

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Existência de soluções estacionárias estáveis
para equações de reação-difusão com condição
de fronteira de Neumann não-linear: condições
necessárias e condições suficientes**

Renato José de Moura

São Carlos - SP

2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Existência de soluções estacionárias estáveis
para equações de reação-difusão com condição
de fronteira de Neumann não-linear: condições
necessárias e condições suficientes**

Renato José de Moura

Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento

Tese apresentada ao Programa de Pós-
Graduação em Matemática da UFS-
Car como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em
Matemática

São Carlos - SP

Dezembro de 2004

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

M453es

Moura, Renato José de.

Existência de soluções estacionárias estáveis para equações de reação-difusão com condição de fronteira de Neumann não-linear: condições necessárias e condições suficientes / Renato José de Moura. -- São Carlos : UFSCar, 2005.

133 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2004.

1. Equações diferenciais parciais não-lineares. 2. Equações de reação e difusão (matemática). 3. Gama-convergência. 4. Equilíbrios estáveis não-constantemente. 5. Sistemas dinâmicos. I. Título.

CDD: 515.355 (20^a)

Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento

*“Dizem que o amor é a grande busca da humanidade.
Como fazemos para encontrá-lo?
Quem sabe está mais perto do que imaginamos...”*

Dedico este trabalho aos meus pais Luiza e Valter
(*In memoriam*), meus irmãos Adriana, Luciano,
Alessandra, meus sobrinhos e a Evelise, os quais
me ensinam diariamente a amá-los.

Agradecimentos

À Deus, pelo dom da vida e a Espiritualidade que nunca me desamparou.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pela oportunidade de realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento, pela pronta disposição na orientação deste trabalho e principalmente a amizade e a orientação para minha vida.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, pela minha formação e as amizades conquistadas.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À Prof. Dra. Neus Cònsul Porras, da Universitat Politècnica de Catalunya, pela indicação do artigo sobre a Gama-convergência, necessário ao Capítulo 2.

Ao Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira, pelas sugestões oportunas e correções a este trabalho.

Aos membros da banca de defesa pública, Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo, Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira, Prof. Dr. Marcos Montenegro e Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues, pelas críticas e sugestões a este trabalho.

Aos membros da banca de qualificação, Prof. Dr. Ruidival dos Santos Filho e Profa. Dra. Janete Crema, pelas críticas e sugestões a este trabalho.

Ao Prof. Dr. Gerson Petronilho, meu orientador de mestrado, o qual tenho grande apreço e estima. Um exemplo a ser seguido.

Aos professores João Sampaio e Sadao, pela amizade e ajuda nos comandos

do Latex.

Às secretárias Célia e Irma, pela amizade e disposição em sempre nos atender de imediato.

Aos amigos da pós, pelos momentos e discussões salutares.

Aos familiares que me fortaleceram com seus incentivos.

Aos amigos do Coral São Carlos, por aceitarem minhas “desafinações”.

Aos amigos Dimas e Kalé, cujos laços de amizade (além dos cabelos brancos e barriga) se acentuaram em nós nesses últimos anos.

À Adriana (uma das pessoas mais importantes em minha vida), por ter me ensinado a “crescer” não só na Matemática mas principalmente como pessoa.

Aos amigos Yashiro, Ivan, Jean, Dalton, Harumi e Daisy, pela amizade, aprendizagem e a oportunidade de crescermos juntos.

À minha nova família, Octacílio, Vera, Elson, Elenise e Pércio, São e Lú (que você nos guie e nos fortaleça onde quer que esteja), por me acolherem. Que Deus sempre os ilumine.

E principalmente a Evelise, a companheira que compartilhou comigo todos os momentos vividos no período do doutorado (me ajudando com as “batatas”), sem a qual este trabalho não teria sentido em minha vida.

Resumo

Neste trabalho consideramos algumas equações de reação-difusão não-lineares com condições de fronteira de Neumann não-lineares. O objetivo é apresentar condições sobre a geometria do domínio, bem como os coeficientes de reação e de difusão, para a existência de soluções estacionárias estáveis não-constantas que desenvolvem camadas de transição interna e superficial. Utilizamos como recursos principais a Gama-convergência de funcionais, técnicas variacionais e resultados de sistemas dinâmicos em dimensão infinita.

Abstract

In this work we consider some nonlinear reaction-diffusion equations with nonlinear Neumann boundary condition. The objective is to present conditions on the geometry of the domain, as well as on the reaction and diffusion terms, for the existence of stationary stable nonconstant solutions which develop internal and superficial transition layers. The main tools used are Gamma-convergence of functionals, variational techniques and results of dynamical systems in infinite dimension.

Sumário

1	Introdução	10
2	Existência de padrões: uma abordagem via Γ-convergência	19
2.1	Apresentação do problema	19
2.2	Resultados preliminares	23
2.2.1	Medida de Hausdorff e Aplicações Lipschitz	23
2.2.2	Funções de variação limitada	24
2.2.3	Conjuntos de perímetro finito	25
2.2.4	Um resumo sobre a Γ -convergência dos funcionais	27
2.3	O Teorema de De Giorgi	29
2.4	Mínimos locais isolados dos Γ -limites	33
2.5	Existência de Padrões	45
3	O papel da condição de igualdade de área na formação de camadas de transição interna e superficial	50
3.1	Apresentação do problema	50
3.2	Hipóteses e definições	51
3.3	Desenvolvimento de camadas de transição	54
3.4	Decorrências	67
4	A influência da geometria do domínio na existência de padrões	71
4.1	Apresentação do problema	71
4.2	Convexidade do domínio: uma condição necessária	72

5	Existência de padrões: caso espacialmente heterogêneo	81
5.1	Apresentação do problema	81
5.2	Resultados preliminares	83
5.2.1	Formulação abstrata	84
5.2.2	Existência e regularidade das soluções	85
5.2.3	Propriedades do funcional energia	87
5.3	Conjunto invariante	89
5.4	Estabilidade	94
5.5	Condições suficientes para a existência de padrões	103
5.5.1	Difusibilidade não-constante	103
5.5.2	Difusibilidade constante	106
A	Uma observação sobre a Γ-convergência	111
A.1	Γ -Convergência	112
A.1.1	Resultados utilizados	114
A.1.2	Demonstração do Teorema A.1	117
	Referências Bibliográficas	129

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho estudamos alguns problemas de reação-difusão com condição de fronteira de Neumann não-linear e que na sua forma mais geral pode ser escrito como

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + f(x, u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ a(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = g(x, u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}, \end{cases}$$

sendo que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, é um domínio limitado com $\partial\Omega$ suficientemente regular, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ denota a derivada na direção normal unitária exterior a $\partial\Omega$. As funções $f(x, u) : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g(x, u) : \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são suaves e satisfazem algumas condições de crescimento.

Tais problemas matemáticos servem como modelos fenomenológicos para os conhecidos problemas de reação-difusão com a propriedade adicional da existência do termo de reação não-linear na fronteira do domínio. A presença de tal termo justifica-se, por exemplo, pela presença de um catalizador agindo na fronteira do domínio. Veja [13, 23].

A existência de soluções estacionárias estáveis não constantes, que por uma questão de brevidade na notação denominamos por padrões (terminologia esta utilizada em genética populacional), tem sido muito estudada nas últimas décadas por diversos autores para equações (ou sistemas de equações)

de reação-difusão dadas por (P). Citamos, entre outros trabalhos, [24, 10, 7, 29, 11, 13].

Motivados por estes trabalhos, uma das questões que norteia nossa investigação é encontrar condições envolvendo os termos $a(x)$, f e g , bem como a geometria de Ω , que garantam a existência, assim como a não existência, de padrões para (P).

Lembramos que soluções estacionárias (equilíbrios) para o problema (P) são soluções da equação elíptica semi-linear dada por

$$(Q) \begin{cases} \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + f(x, u) = 0, & x \in \Omega \\ a(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = g(x, u), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma condição importante para a existência (ou inexistência) de padrões para (P) quando $a(x)$ é constante, $f(x, u) = f(u)$ e $g = 0$ (isto é, não há reação na fronteira do domínio), foi mostrada nos trabalhos [24, 10]: se Ω é um domínio **convexo** então (P) não admite padrões. Este resultado também foi mostrado em [11] quando Ω é uma bola de \mathbb{R}^N , com $g(x, u) = g(u)$ na fronteira e $f = 0$ no interior. É importante ressaltar que a demonstração da autora é diferente das demonstrações de [24] e de [10].

Baseando-se nos trabalhos de [24, 10], mostramos no Capítulo 4 que se $a(x)$ é constante, $f(x, u) = f(u)$, $g(x, u) = g(u)$ e Ω é um domínio suave, limitado e **convexo**, então **não existem padrões** para o problema (P). Este resultado generaliza os casos acima citados.

Portanto uma pergunta natural que surge é: se Ω não é convexo então (P) sempre possui padrões? Em outras palavras, a não-convexidade também é uma condição suficiente para a existência de padrões?

A resposta em geral é negativa. Por exemplo, em [24] o autor provou, entre outros resultados, que se Ω é um anel, $a(x)$ é constante e $g = 0$ então (P) não possui padrões.

Por outro lado, mostramos no Capítulo 5 que se tivermos as seguintes condições:

- $a(x)$ constante, $f(x, u) = f(u)$, $g(x, u) = b(x)g(u)$, com f, g funções suaves e ambas com exatamente três raízes $\alpha < 0 < \beta$, e b uma função suave e estritamente positiva,

então (P) admite padrões desde que Ω seja formado por dois subconjuntos disjuntos e conexos ligados por um estreito canal, e a função b , quando for não-constante, satisfaça algumas propriedades, como por exemplo, ser suficientemente grande na fronteira destes subconjuntos. Este tipo de domínio é chamado de “dumbbell” ou “halter” (ou mesmo “osso-de-cachorro”).

Esta particularidade sobre o domínio, que é necessária para a existência de padrões, foi observada inicialmente em [24], o qual estabeleceu, sob determinadas condições da função de reação e domínios tipo “dumbbell”, que é possível encontrarmos padrões para o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + cf(u), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

sendo que c é uma constante positiva.

Em [13] temos um outro modelo, agora com a condição não-linear na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = cg(u), & (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

com c uma constante positiva. Entretanto este problema não envolve a reação no domínio e tem difusão constante. A autora mostrou que se o domínio também for do tipo “dumbbell”, cuja geometria tem a dependência explícita da constante c , então pode existir padrões para esse problema dependendo de algumas condições técnicas sobre a função g .

Agora, para equações com dependência espacialmente heterogênea, em [29] e [7], por exemplo, os autores apresentaram condições suficientes sobre a

função de difusibilidade $a(x)$ para que o problema

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + f(u), & \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

admita padrões mesmo para domínios convexos. Provaram que se a função $a(x)$ assumir valores suficientemente pequenos em torno de uma superfície suave sem bordo em Ω , então o problema acima apresenta padrões. Motivados por estes trabalhos, também no Capítulo 5, exibimos condições sobre $a(x)$, quando esta for não-constante, para que (P) admita a existência de padrões para o caso em que $f(x, u) = f(u)$ e $g(x, u) = b(x)g(u)$.

Basicamente todos estes trabalhos, [13, 29, 7], (e o que apresentamos no Capítulo 5) utilizam uma técnica envolvendo a existência de um conjunto invariante para o sistema dinâmico gerado pela equação parabólica do problema (P). Esse conjunto, sob hipóteses adequadas, contém equilíbrios não-constantos e mostra-se, via linearização em torno destes equilíbrios, que o espectro do operador linearizado é formado por uma seqüência não-positiva de auto-valores. Com resultados clássicos tem-se a estabilidade.

Atualmente vários trabalhos têm abordado a questão da existência de padrões para equações (ou mesmo para sistemas de equações) de reação-difusão com pequenos parâmetros dados na forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \operatorname{div}(a\nabla u) + f(x, u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \varepsilon^2 a(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(x, u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Diversas técnicas têm sido utilizadas para este fim. Entre elas o uso de Γ -convergência tem proporcionado resultados bastante satisfatórios, uma vez que permite estabelecer não só a existência de padrões como também descrever o comportamento geométrico destas soluções quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Neste sentido destacamos os trabalhos [30, 27], ambos com domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. No primeiro considera-se $g \equiv 0$, $f(x, u) = k(x)f(u)$, e as funções a e k estritamente positivas e de classe C^2 . Já no segundo o autor estuda um sistema de equações com a

condição $g \equiv 0$, $f(x, u) = k(x)f(u)$ vetorial, e também a e k estritamente positivas, de classe C^2 .

Em [6] os autores demonstraram a existência de padrões para este problema com um pequeno parâmetro ε , $a(x) \equiv 1$, $f \equiv 0$ e a condição não-linear na fronteira é dada por $g(x, u) = u(1 - u)(c(x) - u)$, com $0 < c < 1$ e algumas condições técnicas. A abordagem neste caso não envolve técnicas de Γ -convergência.

Através da abordagem via Γ -convergência, apresentamos novas contribuições à existência de padrões para equações de reação-difusão com condições não-lineares no domínio e na fronteira dadas por

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta u + f(u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nu} = \delta_\varepsilon g(u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}, \end{cases}$$

sendo que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio suave e as funções f e g satisfazem algumas condições de crescimento e suavidade e ambas com raízes $\alpha < 0 < \beta$. ε é um parâmetro pequeno e δ_ε satisfaz $\delta_\varepsilon \geq 1$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \delta_\varepsilon = k$, com $0 \leq k < \infty$, hipótese esta que é crucial neste trabalho. Por exemplo, se $\delta_\varepsilon = \varepsilon^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, então $k = 0$.

Para encontrarmos soluções estacionárias de (P_ε) , é suficiente mostrar a existência de mínimos locais para os funcionais definidos em $H^1(\Omega)$ por

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega F(u) dx + \delta_\varepsilon \int_{\partial\Omega} G(Tu) d\mathcal{H}^{N-1},$$

sendo que Tu é o traço da função u , \mathcal{H}^{N-1} é a medida de Hausdorff $(N - 1)$ -dimensional, e os potenciais F e G , primitivas de f e g respectivamente, são não-negativos e possuem apenas duas raízes denotadas por α e β . Os pontos críticos de \mathcal{E}_ε também são pontos críticos dos funcionais $E_\varepsilon = \varepsilon \mathcal{E}_\varepsilon$, para cada $\varepsilon > 0$ fixado. E estes são os funcionais energia cujas equações de Euler-Lagrange são dados por (P_ε) .

Para este fim, calculamos o Γ -limite de \mathcal{E}_ε (em um espaço de Banach adequado), quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e obtemos um problema envolvendo um funcional

\mathcal{E}_0 , que é essencialmente um problema geométrico. E ao demonstrarmos a existência de um mínimo local isolado para \mathcal{E}_0 , temos a existência de mínimos locais para os correspondentes funcionais \mathcal{E}_ε , garantidos por um teorema de De Giorgi (veja [14]) adaptado à forma variacional. Em outras palavras, o teorema garante que se o problema limite (no sentido de Γ -convergência) possuir um mínimo local isolado u_0 então o funcional original também possui um mínimo local u_ε em uma vizinhança de u_0 (para uma certa topologia).

Entretanto, encontrar mínimos locais isolados para \mathcal{E}_0 não é trivial, embora muitas vezes sua identificação seja intuitivamente óbvia. Tanto que nos trabalhos [21, 27] os autores lograram êxito apenas para domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Como nosso problema está colocado em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, tivemos que encontrar uma nova demonstração para este caso, a qual apresentamos no Capítulo 2. Ressaltamos que esta demonstração é diferente daquelas elaboradas pelos autores citados e tudo indica que pode ser estendida para domínios N -dimensionais, $N \geq 3$.

Diversos autores (veja [3, 25, 26, 30, 37]) com diferentes interesses, estudaram o comportamento, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, dos funcionais \mathcal{E}_ε descritos acima, com varias escalas δ_ε adotadas na fronteira. O estudo destes funcionais tem importância também, por exemplo, para descrever modelos de Cahn-Hilliard para fluidos que assumem duas fases distintas.

Em [25, 37], os autores estudaram o caso em que $\delta_\varepsilon = 0$, ou seja, nenhum termo de reação na fronteira foi levado em consideração. Em [25] o autor demonstrou também que cada seqüência $(u_\varepsilon) \subset H^1(\Omega)$, com $\mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon)$ uniformemente limitado, é relativamente compacta em $L^1(\Omega)$ e cada ponto de acumulação u , pertence ao espaço $BV(\Omega, \{\alpha, \beta\})$, espaço das funções de variação total limitada que assumem somente os valores $\{\alpha, \beta\}$ em quase todos os pontos de Ω . Além disso u_ε tem transição de fase α para a fase β em uma superfície $S_u \subset \Omega$, a qual separa as fases $\{u = \alpha\}$ e $\{u = \beta\}$. A energia limite está distribuída sobre S_u com densidade σ (tensão superficial). O Γ -limite

neste caso é o funcional penalizado

$$\mathcal{E}_0(u) = \begin{cases} \sigma \mathcal{H}^{N-1}(S_u), & \text{se } u \in BV(\Omega, \{\alpha, \beta\}) \\ +\infty, & \text{se } u \in L^1(\Omega) \setminus BV(\Omega, \{\alpha, \beta\}), \end{cases}$$

com $\sigma = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{F(\xi)} d\xi$. E este funcional, a menos da constante σ , é o conhecido funcional área da geometria diferencial, mas agora definido no espaço $BV(\Omega, \{\alpha, \beta\})$.

Esta análise foi estendida em [26] para $\delta_\varepsilon = 1$, com G sendo uma função positiva qualquer. Nesse trabalho, Modica observou que os traços dos minimizantes u_ε , denotados por Tu_ε , convergiam para uma nova função v definida em $\partial\Omega$. Ocorre que tal função é constante sobre o traço de cada fase, $\{Tu = \alpha\}$ e $\{Tu = \beta\}$, mas pode diferir de Tu . Isto contribuiu para que surgisse uma densidade adicional na fronteira de Ω no problema limite.

A partir desta observação, em [3] os autores consideraram o caso em que $\delta_\varepsilon \rightarrow \infty$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, assumindo ainda que o potencial G continha duas raízes distintas $\{\alpha', \beta'\}$ satisfazendo $\alpha' \leq \alpha < \beta \leq \beta'$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Mostraram também que os traços Tu_ε convergiam para uma função v que assume os valores α' e β' qtp em $\partial\Omega$. Além disso eles demonstraram que quando a escala adotada δ_ε satisfaz a relação: $\varepsilon \log \delta_\varepsilon \rightarrow k$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$; com $0 < k < \infty$, então uma nova concentração de energia surge ao longo da curva $S_v \subset \partial\Omega$ que separa as fases na fronteira $\{v = \alpha'\}$ e $\{v = \beta'\}$.

Esses fatos sobre a nova variável na fronteira do domínio, observados por [26, 3], permite-nos estudar a Γ -convergência no espaço $L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$. Para isso reescrevemos os funcionais \mathcal{E}_ε da seguinte forma

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u, v) = \begin{cases} \mathcal{E}_\varepsilon(u), & \text{se } u \in H^1(\Omega) \text{ e } v = Tu \\ +\infty, & \text{caso contrário em } L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega). \end{cases}$$

Com isso obtemos que o funcional Γ -limite é dado por

$$\mathcal{E}_0(u, v) = \begin{cases} \Phi(u, v), & (u, v) \in BV(\partial\Omega, \{\alpha, \beta\}) \times BV(\partial\Omega, \{\alpha', \beta'\}) \\ +\infty, & \text{caso contrário em } L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega), \end{cases}$$

sendo que $\Phi(u, v)$ é definido por

$$\Phi(u, v) = \sigma \mathcal{H}^2(S_u) + \int_{\partial\Omega} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^2 + c\mathcal{H}^1(S_v),$$

$$\text{com } c = \frac{(\beta' - \alpha')^2}{\pi} k \quad \text{e} \quad h(t) = 2 \int_0^t \sqrt{F(\xi)} d\xi.$$

Este funcional apresenta as características das observações feitas por [26, 3], como observado acima.

É importante ressaltar que uma leitura cuidadosa nas demonstrações de [3] permitiu-nos verificar que a mesma demonstração da Γ -convergência, quando $k > 0$, também vale para o caso em que $k = 0$, e mais ainda, para domínios N -dimensionais, $N \geq 3$. Neste caso não temos a contribuição do termo $c\mathcal{H}^1(S_v)$ no funcional Φ , o que nos remete à observação de [26] sobre o termo adicional na fronteira, que é o segundo valor do lado direito no funcional Φ . Colocamos estes resultados no Apêndice A.

Uma outra propriedade importante que tem sido estudada nos últimos anos sobre as soluções estacionárias do problema (P_ε) , ou mesmo para problemas mais gerais de equações de reação-difusão deste tipo, mas com condições de fronteira de Neumann homogêneas ($g \equiv 0$), é sob que condições estas soluções desenvolvem camadas de transição interna. Tanto quanto sabemos, tal investigação teve início com o trabalho [28], no qual foi provado que a conhecida condição de igualdade de área constitui na realidade uma condição necessária para a formação de camadas de transição interna.

Neste sentido, no Capítulo 3, estabelecemos condições necessárias para que uma família de soluções de

$$(Q_\varepsilon) \begin{cases} \varepsilon \operatorname{div}(a(x)\nabla v_\varepsilon) + f(x, v_\varepsilon) = 0, & x \in \Omega \\ \varepsilon a(x) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \hat{n}} = g(x, v_\varepsilon), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

desenvolva camadas de transição interna e superficial quando $\varepsilon \rightarrow 0$. O domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é suave e as funções f e g são suaves com raízes α, β não necessariamente consecutivas. Como caso particular, demonstramos que se $a(x)$ é constante e $f(x, u) = f(u)$ e $g(x, u) = g(u)$ então a condição necessária

para uma família de soluções de (Q_ε) desenvolver camadas de transição interna e superficial é que tenhamos a condição de área para f e para g , isto é, $\int_\alpha^\beta f = 0 = \int_\alpha^\beta g$.

A questão da formação de camadas internas de transição, está relacionada à convergência das soluções para funções que assumem apenas dois valores, a saber as raízes das funções f e g (veja Definição 3.1).

Em [28] o autor estudou este problema quando $g \equiv 0$ e demonstrou, em particular, que a condição necessária para que uma família de soluções de (Q_ε) desenvolva camadas de transição interna, quando $f(x, u) = f(u)$, é a condição de área para a função f ($\int_\alpha^\beta f = 0$). Nesse trabalho o autor considerou a convergência uniforme em compactos $K \subset (\Omega \setminus S)$, sendo S a superfície que separa as fases $\{u = \alpha\}$ e $\{u = \beta\}$ em Ω . Essa convergência em princípio pode substituir a convergência em $L^1(\Omega)$, pois como demonstrado em [9], se $\{v_\varepsilon\}$ é uma seqüência de mínimos locais para certas classes de funcionais (por exemplo, E_ε acima com $\delta_\varepsilon = 0$) e v_ε converge em $L^1(\Omega)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para uma função cujos valores são as raízes de f , então a convergência é uniforme em compactos $K \subset (\Omega \setminus S)$.

Em [32] os autores também estudam condições para a formação de camadas de transição internas.

Como exemplo de uma família de soluções que desenvolvem camadas de transição interna e superficial, no sentido da definição do presente trabalho, temos as soluções estacionárias de (P_ε) obtidas no Capítulo 2. E uma das hipóteses que impomos sobre as funções f e g para obtermos tais soluções, é a condição de área para f e g ($\int_\alpha^\beta f = 0 = \int_\alpha^\beta g$). Mostramos também no Capítulo 3 que esta é a condição necessária para uma família de equilíbrios de (P_ε) , com $\delta_\varepsilon = \varepsilon^{-1}$, desenvolver camadas de transição interna e superficial.

Capítulo 2

Existência de padrões: uma abordagem via Γ -convergência

2.1 Apresentação do problema

Atualmente, muito dos problemas relacionados às equações de reação-difusão não-lineares não envolvem o termo de reação na fronteira. Neste capítulo o objetivo será encontrarmos padrões para a seguinte família de equações de reação-difusão com condição de Neumann não-linear:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta u + f(u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nu} = \delta_\varepsilon g(u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (2.1)$$

O domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é simplesmente conexo e de classe C^2 , ν é o vetor normal, unitário e exterior a $\partial\Omega$. As funções f e g são ambas de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e satisfazem:

$$(f_0) \quad f(l) = 0 = g(l), \quad \forall l \in \{\alpha, 0, \beta\} \text{ (únicas) e } \alpha < 0 < \beta.$$

$$(f_1) \quad f'(\alpha) < 0, \quad f'(\beta) < 0, \quad g'(\alpha) < 0, \quad g'(\beta) < 0.$$

(f₂) Existem constantes $C > 0$, $t_0 > \max\{|\alpha|, \beta\}$, r , s , σ_f e σ_g tais que

$$|f(t)|, |g(t)| \geq C|t|, \quad \forall |t| > t_0.$$

$$|f(t)| \leq r + s|t|^{\sigma_f}, \quad 1 \leq \sigma_f < \frac{N+2}{N-2} \quad \forall t,$$

$$|g(t)| \leq r + s|t|^{\sigma_g}, \quad 1 \leq \sigma_g < \frac{N}{N-2} \quad \forall t.$$

$$(f_3) \int_{\alpha}^{\beta} f = 0 = \int_{\alpha}^{\beta} g \text{ (condição de área).}$$

$$(f_4) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \delta_{\varepsilon} = k, \text{ com } 0 \leq k < \infty \text{ e } \delta_{\varepsilon} \geq 1.$$

Inicialmente lembramos que as soluções estacionárias de (2.1) são soluções da família de equações elípticas semi-lineares dadas por

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u + f(u) = 0, & x \in \Omega, \\ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nu} = \delta_{\varepsilon} g(u), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Sabe-se, pela hipótese (f₁), que as soluções constantes $u = \alpha$ e $u = \beta$ são soluções estáveis do problema (2.1). Além disso, cada solução u_{ε} de (2.2) satisfaz $\alpha \leq u_{\varepsilon} \leq \beta$, graças ao princípio do máximo.

Assim nosso objetivo é encontrar soluções estacionárias não-constantes (veja Teorema 2.9, Seção 2.5) e em seguida verificar a estabilidade. E para mostrarmos a existência dessas soluções, é suficiente encontrarmos, para cada $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ dado, um mínimo local do funcional energia, definido em $H^1(\Omega)$ por

$$E_{\varepsilon}(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} F(u) dx + \varepsilon \delta_{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} G(u) d\mathcal{H}^{N-1}, \quad (2.3)$$

sendo que

$$F(u) = - \int_{\alpha}^u f(\xi) d\xi \quad e \quad G(u) = - \int_{\alpha}^u g(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

cuja equação de Euler-Lagrange é a equação (2.2). Os pontos críticos desse funcional são soluções fracas de (2.2), isto é, são as funções $u \in H^1(\Omega)$ tais que

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} f(u) \varphi dx - \varepsilon \delta_{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} g(u) \varphi d\mathcal{H}^{N-1} = 0,$$

para cada $\varphi \in H^1(\Omega)$.

Devido a regularidade das funções f e g , usamos argumentos padrões (por exemplo “bootstrap”) para estas soluções fracas e garantimos que são soluções clássicas de (2.2), isto é, estão no espaço $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Para obtermos mínimos de E_ε usamos como ferramenta um teorema de De Giorgi (Seção 2.4, Teorema 2.7), adaptado à forma variacional, o qual afirma que se encontrarmos um mínimo local isolado u_0 para o funcional \mathcal{E}_0 (veja 2.6), que é o Γ -limite, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, dos funcionais $\mathcal{E}_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon}E_\varepsilon$ penalizados (veja 2.5), então próximo de u_0 (em uma certa topologia) existem mínimos locais dos correspondentes funcionais \mathcal{E}_ε , que por sua vez são mínimos de E_ε .

A estabilidade decorre dos resultados apresentados no Capítulo 5.

Uma análise da hipótese (f₄) permite-nos estudar a equação (2.2) com a mesma escala, ou escalas diferentes, de difusibilidade no domínio e na fronteira. Por exemplo, se $\delta_\varepsilon = \varepsilon^{-1}$ temos a mesma difusibilidade no domínio e na fronteira; mas $\delta_\varepsilon = \varepsilon^{-n}$, com $n \geq 0$ e $n \neq 1$, são casos em que as difusibilidades são diferentes, como pode ser observado na equação (2.2). Todos estes exemplos satisfazem a relação $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \delta_\varepsilon = 0$.

Podemos também escolher, por exemplo, escalas da forma $\delta_\varepsilon = e^{k/\varepsilon}$, com $k > 0$. Neste caso temos $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \delta_\varepsilon = k$.

Entretanto não nos foi possível abordar o caso em que $\delta_\varepsilon = \varepsilon^{-n}$, $n < 0$, embora tenhamos $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \delta_\varepsilon = 0$. A justificativa para isso é que no cálculo da Γ -convergência dos funcionais \mathcal{E}_ε , quando $k = 0$, é necessário que $\varepsilon \ln \delta_\varepsilon$ seja positivo. E se $\delta_\varepsilon = \varepsilon^{-n}$, $n < 0$, por exemplo, isto não se verifica quando ε for muito pequeno.

É importante ressaltar que (f₃) constitui-se na condição necessária para a existência de uma família de soluções estacionárias de (2.1) que desenvolvem camadas de transição interna e superficial (veja Definição 3.1), quando $\varepsilon \rightarrow 0$. A demonstração da condição necessária está feita no Capítulo 3.

As hipóteses sobre a suavidade de f e de g e as hipóteses (f₂) e (f₃)

garantem que o funcional E_ε esteja bem definido e que os potenciais F e G sejam do tipo “double-well” (ou poço-duplo), respectivamente, cuja definição damos a seguir.

Dizemos que um potencial U é do tipo “double-well” (ou poço-duplo) se $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é de classe C^2 e satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $U \geq 0$;
- (ii) U tem exatamente duas raízes, a e b , com $a < b$;
- (iii) $U'(a) = 0 = U'(b)$, $U''(a) > 0$, $U''(b) > 0$;
- (iv) $c_1|t|^{p_1} \leq U(t) \leq c_2|t|^{p_2}$, para certas constantes $c_i > 0$, $p_i \geq 2$ ($i = 1, 2$) e $|t| \geq t_0$, com t_0 suficientemente grande.

Veja abaixo uma ilustração de como deve ser o comportamento destes potenciais.

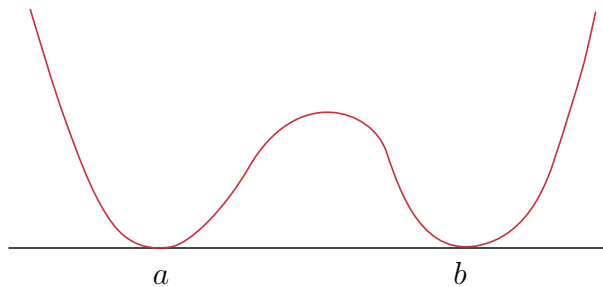


Figura 2.1: Ilustração de um potencial do tipo “double-well”.

A condição sobre os potenciais F e G serem do tipo poço-duplo é essencial para garantir uma determinada compacidade das soluções encontradas. Esta compacidade é uma das hipóteses do Teorema 2.7 na Seção 2.3. Veja o Apêndice A para maiores detalhes.

Organizamos este capítulo da seguinte forma: inicialmente apresentamos alguns resultados preliminares sobre Medida de Hausdorff, funções de variação limitada e um resumo sobre Γ -convergência da família de funcionais aqui abordadas, resultados que serão utilizados nas seções futuras. Em seguida,

na Seção 2.3 apresentamos um teorema de De Giorgi para obtermos, sob determinadas condições, a existência de mínimos locais para a família de funcionais definidas por (2.3). Uma hipótese essencial para esse teorema de De Giorgi é a existência de um mínimo local isolado para um determinado funcional Γ -limite, e que na Seção 2.4 mostramos sua existência. Encerramos o capítulo com a Seção 2.5 na qual todos os resultados em conjunto demonstra a existência dos padrões desejados.

2.2 Resultados preliminares

A seguir apresentamos um resumo de alguns resultados considerados importantes para a leitura deste capítulo. Não há demonstração dos resultados nesta seção, mas sugerimos ao leitor o local para consulta destes e outros resultados relacionados.

2.2.1 Medida de Hausdorff e Aplicações Lipschitz

Seja $A \subset \mathbb{R}^N$, $0 \leq s < \infty$. Defina

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam} C_j}{2} \right)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam} C_j \leq \delta \right\},$$

em que

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}.$$

Aqui $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$, ($0 < s < \infty$), é a usual função gama.

Definição 2.1 Para cada subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ como acima, definimos \mathcal{H}^s , a medida de Hausdorff s -dimensional em \mathbb{R}^N por

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

Teorema 2.1 \mathcal{H}^s é uma medida de Borel regular para cada $0 \leq s < \infty$.

Demonstração: [16] p. 61.

Definição 2.2 Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é chamada Lipschitz se existe uma constante C tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|,$$

para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$. Além disso definimos

$$\text{Lip}(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y \right\}$$

Teorema 2.2 Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função Lipschitz, $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$. Então

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq (\text{Lip}(f))^s \mathcal{H}^s(A).$$

Demonstração: [16] p. 75.

Corolário 2.1 Suponhamos que $n > k$. Sejam $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, a função projeção, $A \subset \mathbb{R}^n$ e $0 \leq s < \infty$. Então

$$\mathcal{H}^s(P(A)) \leq \mathcal{H}^s(A).$$

Demonstração: $\text{Lip}(P) = 1$.

2.2.2 Funções de variação limitada

Definição 2.3 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um conjunto aberto e limitado, e $f \in L^1(\Omega)$. f é dita ser de variação limitada se

$$\int_{\Omega} |\nabla f| \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N), |\varphi| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Observação 2.1 Se f tem variação limitada, o gradiente de f , ∇f , no sentido das distribuições, define uma medida de Radon. Esta medida, também denotada por $\|\nabla f\|$, é uma medida de variação e

$$\|\nabla f\|(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} |\nabla f|$$

é a sua variação total.

Definição 2.4 Definimos o conjunto $BV(\Omega)$ como sendo o conjunto das funções $f \in L^1(\Omega)$ de variação limitada. E $BV(\Omega)$ munido com a norma

$$\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla f\|(\Omega)$$

é um espaço de Banach.

Teorema 2.3 (Semi-continuidade inferior) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um conjunto aberto e seja $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ uma seqüência de funções tal que $f_j \rightarrow f$ em $L^1_{loc}(\Omega)$. Então*

$$\int_{\Omega} |\nabla f| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla f_j|.$$

Demonstração: [16] p. 172.

Teorema 2.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um conjunto aberto e limitado com fronteira de Lipschitz. Seja $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ uma seqüência limitada. Então existe uma subsequência $\{f_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ e $f \in BV(\Omega)$ tal que $f_{j_k} \rightarrow f$ em $L^1(\Omega)$. Em outras palavras $BV(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ compactamente.*

Demonstração: [16] p. 176.

Observação 2.2 Existem outras propriedades importantes envolvendo as funções de variação limitada. E uma delas é a existência do operador traço

$$T : BV(\Omega) \longrightarrow L^1(\partial\Omega),$$

que é um operador linear e limitado. Para os nossos propósitos não há necessidade de maiores detalhes.

2.2.3 Conjuntos de perímetro finito

Uma outra classe importante envolvendo funções de variação limitada é dada por algumas funções características. É a partir delas que temos a definição de conjuntos de perímetro finito.

Definição 2.5 *Sejam $E \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto de Borel e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. O perímetro de E em Ω é definido como*

$$\text{Per}_\Omega E \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \int_\Omega \chi_E \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N), |\varphi| \leq 1 \right\} = \int_\Omega |\nabla \chi_E|,$$

sendo que χ_E é a função característica do conjunto E .

Se um conjunto de Borel E tem perímetro finito, ou seja, $\text{Per}_\Omega E < \infty$, para cada conjunto limitado Ω , então E é chamado de conjunto de Cacciopoli. Destacamos algumas propriedades sobre conjuntos de perímetro finito:

(1) Se $\Omega = A \cup B$, com $A \cap B = \emptyset$, então

$$\text{Per}_\Omega A = \text{Per}_\Omega B.$$

(2) Se E é um conjunto com fronteira suave (de classe C^1) então

$$\text{Per}_\Omega E = \mathcal{H}^{N-1}(\partial E \cap \Omega).$$

(3) Cada conjunto de Cacciopoli limitado E pode ser aproximado por seqüência de conjuntos E_j , de classe C^2 , tais que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\chi_{E_j} - \chi_E| \, dx &\rightarrow 0, & \int_\Omega |\nabla \chi_{E_j}| &\rightarrow \int_\Omega |\nabla \chi_E|; \\ \mathcal{H}^{N-1}(\partial E_j \cap \partial \Omega) &= 0, \end{aligned}$$

para j suficientemente grande. Veja [37] Lema 1, ou [18] p. 22.

Definição 2.6 *Seja E um conjunto de perímetro finito e consideremos a medida $\|\nabla \chi_E\|$. Dizemos que um ponto $x \in \partial E$, pertence a fronteira reduzida de E , $\partial^* E$, se*

- (i) $\int_{B(x,r)} |\nabla \chi_E| > 0$, para cada $r > 0$;
- (ii) $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{B(x,r)} \nu_E d\|\nabla \chi_E\|}{\int_{B(x,r)} |\nabla \chi_E|} = \nu_E(x)$;
- (iii) $|\nu_E(x)| = 1$.

Teorema 2.5 *Seja E um conjunto de Cacciopoli. Então*

$$(i) \quad \partial^* E = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \cup K,$$

sendo que C_i são superfícies compactas, de classe C^1 , e $\mathcal{H}^{N-1}(K) = 0$;

$$(ii) \quad \text{Per}_{\Omega} E = \mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E \cap \Omega);$$

$$(iii) \quad \overline{\partial^* E} = \partial E.$$

Demonstração: [18] p. 54 ou [16] p. 205.

Observação 2.3 Se ∂E é uma superfície de classe C^1 , temos que $\partial^* E = \partial E$ e, conseqüentemente, $\nu_E(x)$ é o vetor normal unitário interno à ∂E em x .

Definimos o espaço $BV(\Omega, \{\alpha, \beta\})$ como o conjunto das funções $u \in BV(\Omega)$ que assumem apenas os valores α e β qtp em Ω . Analogamente definimos $BV(\partial\Omega, \{\alpha, \beta\})$. Por uma questão de brevidade na notação em todo este trabalho usamos $I \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha, \beta\}$.

Para cada $u \in BV(\Omega, I)$, o conjunto $\{x \in \Omega : u(x) = \beta\}$ é um conjunto de perímetro finito. Definimos $S_u \stackrel{\text{def}}{=} \partial^* \{x \in \Omega : u(x) = \beta\} \cap \Omega$. Assim $\text{Per}_{\Omega} \{x \in \Omega : u(x) = \beta\} = \mathcal{H}^{N-1}(S_u)$.

Não é difícil verificarmos que a variação total de u satisfaz

$$\|\nabla u\|(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u| = (\beta - \alpha) \mathcal{H}^{N-1}(S_u).$$

A definição de S_v para $v \in BV(\partial\Omega, I)$ é análoga.

2.2.4 Um resumo sobre a Γ -convergência dos funcionais

Como pode ser visto na Seção 2.3 (Teorema 2.7), a segunda hipótese a ser satisfeita para a existência de mínimos para (2.3) é a Γ -convergência. Esclarecemos que a definição e as demonstrações sobre Γ -convergência se encontram no Apêndice A. Apresentamos apenas um resumo sobre alguns dos resultados decorrentes desse apêndice, para as seções futuras deste capítulo.

Consideremos o espaço $\mathbb{L}^1 = \mathbb{L}^1(\Omega, \partial\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ com a seguinte norma

$$\|(u, v)\|_{\mathbb{L}^1} \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)}.$$

Então $(\mathbb{L}^1, \|\cdot\|_{\mathbb{L}^1})$ é um espaço de Banach.

Definimos $\mathcal{E}_\varepsilon, \mathcal{E}_0 : \mathbb{L}^1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u, v) = \begin{cases} \frac{2}{\varepsilon} E_\varepsilon(u) \text{ se } u \in H^1(\Omega) \text{ e } v = Tu, \\ +\infty \text{ caso contrário em } \mathbb{L}^1, \end{cases} \quad (2.5)$$

com E_ε definido por (2.3) e

$$\mathcal{E}_0(u, v) = \begin{cases} \Phi(u, v), & (u, v) \in BV(\Omega, I) \times BV(\partial\Omega, I) \\ +\infty, & \text{caso contrário em } \mathbb{L}^1, \end{cases} \quad (2.6)$$

sendo que $\Phi(u, v)$ é definido por

$$\Phi(u, v) = \sigma \mathcal{H}^2(S_u) + \int_{\partial\Omega} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^2 + c \mathcal{H}^1(S_v), \quad (2.7)$$

com $c = \frac{(\beta' - \alpha')^2}{\pi} k$, $h(t) = 2 \int_0^t \sqrt{2F(\xi)} d\xi$ e $\sigma = |h(\beta) - h(\alpha)|$

Teorema 2.6 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $k > 0$ então \mathcal{E}_ε Γ -converge (em \mathbb{L}^1) para o funcional \mathcal{E}_0 .*

Demonstração: [3].

Uma leitura cuidadosa de [3] permite-nos verificar que este teorema sobre a Γ -convergência dos funcionais definidos em (2.5), quando $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \delta_\varepsilon = k > 0$, também vale para o caso em que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \delta_\varepsilon = k = 0$ e, mais ainda, para domínios N -dimensionais, $N \geq 3$ (veja Teorema A.1). Neste caso o Γ -limite dos funcionais \mathcal{E}_ε é o funcional \mathcal{E}_0 com

$$\Phi(u, v) = \sigma \mathcal{H}^{N-1}(S_u) + \int_{\partial\Omega} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^{N-1}.$$

A seguir apresentamos um dos resultados mais importantes deste capítulo.

2.3 O Teorema de De Giorgi

Enunciamos e provamos aqui uma versão variacional de um teorema de De Giorgi. Este teorema é responsável, sob determinadas hipóteses, pela existência de mínimos locais para a família de funcionais definidas por (2.5). Como conseqüência, na Seção 2.5 usaremos estes resultados para encontrarmos os padrões desejados.

Teorema 2.7 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado com fronteira suave. Sejam \mathcal{E}_ε e \mathcal{E}_0 definidos por (2.5) e (2.6), respectivamente, com $k \geq 0$. Suponhamos que sejam satisfeitas as seguintes condições*

- (i) *Existem constantes $C > 0$ e $d \in \mathbb{R}$ tais que $F(t) \geq C|t|^p - d$, com $p \geq 2$.*
- (ii) *A família de funcionais $\{\mathcal{E}_\varepsilon\}_\varepsilon$ Γ -converge, em $\mathbb{L}^1(\Omega, \partial\Omega)$, para o funcional \mathcal{E}_0 ,*
- (iii) *$\{\mathcal{E}_\varepsilon\}_\varepsilon$ é equicoerciva, isto é, para cada $\{(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} \subset \mathbb{L}^1(\Omega, \partial\Omega)$ satisfazendo $\mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq M$, para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\{(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ é compacta em $\mathbb{L}^1(\Omega, \partial\Omega)$.*

Se (u_0, v_0) é um mínimo local isolado de \mathcal{E}_0 , então existe uma seqüência $\{(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j})\}$, com $\varepsilon_j \rightarrow 0$, tal que $(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j})$ é um mínimo local de $\mathcal{E}_{\varepsilon_j}$ e

$$\|(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j}) - (u_0, v_0)\|_{\mathbb{L}^1} \xrightarrow{\varepsilon_j \rightarrow 0} 0. \quad (2.8)$$

Para a demonstração deste teorema necessitamos do seguinte

Lema 2.1 *Seja \mathcal{E}_ε definido por (2.5). Suponhamos que existam $C > 0$ e $d \in \mathbb{R}$ tais que $F(t) \geq C|t|^p - d$, com $p \geq 2$. Então para cada $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, existe*

$$(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in B_\delta(u_0, v_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, v) : \|(u, v) - (u_0, v_0)\|_{\mathbb{L}^1} \leq \delta\}$$

satisfazendo

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = \inf \{\mathcal{E}_\varepsilon(u, v) : (u, v) \in B_\delta\}.$$

Demonstração: Fixe $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$. Como $\mathcal{E}_\varepsilon \geq 0$, existe $M \geq 0$ tal que

$$M = \inf\{\mathcal{E}_\varepsilon(u, v) : (u, v) \in B_\delta\}.$$

Como $H^1(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$, $M < \infty$. Seja $\{(u_i, v_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência minimizante, isto é, $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\varepsilon(u_i, v_i) = M$.

Logo existe $c > 0$ tal que

$$\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 dx + \frac{2}{\varepsilon} \int_{\Omega} F(u_i) dx + 2\delta_\varepsilon \int_{\partial\Omega} G(Tu_i) d\mathcal{H}^2 \leq c, \quad (2.9)$$

e $v_i = Tu_i$ pela definição de \mathcal{E}_ε . De (2.9) e das nossas hipóteses sobre F temos

$$C \int_{\Omega} |u_i|^p dx - d|\Omega| \leq \int_{\Omega} F(u_i) dx \leq \varepsilon c = \tilde{c}.$$

Logo

$$\|u_i\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \tilde{c}, \quad \forall i.$$

Como $p \geq 2$, pela desigualdade (2.9) segue que (u_i) é uma seqüência limitada em $H^1(\Omega)$. Logo existe $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ e uma subsequência de (u_i) (denotada ainda por (u_i)) tal que

$$u_i \rightharpoonup u_\varepsilon \text{ em } H^1(\Omega), \quad u_i \rightarrow u_\varepsilon \text{ em } L^2(\Omega).$$

Além disso, pelas propriedades sobre o operador traço obtemos também

$$Tu_i \rightharpoonup Tu_\varepsilon \text{ em } H^{1/2}(\partial\Omega), \quad Tu_i \rightarrow Tu_\varepsilon = v_\varepsilon \text{ em } L^2(\partial\Omega).$$

Uma vez que $L^2 \subset L^1$, existe uma nova subsequência de (u_i) , denotada também por (u_i) , tal que $u_i(x) \rightarrow u_\varepsilon(x)$ qtp em Ω e $Tu_i(y) \rightarrow v_\varepsilon(y)$ qtp em $\partial\Omega$. Pela continuidade de F e G vem que $F(u_i(x)) \rightarrow F(u_\varepsilon(x))$ qtp em Ω e $G(Tu_i(y)) \rightarrow G(v_\varepsilon(y))$ qtp em $\partial\Omega$. Aplicando o Lema de Fatou obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(u_\varepsilon(x)) dx &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(u_i(x)) dx \\ \int_{\partial\Omega} G(v_\varepsilon(y)) d\mathcal{H}^2 &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} G(Tu_i(y)) d\mathcal{H}^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Da teoria clássica sobre funcionais tipo energia sabe-se que $W : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$W(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

é fracamente semicontínuo inferiormente em $H^1(\Omega)$. Disto obtemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dx \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 dx. \quad (2.11)$$

Logo, de (2.10) e (2.11)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) &= \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dx + \frac{2}{\varepsilon} \int_{\Omega} F(u_{\varepsilon}) dx + 2\delta_{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} G(v_{\varepsilon}) d\mathcal{H}^2 \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 dx + \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{2}{\varepsilon} \int_{\Omega} F(u_i) dx + \liminf_{i \rightarrow \infty} 2\delta_{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} G(Tu_i) d\mathcal{H}^2 \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \left[\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 dx + \frac{2}{\varepsilon} \int_{\Omega} F(u_i) dx + 2\delta_{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} G(Tu_i) d\mathcal{H}^2 \right] \\ &= \liminf_{i \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon}(u_i, v_i) = M. \end{aligned}$$

Pelo fato de B_{δ} ser um subconjunto fechado de \mathbb{L}^1 e $(u_i, Tu_i) \rightarrow (u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon})$ em \mathbb{L}^1 , concluimos que $(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) \in B_{\delta}$ e é um mínimo de $\mathcal{E}_{\varepsilon}$ em B_{δ} . ■

Em vista deste lema podemos elaborar a

Demonstração do Teorema 2.7: Seja (u_0, v_0) um mínimo local isolado de \mathcal{E}_0 em $B_{\delta}(u_0, v_0)$, para algum $\delta > 0$. Como $\mathcal{E}_{\varepsilon}$ Γ -converge para \mathcal{E}_0 , existe uma seqüência $\{(a_{\varepsilon_j}, b_{\varepsilon_j})\} \subset \mathbb{L}^1$ tal que $(a_{\varepsilon_j}, b_{\varepsilon_j}) \rightarrow (u_0, v_0)$ em \mathbb{L}^1 e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_j}(a_{\varepsilon_j}, b_{\varepsilon_j}) = \mathcal{E}_0(u_0, v_0). \quad (2.12)$$

Pelo Lema 2.1, existe uma seqüência $\{(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j})\} \subset \mathbb{L}^1$ de mínimos de $\mathcal{E}_{\varepsilon_j}$ em $B_{\delta}(u_0, v_0)$.

Para j suficientemente grande temos que $(a_{\varepsilon_j}, b_{\varepsilon_j}) \in B_{\delta}(u_0, v_0)$. Assim, como $(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j})$ é mínimo em $B_{\delta}(u_0, v_0)$, segue que

$$\mathcal{E}_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j}) \leq \mathcal{E}_{\varepsilon_j}(a_{\varepsilon_j}, b_{\varepsilon_j}), \quad (2.13)$$

implicando que $\{\mathcal{E}_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j})\}$ é uma seqüência limitada, já que $\{\mathcal{E}_{\varepsilon_j}(a_{\varepsilon_j}, b_{\varepsilon_j})\}$ o é (pois é convergente).

Por outro lado, segue de (2.13) e (2.12) que para qualquer subsequência $(\varepsilon_{j_k}) \subset (\varepsilon_j)$ vale que

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_{j_k}}(u_{\varepsilon_{j_k}}, v_{\varepsilon_{j_k}}) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_{j_k}}(a_{\varepsilon_{j_k}}, b_{\varepsilon_{j_k}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_{j_k}}(a_{\varepsilon_{j_k}}, b_{\varepsilon_{j_k}}) \\ &= \mathcal{E}_0(u_0, v_0). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Afirmamos que $(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j})$ está no interior de $B_\delta(u_0, v_0)$. Em outras palavras, $(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j})$ é um mínimo local de $\mathcal{E}_{\varepsilon_j}$.

Suponhamos o contrário. Então existe uma subsequência (mas usamos a mesma notação) $\{(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j}) \subset \mathbb{L}^1\}$ tal que

$$\|(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j}) - (u_0, v_0)\|_{\mathbb{L}^1} = \delta. \quad (2.15)$$

Como $\{\mathcal{E}_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j})\}$ é limitada e por hipótese $\{\mathcal{E}_{\varepsilon_j}\}$ é equicoerciva, segue que $\{(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j})\}$ é compacta em \mathbb{L}^1 . Logo existe uma nova subsequência $\{(u_{\varepsilon_{j_k}}, v_{\varepsilon_{j_k}})\}$ de $\{(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j})\}$ e $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{L}^1$ tais que

$$(u_{\varepsilon_{j_k}}, v_{\varepsilon_{j_k}}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (\bar{u}, \bar{v})$$

em \mathbb{L}^1 .

Portanto de (2.15) vem que

$$\|(\bar{u}, \bar{v}) - (u_0, v_0)\|_{\mathbb{L}^1} = \delta.$$

Pela Γ -convergência de $\{\mathcal{E}_{\varepsilon_j}\}$ e (2.14) concluímos que

$$\mathcal{E}_0(\bar{u}, \bar{v}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_{j_k}}(u_{\varepsilon_{j_k}}, v_{\varepsilon_{j_k}}) = \mathcal{E}_0(u_0, v_0),$$

o que contradiz com o fato de (u_0, v_0) ser mínimo local isolado.

Para mostrarmos (2.8), o procedimento é o mesmo. Suponha, por absurdo, que (2.8) não se verifica. Então existe $\gamma > 0$ e uma subsequência $\{(u_{\varepsilon_{j_k}}, v_{\varepsilon_{j_k}})\} \subset \{(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j})\}$ tal que

$$0 < \gamma \leq \|(u_{\varepsilon_j}, v_{\varepsilon_j}) - (u_0, v_0)\|_{\mathbb{L}^1} \leq \delta.$$

Como a seqüência $\{\mathcal{E}_{\varepsilon_{j_k}}(u_{\varepsilon_{j_k}}, v_{\varepsilon_{j_k}})\}$ é limitada e equicoerciva, encontramos uma nova subsequência (e supomos ser a mesma) $\{(u_{\varepsilon_{j_{k'}}}, v_{\varepsilon_{j_{k'}}})\} \subset \mathbb{L}^1$ e $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{L}^1$ tais que $(u_{\varepsilon_{j_{k'}}}, v_{\varepsilon_{j_{k'}}}) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$ em \mathbb{L}^1 , e, assim,

$$0 < \gamma \leq \|(\bar{u}, \bar{v}) - (u_0, v_0)\|_{\mathbb{L}^1} \leq \delta.$$

Isto implica que $(\bar{u}, \bar{v}) \neq (u_0, v_0)$.

A Γ -convergência de \mathcal{E}_ε e por (2.14) nos dá

$$\mathcal{E}_0(\bar{u}, \bar{v}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_{j_k}}(u_{\varepsilon_{j_k}}, v_{\varepsilon_{j_k}}) = \mathcal{E}_0(u_0, v_0),$$

e isto contradiz o fato de (u_0, v_0) ser mínimo local isolado. Concluimos assim o teorema. ■

Observação 2.4 É importante ressaltarmos que a mesma demonstração desse teorema vale para domínios N -dimensionais e também para outras famílias de funcionais, quando satisfeitas as hipóteses.

A seguir apresentamos um resultado que é a principal contribuição deste capítulo, que é a existência de um mínimo local isolado para o Γ -limite, condição imprescindível para utilizarmos o Teorema 2.7 na Seção 2.5.

2.4 Mínimos locais isolados dos Γ -limites

A partir de agora consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, um domínio limitado com fronteira de classe C^2 e simplesmente conexo.

Suponhamos que existam $\mathcal{O} \subset \Omega$, $h > 0$ e $\theta : (-h, h) \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de classe C^2 , tais que θ tenha um mínimo absoluto em 0, com $\theta(0) > 0$, e que $\partial\Omega \cap \partial\mathcal{O}$ seja uma superfície de revolução (em torno do eixo z , por exemplo) gerada pelo gráfico de θ . Veja abaixo uma ilustração para um domínio satisfazendo estas hipóteses.

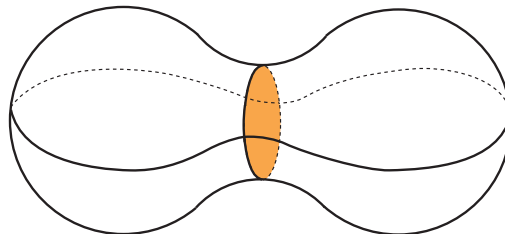


Figura 2.2: O domínio Ω localmente com um “gargalo”.

Sejam

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &\stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 < \theta^2(0)\} \\ \mathbf{C} &\stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = \theta^2(0)\}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Suponha, sem perda de generalidade que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{O}_\beta$, sendo que $\mathcal{O}_\alpha = \{(x, y, z) \in \Omega : 0 < z < h\}$ e $\mathcal{O}_\beta = \{(x, y, z) \in \Omega : -h < z < 0\}$.

Como o conjunto $\Omega \setminus \mathcal{S}$ é formado por duas componentes conexas, defina Ω_α como uma destas componentes e a qual contém o conjunto \mathcal{O}_α . Analogamente para Ω_β . Assim $\Omega = \Omega_\alpha \cup \mathcal{S} \cup \Omega_\beta$.

Defina também $M_\alpha = \partial\Omega_\alpha \cap \partial\Omega \setminus \mathbf{C}$, $M_\beta = \partial\Omega_\beta \cap \partial\Omega \setminus \mathbf{C}$ e

$$u_0 = \alpha\chi_{\Omega_\alpha} + \beta\chi_{\Omega_\beta}, \quad v_0 = \alpha\chi_{M_\alpha} + \beta\chi_{M_\beta}.\tag{2.17}$$

Em vista das considerações acima temos os seguintes resultados que se constituem na principal contribuição deste capítulo.

Teorema 2.8 *Seja*

$$E_0(u) = \begin{cases} \sigma\mathcal{H}^2(S_u), & \text{se } u \in BV(\Omega, I) \\ +\infty, & \text{se } u \in L^1(\Omega) \setminus BV(\Omega, I). \end{cases}$$

Então u_0 , definido em (2.17), é um mínimo L^1 -local isolado para o funcional E_0 .

Corolário 2.2 *Se $0 \leq k < \infty$, então (u_0, v_0) , dado por (2.17), é um mínimo \mathbb{L}^1 -local isolado para o funcional definido por (2.6), com Φ definida por (2.7).*

Observação 2.5 Não é difícil verificar que tanto u_0 quanto v_0 são funções pertencentes aos espaços $BV(\Omega, I)$ e $BV(\partial\Omega, I)$ respectivamente. Pois pela definição, $S_{u_0} = \mathcal{S}$ e $S_{v_0} = \mathbf{C}$. Além disso o traço de u_0 satisfaz $Tu_0 = v_0$.

Observação 2.6 Sempre que mencionarmos $u \in BV(\Omega, I)$ ou $v \in BV(\partial\Omega, I)$, consideramos u e v como sendo constantes em cada componente conexa de $\Omega \setminus S_u$ e $\partial\Omega \setminus S_v$, respectivamente. Não há perda de generalidade nisso, pois os conjuntos $\{x \in \Omega : u(x) \notin \{\alpha, \beta\}\}$ e $\{y \in \partial\Omega : v(y) \notin \{\alpha, \beta\}\}$ têm suas respectivas medidas nulas.

Demonstração do Teorema 2.8: Relembremos a definição de mínimo local isolado (m.l.i.), a qual deve ser observada a topologia envolvida. Uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ é um m.l.i. para o funcional E_0 se existe $\delta > 0$ tal que $\forall u \in L^1(\Omega)$ satisfazendo $0 < \|u - u_0\|_{L^1(\Omega)} < \delta$, implica $E_0(u) > E_0(u_0)$.

Se $u \in L^1(\Omega) \setminus BV(\Omega, I)$ então $E_0(u) = \infty > E_0(u_0)$. Se $u = \beta$ (ou $u = \alpha$) qtp em Ω , então $E_0(u) = 0$. Portanto, u é um mínimo global.

Logo nosso trabalho resume-se em mostrar que u_0 é um mínimo local de E_0 para toda $u \in BV(\Omega, I)$ satisfazendo $0 < |\{x \in \Omega : u(x) = \beta\}| < |\Omega|$, sendo $|\cdot|$ a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^3 .

Afirmamos que é suficiente mostrar que $\mathcal{H}^2(\mathcal{S}) < \mathcal{H}^2(S_u)$ para cada $u \in BV(\mathcal{O}, I)$ tal que $0 < \|u - u_0\|_{L^1(\mathcal{O})} < \delta$, para algum $\delta > 0$.

De fato, suponhamos que exista $\delta > 0$ satisfazendo estas relações. Como $\|u - u_0\|_{L^1(\Omega)} \geq \|u - u_0\|_{L^1(\mathcal{O})}$, se $u \in BV(\Omega, I)$ e $0 < \|u - u_0\|_{L^1(\Omega)} < \delta$ então

$$\begin{aligned} E_0(u_0) &= \sigma \mathcal{H}^2(\mathcal{S}) < \sigma \mathcal{H}^2(S_{u_0}) = \sigma \text{Per}_{\mathcal{O}}(\{x \in \mathcal{O} : u(x) = \beta\}) \\ &\leq \sigma \text{Per}_{\Omega}(\{x \in \Omega : u(x) = \beta\}) = \sigma \mathcal{H}^2(S_u) = E_0(u). \end{aligned}$$

Apresentamos a seguir uma mudança de variáveis que transforma o conjunto \mathcal{O} em um cilindro circular reto \mathcal{C} . Esta mudança, descrita mais abaixo, faz com que a função θ , a qual determina a concavidade local do bordo, tenha grande influência no resultado desejado.

Das nossas hipóteses podemos escrever

$$\partial\Omega \cap \partial\mathcal{O} = \{(\theta(z) \cos t, \theta(z) \sin t, z), 0 \leq t < 2\pi, -h < z < h\} \quad (2.18)$$

para algum $h > 0$.

Consideremos a transformação $\Lambda : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{C}$ definida por

$$\Lambda(x, y, z) = \left(\left(\frac{\theta(0)}{\theta(z)} \right)^{1/2} x, \left(\frac{\theta(0)}{\theta(z)} \right)^{1/2} y, z \right).$$

Não é difícil verificarmos que Λ é um difeomorfismo, pois θ é de classe

C^2 , e que

$$|J\Lambda(x, y, z)| = \frac{\theta(0)}{\theta(z)} \quad \text{e} \quad |J\Lambda^{-1}(x, y, z)| = \frac{\theta(z)}{\theta(0)} \geq 1, \quad \forall (x, y, z) \in \mathcal{C},$$

pois 0 é um mínimo absoluto para θ .

Note que vale a relação $\Lambda(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ e, portanto,

$$\mathcal{H}^2(\mathcal{S}) = \mathcal{H}^2(S_{\bar{u}_0}), \quad (2.19)$$

sendo que $\bar{u}_0 = u_0 \circ \Lambda^{-1} = \alpha\chi_{\mathcal{C}_\alpha} + \beta\chi_{\mathcal{C}_\beta}$, na qual

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(\mathcal{O}_\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathcal{C} : 0 < z < h\} \\ \mathcal{C}_\beta &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(\mathcal{O}_\beta) = \{(x, y, z) \in \mathcal{C} : -h < z < 0\}. \end{aligned}$$

Para cada $\bar{u} \in BV(\mathcal{C}, I)$, denotamos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\alpha^{\bar{u}} &= \{x \in \mathcal{C} : \bar{u}(x) = \alpha\} \\ \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}} &= \{x \in \mathcal{C} : \bar{u}(x) = \beta\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Sabemos que $S_{\bar{u}}$ é uma superfície retificável e disto concluimos que é formada por componentes conexas disjuntas, as quais denotamos por V_β^j , e assim,

$$S_{\bar{u}} = \bigcup_j V_\beta^j. \quad (2.21)$$

Como estamos interessados em mínimos não-triviais, consideramos apenas as funções $\bar{u} \in BV(\mathcal{C}, I)$, satisfazendo $0 < |\mathcal{C}_\alpha^{\bar{u}}| < |\mathcal{C}|$.

Seja $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal. Identificamos \mathbb{R}^2 com $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Com isso temos $P(x, y, z) = (x, y, 0)$. Logo $\mathcal{S} \subset P(\mathbb{R}^3)$.

Dada $\bar{u} \in BV(\mathcal{C}, I)$, $S_{\bar{u}}$ necessariamente satisfaz uma das seguintes propriedades:

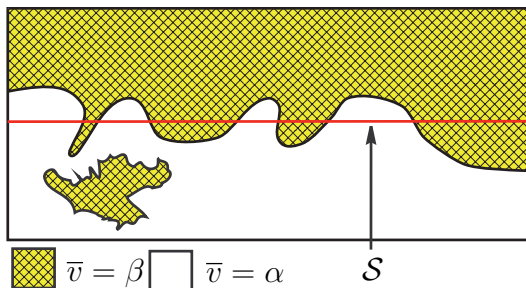
- (i) existe uma componente conexa V_β de $S_{\bar{u}}$ tal que $P(V_\beta) = \mathcal{S}$;
- (ii) não existe nenhuma componente conexa V_β de $S_{\bar{u}}$ tal que $P(V_\beta) = \mathcal{S}$.

Suponhamos que $\bar{u} \in BV(\mathcal{C}, I)$ satisfaz (i) e que $S_{\bar{u}}$ tem uma única componente conexa. Se $S_{\bar{u}}$ tiver mais que uma componente, por exemplo, V_β^1

e V_β^2 , com $\mathcal{H}^2(V_\beta^i) > 0$ ($i = 1, 2$) e uma delas satisfizer (i), digamos V_β^1 , então pelo Corolário 2.1 teríamos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2(S_{\bar{u}}) &= \mathcal{H}^2(V_\beta^1) + \mathcal{H}^2(V_\beta^2) \geq \mathcal{H}^2(P(V_\beta^1)) + \mathcal{H}^2(V_\beta^2) \\ &\geq \mathcal{H}^2(\mathcal{S}) + \mathcal{H}^2(V_\beta^2) > \mathcal{H}^2(\mathcal{S}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Abaixo temos uma ilustração em \mathbb{R}^2 de um possível caso.



Suponhamos que tenhamos escolhido $\delta > 0$. Se $\bar{u} \in BV(\mathcal{C}, I)$, satisfaz (i) e se

$$0 < \|\bar{u} - \bar{u}_0\|_{L^1(\mathcal{C})} < \delta, \quad (2.23)$$

então $\mathcal{H}^2(S_{\bar{u}} \setminus \mathcal{S}) > 0$.

Com efeito, como por hipótese

$$0 < \|\bar{u} - \bar{u}_0\|_{L^1(\mathcal{C})} = (\beta - \alpha) \{ |\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}| + |\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\alpha^{\bar{u}}| \},$$

então $|\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}| > 0$ ou $|\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\alpha^{\bar{u}}| > 0$, necessariamente. Em ambos os casos devemos ter que $\mathcal{H}^2(S_{\bar{u}} \setminus \mathcal{S}) > 0$.

Assim existe um conjunto $W_{\bar{u}} \subset S_{\bar{u}}$ tal que $\overline{W_{\bar{u}}} \cap \mathcal{S} = \emptyset$ e $\mathcal{H}^2(W_{\bar{u}}) > 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $W_{\bar{u}} \subset \mathcal{C}_\alpha$. Logo existe $z_0 > 0$ tal que $z_0 = \inf\{z : (x, y, z) \in W_{\bar{u}}\}$. Pelas hipóteses da função θ temos que

$$|J\Lambda^{-1}| = \frac{\theta(z)}{\theta(0)} > 1, \forall z : (x, y, z) \in W_{\bar{u}}. \quad (2.24)$$

Temos

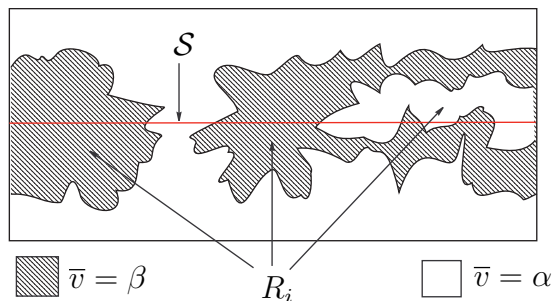
$$\|u - u_0\|_{L^1(\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} |u - u_0| dx = \int_{\mathcal{C}} |\bar{u} - \bar{u}_0| |J\Lambda^{-1}| dx \geq \|\bar{u} - \bar{u}_0\|_{L^1(\mathcal{C})}. \quad (2.25)$$

Portanto, para qualquer $u \in BV(\mathcal{O}, I)$ tal que $0 < \|u - u_0\|_{L^1(\mathcal{O})} < \delta$, se $\bar{u} = u \circ \Lambda^{-1}$ satisfaz (i), então por (2.25), (2.24) e pelo Corolário 2.1, respectivamente, vem que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2(S_u) &= \int_{S_u} d\mathcal{H}^2 = \int_{S_{\bar{u}}} \frac{\theta(z)}{\theta(0)} d\mathcal{H}^2 = \int_{S_{\bar{u}} \setminus W} \frac{\theta(z)}{\theta(0)} d\mathcal{H}^2 + \int_W \frac{\theta(z)}{\theta(0)} d\mathcal{H}^2 \\ &> \int_{S_{\bar{u}} \setminus W} d\mathcal{H}^2 + \int_W d\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2(S_{\bar{u}}) \geq \mathcal{H}^2(P(S_{\bar{u}})) = \mathcal{H}^2(\mathcal{S}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Note que, para $\bar{u} = u \circ \Lambda^{-1}$, sempre vale $\mathcal{H}^2(S_u) \geq \mathcal{H}^2(S_{\bar{u}})$.

Seja $\bar{u} \in BV(\mathcal{C}, I)$ tal que $S_{\bar{u}}$ satisfaz (ii). Para cada componente conexa V_β de $S_{\bar{u}}$, com $\mathcal{H}^2(V_\beta) > 0$, existe uma região interna, digamos R_i , contida em \mathcal{C} , satisfazendo $|R_i| > 0$, tal que \bar{u} assume o valor α ou β (ou ambos) e que $\partial R_i \cap \mathcal{C} \supseteq V_\beta$, com a igualdade no caso em que R_i não contenha outra componente conexa V_β de $S_{\bar{u}}$. Esta região interna é uma das componentes conexas de $\mathcal{C} \setminus S_{\bar{u}}$. Veja abaixo uma ilustração de um possível caso em \mathbb{R}^2 desta situação.



Admita que cada componente conexa V_β de $S_{\bar{u}}$ tenha uma única região interna R_i . Não há perda de generalidade com esta suposição, como pode ser visto mais adiante.

Como \mathcal{S} é de classe C^∞ , $\mathcal{H}^2(\mathcal{S})$ coincide com a área de \mathcal{S} . Da geometria elementar e das nossas hipóteses sobre \mathcal{C} temos

$$|\mathcal{C}_\alpha| = |\mathcal{C}_\beta| = \mathcal{H}^2(\mathcal{S}) \cdot h. \quad (2.27)$$

Afirmamos que se $\bar{u} \in BV(\mathcal{C}, I)$ satisfaz (ii) e (2.23), com $\delta \leq \frac{(\beta - \alpha)}{4} \mathcal{H}^2(\mathcal{S}) \cdot h$, então $\mathcal{H}^2(\mathcal{S}) < \mathcal{H}^2(S_{\bar{u}})$.

De fato, seja $\bar{u} \in BV(\mathcal{C}, I)$ satisfazendo estas hipóteses. Então

$$\begin{aligned} 0 < \int_{\mathcal{C}} |\bar{u} - \bar{u}_0| dx &= (\beta - \alpha) \{ |\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}| + |\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\alpha^{\bar{u}}| \} \\ &< \frac{(\beta - \alpha)}{4} \mathcal{H}^2(\mathcal{S}) \cdot h, \end{aligned}$$

sendo que $\mathcal{C}_\alpha^{\bar{u}}$, $\mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}$ foram definidos em (2.20). Portanto

$$\max \{ |\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}|, |\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\alpha^{\bar{u}}| \} < \frac{1}{4} \mathcal{H}^2(\mathcal{S}) \cdot h. \quad (2.28)$$

Disto observamos que não pode ocorrer nenhum dos seguintes casos: $\mathcal{C}_\alpha^{\bar{u}} \subset \mathcal{C}_\beta$ ou $\mathcal{C}_\beta^{\bar{u}} \subset \mathcal{C}_\alpha$, pois isto implicaria que $\mathcal{C}_\alpha^{\bar{u}} \cap \mathcal{C}_\beta = \mathcal{C}_\beta$ ou $\mathcal{C}_\beta^{\bar{u}} \cap \mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}_\alpha$, respectivamente, contradizendo (2.28). Veja a figura ilustrativa.

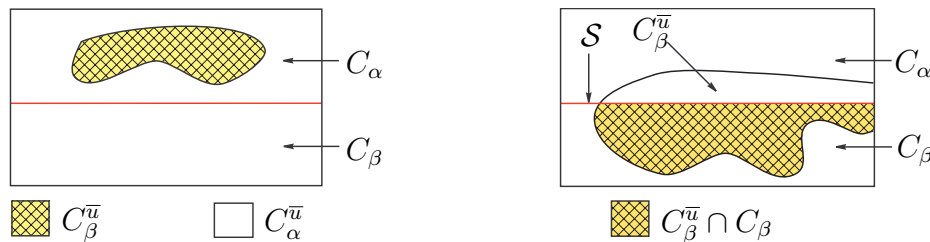


Figura 2.3: Do lado esquerdo um caso que não pode ocorrer devido a hipótese (2.28). Do lado direito o conjunto $\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}$ contido em uma região interna R_i .

Agora, pelas hipóteses sobre \bar{u} devemos ter então $\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\alpha^{\bar{u}}$ ou $\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}$ contido em uma ou mais regiões internas R_i , ou que uma delas seja uma das regiões internas. Suponhamos, por simplicidade, que seja $\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}$. O mesmo argumento se aplica para $\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\alpha^{\bar{u}}$ (veja figura acima).

Não é difícil verificarmos que $\mathcal{C}_\beta = (\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}) \cup (\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\alpha^{\bar{u}}) \cup (\partial \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}} \cap \mathcal{C}_\beta)$, sendo que $|\partial \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}} \cap \mathcal{C}_\beta| = 0$.

Como $|\mathcal{C}_\beta| = \mathcal{H}^2(\mathcal{S}) \cdot h$, de (2.28) e desta última observação segue que

$$|\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}| \geq \frac{3}{4} \mathcal{H}^2(\mathcal{S}) \cdot h.$$

Como anteriormente, consideremos a função projeção ortogonal P . Afirmamos que $\mathcal{H}^2(P(\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}})) > \frac{1}{2} \mathcal{H}^2(\mathcal{S})$.

Com efeito, seja

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in \mathcal{C} : (x, y, 0) \in P(\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}), -h < z < 0\}.$$

Para cada $(x, y, z) \in \mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}$ temos $-h < z < 0$.

Como $P(x, y, z) = (x, y, 0) \in P(\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}})$, segue que $(x, y, z) \in \Sigma$. Logo $\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}} \subset \Sigma$ e assim $|\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}| \leq |\Sigma|$.

Mas $|\Sigma| = \mathcal{H}^2(P(\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}})) \cdot h$. Logo

$$\mathcal{H}^2(P(\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}})) \cdot h \geq |\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}| \geq \frac{3}{4} \mathcal{H}^2(\mathcal{S}) \cdot h > \frac{1}{2} \mathcal{H}^2(\mathcal{S}) \cdot h,$$

donde concluimos que

$$\mathcal{H}^2(P(\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}})) > \frac{1}{2} \mathcal{H}^2(\mathcal{S}).$$

Como $\mathcal{C}_\beta^{\bar{u}} \supset \mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}$ e $P(S_{\bar{u}}) \supseteq P(\mathcal{C}_\beta^{\bar{u}}) \supset P(\mathcal{C}_\beta \cap \mathcal{C}_\beta^{\bar{u}})$, vem que

$$\mathcal{H}^2(P(S_{\bar{u}})) > \frac{1}{2} \mathcal{H}^2(\mathcal{S}).$$

Para concluir a afirmação basta mostrarmos que

$$\mathcal{H}^2(P(S_{\bar{u}})) \leq \frac{1}{2} \mathcal{H}^2(S_{\bar{u}}).$$

Façamos isto mostrando, para cada componente conexa V_β de $S_{\bar{u}}$, que

$$\mathcal{H}^2(P(V_\beta)) \leq \frac{1}{2} \mathcal{H}^2(V_\beta), \quad (2.29)$$

pois como $S_{\bar{u}} = \bigcup_j V_\beta^j$ (com união disjunta) e $\mathcal{H}^2(S_{\bar{u}}) = \sum_j \mathcal{H}^2(V_\beta^j)$, o resultado segue uma vez que $P(S_{\bar{u}}) = \bigcup_j P(V_\beta^j)$.

Se $\mathcal{H}^2(V_\beta) = 0$, então $\mathcal{H}^2(P(V_\beta)) = 0$, pelo Corolário 2.1 e, assim, a desigualdade (2.29) se verifica imediatamente.

Seja V_β uma componente conexa de $S_{\bar{u}}$, com $\mathcal{H}^2(V_\beta) > 0$, e R_i a região interna envolvida por V_β .

Sejam $M, m : P(V_\beta) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} M(Y) &= \max z : (x, y, z) \in P^{-1}(Y) \cap \bar{R}_i \\ m(Y) &= \min z : (x, y, z) \in P^{-1}(Y) \cap \bar{R}_i, \end{aligned}$$

com $Y = (x, y, 0) \in P(V_\beta)$. Estas funções estão bem definidas, pois $\overline{R_i}$ é um compacto e $P^{-1}(Y)$ é uma reta.

É imediato verificarmos que $\text{Graf}(M) \subset V_\beta$ e $\text{Graf}(m) \subset V_\beta$, sendo que

$$\text{Graf}(M) = \{(x, y, z) \in \mathcal{C} : (x, y, 0) \in P(V_\beta), z = M(Y)\}$$

$$\text{Graf}(m) = \{(x, y, z) \in \mathcal{C} : (x, y, 0) \in P(V_\beta), z = m(Y)\},$$

pois os pontos $(x, y, M(x, y, 0))$ e $(x, y, m(x, y, 0))$ pertencem a $\partial R_i \cap \mathcal{C} = V_\beta$.

Inferimos agora que

$$P(\text{Graf}(M)) = P(V_\beta) = P(\text{Graf}(m)). \quad (2.30)$$

Para isso basta apenas observar que se $Y \in P(V_\beta)$, o ponto $(x, y, M(Y)) \in \text{Graf}(M)$ e $P(x, y, M(Y)) = (x, y, 0) = Y \in P(\text{Graf}(M))$. Assim, $P(\text{Graf}(M)) \supset P(V_\beta)$.

A inclusão contrária segue do fato que $\text{Graf}(M) \subset V_\beta$. Analogamente $P(\text{Graf}(m)) = P(V_\beta)$.

Seja $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in V_\beta : m(P(X)) = M(P(X))\}$. Então necessariamente $\mathcal{H}^2(\mathcal{V}) = 0$. Caso contrário, se $\mathcal{H}^2(\mathcal{V}) > 0$, então o conjunto $P(\mathcal{V})$ deve satisfazer $\mathcal{H}^2(P(\mathcal{V})) > 0$.

Defina

$$\Upsilon_{\mathcal{V}} = \{(x, y, z) \in \mathcal{C} : (x, y, 0) \in \text{int}(P(\mathcal{V})), -h < z < h\},$$

sendo que $\text{int}(P(\mathcal{V}))$ é o conjunto interior de $P(\mathcal{V}) \subset \mathcal{S}$.

Observe que $\mathcal{H}^2(\text{int}(P(\mathcal{V}))) > 0$ e que $\text{int}P(\mathcal{V}) \subset P(R_i)$. Logo $\Upsilon_{\mathcal{V}}$ é um subconjunto aberto em \mathcal{C} com $|\Upsilon_{\mathcal{V}}| > 0$. Como $\partial R_i \cap \mathcal{C} = V_\beta$ e $\mathcal{V} \subset V_\beta$, para cada $Y \in \text{int}P(\mathcal{V})$, $P^{-1}(Y) \cap R_i \neq \emptyset$. Assim $\Upsilon_{\mathcal{V}} \cap R_i \neq \emptyset$ e é aberto em \mathcal{C} . Então existe $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Upsilon_{\mathcal{V}} \cap R_i$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B(X_0, \varepsilon)} \subset \Upsilon_{\mathcal{V}} \cap R_i$.

Ora, $P(\overline{B(X_0, \varepsilon)}) \subset \text{int}P(\mathcal{V}) \subset P(\mathcal{V}) \subset P(V_\beta)$. Portanto

$$\begin{aligned} M(P(X_0)) &\geq \max z : (x_0, y_0, z) \in P^{-1}(P(X_0)) \cap \overline{B(X_0, \varepsilon)} \\ &> \min z : (x_0, y_0, z) \in P^{-1}(P(X_0)) \cap \overline{B(X_0, \varepsilon)} \\ &\geq \min z : (x_0, y_0, z) \in P^{-1}(P(X_0)) \cap \overline{R_i} = m(P(X_0)). \end{aligned}$$

Mas $P(X_0) \in P(\mathcal{V})$. Logo existe $Y_0 \in \mathcal{V}$ tal que $P(X_0) = P(Y_0)$ implicando que $M(P(X_0)) = m(P(X_0))$, o que é uma contradição. Portanto $\mathcal{H}^2(\mathcal{V}) = 0$.

Como $\text{Graf}(M) \cup \text{Graf}(m) \subset V_\beta$ e $(\text{Graf}(M) \setminus \mathcal{V}) \cap \text{Graf}(m) = \emptyset$, segue que

$$\mathcal{H}^2(\text{Graf}(M)) + \mathcal{H}^2(\text{Graf}(m)) = \mathcal{H}^2(\text{Graf}(M) \setminus \mathcal{V}) + \mathcal{H}^2(\text{Graf}(m)) \leq \mathcal{H}^2(V_\beta).$$

Pelo Corolário 2.1 e por (2.30)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2(V_\beta) &\geq \mathcal{H}^2(\text{Graf}(M)) + \mathcal{H}^2(\text{Graf}(m)) \\ &\geq \mathcal{H}^2(P(\text{Graf}(M))) + \mathcal{H}^2(P(\text{Graf}(m))) \\ &= 2\mathcal{H}^2(P(V_\beta)), \end{aligned}$$

o que demonstra (2.29) e, portanto, concluimos a afirmação.

Logo, para qualquer $u \in BV(\mathcal{O}, I)$ tal que $\bar{u} = u \circ \Lambda^{-1}$ satisfaz (ii) e $0 < \|u - u_0\|_{L^1(\mathcal{O})} < \delta$, com $\delta \leq \frac{(\beta - \alpha)}{4} \mathcal{H}^2(\mathcal{S}) \cdot h$, de (2.25) e o comentário de (2.26) segue que

$$\mathcal{H}^2(S_u) > \mathcal{H}^2(\mathcal{S}).$$

Concluimos assim a demonstração do teorema. ■

Demonstração do Corolário 2.2: Como no teorema anterior, consideremos a função projeção P , os conjuntos \mathcal{O} e \mathcal{C} e a mudança de variáveis Λ . Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que para qualquer $(u, v) \in \mathbb{L}^1$, satisfazendo

$$0 < \|(u, v) - (u_0, v_0)\|_{\mathbb{L}^1} < \delta$$

teremos $\mathcal{E}_0(u_0, v_0) < \mathcal{E}_0(u, v)$.

Separamos a demonstração para os casos $k = 0$ e $k > 0$.

No primeiro caso, observe que $\mathcal{E}_0(u_0, v_0) = \Phi(u_0, v_0) = \sigma \mathcal{H}^2(\mathcal{S})$, pois $Tu_0 = v_0$ qtp e u_0 e v_0 tem variações totais limitadas.

Pelo Teorema 2.8, existe $\delta > 0$ tal que para cada $u \in L^1(\Omega)$ satisfazendo $0 < \|u - u_0\|_{L^1(\Omega)} < \delta$ então $\sigma \mathcal{H}^2(\mathcal{S}) < \sigma \mathcal{H}^2(S_u)$. Assim, para este

mesmo δ , se $0 < \|(u, v) - (u_0, v_0)\|_{\mathbb{I}^1} < \delta$, necessariamente obtemos, pela definição da norma $\|\cdot\|_{\mathbb{I}^1}$, que

$$0 < \|u - u_0\|_{L^1(\Omega)} < \delta \text{ ou } 0 < \|v - v_0\|_{L^1(\partial\Omega)} < \delta.$$

Em ambos os casos, a definição de \mathcal{E}_0 e Φ implicam que $\mathcal{E}_0(u_0, v_0) < \mathcal{E}_0(u, v)$.

Para o caso em que $k > 0$, inicialmente notemos que vale a relação $\mathcal{E}_0(u_0, v_0) = \Phi(u_0, v_0) = \sigma\mathcal{H}^2(\mathcal{S}) + c\mathcal{H}^1(\mathbf{C})$, pois $Tu_0 = v_0$ qtp e u_0 e v_0 tem variações totais limitadas em Ω e $\partial\Omega$, respectivamente.

Esta demonstração segue basicamente os mesmos passos efetuados no teorema anterior, com pequenas alterações. Mostra-se que este resultado vale no conjunto $\partial\mathcal{O} \cap \partial\Omega$, com a contribuição da mudança de variáveis Λ , a qual transforma o conjunto $\partial\mathcal{O} \cap \partial\Omega$ em

$$\begin{aligned} \widetilde{\partial\mathcal{C}} &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(\partial\mathcal{O} \cap \partial\Omega) \\ &= \{(\theta(0)\cos t, \theta(0)\text{sent}t, z), t \in [0, 2\pi), -h < z < h\}. \end{aligned}$$

Além disso, para cada $\bar{v} \in BV(\widetilde{\partial\mathcal{C}}, I)$, $S_{\bar{v}}$ é uma união de curvas retificáveis conexas e fechadas (podendo ser uma única curva) e necessariamente deve satisfazer uma das seguintes propriedades:

- (i) Existe uma curva componente V_β de $S_{\bar{v}}$ tal que $P(V_\beta) = \mathbf{C}$;
- (ii) Não existe nenhuma curva componente V_β de $S_{\bar{v}}$ tal que $P(V_\beta) = \mathbf{C}$.

Afirmamos que para qualquer $v \in L^1(\partial\mathcal{O} \cap \partial\Omega)$ satisfazendo

$$0 < \|v - v_0\|_{L^1(\partial\mathcal{O} \cap \partial\Omega)} < \delta_1, \tag{2.31}$$

com $\delta_1 \leq \frac{(\beta - \alpha)}{4}\mathcal{H}^1(\mathbf{C}) \cdot h$, teremos

$$c\mathcal{H}^1(\mathbf{C}) < c\mathcal{H}^1(S_v). \tag{2.32}$$

Se $v \in L^1 \setminus BV(\partial\mathcal{O} \cap \partial\Omega, I)$ a desigualdade acima é imediatamente satisfeita, uma vez que $\mathcal{H}^1(S_v) = \infty$.

Se $v \in BV(\partial\mathcal{O} \cap \partial\Omega, I)$ satisfaz (2.31) e $\bar{v} = v \circ \Lambda^{-1}$ (a qual pertence a $BV(\widetilde{\partial\mathcal{C}}, IU)$) satisfaz (i), o mesmo cálculo usado para demonstrar (2.27), com a contribuição da função θ e de suas propriedades, demonstra-se (2.32).

Agora, se $v \in BV(\partial\mathcal{O} \cap \partial\Omega, I)$ satisfaz (2.31) e $\bar{v} = v \circ \Lambda^{-1}$ satisfaz (ii), é possível mostrarmos com algumas mudanças — nos conjuntos $\mathcal{C}_\alpha^{\bar{v}}$ e $\mathcal{C}_\beta^{\bar{v}}$ (definidas agora em $\widetilde{\partial\mathcal{C}}$); nas regiões internas; o fato de $\widetilde{\partial\mathcal{C}}$ ser de classe C^2 ; $\mathcal{H}^2(\widetilde{\partial\mathcal{C}}) = \mathcal{H}^1(\mathbf{C}) \cdot 2h$; usando as propriedades da função projeção e as funções M e m — que (2.32) também se verifica.

Disto e das considerações anteriores obtemos que

$$c\mathcal{H}^1(\mathbf{C}) < c\mathcal{H}^1(S_v), \quad (2.33)$$

para cada $v \in L^1(\partial\Omega)$ satisfazendo $0 < \|v - v_0\|_{L^1(\partial\Omega)} < \delta_1$, com $\delta_1 \leq \frac{(\beta - \alpha)}{4} \mathcal{H}^1(\mathbf{C}) \cdot h$.

Pelo teorema anterior, para cada $u \in L^1(\Omega)$ satisfazendo $0 < \|u - u_0\|_{L^1(\Omega)} < \delta_2$ com $\delta_2 \leq \frac{(\beta - \alpha)}{4} \mathcal{H}^2(\mathcal{S}) \cdot h$, vale que

$$\sigma\mathcal{H}^2(\mathcal{S}) < \sigma\mathcal{H}^2(S_u). \quad (2.34)$$

Escolha

$$\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Como

$$\|(u, v) - (u_0, v_0)\|_{\mathbb{L}^1} = \|u - u_0\|_{L^1(\Omega)} + \|v - v_0\|_{L^1(\partial\Omega)},$$

se $(u, v) \in \mathbb{L}^1$, satisfaz $0 < \|(u, v) - (u_0, v_0)\|_{\mathbb{L}^1} < \delta$ então

$$\|u - u_0\|_{L^1(\Omega)} < \delta \leq \delta_2$$

$$\|v - v_0\|_{L^1(\partial\Omega)} < \delta \leq \delta_1$$

e assim, por (2.33) e (2.34)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(u_0, v_0) &= \Phi(u_0, v_0) = \sigma\mathcal{H}^2(\mathcal{S}) + c\mathcal{H}^1(\mathbf{C}) \\ &< \sigma\mathcal{H}^2(S_u) + c\mathcal{H}^1(S_v) \\ &\leq \mathcal{E}_0(u, v). \end{aligned}$$

Convém esclarecer que o fato de $0 < \|(u, v) - (u_0, v_0)\|_{\mathbb{L}^1}$, não implica que

$$0 < \|u - u_0\|_{L^1(\Omega)} \text{ e } 0 < \|v - v_0\|_{L^1(\partial\Omega)}$$

simultaneamente. Mas, obviamente, uma das alternativas deve ocorrer. Isto não invalida o resultado, pois se $0 < \|(u, v) - (u_0, v_0)\|_{\mathbf{L}^1} < \delta$ e, digamos, $\|u - u_0\|_{L^1(\Omega)} = 0$, com $u \in BV(\Omega, I)$, então $\mathcal{H}^2(\mathcal{S}) = \mathcal{H}^2(S_u)$ e por (2.33) vem que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(u_0, v_0) &= \Phi(u_0, v_0) = \sigma\mathcal{H}^2(\mathcal{S}) + c\mathcal{H}^1(\mathbf{C}) \\ &= \sigma\mathcal{H}^2(S_u) + c\mathcal{H}^1(\mathbf{C}) \\ &< \sigma\mathcal{H}^2(S_u) + c\mathcal{H}^1(S_v) \\ &\leq \mathcal{E}_0(u, v). \end{aligned}$$

Em vista dos fatos expostos concluímos a demonstração. ■

2.5 Existência de Padrões

Nesta seção usamos os resultados obtidos ao longo deste capítulo para mostrarmos a existência de padrões para a família de equações de reação-difusão não-lineares, com diferentes escalas de difusibilidade no domínio e na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta u + f(u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nu} = \delta_\varepsilon g(u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (2.35)$$

Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ satisfaz as hipóteses da Seção 2.4, isto é localmente $\partial\Omega$ é uma superfície de revolução gerada pelo gráfico de uma função convexa. Suponhamos também que sejam válidas as condições (f₀) a (f₃) sobre as funções f e g .

O objetivo é usarmos o Teorema 2.7 para encontrar, inicialmente, mínimos do funcional energia definido em (2.3). Para isso é necessário mostrarmos que suas hipóteses são satisfeitas.

Verifiquemos que as funções F e G definidas em (2.4) são do tipo poço-duplo (como definimos no início deste capítulo). Condição esta, necessária para obtermos a equicoercividade de (2.5) no Teorema A.1.

Vejamos:

- F e G são de classe C^2 pois f e g são de classe C^1 .
- $F(\alpha) = 0 = F(\beta)$ e $G(\alpha) = 0 = G(\beta)$ pela hipótese (f₃) (condição de área).
- $F'(\alpha) = -f(\alpha) = 0$ e $F''(\alpha) = -f'(\alpha) > 0$, pela hipótese (f₁). Analogamente temos $F'(\beta) = 0$, $F''(\beta) > 0$ e as mesmas condições para G .
- Pelas hipóteses de crescimento dadas em (f₂) é fácil ver que existem constantes $c_i > 0, p_i \geq 2$ ($i = 1, 2$) tais que $c_1|t|^{p_1} \leq F(t), G(t) \leq c_2|t|^{p_2}$, para $|t| \geq t_0$, com t_0 suficientemente grande.
- Finalmente resta-nos verificar que $F \geq 0$ e $G \geq 0$.

Como as hipóteses sobre f e g são as mesmas mostremos apenas que $F \geq 0$.

Se $u \in (\beta, \infty)$, então

$$F(u) = - \int_{\beta}^u f(\xi) d\xi > 0,$$

pois $f < 0$ em (β, ∞) .

Para $u \in (-\infty, \alpha)$,

$$F(u) = - \int_{\alpha}^u f(\xi) d\xi = \int_u^{\alpha} f(\xi) d\xi > 0,$$

pois $f > 0$ em $(-\infty, \alpha)$.

Como $f > 0$ em $(0, \beta)$ e $f < 0$ em $(\alpha, 0)$, se $u \in (\alpha, \beta)$, então $u \in (\alpha, 0)$ ou $(0, \beta)$. Os mesmos cálculos anteriores podem ser usados para mostrar que $F > 0$ em (α, β) . Portanto, $F \geq 0$ em \mathbb{R} .

Uma vez que os potenciais são do tipo poço-duplo, pelo Apêndice A os funcionais \mathcal{E}_ε definidos em (2.5) são equicoercivos e, além disso, Γ -convergem para \mathcal{E}_0 definido em (2.6). Pelo Corolário 2.2 obtemos a existência de um mínimo local isolado para Γ -limite, que é dado por (2.17).

Assim, todas as hipóteses do Teorema 2.7 estão satisfeitas.

Portanto existe uma família de funções $\{u_\varepsilon, v_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} \subset \mathbb{L}^1(\Omega, \partial\Omega)$, que são mínimos locais de \mathcal{E}_ε e satisfazem

$$\|(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - (u_0, v_0)\|_{\mathbb{L}^1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.36)$$

Observação 2.7 Esta condição, em particular, nos mostra que u_ε é não-constante.

Teorema 2.9 *A família de funções $\{(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} \subset \mathbb{L}^1$ satisfaz*

- (i) $u_\varepsilon \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, é solução estacionária de (2.35) e $v_\varepsilon = u_\varepsilon|_{\partial\Omega}$.
- (ii) Para qualquer $x \in \overline{\Omega}$, $\alpha \leq u_\varepsilon(x) \leq \beta$.
- (iii) $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ em $L^1(\Omega)$ e $v_\varepsilon \rightarrow v_0$ em $L^1(\partial\Omega)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (iv) Para cada $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, u_ε é estável em $W^{1,p}(\Omega)$, para $p > 3$.

Demonstração: A demonstração do ítem (iii) decorre de (2.36).

No Capítulo 5 faremos uma demonstração semelhante a esta do ítem (ii), que é baseada no princípio do máximo, e por isso não a repetimos aqui.

Mostremos agora o ítem (i). Inicialmente afirmamos que u_ε é mínimo local de E_ε e, portanto, $v_\varepsilon = Tu_\varepsilon$. Com efeito, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ sendo mínimo local de \mathcal{E}_ε (na topologia de \mathbb{L}^1), devemos ter necessariamente que $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ e $v_\varepsilon = Tu_\varepsilon$, conforme a definição de \mathcal{E}_ε . Como $H^1(\Omega)$ e $H^{1/2}(\partial\Omega)$ estão continuamente imersos em $L^1(\Omega)$ e $L^1(\partial\Omega)$, respectivamente, existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^1(\Omega)} &\leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega) \\ \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} &\leq C_2 \|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad \forall v \in H^{1/2}(\partial\Omega). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Pelas propriedades do operador traço $T : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$, existe uma constante C_3 tal que

$$\|Tu\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C_3 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad (2.38)$$

para cada $u \in H^1(\Omega)$.

Assim, se $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ é mínimo local de \mathcal{E}_ε , existe $\delta' > 0$ tal que para qualquer $(u, v) \in \mathbb{L}^1$ satisfazendo

$$\|(u, v) - (u_\varepsilon, v_\varepsilon)\|_{\mathbb{L}^1} < \delta'$$

então

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq \mathcal{E}_\varepsilon(u, v). \quad (2.39)$$

Seja $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\|u - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} < \delta, \quad \delta = \frac{\delta'}{C_1 + (C_2 C_3)}. \quad (2.40)$$

Então por (2.37) e (2.38)

$$\begin{aligned} \|(u, Tu) - (u_\varepsilon, Tu_\varepsilon)\|_{\mathbb{L}^1} &= \|u - u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} + \|Tu - Tu_\varepsilon\|_{L^1(\partial\Omega)} \\ &\leq C_1 \|u - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + C_2 \|Tu - Tu_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \\ &\leq (C_1 + C_2 C_3) \|u - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} < \delta'. \end{aligned}$$

Assim, por (2.39)

$$\frac{2}{\varepsilon} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon, Tu_\varepsilon) \leq \mathcal{E}_\varepsilon(u, Tu) = \frac{2}{\varepsilon} E_\varepsilon(u).$$

Logo para qualquer $u \in H^1(\Omega)$ satisfazendo (2.40),

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E_\varepsilon(u),$$

o que nos mostra que u_ε é mínimo local para E_ε .

Ora, pontos críticos de E_ε são soluções fracas de (2.35). Usamos argumentos do tipo “bootstrap”, para concluir que u_ε é solução clássica de (2.35), isto é, $u_\varepsilon \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Isto conclui o ítem (i).

Como $u_\varepsilon \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, em particular, $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega)$. Da imersão contínua de $W^{1,p}(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$, obtemos que existe uma constante C_p tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_p \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega). \quad (2.41)$$

Mas u_ε é mínimo local de E_ε em $H^1(\Omega)$. Logo por (2.41) facilmente concluímos que u_ε também é mínimo local de E_ε restrito ao espaço $W^{1,p}(\Omega)$.

Observe que, para cada $\varepsilon > 0$ fixado, u_ε é uma solução estacionária de (5.1), com $a(x) = \varepsilon^2$, $b(x) = \varepsilon\delta_\varepsilon$. Assim podemos usar os resultados do Capítulo 5 para concluirmos a estabilidade de u_ε em $W^{1,p}(\Omega)$.

Apenas justificamos que mesmo se a hipótese (h_1) (no Capítulo 5) sobre a função g não for satisfeita ainda obtemos a estabilidade, pois esta hipótese não interfere na demonstração, como pode ser observado.

Concluimos assim o lema. ■

Capítulo 3

O papel da condição de igualdade de área na formação de camadas de transição interna e superficial

3.1 Apresentação do problema

Neste capítulo nosso objeto de estudo é a família de equações elípticas com condição de fronteira não-linear

$$\begin{cases} \varepsilon \operatorname{div}(a(x)\nabla v_\varepsilon) + f(x, v_\varepsilon) = 0, & x \in \Omega \\ \varepsilon a(x) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \hat{n}} = g(x, v_\varepsilon), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

sendo que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave de classe C^2 , denotado por $\partial\Omega$, \hat{n} é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ e $a \in C^1(\bar{\Omega})$, $a > 0$. Sejam $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ambas de classe C^1 , e suponhamos que existam $\alpha, \beta \in C^1(\bar{\Omega})$, com $\alpha(x) < \beta(x)$, tais que $g(x, \alpha(x)) = g(x, \beta(x)) = 0$, $\forall x \in \partial\Omega$, $f(x, \alpha(x)) = f(x, \beta(x)) = 0$, $\forall x \in \Omega$, e ε um pequeno parâmetro positivo.

Mais especificamente estamos interessados em determinar condições necessárias para que soluções de (3.1) desenvolvam camadas de transição interna e superficial (veja Definição 3.1).

No capítulo anterior apresentamos um exemplo de uma família de soluções de (3.1) com tal propriedade, para o caso em que $f(x, u) = f(u)$, $g(x, u) = g(u)$, $a \equiv 1$ e um pequeno parâmetro ε^2 . Uma das hipóteses para a existência dessas soluções é a condição de área para as funções f e g , ou seja, $\int_{\alpha}^{\beta} f = 0 = \int_{\alpha}^{\beta} g$. Um dos resultados deste presente capítulo mostra que a condição de área para as funções f e g também deve ser uma condição necessária para a existência dessas soluções, para certos valores de δ_{ε} .

Em [28], no caso em que $g \equiv 0$, foi mostrado, entre outras aplicações, que a condição de área $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f = 0\right)$ também é uma condição necessária para o desenvolvimento de camadas de transição internas.

Neste capítulo, entre outros resultados, mostramos que a generalização da condição de igualdade de área para as funções f e g , é uma condição necessária para que uma família de soluções de (3.1) desenvolva camadas de transição interna e superficiais.

Este resultado tem implicações imediatas na investigação dos mecanismos que produzem fenômenos de concentração para as soluções de (3.1). A saber, se uma das condições de igualdade de área para f ou g não for verificada, então entre as configurações geométricas mais simples possíveis para estas soluções, para valores pequenos do parâmetro, estão a formação de camadas de fronteira e/ou concentração em torno de um ponto interior ao domínio ou mesmo na fronteira.

3.2 Hipóteses e definições

Iniciamos com um conjunto de definições. Seja H uma superfície $(N-1)$ -dimensional de classe C^2 a qual intercepta $\bar{\Omega}$, dividindo-o em duas regiões Ω_{α} e Ω_{β} tais que $|\Omega_{\alpha}|_N > 0$ e $|\Omega_{\beta}|_N > 0$ ($|\cdot|_N$ denota a medida de Lebesgue

N-dimensional). Seja $S = H \cap \Omega \subsetneq H$, com $|H \setminus S|_\sigma > 0$ ($|\cdot|_\sigma$ denota a medida de superfície (N-1)-dimensional), e que H não intercepte a fronteira de Ω tangencialmente.

Observe que $\bar{S} = H \cap \bar{\Omega}$ é uma superfície (N-1)-dimensional compacta com bordo, de classe C^2 , cujo bordo denotado por Σ , é uma superfície (N-2)-dimensional compacta sem bordo.

Definimos uma vizinhança V de \bar{S} da seguinte forma:

Seja $W_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x) = \text{dist}(x, H) \leq \delta\}$, sendo que $\text{dist}(\cdot, H)$ é a função distância. Ou seja, W_δ é uma vizinhança tubular de H . Defina $V \stackrel{\text{def}}{=} W_\delta \cap \bar{\Omega}$, com δ escolhido suficientemente pequeno tal que as superfícies $K_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} d^{-1}\{\delta\} \cap \bar{\Omega}_\alpha = \{x \in \bar{\Omega}_\alpha : d(x) = \delta\}$ e $K_\beta \stackrel{\text{def}}{=} d^{-1}\{\delta\} \cap \bar{\Omega}_\beta$ também não interceptem o bordo de $\bar{\Omega}$ tangencialmente. Isto é possível pelas hipóteses sobre H . Note ainda que $K_\alpha = \overline{\partial V \cap \Omega_\alpha}$ e $K_\beta = \overline{\partial V \cap \Omega_\beta}$ são superfícies (N-1)-dimensionais de classe C^2 compactas com bordo, os quais denotaremos por C_α e C_β respectivamente, uma vez que H é suave.

Denotemos também $V_\alpha = V \cap \Omega_\alpha$, $V_\beta = V \cap \Omega_\beta$, $M_\alpha = \partial V_\alpha \cap \partial\Omega$ e $M_\beta = \partial V_\beta \cap \partial\Omega$. Observe que ∂V_α e ∂V_β são superfícies C^2 por partes e que $\partial V_\alpha = S \cup M_\alpha \cup K_\alpha$ e $\partial V_\beta = S \cup M_\beta \cup K_\beta$. Além disso, $\partial M_\alpha = C_\alpha \cup \Sigma$ e $\partial M_\beta = C_\beta \cup \Sigma$ (união disjunta). Veja abaixo uma ilustração para um caso particular de um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com a superfície S , juntamente com a ilustração de uma vizinhança de S .

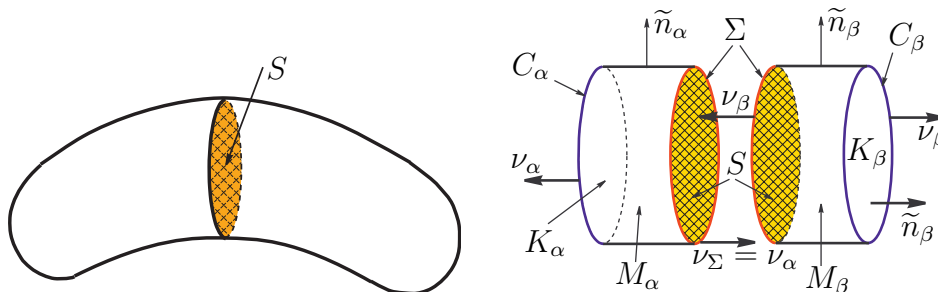


Figura 3.1: O domínio Ω com a vizinhança de S .

Seja $v_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que em \bar{V} ,

$$v_0 = \alpha\chi_{(V_\alpha \cup M_\alpha)} + \beta\chi_{(V_\beta \cup M_\beta)}, \quad (3.2)$$

na qual χ é a função característica do conjunto considerado.

Definição 3.1 Dizemos que uma família $\{v_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ de soluções de (3.1) em $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ desenvolve camadas de transição internas e superficiais, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, com interfaces S e Σ , se

$$v_\varepsilon|_V \longrightarrow v_0|_V \quad e \quad v_\varepsilon|_{\partial V \cap \partial\Omega} \longrightarrow v_0|_{\partial V \cap \partial\Omega}$$

em $L^1(V)$ e $L^1(\partial V \cap \partial\Omega)$, respectivamente, com v_0 dado por (3.2).

Observação 3.1 É importante salientar que todos os resultados mostrados neste capítulo valem se considerarmos a convergência das funções v_ε como uniforme em compactos $K \subset V \setminus S$ e $C \subset (\partial V \cap \partial\Omega) \setminus \Sigma$, uma vez que isso implica na convergência em L^1 . Mas até agora não conseguimos um exemplo de soluções satisfazendo estas condições. No caso em que $g \equiv 0$ é possível encontrarmos soluções com estas características. Em [9], os autores demonstraram que se $\{v_\varepsilon\}$ é uma seqüência de mínimos locais para certas classes de funcionais e v_ε converge em $L^1(V)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para a função v_0 então a convergência é uniforme em compactos $K \subset V \setminus S$.

Observação 3.2 Poderíamos começar o problema, aqui estudado, fixando a interface S como uma superfície suave compacta com bordo. Consideramos uma extensão de S , denotada por H , e tomamos uma vizinhança tubular adequada, como fizemos anteriormente, para que a vizinhança V satisfaça as propriedades desejadas. Mas isso poderia ser um problema, uma vez que a extensão de S não é única. Conseqüentemente V também pode mudar. Porém, como pode ser observado, ao longo das demonstrações utilizamos apenas o fato de V possuir fronteira C^2 por partes, as quais são compactas com bordo. Isto significa que, independente da extensão de S considerada, tomando uma vizinhança tubular adequada aos nossos propósitos o resultado também seguirá.

Lema 3.1 *Sejam $X \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $X = (X_1, \dots, X_N)$, um campo vetorial, $a \in C^1(\bar{\Omega})$ e $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Valem as seguintes relações:*

$$(a) \operatorname{div}[(X \cdot \nabla v)a(x)\nabla v] = X \cdot \nabla v \operatorname{div}(a(x)\nabla v) + a(x)\nabla v \cdot \nabla(X \cdot \nabla v)$$

$$(b) a(x)\nabla v \cdot \nabla(X \cdot \nabla v) = a(x)X \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla v|^2}{2} \right) + a(x) \left[\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right]$$

$$(c) \operatorname{div} \left(a(x)X \left(\frac{|\nabla v|^2}{2} \right) \right) = a(x)X \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla v|^2}{2} \right) + \frac{|\nabla v|^2}{2} (a(x) \operatorname{div} X + X \cdot \nabla a(x))$$

(d) *Existe uma constante $C = C(a, X, N) > 0$ tal que*

$$\left| a(x) \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right| < C|\nabla v|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Demonstração: As demonstrações dos itens (a), (b) e (c) são fáceis de verificar. Como $X \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $a \in C^1(\bar{\Omega})$, tanto $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ ($i, j = 1, \dots, N$) quanto a são uniformemente limitadas em $\bar{\Omega}$. Usando a relação

$$2 \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| \leq \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2,$$

segue o item (d).

Passemos agora ao resultado principal deste capítulo.

3.3 Desenvolvimento de camadas de transição

Teorema 3.1 *Seja $\{v_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ uma família de soluções de (3.1), uniformemente limitada em relação a ε , que desenvolve camadas de transição interna e superficial, com interface S e Σ , no sentido da Definição 3.1. Então*

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, \xi) d\xi = 0 = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} g(y, \zeta) d\zeta, \quad \forall x \in S, \quad \forall y \in \Sigma. \quad (3.3)$$

Demonstração: Por um momento suprimos o índice ε das funções v_ε . Seja $X \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ um campo vetorial tal que $X_y \in T_y \partial\Omega$, $y \in \partial\Omega$, sendo que $T_y \partial\Omega$ é o espaço tangente à $\partial\Omega$ no ponto y . Multiplicando a equação (3.1) por

$X \cdot \nabla v$, usando as relações do Lema 3.1 e integrando sobre V obtemos

$$\begin{aligned}
& - \varepsilon \int_V \operatorname{div}(X \cdot \nabla v a(x) \nabla v) dx - \varepsilon \int_V \frac{|\nabla v|^2}{2} (a(x) \operatorname{div} X + X \cdot \nabla a(x)) dx \\
& + \varepsilon \int_V \operatorname{div} \left(a(x) X \left(\frac{|\nabla v|^2}{2} \right) \right) dx + \varepsilon \int_V a(x) \left[\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right] dx \\
& = \int_V X \cdot \nabla v f(x, v) dx.
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Divergência vem que

$$\begin{aligned}
& - \varepsilon \int_{\partial V} X \cdot \nabla v a(x) \nabla v \cdot \tilde{n}_V d\sigma - \varepsilon \int_V \frac{|\nabla v|^2}{2} (a(x) \operatorname{div} X + X \cdot \nabla a(x)) dx \\
& + \varepsilon \int_{\partial V} a(x) \left(\frac{|\nabla v|^2}{2} \right) X \cdot \tilde{n}_V d\sigma + \varepsilon \int_V a(x) \left[\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right] dx \\
& = \int_V X \cdot \nabla v f(x, v) dx. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Das hipóteses sobre X tem-se que $X \cdot \tilde{n}_V = X \cdot \hat{n} = 0$ em $\partial V \cap \partial \Omega$.

Lembrando que $\varepsilon a(x) \nabla v \cdot \hat{n} = g(x, v)$, em $\partial V \cap \partial \Omega$, a equação (3.4) torna-se

$$\begin{aligned}
& - \varepsilon \int_{K_\alpha} \left(X \cdot \nabla v a(x) \nabla v \cdot \tilde{n}_\alpha - a(x) \frac{|\nabla v|^2}{2} X \cdot \tilde{n}_V \right) d\sigma \\
& - \varepsilon \int_{K_\beta} \left(X \cdot \nabla v a(x) \nabla v \cdot \tilde{n}_\beta - a(x) \frac{|\nabla v|^2}{2} X \cdot \tilde{n}_V \right) d\sigma \\
& - \varepsilon \int_V \frac{|\nabla v|^2}{2} (a(x) \operatorname{div} X + X \cdot \nabla a(x)) dx \\
& + \varepsilon \int_V a(x) \left[\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right] dx \\
& = \int_V X \cdot \nabla v f(x, v) dx + \int_{\partial V \cap \partial \Omega} X \cdot \nabla v g(x, v) d\sigma,
\end{aligned}$$

pois $|\Sigma|_\sigma = 0$ e $K_l = \partial V \cap \Omega_l$ ($l = \alpha, \beta$).

Denotemos por $\Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(x, X, a, v)$ a expressão do lado esquerdo desta última igualdade. Conseqüentemente a equação acima torna-se

$$\begin{aligned}
\Phi_\varepsilon &= \int_{V_\alpha} X \cdot \nabla_x F(x, v) dx - \int_{V_\alpha} \left[\int_\theta^{v(x)} X \cdot \nabla_x f(x, \xi) d\xi \right] dx \\
&+ \int_{V_\beta} X \cdot \nabla_x F(x, v) dx - \int_{V_\beta} \left[\int_\theta^{v(x)} X \cdot \nabla_x f(x, \xi) d\xi \right] dx \\
&+ \int_{M_\alpha} X \cdot \nabla_x G(x, v) d\sigma - \int_{M_\alpha} \left[\int_\rho^{v(x)} X \cdot \nabla_x g(x, \zeta) d\zeta \right] d\sigma \\
&+ \int_{M_\beta} X \cdot \nabla_x G(x, v) d\sigma - \int_{M_\beta} \left[\int_\rho^{v(x)} X \cdot \nabla_x g(x, \zeta) d\zeta \right] d\sigma, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

sendo que $G(x, v) = \int_\rho^{v(x)} g(x, \zeta) d\zeta$ e $F(x, v) = \int_\theta^{v(x)} f(x, \xi) d\xi$, com θ e ρ constantes arbitrárias. Usamos também que $\partial V \cap \partial\Omega = M_\alpha \cup M_\beta \cup \Sigma$, $V = V_\alpha \cup V_\beta \cup S$, $|S|_N = 0$ e $|\Sigma|_\sigma = 0$.

Temos que

$$\int_{V_\alpha} X \cdot \nabla F(x, v) dx = \int_{V_\alpha} \operatorname{div}(XF(x, v)) dx - \int_{V_\alpha} F(x, v) \operatorname{div}X dx$$

e, pelo Teorema da Divergência,

$$\int_{V_\alpha} X \cdot \nabla F(x, v) dx = \int_{\partial V_\alpha} F(x, v) X \cdot \tilde{n}_\alpha d\sigma - \int_{V_\alpha} F(x, v) \operatorname{div}X dx, \quad (3.6)$$

com \tilde{n}_α a normal exterior a $\partial V_\alpha = S \cup M_\alpha \cup K_\alpha$. Lembramos que $X \cdot \tilde{n}_\alpha = 0$ em M_α e $\tilde{n}_\alpha = \hat{n}_S$ em S . Assim a equação (3.6) torna-se

$$\begin{aligned}
\int_{V_\alpha} X \cdot \nabla F(x, v) dx &= \int_S F(x, v) X \cdot \hat{n}_S d\sigma + \int_{K_\alpha} F(x, v) X \cdot \tilde{n}_\alpha d\sigma \\
&- \int_{V_\alpha} F(x, v) \operatorname{div}X dx.
\end{aligned}$$

Analogamente para V_β temos

$$\begin{aligned}
\int_{V_\beta} X \cdot \nabla F(x, v) dx &= - \int_S F(x, v) X \cdot \hat{n}_S d\sigma + \int_{K_\beta} F(x, v) X \cdot \tilde{n}_\beta d\sigma \\
&- \int_{V_\beta} F(x, v) \operatorname{div}X dx,
\end{aligned}$$

pois $\tilde{n}_\beta = -\hat{n}_S$ em S , o que nos dá

$$\begin{aligned}
\int_{V_\alpha} X \cdot \nabla F(x, v) dx + \int_{V_\beta} X \cdot \nabla F(x, v) dx &= \int_{K_\alpha} F(x, v) X \cdot \tilde{n}_\alpha d\sigma \\
+ \int_{K_\beta} F(x, v) X \cdot \tilde{n}_\beta d\sigma - \int_{V_\alpha} F(x, v) \operatorname{div}X dx - \int_{V_\beta} F(x, v) \operatorname{div}X dx. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Faremos a seguir a decomposição do campo $\nabla_x G(x, v)$ na direção do espaço tangente a M_α e na direção normal. Esta decomposição servirá para utilizarmos uma versão do Teorema da Divergência em superfícies. Estes resultados podem ser encontrados, por exemplo, em [27, 34]. Mas faremos uma breve pausa para familiarizarmos o leitor com alguns deles.

Sejam M uma subvariedade de \mathbb{R}^N , de dimensão $N - 1$, $x \in M$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) uma função de classe C^1 em M .

Definição 3.2 Para cada $\tau \in T_x M$, a derivada direcional $D_\tau f \in \mathbb{R}^N$ é definida por $\frac{d(f(\gamma(t)))}{dt}|_{t=0}$, para cada curva $\gamma : (-1, 1) \rightarrow M$, de classe C^1 , tal que $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = \tau$. A aplicação linear induzida $df_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^N$ é definida por $df_x(\tau) = D_\tau f$, $\tau \in T_x M$. Em particular, quando $n = 1$ o gradiente $\nabla^M f$ é definido por

$$\nabla^M f(x) = \sum_{j=1}^{N-1} (D_{\tau_j} f) \tau_j,$$

com $\tau_1, \dots, \tau_{N-1}$ sendo qualquer base ortonormal para $T_x M$.

Denotamos $\nabla_j^M f \equiv e_j \cdot \nabla^M f$ (e_j é o j -ésimo vetor da base padrão do \mathbb{R}^N , $j = 1, \dots, N$). Então

$$\nabla^M f(x) = \sum_{j=1}^N \nabla_j^M f(x) e_j.$$

Se f é a restrição a M de uma função \bar{f} de classe $C^1(U)$, na qual U é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N contendo M , então

$$\nabla^M f(x) = (\nabla \bar{f}(x))^T, \quad x \in M,$$

sendo que $\nabla \bar{f}$ é o gradiente usual em \mathbb{R}^N e $(\nabla \bar{f})^T$ é componente ortogonal de $(\nabla \bar{f})$ na direção do espaço tangente $T_x M$.

Definição 3.3 Seja $X = (X^1, \dots, X^N) : M \rightarrow \mathbb{R}^N$, um campo vetorial com $X^j \in C^1(M)$ ($j = 1, \dots, N$). Definimos, para cada $x \in M$,

$$\operatorname{div}_M X = \sum_{j=1}^N \nabla_j^M X^j.$$

Então, para $x \in M$, temos que

$$\operatorname{div}_M X = \sum_{j=1}^N e_j \cdot \nabla^M X^j = \sum_{j=1}^N e_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{N-1} (D_{\tau_j} X^j) \tau_j \right),$$

e portanto (pois $X = \sum_{j=1}^N X^j e_j$)

$$\operatorname{div}_M X = \sum_{i=1}^{N-1} (D_{\tau_i} X) \cdot \tau_i,$$

em que $\tau_1, \dots, \tau_{N-1}$ é qualquer base ortonormal para $T_x M$.

Teorema 3.2 (*Teorema da Divergência*) *Se \overline{M} (o fecho de M) é uma subvariedade suave, compacta com bordo ∂M , e se $X_x \in T_x M$, para cada $x \in M$, então*

$$\int_M \operatorname{div}_M X_x d\mathcal{H}^{N-1} = - \int_{\partial M} X_x \cdot \eta_x dH^{N-2},$$

com η_x sendo a co-normal unitária interior à ∂M no ponto x .

Observação 3.3 M não precisa necessariamente ser orientável.

Após estas breves definições voltemos nossa atenção para nosso objetivo.

Para cada $x \in M_\alpha$, temos

$$\nabla_x G(x, v) = \nabla^{M_\alpha} G(x, v) + \langle \nabla_x G(x, v), \tilde{n}_\alpha \rangle \tilde{n}_\alpha,$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual. Assim

$$\begin{aligned} X \cdot \nabla_x G(x, v) &= X \cdot \nabla^{M_\alpha} G(x, v) + \langle \nabla_x G(x, v), \tilde{n}_\alpha \rangle X \cdot \tilde{n}_\alpha \\ &= X \cdot \nabla^{M_\alpha} G(x, v), \end{aligned} \tag{3.8}$$

pois $X \cdot \tilde{n}_\alpha = 0$. Além disso,

$$\operatorname{div}_{M_\alpha}(G(x, v)X) = X \cdot \nabla^{M_\alpha} G(x, v) + G(x, v) \operatorname{div}_{M_\alpha} X.$$

Então temos,

$$\int_{M_\alpha} X \cdot \nabla_x G(x, v) d\sigma = \int_{M_\alpha} \operatorname{div}_{M_\alpha}(G(x, v)X) d\sigma - \int_{M_\alpha} G(x, v) \operatorname{div}_{M_\alpha} X d\sigma.$$

Pelo Teorema da Divergência segue que

$$\begin{aligned} \int_{M_\alpha} X \cdot \nabla_x G(x, v) d\sigma &= \int_{\partial M_\alpha} G(x, v) X \cdot \nu_\alpha d\tau - \int_{M_\alpha} G(x, v) \operatorname{div}_{M_\alpha} X d\sigma \\ &= \int_{C_\alpha} G(x, v) X \cdot \nu_\alpha d\tau + \int_{\Sigma} G(x, v) X \cdot \nu_\Sigma d\tau - \int_{M_\alpha} G(x, v) \operatorname{div}_{M_\alpha} X d\sigma, \end{aligned} \quad (3.9)$$

sendo que ν_α é o vetor co-normal unitário exterior a ∂M_α , isto é, $|\nu_\alpha| = 1$ e $\nu_\alpha(y) \in T_y \partial\Omega$, $y \in \partial\Omega$, com $\partial M_\alpha = C_\alpha \cup \Sigma$ (união disjunta) e, em Σ , $\nu_\alpha = \nu_\Sigma$. Além disso τ denota a medida de superfície (N-2)-dimensional.

Observação 3.4 Sem perda de generalidade podemos supor que ν_Σ aponta na direção de Ω_β . Veja figura 3.1.

Analogamente para M_β

$$\begin{aligned} \int_{M_\beta} X \cdot \nabla_x G(x, v) d\sigma &= \int_{C_\beta} G(x, v) X \cdot \nu_\beta d\tau - \int_{\Sigma} G(x, v) X \cdot \nu_\Sigma d\tau \\ &\quad - \int_{M_\beta} G(x, v) \operatorname{div}_{M_\beta} X d\sigma, \end{aligned} \quad (3.10)$$

pois em Σ , $\nu_\beta = -\nu_\Sigma$.

Portanto, pelas equações (3.9) e (3.10) vem que

$$\begin{aligned} \int_{M_\alpha} X \cdot \nabla_x G(x, v) d\sigma + \int_{M_\beta} X \cdot \nabla_x G(x, v) d\sigma &= \int_{C_\beta} G(x, v) X \cdot \nu_\beta d\tau \\ + \int_{C_\alpha} G(x, v) X \cdot \nu_\alpha d\tau - \int_{M_\alpha} G(x, v) \operatorname{div}_{M_\alpha} X d\sigma &- \int_{M_\beta} G(x, v) \operatorname{div}_{M_\beta} X d\sigma. \end{aligned} \quad (3.11)$$

A partir de agora voltamos a colocar o índice ε nas funções v_ε .

Por hipótese, $v_\varepsilon|_V \rightarrow v_0|_V$ em $L^1(V)$ e $v_\varepsilon|_{\partial V} \rightarrow v_0|_{\partial V}$ em $L^1(\partial V \cap \partial\Omega)$. Passando duas vezes para subsequências se necessário, temos que $v_\varepsilon|_V \rightarrow v_0|_V$ qtp em V e $v_\varepsilon|_{\partial V} \rightarrow v_0|_{\partial V}$ qtp em $\partial V \cap \partial\Omega$.

O objetivo é analisarmos o comportamento das equação (3.5), juntamente com a substituição das equações (3.7) e (3.11), quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Afirmamos que $\Phi_\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Assumimos este fato por hora (pois estes cálculos envolvem maiores cuidados) e calculemos este limite nas equações (3.7) e (3.11).

Como $\{v_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ é uniformemente limitada em ε e F e G são de classe C^1 , as seqüências $\{F(x, v_\varepsilon)\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ e $\{G(x, v_\varepsilon)\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ são uniformemente limitadas em ε , para todo $x \in \Omega$ e $x \in \partial\Omega$, respectivamente. Além disso, $v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v_0$ qtp em V . Como $X \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, pelo Teorema da Convergência Dominada obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V_\alpha} F(x, v_\varepsilon) \operatorname{div} X \, dx &= \int_{V_\alpha} F(x, \alpha) \operatorname{div} X \, dx \\ &= \int_{V_\alpha} \operatorname{div}(F(x, \alpha) X) \, dx - \int_{V_\alpha} X \cdot \nabla F(x, \alpha) \, dx \\ &= \int_{\partial V_\alpha} F(x, \alpha) X \cdot \tilde{n}_\alpha \, d\sigma - \int_{V_\alpha} X \cdot \nabla F(x, \alpha) \, dx \\ &= \int_{K_\alpha} F(x, \alpha) X \cdot \tilde{n}_\alpha \, d\sigma + \int_S F(x, \alpha) X \cdot \hat{n}_S \, d\sigma \\ &\quad - \int_{V_\alpha} X \cdot \nabla F(x, \alpha) \, dx. \end{aligned}$$

Na penúltima igualdade utilizamos o Teorema da Divergência e em seguida o fato que $X \cdot \tilde{n}_\alpha = X \cdot \hat{n} = 0$ em $\partial V_\alpha \cap \partial\Omega$.

Aplicamos agora o Teorema da Convergência Dominada para as medidas de superfícies em K_α , M_α e C_α e obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{K_\alpha} F(x, v_\varepsilon) X \cdot \tilde{n}_\alpha \, d\sigma &= \int_{K_\alpha} F(x, \alpha) X \cdot \tilde{n}_\alpha \, d\sigma, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{M_\alpha} G(x, v_\varepsilon) \operatorname{div}_{M_\alpha} X \, d\sigma &= \int_{M_\alpha} G(x, \alpha) \operatorname{div}_{M_\alpha} X \, d\sigma, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\alpha} G(x, v_\varepsilon) X \cdot \nu_\alpha \, d\tau &= \int_{C_\alpha} G(x, \alpha) X \cdot \nu_\alpha \, d\tau. \end{aligned}$$

Note que podemos repetir os argumentos para V_β , K_β , M_β e C_β (lembramos apenas a direção adotada na Observação 3.4) para obtermos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V_\beta} F(x, v_\varepsilon) \operatorname{div} X \, dx &= \int_{K_\beta} F(x, \beta) X \cdot \tilde{n}_\beta \, d\sigma - \int_S F(x, \beta) X \cdot \hat{n}_S \, d\sigma \\ &\quad - \int_{V_\beta} X \cdot \nabla F(x, \beta) \, dx, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{K_\beta} F(x, v_\varepsilon) X \cdot \tilde{n}_\alpha \, d\sigma &= \int_{K_\beta} F(x, \beta) X \cdot \tilde{n}_\beta \, d\sigma, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{M_\beta} G(x, v_\varepsilon) \operatorname{div}_{M_\beta} X \, d\sigma &= \int_{M_\beta} G(x, \beta) \operatorname{div}_{M_\beta} X \, d\sigma \end{aligned}$$

e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\beta} G(x, v_\varepsilon) X \cdot \nu_\beta d\tau = \int_{C_\beta} G(x, \beta) X \cdot \nu_\beta d\tau.$$

Não é difícil verificarmos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V_\alpha} \left[\int_\theta^{v_\varepsilon(x)} X \cdot \nabla_x f(x, \xi) d\xi \right] dx = \int_{V_\alpha} X \cdot \nabla_x F(x, \alpha) dx,$$

pois $f(x, \alpha) = 0$, e

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{M_\alpha} \left[\int_\rho^{v_\varepsilon(x)} X \cdot \nabla_x g(x, \zeta) d\zeta \right] d\sigma &= \int_{M_\alpha} X \cdot \nabla_x G(x, \alpha) d\sigma \\ &= \int_{M_\alpha} X \cdot \nabla^{M_\alpha} G(x, \alpha) d\sigma, \end{aligned}$$

pois $g(x, \alpha) = 0$. Na última igualdade utilizamos (3.8).

Como

$$\operatorname{div}_{M_\alpha}(XG(x, \alpha)) = G(x, \alpha)\operatorname{div}_{M_\alpha}X + X \cdot \nabla^{M_\alpha}G(x, \alpha),$$

usamos o Teorema da Divergência uma vez mais para obtermos

$$\begin{aligned} \int_{M_\alpha} X \cdot \nabla^{M_\alpha}G(x, \alpha) d\sigma &= \int_\Sigma G(x, \alpha)X \cdot \nu_\Sigma d\tau + \int_{C_\alpha} G(x, \alpha)X \cdot \nu_\alpha d\tau \\ &\quad - \int_{M_\alpha} G(x, \alpha)\operatorname{div}_{M_\alpha}X d\sigma. \end{aligned}$$

Analogamente para V_β e M_β , com o cuidado de notar a direção adotada na Observação (3.4), vem que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V_\beta} \left[\int_\theta^{v_\varepsilon(x)} X \cdot \nabla_x f(x, \xi) d\xi \right] dx = \int_{V_\beta} X \cdot \nabla_x F(x, \beta) dx,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{M_\beta} \left[\int_\rho^{v_\varepsilon(x)} X \cdot \nabla_x g(x, \zeta) d\zeta \right] d\sigma = \int_{M_\beta} X \cdot \nabla^{M_\beta}G(x, \beta) d\sigma,$$

e

$$\begin{aligned} \int_{M_\beta} X \cdot \nabla^{M_\beta}G(x, \beta) d\sigma &= - \int_\Sigma G(x, \beta)X \cdot \nu_\Sigma d\tau + \int_{C_\beta} G(x, \beta)X \cdot \nu_\beta d\tau \\ &\quad - \int_{M_\beta} G(x, \beta)\operatorname{div}_{M_\beta}X d\sigma. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Portanto, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ na equação (3.5) e pelas equações (3.7) a (3.12) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S F(x, \beta) X \cdot \hat{n}_S d\sigma - \int_S F(x, \alpha) X \cdot \hat{n}_S d\sigma \\ &\quad + \int_\Sigma G(x, \beta) X \cdot \nu_\Sigma d\tau - \int_\Sigma G(x, \alpha) X \cdot \nu_\Sigma d\tau \\ &= \int_S \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, \xi) d\xi \right] X \cdot \hat{n}_S d\sigma + \int_\Sigma \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, \zeta) d\zeta \right] X \cdot \nu_\Sigma d\tau. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para verificarmos que esta última expressão implica (3.3) consideremos o funcional $\Lambda : C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\Lambda(X) = \int_S \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, \xi) d\xi \right] X \cdot \hat{n}_S d\sigma + \int_\Sigma \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, \zeta) d\zeta \right] X \cdot \nu_\Sigma d\tau.$$

Então para qualquer $\bar{X} \in \mathcal{C} = \{X \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) : X(y) \in T_y \partial\Omega\}$ temos

$$\Lambda(\bar{X}) = 0, \quad (3.14)$$

pela expressão (3.13).

É fácil ver que, fixado $X \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$,

$$\Lambda'(X)Y = \int_S \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, \xi) d\xi \right] Y \cdot \hat{n}_S d\sigma + \int_\Sigma \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, \zeta) d\zeta \right] Y \cdot \nu_\Sigma d\tau,$$

para qualquer $Y \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

Assim, fixado $\bar{X} \in \mathcal{C}$ e $Y \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, com $\text{supp } Y \subset \Omega$, o campo $\bar{X} + tY \in \mathcal{C}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Logo por (3.14)

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(\bar{X} + tY) - \Lambda(\bar{X})}{t} = \Lambda'(\bar{X})Y = \int_S \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, \xi) d\xi \right] Y \cdot \hat{n}_S d\sigma,$$

pois $Y|_{\partial\Omega} = 0$.

Suponhamos que exista $x_0 \in S$ tal que $\int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f(x_0, \xi) d\xi \neq 0$. Então existe um aberto $A \subset \mathbb{R}^N$ (e podemos supor sem perda de generalidade) tal que

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, \xi) d\xi > 0, \quad \forall x \in A \cap S.$$

Escolha $\bar{Y} \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que $\bar{Y}|_S = \hat{n}_S$ (veja [38], por exemplo, campos com estas propriedades). Sejam U um aberto em \mathbb{R}^N tal que $U \subset$

$A \cap \Omega$, $U \cap S \neq \emptyset$, e $\eta \in C_c^2(U)^1$ satisfazendo $0 \leq \eta \leq 1$ e $\eta \equiv 1$ em $B \subset\subset U$, tal que $B \cap S \neq \emptyset$.

Defina $Y = \eta \bar{Y}$. Então $Y \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $\text{supp } Y \subset \Omega$ e, assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda'(\bar{X})Y = \int_S \left[\int_\alpha^\beta f(x, \xi) d\xi \right] Y \cdot \hat{n}_S d\sigma \\ &= \int_{U \cap S} \left[\int_\alpha^\beta f(x, \xi) d\xi \right] \eta \bar{Y} \cdot \hat{n}_S d\sigma \\ &\geq \int_{B \cap S} \left[\int_\alpha^\beta f(x, \xi) d\xi \right] \eta d\sigma = \int_{B \cap S} \left[\int_\alpha^\beta f(x, \xi) d\xi \right] d\sigma > 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Portanto

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, \xi) d\xi = 0, \quad \forall x \in S.$$

Conseqüentemente,

$$\Lambda'(\bar{X})Y = \int_\Sigma \left[\int_\alpha^\beta g(x, \zeta) d\zeta \right] Y \cdot \nu_\Sigma d\tau = 0, \quad \forall \bar{X} \in \mathcal{C} \text{ e } Y \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N).$$

Se existe $x_0 \in \Sigma$ tal que $\int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} g(x, \zeta) d\zeta \neq 0$, um argumento semelhante ao que fizemos anteriormente nos leva a uma contradição. Portanto

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, \zeta) d\zeta = 0, \quad \forall x \in \Sigma.$$

Mostremos agora que $\Phi_\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Relembremos a definição de Φ_ε :

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon &= -\varepsilon \int_{K_\alpha} \left(X \cdot \nabla v_\varepsilon a(x) \nabla v_\varepsilon \cdot \tilde{n}_\alpha - a(x) \frac{|\nabla v_\varepsilon|^2}{2} X \cdot \tilde{n}_\alpha \right) d\sigma \\ &\quad -\varepsilon \int_{K_\beta} \left(X \cdot \nabla v_\varepsilon a(x) \nabla v_\varepsilon \cdot \tilde{n}_\beta - a(x) \frac{|\nabla v_\varepsilon|^2}{2} X \cdot \tilde{n}_\beta \right) d\sigma \\ &\quad -\varepsilon \int_V \frac{|\nabla v_\varepsilon|^2}{2} (a(x) \text{div} X + X \cdot \nabla a(x)) dx \\ &\quad +\varepsilon \int_V a(x) \left[\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} \right) \right] dx. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Afirmamos que é suficiente mostrarmos que

$$\varepsilon C \int_{K_l} |\nabla v_\varepsilon|^2 d\sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (l = \alpha, \beta) \tag{3.16}$$

¹ $C_c^2(U) = \{\phi \in C^2(U) : \text{supp}(\phi) \subset U\}$

e

$$\varepsilon C \int_V |\nabla v_\varepsilon|^2 dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (3.17)$$

sendo que C é uma constante positiva independente de ε .

De fato, pelas hipóteses sobre a e X é possível encontrarmos $C_1 > 0$ tal que

$$|a(x)\operatorname{div}X + X \cdot \nabla a(x)| \leq C_1, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Além disso, pelo Lema 3.1, para $\{v_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ existe $C_2 > 0$, $C_2 = C_2(\alpha, X, N)$ tal que

$$\left| a(x) \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} \right) \right| < C_2 |\nabla v_\varepsilon|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Conseqüentemente podemos limitar os dois últimos termos do lado direito da equação (3.15) por $\varepsilon C_3 \int_V |\nabla v_\varepsilon|^2 dx$, para alguma constante $C_3 > 0$, $C_3 = C_3(a, X, N)$.

Da mesma forma é possível encontrarmos uma constante $C_4 > 0$ tal que

$$\left| X \cdot \nabla v_\varepsilon a(x) \nabla v_\varepsilon \cdot \tilde{n}_j - a(x) \frac{|\nabla v_\varepsilon|^2}{2} X \cdot \tilde{n}_j \right| < C_4 |\nabla v_\varepsilon|^2, \quad \forall x \in \bar{K}_l \quad (l = \alpha, \beta).$$

Logo os dois primeiros termos do lado direito da equação (3.15) podem ser limitados superiormente por $\varepsilon C_4 \int_{K_l} |\nabla v_\varepsilon|^2 d\sigma$ ($l = \alpha, \beta$).

Assim concluímos a afirmação.

Mostremos primeiro (3.17).

Multiplicando a equação (3.1) por v_ε e integrando por partes em V obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_V a(x) |\nabla v_\varepsilon|^2 dx &= \int_V v_\varepsilon f(x, v_\varepsilon) dx + \varepsilon \int_{\partial V} v_\varepsilon a(x) \nabla v_\varepsilon \cdot \tilde{n}_V d\sigma \\ &= \int_V v_\varepsilon f(x, v_\varepsilon) dx + \varepsilon \int_{\partial V \cap \partial \Omega} v_\varepsilon g(x, v_\varepsilon) d\sigma \\ &\quad + \varepsilon \int_{K_\alpha} a(x) v_\varepsilon \nabla v_\varepsilon \cdot \hat{n}_\alpha d\sigma + \varepsilon \int_{K_\beta} a(x) v_\varepsilon \nabla v_\varepsilon \cdot \hat{n}_\beta d\sigma. \end{aligned}$$

Por hipótese, a função a é positiva e limitada. Assim existe $C_5 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_V |\nabla v_\varepsilon|^2 dx \leq C_5 \left[\int_V |v_\varepsilon| |f(x, v_\varepsilon)| dx + \int_{\partial V \cap \partial \Omega} |v_\varepsilon| |g(x, v_\varepsilon)| d\sigma \right. \\ \left. + \varepsilon \int_{K_\alpha} |v_\varepsilon| |\nabla v_\varepsilon| d\sigma + \varepsilon \int_{K_\beta} |v_\varepsilon| |\nabla v_\varepsilon| d\sigma \right]. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Como por hipótese $\{v_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ é uniformemente limitada em ε , f e g são contínuas, $\{f(x, v_\varepsilon)\}_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$, $\{g(x, v_\varepsilon)\}_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$ são uniformemente limitadas em ε . Além disso, $v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v_0$ qtp em V e $\partial V \cap \partial \Omega$. Portanto, $f(x, v_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x, v_0) = 0$, $g(x, v_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g(x, v_0) = 0$ qtp em V e $\partial V \cap \partial \Omega$, respectivamente. Então, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, com as respectivas medidas, concluímos que os dois primeiros termos do lado direito da desigualdade (3.18) tendem a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Para demonstrarmos que os outros dois últimos termos da desigualdade (3.18) tendem a zero, quando ε tende a zero, necessitamos de mais alguns resultados. Mostremos para a superfície K_α . O mesmo raciocínio se aplica à superfície K_β .

Fixe $x_0 \in \text{int}(K_\alpha) = K_\alpha \cap \Omega_\alpha$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x_0 = 0$. Como $x_0 \in \Omega_\alpha$, existe $\rho > 0$ tal que $B_{2\rho} = B(x_0, 2\rho) \subset \subset \Omega_\alpha$.

Definimos

$$w_\varepsilon(z) = v_\varepsilon(\varepsilon^{1/2}z), \quad z \in \overline{B_{\rho/\varepsilon^{1/2}}}.$$

Então para ε suficientemente pequeno, w_ε satisfaz em $B_{\rho/\varepsilon^{1/2}}$,

$$\tilde{a}(z)\Delta w_\varepsilon(z) + \nabla_z \tilde{a}(z) \cdot \nabla_z w_\varepsilon(z) = \tilde{f}(z, w_\varepsilon(z)),$$

sendo que $\tilde{a}(z) = a(\varepsilon^{1/2}z)$ e $\tilde{f}(z, w_\varepsilon(z)) = -f(\varepsilon^{1/2}z, v_\varepsilon(\varepsilon^{1/2}z))$.

Para cada $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ temos $B_{\rho/\varepsilon_0^{1/2}} \subset \subset B_{\rho/\varepsilon^{1/2}}$. Como $\{v_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ é contínua e uniformemente limitada em ε , segue que $\{w_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ também é contínua e uniformemente limitada em $B_{\rho/\varepsilon_0^{1/2}}$. Além disso, $\tilde{a}(z)$, $\nabla_z \tilde{a}(z)$ e \tilde{f} são uniformemente limitadas em $B_{\rho/\varepsilon_0^{1/2}}$, pelas hipóteses sobre a e f . Assim,

pelo Corolário (6.3) de [17], existe $C_6 > 0$, independente de w_ε , tal que

$$|\nabla_z w_\varepsilon(z)| \leq C_6,$$

para todo $z \in B_{\rho/2\varepsilon_0^{1/2}}$. Mas

$$|\nabla_z w_\varepsilon(z)| = |\nabla_z w_\varepsilon(x\varepsilon^{-1/2})| = \varepsilon^{1/2} |\nabla_x v_\varepsilon(x)|,$$

para todo $x \in B_{\rho/2}$.

Logo, para cada $x \in B_{\rho/2}$,

$$\varepsilon |\nabla v_\varepsilon(x)| = \varepsilon^{1/2} \varepsilon^{1/2} |\nabla v_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon^{1/2} C_6 \longrightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Em particular

$$\varepsilon |\nabla v_\varepsilon(x_0)| \longrightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pelo Teorema 2.1 do Capítulo 10 de [22], existe $C_7 = C_7(\Omega, N, a, g)$

tal que

$$\varepsilon |\nabla v_\varepsilon| \leq C_7,$$

para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $x \in \bar{\Omega}$.

Portanto, usando novamente o Teorema da Convergência Dominada para medida de superfícies e lembrando que $\{v_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ é uniformemente limitada em ε , obtemos que

$$\varepsilon \int_{K_\alpha} |v_\varepsilon| |\nabla v_\varepsilon| d\sigma \longrightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Disto concluímos que os dois últimos termos do lado direito da desigualdade (3.18) também tendem a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Assim, segue que

$$\varepsilon C \int_V |\nabla v_\varepsilon|^2 dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (3.19)$$

sendo C uma constante positiva que não depende de ε . Isso demonstra (3.17).

Demonstremos agora a afirmação feita em (3.16).

Lembramos que $W_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x) = \text{dist}(x, H) \leq \delta\}$. Definimos $W_{l,\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{V}_l \cap W_\delta$ ($l = \alpha, \beta$).

Temos que d é Lipschitz contínua e, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, $|\nabla d| = 1$ qtp em W_δ . Lembramos também que $K_l = d^{-1}\{\delta\} \cap \overline{\Omega}_l$ ($l = \alpha, \beta$) e, para cada $t \in [0, \delta]$, o conjunto

$$W_{l,\delta}^t = \{x \in W_{l,\delta} : d(x) = t\} \quad (l = \alpha, \beta)$$

é uma superfície suave (N-1)-dimensional, pois por hipótese H é suave.

Assim, pela fórmula da co-área (veja [15, 16]) temos que

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \left\{ \varepsilon \int_{W_{l,\delta}^t} |\nabla v_\varepsilon|^2 d\sigma \right\} dt &= \varepsilon \int_{W_{l,\delta}} |\nabla v_\varepsilon|^2 |\nabla d| dx = \varepsilon \int_{W_{l,\delta}} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx \\ &\leq \varepsilon \int_V |\nabla v_\varepsilon|^2 dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (l = \alpha, \beta), \end{aligned}$$

conforme (3.19). Conseqüentemente,

$$\varepsilon \int_{W_{l,\delta}^t} |\nabla v_\varepsilon|^2 d\sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \text{ para quase todo } t \in [0, \delta] \quad (l = \alpha, \beta). \quad (3.20)$$

Portanto podemos concluir, sem perda de generalidade, que

$$\varepsilon \int_{W_{l,\delta}^\delta} |\nabla v_\varepsilon|^2 d\sigma = \varepsilon \int_{K_l} |\nabla v_\varepsilon|^2 d\sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (l = \alpha, \beta).$$

De fato, como o conjunto $\{t \in [0, \delta] : \text{não vale (3.20)}\}$ tem medida nula, é possível encontrarmos t_0 suficientemente próximo de δ , para o qual vale (3.20). Então escolhemos nossa vizinhança tubular de H , com $\delta = t_0$. ■

3.4 Decorrências

Para encerrarmos este capítulo apresentamos como corolário, alguns resultados decorrentes das demonstrações feitas no Teorema 3.1, envolvendo a seguinte família de equações semi-lineares elípticas

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \text{div}(a(x)\nabla v_\varepsilon) + f(x, v_\varepsilon) = 0, & x \in \Omega \\ \varepsilon^2 a(x) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \hat{n}} = \lambda_\varepsilon g(x, v_\varepsilon), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.21)$$

Suponhamos que Ω , a , f e g satisfazem as mesmas hipóteses descritas no início deste capítulo.

É importante ressaltarmos que entre os resultados apresentados a seguir está a condição necessária para que uma família de soluções estacionárias do problema (2.1) desenvolva camadas de transição interna e superficial, esta condição é justamente a condição de área que deve ser satisfeita ora para a função f , ora para função g , ou mesmo para ambas, dependendo da escala δ_ε . Estes resultados também são, entre outros, contribuições deste trabalho.

Corolário 3.1 *Suponhamos que exista uma família $\{v_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$, soluções de (3.21), uniformemente limitada em relação a ε , desenvolvendo camadas de transição interna e superficial, com interface S e Σ , no sentido da Definição 3.1. Valem as seguintes relações:*

(a) *Se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon = 0$ então*

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, \xi) d\xi = 0, \quad \forall x \in S. \quad (3.22)$$

(b) *Se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon = \infty$ então*

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, \zeta) d\zeta = 0, \quad \forall x \in \Sigma. \quad (3.23)$$

(c) *Se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon = k$, $0 < k < \infty$, então*

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, \xi) d\xi = 0 = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} g(y, \zeta) d\zeta, \quad \forall x \in S, \quad \forall y \in \Sigma. \quad (3.24)$$

Demonstração: As demonstrações de cada item seguem a mesma seqüência das demonstrações envolvidas no Teorema 3.1. Por isso fazemos apenas alguns comentários norteando as eventuais mudanças e não a repetimos aqui.

Demonstração de (a): Usando o mesmo argumento inicial na demonstração do teorema chegamos na seguinte expressão

$$\begin{aligned}
& - \varepsilon^2 \int_{K_\alpha} \left(X \cdot \nabla v a(x) \nabla v \cdot \tilde{n}_\alpha - a(x) \frac{|\nabla v|^2}{2} X \cdot \tilde{n}_V \right) d\sigma \\
& - \varepsilon^2 \int_{K_\beta} \left(X \cdot \nabla v a(x) \nabla v \cdot \tilde{n}_\beta - a(x) \frac{|\nabla v|^2}{2} X \cdot \tilde{n}_V \right) d\sigma \\
& - \varepsilon^2 \int_V \frac{|\nabla v|^2}{2} (a(x) \operatorname{div} X + X \cdot \nabla a(x)) dx \\
& + \varepsilon^2 \int_V a(x) \left[\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right] dx \\
& = \int_V X \cdot \nabla v f(x, v) dx + \lambda_\varepsilon \int_{\partial V \cap \partial \Omega} X \cdot \nabla v g(x, v) d\sigma. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Os mesmos cálculos anteriores (relembre a definição de Φ_ε em (3.5)) mostra que, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, o lado esquerdo da equação acima é igual 0. Agora do lado direito, com este limite, a primeira integral nos dá (3.22). Já a segunda integral também tende a zero, pelas nossas hipóteses sobre g , as funções v_ε e λ_ε .

Demonstração de (b): Inicialmente observe que se v_ε é solução de (3.21), então v_ε também é solução de

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} \operatorname{div}(a(x) \nabla v_\varepsilon) + \frac{1}{\lambda_\varepsilon} f(x, v_\varepsilon) = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} a(x) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \tilde{n}} = g(x, v_\varepsilon), & x \in \partial \Omega. \end{cases}$$

Usamos as técnicas do início do teorema e obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
& - \frac{\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} \int_{K_\alpha} \left(X \cdot \nabla v a(x) \nabla v \cdot \tilde{n}_\alpha - a(x) \frac{|\nabla v|^2}{2} X \cdot \tilde{n}_V \right) d\sigma \\
& - \frac{\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} \int_{K_\beta} \left(X \cdot \nabla v a(x) \nabla v \cdot \tilde{n}_\beta - a(x) \frac{|\nabla v|^2}{2} X \cdot \tilde{n}_V \right) d\sigma \\
& - \frac{\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} \int_V \frac{|\nabla v|^2}{2} (a(x) \operatorname{div} X + X \cdot \nabla a(x)) dx \\
& + \frac{\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} \int_V a(x) \left[\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right] dx \\
& = \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \int_V X \cdot \nabla v f(x, v) dx + \int_{\partial V \cap \partial \Omega} X \cdot \nabla v g(x, v) d\sigma.
\end{aligned}$$

Pela hipótese sobre λ_ε temos que $\frac{\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} \rightarrow 0$ e $\frac{1}{\lambda_\varepsilon} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Com isso, repetimos os mesmos argumentos, agora para esta equação e, assim, concluímos o item (b).

Demonstração de (c): Este último item decorre do item (a). Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ na equação (3.25) e utilizando os cálculos do teorema (quando obtemos as equações (3.7) a (3.12), mas agora tomamos o cuidado de levar em consideração a hipótese sobre λ_ε) chegamos a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S F(x, \beta) X \cdot \hat{n}_S d\sigma - \int_S F(x, \alpha) X \cdot \hat{n}_S d\sigma \\ &\quad + k \int_\Sigma G(x, \beta) X \cdot \nu_\Sigma d\tau - k \int_\Sigma G(x, \alpha) X \cdot \nu_\Sigma d\tau \\ &= \int_S \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, \xi) d\xi \right] X \cdot \hat{n}_S d\sigma + k \int_\Sigma \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, \zeta) d\zeta \right] X \cdot \nu_\Sigma d\tau, \end{aligned}$$

e isto implica (com os restantes dos argumentos do teorema) o item (c). Concluimos assim o corolário. ■

Capítulo 4

A influência da geometria do domínio na existência de padrões

4.1 Apresentação do problema

Neste capítulo apresentamos uma condição necessária para a existência de padrões para a seguinte equação de reação-difusão, com reações não-lineares no domínio e na fronteira, respectivamente, dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Esta questão, sobre a existência (ou inexistência) de padrões para equações de reação-difusão, teve trabalhos precursores na década de 70. Diversos trabalhos abordaram este tema.

Podemos caracterizar condições necessárias para a existência de padrões através de um estudo do comportamento das funções f e g simplesmente. Ou ainda, podemos descrever características sobre a geometria do domínio. É justamente neste sentido que tratamos este capítulo.

Diversos autores abordaram a influência geométrica do domínio para

a existência de padrões. Entre eles destacamos, [24, 10, 11]. Os dois primeiros trabalhos mostram que se $g = 0$ e Ω é um **domínio convexo**, então não existem padrões para (4.1).

Em [11] a autora demonstrou, de maneira muito elegante e também diferente dos trabalhos acima citados, que quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ uma bola, $g \neq 0$ e $f = 0$ então (4.1) não admite padrões.

Com base nos trabalhos [24, 10] mostramos que quando o domínio é convexo então não existem padrões para (4.1).

4.2 Convexidade do domínio: uma condição necessária

Teorema 4.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um domínio convexo, com fronteira de classe $C^2(\Omega)$, e suponhamos que f e g sejam de classe C^1 . Se u é uma solução estacionária estável de (4.1) e de classe C^3 , então u é constante.*

Para demonstrarmos este teorema é necessário usarmos um resultado que apresentamos como um lema. Este resultado é essencial na demonstração e uma das contribuições deste trabalho.

Lema 4.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo, limitado, com fronteira de classe C^2 e $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ com*

$$g(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \quad x \in \partial\Omega,$$

sendo que $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e ν é o campo normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Então

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} |\nabla \varphi|^2 - g'(\varphi) |\nabla \varphi|^2 \leq 0, \quad (4.2)$$

para cada $x \in \partial\Omega$.

Demonstração: Seja $x_0 \in \partial\Omega$ fixado. Por uma rotação e mudança de coordenadas, se necessário, podemos supor que $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$ é a origem de

um sistema de coordenadas principais e que o eixo $-x_n$ está na direção normal exterior a $\partial\Omega$ em x_0 .

Como $\partial\Omega$ é suave podemos estender o campo $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ em uma vizinhança $V \ni x_0$.

Por hipótese

$$g(\varphi) = \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} \nu_i, \quad x \in \partial\Omega \cap V.$$

Derivando-se esta expressão em relação a x_j obtemos

$$g'(\varphi)\varphi_{x_j} = \sum_{i=1}^n \left(\varphi_{x_i x_j} \nu_i + \frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} \varphi_{x_i} \right) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Agora, multiplicando esta última expressão por φ_{x_j} e somando em $j = 1, \dots, n$ vem que

$$\begin{aligned} g'(\varphi)|\nabla\varphi|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \left(\nu_i \varphi_{x_j} \varphi_{x_i x_j} + \frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} |\nabla\varphi|^2 + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j}, \quad x \in \partial\Omega \cap V. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} |\nabla\varphi|^2 - g'(\varphi)|\nabla\varphi|^2 = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j}, \quad x \in \partial\Omega \cap V. \quad (4.3)$$

Sejam $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ as curvaturas principais de $\partial\Omega$ em x_0 . Como Ω é convexo, em relação ao sistema de coordenadas principais, as curvaturas $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ são todas não-negativas. Além disso, pelo capítulo 14.6 de [17]

$$\begin{cases} \frac{\partial \nu_i(x_0)}{\partial x_j} = \kappa_i \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, \dots, n-1) \\ \frac{\partial \nu_n(x_0)}{\partial x_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n). \end{cases}$$

Logo pela equação (4.3), em x_0 , segue que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} |\nabla\varphi(x_0)|^2 - g'(\varphi)|\nabla\varphi(x_0)|^2 = - \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i \varphi_{x_i}^2(x_0) \leq 0.$$

□

Suponhamos que u seja uma solução estacionária de (4.1). Consideremos o problema de auto-valores do operador linearizado (do problema (4.1)), em torno de u , dado por

$$\begin{cases} \Delta\varphi + f'(u)\varphi = \lambda\varphi, & x \in \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = g'(u)\varphi, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.4)$$

O primeiro auto-valor deste operador é caracterizado por

$$\lambda_0 = \sup_{\substack{\varphi \in W^{1,2}(\Omega) \\ \varphi \neq 0}} \frac{-\int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx + \int_{\Omega} f'(u)\varphi^2 dx + \int_{\partial\Omega} g'(u)\varphi^2 d\sigma}{\int_{\Omega} \varphi^2 dx}. \quad (4.5)$$

Sabe-se que se $\lambda_0 > 0$, então u é uma solução estacionária instável de (4.1). Estes resultados foram mostrados em [11, 12, 13].

Proposição 4.1 *Seja u uma solução estacionária não-constante de (4.1). Se Ω é convexo então $\lambda_0 \geq 0$.*

Demonstração: Como u é não-constante, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\varphi_j = u_{x_j} \not\equiv 0$. Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_{x_j}|^2 dx &= \int_{\Omega} \nabla u_{x_j} \cdot \nabla u_{x_j} dx \\ &= -\int_{\Omega} (\Delta u_{x_j}) u_{x_j} dx + \int_{\partial\Omega} u_{x_j} \left(\frac{\partial}{\partial\nu} u_{x_j} \right) d\sigma \\ &= -\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta u) u_{x_j} dx + \int_{\partial\Omega} u_{x_j} \left(\frac{\partial}{\partial\nu} u_{x_j} \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por outro lado,

$$\int_{\Omega} f'(u) u_{x_j}^2 dx = \int_{\Omega} (f'(u) u_{x_j}) u_{x_j} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (f(u)) u_{x_j} dx. \quad (4.7)$$

De (4.5) temos que

$$\lambda_0 \int_{\Omega} u_{x_j}^2 dx \geq -\int_{\Omega} |\nabla u_{x_j}|^2 dx + \int_{\Omega} f'(u) u_{x_j}^2 dx + \int_{\partial\Omega} g'(u) u_{x_j}^2 d\sigma. \quad (4.8)$$

Substituindo (4.6) e (4.7) nesta última desigualdade chegamos a

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \int_{\Omega} u_{x_j}^2 dx &\geq \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta u) u_{x_j} dx - \int_{\partial\Omega} u_{x_j} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} u_{x_j} \right) d\sigma \\
&\quad + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (f(u)) u_{x_j} dx + \int_{\Omega} g'(u) u_{x_j}^2 d\sigma \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta u + f(u)) u_{x_j} dx \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} u_{x_j} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} u_{x_j} \right) d\sigma + \int_{\partial\Omega} g'(u) u_{x_j}^2 d\sigma \\
&= - \int_{\partial\Omega} u_{x_j} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} u_{x_j} \right) d\sigma + \int_{\partial\Omega} g'(u) u_{x_j}^2 d\sigma,
\end{aligned}$$

pois u é solução estacionária de (4.1).

Note que, para $\varphi_j = u_{x_j} \equiv 0$, esta expressão também é satisfeita.

Assim, somando estas expressões de $1 \leq j \leq n$, obtemos, pelo Lema 4.1, que

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &\geq - \sum_{j=1}^n \int_{\partial\Omega} u_{x_j} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} u_{x_j} \right) d\sigma + \int_{\partial\Omega} g'(u) |\nabla u|^2 d\sigma \\
&= - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} (|\nabla u|^2) d\sigma + \int_{\partial\Omega} g'(u) |\nabla u|^2 d\sigma \stackrel{\text{lema 4.1}}{\geq} 0. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Da hipótese de u ser não-constante concluímos que $\lambda_0 \geq 0$. \square

Com o auxílio destes resultados estamos aptos à

Demonstração do Teorema 4.1: Seja u uma solução estacionária de (4.1).

Suponhamos que u seja não-constante. A proposição anterior estabelece que $\lambda_0 \geq 0$. Se $\lambda_0 > 0$, então u é instável. Suponhamos então que $\lambda_0 = 0$.

Pelas expressões (4.8) e (4.9) tiramos que

$$\begin{aligned}
0 &\geq \sum_{j=1}^n \left[- \int_{\Omega} |\nabla u_{x_j}|^2 dx + \int_{\Omega} f'(u) u_{x_j}^2 dx + \int_{\partial\Omega} g'(u) u_{x_j}^2 d\sigma \right] \\
&= - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} (|\nabla u|^2) d\sigma + \int_{\partial\Omega} g'(u) |\nabla u|^2 d\sigma \stackrel{\text{lema 4.1}}{\geq} 0.
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir para cada $j = 1, \dots, n$,

$$- \int_{\Omega} |\nabla u_{x_j}|^2 dx + \int_{\Omega} f'(u) u_{x_j}^2 dx + \int_{\partial\Omega} g'(u) u_{x_j}^2 d\sigma = 0.$$

Pelo Teorema 11.4 de [36], para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ com $u_{x_j} \neq 0$, u_{x_j} é auto-função de (4.4) associado ao auto-valor $\lambda_0 = 0$. Ou seja, u_{x_j} satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u_{x_j} + f'(u)u_{x_j} = 0, & x \in \Omega \\ \nabla u_{x_j} \cdot \nu = g'(u)u_{x_j}, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.10)$$

Uma aplicação do Teorema de Krein-Rutman (como faremos no Capítulo 5) mostra que $\lambda_0 = 0$ é simples e que existe uma auto-função $\varphi > 0$, $\forall x \in \bar{\Omega}$, associada a este auto-valor.

Portanto, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $u_{x_j} \neq 0$, existem constantes $c_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que

$$u_{x_j}(x) = c_j \varphi(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (4.11)$$

É claro que $u_{x_j} \equiv 0$ também satisfaz (4.10) e (4.11), com $c_j = 0$.

Afirmção 1: Seja $P \in \partial\Omega$ tal que nenhuma curvatura principal de $\partial\Omega$ se anula em P . Então $\nabla u(P) \in T_P^\perp \partial\Omega$, sendo que $T_P^\perp \partial\Omega$ denota o complemento ortogonal de $T_P \partial\Omega$.

Com efeito, escolha um sistema de coordenadas principais e, fazendo rotações se necessário, assuma que o eixo x_n está na direção de $\nu(P)$ e os eixos x_1, \dots, x_{n-1} estão ao longo das direções principais, correspondentes às curvaturas principais $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ de $\partial\Omega$ em P , respectivamente (veja Capítulo 14.6 de [17] sobre este argumento). Conseqüentemente,

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} = \kappa_i \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n-1, \quad (4.12)$$

com $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Pela suavidade de $\partial\Omega$ podemos estender o campo ν em uma vizinhança $U \ni P$ de \mathbb{R}^n . Como u_{x_j} satisfaz (4.10) e $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u)$ em $\partial\Omega$, derivando esta expressão em relação a x_j , $1 \leq j \leq n-1$ e calculando em P vem que

$$\begin{aligned} g'(u(P))u_{x_j}(P) &= \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \cdot \nabla u(P) + \nu(P) \cdot \nabla u_{x_j}(P) \\ &\stackrel{(4.10)}{=} \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \cdot \nabla u(P) + g'(u)u_{x_j}(P), \quad j = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\partial \nu(P)}{\partial x_j} \cdot \nabla u(P) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (4.13)$$

Por outro lado, $\frac{\partial \nu}{\partial x_j} \in T_P \partial \Omega$ e por (4.12),

$$\frac{\partial \nu}{\partial x_j} = (0, \dots, \kappa_j, \dots, 0), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Por hipótese, κ_j não se anula. Portanto os vetores $\frac{\partial \nu}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \nu}{\partial x_{n-1}}$ geram o espaço tangente a $\partial \Omega$ em P . Logo, de (4.13), segue que $\nabla u(P) \in T_P^\perp \partial \Omega$, concluindo assim a nossa primeira afirmação.

Afirmiação 2: Existe $\bar{x} \in \partial \Omega$ tal que $g(u(\bar{x})) = 0$.

Para isso, sabemos que $u_{x_j} = c_j \varphi$ e que para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, $c_j \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $u_{x_j} > 0$ em $\bar{\Omega}$.

Consideremos uma família de hiperplanos afins que tenham como vetor normal o vetor $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Como Ω é limitado e de fronteira suave, existem x' e $x'' \in \partial \Omega$ tais que dois destes hiperplanos interceptam $\bar{\Omega}$ tangencialmente em x' e x'' respectivamente. Neste caso obtemos que $\nu(x') = e_j$ e $\nu(x'') = -e_j$ ou $\nu(x') = -e_j$ e $\nu(x'') = e_j$. Suponhamos o primeiro caso, o outro é análogo. Então

$$\begin{aligned} g(u(x')) &= \nabla u(x') \cdot \nu(x') = u_{x_j}(x') > 0 \\ g(u(x'')) &= \nabla u(x'') \cdot \nu(x'') = -u_{x_j}(x'') < 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

pois $u_{x_j} > 0$. Como g e u são contínuas segue o desejado.

Uma conseqüência deste argumento é que se a função g não mudar de sinal, então (4.14) nos leva a uma contradição, e isto habilita-nos a concluir o teorema.

Afirmiação 3: Como para cada $j = 1, \dots, n$ temos $u_{x_j} = c_j \varphi$, então existe $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 tal que

$$u(x) = \psi(c_1 x_1 + \dots + c_n x_n), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (4.15)$$

Colocamos a demonstração desta afirmação no fim deste capítulo, para não fugirmos do nosso enfoque principal.

Sejam $a = \min_{x \in \bar{\Omega}} (c_1 x_1 + \dots + c_n x_n)$ e $b = \max_{x \in \bar{\Omega}} (c_1 x_1 + \dots + c_n x_n)$.

Pela Afirmação 3 acima, para cada $t \in [a, b]$, a função u satisfaz

$$u(x) = \psi(t), \forall x \in H_t \cap \bar{\Omega},$$

sendo que

$$H_t \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = t\}.$$

De (4.15) e $g(u) = \nabla u \cdot \nu$ em $\partial\Omega$, para cada $x \in H_t \cap \bar{\Omega}$ e $t \in [a, b]$,

$$g(\psi(t)) = g(u(x)) = \nabla u(x) \cdot \nu(x) = \psi'(t)(c_1, \dots, c_n) \cdot \nu(x) = \psi'(t)C \cdot \nu(x).$$

Uma vez que para cada $x \in \bar{\Omega}$, $u_{x_j}(x) \neq 0$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, a função ψ satisfaz $\psi'(t) \neq 0$, para cada $t \in [a, b]$. Assumimos, sem perda de generalidade, que $\psi'(t) > 0$ para cada $t \in [a, b]$.

Portanto

$$C \cdot \nu(x) = \frac{g(\psi(t))}{\psi'(t)}, \quad \forall x \in H_t \cap \partial\Omega, \quad t \in [a, b]. \quad (4.16)$$

Pela Afirmação 2, existe $\bar{x} \in \partial\Omega$ tal que $g(u(\bar{x})) = 0$. Então existe $\bar{t} \in [a, b]$ tal que

$$g(u(x)) = g(\psi(\bar{t})) = 0, \quad \forall x \in H_{\bar{t}} \cap \partial\Omega.$$

Não é difícil verificarmos que se $\bar{t} = a$ ou $\bar{t} = b$, então $\nu(\bar{x}) = -\frac{C}{|C|}$ ou $\nu(\bar{x}) = \frac{C}{|C|}$, respectivamente (deve-se ao fato de que $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = l$, $l = a, b$, ser o plano tangente em \bar{x}). Em ambos os casos, (4.16) nos leva a

$$-|C| = \frac{g(\psi(\bar{t}))}{\psi'(\bar{t})} = 0 \quad \text{ou} \quad |C| = \frac{g(\psi(\bar{t}))}{\psi'(\bar{t})} = 0,$$

o que é uma contradição, pois $|C| \neq 0$.

Suponhamos então que $\bar{t} \in (a, b)$. Como g muda de sinal, é possível encontrar $\delta > 0$ tal que (sem perda de generalidade)

$$g(\psi(t)) < 0; \quad t \in (\bar{t} - \delta, \bar{t}), \quad \text{e} \quad g(\psi(t)) > 0; \quad t \in (\bar{t}, \bar{t} + \delta),$$

já que $\psi'(t) \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$.

Como $g(\psi(\bar{t})) = 0$, então para qualquer $x \in H_{\bar{t}} \cap \partial\Omega$, $\nabla u(x) \cdot \nu(x) = 0$.

Logo $\nabla u(x) \in T_x \partial\Omega$, $\forall x \in H_{\bar{t}} \cap \partial\Omega$.

Se para algum $x \in H_{\bar{t}} \cap \partial\Omega$, nenhuma curvatura principal se anular, a Afirmação 1 acima nos leva a $\nabla u(x) \in T_x^\perp \partial\Omega$, implicando que $\nabla u(x) = 0$, o que é uma contradição, pois $\nabla u(x) = \psi'(t)C$.

Portanto só nos resta a possibilidade de que para cada $x \in H_{\bar{t}} \cap \partial\Omega$ fixado, ao menos uma curvatura principal se anula em x .

Mas Ω é convexo e limitado. Isto significa que existe uma vizinhança W_x tal que ao longo da direção principal, cuja curvatura principal é nula, o vetor normal ν é constante. Então existem $t_1 \in (\bar{t} - \delta, \bar{t})$, $t_2 \in (\bar{t}, \bar{t} + \delta)$, $x_1 \in H_{t_1} \cap \partial\Omega$ e $x_2 \in H_{t_2} \cap \partial\Omega$ tais que

$$\nu(x_1) = \nu(x_2).$$

Disto e de (4.16) obtemos que

$$0 < \frac{g(\psi(t_2))}{\psi'(t_2)} = C \cdot \nu(x_2) = C \cdot \nu(x_1) = \frac{g(\psi(t_1))}{\psi'(t_1)} < 0$$

o que também é uma contradição.

Concluimos assim que u deve ser constante.

Justificamos agora a Afirmação 3 apresentada anteriormente.

Com efeito, inicialmente note que $\nabla u(x) = \varphi(x)C$, $C = (c_1, \dots, c_n)$, para cada $x \in \bar{\Omega}$. Isto nos diz que ∇u é ortogonal aos conjuntos $H_t \stackrel{\text{def}}{=} \{c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = t\}$ que interceptam $\bar{\Omega}$. Ou seja, u é constante em $H_t \cap \bar{\Omega}$.

Suponhamos, para efeitos didáticos, que $|C| = 1$.

Se $C = (1, \dots, 0)$ então $u_{x_j} = 0 \forall x \in \bar{\Omega}$, $j = 2, \dots, n$. Como Ω é convexo, segue que, para cada $x \in \bar{\Omega}$ fixado, a função u é constante nas variáveis x_2, \dots, x_n . Em outras palavras, é possível encontrar $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(x) = \psi(x_1)$, para cada $x \in \bar{\Omega}$.

Definimos $\Phi : \bar{\Omega}_R \rightarrow \bar{\Omega}$ por

$$\Phi(y) = (c_1 y_1 + \dots + c_n y_n, c_2 y_1 - c_1 y_2, \dots, c_n y_1 - c_1 y_n),$$

sendo que $\overline{\Omega}_R$ é a imagem pela rotação (ou composição de rotações) do conjunto $\overline{\Omega}$, cuja aplicação leva o vetor C em $(1, \dots, 0)$.

Um cálculo imediato nos mostra que Φ é um difeomorfismo e que para cada $x \in \overline{\Omega}$,

$$\Phi^{-1}(x) = (\Phi_1^{-1}(x), \dots, \Phi_n^{-1}(x)) = (c_1x_1 + \dots + c_nx_n, \Phi_2^{-1}(x), \dots, \Phi_n^{-1}(x)) = y.$$

Fazendo $\tilde{u}(y) = u(\Phi(y))$, $y \in \overline{\Omega}_R$, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_1} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial u(\Phi(y))}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_k(y)}{\partial y_1} = (c_1^2 + \dots + c_n^2) \varphi(\Phi(y)) \\ &= |C|^2 \varphi(\Phi(y)) = \varphi(\Phi(y)) = \tilde{\varphi}(y), \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u(\Phi(y))}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_k(y)}{\partial y_j} = c_1 \varphi(\Phi(y)) c_j - c_j \varphi(\Phi(y)) c_1 = 0,$$

para $j = 2, \dots, n$, para cada $y \in \overline{\Omega}_R$,

Como $\overline{\Omega}_R$ também é convexo segue que

$$\tilde{u}(y) = \psi(y_1), \quad \forall y \in \overline{\Omega}_R$$

para alguma $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Logo, para cada $x \in \overline{\Omega}$,

$$u(x) = u(\Phi(y)) = \tilde{u}(y) = \psi(y_1) = \psi(\Phi_1^{-1}(x)) = \psi(c_1x_1 + \dots + c_nx_n),$$

concluindo assim a Afirmação 3 e também este capítulo. ■

Capítulo 5

Existência de padrões: caso espacialmente heterogêneo

5.1 Apresentação do problema

Neste capítulo mostramos, sob determinadas condições nas funções que apresentam dependência espacial explícita, a existência de padrões para o seguinte problema parabólico

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + f(u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ a(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = b(x)g(u), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x) \in W^{1,p}(\Omega). \end{cases} \quad (5.1)$$

Aqui $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ é um domínio limitado com fronteira suave de classe C^2 , ν é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$, as funções $a \in C^1(\bar{\Omega})$ e $b \in C^1(\partial\Omega)$, estritamente positivas e a valores reais, e $W^{1,p}(\Omega)$ é o espaço de Sobolev com $p > N \geq 2$.

Supomos também que $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^1 e:

(h₀) f e g possuem apenas três raízes $0, \alpha$ e β ($\alpha < 0 < \beta$) e satisfazem

$$f'(\alpha) < 0, f'(\beta) < 0, g'(\alpha) < 0, g'(\beta) < 0;$$

(h₁) $0 < tg(t) \leq t^2$, para $\alpha < t < \beta$, $t \neq 0$.

Definimos $F(u) = \int_0^u f(\xi) d\xi$ e $G(u) = \int_0^u g(\tau) d\tau$. Suponhamos por simplicidade que

$$F_M = F(\alpha) = F(\beta) \text{ e } G_M = G(\alpha) = G(\beta). \quad (5.2)$$

Das hipóteses sobre f e g obtemos que $F_M = \max_{\alpha \leq v \leq \beta} F(v)$ e $G_M = \max_{\alpha \leq v \leq \beta} G(v)$

A hipótese (5.2) não é uma condição necessária para obtermos os resultados desejados e pode ser relaxada com algumas condições adicionais.

Existem vários trabalhos relacionados à existência, regularidade e unicidade das soluções de (5.1). Entre eles sugerimos [2, 5, 12, 13]. Destes dois últimos, usamos vários resultados que são estendidos naturalmente para abordar a existência e regularidade das soluções de (5.1).

A contribuição deste capítulo para a existência de padrões, está justamente na presença de termos espacialmente heterogêneos, a saber $a(x)$ e $b(x)$, e no termo não-linear f , uma vez que em [13] a existência de padrões é mostrada para $a \equiv 1$, b constante e $f \equiv 0$.

Quando as funções $a(x)$ e $b(x)$ forem constantes e a difusibilidade pequena usamos a geometria do domínio para demonstrarmos a existência de padrões (veja Capítulo 2). Neste capítulo as funções $a(x)$ e $b(x)$, desde que convenientemente escolhidas, são responsáveis pela existência de padrões para (5.1).

Como podemos observar em [11, 12], quando $a \equiv 1$ e $b \equiv 1$, a hipótese (h_0) implica que as soluções constantes $u = \alpha$ e $u = \beta$ são soluções estacionárias estáveis de (5.1), no sentido da Definição 5.7. Portanto, nosso objetivo é encontrar soluções estacionárias estáveis não-constantes.

No presente capítulo seguimos a linha utilizada nos trabalhos [13, 29], e definimos um conjunto invariante pelo sistema dinâmico, gerado pela equação parabólica (5.1), que contém os equilíbrios para esta equação. Em seguida usamos a caracterização variacional para concluirmos que o espectro do operador linearizado, em torno dos equilíbrios, é formado por uma seqüência de auto-valores reais não-positivos.

Sabemos que se o primeiro auto-valor do problema linearizado for negativo, então os equilíbrios são assintoticamente estáveis (veja Definição 5.7). Porém quando este auto-valor é nulo temos um caso crítico de estabilidade. É essencial mostrar que este auto-valor é simples. Neste caso existe uma variedade central unidimensional (veja [35]) com a propriedade de que se estes equilíbrios são estáveis nesta variedade, então também o são no espaço de definição dos equilíbrios.

Embora possamos determinar a existência de padrões para (5.1), a abordagem através de um conjunto invariante não nos permite descrever o comportamento geométrico das soluções, como é o caso abordado pela Γ -convergência no Capítulo 2.

Organizamos este capítulo como segue. Na Seção 5.2 apresentamos alguns resultados preliminares que versam sobre a formulação abstrata do problema (5.1), baseando-nos na abordagem de [11, 12, 13], os quais usaram uma técnica apresentada em [2]. Na seqüência, resultados sobre a existência e regularidade das soluções de (5.1) e uma análise sobre o funcional energia associado ao problema estacionário de (5.1).

Como contribuições deste capítulo, nas Seções 5.3 e 5.4, apresentamos a existência de um conjunto \mathcal{W} , invariante pelo sistema dinâmico gerado pela equação parabólica em questão, com a seguinte propriedade: se \mathcal{W} é não-vazio, então existe ao menos um padrão para (5.1) contido em \mathcal{W} . E na Seção 5.5 mostramos condições suficientes sobre as funções $a(x)$ e $b(x)$, e sobre o domínio (quando a é constante) para que \mathcal{W} seja não-vazio. Quando $a(x)$ é constante, baseamos nossa demonstração de [13].

5.2 Resultados preliminares

Nesta seção enunciamos uma série de resultados utilizados neste capítulo. Vários deles são extensões naturais dos resultados apresentados em [12, 13] com pequenas alterações em suas demonstrações. Por isso não as

reproduzimos novamente.

5.2.1 Formulação abstrata

Definição 5.1 *Uma função v é solução clássica do problema (5.1) se satisfaz a equação (5.1) para qualquer $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ e, para cada $t \geq 0$, $v(t, \cdot) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ e v é de classe C^1 na variável t .*

Suponhamos que u seja uma solução clássica de (5.1). Em particular, $u(t, \cdot) \in W^{2,p}(\Omega)$ e $u_t(t, \cdot) \in L^p(\Omega)$. Seja $v \in W^{1,p'}(\Omega)$, sendo que p' satisfaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Consideremos o produto dual entre L^p e $L^{p'}$. Multiplicando a equação (5.1) por v e integrando por partes sobre Ω obtemos

$$\int_{\Omega} u_t v \, dx + \int_{\Omega} (a(x) \nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx = \int_{\Omega} (f(u)v + uv) \, dx + \int_{\partial\Omega} b(y)g(T_p u)T_{p'} v \, d\sigma, \quad (5.3)$$

na qual $T_q : W^{1,q}(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)$ é o operador traço (veja [1]).

Denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$ os produtos duais entre $(W^{1,p'}(\Omega))'$ e $W^{1,p'}(\Omega)$; $(W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega))'$ e $W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega)$, respectivamente.

Seja $A : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow (W^{1,p'}(\Omega))'$ o operador linear contínuo tal que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $Au : W^{1,p'}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é o funcional linear contínuo definido por:

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} (a(x) \nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx.$$

Então, da equação (5.3) obtemos

$$\begin{aligned} \langle u_t, v \rangle + \langle Au, v \rangle &= \langle f(u) + u, v \rangle + \langle bg(T_p u), T_{p'} v \rangle_{\partial\Omega} \\ &= \langle f(u) + u, v \rangle + \langle T_{p'}^*(bg(T_p u)), v \rangle, \end{aligned} \quad (5.4)$$

sendo que $T_{p'}^* : (W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega))' \rightarrow (W^{1,p'}(\Omega))'$ é o operador adjunto.

Assim, da expressão (5.4) podemos escrever o problema (5.1) em uma forma abstrata definida da seguinte forma

$$\begin{cases} u_t + Au = H(u) \\ u(0) = u_0 \in W^{1,p}(\Omega), \end{cases} \quad (5.5)$$

com $H(u) = f(u) + u + T_{p'}^*(bg(T_p u))$.

Definição 5.2 v é solução estacionária de (5.5) se satisfaz

$$\begin{cases} Au = H(u) \\ u(0) = u_0 \in W^{1,p}(\Omega). \end{cases} \quad (5.6)$$

Definição 5.3 Dizemos que v é solução fraca do problema elíptico semi-linear

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a(x)\nabla v) + f(v) = 0, & x \in \Omega \\ a(x)\frac{\partial v}{\partial n} = b(x)g(v), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.7)$$

se v satisfaz

$$\int_{\Omega} a(x)\nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} f(v)\varphi \, dx - \int_{\partial\Omega} b(x)g(T_p v)T_{p'}\varphi \, d\sigma = 0,$$

para toda $\varphi \in W^{1,p'}(\Omega)$.

Da maneira como formulamos o problema abstrato, as soluções de (5.6), se existirem, são soluções fracas do problema (5.7). Como por hipótese $p > N$, $W^{1,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $C^{0,\delta}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \delta < 1$. Argumentos padrões de regularidade demonstram que essas soluções fracas são soluções clássicas de (5.7). Veja por exemplo [22].

5.2.2 Existência e regularidade das soluções

Proposição 5.1 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ambas de classe C^1 . Então $H : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \left(W^{2-2\beta-\frac{1}{p'},p'}(\Omega)\right)'$, com $\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2} + \frac{1}{2p}$, é de classe C^1 .

Demonstração: Veja [12].

Definição 5.4 Uma função $u : [0, T) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ é solução do problema (5.5) se satisfaz:

(i) u é contínua em $[0, T)$

(ii) $u \in C^1((0, T), (W^{1,p'}(\Omega))')$

(iii) u satisfaz (5.5) se $t \in (0, T)$.

Proposição 5.2 Para cada conjunto limitado $B \subset W^{1,p}(\Omega)$ existe $T = T(B) > 0$ tal que o problema (5.5), para cada $u_0 \in B$, possui uma única solução em $[0, T)$, com valor inicial u_0 . Além disso, a solução $u(t)$ é contínua em relação a u_0 .

Demonstração: Veja [12].

Observação 5.1 Para demonstrar a existência de soluções de (5.5) usa-se fortemente o fato que $-A$ é gerador infinitesimal do semigrupo analítico $\{e^{-tA}, t \geq 0\}$ sobre $(W^{1,p'}(\Omega))'$. Além disso, é válido uma fórmula de variação das constantes para o problema (5.5) cuja solução é dada por

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A}H(u(\tau)) d\tau.$$

De acordo com a definição do problema (5.5), cada solução deste problema é uma solução fraca de (5.1).

Definição 5.5 Um sistema dinâmico (semigrupo não-linear) sobre um espaço métrico completo \mathcal{X} é uma família de aplicações $T(t) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, com $t \geq 0$, tal que

- (i) para cada $t \geq 0$, $T(t)$ é contínua de \mathcal{X} em \mathcal{X} ;
- (ii) para cada $x \in \mathcal{X}$, $t \rightarrow T(t)x$ é contínua;
- (iii) $T(0) = I$, I é a identidade em \mathcal{X} ;
- (iv) $T(t)(T(s)x) = T(t+s)x$, para cada $x \in \mathcal{X}$.

Definição 5.6 Seja $\{T(t)\}$ um sistema dinâmico sobre \mathcal{X} . Para cada $x \in \mathcal{X}$ definimos

- (i) $\gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{T(t)x : t \geq 0\}$, a órbita (ou semi-órbita positiva) de x pelo sistema dinâmico.

(ii) $\omega(x) = \omega(\gamma(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathcal{X} : \text{existe } t_n \rightarrow \infty \text{ tal que } T(t_n)x \rightarrow y\}$, é o conjunto ω -limite de x .

Teorema 5.1 *Seja $x_0 \in \mathcal{X}$ e suponhamos que a órbita $\gamma(x_0)$ seja relativamente compacta em \mathcal{X} . Então $\omega(x_0)$ é não-vazio, compacto, invariante e conexo.*

Demonstração: Veja Teorema 4.3.3 de [19].

Denotamos por $u(t, \cdot, u_0)$ a solução de (5.1) com condição inicial u_0 , isto é $u(0, \cdot, u_0) = u_0$. Coloque $T(t)u_0 \stackrel{\text{def}}{=} u(t, \cdot, u_0)$. Então $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ define um sistema dinâmico em $W^{1,p}(\Omega)$, para cada $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Os seguintes resultados sobre $T(t)$ também se encontram em [12]:

Proposição 5.3 *Se H é de classe C^1 , então para cada $t > 0$ o sistema dinâmico $T(t) : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ é compacto. Isto é, $T(t)$ leva conjuntos limitados de $W^{1,p}(\Omega)$ em conjuntos relativamente compactos em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Veja [12].

Proposição 5.4 *Se f e g são ambas de classe C^1 então, para cada $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, existe $\alpha > 0$ tal que a solução $u(t, \cdot) = T(t)u_0$ de (5.5) é de classe C^1 em t com valores em $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ ($0 < \alpha < 1$) e, para cada $t > 0$, esta função é de classe $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Em outras palavras, $u(t, x)$ é solução clássica de (5.1).*

Demonstração: Veja [12].

5.2.3 Propriedades do funcional energia

Uma vez que o operador traço está bem definido em $W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$, a menos de menção do contrário, não utilizamos mais a notação $T_p u = u|_{\partial\Omega}$, usamos apenas u .

A seguir apresentamos alguns resultados sobre o funcional energia cuja equação de Euler-Lagrange e dada por (5.7). Isto é, os pontos críticos deste

funcional são soluções fracas de (5.7). Argumentos usuais fornecem-nos a regularidade $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ para essas soluções.

Proposição 5.5 *Seja $E : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional energia definido por*

$$E[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(u) dx - \int_{\partial\Omega} b(y) G(u) d\sigma. \quad (5.8)$$

Então E é duas vezes continuamente diferenciável.

Demonstração: Como as funções a e b são suaves e limitadas, a mesma demonstração de [12, 13] se aplica.

Apenas registramos que $DE[u] : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$DE[u]h = \int_{\Omega} a(x) \nabla u \cdot \nabla h dx - \int_{\Omega} f(u)h dx - \int_{\partial\Omega} b(y)g(u)h d\sigma$$

e $D^2E : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}))$ é definido, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$D^2E[u] : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow (W^{1,p}(\Omega))'$, por

$$D^2E[u](\psi, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} a(x) \nabla \psi \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f'(u) \psi v dx - \int_{\partial\Omega} b(y) g'(u) \psi v d\sigma. \quad (5.9)$$

Proposição 5.6 *O funcional E , definido por (5.8) é decrescente ao longo de suas órbitas, exceto nos pontos de equilíbrio. Em outras palavras, E é um funcional de Liapunov.*

Demonstração: Seja $u(t, x) = T(t)u_0(x)$ uma solução de (5.1). Se multiplicarmos a equação (5.1) por $v \in W^{1,p'}(\Omega)$ e integrarmos por partes obtemos

$$\int_{\Omega} u_t v dx = - \left[\int_{\Omega} a(x) \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f(u) v dx - \int_{\partial\Omega} b(y) g(u) v d\sigma \right]. \quad (5.10)$$

Como para cada $t \in [0, T)$ ($0 < T \leq \infty$), $u_t \in W^{1,p}(\Omega)$, podemos derivar o funcional E em relação a t e termos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[u] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right\} - \int_{\Omega} f(u) u_t dx - \int_{\partial\Omega} b(y) g(u) u_t d\sigma \\ &= \int_{\Omega} a(x) \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} \right\} - \int_{\Omega} f(u) u_t dx - \int_{\partial\Omega} b(y) g(u) u_t d\sigma \\ &= \int_{\Omega} a(x) \nabla u \cdot \nabla u_t dx - \int_{\Omega} f(u) u_t dx - \int_{\partial\Omega} b(y) g(u) u_t d\sigma \\ &\stackrel{(5.10)}{=} - \int_{\Omega} (u_t)^2 dx \leq 0, \end{aligned}$$

o que conclui a proposição. ■

5.3 Conjunto invariante

Introduzimos agora um conjunto $\mathcal{W} \subset W^{1,p}(\Omega)$ que é invariante pelo fluxo de $T(t)$ e, além disso, é neste conjunto que encontramos um mínimo para o funcional E , que é o padrão procurado.

Antes de prosseguirmos é necessário apresentarmos alguns resultados que usamos na seqüência.

Teorema 5.2 (Princípio do Máximo) *Seja u satisfazendo a desigualdade diferencial parabólica uniforme*

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0,$$

em um domínio V de um espaço $(N+1)$ -dimensional e suponhamos que os coeficientes de L sejam limitados. Suponhamos que o máximo de u em V seja M e que ele é atingido em algum ponto interior $P = (\bar{x}, \bar{t})$. Seja $E(\bar{t})$ a componente conexa da intersecção do hiperplano $t = \bar{t}$ com V , o qual contém P . Então $u = M$ em $E(\bar{t})$. Além disso, se Q é um ponto de V que pode ser ligado a P por um caminho consistindo de segmentos horizontais e verticais então $u = M$ em Q .

Demonstração: Veja [33], página 173.

Teorema 5.3 (Segundo Princípio do Máximo) *Seja u satisfazendo a desigualdade diferencial parabólica uniforme acima com coeficientes limitados em V . Suponhamos que o máximo M de u é atingido em um ponto $P \in \partial V$. Suponhamos que uma esfera passando por P possa ser construída de modo que seu interior esteja inteiramente em V e que $u < M$. Suponhamos também que a direção radial do centro da esfera a P não seja paralela ao eixo t . Se $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada na direção normal exterior à ∂V então em P temos*

$$\frac{\partial u}{\partial n} > 0.$$

Demonstração: Veja [33], página 174.

Observação 5.2 As conclusões destes dois teoremas também são válidas para u solução de $[L + h](u) \geq 0$, desde que $h \leq 0$ e $M \geq 0$.

Observação 5.3 Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave. O problema de auto-valores de Steklov é definido por

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{em } D \\ \nabla w \cdot n = \rho w, & \text{em } \partial D, \end{cases}$$

e o segundo auto-valor deste problema é caracterizado por

$$\rho_2(D) = \min_{\partial D} \frac{\int_D |\nabla w|^2 dx}{\int_{\partial D} w^2 d\sigma}.$$

Lema 5.1 *Seja Ω um domínio limitado, com fronteira suave. Seja $\rho_2(\Omega)$ o segundo auto-valor do problema de Steklov. Então para cada $w \in W^{1,2}(\Omega)$*

$$\int_{\Gamma} w^2 d\sigma \leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \frac{1}{|\Gamma|_{\sigma}} \left(\int_{\Gamma} w d\sigma \right)^2,$$

sendo que Γ é uma porção suave de $\partial\Omega$ com $|\Gamma|_{\sigma} > 0$, e $|\cdot|_{\sigma}$ denota a medida de superfície.

Demonstração: Esta demonstração o leitor pode encontrar em [13].

Agora estamos em condição de prosseguir.

Sejam $D_1, D_2 \subset \Omega$, dois subdomínios de Ω com fronteiras suaves tais que $|\partial D_i \cap \partial\Omega|_{\sigma} > 0$, $i = 1, 2$.

Sejam $\Gamma_i \subset \partial D_i \cap \partial\Omega$, porções suaves tais que $|\Gamma_i|_{\sigma} > 0$, $i = 1, 2$.

Sejam $\rho_2(D_i)$ os segundos auto-valores do problema de Steklov, sobre os domínios D_i , $i = 1, 2$.

Definimos

$$a_{m,D_i} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in D_i} a(x), \quad i = 1, 2;$$

$$\Sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \Gamma_i : b(y) > \rho_2(D_i) a_{m,D_i}\}, \quad i = 1, 2.$$

Observe que os conjuntos Σ_i podem ser vazios. Entretanto se $\Sigma_i \neq \emptyset$ para algum $i \in \{1, 2\}$, a continuidade da função b implica em $|\Sigma_i|_{\sigma} > 0$.

Sejam

$$J_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_0 - G_M \int_{\partial\Omega} b(y) d\sigma - F_M |\Omega|, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{E}_0 \stackrel{\text{def}}{=} G_M \min_{i=1,2} \left\{ \int_{\Gamma_i} b(y) d\sigma, a_{m,D_i} \rho_2(D_i) |\Sigma_i|_\sigma + \int_{\Gamma_i \setminus \Sigma_i} b(y) d\sigma \right\} \quad (5.12)$$

e definimos o conjunto \mathcal{W} da seguinte forma

$$\mathcal{W} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in W^{1,p}(\Omega) : \alpha \leq v \leq \beta; \int_{\Gamma_1} v d\sigma < 0, \int_{\Gamma_2} v d\sigma > 0; E[v] < J_0 \right\}.$$

Lema 5.2 *Se \mathcal{W} é não vazio, então \mathcal{W} é $T(t)$ invariante, isto é, se $v \in \mathcal{W}$ então $T(t)v \in \mathcal{W}$.*

Demonstração: Seja $v_0 \in \mathcal{W}$.

(i) Pela Proposição 5.6, E é não crescente em t . Assim

$$E[T(t)v_0] \leq E[T(0)v_0] = E[v_0] < J_0, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) Mostremos agora que $T(t)v_0 \leq \beta$, para cada $t > 0$. Um raciocínio semelhante se aplica para $T(t)v_0 \geq \alpha, \forall t > 0$.

Coloquemos $v(t, \cdot) = T(t)v_0$ e suponhamos que a propriedade $v \leq \beta, \forall x \in \bar{\Omega}, t \in \mathbb{R}^+$ não se verifica. Então existe $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega}$ tal que $v(\bar{t}, \bar{x}) > \beta$. Pela continuidade de v existe $\delta > 0$ tal que $v(t, \bar{x}) > \beta, \forall t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta]$.

Não há perda de generalidade se supusermos que

$$v(\bar{t}, \bar{x}) = \max_{[0, \tau] \times \bar{\Omega}} v(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} v_M, \quad (5.13)$$

para algum $\tau > 0$ (isto é devido a continuidade de v e do fato de $[0, \tau] \times \bar{\Omega}$ ser compacto).

Defina $u(t, x) = v(t, x) - v_M$. Então $u(t, x) \leq 0$ para cada $(t, x) \in [0, \tau] \times \bar{\Omega}$ e $u(\bar{t}, \bar{x}) = 0$.

Escolha $p > 0$ tal que a função $v \mapsto f(v) + pv$ seja crescente em $[-M, M]$, para algum M suficientemente grande.

Isto é possível pois por hipótese a função f é de classe C^1 . Como v é limitada é possível encontrarmos M suficientemente grande tal que $|v| < M$ e

$|f'(s)| \leq p$, para todo $s \in [-M, M]$. Para ver que $v \mapsto f(v) + pv$ é crescente, observe que $-p \leq f'(v) \leq p$ e, portanto, $f'(v) + p \geq 0$.

Assim, para o operador $L(\psi) = \nabla \cdot (a\nabla\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial t}$, temos

$$\begin{aligned} Lu - pu &= L(v) - L(v_M) - p(v - v_M) \\ &= \nabla \cdot (a\nabla v) - \frac{\partial v}{\partial t} - pv + pv_M \\ &= -f(v) - pv + pv_M = -(f(v) + pv) + pv_M \\ &\geq -f(v_M) - pv_M + pv_M = -f(v_M) > 0, \end{aligned}$$

para todo $(t, x) \in [0, \tau] \times \overline{\Omega}$, pois $v_M > \beta$, e lembrando que $f(v) + pv$ é crescente.

Se $(\bar{t}, \bar{x}) \in \text{int}([0, \tau] \times \overline{\Omega})$, o Teorema 5.2 (princípio do máximo) nos dá que $u(t, x) \equiv 0$ e, assim, $[L - p](u) = 0$, o que é uma contradição.

Se $(\bar{t}, \bar{x}) \in \partial([0, \tau] \times \overline{\Omega})$, o Teorema 5.3 (segundo princípio) nos dá que $\frac{\partial u(\bar{t}, \bar{x})}{\partial n} > 0$. Mas

$$0 < \frac{\partial u(\bar{t}, \bar{x})}{\partial n} = \frac{\partial v(\bar{t}, \bar{x})}{\partial n} = \frac{b(\bar{x})}{a(\bar{x})} g(v(\bar{t}, \bar{x})) = \frac{b(\bar{x})}{a(\bar{x})} g(v_M) < 0,$$

o que também é uma contradição.

Com um argumento semelhante obtemos que $\alpha \leq T(t)v_0$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Concluimos assim que $\alpha \leq T(t)v_0 \leq \beta$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

(iii) Suponhamos que a propriedade $\int_{\Gamma_1} T(t)v_0 d\sigma < 0$, para cada $t > 0$, não se verifica. Um argumento semelhante se aplica a $\int_{\Gamma_2} T(t)v_0 d\sigma > 0$ e por isso não repetimos aqui.

Como $T(t)v_0$ é contínuo e $\phi(t) = \int_{\Gamma_1} T(t)v_0 d\sigma$ também o é, com a norma do sup, e $\phi(0) < 0$, pelo Teorema do Valor Intermediário existe $t_1 > 0$ tal que $\int_{\Gamma_1} T(t_1)v_0 d\sigma = 0$.

Denotemos $w_1 = T(t_1)v_0$.

Pelo item (ii) e pelas hipótese sobre F e G (veja 5.2) temos que $F(w_1) \leq F_M$ e $G(w_1) \leq G_M$. Assim

$$-F_M|\Omega| \leq -\int_{\Omega} F(w_1) dx, \text{ e } \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} b(y)G(w_1) d\sigma \leq G_M \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} b(y) d\sigma.$$

Com isso

$$\begin{aligned}
E[w_1] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) |\nabla w_1|^2 dx - \int_{\Omega} F(w_1) dx - \int_{\partial\Omega} b(y) G(w_1) d\sigma \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{D_1} a(x) |\nabla w_1|^2 dx - F_M |\Omega| - \int_{\Gamma_1} b(y) G(w_1) d\sigma \\
&\quad - \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} b(y) G(w_1) d\sigma \\
&\geq \int_{\Gamma_1} (\rho_2(D_1) a_{m,D_1} - b(y)) G(w_1) d\sigma - F_M |\Omega| - G_M \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} b(y) d\sigma. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Para justificarmos esta última passagem observe que, pela hipótese (h_1) sobre g , $s \leq g(s) \leq 0$ para $\alpha \leq s < 0$ e $0 \leq g(s) \leq s$ para $\beta \geq s > 0$. Assim

$$\int_{\Gamma_1} G(w_1) d\sigma = \int_{\Gamma_1} \int_0^{w_1} g(\xi) d\xi d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} w_1^2 d\sigma.$$

Além disso, segue do Lema 5.1 e $\int_{\Gamma_1} w_1 d\sigma = 0$, que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{D_1} a(x) |\nabla w_1|^2 dx &\geq \frac{1}{2} a_{m,D_1} \int_{D_1} |\nabla w_1|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{2} a_{m,D_1} \rho_2(D_1) \left[\int_{\Gamma_1} w_1^2 d\sigma - \frac{1}{|\Gamma_1|} \left(\int_{\Gamma_1} w_1 d\sigma \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} a_{m,D_1} \rho_2(D_1) \int_{\Gamma_1} w_1^2 d\sigma \\
&\geq a_{m,D_1} \rho_2(D_1) \int_{\Gamma_1} G(w_1) d\sigma,
\end{aligned}$$

o que justifica a passagem acima mencionada.

Como $E[w_1] < J_0$, segue da definição de J_0 e (5.14) que

$$\mathcal{E}_0 > \int_{\Gamma_1} (\rho_2(D_1) a_{m,D_1} - b(y)) G(w_1) d\sigma + G_M \int_{\Gamma_1} b(y) d\sigma. \quad (5.15)$$

Analisamos a seguir o sinal envolvendo a primeira integral do lado direito desta desigualdade, a qual denotamos por I .

Caso 1: Se $I \geq 0$ então temos, por (5.15), $\mathcal{E}_0 > G_M \int_{\Gamma_1} b(y) d\sigma$.

Caso 2: Se $I < 0$ então, do fato de $G(w_1) \geq 0$ e da continuidade de b , neces-

sariamente temos $|\Sigma_1|_\sigma > 0$. Conseqüentemente

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} (\rho_2(D_1)a_{m,D_1} - b(y))G(w_1) d\sigma &= \int_{\Gamma_1 \setminus \Sigma_1} (\rho_2(D_1)a_{m,D_1} - b(y))G(w_1) d\sigma \\
&\quad + \int_{\Sigma_1} (\rho_2(D_1)a_{m,D_1} - b(y))G(w_1) d\sigma \\
&\geq \int_{\Sigma_1} (\rho_2(D_1)a_{m,D_1} - b(y))G(w_1) d\sigma \\
&\geq G_M \int_{\Sigma_1} (\rho_2(D_1)a_{m,D_1} - b(y)) d\sigma \\
&= \rho_2(D_1)a_{m,D_1} G_M |\Sigma_1|_\sigma - G_M \int_{\Sigma_1} b(y) d\sigma.
\end{aligned}$$

Portanto, desta desigualdade e de (5.15) vem que

$$\mathcal{E}_0 > G_M \left(\rho_2(D_1)a_{m,D_1} |\Sigma_1|_\sigma + \int_{\Gamma_1 \setminus \Sigma_1} b(y) d\sigma \right).$$

Em ambos os casos chegamos a uma contradição com a definição de \mathcal{E}_0 .

Verificado os três itens, concluímos a demonstração do lema. ■

5.4 Estabilidade

Temos a seguir um dos resultados mais importantes deste capítulo.

Teorema 5.4 *Se \mathcal{W} é não-vazio então o problema (5.1) possui padrões em \mathcal{W} .*

Observação 5.4 É importante ressaltar que vários pontos da demonstração deste teorema são apresentados em [12, 13]. Entre eles destacamos: na existência de um mínimo local v_0 para o funcional E em $W^{1,p}(\Omega)$ e a demonstração da estabilidade de v_0 em uma variedade local \mathcal{M} unidimensional. Por uma questão de conveniência repetimos algumas dessas demonstrações adaptadas para o nosso caso.

Antes de começar a demonstração é importante apresentar ao leitor a definição de estabilidade.

Definição 5.7 *Uma solução estacionária de (5.1) u_0 é estável em $W^{1,p}(\Omega)$ se, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer condição inicial $v_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo $\|v_0 - u_0\|_{W^{1,p}} < \delta$, então $u(\cdot)$ está definida em $(0, \infty)$ e satisfaz $\|u(t) - u_0\|_{W^{1,p}} < \varepsilon$, para todo $t > 0$. A função u_0 é assintoticamente estável se é estável e $\|u(t) - u_0\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. E u_0 é uniformemente assintoticamente estável se é estável e existe uma vizinhança*

$$\mathcal{V} = \{v_0 \in W^{1,p}(\Omega) : \|v_0 - u_0\|_{W^{1,p}} < r\}$$

tal que $\|u(t) - u_0\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, uniformemente para cada $v_0 \in \mathcal{V}$.

Uma solução é instável se não for estável.

Demonstração: Mostremos inicialmente que existe um mínimo de E em \mathcal{W} e que por sua vez, também é um mínimo local de E em $W^{1,p}(\Omega)$. A demonstração desse fato é baseada em [13].

Seja \mathcal{E} o conjunto dos pontos de equilíbrio de (5.1). Afirmamos que $\mathcal{W} \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$, limitado e positivamente invariante pelo fluxo de $T(t)$.

De fato, como \mathcal{W} é não-vazio e é positivamente invariante pelo fluxo $T(t)$ (pelo lema anterior), existe $v_0 \in \mathcal{W}$ tal que a órbita de v_0 , definida por $\gamma(v_0) = \{T(t)v_0 : t \geq 0\}$ está contida em \mathcal{W} . Pela Proposição 5.3, $T(t)$ é compacto. Assim, $\gamma(v_0)$ é relativamente compacta.

Portanto, pelo Teorema 5.1 o conjunto $\omega(v_0)$ é compacto e não vazio. Além disso, como E é um funcional de Liapunov, $\omega(v_0) \subset \mathcal{E}$. Pela definição de $\omega(v_0)$ e invariância \mathcal{W} pelo fluxo $T(t)$ segue que $\omega(v_0) \subset \mathcal{W}$. Portanto $\mathcal{W} \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ e é positivamente invariante pelo fluxo de $T(t)$.

Para qualquer $v \in \mathcal{W} \cap \mathcal{E}$, v é limitado e é solução de (5.7). Pelo Teorema 2.1 do Capítulo 10 de [22], existe uma constante $C = C(\alpha, \beta, f, g, \partial\Omega, \Omega)$ tal que

$$\|\nabla v\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq C.$$

Portanto, é possível encontrar uma constante $C > 0$ tal que $\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} < C$ para qualquer $v \in \mathcal{W} \cap \mathcal{E}$. Em outras palavras $\mathcal{W} \cap \mathcal{E}$ é um conjunto limitado.

Agora, como $\mathcal{W} \cap \mathcal{E} = T(t)(\mathcal{W} \cap \mathcal{E})$ e $T(t)$ é compacto, segue que $\mathcal{W} \cap \mathcal{E}$ é relativamente compacto em $W^{1,p}(\Omega)$. Pela continuidade de E em $W^{1,p}(\Omega)$ e a compacidade de $\overline{\mathcal{W} \cap \mathcal{E}}$, existe $v_0 \in \overline{\mathcal{W} \cap \mathcal{E}}$ tal que v_0 é mínimo de E em $\overline{\mathcal{W} \cap \mathcal{E}}$.

Afirmamos agora que v_0 é mínimo de E em \mathcal{W} e que v_0 pertence ao conjunto interior de \mathcal{W} , $\text{int}(\mathcal{W})$.

Se v_0 não é mínimo de E em \mathcal{W} , como \mathcal{W} é não vazio, existe $v_1 \in \mathcal{W}$ tal que $E[v_1] < E[v_0]$. Como anteriormente, $\omega(v_1) \subset \mathcal{E}$, pois $\gamma(v_1)$ é relativamente compacta e $E[T(t)v_1] \leq E[v_1] < E[v_0]$ para todo $t > 0$. Assim, se $w \in \omega(v_1)$ (e portanto $w \in \overline{\mathcal{W} \cap \mathcal{E}}$),

$$E[w] \leq E[v_1] < E[v_0],$$

contradizendo o fato de v_0 ser mínimo de E em $\overline{\mathcal{W} \cap \mathcal{E}}$. Portanto v_0 é mínimo de E em \mathcal{W} .

Suponhamos que $v_0 \in \partial\mathcal{W}$.

Se $v_0 \equiv \alpha$ ou $v_0 \equiv \beta$ devemos ter necessariamente que uma das condições não é satisfeita:

$$\int_{\Gamma_1} v_0 d\sigma \leq 0 \text{ ou } \int_{\Gamma_2} v_0 d\sigma \geq 0.$$

Se $\int_{\Gamma_1} v_0 d\sigma = 0$ ou $\int_{\Gamma_2} v_0 d\sigma = 0$ a mesma demonstração feita no Lema 5.2 (prova do ítem (iii)) nos dá uma contradição com a definição de \mathcal{E}_0 .

Se $E[v_0] = J_0$, então para qualquer $v \in \mathcal{W}$, $E[v] \geq E[v_0] = J_0$, pois v_0 é um mínimo de E em \mathcal{W} , o que é uma contradição com o fato de $v \in \mathcal{W}$.

Logo $v_0 \in \text{int}(\mathcal{W})$.

Mostremos agora que v_0 é um mínimo local de E em $W^{1,p}(\Omega)$, isto é, existe $\epsilon > 0$ tal que $E[v_0] \leq E[v]$ para qualquer

$$v \in B_\epsilon(v_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in W^{1,p}(\Omega) : \|v - v_0\|_{W^{1,p}} < \epsilon\}.$$

Como v_0 é um mínimo de E em \mathcal{W} e $v_0 \in \text{int}(\mathcal{W})$, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que v_0 é mínimo de E em

$$B_{\epsilon_1}(v_0) \cap \text{int}(\mathcal{W}),$$

o qual é aberto em $W^{1,p}(\Omega)$. Portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(v_0) \subset B_{\varepsilon_1}(v_0) \cap \text{int}(\mathcal{W}).$$

Logo para qualquer $v \in B_\varepsilon(v_0) (\subset \text{int}(\mathcal{W}))$, $E[v_0] \leq E[v]$, ou seja, v_0 é um mínimo local de E em $W^{1,p}(\Omega)$. Além do mais v_0 é não constante, pois pertence a \mathcal{W} .

Uma vez que v_0 é um mínimo local de E em $W^{1,p}(\Omega)$ devemos ter $DE[v_0](u) = 0$ e $D^2E[v_0](u, u) \geq 0$ para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pela regularidade de E . Assim, da equação (5.9) segue que

$$\int_{\Omega} a(x)|\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f'(v_0)u^2 dx - \int_{\partial\Omega} b(y)g'(v_0)u^2 d\sigma \geq 0, \quad (5.16)$$

para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Para concluirmos a demonstração do teorema devemos mostrar que v_0 é estável. Para isso é suficiente considerarmos o problema linearizado de (5.1) em torno de v_0 , que é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \text{div}(a(x)\nabla w) + f'(v_0)w, & x \in \Omega \\ a(x)\nabla w \cdot n = b(x)g'(v_0)w, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.17)$$

e analisarmos o espectro do operador linear

$$\mathcal{L}(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{div}(a(x)\nabla\phi) + \theta\phi,$$

cujos domínio é

$$D(\mathcal{L}) = \{ \phi \in W^{2,p}(\Omega) : a(x)\nabla\phi \cdot n - \gamma(x)\phi(x) = 0, x \in \partial\Omega \}.$$

Aqui $\theta = f'(v_0)$ e $\gamma(x) = g'(v_0)b(x)$.

Observe que, pelas nossas hipóteses, $W^{2,p}(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$, pois $p > n$.

Consideremos a extensão do operador \mathcal{L} ao espaço $W^{1,2}(\Omega)$, $\tilde{\mathcal{L}}$. O Teorema 11.3 de [36] mostra que $\sigma(\tilde{\mathcal{L}})$, o espectro do operador $\tilde{\mathcal{L}}$, consiste apenas de uma seqüência de auto-valores. Além disso, com um argumento semelhante ao usado por [11], é possível mostrarmos que $\sigma(\tilde{\mathcal{L}}) = \sigma(\mathcal{L})$. Assim,

se λ é um auto-valor de \mathcal{L} e ψ é uma auto-função não nula associada a λ , devemos ter

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a\nabla\psi) + \theta\psi = \lambda\psi, & x \in \Omega \\ a(x)\nabla\psi \cdot n - \gamma(x)\psi = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.18)$$

Multiplicando esta equação por ψ e integrando por partes obtemos

$$-\int_{\Omega} a(x)|\nabla\psi|^2 dx + \int_{\Omega} \theta\psi^2 dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(x)\psi^2 = \lambda \int_{\Omega} \psi^2 dx.$$

Como $\psi \not\equiv 0$, pela equação (5.16) vem que

$$\lambda = \frac{-\int_{\Omega} a(x)|\nabla\psi|^2 dx + \int_{\Omega} \theta\psi^2 dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(x)\psi^2}{\int_{\Omega} \psi^2 dx} \leq 0.$$

Logo $\sigma(\mathcal{L}) = \{0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots\}$.

Sabe-se que se $\sigma(\mathcal{L}) \subset \{\operatorname{Re}\lambda < 0\}$ então v_0 é assintoticamente estável (e portanto estável). Veja [11, 19], por exemplo.

Portanto, se $\lambda_1 < 0$, $\sigma(\mathcal{L}) \subset \{\operatorname{Re}\lambda < 0\}$, donde segue o desejado.

Agora, se $\lambda_1 = 0$, devemos mostrar que este auto-valor é simples. Como conseqüência, uma vez que $\sigma(\mathcal{L}) \cap \{\operatorname{Re}\lambda = 0\} = \{0\}$, existe uma variedade central local \mathcal{M} , invariante pelo fluxo $T(t)$, unidimensional e tangente em v_0 na direção da auto-função associada ao auto-valor $\lambda_1 = 0$, com a seguinte propriedade: se v_0 é estável em \mathcal{M} então v_0 é estável em $W^{1,p}(\Omega)$. Para este resultado sugerimos uma leitura de [35, 12].

Seja w_1 a auto-função associada ao auto-valor $\lambda_1 = 0$.

Consideremos $S : C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow C^1(\overline{\Omega})$ o operador definido por $S(\phi) = v$, com v a única solução do problema auxiliar

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla v) + [K - f'(v_0)]v = \phi, & x \in \Omega \\ -a(x)\nabla v \cdot n - [K - b(x)g'(v_0)]v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.19)$$

sendo que K é uma constante positiva tal que

$$K - f'(v_0) > 0, \quad x \in \Omega, \quad \text{e} \quad K - b(x)g'(v_0) > 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (5.20)$$

A boa definição de S segue de resultados clássicos, como por exemplo em [17].

Não é difícil ver que S é linear. Afirmamos que S é compacto.

Seja $B \subset C^1(\overline{\Omega})$ um conjunto limitado. Mostremos que $S(B)$ é relativamente compacto em $C^1(\overline{\Omega})$.

Seja $\phi \in B$. Por estimativas clássicas sabemos que se v é solução de (5.19), com $S(\phi) = v$, então

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|S(\phi)\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_1 \|\phi\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq C_2 \|\phi\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq M,$$

pois B é limitado. Ou seja $\|S(\phi)\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq M$, para cada $\phi \in B$.

Logo $S(B) \subset C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e é limitado. Como $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ está compactamente contido em $C^1(\overline{\Omega})$, segue que $S(B)$ é relativamente compacto em $C^1(\overline{\Omega})$. Portanto S é compacto.

Consideremos agora o conjunto $\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in C^1(\overline{\Omega}); \phi \geq 0\}$. Então \mathcal{C} é um cone fechado com $\text{int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$ e $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \{0\}$.

A definição de um cone é a seguinte: um cone \mathcal{C} em um espaço de Banach é um conjunto fechado por adição e multiplicação por escalares não-negativos, isto é, se $u, v \in \mathcal{C}$ então $u + v$ e $\lambda u \in \mathcal{C}$.

Com efeito, seja $\{\phi_n\} \subset \mathcal{C}$ tal que $\phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi$ em $C^1(\overline{\Omega})$. Assim

$$0 \leq \|\phi_n - \phi\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq C \|\phi_n - \phi\|_{C^1(\overline{\Omega})} \rightarrow 0.$$

Portanto $|\phi_n(x) - \phi(x)| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, para cada $x \in \overline{\Omega}$. Como $\phi_n \geq 0$, necessariamente temos $\phi \geq 0$. Logo $\phi \in \mathcal{C}$.

Tomando $\phi \equiv 1$ concluímos que $\text{int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.

Afirmamos agora que $S(\mathcal{C} \setminus \{0\}) \subset \text{int}(\mathcal{C})$.

Com efeito, seja $\phi \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ e mostremos que $S(\phi) = v > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Suponhamos o contrário, isto é, que exista $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $v(x_0) \leq 0$. Como $\phi \not\equiv 0$, existe $\bar{x} \in \overline{\Omega}$ tal que $\phi(\bar{x}) > 0$.

Se v é constante, então

$$\phi = -\text{div}(a\nabla v) + [K - f'(v_0)]v = [K - f'(v_0)]v \Rightarrow v(x) = \frac{\phi(x)}{[K - f'(v_0)]} \geq 0,$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$. Em particular, $v(x_0) = v(\bar{x}) > 0$, o que seria uma contradição. Portanto v não pode ser constante.

Seja $v_m = \min_{x \in \bar{\Omega}} v(x)$. Sem perda de generalidade podemos supor que $v_m = v(x_0)$. Defina $w(x) = v(x) - v_m$. Então $w \geq 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$ e $w(x_0) = 0$. Com isso,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(a\nabla w) &= \operatorname{div}(a\nabla v) = [K - f'(v_0)]v - \phi \\ &= [K - f'(v_0)]v - [K - f'(v_0)]v_m + [K - f'(v_0)]v_m - \phi \\ &= [K - f'(v_0)]w + [K - f'(v_0)]v_m - \phi. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\operatorname{div}(a\nabla w) + [f'(v_0) - K]w = [K - f'(v_0)]v_m - \phi \leq 0.$$

Pelo Teorema 8.1 de [36], w atinge seu mínimo na fronteira, digamos $p \in \partial\Omega$ e pelo Teorema 8.6, também de [36],

$$\frac{\partial w(p)}{\partial n} < 0. \quad (5.21)$$

Da definição de w obtemos que $v(p) = v_m \leq 0$. Assim de (5.21) vem que

$$0 > \frac{\partial w(p)}{\partial n} = \frac{\partial v(p)}{\partial n} = -\frac{[K - b(p)g'(v_0)]v(p)}{a(p)} \geq 0,$$

o que é uma contradição.

Logo $v > 0$ para cada $x \in \bar{\Omega}$, ou seja, $v \in \operatorname{int}(\mathcal{C})$.

Assim estamos nas condições do Teorema de Klein-Rutman (veja [8, 36]) que garante a existência de $\psi_1 > 0$, com $\|\psi_1\| = 1$ e $\mu_1 > 0$ tal que $S\psi_1 = \mu_1\psi_1$. Além disso, este teorema afirma que $\mu_1 = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(S)\}$ e a sua multiplicidade é igual a 1.

Lembramos que as hipóteses do Teorema de Krein-Rutman que devem ser satisfeitas são justamente: a existência de um cone fechado \mathcal{C} com interior não-vazio e um operador linear e compacto S tal que $S(\mathcal{C} \setminus \{0\}) \subset \operatorname{int}(\mathcal{C})$.

Seja $\Phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} -\operatorname{div}(a\nabla v) + [K - f'(v_0)]v$. Então $\Phi = S^{-1}$.

Assim, se λ é um auto-valor de Φ , com ψ_λ a auto-função associada a λ , então $\frac{1}{\lambda}$ é um auto-valor de S com ψ_λ a auto-função associada.

Agora, $\lambda = K$ é um auto-valor de Φ com a auto-função associada w_1 (lembramos que w_1 é a auto-função associada ao auto-valor $\lambda_1 = 0$ do operador \mathcal{L}), pois

$$\begin{aligned}\Phi(w_1) &= -\operatorname{div}(a\nabla w_1) + [K - f'(v_0)]w_1 = -\operatorname{div}(a\nabla w_1) - f'(v_0)w_1 + Kw_1 \\ &= -\mathcal{L}(w_1) + Kw_1 = -0w_1 + Kw_1 = Kw_1.\end{aligned}$$

Afirmamos agora que $\frac{1}{K}$ é o maior auto-valor de S . Com efeito, sejam λ e ϕ auto-valor e auto-função de S , respectivamente. Como $S(\phi) = v$ e $\Phi(v) = \phi$, temos

$$\begin{aligned}\lambda \int_{\Omega} \phi^2 dx &= \int_{\Omega} S(\phi)\phi dx = \int_{\Omega} v \{-\operatorname{div}(a\nabla v) + [K - f'(v_0)]v\} dx \\ &= -\int_{\Omega} \operatorname{div}(a\nabla v)v dx + \int_{\Omega} Kv^2 dx - \int_{\Omega} f'(v_0)v^2 dx \\ &= -\int_{\partial\Omega} a\nabla v \cdot nv d\sigma + \int_{\Omega} a|\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f'(v_0)v^2 dx + \int_{\Omega} Kv^2 dx \\ &\stackrel{(5.19)}{=} \int_{\partial\Omega} [K - b(y)g'(v_0)]v^2 d\sigma + \int_{\Omega} a|\nabla v|^2 dx \\ &\quad - \int_{\Omega} f'(v_0)v^2 dx + \int_{\Omega} Kv^2 dx \\ &\stackrel{(5.9)}{=} D^2E[v_0](v, v) + \int_{\partial\Omega} Kv^2 d\sigma + \int_{\Omega} Kv^2 dx \geq \int_{\Omega} Kv^2 dx.\end{aligned}$$

Portanto

$$\lambda \int_{\Omega} \phi^2 dx \geq \int_{\Omega} Kv^2 dx = K \int_{\Omega} (S(\phi))^2 dx = K\lambda^2 \int_{\Omega} \phi^2 dx,$$

se, e somente se,

$$K\lambda^2 - \lambda \leq 0,$$

donde concluímos que $\lambda \leq \frac{1}{K}$.

Assim, $\mu_1 = \frac{1}{K}$ e é simples, como vimos anteriormente. Isso implica que K também é simples.

Portanto, se $\lambda_1 = 0$ não é um auto-valor simples de \mathcal{L} , existem u, v autofunções associadas a λ_1 , linearmente independentes tais que $\mathcal{L}u = 0$ e

$\mathcal{L}v = 0$. Mas

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}v = \operatorname{div}(a\nabla v) + f'(v_0)v = \operatorname{div}(a\nabla v) + [f'(v_0) - K]v + Kv \\ &= -\Phi(v) + Kv, \end{aligned}$$

o que nos dá $\Phi(v) = Kv$. Analogamente $\Phi(u) = Ku$. Mas K é auto-valor simples. Logo u e v são linearmente dependentes, o que é uma contradição.

Logo $\lambda_1 = 0$ é auto-valor simples. Assim, existe uma variedade central local unidimensional \mathcal{M} , com a propriedade: se v_0 é estável em \mathcal{M} então v_0 é estável em $W^{1,p}(\Omega)$.

Resta-nos mostrar que v_0 é estável em \mathcal{M} . Salientamos que esta demonstração se encontra em [13], mas a apresentamos aqui para a conveniência do leitor.

Como \mathcal{M} é unidimensional podemos identificá-la com o intervalo $(-r, r)$, para algum $r > 0$ e também identificar v_0 com $x = 0 \in (-r, r)$. Mostremos que v_0 é estável a direita, isto é, no intervalo $[0, r)$. Um raciocínio semelhante mostra que v_0 é estável a esquerda.

Suponhamos que $E[0] = 0$ e que 0 é um mínimo isolado, ou seja, existe $r_1 \leq r$ tal que $0 < E[x]$ para cada $x \in (0, r_1]$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado, com $\varepsilon < r_1$. Defina $E_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} E[\bar{x}] = \min_{x \in [\varepsilon, r_1]} E[x]$.

Portanto $E_\varepsilon > E[v_0]$.

Pela continuidade de E , existe $\varepsilon \geq \delta > 0$ tal que $E[x] < E_\varepsilon$ para todo $x \in [0, \delta]$.

Assim, se $x \in [0, \delta]$ então, para cada $t \geq 0$, $E[T(t)x] \leq E[x] < E_\varepsilon$, pois E é decrescente ao longo de suas órbitas. Isto implica que $T(t)x \notin [\varepsilon, r_1]$ para todo $t \geq 0$. Ou seja, $T(t)x \in (0, \varepsilon)$. Em outras palavras, v_0 é estável a direita e, portanto, repetindo o raciocínio para a esquerda, concluímos que v_0 é estável. Concluímos assim o teorema. ■

5.5 Condições suficientes para a existência de padrões

No Lema 5.2 e Teorema 5.4 propostos anteriormente, supusemos que o conjunto \mathcal{W} era não-vazio e disso decorria os resultados. Devemos então mostrar que nosso problema é consistente, isto é, que \mathcal{W} é realmente não-vazio. Aqui reside a importância das funções a e b , as quais desempenham papéis de grande relevância para mostrarmos esse fato.

Começamos com a seguinte condição sobre a função de difusibilidade.

5.5.1 Difusibilidade não-constante

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um domínio limitado, com fronteira suave. Suponhamos que uma superfície $(N - 1)$ -dimensional, suave, $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^N$, divida Ω em duas regiões Ω_α e Ω_β , tais que $|\Omega_\alpha|, |\Omega_\beta| > 0$, $|\partial\Omega_\alpha \cap \partial\Omega|_\sigma > 0$ e $|\partial\Omega_\beta \cap \partial\Omega|_\sigma > 0$.

Defina

$$d(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\text{dist}(x, \mathcal{H}), & x \in \bar{\Omega}_\alpha \cap \mathbb{R}^N \\ \text{dist}(x, \mathcal{H}), & x \in \bar{\Omega}_\beta \cap \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

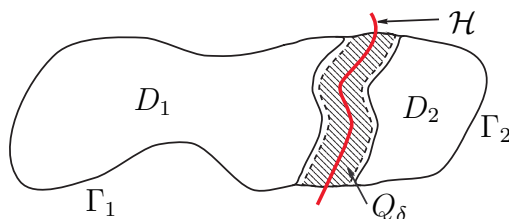
e

$$\mathcal{Q}_s \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \bar{\Omega} : |d(x)| < s\}.$$

Fixe $\delta > 0$ e escolha $D_1 \subset \Omega_\alpha$ e $D_2 \subset \Omega_\beta$ satisfazendo:

- $D_i \cap \mathcal{Q}_\delta = \emptyset$, $i = 1, 2$;
- D_1 e D_2 têm fronteiras suaves;
- $\bar{\Omega} \setminus (D_1 \cup D_2) \subset \mathcal{Q}_{2\delta}$;
- $\partial\Omega \cap \bar{D}_i = \Gamma_i$, com $|\Gamma_i|_\sigma > 0$, $i = 1, 2$.

Veja abaixo uma ilustração para um caso bi-dimensional.



Seja $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, definida por

$$\xi(t) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } t \leq \frac{-\delta}{2} \\ \frac{\alpha + \beta}{2} + \left(\frac{\beta - \alpha}{\delta}\right)t, & |t| \leq \frac{\delta}{2} \\ \beta, & \text{se } t \geq \frac{\delta}{2}. \end{cases}$$

Definimos

$$w(x) = \xi(d(x)) = \begin{cases} \alpha, & x \in \bar{\Omega}_\alpha \setminus \mathcal{Q}_\delta \\ \frac{\alpha + \beta}{2} + \left(\frac{\beta - \alpha}{\delta}\right)d(x), & x \in \mathcal{Q}_\delta \\ \beta, & x \in \bar{\Omega}_\beta \setminus \mathcal{Q}_\delta. \end{cases}$$

Observe que $w \in C^0(\bar{\Omega})$ e como $|\nabla d(x)| = 1$ qtp em \mathcal{Q}_δ , segue que $w \in W^{1,p}(\Omega)$, para qualquer $p \geq 1$. Por construção, $\alpha \leq w \leq \beta$, para todo $x \in \bar{\Omega}$,

$$\int_{\Gamma_1} w(x) d\sigma = \int_{\Gamma_1} \alpha d\sigma < 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_2} w(x) d\sigma = \int_{\Gamma_2} \beta d\sigma > 0.$$

Calculamos o funcional E em w e obtemos

$$\begin{aligned} E[w] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega} F(w) dx - \int_{\partial\Omega} b(y) G(w) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}_\delta} a(x) |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega \setminus (D_1 \cup D_2)} F(w) dx - F(\alpha) |D_1| - F(\beta) |D_2| \\ &\quad - \int_{\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} b(y) G(w) d\sigma - G(\alpha) \int_{\Gamma_1} b(y) d\sigma - G(\beta) \int_{\Gamma_2} b(y) d\sigma \\ &\leq \frac{1}{2} a_{M, \mathcal{Q}_\delta} \frac{(\beta - \alpha)^2}{\delta^2} |\mathcal{Q}_\delta| - F_M |D_1 \cup D_2| - G_M \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} b(y) d\sigma, \end{aligned}$$

pois por hipótese, $F(\alpha) = F(\beta) = F_M$, $G(\alpha) = G(\beta) = G_M$, $F \geq 0$, $G \geq 0$, e $b > 0$. Aqui $a_{M, \mathcal{Q}_\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathcal{Q}_\delta} a(x)$.

Para que $E[w]$ satisfaça $E[w] < J_0 = \mathcal{E}_0 - G_M \int_{\partial\Omega} b(y) d\sigma - F_M |\Omega|$, é suficiente que

$$\frac{1}{2} a_{M, \mathcal{Q}_\delta} \frac{(\beta - \alpha)^2}{\delta^2} |\mathcal{Q}_\delta| + F_M |\Omega \setminus (D_1 \cup D_2)| + G_M \int_{\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} b(y) d\sigma < \mathcal{E}_0. \quad (5.22)$$

Para isso, seja $0 < b \in C^1(\partial\Omega)$. Consideremos os seguintes valores:

$$B_1 = \int_{\partial\Omega_\alpha \cap \partial\Omega} b(y) d\sigma, \quad B_2 = \int_{\partial\Omega_\beta \cap \partial\Omega} b(y) d\sigma$$

e suponha, sem perda de generalidade, que $B_1 \leq B_2$.

Escolha δ suficientemente pequeno para que:

$$\begin{cases} |\mathcal{Q}_{2\delta}| \leq \frac{G_M}{8F_M} B_1, \\ \int_{\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} b \leq \frac{1}{8} B_1, \\ \frac{1}{2} B_1 < \int_{\Gamma_i} b, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (5.23)$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a_{M, \mathcal{Q}_\delta} \frac{(\beta - \alpha)^2}{\delta^2} |\mathcal{Q}_\delta| + F_M |\Omega \setminus (D_1 \cup D_2)| + G_M \int_{\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} b(y) d\sigma \\ & \leq \frac{1}{2} a_{M, \mathcal{Q}_\delta} \frac{(\beta - \alpha)^2}{\delta^2} |\mathcal{Q}_{2\delta}| + F_M |\mathcal{Q}_{2\delta}| + \frac{G_M}{8} B_1 \\ & \leq \frac{1}{4} a_{M, \mathcal{Q}_\delta} \frac{(\beta - \alpha)^2}{\delta^2} \frac{G_M}{4F_M} B_1 + \frac{G_M}{4} B_1. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Agora, se escolhermos $a \in C^1(\bar{\Omega})$ tal que

$$a_{M, \mathcal{Q}_\delta} \leq \frac{4\delta^2 F_M}{(\beta - \alpha)^2} \quad \text{e} \quad a_{m, D_i} \geq \frac{b_M}{\rho_2(D_i)}, \quad i = 1, 2, \quad (5.25)$$

com $b_M = \max\{b(y) : y \in \partial\Omega\}$, então $\Sigma_i = \phi$ ($i = 1, 2$) e, portanto

$$\mathcal{E}_0 = G_M \min_{i=1,2} \left\{ \int_{\Gamma_i} b(y) d\sigma \right\}.$$

Logo, da desigualdade (5.23) e (5.25), de (5.24) vem que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a_{M, \mathcal{Q}_\delta} \frac{(\beta - \alpha)^2}{\delta^2} |\mathcal{Q}_\delta| + F_M |\Omega \setminus (D_1 \cup D_2)| + G_M \int_{\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} b(y) d\sigma \\ & \leq \frac{G_M}{4} B_1 + \frac{G_M}{4} B_1 = \frac{G_M}{2} B_1 \\ & \leq G_M \int_{\Gamma_i} b(y) d\sigma \quad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

donde obtemos (5.22).

Assim, sob a luz do Teorema 5.4 temos o seguinte resultado

Corolário 5.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um domínio limitado com fronteira suave, f e g ambas de classe C^1 satisfazendo as condições (h_0) e (h_1) , e $b \in C^1(\partial\Omega)$ positiva. Suponhamos que \mathcal{H} , D_1 , D_2 e \mathcal{Q}_δ são como acima. Se $a \in C^1(\bar{\Omega})$ e satisfaz (5.25), então (5.1) tem ao menos um padrão.*

Em outras palavras, a existência de padrões está relacionada com o comportamento da função $a(x)$, que deve ser suficientemente pequena em uma vizinhança tubular de \mathcal{H} , e suficientemente grande em dois subconjuntos D_1 e D_2 satisfazendo as condições acima.

5.5.2 Difusibilidade constante

Tratemos agora o caso em que a é constante. Nesse caso algumas mudanças em relação à seção anterior são necessárias, como a geometria do domínio e a dependência da função b . Por isso separamos a demonstração em duas partes: $N = 2$ e $N \geq 3$. Esta demonstração é baseada em [13], no qual a autora aborda o caso em que b é constante e $f \equiv 0$.

Sejam $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$, domínios limitados, com fronteiras de classe C^2 , tais que

$$\rho_2(D_i) > \frac{1}{a}, \quad i = 1, 2. \quad (5.26)$$

Lembramos que $\rho_2(D_i)$ é o segundo auto-valor do problema de Steklov.

Transladando-se os domínios, se necessário, é possível encontrarmos $l = \text{dist}(\overline{D_1}, \overline{D_2})$ tal que

$$|\partial D_i|_\sigma - 4l > 0, \quad i = 1, 2.$$

Assim, existem $P_i \in \partial D_i$ e um segmento \mathcal{S} unindo P_1 a P_2 cujo comprimento é igual a l e não intercepta $\overline{D_i}$ ($i = 1, 2$) em nenhum outro ponto. Podemos assumir que

(i) $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (l, 0)$;

(ii) existe $\varepsilon' > 0$ (suficientemente pequeno) tal que

$$\begin{aligned} \partial D_1 \cap B(P_1, \varepsilon') &= \{(0, y) : |y| < \varepsilon'\} \stackrel{\text{def}}{=} H_1 \\ \partial D_2 \cap B(P_2, \varepsilon') &= \{(l, y) : |y| < \varepsilon'\} \stackrel{\text{def}}{=} H_2; \end{aligned}$$

(iii) \mathcal{S} está contido no eixo x .

Veja a figura (5.1) para uma ilustração deste caso.

Convém observar que estas hipóteses visam facilitar a elaboração dos cálculos. Os mesmos resultados podem ser obtidos para outros domínios cuja geometria é semelhante ao modelo apresentado.

Seja Q_ε uma vizinhança cilíndrica tubular de \mathcal{S} , com $\varepsilon > 0$ a ser definido mais adiante, tal que $\partial D_i \cap \partial Q_\varepsilon \subset H_i$ ($i = 1, 2$), e $|Q_\varepsilon| = 2l\varepsilon$.

Afirmamos que é possível encontrar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que

- (a) $D_i \subset \Omega$;
- (b) $\mathcal{S} \subset \Omega$;
- (c) $\Omega \setminus (D_1 \cup D_2) \subset Q_\varepsilon$;
- (d) $\partial\Omega$ é de classe C^2 ;
- (e) $\Gamma_i = (\partial D_i \setminus \Omega)$, $|\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)| < 3l$; $(\partial D_i \setminus \Gamma_i) \subset (\partial D_i \cap \overline{Q_\varepsilon})$ ($i = 1, 2$);
- (f) $\left(\frac{a(\beta - \alpha)^2}{2l^2} + F_M \right) |\Omega \setminus (D_1 \cup D_2)| < G_M |\Gamma_i| - G_M |\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)|$ ($i = 1, 2$).

Com efeito, escolha $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{cases} 0 < \varepsilon < \varepsilon' \\ \varepsilon < [G_M |\partial D_i| - G_M 4l] \left(\frac{l}{a(\beta - \alpha)^2 + 2l^2 F_M} \right), \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon < \frac{l}{2}. \end{cases}$$

Como por hipótese D_1 e D_2 têm fronteiras suaves, não é difícil verificarmos os itens (a) até (e).

Para o item (f), pelo item (c) e pela escolha de $\varepsilon > 0$, temos

$$|\Omega \setminus (D_1 \cup D_2)| \leq |Q_\varepsilon| = 2l\varepsilon < [G_M |\partial D_i| - G_M 4l] \left(\frac{2l^2}{a(\beta - \alpha)^2 + 2l^2 F_M} \right).$$

Portanto

$$\left(\frac{a(\beta - \alpha)^2}{2l^2} + F_M \right) |\Omega \setminus (D_1 \cup D_2)| < G_M |\partial D_i| - G_M 4l. \quad (5.27)$$

Como $\partial D_i = \Gamma_i \cup (\partial D_i \setminus \Gamma_i) \subset \Gamma_i \cup (\partial D_i \cap \partial Q_\varepsilon)$ ($i = 1, 2$), temos

$$|\partial D_i| \leq |\Gamma_i| + |\partial D_i \setminus \Gamma_i| \leq |\Gamma_i| + 2\varepsilon \leq |\Gamma_i| + l \quad (i = 1, 2),$$

pela escolha de ε .

De (5.27), do ítem (e) e desta última desigualdade vem que

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{a(\beta - \alpha)^2}{2l^2} + F_M \right) |\Omega \setminus (D_1 \cup D_2)| &< G_M |\Gamma_i| + G_M l - G_M 4l \\
 &= G_M |\Gamma_i| - 3G_M l \\
 &< G_M |\Gamma_i| - G_M |\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)|,
 \end{aligned}$$

($i = 1, 2$), o que demonstra o ítem (f).

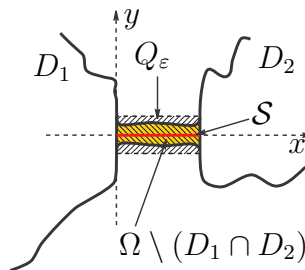


Figura 5.1: Um exemplo de domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ do tipo “dumbbell”

Defina a seguinte função

$$w(x, y) = \begin{cases} \alpha, & (x, y) \in \overline{D}_1 \\ \alpha + \frac{(\beta - \alpha)}{l}x, & (x, y) \in \overline{\Omega} \setminus (D_1 \cup D_2) \\ \beta, & (x, y) \in \overline{D}_2. \end{cases}$$

Então w satisfaz $\alpha \leq w \leq \beta$,

$$\int_{\Gamma_1} w \, d\sigma = \int_{\Gamma_1} \alpha \, d\sigma < 0, \quad \int_{\Gamma_2} w \, d\sigma = \int_{\Gamma_1} \beta \, d\sigma > 0,$$

$$\nabla w(x, y) = \left(\frac{\beta - \alpha}{l}, 0 \right) \text{ se } (x, y) \in \overline{\Omega} \setminus (D_1 \cup D_2), \text{ e}$$

$$\nabla w(x, y) = 0 \text{ se } (x, y) \in (D_1 \cup D_2).$$

Assim, $w \in W^{1,p}(\Omega)$, para cada $p \geq 1$.

Assumimos que esteja definida a função b e calculemos o funcional E em w .

$$\begin{aligned}
E[w] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} a |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega} F(w) dx - \int_{\partial\Omega} b(y) G(w) d\sigma \\
&= \frac{a}{2} \int_{\Omega \setminus (D_1 \cup D_2)} |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega \setminus (D_1 \cup D_2)} F(w) dx - F(\alpha) |D_1| - F(\beta) |D_2| \\
&\quad - \int_{\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} b(y) G(w) d\sigma - G(\alpha) \int_{\Gamma_1} b(y) d\sigma - G(\beta) \int_{\Gamma_2} b(y) d\sigma \\
&\leq \frac{a}{2} \frac{(\beta - \alpha)^2}{l^2} |\Omega \setminus (D_1 \cup D_2)| - F_M |D_1 \cup D_2| - G_M \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} b(y) d\sigma,
\end{aligned}$$

pois F , G e b são positivas.

Pelo ítem (f) e esta última desigualdade vem que

$$\begin{aligned}
E[w] &< G_M |\Gamma_i| - G_M |\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)| - F_M |\Omega \setminus (D_1 \cup D_2)| - F_M |D_1 \cup D_2| \\
&\quad - G_M \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} b(y) d\sigma \\
&= G_M |\Gamma_i| - G_M |\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)| - F_M |\Omega| - G_M \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} b(y) d\sigma. \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Neste estágio precisamos fazer algumas restrições na função $b(x)$. Elaboramos a seguir uma condição suficiente sobre a função b para nossos propósitos.

Condição suficiente: Seja $b \in C^1(\partial\Omega)$ tal que

$$b(y) \geq 1 \quad \forall y \in \Gamma_i \quad (i = 1, 2) \quad (5.29)$$

e

$$\int_{\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} b d\sigma \leq |\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)|. \quad (5.30)$$

Como $\Gamma_i = (\Gamma_i \setminus \Sigma_i) \cup \Sigma_i$ ($i = 1, 2$), sendo que Σ_i fora definido no começo da Seção 5.3, se b satisfaz (5.29) e se para algum $i \in \{1, 2\}$, $\Sigma_i \neq \emptyset$, então por (5.26)

$$G_M |\Gamma_i| = G_M |\Gamma_i \setminus \Sigma_i| + G_M |\Sigma_i| < G_M \int_{\Gamma_i \setminus \Sigma_i} b d\sigma + G_M \rho_2(D_i) |\Sigma_i|.$$

Além disso, (5.30) implica

$$-G_M \int_{\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} b d\sigma \geq -G_M |\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)|.$$

Logo de (5.28) e destas últimas desigualdades segue que

$$E[w] < G_M a \rho_2(D_i) |\Sigma_i| + G_M \int_{\Gamma_i \setminus \Sigma_i} b - F_M |\Omega| - G_M \int_{\partial\Omega} b(y) d\sigma \quad (i = 1, 2),$$

ou seja,

$$E[w] < \mathcal{E}_0 - F_M |\Omega| - G_M \int_{\partial\Omega} b(y) d\sigma = J_0.$$

No caso em que $N \geq 3$ a demonstração segue a mesma linha, mas com uma vantagem, D_1 e D_2 não necessitam estarem tão próximos. Podemos tomar a medida N -dimensional $|\Omega \setminus (D_1 \cup D_2)|$ tão pequena quanto se queira, juntamente com a medida de $|\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)|$, sem que l seja necessariamente pequeno.

Concluimos assim o seguinte resultado.

Corolário 5.2 *Sejam f e g ambas de classe C^1 satisfazendo as condições (h_0) e (h_1) . Para cada constante $a > 0$, existe um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com fronteira suave tal que se $b : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz (5.29) e (5.30) então (5.1) tem ao menos uma solução estacionária estável não-constante.*

Textualmente, a condição sobre a função b nos revela um comportamento de certa forma esperado. Isto é, o fato de b ser suficientemente grande na fronteira dos subconjuntos disjuntos e pequeno no istmo que liga estes subconjuntos, lembra-nos a condição sobre $a(x)$ quando esta é não-constante. Além disso esta condição também contempla o caso quando, eventualmente, a função b for constante, que é o caso abordado em [13].

Apêndice A

Uma observação sobre a Γ -convergência

Neste apêndice apresentamos uma observação sobre a Γ -convergência, abordada em [3], para a seguinte família de funcionais definidas por

$$E_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} W(u) dx + \delta_\varepsilon \int_{\partial\Omega} V(Tu) d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (\text{A.1})$$

Aqui os potenciais W e V são do tipo “double-well” (veja definição no Capítulo 2), Tu é o traço da função u , \mathcal{H}^{N-1} é a medida de Hausdorff $(N - 1)$ -dimensional, e δ_ε satisfaz a importante relação para nosso trabalho:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \delta_\varepsilon = k \geq 0. \quad (\text{A.2})$$

com $\delta_\varepsilon \geq 1$.

Frisamos que em [3] os autores demonstram a Γ -convergência desses funcionais quando $k > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Porém uma análise criteriosa em suas demonstrações permite-nos afirmar que o mesmo resultado vale para a hipótese $k = 0$ e $\delta_\varepsilon \geq 1$. Por isso refizemos todo o caminho percorrido pelos autores, para concluirmos a afirmação para estes casos e colocamos estas notas neste apêndice.

Como uma observação deste apêndice ressaltamos que a demonstração da Γ -convergência de [3] vale para os casos $k = 0$ e $\delta_\varepsilon \geq 1$ e, mais ainda, para domínios N -dimensionais, $N \geq 3$.

Usamos as mesmas notações de [3].

A.1 Γ -Convergência

Definição A.1 *Seja \mathcal{X} um espaço métrico completo e seja $\{\mathcal{F}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ uma família de funcionais $\mathcal{F}_\varepsilon : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Um funcional \mathcal{F}_0 é o Γ -limite de \mathcal{F}_ε em \mathcal{X} se valem as seguintes condições:*

(i) *para cada $x \in \mathcal{X}$ e para cada família $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ tal que $x_\varepsilon \rightarrow x$ (em \mathcal{X}) então*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(x_\varepsilon) \geq \mathcal{F}_0(x);$$

(ii) *para cada $x \in \mathcal{X}$, existe uma seqüência $\{x_{\varepsilon_j}\}_j \subset \mathcal{X}$ tal que $x_{\varepsilon_j} \rightarrow x$ (em \mathcal{X}) e*

$$\limsup_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \mathcal{F}_{\varepsilon_j}(x_{\varepsilon_j}) \leq \mathcal{F}_0(x).$$

A menos de menção do contrário, consideramos que as raízes de W e de V são $\{\alpha, \beta\}$ e $\{\alpha', \beta'\}$, respectivamente, e satisfazem $\alpha' \leq \alpha < \beta \leq \beta'$. Por uma questão de brevidade usamos $I = \{\alpha, \beta\}$ e $I' = \{\alpha', \beta'\}$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio limitado com fronteira de classe C^2 e consideremos a família de funcionais E_ε definidas em (A.1).

Definimos

$$h(t) = 2 \int_0^t W^{1/2}(\xi) d\xi, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\sigma = h(\beta) - h(\alpha) = 2 \int_\alpha^\beta W^{1/2}(\xi) d\xi.$$

Em $\mathbb{L}^1(\Omega, \partial\Omega) \doteq L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ definimos

$$\|(u, v)\|_{\mathbb{L}^1} \doteq \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)}. \quad (\text{A.3})$$

Temos que $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^1}$ é uma norma e que $(\mathbb{L}^1, \|\cdot\|_{\mathbb{L}^1})$ é um espaço de Banach.

Consideremos a família de funcionais $\tilde{E}_\varepsilon : \mathbb{L}^1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definida por

$$\tilde{E}_\varepsilon(u, v) = \begin{cases} E_\varepsilon(u) & \text{se } u \in H^1(\Omega) \text{ e } v = Tu \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Se $0 < k < \infty$ e $N = 3$, pelo Teorema 2.6 de [3], \tilde{E}_ε Γ -converge, em \mathbb{L}^1 , para o funcional \tilde{E}_0 definido por

$$\tilde{E}_0(u, v) = \begin{cases} \Phi(u, v), & (u, v) \in BV(\partial\Omega, I) \times BV(\partial\Omega, I') \\ +\infty, & \text{caso contrário em } \mathbb{L}^1, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

sendo que $\Phi(u, v)$ é definido por

$$\Phi(u, v) = \sigma \mathcal{H}^2(S_u) + \int_{\partial\Omega} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^2 + c \mathcal{H}^1(S_v), \quad (\text{A.6})$$

com $c = \frac{(\beta' - \alpha')^2}{\pi} k$.

Além disso, para cada seqüência $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \subset \mathbb{L}^1$ e $\tilde{E}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq C < \infty$, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ é relativamente compacta em \mathbb{L}^1 e cada ponto de acumulação pertence a $BV(\partial\Omega, I) \times BV(\partial\Omega, I')$. Ou seja \tilde{E}_ε é equicoercivo.

Como dissemos anteriormente, refizemos a demonstração de [3] para contemplar o caso em que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \delta_\varepsilon = 0$, $\delta_\varepsilon \geq 1$ e $N \geq 3$. Estes resultados estão no

Teorema A.1 *Suponhamos que W e V são potenciais do tipo “double-well”. Para cada $u \in BV(\Omega, I)$ e $v \in BV(\partial\Omega, I')$ consideremos o funcional \tilde{E}_0 definido em (A.5), com*

$$\Phi(u, v) = \sigma \mathcal{H}^{N-1}(S_u) + \int_{\partial\Omega} |h(Tu) - h(v)|. \quad (\text{A.7})$$

As seguintes afirmações são verdadeiras

- (i) (Compacidade) *Seja $(u_\varepsilon) \subset H^1(\Omega)$ uma seqüência com $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que \tilde{E}_ε é limitada. Então a seqüência $(u_\varepsilon, Tu_\varepsilon)$ é relativamente compacta em \mathbb{L}^1 .*
- (ii) (Semi-continuidade inferior) *Para cada $(u, v) \in BV(\Omega, I) \times BV(\partial\Omega, I')$ e cada seqüência $(u_\varepsilon) \subset H^1(\Omega)$ tal que $u_\varepsilon \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$ e $Tu_\varepsilon \rightarrow v$ em $L^1(\partial\Omega)$, temos*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{E}_\varepsilon(u, Tu) \geq \Phi(u, v).$$

(iii) (Semi-continuidade superior) *Para cada* $(u, v) \in BV(\Omega, I) \times BV(\partial\Omega, I')$, *existe uma seqüência* $(u_\varepsilon) \subset H^1(\Omega)$ *tal que* $u_\varepsilon \rightarrow u$ *em* $L^1(\Omega)$, $Tu_\varepsilon \rightarrow v$ *em* $L^1(\partial\Omega)$, e

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{E}_\varepsilon(u, Tu) \leq \Phi(u, v).$$

Em outras palavras, os ítems (ii) e (iii) nos dizem que Φ é o Γ -limite (em \mathbb{L}^1) dos funcionais \tilde{E}_ε .

Observação A.1 Em [3] o autor demonstra a Γ -convergência dos funcionais E_ε penalizados em $L^1(\Omega)$. Porém o funcional Γ -limite perde as características geométricas, pois ele não pode ser expresso diretamente por cálculos que envolvem a integração de uma densidade local dependendo de u e de ∇u respectivamente. A abordagem da Γ -convergência no espaço \mathbb{L}^1 possibilita-nos ter um funcional Γ -limite essencialmente geométrico, condição importante para a Seção 2.4.

Antes de iniciarmos a demonstração do teorema enunciamos uma série de resultados que foram demonstrados em [3], [25] e [26] e que são essenciais para obtermos o resultado desejado.

A.1.1 Resultados utilizados

Para cada conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$, $B' \subset \partial B$ e $u \in H^1(B)$, consideremos a localização do funcional E_ε definido por

$$E_\varepsilon(u, B, B') = \varepsilon \int_B |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_B W(u) dx + \delta_\varepsilon \int_{B'} V(Tu) d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (\text{A.8})$$

Observe que $E_\varepsilon(u) = E_\varepsilon(u, \Omega, \partial\Omega)$.

Teorema A.2 ([37, 25, 3]) *Para cada* $B \subset \mathbb{R}^N$, *seja* G_ε^1 *a família de funcionais definida em* $H^1(B)$ *por*

$$G_\varepsilon^1(u, B) \doteq \varepsilon \int_B |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_B W(u) dx, \quad (\text{A.9})$$

sendo que W *é um potencial do tipo “double-well”. Então*

(i) Cada seqüência enumerável $(u_\varepsilon) \subset H^1(B)$, com $G_\varepsilon^1(u_\varepsilon)$ limitado uniformemente, é relativamente compacta em $L^1(B)$ e seus pontos de acumulação pertencem a $BV(B, I)$.

(ii) Para cada $u \in BV(B, I)$ e cada seqüência $(u_\varepsilon) \subset H^1(B)$, tal que $u_\varepsilon \rightarrow u$ em $L^1(B)$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, B) \geq \sigma \mathcal{H}^{N-1}(S_u).$$

(iii) Para cada $u \in BV(B, I)$ existe uma seqüência $(u_\varepsilon) \subset H^1(B)$, tal que $u_\varepsilon \rightarrow u$ em $L^1(B)$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, B) \leq \sigma \mathcal{H}^{N-1}(S_u).$$

Além disso, quando S_u é uma superfície fechada e Lipschitz em B , as funções u_ε satisfazem $\alpha \leq u_\varepsilon \leq \beta$ e são (C/ε) -Lipschitz contínuas, convergem uniformemente para u em cada conjunto com distância positiva de S_u . Sendo $C = \max_{[\alpha, \beta]} \sqrt{W}$.

Proposição A.1 ([3]) *Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ um domínio com fronteira de classe C^1 por partes, e sejam A' , um subconjunto de ∂A , com fronteira de Lipschitz, $u \in L^1(A)$ e $v \in L^1(A')$ dados. Então*

(i) *Para cada seqüência $(u_\varepsilon) \subset H^1(A)$, tal que $u_\varepsilon \rightarrow u$ em $L^1(A)$ e $Tu_\varepsilon \rightarrow v$ em $L^1(A')$*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, A) \geq \int_{A'} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^{N-1}.$$

(ii) *Se v é constante em A' e u é constante em A , com $u = \alpha$ ou $u = \beta$, existe uma seqüência $(u_\varepsilon) \subset H^1(A)$, tal que u_ε converge uniformemente para u em cada conjunto com distância positiva de A' , $Tu_\varepsilon = v$ em A' e*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, A) \leq \int_{A'} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Além disso cada u_ε pode ser escolhida (C/ε) -Lipschitz contínua, com C o máximo de \sqrt{W} sobre cada intervalo contendo os valores de u e v .

Lema A.1 ([3]) *Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ um domínio. Fixe $\varepsilon \in (0, 1]$ e sejam $A' \subset \partial A$ e uma função lipschitziana $v : A' \rightarrow [-m, m]$, $m = \max\{|\alpha|, |\alpha'|, |\beta|, |\beta'|\}$.*

Então v admite uma extensão $u : \bar{A} \rightarrow [-m, m]$ tal que $\text{Lip}(u) \leq \frac{1}{\varepsilon} + \text{Lip}(v)$ e

$$G_\varepsilon^1(u, A) \leq ((\varepsilon \text{Lip}(v) + 1)^2 + C) (|\partial A| + o(1)) \rho, \quad (\text{A.10})$$

na qual C é o máximo de W em $[-m, m]$, o erro $o(1)$ é uma função de ε dependendo somente de A (e não de v) e ρ é o mínimo entre $\|v - \alpha\|_\infty$ e $\|v - \beta\|_\infty$.

Proposição A.2 ([3]) *Para cada $r > 0$, sejam*

$$D_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^N, x = (x_1, \dots, x_N) : |x| < r, x_N > 0\},$$

$$E_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r, x_N = 0\}.$$

Seja $(u_\varepsilon) \subset H^1(D_r)$ uma seqüência enumerável tal que a família de funcionais $E_\varepsilon(u_\varepsilon, D_r, E_r)$ é uniformemente limitada em ε . Então a seqüência (Tu_ε) é relativamente compacta em $L^1(E_r)$.

Definição A.2 *Seja $I(\mathbb{R}^N)$ o conjunto das isometrias lineares em \mathbb{R}^N , ou seja, $I(\mathbb{R}^N)$ é o conjunto das aplicações lineares $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ satisfazendo $|Au - Av| = |u - v|$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^N$.*

Sejam $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^N$ e $\psi : A_1 \rightarrow A_2$ um homeomorfismo com ψ e ψ^{-1} funções Lipschitz. Definimos o defeito de isometria $\delta(\psi)$ de ψ como sendo a menor constante δ tal que

$$\text{dist}(D\psi(x), I(\mathbb{R}^N)) \leq \delta, \text{ para quase todo } x \in A_1.$$

Aqui $D\psi(x)$ é visto como uma aplicação linear de \mathbb{R}^N em \mathbb{R}^N e a distância entre duas aplicações lineares é induzida pela norma $\|T\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |Tv|$.

Observação A.2 $\text{dist}(D\psi(x), I(\mathbb{R}^N)) \leq \delta \implies \|D\psi\| \leq 1 + \delta$, qtp em A_1 .

Proposição A.3 ([3]) *Sejam A_1, A_2 e ψ dados como na Definição A.2. Suponha que ψ aplica $A'_1 \subset \partial A_1$ em $A'_2 \subset \partial A_2$. Então para cada $u \in H^1(A_2)$*

$$E_\varepsilon(u, A_2, A'_2) \geq (1 - \delta(\psi))^{N+2} E_\varepsilon(u \circ \psi, A_1, A'_1). \quad (\text{A.11})$$

Proposição A.4 ([3]) *Para cada $x \in \partial\Omega$ e cada $r > 0$ suficientemente pequeno, existe uma aplicação lipschitziana, com inversa também lipschitziana, $\psi_r : \overline{D_r} \rightarrow \overline{\Omega \cap B_r(x)}$ tal que*

- (a) ψ_r leva D_r sobre $\Omega \cap B_r(x)$ e E_r sobre $\partial\Omega \cap B_r(x)$.
- (b) ψ_r é de classe C^1 em D_r , $\|D\psi_r - \text{Id}\| \leq \delta_r$ em todo D_r e $\delta_r \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$.

Em particular, o defeito de isometria anula-se quando $r \rightarrow 0$. Aqui Id é a aplicação identidade em \mathbb{R}^N .

Estabelecidos estes resultados podemos então elaborar a

A.1.2 Demonstração do Teorema A.1

(i) Seja $(u_\varepsilon) \subset H^1(\Omega)$ tal que $\tilde{E}_\varepsilon(u_\varepsilon, Tu_\varepsilon) \leq C < \infty$, $\forall \varepsilon$. Como $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega)$, pelo Teorema A.2 ítem (i), a seqüência (u_ε) é relativamente compacta em $L^1(\Omega)$.

Pela Proposição A.4 e pela compacidade de $\partial\Omega$, existem r_i ($i = 1, \dots, l$) e aplicações lipschitzianas ψ_i , com inversas lipschitzianas, tais que $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^l B_{r_i}(x_i)$ e $\Omega \cap B_{r_i} = \psi_i(D_{r_i})$, com defeito de isometria $\delta_i = \delta(\psi_{r_i}) < 1$.

Pela compacidade de $\partial\Omega$, basta mostramos que Tu_ε é relativamente compacta em $L^1(\partial\Omega \cap B_{r_i})$, para cada i .

Para cada $i = 1, \dots, l$ fixado, defina $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon \circ \psi_i$. Pela Proposição A.3 e do fato de $\delta_i < 1$, vem que

$$E_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon, D_{r_i}, E_{r_i}) \leq (1 - \delta(\psi_i))^{-(N+2)} E_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega \cap B_{r_i}, \partial\Omega \cap B_{r_i}) < \infty,$$

para todo ε .

Pela Proposição A.2, $T\tilde{u}_\varepsilon$ é relativamente compacta em $L^1(E_{r_i})$. Logo existem $\tilde{v}_i \in L^1(E_{r_i})$ e uma subsequência $T\tilde{u}_{\varepsilon_k}$ tais que $T\tilde{u}_{\varepsilon_k} \rightarrow \tilde{v}_i$ em $L^1(E_{r_i})$. Como ψ_i e ψ_i^{-1} são lipschitzianas, então $Tu_{\varepsilon_k} \rightarrow v_i = \tilde{v}_i \circ \psi_i^{-1}$ em $L^1(\partial\Omega \cap B_{r_i})$.

Com efeito, pelo Teorema de Mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned} \|Tu_{\varepsilon_k} - v_i\|_{L^1(\partial\Omega \cap B_{r_i})} &= \int_{\partial\Omega \cap B_{r_i}} |Tu_{\varepsilon_k} - v_i| = \int_{\partial\Omega \cap B_{r_i}} |T\tilde{u}_{\varepsilon_k} \circ \psi_i^{-1} - \tilde{v}_i \circ \psi_i^{-1}| \\ &= \int_{E_{r_i}} |T\tilde{u}_{\varepsilon_k} - \tilde{v}_i| \cdot |J\psi_i| \\ &\leq C(\psi_i) \|T\tilde{u}_{\varepsilon_k} - \tilde{v}_i\|_{L^1(E_{r_i})} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ou seja, Tu_ε é relativamente compacta em $L^1(\partial\Omega \cap B_{r_i})$. \square

(ii) Sejam $(u_\varepsilon) \subset H^1(\Omega)$ e $(u, v) \in BV(\Omega, I) \times BV(\partial\Omega, I')$ tais que $u_\varepsilon \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$ e $Tu_\varepsilon \rightarrow v$ em $L^1(\partial\Omega)$.

Seja $\delta > 0$ dado e defina $\Omega_\delta \doteq \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$. Pelo Teorema 14.16 de [17], para δ suficientemente pequeno tanto Ω_δ quanto $\Omega \setminus \Omega_\delta$ são conjuntos cujas fronteiras são de classe C^2 , já que $\partial\Omega$ é de classe C^2 .

Consideremos uma cisão de $\Omega \setminus \Omega_\delta$ da seguinte forma: seja \mathcal{P} um hiperplano dividindo $\Omega \setminus \Omega_\delta$ em duas regiões Ω_1 e Ω_2 tais que $(\Omega \setminus \Omega_\delta) \setminus \mathcal{P} = \Omega_1 \cup \Omega_2$; $|\Omega_1|, |\Omega_2| > 0$; $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ sejam de classe C^1 por partes. Como

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega) = G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega_\delta) + G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega_1) + G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega_2),$$

pelo Teorema A.2, com Ω_δ no lugar de B , e pela Proposição A.1, com Ω_1 e Ω_2 no lugar de A e $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$ e $\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega$ no lugar de A' , segue que

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega_\delta) + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega_1) + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega_2) \\ &\geq \sigma \mathcal{H}^{N-1}(S_u \cap \Omega_\delta) + \int_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \sigma \mathcal{H}^{N-1}(S_u \cap \Omega_\delta) + \int_{\partial\Omega} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned}$$

Como δ é arbitrário concluímos a demonstração do ítem (ii). \square

(iii) A demonstração deste ítem seguirá do seguinte lema:

Lema A.2 *Seja $(u, v) \in BV(\Omega, I) \times BV(\partial\Omega, I')$ tal que S_u e S_v são variedades fechadas, de classe C^2 , sem bordo em Ω e $\partial\Omega$ respectivamente. Para cada $\xi > 0$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\|_{L^1(\Omega)} &\leq \xi, \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Tu_\varepsilon - v\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \xi \text{ e} \\ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &\leq \Phi(u, v) + \xi. \end{aligned}$$

Assumimos este lema verdadeiro. Seja $(u, v) \in BV(\Omega, I) \times BV(\partial\Omega, I')$. Pelo Teorema 1.24 de [18] (veja também a Propriedade (3) no Capítulo 2), existe uma seqüência $\{(u_n, v_n)\} \subset BV(\Omega, I) \times BV(\partial\Omega, I')$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$ e $v_n \rightarrow v$ em $L^1(\partial\Omega)$ e ainda satisfazem $\mathcal{H}^{N-1}(S_{u_n}) \rightarrow \mathcal{H}^{N-1}(S_u)$, com S_{u_n} e S_{v_n} , de classe C^2 , fechadas e sem bordo em Ω e $\partial\Omega$, respectivamente.

Logo, pela continuidade do operador traço e pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n, v_n) = \sigma \mathcal{H}^{N-1}(S_u) + \int_{\partial\Omega} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^{N-1} = \Phi(u, v). \quad (\text{A.12})$$

Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, existem u_{n_j}, v_{n_j} tais que

$$\begin{aligned} \|u_{n_j} - u\|_{L^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{2j}; \\ \|v_{n_j} - v\|_{L^1(\partial\Omega)} &\leq \frac{1}{2j}; \\ \Phi(u_{n_j}, v_{n_j}) &\leq \Phi(u, v) + \frac{1}{2j}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Pelo Lema A.2, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma seqüência $(u_\varepsilon^j) \subset H^1(\Omega)$

tal que

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon^j - u_{n_j}\|_{L^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{4j}; \\ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Tu_\varepsilon^j - v_{n_j}\|_{L^1(\partial\Omega)} &\leq \frac{1}{4j}; \\ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon^j) &\leq \Phi(u_{n_j}, v_{n_j}) + \frac{1}{4j}. \end{aligned}$$

Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon_j > 0$, $\varepsilon_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, tal

que

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon_j}^j - u_{n_j}\|_{L^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{2j}; \\ \|Tu_{\varepsilon_j}^j - v_{n_j}\|_{L^1(\partial\Omega)} &\leq \frac{1}{2j}; \\ E_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j}^j) &\leq \Phi(u_{n_j}, v_{n_j}) + \frac{1}{2j}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Fazendo $u_{\varepsilon_j} = u_{\varepsilon_j}^j, j \in \mathbb{N}$, uma aplicação direta da desigualdade triangular e das expressões em (A.12), (A.13) e (A.14) fornece-nos

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow 0} \|u_{\varepsilon_j} - u\|_{L^1(\Omega)} &= 0; \\ \lim_{j \rightarrow 0} \|Tu_{\varepsilon_j} - v\|_{L^1(\partial\Omega)} &= 0; \\ \limsup_{j \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_{\varepsilon_j}) &\leq \Phi(u, v). \end{aligned}$$

Concluimos assim a demonstração do ítem (iii) e a demonstração do teorema. ■

Demonstração do Lema A.2: Sejam u, v dados satisfazendo as hipóteses do lema. Uma vez que $u \in \{\alpha, \beta\}$ qtp em Ω e $v \in \{\alpha', \beta'\}$ qtp em $\partial\Omega$, podemos considerar u e v constantes em cada componente conexa de $\Omega \setminus S_u$ e $\partial\Omega \setminus S_v$, respectivamente. Para isso basta uma pequena modificação de u e v em conjuntos de medidas nulas em Ω e $\partial\Omega$, respectivamente.

Para cada $x \in \bar{\Omega}$ defina $d(x) \doteq \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Defina também $d' : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d'(y) \doteq \begin{cases} \text{dist}(y, S_v), & \text{se } y \in \{v = \beta\} \\ -\text{dist}(y, S_v), & \text{se } y \in \{v = \alpha\} \end{cases}$$

Pela regularidade de $\partial\Omega$ e S_v , existem vizinhanças $Q_{\delta_1} = \{x \in \Omega : d(x) < \delta_1\}$ e $N_{\delta_2} \subset \partial\Omega$ de S_v tais que as funções d e d' são ambas de classe C^2 .

Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ uma vizinhança tubular de S_v tal que $\Omega \cap \bar{U} \subset Q_{\delta_1}$ e $\partial\Omega \cap \bar{U} \subset N_{\delta_2}$. Para cada $x \in \overline{\Omega \cap U}$, sejam x' a projeção de x sobre $\partial\Omega$ e x'' a projeção (intrínseca) de x' sobre S_v . Identifiquemos S_v com $S_v \times \{0\} \times \{0\}$. Com esta identificação em mente, definimos o seguinte difeomorfismo: $\psi : \overline{\Omega \cap U} \rightarrow S_v \times \mathbb{R} \times [0, \infty)$, $\psi(x) = (x'', d'(x'), d(x))$.

Note que, com a identificação acima, para cada $x \in S_v$, $\psi(x) = x$ e, portanto, $D\psi(x)$ é uma isometria.

Definimos $A_r \doteq \{x \in \Omega : \text{dist}(x, S_v) < r\}$. Como $D\psi$ é uma aplicação contínua e $D\psi(x)$ é uma isometria, para cada $x \in S_v$, para r suficientemente pequeno o defeito de isometria δ_r , de $\psi|_{A_r}$, satisfaz $\delta_r < 1$ e $\lim_{r \rightarrow 0} \delta_r = 0$. Con-

Lipschitz contínua em Ω_3 , converge pontualmente para u em Ω_3 e uniformemente em cada conjunto cuja distância a S_u seja positiva.

Temos que u_ε sendo Lipschitz contínua, pode ser estendida a $\partial\Omega_3$ de forma que u_ε seja (C_1/ε) -Lipschitz contínua em $\overline{\Omega_3}$. Além disso, u_ε converge uniformemente para u em $\partial\Omega_3 \cap \partial\Omega_2$ e satisfaz

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega_3) \leq \sigma \mathcal{H}^{N-1}(S_u \cap \Omega_3) \leq \sigma \mathcal{H}^{N-1}(S_u),$$

ou seja,

$$G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega_3) \leq \sigma \mathcal{H}^{N-1}(S_u) + o(1). \quad (\text{A.15})$$

Etapa 2: u_ε em Ω_1 .

Por hipótese, u é constante (igual a α ou β em cada componente conexa V de Ω_1 e v é constante (igual a α' ou β') em $\partial V \cap \partial\Omega$. Logo pela Proposição A.1, para $A = V$ e $A' = \partial V \cap \partial\Omega$, existe uma seqüência $(u_\varepsilon) \subset H^1(V)$ satisfazendo $Tu_\varepsilon = v$ em $\partial V \cap \partial\Omega$, u_ε converge para u uniformemente em cada conjunto cuja distância a $\partial V \cap \partial\Omega$ seja positiva e

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, V) \leq \int_{\partial V \cap \partial\Omega} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (\text{A.16})$$

Mais ainda, u_ε é (C_1/ε) -Lipschitz contínua em V e, assim, podemos estendê-la a \overline{V} . Conseqüentemente podemos definir u_ε em $\overline{\Omega_1}$, já que temos a boa definição em cada componente conexa. Pela construção de Ω_1 , a distância entre duas de suas componentes conexas é sempre maior do que r e como $|u_\varepsilon| \leq m = \max\{|\alpha|, |\alpha'|, |\beta|, |\beta'|\}$, escolhendo $C_2 = \max\{2m, C_1\}$ podemos concluir que u_ε é (C_2/ε) -Lipschitz contínua em $\overline{\Omega_1}$, uma vez que $\frac{C_2}{\varepsilon} > \frac{2m}{r}$.

De fato: u_ε é (C_1/ε) -Lipschitz contínua em cada componente conexa de $\overline{\Omega_1}$ isto é

$$\sup_{\substack{x, y \in V \\ x \neq y}} \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|}{|x - y|} \leq \frac{C_1}{\varepsilon} \leq \frac{C_2}{\varepsilon}.$$

Se $x \in V_1$, $y \in V_2$ (V_1, V_2 componentes conexas de $\overline{\Omega_1}$) então $|x - y| > r > \varepsilon$.

Assim

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq |u_\varepsilon(x)| + |u_\varepsilon(y)| \leq 2m$$

implicando que

$$\sup_{\substack{x, y \in V \\ x \neq y}} \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|}{|x - y|} \leq \frac{C_2}{\varepsilon}.$$

Além disso, $u_\varepsilon = v$ em $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$, converge pontualmente para u em Ω_1 e satisfaz, por (A.16),

$$G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega_1) \leq \int_{\partial\Omega} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^{N-1} + o(1). \quad (\text{A.17})$$

Etapa 3: u_ε em Ω_2 .

Como a distância entre $\overline{\Omega_1}$ e $\overline{\Omega_3}$ é igual a r e u_ε é (C_2/ε) -Lipschitz contínua em $\overline{\Omega_1}$ e (C_1/ε) -Lipschitz contínua em $\overline{\Omega_3}$, então u_ε é (C_2/ε) -Lipschitz contínua em $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_3}$. Para ver que isso se verifica basta usar a mesma justificativa acima.

Portanto podemos aplicar o Lema A.1 para estender a função u_ε em cada componente conexa $B \subset \Omega_2$ tal que u_ε seja $\left(\frac{1+C_2}{\varepsilon}\right)$ -Lipschitz contínua em \overline{B} (em principio a função u_ε está bem definida apenas em $(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3) \cap \partial B$). Usando uma vez mais que a distância entre duas componentes conexas de Ω_2 é maior do que r , definimos a função u_ε em todo $\overline{\Omega_2}$ como sendo $\left(\frac{1+C_2}{\varepsilon}\right)$ -Lipschitz contínua em $\overline{\Omega_2}$ e, ainda pelo lema, satisfazendo

$$G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega_2) \leq ((1+C_2)^2 + C_3) (|\partial\Omega_2| + o(1)) \rho_\varepsilon, \quad (\text{A.18})$$

na qual $\rho_\varepsilon = \inf |u_\varepsilon - u|$ em $(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3) \cap \partial\Omega_2$ e $C_3 = \max W$ em $[-m, m]$.

Como u é constante (igual a α ou β) em cada componente conexa B de Ω_2 e u_ε converge uniformemente para u em $(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3) \cap \partial\Omega_2$ (veja etapas 1 e 2), temos

$$\rho_\varepsilon = o(1). \quad (\text{A.19})$$

Até agora definimos a função u_ε em $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} \cup \overline{\Omega_3}$ e $\left(\frac{1+C_2}{\varepsilon}\right)$ -Lipschitz (lembre-se que esta constante é maior do que qualquer uma que apareceu nesta demonstração) com as propriedades: $u_\varepsilon \rightarrow u$ pontualmente e $Tu_\varepsilon = v$ em $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$. Passamos agora a etapa mais delicada.

Etapa 4: u_ε em B_r .

Inicialmente definimos uma função \tilde{w}_ε em \mathbb{R}^2 e depois estenderemos a \mathbb{R}^N . Em coordenadas polares defina

$$w_\varepsilon(\theta, \rho) \doteq \begin{cases} (\rho\delta_\varepsilon/\varepsilon)(\theta\alpha'/\pi + (1 - \theta/\pi)\beta') + (1 - \rho\delta_\varepsilon/\varepsilon)\frac{\alpha'+\beta'}{2} & \text{se } 0 \leq \rho < \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon} \\ \theta\alpha'/\pi + (1 - \theta/\pi)\beta' & \text{se } \rho \geq \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon} \end{cases}$$

Seja $\varphi : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \times [0, \infty)$ definida por $\varphi(\theta, \rho) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

Definimos

$$D_t \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)| < t; y > 0\},$$

$$E_t \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)| < t; y = 0\}$$

$$Q_t \doteq \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \pi; \rho < t\}$$

e $\tilde{w}_\varepsilon(x, y) = w_\varepsilon(\varphi^{-1}(x, y))$.

Então, para cada $t > \varepsilon/\delta_\varepsilon$ temos

$$\begin{aligned} \int_{D_t} |\nabla \tilde{w}_\varepsilon(x, y)|^2 dx dy &= \int_{Q_t} |\nabla \tilde{w}_\varepsilon(\varphi(\theta, \rho))|^2 |\text{J}\varphi(\theta, \rho)| d\theta d\rho \\ &= \int_0^\pi \int_0^t |\nabla(w_\varepsilon \circ \varphi^{-1})(\varphi(\theta, \rho))|^2 \rho d\theta d\rho. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} |\nabla(w_\varepsilon \circ \varphi^{-1})(\varphi(\theta, \rho))|^2 &= |\nabla(w_\varepsilon(\theta, \rho) \cdot \text{J}\varphi^{-1}(\varphi(\theta, \rho)))|^2 \\ &= |\nabla(w_\varepsilon(\theta, \rho) \cdot [\text{J}\varphi(\theta, \rho)]^{-1})|^2 \\ &= \left| \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \theta}, \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \rho} \right) \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \rho & \rho \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \rho} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Um cálculo imediato nos dá, pela definição de w_ε ,

$$\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \theta} \right)^2 = \begin{cases} \frac{\rho^2 \delta_\varepsilon^2 (\beta' - \alpha')^2}{\varepsilon^2 \pi^2}, & 0 < \rho < \varepsilon/\delta_\varepsilon \\ (\beta' - \alpha')^2, & \rho > \varepsilon/\delta_\varepsilon \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

$$\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \rho}\right)^2 = \begin{cases} \frac{\delta_\varepsilon^2 (\beta' - \alpha')^2}{\varepsilon^2 \pi^2} [\pi^2/4 - \pi\theta + \theta^2], & 0 < \rho < \varepsilon/\delta_\varepsilon \\ 0. & \rho > \varepsilon/\delta_\varepsilon \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Logo, por (A.21), (A.22) e (A.23) a equação (A.20) fica

$$\begin{aligned} \int_{D_t} |\nabla \tilde{w}_\varepsilon(x, y)|^2 dx dy &= \int_0^\pi \int_0^{\varepsilon/\delta_\varepsilon} \frac{\rho \delta_\varepsilon^2 (\beta' - \alpha')^2}{\varepsilon^2 \pi^2} [1 + \pi^2/4 - \pi\theta + \theta^2] d\theta d\rho \\ &\quad + \int_0^\pi \int_{\varepsilon/\delta_\varepsilon}^t \frac{1 (\beta' - \alpha')^2}{\rho \pi^2} d\theta d\rho \\ &= \frac{(\beta' - \alpha')^2}{\pi} \left[1 + \frac{\pi^2}{12}\right] + \frac{(\beta' - \alpha')^2}{\pi} \ln\left(\frac{t \delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Para cada $x \in S_v$ e para cada $(y, z) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ defina $\bar{w}_\varepsilon(x, y, z) = \tilde{w}_\varepsilon(y, z)$. Assim, por (A.8)

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(\bar{w}_\varepsilon, S_v \times D_{2\varepsilon}, S_v \times E_{2\varepsilon}) &= \varepsilon \int_{S_v \times D_{2\varepsilon}} |\nabla \bar{w}_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_v \times D_{2\varepsilon}} W(\bar{w}_\varepsilon) \\ &\quad + \delta_\varepsilon \int_{S_v \times E_{2\varepsilon}} V(T\bar{w}_\varepsilon) d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \mathcal{H}^{N-2}(S_v) \left[\varepsilon \int_{D_{2\varepsilon}} |\nabla \tilde{w}_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{D_{2\varepsilon}} W(\tilde{w}_\varepsilon) + \delta_\varepsilon \int_{E_{2\varepsilon}} V(\tilde{w}_\varepsilon) d\mathcal{H}^1 \right] \\ &= \mathcal{H}^{N-2}(S_v) \left[\varepsilon \int_{D_{2\varepsilon}} |\nabla \tilde{w}_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{D_{2\varepsilon}} W(\tilde{w}_\varepsilon) + \delta_\varepsilon \int_{E_{\varepsilon/\delta_\varepsilon}} V(\tilde{w}_\varepsilon) d\mathcal{H}^1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Nesta última passagem usamos o fato que $V(\tilde{w}_\varepsilon) = 0$ para os pontos $(y, 0)$ tais que $|y| \geq \varepsilon/\delta_\varepsilon$.

Por construção, $|\tilde{w}_\varepsilon| \leq m$, uniformemente em ε , e como W e V são contínuas $\max_{t \in [-m, m]} W(t) = C_3 < \infty$, $\max_{t \in [-m, m]} V(t) = C_4 < \infty$. Logo de (A.24) e (A.25) segue que

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(\bar{w}_\varepsilon, S_v \times D_{2\varepsilon}, S_v \times E_{2\varepsilon}) &\leq \\ &\leq \mathcal{H}^{N-2}(S_v) \left[\varepsilon \int_{D_{2\varepsilon}} |\nabla \tilde{w}_\varepsilon|^2 + \frac{C_3}{\varepsilon} \int_{D_{2\varepsilon}} + \delta_\varepsilon C_4 \int_{E_{\varepsilon/\delta_\varepsilon}} d\mathcal{H}^1 \right] \\ &\leq \mathcal{H}^{N-2}(S_v) \left[\varepsilon \frac{(\beta' - \alpha')^2}{\pi} \left(1 + \frac{\pi^2}{12} + \ln(2\delta_\varepsilon)\right) + 2C_3\varepsilon + 2C_4\varepsilon \right] \\ &= \varepsilon \ln(\delta_\varepsilon) \left(\mathcal{H}^{N-2}(S_v) \frac{(\beta' - \alpha')^2}{\pi} \right) + o(1). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Relembre a definição do difeomorfismo ψ e do conjunto A_ε definidos no início da demonstração e veja que $\psi(A_\varepsilon) \subset S_v \times D_{2\varepsilon}$ e $\psi(\partial A_\varepsilon \cap \partial \Omega) \subset S_v \times E_{2\varepsilon}$.

Defina $u_\varepsilon = \bar{w}_\varepsilon \circ \psi$ em \bar{A}_ε . Como o defeito de isometria de ψ é menor do que 1 (para ε suficientemente pequeno), pela Proposição A.3 e por (A.26) vem que

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u_\varepsilon, A_\varepsilon, \partial A_\varepsilon \cap \partial\Omega) &= c_1 E_\varepsilon(\bar{w}_\varepsilon, S_v \times D_{2\varepsilon}, S_v \times E_{2\varepsilon}) \\ &\leq \varepsilon \ln(\delta_\varepsilon) c_2 + o(1). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Pela definição do defeito de isometria e pela Observação A.2 segue que $\|D\psi\| \leq 2$ para quase todo $x \in A_\varepsilon$. Logo, podemos concluir que ψ é 2-Lipschitz contínua, para ε suficientemente pequeno. Como $\varepsilon/\delta_\varepsilon < 2\varepsilon$, pela definição de \bar{w}_ε um cálculo direto nos mostra que \bar{w}_ε é C_6 -Lipschitz contínua em $\overline{(S_v \times D_{2\varepsilon}) \setminus (S_v \times D_{\varepsilon/\delta_\varepsilon})}$.

Com efeito, para cada $(\theta, \rho) \in [0, \pi] \times [\varepsilon/\delta_\varepsilon, \infty)$, temos

$$|w_\varepsilon(\theta_1, \rho_1) - w_\varepsilon(\theta_2, \rho_2)| = |(\theta_1 - \theta_2)(\alpha' - \beta')/\pi|,$$

conseqüentemente

$$|w_\varepsilon(\theta_1, \rho_1) - w_\varepsilon(\theta_2, \rho_2)| \leq c|(\theta_1, \rho_1) - (\theta_2, \rho_2)|,$$

para algum $c > 0$.

Assim

$$\begin{aligned} \underbrace{|w_\varepsilon \circ \psi^{-1}(y_1, z_1) - w_\varepsilon \circ \psi^{-1}(y_2, z_2)|}_{\bar{w}_\varepsilon} &\leq c|\psi^{-1}(y_1, z_1) - \psi^{-1}(y_2, z_2)| \\ &\leq c_2|(y_1, z_1) - (y_2, z_2)|, \end{aligned}$$

para cada $(y, z) \in D_{2\varepsilon} \setminus \overline{D_{\varepsilon/\delta_\varepsilon}}$, pois ψ é um difeomorfismo neste conjunto. Logo

$$\begin{aligned} |\bar{w}_\varepsilon(x_1, y_1, z_1) - \bar{w}_\varepsilon(x_2, y_2, z_2)| &= |w_\varepsilon \circ \psi^{-1}(y_1, z_1) - w_\varepsilon \circ \psi^{-1}(y_2, z_2)| \\ &\leq c_3|(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)| \end{aligned}$$

para qualquer $(x, y, z) \in \overline{(S_v \times D_{2\varepsilon}) \setminus (S_v \times D_{\varepsilon/\delta_\varepsilon})}$.

Uma vez definida u_ε em \bar{A}_ε , pela construção da função w_ε podemos estender u_ε em $\partial B_r \cap \partial\Omega \setminus \partial A_\varepsilon$ simplesmente fazendo $u_\varepsilon = v$. Destes fatos

e das etapas anteriores temos $u_\varepsilon = v$ em $\partial\Omega \setminus \partial A_\varepsilon$, a boa definição de u_ε em $\partial(B_r \setminus \bar{A}_\varepsilon)$ e, mais ainda, é $(1 + C_2)/\varepsilon$ -Lipschitz contínua neste conjunto, para ε suficientemente pequeno. Novamente, uma aplicação do Lema A.1 permite-nos estender a função u_ε em $B_r \setminus \bar{A}_\varepsilon$ de forma Lipschitz contínua com $\text{Lip}(u_\varepsilon) \leq \frac{2 + C_2}{\varepsilon}$. Garante também que

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u_\varepsilon, B_r \setminus \bar{A}_\varepsilon, \partial(B_r \setminus \bar{A}_\varepsilon) \cap \partial\Omega) &= G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, B_r \setminus \bar{A}_\varepsilon) \\ &\leq \left(\left(\varepsilon \text{Lip}(u_\varepsilon|_{\partial(B_r \setminus \bar{A}_\varepsilon)}) + 1 \right)^2 + C_3 \right) (|\partial(B_r \setminus \bar{A}_\varepsilon)| + o(1)) \rho_\varepsilon \\ &\leq ((2 + C_2)^2 + C_3) (|\partial(B_r \setminus \bar{A}_\varepsilon)| + o(1)) \rho_\varepsilon \\ &\leq C_7 |\partial B_r| + o(1). \end{aligned} \tag{A.28}$$

Na primeira igualdade usamos o fato que $u_\varepsilon = v$ em $\partial\Omega \setminus \bar{A}_\varepsilon$, e isto implica $V(u_\varepsilon) = 0$. Na última desigualdade usamos que ρ_ε é limitado para qualquer ε (veja lema A.1) e a constante C_7 não depende de ε , apenas de W e V .

Portanto definimos u_ε em todo $\bar{\Omega}$ satisfazendo:

- $u_\varepsilon \rightarrow u$ pontualmente em $\Omega_1 \cup \Omega_3$, $|u_\varepsilon|, |u| \leq m$ para cada ε , e

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_3} |u_\varepsilon - u| dx + \int_{\Omega_2 \cup B_r} |u_\varepsilon - u| dx \\ &\leq \|u_\varepsilon - u\|_{L^1(\Omega_1 \cup \Omega_3)} + 2m(|\Omega_2| + |B_r|), \end{aligned}$$

implica em

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\|_{L^1(\Omega)} \leq 2m(|\Omega_2| + |B_r|). \tag{A.29}$$

- $u_\varepsilon = v$ em $\partial\Omega \setminus \bar{A}_\varepsilon$ e as desigualdades (A.15), (A.17), (A.18), (A.19), (A.27) e (A.28) implicam

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &= E_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega, \partial\Omega) = G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega_1) + G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega_2) + G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, \Omega_3) \\ &\quad + G_\varepsilon^1(u_\varepsilon, B_r \setminus \bar{A}_\varepsilon) + E_\varepsilon(u_\varepsilon, A_\varepsilon, \partial\Omega \cap \partial A_\varepsilon) \\ &\leq \sigma \mathcal{H}^{N-1}(S_u) + \int_{\partial\Omega} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^{N-1} + \varepsilon \ln(\delta_\varepsilon) c_2 + C_7 |\partial B_r| + o(1). \end{aligned}$$

Por hipótese $\varepsilon \ln(\delta_\varepsilon) \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Logo

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \sigma \mathcal{H}^{N-1}(S_u) + \int_{\partial\Omega} |h(Tu) - h(v)| d\mathcal{H}^{N-1} + C_7 |\partial B_r|. \tag{A.30}$$

Convido-o a notar que quando $r \rightarrow 0$, por construção, os valores $|\partial B_r|, |\Omega_2|, |B_r| \rightarrow 0$. Portanto, para cada $\xi > 0$ é possível encontrarmos $r > 0$ satisfazendo $C_7|\partial B_r|, |\Omega_2|, |B_r| \leq \xi$, lembrando que C_7 só depende de W e V . Concluimos assim o lema. ■

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A.: **Sobolev Spaces**, Academic Press, New York, 1975.
- [2] AMANN, H.: **Parabolic Evolution Equation and Nonlinear Boundary Conditions**, J. Differential Equations, 72 (1988), 201-269.
- [3] ALBERTI, G., BOUCHITTÉ, G. and SEPPECHER, P. : **Phase Transition with the Line-Tension Effect**, Arch. Rational Mech. Anal., 144 (1998), 1-46.
- [4] ALBERTI, G., BOUCHITTÉ, G. and SEPPECHER, P. : **Un Résultat de Perturbations Singulières Avec la Norme $H^{1/2}$** , C. R. Acad. Sci. Paris, 319-I (1994), 333-338.
- [5] ALIKAKOS, N. D.: **Regularity and Asymptotic Behavior for the Second Order Parabolic Equation with Nonlinear Boundary Conditions in L^p** , J. Differential Equations, 39 (1981), 311-344.
- [6] ARRIETA, J. M., CÒNSUL, N. and BERNAL, R. : **Stable boundary layers in a diffusion problem with nonlinear reaction at the boundary**, Z. angew. Math. Phys., 55 (2004), 1-14.
- [7] BONFIM, L. R. P.: **Sobre a Existência de Soluções Estacionárias Estáveis Não-Constantes para um Problema de Reação-Difusão**. Tese de Doutorado. DM-UFSCar. 2002.
- [8] BREZIS, H.: **Analyse Fonctionnelle**, Paris, Masson, 1983.

- [9] CAFFARELLI, L.A and CÓRDOBA, A.: **Uniform Convergence of a Singular Perturbation Problem**, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLVIII (1995), 1-12.
- [10] CASTEN, R. G., HOLLAND, C. J.: **Instability Results for Reaction Diffusion Equations with Neumann Boundary Conditions**, J. Differential Equations, 27 (1978), 266-273.
- [11] CÒNSUL, N.: **On equilibrium solutions of diffusion equations with nonlinear boundary conditions**, Z. Angew Math. Phys. 47 (1995), 194-209.
- [12] CÒNSUL, N.: **Equacions de Difusió amd Condicions de Contorn no Lineals**, Ph.d thesis, Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 1997.
- [13] CÒNSUL, N. and SOLÁ-MORALES, J.: **Stability of Local Minima and Stable Nonconstant Equilibria**, Journal of Differential Equations, 157 (1999), 61-81.
- [14] DE GIORGI, E.: **Convergence problems for functionals and operators**, In Proc. Int. Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, Pitagora, Bologna, (1979) 223-244.
- [15] EVANS, L.C.: **Partial Differential Equations**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [16] EVANS, L.C and GARIEPY, R.F.: **Measure Theory and Fine Properties of Functions**, CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [17] GILBARG, D. and TRUDINGER, N.S.: **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, Springer-Verlag, Berlin 1983.
- [18] GIUSTI, E.: **Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation**, Birkhäuser, Boston, Basel, 1984.

- [19] HENRY, D.: **Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations**. Lectures Notes in Mathematics, v. 840, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1984.
- [20] HUTCHINSON, J.E and TONEGAWA, Y.: **Convergence of phase interfaces in the Van Der Waals-Cahn-Hilliard theory**, Calc. Var. 10, (1995), 49-84.
- [21] KOHN, R.V. and Sternberg, P., **Local minimizers and singular perturbations**, Proceedings of the R. Soc. of Edinburgh, 111, (1989), 69-84.
- [22] LADYZHENSKAYA, O.A. and URAL'TSEVA, N.N.: **Linear and Quasilinear Elliptic Equations**, Academic Press, New York, 1968.
- [23] MANCEBO, **A Model of Porous Catalyst Accounting for Incipently Non-isothermal Effects**, J. Differential Equations, 151 (1999), 79-110.
- [24] MATANO, H.: **Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations**, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 15 n.2 (1979), 401-454.
- [25] MODICA, L.: **The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion**, Arch. Rational Mech. Anal., 98 (1987), 123-142.
- [26] MODICA, L.: **Gradient theory of phase transitions with boundary contact energy** , Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 5 (1987), 487-512.
- [27] MOREIRA, J. C. : **Soluções Estacionárias Estáveis de uma Classe de Sistemas de Equações de Reação e Difusão Espacialmente Heterogêneas: Uma Abordagem Variacional**, Tese de Doutorado, DM-UFSCar (2004).

- [28] NASCIMENTO, A.S.: **Inner transition layers in an elliptic boundary value problem: a necessary condition**, *Nonlinear Analysis*, 44 (2001), 487-497.
- [29] NASCIMENTO, A.S.: **On the Role of Diffusivity in Some Stable Equilibria of a Diffusion Equation**, *J. Differential Equations*, 155 (1999), 231-244.
- [30] NASCIMENTO, A.S.: **Stable Stationary Solutions Induced by Spatial Inhomogeneity Via Γ -Convergence**, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, vol 29, N. 1, (1998), 75-97.
- [31] NASCIMENTO, A.S.: **Stable transition layers in a semilinear diffusion equation with spatial inhomogeneities in N -dimensional domains**, *J. Differential Equations*, 190 (2003), 16-38.
- [32] NASCIMENTO, A.S., and Crema, J.: **A geometric sufficient condition for existence of stable transition layers in a class of spatial heterogeneous diffusion equations**, *Matemática Contemporânea* (a aparecer).
- [33] PROTTER, M. H, and WEINBERG, H.: **Maximum principles in differential equations**, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [34] SIMON, L.: **Lectures on Geometric Measure Theory**, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, Australia, 1984.
- [35] SIMONETT. G.: **Center Manifolds for Quasilinear Reaction-Diffusion Systems**, *Differential and Integral Equations*, Volume 8, no. 4, (1995), 753-796.
- [36] SMOLLER, L.: **Shock waves and reaction-diffusion equations**, Springer-Verlag, New York, 1992.

- [37] STERNBERG, P., **The Effect of a Singular Perturbation on Non-convex Variational Problems**, Arch. Rational Mech. Anal. 101, (1988), no. 3, 209-260.
- [38] STERNBERG, P. and ZUMBRUN, K.: **On the Connectivity of Boundaries of Sets Minimizing Perimeter Subject to a Volume Constraint**, Comm. in Analysis and Geometry, Volume 7, Number 1 (1999), 199-220.