UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Produtos em Homologia e Cohomologia na categoria dos Complexos Simpliciais

Cristhian Augusto Bugs

Orientador: Prof. Dr. Dirceu Penteado

São Carlos - SP

Março de 2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Produtos em Homologia e Cohomologia na categoria dos Complexos Simpliciais

Cristhian Augusto Bugs

Orientador: Prof. Dr. Dirceu Penteado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática

São Carlos - SP

Março de 2004

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

B931ph

Bugs, Cristhian Augusto.
Produtos em homologia e cohomologia na categoria dos complexos simpliciais / Cristhian Augusto Bugs. -- São Carlos : UFSCar, 2004.
89 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2004.

1. Topologia algébrica. 2. Homologia simplicial. 3. Produto cup. 4. Produto cap. I. Título.

CDD: 514.2 (20ª)

Orientador

Prof. Dr. Dirceu Penteado

À minha esposa Marilene.

Agradecimentos

À minha esposa, Marilene, pela compreensão, dedicação e amor recebidos ao longo desses anos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Dirceu Penteado, pelas orientações, paciência e incentivos durante todo o desenvolvimento deste trabalho, contribuindo muito para a minha formação.

Aos meus pais e a minha irmã pelo incentivo e por acreditarem em mim.

Aos professores e amigos João, Marcelo e Fabiane que sempre me incentivaram e apoiaram.

Aos professores do departamento da UFSCar pelas inúmeras oportunidades.

À todos os amigos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho e, de maneira especial, a Mariza, Jacson, Marcos, Kelly, pela convivência, amizade e apoio em todos os momentos.

Aos colegas do PPG-M pelo companheirismo, pela amizade e o excelente ambiente de trabalho que proporcionaram.

À Célia, pela sua atenção e dedicação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho nós apresentamos a teoria fundamental para estabelecer as coordenadas do Índice de Kronecker, Produtos Cup e Cap na categoria dos complexos simpliciais finitos em termos de cadeia e cocadeia.

Abstract

In this work we present fundamental theory to establish the coordinates of the Kronecker Index, Cup and Cap Products in the finite Simplicial Complexes category in terms of chain and cochain.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho foi estabelecer, na categoria dos complexos simpliciais finitos, relações matriciais em termos das coordenadas dos produtos de Kronecker (Índice de kronecker), cup e cap a nível de cadeia e cocadeia. Basicamente estes resultados foram uma adaptação destes produtos desenvolvidos na categoria de homologia e cohomologia singular apresentados principalmente por Greenberg em [2].

Na categoria estudada, a maior dificuldade foi adaptar o conceito de p-face anterior e p-face posterior para se evitar ambigüidade. Isto exigiu criteriosa revisão do conceito de orientação. Estabeleceu-se que a enumeração dos vértices de um complexo simplicial geométrico finito, além de simplificar o processo de orientá-lo, facilita a descrição dos operadores bordo, gera conceito de bases canônicas e cria-se um complexo de cadeia simplicial induzido isomorfo ao complexo de cadeia simplicial geométrico, onde inexiste a ambigüidade p-face da frente ou p-face detrás.

O trabalho é organizado como segue. O capítulo 1 aborda conceitos preliminares sobre Álgebra, um pouco de Álgebra Booleana, sinal de uma permutação, Álgebra Homológica e o conceito de função suporte para aplicações entre complexos de cadeia. No capítulo 2 estudamos alguns resultados de homologia e cohomologia simplicial, definimos complexo simplicial induzido, estabelecemos relações de faces entre simplexos analisando o produto booleano das matrizes dos operadores bordos e por fim, definimos o índice de Kronecker e seu cálculo em termos de coordenadas. No capítulo 3, definimos o produto cup nas cocadeias do complexo induzido e depois no geométrico e demonstramos as propriedades que induzem o anel de cohomologia. Aí encontramos algumas dificuldades no que diz respeito a anti-comutatividade. No capítulo 4, definimos o produto cap entre cadeia e cocadeia e as propriedades que tornam a homologia de K_g um módulo à direita do anel de cohomologia. Finalizando, no apêndice é calculada a homologia da Faixa de Möbius considerando-se uma orientação aleatória e as coordenadas do produto cup entre duas cocadeias do complexo de cocadeia obtido através da triangulação do Toro.

Capítulo 1

Pré-Requisitos

1.1 Anéis e módulos

Definição 1.1 *Um **Anel** é um conjunto não vazio R com duas operações internas em R, uma denominada adição e a outra multiplicação.*

A adição: $+ : R \times R \to R$, cuja imagem $+(a, b) = a + b$ satisfaz:

(i) $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall\ a, b, c \in R$;

(ii) $\exists\ 0_R \in R$ *de maneira que* $0_R + a = a + 0_R = a\,, \forall a \in R$;

(iii) $\forall\, a \in R\,,\ \exists\ a' \in R$ *tal que* $a + a' = a' + a = 0_R$, *denotamos* $a' = -a$;

(iv) $a + b = b + a, \forall\ a, b \in R$;

A multiplicação $\cdot : R \times R \to R$, cuja imagem $\cdot(a, b) = a \cdot b = ab$ satisfaz:

(v) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall\ a, b, c \in R$;

(vi) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *e* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c;\ \forall\ a, b, c\ \in R.$

Se a multiplicação satisfaz:

(vii) $a \cdot b = b \cdot a, \forall\ a, b \in R$;

*então R é chamado **Anel Comutativo**.*

(viii) *Se R contém um elemento 1_R de modo que: $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$, $\forall a \in R$,*

*então R é chamado **Anel com Identidade**.*

Definição 1.2 *Seja R um anel. Dizemos que um subconjunto S de R, $S \neq \emptyset$, é um **subanel** de R se, e somente se,*

(i) *S é fechado para ambas as operações de R, isto é,*

$$\forall r, s \in S \Rightarrow r + s \in S \text{ e } r \cdot s \in S$$

(ii) *S com as operações restritas é também um anel.*

Definição 1.3 *Um subanel I de um anel R é chamado **ideal à esquerda** se,e somente se,*

$$\forall\, r \in R \text{ e } \forall\, x \in I,\ r \cdot x \in I;$$

*I é chamado **ideal à direita** se, e somente se,*

$$\forall\, r \in R \text{ e } \forall\, x \in I,\ x \cdot r \in I;$$

*I é um **ideal** se for um ideal à esquerda e à direita.*

Definição 1.4 *Seja X um subconjunto de um anel R. Seja $\{A_i\,;\, i \in I\}$ a família de todos ideais (à esquerda) em R que contém X. Prova-se que $\cap_{i \in I} A_i$ é um ideal, chamado **ideal** (à esquerda) **gerado por X**. Este ideal é denotado por (X).*

Definição 1.5 *Sejam R um anel e M um conjunto não vazio. Dizemos que M é um **R-módulo** (à esquerda) se existem duas operações em M. Uma* *operação interna, chamada adição de elementos de M, denotado por $+ : M \times M \to M$ e um produto por elementos do anel, denotada por $\cdot : R \times M \to M$, cujas imagens são denotadas por $+(a,b) = a+b$ e $\cdot(r,a) = r.a$ satisfazendo $\forall$ $a,b,c \in M$ e $\forall\, r,s \in R$,as seguintes propriedades:*

(i) $a + (b + c) = (a + b) + c$;

(ii) $\exists\, 0_M \in M$ *de maneira que* $0_M + a = a + 0_M = a\,, \forall a \in M$;

(iii) $\forall\, a \in M\,, \exists\, a' \in M$ *tal que* $a + a' = a' + a = 0_M$;

(iv) $a + b = b + a$;

(v) $r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b$;

(vi) $(r + s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a$;

(vii) $(r \cdot s) \cdot a = r \cdot (s \cdot a)\,$;

(viii) *Se R tem identidade 1_R e $1_R \cdot a = a$, $\forall\, a \in M$,*

*então M é chamado R-**módulo unitário**. Se R é um anel de divisão, o R-módulo unitário é chamado **Espaço Vetorial**.*

Um $R-$módulo à direita é definido analogamente via uma função

$$\cdot : M \times R \longmapsto M$$

satisfazendo **(i)** a **(vii)**.

Exemplo 1.1 *Todo grupo abeliano aditivo G é um $\mathbb{Z}-$módulo unitário, com*

$$n \cdot a = \begin{cases} 0, \ se \ n = 0 \\ (n-1) \cdot a + a, \ se \ n > 0 \\ -(n-1) \cdot a - 1 \cdot a, \ se \ n < 0 \end{cases}$$

Exemplo 1.2 *Seja R um anel e I um ideal de R. Então I e $\frac{R}{I}$ são R-módulos.*

Definição 1.6 *Seja R um anel, M um $R-$módulo e N um subconjunto não vazio de M. Dizemos que N é um* ***submódulo*** *de M se N é fechado para a operação adição de M e $r \cdot n \in N$ para todo $r \in R$ e $n \in N$. Um submódulo de um espaço vetorial é chamado* ***subespaço vetorial****.*

Definição 1.7 *Um anel R é chamado* ***anel graduado*** *se existem subgrupos aditivos M^n, $n \geq 0$, de modo que:*

(i) $R = \oplus_{n\geq 0} M^n$*(soma direta de grupos aditivos);*

(ii) $M^n \cdot M^m \subset M^{n+m}, \forall n, m \geq 0$, *isto é, se $x \in M^n$ e $y \in M^m$, então $x \cdot y \in M^{n+m}$.*

Definição 1.8 *Dado $x \in R = \oplus_{n\geq 0} M^n$, dizemos que x é* ***homogêneo*** *de* **grau n** *se $x \in M^n$. Um ideal I e um subanel S são chamados* ***homogêneos*** *se forem gerados por elementos homogêneos.*

Temos que se I é um ideal homogêneo do anel graduado $R = \oplus_{n\geq 0} M^n$ então $I = \oplus_{n\geq 0} I^n$, onde $I^n = I \cap M^n$.

Lema 1.1 *Se I é um ideal homogêneo em um anel graduado $R = \oplus_{n\geq 0} M^n$, então R/I é um anel graduado, além disso*

$$R/I = \oplus_{n\geq 0}(M^n + I)/I.$$

Demonstração. De fato, como I é um ideal homogêneo, temos que $I = \oplus_{n\geq 0}(I \cap M^n)$ e sendo assim,

$$\frac{R}{I} = \frac{\oplus_{n\geq 0} M^n}{\oplus_{n\geq 0}(I \cap M^n)} = \oplus_{n\geq 0} \frac{M^n}{I \cap M^n}$$

Pelo segundo teorema do isomorfismo de módulos, tem-se

$$\oplus_{n\geq 0} \frac{M^n}{I \cap M^n} \cong \oplus_{n\geq 0} \frac{M^n + I}{I}$$

■

1.2 R-homomorfismos e módulos livres

Definição 1.9 *Sejam A e B módulos sobre um anel R. Uma função $f : A \to B$ é um $R-$**módulo homomorfismo ou** $R-$**linear** se, e somente se, $\forall$ $a, b \in A$ e $r \in R : f(a+b) = f(a) + f(b)$ e $f(r.a) = r.f(a)$.*

*Se R é um anel de divisão, então um $R-$módulo homomorfismo f é chamado **transformação linear**. Se for sobrejetivo, injetivo ou bijetivo então o $R-$homomorfismo f é chamado epimorfismo, monomorfismo ou isomorfismo, respectivamente. Definimos $Ker\, f = \{a \in A\,,\, f(a) = 0\}$ e $Im\, f = \{b \in B\,,\, b = f(a)$ para algum $a \in A\}$*

Observação 1.1 *Prova-se que f é um $R-$monomorfismo se, e somente se, $\ker f = 0$ e $f : A \to B$ é um $R-$isomorfismo se, e somente se existe um $R-$homomorfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_B$.*

Observação 1.2 *Sejam A, B, C módulos sobre um anel comutativo R. Uma função $f : A \times B \to C$ é uma **aplicação bilinear** se restrita a cada um dos fatores é $R-$ **linear**, ou seja: para todos $a, a_i \in A$, $b, b_i \in B$ e $r \in R$ temos,*

$$f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b), \quad f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2),$$

$$f(ra, b) = rf(a, b) = f(a, rb).$$

Definição 1.10 *Seja X um subconjunto não vazio de um $R-$módulo M. Uma **combinação linear finita de elementos de** X é uma expressão $\sum_{x \in X} r_x x$, onde, $r_x \in R$, e o conjunto $\{r_x \in R,\, r_x \neq 0\}$ (conjunto suporte) é finito.*

Definição 1.11 *Um subconjunto X de um $R-$módulo M é chamado $R-$**linearmente independente** se toda combinação linear finita de elementos de X que resulta em $0 \in R$ tem conjunto suporte vazio, isto equivale ao seguinte:*

se $\forall n \in \mathbb{N}$ *tem-se* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$*, com* $r_i \in R$ *e* $x_i \in X$ *então* $r_i = 0$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definição 1.12 *Seja* M *um* $R-$*módulo. Dizemos que* M *é um* $R-$***módulo livre*** *se, para algum conjunto de índices* I*, existir um conjunto* $B = \{b_\lambda \in M\ ,\ \lambda \in I\}$ *satisfazendo:*

(i) B *é um sistema de geradores, isto é, para todo* $a \in M$ *existem* $r_\lambda \in R$ *e* $b_\lambda \in B$*, tais que* $a = \displaystyle\sum_{\lambda \in I} r_\lambda . b_\lambda$ *e* $\{r_\lambda \neq 0\}$ *é finito.*

(ii) B *é um conjunto* $R-$*linearmente independente.*

Observação 1.3 *O subconjunto B da definição anterior é chamado* ***base de M****.* *Pode-se provar que a quantidade de elementos em cada base de um* $R-$*módulo livre é a mesma.*

Observação 1.4 *Um* $R-$*módulo livre finitamente gerado possui uma base com um número finito de elementos.*

Observação 1.5 *Definimos o* ***posto*** *do* $R-$*módulo livre* M *como sendo a quantidade de elementos de uma base* B*.*

Observação 1.6 *Se* $a \in M$ *e* $a = \sum_{\lambda \in I} r_\lambda . b_\lambda$ *então* $(r_\lambda)_{\lambda \in I}$ *são chamados de coordenadas de a em relação à base B. Denotaremos esta lista por* $(a)_B$.

Observação 1.7 *No caso de* $R-$*módulos livres finitamente gerados, temos a seguinte fórmula para mudança de base:* $(a)_C = M_C^B\,(a)_B$*, onde* M_C^B *denota a chamada matriz mudança da base* B *para a base* C *. Lembremos que essa é a matriz cuja* j*-ésima coluna são as coordenadas dos elementos* $b_j \in B$ *em relação à base* C*.*

Definição 1.13 *Seja $f : A \to B$ um homomorfismo entre $R-$módulos livres. Sejam E uma base de A e F uma base de B com postos m e n respectivamente. A matriz de f em relação às bases E e F, denotada por $[f]_F^E = (a_{ij})_{n\times m}$, é tal que j-ésima coluna são as coordenadas de $f(e_j)$ em relação a base F, isto é, $(f(e_j))_F = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})$.*

Valem as seguintes fórmulas:

(i) $(f(a))_F = [f]_F^E (a)_E \,, \forall\, a \in A$

(ii) Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ homomorfismos entre $R-$módulos livres e E, F e G bases de A, B e C respectivamente. Então $[g \circ f]_G^E = [g]_G^F \cdot [f]_F^E$

1.3 Grupo de permutações

Seja S um subconjunto não vazio e seja $A(S)$ o conjunto de todas as bijeções $S \to S$. Com a operação de composição de funções $f \circ g$, $A(S)$ é um grupo, pois a composição é associativa, 1_s é uma bijeção e toda bijeção tem uma inversa. Os elementos de $A(S)$ são chamados permutações e $A(S)$ é chamado grupo de permutações do conjunto S. Se $S = \{1, 2, 3, ..., n\}$, então $A(S)$ é denotado por S_n.

Definição 1.14 *Sejam $i_1, i_2, i_3, ..., i_r$ $(r \leq n)$ elementos distintos do conjunto $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. Então $(i_1, i_2, ..., i_r)$ denota a permutação que aplica*

$$i_1 \longmapsto i_2, i_2 \longmapsto i_3, i_3 \longmapsto i_4, ..., i_{r-1} \longmapsto i_r \text{ e } i_r \longmapsto i_1$$

*e aplica qualquer outro elemento distinto de $i_1, \ldots, i_r$ nele mesmo. $(i_1, i_2, ..., i_r)$ é chamado **r-ciclo** e um $2-$ciclo é chamado **transposição**.*

Exemplo 1.3 *A permutação*

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

é um 4-ciclo: $\tau = (1432) = (4321) = (3214) = (2143)$. *Se* σ *é o 3-ciclo* (125), *então* $\sigma\tau = (125)(1432) = (1435)$.

Pode-se provar que toda permutação pode ser escrita como um produto de transposições, não de modo único, mas cuja paridade é única. Decorre daí a seguinte definição:

Definição 1.15 *Uma permutação* $\tau \in S_n$ *é chamada* ***par*** *(resp.* ***ímpar****) se* τ *pode ser escrita como um produto de um número par (resp. ímpar) de transposições e neste caso, dizemos que o sinal de* τ *é 1 (resp. sinal de* τ *é* -1 *).*

1.4 Álgebra Booleana

Definição 1.16 *Um conjunto* B *com duas operações binárias* $+$ *e* $\cdot$ *é uma* ***álgebra booleana*** *se, e somente se, são verificados os seguintes axiomas:*

Axioma 1 *As operações* $+$ *e* $\cdot$ *são comutativas e associativas;*

Axioma 2 *Cada operação é distributiva sobre a outra, ou seja,* $\forall\ a, b, c \in B$ *tem-se:*

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \qquad\qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$$

Axioma 3 *Existem em* B *as identidades* 0 *e* 1 *relativa às operações* $+$ *e* $\cdot$ *respectivamente, com* $1 \neq 0$*;*

Axioma 4 *Para todo* $a \in B$*, existe um elemento* $a' \in B$ *de modo que:*

$$a + a' = 1 \qquad e \qquad a \cdot a' = 0$$

Se B é uma álgebra booleana vamos denotá-la por $(B, +, \cdot, 0, 1)$.

Teorema 1.1 *Se $a \in (B, +, \cdot, 0, 1)$ então $a + a = a$ e $a \cdot a = a$.*

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned} a &= a + 0 \\ &= a + a \cdot a' \\ &= (a + a) \cdot (a + a') \\ &= (a + a) \cdot (1) \\ &= a + a \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a &= a \cdot 1 \\ &= a \cdot (a + a') \\ &= a \cdot a + a \cdot a' \\ &= a \cdot a + 0 \\ &= a \cdot a \end{aligned}$$

■

Teorema 1.2 *Se $a \in (B, +, \cdot, 0, 1)$ então $a + 1 = 1$ e $a \cdot 0 = 0$.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} 1 &= a + a' \\ &= a + a' \cdot 1 \\ &= (a + a') \cdot (a + 1) \\ &= 1 \cdot (a + 1) \\ &= a + 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a \cdot 0 &= 0 + a \cdot 0 \\ &= a \cdot a' + a \cdot 0 \\ &= a \cdot (a' + 0) \\ &= a \cdot a' \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.4 *Seja $B = \{0, 1\}$. Definidas as operações nas tabelas abaixo:*

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

e

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

pode-se verificar que $(B, +, \cdot, 0, 1)$ é uma álgebra booleana, onde

$$0' = 1 \quad e \quad 1' = 0.$$

Seja $M_{n\times m}(B)$ o conjunto das matrizes $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ tais que

$$a_{ij} \in (B, +, \cdot, 0, 1)$$

do exemplo anterior. Chamaremos a matriz A de **matriz booleana.** Utilizando a soma e o produto de $(B, +, \cdot, 0, 1)$, podemos considerar o produto booleano e a soma booleana de matriz, ou seja, se $B = [b_{ij}]_{m\times k} \in M_{m\times k}(B)$ e $C = [c_{ij}]_{n\times m} \in M_{n\times m}(B)$ então $A + C = [a_{ij} + c_{ij}]_{n\times m}$ e $A \cdot B = \left[(ab)_{ij}\right]_{n\times k}$ é tal que $(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Exemplo 1.5 *Se* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *então*

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e \qquad A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.5 Álgebra Homológica

Definição 1.17 *Seja R um anel comutativo. Um R-**complexo de cadeias** é uma sequência de $R-$módulos e $R-$homomorfismos*

$$\ldots \rightarrow S_{n+1} \xrightarrow{\partial^S_{n+1}} S_n \xrightarrow{\partial^S_n} S_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

tais que $\partial^S_n \circ \partial^S_{n+1} = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

O complexo acima é denotado por (S_*, ∂) ou $\left(S_*, \partial^S\right)$. Observe que a condição $\partial^S_n \circ \partial^S_{n+1} = 0$ é equivalente a $Im\partial^S_{n+1} \subset Ker\ \partial^S_n$.

Definição 1.18 *Dizemos que $\left(S'_*, \partial^{S'}\right)$ é um R-**subcomplexo** de $\left(S_*, \partial^S\right)$ se cada S'_n é um R-submódulo de S_n e se cada*

$$\partial^{S'}_n = \partial^S_n \mid_{S'_n}$$

Definição 1.19 *Se* $\left(S_*, \partial^S\right)$ *é um complexo de cadeias, então* $Ker\,\partial_n^S$ *é chamado R-módulo dos **n-ciclos** e é denotado por* Z_n *ou* $Z_n\left(S_*, \partial^S\right)$ *;* $Im\,\partial_{n+1}^S$ *é chamado R-módulo dos **n-bordos** e é denotado por* B_n *ou* $B_n\left(S_*, \partial^S\right)$*. O **n-ésimo** R**-módulo de homologia** do complexo é definido por*

$$H_n\left(S_*, \partial^S\right) = \frac{Z_n\left(S_*, \partial^S\right)}{B_n\left(S_*, \partial^S\right)}$$

Se $z_n \in Z_n\left(S_*, \partial^S\right)$, então $z_n + B_n\left(S_*, \partial^S\right) \in H_n\left(S_*, \partial^S\right)$ é chamado de classe de homologia de z_n e é denotado por $\overline{z_n}$.

Definição 1.20 *Sejam* $\left(S_*, \partial^S\right)$ *e* $\left(T_*, \partial^T\right)$ *complexos de cadeia. Uma **aplicação de cadeias*** $f : \left(S_*, \partial^S\right) \to \left(T_*, \partial^T\right)$ *é uma sequência de homomorfismos* $\{f_n : S_n \to T_n\}$ *de modo que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & S_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^S} & S_n & \xrightarrow{\partial_n^S} & S_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & f_{n+1}\big\downarrow & & f_n\big\downarrow & & f_{n-1}\big\downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & T_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^T} & T_n & \xrightarrow{\partial_n^T} & T_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

isto é, $\partial_n^T \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n^S$ *para cada* $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.21 *Sejam* $f, g : \left(S_*, \partial^S\right) \to \left(T_*, \partial^T\right)$ *aplicações de cadeia, dizemos que* f ***é homotópica a*** g*, denotaremos por* $f \simeq g$*, se existe uma sequência de homomorfismos* $\{P_n : S_n \to T_{n+1}\}$ *de modo que para todo*
$n \in \mathbb{Z},\ f_n - g_n = \partial_{n+1}^T \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n^S$

Teorema 1.3 *Se* $f, g : S_* \to T_*$ *são aplicações de cadeia com* $f \simeq g$*, então para todo* $n \in \mathbb{Z}$, $\quad H_n(f) = H_n(g) : H_n(S_*) \to H_n(T_*)$

Demonstração. De fato, se $f \simeq g$ então existem homomorfismos
$P_n : S_n \to T_{n+1}$ tais que $f_n - g_n = \partial_{n+1}^T \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n^S$.
Por definição, $H_n(f) : z + B_n(S_*) \mapsto f_n(z) + B_n(T_*)$ onde, $\partial_n^S(z) = 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} (f_n - g_n)(z) &= \left(\partial^T_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial^S_n\right)(z) \\ &= \left(\partial^T_{n+1} \circ P_n\right)(z) \end{aligned}$$

Como $\left(\partial^T_{n+1} \circ P_n\right)(z) \in B_n(T_*)$, segue que

$$(f_n - g_n)(z) = f_n(z) - g_n(z) \in B_n(T_*)$$

ou seja, $f_n(z) + B_n(T_*) = g_n(z) + B_n(T_*)$. Portanto, $H_n(f) = H_n(g)$ ■

Definição 1.22 *Uma $f : (S_*, \partial^S) \to (T_*, \partial^T)$ é chamada **equivalência de cadeias** se existe uma $g : (T_*, \partial^T) \to (S_*, \partial^S)$ de modo que $g \circ f \simeq id_{S_*}$ e $f \circ g \simeq id_{T_*}$. Dois complexos de cadeia são chamados **cadeias equivalentes** se existe uma equivalência de cadeia entre eles.*

Teorema 1.4 *Se $f : (S_*, \partial^S) \to (T_*, \partial^T)$ é uma equivalência de cadeia, então $\forall n \in \mathbb{Z}$,*

$$H_n(f) : H_n(S_*) \to H_n(T_*)$$

é um isomorfismo.

Demonstração. De fato, como por hipótese existe $g : (T_*, \partial^T) \to (S_*, \partial^S)$ tal que $g \circ f \simeq id_{S_*}$ e $f \circ g \simeq id_{T_*}$ segue do teorema 1.3 que $H_n(f \circ g) = H_n(id_{T_*})$ e $H_n(g \circ f) = H_n(id_{S_*})$. Como $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$, temos que $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g) = H_n(id_{T_*}) = id_{H_n(T_*)}$ e $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(id_{S_*}) = id_{H_n(S_*)}$. Portanto, $H_n(f)$ é um isomorfismo. ■

Definição 1.23 *Uma **homotopia contrátil** de um complexo (S_*, ∂) é uma sequência de homomorfismos $\{c_n : S_n \to S_{n+1}\}$ de modo que $\forall\ n \in \mathbb{Z}$,*

$$\partial_{n+1} \circ c_n + c_{n-1} \circ \partial_n = id_{S_n}$$

ou seja, uma homotopia contrátil é uma homotopia entre a identidade de S_* e a aplicação nula.

Corolário 1.1 *Se um complexo S_* tem uma homotopia contrátil, então*

$$H_n\left(S_*\right) = 0,\ \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. De fato, seja id_{S_*} a identidade de S_*. Pelo **Teorema 1.3**

$$H_n\left(0\right) = H_n\left(id_{S_*}\right) = id_{H_n(S_*)}$$

Como $H_n\left(id_{S_*}\right)$ é a identidade de $H_n\left(S_*\right)$ temos que $H_n\left(S_*\right) = 0$. ■

Definição 1.24 *Um R-**complexo de cocadeias** é uma sequência de R-módulos e R-homomorfismos*

$$\ldots \longrightarrow S^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} S^n \xrightarrow{\delta^n} S^{n+1} \longrightarrow \ldots$$

tais que

$$\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

O complexo acima é denotado por (S^*, δ) ou (S^*, δ_S). Observe que a condição $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$ é equivalente a $Im\delta^{n-1} \subset Ker\ \delta^n$.

Exemplo 1.6 *Seja (S_*, ∂) um $\mathbb{Z}$-complexo de cadeias e G um grupo abeliano aditivo. Se $S^n = Hom_{\mathbb{Z}}\left(S_n, G\right) = \{h : S_n \to G; h(a+b) = h(a) + h(b)\}$ então o $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\partial_{n+1} : S_{n+1} \to S_n$ induz um $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\delta^n : S^n \to S^{n+1}$ tal que se $h \in S^n$ é um homomorfismo, então $\delta^n\left(h\right) = h \circ \partial_{n+1}$.*
Isto define um complexo de cocadeias, pois

$$\delta^n \circ \delta^{n-1}(f) = \delta^n(f \circ \partial_n) = f \circ \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

Definição 1.25 *Seja G um grupo abeliano e (S^*, δ) o $\mathbb{Z}$-complexo de cocadeias do exemplo anterior. O $\mathbb{Z}-$módulo das **n-cocadeias com coeficientes em G** é $S^n = Hom_{\mathbb{Z}}\left(S_n, G\right)$. O $\mathbb{Z}-$módulo dos **n-cociclos** é o ker δ^n e é denotado por $Z^n(S_*; G)$; o $\mathbb{Z}$-módulo dos **n-cobordos** é a $Im\delta^{n-1}$ e é denotada por*

$B^n(S_*;G)$. *O* n***-ésimo*** Z***-módulo de cohomologia com coeficientes em G*** *é*

$$H^n(S_*;G) = \frac{Z^n(S_*;G)}{B^n(S_*;G)} = \frac{ker\ \delta^n}{Im\ \delta^{n-1}}.$$

Definição 1.26 *Um* R*-complexo de cadeias* $\left(S_*, \partial^S\right)$ *é chamado* ***livre*** *se cada um dos seus termos é um* $R-$*módulo livre.*

Definição 1.27 (S_*, ∂^S) *é acíclico se* $H_n\left(S_*\right) = 0$*, para todo* $n > 0$*.*

Definição 1.28 *Seja* $\left(S_*, \partial^S\right)$ *um complexo de cadeias livre no qual cada termo* S_n *tem uma base* E_n*. Se* $\alpha \in S_n$ *e* $\beta \in E_{n-1}$*, então* β *é uma* ***face*** *de* α*, denotado por* $\beta < \alpha$*, se* β *aparece em* $\partial_n^S(\alpha)$ *com coeficiente em* R *não nulo.*

Definição 1.29 *Sejam* $\left(S_*, \partial^S\right)$ *um complexo de cadeias livre no qual cada termo* S_n *tem uma base* E_n *e* $\varphi : (S_*, \partial^S) \to (T_*, \partial^T)$ *uma aplicação de cadeia.*

Uma ***função suporte*** *para* φ *é uma função* V *que associa a cada* $\gamma \in \cup E_n$ *um subcomplexo* $V\left(\gamma\right)$ *de* T_* *de modo que, para todo* γ*,*

(i) $V\left(\gamma\right)$ *é acíclico;*

(ii) *se* $\gamma \in E_n$*, então* $\varphi_n\left(\gamma\right) \in V_n\left(\gamma\right) \subset T_n$*;*

(iii) *se* $\beta < \gamma$*, então* $V\left(\beta\right) \subset V\left(\gamma\right)$*.*

Teorema 1.5 *Seja* S_* *um complexo de cadeias livre no qual cada termo tem uma base* E_n *e seja* $\varphi : (S_*, \partial^S) \to (T_*, \partial^T)$ *uma aplicação de cadeias. Se* φ *tem uma função suporte e* $\varphi_0 : S_0 \to T_0$ *é a aplicação nula, então* φ *é homotópica a aplicação de cadeia nula.*

Demonstração. De fato, vamos provar por indução para $p \geq 0$ que existem homomorfismos $h_p : S_p \to T_{p+1}$ de modo que:

(1) $\varphi_p = \partial^T_{p+1} \circ h_p + h_{p-1} \circ \partial^S_p;$

(2) $h_i(\gamma) \in V_{i+1}(\gamma)$, para todo $\gamma \in E_i \subset S_i$ com $i \leq p$.

Para $p = 0$ queremos definir $h_0 : S_0 \to T_1$ tal que $\varphi_0 = \partial^T_1 \circ h_0 + h_{-1} \circ \partial^S_0$.

Como $\varphi_0 = 0$ por hipótese, basta definir $h_{-1} = h_0 = 0$.

Suponhamos por indução que $h_0, h_1, ..., h_p$ satisfazem (1) e (2). Para definir $h_{p+1} : S_{p+1} \to T_{p+2}$ é suficiente definir $h_{p+1}(\gamma)$, para todo $\gamma \in E_{p+1.}$

Se $\gamma \in E_{p+1}$ então $\partial^S_{p+1}(\gamma) \in S_p$ e sendo assim, $h_p\left(\partial^S_{p+1}(\gamma)\right) \in T_{p+1}$.

Além disso, como $\partial^S_{p+1}(\gamma)$ é combinação linear de $\gamma' < \gamma$ então

$$h_p\left(\partial^S_{p+1}(\gamma)\right) \in \langle V(\gamma'), \gamma' < \gamma \rangle \subset V_{p+1}(\gamma)$$

(onde $\langle \ \rangle$ significa "subcomplexo gerado por") por hipótese de indução. Sendo assim, segue do item (ii) da **Definição 1.29** que $\varphi_{p+1}(\gamma) - h_p\left(\partial^S_{p+1}(\gamma)\right) \in V_{p+1}(\gamma)$. Agora, $\varphi_{p+1}(\gamma) - h_p\left(\partial^S_{p+1}(\gamma)\right)$ é um $(p+1)$-ciclo do complexo $V(\gamma)$, pois

$$\begin{aligned}
\partial^T_{p+1}\left(\varphi_{p+1}(\gamma) - h_p\left(\partial^S_{p+1}(\gamma)\right)\right) &= \partial^T_{p+1}\left(\varphi_{p+1}(\gamma) - \left(h_p\partial^S_{p+1}\right)(\gamma)\right) \\
&= \partial^T_{p+1}\left(\left(\varphi_{p+1} - h_p\partial^S_{p+1}\right)(\gamma)\right) \\
&= \left(\partial^T_{p+1}\varphi_{p+1} - \partial^T_{p+1}h_p\partial^S_{p+1}\right)(\gamma) \\
&= \left(\partial^T_{p+1}\varphi_{p+1} - \left(\varphi_p - h_{p-1}\partial^S_p\right)\partial^S_{p+1}\right)(\gamma) \\
&= \left(\partial^T_{p+1}\varphi_{p+1} - \varphi_p\partial^S_{p+1} + h_{p-1}\partial^S_p\partial^S_{p+1}\right)(\gamma) \\
&= 0
\end{aligned}$$

pois φ é uma aplicação de cadeias e $\partial^S_p \circ \partial^S_{p+1} = 0$. Como $V(\gamma)$ é acíclico, $\varphi_{p+1}(\gamma) - h_p\left(\partial^S_{p+1}(\gamma)\right)$ é um bordo, então existe $\beta \in V_{p+2}(\gamma)$ tal que

$$\partial^T_{p+2}(\beta) = \varphi_{p+1}(\gamma) - h_p\left(\partial^S_{p+1}(\gamma)\right).$$

Definindo $h_{p+1}(\gamma) = \beta$, temos que $\varphi_{p+1}(\gamma) = \partial^T_{p+2}(h_{p+1}(\gamma)) + h_p\left(\partial^S_{p+1}(\gamma)\right)$ para todo $\gamma \in E_{p+1}$.

Além disso, vale a condição (2) pois β já está em $V_{p+2}(\gamma)$. ■

Corolário 1.2 *Sejam $\varphi, \psi : S_* \to T_*$ aplicações de cadeias com S_* livre e cuja base de S_n é E_n. Se $\varphi_0 = \psi_0 : S_0 \to T_0$ e $\varphi - \psi$ tem uma função suporte, então φ e ψ são aplicações de cadeias homotópicas.*

Demonstração. De fato, pelo teorema anterior temos que $\varphi - \psi \simeq 0$. Portanto, $\varphi \simeq \psi$. ■

Capítulo 2

Homologia e Cohomologia Simplicial

2.1 Complexo Geométrico

Definição 2.1 *Um subconjunto* $A = \{a_1, a_2, ..., a_{k+1}\}$ *de pontos do* $\mathbb{R}^n$ *é dito* ***geometricamente independente*** *se o conjunto*

$$\{a_2 - a_1, a_3 - a_1, ..., a_{k+1} - a_1\}$$

é um subconjunto linearmente independente do $\mathbb{R}^n$*.*

Definição 2.2 *Seja* $\{a_1, a_2, ..., a_{k+1}\}$ *um conjunto de pontos geometricamente independentes do* $\mathbb{R}^n$*. O* ***p-simplexo*** σ^p*, de dimensão* p*, determinado por* $\{a_1, a_2, ..., a_{p+1}\}$ *é o conjunto de todos os pontos* $x \in \mathbb{R}^n$*, tais que* $x = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i a_i$*, com* $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$ *e* $\lambda_i \geq 0$ *para* $i = 1, 2, \ldots, p+1$*.*

Indicaremos este p*-simplexo por* $\sigma^p = \overline{\{a_1, ..., a_{p+1}\}}$*. Os pontos* $a_1, ..., a_{p+1}$ *são chamados de vértices do simplexo* σ^p*.*

Definição 2.3 *Um simplexo τ é uma **face** de um simplexo σ, se cada vértice de τ é também um vértice de σ.*

Definição 2.4 *Dois simplexos τ e σ são ditos **propriamente justapostos** se não se interceptam ou se a intersecção entre eles é uma face comum.*

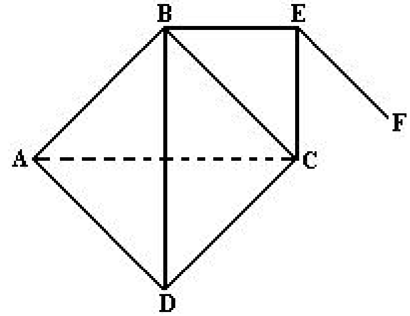
Definição 2.5 *Um **complexo simplicial geométrico finito** (ou complexo simplicial) K_g é uma coleção finita de simplexos, todos contidos num mesmo $\mathbb{R}^n$, de modo que:*

(i) *todas as faces de um q-simplexo desta coleção também pertencem a K_g;*

(ii) *quaisquer dois simplexos são propriamente justapostos.*

Nós escreveremos Vert(K_g) para denotar o conjunto dos vértices de K_g, ou seja, o conjunto de todos os 0-simplexos de K_g. Se K_g é um complexo simplicial, a figura resultante da justaposição dos simplexos de K_g em $\mathbb{R}^n$, denotada por $|K_g|$, é chamada de **realização geométrica** e a dimensão de K_g é a maior dentre todas as dimensões de seus simplexos.

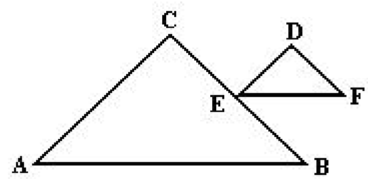
Exemplo 2.1 *Dado o poliedro em $\mathbb{R}^3$, justaposição de um tetraedro, um triângulo e uma aresta:*



obtemos o seguinte complexo simplicial:

$$K_g = \{ \ \overline{\{A\}}, \ \overline{\{B\}}, \ \overline{\{C\}}, \ \overline{\{D\}}, \ \overline{\{E\}}, \ \overline{\{F\}}, \ \overline{\{A,B\}}, \ \overline{\{A,C\}}, \ \overline{\{A,D\}},$$
$$\overline{\{B,C\}}, \ \overline{\{B,D\}}, \ \overline{\{B,E\}}, \ \overline{\{C,D\}}, \ \overline{\{C,E\}}, \ \overline{\{E,F\}},$$
$$\overline{\{A,B,C\}}, \ \overline{\{A,B,D\}}, \ \overline{\{A,C,D\}}, \ \overline{\{B,C,D\}}, \ \overline{\{B,C,E\}},$$
$$\overline{\{A,B,C,D\}} \ \}$$

Exemplo 2.2 *Consideremos as seguintes coleções finitas de simplexos abaixo:*



$$(K_g)_1 = \{ \ \overline{\{A\}}, \ \overline{\{B\}}, \ \overline{\{C\}}, \ \overline{\{D\}}, \ \overline{\{E\}}, \ \overline{\{F\}}, \ \overline{\{A,B\}}, \ \overline{\{A,C\}}, \ \overline{\{B,E\}},$$
$$\overline{\{C,E\}}, \ \overline{\{D,E\}}, \ \overline{\{D,F\}}, \ \overline{\{E,F\}}, \ \overline{\{D,E,F\}} \ \}$$

$$(K_g)_2 = \{ \ \overline{\{A\}}, \ \overline{\{B\}}, \ \overline{\{C\}}, \ \overline{\{D\}}, \ \overline{\{E\}}, \ \overline{\{F\}}, \ \overline{\{A,B\}}, \ \overline{\{A,C\}}, \ \overline{\{B,C\}},$$
$$\overline{\{D,E\}}, \ \overline{\{D,F\}}, \ \overline{\{E,F\}}, \ \overline{\{D,E,F\}} \ \}$$

Podemos verificar que $(K_g)_1$ é um complexo simplicial, no entanto, $(K_g)_2$ satisfaz a condição (i) da definição de complexo simplicial, mas não satisfaz a condição (ii) ($\overline{\{C,B\}} \cap \overline{\{D,E\}} = \{E\}$ e E não é face de $\overline{\{B,C\}}$).

2.2 Orientação de um Complexo Geométrico

Definição 2.6 *Dado um p-simplexo $\sigma^p = \overline{\{a_1, a_2, ..., a_{p+1}\}}$,* ***orientar*** *$\sigma^p$ é escolher uma ordem para os seus vértices e fazemos isto escrevendo: $\sigma^p = (\ a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{p+1}})$. Com isto, queremos dizer:*

i) $\sigma^p = \overline{\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{p+1}}\}}$

ii) *a ordem dos vértices é a seguinte: $a_{i_1} = 1^{\underline{o}}$ vértice, $a_{i_2} = 2^{\underline{o}}$ vértice, etc.*

Observação 2.1 *Se* $\sigma^p = (a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{p+1}})$ *e se* $x = \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j a_{i_j} \in \sigma^p$, *então* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{p+1}$ *são as* ***coordenadas baricêntricas*** *do ponto* x *em relação a* σ^p.

Definição 2.7 *Dado um complexo simplicial* K_g, *dizemos que* K_g *é um* ***complexo simplicial geométrico orientado*** *se cada um dos seus simplexos estão orientados.*

Definição 2.8 *Orientado um p-simplexo, digamos* $\sigma^p = (a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{p+1}})$, *o* ***simplexo orientado positivamente***, *denotado por* $+\sigma^p = \langle\ a_{j_1}, ..., a_{j_{p+1}}\rangle$, *é o conjunto de todos os simplexos orientados* $(a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_{p+1}})$ *satisfazendo:*

i) $\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{p+1}}\} = \{a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_{p+1}}\}$;

ii) *sinal da permutação* $\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_{p+1}} \\ a_{j_1} & a_{j_2} & \dots & a_{j_{p+1}} \end{pmatrix}$ *é par.*

Escrevemos $-\sigma^p = \langle\ a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_{p+1}}\rangle$ *se a permutação* $\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_{p+1}} \\ a_{j_1} & a_{j_2} & \dots & a_{j_{p+1}} \end{pmatrix}$ *é ímpar.*

Observação 2.2 *A condição* **(ii)** *equivale a dizer que a permutação*

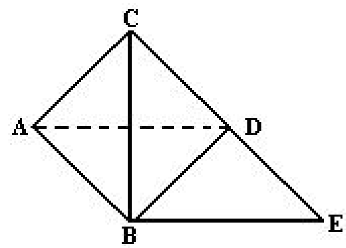
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p+1 \\ j_1 & j_2 & \dots & j_{p+1} \end{pmatrix}$$

é par.

Observação 2.3 *Se* $+\sigma^p = \langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_{p+1}}\rangle$ *tem algum vértice repetido convencionamos que* $\langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_{p+1}}\rangle = 0$.

Exemplo 2.3 *Considere o seguinte complexo simplicial geométrico: justaposição de um tetraedro e um triângulo, dados a seguir:*

$$K_g = \{\ \overline{\{A\}},\ \overline{\{B\}},\ \overline{\{C\}},\ \overline{\{D\}},\ \overline{\{E\}},\ \overline{\{A,B\}},\ \overline{\{A,C\}},\ \overline{\{A,D\}},\ \overline{\{B,C\}},$$
$$\overline{\{B,D\}},\ \overline{\{C,D\}},\ \overline{\{B,E\}},\ \overline{\{D,E\}},\ \overline{\{A,B,C\}},\ \overline{\{A,B,D\}},$$
$$\overline{\{A,C,D\}},\ \overline{\{B,C,D\}},\ \overline{\{A,B,C,D\}}\ \}$$



Se considerarmos o 2-simplexo com a orientação $\sigma^2 = (A,B,C)$, temos que $+\sigma^2 = \langle B,C,A\rangle = \langle A,B,C\rangle = \langle C,A,B\rangle$, enquanto que $-\sigma^2 = \langle A,C,B\rangle = \langle C,B,A\rangle = \langle B,A,C\rangle$. Se $+\sigma^2 = \langle A,B,C\rangle$ então

$$-\sigma^2 = \langle A,C,B\rangle = (-1)\{+\langle A,B,C\rangle\} = -\langle A,B,C\rangle$$

Convenção 2.1 *Tendo em vista o exemplo anterior convencionamos que o número -1 multiplicado por um simplexo com orientação positiva ou negativa obedece as regras de sinais usuais.*

Convenção 2.2 *Indicamos um simplexo de dimensão p com orientação positiva por σ^p.*

2.3 $\mathbb{Z}$-módulo de Homologia Simplicial

Definição 2.9 *Seja K_g um complexo simplicial geométrico orientado. O* ***$\mathbb{Z}$-módulo das p-cadeias de*** *K_g é o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado pelos p-simplexos orientados positivamente de K_g e denotado por $C_p(K_g)$. Uma p-**cadeia elementar** é identificada com um p-simplexo orientado positivamente.*

Convenção 2.3 *Denotaremos por* $b(p)$ *o número de simplexos em* K_g *orientado de dimensão* p.

Convenção 2.4 *Denotaremos por* $E_p(K_g)$ *uma base de* $C_p(K_g)$ *formada de* p***-cadeias elementares***

Observação 2.4 *Se* K_g *tem dimensão* n, *então* $C_q(K_g) = 0$, $\forall\ q > n$.

Observação 2.5 $C_p(K_g)$ *é isomorfo ao* $\mathbb{Z}$*-módulo dado pelo cartesiano de* $b(p)$ *cópias de* $\mathbb{Z}$.

Com intenção de se construir um complexo de cadeias a partir dos $\mathbb{Z}$-módulos $C_p(K_g)$, introduzimos o conceito de número de incidência.

Definição 2.10 *Seja* K_g *um complexo simplicial geométrico orientado. Nós associamos a cada par de simplexos orientados positivamente* $(\sigma^{p+1},\ \sigma^p)$ *um* ***número de incidência*** $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$ *da seguinte forma:*

i) *Se* σ^p *não é face de* σ^{p+1} (*o conjunto de vértices de* σ^p *não está contido no conjunto de vértices de* σ^{p+1}), *então* $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$;

ii) *Se* σ^p *é face de* σ^{p+1}, *considere* $\sigma^p = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{p+1}} \rangle$ *e* v *o vértice de* σ^{p+1} *que não está no conjunto de vértices de* σ^p.

Definimos, $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = \begin{cases} 1, \ se\ \sigma^{p+1} = \langle v, a_{i_1}, ..., a_{i_{p+1}} \rangle \\ -1, \ se\ \sigma^{p+1} = -\langle v, a_{i_1}, ..., a_{i_{p+1}} \rangle \end{cases}$

Observação 2.6 *Seguem desta definição as seguintes propriedades:*

i) $[-\sigma^{p+1}, -\sigma^p] = [\sigma^{p+1}, \sigma^p]$;

ii) $[-\sigma^{p+1}, \sigma^p] = [\sigma^{p+1}, -\sigma^p] = -[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$

Exemplo 2.4 *Sejam* $\sigma^2 = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\sigma^1 = \langle a_1, a_2\rangle$, $\tau^1 = \langle a_1, a_3\rangle$ *e* $\theta^1 = \langle a_3, a_2\rangle$. *Dessa forma, temos que* $[\sigma^2, \sigma^1] = 1$, $[\sigma^2, \tau^1] = -1$, $[\sigma^2, \theta^1] = -1$.

Lema 2.1 *Seja* K_g *um complexo simplicial geométrico orientado. Se* σ^p *é um* p*-simplexo de* $C_p(K_g)$ *e* σ^{p-2} *é uma* $(p-2)$*-face de* σ^p *então*

$$\sum_{\sigma_i^{p-1} \in C_{p-1}(K_g)} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}].[\sigma_i^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 0,$$

Demonstração. De fato, sejam $v_1, v_2, ..., v_{p-1}$ os vértices de σ^{p-2} de modo que $\sigma^{p-2} = \langle v_1, v_2, ..., v_{p-1}\rangle$, então, σ^p possui mais dois vértices a, b de modo que podemos supor $\sigma^p = \langle a, b, v_1, v_2, ..., v_{p-1}\rangle$. Na soma

$$\sum_{\sigma_i^{p-1} \in C_{p-1}(K_g)} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}].[\sigma_i^{p-1}, \sigma^{p-2}]$$

termos não nulos ocorrem somente para dois valores de σ_i^{p-1} obtidos através de uma orientação positiva dos simplexos

$$\sigma_1^{p-1} = \overline{\{a, v_1, v_2, ..., v_{p-1}\}} \qquad \sigma_2^{p-1} = \overline{\{b, v_1, v_2, ..., v_{p-1}\}}$$

Temos 4 casos possíveis orientações positivas para σ_1^{p-1} e σ_2^{p-1} :

Caso I Suponhamos que $\sigma_1^{p-1} = \langle a, v_1, v_2, ..., v_{p-1}\rangle$ e $\sigma_2^{p-1} = \langle b, v_1, v_2, ..., v_{p-1}\rangle$, então

$$[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = -1 \qquad [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1$$
$$[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = 1 \qquad [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1$$

Caso II Se $\sigma_1^{p-1} = \langle a, v_1, v_2, ..., v_{p-1}\rangle$ e $\sigma_2^{p-1} = -\langle b, v_1, v_2, ..., v_{p-1}\rangle$ então,

$$[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = -1 \quad , \quad [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1$$
$$[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = -1 \quad , \quad [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$$

Caso III Se $\sigma_1^{p-1} = -\langle a, v_1, v_2, ..., v_{p-1}\rangle$ e $\sigma_2^{p-1} = -\langle b, v_1, v_2, ..., v_{p-1}\rangle$ então,

$$[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = 1 \quad , \quad [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$$
$$[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = -1 \quad , \quad [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$$

Caso IV Se $\sigma_1^{p-1} = -\langle a, v_1, v_2, ..., v_{p-1}\rangle$ e $\sigma_2^{p-1} = \langle b, v_1, v_2, ..., v_{p-1}\rangle$ então,

$$[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = 1 \quad , \quad [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$$
$$[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = 1 \quad , \quad [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1$$

Portanto, a soma dos produtos em qualquer um dos quatro casos é zero.

■

Definição 2.11 *Se σ^p é uma p-cadeia elementar de $C_p(K_g)$ com $p \geq 1$, o* ***bordo*** *de σ^p, denotado por $\partial_p(\sigma^p)$, é definido por*

$$\partial_p(\sigma^p) = \sum_{i=1}^{b(p-1)} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] \cdot \sigma_i^{p-1}$$

para todo $(p-1)$-simplexo $\sigma_i^{p-1} \in C_{p-1}(K_g)$.

Definição 2.12 *O* ***operador bordo*** *é o $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\partial_p : C_p(K_g) \to C_{p-1}(K_g)$ que na p-cadeia arbitrária $c_p = \sum \lambda_i \cdot \sigma_i^p$, vale*

$$\partial_p(c_p) = \sum_{i=1}^{b(p)} \lambda_i \partial_p(\sigma_i^p)$$

O operador bordo ∂_0 é definido como sendo o homomorfismo nulo.

Observação 2.7 *Se $E_p(K_g) = (\sigma_1^p, ..., \sigma_{b(p)}^p)$ e $E_{p+1}(K_g) = (\sigma_1^{p+1}, ..., \sigma_{b(p+1)}^{p+1})$, a matriz $\eta(p+1) = [\eta_{ij}(p+1)]$, onde $\eta_{ij}(p+1)$=$[\sigma_j^{p+1}, \sigma_i^p]$, é a* ***p-ésima matriz de incidência*** *de K_g e decorre da* ***Definição 2.11*** *que $\eta(p+1) = \left[\partial_{p+1}\right]_{E_p(K_g)}^{E_{p+1}(K_g)}$*

Teorema 2.1 *Se K_g é um complexo simplicial geométrico orientado e $p \geq 1$, então a composição $\partial_{p-1} \circ \partial_p : C_p(K_g) \to C_{p-2}(K_g)$ é o homomorfismo nulo.*

Demonstração. De fato, mostremos que se $z_p \in C_p(K_g)$, então $(\partial_{p-1} \circ \partial_p)(z_p) = 0$. Para fazer isto, basta verificar que para todo p-simplexo σ^p de K_g tem-se $(\partial_{p-1} \circ \partial_p)(\sigma^p) = 0$. Temos que

$$
\begin{aligned}
(\partial_{p-1} \circ \partial_p)(\sigma^p) &= \partial_{p-1}(\sum_{i=1}^{b(p-1)} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] \cdot \sigma_i^{p-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{b(p-1)} \partial_{p-1}([\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] \cdot \sigma_i^{p-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{b(p-1)} \sum_{k=1}^{b(p-2)} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] \cdot [\sigma_i^{p-1}, \sigma_k^{p-2}] \cdot \sigma_k^{p-2} \\
&= \sum_{k=1}^{b(p-2)} \left\{ \sum_{i=1}^{b(p-1)} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] \cdot [\sigma_i^{p-1}, \sigma_k^{p-2}] \right\} \cdot \sigma_k^{p-2}
\end{aligned}
$$

Mas pelo **Lema 2.1**,

$$
\sum_{i=1}^{b(p-1)} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] \cdot [\sigma_i^p - 1, \sigma_k^{p-2}] = 0,
$$

portanto $(\partial_{p-1} \circ \partial_p)(\sigma^p) = 0$ e sendo assim, $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ ■

Segue do teorema anterior que $(C_*(K_g), \partial)$ é um $\mathbb{Z}$-complexo de cadeias.

Definição 2.13 *Seja K_g um complexo simplicial geométrico orientado e p um inteiro não-negativo. Aplicando a **Definição 1.19**, obtemos o p-ésimo $\mathbb{Z}$-módulo de homologia de K_g dado por*

$$
H_p(K_g) = \frac{Z_p(K_g)}{B_p(K_g)}
$$

Teorema 2.2 *Sejam $(C_*(K_g(1)), \partial^1)$ e $(C_*(K_g(2)), \partial^2)$ os complexos de cadeias simpliciais obtidos de um complexo simplicial geométrico K_g considerando-se duas orientações. Então, os $\mathbb{Z}$-módulos de homologia $H_p(C_*(K_g(1)))$ e $H_p(C_*(K_g(2)))$ são isomorfos para cada p.*

Demonstração. De fato, dado um p-simplexo $\sigma^p \in K_g$, seja $\sigma^p(i)$ a orientação positiva de σ^p no complexo $K_g(i) = K_i,\ i = 1, 2$. Então existe uma função α definida no complexo simplicial geométrico K_g (não orientado) com valores em $\{1, -1\}$ tal que $\alpha(\sigma^p)$ satisfaz

$$\sigma^p(1) = \alpha(\sigma^p) \cdot \sigma^p(2)$$

Definimos uma sequência $\varphi = \{\varphi_p : C_p(K_1) \to C_p(K_2)\}_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}$-homomorfismos dada por

$$\varphi_p(\sum_{i=1}^{b(p)} g_i \cdot \sigma_i^p(1)) = \sum_{i=1}^{b(p)} g_i \cdot \alpha(\sigma_i^p) \cdot \sigma_i^p(2)$$

onde $\sum g_i \cdot \sigma_i^p(1)$ representa uma p-cadeia em $C_p(K_1)$. Mostremos que φ_p é uma aplicação de cadeias:

$$\begin{aligned}
(\varphi_{p-1} \circ \partial_p^1)(\sigma^p(1)) = & \\
&= \varphi_{p-1}(\sum_{i=1}^{b(p-1)} [\sigma^p(1)\, ,\, \sigma_i^{p-1}(1)] \cdot \sigma_i^{p-1}(1)) \\
&= \sum_{i=1}^{b(p-1)} \alpha(\sigma_i^{p-1}) \cdot [\sigma^p(1)\, ,\, \sigma_i^{p-1}(1)] \cdot \sigma_i^{p-1}(2) \\
&= \sum_{i=1}^{b(p-1)} \alpha(\sigma_i^{p-1}) \cdot \alpha(\sigma_i^{p-1}) \cdot \alpha(\sigma^p) \cdot [\sigma^p(2)\, ,\, \sigma_i^{p-1}(2)] \cdot \sigma_i^{p-1}(2) \\
&= \alpha(\sigma^p) \cdot \sum_{i=1}^{b(p-1)} [\sigma^p(2)\, ,\, \sigma_i^{p-1}(2)] \cdot \sigma_i^{p-1}(2) \\
&= \partial_p^2(\alpha(\sigma^p) \cdot \sigma^p(2)) \\
&= (\partial_p^2 \circ \varphi_p)(\sigma^p(1))
\end{aligned}$$

Segue que φ_p induz um $\mathbb{Z}$-homomorfismo bem definido

$$\varphi_p^* : H_p(C_*(K_1)) \to H_p(C_*(K_2))$$

dado por $\varphi_p^*(\bar{z}_p) = \overline{\varphi_p(z)}$ para cada $\bar{z}_p \in H_p(C_*(K_1))$. Analogamente, definimos $\psi_p : C_p(K_2) \to C_p(K_1)$ por $\psi_p(\sigma^p(2)) = \alpha(\sigma^p)\sigma^p(1)$ e estendemos por linearidade. Dessa forma, temos que $(\varphi_p \circ \psi_p)(\sigma^p(2)) = \sigma^p(2)$ e $(\psi_p \circ \varphi_p)(\sigma^p(1)) = (\sigma^p(1))$. Portanto, $H_p(C_*(K_1))$ e $H_p(C_*(K_2))$ são isomorfos. ■

Será útil para o próximo capítulo provarmos que as homologias do subcomplexo de $(C_*(K_g), \partial)$ gerado pelas i-faces de um determinado $\sigma^p \in K_g$ é acíclico. Para tanto, introduzimos o conceito de homologias estendidas.

Definição 2.14 *Se K_g é um complexo simplicial geométrico orientado de dimensão n, definimos $C_{-1}(K_g)$ como sendo o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado pelo símbolo $<>$, e $\varepsilon : C_0(K_g) \to C_{-1}(K_g)$, dada por $\displaystyle\sum_{j=1}^{b(0)} m_j(\sigma_j^0) \mapsto (\sum_{j=1}^{b(0)} m_j) <>$. O* ***complexo de cadeia estendido*** *$C_*^e(K_g)$ é dado por:*

$$0 \to \; C_n(K_g) \;\xrightarrow{\partial_n}\; \ldots \;\xrightarrow{\partial_2}\; C_1(K_g) \;\xrightarrow{\partial_1}\; C_0(K_g) \;\xrightarrow{\varepsilon}\; C_{-1}(K_g) \; \to 0$$

Verifica-se que $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ e assim, o ***q-ésimo $\mathbb{Z}$-módulo de homologia reduzida*** *é*

$$\widetilde{H}_q(K_g) = H_q(C_*^e(K_g)).$$

Observação 2.8 *Decorre da* ***Definição 2.14*** *que $\widetilde{H}(K_g) \cong H_q(K_g)$, para todo $q \geq 1$.*

Lema 2.2 *Se $\sigma^p = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{p+1}} \rangle \in C_p(K_g)$ e as orientações positivas de suas faces são tais que os índices dos vértices estão em ordem crescente então*

$$\partial_p(\sigma^p) = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{1+j} \langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{j-1}}, \widehat{a_{i_j}}, a_{i_{j+1}}, \ldots, a_{i_{p+1}} \rangle$$

onde $\widehat{a_{i_j}}$ significa a omissão do vértice a_{i_j}.

Demonstração. De fato, se $\sigma_j^{p-1} = \langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{j-1}}, a_{i_{j+1}}, \ldots, a_{i_{p+1}} \rangle$ é uma face de σ^p então

$$\begin{aligned}
\partial_p(\sigma^p) = & \sum_{i=1}^{b(p-1)} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] \cdot \sigma_i^{p-1} = \sum_{j=1}^{p+1} [\sigma^p, \sigma_j^{p-1}] \cdot \sigma_j^{p-1} \\
= & \sum_{j=1}^{p+1} [\sigma^p, \sigma_j^{p-1}] \cdot \langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{j-1}}, a_{i_{j+1}}, \ldots, a_{i_{p+1}} \rangle
\end{aligned}$$

Mas,

$$[\sigma^p, \sigma_j^{p-1}] = sinal \begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_j & a_{i_{j+1}} & \dots & a_{i_{p+1}} \\ a_j & a_{i_1} & \dots & a_{i_{j-1}} & a_{i_{j+1}} & \dots & a_{i_{p+1}} \end{pmatrix} = (-1)^{j-1}.$$

Como $(-1)^{j-1} = (-1)^{j+1}$, então

$$\partial_p(\sigma^p) = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} \cdot \langle a_{i_1}, \dots, a_{i_{j-1}}, a_{i_{j+1}}, \dots, a_{i_{p+1}} \rangle$$

■

Lema 2.3 *Sejam K_g um complexo simplicial geométrico orientado e $\sigma^n \in K_g$. Se $L_g(\sigma^n)$ é o complexo simplicial consistindo de todas as faces de σ^n, então $\widetilde{H}_q(L_g(\sigma^n)) = 0$ para todo $q \geq 0$.*

Demonstração. De fato, utilizando o **Corolário 1.1** provemos que existem homomorfismos $h_q : C_q(L_g(\sigma^n)) \to C_{q+1}(L_g(\sigma^n)), \forall\ q \geq -1$ de modo que

$$\partial_{q+1} \circ h_q + h_{q-1} \circ \partial_q = id_{C_q(L_g(\sigma^n))}.$$

Seja $\sigma^n = \langle a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \rangle$ e considere as orientações de suas faces de modo que os índices dos vértices estejam em ordem crescente. Definimos $h_{-1} : C_{-1}L_g(\sigma^n)) \to C_0(L_g(\sigma^n))$ por $<> \mapsto \langle a_1 \rangle$ e estendemos por linearidade. Logo,

$$(\varepsilon \circ h_{-1} + h_{-2} \circ \partial_{-1})(<>) = (\varepsilon \circ h_{-1})(<>) = \varepsilon(\langle a_1 \rangle) = <> = id_{-1}(<>).$$

Para $q \geq 0$, definimos $h_q : C_q(L_g(\sigma^n)) \to C_{q+1}(L_g(\sigma^n))$ por

$$\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_{q+1}} \rangle \mapsto \langle a_1, a_{i_1}, \dots, a_{i_{q+1}} \rangle$$

e estendemos por linearidade. Para $\sigma^q = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{q+1}} \rangle \in E_q(L_g(\sigma^n))$, seja $\sigma_j^{q-1} = \langle a_{i_1}, \dots, a_{i_{j-1}}, a_{i_{j+1}}, \dots, a_{i_{p+1}} \rangle$ uma de suas faces. Por definição e pelo

Lema 2.2, temos

$$\begin{aligned} h_{q-1}\circ\partial_q(\sigma^q) = &\ h_{q-1}\left(\sum_{j=1}^{q+1}[\sigma^q,\sigma_j^{q-1}]\sigma_j^{q-1}\right) \\ = &\ h_{q-1}\left(\sum_{j=1}^{q+1}(-1)^{1+j}\langle a_{i_1},\ldots,a_{i_{j-1}},a_{i_{j+1}},\ldots,a_{i_{q+1}}\rangle\right) \\ = &\ \sum_{j=1}^{q+1}(-1)^{1+j}\langle a_1,a_{i_1},\ldots,a_{i_{j-1}},a_{i_{j+1}},\ldots,a_{i_{q+1}}\rangle \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\partial_{q+1}\circ h_q(\langle a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_{q+1}}\rangle) = \ \partial_{q+1}(\langle a_1,a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_{q+1}}\rangle)$$
$$= \langle a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_{q+1}}\rangle - \sum_{k=1}^{q+1}(-1)^{1+k}\langle a_1,a_{i_1},a_{i_2},\ldots,\widehat{a_{i_k}},\ldots,a_{i_{q+1}}\rangle$$

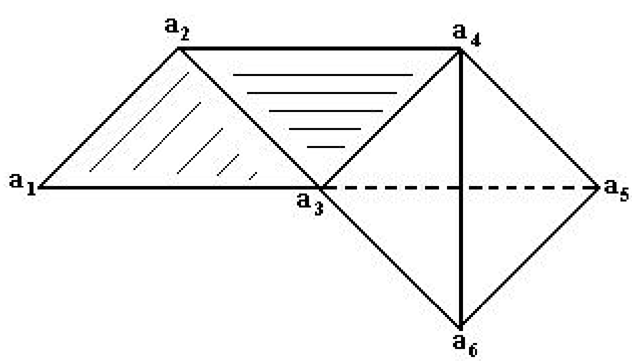
Portanto, $\partial_{q+1}\circ h_q + h_{q-1}\circ\partial_q = id_{C_q(L_g(\sigma^n))}$. ■

Observação 2.9 *Uma maneira de orientar um complexo simplicial geométrico é escolher uma enumeração para todos os vértices e usar esta enumeração para induzir uma ordem em cada simplexo. Formalmente, uma enumeração significa uma bijeção* $en:\{1,2,\ldots,b(0)\}\to Vert(K_g)$ *e escrevemos* $en(i)=a_i$.

Como σ^p *é determinado por* $(p+1)$ *vértices, identificamos estes vértices com a enumeração, isto é,* $\sigma^p=\overline{\{a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_{p+1}}\}}$. *Considere a orientação em* σ^p *dada por:*

$$\sigma^p=(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_{p+1}})\Leftrightarrow i_1<i_2<\ldots i_{p+1}$$

Exemplo 2.5 *Dado o complexo simplicial*



Se Vert(K_g)=$\{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$, os simplexos de dimensão maior que zero podem ser orientados de acordo com a ordem crescente dos índices dos vértices. Logo,

$$
\begin{aligned}
K_g = \{\, & \langle a_1\rangle, \langle a_2\rangle, \langle a_3\rangle, \langle a_4\rangle, \langle a_5\rangle, \langle a_6\rangle, \langle a_1, a_2\rangle, \langle a_1, a_3\rangle, \langle a_2, a_3\rangle, \langle a_2, a_4\rangle, \\
& \langle a_3, a_4\rangle,\ \langle a_3, a_5\rangle, \langle a_3, a_6\rangle,\ \langle a_4, a_5\rangle,\ \langle a_4, a_6\rangle,\ \langle a_5, a_6\rangle,\ \langle a_1, a_2, a_3\rangle, \\
& \langle a_2, a_3, a_4\rangle,\ \langle a_3, a_4, a_5\rangle,\ \langle a_3, a_4, a_6\rangle,\ \langle a_3, a_5, a_6\rangle,\ \langle a_4, a_5, a_6\rangle, \\
& \langle a_3, a_4, a_5, a_6\rangle\}
\end{aligned}
$$

2.4 Cohomologia Simplicial

Seja K_g um complexo simplicial geométrico orientado. Como foi visto no **Exemplo 1.6**, se $C^n(K_g; G) = Hom_{\mathbb{Z}}(C_n(K_g), G)$ e

$$\delta^n : C^n(K_g; G) \to C^{n+1}(K_g; G)$$

é dado por $\delta^n(f) = f \circ \partial_{n+1}$, então $(C^*(K_g; G), \delta)$ é um $\mathbb{Z}$-complexo de cocadeias com coeficientes em G.

Definição 2.15 *Dado um complexo simplicial geométrico orientado K_g, o **p-ésimo $\mathbb{Z}-$módulo de cohomologia simplicial com coeficientes em** G é*

$$H^p(C^*(K_g); G) = \frac{Ker\, \delta^p}{Im\, \delta^{p-1}} = H^p(K_g; G)$$

Convenção 2.5 *A partir de agora, estaremos sempre considerando $G = \mathbb{Z}$.*

Convenção 2.6 *Dada uma base $E_p(K_g) = (\sigma_1^p, \ldots, \sigma_{b(p)}^p)$ de $C_p(K_g)$ formada de cadeias elementares, denotaremos por $E^p(K_g) = ((\sigma_1^p)^*, \ldots, (\sigma_{b(p)}^p)^*)$ a base dual, isto é, $(\sigma_i^p)^*$ é o $\mathbb{Z}$-homomorfismo dado por*

$$(\sigma_i^p)^*(\sigma_j^p) = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases}.$$

2.5 Complexo simplicial induzido

Seja K_g um complexo simplicial geométrico finito. Só é possível gerar o complexo de cadeia $(C_*(K_g), \partial)$ se introduzirmos uma orientação em K_g. O **Teorema 2.2** nos diz que as homologias resultantes (e portanto co-homologias) de orientações diferentes são isomorfos. Um modo simples de orientar o complexo simplicial geométrico K_g é considerar uma enumeração dos vértices de K_g. Indicamos o complexo simplicial geométrico orientado pela enumeração por $K_g(en)$. Lembremos que uma enumeração é uma bijeção $en : \{1, 2, \ldots b(0)\} \to Vert(K_g)$, $en(i) = a_i$ e a orientação em σ^p é:

$$\sigma^p = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{p+1}}) \Leftrightarrow i_1 < i_2 < \ldots < i_{p+1}$$

Vamos extrair do complexo simplicial $K_g(en)$ um novo complexo simplicial induzido K_i cujo complexo de cadeias facilitará o seguinte:

i) Definição do produto cup no próximo capítulo;

ii) Simplicidade da definição do operador bordo;

iii) Existência de uma base canônica.

Definição 2.16 *Seja $K_g(en)$ um complexo simplicial geométrico orientado. O **complexo simplicial induzido** de $(K_g(en))$ é definido como sendo uma coleção de $(p+1)-$uplas, denotada por K_i, dadas por:*

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{p+1}) \in K_i \Leftrightarrow \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{p+1}} \rangle \in C_p(K_g(en)) \quad e \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_{p+1}.$$

Os elementos de K_i com p+1 vértices são chamados de p-simplexos induzidos e a dimensão de um simplexo $\sigma \in K_i$ é o número de vértices de σ menos um. A dimensão de K_i é a máxima das dimensões de seus simplexos.

Definição 2.17 *O $\mathbb{Z}$-**módulo das p-cadeias** do complexo induzido K_i é o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado pelas $(p+1)-$uplas de K_i denotado por $C_p(K_i)$.*

Definição 2.18 *O conjunto de todas $(p+1)-$uplas de um complexo simplicial induzido K_i pode ser ordenado segundo a ordem lexicográfica, isto é,*

$$(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{p+1}) < (j_1, j_2, j_3, \ldots, j_{p+1})$$

*se e só se, $i_1 < j_1$ ou $i_1 = j_1$ e $i_2 < j_2$, ou...ou $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \ldots, i_p = j_p$ e $i_{p+1} < j_{p+1}$. O conjunto das $(p+1)-$uplas assim ordenados será chamado de **p-ésima base canônica** de K_i, denotado por $E_p(K_i)$.*

Observação 2.10 *Existe um isomorfismo $\phi : C_p(K_i) \to C_p(K_g(en))$, que na base $E_p(K_i)$ é dado por $\phi(i_1, i_2, \ldots i_{p+1}) = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{p+1}} \rangle$.*

Como os p-simplexos de $K_g(en)$ orientados possuem um representante da classe de orientação cujos índices dos vértices que geram os p-simplexos estão sempre em ordem crescente, constrói-se ϕ^{-1}.

A matriz de $\left[\phi_p\right]^{E_p(K_i)}_{E_p(K_g(en))} = I_{b(p)}$, matriz identidade de ordem $b(p)$.

Dado um p-simplexo induzido, para cada $1 \leq j \leq p+1$ temos um modo de associar um $(p-1)$-simplexo simplesmente omitindo o j-ésimo vértice. Isto nos sugere definirmos o seguinte:

Definição 2.19 *Seja K_i um complexo simplicial induzido, definimos o **operador da j-ésima face** como sendo o $\mathbb{Z}-$homomorfismo $\partial^j_p : C_p(K_i) \to C_{p-1}(K_i)$, cujo valor na base $E_p(K_i)$ é dado por:*

$$\partial^j_p\left((i_1, ..., i_j, ..., i_{p+1})\right) = (i_1, ..., \widehat{i_j}, ..., i_{p+1}) = (i_1, ..., i_{j-1}, i_{j+1} ..., i_{p+1})$$

onde $\widehat{i_j}$ significa a omissão do termo i_j.

Definição 2.20 *Seja K_i o complexo simplicial induzido. Definimos o* ***p-ésimo operador bordo induzido*** $\partial_p : C_p(K_i) \rightarrow C_{p-1}(K_i)$ *como sendo a soma alternada de seus p+1 operadores bordo face, isto é:*

$$\partial_p = \partial_p^1 - \partial_p^2 + \partial_p^3 - ... + (-1)^{1+(p+1)} \partial_p^{p+1}$$

Se $\sigma^p = (i_1, ..., i_j, ..., i_{p+1}) \in E_p(K_i)$*, então*

$$\partial_p \left((i_1, ..., i_j, ..., i_{p+1}) \right) = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} (i_1, ..., \widehat{i_j}, ..., i_{p+1})$$

Lema 2.4 *Para todo $p \geq 0$, os operadores faces satisfazem:*

i) $\partial_p^r \circ \partial_{p+1}^s = \partial_p^{s-1} \circ \partial_{p+1}^r$ *se* $1 \leq r < s \leq p+2$*;*

ii) $\partial_p^r \circ \partial_{p+1}^s = \partial_p^s \circ \partial_{p+1}^{r+1}$ *se* $1 \leq s \leq r \leq p+1$*;*

Demonstração. De fato, seja $\sigma = (i_1, i_2, ..., i_{p+2}) \in C_{p+1}(K_i)$, temos que para $r < s$ tem-se:

$$\begin{aligned} (\partial_p^r \circ \partial_{p+1}^s)((i_1, i_2, ..., i_{p+2})) &= \partial_p^r((i_1, ..., i_r, ..., i_{s-1}, i_{s+1}, ..., i_{p+2})) \\ &= (i_1, ..., i_{r-1}, i_{r+1}, ..., i_{s-1}, i_{s+1}, ..., i_{p+2}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\partial_p^{s-1} \circ \partial_{p+1}^r)((i_1, i_2, ..., i_{p+2})) &= \partial_p^{s-1}((i_1, ..., i_{r-1}, i_{r+1}, ..., i_s, ..., i_{p+2})) \\ &= (i_1, ..., i_{r-1}, i_{r+1}, ..., i_{s-1}, i_{s+1}, ..., i_{p+2}) \end{aligned}$$

Logo, $\partial_p^r \circ \partial_{p+1}^s = \partial_p^{s-1} \circ \partial_{p+1}^r$. Analogamente, para $r \geq s$,

$$\begin{aligned} (\partial_p^r \circ \partial_{p+1}^s)((i_1, i_2, ..., i_{p+2})) &= \partial_p^r((i_1, ..., i_{s-1}, i_{s+1}, ..., i_r, ..., i_{p+2})) \\ &= (i_1, ..., i_{s-1}, i_{s+1}, ..., i_r, i_{r+2}, ..., i_{p+2}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\partial_p^s \circ \partial_{p+1}^{r+1})((i_1, i_2, ..., i_{p+2})) &= \partial_p^s((i_1, ..., i_s, ..., i_r, i_{r+2}, ..., i_{p+2})) \\ &= (i_1, ..., i_{s-1}, i_{s+1}, ..., i_r, i_{r+2}, ..., i_{p+2}) \end{aligned}$$

Portanto, $\partial_p^r \circ \partial_{p+1}^s = \partial_p^s \circ \partial_{p+1}^{r+1}$.

■

Teorema 2.3 *Para todo* $p \geq 0$, $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Demonstração. De fato, sejam

$$\partial_p = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \cdot \partial_p^k$$

e

$$\partial_{p+1} = \sum_{j=1}^{p+2} (-1)^{j+1} \cdot \partial_{p+1}^j$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
\partial_p \circ \partial_{p+1} &= (\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \cdot \partial_p^k) \circ (\sum_{j=1}^{p+2} (-1)^{j+1} \cdot \partial_{p+1}^j) \\
&= \sum_{1 \leq j \leq k \leq p+1} (-1)^{j+k+2} \partial_p^k \circ \partial_{p+1}^j + \sum_{1 \leq k < j \leq p+2} (-1)^{j+k+2} \partial_p^k \circ \partial_{p+1}^j \qquad (2.1) \\
&= \sum_{1 \leq j \leq k \leq p+1} (-1)^{j+k+2} \partial_p^k \circ \partial_{p+1}^j + \sum_{1 \leq k < j \leq p+2} (-1)^{j+k+2} \partial_p^{j-1} \circ \partial_{p+1}^k
\end{aligned}$$

Tomando $\partial_p^k \circ \partial_{p+1}^j$ com sinal $(-1)^{j+k+2}$ na segunda parcela da última equação de (2.1), pelo **Lema 2.4** temos a igualdade

$$\partial_p^k \circ \partial_{p+1}^j = \partial_p^{j-1} \circ \partial_{p+1}^k.$$

Mas $\partial_p^{j-1} \circ \partial_{p+1}^k$ pertence a primeira parcela da última equação de (2.1) com sinal $(-1)^{j+k+1}$.

Logo, cada termo $\partial_p^q \circ \partial_{p+1}^r$ ocorre duas vezes, uma na segunda somatória com sinal $(-1)^{j+k+2}$ e uma na primeira somatória com sinal $(-1)^{j+k+1}$. Portanto, os termos se cancelam e $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ ■

Dado um complexo induzido K_i de dimensão n, obtemos então o complexo de cadeias

$$0 \rightarrow C_n(K_i) \xrightarrow{\partial_n} \ldots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K_i) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K_i) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

e conseqüentemente pode-se determinar o p-ésimo $\mathbb{Z}$-módulo de Homologia do complexo K_i.

Teorema 2.4 *Se K_g é um complexo simplicial geométrico orientado a partir de uma enumeração então $C_*(K_g(en), \partial^g)$ e $C_*(K_i, \partial)$ são cadeias isomorfas.*

Demonstração. De fato, de acordo com a **Observação 2.10** dados os isomorfismos

$$\phi : C_*(K_i) \to C_*(K_g(en))$$

$$\phi^{-1} : C_*(K_g(en)) \to C_*(K_i)$$

mostremos apenas que ϕ, ϕ^{-1} são aplicações de cadeia.

Dado $\tau^p = (i_1, i_2, \ldots, i_{p+1}) \in E_p(K_i)$, temos que

$$\begin{aligned} (\phi_{p-1} \circ \partial_p)(\tau^p) = &\ \phi_{p-1}\left(\sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{1+j}(i_1, i_2, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+1}\right) \\ = &\ \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{1+j}\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, \widehat{a_{i_j}}, \ldots, a_{i_{p+1}}\rangle \end{aligned}$$

enquanto que, pelo **Lema 2.2**

$$\begin{aligned} (\partial_p^g \circ \phi_p)(\tau^p) = &\ \partial_p^g(\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{p+1}}\rangle) \\ = &\ \sum_{j=1}^{b(p-1)} [\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{p+1}}\rangle, \sigma_j^{p-1}] \cdot \sigma_j^{p-1} \\ = &\ \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{1+j}\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, \widehat{a_{i_j}}, \ldots, a_{i_{p+1}}\rangle \end{aligned}$$

Logo, $\phi_{p-1} \circ \partial_p = \partial_p^g \circ \phi_p$. Como $\phi_p \circ \phi_p^{-1} = id_{C_p(K_g(en))}$ e $\phi_p^{-1} \circ \phi_p = id_{C_p(K_i)}$, segue que $C_*(K_g(en), \partial^g)$ e $C_*(K_i, \partial)$ são cadeias isomorfas. ∎

Pelo **Teorema 1.4** e pelo Teorema acima, podemos agora concluir então que

$$H_p(C_*(K_g(en))) \cong H_p(C_*(K_i))$$

2.6 Relações matriciais booleanas dos operadores bordos

De acordo com a **Observação 2.10**, $\left[\phi_p\right]^{E_p(K_i)}_{\phi(E_p(K_i))} = id_{b(p)}$; este fato nos permite concluir a igualdade de matrizes $\left[\partial_p\right]^{E_p(K_i)}_{E_{p-1}(K_i)} = \left[\partial^g_p\right]^{E_p(K_g(en))}_{E_{p-1}(K_g(en))}$.

O produto booleano das matrizes do operador bordo, em $C_*(K_i)$ ou em $C_*(K_g(en))$, considerada com entradas booleanas, nos permite inferir relações de faces de dimensões menores, como segue:

Definição 2.21 *Seja K_i um complexo simplicial induzido finito. Dado o $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\partial_n : C_n(K_i) \to C_{n-1}(K_i)$, seja $[\partial_n]^{E_n}_{E_{n-1}}$ sua matriz em relação as bases canônicas. Definimos*

$$[\overline{\partial_n}] = [\overline{a_{ij}}]_{b(n-1)\times b(n)}$$

como sendo a matriz booleana onde:

$$\overline{a_{ij}} = \begin{cases} 1 \ , & se\ a_{ij} = 1\ ou\ a_{ij} = -1 \\ 0 \ , & se\ a_{ij} = 0 \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq b(n-1)$ e $1 \leq j \leq b(n)$.

Lema 2.5 *Seja $T_{n-k} = [b_{rj}]$ o produto booleano das matrizes $[\partial_{n-k}], [\partial_{n-k+1}], \ldots,$ $[\partial_n]$, ou seja, $T_{n-k} = [\overline{\partial_{n-k}}] \cdot [\overline{\partial_{n-k+1}}] \ldots [\overline{\partial_n}]$. Então $b_{rj} \neq 0$ se, e somente se, o r-ésimo simplexo de dimensão $(n-k-1)$ é face do j-ésimo simplexo de dimensão n.*

Demonstração. De fato, se $k = 0$ então $T_{n-0} = T_n = [\overline{\partial_n}]$. Temos que

$$\begin{aligned} b_{rj} \neq 0 &\Leftrightarrow b_{rj} = 1 \\ &\Leftrightarrow [\partial_n(\sigma^n_j)]_{E_{n-1}} = (a_{1j}, \ldots, \pm b_{rj}, \ldots, a_{b(n-1)j}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \partial(\sigma_j^n) = a_{1j} \cdot \sigma_1^{n-1} + \ldots \pm b_{rj} \cdot \sigma_r^{n-1} + \ldots + a_{b(n-1)j} \cdot \sigma_{b(n-1)}^{n-1}$$

$\Leftrightarrow$ o r-ésimo simplexo de dimensão $n-1$ é face do j-ésimo simplexo de dimensão n.

Suponhamos agora que o lema seja válido para $k-1$. Temos que

$$\begin{aligned} T_{n-k} = & \ [\overline{\partial_{n-k}}] \cdot [\overline{\partial_{n-k+1}}] \ldots [\overline{\partial_n}] \\ = & \ [\overline{\partial_{n-k}}] \cdot T_{n-k+1} \end{aligned}$$

Se $T_{n-k} = [b_{rj}]$, $[\overline{\partial_{n-k}}] = [c_{rk}]$ e $T_{n-k+1} = [d_{kj}]$ então $[b_{rj}] = [c_{rk}] \cdot [d_{kj}]$ onde

$$b_{rj} = \sum_{k=1}^{b(n-k)} c_{rk} \cdot d_{kj}$$

sendo a soma e o produto booleanos. Então,

$b_{rj} \neq 0 \Leftrightarrow b_{rj} = 1$

$\Leftrightarrow \exists\ k_0 \in \{1, 2, \ldots, b(n-k)\}$ tal que $c_{rk_0} \cdot d_{k_0 j} = 1$

$\Leftrightarrow c_{rk_0} = 1$ e $d_{k_0 j} = 1$

$\Leftrightarrow c_{rk_0} = 1$ significa que o r-ésimo simplexo de dimensão $n-k-1$ é face do k_0-ésimo simplexo de dimensão $n-k$ e, por hipótese de indução, $d_{k_0 j} = 1$, significa que o k_0-ésimo simplexo de dimensão $n-k$ é face do j-ésimo simplexo de dimensão n.

Logo, o r-ésimo simplexo de dimensão $n-k-1$ é face do j-ésimo simplexo de dimensão n. ■

O Lema anterior permite, através da matriz T_1, determinar todos os simplexos induzidos de dimensão n, considerando em cada coluna as linhas nulas. Mais formalmente:

Teorema 2.5 *Sejam K_i um complexo simplicial induzido finito, $[\partial_p]_{E_{p-1}}^{E_p}$ as matrizes dos operadores bordo em relação as bases canônicas e $[\overline{\partial_p}]$ as matrizes booleanas obtidas a partir das matrizes $[\partial_p]_{E_{p-1}}^{E_p}$.*

Considere o produto booleano $[a_{ij}] = T_1 = [\overline{\partial_1}] \ldots [\overline{\partial_n}]$. Então o j-ésimo simplexo induzido de dimensão n é a $(n+1)-$upla $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$ tal que o elemento $a_{i_l j}$ da matriz T_1 é não nulo, para $l = 1, 2, \ldots, n+1$.

Demonstração. De fato, se

$$T_1 = [\overline{\partial_1}] \ldots [\overline{\partial_n}]$$

e $a_{i_l j} \neq 0$ então, pelo Lema anterior, o i_l-ésimo simplexo de dimensão 0 é face do j-ésimo simplexo de dimensão n. Portanto, para $l = 1, 2, \ldots, n+1$ o j-ésimo simplexo de dimensão n é a sequência $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$ ■

Existem situações em que a partir dos simplexos induzidos de dimensão máxima podemos determinar todo o complexo simplicial considerando todas as suas faces. No entanto, existem situações em que simplexos não são faces de simplexos de dimensão máxima.

O seguinte corolário nos diz como obter todo o complexo simplicial K_i:

Corolário 2.1 *Seja K_i um complexo simplicial induzido de dimensão n. Se para $1 \leq p \leq n$, $V_p = [\overline{\partial_1}] \ldots [\overline{\partial_p}] = [a_{ij}]$ então o j-ésimo simplexo de dimensão p é a sequência $(i_1, i_2, \ldots, i_{p+1})$ tal que o elemento $a_{i_l j}, l = 1, 2, \ldots, p+1$, da matriz V_p é não nulo.*

Demonstração. Segue análogo ao teorema anterior tomando-se $n = p$.

Exemplo 2.6 *Sejam as matrizes booleanas dos operadores bordo ∂_1 e ∂_2 dadas* *por:*

$$[\overline{\partial_2}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \ [\overline{\partial_1}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $T_1 = [\overline{\partial_1}] \cdot [\overline{\partial_2}]$ *então*

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pelo ***Teorema 2.5****, como* $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 1$ *então o primeiro simplexo induzido de dimensão 2 é a seqüência* $(1, 2, 3)$ *e como* $a_{32} = a_{42} = a_{52} = 1$ *o segundo simplexo de dimensão 2 é a sequência* $(3, 4, 5)$*. Considerando somente a matriz* $[\overline{\partial_1}]$*, temos que pelo* ***Corolário 2.1*** *os simplexos de dimensão 1 são dados por:*$(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (3, 5)$ *e* $(4, 5)$ *e os 0-simplexos são:* $(1), (2), \ldots, (5)$.

2.7 Índice de Kronecker

Definição 2.22 *Dado o* $\mathbb{Z}$*-complexo de cadeias* (C_*, ∂)*, considere o* $\mathbb{Z}$*-módulo* $C^p = Hom_{\mathbb{Z}}(C_p, \mathbb{Z})$*. O* $\mathbb{Z}$*-homomorfismo bilinear*

$$C_p \times C^p \to \mathbb{Z}$$

dado por $(a_p, b^p) \mapsto b^p(a_p)$*, é chamado de* ***Índice de Kronecker****. Denotamos* $b^p(a^p) = [a_p \, , \, b^p]$.

Teorema 2.6 *O índice de Kronecker induz um $\mathbb{Z}$-homomorfismo bilinear*

$$H_p(C_*;\mathbb{Z}) \times H^p(C^*;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

dado por $(\bar{a_p}, \bar{b}^p) \mapsto b^p(a_p)$.

Demonstração. De fato, tudo que temos que mostrar é que a aplicação está bem definida.

Sejam (a_p, b^p) e (c_p, d^p) tais que $a_p - c_p = \partial_{p+1}(f)$ e $b^p - d^p = \delta^{p-1}(g)$ para algum $f \in C_{p+1}$ e para algum $g \in C^{p-1}$. Então:

$$\begin{aligned} b^p(a_p) = \;& b^p(c_p + \partial_{p+1}(f)) = b^p(c_p) + b^p(\partial_{p+1}(f)) \\ = \;& (d^p + \delta^{p-1}(g))(c_p) + (d^p + \delta^{p-1}(g))(\partial_{p+1}(f)) \\ = \;& d^p(c_p) + g\partial_p(c_p) + d^p\partial_{p+1}(f) + g\partial_p\partial_{p+1}(f) = d^p(c_p) \end{aligned}$$

A última igualdade decorre de $c_p \in Z_p(C_*)$, $d^p \in Z^p(C^*)$ e $\partial_p\partial_{p+1} = 0$ ■

Convenção 2.7 *Em relação às bases $E_p(K_g)$ de $C_p(K_g)$ e $E^p(K_g)$ de $C^p(K_g)$ convencionamos* **matriz linha** *para as coordenadas da $p-$cocadeia φ^p e* **matriz coluna** *para as coordenadas da $p-$cadeia z_p. Assim, se $\varphi^p = \sum_{i=1}^{b(p)} k_i \cdot (\sigma_i^p)^*$ e $z_p = \sum_{i=1}^{b(p)} x_i \cdot \sigma_i^p \in C_p(K_g)$ então*

$$[z_p\, ,\, \varphi^p] = \varphi^p(z_p) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_{b(p)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{b(p)} \end{pmatrix}$$

Evidente que a fórmula acima continua válida sempre que C_p é livre de posto finito, e as bases de C_p e $C^p = Hom_{\mathbb{Z}}(C_p, \mathbb{Z})$ são duais.

Capítulo 3

Produto Cup

3.1 Produto Cup em $C^*(K_i;\mathbb{Z})$

Seja K_i um complexo simplicial induzido. Sabemos que $C^*(K_i;\mathbb{Z}) = C^0(K_i;\mathbb{Z}) \oplus C^1(K_i;\mathbb{Z}) \oplus \ldots \oplus C^n(K_i;\mathbb{Z})$ é um $\mathbb{Z}$-módulo. Vamos definir uma estrutura de anel graduado em $C^*(K_i;\mathbb{Z})$ e com esta estrutura provar que $Z^*(K_i;\mathbb{Z}) = Z^0(K_i;\mathbb{Z}) \oplus Z^1(K_i;\mathbb{Z}) \oplus \ldots \oplus Z^n(K_i;\mathbb{Z})$ é um subanel e $B^*(K_i;\mathbb{Z}) = B^0(K_i;\mathbb{Z}) \oplus B^1(K_i;\mathbb{Z}) \oplus \ldots \oplus B^n(K_i;\mathbb{Z})$ é um ideal, e assim pela **Definição 1.7**, teremos uma estrutura de anel graduado em $\frac{Z^*(K_i;\mathbb{Z})}{B^*(K_i;\mathbb{Z})} = H^*(K_i;\mathbb{Z})$.

Desempenha papel importante na definição desta estrutura o conceito de face anterior e face posterior. Mais precisamente:

Definição 3.1 *Seja K_i um complexo simplicial induzido. Se $0 \leq j \leq d$, definimos as aplicações $\mu_j^d, \lambda_j^d : E_d(K_i) \to E_j(K_i)$ da seguinte forma:*

$$\lambda_j^d((i_1, i_2, \ldots, i_{d+1})) \mapsto (i_1, i_2, \ldots, i_{j+1})$$

e

$$\mu_j^d((i_1, i_2, \ldots, i_{d+1})) \mapsto (i_{d+1-j}, \ldots, i_{d+1})$$

Chamaremos λ_j^d de **aplicação anterior** e μ_j^d de **aplicação posterior**.

Lema 3.1 **(i)** $\lambda_k^i \circ \lambda_i^j = \lambda_k^j$ *e* $\mu_k^i \circ \mu_i^j = \mu_k^j$

(ii) $\lambda_m^{m+k} \circ \mu_{m+k}^{n+m+k} = \mu_m^{n+m} \circ \lambda_{n+m}^{n+m+k}$

(iii) *Para* $\partial_{d+1}^i|_{E_{d+1}(K_i)}$, *temos*

$$\lambda_p^d \circ \partial_{d+1}^i = \begin{cases} \partial_{p+1}^i \circ \lambda_{p+1}^{d+1}, \ se\ i \leq p+1 \\ \lambda_p^{d+1}, \ se\ i > p+1 \end{cases}$$

$$\mu_q^d \circ \partial_{d+1}^i = \begin{cases} \mu_q^{d+1}, \ se\ i \leq d-q+1 \\ \partial_{q+1}^{i+q-d} \circ \mu_{q+1}^{d+1}, \ se\ i > d-q+1 \end{cases}$$

Demonstração. (i) De fato, dado um complexo K_i seja $\sigma = (l_1, l_2, \ldots, l_{j+1}) \in E_j(K_i)$. Temos que

$$(\lambda_k^i \circ \lambda_i^j)(\sigma) = (\lambda_k^i)((l_1, l_2, \ldots, l_{i+1})) = (l_1, l_2, \ldots, l_{k+1}) = \lambda_k^j(\sigma)$$

Analogamente, prova-se que $\mu_k^i \circ \mu_i^j = \mu_k^j$.

(ii) Seja $\sigma = (l_1, l_2, \ldots, l_{n+m+k+1})$, então

$$(\mu_m^{n+m} \circ \lambda_{n+m}^{n+m+k})(\sigma) = \mu_m^{n+m}((l_1, l_2, \ldots, l_{n+m+1}) = (l_{n+1}, l_{n+2}, \ldots, l_{n+m+1})$$

$$(\lambda_m^{m+k} \circ \mu_{m+k}^{n+m+k})(\sigma) = \lambda_m^{m+k}((l_{n+1}, \ldots, l_{n+m+k+1})) = (l_{n+1}, \ldots, l_{n+m+1})$$

Logo, $\mu_m^{n+m} \circ \lambda_{n+m}^{n+m+k} = \lambda_m^{m+k} \circ \mu_{m+k}^{n+m+k}$

(iii) Dado $\sigma = (l_1, l_2, \ldots, l_{d+2})$ suponhamos que $i \leq p+1$, então

$$(\lambda_p^d \circ \partial_{d+1}^i)(\sigma) = \lambda_p^d((l_1, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots, l_{d+2})) = (l_1, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots, l_{p+2})$$

$$(\partial_{p+1}^i \circ \lambda_{p+1}^{d+1})(\sigma) = \partial_{p+1}^i((l_1, l_2, \ldots, l_{p+2})) = (l_1, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots, l_{p+2})$$

Se $i > p+1$, temos

$$(\lambda_p^d \circ \partial_{d+1}^i)(\sigma) = \lambda_p^d((l_1, \ldots, l_{p+1}, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots, l_{d+2})) = (l_1, \ldots, l_{p+1})$$

$$\lambda_p^{d+1}(\sigma) = (l_1, \ldots, l_{p+1})$$

Portanto,

$$\lambda_p^d \circ \partial_{d+1}^i = \begin{cases} \partial_{p+1}^i \circ \lambda_{p+1}^{d+1}, \ se \ i \leq p+1 \\ \lambda_p^{d+1}, \ se \ i > p+1 \end{cases}$$

e analogamente verifica-se que

$$\mu_q^d \circ \partial_{d+1}^i = \begin{cases} \mu_q^{d+1}, \ se \ i \leq d-q+1 \\ \partial_{q+1}^{i+q-d} \circ \mu_{q+1}^{d+1}, \ se \ i > d-q+1 \end{cases}$$

■

Definição 3.2 *Dado um complexo simplicial K_i e as bases canônicas $E_p(K_i)$ e $E_q(K_i)$ de $C_p(K_i)$ e $C_q(K_i)$ respectivamente, podemos determinar a matriz das aplicações anterior e posterior. Se $E_p(K_i) = (\sigma_1^p, \ldots, \sigma_{b(p)}^p)$ e $E_q(K_i) = (\sigma_1^q, \sigma_2^q, \ldots, \sigma_{b(q)}^q)$ então a matriz de $\lambda_q^p : E_p \longrightarrow E_q$ é $[\lambda_q^p]_{b(q)\times b(p)} = [a_{ij}]$, onde:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \ \textit{se os vértices de } \sigma_i^q \textit{ são os } (q+1) \textit{ primeiros vértices de } \sigma_j^p; \\ 0, \ \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

A matriz de $\mu_q^p : E_p \longrightarrow E_q$ é $[\mu_q^p]_{b(q)\times b(p)} = [b_{ij}]$, onde:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \ \textit{se os vértices de } \sigma_i^q \textit{ são os } (q+1) \textit{ últimos vértices de } \sigma_j^p; \\ 0, \ \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação 3.1 *As matrizes das aplicações anterior e posterior têm somente um elemento não nulo em cada coluna.*

Observação 3.2 *Denotemos por $[\lambda]$ a matriz de blocos:*

$$[\lambda] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} b(0) & b(1) & b(2) & b(3) & \cdot & \cdot & b(n-1) & b(n) \end{array} \\ \begin{array}{c} b(0) \\ b(1) \\ b(2) \\ \vdots \\ b(n-1) \\ b(n) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & [\lambda_0^1] & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\lambda_1^2] & 0 & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\lambda_2^3] & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & [\lambda_{n-1}^n] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Analogamente define-se a matriz $[\mu]$. *A condição* (i) *significa que* $[I]+[\lambda]+[\lambda]^2+\ldots+[\lambda]^n=[\lambda_T]$ *é da forma:*

$$[\lambda_T]=\begin{pmatrix} [\lambda_0^0] & [\lambda_0^1] & [\lambda_0^2] & [\lambda_0^3] & \vdots & \ldots & \vdots & [\lambda_0^n] \\ 0 & [\lambda_1^1] & [\lambda_1^2] & [\lambda_1^3] & [\lambda_1^4] & \vdots & \vdots & [\lambda_1^n] \\ 0 & 0 & [\lambda_2^2] & [\lambda_2^3] & [\lambda_2^4] & [\lambda_2^5] & \vdots & [\lambda_2^n] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & [\lambda_{n-1}^n] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [\lambda_n^n] \end{pmatrix}$$

Analogamente para $[\mu_T]=[I]+[\mu]+[\mu]^2+\ldots+[\mu]^n$. *A condição* (ii) *do Lema anterior equivale a* $[\lambda][\mu]=[\mu][\lambda]$

Observação 3.3 *Notemos que* $\lambda_{p-1}^p=\partial_p^{p+1}$ *e* $\mu_{p-1}^p=\partial_p^1$, *isto implica que a matriz* $[\lambda_{p-1}^p]$ *é obtida da matriz de* $[\partial_p]=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}[\partial_p^i]$, *fazendo o primeiro elemento não nulo de cada coluna de* $[\partial_p]$ *igual a* 1 *e os demais desta coluna iguais a zero e a matriz* $[\mu_{p-1}^p]$ *é obtida fazendo o último elemento não nulo de cada coluna de* $[\partial_p]$ *igual a* 1 *e os demais desta coluna iguais a zero.*

Definição 3.3 *Seja* K_i *um complexo simplicial de dimensão* n. *Dadas as cocadeias* $\varphi\in C^p(K_i;\mathbb{Z})$ *e* $\theta\in C^q(K_i;\mathbb{Z})$ *definimos o produto cup*

$$\varphi\cup\theta\in C^{p+q}(K_i;\mathbb{Z})$$

para $\sigma\in E_{p+q}(K_i)$ *da seguinte forma:*

$$[\sigma,\varphi\cup\theta]=(\varphi\cup\theta)(\sigma)=[\lambda_p^{p+q}(\sigma),\varphi]\cdot[\mu_q^{p+q}(\sigma),\theta]$$

e estendemos por linearidade para $C_{p+q}(K_i)$.

Naturalmente, o produto cup define uma função

$$C^*(K_i,\mathbb{Z})\times C^*(K_i,\mathbb{Z})\to C^*(K_i,\mathbb{Z})$$

da seguinte forma:

$$(\oplus\varphi_i) \cup (\oplus\theta_j) = \oplus_{i,j}\varphi_i \cup \theta_j$$

ou seja, se $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ e $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ então $\varphi \cup \theta = (\varphi_0 \cup \theta_0, \ldots, \varphi_{n-2} \cup \theta_0 + \varphi_{n-3} \cup \theta_1 + \ldots + \varphi_0 \cup \theta_{n-2}, \varphi_{n-1} \cup \theta_0 + \varphi_{n-2} \cup \theta_1 + \ldots + \varphi_0 \cup \theta_{n-1}, \varphi_n \cup \theta_o + \varphi_{n-1} \cup \theta_1 + \ldots + \varphi_0 \cup \theta_n)$.

Lema 3.2 *Se K_i é um complexo simplicial induzido de dimensão n, então $C^*(K_i, \mathbb{Z}) = C^0(K_i, \mathbb{Z}) \oplus C^1(K_i, \mathbb{Z}) \oplus \ldots C^n(K_i, \mathbb{Z})$ é um anel graduado com o produto cup.*

Demonstração. De fato, provemos primeiramente que $\varphi^p \cup (\theta^q + \psi^q) = (\varphi^p \cup \theta^q) + (\varphi^p \cup \psi^q)$ quando $\varphi^p \in C^p(K_i, \mathbb{Z})$ e $\theta^q, \psi^q \in C^q(K_i, \mathbb{Z})$. Tomando $\sigma^{p+q} \in E_{p+q}$, temos que

$$\begin{aligned}
[\sigma^{p+q}, \varphi^p \cup (\theta^q + \psi^q)] &= [\lambda_p^{p+q}(\sigma^{p+q}), \varphi^p] \cdot [\mu_q^{p+q}(\sigma^{p+q}), \theta^q + \psi^q] \\
&= [\lambda_p^{p+q}(\sigma^{p+q}), \varphi^p] \cdot ([\mu_q^{p+q}(\sigma^{p+q}), \theta^q] + [\mu_q^{p+q}(\sigma^{p+q}), \psi^q]) \\
&= [\lambda_p^{p+q}(\sigma^{p+q}), \varphi^p] \cdot [\mu_q^{p+q}(\sigma^{p+q}), \theta^q] + \\
&+ [\lambda_p^{p+q}(\sigma^{p+q}), \varphi^p] \cdot [\mu_q^{p+q}(\sigma^{p+q}), \psi^q] \\
&= [\sigma, \varphi \cup \theta] + [\sigma, \varphi \cup \psi]
\end{aligned}$$

Logo, temos que $\varphi^p \cup (\theta^q + \psi^q) = \varphi^p \cup \theta^q + \varphi^q \cup \psi^q$, ou seja, o produto cup é distributivo. Analogamente verificamos a distributiva à esquerda.

Para provar a associatividade, dados $\varphi^p \in C^p(K_i, \mathbb{Z})$, $\theta^q \in C^q(K_i, \mathbb{Z})$, $\psi^r \in C^r(K_i, \mathbb{Z})$ e $\sigma^{p+q+r} = (i_1, i_2, \ldots, i_{p+q+r+1}) \in C^{p+q+r}(K_i, \mathbb{Z})$, temos que verificar a igualdade $\varphi^p \cup (\theta^q \cup \psi^r) = (\varphi^p \cup \theta^q) \cup \psi^r$. De fato,

$$\begin{aligned}
[\sigma^{p+q+r}, \varphi^p \cup (\theta^q \cup \psi^r)] = &\quad [\lambda_p^{p+q+r}(\sigma^{p+q+r}), \varphi^p] \cdot [\mu_{q+r}^{p+q+r}(\sigma^{p+q+r}), \theta^q \cup \psi^r] \\
= &\quad [\lambda_p^{p+q+r}(\sigma^{p+q+r}), \varphi^p] \cdot [\lambda_q^{q+r}(\mu_{q+r}^{p+q+r}(\sigma^{p+q+r})), \theta^q] \cdot \\
&\quad \cdot [\mu_r^{q+r}(\mu_{q+r}^{p+q+r}(\sigma^{p+q+r})), \psi^r]
\end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned}[\sigma^{p+q+r}, (\varphi^p \cup \theta^q) \cup \psi^r)] &= [\lambda_{p+q}^{p+q+r}(\sigma^{p+q+r}), \varphi^p \cup \theta^q] \cdot [\mu_r^{p+q+r}(\sigma^{p+q+r}), \psi^r] \\ &= [\lambda_p^{p+q+r}(\sigma^{p+q+r})), \varphi^p] \cdot [\mu_q^{p+q}(\lambda_{p+q}^{p+q+r}(\sigma^{p+q+r})), \theta^q] \\ &\cdot [\mu_r^{p+q+r}(\sigma^{p+q+r}), \psi^r]\end{aligned}$$

Segue que estes dois produtos são iguais pelo **Lema 3.1**. Dados $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ e $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ segue das propriedades anteriores que $\varphi \cup (\theta + \psi) = \varphi \cup \theta + \varphi \cup \psi$ e $\varphi \cup (\theta \cup \psi) = (\varphi \cup \theta) \cup \psi$. Logo, $C^*(K_i, \mathbb{Z})$ é um anel graduado. ■

Observação 3.4 *Dado o $\mathbb{Z}$-módulo $C^0(K_i, \mathbb{Z})$, definimos $e^0 \in C^0(K_i, \mathbb{Z})$ por $e^0(\sigma_j^0) = 1$ para todo $\sigma_j^0 \in E_0(K_i)$. Definido dessa forma, podemos verificar que $e^0 \cup \varphi^p = \varphi^p \cup e^0 = \varphi^p$. De fato, seja $c_p = \sum_{i=1}^{b(p)} x_i \cdot \sigma_i^p$, temos que*

$$\begin{aligned}[c_p, e^0 \cup \varphi^p] &= [\sum_{i=1}^{b(p)} x_i \cdot \sigma_i^p, e^0 \cup \varphi^p] \\ &= \sum_{i=1}^{b(p)} x_i \cdot [\sigma_i^p, e^0 \cup \varphi^p] \\ &= \sum_{i=1}^{b(p)} x_i \cdot [\lambda_0^p(\sigma_i^p), e^0] \cdot [\mu_p^p(\sigma_i^p), \varphi^p] \\ &= \sum_{i=1}^{b(p)} x_i \cdot [\sigma_i^p, \varphi^p] \\ &= [\sum_{i=1}^{b(p)} x_i \cdot \sigma_i^p, \varphi^p] \\ &= [c_p, \varphi^p]\end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que $\varphi^p \cup e^0 = \varphi^p$. O elemento $(e^0, 0, \ldots, 0) \in C^*(K_i; \mathbb{Z})$ é a identidade do anel. Se $b(0)$ é a cardinalidade de $E_0(K_i)$ então a matriz de coordenadas do $\mathbb{Z}$-homomorfismo $e^0 : C_0(K_i; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, em relação a base $E^0(K_i)$, é $[e^0]_{1 \times b(0)} = [1\,1\, \ldots\, 1]$.

Proposição 3.1 *Se $\varphi^p \in C^p(K_i, \mathbb{Z})$ e $\theta^q \in C^q(K_i, \mathbb{Z})$ então*

$$\delta^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q) = \delta^p(\varphi^p) \cup \theta^q + (-1)^p \varphi^p \cup \delta^q(\theta^q).$$

Demonstração. De fato, se $\sigma^{p+q+1} \in E_{p+q+1}(K_i)$, então

$$\begin{aligned}
& [\sigma^{p+q+1}, \delta^p(\varphi^p) \cup \theta^q + (-1)^p \varphi^p \cup \delta^q(\theta^q)] = \\
= \; & [\sigma^{p+q+1}, \delta^p(\varphi^p) \cup \theta^q] + (-1)^p [\sigma^{p+q+1}, \varphi^p \cup \delta^q(\theta^q)] \\
= \; & [\lambda_{p+1}^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1}), \delta^p(\varphi^p)] \cdot [\mu_q^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1}), \theta^q] + \\
+ \; & (-1)^p [\lambda_p^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1}), \varphi^p] \cdot [\mu_{q+1}^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1}), \delta^q(\theta^q)] \\
= \; & [\partial_{p+1}(\lambda_{p+1}^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1})), \varphi^p] \cdot [\mu_q^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1}), \theta^q] + \\
+ \; & (-1)^p [\lambda_p^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1}), \varphi^p] \cdot [\partial_{q+1}(\mu_{q+1}^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1})), \theta^q]
\end{aligned}$$

Substituindo, $\partial_{p+1} = \sum_{i=1}^{p+2} (-1)^{i+1} \partial_{p+1}^i$ e $\partial_{q+1} = \sum_{i=1}^{q+2} (-1)^{i+1} \partial_{q+1}^i$ na última equação obtemos:

$$\begin{aligned}
& [\sigma^{p+q+1}, \delta^p(\varphi^p) \cup \theta^q + (-1)^p \varphi^p \cup \delta^q(\theta^q)] = \\
= \; & \sum_{i=1}^{p+2} (-1)^{i+1} [\partial_{p+1}^i(\lambda_{p+1}^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1})), \varphi^p] \cdot [\mu_q^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1}), \theta^q] + \\
+ \; & \{\sum_{i=1}^{q+2} (-1)^{i+1+p} [\lambda_p^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1}), \varphi^p] \cdot [\partial_{q+1}^i(\mu_{q+1}^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1})), \theta^q]\}
\end{aligned}$$

Quando $i = p+2$ na primeira soma e $i = 1$ na segunda soma, as parcelas se cancelam, de modo que:

$$\begin{aligned}
& [\sigma^{p+q+1}, \delta^p(\varphi^p) \cup \theta^q + (-1)^p \varphi^p \cup \delta^q(\theta^q)] = \\
= \; & \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} [\partial_{p+1}^i(\lambda_{p+1}^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1})), \varphi^p] \cdot [\mu_q^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1}), \theta^q] + \\
+ \; & \sum_{i=2}^{q+2} (-1)^{i+1+p} [\lambda_p^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1}), \varphi^p] \cdot [\partial_{q+1}^i(\mu_{q+1}^{p+q+1}(\sigma^{p+q+1})), \theta^q]
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Por outro lado, $[\sigma^{p+q+1}, \delta^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)] = [\partial_{p+q+1}(\sigma^{p+q+1}), \varphi^p \cup \theta^q]$

Substituindo $\partial_{p+q+1} = \sum_{i=1}^{p+q+2} (-1)^{i+1}\partial^i_{p+q+1}$ na expressão anterior temos:

$$\begin{aligned}
& [\sigma^{p+q+1}, \delta^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)] = \\
= \;& [\sum_{i=1}^{p+q+2} (-1)^{i+1}\partial^i_{p+q+1}(\sigma^{p+q+1}), \varphi^p \cup \theta^q] \\
= \;& \sum_{i=1}^{p+q+2} (-1)^{i+1}[\partial^i_{p+q+1}(\sigma^{p+q+1}), \varphi^p \cup \theta^q] \\
= \;& \sum_{i=1}^{p+q+2} (-1)^{i+1}[\lambda^{p+q}_p(\partial^i_{p+q+1}(\sigma^{p+q+1})), \varphi^p] \cdot [\mu^{p+q}_q(\partial^i_{p+q+1}(\sigma^{p+q+1})), \theta^q] \\
= \;& \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}[\lambda^{p+q}_p(\partial^i_{p+q+1}(\sigma^{p+q+1})), \varphi^p] \cdot [\mu^{p+q}_q(\partial^i_{p+q+1}(\sigma^{p+q+1})), \theta^q]+ \\
+ \;& \sum_{i=p+2}^{p+q+2} (-1)^{i+1}[\lambda^{p+q}_p(\partial^i_{p+q+1}(\sigma^{p+q+1})), \varphi^p] \cdot [\mu^{p+q}_q(\partial^i_{p+q+1}(\sigma^{p+q+1})), \theta^q]
\end{aligned}$$

Usando o **Lema 3.1** (iii) para $d = p + q$, a soma acima é igual a:

$$\begin{aligned}
& [\sigma^{p+q+1}, \delta^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)] = \\
= \;& \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}[\partial^i_{p+1}(\lambda^{p+q+1}_{p+1}(\sigma^{p+q+1})), \varphi^p] \cdot [\mu^{p+q+1}_q(\sigma^{p+q+1}), \theta^q]+ \\
+ \;& \sum_{i=p+2}^{p+q+2} (-1)^{i+1}[\lambda^{p+q+1}_p(\sigma^{p+q+1}), \varphi^p] \cdot [\partial^{i-p}_{q+1}(\mu^{p+q+1}_{q+1}(\sigma^{p+q+1})), \theta^q]
\end{aligned}$$

Fazendo $i = p + j$ na segunda soma, obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}[\partial^i_{p+1}(\lambda^{p+q+1}_{p+1}(\sigma^{p+q+1})), \varphi^p] \cdot [\mu^{p+q+1}_q(\sigma^{p+q+1}), \theta^q]+ \\
+ \;& \sum_{j=2}^{q+2}(-1)^{j+1+p}[\lambda^{p+q+1}_p(\sigma^{p+q+1}), \varphi^p] \cdot [\partial^j_{q+1}(\mu^{p+q+1}_{q+1}(\sigma^{p+q+1})), \theta^q]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2), segue que $\delta^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q) = \delta^p(\varphi^p) \cup \theta^q + (-1)^p\varphi^p \cup \delta^q(\theta^q)$. ■

Corolário 3.1 *Se $\delta^q(\theta^q) = 0$, então $\delta^p(\varphi^p) \cup \theta^q = \delta^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)$. Em outras palavras, cobordo $\cup$ cociclo = cobordo.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\delta^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q) &= \delta^p(\varphi^p) \cup \theta^q + (-1)^p\varphi^p \cup \delta^q(\theta^q) \\
&= \delta^p(\varphi^p) \cup \theta^q + (-1)^p\varphi^p \cup 0
\end{aligned}$$

$$= \delta^p(\varphi^p) \cup \theta^q$$

■

Corolário 3.2 *Se* $\delta^p(\varphi^p) = 0$, *então* $\varphi^p \cup \delta^q(\theta^q) = (-1)^p \delta^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)$. *Em outras palavras, cociclo* $\cup$ *cobordo=cobordo.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\delta^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q) &= \delta^p(\varphi^p) \cup \theta^q + (-1)^p \varphi^p \cup \delta^q(\theta^q) \\
&= 0 \cup \theta^q + (-1)^p \varphi^p \cup \delta^q(\theta^q) \\
&= (-1)^p \varphi^p \cup \delta^q(\theta^q)
\end{aligned}$$

■

Corolário 3.3 *Se* $\delta^p(\varphi^p) = \delta^q(\theta^q) = 0$, *então* $\delta^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q) = 0$. *Em outras palavras, cociclo* $\cup$ *cociclo=cociclo.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\delta^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q) &= \delta^p(\varphi^p) \cup \theta^q + (-1)^p \varphi^p \cup \delta^q(\theta^q) \\
&= 0 \cup \theta^q + (-1)^p \varphi^p \cup 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.1 *Seja* K_i *um complexo simplicial induzido de dimensão n, a soma direta* $Z^*(K_i, \mathbb{Z}) = Z^0(K_i, \mathbb{Z}) \oplus \ldots \oplus Z^n(K_i, \mathbb{Z})$ *é um subanel de* $C^*(K_i, \mathbb{Z}) = C^0(K_i, \mathbb{Z}) \oplus \ldots \oplus C^n(K_i, \mathbb{Z})$ *e a soma direta* $B^*(K_i, \mathbb{Z}) = B^0(K_i, \mathbb{Z}) \oplus \ldots \oplus B^n(K_i, \mathbb{Z})$ *é um ideal em* $Z^*(K_i, \mathbb{Z})$. *Conseqüentemente,* $H^*(K_i, \mathbb{Z})$ *é um anel graduado.*

Demonstração. De fato, se $\varphi^p \in Z^p$ e $\theta^q \in Z^q$, então pelo **Corolário 3.3**, temos que $\delta^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q) = 0$, ou seja, se $\varphi, \theta \in Z^*(K_i, \mathbb{Z})$ então $\varphi \cup \theta \in Z^*(K_i, \mathbb{Z})$. Segue que $Z^*(K_i, \mathbb{Z})$ é um subanel de $C^*(K_i, \mathbb{Z})$.

Se $\varphi^p \in Z^p(K_i,\mathbb{Z})$ e $\theta^q \in B^q(K_i,\mathbb{Z})$, então pelo **Corolário 3.2**, existe $\psi^{q-1} \in C^{q-1}(K_i,\mathbb{Z})$ tal que $\delta^{q-1}(\psi^{q-1}) = \theta^q$. Portanto,

$$\begin{aligned}\varphi^p \cup \theta^q = \varphi^p \cup \delta^{q-1}(\psi^{q-1}) &= \pm(\delta^{p+q-1}(\varphi^p \cup \psi^{q-1}) - \delta^p(\varphi^p) \cup \psi^{q-1}) \\ &= \pm\delta^{p+q-1}(\varphi^p \cup \psi^{q-1})\end{aligned}$$

de modo que $\varphi^p \cup \theta^q$ é um cobordo. Analogamente, podemos verificar que $\theta^q \cup \varphi^p$ é um cobordo. Logo, $B^*(K_i,\mathbb{Z})$ é um ideal em $Z^*(K_i,\mathbb{Z})$.

Pelo **Lema 1.1**, $H^*(K_i,\mathbb{Z}) = \frac{Z^*(K_i,\mathbb{Z})}{B^*(K_i,\mathbb{Z})}$ é um anel graduado.

■

Explicitamente o produto em $H^*(K_i,\mathbb{Z})$ é dado por

$$\overline{\varphi} \cup \overline{\theta} = \overline{\varphi \cup \theta}$$

Observação 3.5 *O produto cup, a nível de cocadeias, não é comutativo. De fato, seja* $\sigma^{p+q} \in C_{p+q}$ *tal que* $\lambda_p^{p+q}(\sigma^{p+q}) = \tau_1^p$, $\mu_q^{p+q}(\sigma^{p+q}) = \gamma_1^q$,$\lambda_q^{p+q}(\sigma^{p+q}) = \tau_2^q$ *e* $\mu_p^{p+q}(\sigma^{p+q}) = \gamma_2^p$ *. Definimos* $\varphi^p \in C^p(K_i;\mathbb{Z})$ *e* $\theta^q \in C^q(K_i;\mathbb{Z})$ *em* $E_p(K_i)$ *e* $E_q(K_i)$ *respectivamente, da seguinte forma:*

$$\varphi^p(\sigma^p) = \begin{cases} 1, \ se\ \sigma^p = \tau_1^p \\ 0, \ caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$$

e

$$\theta^q(\sigma^q) = \begin{cases} 1, \ se\ \sigma^q = \gamma_1^q \\ 0, \ caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}[\sigma^{p+q}, \varphi^p \cup \theta^q] &= [\lambda_p^{p+q}(\sigma^{p+q}), \varphi^p] \cdot [\mu_q^{p+q}(\sigma^{p+q}), \theta^q] \\ &= [\tau_1^p, \varphi^p] \cdot [\gamma_1^q, \theta^q] \\ &= 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Evidentemente, como $\tau_2^q \neq \gamma_1^q$ *e* $\gamma_2^p \neq \tau_1^p$ *temos que*

$$\begin{aligned}[\sigma^{p+q}, \theta^q \cup \varphi^p] &= [\lambda_q^{p+q}(\sigma^{p+q}), \theta^q] \cdot [\mu_p^{p+q}(\sigma^{p+q}), \varphi^p] \\ &= [\tau_2^q, \theta^q] \cdot [\gamma_2^p, \varphi^p]\end{aligned}$$

$= 0 \cdot 0 = 0$

Portanto, $\varphi^p \cup \theta^q \neq \theta^q \cup \varphi^p$

3.2 Produto Cup Geométrico

De acordo com as convenções, a partir de uma enumeração dos vértices, os p-simplexos de K_g orientados possuem um representante da classe de orientação cujos índices dos vértices que geram os p-simplexos orientados positivamente estão sempre em ordem crescente. Mais formalmente, existe um isomorfismo de cadeias

$$\phi : C_*(K_i) \to C_*(K_g)$$

de modo que $\phi_p : C_p(K_i) \to C_p(K_g)$ é dada por $\phi_p : (i_1, i_2, \ldots, i_{p+1}) \mapsto \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{p+1}} \rangle$

Isto nos permite definir também o produto cup para $\varphi^p \in C^p(K_g)$ e $\theta^q \in C^q(K_g)$ através do isomorfismo ϕ.

Definição 3.4 *Seja K_g um complexo simplicial geométrico orientado. Se $\varphi^p \in C^p(K_g;\mathbb{Z})$ e $\theta^q \in C^q(K_g;\mathbb{Z})$, definimos o* ***produto cup geométrico*** $\varphi^p \cup \theta^q \in C^{p+q}(K_g;\mathbb{Z})$ *para $\sigma^{p+q} \in E_{p+q}(K_g)$ da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}
(\varphi^p \cup \theta^q)(\sigma^{p+q}) &= [\sigma^{p+q}, (\varphi^p \circ \phi_p \cup_\phi \theta^q \circ \phi_q) \circ \phi_{p+q}^{-1}] \\
&= [\phi_{p+q}^{-1}(\sigma^{p+q}), \varphi^p \circ \phi_p \cup_\phi \theta^q \circ \phi_q] \\
&= [\lambda_p^{p+q}(\phi_{p+q}^{-1}(\sigma^{p+q})), \varphi^p \circ \phi_p] \cdot [\mu_q^{p+q}(\phi_{p+q}^{-1}(\sigma^{p+q})), \theta^q \circ \phi_q] \\
&= [(\phi_p \circ \lambda_p^{p+q} \circ \phi_{p+q}^{-1})(\sigma^{p+q}), \varphi^p] \cdot [(\phi_q \circ \mu_q^{p+q} \circ \phi_{p+q}^{-1})(\sigma^{p+q}), \theta^q]
\end{aligned}$$

Observação 3.6 *O isomorfismo $\phi : C_*(K_i) \to C_*(K_g)$ induz o isomorfismo de anel graduado $\phi^* : C^*(K_g) \to C^*(K_i)$, isto é, $\phi^{p+q}(a^p \cup b^q) = \phi^p(a^p) \cup \phi^q(b^q)$. De fato,*

$$\phi^{p+q}(a^p \cup b^q) = (a^p \circ \phi_p \cup_\phi b^q \circ \phi_q) \circ \phi_{p+q}^{-1}\phi_{p+q} = \phi^p(a^p) \cup \phi^q(b^q).$$

Observação 3.7 *A definição do produto cup em $C^*(K_g)$ foi feita usando uma enumeração dos vértices de K_g, a qual induz uma orientação em K_g e o isomorfismo $\phi : C_*(K_i) \to C_*(K_g)$.*

Ao usarmos uma outra enumeração para os vértices, digamos ψ, identificamos cada simplexo padrão $\sigma^p = \langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{p+1}} \rangle = \langle a_{\psi(i_1)}, \ldots, a_{\psi(i_{p+1})} \rangle$.

A partir da primeira enumeração, construímos $C_p(K_i)$ gerado pelas $(p+1)$-uplas $(i_1, i_2, \ldots, i_{p+1})$, dispostas em ordem crescente. Podemos considerar agora $C_p(K_{\psi(i)})$ gerado pelas $(p+1)$-uplas $(\psi(i_1), \psi(i_2), \ldots, \psi(i_{p+1}))$.

Embora esta última upla pode não estar em ordem crescente, o fato é que podemos definir, neste contexto, faces anterior e posterior o que nos permite definir o produto cup em $C^*(K_{\psi(i)})$.

A enumeração ψ induz um isomorfismo $\bar{\psi} : C_*(K_{\psi(i)}) \to C_*(K_g)$, que leva $(\psi(i_1), \psi(i_2), \ldots, \psi(i_{p+1}))$ em $\langle a_{i_1}, a_{i_2} \ldots a_{i_{p+1}} \rangle$, de modo que ao definirmos o produto cup através de $\bar{\psi}$ temos a igualdade:

$$\begin{aligned} (a^p \cup b^q)(\sigma^{p+q}) = & \ [\sigma^{p+q} \, , \, (a^p \circ \phi_p \cup_\phi b^q \circ \phi_q) \circ \phi^{-1}_{p+q}] \\ = & \ [\sigma^{p+q} \, , \, (a^p \circ \bar{\psi}_p \cup_{\bar{\psi}} b^q \circ \bar{\psi}_q) \circ \bar{\psi}^{-1}_{p+q}] \end{aligned}$$

Definição 3.5 *Sejam K_g e L_g complexos simpliciais. Uma* ***aplicação simplicial*** *$f : K_g \to L_g$ é uma função $f : Vert(K_g) \to Vert(L_g)$ de modo que se $\overline{\{a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}\}}$ é um simplexo de K_g, então $\overline{\{f(a_1), \ldots, f(a_{p+1})\}}$ é um simplexo de L_g. É claro que repetições entre $f(a_1), \ldots, f(a_{p+1})$ são permitidas.*

Observação 3.8 *Quando $f : Vert(K_g) \to Vert(L_g)$ é injetora e K_g tem uma orientação que provém de uma enumeração dos vértices $en : \{1, 2, \ldots, b(0)\} \to Vert(K_g)$, então podemos usar esta enumeração para induzir uma enumeração dos vértices do complexo L_g. Comecemos enumerando os vértices que estão no conjunto $f(Vert(K_g))$, definindo $en(i) = b_i \Leftrightarrow f(a_i) = b_i$ e os vértices de $Vert(L_g) - f(Vert(K_g))$ de forma aleatória. Se a enumeração dos vértices de*

L_g *é feita desta forma dizemos que* L_g **tem uma orientação induzida pela** f.

Teorema 3.2 *Se* $f : K_g \to L_g$ *é uma aplicação simplicial tal que* $f : Vert(K_g) \to Vert(L_g)$ *é injetora e* L_g *tem a orientação induzida de* f *, então* $f_q : C_q(K_g) \to C_q(L_g)$*, dada por* $f_q(\langle a_1, \ldots, a_{q+1}\rangle) = \langle f(a_1), \ldots, f(a_{q+1})\rangle$ *é uma aplicação de cadeias.*

Demonstração. De fato, dado $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}\rangle \in E_p(K_g)$, temos:

$$\begin{aligned} \partial_p \circ f_p(\langle a_1, \ldots, a_{p+1}\rangle) &= \\ &= \partial_p(\langle f(a_1), \ldots, f(a_{p+1})\rangle) \\ &= \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{j+1}\langle f(a_1), \ldots, \widehat{f(a_j)}, \ldots f(a_{p+1})\rangle \end{aligned}$$

Enquanto que,

$$\begin{aligned} (f_{p-1} \circ \partial_p)(\langle a_1, \ldots, a_{p+1}\rangle) &= f_{p-1}(\sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{j+1}\langle a_1, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_{p+1}\rangle) \\ &= \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{j+1}\langle f(a_1), \ldots, \widehat{f(a_j)}, \ldots f(a_{p+1})\rangle \end{aligned}$$

Portanto, $\partial_p \circ f_p = f_{p-1} \circ \partial_p$. ■

Teorema 3.3 *Seja* $f : K_g \to L_g$ *uma aplicação entre complexos simpliciais. Se* $f : Vert(K_g) \to Vert(L_g)$ *é injetora e a orientação de* L_g *é induzida de* f*, então* $f^* : C^*(L_g) \to C^*(K_g)$ *é um homomorfismo de anel graduado, isto é,* $f^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q) = f^p(\varphi^p) \cup f^q(\theta^q)$

Demonstração. De fato, seja $\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{p+q+1}}\rangle \in E_{p+q}(K_g)$. Com a orientação de L_g induzida por f, temos que

$$\begin{aligned} f^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)(\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{p+q+1}}\rangle) &= (\varphi^p \cup \theta^q) \circ f_{p+q}(\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{p+q+1}}\rangle) \\ &= (\varphi^p \cup \theta^q)(\langle f(a_{i_1}), \ldots, f(a_{i_{p+q+1}})\rangle) \end{aligned}$$

Mas, por definição

$$
\begin{aligned}
&(\varphi^p \cup \theta^q)(\langle f(a_{i_1}), \ldots, f(a_{i_{p+q+1}})\rangle) = \\
&= [\langle f(a_{i_1}), \ldots, f(a_{i_{p+q+1}})\rangle, (\varphi^p \circ \phi_p \cup_\phi \theta^q \circ \phi_q) \circ \phi_{p+q}^{-1}] = \\
&= [\phi_{p+q}^{-1}(\langle f(a_{i_1}), \ldots, f(a_{i_{p+q+1}})\rangle), \varphi^p \circ \phi_p \cup_\phi \theta^q \circ \phi_q] \\
&= [(i_1, \ldots, i_{p+q+1}), \varphi^p \circ \phi_p \cup_\phi \theta^q \circ \phi_q] \\
&= [(i_1, \ldots, i_{p+1}), \varphi^p \circ \phi_p] \cdot [(i_{p+1}, \ldots, i_{p+q+1}), \theta^q \circ \phi_q] \\
&= [\langle f(a_{i_1}), \ldots, f(a_{i_{p+1}})\rangle, \varphi^p] \cdot [\langle f(a_{i_{p+1}}), \ldots, f(a_{i_{p+q+1}})\rangle, \theta^q]
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Enquanto que,

$$
\begin{aligned}
&f^p(\varphi^p) \cup f^q(\theta^q)(\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{p+q+1}}\rangle) = \\
&= [\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{p+q+1}}\rangle, (\varphi^p \circ f_p) \circ \phi_p \cup_\phi (\theta^q \circ f_q) \circ \phi_q) \circ \phi_{p+q}^{-1}] \\
&= [\phi_{p+q}^{-1}(\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{p+q+1}}\rangle), (\varphi^p \circ f_p) \circ \phi_p \cup_\phi (\theta^q \circ f_q) \circ \phi_q)] \\
&= [(i_1, i_2, \ldots, i_{p+q+1}), (\varphi^p \circ f_p) \circ \phi_p \cup_\phi (\theta^q \circ f_q) \circ \phi_q)] \\
&= [(i_1, i_2, \ldots, i_{p+1}), (\varphi^p \circ f_p) \circ \phi_p] \cdot [(i_{p+1}, \ldots, i_{p+q+1}), (\theta^q \circ f_q) \circ \phi_q)] \\
&= [\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{p+1}}\rangle, \varphi^p \circ f_p] \cdot [\langle a_{i_{p+1}}, \ldots, a_{i_{p+q+1}}\rangle, \theta^q \circ f_q] \\
&= [\langle f(a_{i_1}), \ldots, f(a_{i_{p+1}})\rangle, \varphi^p] \cdot [\langle f(a_{i_{p+1}}), \ldots, f(a_{i_{p+q+1}})\rangle, \theta^q]
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Comparando, (3.3) e (3.4) verifica-se que $f^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q) = f^p(\varphi^p) \cup f^q(\theta^q)$. ■

Seguem alguns exemplos da situação do Teorema anterior:

Exemplo 3.1 *Se K_g é um complexo simplicial geométrico e σ_i^p é o i-ésimo p-simplexo então a inclusão $j : K_g(\sigma_i^p) \to K_g$, onde $K_g(\sigma_i^p)$ é o subcomplexo de K_g formado de todas as faces de σ_i^p, é uma aplicação simplicial. Portanto $j^* : C^*(K_g) \to C^*(K_g(\sigma_i^p))$ é um homomorfismo de anel graduado.*

Exemplo 3.2 *Considere $K_g(\sigma_i^p)$ e seja $r : K_g(\sigma_i^p) \to K_g(\sigma_i^p)$ tal que $r(a_{i_j}) = a_{i_{p+2-j}}$. Então r é uma aplicação simplicial e portanto r^* é um homomorfismo de anel graduado.*

Lema 3.3 *Seja $r_q : C_q(K_g(\sigma_i^p)) \to C_q(K_g(\sigma_i^p))$ a induzida da r do exemplo anterior. Então r é homotópica a identidade.*

Demonstração. Pelo **Lema 2.3**, $K_g(\sigma_i^p)$ é acíclico e o complexo de cadeias

$$0 \;\to\; C_p(K_g(\sigma_i^p)) \;\to\; \ldots \;\xrightarrow{\partial_2}\; C_1(K_g(\sigma_i^p)) \;\xrightarrow{\partial_1}\; C_0(K_g(\sigma_i^p)) \;\xrightarrow{\varepsilon}\; \mathbb{Z}$$

é exato. Como $\varepsilon(r_0 - I_0)(\sigma_j^0) = 0$, para todo $\sigma_j^0 \in E_0(K_g(\sigma_i^p))$, então existe $\beta_j^1 \in C_1(K_g(\sigma_i^p))$ tal que $\partial_1(\beta_j^1) = (r_0 - I_0)(\sigma_j^0)$. Definimos $h_0 : C_0(K_g(\sigma_i^p)) \to C_1(K_g(\sigma_i^p))$ colocando $h_0(\sigma_j^0) = \beta_j^1$ e assim $\partial_1 h_0 = r_0 - I_0$.

Para definir $h_1 : C_1(K_g(\sigma_i^p)) \to C_2(K_g(\sigma_i^p))$, note que se $\sigma_k^1 \in E_1(K_g(\sigma_i^p))$ então

$$\begin{aligned}\partial_1(r_1 - I_1 - h_0\partial_1)\sigma_k^1 &= \Big(r_0\partial_1 - I_0\partial_1 - (r_0 - I_0)\partial_1\Big)\sigma_k^1. \text{ Portanto,}\\ \partial_1(r_1 - I_1 - h_0\partial_1)\sigma_k^1 &= 0\end{aligned}$$

Portanto, existe $\beta_k^2 \in C_2(K_g(\sigma_i^p))$ tal que $\partial_2(\beta_k^2) = (r_1 - I_1 - h_0\partial_1)\sigma_k^1$. Assim, definimos $h_1(\sigma_k^1) = \beta_k^2$. Logo, $\partial_2 h_1 + h_0\partial_1 = r_1 - I_1$ e o resultado segue por indução. ■

Teorema 3.4 *Seja K_g um complexo simplicial geométrico orientado. Se $\overline{\varphi^p} \in H^p(K_g)$ e $\overline{\theta^q} \in H^q(K_g)$, então*

$$\overline{\varphi^p} \cup \overline{\theta^q} = (-1)^{p\cdot q}\overline{\theta^q} \cup \overline{\varphi^p}$$

Demonstração. De fato, consideremos os seguintes passos:

Passo 1. Definimos $\bar{r}_q : C_q(K_g) \to C_q(K_g)$ por:

i) $\bar{r}_0\langle a_i\rangle = \langle a_i\rangle$;

ii) $\bar{r}_q\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{q+1}}\rangle = \langle a_{i_{q+1}}, a_{i_q}, \ldots, a_{i_1}\rangle$.

Note que:

a) $\bar{r}_q$ não é induzida de uma aplicação simplicial. Quando restrita ao subcomplexo $C_*(K_g(\sigma^q))$, aí sim teremos $\bar{r}_q = r_q$;

b) $\bar{r}_q$ não é uma aplicação de cadeias de $C_*(K_g)$, no entanto, de acordo com a **Convenção 2.1**, $R = \{\varepsilon_q.\bar{r}_q : C_q(K_g) \to C_q(K_g)\}$, onde $\varepsilon_q = (-1)^{\frac{1}{2}q(q+1)}$, é uma aplicação de cadeias com suporte acíclico. De fato, de acordo com a **Definição 1.29**, dado $\gamma \in \cup E_i(K_g)$, o subcomplexo $V_*(\gamma)$(subcomplexo de cadeia gerado pelas faces de γ), satisfaz o seguinte:

i) $V_*(\gamma)$ é acíclico pelo **Lema 2.3**;

ii) se $\gamma \in E_n(K_g)$ então $R_n(\gamma) \in V_n(\gamma) \subset C_n(K_g)$;

iii) se β é face de γ então $V(\beta) \subset V(\gamma)$.

c) Como $R_0 - I_0$ é nula, onde I_0 é a induzida de identidade de K_g, segue que $R \simeq I$ pelo **Corolário 1.2**.

Passo 2. Sabemos $\overline{\varphi^p} \cup \overline{\theta^q} = \overline{(\varphi^p \cup \theta^q)} = \overline{\varepsilon_{p+q}\bar{r}^{(p+q)}(\varphi^p \cup \theta^q)}$

Calculando $[\sigma^{p+q}\,,\, R^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)]$, se $j_{p+q} : C_{p+q}(K_g(\sigma^{p+q})) \to C_{p+q}(K_g)$ é a inclusão, então

$$\begin{aligned}
& [\sigma^{p+q}\,,\, R^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)] = \\
= \;& [j_{p+q}(\sigma^{p+q})\,,\, R^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)] \\
= \;& [j_{p+q}(\sigma^{p+q}),\, \varepsilon_{p+q}\bar{r}^{(p+q)}(\varphi^p \cup \theta^q)] \\
= \;& \varepsilon_{p+q}[j_{p+q}(\sigma^{p+q})\,,\, \overline{r}^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)] \\
= \;& \varepsilon_{p+q}[\sigma^{p+q}\,,\, (\varphi^p \cup \theta^q) \circ \overline{r}_{p+q} \circ j_{p+q}] \\
= \;& \varepsilon_{p+q}[\sigma^{p+q}\,,\, j^{p+q} \circ \overline{r}^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)] \qquad (3.5) \\
= \;& \varepsilon_{p+q}[\sigma^{p+q}\,,\, r^{p+q} \circ j^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)] \\
= \;& \varepsilon_{p+q}[\sigma^{p+q}\,,\, r^p(j^p(\varphi^p)) \cup r^q(j^q(\theta^q))] \\
= \;& \varepsilon_{p+q}[\phi_p\lambda_p^{p+q}\phi_{p+q}^{-1}(\sigma^{p+q})\,,\, r^p(j^p(\varphi^p))][\phi_q\mu_q^{p+q}\phi_{p+q}^{-1}\sigma^{p+q}\,, r^q(j^q(\theta^q))] \\
= \;& \varepsilon_{p+q}[r_p\phi_p\lambda_p^{p+q}\phi_{p+q}^{-1}(\sigma^{p+q})\,,\, j^p(\varphi^p)][r_q\phi_q\mu_q^{p+q}\phi_{p+q}^{-1}\sigma^{p+q}\,, j^q(\theta^q)] \\
= \;& \varepsilon_{p+q}\varepsilon_p\varepsilon_q[\phi_p\mu_p^{p+q}\phi_{p+q}^{-1}(\sigma^{p+q})\,,\, \varphi^p][\phi_q\lambda_q^{p+q}\phi_{p+q}^{-1}(\sigma^{p+q})\,, \theta^q]
\end{aligned}$$

enquanto que,

$$\begin{aligned}
& [\sigma\,,\, R^q(\theta^q) \cup R^p(\varphi^p)] \\
= \;& [\sigma\,,\, \varepsilon_q \bar{r}^q(\theta^q) \cup \varepsilon_p \bar{r}^p(\varphi^p)] \\
= \;& \varepsilon_p\varepsilon_q [\phi_q \lambda_q^{p+q} \phi_{p+q}^{-1}(\sigma)\,,\, \bar{r}^q \theta^q][\phi_p \mu_p^{p+q} \phi_{p+q}^{-1}(\sigma)\,,\, \bar{r}^p(\varphi)^p] \qquad (3.6) \\
= \;& \varepsilon_p\varepsilon_q [\bar{r}_q \phi_q \lambda_q^{p+q} \phi_{p+q}^{-1}(\sigma)\,,\, \theta^q][\bar{r}_p \phi_p \mu_p^{p+q} \phi_{p+q}^{-1}(\sigma)\,,\, \varphi^p] \\
= \;& [\phi_q \lambda_q^{p+q} \phi_{p+q}^{-1}(\sigma)\,,\, \theta^q][\phi_p \mu_p^{p+q} \phi_{p+q}^{-1}(\sigma)\,,\, \varphi^p]
\end{aligned}$$

Substituindo (3.6) em (3.5), temos :

$$[\sigma\,,\, R^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)] = (-1)^{pq}[\sigma\,,\, R^q(\theta^q) \cup R^p(\varphi^p)], \;\; \forall\, \sigma \in C_{p+q}(K_g),$$

ou seja, $R^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q) = (-1)^{pq} R^q(\theta^q) \cup R^p(\varphi^p)$

Passo 3. Portanto,

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi^p} \cup \overline{\theta^q} &= \overline{\varphi^p \cup \theta^q} \\
&= \overline{R^{p+q}(\varphi^p \cup \theta^q)} \\
&= \overline{(-1)^{p\cdot q} R^q(\theta^q) \cup R^p(\varphi^p)} \\
&= (-1)^{p\cdot q}\overline{R^q(\theta^q) \cup R^p(\varphi^p)} \\
&= (-1)^{p\cdot q}\overline{R^q(\theta^q)} \cup \overline{R^p(\varphi^p)} \\
&= (-1)^{p\cdot q}\overline{\theta^q} \cup \overline{\varphi^p}
\end{aligned}$$

■

3.3 Representação matricial do produto cup

Definição 3.6 *Chama-se* **produto de Hadamard** *de duas matrizes* $a = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $b = [b_{ij}]_{m\times n}$ *à matriz* $c = [c_{ij}]_{m\times n}$ *onde* $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$.

Notação. Denotaremos o produto de Hadamard das matrizes $a = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $b = [b_{ij}]_{m\times n}$ por $[a_{ij}] \star [b_{ij}]$.

Teorema 3.5 *Se $\varphi^p \in C^p(K_i;\mathbb{Z})$, $\theta^q \in C^q(K_i;\mathbb{Z})$ então temos que*

$$[\varphi^p \cup \theta^q]_{E^{p+q}} = ([\varphi^p]_{E^p} \cdot [\lambda_p^{p+q}]) \star ([\theta^q]_{E^q} \cdot [\mu_q^{p+q}])$$

Demonstração. De fato, se $b(p)$, $b(q)$ e $b(p+q)$ são as cardinalidades de E_p, E_q e E_{p+q} respectivamente então suponhamos que $E_p = \{\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_{b(p)}^p\}$, $E_q = \{\beta_1^q, \beta_2^q, \ldots, \beta_{b(q)}^q\}$ e $E_{p+q} = \{\gamma_1^{p+q}, \gamma_2^{p+q}, \ldots,\ \gamma_{b(p+q)}^{p+q}\}$. Lembramos que $E^p = ((\alpha_1^p)^*, (\alpha_2^p)^*, \ldots, (\alpha_{b(p)}^p)^*)$, onde $(\alpha_i^p)^*$ é o $\mathbb{Z}$-homomorfismo dado por $(\alpha_i^p)^*(\alpha_j^p) = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases}$. Analogamente, estão definidos E^q e E^{p+q}. Seja $\varphi^p \in C^p(K_i, \mathbb{Z})$ tal que $[\varphi^p]_{E^p} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{b(p)} \end{pmatrix}$, ou seja, $\varphi^p = \sum_{i=1}^{b(p)} x_i \cdot (\alpha_i^p)^*$ e $\theta^q \in C^q(K_i, \mathbb{Z})$ tal que $[\theta^q]_{E^q} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{b(q)} \end{pmatrix}$. Por definição, $\varphi^p \cup \theta^q \in C^{p+q}(K_i, \mathbb{Z})$ é o $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\varphi^p \cup \theta^q : C_{p+q} \to \mathbb{Z}$ definido para $\gamma_j^{p+q} \in E_{p+q}$ por $[\gamma_j^{p+q}, \varphi^p \cup \theta^q] = [\lambda_p^{p+q}(\gamma_j^{p+q}), \varphi^p] \cdot [\mu_q^{p+q}(\gamma_j^{p+q}), \theta^q]$

Se

$$[\lambda_p^{p+q}]_{E_p}^{E_{p+q}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1b(p+q)} \\ a_{21} & \ldots & a_{2b(p+q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{b(p)1} & \ldots & a_{b(p)b(p+q)} \end{pmatrix} \text{ e } [\mu_q^{p+q}]_{E_q}^{E_{p+q}} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1b(p+q)} \\ c_{21} & \ldots & c_{2b(p+q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{b(q)1} & \ldots & c_{b(q)b(p+q)} \end{pmatrix}$$

são as matriz dos operadores faces anterior e posterior então temos que:

$$[\varphi^p] \cdot [\lambda_p^{p+q}] = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{b(p)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1b(p+q)} \\ a_{21} & \ldots & a_{2b(p+q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{b(p)1} & \ldots & a_{b(p)b(p+q)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{b(p)} x_i a_{i1} & \ldots & \sum_{i=1}^{b(p)} x_i a_{ij} & \ldots & \sum_{i=1}^{b(p)} x_i a_{ib(p+q)} \end{pmatrix}$$

e

$$[\theta^q]\cdot[\mu_q^{p+q}] = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{b(q)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1b(p+q)} \\ c_{21} & \dots & c_{2b(p+q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{b(q)1} & \dots & c_{b(q)b(p+q)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{b(q)} y_i c_{i1} & \dots \sum_{i=1}^{b(q)} y_i c_{ij} & \dots & \sum_{i=1}^{b(q)} y_i c_{ib(p+q)} \end{pmatrix}$$

Logo,

$([\varphi^p]\cdot[\lambda_p^{p+q}]) \star ([\theta^q]\cdot[\mu_q^{p+q}]) =$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{b(p)} x_i a_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{b(p)} x_i a_{ib(p+q)} \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{b(q)} y_i c_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{b(q)} y_i c_{ib(p+q)} \end{pmatrix}$$

Por outro lado, para $\gamma_j^{p+q} \in E_{p+q}$ suponhamos que $\lambda_p^{p+q}(\gamma_j^{p+q}) = \sum_{i=1}^{b(p)} a_{ij}\alpha_i^p$ e $\mu_q^{p+q}(\gamma_j^{p+q}) = \sum_{i=1}^{b(q)} c_{ij}\beta_i^q$. Segue que

$$\begin{aligned} [\gamma_j^{p+q}, \varphi^p \cup \theta^q] = & [\lambda_p^{p+q}(\gamma_j^{p+q}), \varphi^p]\cdot[\mu_q^{p+q}(\gamma_j^{p+q}), \theta^q] \\ = & \varphi^p(\sum_{i=1}^{b(p)} a_{ij}\alpha_i^p)\cdot\theta^q(\sum_{i=1}^{b(q)} c_{ij}\beta_i^q) \\ = & (\sum_{i=1}^{b(p)} a_{ij}\varphi^p(\alpha_i^p))\cdot(\sum_{i=1}^{b(q)} c_{ij}\theta^q(\beta_i^q)) \\ = & (\sum_{i=1}^{b(p)} a_{ij}x_i))\cdot(\sum_{i=1}^{b(q)} c_{ij}y_i)) \end{aligned}$$

ou seja, como γ_j^{p+q} é um elemento básico então a j-ésima coluna da matriz do $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\varphi^p \cup \theta^q$ é dada pelo segundo membro da igualdade acima. Portanto,

$$\begin{aligned} & [\varphi^p \cup \theta^q]_{E^{p+q}} = \\ = & \Big((\sum_{i=1}^{b(p)} a_{i1}x_i)\cdot(\sum_{i=1}^{b(q)} c_{i1}y_i)\dots(\sum_{i=1}^{b(p)} a_{ib(p+q)}x_i)\cdot(\sum_{i=1}^{b(q)} c_{ib(p+q)}y_i)\Big) \\ = & \Big((\sum_{i=1}^{b(p)} x_i a_{i1})\cdot(\sum_{i=1}^{b(q)} y_i c_{i1})\dots(\sum_{i=1}^{b(p)} x_i a_{ib(p+q)})\cdot(\sum_{i=1}^{b(q)} y_i c_{ib(p+q)})\Big) \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{b(p)} x_i a_{i1} \quad \ldots \quad \sum_{i=1}^{b(p)} x_i a_{ib(p+q)} \right) \star \left(\sum_{i=1}^{b(q)} y_i c_{i1} \quad \ldots \quad \sum_{i=1}^{b(q)} y_i c_{ib(p+q)} \right)$$

Comparando as matrizes $[\varphi^p \cup \theta^q]_{E^{p+q}}$ e $([\varphi^p]_{E^p} \cdot [\lambda_p^{p+q}]) \star ([\theta^q]_{E^q} \cdot [\mu_q^{p+q}])$ podemos então verificar a igualdade. ■

Observação 3.9 *A fórmula* $[\varphi^p \cup \theta^q]_{E^{p+q}} = ([\varphi^p]_{E^p} \cdot [\lambda_p^{p+q}]) \star ([\theta^q]_{E^q} \cdot [\mu_q^{p+q}])$ *é a mesma quando* $\varphi^p \in C^p(K_g;\mathbb{Z})$ *e* $\theta^q \in C^q(K_g;\mathbb{Z})$*, uma vez que* $[\phi_q]_{E_p(K_g)}^{E_p(K_i)}$ *é a matriz identidade.*

Vamos dar agora uma descrição global do produto cup em termos de matrizes.

Definição 3.7 *Seja* K_i *um complexo simplicial induzido de dimensão* n*. Dado* $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^n) \in C^*(K_i;\mathbb{Z})$ *definimos a matriz de* φ *como sendo a matriz de blocos da seguinte forma:*

$$[\varphi] = [[\varphi^0] \ [\varphi^1] \ \ldots \ [\varphi^n]]_{1\times(b(0)+b(1)+\ldots+b(n))}$$

Para $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^n), \theta = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^n) \in C^*(K_i;\mathbb{Z})$ temos que

$$[\varphi \cup \theta] = [1 \ 1 \ \ldots \ 1] \cdot \left[\Big([\varphi]_D \cdot [\lambda_T] \Big) \star \Big(\overline{[\theta]_D \cdot [\mu_T]} \Big) \right] \tag{3.7}$$

onde as matrizes $[\varphi]_D, [\theta]_D$ são as matrizes de blocos dadas por

$$\begin{bmatrix} [\varphi^0] & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & [\varphi^1] & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & [\varphi^n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\theta^0] & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & [\theta^1] & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & [\theta^n] \end{bmatrix}$$

respectivamente, e a operação barra consiste em inverter a ordem dos elementos não nulos nas colunas da matriz $[\theta]_D \cdot [\mu_T]$.

Exemplo 3.3 *Seja K_i tal que $dim(K_i) = 2$. Dados $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2), \theta = (\theta^0, \theta^1, \theta^2) \in C^*(K_i; \mathbb{Z})$ temos que*

$$\varphi \cup \theta = (\varphi^0 \cup \theta^0,\ \varphi^0 \cup \theta^1 + \varphi^1 \cup \theta^0,\ \varphi^0 \cup \theta^2 + \varphi^1 \cup \theta^1 + \varphi^2 \cup \theta^0).$$

Logo,

$$[\varphi \cup \theta] = \Big[[\varphi^0 \cup \theta^0]\ [\varphi^0 \cup \theta^1 + \varphi^1 \cup \theta^0]\ [\varphi^0 \cup \theta^2 + \varphi^1 \cup \theta^1 + \varphi^2 \cup \theta^0]\Big].$$

Enquanto que por (3.7),

$$[\varphi \cup \theta] = [1\ 1\ 1]\{[\varphi]_D([I] + [\lambda] + [\lambda^2])\} \star \overline{\{[\theta]_D \cdot ([I] + [\mu] + [\mu^2])\}}$$

$$= [1\ 1\ 1]\left\{\begin{bmatrix} [\varphi^0][\lambda_0^0] & [\varphi^0][\lambda_0^1] & [\varphi^0][\lambda_0^2] \\ 0 & [\varphi^1][\lambda_1^1] & [\varphi^1][\lambda_1^2] \\ 0 & 0 & [\varphi^2][\lambda_2^2] \end{bmatrix}\right\} \star \overline{\left\{\begin{bmatrix} [\theta^0][\mu_0^0] & [\theta^0][\mu_0^1] & [\theta^0][\mu_0^2] \\ 0 & [\theta^1][\mu_1^1] & [\theta^1][\mu_1^2] \\ 0 & 0 & [\theta^2][\mu_2^2] \end{bmatrix}\right\}}$$

$$= [1\ 1\ 1]\left\{\begin{bmatrix} [\varphi^0][\lambda_0^0] & [\varphi^0][\lambda_0^1] & [\varphi^0][\lambda_0^2] \\ 0 & [\varphi^1][\lambda_1^1] & [\varphi^1][\lambda_1^2] \\ 0 & 0 & [\varphi^2][\lambda_2^2] \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} [\theta^0][\mu_0^0] & [\theta^1][\mu_1^1] & [\theta^2][\mu_2^2] \\ 0 & [\theta^0][\mu_0^1] & [\theta^1][\mu_1^2] \\ 0 & 0 & [\theta^0][\mu_0^2] \end{bmatrix}\right\}$$

$$= [1\ 1\ 1] \cdot \begin{bmatrix} [\varphi^0][\lambda_0^0] \star [\theta^0][\mu_0^0] & [\varphi^0][\lambda_0^1] \star [\theta^1][\mu_1^1] & [\varphi^0][\lambda_0^2] \star [\theta^2][\mu_2^2] \\ 0 & [\varphi^1][\lambda_1^1] \star [\theta^0][\mu_0^1] & [\varphi^1][\lambda_1^2] \star [\theta^1][\mu_1^2] \\ 0 & 0 & [\varphi^2][\lambda_2^2] \star [\theta^0][\mu_0^2] \end{bmatrix}$$

$$= [1\ 1\ 1] \cdot \begin{bmatrix} [\varphi^0 \cup \theta^0] & [\varphi^0 \cup \theta^1] & [\varphi^0 \cup \theta^2] \\ 0 & [\varphi^1 \cup \theta^0] & [\varphi^1 \cup \theta^1] \\ 0 & 0 & [\varphi^2 \cup \theta^0] \end{bmatrix}$$

$$= \Big[[\varphi^0 \cup \theta^0]\ [\varphi^0 \cup \theta^1 + \varphi^1 \cup \theta^0]\ [\varphi^0 \cup \theta^2 + \varphi^1 \cup \theta^1 + \varphi^2 \cup \theta^0]\Big].$$

Capítulo 4

Produto Cap

4.1 Produto Cap em K_i

Dado um complexo simplicial induzido K_i, queremos definir o produto de uma $(p+q)-$cadeia γ por uma $p-$cocadeia φ. Para isso, consideremos primeiramente o seguinte resultado:

Lema 4.1 *Se $c_q, d_q \in C_q(K_i)$ são tais que $\forall\ \theta^q \in C^q(K_i;\mathbb{Z})$ tem-se $\theta^q(c_q - d_q) = 0 = [c_q - d_q, \theta^q]$ então $c_q = d_q$.*

Demonstração. De fato, se $C_q(K_i) = 0$ então $c_q = d_q$. Se $C_q(K_i) \neq 0$, suponhamos que $c_q \neq d_q$. Para $c_q = \sum_{i=1}^{b(q)} x_i \cdot \sigma_i^q$ e $d_q = \sum_{i=1}^{b(q)} y_i \cdot \sigma_i^q$ existe $1 \leq i \leq b(q)$ tal que $x_i \neq y_i$. Tomando $\theta^q = (\sigma_i^q)^* \in C^q(K_i;\mathbb{Z})$ temos que

$$\begin{aligned}\theta^q(c_q - d_q) &= \theta^q(c_q) - \theta^q(d_q)\\ &= x_i - y_i\end{aligned}$$

Como $x_i - y_i \neq 0$ então $\theta^q(c_q - d_q) \neq 0$, o que é um absurdo. Portanto, $c_q = d_q$.

$\blacksquare$

Definição 4.1 *Definimos a aplicação bilinear*

$$\cap : C_{p+q}(K_i) \times C^p(K_i;\mathbb{Z}) \to C_q(K_i)$$

que associa a cada $\sigma^{p+q} \in E_{p+q}(K_i)$ *e* $d^p \in C^p(K_i;\mathbb{Z})$ *uma* $q-$*cadeia* $\sigma^{p+q} \cap d^p \in C_q(K_i)$ *tal que*

$$\sigma^{p+q} \cap d^p = [\lambda_p^{p+q}(\sigma^{p+q}), d^p] \cdot \mu_q^{p+q}(\sigma^{p+q})$$

Para uma cadeia arbitrária $c_{p+q} = \sum_{i=1}^{b(p+q)} x_i \cdot \sigma_i^{p+q} \in C_{p+q}(K_i)$, *definimos*

$$c_{p+q} \cap \varphi^p = (\sum_{i=1}^{b(p+q)} x_i \cdot \sigma_i^{p+q}) \cap \varphi^p = \sum_{i=1}^{b(p+q)} x_i \cdot (\sigma_i^{p+q} \cap \varphi^p)$$

Proposição 4.1 *Seja* K_i *um complexo simplicial induzido. Se* $z_{p+q} \in C_{p+q}(K_i)$ *e* $d^p \in C^p(K_i;\mathbb{Z})$ *então* $\forall\ c^q \in C^q(K_i;\mathbb{Z})$ *temos que*

$$[z_{p+q} \cap d^p, c^q] = [z_{p+q}, d^p \cup c^q]$$

Demonstração. De fato, se $z_{p+q} = \sum_{i=1}^{b(p+q)} x_i \cdot \sigma_i^{p+q}$ segue que

$$\begin{aligned}
[z_{p+q} \cap d^p, c^q] &= [(\sum_{i=1}^{b(p+q)} x_i \cdot \sigma_i^{p+q}) \cap d^p, c^q] \\
&= [\sum_{i=1}^{b(p+q)} x_i \cdot (\sigma_i^{p+q} \cap d^p), c^q] \\
&= \sum_{i=1}^{b(p+q)} x_i \cdot [[\lambda_p^{p+q}(\sigma_i^{p+q}), d^p] \cdot \mu_q^{p+q}(\sigma_i^{p+q}), c^q] \\
&= \sum_{i=1}^{b(p+q)} x_i \cdot [\lambda_p^{p+q}(\sigma_i^{p+q}), d^p] \cdot [\mu_q^{p+q}(\sigma_i^{p+q}), c^q] \\
&= \sum_{i=1}^{b(p+q)} x_i \cdot [\sigma_i^{p+q}, d^p \cup c^q] \\
&= [\sum_{i=1}^{b(p+q)} x_i \cdot \sigma_i^{p+q}, d^p \cup c^q] \\
&= [z_{p+q}, d^p \cup c^q]
\end{aligned}$$

Portanto, $[z_{p+q} \cap d^p, c^q] = [z_{p+q}, d^p \cup c^q]$. ■

Podemos estender a definição do produto $\cap$ em $C_*(K_i) = \oplus_{j=0}^n C_j(K_i)$. Encarando assim, $C_*(K_i)$ terá uma estrutura de $C^*(K_i;\mathbb{Z})$ módulo à direita, conforme veremos a seguir.

Formalmente, se a dimensão de K_i é n então:

$$\cap : C_*(K_i) \times C^*(K_i;\mathbb{Z}) \to C_*(K_i)$$

é tal que, se $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ e $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^n)$, então

$$\sigma\cap\varphi = (\sigma_0\cap\varphi^0+\sigma_1\cap\varphi^1+\ldots+\sigma_n\cap\varphi^n, \sigma_1\cap\varphi^0+\sigma_2\cap\varphi^1+\ldots+\sigma_n\cap\varphi^{n-1}, \ldots, \sigma_n\cap\varphi^0)$$

onde $\sigma_j \in C_j(K_i)$ e $\varphi^j \in C^j(K_i;\mathbb{Z})$

Proposição 4.2 *Se K_i é um complexo simplicial induzido, então $C_*(K_i)$ é um $C^*(K_i;\mathbb{Z})$-módulo à direita.*

Demonstração. De fato, dados $c_{p+q}, d_{p+q} \in C_{p+q}(K_i)$, $\varphi^p, \psi^p \in C^p(K_i;\mathbb{Z})$ e $\theta^q \in C^q(K_i;\mathbb{Z})$, segue da bilinearidade que

i) $(c_{p+q} + d_{p+q}) \cap \varphi^p = c_{p+q} \cap \varphi^p + d_{p+q} \cap \varphi^p$

ii) $c_{p+q} \cap (\varphi^p + \psi^p) = c_{p+q} \cap \varphi^p + c_{p+q} \cap \psi^p$

Por outro lado, para $\phi^r \in C^r(K_i;\mathbb{Z})$ e $c_{p+q+r} \in C_{p+q+r}(K_i)$ tem-se

$$\begin{aligned}
[c_{p+q+r} \cap (\varphi^p \cup \theta^q), \phi^r] &= [c_{p+q+r}, (\varphi^p \cup \theta^q) \cup \phi^r] \\
&= [c_{p+q+r}, \varphi^p \cup (\theta^q \cup \phi^r)] \\
&= [c_{p+q+r} \cap \varphi^p, \theta^q \cup \phi^r] \\
&= [(c_{p+q+r} \cap \varphi^p) \cap \theta^q, \phi^r]
\end{aligned}$$

Pelo **Lema 4.1**,

iii) $c_{p+q+r} \cap (\varphi^p \cup \theta^q) = (c_{p+q+r} \cap \varphi^p) \cap \theta^q$

Lembrando que se $e \in C^0(K_i;\mathbb{Z})$ é tal que $e(\sigma_j^0) = 1$, $\forall\ \sigma_j^0 \in C_0(K_i)$ então para qualquer $c_p \in C_p(K_i)$ e para qualquer $\varphi^p \in C^p(K_i)$ tem-se

$$\begin{aligned}
[c_p \cap e, \varphi^p] &= [c_p, e \cup \varphi^p] \\
&= [c_p, \varphi^p]
\end{aligned}$$

Portanto,

iv) $c_p \cap e = c_p$

As demonstrações anteriores se estendem facilmente para $C_*(K_i) \times C^*(K_i)$. Como $C^*(K_i;\mathbb{Z})$ é um anel unitário segue $C_*(K_i)$ é um $C^*(K_i;\mathbb{Z})$-módulo unitário à direita. ■

Proposição 4.3 *Se* $c_{p+q} \in C_{p+q}(K_i)$ *e* $\varphi^p \in C^p(K_i;\mathbb{Z})$ *então*

$$\partial_q(c_{p+q} \cap \varphi^p) = (-1)^p[\partial_{p+q}(c_{p+q}) \cap \varphi^p - c_{p+q} \cap \delta^p(\varphi^p)]$$

Demonstração. De fato, dado $\sigma^{p+q} = (i_1, i_2, \ldots, i_{p+q+1}) \in E_{p+q}$ temos $\sigma^{p+q} \cap \varphi^p = [\lambda_p^{p+q}(\sigma^{p+q}), \varphi^p] \cdot \mu_q^{p+q}(\sigma^{p+q})$ e sendo assim,

$$\begin{aligned}
\partial_q(\sigma^{p+q} \cap \varphi^p) &= \partial_q([\lambda_p^{p+q}(\sigma^{p+q}), \varphi^p] \cdot \mu_q^{p+q}(\sigma^{p+q})) \\
&= [\lambda_p^{p+q}(\sigma^{p+q}), \varphi^p] \cdot \partial_q((i_{p+1}, i_{p+2}, \ldots, i_{p+q+1})) \\
&= [(i_1, i_2, \ldots, i_{p+1}), \varphi^p] \cdot \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{1+j}(i_{p+1}, \ldots, \widehat{i_{p+j}}, \ldots, i_{p+q+1})
\end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned}
\partial_{p+q}(\sigma^{p+q}) \cap \varphi^p &= \left(\sum_{j=1}^{p+q+1} (-1)^{1+j}(i_1, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+q+1}) \right) \cap \varphi^p \\
&= \left(\sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{1+j}(i_1, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+q+1}) \right) \cap \varphi^p + \\
&+ \left(\sum_{j=p+2}^{p+q+1} (-1)^{1+j}(i_1, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+q+1}) \right) \cap \varphi^p \\
&= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{1+j}[(i_1, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+2}), \varphi^p] \cdot (i_{p+2}, \ldots, i_{p+q+1}) \\
&+ \sum_{j=p+2}^{p+q+1} (-1)^{1+j}[(i_1, \ldots, i_{p+1}), \varphi^p] \cdot (i_{p+1}, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+q+1})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma^{p+q} \cap \delta^p(\varphi^p) &= \sigma^{p+q} \cap (\varphi^p \circ \partial_{p+1}) \\
&= [\lambda_{p+1}^{p+q}(\sigma^{p+q}), \varphi^p \circ \partial_{p+1}] \cdot \mu_{q-1}^{p+q}(\sigma^{p+q}) \\
&= [\partial_{p+1}(\lambda_{p+1}^{p+q}(\sigma^{p+q})), \varphi^p] \cdot (i_{p+2}, \ldots, i_{p+q+1}) \\
&= [\partial_{p+1}((i_1, i_2, \ldots, i_{p+2})), \varphi^p] \cdot (i_{p+2}, \ldots, i_{p+q+1}) \\
&= [\sum_{j=1}^{p+2} (-1)^{1+j}(i_1, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+2}), \varphi^p] \cdot (i_{p+2}, \ldots, i_{p+q+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{p+2} (-1)^{1+j}[(i_1, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+2}), \varphi^p] \cdot (i_{p+2}, \ldots, i_{p+q+1})
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\partial_{p+q}(\sigma^{p+q}) \cap \varphi^p - \sigma^{p+q} \cap \delta^p(\varphi^p) = \\
&= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{1+j}[(i_1, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+2}), \varphi^p] \cdot (i_{p+2}, \ldots, i_{p+q+1}) + \\
&+ \sum_{j=p+2}^{p+q+1} (-1)^{1+j}[(i_1, \ldots, i_{p+1}), \varphi^p] \cdot (i_{p+1}, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+q+1}) \\
&- \sum_{j=1}^{p+2} (-1)^{1+j}[(i_1, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+2}), \varphi^p] \cdot (i_{p+2}, \ldots, i_{p+q+1}) \\
&= [(i_1, \ldots, i_{p+1}), \varphi^p] \cdot \left(\sum_{j=p+2}^{p+q+1} (-1)^{1+j}(i_{p+1}, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+q+1}) \right. \\
&\quad + (-1)^{p+2}(i_{p+2}, \ldots, i_{p+q+1})) \\
&= [(i_1, \ldots, i_{p+1}), \varphi^p] \cdot \sum_{j=p+1}^{p+q+1} (-1)^{1+j}(i_{p+1}, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+q+1}) \\
&= (-1)^p[(i_1, \ldots, i_{p+1}), \varphi^p] \cdot \left(\sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{1+j}(i_{p+1}, \ldots, \widehat{i_{p+j}}, \ldots, i_{p+q+1}) \right)
\end{aligned}$$

Mas,

$$\partial_q(\sigma^{p+q} \cap \varphi^p) = [(i_1, i_2, \ldots, i_{p+1}), \varphi^p] \cdot \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{1+j}(i_{p+1}, \ldots, \widehat{i_{p+j}}, \ldots, i_{p+q+1})$$

Logo,

$$\partial_q(\sigma^{p+q} \cap \varphi^p) = (-1)^p[\partial_{p+q}(\sigma^{p+q}) \cap \varphi^p - \sigma^{p+q} \cap \delta^p(\varphi^p)]$$

■

Corolário 4.1 *Se* $\delta^p(\varphi^p) = 0$ *e* $\partial_{p+q}(c_{p+q}) = 0$ *então* $\partial_q(c_{p+q} \cap \varphi^p) = 0$.

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned} \partial_q(c_{p+q} \cap \varphi^p) &= (-1)^p[\partial_{p+q}(c_{p+q}) \cap \varphi^p - c_{p+q} \cap \delta^p(\varphi^p)] \\ &= (-1)^p[0 \cap \varphi^p - c_{p+q} \cap 0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Corolário 4.2 *Se* $\partial_{p+q}(\sigma^{p+q}) = 0$ *então* $\partial_q(\sigma^{p+q} \cap \varphi^p) = (-1)^p \sigma^{p+q} \cap \delta^p(\varphi^p)$

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned} \partial_q(\sigma^{p+q} \cap \varphi^p) &= (-1)^p[\partial_{p+q}(\sigma^{p+q}) \cap \varphi^p - \sigma^{p+q} \cap \delta^p(\varphi^p)] \\ &= (-1)^p[0 \cap \varphi^p - \sigma^{p+q} \cap \delta^p(\varphi^p)] \\ &= (-1)^{p+1} \sigma^{p+q} \cap \delta^p(\varphi^p) \end{aligned}$$

■

Corolário 4.3 *Se* $\delta^p(\varphi^p) = 0$ *então* $\partial_q(\sigma^{p+q} \cap \varphi^p) = (-1)^p \partial_{p+q}(\sigma^{p+q}) \cap \varphi^p$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} \partial_q(\sigma^{p+q} \cap \varphi^p) &= (-1)^p[\partial_{p+q}(\sigma^{p+q}) \cap \varphi^p - \sigma^{p+q} \cap \delta^p(\varphi^p)] \\ &= (-1)^p[\partial_{p+q}(\sigma^{p+q}) \cap \varphi^p - \sigma^{p+q} \cap 0] \\ &= (-1)^p \partial_{p+q}(\sigma^{p+q}) \cap \varphi^p \end{aligned}$$

■

Corolário 4.4 *Seja* K_i *um complexo simplicial induzido. Pela passagem ao quociente, o produto cap induz uma aplicação bilinear*

$$\cap : H_{p+q}(K_i) \times H^p(K_i; \mathbb{Z}) \to H_q(K_i)$$

tal que $\cap((\overline{z_{p+q}}, \overline{\varphi}^p)) = \overline{z_{p+q} \cap \varphi^p}$.

Demonstração. De fato, mostremos que esta aplicação está bem definida. Dados $(\overline{z_1}, \overline{\varphi_1}) = (\overline{z_2}, \overline{\varphi_2}) \in H_{p+q}(K_i) \times H^p(K_i; \mathbb{Z})$ temos que verificar que

$z_1 \cap \varphi^1 - z_2 \cap \varphi^2 \in B_q(K_i)$. Segue que $(\overline{z_1}, \overline{\varphi_1}) = (\overline{z_2}, \overline{\varphi_2})$ se, e somente se, existem $w \in C_{p+q+1}(K_i)$ e $\theta \in C^{p-1}(K_i)$ tais que $\partial_{p+q+1}(w) = z_1 - z_2$ e $\delta^{p-1}(\theta) = \varphi_1 - \varphi_2$. Podemos observar o seguinte:

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}(w \cap \varphi^1) &= (-1)^p[\partial_{p+q+1}(w) \cap \varphi^1 - w \cap \delta^p(\varphi^1)] \\ &= (-1)^p[(z_1 - z_2) \cap \varphi^1 - w \cap 0)] \\ &= (-1)^p[(z_1 - z_2) \cap \varphi^1] \end{aligned}$$

assim como,

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}(z_2 \cap \theta) &= (-1)^p[\partial_{p+q}(z_2) \cap \theta - z_2 \cap \delta^{p-1}(\theta)] \\ &= (-1)^p[0 \cap \theta - z_2 \cap (\varphi^1 - \varphi^2)] \\ &= (-1)^p[-z_2 \cap (\varphi^1 - \varphi^2)] \end{aligned}$$

Tomando apropriadamente $\gamma = (-1)^p[(w \cap \varphi^1) - (z_2 \cap \theta)]$ temos:

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}(\gamma) &= \partial_{q+1}((-1)^p[(w \cap \varphi^1) - (z_2 \cap \theta)]) \\ &= (-1)^p[\partial_{q+1}(w \cap \varphi^1) - \partial_{q+1}(z_2 \cap \theta)] \\ &= (-1)^p\{(-1)^p[(z_1 - z_2) \cap \varphi^1] - (-1)^p[-z_2 \cap (\varphi^1 - \varphi^2)]\} \\ &= (z_1 - z_2) \cap \varphi^1 + z_2 \cap (\varphi^1 - \varphi^2) \\ &= z_1 \cap \varphi^1 - z_2 \cap \varphi^1 + z_2 \cap \varphi^1 - z_2 \cap \varphi^2 \\ &= z_1 \cap \varphi^1 - z_2 \cap \varphi^2 \end{aligned}$$

Logo, $z_1 \cap \varphi^1 - z_2 \cap \in B_q(K_i)$ e sendo assim, a aplicação $\cap$ está bem definida. Portanto, induzida pelo produto cap a aplicação $\cap : H_{p+q}(K_i) \times H^p(K_i; \mathbb{Z}) \to H_q(K_i)$ é uma aplicação bilinear. ∎

4.2 Representação Matricial

Seja K_i um complexo simplicial induzido. Dados $\sigma_j^{p+q} \in E_{p+q}(K_i)$ e $\varphi^p \in C^p(K_i; \mathbb{Z})$ pela **Definição 4.1**, temos que

$$\sigma_j^{p+q} \cap \varphi^p = [\lambda_p^{p+q}(\sigma_j^{p+q}), \varphi^p] \cdot \mu_q^{p+q}(\sigma_j^{p+q}) = \{\varphi^p(\lambda_p^{p+q}(\sigma_j^{p+q}))\} \cdot \mu_q^{p+q}(\sigma_j^{p+q})$$

Lembrando que se $\varphi^p = \sum_{i=1}^{b(p)} x_i \cdot (\sigma_i^p)^*$ e $c_p = \sum_{i=1}^{b(p)} y_i \cdot \sigma_i^p \in C_p(K_i)$ então

$$[\varphi^p]_{E^p(K_i)} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{b(p)} \end{pmatrix} \text{ e } [c_p]_{E_p} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{b(p)} \end{pmatrix}$$

Segue que para um $(p+q)-$simplexo σ_j^{p+q} tem-se

$$\begin{aligned} [\sigma_j^{p+q} \cap \varphi^p]_{E_q} &= \left([\lambda_p^{p+q}(\sigma_j^{p+q}) \, , \, \varphi^p] \cdot \mu_q^{p+q}(\sigma_j^{p+q}) \right)_{E_q} \\ &= \left(\{\varphi^p(\lambda_p^{p+q}(\sigma_j^{p+q}))\} \cdot \mu_q^{p+q}(\sigma_j^{p+q}) \right)_{E_q} \end{aligned}$$

A coordenada de $[\sigma_j^{p+q} \cap \varphi^p]_{E_q}$ correspondente ao elemento $\mu_q^{p+q}(\sigma_j^{p+q})$ é o escalar $\varphi^p(\lambda_p^{p+q}(\sigma_j^{p+q}))$ cujo valor, em termos de coordenadas, é dado por $[\varphi^p][\lambda_p^{p+q}][\sigma_j^{p+q}]$. Assim $[\sigma_j^{p+q} \cap \varphi^p]_{E_q} = [\mu_q^{p+q}(\sigma_j^{p+q})][\varphi^p][\lambda_p^{p+q}][\sigma_j^{p+q}]$. Mais precisamente, se $\left[\mu_q^{p+q}\right] = [\mu_{k\times i}]_{b(q)\times b(p+q)}$ e $\left[\lambda_p^{p+q}\right] = [\lambda_{j\times i}]_{b(p)\times b(p+q)}$ então temos que

$$\left[\mu_q^{p+q}\right] \cdot \left[\sigma_j^{p+q}\right] = \begin{bmatrix} \mu_{1j} \\ \mu_{2j} \\ \vdots \\ \mu_{b(q)j} \end{bmatrix} \text{ e } \left[\lambda_p^{p+q}\right] \cdot \left[\sigma_j^{p+q}\right] = \begin{bmatrix} \lambda_{1j} \\ \lambda_{2j} \\ \vdots \\ \lambda_{b(p)j} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\left[\sigma_j^{p+q} \cap \varphi^p\right]_{E_q} = \begin{bmatrix} \mu_{1j} \\ \mu_{2j} \\ \vdots \\ \mu_{b(p)j} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{b(p)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{1j} \\ \lambda_{2j} \\ \vdots \\ \lambda_{b(p)j} \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_{1j} \\ \mu_{2j} \\ \vdots \\ \mu_{b(q)j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \cdot \lambda_{1j} + x_2 \cdot \lambda_{2j} + \ldots + x_{b(p)} \cdot \lambda_{b(p)j} \end{bmatrix}$$

Agora para uma $(p+q)-$cadeia arbitrária $c_{p+q} = \sum\limits_{j=1}^{b(p+q)} y_j \cdot \sigma_j^{p+q}$ tem-se

$$[c_{p+q} \cap \varphi^p]_{E_q} = \left[\sum_{j=1}^{b(p+q)} y_j \cdot (\sigma_j^{p+q} \cap \varphi^p) \right]_{E_q}$$

$$= \sum_{j=1}^{b(p+q)} y_j \cdot \left[\sigma_j^{p+q} \cap \varphi^p \right]_{E_q}$$

$$= \sum_{j=1}^{b(p+q)} y_j \cdot \begin{bmatrix} \mu_{1j} \\ \mu_{2j} \\ \vdots \\ \mu_{b(q)j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \cdot \lambda_{1j} + x_2 \cdot \lambda_{2j} + \ldots + x_{b(p)} \cdot \lambda_{b(p)j} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\mu_q^{p+q}\right] \cdot \begin{bmatrix} (x_1 \cdot \lambda_{11} + x_2 \cdot \lambda_{21} + \ldots + x_{b(p)} \cdot \lambda_{b(p)1}) \cdot y_1 \\ (x_1 \cdot \lambda_{12} + x_2 \cdot \lambda_{22} + \ldots + x_{b(p)} \cdot \lambda_{b(p)2}) \cdot y_2 \\ \vdots \\ (x_1 \cdot \lambda_{1b(p+q)} + x_2 \cdot \lambda_{2b(p+q)} + \ldots + x_{b(p)} \cdot \lambda_{b(p)b(p+q)}) \cdot y_{b(p+q)} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\mu_q^{p+q}\right] \left[\begin{bmatrix} x_1 \cdot \lambda_{11} + x_2 \cdot \lambda_{21} + \ldots + x_{b(p)} \cdot \lambda_{b(p)1} \\ x_1 \cdot \lambda_{12} + x_2 \cdot \lambda_{22} + \ldots + x_{b(p)} \cdot \lambda_{b(p)2} \\ \vdots \\ x_1 \cdot \lambda_{1b(p+q)} + x_2 \cdot \lambda_{2b(p+q)} + \ldots + x_{b(p)} \cdot \lambda_{b(p)b(p+q)} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{b(p+q)} \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[\mu_q^{p+q}\right]\left\{\left[\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{b(p)} \end{bmatrix} \cdot \left[\lambda_p^{p+q}\right]\right]^t \star \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{b(p+q)} \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \left[\mu_q^{p+q}\right]\left\{\left[[\varphi^p] \cdot \left[\lambda_p^{p+q}\right]\right]^t \star [c_{p+q}]\right\}$$

Portanto,

$$[c_{p+q} \cap \varphi^p]_{E_q} = \left[\mu_q^{p+q}\right]\left\{\left[[\varphi^p] \cdot \left[\lambda_p^{p+q}\right]\right]^t \star [c_{p+q}]\right\}.$$

Observação 4.1 *Assim como no produto cup, a fórmula* $[c_{p+q} \cap \varphi^p\ ]_{E_q} = \left[\mu_q^{p+q}\right]\left\{\left[[\varphi^p] \cdot \left[\lambda_p^{p+q}\right]\right]^t \star [c_{p+q}]\right\}$ *é a mesma quando* $c_{p+q} \in C_{p+q}(K_g)$ *e* $\varphi^p \in C^p(K_g;\mathbb{Z})$.

Apêndice A

Cálculos e exemplos

A.1 Matriz na forma padrão

Dado um $\mathbb{Z}-$homomorfismo $f : A \to B$ entre $\mathbb{Z}$-módulos livres, é imediato calcular núcleos e imagens se a matriz de f em relação às bases E e F estiver na forma padrão, ou seja:

$$[f]_F^E = \begin{bmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times m}$$

onde D é uma matriz quadrada de ordem r cujos elementos diferentes de zero estão na diagonal secundária, isto é,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & & & & \lambda_1 \\ & & & \lambda_2 & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \\ \lambda_r & & & & 0 \end{bmatrix}_{r\times r}$$

Nesta forma, o núcleo de f é gerado pelos $(m-r)$ primeiros vetores da base E e a imagem é o $\mathbb{Z}-$módulo gerado por $\lambda_1 f_1, \lambda_2 f_2$, ..., $\lambda_r f_r$ e denotado por

$$[\lambda_1 f_1, \lambda_2 f_2, ..., \lambda_r f_r]$$

Se quisermos calcular o quociente de B(contradomínio) pela imagem de f, construimos o seguinte isomorfismo:

$$\phi : \frac{\text{contradomínio}}{\text{imagem da f}} = \frac{[f_1, f_2, ..., f_r, ..., f_m]}{[\lambda_1 f_1, \lambda_2 f_2, ..., \lambda_r f_r]} \to \mathbb{Z}_{|\lambda_1|} \times \mathbb{Z}_{|\lambda_2|} \times ... \times \mathbb{Z}_{|\lambda_r|} \times \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}$$

dado por:

$$\phi\left((x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_r f_r + ... + x_m f_m) + \mathrm{Im(f)}\right) = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_r}, x_{r+1}, ..., x_m)$$

onde a operação no contradomínio da ϕ é dada pela adição das coordenadas correspondentes.

Observação A.1 *A matriz na forma padrão para um $\mathbb{Z}-$homomorfismo entre $\mathbb{Z}-$ módulos livres não é única.*

Observação A.2 *No contradomínio do $\mathbb{Z}-isomorfismo$ ϕ podemos eliminar as parcelas $\mathbb{Z}_1$ já que estes são $\mathbb{Z}-$ módulos triviais*

A.2 Operações elementares permissíveis na matriz inteira $[\mathbf{f}]_F^E$

Sejam A e B $\mathbb{Z}$-módulos livres com bases E e F respectivamente. Dado o $\mathbb{Z}$-homomorfismo $f : A \to B$, vamos fazer operações elementares nas linhas e colunas da matriz inteira $[f]_F^E$, de modo a se obter uma nova matriz inteira na forma padrão

$$M = [f]_{F'}^{E'}$$

onde E' e F' são as novas bases do domínio e contradomínio respectivamente de f. As tabelas abaixo nos mostram as operações elementares permissíveis, bem como as correspondentes operações nas bases e nas coordenadas do domínio e do contradomínio de f.

coor. do domínio	base domínio	oper. elementares
$(x_1, ..., x_n)$	$\{e_1, ..., e_n\}$	$[f]_F^E$
$x_i \leftrightarrow x_j$	$e_i \leftrightarrow e_j$	$C_i \leftrightarrow C_j$
$x_j \rightarrow x_j - \gamma x_i$	$e_i \rightarrow e_i + \gamma e_j$	$C_i \rightarrow C_i + \gamma C_j$

(A.1)

oper. elementares	base contradomínio	coor. do contradomínio
$[f]_F^E$	$\{f_1, ..., f_m\}$	$(y_1, ..., y_m)$
$L_r \leftrightarrow L_k$	$f_r \leftrightarrow f_k$	$y_r \leftrightarrow y_k$
$L_r \rightarrow L_r + \gamma L_k$	$f_k \rightarrow f_k - \gamma f_r$	$y_r \rightarrow y_r + \gamma y_k$

(A.2)

A notação $C_i \leftrightarrow C_j$ significa permutar a coluna i pela coluna j e $C_i \rightarrow C_i + \gamma C_j$ significa substituir a coluna i pela coluna que se obtém, efetuando-se a soma dos elementos da coluna i com os correspondentes da coluna j multiplicados por $\gamma \in Z$. Convencionando que L_r denota a r-ésima linha, de modo análogo, seguem as outras notações.

Exemplo A.1 *Seja o $Z-$homomorfismo $f : A \rightarrow B$ com bases E e F cuja matriz é dada por*

$$[f]_F^E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se fizermos a seguinte sequência de operações elementares nesta matriz:

$$C_3 \leftrightarrow C_1, C_2 \rightarrow C_2 - 3C_3, L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1, L_3 \rightarrow L_3 - L_1$$

obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Consideremos agora as seguintes operações:

$$C_1 \leftrightarrow C_2, C_1 \rightarrow C_1 + 4C_2$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e finalmente fazendo

$$C_1 \leftrightarrow C_2,\ C_1 \rightarrow C_1 + 2C_2,\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2$$

temos a matriz na forma padrão

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo A.2 *Seja $f : A \rightarrow B$ o $\mathbb{Z}-$homomorfismo cuja matriz em relação as bases canônicas é*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Se fizermos a seguinte sequência de operações elementares nesta matriz:

$$L_1 \rightarrow L_1 + L_2, C_1 \rightarrow C_1 - C_2, C_1 \longleftrightarrow C_2, C_1 \rightarrow C_1 - 2C_2, L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1$$

obteremos a matriz numa outra forma padrão:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

A.3 Obtendo a matriz na forma padrão: O Algorítmo Anula

Mostraremos a seguir o Algorítmo Anula, que nos leva à forma padrão ilustrando apenas as operações elementares realizadas na matriz $[f]_F^E$. Porém, o Algorítmo Anula, além destas operações na matriz, consiste também das correspondentes mudanças nas bases E e F de acordo com as tabelas $(A.1)$ e $(A.2)$

1º Passo: Usando somente permutações de linhas e de colunas, colocamos no cruzamento da primeira linha com a m-ésima coluna, o elemento p da matriz $[f]_F^E$ de menor módulo. Este elemento chamaremos de pivô. Se houver dois ou mais candidatos para o pivô façamos uma escolha.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m-1} & p \\ & & & & & & b_2 \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & b_n \end{bmatrix}$$

2º Passo: Se q_i é o quociente da divisão de a_i pelo pivô p, então fazendo as operações elementares $C_i \to C_i - q_iC_m$, para $i = 1, 2, ..., m-1$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdot & \cdot & \cdot & r_{m-1} & p \\ & & & & & & b_2 \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & b_n \end{bmatrix}$$

onde $r_i, 1 \leq i \leq m-1$, é o resto da divisão de a_i por p.

3º Passo: Se q_k é o quociente da divisão de b_k pelo pivô, então fazendo as operações elementares $L_k \to L_k - q_k L_1,$ para $k = 2, 3, ..., n$ obtemos:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdot & \cdot & \cdot & r_{m-1} & p \\ & & & & & & s_2 \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & s_n \end{bmatrix}$$

onde s_k, $k = 2, 3, ..., n$, é o resto da divisão de b_k por p.

4º Passo: Se na matriz acima, alguns dos r_j ou s_i forem não nulos, então estes são menores que o pivô p, pois são restos da divisão por p. Retornamos então ao 1º passo até obter uma matriz da forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & p' \\ B & 0 \end{bmatrix}_{m_\times n}$$

5º Passo: Refazemos os passos 1,2,3 e 4 para a submatriz B.

Exemplo A.3 *Dado o $\mathbb{Z}-$homomorfismo $f : A \to B$, sejam $E = \{e_1, e_2\}$ e*

$F = \{f_1, f_2\}$ *bases de* A, B *respectivamente. Se*

$$[f]_F^E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

efetuamos as operações elementares com as linhas e colunas obtendo consequentemente as novas bases E' *e* F'*. Ou seja,*

$$C_1 \to C_1 - 3C_2 \;\; \Rightarrow e_1 \to e_1 - 3e_2$$

logo

$$[f]_F^{E'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}, \quad E' = \{e_1 - 3e_2, e_2\}, \quad F = \{f_1, f_2\}$$

e

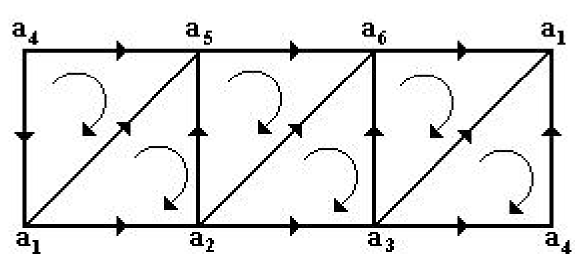
$$L_2 \to L_2 - 2L_1 \Rightarrow f_1 \to f_1 + 2f_2,$$

obtendo assim a matriz na forma padrão e suas novas bases E' *e* F' :

$$[f]_{F'}^{E'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad E' = \{e_1 - 3e_2, e_2\}, \quad F' = \{f_1 + 2f_2, f_2\}.$$

A.4 Exemplos

Exemplo A.4 *Seja* K_g *a coleção de simplexos orientados aleatoriamente obtidos da triangulação da Faixa de Möbius dada abaixo. Dessa forma, para calcular os seus* $\mathbb{Z}$*-módulos de homologia, teremos que usar a definição do operador bordo geométrico junto com a definição de número de incidência.*



$$K_g = \{\ \langle a_1\rangle,\ \ \langle a_2\rangle,\ \ \langle a_3\rangle,\ \ \langle a_4\rangle,\ \ \langle a_5\rangle,\ \ \langle a_6\rangle,\ \ \langle a_4, a_1\rangle,\ \ \langle a_2, a_5\rangle,\ \ \langle a_3, a_6\rangle,$$

$\langle a_4, a_5\rangle, \langle a_5, a_6\rangle, \langle a_6, a_1\rangle, \langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_3\rangle, \langle a_3, a_4\rangle, \langle a_1, a_5\rangle, \langle a_3, a_1\rangle,$

$\langle a_2, a_6\rangle, \langle a_1, a_4, a_5\rangle, \langle a_1, a_5, a_2\rangle, \langle a_2, a_5, a_6\rangle, \langle a_2, a_6, a_3\rangle, \langle a_3, a_6, a_1\rangle,$

$\langle a_3, a_1, a_4\rangle \ \}$

Obtido então o complexo de cadeias

$$0 \longrightarrow C_2(K_g) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K_g) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K_g) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

vamos usar o algoritmo anula e o programa HCprod Ver[4], *para calcular* $H_2(K_g)$, $H_1(K_g)$ *e* $H_0(K_g)$. *Podemos primeiramente ordenar o conjunto dos p-simplexos* $(p = 0, 1, 2)$, *considerando dois aspectos: primeiro os representantes de orientação positiva nele listados e segundo a ordem lexicográfica dos índices dos vértices de cada simplexo listado no conjunto. Dessa forma, obtemos os seguintes conjuntos ordenados:*

$$E_0(K_g) = (\ \langle a_1\rangle, \langle a_2\rangle, \langle a_3\rangle, \langle a_4\rangle, \langle a_5\rangle, \langle a_6\rangle\ )$$

$$E_1(K_g) = (\ \langle a_1, a_2\rangle, \langle a_1, a_5\rangle, \langle a_2, a_3\rangle, \langle a_2, a_5\rangle, \langle a_2, a_6\rangle, \langle a_3, a_1\rangle,$$
$$\langle a_3, a_4\rangle, \langle a_3, a_6\rangle, \langle a_4, a_1\rangle, \langle a_4, a_5\rangle, \langle a_5, a_6\rangle, \langle a_6, a_1\rangle\ )$$

$$E_2(K_g) = (\ \langle a_1, a_4, a_5\rangle, \langle a_1, a_5, a_2\rangle, \langle a_2, a_5, a_6\rangle,$$
$$\langle a_2, a_6, a_3\rangle, \langle a_3, a_1, a_4\rangle, \langle a_3, a_6, a_1\rangle\ )$$

A matriz do operador bordo ∂_2 *em relação às bases* E_2 *e* E_1 *e a matriz na* *forma padrão em relação às novas bases* F_2 *e* G_1 *são dadas por:*

$$[\partial_2]_{E_1}^{E_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\partial_2]_{G_1}^{F_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora, a seguinte matriz nos dá as coordenadas da nova base $G_1 = \{\gamma_1^1, ..., \gamma_{12}^1\}$

em relação a E_1 que devem ser lidas na horizontal:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $E_1 = \{\sigma_1^1, \sigma_2^1, ..., \sigma_{12}^1\}$ *então temos que* $G_1 = \{\gamma_1^1, \gamma_2^1, ..., \gamma_{12}^1\}$, *onde*

$$\gamma_1^1 = 1 \cdot \sigma_1^1 - 1 \cdot \sigma_2^1 + 1 \cdot \sigma_4^1,$$

$$\gamma_2^1 = 1 \cdot \sigma_2^1 + 1 \cdot \sigma_9^1 - 1 \cdot \sigma_{10}^1,$$

$$\gamma_3^1 = 1 \cdot \sigma_3^1 - 1 \cdot \sigma_5^1 + 1 \cdot \sigma_8^1,$$

$$\gamma_4^1 = 1 \cdot \sigma_4^1 - 1 \cdot \sigma_5^1 + 1 \cdot \sigma_{11}^1,$$

$$\gamma_5^1 = 1 \cdot \sigma_6^1 - 1 \cdot \sigma_8^1 - 1 \cdot \sigma_{12}^1,$$

$$\gamma_6^1 = 1 \cdot \sigma_7^1 - 1 \cdot \sigma_8^1 + 1 \cdot \sigma_9^1 - 1 \cdot \sigma_{12}^1,$$

$$\gamma_7^1 = 1 \cdot \sigma_5^1,$$

$$\gamma_8^1 = 1 \cdot \sigma_8^1,$$

$$\gamma_9^1 = 1 \cdot \sigma_9^1,$$

$$\gamma^1_{10} = 1 \cdot \sigma^1_{10},$$

$$\gamma^1_{11} = 1 \cdot \sigma^1_{11},$$

$$\gamma^1_{12} = 1 \cdot \sigma^1_{12}.$$

Observando a matriz na forma padrão do operador ∂_2, podemos concluir que $Ker\ \partial_2$=0, logo, $H_2(K_g) = 0$. Agora a matriz do operador bordo ∂_1 em relação às bases E_1 e E_0 é dada a seguir:

$$[\partial_1]^{E_1}_{E_0} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

De acordo com o algorítmo anula precisamos agora calcular $[\partial_1]^{G_1}_{E_0}$, para isso, sabemos que $[\partial_1]^{G_1}_{E_0} = [\partial_1]^{E_1}_{E_0} \cdot [M]^{G_1}_{E_1}$, onde $[M]^{G_1}_{E_1}$ é dada a seguir:

$$[M]^{G_1}_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sendo assim, obtemos a seguinte matriz:

$$[\partial_1]_{E_0}^{G_1} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&-1 \end{pmatrix}$$

Colocando a matriz na forma padrão temos:

$$[\partial_1]_{G_0}^{F_1} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

e as coordenadas das novas bases G_0 *e* F_1 *em relação a* E_0 *e* G_1 *respectivamente são dadas por:*

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&-1 \\ 0&1&0&0&0&-1 \\ 0&0&1&0&0&-1 \\ 0&0&0&1&0&-1 \\ 0&0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Se $F_1 = \{\beta_1^1, \beta_2^1, ..., \beta_{12}^1\}$ *então*

$$\beta_1^1 = 1 \cdot \gamma_1^1\,,$$

$$\beta_2^1 = 1 \cdot \gamma_2^1\,,$$

$$\beta_3^1 = 1 \cdot \gamma_3^1\,,$$

$$\beta_4^1 = 1 \cdot \gamma_4^1\,,$$

$$\beta_5^1 = 1 \cdot \gamma_5^1\,,$$

$$\beta_6^1 = 1 \cdot \gamma_6^1\,,$$

$$\beta_7^1 = -1 \cdot \gamma_9^1 + 1 \cdot \gamma_{10}^1 + 1 \cdot \gamma_{11}^1 + 1 \cdot \gamma_{12}^1\,,$$

$$\beta_8^1 = -1 \cdot \gamma_9^1 + 1 \cdot \gamma_{10}^1 + 1 \cdot \gamma_{12}^1\,,$$

$$\beta_9^1 = 1 \cdot \gamma_9^1 - 1 \cdot \gamma_{12}^1\,,$$

$$\beta_{10}^1 = 1 \cdot \gamma_8^1\,,$$

$$\beta_{11}^1 = 1 \cdot \gamma_7^1\,,$$

$$\beta_{12}^1 = 1 \cdot \gamma_{12}^1\,.$$

Observando as matrizes $[\partial_2]_{G_1}^{F_2}$ *e* $[\partial_1]_{G_0}^{F_1}$ *podemos concluir que*

$$Im\,\partial_2 = [-\gamma_1^1, -\gamma_2^1, -\gamma_3^1, \gamma_4^1, -\gamma_5^1, -\gamma_6^1]$$

enquanto que

$$Ker\,\partial_1 = [\beta_1^1, \beta_2^1, \beta_3^1, \beta_4^1, \beta_5^1, \beta_6^1, \beta_7^1].$$

Logo,

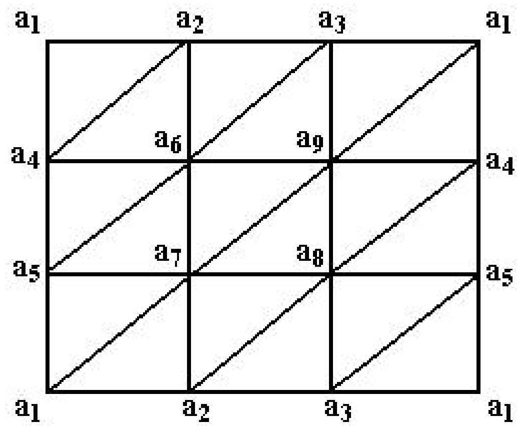
$$H_1(K_g) = \frac{[\gamma_1^1,\, \gamma_2^1,\, \gamma_3^1,\, \gamma_4^1,\, \gamma_5^1,\, \gamma_6^1,\, -1 \cdot \gamma_9^1 + 1 \cdot \gamma_{10}^1 + 1 \cdot \gamma_{11}^1 + 1 \cdot \gamma_{12}^1]}{[-\gamma_1^1,\, -\gamma_2^1,\, -\gamma_3^1,\, \gamma_4^1,\, -\gamma_5^1,\, -\gamma_6^1]}$$

e assim $H_1(K_g) \cong \mathbb{Z}$. *Se* $G_0 = \{\alpha_1^0,\, \alpha_2^0,\, \alpha_3^0,\, \alpha_4^0,\, \alpha_5^0,\, \alpha_6^0\}$ *então*

$$H_0(K_g) = \frac{[\alpha_1^0,\, \alpha_2^0,\, \alpha_3^0,\, \alpha_4^0,\, \alpha_5^0,\, \alpha_6^0]}{[1 \cdot \alpha_1^0\,, -1 \cdot \alpha_2^0\,, -1 \cdot \alpha_3^0\,, -1 \cdot \alpha_4^0\,, 1 \cdot \alpha_5^0]}$$

e novamente temos que $H_0(K_g) \cong \mathbb{Z}$.

Exemplo A.5 *Seja a triangulação do toro T dada por:*



Utilizando o programa Hcprod, obtemos as seguintes coordenadas dos geradores $\overline{\varphi^1}, \overline{\theta^1} \in H^1(K_g;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *em relação à base canônica* $E^1 = (\langle a_1, a_2\rangle^*, \langle a_1, a_3\rangle^*, \ldots, \langle a_8, a_9\rangle^*)$*:*

$[\varphi^1]_{E^1} = [\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -1$
$0\ \ -1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ]$

e

$[\theta^1]_{E^1} = [\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 0$
$0\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ ]$.

Utilizando a fórmula local para o produto cup

$$[\varphi^1 \cup \theta^1]_{E^2} = ([\varphi^1]_{E^1} \cdot [\lambda_1^2]) \star ([\theta^1]_{E^1} \cdot [\mu_1^2])$$

temos que

$$[\varphi^1 \cup \theta^1]_{E^2} = [\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ ]$$

onde $E^2 = (\langle a_1, a_2, a_4\rangle^*, \langle a_1, a_2, a_7\rangle^*, \ldots, \langle a_7, a_8, a_9\rangle^*)$ *e as matrizes* $[\lambda_1^2]$ *e* $[\mu_1^2]$ *são obtidas de acordo com a* ***Observação 3.3****, da matriz do operador bordo* ∂_2 *dada a seguir:*

$$\begin{bmatrix}
1&1&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0\\
0&0&1&1&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0\\
-1&0&0&0&1 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0\\
0&0&-1&0&0 & 1&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0\\
0&-1&0&0&0 & -1&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0\\
0&0&0&-1&-1 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&1&1&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0\\
1&0&0&0&0 & 0&0&0&1&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&-1&0&-1&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0\\
0&1&0&0&0 & 0&0&0&0&1 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&-1&0&-1 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0\\
0&0&1&0&0 & 0&0&0&0&0 & 1&0&0&0&0 & 0&0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&1&0&0&0 & 0&1&0&0&0 & 0&0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&1&0&0 & -1&0&0&0&0 & 0&0&0\\
0&0&0&1&0 & 0&0&0&0&0 & 0&-1&0&0&0 & 0&0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&1&1&0 & 0&0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&1&0 & 0&0&-1&0&0 & 0&0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&-1&1 & 0&0&0\\
0&0&0&0&1 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&-1 & 0&0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&1&0&0 & 1&0&0\\
0&0&0&0&0 & 1&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & -1&0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 1&0&0&1&0 & 0&0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 1&1&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&1&0&0&0 & 0&-1&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&1 & 0&0&0&0&0 & 0&0&1\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&1&-1\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&1 & 0&0&1
\end{bmatrix}$$

Sabemos que $H^2(K_g;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ *e as coordenadas do gerador* $\overline{\psi^2}\in H^2(K_g;\mathbb{Z})$ *pelo programa são dadas por:* $[\psi^2]_{E^2}=[\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ ]$. *Podemos afirmar que* $\overline{\varphi^1\cup\theta^1}=\overline{\psi^2}$. *De fato, mostremos que* $\varphi^1\cup\theta^1-\psi^2\in Im(\delta^1)$. *Temos* $\varphi^1\cup\theta^1-\psi^2=(\sigma^2_{13})^*+(\sigma^2_{16})^*+(\sigma^2_{17})^*-(\sigma^2_{18})^*$, *onde* $(\sigma^2_i)^*\in E^2$, *e a matriz de* δ^1 *na forma padrão é dada por*

$$\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&1\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 1&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&1 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&1&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&1&0&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&1&0&0&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 1&0&0&0&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&1 & 0&0&0&0&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&1&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&1&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&1&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 1&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&1 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&-1&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&1&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&1&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & -1&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0\\
0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0&0&0&0 & 0&0
\end{bmatrix}$$

Logo, $Im(\delta^1) = [\gamma_1^2, \ldots, \gamma_{13}^2, -\gamma_{14}^2, \gamma_{15}^2, \gamma_{16}^2, -\gamma_{17}^2]$, *onde* $\gamma_j^2 \in F^2$. *Para saber então se* $\varphi^1 \cup \theta^1 - \psi^2 \in Im(\delta^1)$, *basta fazer a mudança de base:*

$$[\varphi^1 \cup \theta^1 - \psi^2]_{F^2} = M_{F_2}^{E^2} \cdot [\varphi^1 \cup \theta^1 - \psi^2]_{E^2}$$

onde $M_{F_2}^{E^2}$ *é a matriz mudança de base de* E^2 *para* F^2 *dada a seguir*

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Dessa forma,

$$[\varphi^1 \cup \theta^1 - \psi^2]_{F^2} = [\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ ]$$

ou seja, $\varphi^1 \cup \theta^1 - \psi^2 = \gamma_{13}^2 - \gamma_{14}^2 + \gamma_{17}^2 \in Im(\delta^1)$. *Portanto,* $\overline{\varphi^1 \cup \theta^1} = \overline{\psi^2}$.

Referências Bibliográficas

[1] CROOM, F.H., *Basic concepts of algebraic topology*, Undergraduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 1978.

[2] GREENBERG, M.J., *Lectures on Algebraic Topology*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.

[3] HUNGERFORD,T.W., *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[4] PENTEADO, D., *Cálculos de Homologia e Cohomologia Simplicial(Programa HCprod)*, Reunião Regional da Sociedade Brasileira de Matemática, São Carlos, 1995.

[5] ROTMAN, J.J., *An introduction to Algebraic Topology*, Graduate texts in mathematics 119, Springer-Verlag, New York, 1998.