UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência de Variedade Invariante e Atrator para a equação $u_t = u_{xx} + f(u)$

RICARDO DE SÁ TELES

São Carlos - SP

Março de 2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência de Variedade Invariante e Atrator para a equação $u_t = u_{xx} + f(u)$

RICARDO DE SÁ TELES

Orientadora: Profa. Dra. Vera Lúcia Carbone

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Matemática" .

São Carlos

Março de 2007

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Teles, Ricardo de Sá.
T269ev	Existência de variedade invariante e atrator para a equação $u_t = u_{xx} + f(u)$ / Ricardo de Sá Teles. -- São Carlos : UFSCar, 2007.
	81 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2007.
	1. Análise matemática. 2. Variedade invariante. 3. Atrator global. 4. Semigrupos. I. Título.
	CDD: 515 (20ª)

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Vera Lúcia Carbone
DM - UFSCar

Profa. Dra. Cláudia Buttarello Gentile
DM - UFSCar

Prof. Dr. Ma To Fu
ICMC - USP

Agradecimentos

A Deus pela presença constante em minha vida.

À profa. Dra. Vera Lúcia Carbone, pela orientação competente, pelo comprometimento e paciência demonstrados ao longo de todo o trabalho. A todos os professores e funcionários do DM-UFSCar, que direta ou indiretamente participaram da minha formação profissional.

Aos amigos da pós-graduação.

Aos amigos Toninho Gomes e Sílvia Grandi pela amizade sincera desde a época da graduação.

Ao grande amigo Wesley Góis.

Aos meus pais (Sr. Nivaldo e Dona Cidalia) e irmãos (Nilza, Neusa e Renato) pelo apoio incondicional e pela família que formamos.

Ao CNPq pela bolsa de estudo concedida.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a equação diferencial

$$u_t = u_{xx} + f(u), \ \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ \ t \geqslant 0$$

com condições de fronteira de Dirichlet homogênea e $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ globalmente lipschitz e limitada, satisfazendo as seguintes condições:

$(i) \limsup_{|u| \to \infty} f(u)u^{-1} \leqslant 0$

$(ii) f(0) = 0.$

Estudamos a existência de uma variedade invariante exponencialmente atratora, decompondo o espaço $L^2(0,1)$ de modo a reescrever a equação como um sistema de equações fracamente acoplado. Usamos a teoria de sistemas gradientes para mostrar que a equação possui um atrator global.

Abstract

In this work we study the differential equation

$$u_t = u_{xx} + f(u),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ t \geqslant 0$$

with homogeneous Dirichlet boundary conditions and $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ lipschitz and bounded globally and satisfying the following conditions:

$(i)\limsup_{|u|\to\infty} f(u)u^{-1} \leqslant 0$

$(ii) f(0) = 0.$

We study the existence of the invariant manifold exponentially attractor decomposing the espace $L^2(0,1)$ such that the equation can be rewritten as the weakly coupled system. We use the gradient systems theory to show that the equation has a global attractor.

Sumário

Introdução

Este trabalho versa sobre o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), \;\; 0 \leqslant x \leqslant 1, \;\; t \geqslant 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases} \tag{1}$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\phi \in H_0^1([0,1])$ satisfaz as seguintes condições:

$(\mathbf{H1})$: f é globalmente Lipschitz, com constante de lipschitz L_f e globalmente limitada, com constante de limitação N_f;

$(\mathbf{H2})$: $\limsup_{|u|\to\infty} f(u)u^{-1} \leqslant 0$;

$(\mathbf{H3})$: $f(0) = 0$.

Atualmente tem sido estudado o comportamento das soluções da família de equações parabólicas

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon - \operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon = f(u^\varepsilon) & \text{em } \Omega \\ p_\varepsilon(x)\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = g(u^\varepsilon) & \text{em } \Gamma \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon, \end{cases}$$

quando $\varepsilon \to 0$, $\lambda > 0$, $f, g \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, $\Gamma = \partial\Omega$ onde a difusibilidade $p_\varepsilon(x)$ é assumida grande em um subconjunto $\Omega_0 \subset \Omega \subset \mathrm{R}^n$, mais precisamente

$$p_\varepsilon(x) \to \begin{cases} p_0(x), & \text{uniformemente sobre } \Omega_1, (p_0 \in C^1(\overline{\Omega}_1, (0,\infty))); \\ \infty, & \text{uniformemente sobre subconjuntos compactos de } \Omega_0. \end{cases}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Os autores em [9] mostram que esse problema possui uma família de atratores $\mathscr{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, que é semicontínua superiormente e em [10] a semicontinuidade inferior é provada.

Nosso objetivo nesse trabalho é mostrar a existência de dois conjuntos importantes para a equação (1): variedade invariante: $\mathscr{S}$ e atrator: $\mathscr{A}$, onde $\mathscr{A} \subset \mathscr{S}$.

Sendo o operador $Au = -u_{xx}$ com $\mathscr{D}(A) = \mathrm{H}_0^1(0,1) \cap \mathrm{H}^2(0,1)$, através de suas autofunções decompomos o espaço $X = \mathrm{L}^2(0,1)$ e considerando as restrições do operador A aos subespaços que decompõem X podemos escrever (1) como um sistema de equações fracamente acoplado para o qual provamos a existência de uma variedade invariante S.

Com as hipóteses $(H1)-(H3)$ obtemos um C_0-semigrupo sobre $\mathrm{H}_0^1(0,1)$ para (1) e provamos a existência de atrator.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

Capítulo 1: apresentamos resultados da teoria geral de Análise Funcional que serão utilizados no decorrer do trabalho.

Capítulo 2: reunimos resultados de semigrupos, caracterizamos os operadores que geram semigrupos analíticos e estudamos existência e regularidade de soluções .

Capítulo 3: é demonstrado o teorema central do trabalho, que garante a existência de uma variedade invariante exponencialmente atratora, assim como a existência de atrator para o problema proposto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos resultados da teoria geral de Análise Funcional que serão utilizados no decorrer do trabalho.

1.1 Teoria Geral de Análise Funcional

Seja V um espaço vetorial. Denotamos o dual topológico de V por V', onde

$$V' = \{f : V \to K; f \text{ é forma linear e contínua}\},$$

sendo K o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Em V' definimos a norma dual

$$\|f\|_{V'} = \sup_{\|x\|_V \leqslant 1} |f(x)|.$$

Definição 1.1. *Uma aplicação $p : V \to \mathbb{R}$ é uma semi-norma se satisfaz as seguintes propriedades*

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \ \ \forall \alpha \in \mathbb{C},\ x \in V$$
$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \ \ \forall x, y \in V.$$

Definição 1.2. *Uma função $p : V \to \mathbb{R}$ é sublinear se*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$$
$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \forall\ \alpha > 0.$$

O próximo lema é um dos Teoremas de Hahn-Banach, cuja demonstração pode ser encontrada em [1], Teorema I.1, p.1.

Lema 1.3. *(Forma analítica real do Teorema de Hahn-Banach) Seja V um espaço vetorial real e $p : V \to \mathbb{R}$ uma aplicação sublinear. Se $g_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ é uma forma linear definida no subespaço vetorial $V_0 \subset V$ tal que $g_0(y) \leqslant p(y)$, para todo $y \in V_0$, então existe uma forma linear $g : V \to \mathbb{R}$ tal que*

(i) $\quad g(y) = g_0(y), \quad \forall y \in V_0$

(ii) $\quad g(y) \leqslant p(y), \quad \forall y \in V.$

$\Diamond$

Proposição 1.4. *Seja V um espaço vetorial normado e $V_0 \subset V$ subespaço. Se g é um funcional linear e contínuo em V_0 de norma*

$$\|g\|_{V_0{}'} = \sup_{\substack{x \in V_0 \\ \|x\| \leqslant 1}} |g(x)|,$$

então existe um funcional linear contínuo f em V que estende g e tal que $\|f\|_{V'} = \|g\|_{V_0{}'}$.

Demonstração: Tomemos

$$\begin{aligned} p : &V \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto p(x) = \|g\|_{V_0{}'} \|x\| \end{aligned}$$

Para $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} p(\alpha x) &= \|g\|_{V_0{}'} \|\alpha x\| = |\alpha| \|g\|_{V_0{}'} \|x\| = |\alpha| p(x), \\ p(x+y) &= \|g\|_{V_0{}'} \|x+y\| \leqslant \|g\|_{V_0{}'} (\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y), \end{aligned}$$

isto é, p é uma seminorma.

Além disso,

$$|g(x)| \leqslant \|g\|_{V_0{}'} \|x\| = p(x).$$

Segue do Lema 1.3 que existe $f : V \to \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \ \ \forall x \in V_0 \\ |f(x)| &\leqslant p(x), \ \ \forall x \in V. \end{aligned}$$

Como

$$|f(x)| \leqslant p(x) = \|g\|_{V_0'}\|x\| \Rightarrow \|f\|_{V'} \leqslant \|g\|_{V_0'}$$

e

$$\|g\| = \sup_{\substack{x\in V_0 \\ \|x\|\leqslant 1}} |g(x)| \leqslant \sup_{\substack{x\in V_0 \\ \|x\|\leqslant 1}} |f(x)| \leqslant \sup_{\substack{x\in V \\ \|x\|\leqslant 1}} |f(x)| = \|f\|_V,$$

obtemos

$$\|f\|_{V'} = \|g\|_{V_0'}.$$

■

Proposição 1.5. *Seja V um espaço vetorial normado. Então para todo $x_0 \in V$ existe um funcional linear contínuo f tal que $\|f\|_{V'} = \|x_0\|$ e $f(x_0) = \|x_0\|^2$.*

Demonstração: Seja o subespaço $V_0 = x_0\mathbb{R}$. Consideremos

$$\begin{aligned} g :&V_0 \mapsto \mathbb{R} \\ &tx_0 \mapsto g(tx_0) = t\|x_0\|^2. \end{aligned}$$

g é um funcional linear contínuo. Então pela Proposição 1.4 existe um funcional linear e contínuo f em V que estende g e tal que $\|f\|_{V'} = \|g\|_{V_0'}$.

Como

$$|g(tx_0)| = |t\|x_0\|^2| = |t|\|x_0\|^2 = \|x_0\||t|\|x_0\| \Rightarrow \|g\|_{V_0'} = \|x_0\|.$$

Portanto $\|f\|_{V'} = \|x_0\|$.

Como $f(x) = g(x)$ para todo $x \in V_0 = x_0\mathbb{R}$, em particular para $x = x_0$, temos

$$f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|^2.$$

■

Definição 1.6. *Seja X espaço topológico, $f : X \to \mathbb{R}$ é dita semicontínua inferiormente em X se*

$$f^{-1}((-\infty,a]) = \{x \in X : f(x) \leqslant a\}$$

é fechado em X para cada $a \in \mathbb{R}$.

Analogamente, $f : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente em X se

$$f^{-1}([a,+\infty)) = \{x \in X : f(x) \geqslant a\}$$

é fechado em X, para cada $a \in \mathbb{R}$.

Definição 1.7. *Um espaço topológico X é um espaço de Baire se dada uma coleção enumerável $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos fechados de X tal que cada um deles tem interior vazio em X, então $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ também tem interior vazio em X.*

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [1], Lema II.1, p.15.

Lema 1.8. *(Teorema de Baire) Todo espaço métrico completo é de Baire.*

◊

O Teorema de Baire pode ser enunciado da seguinte forma:

Sejam $X \neq \emptyset$ um espaço métrico completo, $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ fechados tais que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Então existe n_0 tal que $\overset{\circ}{X}_{n_0} \neq \emptyset$. ◊

Teorema 1.9. *(Osgood) Seja X espaço de Baire e $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma família de funções semi-contínua inferiormente com a propriedade que para cada $x \in X$ existe M_x tal que $\sup\limits_{\alpha\in A} f_\alpha(x) \leqslant M_x$. Então existe um aberto $O \neq \emptyset$ e uma constante M satisfazendo*

$$\sup_{\substack{\alpha\in A \\ x\in O}} f_\alpha(x) \leqslant M.$$

Demonstração: Para cada $n \geqslant 1$, seja

$$U_n = \{x \in X,\, f_\alpha(x) \leqslant n, \forall \alpha \in A\} = \bigcap_{\alpha\in A} \{x \in X,\, f_\alpha(x) \leqslant n\}.$$

Então U_n é fechado, pois $U_n = \bigcap\limits_{\alpha\in A} f_\alpha^{-1}((-\infty, n])$ onde f_α é semicontínua inferiormente.

Além disso, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. De fato, se $x \in X$ então existe M_x tal que $\sup\limits_{\alpha\in A} f_\alpha(x) \leqslant M_x$, logo $f_\alpha(x) \leqslant M_x$ para todo $\alpha \in A$; portanto $x \in U_n$ para $n \geqslant M_x$. Consequentemente $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$.

Assim, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ onde X é espaço de Baire, existe $n_0 \geqslant 1$ tal que $\overset{\circ}{U}_{n_0} \neq \emptyset$.

Seja $O = \overset{\circ}{U}_{n_0} \subset U_{n_0}$ e $M = n_0$ então O é aberto e $f_\alpha(x) \leqslant n_0 = M$, para todo $x \in O$ e para todo $\alpha \in A$. Portanto

$$\sup_{\substack{x \in O \\ \alpha \in A}} f_\alpha(x) \leqslant M.$$

■

Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K. Identificamos

$$\mathscr{L}(X,Y) = \{T : X \to Y; T \text{ é uma aplicação linear e contínua}\}.$$

Para $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ definimos

$$\|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y = \inf_{x \in X} \{L, \|Tx\|_Y \leqslant L\|x\|_X\}.$$

Em particular, se $X = Y$ escrevemos $\mathscr{L}(X)$ ao invés de $\mathscr{L}(X,X)$.

Usaremos a seguinte notação $< x^*, x >= x^*(x)$, para $x^* \in X'$ e $x \in X$.

Corolário 1.10. *(Princípio da Limitação Uniforme) Sejam $(X, \|\cdot\|)$ espaço de Banach, $(Y, |\cdot|)$ um espaço normado e $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de elementos de $\mathscr{L}(X,Y)$ tal que para todo $x \in X$, existe M_x satisfazendo $\sup_{\alpha \in A} |T_\alpha(x)| \leqslant M_x$. Então existe M tal que $\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\| \leqslant M$.*

Demonstração: Seja $f_\alpha(x) = |T_\alpha(x)|$, f é contínua pois T_α é contínua. Além disso, como X é um espaço de Banach segue do Lema 1.8 que X é espaço de Baire e, para cada $x \in X$, existe M_x tal que

$$\sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = \sup_{\alpha \in A} |T_\alpha(x)| \leqslant M_x.$$

Segue do Teorema 1.9 que existem aberto $O \neq \emptyset$ e portanto $B(x_0, r) \subset O \subset X$, $x_0 \in X$ e constante M_1 tal que

$$\sup_{\substack{\alpha \in A \\ x \in B(x_0, r)}} |T_\alpha(x)| \leqslant M_1.$$

Notemos que para $z \in X$, $\|z\| \leqslant 1$ se, e somente se, $(x_0 + r_1 z) \in \overline{B}(x_0, r_1)$, $r_1 < r$.

Portanto, para todo $\alpha \in A$, temos

$$\|T_\alpha\| = \sup_{\|z\| \leqslant 1} |T_\alpha(z)| = \sup_{\|z\| \leqslant 1} |T_\alpha(\frac{x_0 + r_1 z - x_0}{r_1})| \leqslant \sup_{\|z\| \leqslant 1} \frac{1}{r_1} |T_\alpha(x_0 + r_1 z)| + \frac{1}{r_1} |T_\alpha(x_0)|$$
$$\leqslant \frac{1}{r_1}(M_1 + M_{x_0}).$$

Logo, $\|T_\alpha\| \leqslant M$, onde $M = \frac{1}{r_1}(M_1 + M_{x_0})$, para todo $\alpha \in A$.

Conseqüentemente, $\sup\limits_{\alpha \in A} \|T_\alpha\| \leqslant M$. ■

Sejam X espaço de Banach, X' o dual de X com a norma

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leqslant 1}} |< f, x >|$$

e X'' o bidual de X, isto é, o dual de X' com a norma

$$\|\xi\|_{X''} = \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\| \leqslant 1}} |< \xi, f >|.$$

Consideremos uma injeção canônica $J : X \to X''$ definida, para cada $x \in X$, por:

$$J(x) : X' \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto < f, x > .$$

J assim definida uma isometria linear, pois,

$$\|J(x)\|_{X''} = \sup_{\|f\|_{X'} \leqslant 1} |< J(x), f >| = \sup_{\|f\|_{X'} \leqslant 1} |< f, x >| = \|x\|_X,$$

a linearidade é imediata.

Definição 1.11. *Dizemos que X é reflexivo se $J(X) = X''$, isto é, J é sobrejetor.*

Em X' temos duas topologias, a saber:

(i) $(X', \|\cdot\|)$ topologia forte dada pela norma

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leqslant 1}} |< f, x >|.$$

(ii) $(X', \sigma(X', X''))$ topologia fraca que é a menos fina que deixa todos $\xi \in X''$ contínuos.

Vamos definir em X' uma outra topologia que será menos fina (menos abertos) do que a topologia fraca.

Para cada $x \in X$, considere

$$\varphi_x : X' \mapsto \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \varphi_x(f) = < f, x > .$$

Quando x percorre X, obtemos uma família de aplicações $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ de X' em $\mathbb{R}$.

Definição 1.12. *A topologia fraca* é a menor topologia em X' que deixa contínua todas as aplicações $\{\varphi_x\}_{x\in X}$. Vamos denotar esta topologia por $\sigma(X',X)$.*

Se dim$X<\infty$ ou X é reflexivo é possível mostrar que $\sigma(X',X)=\sigma(X',X'')$. É claro que

$$\sigma(X',X)\subset\sigma(X',X'')\subset\sigma(X',\|\cdot\|).$$

A topologia fraca* tem as seguintes propriedades:

(i) A topologia $\sigma(X',X)$ é de Hausdorff, ou seja, quaisquer dois elementos distintos desse espaço podem ser separador por vizinhanças disjuntas.

(ii) Uma base de vizinhanças de $f_0\in X'$ na topologia $\sigma(X',X)$ é dada por

$$V=\{f\in X',|<f-f_0,x_i>|<\varepsilon,\ \forall i\in I\},$$

onde I é finito, $x_i\in X$ e $\varepsilon>0$.

A convergência $f_n\to f$ em $\sigma(X',X)$ será indicada por $f_n\overset{*}{\rightharpoonup}f$.

O próximo teorema é a razão da existência da topologia fraca*, cuja demonstração pode ser encontrada em [1], Teorema III.15, p.42.

Teorema 1.13. *(Teorema de Banach - Alaoglu - Bourbaki) Seja X espaço de Banach, então a bola fechada*

$$B_{X'}=\{f\in X':\|f\|\leqslant 1\}$$

é compacta na topologia fraca.*

$\Diamond$

Vejamos agora os operadores adjuntos.

Seja $A:\mathscr{D}(A)\subset X\to Y$ linear. Queremos encontrar $A^*:\mathscr{D}(A^*)\subset Y'\to X'$ tal que

$$<v,Au>=<A^*v,u>,\ \ \forall v\in\mathscr{D}(A^*)\text{ e }u\in\mathscr{D}(A).$$

Dado $v\in Y'$, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} g:&\mathscr{D}(A)\to\mathbb{R}\\ &u\mapsto g(u)=<v,Au>. \end{aligned}$$

Claramente g é linear. Se g for contínua, existe $c \geqslant 0$ tal que $\|g(u)\| \leqslant c\|u\|, \ \forall u \in \mathscr{D}(A)$.

Pela Proposição 1.4, g pode ser estendida a uma aplicação linear $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $|f(u)| \leqslant c\|u\|, \ \forall u \in X$.

Se $\mathscr{D}(A)$ for denso então existe única f. Seja f tal extensão então podemos definir $A^*v = f$. Com isso,

$$\mathscr{D}(A^*) = \{v \in Y' : u \in \mathscr{D}(A) \mapsto < v, Au > \text{ é contínua}\}$$

e $A^*v = f$ é tal que

$$< g, u > = < v, Au > = < A^*v, u > = < f, u >,$$

onde $u \in \mathscr{D}(A)$ e $v \in \mathscr{D}(A^*)$.

O operador $A^* : \mathscr{D}(A^*) \subset Y' \to X'$ é chamado adjunto de A.

Definição 1.14. *Dizemos que $S : \mathscr{D}(S) \subset X \to X$ é simétrico se $\overline{\mathscr{D}(S)} = X$ e $S \subset S^*$, ou seja, $< x^*, Sx > = < Sx^*, x >, \forall x \in \mathscr{D}(S)$ (isto é, $\mathscr{D}(S) \subset \mathscr{D}(S^*)$ e $S = S^* em \mathscr{D}(S)$). Dizemos que S é auto-adjunto se $S = S^*$.*

Proposição 1.15. *Seja $A : \mathscr{D}(A) \subset X \to Y$. Se $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$ então A^* é fechado.*

Demonstração: Temos que $A^* : \mathscr{D}(A^*) \subset Y' \to X'$ e $\mathscr{G}(A^*) \subset Y' \times X'$.

Seja $v_n \in \mathscr{D}(A^*)$ tal que $v_n \to v$ em Y' e $A^*v_n \to f$ em X'. Queremos mostrar que $v \in \mathscr{D}(A^*)$ e $A^*v = f$.

Como $v_n \in \mathscr{D}(A^*)$, temos

$$< v_n, Au > = < A^*v_n, u >, \ u \in \mathscr{D}(A).$$

Logo,

$$< v, Au > = \lim_{n \to \infty} < v_n, Au > = \lim_{n \to \infty} < A^*v_n, u > = < f, u >, \ \forall u \in \mathscr{D}(A).$$

Sendo f contínua, a aplicação $u \mapsto < v, Au >$ é contínua e portanto $v \in \mathscr{D}(A^*)$.

Como $< v, Au > = < A^*v, u >$, segue que $f = A^*v$.

Portanto $\mathscr{G}(A^*)$ é fechado e conseqüentemente A^* é fechado.

■

Os resultados seguintes serão utilizados no decorrer do trabalho, suas demonstrações podem ser encontradas em [1], Teorema II.7, p.20 e Corolário I.8, p.7, respectivamente.

Teorema 1.16. *(Gráfico Fechado) Sejam X e Y espaços de Banach. Se $T: X \to Y$ é um operador linear. Se o gráfico de T, $\mathscr{G}(T)$, é fechado em $X \times Y$ então T é contínuo.*

$\Diamond$

Proposição 1.17. *Seja $Y \subset X$ um subespaço vetorial tal que $\overline{Y} \neq X$. Então existe $f \in X'$, $f \neq 0$ tal que $f(x) = 0$, $\forall x \in Y$.*

$\Diamond$

1.2 Os espaços de Hilbert

Definição 1.18. *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H dotado de produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e que é completo relativamente a norma $\|u\|_H = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.*

Exemplo 1.19. *O espaço $L^2(\Omega)$ dotado do produto interno*

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

é um espaço de Hilbert.

Observação 1. *Os espaços de Hilbert gozam de uma propriedade importante todos são reflexivos.*

Definição 1.20. *Seja H espaço de Hilbert. Uma base Hilbertiana ou conjunto ortonormal completo é uma seqüência $\{e_n\}$ de elementos de H tais que*

(i) $\|e_n\| = 1$, $\forall n$; $< e_m, e_n >= 0$, $\forall m, n$, $m \neq n$.

(ii) *O espaço vetorial gerado pelos $\{e_n\}$ é denso em H.*

Observação 2. *Em [1] encontramos a demonstração do seguinte fato: se $\{e_n\}$ é uma base Hilbertiana para H então todo $u \in H$ se escreve da forma*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} < u, e_n > e_n \quad com \quad \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < u, e_n > |^2.$$

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [1], Teorema VI.11, p.97, fornece uma importante caraterística dos espaços de Hilbert.

Teorema 1.21. *Sejam H espaço de Hilbert separável, isto é, existe $D \subset X$ enumerável e denso, e $T : \mathscr{D}(T) \subset H \to H$ um operador compacto e auto-adjunto. Então H admite uma base Hilbertiana formada por autovetores de T.*

O próximo resultado diz sob quais condições um operador é auto-adjunto.

Proposição 1.22. *Sejam H espaço de Hilbert, $A : \mathscr{D}(A) \subset H \to H$ densamente definido, simétrico e sobrejetor então A é auto-adjunto.*

Demonstração: Como $A : \mathscr{D}(A) \subset H \to H$ é simétrico temos $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(A^*)$ e para $x \in \mathscr{D}(A),\ Ax = A^*x$.

Para concluirmos que $A = A^*$ basta mostrarmos que $\mathscr{D}(A^*) \subset \mathscr{D}(A)$.

Seja $y \in \mathscr{D}(A^*)$ e $z = A^*y$. Como $R(A) = H$ existe $u \in \mathscr{D}(A)$ tal que $z = Au$.

Para todo $x \in \mathscr{D}(A)$ temos que

$$< Ax, y > = < x, A^*y > = < x, z > = < x, Au > = < x, A^*u > = < Ax, u > .$$

Então

$$< Ax, y - u > = 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}(A).$$

Como $\overline{\mathscr{D}(A)} = H$, segue da Proposição 1.17 que $y - u = 0 \Rightarrow y = u \in \mathscr{D}(A)$. Portanto, $\mathscr{D}(A^*) \subset \mathscr{D}(A)$.

Conseqüentemente, $A = A^*$, ou seja, A é auto-adjunto. ■

Demonstraremos agora o importante Teorema de Lax-Milgram, que é utilizado, em geral, para garantir existência de solução fraca.

Definição 1.23. *Sejam H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear:*

(i) *a é contínua se existe constante $c \geqslant 0$ tal que*

$$|a(u,v)| \leqslant c \|u\| \|v\|, \ \forall u, v \in H.$$

(ii) *a é coerciva se existe constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v,v) \geqslant \alpha \|v\|^2, \ \forall v \in H.$$

A demonstração do Teorema de Stampacchia pode ser encontrado em [1], Teorema V.6, p.83.

Teorema 1.24. *(Stampacchia) Sejam $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva e $K \subset H$ convexo fechado e não vazio. Dado $\varphi \in H'$, existe um único $u \in K$ tal que:*

$$a(u, v-u) \geqslant \varphi(v-u),\ \forall v \in K. \tag{1.1}$$

Além disso, se a é simétrica então u se caracteriza por

$$\begin{cases} u \in K \\ \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \right\} \end{cases}$$

$\diamondsuit$

Corolário 1.25. *(Lax-Milgram) Sejam H um espaço de Hilbert e $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para todo $\varphi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \varphi(v),\ \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, u se caracteriza por

$$\begin{cases} u \in H \\ \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \right\} \end{cases}$$

Demonstração: Pelo Teorema 1.24, $\exists!\, u \in H$ tal que

$$a(u, v-u) \geqslant \varphi(v-u),\ \ \forall v \in H.$$

Como para todo $v \in H$, $v + u \in H$, segue que

$$a(u, v+u-u) \geqslant \varphi(v+u-u) \Rightarrow a(u,v) \geqslant \varphi(v),\ \ \forall v \in H.$$

Para $t \in \mathbb{R}$ e $v \in H$ temos $tv \in H$ e

$$\varphi(tv) - a(u,tv) \leqslant 0 \Rightarrow t[\varphi(v) - a(u,v)] \leqslant 0\ \ \forall v \in H,\ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

portanto $\varphi(v) - a(u,v) = 0 \Rightarrow \varphi(v) = a(u,v),\ \ \forall v \in H$. A caracterização de u, segue do Teorema 1.24. $\blacksquare$

1.3 Espaços de Sobolev

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}$ um aberto dotado da medida de Lebegue dx.

Definição 1.26. *$C_c(\Omega)$ é o espaço das funções contínuas com suporte compacto, ou seja,*

$$C_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \textit{ é contínua e } f(x) = 0, \forall x \in \Omega \backslash K, \textit{onde } K \subset \Omega \textit{ é compacto}\}.$$

Definição 1.27. *Seja $p \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p < \infty$. Definimos o seguinte espaço vetorial normado*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \textit{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

com a norma dada por:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Definição 1.28. *Se $p = \infty$ define-se*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \textit{ é mensurável e } \exists \textit{ constante } c \textit{ tal que } |f(x)| \leqslant c, \textit{ q.t.p}^1 \textit{ em } \Omega\}.$$

Em $L^\infty(\Omega)$ consideramos a norma:

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{c : |f(x)| \leqslant c, \textit{ q.t.p em } \Omega\}.$$

Observação 3. *Se $f \in L^\infty$, então $|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty}$, q.t.p em Ω.*

Observação 4. *É possível mostrar que L^p, $1 < p < \infty$ é separável, reflexivo e o dual de L^p é $L^{p'}$, isto é, $(L^p)' = L^{p'}$.*

A desigualdade a seguir é de extrema utilidade em muitas demonstrações.

Teorema 1.29. *(Desigualdade de Hölder) Seja $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

$\lozenge$

A demonstração da Desigualdade de Hölder para $p = 1$ ou $p = \infty$ é imediata. Quando $1 < p < \infty$ utilizamos a desigualdade de Young:

$$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$$

para $a \geqslant 0, b \geqslant 0$. Para mais detalhes veja em [1], Teorema IV.6, p.56.

[1] isto é, exceto em um conjunto de medida nula.

Definição 1.30. *Sejam* $I = (a,b)$ *e* $p \in \mathbb{R}$ *com* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Definimos o espaço de Sobolev* $W^{1,p}(I)$ *como sendo*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Definição 1.31. $H^1(I) = W^{1,2}(I)$.

Observação 5. *As funções* φ *são chamadas de funções testes.*

Seja $u \in L^p(I)$ *diremos que* $g \in L^p(I)$ *é a derivada generalizada de* u *se*

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

Notação: $u' = g$.

Colocamos então

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \ u' \in L^p(I) \right\},$$

onde u' *é a derivada generalizada de* u.

Exemplo 1.32. *Seja* $I = (-1,1)$. *A função*

$$u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

pertence a $W^{1,p}(I)$, *para todo* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e*

$$u'(x) = H(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

pois, para toda $\varphi \in C_c^1(I)$ *temos:*

$$\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)dx = \int_0^1 x\varphi'(x)dx = -\int_0^1 \varphi(x)dx = -\int_{-1}^{1} H(x)\varphi(x)dx.$$

H é chamada função de Heaviside. Notemos que $H \notin W^{1,p}(I)$.

Observação 6. *O espaço* $W^{1,p}$ *está dotado da seguinte norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \left\|u'\right\|_{L^p}$$

ou equivalentemente,

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \left\|u'\right\|_{L^p}^p)^{1/p}.$$

Observação 7. *O espaço* $H^1 = W^{1,2}$ *está dotado do seguinte produto escalar*

$$\langle u,v\rangle_{H^1} = \langle u,v\rangle_{L^2} + \left\langle u',v'\right\rangle_{L^2}$$

e a norma associada é

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2)^{1/2}.$$

Definição 1.33. *Dado um inteiro* $m \geqslant 2$ *e um real* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*, definimos por recorrência o espaço*

$$W^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m-1,p}(I);\ u' \in W^{m-1,p}(I)\right\}.$$

Coloque

$$H^m = W^{m,2}(I).$$

Em particular $H^2(I) = \left\{u \in H^1;\ u' \in H^1\right\}$.

Definição 1.34. *Dado* $1 \leqslant p < \infty$ *denotamos por* $W_0^{1,p}(I)$ *o fecho de* $C_c^1(I)$ *em* $W^{1,p}(I)$ *e ainda*

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

Teorema 1.35. *(Derivada do Produto) Sejam* $u,v \in W^{1,p}(I)$ *com* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*, então:*

$$uv \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

Portanto, temos também a regra de integração por partes

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv', \forall x,y \in \bar{I}.$$

Teorema 1.36. *(Desigualdade de Poincaré) Seja I limitado e* $1 \leqslant p < \infty$*. Então existe constante c, dependendo de* $|I|$*, tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leqslant c\|u'\|_{L^p}.$$

$\forall u \in W_0^{1,p}(I)$*. Em outras palavras,* $\|u\|_{W^{1,p}}$ *e* $\|u'\|_{L^p}$ *são equivalentes em* $W_0^{1,p}(I)$*.*

Demonstração: Seja $I = (a,b)$. Consideremos $u \in W_0^{1,p}(I)$. Como $u \in \overline{C_c^1(I)} \subset W^{1,p}(I)$ segue do Teorema 1.29 segue que

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left|\int_a^x u'(t)dt\right| \leqslant \int_a^x |u'(t)|dt \leqslant \int_a^b |u'(t)|dt \leqslant \|u'\|_p(b-a)^{\frac{1}{p'}}.$$

Temos

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_a^b |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b \|u'\|_{L^p}^p (b-a)^{\frac{p}{p'}}\right)^{\frac{1}{p}} = \|u'\|_{L^p}(b-a)^{\frac{1}{p'}}(b-a)^{\frac{1}{p}} = \|u'\|_{L^p}(b-a).$$

Como $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \leqslant (b-a)\|u'\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$, se $c = 1+(b-a)$ então

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leqslant c\|u'\|_{L^p}.$$

∎

A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em [1], Teorema IX.16, p.169.

Teorema 1.37. *(Rellich-Kondrachov) Seja Ω limitado de classe C^1 ($\Omega \in \mathbb{R}^n$).*

(i) *Se $p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*)$, onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;*

(ii) *Se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \infty)$;*

(iii) *Se $p > n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$;*

com injeções compactas.

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com injeção compacta para todo p.

Capítulo 2

Teoria Geral de Semigrupos

O objetivo principal deste capítulo é encontrar condições sob as quais um operador gera um semigrupo fortemente contínuo. As referências para este assunto são [2] e [11].

2.1 Propriedades dos Semigrupos

Definição 2.1. *Um semigrupo de operadores lineares em X é uma família $\{T(t) : t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ tal que*

(i) $T(0) = I_X$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \ \forall s,t \geqslant 0.$

Se adicionalmente,

(iii) $\|T(t) - I_X\|_{\mathscr{L}(X)} \to 0$ *quando* $t \to 0^+$ *então dizemos que o semigrupo é uniformemente contínuo.*

(iv) $\|T(t)x - x\|_X \to 0$ *quando* $t \to 0^+, \forall x \in X$*, então o semigrupo é fortemente contínuo ou um* C^0*-semigrupo.*

Se os operadores estão definidos para $t,s \in \mathbb{R}$ e as condições (i) e (ii) se verificam então $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo. Além disso, se $\|T(t)x - x\|_X \to 0$ quando $t \to 0$, para todo $x \in X$ então esse grupo é dito um C^0-grupo.

Definição 2.2. *Seja $\Delta = \{z : \phi_1 < \arg z < \phi_2, \phi_1 < 0 < \phi_2\}$ e, para $z \in \Delta$, seja $T(z)$ um operador linear limitado. A família $\{T(z) : z \in \Delta\}$ é um semigrupo analítico sobre Δ se*

(i) $z \mapsto T(z)$ *é analítica em* Δ.

(ii) $T(0) = I$ *e* $\lim_{z\to 0} T(z)x = x$ *para cada* $x \in X$.

(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2),\ \forall z_1, z_2 \in \Delta$.

Observação 8. *Todo semigrupo uniformemente contínuo é fortemente contínuo.*

Definição 2.3. *Se* $\{T(t), t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ *é um semigrupo fortemente contínuo, seu gerador infinitesimal é o operador definido por* $A : \mathscr{D}(A) \subset X \to X$

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ onde } \mathscr{D}(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Exemplo 2.4. $T(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$, $t \geqslant 0$ *para algum* $A \in \mathscr{L}(X)$ *é um semigrupo fortemente contínuo, cujo gerador infinitesimal é A,* $\mathscr{D}(A) = X$, *pois para* $x \in X$, *temos:*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(e^{At}x - x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \right) x - x \right] \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[x + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \right) x - x \right] = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \right] x \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^{n-1}}{n!} \right) x = \lim_{t\to 0^+} \left(Ax + \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A^n t^{n-1}}{n!} \right) x \right) \\
&= Ax + \lim_{t\to 0^+} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A^n t^{n-1}}{n!} \right) x = Ax,
\end{aligned}$$

a última igualdade é obtida usando o fato que a série converge uniformemente.

Portanto, A é o gerador infinitesimal de $T(t)$.

Os semigrupos uniformemente contínuos são da forma e^{At} para algum $A \in \mathscr{L}(X)$, é o que afirma o seguinte resultado:

Teorema 2.5. *São equivalentes:*

(i) $\{T(t) : t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ *é um semigrupo uniformemente contínuo sobre* X.

(ii) *Seu gerador infinitesimal está definido em todo* X.

(iii) *Para algum* $A \in \mathscr{L}(X), T(t) = e^{At}$.

Demonstração: $(iii) \Rightarrow (ii)$ Se $T(t) = e^{At}$ para algum $A \in \mathscr{L}(X)$, mostramos no Exemplo 2.4 que o gerador infinitesimal é A e portanto está definido em todo X.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja A o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geqslant 0\}$, onde A está definido sobre todo X. Então dado $x \in X$, temos que

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Assim,

$$\lim_{t \to 0^+} \left\| \frac{T(t)x - x}{t} \right\| = \|Ax\|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$-\varepsilon + \|Ax\| < \left\| \frac{T(t)x - x}{t} \right\| < \|Ax\| + \varepsilon$$

para $t \in [0, \delta]$. Ou seja, $\left\{ \left\| \frac{T(t)x-x}{t} \right\| \right\}_{0 \leqslant t \leqslant \delta}$ é limitado para cada $x \in X$. Segue do Corolário 1.10 que $\left\{ \left\| \frac{T(t)-I}{t} \right\| \right\}_{0 \leqslant t \leqslant \delta}$ é limitado. Seja $k \geqslant 0$ tal que $\left\| \frac{T(t)-I}{t} \right\| \leqslant k$ para $0 \leqslant t \leqslant \delta$. Então

$$\|T(t) - I\| \leqslant tk \to 0, \text{com}\, t \to 0^+.$$

Portanto, $T(t) \to I$, com $t \to 0^+$ e assim $T(t)$ é uniformemente contínuo sobre X.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Assumimos inicialmente que $T(t) = e^{At}$ e encontramos a expressão pra definir $A \in \mathscr{L}(X)$

$$A = (T(t) - I) \left(\int_0^t T(s) ds \right)^{-1}$$

e então provamos que $A \in \mathscr{L}(X)$ e que $T(t) = e^{At}, t \geqslant 0$. ■

Os semigrupos fortemente contínuos possuem uma limitação exponencial que é dada no teorema a seguir.

Teorema 2.6. *Suponha que $\{T(t), t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo. Então existem $M \geqslant 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant Me^{\beta t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Para qualquer $l > 0$ podemos escolher $\beta \geqslant \frac{1}{l} \log \|T(l)\|_{\mathscr{L}(X)}$ e então escolher M.

Demonstração: Inicialmente observamos que $\sup\limits_{t\in[0,\eta]} \|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} < \infty$ para algum $\eta > 0$ pois, caso contrário, existiria uma sequência $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \to 0^+$ tal que $\|T(t_n)\|_{\mathscr{L}(X)} \to \infty$. Como $T(t)$ é fortemente contínuo $\lim\limits_{t_n\to 0^+} T(t_n)x = x$, para cada $x \in X$, logo $\{T(t_n)x\}_{n\geqslant 1}$ é limitada para cada $x \in X$. Segue do Corolário 1.10 que $\{\|T(t_n)\|_{\mathscr{L}(X)}\}_{n\geqslant 1}$ é limitada, contrariando o fato que $\|T(t_n)\|_{\mathscr{L}(X)} \to \infty$.

Assim, $\sup\limits_{t\in[0,\eta]} \|T(t)\| < \infty$, para algum $\eta > 0$ e com isso podemos afirmar que $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|T(t)\| < \infty$ para qualquer $T > 0$, pois dado $T > 0, t \in [0,T]$, t pode ser escrito da forma $t = m\eta + \lambda$ com $m \in \mathbb{N}^*, \lambda \in (0,\eta)$ e

$$\|T(t)\| = \|T(m\eta+\lambda)\| = \|T(m\eta)T(\lambda)\| = \|T(\eta)^m T(\lambda)\| \leqslant \|T(\eta)\|^m \|T(\lambda)\| < \infty.$$

Seja $l > 0$ arbitrário tal que

$$\tilde{M} = \sup\{\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)}, 0 \leqslant t \leqslant l\} < \infty$$

e seja $\beta \geqslant \frac{1}{l}\log\{\|T(l)\|_{\mathscr{L}(X)}\}$, isto é, $\|T(l)\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant e^{\beta l}$. Então,

$$\begin{aligned}\|T(nl+t)\| &= \|T(nl)T(t)\| = \|T(l)^n T(t)\| \\ &\leqslant \|T(l)\|^n \|T(t)\| \leqslant \tilde{M}e^{\beta nl} \\ &\leqslant \tilde{M}e^{\beta nl}e^{\beta t + |\beta| l} \leqslant \tilde{M}e^{|\beta| l}e^{\beta(nl+t)}.\end{aligned}$$

Logo

$$\|T(nl+t)\| \leqslant Me^{\beta(nl+t)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant l, n \in \mathbb{N} \text{ e } M = \tilde{M}e^{|\beta| l}.$$

Assim dado $t \geqslant 0$, podemos escrever $t = nl + t_0$, para algum $n \geqslant 0$ e $0 \leqslant t_0 \leqslant l$ e portanto

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\beta t}, \ \forall t \geqslant 0.$$

■

Dado um operador $A : \mathscr{D}(A) \subset X \to X$, denotaremos por $\rho(A)$, o conjunto resolvente de A onde

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ é injetora, } \operatorname{Im}(\lambda I - A) \text{é densa, } (\lambda I - A)^{-1} : \operatorname{Im}(\lambda I - A) \to \text{ é contínua}\}.$$

O espectro de A, denotado por $\sigma(A)$ é definido por

$$\mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

Observação 9. *O operador A comuta com o operador resolvente* $(\lambda I - A)^{-1}$.

De fato, seja $u = (\lambda - A)^{-1}v$, ou seja, $(\lambda - A)u = v$.
Como A comuta com $(A - \lambda)$ temos que

$$(\lambda - A)^{-1}Av = (\lambda - A)^{-1}A(\lambda - A)u = (\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)Au = Au.$$

Por outro lado,

$$A(\lambda - A)^{-1}v = A(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)u = Au.$$

Portanto, $A(\lambda - A)^{-1}v = (\lambda - A)^{-1}Av$, ou seja, A comuta com $(\lambda - A)^{-1}$. ■

Vejamos agora alguns fatos importantes sobre semigrupos fortemente contínuos.

Teorema 2.7. *Suponha que* $\{T(t), t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ *é um semigrupo fortemente contínuo.*

(i) *Para qualquer* $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ *é contínua para* $t \geqslant 0$.

(ii) $t \mapsto \|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)}$ *é semicontínua inferiormente e portanto mensurável.*

(iii) *Seja A o gerador infinitesimal de T(t), então A é densamente definido e fechado. Para* $x \in \mathscr{D}(A)$, $t \mapsto T(t)x$ *é continuamente diferenciável e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \ \ t > 0.$$

(iv) *Para* $Re\lambda > \beta$, *onde*β *é obtido no Teorema 2.6,* λ *está no conjunto resolvente de A e*

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt, \forall\, x \in X.$$

Demonstração:

(i) Vamos calcular os limites laterais. Sejam $t > 0$ e $x \in X$.

$$\|T(t+h)x - T(t)x\|_X = \|T(t)T(h)x - T(t)x\|_X = \|T(t)(T(h) - I)x\|_X \leqslant \|T(t)\|\|T(h)x - x\|$$
$$\leqslant Me^{\beta t}\|T(h)x - x\| \to 0, \ \ \text{quando } h \to 0^+.$$

Analogamente, temos:

$$\begin{aligned}\|T(t)x - T(t-h)x\|_X &= \|T(t-h+h)x - T(t-h)x\|_X = \|T(t-h)T(h)x - T(t-h)x\|_X \\ &= \|T(t-h)(T(h)x - x)\|_X \leqslant \|T(t-h)\|_{\mathscr{L}(X)}\|T(h)x - x\|_X \\ &\leqslant Me^{\beta(t-h)}\|T(h)x - x\| \to 0, \ \ h \to 0^+.\end{aligned}$$

Portanto, para todo $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ é contínua para $t \geqslant 0$.

(ii) Devemos provar que, dado $b \in \mathbb{R}$, $A = \{t \geqslant 0 : \|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} > b\}$ é aberto em $[0, +\infty)$. Seja $t_0 \in A$. Como $\|T(t_0)\|_{\mathscr{L}(X)} > b$ então existe $x \in X$ com $\|x\| = 1$ tal que $\|T(t_0)x\| > b$. De (i) a aplicação $t \mapsto T(t)x$ é contínua, segue que existe uma vizinhança V de t_0 tal que se $t \in V$ então $\|T(t)x\| > b$. Portanto $\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} > b$ para $t \in V$ e isso conclui a demonstração.

(iii) Vamos mostrar que A é densamente definido.

Sejam $x \in X$, $\varepsilon > 0$ dado e $x_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T(t)xdt$. Então:

$$x_\varepsilon - x = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T(t)xdt - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon xdt = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (T(t)x - x)dt.$$

Como $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é fortemente contínuo, $T(t)x \to x$ quando $t \to 0^+$, logo dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon_\delta > 0$ tal que $\|T(t)x - x\| < \delta$ para $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_\delta$. Assim,

$$\|x_{\varepsilon_\delta} - x\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_\delta}\int_0^{\varepsilon_\delta} \|T(t)x - x\|dt < \delta\frac{1}{\varepsilon_\delta}\int_0^{\varepsilon_\delta} dt = \delta.$$

Portanto $x_\varepsilon \to x$ quando $\varepsilon \to 0^+$. Verifiquemos que $x_\varepsilon \in \mathscr{D}(A)$.

Para $h > 0$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{T(h)x_\varepsilon - x_\varepsilon}{h} &= \frac{(T(h)-I)}{\varepsilon h}\left(\int_0^\varepsilon T(t)xdt\right) = \frac{1}{\varepsilon h}\int_0^\varepsilon (T(h)-I)T(t)xdt \\ &= \frac{1}{\varepsilon h}\int_0^\varepsilon (T(h)T(t)x - T(t)x)dt = \frac{1}{\varepsilon h}\left(\int_0^\varepsilon T(h+t)xdt - \int_0^\varepsilon T(t)xdt\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon h}\left(\int_h^{h+\varepsilon} T(t)xdt - \int_0^\varepsilon T(t)xdt\right) = \frac{1}{\varepsilon h}\left(\int_0^{\varepsilon+h} T(t)xdt - \int_0^h T(t)xdt - \int_0^\varepsilon T(t)xdt\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon h}\left(\int_0^{\varepsilon+h} T(t)xdt - \int_0^\varepsilon T(t)xdt\right) - \frac{1}{\varepsilon h}\left(\int_0^h T(t)xdt - \int_0^0 T(t)xdt\right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)x_\varepsilon - x_\varepsilon}{h} = \frac{1}{\varepsilon}(T(\varepsilon)x - x).$$

Portanto $x_\varepsilon \in \mathscr{D}(A)$ e assim $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$.

A é fechado. De fato, seja $\{x_n\} \subset \mathscr{D}(A)$ com $x_n \to x \in X$ e $Ax_n \to y$, quando $n \to \infty$.

A seguinte igualdade será mostrada adiante,

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds. \tag{2.1}$$

Como $T(s)Ax_n \to T(s)y$ uniformemente sobre intervalos limitados, obtemos:

$$\lim_{n\to+\infty} T(t)x_n - x_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t T(s)Ax_n ds = \int_0^t \lim_{n\to+\infty} T(s)Ax_n ds = \int_0^t T(s)yds.$$

Isto é,

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds.$$

Façamos $t \to 0^+$ na última igualdade acima

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(\int_0^{0+t} T(s)yds - \int_0^0 T(s)yds\right) = T(0)y = y.$$

Como o limite existe, $x \in \mathscr{D}(A)$ e $Ax = y$. Portanto A é fechado.

Se $x \in \mathscr{D}(A)$ então

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^+}{dt}\right)T(t)x &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(T(t+h)x - T(t)x) = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(T(h)T(t)x - T(t)x)\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}T(t)((T(h)-I)x) = \lim_{h\to 0^+} T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x\\ &= T(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax.\end{aligned}$$

Como $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h}$ existe, $T(t)x \in \mathscr{D}(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Por (i) a aplicação $t \mapsto T(t)Ax$ é contínua, isto é, $t \mapsto \left(\frac{d^+}{dt}\right)T(t)x$ é contínua, e portanto $t \mapsto T(t)x$ é continuamente diferenciável e $\left(\frac{d^+}{dt}\right)T(t)x = \frac{d}{dt}T(t)x$.

Logo,

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

2.1 é obtido integrando essa igualdade

$$\int_0^t \frac{d}{ds}T(s)xds = \int_0^t T(s)Axds \Rightarrow T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds.$$

(iv) Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Re\lambda > \beta$ (β do Teorema 2.6). Defina $R(\lambda) : X \to X$ por

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt.$$

Como

$$\begin{aligned}\|R(\lambda)x\|_X &\leqslant \int_0^\infty \|e^{-\lambda t}T(t)x\|dt = \int_0^\infty |e^{\lambda t}|\|T(t)x\|dt \\ &\leqslant \int_0^\infty e^{-(Re\lambda)t}Me^{\beta t}\|x\|dt = M\int_0^\infty e^{(\beta - Re\lambda)t}\|x\|dt = \frac{M}{Re\lambda - \beta}\|x\|\end{aligned}$$

então

$$\|R(\lambda)\|_{\mathscr{L}(X)} = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|R(\lambda)x\| \leqslant \frac{M}{Re\lambda - \beta}.$$

Sejam $x \in X$ e $h > 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(T(h)-I)R(\lambda)x &= \frac{(T(h)-I)}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h}dt \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)xds - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)xds - \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{\lambda(h-s)}T(s)xds - \int_0^h e^{\lambda(h-s)}T(s)xds - \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty (e^{\lambda(h-s)} - e^{-\lambda s})T(s)xds - \int_0^h e^{\lambda(h-s)}T(s)xds\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty (e^{\lambda h} - 1)e^{-\lambda s}T(s)xds - \int_0^h e^{\lambda(h-s)}T(s)xds\right) \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}T(s)xds.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(T(h)-I)R(\lambda)x &= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds - e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}T(s)xds\right) \\ &= \lambda R(\lambda)x - x.\end{aligned}$$

Portanto $R(\lambda)x \in \mathscr{D}(A)$ e $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$. Assim,

$$-AR(\lambda)x = x - \lambda R(\lambda)x \Rightarrow (\lambda - A)R(\lambda)x = x \Rightarrow (\lambda - A)\text{é sobrejetivo.}$$

Segue que, para $x \in \mathscr{D}(A)$

$$x = (\lambda - A)R(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x = R(\lambda)\lambda x - R(\lambda)Ax = R(\lambda)(\lambda - A)x.$$

Ou seja,

$$(\lambda - A)R(\lambda)x = x = R(\lambda)(\lambda - A)x$$

e então $(\lambda - A)$ é injetora.

De $(\lambda - A)R(\lambda)x = R(\lambda)(\lambda - A)x$ temos $(\lambda - A)^{-1} = R(\lambda)$ onde $R(\lambda)$ é limitada e assim $(\lambda - A)^{-1}$ é contínua. Portanto, $\lambda \in \rho(A)$ e

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)xdt.$$

■

2.2 Teoremas de Hille-Yosida e Lumer Phillips

O Teorema de Hille-Yosida, que provaremos abaixo, fornece as características de um operador A de modo que este seja o gerador de um semigrupo fortemente contínuo.

Observação 10. *Sejam A_λ e A_μ operadores lineares tais que $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ então $A_\lambda e^{rA_\lambda} = e^{rA_\lambda} A_\lambda$ e $A_\lambda e^{rA_\mu} = e^{rA_\mu} A_\lambda$, onde $e^A = \sum_{n=0}^\infty \frac{A^n}{n!}$.*

Teorema 2.8. *(Teorema de Hille-Yosida) Suponha que $A : \mathscr{D}(A) \subset X \to X$ é um operador linear. Então os fatos seguintes são equivalentes:*

(i) *A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant e^{\omega t}, \ \forall t \geqslant 0, \omega \in \mathbb{R}.$$

(ii) *A é um operador linear fechado, densamente definido, cujo resolvente contém $\{\lambda : Im\lambda = 0, \ \lambda > \omega\}$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega}, \ \forall \lambda > \omega. \tag{2.2}$$

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$

Como A é o gerador infinitesimal do semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ pelo Teorema 2.7 (iii), temos que A é fechado e densamente definido. Além disso, se $\lambda > \omega$ então $\lambda \in \rho(A)$ e

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)xdt, \ \forall \, x \in X.$$

Assim,

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\|_X \leqslant \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\|T(t)x\|_X dt \leqslant \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)}\|x\|_X dt \leqslant \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}e^{\omega t}\|x\|_X dt$$
$$= \int_0^{\infty} e^{(\omega-\lambda)t}\|x\|_X dt = \frac{1}{\lambda - \omega}\|x\|.$$

Logo,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|(\lambda - A)^{-1}x\| \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega},\ \lambda > \omega.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Inicialmente faremos a prova para $\omega = 0$, em seguida provaremos o caso geral.

Temos

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant 1.$$

Agora

$$\lambda(\lambda - A)^{-1} = (\lambda^{-1})^{-1}(\lambda - A)^{-1} = (\lambda^{-1}(\lambda - A))^{-1} = (I - \lambda^{-1}A)^{-1}.$$

Por outro lado, para $x \in \mathscr{D}(A)$

$$(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)x = Ix \Rightarrow (\lambda - A)^{-1}\lambda x - (\lambda - A)^{-1}Ax = x$$
$$\Rightarrow \lambda(\lambda - A)^{-1}x = (I + (\lambda - A)^{-1}A)x.$$

Portanto no domínio de A valem as igualdades:

$$\lambda(\lambda - A)^{-1} = (I - \lambda^{-1}A)^{-1} = I + (\lambda - A)^{-1}A.$$

Para $x \in \mathscr{D}(A)$ temos

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x\|_X \leqslant \|(\lambda - A)^{-1}\|\|Ax\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \to 0,\ \text{quando}\lambda \to \infty.$$

Como $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$, para todo $x \in X$ existe sequência $\{x_n\}_{n\geqslant 1}, x_n \in \mathscr{D}(A)$ tal que $x_n \to x$. Logo

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x\| = \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x - \lambda(\lambda - A)^{-1}x_n + \lambda(\lambda - A)^{-1}x_n - x_n + x_n - x\|$$
$$\leqslant \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|\|x - x_n\| + \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \to 0,$$

quando $\lambda \to \infty, n \to \infty$.

Portanto

$$(I - \lambda^{-1}A)^{-1}x = \lambda(\lambda - A)^{-1}x \to x$$

quando $\lambda \to \infty, \forall x \in X$.

Defina $A_\lambda = A(I-\lambda^{-1}A)^{-1}, \lambda > 0$, então $A_\lambda \in \mathscr{L}(X)$ pois

$$A_\lambda = A(I-\lambda^{-1}A)^{-1} = A\lambda(\lambda - A)^{-1} = \lambda A(\lambda - A)^{-1}$$

e

$$A(\lambda - A)^{-1} = \lambda(\lambda - A)^{-1} - I.$$

Assim,

$$A_\lambda = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda I \tag{2.3}$$

e temos

$$\|A_\lambda\| \leqslant \lambda\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| + \lambda\|I\| \leqslant \lambda + \lambda = 2\lambda.$$

Além disso, se $x \in \mathscr{D}(A)$ então $A_\lambda x \to Ax$ quando $\lambda \to \infty$. De fato,

$$\begin{aligned}\|A_\lambda x - Ax\| &= \|A(I-\lambda^{-1}A)^{-1}x - Ax\| = \|A\lambda(\lambda - A)^{-1}x - Ax\| = \|\lambda A(\lambda - A)^{-1}x - Ax\| \\ &= \|\lambda(\lambda - A)^{-1}Ax - Ax\| \to 0, \text{ quando } \lambda \to +\infty.\end{aligned}$$

Dizemos que A_λ é a aproximação de Yosida do gerador A.

Vamos agora obter $T(t)$ como o limite de e^{tA_λ} quando $\lambda \to \infty$. De (2.3) temos $A_\lambda = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda I$, assim para $t \geqslant 0$ temos

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}} \leqslant e^{-\lambda t} e^{t\lambda} = 1, \text{ para } \lambda > 0.$$

Dados $\lambda > 0$, $\mu > 0$ segue da Observação 10 que:

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}x)ds \right\|_X \leqslant \int_0^1 t\|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\|_X ds \\ &\leqslant t\|A_\lambda x - A_\mu x\|_X \int_0^1 \|e^{tsA_\lambda}\|\|e^{t(1-s)A_\mu}\|ds \leqslant t\|A_\lambda x - A_\mu x\|_X.\end{aligned}$$

Como $A_\lambda x \to Ax$ quando $\lambda \to \infty$, para $x \in \mathscr{D}(A)$, temos

$$t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \leqslant t(\|A_\lambda x - Ax\| + \|A_\mu x - Ax\|) \to 0, \quad \text{quando } \lambda, \mu \to +\infty$$

uniformemente em t, para t em limitados de $\mathbb{R}_+$, digamos $0 \leqslant t \leqslant t_0$, para algum $t_0 > 0$. Logo,

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X \to 0, \quad \text{quando } \lambda, \mu \to +\infty.$$

Assim $\{e^{tA_\lambda} : t \geqslant 0\}$ é de Cauchy quando $\lambda \to +\infty$, uniformemente para $t \in [0, t_0]$, logo convergente. Portanto para $x \in \mathscr{D}(A)$

$$T(t)x := \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$$

existe uniformemente para $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Vamos mostrar que $T(t)$, assim definido, é um semigrupo fortemente contínuo.

Obviamente $T(0)x = I(x)$ e $T(t+s)x = T(t)T(s)x$, para $x \in \mathscr{D}(A)$, $\forall t, s \geqslant 0$. Além disso, para $x \in \mathscr{D}(A)$ temos

$$\|T(t)x\| = \lim_{\lambda\to\infty} \|e^{A_\lambda t}x\| \leqslant \lim_{\lambda\to\infty} \|e^{A_\lambda t}\|\|x\| \leqslant \|x\| \Rightarrow \|T(t)\| \leqslant 1.$$

Logo $T(t)$ é limitado em $\mathscr{D}(A)$. Assim podemos estender $T(t)$ para X preservando a limitação. Portanto $T(t) \in \mathscr{L}(X)$ para cada $t \geqslant 0$.

É fácil ver que para $x \in \mathscr{D}(A)$, $t \mapsto T(t)x$ é contínua. Assim $T(t)x \to x$ em $\mathscr{D}(A)$ quando $t \to 0^+$.

Como $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$, dados $x \in X$ *e* $\varepsilon > 0$ existem $x_1 \in \mathscr{D}(A)$ e $\delta > 0$ tal que

$$\|T(t)x_1 - x_1\| < \frac{\varepsilon}{3}, \;\; \|x_1 - x\| < \frac{\varepsilon}{3} \;\text{ para }\; 0 \leqslant t \leqslant \delta.$$

Segue que

$$\begin{aligned}\|T(t)x - x\| &= \|(T(t)x - T(t)x_1) + (T(t)x_1 - x_1) + (x_1 - x)\| \\ &\leqslant \|T(t)\|\|x - x_1\| + \|T(t)x_1 - x_1\| + \|x - x_1\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo $T(t)$ é um semigrupo fortemente contínuo.

Dado $x \in X$, existe sequência $\{x_n\}_{n\geqslant 1}, x_n \in \mathscr{D}(A)$ tal que $\|x_n - x\| \to 0$ quando $n \to +\infty$, então

$$\begin{aligned}\|e^{A_\lambda t}x - T(t)x\| &= \|e^{A_\lambda t}x - e^{A_\lambda t}x_n + e^{A_\lambda t}x_n - T(t)x_n + T(t)x_n - T(t)x\| \\ &\leqslant \|e^{A_\lambda t}\|\|x - x_n\| + \|e^{A_\lambda t}x_n - T(t)x_n\| + \|T(t)\|\|x - x_n\| \\ &\leqslant \|x - x_n\| + \|e^{A_\lambda t}x_n - T(t)x_n\| + \|x - x_n\| \to 0, \text{ quando } \lambda \to +\infty, n \to +\infty.\end{aligned}$$

Portanto,

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{A_\lambda t}x, \quad \text{para todo } x \in X.$$

e assim $T(t+s)x = T(t)T(s)x,\ \forall x \in X, t, s \geqslant 0$. Com isso, $\{T(t) : t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo de contrações.

Resta agora provar que A é o gerador infinitesimal de $T(t)$.

Seja $x \in \mathscr{D}(A)$, temos

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty}(e^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t \frac{d}{ds}(e^{sA_\lambda}x)ds = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t A_\lambda e^{A_\lambda s}xds = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda xds \\ &= \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t (e^{sA_\lambda}A_\lambda x - e^{sA_\lambda}Ax)ds + \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{sA_\lambda}Axds \\ &= \int_0^t \lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}(A_\lambda x - Ax)ds + \int_0^t \lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}Axds = \int_0^t T(s)Axds. \end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(\int_0^t T(s)Axds\right) = T(0)Ax = Ax.$$

Portanto

$$Ax = \lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in \mathscr{D}(A).$$

Assim, se B é o gerador infinitesimal de $T(t)$ então B deve ser uma extensão de A, isto é, $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(B)$ e $Bx = Ax$ para todo $x \in \mathscr{D}(A)$.

Como B gera $T(t)$ de $(i) \Rightarrow (ii)$ temos que $(0,\infty) \subset \rho(B)$. Mas, por hipótese, $(0,\infty) \subset \rho(A)$, assim, $1 \in \rho(A) \cap \rho(B)$, então

$$X = (I - A)\mathscr{D}(A) \text{ e } X = (I - B)\mathscr{D}(B)$$

mas

$$(I - A)\mathscr{D}(A) = (I - B)\mathscr{D}(A)$$

logo

$$(I - B)\mathscr{D}(A) = X = (I - B)\mathscr{D}(B)$$

e portanto

$$\mathscr{D}(A) = (I - B)^{-1}X = \mathscr{D}(B).$$

Segue que $B = A$. Assim, A é o gerador infinitesimal de $T(t)$.

Façamos agora o caso ω arbitrário. Seja A um operador fechado, densamente definido tal que

$$(\omega,\infty) \subset \rho(A) \text{ e } \|(\lambda - A)^1\| \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega},\ \forall \lambda > \omega.$$

Seja $A_1 = A - \omega$, então A_1 é fechado, densamente definido e $(0,\infty) \subset \rho(A_1)$. Ainda, temos

$$\|(\lambda - A_1)^{-1}\| = \|((\lambda+\omega) - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

para todo $\lambda > 0$.

Então pelo caso $\omega = 0$ temos que A_1 é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $T_1(t)$ com $\|T_1(t)\| \leqslant 1,\ \forall t \geqslant 0$.

Seja $T(t) = e^{\omega t} T_1(t)$. É imediato que $T(t) \in \mathscr{L}(X)$, $T(0) = I$ e $T(t+s) = T(t)T(s)$, além disso,

$$\|T(t)x - x\| = \|e^{\omega t}T_1(t)x - x\| = \|e^{\omega t}T_1(t)x - e^{\omega t}x + e^{\omega t}x - x\| \leqslant \|e^{\omega t}\|\|T_1(t)x - x\| + \|e^{\omega t}x - x\| \to 0,$$

quando $t \to 0^+$, logo $T(t)$ é um semigrupo fortemente contínuo.

Falta mostrarmos que A é o gerador infinitesimal de $T(t)$.

Dado $x \in \mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(A_1)$ temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(e^{\omega t}T_1(t)x - x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(e^{\omega t}T_1(t)x - T_1(t)x + T_1(t)x - x) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(e^{\omega t} - 1)T_1(t)x + \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T_1(t)x - x) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(e^{\omega t} - 1) \lim_{t\to 0^+} T_1(t)x + \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T_1(t)x - x) \\
&= \omega x + A_1 x = (\omega + A_1)x = Ax.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = Ax, \quad \forall x \in \mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(A_1),$$

de onde segue que A é o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geqslant 0\}$. ■

Definição 2.9. *Seja X um espaço de Banach sobre um corpo K com norma $\|.\|_X$ e seja X' o seu dual topológico com a norma usual $\|\xi\|_{X'} = \sup\limits_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leqslant 1}} | < \xi, x > | =$ $\sup\{Re(< \xi, x >) : \|x\|_X \leqslant 1\}$. A aplicação dualidade $J : X \to 2^{X'}$ é uma aplicação definida por*

$$J(x) = \{\xi \in X' : Re(< \xi, x >) = \|x\|_X^2, \|\xi\|_{X'} = \|x\|_X\}.$$

Segue da Proposição 1.5 que $J(x) \neq \emptyset$.

Um operador linear $A : \mathscr{D}(A) \subset X \to X$ é dissipativo se para cada $x \in \mathscr{D}(A)$ existe $\xi \in J(x)$ tal que $Re(< \xi, Ax >) \leqslant 0$.

Lema 2.10. *O operador linear $A : \mathscr{D}(A) \subset X \to X$ é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geqslant \lambda \|x\|_X, \quad \forall x \in \mathscr{D}(A),\ \forall \lambda > 0. \tag{2.4}$$

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Sejam A dissipativo, $\lambda > 0$ e $x \in \mathscr{D}(A)$ então existe $x^* \in J(x)$ tal que $Re < x^*, Ax > \leqslant 0$. Logo

$$\begin{aligned}\|\lambda x - Ax\|_X \|x\|_X = \|\lambda x - Ax\|_X \|x^*\|_{X'} &\geqslant | < x^*, \lambda x - Ax > | \geqslant Re < x^*, \lambda x - Ax > \\ &= Re < x^*, \lambda x > - Re < x^*, Ax > = \lambda Re < x^*, x > - Re < x^*, Ax > \\ &\geqslant \lambda Re < x^*, x > = \lambda \|x\|_X^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geqslant \lambda \|x\|_X.$$

$(\Leftarrow)$ Sejam $f_\lambda^* \in J((\lambda - A)x)$ e $g_\lambda^* = \frac{f_\lambda^*}{\|f_\lambda^*\|}$, então

$$\begin{aligned}\lambda \|x\| \leqslant \|(\lambda - A)x\| = \frac{\|(\lambda - A)x\|^2}{\|(\lambda - A)x\|} = \frac{Re < f_\lambda^*, (\lambda - A)x >}{\|f_\lambda^*\|} = Re\left\langle \frac{f_\lambda^*}{\|f_\lambda^*\|}, (\lambda - A)x \right\rangle \\ = Re < g_\lambda^*, (\lambda - A)x > = \lambda Re < g_\lambda^*, x > - Re < g_\lambda^*, Ax > \leqslant \lambda | < g_\lambda^*, x > | - Re < g_\lambda^*, Ax > \\ \leqslant \lambda \|g_\lambda^*\| \|x\| - Re < g_\lambda^*, Ax > = \lambda \|x\| - Re < g_\lambda^*, Ax > .\end{aligned}$$

Logo temos

$$0 \leqslant -Re < g_\lambda^*, Ax > \Rightarrow Re < g_\lambda^*, Ax > \leqslant 0.$$

Segue do Teorema 1.13 que

$$B_{X'} = \{ f \in X' : \|f\| \leqslant 1 \}$$

é compacto na topologia fraca* $\sigma(X', X)$.

Como $\|g_\lambda^*\| \leqslant 1$, $\{g_\lambda^*\}$ é uma seqüência na bola unitária de X', que é compacta, então $\{g_\lambda^*\}$ admite uma subseqüência convergente para um ponto da bola unitária, ou seja,

$$\text{existe } g^* \in X', \|g^*\| \leqslant 1 \text{ e seqüência } \lambda_n \to \infty \text{ tal que } g_{\lambda_n}^* \overset{*}{\rightharpoonup} g^*.$$

Então

$$Re < g^*, Ax > = Re < \lim_{\lambda_n \to \infty} g_{\lambda_n}^*, Ax > = \lim_{\lambda_n \to \infty} Re < g_{\lambda_n}^*, Ax > \leqslant 0.$$

Temos

$$\lambda\|x\| \leqslant \lambda Re < g_{\lambda}^{*}, x > -Re < g_{\lambda}^{*}, Ax >,$$

ou seja,

$$\|x\| \leqslant Re < g_{\lambda}^{*}, x > -\frac{1}{\lambda} Re < g_{\lambda}^{*}, Ax > .$$

em particular,

$$\|x\| \leqslant Re < g_{\lambda_n}^{*}, x > -\frac{1}{\lambda_n} Re < g_{\lambda_n}^{*}, Ax > .$$

Passando o limite quando $\lambda_n \to \infty$ temos

$$\|x\| \leqslant \lim_{\lambda_n \to \infty} Re < g_{\lambda_n}^{*}, x > - \lim_{\lambda_n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} Re < g_{\lambda_n}^{*}, Ax >= Re < g^{*}, x >$$

então,

$$Re < g^{*}, x > \geqslant \|x\|. \tag{2.5}$$

Agora,

$$Re < g^{*}, x > \leqslant | < g^{*}, x > | \leqslant \|g^{*}\| \|x\| \leqslant \|x\|. \tag{2.6}$$

Segue de 2.5 e 2.6 que

$$Re < g^{*}, x >= \|x\|.$$

Como

$$\|g^{*}\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} | < g^{*}, x > | = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} Re < g^{*}, x >= 1,$$

basta tomarmos $x^{*} = \|x\| g^{*}$ e teremos:

$$Re < x^{*}, Ax >= \|x\| Re < g^{*}, Ax > \leqslant 0$$

e $x^{*} \in J(x)$, pois

$$Re < x^{*}, x >= Re < \|x\| g^{*}, x >= \|x\| Re < g^{*}, x >= \|x\| \|x\| = \|x\|^{2}.$$

e

$$\|x^{*}\| = \|x\| \|g^{*}\| = \|x\|.$$

Portanto A é dissipativo. ∎

Observação 11. *Quando A é sobrejetor,* (2.4) *fornece a continuidade de* $(\lambda - A)^{-1}$ *e a condição* (ii) *do Teorema 2.8 está satisfeita.*

Usaremos o seguinte resultado:

Lema 2.11. *Seja* $T \in \mathscr{L}(X)$ *com* $\|T\| < 1$ *então a série* $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ *é absolutamente convergente e* $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. *Além disso* $\|(I-T)^{-1}\| \leqslant (1 - \|T\|)^{-1}$.

$\Diamond$

O Teorema de Lumer-Phillips diz que com uma consideração adicional os operadores dissipativos geram semigrupos fortemente contínuos.

Teorema 2.12. *(Lumer - Phillips) Seja* $A : \mathscr{D}(A) \subset X \to X$, $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$.

(i) *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações então A é dissipativo.*

(ii) *Se A é dissipativo e $R(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$ então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

Demonstração: (i) Se A é o gerador infinitesimal de $T(t)$ com $\|T(t)\| \leqslant 1$ então pelo Teorema 2.8 temos que $(0,\infty) \subset \rho(A)$, logo $R(\lambda - A) = X, \ \forall \lambda > 0$.

Dados $x \in \mathscr{D}(A), x^* \in J(x)$ então

$$|<x^*, T(t)x>| \leqslant \|T(t)x\|\|x^*\| \leqslant \|T(t)\|\|x\|\|x^*\| \leqslant \|x\|^2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} Re\left\langle x^*, \frac{T(t)x - x}{t} \right\rangle &= \frac{1}{t}(Re <x^*, T(t)x> - Re <x^*, x>) = \frac{1}{t}(Re <x^*, T(t)x> - \|x\|^2) \\ &\leqslant \frac{1}{t}(|<x^*, T(t)x>| - \|x\|^2) \leqslant \frac{1}{t}(\|x\|^2 - \|x\|^2) = 0. \end{aligned}$$

Fazendo $t \to 0^+$, obtemos $Re <x^*, Ax> \leqslant 0$. Portanto A é dissipativo.

(ii) Sejam $\lambda > 0$ e $x \in \mathscr{D}(A)$. Como A é dissipativo segue do Lema 2.10 que

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geqslant \lambda \|x\|_X \tag{2.7}$$

De 2.7 segue a injetividade de $(\lambda - A), \ \forall \lambda > 0$. Assim $\lambda_0 - A)$ tem inversa.

Seja $y = (\lambda_0 - A)x$ para $x \in \mathscr{D}(A)$, isto é, $(\lambda_0 - A)^{-1}y = x$. De (2.7) temos

$$\|y\| \geqslant \lambda_0 \|(\lambda_0 - A)^{-1}y\| \Rightarrow \|(\lambda_0 - A)^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{\lambda_0}\|y\|. \tag{2.8}$$

o que mostra que $(\lambda_0 - A)^{-1}$ é contínua, portanto fechada e $\lambda_0 \in \rho(A)$. Como $(\lambda_0 - A) = ((\lambda_0 - A)^{-1})^{-1}$ segue que $(\lambda_0 - A)$ é fechada.

Seja $\Lambda = \{\lambda > 0 : \lambda \in \rho(A)\} = (0,\infty) \cap \rho(A)$. Temos que $\Lambda \neq \emptyset$, pois $\lambda_0 \in \Lambda$.

Como $\rho(A)$ é aberto em $(0,\infty)$ segue que Λ é aberto em $(0,\infty)$. Vamos provar que Λ é fechado em $(0,\infty)$.

De fato, consideremos $\lambda > 0$ e a sequência $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}, \lambda_n \in \Lambda$ com $\lambda_n \to \lambda$. Temos

$$(\lambda - A) = ((\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1} + I)(\lambda_n - A). \tag{2.9}$$

Para que $\lambda \in \Lambda$, basta mostrarmos que $\lambda \in \rho(A)$, ou seja, que $(\lambda - A)$ tem inversa limitada, para isto, basta que o lado direito de (2.9) seja invertível com inversa limitada. Como $\lambda_n \in \rho(A)$, $(\lambda_n - A)$ tem inversa limitada, assim devemos provar que $((\lambda - \lambda_n)(\lambda - A)^{-1} + I)$ tem inversa limitada.

Como $\lambda_n \in \rho(A)$, segue de (2.8) que:

$$\|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}\| = |\lambda - \lambda_n| \|(\lambda_n - A)_n^{-1}\| \leqslant |\lambda - \lambda_n| \frac{1}{\lambda_n} \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Conseqüentemente

$$\|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}\| < 1, \text{ para n suficientemente grande.}$$

Segue do Lema 2.11 que $(\lambda - \lambda_n)(\lambda - A)^{-1} + I$ tem inversa limitada, conseqüentemente $(\lambda - A)$ tem inversa limitada com inversa dada por $(\lambda - A)^{-1} = (\lambda_n - A)^{-1}((\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1} + I)^{-1}$ e portanto $\lambda \in \Lambda = (0,\infty) \cap \rho(A)$.

Logo Λ é aberto e fechado em $(0,\infty)$ que é conexo então $\Lambda = (0,\infty)$, logo $(0,\infty) \subset \rho(A)$. Portanto, dado $\lambda > 0$ temos $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Assim, A é fechado, A é densamente definido, $(0,\infty) \subset \rho(A)$ e $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0.$

Segue do Teorema 2.8 que A gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações.

■

Corolário 2.13. *Seja $A : \mathscr{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado e densamente definido. Se ambos A e A^* são dissipativos então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações sobre X.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.12 é suficiente provar que $R(\lambda - A) = X$ para algum $\lambda > 0$.

Como A é dissipativo, segue do Lema 2.10 que

$$\|(\lambda - A)x\| \geqslant \lambda \|x\|, \tag{2.10}$$

para todo $x \in \mathscr{D}(A)$ e $\lambda > 0$.

$R(I-A)$ é fechado em X, pois se $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in R(I-A)$ com $f_n \to f$ quando $n \to \infty$ então existe seqüência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathscr{D}(A)$ com $(I-A)x_n = f_n \to f$. Como

$$\|(I-A)(x_n - x_m)\| \geqslant \|x_n - x_m\| \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leqslant \|(I-A)(x_n - x_m)\| = \|f_n - f_m\| \to 0$$

para $n,m \geqslant n_0$. Logo a seqüência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em X que é completo, portanto $x_n \to x$ quando $n \to \infty$.

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - Ax_n) = f \Rightarrow Ax_n \to x - f.$$

Sendo A fechado, temos $x \in \mathscr{D}(A)$ e $Ax = x - f \Rightarrow f = (I-A)x \in R(I-A)$.

Portanto, $R(I-A)$ é fechada.

Se $\overline{R(I-A)} = R(I-A) \neq X$ segue da Proposição 1.17 que existe $x^* \in X'$ tal que $x^* \neq 0$,

$$< x^*, (I-A)x >= 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}(A)$$

Então para todo $x \in \mathscr{D}(A)$

$$< (I-A)^* x^*, x >= 0 \Rightarrow (I-A)^* x^* = 0 \Rightarrow (I-A^*)x^* = 0$$

e como A^* é dissipativo segue que

$$\|(I-A^*)x^*\| \geqslant \|x^*\| \Rightarrow \|x^*\| \leqslant 0 \Rightarrow x^* = 0$$

que é uma contradição. Portanto $R(I-A) = X$.

Segue do Teorema 2.12 com $\lambda_0 = 1 > 0$ que A gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações. ∎

2.3 Condições sob as quais um operador gera um semigrupo fortemente contínuo

O objetivo dessa seção é o de mostrar que com condições adicionais os operadores setoriais geram semigrupos fortemente contínuos, para isso usaremos o conceito de imagem numérica.

Definição 2.14. *Seja $A : \mathscr{D}(A) \subset X \to X$. A imagem numérica de A é o conjunto*

$$W(A) = \{< x^*, Ax >: \|x^*\|_{X'} = \|x\|_X = 1, < x^*, x >= 1, x \in \mathscr{D}(A)\} \subset \mathbb{C}.$$

No caso em que X é um espaço de Hilbert,

$$W(A) = \{< x, Ax >: x \in \mathscr{D}(A), \|x\|_X = 1\}.$$

Teorema 2.15. *Seja $A : \mathscr{D}(A) \subset X \to X$ um operador fechado densamente definido. Seja $W(A)$ a imagem numérica de A e Σ um subconjunto aberto e conexo em $\mathbb{C} \backslash W(A)$. Então*

(i) *$\forall \lambda \notin \overline{W(A)}$, $\lambda - A$ é injetora e satisfaz para todo $x \in \mathscr{D}(A)$, $\|(\lambda - A)x\|_X \geqslant d(\lambda, W(A))\|x\|_X$, onde $d(\lambda, W(A))$ é a distância de λ a $W(A)$.*

(ii) *Se $\Sigma \cap \rho(A) \neq \emptyset$ então $\Sigma \subset \rho(A)$ e para todo $\lambda \in \Sigma$, vale $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant \frac{1}{d(\lambda, W(A))}$.*

Demonstração: (i) Sejam $\lambda \notin \overline{W(A)}$ e $x \in \mathscr{D}(A)$ com $\|x\| = 1$, pela Proposição 1.5 existe $x^* \in X', \|x^*\|_{X'} = \|x\| = 1$ e $< x^*, x >= \|x\|^2 = 1$. Então

$$\begin{aligned} 0 < \|x\| d(\lambda, W(A)) = d(\lambda, W(A)) &\leqslant |\lambda - < x^*, Ax > | = |\lambda < x^*, x > - < x^*, Ax > | \\ = | < x^*, \lambda x - Ax > | &\leqslant \|x^*\| \|(\lambda - A)x\| = \|(\lambda - A)x\|. \end{aligned}$$

Assim para $x \in \mathscr{D}(A)$, tomando $\frac{x}{\|x\|}$ obtemos:

$$0 < d(\lambda, W(A)) \leqslant \left\| (\lambda - A) \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|(\lambda - A)x\|,$$

isto é,

$$\|(\lambda - A)x\| \geqslant d(\lambda, W(A))\|x\|,$$

de onde segue a injetividade de $(\lambda - A)$.

(ii) Seja $\Sigma \cap \rho(A) \neq \emptyset$. Sabemos que $\Sigma \cap \rho(A)$ é aberto. Mostremos que $\Sigma \cap \rho(A)$ é fechado em Σ.

Seja $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\lambda_n \in \Sigma \cap \rho(A)$ com $\lambda_n \to \lambda \in \Sigma$ quando $n \to \infty$. Provemos que $\lambda \in \rho(A)$.

Como $\lambda \in \Sigma$ e Σ é aberto com $\Sigma \subset \mathbb{C} \backslash W(A)$ então $d(\lambda, W(A)) > 0$.

Afirmamos que $|\lambda - \lambda_n| < d(\lambda_n, W(A))$ para $n \geqslant n_0$. Suponha que para todo N existe $n \geqslant N$ com $|\lambda - \lambda_n| \geqslant d(\lambda_n, W(A)$. Seja $N = 1$, existe $n_1 \geqslant 1$ com $|\lambda_{n_1} - \lambda| \geqslant d(\lambda_{n_1}, W(A))$ para $N = n_1$ existe $n_2 \geqslant n_1$ com $|\lambda_{n_2} - \lambda| \geqslant d(\lambda_{n_2}, W(A))$. Continuando assim temos que para a subsequência $\{\lambda_{n_k}\}$, vale $|\lambda_{n_k} - \lambda| \geqslant d(\lambda_{n_k}, W(A))$ logo $\lim d(\lambda_{n_k}, W(A)) = 0$. Como a função $d(\cdot, W(A))$ é contínua e $\lambda_{n_k} \to \lambda$, segue que $d(\lambda, W(A)) = 0$, portanto $\lambda \in \overline{W(A)}$. Por hipótese, $\Sigma \cap W(A) = \emptyset$, temos $\Sigma \cap \overline{W(A)} = \emptyset$. Conseqüentemente, $\lambda \notin \Sigma$, o que é absurdo.

Portanto, para $n \geqslant n_0$ vale

$$d(\lambda_n, W(A)) > |\lambda - \lambda_n| \to 0. \tag{2.11}$$

Como $\lambda_n \notin \overline{W(A)}$ segue de (i), que para todo $x \in \mathscr{D}(A)$

$$\|(\lambda_n - A)x\| \geqslant d(\lambda_n, W(A))\|x\|.$$

Fazendo $y = (\lambda_n - A)x \Rightarrow (\lambda_n - A)^{-1}y = x$, então

$$\|y\| \geqslant d(\lambda_n, W(A))\|(\lambda_n - A)^{-1}y\|,$$

ou seja,

$$\|(\lambda_n - A)^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{d(\lambda_n, W(A))}\|y\| \Rightarrow \|(\lambda_n - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{d(\lambda_n, W(A))}$$

Conseqüentemente, de (2.11) temos

$$\|(\lambda_n - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{d(\lambda_n, W(A))} < \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|} \Rightarrow |\lambda - \lambda_n|\|(\lambda_n - A)^{-1}\| < 1. \tag{2.12}$$

Como

$$(\lambda - A) = (I - (\lambda_n - \lambda)(\lambda_n - A)^{-1})(\lambda_n - A) \text{ e } \|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}\| < 1,$$

segue do Lema 2.11 que $(I - (\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1})$ é inversível com inversa limitada e $(\lambda_n - A)$ tem inversa limitada, pois $\lambda_n \in \rho(A)$. Desta forma, temos que $(\lambda - A)$ é inversível com inversa limitada, portanto $\lambda \in \rho(A)$.

Portanto, $\Sigma \cap \rho(A)$ é aberto e fechado em Σ que é conexo. Como $\Sigma \neq \emptyset$ então $\Sigma \cap \rho(A) = \Sigma$ e assim $\Sigma \subset \rho(A)$, além disso, de (2.12) obtemos que para todo $\lambda \in \Sigma$,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{d(\lambda, W(A))}.$$

■

Definição 2.16. *Dizemos que $A : \mathscr{D}(A) \subset H \to H$ auto-adjunto é limitado superiormente se para algum $a \in \mathbb{R}$*

$$< Ax, x > \leqslant a < x, x >, \ \forall x \in \mathscr{D}(A).$$

Definição 2.17. *Seja $A : \mathscr{D}(A) \subset X \to X$, dizemos que $-A$ é setorial se A é densamente definido, A é fechado e $\Sigma_{a,\varphi} \subset \rho(A)$, onde $\Sigma_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |arg(\lambda - a)| < \varphi\}$ para algum $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \frac{c}{|\lambda - a|}, \ \forall \lambda \in \Sigma_{a,\varphi}$.*

O próximo resultado nos fornece condições sob as quais um operador gera um semigrupo fotemente contínuo.

Proposição 2.18. *Seja $A : \mathscr{D}(A) \subset H \to H$ um operador auto-adjunto e H espaço de Hilbert. Segue que A é fechado e densamente definido. Suponha que A seja limitado superiormente. Então $\mathbb{C} \backslash (-\infty, a] \subset \rho(A)$ e existe $M \geqslant 1$, dependendo somente de φ, $M = \frac{1}{\sin(\varphi)}$, tal que $\|(A - \lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda - a|}$ para todo $\lambda \in \Sigma_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a) < \varphi\}, \varphi < \pi$. Segue que A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ satisfazendo*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(H)} \leqslant e^{at}.$$

Demonstração: Inicialmente vamos localizar a imagem numérica de A. Como H é um espaço de Hilbert, temos

$$W(A) = \{< Ax, x >: \|x\| = 1, x \in \mathscr{D}(A)\}.$$

Como $< Ax, x > \leqslant a < x, x >= a\|x\|^2, \ a \in \mathbb{R}$, segue que

$$W(A) = \{< Ax, x >: \|x\| = 1, x \in \mathscr{D}(A)\} \subset (-\infty, a].$$

Para $x \in \mathscr{D}(A)$, temos

$$< (A - a)x, x > \leqslant 0, \quad < (A^* - a)x, x > \leqslant 0,$$

ou seja, $A - a$ e $(A - a)^* = A^* - a$ são dissipativos. Segue do Corolário 2.13 que $A - a$ gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Segue do Teorema 2.8 que $(0, \infty) \subset \rho(A - a)$ e do Teorema 2.15 temos

$$\mathbb{C} \backslash (-\infty, a] \subset \rho(A), \quad \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{d(\lambda, W(A))}$$

com

$$d(\lambda,W(A)) \geqslant d(\lambda,(-\infty,a]).$$

Assim,

$$\|(\lambda-A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{d(\lambda,(-\infty,a])}, \ \ \forall\lambda\in\mathbb{C}\backslash(-\infty,a].$$

Vamos estimar $d(\lambda,(-\infty,a])$ quando $\lambda\in\mathbb{C}$ é tal que $Re\lambda \geqslant a$ e $Re\lambda < a$.

Se $Re\lambda \geqslant a$, temos $|\lambda-a| \leqslant d(\lambda,W(A))$, já que $W(A)\subset(-\infty,a]$, então

$$\frac{1}{d(\lambda,W(A))} \leqslant \frac{1}{|\lambda-a|} \Rightarrow \|(\lambda-A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda-a|}.$$

Se $Re\lambda < a$. Fazemos um círculo com centro em a, que passa por λ e transladamos λ até ficar sobre o segmento de reta com abertura φ, para algum $\varphi<\pi$ e o chamamos de $\overline{\lambda}$. Veja Figura 1 acima.

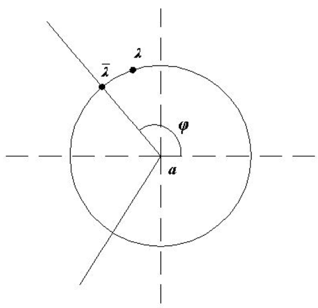

Figura 2.1: Figura 1

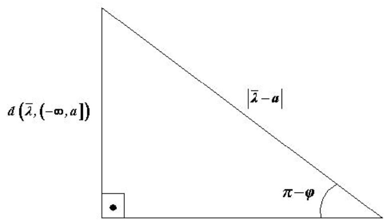

Figura 2.2: Figura 2

Temos que

$$d(\lambda,(-\infty,a]) \geqslant d(\overline{\lambda},(-\infty,a]) = \sin(\pi-\varphi)|\overline{\lambda}-a| = \sin(\varphi)|\lambda-a|.$$

Portanto

$$\|(\lambda-A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{d(\lambda,W(A))} \leqslant \frac{1}{d(\lambda,(-\infty,a])} \leqslant \csc(\varphi)\frac{1}{\lambda-a|}.$$

■

Observação 12. *É possível mostrar que o semigrupo gerado por A é analítico e é dado por*

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_a} e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}d\lambda,$$

onde $\Gamma_a = \partial\{\sum_a\backslash\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda-a| \leqslant r\}\}$ *no setor* $\{t\in\mathbb{C} : |\arg(t)| < \varphi-\frac{\pi}{2}\}$.

2.4 Existência de Solução

O objetivo desta seção é o estudo da existência de solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au(t) = f(t,u(t)), \ t > t_0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{2.13}$$

onde A é um operador setorial e $f : U \to X$ onde $U \subset \mathbb{R}^+ \times X$ é aberto.

Definição 2.19. *Uma função $u : [t_0,t_1] \to X$ é uma solução clássica de* (2.13) *sobre* $[t_0,t_1]$ *se u é contínua sobre* $[t_0,t_1)$, *continuamente diferenciável sobre* (t_0,t_1), $u(t) \in \mathscr{D}(A)$ *para* $t_0 < t < t_1$ *e* (2.13) *é satisfeita para* $[t_0,t_1)$.

Mostra-se que se u é uma solução clássica de (2.13) então u satisfaz a seguinte equação integral:

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(s,u(s))ds. \tag{2.14}$$

Isto motiva a seguinte definição:

Definição 2.20. *Uma solução contínua da equação integral* (2.14) *é denominada solução fraca de* (2.13).

Condição (F) Seja $f : U \to X, U$ como acima, dizemos que $f(t,x)$ é Hölder contínua em t e localmente Lipschitz em x se $(t_1,x_1) \in U$, existe uma vizinhança $V \subset U$ de (t_1,x_1) tal que para $(t,x) \in V$, $(s,y) \in V$,

$$\|f(t,x) - f(s,y)\| \leqslant L(|t-s|^{\theta} + \|x-y\|),$$

para constantes $L > 0, \theta > 0$.

A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em [5], p.56.

Teorema 2.21. *Seja A um operador setorial e $f : U \to X$ satisfaz a condição (F) então para todo dado inicial* $(t_0,x_0) \in U$ *o problema de valor inicial* (2.13) *tem uma única solução local* $u \in \mathrm{C}([t_0,t_1) : X) \cap \mathrm{C}^1((t_0,t_1) : X)$ *onde* $t_1 = t_1(t_0,x_0) > t_0$.

$\Diamond$

Teorema 2.22. *Sejam A e f como no Teorema 2.21 com a condição adicional que para todo conjunto fechado e limitado $B \subset U$ temos $f(B)$ limitado em X. Se u é uma solução de* (2.13) *sobre* (t_0, t_1) *e t_1 é maximal, então ou $t_1 = +\infty$ ou existe uma seqüência $t_n \to t_1^-$ quando $n \to \infty$ tal que* $(t_n, u(t_n)) \to \partial U$*(se U é ilimitado, o ponto no infinito esta incluido em ∂U).*

Demonstração: Suponha $t_1 < \infty$, mas $(t, u(t))$ não entra numa vizinhança N de ∂U para $t_2 \leqslant t \leqslant t_1$, consideramos N da forma $U \backslash B$ onde B é um subconjunto limitado e fechado de U, e $(t, u(t)) \in B$ para $t_2 \leqslant t < t_1$. Mostraremos que existe $u_1 \in B$ tal que $u(t) \to u_1$ em X quando $t \to t_1^-$ então $u(t)$ pode ser estendida através de t_1 considerando a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}w(t) + Aw(t) = f(t, w(t)), t > t_0 \\ w(t_1) = u_1 \end{cases}$$

e isto contradiz a maximalidade de t_1.

Considere $C = \sup\{||f(t,x)||, (t,x) \in B\}$, C está bem definido pois B é limitado e fechado. Primeiramente mostraremos que $||u(t)||$ permanece limitada quando $t \to t_1^-$. Para $t_2 \leqslant t < t_1$, temos:

$$||u(t)|| \leqslant ||e^{-A(t-t_0)}||||u(t_0)|| + \int_{t_0}^{t} ||e^{-A(t-s)}||||f(s, u(s))||ds \leqslant C_1[||u(t_0)|| + (t - t_0)]$$

que é limitado quando $t \to t_1^-$.

Consideremos, $t_2 \leqslant \tau < t < t_1$, assim

$$u(t) - u(\tau) = (e^{-A(t-\tau)} - I)u(\tau) + \int_{\tau}^{t} e^{-A(t-s)} f(s, u(s))ds$$

então

$$||u(t) - u(\tau)|| \leqslant C_2||u(\tau)|| + C_3(t - \tau).$$

Portanto, existe $\lim\limits_{t \to t_1^-} u(t)$ em X. ∎

Capítulo 3

Existência de Variedade Invariante e Atrator para a equação $u_t = u_{xx} + f(u)$

Neste capítulo apresentamos o teorema central do nosso trabalho que irá determinar a existência de um conjunto chamado variedade invariante para um sistema de equações fracamente acoplado. Este resultado pode ser encontrado em [5] e na forma que apresentamos em [3].

Sejam X e Y espaços de Banach, $-A : \mathscr{D}(A) \subset X \to X$ um operador setorial tal que $Re(\sigma(-A)) > 0$ e $B : \mathscr{D}(B) \subset Y \to Y$ é gerador de um C^0-grupo de operadores lineares limitados $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ sobre Y. Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ o semigrupo analítico de operadores lineares limitados gerado por A.

Definição 3.1. *Sejam $f : X \times Y \to X$, $g : X \times Y \to Y$ funções contínuas localmente Lipschitz. Um conjunto $S \subset X \times Y$ é uma variedade invariante para equação diferencial*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x,y) \\ \dot{y} = By + g(x,y) \end{cases}$$

se existe $\sigma : Y \to X$ tal que $S = \{(x,y) \in X \times Y : x = \sigma(y)\}$ e, para qualquer $(x_0,y_0) \in S$, existe uma solução $(x(\cdot),y(\cdot))$ da equação diferencial sobre $\mathbb{R}$, com $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$, tal que $(x(t),y(t))$ está em S, para todo $t \in \mathbb{R}$.

A variedade invariante S é exponencialmente atratora se existem constantes positivas γ e κ tais que

$$\|x(t) - \sigma(y(t))\|_X \leqslant \kappa e^{-\gamma t} \|x(0) - \sigma(y(0))\|_X$$

sempre que $(x(t),y(t))$ é uma solução da equação diferencial.

3.1 Teorema da Variedade Invariante

Estabelecemos inicialmente uma versão generalizada da Desigualdade Gronwall. Para obter a desigualdade estudamos a convergência das séries

$$E_\beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\beta k}}{\Gamma(k\beta+1)} \quad \tilde{E}_\beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\beta k}}{\Gamma((k+1)\beta)}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função-gama,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

As funções E_β e $\tilde{E}_\beta$ são funções inteiras e como demonstrado em [4]

- existe constante c tal que $E_\beta(z) \leqslant ce^z$;
- dado $d > 1$ existe $c' > 0$ tal que $\tilde{E}_\beta(z) \leqslant c'e^{dz}$.

Teorema 3.2. *(Desigualdade de Gronwall Generalizada) Sejam $t < r$, $\phi : [t,r] \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua, $a : [t,r] \to \mathbb{R}^+$ uma função localmente integrável, $b > 0$ e $0 < \beta \leqslant 1$. Assuma que*

$$\phi(t) \leqslant a(t) + b\int_t^r (s-t)^{\beta-1}\phi(s)ds, t \leqslant r. \tag{3.1}$$

Então,

$$\phi(t) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (B^k a)(t), \tag{3.2}$$

onde

$$B^k a(t) = \int_t^r \frac{(b\Gamma(\beta))^k}{\Gamma(k\beta)} (s-t)^{k\beta-1} a(s)ds.$$

- *Se $a(t) \equiv a$ é constante então*

$$\phi(t) \leqslant aE_\beta((b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)) \leqslant ace^{(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)}. \tag{3.3}$$

- *Se $\dot{a}(t) \leqslant 0$ e $\beta = 1$ então*

$$\phi(t) \leqslant a(t)e^{b(r-t)}.$$

- *Se $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(s-r)} ds$, $\rho > 0$, então*

$$\phi(t) \leqslant \frac{c_0}{b}[E_\beta((b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)) - 1] \leqslant \frac{c_0}{b}[ce^{(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)} - 1]. \tag{3.4}$$

• *Se* $\psi : [t,r] \to \mathbb{R}^+$ *é uma função contínua e*

$$a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho s} \psi(s)\, ds,$$

com $\rho > 0$, *então*

$$\phi(t) \leqslant c_0 c' \Gamma(\beta) \int_t^r (s-t)^{\beta-1} e^{\rho s} e^{d(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(s-t)} \psi(s) ds. \tag{3.5}$$

Demonstração: Seja

$$(B\phi)(t) = b \int_t^r (s-t)^{\beta-1} \phi(s) ds.$$

Segue de (3.1) que

$$\begin{aligned} \phi(t) \leqslant a(t) + (B\phi)(t) &\leqslant a(t) + (Ba)(t) + (B^2\phi)(t) \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (B^k a)(t) + (B^n \phi)(t). \end{aligned}$$

Suponha por indução que

$$(B^{n-1}\phi)(t) = \int_t^r \frac{(b\Gamma(\beta))^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} (s-t)^{(n-1)\beta-1} \phi(s) ds$$

então

$$\begin{aligned} B(B^{n-1}\phi)(t) &= b \int_t^r (s-t)^{\beta-1} \left[\int_s^r \frac{(b\Gamma(\beta))^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} (\theta-s)^{(n-1)\beta-1} \phi(\theta) d\theta \right] ds \\ &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) \left[\int_t^\theta (s-t)^{\beta-1} (\theta-s)^{(n-1)\beta-1} ds \right] d\theta \\ &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) \left[\int_0^{\theta-t} u^{\beta-1} (\theta-t-u)^{(n-1)\beta-1} du \right] d\theta \\ &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) \left[\int_0^{\theta-t} u^{\beta-1} ((\theta-t)(1-\frac{u}{\theta-t}))^{(n-1)\beta-1} du \right] d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo $z = \frac{u}{\theta-t}$ temos

$$\begin{aligned} (B^n\phi)(t) &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta)(\theta-t)^\beta \left[\int_0^1 z^{\beta-1} (\theta-t)^{(n-1)\beta-1} (1-z)^{(n-1)\beta-1} dz \right] d\theta \\ &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta)(\theta-t)^{n\beta-1} d\theta \int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{(n-1)\beta-1} dz. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{(n-1)\beta-1} dz = \mathbf{B}(\beta,(n-1)\beta) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma((n-1)\beta)}{\Gamma(n\beta)},$$

onde

$$\mathbf{B}(r,s) = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}dx,$$

então

$$(B^n\phi)(t) = \frac{(b\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)}\int_t^r \phi(\theta)(\theta - t)^{n\beta-1}d\theta.$$

Vamos estudar a convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n\beta)}.$$

Se $a_n = \Gamma(n\beta)^{-1}$ então

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\Gamma(n\beta)}{\Gamma((n+1)\beta)} = \frac{\mathbf{B}(\beta, n\beta)}{\Gamma(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{n\beta-1}dt.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para $f_n = t^{\beta-1}(1-t)^{n\beta-1}$, com $f_n \leqslant t^{\beta-1}$ para $n \geqslant 1/\beta$, que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

portanto o raio de convergência da série é $+\infty$.

Logo $B^n\phi(t) \to 0$, quando $n \to \infty$ e

$$\phi(t) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}(B^n a)(t).$$

•Se $a(t) \equiv a =$ constante então

$$\begin{aligned}(B^n a)(t) &= \frac{(b\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)}\int_t^r (s-t)^{n\beta-1}a ds\\ &= \frac{a(b\Gamma(\beta))^n}{n\beta\Gamma(n\beta)}(r-t)^{n\beta} = \frac{a(b\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta+1)}(r-t)^{n\beta}.\end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}\phi(t) &\leqslant aE_\beta((b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t))\\ &\leqslant ace^{(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)}.\end{aligned}$$

• Se $\dot{a}(t) \leqslant 0$ e $\beta = 1$, integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}(B^n a)(t) &= \frac{b^n}{\Gamma(n)}\left[\frac{1}{n}a(r)(r-t)^n - \frac{1}{n}\int_t^r (s-t)^n \dot{a}(s)ds\right]\\ &\leqslant \frac{b^n}{\Gamma(n)}\left[\frac{1}{n}a(r)(r-t)^n - \frac{1}{n}(r-t)^n\int_t^r \dot{a}(s)ds\right]\\ &= \frac{b^n}{n\Gamma(n)}(r-t)^n a(t).\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(B^n a)(t) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(b(r-t))^n}{\Gamma(n+1)}a(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(b(r-t))^n}{n!}a(t) = e^{b(r-t)}a(t).$$

Portanto,

$$\phi(t) \leqslant a(t)e^{b(r-t)}.$$

•Se $a(t) = c_0\int_t^r (s-t)^{-\alpha}e^{\rho(s-r)}ds$, com $\alpha = 1-\beta$ então

$$\begin{aligned}
(B^n a)(t) &= c_0\frac{b^n\Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)}\int_t^r (s-t)^{n\beta-1}\left[\int_s^r(\theta-s)^{-\alpha}e^{\rho(\theta-r)}d\theta\right]ds\\
&= c_0\frac{b^n\Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)}\int_t^r e^{\rho(\theta-r)}\left[\int_t^\theta(s-t)^{n\beta-1}(\theta-s)^{-\alpha}ds\right]d\theta\\
&= c_0\frac{b^n\Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)}\int_t^r e^{\rho(\theta-r)}\left[\int_0^{\theta-t}u^{n\beta-1}(\theta-t-u)^{-\alpha}du\right]d\theta.
\end{aligned}$$

Fazendo $v = \frac{u}{\theta-t}$ obtemos

$$\begin{aligned}
B^n a(t) &= c_0\frac{b^n\Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)}\int_t^r e^{\rho(\theta-r)}\left[\int_0^1 v^{n\beta-1}(\theta-t)^{n\beta-1}(\theta-t)^{1-\alpha}(1-v)^{-1+\beta}dv\right]d\theta\\
&= c_0\frac{b^n\Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)}\int_t^r e^{\rho(\theta-r)}(\theta-t)^{(n+1)\beta-1}d\theta\mathbf{B}(\beta,n\beta)\\
&= c_0\frac{b^n\Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)}\int_t^r e^{\rho(\theta-r)}(\theta-t)^{(n+1)\beta-1}d\theta\\
&\leqslant c_0\frac{b^n\Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)}\int_0^{r-t}s^{(n+1)\beta-1}ds.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(B^n a)(t) &\leqslant c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n\Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)}\int_0^{r-t}s^{(n+1)\beta-1}ds\\
&= c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n\Gamma(\beta)^{n+1}(r-t)^{(n+1)\beta}}{\Gamma((n+1)\beta+1)}\\
&= \frac{c_0}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b^{1/\beta}\Gamma(\beta)^{1/\beta}(r-t))^{(n+1)\beta}}{\Gamma((n+1)\beta+1)}\\
&= \frac{c_0}{b}[E_\beta(b^{1/\beta}\Gamma(\beta)^{1/\beta}(r-t))-1].
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\leqslant \frac{c_0}{b}[E_\beta(b^{1/\beta}\Gamma(\beta)^{1/\beta}(r-t))-1]\\
&\leqslant \frac{c_0}{b}[ce^{b^{1/\beta}\Gamma(\beta)^{1/\beta}(r-t)}-1].
\end{aligned}$$

- Se $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho s} \psi(s) ds$ então

$$
\begin{aligned}
(B^n a)(t) &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r (s-t)^{n\beta-1} \left[\int_s^r (\theta - s)^{-\alpha} e^{\rho\theta} \psi(\theta) d\theta \right] ds \\
&= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho\theta} \psi(\theta) \left[\int_t^\theta (s-t)^{n\beta-1} (\theta - s)^{-\alpha} ds \right] d\theta \\
&= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho\theta} \psi(\theta) (\theta - t)^{(n+1)\beta - 1} \mathbf{B}(\beta, n\beta) d\theta \\
&= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_t^r e^{\rho\theta} \psi(\theta) (\theta - t)^{(n+1)\beta - 1} d\theta.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\phi(t) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (B^n a)(t) &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_t^r e^{\rho\theta} \psi(\theta) (\theta - t)^{(n+1)\beta-1} d\theta \\
&= c_0 \Gamma(\beta) \int_t^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^n (\theta - t)^{n\beta}}{\Gamma((n+1)\beta)} e^{\rho\theta} \psi(\theta) (\theta - t)^{\beta - 1} d\theta \\
&= c_0 \Gamma(\beta) \int_t^r \tilde{E}_\beta((b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(\theta - t)) e^{\rho\theta} \psi(\theta) (\theta - t)^{\beta-1} d\theta \\
&\leqslant c_0 c' \Gamma(\beta) \int_t^r e^{d(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(\theta - t)} e^{\rho\theta} \psi(\theta) (\theta - t)^{\beta-1} d\theta.
\end{aligned}
$$

■

Provaremos agora o teorema que irá assegurar a existência de uma variedade invariante exponencialmente atratora para o problema proposto.

Teorema 3.3. *(Teorema da Variedade Invariante) Sejam X_n, Y_n seqüências de espaços de Banach, $A_n : \mathscr{D}(A_n) \subset X_n \to X_n$ uma seqüência de operadores setoriais e $B_n : \mathscr{D}(B_n) \subset Y_n \to Y_n$ uma seqüência de geradores de C^0-grupos de operadores lineares limitados. Suponha que $f_n : X_n \times Y_n \to X_n$ e $g_n : X_n \times Y_n \to Y_n$ são seqüência de funções satisfazendo*

$$
\begin{aligned}
&\| f_n(x,y) - f_n(z,w) \|_{X_n} \leqslant L_f (\|x - z\|_{X_n} + \|y - w\|_{Y_n}) \\
&\| f_n(x,y) \|_{X_n} \leqslant N_f
\end{aligned}
$$

para todo $(x,y), (z,w)$ em $X_n \times Y_n$, e

$$
\begin{aligned}
&\| g_n(x,y) - g_n(z,w) \|_{Y_n} \leqslant L_g (\|x - z\|_{X_n} + \|y - w\|_{Y_n}) \\
&\| g_n(x,y) \|_{Y_n} \leqslant N_g
\end{aligned}
$$

para todo (x,y), (z,w) em $X_n \times Y_n$. Assuma que

(i) $\|e^{-A_n t} w\|_{X_n} \leqslant M_a e^{-\beta(n)t} \|w\|_{X_n}$, $t \geqslant 0$

(ii) $\|e^{-B_n t} z\|_{Y_n} = \|e^{B_n(-t)} z\|_{Y_n} \leqslant M_b e^{-\rho(n)t} \|z\|_{Y_n}$, $t \leqslant 0$

para qualquer $w \in X_n$ e $z \in Y_n$, onde $\beta(n) - \rho(n) \to +\infty$ quando $n \to +\infty$.

Considere o sistema fracamente acoplado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -A_n x + f_n(x,y) \\ \dot{y} &= -B_n y + g_n(x,y). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Então, para n suficientemente grande, existe uma variedade invariante exponencialmente atratora para (3.6)

$$S = \{(x,y) : x = \sigma_n(y), y \in Y_n\}$$

onde $\sigma_n : Y_n \to X_n$ satisfaz

$$s(n) = \sup_{y \in Y_n} \|\sigma_n(y)\|_{X_n} \quad e \quad \|\sigma_n(y) - \sigma_n(z)\|_{X_n} \leqslant l(n)\|y - z\|_{Y_n},$$

com $s(n), l(n) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Se f, g são suaves, então σ_n é suave e sua derivada $D\sigma_n$ satisfaz

$$\sup_{y \in Y_n} \|D\sigma_n(y)\|_{\mathscr{L}(Y_n, X_n)} \leqslant l(n).$$

Demonstração: Iremos provar inicialmente a existência da variedade invariante. Dados $D > 0$ e $\Delta > 0$, seja $\sigma_n : Y_n \to X_n$ satisfazendo

$$|||\sigma_n||| := \sup_{y \in Y_n} \|\sigma_n(y)\|_{X_n} \leqslant D, \qquad \|\sigma_n(y) - \sigma_n(y')\|_{X_n} \leq \Delta \|y - y'\|_{Y_n}. \tag{3.7}$$

Seja $y(t) = y(t, \tau, \eta, \sigma_n)$, definida para $t < \tau$, a solução de

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -B_n y + g_n(\sigma_n(y), y) \\ y(\tau) = \eta \end{cases}$$

e defina

$$G(\sigma_n)(\eta) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-A_n(\tau - s)} f_n(\sigma_n(y(s)), y(s)) ds.$$

Note que,

$$\|G(\sigma_n)(\cdot)\|_{X_n} \leqslant \int_{\infty}^{\tau} \|e^{-A_n(\tau-s)}\| \| f_n(\sigma_n(y(s)), y(s))\|_{X_n} ds \leqslant N_f M_a \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(n)(\tau - s)} ds. \tag{3.8}$$

Seja n_0 tal que, para $n \geq n_0$ $\|G(\sigma_n)(\cdot)\|_{X_n} \leqslant D$.

Sejam σ_n, σ_n' funções satisfazendo (3.7). Se $\eta, \eta' \in Y$ sejam $y(t) = y(t,\tau,\eta,\sigma_n)$ como acima e $y'(t) = y(t,\tau,\eta',\sigma_n')$, definida para $t < \tau$, solução de

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -B_n y + g_n(\sigma_n'(y), y) \\ y(\tau) = \eta'. \end{cases}$$

Então de (2.14) temos

$$\begin{aligned} y(t) - y'(t) = e^{-B_n(t-\tau)}\eta + \int_\tau^t e^{-B_n(t-s)} g_n(\sigma_n(y(s)), y(s))ds \\ - e^{-B_n(t-\tau)}\eta' - \int_\tau^t e^{-B_n(t-s)} g_n(\sigma_n'(y'(s)), y'(s))ds \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \|y_n(t) - y_n'(t)\|_{Y_n} &\leqslant \|e^{-B_n(t-\tau)}(\eta - \eta')\|_{Y_n} \\ &+ \int_t^\tau \|e^{-B_n(t-s)}[g_n(\sigma_n(y_n(s)), y_n(s)) - g_n(\sigma_n'(y_n'(s)), y_n'(s))]\|_{Y_n} ds \\ &\leqslant M_b e^{\rho(n)(\tau-t)}\|\eta - \eta'\|_{Y_n} \\ &+ M_b \int_t^\tau e^{\rho(n)(s-t)}\|g_n(\sigma_n(y_n(s)), y_n(s)) - g_n(\sigma_n'(y_n'(s)), y_n'(s))\|_{Y_n} ds \\ &\leqslant M_b e^{\rho(n)(\tau-t)}\|\eta - \eta'\|_{Y_n} \\ &+ M_b L_g \int_t^\tau e^{\rho(n)(s-t)}[\|\sigma_n(y_n(s)) - \sigma_n(y_n'(s))\|_{X_n} \\ &+ \|\sigma_n(y_n'(s)) - \sigma_n'(y_n'(s))\|_{X_n} + \|y_n(s) - y_n'(s)\|_{Y_n}]ds \\ &\leqslant M_b e^{\rho(n)(\tau-t)}\|\eta - \eta'\|_{Y_n} \\ &+ M_b L_g \int_t^\tau e^{\rho(n)(s-t)} ds \sup_{y_n'(s) \in Y_n} \|(\sigma_n - \sigma_n')(y_n'(s))\|_{X_n} \\ &+ M_b L_g (1+\Delta) \int_t^\tau e^{\rho(n)(s-t)}\|y_n(s) - y_n'(s)\|_{Y_n} ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|y_n(t) - y_n'(t)\|_{Y_n} \leqslant M_b e^{\rho(n)(\tau-t)}\|\eta - \eta'\|_{Y_n} \\ + M_b L_g |||\sigma_n - \sigma_n'||| \int_t^\tau e^{\rho(n)(s-t)} ds \\ + M_b L_g (1+\Delta) \int_t^\tau e^{\rho(n)(s-t)}\|y_n(s) - y_n'(s)\|_{Y_n} ds. \end{aligned}$$

Seja

$$\phi(t) = e^{\rho(n)(t-\tau)}\|y_n(t) - y_n'(t)\|_{Y_n}.$$

Então,

$$\phi(t) \leqslant M_b\left[\|\eta-\eta'\|_{Y_n} + L_g\int_t^{\tau} e^{\rho(n)(s-\tau)}ds|||\sigma_n-\sigma_n'|||\right]$$
$$+M_bL_g(1+\Delta)\int_t^{\tau}\phi(s)ds$$

isto é,

$$\phi(t) \leqslant M_b\left[\left\|\eta-\eta'\right\|_{Y_n} + \frac{L_g}{\rho(n)}|||\sigma_n-\sigma_n'|||\right]+M_bL_g(1+\Delta)\int_t^{\tau}\phi(s)ds.$$

Segue do Teorema 3.2 que

$$\phi(t) \leqslant [c_1\|\eta-\eta'\|_{Y_n} + c_2\left\|\sigma_n-\sigma_n'\right\|]e^{(M_bL_g(1+\Delta))(\tau-t)},$$

ou seja,

$$\|y_n(t)-y_n'(t)\|_{Y_n} \leqslant [c_1\|\eta-\eta'\|_{Y_n} + c_2\left\|\sigma_n-\sigma_n'\right\|]e^{[\rho(n)+c_\Gamma](\tau-t)} \tag{3.9}$$

onde $c_\Gamma = M_bL_g(1+\Delta)$.

Utilizando (3.9) temos

$$\begin{aligned}
&\|G(\sigma_n)(\eta)-G(\sigma_n')(\eta')\|_{X_n}\\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\tau}\|e^{-A_n(\tau-s)}[f_n(\sigma_n(y(s)),y(s)) - f_n(\sigma_n'(y'(s)),y'(s))]\|_{X_n}ds\\
&\leqslant M_a\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\beta(n)(\tau-s)}\|f_n(\sigma_n(y(s)),y(s)) - f_n(\sigma_n'(y'(s)),y'(s))\|_{X_n}ds\\
&\leqslant M_a\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\beta(n)(\tau-s)}L_f(\|\sigma_n(y(s))-\sigma_n'(y'(s))\|_{X_n}+\|y(s)-y'(s)\|_{Y_n})ds\\
&\leqslant M_a\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\beta(n)(\tau-s)}L_f((1+\Delta)\|y(s)-y'(s)\|_{Y_n}+|||\sigma_n-\sigma_n'|||)ds\\
&\leqslant M_a\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\beta(n)(\tau-s)}L_f[(1+\Delta)[c_1\|\eta-\eta'\|_{Y_n}+c_2|||\sigma_n-\sigma_n'|||]e^{[\ \rho(n)+c_\Gamma](\tau-s)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +|||\sigma_n-\sigma_n'|||]ds\\
&= M_a\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\beta(n)(\tau-s)}L_f[1+c_2(1+\Delta)e^{[\ \rho(n)+c_\Gamma](\tau-s)}]ds|||\sigma_n-\sigma_n'|||\\
&\quad +c_1M_aL_f(1+\Delta)\int_{-\infty}^{\tau}e^{-[\beta(n)-\rho(n)-c_\Gamma](\tau-s)}ds\|\eta-\eta'\|_{Y_n}.
\end{aligned}$$

Sejam

$$I_\sigma(n) = M_aL_f\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\beta(n)(\tau-s)}\left(1+c_2(1+\Delta)e^{[\rho(n)+c_\Gamma](\tau-s)}\right)ds$$

e

$$I_\eta(n) = c_1 M_a L_f(1+\Delta)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-[\beta(n)-\rho(n)-c_\Gamma](\tau-s)}ds.$$

Se $\theta < 1$, existe n_0 tal que para $n \geqslant n_0$ temos

$$I_\sigma(n) \leqslant \theta, \qquad I_\eta(n) \leqslant \Delta \tag{3.10}$$

e

$$\|G(\sigma_n)(\eta) - G(\sigma_n')(\eta')\|_{X_n} \leqslant I_\eta(n)\|\eta - \eta'\|_{Y_n} + I_\sigma(n)\left\|\sigma_n - \sigma_n'\right\|. \tag{3.11}$$

As desigualdades (3.8) e (3.11) implicam que G é uma contração da classe de funções que satisfazem (3.7) nela mesma.

Seja $\sigma_n^* = G(\sigma_n^*)$ o único ponto fixo de G nesta classe. Provaremos agora que

$$S = \{(\sigma_n^*(y), y) : y \in Y_n\}$$

é uma variedade invariante para (3.6).

Seja $(x_0, y_0) \in S$, $x_0 = \sigma_n^*(y_0)$. Denote por $y_n^*(t)$ a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -B_n y + g_n(\sigma_n^*(y), y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

e considere a curva $(\sigma_n^*(y_n^*(t)), y_n^*(t)) \in S$, $t \in \mathbb{R}$. Mas a única solução de

$$\dot{x} = -A_n x + f_n(\sigma_n^*(y_n^*(t)), y_n^*(t))$$

que permanece limitada quando $t \to -\infty$ é

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-A_n(t-s)} f_n(\sigma_n^*(y_n^*(s)), y_n^*(s))ds = G(\sigma_n^*)(y_n^*(t)) = \sigma_n^*(y_n^*(t)).$$

Portanto, $(\sigma_n^*(y_n^*(t)), y_n^*(t))$ é uma solução de (3.6) através de (x_0, y_0) e com isto provamos a invariância.

Segue imediatamente de (3.8) que $s(n) \to 0$ quando $n \to +\infty$ e de (3.11) que $l(n) \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Mostraremos agora que, para n suficientemente grande, existem constantes positivas γ e κ tais que se $(x_n(t), y_n(t))$ é uma solução de (3.6) então

$$\|x_n(t) - \sigma_n^*(y_n(t))\|_{X_n} \leqslant \kappa e^{-\gamma t}\|x_n(t_0) - \sigma_n^*(y_n(t_0))\|_{X_n},$$

ou seja, a variedade invariante S é exponencialmente atratora. Coloque $\xi(t) = x_n(t) - \sigma_n^*(y_n(t))$ e seja $y_n^*(s,t)$, $s \leqslant t$, solução de

$$\begin{cases} \frac{dy_n^*}{ds} = -B_n y_n^* + g_n(\sigma_n^*(y_n^*), y_n^*), & s \leq t \\ y_n^*(t,t) = y_n(t). \end{cases}$$

Então de (2.14),

$$\begin{aligned}
\|y_n^*(s,t) - y_n(s)\|_{Y_n} &\leqslant \|e^{-B_n(s-t)} y_n^*(t,t) - e^{-B_n(s-t)} y_n(t)\| \\
&\quad + \int_s^t \|e^{-B_n(s-\theta)}[g_n(\sigma_n^*(y_n^*(\theta,t)), y_n^*(\theta,t)) - g_n(x_n(\theta), y_n(\theta))]\|_{Y_n} d\theta \\
&\leqslant \int_s^t M_b e^{\rho(n)(\theta-s)} \|g_n(\sigma_n^*(y_n^*(\theta,t)), y_n^*(\theta,t))) - g_n(x_n(\theta), y_n(\theta))\|_{Y_n} d\theta \\
&\leqslant M_b L_g \int_s^t e^{\rho(n)(\theta-s)} [\|\sigma_n^*(y_n^*(\theta,t)) - \sigma_n^*(y_n(\theta,t)) + \sigma_n^*(y_n(\theta,t)) - x_n(\theta)\|_{Y_n} \\
&\quad + \|y_n^*(\theta,t) - y_n(\theta)\|_{Y_n} d\theta \\
&\leqslant M_b L_g \int_s^t e^{\rho(n)(\theta-s)} \left[\|\sigma_n^*(y_n(\theta,t)) - x_n(\theta)\|_{X_n} + (1+\Delta)\|y_n^*(\theta,t) - y_n(\theta)\|_{Y_n}\right] d\theta \\
&= M_b L_g \int_s^t e^{\rho(n)(\theta-s)} [(1+\Delta)\|y_n^*(\theta,t) - y_n(\theta)\|_{Y_n} + \|\xi(\theta)\|_{X_n}] d\theta
\end{aligned}$$

Colocando $z(s) = e^{\rho(n)s} \|y_n^*(s,t) - y_n(s)\|_{Y_n}$ temos

$$z(s) \leqslant M_b L_g (1+\Delta) \int_s^t z(\theta) d\theta + M_b L_g \int_s^t e^{\rho(n)\theta} \|\xi(\theta)\|_{X_n} d\theta.$$

Segue da Desigualdade de Gronwall Generalizada que

$$\|y_n^*(s,t) - y_n(s)\|_{Y_n} \leqslant c_3 \int_s^t e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](\theta-s)} \|\xi(\theta)\|_{X_n} d\theta \tag{3.12}$$

onde $s \leq t$ e $c_\Gamma = M_b L_g (1+\Delta)$.

Seja $s \leqslant t_0 \leqslant t$. Vamos estimar $\|y_n^*(s,t) - y_n^*(s,t_0)\|_{Y_n}$. Temos de (2.14) que

$$\begin{aligned}
\|y_n^*(s,t) - y_n^*(s,t_0)\|_{Y_n} &\leqslant \|e^{-B_n(s-t_0)}[y_n^*(t_0,t) - y_n(t_0)]\|_{Y_n} \\
&\quad + \|\int_{t_0}^s e^{-B_n(s-\theta)}[g_n(\sigma_n^*(y_n^*(\theta,t)), y_n^*(\theta,t)) - g_n(\sigma_n^*(y_n^*(\theta,t_0)), y_n^*(\theta,t_0))] d\theta\|_{Y_n} \\
&\leqslant c_3 M_b e^{\rho(n)(t_0-s)} \int_{t_0}^t e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](\theta-t_0)} \|\xi(\theta)\|_{X_n} d\theta \\
&\qquad + M_b L_g (1+\Delta) \int_s^{t_0} e^{\rho(n)(\theta-s)} \|y_n^*(\theta,t) - y_n^*(\theta,t_0)\|_{Y_n} d\theta.
\end{aligned}$$

Então pela Desigualdade de Gronwall Generalizada onde

$$c_3 M_b e^{\rho(n)t_0} \int_{t_0}^t e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](\theta-t_0)} \|\xi(\theta)\|_{X_n} d\theta$$

é constante em relação a s, que

$$e^{\rho(n)s}\|y_n^*(s,t)-y_n^*(s,t_0)\|_{Y_n}\leqslant cc_3M_b e^{-c_\Gamma s}\int_{t_0}^{t}e^{[\rho(n)+dc_\Gamma]\theta}\|\xi(\theta)\|_{X_n}d\theta,$$

ou seja,

$$\|y_n^*(s,t)-y_n^*(s,t_0)\|_{Y_n}\leqslant c_4\int_{t_0}^{t}e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](\theta-s)}\|\xi(\theta)\|_{X_n}d\theta. \tag{3.13}$$

Podemos agora obter uma estimativa para $\|\xi(t)\|_{X_n}$.

$$\begin{aligned}
\xi(t)-e^{-A_n(t-t_0)}\xi(t_0) &= x_n(t)-e^{-A_n(t-t_0)}x_n(t_0)-\sigma_n^*(y_n(t))+e^{-A_n(t-t_0)}\sigma_n^*(y_n(t_0))\\
&=\int_{t_0}^{t}e^{-A_n(t-s)}f_n(x_n(s),y_n(s))ds-\sigma_n^*(y_n(t))+e^{-A_n(t-t_0)}\sigma_n^*(y_n(t_0))\\
&=\int_{t_0}^{t}e^{-A_n(t-s)}f_n(x_n(s),y_n(s))ds-\int_{-\infty}^{t}e^{-A_n(t-s)}f_n(\sigma_n^*(y_n^*(s,t)),y_n^*(s,t))ds\\
&\quad+e^{-A_n(t-t_0)}\int_{-\infty}^{t_0}e^{-A_n(t_0-s)}f_n(\sigma_n^*(y_n^*(s,t_0)),y_n^*(s,t_0))ds\\
&=\int_{t_0}^{t}e^{-A_n(t-s)}[f_n(x_n(s),y_n(s))-f_n(\sigma_n^*(y_n^*(s,t)),y_n^*(s,t))]ds\\
&\quad-\int_{-\infty}^{t_0}e^{-A_n(t-s)}[f_n(\sigma_n^*(y_n^*(s,t)),y_n^*(s,t))-f_n(\sigma_n^*(y_n^*(s,t_0)),y_n^*(s,t_0))]ds.
\end{aligned}$$

Utilizando (3.12) e (3.13) segue que

$$
\begin{aligned}
&\left\|\xi(t) - e^{-A_n(t-t_0)}\xi(t_0)\right\|_{X_n} \\
&\leqslant M_a L_f \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(n)(t-s)}(\|x_n(s) - \sigma_n^*(y_n^*(s,t))\|_{X_n} + \|y_n(s) - y_n^*(s,t)\|_{Y_n})ds \\
&\quad + M_a L_f(1+\Delta)\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(n)(t-s)}\|y_n^*(s,t) - y_n^*(s,t_0)\|_{Y_n} ds \\
&\leqslant M_a L_f \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(n)(t-s)}\|x_n(s) - \sigma_n^*(y_n^*(s,t))\|_{X_n} \\
&\quad + c_3 M_a L_f \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(n)(t-s)} \int_{s}^{t} e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](\theta-s)}\|\xi(\theta)\|_{X_n} d\theta ds \\
&+ c_4 M_a L_f(1+\Delta)\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(n)(t-s)} \int_{t_0}^{t} e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](\theta-s)}\|\xi(\theta)\|_{X_n} d\theta ds \\
&\leqslant M_a L_f \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(n)(t-s)}\|\xi(s)\|_{X_n} ds \\
&\quad + c_5 \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(n)(t-\theta)}\|\xi(\theta)\|_{X_n} \int_{t_0}^{\theta} e^{-[\beta(n)-(\rho(n)+dc_\Gamma)](\theta-s)} ds d\theta \\
&\quad + c_6 \int_{t_0}^{t} e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](\theta-t)}\|\xi(\theta)\|_{X_n} \int_{-\infty}^{t} e^{-[\beta(n)-(\rho(n)+dc_\Gamma)](t-s)} ds d\theta \\
&\leqslant \left[M_a L_f + \frac{c_5}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]}\right] \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(n)(t-s)} \|\xi(s)\|_{X_n} ds \\
&\quad + \frac{c_6}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]} \int_{t_0}^{t} e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](\theta-t)}\|\xi(\theta)\|_{X_n} d\theta.
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Como,

$$
\begin{aligned}
\|\xi(t)\|_{X_n} &\leqslant \|e^{-A_n(t-t_0)}\xi(t_0)\|_{X_n} + \|\xi(t) - e^{-A_n(t-t_0)\xi(t_0)}\|_{X_n} \\
&\leqslant M_a e^{-\beta(n)(t-t_0)}\|\xi(t_0)\|_{X_n} + \|\xi(t) - e^{-A_n(t-t_0)}\xi(t_0)\|_{X_n}
\end{aligned}
$$

segue de (3.14) que

$$
\begin{aligned}
\|\xi(t)\|_{X_n} \leqslant\ & M_a e^{-\beta(n)(t-t_0)}\|\xi(t_0)\|_{X_n} \\
&+ \left[M_a L_f + \frac{c_5}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]}\right] \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(n)(t-s)}\|\xi(s)\|_{X_n} ds \\
&+ \frac{c_6}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]} \int_{t_0}^{t} e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](s-t)}\|\xi(s)\|_{X_n} ds.
\end{aligned}
$$

Se $\omega(t) = \sup\{\|\xi(s)\|_{X_n} : t_0 \leqslant s \leqslant t\}$ então

$$
\begin{aligned}
\|\xi(t)\|_{X_n} \leqslant\ & M_a e^{-\beta(n)(t-t_0)}\|\xi(t_0)\|_{X_n} \\
&+ \left[M_a L_f + \frac{c_5}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]}\right] \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(n)(t-s)} ds\,\omega(t) \\
&+ \frac{c_6}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]} \int_{t_0}^{t} e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](s-t)} ds\,\omega(t).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$e^{\beta(n)(t-t_0)}\|\xi(t)\|_{X_n} \leqslant M_a\|\xi(t_0)\|_{X_n} + \gamma(n)e^{\beta(n)(t-t_0)}\omega(t), \tag{3.15}$$

onde

$$\gamma(n) = \frac{1}{\beta(n)}\left[M_aL_f + \frac{c_5}{[\beta(n)-(\rho(n)+dc_\Gamma)]}\right] + \frac{c_6K}{[\beta(n)-(\rho(n)+dc_\Gamma)]}$$

e

$$K = \sup_{\eta\geqslant 0}\left(\int_0^\eta e^{(\rho(n)+dc_\Gamma)(u-\eta)}du\right).$$

Escolha $n_0 > 0$ tal que $\gamma(n) \leqslant 1/2$ para todo $n \geqslant n_0$. Trocando t por s em (3.15), temos

$$e^{\beta(n)(s-t_0)}\|\xi(s)\|_{X_n} \leqslant M_a\|\xi(t_0)\|_{X_n} + \gamma(n)e^{\beta(n)(s-t_0)}\omega(s),$$

para $n \geqslant n_0$, e então,

$$\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t} e^{\beta(n)(s-t_0)}\|\xi(s)\|_{X_n} \leqslant M_a\|\xi(t_0)\|_{X_n} + \gamma(n)e^{\beta(n)(t-t_0)}\sup_{t_0\leqslant s\leq t}\omega(s)$$

ou seja,

$$e^{\beta(n)(t-t_0)}\omega(t) \leqslant M_a\|\xi(t_0)\|_{X_n} + \gamma(n)e^{\beta(n)(t-t_0)}\omega(t).$$

Assim para $n \geqslant n_0$

$$\begin{aligned} e^{\beta(n)(t-t_0)}\|\xi(t)\|_{X_n} \leqslant e^{\beta(n)(t-t_0)}\omega(t) &\leq M_a\|\xi(t_0)\|_{X_n} + \gamma(n)e^{\beta(n)(t-t_0)}\omega(t) \\ &\leqslant M_a\|\xi(t_0)\|_{X_n} + \frac{1}{2}e^{\beta(n)(t-t_0)}\omega(t). \end{aligned}$$

Então

$$\|\xi(t)\|_{X_n} \leqslant 2M_ae^{-\beta(n)(t-t_0)}\|\xi(t_0)\|_{X_n},$$

e portanto

$$\|x_n(t)-\sigma_n^*(y_n(t))\|_{X_n} \leqslant 2M_ae^{-\beta(n)(t-t_0)}\|x_n(t_0)-\sigma_n^*(y_n(t_0))\|_{X_n},$$

e S é exponencialmente atratora.

A suavidade de σ_n^* é provada da mesma forma que em Henry [5]. ■

Nos exemplos abaixo determinamos uma variedade invariante para o sistema de equações dado.

Exemplo 3.4. *Seja*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{cases} \tag{3.16}$$

com as condições iniciais $x(0) = x_0$ *e* $y(0) = y_0$.

A solução do sistema é dada por $\phi(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{t})$. *Como*

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -\frac{x}{y} \Longrightarrow -\frac{1}{x}\dot{x} = \frac{1}{y}\dot{y} \Longrightarrow |xy| = e^c, \quad c \in \mathbb{R}$$

o retrato de fase é descrito como na figura abaixo

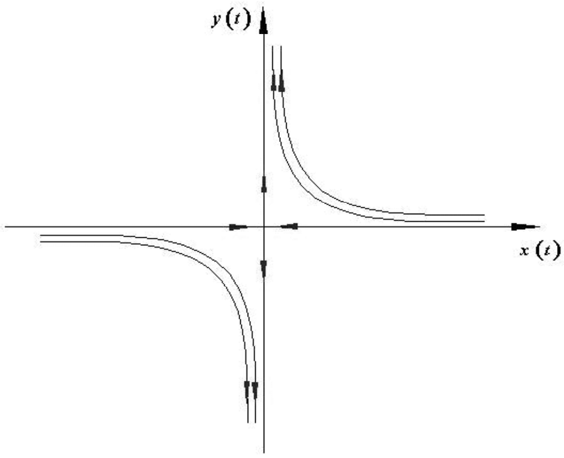

Figura 3.1: retrato de fase

O eixo $Ox = S = \{(x, \sigma(x)) : \sigma \equiv 0\}$ *é uma variedade invariante exponencialmente atratora, pois se* $(x(t), y(t)$ *é uma solução de* (3.16) *que passa pelo ponto* $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ *então* $\phi(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 e^{-t}, 0) \in S$. *Analogamente o eixo* $Oy = S = \{(\sigma(y), y) : \sigma \equiv 0\}$.

Exemplo 3.5. *Considere*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax, & a > 0 \\ \dot{y} = by & b < 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

com as condições iniciais $x(0) = x_0$ *e* $y(0) = y_0$.

A solução do sistema (3.17) *é dada por* $\phi(t) = (x(t), y(t)) = (x_0e^{at}, y_0e^{bt})$. *Os eixos Ox e Oy são variedades invariantes, mas somente o eixo Oy é exponencialmente atratora.*

A solução que passa pelo ponto $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ *é da forma* $\phi(t) = (x(t), y(t)) = (x_0e^{at}, y_0e^{bt}) = (x_0e^{at}, 0)$.

Exemplo 3.6. *Seja*

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^3 \end{cases} \tag{3.18}$$

com as condições iniciais $x(0) = x_0$ *e* $y(0) = y_0$.

A solução de (3.18) *é dada por* $\phi(t) = (x(t), y(t)) = (x_0e^t, \frac{x_0^3e^{3t}}{4} + ce^{-t})$, *onde* $c = y_0 - \frac{x_0^3}{4}$.

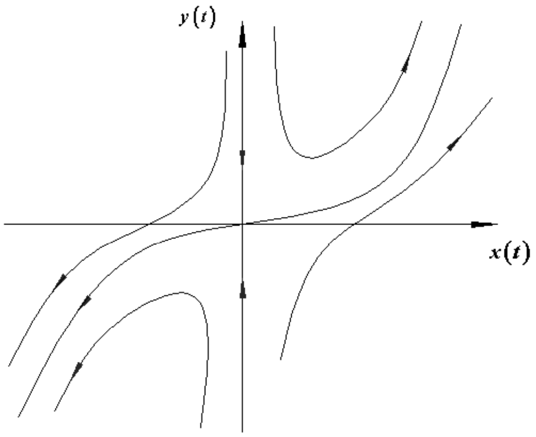

Figura 3.2: retrato de fase

Observemos que $x(t) \to 0$ *e* $y(t) \to 0$ *quando* $t \to +\infty$ *se, e somente se,* $x_0 = 0$ *e* y_0 *é arbitrário. Além disso,* $x(t) \to 0$ *e* $y(t) \to 0$ *quando* $t \to -\infty$ *se, e somente se,* x_0 *é arbitrário e* $y_0 = \frac{x_0^3}{4}$.

Se $y_0 = \frac{x_0^3}{4}$ *então a órbita correspondente no retrato de fase é* $\phi(t) = \left(x(t), \frac{(x(t))^3}{4}\right)$.

Assim, $S = \{(x,y) : y(t) = \frac{1}{4}x(t)^3\}$ *é uma variedade invariante para esse problema.*

$\Diamond$

Aplicaremos o Teorema da Variedade Invariante à equação $u_t = u_{xx} + f(u)$ com condição de fronteira Dirichlet homogênea, para isso iremos escrevê-la como um sistema de equações.

Seja

$$
\begin{aligned}
A : \mathscr{D}(A) \subset X &\to X \\
u &\mapsto Au = -u_{xx}
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

onde $\mathscr{D}(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ e $X = L^2(0,1)$.

Definição 3.7. *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que um operador $T : X \to Y \in \mathscr{L}(X,Y)$ é compacto se $\overline{T(B_X)}$ (B_X é um limitado em X) compacto na topologia forte, isto é, $T(B_X)$ é relativamente compacto na topologia forte.*

O próximo resultado será utilizado na demonstração do teorema abaixo que fornece algumas informações sobre o operador A definido em (3.19).

Lema 3.8. *Seja $T : \mathscr{D}(T) \subset X \to X$ fechado tal que $(\lambda_0 - T)^{-1}$ é compacto para algum $\lambda_0 \in \rho(T)$. Então $(\lambda - T)^{-1}$ é um operador compacto para todo $\lambda \in \rho(T)$.*

$\Diamond$

Teorema 3.9. *Considere o operador A definido acima. Então:*

(i) *A é sobrejetor.*

(ii) *A é simétrico.*

(iii) *A é auto-adjunto.*

(iv) *$-A$ é limitado superiormente.*

(v) *A tem resolvente compacto.*

(vi) *A é um operador setorial.*

Demonstração: (i) Mostraremos que o problema

$$
\begin{cases}
-u_{xx} = f \\
u(0) = u(1) = 0
\end{cases}
$$

tem uma solução $u \in \mathscr{D}(A)$ para toda $f \in L^2(0,1)$.

Consideraremos a seguinte forma bilinear em $H_0^1(0,1)$

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'$$

e a forma linear

$$\phi : v \mapsto \int_0^1 fv.$$

• a é contínua, pois

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leqslant \int_0^1 |u'(x)v'(x)|dx \leqslant \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \\
&\leqslant \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\|u'\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \\
&= \|v'\|_{L^2}(\|u'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) + \|v\|_{L^2}(\|u'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \\
&= (\|u'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})(\|v\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2}) = \|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}.
\end{aligned}$$

• a é coerciva, pois pelo Teorema 1.36 temos

$$a(v,v) = \int_0^1 (v'(x))^2 dx = \|v'\|_{L^2}^2 \geqslant c\|v\|_{H_0^1}^2.$$

Assim, pelo Teorema 1.25 (de Lax Milgram) existe uma única $u \in H_0^1$ tal que $a(u,v) =< \phi, v >$, ou seja u é uma solução fraca. Desde que $\int_\Omega u'(x)v'(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx$, para toda $v \in C_c^1(0,1)$ e $f \in L^2(0,1)$ então $u' \in H^1$, ou seja, $u \in H^2$ e $-u" = f$.

(ii) Segue do Teorema 1.35, que para quaisquer $u, v \in \mathscr{D}(A)$

$$\begin{aligned}
< Au, v > =< -u_{xx}, v >= \int -u_{xx}v = \int u'v' \\
=< u', v' >=< u, -v_{xx} >=< u, Av > .
\end{aligned}$$

(iii) A é auto-adjunto.

Como A é simétrico temos $A \subset A^*$, isto é, $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(A^*)$ e $Ax = A^*x$, para todo $x \in \mathscr{D}(A)$. Para provar que $A = A^*$ basta mostrar a outra inclusão $\mathscr{D}(A^*) \subset \mathscr{D}(A)$.

Tome $y \in \mathscr{D}(A^*)$ e $z = A^*y$. Como $R(A) = X$ existe $u \in \mathscr{D}(A)$ tal que $z = Au$.

Para todo $x \in \mathscr{D}(A)$ temos que

$$\begin{aligned}
< Ax, y > =< x, A^*y >=< x, z >=< x, Au > \\
=< x, A^*u >=< Ax, u > \Rightarrow < Ax, y - u >= 0.
\end{aligned}$$

Como $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$ segue da Proposição 1.17 que $y - u = 0$, ou seja, $y = u \in \mathscr{D}(A)$. Portanto $\mathscr{D}(A^*) \subset \mathscr{D}(A)$.

Desde que A é auto-adjunto temos que A é fechado.

(iv) A é positivo, pois $< Au, u >=< -u'', u >=< u', u' >= \|u'\|^2_{L^2}$ e do Teorema 1.36 (Desigualdade de Poincaré) temos:

$$< Au, u >= \|u'\|^2_{L^2} \geqslant \frac{1}{c^2}\|u\|^2_{H^1_0} \geqslant 0.$$

Assim,

$$< -Au, u >\leqslant a\|u\|^2_{H^1_0},$$

com $a = -\frac{1}{c^2}$. Portanto $-A$ é limitado superiormente.

(v) A tem resolvente compacto.

A é sobrejetor e como A é positivo temos que A é injetor, isto é, existe A^{-1}. Temos também que A é fechado e assim A^{-1} também é. Pelo Teorema 1.16 obtemos que A^{-1} é contínuo.

$$A^{-1} : X \to H^2 \cap H^1_0 \subset\subset L^2 = X.$$

Assim, seja $B \subset X$ um conjunto limitado pela continuidade de A^{-1} obtemos que $A^{-1}(B)$ é limitado em $H^2 \cap H^1_0$. Segue do Teorema 1.37 que $H^2 \cap H^1_0 \hookrightarrow L^2 = X$ compactamente, assim $A^{-1}(B)$ é pré-compacto em X.

Portanto A^{-1} é compacto e pelo Lema 3.8, $(\lambda - A)^{-1}$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.

(vi) A é setorial. Segue diretamente da Proposição (2.18).

■

Observação 13. *Com essas informações sobre o operador A, segue da Proposição 2.18 que* $-A$ *gera semigrupo analítico* $\{e^{-At}\}$.

3.2 Um sistema de equações para $u_t = u_{xx} + f(u)$

Notemos que os autovalores do operador $Au = -u_{xx}$ para $u \in \mathscr{D}(A) = H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$ são dados por:

$$\tilde{\lambda}_n = n^2\pi^2, n \in \mathbb{N}_*.$$

e as auto-funções associadas são

$$\phi_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x), n \in \mathbb{N}_*.$$

Observação 14. *Segue do Teorema 1.21 que as auto-funções $\phi_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x), n \in \mathbb{N}_*$ formam uma base Hilbertiana para X.*

Portanto os autovalores do operador $-A$ são dados por

$$\lambda_n = -n^2\pi^2, n \in \mathbb{N}_*$$

e assim formam uma sequência decrescente

$$0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{n-1} > \lambda_n > \lambda_{n+1} > \ldots.$$

Consideremos a seguinte decomposição do espaço $X = W \oplus W^{\perp}$, onde

$$W = [\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-1}, \phi_n] \text{ e } W^{\perp} = \{\phi \in X : <\phi, w>= 0, \forall w \in W\}$$

aqui $< \cdot, \cdot >$ denota o produto interno do $L^2(0,1)$ e n é arbitrário.

Então $u \in L^2(0,1)$ pode ser escrito como

$$u = v_1\phi_1 + \ldots + v_n\phi_n + w$$

onde $w = u - \sum_{j=1}^{n} v_j\phi_j$.

Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$u(x)\phi_j(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i(x)\phi_j(x) + w(x)\phi_j(x).$$

Como

$$<\phi_i, \phi_j>= \begin{cases} 0, & \text{se} \quad i \neq j \\ 1, & \text{se} \quad i = j \end{cases}$$

e $w \in W^{\perp}$, isto é, $< w, \phi_j >= 0$, segue que

$$\int_0^1 u(x)\phi_j(x)dx = v_j\|\phi_j\|_{L^2}^2 \Rightarrow v_j = \int_0^1 u(x)\phi_j(x)dx, \quad \text{para cada } j = 1, \ldots, n.$$

Assim, para $u \in L^2(0,1)$ temos

$$u = \sum_{j=1}^{n} v_j\phi_j + w \text{ onde } w = u - \sum_{j=1}^{n} v_j\phi_j \text{ e } v_j = \int_0^1 u(x)\phi_j(x)dx.$$

Seja $u(x,t)$ uma solução de

$$\begin{cases} u_t = -Au + f(u) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

Para cada t podemos escrever

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{n} v_j(t)\phi_j(x) + w(x,t),$$

onde, de modo análogo ao feito acima

$$v_j(t) = \int_0^1 u(x,t)\phi_j(x)dx.$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\dot{v_j}(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^1 u(x,t)\phi_j(x)dx = \int_0^1 \frac{d}{dt}u(x,t)\phi_j(x)dx = \int_0^1 (-Au + f(u))\phi_j(x)dx \\
&= \int_0^1 (u_{xx}(x,t)\phi_j(x) + f(u(x,t))\phi_j(x))dx \\
&= \phi_j(x)u_x(x,t)|_0^1 - \int_0^1 u_x(x,t)\phi_j'(x)dx + \int_0^1 f(u(x,t))\phi_j(x)dx \\
&= \phi_j(x)u_x(x,t)|_0^1 - u(x,t)\phi_j'(x)|_0^1 + \int_0^1 u(x,t)\phi_j''(x)dx + \int_0^1 f(u(x,t))\phi_j(x)dx.
\end{aligned}$$

Como u e ϕ_j estão no domínio do operador A segue que $u(1,t) = u(0,t) = \phi_j(1) = \phi_j(0) = 0$, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\dot{v_j}(t) &= \int_0^1 (u(x,t)\phi_j''(x))dx + \int_0^1 f(u(x,t))\phi_j(x)dx = \int_0^1 u(x,t)(-A\phi_j)(x)dx + \int_0^1 f(u(x,t))\phi_j(x)dx \\
&= \int_0^1 u(x,t)\lambda_j\phi_j(x)dx + \int_0^1 f(u(x,t))\phi_j(x)dx = \lambda_j\int_0^1 u(x,t)\phi_j(x)dx + \int_0^1 f(u(x,t))\phi_j(x)dx \\
&= \lambda_j v_j(t) + < f(u(\cdot,t)), \phi_j > .
\end{aligned}$$

Logo

$$\dot{v_j}(t) = \lambda_j v_j(t) + < f(u(\cdot,t)), \phi_j >, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.21}$$

Consideremos agora $\hat{A} = A|_{\mathscr{D}(A)\cap W^{\perp}}$ e $B = A|_W$. Obtemos

$$A = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Como W tem dimensão finita podemos escrever $-B$, como a matriz diagonal:

$$-B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
w_t + \hat{A}w &= u_t - \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} v_j(t)\phi_j\right) - w_{xx} = u_t - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}(v_j(t)\phi_j) - w_{xx} \\
&= u_t - u_{xx} - \sum_{j=1}^{n} v_j(t)\phi_j'' - \sum_{j=1}^{n} \dot{v}_j(t)\phi_j \\
&= u_t + Au + \sum_{j=1}^{n} v_j(t)(-\phi_j'') - \sum_{j=1}^{n} \dot{v}_j(t)\phi_j = u_t + Au + \sum_{j=1}^{n} v_j(t)A\phi_j - \sum_{j=1}^{n} \dot{v}_j(t)\phi_j \\
&= f(u) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j(t)\phi_j - \sum_{j=1}^{n} \dot{v}_j(t)\phi_j \\
&= f(u) + \sum_{j=1}^{n} (\dot{v}_j(t) - < f(u(\cdot,t)), \phi_j >)\phi_j - \sum_{j=1}^{n} \dot{v}_j(t)\phi_j \\
&= f(u) + \sum_{j=1}^{n} \dot{v}_j(t)\phi_j - \sum_{j=1}^{n} < f(u(\cdot,t)), \phi_j > \phi_j - \sum_{j=1}^{n} \dot{v}_j(t)\phi_j \\
&= f(u) - \sum_{j=1}^{n} < f(u(\cdot,t)), \phi_j > \phi_j.
\end{aligned}$$

Portanto

$$w_t + \hat{A}w = f(u) - \sum_{j=1}^{n} < f(u(\cdot,t)), \phi_j > \phi_j. \tag{3.22}$$

Seja $u = (v, w)$ onde $v = (v_1, \ldots, v_n) \in W, w \in W^{\perp}$ e $-B = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Segue de (3.21) e (3.22) que (3.20) pode ser escrito como o sistema de equações fracamente acoplado:

$$\begin{cases} \dot{v} + Bv = g(v, w) \\ w_t + \hat{A}w = \hat{f}(v, w) \end{cases} \tag{3.23}$$

onde

$$g(v, w) = (< f(u(\cdot,t)), \phi_1 >, \ldots, < f(u(\cdot,t)), \phi_n >)^t$$

e

$$\hat{f}(v, w) = f(u) - \sum_{j=1}^{n} < f(u(\cdot,t)), \phi_j > \phi_j.$$

Vamos aplicar o Teorema da Variedade Invariante para o sistema fracamente acoplado (3.23). Sejam L_f a constante de Lipschitz de f e N_f como em $(H1)$, usando a Observação 14, obtemos

$$
\begin{aligned}
\bullet\|\hat{f}(x,y)-\hat{f}(z,w)\| &= \left\| f(u_1) - \sum_{j=1}^{n} < f(u_1),\phi_j > \phi_j - f(u_2) + \sum_{j=1}^{n} < f(u_2),\phi_j > \phi_j \right\| \\
&\leqslant \|f(u_1)-f(u_2)\| + \sum_{j=1}^{n} |< f(u_1)-f(u_2),\phi_j >| \|\phi_j\| \\
&\leqslant L_f\|u_1-u_2\| + \sum_{j=1}^{n} L_f\|u_1-u_2\|\|\phi_j\|^2 \\
&\leqslant (1+n)L_f(\|x-z\|+\|y-w\|) := L_{\hat{f}}(\|x-z\|+\|y-w\|).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bullet\|\hat{f}(x,y)\| = \left\| f(u_1) - \sum_{j=1}^{n} < f(u_1),\phi_j > \phi_j \right\| &\leqslant \|f(u_1)\| + \sum_{j=1}^{n} \|f(u_1)\|\|\phi_j\|^2 \leqslant (1+n)\|f(u_1)\| \\
&\leqslant (1+n)N_f := N_{\hat{f}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bullet\|g(x,y)-g(z,w)\| \\
&= \|(< f(u_1),\phi_1 >, < f(u_1),\phi_2 >, \cdots, < f(u_1),\phi_n >)^t - (< f(u_2),\phi_1 >, \cdots, < f(u_2),\phi_n >)^t\|_{\mathbb{R}^n} \\
&= \|(< f(u_1)-f(u_2),\phi_1 >, < f(u_1)-f(u_2),\phi_2 >, \cdots, < f(u_1)-f(u_2),\phi_n >)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} |< f(u_1)-f(u_2),\phi_j >|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |< f(u_1)-f(u_2),\phi_j >|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|f(u_1)-f(u_2)\| \leqslant L_f\|u_1-u_2\| = L_f\|(x+y)-(z+w)\| \\
&\leqslant L_f(\|x-z\|+\|y-w\|).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bullet\|g(x,y)\| &= |(< f(u_1),\phi_1 >, < f(u_1),\phi_2 >, \cdots, < f(u_1),\phi_n >)^t| \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} |< f(u_1),\phi_j >|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |< f(u_1),\phi_j >|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|f(u_1)\| \leqslant N_f := N_g.
\end{aligned}
$$

Verifiquemos as estimativas para os semigrupos gerados pelos operadores $\hat{A}$ e B.

Temos

$$
e^{-Bt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.
$$

Como $\lambda_n < \lambda_{n-1} < \cdots < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$, para $t < 0$, $e^{\lambda_n t} > e^{\lambda_{n-1} t} > \cdots > e^{\lambda_2 t} > e^{\lambda_1 t} > 0$, segue que

$$\begin{aligned}\|e^{-Bt}x\|_{\mathbb{R}^n} &= \|(x_1 e^{\lambda_1 t}, \cdots, x_n e^{\lambda_n t})\|_{\mathbb{R}^n} = \sum_{j=1}^{n} |x_j e^{\lambda_j t}| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| e^{\lambda_j t} \\ &\leqslant \left(\sup_{1\leqslant j\leqslant n} e^{\lambda_j t}\right) \sum_{j=1}^{n} |x_j| = e^{\lambda_n t} \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leqslant M_b e^{\lambda_n t} \|x\|_{\mathbb{R}^n}.\end{aligned}$$

Ou seja, $\|e^{-Bt}x\| \leqslant M_b e^{\lambda_n t}\|x\|$, onde M_b é uma constante.

Portanto,

$$\|e^{-Bt}\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} (\|x\| e^{\lambda_n t}) \leqslant M_b e^{\lambda_n t}.$$

Na notação do Teorema 3.3, segue que $-\rho(n) = \lambda_n$. Observe que o grupo gerado por B, é dado por e^{Bt}, $t \in \mathbb{R}$ onde B é a matriz diagonal formada pelos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Para estimar o semigrupo gerado por $\hat{A}$, $\|e^{-\hat{A}t}\|$, utilizaremos o seguinte teorema, encontrado em [5].

Teorema 3.10. *Se A é um operador setorial com $Re(\sigma(A)) > \delta > 0$ para $\alpha \geqslant 0$ existe $c_\alpha < \infty$ tal que*

$$\|A^\alpha e^{-At}x\| \leqslant c_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}\|x\| \quad \textit{para } t > 0.$$

No caso particular em que $\alpha = 0$ temos

$$\|e^{-At}x\| \leqslant c_0 e^{-\delta t}\|x\|.$$

$\Diamond$

O teorema abaixo garante que o espectro do operador A definido em (3.19) é formado inteiramente por autovalores.

Teorema 3.11. *Seja $T : \mathscr{D}(T) \subset X \to X$ operador fechado em X tal que o resolvente $(\lambda_0 - T)^{-1}$ existe e é compacto para algum λ_0. Então o espectro de T consiste inteiramente de autovalores isolados com multiplicidades finitas.*

$\Diamond$

Observamos que

$$\sigma(\hat{A}) = \{j^2\pi^2 : j = n+1, n+2, \cdots\}.$$

Segue do Teorema 3.10 que

$$\|e^{-\hat{A}t}x\| \leqslant M_a e^{-(n+1)^2\pi^2 t}\|x\|, \text{ para } t > 0.$$

Na notação do Teorema 3.3 temos $\beta(n) = (n+1)^2\pi^2$.

Teorema 3.12. *O sistema* (3.23) *possui uma variedade invariante exponencialmente atratora* $\mathscr{S}$.

Demonstração: Como visto acima $\hat{f}, g$, e os semigrupos gerados por $\hat{A}$ e B satisfazem as hipóteses do Teorema 3.3, além disso

$$\beta(n) - \rho(n) = (n+1)^2\pi^2 - n^2\pi^2 = 2n\pi^2 + \pi^2 \to +\infty \text{ quando } n \to \infty.$$

Assim, segue do Teorema (3.3) que (3.23) possui uma variedade invariante exponencialmente atratora.

Seja

$$\mathscr{S} = \{(\sigma^*(y), y), y \in \mathbb{R}^n\}$$

a variedade invariante para (3.23) onde $\sigma^* : \mathbb{R}^n \to X$ é ponto fixo da aplicação

$$G(\sigma)(\eta) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\hat{A}(\tau-s)}\hat{f}(\sigma^*(y(s)), y(s))ds.$$

Podemos estimar $\|\sigma^*(\cdot)\|$ usando a demonstração do Teorema (3.3), onde obtemos:

$$\begin{aligned}
\|\sigma^*(\cdot)\| &\leqslant N_f M_a \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(n+1)^2\pi^2(\tau-s)}ds \leqslant N_f M_a e^{-(n+1)^2\pi^2\tau}\int_{-\infty}^{\tau} e^{(n+1)^2\pi^2 s}ds \\
&= N_f M_a e^{-(n+1)^2\pi^2\tau}\frac{1}{(n+1)^2\pi^2}e^{(n+1)^2\pi^2 s}|_{-\infty}^{\tau} = N_f M_a\frac{1}{\beta(n)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|\sigma^*(\cdot)\| \leqslant N_f M_a\frac{1}{\beta(n)} \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

■

3.3 Atratores para semigrupo de operadores

O objetivo desta seção é estabelecer a notação e os resultados básicos para o estudo do comportamento assintótico de semigrupos. Esses resultados podem ser encontrados em [6].

Para um dado semigrupo $T(t) \subset \mathscr{L}(X)$ e $A, M \subset X$ utilizaremos a seguinte notação:

(i) para cada $t \geqslant 0$, $T(t)M = \{T(t)x : x \in M\}$;

(ii) $\gamma^+(A) = \{T(t)A;\ t \in [0, +\infty)\}$;

(iii) $\gamma^+_{[s,s']}(A) = \{T(t)A;\ t \in [s, s']\}$;

(iv) $\gamma^+_s(A) = \{T(t)A;\ t \geqslant s\}$.

O conjunto $\gamma^+(A)$ é denominado a órbita positiva de A.

Dizemos que o semigrupo $T(t)$ é limitado se para cada conjunto B limitado temos que $\gamma^+(B)$ é limitado.

Podemos definir também a órbita negativa de um ponto x (analogamente, de um conjunto B).

Definição 3.13. *Uma órbita negativa em x é uma função $\phi : (-\infty, 0] \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para qualquer $s \leqslant 0$, $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $0 \leqslant t \leqslant -s$. Uma órbita completa em x é uma função $\phi : \mathbb{R} \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para qualquer $s \in \mathbb{R}$, $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $0 \leqslant t$. Pelo fato de $T(t)$ não ser um-a-um nos dá que se existe uma órbita negativa então não é necessariamente única. Assim podemos definir a órbita negativa em x como:*

$$\gamma^-(x) = \bigcup_{t \geqslant 0} H(t, x)$$

onde $H(t,x) = \{y \in X :$ existe uma órbita negativa $\phi : (-\infty, 0] \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e $\phi(-t) = y\}$.

A órbita completa $\gamma(x)$ em x é definida como $\gamma^+(x) \bigcup \gamma^-(x)$.

Para um subconjunto $B \subset X$ temos $\gamma^-(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma^-(x)$ e $\gamma(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma(x)$.

Podemos definir os conjuntos ω-limite e α-limite através da definição de órbita positiva e órbita negativa.

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(x)}, \quad \omega(B) = \bigcap_{t \geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(B)}$$
$$\alpha(x) = \bigcap_{t \geqslant 0} \overline{\gamma_t^-(x)}, \quad \alpha(B) = \bigcap_{t \geqslant 0} \overline{\gamma_t^-(B)}$$

onde $\overline{B}$ denota o fecho do conjunto B. No caso do conjunto ω-limite vemos que a definição acima é equivalente a

$$\omega(B) = \{y \in X : \exists\, t_n \to +\infty, \exists\, x_n \in B \ \text{ e } y = \lim_{n \to +\infty} T(t_n)x_n\}.$$

Outras definições necessárias são:

Definição 3.14. *Sejam A e M subconjuntos de X. Dizemos que A atrai M sob o semigrupo* $T(t)$ *se* $\lim_{t\to\infty} d(T(t)M,A) = 0$.

Dizemos que um conjunto A é invariante relativo ao semigrupo $T(t)$ *se* $T(t)A = A$ *para todo* $t \in [0,+\infty)$.

O seguinte lema é importante:

Lema 3.15. *Seja* $B \subset X$ *um conjunto para o qual* $\omega(B)$ *é compacto e* $\omega(B)$ *atrai B então* $\omega(B)$ *é invariante. Além disso, se B é conexo então* $\omega(B)$ *é conexo. Analogamente, temos os resultados para o conjunto* α*-limite. Se* $\alpha(B)$ *é compacto* $\gamma^-(B) = \bigcup_{t\geqslant 0} H(t,B)$ *e* $\lim_{t\to\infty} d(H(t,B),\alpha(B)) \to 0$ *então* $\alpha(B)$ *é invariante. Se* $H(t,B)$ *é conexo para* $t \geqslant 0$ *então* $\alpha(B)$ *é conexo.*

Demonstração: Se $\omega(B) = \emptyset$ então nada temos a demonstrar. Se $\omega(B) \neq \emptyset$ então pela continuidade de $T(t)$ obtemos que $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$.

Resta mostrar que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$. Seja $y \in \omega(B)$ então existem seqüências $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subset B$ tal que $T(t_n)x_n \to y$, quando $n \to \infty$.

Consideremos o conjunto $H = \{T(t_n - t_0)x_n : t_n \geqslant t_0\}$, $t_0 \geqslant 0$ fixado. Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B sob $T(t)$ então $H \cup \omega(B)$ é compacto. Desta forma, existe uma subseqüência $(T(t_{n_k} - t_0)x_{n_k}) \subset H$ tal que $T(t_{n_k} - t_0)x_{n_k} \to z$. Então $z \in \omega(B)$ e $T(t_{n_k})x_{n_k} = T(t_0)T(t_{n_k} - t_0)x_{n_k} \to T(t_0)z$, e $y = T(t_0)z$ e $y \in T(t)\omega(B)$. Portanto, $\omega(B) = T(t)\omega(B)$.

Agora provaremos a conexidade. Suponha $\omega(B)$ desconexo então $\omega(B) = A_1 \cup A_2$ é a união disjunta de dois conjuntos compactos separados por uma distância $\delta > 0$. Como $\omega(B)$ atrai B sob $T(t)$ então, $\forall \varepsilon > 0$, $T(t)B$ esta contido na ε-vizinhança de A_1 e A_2. Mas, se $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$, obtemos uma contradição, pois $T(t)B$ é conexo, já que $T(t)$ é contínuo. Portanto $\omega(B)$ é conexo.

■

Lema 3.16. *Se B é um subconjunto não vazio de X tal que* $\overline{\gamma^+(B)}$ *é compacto então* $\omega(B)$ *é não vazio, compacto, invariante e* $\omega(B)$ *atrai B.*

Demonstração: Como $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é compacto e não vazio, $t \geqslant 0$, temos que $\omega(B)$ é não vazio e compacto. Mostraremos que $\omega(B)$ atrai B. Suponha que não, então existe um ε_0 e seqüências $t_n \to \infty$ e $x_n \in B$ tal que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon_0$ para todo $n \geqslant 1$, mas $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n, n = 1,2,...\} \subset \overline{\gamma^+(B)}$ então existem subseqüências $t_{n_k} \to \infty$ e $x_{n_k} \in B$ tal que $T(t_{n_k})x_{n_k} \to$

$y \in \omega(B)$. Isto é uma contradição. Portanto $\omega(B)$ atrai B e pelo Lema 3.15 temos que $\omega(B)$ é invariante. ■

Usaremos os seguintes conceitos:

Definição 3.17. *Um semigrupo $T(t), t \geqslant 0$ é dito assintoticamente suave se, para qualquer conjunto $B \subset X$ não vazio limitado e fechado, para o qual $T(t)B \subset B$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ tal que J atrai B.*

Lema 3.18. *Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo assintoticamente suave e B é um subconjunto não vazio de X tal que $\gamma^+(B)$ é limitado então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B. Além disso, se B é conexo então $\omega(B)$ é conexo.*

Demonstração: Como $T(t)\gamma^+(B) \subset \gamma^+(B)$ e $T(t)$ é contínuo então $T(t)\overline{\gamma^+(B)} \subset \overline{\gamma^+(B)}$, como $T(t)$ é assintoticamente suave existe um conjunto compacto $J \subset \overline{\gamma^+(B)}$ tal que J atrai B, assim existem seqüências $\varepsilon_n \to 0$ e $t_n \to \infty$ tal que $T(t)B \subset \mathscr{O}_{\varepsilon_n}(J)$ para $t \geqslant t_n$. Portanto, $\omega(B) \subset J$. Como $\omega(B)$ é fechado e J é compacto, assim $\omega(B)$ é compacto.

Resta mostramos que $\omega(B)$ atrai B, caso contrário, existe $\varepsilon_0 > 0$ e seqüências $x_n \in B$ e $t_n \to \infty$ tal que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon_0$. Como $\omega(B)$ é compacto existem subseqüências $x_{n_k} \in B$ e $t_{n_k} \to \infty$ tal que $T(t_n)x_n \to z \in \omega(B)$.

Portanto, $\omega(B)$ é compacto e atrai B e pelo Lema 3.15 $\omega(B)$ é invariante. ■

Definição 3.19. *Um semigrupo $T(t), t \geqslant 0$ é dito condicionalmente completamente contínuo para $t \geqslant t_1$ se, para cada conjunto limitado $B \subset X$ para o qual $\{T(s)B : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ é limitado, temos $T(t)B$ é pré-compacto.*

Um semigrupo $\{T(t), t \geqslant 0\}$ é dito completamente contínuo se é condicionalmente completamente contínuo e para cada $t \geqslant 0$, o conjunto $\{T(s)B : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ é limitado se B é limitado.

Teorema 3.20. *Semigrupo condicionalmente completamente contínuo é assintoticamente suave.*

Demonstração: Seja $B \subset X$, B não vazio, fechado e limitado tal que $T(t)B \subset B$ então $\gamma^+(B) \subset B$. Assim, para todo $t > 0$ $\{T(s)\gamma^+(B) = \gamma_s^+(B), 0 \leqslant s \leqslant t\} \subset B$ e portanto é limitado, como $T(t)$ é condicionalmente completamente contínuo $\gamma_t^+(B)$ é pré-compacto. Logo, $\omega(B) = \bigcap_{t \geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é não vazio e compacto, então $\omega(B)$ atrai B. ■

Definição 3.21. *Um semigrupo* $T(t)$ *é dito ponto dissipativo/limitado dissipativo/compacto dissipativo/localmente compacto dissipativo se existe um subconjunto limitado* $B \subset X$ *que atrai pontos/subconjuntos limitados/compactos/uma vizinhança de compactos.*

Um conjunto invariante A *é dito um atrator global se* A *é o maior compacto invariante que atrai subconjuntos limitados.*

Lema 3.22. *Seja* $T(t)$ *um semigrupo assintoticamente suave, ponto dissipativo e* $\gamma(B)$ *limitado se* B *é compacto então* $T(t)$ *é compacto dissipativo.*

Demonstração: Como $T(t)$ é ponto dissipativo existe um conjunto $B \neq \emptyset$ limitado que atrai pontos de X e considere $U = \{x \in B : \gamma^+(x) \subset B\}$. Temos que $\gamma^+(U) \subset U$ limitado e U atrai pontos.

Temos que $T(t)\gamma^+(U) \subset \gamma^+(U)$ e $T(t)$ é assintoticamente suave, portanto existe compacto, $K \subset \overline{\gamma^+(U)}$ tal que K atrai U e portanto K atrai pontos.

O conjunto K atrai a si mesmo e portanto $\overline{\gamma^+(K)}$ é compacto. Seja $J = \omega(K)$ então pelo Lema 3.16, temos que J é compacto, invariante e atrai pontos de X.

Mostraremos que existe uma vizinhança V de J tal que $\gamma^+(V)$ é limitado. Se não existisse tal vizinhança teríamos seqüências $x_n \in J$, $x_n \to y \in J$ e $t_n \to \infty$ tal que $\|T(t_n)x_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Consideremos $A = \{x_n : n \geqslant 1\}$ assim $\overline{A}$ é compacto e $\gamma^+(A)$ é ilimitado. Isto é uma contradição pois órbita de conjunto compacto é limitada.

Seja V vizinhança de J tal que $\gamma^+(V)$ é limitada, como J atrai pontos de X e $T(t)$ é contínuo então para todo $x \in X$ existe uma vizinhança $\mathscr{O}_x$ de x e t_x tal que $T(t)\mathscr{O}_x \subset \gamma^+(V)$ para $t < t_x$, ou seja, $\gamma^+(V)$ atrai x para todo $x \in X$, portanto se considerarmos H compacto temos que $\gamma^+(V)$ atrai H.

Portanto, $T(t)$ é compacto dissipativo. ∎

O próximo teorema diz sob quais condições um semigrupo possui um atrator global.

Teorema 3.23. *Se* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *é um semigrupo assintoticamente suave, ponto dissipativo e órbitas de cojuntos limitados são limitados, então existe uma atrator global* A.

Demonstração: Como $T(t)$ é assintoticamente suave, ponto dissipativo e órbita de conjunto limitado é limitada, pelo Lema 3.22 temos que $T(t)$ é compacto dissipativo. Seja C o conjunto limitado que atrai compactos. Considere $B = \{x \in C : \gamma^+(x) \subset C\}$. Então $T(t)(\overline{B}) \subset \overline{B}$, como

$T(t)$ é assintoticamente suave, existe $K \subset \overline{B}$, K compacto que atrai B, logo K atrai subconjuntos compactos.

Seja $A = \bigcap_{t \geqslant 0} T(t)K$. O conjunto A é independente de K compacto maximal invariante e atrai subconjuntos compactos, pois seja H um subconjunto compacto então $T(t)H \to K$, portanto, $\overline{\gamma^+(H)}$ é compato e $\omega(H) \subset K$. Em particular, $\omega(K) \subset K$ e assim $\omega(K) = \bigcap_{t \geqslant 0} T(t)K$ é não vazio compacto invariante que atrai subconjuntos compactos de X. Para mostrar que A é independente de K e é maximal fazemos: suponha que K_1 compacto também atrai subconjuntos compactos então $\omega(K_1) \subset \omega(K) \subset \omega(K_1)$. ■

Para caracterizarmos o atrator é necessária a definição de ponto de equilíbrio.

Definição 3.24. *Dizemos que $x \in X$ é um ponto de equilíbrio para um semigrupo $T(t), t \geqslant 0$ se $T(t)x = x$ para $t \geqslant 0$. Denotamos por E o conjunto dos pontos de equilíbrio, isto é, $E = \{x \in X : T(t)x = x,\ t \geqslant 0\}$.*

Definição 3.25. *Um semigrupo fortemente contínuo $T(t)$, $t \geqslant 0$ é dito um sistema gradiente se:*
1. órbita positiva limitada é pré-compacta;
2. Existe uma função de Lyapunov para $T(t)$, ou seja, existe uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(i) *$V(x)$ é limitada inferiormente;*

(ii) *$V(x) \to +\infty$ quando $|x| \to +\infty$;*

(iii) *$V(T(t)x)$ é não crescente em t para cada $x \in X$;*

(iv) *Se x é tal que $T(t)x$ está definido pra $t \in \mathbb{R}$ e $V(T(t)x) = V(x)$ para $t \in \mathbb{R}$ então x é um ponto de equilíbrio.*

Para sistemas gradientes temos os seguintes resultados:

Lema 3.26. *Se $T(t)$ é um sistema gradiente então o conjunto ω-limite $\omega(x)$ de x para cada $x \in X$ pertence a E. Se $\gamma^-(x)$ é uma órbita pré-compacta através de x, então o conjunto α-limite $\alpha(x)$ pertence a E.*

Demonstração: Como o sistema é gradiente então a órbita $\gamma^+(x)$ é pré-compacta assim, $V(T(t)x) \to c$ para $t \to \infty$. Como $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacta então $\omega(x)$ é compacto e invariante. Seja

$y \in \omega(x)$ pela continuidade de V segue que $V(T(t)y) = c = V(y)$ para $t \in \mathbb{R}$ então por (iv), segue que $y \in E$. Para mostrarmos que $\alpha(x) \subset E$ veja Teorema 4.1, p. 401 em [7]. ■

O próximo teorema caracteriza o atrator, para sistemas gradientes, através do conjunto dos pontos de equilíbrio.

Teorema 3.27. *Se $T(t), t \geqslant 0$ é um sistema gradiente, assintoticamente suave e E é limitado, então existe uma atrator glogal $\mathscr{A}$ para $T(t)$ e*

$$\mathscr{A} = \mathrm{W}^u(E) = \{y \in X : T(-t)y \textit{ está definido para } t \geqslant 0 \textit{ e } T(-t)y \to E \textit{ para } t \to +\infty\}.$$

Se X é um espaço de Banach então $\mathscr{A}$ é conexo.

Demonstração: Como $T(t)$ é sistema gradiente, pelo Lema 3.26 e pelo fato que E é limitado temos que $T(t)$ é ponto dissipativo, pelas condições sobre V temos que órbita de conjunto limitado é limitado, assim pelo Teorema 3.23, existe um atrator global.

Como para qualquer $x \in \mathscr{A}$ a órbita está globalmente definida em $\mathscr{A}$ e é compacta então segue do Lema 3.26 que $\alpha(x) \subset E$ para $x \in \mathscr{A}$, ou seja, $\mathscr{A} \subset W^u(E)$.

Seja $x \in W^u(E)$ então $T(-t)x \to E \subset \mathscr{A}$ e $T(t)x \to \mathscr{A}$ quando $t \to \infty$ portanto $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \overline{T(t)x} \subset \mathscr{A}$, logo $x \in \mathscr{A}$.

Portanto, $\mathscr{A} = W^u(E)$. ■

3.3.1 Existência de solução e atrator

Mostraremos que o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), \ \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ \ t \geqslant 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases} \tag{3.24}$$

possui soluções globalmente definidas, que o sistema é gradiente, assintoticamente suave e possui um atrator. Estamos supondo $\phi \in H_0^1([0,1],\mathbb{R})$, $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, f satistazendo $(H1)$, $(H2)$ e $(H3)$.

O procedimento que faremos aqui é o mesmo utilizado em [6] para a equação parabólica escalar $u_t = (a(x)u_x)_x + f(u)$, onde $a \in \mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Como em (3.19), consideramos $X = L^2(0,1)$ e o operador A definido por:

$$A : \mathscr{D}(A) \subset X \to X$$
$$Au = -u_{xx}$$

onde $\mathscr{D}(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$. Como vimos no Teorema 3.9, A é positivo, auto-adjunto, possui resolvente compacto e é setorial. Observamos que se $\phi \in H_0^1(0,1)$ então $|\phi(x)| \leqslant \|\phi\|_{H_0^1(0,1)}$, pois:

$$|\phi(x)|^2 = |\phi(x) - \phi(0)|^2 = |\int_0^x \phi'(s)ds|^2 \leqslant \int_0^x |\phi'(s)|^2 ds \leqslant \|\phi'\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \|\phi\|^2_{H_0^1(0,1)}.$$

Definimos $f^e : H_0^1(0,1) \to X$ dada por $f^e(\phi)(x) = f(\phi(x))$ para todo $x \in [0,1]$.

Temos que f^e é Lipschitz em limitados, pois sejam $\phi, \psi \in H_0^1(0,1)$ tal que $\|\phi\|, \|\psi\| \leqslant r$, pela observação anterior temos $|\phi(x)|, |\psi(x)| \leqslant r$ e como $f \in \mathrm{C}^1$, temos que exite $c = c(r)$ tal que $\sup\{|f'(s)| : |s| \leqslant r\} \leqslant c(r)$ e

$$\begin{aligned}\|f^e(\phi) - f^e(\psi)\|_X^2 = \int_0^1 |f(\phi(x)) - f(\psi(x))|^2 dx = \int_0^1 |\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f'(s)ds|^2 dx \\ \leqslant c\int_0^1 |\phi(x) - \psi(x)|^2 dx \leqslant c\|\phi - \psi\|^2_{H_0^1(0,1)}.\end{aligned}$$

Portanto, como A é setorial e f satisfaz a condição (F) então, segue do Teorema 2.21 que existe solução local para toda $\phi \in H_0^1(0,1)$. Denotaremos por $u(t,x,\phi)$ a solução de (3.24).

Mostraremos que as soluções da equação estão globalmente definidas.

Consideremos o seguinte funcional:

$$V(\phi) = \int_0^1 [\frac{1}{2}\phi_x^2(x) - F(\phi(x))]dx \tag{3.25}$$

onde $F(u) = \int_0^u f(s)ds$.

Calculando $\frac{d}{dt}V(u(t,\cdot,\phi))$, obtemos a seguinte expresssão, onde $< \cdot,\cdot >$ representa o produto interno em X :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(u(t,\cdot,\phi)) &= \frac{d}{dt} < \frac{1}{2}u_x^2(t,\cdot,\phi) - F(u(t,\cdot,\phi)), 1 > \\ &=< Au, u_t > - < f(u(t,\cdot,\phi)), u_t >=< Au - f(u), u_t > \\ &=< -u_t, u_t >= -\int_0^1 u_t^2(\phi,x)(t)dx \leqslant 0.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Para qualquer $\varepsilon > 0$ e $s \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$F(s) \leqslant \varepsilon s^2 + C_\varepsilon,$$

pois pela condição $(H2)$, $\forall\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que para $|u| > M$ temos

$$F(s) - \varepsilon s^2 = \int_0^s [f(\tau)/\tau - 2\varepsilon]\tau d\tau = \int_0^M [f(\tau)/\tau - 2\varepsilon]\tau d\tau + \int_M^s [f(\tau)/\tau - 2\varepsilon]\tau d\tau \leqslant C_\varepsilon.$$

Portanto, como $|\phi(x)| \leqslant \|\phi\|_{H_0^1}$ temos:

$$V(\phi) \geqslant \frac{1}{2}\|\phi\|_{H_0^1}^2 - \int_0^1 [\varepsilon\phi^2(x) + C_\varepsilon]dx \geqslant \frac{1}{2}\|\phi\|_{H_0^1}^2 - \varepsilon\|\phi\|_{H_0^1}^2 - C_\varepsilon.$$

Considere $\varepsilon = \frac{1}{4}$ e assim obtemos:

$$\|\phi\|_{H_0^1}^2 \leqslant 4V(\phi) + 4c_{\frac{1}{4}}. \tag{3.27}$$

Segue de (3.26) que $V(u(t,\phi))$ é não crescente em t, então temos $V(u(t,\phi)) \leqslant V(\phi)$, isto implica que

$$\|u(t,\phi)\|_{H_0^1}^2 \leqslant 4V(u(t,\phi)) + 4C_{\frac{1}{4}} \leqslant 4V(\phi) + 4C_{\frac{1}{4}}. \tag{3.28}$$

Assim pelo Teorema 2.22 as soluções estão globalmente definidas. Portanto provamos o seguinte teorema:

Teorema 3.28. *O problema 3.24 define um* C_0*-semigrupo sobre* $H_0^1(0,1)$.

Demonstração: O semigrupo é definido por:

$$T(t) : H_0^1(0,1) \to H_0^1(0,1)$$
$$T(t)\phi = u(t;\cdot,\phi)$$

Mostramos que $u(t;\cdot,\phi)$ está globalmente definida, portanto $T(t)$ está definido para todo $t \geqslant 0$. A propriedade de semigrupo é garantida pela unicidade de solução e a continuidade pela continuidade em relação aos dados iniciais.

∎

Teorema 3.29. *O semigrupo* $T(t), t \geqslant 0$ *é um sistema gradiente.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que órbita positiva limitada é pré-compacta. Dado qualquer $r > 0$, por definição de f^e e pelo fato $|\phi(x)| \leqslant \|\phi\|_{H_0^1(0,1)}$, temos que existe uma constante $k(r)$ tal que

$$\|f^e(\phi)\|_X \leqslant k(r),$$

se $\|\phi\|_{H_0^1(0,1)} \leqslant r$.

Assim, existe outra constante $c(r)$ tal que

$$V(\phi) = \int_0^1 [\frac{1}{2}\phi_x^2(x) - F(\phi(x))]dx \leqslant \frac{1}{2}\|\phi\|_{H_0^1} + \int_0^1 \int_0^{\phi(x)} |f(s)|dsdx \leqslant r + k(r)r = c(r)$$

se $\|\phi\|_{H_0^1(0,1)} \leqslant r$.

Portanto, por este fato e pela desigualdade (3.28) temos que

$$\|u(t;\cdot,\phi)\|_{H_0^1}^2 \leqslant 4V(\phi) + 4C_{\frac{1}{4}} \leqslant c(r) + 4C_{\frac{1}{4}}$$

ou seja, as órbitas de conjuntos limitados são limitados sob $T(t)$.

Como o operador A tem resolvente compacto, é possível mostrar, usando a demonstração do Teorema 2.21 que $T(t)$ é completamente contínuo.

Logo a órbita positiva $\gamma^+(\phi)$ de $\phi \in H_0^1(0,1)$ é pré-compacta, segue do Lema 3.16 que o conjunto ω-limite não vazio, compacto, conexo e invariante.

A função definida em (3.25) é um funcional de Lyapunov para $T(t)$ pois:

(i) Por (3.27), $V(x)$ é limitada inferiormente;

(ii) Na expressão (3.27), temos $V(\phi) \to +\infty$ quando $\|\phi\|_{H_0^1} \to +\infty$, ou seja, V satisfaz a condição (ii) da definição de sistema gradiente.

(iii) Pela expressão (3.26) temos que $V(u(t,\phi))$ é não crescente em t;

(iv) Se $V(T(t)\phi) = V(\phi)$, por (3.26) temos $\phi \in E$.

■

Como conseqüência dos resultados acima e do Teorema 3.20, temos que $T(t)$ é assintoticamente suave.

Teorema 3.30. *O semigrupo definido pelo problema* (3.24) *é ponto dissipativo.*

Demonstração: Como já mostramos que $T(t)$ é sistema gradiente, pelo Lema 3.26 temos que $\omega(x) \subset E$ para cada $x \in X$ assim, resta mostrar que E é limitado.

Consideremos $\phi \in E \subset H_0^1(0,1)$, assim ϕ é um valor extremo do funcional

$$V(\phi) = \int_0^1 [\frac{1}{2}\phi_x^2(x) - F(\phi(x))]dx$$

ou seja, $V'(\phi)\phi = 0$ onde

$$V'(\phi)\psi = \int_0^1 [\phi_x \psi_x(x) - f(\phi(x))\psi(x)]dx, \text{ para } \psi \in H_0^1(0,1). \tag{3.29}$$

Como f satistaz (H2) temos que para $\forall \varepsilon > 0$ existe um $M > 0$ tal que $f(u)/u \leqslant \varepsilon$ para $\|u\| \geqslant M$. Em (3.29) consideramos $\psi = \phi$:

$$\int_0^1 \phi_x^2(x)dx = \int_0^1 f(\phi(x))\phi(x)dx = \int_{I_1} f(\phi(x))\phi(x)dx + \int_{I_2} f(\phi(x))\phi(x)dx$$

onde $I_1 = \{x \in [0,1] : |\phi(x)| \geqslant M\}$ e $I_2 = [0,1] \backslash I_1$. Então existe uma constante $K = K(\varepsilon)$ tal que:

$$\int_0^1 \phi_x^2(x)dx \leqslant \varepsilon \|\phi\|_{L^2}^2 + K \leqslant \varepsilon \|\phi\|_{H_0^1}^2 + K.$$

Assim, se $\varepsilon < 1$ temos $\|\phi\|_{H_0^1}^2$ é limitada por $K(1-\varepsilon)^{-1}$ e o conjunto dos pontos de equilíbrio é limitado. ■

Portanto temos:

Teorema 3.31. *Se f satisfaz $(H1)-(H3)$ existe um atrator global conexo*

$$\mathscr{A} = \mathrm{W}^u(\mathrm{E}), \ \textit{em } H_0^1(0,1).$$

Demonstração: Pelos teoremas acima $T(t)$ é assintoticamente suave, sistema gradiente e E limitado, segue do Teorema 3.27 que existe um atrator global conexo dado por

$$\mathscr{A} = \mathrm{W}^u(\mathrm{E}), \text{ em } H_0^1(0,1).$$

■

A importância fundamental de mostrar que (3.24) possui uma variedade invariante $\mathscr{S}$ e um atrator $\mathscr{A}$ é que, como provado em [8], temos a inclusão:

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{S}.$$

Referências Bibliográficas

[1] H. BRÈZIS, *Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications*, Paris: Masson, 1983.

[2] A. PAZY, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, 1983, Springer-Verlag, New York.

[3] V.L. CARBONE, *Tese de Doutorado*, ICMC-USP, Fevereiro de 2003.

[4] M.A. EVGRAFOV, *Asymptotic Estimates and Entire functions*, 1961, Gordon and Breach, New York.

[5] D. HENRY, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, **vol. 840**, 1980, Springer Verlag, Berlin.

[6] J.K. HALE, *Asymptotic Behavior of Dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs, 25, AMS, 1988.

[7] R. TEMAM, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Spring-Verlag.

[8] A. RODRIGUEZ-BERNAL, *Inertial Manifolds for Dissipative Semiflows in Banach Spaces*, Appl.Anal., 37, 95-141, 1990.

[9] J. M. ARRIETA, A. N. CARVALHO AND A. RODRÍGUEZ-BERNAL, *Upper semicontinuity for attractors of parabolic problems with localized large diffusion and nonlinear boundary conditions*, Journal of Differential Equations, **168**, 33-59, (2000).

[10] V. L. CARBONE, A. N. CARVALHO, K. SCHIABEL-SILVA, *Continuity of attractors for parabolic problems with localized large diffusion*, to apper in Nonlinear Analysis.

[11] A. N. CARVALHO, *Notas de Equações Parabólicas Semilineares*, ICMC-USP.