

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Movimento de interface para duas equações de reação-difusão

João Biesdorf

SÃO CARLOS
2007

Movimento de interface para duas equações de reação-difusão

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Movimento de interface para duas equações de reação-difusão

João Biesdorf

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento.

SÃO CARLOS
2007

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

B589mi

Biesdorf, João.

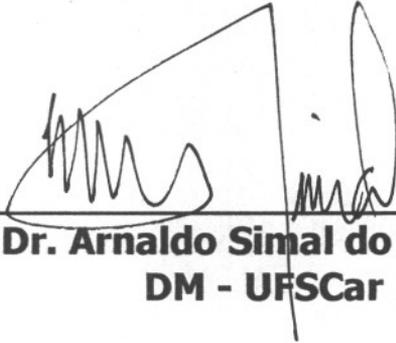
Movimento de interface para duas equações de reação-difusão / João Biesdorf. -- São Carlos : UFSCar, 2007.
76 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2007.

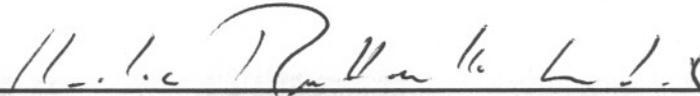
1. Expansão assintótica. 2. Movimento por curvatura média. 3. Movimento de interface. 4. Equação de reação-difusão. I. Título.

CDD: 515.35 (20ª)

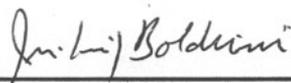
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento
DM - UFSCar



Profa. Dra. Cláudia Buttarello Gentile
DM - UFSCar



Prof. Dr. José Luis Boldrini
UNICAMP

Agradecimento

Agradeço primeiramente a Deus pela vida com saúde e a vocação à matemática, ambos por Ele concedidos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento, pelo profissionalismo e prontidão em sanar minhas dúvidas e principalmente pela paciência e dedicação na correção deste trabalho.

Aos demais professores que, de uma forma ou de outra, participaram de minha formação acadêmica.

Aos meus pais, Irineo e Inês, pelo incentivo e por me darem a oportunidade de caminhar até aqui.

Aos meus irmãos, Luís, Miguel e Teresinha, por sempre terem me apoiado.

À minha namorada Rosane que, mesmo longe, muito me incentivou e apoiou psicologicamente.

Ao amigo, colega de moradia e de curso, Francisco, que, além de me apoiar e incentivar, nunca negou ajuda profissional.

Aos amigos distantes ou próximos, novos ou antigos, que, cada um do seu jeito, sempre me apoiaram e incentivaram.

Aos colegas de turma pela ajuda, coleguismo e pelos momentos de descontração.

Enfim, a todos os que de uma maneira ou de outra contribuíram para que eu chegasse ao término de mais uma etapa da vida.

Muito obrigado.

-Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Abstrat

In this work, following [15], we will use the technique of matched asymptotic expansions to study the movement of interface for the solutions of an advection-reaction-diffusion equations and the equation of reaction-diffusion with spatially of inhomogeneous reaction term. We will get that the equations of such movements are equal. Also we will study a system of equations without the drift term and will compare the movement of its interfaces with the equation of the model of chemotaxis considered by Mimura and TsujiKawa [13] and [14].

Keywords: Asymptotic expansions, mean curvature motion.

Resumo

Nesta dissertação, seguindo [15], usaremos a técnica de expansões assintóticas para estudar o movimento de interface para as soluções das equações de advecção-reação-difusão e a equação de reação-difusão com taxa de reação espacialmente não homogênea. Nisto obteremos que as equações de tais movimentos são iguais.

Também estudaremos um sistema de equações sem o termo flutuante e compararemos o movimento de suas interfaces com a equação do modelo de chemotaxis proposto por Mimura e TsujiKawa [13] e [14].

Palavras-chave: Expansões assintóticas, movimento por curvatura média.

Sumário

0	Introdução	13
1	Preliminares	17
1.1	Introdução	17
1.2	Expansões assintóticas de uma função	17
1.3	Um pouco de geometria diferencial	24
1.4	Estudo de duas EDOs muito úteis	31
2	Obtenção da equação da interface	43
2.1	Introdução	43
2.2	As soluções das equações de reação-difusão	43
2.3	Expansões assintóticas	47
2.4	Interface da equação de advecção-reação-difusão	49
2.5	Interface referente equação de reação-difusão	53
3	Interface de um sistema de reação-difusão	57
3.1	Introdução	57
3.2	Interface referente ao sistema de reação-difusão	58
4	Simulações numéricas	65
4.1	Convergência da interface	65
4.2	Exemplos	67

Capítulo 0

Introdução

Em soluções de equações de reação-difusão bi-estáveis não lineares, com o efeito de difusão relativamente pequeno se comparado com a taxa de reação, podemos muitas vezes observar o aparecimento de uma nítida camada interna, conhecida como interface. Esta, a grosso modo, é uma hiperfície que separa o domínio da solução da equação em dois conjuntos, em cada um dos quais a solução é praticamente constante. Neste caso, perto da interface ocorre uma rápida transição de um estado para outro, ou seja, a norma do vetor gradiente da solução se torna grande.

Para nos orientarmos nesta dissertação, seguimos basicamente [15] e complementamos com as demais referências bibliográficas.

Um dos objetivos desta dissertação é mostrar que a equação de advecção-reação-difusão

$$(0.1) \quad \begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon \Delta u + \frac{\varepsilon}{h(x)} \nabla h(x) \cdot \nabla u + \frac{1}{\varepsilon} f(u); \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \end{cases}$$

e a equação de reação-difusão com taxa de reação espacialmente não homogênea

$$(0.2) \quad \begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} h(x)^2 f(u); \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \end{cases}$$

têm a mesma equação de movimento de interface, a saber,

$$(0.3) \quad V = -(n-1)H - \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \ln(h)$$

sendo V e H respectivamente a velocidade normal e curvatura média da interface. Na Equação (0.1), $\varepsilon \Delta u$ é o efeito de difusão, $\frac{\varepsilon}{h(x)} \nabla h(x) \cdot \nabla u$ o termo de advecção e $\frac{1}{\varepsilon} f(u)$ a taxa de reação. Na Equação (0.2), a parcela $\frac{1}{\varepsilon} h(x)^2 f(u)$ é a taxa de reação espacialmente não homogênea.

Tomando $\varepsilon > 0$ como um parâmetro suficientemente pequeno, tanto em (0.1) como em (0.2), o efeito de difusão é relativamente pequeno se comparado com a taxa de reação. Aqui $h(x) > 0$ é suave e

$$(0.4) \quad f(u) = -W'(u)$$

também é suave, onde W é uma função potencial de poço duplo cujos mínimos locais estão localizados em $u = 0$ e $u = 1$ e além disso $W(0) = W(1)$. Isto quer dizer que para algum

$$(0.5) \quad a \in (0, 1),$$

$$(0.6) \quad f(0) = f(a) = f(1) = 0, \quad f'(0) < 0, \quad f'(a) > 0 \text{ e } f'(1) < 0.$$

Por outro lado $W(0) = W(1)$ acarreta $\int_0^1 f(u) du = 0$.

Exemplo 0.1 Um caso simples de tal W é $W(u) = u^2(1-u)^2$, pois $W(0) = W(1) = 0$ e $W \geq 0$. Assim 0 e 1 são mínimos globais de W e são únicos em $[0, 1]$ pois $W'(u) = 0$ em $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, sendo que W atinge o máximo local em $u = (1/2)$. Veja o gráfico na Figura 1.

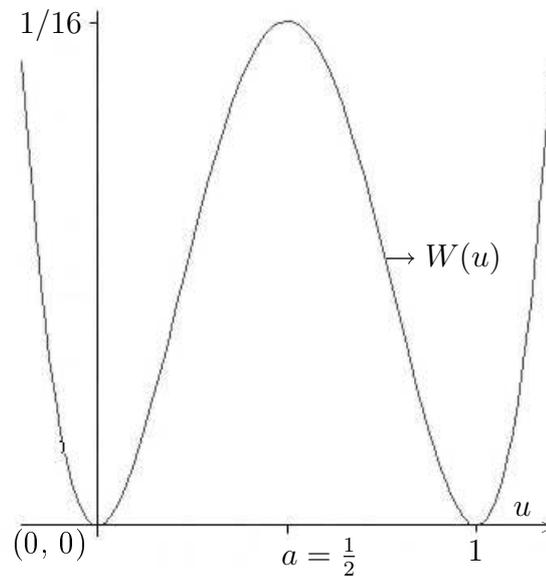


Figura 1: Gráfico de $W(u) = u^2(1-u)^2$.

Também estudaremos o sistema de equações sem o termo flutuante

$$(0.7) \quad \begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} h(v)^2 f_\varepsilon(u), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ \varepsilon v_t = \Delta v + u - \gamma v, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \end{cases}$$

e compararemos o movimento de suas interfaces com a equação do modelo de chemotaxis proposto por Mimura e TsujiKawa [13] e [14]

$$(0.8) \quad \begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon \Delta u - \varepsilon \nabla \cdot (u \nabla \chi(v)) + \frac{1}{\varepsilon} f_\varepsilon(u), & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \varepsilon v_t = \Delta v + u - \gamma v, & \text{em } \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

sendo $\nabla \cdot$ o operador divergente. Aqui $f_\varepsilon(u) = u(1-u)(u-1/2+\alpha\varepsilon)$ e α, γ são constantes positivas. A função χ é chamada de função de sensibilidade da agregação chemotaxis e satisfaz $\chi'(v) > 0$ para $v > 0$. Um exemplo comum de tal χ é $\chi(v) = kv$ sendo $k > 0$ uma constante. Ainda na Equação (0.8), a parcela $\varepsilon \nabla \cdot (u \nabla \chi(v))$ é conhecida como termo flutuante e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado com $\partial\Omega$ suave. Ressaltamos também que chemotaxis é um tipo de movimento, em que as bactérias e outros organismos unicelulares ou multicelulares, dirigem seus movimentos de acordo com determinados produtos químicos por eles segregados.

O problema 0.8 é um modelo de crescimento chemotaxis que descreve o movimento de indivíduos quando a quantidade de nutrientes é constante. As funções incógnitas $u(x, t)$ e $v(x, t)$ são respectivamente a densidade populacional de indivíduos e concentração da substância de chemotaxis na posição $x \in \Omega$ e no tempo $t > 0$.

Sendo $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ a solução do problema (0.8), Bonami, Hilhorst, Logak e Mimura [5] mostraram que $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightarrow (u_0, v_0)$ em $[0, T]$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para algum $T > 0$, sendo u_0 a função característica do domínio em movimento $\Omega_t \subset\subset \Omega$, cuja equação de movimento relativa a v_0 é dada por

$$(0.9) \quad \begin{cases} V = (n-1)H + \frac{\partial \chi(v_0)}{\partial \vec{n}} + c_0 \alpha & \text{em } \Gamma_t = \partial\Omega_t, t \in (0, T) \\ -\Delta v_0(x, t) + \gamma v_0(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_t, t \in [0, T], \\ 1, & x \in \Omega_t, t \in [0, T] \end{cases} \\ \frac{\partial v_0}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{em } \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

onde \vec{n} é o vetor normal exterior em Γ_t , V a velocidade normal de Γ_t , H a curvatura média de Γ_t (a qual é positiva se Ω_t é convexa), $\overline{\Omega}_t = \Omega_t \cup \Gamma_t$ e $c_0 = \sqrt{2}$.

A evolução de Γ_t determina os modelos de agregação de indivíduos. Na presença do termo de chemotaxis podemos observar numericamente inúmeros casos em que Ω_t perde a convexidade e desenvolve padrões bastante complicados, o que não acontece quando $\chi(v)$ é espacialmente constante pois neste caso o movimento da interface é simplesmente governado pela curvatura média de Γ_t . Portanto os padrões dinâmicos desenvolvidos pelo problema (0.8) dependem crucialmente da função de sensibilidade da agregação chemotaxis. Um dos propósitos principais de Nakamura, Matano, Hilhorst e Schätzle em [15] foi mostrar precisamente que alguma complexa tendência espacial pode ocorrer também num sistema de equação reação-difusão sem o termo flutuante, que nesta dissertação é representado pelo sistema (0.7).

Para dar mais autonomia à esta dissertação, o segundo capítulo tratará de assuntos preliminares, tais como, a definição de expansão assintótica, definição e caracterização da função distância com sinal e por final um teorema de condições necessárias e suficientes para a existência de solução limitada de uma determinada EDO. Este teorema será indispensável para a obtenção da equação de movimento das interfaces das soluções de (0.1), (0.2) e (0.7). O enunciado do mesmo está em [15] que remete a demonstração a [1]. Por outro lado, em [1] esta demonstração é inviável para este trabalho. No entanto, em [15] foi sugerido o uso da alternativa de Fredholm, porém não conseguimos contornar a não compacidade, uma vez que a solução da EDO está definida em \mathbb{R} e não em conjuntos limitados. Por causa destes fatos, optamos por desenvolver duas demonstrações próprias para o mesmo sendo uma mais simples e outra mais geral.

No terceiro capítulo veremos uma obtenção formal para as equações de movimento de interface das soluções referentes as equações (0.1) e (0.2), mostrando que as duas equações obtidas são iguais. Aqui as técnicas usadas serão a função distância com sinal e as expansões assintóticas. Isto pode ser visto por exemplo em [9].

No quarto capítulo, usando as mesmas técnicas usadas no terceiro capítulo, estudaremos o sistema (0.7). Veremos que, com algumas hipóteses adicionais, a equação de movimento da interface, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, é dada por (0.9), a qual, por [5], é a equação de movimento da interface de (0.8).

Finalmente, no quinto capítulo, mostraremos simulações numéricas feitas em [15]. Adiantamos que assumiremos $n = 2$ e, ao invés de tomar o domínio espacial das equações como sendo o \mathbb{R}^n todo, nós o tomaremos como sendo um quadrado centrado na origem e cujos lados são paralelos aos eixos cartesianos. Observaremos que nas simulações, os movimentos das interfaces para as equações (0.1) e (0.2) são idênticos entre si, confirmando os resultados obtidos no terceiro capítulo. Analiticamente, obteremos condições suficientes nas equações (0.1) e (0.2) e em suas interfaces iniciais tais que cada uma destas interfaces converge para um círculo centrado na origem, o qual neste caso é uma interface estacionária de equilíbrio estável para a respectiva equação. Isto também será ilustrado numericamente em exemplos em que estas condições estão ou não satisfeitas. Também apresentaremos exemplos da evolução das interfaces para o sistema (0.7), observando a existência de uma grande variedade de padrões espaciais.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste Capítulo apresentaremos algumas definições e resultados a serem usados nesta dissertação.

Na Seção 2 estudaremos a ordem de magnitude entre duas funções, chegando a definir o que é uma expansão assintótica de uma função.

Na Seção 3 definiremos hiperfície suave. Seja S uma tal hiperfície que divide \mathbb{R}^n em duas componentes conexas, sendo uma delas limitada. A partir da mesma definiremos a função distância com sinal a S . Mostraremos que esta função herda a suavidade desta hiperfície numa vizinhança tubular de S . E além disso, mostraremos que a norma do vetor gradiente de tal função quando existe é unitária. Porém, o resultado central desta seção é aquele que relaciona o laplaciano da função distância descrita acima, com a curvatura média de S .

Na Seção 4 faremos o estudo de dois problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias. Estudaremos a existência e unicidade de soluções limitadas para estes problemas, mostrando inclusive condições necessárias e suficientes para tal. Também daremos importância ao estudo do comportamento de tais soluções.

1.2 Medida matemática de ordem de magnitude entre duas funções e expansões assintóticas

As vezes é útil ter uma medida matemática da ordem relativa de magnitude entre duas expressões matemáticas. Veremos isto melhor nas definições e exemplos a seguir, onde introduziremos os conceitos de magnitude "O" e "o".

Definição 1.1 *Dada uma função contínua $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que $A(\xi) = O(e^{-\rho|\xi|})$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ para algum $\rho > 0$ se existe $k > 0$ tal que $|A(\xi)| \leq ke^{-\rho|\xi|}$ para todo*

$\xi \in \mathbb{R}$.

Notemos que podemos reescrever a definição acima, substituindo $|A(\xi)| \leq ke^{-\rho|\xi|}$ por $|A(\xi)|e^{\rho|\xi|} \leq k$.

Pela definição acima, dados $\rho_1 \leq \rho_2$ números positivos temos que $A(\xi) = O(e^{-\rho_2|\xi|})$ quando

$|\xi| \rightarrow \infty$ para algum $\rho > 0$, implica em $A(\xi) = O(e^{-\rho_1|\xi|})$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ para algum $\rho > 0$.

Observamos que isto é consequência imediata da desigualdade $e^{-\rho_2|\xi|} \leq e^{-\rho_1|\xi|}$.

Exemplo 1.1 *Sejam n um número inteiro positivo e $\rho_2 > \rho_1 > 0$. Então $A(\xi) = O(e^{-\rho_2|\xi|})$ quando*

$|\xi| \rightarrow \infty$ para algum $\rho > 0$ implica em $\xi^n A(\xi) = O(e^{-\rho_1|\xi|})$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ para algum $\rho > 0$. Para nos certificarmos disto, observemos que por hipótese existe $k > 0$ tal que

$$|A(\xi)| \leq k \exp(-\rho_2|\xi|).$$

Disto segue que

$$|\xi^n A(\xi)| \leq |\xi^n| k \exp(-\rho_2|\xi|).$$

Através de processo recursivo em n pode se mostrar que existe $\tilde{k} > 0$ tal que

$$|\xi^n| \leq \tilde{k} \exp((\rho_2 - \rho_1)|\xi|).$$

Usando esta última desigualdade na anterior a ela, segue

$$|\xi^n A(\xi)| \leq k\tilde{k} \exp(-\rho_1|\xi|),$$

o que é exatamente o resultado proposto.

Definição 1.2 *Dados $\varepsilon_1 > 0$, $I = (0, \varepsilon_1)$ um intervalo aberto, $D \subset \mathbb{R}^n$ e u, v funções reais definidas em $D \times I$, dizemos que $u(x, \varepsilon) = O(v(x, \varepsilon))$ em I se para cada $x \in D$ existe k tal que $|u(x, \varepsilon)| \leq k|v(x, \varepsilon)|$ para todo $\varepsilon \in I$. Simplificadamente escrevemos $u = O(v)$ em I .*

Definição 1.3 *Dizemos que u e v tem a mesma ordem de magnitude em I se $u = O(v)$ em I e $v = O(u)$ em I e neste caso escrevemos $v = O_S(u)$ em I ou equivalentemente $u = O_S(v)$ em I .*

Dado $c > 0$, tomando respectivamente $k = c$ e $1/c$ na Definição 1.2, temos $\varepsilon = O_S(\varepsilon/c)$ em $I = (0, \varepsilon_1)$ para todo $\varepsilon_1 > 0$.

Definição 1.4 *Dadas as funções reais u e v como na Definição 1.2, dizemos que $u(x, \varepsilon) = o(v(x, \varepsilon))$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se, para cada $x \in D$ e $\delta > 0$, existe um intervalo $I' = (0, \varepsilon')$ tal que*

$$(1.1) \quad |u(x, \varepsilon)| \leq \delta |v(x, \varepsilon)|$$

para todo $\varepsilon \in I'$. Simplificadamente escrevemos $u \ll v$.

Na prática, se para cada $x \in D$ existe $\varepsilon' > 0$ tal que $v(x, \varepsilon)$ não se anula no intervalo $(0, \varepsilon')$, podemos dividir a desigualdade dada em (1.1) por $|v(x, \varepsilon)|$. Tomando $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos que esta é equivalente a

$$(1.2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{u(x, \varepsilon)}{v(x, \varepsilon)} \right| = 0.$$

Por (1.2) temos por exemplo $\varepsilon^n \ll \varepsilon^{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Podemos também modificar as definições 1.2 e 1.4 tirando a dependência em x . Mas isto não é o objetivo deste trabalho e, caso haja interesse do leitor em se aprofundar em tal assunto, sugerimos [12].

Definição 1.5 *Dizemos que $y^* = y^*(y, \varepsilon)$ é um aumento de ordem de magnitude de y em relação a ε quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se $y = o(y^*(y, \varepsilon))$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Um exemplo simples e muito útil de y^* da Definição 1.5 é $y^*(y, \varepsilon) = y/\varepsilon$.

Muitas vezes, para estudarmos algumas propriedades de uma função, é útil fazer certas expansões da mesma e então, estudando os coeficientes destas expansões, podemos obter propriedades de tal função. Na verdade está aqui uma ferramenta muito importante desta dissertação.

Definição 1.6 *Dada uma seqüência $\{\phi_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ definida num intervalo $I = (0, \varepsilon_0)$, dizemos que ela é assintótica, se $\phi_{n+1} \ll \phi_n$; ($n = 1, 2, 3, \dots$).*

Um exemplo bastante conhecido de tal seqüência é $\phi_n(\varepsilon) = \varepsilon^{n-1}$.

Definição 1.7 *Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $I = (0, \varepsilon_0)$ um intervalo. Dados uma função real u definida em $D \times I$ e $\{\phi_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência assintótica definida em I , dizemos que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \phi_k(\varepsilon)$ é uma expansão assintótica de $u(y, \varepsilon)$ e escrevemos $u(y, \varepsilon) \sim \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \phi_k(\varepsilon)$ se*

$$(1.3) \quad u(y, \varepsilon) - \sum_{k=1}^M u_k(y) \phi_k(\varepsilon) = o(\phi_M(\varepsilon)) \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (M = 1, 2, 3, \dots).$$

A proposição a seguir, sob certas hipóteses, nos dá condições necessárias e suficientes para a existência dos coeficientes $u_k(y)$ da expansão assintótica na Definição 1.7 e um algoritmo recursivo para a construção dos mesmos.

Proposição 1.1 *Sejam $\{\phi_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência assintótica e u uma função como na Definição (1.7). Se existe ε' tal que $\phi_k(\varepsilon)$ não se anula no intervalo $(0, \varepsilon')$ para $(k = 1, 2, 3, \dots)$, então existe uma expansão assintótica para u se e somente se*

$$(1.4) \quad \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(y, \varepsilon) - \sum_{n=1}^{k-1} u_n(y) \phi_n(\varepsilon)}{\phi_k(\varepsilon)} \right| < \infty$$

para $(k = 1, 2, 3, \dots)$. E neste caso os coeficientes $u_k(y)$ da expansão são assintótica dados por

$$(1.5) \quad u_k(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(y, \varepsilon) - \sum_{n=1}^{k-1} u_n(y) \phi_n(\varepsilon)}{\phi_k(\varepsilon)};$$

$(k = 1, 2, 3, \dots)$. Aqui definimos $\sum_{n=1}^0 u_n(y) \phi_n(\varepsilon) \doteq 0$.

Para demonstrar esta proposição, vamos usar os dois próximos lemas.

Lema 1.2 *Sejam $\{\phi_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$, u e $u_k(y)$; $(k = 1, 2, 3, \dots)$ como na Proposição 1.1. Então estes coeficientes satisfazem a Definição 1.7.*

Demonstração: Vamos fazer a demonstração usando o princípio de indução matemática em k . Para $k = 1$ precisamos mostrar que $u(y, \varepsilon) - u_1(y) \phi_1(\varepsilon) = o(\phi_1(\varepsilon))$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Mas por (1.2), esta é equivalente a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(y, \varepsilon) - u_1(y) \phi_1(\varepsilon)}{\phi_1(\varepsilon)} = 0,$$

mas esta última igualdade de fato ocorre quando substituimos (1.5) com $k = 1$. Agora supondo que a Definição 1.7 está satisfeita para $(k = 1, \dots, m)$ e usando (1.5) temos

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\phi_{m+1}(\varepsilon)} \left(u(y, \varepsilon) - \sum_{n=1}^{m+1} u_n(y) \phi_n(\varepsilon) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{u(y, \varepsilon)}{\phi_{m+1}(\varepsilon)} - \frac{1}{\phi_{m+1}(\varepsilon)} \sum_{n=1}^m u_n(y) \phi_n(\varepsilon) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{u(y, \varepsilon)}{\phi_{m+1}(\varepsilon)} - \frac{1}{\phi_{m+1}(\varepsilon)} \sum_{n=1}^m u_n(y) \phi_n(\varepsilon) \right) = 0, \end{aligned}$$

o que por (1.2) satisfaz a Definição 1.7 para $k = m + 1$. Assim, pelo princípio de indução matemática, a afirmação do Lema é verdadeira. ■

Lema 1.3 *Dada uma seqüência assintótica $\{\phi_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ e a função real u como na Proposição 1.1, se $u(y, \varepsilon)$ tem uma expansão assintótica, então os coeficientes $u_k(y)$; $(k = 1, 2, 3, \dots)$ da mesma são dados por (1.5).*

Demonstração: Usando (1.2), então por hipótese temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\phi_k(\varepsilon)} \left(u(y, \varepsilon) - \sum_{n=1}^k u_n(y) \phi_n(\varepsilon) \right) = 0;$$

($k = 1, 2, 3, \dots$) e portanto

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\phi_k(\varepsilon)} \left(u(y, \varepsilon) - \sum_{n=1}^{k-1} u_n(y) \phi_n(\varepsilon) \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\phi_k(\varepsilon)} u_k(y) \phi_k(\varepsilon), \\ \Rightarrow u_k(y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(y, \varepsilon) - \sum_{n=1}^{k-1} u_n(y) \phi_n(\varepsilon)}{\phi_k(\varepsilon)}, \end{aligned}$$

o que mostra (1.5) para ($k = 1, 2, 3, \dots$). ■

Vejamos agora a demonstração da Proposição 1.1.

Demonstração: (\Rightarrow) Pelo Lema 1.3 temos que os coeficientes da expansão assintótica são dados por (1.5) e portanto o limite (1.4) existe.

(\Leftarrow) Pelo Lema 1.2, os coeficientes dados em (1.5) satisfazem a a Definição 1.7, o que acaba de demonstrar a Proposição 1.1. ■

Corolário 1.4 *Seja u uma função como na Definição 1.7. Então, para cada seqüência assintótica fixada $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$ que esteja nas hipóteses da Proposição 1.1, a expansão assintótica de u , quando existe, é única.*

Demonstração: Conseqüência imediata da Proposição 1.1 e da unicidade do limite dado em (1.5). ■

Quando a seqüência assintótica não satisfaz a condição da existência de ε' tal que ϕ_k não se anula em $(0, \varepsilon')$ para todo K inteiro fica mais difícil falar em expansão assintótica. Nesta dissertação vamos nos restringir ao caso em que esta condição está satisfeita. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.2 *Um caso particular, porém bastante comum para $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$, é o caso em que $\phi_n(\varepsilon) = \varepsilon^{n-1}$. O fato de que esta seqüência é assintótica é conseqüência direta da Definição 1.4.*

Neste caso

$$u(y, \varepsilon) \sim \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \varepsilon^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}(y) \varepsilon^n$$

o que é a expansão de Taylor de $u(y, \cdot)$ numa vizinhança a direita de $\varepsilon = 0$. É fácil de ver que se a série de Taylor é convergente, então ela satisfaz a Definição 1.7. Assim a expansão

de Taylor é de certa forma um caso particular de expansão assintótica. Portanto, nestas condições a expansão de Taylor coincide com a expansão assintótica e podemos falar em série de Taylor sem falar em derivadas da função.

Muitas vezes na Definição 1.7, a Equação (1.3) é satisfeita para cada $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ mas não vale uniformemente em y . Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 1.3

$$(1.6) \quad \begin{cases} u(y, \varepsilon) = e^{-y/\varepsilon} - \frac{\varepsilon e^{-y}}{y+\varepsilon} \\ y \geq 0, \varepsilon > 0 \text{ e} \\ \phi_n(\varepsilon) = \varepsilon^{n-1}. \end{cases}$$

Aqui, usando a Proposição 1.1, temos que

$$(1.7) \quad u_n(y) = (-1)^{n-1} \frac{e^{-y}}{y^{n-1}}.$$

Notemos também que se

$$\tilde{u}(y, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon e^{-y}}{y + \varepsilon},$$

então \tilde{u} e u têm a mesma expansão. Isto porque $e^{-y/\varepsilon}$ é transcendentamente pequeno; ou seja: $e^{-y/\varepsilon} = o(\varepsilon^n)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$; ($n = 1, 2, 3, \dots$). Observemos também que (1.7) satisfaz a Definição 1.7, mas (1.3) não está satisfeita uniformemente em y perto de $y = 0$. De fato (1.7) nem está definida em $y = 0$. Observemos o gráfico de u e sua expansão até $n = 3$ com $\varepsilon = 0,1$ na Figura 1.1.

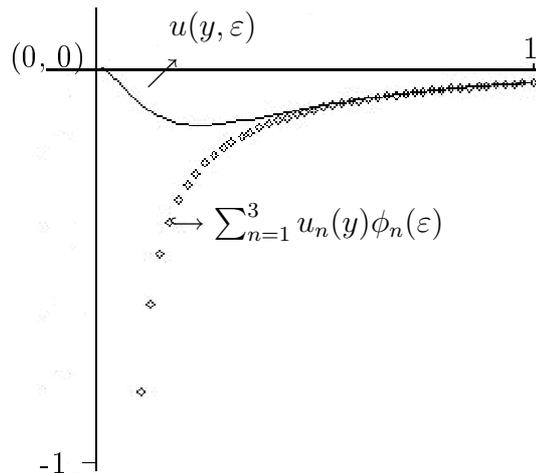


Figura 1.1: Gráfico de u e sua expansão até $n = 3$ com $\varepsilon = 0,1$.

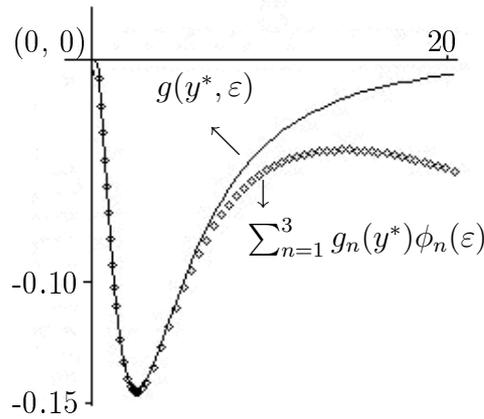


Figura 1.2: Gráfico de g e sua expansão até $n = 3$ com $\varepsilon = 0, 1$.

A definição de expansão dada na Definição 1.7 é muito prática quando baseada no limite $\varepsilon \rightarrow 0$ com y fixo, porém pode deixar a desejar quando (1.3) não vale uniformemente na variável y . Neste exemplo, esta uniformidade deixa de valer em torno de $y = 0$ e assim a expansão não é muito boa quando fazemos $y \rightarrow 0$ e ε fixo. Isto podemos observar na representação feita na Figura 1.1. Aqui, mais geralmente, se $y = O(\varepsilon)$, a expansão dada na Definição 1.7 truncada não aproxima bem u quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim é razoável fazermos tentativas de mudança de variável no sentido de aumentar a ordem de magnitude de y em relação a ε . Também ainda observando que $e^{y/\varepsilon}$ não aparece na expansão de u , uma tentativa inicial é tomar $y^*(y, \varepsilon) = y/\varepsilon$. Assim temos

$$u(y, \varepsilon) = g(y^*, \varepsilon) = e^{-y^*} - \frac{e^{-\varepsilon y^*}}{y^* + 1}$$

Mas agora com a mesma seqüência usada em (1.6), temos

$$(1.8) \quad g_n(y) = \begin{cases} \exp(-y^*) - \frac{1}{1+y^*}, & \text{se } n = 1 \\ (-1)^n \frac{(y^*)^{n-1}}{(n-1)!(1+y^*)}, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Notamos agora que o termo $e^{-y/\varepsilon}$ contribui em (1.8). Observamos também que o lado direito de (1.8) se anula em $y^* = 0 = y$ para todas as ordens de ε . E isto já é um bom começo pois $u(0, \varepsilon) = 0$. Analisando o gráfico da Figura 1.2, vemos que (1.8) truncado em $n = 3$ já é uma boa aproximação para u perto de $y^* = 0$, porém deixa a desejar para y^* grande. Assim vimos 1.7 e 1.8 são expansões muito boas para u mas em domínios mutuamente excludentes.

O exemplo acima, motiva a definição a seguir:

Definição 1.8 *Seja u uma função como na Definição 1.7. Então se*

$$(1.9) \quad u(y, \varepsilon) \sim \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \phi_n(\varepsilon)$$

e se $u(y, \varepsilon) = g(y^*, \varepsilon)$ com

$$(1.10) \quad g(y^*, \varepsilon) \sim \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y^*) \phi_n(\varepsilon),$$

sendo y^* um aumento da ordem de magnitude de y em relação a ε quando $\varepsilon \rightarrow 0$, dizemos que (1.9) é uma expansão externa de u , enquanto (1.10) é dita expansão interna de u .

1.3 Um pouco de geometria diferencial

Nesta seção, com base em [18], [11] e [3], faremos um pequeno estudo direcionado de Geometria Diferencial. Definiremos hiperfície suave em \mathbb{R}^n , bem como a sua curvatura média. Também definiremos função distância com sinal até uma hiperfície suave S , sendo S limitada e tal que S divide \mathbb{R}^n em duas componentes conexas, onde uma delas é limitada. Mostraremos que a função distância herda a suavidade da hiperfície numa vizinhança tubular da mesma. Mas o resultado central desta seção é o Corolário 1.12 que relaciona a curvatura média de S com o laplaciano da função distância acima.

Definição 1.9 *Dado $S \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que S é uma hiperfície suave em \mathbb{R}^n se, para cada $p \in S$, existem $U \subset \mathbb{R}^n$ e $\Psi \in C^\infty(U; \mathbb{R})$ tais que $p \in U$, $S \cap U = \Psi^{-1}(0)$ e $\Psi_{x_n}(q) \neq 0 \forall q \in U$.*

Tomando U suficientemente pequeno, podemos assumir $\Psi_{x_n}(q) \neq 0$ para todo $q \in U$. Nestas condições, o teorema da função implícita nos garante que existem aberto $V_{p'}$ e $\Phi \in C^\infty(V_{p'}, \mathbb{R})$ tais que

$$(1.11) \quad \begin{cases} \Psi(x', \Phi(x')) = 0 \\ x' \in V_{p'}. \end{cases}$$

Aqui p' e x' são as respectivas projeções de p e x em \mathbb{R}^{n-1} ignorando-se a última coordenada e, $V_{p'}$ uma vizinhança de p' em \mathbb{R}^{n-1} .

Seja

$$(1.12) \quad \begin{cases} \bar{\Phi} : V_{p'} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x' \rightarrow (x', \Phi(x')). \end{cases}$$

Observamos que, em especial, $\bar{\Phi}(p') = p$.

Por (1.11) temos que $(\Psi \circ \bar{\Phi})$ se anula em $V_{p'}$, logo

$$(1.13) \quad \nabla \Psi(\bar{\Phi}(q')) \cdot D\bar{\Phi}(q') = 0 \quad \text{em } V_{p'},$$

sendo

$$(1.14) \quad D\bar{\Phi}(q') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \Phi_{x_1}(q') & \Phi_{x_2}(q') & \cdots & \Phi_{x_{n-1}}(q') \end{pmatrix}.$$

Como as colunas de $D\bar{\Phi}(q')$ formam uma base para S_q , sendo S_q o hiperplano tangente a S em q , temos que $\nabla \Psi(q) \perp S_q$, o que motivando a seguinte definição:

Definição 1.10 Dado $q \in S \cap U$, dizemos que

$$(1.15) \quad \vec{n}(q) = \frac{\nabla \Psi(q)}{\|\nabla \Psi(q)\|}$$

é o vetor normal unitário de S em q .

Pela motivação precedente, a menos de sinal, a definição acima está bem definida. Assim, tudo que será definido a partir de \vec{n} dependerá do sinal, mas isto não nos causará maiores problemas. Notemos também que $\vec{n} \in C^\infty(U; S^{n-1})$ pois $\nabla \Psi|_U \neq 0$ e $\Psi \in C^\infty(U; \mathbb{R})$. Segue que a matriz $D\vec{n}_{(n \times n)}$ está bem definida. Isto permite a definição a seguir.

Definição 1.11 Dados uma superfície suave S , $q \in S$ e $\vec{n}(q)$ o vetor normal unitário de S em q , dizemos que

$$(1.16) \quad H(q) = -\frac{1}{n-1} \text{tr}(D\vec{n}(q)),$$

é a curvatura média de S em q .

Aqui $\text{tr}(D\vec{n}(q))$ é o traço da matriz $D\vec{n}(q)_{(n \times n)}$.

Podemos considerar $D\vec{n}(q)_{(n \times n)}$ como uma transformação linear de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n .

Definição 1.12 Seja $q \in S$, definimos a curvatura máxima $k(q)$ de S em q como sendo

$$k(q) = \sup_{\|\vec{v}\|=1} \|D\vec{n}(q) \cdot \vec{v}\|.$$

Observemos que geometricamente k é a variação de \vec{n} ao longo de γ , pois

$$D\vec{n}(q) \cdot \vec{v} = D\vec{n}(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = \frac{d}{dt} \vec{n}(\gamma(t))|_{t=t_0}.$$

De agora em diante, vamos supor que S é limitada, fechada e é tal que $\mathbb{R}^n \setminus S$ possui exatamente duas componentes conexas. Um exemplo bem simples de tal superfície

é a esfera S^{n-1} .

Seja Λ^- a componente conexa limitada de $\mathbb{R}^n \setminus S$ e Λ^+ a componente ilimitada de $\mathbb{R}^n \setminus S$. Seja $\mathfrak{d} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(1.17) \quad \mathfrak{d}(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, S), & \text{se } x \in \Lambda^+ \\ -\text{dist}(x, S), & \text{se } x \in \Lambda^- \end{cases}$$

onde $\text{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} \{d(x, y)\}$ é a distância de x até a hiperfície S , sendo $d(x, y)$ a distância de x a y .

Definição 1.13 A função \mathfrak{d} em (1.17) é dita função distância com sinal à hiperfície S .

Pela propriedade da desigualdade triangular temos que d é lipschitziana, com constante de lipschitz igual a 2. Em especial d é contínua. Esta continuidade é herdada por \mathfrak{d} . Vejamos:

Lema 1.5 Seja $s > 0$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, com $\|\theta\| = 1$. Então a função \mathfrak{d} definida acima satisfaz a desigualdade

$$|\mathfrak{d}(x + s\theta)| \leq |\mathfrak{d}(x)| + s.$$

Demonstração: Da definição de $\text{dist}(x, S)$, da continuidade de d e da compacidade de S , temos que existe $y \in S$ tal que $\text{dist}(x, S) = d(x, y)$. Assim ainda pela definição de $\text{dist}(x + s\theta, S)$ e pela desigualdade triangular temos:

$\text{dist}(x + s\theta, S) \leq d(x + s\theta, y) \leq d(x + s\theta, x) + d(x, y) = s + \text{dist}(x, S)$. Como $|\mathfrak{d}(x)| = \text{dist}(x, S)$, esta desigualdade é exatamente o que queríamos demonstrar. ■

Corolário 1.6 Sejam s e θ como no Lema 1.5. Então temos a seguinte desigualdade:

$$| |\mathfrak{d}(x + s\theta)| - |\mathfrak{d}(x)| | \leq s.$$

Demonstração: Se $|\mathfrak{d}(x + s\theta)| \geq |\mathfrak{d}(x)|$ então pelo Lema 1.5, $| |\mathfrak{d}(x + s\theta)| - |\mathfrak{d}(x)| | = |\mathfrak{d}(x + s\theta)| - |\mathfrak{d}(x)| \leq |\mathfrak{d}(x)| + s - |\mathfrak{d}(x)| = s$. Agora se $|\mathfrak{d}(x + s\theta)| < |\mathfrak{d}(x)|$, então o Lema 1.5 vale em especial para $\tilde{x} = x + s\theta$ e $\tilde{\theta} = -\theta$. Conseqüentemente temos: $|\mathfrak{d}(x)| \leq |\mathfrak{d}(x + s\theta)| + s$, da qual resulta: $| |\mathfrak{d}(x + s\theta)| - |\mathfrak{d}(x)| | = |\mathfrak{d}(x)| - |\mathfrak{d}(x + s\theta)| \leq |\mathfrak{d}(x + s\theta)| + s - |\mathfrak{d}(x + s\theta)| = s$. ■

Corolário 1.7 Seja \mathfrak{d} e θ como no Lema 1.5. Então dado $x \in \mathbb{R}^n$ e s suficientemente pequeno, \mathfrak{d} satisfaz

a) $|\mathfrak{d}(x + s\theta) - \mathfrak{d}(x)| \leq s$,

b) \mathfrak{d} é contínua.

Demonstração: Se $x \in S$, então pela definição de \mathfrak{d} e pelo corolário anterior temos que $|\mathfrak{d}(x + s\theta) - \mathfrak{d}(x)| = |\mathfrak{d}(x + s\theta)| \leq s$, satisfazendo a parte (a) do corolário para este caso. Se $x \notin S$, então podemos tomar s suficientemente pequeno tal que x e $x + s\theta$ estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus S$. Assim $\mathfrak{d}(x)$ e $\mathfrak{d}(x + s\theta)$ têm o mesmo sinal e portanto pelo corolário acima $|\mathfrak{d}(x + s\theta) - \mathfrak{d}(x)| = ||\mathfrak{d}(x + s\theta)| - |\mathfrak{d}(x)|| \leq s$. Isto mostra a primeira parte do corolário. A parte (b) é conseqüência imediata desta parte. ■

Da Geometria Diferencial assumimos o seguinte fato:

Proposição 1.8 *Seja S uma hipersuperfície suave e compacta. Então existe $r > 0$ tal que para todo x em $S^r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |\mathfrak{d}(x)| < r\}$ existe um único $y \in S$ com*

$$(1.18) \quad \text{dist}(x, S) = d(x, y).$$

Observamos que $0 < r \leq \inf_{p \in S} \{|k(p)|^{-1}\}$. ■

A afirmação acima encontra-se num apêndice de [11].

Sejam $x_0 \in S^r$ fixado, $y_0 = y(x_0)$ tal que $|\mathfrak{d}(x_0)| = d(x_0, y_0)$ e $d_0 = \mathfrak{d}(x_0)$. Como \vec{n} está orientado de Λ^- para Λ^+ , e $(x_0 - y_0) \perp S_{y_0}$, temos a seguinte equação:

$$(1.19) \quad x_0 = y_0 + \vec{n}(y_0)d_0.$$

Podemos supor que $\vec{n}(y_0)$ aponta no sentido positivo do eixo x_n , ou seja:

$$(1.20) \quad \vec{n}(y_0) = (0, \dots, 0, 1).$$

Por (1.11) existem $V_{y'_0}$ e $\Phi \in C^\infty(V_{y'_0}; \mathbb{R})$ tais que $(y', \Phi(y')) \in S$, para todo $y' \in V_{y'_0}$. Aqui, y'_0 e y' são as respectivas projeções de y_0 e y em \mathbb{R}^{n-1} e $V_{y'_0}$ vizinhança de y'_0 em \mathbb{R}^{n-1} . Por (1.15) e (1.20) com (1.13) e (1.14) temos $\nabla_{x'}\Phi(y'_0) = 0$. Assim por (1.20) temos $\vec{n}(y_0) = (0, \dots, 0, 1) = (\nabla_{x'}\Phi(y'_0), 1)$.

Mas isto é apenas um caso particular da proposição a seguir.

Proposição 1.9 *Seja $\vec{N}(y) = (N_1(y'), \dots, N_n(y'))$, onde*

$$N_i(y') = -\frac{\Phi_{x'_i}(y')}{\sqrt{1 + \|\nabla_{x'}\Phi(y')\|^2}} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

e

$$N_n(y') = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla_{x'}\Phi(y')\|^2}}.$$

Então $\vec{N}(y) = \vec{n}(y)$.

Demonstração: Notemos que $\|\vec{N}(y)\| = 1$ pois o denominador foi tomado para que isto acontecesse. E como as colunas de $D\vec{\Phi}(y')$ definida em (1.14) são uma base para S_y , temos que $\vec{N}(y) \perp S_y$, ou seja $\vec{N}(y) = \pm \vec{n}(y)$. Mas em $y = y_0$, \vec{n} e \vec{N} coincidem. E da continuidade de \vec{N} e \vec{n} temos que eles são iguais. ■

Teorema 1.10 *Seja \mathfrak{d} como em (1.17). Então $\mathfrak{d} \in C^\infty(S^r, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Da construção feita antes da proposição acima temos que

$$(1.21) \quad D\vec{n}(y_0)_{n \times n} = D\vec{N}(y_0)_{n \times n} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ -D^2\Phi(y'_0)_{(n-1) \times (n-1)} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $D^2\Phi(y'_0)_{(n-1) \times (n-1)}$ é a matriz hesiana de Φ em y'_0 . Como $D^2\Phi(y'_0)_{(n-1) \times (n-1)}$ é simétrica e portanto diagonalizável. Consideremos a base B_{y_0} para \mathbb{R}^n , onde B_{y_0} é formado pelos $n - 1$ autovetores de $D^2\Phi(y'_0)_{(n-1) \times (n-1)}$ e $\vec{n}(y_0)$, que continuam sendo autovetores de $D\vec{n}(y_0)_{n \times n}$. Nesta base,

$$(1.22) \quad D\vec{n}(y_0)_{n \times n} = \begin{pmatrix} -d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\{d_i\}_{i=1}^{n-1}$ é o conjunto de autovalores de $D^2\Phi(y'_0)_{(n-1) \times (n-1)}$.

Sejam $I_r = \{d \in \mathbb{R} : |d| < r\}$ e

$$\begin{cases} g : (V_{y'_0}) \times I_H \rightarrow S^r \subset \mathbb{R}^n \\ (y', d) \rightarrow (y', \Phi(y')) + \vec{n}(y', \Phi(y'))d = y + \vec{n}(y)d. \end{cases}$$

Em especial $g(y'_0, d_0) = x_0$ e $d_0 \in I_r$. É claro que $g \in C^\infty(V_{y'_0}) \times I_r$ e

$$Dg(y'_0, d_0)_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 - d_1 d_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - d_2 d_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - d_{n-1} d_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $d_0 \in I_r$ e $|d_i| < r^{-1}$; ($i = 1, \dots, n - 1$), temos $\det(Dg(y'_0, d_0)_{n \times n}) > 0$. Assim pelo teorema da função inversa existe uma vizinhança \tilde{V} de x_0 e $\tilde{g} \in C^\infty(\tilde{V}, \mathbb{R}^n)$ tal que $g \circ \tilde{g}$

é a identidade em \tilde{V} . Portanto, seja x na imagem de g , então pela definição de g temos: $\tilde{g}(x) = \tilde{g}(y + \vec{n}(y)\mathfrak{d}(y)) = (y', \mathfrak{d}(y))$ mostrando em especial que \mathfrak{d} é C^∞ na imagem de \tilde{V} pela g . E como este teorema vale para qualquer $x_0 \in S^r$ e pela Proposição 1.8 temos que g definida acima é injetora; temos que $\mathfrak{d} \in C^\infty(S^r, \mathbb{R})$. ■

Notemos no teorema acima, a importância da unicidade de y dada pela Proposição 1.8, pois ao contrário \tilde{g} não estaria nem definida. Vejamos um exemplo simples em que não temos a unicidade. Sabemos também que se \mathfrak{d} é diferenciável, então

$$(1.23) \quad \nabla \mathfrak{d}(x) \cdot h = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{d}(x + sh) - \mathfrak{d}(x)}{s}$$

onde $s \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.4 *Seja $n = 2$, S a esfera unitária centrada na origem, $x_0 = (0, 0)$ e $h = (1, 0)$. Então supondo que \mathfrak{d} é diferenciável em x_0 , por (1.23) temos,*

$$1 = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\mathfrak{d}((s, 0)) - \mathfrak{d}((0, 0))}{s} = \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\mathfrak{d}((s, 0)) - \mathfrak{d}((0, 0))}{s} = -1,$$

o que é uma contradição. Portanto, \mathfrak{d} não é diferenciável em x_0 .

Corolário 1.11 *Se \mathfrak{d} é diferenciável, então $\|\nabla \mathfrak{d}\| = 1$.*

Demonstração: Pela definição de norma para operadores lineares, seguida por (1.23) e ainda pela parte (a) do Lema 1.7, temos:

$$|\nabla \mathfrak{d}(x)| = \sup_{\substack{h \in \mathbb{R}^n, \\ \|h\|=1}} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|\mathfrak{d}(x + sh) - \mathfrak{d}(x)|}{s} \leq 1,$$

mostrando assim que

$$|\nabla \mathfrak{d}(x)| \leq 1.$$

Portanto, para completar a tese do corolário, resta mostra que

$$|\nabla \mathfrak{d}(x)| \geq 1.$$

Para isto vamos primeiro supor que $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Neste caso, sejam $y \in S$ tal que $|\mathfrak{d}(x)| = d(x, y)$, $\theta = (x - y)/\|x - y\|$ e $0 < s < 1$ suficientemente pequeno tal que $x + s\theta$ e x pertençam à mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus S$. Disto segue que

$$(1.24) \quad |\mathfrak{d}(x + \frac{s}{\|x - y\|}(x - y))| = d(x + \frac{s}{\|x - y\|}(x - y), y).$$

De fato, pois se

$$|\mathfrak{d}(x + \frac{s}{\|x - y\|}(x - y))| < d(x + \frac{s}{\|x - y\|}(x - y), y).$$

então pela definição de $\mathfrak{d}(\cdot)$ temos que existe $z \in S$ tal que

$$d\left(x + \frac{s}{\|x-y\|}(x-y), z\right) < d\left(x + \frac{s}{\|x-y\|}(x-y), y\right).$$

Mas isto implica que

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d\left(x, x + \frac{s}{\|x-y\|}(x-y)\right) + d\left(x + \frac{s}{\|x-y\|}(x-y), z\right) \\ &< d\left(x, x + \frac{s}{\|x-y\|}(x-y)\right) + d\left(x + \frac{s}{\|x-y\|}(x-y), y\right) = d(x, y), \end{aligned}$$

o que é um absurdo pois $d(x, y) = |\mathfrak{d}(x)|$. Assim (1.24) é verdadeiro. Logo

$$\begin{aligned} |\mathfrak{d}\left(x + \frac{s}{\|x-y\|}(x-y)\right)| &= d\left(x + \frac{s}{\|x-y\|}(x-y), y\right) \\ &= d(x, y) - d\left(x, x + \frac{s}{\|x-y\|}(x-y)\right) = |\mathfrak{d}(x)| - s \end{aligned}$$

Logo, pela definição de norma para operadores lineares, seguida por (1.23) e ainda por (1.24), temos:

$$|\nabla\mathfrak{d}(x)| \geq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|\mathfrak{d}(x + s\theta) - \mathfrak{d}(x)|}{s} = 1,$$

o que mostra a desigualdade que faltava para $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Pelo Teorema 1.10, \mathfrak{d} é de classe C^∞ numa vizinhança de S e como $S \subset \overline{\mathbb{R}^n \setminus S}$, a desigualdade acima se estende também para S . ■

Teorema 1.12 *A curvatura média de S em y_0 introduzida na Definição 1.11 é dada por*

$$H(y_0) = \frac{1}{n-1} \Delta \mathfrak{d}(\cdot)|_{y_0}.$$

Demonstração: Como $S = \mathfrak{d}^{-1}(0)$, então pelo Teorema 1.10, podemos substituir Ψ por \mathfrak{d} na Definição 1.9 e como matrizes semelhantes tem o mesmo traço, podemos supor os eixos cartesianos como sendo os elementos da Base B_{y_0} definida na demonstração do Teorema 1.10. Ainda pela definição de d_i ($i = 1, \dots, n-1$) na demonstração do mesmo teorema, obtemos que

$$\text{tr}(D\vec{n}(y_0)) = -\Delta \mathfrak{d}(\cdot)|_{y_0},$$

o que nos dá o resultado desejado. ■

Corolário 1.13 *Seja \mathfrak{d} a função distância como na Definição 1.17, então $\vec{n}(q) = \nabla\mathfrak{d}(q)$ para todo $q \in S$.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.10 podemos tomar $\Psi = \mathfrak{d}$ na Definição 1.9 e então pelo Corolário 1.11 e pela Definição 1.10 segue a tese deste corolário. ■

1.4 Estudo de duas EDOs muito úteis

Nesta seção iremos estudar a existência, unicidade e o comportamento da solução da equação

$$(1.25) \quad \varphi_{\xi\xi} + f(\varphi) = 0$$

com

$$(1.26) \quad \begin{cases} \varphi(0) = a \\ \varphi(-\infty) = 1 \\ \varphi(\infty) = 0. \end{cases}$$

Também estudaremos a existência, unicidade de solução limitada do problema

$$(1.27) \quad \begin{cases} \psi_{\xi\xi} + f'(\varphi(\xi)) = A(\xi) \\ \psi(0) = 0. \end{cases}$$

Aqui, $\xi \in \mathbb{R}$, f e a são como em (0.4) e (0.5) respectivamente. φ é solução de (1.25) e A é contínua e limitada. Notemos que em (1.26) temos uma EDO de segunda ordem e mesmo com estes três dados iniciais obtemos uma única solução. O fato é que estes dados são compatíveis para tal. Já o problema (1.27) é também uma EDO de segunda ordem mas com um dado inicial e mesmo assim obtemos a unicidade da solução. Aqui o fato é que exigimos que a solução seja limitada em \mathbb{R} .

Uma versão da próxima proposição pode ser encontrada em [10].

Proposição 1.14 *Existe uma única solução de (1.25) satisfazendo (1.26).*

Demonstração: Multiplicando (1.25) por φ_ξ e integrando em ξ , temos:

$$(1.28) \quad \frac{1}{2}\varphi_\xi^2 - W(\varphi) = E,$$

onde E é uma constante. Mas (1.28) será obtida se obtivermos φ tal que

$$(1.29) \quad \begin{cases} E + W(\varphi) \geq 0 \\ \varphi_\xi = \sqrt{2(E + W(\varphi))}. \end{cases}$$

Tomemos $E = -W(0)$, assim

$$(1.30) \quad \sqrt{2(E + W(\varphi))} \geq c > 0$$

para φ próximo de a , pois $W(a) > W(0)$.

Seja

$$F(y, x) = \sqrt{2(E + W(y))}$$

segue que

$$F_y(y, x) = -\frac{f(y)}{\sqrt{2(E + W(y))}}, \quad F_x(y, x) = 0.$$

Mas f é contínua em $[0, 1]$ e assim existe $M > 0$, tal que $|f(y)| \leq M \forall y \in [0, 1]$. Assim, por (1.30) temos que $|F_y(y, x)| \leq M/c$ numa vizinhança de $y = a$. Logo F é localmente lipschitz e portanto localmente estamos nas condições do teorema de Picard. Conseqüentemente, existe uma e uma única solução local $\tilde{\varphi}$ para (1.29) com $\tilde{\varphi}(0) = a$. Como $W(0) = W(1) = -E$ e $W(y) > -E, \forall y \in (0, 1)$, então por (1.29) podemos estender $\tilde{\varphi}$ para a reta toda e, além do mais $\tilde{\varphi}(-\infty) = 0$ e $\tilde{\varphi}(\infty) = 1$. E como por (1.29) $\tilde{\varphi}_\xi > 0$, temos que $\tilde{\varphi}$ também é solução de (1.25). Ainda não é o que queremos, mas fazendo

$$(1.31) \quad \varphi(\xi) \doteq \tilde{\varphi}(-\xi)$$

temos o resultado desejado. ■

Observemos que a menos de sinal, (1.25) acarreta em (1.29). Usando que $\varphi(-\infty) > \varphi(\infty)$, eliminamos esta dualidade do sinal. Assim, a unicidade citada no teorema acima é conseqüência da unicidade de solução para (1.29) com $\varphi(0) = 0$. Já a existência foi obtida do fato que $\tilde{\varphi}_\xi > 0$ permitiu que (1.29) implicasse em (1.25) aliado à existência de solução para (1.29).

Corolário 1.15 *Seja φ solução de (1.25). Então*

$$(1.32) \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{\varphi_\xi(\xi)}{\varphi_{\xi\xi}(\xi)} = L \text{ onde } 0 < |L| < \infty.$$

Demonstração: Usando a regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{2(W(0) + W(\varphi(\xi)))}{(f(\varphi(\xi)))^2} = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{-f(\varphi(\xi))\varphi_\xi(\xi)}{f(\varphi(\xi))f'(\varphi(\xi))\varphi_\xi(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{f'(\varphi(\xi))} = \tilde{L}$$

o Como $f'(0)$ e $f'(1)$ são ambos não nulos, segue que $|\tilde{L}| < \infty$. Portanto

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{\sqrt{2(W(0) + W(\varphi(\xi)))}}{f(\varphi(\xi))} \right| = \sqrt{|\tilde{L}|}.$$

De (1.29), (1.31) e (1.25) segue que, a menos de sinal, $L = \sqrt{|\tilde{L}|}$ satisfaz a tese do corolário. ■

Corolário 1.16 *Seja φ solução de (1.25) com os dados iniciais (1.26). Então $\varphi_\xi(\xi) = O(\xi^{-n})$, quando $|\xi| \rightarrow \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Pelas regras elementares de diferenciação, obtemos

$$(1.33) \quad \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\varphi_\xi(\xi)} \right) = -\frac{\varphi_{\xi\xi}(\xi)}{\varphi_\xi(\xi)^2}.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ e usando a regra de L'Hospital, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{|\varphi_\xi(\xi)|}{|\xi^{-n}|} &= \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{|\xi^n|}{1/|\varphi_\xi(\xi)|} = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{|n\xi^{n-1}|}{|\varphi_{\xi\xi}(\xi)|/|\varphi_\xi(\xi)|^2} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{|Ln\xi^{n-1}|}{1/|\varphi_\xi(\xi)|} = nL \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{|\varphi_\xi(\xi)|}{|\xi^{-(n-1)}|} \end{aligned}$$

Repetindo o processo acima n vezes obtemos

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{|\varphi_\xi(\xi)|}{|\xi^{-n}|} = L^n n! \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{|\varphi_\xi(\xi)|}{|\xi^0|} = 0. \quad \blacksquare$$

Como consequência imediata dos dois corolários acima, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1.17 *Seja φ solução de (1.25) com os dados iniciais (1.26). Então $\varphi_{\xi\xi}(\xi) = O(\xi^{-n})$, quando $|\xi| \rightarrow \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.* \blacksquare

Analisando (1.29) e usando (1.31) concluímos que φ se comporta qualitativamente como no gráfico da Figura 1.3.

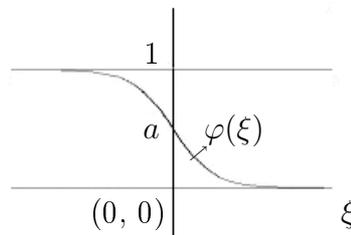


Figura 1.3: Gráfico de φ em função de ξ .

Exemplo 1.5 *Se $f(u) = u(1-u)(u-1/2)$, então*

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{tgh} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}} \right) \right)$$

é a única solução de (1.25) satisfazendo (1.26).

Aqui, $tgh(\xi)$, $cossech(\xi)$, $cosh(\xi)$ e $senh(\xi)$ são respectivamente a tangente hiperbólica, a cossecante hiperbólica, o cosseno hiperbólico e seno hiperbólico de ξ .

De fato, observemos primeiro que f satisfaz (0.4), com $a = 1/2$.

Lembremos também que

$$\frac{d}{dx}tgh(x) = cossech(x)$$

e

$$\frac{d}{dx}cossech(x) = -2tgh(x)cossec(x)$$

Assim

$$\varphi_\xi(\xi) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{2}} cossech\left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right),$$

conseqüentemente

$$(1.34) \quad \varphi_{\xi\xi}(\xi) = \frac{1}{8} tgh\left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right) cossech\left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right)$$

e

$$\begin{aligned} f(\varphi(\xi)) &= \varphi(\xi)(1 - \varphi(\xi))\left(\varphi(\xi) - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{tgh(\xi/2\sqrt{2})}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{tgh(\xi/2\sqrt{2})}{2}\right) \left(-\frac{tgh(\xi/2\sqrt{2})}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{cosh(\xi/2\sqrt{2}) - senh(\xi/2\sqrt{2})}{cosh(\xi/2\sqrt{2})}\right) \left(\frac{cosh(\xi/2\sqrt{2}) + senh(\xi/2\sqrt{2})}{cosh(\xi/2\sqrt{2})}\right) \\ &\quad \left(\frac{-senh(\xi/2\sqrt{2})}{cosh(\xi/2\sqrt{2})}\right) \\ &= -\frac{1}{8} cossec\left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right) tgh\left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Portanto

$$(1.35) \quad f(\varphi(\xi)) = -\frac{1}{8} cossec\left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right) tgh\left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right).$$

Por (1.35) e (1.34), segue que φ é solução de (1.25). E além do mais,

$$\varphi(-\infty) \doteq \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \varphi(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left(1 - tgh\left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{2} (1 - (-1)) = 1,$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2} (1 - tgh(0)) = \frac{1}{2}$$

e

$$\varphi(\infty) \doteq \lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - tgh\left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right)\right) = 0.$$

Portanto φ também satisfaz (1.26). Assim, pela proposição 1.14 φ é a única solução de (1.25) com dados iniciais (1.26). Usando uma vez a regra de L'Hospital, podemos mostrar

que para neste exemplo obtemos que $\varphi_\xi(\xi) = O(e^{-\rho|\xi|})$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ para todo $\rho > 0$ e conseqüentemente, pelo Exemplo 1.1, obtemos $\xi^n \varphi_{\xi\xi}(\xi) = O(e^{-\rho|\xi|})$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ para todo $\rho > 0$.

O próximo teorema é indispensável para a obtenção da equação de movimento das interfaces das soluções de (0.1), (0.2) e (0.7). Após este, teremos um resultado bem mais geral do mesmo. Para ambos desenvolvemos demonstrações próprias. Vejamos:

Teorema 1.18 *a) Se o problema (1.27) tem solução limitada então*

$$-\infty < \int_0^{-\infty} \varphi'(s)A(s)ds = \int_0^{\infty} \varphi'(s)A(s)ds < \infty.$$

Em particular,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(s)A(s)ds = 0.$$

Demonstração: Pelo Corolário 1.15 segue que

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{\varphi_\xi(\xi)}{\varphi_{\xi\xi}(\xi)} \right| < \infty$$

e conseqüentemente

$$(1.36) \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \left| (A(\xi) - f'(\varphi(\xi))\psi(\xi)) \left(\frac{\varphi_\xi(\xi)}{f(\varphi(\xi))} \right) \right| < \infty.$$

Assim, se

$$(1.37) \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} |\psi_\xi(\xi)| = \infty$$

e usando a regra de L'Hospital com (1.33), (1.27), (1.36), o Corolário 1.16 temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \psi_\xi(\xi)\varphi_\xi(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{\psi_\xi(\xi)}{1/\varphi_\xi(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{\psi_{\xi\xi}(\xi)\varphi_\xi(\xi)^2}{\varphi_{\xi\xi}(\xi)} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} -(A(\xi) - f'(\varphi(\xi))\psi(\xi)) \left(\frac{\varphi_\xi(\xi)}{f(\varphi(\xi))} \right) \varphi_\xi(\xi) = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$(1.38) \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \psi_\xi(\xi)\varphi_\xi(\xi) = 0$$

Notemos que se (1.37) não é satisfeito, então pelo Corolário 1.16, (1.38) ainda continua valendo. De 1.38 temos que

$$(1.39) \quad -\infty < \psi_\xi(\xi)\varphi_\xi(\xi) \Big|_0^{\infty} = \psi_\xi(\xi)\varphi_\xi(\xi) \Big|_0^{-\infty} < \infty.$$

Por outro lado, pelo Corolário 1.17 temos

$$(1.40) \quad -\infty < \psi(\xi)\varphi_{\xi\xi}(\xi)\Big|_0^{\infty} = \psi(\xi)\varphi_{\xi\xi}(\xi)\Big|_0^{-\infty} < \infty$$

Assim, usando (1.27), a integração por partes, (1.39) e (1.40) temos

$$(1.41) \quad \begin{aligned} \int_0^{\infty} A(\xi)\varphi_{\xi}(\xi)d\xi &= \int_0^{\infty} [\psi_{\xi\xi}(\xi)\varphi_{\xi}(\xi) + f'(\varphi(\xi))\varphi_{\xi}(\xi)\psi(\xi)]d\xi \\ &= (\psi_{\xi}(\xi)\varphi_{\xi}(\xi) + f(\varphi(\xi))\psi(\xi))\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} \\ &\quad - \int_0^{\infty} \psi_{\xi}(\xi)\varphi_{\xi\xi} + f(\varphi(\xi))\psi_{\xi}(\xi)d\xi \\ &= (\psi_{\xi}(\xi)\varphi_{\xi}(\xi) + f(\varphi(\xi))\psi(\xi))\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} \\ &= (\psi_{\xi}(\xi)\varphi_{\xi}(\xi) - \varphi_{\xi\xi}(\xi)\psi(\xi))\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} \\ &= (\psi_{\xi}(\xi)\varphi_{\xi}(\xi) - \varphi_{\xi\xi}(\xi)\psi(\xi))\Big|_{\xi=0}^{\xi=-\infty} \\ &= \int_0^{-\infty} \psi_{\xi\xi}(\xi)\varphi_{\xi}(\xi) + f'(\varphi(\xi))\varphi_{\xi}(\xi)\psi(\xi)d\xi \\ &= \int_0^{-\infty} A(\xi)\varphi_{\xi}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Portanto, $\int_{-\infty}^{\infty} A(\xi)\varphi_{\xi}(\xi)d\xi = 0$ e em particular

$$-\infty < \int_0^{-\infty} A(\xi)\varphi_{\xi}(\xi)d\xi < \infty. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.19 a) A equação (1.27) tem solução limitada se e somente se

$$-\infty < \int_0^{-\infty} \varphi'(s)A(s)ds = \int_0^{\infty} \varphi'(s)A(s)ds < \infty.$$

Em particular, se existe solução limitada para (1.27), temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(s)A(s)ds = 0.$$

b) Neste caso a solução é única e é dada por

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \varphi'(\xi) \left[-c \int_0^{\xi} \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds - \int_0^{\xi} \varphi'(s) \int_0^s \frac{1}{\varphi'(z)^2} dz A(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\xi} \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \int_0^{\xi} \varphi'(s) A(s) ds \right] \end{aligned}$$

onde

$$c = \int_0^{\pm\infty} A(s)\varphi'(s)ds.$$

c) Se $A(\xi) = O(\xi^{-n})$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$ então a solução ψ também satisfaz $\psi(\xi) = O(\xi^{-n})$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ para o mesmo n .

Demonstração: Podemos escrever (1.27) como

$$(1.42) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_\xi \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ f'(\varphi(\xi)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A(\xi) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi_\xi(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \end{cases}$$

onde c é a nossa escolha para $\psi_\xi(0)$, escolha esta que se tornará necessária mais adiante. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(\xi, x, y) = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ f'(\varphi(\xi)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A(\xi) \end{pmatrix}.$$

Então pelas hipóteses de f , φ e A , temos que F é lipschitziana nas duas últimas variáveis. Assim, pelo teorema de Picard, para cada c fixado, existe uma e única solução de (1.42) e portanto de (1.27). O fato é que esta solução pode não ser limitada.

Derivando (1.25) temos:

$$(1.43) \quad \varphi'_{\xi\xi} + f'(\varphi(\xi))\varphi' = 0,$$

de onde vemos que φ' é solução da equação homogênea associada a (1.27) e portanto (φ', φ'') é uma solução da equação homogênea associada a (1.42). Em busca de uma solução geral de (1.42), vamos achar uma solução do problema homogêneo associado a (1.42) e linearmente independente a (φ', φ'') .

Sejam

$$(1.44) \quad (\omega_1(\xi), \omega_1'(\xi)) = (\varphi'(\xi), \varphi''(\xi))$$

e

$$(1.45) \quad \omega_2(\xi) = \omega_1(\xi) \int_0^\xi \frac{1}{\omega_1^2(s)} ds.$$

Por (1.29) e (1.31) temos que $\varphi' < 0$ e portanto (1.45) está bem definido. Assim,

$$\omega_2'(\xi) = \omega_1'(\xi) \int_0^\xi \frac{1}{\omega_1^2(s)} ds + \frac{1}{\omega_1(\xi)}.$$

Segue que

$$\omega_2''(\xi) = \omega_1''(\xi) \int_0^\xi \frac{1}{\omega_1^2(s)} ds + \frac{\omega_1'(\xi)}{\omega_1^2(\xi)} - \frac{\omega_1'(\xi)}{\omega_1^2(\xi)} = \omega_1''(\xi) \int_0^\xi \frac{1}{\omega_1^2(s)} ds.$$

conseqüentemente, por (1.43) e (1.44) temos:

$$\omega_2''(\xi) + f'(\varphi(\xi))\omega_2(\xi) = \left(\int_0^\xi \frac{1}{\omega_1^2(s)} ds \right) (\omega_1''(\xi) + f'(\varphi(\xi))\omega_1(\xi)) = 0,$$

o que mostra que ω_2 também é solução do problema homogêneo associado a (1.27). Portanto (ω_2, ω_2') é solução do problema homogêneo associado à (1.42). Precisamos mostrar ainda que (ω_1, ω_1') e (ω_2, ω_2') são linearmente independentes. Seja

$$\Upsilon(\xi) = \begin{pmatrix} \omega_1(\xi) & \omega_2(\xi) \\ \omega_1'(\xi) & \omega_2'(\xi) \end{pmatrix}.$$

Assim

$$(1.46) \quad \begin{aligned} \det(\Upsilon(\xi)) &= \omega_1(\xi)\omega_2'(\xi) - \omega_1'(\xi)\omega_2(\xi) \\ &= \omega_1(\xi)\omega_1'(\xi) \int_0^\xi \frac{1}{\omega_1^2(s)} ds + \frac{\omega_1(\xi)}{\omega_1(\xi)} - \omega_1(\xi)\omega_1'(\xi) \int_0^\xi \frac{1}{\omega_1^2(s)} ds = 1, \end{aligned}$$

o que mostra que (ω_1, ω_1') e (ω_2, ω_2') são linearmente independentes. Observamos $\Upsilon(\xi)$ é uma matriz fundamental do problema homogêneo associado à (1.42). Afirmamos que

$$(1.47) \quad \begin{pmatrix} \psi(\xi) \\ \psi_\xi(\xi) \end{pmatrix} = \Upsilon(\xi) \left((\Upsilon(0))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} + \int_0^\xi (\Upsilon(s))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ A(s) \end{pmatrix} ds \right)$$

é solução de (1.42). De fato:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi(\xi) \\ \psi_\xi(\xi) \end{pmatrix}' &= \Upsilon'(\xi) \left[(\Upsilon(0))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} + \int_0^\xi (\Upsilon(s))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ A(s) \end{pmatrix} ds \right] \\ &\quad + \Upsilon(\xi) (\Upsilon(\xi))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ A(\xi) \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ f'(\varphi(\xi)) & 0 \end{pmatrix} \Upsilon(\xi) \left[(\Upsilon(0))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} + \int_0^\xi (\Upsilon(s))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ A(s) \end{pmatrix} ds \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ A(\xi) \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ f'(\varphi(\xi)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A(\xi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Isto mostra que (1.47) satisfaz a equação associada a (1.42). E

$$\begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi_\xi(0) \end{pmatrix}' = \Upsilon(0)(\Upsilon(0))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

Assim mostramos que (1.47) é solução de (1.42) e portanto ψ é solução de (1.27). Mas por (1.46) segue que

$$\Upsilon(\xi) = \begin{pmatrix} \omega_1(\xi) & \omega_2(\xi) \\ \omega_1'(\xi) & \omega_2'(\xi) \end{pmatrix}$$

e conseqüentemente

$$(1.48) \quad (\Upsilon(\xi))^{-1} = \frac{1}{\det(\Upsilon(\xi))} \begin{pmatrix} \omega_2'(\xi) & -\omega_2(\xi) \\ -\omega_1'(\xi) & \omega_1(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2'(\xi) & -\omega_2(\xi) \\ -\omega_1'(\xi) & \omega_1(\xi) \end{pmatrix}.$$

Por (1.44), (1.29) (1.31) temos:

$$(1.49) \quad \omega_1(0) = \varphi'(0) = -\sqrt{2(W(a) - W(0))} \neq 0$$

e por (1.45) segue que

$$(1.50) \quad \omega_2(0) = 0$$

Substituindo (1.48) em (1.47) temos:

$$\begin{pmatrix} \psi(\xi) \\ \psi_\xi(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1(\xi) & \omega_2(\xi) \\ \omega_1'(\xi) & \omega_2'(\xi) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \omega_2'(\xi) & -\omega_2(\xi) \\ -\omega_1'(\xi) & \omega_1(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} + \int_0^\xi \begin{pmatrix} \omega_2'(s) & -\omega_2(s) \\ -\omega_1'(s) & \omega_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A(s) \end{pmatrix} ds \right].$$

Substituindo (1.49) e (1.50) na equação acima temos:

$$\begin{pmatrix} \psi(\xi) \\ \psi_\xi(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1(\xi) & \omega_2(\xi) \\ \omega_1'(\xi) & \omega_2'(\xi) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -c\sqrt{2(W(a) - W(0))} \end{pmatrix} + \int_0^\xi \begin{pmatrix} -\omega_2(s)A(s) \\ \omega_1(s)A(s) \end{pmatrix} ds \right].$$

Conseqüentemente

$$\psi(\xi) = -c\sqrt{2(W(a) - W(0))}\omega_2(\xi) - \omega_1(\xi) \int_0^\xi \omega_2(s)A(s)ds + \omega_2(\xi) \int_0^\xi \omega_1(s)A(s)ds.$$

Substituindo (1.45) e (1.44) na equação acima, segue:

$$(1.51) \quad \psi(\xi) = \varphi'(\xi) \left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} \int_0^\xi \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds - \int_0^\xi \varphi'(s) \int_0^s \frac{1}{\varphi'(z)^2} dz A(s) ds + \int_0^\xi \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \int_0^\xi \varphi'(s) A(s) ds \right]$$

Assim para cada c temos uma única solução ψ para o problema (1.27), que é contínua, mas nem sempre limitada. De fato ela é limitada se e somente se

$$(1.52) \quad \int_0^{\infty} \varphi'(s)A(s)ds = \int_0^{-\infty} \varphi'(s)A(s)ds = -c\sqrt{2(W(a) - W(0))}.$$

Pois se supusermos que

$$c\sqrt{2(W(a) - W(0))} \neq \int_0^{\pm\infty} \varphi'(s)A(s)ds,$$

como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} & \left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} \int_0^{\xi} \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds - \int_0^{\xi} \varphi'(s) \int_0^s \frac{1}{\varphi'(z)^2} dz A(s) ds \right. \\ & \left. + \int_0^{\xi} \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \int_0^{\xi} \varphi'(s)A(s) ds \right] \\ & = \frac{1}{\varphi'(\xi)^2} \left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} + \int_0^{\xi} \varphi'(s)A(s) ds \right] \end{aligned}$$

o que pelo corolário (1.16) é ilimitado e portanto

$$\begin{aligned} & \left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} \int_0^{\xi} \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds - \int_0^{\xi} \varphi'(s) \int_0^s \frac{1}{\varphi'(z)^2} dz A(s) ds \right. \\ & \left. + \int_0^{\xi} \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \int_0^{\xi} \varphi'(s)A(s) ds \right] \end{aligned}$$

é ilimitado. Usando a regra de L'Hospital e (1.33) temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \psi(\xi) & = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1/\varphi'(\xi)} \left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} \int_0^{\xi} \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \right. \\ & \left. - \int_0^{\xi} \varphi'(s) \int_0^s \frac{1}{\varphi'(z)^2} dz A(s) ds + \int_0^{\xi} \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \int_0^{\xi} \varphi'(s)A(s) ds \right] \\ & = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\varphi''(\xi)} \left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} + \int_0^{\xi} \varphi'(s)A(s) ds \right] \end{aligned}$$

o que é ilimitado pela suposição acima e pelo fato de

$$\frac{1}{\varphi''(\xi)}$$

ser ilimitada. Este último fato é consequência de (1.25). Agora se tomarmos c tal que

$$c\sqrt{2(W(a) - W(0))} = \int_0^{\pm\infty} \varphi'(s)A(s)ds$$

e se

$$\begin{aligned} & \left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} \int_0^{\xi} \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds - \int_0^{\xi} \varphi'(s) \int_0^s \frac{1}{\varphi'(z)^2} dz A(s) ds \right. \\ & \left. + \int_0^{\xi} \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \int_0^{\xi} \varphi'(s)A(s) ds \right] \end{aligned}$$

é limitada, então pelo corolário (1.16) temos que ψ é limitada. Se

$$\left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} \int_0^\xi \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds - \int_0^\xi \varphi'(s) \int_0^s \frac{1}{\varphi'(z)^2} dz A(s) ds \right. \\ \left. + \int_0^\xi \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \int_0^\xi \varphi'(s) A(s) ds \right]$$

não for limitada, então podemos aplicar a regra de L'Hospital duas vezes, assim obtendo

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \psi(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1/\varphi'(\xi)} \left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} \int_0^\xi \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\xi \varphi'(s) \int_0^s \frac{1}{\varphi'(z)^2} dz A(s) ds + \int_0^\xi \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \int_0^\xi \varphi'(s) A(s) ds \right] \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\varphi''(\xi)} \left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} + \int_0^\xi \varphi'(s) A(s) ds \right] \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{A(\xi)}{f'(\varphi(\xi))} = \frac{A(\infty)}{f'(0)} e \frac{A(-\infty)}{f'(1)} \end{aligned}$$

respectivamente. Ainda por (0.4) $f'(0) < 0$ e $f'(1) < 0$, mostrando assim que o limite acima é limitado. E como ψ é contínua, temos que ψ é limitada, mostrando assim as partes (a) e (b) deste teorema.

Agora se $A(\xi) = O(\xi^{-n})$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e se

$$\left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} \int_0^\xi \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds - \int_0^\xi \varphi'(s) \int_0^s \frac{1}{\varphi'(z)^2} dz A(s) ds \right. \\ \left. + \int_0^\xi \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \int_0^\xi \varphi'(s) A(s) ds \right]$$

for limitada, então pelo corolário (1.16) segue que $\psi(\xi) = O(\xi^{-n})$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$. Mas se

$$\left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} \int_0^\xi \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds - \int_0^\xi \varphi'(s) \int_0^s \frac{1}{\varphi'(z)^2} dz A(s) ds \right. \\ \left. + \int_0^\xi \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \int_0^\xi \varphi'(s) A(s) ds \right]$$

não for limitada, então usando duas vezes a regra de L'Hospital e pela hipótese adicional de A , temos que existe $k > 0$ tal que $|A(\xi)| \leq k|\xi^{-n}|$ e assim obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{|\psi(\xi)|}{|\xi^{-n}|} &= \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|\xi^{-n}/\varphi'(\xi)|} \left| \left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} \int_0^\xi \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^\xi \varphi'(s) \int_0^s \frac{1}{\varphi'(z)^2} dz A(s) ds + \int_0^\xi \frac{1}{\varphi'(s)^2} ds \int_0^\xi \varphi'(s) A(s) ds \right] \right| \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{\left| \left[-c\sqrt{2(W(a) - W(0))} + \int_0^\xi \varphi'(s) A(s) ds \right] \right|}{|\xi^{-n}\varphi''(\xi) - n\xi^{-n-1}\varphi'(\xi)|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{|A(\xi)\varphi'(\xi)|}{|-n\xi^{-n-1}\varphi''(\xi) - \xi^{-n}f'(\varphi(\xi))\varphi'(\xi) - n(-n-1)\xi^{-n-2}\varphi'(\xi) - n\xi^{-n-1}\varphi''(\xi)|} \\
&= \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{|A(\xi)\varphi'(\xi)|}{|\varphi'(\xi)(-2n\xi^{-n-1}/L - \xi^{-n}f'(\varphi(\xi)) - n(-n-1)\xi^{-n-2})|} \\
&\leq \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{k|\xi^{-n}|}{-2n\xi^{-n-1}/L - \xi^{-n}f'(\varphi(\xi)) - n(-n-1)\xi^{-n-2}} = \frac{k}{\alpha} < \infty
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ e $\alpha = \lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ respectivamente. Por (0.4) $f'(0) < 0$ e $f'(1) < 0$ e portanto $\alpha < 0$, mostrando assim que o limite acima é limitado. Isto acaba de mostrar a parte (c) do teorema. \blacksquare

Observemos que o ítem c do teorema acima ainda continua valendo se trocarmos $O(\xi^{-n})$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$ por $O(e^{-\rho|\xi|})$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ para algum $\rho > 0$. A demonstração deste fato, a menos das devidas substituições, é exatamente idêntica à aquela apresentada acima.

Capítulo 2

Obtenção da equação da interface

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos uma derivação formal da equação de movimento da interface para a equação de advecção-reação-difusão

$$(2.1) \quad \begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon \Delta u + \frac{\varepsilon}{h(x)} \nabla h(x) \cdot \nabla u + \frac{1}{\varepsilon} f(u) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \end{cases}$$

e para a equação de reação-difusão com termo espacialmente não homogêneo

$$(2.2) \quad \begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} h(x)^2 f(u) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \end{cases}$$

sendo $\varepsilon > 0$ um parâmetro pequeno, $h(x) > 0$ suave e f como em (0.4). Mostraremos que apesar de as duas equações não serem iguais, elas tem o mesmo movimento de interface.

2.2 Evolução das soluções das equações de reação-difusão

Agora vamos estudar a evolução das soluções de (2.1) e (2.2). Para isto, consideraremos o caso especial em que $h(x) = c$, sendo $c > 0$ uma constante. Neste caso suporemos que Δu^ε é limitado. Com estas hipóteses, a equação (2.1) se resume a

$$(2.3) \quad \varepsilon u_t = \varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} f(u)$$

enquanto (2.2) se transforma em

$$\varepsilon u_t = \varepsilon \Delta u + \frac{c^2}{\varepsilon} f(u).$$

Nesta última, tomando $\tilde{\varepsilon} \doteq \varepsilon/c^2$, recaímos em (2.3), isto é; sem perda de generalidade, (2.3) também representa (2.2). Seja u^ε a solução da equação (2.3).

No primeiro estágio, vamos tomar $\tau \doteq t/\varepsilon^2$. Escrevendo t em função de τ em (2.3) e observando que $\tau \doteq t/\varepsilon^2 \Rightarrow dt = \varepsilon^2 d\tau$, (2.3) fica

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\tau} u^\varepsilon(x, \tau) = \varepsilon \Delta u^\varepsilon(x, \tau) + \frac{1}{\varepsilon} f(u^\varepsilon(x, \tau)),$$

que podemos reescrever como

$$\frac{d}{d\tau} u^\varepsilon = \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + f(u^\varepsilon).$$

Como estamos com $0 < \varepsilon \ll 1$, com exceção nas vizinhanças próximas das raízes de f , espera-se que a taxa de reação na equação acima domine o efeito de difusão. Assim podemos aproximar a equação acima por

$$(2.4) \quad \frac{d}{d\tau} u^\varepsilon = f(u^\varepsilon)$$

Mas $f(u^\varepsilon) = -W'(u^\varepsilon)$ e portanto f é negativa em $(0, a)$ e positiva em $(a, 1)$. Veja o gráfico na Figura 2.1.

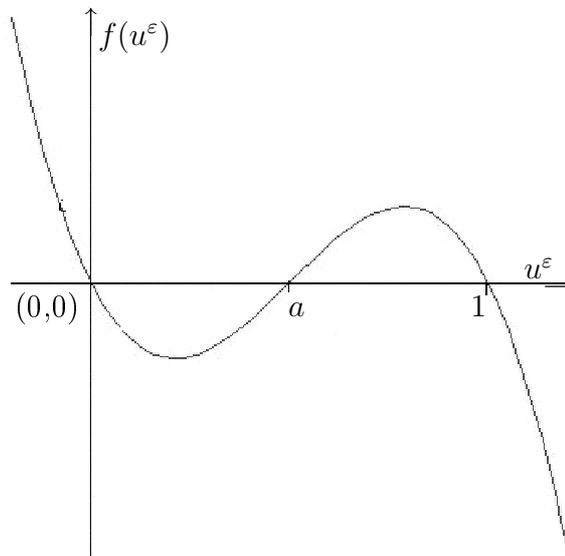


Figura 2.1: Gráfico de f em função de u^ε .

Logo, se $0 < u^\varepsilon(x, 0) < a$ então $u^\varepsilon(x, \tau)$ se aproxima de 0 quando τ cresce, isto porque u^ε decresce a medida que τ cresce sem se tornar significativamente negativa. Fazendo uma análise parecida, temos que se $1 > u^\varepsilon(x, 0) > a$, então $u^\varepsilon(x, \tau)$ se aproxima de 1. Isto pode ser visto na representação do retrato de fase no gráfico da Figura 2.2.

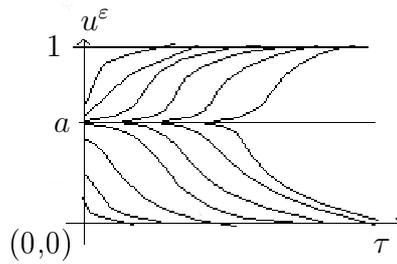


Figura 2.2: Retrato de fase para u^ε em função de τ .

Aqui 0 e 1 funcionam como atratores do fluxo associado a (2.4) e à medida em que a solução se afasta dos mesmos, a taxa de reação ganha força, fazendo com que a solução volte a se aproximar do seu respectivo atrator. Isto já não é válido em toda vizinhança suficientemente pequena de a , pois o mesmo funciona como repulsor, fazendo com que a solução se torne bastante instável a medida que τ (e portanto t) crescem; isto é: uma pequena perturbação em x pode significar uma grande variação de u^ε . Observemos o gráfico de u^ε em função de x para um τ grande fixo na Figura 2.3.

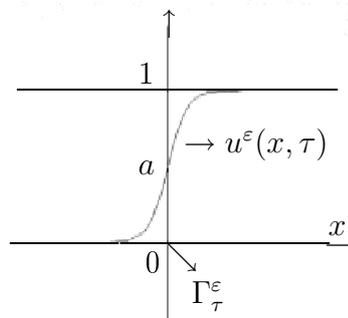


Figura 2.3: Gráfico de u^ε em função de x para um τ grande fixo.

Isto motiva as seguintes definições:

Definição 2.1 Dizemos que $\Gamma_t^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^\varepsilon(x, t) = a\}$ é a interface em cada t .

Definição 2.2 Definimos $\Gamma^\varepsilon = \{\bigcup_{t>0} (\Gamma_t^\varepsilon \times \{t\})\}$ como sendo a interface.

No segundo estágio, tomemos $\tau \doteq t/\varepsilon$. Escrevendo t em função de τ em (2.3),

temos que

$$\frac{d}{d\tau}u^\varepsilon = \varepsilon \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}f(u^\varepsilon).$$

Como ε é pequeno mas fixado, f contínua se anulando em a , então suficientemente próximo da interface o efeito de difusão Δu^ε é suficientemente grande para dominar a taxa de reação $\varepsilon^{-1}f(u^\varepsilon)$ na equação acima. Aqui a situação difere, dependendo quando a função potencial $W(u)$ tem os mesmos mínimos em 0 e 1; isto é: $W(0) = W(1)$ ou não. Allen e Cahn [2] têm observado que se $W(0) \neq W(1)$, então a interface começa a se mover numa velocidade constante na direção normal. Por outro lado, se $W(0) = W(1)$, que é o caso desta dissertação, a interface permanece estacionária nesta escala.

No terceiro estágio vamos analisar a evolução de u^ε na escala t , restringindo-nos somente ao caso em que $W(0) = W(1)$. Allen e Cahn têm observado que neste caso a interface começa a se mover com velocidade normal igual a curvatura média. Rubinstein, Sternberg e Keller [19] mostraram de forma não rigorosa os cálculos deste fato. Mais tarde, Xinfu Chen [7], entre outros, completaram os cálculos de forma bastante rigorosa da evolução das interfaces do primeiro ao terceiro estágio.

Quando $h(x)$ não for constante, o cenário precedente muda um pouco, mesmo porque (2.1) e (2.2) não terão uma forma tão simples. Fazendo $\tau = t/\varepsilon^2$, (2.1) torna-se

$$(2.5) \quad \frac{du^\varepsilon}{d\tau} = \varepsilon^2(\Delta u^\varepsilon + \frac{1}{h(x)}\nabla h(x) \cdot \nabla u^\varepsilon) + f(u^\varepsilon)$$

e como ε é pequeno, a aproximação pela equação (2.4) feita no primeiro estágio no início desta seção continua valendo. Já (2.2) torna-se

$$(2.6) \quad \frac{du^\varepsilon}{d\tau} = \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + h(x)^2 f(u^\varepsilon),$$

o que para regiões onde $h(x)^2$ é *grande* pode ser tratada como a equação (2.5). Em especial, se $\exists c > 0; h(x)^2 > c \forall x \in \mathbb{R}^n$, então aplica-se também aqui a análise feita no primeiro estágio.

No segundo estágio, como acima, tomemos a escala tempo como sendo $\tau = t/\varepsilon$. Então (2.1) torna-se

$$(2.7) \quad \frac{du^\varepsilon}{d\tau} = \varepsilon(\Delta u^\varepsilon + \frac{1}{h(x)}\nabla h(x) \cdot \nabla u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}f(u^\varepsilon)$$

e como ε é um parâmetro fixo, então para regiões suficientemente próximas da interface, a equação acima pode ser aproximada por

$$\frac{du^\varepsilon}{d\tau} = \varepsilon(\Delta u^\varepsilon + \frac{1}{h(x)}\nabla h(x) \cdot \nabla u^\varepsilon).$$

Por outro lado, nesta escala, a equação (2.2) fica

$$(2.8) \quad \frac{du^\varepsilon}{d\tau} = \varepsilon \Delta u^\varepsilon + \frac{h(x)^2}{\varepsilon}f(u^\varepsilon)$$

que, se u^ε estiver próximo da interface, pode ser aproximada pela equação parabólica

$$\frac{du^\varepsilon}{d\tau} = \varepsilon \Delta u^\varepsilon.$$

2.3 Expansões assintóticas

Seja u^ε a solução de (2.1) ou (2.2) e Γ_t^ε , Γ^ε as interfaces definidas nas definições 2.1 e 2.2 respectivamente. Agora em diante assumiremos que para todo $t \geq 0$ Γ_t^ε é uma hiperfície suave, fechada tal que $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_t^\varepsilon$ tem duas componentes conexas, a saber uma limitada e outra ilimitada. Seja Ω_t^ε a componente conexa limitada descrita acima. Vejamos a representação de Ω_t^ε para $n = 2$ dada na Figura 2.4.

Seja d^ε a função distância com sinal definida por

$$(2.9) \quad d^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} \text{dist}(x, \Gamma_t^\varepsilon), & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_t^\varepsilon \\ -\text{dist}(x, \Gamma_t^\varepsilon), & \text{se } x \in \Omega_t^\varepsilon \end{cases}$$

onde $\text{dist}(x, \Gamma_t^\varepsilon) = \inf_{y \in \Gamma_t^\varepsilon} \{d(x, y)\}$ é a distância de x até a hiperfície Γ_t^ε , sendo $d(x, y)$, como em (1.17) a distância de x a y . Pela própria definição de d^ε temos que $d^\varepsilon|_{\Gamma^\varepsilon} = 0$, pois $\text{dist}(x, \Gamma_t^\varepsilon) = 0$ para $x \in \Gamma_t^\varepsilon$. Notemos também que para cada $t \geq 0$, $d^\varepsilon(\cdot, t)$ satisfaz as hipóteses de $\mathfrak{d}(\cdot)$ definida em (1.17), com $S = \Gamma_t^\varepsilon$, assim pelos resultados (1.10) e (1.11)

$$(2.10) \quad \|\nabla d^\varepsilon\| = 1$$

numa vizinhança tubular de Γ^ε . Assumiremos também que d^ε tem a expansão assintótica dada por

$$(2.11) \quad d^\varepsilon(x, t) = d_0(x, t) + \varepsilon d_1(x, t) + \varepsilon^2 d_2(x, t) + \dots$$

e definimos:

$$(2.12) \quad \Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_0(x, t) = 0\},$$

$$(2.13) \quad \Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_0(x, t) < 0\},$$

$$(2.14) \quad \Gamma = \bigcup_{t \geq 0} (\Gamma_t \times \{t\}),$$

$$(2.15) \quad Q_0^{\mathbb{R}^n} = \bigcup_{t \geq 0} (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_t} \times \{t\}) \text{ e}$$

$$(2.16) \quad Q_1 = \bigcup_{t \geq 0} (\Omega_t \times \{t\}).$$

Figura 2.4: Representação de Ω_t^ε para $n = 2$.

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos que

$$(2.17) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d^\varepsilon = d_0$$

pois por (2.11), $d(\varepsilon, x, t) = d^\varepsilon(x, t)$ é contínua na variável ε . Observemos que pela definição de d^ε , $\Gamma_t^\varepsilon = (d^\varepsilon)^{-1}(0)$, enquanto $\Gamma_t = (d_0)^{-1}(0)$. Vamos supor também que

$$(2.18) \quad \Gamma_t \text{ é suave.}$$

Assumiremos também que $u^\varepsilon(x, t)$ tem as expansões assintóticas externas

$$(2.19) \quad u^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} u_0^+(x, t) + \varepsilon u_1^+(x, t) + \varepsilon^2 u_2^+(x, t) + \dots, & \text{se } x \in Q_0, \\ u_0^-(x, t) + \varepsilon u_1^-(x, t) + \varepsilon^2 u_2^-(x, t) + \dots, & \text{se } x \in Q_1. \end{cases}$$

Quando não houver necessidade de distinção entre Q_0 e Q_1 simplesmente escrevemos

$$(2.20) \quad u^\varepsilon(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t) + \varepsilon^2 u_2(x, t) + \dots$$

para (x, t) longe da interface Γ^ε . Ainda assumiremos também que $u^\varepsilon(x, t)$ tem a expansão interna

$$(2.21) \quad u^\varepsilon(x, t) = U_0(\xi, x, t) + \varepsilon U_1(\xi, x, t) + \varepsilon^2 U_2(\xi, x, t) + \dots$$

perto da interface Γ^ε . Sendo

$$(2.22) \quad \xi = d^\varepsilon(x, t)/\varepsilon$$

de certa forma um aumento de ordem de $y = (x, t)$ em relação a ε . Cabe aqui lembrarmos as Definições 1.7 e 1.5 e os Exemplos 1.2 e 1.3. Estamos supondo que a variável ξ dá exatamente a correta escala espacial para descrever a acentuada transição entre as regiões $u \simeq 0$ e $u \simeq 1$. Como $u^\varepsilon = a$ em Γ^ε , vamos normalizar U_k tal que

$$(2.23) \quad U_0(0, x, t) = a \text{ e } U_k(0, x, t) = 0 \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots \text{ e } x \text{ perto de } \Gamma^\varepsilon.$$

Tomando $(x, t) \notin \Gamma^\varepsilon$, mas perto de Γ^ε e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ (e portanto $\xi \rightarrow \pm\infty$) temos:

$$(2.24) \quad U_k(+\infty, x, t) = u_k^+(x, t), \text{ se } x \in (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_t})$$

$$(2.25) \quad U_k(-\infty, x, t) = u_k^-(x, t), \text{ se } x \in (\Omega_t)$$

onde u_k^+ e u_k^- são as expansões externas definidas em (2.19). Agora estamos finalmente em condições de usar a função distância com sinal e expansões assintóticas para obter as equações de movimento das interfaces das equações em estudo.

2.4 Equação de movimento de interface da solução da equação de advecção-reação-difusão

Usando a expansão assintótica externa (2.20) em (2.1) obtemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t) &= \varepsilon \Delta \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t) \\ &+ \frac{\varepsilon}{h(x)} \nabla h(x) \cdot \nabla \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t) + \frac{1}{\varepsilon} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} u_i(x, t)\right). \end{aligned}$$

Expandindo f em torno de $u_0(x, t)$ podemos escrever esta equação como

$$\begin{aligned} (2.26) \quad & \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \frac{d}{dt} u_i(x, t) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \Delta u_i(x, t) + \frac{1}{h(x)} \nabla h(x) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \nabla u_i(x, t) \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(u_0(x, t)) \varepsilon^{-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t)\right)^j. \end{aligned}$$

Separando os coeficientes de ε^{-1} em (2.26) obtemos que

$$(2.27) \quad f(u_0(x, t)) = 0 \text{ em } Q_0 \cup Q_1$$

e separando os coeficientes de ε^0 em (2.26) temos que

$$(2.28) \quad f'(u_0(x, t)) u_1(x, t) = 0 \text{ em } Q_0 \cup Q_1.$$

Por (0.6) e (2.27) segue que $u_0 = 0$, ou $u_0 = a$, ou $u_0 = 1$. Como estamos estudando a interface entre as regiões onde $u \approx 0$ e $u \approx 1$, temos que

$$(2.29) \quad u_0(x, t) = 0 \text{ em } Q_0 \text{ e } u_0(x, t) = 1 \text{ em } Q_1$$

ou

$$u_0(x, t) = 1 \text{ em } Q_0 \text{ e } u_0(x, t) = 0 \text{ em } Q_1.$$

Como ambos os casos têm o mesmo tratamento, vamos assumir (2.29). Para $n = 2$, a representação de u_0 pode ser vista na Figura 2.5.

De (2.28), (2.29) e (0.6), temos que

$$(2.30) \quad u_1(x, t) = 0 \text{ em } Q_0 \cup Q_1.$$

Usando a expansão assintótica interna (2.21) e expandindo f em torno de U_0 , obtemos que

$$(2.31) \quad f(u^\varepsilon(x, t)) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(U_0(\xi, x, t)) \frac{1}{j!} \varepsilon^{-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i U_i(\xi, x, t)\right)^j.$$

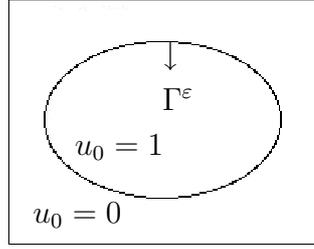


Figura 2.5: Representação de u_0 no caso em que $n = 2$.

Usando (2.22) e (2.11) temos que

$$\begin{aligned}
 (2.32) \quad \frac{d}{dt}(U_i(\xi(\varepsilon, x, t), x, t)) &= \frac{d}{dt}\left(U_i\left(\frac{d^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right)\right) \\
 &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} U_i(\xi, x, t) \frac{\partial}{\partial t} d^\varepsilon(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} U_i(\xi, x, t) \\
 &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} U_i(\xi, x, t) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \frac{\partial}{\partial t} d_j(x, t) + \frac{d}{dt} U_i(\xi, x, t).
 \end{aligned}$$

E pelo mesmo motivo e ainda, usando (2.10) pois a mesma vale perto de Γ^ε , temos que

$$\begin{aligned}
 (2.33) \quad \Delta(U_i(\xi(\varepsilon, x, t), x, t)) &= \Delta\left(U_i\left(\frac{d^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right)\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{d^2}{dx_j^2} \left(U_i\left(\frac{d^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right)\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} d^\varepsilon(x, t) \frac{\partial}{\partial \xi} U_i(\xi, x, t) + \frac{\partial}{\partial x_j} U_i(\xi, x, t) \right] \\
 &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} d^\varepsilon(x, t) \frac{\partial}{\partial \xi} U_i(\xi, x, t) + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} d^\varepsilon(x, t)\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_i(\xi, x, t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} d^\varepsilon(x, t) \frac{\partial^2}{\partial \xi x_j} U_i(\xi, x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} U_i(\xi, x, t) \right] \\
 &= \frac{1}{\varepsilon} \Delta d^\varepsilon(x, t) \frac{\partial}{\partial \xi} U_i(\xi, x, t) + \frac{1}{\varepsilon^2} \|\nabla d^\varepsilon(x, t)\|^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_i(\xi, x, t) \\
 &\quad + \frac{2}{\varepsilon} \nabla d^\varepsilon(x, t) \cdot \nabla_x \frac{\partial}{\partial \xi} U_i(\xi, x, t) + \Delta_x U_i(\xi, x, t) \\
 &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Delta d_j(x, t) \frac{\partial}{\partial \xi} U_i(\xi, x, t) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_i(\xi, x, t)
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \nabla d_j(x, t) \cdot \nabla_x \frac{\partial}{\partial \xi} U_i(\xi, x, t) + \Delta_x U_i(\xi, x, t).$$

E analogamente

$$(2.34) \quad \begin{aligned} \nabla_x (U_i(\xi(\varepsilon, x, t), x, t)) &= \nabla_x \left(U_i \left(\frac{d^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon}, x, t \right) \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} U_i(\xi, x, t) \nabla d^\varepsilon(x, t) + \nabla_x U_i(\xi, x, t) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} U_i(\xi, x, t) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \nabla d_j(x, t) + \nabla_x U_i(\xi, x, t). \end{aligned}$$

Agora substituindo (2.21) em (2.1) temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \frac{d}{dt} (U_i(\xi(\varepsilon, x, t), x, t)) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \Delta_x (U_i(\xi(\varepsilon, x, t), x, t)) \\ &+ \frac{1}{h(x)} \nabla h(x) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \nabla_x (U_i(\xi(\varepsilon, x, t), x, t)) + \frac{1}{\varepsilon} f \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (U_i(\xi, x, t)) \right). \end{aligned}$$

Usando (2.31), (2.32), (2.33) e (2.34) a equação acima é equivalente a

$$(2.35) \quad \begin{aligned} &\sum_{\substack{i=0, \\ j=0}}^{\infty} \varepsilon^{i+j} \frac{\partial}{\partial \xi} U_i \frac{\partial}{\partial t} d_j + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \frac{\partial}{\partial t} U_i \\ &= \sum_{\substack{i=0, \\ j=0}}^{\infty} \varepsilon^{i+j} \Delta d_j \frac{\partial}{\partial \xi} U_i + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_i \\ &+ 2 \sum_{\substack{i=0, \\ j=0}}^{\infty} \varepsilon^{i+j} \nabla d_j \cdot \nabla_x \frac{\partial}{\partial \xi} U_i + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \Delta_x U_i \\ &+ \frac{1}{h(x)} \nabla h(x) \cdot \left[\sum_{\substack{i=0, \\ j=0}}^{\infty} \varepsilon^{i+j} \frac{\partial}{\partial \xi} U_i \nabla d_j + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \nabla_x U_i \right] \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(U_0) \frac{1}{j!} \varepsilon^{-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i U_i \right)^j. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de ε^{-1} em (2.35) temos que

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_0 + f(U_0) = 0.$$

Isto pode ser escrito como

$$(2.36) \quad U_{0\xi\xi} + f(U_0) = 0.$$

E separando os coeficientes de ε^0 segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} U_0 \frac{\partial}{\partial t} d_0 &= \Delta d_0 \frac{\partial}{\partial \xi} U_0 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_1 + 2 \nabla d_0 \cdot \nabla_x \frac{\partial}{\partial \xi} U_0 \\ &+ \frac{1}{h} \nabla h \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi} U_0 \nabla d_0 \right) + f'(U_0) U_1. \end{aligned}$$

Isto pode ser escrito como

$$(2.37) \quad U_{1\xi\xi} + f'(U_0) U_1 = U_{0\xi} \left(d_{0t} - \Delta d_0 - \frac{\nabla h \cdot \nabla d_0}{h} \right) - 2 \nabla d_0 \cdot \nabla_x U_{0\xi}.$$

Ambas, (2.36) e (2.37) são EDOs em ξ com parâmetros x e t . Mas pelas condições de normalização dadas em (2.23), segue que

$$U_0(0, x, t) = a$$

e pelas condições (2.24), (2.25) e por (2.29) temos que

$$(2.38) \quad \begin{cases} U_0(+\infty, x, t) = u_0^+(x, t) = 0 \\ U_0(-\infty, x, t) = u_0^-(x, t) = 1. \end{cases}$$

Assim

$$(2.39) \quad \begin{cases} U_0(+\infty, x, t) = 0 \\ U_0(0, x, t) = a \\ U_0(-\infty, x, t) = 1. \end{cases}$$

Logo por (2.36) e por (2.39),

$$(2.40) \quad U_0(\xi, x, t) = \varphi(\xi)$$

onde φ é solução de (1.25) com condições iniciais dados por (1.26).

Substituindo (2.40) em (2.37), observando que $\nabla_x \varphi'(\xi) = 0$ (pois φ não depende de x) e usando as condições (2.23), temos que

$$(2.41) \quad \begin{cases} U_{1\xi\xi} + f'(\varphi(\xi)) U_1 = \left(d_{0t} - \Delta d_0 - \frac{\nabla h \cdot \nabla d_0}{h} \right) \varphi'(\xi) \\ U_1(0, x, t) = 0. \end{cases}$$

Aqui, para cada $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, fazendo

$$A(\xi) = \left(d_{0t} - \Delta d_0 - \frac{\nabla h \cdot \nabla d_0}{h} \right) \varphi'(\xi)$$

e com o Corolário 1.16, temos que (2.41) satisfaz as hipóteses do Teorema 1.18.

Seja

$$(2.42) \quad g(x, t) = \left(d_{0t}(x, t) - \Delta d_0(x, t) - \frac{\nabla h(x) \cdot \nabla d_0(x, t)}{h(x)} \right).$$

Então, pela hipótese assumida quando fazemos a expansão assintótica interna (2.21), o problema (2.41) tem solução limitada em ξ e assim pelo Teorema 1.18 segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x, t) \varphi'(\xi)^2 d\xi = 0$$

Por (1.29) e (1.31) e pela igualdade acima, segue que $g(x, t) = 0$ e portanto

$$(2.43) \quad d_{0t}(x, t) = \Delta d_0(x, t) + \frac{\nabla h(x) \cdot \nabla d_0(x, t)}{h(x)}$$

Por (2.17) e pelo Corolário 1.13 temos que em $S = \Gamma$ vale

$$(2.44) \quad \vec{n} = \nabla d_0$$

e conseqüentemente

$$(2.45) \quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \ln(h) = \frac{\nabla h \cdot \nabla d_0}{h}$$

Também por (2.17) e pelo Teorema 1.12, temos que a curvatura média H em $S = \Gamma$ é dada por

$$(2.46) \quad H = \frac{1}{n-1} \Delta d_0$$

Seja $x(t)$ tal que $(x(t), t) \in \Gamma$. Então temos que $d_0(x(t), t) = 0$ e, conseqüentemente

$$\frac{d}{dt} d_0(x(t), t) = 0$$

para todo $t \geq 0$. Portanto $\nabla d_0(x, t) \cdot x'(t) = -d_{0t}(x(t), t)$. Mas por (2.44) $\nabla d_0(x, t) \cdot x'(t)$ é exatamente a componente normal da velocidade de Γ em x . Assim

$$(2.47) \quad V(x(t), t) = -d_{0t}(x(t), t)$$

é a velocidade normal da hiperfície Γ . Logo, por (2.47), (2.46) e (2.45), (2.43) nos diz que

$$(2.48) \quad V = -(n-1)H - \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \ln(h).$$

2.5 Equação de movimento da interface para a solução da equação de reação-difusão com taxa de reação espacialmente não homogênea

Usando a expansão assintótica (2.20) em (2.2) temos que

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t) = \varepsilon \Delta \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t) + \frac{h(x)^2}{\varepsilon} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} u_i(x, t)\right).$$

Expandindo f em torno de $u_0(x, t)$, esta equação pode ser escrita como

$$(2.49) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \frac{d}{dt} u_i(x, t) \\ = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \Delta u_i(x, t) + \frac{h(x)^2}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(u_0(x, t)) \varepsilon^{-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t) \right)^j.$$

Separando os coeficientes de ε^{-1} em (2.49) e usando a hipótese que $h > 0$, segue

$$(2.50) \quad f(u_0(x, t)) = 0 \text{ em } Q_0 \cup Q_1.$$

Também, separando os coeficientes de ε^0 em (2.26) e usando a hipótese que $h > 0$, obtemos que

$$(2.51) \quad f'(u_0(x, t)) u_1(x, t) = 0 \text{ em } Q_0 \cup Q_1.$$

Estamos na mesma situação da seção anterior e pelo mesmo motivo assumiremos

$$(2.52) \quad u_0(x, t) = 0 \text{ em } Q_0 \text{ e } u_0(x, t) = 1 \text{ em } Q_1$$

De (2.51), (2.52) e (0.6), temos que

$$(2.53) \quad u_1(x, t) = 0 \text{ em } Q_0 \cup Q_1.$$

Até aqui o procedimento é semelhante ao da seção anterior e portanto continuam valendo as condições de normalização (2.23) dadas na mesma.

Agora, usando a expansão assintótica interna (2.21) em (2.2) obtemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \frac{d}{dt} (U_i(\xi(\varepsilon, x, t), x, t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \Delta_x (U_i(\xi(\varepsilon, x, t), x, t)) \\ + \frac{h(x)^2}{\varepsilon} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i U_i(\xi, x, t)\right).$$

Usando (2.31), (2.32), (2.33) e (2.34) a equação acima é equivalente a

$$(2.54) \quad \sum_{\substack{i=0, \\ j=0}}^{\infty} \varepsilon^{i+j} \frac{\partial}{\partial \xi} U_i \frac{\partial}{\partial t} d_j + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \frac{\partial}{\partial t} U_i \\ = \sum_{\substack{i=0, \\ j=0}}^{\infty} \varepsilon^{i+j} \Delta d_j \frac{\partial}{\partial \xi} U_i + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i-1} \frac{\partial^2}{\xi^2} U_i \\ + 2 \sum_{\substack{i=0, \\ j=0}}^{\infty} \varepsilon^{i+j} \nabla d_j \cdot \nabla_x \frac{\partial}{\partial \xi} U_i + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \Delta_x U_i \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^2(x)}{\varepsilon} f^{(j)}(U_0) \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i U_i \right)^j.$$

Comparando os coeficientes de ε^{-1} em (2.54) temos que

$$(2.55) \quad U_{0\xi\xi} + h^2(x)f(U_0) = 0$$

e separando os coeficientes de ε^0 segue que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} U_0 \frac{\partial}{\partial t} d_0 = \Delta d_0 \frac{\partial}{\partial \xi} U_0 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_1 + 2\nabla d_0 \cdot \nabla_x \frac{\partial}{\partial \xi} U_0 + h^2(x)f'(U_0)U_1.$$

Mas esta pode ser escrita como

$$(2.56) \quad U_{1\xi\xi} + h^2(x)f'(U_0)U_1 = U_{0\xi}(d_{0t} - \Delta d_0) - 2\nabla d_0 \cdot \nabla_x U_{0\xi}.$$

Como $h(x) > 0$, segue que

$$(2.57) \quad \xi \cdot h(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{se } \xi = -\infty \\ 0, & \text{se } \xi = 0 \\ \infty, & \text{se } \xi = \infty. \end{cases}$$

Seja φ a solução de (1.25) com dados iniciais (1.26). Então por (2.55) e por (2.57)

$$(2.58) \quad U_0(\xi, x, t) = \varphi(h(x)\xi)$$

é a solução de (2.55) com dados iniciais (2.39). Substituindo (2.58) em (2.56) segue que

$$(2.59) \quad \begin{aligned} & U_{1\xi\xi} + h^2(x)f'(\varphi(h(x)\xi))U_1 \\ &= \frac{d}{d\xi} \varphi(h(x)\xi) (d_{0t} - \Delta d_0) - 2\nabla_x \left(\frac{d}{d\xi} \varphi(h(x)\xi) \right) \cdot \nabla d_0 \\ &= h(x)\varphi'(h(x)\xi)(d_{0t} - \Delta d_0) - 2\nabla d_0 \cdot \nabla_x (h(x)\varphi'(h(x)\xi)) \\ &= h(x)\varphi'(h(x)\xi)(d_{0t} - \Delta d_0) - 2\nabla d_0 \cdot \nabla_x h(x)\varphi'(h(x)\xi) \\ &\quad - 2h(x)\xi\varphi''(h(x)\xi)\nabla h(x) \cdot \nabla d_0 \\ &= h(x)\varphi'(h(x)\xi)(d_{0t} - \Delta d_0) \\ &\quad - 2\nabla d_0 \cdot \nabla_x h(x)(\varphi'(h(x)\xi) + \xi\varphi''(h(x)\xi)h(x)) \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Seja $z = h(x)\xi$, então (2.59) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & h^2(x)U_{1zz} + h^2(x)f'(\varphi(z))U_1 \\ &= h(x)\varphi'(z)(d_{0t} - \Delta d_0) - 2\nabla d_0 \cdot \nabla h(x)(\varphi'(z) + \xi\varphi''(z)h(x)). \end{aligned}$$

Dividindo por h^2 e reordenando os termos, obtemos

$$(2.60) \quad \begin{aligned} & U_{1zz} + f'(\varphi(z))U_1 \\ &= \left(d_{0t} - \Delta d_0 - \frac{2\nabla h \cdot \nabla d_0}{h} \right) \frac{\varphi'(z)}{h} - \frac{2}{h^2} \nabla d_0 \cdot \nabla h z \varphi''(z) \end{aligned}$$

Pelas condições (2.23) temos que

$$(2.61) \quad U_1(0, x, t) = a.$$

Escrevendo

$$A(z, x, t) = \left(d_{0t}(x, t) - \Delta d_0(x, t) - \frac{2\nabla h(x) \cdot \nabla d_0(x, t)}{h(x)} \right) \frac{\varphi'(z)}{h(x)} - \frac{2\nabla d_0(x, t) \cdot \nabla h(x)}{h(x)^2} z\varphi''(z)$$

então pelos lemas 1.16 e 1.17 e como supomos expansão assintótica interna (2.21) temos que A está nas hipóteses do Teorema 1.18.

Em especial

$$(2.62) \quad \left(d_{0t} - \Delta d_0 - \frac{2\nabla h \cdot \nabla d_0}{h} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(z)^2 dz - \frac{2\nabla d_0 \cdot \nabla h}{h} \int_{-\infty}^{\infty} z\varphi'(z)\varphi''(z) dz = 0.$$

Pelo Corolário 1.16 temos que

$$z\varphi'(z)^2 \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} = 0.$$

Usando a integração por partes, obtemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} z\varphi'(z)\varphi''(z) dz = z\varphi'(z)^2 \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(z)^2 dz - \int_{-\infty}^{\infty} z\varphi'(z)\varphi''(z) dz$$

e conseqüentemente

$$(2.63) \quad \int_{-\infty}^{\infty} z\varphi'(z)\varphi''(z) dz = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(z)^2 dz.$$

Substituindo (2.63) em (2.62) temos que

$$\left(d_{0t} - \Delta d_0 - \frac{2\nabla h \cdot \nabla d_0}{h} + \frac{\nabla d_0 \cdot \nabla h}{h} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(z)^2 dz = 0$$

E como φ' é não nula então

$$d_{0t} = \left(\Delta d_0 + \frac{\nabla h \cdot \nabla d_0}{h} \right)$$

o que é exatamente a Equação 2.43 e conseqüentemente 2.48 está satisfeito. Concluindo, mostramos que as equações (2.2) e (2.1) têm a mesma equação de movimento de interface. Esta é dada por (2.48), a saber

$$V = -(n-1)H - \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \ln(h).$$

Capítulo 3

Interface de um sistema de reação-difusão

3.1 Introdução

Neste capítulo vamos introduzir o sistema de reação-difusão sem o termo flutuante

$$(3.1) \quad \begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} h(v)^2 f_\varepsilon(u), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ \varepsilon v_t = \Delta v + u - \gamma v, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \end{cases}$$

onde $f_\varepsilon(u) = (u(1-u)(u - 1/2 + \alpha\varepsilon))$, sendo $\alpha > 0$. Nosso propósito é, usando expansões assintóticas, mostrar que o movimento de interface para a solução do sistema acima é idêntico ao movimento de interface do sistema de crescimento de chemotaxis

$$(3.2) \quad \begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon \Delta u - \varepsilon \nabla \cdot (u \nabla \chi(v)) + \frac{1}{\varepsilon} f_\varepsilon(u), & em \Omega \times (0, T) \\ \varepsilon v_t = \Delta v + u - \gamma v, & em \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

onde $\nabla \cdot$ é o operador divergente, sendo γ uma constante positiva. A função χ é chamada de função de sensibilidade da agregação de chemotaxis e satisfaz $\chi'(v) > 0$ para $v > 0$. A Equação (3.2) foi proposta por Mimura e Tsujikawa[13] como um modelo de agregação de indivíduos biológicos no caso em que $h(v) = exp(-\chi(v))$.

Sendo $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ a solução do problema (3.2), Bonami, Hilhorst, Logak e Mimura; [5] mostraram que $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightarrow (u_0, v_0)$ em $[0, T]$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para algum $T > 0$. Aqui u_0 é a função característica do domínio em movimento $\Omega_t \subset \subset \Omega$, cuja equação de movimento relativa a v_0 é dada pelo problema (3.3) a seguir:

$$(3.3) \quad \begin{cases} V = -(n-1)H + \frac{\partial \chi(v_0)}{\partial \bar{n}} + \sqrt{2\alpha} exp(\chi(v_0)) \\ - \Delta v_0(x, t) + \gamma v_0(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_t, \quad t \in [0, T], \\ 1, & x \in \Omega_t, \quad t \in [0, T] \end{cases} \end{cases}$$

Sendo V e H respectivamente a velocidade normal e curvatura média de $\partial\Omega_t$. A obtenção de (3.3) é fundamentada no uso da onda viajante de um problema auxiliar e a função distância com sinal, como tem feito por exemplo Barles, Soner e Souganidis [4]. Observamos também que este método é, em sua maior parte, equivalente ao usado no capítulo precedente. Bonami, Hilhorst, Logak e Mimura fizeram uma prova rigorosa para a convergência no caso em que v é estacionária [6].

3.2 Equação de movimento de interface do sistema de reação-difusão sem o termo flutuante

Seja $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ a solução de (3.1) ou (3.2). Como no capítulo anterior, definimos a interface Γ^ε por $\Gamma^\varepsilon = \{\bigcup_{t>0}(\Gamma_t^\varepsilon \times \{t\})\}$ onde $\Gamma_t^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^\varepsilon(x, t) = 1/2\}$. Notemos que no capítulo anterior $\Gamma_t^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^\varepsilon(x, t) = a\}$, sendo $0 < a < 1$ a raiz de f tal que $f'(a) > 0$. Aqui $1/2$ é a raiz de $f(u) = (u(1-u)(u-1/2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon$.

Também definimos $d_0(x, t), \Gamma_t, \Omega_t, \Gamma, Q_0$ e Q_1 como na Seção 3 do capítulo precedente.

Assumimos que u^ε tem a expansão externa (2.20), a expansão interna (2.21) e vamos impor as condições de normalização como na Seção 3, a saber (2.23), (2.24) e (2.25). Assumimos também que v^ε tem a expansão

$$(3.4) \quad v^\varepsilon(x, t) = v_0(x, t) + \varepsilon v_1(x, t) + \varepsilon^2 v_2(x, t) + \dots$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$. Substituindo (2.20) e (3.4) em (3.1) obtemos que

$$(3.5) \quad \varepsilon \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t) = \varepsilon \Delta \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t) + \frac{h(v)^2}{\varepsilon} f_\varepsilon(u),$$

$$(3.6) \quad \varepsilon \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(x, t) = \Delta \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(x, t) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(x, t) - \gamma \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(x, t).$$

Fazendo a expansão de Taylor h em torno de v_0 , segue que

$$(3.7) \quad h(v^\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} h^{(j)}(v_0) \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i \right)^j.$$

Por outro lado

$$(3.8) \quad \begin{aligned} f_\varepsilon(u) &= f_0(u) + \varepsilon f_1(u), \text{ sendo} \\ f_0(u) &= u(1-u)(u-1/2) \\ f_1(u) &= \alpha u(1-u). \end{aligned}$$

Agora, fazendo as expansões de Taylor para f_0 e f_1 em torno de u_0 , obtemos que

$$(3.9) \quad \begin{cases} f_0(u^\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} f_0^{(j)}(u_0) \frac{1}{j!} (\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(\xi, x, t))^j, \\ f_1(u^\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} f_1^{(j)}(u_0) \frac{1}{j!} (\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(\xi, x, t))^j. \end{cases}$$

Ainda substituindo (3.9) em (3.8) e daí substituindo (3.8) e (3.7) em (3.5), obtemos

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \frac{d}{dt} u_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \Delta u_i + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{j=0}^{\infty} h^{(j)}(v_0) \frac{1}{j!} (\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i)^j \right)^2 \\ & \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f_0^{(j)}(u_0) (\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t))^j + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{j!} f_1^{(j)}(u_0) (\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t))^j \right). \end{aligned}$$

Separando os coeficientes de ε^{-1} em (3.10) segue que

$$(3.11) \quad h(v_0)^2 f_0(u_0(x, t)) = 0.$$

Também, separando os coeficientes de ε^0 em (3.10), segue que

$$(3.12) \quad h(v_0)^2 (f_0'(u_0) u_1 + f_1(u_0)) + 2h(v_0)h'(v_0)v_1 f_0(u_0) = 0.$$

Separando os coeficientes de ε^0 em (3.6), obtemos que

$$(3.13) \quad \Delta v_0 + u_0 - \gamma v_0 = 0 \text{ em } Q_0 \cup Q_1.$$

Por (3.11) temos que $u_0 = 0$, ou $u_0 = a$, $u_0 = 1$. Então como em (2.29) na Seção 3 do capítulo anterior, vamos supor que

$$(3.14) \quad u_0(x, t) = 0 \text{ se } x \in Q_0 \text{ e } u_0(x, t) = 1 \text{ se } x \in Q_1.$$

Por (3.14), (3.12) pode ser reescrito como

$$h(v_0)^2 f'(u_0) u_1 = 0$$

e portanto, como $h > 0$ obtemos que

$$(3.15) \quad u_1 = 0 \text{ em } Q_0 \cup Q_1$$

Por 3.13, v_0 é solução de

$$(3.16) \quad -\Delta v_0(x, t) + \gamma v_0(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}_t, \\ 1, & x \in \Omega_t \end{cases}$$

Substituindo 2.21 e 3.4 na primeira equação do sistema (3.1), segue que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \frac{d}{dt} (U_i(\xi(\varepsilon, x, t), x, t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \Delta (U_i(\xi(\varepsilon, x, t), x, t)) + \frac{h(x)^2}{\varepsilon} f_\varepsilon(u^\varepsilon).$$

Usando (2.32), (2.33), (3.8), (3.9 e (3.7) a equação acima é equivalente a

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i=0, \\ j=0}}^{\infty} \varepsilon^{i+j} \frac{\partial}{\partial \xi} U_i \frac{\partial}{\partial t} d_j + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \frac{\partial}{\partial t} U_i \\ &= \sum_{\substack{i=0, \\ j=0}}^{\infty} \varepsilon^{i+j} \Delta d_j \frac{\partial}{\partial \xi} U_i + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_i \\ &+ 2 \sum_{\substack{i=0, \\ j=0}}^{\infty} \varepsilon^{i+j} \nabla d_j \cdot \nabla_x \frac{\partial}{\partial \xi} U_i + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \Delta_x U_i \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{j=0}^{\infty} h^{(j)}(v_0) \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i \right)^j \right)^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_0^{(j)}(U_0) \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i U_i \right)^j \right. \\ &\left. + \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} f_1^{(i)}(U_0) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i U_i \right)^j \right). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de ε^{-1} e ε^0 na equação acima, obtemos respectivamente que

$$(3.17) \quad U_{0\xi\xi} + h^2(v) f_0(U_0) = 0$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} U_0 \frac{\partial}{\partial t} d_0 &= \Delta d_0 \frac{\partial}{\partial \xi} U_0 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_1 + 2 \nabla d_0 \cdot \nabla_x \frac{\partial}{\partial \xi} U_0 \\ &+ h^2(v_0) f'_0(U_0) U_1 + h^2(v_0) f_1(U_0) + 2h(v_0) h'(v_0) v_1 f_0(U_0), \end{aligned}$$

sendo que esta última pode ser reescrita como

$$(3.18) \quad U_{1\xi\xi} + h^2(v_0) f'_0(U_0) U_1 = U_{0\xi} (d_{0t} - \Delta d_0) - 2 \nabla d_0 \cdot \nabla_x U_{0\xi} - 2h(v_0) h'(v_0) v_1 f_0(U_0) - h^2(v_0) f_1(U_0).$$

Das condições de normalização (2.23) e de (2.24), (2.25), temos que U_0 satisfaz (2.39).

Assim, por (3.17) e (2.39), U_0 é solução do seguinte problema

$$(3.19) \quad \begin{cases} U_{0\xi\xi} + h^2(v_0) f_0(U_0) = 0 \\ U_0(+\infty, x, t) = 0 \\ U_0(0, x, t) = 1/2 \\ U_0(-\infty, x, t) = 1. \end{cases}$$

Fazendo $z = h(v_0)\xi$, então o problema acima pode ser reescrito como

$$(3.20) \quad \begin{cases} U_{0zz} + f_0(U_0) = 0 \\ U_0(+\infty, x, t) = 0 \\ U_0(0, x, t) = 1/2 \\ U_0(-\infty, x, t) = 1. \end{cases}$$

Logo, a solução em (3.20) é dada por

$$(3.21) \quad U_0(\xi, x, t) = \varphi(h(v_0(x, t))\xi)$$

sendo φ a solução de (1.25) com dados iniciais (1.26) e $f = f_0$. Aqui, pelo Exemplo 1.5

$$(3.22) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{tgh}\left(\frac{z}{2\sqrt{2}}\right) \right).$$

Portanto,

$$(3.23) \quad U_0(\xi, x, t) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{tgh}\left(\frac{h(v_0(x, t))\xi}{2\sqrt{2}}\right) \right).$$

Substituindo (3.21) em (3.18) e fazendo $z = h(v_0(x, t))\xi$, obtemos que

$$\begin{aligned} & h(v_0(x, t))^2 U_{1zz} + h(v_0(x, t))^2 f'_0(\varphi(z)) U_1 \\ &= (d_{0t} - \Delta d_0) \varphi'(z) h(v_0(x, t)) \\ & - 2 \nabla_x (h(v_0(x, t)) \varphi'(h(v_0(x, t))\xi)) \cdot \nabla d_0 \\ & - 2h(v_0(x, t)) h'(v_0(x, t)) v_1(x, t) f_0(\varphi(z)) - h(v_0(x, t))^2 f_1(\varphi(z)) \\ &= (d_{0t} - \Delta d_0) \varphi'(z) h(v_0(x, t)) \\ & - 2(h'(v_0(x, t)) \varphi'(z) \nabla v_0(x, t) + h(v_0(x, t)) \varphi''(z) \xi h'(v_0(x, t)) \nabla v_0(x, t)) \cdot \nabla d_0 \\ & - 2h(v_0(x, t)) h'(v_0(x, t)) v_1(x, t) f_0(\varphi(z)) - h(v_0(x, t))^2 f_1(\varphi(z)). \end{aligned}$$

Dividindo a equação acima por $h(v_0)^2$, segue que

$$(3.24) \quad \begin{aligned} U_{1zz} + f'_0(\varphi(z)) U_1 &= \frac{1}{h(v_0)} (d_{0t} - \Delta d_0) \varphi'(z) \\ & - \frac{2h'(v_0)}{h(v_0)^2} (\varphi'(z) + z\varphi''(z)) \nabla v_0 \cdot \nabla d_0 \\ & - \frac{2h'(v_0)}{h(v_0)} v_1 f_0(\varphi(z)) - f_1(\varphi(z)) \end{aligned}$$

Mas esta última pode ser reescrita na forma

$$U_{1zz} + f'_0(\varphi(z)) U_1 = A(z, x, t).$$

Pelos corolários 1.16 e 1.17, a equação acima está nas hipóteses do Teorema 1.18. Como estamos assumindo a expansão interna 2.21, então para cada $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, U_1 é solução limita em ξ (e portanto em z) de (3.24). Assim, pelo teorema citado, segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(z)A(z, x, t)dz = 0$$

e portanto

$$(3.25) \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(v_0(x, t))A(z)\varphi'(z)dz = 0.$$

Separando $h(v_0(x, t))A(z)$ em (3.24), então (3.25) torna-se

$$(3.26) \quad \begin{aligned} & \left(d_{0t} - \Delta d_0 - \frac{2h'(v_0)}{h(v_0)} \nabla v_0 \cdot \nabla d_0 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(z)^2 dz \\ & - \frac{2h'(v_0)}{h(v_0)} \nabla v_0 \cdot \nabla d_0 \int_{-\infty}^{\infty} z \varphi'(z) \varphi''(z) dz \\ & - 2h'(v_0)v_1 f_0(\varphi(z)) \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\varphi(z)) \varphi'(z) dz \\ & - h(v_0) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\varphi(z)) \varphi'(z) dz = 0. \end{aligned}$$

Ainda por (3.8) e por (3.22) segue que

$$(3.27) \quad \begin{aligned} f_1(\varphi(z)) &= \alpha \varphi(z)(1 - \varphi(z)) = \\ & \alpha \frac{1}{2} \left(\frac{\cosh(z/2\sqrt{2}) - \sinh(z/2\sqrt{2})}{\cosh(z/2\sqrt{2})} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\cosh(z/2\sqrt{2}) + \sinh(z/2\sqrt{2})}{\cosh(z/2\sqrt{2})} \right) \\ & = \frac{\alpha}{4} \operatorname{cossech}(z/2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

e

$$(3.28) \quad \sqrt{2}\alpha\varphi'(z) = -\sqrt{2}\alpha\varepsilon \frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{cossech} \left(\frac{z}{2\sqrt{2}} \right) = -\frac{\alpha}{4} \operatorname{cossech} \left(\frac{z}{2\sqrt{2}} \right).$$

Assim, por 3.27 e 3.28, segue que

$$f_1(\varphi(z)) = -\sqrt{2}\alpha\varphi'(z).$$

Multiplicando esta última equação por $\varphi'(z)$ e integrando sobre \mathbb{R} , obtemos que

$$(3.29) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\varphi(z))\varphi'(z)dz = -\sqrt{2}\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(z)^2 dz.$$

Por (3.20) e pelo Corolário 1.16, segue que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\varphi(z))\varphi'(z)dz &= - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi''(z)\varphi'(z)dz \\ &= -\varphi'(z)^2 \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi''(z)\varphi'(z)dz = - \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\varphi(z))\varphi'(z)dz. \end{aligned}$$

Portanto

$$(3.30) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\varphi(z))\varphi'(z)dz = 0.$$

Substituindo (2.63), (3.30) e (3.29) em (3.26), obtemos que

$$\left(d_{0t}(x, t) - \Delta d_0 - \frac{2h'(v_0(x, t))}{h(v_0(x, t))} \nabla v_0 \cdot \nabla d_0 + \frac{h'(v_0(x, t))}{h(v_0(x, t))} \nabla v_0 \cdot \nabla d_0 + 0 + \sqrt{2}\alpha h(v_0) \right) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(z)^2 dz = 0.$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(z)^2 dz > 0$$

segue que

$$(3.31) \quad d_{0t} = \Delta d_0 + \frac{h'(v_0)}{h(v_0)} \nabla v_0 \cdot \nabla d_0 - \sqrt{2}\alpha h(v_0).$$

Por (2.44), temos que

$$(3.32) \quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \ln(h(v_0)) = \frac{h'(v_0)}{h(v_0)} \nabla v_0 \cdot \nabla d_0.$$

Substituindo (2.47), (2.46), (3.32) em (3.31) ainda tomando $\chi(v_0) = -\ln(h(v_0))$ obtemos que

$$(3.33) \quad V = -(n-1)H + \frac{\partial \chi(v_0)}{\partial \vec{n}} + \sqrt{2}\alpha \exp(\chi(v_0))$$

onde \vec{n} é o vetor normal exterior em Γ_t , V é a velocidade normal de Γ_t , H a curvatura média de Γ_t a qual é positiva se Ω_t é convexa e $\overline{\Omega}_t = \Omega_t \cup \Gamma_t$. Mas (3.33) é a equação de movimento de interface para (0.8).

Capítulo 4

Simulações numéricas

4.1 Condições suficientes para a convergência da interface

Neste capítulo faremos simulações do movimento da interface quando $n = 2$. As figuras da Seção 2 a seguir, foram copiadas de [15]. Inicialmente assumimos que h radialmente simétrica, isto é: $h = h(r)$, onde $r = \|x\|$. Também suporemos que para cada $t \geq 0$, Γ_t como sendo um círculo centrado na origem e com raio $R(t)$. Assumimos ainda que o domínio Ω como sendo um retângulo em torno da origem. Assim a velocidade normal V de Γ_t é exatamente a variação de seu raio, a saber

$$(4.1) \quad V(t) = \frac{dR}{dt}.$$

Da geometria diferencial sabemos que se $p \in \Gamma_t$ então

$$(4.2) \quad H(p) = \frac{1}{R(t)}.$$

Ainda, como $h(x) = \tilde{h}(\|x\|)$, então

$$\nabla h(x) = \tilde{h}'(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|} = \tilde{h}'(\|x\|) \cdot \vec{n}.$$

Doravante não faremos mais distinção entre h e \tilde{h} . Pela identidade acima obtemos que

$$(4.3) \quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \ln(h(x)) = \frac{1}{h(\|x\|)} h'(\|x\|) \vec{n} \cdot \vec{n} = \frac{1}{h(\|x\|)} h'(\|x\|).$$

Agora substituindo (4.1), (4.2) e (4.3) em (2.48), obtemos

$$(4.4) \quad \frac{dR}{dt} = -\frac{1}{R} - \frac{h'(R)}{h(R)}.$$

Usando as regras elementares de derivação, segue

$$\frac{d}{dR} \ln(Rh(R)) = \frac{1}{Rh(R)} (h(R) + Rh'(R)) = \frac{1}{R} + \frac{h'(R)}{h(R)}.$$

Portanto

$$(4.5) \quad \frac{d}{dR} \ln(Rh(R)) = \frac{1}{R} + \frac{h'(R)}{h(R)}.$$

Assim, substituindo (4.5) em (4.4), temos

$$(4.6) \quad \frac{dR}{dt} = -\frac{d}{dR} \ln(Rh(R)).$$

Agora, se

$$(4.7) \quad Rh(R) \text{ atinge mínimo em } R^* > 0$$

e como \ln é estritamente crescente, então o mesmo acontece com a função $\ln(Rh(R))$. Também, como h é limitada então

$$\lim_{R \rightarrow 0} Rh(R) = 0$$

e portanto

$$\lim_{R \rightarrow 0} \ln(Rh(R)) = -\infty,$$

e assim existe $R' < R^*$ positivo tal que $\ln(Rh(R))$ atinge um máximo local em $R = R'$. Vemos isto qualitativamente no gráfico da Figura 4.1.

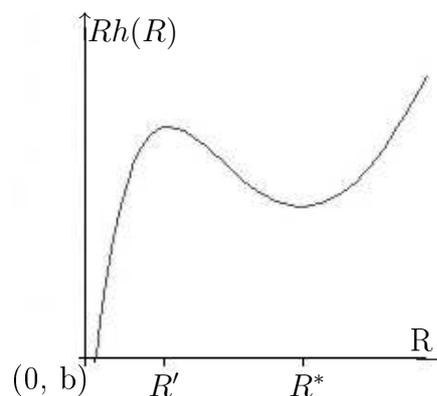


Figura 4.1: Representação qualitativa de $\ln(Rh(R))$ em função de R .

Portanto $-\frac{d}{dR} \ln(Rh(R))$ é como no gráfico da Figura 4.2.

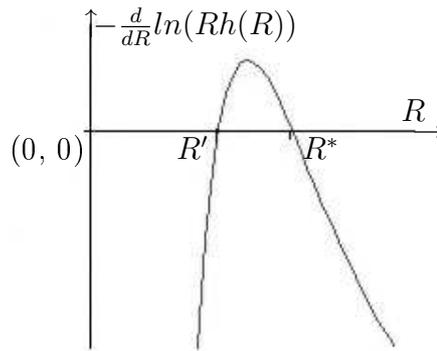


Figura 4.2: Representação qualitativa de $-\frac{d}{dR}\ln(Rh(R))$ em função de R .

Se $R(t)$ é solução de (4.6) e for suficientemente próximo de R^* , então pela análise do sinal de $-\frac{d}{dR}\ln(Rh(R))$, $R(t)$ converge para R^* . Assim se Γ_0 for suficientemente próximo de Γ_∞ , então Γ_t converge para Γ_∞ , onde Γ_∞ é o círculo de raio R^* centrado na origem. Aqui, suficientemente próximo quer dizer que não existe raiz de $-\frac{d}{dR}\ln(Rh(R))$ entre $R(t)$ e R^* . Outra observação importante é que R^* descrito acima pode não existir, ou não ser único, mas para cada R^* existe exatamente um R' como nos gráficos das Figuras 4.1 e 4.2. Veremos alguns exemplos na próxima seção.

4.2 Exemplos

Vejamos algumas exemplificações numéricas.

Aqui $R^* = \sqrt{5}/3$ e $R' = \sqrt{2}/3$. Como esperado, a única diferença nas Figuras 4.3 e 4.4 está na espessura da camada interna (representada pela transição do preto ao branco nas figuras). Isto é também esperado, pois na expansão interna da solução da equação (2.2), $U_0(\xi, x, t) = \varphi(h(x)\xi)$ onde $\varphi(\xi) = U_0(\xi, x, t)$ para a expansão em (2.1). Como $h > 1$, temos que a norma do vetor gradiente em relação a variável espacial para a solução em (2.2) é maior se comparada com a solução para (2.1). Mas quanto maior for esta norma, mais rápido U_0 muda de um valor para outro e portanto mais rápida é a transição do preto ao branco na representação nas figuras. A mesma análise feita acima continua valendo em certos casos se h não é radialmente simétrica. Observamos isto nas Figuras 4.5 e 4.6.

Mas quando Γ_0 tiver pontos não suficientemente próximos de Γ_∞ , ou a curvatura de Γ_0 oscilar muito então mesmo h sendo radialmente simétrica, Γ_t pode perder a convexidade. Este fenômeno pode ser observado nas figuras 4.7 e 4.8.

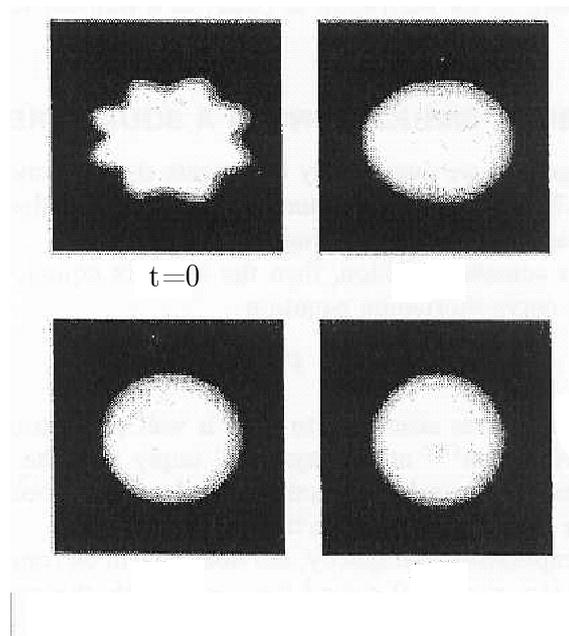


Figura 4.3: Evolução no tempo da solução $u^\varepsilon(x, t)$ de (2.1) com $\varepsilon = 0.025$, $f(u) = u(1 - u)(u - 1/2)$ e $h(x) = 1/(|x| + 1/9) + 1$.

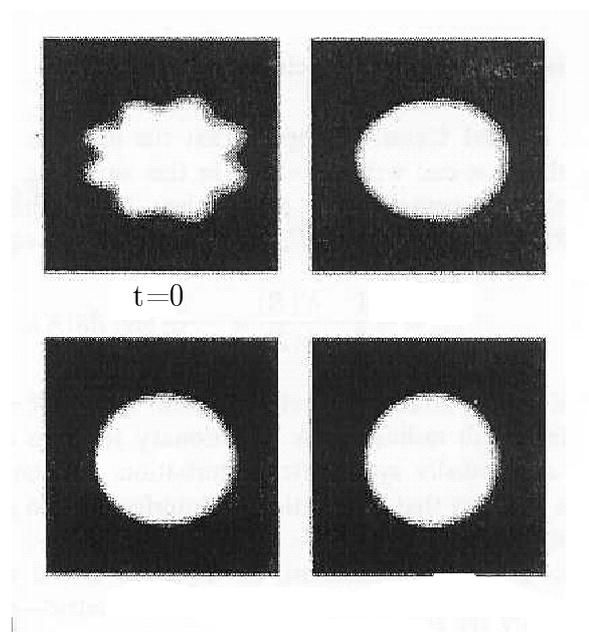


Figura 4.4: Evolução no tempo da solução $u^\varepsilon(x, t)$ de (2.2) com ε , f e h como na Figura 4.3.

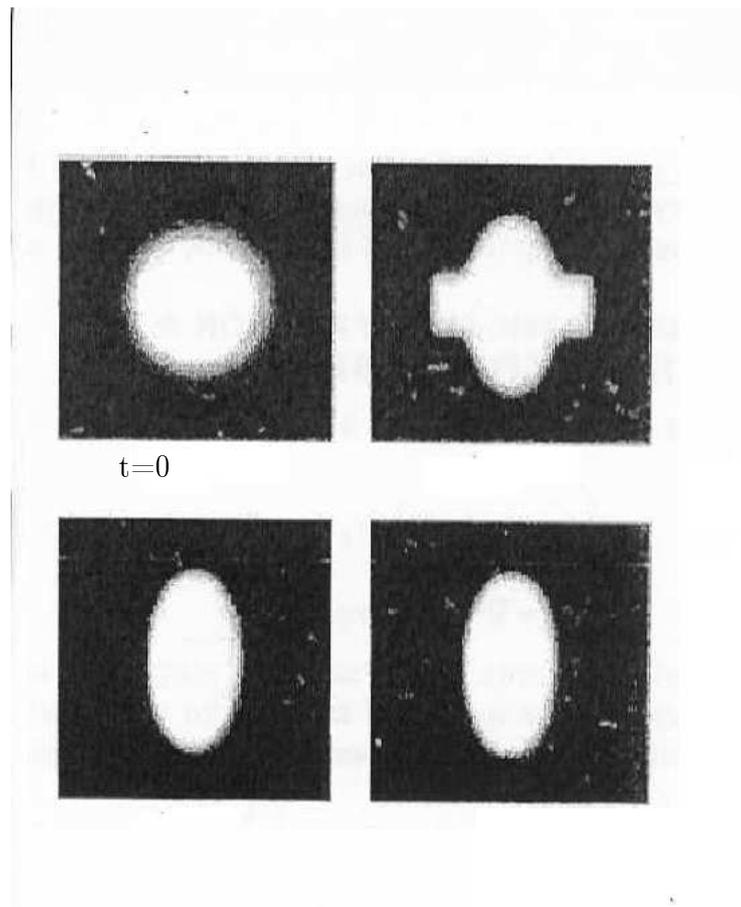


Figura 4.5: Evolução no tempo da solução $u^\varepsilon(x, t)$ de (2.1) com $\varepsilon = 0.025$, $f(u) = u(1 - u)(u - 1/2)$, $h(x) = \exp(p(\cos(q(4x_1^2 + x_2^2))))$, $p = 1.25$ e $q = 3$.

Vejamos também dois exemplos de evolução para $u^\varepsilon(x, t)$, solução do sistema (0.7), dados nas Figuras 4.9 e 4.10. Aqui podemos notar a existência de uma grande variedade de padrões espaciais na evolução da solução no tempo.

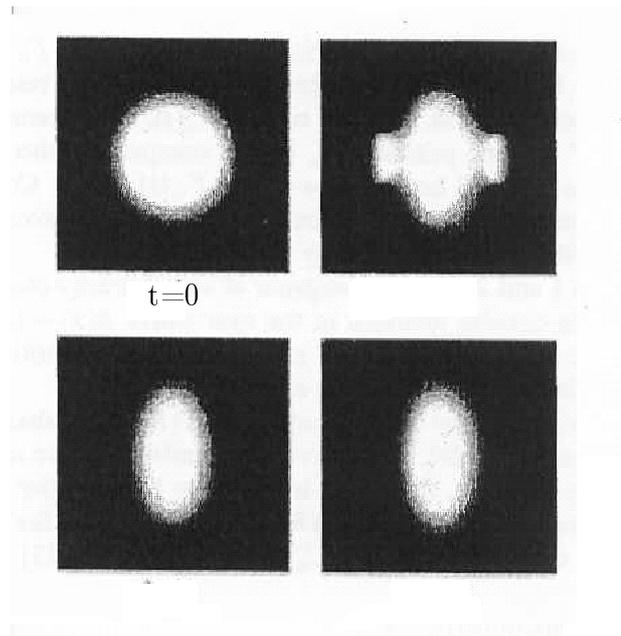


Figura 4.6: Evolução no tempo da solução $u^\varepsilon(x, t)$ de (2.2) com ε , f e h como na Figura 4.5.

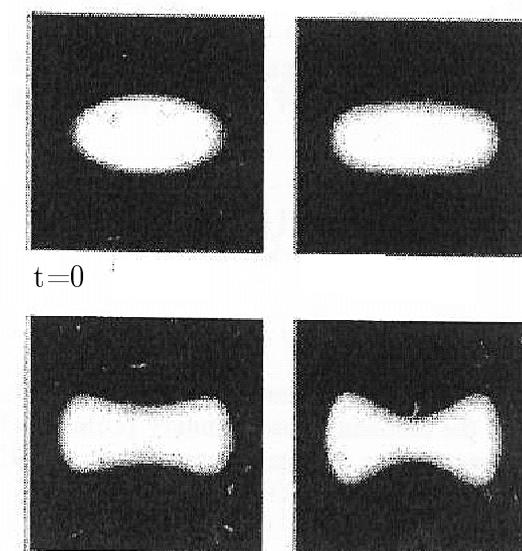


Figura 4.7: Evolução no tempo da solução $u^\varepsilon(x, t)$ de (2.1) com $\varepsilon = 0.025$, $f(u) = u(1 - u)(u - 1/2)$, $h(x) = \exp(p(\sin(q\pi\|x\|^2)))$, $p = 1.956$ e $q = 1.15$.

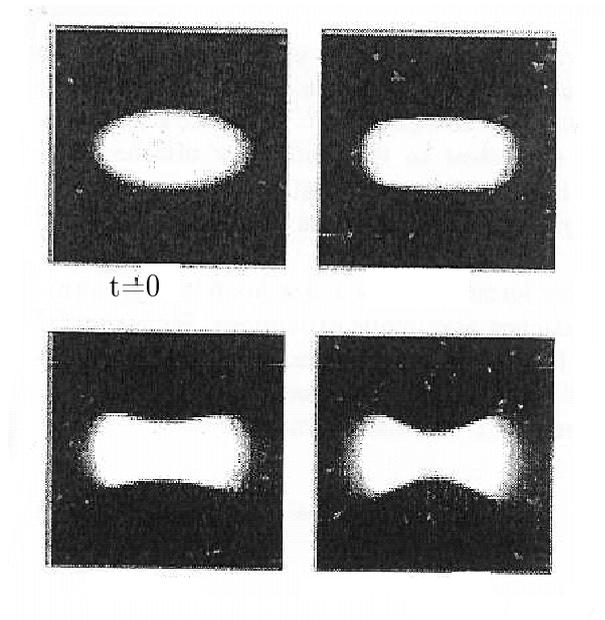


Figura 4.8: Evolução no tempo da solução $u^\varepsilon(x, t)$ de (2.2) com ε , f e h como na Figura 4.7.

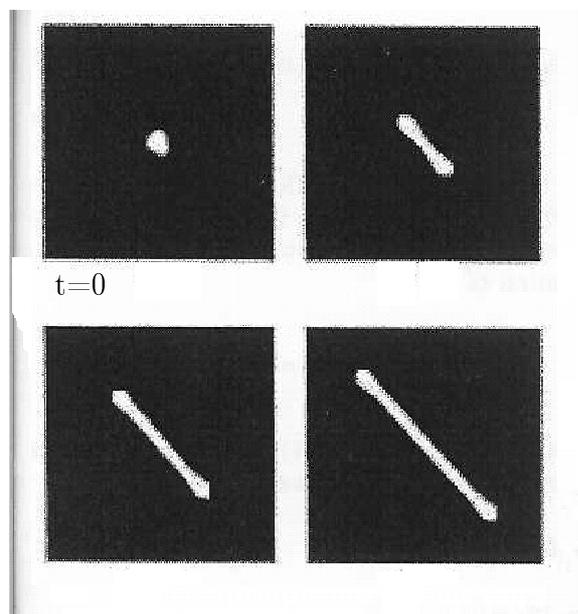


Figura 4.9: Evolução no tempo da solução $u^\varepsilon(x, t)$ de (0.7) com $\varepsilon = 0.05$, $\alpha = 1.0$, $\gamma = 1.0$, $h(v) = a \exp(-bv)$, $a = 20\sqrt{2}$ e $b = 6.41$.

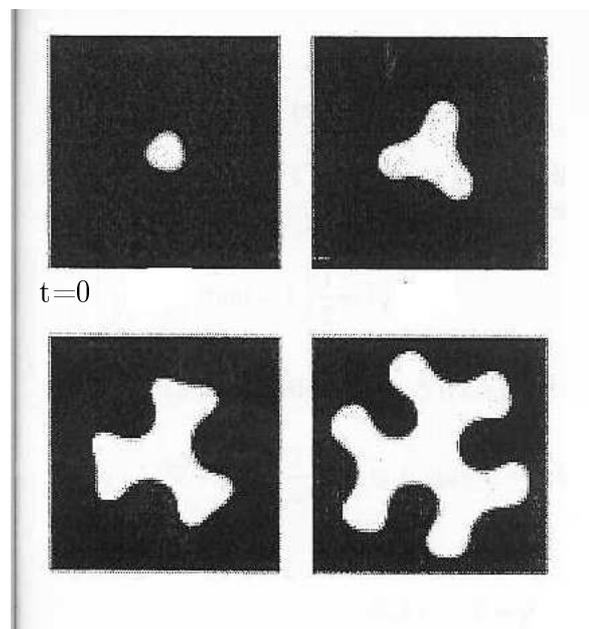


Figura 4.10: Evolução no tempo da solução $u^\varepsilon(x, t)$ de (0.7) com $\varepsilon = 0.05$, $\alpha = 1.0$, $\gamma = 0.5$, $h(v) = a \exp(-bv)$, $a = 20\sqrt{2}$ e $b = 17.55$.

Referências Bibliográficas

- [1] ALIKAKOS, N. D.; BATES, P. W.; CHEN, X. *Convergence of the Cahn-Hilliard equation to the Hele-Shaw model.* **Arch. Rational Mech. Anal**, v. 128, p. 165-205, 1979.
- [2] ALLEN, S.; CAHN, J. *A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening.* **Acta Metall**, v. 27, p. 1084-1095, 1979.
- [3] LUIGI, A.; NORMAN, D. *Geometric evolution problems, distance function and viscosity solutions.* In: LUIGI, A.; NORMAN, D. **Calculus of variations and partial differential equations: topics on geometrical evolution problems and degree theory.** Berlin: Springer. P. 05-16.
- [4] BARLES, G.; SONER, H. M.; SOUGANIDIS, P. E. *Front propagation and phase field theory.* **SIAM J. control optim**, v. 31, p. 439-469, 1993.
- [5] BONAMI, A.; HILHORST, D.; LOGAK, E.; MIMURA, M. **A free boundary problem arising in a chemotaxis model, free boundary problems: theory and applications.** Pitman Research Notes in mathematics Series; v. 363, 1996.
- [6] BONAMI, A.; HILHORST, D.; LOGAK, E.; MIMURA, M. *Singular limit of a chemotaxis-growth model.* **Adv. Differential Equations**, v. 10, p. 1173-1218 2001.
- [7] CHEN, X. *Generation and Propagation of Interfaces for Reaction-Diffusion Equations,* **J. Differential Equations**, v. 96, p. 116-141, 1992.
- [8] CHILDRESS, S.; PERCUS, J. K. *Nonlinear aspects of chemotaxis.* **Math. Biosci**, v. 56, p. 217-237, 1992.
- [9] FIFE, P. C. *Dynamics of Internal Layers and Diffusive Interfaces.* In CBMS-NSF Regional Conf. Ser. **Appl. math., SIAM**, Philadelphia, 1991.
- [10] FIFE, C. P. *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems.* In LEVIN, S. **Lecture notes in biomathematics**, v.28. Springer-Verlag, Berlin, 1974.

- [11] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order.** 2 ed. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [12] KEVORKIAN, J.; COLE, J. D. **Multiple scale and singular perturbation methods.** New York, Springer, 1996.
- [13] MIMURA, M.; TSUJIKAVA, T. *Aggregating pattern dynamics in chemotaxis model including growth.* **Physica A**, v. 230, p. 499-543, 1996.
- [14] MIMURA, M.; TSUJIKAVA, T.; KOBAYASHI R.; UEYAMA, D. *Dinamics of aggregation patterns in a chemotaxis-diffusion-growth model equation.* **Forma**, v. 8, p. 179-195, 1993.
- [15] NAKAMURA, K. I.; MATANO, H.; HILHORST, D.; SCHÄTZLE, R. *Singular limit of a reaction-diffusion equation with a spatially inhomogeneous reaction term.* **Jornal of Statistica Physics**, v. 95, p. 1165-1184, 1999.
- [16] OKUBO, A. **Diffusion and Ecological Problems.** Mathematical Models Berlin, Springer-Verlag, (Biomathematics; v.10), 1980.
- [17] SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias.** Progeto Euclides, 1979.
- [18] THORPE, J. A. **Elementary Topics in Differential Geometry.** New York Heidelberg, Springer-Verlag, 1979.
- [19] RUBINSTEIN, J.; STERNBERG, P.; KELER, J. B. *Fast reaction, slow diffusion and curve shortening.* **SIAM J. Appl. Math.**, v. 49, p. 116-133, 1989.