat{E} = \hat{a}\hat{b}\hat{a}\hat{b}^{-1}$. Assim, temos $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{a}) = \tilde{a}B^{-1}$ e $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{b}) = B\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$, onde $B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$.

Neste caso temos; $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = B\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$. Daí segue que $\tilde{b} = \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0}$. Dessas igualdades obtemos;

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde a\tilde b^{-1}B^{-1}\tilde a\tilde b B^{-1}\\
&= \tilde a\tilde b^{-1}\tilde b\tilde a^{-1}\tilde b^{-1}\tilde a^{-1}\tilde a\tilde b B^{-1}\\
&= B^{-1}.
\end{aligned}
$$

Portanto, ${\tilde c_0}^{-1}B^{-1}\tilde c_0 = B$, e disso obtemos ${\tilde c_0}^{-1}B\tilde c_0=B^{-1}$. Como $\tilde c_0\tilde a{\tilde c_0}^{-1}=\tilde aB$, então $\tilde a={\tilde c_0}^{-1}\tilde a\tilde c_0{\tilde c_0}^{-1}B^{-1}\tilde c_0={\tilde c_0}^{-1}\tilde a\tilde c_0B$. Assim, ${\tilde c_0}^{-1}\tilde a\tilde c_0=\tilde aB^{-1}$. Note que, $\tilde b={\tilde c_0}^{-1}B\tilde c_0{\tilde c_0}^{-1}\tilde b^{-1}\tilde c_0{\tilde c_0}^{-1}\tilde a^{-1}\tilde c_0 = B^{-1}{\tilde c_0}^{-1}\tilde b^{-1}\tilde c_0 B\tilde a^{-1}$. Daí obtemos; ${\tilde c_0}^{-1}\,\tilde b^{-1}\tilde c_0=B\tilde b\tilde a B^{-1}$, que implica ${\tilde c_0}^{-1}\tilde b\tilde c_0=B\tilde a^{-1}\tilde b^{-1}B^{-1}$.

Usando a identidade, $\tilde c_0\tilde\alpha({\tilde c_0}^{-1}\tilde a\tilde c_0)\tilde\alpha^{-1}{\tilde c_0}^{-1}=(\tilde c_0\tilde\alpha{\tilde c_0}^{-1})\tilde a(\tilde c_0\tilde\alpha^{-1}{\tilde c_0}^{-1})$, obteremos; $\tilde c_0\tilde\alpha\tilde a\ B^{-1}\tilde\alpha^{-1}{\tilde c_0}^{-1}=w_2(\tilde a,\tilde b)\tilde\alpha\tilde a\tilde\alpha^{-1}w_2(\tilde a,\tilde b)^{-1}$. Visto que,

$$
\begin{aligned}
\tilde c_0\tilde\alpha\tilde aB^{-1}\tilde\alpha^{-1}{\tilde c_0}^{-1} &= \tilde c_0\tilde\alpha\tilde a\tilde b\tilde a^{-1}\tilde b^{-1}\tilde a^{-1}\tilde\alpha^{-1}{\tilde c_0}^{-1}\\
&= \tilde c_0\tilde\alpha\tilde a\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha\tilde b\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha\tilde a^{-1}\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha\tilde b^{-1}\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha\tilde a^{-1}\tilde\alpha^{-1}{\tilde c_0}^{-1}\\
&= \tilde c_0 B\tilde aB^{-1}B\tilde a^{-1}\tilde b\tilde a^{-1}B^{-1}B\tilde a^{-1}B^{-1}B\tilde a\tilde b^{-1}\tilde aB^{-1}B\tilde a^{-1}B^{-1}{\tilde c_0}^{-1}\\
&= \tilde c_0\tilde aB^{-1}{\tilde c_0}^{-1}\\
&= \tilde c_0\tilde a{\tilde c_0}^{-1}\tilde c_0B^{-1}{\tilde c_0}^{-1}\\
&= \tilde aB^{-1}B\\
&= \tilde a,
\end{aligned}
$$

então $w_2(\tilde a,\tilde b)$ deve satisfazer; $\tilde a = w_2(\tilde a,\tilde b)B\tilde aB^{-1}w_2(\tilde a,\tilde b)^{-1}$. Agora, usando a identidade, $\tilde c_0\tilde\alpha({\tilde c_0}^{-1}\tilde b\tilde c_0)\tilde\alpha^{-1}{\tilde c_0}^{-1}=(\tilde c_0\tilde\alpha{\tilde c_0}^{-1})\tilde b(\tilde c_0\tilde\alpha^{-1}{\tilde c_0}^{-1})$, obteremos; $\tilde c_0\tilde\alpha B\tilde a^{-1}\tilde b^{-1}B^{-1}\tilde\alpha^{-1}{\tilde c_0}^{-1}$ $= w_2(\tilde a,\tilde b)\tilde\alpha\tilde b\tilde\alpha^{-1}w_2(\tilde a,\tilde b)^{-1}$. Também temos;

$$
\begin{aligned}
\tilde c_0\tilde\alpha B\tilde a^{-1}\tilde b^{-1}B^{-1}\tilde\alpha^{-1}{\tilde c_0}^{-1} &= \tilde c_0\tilde\alpha\tilde a\tilde b\tilde a\tilde b^{-1}\tilde a^{-1}\tilde a^{-1}\tilde b^{-1}\tilde a^{-1}\tilde\alpha^{-1}{\tilde c_0}^{-1}\\
&= \tilde c_0\tilde\alpha\tilde a\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha\tilde b\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha\tilde a\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha\tilde b^{-1}\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha\tilde a^{-1}\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha\tilde a^{-1}\tilde\alpha^{-1}\\
&\quad \tilde\alpha\tilde b^{-1}\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha\tilde a^{-1}\tilde\alpha^{-1}{\tilde c_0}^{-1}\\
&= \tilde c_0B\tilde aB^{-1}B\tilde a^{-1}\tilde b\tilde a^{-1}B^{-1}B\tilde aB^{-1}B\tilde a\tilde b^{-1}\tilde aB^{-1}B\tilde a^{-1}B^{-1}\\
&\quad B\tilde a^{-1}B^{-1}B\tilde a\tilde b^{-1}\tilde aB^{-1}B\tilde a^{-1}B^{-1}{\tilde c_0}^{-1}\\
&= \tilde c_0B\tilde a^{-1}B\tilde b^{-1}B^{-1}{\tilde c_0}^{-1}\\
&= \tilde c_0B{\tilde c_0}^{-1}\tilde c_0\tilde a^{-1}{\tilde c_0}^{-1}\tilde c_0B{\tilde c_0}^{-1}\tilde c_0\tilde b^{-1}{\tilde c_0}^{-1}\tilde c_0 sB^{-1}{\tilde c_0}^{-1}\\
&= B^{-1}B\tilde a^{-1}B^{-1}\tilde a\tilde bB^{-1}B\\
&= \tilde a^{-1}\tilde b\tilde a^{-1}.
\end{aligned}
$$

Assim, $w_2(\tilde{a},\tilde{b})$, deve satisfazer; $\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}=w_2(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Portanto, $w_2(\tilde{a},\tilde{b})=B^{-1}$ é a solução.

Usando a identidade, $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=(\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obteremos; $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Temos;

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{a}B^{-1}.
\end{aligned}$$

Logo, $\tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}=\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}=\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}=\tilde{a}B^{-1}B=\tilde{a}$. Portanto, $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}=\tilde{a}B^{-1}$. Também temos;

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}\\
&= \tilde{a}B^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, $w_3(\tilde{a},\tilde{b})$, deve satisfazer; $\tilde{a}B^{-1}=w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{a}B^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Agora, usando a identidade, $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=(\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obteremos; $\tilde{c_0}\tilde{\beta}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}$ $\tilde{c_0}^{-1}=w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Das relações acima obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\beta}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\\
&\quad \tilde{\beta}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\\
&\quad \tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B^{-1}\\
&= B\tilde{b}B^{-1}.
\end{aligned}$$

Daí concluímos que,

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1} &= \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{b}B^{-1}\tilde{c_0}\\ &= \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}\\ &= B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}B\\ &= \tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}.\end{aligned}$$

Portanto, $B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1} = \tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta} = \tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}$. Logo, $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta} = \tilde{b}^{-1}B^{-1}$, que implica $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta} = B\tilde{b}$. Note que, $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}B\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\ B^{-1}B\tilde{a}B^{-1} = B\tilde{b}B^{-1}$. Assim, $w_3(\tilde{a},\tilde{b})$, deve satisfazer; $B\tilde{b}B^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{b}B^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Portanto, $w_3(\tilde{a},\tilde{b}) = 1$ é a solução.

Como $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = (\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha}^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b}) = B^{-1}$, então segue que $(\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{\alpha}) = B^{-1}\tilde{\alpha}$. Agora, como $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1} = (\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{\beta})\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b}) = 1$, então obtemos $(\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{\beta}) = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}$.

Assim, concluímos a demonstração do teorema A.2.1. □

Observação A.2.1. *Toda palavra $p(\tilde{a},\tilde{b})$ pode ser escrita como uma palavra em $w = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$ e $v = \tilde{a}\tilde{b}$. De fato, de ,$w = v\tilde{a}^{-1}v^{-1}$, tiramos $\tilde{a} = v^{-1}w^{-1}v$. Agora, de, $\tilde{b} = \tilde{a}^{-1}v$, obtemos; $\tilde{b} = v^{-1}wv^2$.*

No resto desta seção, calcularemos os conjugados dos geradores w e v em relação a $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ e $\tilde{c_0}$. Essas conjugações se encontram nas tabelas abaixo.

$\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} = B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$	
$\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}B^{-1}$	$\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{a}\tilde{\alpha} = \tilde{a}B^{-1}\tilde{a}B\tilde{a}$
$\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = B(\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1})B^{-1}$	$\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{b}\tilde{\alpha} = \tilde{a}B^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}(\tilde{b}B)\tilde{b}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1}$
$\tilde{\alpha}B\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}(B)\tilde{a}B^{-1}$	$\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha} = \tilde{a}B\tilde{a}^{-1}$
$\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}$	$\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = \tilde{a}\tilde{b}(\tilde{a}^{-1})\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$
$\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}$	$\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta} = B\tilde{b}$
$\tilde{\beta}B\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}(B^{-1})\tilde{b}$	$\tilde{\beta}^{-1}B\tilde{\beta} = B\tilde{b}(B^{-1})\tilde{b}^{-1}B^{-1}$

(A.3)

Cálculo da tabela A.3.

Para calcular a tabela A.3 usaremos os resultados já obtidos na tabela A.2. Temos;

$$\begin{aligned}
\tilde\alpha B\tilde\alpha^{-1} &= \tilde\alpha\tilde a\tilde b\tilde a\tilde b^{-1}\tilde\alpha^{-1}\\
&= \tilde\alpha\tilde a\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha\tilde b\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha\tilde a\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha\tilde b^{-1}\tilde\alpha^{-1}\\
&= B\tilde aB^{-1}B\tilde a^{-1}\tilde b\tilde a^{-1}B^{-1}B\tilde aB^{-1}B\tilde a\tilde b^{-1}\tilde aB^{-1}\\
&= B\tilde b\tilde a\tilde b^{-1}\tilde aB^{-1}\\
&= B\tilde a^{-1}B\tilde aB^{-1}.
\end{aligned}$$

Da igualdade acima obtemos; $\tilde\alpha B\tilde\alpha^{-1}=B\tilde a^{-1}\tilde\alpha\tilde a\tilde\alpha^{-1}$, que implica $\tilde\alpha B\tilde a^{-1}\tilde\alpha^{-1}=B\tilde a^{-1}$. Assim, $\tilde\alpha\tilde a\tilde\alpha^{-1}\tilde\alpha B\tilde a^{-1}\tilde\alpha^{-1}=\tilde\alpha\tilde a\tilde\alpha^{-1}B\tilde a^{-1}=B\tilde aB^{-1}B\tilde a^{-1}=B$. Daí temos $\tilde\alpha\tilde aB\tilde a^{-1}\ \tilde\alpha^{-1}=B$. Portanto, $\tilde aB\tilde a^{-1}=\tilde\alpha^{-1}B\tilde\alpha$.

Usando, $\tilde\alpha B\tilde a^{-1}\tilde\alpha^{-1}=B\tilde a^{-1}$, obtemos; $B\tilde a^{-1}=\tilde\alpha^{-1}B\tilde a^{-1}\tilde\alpha=\tilde\alpha^{-1}B\tilde\alpha\tilde\alpha^{-1}\tilde a^{-1}\tilde\alpha=\tilde aB\tilde a^{-1}\tilde\alpha^{-1}\ \tilde a^{-1}\tilde\alpha$, que implica $\tilde\alpha^{-1}\tilde a^{-1}\tilde\alpha=\tilde aB^{-1}\tilde a^{-1}B\tilde a^{-1}$. Assim, $\tilde\alpha^{-1}\tilde a\tilde\alpha=\tilde aB^{-1}\tilde aB\tilde a^{-1}$.

Agora, da igualdade, $\tilde\alpha\tilde b\tilde\alpha^{-1}=B\tilde a^{-1}\tilde b\tilde a^{-1}B^{-1}$, obtemos; $\tilde b=\tilde\alpha^{-1}B\tilde a^{-1}\tilde b\tilde a^{-1}B^{-1}\tilde\alpha=\tilde\alpha^{-1}B\tilde\alpha\ \tilde\alpha^{-1}\tilde a^{-1}\tilde\alpha\tilde\alpha^{-1}\tilde b\tilde\alpha\tilde\alpha^{-1}\tilde a^{-1}\tilde\alpha\tilde\alpha^{-1}B^{-1}\tilde\alpha=\tilde aB\tilde a^{-1}\tilde aB^{-1}\tilde a^{-1}B\tilde a^{-1}\tilde\alpha^{-1}\tilde b\tilde\alpha\tilde aB^{-1}\tilde a^{-1}B\tilde a^{-1}\tilde a\ B^{-1}\tilde a^{-1}=B\tilde a^{-1}\tilde\alpha^{-1}\tilde b\tilde\alpha\tilde aB^{-1}\tilde a^{-1}\tilde a^{-1}$. Logo, $\tilde\alpha^{-1}\tilde b\tilde\alpha=\tilde aB^{-1}\tilde b\tilde a\tilde aB\tilde a^{-1}=\tilde aB^{-1}\ \tilde a^{-1}\tilde b^{-1}\tilde a(\tilde bB)\ \tilde b\tilde aB\tilde a^{-1}$. Temos;

$$\begin{aligned}
\tilde\beta B\tilde\beta^{-1} &= \tilde\beta\tilde a\tilde b\tilde a\tilde b^{-1}\tilde\beta^{-1}\\
&= \tilde\beta\tilde a\tilde\beta^{-1}\tilde\beta\tilde b\tilde\beta^{-1}\tilde\beta\tilde a\tilde\beta^{-1}\tilde\beta\tilde b^{-1}\tilde\beta^{-1}\\
&= \tilde b^{-1}\tilde a^{-1}\tilde b\tilde b^{-1}B\tilde b\tilde b\tilde b^{-1}\tilde a^{-1}\tilde b\tilde b^{-1}\tilde b^{-1}B^{-1}\tilde b\\
&= \tilde b^{-1}B^{-1}\tilde b.
\end{aligned}$$

Da igualdade acima obtemos; $\tilde\beta B\tilde\beta^{-1}=\tilde b^{-1}B^{-1}\tilde b=\tilde b^{-1}\tilde b\tilde a^{-1}\tilde b^{-1}\tilde a^{-1}\tilde b=\tilde a^{-1}\tilde\beta\tilde a\tilde\beta^{-1}$. Daí temos; $\tilde\beta B=\tilde a^{-1}\tilde\beta\tilde a$, que implica $\tilde a\tilde\beta B\tilde a^{-1}=\tilde\beta$. Portanto, $\tilde\beta^{-1}\tilde a\tilde\beta=\tilde aB^{-1}$.

Observemos que, $\tilde\beta\tilde a\tilde b\tilde\beta^{-1}=\tilde\beta\tilde a\tilde\beta^{-1}\tilde\beta\tilde b\tilde\beta^{-1}=\tilde b^{-1}\tilde a^{-1}\tilde b\tilde b^{-1}B\tilde b\tilde b=\tilde a\tilde b$. Disso, obtemos $\tilde\beta^{-1}\tilde a\tilde b\tilde\beta=\tilde a\tilde b$. Agora, $\tilde\beta^{-1}\tilde a\tilde b\tilde\beta=\tilde a\tilde b$, que implica $\tilde\beta^{-1}\tilde a\tilde\beta\tilde\beta^{-1}\tilde b\tilde\beta=\tilde a\tilde b$. Logo, $\tilde aB^{-1}\tilde\beta^{-1}\tilde b\tilde\beta=\tilde a\tilde b$. Portanto, $\tilde\beta^{-1}\tilde b\tilde\beta=B\tilde b$. Por fim temos;

$$\begin{aligned}
\tilde\beta^{-1}B\tilde\beta &= \tilde\beta^{-1}\tilde a\tilde b\tilde a\tilde b^{-1}\tilde\beta\\
&= \tilde\beta^{-1}\tilde a\tilde\beta\tilde\beta^{-1}\tilde b\tilde\beta\tilde\beta^{-1}\tilde a\tilde\beta\tilde\beta^{-1}\tilde b^{-1}\tilde\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}\tilde{a}B^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1} \\ &= B\tilde{b}B^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}. \end{aligned}$$

Dessa forma finalizamos os cálculos da tabela A.3. Passamos à tabela A.4.

Caso I $\phi_0(1,1)$	$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{c_0} = \tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{\beta}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{c_0} = \tilde{\beta}$ $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0} = \tilde{a}$ $\quad \tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{b}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{b}$ $\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} = B$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0} = B$
Caso II $\phi_1(1,1)$	$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{c_0} = \tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{c_0} = \tilde{\beta}\tilde{\alpha}$ $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0} = \tilde{a}$ $\quad \tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{b}\tilde{a}^{-1}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{b}\tilde{a}$ $\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} = B$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0} = B$
Caso III $\phi_0(1,-1)$	$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1} = B^{-1}\tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{c_0} = B^{-1}\tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{\beta}^{-1}$ $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{c_0} = \tilde{\beta}^{-1}$ $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}$ $\quad \tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$ $\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} = B^{-1}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0} = B^{-1}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$
Caso IV $\phi_1(1,-1)$	$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1} = B^{-1}\tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{c_0} = B^{-1}\tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}$ $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{c_0} = \tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}$ $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}$ $\quad \tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = B\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$ $\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} = B^{-1}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0} = B^{-1}$ $\quad \tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}$

(A.4)

Note que a tabela A.4 já foi obtida na demonstração do teorema A.2.1. A seguir temos a tabela A.5.

$\tilde{\alpha}v\tilde{\alpha}^{-1} = wvw$	$\tilde{\alpha}^{-1}v\tilde{\alpha} = w^{-1}vw^{-1}$
$\tilde{\alpha}w\tilde{\alpha}^{-1} = w$	$\tilde{\alpha}^{-1}w\tilde{\alpha} = w$
$\tilde{\alpha}B\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}(w^{-1}v^{-1}w^{-1}v)\tilde{\alpha}^{-1}$ $= w^{-1}Bw$	$\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{-1}(w^{-1}v^{-1}w^{-1}v)\tilde{\alpha}$ $= wBw^{-1}$
$\tilde{\beta}v\tilde{\beta}^{-1} = v$	$\tilde{\beta}^{-1}v\tilde{\beta} = v$
$\tilde{\beta}w\tilde{\beta}^{-1} = v^{-1}w^{-1}v$	$\tilde{\beta}^{-1}w\tilde{\beta} = vw^{-1}v^{-1}$
$\tilde{\beta}B\tilde{\beta}^{-1} = v^{-1}wB^{-1}w^{-1}v$	$\tilde{\beta}^{-1}B\tilde{\beta} = vwB^{-1}w^{-1}v^{-1}$

(A.5)

Cálculo da tabela A.5.

Temos; $B=\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}=v^{-1}w^{-1}vv^{-1}wv^2v^{-1}w^{-1}vv^{-2}w^{-1}v=w^{-1}v^{-1}w^{-1}v.$

A tabela A.5 é dada pelos cálculos dos conjugados abaixo. Primeiramente, faremos a conjugação em relação a $\tilde{\alpha}$.

$\tilde{\alpha}v\tilde{\alpha}^{-1}=\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}=\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}=B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}=B\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}=\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}$ $\tilde{a}^{-1}B^{-1}=\tilde{a}\tilde{b}B^{-1}=\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B^{-1}=\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B^{-1}=wvw.$

$\tilde{\alpha}w\tilde{\alpha}^{-1}=\tilde{\alpha}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}=\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}=B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}\tilde{a}B^{-1}=\tilde{a}B^{-1}=w.$

$\tilde{\alpha}B\tilde{\alpha}^{-1}=\tilde{\alpha}w^{-1}v^{-1}w^{-1}v\tilde{\alpha}^{-1}$. Também, temos $\tilde{\alpha}B\tilde{\alpha}^{-1}=B\tilde{a}^{-1}B\tilde{a}B^{-1}=w^{-1}Bw.$

$\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{v}\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{a}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{b}\tilde{\alpha}=\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}B\tilde{b}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1}=\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1}$ $=B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1}=B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1}=B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B\tilde{a}^{-1}=w^{-1}vw^{-1}.$

$\tilde{\alpha}^{-1}w\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}^{-1}aB^{-1}\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}^{-1}a\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}=\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}^{-1}=\tilde{a}B^{-1}=w.$

$\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}^{-1}w^{-1}v^{-1}w^{-1}v\tilde{\alpha}$, por outro lado, temos $\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}^{-1}w^{-1}v^{-1}w^{-1}v\tilde{\alpha}=$ $\tilde{\alpha}^{-1}w^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}v^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}w^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}v\tilde{\alpha}=w^{-1}wv^{-1}ww^{-1}w^{-1}vw^{-1}=ww^{-1}v^{-1}w^{-1}vw^{-1}=w$ $Bw^{-1}.$

Agora, faremos a conjugação em relação a $\tilde{\beta}$.

$\tilde{\beta}v\tilde{\beta}^{-1}=\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}=\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}=\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b}=\tilde{a}\tilde{b}=v.$

$\tilde{\beta}w\tilde{\beta}^{-1}=\tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}=\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}=\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}=\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}=$ $v^{-1}w^{-1}v.$

$\tilde{\beta}B\tilde{\beta}^{-1}=\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b}=\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}=v^{-1}wB^{-1}w^{-1}v.$

$\tilde{\beta}^{-1}v\tilde{\beta}=\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{\beta}=\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta}=\tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}=\tilde{a}\tilde{b}=v.$

$\tilde{\beta}^{-1}w\tilde{\beta}=\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}=\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta}=\tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}=\tilde{a}\tilde{b}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}=v$ $w^{-1}v^{-1}.$

$\tilde{\beta}^{-1}B\tilde{\beta}=B\tilde{b}B^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}=\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}=\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B^{-1}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}=vwB^{-1}$ $w^{-1}v^{-1}.$

Assim, encerramos os cálculos da tabela A.5. Passaremos agora aos cálculos da tabela A.6. Isso se dá conjugando v,w em relação a $\tilde{c}_0$, em cada um dos quatro casos da tabela A.2.

Caso I	$\tilde{c}_0 v\tilde{c}_0^{-1}=v$	$\tilde{c}_0 w\tilde{c}_0^{-1}=w$	$\tilde{c}_0 B\tilde{c}_0^{-1}=B$
$\phi_0(1,1)$	$\tilde{c}_0^{-1} v\tilde{c}_0=v$	$\tilde{c}_0^{-1} w\tilde{c}_0=w$	$\tilde{c}_0^{-1} B\tilde{c}_0=B$
Caso II	$\tilde{c}_0 v\tilde{c}_0^{-1}=wv$	$\tilde{c}_0 w\tilde{c}_0^{-1}=w$	$\tilde{c}_0 B\tilde{c}_0^{-1}=B$
$\phi_1(1,1)$	$\tilde{c}_0^{-1} v\tilde{c}_0=w^{-1}v$	$\tilde{c}_0^{-1} w\tilde{c}_0=w$	$\tilde{c}_0^{-1} B\tilde{c}_0=B$
Caso III	$\tilde{c}_0 v\tilde{c}_0^{-1}=v^{-1}$	$\tilde{c}_0 w\tilde{c}_0^{-1}=v^{-1}w^{-1}v$	$\tilde{c}_0 B\tilde{c}_0^{-1}=B^{-1}$
$\phi_0(1,-1)$	$\tilde{c}_0^{-1} v\tilde{c}_0=v^{-1}$	$\tilde{c}_0^{-1} w\tilde{c}_0=v^{-1}w^{-1}v$	$\tilde{c}_0^{-1} B\tilde{c}_0=B^{-1}$
Caso IV	$\tilde{c}_0 v\tilde{c}_0^{-1}=v^{-1}w^{-1}$	$\tilde{c}_0 w\tilde{c}_0^{-1}=v^{-1}w^{-1}v$	$\tilde{c}_0 B\tilde{c}_0^{-1}=B^{-1}$
$\phi_1(1,-1)$	$\tilde{c}_0^{-1} v\tilde{c}_0=v^{-1}w$	$\tilde{c}_0^{-1} w\tilde{c}_0=v^{-1}w^{-1}v$	$\tilde{c}_0^{-1} B\tilde{c}_0=B^{-1}$

(A.6)

Cálculo da tabela A.6.

Caso I) $\phi_0(1,1)$.

$\tilde{c}_0 v\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{c}_0\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{c}_0\tilde{a}\tilde{c}_0^{-1}\tilde{c}_0\tilde{b}\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{a}\tilde{b}=v.$

$\tilde{c}_0 w\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{c}_0\tilde{a}B^{-1}\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{c}_0\tilde{a}\tilde{c}_0^{-1}\tilde{c}_0B^{-1}\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{a}B^{-1}=w.$

$\tilde{c}_0 B\tilde{c}_0^{-1}=B.$

$\tilde{c}_0^{-1} v\tilde{c}_0=\tilde{c}_0^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}_0=\tilde{c}_0^{-1}\tilde{a}\tilde{c}_0\tilde{c}_0^{-1}\tilde{b}\tilde{c}_0=\tilde{a}\tilde{b}=v.$

$\tilde{c}_0^{-1} w\tilde{c}_0=\tilde{c}_0^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c}_0=\tilde{c}_0^{-1}\tilde{a}\tilde{c}_0\tilde{c}_0^{-1}B^{-1}\tilde{c}_0=\tilde{a}B^{-1}=w.$

$\tilde{c}_0^{-1} B\tilde{c}_0=B.$

Caso II) $\phi_1(1,1)$.

$\tilde{c}_0 v\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{c}_0\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{c}_0\tilde{a}\tilde{c}_0^{-1}\tilde{c}_0\tilde{b}\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}=\tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}\tilde{a}^{-1}=\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}=wv.$

$\tilde{c}_0 w\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{c}_0\tilde{a}B^{-1}\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{c}_0\tilde{a}\tilde{c}_0^{-1}\tilde{c}_0B^{-1}\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{a}B^{-1}=w.$

$\tilde{c}_0 B\tilde{c}_0^{-1}=B.$

$\tilde{c}_0^{-1} v\tilde{c}_0=\tilde{c}_0^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}_0=\tilde{c}_0^{-1}\tilde{a}\tilde{c}_0\tilde{c}_0^{-1}\tilde{b}\tilde{c}_0=B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}=B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}=w^{-1}v.$

$\tilde{c}_0^{-1} w\tilde{c}_0=\tilde{c}_0^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c}_0=\tilde{c}_0^{-1}\tilde{a}\tilde{c}_0\tilde{c}_0^{-1}B^{-1}\tilde{c}_0=\tilde{a}B^{-1}=w.$

$\tilde{c}_0^{-1} B\tilde{c}_0=B.$

Caso III) $\phi_0(1,-1)$.

$\tilde{c}_0 v\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{c}_0\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{c}_0\tilde{a}\tilde{c}_0^{-1}\tilde{c}_0\tilde{b}\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}=\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}=v.$

$\tilde{c}_0 w\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{c}_0\tilde{a}B^{-1}\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{c}_0\tilde{a}\tilde{c}_0^{-1}\tilde{c}_0B^{-1}\tilde{c}_0^{-1}=\tilde{a}B^{-1}B=\tilde{a}=v^{-1}w^{-1}v.$

$\tilde{c}_0 B\tilde{c}_0^{-1}=B.$

$\tilde{c_0}^{-1} v \tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1} \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1} \tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}^{-1}B^{-1} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = v^{-1}$.

$\tilde{c_0}^{-1} w \tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1} \tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}B = v^{-1}w^{-1}v$.

$\tilde{c_0}^{-1} B \tilde{c_0} = B^{-1}$.

Caso IV) $\phi_1(1, -1)$.

$\tilde{c_0} v \tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = v^{-1}w^{-1}vv^{-1} = v^{-1}w^{-1}$.

$\tilde{c_0} w \tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}B = \tilde{a} = v^{-1}w^{-1}v$.

$\tilde{c_0} B \tilde{c_0}^{-1} = B^{-1}$.

$\tilde{c_0}^{-1} v \tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1} = \tilde{b}^{-1}B^{-1} = \tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = v^{-1}wvv^{-1} = v^{-1}w$.

$\tilde{c_0}^{-1} w \tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}B = \tilde{a} = v^{-1}w^{-1}v$.

$\tilde{c_0}^{-1} B \tilde{c_0} = B^{-1}$.

Assim, terminamos os cálculos das tabelas acima.

Referências Bibliográficas

[1] H. J. Baues; *Obstruction Theory,* Lectures Notes, vol.628, Springer-Verlag, 1977.

[2] R.Brooks, R.F.Brown, J.Pak, D.Taylor; *Nielsen numbers of maps of tori* , Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1), 1975, 398-400.

[3] Kenneth S. Brown; *Cohomology of Groups*, Springer-Verlag, 1982.

[4] R. F. Brown; *The Nielsen number of a fibre map*, Ann. of Math. 85 (2), 1967, 483-493.

[5] R. F. Brown; *Fixed points and fibre*, Pacific J. Math. 21, 1967, 465-472.

[6] R. F. Brown; *The Lefschetz Fixed Point Theorem*, Scott Foresman, Glenview, Illinois, 1971.

[7] R. F. Brown and C. Soderlund; *Fixed points sets of fiber-preserving maps* , J. Fixed Point Theory Appl. 2, 2007, 41 - 53.

[8] H. Cartan and S. Eilenberg; *Homological algebra*, Princeton University Press, Priceton, 1956.

[9] D. Dimovski and R. Geoghegan; *One-paremeter fixed point theory*, Forum Math. 2, 1990, 125-154.

[10] R. Dobrenko and J. Jezierski; *The coincidence Nielsen number on nonorientable manifolds,* Rocky J. Math. vol. 23, Topological methods in non linear functional analysis, 1993, 67 -85.

[11] E. Fadell and S. Hussein; *A fixed point theory for fibre-preserving maps* Lectures Notes in Mathematics, vol.886, Springer Verlag, 1981, 49-72.

[12] E. Fadell and S. Husseini; *The Nielsen number on surfaces,* Contemporary Mathematics, vol. 21, Topological methods in non linear functional analysis, 1982, 59-99.

[13] A. Garcia e Y. Lequain; *Elementos de álgebra,* Projeto Euclides , IMPA , 2005.

[14] R. Geoghegan; *Nielsen fixed point theory. In: Handbook of Geometric Topology, Ed. by R. J. Daverman and R. B. Sher, Elsevier, 2003 pp. 499-521.*

[15] R. Geoghegan; *Topological Methods in Group Theory*, Springer, 2008.

[16] R. Geoghegan and A. Nicas; *Parametrized Lefschetz-Nielsen fixed point theory and Hochschild homology traces*, Amer. J. Math. 116, 1994, 397-446.

[17] R. Geoghegan and A. Nicas; *A Hochschild homology Euler characteristic for circle actions* , K-Theory 18 (1999), 99-135.

[18] R. Geoghegan, A. Nicas and D. Schütz; *Obstructions to homotopy invariance in parametrized fixed point theory*, Geometry and Topology: Aarhus, Contemp. Math. Vol 258, 2000, 351–369.

[19] D. L. Gonçalves; *Fixed points of S^1-fibrations,* Pacific J. Math. 129, 1987, 297-306.

[20] D. L. Gonçalves; *Coincidence theory,* Handbook of Topological Fixed Point Theory, Springer 2005, 3-42.

[21] D. L. Gonçalves and M. R. Kelly; *Maps between surfaces and minimal coincidence sets for homotopies* , Topology and its Application, 116, 2001, 91-102.

[22] D. L. Gonçalves and M. R. Kelly; *Maps into the torus and minimal coincidence sets for homotopies*, Fundamenta Mathematicae, 172, 2002, 99-106.

[23] D. L. Gonçalves and M. R. Kelly; *Wecken type problems for self-maps of the Klein bottle,* Hindawi Publishing Corporation Fixed Point Theory and Applications, Volume 2006, Article ID 75848, pages 1-15.

[24] D. L. Gonçalves e J. C. de Souza Kiihl; *Teoria do índice,* 14^o colóquio brasileiro de matemática, IMPA.

[25] D. L. Gonçalves and U. Koschorke; *Nielsen coincidence theory of fiber-preserving maps and Dold's fixed point index*, Top. Meth. in Nonlin. Anal. 33(1), 2009, 85-103.

[26] D. L. Gonçalves, D.Penteado and J.P Vieira; *Fixed Points on Torus Fiber Bundles over the Circle*, Fundamenta Mathematicae, vol.183 (1), 2004, 1-38.

[27] D.L.Gonçalves, D.Penteado and J.P Vieira; *Fixed Points on Klein bottle Fiber Bundles over the Circle*, Fundamenta Mathematicae, vol.203 (3), 2009, 263-292.

[28] D.L.Gonçalves, D.Penteado and J.P Vieira; *Coincidence points of fiber maps on S^n- bundles*, Topology and its Applications, 157, 2010, 1760 - 1769.

[29] P. J. Hilton and U. Stammbach; *A course in homological algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 4, Springer-Verlag, New York, 1997.

[30] S. Y. Husseini; *Generalized Lefschetz Numbers*, Trans. Amer. Math. Soc. 272, 1982, 247-274.

[31] D. L. Johnson; *Presentation of groups,* LMS Lectures Notes, 22, Cambridge University Press, 1976.

[32] U. Koschorke; *Fixed points and coincidences in torus bundles,* Journal of Topology and Analysis, Vol. 3, No. 2, 2011, 177-212.

[33] R. C. Lyndon; *Cohomology theory of groups with a single defining relation,* Annals of Mathematics, vol.52(3), 1950, 650-665.

[34] S. MacLane; *Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[35] M. Nakaoka; *Coincidence Lefschetz numbers for a pair of fibre preserving maps*, J. Math. Soc. Japan Vol. 32, No. 4, 1980.

[36] R. D. Porter; *Introduction to fibre bundles;* lecture notes in pure and applied mathematics, vol.31.

[37] Joseph J. Rotman; *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, second edition, 2008.

[38] H. Schirmer; *Fix-finite homotopies*, Pacific J. Math. 83, 1979, 531–542.

[39] H. Schirmer; *Fixed points sets of homotopies*, Pacific J. Math. 108, 1983, 191–202.

[40] G. P. Scott; *Braids groups and the group of homeomorphisms of a surface,* Proc.Camb.Phil.Soc. 68, 1970, 605-617.

[41] W. L. Silva; *Coincidências de aplicações em fibrados com base S^1 e fibra garrafa de Klein*, Dissertação de Mestrado, USP, 2009.

[42] W. L. Silva and J.P.Vieira; *Coincidences of self-maps on Klein bottle fiber bundles over the circle*, JP Journal of Geometry and Topology, Vol. 12, Number 1, 2012, 55-97.

[43] R. Skora; *The degree of a map between surfaces*, Math. Ann. 276, 1987, 415-423.

[44] K. Tsai-han; *The theory of fixed point classes,* Springer-Verlag, 1987.

[45] J. W. Vick; *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology,* Academic Press.

[46] G. W. Whitehead; *Elements of Homotopy Theory,* Springer-Verlag, 1918.

[47] P.Wong; *Teoria de Pontos Fixos*, Mini curso, XIV EBT Campinas, SP Brasil, 2004.