

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Carolina de Miranda e Pereiro

**Os grupos de tranças do toro e da
garrafa de Klein**

São Carlos - SP
FEVEREIRO DE 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Carolina de Miranda e Pereiro

BOLSISTA FAPESP

Orientadores: John Guaschi e Daniel Ventrúscolo

Os grupos de tranças do toro e da garrafa de Klein

Tese feita em cotutela entre a Universidade Federal de São Carlos e a Université de Caen Basse-Normandie. Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, área de concentração: Topologia Algébrica

São Carlos - SP

FEVEREIRO DE 2015

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

P436gt Pereiro, Carolina de Miranda e.
Os grupos de tranças do toro e da garrafa de Klein /
Carolina de Miranda e Pereiro. -- São Carlos : UFSCar,
2015.
186 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,
2015.

1. Topologia algébrica. 2. Trança. 3. Teoria dos grupos. I.
Título.

CDD: 514.2 (20^a)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Carolina de Miranda e Pereiro, realizada em 24/02/2015:

Daciberg Lima Gonçalves

Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves
USP

J. Guaschi

Prof. Dr. John Guaschi
UNICAEN

Paolo Bellingeri

Prof. Dr. Paolo Bellingeri
UNICAEN

Luis Paris

Prof. Dr. Luis Paris
U-BOURGOGNE

Daniel Vendruscolo

Prof. Dr. Daniel Vendruscolo
UFSCar

Oziride Manzoli Neto

Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto
USP



Université de Caen Basse-Normandie

Ecole doctorale SIMEM

Thèse de doctorat

présentée et soutenue le : 24/02/2015

par

Carolina de Miranda e Pereiro

pour obtenir le

Doctorat de l'Université de Caen Basse-Normandie

Spécialité : Mathématiques et leurs interactions

préparée dans le cadre d'une cotutelle internationale de thèse

entre l'Université de Caen Basse-Normandie et l'Universidade Federal de São Carlos.

Les groupes de tresses du tore et de la bouteille de Klein

Directeur de thèse : John Guaschi (Université de Caen Basse-Normandie)
Co-directeur de thèse : Daniel Ventrúscolo (Universidade Federal de São Carlos)

Composition du jury :

Daciberg Lima Gonçalves	Professeur des Universités , Universidade de São Paulo (rapporteur)
Luis Paris	Professeur des Universités, Université de Bourgogne (rapporteur)
Oziride Manzoli Neto	Maître de Conférences (HDR), Universidade de São Paulo
Paolo Bellingeri	Maître de Conférences (HDR), Université de Caen Basse-Normandie
John Guaschi	Professeur des Universités, Université de Caen Basse-Normandie (directeur de thèse)
Daniel Ventrúscolo	Maître de Conférences, Universidade Federal de São Carlos (codirecteur de thèse)

A meus pais.

Resumo

Nesta tese estudamos os grupos de tranças (puras) de superfícies, $B_n(M)$ e $P_n(M)$, onde M é uma superfície compacta, priorizando o estudo dos grupos de tranças do toro, \mathbb{T} e da garrafa de Klein, \mathbb{K} , para compreender suas semelhanças e diferenças. Obtivemos novas apresentações para estes grupos que evidenciam suas similaridades e generalizamos a apresentação encontrada para o grupo de tranças puras da garrafa de Klein para uma superfície fechada não orientável de genus $g \geq 2$ qualquer. Além disso, para os grupos de tranças do toro e da garrafa de Klein, calculamos secções algébricas explícitas para a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth e conseguimos condições necessárias e suficientes para várias generalizações da sequência exata curta de Fadell-Neuwirth cindir. Estudamos também as séries centrais descendentes e das derivadas de $B_n(\mathbb{T})$ e $B_n(\mathbb{K})$, conseguimos assim responder para quais valores de n tais grupos são residualmente nilpotentes e residualmente solúveis. Em uma tentativa de calcular explicitamente as séries centrais descendentes e das derivadas de $P_n(\mathbb{K})$, damos uma descrição geral destas séries de um produto semi-direto qualquer. Para finalizar, obtemos uma apresentação para o fecho normal do grupo de tranças de Artin B_n em $B_n(\mathbb{T})$, o que nos permitiu mostrar que $B_2(\mathbb{T})$ é ordenável à direita.

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions les groupes de tresses $B_n(M)$ et les groupes de tresses pures $P_n(M)$ à n brins d'une surface compacte M . Nous mettons l'accent sur les groupes de tresses du tore \mathbb{T} et de la bouteille de Klein \mathbb{K} , et sur la compréhension de leur similarités et leurs différences. Nous obtenons de nouvelles présentations de ces groupes qui mettent en évidence leurs ressemblances. Nous généralisons notre présentation des groupes de tresses pures de la bouteille de Klein aux groupes de tresses pures des surfaces non orientables de genre $g \geq 2$. Nous calculons des sections algébriques explicites pour la suite exacte courte de Fadell-Neuwirth des groupes de tresses pures du tore et de la bouteille de Klein, et nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour le scindement de diverses généralisations de cette suite exacte courte aux groupes de tresses mixtes. Ensuite, nous étudions les séries centrales descendantes et dérivées de $B_n(\mathbb{T})$ et $B_n(\mathbb{K})$, et nous déterminons les valeurs de n pour lesquelles ces groupes sont résiduellement nilpotents et résiduellement solubles. Dans une tentative de calculer explicitement les séries centrales descendantes et dérivées de $P_n(\mathbb{K})$, nous donnons une description générale de ces séries d'un produit semi-direct quelconque. Enfin, nous exhibons une présentation de la clôture normale du groupe de tresses d'Artin B_n dans $B_n(\mathbb{T})$, ce qui nous permet de montrer que $B_2(\mathbb{T})$ est ordonnable à droite.

Abstract

In this thesis, we study the n -string braid group $B_n(M)$ and pure braid group $P_n(M)$ of a compact surface M , with particular emphasis on the braid groups of the torus \mathbb{T} and the Klein bottle \mathbb{K} and on understanding their similarities and differences. We obtain new presentations of these groups that highlight their similarities. We generalise our presentation of the pure braid groups of the Klein bottle to the pure braid groups of any non-orientable compact surface of genus $g \geq 2$. We compute explicit algebraic sections for the Fadell-Neuwirth short exact sequence of the pure braid groups of the torus and the Klein bottle, and we give necessary and sufficient conditions for the splitting of various generalisations of this short exact sequence to mixed braid groups. We then study the lower central and derived series of $B_n(\mathbb{T})$ and $B_n(\mathbb{K})$, and we determine the values of n for which these groups are residually nilpotent and residually soluble. In an attempt to calculate explicitly the lower central and derived series of $P_n(\mathbb{K})$, we give a general description of these series for an arbitrary semi-direct product. Finally, we exhibit a presentation of the normal closure of the Artin braid group B_n in $B_n(\mathbb{T})$, which allows us to show that $B_2(\mathbb{T})$ is right-orderable.

Sumário

Version Française	1
Introdução	17
1 Apresentações dos Grupos de Tranças	30
1.1 Introdução	30
1.2 Apresentação de extensões de grupos	35
1.3 Apresentações dos grupos de tranças puras do toro e da garrafa de Klein	37
1.4 Apresentações dos grupos de tranças do toro e da garrafa de Klein	52
1.5 Apresentações dos grupos de tranças de superfícies não orientáveis	64
2 Sequência Exata Curta de Fadell-Neuwirth	69
2.1 Introdução	69
2.2 Existência de uma secção	71
2.3 Secção para outras superfícies não orientáveis	97
2.4 Generalização da sequência de Fadell-Neuwirth	99
2.4.1 Caso do toro	106
2.4.2 Caso da garrafa de Klein	116
2.5 Generalização para mais fatores	126
3 Propriedades Residuais	129
3.1 Introdução	129
3.2 Propriedades das séries	132
3.3 Série Central Descendente de $B_n(\mathbb{K})$	147
3.3.1 O caso $n \geq 3$	148
3.3.2 Caso $n = 2$	150

3.4	Série das Derivadas	159
3.5	Caso de outras superfícies não orientáveis	170
3.6	Resultados Adicionais	171
4	Uma aplicação a ordenabilidade	175
4.1	O subgrupo $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$	175
4.2	Ordenabilidade de $B_2(\mathbb{T})$	177

Version Française

Les groupes de tresses ont été introduits par E. Artin [1, 2] en 1926 d'une manière intuitive et géométrique avec pour objectif l'étude des nœuds. Une forte impulsion a été donnée à leur étude pendant les années 80 lorsque V. Jones [42] a découvert une nouvelle représentation des groupes de tresses d'Artin, ce qui a donné lieu au célèbre polynôme de Jones dans la théorie des nœuds. Les tresses sont des objets importants et intéressants parce qu'elles apparaissent dans des contextes divers (géométrie, algèbre, topologie, systèmes dynamiques, singularités...), ce qui implique que l'on peut les définir et les étudier de plusieurs points de vue et aussi parce qu'elles appartiennent à des familles de groupes plus grandes (les groupes de tresses de surfaces, les groupes d'Artin-Tits, les groupes de Garside...). Les groupes de tresses possèdent un large spectre d'applications potentielles à des domaines différents comme la théorie des nœuds, la topologie en basse dimension, en particulier en dimensions 2 et 3, les groupes des difféotopies des surfaces, la géométrie, les équations algébriques et même la robotique et la cryptographie [11, 14, 40, 53].

Comme nous l'avons déjà dit, les groupes de tresses admettent plusieurs définitions de nature différente. Soit $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ un ensemble de $n \geq 1$ points distincts appartenant au disque \mathbb{D}^2 . Une *n-tresse géométrique* est une collection de n chemins $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ dans \mathbb{D}^2 tels que $\beta_i(0) = p_i$ et $\beta_i(1) \in \mathcal{P}$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et $\beta_i(t) \neq \beta_j(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $1 \leq i < j \leq n$. Le *groupe de tresses d'Artin* B_n à n brins se définit alors comme l'ensemble des n -tresses géométriques, à isotopie près, dont l'opération de groupe est la concaténation. En remplaçant \mathbb{D}^2 par n'importe quelle surface M , cette définition géométrique s'étend aux *groupe de tresses* $B_n(M)$ de M à n brins.

Les groupes de tresses possèdent de nombreuses propriétés intéressantes. Le groupe B_n s'interprète comme le groupe des difféotopies du disque troué à n points, et aussi comme un sous-groupe du groupe des automorphismes du groupe libre F_n de rang n ,

ce qui permet de donner une solution du problème du mot dans B_n . Garside [22] a utilisé la structure du monoïde des tresses positives pour obtenir une nouvelle solution du problème du mot et pour résoudre le problème de conjugaison dans B_n . Pour des raisons topologiques, on sait que B_n est sans torsion pour tout n . Dyer a donné une deuxième démonstration purement algébrique de ce fait [15]. Une troisième démonstration vient de l'ordonnabilité à droite de B_n [13]. On sait également que B_n est linéaire pour tout n [9, 45, 46]. D'autres propriétés des groupes de tresses se trouvent dans [8, 12, 34, 38, 55, 58].

Bien que les groupes de tresses aient été considérablement étudiés, il reste encore beaucoup de questions dans ce domaine. Une direction intéressante est l'étude des groupes de tresses de surfaces, qui est la suite naturelle du travail effectué jusqu'à présent pour les groupes de tresses d'Artin. Pour cela, il convient de considérer une définition topologique. Soit M une variété de dimension $d \geq 2$ obtenue en retirant un nombre fini (éventuellement zéro) de points de l'intérieur d'une variété compacte. Fox et Neuwirth [20] ont généralisé les groupes de tresses (pures) d'Artin à ceux de M de la manière suivante. On définit le n -ième espace de configuration de M par :

$$F_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in M, x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}.$$

Le groupe de tresses pures de M à n brins est défini par :

$$P_n(M) = \pi_1(F_n(M), (p_1, \dots, p_1)),$$

où (p_1, \dots, p_n) est un point de base de $F_n(M)$. Le groupe symétrique S_n agit librement dans $F_n(M)$ par permutation des coordonnées. L'espace quotient associé se note $D_n(M) = F_n(M)/S_n$. Le groupe de tresses de M à n brins est défini par :

$$B_n(M) = \pi_1(D_n(M), [(p_1, \dots, p_n)]),$$

où $[(p_1, \dots, p_n)]$ désigne la classe de (p_1, \dots, p_n) dans $D_n(M)$. On remarque que pour $n = 1$, on a :

$$P_1(M) = B_1(M) = \pi_1(M).$$

Par conséquent, les groupes de tresses (pures) de M généralisent le groupe fondamental de M . Si M est une variété compacte de dimension $d \geq 3$, Birman [10] a prouvé que le

groupe de tresses pures $P_n(M)$ est isomorphe au produit de n copies de $\pi_1(M)$. Ainsi, l'étude des groupes de tresses devient plus intéressante lorsque M est une surface.

Soit M une surface sans bord. D'après Fadell et Neuwirth [17], la projection :

$$p : F_{n+m}(M) \longrightarrow F_n(M)$$

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$$

est une fibration localement triviale dont la fibre s'identifie à $F_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$. En prenant la suite exacte longue en homotopie de cette fibration, on obtient la *suite exacte courte de Fadell-Neuwirth* des groupes de tresses pures de M :

$$1 \rightarrow P_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow P_{n+m}(M) \xrightarrow{p_*} P_n(M) \rightarrow 1, \quad (1)$$

où p_* est l'homomorphisme induit par p au niveau du groupe fondamental, et $n \geq 3$ si $M = \mathbb{S}^2$ [16, 18], $n \geq 2$ si $M = \mathbb{R}P^2$ [63], et $n \geq 1$ sinon [17]. Cette suite sera beaucoup utilisée et étudiée tout au long de ce manuscrit.

Le but principal de cette thèse est d'étudier les propriétés algébriques et topologiques des groupes de tresses (pures) du tore \mathbb{T} et de la bouteille de Klein \mathbb{K} , en soulignant leurs points communs et leurs différences entre eux ainsi qu'avec les groupes de tresses d'Artin.

L'une des premières questions qui se pose est de trouver des présentations de ces groupes. Nous savons que le groupe de tresses d'Artin admet la présentation suivante :

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ si } |i - j| \geq 2, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \right\rangle.$$

En 1962, Fadell et Van Buskirk [18] ont obtenu une présentation de $B_n(\mathbb{S}^2)$. Ensuite en 1966, Van Buskirk [63] a donné une présentation de $B_n(\mathbb{R}P^2)$. Parmi les groupes de tresses de surfaces, ces groupes sont des cas particuliers car leur centre n'est pas trivial (comme pour B_n), ils possèdent des éléments de torsion [18, 52, 63], et certains sont fini. Récemment, ils ont fait l'objet d'une étude approfondie [24, 25, 26, 27, 30].

De ce point de vue, les cas du tore et de la bouteille de Klein sont intéressants parce qu'ils sont les premiers groupes de tresses de surfaces (orientable et non orientable) sans torsion, donc certaines techniques utilisées dans les cas de la sphère et du plan projectif

ne s'y appliquent pas. Le centre de ces groupes n'est pas trivial (voir [10, 57] pour le cas du tore et la Proposition 2.2.4 pour le cas de la bouteille de Klein). De plus, l'étude des groupes de tresses de ces surfaces est la première étape pour obtenir des résultats qui se généralisent à toute surface compacte (orientable ou non orientable). Par ailleurs, d'après Fadell et Neuwirth, l'existence d'un champ de vecteurs non singulier sur ces surfaces implique que l'homomorphisme p_* de la suite exacte courte (1) admet une section. Il en résulte que celle-ci se scinde pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$. On peut donc décomposer les groupes de tresses pures du tore et de la bouteille de Klein sous la forme d'un produit semi-direct, ce qui n'est pas le cas pour les surfaces fermées de genre supérieur. Puisque le tore est le revêtement double orientable de la bouteille de Klein, il existe également une relation forte entre leurs groupes de tresses respectives [31].

La première présentation du groupe de tresses du tore $B_n(\mathbb{T})$ à n brins a été donnée par Birman [10] en 1969, et on peut identifier le centre de ce groupe (il est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, voir aussi [57]). Birman a également exhibé une présentation des groupes de tresses des surfaces orientables de genre supérieur. En 1970, Scott [61] a donné une présentation pour les groupes de tresses d'une surface fermée quelconque, orientable ou non. Il existe d'autres présentations des groupes de tresses de surfaces dans la littérature [5, 24, 29, 32], pour des surfaces à bord et en retirant des ensembles finis de points.

Chapitre 1 : Présentations des groupes de tresses

Nous commençons par donner de nouvelles présentations des groupes de tresses (pures) du tore et de la bouteille de Klein qui mettent en évidence des similarités entre ces groupes, ce qui permet d'obtenir de nouveaux résultats les concernant. En utilisant la suite exacte courte de Fadell-Neuwirth (1), un raisonnement par récurrence et la méthode de calcul de présentations des extensions de groupes [41], nous obtenons les présentations suivantes.

Théorème 1.3.1 (page 37) : *Soit M le tore \mathbb{T} ou la bouteille de Klein \mathbb{K} . Le groupe de tresses pures $P_n(M)$ de M admet la présentation suivante :*

$$\text{Générateurs : } \{a_i, b_i, i = 1, \dots, n\} \cup \{C_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n\} ;$$

Relations :

1. $a_i a_j = a_j a_i, (1 \leq i < j \leq n) ;$
2. $a_i^{-1} b_j a_i = b_j a_j C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} a_j^{-1}, (1 \leq i < j \leq n) ;$
3. $a_i^{-1} C_{j,k} a_i = \begin{cases} C_{j,k}, (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ a_k C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} a_k^{-1} C_{j,k} C_{i,k}^{-1} C_{i+1,k}, (1 \leq j \leq i < k \leq n) ; \end{cases}$
4. $C_{i,l}^{-1} C_{j,k} C_{i,l} = \begin{cases} C_{j,k}, (1 \leq i < l < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j \leq i < l < k \leq n), \\ C_{i,k} C_{l+1,k}^{-1} C_{l,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} C_{l,k}^{-1} C_{l+1,k}, (1 \leq i < j \leq l < k \leq n) ; \end{cases}$
5. $\begin{cases} \prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} = a_i b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1}, (1 \leq i \leq n), \text{ si } M = \mathbb{T}, \\ \prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} = b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1}, (1 \leq i \leq n), \text{ si } M = \mathbb{K} ; \end{cases}$
6. $\begin{cases} b_j b_i = b_i b_j, (1 \leq i < j \leq n), & \text{si } M = \mathbb{T}, \\ b_j b_i = b_i b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}, (1 \leq i < j \leq n), & \text{si } M = \mathbb{K} ; \end{cases}$
7. $\begin{cases} b_i^{-1} a_j b_i = a_j b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} b_j^{-1}, (1 \leq i < j \leq n), & \text{si } M = \mathbb{T}, \\ b_i^{-1} a_j b_i = a_j b_j (C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1})^{-1} b_j^{-1}, (1 \leq i < j \leq n), & \text{si } M = \mathbb{K} ; \end{cases}$
8. $\begin{cases} b_i^{-1} C_{j,k} b_i = \begin{cases} C_{j,k}, (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1} b_k^{-1}, (1 \leq j \leq i < k \leq n) ; \end{cases} & \text{si } M = \mathbb{T}, \\ b_i^{-1} C_{j,k} b_i = \begin{cases} C_{j,k}, (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k (C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1})^{-1} b_k^{-1}, (1 \leq j \leq i < k \leq n) ; \end{cases} & \text{si } M = \mathbb{K}. \end{cases}$

Des représentants géométriques des générateurs de ces groupes sont donnés dans la Figure 1. En regardant de près les générateurs b_i de $P_n(\mathbb{K})$ dans la Figure 1, le point i se trouve au milieu du losange, ce qui nous donne la (fausse) impression que ces générateurs sont «les mêmes» dans les cas du tore et de la bouteille de Klein, Cependant, lorsqu'on choisit un autre point, nous pouvons observer la différence entre ces générateurs dans la Figure 2. Ceci permet de constater que les deux groupes sont assez proches dans un certain sens : par exemple, souvent le mot $C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}$ dans $P_n(\mathbb{T})$ est remplacé par son inverse dans $P_n(\mathbb{K})$.

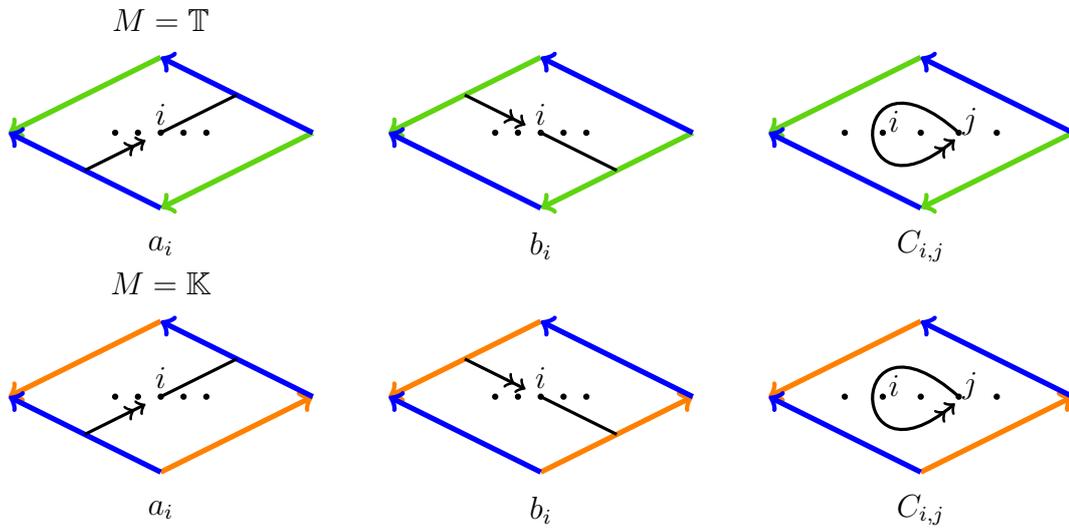


Figure 1: Générateurs de $P_n(\mathbb{T})$ et de $P_n(\mathbb{K})$

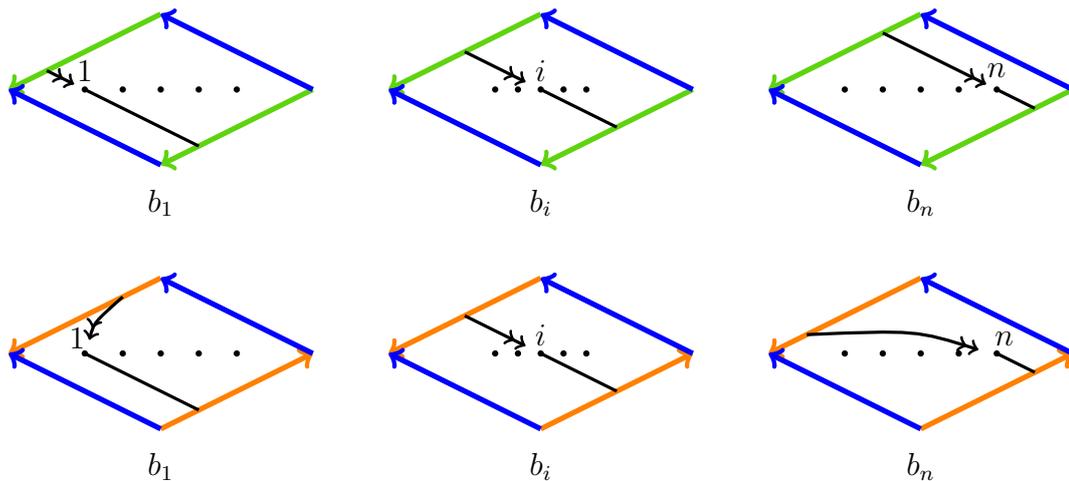


Figure 2: La différence entre les générateurs b_i de $P_n(\mathbb{T})$ et de $P_n(\mathbb{K})$

En appliquant la méthode de calcul pour les extensions de groupes à la suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow P_n(M) \longrightarrow B_n(M) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1,$$

nous obtenons dans le résultat suivant des présentations des groupes de tresses $B_n(\mathbb{T})$ et $B_n(\mathbb{K})$.

Théorème 1.4.1 (page 52) : *Soit M le tore \mathbb{T} ou la bouteille de Klein \mathbb{K} . Le groupe de tresses $B_n(M)$ de M admet la présentation suivante :*

Générateurs : $a, b, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$;

Relations :

1. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$;
2. $\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_j$, si $|i - j| \geq 2$;
3. $a \sigma_j = \sigma_j a$, si $j \geq 2$;
4. $b \sigma_j = \sigma_j b$, si $j \geq 2$;
5. $b^{-1} \sigma_1 a = \sigma_1 a \sigma_1 b^{-1} \sigma_1$;
6. $a(\sigma_1 a \sigma_1) = (\sigma_1 a \sigma_1) a$;
7.
$$\begin{cases} b(\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1}) = (\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1}) b, & \text{si } M = \mathbb{T}, \\ b(\sigma_1^{-1} b \sigma_1) = (\sigma_1^{-1} b \sigma_1) b, & \text{si } M = \mathbb{K} ; \end{cases}$$
8.
$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 = \begin{cases} b a b^{-1} a^{-1} & \text{si } M = \mathbb{T}, \\ b a^{-1} b^{-1} a^{-1} & \text{si } M = \mathbb{K}. \end{cases}$$

Les éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ sont les générateurs habituels d'Artin, et par rapport aux générateurs de $P_n(M)$, on a $a = a_1$ et $b = b_1$. On s'aperçoit qu'entre les présentations de $B_n(\mathbb{T})$ et $B_n(\mathbb{K})$, les seules différences se trouvent dans les relations (7) et (8) où il y a un changement de signe de σ_1 et a respectivement.

Nous obtenons également une nouvelle présentation de $P_n(N_{g+1})$, où N_{g+1} est une surface fermée non orientable de genre $g + 1$, $g \geq 1$. Cette présentation diffère de celles déjà connues parce que nous ne regardons pas les surfaces comme des sommes connexes de plans projectifs, mais plutôt comme des sommes connexes de tores avec un plan projectif ou avec une bouteille de Klein.

Théorème 1.5.1 (page 65) : *Soit N_{g+1} une surface fermée non orientable de genre $g + 1$, $g \geq 1$. Le groupe $P_n(N_{g+1})$ admet la présentation suivante :*

Générateurs : $\{a_{i,r}, b_i : 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq g\} \cup \{C_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n\}$;

Relations :

1. $a_{i,r}a_{j,r} = a_{j,r}a_{i,r}, (1 \leq r \leq g), (1 \leq i < j \leq n)$
2.
$$\begin{cases} a_{i,r}^{-1}a_{j,s}a_{i,r} = \begin{cases} a_{j,r}C_{i+1,j}^{-1}C_{i,j}a_{j,r}^{-1}a_{j,s}, & (1 \leq r < s \leq g) \\ a_{j,s}C_{i,j}^{-1}C_{i+1,j}, & (1 \leq s < r \leq g) \end{cases} \\ a_{i,r}^{-1}b_ja_{i,r} = b_ja_{j,r}C_{i,j}^{-1}C_{i+1,j}a_{j,r}^{-1}, & (1 \leq r \leq g), (1 \leq i < j \leq n) \end{cases} \quad (1 \leq i < j \leq n)$$
3.
$$a_{i,r}^{-1}C_{j,k}a_{i,r} = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ a_{k,r}C_{i+1,k}^{-1}C_{i,k}a_{k,r}^{-1}C_{j,k}C_{i,k}^{-1}C_{i+1,k}, & (1 \leq j \leq i < k \leq n); \end{cases} \quad (1 \leq r \leq g)$$
4.
$$C_{i,l}^{-1}C_{j,k}C_{i,l} = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < l < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j \leq i < l < k \leq n), \\ C_{i,k}C_{l+1,k}^{-1}C_{l,k}C_{i,k}^{-1}C_{j,k}C_{l,k}^{-1}C_{l+1,k}, & (1 \leq i < j \leq l < k \leq n); \end{cases}$$
5.
$$\prod_{j=i+1}^n C_{i,j}C_{i+1,j}^{-1} = \begin{cases} b_iC_{1,i}a_{i,1}^{-1}a_{i,2} \cdots a_{i,g-1}^{-1}a_{i,g}b_i a_{i,g}^{-1} \cdots a_{i,2}a_{i,1}^{-1}, & g \text{ pair} \\ b_iC_{1,i}a_{i,1}^{-1}a_{i,2} \cdots a_{i,g-1}^{-1}a_{i,g}^{-1}b_i^{-1}a_{i,g}^{-1} \cdots a_{i,2}a_{i,1}^{-1}, & g \text{ impair} \end{cases}$$
6. $b_jb_i = b_i b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}, (1 \leq i < j \leq n)$
7. $b_i^{-1}a_{j,r}b_i = a_{j,r}b_j(C_{i,j}C_{i+1,j}^{-1})^{-1}b_j^{-1}, (1 \leq i < j \leq n), (1 \leq r \leq g)$
8.
$$b_i^{-1}C_{j,k}b_i = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ C_{i+1,k}C_{i,k}^{-1}C_{j,k}b_k(C_{i,k}C_{i+1,k}^{-1})^{-1}b_k^{-1}, & (1 \leq j \leq i < k \leq n). \end{cases}$$

Chapitre 2 : La suite exacte courte de Fadell-Neuwirth

La suite exacte courte de Fadell-Neuwirth (1) :

$$1 \rightarrow P_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow P_{n+m}(M) \rightarrow P_n(M) \rightarrow 1$$

est un outil important dans l'étude des groupes de tresses de surfaces. L'un des principaux problèmes concernant cette suite exacte est de déterminer les valeurs de n et m pour lesquelles elle se scinde [10, 17, 18, 24, 26, 29, 63]. Si $M = \mathbb{D}^2$, on voit facilement que la suite se scinde pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ parce que l'inclusion naturelle $P_n \rightarrow P_{n+m}$, qui est définie en ajoutant m brins triviaux, est une section. Si $M = \mathbb{S}^2$, il existe une section pour p au niveau géométrique [18] pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, et si $M = \mathbb{R}P^2$ la suite se scinde si et

seulement si $n = 2$ et $m = 1$ [26, 63]. Les cas où M est le tore ou la bouteille de Klein se distinguent parce que la suite exacte courte se scinde pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ [17] en raison de l'existence d'un champ de vecteurs non singulier, ce qui n'est pas vrai en général pour une surface compacte quelconque.

La proximité des présentations de $P_n(\mathbb{T})$ et $P_n(\mathbb{K})$ données par le Théorème 1.3.1 permet d'exhiber des sections algébriques pour la suite exacte courte (1) de Fadell-Neuwirth des groupes de tresses pures du tore et de la bouteille de Klein qui se ressemblent. L'idée géométrique pour obtenir une section est de «doubler» le dernier brin.

Proposition 2.2.1 (page 72) : *Soit M le tore \mathbb{T} ou la bouteille de Klein \mathbb{K} . Alors en termes des présentations données par le Théorème 1.3.1, l'application $s : P_n(M) \rightarrow P_{n+1}(M)$ définie sur les générateurs de $P_n(M)$ par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i \mapsto a_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ b_i \mapsto b_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ a_n \mapsto a_n a_{n+1} \\ C_{i,j} \mapsto C_{i,j}, \quad 1 \leq i < j \leq n-1 \\ C_{i,n} \mapsto C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1}, \end{array} \right.$$

et:

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_n \mapsto b_n b_{n+1} & \text{si } M = \mathbb{T} \\ b_n \mapsto b_n b_{n+1} C_{n,n+1} & \text{si } M = \mathbb{K}, \end{array} \right.$$

s'étend à une section algébrique pour la suite exacte courte

$$1 \rightarrow \pi_1(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow P_{n+1}(M) \rightarrow P_n(M) \rightarrow 1.$$

En concaténant ces sections, on obtient une section de la suite exacte courte de Fadell-Neuwirth (1) pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne lieu à une description limpide de la section. Ceci nous aide à mieux comprendre la structure (sous forme d'un produit semi-direct itéré) de $P_n(\mathbb{T})$ et $P_n(\mathbb{K})$.

Comme corollaire, on retrouve le fait, démontré dans [10, 57], que le centre du groupe de tresses du tore $B_n(\mathbb{T})$ est un groupe abélien libre de rang 2 engendré par les éléments $a_1 \cdots a_n$ et $b_1 \cdots b_n$. Nous démontrons également dans la Proposition 2.2.4 que le centre du groupe de tresses de la bouteille de Klein $B_n(\mathbb{K})$ est engendré par $(b_n \cdots b_1)^2$ et est isomorphe à \mathbb{Z} , ce qui semble être un résultat nouveau dans la littérature.

Pour les surfaces non orientables N_{g+1} de genre $g + 1$, où $g \geq 2$, Gonçalves et Guaschi [29] ont montré que la suite exacte courte de Fadell-Neuwirth (1) se scinde si et seulement si $n = 1$, m étant quelconque. Nous obtenons également une section algébrique explicite :

Théorème 2.3.1 (page 97) : *En termes des présentations du Théorème 1.5.1, l'application $s : P_1(N_{g+1}) \rightarrow P_n(N_{g+1})$ définie sur les générateurs de $P_1(N_{g+1})$ par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \mapsto a_{2,1}^{-1} \cdots a_{n,1}^{-1} b_1 \\ a_{1,1} \mapsto a_{1,1} a_{2,1} \cdots a_{n,1} \\ a_{1,r} \mapsto a_{1,r}, \quad (1 < r < g) \\ a_{1,g} \mapsto \begin{cases} a_{1,g}, & \text{si } g \text{ est pair} \\ a_{2,1}^{-1} \cdots a_{n,1}^{-1} a_{1,g}, & \text{si } g \text{ est impair} \end{cases} \end{array} \right.$$

s'étend à une section algébrique pour la suite exacte courte

$$1 \rightarrow P_{n-1}(N_{g+1} \setminus \{x_1\}) \rightarrow P_n(N_{g+1}) \rightarrow P_1(N_{g+1}) \rightarrow 1.$$

La projection p_* ne s'étend pas aux groupes de tresses $B_n(M)$. Cependant, la suite exacte courte (1) se généralise en prenant un quotient intermédiaire de l'espace de configuration $F_{n+m}(M)$ par le sous-groupe $S_n \times S_m$ de S_{n+m} , où $n, m \in \mathbb{N}^*$. On obtient ainsi des sous-groupes «mixtes» de $B_{n+m}(M)$ de la forme $B_{n,m}(M) = \pi_1(F_{n+m}(M)/(S_n \times S_m))$ pour lesquels il existe une fibration à la Fadell-Neuwirth :

$$p: F_{n+m}(M)/(S_n \times S_m) \longrightarrow F_n(M)/S_n,$$

qui provient de l'oubli des m dernières coordonnées et dont la fibre s'identifie à $F_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})/S_m$. Comme dans le cas des groupes de tresses pures, une application de

la suite exacte longue en homotopie nous donne *la suite exacte courte généralisée de Fadell-Neuwirth* :

$$1 \longrightarrow B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \longrightarrow B_{n,m}(M) \longrightarrow B_n(M) \longrightarrow 1. \quad (2)$$

Peu de choses sont connues sur le scindement possible de cette suite exacte en général. Dans le cas des groupes de tresses d'Artin B_n , comme pour P_n , il est facile de voir qu'il y a toujours une section. Dans le cas des groupes de tresses de la sphère, quelques résultats partiels sont connus [25], mais le problème est difficile, et reste ouvert en général.

Lorsque M est le tore ou la bouteille de Klein, l'existence d'un champ de vecteurs sur M nous permet de constater que la suite exacte courte (2) se scinde lorsque m est multiple de n . Il n'est pas clair que la réciproque soit vraie, mais nous démontrons que c'est bien le cas :

Théorème 2.4.1 (page 100) : *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Si M est le tore ou la bouteille de Klein, la suite exacte courte (2) se scinde si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = l \cdot n$.*

Pour démontrer ce résultat, on détermine d'abord des présentations de $B_{n,m}(M)$ puis du groupe $B_{n,m}(M)/\Gamma_2(B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))$. Dans les deux cas, les présentations pour le tore et la bouteille de Klein sont assez semblables. Ensuite, dans la suite exacte courte (2), on prend le quotient du noyau et de $B_{n,m}(M)$ par $\Gamma_2(B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))$, ainsi le noyau devient abélien. Si la suite exacte courte (2) admet une section, il en est de même pour la suite exacte courte «quotientée». En analysant les images des relations de $B_n(M)$, on obtient des renseignements sur cette section, ce qui permet de conclure.

La définition des groupes de tresses «mixtes» se généralise facilement à plusieurs facteurs. En effet, en posant $B_{n_1, \dots, n_k}(M) = \pi_1 \left(\frac{F_{n_1 + \dots + n_k}(M)}{S_{n_1} \times \dots \times S_{n_k}} \right)$, pour $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ quelconques, on se demande si la projection

$$p : B_{n_1, \dots, n_k}(M) \longrightarrow B_{n_1, \dots, n_{k-1}}(M),$$

obtenue en oubliant un seul bloc, admet une section. La réponse paraît moins claire que dans le cas du Théorème 2.4.1, mais les méthodes que l'on a utilisées dans le cas $k = 2$

s'adaptent aussi au cas général. Plus précisément, on démontre :

Théorème 2.5.1 (page 126) : *Soit M le tore ou la bouteille de Klein. S'il existe $l_1, \dots, l_{k-1} \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_k = l_1 n_1 + \dots + l_{k-1} n_{k-1}$, alors la projection $p : B_{n_1, \dots, n_k}(M) \longrightarrow B_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}(M)$ admet une section. Réciproquement, si la projection admet une section, alors il existe $l_1, \dots, l_{k-1} \in \mathbb{Z}$ tels que $n_k = l_1 n_1 + \dots + l_{k-1} n_{k-1}$.*

Ce résultat généralise celui du Théorème 2.4.1. La question de l'existence d'une section n'est pas pour autant complètement résolue dans le cas $k \geq 3$ car la preuve du Théorème 2.5.1 ne permet pas de savoir si les coefficients l_1, \dots, l_{k-1} sont tous non négatifs ou non. La géométrie du problème laisse penser que ceux-ci ne peuvent être négatifs. Nous continuons à réfléchir sur ce problème.

À l'autre extrême, on peut considérer la projection $p : B_{n_1, \dots, n_k}(M) \longrightarrow B_{n_1}(M)$ obtenue en oubliant tous les blocs sauf le premier, et demander si elle admet une section. Cette question est plus facile, et sa réponse est une conséquence immédiate de la solution obtenue dans le cas $k = 2$. Ainsi, on déduit qu'il existe une section si et seulement si pour tout $i = 2, \dots, k$, il existe $l_i \in \mathbb{N}$ tel que $n_i = l_i n_1$.

Chapitre 3 : Propriétés Résiduelles

Au Chapitre 3, notre objectif est d'étudier les séries centrales descendantes et dérivées des groupes de tresses de surfaces et leurs propriétés résiduelles. Si G est un groupe, on rappelle que la *série centrale descendante* $\{\Gamma_i(G)\}_{i \geq 1}$ de G est définie de manière récursive par $\Gamma_1(G) = G$, et $\Gamma_{i+1}(G) = [\Gamma_i(G), G]$ pour tout $i \geq 1$, et la *série dérivée* $\{G^{(i)}\}_{i \geq 0}$ de G est définie par $G^{(0)} = G$, et $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$ pour tout $i \geq 0$. Il est connu que G est *résiduellement nilpotent* si $\bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(G) = \{1\}$, et est *résiduellement soluble* si $\bigcap_{i \geq 0} G^{(i)} = \{1\}$. Ces deux séries jouent un rôle important dans l'étude de G d'un point de vue combinatoire.

On sait que tout groupe libre de rang fini est résiduellement nilpotent [48]. Lorsque M est une surface orientable de genre $g \geq 2$, les groupes de tresses pures, P_n et $P_n(M)$,

sont résiduellement nilpotents pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ [3, 7, 19, 44]. Nous étudions la série centrale descendante et dérivée de $P_n(\mathbb{K})$. D'abord, nous obtenons les théorèmes généraux suivants sur les séries d'un produit semi-direct arbitraire.

Théorème 3.2.8 (page 135) : *Soient G, H groupes, et soit $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ une action de G sur H . On définit les sous-groupes L_n, K_n et H_n de la manière suivante :*

$$L_1 = H$$

et pour $n \geq 2$:

$$K_n = \langle \varphi(g)(h).h^{-1} : g \in \Gamma_{n-1}(G), h \in H \rangle ;$$

$$H_n = \langle \varphi(g)(h).h^{-1} : g \in G, h \in L_{n-1} \rangle ;$$

$$L_n = \langle K_n, H_n, [H, L_{n-1}] \rangle.$$

Alors φ induit une action (également notée φ) de $\Gamma_n(G)$ sur L_n , et

$$\Gamma_n(H \rtimes_{\varphi} G) = L_n \rtimes_{\varphi} \Gamma_n(G).$$

Théorème 3.2.11 (page 136) : *Soient G, H groupes, et soit $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ une action de G sur H . On définit les sous-groupes V_n et \tilde{H}_n de la manière suivante :*

$$V_1 = H$$

et pour $n \geq 2$:

$$\tilde{H}_n = \langle \varphi(g)(h).h^{-1} : g \in G, h \in V_{n-1} \rangle ;$$

$$V_n = \langle \tilde{H}_n, [H, V_{n-1}] \rangle.$$

Alors φ induit une action (également notée φ) de $G^{(n)}$ sur V_{n+1} , et

$$(H \rtimes_{\varphi} G)^{(n)} \subset V_{n+1} \rtimes_{\varphi} (G)^{(n)}.$$

Ces résultats pourront servir pour étudier les séries centrales descendantes et dérivées d'un produit semi-direct quelconque. À titre d'exemple, nous avons essayé de calculer les

séries centrales descendantes et dérivées des groupes de tresses pures $P_n(\mathbb{K})$ de \mathbb{K} (qui s'écrivent sous la forme d'un produit semi-direct par la Proposition 2.2.1), et nous avons obtenu des résultats partiels sur la structure de ces séries aux Lemmes 3.3.6 et 3.4.3, et à la Proposition 3.3.7.

Quant au groupe de tresses (total) $B_n(M)$, on sait que si M est une surface orientable de genre $g \geq 1$, alors $B_n(M)$ est résiduellement nilpotent si, et seulement si, $n \leq 2$ [3, 7, 27, 28]. Se $M = \mathbb{R}P^2$ le résultat reste valable [30], mais il n'y avait pas de résultat pour les surfaces non orientables de genre supérieur. Lorsque $M = \mathbb{K}$, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 3.3.1 (page 148) : *Le groupe de tresses de la bouteille de Klein, $B_n(\mathbb{K})$, est résiduellement nilpotent si et seulement si $n \leq 2$.*

Pour démontrer le Théorème 3.3.1, on montre d'abord que si $n \geq 3$, $B_n(\mathbb{K})$ n'est pas résiduellement nilpotent, la méthode étant semblable au cas du tore. On considère la suite exacte courte :

$$1 \rightarrow \frac{\Gamma_2(B_n(\mathbb{K}))}{\Gamma_3(B_n(\mathbb{K}))} \rightarrow \frac{B_n(\mathbb{K})}{\Gamma_3(B_n(\mathbb{K}))} \xrightarrow{p} \frac{B_n(\mathbb{K})}{\Gamma_2(B_n(\mathbb{K}))} \rightarrow 1,$$

et en utilisant notre présentation de $B_n(\mathbb{K})$, on montre que p est un isomorphisme.

Le cas $n = 2$ est plus compliqué. On se sert du Théorème 3.2.5 de Gruenberg, la suite exacte courte

$$1 \rightarrow P_2(\mathbb{K}) \rightarrow B_2(\mathbb{K}) \rightarrow S_2 \rightarrow 1,$$

et le fait que $S_2 \cong \mathbb{Z}_2$ est 2-fini. Il suffit alors de montrer que $P_2(\mathbb{K})$ est résiduellement 2-fini. Ceci étant, $B_2(\mathbb{K})$ est résiduellement 2-fini et alors résiduellement nilpotent.

Il convient de réduire le problème aux groupes de tresses pures parce que nous pouvons écrire $P_2(\mathbb{K}) = \pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\}) \rtimes_{\varphi} s(P_1(\mathbb{K}))$, c'est-à-dire sous la forme d'un produit semi-direct d'un groupe libre avec $\pi_1(\mathbb{K})$, et ces deux groupes sont résiduellement 2-finis (en particulier, ils sont résiduellement nilpotents). Cependant, le produit semi-direct de deux groupes résiduellement 2-finis (respectivement résiduellement nilpotents) n'est pas résiduellement 2-fini (respectivement résiduellement nilpotent) en général.

Nous avons essayé de calculer $\Gamma_n(P_2(\mathbb{K}))$ en utilisant le Théorème 3.2.8, ce qui nous amène à faire la conjecture suivante :

Conjecture : *La série centrale descendante de $P_2(\mathbb{K})$ pour $n \geq 2$ est donnée par :*

$$\Gamma_n(P_2(\mathbb{K})) = \left\langle a_2^{2^{n-1}}, x^{2^{n-i}} : x \in \Gamma_i(\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\})), 2 \leq i \leq n \right\rangle \rtimes \left\langle (a_2 a_1)^{2^{n-1}} \right\rangle.$$

Si la conjecture est vraie, alors on peut en déduire que $P_2(\mathbb{K})$ est résiduellement 2-fini, et donc résiduellement nilpotent. Pour cela, on considère la série $\{\gamma_i^p G\}_{i \geq 1}$ définie de manière récursive par $\gamma_1^p G = G$, et $\gamma_{i+1}^p G = \langle [G, \gamma_i^p G], g^p : g \in \gamma_i^p G \rangle$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Il est connu que si G est de type fini, alors G est résiduellement p -fini si $\bigcap_{i \geq 1} \gamma_i^p G = \{1\}$ [56]. Nous souhaitons calculer cette série lorsque $p = 2$ et $G = P_n(\mathbb{K})$.

Proposition 3.3.7 (page 156) : *Si la conjecture ci-dessus est vraie, alors*

$$\gamma_n^2 P_2(\mathbb{K}) = \left\langle \Gamma_n(P_2(\mathbb{K})), b_2^{2^{n-1}}, (b_2 b_1)^{2^{n-1}} \right\rangle$$

pour $n \geq 2$. Donc, $P_2(\mathbb{K})$ est résiduellement 2-fini.

En fait, en utilisant la Proposition 3.6.1, le produit semi-direct de deux groupes 2-finis est 2-fini si l'action est triviale mod 2. Ceci permet de montrer que $P_2(\mathbb{K})$ est résiduellement 2-fini, donc $B_2(\mathbb{K})$ l'est également. Par conséquent, $B_2(\mathbb{K})$ est résiduellement nilpotent.

Plus généralement, Bellingeri et Gervais ont montré récemment [6] que $P_n(M)$ est résiduellement 2-fini pour toute surface M non orientable compacte différente de $\mathbb{R}P^2$. Dans la Proposition 3.5.2, nous déduisons de manière semblable au cas de la bouteille de Klein que $B_n(M)$ est résiduellement nilpotent si et seulement si $n \leq 2$.

Nous étudions également les séries dérivées des groupes de tresses du tore et de la bouteille de Klein, et nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.4.1 (page 159) : *Soit M le tore \mathbb{T} ou la bouteille de Klein \mathbb{K} . Alors $B_n(M)$ est résiduellement soluble si et seulement si $n \leq 4$.*

Gonçalves et Guaschi ont montré que la même conclusion est vraie pour $B_n(\mathbb{S}^2)$ [27], et aussi pour le plan projectif $\mathbb{R}P^2$ mais en excluant le cas $n = 4$, c'est-à-dire si $n \neq 4$, $B_n(\mathbb{R}P^2)$ est résiduellement soluble si et seulement si $n \leq 3$ [29]. Pour les autres surfaces

compactes non orientables, en utilisant les résultats récentes de [6], le Théorème 3.2.5 de Gruenberg, le Théorème 3.5.1 et [29], nous concluons que $B_n(M)$ est résiduellement soluble si et seulement si $n \leq 4$, pour tout surface non orientable M (y compris le plan projectif). De plus, nous donnons une présentation pour le groupe $(B_n(\mathbb{T}))^{(1)}$ dans la Proposition 3.4.4.

Chapitre 4 : Une application à l'ordonnabilité

On termine cette thèse au Chapitre 4 en analysant la clôture normale de B_n dans $B_n(\mathbb{T})$, ou de manière équivalente, la clôture normale $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$ de σ_1 dans $B_n(\mathbb{T})$. À la Proposition 4.1.1 et au Corollaire 4.1.2, nous donnons une présentation de $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$ et de son abélianisé $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle^{Ab}$ respectivement. Ce sous-groupe pourrait se révéler utile pour étudier d'autres propriétés des groupes de tresses d'une surface, comme l'ordonnabilité par exemple. En se servant de l'expansion de Magnus, on sait que P_n est biordonnable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ [43, 60]. P. Dehornoy [13] a démontré que B_n est ordonnable à droite pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour les groupes de tresses pures d'une surface compacte fermée M , nous savons également pour quelles surfaces $P_n(M)$ est ordonnable à droite ou biordonnable [33, 43, 60]. Dans le cas des groupes de tresses de surfaces, presque aucun résultat n'est connu, en dehors du cas $n = 1$ (le groupe fondamental de M), et de \mathbb{S}^2 et $\mathbb{R}P^2$ dont les groupes de tresses admettent de la torsion, et par conséquent ne sont pas ordonnables à droite. En utilisant nos résultats sur $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$, nous démontrons au Théorème 4.2.1 (page 179) que $B_2(\mathbb{T})$ est ordonnable à droite. Malheureusement la démonstration ne s'étend ni à des valeurs de n supérieures, ni à des surfaces de genre supérieur. Nous sommes toujours à la recherche d'une démonstration de l'ordonnabilité à droite de $B_n(\mathbb{T})$ pour $n \geq 3$.

Introdução

Os grupos de tranças foram introduzidos por E. Artin [1, 2] em 1926 de uma forma intuitiva e geométrica com o objetivo de estudar os nós. São objetos importantes e interessantes porque aparecem em contextos diversos (geometria, álgebra, topologia, sistemas dinâmicos, singularidades...), o que implica que podem ser estudados de vários pontos de vista, mas também porque são exemplos típicos de famílias maiores de grupos (grupos de tranças de superfícies, grupos de Artin-Tits, grupos de Garside...). Uma consequência disto é que o espectro de aplicações dos grupos de tranças é grande, por exemplo em teoria dos nós e entrelaçamentos, topologia de baixa dimensão, em particular em dimensões 2 e 3, “mapping class groups”, geometria, equações algébricas e até em robótica e criptografia (veja [11, 14, 40, 53] por exemplo).

Entre as diferentes definições existentes, o grupo de tranças de Artin, B_n , pode ser visto como um subgrupo do grupo de automorfismos do grupo livre F_n , o que nos dá imediatamente uma solução para o problema da palavra [1]. Posteriormente, Garside [22] usou a estrutura do monóide associado e obteve formas normais, com isso ele fez uma nova demonstração para o problema da palavra, além de resolver o problema da conjugação em B_n . Além disso, sabemos que B_n é livre de torção para todo n e uma demonstração puramente algébrica foi dada por Dyer [15].

O estudo dos grupos de tranças teve um grande impulso, quando V. Jones [42] descobriu nos anos 80 uma nova representação para os grupos de tranças, o que gerou o famoso polinômio de Jones da teoria de nós. Além disso, os grupos de tranças são ordenáveis à direita [13], o que nos dá outra demonstração que B_n é livre de torção, para todo n . Sabemos também, que os grupos de tranças B_n são lineares para todo n [9, 45, 46]. Outras propriedades gerais dos grupos de tranças de Artin podem ser vistos em [8, 12, 34, 38, 55, 58].

Apesar de ser um assunto muito estudado nos últimos anos há ainda muito a ser feito nesta área. Em particular o estudo de grupos de tranças de superfícies desponta

como uma sequência natural dos trabalhos feitos até aqui para os grupos de tranças de Artin, dos grupos de tranças da esfera e do plano projetivo.

Usando espaços de configuração, Fox e Neuwirth [20] generalizaram os grupos de tranças (puras) para qualquer variedade compacta M de dimensão $d \geq 2$, ou para uma tal variedade com uma quantidade finita de pontos retirados. Definimos o n -ésimo espaço de configuração de M do seguinte modo:

$$F_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in M, x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}.$$

O grupo de tranças puras de M com n cordas é definido por

$$P_n(M) = \pi_1(F_n(M), (p_1, \dots, p_n)),$$

onde (p_1, \dots, p_n) é um ponto base em $F_n(M)$. O grupo simétrico S_n age livremente em $F_n(M)$ pela permutação das coordenadas, o quociente correspondente será denotado por $D_n(M) = F_n(M)/S_n$. O grupo de tranças (total) de M com n cordas é então definido por

$$B_n(M) = \pi_1(D_n(M), [(p_1, \dots, p_n)]),$$

onde $[(p_1, \dots, p_n)]$ é um ponto base em $D_n(M)$ e $[(p_1, \dots, p_n)]$ denota a classe de (p_1, \dots, p_n) em $D_n(M)$. Note que, para $n = 1$, temos

$$P_1(M) = B_1(M) = \pi_1(M).$$

Segue então que o grupo de tranças (puras) de M é uma generalização do seu grupo fundamental. Se M é o disco \mathbb{D}^2 , temos que $B_n(M)$ é o grupo B_n e o grupo das tranças puras de Artin é $P_n(\mathbb{D}^2)$, que denotamos por P_n . Se M é uma variedade compacta de dimensão $d \geq 3$, Birman [10] provou que seu grupo de tranças puras $P_n(M)$ é isomorfo ao produto de n cópias de $\pi_1(M)$ e por isso o estudo de grupos de tranças é mais interessante quando temos uma superfície.

Usando a construção de Fadell e Neuwirth [17], temos que a projeção

$$\begin{aligned} p : F_{n+m}(M) &\longrightarrow F_n(M) \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

é uma fibração localmente trivial, com fibra que se identifica a $F_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$. Tomando-se a sequência exata longa em homotopia desta fibração, obtemos a *sequência exata curta de Fadell-Neuwirth*

$$1 \rightarrow P_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow P_{n+m}(M) \xrightarrow{p_*} P_n(M) \rightarrow 1 \quad (3)$$

onde $n \geq 3$ se M é a esfera \mathbb{S}^2 [16, 18], $n \geq 2$ se M é o plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ [63] e $n \geq 1$ nos outros casos [17] e, p_* é o homomorfismo induzido da projeção p . Tal sequência é uma ferramenta importante e foi muito utilizada e estudada neste trabalho.

O objetivo principal dessa tese é estudar as propriedades algébricas e topológicas dos grupos de tranças (puras) do toro \mathbb{T} e da garrafa de Klein \mathbb{K} , destacando suas semelhanças e diferenças.

Uma das primeiras questões é encontrar apresentações para tais grupos. Sabemos que o grupo de tranças de Artin admite a seguinte apresentação:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ se } |i - j| \geq 2, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}. \end{array} \right\rangle.$$

Fadell e Van Buskirk [18] em 1962 conseguiram uma apresentação para $B_n(\mathbb{S}^2)$, depois Van Buskirk [63] em 1966 mostrou uma apresentação para $B_n(\mathbb{R}P^2)$. Tais grupos são casos particulares no estudo de tranças de superfícies, pois têm centro não trivial (como no caso do grupo de tranças de Artin), têm elementos de torção [18, 52, 63] e alguns são finitos. Recentemente, tais grupos têm sido vastamente explorados [24, 25, 26, 27, 30].

O caso do toro e da garrafa de Klein são interessantes a serem estudados pois são os primeiros grupos de tranças de superfície (orientável e não orientável) sem torção, portanto muitas técnicas utilizadas no caso da esfera e do plano projetivo não podem ser utilizadas neste caso. Também possuem centro não trivial (veja [10, 57] para o caso do toro e a Proposição 2.2.4 para o caso da garrafa de Klein). Além disso, o estudo dessas superfícies é o primeiro passo para conseguir generalizar os resultados para qualquer superfície compacta (orientável e não orientável). Além disso, a existência de um campo de vetores não nulo nestas superfícies implica que a sequência de Fadell-Neuwirth cinde para todo n, m , portanto podemos escrever o grupo de tranças puras do toro e da garrafa

de Klein como produto semi-direto. Sabemos também, que devido ao fato do toro ser o recobrimento duplo orientável da garrafa de Klein, existe uma forte relação entre seus respectivos grupos de tranças [31].

A primeira apresentação de $B_n(\mathbb{T})$, grupo de tranças do toro, foi dada por Birman [10] em 1969, onde podemos identificar o centro deste grupo que é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Neste artigo, ela também encontrou uma apresentação para o grupo de tranças de outras superfícies orientáveis. Para finalizar, Scott [61] em 1970 mostrou uma apresentação para toda superfície fechada, orientável ou não. Existem outras apresentações de grupos de tranças de superfícies na literatura, incluindo apresentações no caso de superfícies com bordo e pontos removidos [5, 24, 29, 32], onde cada autor calcula a apresentação mais conveniente para seu propósito. Neste trabalho também obtivemos uma nova apresentação para o grupo de tranças (puras) do toro e da garrafa de Klein que evidencia a semelhança de tais grupos, facilitando a conclusão dos novos resultados sobre os dois grupos. Conseguimos as novas apresentações usando a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth, indução e o método de cálculo de apresentação de extensões de grupos [41] que está descrito no Capítulo 1. Temos os seguintes resultados:

Teorema 1.3.1: *Seja M o toro \mathbb{T} ou a garrafa de Klein \mathbb{K} . O n -ésimo grupo de tranças puras, $P_n(M)$, admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $\{a_i, b_i, i = 1, \dots, n\} \cup \{C_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n\}$;

Relações:

1. $a_i a_j = a_j a_i, (1 \leq i < j \leq n)$;
2. $a_i^{-1} b_j a_i = b_j a_j C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} a_j^{-1}, (1 \leq i < j \leq n)$;
3. $a_i^{-1} C_{j,k} a_i = \begin{cases} C_{j,k}, (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ a_k C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} a_k^{-1} C_{j,k} C_{i,k}^{-1} C_{i+1,k}, (1 \leq j \leq i < k \leq n); \end{cases}$
4. $C_{i,l}^{-1} C_{j,k} C_{i,l} = \begin{cases} C_{j,k}, (1 \leq i < l < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j \leq i < l < k \leq n), \\ C_{i,k} C_{l+1,k}^{-1} C_{l,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} C_{l,k}^{-1} C_{l+1,k}, (1 \leq i < j \leq l < k \leq n); \end{cases}$

$$\begin{aligned}
5. & \begin{cases} \prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} = a_i b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1}, & (1 \leq i \leq n), \text{ se } M = \mathbb{T}, \\ \prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} = b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1}, & (1 \leq i \leq n), \text{ se } M = \mathbb{K}; \end{cases} \\
6. & \begin{cases} b_j b_i = b_i b_j, & (1 \leq i < j \leq n), \text{ se } M = \mathbb{T}, \\ b_j b_i = b_i b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}, & (1 \leq i < j \leq n), \text{ se } M = \mathbb{K}; \end{cases} \\
7. & \begin{cases} b_i^{-1} a_j b_i = a_j b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} b_j^{-1}, & (1 \leq i < j \leq n), \text{ se } M = \mathbb{T}, \\ b_i^{-1} a_j b_i = a_j b_j (C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1})^{-1} b_j^{-1}, & (1 \leq i < j \leq n), \text{ se } M = \mathbb{K}; \end{cases} \\
8. & \begin{cases} b_i^{-1} C_{j,k} b_i = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1} b_k^{-1}, & (1 \leq j \leq i < k \leq n); \end{cases} & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b_i^{-1} C_{j,k} b_i = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k (C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1})^{-1} b_k^{-1}, & (1 \leq j \leq i < k \leq n); \end{cases} & \text{se } M = \mathbb{K}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Usando o fato que $B_n(M)$ é uma extensão de $P_n(M)$ pelo grupo simétrico, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 1.4.1: *Seja M o toro \mathbb{T} ou a garrafa de Klein \mathbb{K} . O n -ésimo grupo de tranças, $B_n(M)$, admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $a, b, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$;

Relações:

1. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$;
2. $\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_j$, se $|i - j| \geq 2$;
3. $a \sigma_j = \sigma_j a$, se $j \geq 2$;
4. $b \sigma_j = \sigma_j b$, se $j \geq 2$;
5. $b^{-1} \sigma_1 a = \sigma_1 a \sigma_1 b^{-1} \sigma_1$;
6. $a(\sigma_1 a \sigma_1) = (\sigma_1 a \sigma_1) a$;
7. $\begin{cases} b(\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1}) = (\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1}) b, & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b(\sigma_1^{-1} b \sigma_1) = (\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1}) b, & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$

$$8. \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 = \begin{cases} bab^{-1}a^{-1} & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ ba^{-1}b^{-1}a^{-1} & \text{se } M = \mathbb{K}. \end{cases}$$

Observamos nos Teoremas 1.3.1 e 1.4.1 a semelhança dos grupos de tranças (puras) do toro e da garrafa de Klein. Em $P_n(M)$ vemos quatro relações idênticas (1,2,3 e 4), três relações que a única diferença é o sinal do elemento $C_{i,k}C_{i+1,k}^{-1}$, além das relações (5) de superfícies que se diferem. Em $B_n(M)$ temos apenas as relações (7) e (8) distintas e a única diferença é o sinal dos elementos σ_1 e a , respectivamente.

Além disso, encontramos uma nova apresentação para $P_n(M)$, onde M é uma superfície compacta não orientável, a qual se difere das apresentações já conhecidas pois não visualizamos as superfícies como soma conexa de planos projetivos, mas sim como soma conexa de toros com um plano projetivo ou soma conexa de toros com uma garrafa de Klein.

Teorema 1.5.1: *Seja N_{g+1} uma superfície não orientável de genus $g + 1$, $g \geq 1$.*

O grupo $P_n(N_{g+1})$ admite a seguinte apresentação:

Geradores: $\{a_{i,r}, b_i : 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq g\} \cup \{C_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n\}$;

Relações:

1. $a_{i,r}a_{j,r} = a_{j,r}a_{i,r}$, $(1 \leq r \leq g)$, $(1 \leq i < j \leq n)$;
2.
$$a_{i,r}^{-1}a_{j,s}a_{i,r} = \begin{cases} a_{j,r}C_{i+1,j}^{-1}C_{i,j}a_{j,r}^{-1}a_{j,s}, & (1 \leq r < s \leq g) \\ a_{j,s}C_{i,j}^{-1}C_{i+1,j}, & (1 \leq s < r \leq g) \end{cases} \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

$$a_{i,r}^{-1}b_ja_{i,r} = b_ja_{j,r}C_{i,j}^{-1}C_{i+1,j}a_{j,r}^{-1}, \quad (1 \leq r \leq g), (1 \leq i < j \leq n);$$
3.
$$a_{i,r}^{-1}C_{j,k}a_{i,r} = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ a_{k,r}C_{i+1,k}^{-1}C_{i,k}a_{k,r}^{-1}C_{j,k}C_{i,k}^{-1}C_{i+1,k}, & (1 \leq j \leq i < k \leq n); \end{cases} \quad (1 \leq r \leq g)$$
4.
$$C_{i,l}^{-1}C_{j,k}C_{i,l} = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < l < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j \leq i < l < k \leq n), \\ C_{i,k}C_{l+1,k}^{-1}C_{l,k}C_{i,k}^{-1}C_{j,k}C_{l,k}^{-1}C_{l+1,k}, & (1 \leq i < j \leq l < k \leq n); \end{cases}$$
5.
$$\prod_{j=i+1}^n C_{i,j}C_{i+1,j}^{-1} = \begin{cases} b_i C_{1,i} a_{i,1}^{-1} a_{i,2} \cdots a_{i,g-1}^{-1} a_{i,g} b_i a_{i,g} a_{i,g-1}^{-1} \cdots a_{i,2} a_{i,1}^{-1}, & g \text{ é par} \\ b_i C_{1,i} a_{i,1}^{-1} a_{i,2} \cdots a_{i,g-1} a_{i,g}^{-1} b_i^{-1} a_{i,g}^{-1} a_{i,g-1} \cdots a_{i,2} a_{i,1}^{-1}, & g \text{ é ímpar} \end{cases}$$

6. $b_j b_i = b_i b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}$, $(1 \leq i < j \leq n)$;
7. $b_i^{-1} a_{j,r} b_i = a_{j,r} b_j (C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1})^{-1} b_j^{-1}$, $(1 \leq i < j \leq n)$, $(1 \leq r \leq g)$;
8. $b_i^{-1} C_{j,k} b_i = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k (C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1})^{-1} b_k^{-1}, & (1 \leq j \leq i < k \leq n). \end{cases}$

Tais resultados estão descritos no Capítulo 1.

Já definimos acima a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth (3),

$$1 \rightarrow P_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow P_{n+m}(M) \xrightarrow{p^*} P_n(M) \rightarrow 1$$

a qual é uma ferramenta importante no estudo de grupos de tranças de superfícies. Uma das principais questões na área é para quais valores de n, m a sequência cinde [10, 17, 18, 24, 26, 29, 63]. Se M é o disco \mathbb{D}^2 , vemos com facilidade que a sequência cinde para todo n, m , pois a inclusão natural $P_n \rightarrow P_{n+m}$ que acrescentamos as últimas m cordas triviais é uma secção. Se $M = \mathbb{S}^2$ existe uma secção para p no nível geométrico [18] e para $M = \mathbb{R}P^2$ a sequência cinde se, e somente se, $n = 2$ e $m = 1$ [26, 63]. Os casos em que M é o toro ou a garrafa de Klein se destacam pois a sequência cinde para todos os valores de $n, m \in \mathbb{N}^*$ [17], devido a existência de um campo de vetores não nulo, o que não é verdade em geral para uma superfície compacta qualquer. No Capítulo 2 calculamos explicitamente esta secção em termos dos geradores. Obtivemos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.1: *Seja M o toro \mathbb{T} ou a garrafa de Klein \mathbb{K} . Então, com as apresentações dadas no Teorema 1.3.1, a aplicação $s : P_n(M) \rightarrow P_{n+1}(M)$ definida nos geradores de $P_n(M)$ por:*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i \mapsto a_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ b_i \mapsto b_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ a_n \mapsto a_n a_{n+1} \\ C_{i,j} \mapsto C_{i,j}, \quad 1 \leq i < j \leq n-1 \\ C_{i,n} \mapsto C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1} \end{array} \right.$$

e:

$$\begin{cases} b_n \mapsto b_n b_{n+1} & \text{se } M = \mathbb{T} \\ b_n \mapsto b_n b_{n+1} C_{n,n+1} & \text{se } M = \mathbb{K}, \end{cases}$$

se estende a uma secção algébrica para a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \pi_1(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \longrightarrow P_{n+1}(M) \longrightarrow P_n(M) \longrightarrow 1.$$

A ideia geométrica dessa secção é duplicar a última corda no sentido do campo de vetores não nulo. A composição de tais secções fornece uma secção da sequência exata curta de Fadell-Neuwirth (3) para todo n, m .

Utilizando esta secção, calculamos o centro de tais grupos. É conhecido [10, 57] que o centro de $B_n(M)$ é trivial se $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{R}P^2, \mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1 \times I, \mathbb{T}, \mathbb{K}, \mathbb{S}^1 \widehat{\times} I$ (faixa de Möbius), o centro de $B_n(\mathbb{S}^2)$ é isomorfo a \mathbb{Z}_2 e o centro de $B_n(\mathbb{T})$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Conseguimos identificar o gerador do centro de $B_n(\mathbb{K})$ provando que é isomorfo a \mathbb{Z} na Proposição 2.2.4.

No caso de superfícies não orientáveis de genus $g \geq 3$, a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth cinde se, e somente se, $n = 1$ [29]. Calculamos também uma secção algébrica da sequência exata curta de Fadell-Neuwirth neste caso, obtemos o seguinte:

Teorema 2.3.1: *Em termos da apresentação dada pelo Teorema 1.5.1, a aplicação $s : P_1(N_{g+1}) \rightarrow P_n(N_{g+1})$ definida nos geradores de $P_1(N_{g+1})$ como:*

$$\begin{cases} b_1 \mapsto b_1 a_{n,1} \cdots a_{2,1} \\ a_{1,1} \mapsto a_{1,1} a_{2,1} \cdots a_{n,1} \\ a_{1,r} \mapsto a_{1,r}, \quad (1 < r < g) \\ a_{1,g} \mapsto \begin{cases} a_{1,g}, & \text{se } g \text{ é par} \\ a_{2,1}^{-1} \cdots a_{n,1}^{-1} a_{1,g}, & \text{se } g \text{ é ímpar} \end{cases} \end{cases}$$

é uma secção para a sequência exata curta

$$1 \rightarrow P_{n-1}(N_{g+1} \setminus \{x_1, \dots, x_m\}) \rightarrow P_n(N_{g+1}) \rightarrow P_1(N_{g+1}) \rightarrow 1.$$

A projeção p_* não se estende aos grupos de tranças $B_n(M)$, mas podemos obter uma generalização da sequência exata curta de Fadell-Neuwirth se considerarmos o quociente

intermediário do espaço de configurações $F_{n+m}(M)$ pelo subgrupo $S_n \times S_m$ de S_{n+m} , $n, m \in \mathbb{N}^*$. Obtemos assim *subgrupos de tranças mistas* de $B_{m+n}(M)$ da forma

$$B_{n,m}(M) = \pi_1(F_{n+m}(M)/(S_n \times S_m))$$

para os quais existe uma fibração à la Fadell-Neuwirth:

$$p : F_{n+m}(M)/(S_n \times S_m) \longrightarrow F_n(M)/S_n$$

obtida “esquecendo-se” as m últimas coordenadas e que tem como fibra $F_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})/S_m$. Como no caso dos grupos de tranças puras, uma aplicação da sequência exata longa em homotopia leva a *sequência exata curta de Fadell-Neuwirth generalizada*,

$$1 \rightarrow B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow B_{n,m}(M) \rightarrow B_n(M) \rightarrow 1 \quad (4)$$

onde $n \geq 3$ se $M = \mathbb{S}^2$, $n \geq 2$ se $M = \mathbb{R}P^2$ e $n \geq 1$ nos outros casos. Pouca coisa é conhecida sobre a possibilidade desta sequência cindir em geral. No caso dos grupos de tranças de Artin, é fácil ver que sempre podemos obter uma secção. No caso do grupo de tranças da esfera, alguns resultados parciais são conhecidos [25], mas o problema é difícil e o caso geral ainda está em aberto.

No caso que M é o toro ou a garrafa de Klein, a existência de um campo de vetores não nulo nos permite verificar que a sequência exata curta (4) cinde se m é múltiplo de n . Não é claro se a recíproca é verdadeira, mas conseguimos demonstrar que sim no teorema seguinte:

Teorema 2.4.1: *Seja $m, n \in \mathbb{N}$. Se M é o toro ou a garrafa de Klein, a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth generalizada*

$$1 \longrightarrow B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \longrightarrow B_{n,m}(M) \longrightarrow B_n(M) \longrightarrow 1$$

cinde se, e somente se, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $m = l \cdot n$.

Para obtermos este resultado, primeiro calculamos apresentações para $B_{n,m}(M)$ na Proposição 2.4.5, as quais são bastante similares nos casos do toro e da garrafa de Klein. Depois, obtivemos uma apresentação para $B_{n,m}(M)/\Gamma_2(B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))$ e supomos

que existe um homomorfismo $\varphi : B_n(M) \rightarrow B_{n,m}(M)/\Gamma_2(B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))$, conseguindo informações sobre este homomorfismo o que permite obter o resultado.

A definição de tranças mistas se generaliza facilmente para mais fatores. De fato, definindo $B_{n_1, \dots, n_k}(M) = \pi_1 \left(\frac{F_{n_1 + \dots + n_k}(M)}{S_{n_1} \times \dots \times S_{n_k}} \right)$, para $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ quaisquer, nos perguntamos se a projeção

$$p : B_{n_1, \dots, n_k}(M) \longrightarrow B_{n_1, \dots, n_{k-1}}(M)$$

que esquece apenas um bloco, admite uma secção. Mostramos o seguinte:

Teorema 2.5.1: *Seja M o toro ou a garrafa de Klein. Se $n_k = l_1 n_1 + \dots + l_{k-1} n_{k-1}$, para $l_1, \dots, l_{k-1} \in \mathbb{N}$ quaisquer, então a projeção $p : B_{n_1, \dots, n_k}(M) \longrightarrow B_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}(M)$ admite uma secção. Reciprocamente, se a projeção admite uma secção, então $n_k = l_1 n_1 + \dots + l_{k-1} n_{k-1}$, para $l_1, \dots, l_{k-1} \in \mathbb{Z}$.*

Este resultado generaliza o Teorema 2.4.1, mas a resposta ainda não está completa para $k \geq 3$ pois nossa demonstração não nos permite decidir se os coeficientes são todos positivos ou não, mas a geometria do problema nos induz a conjecturar que não.

No outro extremo, podemos considerar a projeção $p : B_{n_1, \dots, n_k}(M) \longrightarrow B_{n_1}(M)$, na qual esquecemos todos os blocos com exceção do primeiro e questionar se admite uma secção. Esta pergunta é mais fácil de ser respondida pois é uma consequência imediata do Teorema 2.4.1, ou seja, admite uma secção se, e somente se, para todo $i = 2, \dots, k$ existe $l_i \in \mathbb{N}$ tal que $n_i = l_i n_1$.

No Capítulo 3, nosso foco foi propriedades residuais dos grupos de tranças e estudar suas respectivas séries centrais descendentes e derivadas. Lembramos que se G é um grupo, a série central descendente $\{\Gamma_i(G)\}_{i \geq 1}$ de G é definida recursivamente por: $\Gamma_1(G) = G$ e $\Gamma_{i+1}(G) = [G, \Gamma_i(G)]$, para $i \geq 1$. A série derivada $\{G^{(i)}\}_{i \geq 0}$ de G é definida por $G^{(0)} = G$ e $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$ para $i \geq 0$. Se sabe que G é residualmente nilpotente se $\bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(G) = \{1\}$ e G é residualmente solúvel se $\bigcap_{i \geq 0} G^{(i)} = \{1\}$. Estas duas séries são importantes no estudo de G do ponto de vista combinatório.

Sabemos que todo grupo livre de posto finito é residualmente nilpotente [48]. No estudo dos grupos de tranças puras, tem-se que P_n e $P_n(M)$ são residualmente nilpotentes

para todo n , onde M é um superfície orientável de genus $g \geq 2$ [3, 7, 19, 44]. Começamos estudando as séries centrais descendentes e das derivadas de $P_n(\mathbb{K})$. Primeiro conseguimos os seguintes teoremas gerais sobre séries de um produto semi-direto:

Teorema 3.2.8: *Sejam H e G grupos e seja $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ uma ação de G em H . Definimos por indução os seguintes grupos: L_n, K_n e H_n .*

$$L_1 = H$$

para $n \geq 2$, definimos:

$$K_n = \langle \varphi(g)(h).h^{-1} : g \in \Gamma_{n-1}(G), h \in H \rangle;$$

$$H_n = \langle \varphi(g)(h).h^{-1} : g \in G, h \in L_{n-1} \rangle;$$

$$L_n = \langle K_n, H_n, [H, L_{n-1}] \rangle.$$

Então φ induz uma ação (também denotada por φ) de $\Gamma_n(G)$ em L_n , e

$$L_n \rtimes_{\varphi} \Gamma_n(G) = \Gamma_n(H \rtimes_{\varphi} G).$$

Teorema 3.2.11: *Sejam H e G grupos e seja $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ uma ação de G em H . Definimos por indução os seguintes grupos: V_n (para $n \geq 1$) e \tilde{H}_n (para $n \geq 2$), onde*

$$V_1 = H;$$

para $n \geq 2$, definimos:

$$\tilde{H}_n = \langle \varphi(g)(h).h^{-1} : g \in G, h \in V_{n-1} \rangle;$$

$$V_n = \langle \tilde{H}_n, [H, V_{n-1}] \rangle.$$

Então φ induz uma ação (também denotada por φ) de $G^{(n)}$ em V_{n+1} , e

$$(H \rtimes_{\varphi} G)^{(n)} \subset V_{n+1} \rtimes_{\varphi} G^{(n)}.$$

Tais resultados podem ser úteis para o estudo das séries centrais e descendentes e das derivadas de um produto semi-direto qualquer. Como $P_n(\mathbb{K})$ se escreve como um produto semi-direto pela Proposição 2.2.1, tentamos calcular as séries centrais descendentes e das derivadas desses grupos usando os resultados acima e obtivemos resultados parciais sobre a estrutura das séries para $P_n(\mathbb{K})$ no Lema 3.3.6, na Proposição 3.3.7 e no Lema 3.4.3.

No estudo do grupo de tranças (total), até o momento era conhecido que se M é uma superfície orientável de genus $g \geq 1$, então $B_n(M)$ é residualmente nilpotente se, e somente se, $n \leq 2$ [3, 7, 27, 28]. Se $M = \mathbb{R}P^2$ o mesmo resultado é válido [30], mas não existia nenhum resultado para outras superfícies não orientáveis. No caso que $M = \mathbb{K}$, obtivemos as mesmas condições:

Teorema 3.3.1: $B_n(\mathbb{K})$ é residualmente nilpotente se, e somente se, $n \leq 2$.

Para outras superfícies não orientáveis, utilizando um trabalho recente de P. Bellingheri e S. Gervais [6], conseguimos concluir que o mesmo é válido. O método usado foi provar que $P_2(M)$ é residualmente 2-finito e depois utilizar o Teorema 3.2.5 de Gruenberg para concluir o mesmo para $B_2(M)$. Consequentemente $B_2(M)$ é residualmente nilpotente. Para $n \geq 3$, usando as relações de Artin e uma apresentação de $B_n(M)$, mostramos que $B_n(M)$ não é residualmente nilpotente na Proposição 3.5.2.

Estudando as séries das derivadas, provamos o seguinte:

Teorema 3.4.1: $B_n(\mathbb{T})$ e $B_n(\mathbb{K})$ são residualmente solúveis se, e somente se, $n \leq 4$.

De fato, tal condição é a mesma para outras superfícies (orientáveis e não orientáveis) [6, 27, 29] e damos maiores detalhes no Capítulo 3. Além disso, demos uma apresentação para o grupo $(B_n(\mathbb{T}))^{(1)}$ na Proposição 3.4.4.

Finalizamos no Capítulo 4 analisando o fecho normal de B_n em $B_n(\mathbb{T})$, ou equivalentemente, o fecho normal de σ_1 em $B_n(\mathbb{T})$. Obtivemos apresentações para $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$ e para o seu abelianizado, $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle^{Ab}$, na Proposição 4.1.1 e no Corolário 4.1.2, respectivamente. Tal subgrupo pode ser útil para estudar várias propriedades dos grupos de tranças de superfícies, uma delas é a ordenabilidade desses grupos. Em relação à ordenabilidade dos grupos de tranças já são conhecidos alguns resultados importantes. Usando-se a “expansão de Magnus” foi provado que P_n é biordenável para todo n [43, 60] e P. Dehornoy [13] provou que B_n é ordenável à direita para todo n . Para o grupo de tranças puras de uma superfície M , já temos uma resposta completa para quais delas $P_n(M)$ são ordenáveis à direita e/ou biordenáveis [33, 43, 60]. Para o grupo de tranças (total) de superfícies ainda não havia nenhum resultado (se $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{R}P^2$). Conseguímos provar usando o fecho normal de σ_1 em $B_n(\mathbb{T})$ que para $n = 2$ tal grupo é ordenável à direita no Teorema 4.2.1. Nossa técnica

não se estende para generalizar o resultado para outras superfícies e nem para $n \geq 3$, mas continuamos a refletir sobre a questão.

Capítulo 1

Presentações dos Grupos de Tranças

O objetivo deste trabalho é estudar os grupos de tranças do toro \mathbb{T} e da garrafa de Klein \mathbb{K} , a partir de um ponto de vista algébrico e topológico. Embora sejam conhecidas algumas apresentações destes grupos (P. Bellingeri, J. Birman, J. González-Meneses, G. P. Scott, entre outros [5, 10, 32, 61]) optamos em calcular novas apresentações para facilitar a comparação entre eles. Neste capítulo, obtivemos novas apresentações para os grupos de tranças (puras) do toro e da garrafa de Klein, obtendo os Teoremas 1.3.1 e 1.4.1. Nestes teoremas fica evidente a semelhança entre estes grupos. Além disso, generalizamos essa nova apresentação do grupo de tranças puras da garrafa de Klein para outras superfícies não orientáveis no Teorema 1.5.1, a qual se difere das apresentações já conhecidas pois não visualizamos as superfícies como soma conexa de planos projetivos, mas sim como soma conexa de toros com um plano projetivo ou soma conexa de toros com uma garrafa de Klein.

1.1. Introdução

O *grupo de tranças do plano* (também chamado de *grupo de tranças de Artin*) foi definido por Artin em 1925 [1], veja também [2]. Tal grupo pode ser definido geometricamente do seguinte modo:

Seja $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ um conjunto de pontos distintos no disco \mathbb{D}^2 . Definimos uma *n-trança geométrica* como sendo uma coleção $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ de n caminhos de $[0, 1]$ em \mathbb{D}^2 , satisfazendo:

- para todo $i = 1, \dots, n$, $\beta_i(0) = p_i$ e $\beta_i(1) \in \mathcal{P}$.
- para todo $t \in [0, 1]$, o conjunto $\{\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)\}$ consiste exatamente de n pontos distintos de \mathbb{D}^2 .

A imagem de cada β_i é chamada de *corda* da trança. Podemos considerar, para melhor visualização, os caminhos $(\beta_i(t), t) \in \mathbb{D}^2 \times [0, 1]$. A ideia é que, visualizando o intervalo unitário como sendo vertical, temos n cordas descendo continuamente no intervalo, mas sem intersecções entre elas. Exemplos na Figura 1.1.

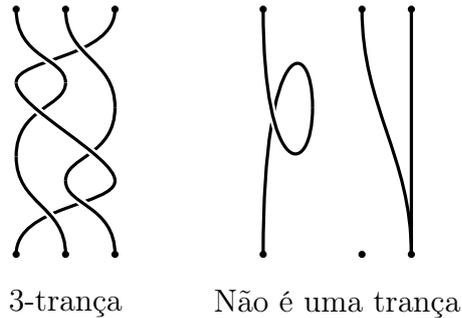


Figura 1.1: Exemplos

Cada trança geométrica β determina uma permutação τ no grupo simétrico S_n , definida por $\tau(i) = j$ se β_i tem como ponto final p_j . Por exemplo, a 3-trança da Figura 1.1 tem permutação (123) . Uma trança que tem a permutação trivial é chamada de *trança pura*.

O grupo de tranças de Artin B_n será a coleção de todas as n -tranças geométricas, salvo homotopia. Para estar bem definida a estrutura de grupo, precisamos utilizar homotopia para classificar tranças topologicamente equivalentes. Duas tranças β, β' são ditas *equivalentes* se existir uma homotopia entre elas, tal que a todo momento da homotopia temos uma trança geométrica bem definida. A ideia é deformar uma trança na outra, fixando os pontos iniciais e finais.

O produto de duas tranças é definido por concatenação dos caminhos de duas tranças geométricas (veja na Figura 1.2). O elemento trivial é a n -trança em que cada caminho β_i é uma linha retas de $(p_i, 0)$ até $(p_i, 1)$ (veja na Figura 1.3).

O grupo de tranças de Artin, B_n , tem como geradores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ (também chamados de *geradores de Artin*) que podem ser visualizados na Figura 1.4 junto com seus inversos.

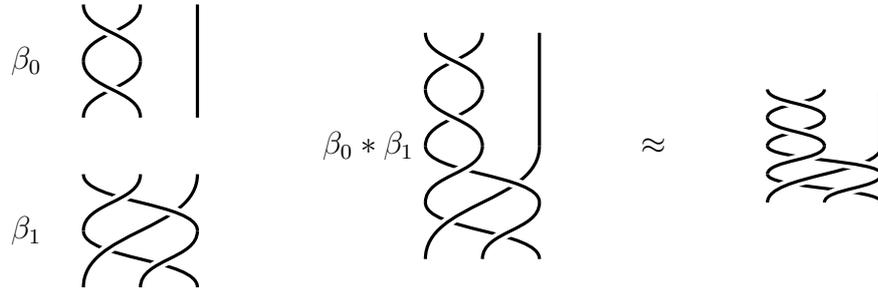


Figura 1.2: Produto das tranças β_0 e β_1

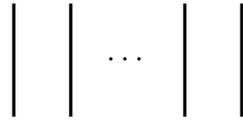


Figura 1.3: A trança trivial em B_n

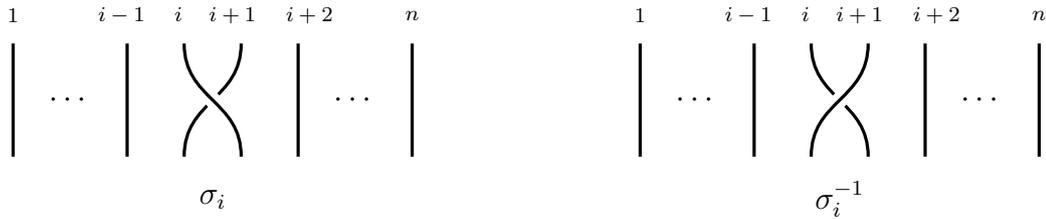


Figura 1.4: A trança σ_i e seu elemento inverso

Uma apresentação de B_n é dada por ([40], p. 18):

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}; \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| \geq 2 \end{array} \right\rangle$$

Da apresentação de B_n dada acima, as relações são chamadas de *relações de Artin*, podemos observá-las na Figura 1.5.

Utilizando o estudo de espaços de configurações feito por Fox, os grupos de tranças foram generalizados por Fox e Neuwirth [20] para qualquer superfície compacta M , ou com uma quantidade finita de pontos retirados, do seguinte modo.

Definimos o n -ésimo espaço de configuração de M :

$$F_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in M; x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}.$$

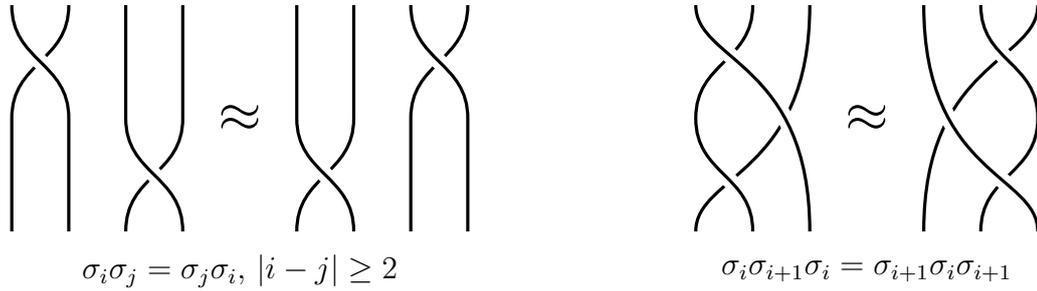


Figura 1.5: Relações de Artin

O grupo de trança puras de M com n cordas é definido por

$$P_n(M) = \pi_1(F_n(M), (p_1, \dots, p_n)),$$

onde (p_1, \dots, p_n) é um ponto base em $F_n(M)$.

O grupo simétrico S_n age livremente em $F_n(M)$ pela permutação das coordenadas, o quociente correspondente será denotado por $D_n(M) = F_n(M)/S_n$. O grupo de tranças (total) de M com n cordas é então definido por

$$B_n(M) = \pi_1(D_n(M), [(p_1, \dots, p_n)]),$$

onde $[(p_1, \dots, p_n)]$ é um ponto base em $D_n(M)$. Note que, para $n = 1$, temos

$$P_1(M) = B_1(M) = \pi_1(M).$$

Neste trabalho, estudamos prioritariamente o caso $M = \mathbb{T}$ o toro e $M = \mathbb{K}$ a garrafa de Klein. Vamos visualizar o toro e a garrafa de Klein sendo os quadrados identificados como na Figura 1.6.



Figura 1.6: Visualização do toro e da garrada de Klein

Para $M = \mathbb{D}^2$, a definição de $B_n(M)$ coincide com a definição geométrica de B_n [11, 20]. De fato, substituindo \mathbb{D}^2 por M na definição de n -tranças geométrica ambas definições são equivalentes.

Existe um homomorfismo natural $\tau : B_n(M) \rightarrow S_n$, que associa a cada trança geométrica β a permutação $\tau(\beta)$ definida por $\beta_i(1) = p_{\tau(\beta)(i)}$. O núcleo é exatamente $P_n(M)$, assim obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \rightarrow P_n(M) \rightarrow B_n(M) \rightarrow S_n \rightarrow 1. \quad (1.1)$$

Embora seja mais fácil e intuitivo compreender o grupo de tranças de maneira geométrica, a definição por espaço de configuração foi mais útil neste trabalho, pela sua relação com a teoria de homotopia.

Para $m \in \mathbb{N}^*$, podemos definir o homomorfismo $p_* : P_{n+m}(M) \rightarrow P_n(M)$, induzido pela projeção:

$$\begin{aligned} p : F_{n+m}(M) &\rightarrow F_n(M) \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) &\mapsto (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Podemos visualizar geometricamente esse homomorfismo como sendo o homomorfismo que “esquece” as últimas m cordas.

No caso que M é uma superfície compacta sem bordo, a projeção p foi estudada por Fadell e Neuwirth [17], que mostraram que tal projeção é uma fibração localmente trivial. A fibra sobre o ponto (x_1, \dots, x_n) se identifica a $F_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$, que é considerado como um subespaço do espaço total via a inclusão $i : F_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow F_{n+m}(M)$ definida por $i(y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$.

Aplicando a sequência exata longa em homotopia dessa fibração, obtemos a *sequência exata curta de Fadell-Neuwirth*:

$$1 \rightarrow P_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \xrightarrow{i_*} P_{n+m}(M) \xrightarrow{p_*} P_n(M) \rightarrow 1 \quad (1.2)$$

onde $n \geq 3$ se M é a esfera \mathbb{S}^2 [16, 18], $n \geq 2$ se M é o plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$ [63] e $n \geq 1$ nos outros casos [17] e i_*, p_* são os homomorfismos induzidos de i e p respectivamente.

Utilizaremos com maior frequência a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth com

$m = 1$:

$$1 \rightarrow \pi_1(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow P_{n+1}(M) \xrightarrow{p_*} P_n(M) \rightarrow 1. \quad (1.3)$$

Tal sequência tem sido amplamente estudada e pode ser utilizada para encontrar apresentações dos grupos envolvidos, seus centros, saber sobre a existência ou não de torção e questionar sobre a existência ou não de uma secção para a sequência, entre outros. No caso que M é o toro \mathbb{T} ou a garrafa de Klein \mathbb{K} , sabemos por [17] que tal sequência exata cinde.

Neste capítulo, utilizaremos as sequências exatas curtas acima para calcular apresentações para os grupos de tranças puras e para os grupos de tranças no caso que $M = \mathbb{T}$ ou $M = \mathbb{K}$.

São conhecidas na literatura diversas apresentações de tais grupos feitas por P. Beltingeri, J. Birman, J. González-Meneses, G. P. Scott [5, 10, 32, 61], porém optamos por fazer uma nova apresentação que deixasse mais evidente a semelhança entre os grupos de tranças do toro e da garrafa de Klein.

Na Seção 1.2 explicamos o método que foi utilizado para o cálculo das apresentações. Na Seção 1.3 usamos a sequência (1.3) para calcular a apresentação dos grupos de tranças puras do toro e da garrafa de Klein dada no Teorema 1.3.1, na Seção 1.4 obtemos uma apresentação do grupo de tranças (total) de tais superfícies dada no Teorema 1.4.1 e finalizamos na Seção 1.5 com uma apresentação dos grupos de tranças puras de uma superfície não orientável dada no Teorema 1.5.1.

1.2. Apresentação de extensões de grupos

Vamos descrever o método para calcular apresentação de grupos, quando temos uma extensão de grupos, o método foi usado para calcular apresentações dos grupos estudados neste trabalho. Para maiores detalhes veja o livro do Johnson [41].

Dada uma extensão

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$$

e apresentações

$$G = \langle X \mid R \rangle \text{ e } A = \langle Y \mid S \rangle$$

para G e A , podemos encontrar uma apresentação para \tilde{G} .

Primeiro, seja

$$\tilde{Y} = \{\tilde{y} = i(y) : y \in Y\},$$

e seja

$$\tilde{S} = \{\tilde{s} = i(s) : s \in S\}$$

o conjunto de palavras de \tilde{Y} obtido de S pela substituição de cada y por \tilde{y} .

Agora, seja

$$\tilde{X} = \{\tilde{x} : x \in X\}$$

elementos de uma transversal da $Im(i)$ em \tilde{G} . Para cada $r \in R$, seja \tilde{r} uma palavra em \tilde{X} obtida pela substituição em r de cada x por \tilde{x} . Sabemos que p envia cada \tilde{r} no elemento neutro, portanto $\tilde{r} \in Ker(p) = Im(i)$, que é gerada por \tilde{Y} , assim cada \tilde{r} pode ser escrito como uma palavra, digamos v_r em \tilde{Y} .

Definimos

$$\tilde{R} = \{\tilde{r}v_r^{-1} : r \in R\}.$$

Finalmente, como $Im(i) \triangleleft \tilde{G}$, cada conjugado $\tilde{x}^{-1}\tilde{y}\tilde{x}$ com $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ pertence a $Im(i)$, portanto é uma palavra, digamos $w_{x,y}$, em \tilde{Y} .

Definindo,

$$\tilde{T} = \{\tilde{x}^{-1}\tilde{y}w_{x,y}^{-1} : x \in X, y \in Y\},$$

temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.1. *Utilizando a notação acima, o grupo \tilde{G} admite a seguinte apresentação:*

$$\langle \tilde{X}, \tilde{Y} : \tilde{S}, \tilde{R}, \tilde{T} \rangle.$$

No que segue, chamamos as relações \tilde{S} de Tipo I, as relações \tilde{R} de Tipo II e as relações \tilde{T} de Tipo III.

1.3. Apresentações dos grupos de tranças puras do toro e da garrafa de Klein

Usaremos agora o método acima e a sequência de Fadell-Neuwirth (1.3) para encontrar uma apresentação para o grupo de tranças puras do toro e da garrafa de Klein.

Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 1.3.1. *Seja M o toro \mathbb{T} ou a garrafa de Klein \mathbb{K} . O n -ésimo grupo de tranças puras, $P_n(M)$, admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $\{a_i, b_i, i = 1, \dots, n\} \cup \{C_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n\}$;

Relações:

1. $a_i a_j = a_j a_i, (1 \leq i < j \leq n)$;
2. $a_i^{-1} b_j a_i = b_j a_j C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} a_j^{-1}, (1 \leq i < j \leq n)$;
3. $a_i^{-1} C_{j,k} a_i = \begin{cases} C_{j,k}, (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ a_k C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} a_k^{-1} C_{j,k} C_{i,k}^{-1} C_{i+1,k}, (1 \leq j \leq i < k \leq n); \end{cases}$
4. $C_{i,l}^{-1} C_{j,k} C_{i,l} = \begin{cases} C_{j,k}, (1 \leq i < l < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j \leq i < l < k \leq n), \\ C_{i,k} C_{l+1,k}^{-1} C_{l,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} C_{l,k}^{-1} C_{l+1,k}, (1 \leq i < j \leq l < k \leq n); \end{cases}$
5. $\begin{cases} \prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} = a_i b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1}, (1 \leq i \leq n), & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ \prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} = b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1}, (1 \leq i \leq n), & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$
6. $\begin{cases} b_j b_i = b_i b_j, (1 \leq i < j \leq n), & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b_j b_i = b_i b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}, (1 \leq i < j \leq n), & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$
7. $\begin{cases} b_i^{-1} a_j b_i = a_j b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} b_j^{-1}, (1 \leq i < j \leq n), & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b_i^{-1} a_j b_i = a_j b_j (C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1})^{-1} b_j^{-1}, (1 \leq i < j \leq n), & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$
8. $\begin{cases} b_i^{-1} C_{j,k} b_i = \begin{cases} C_{j,k}, (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1} b_k^{-1}, (1 \leq j \leq i < k \leq n); \end{cases} & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b_i^{-1} C_{j,k} b_i = \begin{cases} C_{j,k}, (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k (C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1})^{-1} b_k^{-1}, (1 \leq j \leq i < k \leq n); \end{cases} & \text{se } M = \mathbb{K}. \end{cases}$

Podemos visualizar os geradores desses grupos na Figura 1.7

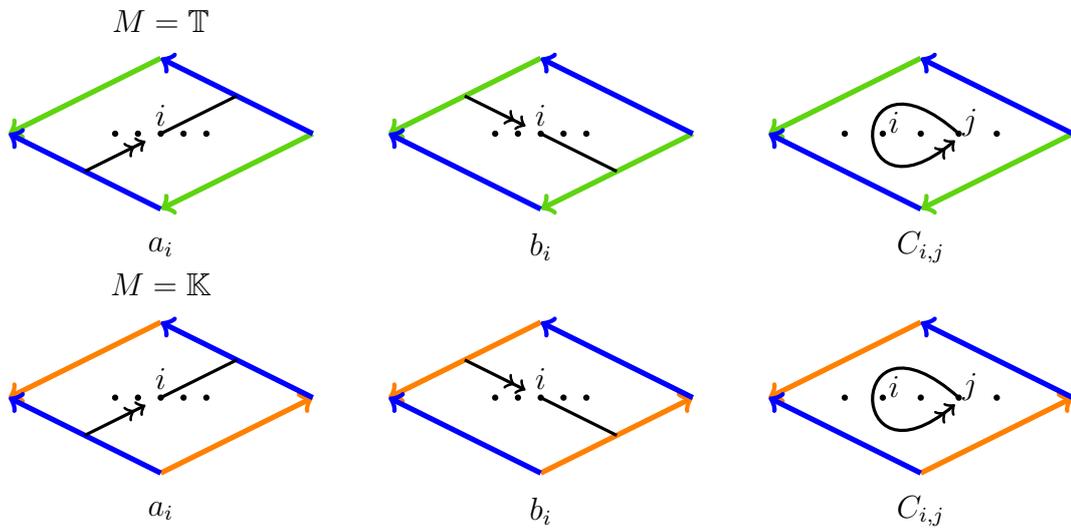


Figura 1.7: Geradores de $P_n(\mathbb{T})$ e $P_n(\mathbb{K})$

Vale observar com maior cuidado os geradores b_i em $P_n(\mathbb{K})$, pois no caso do ponto i estar exatamente no meio do losango, nos dá a falsa impressão que esses geradores são iguais no toro e na garrafa de Klein, mas ao trocar o ponto i vemos a diferença entre esses geradores (Figura 1.8).

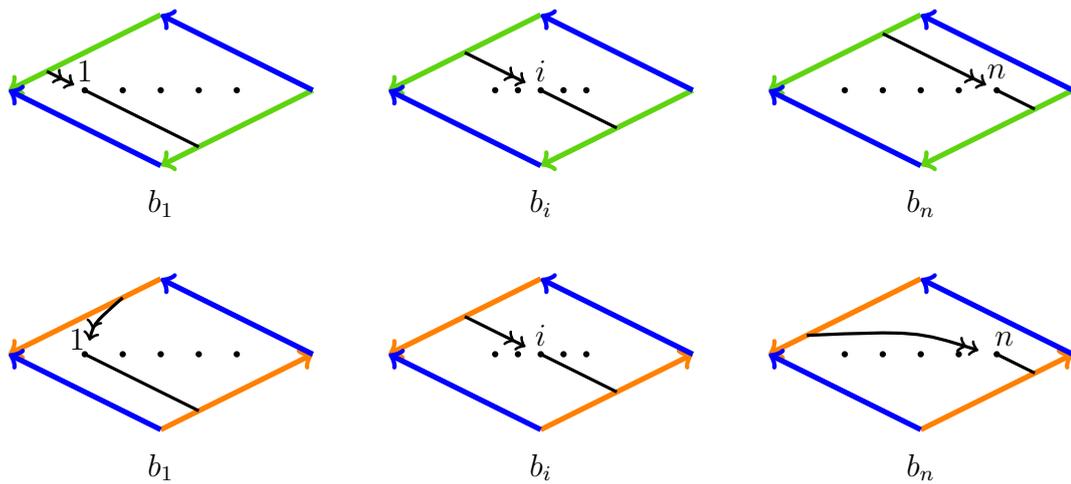
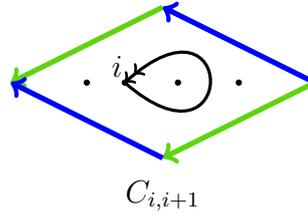


Figura 1.8: Diferença entre os geradores b_i em $P_n(\mathbb{T})$ e em $P_n(\mathbb{K})$

Para facilitar a notação, estamos considerando que $C_{i,j} = 1$ se $i = j$, além disso, a trança $C_{i,i+1}$ pode ser vista também na Figura 1.9,

Figura 1.9: A trança $C_{i,i+1}$

Estamos considerando o espaço $M \times [0, 1]$ visto “por cima”, portanto os pontos representam que a corda desce trivialmente e as únicas cordas que mexem são as cordas i (no caso de a_i e b_i) e j (no caso de $C_{i,j}$). Note que usamos a decomposição mais semelhante entre o toro e a garrafa de Klein, o que torna os geradores quase idênticos, com a exceção dos geradores b_i , assim, conseguimos no Teorema 1.3.1 uma apresentação destes grupos muito semelhante, em que quatro dessas relações são idênticas (1,2,3,4), em três dessas relações a única diferença é o sinal do elemento $(C_{i,j}C_{i+1,j}^{-1})$ (6,7,8), e ainda as relações (5) que dizemos ser *relações de superfície*.

Demonstração do Teorema 1.3.1:

Provemos inicialmente o teorema para o caso que $M = \mathbb{T}$. Faremos a demonstração por indução. Tome inicialmente $n = 1$.

Sabemos que

$$P_1(\mathbb{T}) = \pi_1(\mathbb{T}) = \langle a_1, b_1 : b_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} = 1 \rangle$$

e o grupo $\pi_1(\mathbb{T} \setminus \{x_1\})$ é um grupo livre de posto dois com base: $\{a_2, b_2\}$, mas para simplificar futuras relações consideramos esse grupo com a seguinte apresentação:

$$\pi_1(\mathbb{T} \setminus \{x_1\}) = \langle a_2, b_2, C_{1,2} : C_{1,2} = b_2^{-1} a_2^{-1} b_2 a_2 \rangle.$$

Tal relação pode ser visualizada na Figura 1.10.

Agora, para encontrarmos uma apresentação para $P_2(\mathbb{T})$, basta usarmos o método da Proposição 1.2.1 e a sequência exata curta (1.3) abaixo, com $n = 1$ e $M = \mathbb{T}$:

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathbb{T} \setminus \{x_1\}) \rightarrow P_2(\mathbb{T}) \rightarrow P_1(\mathbb{T}) \rightarrow 1$$

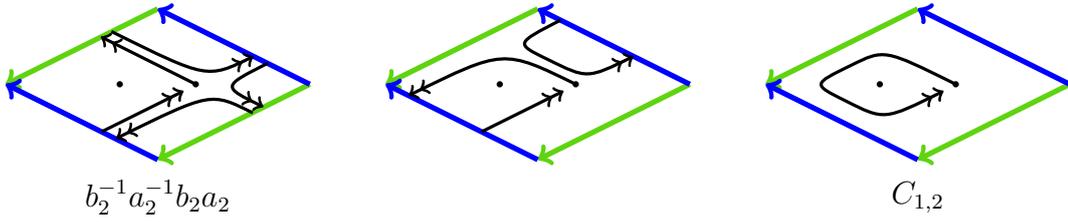


Figura 1.10: $C_{1,2} = b_2^{-1}a_2^{-1}b_2a_2$

Como geradores teremos a_1, b_1 (vistos agora no grupo de tranças de 2 cordas) e $a_2, b_2, C_{1,2}$ (vistos como a inclusão no grupo $P_2(\mathbb{T})$).

Conforme a Proposição 1.2.1, temos três tipos de relações.

Tipo I: as relações de $\pi_1(\mathbb{T} \setminus \{x_1\})$, ou seja, $C_{1,2} = b_2^{-1}a_2^{-1}b_2a_2$, que é exatamente a relação (5) no Teorema 1.3.1 com $i = 2$.

Tipo II: reescrever a relação vinda de $P_1(\mathbb{T})$ em termos dos geradores $a_2, b_2, C_{1,2}$, ou seja, escrever a trança $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$ no grupo $P_2(\mathbb{T})$, depois reescrevê-la como uma trança que mantém a primeira corda trivial e mexe apenas a última corda. Podemos verificar na Figura 1.11.

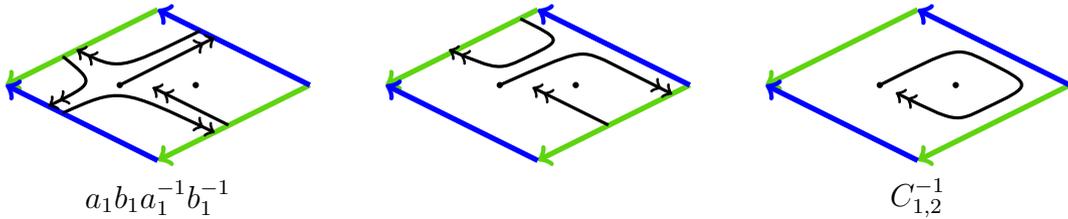


Figura 1.11: $C_{1,2}^{-1} = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$

Assim, obtemos a relação: $C_{1,2}^{-1} = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$, que é exatamente a descrita na relação (5) do Teorema 1.3.1, com $i = 1$.

Tipo III: fazer o conjugado dos elementos $a_2, b_2, C_{1,2}$ pelos elementos a_1, b_1 , e escrevê-los em termos dos elementos $a_2, b_2, C_{1,2}$, ou seja, deixando a primeira corda trivial e mexendo apenas a última corda. As Figuras 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16 e 1.17 correspondem respectivamente as relações (1, 2, 3, 6, 7) e (8) da apresentação.

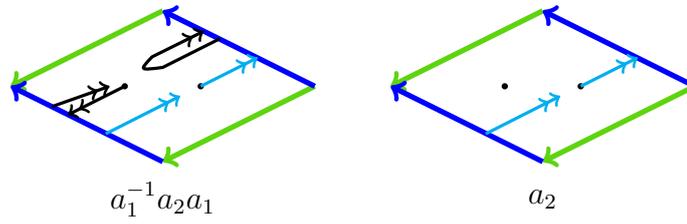


Figura 1.12: Relação 1: $a_1 a_2 = a_2 a_1$

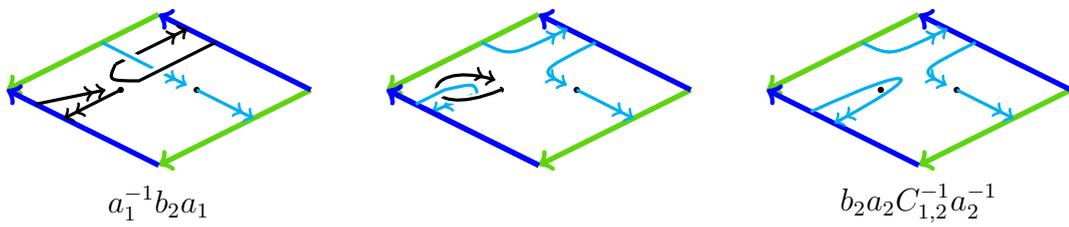


Figura 1.13: Relação 2: $a_1^{-1} b_2 a_1 = b_2 a_2 C_{1,2}^{-1} a_2^{-1}$

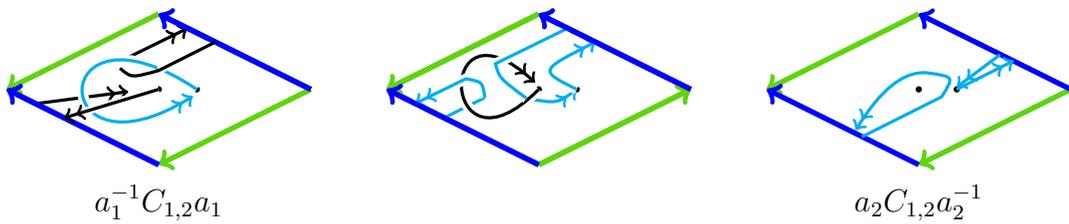


Figura 1.14: Relação 3: $a_1^{-1} C_{1,2} a_1 = a_2 C_{1,2} a_2^{-1}$

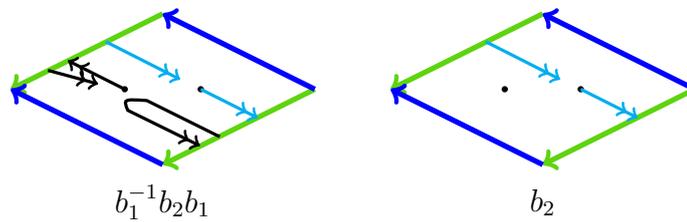


Figura 1.15: Relação 6: $b_1 b_2 = b_2 b_1$

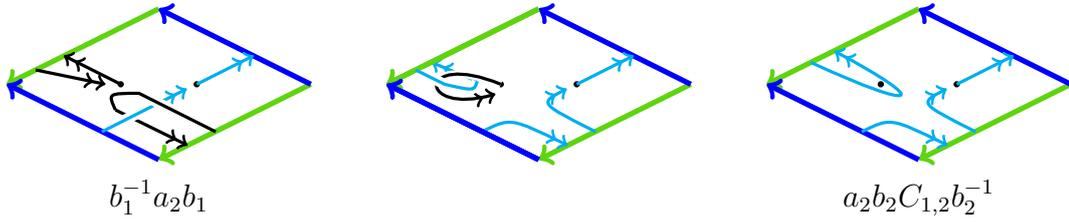


Figura 1.16: Relação 7: $b_1^{-1} a_2 b_1 = a_2 b_2 C_{1,2} b_2^{-1}$

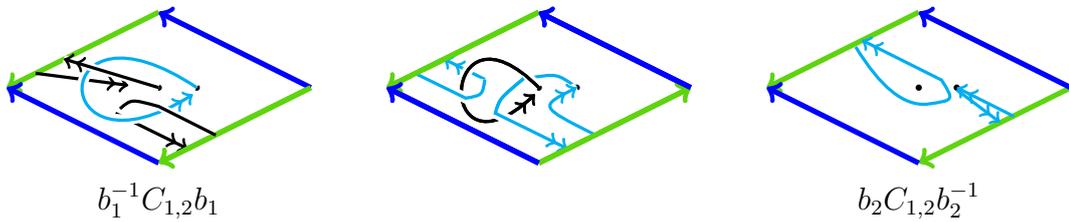


Figura 1.17: Relação 8: $b_1^{-1} C_{1,2} b_1 = b_2 C_{1,2} b_2^{-1}$

Conseguindo assim a apresentação do grupo $P_2(\mathbb{T})$ dada no enunciado (a relação (4) não existe para $n = 2$).

Agora prosseguimos com o passo indutivo. Suponha que o grupo de tranças puras do toro $P_n(\mathbb{T})$ tenha apresentação dada pelo Teorema 1.3.1. Calculemos a apresentação de $P_{n+1}(\mathbb{T})$. Novamente, usando a sequência de Fadell-Neuwirth (1.3) temos:

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathbb{T} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow P_{n+1}(\mathbb{T}) \rightarrow P_n(\mathbb{T}) \rightarrow 1$$

e sabemos que $\pi_1(\mathbb{T} \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ é um grupo livre de posto $n + 1$, com geradores $a_{n+1}, b_{n+1}, C_{i,n+1}, 2 \leq i \leq n$, mas para facilitar a notação usaremos a seguinte apresentação para este grupo:

$$\pi_1(\mathbb{T} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) = \langle a_{n+1}, b_{n+1}, C_{i,n+1}, 1 \leq i \leq n : C_{1,n+1} = b_{n+1}^{-1} a_{n+1}^{-1} b_{n+1} a_{n+1} \rangle.$$

A relação pode ser vista na Figura 1.18.

Agora, aplicamos o método da Proposição 1.2.1. Temos como geradores de $P_{n+1}(\mathbb{T})$ os elementos $a_i, b_i, i = 1, \dots, n + 1, C_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n + 1$.

Temos três tipos de relações:

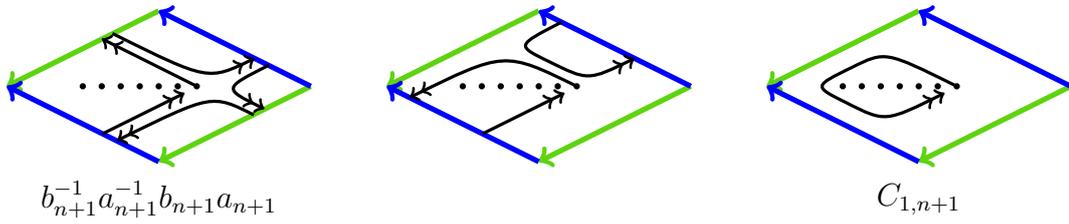


Figura 1.18: $C_{1,n+1} = b_{n+1}^{-1} a_{n+1}^{-1} b_{n+1} a_{n+1}$

Tipo I: que consiste da relação $C_{1,n+1} = b_{n+1}^{-1} a_{n+1}^{-1} b_{n+1} a_{n+1}$ vinda do grupo $\pi_1(\mathbb{T} \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$.

Tipo II: Temos que verificar como ficam as relações de $P_n(\mathbb{T})$ ao acrescentarmos a corda $n + 1$. Mas, com exceção das relações de superfície (5), as cordas não mexem no ponto $n + 1$ e todas as relações se mantêm idênticas, como é possível ver nas Figuras 1.19, 1.20, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26 e 1.27.

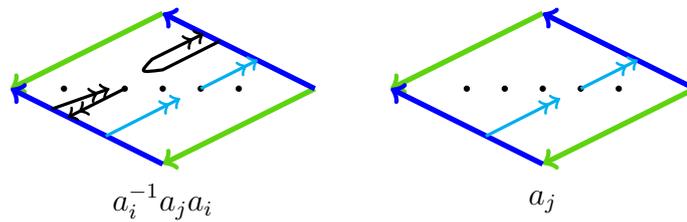


Figura 1.19: Relação 1: $a_i a_j = a_j a_i$

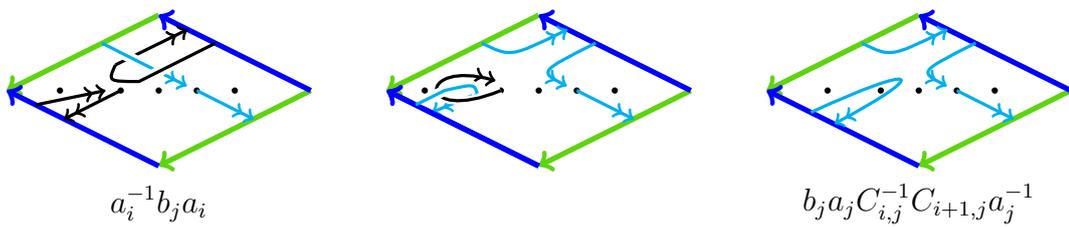


Figura 1.20: Relação 2: $a_i^{-1} b_j a_i = b_j a_j C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} a_j^{-1}$

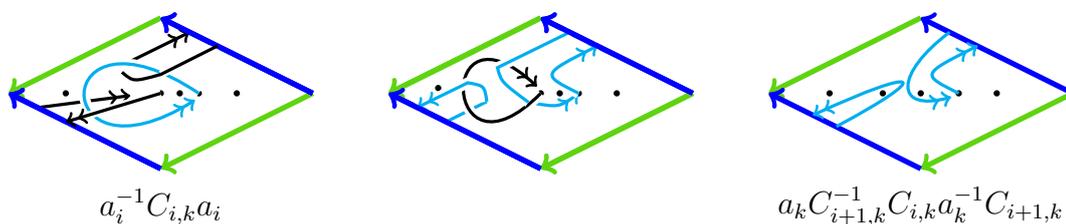


Figura 1.21: Relação 3: se $i = j$; $a_i^{-1} C_{i,k} a_i = a_k C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} a_k^{-1} C_{i+1,k}$

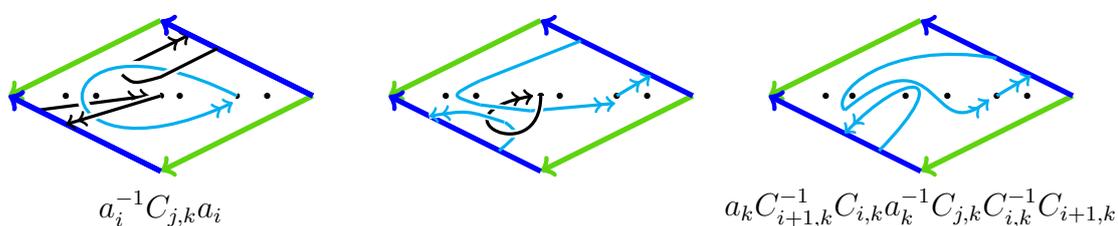


Figura 1.22: Relação 3: se $j < i < k$; $a_i^{-1} C_{j,k} a_i = a_k C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} a_k^{-1} C_{j,k} C_{i,k}^{-1} C_{i+1,k}$

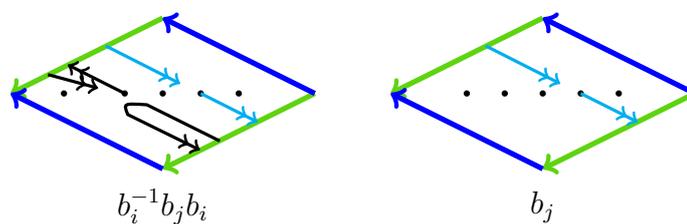


Figura 1.23: Relação 6: $b_i b_j = b_j b_i$

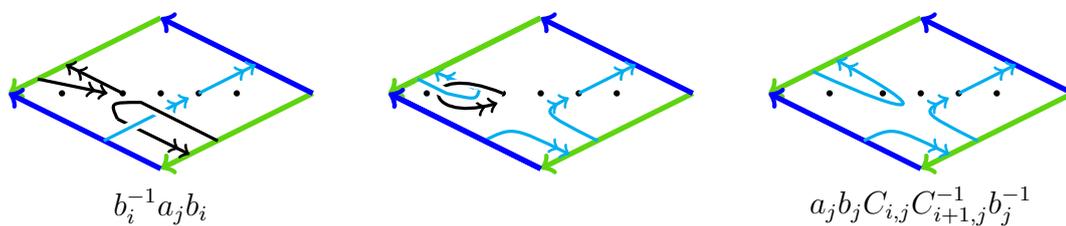


Figura 1.24: Relação 7: $b_i^{-1} a_j b_i = a_j b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} b_j^{-1}$

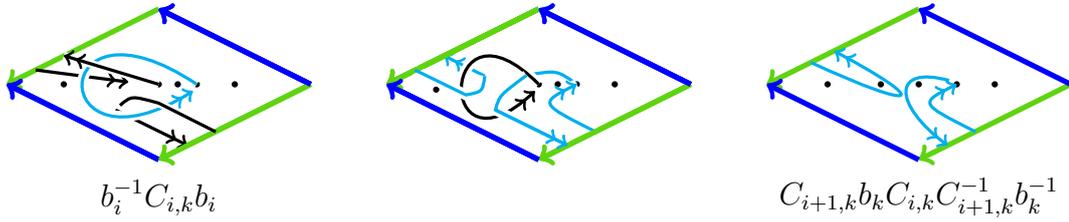


Figura 1.25: Relação 8: se $i = j$; $b_i^{-1}C_{i,k}b_i = C_{i+1,k}b_kC_{i,k}C_{i+1,k}^{-1}b_k^{-1}$

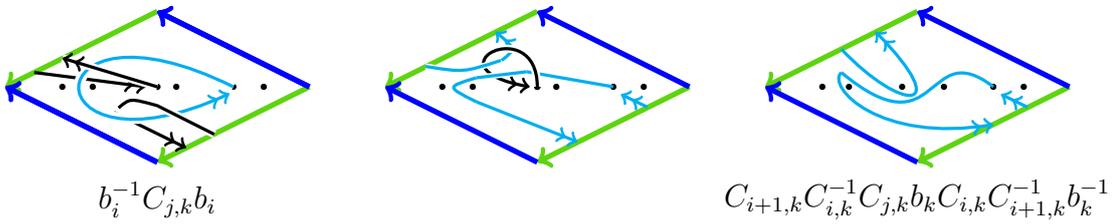


Figura 1.26: Relação 8: se $j < i < k$; $b_i^{-1}C_{j,k}b_i = C_{i+1,k}C_{i,k}^{-1}C_{j,k}b_kC_{i,k}C_{i+1,k}^{-1}b_k^{-1}$

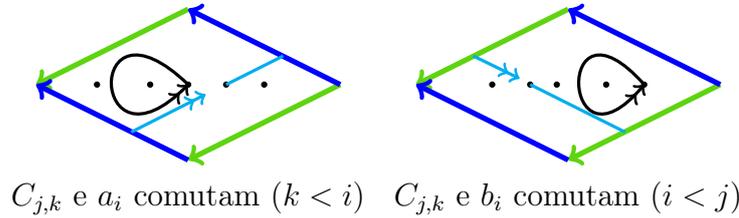


Figura 1.27: Elementos que comutam

Agora vamos analisar o que acontece com as relações de superfície (5),

$$\prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1}C_{i+1,j} = a_i b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1}.$$

Vamos primeiro desenhar a trança $\prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1}C_{i+1,j}$, que pode ser vista como uma trança do plano, na Figura 1.28.

Agora, desenhamos o inverso da trança $a_i b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1}$, ou seja $b_i a_i C_{1,i}^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1}$, (Figura 1.29) pois queremos escrever a trança $(b_i a_i C_{1,i}^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1})(\prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1}C_{i+1,j})$, em termos dos geradores que mexem apenas a última corda.

Note que, se não fosse pela adição do ponto $n + 1$, essas tranças seriam uma o

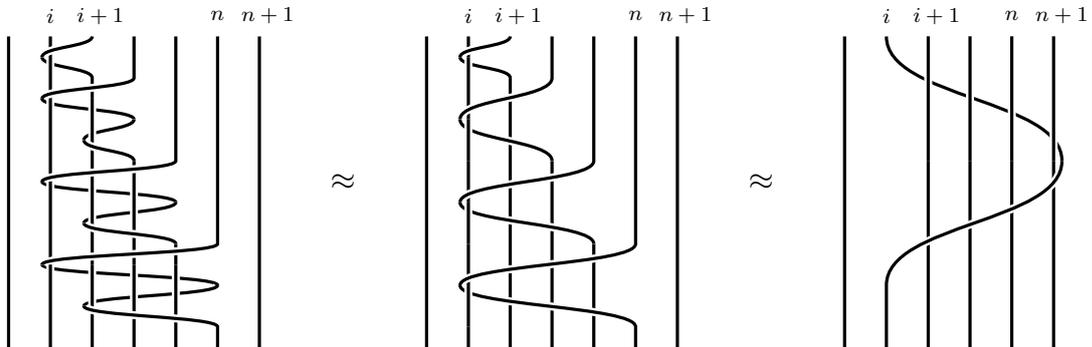


Figura 1.28: $\prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j}$

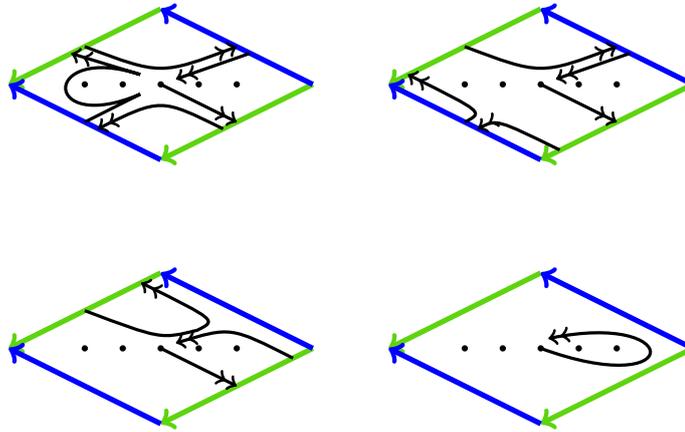


Figura 1.29: $b_i a_i C_{1,i}^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1}$

inverso da outra, mas com o ponto $n + 1$ a mais obtemos a Figura 1.30, ao calcularmos $(b_i a_i C_{1,i}^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1})(\prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j})$.

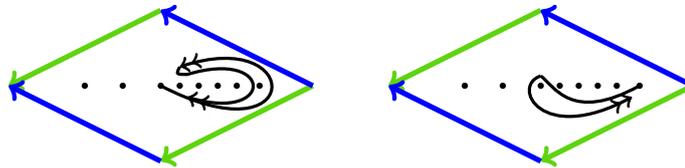


Figura 1.30: Relação (5) de superfície

Concluimos assim, que em $P_{n+1}(\mathbb{T})$ é válido $(b_i a_i C_{1,i}^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1})(\prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j}) = C_{i+1,n+1}^{-1} C_{i,n+1}$, ou seja, $\prod_{j=i+1}^{n+1} C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} = a_i b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1}$, que é exatamente a relação (5) do Teorema 1.3.1 para $P_{n+1}(\mathbb{T})$.

Tipo III: Agora faltam os conjugados de a_{n+1}, b_{n+1} e $C_{i,n+1}$, $i = 1, \dots, n$, mas eles

correspondem as mesmas figuras acima, só irá mudar que estaremos fazendo os conjugados de $a_{n+1}, b_{n+1}, C_{i,n+1}$, teremos que as relações serão da mesma forma.

Assim, terminamos a demonstração para o caso $M = \mathbb{T}$.

Agora provemos o teorema para $M = \mathbb{K}$. O raciocínio é o mesmo, mas teremos mudanças nas relações quando a homotopia passar pela parede que inverte a orientação na garrafa de Klein. Pelo fato de $P_1(\mathbb{K})$ ser não isomorfo a $P_1(\mathbb{T})$ a relação de superfície também irá se alterar.

Primeiro, consideramos o caso $n = 1$, para calcular a apresentação de $P_2(\mathbb{K})$. Utilizamos a apresentação $P_1(\mathbb{K}) = \langle a_1, b_1, : b_1^{-1}a_1b_1a_1 = 1 \rangle$, o grupo $\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\})$ é livre de posto dois, com geradores a_2, b_2 , porém usaremos a apresentação:

$$\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\}) = \langle a_2, b_2, C_{1,2} : C_{1,2} = b_2^{-1}a_2b_2a_2 \rangle.$$

Podemos verificar essa relação na Figura 1.31.

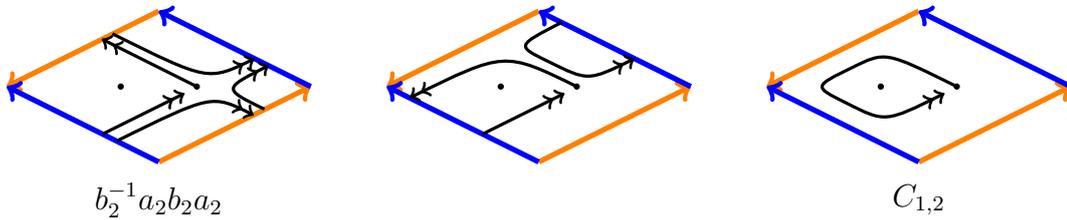


Figura 1.31: $C_{1,2} = b_2^{-1}a_2b_2a_2$

Assim, $P_2(\mathbb{K})$ é gerado por a_1, b_1 (vistos no grupo de tranças de 2 cordas) e por $a_2, b_2, C_{1,2}$ (vistos pela inclusão). Temos três tipos de relações:

Tipo I: Temos a relação vinda de $\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\})$, ou seja, $C_{1,2} = b_2^{-1}a_2b_2a_2$.

Tipo II: Agora temos que analisar a trança $a_1b_1a_1b_1^{-1}$ em $P_2(\mathbb{K})$ e escrevê-la em termos dos geradores $a_2, b_2, C_{1,2}$, ou seja, uma trança que mantém a primeira corda trivial e mexe apenas a segunda corda. Podemos verificar na Figura 1.32.

Tipo III: Agora temos que analisar os conjugados de a_2, b_2 e $C_{1,2}$ por a_1, b_1 . Os conjugados por a_1 vão ser idênticos ao do caso do toro, pois as deformações são feitas pela parede “azul”, que é a que mantém a orientação, por isso as 4 primeiras relações desses

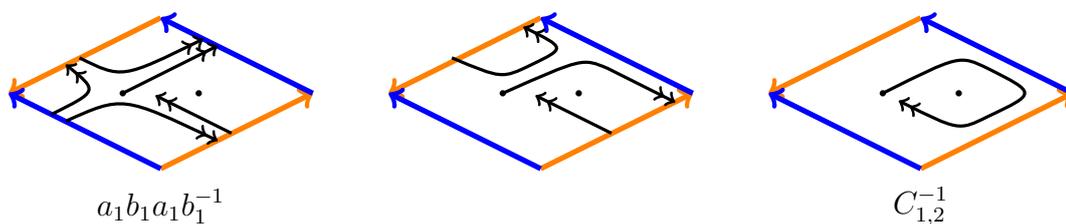


Figura 1.32: $C_{1,2}^{-1} = a_1 b_1 a_1 b_1^{-1}$

grupos são idênticas. A diferença entre o caso do toro e da garrafa de Klein é quando passamos pela a outra parede, pois invertemos a orientação dessa parede. As relações obtidas ao conjugar por b_1 podem ser vistas nas Figuras 1.33, 1.34 e 1.35 a seguir:

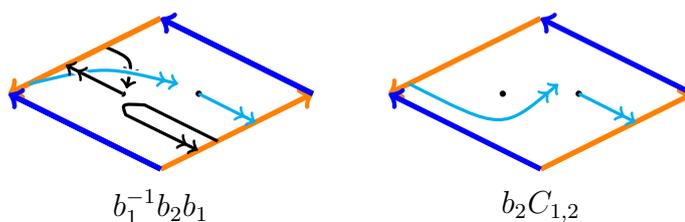


Figura 1.33: Relação 6: $b_1^{-1} b_2 b_1 = b_2 C_{1,2}$

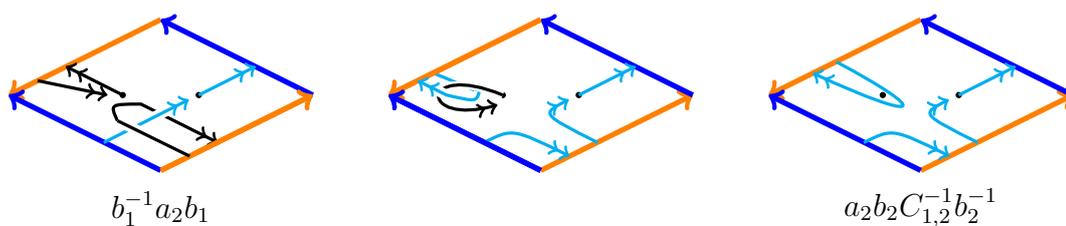


Figura 1.34: Relação 7: $b_1^{-1} a_2 b_1 = a_2 b_2 C_{1,2}^{-1} b_2^{-1}$

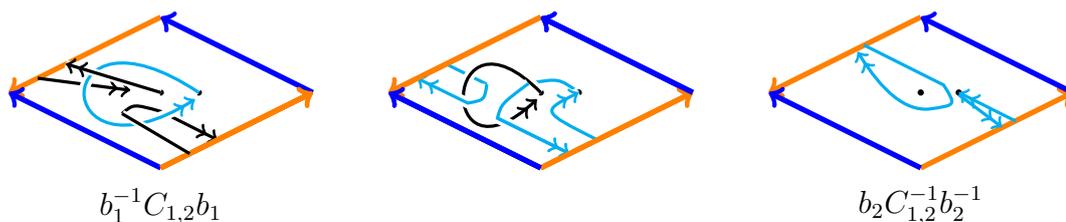


Figura 1.35: Relação 8: $b_1^{-1} C_{1,2} b_1 = b_2 C_{1,2}^{-1} b_2^{-1}$

Agora prosseguimos por indução, considerando que a apresentação de $P_n(\mathbb{K})$ é dada pelo Teorema 1.3.1, a apresentação de $\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ (grupo livre de posto $n + 1$) é dada por:

$$\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) = \langle a_{n+1}, b_{n+1}, C_{i,n+1}, 1 \leq i \leq n : C_{1,n+1} = b_{n+1}^{-1} a_{n+1} b_{n+1} a_{n+1} \rangle,$$

como podemos visualizar na Figura 1.36.

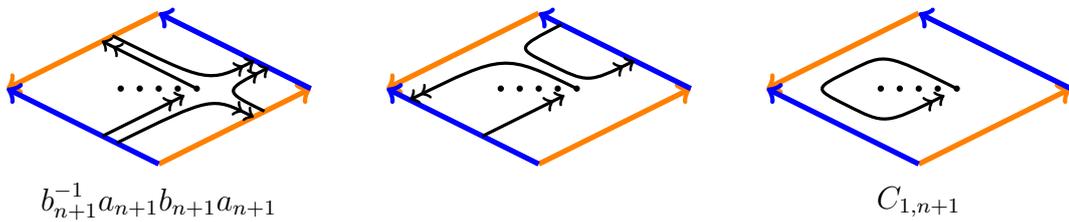


Figura 1.36: $C_{1,n+1} = b_{n+1}^{-1} a_{n+1} b_{n+1} a_{n+1}$

Assim conseguimos a apresentação de $P_{n+1}(\mathbb{K})$, com geradores $a_i, b_i, i = 1, \dots, n + 1, C_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n + 1$, e os três tipos de relações abaixo:

Tipo I: A relação vinda do grupo $\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$, ou seja, $C_{1,n+1} = b_{n+1}^{-1} a_{n+1} b_{n+1} a_{n+1}$.

Tipo II: Verificar como ficam as relações de $P_n(\mathbb{K})$ ao adicionarmos a corda $n + 1$.

Como no caso do toro, a maioria irá se manter, como podemos verificar nas Figuras 1.37, 1.38, 1.39, 1.40 e 1.41. Faremos apenas as figuras que incluem mudanças pela parede “laranja”, pois os outros casos são iguais ao caso do toro. A única relação que será modificada pela adição de corda $n + 1$ é a relação de superfície.

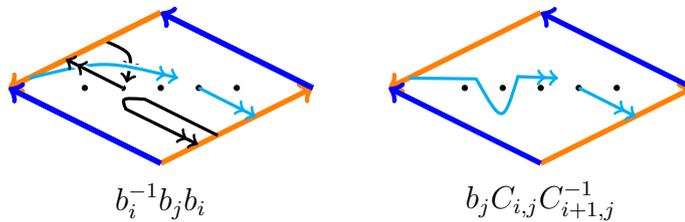


Figura 1.37: Relação 6: $b_i^{-1} b_j b_i = b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}$

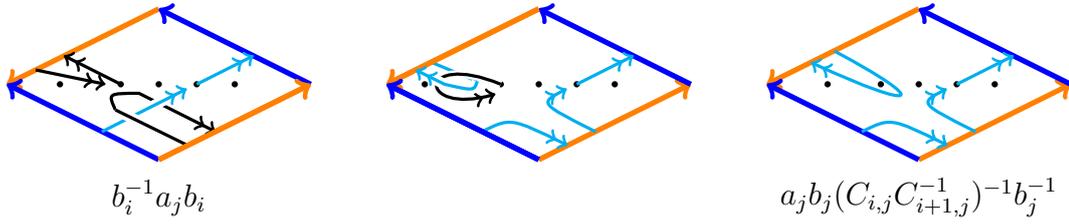


Figura 1.38: Relação 7: $b_i^{-1} a_j b_i = a_j b_j (C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1})^{-1} b_j^{-1}$

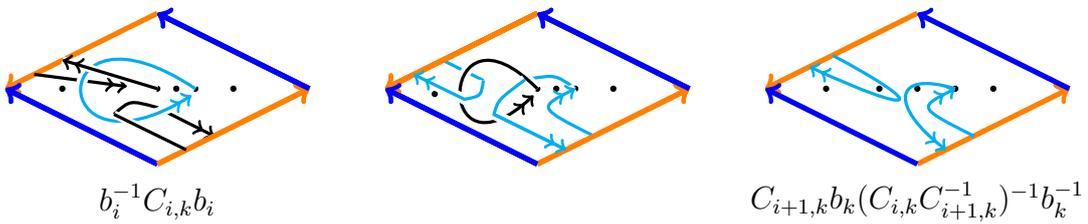


Figura 1.39: Relação 8: se $i = j$; $b_i^{-1} C_{i,k} b_i = C_{i+1,k} b_k (C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1})^{-1} b_k^{-1}$

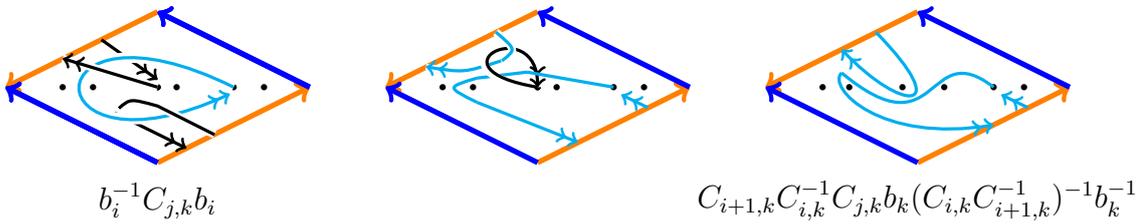


Figura 1.40: Relação 8: se $j < i$; $b_i^{-1} C_{j,k} b_i = C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k (C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1})^{-1} b_k^{-1}$

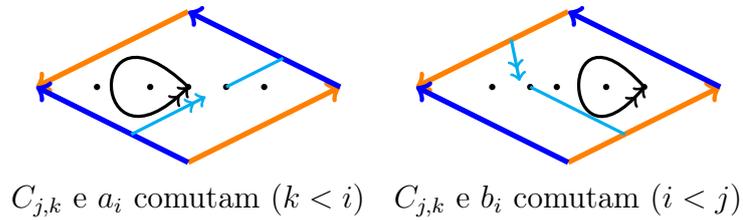


Figura 1.41: Elementos que comutam

Agora vamos verificar o que acontece com as relações (5) de superfície,

$$\prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} = b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1}.$$

Vamos primeiro desenhar a trança $\prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}$, que pode ser vista como uma trança do plano, na Figura 1.42.

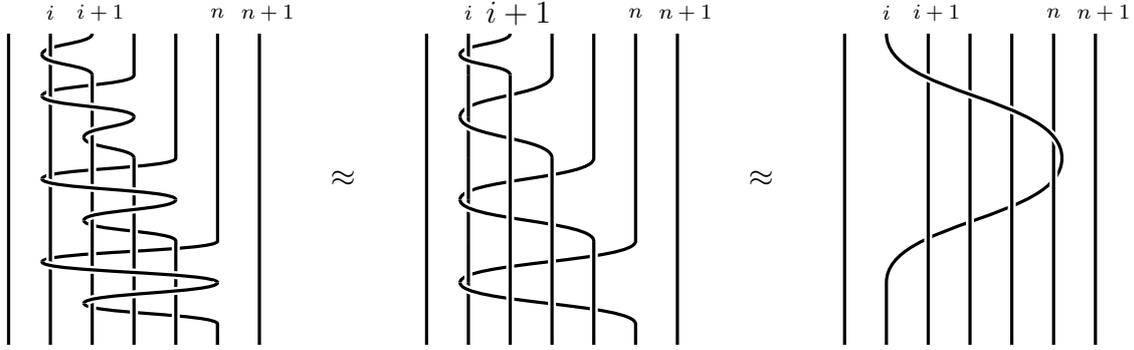


Figura 1.42: $\prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}$

Agora, desenhamos o inverso da trança $b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1}$, ou seja $a_i b_i a_i C_{1,i}^{-1} b_i^{-1}$, (Figura 1.43) pois queremos escrever a trança $(a_i b_i a_i C_{1,i}^{-1} b_i^{-1})(\prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1})$, em termos dos geradores que mexem apenas a última corda.

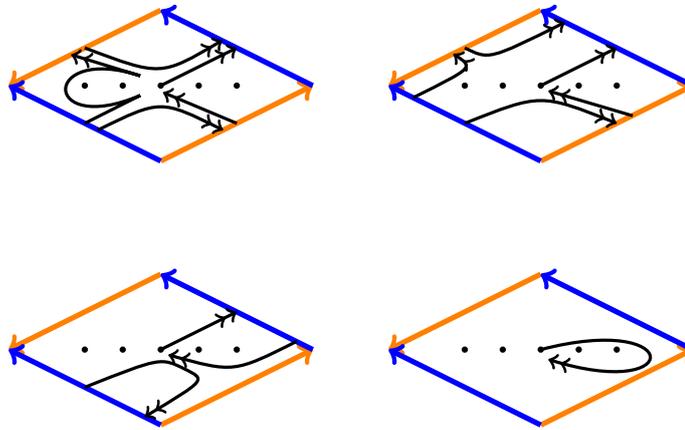


Figura 1.43: $a_i b_i a_i C_{1,i}^{-1} b_i^{-1}$

Note que, se não fosse pela adição do ponto $n + 1$, essas tranças seriam uma o inverso da outra, mas com o ponto $n + 1$ a mais obtemos a Figura 1.44, ao calcularmos $(a_i b_i a_i C_{1,i}^{-1} b_i^{-1})(\prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1})$:

Concluimos assim, que em $P_{n+1}(\mathbb{K})$ é válido $(a_i b_i a_i C_{1,i}^{-1} b_i^{-1})(\prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}) = C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1}$, ou seja, $\prod_{j=i+1}^{n+1} C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} = b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1}$, que é exatamente a relação

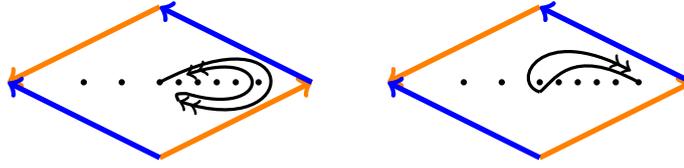


Figura 1.44: Relação (5) de superfície

(5) do Teorema 1.3.1 para $P_{n+1}(\mathbb{K})$.

Tipo III: Agora faltam os conjugados de a_{n+1}, b_{n+1} e $C_{i,n+1}, i = 1, \dots, n$, mas eles correspondem exatamente às mesmas figuras acima, só irá mudar que estaremos fazendo os conjugados de $a_{n+1}, b_{n+1}, C_{i,n+1}$, e teremos que as relações serão da mesma forma.

Completando assim a demonstração do Teorema 1.3.1. ■

1.4. Apresentações dos grupos de tranças do toro e da garrafa de Klein

Obtida a apresentação dos grupos de tranças puras do toro e da garrafa de Klein, podemos agora obter apresentações para o grupo de tranças (total), para isto vamos utilizar a sequência exata curta (1.1).

O resultado obtido é o seguinte:

Teorema 1.4.1. *Seja M o toro \mathbb{T} ou a garrafa de Klein \mathbb{K} . O n -ésimo grupo de tranças, $B_n(M)$, admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $a, b, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$;

Relações:

1. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$;
2. $\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_j$, se $|i - j| \geq 2$;
3. $a \sigma_j = \sigma_j a$, se $j \geq 2$;
4. $b \sigma_j = \sigma_j b$, se $j \geq 2$;

$$5. b^{-1}\sigma_1 a = \sigma_1 a \sigma_1 b^{-1} \sigma_1$$

$$6. a(\sigma_1 a \sigma_1) = (\sigma_1 a \sigma_1) a;$$

$$7. \begin{cases} b(\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1}) = (\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1}) b, & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b(\sigma_1^{-1} b \sigma_1) = (\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1}) b, & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$$

$$8. \text{Relação de superfície: } \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2 \sigma_1 = \begin{cases} bab^{-1}a^{-1} & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ ba^{-1}b^{-1}a^{-1} & \text{se } M = \mathbb{K}. \end{cases}$$

Demonstração:

Lembre-se que o grupo das permutações S_n , tem apresentação dada por ([41], p. 61):

$$S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} : (s_i)^2 = 1, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, s_i s_j = s_j s_i (|i - j| \geq 2) \rangle.$$

Para demonstrar o teorema utilizaremos novamente o método da Proposição 1.2.1.

Temos que todos os geradores de $P_n(M)$ estão no conjunto de geradores de $B_n(M)$ e todas as relações de $P_n(M)$ são relações de $B_n(M)$, que são as relações do Tipo I.

Escolhemos os elementos $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ em $B_n(M)$ (geradores de Artin), tais que $\tau(\sigma_i) = s_i$ e assim com os geradores de $P_n(M)$ obtemos um conjunto de geradores para $B_n(M)$. Ao verificarmos as relações do Tipo II em $B_n(M)$, vamos obter as relações de Artin (1) e (2) e ainda a relação $\sigma_i^2 = C_{i,i+1}$.

Note que os elementos $C_{j,k}$ podem ser vistos como tranças do plano, por isso podemos escrevê-los em termo dos geradores de Artin do seguinte modo:

$$C_{j,k} = \sigma_{k-1} \cdots \sigma_j^2 \cdots \sigma_{k-1}. \quad (1.4)$$

$$C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} = \sigma_{k-1}^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{k-1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{k-1}^2 \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1}. \quad (1.5)$$

$$C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1} = \sigma_{k-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{k-1}^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{k-1}^2 \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i. \quad (1.6)$$

Portanto, tais elementos podem ser removidos do conjunto de geradores de $B_n(M)$.

Agora, só falta calcularmos as relações do Tipo III, ou seja, os conjugados de a_j, b_j pelos σ_i 's. Em ambos os casos ($M = \mathbb{T}$ ou $M = \mathbb{K}$) temos o seguinte:

$$\bullet \sigma_i^{-1} a_j \sigma_i = \begin{cases} \sigma_i^{-2} a_{i+1}, & j = i \\ a_i \sigma_i^2, & j = i + 1 \\ a_j, & \text{outros casos;} \end{cases}$$

$$\bullet \sigma_i^{-1} b_j \sigma_i = \begin{cases} b_{i+1} \sigma_i^2, & j = i \\ \sigma_i^{-2} b_i, & j = i + 1 \\ b_j, & \text{outros casos.} \end{cases}$$

Tais relações podem ser vistas nas Figuras 1.45, 1.46, as relações foram desenhadas no toro, mas são idênticas na garrafa de Klein.

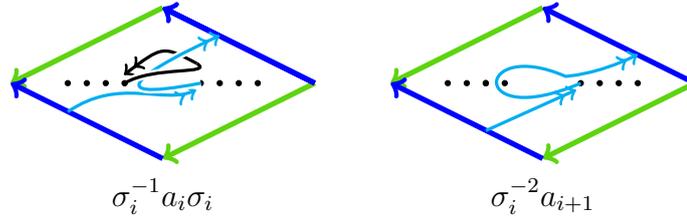


Figura 1.45: $\sigma_i^{-1} a_i \sigma_i = \sigma_i^{-2} a_{i+1}$

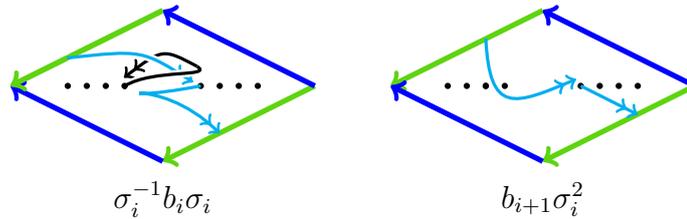


Figura 1.46: $\sigma_i^{-1} b_i \sigma_i = b_{i+1} \sigma_i^2$

Com as relações acima vemos que podemos retirar todos $a_j, b_j, j = 2, \dots, n$ do conjunto de geradores, pois:

$$\begin{aligned} a_j &= (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) a_1 (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}); \\ b_j &= (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b_1 (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Portanto, reduzimos o conjunto de geradores de $B_n(M)$ para $a_1, b_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, e denotaremos $a_1 = a$ e $b_1 = b$.

Para completar a demonstração do teorema, precisamos verificar que as relações descritas no Teorema 1.4.1 são válidas em $B_n(M)$ e que todas as relações de $P_n(M)$ são consequência das mesmas.

Para as contas a seguir utilizaremos o símbolo $\underbrace{\quad}_()$ para realçar onde estamos usando uma relação do grupo $B_n(M)$, no parênteses escrevemos o número da relação usada e na linha seguinte colocamos o elemento correspondente em parênteses.

Mostremos primeiro que as relações são válidas.

Temos que as relações (1) e (2), são válidas, pois são relações do Tipo II. As relações (3) e (4) são válidas, pois são relações do Tipo III.

Podemos verificar que a relação (6) é válida, pois $a_1a_2 = a_2a_1$ em $P_n(M)$ (relação (2) do Teorema 1.3.1), conseqüentemente, $a(\sigma_1a\sigma_1) = (\sigma_1a\sigma_1)a$ em $B_n(M)$.

Para provar a relação (5), usaremos que $a_1^{-1}b_2a_1 = b_2a_2C_{1,2}^{-1}a_2^{-1}$ em $P_n(M)$ e também a relação (6) acima, do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
a_1^{-1}b_2a_1 &= b_2a_2C_{1,2}^{-1}a_2^{-1} \\
\Rightarrow a^{-1}(\sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1})a &= \sigma_1^{-1}ba\sigma_1^{-2}a^{-1}\sigma_1^{-1} \\
\Rightarrow a^{-1}\sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1} &= \sigma_1^{-1}ba\sigma_1^{-1}\underbrace{\sigma_1^{-1}a^{-1}\sigma_1^{-1}a^{-1}}_{(6)} \\
&= \sigma_1^{-1}ba\underbrace{\sigma_1^{-1}(a^{-1}\sigma_1^{-1}a^{-1}\sigma_1^{-1})}_{(6)} \\
&= \sigma_1^{-1}ba(a^{-1}\sigma_1^{-1}a^{-1}\sigma_1^{-1})\sigma_1^{-1} \\
\Rightarrow a^{-1}\sigma_1^{-1}b &= \sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1}a^{-1}\sigma_1^{-1} \\
\Rightarrow b^{-1}\sigma_1a &= \sigma_1a\sigma_1b^{-1}\sigma_1
\end{aligned}$$

Obtendo assim a relação (5).

Para provar a relação (7), usaremos a relação $b_1b_2 = b_2b_1$ em $P_n(\mathbb{T})$, (resp. $b_1b_2C_{1,2} = b_2b_1$ em $P_n(\mathbb{K})$), obtemos assim $b(\sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1}) = (\sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1})b$ em $B_n(\mathbb{T})$ (resp. $b(\sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1})\sigma_1^2 = (\sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1})b$ em $B_n(\mathbb{K})$).

Para provar a relação (8) de superfície, considere a relação (5) do Teorema 1.3.1 para $i = n$, e reescrevendo os geradores utilizando (1.4) e (1.7) obtemos a relação (8).

Agora, reescreveremos as relações de $P_n(M)$, em função dos geradores $a, b, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, para verificar que as relações necessárias são apenas as descritas no Teorema 1.4.1.

Para isso, vamos utilizar a seguinte proposição:

Proposição 1.4.2. *As seguintes relações são válidas em $B_n(M)$;*

$$9. \sigma_i(\sigma_1 \cdots \sigma_k) = (\sigma_1 \cdots \sigma_k)\sigma_{i-1} \text{ se } 1 < i \leq k;$$

$$10. \sigma_i(\sigma_k \cdots \sigma_1) = (\sigma_k \cdots \sigma_1)\sigma_{i+1} \text{ se } 1 \leq i < k;$$

$$11. \sigma_k \sigma_{k-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{k-1}^{-1} \sigma_k^{-1} = \sigma_i^{-1} \cdots \sigma_{k-1}^{-1} \sigma_k^2 \sigma_{k-1} \cdots \sigma_i \text{ se } 1 \leq i < k;$$

$$12. a^{-1} \sigma_1^2 a = \sigma_1 a \sigma_1^2 a^{-1} \sigma_1^{-1};$$

$$13. \begin{cases} b^{-1} \sigma_1^2 b = \sigma_1^{-1} b \sigma_1^2 b^{-1} \sigma_1, & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b^{-1} \sigma_1^2 b = \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-2} b^{-1} \sigma_1, & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$$

$$14. a^{-1}(\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1}) a = \sigma_1^{-1} b a \sigma_1^{-2} a^{-1} \sigma_1^{-1};$$

$$15. \begin{cases} b^{-1}(\sigma_1 a \sigma_1) b = \sigma_1 a b \sigma_1^2 b^{-1} \sigma_1, & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b^{-1}(\sigma_1 a \sigma_1) b = \sigma_1 a b \sigma_1^{-2} b^{-1} \sigma_1, & \text{se } M = \mathbb{K}. \end{cases}$$

Demonstração:

Temos que provar usando apenas as relações de $B_n(M)$ dadas pelo Teorema 1.4.1. Para isso, basta utilizar as relações de Artin para as relações (9), (10) e (11). Para a relação (12) (resp. relação (13)) usaremos a relação (6) (resp. relação (7)) de $B_n(M)$, note que $a^{-1} \sigma_1 a = \sigma_1 a \sigma_1 a^{-1} \sigma_1^{-1}$ (resp. $b^{-1} \sigma_1 b = \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{\pm 1} b^{-1} \sigma_1$) e elevando ambos os lados ao quadrado obtemos o resultado. Agora para as relações (14) e (15) temos, usando a relação (4) de $B_n(M)$:

Relação (14):

$$\begin{aligned} a^{-1} \sigma_1^{-1} b &= \sigma_1^{-1} b \underbrace{\sigma_1^{-1} a^{-1} \sigma_1^{-1}}_{(6)} \\ &= \sigma_1^{-1} b (a \sigma_1^{-1} \underbrace{a^{-1} \sigma_1^{-1} a^{-1}}_{(6)}) \\ &= \sigma_1^{-1} b a \sigma_1^{-1} (\sigma_1^{-1} a^{-1} \sigma_1^{-1} a^{-1} \sigma_1) \end{aligned}$$

Relação (15):

$$\begin{aligned} b^{-1} \sigma_1 a &= \sigma_1 a \underbrace{\sigma_1 b^{-1} \sigma_1}_{(7)} \\ &= \sigma_1 a (b \sigma_1^{\pm 1} \underbrace{b^{-1} \sigma_1 b^{-1}}_{(7)}) \\ &= \sigma_1 a b \sigma_1^{\pm 1} (\sigma_1^{\pm 1} b^{-1} \sigma_1 b^{-1} \sigma_1^{-1}) \end{aligned}$$

e obtemos o resultado desejado. ■

Verifiquemos agora as relações de $P_n(M)$, vamos utilizar as relações do Teorema 1.4.1 e da Proposição 1.4.2 (no lado direito da expressão indicaremos o número da relação que foi utilizada).

1. $a_j a_i = a_i a_j$, $1 \leq i < j \leq n$;

$$\begin{aligned}
& a_j a_i \\
&= (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) && \text{por (1.7)} \\
&= (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_i \cdots \sigma_2) (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) && \text{por (9)} \\
&= (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_i \cdots \sigma_2) a \sigma_1 a (\sigma_2 \cdots \sigma_{j-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) && \text{por (3)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) \underbrace{a \sigma_1 a}_{\overline{a \sigma_1 a}} (\sigma_2 \cdots \sigma_{j-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) && \text{por (10)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_2) \overline{a \sigma_1 a \sigma_1} (\sigma_2 \cdots \sigma_{j-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) && \text{por (6)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_2) \sigma_1 a (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) && \text{por (3)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_2 \cdots \sigma_i) (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) && \text{por (9)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_2 \cdots \sigma_i) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) && \text{por (3)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) && \text{por (10)} \\
&= a_i a_j && \text{por (1.7)}
\end{aligned}$$

2. $a_i^{-1} b_j a_i = b_j a_j C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} a_j^{-1}$, $1 \leq i < j \leq n$;

$$\begin{aligned}
& a_i^{-1} b_j a_i \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a^{-1} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) && \text{por (1.7)} \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a^{-1} (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}) b (\sigma_i \cdots \sigma_2) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) && \text{por (9) e (10)} \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a^{-1} (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) && \text{por (4)} \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \underbrace{a^{-1} \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1} a}_{\overline{a^{-1} \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1} a}} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) && \text{por (3)} \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \overline{\sigma_1^{-1} b a \sigma_1^{-2} a^{-1} \sigma_1^{-1}} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) && \text{por (14)} \\
&= (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) b a \sigma_1^{-2} a^{-1} (\sigma_2 \cdots \sigma_i) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) && \text{por (9) e (10)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b a (\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-2} \sigma_2 \cdots \sigma_i) a^{-1} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) \quad \text{por (3) e (4)} \\
&= b_j a_j (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1} \sigma_i^{-2} \sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) a_j^{-1} \text{ por (1.7) e (11)} \\
&= b_j a_j (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-2} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-1}) a_j^{-1} \\
&= b_j a_j C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} a_j^{-1} \quad \text{por (1.4)}
\end{aligned}$$

$$3. a_i^{-1} C_{j,k} a_i = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ a_k C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} a_k^{-1} C_{j,k} C_{i,k}^{-1} C_{i+1,k}, & (1 \leq j \leq i < k \leq n); \end{cases}$$

O caso $1 \leq i < j < k \leq n$ é consequência do fato que a comuta com $\sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ (relação (3)) e da relação (2) do Teorema 1.4.1.

Para $1 \leq j < k < i \leq n$, temos

$$\begin{aligned}
&a_i^{-1} C_{j,k} a_i \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a^{-1} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1} \sigma_j^2 \sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\
&\quad \text{por (1.4) e (1.7)} \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a^{-1} (\sigma_k \cdots \sigma_{j+2} \sigma_{j+1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_{j+1} \sigma_{j+2} \cdots \sigma_k) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\
&\quad \text{por (9) e (10)} \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_k \cdots \sigma_{j+2} \sigma_{j+1}) a^{-1} a (\sigma_{j+1} \sigma_{j+2} \cdots \sigma_k) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \quad \text{por (3)} \\
&= (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1} \sigma_j) (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) (\sigma_j \sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) \quad \text{por (9) e (10)} \\
&= C_{j,k}. \quad \text{por (1.4)}
\end{aligned}$$

Para $1 \leq j \leq i < k \leq n$, temos dois casos a considerar:

(a) $j = i$, como $C_{i+1,k}$ comuta com a_i a relação é equivalente à

$$a_i^{-1} C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1} a_i = a_k C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} a_k^{-1};$$

logo:

$$\begin{aligned}
& a_i^{-1} C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1} a_i \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a^{-1} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) (\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{k-2}^{-1} \sigma_{k-1}^2 \sigma_{k-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i) (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (1.6) e (1.7)} \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a^{-1} (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{k-1}^{-1}) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (9) e (10)} \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_2) \underbrace{a^{-1} \sigma_1^2 a (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{k-1}^{-1})}_{\text{por (3)}} (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_2) \underbrace{\sigma_1 a \sigma_1^2 a^{-1} \sigma_1^{-1}}_{\text{por (12)}} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{k-1}^{-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (12)} \\
&= (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1) (\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) a \sigma_1^2 a^{-1} (\sigma_2 \cdots \sigma_i) (\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{k-1}^{-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (9) e (10)} \\
&= (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1) a (\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \sigma_1^2 (\sigma_2 \cdots \sigma_i) a^{-1} (\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{k-1}^{-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (3)} \\
&= a_k C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} a_k^{-1}. \\
&\hspace{25em} \text{por (1.5) e (1.7)}
\end{aligned}$$

(b) $j < i$;

$$\begin{aligned}
& a_i^{-1} C_{j,k} a_i \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a^{-1} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1} \sigma_j^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_j^2 \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_j \sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (1.4) e (1.7)} \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a^{-1} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_j^2 \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (9) e (10)} \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a^{-1} (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) \sigma_j^2 (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (2)} \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a^{-1} (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1}) (\sigma_j \cdots \sigma_1^2 \cdots \sigma_j^{-1}) (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (3)} \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1}) (\sigma_j \cdots \sigma_2) \underbrace{a^{-1} \sigma_1^2 a (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_j^{-1})}_{\text{por (12)}} (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (12)} \\
&= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1}) (\sigma_j \cdots \sigma_2) \underbrace{\sigma_1 a \sigma_1^2 a^{-1} \sigma_1^{-1}}_{\text{por (9) e (10)}} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_j^{-1}) (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (9) e (10)} \\
&= (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \sigma_1^2 a^{-1} (\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_j^{-1}) (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_j \cdots \sigma_{i-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (3)} \\
&= (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \sigma_1^2 a^{-1} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_j^{-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) \underbrace{(\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_j \sigma_{j+1} \cdots \sigma_{i-1})}_{\text{por (2)}} \\
&\hspace{25em} \text{por (2)} \\
&= (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \sigma_1^2 (\sigma_2 \cdots \sigma_j) a^{-1} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_j^{-1}) \overbrace{(\sigma_j \cdots \sigma_i) (\sigma_j \cdots \sigma_{i-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{k-1})}^{(*)} \\
&= (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \sigma_1^2 (\sigma_2 \cdots \sigma_j) (\sigma_{j+1} \sigma_{j+2} \cdots \sigma_i) a^{-1} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (\sigma_j \cdots \sigma_{i-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{k-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (2) e (3)} \\
&= a_k C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} a_k^{-1} (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_j) (\sigma_j \cdots \sigma_{i-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{k-1}) \\
&\hspace{25em} \text{por (1.5) e (1.7)} \\
&= a_k C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} a_k^{-1} C_{j,k} C_{i,k}^{-1} C_{i+1,k}. \\
&\hspace{25em} \text{por (1.4)}
\end{aligned}$$

Para verificar a relação (*), note que

$$\begin{aligned}
& (\sigma_{j+1} \underbrace{\sigma_{j+2} \cdots \sigma_{k-1}}_{(2)} (\sigma_j \sigma_{j+1} \cdots \sigma_{i-1})) = \underbrace{\sigma_{j+1} \sigma_j}_{(1)} (\sigma_{j+2} \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{i-1}) \\
& = (\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1}) (\sigma_{j+2} \underbrace{\sigma_{j+3} \cdots \sigma_{k-1}}_{(2)} (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{i-1})) \\
& = \sigma_j \sigma_{j+1} (\sigma_j \underbrace{\sigma_{j+1}^{-1} \sigma_{j+2} \sigma_{j+1}}_{(1)} (\sigma_{j+3} \cdots \sigma_{k-1})) (\sigma_{j+2} \cdots \sigma_{i-1}) \\
& = \sigma_j \sigma_{j+1} (\underbrace{\sigma_j \sigma_{j+2} \sigma_{j+1} \sigma_{j+2}^{-1}}_{(2)} (\sigma_{j+3} \cdots \sigma_{k-1})) (\sigma_{j+2} \cdots \sigma_{i-1}) \\
& = (\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_{j+2}) (\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_{j+2}^{-1}) (\sigma_{j+3} \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_{j+2} \cdots \sigma_{i-1}) \\
& = (\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_{j+2} \sigma_{j+3}) (\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_{j+2} \sigma_{j+3}^{-1} \sigma_{j+4} \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_{j+3} \cdots \sigma_{i-1}) \\
& \vdots \\
& = \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_{j+2} \cdots \sigma_i (\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_{j+2} \cdots \sigma_{i-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{k-1}).
\end{aligned}$$

$$4. C_{i,l}^{-1} C_{j,k} C_{i,l} = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < l < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j \leq i < l < k \leq n), \\ C_{i,k} C_{l+1,k}^{-1} C_{l,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} C_{l,k}^{-1} C_{l+1,k}, & (1 \leq i \leq j \leq l < k \leq n); \end{cases}$$

Como essas tranças são tranças do plano, essas relações são conseqüências das relações de Artin.

$$5. \begin{cases} \prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} = a_i b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1}, & (1 \leq i \leq n), \text{ se } M = \mathbb{T}, \\ \prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} = b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1}, & (1 \leq i \leq n), \text{ se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$$

No caso $M = \mathbb{T}$, temos que (Figura 1.28);

$$\prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} = \sigma_i^{-1} \cdots \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^{-2} \sigma_{n-2}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} & = \sigma_i^{-1} \cdots \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^{-2} \sigma_{n-2}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1} \\
& = (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) a b a^{-1} b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) && \text{por (8)} \\
& = (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) a b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{i-1}) (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a^{-1} b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\
& = a_i b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} && \text{por (1.4) e (1.7).}
\end{aligned}$$

No caso $M = \mathbb{K}$, temos que (Figura 1.42);

$$\prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} = \sigma_i \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_i.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} &= \sigma_i \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_i \\ &= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b a^{-1} b^{-1} a^{-1} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) && \text{por (8)} \\ &= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{i-1}) (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a^{-1} b^{-1} a^{-1} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\ &= b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1} && \text{por (1.4) e (1.7).} \end{aligned}$$

$$6. \begin{cases} b_j b_i = b_i b_j, & (1 \leq i < j \leq n), \text{ se } M = \mathbb{T}, \\ b_j b_i = b_i b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}, & (1 \leq i < j \leq n), \text{ se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &b_i^{-1} b_j b_i \\ &= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\ & && \text{por (1.7)} \\ &= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) b^{-1} (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) && \text{por (9) e (10)} \\ &= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \underbrace{b^{-1} \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1} b}_{\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{\mp 1} b} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) && \text{por (4)} \\ &= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \overbrace{\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{\mp 1} b}^{\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{\mp 1} b} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) && \text{por (7)} \\ &= \begin{cases} (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_i \cdots \sigma_2) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}), & M = \mathbb{T} \\ (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_i \cdots \sigma_2) b \sigma_1^2 (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}), & M = \mathbb{K} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_i \cdots \sigma_2) (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}), & M = \mathbb{T} \\ (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_i \cdots \sigma_2) \sigma_1^2 (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}), & M = \mathbb{K} \end{cases} && \text{por (4)} \\ &= \begin{cases} (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}), & M = \mathbb{T} \\ (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1} \sigma_i^2 \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}), & M = \mathbb{K} \end{cases} && \text{por (11)} \\ &= \begin{cases} b_j, & M = \mathbb{T} \\ b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}, & M = \mathbb{K} \end{cases} && \text{por (1.6) e (1.7).} \end{aligned}$$

Na conta acima, $\sigma_1^{\mp 1}$ denota σ_1^{-1} no caso que $M = \mathbb{T}$ e σ_1 no caso que $M = \mathbb{K}$.

$$7. \begin{cases} b_i^{-1} a_j b_i = a_j b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} b_j^{-1}, & (1 \leq i < j \leq n), \text{ se } M = \mathbb{T}, \\ b_i^{-1} a_j b_i = a_j b_j (C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1})^{-1} b_j^{-1}, & (1 \leq i < j \leq n), \text{ se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& b_i^{-1} a_j b_i \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \text{ por (1.7)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) b^{-1} (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) a (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \text{ por (9) e (10)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_2) \underbrace{b^{-1} \sigma_1 a \sigma_1 b}_{\sigma_1 a b \sigma_1^{\pm 2} b^{-1}} (\sigma_2 \cdots \sigma_{j-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \text{ por (4)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_2) \overbrace{\sigma_1 a b \sigma_1^{\pm 2} b^{-1} \sigma_1}^{\sigma_1 a b \sigma_1^{\pm 2} b^{-1} \sigma_1} (\sigma_2 \cdots \sigma_{j-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \text{ por (15)} \\
&= (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_i \cdots \sigma_2) a b \sigma_1^{\pm 2} b^{-1} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) \text{ por (9) e (10)} \\
&= (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) a b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1} \sigma_i^{\pm 2} \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) \text{ por (3) e (4)} \\
&= \begin{cases} a_j b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} b_j^{-1}, & M = \mathbb{T} \\ a_j b_j (C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1})^{-1} b_j^{-1}, & M = \mathbb{K} \end{cases} \text{ por (1.5), (1.6) e (1.7).}
\end{aligned}$$

$$8. \begin{cases} b_i^{-1} C_{j,k} b_i = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1} b_k^{-1}, & (1 \leq j \leq i < k \leq n); \end{cases} & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b_i^{-1} C_{j,k} b_i = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k (C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1})^{-1} b_k^{-1}, & (1 \leq j \leq i < k \leq n); \end{cases} & \text{se } M = \mathbb{K}. \end{cases}$$

O caso $1 \leq i < j < k \leq n$ é consequência do fato que b comuta com $\sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ (relação (4)) e da relação (2) do Teorema 1.4.1.

Para $1 \leq j < k < i \leq n$, temos

$$\begin{aligned}
& b_i^{-1} C_{j,k} b_i \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1} \sigma_j^2 \sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\
& \hspace{20em} \text{por (1.4) e (1.7)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1)^{-1} (\sigma_k \cdots \sigma_{j+2} \sigma_{j+1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_{j+1} \sigma_{j+2} \cdots \sigma_k) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\
& \hspace{20em} \text{por (9) e (10)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_k \cdots \sigma_{j+2} \sigma_{j+1}) b^{-1} b (\sigma_{j+1} \sigma_{j+2} \cdots \sigma_k) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \text{ por (4)} \\
&= (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1} \sigma_j) (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) (\sigma_j \sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) \text{ por (9) e (10)} \\
&= C_{j,k} \text{ por (1.4).}
\end{aligned}$$

Para $1 \leq j \leq i < k \leq n$, temos que separar em dois casos:

$$(a) \ j = i, \text{ a relação é equivalente à } b_i^{-1} C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} b_i = \begin{cases} b_k C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1} b_k^{-1}, & M = \mathbb{T} \\ b_k C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} b_k^{-1}, & M = \mathbb{K} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& b_i^{-1} C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} b_i \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) (\sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{k-2} \sigma_{k-1}^2 \sigma_{k-2} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1}) (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\
& \hspace{25em} \text{por (1.7) e (1.5)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) b^{-1} (\sigma_{k-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1} \sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{k-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\
& \hspace{25em} \text{por (9) e (10)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_{k-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \underbrace{b^{-1} \sigma_1^2 b}_{\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{\pm 2} b^{-1} \sigma_1} (\sigma_2 \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\
& \hspace{25em} \text{por (4)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_{k-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \underbrace{\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{\pm 2} b^{-1} \sigma_1}_{\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{\pm 2} b^{-1} \sigma_1} (\sigma_2 \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\
& \hspace{25em} \text{por (13)} \\
&= (\sigma_{k-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_i \cdots \sigma_2) b \sigma_1^{\pm 2} b^{-1} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}) \\
& \hspace{25em} \text{por (9) e (10)} \\
&= (\sigma_{k-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_i \cdots \sigma_2 \sigma_1^{\pm 2} \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}) b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}) \\
& \hspace{25em} \text{por (4)} \\
&= \begin{cases} b_k C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1} b_k^{-1}, M = \mathbb{T} \\ b_k (C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1})^{-1} b_k^{-1}, M = \mathbb{K} \end{cases} \hspace{5em} \text{por (1.5), (1.6) e (1.7).} \\
& \quad \text{(b) } j < i;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_i^{-1} C_{j,k} b_i \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_j \cdots \sigma_{i-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_j^2 \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_j^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\
& \hspace{25em} \text{por (1.4) e (1.7)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1} \sigma_j^2 \sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \hspace{2em} \text{por (9) e (10)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) b^{-1} (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}) \sigma_j^2 (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \hspace{2em} \text{por (2)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) b^{-1} (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1}) (\sigma_j^{-1} \cdots \sigma_2^{-1} \sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_j) (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) b (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \hspace{2em} \text{por (11)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1}) (\sigma_j^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \underbrace{b^{-1} \sigma_1^2 b}_{\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{\pm 2} b^{-1} \sigma_1} (\sigma_2 \cdots \sigma_j) (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \hspace{2em} \text{por (4)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1}) (\sigma_j^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \underbrace{\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{\pm 2} b^{-1} \sigma_1}_{\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{\pm 2} b^{-1} \sigma_1} (\sigma_2 \cdots \sigma_j) (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \text{ por (13)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_j \sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1}) (\sigma_j^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{\pm 2} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}) b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}) \\
& \hspace{25em} \text{por (4), (9) e (10)} \\
&= \underbrace{(\sigma_{i-1} \cdots \sigma_j)}_{(**)} (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1}) (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) (\sigma_j^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b \sigma_1^{\pm 2} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}) b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}) \hspace{2em} \text{por (2)} \\
&= \underbrace{(\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i-1} \cdots \sigma_j)}_{(**)} (\sigma_i \cdots \sigma_j) (\sigma_j^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_j \cdots \sigma_2) \sigma_1^{\pm 2} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}) b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}) \\
&= (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i-1} \cdots \sigma_j) (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b (\sigma_i \cdots \sigma_{j+1}) (\sigma_j \cdots \sigma_2) \sigma_1^{\pm 2} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}) b^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}) \\
& \hspace{25em} \text{por (2) e (3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i-1} \cdots \sigma_j)(\sigma_j \cdots \sigma_{k-1}) b_k C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1} b_k^{-1}, M = \mathbb{T} \\ (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i-1} \cdots \sigma_j)(\sigma_j \cdots \sigma_{k-1}) b_k (C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1})^{-1} b_k^{-1}, M = \mathbb{K} \end{cases} \quad \text{por (1.5), (1.6) e (1.7)} \\
&= \begin{cases} C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1} b_k^{-1}, M = \mathbb{T} \\ C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k (C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1})^{-1} b_k^{-1}, M = \mathbb{K} \end{cases} \quad \text{por (1.4)}.
\end{aligned}$$

Podemos verificar a relação (**) de modo análogo a relação (*):

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{j+1} \underbrace{\sigma_j}_{(2)})(\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+2} \sigma_{j+1}) = (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{j+1})(\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+2}) \underbrace{\sigma_j \sigma_{j+1}}_{(1)} \\
&= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{j+1})(\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+2} \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j) \sigma_{j+1} \sigma_j \\
&\vdots \\
&= (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i-1} \cdots \sigma_j)(\sigma_i \cdots \sigma_j)
\end{aligned}$$

Nas contas acima, $\sigma_1^{\pm 2}$ denota σ_1^2 no caso que $M = \mathbb{T}$ e σ_1^{-2} no caso que $M = \mathbb{K}$.

Terminando a demonstração do Teorema 1.4.1. ■

1.5. Apresentações dos grupos de tranças de superfícies não orientáveis

Calculamos também uma nova apresentação para o grupo de tranças puras de uma superfície não orientável N_{g+1} de genus $g + 1$, $g \geq 2$. Visualizamos nossa superfície como um soma conexa de toros e um plano projetivo (para g par) e soma conexa de toros e uma garrafa de Klein (para g ímpar), como mostramos na Figura 1.47.

Como geradores, teremos as tranças $C_{i,j}$, ($1 \leq i < j \leq n$) (análogas ao caso do toro e da garrafa de Klein) e ainda os geradores $a_{i,r}$ e b_i , ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq r \leq g$), como na Figura 1.48.

Usamos o método da Proposição 1.2.1, obtivemos o seguinte resultado:

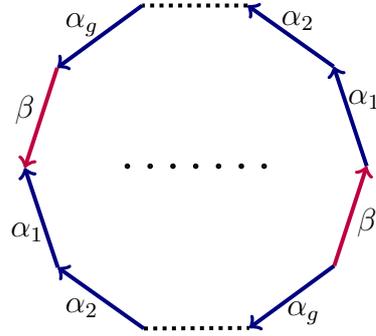


Figura 1.47: Superfície não orientável

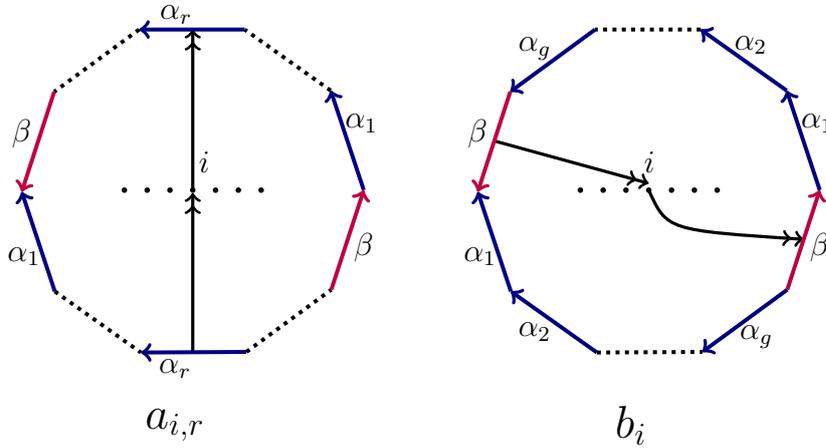


Figura 1.48: Geradores de $P_n(N_{g+1})$

Teorema 1.5.1. *Seja N_{g+1} uma superfície não orientável de genus $g + 1$, $g \geq 1$. O grupo $P_n(N_{g+1})$ admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $\{a_{i,r}, b_i : 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq g\} \cup \{C_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n\}$

Relações:

1. $a_{i,r}a_{j,r} = a_{j,r}a_{i,r}, (1 \leq r \leq g), (1 \leq i < j \leq n)$

2.
$$a_{i,r}^{-1}a_{j,s}a_{i,r} = \begin{cases} a_{j,r}C_{i+1,j}^{-1}C_{i,j}a_{j,r}^{-1}a_{j,s}, & (1 \leq r < s \leq g) \\ a_{j,s}C_{i,j}^{-1}C_{i+1,j}, & (1 \leq s < r \leq g) \end{cases} \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

$a_{i,r}^{-1}b_ja_{i,r} = b_ja_{j,r}C_{i,j}^{-1}C_{i+1,j}a_{j,r}^{-1}, (1 \leq r \leq g), (1 \leq i < j \leq n)$

3.
$$a_{i,r}^{-1}C_{j,k}a_{i,r} = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ a_{k,r}C_{i+1,k}^{-1}C_{i,k}a_{k,r}^{-1}C_{j,k}C_{i,k}^{-1}C_{i+1,k}, & (1 \leq j \leq i < k \leq n); \end{cases} \quad (1 \leq r \leq g)$$

4. $C_{i,l}^{-1}C_{j,k}C_{i,l} = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < l < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j \leq i < l < k \leq n), \\ C_{i,k}C_{l+1,k}^{-1}C_{l,k}C_{i,k}^{-1}C_{j,k}C_{l,k}^{-1}C_{l+1,k}, & (1 \leq i < j \leq l < k \leq n); \end{cases}$
5. $\prod_{j=i+1}^n C_{i,j}C_{i+1,j}^{-1} = \begin{cases} b_i C_{1,i} a_{i,1}^{-1} a_{i,2} \cdots a_{i,g-1}^{-1} a_{i,g} b_i a_{i,g} a_{i,g-1}^{-1} \cdots a_{i,2} a_{i,1}^{-1}, & \text{se } g \text{ é par} \\ b_i C_{1,i} a_{i,1}^{-1} a_{i,2} \cdots a_{i,g-1} a_{i,g}^{-1} b_i^{-1} a_{i,g}^{-1} a_{i,g-1} \cdots a_{i,2} a_{i,1}^{-1}, & \text{se } g \text{ é ímpar} \end{cases}$
6. $b_j b_i = b_i b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}, (1 \leq i < j \leq n)$
7. $b_i^{-1} a_{j,r} b_i = a_{j,r} b_j (C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1})^{-1} b_j^{-1}, (1 \leq i < j \leq n), (1 \leq r \leq g)$
8. $b_i^{-1} C_{j,k} b_i = \begin{cases} C_{j,k}, & (1 \leq i < j < k \leq n) \text{ ou } (1 \leq j < k < i \leq n), \\ C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k (C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1})^{-1} b_k^{-1}, & (1 \leq j \leq i < k \leq n); \end{cases}$

Podemos verificar que se $g = 1$, temos a mesma apresentação dada no Teorema 1.3.1, por isto a demonstração deste teorema é totalmente análoga ao Teorema 1.3.1 (especialmente as relações (1, 3, 4, 6, 7) e (8)). Vamos apenas mostrar nas Figuras 1.49, 1.50, 1.51 e 1.52 a seguir que as outras relações são válidas.

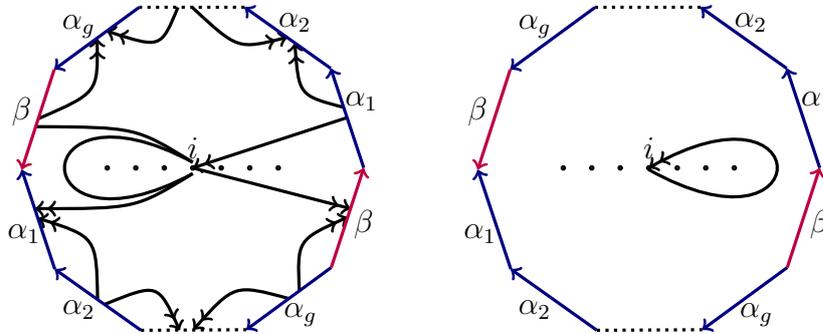


Figura 1.49: Relação (5), caso g par

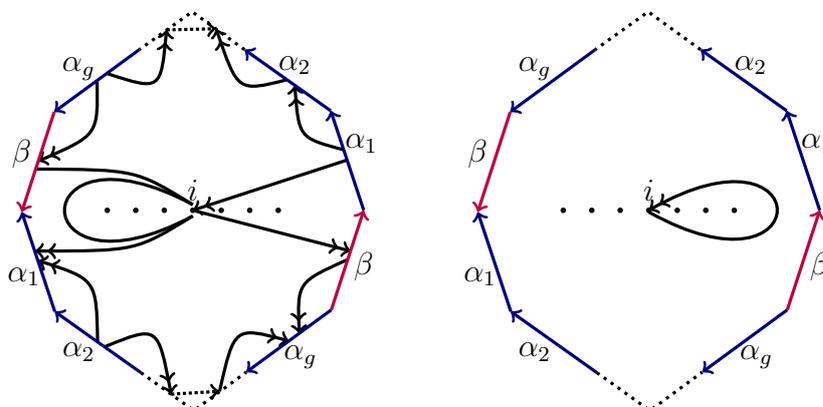


Figura 1.50: Relação (5), caso g ímpar

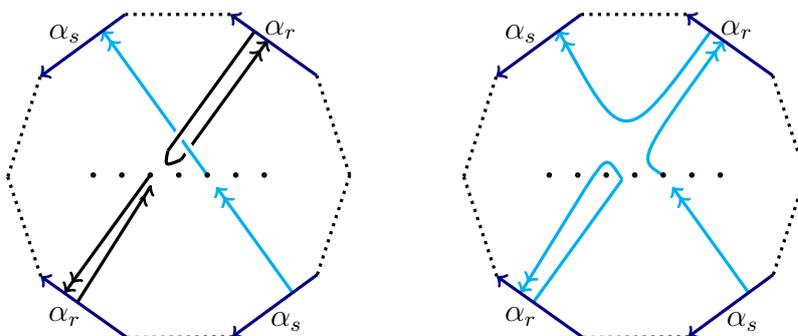


Figura 1.51: Relação (2): $r < s$, $a_{i,r}^{-1}a_{j,s}a_{i,r} = a_{j,r}C_{i+1,j}^{-1}C_{i,j}a_{j,r}^{-1}a_{j,s}$

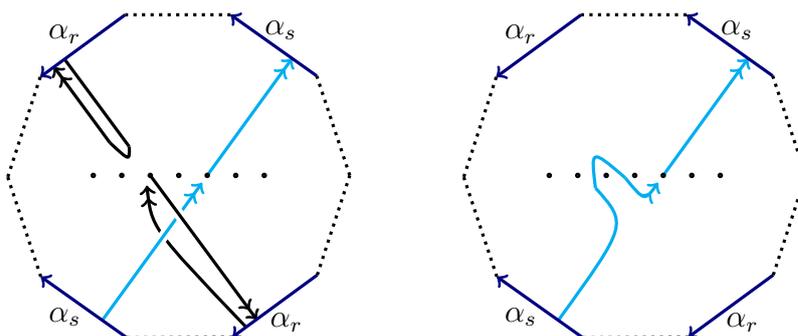


Figura 1.52: Relação (2): $s < r$, $a_{i,r}^{-1}a_{j,s}a_{i,r} = a_{j,s}C_{i,j}^{-1}C_{i+1,j}$

No resto do texto, utilizaremos também a apresentação do grupo de tranças (total) de superfícies não orientáveis dada por Bellingeri [5], nesta apresentação ele considera as superfícies não orientáveis como soma conexa de planos projetivos:

Teorema 1.5.2. (Bellingeri) *Seja N_g uma superfície fechada não orientável de genus $g \geq 3$. O grupo de tranças $B_n(N_g)$ admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, a_1, \dots, a_g$.

Relações:

1. *Relações de Artin;*
2. $a_r \sigma_i = \sigma_i a_r$ ($1 \leq r \leq g$; $i \neq 1$);
3. $\sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} a_r = a_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1$ ($1 \leq r \leq g$);
4. $\sigma_1^{-1} a_s \sigma_1 a_r = a_r \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1$ ($1 \leq s < r \leq g$);
5. $a_1^2 \cdots a_g^2 = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2 \sigma_1$.

Capítulo 2

Sequência Exata Curta de Fadell-Neuwirth

Neste capítulo vamos estudar as sequências exatas curtas de Fadell-Neuwirth (1.2) e (1.3), as quais são fundamentais no estudo dos grupos de tranças e saber se elas cindem foi uma das primeiras questões levantadas pelos fundadores da teoria (J. Birman, E. Fadell, L. Neuwirth, R. Fox, J. Van Buskirk [10, 11, 17, 18, 20, 63]). Se sabe agora que tais sequências não cinde em geral, mas quando M é o toro ou a garrafa de Klein, existe em M um campo de vetores não singular, o que implica que tais sequências cindem. Neste capítulo calculamos explicitamente uma secção em termos dos geradores de $P_n(M)$ na Proposição 2.2.1. Com isso, conseguimos descrever o grupo de tranças puras de M como um produto semi-direto e calculamos o centro de $B_n(M)$, no caso que $M = \mathbb{T}$ já conhecíamos o centro de $B_n(\mathbb{T})$ [10, 57] e no caso que $M = \mathbb{K}$ obtemos a Proposição 2.2.4. Além disso, se M é uma superfície não orientável de genus $g \geq 3$, temos o Teorema 2.3.1 que descreve explicitamente uma secção para a sequência (1.2) com $n = 1$. Estudamos também a sequência exata curta generalizada de Fadell-Neuwirth (2.3), questionando quando a sequência cinde, a existência de um campo de vetores não singular nos auxilia a obter o Teorema 2.4.1, conseguindo generalizá-lo no Teorema 2.5.1.

2.1. Introdução

A sequência exata curta de Fadell-Neuwirth (1.3) já foi apresentada e definida no capítulo anterior, mas retomamos o estudo de tal sequência para obtermos maiores informações dos grupos de tranças.

Uma das principais questões sobre o assunto é: quando a sequência (1.3)

$$1 \rightarrow \pi_1(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \xrightarrow{i_*} P_{n+1}(M) \xrightarrow{p_*} P_n(M) \rightarrow 1$$

cinde? Quando a superfície M é o plano, tal pergunta é facilmente respondida, a sequência

cinde para todo $n \in \mathbb{N}^*$, pois a inclusão natural de $P_n(M)$ em $P_{n+1}(M)$, que acrescenta uma corda trivial, é um homomorfismo. No caso de outras superfícies a resposta é mais complicada, pois a mesma função não é mais, em geral, um homomorfismo.

No caso da esfera $M = \mathbb{S}^2$, Fadell e Van Buskirk [18] mostraram que existe secção para p no nível geométrico. No caso do plano projetivo $M = \mathbb{R}P^2$, Van Buskirk [63] provou que para $n = 1$ a projeção p não admite secção e para $n = 2$ admite secção no nível geométrico.

O caso de outras superfícies foi estudado por Gonçalves e Guaschi [24, 26, 29], foi provado que se M é uma superfície compacta, conexa sem bordo, orientável (resp. não orientável) e de genus $g \geq 2$ (resp. $g \geq 3$) a sequência cinde se, e somente se, $n = 1$; se M é uma superfície compacta, conexa, sem bordo, com uma quantidade finita de pontos deletados e diferente da esfera \mathbb{S}^2 e do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, a sequência cinde para todo $n \geq 1$, além disso eles completaram a resposta para o caso do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ mostrando que a sequência cinde se, e somente se, $n = 2$.

O caso em que $M = \mathbb{T}$, o toro, ou $M = \mathbb{K}$, a garrafa de Klein, foi estudado por Fadell e Neuwirth [17] e concluíram que a sequência (1.3) cinde para todo n . Para a demonstração de tal fato, foi essencial a existência de um campo vetorial não nulo nestas superfícies. A ideia da demonstração é construir uma função contínua entre $F_n(M)$ e $F_{n+1}(M)$, mandando $x = (x_1, \dots, x_n)$ em $(x_1, \dots, x_n, y(x))$, onde $y(x)$ é um ponto em M diferente de todo x_i , obtendo assim uma secção no nível geométrico. Para a construção de $y(x)$ usamos um campo de vetor não nulo ν e fixamos um ponto, x_n neste caso, definimos:

$$y(x) = x_n + \nu(x)\epsilon(x)/2, \text{ onde } \epsilon(x) = \min_{1 \leq i < j \leq n} \{dist(x_i, x_j)\}.$$

A secção algébrica desejada será a induzida de tal função. Geometricamente, estamos “duplicando” a última corda de cada trança.

Com essa ideia geométrica, encontramos uma secção explícita em termo dos geradores de $P_n(M)$, podendo assim interpretar esses grupos como um produto semi-direto. Neste capítulo, estudamos também *os grupos de tranças mistas*, que são subgrupos de $B_n(M)$ e generalizamos a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth, questionamos nova-

mente se a tal sequência cinde ou não.

2.2. Existência de uma secção

Nesta seção vamos escrever explicitamente a secção da sequência de Fadell-Neuwirth 1.3 para $M = \mathbb{T}$ e para $M = \mathbb{K}$. A ideia geométrica é “duplicarmos” a última corda na direção do campo de vetores não nulo, podemos visualizar nas figuras abaixo (2.1, 2.2, 2.3) a ideia de “duplicar” uma corda. A dificuldade é apenas provar que todas as relações de $P_n(M)$ se mantêm através da função, pois assim será um homomorfismo.

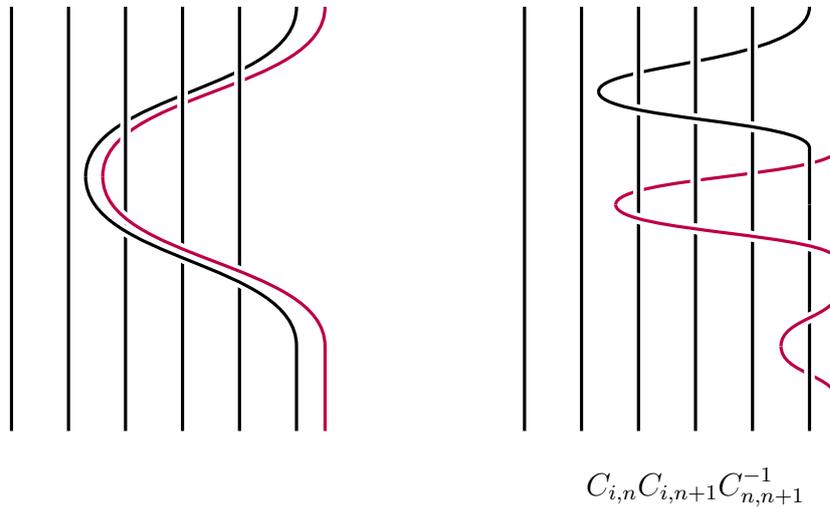


Figura 2.1: Duplicando a última corda de $C_{i,n}$.

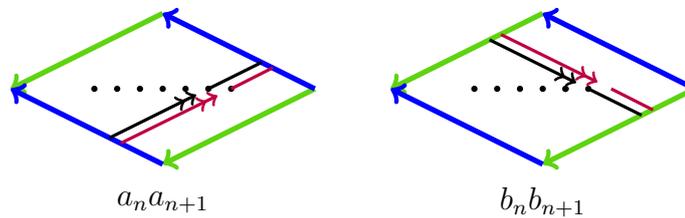


Figura 2.2: Duplicando a última corda de a_n e b_n em $P_n(\mathbb{T})$

Quando duplicamos a última corda de uma trança em $P_n(\mathbb{K})$, temos que ser mais atentos ao sentido do campo de vetores não nulo. Note que, ao duplicarmos a última corda

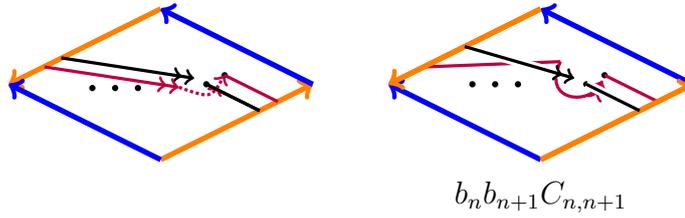


Figura 2.3: Duplicando a última corda de b_n em $P_n(\mathbb{K})$

de b_n em $P_n(\mathbb{K})$, o ponto $n + 1$ se move, por isso, temos que reposicioná-lo na posição inicial.

Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.1. *Seja M o toro \mathbb{T} ou a garrafa de Klein \mathbb{K} . Então, em termos da apresentação dada pelo Teorema 1.3.1, a aplicação $s : P_n(M) \longrightarrow P_{n+1}(M)$ definida nos geradores de $P_n(M)$ como:*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i \mapsto a_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ b_i \mapsto b_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ a_n \mapsto a_n a_{n+1} \\ C_{i,j} \mapsto C_{i,j}, \quad 1 \leq i < j \leq n-1 \\ C_{i,n} \mapsto C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1}, \end{array} \right.$$

e:

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_n \mapsto b_n b_{n+1} & \text{se } M = \mathbb{T} \\ b_n \mapsto b_n b_{n+1} C_{n,n+1} & \text{se } M = \mathbb{K}, \end{array} \right.$$

é uma secção para a sequência exata curta (1.3).

Para demonstrar tal proposição precisamos de alguns resultados preliminares:

Proposição 2.2.2. *Seja $M = \mathbb{T}$ ou $M = \mathbb{K}$, as seguintes relações são válidas em $P_{n+1}(M)$:*

$p_1.$ $a_n b_{n+1} = b_{n+1} C_{n,n+1} a_n;$

$p_2.$ $a_n^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} a_n = C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1}, \quad (i < n);$

$$p_3. \begin{cases} C_{j,n}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{j,n} = C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{l,n+1} C_{n,n+1}^{-1}, & (j < i < l \leq n) \\ C_{j,n}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{l,n+1} C_{j,n} = C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1}, & (j < i < n); \end{cases}$$

$$p_4. b_n a_{n+1} = a_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_n;$$

$$p_5. b_n^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} b_n = C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1}, \quad (i < n);$$

$$p_6. C_{i,n} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} = C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1}, \quad (i+1 < n).$$

Demonstração:

Vamos usar as relações de $P_n(M)$ dadas pelo Teorema 1.3.1.

$$p_1. a_n b_{n+1} = b_{n+1} C_{n,n+1} a_n;$$

Pela relação (2), temos o seguinte:

$$a_n^{-1} b_{n+1} a_n = b_{n+1} \underbrace{a_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} a_{n+1}^{-1}}_{(3)} = b_{n+1} (a_n^{-1} C_{n,n+1}^{-1} a_n) \Rightarrow b_{n+1} C_{n,n+1} a_n = a_n b_{n+1}$$

como desejado.

$$p_2. a_n^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} a_n = C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1};$$

Usando a relação (3), temos:

$$\begin{aligned} a_n^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} a_n &= \underbrace{a_n^{-1} C_{i,n+1}^{-1} a_n}_{(3)} \underbrace{a_n^{-1} C_{i+1,n+1} a_n}_{(3)} \\ &= (C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} a_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} a_{n+1}^{-1}) (a_{n+1} C_{n,n+1} a_{n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) \\ &\Rightarrow a_n^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} a_n = C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1} \end{aligned}$$

como desejado.

$$p_3. \begin{cases} C_{j,n}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{j,n} = C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{l,n+1} C_{n,n+1}^{-1}, & (j < i < l \leq n) \\ C_{j,n}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{l,n+1} C_{j,n} = C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1}, & (j < i < n); \end{cases}$$

Pela relação (4), temos

$$\begin{aligned} C_{j,n}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{l,n+1} C_{j,n} &= \underbrace{C_{j,n}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{j,n}}_{(4)} \underbrace{C_{j,n}^{-1} C_{l,n+1} C_{j,n}}_{(4)} \\ &= (C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{j,n+1} C_{n,n+1}^{-1} C_{j,n+1}^{-1}) (C_{j,n+1} C_{n,n+1} C_{j,n+1}^{-1} C_{l,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) \\ &\Rightarrow C_{j,n}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{j,n} = C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{l,n+1} C_{n,n+1}^{-1} \end{aligned}$$

como desejado. Para a outra relação tome $l = i + 1$.

$$p_4. b_n a_{n+1} = a_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_n;$$

Pela relação (7), temos o seguinte:

$$b_n^{-1} a_{n+1} b_n = \begin{cases} a_{n+1} \underbrace{b_{n+1} C_{n,n+1} b_{n+1}^{-1}}_{(8)}, & M = \mathbb{T} \\ a_{n+1} \underbrace{b_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}}_{(8)}, & M = \mathbb{K} \end{cases} = \begin{cases} a_{n+1} (b_n^{-1} C_{n,n+1} b_n), & M = \mathbb{T} \\ a_{n+1} (b_n^{-1} C_{n,n+1} b_n), & M = \mathbb{M} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_n a_{n+1} = a_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_n$$

como desejado.

$$p_5. b_n^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} b_n = C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1}, \quad (i < n);$$

Usando a relação (8), temos o seguinte:

$$\begin{aligned} b_n^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} b_n &= \underbrace{b_n^{-1} C_{i,n+1} b_n}_{(8)} \underbrace{b_n^{-1} C_{i+1,n+1}^{-1} b_n}_{(8)} \\ &= (C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} b_{n+1} C_{n,n+1}^{\pm 1} b_{n+1}^{-1}) (b_{n+1} C_{n,n+1}^{\mp 1} b_{n+1}^{-1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1}) \\ \Rightarrow b_n^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} b_n &= C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1} \end{aligned}$$

como desejado.

Usamos acima a seguinte notação:

$$C_{n,n+1}^{\pm 1} = \begin{cases} C_{n,n+1}, & M = \mathbb{T} \\ C_{n,n+1}^{-1}, & M = \mathbb{K} \end{cases} \quad \text{e} \quad C_{n,n+1}^{\mp 1} = \begin{cases} C_{n,n+1}^{-1}, & M = \mathbb{T} \\ C_{n,n+1}, & M = \mathbb{K}. \end{cases}$$

$$p_6. C_{i,n} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} = C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1}, \quad (i+1 < n).$$

Usando a relação (4), temos

$$\begin{aligned}
C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{i,n} &= C_{n,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} \\
\Rightarrow C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n+1}^{-1} &= C_{n,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} \underbrace{C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1}}_{(4)} \\
&= C_{n,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} (C_{i,n}^{-1} C_{n,n+1}^{-1}) \\
\Rightarrow \underbrace{C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1}}_{(4)} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1} &= C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} \\
\Rightarrow (C_{i,n}^{-1} C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1}) C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1} &= C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} \\
\Rightarrow C_{i,n} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} &= C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1}
\end{aligned}$$

como desejado. ■

Agora podemos provar a Proposição 2.2.1. Nas contas a seguir serão extensas, para facilitar a leitura escrevemos com chaves em baixo ($\underbrace{\quad}_0$) a parte da conta que vamos substituir, com o número da relação de $P_n(M)$ que estou utilizando (relações dadas pelo Teorema 1.3.1 e pela Proposição 2.2.2 acima) e na linha seguinte escrevemos com parenteses a substituição feita.

Demonstração da Proposição 2.2.1:

Temos 8 relações em $P_n(M)$. Para cada relação $R_1 = R_2$ vamos aplicar a secção $s(R_1), s(R_2)$ obtendo elementos de $P_{n+1}(M)$, usando as relações deste grupo, iremos mostrar que $S(R_1) = s(R_2)$ demonstrando assim que s é de fato uma secção para a sequência exata curta (1.3).

Como s é a identidade para os elementos que não mexem a corda n e devido ao fato que as mesmas relações são válidas em $P_{n+1}(M)$, só precisamos verificar igualdade quando os elementos $a_n, b_n, C_{i,n}$ aparecem na relação.

1. $a_i a_n = a_n a_i$;

Ao aplicar a secção s temos:

$$s(a_i a_n) = a_i (a_n a_{n+1}) = (a_n a_{n+1}) a_i = s(a_n a_i),$$

devido ao fato de todos os geradores a_j comutarem entre si, pela relação (1).

$$2. a_i^{-1}b_n a_i = b_n a_n C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n} a_n^{-1};$$

(i) Suponha $i + 1 = n$;

$$M = \mathbb{T}$$

$$\begin{aligned} s(a_i^{-1}b_j a_i) &= a_i^{-1}b_n b_{n+1} a_i = \underbrace{a_i^{-1}b_n a_i}_{(2)} \underbrace{a_i^{-1}b_{n+1} a_i}_{(2)} = \underbrace{(b_n a_n C_{i,n}^{-1} a_n^{-1})}_{(2)} \underbrace{(b_{n+1} a_{n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1} a_{n+1}^{-1})}_{(2)} \\ &= b_n a_n \underbrace{C_{i,n}^{-1} (b_{n+1} a_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} a_{n+1}^{-1} a_n^{-1})}_{(3) \text{ e } (8)} a_{n+1} \underbrace{C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1} a_{n+1}^{-1}}_{(1)} \\ &= b_n \underbrace{a_n (b_{n+1} a_{n+1} C_{i,n}^{-1})}_{p_1} C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{(a_n^{-1}) C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1} a_{n+1}^{-1}}_{p_2} \\ &= b_n (b_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1} a_n}_{(3)} a_{n+1}) \underbrace{C_{i,n}^{-1} C_{n,n+1}^{-1} (C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} a_n^{-1})}_{(3)} a_{n+1}^{-1} \\ &= b_n b_{n+1} (a_n a_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1} C_{i,n}^{-1} C_{i,n+1}^{-1}}_{(4)} a_n^{-1} a_{n+1}^{-1}) \\ &= b_n b_{n+1} \cdot a_n a_{n+1} \cdot (C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1})^{-1} \cdot a_n^{-1} a_{n+1}^{-1} = s(b_n a_n C_{i,n}^{-1} a_n^{-1}). \end{aligned}$$

$$M = \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} s(a_i^{-1}b_n a_i) &= a_i^{-1} \cdot b_n b_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1} \cdot a_i}_{(3)} = \underbrace{a_i^{-1} b_n a_i}_{(2)} \underbrace{a_i^{-1} b_{n+1} (a_i C_{n,n+1})}_{(2)} \\ &= \underbrace{(b_n a_n C_{i,n}^{-1} a_n^{-1})}_{(2)} \underbrace{(b_{n+1} a_{n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1} a_{n+1}^{-1})}_{(2)} C_{n,n+1} \\ &= b_n a_n \underbrace{C_{i,n}^{-1} (b_{n+1} a_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} a_{n+1}^{-1} a_n^{-1})}_{(3) \text{ e } (8)} a_{n+1} \underbrace{C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1} a_{n+1}^{-1} C_{n,n+1}}_{(1)} \\ &= b_n \underbrace{a_n (b_{n+1} a_{n+1} C_{i,n}^{-1})}_{p_1} C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{(a_n^{-1}) C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1} a_{n+1}^{-1} C_{n,n+1}}_{p_2} \\ &= b_n (b_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1} a_n}_{(3)} a_{n+1}) \underbrace{C_{i,n}^{-1} C_{n,n+1}^{-1} (C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} a_n^{-1})}_{(3)} a_{n+1}^{-1} C_{n,n+1} \\ &= b_n b_{n+1} C_{n,n+1} \cdot a_n a_{n+1} \cdot \underbrace{C_{i,n}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} (C_{n,n+1} a_n^{-1} a_{n+1}^{-1})}_{(4)} \\ &= b_n b_{n+1} C_{n,n+1} \cdot a_n a_{n+1} \cdot (C_{n,n+1} C_{i,n}^{-1} C_{i,n+1}^{-1}) \cdot a_n^{-1} a_{n+1}^{-1} = s(b_n a_n C_{i,n}^{-1} a_n^{-1}). \end{aligned}$$

(ii) Suponha $i + 1 < n$; $M = \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}
s(a_i^{-1}b_j a_i) &= a_i^{-1}b_n b_{n+1} a_i = \underbrace{a_i^{-1}b_n a_i}_{(2)} \underbrace{a_i^{-1}b_{n+1} a_i}_{(2)} \\
&= (b_n a_n C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n} a_n^{-1}) \underbrace{(b_{n+1} a_{n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} a_{n+1}^{-1})}_{(2)} \\
&= b_n a_n \underbrace{C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n} (b_{n+1} a_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} a_{n+1}^{-1} a_n^{-1})}_{(3) \text{ e } (8)} \underbrace{a_{n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} a_{n+1}^{-1}}_{(1)} \\
&= b_n \underbrace{a_n (b_{n+1} a_{n+1} C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n})}_{p_1} C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{(a_n^{-1}) C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} a_{n+1}^{-1}}_{p_2} \\
&= b_n (b_{n+1} C_{n,n+1} a_n) a_{n+1} C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n} \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} (C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1} a_n^{-1})}_{(3)} a_{n+1}^{-1} \\
&= b_n b_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1} a_n a_{n+1} C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n} C_{i,n+1}^{-1}}_{(3)} \underbrace{C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1} a_n^{-1} a_{n+1}^{-1}}_{(4)} \\
&= b_n b_{n+1} (a_n a_{n+1} C_{n,n+1}) C_{i,n}^{-1} (C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n}) C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1} a_n^{-1} a_{n+1}^{-1} = s(b_n a_n C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n} a_n^{-1}).
\end{aligned}$$

 $M = \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
s(a_i^{-1}b_n a_i) &= a_i^{-1} \cdot b_n b_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1} \cdot a_i}_{(3)} = \underbrace{a_i^{-1} b_n a_i}_{(2)} \underbrace{a_i^{-1} b_{n+1} a_i}_{(2)} (a_i C_{n,n+1}) \\
&= (b_n a_n C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n} a_n^{-1}) \underbrace{(b_{n+1} a_{n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} a_{n+1}^{-1})}_{(2)} C_{n,n+1} \\
&= b_n a_n \underbrace{C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n} (b_{n+1} a_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} a_{n+1}^{-1} a_n^{-1})}_{(3) \text{ e } (8)} \underbrace{a_{n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} a_{n+1}^{-1} C_{n,n+1}}_{(1)} \\
&= b_n \underbrace{a_n (b_{n+1} a_{n+1} C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n})}_{p_1} C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{(a_n^{-1}) C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} a_{n+1}^{-1} C_{n,n+1}}_{p_2} \\
&= b_n (b_{n+1} C_{n,n+1} a_n) a_{n+1} C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n} \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} (C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1} a_n^{-1})}_{(3)} a_{n+1}^{-1} C_{n,n+1} \\
&= b_n b_{n+1} C_{n,n+1} a_n a_{n+1} C_{i,n}^{-1} \underbrace{C_{i+1,n} C_{i,n+1}^{-1}}_{(4)} C_{i+1,n+1} \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} (C_{n,n+1} a_n^{-1} a_{n+1}^{-1})}_{(3)} \\
&= b_n b_{n+1} C_{n,n+1} \cdot a_n a_{n+1} \cdot C_{i,n}^{-1} (C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n}) C_{i+1,n+1} \cdot a_n^{-1} a_{n+1}^{-1} = s(b_n a_n C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n} a_n^{-1}).
\end{aligned}$$

$$3. \begin{cases} a_i^{-1}C_{j,n}a_i = C_{j,n}, (i < j < n); \\ a_n^{-1}C_{j,k}a_n = C_{j,k}, (j < k < n); \\ a_i^{-1}C_{j,n}a_i = a_nC_{i+1,k}^{-1}C_{i,k}a_n^{-1}C_{j,n}C_{i,n}^{-1}C_{i+1,n}, (j \leq i < n) \end{cases}$$

Como nesta relação não aparece o elemento b_n , a demonstração é a mesma para o toro e para a garrafa de Klein. Temos seis casos a considerar:

(i) Suponha $i < j < n$;

$$s(a_i^{-1}C_{j,n}a_i) = \underbrace{a_i^{-1}.C_{j,n}C_{j,n+1}C_{n,n+1}^{-1}}_{(3)}.a_i = C_{j,n}C_{j,n+1}C_{n,n+1}^{-1} = s(C_{j,n})$$

Usamos apenas o fato que a_i comuta com todos os elementos acima, pela relação (3).

(ii) Suponha $j < k < n$;

$$s(a_n^{-1}C_{j,k}a_n) = \underbrace{a_{n+1}^{-1}a_n^{-1}.C_{j,k}.a_n a_{n+1}}_{(3)} = C_{j,k} = s(C_{j,k})$$

Usamos apenas o fato que a_n e a_{n+1} comuta com $C_{j,k}$, pela relação (3).

(iii) Suponha $i = j$ e $i + 1 = n$;

$$\begin{aligned} s(a_i^{-1}C_{i,n}a_i) &= a_i^{-1}C_{i,n}C_{i,n+1} \underbrace{C_{n,n+1}^{-1}a_i}_{(3)} = \underbrace{a_i^{-1}C_{i,n}a_i}_{(3)} \underbrace{a_i^{-1}C_{i,n+1}(a_i C_{n,n+1}^{-1})}_{(3)} \\ &= (a_n \underbrace{C_{i,n}a_n^{-1}}_{(1) \text{ e } (3)})(a_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} a_{n+1}^{-1} C_{n,n+1}) C_{n,n+1}^{-1} \\ &= a_n (a_{n+1} C_{i,n} a_n^{-1}) \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} a_{n+1}^{-1}}_{p_2} \\ &= a_n a_{n+1} C_{i,n} (C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1} a_n^{-1}) a_{n+1}^{-1} = s(a_n C_{i,n} a_n^{-1}). \end{aligned}$$

(iv) Suponha $j < i$ e $i + 1 = n$;

$$\begin{aligned}
s(a_i^{-1}C_{j,n}a_i) &= a_i^{-1}C_{j,n}C_{j,n+1}\underbrace{C_{n,n+1}^{-1}a_i}_{(3)} = \underbrace{a_i^{-1}C_{j,n}a_i}_{(3)}\underbrace{a_i^{-1}C_{j,n+1}(a_i C_{n,n+1}^{-1})}_{(3)} \\
&= \underbrace{(a_n C_{i,n}a_n^{-1}C_{j,n}C_{i,n}^{-1})}_{(1) \text{ e } (3)}(a_{n+1} C_{n,n+1}^{-1}C_{i,n+1}a_{n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{n,n+1})C_{n,n+1}^{-1} \\
&= a_n(a_{n+1}C_{i,n}a_n^{-1}C_{j,n}\underbrace{C_{i,n}^{-1}}_{(4)})C_{n,n+1}^{-1}C_{i,n+1}a_{n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{i,n+1}^{-1} \\
&= a_n a_{n+1} C_{i,n} \underbrace{a_n^{-1}C_{j,n}(C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}C_{i,n}^{-1})}_{p_2 \text{ e } p_3} \underbrace{a_{n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{i,n+1}^{-1}}_{(3)} \\
&= a_n a_{n+1} C_{i,n} (C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}a_n^{-1}\underbrace{C_{j,n}}_{(3)})(\underbrace{a_{n+1}^{-1}C_{i,n}^{-1}}_{(4)})C_{j,n+1}C_{i,n+1}^{-1} \\
&= a_n a_{n+1} C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1} a_n^{-1} (a_{n+1}^{-1} C_{j,n}) (C_{j,n+1} C_{i,n}^{-1}) C_{i,n+1}^{-1} = s(a_n C_{i,n} a_n^{-1} C_{j,n} C_{i,n}^{-1}).
\end{aligned}$$

(v) Suponha $i = j$ e $i + 1 < n$;

$$\begin{aligned}
s(a_i^{-1}C_{i,n}a_i) &= a_i^{-1}C_{i,n}C_{i,n+1}\underbrace{C_{n,n+1}^{-1}a_i}_{(3)} = \underbrace{a_i^{-1}C_{i,n}a_i}_{(3)}\underbrace{a_i^{-1}C_{i,n+1}(a_i C_{n,n+1}^{-1})}_{(3)} \\
&= \underbrace{(a_n C_{i+1,n}C_{i,n}a_n^{-1}C_{i+1,n})}_{(1) \text{ e } (3)}(a_{n+1} C_{i+1,n+1}^{-1}C_{i,n+1}a_{n+1}^{-1}C_{i+1,n+1})C_{n,n+1}^{-1} \\
&= a_n(a_{n+1}C_{i+1,n}^{-1}C_{i,n}a_n^{-1}\underbrace{C_{i+1,n}}_{(3) \text{ e } (4)})C_{i+1,n+1}^{-1}C_{i,n+1}a_{n+1}^{-1}C_{i+1,n+1}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= a_n a_{n+1} C_{i+1,n}^{-1} C_{i,n} \underbrace{a_n^{-1}(C_{i+1,n+1}^{-1}C_{i,n+1}a_{n+1}^{-1}C_{i+1,n})}_{p_2} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1} \\
&= a_n a_{n+1} C_{i+1,n}^{-1} \underbrace{C_{i,n}(C_{n,n+1}C_{i+1,n+1}^{-1}C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}a_n^{-1})}_{p_3} a_{n+1}^{-1} C_{i+1,n} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1} \\
&= a_n a_{n+1} C_{i+1,n}^{-1} (C_{i+1,n+1}^{-1}C_{n,n+1}C_{i,n})C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}a_n^{-1}a_{n+1}^{-1}C_{i+1,n}C_{i+1,n+1}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= s(a_n C_{i+1,n}^{-1} C_{i,n} a_n^{-1} C_{i+1,n}).
\end{aligned}$$

(vi) Suponha $j < i$ e $i + 1 < n$;

$$\begin{aligned}
s(a_i^{-1}C_{j,n}a_i) &= a_i^{-1}C_{j,n}C_{j,n+1}\underbrace{C_{n,n+1}^{-1}a_i}_{(3)} = \underbrace{a_i^{-1}C_{j,n}a_i}_{(3)}\underbrace{a_i^{-1}C_{j,n+1}}_{(3)}(a_iC_{n,n+1}^{-1}) \\
&= (a_n\underbrace{C_{i+1,n}^{-1}C_{i,n}a_n^{-1}C_{j,n}C_{i,n}^{-1}C_{i+1,n}}_{(3)})(a_{n+1}C_{i+1,n+1}^{-1}C_{i,n+1}a_{n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{i+1,n+1})C_{n,n+1}^{-1} \\
&= a_n(a_{n+1}C_{i+1,n}^{-1}C_{i,n}a_n^{-1}C_{j,n}C_{i,n}^{-1}\underbrace{C_{i+1,n}}_{(3)\text{ e } (4)}C_{i+1,n+1}^{-1}C_{i,n+1}a_{n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{i+1,n+1}C_{n,n+1}^{-1}) \\
&= a_na_{n+1}C_{i+1,n}^{-1}C_{i,n}a_n^{-1}C_{j,n}\underbrace{C_{i,n}^{-1}(C_{i+1,n+1}^{-1}C_{i,n+1}a_{n+1}^{-1}C_{i+1,n})}_{p_3}C_{j,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{i+1,n+1}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= a_na_{n+1}C_{i+1,n}^{-1}C_{i,n}a_n^{-1}\underbrace{C_{j,n}(C_{n,n+1}C_{i+1,n+1}^{-1}C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}C_{i,n}^{-1})}_{p_3}a_{n+1}^{-1}\underbrace{C_{i+1,n}C_{j,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{i+1,n+1}C_{n,n+1}^{-1}}_{(4)} \\
&= a_na_{n+1}C_{i+1,n}^{-1}C_{i,n}a_n^{-1}\underbrace{a_n^{-1}(C_{i+1,n+1}^{-1}C_{i,n+1}C_{j,n})}_{(p_2)}\underbrace{(a_{n+1}^{-1}C_{i,n}^{-1})}_{(3)}C_{i+1,n}C_{j,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{i+1,n+1}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= a_na_{n+1}C_{i+1,n}^{-1}\underbrace{C_{i,n}(C_{n,n+1}C_{i+1,n+1}^{-1}C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}a_n^{-1})}_{(4)}(a_{n+1}^{-1}C_{j,n})\underbrace{C_{i,n}^{-1}C_{i+1,n}C_{j,n+1}}_{(4)}C_{i,n+1}^{-1}C_{i+1,n+1}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= a_na_{n+1}C_{i+1,n}^{-1}(C_{i+1,n+1}^{-1}C_{i,n+1}C_{i,n})a_n^{-1}a_{n+1}^{-1}C_{j,n}(C_{j,n+1}C_{i,n}^{-1}\underbrace{C_{i+1,n}}_{(4)}C_{i,n+1}^{-1})C_{i+1,n+1}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= s(a_nC_{i+1,n}^{-1}C_{i,n}a_n^{-1})C_{j,n}C_{j,n+1}(C_{n,n+1}^{-1}C_{n,n+1})C_{i,n}^{-1}(C_{i,n+1}^{-1}C_{i+1,n})C_{i+1,n+1}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= s(a_nC_{i+1,n}^{-1}C_{i,n}a_n^{-1}C_{j,n}C_{i,n}^{-1}C_{i+1,n}).
\end{aligned}$$

$$4. C_{i,l}^{-1}C_{j,n}C_{i,l} = \begin{cases} C_{j,n}, & (i < l < j < n) \text{ ou } (j \leq i < l < n); \\ C_{i,n}C_{l+1,n}^{-1}C_{l,n}C_{i,n}^{-1}C_{j,n}C_{l,n}^{-1}C_{l+1,n}, & (i < j \leq l < n). \end{cases}$$

Nesta relação também temos a mesma demonstração para o toro e para a garrafa de Klein, temos cinco casos a considerar:

(i) Suponha $i < l < j < n$ ou $j \leq i < l < n$;

$$s(C_{i,l}^{-1}C_{j,n}C_{i,l}) = \underbrace{C_{i,l}^{-1}C_{j,n}C_{j,n+1}C_{n,n+1}^{-1}}_{(4)}C_{i,l} = C_{j,n}C_{j,n+1}C_{n,n+1}^{-1} = s(C_{j,n})$$

Usamos apenas que o elemento $C_{i,l}$ comuta com os outros elementos, pela relação (4).

(ii) Suponha $i < j = l$ e $l + 1 = n$;

$$\begin{aligned}
s(C_{i,j}^{-1}C_{j,n}C_{i,j}) &= C_{i,j}^{-1}C_{j,n}C_{j,n+1}\underbrace{C_{n,n+1}^{-1}C_{i,j}}_{(4)} = \underbrace{C_{i,j}^{-1}C_{j,n}C_{i,j}}_{(4)}\underbrace{C_{i,j}^{-1}C_{j,n+1}}_{(4)}(C_{i,j}C_{n,n+1}^{-1}) \\
&= (C_{i,n}C_{j,n}C_{i,n}^{-1})\underbrace{(C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{n,n+1})}_{(4)}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}(C_{i,n+1}C_{j,n}C_{i,n}^{-1})\underbrace{C_{n,n+1}^{-1}C_{j,n+1}}_{p_3}C_{i,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}\underbrace{C_{j,n}(C_{j,n+1}C_{n,n+1}^{-1}C_{i,n}^{-1})}_{(4)}C_{i,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}(C_{n,n+1}^{-1}C_{j,n}C_{j,n+1})C_{i,n}^{-1}C_{i,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}C_{j,n}C_{j,n+1}(C_{n,n+1}^{-1}C_{n,n+1})C_{i,n}^{-1}C_{i,n+1}^{-1} = s(C_{i,n}C_{j,n}C_{i,n}^{-1}).
\end{aligned}$$

(iii) Suponha $i < j < l$ e $l + 1 = n$;

$$\begin{aligned}
s(C_{i,l}^{-1}C_{j,n}C_{i,l}) &= C_{i,l}^{-1}C_{j,n}C_{j,n+1}\underbrace{C_{n,n+1}^{-1}C_{i,l}}_{(4)} = \underbrace{C_{i,l}^{-1}C_{j,n}C_{i,l}}_{(4)}\underbrace{C_{i,l}^{-1}C_{j,n+1}}_{(4)}(C_{i,l}C_{n,n+1}^{-1}) \\
&= (C_{i,n}C_{l,n}C_{i,n}^{-1}C_{j,n}C_{l,n}^{-1})\underbrace{(C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}C_{l,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{l,n+1}^{-1}C_{n,n+1})}_{(4)}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}(C_{i,n+1}C_{l,n}C_{i,n}^{-1}C_{j,n}C_{l,n}^{-1})\underbrace{C_{n,n+1}^{-1}C_{l,n+1}}_{(4)}C_{i,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{l,n}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}C_{l,n}C_{i,n}^{-1}C_{j,n}(C_{l,n+1}C_{n,n+1}^{-1}C_{l,n}^{-1})\underbrace{C_{i,n+1}^{-1}C_{j,n+1}}_{(4)}C_{l,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}C_{l,n}C_{i,n}^{-1}\underbrace{C_{j,n}C_{l,n+1}C_{n,n+1}^{-1}}_{p_3}(C_{i,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{l,n}^{-1})C_{l,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}C_{l,n}\underbrace{C_{i,n}^{-1}(C_{n,n+1}^{-1}C_{l,n+1}C_{j,n})}_{p_3}C_{i,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{l,n}^{-1}C_{l,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}\underbrace{C_{l,n}(C_{l,n+1}C_{n,n+1}^{-1}C_{i,n}^{-1})}_{(4)}(C_{i,n+1}^{-1}C_{j,n})C_{j,n+1}C_{l,n}^{-1}C_{l,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}(C_{n,n+1}^{-1}C_{l,n}C_{l,n+1})C_{i,n}^{-1}C_{i,n+1}^{-1}C_{j,n}C_{j,n+1}C_{l,n}^{-1}C_{l,n+1}^{-1} \\
&= s(C_{i,n}C_{l,n}C_{i,n}^{-1}C_{j,n}C_{l,n}^{-1}).
\end{aligned}$$

(iv) Suponha $i < j = l$ e $l + 1 < n$;

$$\begin{aligned}
s(C_{i,j}^{-1}C_{j,n}C_{i,j}) &= C_{i,j}^{-1}C_{j,n}C_{j,n+1}\underbrace{C_{n,n+1}^{-1}C_{i,j}}_{(4)} = \underbrace{C_{i,j}^{-1}C_{j,n}C_{i,j}}_{(4)}\underbrace{C_{i,j}^{-1}C_{j,n+1}}_{(4)}\underbrace{(C_{i,j}C_{n,n+1}^{-1})}_{(4)} \\
&= (C_{i,n}\underbrace{C_{j+1,n}^{-1}C_{j,n}C_{i,n}^{-1}C_{j+1,n}}_{(4)})(C_{i,n+1}C_{j+1,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1})C_{n,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}(C_{i,n+1}C_{j+1,n}^{-1}C_{j,n}C_{i,n}^{-1}\underbrace{C_{j+1,n}}_{(4)})C_{j+1,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}C_{j+1,n}^{-1}C_{j,n}\underbrace{C_{i,n}^{-1}(C_{j+1,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}C_{j+1,n})}_{p_3}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}C_{j+1,n}^{-1}\underbrace{C_{j,n}(C_{n,n+1}C_{j+1,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{n,n+1}^{-1})}_{p_3}C_{i,n}^{-1}C_{i,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}C_{j+1,n}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}C_{j+1,n}^{-1}(C_{j+1,n+1}^{-1}\underbrace{C_{n,n+1}C_{j,n}}_{(4)})C_{j,n+1}C_{n,n+1}^{-1}C_{i,n}^{-1}C_{i,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}C_{j+1,n}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}C_{j+1,n}^{-1}(C_{j+1,n+1}^{-1}(C_{j,n}C_{j,n+1})C_{i,n}^{-1}C_{i,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}C_{j+1,n}C_{n,n+1}^{-1}) \\
&= s(C_{i,n}C_{j+1,n}^{-1}C_{j,n}C_{i,n}^{-1}C_{j+1,n}).
\end{aligned}$$

(v) Suponha $i < j < l$ e $l + 1 < n$;

$$\begin{aligned}
s(C_{i,l}^{-1}C_{j,n}C_{i,l}) &= C_{i,l}^{-1}C_{j,n}C_{j,n+1}\underbrace{C_{n,n+1}^{-1}C_{i,l}}_{(4)} = \underbrace{C_{i,j}^{-1}C_{j,n}C_{i,j}}_{(4)}\underbrace{C_{i,j}^{-1}C_{j,n+1}}_{(4)}\underbrace{(C_{i,j}C_{n,n+1}^{-1})}_{(4)} \\
&= (C_{i,n}\underbrace{C_{l+1,n}^{-1}C_{l,n}C_{i,n}^{-1}C_{j,n}C_{l,n}^{-1}C_{l+1,n}}_{(4)})(C_{i,n+1}C_{l+1,n+1}^{-1}C_{l,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{l,n+1}^{-1}C_{l+1,n+1})C_{n,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}(C_{i,n+1}C_{l+1,n}^{-1}C_{l,n}C_{i,n}^{-1}C_{j,n}C_{l,n}^{-1}\underbrace{C_{l+1,n}}_{(4)})C_{l+1,n+1}^{-1}C_{l,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{l,n+1}^{-1}C_{l+1,n+1}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}C_{l+1,n}^{-1}C_{l,n}C_{i,n}^{-1}C_{j,n}\underbrace{C_{l,n}^{-1}(C_{l+1,n+1}^{-1}C_{l,n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{l,n+1}^{-1}C_{l+1,n})}_{p_3}C_{l+1,n+1}C_{n,n+1}^{-1} \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}C_{l+1,n}^{-1}C_{l,n}C_{i,n}^{-1}\underbrace{C_{j,n}(C_{n,n+1}C_{l+1,n+1}^{-1}C_{l,n+1}C_{n,n+1}^{-1}C_{l,n}^{-1})}_{p_3}\underbrace{C_{i,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{l,n+1}^{-1}}_{(4)}s(C_{l+1,n}) \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}C_{l+1,n}^{-1}C_{l,n}\underbrace{C_{i,n}^{-1}(C_{l+1,n+1}^{-1}C_{l,n+1}C_{j,n})}_{p_3}\underbrace{(C_{i,n+1}^{-1}C_{j,n+1}C_{l,n+1}^{-1}C_{l,n}^{-1})}_{(4)}s(C_{l+1,n}) \\
&= C_{i,n}C_{i,n+1}C_{l+1,n}^{-1}\underbrace{C_{l,n}(C_{n,n+1}C_{l+1,n+1}^{-1}C_{l,n+1}C_{n,n+1}^{-1}C_{i,n}^{-1})}_{(4)}\underbrace{(C_{i,n+1}^{-1}C_{j,n}C_{j,n+1}C_{l,n+1}^{-1}C_{l,n}^{-1})}_{(4)}s(C_{l+1,n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_{i,n} C_{i,n+1} C_{l+1,n}^{-1} (C_{l+1,n+1}^{-1} \underbrace{C_{n,n+1} C_{l,n}}_{(4)} C_{l,n+1} C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} s(C_{j,n} C_{l,n}^{-1} C_{l+1,n})) \\
&= s(C_{i,n} C_{l+1,n}^{-1} C_{l,n} C_{i,n}^{-1} C_{j,n} C_{l,n}^{-1} C_{l+1,n}).
\end{aligned}$$

$$5. \begin{cases} \prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} = a_i b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1}, & (1 \leq i \leq n), \text{ se } M = \mathbb{T}, \\ \prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} = b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1}, & (1 \leq i \leq n), \text{ se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$$

(i) Suponha $i = n = 1$.

Mostrar que $s(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) = 1$, se $M = \mathbb{T}$ (resp. $s(b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_1^{-1}) = 1$, se $M = \mathbb{K}$), ou equivalentemente que $s(a_1 b_1) = s(b_1 a_1)$ se $M = \mathbb{T}$ (resp. $s(a_1 b_1) = s(b_1 a_1^{-1})$, se $M = \mathbb{K}$):

$ \begin{aligned} M = \mathbb{T} \\ s(a_1 b_1) &= \underbrace{a_1 a_2}_{(1)} \underbrace{b_1 b_2}_{(6)} = \underbrace{(a_2 a_1)}_{p_1} \underbrace{(b_2 b_1)}_{p_1} \\ &= \underbrace{a_2 (b_2 C_{1,2} a_1)}_{(5)} \underbrace{b_1}_{(5)} = \underbrace{(b_2 a_2 C_{1,2}^{-1})}_{p_4} \underbrace{(b_1 a_1)}_{p_4} \\ &= \underbrace{b_2 (b_1 a_2)}_{(6)} \underbrace{a_1}_{(1)} = (b_1 b_2) (a_1 a_2) = s(b_1 a_1). \end{aligned} $		$ \begin{aligned} M = \mathbb{K} \\ s(a_1 b_1) &= \underbrace{a_1 a_2}_{(1)} \underbrace{b_1 b_2 C_{1,2}}_{(6)} = \underbrace{(a_2 a_1)}_{p_1} \underbrace{(b_2 b_1)}_{p_1} \\ &= \underbrace{a_2 (b_2 C_{1,2} a_1)}_{(5)} \underbrace{b_1}_{(5)} = \underbrace{(b_2 C_{1,2} a_2^{-1})}_{p_4} \underbrace{(b_1 a_1^{-1})}_{p_4} \\ &= \underbrace{b_2 (b_1 a_2^{-1})}_{(6)} a_1^{-1} = (b_1 b_2 C_{1,2}) a_2^{-1} a_1^{-1} = s(b_1 a_1^{-1}). \end{aligned} $
--	--	---

(ii) Suponha $i = n > 1$;

Mostrar que $s(a_n b_n C_{1,n} a_n^{-1} b_n^{-1}) = 1$, se $M = \mathbb{T}$ (resp. $s(b_n C_{1,n} a_n^{-1} b_n^{-1} a_n^{-1}) = 1$, se $M = \mathbb{K}$), ou equivalentemente que $s(a_n b_n) = s(b_n a_n C_{1,n}^{-1})$ se $M = \mathbb{T}$ (resp. $s(a_n b_n) = s(b_n C_{1,n} a_n^{-1})$, se $M = \mathbb{K}$):

$M = \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}
s(a_n b_n) &= \underbrace{a_n a_{n+1}}_{(1)} \underbrace{b_n b_{n+1}}_{(6)} \\
&= (a_{n+1} \underbrace{a_n}_{p_1}) (\underbrace{b_{n+1}}_{(5)} \underbrace{b_n}_{(5)}) \\
&= (b_{n+1} a_{n+1} C_{1,n+1}^{-1}) (b_n a_n C_{1,n}^{-1}) \\
&= b_{n+1} a_{n+1} (C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{C_{n,n+1}}_{p_5} C_{1,n+1}^{-1} b_n a_n C_{1,n}^{-1}) \\
&= b_{n+1} \underbrace{a_{n+1} C_{n,n+1}^{-1}}_{p_4} (\underbrace{b_n C_{1,n+1}^{-1} C_{n,n+1}}_{p_2}) a_n C_{1,n}^{-1} \\
&= b_{n+1} (b_n a_{n+1}) (a_n C_{n,n+1} C_{1,n+1}^{-1}) C_{1,n}^{-1} \\
&= s(b_n a_n C_{1,n}^{-1}).
\end{aligned}$$

$M = \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
s(a_n b_n) &= \underbrace{a_n a_{n+1}}_{(1)} \underbrace{b_n b_{n+1} C_{n,n+1}}_{(6)} \\
&= (a_{n+1} \underbrace{a_n}_{p_1}) (\underbrace{b_{n+1}}_{(5)} \underbrace{b_n}_{(5)} C_{n,n+1}) \\
&= (b_{n+1} C_{1,n+1} \underbrace{a_{n+1}^{-1}}_{p_4}) (b_n C_{1,n} a_n^{-1}) \\
&= b_{n+1} \underbrace{C_{1,n+1} (C_{n,n+1}^{-1} b_n a_{n+1}^{-1})}_{p_5} C_{1,n} a_n^{-1} \\
&= \underbrace{b_{n+1} (b_n C_{n,n+1}^{-1} C_{1,n+1})}_{(6)} \underbrace{(C_{1,n} a_{n+1}^{-1})}_{(4)} a_n^{-1} \\
&= (b_n b_{n+1} C_{n,n+1}) (C_{1,n+1} C_{1,n} C_{n,n+1}^{-1}) a_{n+1}^{-1} a_n^{-1} \\
&= s(b_n C_{1,n} a_n^{-1}).
\end{aligned}$$

(iii) Suponha $1 \leq i < n$;

$M = \mathbb{T}$;

Temos que mostrar que $s(a_i b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1}) = s(\prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j})$, usando a relação (5) em $P_{n+1}(\mathbb{T})$ temos

$$s(a_i b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1}) = a_i b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} = \prod_{j=i+1}^{n+1} C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j}$$

em $P_{n+1}(T)$. Por outro lado:

$$\begin{aligned}
s\left(\prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j}\right) &= s\left(\left(\prod_{j=i+1}^{n-1} C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j}\right) (C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n})\right) \\
&= \left(\prod_{j=i+1}^{n-1} C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j}\right) (C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1}) (C_{i+1,n} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1}).
\end{aligned}$$

Portanto, basta mostrarmos que

$$(C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1}) (C_{i+1,n} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) = C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n} C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1},$$

que podemos verificar facilmente utilizando a relação (4), pois $C_{n,n+1}$ comuta com $C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1}$ e com $C_{i+1,n} C_{i+1,n+1}$, e $C_{i,n+1}$ comuta com $C_{i,n}$, $C_{i+1,n}$.

$$M = \mathbb{K};$$

Temos que mostrar que $s(b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1}) = s(\prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1})$, usando a relação (5) em $P_{n+1}(\mathbb{K})$, temos

$$s(b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1}) = b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1} = \prod_{j=i+1}^{n+1} C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}$$

em $P_{n+1}(T)$. Por outro lado:

$$\begin{aligned} s\left(\prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}\right) &= s\left(\left(\prod_{j=i+1}^{n-1} C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}\right)(C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1})\right) \\ &= \left(\prod_{j=i+1}^{n-1} C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1}\right) (C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1})(C_{n,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{i+1,n}^{-1}). \end{aligned}$$

Portanto, basta mostrarmos que

$$(C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1})(C_{n,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{i+1,n}^{-1}) = C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1},$$

que podemos verificar facilmente utilizando a relação (4), pois $C_{i+1,n}$ comuta com $C_{i,n+1}, C_{i+1,n+1}$.

$$6. \begin{cases} b_n b_i = b_i b_n, & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b_n b_i = b_i b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1}, & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$$

Mostremos inicialmente o caso $M = \mathbb{T}$:

$$s(b_n b_i) = b_n b_{n+1} b_i = b_i b_n b_{n+1} = s(b_i b_n)$$

usamos apenas o fato que os geradores b_j comutam entre si, pela relação (6).

Agora o caso que $M = \mathbb{K}$, é um pouco mais complicado e precisamos dividir em dois subcasos:

(i) Suponha $i + 1 = n$;

$$\begin{aligned} s(b_n b_i) &= b_n b_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1} b_i}_{(8)} = b_n \underbrace{b_{n+1} (b_i C_{n,n+1})}_{(6)} \\ &= \underbrace{b_n (b_i b_{n+1} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1})}_{(6)} C_{n,n+1} = (b_i b_n \underbrace{C_{i,n}}_{(8)}) b_{n+1} C_{i,n+1} \\ &= b_i b_n (b_{n+1} C_{i,n}) C_{i,n+1} = b_i b_n b_{n+1} \underbrace{(C_{n,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) C_{i,n} C_{i,n+1}}_{(4)} \\ &= b_i b_n b_{n+1} C_{n,n+1} (C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) = s(b_i b_n C_{i,n}). \end{aligned}$$

(ii) Suponha $i + 1 < n$;

$$\begin{aligned}
s(b_n b_i) &= b_n b_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1} b_i}_{(8)} = b_n \underbrace{b_{n+1} (b_i C_{n,n+1})}_{(6)} \\
&= \underbrace{b_n (b_i b_{n+1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1})}_{(6)} C_{n,n+1} = (b_i b_n \underbrace{C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1}}_{(8)}) b_{n+1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1} \\
&= b_i b_n (b_{n+1} C_{i,n} \underbrace{C_{i+1,n}^{-1}}_{(4)}) C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1} \\
&= b_i b_n b_{n+1} (C_{n,n+1} \underbrace{C_{n,n+1}^{-1}}_{(4)}) C_{i,n} (C_{i,n+1} \underbrace{C_{i+1,n}^{-1}}_{(4)}) C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1} \\
&= b_i b_n b_{n+1} C_{n,n+1} (C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) (C_{n,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{i+1,n}^{-1}) = s(b_i b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1}).
\end{aligned}$$

$$7. \begin{cases} b_i^{-1} a_n b_i = a_n b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_n^{-1}, & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b_i^{-1} a_n b_i = a_n b_n (C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1})^{-1} b_n^{-1}, & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$$

Novamente vamos separar o caso que M é o toro ou a garrafa de Klein.

(i) Suponha $i + 1 = n$;

$$M = \mathbb{T}$$

$$\begin{aligned}
s(b_i^{-1} a_n b_i) &= b_i^{-1} a_n a_{n+1} b_i = \underbrace{b_i^{-1} a_n b_i}_{(7)} \underbrace{b_i^{-1} a_{n+1} b_i}_{(7)} \\
&= (a_n b_n C_{i,n} \underbrace{b_n^{-1}}_{(7)}) (a_{n+1} b_{n+1} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}) \\
&= a_n b_n \underbrace{C_{i,n} (a_{n+1} b_{n+1} C_{n,n+1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1})}_{(3) \text{ e } (8)} b_{n+1} \underbrace{C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}}_{(6)} \\
&= a_n \underbrace{b_n (a_{n+1} b_{n+1} C_{i,n})}_{p_4} C_{n,n+1} \underbrace{(b_n^{-1}) C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}}_{p_5} \\
&= a_n (a_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} b_n}_{(8)}) b_{n+1} C_{i,n} C_{n,n+1} (C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} b_n^{-1}) b_{n+1}^{-1} \\
&= a_n a_{n+1} (b_n b_{n+1} C_{n,n+1}^{-1}) C_{i,n} C_{i,n+1} b_n^{-1} b_{n+1}^{-1} = s(a_n b_n C_{i,n} b_n^{-1}).
\end{aligned}$$

$$M = \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned}
s(b_i^{-1}a_nb_i) &= b_i^{-1}a_na_{n+1}b_i = \underbrace{b_i^{-1}a_nb_i}_{(7)} \underbrace{b_i^{-1}a_{n+1}b_i}_{(7)} \\
&= (a_nb_n C_{i,n}^{-1} \underbrace{b_n^{-1}}_{(7)}) (a_{n+1} b_{n+1} C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}) \\
&= a_nb_n \underbrace{C_{i,n}^{-1} (a_{n+1} b_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1})}_{(3) \text{ e } (8)} \underbrace{b_{n+1} C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}}_{(6)} \\
&= a_n \underbrace{b_n (a_{n+1} b_{n+1} C_{i,n}^{-1})}_{p_4} \underbrace{(b_n^{-1}) C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}}_{p_5} \\
&= a_n (a_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} b_n}_{(8)}) b_{n+1} C_{i,n}^{-1} (C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1} \underbrace{b_{n+1}^{-1}}_{(6)}) b_{n+1}^{-1} \\
&= a_n a_{n+1} (b_n b_{n+1} C_{n,n+1}) C_{i,n}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1} (C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1}) = s(a_n b_n C_{i,n}^{-1} b_n^{-1}).
\end{aligned}$$

(ii) Suponha $i + 1 < n$;

$$M = \mathbb{T}$$

$$\begin{aligned}
s(b_i^{-1}a_nb_i) &= b_i^{-1}a_na_{n+1}b_i = \underbrace{b_i^{-1}a_nb_i}_{(7)} \underbrace{b_i^{-1}a_{n+1}b_i}_{(7)} \\
&= (a_nb_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} \underbrace{b_n^{-1}}_{(7)}) (a_{n+1} b_{n+1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}) \\
&= a_nb_n \underbrace{C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} (a_{n+1} b_{n+1} C_{n,n+1} \underbrace{b_{n+1}^{-1} b_n^{-1}}_{(6)})}_{(3) \text{ e } (8)} \underbrace{b_{n+1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}}_{(6)} \\
&= a_n \underbrace{b_n (a_{n+1} b_{n+1} C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1})}_{p_4} C_{n,n+1} \underbrace{(b_n^{-1}) C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}}_{p_5} \\
&= a_n (a_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} b_n}_{(8)}) b_{n+1} C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} C_{n,n+1} (C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1} b_n^{-1}) b_{n+1}^{-1} \\
&= a_n a_{n+1} (b_n b_{n+1} C_{n,n+1}^{-1}) C_{i,n} \underbrace{C_{i+1,n}^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1} b_n^{-1} b_{n+1}^{-1}}_{(4)} \\
&= a_n a_{n+1} b_n b_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n} (C_{i,n+1} C_{i+1,n}^{-1}) C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1} b_n^{-1} b_{n+1}^{-1} \\
&= s(a_n b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_n^{-1}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= \mathbb{K} \\
s(b_i^{-1}a_nb_i) &= b_i^{-1}a_na_{n+1}b_i = \underbrace{b_i^{-1}a_nb_i}_{(7)} \underbrace{b_i^{-1}a_{n+1}b_i}_{(7)} \\
&= (a_nb_n C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} \underbrace{b_n^{-1}}_{(7)}) (a_{n+1} b_{n+1} C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}) \\
&= a_nb_n \underbrace{C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1}}_{(3) \text{ e } (8)} \underbrace{(a_{n+1} b_{n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1})}_{(6)} C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1} \\
&= a_n \underbrace{b_n (a_{n+1} b_{n+1} C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1})}_{p_4} \underbrace{(b_n^{-1}) C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}}_{p_5} \\
&= a_n (a_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} b_n}_{(8)}) b_{n+1} C_{i+1,n} \underbrace{C_{i,n}^{-1} (C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1}^{-1} b_n^{-1})}_{p_3} b_{n+1}^{-1} \\
&= a_n a_{n+1} (b_n b_{n+1} C_{n,n+1}) C_{i+1,n} (C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1}) C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1} (C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1}) \\
&= s(a_nb_n C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} b_n^{-1}).
\end{aligned}$$

$$8. \begin{cases} b_i^{-1} C_{j,n} b_i = C_{j,n}, & (i < j < n); \\ b_n^{-1} C_{j,k} b_n = C_{j,k}, & (j < k < n); \\ b_i^{-1} C_{j,n} b_i = \begin{cases} C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} C_{j,n} b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_n^{-1}, & (j \leq i < n), M = \mathbb{T}, \\ C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} C_{j,n} b_n (C_{i,n} C_{i+1,n})^{-1} b_n^{-1}, & (j \leq i < n), M = \mathbb{K}. \end{cases} \end{cases}$$

Analisaremos caso a caso:

(i) Suponha $i < j < n$ ($M = \mathbb{T}$ ou $M = \mathbb{K}$);

$$s(b_i^{-1} C_{j,n} b_i) = b_i^{-1} C_{j,n} C_{j,n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_i = C_{j,n} C_{j,n+1} C_{n,n+1}^{-1} = s(C_{j,n})$$

pois b_i comuta com $C_{j,n}$, $C_{j,n+1}$ e $C_{n,n+1}^{-1}$.

(ii) Suponha $j < k < n$;

Se $M = \mathbb{T}$, temos:

$$s(b_n^{-1} C_{j,k} b_n) = b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} C_{j,k} b_n b_{n+1} = C_{j,k} = s(C_{j,k})$$

pois b_n e b_{n+1} comutam com $C_{j,k}$.

Se $M = \mathbb{K}$, temos:

$$s(b_n^{-1} C_{j,k} b_n) = C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} C_{j,k} b_n b_{n+1} C_{n,n+1} = C_{j,k} = s(C_{j,k})$$

pois b_n, b_{n+1} e $C_{n,n+1}$ comutam com $C_{j,k}$.

(iii) Suponha $i = j$ e $i + 1 = n$;

$$\begin{aligned}
M &= \mathbb{T} \\
s(b_i^{-1}C_{i,n}b_i) &= \underbrace{b_i^{-1}C_{i,n}C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}}_{(4) \text{ e } (8)} b_i \\
&= (C_{n,n+1}^{-1}b_i^{-1}C_{i,n+1}C_{i,n})b_i \\
&= C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{b_i^{-1}C_{i,n+1}b_i}_{(8)} \underbrace{b_i^{-1}C_{i,n}b_i}_{(8)} \\
&= C_{n,n+1}^{-1} (C_{n,n+1}b_{n+1}C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{b_{n+1}^{-1}}_{(6) \text{ e } (8)}) (b_n C_{i,n} b_n^{-1}) \\
&= b_{n+1} \underbrace{C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}}_{p_5} (b_n C_{i,n} b_{n+1}^{-1}) b_n^{-1} \\
&= \underbrace{b_{n+1}(b_n C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1})}_{(6)} \underbrace{C_{i,n}}_{(4)} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= (b_n b_{n+1}) (C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(b_n C_{i,n} b_n^{-1}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= \mathbb{K} \\
s(b_i^{-1}C_{i,n}b_i) &= \underbrace{b_i^{-1}C_{i,n}C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}}_{(4) \text{ e } (8)} b_i \\
&= (C_{n,n+1}^{-1}b_i^{-1}C_{i,n+1}C_{i,n})b_i \\
&= C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{b_i^{-1}C_{i,n+1}b_i}_{(8)} \underbrace{b_i^{-1}C_{i,n}b_i}_{(8)} \\
&= C_{n,n+1}^{-1} (C_{n,n+1}b_{n+1}C_{n,n+1}C_{i,n+1}^{-1} \underbrace{b_{n+1}^{-1}}_{(6)}) (b_n C_{i,n}^{-1} b_n^{-1}) \\
&= b_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1}C_{i,n+1}^{-1}}_{p_5} (b_n C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{b_{n+1}^{-1}}_{(8)}) C_{i,n}^{-1} b_n^{-1} \\
&= \underbrace{b_{n+1}(b_n C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1})}_{(6)} C_{n,n+1}^{-1} (C_{i,n}^{-1} b_{n+1}^{-1}) b_n^{-1} \\
&= (b_n b_{n+1} C_{n,n+1}) C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} (C_{n,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(b_n C_{i,n}^{-1} b_n^{-1}).
\end{aligned}$$

(iv) Suponha $j = i$ e $i + 1 < n$;

$M = \mathbb{T}$;

$$\begin{aligned}
s(b_i^{-1}C_{i,n}b_i) &= \underbrace{b_i^{-1}C_{i,n}C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}}_{(4) \text{ e } (8)} b_i = (C_{n,n+1}^{-1}b_i^{-1}C_{i,n+1}C_{i,n})b_i = C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{b_i^{-1}C_{i,n+1}b_i}_{(8)} \underbrace{b_i^{-1}C_{i,n}b_i}_{(8)} \\
&= C_{n,n+1}^{-1} (C_{i+1,n+1}b_{n+1}C_{i,n+1}C_{i+1,n+1}^{-1} \underbrace{b_{n+1}^{-1}}_{(6) \text{ e } (8)}) (C_{i+1,n}b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_n^{-1}) \\
&= C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} \underbrace{b_{n+1}C_{i,n+1}C_{i+1,n+1}^{-1}}_{(4) \text{ e } (8)} (C_{i+1,n}b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_n^{-1}) b_n^{-1} \\
&= \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1}}_{(4)} (C_{i+1,n}b_{n+1} \underbrace{C_{i,n+1}C_{i+1,n+1}^{-1}}_{p_5}) b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= (C_{i+1,n}C_{i+1,n+1}C_{n,n+1}^{-1}) b_{n+1} (b_n C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} \underbrace{C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1}}_{p_3}) C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= C_{i+1,n} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{b_{n+1}b_n}_{(6)} \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1}}_{(4)} (C_{i,n} C_{n,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1}) C_{i+1,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= C_{i+1,n} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1} (b_n b_{n+1}) (C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) C_{n,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{i+1,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}
\end{aligned}$$

$$= s(C_{i+1,n} b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_n^{-1}).$$

$$M = \mathbb{K};$$

$$\begin{aligned}
s(b_i^{-1} C_{i,n} b_i) &= \underbrace{b_i^{-1} C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1}}_{(4) \text{ e } (8)} b_i = (C_{n,n+1}^{-1} b_i^{-1} C_{i,n+1} C_{i,n}) b_i = C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{b_i^{-1} C_{i,n+1} b_i}_{(8)} \underbrace{b_i^{-1} C_{i,n} b_i}_{(8)} \\
&= C_{n,n+1}^{-1} (C_{i+1,n+1} b_{n+1} C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1} \underbrace{b_{n+1}^{-1}}_{(8)}) (C_{i+1,n} b_n C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} b_n^{-1}) \\
&= C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} \underbrace{b_{n+1} C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1}}_{(4) \text{ e } (8)} \underbrace{(C_{i+1,n} b_{n+1}^{-1})}_{(6)} b_n C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} b_n^{-1} \\
&= \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1}}_{(4)} \underbrace{(C_{i+1,n} b_{n+1} C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1})}_{p_5} \underbrace{(b_n C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1})}_{(8)} C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} b_n^{-1} \\
&= (C_{i+1,n} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) \underbrace{b_{n+1}^{-1}}_{(6)} \underbrace{(b_n C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1})}_{(4)} C_{n,n+1}^{-1} (C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} b_{n+1}^{-1}) b_n^{-1} \\
&= C_{i+1,n} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1} (b_n b_{n+1} C_{n,n+1}) \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} (C_{i+1,n} C_{i,n+1}^{-1})}_{(4)} C_{i,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= C_{i+1,n} C_{i+1,n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_n b_{n+1} C_{n,n+1} (C_{i+1,n+1} C_{i+1,n} C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} C_{n,n+1}^{-1}) b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(C_{i+1,n} b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_n^{-1}).
\end{aligned}$$

(v) Suponha $j < i$ e $i + 1 = n$;

$$M = \mathbb{T};$$

$$\begin{aligned}
s(b_i^{-1} C_{j,n} b_i) &= \underbrace{b_i^{-1} C_{j,n} C_{j,n+1} C_{n,n+1}^{-1}}_{(4) \text{ e } (8)} b_i = (C_{n,n+1}^{-1} b_i^{-1} C_{j,n+1} C_{j,n}) b_i = C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{b_i^{-1} C_{j,n+1} b_i}_{(8)} \underbrace{b_i^{-1} C_{j,n} b_i}_{(8)} \\
&= C_{n,n+1}^{-1} (C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{j,n} b_{n+1} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{b_{n+1}^{-1}}_{(6) \text{ e } (8)}) (C_{i,n}^{-1} C_{j,n} b_n C_{i,n} b_n^{-1}) \\
&= C_{i,n+1}^{-1} C_{j,n+1} b_{n+1} \underbrace{C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1} (C_{i,n}^{-1} C_{j,n} b_n C_{i,n} b_n^{-1})}_{p_6} b_n^{-1} \\
&= C_{i,n+1}^{-1} \underbrace{C_{j,n+1} b_{n+1} (C_{i,n}^{-1} C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1})}_{(4) \text{ e } (8)} \underbrace{C_{j,n} b_n C_{i,n} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1}}_{p_3} \\
&= C_{i,n+1}^{-1} (C_{i,n}^{-1} \underbrace{C_{j,n+1} b_{n+1}}_{(4) \text{ e } (8)}) (C_{j,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) b_n C_{i,n} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} (C_{j,n} C_{j,n+1} b_{n+1}) \underbrace{C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_n}_{p_5} C_{i,n} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1}}_{(4)} \underbrace{(C_{n,n+1} C_{n,n+1}^{-1})}_{(4)} \underbrace{C_{j,n} C_{j,n+1}}_{(4)} \underbrace{b_{n+1} (b_n C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1})}_{(6)} \underbrace{C_{i,n} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1}}_{(4)} \\
&= (C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1}) (C_{j,n} C_{j,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) (b_n b_{n+1}) (C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(C_{i,n}^{-1} C_{j,n} b_n C_{i,n} b_n^{-1}).
\end{aligned}$$

$$M = \mathbb{K};$$

$$\begin{aligned}
s(b_i^{-1} C_{j,n} b_i) &= \underbrace{b_i^{-1} C_{j,n} C_{j,n+1} C_{n,n+1}^{-1}}_{(4) \text{ e } (8)} b_i = (C_{n,n+1}^{-1} b_i^{-1} C_{j,n+1} C_{j,n}) b_i = C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{b_i^{-1} C_{j,n+1} b_i}_{(8)} \underbrace{b_i^{-1} C_{j,n} b_i}_{(8)} \\
&= C_{n,n+1}^{-1} (C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{j,n+1} b_{n+1} C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} \underbrace{b_{n+1}^{-1}}_{(8)}) (C_{i,n}^{-1} C_{j,n} b_n C_{i,n}^{-1} b_n^{-1}) \\
&= C_{i,n+1}^{-1} C_{j,n+1} b_{n+1} \underbrace{C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1}}_{p_6} (C_{i,n}^{-1} C_{j,n} \underbrace{b_{n+1}^{-1}}_{(6)}) \underbrace{C_{i,n}^{-1} b_n^{-1}}_{(8)} \\
&= C_{i,n+1}^{-1} \underbrace{C_{j,n+1} b_{n+1}}_{(4) \text{ e } (8)} \underbrace{(C_{i,n}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1})}_{p_3} C_{j,n} \underbrace{(b_n C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1})}_{(8)} C_{i,n}^{-1} b_n^{-1} \\
&= C_{i,n+1}^{-1} (C_{i,n}^{-1} \underbrace{C_{j,n+1} b_{n+1}}_{(4) \text{ e } (8)}) (C_{j,n} C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1}) b_n C_{n,n+1}^{-1} (C_{i,n}^{-1} b_{n+1}^{-1}) b_n^{-1} \\
&= C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} (C_{j,n} C_{j,n+1} b_{n+1}) \underbrace{C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} b_n}_{(8)} C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= \underbrace{C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1}}_{(4)} \underbrace{(C_{n,n+1} C_{n,n+1}^{-1})}_{(4)} \underbrace{C_{j,n} C_{j,n+1}}_{(4)} \underbrace{b_{n+1} (b_n C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1})}_{(6)} C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= (C_{n,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1}) (C_{j,n} C_{j,n+1} C_{n,n+1}^{-1}) (b_n b_{n+1} C_{n,n+1}) \underbrace{C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} (C_{n,n+1} C_{n,n+1}^{-1})}_{(4)} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(C_{i,n}^{-1} C_{j,n} b_n C_{i,n}^{-1} b_n^{-1}).
\end{aligned}$$

(vi) Suponha $j < i$ e $i + 1 < n$;

$$M = \mathbb{T};$$

$$\begin{aligned}
s(b_i^{-1} C_{j,n} b_i) &= \underbrace{b_i^{-1} C_{j,n} C_{j,n+1} C_{n,n+1}^{-1}}_{(4) \text{ e } (8)} b_i = (C_{n,n+1}^{-1} b_i^{-1} C_{j,n+1} C_{j,n}) b_i = C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{b_i^{-1} C_{j,n+1} b_i}_{(8)} \underbrace{b_i^{-1} C_{j,n} b_i}_{(8)} \\
&= C_{n,n+1}^{-1} (C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{j,n+1} b_{n+1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} \underbrace{b_{n+1}^{-1}}_{(6) \text{ e } (8)}) (C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} C_{j,n} b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_n^{-1}) \\
&= C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} \underbrace{C_{i,n+1}^{-1} C_{j,n+1} b_{n+1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1}}_{(4) \text{ e } (8)} (C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} C_{j,n} b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_n^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} (C_{i+1,n} C_{i,n+1}^{-1} C_{j,n+1} b_{n+1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1})}_{p_6} C_{j,n} b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(C_{i+1,n}) C_{i,n+1}^{-1} \underbrace{C_{j,n+1} b_{n+1} (C_{i,n}^{-1} C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1})}_{p_3} C_{j,n} b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(C_{i+1,n}) C_{i,n+1}^{-1} \underbrace{(C_{i,n}^{-1} C_{j,n+1} b_{n+1})}_{(4) \text{ e } (8)} \underbrace{(C_{j,n} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1})}_{p_5} b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(C_{i+1,n}) C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} \underbrace{(C_{j,n} C_{j,n+1} b_{n+1})}_{(6)} \underbrace{(b_n C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} C_{n,n+1})}_{p_3} C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(C_{i+1,n}) C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} C_{j,n} C_{j,n+1} (b_n b_{n+1}) C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1} (C_{i,n} C_{n,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1}) C_{i+1,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} C_{j,n} b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_n^{-1}).
\end{aligned}$$

$$M = \mathbb{K};$$

$$\begin{aligned}
s(b_i^{-1} C_{j,n} b_i) &= \underbrace{b_i^{-1} C_{j,n} C_{j,n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_i}_{(4) \text{ e } (8)} = (C_{n,n+1}^{-1} b_i^{-1} C_{j,n+1} C_{j,n}) b_i = C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{b_i^{-1} C_{j,n+1} b_i}_{(8)} \underbrace{b_i^{-1} C_{j,n} b_i}_{(8)} \\
&= C_{n,n+1}^{-1} (C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{j,n+1} b_{n+1} C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}) \underbrace{(C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} C_{j,n} b_n C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} b_n^{-1})}_{(8)} \\
&= C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} \underbrace{C_{i,n+1}^{-1} C_{j,n+1} b_{n+1} C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1} (C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} C_{j,n} b_{n+1}^{-1})}_{(4) \text{ e } (8)} b_n C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} b_n^{-1} \\
&= \underbrace{C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} (C_{i+1,n} C_{i,n+1}^{-1} C_{j,n+1} b_{n+1} C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1})}_{p_6} C_{j,n} (b_n C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}) \underbrace{C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} b_n^{-1}}_{(8)} \\
&= s(C_{i+1,n}) C_{i,n+1}^{-1} \underbrace{C_{j,n+1} b_{n+1} (C_{i,n}^{-1} C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1})}_{(4) \text{ e } (8)} C_{j,n} b_n C_{n,n+1}^{-1} \underbrace{(C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} b_{n+1}^{-1})}_{p_3} b_n^{-1} \\
&= s(C_{i+1,n}) C_{i,n+1}^{-1} \underbrace{(C_{i,n}^{-1} C_{j,n+1} b_{n+1})}_{(4) \text{ e } (8)} \underbrace{(C_{j,n} C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1})}_{(8)} b_n C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(C_{i+1,n}) \underbrace{C_{i,n+1}^{-1} C_{i,n}^{-1} (C_{j,n} C_{j,n+1} b_{n+1})}_{(6)} \underbrace{(b_n C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} C_{i,n+1}^{-1} C_{n,n+1})}_{(8)} C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} C_{j,n}) (b_n b_{n+1} C_{n,n+1}) C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} \underbrace{C_{i,n+1}^{-1} C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} (C_{n,n+1} C_{n,n+1}^{-1})}_{(4)} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} C_{j,n}) (b_n b_{n+1} C_{n,n+1}) C_{n,n+1}^{-1} C_{i+1,n+1} (C_{i+1,n} C_{i,n+1}^{-1}) C_{i,n}^{-1} C_{n,n+1} C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_n^{-1} \\
&= s(C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} C_{j,n} b_n C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} b_n^{-1}),
\end{aligned}$$

terminando assim a demonstração da Proposição 2.2.1. ■

A possibilidade de escrever os grupos de tranças puras como produto semi-direto foi muito útil para encontrarmos propriedades sobre esses grupos. Tal resultado foi importante no estudo das séries centrais descendentes, que serão exploradas no Capítulo 3. Outra propriedade interessante que conseguimos concluir é com respeito ao centro de tais grupos. Provamos o seguinte:

Proposição 2.2.3. *O centro de $B_n(\mathbb{T})$ é abeliano livre de posto dois. Em particular*

$$Z(B_n(\mathbb{T})) = \langle (a_1 \cdots a_n), (b_1 \cdots b_n) \rangle.$$

Proposição 2.2.4. *O centro de $B_n(\mathbb{K})$ é abeliano livre de posto um. Em particular*

$$Z(B_n(\mathbb{K})) = \langle (b_n \cdots b_1)^2 \rangle.$$

O resultado da Proposição 2.2.3 já era conhecido na literatura [10, 57], foi apenas um exercício verificar o mesmo resultado na nossa notação. Para a garrafa de Klein, era conhecido o fato do centro ser abeliano livre, mas ampliamos o resultado ao conhecer qual elemento gera o centro.

Demonstração: Para demonstrarmos a Proposição 2.2.4, usamos a mesma ideia do artigo [57], usando os 3 passos a seguir. Denotaremos $\beta_n = (b_n \cdots b_1)$ e $Z_n = \langle \beta_n^2 \rangle$, iremos provar por indução que Z_n é o centro de $B_n(\mathbb{K})$. Para $n = 1$, sabemos que a afirmação é verdadeira. Agora suponha que o mesmo vale para todo $p < n$, temos os seguintes passos.

Passo 1. $Z(P_n(\mathbb{K})) \subset Z_n$.

Tome $g \in Z(P_n(\mathbb{K}))$, considerarmos a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth:

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}) \rightarrow P_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{p} P_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow 1.$$

Temos que $p(g) \in Z(P_{n-1}(\mathbb{K}))$, por indução $Z(P_{n-1}(\mathbb{K})) = Z_{n-1}$. Ainda, $p(Z_n) = Z_{n-1}$. Portanto, podemos escolher $h \in Z_n$ tal que $p(h) = p(g)$. Escrevemos $g' = gh^{-1}$. Então $g' \in Z(P_n(\mathbb{K}))$ e $g' \in \pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\})$ (pois $p(g') = 1$). Logo, $g' \in Z(\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\})) = \{1\}$, o que implica que $g' = 1$, ou seja $g = h \in Z_n$.

Passo 2. $Z(B_n(\mathbb{K})) \subset P_n(\mathbb{K})$.

Seja $g \in B_n(\mathbb{K})$. Suponha que existem $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ tal que a corda i (que tem ponto inicial p_i) tem p_j como ponto final. Provemos que $g \notin Z(B_n(\mathbb{K}))$. Seja $a_i \in P_n(\mathbb{K})$. Considere a seqüência exata curta abaixo:

$$1 \rightarrow P_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow P_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\rho_i} \pi_1(\mathbb{K}) \rightarrow 1$$

onde ρ_i é a função que “esquece” todas as cordas com exceção da corda i . Temos então que $\rho_i(a_i) \neq 1$ e $\rho_i(ga_i g^{-1}) = 1$, assim $ga_i g^{-1} \neq a_i$, portanto $g \notin Z(B_n(\mathbb{K}))$.

Passo 3. $Z_n \subset Z(P_n(\mathbb{K})) \Rightarrow Z_n \subset Z(B_n(\mathbb{K}))$.

Para isso usaremos a secção $s : P_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow P_n(\mathbb{K})$ da Proposição 2.2.1 e estamos na hipótese de indução que $Z_{n-1} = \langle \beta_{n-1}^2 \rangle$ é o centro de $P_{n-1}(\mathbb{K})$. Precisamos provar que o elemento $\beta_n^2 = (b_n \cdots b_1)^2$ comuta com todos os geradores de $P_n(\mathbb{K})$. Sabemos que $s(\beta_{n-1}^2) = \beta_n^2$, assim

$$s(\beta_{n-1}^2 a_i) = s(a_i \beta_{n-1}^2) \Rightarrow \begin{cases} \beta_n^2 a_i = a_i \beta_n^2, & (1 \leq i < n-1) \\ \beta_n^2 \cdot a_{n-1} a_n = a_{n-1} a_n \cdot \beta_n^2, & (i = n-1) \end{cases}$$

$$s(\beta_{n-1}^2 b_i) = s(b_i \beta_{n-1}^2) \Rightarrow \begin{cases} \beta_n^2 b_i = b_i \beta_n^2, & (1 \leq i < n-1) \\ \beta_n^2 \cdot b_n b_{n-1} = b_n b_{n-1} \cdot \beta_n^2, & (i = n-1) \end{cases}$$

$$s(\beta_{n-1}^2 C_{i,j}) = s(C_{i,j} \beta_{n-1}^2) \Rightarrow \begin{cases} \beta_n^2 C_{i,j} = C_{i,j} \beta_n^2, & (1 \leq i < j < n-1) \\ \beta_n^2 \cdot C_{i,n-1} C_{i,n} C_{n-1,n}^{-1} = C_{i,n-1} C_{i,n} C_{n-1,n}^{-1} \cdot \beta_n^2, & (1 \leq i < j = n-1). \end{cases}$$

Portanto só falta provar que β_n^2 comuta com a_n, b_n , pois uma vez provado isso, teremos que

$$\begin{aligned} \beta_n^2 \cdot a_{n-1} a_n &= a_{n-1} \underbrace{a_n \cdot \beta_n^2}_{\beta_n^2 a_n} = a_{n-1} \beta_n^2 a_n \\ &\Rightarrow \beta_n^2 a_{n-1} = a_{n-1} \beta_n^2. \end{aligned}$$

Assim β_n comuta com a_i para todo $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} b_n \beta_n^2 b_{n-1} &= \underbrace{\beta_n^2 \cdot b_n}_{\beta_n^2 b_n} b_{n-1} = b_n b_{n-1} \cdot \beta_n^2 \\ &\Rightarrow \beta_n^2 b_{n-1} = b_{n-1} \beta_n^2. \end{aligned}$$

Assim β_n^2 comuta com b_i para todo $i = 1, \dots, n$. Agora, usamos a relação (5) de $P_n(\mathbb{K})$, dada pelo Teorema 1.3.1, e temos que $C_{1,n} = b_n^{-1}a_n b_n a_n$, portanto $C_{1,n}$ comuta com β_n^2 . Supondo que $C_{i,n}$ comuta com β_n^2 e usando a relação 2 de $P_n(\mathbb{K})$, temos que $C_{i+1,n} = C_{i,n}a_n^{-1}b_n^{-1}a_i^{-1}b_n a_i a_n$, portanto $C_{i+1,n}$ comuta com β_n^2 . Concluímos assim que β_n^2 comuta com $C_{i,n}$ para todo $i = 1, \dots, n-1$.

Para finalizar, usamos $\beta_n^2 \cdot C_{i,n-1} C_{i,n} C_{n-1,n}^{-1} = C_{i,n-1} C_{i,n} C_{n-1,n}^{-1} \cdot \beta_n^2$ para concluir que β_n comuta com $C_{i,n-1}$ para todo $i = 1, \dots, n-2$.

Agora provemos que a_n e b_n comutam com β_n^2 .

- a_n comuta com β_n^2 :

Usaremos a relação $C_{1,n}a_n^{-1}b_i = C_{i+1,n}b_i C_{i,n}^{-1}C_{1,n}a_n^{-1}$, para demonstrá-la, note que

$$\begin{aligned}
C_{1,n} \underbrace{a_n^{-1}b_i}_{(7) \text{ e } (8)} &= C_{1,n}(C_{i,n}^{-1}b_i C_{i+1,n}a_n^{-1}) = \underbrace{(b_i b_i^{-1})}_{(8)} C_{1,n} \underbrace{(b_i b_i^{-1})}_{(8)} C_{i,n}^{-1}b_i C_{i+1,n}a_n^{-1} \\
&= \underbrace{b_i}_{(8)} \underbrace{(C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} C_{1,n} b_n C_{i+1,n} C_{i,n}^{-1} b_n^{-1})}_{(8)} (b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} b_n^{-1} C_{i+1,n}^{-1}) C_{i+1,n} a_n \\
&= (C_{i+1,n} b_i) C_{i,n}^{-1} C_{1,n} a_n.
\end{aligned}$$

Agora, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\underbrace{a_n(b_n b_{n-1} \cdots b_1)}_{(5)} &= (b_n \underbrace{C_{1,n} a_n^{-1}}_{(5)}) b_{n-1} \cdots b_1 = b_n (b_{n-1} C_{n-1,n}^{-1} \underbrace{C_{1,n} a_n^{-1}}_{(5)}) b_{n-2} \cdots b_1 \\
&= b_n b_{n-1} C_{n-1,n}^{-1} (C_{n-1,n} b_{n-2} C_{n-2,n}^{-1} C_{1,n} a_n^{-1}) b_{n-3} \cdots b_1 \\
&= b_n b_{n-1} b_{n-2} C_{n-2,n}^{-1} \underbrace{C_{1,n} a_n^{-1} b_{n-3}}_{(5)} \cdots b_1 \\
&= b_n b_{n-1} b_{n-2} C_{n-2,n}^{-1} (C_{n-2,n} b_{n-3} \underbrace{C_{1,n} a_n^{-1}}_{(5)}) b_{n-4} \cdots b_1 \\
&\vdots \\
&= b_n \cdots b_3 C_{3,n}^{-1} (C_{3,n} b_2 C_{2,n}^{-1} \underbrace{C_{1,n} a_n^{-1}}_{(5)}) b_1 \\
&= b_n \cdots b_3 b_2 C_{2,n}^{-1} (C_{2,n} b_1 C_{1,n}^{-1} C_{1,n} a_n^{-1}) \\
&= b_n \cdots b_1 a_n^{-1} = \beta_n a_n^{-1}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $a_n \beta_n^2 = \beta_n a_n^{-1} \beta_n = \beta_n^2 a_n$.

- b_n comuta com β_n^2 ;

Usaremos a relação: $b_i b_n C_{i,n} = b_n C_{i+1,n} b_i$, que obtemos pelas relações (6) e (8).

Temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
b_n \cdot (\underbrace{b_n b_{n-1}} b_{n-2} \cdots b_1) &= b_n (b_{n-1} \underbrace{b_n C_{n-1,n}} b_{n-2} \cdots b_1) \\
&= b_n b_{n-1} (b_{n-2} \underbrace{b_n C_{n-2,n}} b_{n-2} \cdots b_1) \\
&\vdots \\
&= b_n \cdots b_3 (b_2 \underbrace{b_n C_{2,n}} b_1) = b_n \cdots b_2 (b_1 b_n C_{1,n}).
\end{aligned}$$

Assim $b_n \beta_n = \beta_n \underbrace{b_n C_{1,n}}_{(5)} = \beta_n (a_n b_n a_n)$, usando a conta do item anterior, temos

o seguinte:

$$b_n \beta_n^2 = \beta_n (a_n b_n a_n) \beta_n = \beta^2 \underbrace{a_n^{-1} b_n C_{1,n} a_n^{-1}}_{(5)} = \beta_n^2 b_n,$$

terminando assim a demonstração. ■

Observação 2.2.5. *Para demonstrar a Proposição 2.2.3 sobre o centro de $B_n(\mathbb{T})$, repetimos os passos 1 e 2 (de modo idêntico), a única coisa que mudamos no passo 3 é que temos que provar que a_n e b_n comutam com $(a_1 \cdots a_n)$ e $(b_1 \cdots b_n)$. Temos que a_n comuta com $(a_1 \cdots a_n)$ pela relação (1) e b_n comuta com $(b_1 \cdots b_n)$ pela relação (6). Para os outros dois casos:*

- Usaremos que $a_i b_n = b_n C_{i,n} C_{i+1,n}^{-1} a_i$, ($i < n$), que segue das relações (2) e (3), e o fato que $(a_1 \cdots a_n) = a_n a_1 \cdots a_{n-1}$, pela relação (1).

$$\begin{aligned}
(a_n a_1 \cdots \underbrace{a_{n-1}} b_n) &= a_n a_1 \cdots \underbrace{a_{n-2} (b_n C_{n-1,n} a_{n-1})}_{(3)} = a_n a_1 \cdots \underbrace{a_{n-3} (b_n C_{n-2,n} \underbrace{C_{n-1,n}^{-1} a_{n-2}}_{(3)})}_{(3)} C_{n-1,n} a_{n-1} \\
&= \dots = a_n \underbrace{a_1 (b_n C_{2,n} \underbrace{C_{3,n}^{-1} a_2}_{(3)})}_{(3)} C_{2,n}^{-1} \cdots a_{n-1} = \underbrace{a_n (b_n C_{1,n} C_{2,n}^{-1} a_1)}_{(5)} C_{2,n} a_2 \cdots a_{n-1} \\
&= (b_n a_n) a_1 \cdots a_{n-1}.
\end{aligned}$$

- Usaremos que $b_i a_n = a_n C_{i,n}^{-1} C_{i+1,n} b_i$, ($i < n$), que segue das relações (7) e (8), e o fato que $(b_1 \cdots b_n) = b_n b_1 \cdots b_{n-1}$, pela relação (6).

$$\begin{aligned}
(b_n b_1 \cdots \underbrace{b_{n-1}}) a_n &= b_n b_1 \cdots \underbrace{b_{n-2}} (a_n C_{n-1,n}^{-1} b_{n-1}) = b_n b_1 \cdots \underbrace{b_{n-3}} (a_n C_{n-2,n}^{-1} \underbrace{C_{n-1,n} b_{n-2}}_{(8)} C_{n-1,n}^{-1}) b_{n-1} \\
&= \dots = b_n \underbrace{b_1 (a_n C_{2,n}^{-1} C_{3,n} b_2) C_{3,n}^{-1}}_{(8)} \cdots b_{n-1} = \underbrace{b_n (a_n C_{1,n}^{-1} C_{2,n} b_1) C_{2,n}^{-1}}_{(5)} b_2 \cdots b_{n-1} \\
&= (a_n b_n) b_1 \cdots b_{n-1}.
\end{aligned}$$

2.3. Secção para outras superfícies não orientáveis

Para outras superfícies N_{g+1} não orientáveis de genus $g \geq 2$, Gonçalves e Guaschi [29] provaram que a sequência exata curta

$$1 \rightarrow P_{n-m}(N_{g+1} \setminus \{x_1, \dots, x_m\}) \rightarrow P_{n+m}(N_{g+1}) \rightarrow P_m(N_{g+1}) \rightarrow 1 \quad (2.1)$$

cinde para todo n se, e somente se, $m = 1$. Nesta secção calculamos explicitamente esta secção em função dos geradores de $P_n(N_{g+1})$ dadas no Teorema 1.5.1. Temos o seguinte:

Teorema 2.3.1. *Em termos da apresentação dada pelo Teorema 1.5.1, a aplicação $s : P_1(N_{g+1}) \rightarrow P_n(N_{g+1})$ definida nos geradores de $P_1(N_{g+1})$ como:*

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \mapsto b_1 a_{n,1} \cdots a_{2,1} \\ a_{1,1} \mapsto a_{1,1} a_{2,1} \cdots a_{n,1} \\ a_{1,r} \mapsto a_{1,r}, \quad (1 < r < g) \\ a_{1,g} \mapsto \begin{cases} a_{1,g}, & \text{se } g \text{ é par} \\ a_{2,1}^{-1} \cdots a_{n,1}^{-1} a_{1,g}, & \text{se } g \text{ é ímpar} \end{cases} \end{array} \right.$$

é uma secção para a sequência exata curta (2.1).

Demonstração:

Precisamos de um resultado preliminar, note que para $1 < j$ e $1 < i$, temos

$$a_{1,i-1} a_{1,i}^{-1} (a_{j,1}) a_{1,i} a_{1,i-1}^{-1} = a_{j,1}, \quad (2.2)$$

pois

$$a_{1,i-1} \underbrace{a_{1,i}^{-1} (a_{j,1}) a_{1,i}}_{(2)} a_{1,i-1}^{-1} = \underbrace{a_{1,i-1} (a_{j,1} C_{1,j}^{-1} C_{2,j})}_{(2)} a_{1,i-1}^{-1} = a_{j,1}.$$

Vamos dividir a demonstração em dois casos. Começamos com o caso que g é par. Temos que provar que

$$s(a_{1,2}^{-1} \cdots a_{1,g-1} a_{1,g}^{-1} b_1^{-1} a_{1,g}^{-1} a_{1,g-1} \cdots a_{1,2}^{-1}) = s(a_{1,1}^{-1} b_1 a_{1,1}^{-1}).$$

Por um lado temos que

$$\begin{aligned} s(a_{1,1}^{-1} b_1 a_{1,1}^{-1}) &= \underbrace{a_{n,1}^{-1} \cdots a_{2,1}^{-1} a_{1,1}^{-1}}_{(1)} \cdot b_1 \underbrace{a_{n,1} \cdots a_{2,1} \cdot a_{n,1}^{-1} \cdots a_{2,1}^{-1}}_{(1)} a_{1,1}^{-1} \\ &= (a_{1,1}^{-1} a_{2,1}^{-1} \cdots a_{n,1}^{-1}) b_1 a_{1,1}^{-1} \end{aligned}$$

pelo fato que os elementos $a_{i,1}$ comutam entre si.

Por outro lado

$$\begin{aligned} & s(a_{1,2}^{-1} a_{1,3} \cdots a_{1,g-1} a_{1,g}^{-1} b_1^{-1} a_{1,g}^{-1} a_{1,g-1} \cdots a_{1,3} a_{1,2}^{-1}) \\ &= a_{1,2}^{-1} \underbrace{a_{1,3} \cdots a_{1,g-1} a_{1,g}^{-1} (a_{2,1}^{-1} \cdots a_{n,1}^{-1} b_1^{-1})}_{(2.2)} a_{1,g}^{-1} a_{1,g-1} \cdots a_{1,3} a_{1,2}^{-1} \\ &= \underbrace{a_{1,2}^{-1} (a_{2,1}^{-1} \cdots a_{n,1}^{-1} a_{1,2}^{-1})}_{(2)} \underbrace{a_{1,2}^{-1} a_{1,3} \cdots a_{1,g-1} a_{1,g}^{-1}}_{(5)} b_1^{-1} a_{1,g}^{-1} a_{1,g-1} \cdots a_{1,3} a_{1,2}^{-1} \\ &= (\prod_{i=2}^n C_{2,i}^{-1} C_{1,i} a_{i,1}^{-1}) (a_{1,1}^{-1} (\prod_{j=2}^n C_{1,j}^{-1} C_{2,j}) b_1 a_{1,1}^{-1}) \\ &= a_{1,1}^{-1} (\prod_{i=2}^n \underbrace{a_{1,1} C_{2,i}^{-1} C_{1,i} a_{i,1}^{-1} a_{1,1}^{-1}}_{(3)}) (\prod_{j=2}^n C_{1,j}^{-1} C_{2,j}) b_1 a_{1,1}^{-1} \\ &= a_{1,1}^{-1} (\prod_{i=2}^n a_{i,1}^{-1} C_{1,i} C_{2,1}^{-1}) (\prod_{j=2}^n C_{1,j}^{-1} C_{2,j}) b_1 a_{1,1}^{-1} \\ &= a_{1,1}^{-1} a_{2,1}^{-1} \cdots a_{n,1}^{-1} (\prod_{i=2}^n C_{1,i} C_{2,i}^{-1}) (\prod_{j=2}^n C_{1,j}^{-1} C_{2,i}) b_1 a_{1,1}^{-1}. \end{aligned}$$

Assim, basta mostrarmos que $(\prod_{i=2}^n C_{1,i} C_{2,i}^{-1}) (\prod_{j=2}^n C_{1,j}^{-1} C_{2,i}) = 1$. Observando as Figuras 1.28 e 1.42 verificamos que é verdade.

No caso que g é ímpar, temos que provar que

$$s(a_{1,2}^{-1} a_{1,3} \cdots a_{1,g-1} a_{1,g} b_1 a_{1,g}^{-1} a_{1,g-1} \cdots a_{1,3} a_{1,2}^{-1}) = s(a_{1,1}^{-1} b_1 a_{1,1}^{-1}).$$

Por um lado temos que

$$\begin{aligned} s(a_{1,1}^{-1} b_1 a_{1,1}^{-1}) &= \underbrace{a_{n,1}^{-1} \cdots a_{2,1}^{-1} a_{1,1}^{-1}}_{(1)} \cdot b_1 \underbrace{a_{n,1} \cdots a_{2,1} \cdot a_{n,1}^{-1} \cdots a_{2,1}^{-1}}_{(1)} a_{1,1}^{-1} \\ &= (a_{1,1}^{-1} a_{2,1}^{-1} \cdots a_{n,1}^{-1}) b_1 a_{1,1}^{-1} \end{aligned}$$

pelo fato que os elementos $a_{i,1}$ comutam entre si.

Por outro lado

$$\begin{aligned}
& s(a_{1,2}^{-1}a_{1,3} \cdots a_{1,g-1}^{-1}a_{1,g}b_1a_{1,g}a_{1,g-1}^{-1} \cdots a_{1,3}a_{1,2}^{-1}) \\
&= a_{1,2}^{-1} \underbrace{a_{1,3} \cdots a_{1,g-1}^{-1}(a_{2,1}^{-1} \cdots a_{n,1}^{-1}a_{1,g})}_{(2.2)} (b_1a_{n,1} \cdots a_{2,1})(a_{2,1}^{-1} \cdots a_{n,1}^{-1}a_{1,g})a_{1,g-1}^{-1} \cdots a_{1,3}a_{1,2}^{-1} \\
&= \underbrace{a_{1,2}^{-1}(a_{2,1}^{-1} \cdots a_{n,1}^{-1}a_{1,2})}_{(2)} \cdot \underbrace{a_{1,2}^{-1}a_{1,3} \cdots a_{1,g-1}^{-1}}_{(5)} a_{1,g}b_1a_{1,g}a_{1,g-1}^{-1} \cdots a_{1,3}a_{1,2}^{-1} \\
&= (\prod_{i=2}^n C_{2,i}^{-1}C_{1,i}a_{i,1}^{-1})(a_{1,1}^{-1}(\prod_{j=2}^n C_{1,j}^{-1}C_{2,j})b_1a_{1,1}^{-1}) \\
&= a_{1,1}^{-1}(\prod_{i=2}^n \underbrace{a_{1,1}C_{2,i}^{-1}C_{1,i}a_{i,1}^{-1}a_{1,1}}_{(3)})(\prod_{j=2}^n C_{1,j}^{-1}C_{2,j})b_1a_{1,1}^{-1} \\
&= a_{1,1}^{-1}(\prod_{i=2}^n a_{i,1}^{-1}C_{1,i}C_{2,1}^{-1})(\prod_{j=2}^n C_{1,j}^{-1}C_{2,j})b_1a_{1,1}^{-1} \\
&= a_{1,1}^{-1}a_{2,1}^{-1} \cdots a_{n,1}^{-1}(\prod_{i=2}^n C_{1,i}C_{2,i}^{-1})(\prod_{j=2}^n C_{1,j}^{-1}C_{2,j})b_1a_{1,1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Como já sabemos que $(\prod_{i=2}^n C_{1,i}C_{2,i}^{-1})(\prod_{j=2}^n C_{1,j}^{-1}C_{2,j}) = 1$ segue o resultado. ■

2.4. Generalização da sequência de Fadell-Neuwirth

A projeção $p_* : P_{n+1}(M) \rightarrow P_n(M)$ da sequência (1.3) não se estende aos grupos de tranças $B_{n+1}(M)$, mas podemos obter uma generalização da sequência exata curta de Fadell-Neuwirth se considerarmos o quociente intermediário do espaço de configuração $F_{n+m}(M)$ pelo subgrupo $S_n \times S_m$ de S_{n+m} , $n, m \in \mathbb{N}^*$. Obtemos assim o *subgrupos das tranças “mistas”* da forma

$$B_{n,m}(M) = \pi_1(F_{n+m}(M)/(S_n \times S_m))$$

de $B_{n+m}(M)$. Tal subgrupo consiste de todas as $(n+m)$ -tranças, tais que as primeiras n cordas só permutam entre si e respectivamente as últimas m cordas também só permutam entre si. Para este subgrupo existe uma fibração associada:

$$p : F_{n+m}(M)/(S_n \times S_m) \rightarrow F_n(M)/S_n$$

obtida “esquecendo-se” as m últimas coordenadas, que tem como fibra

$$F_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})/S_m.$$

Como no caso dos grupos de tranças puras, uma aplicação da sequência exata longa em homotopia leva a seguinte sequência exata curta, chamada sequência exata curta de Fadell-Neuwirth generalizada:

$$1 \rightarrow B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow B_{n,m}(M) \rightarrow B_n(M) \rightarrow 1. \quad (2.3)$$

onde $n \geq 3$ se $M = \mathbb{S}^2$ e $n \geq 2$ se $M = \mathbb{R}P^2$.

Novamente, algumas questões naturais surgem. Uma delas é conseguir apresentações para os grupos envolvidos na sequência (o que pode ser feito por indução usando o método da Proposição 1.2.1). Outra questão é se a sequência cinde ou não. No caso que $M = \mathbb{D}^2$ é claro que a resposta é sim. O caso $M = \mathbb{S}^2$ foi estudado por Gonçalves e Guaschi [25] no qual eles concluíram condições necessárias sobre n e m para a sequência cindir.

Estudamos o caso em que $M = \mathbb{T}$ ou $M = \mathbb{K}$, em ambos os casos concluímos o seguinte:

Teorema 2.4.1. *Seja $M = \mathbb{T}$ ou $M = \mathbb{K}$. A sequência exata curta (2.3)*

$$1 \rightarrow B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow B_{n,m}(M) \rightarrow B_n(M) \rightarrow 1$$

cinde se, e somente se, $m = l.n$, onde $l \in \mathbb{N}$.

A volta desse teorema é a parte mais simples de ser demonstrada, pois podemos utilizar a mesma idéia feita no caso das tranças puras.

Demonstração: Suponha que $m = l.n$, para algum $l \in \mathbb{N}$, podemos construir a secção de modo análogo a secção da sequência de Fadell-Neuwirth (1.3), utilizando um campo de vetores não nulo ν . Portanto basta construir uma secção entre os espaços de configuração envolvidos e depois considerar a função induzida no grupo fundamental como a secção desejada. Tal secção é uma função contínua

$$s : F_n(M)/S_n \rightarrow F_{n+l.n}(M)/(S_n \times S_{l.n}),$$

que não depende da ordem dos n primeiros termos e composta com a projeção é a identidade. Para cada n -úpla $x = (x_1, \dots, x_n) \in F_n(M)/S_n$, tome $\epsilon(x) = \min_{1 \leq i < j \leq n} \{dist(x_i, x_j)\}$, e assim a secção s é dada por

$$s(x) = \left(x_1, \dots, x_n, x_1 + \frac{1 \cdot v(x) \cdot \epsilon(x)}{2(l+1)}, \dots, x_1 + \frac{l \cdot v(x) \cdot \epsilon(x)}{2(l+1)}, \dots, x_n + \frac{1 \cdot v(x) \cdot \epsilon(x)}{2(l+1)}, \dots, x_n + \frac{l \cdot v(x) \cdot \epsilon(x)}{2(l+1)} \right).$$

Agora, basta considerar a classe de equivalência de tal elemento em $F_{n+l.n}(M)/(S_n \times S_{l.n})$ e temos a secção desejada.

Para demonstrar a ida do Teorema 2.4.1, precisamos das apresentações dos grupos envolvidos e de alguns quocientes específicos. Calculemos inicialmente as apresentações desses grupos.

Proposição 2.4.2. *Seja $M = \mathbb{T}$ ou $M = \mathbb{K}$. Temos que $B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ admite a seguinte apresentação:*

Geradores:

$$a_{n+1}, \dots, a_{n+m}, b_{n+1} \cdots, b_{n+m},$$

$$\sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+m-1},$$

$$C_{i,j}; (1 \leq i < j), (n+1 \leq j \leq n+m)$$

Relações:

$$1. \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1};$$

$$2. \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| \geq 2;$$

$$3. \sigma_i^{-1} a_j \sigma_i = \begin{cases} a_j, & (j \neq i, i+1) \\ \sigma_i^{-2} a_{i+1}, & (j = i); \end{cases}$$

$$4. \sigma_i^{-1} b_j \sigma_i = \begin{cases} b_j, & (j \neq i, i+1) \\ b_{i+1} \sigma_i^2, & (j = i); \end{cases}$$

$$5. \sigma_i^{-1} C_{l,j} \sigma_i = \begin{cases} C_{l,j}, & (i+1 < l < j) \text{ ou } (l \leq i < j-1) \text{ ou } (l < j < i) \\ C_{j,j+1}^{-1} C_{l,j+1}, & (i = j) \\ C_{l-1,j} C_{l,j}^{-1} C_{l+1,j}, & (l = i+1); \end{cases};$$

6. $C_{i,j} = \sigma_{j-1} \cdots \sigma_i^2 \cdots \sigma_{j-1}, (n+1 \leq i < j \leq n+m);$
7. $a_i a_j = a_j a_i, (n+1 \leq i < j \leq n+m);$
8. $a_i^{-1} b_j a_i = b_j a_j C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} a_j^{-1}, (n+1 \leq i < j \leq n+m);$
9. $a_i^{-1} C_{j,k} a_i = \begin{cases} C_{j,k}, & (i < j < k) \text{ ou } (j < k < i), \\ a_k C_{i+1,k}^{-1} C_{i,k} a_k^{-1} C_{j,k} C_{i,k}^{-1} C_{i+1,k}, & (j \leq i < k); \end{cases}$
10. $C_{i,l}^{-1} C_{j,k} C_{i,l} = \begin{cases} C_{j,k}, & (i < l < j < k) \text{ ou } (j \leq i < l < k), \\ C_{i,k} C_{l+1,k}^{-1} C_{l,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} C_{l,k}^{-1} C_{l+1,k} & (i \leq j \leq l < k); \end{cases}$
11. $\begin{cases} \prod_{j=i+1}^n C_{i,j}^{-1} C_{i+1,j} = a_i b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1}, & (n+1 \leq i \leq n+m), & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ \prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} = b_i C_{1,i} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i^{-1}, & (n+1 \leq i \leq n+m), & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$
12. $\begin{cases} b_j b_i = b_i b_j, & (n+1 \leq i < j \leq n+m), & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b_j b_i = b_i b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} & (n+1 \leq i < j \leq n+m), & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$
13. $\begin{cases} b_i^{-1} a_j b_i = a_j b_j C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} b_j^{-1}, & (n+1 \leq i < j \leq n+m), & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b_i^{-1} a_j b_i = a_j b_j (C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1})^{-1} b_j^{-1}, & (n+1 \leq i < j \leq n+m), & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$
14. $\begin{cases} b_i^{-1} C_{j,k} b_i = \begin{cases} C_{j,k}, & (i < j < k) \text{ ou } (j < k < i), \\ C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1} b_k^{-1} & (j \leq i < k); \end{cases} & \text{se } M = \mathbb{T}, \\ b_i^{-1} C_{j,k} b_i = \begin{cases} C_{j,k}, & (i < j < k) \text{ ou } (j < k < i), \\ C_{i+1,k} C_{i,k}^{-1} C_{j,k} b_k (C_{i,k} C_{i+1,k}^{-1})^{-1} b_k^{-1} & (j \leq i < k); \end{cases} & \text{se } M = \mathbb{K}. \end{cases}$

Consequimos essa apresentação apenas adicionando todas as relações de $P_{n+m}(M)$ e $B_{n+m}(M)$ envolvendo os geradores em questão. Poderíamos simplificar a apresentação ao eliminar alguns geradores (por exemplo, $a_i, b_i, i = n+1, \dots, n+m-1$ e $C_{i,j}, n < i < j < n+m$), mas não será necessário, pois apenas utilizamos o abelianizado de tal grupo, que temos a apresentação na proposição seguinte.

Proposição 2.4.3. *Seja $M = \mathbb{T}$ ou $M = \mathbb{K}$. Temos que*

$$\frac{B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})}{\Gamma_2(B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))} = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{n+1} \oplus \mathbb{Z}_2$$

é um grupo abeliano com os seguintes geradores: $x, y, \rho_2, \dots, \rho_n, \theta$, onde

$$x = a_i, i = n+1, \dots, n+m,$$

$$y = b_i, i = n + 1, \dots, n + m,$$

$$\rho_i = C_{i,j}, j = n + 1, \dots, n + m,$$

$$\theta = \sigma_i \text{ (portanto tal gerador só existe se } m \geq 2\text{), tal que } \theta^2 = 1.$$

Demonstração: Ao abelianizarmos $B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$, vemos pela relação (1) dada pela Proposição 2.4.2, que $\sigma_i = \sigma_{i+1}$ para todo $i = n + 1, \dots, n + m - 2$ e denotamos tal elemento por θ (note que tal relação só existe se $m \geq 2$). Pela relação (8) temos que $C_{i,j}^{-1}C_{i+1,j} = 1$ para todo $n + 1 \leq i < j \leq n + m$, em particular, quando consideramos $i + 1 = j$ temos que $C_{i,i+1} = 1$, por recorrência segue que $C_{i,j} = 1$ para todo $n + 1 \leq i < j \leq n + m$. Usando a relação (6) com $i + 1 = j$, implica que θ tem ordem 2. Usamos essa informação nas relações (3) e (4) para concluir que $a_i = a_{i+1}$ e $b_i = b_{i+1}$ para todo $n + 1 \leq i \leq n + m - 1$, denotamos por x e y , respectivamente. Para $1 \leq i \leq n$ concluimos que $C_{i,j} = C_{i,j+1}$, pela relação (5), que vamos denotar por ρ_i . Agora, pela relação (11) temos $\rho_1 = C_{1,n+m} = 1$, para $M = \mathbb{T}$ e $\rho_1 = C_{1,n+m} = a_{n+m}^2 = x^2$, para $M = \mathbb{K}$. Portanto retiramos tal elemento dos geradores, e terminamos a demonstração. ■

Observação 2.4.4. No caso $m = 1$ temos que $\frac{B_1(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})}{\Gamma_2(B_1(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))} = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n+1}$.

Para calcular a apresentação de $B_{n,m}(M)$, usamos a Proposição 1.2.1 e a sequência exata curta (2.3):

$$1 \rightarrow B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow B_{n,m}(M) \rightarrow B_n(M) \rightarrow 1.$$

Temos uma apresentação de $B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ dada pela Proposição 2.4.2 e uma apresentação $B_n(M)$ dada pelo Teorema 1.4.1, portanto na apresentação de $B_{n,m}(M)$ teremos todos os geradores desses dois grupos e suas respectivas relações, todas relações de $B_n(M)$ continuam iguais em $B_{n,m}(M)$ com exceção da relação de superfície, e temos também que os conjugados de $B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ por elementos de $B_n(M)$ geram relações de $B_{n,m}(M)$. Podemos concluir que:

Proposição 2.4.5. Seja $M = \mathbb{T}$ ou $M = \mathbb{K}$. Temos que $B_{n,m}(M)$ admite a seguinte apresentação:

Geradores:

Tipo I: $a_{n+1}, \dots, a_{n+m}, b_{n+1}, \dots, b_{n+m}, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+m-1}, C_{i,j}, (1 \leq i < j), (n+1 \leq j \leq n+m);$

Tipo II: $a, b, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}.$

Relações:

- **Tipo I:** Todas as relações da Proposição 2.4.2.
- **Tipo II:** Todas as relações do Teorema 1.4.1, com exceção da relação de superfície.
- **Tipo III:** os conjugados relativos ao fato de $B_{n,m}(M)$ ser subgrupo de $B_{n+m}(M)$.
- **Relação de Superfície:**

$$\begin{cases} (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1)^{-1} bab^{-1} a^{-1} = \prod_{i=1}^m (C_{1,n+i} C_{2,n+i}^{-1}), & M = \mathbb{T} \\ (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1)^{-1} ba^{-1} b^{-1} a^{-1} = \prod_{i=1}^m (C_{1,n+i} C_{2,n+i}^{-1}), & M = \mathbb{K}. \end{cases}$$

Para a demonstração do Teorema 2.4.1 utilizaremos o quociente de $B_{n,m}(M)$ pelo $\Gamma_2(B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))$, que é dado pela proposição seguinte e que segue da Proposição 2.4.5:

Proposição 2.4.6. *Seja $M = \mathbb{T}$ ou $M = \mathbb{K}$. Temos que $\frac{B_{n,m}(M)}{\Gamma_2(B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))}$ admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $a, b, x, y, \rho_2, \dots, \rho_n, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \theta.$

Relações:

1. Relação de superfície: $\begin{cases} (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1)^{-1} bab^{-1} a^{-1} = \rho_2^{-m}, & \text{se } M = \mathbb{T} \\ (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1)^{-1} ba^{-1} b^{-1} a^{-1} = \rho_2^{-m} x^{2m}, & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$
2. Todas as relações de $B_n(M)$, dadas pelo Teorema 1.4.1 com exceção da relação de superfície.
3. $\theta^2 = 1;$
4. $\langle x, y, \rho_i, \theta \rangle$ é abeliano;
5. $\langle a, x, \rho_i, \theta \rangle$ é abeliano;
6. $\langle \sigma_i, x, y, \theta \rangle$ é abeliano para todo $i = 1, \dots, n-1.$

$$7. \begin{cases} \langle b, y, \rho_i, \theta \rangle \text{ é abeliano,} & \text{se } M = \mathbb{T} \\ \langle b, \rho_i, \theta \rangle \text{ é abeliano,} & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$$

$$8. a^{-1}ya = \begin{cases} y\rho_2, & \text{se } M = \mathbb{T} \\ yx^{-2}\rho_2, & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$$

$$9. b^{-1}xb = \begin{cases} x\rho_2^{-1}, & \text{se } M = \mathbb{T} \\ x^{-1}\rho_2, & \text{se } M = \mathbb{K}; \end{cases}$$

$$10. b^{-1}yb = yx^2\rho_2^{-1}, \text{ se } M = \mathbb{K}.$$

$$11. \sigma_i^{-1}\rho_j\sigma_i = \begin{cases} \rho_j, & (j \neq i+1) \\ \rho_{j-1}\rho_j^{-1}\rho_{j+1}, & (i+1 = j). \end{cases}$$

Para facilitar a notação, adotamos a nomenclatura que $\rho_{n+1} = 1$ e $\rho_1 = 1$ (no caso que $M = \mathbb{T}$) e $\rho_1 = x^2$ (no caso que $M = \mathbb{K}$) que é válido pela Proposição 2.4.3.

Agora para demonstrar o Teorema 2.4.1, suponha que a sequência (2.3) cinde, então temos um homomorfismo induzido:

$$\begin{aligned} \phi : B_n(M) &\rightarrow \frac{B_{n,m}(M)}{\Gamma_2(B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))} \\ \phi(a) &= a.\theta^{i_1}\rho_2^{i_2} \dots \rho_n^{i_n} x^{k_1} y^{k_2} \\ \phi(b) &= b.\theta^{j_1}\rho_2^{j_2} \dots \rho_n^{j_n} x^{k_3} y^{k_4} \\ \phi(\sigma_i) &= \sigma_i.\theta^{r_{i,1}}\rho_2^{r_{i,2}} \dots \rho_n^{r_{i,n}} x^{l_{i,1}} y^{l_{i,2}}. \end{aligned}$$

Vamos utilizar as relações desses grupos para obtermos informações sobre os coeficientes acima. Para facilitar a notação, denotaremos $r_{1,j} = r_j$ e $l_{1,j} = l_j$.

O método utilizado será o seguinte, por sabermos que ϕ é um homomorfismo, para cada relação $R_1 = R_2$ em $B_n(M)$, temos que $\phi(R_1) = \phi(R_2)$, mas muitos dos elementos a mais que aparecem na imagem por ϕ dessas relações comutam com todos os elementos envolvidos e por isso se cancelam.

Os elementos que não comutam, conseguimos mandá-los para o lado direito da expressão usando as relações do grupo $\frac{B_{n,m}(M)}{\Gamma_2(B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))}$, as principais relações utilizadas foram (7), (8), (9) e (10) dadas na Proposição 2.4.6. Após isso, teremos uma expressão do tipo $R_1\epsilon(R_1) = R_2\epsilon(R_2)$, onde $\epsilon(R_i)$ vai depender apenas dos elementos x, y, ρ_j, θ .

Com exceção da relação de superfície, as relações válidas em $B_n(M)$ também são válidas em $\frac{B_{n,m}(M)}{\Gamma_2(B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))}$, obteremos então que $\epsilon(R_1) = \epsilon(R_2)$, os quais terão apenas os elementos de $\frac{B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})}{\Gamma_2(B_m(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))}$ e assim, pertencem a um grupo livre comutativo. A igualdade dos termos ocorre apenas se houver igualdade dos coeficientes. Usando esse método descobriremos informações úteis sobre os coeficientes acima.

2.4.1. Caso do toro

Relação: $a\sigma_1 a\sigma_1 = \sigma_1 a\sigma_1 a$:

Primeiro, ao aplicar o homomorfismo ϕ nos dois lados da equação $a\sigma_1 a\sigma_1 = \sigma_1 a\sigma_1 a$ podemos comutar os elementos x, θ e ρ_i ($3 \leq i \leq n$) entre si e com os elementos a e σ_1 , portanto irão se cancelar (usando as relações (4), (5), (6) e (11) dadas na Proposição 2.4.6). Sobrando apenas os elementos a, y, σ_1 e ρ_2 na igualdade. Portanto, temos que nos preocupar com os elementos y e ρ_2 , pois eles não comutam com a e σ_1 , respectivamente. Para isolá-los no lado direito da expressão usaremos as relações (8) e (11). Teremos:

$$\begin{aligned}
a(\rho_2^{i_2} y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2})a(\rho_2^{i_2} y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2}) &= a\sigma_1(\rho_2^{-i_2} \rho_3^{i_2} y^{k_2})(\rho_2^{r_2} y^{l_2})a(\rho_2^{i_2} y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2}) \\
&= a\sigma_1(\rho_2^{-i_2+r_2} \rho_3^{i_2} y^{k_2+l_2})a(\rho_2^{i_2} y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2}) \\
&= a\sigma_1 a(\rho_2^{-i_2+r_2} \rho_3^{i_2} y^{k_2+l_2} \rho_2^{k_2+l_2})(\rho_2^{i_2} y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2}) \\
&= a\sigma_1 a(\rho_2^{k_2+l_2+r_2} \rho_3^{i_2} y^{2k_2+l_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2}) \\
&= a\sigma_1 a\sigma_1(\rho_2^{-k_2-l_2-r_2} \rho_3^{i_2+k_2+l_2+r_2} y^{2k_2+l_2})(\rho_2^{r_2} y^{l_2}) \\
&= a\sigma_1 a\sigma_1(\rho_2^{-k_2-l_2} \rho_3^{i_2+k_2+l_2+r_2} y^{2k_2+2l_2}).
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2})a(\rho_2^{i_2} y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2})a(\rho_2^{i_2} y^{k_2}) &= \sigma_1 a(\rho_2^{r_2} y^{l_2} \rho_2^{l_2})(\rho_2^{i_2} y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2})a.(\rho_2^{i_2} y^{k_2}) \\
&= \sigma_1 a(\rho_2^{r_2+l_2+i_2} y^{l_2+k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2})a.(\rho_2^{i_2} y^{k_2}) \\
&= \sigma_1 a\sigma_1(\rho_2^{-r_2-l_2-i_2} \rho_3^{r_2+l_2+i_2} y^{l_2+k_2})(\rho_2^{r_2} y^{l_2})a.(\rho_2^{i_2} y^{k_2}) \\
&= \sigma_1 a\sigma_1(\rho_2^{-l_2-i_2} \rho_3^{r_2+l_2+i_2} y^{2l_2+k_2})a.(\rho_2^{i_2} y^{k_2}) \\
&= \sigma_1 a\sigma_1 a(\rho_2^{-l_2-i_2} \rho_3^{r_2+l_2+i_2} y^{2l_2+k_2} \rho_2^{2l_2+k_2})(\rho_2^{i_2} y^{k_2}) \\
&= \sigma_1 a\sigma_1 a(\rho_2^{l_2+k_2} \rho_3^{r_2+l_2+i_2} y^{2l_2+2k_2}).
\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de ρ_2 , temos que

$$l_2 = -k_2;$$

e comparando agora os coeficientes de ρ_3 , temos que

$$n \geq 3, k_2 = 0 \Rightarrow l_2 = 0.$$

Relação: $b\sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1} = \sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1}b$:

Ao aplicar o homomorfismo ϕ , como y e ρ_i ($3 \leq i \leq n$) comutam entre si e com b e σ_1 (relações (4), (6), (7) e (11)), podemos cancelá-los. Só temos que nos preocupar com os elementos x e ρ_2 , pois eles não comutam com b e σ_1 , respectivamente. Para isolá-los no lado direito da expressão usaremos as relações (9) e (11). Teremos:

$$\begin{aligned} b(x^{k_3}\rho_2^{j_2})(x^{-l_1}\rho_2^{-r_2})\sigma_1^{-1}b(x^{k_3}\rho_2^{j_2})(x^{-l_1}\rho_2^{-r_2})\sigma_1^{-1} &= b(x^{k_3-l_1}\rho_2^{j_2-r_2})\sigma_1^{-1}b(x^{k_3-l_1}\rho_2^{j_2-r_2})\sigma_1^{-1} \\ &= b\sigma_1^{-1}(x^{k_3-l_1}\rho_2^{-j_2+r_2}\rho_3^{j_2-r_2})b(x^{k_3-l_1}\rho_2^{j_2-r_2})\sigma_1^{-1} \\ &= b\sigma_1^{-1}b(x^{k_3-l_1}\rho_2^{-k_3+l_1}\rho_2^{-j_2+r_2}\rho_3^{j_2-r_2})(x^{k_3-l_1}\rho_2^{j_2-r_2})\sigma_1^{-1} \\ &= b\sigma_1^{-1}b(x^{2k_3-2l_1}\rho_2^{-k_3+l_1}\rho_3^{j_2-r_2})\sigma_1^{-1} \\ &= b\sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1}(x^{2k_3-2l_1}\rho_2^{k_3-l_1}\rho_3^{-k_3+l_1}\rho_3^{j_2-r_2}) \\ &= b\sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1}(x^{2k_3-2l_1}\rho_2^{k_3-l_1}\rho_3^{-k_3+l_1+j_2-r_2}). \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} (x^{-l_1}\rho_2^{-r_2})\sigma_1^{-1}b(x^{k_3}\rho_2^{j_2})(x^{-l_1}\rho_2^{-r_2})\sigma_1^{-1}b(x^{k_3}\rho^{j_2}) &= (x^{-l_1}\rho_2^{-r_2})\sigma_1^{-1}b(x^{k_3-l_1}\rho_2^{j_2-r_2})\sigma_1^{-1}b(x^{k_3}\rho^{j_2}) \\ &= \sigma_1^{-1}(x^{-l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{-r_2})b(x^{k_3-l_1}\rho_2^{j_2-r_2})\sigma_1^{-1}b(x^{k_3}\rho^{j_2}) \\ &= \sigma_1^{-1}b(x^{-l_1}\rho_2^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{-r_2})(x^{k_3-l_1}\rho_2^{j_2-r_2})\sigma_1^{-1}b(x^{k_3}\rho^{j_2}) \\ &= \sigma_1^{-1}b(x^{k_3-2l_1}\rho_2^{l_1+j_2}\rho_3^{-r_2})\sigma_1^{-1}b(x^{k_3}\rho^{j_2}) \\ &= \sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1}(x^{k_3-2l_1}\rho_2^{-l_1-j_2}\rho_3^{l_1+j_2}\rho_3^{-r_2})b(x^{k_3}\rho^{j_2}) \\ &= \sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1}(x^{k_3-2l_1}\rho_2^{-l_1-j_2}\rho_3^{l_1+j_2-r_2})b(x^{k_3}\rho^{j_2}) \\ &= \sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1}b(x^{k_3-2l_1}\rho_2^{-k_3+2l_1}\rho_2^{-l_1-j_2}\rho_3^{l_1+j_2-r_2})(x^{k_3}\rho^{j_2}) \\ &= \sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1}b(x^{2k_3-2l_1}\rho_2^{-k_3+l_1}\rho_3^{l_1+j_2-r_2}). \end{aligned}$$

Comparando os coeficiente de ρ_2 , temos que

$$k_3 - l_1 = -k_3 + l_1 \Rightarrow k_3 = l_1,$$

e comparando o coeficiente de ρ_3 , temos:

$$n \geq 3, -k_3 + l_1 + j_2 - r_2 = l_1 + j_2 - r_2 \Rightarrow k_3 = 0.$$

Relação: $b^{-1}\sigma_1a = \sigma_1a\sigma_1b^{-1}\sigma_1$:

Aplicando o homomorfismo ϕ na equação temos que θ e ρ_i ($4 \leq i \leq n$) comutam entre si e com a, b e σ_1 e podemos cancelá-los, mas pelo fato de um lado da igualdade o elemento σ_1 aparece apenas uma vez e do outro ele aparece três vezes, segue que $r_1 = 0$ e $r_j = 0$, $j \geq 4$. Embora o elemento ρ_3 também comute com a, b e σ_1 não podemos concluir o mesmo para r_3 , pois o elemento ρ_3 aparecerá quando usarmos a relação (11) e vamos analisar com mais cuidado este caso. Note que, pela relação (9), $b^{-1}xb = x\rho_2^{-1}$ implica que $xb^{-1} = b^{-1}x\rho_2$. Neste caso, temos que nos preocupar com os coeficiente de x, y, ρ_2 e ρ_3 . Calculando do lado esquerdo, temos:

$$\begin{aligned}
& (x^{-k_3}y^{-k_4}\rho_2^{-j_2}\rho_3^{-j_3})b^{-1}\sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})a(x^{k_1}y^{k_2}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3}) \\
&= b^{-1}(x^{-k_3}\rho_2^{-k_3}y^{-k_4}\rho_2^{-j_2}\rho_3^{-j_3})\sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})a(x^{k_1}y^{k_2}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3}) \\
&= b^{-1}(x^{-k_3}y^{-k_4}\rho_2^{-k_3-j_2}\rho_3^{-j_3})\sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})a(x^{k_1}y^{k_2}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3}) \\
&= b^{-1}\sigma_1(x^{-k_3}y^{-k_4}\rho_2^{k_3+j_2}\rho_3^{-k_3-j_2}\rho_3^{-j_3})(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})a(x^{k_1}y^{k_2}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3}) \\
&= b^{-1}\sigma_1(x^{-k_3+l_1}y^{-k_4+l_2}\rho_2^{k_3+j_2+r_2}\rho_3^{-k_3-j_2-j_3+r_3})a(x^{k_1}y^{k_2}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3}) \\
&= b^{-1}\sigma_1a(x^{-k_3+l_1}y^{-k_4+l_2}\rho_2^{-k_4+l_2}\rho_2^{k_3+j_2+r_2}\rho_3^{-k_3-j_2-j_3+r_3})(x^{k_1}y^{k_2}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3}) \\
&= b^{-1}\sigma_1a(x^{-k_3+l_1+k_1}y^{-k_4+l_2+k_2}\rho_2^{-k_4+l_2+k_3+j_2+r_2+i_2}\rho_3^{-k_3-j_2-j_3+r_3+i_3}).
\end{aligned}$$

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned}
& \sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})a(x^{k_1}y^{k_2}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3})\sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})(x^{-k_3}y^{-k_4}\rho_2^{-j_2}\rho_3^{-j_3})b^{-1}\sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\
&= \sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})a(x^{k_1}y^{k_2}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3})\sigma_1(x^{l_1-k_3}y^{l_2-k_4}\rho_2^{r_2-j_2}\rho_3^{r_3-j_3})b^{-1}\sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\
&= \sigma_1a(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})(x^{k_1}y^{k_2}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3})\sigma_1(x^{l_1-k_3}y^{l_2-k_4}\rho_2^{r_2-j_2}\rho_3^{r_3-j_3})b^{-1}\sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\
&= \sigma_1a(x^{l_1+k_1}y^{l_2+k_2}\rho_2^{l_2+r_2+i_2}\rho_3^{r_3+i_3})\sigma_1(x^{l_1-k_3}y^{l_2-k_4}\rho_2^{r_2-j_2}\rho_3^{r_3-j_3})b^{-1}\sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\
&= \sigma_1a\sigma_1(x^{l_1+k_1}y^{l_2+k_2}\rho_2^{-l_2-r_2-i_2}\rho_3^{l_2+r_2+i_2}\rho_3^{r_3+i_3})(x^{l_1-k_3}y^{l_2-k_4}\rho_2^{r_2-j_2}\rho_3^{r_3-j_3})b^{-1}\sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\
&= \sigma_1a\sigma_1(x^{2l_1+k_1-k_3}y^{2l_2+k_2-k_4}\rho_2^{-l_2-i_2-j_2}\rho_3^{+l_2+r_2+i_2+2r_3+i_3-j_3})b^{-1}\sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\
&= \sigma_1a\sigma_1b^{-1}(x^{2l_1+k_1-k_3}\rho_2^{2l_1+k_1-k_3}y^{2l_2+k_2-k_4}\rho_2^{-l_2-i_2-j_2}\rho_3^{l_2+r_2+i_2+2r_3+i_3-j_3})\sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\
&= \sigma_1a\sigma_1b^{-1}(x^{2l_1+k_1-k_3}y^{2l_2+k_2-k_4}\rho_2^{-l_2-i_2-j_2+2l_1+k_1-k_3}\rho_3^{l_2+r_2+i_2+2r_3+i_3-j_3})\sigma_1(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\
&= \sigma_1a\sigma_1b^{-1}\sigma_1(x^{2l_1+k_1-k_3}y^{2l_2+k_2-k_4}\rho_2^{+l_2+i_2+j_2-2l_1-k_1+k_3}\rho_3^{-l_2-i_2-j_2+2l_1+k_1-k_3}\rho_3^{l_2+r_2+i_2+2r_3+i_3-j_3})(x^{l_1}y^{l_2}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\
&= \sigma_1a\sigma_1b^{-1}\sigma_1(x^{3l_1+k_1-k_3}y^{3l_2+k_2-k_4}\rho_2^{l_2+i_2+j_2-2l_1-k_1+k_3+r_2}\rho_3^{-j_2+2l_1+k_1-k_3+r_2+3r_3+i_3-j_3}).
\end{aligned}$$

Agora, comparando o coeficiente de x , temos

$$-k_3 + l_1 + k_1 = 3l_1 + k_1 - k_3 \Rightarrow l_1 = 0,$$

analogamente, ao comparar o coeficiente de y , temos

$$-k_4 + l_2 + k_2 = 3l_2 + k_2 - k_4 \Rightarrow l_2 = 0.$$

Utilizando os resultados anteriores, temos que $l_2 = -k_2$ e $l_1 = k_3$, portanto $k_2 = k_3 = 0$, para $n \geq 2$.

Comparando o coeficiente de ρ_2 , temos

$$-k_4 + l_2 + k_3 + j_2 + r_2 + i_2 = l_2 + i_2 + j_2 - 2l_1 - k_1 + k_3 + r_2 \Rightarrow k_4 = k_1,$$

e comparando o coeficiente de ρ_3 , temos

$$n \geq 3, -k_3 - j_2 - j_3 + r_3 + i_3 = -j_2 + 2l_1 + k_1 - k_3 + r_2 + 3r_3 + i_3 - j_3 \Rightarrow -k_1 = r_2 + 2r_3.$$

Pela importância dos resultados acima, colocaremos em forma de proposição:

Proposição 2.4.7. *No caso $M = \mathbb{T}$, temos as seguintes relações dos coeficientes das imagens dos geradores por ϕ :*

(i) $l_1 = l_2 = k_2 = k_3 = 0;$

(ii) $k_1 = k_4;$

(iii) para $n \geq 3$, $-k_1 = r_2 + 2r_3;$

(iv) $r_1 = r_j = 0$, para $4 \leq j \leq n$.

No caso $n = 2$, basta calcularmos a imagem da relação de superfície para termos uma conclusão. Temos o seguinte (omitimos os termos que já sabemos que têm coeficientes nulos):

$$\phi(bab^{-1}a^{-1}) = \phi(\sigma_1^2)$$

$$b(\theta^{j_1} \rho_2^{j_2} y^{k_4})a(\theta^{i_1} \rho_2^{i_2} x^{k_1})(\theta^{-j_1} \rho_2^{-j_2} y^{-k_4})b^{-1}(\theta^{-i_1} \rho_2^{-i_2} x^{-k_1})a^{-1} = \sigma_1(\rho_2^{r_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2}).$$

Usando que θ e ρ_2 comutam com a e b , podemos simplificar a equação acima:

$$\begin{aligned} b(y^{k_4})a(x^{k_1}y^{-k_4})b^{-1}(x^{-k_1})a^{-1} &= \sigma_1(\rho_2^{r_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2}) = \sigma_1^2(\rho_2^{-r_2}\rho_2^{r_2}) \\ b(y^{k_4})a(x^{k_1}y^{-k_4})b^{-1}(x^{-k_1})a^{-1} &= \sigma_1^2. \end{aligned}$$

Analisando o lado esquerdo temos:

$$\begin{aligned} ba(y^{k_4}\rho_2^{k_4}x^{k_1}y^{-k_4})b^{-1}(x^{-k_1})a^{-1} \\ &= ba(\rho_2^{k_4}x^{k_1})b^{-1}(x^{-k_1})a^{-1} \\ &= bab^{-1}(\rho_2^{k_4}x^{k_1}\rho_2^{k_1})(x^{-k_1})a^{-1} \\ &= bab^{-1}(\rho_2^{k_4+k_1})a^{-1} \\ &= bab^{-1}a^{-1}(\rho_2^{k_4+k_1}). \end{aligned}$$

Assim

$$bab^{-1}a^{-1}(\rho_2^{k_4+k_1}) = \sigma_1^2.$$

Agora, usamos que $\sigma_1^{-2}bab^{-1}a^{-1} = \rho_2^{-m}$ (relação (1) dada na Proposição 2.4.6), temos

$$(\sigma_1^2\rho_2^{-m})(\rho_2^{k_4+k_1}) = \sigma_1^2 \Rightarrow \rho_2^{-m}(\rho_2^{k_4+k_1}) = 1.$$

Concluimos assim, que $-m + k_4 + k_1 = 0$, pela Proposição 2.4.7, temos que $k_4 = k_1$, o que implica que

$$m = 2k_1,$$

portanto m é um múltiplo de 2, como desejado, terminamos assim a demonstração para o caso $n = 2$.

Nos próximos cálculos estamos supondo que $n \geq 3$. Podemos concluir, com uma certa facilidade que $l_{i,1} = l_1$ e $l_{i,2} = l_2$, para todo $i = 1, \dots, n-1$. Para tanto, basta comutar apenas os elementos x e y que aparecem na imagem da relação de Artin $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$, (sabemos que nenhum x ou y aparecerá ao “comutar” os ρ_j com σ_i), assim $l_{i,j} = l_{i+1,j}$ e conseqüentemente $l_{i,1} = l_1 = 0$ e $l_{i,2} = l_2 = 0$ (pela Proposição 2.4.7), para $i = 1, \dots, n-1$. Utilizaremos este fato nas relações restantes a serem analisadas.

Relações: $a\sigma_k = \sigma_k a$ e $b\sigma_k = \sigma_k b$, $k \geq 2$:

Os elementos que não comutam com a e σ_k são y e ρ_{k+1} , respectivamente, já sabemos que $l_{k,2} = l_2 = 0$, portando não precisamos nos preocupar com o elemento y . Temos então no lado direito da equação:

$$a\rho_{k+1}^{i_{k+1}}\sigma_k\rho_{k+1}^{r_{k,k+1}} = a\sigma_k(\rho_k^{i_{k+1}}\rho_{k+1}^{-i_{k+1}}\rho_{k+2}^{i_{k+1}})\rho_{k+1}^{r_{k,k+1}} = a\sigma_k(\rho_k^{i_{k+1}}\rho_{k+1}^{-i_{k+1}+r_{k,k+1}}\rho_{k+2}^{i_{k+1}}).$$

Por outro lado,

$$\sigma_k\rho_{k+1}^{r_{k,k+1}}a\rho_{k+1}^{i_{k+1}} = \sigma_k a\rho_{k+1}^{r_{k,k+1}+i_{k+1}}.$$

Assim, pelo coeficiente de ρ_{k+1} , segue que $i_{k+1} = 0$, $k \geq 2$. De modo análogo para a relação $b\sigma_k = \sigma_k b$, $k \geq 2$, segue que $j_{k+1} = 0$, $k \geq 2$.

Relação: $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, $|i - j| \geq 2$:

Vamos supor que $i < j$, temos que os elementos que não comutam com σ_i e σ_j são ρ_{i+1} e ρ_{j+1} , respectivamente, usando a relação (11) temos:

$$\begin{aligned} \sigma_i(\rho_{i+1}^{r_{i,i+1}}\rho_{j+1}^{r_{i,j+1}})\sigma_j(\rho_{i+1}^{r_{i,i+1}}\rho_{j+1}^{r_{j,j+1}}) &= \sigma_i\sigma_j(\rho_{i+1}^{r_{i,i+1}}(\rho_j^{r_{j,j+1}}\rho_{j+1}^{-r_{j,j+1}}\rho_{j+2}^{r_{j,j+1}}))(\rho_{i+1}^{r_{i,i+1}}\rho_{j+1}^{r_{j,j+1}}) \\ &= \sigma_i\sigma_j(\rho_{i+1}^{r_{i,i+1}+r_{j,i+1}}\rho_j^{r_{j,j+1}}\rho_{j+1}^{-r_{j,j+1}+r_{j,j+1}}\rho_{j+2}^{r_{j,j+1}}). \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \sigma_j(\rho_{i+1}^{r_{j,i+1}}\rho_{j+1}^{r_{j,j+1}})\sigma_i(\rho_{i+1}^{r_{i,i+1}}\rho_{j+1}^{r_{j,j+1}}) &= \sigma_j\sigma_i((\rho_i^{r_{j,i+1}}\rho_{i+1}^{-r_{j,i+1}}\rho_{i+2}^{r_{j,i+1}})\rho_{j+1}^{r_{j,j+1}})(\rho_{i+1}^{r_{i,i+1}}\rho_{j+1}^{r_{j,j+1}}) \\ &= \sigma_j\sigma_i(\rho_i^{r_{j,i+1}}\rho_{i+1}^{-r_{j,i+1}+r_{i,i+1}}\rho_{i+2}^{r_{j,i+1}}\rho_{j+1}^{r_{j,j+1}+r_{i,j+1}}). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes temos:

- (i) coeficiente de ρ_i : $0 = r_{j,i+1}$;
- (ii) coeficiente de ρ_{i+1} : $r_{i,i+1} + r_{j,i+1} = -r_{j,i+1} + r_{i,i+1} \Rightarrow r_{j,i+1} = 0$;
- (iii) coeficiente de ρ_{j+1} : $-r_{i,j+1} + r_{j,j+1} = r_{j,j+1} + r_{i,j+1} \Rightarrow r_{i,j+1} = 0$;
- (iv) coeficiente de ρ_{j+2} : $r_{i,j+1} = 0$.

Resumindo, temos que $r_{j,i} = 0$ para $2 \leq i < j \leq n - 1$ e $r_{i,j} = 0$ para $j - i \geq 3$, ou seja, na imagem de σ_i , os únicos (possíveis) elementos com coeficientes não nulos são ρ_i , ρ_{i+1} e ρ_{i+2} .

Relação: $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$:

Já sabemos que os únicos possíveis elementos que aparecem na imagem de σ_i são ρ_i, ρ_{i+1} e ρ_{i+2} , na imagem de σ_{i+1} são ρ_{i+1}, ρ_{i+2} e ρ_{i+3} . Entre esses, os elementos que não comutam com σ_i e σ_{i+1} são ρ_{i+1} e ρ_{i+2} , respectivamente.

Para simplificar a notação usaremos $r_{i,j} = p_j$ e $r_{i+1,j} = q_j$. Voltando a relação, temos do lado esquerdo:

$$\begin{aligned} & \sigma_i(\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \sigma_{i+1}(\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \sigma_i(\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \\ &= \sigma_i \sigma_{i+1} (\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} (\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{-p_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}})) (\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \sigma_i (\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \\ &= \sigma_i \sigma_{i+1} (\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}+p_{i+2}+q_{i+1}} \rho_{i+2}^{-p_{i+2}+q_{i+2}} \rho_{i+3}^{p_{i+2}+q_{i+3}}) \sigma_i (\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \\ &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i (\rho_i^{p_i} (\rho_i^{p_{i+1}+p_{i+2}+q_{i+1}} \rho_{i+1}^{-p_{i+1}-p_{i+2}-q_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+1}+p_{i+2}+q_{i+1}}) \rho_{i+2}^{-p_{i+2}+q_{i+2}} \rho_{i+3}^{p_{i+2}+q_{i+3}}) (\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \\ &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i (\rho_i^{2p_i+p_{i+1}+p_{i+2}+q_{i+1}} \rho_{i+1}^{-p_{i+2}-q_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+1}+q_{i+1}+q_{i+2}+p_{i+2}} \rho_{i+3}^{p_{i+2}+q_{i+3}}). \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} & \sigma_{i+1}(\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \sigma_i(\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \sigma_{i+1}(\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \\ &= \sigma_{i+1} \sigma_i ((\rho_i^{q_{i+1}} \rho_{i+1}^{-q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+1}}) \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) (\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \sigma_{i+1} (\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \\ &= \sigma_{i+1} \sigma_i (\rho_i^{q_{i+1}+p_i} \rho_{i+1}^{-q_{i+1}+p_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+1}+q_{i+2}+p_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \sigma_{i+1} (\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \\ &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} (\rho_i^{q_{i+1}+p_i} \rho_{i+1}^{-q_{i+1}+p_{i+1}} (\rho_{i+1}^{q_{i+1}+q_{i+2}+p_{i+2}} \rho_{i+2}^{-q_{i+1}-q_{i+2}-p_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+1}+q_{i+2}+p_{i+2}}) \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) (\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \\ &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} (\rho_i^{q_{i+1}+p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}+q_{i+1}+q_{i+2}+p_{i+2}} \rho_{i+2}^{-q_{i+1}-p_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+1}+q_{i+2}+p_{i+2}+2q_{i+3}}). \end{aligned}$$

Analisando os coeficientes temos:

- (i) coeficiente de ρ_i : $2r_{i,i} + r_{i,i+1} + r_{i,i+2} + r_{i+1,i+1} = r_{i+1,i+1} + r_{i,i} \Rightarrow r_{i,i} + r_{i,i+1} + r_{i,i+2} = 0$;
- (ii) coeficiente de ρ_{i+1} : $-r_{i,i+2} - r_{i+1,i+1} = r_{i,i+1} + r_{i+1,i+1} + r_{i+1,i+2} + r_{i,i+2} \Rightarrow -2r_{i+1,i+1} - r_{i+1,i+2} = 2r_{i,i+2} + r_{i,i+1}$;
- (iii) coeficiente de ρ_{i+2} : $r_{i,i+1} + r_{i+1,i+1} + r_{i+1,i+2} + r_{i,i+2} = -r_{i+1,i+1} - r_{i,i+2} \Rightarrow -2r_{i+1,i+1} - r_{i+1,i+2} = 2r_{i,i+2} + r_{i,i+1}$;
- (iv) coeficiente de ρ_{i+3} : $r_{i,i+2} + r_{i+1,i+3} = r_{i+1,i+1} + r_{i+1,i+2} + r_{i,i+2} + 2r_{i+1,i+3} \Rightarrow r_{i+1,i+1} + r_{i+1,i+2} + r_{i+1,i+3} = 0$.

Temos que tomar cuidado nos casos extremos, pois se $i = 1$, o elemento $\rho_i = 1$, ao

analisar o coeficiente se $\rho_{i+1} = \rho_2$ e usando a Proposição 2.4.7 temos:

$$-2r_{2,2} - r_{2,3} = 2r_{1,3} + r_{1,2} = -k_1,$$

para $i = n - 2$, não temos o elemento ρ_{i+3} . Agora, usando as relações (i) e (ii) acima, temos o seguinte, para $i \geq 2$:

$$\begin{aligned} -2r_{i+1,i+1} - r_{i+1,i+2} &= 2r_{i,i+2} + r_{i,i+1} = 2(-r_{i,i} - r_{i,i+1}) + r_{i,i+1} \\ \Rightarrow -2r_{i+1,i+1} - r_{i+1,i+2} &= -2r_{i,i} - r_{i,i+1}. \end{aligned}$$

Por recorrência,

$$-2r_{i,i} - r_{i,i+1} = -2r_{2,2} - r_{2,3} = 2r_{1,3} + r_{1,2} = -k_1, \quad (2.4)$$

para $2 \leq i \leq n - 1$.

Para finalizar, temos que calcular a imagem de $(\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-2} \cdots \sigma_1^{-1})bab^{-1}a^{-1}$. Só precisamos saber qual será o coeficiente de ρ_2 ao isolarmos todos os elementos ρ_i , x e y do lado direito da equação. Faremos isto por partes. Primeiro considere apenas o elemento $\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}$, temos a seguinte imagem:

$$(\rho_{n-1}^{-r_{n-1,n-1}} \rho_n^{-r_{n-1,n}}) \sigma_{n-1}^{-1} (\rho_{n-2}^{-r_{n-2,n-2}} \rho_{n-1}^{-r_{n-2,n-1}} \rho_n^{-r_{n-2,n}}) \sigma_{n-2}^{-1} \cdots (\rho_2^{-r_{1,2}} \rho_3^{-r_{1,3}}) \sigma_1^{-1}.$$

Teremos sempre que nos preocupar com o coeficiente de ρ_{i+1} , que está ao lado esquerdo de σ_i , pois ao “comutarmos” esses elementos acrescentaremos um elemento ρ_i à expressão, assim no final estaremos acrescentando ρ_2 à nossa expressão. Assim, na primeira parte temos:

$$\begin{aligned} &\sigma_{n-1}^{-1} (\rho_{n-1}^{-r_{n-1,n-1}} (\rho_{n-1}^{r_{n-1,n}} \rho_n^{-r_{n-1,n}})) (\rho_{n-2}^{-r_{n-2,n-2}} \rho_{n-1}^{-r_{n-2,n-1}} \rho_n^{-r_{n-2,n}}) \sigma_{n-2}^{-1} \cdots (\rho_2^{-r_{1,2}} \rho_3^{-r_{1,3}}) \sigma_1^{-1} \\ &= \sigma_{n-1}^{-1} (\rho_{n-2}^{-r_{n-2,n-2}} \rho_{n-1}^{-r_{n-2,n-1} - r_{n-1,n-1} + r_{n-1,n}} \rho_n^{-r_{n-2,n} - r_{n-1,n}}) \sigma_{n-2}^{-1} \cdots (\rho_2^{-r_{1,2}} \rho_3^{-r_{1,3}}) \sigma_1^{-1}, \end{aligned}$$

teremos que o coeficiente de ρ_{n-1} do lado esquerdo de σ_{n-2} (chamaremos de posição $n - 2$) é $-r_{n-2,n-1} - r_{n-1,n-1} + r_{n-1,n}$.

Agora temos que “comutar” todos os ρ 's com σ_{n-2} e descobriremos o coeficiente de ρ_{n-2} (na posição $n - 3$, ou seja, ρ_{n-2} está do lado esquerdo de σ_{n-3}). Tal coeficiente será

a soma do coeficiente de ρ_{n-1} na posição $n-2$ (pois $\rho_{n-1}\sigma_{n-2} = \sigma_{n-2}\rho_{n-1}^{-1}\rho_{n-2}$), com o coeficiente de ρ_{n-2} dado na imagem de σ_{n-2}^{-1} por ϕ (pois ρ_{n-2} e σ_{n-2} comutam) e com o coeficiente de ρ_{n-2} dado na imagem de σ_{n-3}^{-1} por ϕ , ou seja:

$$(-r_{n-2,n-1} - r_{n-1,n-1} + r_{n-1,n}) + (-r_{n-2,n-2} - r_{n-3,n-2}) = \left(\sum_{i=n-2}^{n-1} -r_{i-1,i} - r_{i,i} \right) - r_{n-1,n}.$$

Em geral, teremos que o coeficiente de ρ_j na posição $j-1$, será:

$$\left(\sum_{i=j}^{n-1} -r_{i-1,i} - r_{i,i} \right) - r_{n-1,n}.$$

Consequentemente, o coeficiente de ρ_2 na posição 1, ou seja, antes de passar por σ_1 é:

$$\left(\sum_{i=2}^{n-1} -r_{i-1,i} - r_{i,i} \right) - r_{n-1,n},$$

mas ao passar por σ_1 teremos que mudar o sinal do coeficiente de ρ_2 , portanto, nesta parte teremos que o coeficiente de ρ_2 é:

$$\left(\sum_{i=2}^{n-1} r_{i-1,i} + r_{i,i} \right) + r_{n-1,n}.$$

Agora a segunda parte analisada será a seguinte:

$$(\rho_2^{-r_{1,2}} \rho_3^{-r_{1,3}}) \sigma_1^{-1} (\rho_2^{-r_{2,2}} \rho_3^{-r_{2,3}} \rho_4^{-r_{2,4}}) \sigma_2^{-1} \cdots (\rho_{n-1}^{-r_{n-1,n-1}} \rho_n^{-r_{n-1,n}}) \sigma_{n-1}^{-2} \cdots \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}.$$

Primeiro observe que sempre que algum ρ_j tem que passar por dois σ_i , (mesmo que eles não estejam lado a lado), teremos que esses elementos comutam. Então podemos trocar a expressão acima pela seguinte:

$$\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-2} (\rho_{n-1}^{-r_{n-1,n-1}} \rho_n^{-r_{n-1,n}}) \sigma_{n-2}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1} (\rho_2^{-r_{2,2}} \rho_3^{-r_{2,3}} \rho_4^{-r_{2,4}}) \sigma_1^{-1} (\rho_2^{-r_{1,2}} \rho_3^{-r_{1,3}}) \quad (2.5)$$

na qual comutamos todos os ρ_i que aparecem na imagem de σ_j com $\sigma_j^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-2} \cdots \sigma_j^{-1}$. Neste caso, vemos que o coeficiente de ρ_{n-1} na posição $n-2$, (antes de passar por σ_{n-2}) é

$$-r_{n-1,n-1}.$$

Novamente temos que prestar atenção no coeficiente de ρ_{i+1} antes de passar por σ_i , pois ele acrescentará o elemento ρ_i com o mesmo coeficiente de ρ_{i+1} na posição i . Em

geral, teremos que o coeficiente de ρ_{i+1} na posição i será a soma do coeficiente de ρ_{i+2} na posição $i + 1$ com o coeficiente de ρ_{i+1} na expressão (2.5), ou seja:

$$\sum_{j=i+1}^{n-1} (-r_{j,j}).$$

Portanto o coeficiente de ρ_2 na posição 1 será:

$$\sum_{i=2}^{n-1} (-r_{i,i}),$$

mas, ao passar por σ_1 , invertemos esse sinal e ainda somamos o coeficiente $-r_{1,2}$, tendo como coeficiente final:

$$-r_{1,2} + \sum_{i=2}^{n-1} (r_{i,i}).$$

Juntando as duas partes deste cálculo, temos que o coeficiente de ρ_2 , pela imagem de $\sigma_{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-2} \cdots \sigma_1^{-1}$ é:

$$-r_{1,2} + \sum_{j=2}^{n-1} (r_{j,j}) + \left(\sum_{i=2}^{n-1} r_{i-1,i} + r_{i,i} \right) + r_{n-1,n} = \sum_{i=2}^{n-1} 2r_{i,i} + r_{i,i+1},$$

e usando a igualdade dada por (2.4), temos:

$$\sum_{i=2}^{n-1} 2r_{i,i} + r_{i,i+1} = \sum_{i=2}^{n-1} (-2r_3 - r_2) = \sum_{i=2}^{n-1} k_1 = (n-2)k_1.$$

Voltando ao cálculo, do coeficiente de ρ_2 na imagem de $\sigma_{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-2} \cdots \sigma_1^{-1} bab^{-1} a^{-1}$, temos que ρ_2 comuta com a e b , então se mantém iguais, mas vamos acrescentar como coeficiente o elemento $k_4 + k_1 = 2k_1$, pelo fato de y não comutar com a e x não comutar com b (igual ao caso $n = 2$). Assim o coeficiente de ρ_2 fica:

$$(n-2)k_1 + 2k_1 = nk_1.$$

Agora substituímos $\sigma_{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-2} \cdots \sigma_1^{-1} bab^{-1} a^{-1}$ por ρ_2^{-m} , pela relação de superfície (1) do grupo $\frac{B_{n,m}(\mathbb{T})}{\Gamma_2(B_m(\mathbb{T} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))}$ (dada pela Proposição 2.4.6), e obtemos $m = nk_1$ provando o Teorema 2.4.1 para $M = \mathbb{T}$.

2.4.2. Caso da garrafa de Klein

Muitas das contas serão análogas ao caso do toro, a principal diferença é que na garrafa de Klein $x^2 = \rho_1$ (com isto as relações (8), (9) e (11) dadas na Proposição 2.4.6 são diferentes) e o elemento y não comuta com b (relação (10)). Novamente, vamos focar apenas nos elementos que não comutam e se cancelam, pois eles que nos darão informações sobre os coeficientes.

Relação: $a\sigma_1 a\sigma_1 = \sigma_1 a\sigma_1 a$:

Só temos que nos preocupar com os elementos y e ρ_2 , pois eles não comutam com a e σ_1 , respectivamente. Não colocaremos y na imagem de σ_1 , pois já sabemos que $l_2 = 0$. Teremos:

$$\begin{aligned}
& a.(\rho_2^{i_2} y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2})a.(\rho_2^{i_2} y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2}) \\
&= a\sigma_1(x^{2i_2}\rho_2^{-i_2}\rho_3^{i_2}y^{k_2})(\rho_2^{r_2}y^{l_2})a.(\rho_2^{i_2}y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2}y^{l_2}) \\
&= a\sigma_1(\rho_2^{-i_2+r_2}\rho_3^{i_2}y^{k_2+l_2}x^{2i_2})a.(\rho_2^{i_2}y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2}y^{l_2}) \\
&= a\sigma_1 a(\rho_2^{-i_2+r_2}\rho_3^{i_2}y^{k_2+l_2}x^{-2(k_2+l_2)}\rho_2^{k_2+l_2}x^{2i_2})(\rho_2^{i_2}y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2}y^{l_2}) \\
&= a\sigma_1 a(\rho_2^{k_2+l_2+r_2}\rho_3^{i_2}y^{2k_2+l_2}x^{-2(k_2+l_2)+2i_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2}y^{l_2}) \\
&= a\sigma_1 a\sigma_1(x^{2(k_2+l_2+r_2)}\rho_2^{-k_2-l_2-r_2}\rho_3^{i_2+k_2+l_2+r_2}y^{2k_2+l_2}x^{2(-k_2-l_2+i_2)})(\rho_2^{r_2}y^{l_2}) \\
&= a\sigma_1 a\sigma_1(\rho_2^{-k_2-l_2}\rho_3^{i_2+k_2+l_2+r_2}y^{2k_2+2l_2}x^{2(i_2+r_2)}).
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
& \sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2})a.(\rho_2^{i_2} y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2})a.(\rho_2^{i_2} y^{k_2}) \\
&= \sigma_1 a(\rho_2^{r_2} y^{l_2} x^{-2l_2} \rho_2^{l_2})(\rho_2^{i_2} y^{k_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2})a.(\rho_2^{i_2} y^{k_2}) \\
&= \sigma_1 a(\rho_2^{r_2+l_2+i_2} y^{l_2+k_2} x^{-2l_2})\sigma_1(\rho_2^{r_2} y^{l_2})a.(\rho_2^{i_2} y^{k_2}) \\
&= \sigma_1 a\sigma_1(x^{2(r_2+l_2+i_2)}\rho_2^{-r_2-l_2-i_2}\rho_3^{r_2+l_2+i_2}y^{l_2+k_2}x^{-2l_2})(\rho_2^{r_2}y^{l_2})a.(\rho_2^{i_2}y^{k_2}) \\
&= \sigma_1 a\sigma_1(\rho_2^{-l_2-i_2}\rho_3^{r_2+l_2+i_2}y^{2l_2+k_2}x^{2(r_2+i_2)})a.(\rho_2^{i_2}y^{k_2}) \\
&= \sigma_1 a\sigma_1 a(\rho_2^{-l_2-i_2}\rho_3^{r_2+l_2+i_2}y^{2l_2+k_2}x^{-2(2l_2+k_2)}\rho_2^{2l_2+k_2}x^{2(r_2+i_2)})(\rho_2^{i_2}y^{k_2}) \\
&= \sigma_1 a\sigma_1 a(\rho_2^{l_2+k_2}\rho_3^{r_2+l_2+i_2}y^{2l_2+2k_2}x^{2(-2l_2-k_2+r_2+i_2)}).
\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de ρ_2 , temos que

$$l_2 = -k_2;$$

comparando o coeficiente de x , temos

$$2(i_2 + r_2) = 2(-2l_2 - k_2 + r_2 + i_2) \Rightarrow 2l_2 = -k_2 \Rightarrow 2(-k_2) = -k_2 \Rightarrow k_2 = 0 = l_2.$$

Relação: $b\sigma_1^{-1}b\sigma_1 = \sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1}b$:

Aplicando o homomorfismo ϕ na equação acima temos que θ e ρ_j ($4 \leq j \leq n$) comutam entre si e com b e σ_1 e podemos cancelá-los, mas pelo fato de um lado da igualdade o elemento σ_1 aparecer apenas uma vez negativo e outra positivo e do outro da igualdade aparecer duas vezes negativo, segue que $r_1 = 0$ e $r_j = 0$ ($j \geq 4$). Embora o elemento ρ_3 também comute com b e com σ_1 não podemos concluir o mesmo para r_3 pois o elemento ρ_3 , vamos apenas já comutá-lo e enviar para o lado esquerdo da expressão (apenas no lado direito, pois no lado esquerdo ele se cancela). Temos que nos preocupar com os elementos x, y que não comutam com b e com ρ_2 que não comuta com σ_1 . Teremos:

$$\begin{aligned} & b(x^{k_3}y^{k_4}\rho_2^{j_2})(x^{-l_1}\rho_2^{-r_2})\sigma_1^{-1}b(x^{k_3}y^{k_4}\rho_2^{j_2})\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}) \\ &= b(x^{k_3-l_1}y^{k_4}\rho_2^{j_2-r_2})\sigma_1^{-1}b(x^{k_3}y^{k_4}\rho_2^{j_2})\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}) \\ &= b\sigma_1^{-1}(x^{k_3-l_1}y^{k_4}x^{2(j_2-r_2)}\rho_2^{-j_2+r_2}\rho_3^{j_2-r_2})b(x^{k_3}y^{k_4}\rho_2^{j_2})\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}) \\ &= b\sigma_1^{-1}(x^{k_3-l_1+2j_2-2r_2}y^{k_4}\rho_2^{-j_2+r_2}\rho_3^{j_2-r_2})b(x^{k_3}y^{k_4}\rho_2^{j_2})\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}) \\ &= b\sigma_1^{-1}b((x^{-k_3+l_1-2j_2+2r_2}\rho_2^{k_3-l_1+2j_2-2r_2})(y^{k_4}x^{2k_4}\rho_2^{-k_4})\rho_2^{-j_2+r_2}\rho_3^{j_2-r_2})(x^{k_3}y^{k_4}\rho_2^{j_2})\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}) \\ &= b\sigma_1^{-1}b(x^{l_1-2j_2+2r_2+2k_4}y^{2k_4}\rho_2^{k_3-l_1+2j_2-r_2-k_4}\rho_3^{j_2-r_2})\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}) \\ &= b\sigma_1^{-1}b\sigma_1(x^{l_1-2j_2+2r_2+2k_4}y^{2k_4}(x^{2(k_3-l_1+2j_2-r_2-k_4)}\rho_2^{-k_3+l_1-2j_2+r_2+k_4}\rho_3^{k_3-l_1+2j_2-r_2-k_4})\rho_3^{j_2-r_2})(x^{l_1}\rho_2^{r_2}) \\ &= b\sigma_1^{-1}b\sigma_1(x^{2k_3+2j_2}y^{2k_4}\rho_2^{-k_3+l_1-2j_2+2r_2+k_4}\rho_3^{k_3-l_1+3j_2-2r_2-k_4}). \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
& (x^{-l_1} \rho_2^{-r_2}) \sigma_1^{-1} b(x^{k_3} y^{k_4} \rho_2^{j_2}) (x^{-l_1} \rho_2^{-r_2}) \sigma_1^{-1} b(x^{k_3} y^{k_4} \rho_2^{j_2}) \rho_3^{-2r_3} \\
&= (x^{-l_1} \rho_2^{-r_2}) \sigma_1^{-1} b(x^{k_3-l_1} y^{k_4} \rho_2^{j_2-r_2}) \sigma_1^{-1} b(x^{k_3} y^{k_4} \rho_2^{j_2}) \rho_3^{-2r_3} \\
&= \sigma_1^{-1} (x^{-l_1} (x^{-2r_2} \rho_2^{r_2} \rho_3^{-r_2})) b(x^{k_3-l_1} y^{k_4} \rho_2^{j_2-r_2}) \sigma_1^{-1} b(x^{k_3} y^{k_4} \rho_2^{j_2}) \rho_3^{-2r_3} \\
&= \sigma_1^{-1} (x^{-l_1-2r_2} \rho_2^{r_2} \rho_3^{-r_2}) b(x^{k_3-l_1} y^{k_4} \rho_2^{j_2-r_2}) \sigma_1^{-1} b(x^{k_3} y^{k_4} \rho_2^{j_2}) \rho_3^{-2r_3} \\
&= \sigma_1^{-1} b((x^{l_1+2r_2} \rho_2^{-l_1-2r_2}) \rho_2^{r_2} \rho_3^{-r_2}) (x^{k_3-l_1} y^{k_4} \rho_2^{j_2-r_2}) \sigma_1^{-1} b(x^{k_3} y^{k_4} \rho_2^{j_2}) \rho_3^{-2r_3} \\
&= \sigma_1^{-1} b(x^{2r_2+k_3} y^{k_4} \rho_2^{-l_1-2r_2+j_2} \rho_3^{-r_2}) \sigma_1^{-1} b(x^{k_3} y^{k_4} \rho_2^{j_2}) \rho_3^{-2r_3} \\
&= \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1} (x^{2r_2+k_3} y^{k_4} (x^{2(-l_1-2r_2+j_2)} \rho_2^{l_1+2r_2-j_2} \rho_3^{-l_1-2r_2+j_2}) \rho_3^{-r_2}) b(x^{k_3} y^{k_4} \rho_2^{j_2}) \rho_3^{-2r_3} \\
&= \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1} (x^{-2r_2+k_3-2l_1+2j_2} y^{k_4} \rho_2^{l_1+2r_2-j_2} \rho_3^{-l_1-3r_2+j_2}) b(x^{k_3} y^{k_4} \rho_2^{j_2}) \rho_3^{-2r_3} \\
&= \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1} b((x^{2r_2-k_3+2l_1-2j_2} \rho_2^{-2r_2+k_3-2l_1+2j_2}) (y^{k_4} x^{2k_4} \rho_2^{-k_4}) \rho_2^{l_1+2r_2-j_2} \rho_3^{-l_1-3r_2+j_2}) (x^{k_3} y^{k_4} \rho_2^{j_2}) \rho_3^{-2r_3} \\
&= \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1} b((x^{2r_2+2l_1-2j_2+2k_4} y^{2k_4} \rho_2^{k_3-l_1+2j_2-k_4}) \rho_3^{-l_1-3r_2+j_2-2r_3}).
\end{aligned}$$

Analisando o coeficiente de ρ_2 , temos:

$$-k_3 + l_1 - 2j_2 + 2r_2 + k_4 = k_3 - l_1 + 2j_2 - k_4 \Rightarrow -2k_3 + 2l_1 - 4j_2 + 2r_2 + 2k_4 = 0;$$

e pelo coeficiente de x , temos:

$$2k_3 + 2j_2 = 2r_2 + 2l_1 - 2j_2 + 2k_4 \Rightarrow -2k_3 + 2l_1 - 4j_2 + 2r_2 + 2k_4 = 0,$$

exatamente a mesma relação. Para $n \geq 3$, podemos comparar o coeficiente de ρ_3 e obtemos:

$$k_3 - l_1 + 3j_2 - 2r_2 - k_4 = -l_1 - 3r_2 + j_2 - 2r_3 \Rightarrow k_3 - k_4 + 2j_2 = r_2 - 2r_3.$$

Juntando ambas as relações, concluímos que para $n \geq 3$, $l_1 = -2r_3$.

Relação: $b^{-1} \sigma_1 a = \sigma_1 a \sigma_1 b^{-1} \sigma_1$:

Note que:

$$\begin{aligned}
b^1 x b &= x^{-1} \rho_2 \Rightarrow b^{-1} x^{-1} b = \rho_2^{-1} x \\
&\Rightarrow x b^{-1} = b^{-1} x^{-1} \rho_2,
\end{aligned}$$

também temos:

$$b^{-1} y b = y x^2 \rho_2^{-1} \Rightarrow b^{-1} y = y x^2 \rho_2^{-1} b^{-1} = y b^{-1} (x^{-2} \rho_2^2) \rho_2^{-1} = y b^{-1} x^{-2} \rho_2$$

$$\Rightarrow yb^{-1} = b^{-1}yx^2\rho_2^{-1}.$$

Neste caso, temos que nos preocupar com os coeficientes de x, y, ρ_2 e ρ_3 . Já sabemos que $l_2 = 0 = k_2$. Calculando do lado esquerdo, temos:

$$\begin{aligned} & (x^{-k_3}y^{-k_4}\rho_2^{-j_2}\rho_3^{-j_3})b^{-1}\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})a(x^{k_1}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3}) \\ &= b^{-1}((x^{k_3}\rho_2^{-k_3})(y^{-k_4}x^{-2k_4}\rho_2^{k_4})\rho_2^{-j_2}\rho_3^{-j_3})\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})a(x^{k_1}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3}) \\ &= b^{-1}(x^{k_3-2k_4}y^{-k_4}\rho_2^{-k_3+k_4-j_2}\rho_3^{-j_3})\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})a(x^{k_1}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3}) \\ &= b^{-1}\sigma_1(x^{k_3-2k_4}y^{-k_4}(x^{2(-k_3+k_4-j_2)}\rho_2^{+k_3-k_4+j_2}\rho_3^{-k_3+k_4-j_2})\rho_3^{-j_3})(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})a(x^{k_1}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3}) \\ &= b^{-1}\sigma_1(x^{-k_3-2j_2+l_1}y^{-k_4}\rho_2^{+k_3-k_4+j_2+r_2}\rho_3^{-k_3+k_4-j_2-j_3+r_3})a(x^{k_1}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3}) \\ &= b^{-1}\sigma_1a(x^{-k_3-2j_2+l_1}(y^{-k_4}x^{2k_4}\rho_2^{-k_4})\rho_2^{+k_3-k_4+j_2+r_2}\rho_3^{-k_3+k_4-j_2-j_3+r_3})(x^{k_1}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3}) \\ &= b^{-1}\sigma_1a(x^{-k_3-2j_2+l_1+2k_4+k_1}y^{-k_4}\rho_2^{k_3-2k_4+j_2+r_2+i_2}\rho_3^{-k_3+k_4-j_2-j_3+r_3+i_3}). \end{aligned}$$

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned} & \sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})a(x^{k_1}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3})\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})(x^{-k_3}y^{-k_4}\rho_2^{-j_2}\rho_3^{-j_3})b^{-1}\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\ &= \sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3})a(x^{k_1}\rho_2^{i_2}\rho_3^{i_3})\sigma_1(x^{l_1-k_3}y^{-k_4}\rho_2^{r_2-j_2}\rho_3^{r_3-j_3})b^{-1}\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\ &= \sigma_1a(x^{l_1+k_1}\rho_2^{r_2+i_2}\rho_3^{r_3+i_3})\sigma_1(x^{l_1-k_3}y^{-k_4}\rho_2^{r_2-j_2}\rho_3^{r_3-j_3})b^{-1}\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\ &= \sigma_1a\sigma_1(x^{l_1+k_1}(x^{2(r_2+i_2)}\rho_2^{-r_2-i_2}\rho_3^{r_2+i_2})\rho_3^{r_3+i_3})(x^{l_1-k_3}y^{-k_4}\rho_2^{r_2-j_2}\rho_3^{r_3-j_3})b^{-1}\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\ &= \sigma_1a\sigma_1(x^{2l_1+k_1-k_3+2r_2+2i_2}y^{-k_4}\rho_2^{-i_2-j_2}\rho_3^{r_2+i_2+2r_3+i_3-j_3})b^{-1}\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\ &= \sigma_1a\sigma_1b^{-1}((x^{-2l_1-k_1+k_3-2r_2-2i_2}\rho_2^{2l_1+k_1-k_3+2r_2+2i_2})(y^{-k_4}x^{-2k_4}\rho_2^{k_4})\rho_2^{-i_2-j_2}\rho_3^{r_2+i_2+2r_3+i_3-j_3})\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\ &= \sigma_1a\sigma_1b^{-1}(x^{-2l_1-k_1+k_3-2r_2-2i_2-2k_4}y^{-k_4}\rho_2^{2l_1+k_1-k_3+2r_2+i_2+k_4-j_2}\rho_3^{r_2+i_2+2r_3+i_3-j_3})\sigma_1(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\ &= \sigma_1a\sigma_1b^{-1}\sigma_1(x^{-2l_1-k_1+k_3-2r_2-2i_2-2k_4}y^{-k_4} \\ & (x^{2(2l_1+k_1-k_3+2r_2+i_2+k_4-j_2)}\rho_2^{-2l_1-k_1+k_3-2r_2-i_2-k_4+j_2}\rho_3^{2l_1+k_1-k_3+2r_2+i_2+k_4-j_2})\rho_3^{r_2+i_2+2r_3+i_3-j_3})(x^{l_1}\rho_2^{r_2}\rho_3^{r_3}) \\ &= \sigma_1a\sigma_1b^{-1}\sigma_1(x^{3l_1+k_1-k_3+2r_2-2j_2}y^{-k_4}\rho_2^{-2l_1-k_1+k_3-r_2-i_2-k_4+j_2}\rho_3^{2l_1+k_1-k_3+3r_2+2i_2+k_4-j_2+i_3-j_3+3r_3}). \end{aligned}$$

Agora, comparando o coeficiente de x , temos

$$-k_3 - 2j_2 + l_1 + 2k_4 + k_1 = 3l_1 + k_1 - k_3 + 2r_2 - 2j_2 \Rightarrow 2k_4 = 2l_1 + 2r_2,$$

comparando o coeficiente de ρ_2 , temos:

$$k_3 - 2k_4 + j_2 + r_2 + i_2 = -2l_1 - k_1 + k_3 - r_2 - i_2 - k_4 + j_2 \Rightarrow -k_4 + 2i_2 = (-2l_1 - 2r_2) - k_1$$

$$\Rightarrow -k_4 + 2i_2 = -2k_4 - k_1 \Rightarrow -k_4 - k_1 = 2i_2.$$

Para $n \geq 3$, temos ao analisar o coeficiente de ρ_3 :

$$\begin{aligned} -k_3 + k_4 - j_2 - j_3 + r_3 + i_3 &= 2l_1 + k_1 - k_3 + 3r_2 + 2i_2 + k_4 - j_2 + i_3 - j_3 + 3r_3 \\ \Rightarrow 0 &= 2l_1 + k_1 + 3r_2 + 2i_2 + 2r_3. \end{aligned}$$

Juntando todas as relações, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= 2l_1 + k_1 + 3r_2 + 2i_2 + 2r_3 = 2(k_4 - r_2) + k_1 + 3r_2 + (-k_4 - k_1) + 2r_3 \\ \Rightarrow k_4 + r_2 + 2r_3 &= 0 \Rightarrow r_2 + 2r_3 = -k_4. \end{aligned}$$

Novamente, pela importância de tal resultado, colocaremos em forma de proposição:

Proposição 2.4.8. *No caso $M = \mathbb{K}$, temos as seguintes relações dos coeficientes das imagens dos geradores por ϕ :*

- (i) $l_2 = k_2 = 0$;
- (ii) $-k_1 - k_4 = 2i_2$;
- (iii) $2k_4 = 2l_1 + r_2$;
- (iv) para $n \geq 3$, $-k_4 = r_2 + 2r_3$;
- (v) $\rho_1 = \rho_j = 0$ para $j \geq 4$.

No caso $n = 2$, basta agora calcularmos a imagem da relação de superfície para termos uma conclusão. Temos o seguinte:

$$\phi(ba^{-1}b^{-1}a^{-1}) = \phi(\sigma_1^2)$$

$$b(\theta^{j_1} \rho_2^{j_2} x^{k_3} y^{k_4})(\theta^{-i_1} \rho_2^{-i_2} x^{-k_1})a^{-1}(\theta^{-j_1} \rho_2^{-j_2} x^{-k_3} y^{-k_4})b^{-1}(\theta^{-i_1} \rho_2^{-i_2} x^{-k_1})a^{-1} = \sigma_1(\rho_2^{r_2} x^{l_1})\sigma_1(\rho_2^{r_2} x^{l_1}).$$

Usando que θ e ρ_2 comutam com a e b e que x comuta com a , podemos simplificar a equação acima:

$$\begin{aligned} b(x^{k_3} y^{k_4})(x^{k_1})a^{-1}(x^{-k_3} y^{-k_4})b^{-1}(x^{-k_1})a^{-1}\theta^{-2i_1}\rho_2^{-2i_2} &= \sigma_1(\rho_2^{r_2} x^{l_1})\sigma_1(\rho_2^{r_2} x^{l_1}) \\ &= \sigma_1^2((x^{2r_2} \rho_2^{-r_2})x^{l_1})(\rho_2^{r_2} x^{l_1}) \\ b(y^{k_4} x^{-k_1})a^{-1}(y^{-k_4})b^{-1}(x^{-k_1})a^{-1}\theta^{-2i_1}\rho_2^{-2i_2} &= \sigma_1^2 x^{2r_2+2l_1}. \end{aligned}$$

Analisando o lado esquerdo temos (note que $ya^{-1} = a^{-1}yx^2\rho_2^{-1}$):

$$\begin{aligned}
& b(y^{k_4}x^{-k_1})a^{-1}(y^{-k_4})b^{-1}(x^{-k_1})a^{-1}\theta^{-2i_1}\rho_2^{-2i_2} \\
&= ba^{-1}((y^{k_4}x^{2k_4}\rho_2^{-k_4})x^{-k_1})(y^{-k_4})b^{-1}(x^{-k_1})a^{-1}\theta^{-2i_1}\rho_2^{-2i_2} \\
&= ba^{-1}(x^{2k_4-k_1}\rho_2^{-k_4})b^{-1}(x^{-k_1})a^{-1}\theta^{-2i_1}\rho_2^{-2i_2} \\
&= ba^{-1}b^{-1}((x^{-2k_4+k_1}\rho_2^{2k_4-k_1})\rho_2^{-k_4})(x^{-k_1})a^{-1}\theta^{-2i_1}\rho_2^{-2i_2} \\
&= ba^{-1}b^{-1}(x^{-2k_4}\rho_2^{k_4-k_1})a^{-1}\theta^{-2i_1}\rho_2^{-2i_2} \\
&= ba^{-1}b^{-1}a^{-1}(x^{-2k_4}\theta^{-2i_1}\rho_2^{-2i_2+k_4-k_1}).
\end{aligned}$$

Assim

$$ba^{-1}b^{-1}a^{-1}(x^{-2k_4}\theta^{-2i_1}\rho_2^{-2i_2+k_4-k_1}) = \sigma_1^2\theta^{2r_1}x^{2r_2+2l_1}.$$

Agora, usamos a relação (1), $\sigma_1^{-2}ba^{-1}b^{-1}a^{-1} = \rho_2^{-m}x^{2m}$, de $\frac{B_{n,m}(\mathbb{K})}{\Gamma_2(B_m(\mathbb{K}\setminus\{x_1,\dots,x_n\}))}$ dada pela Proposição 2.4.6. Temos

$$\begin{aligned}
(\sigma_1^2\rho_2^{-m}x^{2m})(x^{-2k_4}\theta^{-2i_1}\rho_2^{-2i_2+k_4-k_1}) &= \sigma_1^2x^{2r_2+2l_1} \\
\rho_2^{-m}x^{2m}(x^{-2k_4}\theta^{-2i_1}\rho_2^{-2i_2+k_4-k_1}) &= x^{2r_2+2l_1}.
\end{aligned}$$

Concluimos assim, que

- (i) coeficiente de θ : $-i_1 = 0$;
- (ii) coeficiente de x : $2m - 2k_4 = 2r_2 + 2l_1$;
- (iii) coeficiente de ρ_2 : $-m - 2i_2 + k_4 - k_1 = 0$.

Usando em (ii) que $2k_4 = 2l_1 + 2r_2$, temos que $2m - 2k_4 = 2k_4$ o que implica que $m = 2k_4$, assim m é um múltiplo de 2.

Usando em (iii) que $-k_4 - k_1 = 2i_2$, temos que $-m - (-k_4 - k_1) + k_4 - k_1 = 0$ o que implica que $m = 2k_4$, obtemos o mesmo resultado e o Teorema 2.4.1 fica demonstrado para $n = 2$ e $M = \mathbb{K}$.

Considere agora $n \geq 3$, a maioria das relações nos darão informações análogas ao caso do toro. Do mesmo modo do caso do toro, podemos comutar todos os elementos y na relação de Artin $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ e concluir que $l_{i,2} = l_{i+1,2} = 0$. Infelizmente não

podemos fazer o mesmo com o elemento x , pois ele pode aparecer ao “comutar” ρ_2 com σ_1 , portanto teremos algumas mudanças nas contas.

Relação: $a\sigma_k = \sigma_k a$, $k \geq 2$:

Os elementos que não comutam com a e σ_k são y e ρ_{k+1} , mas já sabemos que $l_{k,2} = k_2 = 0$, portanto não precisamos nos preocupar com o elemento y . Temos então no lado direito da equação:

$$a\rho_{k+1}^{i_{k+1}}\sigma_k\rho_{k+1}^{r_{k,k+1}} = a\sigma_k(\rho_k^{i_{k+1}}\rho_{k+1}^{-i_{k+1}}\rho_{k+2}^{i_{k+1}})\rho_{k+1}^{r_{k,k+1}} = a\sigma_k(\rho_k^{i_{k+1}}\rho_{k+1}^{-i_{k+1}+r_{k,k+1}}\rho_{k+2}^{i_{k+1}}).$$

Por outro lado,

$$\sigma_k\rho_{k+1}^{r_{k,k+1}}a\rho_{k+1}^{i_{k+1}} = \sigma_k a\rho_{k+1}^{r_{k,k+1}+i_{k+1}}.$$

Assim, pelo coeficiente de ρ_{k+1} , segue que $i_{k+1} = 0$, $k \geq 2$.

No caso da garrafa de Klein, a relação $b\sigma_k = \sigma_k b$, $k \geq 2$ não é totalmente análoga.

Relação: $b\sigma_k = \sigma_k b$, $k \geq 2$:

Os elementos que não comutam com b e σ_k são x , y e ρ_{k+1} e já sabemos que $l_{k,2} = 0$. Temos do lado direito da equação:

$$\begin{aligned} b(x^{k_3}y^{k_4}\rho_{k+1}^{j_{k+1}})\sigma_k(x^{l_{k,1}}\rho_{k+1}^{r_{k,k+1}}) &= b\sigma_k x^{k_3}y^{k_4}(\rho_k^{j_{k+1}}\rho_{k+1}^{-j_{k+1}}\rho_{k+2}^{j_{k+1}})x^{l_{k,1}}\rho_{k+1}^{r_{k,k+1}} \\ &= a\sigma_k x^{k_3+l_{k,1}}y^{k_4}(\rho_k^{j_{k+1}}\rho_{k+1}^{-j_{k+1}+r_{k,k+1}}\rho_{k+2}^{j_{k+1}}). \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \sigma_k(x^{l_{k,1}}\rho_{k+1}^{r_{k,k+1}})b(x^{k_3}y^{k_4}\rho_{k+1}^{j_{k+1}}) &= \sigma_k b(x^{-l_{k,1}}\rho_2^{l_{k,1}})\rho_{k+1}^{r_{k,k+1}}(x^{k_3}y^{k_4}\rho_{k+1}^{j_{k+1}}) \\ &= \sigma_k b(x^{-l_{k,1}+k_3}y^{k_4}\rho_2^{l_{k,1}}\rho_{k+1}^{r_{k,k+1}+j_{k+1}}). \end{aligned}$$

daí, comparando o coeficiente de x , concluímos que $l_{k,1} = 0$ e de modo análogo ao anterior, segue que $j_{k+1} = 0$, $k \geq 2$.

Relação $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, $|i - j| \geq 2$:

Vamos considerar que $i < j$, temos que os elementos que não comutam são ρ_{i+1} e ρ_{j+1} , temos então no lado direito:

$$\begin{aligned} \sigma_i(\rho_{i+1}^{r_{i,i+1}}\rho_{j+1}^{r_{i,j+1}})\sigma_j(\rho_{i+1}^{r_{j,i+1}}\rho_{j+1}^{r_{j,j+1}}) &= \sigma_i\sigma_j(\rho_{i+1}^{r_{i,i+1}}(\rho_j^{r_{i,j+1}}\rho_{j+1}^{-r_{i,j+1}}\rho_{j+2}^{r_{i,j+1}}))(\rho_{i+1}^{r_{j,i+1}}\rho_{j+1}^{r_{j,j+1}}) \\ &= \sigma_i\sigma_j(\rho_{i+1}^{r_{i,i+1}+r_{j,i+1}}\rho_j^{r_{i,j+1}}\rho_{j+1}^{-r_{i,j+1}+r_{j,i+1}}\rho_{j+2}^{r_{i,j+1}}). \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} & \sigma_j(\rho_{i+1}^{r_{j,i+1}} \rho_{j+1}^{r_{j,j+1}}) \sigma_i(\rho_{i+1}^{r_{i,i+1}} \rho_{j+1}^{r_{i,j+1}}) \\ &= \sigma_j \sigma_i((\rho_i^{r_{j,i+1}} \rho_{i+1}^{-r_{j,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{j,i+1}}) \rho_{j+1}^{r_{j,j+1}}) (\rho_{i+1}^{r_{i,i+1}} \rho_{j+1}^{r_{i,j+1}}) \\ &= \sigma_j \sigma_i(\rho_i^{r_{j,i+1}} \rho_{i+1}^{-r_{j,i+1}+r_{i,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{j,i+1}} \rho_{j+1}^{r_{j,j+1}+r_{i,j+1}}). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes temos:

- (i) coeficiente de ρ_i : $0 = r_{j,i+1}$;
- (ii) coeficiente de ρ_{i+1} : $r_{i,i+1} + r_{j,i+1} = -r_{j,i+1} + r_{i,i+1} \Rightarrow r_{j,i+1} = 0$;
- (iii) coeficiente de ρ_{j+1} : $-r_{i,j+1} + r_{j,j+1} = r_{j,j+1} + r_{i,j+1} \Rightarrow r_{i,j+1} = 0$
- (iv) coeficiente de ρ_{j+2} : $r_{i,j+1} = 0$.

Resumindo, temos que $r_{j,i} = 0$ para $2 \leq i < j \leq n-1$; e também $r_{i,j} = 0$ para $j-i \geq 3$, ou seja, na imagem de σ_i , os únicos (possíveis) elementos com coeficientes não nulos são ρ_i, ρ_{i+1} e ρ_{i+2} .

Para a relação seguinte, teremos muita semelhança com o caso do toro, mas para o caso $i=1$, temos que tomar cuidado, pois $\rho_1 = x^2$ e também temos que considerar que x aparece na imagem de σ_i e σ_j .

Relação: $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$:

Os elementos que não comutam com σ_i e σ_{i+1} são ρ_{i+1} e ρ_{i+2} , respectivamente, mas temos que ficar atentos as mudanças geradas nos elementos ρ_i e ρ_{i+3} .

Para ρ_j , com $j \neq i, i+1, i+2, i+3$, note que do lado esquerdo tal elemento tem como coeficiente $2r_{i,j} + r_{i+1,j}$ e do lado direito $r_{i,j} + 2r_{i+1,j}$. Concluimos assim que $r_{i,j} = r_{i+1,j}$ para $j \neq i, i+1, i+2, i+3$. Para simplificar a notação usaremos $r_{i,j} = p_j$ e $r_{i+1,j} = q_j$. Voltando a relação, temos do lado esquerdo:

$$\begin{aligned} & \sigma_i(\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \sigma_{i+1}(\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \sigma_i(\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \\ &= \sigma_i \sigma_{i+1}(\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} (\rho_{i+1}^{p_{i+2}} \rho_{i+2}^{-p_{i+2}} \rho_{i+3}^{p_{i+2}})) (\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \sigma_i(\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \\ &= \sigma_i \sigma_{i+1}(\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}+p_{i+2}+q_{i+1}} \rho_{i+2}^{-p_{i+2}+q_{i+2}} \rho_{i+3}^{p_{i+2}+q_{i+3}}) \sigma_i(\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \\ &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i(\rho_i^{p_i} (\rho_i^{p_{i+1}+p_{i+2}+q_{i+1}} \rho_{i+1}^{-p_{i+1}-p_{i+2}-q_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+1}+p_{i+2}+q_{i+1}}) \rho_{i+2}^{-p_{i+2}+q_{i+2}} \rho_{i+3}^{p_{i+2}+q_{i+3}}) (\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \\ &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i(\rho_i^{2p_i+p_{i+1}+p_{i+2}+q_{i+1}} \rho_{i+1}^{-p_{i+1}-p_{i+2}-q_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+1}+p_{i+2}+q_{i+1}} \rho_{i+3}^{p_{i+2}+q_{i+3}}). \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{i+1}(\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \sigma_i(\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \sigma_{i+1}(\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \\
&= \sigma_{i+1} \sigma_i((\rho_i^{q_{i+1}} \rho_{i+1}^{-q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+1}}) \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) (\rho_i^{p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}} \rho_{i+2}^{p_{i+2}}) \sigma_{i+1}(\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \\
&= \sigma_{i+1} \sigma_i(\rho_i^{q_{i+1}+p_i} \rho_{i+1}^{-q_{i+1}+p_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+1}+q_{i+2}+p_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \sigma_{i+1}(\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \\
&= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}(\rho_i^{q_{i+1}+p_i} \rho_{i+1}^{-q_{i+1}+p_{i+1}} (\rho_{i+1}^{q_{i+1}+q_{i+2}+p_{i+2}} \rho_{i+2}^{-q_{i+1}-q_{i+2}-p_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+1}+q_{i+2}+p_{i+2}}) \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) (\rho_{i+1}^{q_{i+1}} \rho_{i+2}^{q_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+3}}) \\
&= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}(\rho_i^{q_{i+1}+p_i} \rho_{i+1}^{p_{i+1}+q_{i+1}+q_{i+2}+p_{i+2}} \rho_{i+2}^{-q_{i+1}-p_{i+2}} \rho_{i+3}^{q_{i+1}+q_{i+2}+p_{i+2}+2q_{i+3}}).
\end{aligned}$$

Analisando os coeficientes (caso $i \neq 1$) temos que fica exatamente igual ao caso do toro:

- (i) coeficiente de ρ_i : $2r_{i,i} + r_{i,i+1} + r_{i,i+2} + r_{i+1,i+1} = r_{i+1,i+1} + r_{i,i} \Rightarrow r_{i,i} + r_{i,i+1} + r_{i,i+2} = 0$;
- (ii) coeficiente de ρ_{i+1} : $-r_{i,i+2} - r_{i+1,i+1} = r_{i,i+1} + r_{i+1,i+1} + r_{i+1,i+2} + r_{i,i+2} \Rightarrow -2r_{i+1,i+1} - r_{i+1,i+2} = 2r_{i,i+2} + r_{i,i+1}$;
- (iii) coeficiente de ρ_{i+2} : $r_{i,i+1} + r_{i+1,i+1} + r_{i+1,i+2} + r_{i,i+2} = -r_{i+1,i+1} - r_{i,i+2} \Rightarrow -2r_{i+1,i+1} - r_{i+1,i+2} = 2r_{i,i+2} + r_{i,i+1}$;
- (iv) coeficiente de ρ_{i+3} : $r_{i,i+2} + r_{i+1,i+3} = r_{i+1,i+1} + r_{i+1,i+2} + r_{i,i+2} + 2r_{i+1,i+3} \Rightarrow r_{i+1,i+1} + r_{i+1,i+2} + r_{i+1,i+3} = 0$;
- (v) coeficiente de x : $l_{i,1} = l_{i+1,1}$.

No caso $i = 1$, temos que considerar que o coeficiente de ρ_1 é na verdade duas vezes o coeficiente de x , que não temos o elemento $r_{1,1}$ e ainda adicionar $2l_{1,1} + l_{2,1}$ do lado esquerdo da equação, e adicionar $l_{1,1} + 2l_{2,1}$ do lado direito. Teremos o seguinte:

$$\begin{aligned}
2(r_{1,2} + r_{1,3} + r_{2,2}) + 2l_{1,1} + l_{2,1} &= 2(r_{2,2}) + l_{1,1} + 2l_{2,1} \\
&\Rightarrow 2(r_{1,2} + r_{1,3}) = l_{2,1} - l_{1,1} \\
&\Rightarrow 2(r_2 + r_3) = l_{2,1} - l_{1,1},
\end{aligned}$$

e no caso $i = n - 2$, não temos o elemento ρ_{i+3} .

Temos também o seguinte, para $i \geq 2$:

$$\begin{aligned} -2r_{i+1,i+1} - r_{i+1,i+2} &= 2r_{i,i+2} + r_{i,i+1} = 2(-r_{i,i} - r_{i,i+1}) + r_{i,i+1} \\ &\Rightarrow -2r_{i+1,i+1} - r_{i+1,i+2} = -2r_{i,i} - r_{i,i+1}. \end{aligned}$$

Por recorrência, $-2r_{i,i} - r_{i,i+1} = -2r_{2,2} - r_{2,3} = 2r_{1,3} + r_{1,2} =$, para $2 \leq i \leq n-1$.

Para finalizar, precisamos calcular o coeficiente de ρ_2 , na imagem de

$$\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1 b a^{-1} b^{-1} a^{-1},$$

depois de isolarmos todos os ρ_i do lado direito da equação. Será análogo ao cálculo no caso do toro. Teremos que o coeficiente de ρ_2 ao passar por $\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1$ será

$$\sum_{i=2}^{n-1} 2r_{i,i} + r_{i,i+1} = \sum_{i=2}^{n-1} (-2r_3 - r_2) = \sum_{i=2}^{n-1} k_4 = (n-2)k_4,$$

e depois este elemento comuta com b e com a , vamos ter que acrescentar os coeficientes que aparecem pelo fato de x e y não comutarem com b e pelo fato de y não comutar com a , mas neste caso, será igual ao caso $n=2$, ou seja

$$-2i_2 + k_4 - k_1 = (k_4 + k_1) + k_4 - k_1 = 2k_4$$

Note que, temos também que pensar no coeficiente de ρ_1 ao comutar com $\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1$, pois nos dará alguma quantidade de x , o qual não comuta com b , o que poderia nos gerar novos ρ_2 . Mas podemos mostrar que x comuta com $b a^{-1} b^{-1} a^{-1}$, pois:

$$\begin{aligned} x(b a^{-1} b^{-1} a^{-1}) &= b(x^{-1} \rho_2) a^{-1} b^{-1} a^{-1} = b a^{-1} (x^{-1} \rho_2) b^{-1} a^{-1} = \\ &= b a^{-1} b^{-1} ((x \rho_2^{-1}) \rho_2) a^{-1} = (b a^{-1} b^{-1} a^{-1}) x. \end{aligned}$$

Assim, temos que o coeficiente final de ρ_2 é

$$(n-2)k_4 + 2k_4 = nk_4.$$

Agora, substituindo $\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1 b a^{-1} b^{-1} a^{-1}$ por $\rho_2^{-m} \rho_1^{2m}$, pela relação de superfície (1) de $\frac{B_{n,m}(\mathbb{K})}{\Gamma_2(B_m(\mathbb{K} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))}$ (dada pela Proposição 2.4.6) e comparando o coeficiente de ρ_2 , vamos obter a seguinte igualdade:

$$-m + nk_4 = 0 \Rightarrow m = nk_4$$

como desejado. Terminando a demonstração do Teorema 2.4.1.

2.5. Generalização para mais fatores

A definição do grupo de tranças “mistras” se generaliza facilmente a mais fatores. De fato, seja

$$B_{n_1, \dots, n_k}(M) = \pi_1(F_{n_1 + \dots + n_k}(M)/(S_{n_1} \times \dots \times S_{n_k})),$$

para $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ quaisquer, nos perguntamos para quais condições de n_1, \dots, n_k a projeção

$$p : B_{n_1, \dots, n_k}(M) \longrightarrow B_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}(M),$$

obtida esquecendo-se apenas um dos blocos, admite uma secção. A resposta pode ser obtida de modo semelhante ao feito no caso de $k = 2$. Temos o seguinte resultado, em geral:

Teorema 2.5.1. *Seja M o toro ou a garrafa de Klein. Se $n_k = l_1 n_1 + \dots + l_{k-1} n_{k-1}$, para $l_1, \dots, l_{k-1} \in \mathbb{N}$ quaisquer, então a projeção $p : B_{n_1, \dots, n_k}(M) \longrightarrow B_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}(M)$ admite uma secção. Reciprocamente, se a projeção admite uma secção, então $n_k = l_1 n_1 + \dots + l_{k-1} n_{k-1}$, para $l_1, \dots, l_{k-1} \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Para demonstrar esse resultado, usamos exatamente a mesma técnica. Se $n_k = l_1 n_1 + \dots + l_{k-1} n_{k-1}$, a existência do campo de vetores não nulo nos permite criar tais pontos no nível de espaço de configuração. Para provar a recíproca, note primeiro que as relações em $B_{n_1, \dots, n_k}(M)$ são exatamente as mesmas que $B_{n, m}(M)$ com exceção da relação de superfície.

A relação de superfície é dada por:

$$M = \mathbb{T},$$

$$(\sigma_1 \cdots \sigma_{n_1-1}^2 \cdots \sigma_1)^{-1} b a b^{-1} a^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{n_2} C_{1, n_1+i} C_{2, n_1+i}^{-1} \right) \left(\prod_{i=1}^{n_3} C_{1, n_2+i} C_{2, n_2+i}^{-1} \right) \cdots \left(\prod_{i=1}^{n_k} C_{1, n_{k-1}+i} C_{2, n_{k-1}+i}^{-1} \right),$$

$$M = \mathbb{K},$$

$$(\sigma_1 \cdots \sigma_{n_1-1}^2 \cdots \sigma_1)^{-1} b a^{-1} b^{-1} a^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{n_2} C_{1, n_1+i} C_{2, n_1+i}^{-1} \right) \left(\prod_{i=1}^{n_3} C_{1, n_2+i} C_{2, n_2+i}^{-1} \right) \cdots \left(\prod_{i=1}^{n_k} C_{1, n_{k-1}+i} C_{2, n_{k-1}+i}^{-1} \right).$$

Novamente, vamos considerar o grupo

$$\frac{B_{n_1, \dots, n_k}(M)}{\Gamma_2(B_{n_k}(M \setminus \{(n_1 + \dots + n_{k-1}) \text{ pontos}\}))}$$

Sua apresentação será análoga ao dado na Proposição 2.4.6, com exceção da relação de superfície, que é dada por:

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \cdots \sigma_{n_1-1}^2 \cdots \sigma_1)^{-1} bab^{-1}a^{-1} &= \rho_2^{-n_2-n_3-\dots-n_k}, & M = \mathbb{T} \\ (\sigma_1 \cdots \sigma_{n_1-1}^2 \cdots \sigma_1)^{-1} ba^{-1}b^{-1}a^{-1} &= \rho_2^{-n_2-n_3-\dots-n_k} x^{2(-n_2-n_3-\dots-n_k)}, & M = \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Agora, fazemos exatamente como no caso anterior, vamos supor que existe uma secção

$$\varphi : B_{n_1, \dots, n_{k-1}}(M) \rightarrow \frac{B_{n_1, \dots, n_k}(M)}{\Gamma_2(B_{n_k}(M \setminus \{(n_1 + \dots + n_{k-1}) \text{ pontos}\}))}$$

e encontrar relações entre os coeficientes. Os resultados das Proposições 2.4.7 e 2.4.8 se mantêm idênticos, pelo fato que as relações são as mesmas.

No caso da relação de superfície, temos que o lado esquerdo da relação não se altera, portanto, ao analisarmos os coeficientes, teremos os mesmos (do lado esquerdo). Ou seja, o coeficiente de ρ_2 ao comutar com $(\sigma_1 \cdots \sigma_{n_1-1}^2 \cdots \sigma_1)^{-1}$ é dado por:

- $M = \mathbb{T}$;

$$(n_1 - 2)k_1,$$

e ao passar por $bab^{-1}a^{-1}$, temos:

$$(n_1 - 2)k_1 + 2k_1 = n_1k_1.$$

Portanto,

$$n_1k_1 = -n_2 - \dots - n_k \Rightarrow -n_k = k_1n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}$$

como desejado.

- $M = \mathbb{K}$;

$$(n_1 - 2)k_4,$$

e ao passar por $ba^{-1}b^{-1}a^{-1}$, temos:

$$(n_1 - 2)k_4 + 2k_4 = n_1k_4$$

portanto,

$$n_1 k_4 = -n_2 - \cdots - n_k \Rightarrow -n_k = k_4 n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1}$$

como desejado. ■

O Teorema 2.5.1 generaliza o Teorema 2.4.1. Mas a questão da existência da secção não está completamente resolvida para $k \geq 3$, pois nossa técnica de demonstração não nos permite dizer se os coeficientes envolvidos são todos positivos ou não. A geometria do problema sugere que tais coeficientes não poderiam ser negativos, mas continuamos a refletir sobre o problema.

Por outro lado, podemos também considerar a projeção $p : B_{n_1, \dots, n_k}(M) \longrightarrow B_{n_1}(M)$ obtida esquecendo-se todos os blocos, com exceção do primeiro e perguntar novamente se admite secção ou não. Esta questão é mais fácil de resolver e segue como consequência imediata da solução no caso $k = 2$. Ou seja, a secção existe se, e somente se n_i é múltiplo de n_1 , para $2 \leq i \leq k$, pois suponha que exista a secção $s : B_{n_1}(M) \rightarrow B_{n_1, \dots, n_k}(M)$, usando a projeção $p' : B_{n_1, \dots, n_k}(M) \rightarrow B_{n_1, n_i}(M)$, a composta $p' \circ s$ é uma secção, e pelo Teorema 2.4.1 n_i é múltiplo de n_1 .

Assim, deduzimos que existe uma secção se, e somente se, para todo $i = 2, \dots, k$, existe $l_i \in \mathbb{N}$ tal que $n_i = l_i n_1$.

Capítulo 3

Propriedades Residuais

Neste capítulo estudamos as séries centrais descendentes e das derivadas de $B_n(M)$ e $P_n(M)$. Obtemos primeiro os Teoremas 3.2.8 e 3.2.11 que auxiliam o estudo dessas séries para um produto semi-direto qualquer. Para superfícies orientáveis, já era conhecido para quais valores de n o grupo de tranças (puras) de M é residualmente nilpotente ou não [3, 7, 27, 28]. Para superfícies não orientáveis, até o momento, sabe-se a resposta apenas para o plano projetivo [30]. Demos continuidade estudando o caso da garrafa de Klein. Temos que $B_n(\mathbb{K})$ é residualmente nilpotente se, e somente se, $n \leq 2$, pelos Teoremas 3.3.1, 3.6.2 e 3.6.3. Para as outras superfícies não orientáveis temos o Teorema 3.5.1, além dos recentes resultados de P. Bellingeri e S. Gervais [6]. No estudo das séries das derivadas, conseguimos provar no Teorema 3.4.1 que se $M = \mathbb{T}$ ou $M = \mathbb{K}$ então $B_n(M)$ é residualmente solúvel se, e somente se, $n \leq 4$.

3.1. Introdução

Neste capítulo vamos estudar algumas propriedades residuais dos grupos de tranças, as principais estudadas foram residualmente nilpotente, residualmente solúvel e residualmente p -finito. Para isto, precisamos de algumas séries, que podem ser definidas recursivamente. Seja G um grupo, estamos usando como notação

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

o comutador (ou o colchete) dos elementos x e y de G e

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n] = [x_1, [x_2, [\dots [x_{n-1}, x_n]]]]$$

o comutador (ou o colchete) de n fatores, onde $x_1, \dots, x_n \in G$. Dado subgrupos $H, K \subset G$ então $[H, K]$ denota o subgrupo:

$$[H, K] = \langle [h, k] : h \in H, k \in K \rangle.$$

Temos $[H, K] = [K, H]$. Se H e K forem subgrupos normais de G então $[H, K] \triangleleft G$. Temos também as seguintes definições:

Definição 3.1.1. A série central descendente $\{\Gamma_i(G)\}_{i \geq 1}$ é definida por

$$\Gamma_1(G) = G, \text{ e } \Gamma_{i+1}(G) = [G, \Gamma_i(G)]$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definição 3.1.2. A série das derivadas $\{G^{(i)}\}_{i \geq 0}$ é definida por

$$G^{(0)} = G, \text{ e } G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definição 3.1.3. A série $\{\gamma_i^p(G)\}_{i \geq 1}$, é definida por

$$\gamma_1^p(G) = G, \text{ e } \gamma_{i+1}^p(G) = \langle [G, \gamma_i^p(G)], \{x^p : x \in \gamma_i^p(G)\} \rangle$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, e todo p primo.

Podemos verificar facilmente que $\Gamma_i(G) \supseteq \Gamma_{i+1}(G)$, $G^{(i-1)} \supseteq G^{(i)}$ e $\gamma_i^p(G) \supseteq \gamma_{i+1}^p(G)$. Note que $\Gamma_2(G) = G^{(1)}$ é o subgrupo dos comutadores de G . O abelianizado do grupo G , que denotamos G^{Ab} , é o quociente $G/\Gamma_2(G)$. Note que para qualquer grupo G , para $i \geq 1$ e p primo, temos

$$(G)^{i-1} \subset \Gamma_i(G) \subset \gamma_i^p(G).$$

Para mais detalhes veja [49].

Um grupo G é dito ser *nilpotente* (respectivamente, *solúvel*, *p-finito*) se para algum $i \geq 1$, $\Gamma_i(G) = \{1\}$ (respectivamente, $G^{(i-1)} = \{1\}$, $\gamma_i^p(G) = \{1\}$). O grupo G é dito ser *perfeito* se $G = \Gamma_2(G)$.

De acordo com P. Hall [39], para qualquer propriedade \mathcal{P} da teoria de grupos, um grupo G é dito ser *residualmente* \mathcal{P} se para qualquer elemento não trivial $g \in G$, existe um grupo H com a propriedade \mathcal{P} e um homomorfismo sobrejetor $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $\varphi(g) \neq 1$, ou seja, a cada elemento $g \neq 1$ em G existe um subgrupo normal correspondente K_g tal que $g \notin K_g$ e G/K_g tem a propriedade \mathcal{P} , equivalentemente, G contém uma família $\{K_\lambda\}$ de subgrupos normais tal que G/K_λ tem a propriedade \mathcal{P} para todo λ e $\bigcap_\lambda K_\lambda = \{1\}$.

É conhecido [49] que um grupo G é *residualmente nilpotente* (respectivamente, *residualmente solúvel*) se, e somente se, $\bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(G) = \{1\}$ (respectivamente $\bigcap_{i \geq 0} G^{(i)} = \{1\}$). Além disso, se G é um grupo finitamente gerado, G é *residualmente p -finito* se, e somente se, $\bigcap_{i \geq 1} \gamma_i^p(G) = \{1\}$ [56].

Segue diretamente da definição de residualmente \mathcal{P} que qualquer grupo com a propriedade \mathcal{P} é residualmente \mathcal{P} , ou seja, \mathcal{P} implica residualmente \mathcal{P} . Se \mathcal{P} implica uma propriedade \mathcal{Q} , então residualmente \mathcal{P} implica residualmente \mathcal{Q} . Por isso, sabemos que residualmente p -finito implica em residualmente nilpotente [37] e residualmente nilpotente implica em residualmente solúvel.

A série central descendente e seus quocientes sucessivos Γ_i/Γ_{i+1} são invariantes por isomorfismos. Um importante resultado de Magnus [48] diz que todo grupo livre é residualmente nilpotente. Os primeiros resultados sobre as séries centrais descendentes e das derivadas na teoria dos grupos de tranças, foram feitos por Gorin e Lin [36] que obtiveram uma apresentação do subgrupo comutador de B_n se $n \geq 3$, e para $n \geq 5$, mostraram que $(B_n)^{(1)} = (B_n)^{(2)}$, e assim que $(B_n)^{(1)}$ é perfeito. Segue que $\Gamma_2(B_n) = \Gamma_3(B_n)$, logo B_n não é residualmente nilpotente. A série central descendente do grupo de tranças puras foi estudada por Falk e Randell [19] e independentemente por Kohno [44], que concluíram que P_n é residualmente nilpotente para todo n .

Os grupos de tranças de superfícies orientáveis foram estudados por Bellingeri, Gervais e Guaschi [7], que mostraram que se $\Sigma_{g,m}$ é um superfície conexa, orientável, de genus g , $g \geq 1$, com m componentes de bordo, $m \geq 0$, então $B_n(\Sigma_{g,m})$ não é residualmente nilpotente se $n \geq 3$. No caso do toro, mostraram que $B_2(\mathbb{T})$ é residualmente nilpotente. Além disso, para o grupo de tranças puras, $P_n(\Sigma_{g,m})$ é residualmente nilpotente livre de

torção para todo n , se $m \geq 1$ ou se $g = 1$ e $m = 0$, ou seja o toro.

Posteriormente, Bardakov e Bellingeri [3] provaram que se Σ_g é uma superfície fechada e orientável de genus g , então o grupo $P_n(\Sigma_g)$ é residualmente nilpotente livre de torção para todo n , e $g \geq 1$, e o grupo $B_2(\Sigma_g)$ é residualmente 2-finito, em particular, residualmente nilpotente.

Além disso, Gonçalves e Guaschi [27, 28, 30] estudaram as séries dos grupos de tranças da esfera \mathbb{S}^2 e do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$. Concluíram que $B_n(\mathbb{S}^2)$ é residualmente nilpotente se, e somente se $n \leq 2$, e se $n \geq 3$, $\Gamma_3(B_n(\mathbb{S}^2)) = \Gamma_2(B_n(\mathbb{S}^2))$. Também, $B_n(\mathbb{S}^2)$ é residualmente solúvel se e somente se $n \leq 4$. No caso do plano projetivo, temos que $B_n(\mathbb{R}P^2)$ é residualmente nilpotente se, e somente se, $n \leq 3$. Se $n \neq 4$, $B_n(\mathbb{R}P^2)$ é residualmente solúvel se e somente se $n < 4$.

3.2. Propriedades das séries

Nesta seção, iremos mostrar alguns resultados preliminares que serão utilizados para provar nossos resultados. Primeiro, precisamos de uma apresentação para o abelianizado de $B_n(M)$ dada na proposição seguinte:

Proposição 3.2.1. *Seja M o toro ou a garrafa de Klein. Se $n \geq 2$, o grupo $B_n(M)^{Ab}$ é dado por:*

Geradores: a, b, σ .

Relações:

1. $[a, b] = [a, \sigma] = [b, \sigma] = 1$;
2. $\sigma^2 = 1$;
3. Se $M = \mathbb{K}$, $a^2 = 1$.

Portanto,

$$B_n(\mathbb{T})^{Ab} = \langle a, b, \sigma : [a, b] = [a, \sigma] = [b, \sigma] = 1, \sigma^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2,$$

e

$$B_n(\mathbb{K})^{Ab} = \langle a, b, \sigma : [a, b] = [a, \sigma] = [b, \sigma] = 1, a^2 = \sigma^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Demonstração: Usando a apresentação dada pelo Teorema 1.4.1, segue pela relação (1) que $\sigma_i = \sigma_{i+1}$ em $B_n(M)^{Ab}$ para todo $i = 1, \dots, n-2$, denotamos a classe desse elemento por σ . Com isto, temos que os geradores de $B_n(M)^{Ab}$ são a, b, σ . A relação (5) e o fato que todos os elementos do grupo comutam, implica que $\sigma^2 = 1$, se $M = \mathbb{K}$, segue pela relação (8) que $a^2 = 1$, como desejado. ■

Definição 3.2.2. A série $\{D_i(G)\}$ é definida por

$$D_1(G) = G, \text{ e } D_i(G) = \{x \in G : x^n \in \Gamma_i(G) \text{ para algum } n \in \mathbb{N}^*\}$$

para todo $i \geq 2$.

Se $\bigcap_{i \geq 1} D_i(G) = \{1\}$, sabemos que G é residualmente nilpotente livre de torção [21].

A seguir, listamos alguns resultados técnicos que serão utilizados nas próximas seções. Os dois teoremas a seguir podem ser vistos com maiores detalhes no livro [49].

Teorema 3.2.3. Sejam a, b, c elementos de um grupo G . Sejam k, m, n inteiros positivos tais que $a \in \Gamma_k(G), b \in \Gamma_m(G), c \in \Gamma_n(G)$. Então:

1. $a.b \equiv b.a \pmod{\Gamma_{k+m}(G)}$;
2. $[a, b.c] \equiv [a, b].[a, c] \pmod{\Gamma_{k+m+n}(G)}$;
3. $[a.b, c] \equiv [a, c].[b, c] \pmod{\Gamma_{k+m+n}(G)}$;
4. $[a, [b, c]].[b, [c, a]].[c, [a, b]] = 1 \pmod{\Gamma_{k+m+n+1}(G)}$.

Teorema 3.2.4. Seja G um grupo gerado por a_1, a_2, \dots, a_r . Então, para $n \geq 1$, $\Gamma_n(G)/\Gamma_{n+1}(G)$ é abeliano e é gerado pela classe de equivalência dos elementos:

$$[a_{\rho_1}, a_{\rho_2}, \dots, a_{\rho_n}] \text{ onde } \rho_i \in \{1, 2, \dots, r\}.$$

Agora, enunciamos o Teorema de Gruenberg, o qual será muito utilizado:

Teorema 3.2.5. (Gruenberg, [37], Lema 1.5, p. 33) *Seja \mathcal{P} uma das seguintes classes de grupos:*

1. *A classe de grupos solúveis;*
2. *A classe de grupos finitos;*
3. *A classe de grupos p -finitos para um número primo p .*

Sejam K, H grupos, e suponha que K tem a propriedade \mathcal{P} e que H é residualmente \mathcal{P} . Então para toda extensão de grupos

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1,$$

o grupo G é residualmente \mathcal{P} .

Observe que tal teorema não é válido para a classe de grupos nilpotentes, como mostrado no exemplo a seguir:

Exemplo 3.2.6. ([50]) *Seja $F = \langle x, y \rangle$ o grupo livre de posto dois com geradores x, y . Considere o automorfismo φ de F dado por:*

$$\begin{aligned} \varphi : x &\mapsto x^2y \\ & \\ & \\ y &\mapsto xy. \end{aligned}$$

Seja $G = F \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$. Note que \mathbb{Z} é nilpotente e F é residualmente nilpotente, mas G não é residualmente nilpotente pois

$$G = \langle x, y, t : txt^{-1} = x^2y, tyt^{-1} = xy \rangle \cong \langle y, t : t[t, y^{-1}]t^{-1} = [t, y^{-1}]^2y \rangle,$$

logo $y \in \Gamma_n(G)$ para todo n e portanto G não é residualmente nilpotente. Neste exemplo, podemos observar também que um produto semi-direto de grupos residualmente 2-finitos (resp. residualmente nilpotentes) não é, em geral, residualmente 2-finito (resp. residualmente nilpotente).

Para utilizar o Teorema de Gruenberg, não precisamos que a sequência cinda, mas caso tenhamos uma sequência que cinde, temos um produto semi-direto e podemos calcular com mais detalhes as séries estudadas.

Teorema 3.2.7. (Falk, Randell, [19], Teorema 3.1, p. 83) *Seja*

$$1 \rightarrow H \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\varphi} G \rightarrow 1$$

uma sequência exata curta, que cinde, pela secção φ e suponha que a ação é quase direta, ou seja, a ação induzida de G em $H/[H, H]$ é trivial (em outras palavras $[G, H]$ está contido em $[H, H]$). Então as sequências

$$1 \rightarrow \Gamma_n(H) \rightarrow \Gamma_n(\tilde{G}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma_n(G) \rightarrow 1$$

cindem para todo $n \geq 1$, ou seja,

$$\Gamma_n(\tilde{G}) = \Gamma_n(H) \rtimes_{\varphi} \Gamma_n(G).$$

No estudo do grupo de tranças puras da garrafa de Klein, usamos com frequência a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth (1.3), pois ela cinde e conseguimos escrever o grupo $P_n(\mathbb{K})$ como produto semi-direto de dois grupos com número de cordas menor. No caso das superfícies orientáveis [3], foi calculada a ação e visto que é quase direta, então é usado diretamente o resultado de Falk e Randell. Já no caso de superfícies não orientáveis, não temos uma ação quase direta e portanto precisamos de um resultado mais forte. Obtivemos os seguintes teoremas para nos auxiliar no cálculo da série central descendente e série das derivadas de um produto semi-direto qualquer.

Teorema 3.2.8. *Sejam H e G grupos, e seja $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ uma ação de G em H . Definimos por indução os seguintes grupos: L_n (para $n \geq 1$) e K_n, H_n (para $n \geq 2$), onde*

$$L_1 = H;$$

para $n \geq 2$, definimos:

$$K_n = \langle \varphi(g)(h).h^{-1} : g \in \Gamma_{n-1}(G), h \in H \rangle;$$

$$H_n = \langle \varphi(g)(h).h^{-1} : g \in G, h \in L_{n-1} \rangle;$$

$$L_n = \langle K_n, H_n, [H, L_{n-1}] \rangle.$$

Então φ induz uma ação (também denotada por φ) de $\Gamma_n(G)$ em L_n , e

$$\Gamma_n(H \rtimes_{\varphi} G) = L_n \rtimes_{\varphi} \Gamma_n(G).$$

Observação 3.2.9. *A demonstração do Teorema 3.2.8 é semelhante ao caso $n = 2$, feito por Gonçalves e Guaschi ([27], Proposição 3.3, p. 3387).*

Observação 3.2.10. *No caso que a ação $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ é quase direta, o subgrupo L_n coincide com $\Gamma_n(H)$, pois $K_n, H_n \subset \Gamma_n(H)$, que é o caso estudado por Falk e Randell.*

Nem sempre conseguimos calcular os subgrupos K_n , mas nota-se no teorema seguinte que para ter uma estimativa da série das derivadas, não é necessário conhecer explicitamente estes subgrupos:

Teorema 3.2.11. *Sejam H e G grupos, e seja $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ uma ação de G em H . Definimos por indução os seguintes grupos: V_n (para $n \geq 1$) e \tilde{H}_n (para $n \geq 2$), onde*

$$V_1 = H;$$

para $n \geq 2$, definimos:

$$\tilde{H}_n = \langle \varphi(g)(h).h^{-1} : g \in G, h \in V_{n-1} \rangle;$$

$$V_n = \langle \tilde{H}_n, [H, V_{n-1}] \rangle.$$

Então φ induz uma ação (também denotada por φ) de $G^{(n)}$ em V_{n+1} , e

$$(H \rtimes_{\varphi} G)^{(n)} \subset V_{n+1} \rtimes_{\varphi} G^{(n)}.$$

Utilizaremos os Teoremas acima (3.2.8 e 3.2.11) para estudar as séries centrais descendentes e das derivadas dos grupos de tranças puras da garrafa de Klein, mas tais resultados talvez possam ser usados para calcular as séries de outros produtos semi-diretos.

Para a demonstração dos Teoremas 3.2.8 e 3.2.11 precisaremos do lema a seguir:

Lema 3.2.12. *Usando a notação do Teorema 3.2.8 (resp. do Teorema 3.2.11), são válidos:*

1. $K_{n+1} \subseteq K_n$ e K_n é um subgrupo normal de H para todo $n \geq 2$;
2. L_n (resp. V_n) é normal em H , para todo $n \geq 1$;

3. Dado $h \in H$ e $x \in H_n$ (resp. $x \in \tilde{H}_n$), então $h x h^{-1} \in L_n$ (resp. V_n), para todo $n \geq 2$;
4. $H_{n+1} \subseteq H_n$ (resp. $\tilde{H}_{n+1} \subseteq \tilde{H}_n$), para todo $n \geq 2$;
5. $L_{n+1} \subseteq L_n$ (resp. $V_{n+1} \subseteq V_n$), para todo $n \geq 1$.

Demonstração:

1. $K_{n+1} \subseteq K_n$, pois $\Gamma_n(G) \subseteq \Gamma_{n-1}(G)$. Sejam $h' \in H$ e $x \in K_n$, um elemento da forma $x = \varphi(g)(h).h^{-1}$, onde $g \in \Gamma_{n-1}(G)$ e $h \in H$. Para verificar que K_n é um subgrupo normal de H , basta mostrar que $h' x h'^{-1} \in K_n$.

Como $\varphi(g) \in \text{Aut}(H)$, sabemos que existe $h'' \in H$, tal que $\varphi(g)(h'') = h'$, logo:

$$h'(\varphi(g)(h).h^{-1})h'^{-1} = (\varphi(g)(h''h).h^{-1}h''^{-1})(\varphi(g)(h'').h''^{-1})^{-1} \in K_n.$$

Portanto $K_n \triangleleft H$ para todo $n \geq 2$.

2. O caso $n = 1$ é claro. Para $n \geq 2$, basta provar que o conjugado de um elemento de L_n (resp. V_n) por um elemento de H pertence a L_n (resp. V_n). Provaremos por indução sobre n .

O caso $n = 2$, foi provado no artigo [27], mas é fácil verificar tal fato, $L_2 = \langle K_2, \Gamma_2(H) \rangle = V_2$, pois $K_2 = H_2 = \tilde{H}_2$, além disso K_2 e $\Gamma_2(H)$ são normais em H , portanto $L_2 = V_2$ é normal em H .

Suponha por indução, que L_n (resp. V_n) é normal em H . Provemos que o mesmo é válido para L_{n+1} .

O grupo L_{n+1} (resp. V_{n+1}) é gerado pelos subgrupos K_{n+1}, H_{n+1} e $[H, L_n]$ (resp. \tilde{H}_n e $[H, V_n]$) e os elementos destes subgrupos chamaremos de geradores de L_{n+1} (resp. V_{n+1}). Basta provar que $h' x h'^{-1} \in L_{n+1}$ (resp. V_{n+1}) para x um gerador de L_{n+1} (resp. V_{n+1}) e $h' \in H$ qualquer.

- Se $x \in K_{n+1}$, já provamos no item (1) que $h' x h'^{-1} \in K_{n+1} \subseteq L_{n+1}$.

- Se $x \in [H, L_n]$ (resp. $[H, V_n]$), basta provarmos os elementos da forma $x = hlh^{-1}l^{-1}$, com $h \in H$ e $l \in L_n$ (resp. V_n):

$$\begin{aligned} h'(hlh^{-1}l^{-1})h'^{-1} &= h'(hlh^{-1})h'^{-1}h'(l^{-1})h'^{-1} \\ &= h'(hlh^{-1})h'^{-1}l^{-1}lh'(l^{-1})h'^{-1} \\ &= \underbrace{[h'h, l]}_{\in [H, L_n]} \cdot \underbrace{[l, h']}_{\in [L_n, H]} \in [H, L_n] \subseteq L_{n+1}. \end{aligned}$$

Note que, como estamos supondo por hipótese de indução que L_n (resp. V_n) é normal em H , os subgrupos $[H, L_n]$ (resp. $[H, V_n]$) e $[L_n, H]$ (resp. $[V_n, H]$) são iguais.

- Se $x \in H_{n+1}$ (resp. \tilde{H}_{n+1}), então $x = \varphi(g)(h).h^{-1}$ com $g \in G$ e $h \in L_n$ (resp. V_n), e sabemos que existe $h'' \in H$ tal que $\varphi(g)(h'') = h'$, portanto:

$$\begin{aligned} h'(\varphi(g)(h).h^{-1})h'^{-1} &= \varphi(g)(h''h).h^{-1}.\varphi(g)(h''^{-1}) \\ &= \varphi(g)(h''hh''^{-1}).(h''hh''^{-1})^{-1}.(h''hh''^{-1}).\varphi(g)(h'')h^{-1}.\varphi(g)(h''^{-1}) \\ &= (\varphi(g)(h''hh''^{-1}).(h''hh''^{-1})^{-1}) \cdot [h'', h][h, \varphi(g)(h'')]. \end{aligned}$$

Note que $h''hh''^{-1} \in L_n$ (resp. V_n), pois tal subgrupo é normal em H por hipótese de indução, e portanto $(\varphi(g)(h''hh''^{-1}).(h''hh''^{-1})^{-1}) \in H_{n+1} \subseteq L_{n+1}$ (resp. V_{n+1}).

Note também, que $[h'', h] \in [H, L_n]$ e $[h, \varphi(g)(h'')] \in [L_n, H]$ (resp. $[V_n, H]$), concluímos assim que

$$h'(\varphi(g)(h).h^{-1})h'^{-1} \in L_{n+1} \text{ (resp. } V_{n+1}\text{)}.$$

ou seja, embora H_{n+1} (resp. \tilde{H}_{n+1}) não é necessariamente normal em H , o conjugado de um elemento de H_{n+1} (resp. \tilde{H}_{n+1}) por um elemento de H sempre pertence a L_{n+1} (resp. V_{n+1}).

Logo L_{n+1} (resp. V_{n+1}) é um subgrupo normal de H .

3. Foi provado no item acima (apenas enunciamos tal resultado para futuras referências).

4. Provaremos por indução sobre n . Para $n = 2$, temos que $H_3 \subseteq H_2$, pois $L_2 \subseteq H$. Agora, suponha por indução que $H_n \subseteq H_{n-1}$ onde $n \geq 3$, como $L_n = \langle K_n, H_n, [H, L_{n-1}] \rangle$, segue que $L_n \subseteq L_{n-1}$, pois $K_n \subseteq K_{n-1} \subseteq L_{n-1}$ pelo item (1), $H_n \subseteq H_{n-1} \subseteq L_{n-1}$ por hipótese de indução e $[H, L_{n-1}] \subseteq L_{n-1}$ pois L_{n-1} é normal em H pelo item (2). Sabendo que $L_n \subseteq L_{n-1}$ e usando a definição de H_{n+1} e H_n , segue que $H_{n+1} \subseteq H_n$ como desejado.
- A demonstração é análoga para \tilde{H}_n substituindo H_n por \tilde{H}_n e L_n por V_n .
5. O caso $n = 1$ é imediato. Para os outros casos, basta usar que $K_{n+1} \subseteq K_n$, $H_{n+1} \subseteq H_n$ e L_n é normal em H , portanto $L_{n+1} \subseteq L_n$. O raciocínio é análogo para V_n .

■

Lema 3.2.13. *Usando a nomenclatura dos Teoremas 3.2.8 e 3.2.11, sejam \tilde{G} um subgrupo de G e \tilde{H} um subgrupo de H sendo X (resp. Y) um conjunto de geradores de \tilde{G} (resp. \tilde{H}), temos:*

1. *O subgrupo*

$$\langle \varphi(g)(h).h^{-1} : g \in \tilde{G}, h \in \tilde{H} \rangle$$

esta contido no fecho normal em H do conjunto

$$Z = \{ \varphi(g)(h).h^{-1} : g \in X, h \in Y \}.$$

Em particular, se este subgrupo é normal em H , então ele é igual ao fecho normal em H do conjunto dado. Assim, para calcular os subgrupos K_n, H_n, \tilde{H}_n basta calcularmos a ação nos geradores. No caso de K_n , como este subgrupo é normal em H temos a igualdade dos grupos.

2. *Seja $\{x_j\}_{j \in J}$ um conjunto de H tal que $L_n = \langle \langle \{x_j\}_{j \in J} \rangle \rangle$ (resp. $V_n = \langle \langle \{x_j\}_{j \in J} \rangle \rangle$) o fecho normal de $\{x_j\}_{j \in J}$ em H . Então H_{n+1} (resp. \tilde{H}_{n+1}) é gerado (a menos de conjugados e de $[H, L_n]$, resp. $[H, V_n]$) por $\{ \varphi(g)(x_j).x_j^{-1} : g \in G, j \in J \}$. Portanto*

$$L_{n+1} = \langle \langle K_{n+1}, \varphi(g)(x_j).x_j^{-1}, [h, x_j] : g \in X, h \in H, j \in J \rangle \rangle$$

e

$$V_{n+1} = \langle \langle \varphi(g)(x_j).x_j^{-1}, [h, x_j] : g \in X, h \in H, j \in J \rangle \rangle.$$

Demonstração:

1. Seja $g \in \tilde{G}$ e primeiro suponhamos que $g = g_1 g_2 \cdots g_p \in \tilde{G}$, onde $g_i \in X$. Segue que

$$\begin{aligned} \varphi(g_1 g_2 \cdots g_p)(h).h^{-1} &= \left(\varphi(g_1) \left(\varphi(g_2 \cdots g_p)(h) \right) \left(\varphi(g_2 \cdots g_p)(h) \right)^{-1} \right) \cdot \left(\varphi(g_2 \cdots g_p)(h) \right) \cdot h^{-1} \\ &\quad \vdots \\ &= \left(\varphi(g_1) \left(\varphi(g_2 \cdots g_p)(h) \right) \left(\varphi(g_2 \cdots g_p)(h) \right)^{-1} \right) \left(\varphi(g_2) \left(\varphi(g_3 \cdots g_p)(h) \right) \left(\varphi(g_3 \cdots g_p)(h) \right)^{-1} \right) \cdots \varphi(g_p)(h).h^{-1} \end{aligned}$$

o qual é da forma $\varphi(g_1)(\tilde{h}_1)\tilde{h}_1^{-1} \cdots \varphi(g_p)(\tilde{h}_p)\tilde{h}_p^{-1}$, com $g_i \in X$ e $\tilde{h}_i \in \tilde{H}$, portanto basta calcular a ação para os elementos de X .

Também basta mostrar para os elementos de Y . Suponhamos que $h = h_1 \cdots h_q \in \tilde{H}$ qualquer, onde $h_j \in Y$. Temos que $\varphi(g)(h_1 \cdots h_q).(h_1 \cdots h_q)^{-1}$ é igual à

$$\left(\varphi(g)(h_1).h_1^{-1} \right) \left(h_1 \left(\varphi(g)(h_2).h_2^{-1} \right) h_1^{-1} \right) \cdots \left(h_1 h_2 \cdots h_{q-1} \left(\varphi(g)(h_q).h_q^{-1} \right) h_{q-1}^{-1} \cdots h_2^{-1} h_1^{-1} \right)$$

que é um produto de conjugados das imagens da ação nos elementos de Y , então pertence ao fecho normal em H de Z .

No caso geral, os elementos da forma $\varphi(g_i)(h_j).h_j^{-1}$ obtidos das contas na demonstração, podem ter g_i 's (resp. h_j 's) que não pertencem a X (resp. Y), mas que os inversos pertencem. Se o elemento é da forma $z = \varphi(g_i)(h_j).h_j^{-1}$ onde $g_i \in X$ e $h_j \in Y$, então $z^{-1} = h_j^{-1}.\varphi(g_i)(h_j).h_j^{-1}$, que é um conjugado de um elemento de Z , e portanto, $z \in \langle \langle Z \rangle \rangle$. Se o elemento é da forma $z = \varphi(g_i^{-1})(h_j).h_j^{-1}$ onde $g_i \in X$ e $h_j \in Y$, então existe $h' \in H$ tal que $h_j = \varphi(g_i)(h')$, portanto $(\varphi(g_i^{-1})(h_j).h_j^{-1})^{-1} = \varphi(g_i)(h').h'^{-1}$, então o inverso de $z = \varphi(g_i^{-1})(h_j).h_j^{-1}$ pertence a $\langle \langle Z \rangle \rangle$. Se o elemento é da forma $z = \varphi(g_i^{-1})(h_j^{-1}).h_j$ onde $g_i \in X$ e $h_j \in Y$ aplicamos os casos anteriores e vemos também que $z \in \langle \langle Z \rangle \rangle$.

2. Seja $L_n = \langle\langle \{x_j\}_{j \in J} \rangle\rangle$ (resp. $V_n = \langle\langle \{x_j\}_{j \in J} \rangle\rangle$), se $\alpha x \alpha^{-1} \in L_n$ (resp. V_n), tal que $x \in \{x_j\}_{j \in J}$ e $\alpha \in H$, temos o seguinte:

$$\varphi(g)(\alpha x \alpha^{-1}) \cdot (\alpha x \alpha^{-1})^{-1} = \varphi(g)(\alpha) \cdot (\varphi(g)(x) \cdot x^{-1}) \varphi(g)(\alpha^{-1}) \cdot \underbrace{\alpha [\alpha^{-1} \varphi(g)(\alpha), x] \alpha^{-1}}_{\in [H, L_n]},$$

portanto, os únicos novos elementos que podem aparecer em H_{n+1} (resp. \tilde{H}_{n+1}), a menos de conjugados e que ainda não estão em $[H, L_n]$ (resp. $[H, V_n]$), são da forma $\varphi(g)(x_j) \cdot x_j^{-1}$ para x_j um gerador de L_n (resp. V_n) a menos de conjugado.

Temos também que $[H, L_n]$ (resp. $[H, V_n]$) é igual a $\langle\langle [h, x_j], h \in H, j \in J \rangle\rangle$, pois se $l \in L_n$ (resp. V_n), então l é um produto de conjugados dos elementos de $\{x_j\}_{j \in J}$ e seus inversos, ou seja, $l = \prod_{j=1}^q \alpha_j x_j \alpha_j^{-1} \in L_n$ (resp. V_n) com $\alpha_j \in H$, temos para $q = 1$:

$$[h, \alpha_1 x_1 \alpha_1^{-1}] = h \alpha_1 [x_1, \alpha_1^{-1} h \alpha_1] \alpha_1^{-1} h^{-1}$$

portanto $[h, \alpha_1 x_1 \alpha_1^{-1}]$ pertence a

$$\langle\langle K_{n+1}, \varphi(g)(x_j) \cdot x_j^{-1}, [h, x_j] : g \in X, h \in H \rangle\rangle$$

(resp. $\langle\langle \varphi(g)(x_j) \cdot x_j^{-1}, [h, x_j] : g \in X, h \in H \rangle\rangle$). Supondo válido o resultado para $q - 1$, ou seja, $\tilde{l} = \prod_{j=1}^{q-1} \alpha_j x_j \alpha_j^{-1}$, provamos para q , observando que

$$[h, \tilde{l} \alpha_q x_q \alpha_q^{-1}] = [h, \tilde{l}] \tilde{l} [h, \alpha_q x_q \alpha_q^{-1}] \tilde{l}^{-1}. \quad (3.1)$$

Com isso temos que

$$L_{n+1} \subset \langle\langle K_{n+1}, \varphi(g)(x_j) \cdot x_j^{-1}, [h, x_j] : g \in X, h \in H \rangle\rangle$$

(resp. $V_{n+1} \subset \langle\langle \varphi(g)(x_j) \cdot x_j^{-1}, [h, x_j] : g \in X, h \in H \rangle\rangle$). Agora, usando que

$$\{K_{n+1}, \varphi(g)(x_j) \cdot x_j^{-1}, [h, x_j] : g \in X, h \in H\} \subset L_{n+1}$$

(resp. $\{\varphi(g)(x_j) \cdot x_j^{-1}, [h, x_j] : g \in X, h \in H\} \subset V_{n+1}$) e que L_{n+1} e V_{n+1} são normais em H (pelo Lema 3.2.12) segue a outra inclusão e portanto

$$L_{n+1} = \langle\langle K_{n+1}, \varphi(g)(x_j) \cdot x_j^{-1}, [h, x_j] : g \in X, h \in H, j \in J \rangle\rangle$$

e

$$V_{n+1} = \langle \langle \varphi(g)(x_j) \cdot x_j^{-1}, [h, x_j] : g \in X, h \in H, j \in J \rangle \rangle.$$

■

Observação 3.2.14. *No restante do texto, iremos nos referir aos geradores de K_n, H_n, \tilde{H}_n respectivamente, como os elementos da forma $\varphi(g)(h) \cdot h^{-1}$, onde g é gerador de $\Gamma_{n-1}(G), G, G$ respectivamente e h é um gerador, a menos de conjugados, de H, L_{n-1}, V_{n-1} respectivamente. Os geradores de $[H, L_n]$ (resp. $[H, V_n]$) serão elementos da forma $[h, l]$ com h gerador de H e l gerador de L_n (resp. V_n), a menos de conjugados, e os geradores de L_n (resp. V_n) os geradores de $K_n, H_n, [H, L_{n-1}]$ (resp. $\tilde{H}_n, [H, V_{n-1}]$).*

O Lema 3.2.13 implica também que para calcular L_n (resp. V_n) ao calcularmos o subgrupo H_n (resp. \tilde{H}_n) os únicos elementos que possivelmente não pertencem a $\langle K_n, [H, L_{n-1}] \rangle$ (resp. $[H, V_{n-1}]$) são da forma $\varphi(g)(h) \cdot h^{-1}$ com h um gerador de L_{n-1} (resp. V_{n-1}) a menos de conjugado portanto só nos preocuparemos com esses elementos.

Demonstraremos a seguir o Teorema 3.2.8.

Demonstração do Teorema 3.2.8:

A demonstração será análoga ao caso de $n = 2$ (veja Observação 3.2.9), mas temos que verificar se tudo continua bem definido. O primeiro passo de indução já está feito [27], ou seja,

$$L_2 \rtimes_{\varphi} \Gamma_2(G) = \Gamma_2(H \rtimes_{\varphi} G).$$

Temos como hipótese de indução que φ induz uma ação (também denotada por φ) de $\Gamma_n(G)$ em L_n , ($\varphi : \Gamma_n(G) \rightarrow \text{Aut}(L_n)$), e

$$L_n \rtimes_{\varphi} \Gamma_n(G) = \Gamma_n(H \rtimes_{\varphi} G).$$

Vamos provar que o mesmo é válido para $n + 1$. Inicialmente, vamos verificar que φ induz uma ação de $\varphi : \Gamma_{n+1}(G) \rightarrow \text{Aut}(L_{n+1})$. Primeiro, vamos provar que dado $g \in \Gamma_{n+1}(G)$, temos que $\varphi(g)(L_{n+1}) \subseteq L_{n+1}$, para isto basta considerar $x \in L_{n+1}$, tal que x é um elemento de K_{n+1}, H_{n+1} ou $[H, L_{n+1}]$, o resultado seguirá para produto de elementos dessa forma por $\varphi(g)$ ser um homomorfismo. Temos as seguintes possibilidades:

1. x é um gerador de K_{n+1} :

Então existem $g' \in \Gamma_n(G)$ e $h \in H$, tais que $x = \varphi(g')(h).h^{-1}$, logo,

$$\varphi(g) (\varphi(g')(h).h^{-1}) = (\varphi(gg')(h).h^{-1}) (\varphi(g)(h).h^{-1})^{-1}.$$

Como $g \in \Gamma_{n+1}(G)$, $\Gamma_{n+1}(G) \subseteq \Gamma_n(G)$ e $gg' \in \Gamma_n(G)$, temos que o elemento acima pertence a K_{n+1} .

2. x é um gerador de H_{n+1} :

A conta é análoga a acima, com a diferença que $g' \in G$ e $h \in L_n$, e assim obtemos um elemento de H_{n+1} .

3. x é um gerador de $[H, L_n]$:

Então $x = hlh^{-1}l^{-1}$, com $h \in H$ e $l \in L_n$, usando a hipótese de indução (existência da ação $\varphi : \Gamma_n(G) \rightarrow \text{Aut}(L_n)$), sabemos que $\varphi(g)(l) \in L_n$ e claramente $\varphi(g)(h) \in H$. Assim:

$$\varphi(g)(x) = [\varphi(g)(h), \varphi(g)(l)] \in [H, L_n].$$

Com isso, concluímos que $\varphi(g)(L_{n+1}) \subseteq L_{n+1}$, para todo $g \in \Gamma_{n+1}(G)$. Basta agora provarmos que para cada $g \in \Gamma_{n+1}(G)$, o homomorfismo $\varphi(g) : L_{n+1} \rightarrow L_{n+1}$ é sobrejetor (já sabemos que é injetor pois é a restrição de um homomorfismo injetor). Novamente temos três casos a analisar:

1. Se x é um gerador de K_{n+1} :

Então existem $g' \in \Gamma_n(G)$ e $h \in H$, tais que $x = \varphi(g')(h).h^{-1}$, logo tome

$$y = (\varphi(g^{-1}g')(h).h^{-1}) .h (\varphi(g^{-1})(h^{-1}).h) h^{-1},$$

temos que $y \in K_{n+1}$ (note que usamos o fato do item (1) do Lema 3.2.12), assim $\varphi(g)(y) = x$.

2. Se x é um gerador de H_{n+1} :

Este caso é análogo ao caso acima, com a diferença que $g' \in G$ e $h \in L_n$. O elemento y será tomado da mesma forma, porém não temos que H_{n+1} é normal em H , mas pelo item (3) do Lema 3.2.12 o conjugado de um elemento de H_{n+1} por qualquer elemento de H pertence a L_{n+1} , portanto sabemos que $y \in L_{n+1}$. Assim $\varphi(g)(y) = x$.

3. Se x é um gerador de $[H, L_n]$:

Então $x = hlh^{-1}l^{-1}$, com $h \in H$ e $l \in L_n$, usando a hipótese de indução (existência da ação $\varphi : \Gamma_n(G) \rightarrow \text{Aut}(L_n)$), sabemos que existe $l' \in L_n$ tal que $\varphi(g)(l') = l$, e pela ação $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ da hipótese, existe $h' \in H$ tal que $\varphi(g)(h') = h$. Assim: $\varphi(g)([h', l']) = [h, l] = x$ e $[h', l'] \in [H, L_n]$.

Para concluir, note que se tivermos um produto dos elementos de K_{n+1}, H_{n+1} e $[H, L_n]$, o resultado segue pelas propriedades de homomorfismo. Provamos assim que $\varphi : \Gamma_{n+1}(G) \rightarrow \text{Aut}(L_{n+1})$ é de fato uma ação, portanto está bem definido o produto semi-direto $L_{n+1} \rtimes_{\varphi} \Gamma_{n+1}(G)$.

Para finalizar o teorema, temos que mostrar que $L_{n+1} \rtimes_{\varphi} \Gamma_{n+1}(G)$ coincide com o grupo $\Gamma_{n+1}(H \rtimes_{\varphi} G)$.

Tome $(x, g) \in L_{n+1} \rtimes_{\varphi} \Gamma_{n+1}(G)$, como $(x, g) = (x, 1) \cdot (1, g)$ basta provarmos que $(x, 1), (1, g) \in \Gamma_{n+1}(H \rtimes_{\varphi} G)$. Como $g \in \Gamma_{n+1}(G)$, claramente $(1, g) \in \Gamma_{n+1}(H \rtimes_{\varphi} G)$. Agora, para $(x, 1)$ tal que $x \in L_{n+1}$, como x é um produto de elementos de K_{n+1}, H_{n+1} e $[H, L_n]$, novamente temos três casos a considerar:

1. $x = \varphi(g)(h) \cdot h^{-1} \in K_{n+1}$, onde $g \in \Gamma_n(G)$ e $h \in H$:

Então $(x, 1) = [(1, g), (h, 1)]$, como $g \in \Gamma_n(G)$, segue que $(1, g) \in \Gamma_n(H \rtimes_{\varphi} G)$ e portanto $(x, 1) = [(1, g), (h, 1)] \in [\Gamma_n(H \rtimes_{\varphi} G), H \rtimes_{\varphi} G] = \Gamma_{n+1}(H \rtimes_{\varphi} G)$.

2. $x = \varphi(g)(h) \cdot h^{-1} \in H_{n+1}$, onde $g \in G$ e $h \in L_n$:

Então $(x, 1) = [(1, g), (h, 1)]$, e temos que $(h, 1) \in L_n \rtimes_{\varphi} \Gamma_n(G) = \Gamma_n(H \rtimes_{\varphi} G)$ (hipótese de indução) e portanto $(x, 1) = [(1, g), (h, 1)] \in \Gamma_{n+1}(H \rtimes_{\varphi} G)$.

3. $x = hlh^{-1}l^{-1} \in [H, L_n]$, onde $h \in H$ e $l \in L_n$:

Então $(x, 1) = [(h, 1), (l, 1)]$, e temos que $(l, 1) \in L_n \rtimes_{\varphi} \Gamma_n(G) = \Gamma_n(H \rtimes_{\varphi} G)$ (hipótese de indução) e portanto $(x, 1) = [(h, 1), (l, 1)] \in \Gamma_{n+1}(H \rtimes_{\varphi} G)$.

Como esses três casos são válidos, um produto desses elementos também pertence a $\Gamma_{n+1}(H \rtimes_{\varphi} G)$, pela definição de grupo. Provamos assim que $L_{n+1} \rtimes_{\varphi} \Gamma_{n+1}(G) \subseteq \Gamma_{n+1}(H \rtimes_{\varphi} G)$.

Para a outra inclusão, tome $[(h, g), (x, y)]$ um elemento de $\Gamma_{n+1}(H \rtimes_{\varphi} G)$, ou seja, $(h, g) \in H \rtimes_{\varphi} G$ e $(x, y) \in \Gamma_n(H \rtimes_{\varphi} G) = L_n \rtimes_{\varphi} \Gamma_n(G)$. Temos que

$$[(h, g), (x, y)] = (h \cdot \varphi(g)(x) \cdot \varphi(gyg^{-1})(h^{-1}) \cdot \varphi([g, y])(x^{-1}), [g, y]).$$

Obviamente $[g, y] \in \Gamma_{n+1}(G)$, pois $g \in G$ e $y \in \Gamma_n(G)$. A primeira coordenada podemos escrever do seguinte modo:

$$[h, x] \cdot xhx^{-1} (\varphi(g)(x) \cdot x^{-1}) xh^{-1}x^{-1} \cdot xh (\varphi(gyg^{-1})(h^{-1}) \cdot h) h^{-1}x^{-1} \cdot x (\varphi([g, y])(x^{-1}) \cdot x) x^{-1}.$$

Note que:

- $[h, x] \in [H, L_n] \subseteq L_{n+1}$, pois $h \in H$ e $x \in L_n$.
- $\varphi(g)(x) \cdot x^{-1} \in H_{n+1} \subseteq L_{n+1}$, pois $x \in L_n$.
- $\varphi(gyg^{-1})(h^{-1}) \cdot h \in K_{n+1} \subseteq L_{n+1}$, pois $y \in \Gamma_n(G)$ (que é um subgrupo normal de G), logo $gyg^{-1} \in \Gamma_n(G)$.
- $\varphi([g, y])(x^{-1}) \cdot x \in H_{n+1} \cap K_{n+1} \subseteq L_{n+1}$, pois $x \in L_n$ e $[g, y] \in \Gamma_n(G)$.

Os conjugados de todos os elementos acima também pertencem a L_{n+1} pois tal grupo é normal em H pelo item (2) do Lema 3.2.12, portanto o elemento da primeira coordenada pertence a L_{n+1} .

Provamos assim que $L_{n+1} \rtimes_{\varphi} \Gamma_{n+1}(G) = \Gamma_{n+1}(H \rtimes_{\varphi} G)$, como desejado. ■

Exemplo 3.2.15. Aplicaremos o Teorema 3.2.8 para mostrar que $\pi_1(\mathbb{K})$ é residualmente nilpotente. Temos $\pi_1(\mathbb{K}) = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, com a ação não trivial. Temos que $\Gamma_n(\mathbb{Z}) = \{1\}$, para todo $n \geq 2$. Agora, $K_2 = \langle a^2 \rangle$ e $[\langle a \rangle, \langle a \rangle] = \{1\}$, portanto $L_2 = \langle a^2 \rangle$. Para $n \geq 3$, por indução vemos que $K_n = \{1\}$, $H_n = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$, $[H, L_{n-1}] = \{1\}$, portanto $L_n = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$, conseqüentemente

$$\Gamma_n(\pi_1(\mathbb{K})) = \langle a^{2^{n-1}} \rangle \rtimes \{1\} = \langle a^{2^{n-1}} \rangle,$$

para $n \geq 2$. Então $\bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(\pi_1(\mathbb{K})) = \{1\}$, o que implica que $\pi_1(\mathbb{K})$ é residualmente nilpotente.

Agora provemos o Teorema 3.2.11:

Demonstração do Teorema 3.2.11:

Mostraremos também por indução em n . O primeiro passo, é provar que o teorema é válido para $n = 1$, o que é imediato pelo Teorema 3.2.8 e pelo fato de $A^{(1)} = \Gamma_2(A)$ para qualquer grupo A (neste caso, temos a igualdade dos grupos, não apenas a inclusão).

Pelo item (2) do Lema 3.2.12 temos que V_n são subgrupos normais de H para todo n . Agora suponha que $(H \rtimes_{\varphi} G)^{(n)} \subset V_{n+1} \rtimes_{\varphi} G^{(n)}$, e provaremos que o mesmo é válido para $n + 1$. Temos o seguinte:

$$(H \rtimes_{\varphi} G)^{(n+1)} = [(H \rtimes_{\varphi} G)^{(n)}, (H \rtimes_{\varphi} G)^{(n)}] \subset [V_{n+1} \rtimes_{\varphi} G^{(n)}, V_{n+1} \rtimes_{\varphi} G^{(n)}].$$

Basta agora, provar que $[V_{n+1} \rtimes_{\varphi} G^{(n)}, V_{n+1} \rtimes_{\varphi} G^{(n)}] \subset V_{n+2} \rtimes_{\varphi} G^{(n+1)}$. Tome $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \in [V_{n+1} \rtimes_{\varphi} G^{(n)}, V_{n+1} \rtimes_{\varphi} G^{(n)}]$, temos:

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = (x_1 \cdot \varphi(y_1)(x_2) \cdot \varphi(y_1 y_2 y_1^{-1})(x_1^{-1}) \cdot \varphi([y_1, y_2])(x_2^{-1}), [y_1, y_2]).$$

Obviamente $[y_1, y_2] \in G^{(n+1)}$, pois $y_1, y_2 \in G^{(n)}$. A primeira coordenada podemos escrever do seguinte modo:

$$[x_1, x_2] \cdot x_2 x_1 x_2^{-1} (\varphi(y_1)(x_2) \cdot x_2^{-1}) x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \cdot x_2 x_1 (\varphi(y_1 y_2 y_1^{-1})(x_1^{-1}) \cdot x_1) x_1^{-1} x_2^{-1} \cdot x_2 (\varphi([y_1, y_2])(x_2^{-1}) \cdot x_2) x_2^{-1}.$$

Note que:

- $[x_1, x_2] \in [H, V_{n+1}] \subseteq V_{n+2}$, pois $x_1, x_2 \in V_{n+1} \subset H$.

- $\varphi(y_1)(x_2).x_2^{-1}$, $\varphi(y_1y_2y_1^{-1})(x_1^{-1}).x_1$ e $\varphi([y_1, y_2])(x_2^{-1}).x_2$ pertencem a \tilde{H}_{n+2} pois $x_1, x_2 \in V_{n+1}$, e portanto pertencem a V_{n+2} .

Assim, o elemento da primeira coordenada pertence a V_{n+2} , pois tal grupo é normal em H pelo item (2) do Lema 3.2.12. Provando assim o teorema. ■

A próxima proposição, é totalmente técnica, mas nos auxiliará adiante:

Proposição 3.2.16. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que*

$$[x^{2^n}, y] = [x, x, x^2, \dots, x^{2^{n-1}}, y] \cdot [x, x^2, \dots, x^{2^{n-1}}, y]^2 \cdot [x^2, \dots, x^{2^{n-1}}, y]^2 \cdots [x^{2^{n-1}}, y]^2.$$

Demonstração: Para $n = 1$, note que

$$[x^2, y] = x.x.y.x^{-1}.x^{-1}.y^{-1} = x[x, y]yx^{-1}y^{-1} = x[x, y]x^{-1}[x, y] = [x, x, y].[x, y]^2.$$

Suponha agora que a igualdade é válida para todo $i \leq n$, e provemos para $n + 1$. Usando a fórmula para $x = x^{2^n}$ e $n = 1$, temos

$$[x^{2^{n+1}}, y] = [(x^{2^n})^2, y] = [x^{2^n}, x^{2^n}, y][x^{2^n}, y]^2,$$

agora usando a fórmula para x , n e tomando $y = [x^{2^n}, y]$, temos:

$$[x^{2^n}, [x^{2^n}, y]] = [x, x, x^2, \dots, x^{2^{n-1}}, [x^{2^n}, y]] [x, x^2, \dots, x^{2^{n-1}}, [x^{2^n}, y]]^2 \cdots [x^{2^{n-1}}, [x^{2^n}, y]]^2.$$

Juntando essas duas contas, concluímos que

$$[x^{2^{n+1}}, y] = [x, x, x^2, \dots, x^{2^{n-1}}, [x^{2^n}, y]] [x, x^2, \dots, x^{2^{n-1}}, [x^{2^n}, y]]^2 \cdots [x^{2^{n-1}}, [x^{2^n}, y]]^2 [x^{2^n}, y]^2$$

como desejado. ■

3.3. Série Central Descendente de $B_n(\mathbb{K})$

Como dito anteriormente, já foi estudada a série central descende do grupo de tranças do toro (na verdade, de todas as superfícies orientáveis) e Bellingeri, Gervais e Guaschi [7]

mostraram que $B_n(\mathbb{T})$ é residualmente nilpotente se, e somente se, $n \leq 2$ e $P_n(\mathbb{T})$ é residualmente nilpotente para todo n .

Nesta seção, estudamos o caso da garrafa de Klein. Até agora, obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.1. *O grupo de tranças da garrafa de Klein, $B_n(\mathbb{K})$, é residualmente nilpotente para $n = 1$ e não é residualmente nilpotente se $n \geq 3$.*

O caso $n = 1$ é imediato e foi feito no Exemplo 3.2.15, pois $B_1(\mathbb{K}) = \pi_1(\mathbb{K})$.

Se $n = 2$, conjecturamos que $B_2(\mathbb{K})$ é residualmente nilpotente, fizemos vários cálculos que indicam que essa afirmação é verdadeira, que serão explicitados adiante.

Faremos agora o caso que $n \geq 3$.

3.3.1. O caso $n \geq 3$

Vamos mostrar que $B_n(\mathbb{K})$, $n \geq 3$, não é residualmente nilpotente de modo análogo ao feito por Bellingeri, Gervais e Guaschi:

Proposição 3.3.2. *Para $n \geq 3$, $B_n(\mathbb{K})$ não é residualmente nilpotente.*

Demonstração:

Basta considerarmos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \rightarrow \frac{\Gamma_2(B_n(\mathbb{K}))}{\Gamma_3(B_n(\mathbb{K}))} \rightarrow \frac{B_n(\mathbb{K})}{\Gamma_3(B_n(\mathbb{K}))} \xrightarrow{p} \frac{B_n(\mathbb{K})}{\Gamma_2(B_n(\mathbb{K}))} \rightarrow 1.$$

Sabemos pela Proposição 3.2.1 que

$$\frac{B_n(\mathbb{K})}{\Gamma_2(B_n(\mathbb{K}))} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \langle a, b, \sigma : [a, b] = [a, \sigma] = [b, \sigma] = 1, a^2 = \sigma^2 = 1 \rangle. \quad (3.2)$$

Queremos mostrar que p é um isomorfismo. Temos pelas propriedades da série central descendente, que todos os elementos do núcleo de p são centrais em $\frac{B_n(\mathbb{K})}{\Gamma_3(B_n(\mathbb{K}))}$. Para $i = 1, \dots, n - 2$,

$$[\sigma_i, \sigma_{i+1}] = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \quad (3.3)$$

usando as relações de Artin. Assim $\sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i$ é central em $\frac{B_n(\mathbb{K})}{\Gamma_3(B_n(\mathbb{K}))}$ e temos nesse quociente:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \Rightarrow (\sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i) \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_i \sigma_{i+1}$$

$$\Rightarrow \sigma_{i+1}(\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i)\sigma_i = \sigma_i\sigma_{i+1} \Rightarrow \sigma_i\sigma_i = \sigma_i\sigma_{i+1} \Rightarrow \sigma_i = \sigma_{i+1}.$$

Assim todos os σ_i representam a mesma classe em $\frac{B_n(\mathbb{K})}{\Gamma_3(B_n(\mathbb{K}))}$, denotemos tal classe por σ . Segue que a classe de σ comuta com a classe de a e de b em $\frac{B_n(\mathbb{K})}{\Gamma_3(B_n(\mathbb{K}))}$, pois σ_i comuta com a e com b (relações (3) e (4) do Teorema 1.4.1) em $B_n(\mathbb{K})$ se $i \geq 2$ (estamos usando que $n \geq 3$).

Agora, usando as outras relações do grupo $B_n(\mathbb{K})$ dadas pelo Teorema 1.4.1, temos novas relações em $\frac{B_n(\mathbb{K})}{\Gamma_3(B_n(\mathbb{K}))}$:

- $b(\sigma_1^{-1}b\sigma_1) = (\sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1})b \Rightarrow \sigma^2 = 1$
- $b^{-1}\sigma_1a = \sigma_1a\sigma_1b^{-1}\sigma_1 \Rightarrow b^{-1}a = ab^{-1}\sigma^2 \Rightarrow ab = ba$
- $ba^{-1}b^{-1}a^{-1} = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2\sigma_1 \Rightarrow a^{-2} = \sigma^{2(n-1)} \Rightarrow a^2 = 1.$

Sabemos então que σ, a, b geram $\frac{B_n(\mathbb{K})}{\Gamma_3(B_n(\mathbb{K}))}$, e não temos mais relações vindas de $[x, [y, z]]$, para $x, y, z \in B_n(\mathbb{K})$ quaisquer, pois como os geradores σ, a, b comutam e portanto o colchete será trivial no quociente. Consequentemente,

$$\frac{B_n(\mathbb{K})}{\Gamma_3(B_n(\mathbb{K}))} = \langle a, b, \sigma : a^2 = \sigma^2 = [a, b] = [a, \sigma] = [b, \sigma] = 1 \rangle,$$

e comparando com (3.2) vemos que p é um isomorfismo, como desejado. Assim $B_n(\mathbb{K})$ não é residualmente nilpotente, pois $\Gamma_2(B_n(\mathbb{K})) = \Gamma_3(B_n(\mathbb{K}))$ e tal subgrupo não é trivial. ■

Além disso, conseguimos uma descrição desses subgrupos.

Proposição 3.3.3. *Para $n \geq 3$, $\Gamma_2(B_n(\mathbb{K})) = \langle\langle \sigma_2^{-1}\sigma_1 \rangle\rangle$, o fecho normal de $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ em $B_n(\mathbb{K})$.*

Demonstração:

Primeiro, segue da equação (3.3) que $\langle\langle \sigma_2^{-1}\sigma_1 \rangle\rangle \subset \Gamma_2(B_n(\mathbb{K}))$. Reciprocamente, demonstremos que todos os colchetes dos geradores de $B_n(\mathbb{K})$ pertencem a $\langle\langle \sigma_2^{-1}\sigma_1 \rangle\rangle$

usando as relações do Teorema 1.4.1. Temos

$$\begin{aligned}
[\sigma_i, \sigma_{i+1}] &= \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i = \sigma_{i+1}^{-1} \underbrace{\sigma_i (\sigma_{i-1} \sigma_i \sigma_i^{-1} \sigma_{i-1}^{-1})}_{(1)} = \underbrace{\sigma_{i+1}^{-1} (\sigma_{i-1} \sigma_i \sigma_{i-1})}_{(2)} \sigma_i^{-1} \sigma_{i-1}^{-1} \\
&= (\sigma_{i-1} \underbrace{\sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i}_{(1)} \sigma_{i-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i-1}^{-1}) = \sigma_{i-1} (\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \underbrace{\sigma_{i+1}^{-1} \sigma_{i-1}}_{(2)}) \sigma_i^{-1} \sigma_{i-1}^{-1} \\
&= \sigma_{i-1} \sigma_i \sigma_{i+1} (\sigma_i^{-1} \sigma_{i-1}) \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i-1}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Por indução em n segue que todos os colchetes $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ estão no fecho normal de $\sigma_2^{-1} \sigma_1$.

Além disso,

$$[a, \sigma_1] = a \sigma_1 (\underbrace{\sigma_2^{-1} \sigma_2}_{(3)}) a^{-1} \sigma_1^{-1} = a (\sigma_1 \sigma_2^{-1}) a^{-1} (\sigma_2 \sigma_1^{-1}), \tag{3.5}$$

portanto $[a, \sigma_1]$ pertence a $\langle\langle \sigma_2^{-1} \sigma_1 \rangle\rangle$. O raciocínio é análogo para $[b, \sigma_1]$, usando a relação (8).

Para calcular o último colchete $[b, a]$, primeiro mostraremos que σ_1^2 pertence ao fecho normal de $\sigma_2^{-1} \sigma_1$, usando a relação (7) do grupo $B_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned}
(b \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1}) \sigma_1^2 &= \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1} b \\
\Rightarrow \sigma_1^2 &= \sigma_1 b^{-1} \underbrace{\sigma_1 b^{-1} \sigma_1^{-1} b}_{(5)} \sigma_1^{-1} b = (\sigma_1 b^{-1} [\sigma_1, b^{-1}] b \sigma_1^{-1}) [\sigma_1, b^{-1}] \in \langle\langle \sigma_2^{-1} \sigma_1 \rangle\rangle
\end{aligned}$$

e agora usando a relação (5) do grupo $B_n(\mathbb{K})$, temos:

$$\begin{aligned}
bab^{-1} a^{-1} &= ba (\underbrace{\sigma_1^{-1} \sigma_1}_{(5)}) b^{-1} (\sigma_1 \sigma_1^{-1}) a^{-1} = b a \underbrace{\sigma_1^{-1} (a^{-1} \sigma_1^{-1} b^{-1} \sigma_1 a)}_{(5)} \sigma_1^{-1} a^{-1} \\
&= b [a, \sigma_1^{-1}] \sigma_1^{-2} b^{-1} [\sigma_1, a].
\end{aligned}$$

Segue das contas acima que esse último elemento pertence a $\langle\langle \sigma_2^{-1} \sigma_1 \rangle\rangle$. Sabemos que o colchete dos geradores de $B_n(\mathbb{K})$ pertencem a $\langle\langle \sigma_2^{-1} \sigma_1 \rangle\rangle$, o colchete de $[g, h]$ onde g, h são produtos dos geradores e seus inversos, pertence ao fecho normal do colchete dos geradores. Daí segue que $\Gamma_2(B_n(\mathbb{K})) \subset \langle\langle \sigma_2^{-1} \sigma_1 \rangle\rangle$. ■

3.3.2. Caso $n = 2$

Nesta seção estamos interessados em descobrir se $B_2(\mathbb{K})$ é residualmente nilpotente ou não. Acreditamos que sim, mas ainda falta alguns detalhes na demonstração. Usamos

para isto alguns resultados da Seção 3.2.

Primeiro, utilizando o Teorema 3.2.5 de Gruenberg, a sequência exata curta (1.1)

$$1 \rightarrow P_2(\mathbb{K}) \rightarrow B_2(\mathbb{K}) \rightarrow S_2 \rightarrow 1$$

e o fato de $S_2 \cong \mathbb{Z}_2$ é 2-finito, basta mostrarmos que $P_2(\mathbb{K})$ é residualmente 2-finito, pois assim poderíamos concluir que $B_2(\mathbb{K})$ é residualmente 2-finito, assim, como $B_2(\mathbb{K})$ é finitamente gerado, teríamos que $B_2(\mathbb{K})$ é residualmente nilpotente.

É interessante reduzir o problema para as tranças puras, pois podemos escrever $P_2(\mathbb{K})$ como o produto semi-direto de dois grupos que conhecemos bem, um grupo livre de posto dois e o grupo fundamental da garrafa de Klein, ambos são residualmente 2-finito e finitamente gerados, em particular residualmente nilpotente. Porém, não é verdade em geral que o produto semi-direto de dois grupos residualmente 2-finitos é residualmente 2-finito (nem que o produto semi-direto de dois grupos residualmente nilpotentes é residualmente nilpotente, veja o Exemplo 3.2.6). Precisamos agora analisar a ação de um no outro e usaremos o Teorema 3.2.8 para calcularmos explicitamente qual é a série central descendente de $P_2(\mathbb{K})$, para depois calcularmos a série $\gamma_n^2(P_2(\mathbb{K}))$.

Temos então, a seguinte exata curta:

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\}, x_2) \rightarrow P_2(\mathbb{K}) \rightarrow P_1(\mathbb{K}) \rightarrow 1$$

que cinde, pela secção

$$s: P_1(\mathbb{K}) \longrightarrow P_2(\mathbb{K})$$

$$a_1 \longmapsto a_2 a_1$$

$$b_1 \longmapsto b_1 b_2 C_{1,2} = b_2 b_1$$

dada pela Proposição 2.2.1. Sabemos que $\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\}) = \langle a_2, b_2 \rangle$ é um grupo livre de posto dois e para $P_2(\mathbb{K})$ temos:

Observação 3.3.4. $P_2(\mathbb{K})$ admite a seguinte apresentação dada pelo Teorema 1.3.1:

Geradores: a_1, b_1, a_2, b_2 .

Relações:

1. $a_1^{-1}a_2a_1 = a_2$;
2. $a_1^{-1}b_2a_1 = a_2^{-1}b_2a_2^{-1}$;
3. $b_1^{-1}a_2b_1 = a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}a_2^{-1}$;
4. $b_1^{-1}b_2b_1 = a_2b_2a_2$;
5. $b_2^{-1}a_2b_2a_2 = b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}$.

Observação 3.3.5. A apresentação dada na Observação 3.3.4 é a mesma dada pelo Teorema 1.3.1 que temos usado sempre, mas foi retirado o gerador $C_{1,2} = b_2^{-1}a_2b_2a_2$, para facilitar as contas.

Então podemos considerar $P_2(\mathbb{K}) = \pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\}) \rtimes_{\varphi} s(P_1(\mathbb{K}))$, tal que

$$\begin{aligned} \varphi: s(P_1(\mathbb{K})) &\longrightarrow \text{Aut}(\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\})) \\ \varphi(a_2a_1) &: \begin{cases} a_2 \longmapsto a_2 \\ b_2 \longmapsto a_2^{-2}b_2 \end{cases} \\ \varphi(b_2b_1) &: \begin{cases} a_2 \longmapsto a_2^{-1} \\ b_2 \longmapsto a_2b_2a_2, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

como é mostrado nas contas a seguir (os números correspondem as relações (1)-(5) acima):

- $\underbrace{(a_2a_1)^{-1}}_{(1)} b_2 \underbrace{(a_2a_1)}_{(1)} = a_2^{-1} \underbrace{a_1^{-1}b_2a_1}_{(2)} a_2 = a_2^{-1}(a_2^{-1}b_2a_2^{-1})a_2 = a_2^{-2}b_2$
- $(b_2b_1)^{-1}a_2(b_2b_1) = \underbrace{b_1^{-1}b_2^{-1}b_1}_{(4)} \underbrace{b_1^{-1}a_2b_1}_{(3)} \underbrace{b_1^{-1}b_2b_1}_{(4)} = (a_2^{-1}b_2^{-1}a_2^{-1})(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}a_2^{-1})(a_2b_2a_2) = a_2^{-1}$
- $(b_2b_1)^{-1}b_2(b_2b_1) = \underbrace{b_1^{-1}b_2b_1}_{(4)} = a_2b_2a_2.$

Segue do Exemplo 3.2.15 que $\Gamma_n(s(P_1(\mathbb{K}))) = \langle (a_2a_1)^{2^{n-1}} \rangle$, para todo $n \geq 2$ e sabemos que $s(P_1(\mathbb{K}))$ é residualmente nilpotente.

De agora em diante, vamos utilizar a nomenclatura do Teorema 3.2.8 no nosso caso, ou seja, para o grupo $P_2(\mathbb{K}) = \pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\}) \rtimes_{\varphi} s(P_1(\mathbb{K}))$, portanto $H = \pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\})$ e $G = s(P_1(\mathbb{K}))$. Agora, basta calcularmos os grupos L_n , definidos neste teorema.

Neste caso, os subgrupos mais simples de serem calculados são K_n , pelo fato de já conhecermos os grupos $\Gamma_n(s(P_1(\mathbb{K})))$ para todo n e termos uma descrição simples de tais grupos.

Lema 3.3.6. *Usando a nomenclatura do Teorema 3.2.8 para o grupo $P_2(\mathbb{K}) = \pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\}) \rtimes_{\varphi} s(P_1(\mathbb{K}))$, o subgrupo K_n é igual ao fecho normal, $\langle\langle a_2^2, \Gamma_2(H) \rangle\rangle$, de $\{a_2^2\} \cup \Gamma_2(H)$ em H se $n = 2$, e ao fecho normal, $\langle\langle a_2^{2^{n-1}} \rangle\rangle$, de $\{a_2^{2^{n-1}}\}$ em H para $n \geq 3$.*

Demonstração: Primeiro, para o caso $n = 2$, vamos calcular a ação apenas nos geradores de H e G . Temos então que os seguintes elementos pertencem à K_2 :

- $\varphi(a_2 a_1)(a_2).a_2^{-1} = 1$;
- $\varphi(a_2 a_1)(b_2).b_2^{-1} = a_2^{-2}$;
- $\varphi(b_2 b_1)(a_2).a_2^{-1} = a_2^{-2}$;
- $\varphi(b_2 b_1)(b_2).b_2^{-1} = a_2 b_2 a_2 b_2^{-1} = a_2^2 [a_2^{-1}, b_2]$.

Portanto $\{a_2^2, [a_2^{-1}, b_2]\} \subset K_2$. Pelo fato de K_2 ser normal em H (Lema 3.2.12 item (1)), segue que o fecho normal de $\{a_2^2, [a_2^{-1}, b_2]\}$ em H está contido em K_2 , conseqüentemente $\langle\langle a_2^2, \Gamma_2(H) \rangle\rangle \subseteq K_2$.

Para mostrar a outra inclusão, precisamos mostrar que $\varphi(g)(h).h^{-1} \in \langle\langle a_2^2, \Gamma_2(H) \rangle\rangle$ para todo $h \in H$ e $g \in G$, pelo Lema 3.2.13 sabemos que basta mostrar para os geradores de G e H , portanto as contas feitas acima já garantem o resultado.

Calculando K_n , para $n \geq 3$. Pelo Lema 3.2.13, temos que calcular qual é a ação de $(a_2 a_1)^m$ apenas nos geradores de H (com m um múltiplo de 2^{n-2}), pois a ação num elemento qualquer de H estará no fecho normal de $\{\varphi(a_2 a_1)^m(h).h^{-1} : h \text{ é um gerador de } H\}$ em H . Temos que a ação é trivial no elemento a_2 (pois a_1 e a_2 comutam). Verifiquemos

a ação em b_2 (usaremos as relações dadas na Observação 3.3.4):

$$\begin{aligned}
\underbrace{(a_2 a_1)^{-m}}_{(1)} b_2 \underbrace{(a_2 a_1)^m}_{(1)} &= a_2^{-m} a_1^{-m} b_2 a_1^m a_2^m = a_2^{-m} a_1^{-m+1} \underbrace{a_1^{-1} b_2 a_1}_{(2)} a_1^{m-1} a_2^m \\
&= \underbrace{a_2^{-m} a_1^{-m+1}}_{(1)} \underbrace{(a_2^{-1} b_2 a_2^{-1})}_{(1)} \underbrace{a_1^{m-1} a_2^m}_{(1)} = \underbrace{(a_2^{-m} a_2^{-1})}_{(1)} \underbrace{a_1^{-m+1}}_{(2)} b_2 \underbrace{(a_1^{m-1} a_2^{-1} a_2^m)}_{(2)} \\
&= \cdots = a_2^{-m} (a_2^{-m} \cdot b_2 a_2^{-m}) a_2^m = a_2^{-2m} b_2.
\end{aligned}$$

Portanto, o elemento

$$(a^{-2m} b_2) \cdot b_2^{-1} = a_2^{-2m}$$

pertence a K_n , onde m é um múltiplo de 2^{n-2} , logo $\langle \langle a_2^{2^{n-1}} \rangle \rangle = K_n$, pelo Lema 3.2.12, para $n \geq 3$, como desejado. \blacksquare

Lembremos que $H_2 = K_2$ e $[H, L_1] = \Gamma_2(H)$, concluimos assim que $L_2 = \langle \langle \Gamma_2(H), a_2^2 \rangle \rangle = K_2$, no nosso caso.

Nosso objetivo agora é calcular L_n para $n \geq 3$. Vamos definir os seguintes grupos, para $n \geq 2$, $W_2 = L_2$ e para $n \geq 3$:

$$W_n = \langle \langle \Gamma_n(H), x^2 : x \in W_{n-1} \rangle \rangle,$$

e para $n \geq 2$:

$$\widetilde{W}_n = \langle \langle a_2^{2^{n-1}}, x^{2^{n-i}} : x \in \Gamma_i(H), 2 \leq i \leq n \rangle \rangle.$$

Nos dois casos, se trata do fecho normal em H .

Conjecturamos que $L_n = W_n = \widetilde{W}_n$ para todo $n \geq 3$. Para $n = 3$, calculemos K_3, H_3 e $[H, L_2]$. O subgrupo $K_3 = \langle \langle a_2^4 \rangle \rangle$ foi calculado no Lema 3.3.6. Calculemos agora o subgrupo $[H, L_2]$, sabemos pelo Lema 3.2.13 que podemos calcular apenas nos geradores de L_2 , a menos de conjugados, ou seja $[H, a_2^2] \cup [H, \Gamma_2(H)]$, como $[H, \Gamma_2(H)] = \Gamma_3(H)$ todas as contas que faremos de agora em diante serão módulo $\Gamma_3(H)$, utilizaremos o Teorema 3.2.3 para tais contas. Calculemos $[h, a_2^2]$ para h um gerador de H :

- $[a_2, a_2^2] = 1$;
- $[b_2, a_2^2] \equiv [b_2, a_2]^2 \pmod{\Gamma_3(H)}$.

Novamente, só precisamos calcular nos geradores de H , pois se $h = h_1 \cdots h_p$ onde h_i é gerador de H , então

$$[h, a_2^2] \equiv [h_1, a_2^2] \cdots [h_p, a_2^2] \pmod{\Gamma_3(H)},$$

portanto $[H, L_2] = \langle \langle \Gamma_3(H), x^2 : x \in \Gamma_2(H) \rangle \rangle$.

Vamos agora calcular o subgrupo H_3 , ou seja, $\varphi(g)(h).h^{-1}$ com $g \in G$ e $h \in L_2$. Já sabemos pelo Lema 3.2.13, que podemos considerar g um gerador de G e h um gerador de L_2 , a menos de conjugados. Então, resta calcular a ação para $g = a_2a_1$ e $g = b_2b_1$, $h = a_2^2$ e $h = [b_2, a_2]\theta$, $\theta \in \Gamma_3(H)$. Temos o seguinte (continuamos fazendo a conta mod $\Gamma_3(H)$):

- $\varphi(a_2a_1)(a_2^2).a_2^{-2} = 1$;
- $\varphi(b_2b_1)(a_2^2).a_2^{-2} = a_2^{-4}$, portanto pertence a K_3 ;
- $\varphi(a_2a_1)([b_2, a_2]\theta)([b_2, a_2]\theta)^{-1} \equiv [a_2^{-2}b_2, a_2][b_2, a_2]^{-1}$
 $\equiv [a_2^{-2}, a_2][b_2, a_2][b_2, a_2]^{-1} \equiv 1 \pmod{\Gamma_3(H)}$;
- $\varphi(b_2b_1)([b_2, a_2]\theta)([b_2, a_2]\theta)^{-1} \equiv [a_2b_2a_2, a_2^{-1}][b_2, a_2]^{-1}$
 $\equiv [a_2, a_2]^{-1}[b_2, a_2]^{-1}[a_2, a_2]^{-1}[b_2, a_2]^{-1}$
 $\equiv [b_2, a_2]^{-2} \pmod{\Gamma_3(H)}$, portanto pertence a $[H, L_2]$.

Portanto $H_3 \subset \langle \langle K_3, [H, L_2] \rangle \rangle$, e assim

$$L_3 = \langle \langle a_2^4, x^2 : x \in \Gamma_2(H); \Gamma_3(H) \rangle \rangle = \widetilde{W}_3 = W_3.$$

Assim nosso primeiro passo de indução está feito. Supondo por indução que $L_n = W_n = \widetilde{W}_n$, conseguimos provar que $\widetilde{W}_{n+1} \subset W_{n+1}$ e $W_{n+1} = L_{n+1}$. Ao tentar provar que $W_{n+1} \subset \widetilde{W}_{n+1}$ ($W_n = \widetilde{W}_n$ por hipótese de indução) provamos com facilidade que se $x^2 \in W_{n+1}$ onde x é um dos geradores de \widetilde{W}_n , então $x^2 \in \widetilde{W}_{n+1}$. Para concluir o resultado basta provar que se $x^2 \in W_{n+1}$ com $x = x_1 \cdots x_q \in \widetilde{W}_n$, onde os x_i 's são geradores de \widetilde{W}_n e $x_i^2 \in \widetilde{W}_{n+1}$, então $x^2 \in W_{n+1}$. Para essa propriedade ser válida é necessário provar que $[\widetilde{W}_n, \widetilde{W}_n] \subset \widetilde{W}_{n+1}$, pois

$$x^2 = x_1^2 \underbrace{[x_1^{-1}, (x_2 \cdots x_q)]}_{\in [\widetilde{W}_n, \widetilde{W}_n]} (x_2 \cdots x_q)^2,$$

tudo indica que tal inclusão é válida mas por enquanto não conseguimos prová-la.

Se for verdade que $W_n \subset \widetilde{W}_n$ para todo $n \geq 3$, teríamos o seguinte resultado:

Conjectura: Usando a notação acima, conjecturamos que $L_n = W_n = \widetilde{W}_n$ para todo $n \geq 2$. Se for verdadeira, a série central descendente de $P_2(\mathbb{K})$, para $n \geq 2$ seria dada por:

$$\begin{aligned} \Gamma_n(P_2(\mathbb{K})) &= L_n \rtimes \langle (a_2 a_1)^{2^{n-1}} \rangle = \langle \langle \Gamma_n(\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\})), x^2, x \in W_{n-1} \rangle \rangle \rtimes \langle (a_2 a_1)^{2^{n-1}} \rangle \\ &= \langle \langle a_2^{2^{n-1}}, x^{2^{n-i}} : x \in \Gamma_i(\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1\})), 2 \leq i \leq n \rangle \rangle \rtimes \langle (a_2 a_1)^{2^{n-1}} \rangle. \end{aligned}$$

Consequentemente, $P_2(\mathbb{K})$ seria residualmente nilpotente.

Como explicado anteriormente, para mostrar que $B_2(\mathbb{K})$ é residualmente nilpotente, basta demonstrar que $P_2(\mathbb{K})$ é residualmente 2-finito. Mas, se nossa conjectura estiver correta, conseguimos provar o seguinte:

Proposição 3.3.7. Supondo a conjectura acima válida, temos para $n \geq 2$,

$$\gamma_n^2 P_2(\mathbb{K}) = \langle \langle \Gamma_n(P_2(\mathbb{K})), b_2^{2^{n-1}}, (b_2 b_1)^{2^{n-1}} \rangle \rangle.$$

Se for o caso, $P_2(\mathbb{K})$ é residualmente 2-finito.

Demonstração: Provaremos por indução em n . Denotemos por

$$U_n = \langle \langle \Gamma_n(P_2(\mathbb{K})), b_2^{2^{n-1}}, (b_2 b_1)^{2^{n-1}} \rangle \rangle.$$

Provemos que para $n = 2$ é válida a proposição, por definição,

$$\gamma_1^2 P_2(\mathbb{K}) = P_2(\mathbb{K}) = U_1$$

e também

$$\gamma_2^2 P_2(\mathbb{K}) = \langle [P_2(\mathbb{K}), P_2(\mathbb{K})] \cup \{x^2 : x \in P_2(\mathbb{K})\} \rangle.$$

Assim, temos que $U_2 \subset \gamma_2^2 P_2(\mathbb{K})$ pois $\Gamma_2(P_2(\mathbb{K})) = [P_2(\mathbb{K}), P_2(\mathbb{K})], b_2^2, (b_2 b_1)^2 \in \{x^2 : x \in P_2(\mathbb{K})\}$ e $\gamma_2^2 P_2(\mathbb{K})$ é normal. Para a outra inclusão, já temos que $[P_2(\mathbb{K}), P_2(\mathbb{K})] \subset U_2$. Agora $P_2(\mathbb{K})$ é gerado por $\{a_2, a_2 a_1, b_2, b_2 b_1\}$ e todos esses elementos elevados ao quadrado estão

em U_2 (lembre-se que $a_2^2 \in L_2 \subset \Gamma_2(P_2(\mathbb{K}))$ e $(a_2a_1)^2 \in \Gamma_2(s(\pi_1(\mathbb{K}))) \subset \Gamma_2(P_2(\mathbb{K}))$). Para finalizar, se $x = x_1 \cdots x_q$, com $x_i \in \{a_2^{\pm 1}, (a_2a_1)^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}, (b_2b_1)^{\pm 1}\}$, segue que

$$x^2 = x_1^2 \underbrace{[x_1^{-1}, x_2 \cdots x_q]}_{\in \Gamma_2(P_2(\mathbb{K})) \subset U_2} (x_2 \cdots x_q)^2 \quad (3.7)$$

e por recorrência segue que $x^2 \in U_2$, portanto $\gamma_2^2 P_2(\mathbb{K}) \subset U_2$, logo $\gamma_2^2 P_2(\mathbb{K}) = U_2$.

Suponha por indução que $U_i = \gamma_i^2 P_2(\mathbb{K})$ para todo $1 \leq i \leq n$, provemos que o mesmo é válido para $n+1$. Vemos com facilidade que $U_{n+1} \subset \gamma_{n+1}^2 P_2(\mathbb{K})$, pois $\Gamma_{n+1}(P_2(\mathbb{K})) \subset \gamma_{n+1}^2 P_2(\mathbb{K})$, além disso temos que $b_2^{2^n}, (b_2b_1)^{2^n}$ pertencem a $\gamma_{n+1}^2 P_2(\mathbb{K})$, pois $b_2^{2^n} = (b_2^{2^{n-1}})^2$, $(b_2b_1)^{2^n} = ((b_2b_1)^{2^{n-1}})^2$ e $b_2^{2^{n-1}}, (b_2b_1)^{2^{n-1}} \in U_n = \gamma_n^2 P_2(\mathbb{K})$ por hipótese de indução. Usamos também o fato que $\gamma_{n+1}^2 P_2(\mathbb{K}) \triangleleft P_2(\mathbb{K})$.

Para provar a outra inclusão, provemos primeiro que $[P_2(\mathbb{K}), \gamma_n^2 P_2(\mathbb{K})] = [P_2(\mathbb{K}), U_n] \subset U_{n+1}$. Temos que mostrar que $[x, u] \in U_{n+1}$, para $x \in P_2(\mathbb{K})$ e $u \in U_n$, provemos para $u \in \{\Gamma_n(P_2(\mathbb{K})), b_2^{2^{n-1}}, (b_2b_1)^{2^{n-1}}\}$, pois sendo válido para esses elementos o resultado segue para produto de conjugados desses elementos pela equação (3.1) e pelo fato de U_{n+1} ser normal em H .

Se $u \in \Gamma_n(P_2(\mathbb{K}))$, então $[x, u] \in \Gamma_{n+1}(P_2(\mathbb{K})) \subset U_{n+1}$. Se $u = (b_2b_1)^{2^{n-1}}$ então pelo Teorema 2.2.4, u é um elemento do centro de $P_2(\mathbb{K})$ e assim $[x, u] = 1 \in U_{n+1}$. Se $u = b_2^{2^{n-1}}$, temos que calcular os colchetes para x um gerador de $P_2(\mathbb{K})$, sendo válido para os geradores, o resultado segue para qualquer elemento de $P_2(\mathbb{K})$ pela equação (3.7). Vamos provar que $[b_2^{2^{n-1}}, x]$ pertence a $\Gamma_{n+1}(P_2(\mathbb{K})) = L_{n+1} \rtimes \Gamma_{n+1}(P_1(\mathbb{K})) \subset U_{n+1}$, de fato, vamos provar que $[b_2^{2^{n-1}}, x] \in L_{n+1}$ (que por conjectura coincide com $W_{n+1} = \widetilde{W}_{n+1}$) para $x \in \{a_2, (a_2a_1)^{-1}, b_2, (b_2b_1)^{-1}\}$. O caso $x = b_2$ é trivial. Os outros casos vamos fazer por indução. Provemos primeiro para $n = 2$, usando as contas no começo da prova do Lema 3.3.6:

- $x = a_2$, então usando a Proposição 3.2.16

$$[u, x] = [b_2^2, a_2] = \underbrace{[b_2, b_2, a_2]}_{\in \Gamma_3(P_2(\mathbb{K})) \subset L_3} \underbrace{[b_2, a_2]^2}_{\in L_3}.$$

Sabemos que $[b_2, a_2]^2 \in L_3 = W_3$ pois é um elemento de $\Gamma_2(P_2(\mathbb{K})) \subset L_2 = W_2$ elevado ao quadrado, logo $[u, x] \in L_3$.

- $x = (b_2b_1)^{-1}$, então

$$[x, u] = [(b_2b_1)^{-1}, b_2^2] = (a_2b_2a_2)(a_2b_2a_2)b_2^{-2} = \underbrace{[a_2b_2, a_2^2]}_{\in [H, L_2] \subset L_3} \underbrace{a_2^4}_{\in K_3 \subset L_3} \underbrace{[a_2^{-1}, b_2^2]}_{\in L_3}.$$

Podemos ver que $[a_2^{-1}, b_2^2] \in L_3$ de modo análogo ao caso anterior substituindo a_2 por a_2^{-1} , portanto $[x, u] \in L_3$ como desejado.

- $x = (a_2a_1)^{-1}$, então

$$[x, u] = [(a_2a_1)^{-1}, b_2^2] = (a_2^{-2}b_2)(a_2^{-2}b_2)b_2^{-2} = \underbrace{a_2^{-4}}_{\in K_3 \subset L_3} \underbrace{[a_2^2, b_2]}_{\in [H, L_2] \subset L_3}.$$

Portanto $[x, u] \in L_3$ como desejado.

Deduzimos que $[b_2^2, x] \in L_3$ para todo $x \in \{a_2, (a_2a_1)^{-1}, b_2, (b_2b_1)^{-1}\}$. Suponha que para $2 \leq j < n + 1$, $[b_2^{2j-1}, x] \in L_{j+1}$, com $x \in \{a_2, (a_2a_1)^{-1}, b_2, (b_2b_1)^{-1}\}$. Provemos que o mesmo é válido para $n + 1$. Pela Proposição 3.2.16,

$$[b_2^{2^n}, x] = \underbrace{\left[b_2^{2^{n-1}}, \underbrace{[b_2^{2^{n-1}}, x]}_{\in L_{n+1}} \right]}_{\in [H, L_{n+1}] \subset L_{n+2}} [b_2^{2^{n-1}}, x]^2.$$

Temos que $[b_2^{2^{n-1}}, x]^2 \in L_{n+2} = W_{n+2}$ pois é um elemento de $L_{n+1} = W_{n+1}$ elevado ao quadrado (estamos usando a conjectura que $W_n = L_n$ para todo n). Portanto $[b_2^{2^n}, x] \in L_{n+2}$. O resultado segue para qualquer elemento x de $P_2(\mathbb{K})$ pela equação (3.1).

Com isto concluímos que $[P_2(\mathbb{K}), \gamma_n^2 P_2(\mathbb{K})] = [P_2(\mathbb{K}), U_n] \subset U_{n+1}$. Temos que provar agora que $\{x^2 : x \in \gamma_n^2 P_2(\mathbb{K})\} = \{x^2 : x \in U_n\} \subset U_{n+1}$. O resultado é imediato se $x = b_2^{2^{n-1}}, (b_2b_1)^{2^{n-1}}$. Se $x \in \Gamma_n(P_2(\mathbb{K}))$ e supondo que a conjectura é verdadeira, temos

$$\Gamma_n(P_2(\mathbb{K})) = L_n \rtimes \langle (a_1a_2)^{2^{n-1}} \rangle$$

então $x = (x_1, x_2)$ com $x_1 \in L_n$ e $x_2 \in \langle (a_1a_2)^{2^{n-1}} \rangle$, assim

$$x^2 = (x_1, x_2)(x_1, x_2) = (x_1 \cdot \varphi(x_2)(x_1), x_2^2).$$

Segue que $x_2^2 \in \langle (a_1 a_2)^{2^n} \rangle$. Como $x_1 \in L_n = W_n$ temos que $x_1^2 \in W_{n+1} = L_{n+1}$ e portanto $x_1 \cdot \varphi(x_2)(x_1) = x_1^2 \cdot x_1^{-1} \varphi(x_2)(x_1) \in L_{n+1}$, pois $x_1^2 \in L_{n+1}$ e $x_1^{-1} \varphi(x_2)(x_1) = (\varphi(x_2)(x_1^{-1}) \cdot x_1)^{-1}$ pertence a $H_{n+1} \subset L_{n+1}$, logo

$$x^2 \in L_{n+1} \rtimes \langle (a_1 a_2)^{2^n} \rangle = \Gamma_{n+1}(P_2(\mathbb{K})) \subset U_{n+1}.$$

Se x é um produto de conjugados desses elementos, segue que $x^2 \in U_{n+1}$ pela equação (3.7) e o fato que $[P_2(\mathbb{K}), \gamma_n^2 P_2(\mathbb{K})] \subset U_{n+1}$.

Portanto temos $\gamma_{n+1}^2(P_2(\mathbb{K})) = U_{n+1}$. Segue que $P_2(\mathbb{K})$ é residualmente 2-finito pois $\bigcap_{n \geq 2} U_n = \{1\}$. ■

Com esses resultados e com a utilização de Teorema 3.2.5 de Gruenberg, conseguiríamos concluir que $B_2(\mathbb{K})$ é residualmente 2-finito, em particular é residualmente nilpotente. Mostraremos na Seção 3.6 que $B_2(\mathbb{K})$ é de fato residualmente 2-finito, com a utilização de um resultado recente de P. Bellingeri e S. Gervais [6].

3.4. Série das Derivadas

Nesta seção estudamos as séries das derivadas para o grupo de tranças do toro e da garrafa de Klein. Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.4.1. *Seja M o toro \mathbb{T} ou a garrafa de Klein \mathbb{K} . Então, $B_n(M)$ é residualmente solúvel se, e somente se, $n \leq 4$.*

Começaremos com o caso $n \leq 4$. Sabemos então, que S_n é solúvel, portanto podemos utilizar o Teorema 3.2.5 de Gruenberg e concluir que $B_n(M)$ é residualmente solúvel se, e somente se, $P_n(M)$ é residualmente solúvel.

No caso que $M = \mathbb{T}$ é o toro (ou qualquer superfície orientável $\Sigma_{g,m}$, de genus $g \geq 1$ e com $m \geq 0$ componentes de bordo), já sabemos [3, 7] que $P_n(M)$ é residualmente nilpotente livre de torção, o que implica que $P_n(M)$ é residualmente solúvel. No caso que $M = \mathbb{K}$, até o momento não existia nenhum resultado sobre esse assunto.

Nossa primeira tentativa foi utilizar o Teorema 3.2.8 e a sequência de Fadell-Neuwirth (1.3) para calcular a série central descendente de $P_n(\mathbb{K})$ para todo n . Porém, a medida

que aumentamos o valor de n , a série central descendente de $P_n(\mathbb{K})$ fica mais complexa e não conseguimos calcular os subgrupos K_i . Consequentemente não conseguimos calcular a série central descendente. Para contornar essa dificuldade, utilizamos o Teorema 3.2.11, que evita termos que calcular K_i , o que nos daria uma estimativa para a série das derivadas. Mas também não conseguimos calcular a série das derivadas. Tivemos a mesma dificuldade da Seção 3.3.2, primeiro definimos subgrupos W_m e \widetilde{W}_m de modo análogo. Estes novos subgrupos também acreditamos que coincidem, mas não conseguimos provar esse fato. A dificuldade é a mesma, falta apenas provar que $[\widetilde{W}_{n-1}, \widetilde{W}_{n-1}] \subset \widetilde{W}_n$. Se for verdade que esses subgrupos de $P_n(\mathbb{K})$, W_m e \widetilde{W}_m , são iguais conseguimos provar que $P_n(\mathbb{K})$ é residualmente solúvel para todo n .

A ideia foi utilizar indução, ou seja, suponha que $P_n(\mathbb{K})$ é residualmente solúvel (já sabemos pelo Exemplo 3.2.15 e usando o fato que residualmente nilpotente implica em residualmente solúvel que é válido para $n = 1$) e usaremos o Teorema 3.2.11.

Usando a sequência de Fadell-Neuwirth (1.3), escrevemos $P_{n+1}(\mathbb{K})$ como um produto semi-direto de $\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ e $s(P_n(\mathbb{K}))$ onde s é a secção dada na Proposição 2.2.1. Estamos usando a notação do Teorema 3.2.11 e portanto $H = \pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ e $G = s(P_n(\mathbb{K}))$, sabemos pelo Teorema 3.2.11 que

$$(P_{n+1}(\mathbb{K}))^{(i)} \subset V_{i+1} \rtimes (P_n(\mathbb{K}))^{(i)}, \quad (3.8)$$

onde V_{i+1} é definido recursivamente, como grupo gerado por $[H, V_i]$ e

$$\widetilde{H}_{i+1} = \{\varphi(g)(h).h^{-1} : g \in G, h \in V_i\},$$

com $V_1 = H$. Usando o Lema 3.2.13 e a Observação 3.2.14, vamos calcular apenas os geradores de \widetilde{H}_m e $[H, V_{m-1}]$ para obtermos os subgrupos V_m . Supondo que $P_n(\mathbb{K})$ é residualmente solúvel, por (3.8), basta calcularmos $\bigcap_{i \geq 1} V_i$ para obtermos o mesmo resultado para $P_{n+1}(\mathbb{K})$.

Precisamos inicialmente calcular a ação de $s(P_n(\mathbb{K}))$ em $\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$. Conseguimos essa ação calculando os conjugados da forma $g^{-1}hg$ com

$$g \in \{a_i, b_i, C_{i,k}, 1 \leq i \leq k \leq n-1\} \cup \{a_n a_{n+1}, b_n b_{n+1} C_{n,n+1}, C_{i,n} C_{i,n+1} C_{n,n+1}^{-1}, 1 \leq i \leq n-1\}$$

um gerador de $s(P_n(\mathbb{K}))$ e

$$h \in \{a_{n+1}, b_{n+1}, C_{j,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}, 1 \leq j \leq n\}$$

um gerador de $\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ usando as relações do Teorema 1.3.1. Temos o seguinte:

$$\varphi: s(P_n(\mathbb{K})) \longrightarrow \text{Aut}(\pi_1(\mathbb{K} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))$$

$$\begin{array}{l} \varphi(a_i) \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ C_{j,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1} \end{array} \right. \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} \\ b_{n+1}a_{n+1}C_{i,n+1}^{-1}C_{i+1,n+1}a_{n+1}^{-1} \\ \alpha_{i,j}C_{j,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}\alpha_{i,j}^{-1} \end{array} \right. \\ \varphi(b_i) \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ C_{i,n+1}^{-1}C_{i+1,n+1} \\ C_{j,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}, (j \neq i) \end{array} \right. \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1}b_{n+1}C_{i+1,n+1}C_{i,n+1}^{-1}b_{n+1}^{-1} \\ b_{n+1}C_{i,n+1}C_{i+1,n+1}^{-1} \\ \beta_{i,i}(C_{i,n+1}^{-1}C_{i+1,n+1})^{-1}\beta_{i,i}^{-1} \\ \beta_{i,j}C_{j,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}\beta_{i,j}^{-1} \end{array} \right. \\ \varphi(C_{i,k}) \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ C_{j,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1} \end{array} \right. \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ \delta_{i,j,k}C_{j,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}\delta_{i,j,k}^{-1} \end{array} \right. \\ \varphi(a_n a_{n+1}) \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ C_{j,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1} \end{array} \right. \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} \\ a_{n+1}^{-1}b_{n+1}a_{n+1}C_{n,n+1}^{-1} \\ \tilde{\alpha}_j C_{j,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}\tilde{\alpha}_j^{-1} \end{array} \right. \\ \varphi(b_n b_{n+1} C_{n,n+1}) \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ C_{n,n+1}^{-1} \\ C_{j,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}, (j \neq n) \end{array} \right. \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} C_{n,n+1}^{-1}b_{n+1}^{-1}a_{n+1}b_{n+1} \\ b_{n+1}C_{n,n+1} \\ C_{n,n+1} \\ \tilde{\beta}_j C_{j,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}\tilde{\beta}_j^{-1} \end{array} \right. \\ \varphi(C_{i,n}C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1}) \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ C_{j,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1} \end{array} \right. \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} C_{n,n+1}C_{i,n+1}^{-1}a_{n+1}C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1} \\ C_{n,n+1}C_{i,n+1}^{-1}b_{n+1}C_{i,n+1}C_{n,n+1}^{-1} \\ \tilde{\delta}_{i,j}C_{j,n+1}^{-1}C_{j+1,n+1}\tilde{\delta}_{i,j}^{-1}, \end{array} \right. \end{array} \quad (3.9)$$

onde $1 \leq i \leq k \leq n-1$ e $1 \leq j \leq n$ e

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i < j) \\ C_{j+1,n+1}^{-1} a_{n+1}, & \text{se } (i = j) \\ C_{i+1,n+1}^{-1} C_{i,n+1}, & \text{se } (i > j), \end{cases} \quad \beta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i < j) \\ b_{n+1} C_{i,n+1}, & \text{se } (i = j) \\ b_{n+1} C_{i,n+1} C_{i+1,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1}, & \text{se } (i > j), \end{cases}$$

$$\delta_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & \text{se } (k < j) \text{ ou se } (i > j) \\ C_{j+1,n+1}^{-1} C_{i,n+1}, & \text{se } (k = j) \\ C_{k+1,n+1}^{-1} C_{k,n+1}, & \text{se } (k > j \geq i), \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}_j = a_{n+1}^{-1} \alpha_{n,j}, \quad \tilde{\beta}_j = C_{n,n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1} \beta_{n,j}, \quad \tilde{\delta}_{i,j} = C_{n,n+1}^{-1} C_{i,n+1}^{-1} \delta_{i,j,n}.$$

Denotaremos por $D_j = C_{j,n+1}^{-1} C_{j+1,n+1}$, para $j = 1, \dots, n$ e $A_n^{2^i} = \langle \langle D_j^{2^i} : j = 1, \dots, n \rangle \rangle$ para $i \geq 0$ (se $i = 0$ denotaremos por A_n). Note primeiro que $D_j \in \tilde{H}_2$, para todo $j = 1, \dots, n-1$, pois

$$\varphi(a_j)(b_{n+1}) \cdot b_{n+1}^{-1} = b_{n+1} a_{n+1} D_j a_{n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1},$$

e para $j = n$ temos

$$\varphi(b_n b_{n+1} C_{n,n+1})(b_{n+1}) b_{n+1}^{-1} = b_{n+1} C_{n,n+1} b_{n,n+1}^{-1} = b_{n+1} D_n^{-1} b_{n,n+1}^{-1}.$$

Assim pelo fato de $\tilde{H}_2 = K_2$ ser normal em H (Lema 3.2.12), segue que $A_n \subset \tilde{H}_2$, portanto $\langle \Gamma_2(H), A_n \rangle \subset V_2$. Verificando $\varphi(g)(h) \cdot h^{-1}$ para todos os geradores $g \in G$ e $h \in H$, vemos que além de $D_j \in \tilde{H}_2$ temos também que $[a_{n+1}^{-1}, b_{n+1}], [b_{n+1}^{-1}, a_{n+1}] \in \tilde{H}_2$. Usando os resultados do Lema 3.2.13 e que \tilde{H}_2 é normal, segue que $\tilde{H}_2 = \langle \langle \Gamma_2(H), A_n \rangle \rangle \subset V_2$ (usamos que V_n é normal em H pelo Lema 3.2.12 item (2)). Como $V_2 = \langle \tilde{H}_2, \Gamma_2(H) \rangle$ temos

$$V_2 = \langle \Gamma_2(H), A_n \rangle.$$

Seja $Y_1 = V_1 = H$, para $m \geq 2$, definimos

$$Y_m = \left\langle A_n^{2^{m-2}}, [Y_i, Y_k], (1 \leq i \leq k < m, i+k=m) \right\rangle.$$

Observação 3.4.2. Note que Y_m é normal em H para todo m . Além disso, para todo $i \geq 1$, $\varphi(g)(Y_i) \subset Y_i$, podemos provar essa afirmação por indução em i , notando que $\varphi(g)([y_k, y_j]) = [\varphi(g)(y_k), \varphi(g)(y_j)]$ para $y_k \in Y_k$ e $y_j \in Y_j$ e $\varphi(g)(D_j^{2^{i-2}})$ é um conjugado

de $D_j^{2^{i-2}}$ ou de $D_j^{-2^{i-2}}$ para todo $j = 1, \dots, n$, onde g é um gerador de G , portanto pertence a Y_i .

O lema a seguir fornece a primeira estimativa dos subgrupos V_m .

Lema 3.4.3. *Para todo $m \geq 2$, $V_m \subset Y_m$.*

Demonstração: Provemos por indução sobre m . Como $V_2 = \langle A_n, \Gamma_2(H) \rangle$ é normal em H pelo Lema 3.2.12, $Y_2 = \langle A_n, [Y_1, Y_1] \rangle$ e $Y_1 = H$, temos que o lema é válido para $m = 2$ (na verdade, no caso $m = 2$ temos a igualdade dos subgrupos).

Suponha que $V_i \subset Y_i$ para todo $i = 2, \dots, m$, provemos o mesmo resultado para $m + 1$. Por definição, $V_{m+1} = \langle \tilde{H}_{m+1}, [H, V_m] \rangle$, segue pela hipótese de indução que $[H, V_m] \subset [H, Y_m] \subset Y_{m+1}$, pois $H = Y_1$. Provemos agora que $\tilde{H}_{m+1} \subset Y_{m+1}$, ou seja, provar que $\langle \langle \varphi(g)(h).h^{-1} \rangle \rangle \in Y_{m+1}$, onde g pertence ao conjunto de geradores de G e h pertence ao conjunto de geradores de V_m (pelo Lema 3.2.13 e pela normalidade de Y_{m+1} em H). Para isto, vamos provar que $x = \varphi(g)(h).h^{-1} \in Y_{m+1}$ com $h \in Y_m$, o que implicará no resultado desejado pois $V_m \subset Y_m$ por hipótese de indução e pelo fato de Y_{m+1} ser normal em H . Temos, a menos de produto de conjugados, dois casos a considerar:

- $h = D_j^{2^{m-2}}$, $j = 1, \dots, n$;

Para $j = 1, \dots, n - 1$, note que $\varphi(b_j)(D_j^{2^{m-2}})D_j^{-2^{m-2}} = [\beta_{j,j}, D_j^{-2^{m-2}}]D_j^{2^{m-1}} \in Y_{m+1}$. Para $j = n$, $\varphi(b_n b_{n+1} C_{n,n+1})(D_n^{2^{m-2}})D_n^{-2^{m-2}} = D_n^{-2^{m-1}} \in Y_{m+1}$. Para todos os outros casos, vemos por (3.9), que $\varphi(g)(D_j^{2^{m-2}})D_j^{-2^{m-2}}$ é um comutador de $D_n^{2^{m-2}}$, onde g é um dos geradores de G , e portanto pertence a Y_{m+1} .

- $h = [x_i, x_k]$, com $x_i \in Y_i$ e $x_k \in Y_k$ com $1 \leq i \leq k < m$ tal que $i + k = m$. Estamos supondo por hipótese de indução que $\varphi(g)(x_j)x_j^{-1} \in Y_{j+1}$ para todo $1 \leq j \leq m$ e usando que $\varphi(g)(Y_j) \subset Y_j$, para todo $j \geq 1$, pela Observação 3.4.2. Temos que:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(g)([x_i, x_k])[x_k, x_i] \\ &= \varphi(g)(x_i)x_k \underbrace{[x_k^{-1}\varphi(g)(x_k), \varphi(g)(x_i^{-1})]}_{\in [Y_{k+1}, Y_i]} x_k^{-1}\varphi(g)(x_i^{-1}) \cdot \varphi(g)(x_i) \underbrace{[x_k, \varphi(g)(x_i^{-1})x_i]}_{\in [Y_k, Y_{i+1}]} \varphi(g)(x_i^{-1}). \end{aligned}$$

Pela normalidade de Y_{m+1} em H , tal elemento pertence a Y_{m+1} .

Segue pelo Lema 3.2.13 que é suficiente calcular nos geradores a menos de conjugados, pois se h é um produto de conjugados de Y_m , $\varphi(g)(h).h^{-1}$ irá pertencer ao fecho normal dos casos acima unido com $[H, Y_m]$, o que dá um elemento de Y_{m+1} . ■

Agora vamos definir o subgrupo W_m para $m \geq 2$. Seja $W_2 = V_2 = Y_2$ e para $m \geq 3$, seja W_m o fecho normal em H de:

$$\{x^2 : x \in W_{m-1}\} \cup \{[x_1, \dots, x_i] \in \Gamma_i(H) : \exists 1 \leq j_1 < \dots < j_{m-i} \leq i : x_{j_1}, \dots, x_{j_{m-i}} \in A_n\}.$$

Se $m = 4$, o segundo conjunto tem colchetes de tamanho 2 com $x_1, x_2 \in A_n$, os colchetes de tamanho 3 têm no mínimo um elemento que pertence a A_n e $\Gamma_4(H)$ está contido no conjunto acima.

Se $m = 7$, teremos que $\Gamma_7(H)$ está contido no conjunto acima, e ainda teremos colchetes de tamanho 4, 5 e 6, sendo que os colchetes de tamanho 4 têm no mínimo três elementos que pertencem à A_n , os colchetes de tamanho 5 têm no mínimo dois elementos que pertencem à A_n e os colchetes de tamanho 6 têm no mínimo um elemento em A_n .

Em geral, tem colchetes de tamanho i , onde i varia entre $m/2$ (ou $(m+1)/2$ se m é ímpar) e m . Para tal valor de i , tem (pelo menos) $m-i$ x_l que pertencem a A_n .

Agora, precisamos de outro subgrupo. Seja \widetilde{W}_m o fecho normal em H de:

$$A_n^{2^{m-2}} \cup \{[x_1, \dots, x_i]^{2^{m-i-k}} \in \Gamma_i(H) : \exists 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq i : x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \in A_n\}.$$

Não conseguimos provar que $W_m = \widetilde{W}_m$ para todo m , mas acreditamos que seja verdade. Conseguimos provar tal resultado para $m \leq 6$ e supondo por hipótese de indução que $Y_i = W_i = \widetilde{W}_i$ para $2 \leq i < m$, sabemos provar que $\widetilde{W}_m \subset W_m$ e que $Y_m = W_m$. Para obter o resultado, falta apenas verificar se $[\widetilde{W}_{m-1}, \widetilde{W}_{m-1}] \subset \widetilde{W}_m$ pois assim conseguimos provar que $W_m \subset \widetilde{W}_m$, problema análogo ao apresentado na Seção 3.3. Como $\bigcap_{m \geq 2} W_m = \{1\}$ concluiríamos que $P_n(\mathbb{K})$ é residualmente solúvel para todo n . Essa conclusão é de fato verdadeira e foi mostrado recentemente (novembro 2014) por Bellingeri e Gervais [6], daremos maiores detalhes na Seção 3.6. Com isso $B_n(\mathbb{K})$ é residualmente solúvel para $n \leq 4$.

Agora vamos analisar o caso $n \geq 5$. Seja M o toro ou a garrafa de Klein. Tome a

seguinte sequência exata curta:

$$1 \rightarrow \frac{(B_n(M))^{(1)}}{(B_n(M))^{(2)}} \xrightarrow{i} \frac{B_n(M)}{(B_n(M))^{(2)}} \xrightarrow{p} B_n(M)^{Ab} \rightarrow 1.$$

Nosso objetivo agora é calcular uma apresentação para $\frac{B_n(M)}{(B_n(M))^{(2)}}$. Usaremos as apresentações de $B_n(M)$ dada no Teorema 1.4.1 e de $B_n(M)^{Ab}$ dada pela Proposição 3.2.1. Sabemos que as classes de $a, b, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ geram esse grupo. A primeira coisa que concluímos é que todos os σ_i estão na mesma classe de $\frac{B_n(M)}{(B_n(M))^{(2)}}$ (esse procedimento é padrão [27] e utiliza apenas as relações de Artin), pois para $i = 2, \dots, n-1$ temos que $p(\sigma_i) = p(\sigma_1) = \sigma$. Logo existem $t_i \in \frac{(B_n(M))^{(1)}}{(B_n(M))^{(2)}}$, tais que $\sigma_i = t_i \sigma_1$ em $\frac{B_n(M)}{(B_n(M))^{(2)}}$. Agora usando as relações de Artin, para $3 \leq i \leq n-1$, obtemos o seguinte:

$$\sigma_1 \sigma_i = \sigma_i \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 t_i \sigma_1 = t_i \sigma_1 \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 t_i = t_i \sigma_1.$$

Para $4 \leq i \leq n-1$ (observamos que tais argumentos são válidos apenas para $n \geq 5$):

$$\sigma_2 \sigma_i = \sigma_i \sigma_2 \Rightarrow t_2 \sigma_1 t_i \sigma_1 = t_i \sigma_1 t_2 \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 t_2 = t_2 \sigma_1.$$

Note que já sabemos que t_i comuta com σ_1 e também temos que t_i comuta com t_2 pois o grupo $\frac{(B_n(M))^{(1)}}{(B_n(M))^{(2)}}$ é abeliano. Assim, t_i comuta com σ_1 para todo $i = 2, \dots, n-1$.

Utilizando agora a relação $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ e o fato que t_i comuta com σ_1 , obtemos que $t_2 = 1$. Depois, com a relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ para $i \geq 2$, concluímos que $t_i = t_{i+1}$. Logo temos que $\sigma_i = \sigma_1$ em $\frac{B_n(M)}{(B_n(M))^{(2)}}$ para $i \geq 2$.

Portanto, em $\frac{B_n(M)}{(B_n(M))^{(2)}}$ a classe de todos os σ_i , $i = 1, \dots, n-1$ coincidem, denotaremos tal classe por σ . Os geradores de $\frac{B_n(M)}{(B_n(M))^{(2)}}$ são σ e as classes de a e b .

A partir de agora, precisamos das apresentações específicas dos grupos para cada superfície. Começaremos com $M = \mathbb{T}$. Primeiro, precisamos de uma apresentação de $(B_n(\mathbb{T}))^{(1)}$, dada na proposição a seguir:

Proposição 3.4.4. *Uma apresentação de $(B_n(\mathbb{T}))^{(1)}$ é dada por:*

Geradores: Para $k, m \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n-1$:

- $b_{k,m} = b^k a^m b a^{-m} b^{-k-1}$.

- $d_{k,m} = b^k a^m \sigma_1 b \sigma_1^{-1} a^{-m} b^{-1-k}$;
- $a_{k,m} = b^k a^m (\sigma_1 a \sigma_1^{-1} a^{-1}) a^{-m} b^{-k}$;
- $\theta_{i,k,m} = b^k a^m \sigma_i \sigma_1^{-1} a^{-m} b^{-k}$;
- $\rho_{i,k,m} = b^k a^m \sigma_1 \sigma_i a^{-m} b^{-k}$;

Relações:

$$1. \begin{cases} \theta_{i,k,m} \rho_{i+1,k,m} \theta_{i,k,m} = \theta_{i+1,k,m} \rho_{i,k,m} \theta_{i+1,k,m} \\ \rho_{i,k,m} \theta_{i+1,k,m} \rho_{i,k,m} = \rho_{i+1,k,m} \theta_{i,k,m} \rho_{i+1,k,m} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \theta_{i,k,m} \rho_{j,k,m} = \theta_{j,k,m} \rho_{i,k,m} \\ \rho_{i,k,m} \theta_{j,k,m} = \rho_{j,k,m} \theta_{i,k,m} \end{cases} \text{ se } |i - j| \geq 2.$$

$$3. \begin{cases} a_{k,m} = \theta_{j,k,m}^{-1} \theta_{j,k,m+1} \\ a_{k,m} = \rho_{j,k,m} \rho_{j,k,m+1}^{-1} \end{cases} \text{ para } j \geq 2.$$

$$4. \begin{cases} b_{k,m} \theta_{j,k+1,m} = \theta_{j,k,m} d_{k,m} \\ d_{k,m} \rho_{j,k+1,m} = \rho_{j,k,m} b_{k,m} \end{cases} \text{ para } j \geq 2.$$

$$5. \begin{cases} b_{k-1,m}^{-1} a_{k-1,m} b_{k-1,m+1} \rho_{1,k,m+1}^{-1} a_{k,m}^{-1} = 1 \\ d_{k-1,m}^{-1} \rho_{1,k-1,m} \rho_{1,k-1,m+1}^{-1} d_{k-1,m+1} \rho_{1,k,m}^{-1} = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} a_{k,m+1} \rho_{1,k,m+2} = a_{k,m} \rho_{1,k,m+1} \\ \rho_{1,k,m} a_{k,m+1} = a_{k,m} \rho_{1,k,m+1} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} b_{k,m} \rho_{1,k+1,m}^{-1} d_{k+1,m} = \rho_{1,k,m}^{-1} d_{k,m} b_{k+1,m} \\ b_{k,m} \rho_{1,k+1,m}^{-1} d_{k+1,m} = d_{k,m} b_{k+1,m} \rho_{1,k+2,m}^{-1} \end{cases}$$

8. se n é ímpar:

$$\begin{cases} \theta_{1,k,m} \rho_{2,k,m} \theta_{3,k,m} \cdots \rho_{n-1,k,m} \theta_{n-1,k,m} \cdots \rho_{3,k,m} \theta_{2,k,m} \rho_{1,k,m} = b_{k,m} b_{k,m+1}^{-1} \\ \rho_{1,k,m} \theta_{2,k,m} \rho_{3,k,m} \cdots \theta_{n-1,k,m} \rho_{n-1,k,m} \cdots \theta_{3,k,m} \rho_{2,k,m} \theta_{1,k,m} = d_{k,m} a_{k+1,m} d_{k,m+1}^{-1} a_{k,m}^{-1} \end{cases}$$

9. se n é par:

$$\begin{cases} \theta_{1,k,m} \rho_{2,k,m} \theta_{3,k,m} \cdots \theta_{n-1,k,m} \rho_{n-1,k,m} \cdots \rho_{3,k,m} \theta_{2,k,m} \rho_{1,k,m} = b_{k,m} b_{k,m+1}^{-1} \\ \rho_{1,k,m} \theta_{2,k,m} \rho_{3,k,m} \cdots \rho_{n-1,k,m} \theta_{n-1,k,m} \cdots \theta_{3,k,m} \rho_{2,k,m} \theta_{1,k,m} = d_{k,m} a_{k+1,m} d_{k,m+1}^{-1} a_{k,m}^{-1} \end{cases}$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, usamos a sequência exata curta:

$$1 \rightarrow (B_n(\mathbb{T}))^{(1)} \rightarrow B_n(\mathbb{T}) \rightarrow B_n(\mathbb{T})^{Ab} \rightarrow 1,$$

a apresentação de $B_n(\mathbb{T})$ dada pelo Teorema 1.4.1, a apresentação de $B_n(\mathbb{T})^{Ab}$ dada pela Proposição 3.2.1 e o método de Reidemeister-Schreier [40], com $\tau = \{b^k a^m; b^k a^m \sigma_1 : k, m \in \mathbb{Z}\}$ a transversal de Schreier. Com isso, obtemos o resultado. ■

Proposição 3.4.5. *Se $n \geq 5$, então $B_n(\mathbb{T})$ não é residualmente solúvel. Além disso, $(B_n(\mathbb{T}))^{(2)} = (B_n(\mathbb{T}))^{(3)}$.*

Demonstração: Analisando as relações de $B_n(\mathbb{T})$ dadas pelo Teorema 1.4.1, temos que σ comuta com a classe de a e com a classe de b , pois pelas relações (3) e (4) temos que a e b comutam com σ_i para $i \geq 2$. A relação (5), $b^{-1}\sigma_1 a = \sigma_1 a \sigma_1 b^{-1}\sigma_1$, implica que:

$$\sigma^{-2} = bab^{-1}a^{-1}.$$

Usando agora a relação de superfície (8), $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2 \sigma_1 = bab^{-1}a^{-1}$, temos que:

$$\sigma^{2(n-1)} = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2 \sigma_1 = bab^{-1}a^{-1} = \sigma^{-2},$$

logo $\sigma^{2n} = 1$. Assim, σ tem ordem no máximo $2n$, mostraremos que a sua ordem é exatamente $2n$.

Denotamos $\Theta = \langle \langle \theta_{i,k,m}, k, m \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n-1 \rangle \rangle$. Calculemos agora o grupo:

$$\frac{(B_n(\mathbb{T}))^{(1)}/(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}}{\Theta},$$

usando a apresentação de $(B_n(\mathbb{T}))^{(1)}$ dada pela Proposição 3.4.4, teremos as seguintes relações neste quociente:

1. $\rho_{i+1,k,m} = \rho_{i,k,m}$;
2. $a_{k,m} = 1$;
3. $\rho_{j,k,m} = \rho_{j,k,m+1}$;
4. $b_{k,m} = d_{k,m}$;

5. $\rho_{j,k+1,m} = \rho_{j,k,m}$, segue de (1), (3) e (5) que $\rho_{j,k,m} = \rho_{1,0,0}$;
6. $\rho_{1,k,m} = b_{k-1,m}^{-1} b_{k-1,m+1}$ ($\rho_{1,k,m}$ já é igual a $\rho_{1,0,0}$);
7. $(\rho_{1,0,0})^{n-1} = b_{k,m} b_{k,m+1}^{-1} = \rho_{1,0,0}^{-1} \Rightarrow (\rho_{1,0,0})^n = 1$
8. $(\rho_{1,0,0})^m = b_{k,m}$, (usando (6) e $b_{k,0} = 1$).

Concluimos então que

$$\frac{(B_n(\mathbb{T}))^{(1)}/(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}}{\Theta} = \langle \rho_{1,0,0} \rangle \cong \mathbb{Z}_n.$$

Chamemos q a projeção de $(B_n(\mathbb{T}))^{(1)}/(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}$ em $\frac{(B_n(\mathbb{T}))^{(1)}/(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}}{\Theta} = \langle \rho_{1,0,0} \rangle \cong \mathbb{Z}_n$. Mostremos agora que a ordem de σ em $B_n(\mathbb{T})/(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}$ é $2n$. Sabemos que a ordem de σ é par, pois ele é projetado por p no gerador de \mathbb{Z}_2 , que também denotamos por σ . Suponha por absurdo que $2\tilde{p}$ é a ordem de σ , com $\tilde{p} < n$. Mas $i(\rho_{1,0,0}) = \sigma^2$, e i é injetora, logo, $i((\rho_{1,0,0})^{\tilde{p}}) = \sigma^{2\tilde{p}} = 1 \Rightarrow (\rho_{1,0,0})^{\tilde{p}} = 1$, aplicando a projeção q , temos que $1 = q((\rho_{1,0,0})^{\tilde{p}}) = (\rho_{1,0,0})^{\tilde{p}}$ em $\frac{(B_n(\mathbb{T}))^{(1)}/(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}}{\Theta}$, concluimos que $\rho_{1,0,0}$ tem ordem $\tilde{p} < n$ em $\frac{(B_n(\mathbb{T}))^{(1)}/(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}}{\Theta}$, o que é absurdo.

Portanto σ tem ordem $2n$ em $B_n(\mathbb{T})/(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}$. Agora, já sabemos que $\sigma^{2n} = [a, \sigma] = [b, \sigma] = 1$ e $[b, a] = \sigma^{-2}$, logo qualquer outra relação deste grupo podemos escrever na forma $a^k b^m \sigma^l = 1$ e ao projetar $B_n(\mathbb{T})/(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}$ em $B_n(\mathbb{T})^{Ab}$, obtemos $k = m = 0$ e l par, mas conhecemos já a ordem de σ , com isso, temos que a apresentação de $B_n(\mathbb{T})/(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}$ é dada por:

$$\frac{B_n(\mathbb{T})}{(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}} = \langle \sigma, a, b : [a, \sigma] = [b, \sigma] = \sigma^{2n} = 1, [b, a] = \sigma^{-2} \rangle.$$

Para finalizar, tome a sequência exata curta:

$$1 \rightarrow \frac{(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}}{(B_n(\mathbb{T}))^{(3)}} \rightarrow \frac{B_n(\mathbb{T})}{(B_n(\mathbb{T}))^{(3)}} \xrightarrow{\tilde{p}} \frac{B_n(\mathbb{T})}{(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}} \rightarrow 1.$$

Temos que $\tilde{p}(\sigma_i) = \sigma$ para todo i . Assim, como o núcleo é abeliano, podemos concluir do mesmo modo anterior que em $\frac{B_n(\mathbb{T})}{(B_n(\mathbb{T}))^{(3)}}$ todos os σ_i estão na mesma classe (pois na demonstração só precisavamos utilizar as relações de Artin e o fato do núcleo ser abeliano, os quais ainda são válidos neste contexto).

Daí, usando o Teorema 1.4.1, obtemos do mesmo modo que a e b comutam com o representante de σ_i e utilizando as outras relações, temos que $[b, a] = \sigma_1^{-2}$ e que o representante da classe dos σ_i tem ordem no máximo $2n$. Todas as demonstrações são análogas as feitas da primeira vez. Assim concluímos que a projeção \tilde{p} é um isomorfismo. Assim $(B_n(\mathbb{T}))^{(2)} = (B_n(\mathbb{T}))^{(3)}$ (que é um grupo não trivial pois $\frac{B_n(\mathbb{T})}{(B_n(\mathbb{T}))^{(2)}}$ não é isomorfo a $B_n(\mathbb{T})$) e portanto $B_n(\mathbb{T})$ não é residualmente solúvel para $n \geq 5$. ■

Já no caso da garrafa de Klein, temos o seguinte:

Proposição 3.4.6. *Se $n \geq 5$, então $B_n(\mathbb{K})$ não é residualmente solúvel. Além disso, $(B_n(\mathbb{K}))^{(1)} = (B_n(\mathbb{K}))^{(2)} = \langle\langle \sigma_2^{-1}\sigma_1 \rangle\rangle$, o fecho normal de $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ em $B_n(\mathbb{K})$.*

Demonstração: Considere a sequência exata curta:

$$1 \rightarrow \frac{(B_n(\mathbb{K}))^{(1)}}{(B_n(\mathbb{K}))^{(2)}} \rightarrow \frac{B_n(\mathbb{K})}{(B_n(\mathbb{K}))^{(2)}} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1.$$

Note que, pela Proposição 3.2.1, $\frac{B_n(\mathbb{K})}{(B_n(\mathbb{K}))^{(1)}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ é o abelianizado do grupo $B_n(\mathbb{K})$. O primeiro passo da demonstração é provar que todos os σ_i 's representam a mesma classe em $\frac{B_n(\mathbb{K})}{(B_n(\mathbb{K}))^{(2)}}$, que já foi feito, denotaremos esta classe por σ . Usando o Teorema 1.4.1 e o fato de σ_i comutar com a e com b , para $i \geq 2$, temos que σ comuta com a classe de a e de b em $\frac{B_n(\mathbb{K})}{(B_n(\mathbb{K}))^{(2)}}$. Assim temos as seguintes consequências:

- $b(\sigma_1^{-1}b\sigma_1) = (\sigma_1^{-1}b\sigma_1^{-1})b \Rightarrow \sigma^2 = 1$
- $b^{-1}\sigma_1a = \sigma_1a\sigma_1b^{-1}\sigma_1 \Rightarrow b^{-1}a = ab^{-1}\sigma^2 \Rightarrow ab = ba$
- $ba^{-1}b^{-1}a^{-1} = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2\sigma_1 \Rightarrow a^{-2} = \sigma^{2(n-1)} \Rightarrow a^2 = 1.$

Devido ao fato que $B_n(\mathbb{K})^{Ab} = \langle a, b, \sigma : [a, b] = [a, \sigma] = [b, \sigma] = 1, a^2 = \sigma^2 = 1 \rangle$ e que $p : \frac{B_n(\mathbb{K})}{(B_n(\mathbb{K}))^{(2)}} \rightarrow B_n(\mathbb{K})^{Ab}$ é sobrejetor, segue que o grupo $\frac{B_n(\mathbb{K})}{(B_n(\mathbb{K}))^{(2)}}$ é isomorfo ao abelianizado de $B_n(\mathbb{K})$, logo p é um isomorfismo, implicando que $(B_n(\mathbb{K}))^{(1)} = (B_n(\mathbb{K}))^{(2)}$. Segue da Proposição 3.3.3 e do fato que $(B_n(\mathbb{K}))^{(1)} = \Gamma_2(B_n(\mathbb{K}))$ que $(B_n(\mathbb{K}))^{(1)} = \langle\langle \sigma_2^{-1}\sigma_1 \rangle\rangle$, o fecho normal de $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ em $B_n(\mathbb{K})$. ■

3.5. Caso de outras superfícies não orientáveis

Os resultados encontrados nas seções anteriores para a garrafa de Klein, podem ser deduzidos de modo semelhante para outras superfícies não orientáveis. Não conseguimos obter todos os resultados apenas resultados parciais. Temos o seguinte:

Teorema 3.5.1. *Seja N_g uma superfície fechada não orientável de genus $g \geq 2$. Então:*

- $B_n(N_g)$ não é residualmente nilpotente se $n \geq 3$;
- $B_n(N_g)$ não é residualmente solúvel se $n \geq 4$.

Vamos separar esses resultados nas duas proposições a seguir. A ideia das demonstrações é exatamente análoga a feita no caso da garrafa de Klein.

Proposição 3.5.2. *Seja N_g uma superfície fechada não orientável de genus $g \geq 2$. Então para $n \geq 3$, $B_n(N_g)$ não é residualmente nilpotente. Além disso, $\Gamma_2(B_n(N_g)) = \Gamma_i(B_n(N_g)) = \langle\langle \sigma_2^{-1}\sigma_1 \rangle\rangle$, o fecho normal de $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ em $B_n(N_g)$, para todo $i \geq 3$.*

Demonstração: Para $g = 2$, segue das Proposições 3.3.2 e 3.3.3. Para $g \geq 3$, vamos usar a apresentação de $B_n(N_g)$ dada no Teorema 1.5.2. Considere a sequência exata curta:

$$1 \rightarrow \frac{\Gamma_2(B_n(N_g))}{\Gamma_3(B_n(N_g))} \rightarrow \frac{B_n(N_g)}{\Gamma_3(B_n(N_g))} \xrightarrow{p} \frac{B_n(N_g)}{\Gamma_2(B_n(N_g))} \rightarrow 1.$$

De modo análogo a Proposição 3.3.2 no caso da garrafa de Klein, concluímos que todos os σ_i , $i = 1, \dots, n-1$ representam a mesma classe em $\frac{B_n(N_g)}{\Gamma_3(B_n(N_g))}$, vamos denotá-la por σ . Segue da relação (2) do Teorema 1.5.2 que este representante comuta com todos os geradores a_r , $r = 1, \dots, g$.

Assim pela relação (3) do Teorema 1.5.2, segue que $\sigma^2 = 1$. Pela relação (4) temos que a_r comuta com a_s para $1 \leq s < r \leq g$, portanto o grupo $\frac{B_n(N_g)}{\Gamma_3(B_n(N_g))}$ coincide com $\frac{B_n(N_g)}{\Gamma_2(B_n(N_g))}$, concluímos que $\Gamma_2(B_n(N_g)) = \Gamma_i(B_n(N_g))$ para todo $i \geq 3$. Esse grupo é não trivial pois $\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i \in \Gamma_2(B_n(N_g))$ pela equação (3.3), conseqüentemente $B_n(N_g)$ não é residualmente nilpotente.

Para demonstrar a segunda parte, escrevemos os colchetes da forma $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ do mesmo modo feito no caso da garrafa de Klein nas equações (3.3) e (3.4), pois dependem apenas das relações de Artin. Escrevemos $[a_i, \sigma_1] = (a_i \sigma_1 \sigma_2^{-1} a_i^{-1}) \sigma_2 \sigma_1^{-1}$, de modo análogo a equação (3.5). Agora, para $s < r$, temos:

$$\begin{aligned} [a_s, a_r] &= a_s a_r a_s^{-1} a_r^{-1} = a_s a_r (\underbrace{\sigma_1 \sigma_1^{-1}}_{(4)}) a_s^{-1} (\sigma_1 \sigma_1^{-1}) a_r^{-1} \\ &= a_s a_r \sigma_1 (a_r^{-1} \sigma_1^{-1} a_s^{-1} \sigma_1 a_r) \sigma_1^{-1} a_r^{-1} = a_s [a_r, \sigma_1] a_s^{-1} [\sigma_1, a_r], \end{aligned}$$

terminando a demonstração. ■

Proposição 3.5.3. *Seja N_g uma superfície fechada não orientável de genus $g \geq 3$. Então para $n \geq 5$, $B_n(N_g)$ não é residualmente solúvel. Além disso, $(B_n(N_g))^{(1)} = (B_n(N_g))^{(i)}$, para todo $i \geq 2$.*

Demonstração: Do mesmo modo ao caso da garrafa de Klein no Teorema 3.4.1, podemos mostrar que todos os σ_i estão na mesma classe em $B_n(N_g)/(B_n(N_g))^{(2)}$. Consequentemente comutam com a_j , ($1 \leq j \leq g$) pela relação (2) do Teorema 1.5.2. A relação (4) nos dá que a_i comuta com a_j , obtendo assim um isomorfismo $B_n(N_g)/(B_n(N_g))^{(2)} \cong B_n(N_g)/(B_n(N_g))^{(1)}$ e o resultado da proposição. ■

3.6. Resultados Adicionais

Enquanto estávamos estudando as séries centrais descendentes e das derivadas de $P_n(\mathbb{K})$, o professor S. Gervais, que também estava trabalhando com os mesmos problemas, nos mostrou a seguinte proposição (inspirado no Teorema 3.2.7 de Falk e Randell):

Proposição 3.6.1. *([6]) Seja*

$$1 \rightarrow H \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\varphi} G \rightarrow 1$$

uma sequência exata curta, que cinde, pela secção φ e suponha que a ação de G em $H/\gamma_2^2(H)$ é trivial (ou seja, trivial mod 2). Então as sequências exatas curtas

$$1 \rightarrow \gamma_n^2(H) \rightarrow \gamma_n^2(\tilde{G}) \xrightarrow{\varphi} \gamma_n^2(G) \rightarrow 1$$

cindem para todo n , ou seja,

$$\gamma_n^2(\tilde{G}) \cong \gamma_n^2(H) \rtimes_{\varphi} \gamma_n(G).$$

Com esta proposição, conseguimos ampliar nossos resultados:

Teorema 3.6.2. $P_2(\mathbb{K})$ é residualmente 2-finito. Consequentemente, $B_2(\mathbb{K})$ é residualmente 2-finito.

Demonstração: Temos que $\pi_1(\mathbb{K})$ é residualmente 2-finito, pois $\gamma_n^2(\pi_1(\mathbb{K})) = \langle a^{2^{n-1}}, b^{2^{n-1}} \rangle$. Sabemos também que os grupos livres finitamente gerados são 2-finitos. Portanto para concluir que $P_2(\mathbb{K})$ é residualmente 2-finito, basta observar a ação dada em (3.6), que é trivial mod 2, o resultado segue pela Proposição 3.6.1. Para $B_2(\mathbb{K})$ basta usar o Teorema 3.2.5 e a sequência exata curta (1.1). ■

Além disso, P. Bellingeri e S. Gervais [6] provaram que $P_n(N_{g,m})$ é residualmente 2-finito para todo n , onde $N_{g,m}$ é uma superfície não orientável de genus g e m componentes de bordo, com $m \geq 1$. Foi provado isto, mostrando que tal grupo é um subgrupo do grupo de Torelli, o qual é conhecido ser residualmente 2-finito por um resultado de L. Paris [56]. Sabendo disso, podemos agora provar que $P_n(\mathbb{K})$ é residualmente 2-finito para todo n , pois considerando a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth (1.2):

$$1 \rightarrow P_{n-1}(\mathbb{K} \setminus \{x_1\}) \rightarrow P_n(\mathbb{K}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{K}) \rightarrow 1$$

que cinde [17], usando a Proposição 2.2.1 e a apresentação de $P_n(\mathbb{K})$ dada no Teorema 1.3.1, vemos que a ação é dada por:

$$\varphi: \pi_1(\mathbb{K}) \longrightarrow \text{Aut}(P_{n-1}(\mathbb{K} \setminus \{x_1\}))$$

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) \begin{cases} a_i, 2 \leq i \leq n \\ b_i, 2 \leq i \leq n \\ C_{1,j}, 2 \leq j \leq n \\ C_{i,j}, 2 \leq i < j \leq n \end{cases} \longmapsto \begin{cases} a_i \\ (a_2 \cdots a_n)^{-1} (b_i a_i C_{1,i}^{-1} C_{2,i} a_i^{-1}) (a_2 \cdots a_n) \\ (a_2 \cdots a_n)^{-1} (a_j C_{2,j}^{-1} C_{1,j} a_j^{-1} C_{2,j}) (a_2 \cdots a_n) \\ C_{i,j} \end{cases}$$

$$\varphi(b_n \cdots b_1) \begin{cases} a_i, 2 \leq i \leq n \\ b_i, 2 \leq i \leq n \\ C_{1,j}, 2 \leq j \leq n \\ C_{i,j}, 2 \leq i < j \leq n \end{cases} \longmapsto \begin{cases} \beta^{-1} (a_i b_i C_{2,i} C_{1,i}^{-1} b_i^{-1}) \beta \\ \beta^{-1} (b_i C_{1,i} C_{2,i}^{-1}) \beta \\ \beta^{-1} (C_{2,j} b_j C_{2,j}^{-1} C_{1,j}^{-1} b_j^{-1}) \beta \\ C_{i,j}, \end{cases}$$

onde $\beta = (b_1^{-1} b_n b_1) \cdots (b_1^{-1} b_2 b_1) = (b_n C_{1,n} C_{2,n}^{-1}) \cdots (b_2 C_{1,2})$. Para verificar que a ação é trivial mod 2, note que:

- pela relação (6) dada no Teorema 1.3.1,

$$C_{j-1,j} = [b_j^{-1}, b_{j-1}^{-1}] \in \gamma_2^2 P_{n-1}(\mathbb{K} \setminus \{x_1\})$$

para $2 < j \leq n$. Agora, se $2 \leq i < j \leq n$, então

$$C_{i,j} = [b_j^{-1}, b_i^{-1}] C_{i+1,j} \in \gamma_2^2 P_{n-1}(\mathbb{K} \setminus \{x_1\});$$

portanto, por indução sobre i , concluímos que $C_{i,j} \in \gamma_2^2 P_{n-1}(\mathbb{K} \setminus \{x_1\})$ para todo $2 \leq i < j \leq n$.

- pela relação (5),

$$C_{1,n} = [b_n^{-1}, a_n] a_n^2 \in \gamma_2^2 P_{n-1}(\mathbb{K} \setminus \{x_1\}).$$

Se $2 \leq i < n$,

$$C_{1,i} = b_i^{-1} \left(\prod_{j=i+1}^n C_{i,j} C_{i+1,j}^{-1} \right) b_i [b_i^{-1}, a_i] a_i^2 \in \gamma_2^2 P_{n-1}(\mathbb{K} \setminus \{x_1\}),$$

como já sabemos, pelo item anterior, que $C_{i,j} \in \gamma_2^2 P_{n-1}(\mathbb{K} \setminus \{x_1\})$ para todo $2 \leq i < j \leq n$ segue $C_{1,i} \in \gamma_2^2 P_{n-1}(\mathbb{K} \setminus \{x_1\})$ para todo $2 \leq i \leq n$.

Pelos dois casos acima, temos que $C_{i,j} \in \gamma_2^2 P_{n-1}(\mathbb{K} \setminus \{x_1\})$ para todo $1 \leq i < j \leq n$, segue que ação é trivial mod 2. Usando o resultado de Bellingeri e Gervais [6], segue que $P_n(\mathbb{K})$ é residualmente 2-finito. Com isto finalizamos os resultados das seções anteriores concluindo o seguinte:

Teorema 3.6.3. *Seja M o toro ou a garrafa de Klein. Então $B_n(M)$ é residualmente nilpotente se, e somente se, $n \leq 2$. Além disso, $B_n(M)$ é residualmente solúvel se, e somente se, $n \leq 4$.*

Para concluir o resultado para as outras superfícies sem bordo, basta tomar a sequência exata curta:

$$1 \rightarrow P_{n-1}(N_{g,1}) \rightarrow P_n(N_g) \rightarrow \pi_1(N_g) \rightarrow 1$$

que cinde para $g \geq 1$ e verificar se a ação é trivial mod 2, pois é conhecido que $\pi_1(N_g)$ é residualmente p -finito para todo p , se $g \geq 3$ [47].

Calculamos essa secção no Teorema 2.3.1 e é fácil verificar usando a apresentação de $P_n(N_g)$ dada no Teorema 1.5.1 que a ação induzida é trivial mod 2. No trabalho de Bellingeri e Gervais [6] também foi calculada a ação, porém foi utilizada outra apresentação para o grupo de tranças puras de superfícies não orientáveis. Sabendo que $P_n(N_g)$ é residualmente 2-finito, podemos concluir de modo análogo ao caso da garrafa de Klein, que $B_n(N_g)$ é residualmente nilpotente se $n \leq 2$ e residualmente solúvel se $n \leq 4$.

No caso que $N_g = \mathbb{R}P^2$ é o plano projetivo, temos a sequência de Fadell-Neuwirth (1.2) apenas para $n \geq 2$ [63]:

$$1 \rightarrow P_m(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow P_{m+n}(\mathbb{R}P^2) \rightarrow P_n(\mathbb{R}P^2) \rightarrow 1.$$

Além disso, a sequência acima não cinde, mas em compensação $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$ e $P_2(\mathbb{R}P^2) = Q_8$ [63] (o grupo dos quatérnios) são 2-finitos. Agora podemos usar o Teorema 3.2.5 de Gruenberg e o resultado de Bellingeri e Gervais [6] que $P_m(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ é residualmente 2-finito para concluir que $P_n(\mathbb{R}P^2)$ é residualmente 2-finito para $n \geq 3$. Com isto, concluímos que $B_4(\mathbb{R}P^2)$ é residualmente solúvel (único caso que faltava para o plano projetivo [30]).

Capítulo 4

Uma aplicação a ordenabilidade

Neste capítulo estudamos o fecho normal de σ_1 em $B_n(\mathbb{T})$, obtemos a Proposição 4.1.1 que nos dá uma apresentação para este subgrupo e calculamos também o abelianizado no Corolário 4.1.2. Com isso, conseguimos provar que $B_2(\mathbb{T})$ é ordenável à direita no Teorema 4.2.1.

4.1. O subgrupo $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$

Nesta seção vamos estudar algumas propriedades do fecho normal, $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$, de σ_1 em $B_n(\mathbb{T})$ para $n \geq 2$. Primeiro, obtivemos uma apresentação:

Proposição 4.1.1. *Seja $n \geq 2$. Seja $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$, o fecho normal de σ_1 em $B_n(\mathbb{T})$. Então $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$ admite a seguinte apresentação:*

$$\text{Geradores: } \begin{cases} \{a_{i,j}, \theta_{i,j} : i, j \in \mathbb{Z}\} & \text{se } n = 2; \\ \{a_{i,j}, \theta_{i,j} : i, j \in \mathbb{Z}\} \cup \{\sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\} & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Relações:

1. $a_{i,j}\theta_{i+1,j}a_{i+1,j}\theta_{i+2,j} = \theta_{i,j}a_{i,j}\theta_{i+1,j}a_{i+1,j}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$;
2. $\theta_{i,j+1}\theta_{i,j} = \theta_{i,j+2}\theta_{i,j+1}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$;
3. $\theta_{i,j}a_{i,j} = \theta_{i,j+1}a_{i,j+1}\theta_{i+1,j+1}\theta_{i+1,j}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$;
4. $\begin{cases} \theta_{i,j}^2 \cdot a_{i,j} a_{i,j+1}^{-1} = 1, & \text{para todo } i, j \in \mathbb{Z}, \text{ se } n = 2, \\ \theta_{i,j} \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2 \theta_{i,j} \cdot a_{i,j} a_{i,j+1}^{-1} = 1, & \text{para todo } i, j \in \mathbb{Z}, \text{ se } n \geq 3; \end{cases}$
5. $a_{i,0} = 1$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Se $n \geq 3$,

6. $\theta_{i,j}\sigma_2\theta_{i,j} = \sigma_2\theta_{i,j}\sigma_2$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$;
7. $\theta_{i,j}\sigma_k = \sigma_k\theta_{i,j}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, $k \geq 3$;
8. $a_{i,j}\sigma_k = \sigma_k a_{i,j}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$;
9. Relações de Artin entre os geradores $\sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$.

Note que, se $j = 0$, temos que $a_{i,0} = 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, mas vamos manter esses elementos para facilitar na notação.

Demonstração: Para obter o resultado, utilizaremos o método de Reidemeister-Schreier [40]. Usando a apresentação de $B_n(\mathbb{T})$ dada no Teorema 1.4.1, segue que

$$B_n(\mathbb{T})/\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle = \langle a, b : [a, b] = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Consideramos

$$\tau = \{a^i b^j : i, j \in \mathbb{Z}\}$$

como a transversal de Schreier. Assim, teremos os seguintes geradores de $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= a^i b^j a b^{-j} a^{-i-1} \\ \theta_{i,j} &= a^i b^j \sigma_1 b^{-j} a^{-i} \\ \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, & \text{ se } n \geq 3, \end{aligned}$$

e segue as relações do enunciado. ■

Corolário 4.1.2. *Seja $n \geq 2$. Seja $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$ o fecho normal de σ_1 em $B_n(\mathbb{T})$. Então,*

$$\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle^{Ab} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } n = 2 \\ \mathbb{Z}_{2n}, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Demonstração: Vamos provar primeiro o resultado para $n = 2$. Usando a relação (4) da Proposição 4.1.1 e o fato que $a_{i,0} = 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \theta_{i,j-1}^2 \cdots \theta_{i,0}^2, \text{ se } j \geq 1 \\ a_{i,j} &= \theta_{i,j}^{-2} \cdots \theta_{i,-1}^{-2}, \text{ se } j \leq -1, \end{aligned}$$

portanto não precisamos dos elementos $a_{i,j}$ no conjunto de geradores.

A relação (1) no abelianizado implica que $\theta_{i,j} = \theta_{i+2,j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, a relação (2), implica que $\theta_{i,j} = \theta_{i,j+2}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$. Consequentemente, só precisamos dos elementos $\theta_{0,0}, \theta_{0,1}, \theta_{1,0}$ e $\theta_{1,1}$ para gerar $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle^{Ab}$.

Agora pela relação (3), temos que:

$$\underbrace{\theta_{i,j} a_{i,j} a_{i,j+1}^{-1}}_{(4)} = \theta_{i,j+1} \theta_{i+1,j+1} \theta_{i+1,j} \Rightarrow \theta_{i,j}^{-1} = \theta_{i,j+1} \theta_{i+1,j+1} \theta_{i+1,j}.$$

Portanto $\theta_{0,0} \theta_{0,1} \theta_{1,0} \theta_{1,1} = 1$ e retirando o elemento $\theta_{1,1}$ do conjunto de geradores, obtemos um grupo abeliano livre de posto 3, como desejado.

Agora, se $n \geq 3$, usando as relações (6) e (9) dadas na Proposição 4.1.1, note que σ_k e $\theta_{i,j}$ estão na mesma classe, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$ e $k = 2, \dots, n-1$; denote tal classe por θ . Usando as relações (3) e (4), vemos que para todo $i, j \in \mathbb{Z}$,

$$a_{i,j} a_{i,j+1}^{-1} = \theta^2 = \theta^{-2(n-1)} \Rightarrow \theta^{2n} = 1$$

e todas as outras relações do grupo são triviais. Pelo fato de $a_{i,0} = 1$, segue que a classe de $a_{i,j}$ pertence ao subgrupo gerado por θ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, (de modo análogo ao feito no caso $n = 2$), portanto para $n \geq 3$

$$\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle^{Ab} = \langle\theta : \theta^{2n} = 1\rangle \cong \mathbb{Z}_{2n}.$$

■

4.2. Ordenabilidade de $B_2(\mathbb{T})$

Dizemos que um grupo G é *ordenável à direita* se possui uma ordem total \prec compatível com a multiplicação pela direita, ou seja, se $x, y, z \in G$, $x \prec y$ implica que $xz \prec yz$. O grupo G é *ordenável à esquerda* se possui uma ordem total compatível com a multiplicação pela esquerda, ou seja, $x, y, z \in G$, $x \prec y$ implica que $zx \prec zy$. Um grupo é ordenável à direita se, e somente se, é ordenável à esquerda, mas a ordem não é necessariamente a mesma; se for a mesma ordem tal grupo é chamado de *biordenável*. Se G for ordenável à

direita (respectivamente biordenável) o mesmo é válido para qualquer subgrupo $H < G$ usando a restrição da ordem de G . Para mais detalhes sobre ordenabilidade veja [14, 51].

Todo grupo que possui elemento de torção não pode ser ordenável à direita. Definimos que um grupo G tem *torção generalizada* se existem $g, h_1, \dots, h_k \in G$, $g \neq 1$, tal que $(h_1 g h_1^{-1}) \cdots (h_k g h_k^{-1}) = 1$. Tal propriedade do grupo é uma obstrução a biordenabilidade. Por possuírem elementos de torção [18, 52, 63], os grupos de tranças (puras) da esfera e do plano projetivo não são ordenáveis à direita e serão excluídos da discussão que segue.

Um resultado de Magnus [49] mostra que todos os grupos livres são biordenáveis, na qual ele define uma biordem usando a “expansão de Magnus”. Usando a expansão de Magnus e a decomposição em produto semi-direto do grupo de tranças puras de Artin, foi provado que P_n é biordenável para todo n [43, 60].

Com relação ao grupo de tranças (total) de Artin, sabemos que B_n não é biordenável por ter um elemento de torção generalizada (considere $g = \sigma_1 \sigma_2^{-1}$, $h_1 = 1$ e $h_2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ em B_3), pela inclusão $B_n \rightarrow B_{n+1}$, segue o resultado para todo $n \geq 3$ como observado em [54]. Além disso, temos um resultado importante de Dehornoy [13] que prova que B_n é ordenável à direita para $n \geq 3$. A partir daí, descobriu-se a existência de uma infinidade de ordens distintas em B_n [62], o que motivou o estudo da ordenabilidade dos grupos que aparecem em topologia de baixa dimensão.

Sabemos por Baumslag [4] que se M é uma superfície fechada e orientável, $\pi_1(M)$ é biordenável, tal resultado foi estendido por Rolfsen e Wiest [59] que provaram que $\pi_1(M)$ é biordenável para toda superfície fechada, orientável ou não, com exceção do plano projetivo e da garrafa de Klein (pois possui torção generalizada). Além disso, eles provaram que $P_n(N)$ é ordenável à direita para toda superfície fechada N não orientável (diferente do plano projetivo). Continuando os estudos dos grupos de tranças de superfícies, González-Meneses [33] mostrou que se M é uma superfície compacta e conexa (diferente da esfera e do plano projetivo), $n \geq 2$, então $P_n(M)$ é biordenável se, e somente se, M é orientável.

Seja M uma superfície diferente da esfera e do plano projetivo, não é conhecido se os grupos de tranças de superfícies $B_n(M)$ são ordenáveis à direita ou não. Se sabe que B_n mergulha em $B_n(M)$ [23, 57], então $B_n(M)$ não é biordenável para $n \geq 3$, pois também

contém um elemento de torção generalizada. No caso que $M = \mathbb{T}$, Bellingeri, Gervais e Guaschi [7] mostraram que $B_2(\mathbb{T})$ também tem torção generalizada e portanto não é biordenável.

Um resultado de Gonçalves e Guaschi [31] diz que o grupo de tranças $B_n(M)$ mergulha em $B_{dn}(\widetilde{M})$, onde \widetilde{M} é um recobrimento a d folhas de M , o que implica que uma resposta positiva (resp. negativa) para a ordenabilidade de $B_{2n}(\mathbb{T})$ (resp. $B_n(\mathbb{K})$) implicará em uma resposta positiva (resp. negativa) para $B_n(\mathbb{K})$ (resp. $B_{2n}(\mathbb{T})$). Provamos que $B_2(\mathbb{T})$ é ordenável à direita, usando o Corolário 4.1.2.

Teorema 4.2.1. *$B_2(\mathbb{T})$ é ordenável à direita.*

Usamos o Corolário 4.1.2 para demonstrar este teorema, precisaremos dos seguintes resultados prévios:

Proposição 4.2.2. *([14]) Seja $1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 1$ uma sequência exata de grupos. Se A e C são ordenáveis à direita, então B é ordenável à direita.*

Teorema 4.2.3. *(González-Meneses [33]) Se M é uma superfície fechada orientável de genus g , $g \geq 1$, então $P_n(M)$ é biordenável.*

Demonstração do Teorema 4.2.1: Considere a sequência exata curta

$$1 \rightarrow \langle\langle\sigma_1\rangle\rangle \rightarrow B_2(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

Como $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é ordenável à direita, usando a Proposição 4.2.2, basta provar que $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$ é ordenável à direita para concluir o mesmo para $B_2(\mathbb{T})$.

Considere agora, a seguinte sequência exata curta:

$$1 \rightarrow \Gamma_2(\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle) \rightarrow \langle\langle\sigma_1\rangle\rangle \rightarrow \langle\langle\sigma_1\rangle\rangle^{Ab} \rightarrow 1.$$

Como $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle^{Ab}$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ pelo Corolário 4.1.2, então é ordenável à direita. Além disso, $\Gamma_2(\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle) \subset \Gamma_2(B_2(\mathbb{T})) \subset P_2(\mathbb{T})$ e como $P_2(\mathbb{T})$ é ordenável à direita pelo Teorema 4.2.3, $\Gamma_2(\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle)$ também é. Segue pela Proposição 4.2.2 que $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$ é ordenável à direita, como queríamos demonstrar. ■

Os resultados obtidos na Proposição 4.1.1 e no Corolário 4.1.2 talvez possam nos auxiliar no estudo de outras propriedades dos grupos de tranças, a linearidade por exemplo.

Para $n \geq 3$, ainda não sabemos responder se $B_n(\mathbb{T})$ é ordenável à direita ou não. A técnica da demonstração no caso $n = 2$ não se estende para os outros casos pois, pelo Corolário 4.1.2, $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle^{Ab}$ é de torção e portanto não é ordenável à direita. Tentamos encontrar outro subgrupo normal A de $P_n(\mathbb{T}) \cap \langle\langle\sigma_1\rangle\rangle$ tal que $\langle\langle\sigma_1\rangle\rangle/A$ fosse ordenável, mas infelizmente, todos os quocientes que calculamos tinham torção e por isso ainda não temos uma resposta para estes casos.

Também calculamos o fecho normal de σ_1 em $B_2(M)$, onde M é uma superfície orientável de genus $g \geq 2$, mas ao abelianizarmos este subgrupo também tem torção e portanto o método feito no Teorema 4.2.1 não se aplica para tais superfícies.

Referências Bibliográficas

- [1] E. Artin, Theorie der Zöpfe, *Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ.* **4** (1926), 47-72.
- [2] E. Artin, Theory of braids, *Ann. Math.* **48** (1947), 101-126.
- [3] V. G. Bardakov and P. Bellingeri, On residual properties of pure braid groups of closed surfaces. *Communications in Algebra* **37** (2009), 1481-1490
- [4] G. Baumslag, On generalised free products, *Math. Z.*, **78** (1962), 423-438.
- [5] P. Bellingeri, On presentations of surface braid groups, *J. Algebra* **274** (2004), 543–563.
- [6] P. Bellingeri and S. Gervais, On p -almost direct products and residual properties of pure braid groups of nonorientable surfaces, *arXiv:1412.0186* (2014).
- [7] P. Bellingeri, S. Gervais and J. Guaschi, Lower central series of Artin-Tits and surface braid groups, *J. Algebra* **319** (2008), 1409-1427.
- [8] A. J. Berrick, F. R. Cohen, E. Hanbury, Y. L. Wong and J. Wu, Braids: Introductory Lectures on Braids, Configurations and Their Applications, Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, *National University of Singapore*, Vol. 19, World Scientific, 2010.
- [9] S. J. Bigelow, Braid groups are linear, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2) (2001), 287-309.
- [10] J. S. Birman, On braid groups, *Comm. Pure and Appl. Math* **22** (1969), 41-72.
- [11] J. S. Birman, Braids, links and mapping class groups, *Ann. Math. Stud.* **82**, Princeton University Press, 1974.
- [12] J. S. Birman and T. E. Brendle, Braids: a survey, in Handbook of knot theory, 19-103, edited by W. Menasco and M. Thistlethwaite, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.

-
- [13] P. Dehornoy, Braid groups and left distributive operations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **345** (1994), 115-150.
- [14] P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen and B. Wiest, Ordering braids, *Mathematical Survey and Monographs*, **148**, American Mathematical Society, Providence, RI, (2008).
- [15] J. L. Dyer, The algebraic braid groups are torsion-free: an algebraic proof, *Math. Z.* **172** (1980), 157-160.
- [16] E. Fadell, Homotopy groups of configuration spaces and the string problem of Dirac, *Duke Math. Journal* **29** (1962), 231-242.
- [17] E. Fadell and L. Neuwirth, Configuration spaces, *Math. Scandinavica* **10** (1962), 111-118.
- [18] E. Fadell and J. Van Buskirk, The braid groups of \mathbb{E}^2 and \mathbb{S}^2 , *Duke Math. Journal* **29** (1962), 243-257.
- [19] M. Falk and R. Randell, The lower central series of a fiber-type arrangement, *Invent. Math.* **82** (1985), 77-88.
- [20] R. H. Fox and L. Neuwirth, The braid groups, *Math. Scandinavica* **10** (1962), 119-126.
- [21] S. Garoufalidis and J. Levine, Finite type 3-manifold invariants and the structure of the Torelli group I, *Invent. Math.* **131** (1998), 541-594.
- [22] F. A. Garside, The braid group and other groups, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **20** (1969), 235-254.
- [23] C.H. Goldberg, An exact sequence of braid groups, *Math. Scandinavica* **33** (1973), 69-82.
- [24] D. L. Gonçalves and J. Guaschi, On the structure of surface pure braid groups, *J. Pure Appl. Algebra* **186** (2003), 187-218.

- [25] D. L. Gonçalves and J. Guaschi, The braid group $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$ and a generalisation of the Fadell-Neuwirth short exact sequence, *J. Knot Theory Ramifications* **14** (2005), 375–403.
- [26] D. L. Gonçalves and J. Guaschi, The braid groups of the projective plane and the Fadell-Neuwirth short exact sequence, *Geometriae Dedicata*, **130** (2007), 93-107.
- [27] D. L. Gonçalves and J. Guaschi, The lower central and derived series of the braid groups of the sphere, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), 3375-3399.
- [28] D. L. Gonçalves and J. Guaschi, The lower central and derived series of the braid groups of the finitely-punctured sphere, *J. Knot Theory Ramifications* **18** (2009), 651-704.
- [29] D. L. Gonçalves and J. Guaschi, Braid groups of non-orientable surfaces and the Fadell-Neuwirth short exact sequence, *J. Pure Appl. Algebra* **214** (2010), 667-677.
- [30] D. L. Gonçalves and J. Guaschi, The lower central and derived series of the braid groups of the projective plane, *J. Algebra* **331** (2011), 96-129.
- [31] D. L. Gonçalves and J. Guaschi, Surface braid groups and coverings, *J. London Math. Soc.* **85** (2012), 855-868.
- [32] J. González-Meneses, New presentations of surface braid groups, *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001), 431-451.
- [33] J. González-Meneses, Ordering pure braid groups on closed surfaces, *Pacific J. Math.* **203** (2002), 369-378.
- [34] J. González-Meneses, Basic results on braid groups, *Ann. Math. Blaise Pascal* **18** (2011), 15-59.
- [35] J. González-Meneses and L. Paris, Vassiliev invariants for braids on surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2003), 219-243.

- [36] E. A. Gorin and V. Ja. Lin, Algebraic equations with continuous coefficients and some problems of the algebraic theory of braids, *Math. USSR Sbornik* **7** (1969), 569-596.
- [37] K. W. Gruenberg, Residual properties of infinite soluble groups, *Proc. London Math. Soc.* **7** (1957), 29-62.
- [38] J. Guaschi and D. Juan-Pineda. A survey of surface braid groups and the lower algebraic K-theory of their group rings. *Handbook of Group Actions, Kunming Conference Proceedings* (2013), <hal-00794539>.
- [39] P. Hall, A contribution to the theory of groups of prime-power order, *Proc. London Math. Soc. (2)* **36** (1934), 29-95.
- [40] V. L. Hansen, Braids and Coverings: selected topics, *London Math. Society Student Text* **18**, Cambridge University Press, 1989.
- [41] D. L. Johnson, Presentations of Groups, 2nd ed., Cambridge University Press, 1997.
- [42] V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985), 103-111.
- [43] D. M. Kim and D. Rolfsen, Ordering groups of pure braids and hyperplane arrangements, *Canad. J. Math* **55** (4) (2003), 822-838.
- [44] T. Kohno, Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures, *Invent. Math* **82**, 57-75.
- [45] D. Krammer, The braid group B_4 is linear, *Invent. Math.* **142** (3) (2000), 451-486.
- [46] D. Krammer, Braid groups are linear, *Ann. of Math. (2)* **155** (1) (2002), 131-156.
- [47] G. Levitt and A. Minasyan, Residual properties of automorphism groups of (relatively) hyperbolic groups, *Geometry & Topology* **18** (2014), 2985-3023.
- [48] W. Magnus, Residually finite groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), 305-316.

- [49] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, Combinatorial group theory, reprint of the 1976 second edition, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004.
- [50] R. Mikhailov and I. B. S. Passi, Lower central and dimension series of groups, Springer Lecture Notes no. 1952, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [51] R. B. Mura and A. Rhemtulla, Orderable groups, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 27, Marcel Dekker, 1977.
- [52] K. Murasugi, Seifert fibre spaces and braid groups, *Proc. London Math. Soc.* **44** (1982) 71-84.
- [53] K. Murasugi and B. I. Kurpita, A study of braids, Mathematics and its Applications **484**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [54] L. P. Neuwirth, The status of some problems related to knot groups, Topology Conference (Virginia Polytech. Inst. and State Univ., Blacksburg, Va., 1973), Springer, Berlin, 1974, pp. 209-230. Lecture Notes in Math., Vol. 375.
- [55] L. Paris, Braid groups and Artin groups, in Handbook of Teichmüller theory Vol. II, 389-451, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. 13, Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [56] L. Paris, Residual p properties of mapping class groups and surfaces groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), no. 5, 2487-2507.
- [57] L. Paris and D. Rolfsen, Geometric subgroups of surface braid groups, *Ann. Inst. Fourier* **49** (1999), 417-472.
- [58] D. Rolfsen, Tutorial on the braid groups, chapter in Braids, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., **19**, World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2010) 1-30.
- [59] D. Rolfsen and B. Wiest, Free group automorphisms, invariant orderings and topological applications, *Algebr. Geom. Topol.* **1** (2001), 311-320.
- [60] D. Rolfsen and J. Zhu, Braids, orderings and zero divisors, *J. Knot Theory Ramifications*, **7(6)** (1998), 837-841.

-
- [61] G. P. Scott, Braid groups and the group of the homeomorphisms of a surface, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **68** (1970), 605-617.
- [62] H. Short and B. Wiest, Orderings of mapping class groups after Thurston, *Enseign. Math.* **46** (2000), 279-312.
- [63] J. Van Buskirk, Braid groups of compact 2-manifolds with elements of finite order, *Trans. Amer. Math. Soc.* **122** (1966), 81-97.

Les groupes de tresses du tore et de la bouteille de Klein

Résumé : Dans cette thèse, nous étudions les groupes de tresses $B_n(M)$ et les groupes de tresses pures $P_n(M)$ à n brins d'une surface compacte M . Nous mettons l'accent sur les groupes de tresses du tore \mathbb{T} et de la bouteille de Klein \mathbb{K} , et sur la compréhension de leur similarités et leurs différences. Nous obtenons de nouvelles présentations de ces groupes qui mettent en évidence leurs ressemblances. Nous généralisons notre présentation des groupes de tresses pures de la bouteille de Klein aux groupes de tresses pures des surfaces non orientables de genre $g \geq 2$. Nous calculons des sections algébriques explicites pour la suite exacte courte de Fadell-Neuwirth des groupes de tresses pures du tore et de la bouteille de Klein, et nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour le scindement de diverses généralisations de cette suite exacte courte aux groupes de tresses mixtes. Ensuite, nous étudions les séries centrales descendantes et dérivées de $B_n(\mathbb{T})$ et $B_n(\mathbb{K})$, et nous déterminons les valeurs de n pour lesquelles ces groupes sont résiduellement nilpotents et résiduellement solubles. Dans une tentative de calculer explicitement les séries centrales descendantes et dérivées de $P_n(\mathbb{K})$, nous donnons une description générale de ces séries d'un produit semi-direct quelconque. Enfin, nous exhibons une présentation de la clôture normale du groupe de tresses d'Artin B_n dans $B_n(\mathbb{T})$, ce qui nous permet de montrer que $B_2(\mathbb{T})$ est ordonnable à droite.

The braid groups of the torus and the Klein bottle

Abstract : In this thesis, we study the n -string braid group $B_n(M)$ and pure braid group $P_n(M)$ of a compact surface M , with particular emphasis on the braid groups of the torus \mathbb{T} and the Klein bottle \mathbb{K} and on understanding their similarities and differences. We obtain new presentations of these groups that highlight their similarities. We generalise our presentation of the pure braid groups of the Klein bottle to the pure braid groups of any non-orientable compact surface of genus $g \geq 2$. We compute explicit algebraic sections for the Fadell-Neuwirth short exact sequence of the pure braid groups of the torus and the Klein bottle, and we give necessary and sufficient conditions for the splitting of various generalisations of this short exact sequence to mixed braid groups. We then study the lower central and derived series of $B_n(\mathbb{T})$ and $B_n(\mathbb{K})$, and we determine the values of n for which these groups are residually nilpotent and residually soluble. In an attempt to calculate explicitly the lower central and derived series of $P_n(\mathbb{K})$, we give a general description of these series for an arbitrary semi-direct product. Finally, we exhibit a presentation of the normal closure of the Artin braid group B_n in $B_n(\mathbb{T})$, which allows us to show that $B_2(\mathbb{T})$ is right-orderable.

Mots clés indexation Rameau : tresses, théorie des ; topologie algébrique ; groupes, théorie des.

Discipline : Mathématiques et leurs interactions.

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme

UMR CNRS 6139, CS 14032,

Université de Caen Basse-Normandie BP 5186,

14032 Caen Cedex 5, France.