UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Operadores Pseudo-diferenciais e Espaços de Hardy

Rafael Augusto dos Santos Kapp

Orientador: Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie

Tese apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para obtensão do título de Doutor em Matemática.

São Carlos - SP

Maio-2005

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar

K17op

Kapp, Rafael Augusto dos Santos.
Operadores pseudo-diferenciais e espaços de Hardy / Rafael Augusto dos Santos Kapp. -- São Carlos : UFSCar, 2005.
50 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2005.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Espaços de Hardy. 3. Operadores pseudo-diferenciais. 4. Resolubilidade local. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Agradecimentos.

Á minha esposa Neusinha e minha família: por reavivar minha fé no trabalho nos momentos de desesperança.

Ao meu orientador Jorge Hounie, por introduzir-me num ramo da matemática de grande sofisticação e pela força do exemplo.

Aos meus colegas e professores da pós-graduação pelo companheirismo e pela generosidade de compartilhar seus conhecimentos.

A FAPESP pelo suporte financeiro.

Resumo.

Neste trabalho generalizamos os resultados de Goldberg (1979) e Taylor (2000) sobre continuidade de operadores pseudo-diferenciais em espaços de Hardy, provando que operadores com símbolos nas classes $S^0_{1,\delta}(\mathbb{R}^n)$ $(0 \leq \delta < 1)$ e $\tilde{S}^0_{1,1}$ são contínuos em $h^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \leq 1$. Como aplicações destes resultados, provamos a resolubilidade local de operadores $L = \partial_t + ib(x,t)\partial_x$, com $b(x,t)$ satisfazendo determinadas condições, em $X([-T,T], h^1(\mathbb{R}))$, com X espaço de Banach cuja norma satisfaz uma condição de monoticidade, e a não resolubilidade de ∂_t em $L^\infty([-T,T], h^p(\mathbb{R}^n))$ $(0 < p \leq 1)$.

Abstract.

In this work we generalize previous results obtained by Goldberg (1979) and Taylor (2000), about continuity of pseudo-differential operators on Hardy spaces, by proving that operators whose symbols belong to $S^0_{1,\delta}(\mathbb{R}^n)$ and $\tilde{S}^0_{1,1}(\mathbb{R}^n)$, are in fact continuous on $h^p(\mathbb{R}^n)$ $(0 < p \leq 1)$. Beside this, we prove the local solvability of $L = \partial_t + ib(x,t)\partial_x$, where $b(x,t)$ satisfy specific conditions , in $X([-T,T], h^1(\mathbb{R}))$, where X is a Banach space which norm is monotonic, and a negative result for ∂_t in $L^\infty([-T,T], h^p(\mathbb{R}^n))$ $(0 < p \leq 1)$.

Sumário.

Introdução.

Em 1915, Hardy [Har] introduz as seguintes médias para funções F analíticas no disco

$$M_p(r,F) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}, 0 < p < \infty \ \ e \ \ M_\infty(r,F) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} |F(re^{i\theta})|.$$

Neste mesmo artigo demonstra seu teorema de convexidade envolvendo tais médias, considerado o ponto de partida da teoria de espaços H^p.

O termo espaços de Hardy surge em 1923 no trabalho de F. Riesz [Ri]- que também apresenta propriedades importantes destes espaços como fatorização de Blaschke e existência de valores de fronteira - para designar o espaço das funções F analíticas no disco para as quais

$$\|F\|_{H^p} = \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r,F) < \infty.$$

Posteriormente, Krylov [Kr] desenvolve a teoria dos espaços $H^p(\mathbb{R})$, $0 < p$, formados pelas funções F analíticas no semi-plano $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0\}$ que satisfazem

$$\sup_{t>0} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p dx \Big)^{1/p} < \infty.$$

Uma generalização para os espaços n-dimensionais $\mathbb{R}^n$, é feita por Stein e Weiss, em [SW], por meio do conceito de funções analíticas generalizadas. Uma função $F = (u_0(x,t), u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t))$ a valores vetoriais, definida em $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, \ \ t > 0\}$ é uma função analítica generalizada se, e somente se, as funções u_j são harmônicas para $j = 0, 1, , \cdots, n$ e satisfazem:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \ \ e \ \ \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_k}.$$

Nestas condições F está em $H^p(\mathbb{R}^n)$, $\frac{n-1}{n} < p \leq 1$, se

$$\|F\|_{H^p} := \sup_{y>0} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|^p dx \Big)^{1/p} < \infty.$$

A teoria de espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$, independente dos conceitos de funções harmônicas e analíticas, chamada *método real* para espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$, foi introduzida por Fefferman e Stein [FS], generalizando o trabalho de Burkholder, Gundy e Silverstein [BGS] para $H^p(\mathbb{R})$.

Quando $1 < p < \infty$, $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$; além disso, $H^p(\mathbb{R}^n)$ substitui com vantagens $L^p(\mathbb{R}^n)$, com $0 < p \leq 1$, visto que é estável sob certos operadores integrais singulares e possui dual não trivial, entre outras propriedades interessantes para a análise harmônica.

Embora possua boas propriedades funcionais, $H^p(\mathbb{R}^n)$ não é localizável para $0 < p \leq 1$. Este obstáculo foi superado pela criação, de Goldberg [G], de uma nova classe de espaços de Hardy: os espaços de Hardy localizáveis $h^p(\mathbb{R}^n)$ (definição 2.3 no texto). Foi também demonstrado em [G] que operadores pseudo-diferenciais na classe $Op(S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n))$ são contínuos em $h^p(\mathbb{R}^n)$, para $p > 0$.

A teoria de operadores pseudo-diferenciais remonta a Mikhlin, que introduziu a primeira noção de símbolo de um operador integral singular. Na década de 1950, Calderón e Zygmund utilizam-se da transformada de Fourier para definir símbolo, esclarecendo suas propriedades multiplicativas. Em 1965, Kohn e Nirenberg [KN] introduzem os operadores pseudo-diferenciais com símbolos poli-homogêneos gerais, removem a restrição a ordem 0 e descrevem as regras de cálculo para termos de ordem inferior. Classes mais gerais de símbolos foram introduzidas por Hörmander[Hor 3], dos símbolos de tipo ρ, δ, a fim de incorporar soluções fundamentais de operadores hipoeliticos de *"constant strenght"*. Posteriormente, Beals e Fefferman [BF] estendem a noção de símbolos para um tratamento adequado de operadores diferenciais de tipo principal.

O cálculo de operadores pseudo-diferenciais se aplica bem para operadores com símbolos nas classes $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ (definição 1.1 no texto), com $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$ e $\delta \leq \rho$. Como conseqüência do exemplo de Ching [Ch], temos que o mesmo não é válido para as classes $S^m_{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Bourdaud [Bou 2] mostrou que as dificuldades com o cálculo para estas classes são suplantadas se considerados os símbolos cujos adjuntos também sejam elementos de $S^m_{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Hörmander [Hor 1] adapta as idéias de Bourdaud, tratando exclusivamente com os símbolos e levando em consideração o crescimento destes próximos a *diagonal torta* $\{(\xi, -\xi); \quad \xi \in \mathbb{R}^n\}$.

Como já dissemos anteriormente, Goldberg provou que operadores pseudo-diferenciais com símbolos em $S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ são contínuos em $h^p(\mathbb{R}^n)$, para $p > 0$. Utilizando resultados da teoria de Littlewood-Paley, Taylor [T] considerou $p = 1$, e estendeu o resultado de Goldberg para operadores com símbolos nas classes $S^0_{1,\delta}(\mathbb{R}^n)$, com $0 \leq \delta < 1$, e a classe de Bony, formada pelos símbolos $a \in S^0_{1,1}$ tais que $|\xi| \leq \rho|\eta|$ se $(\xi, \eta) \in S(\hat{a}(\xi, \eta))$ $(0 < \rho < 1)$.

Os dois primeiros capítulos do presente trabalho tratam de alguns fatos básicos das teorias de operadores pseudo diferenciais e espaços de Hardy. No terceiro capítulo retomamos a idéia inicial de Goldberg, utilizando estimativas pontuais do núcleo e continuidade em L^2, para generalizarmos os resultados de Taylor e Goldberg, provando que operadores com símbolos nas classes $S^0_{1,\delta}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \delta < 1$, e $\tilde{S}^0_{1,1}$ (classe de Bourdaud-Hörmander, p. 15 no texto), são contínuos em $h^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $p > 0$. No último capítulo provamos a resolubilidade local em $X([-T, T], h^1(\mathbb{R}))$, sendo X um espaço de Banach cuja norma satisfaz uma condição de monoticidade, dos operadores diferenciais

$$L = \frac{\partial}{\partial_t} + ib(t,x)\frac{\partial}{\partial_x}, \quad (t,x) \in [-T,T] \times \mathbb{R},$$

com

(i) $b(x,t)$ é suave, real e não negativa,

(ii) todas derivadas de $b(x,t)$ são uniformemente limitadas.

Provamos também a não resolubilidade do operador ∂_t em $L^\infty([-T,T], h^p(\mathbb{R}^n))$, para $0 < p < 1$.

Capítulo 1

Operadores Pseudo-diferenciais

A finalidade deste capítulo é de registrar alguns resultados básicos da teoria de operadores pseudo-diferenciais, com o intuito de oferecer uma referência rápida para o leitor.

Espaços de símbolos e núcleo

Definição 1.1 *Sejam $m \in \mathbb{R}$ e $\rho, \delta \in [0,1]$. Definimos o espaço de símbolos de ordem m e tipo (ρ, δ), denotado por $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$, como o conjunto das funções $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tais que, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$, existe uma constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tal que*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{-m+\rho|\beta|-\delta|\alpha|}. \tag{1.1}$$

Observação. $S^m_{\rho,\delta}$, com a topologia definida pelas semi-normas

$$p_{\alpha\beta}(a) = \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \{|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-m+\rho|\beta|-\delta|\alpha|}\},$$

é um espaço de Fréchet.

Teorema 1.1 *Dado $a \in S^m_{\rho,\delta}$, definimos o operador pseudo-diferencial com símbolo a por*

$$a(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi, \quad u \in \mathcal{S}. \tag{1.2}$$

A fórmula (1.2) define uma aplicação bilinear contínua de $S^m_{\rho,\delta} \times \mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$.

Decorre do teorema que $a(x,D)$ é um operador contínuo em $\mathcal{S}$. Sendo assim, o teorema do núcleo de Schwartz garante a existência de um núcleo K a ele associado. Para operadores pseudo-diferenciais este núcleo tem uma boa representação:

Teorema 1.2 *Seja $\rho > 0$. Dado $a \in S^m_{\rho,\delta}$, o núcleo K é uma função suave no complementar da diagonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ representada por*

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n} lim_{\epsilon \to 0} \int e^{i(x-y).\xi} a(x,\xi)\psi(\epsilon\xi)d\xi \tag{1.3}$$

sendo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\psi(\xi) = 1$ para $\xi \in B(0,1)$.

Prova. Dado $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$, definamos

$$a_\epsilon(x,\xi) = a(x,\xi)\psi(\epsilon\xi).$$

Afirmamos que $K_\epsilon(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y).\xi} a_\epsilon(x,\xi)d\xi$ é o núcleo do operador definido por a_ϵ. De fato, dados $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\langle K_\epsilon, u \otimes v \rangle &= \langle (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y).\xi} a_\epsilon(x,\xi)d\xi, u(y)v(x) \rangle \\
&= (2\pi)^{-n} \int v(x) \int u(y) \left[\int e^{i(x-y).\xi} a_\epsilon(x,\xi)d\xi \right] dydx \\
&= (2\pi)^{-n} \int v(x) \int e^{ix.\xi} a_\epsilon(x,\xi) \left[\int e^{-iy.\xi} u(y)dy \right] d\xi dx \\
&= \langle Op(a_\epsilon)u, v \rangle.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\langle Op(a_\epsilon)u, v \rangle = \langle Op(a)(\epsilon^{-n}\check{\psi}(\frac{\cdot}{\epsilon}) * u), v \rangle = \langle K, (\epsilon^{-n}\check{\psi}(\frac{\cdot}{\epsilon}) * u) \otimes v \rangle$ e $\epsilon^{-n}\check{\psi}(\frac{\cdot}{\epsilon}) * u \to u$ em $\mathcal{S}$, se existir o limite $\lim_{\epsilon \to 0} K_\epsilon$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, este será igual a K. Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

$$\langle K_\epsilon, f(x,y) \rangle = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y).\xi} a_\epsilon(x,\xi) f(x,y) d\xi dy dx.$$

Usando a fórmula$(1-\Delta_y)^N\, e^{i(x-y).\xi} = (1+|\xi|^2)^N e^{i(x-y).\xi}$ e integrando por partes, concluímos que a integral acima é igual a

$$(2\pi)^{-n}\iiint e^{i(x-y).\xi}\frac{a(x,\xi)}{\langle\xi\rangle^{2N}}\psi(\epsilon\xi)(1-\Delta)^N f(x,y)dydxd\xi,\quad <\xi>=(1+|\xi|^2)^{1/2}.$$

Tomando $2N > m+n$, o integrando fica majorado, uniformemente em ϵ, por uma função integrável. Concluímos a partir do teorema da convergência dominada que existe o limite $\lim_{\epsilon\to 0} K_\epsilon = K$, com

$$\langle K, f(x,y)\rangle = (2\pi)^{-n}\iiint e^{i(x-y).\xi}\frac{a(x,\xi)}{\langle\xi\rangle^{2N}}(1-\Delta_y)^N f(x,y)dydxd\xi,$$
$$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n).$$

Agora, para $x\neq y$ e $\rho>0$:

$$\begin{aligned}|x-y|^{2N}K_\epsilon(x,y) &= (2\pi)^{-n}\int(-\Delta_\xi)^N e^{i(x-y).\xi}a(x,\xi)\psi(\epsilon\xi)d\xi\\ &= \frac{(-1)^N}{(2\pi)^n}\int e^{i(x-y).\xi}\Delta_\xi^N(a(x,\xi)\psi(\epsilon\xi))d\xi.\end{aligned}$$

Como $\psi\equiv 1$ em $B(0,1)$, temos $\epsilon\sim(1+|\xi|)^{-1}$ para $\xi\in S(\partial^\gamma\psi(\epsilon\xi))$, com $\gamma\neq 0$. Assim

$$|\Delta_\xi^N a(x,\xi)\psi(\epsilon\xi)|\le C_N(1+|\xi|)^{m-2N\rho}\in L^1(\mathbb{R}^n),\quad\text{se}\quad m-2N\rho<-n.$$

Segue do teorema da convergência dominada que

$$(x-y)^\alpha K(x,y) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^n}\int e^{i(x-y).\xi}D_\xi^\alpha a(x,\xi)d\xi\in C^0(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n).\quad (1.4)$$

Aplicando argumentos análogos para as derivadas de K concluímos o teorema.

∎

Observação. Em conseqüência de (1.4) temos

$$\sup_{x\neq y}|x-y|^N|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta K(x,y)|<\infty\quad\text{se}\quad N\ge N_0(\alpha,\beta)\quad (1.5)$$

Estimativas pontuais para o núcleo

A seguir estabelecemos de forma mais precisa as relações das derivadas do núcleo com a ordem do operador pseudo-diferencial.

Proposição 1.1 *Se $M \in \mathbb{N}$, $m+n+M<0$ então o núcleo $K(x,y)$ de um operador, com símbolo na classe $S^m_{\rho,\delta}$, é um elemento de $C^M_b(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.*

Prova. Comecemos pelo caso $M=0$ e $m<-n$:

$$|a(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^m \in L^1(\mathbb{R}^n), \tag{1.6}$$

assim

$$|K(x,y)| \leq C\|(1+|\xi|)^m\|_{L^1} = C' \quad \text{e} \quad K(x,y) \quad \text{é contínua.} \tag{1.7}$$

[1] Dados $|\alpha|+|\beta| \leq M$, $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y)$ é o núcleo de um operador com símbolo na classe $S^{m+|\alpha|+|\beta|}_{\rho,\delta}$, o que reduz a demonstração deste ao caso tratado acima.

∎

Proposição 1.2 *Se $M \in \mathbb{N}$ é tal que $M+m+n>0$ então*

$$\sup_{|\alpha|+|\beta|=M} |D_x^\alpha D_y^\beta K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{\frac{M+m+n}{\rho}}}, \quad x \neq y. \tag{1.8}$$

Prova. Faremos a demonstração para $M=0$ e portanto $|\alpha|=|\beta|=0$. Seja $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1 & , \quad |\xi| \leq 1 \\ 0 & , \quad |\xi| \geq 2 \end{cases}$$

Uma vez que o núcleo associado a $a(x,\xi)\chi(\xi)$ é suave com todas derivadas limitadas, podemos supor que $a(x,\xi)=0$ se $|\xi| \leq 1$. Tomemos $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ com $S(\phi) \subset [1,2]$ e

$$\int_0^\infty \phi(t)\frac{dt}{t} = 1$$

[1] A letra C denotará uma constante positiva a qual pode mudar um número finito de vezes.

Definamos, para $x \neq y$, $K(x,y,t) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y).\xi} a(x,\xi)\phi(|\xi|/t)d\xi$. Temos

$$|(x-y)^\alpha K(x,y)| \leq Ct^{m-\rho|\alpha|+n},$$

pois

$$|(x-y)^\alpha K(x,y)| = |(2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y).\xi} D_\xi^\alpha [a(x,\xi)\phi(|\xi|/t)]d\xi| \quad \text{e}$$
$$|D_\xi^\alpha [a(x,\xi)\phi(|\xi|/t)]| \leq |\xi|^{m-\rho|\alpha|}, \quad \text{pois} \quad |\xi| \sim t \quad \text{em} \quad S(\phi(|\xi|/t)).$$

Em particular,

$$|K(x,y,t)| \leq Ct^{m+n}$$
$$t^{\rho N}|x-y|^N |K(x,y,t)| \leq Ct^{m+n}$$

Somando as duas desigualdades obtemos

$$|K(x,y,t)| \leq \frac{Ct^{n+m}}{(1+t^{\rho N}|x-y|^N)}.$$

Note que

$$K(x,y) = \int_0^\infty K(x,y,t)\frac{dt}{t},$$

logo

$$|K(x,y)| \leq \int_0^\infty |K(x,y,t)|\frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \frac{Ct^{n+m}}{(1+t^{\rho N}|x-y|^N)}\frac{dt}{t}$$

Fazendo a mudança $s = t|x-y|^{1/\rho}$ e tomando $N = \left[\frac{m+n+1}{\rho}\right] + 1$,temos

$$I = C\int_0^\infty \frac{(s|x-y|^{-1/\rho})^{n+m}}{1+s^{\rho N}}\frac{ds}{s} = \frac{C}{|x-y|^{\frac{m+n}{\rho}}} \int_0^\infty \frac{s^{m+n}}{1+s^{\rho N}}\frac{ds}{s} = \frac{C'}{|x-y|^{\frac{m+n}{\rho}}},$$

Para o caso $M > 0$, a demonstração é análoga, bastando observar que as derivadas de ordem M do núcleo são núcleos de operadores na classe $S_{(\rho,\delta)}^{M+m}$. ∎

Há também estimativa pontual para o caso $M + m + n = 0$. Sua demonstração assemelha-se à da proposição acima.

Proposição 1.3 *Se $M + m + n = 0$ então*

$$\sup_{|\alpha|+|\beta|=M} |D_x^\alpha D_y^\beta K(x,y)| \le C(|\ln|x-y|| + 1), \quad x \neq y.$$

Para maiores detalhes vide [AH] e [T].

Composição

A fim de determinar o símbolo do operador resultante da composição de dois operadores pseudo-diferenciais, vamos supor que os símbolos a e b sejam elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Dado $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de $a(x,D)u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é a função em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\theta \mapsto (2\pi)^{-n} \int e^{iy.(\eta-\theta)} a(y,\eta)\hat{u}(\eta) d\eta dy$$

Desse modo

$$b(x,D)a(x,D)u(x) = (2\pi)^{-2n} \int\int e^{ix.\theta+iy.(\eta-\theta)} b(x,\theta)a(y,\eta)\hat{u}(\eta) d\eta dy d\theta =$$
$$(2\pi)^{-n} \int e^{ix.\eta}[(2\pi)^{-n} \int\int e^{-i(x-y).(\eta-\theta)} b(x,\theta)a(y,\eta) dy d\theta]\hat{u}(\eta) d\eta.$$

Portanto,

$$b(x,D)a(x,D)u(x) = Op(c)u(x)$$

com

$$\begin{aligned} c(x,\eta) &= (2\pi)^{-n} \iint e^{-i(x-y).(\eta-\theta)} b(x,\theta)a(y,\eta) dy d\theta && (1.9)\\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{ix.(\theta-\eta)} b(x,\theta)\hat{a}(\theta-\eta,\eta) d\theta && (1.10)\\ &= (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y).\theta} b(x,\theta+\eta)a(y,\eta) d\theta dy && (1.11) \end{aligned}$$

Teorema 1.3 *Se $b \in S^\mu_{1,1}$ e $a \in S^m_{1,\delta}$, com $\delta < 1$, então $c(x,D) = b(x,D)a(x,D) \in Op(S^{m+\mu}_{1,1})$. Além disso, cada semi-norma de $c(x,\eta)$ é estimada por um produto de semi-normas de b e a.*

Prova. Suponhamos de início que a e b sejam elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Neste caso é válida a representação (1.7) de $c(x,\eta)$; representação que utilizaremos para provar

$$|c(x,\eta)| \leq C(1+|\eta|)^{m+\mu}. \tag{1.12}$$

Tomemos $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\chi(x) = 1$ se $|x| < 1/3$ e 0, se $|x| > 1/2$. Definimos

$$\chi_1(\eta,\theta) = \chi(|\theta-\eta|/(1+|\eta|))$$

$$\chi_2(\eta,\theta) = 1 - \chi_1(\eta,\theta)$$

Agora decompomos a função $p(x,y,\theta,\eta) = b(x,\theta)a(y,\eta)$, que aparece em (1.7), como

$$p(x,y,\theta,\eta) = \chi_1 p(x,y,\theta,\eta) + \chi_2 p(x,y,\theta,\eta) = p_1(x,y,\theta,\eta) + p_2(x,y,\theta,\eta).$$

Observe que as estimativas para as derivadas segundo y e θ de p_1 e p_2 são as mesmas que se tem para p. Assim basta demonstrarmos (1.10) para

$$(i) \quad p = 0 \quad \text{se} |\theta-\eta| \geq (1+|\eta|)/2$$

$$(ii) \quad p = 0 \quad \text{se} |\theta-\eta| \leq (1+|\eta|)/3$$

Para (ii) usamos a igualdade

$$\frac{(-\Delta_y)^N}{|\theta-\eta|^{2N}}\left[\frac{(1-\Delta_\theta)^N}{(1+|x-y|^2)^N} e^{i(x-y).(\theta-\eta)}\right] = e^{i(x-y).(\theta-\eta)}.$$

Aplicando a integração por partes, temos que a integral em (1.7) é igual a

$$\iint_{|\theta-\eta|\geq\frac{1+|\eta|}{3}} (1+|x-y|^2)^{-N}(1-\Delta_\theta)^N[|\theta-\eta|^{-2N}(-\Delta_y)^N p(x,y,\eta,\theta)]d\theta dy.$$

Cada fator $(\theta-\eta)^\gamma$, com $|\gamma| \leq 2N$, produzido pelas derivações de $|\theta-\eta|^{-2N}$ segundo θ, é acompanhado do fator $|\theta-\eta|^{-|\gamma|}$. Desse modo

$$|(1-\Delta_\theta)^N(|\theta-\eta|^{-2N}(-\Delta_y)^N p(x,y,\theta,\eta))| \leq C_N|\theta-\eta|^{-2N} \sum_{|\alpha|\leq 2N} |(-\Delta)^N \partial_\theta^\alpha p(x,y,\theta,\eta)|.$$

Como $b \in S^{\mu}_{1,1}$ e $a \in S^{m}_{1,\delta}$, temos

$$|(-\Delta_y)^N \partial^{\alpha}_{\theta} p(x, y, \theta, \eta)| \leq C_{\alpha N}(1 + |\theta|)^{\mu - |\alpha|}(1 + |\eta|)^{m+2\delta N}$$

Logo

$$|c(x, \eta)| \leq C \iint_{|\theta-\eta| \geq \frac{(1+|\eta|)}{3}} (1 + |x - y|^2)^{-N}|\theta - \eta|^{-2N}(1 + |\theta|)^{\mu}(1 + |\eta|)^{m+2N\delta} d\theta dy.$$

Note que $(1 + |\theta|) \leq (1 + |\eta|) + |\theta - \eta| \leq 4|\theta - \eta|$; então $(1 + |\theta|)^{|\mu|} \leq 4^{|\mu|}|\theta - \eta|^{|\mu|}$.Assim, se $2N > |\mu| + n$,

$$|c(x, \eta)| \leq C_N(1 + |\eta|)^{|\mu|+m+n+2N(\delta-1)}.$$

o que prova (1.12) para N suficientemente grande, já que $\delta < 1$.

Para o caso (i) usamos a identidade

$$L^{(N)}_{\phi} e^{i(x-y).(\theta-\eta)} = e^{i(x-y).(\theta-\eta)}[1 + \phi^{2N}(\eta)|x - y|^{2N} + \phi^{-2N}(\eta)|\eta - \theta|^{2N}] \tag{1.13}$$

sendo

$$L^{(N)}_{\phi} = \ {}^{t}L^{(N)}_{\phi} = 1 + \phi^{2N}(\eta)(-\Delta_{\theta})^N + \phi^{-2N}(\eta)(-\Delta_y)^N, \tag{1.14}$$

$$\phi(\eta) = (1 + |\eta|)$$

Usando a fórmula (1.13) e aplicando integração por partes, obtemos

$$c(x, \eta) = \int_{|\theta-\eta| \leq \frac{1+|\eta|}{2}} e^{i(x-y).(\theta-\eta)} L^{(N)}_{\phi} \left[\frac{p(x, y, \eta, \theta)}{1 + \phi^{2N}(\eta)|x - y|^{2N} + \phi^{-2N}(\eta)|\eta - \theta|^{2N}} \right] dy d\theta$$

Temos que

$$\phi^{-2N}(\eta)(-\Delta_y)^N \left[\frac{p(x, y, \eta, \theta)}{1 + \phi^{2N}(\eta)|x - y|^{2N} + \phi^{-2N}(\eta)|\eta - \theta|^{2N}} \right]$$

é uma combinação linear de elementos da forma

$$\phi^{-2N}(\eta)\partial^{\alpha}_{y} p(x, y, \eta, \theta) \frac{(x - y)^{\beta} \phi^{2Nl_1}(\eta)(1 + |x - y|^2)^{l_2}}{(1 + \phi^{2N}(\eta)|x - y|^{2N} + \phi^{-2N}(\eta)|\eta - \theta|^{2N})^{1+l_3}}$$

com $\frac{|\beta|}{2} + l_2 \leq Nl_3$, $l_1 \leq l_3$ e $|\alpha| \leq 2N$. Visto que $(1+|\eta|)$ e $(1+|\theta|)$ são comparáveis quando $|\theta - \eta| \leq \frac{1+|\eta|}{2}$, estes elementos são limitados por

$$C(1+|\eta|)^{\mu+m}\phi^{-2N}(\eta)(1+|\eta|)^{|\alpha|}(1+\phi^{2N}(\eta)|x-y|^{2N}+\phi^{-2N}(\eta)|\eta-\theta|^{2N})^{-1} \leq$$
$$C(1+|\eta|)^{\mu+m}(1+\phi^{2N}(\eta)|x-y|^{2N}+\phi^{-2N}(\eta)|\eta-\theta|^{2N})^{-1}$$

Já

$$\phi^{2N}(\eta)(-\Delta_\theta)^N\left[\frac{p(x,y,\eta,\theta)}{1+\phi^{2N}(\eta)|x-y|^{2N}+\phi^{-2N}(\eta)|\eta-\theta|^{2N}}\right]$$

é uma combinação linear de elementos da forma

$$\phi^{2N}(\eta)\partial_\theta^\alpha p(x,y,\eta,\theta)\frac{\phi^{-2Nl_1}(\eta)(\theta-\eta)^\beta(|\theta-\eta|^2)^{l_2}}{(1+\phi^{2N}(\eta)|x-y|^{2N}+\phi^{-2N}(\eta)|\eta-\theta|^{2N})^{1+l_3}}$$

com $\frac{|\beta|}{2} + l_2 \leq Nl_1 - (\frac{2N-|\alpha|}{2})$, $l_1 \leq l_3$. Assim os elementos acima são limitados em valor absoluto por

$$C(1+|\eta|)^{\mu+m}\frac{1}{(1+\phi^{2N}(\eta)|x-y|^{2N}+\phi^{-2N}(\eta)|\eta-\theta|^{2N})^{-1}}$$

Como

$|\theta-\eta| \leq \frac{1+|\eta|}{2}$ e $(1+\phi^{2N}(\eta)|x-y|^{2N}) \geq C(1+\phi^2(\eta)|x-y|^2)^N$,

temos

$1+\phi^{2N}(\eta)|x-y|^{2N}+\phi^{-2N}(\eta)|\eta-\theta|^{2N} \geq C(\frac{1}{2}+\phi^2(\eta)|x-y|^2+\phi^{-2}|\theta-\eta|^2)^N$.

Decorre disto que

$$(1+|\eta|)^{-\mu-m}|c(x,\eta)| \leq C_N\int(\frac{1}{2}+\phi^2(\eta)|x-y|^2+\phi^{-2}|\theta-\eta|^2)^{-N}dyd\theta =$$
$$C_N\int(\frac{1}{2}+|y|^2+|\theta|^2)^{-N}dyd\theta < \infty, \quad N > n.$$

Usando a notação $c[b,a](x,\xi)$, para indicar a dependência de c em relação aos símbolos a e b, temos

$$D_xc[b,a](x,\eta) = c[D_xb,a] + c[b,D_xa] \tag{1.15}$$

$$D_\eta c[b,a](x,\eta) = c[D_\eta b,a] + c[b,D_\eta a] \tag{1.16}$$

Por indução na ordem de derivação temos

$$|\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta c(x,\eta)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\eta|)^{\mu+m+|\alpha|-|\beta|} \tag{1.17}$$

Para o caso geral, ou seja, quando não é necessariamente verdade que a e b sejam elementos de $\mathcal{S}$, consideramos

$$a_\nu(x,\xi) = \vartheta(\frac{x}{2^\nu})\vartheta(\frac{\xi}{2^\nu})a(x,\xi)$$
$$b_\nu(x,\xi) = \vartheta(\frac{x}{2^\nu})\vartheta(\frac{\xi}{2^\nu})b(x,\xi)$$

sendo $\vartheta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\vartheta(x) = 1$ se $|x| \leq 1$. Estes são elementos de $\mathcal{S}$ que dão origem a um símbolo $c_\nu(x,\eta)$ que satisfaz (1.15), com as constantes $C_{\alpha,\beta}$ dependentes apenas das semi-normas de a e b. Usando a decomposição de $b_\nu(x,\theta)a_\nu(y,\eta)$ em elementos da forma (i) e (ii), provamos que a seqüência $(c_\nu(x,\eta))_0^\infty$ é convergente para todo $(x,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Usando o

Lema 1.1 *(ver [GS]) Seja $(a_j)_{j=1}^\infty$ uma seqüência limitada em $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ que converge pontualmente. Então seu limite pontual a pertence a $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e, para todo $m' > m$, tem-se que $a_j \to a$ em $S^{m'}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e*

$$|a^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-m+\rho|\alpha|-\delta|\beta|} \leq \limsup p_{\alpha\beta}(a_j)$$
$$p_{\alpha\beta}(a_j) = \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}} |a^{(\alpha)}_{j(\beta)}(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-m+\rho|\alpha|-\delta|\beta|};$$

[G-S]

concluímos que $c(x,\eta)$ é um elemento de $S^{m+\mu}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.Está demonstrado o teorema 1.3. ∎

Ao tentarmos estender a proposição acima para o caso em que $a \in S^m_{1,1}$ esbarramos com dificuldades com o cálculo desta classe, que se devem basicamente a suas propriedades de continuidade. No entanto, entre os elementos de $S^m_{1,1}$ existe um subconjunto de interesse que goza das propriedades de composição como expostas na proposição acima. Seguindo [Hor1] apresentaremos esta classe a seguir.

Seja $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{gathered}\chi(t\xi, t\eta) = \chi(\xi, \eta) \;\text{ se }\; t \geq 1, |\eta| \geq 2 \\ S(\chi) \subset \{(\xi, \eta); |\xi| \leq |\eta|, |\eta| \geq 1\} \\ \chi = 1 \;\text{ em }\; \{2|\xi| \leq |\eta|, |\eta| \geq 2\}.\end{gathered} \tag{1.18}$$

e definamos ,para $a(x, \eta) \in S^m_{1,1}$,

$$\hat{a}_{\chi,\epsilon}(\xi, \eta) = \chi(\xi + \eta, \epsilon\eta)\hat{a}(\xi, \eta) \tag{1.19}$$

sendo $\hat{a}(\xi, \eta)$ transformada de Fourier de a na variável x.

Definição 1.2 *Definimos $\tilde{S}^m_{1,1}$ como o subconjunto de símbolos $a \in S^m_{1,1}$ que satisfazem*

$$\begin{gathered}|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x a_{\chi,\epsilon}(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta N}\epsilon^N (1 + |\xi|)^{m+|\beta|-|\alpha|}, \\ 0 < \epsilon < 1 \;\; e \;\; N, \alpha, \beta \;\; \textit{arbitrários.}\end{gathered} \tag{1.20}$$

Esta classe de símbolos coincide com estas outras duas:

- $a \in S^m_{1,1}$ com $a(x, D)^* \in Op(S^m_{1,1})$;

- $a \in S^m_{1,1}$ com $a(x, D)$ contínuo de $H_{(s+m)}(\mathbb{R}^n)$ a $H_{(s)}(\mathbb{R}^n)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Uma demonstração destes resultados encontra-se em [Hor3] (teorema 9.4.2).

Lema 1.2 *Seja $b \in S^\mu_{1,1}$ e $a(x, \eta) \in S^m_{1,1}$ tal que*

$$S(\hat{a}(\xi, \eta)) \subset \{(\xi, \eta); |\xi + \eta| \geq B|\eta| \;\; e \;\; |\eta| \geq C > 0\} \tag{1.21}$$

com $B \leq 1$ e $C \geq 1$.Então $c(x, D) = b(x, D)a(x, D) \in S^{m+\mu}_{1,1}$; além disso, toda semi-norma de c é estimada por um produto de semi-normas de a e b, multiplicado por uma potência de B.

Prova Usamos a fórmula (1.10) para concluir que (1.9) é, neste caso, igual a

$$(2\pi)^{-n}\iint_{|\theta+\eta|\geq B|\eta|} e^{i(x-y).\theta} b(x,\theta+\eta)a(y,\eta)d\theta dy \tag{1.22}$$

Se tomarmos $L_\phi^{(N)}$ como no teorema 1.3, temos

$$\left|L_\phi^{(N)}\left[\frac{b(x,\theta+\eta)a(y,\eta)}{1+\phi^{2N}(\eta)|x-y|^{2N}+\phi^{-2N}(\eta)|\theta|^{2N}}\right]\right| \leq$$

$$C_N(a)B^{-2N}\frac{(1+|\theta+\eta|)^\mu(1+|\eta|)^m}{(1+\phi(\eta)^{2N}|x-y|^{2N}+\phi^{-2N}|\theta|^{2N})}.$$

Sendo que $C_N(a)$ é uma semi-norma de ordem $2N$ em y do símbolo a e o fator B^{-2N} é resultado da estimativa $(1+|\theta+\eta|)^{-2N} \leq B^{-2N}(1+|\eta|)^{-2N}$ Usando a fórmula

$L_\phi^{(N)}(e^{i(x-y).\theta}) = 1+\phi^{2N}(\eta)|x-y|^{2N}+\phi^{-2N}(\eta)|\theta|^{2N}$,

e integrando (1.22) por partes, temos para $\mu \geq 0$

$$|c(x,\eta)| \leq C_N B^{-2N}(1+|\eta|)^m \int_{|\theta+\eta|\geq B|\eta|}\frac{(1+|\theta+\eta|)^\mu}{(1+\phi^2(\eta)|x-y|^2+\phi^{-2}(\eta)|\theta|^2)^N}dyd\theta \leq$$

$$C_N B^{-2N}(1+|\eta|)^{m+\mu}\int\frac{(\frac{1}{\phi(\eta)}+|\theta+\frac{\eta}{\phi(\eta)}|)^\mu}{(1+|y|^2+|\theta|^2)^N}dyd\theta \leq$$

$$C_N B^{-2N}(1+|\eta|)^{m+\mu}\int\frac{(\frac{1+|\eta|}{\phi(\eta)}+|\theta|)^\mu}{(1+|x-y|^2+|\theta|^2)^N} \leq C_{N,\mu}(1+|\eta|)^{m+\mu}$$

se $N > n+\mu$.

E quando $\mu < 0$ temos

$$|c(x,\eta)| \leq C_N B^{-2N+\mu}(1+|\eta|)^{m+\mu}\int\frac{(\frac{1+|\eta|}{\phi(\eta)}+|\theta|)^\mu}{(1+|x-y|^2+|\theta|^2)^N}dyd\theta \leq C_N B^{-2N+\mu}(1+|\eta|)^{m+\mu}$$

se $N > n$.

Usando a relação das derivadas do símbolo c com as dos símbolos a e b, concluímos por indução sobre a ordem de derivação que

$|\partial_x^\alpha\partial_\eta^\beta c(x,\eta)| \leq C_N B^{-2N}(1+|\eta|)^{m+\mu+|\alpha|-|\beta|}$, para $N > n+|\mu|+|\beta|$;

sendo C_N uma semi-norma de ordem $2N$ em y do símbolo a.

Novamente utilizamos o lema (1.1) para concluir o caso geral. ∎

Agora decomporemos um símbolo $a \in S^m_{1,1}$ como soma de símbolos em $S^m_{1,\delta}$ e aqueles com a propriedade (1.19). Para tanto tomemos $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi(\xi) = 1$, quando $|\xi| < 1/2$, e $\varphi(\xi) = 0$, quando $|\xi| > 1$. Definamos

$$\varphi_\nu = \varphi(\xi/2^\nu), \quad \psi_\nu(\xi)\varphi_{\nu+1}(\xi) - \varphi_\nu(\xi); \quad \nu \in \mathbb{Z}^n. \tag{1.23}$$

então

$$1 = \varphi_\mu(\xi) + \sum_{\mu}^{\infty} \psi_\nu(\xi) \tag{1.24}$$

para todo inteiro μ.

Lema 1.3 *Se $a(y,\eta) \in \tilde{S}^m_{1,1}$ então existem $a_1(y,\eta) \in S^m_{1,0}$ e $a_2(y,\eta) \in S^m_{1,1}$ que se escreve como uma série de elementos de $S^m_{1,1}$ que satisfazem (1.19),de modo que $a(y,\eta) = a_1(y,\eta) + a_2(y,\eta)$.*

Prova. Comecemos por decompor o símbolo a em séries formais de símbolos:

$$a(y,\eta) = (a - a_{\chi,1})(y,\eta) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\chi,2^{-\nu}} - a_{\chi,2^{-\nu+1}})(y,\eta) =$$

$$\left[(a - a_{\chi,1})(y,\eta)\varphi_2(\eta) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\chi,2^{-\nu}} - a_{\chi,2^{-\nu+1}})(y,\eta)\varphi_{\nu+2}(\eta)\right] + \tag{1.25}$$

$$\left[(a - a_{\chi,1})(y,\eta)(1-\varphi_2)(\eta) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\chi,2^{-\nu}} - a_{\chi,2^{-\nu+1}})(y,\eta)(1-\varphi_{\nu+2})(\eta)\right] \tag{1.26}$$

A série (1.25) por sua vez pode ser reescrita como

$$a(y,\eta)\varphi_2(\eta) + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\chi,2^{-\nu}}(y,\eta)(\varphi_{\nu+3} - \varphi_{\nu+2})(\eta) =$$

$$a(y,\eta)\varphi_2(\eta) + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\chi,2^{-\nu}}(y,\eta)\psi_{\nu+2}(\eta) \tag{1.27}$$

A série em (1.27) define um elemento em $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, visto que no máximo três suportes das parcelas se interceptam. E por esse motivo basta provarmos que $\{a_{\chi,2^{-\nu}}(y,\eta)\psi_{\nu+2}(\eta); \nu = 1, 2\cdots\}$ é um subconjunto limitado de $S^m_{1,0}$, a fim de concluir que (1.25) define um elemento de $S^m_{1,0}$.

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta a_{\chi,2^{-\nu}}(y,\eta)\psi_{\nu+2}(\eta)| \leq \sum_{\gamma\leq\beta} C_{\gamma,\beta}|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\gamma a_{\chi,2^{-\nu}}(y,\eta)||\partial_\eta^{\beta-\gamma}\psi_{\nu+2}(\eta)|$$

Como $(1+|\eta|) \sim 2^\nu$ no suporte de $\psi_{\nu+2}$ e $|\partial_\eta^{\beta-\gamma}\psi_{\nu+2}(\eta)| \leq C'_{\gamma,\beta}2^{-|\beta-\gamma|\nu}$, temos

$$|\partial_\eta^{\beta-\gamma}\psi_{\nu+2}(\eta)| \leq C'_{\gamma,\beta}(1+|\eta|)^{-|\beta-\gamma|}.$$

Além disso, por (1.20) e $(1+|\eta|) \sim 2^\nu$

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\gamma a_{\chi,2^{-\nu}}(y,\eta)| \leq C_{\alpha,\gamma}2^{-\nu|\alpha|}(1+|\eta|)^{|\alpha|}(1+|\eta|)^{m-|\gamma|} \leq C_{\alpha,\gamma}(1+|\eta|)^{m-|\gamma|}$$

Portanto,

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta [a_{\chi,2^{-\nu}}(y,\eta)\psi_{\nu+2}(\eta)]| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\eta|)^{m-|\beta|}, \quad \text{para todo} \quad \nu.$$

Quanto a (1.24), note que

$$S(\mathcal{F}(a-a_{\chi,1})(\xi,\eta)(1-\varphi_2(\eta))) \subset \{(\xi,\eta); |\xi+\eta| \geq |\eta|/2, |\eta| \geq 2\}$$

$$S(\mathcal{F}(a_{\chi,2^{-\nu}} - a_{\chi,2^{-\nu+1}})(\xi,\eta)(1-\varphi_{\nu+2}(\eta))) \subset$$
$$\{(\xi,\eta); |\xi+\eta| \geq |\eta|/2^{\nu+1}, |\eta| \geq 2^{\nu+1}\}$$

Para estes símbolos temos

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta \big[(a_{\chi,2^{-\nu}} - a_{\chi,2^{-\nu+1}})(1-\varphi_{\nu+2}(\eta))\big]| \leq$$
$$\sum_{\gamma\leq\beta} C_{\gamma,\beta}|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\gamma (a_{\chi,2^{-\nu}} - a_{\chi,2^{-\nu+1}})(y,\eta)||\partial_\eta^{\beta-\gamma}(1-\varphi_{\nu+2})(\eta)|$$

Por (1.20),

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\gamma (a_{\chi,2^{-\nu}} - a_{\chi,2^{-\nu+1}})(y,\eta)| \leq C_{\alpha,\gamma,N+1}2^{-\nu(N+1)}(1+|\eta|)^{m+|\alpha|-|\gamma|}, \quad (1.28)$$

quando $\beta-\gamma \neq 0$, $(1+|\eta|) \sim 2^\nu$ no suporte de $\partial_\eta^{\beta-\gamma}(1-\varphi_{\nu+2})(\eta)$; desse modo

$$\partial_\eta^{\beta-\gamma}(1-\varphi_{\nu+2})(\eta) \leq C_{\beta,\gamma}(1+|\eta|)^{-|\beta-\gamma|}.$$

Com isto

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\chi,2^{-\nu}} - a_{\chi,2^{-\nu+1}})(y,\eta)(1-\varphi_{\nu+2})(\eta)| \leq C_{\alpha,\beta,N+1} 2^{-N\nu}(1+|\eta|)^{m-|\beta|+|\alpha|}$$

∎

Teorema 1.4 *Se* $b \in S^{\mu}_{1,1}$ *e* $a \in \tilde{S}^m_{1,1}$ *então* $c(x,D) = b(x,D)a(x,D)$ *é um operador pseudo-diferencial com símbolo* $c \in S^{m+\mu}_{(1,1)}$*, cujas semi-normas são estimadas por um número finito de produtos de semi-normas de* a *e* b*.*

Prova. Primeiro decompomos $a(y,\eta)$ em símbolos $a_1(y,\eta)$ e $a_2(y,\eta)$ como no lema (1.3). Para $a_1(y,\eta)$ aplicamos o teorema (1.3).

Tomando N suficientemente grande em (1.28), o operador definido pela composição de $b(x,D)$ com $Op(a_{\chi,2^{-\nu}} - a_{\chi,2^{-\nu+1}}(1-\varphi_{\nu+2}))$ é, em conseqüência do lema (1.2), definido por um símbolo $c_\nu(x,\eta)$ com

$$|\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta c_\nu(x,\eta)| \leq C_{\alpha,\beta} 2^{-\nu}(1+|\eta|)^{m+\mu-|\beta|+|\alpha|}$$

Assim temos, em conseqüência do lema 1.1, que $b(x,D)a_2(x,D)$ é um operador pseudo-diferencial, cujo símbolo pertence a classe $S^{m+\mu}_{1,1}$. ∎

Continuidade em L^2

Teorema 1.5 *(ver [Hou3], p. 766) Se* $m \leq -n \max 0, (\delta-\rho)/2$*,* $0 < \rho \leq 1$*,* $0 \leq \delta < 1$ *e* $a \in S^m_{(\rho,\delta)}$ *então*

$$\|a(x,D)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq [n/2]+1} \sup |D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-m+\rho|\alpha|-\delta|\beta|} \quad (1.29)$$

Em particular, os operadores com símbolos na classe $S^0_{1,\delta}$ são contínuos em L^2.

Capítulo 2

Espaços $h^p(\mathbb{R}^n)$

Funções Maximais

Definição 2.1 *Dada uma função f mensurável em $\mathbb{R}^n$, definimos a função maximal $M(f)$ por*

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy \tag{2.1}$$

A limitação da função maximal nos será útil em mais de uma oportunidade neste trabalho, por isso é conveniente que apresentemos o seguinte teorema, cuja demonstração se encontra em [Stein 2].

Teorema 2.1 *Seja f uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$*

(i) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, então Mf é finita em quase toda parte.

(ii) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então, para cada $t > 0$,

$$|\{x/ \quad (Mf)(x) > t\}| \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f|dx,$$

sendo C uma constante que depende apenas da dimensão n.

(iii)Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 < p \leq \infty$ então $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

com a constante C_p depende apenas de p e da dimensão n.

Daremos agora definições de certas funções maximais necessárias para a definição de $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.2 *Dadas $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{S}$ com $\int \phi \neq 0$, definimos*

$$M_\phi f(x) = \sup_{t>0} |(\phi_t * f)(x)|, \quad \phi_t(x) = t^{-n}\phi(\frac{x}{t})$$

$$M_\phi^* f(x) = \sup_{\substack{|y-x|<t \\ t>0}} |(\phi_t * f)(y)|$$

$$M_{\phi_N}^{**} f(x) = \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n \\ 0<t}} \left|(\phi_t * f)(x-y)\left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-N}\right|$$

$$M_{\mathcal{F}} f(x) = \sup_{\psi\in\mathcal{F}} |M_\psi f(x)|$$

com $\mathcal{F} = \mathcal{F}_M = \{\psi \in \mathcal{S} / \|\psi\|_{\alpha,\beta} = \sup_x |x^\alpha \partial^\beta \psi(x)| \leq 1; \quad |\alpha|, |\beta| \leq M\}.$

Uma relação entre estas funções maximais é dada pelo

Teorema 2.2 *([Stein1],p. 91) Para $p > 0$ as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

(ii) $M_\phi^* f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

(iii) $M_{\phi_N}^{**} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se $N > n/p$

(iv) $M_{\mathcal{F}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $M \geq M_0(p,n)$

Além disso, as normas em L^p destas funções maximais são equivalentes.

Definição 2.3 *Uma distribuição $f \in \mathcal{S}'$ está em $H^p(\mathbb{R}^n)$ se satisfaz alguma das condições do teorema acima.*

Agora tomando o parâmetro t no intervalo $(0,1]$, temos a seguinte

Definição 2.4 *Dadas $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{S}$ com $\int \phi \neq 0$, definimos*

$$m_\phi f(x) = \sup_{0<t\leq 1} |(\phi_t * f)(x)| \tag{2.2}$$

$$m_\phi^* f(x) = \sup_{\substack{|y-x|<t \\ 0<t\leq 1}} |\phi_t * f(y)| \tag{2.3}$$

$$m_{\phi_N}^{**} f(x) = \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n \\ 0<t\leq 1}} \left|(\phi_t * f)(x-y)\left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-N}\right| \tag{2.4}$$

$$m_{\mathcal{F}} f(x) = \sup_{\psi\in\mathcal{F}} |m_\psi f(x)| \tag{2.5}$$

com $\mathcal{F} = \mathcal{F}_M = \{\psi \in \mathcal{S} / \|\psi\|_{\alpha,\beta} = \sup_x |x^\alpha \partial^\beta \psi(x)| \leq 1; \quad |\alpha|, |\beta| \leq M\}$.

Teorema 2.3 *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $m_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

(ii) $m_\phi^* f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

(iii) $m_{\phi_N}^{**} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *se* $N > n/p$

(iv) $m^{\mathcal{F}}(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *para* $M \geq M_0(p,n)$

Além disso, as normas em L^p destas funções maximais são equivalentes.

A demonstração deste teorema é uma adaptação dos teoremas 8, 9 e 11 de [FS], como foi observado em [G].

Definição 2.5 *Uma distribuição $f \in \mathcal{S}'$ está em $h^p(\mathbb{R}^n)$ se satisfaz alguma das condições do teorema (2.3).*

Observações.

- Em h^p definimos a "norma" $\|f\|_{h^p} = \|m_\phi(f)\|_{L^p}$, sendo esta equivalente à $\|m_\phi^*(f)\|_{L^p}$,$\|m_{\phi_N}^{**}(f)\|_{L^p}$ e $\|m_{\mathcal{F}}(f)\|_{L^p}$;
- Se $p > 1$, $h^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$
- $H^p(\mathbb{R}^n) \subset h^p(\mathbb{R}^n)$ visto que $m_\phi f(x) \leq M_\phi f(x)$

Uma relação entre as funções maximais Mf e $m_\phi f$ é dada na seguinte

Proposição 2.1 *Sejam $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Existe uma constante $C(\phi)$ tal que*

$$m_{\phi}f(x) \leq C(\phi)Mf(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Prova. Basta demonstrarmos que $|(f * \phi)(x)| \leq C(\phi)M(f)(x)$. Note que

$$|(f * \phi)(x)| \leq (|f| * |\phi|)(x).$$

Agora a função $|\phi(x)|$ é majorada por $C_{\phi}(1+|x|)^{-n-1}$. Esta última é um limite de funções da forma $\sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{B_j}$, com a_j positivos, B_j uma bola centrada na origem, χ_{B_j} a função característica da bola e $\sum_{j=1}^{N} a_j|B_j| \leq C\int(1+|x|)^{-n-1}dx$.

Visto que $|(f * \chi_{B_j})(x)| \leq |B_j|Mf(x)$, temos

$$|f * \sum_{j=1}^{N} a_j\chi_{B_j}| \leq [C\int(1+|x|)^{-n-1}dx]Mf(x);$$

e segue o resultado. ∎

Proposição 2.2 *O espaço $h^p(\mathbb{R}^n)$ é completo para todo $p > 0$.*

Prova. Quando $p > 1$, $h^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Assim resta provar o resultado para $0 < p \leq 1$.

Seja $\{f_j\}$ uma seqüência de Cauchy em $h^p(\mathbb{R}^n)$ segundo a métrica $d(f,g) = \|m_{\phi}(f-g)\|_{L^p}^p$. Seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; temos

$$|\langle f_k, \psi\rangle - \langle f_j, \psi\rangle| = |(f_k - f_j) * \check{\psi}(0)| \leq m_{\check{\psi}}^*(f_k - f_j)(y), \quad \text{sendo} \quad \check{\psi}(x) = \psi(-x),$$

para todo y com $|y| \leq 1$, e assim

$$|\langle f_k, \psi\rangle - \langle f_j, \psi\rangle|^p \leq \frac{1}{|B|}\int_B (m_{\psi}^*(f_k - f_j)(y))^p dy,$$

sendo B a bola de raio 1 centrada na origem. Portanto

$$|\langle f_k, \psi\rangle - \langle f_j, \psi\rangle| \le C_\psi d(f_k, f_j).$$

Em conseqüência da desigualdade acima, temos que f_j converge para uma f em $\mathcal{S}'$. Mostraremos que de fato f_j converge para f em $h^p(\mathbb{R}^n)$.

Podemos supor ,sem perda de generalidade, que

$$d(f_k, f_{k+1}) \le 2^{-k}, \quad k = 1, \quad 2, \cdots$$

Fixado $0 < \epsilon \le 1$, escrevemos, em razão da convergência de f_j para f,

$$\langle f - f_k, \phi_\epsilon(x - .)\rangle = \sum_{j=k}^{\infty} \langle f_{j+1} - f_j, \phi_\epsilon(x - .)\rangle.$$

Observe que cada parcela a direita da igualdade acima é dominada em módulo por $m_\phi(f_{j+1} - f_j)(x)$; logo

$$m_\phi(f - f_k)(x) \le \sum_{j=k}^{\infty} m_\phi(f_{j+1} - f_j)(x).$$

Elevando ambos membros da desigualdade à potência p e integrando obtemos, em decorrência da subaditividade da função t^p ($t \ge 0$ e $0 < p \le 1$),

$$\|f - f_k\|_{h^p}^p \le \sum_{j=k}^{\infty} \|f_{j+1} - f_j\|_{h^p}^p \le \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} \le 2^{1-k}. \tag{2.6}$$

Esta provado então que $f - f_k \in h^p(\mathbb{R}^n)$; portanto, $f = (f - f_k) + f_k \in h^p(\mathbb{R}^n)$. Além disso, segue de (2.6) que $f_k \to f$ em $h^p(\mathbb{R}^n)$. ∎

Decomposição atômica

Os elementos de $H^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \le 1$, tem uma decomposição atômica (vide [Stein 1]). Os elementos de $h^p(\mathbb{R}^n)$, como veremos abaixo também podem ser decompostos em átomos. Comecemos por dizer o que é um átomo no contexto de $h^p(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.6 *Uma função $a(x)$ é um $(h^p, q)-$átomo, com $1 < q \leq \infty$ e $0 < p \leq 1$, se*

$$a \in L^q(\mathbb{R}^n) \tag{2.7}$$

e existe um cubo Q tal que

$$S(a) \subset Q \quad com \quad \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |a(x)|^q dx\right)^{1/q} \leq \frac{1}{|Q|^{1/p}}, \quad se \quad 1 < q < \infty, \tag{2.8}$$
$$e \quad \|a\|_\infty \leq \frac{1}{|Q|^{1/p}} \quad se \quad q = \infty.$$

$$e \; se \quad |Q| < 1 \quad então \quad \int_Q x^\alpha a(x)dx = 0, \quad |\alpha| \leq [n(\frac{1}{p} - 1)] \tag{2.9}$$

Exemplo 2.1 *Seja $1 < p \leq 1$ e tomemos $l \geq [n(\frac{1}{p} - 1)]$. Tomemos $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, não nula, tal que $\hat{g} \subset Q(0, r)$. Existe uma constante $C_{p,q}$ tal que $C_{p,q}(\xi_1^{l+1}\xi_2^{l+1}\cdots\xi_n^{l+1}g(.))\hat{}$ é um $(h^p, q)-$átomo.*

Lema 2.1 *Seja $u \in h^p$ $(0 < p \leq 1)$. Existem $f \in H^p$ e $g \in C^\infty \cap h^p$ tais que $u = f + g$ com*

$$\|f\|_{H^p} \leq C\|u\|_{h^p} \tag{2.10}$$
$$\|g\|_{h^p} \leq C\|u\|_{h^p}$$

Prova. Seja

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1 & , \quad |\xi| \leq 1 \\ 0 & , \quad |\xi| \geq 2 \end{cases}$$

Tomando $p(x) = (2\pi)^{-n}\displaystyle\int e^{ix.\xi}\chi(\xi)d\xi \in \mathcal{S}$, definimos

$$f = u - u * p \quad \text{e} \quad g = u * p.$$

Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $S(\hat{\phi}) \subset \{|\xi| \leq 1\}$ e $\hat{\phi}(\xi) \equiv 1$ em $|\xi| \leq 1/2$. Temos

$$\phi_t * f(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi}\hat{\phi}(t\xi)(1 - \chi(\xi))\hat{u}(\xi)d\xi,$$

que é nula se $t > 1$. Portanto, $m_\phi f = M_\phi f$.

Tratemos agora de g. Afirmamos que $\{\phi_\epsilon * p\}_{0<\epsilon\leq 1}$ é limitada em $\mathcal{S}$. De fato,

$$|x^\alpha(\phi_\epsilon * D^\beta p)(x)| \leq C_{\beta,N}\frac{|x^\alpha|}{(1+|x|)^N} \leq C_{\alpha,\beta}, \quad \text{se} \quad N = |\alpha|.$$

Decorre do fato acima que existe C e uma família M tal que $\phi_\epsilon * u \in \mathcal{F}_M$. Assim, $|\phi_\epsilon * p * u(x)| \leq c m_{\mathcal{F}_M} u(x)$, para todo $0 < \epsilon \leq 1$; logo $m_\phi(g)(x) \leq C m_{\mathcal{F}_M} u(x)$.

Temos em conseqüência dos fatos acima,

$$\|f\|^p_{H^p} = \|f\|^p_{h^p} = \|u - g\|^p_{h^p} \leq \|u\|^p_{h^p} + \|g\|^p_{h^p} \leq (1 + C^p)\|u\|^p_{h^p}.$$

∎

Proposição 2.3 *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|a\|_{h^p} \leq C, \quad \textit{para todo} \quad (h^p, q) - \textit{átomo}. \tag{2.11}$$

Prova. Suponhamos que a seja um átomo com $S(a) \subset Q(x_0, l)$; em conseqüência $S(\phi_\epsilon * a) \subset Q(x_0, l+1)$.Segue da proposição 2.1

$$\sup_{0<\epsilon\leq 1} |\phi_\epsilon * a| \leq CMa,$$

e tomando r tal que $rp = q$ e r' tal que $1/r + 1/r' = 1$ temos

$$\int |m_\phi a(x)|^p dx \leq \Big(\int |m_\phi a(x)|^{pr} dx\Big)^{1/r}\Big(\int_Q 1 dx\Big)^{1/r'} \leq$$
$$\Big(\int |m_\phi a(x)|^{pr} dx\Big)^{1/r}|Q(x_0, l+1)|^{1/r'} \leq C\Big(\int |Ma(x)|^{pr} dx\Big)^{1/r}|Q(x_0, l+1)|^{1/r'}$$
$$= C\Big(\int |Ma(x)|^q dx\Big)^{1/r}|Q(x_0, l+1)|^{1/r'} \leq C\|a\|^{q/r}_{L^q}|Q(x_0, l+1)|^{1-1/r} \leq C'_q.$$

Sendo que a penúltima desigualdade decorre de (iii) do teorema 2.1 e a última, do fato de a ser átomo. ∎

Teorema 2.4 *Se $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$ $(0 < p \leq 1)$, existem seqüências (a_j), de $(h^p, \infty)-$átomos, e (λ_j) de números tais que*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \quad em \quad \mathcal{S}' \quad e \tag{2.12}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \leq \|f\|_{h^p} \tag{2.13}$$

Prova. Escrevamos $f = g + f_1$, com $g \in C^\infty \cap h^p$ e $f_1 \in H^p$, como no lema 2.1. Utilizando-se da decomposição atômica em H^p (vide [Stein 1]), temos $f_1 = \sum \lambda_j a_j$ com $\sum |\lambda_j|^p \leq C\|f\|_{H^p} \leq C'\|u\|_{h^p}$.

Mostraremos agora que $g \in C^\infty \cap h^p$ se decompõe em átomos. Seja $\{\varphi_j\}$ uma partição da unidade da forma $\varphi_j(x) = \varphi_0(x - c_j)$ com $S(\varphi_0) \subset Q(0, \frac{3}{2})$ e $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma enumeração de $\mathbb{Z}^n$. Basicamente reescreveremos a série

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j g.$$

Sejam $\Lambda_j = (1 + \|g\|_{L^\infty(Q_j)})(3/2)^{n/p}$ e $a_j := \frac{\varphi_j g}{1+\|g\|_{L^\infty(Q_j)}} \left(\frac{3}{2}\right)^{-n/p} \varphi_j g$. Então

$$\varphi_j g = \Lambda_j a_j$$

É claro que

$$S(a_j) \subset Q_j$$
$$\|a_j\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{|Q_j|^{1/p}}$$

Note que para p do lema 2.1 e todo $x \in Q_j$,

$$|(f * p)(x)| \leq \sup_{r \in Q_j} |(f * p_r)(0)| \ \text{ sendo } \ p_r(y) = p(y + r),$$

pois $(f * p)(x) = (f * p_x)(0)$ para todo $x \in Q_j$. Logo

$$\sup_{x \in Q_j} |(f * p)(x)| \leq \sup_{r \in Q_j} |(p_r * f)(0)|.$$

Uma vez que $(f*p_r)(0) = (f*p_{r-x})(x)$ e $r-x \in Q(0,\frac{3}{2})$ para $r, x \in Q_j$, temos

$$\sup_{r\in Q_j} |(p_r * f)(0)| \leq \sup_{s\in Q(0,\frac{3}{2})} |f * p_s(x)|, \quad \text{para todo} \quad x \in Q_j.$$

As semi-normas de p_s em $\mathcal{S}$ são uniformemente limitadas segundo s se s varia em Q. Em conseqüência disto, se $\mathcal{F}$ é uma família de elementos de $\mathcal{S}$ que satisfaz as hipóteses do teorema 2.2 temos

$$\{Cp_s\}_{s\in Q(0,\frac{3}{2})} \subset \mathcal{F} \quad \text{para} \quad C = \frac{1}{1+\sup_{s\in Q}(\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq M} \|p_s\|_{\alpha,\beta})}.$$

Desse modo

$$\sup_{s\in Q(0,\frac{3}{2})} |(f*p_s)(x)| \leq \frac{1}{C} m_{\mathcal{F}} f(x), \quad \text{para todo} \quad x \in Q_j.$$

Portanto,

$$\|g\|^p_{L^\infty(Q_j)} \leq \frac{C'}{|Q_j|} \int_{Q_j} (m_{\mathcal{F}} f(x))^p dx;$$

e se N é o número máximo de intersecções entre os cubos Q_j,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\Lambda_j|^p \leq \frac{C'}{|Q_j|} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} (m_{\mathcal{F}} f(x))^p dx \leq \frac{NC'}{|Q_j|} \int_{\mathbb{R}^n} (m_{\mathcal{F}} f(x))^p dx < \infty.$$

∎

Observação. Um elemento de $\mathcal{S}'$ que se escreve como $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$, com $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty$ e a_j $(h^p,\infty)-$átomo, é também um elemento de $h^p(\mathbb{R}^n)$. Isto decorre do fato das somas parciais, $S_N = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j$, formarem uma seqüência de Cauchy no espaço completo $h^p(\mathbb{R}^n)$ e da convergência em $h^p(\mathbb{R}^n)$ implicar na convergência em $\mathcal{S}'$.

Corolário 2.1 *O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $h^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $p > 0$.*

Prova. Decompomos $f \in \mathcal{S}$ na forma

$$f(x) = f(x)\varphi(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} f(x)\psi_\nu(x), \tag{2.14}$$

sendo $1 = \varphi(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(x)$ a partição da unidade definida por (1.23) e (1.24).

Em conseqüência da propriedade (1.23),

$$S(\phi_t * (\psi_\nu f)) \subset \{x/ \ \ 2^{\nu-1} - 1 \leq |x| \leq 2^{\nu+1} + 1\}, \quad 0 < t \leq 1 \ \text{ e } \ \nu \geq 1 \tag{2.15}$$

Dito isto provaremos agora que $\|f\|_{h^p} < \infty$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} (m_\phi f(x))^p dx \leq \int_{|x| \leq 2^4} (m_\phi f(x))^p dx + \sum_{\nu=4}^{\infty} \int_{2^{\nu-1} \leq |x| \leq 2^{\nu+1}} (m_\phi f(x))^p dx$$

Tendo em vista (2.13) e (2.14), a série acima fica

$$\sum_{\nu=4}^{\infty} \Big(\sum_{j=-2}^{2} \int_{2^{\nu-1} \leq |x| \leq 2^{\nu+1}} (m_\phi(\psi_{\nu-j} f)(x))^p dx \Big) \tag{2.16}$$

Note que

$$m_\phi(\psi_\nu f)(x) \leq \|\psi_\nu f\|_\infty \leq \sup_{2^{\nu-1} \leq |x| \leq 2^{\nu+1}} |f(x)|$$

e como $f \in \mathcal{S}$,

$$|f(x)| \leq C_N (1 + |x|) - N \ \ \text{para todo} \ \ N > 0.$$

Em conseqüência destes dois fatos,

$$\sum_{j=-2}^{2} \int_{2^{\nu-1} \leq |x| \leq 2^{\nu+1}} (m_\phi(\psi_{\nu-j} f)(x))^p dx \leq 5C(1 + 2^{\nu-3})^{-Np}(2^{(\nu+1)n} - 2^{(\nu-1)n}).$$

Tomando N suficientemente grande vê-se que a série (2.15) é convergente. Concluímos assim que $f \in h^p$.

Dada $f \in h^p$, consideremos uma decomposição em átomos da mesma

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j.$$

Afirmamos que $s_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j$ converge em h^p para f. De fato,

$$\|f - s_m\|_{h^p}^p = \| \sum_{j=m+1}^{\infty} \lambda_j a_j \|_{h^p}^p$$

e visto que $0 < p \leq 1$, o membro a direita da igualdade acima é majorado por

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \|\lambda_j a_j\|_{h^p}^p \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} |\lambda_j|^p \|a_j\|_p \leq C \sum_{j=m+1}^{\infty} |\lambda_j|^p.$$

A constante C é a mesma que aparece na proposição 0.1. Do teorema 0.3 sabemos que a série $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p$ é convergente. Desse modo, $\sum_{j=m+1}^{\infty} |\lambda_j|^p$ $rightarrow 0$ quando $m \to \infty$; concluímos assim a afirmação.

Provamos acima que o conjunto das combinações lineares finitas de átomos é denso em h^p. Assim, se provarmos que os átomos de h^p são aproximáveis por funções em $\mathcal{S}$ teremos demonstrado o teorema. Seja $\varphi \in C_0^{\infty}(B(0,R))$ com $\int \varphi = 1$ e dado um átomo a com $S(a) \subset Q(x_0, l)$, utilizamos os mesmos procedimentos da demonstração da proposição 2.3 para concluir que

$$\int |m_\phi(\varphi_\epsilon * a - a)|^p dx \leq C \|\varphi_\epsilon * a - a\|_{L^2}^p |Q(x_0, l + R + 1)|^{1 - \frac{2}{p}}, \quad \text{para} \quad 0 < \epsilon \leq 1.$$

Como sabemos, $\|\varphi_\epsilon * a - a\|_{L^2} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Concluímos assim que $\|\varphi_\epsilon * a - a\|_{h^p} \to 0$ e o corolário. ∎

Capítulo 3

Continuidade em $h^p(\mathbb{R}^n)$

Já mencionamos os resultados de [G]-da continuidade dos operadores em $Op(S^0_{1,0})$ em h^p- e de [T]- da continuidade dos operadores em $Op(S^0_{1,\delta})$ (com $\delta < 1$) em h^1. O teorema a seguir é uma extensão destes dois resultados.

Antes de tratarmos da continuidade dos operadores pseudo-diferenciais em $h^p(\mathbb{R}^n)$, vejamos como a decomposição atômica contribui no estudo da continuidade de operadores em $h^p(\mathbb{R}^n)$.

Se $T : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é um operador linear contínuo e existe uma constante C tal que

$$\|T(a)\|_{h^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \quad \text{, para todo átomo } \; a,$$

é contínuo em $h^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, cada $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$ se escreve na forma (2.12) em $\mathcal{S}'$; logo $T(f) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j T(a_j)$. Tendo em vista a subaditividade de $\|.\|^p_{h^p}$, temos

$$\|T(f)\|^p_{h^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \|T(a_j)\|^p_{h^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p.$$

Em razão da desigualdade (2.13), concluímos pela continuidade de T.

Teorema 3.1 *Todo operador em $Op(S^0_{1,\delta}(\mathbb{R}^n))$, com $0 \leq \delta < 1$, é contínuo em h^p, para todo $p > 0$.*

Prova. Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\hat{\phi}(\xi) = 1$ para $|\xi| \leq 1/2$ e 0, para $|\xi| > 1$. O conjunto $\{\hat{\phi}(\epsilon\xi)\}_{0<\epsilon\leq 1}$ é limitado em $S^0_{1,0}$. De fato, uma vez que $1/2 \leq \epsilon|\xi| \leq 1$ no suporte de $\partial^\alpha\hat{\phi}(\epsilon\xi)$, quando $|\alpha| > 0$, temos

$$|\partial^\alpha\hat{\phi}(\epsilon\xi)| = \epsilon^{|\alpha|}|(\partial^\alpha\hat{\phi})(\epsilon\xi)| \leq C_\alpha(\phi)(1+|\xi|)^{-|\alpha|}.$$

Agora tomemos $B = Op(b) \in Op(S^0_{1,\delta})$. Pelo teorema 1.3, o símbolo $c_\epsilon(x,\xi)$ de $Op(\hat{\phi}(\epsilon.))Op(b)$ tem semi-normas em $S^0_{1,\delta}$ limitadas por um produto de semi-normas de $\hat{\phi}(\epsilon\xi)$ e $b(x,\xi)$ em $S^0_{1,0}$ e $S^0_{1,\delta}$, respectivamente. Logo $\{c_\epsilon\}$ é limitado em $S^0_{1,\delta}$.

Como conseqüência da limitação de $\{c_\epsilon\}$, as estimativas (1.5) e (1.8) valem uniformemente para o núcleo K_ϵ de $Op(c_\epsilon)$.

Mostraremos agora que $\|B(a)\|_{h^p} \leq C$ para todo átomo a, afim de concluir pela continuidade de B.

Seja a um $(h^p - \infty)-$átomo suportado em $Q(x_0,r) \subset B(x_0, \frac{\sqrt{n}}{2}r)$. Estimemos a "norma"$h^p$ de $B(a)$.

$\|B(a)\|^p_{h^p} = \int \sup\limits_{0<\epsilon\leq 1} |\phi_\epsilon * B(a)(x)|^p dx = \displaystyle\int_{B(x_0,\sqrt{n}r)} \sup\limits_{0<\epsilon\leq 1} |\phi_\epsilon * B(a)(x)|^p dx +$
$\displaystyle\int_{B(x_0,\sqrt{n}r)^c} \sup\limits_{0<\epsilon\leq 1} |\phi_\epsilon * B(a)(x)|^p dx = I_1 + I_2.$

Para I_1 usamos a desigualdade de Hölder, a limitação da função maximal M em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e o fato de a ser um átomo, a fim de concluir

$I_1 \leq C(\phi)\int_{B(x_0,2r)} M(B(a))^p dx \leq C(2r)^{n(1-p/2)}\|M(B(a))\|^p_{L^2} \leq cr^{n(1-p/2)}\|a\|^p_{L^2} \leq C_{n,p}$.

Quando $r \geq 1$, utilizamos a desigualdade (1.5) para concluir pela limitação de I_2:

$$I_2 \leq \int_{B(x_0,\sqrt{n}r)^c} \{\sup_{0<\epsilon\leq 1} |\int_{B(x_0,\sqrt{n}r/2)} K_\epsilon(x,y)a(y)dy|\}^p dx \leq$$
$$\int_{B(x_0,\sqrt{n}r)^c} \frac{1}{|x-x_0|^{Np}}(\int |a(y)|dy)^p dx \leq Cr^{(n-N)p} \leq C_{p,n}, \quad \text{para} \quad N > n/p.$$

Quando $r < 1$ e $\frac{n}{n+l} < p \leq \frac{n}{n+l-1}$, a é um átomo com momentos nulos até a ordem $l-1$. Utilizando a desigualdade (1.8), concluímos que I_2 é majorado por:

$$\int_{B(x_0,2r)^c} \{\sup_{0<\epsilon\leq 1} |\int_{B(x_0,r)} [K_\epsilon(x,y) - \sum_{|\alpha|\leq l-1} \partial_y^\alpha K_\epsilon(x,x_0)(y-x_0)^\alpha] a(y)dy|\}^p dx \leq$$
$$\int_{B(x_0,2r)^c} \frac{1}{|x-x_0|^{(n+l)p}} dx (\int_{B(x_0,r)} |y-x_0|^l |a(y)|dy)^p \leq C_{n,p} r^{n-(n+l)p} r^{-n+(n+l)p}$$
$$\leq C_{n,p}.$$

∎

É uma pergunta natural: Existem condições sobre (ρ,δ), com $\rho < 1$, de modo que os operadores da classe $Op(S^0_{\rho,\delta})$ sejam contínuos em algum h^p com $p < 1$?

A resposta é que isto não é válido, mais precisamente, mostraremos:

Proposição 3.1 *Para cada $0 < \rho < 1$ existe um símbolo $a \in S^m_{\rho,0}(\mathbb{R}^n)$ tal que $a(x,D)$ é descontínuo em $h^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $0 < p \leq 1$.*

Vejamos alguns resultados necessários a demonstração desta proposição. Sejam $\mathcal{H}$ um espaço vetorial topológico de Hausdorff e A_0, A_1 dois quase espaços de Banach tais que A_0, $A_1 \hookrightarrow \mathcal{H}$. Seja $A_0 + A_1$ o conjunto dos elementos $a \in \mathcal{H}$ que podem ser escritos como $a = a_0 + a_1$, com $a_0 \in A_0$ e $a_1 \in A_1$.

Se $0 < t < \infty$ e $a \in A_0 + A_1$ define-se o K-funcional por

$$K(t,a) = K(t,a,A_0,A_1) = \inf(\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}), \tag{3.1}$$

sendo o ínfimo tomado sobre todas as representações $a = a_0 + a_1$, com $a_0 \in A_0$ e $a_1 \in A_1$.

Definição 3.1 *Seja* $0 < \theta < 1$. *Se* $0 < q < \infty$ *então*

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \tag{3.2}$$
$$\{a; \quad a \in A_0 + A_1, \quad \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = (\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t,a)]^q \frac{dt}{t})^{1/q} < \infty\},$$

e se $q = \infty$,

$$(A_0, A_1)_{\theta,\infty} = \tag{3.3}$$
$$\{a; \quad a \in A_0 + A_1, \quad \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}} = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,a) < \infty\}$$

Observação. O caso que nos interessa é o seguinte:

$$(h^{p_0}(\mathbb{R}^n), h^{p_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} = h^p(\mathbb{R}^n), \tag{3.4}$$

sendo $0 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ e $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ (ver [Tri]).

Proposição 3.2 *Seja* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *um operador linear com* $T_{|A_k} \in \mathcal{L}(A_k)$ $(k = 0, 1)$. *Então a restrição de* T *a* $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ *(com* $0 < \theta < 1$ *e* $0 < q \leq \infty$*) é um elemento de* $\mathcal{L}((A_0, A_1)_{\theta,q})$.

Prova. Por hipótese,

$$\|Ta_k\|_{A_k} \leq \|T\|_k \|a_k\|_{A_k} \quad (k = 0, \quad 1).$$

Se $a = a_0 + a_1$ então

$$K(t, Ta) \leq \inf(\|Ta_0\|_{A_0} + t\|Ta_1\|_{A_1})$$
$$\leq \|T\|_{A_0} \inf(\|a_0\|_{A_0} + t\|T\|_{A_1}\|T\|_{A_0}^{-1}\|a_1\|_{A_1})$$
$$\leq \|T\|_{A_0} K(t\|T\|_{A_1}\|T\|_{A_0}^{-1}, a).$$

Por uma mudança de variáveis de integração,

$$\|Ta\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} \leq \|T\|_{A_0}^{1-\theta}\|T\|_{A_1}^{\theta}\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}.$$

∎

Em [Stein 1] encontramos o seguinte resultado ligado aos nomes de Hardy, Littlewood, Hirchman, Wainger, Fefferman e Stein :

Proposição 3.3 *Se* $(\rho-1)n/2 < m \leq 0$ *então* $Op(S^m_\rho) \subset \mathcal{L}(L^p)$ *se, e somente se,* $|p^{-1} - 2^{-1}| \leq m/[n(\rho-1)]$.

Demonstração da proposição 3.1.

Dado $0 < \rho < 1$ existe, pela proposição 3.3, um símbolo $a \in S^0_{\rho,0}(\mathbb{R}^n)$ tal que $a(x,D)$ é contínuo em $L^p(\mathbb{R}^n)$ apenas para $p = 2$. Suponhamos, por absurdo, que o operador $a(x,D)$ seja contínuo em $h^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, para algum $0 < p_0 \leq 1$. O ponto médio $\frac{p_0+2}{2}$ de $[p_0, 2]$ se escreve como $\frac{2}{p_0+2} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{2}$ com $\theta = \frac{2}{2+p_0}$; em conseqüência da proposição 3.2 e de (3.4), temos que $a(x,D)$ é contínuo em $L^{\frac{2+p_0}{2}}(\mathbb{R}^n)$. Mas $1 < \frac{2+p_0}{2} < 2$, o que contradiz a escolha de a. ∎

Foi demonstrado em [T] que operadores da classe de Bony $Op(\mathcal{B}S^0_{1,1})$ são contínuos em h^1. Os símbolos da classe de Bony constituem um subconjunto da classe $\tilde{S}^0_{1,1}$, mais especificamente a classe de Bony é um subconjunto do conjunto de símbolos $a(x,\eta) \in S^0_{1,1}$ tais que

$$\hat{a}(\xi,\eta) = 0 \quad \text{quando} \quad |\xi+\eta| + 1 < |\eta|/B, \tag{3.5}$$

para algum constante positiva B.

Desse modo o teorema a seguir é uma extensão do teorema de [T] para a classe de Bony.

Teorema 3.2 *Todo operador na classe* $Op(\tilde{S}^0_{(1,1)})$ *é continuo em* h^p.

Prova. A demonstração é análoga a do teorema 3.1, visto que a composição com um elemento de $Op(S^0_{1,\delta})$, como é o operador definido por $\hat{\phi}(\epsilon\xi)$, por um operador em $Op(\tilde{S}^0_{(1,1)})$ é ainda um operador nesta última classe. Além disso, os operadores em $Op(\tilde{S}^0_{(1,1)})$ são contínuos em L^2 (vide observação que segue a definição (1.2)) e os núcleos a eles associados satisfazem a estimativa (3.1), em conseqüência de (1.6). ∎

Capítulo 4

Aplicações.

Neste capítulo trataremos da resolubilidade local de operadores diferenciais de primeira ordem em duas variáveis

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + ib(t,x)\frac{\partial}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}, |t| < T. \tag{4.1}$$

No que segue denotaremos por Ω_T o conjunto $\mathbb{R} \times [-T, T]$ e vamos supor que

(i) $b(x,t)$ é suave, real e não negativa,

(ii) todas derivadas de $b(x,t)$ são uniformemente limitadas.

Trataremos da resolubilidade no seguinte sentido

Definição 4.1 *Dizemos que L é localmente resolúvel num espaço de funções (ou distribuições) $X(\Omega_T)$ se, cada $x_0 \in \Omega_T$ está contido numa vizinhança U, de modo que para toda $f \in X(\Omega_T) \cap \mathcal{E}'(U)$ exista $u \in X(\Omega_T)$ tal que*

$$Lu = f \quad em \quad U \tag{4.2}$$

Nos dois lemas que seguem apresentaremos os resultados necessários para a construção de uma parametriz de L. Para demonstrações dos mesmos veja [HL] e [Hou 4]

Lema 4.1 *Seja L definido por (4.1). Existe uma função $\phi(x,t,t')$ definida em $\Omega_T \times [-T,T]$, tal que $x-\phi(x,t,t')$ é limitada com derivadas limitadas de modo que se $B(x,t,t') = \int_{t'}^{t} b(x,s)ds$, temos*

$$|D_x^\alpha D_t^\beta D_{t'}^\gamma (L\phi(x,t,t'))| \leq C(N,\alpha,\beta,\gamma)|B(x,t,t')|^N, \quad N = 0,1,\cdots \tag{4.3}$$

e

$$\phi(x,t',t') = x, \quad (x,t') \in \Omega_T. \tag{4.4}$$

Além disso, se T é tomado suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}B(x,t,t') \leq Im\phi(x,t,t') \leq \frac{3}{2}B(x,t,t'), \quad t \geq t', \\ \frac{3}{2}B(x,t,t') \leq Im\phi(x,t,t') \leq \frac{1}{2}B(x,t,t'), \quad t \leq t' \end{aligned} \tag{4.5}$$

e

$$|Re \quad \phi_x(x,t,t') - 1| < 1/2. \tag{4.6}$$

Consideremos uma função real e suave $0 \leq \lambda^+(\xi) \leq 1$ tal que $\lambda^+(\xi) = 0$ se $\xi \leq -1$ e $\lambda^+(\xi) = 1$ se $\xi \geq 1$ e definamos $\lambda^- = 1 - \lambda^+$.

Lema 4.2 *(i) Se $-T \leq t' \leq t \leq T$, a função*

$$a^+(x,\xi,t,t') = \lambda^+(\xi)exp(-Im \quad \phi(x,t,t')\xi)$$

é um símbolo da classe $S^0_{1,1/2}(\mathbb{R})$ como uma função de (x,ξ) dependendo continuamente de t,t'. Além disso,

$$D_t^j D_{t'}^k a^+(x,\xi,t,t') \in S^{j+k}_{1,1/2}(\mathbb{R}) \quad j,k = 0,1\cdots$$

uniforme e continuamente em t,t' para $t' \leq t$.

(ii) Analogamente,

$$a^-(x,\xi,t,t') = \lambda^-(\xi)exp(-Im \quad \phi(x,t,t')\xi)$$

satisfaz, como função de (x,ξ),

$$D_t^j D_{t'}^k a^-(x,\xi,t,t') \in S^{j+k}_{1,1/2}(\mathbb{R}) \quad j,k=0,1\cdots$$

uniforme e continuamente em $t \leq t'$.

Definamos para $f \in C_0^\infty(\Omega_T)$

$$K^+f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi(x,t,t')\xi}\lambda^+(\xi)\hat{f}(\xi,t')d\xi dt',$$
$$K^-f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{T}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi(x,t,t')\xi}\lambda^-(\xi)\hat{f}(\xi,t')d\xi dt',$$

sendo $\hat{f}(\xi,t')$ a transformada de Fourier de $f(x,t')$ com respeito a x.

$$R^+f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi(x,t,t')\xi} i\xi L\phi(x,t,t')\lambda^+(\xi)\hat{f}(\xi,t')d\xi dt',$$
$$R^-f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi(x,t,t')\xi} i\xi L\phi(x,t,t')\lambda^-(\xi)\hat{f}(\xi,t')d\xi dt'.$$

São imediatas as igualdades

$$LK^+f = \lambda^+(D)f + R^+f,$$

$$LK^-f = \lambda^-(D)f + R^-f.$$

Segue de (4.3) e do fato de $\xi \geq -1$ no suporte de λ^+, que para $t' \leq t$

$$|exp(-Im\phi(x,t,t')\xi)L\phi(x,t,t')\lambda^+(\xi)| \leq$$

$$C_N exp(-B(x,t,t')\xi/2)B(x,t,t')^N\lambda^+(\xi), \quad \text{se} \;\; \xi \geq 0; \quad \text{e}$$

$$\leq C\lambda^+(\xi) \;\; \text{se} \;\; -1 \leq \xi \leq 0 \;\; \text{(pois } B \text{ é limitado e } \xi \text{ está num compacto)},$$

ao final temos

$$|exp(-Im\phi(x,t,t')\xi)L\phi(x,t,t')\lambda^+(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad N=0,1,\cdots.$$

E também são válidas estimativas parecidas com esta para

$$\partial_x^j\partial_t^k\partial_{t'}^l exp(-Im\phi(x,t,t'))L\phi(x,t,t')\lambda^+(\xi).$$

Desigualdades análogas são válidas para $exp(-Im\phi(x,t,t'))L\phi(x,t,t')\lambda^{-}(\xi)$. Concluímos assim que $exp(-Im\phi(x,t,t'))L\phi(x,t,t')\lambda^{+-}(\xi)$ é um símbolo em $S^{-\infty}_{1,0}$ com semi-normas uniformemente limitadas segundo t e t'.

Resumindo, os operadores $K^{\pm}$ e $R^{\pm}$ são da forma

$$Bf(x,t)(2\pi)^{-1}\int_{c}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\phi(x,t,t')\xi}b(x,\xi,t,t')\hat{f}(\xi,t')d\xi dt',$$

com $c = \pm T$ e $b_1(x,\xi,t,t') = e^{-Im\phi(x,t,t')}b(x,\xi,t,t')$ um símbolo, cujas semi-normas são uniformemente limitadas segundo os parâmetros t e t'.

Para t e t' fixos, a função $x \mapsto Re\phi(x,t,t')$ é um difeomorfismo em $\mathbb{R}$ com derivadas limitadas, segundo o lema (4.1). Seja $\psi(x,t,t')$ sua inversa. Temos que

$$\tilde{b}_1(x,\xi,t,t') = b_1(\psi(x,t,t'),\xi,t,t')$$

é também um símbolo na mesma classe de b_1 com as mesmas propriedades segundo as semi-normas. Se $B_{t,t'}$ denota o operador pseudo-diferencial com símbolo $\tilde{b}_1(x,\xi,t,t')$ dependente dos parâmetros t e t', então

$$Bf(x,t) = \int_{c}^{t}(B_{t,t'}f)\circ Re\phi dt'. \tag{4.7}$$

Note ainda que se escrevermos $K = K^{+} + K^{-}$ e $R = R^{+} + R^{-}$ temos

$$LKf = f + Rf \tag{4.8}$$

uma vez que $\lambda^{+}(D) + \lambda^{-}(D) = I$, por construção.

Seja $X[-T,T]$ um espaço de Banach de funções complexas, de modo que a norma nele definida satisfaz a condição de monoticidade:

$$f,g \in X([-T,T]) \;\; e \;\; |f| \leq |g| \rightarrow \|f\| \leq \|g\|. \tag{4.9}$$

Observação. Os espaços $L^{p}([-T,T],\mathbb{R})$, com $1 < p < \infty$, de funções f definidas em $[-T,T]$ com valores em $\mathbb{R}$, tais que $\int_{-T}^{T}|f(t)|^{p}dt < \infty$, têm a propriedade acima.

Agora consideremos o espaço $X([-T,T],h^1(\mathbb{R}))$ das distribuições $f(x,t)$ tais que $\| \quad \|f(x,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}\|_{X([-T,T])_t} < \infty$. Suponhamos que o sub-espaço $\mathcal{X}([-T,T],C_0^\infty(\mathbb{R}))$ formado pelas $f(x,t)$ tais que $f(x,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, para cada t fixo, seja denso em $X([-T,T],h^1(\mathbb{R}))$.

Teorema 4.1 *O operador L de (4.1) é localmente resolúvel em $X([-T,T],h^1(\mathbb{R}))$.*

Prova. Comecemos por estimar operadores da forma (4.7) em $X([-T,T],h^1(\mathbb{R}))$. Sejam B, um operador da forma (4.7), e f um elemento de $X([-T,T],h^1(\mathbb{R}))$ tal que $f(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Temos para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e t fixo

$$m_\phi Bf(x,t) = \sup_{0<\epsilon\leq 1} |\phi_\epsilon * \int_c^t B_{t,t'} f \circ Re\phi dt'| \leq \int_c^t |\phi_\epsilon * (B_{t,t'} f \circ Re\phi) dt'|.$$

Logo

$$\|Bf(.,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} \leq \int_c^t \|B_{t,t'} f \circ Re\phi\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} dt'.$$

Em razão da invariância de $h^1(\mathbb{R})$ pelos difeomorfismos envolvidos , o lado direito da desigualdade acima é majorado por $C \int_c^t \|B_{t,t'}f\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} dt'$. Além disso, $B_{t,t'}$ é um operador com símbolo na classe $S^0_{1,\delta}$, com $\delta < 1$; o que, em razão do teorema 3.1, implica em

$$\|B_{t,t'} f(.,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} \leq C(t,t')\|f(.,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}.$$

Assim,

$$\|Bf(.,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} \leq (|t-c| \sup_{t,t'} C(t,t'))\|f(.,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}.$$

Tendo em vista as considerações feitas a respeito dos símbolos de K^{+}_{-} e R^{+}_{-}, temos que $\sup_{t,t'} C(t,t') \leq C$; além disso, $|t-c| \leq 2T$. Logo, pela monoticidade da norma em X e tomando $\|Bf(.,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}$ e $2TC\|f(.,t)\|_{h^1(\mathbb{R})}$ os elementos de X a se comparar, temos

$$\|\|Bf(.,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}\|\|_{X[-T,T]} \leq 2TC\|\|f(.,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}\|\|_{X[-T,T]}. \tag{4.10}$$

Concluímos assim que K e R são contínuos em $X([-T,T],h^1(\mathbb{R}))$.

Se T é suficientemente pequeno, $\|R\|_{X([-T,T],h^1(\mathbb{R}))} < 1$. Assim o operador $I + R$ tem inverso $(I+R)^{-1}$ dado pela série de Neumann $\sum_0^\infty (-R)^j$. Com isto,

$$LK(I+R)^{-1}f = f, \quad \text{para toda} \quad f \in X([-T,T],\mathcal{S}(\mathbb{R})). \tag{4.11}$$

Usando a densidade de $X([-T,T],\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ em $X([-T,T],h^1(\mathbb{R}))$, concluímos que L é resolúvel numa vizinhança de 0. ∎

Corolário 4.1 *O operador L de (4.1) é localmente resolúvel em $L^p([-T,T],h^1(\mathbb{R}))$ para $1 \leq p \leq \infty$.*

Lema 4.3 *O subespaço*

$$X = \{u(t,x) \in L^\infty([-1,1],h^p(\mathbb{R})); \partial_t u(t,x) \in L^\infty([-1,1],h^p(\mathbb{R}))\}$$

com a métrica

$$\|u(t,x)–v(t,x))\|_g = \sup_{t\in I} |u(t,x)–v(t,x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})} + \sup_{t\in I} \|\partial_t(u(t,x) - v(t,x))\|^p_{h^p(\mathbb{R})},$$

é completo. Além disso, para que $\partial_t : (X, \|.\|_g) \to (X, \|.\|)$ seja sobrejetora é necessário que

$$\inf_{a\in h^p(\mathbb{R})} \sup_{t\in[-1,1]} \|u(t,x) - a(x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})} \leq C \sup_{t\in[-1,1]} \|\partial_t u(t,x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})}. \tag{4.12}$$

Prova. O espaço $L^\infty([-1,1],h^p(\mathbb{R}))$, com a métrica

$$(u,v) \mapsto \sup_{t\in[-1,1]} \|u(t,x) - v(t,x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})}$$

é um F-espaço, ou seja, um espaço vetorial topológico definido por uma métrica invariante por translação e completo segundo a mesma.

Denotaremos por $(X, \|.\|)$ o subespaço X com a métrica

$$\|u(t,x) - v(t,x)\| = \sup_{t \in I} \|u(t,x) - v(t,x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})}$$

Afirmamos que $(X, \|.\|_g)$ é completo. De fato, se $\{u_n(t,x)\}$ é uma seqüência de Cauchy em $(X, \|.\|_g)$, decorre da desigualdade $\|.\| \leq \|.\|_g$ e da completude de $(L^\infty(I, h^p(\mathbb{R})), \|.\|)$ que

$$u_n(t,x) \to u(t,x) \in L^\infty(I, h^p(\mathbb{R}))$$

$$\partial_t u_n(t,x) \to v(t,x) \in L^\infty(I, h^p(\mathbb{R}))$$

segundo $\|.\|$. Em particular ambas convergências se dão também em $\mathcal{D}'$; com isto $\partial_t u(t,x) = v(t,x)$. Concluímos assim pela completude de $(X, \|.\|_g)$.

É claro que $\partial_t : (X, \|.\|_g) \to (X, \|.\|)$ é contínua. Suponhamos que esta função também seja sobrejetora; em vista do teorema da aplicação aberta, concluímos que ∂_t também é aberta. Tomando o núcleo de $N(\partial_t)$ de ∂_t, temos que

$$\frac{X}{N(\partial_t)} \ni \bar{u} \mapsto \partial_t u \in X \quad \text{é um isomorfismo,} \tag{4.13}$$

se tomarmos o quociente com a métrica

$$(\bar{u}, \bar{v}) \mapsto \inf_{w \in \bar{u}, z \in \bar{v}} \|w - z\|_g. \tag{4.14}$$

Decorre de (4.13) e de $N(\partial_t) = h^p(\mathbb{R}_x)$ que existe $C > 0$ tal que

$$\inf_{a \in h^p(\mathbb{R})} \sup_{t \in [-1,1]} \|u(t,x) - a(x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})} \leq C \sup_{t \in [-1,1]} \|\partial_t u(t,x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})}.$$

∎

Observação. Consideremos um F-espaço (Y, d) com $Y \hookrightarrow \mathcal{D}'$ e $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|^r d(x,y)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ e x, y em Y. Seja L uma aplicação linear definida em Y a valores em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e definamos $X = \{u \in Y; \;\; L(u) \in Y\}$. Então (X, d_g), com $d_g(u,v) = d(u,v) + d(L(u),L(v))$, é completo; $L : (X,d_g) \to (X,d)$ é contínua. Além disso, uma condição necessária para que L seja sobrejetora é

$$\inf_{a \in N(L)} d(u,a) \leq Cd(Lu,0).$$

Sua demonstração segue os mesmos passos empregados para provar o lema acima.

Teorema 4.2 *O operador ∂_t não é localmente resolúvel em $L^\infty([-1,1],h^p(\mathbb{R}))$ para $0 < p < 1$.*

Prova. Suponhamos, por absurdo, que $\partial_t : X \to X$ seja sobrejetora. Nosso intento é obter uma contradição a partir de (4.12). Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , & t \leq 0 \\ t \quad , & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 \quad , & t \geq 1 \end{cases}$$

e $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $S(g) \subset [0,1]$ não nulo, com $\int g(x)dx = 0$. Dado um inteiro positivo n, definimos para cada inteiro k, com $0 \leq k \leq n-1$,

$$f_k(t) = \frac{1}{n} f(nt-k), \quad t \in [-1,1]$$
$$g_k(x) = g(nx-k).$$

Temos

$$\begin{cases} f_k(1) = 1/n & \text{para} \quad 0 \leq k \leq n-1 \\ f_k'(t) = \chi_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}(t) & \text{em} \quad L^\infty([-1,1]) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} S(g_k) \subset [\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}] \\ \|g_k\|_{h^p}^p \leq \frac{C_p}{n} & \frac{1}{2} < p \leq 1 \end{cases} \tag{4.15}$$

Para cada n definimos

$$u_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n-1}(f_k(t)g_k(x) + f_k(-t)g_k(-x)) \in X$$

Segue da desigualdade (4.12) que existe $a_n \in h^p(\mathbb{R})$ tal que

$$\sup_{t\in[-1,1]} \|u_n(t,x) - a_n(x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})} \leq 2C \sup_{t\in[-1,1]} \|\partial_t u(t,x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})}.$$

Em particular,

$$\|u_n(-1,x) - a_n(x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})} \leq 2C \sup_{t\in[-1,1]} \|\partial_t u_n(t,x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})}$$
$$\|u_n(1,x) - a_n(x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})} \leq 2C \sup_{t\in[-1,1]} \|\partial_t u_n(t,x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})}.$$

Logo, pela desigualdade triangular

$$\|u_n(1,x) - u_n(-1,x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})} \leq 4C \sup_{t\in[-1,1]} \|\partial_t u_n(t,x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})}.$$

Note que

$$\|u_n(1,x) - u_n(-1,x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})} = \frac{1}{n^p}\|\sum_{k=0}^{n-1} g_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} g_k(-x)\|^p_{h^p}. \qquad (4.16)$$

Utilizando a propriedade

$$\sup_{0<t\leq 1} |\phi_t * g(x)| \geq |g(x)|,$$

concluímos que o termo a direita em (4.16) é no mínimo

$$\frac{1}{n^p}\int |\sum_{k=0}^{n-1} g_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} g_k(-x)|^p dx,$$

que por sua vez é maior ou igual a

$$\frac{1}{n^p}\int_0^1 |\sum_{k=0}^{n-1} g_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} g_k(-x)|^p dx = \frac{1}{n^p}\int_0^1 |\sum_{k=0}^{n-1} g_k(x)|^p dx =$$
$$\frac{1}{n^p}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(x)|^p dx = \frac{C'}{n^p}.$$

A penúltima igualdade decorre da disjunção dos suportes das funções envolvidas.

Agora,

$$\sup_{t\in[-1,1]} \|\partial_t u_n(t,x)\|^p_{h^p(\mathbb{R})} \leq \max_{0\leq k\leq n-1}\{ \sup_{t\in[k/n,(k+1)/n]} \chi_{[k/n,(k+1)/n]}(t)\|g_k(x)\|^p_{h^p}, \sup_{t\in[(-k-1)/n,-k/n]} \chi_{[(-k-1)/n,-k/n]}(t)\|g_k(-x)\|^p_{h^p}\} \leq C_p/n.$$

Portanto, existem constantes positivas independentes de n tais que

$$\frac{C'}{n^p} \leq \frac{C_p}{n},$$

o que é um absurdo para $0 < p < 1$. ∎

Referências bibliográficas.

[AH] J. Alvarez e J. Hounie, *Estimates for the kernel and continuity properties of pseudo-differential operators*, Arkiv för Mat. **28** (1990), 1-22.

[AM] J. Alvarez e M. Milman, *Vector valued inequalities for strongly singular Calderón-Zygmund Operators*, Rev. Mat. Iberoamericana **2** 4 (1986), 405-426.

[Bea] R. M. Beals, *L^p boundedness of Fourier Integral operators*, Memoirs of AMS. **264** (1982).

[BF] R. M. Beals e C. Fefferman, *On local solvability of linear partial differential equations*, Ann. of Math. **97** (1973) 482-498.

[BGS] D. L. Burkholder, R. F. Gundy e M.L. Silverstein , *A maximal function characterizaton of the class H^p*, Trans. of AMS **157** (1971), 137-153.

[Bou 1] Gérard Bourdaud, *L^p-estimates for certain non-regular pseudo-differential operators*, Comm. in PDE. **7** 9 (1982), 1023-1033.

[Bou 2] Gérard Bourdaud, *Une algebre maximale d'operateurs pseudo-differentiels*, Comm. in PDE. **13** 9 (1988), 1059-1083.

[BHS] S. Berhanu, J. Hounie e P. Santiago, *A similarity principle for complex vector fields and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** 4 (2000), 1661-1675.

[Ch] C. Ching, *Pseudo-differential operators with non-regular symbols*, J. of Diff. Eq. ,**11** (1972), 436-447.

[CG] R. R. Coifman e G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. of AMS ,**83** 4 (1977), 569-645.

[FS] C. Fefferman e E.M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[G] D. Goldberg, *A local version of real Hardy spaces*, Duke Math. J. **46** (1979), 27-42.

[GS] A. Grigis e J. Sjöstrand, *Microlocal Analysis for Differential Operators*, Cambridge University Press, Cambridge 1994.

[Har] G. H. Hardy, *The mean value of the modules of an analytic function*, Proc. London Math. Soc. **14** 2 (1915), 269-277.

[Hor 1] Lars Hörmander, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Springer Verlag, New York 1998.

[Hor 2] Lars Hörmander, *The Analysis of Partial Differential Operators I-IV*, Springer Verlag, New York 1985.

[Hor 3] Lars Hörmander, *Pseudo-differential operators and hypoellitic equations*, Amer. Math. Symp. on Singular Integrals, (1966) 138-183.

[HL] J. Hounie e E.P. de Lemos,*Local solvability in L^p of first-order linear operators,* J. Math. Anal. Appl. **19** 1 (1996), 42-53.

[HS] J. Hounie e E.R. Silva, *A similarity principle for locally solvable vector fields*, J. Math. Pures Appl. **81** (2002), 715-746.

[Hou 1] Jorge Hounie, *Introdução aos Operadores Pseudo-Diferenciais*, 16^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1987.

[Hou 2] Jorge Hounie, *Teoria Elementar das Distribuições*, 12^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1979.

[Hou 3] Jorge Hounie, *On the L^2 continuity of Pseudo-differential Operators*, Comm. in PDE,**11** (1986), 765-778.

[Hou 4] Jorge Hounie, *Global Cauchy problems modulo flat functions*, Advances in Math. **51** (1984), 240-252.

[KN] J. J. Kohn e L. Nirenberg, *On the algebra of pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 269-305.

[Kr] V. Krylov, *Functions regular in the half-plane*, Sbornik **6** (1939), 95-138 (em Russo).

[Ri] F. Riesz, *Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques* , Acta Sci. Math. ,**1** (1922/23), 27-32.

[Stein 1] Elias M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1993.

[Stein 2] Elias M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton 1970.

[SW] E. M. Stein e G. Weiss, *On The Theory of Harmonic Functions of Several Variables I: The Theory of H^p spaces*, Acta Math. **103** (1960) 25-62

[T] Michael E. Taylor, Tools for PDE, American Mathematical Society, Providence 2000.

[Tri] Hans Triebel , Theory of Function Spaces, Birkhäuser, 1983.