UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Soluções Singulares para Operadores Diferenciais Parciais com Coeficientes Constantes

Elisandra Bär

São Carlos - SP

2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Soluções Singulares para Operadores Diferenciais Parciais com Coeficientes Constantes

Elisandra Bär

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração: Análise Matemática

São Carlos - SP

Fevereiro de 2004

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Bär, Elisandra.
B223ss	Soluções singulares para operadores diferenciais parciais com coeficientes constantes / Elisandra Bär. -- São Carlos : UFSCar, 2004.
	148 p.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2004.
	1. Equações diferenciais parciais lineares. 2. Fourier, Análise de. 3. Singularidades (matemática). 4. Conjunto frente de ondas. I. Título.
	CDD: 515.353 (20ª)

Orientador

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho

.

Banca Examinadora

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie

Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos

Aos meus pais Helga e Egon e minha irmã Marcia.

.

"Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota."

(Madre Teresa de Calcuta)

Agradecimentos

A Deus pela constante companhia e por estar sempre iluminando meu caminho.

Aos meus pais Helga e Egon e minha irmã Marcia por todo amor, carinho, apoio, incentivo e compreensão. Aos meus tios e avós que sempre estiveram presentes.

Ao Diogo que nestes últimos meses é meu porto seguro. Obrigada pelo teu amor, carinho, respeito e compreensão.

Ao meu orientador Professor Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho pela orientação dedicada e paciente.

Aos Professores do Departamento de Matemática da UFSCar pelos ensinamentos matemáticos e pela amizade.

Aos Professores do Departamento de Matemática da UEPG, de maneira especial ao Giuliano que foi muito mais que um professor, foi orientador e é um amigo muito querido.

Aos meus amigos que sempre estiveram ao meu lado, em especial a Luíza, a Jô, a Vânia, a Cris, a Kelly, o Marcos, a Clarice, a Luana. Aos colegas e amigos do PPG-M pelo companheirismo e excelente ambiente de trabalho.

A Célia nossa secretária que sempre está disposta a "brigar" por nós.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

Conteúdo

Resumo

O objetivo deste trabalho é dissertar sobre soluções singulares de operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes. Nós provaremos o Teorema de Paley-Wiener-Schwartz e a sua versão para suportes singulares, os quais carregam informações sobre o tamanho do suporte e do suporte singular, respectivamente, e também sobre a regularidade de distribuições de suporte compacto. Nós também demonstramos dois resultados do tipo de propagação de singularidades para soluções de operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes de tipo principal real. Estes resultados descrevem, para uma situação específica, quão pequeno pode ser o suporte singular de soluções singulares.

Abstract

The objective of this work is to present some properties of singular solutions for linear partial differential operators with constant coefficients. We prove Paley-Wiener-Schwartz's theorem and its version for singular supports, these results carry information about the size of support and singular support, respectively, and also about the regularity of compact support distributions. We also prove two theorems of propagation of singularities's type for solutions of linear partial differential operators with constant coefficients of real principal type. These results describe in particular, for a very specific situation, how small can the singular support of singular solutions be.

Introdução

O objetivo deste trabalho é dissertar sobre soluções singulares de operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes.

No primeiro capítulo introduziremos algumas notações, definições e resultados que serão utilizados nesta dissertação.

No segundo capítulo falaremos sobre a transformada de Fourier e algumas de suas propriedades. Como aplicação discutiremos soluções fundamentais de equações elípticas. A transformada de Fourier-Laplace de distribuições com suporte compacto é então abordada. A seguir demonstraremos o teorema de Paley-Wiener-Schwartz e a sua versão para suportes singulares. Tais resultados dão informações sobre o tamanho do suporte e do suporte singular de uma distribuição de suporte compacto, respectivamente, bem como sobre a sua regularidade medida pelo comportamento da transformada de Fourier.

No Capítulo 3 introduziremos o conjunto frente de ondas(=wave front set), denotado por $WF(u)$, de uma distribuição u; tal conjunto combina a localização das singularidades e o comportamento da transformada de Fourier. Esta noção se mostra importante para a descrição de soluções singulares de equações diferenciais parciais lineares $P(x, D)$, que aqui se entende por distribuições u tais que o seu conjunto frente de ondas é estritamente maior que o de $P(x, D)u$. Para o caso em que $P(x, D)$ seja com coeficientes constantes e de tipo principal real algumas propriedades das singularidades, em termos do conjunto frente de ondas, das soluções singulares finalizam este trabalho. Tais resultados são sintetizados nos teoremas 3.4.7 e 3.4.8. A principal fonte foi o livro The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol. 1, de L. Hörmander.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Este capítulo apresenta um apanhado geral dos conteúdos preliminares necessários para o desenrolar desta dissertação. Ele está dividido nas seguintes seções:

Na Seção 1.2 apresentaremos as notações usadas nesta dissertação.

Na Seção 1.3 introduziremos a topologia natural em $C_c^\infty(\Omega)$ que o torna um espaço vetorial topológico completo, sendo Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, ;

Na Seção 1.4 demonstraremos alguns resultados da teoria das distribuições;

A Seção 1.5 trata de convolução ;

Na Seção 1.6 definiremos distribuições homogêneas e enunciaremos dois teoremas de extensão de distribuições homogêneas de $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ para $\mathbb{R}^n$;

Na Seção 1.7 definiremos distribuições em espaços produto e produto tensorial;

Na Seção 1.8 falaremos da composição de distribuições com funções C^∞ com diferencial sobrejetiva;

Na Seção 1.9 apresentaremos alguns resultados sobre conjuntos convexos;

Na Seção 1.10 enunciaremos alguns teoremas os quais serão citados nos capítulos posteriores.

1.2 Notações

O objetivo desta seção é apresentar as notações usadas neste capítulo.

Iniciamos recordando que estamos usando $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como as variáveis no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n \geq 1$ e $\mathbb{N}^n$ como o conjunto de todas as n-uplas $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ com $\alpha_j \in \mathbb{N}$, para cada $j = 1, \cdots, n$. Também estamos usando $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n},$$

sendo $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Usaremos o produto escalar usual

$$x \cdot \xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n$$

e a norma usual

$$|x| = \sqrt{x \cdot x}\ .$$

Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ então usaremos a seguinte relação de ordem

$$\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_j \leq \alpha_j \ , \forall j = 1, \ldots, n\ .$$

Além disso

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

e o coeficiente binomial é dado por

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}\ ,\ \forall \beta \leq \alpha\ ,$$

onde a diferença de multi-índices é calculada coordenada a coordenada.

Os monômios em x de expoente α serão denotados por

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \ .$$

Usaremos também a notação

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n} \ ,$$

sendo $D_{x_j} = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vale a fórmula de Leibniz

$$\partial^\alpha (\varphi \cdot \psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} \varphi \cdot \partial^\beta \psi.$$

Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, podemos considerar a expansão de Taylor

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \ .$$

Dado um operador linear diferencial parcial de ordem m

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) D^\alpha$$

com coeficientes $c_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, chamamos de **símbolo** de P a função

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \xi^\alpha$$

e de **símbolo principal** de P a função

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} c_\alpha(x) \xi^\alpha \ .$$

Tanto o símbolo como o símbolo principal são funções definidas em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, polinomiais na segunda variável, sendo esta última uma função homogênea de grau m em ξ.

Consideraremos Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, se K for um subconjunto compacto de Ω denotaremos $K \subset\subset \Omega$ e o complementar de Ω em $\mathbb{R}^n$ denotaremos por Ω^c.

1.3 A Topologia de $C_c^\infty(\Omega)$

Nesta seção enunciaremos os resultados necessários para introduzirmos uma topologia em C_c^∞ a qual torne espaço completo, a demonstração destes resultados pode ser encontrada em [O] ou [H2].

Nesta seção seja K compacto em $\mathbb{R}^n$. Nestas condições temos que:

Proposição 1.3.1. *O espaço vetorial normado $C(K) = \{f : K \to \mathbb{C}; f$ contínua$\}$, com a norma do supremo, $\| f \|_\infty = \sup\{|f(x)|\}$, é completo.*

Demonstração Ver [O] pg.10. ∎

Teorema 1.3.2 (Teorema da Extensão de Whitney) *Sejam $u_\alpha, |\alpha| \leq k$, funções contínuas em K. Para cada α, considere*

$$U_\alpha(x,y) = \left| u_\alpha(x) - \sum_{|\beta| \leq k-|\alpha|} \frac{u_{\alpha+\beta}(y)(x-y)^\beta}{\beta!} \right| |x-y|^{|\alpha|-k} \quad se \quad x \neq y, \quad x, y \in K$$

e

$$U_\alpha(x,x) = 0, x \in K.$$

Se U_α é contínua em $K \times K$ quando $|\alpha| \leq k$, é possível encontrar $v \in C^k(\mathbb{R}^n)$ com $\partial^\alpha v(x) = u_\alpha(x), x \in K$ e $|\alpha| \leq k$.

Demonstração. Ver [H2]-pg.48. ∎

Agora considere o espaço $C^j(K)$ o espaço das funções contínuas definidas no compacto K que admite extensão j-vezes diferenciável com a j-ésima derivada contínua, isto é,

$$C^j(K) = \{f \in C(K); \exists U \supset K \text{ aberto e } f^* \in C^j(U) : f^* |_K = f\}.$$

Podemos colocar uma norma neste espaço a fim de torná-lo completo.

Proposição 1.3.3 *Seja $K \in \mathbb{R}^n$ compacto tal que $\overline{intK} = K$. Então*

$$\| f \|_{j,\infty} = \sup_K \{|D^\alpha f^*(x)|; |\alpha| \leq j\}$$

é uma norma em $C^j(K)$. E $(C^j(K), \| \cdot \|_{j,\infty})$ é completo.

Demonstração Ver [O] pg.12. ∎

A proposição acima mostra que se $\overline{intK} = K$, não há ambiguidade em considerar

$$p_j(f) = \| f \|_{j,\infty} = \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|, \quad \text{se} \quad f \in C^j(K).$$

Proposição 1.3.4. *Nestas condições temos que $(C^\infty(K), \{p_j\})$ é normado completo.*

Demonstração. Ver [O] pg.14. ∎

Defina $C^\infty(K) = \bigcap_{j=0}^{\infty} C^j(K)$. Em $C^\infty(K)$ considere a métrica

$$d(f,g) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(f-g)}{1 + p_j(f-g)},$$

Proposição 1.3.5. *Suponha que K seja infinito. Nesta condições $(C^\infty(K), d)$ não é normável, isto é, não existe norma $\| \cdot \|$ tal que*

$$(C^\infty(K), d) = (C^\infty(K), \| \cdot \|).$$

Demonstração. Ver [O] pg.14. ∎

Podemos definir uma topologia de $C^\infty(K)$ através de semi-normas. De fato neste caso será uma família infinita de semi-normas. Defina um aberto básico de $C^i(K)$ como sendo,

$$V(f, n, \epsilon) = \{g \in C^i(K) : p_n(g - f) < \epsilon\}.$$

Proposição 1.3.6. *$(C^\infty(K), d)$ é igual a $(C^\infty(K), \{p_n\})$.*

Demonstração Ver [O] pg.15. ∎

Dado Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, não vazio, definimos o espaço vetorial C_c^∞ como sendo o espaço da funções $C^\infty(\Omega)$ cujo suporte é compacto. Lembramos que o suporte de uma função contínua $\phi(x)$ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega;\ \phi(x) \neq 0\}$, e se denota por $S(\phi)$. Tal espaço é não vazio pois a função $\phi(x) = \exp(1/(|x|^2 - 1))$ se $x \in B_1(0) \subset R^n$ e $\phi(x) = 0$ se $x \notin B_1(0)$ está em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, o seu suporte é $\overline{B_1(0)}$ e $\phi \geq 0$ em $B_1(0)$. Transladando e contraindo o suporte de ϕ, encontramos $\phi* \in C_c^\infty(\Omega)$. Escreva $\Omega = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} K_i$, com os $K_i's$ compactos de $\mathbb{R}^n$ tais que $K_i \subset int(K_{i+1})\ \ \forall i \in \mathbb{N}$. Um cálculo relativamente simples mostra que

$$d_1(f, g) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{-i} q_i(g-f)}{1 + q_i(g-f)},$$

em que $q_i(f) = \sup_{x \in K_i}\{|D^\alpha f(x)|;\ |\alpha| \leq i\},\ f \in C_c^\infty(\Omega)$, define uma métrica sobre o espaço C_c^∞. A topologia de C_c^∞ é dada pelos elementos básicos

$$V(f, n, \epsilon) = \{g \in C_c^\infty(\Omega) : q_n(g-f) < \epsilon\}.$$

Proposição 1.3.7. *(C_c^∞, d_1) não é completo.*

Demonstração. Ver [O] pg.17. ∎

Pode-se definir uma outra topologia em C_c^∞ que é mais fina do que foi dada. Isto é feito da seguinte forma: Seja $\rho = \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ uma família de funções contínuas definidas em Ω, tais que $\{S(\rho_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ é uma família localmente finita de conjuntos, isto é, para todo compacto $K \subset \Omega$, $\#\{\alpha; S(\rho_\alpha) \cap K \neq \emptyset\}$ é finito. Fixado uma tal famíia considere a seguinte semi-norma em C_c^∞ :

$$p_\rho(\phi) = \sum_\alpha \sup |\rho_\alpha D^\alpha \phi|.$$

Assim definimos uma topologia em C_c^∞, cujos abertos básicos são dados por:

$$V(f,\rho,\epsilon) = \{g \in C_c^\infty(\Omega); p_\rho(g-f) < \epsilon\}.$$

Nestas condições a topologia dada pela família de semi-normas $\{p_\rho\}$, é mais fina que a dada pela família de semi-normas $\{p_i\}$, construída anteriormente. De fato, basta mostrar que fixado n_o existe $C > 0$ e ρ_o tal que

$$p_{n_o}(f) \leq C p_{\rho_o}(f), \quad \forall f \in C_c^\infty.$$

Assim tome $C = 1$ e $\rho_o = \{\rho_{0,\alpha}\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ em que

$$\rho_{0,\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |\alpha| \leq n_o \\ 0, & \text{se} \quad |\alpha| > n_o \end{cases}$$

Tais $\rho_o = \{\rho_{0,\alpha}\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ pertencem a $C(\Omega)$ e é uma família localmente finita pois $\rho_{0,\alpha}(x) = 0$ exceto para $|\alpha| > n_o$, independente do compacto. E como

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K_{n_o}} \{|D^\alpha f(x)| : |\alpha| \leq n_o\} &\leq \sup_{x\in\Omega}\{|D^\alpha f(x)| : |\alpha| \leq n_o\} \\ &= \sup_{x\in\Omega}\{|\rho_{0,\alpha}(x) D^\alpha f(x)|\} \leq p_{\rho_o}(f) \\ &= \sum_\alpha \sup_{x\in\Omega}\{|\rho_{0,\alpha}(x) D^\alpha f(x)|\}, \end{aligned}$$

temos que a topologia dada pela família de semi-normas $\{p_\rho\}$ é mais fina que a topologia dada pelas semi-normas $\{p_n\}$.

Proposição 1.3.8. *$(C_c^\infty, \{p_\rho\})$ é completo.*

Demonstração Ver [O] pg.21. ■

Esta será a topologia de C_c^∞ que consideraremos.

1.4 Definição e Propriedades Básicas de Distribuições

Definição 1.4.1 *Se f é uma função complexa, Lebesgue mensurável, definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tal que para todo compacto $K \subset \Omega$,*

$$\int_K |f| dx < \infty$$

dizemos que f é localmente integrável e escrevemos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Dada $\phi_1 \in C_c^\infty$, $\phi_1 \not\equiv 0$, $\phi_1 \geq 0$ se multiplicarmos $\phi_1(x)$ por uma constante adequada obteremos uma nova função $\phi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int \phi(x)dx = 1, \ \phi \geq 0, \ S(\phi) \subseteq \{x; \ |x| \leq 1\}. \tag{1.4.1}$$

De fato, seja $\lambda = \frac{1}{\int \phi_1 dx}$, assim tome $\phi(x) = \lambda \phi_1(x)$.

Seja

$$\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \phi(\frac{x}{\epsilon}),$$

definimos

$$f_\epsilon(x) = \int f(x - \epsilon y)\phi(y)dy = \epsilon^{-n} \int f(y)\phi(\frac{x-y}{\epsilon})dy, \quad f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 1.4.2 *Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que (1.4.1) vale, se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $S(f) = \Omega$ então $f_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ se $\epsilon < \delta = d(S(f), \Omega^c)$. Se $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ e $S(f) \subset\subset \Omega$ então $f_\epsilon \to f$ em $L^p(\Omega)$ quando $\epsilon \to 0$. Além disso, se $f \in C^0(\Omega)$, então $f_\epsilon \to f$ uniformemente.*

Demonstração. Demonstração. 1) $f_\epsilon \in C^0(\Omega)$. De fato, como

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(x) - f_\epsilon(x')| &= \epsilon^{-n} |\int f(y)[\phi(\frac{x-y}{\epsilon}) - \phi(\frac{x'-y}{\epsilon})]dy| \\ &\leq \epsilon^{-n} \int |f(y)||\phi(\frac{x-y}{\epsilon}) - \phi(\frac{x'-y}{\epsilon})|dy \\ &\leq \| f \|_1 \sup_{\epsilon|t-t'| \leq |x-x'|} |\phi(t) - \phi(t')|, \end{aligned}$$

e o resultado segue da continuidade de ϕ.

2) Podemos diferenciar ϕ sob o sinal de integração. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial_{x_j}} f_\epsilon(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_\epsilon(x+he_j) - f_\epsilon(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\epsilon^{-n}}{h} \int f(y)[\phi(\frac{x+he_j-y}{\epsilon}) - \phi(\frac{x-y}{\epsilon})]dy.\end{aligned}$$

Mas como $f \in L^1(\Omega)$, temos que para cada x fixo

$$\frac{\epsilon^{-n}}{h} f(y)[\phi(\frac{x+he_j-y}{\epsilon}) - \phi(\frac{x-y}{\epsilon}) \to \epsilon^{-n} f(y) \frac{\partial}{\partial_{x_j}} \phi(\frac{x-y}{\epsilon}),$$

quando $h \to 0$. Então pelo Teorema do Valor Médio existem $0 < \theta_h < 1$ tal que

$$\begin{aligned}|\frac{1}{h} f(y)[\phi(\frac{x+he_j-y}{\epsilon}) - \phi(\frac{x-y}{\epsilon})]| &= |f(y) \left(\frac{\partial}{\partial_{x_j}}\phi\right)(\frac{x+\theta_h e_j - y}{\epsilon})| \\ &\le |f(y)| \max_{0<\theta_h<1} | \left(\frac{\partial}{\partial_{x_j}}\phi\right)(\frac{x+\theta_h e_j - y}{\epsilon})|,\end{aligned}$$

de modo que o membro à direita da última desigualdade está em $L^1(\Omega)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\frac{\partial}{\partial_{x_j}} f_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \int f(y) \left(\frac{\partial}{\partial_{x_j}}\phi\right)(\frac{x-y}{\epsilon})dy.$$

Analogamente mostra-se que

$$D^\alpha f_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \int f(y)\,(D^\alpha \phi)\,(\frac{x-y}{\epsilon})dy,$$

e seguindo os passos de 1) prova-se que $D^\alpha f_\epsilon \in C^0(\Omega)$. Portanto, $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$.

3) Suponhamos que $f_\epsilon(x) \neq 0$. Logo, pela primeira expressão de f_ϵ, existe $y \in S(\phi) = \{y, |y| \le 1\}$ tal que $x - \epsilon y \in K$. Assim, se $\epsilon < \delta = d(K, \Omega^c)$, segue que $S(f_\epsilon) \subseteq K + \{x; \| x \| \le \epsilon\}$, donde $f_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$.

4) Vamos supor que $f \in C_c^0(\Omega)$. Desde que $\int \phi dy = 1$, então

$$|f_\epsilon(x) - f(x)| = |\int [f(x-\epsilon y) - f(x)]\phi(y)dy| \le \sup_y |f(x-\epsilon y) - f(x)|,$$

o qual tende a zero com ϵ, devido a continuidade uniforme de f. Logo, $f_\epsilon \to f$ uniformemente.

5) Seja $f \in L^p(\Omega)$. Temos que $\| f_\epsilon \|_p \leq \| f \|_p$. De fato,

$$|f_\epsilon(x)| = |\int f(x-\epsilon y)\phi(y)dy| \leq \int |f(x-\epsilon y)||\phi(y)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}dy$$
$$\leq (\int |f(x-\epsilon y)|^p|\phi(y)|dy)^{\frac{1}{p}}(\int |\phi(y)|dy)^{\frac{1}{q}},$$

em que na última passagem usamos a desigualdade de Hölder. Assim,

$$\int |f_\epsilon(x)|^p dx \leq \int\int |f(x-\epsilon y)|^p|\phi(y)|dydx = \| f \|_p^p,$$

sendo que a última igualdade segue do teorema de Fubini. Logo $\| f_\epsilon \|_p \leq \| f \|_p$. Por outro lado, dado $\eta > 0$, existem $v,\ v_\epsilon \in C_c^0(\Omega)$ tal que $\| f - v \|_p < \eta$ e $\|f_\epsilon - v_\epsilon\|_p < \eta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \| f_\epsilon - f \|_p = & \| f_\epsilon - v + v - f \|_p \leq \| f_\epsilon - v \|_p + \| v - f \|_p \\ & \leq \| f_\epsilon - v_\epsilon \|_p + \| v_\epsilon - v \|_p + \| f - v \|_p < 2\eta + \| v_\epsilon - v \|_p . \end{aligned}$$

Mas como $v_\epsilon \to v$ uniformemente quando $\epsilon \to 0$ e $S(v_\epsilon) \subset K + \{x; \| x \| \leq \epsilon\}$, o qual independe de ϵ se $0 < \epsilon < 1$. Logo, $\| v_\epsilon - v \|_p < \delta$ se ϵ for suficientemente pequeno e $\| f_\epsilon - f \|_p < 3\delta$. ■ ■

Observações 1.4.3 *(i) Se $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$ é de suporte compacto então $f \in L^1$ pela desigualdade de Hölder, assim $f_\epsilon \in L^1$.*

(ii) Usando o fato de que as funções em L^p com suporte compacto são densas em L^p, o teorema mostra que $C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ densamente.

(iii) $C_c^\infty(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ de modo não denso. De fato, seja $\psi(x) = 1$ em Ω, então $\psi \in L^\infty(\Omega)$. Assim, dado qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\|\varphi - \psi\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |(\varphi-\psi)(x)| \geq 1$, pois existe $x \in \Omega$ tal que $\varphi(x) = 0$.

Teorema 1.4.4 *Seja $K \subset \Omega$ um conjunto compacto. Então existe uma função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi = 1$ numa vizinhança de K.*

Demonstração. Seja $\delta = d(K,\ \Omega^c)$, $\delta > 0$, pois é a distância entre um compacto e um fechado disjunto. Consideremos $\epsilon,\ \epsilon_1 > 0$ tais que $\epsilon < \epsilon_1 < \epsilon + \epsilon_1 < \delta$ e seja χ a função característica de $K_1 = K + \{x \in \Omega;\ |x| \leq \epsilon_1\}$. Tomemos

$$\varphi(x) = \int \chi(x - \epsilon y)\phi(y)dy = \epsilon^{-n} \int \chi(y)\phi(\frac{x-y}{\epsilon})dy,$$

em que $\phi \in C_c^\infty$ tal que (1.4.1) vale. $\varphi \in C_c^\infty$, pois $S(\varphi) \subseteq K_1 + \{x;\ |x| \leq \epsilon\} \subseteq K + \{x;\ |x| \leq \epsilon + \epsilon_1\} \subseteq \Omega$. Se $d(x,\ K) < \epsilon_1 - \epsilon$, segue que para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$, com $|y| \leq 1$, $\ x - \epsilon y \in K_1$. Conseqüentemente

$$\varphi(x) = \int \chi(x - \epsilon y)\phi(y)dy = \int_{|y|\leq 1} \chi(x - \epsilon y)\phi(y)dy = \int_{|y|\leq 1} \phi(y)dy = 1.$$

Portanto $\varphi \equiv 1$ numa vizinhança de K. ∎

Observação 1.4.5 *Com a notação do Teorema acima temos*

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| = \epsilon^{-n}|D^\alpha(\int \chi(y)\phi(\frac{x-y}{\epsilon})dy)| =$$

$$= \epsilon^{-n}|\int \chi(y)\epsilon^{-|\alpha|}(D^\alpha)(\frac{x-y}{\epsilon})dy| =$$

$$= \epsilon^{-|\alpha|}|\int \chi(x-\epsilon y)(D^\alpha \phi)(y)dy| \leq$$

$$\leq \epsilon^{-|\alpha|}\int |D^\alpha \phi|dy.$$

Assim

$$|\partial^\alpha \varphi| \leq C_\alpha \epsilon^{-|\alpha|} \tag{1.4.2}$$

em que C_α depende apenas de α e da norma.

Teorema 1.4.6 *Sejam $\Omega_1, ..., \Omega_k$ conjuntos abertos e K um compacto tal que $K \subset \cup_1^k \Omega_j$. Então existem funções $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$ tal que $\varphi_j \geq 0$ e $\sum_1^k \varphi_j \leq 1$, com a igualdade numa vizinhança de K.*

Demonstração. Ver [H2] pg.28. ∎

Definição 1.4.7 *Uma sequência* $\{\phi_j\}$ *de funções em* $C_c^\infty(\Omega)$ *converge a zero em* $C_c^\infty(\Omega)$ *se*

(i) *existe um compacto* $K \subset \Omega$ *tal que* $S(\phi_j) \subseteq K,\ j = 1, 2, ...$

(ii) *para todo inteiro positivo* m, *as derivadas de ordem* m *das funções* ϕ_j *convergem uniformemente a zero quando* $j \to \infty$.

Definição 1.4.8 *Uma distribuição* u *em* Ω *é uma aplicação linear de* C_c^∞ *tal que para cada compacto* $K \subset \Omega$ *existem constantes* C *e* k *tais que:*

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} sup|D^\alpha \varphi|; \quad \varphi \in C_\circ^\infty(K). \tag{1.4.3}$$

O conjunto de todas distribuições é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Se o inteiro k na estimativa acima independe da escolha do compacto K, a distribuição u é dita ser de ordem finita, e o menor de tais inteiros k é chamado de ordem da distribuição u em Ω e denotamos o conjunto destas distribuições por $\mathcal{D}'^k(\Omega)$. O conjunto de todas distribuições de ordem finita em Ω é denotado por $\mathcal{D}'_F(\Omega)$, isto é, $\mathcal{D}'_F(\Omega) = \bigcup_k \mathcal{D}'^k(\Omega)$.

O próximo teorema dá uma outra definição para distribuições.

Teorema 1.4.9 *Uma forma linear* u *definida em* $C_c^\infty(\Omega)$ *é uma distribuição se, e somente se,* $u(\varphi_j) \to 0$ *quando* $j \to \infty$ *para cada seqüência* $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ *tal que* $\varphi_j \to 0$ *em* $C_c^\infty(\Omega)$.

Demonstração Suponhamos que u é uma distribuição. Seja $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_j) \subseteq K_0, \quad j = 1, 2, ...$ logo $\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{K_0} |D^\alpha \phi_j| \to 0$ quando $j \to 0$, pois $\phi_j^{(m)} \to 0$ quando $j \to 0$ uniformemente em $K = K_0$, portanto $u(\phi_j) \to 0$ quando $j \to 0$. Reciprocamente, suponhamos que $u(\phi_j) \to 0$ quando

$j \to 0$ para toda seqüência $C_c^\infty(\Omega) \ni \phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e suponhamos que u não satisfaça (1.4.3), ou seja dado $C = k = n$ existe $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$r_n = |\langle u,\ \varphi_n\rangle| > n \sum_{|\alpha|\leq n} \sup |D^\alpha \varphi_n|, \quad S(\varphi_n) \subseteq K,$$

assim para $\psi_n = \frac{\varphi_n}{r_n} \in C_c^\infty$, temos que

$$\sum_{|\alpha|\leq n} \sup |D^\alpha \psi_n| < \frac{1}{n}, \quad \langle u,\ \psi_n\rangle = 1, \quad S(\psi_n) \subseteq K,$$

isto é, $\psi_n \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e $\langle u,\ \psi_n\rangle \not\to 0$ o que contradiz a continuidade de u.

■

Exemplo 1.4.10 *Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n$, e defina*

$$\langle \delta,\ \phi\rangle = \phi(0), \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

O funcional δ é linear e contínuo. Esta distribuição é chamada "delta de Dirac".

Exemplo 1.4.11 *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, e defina*

$$\langle T_f,\ \phi\rangle = \int f\phi dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

T_f é uma distribuição. De fato,

$$\langle T_f,\ \phi_1 + \lambda\phi_2\rangle = \int f\phi_1 dx\ + \lambda \int f\phi_2 dx, \quad \phi_1,\ \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

o que prova a linearidade. Seja $\{\phi_j\}$ uma seqüencia em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ da definição 1.4.7 temos que existe $K \subset\subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subseteq K$, $j = 1,\ 2...$ e para todo $m > 0$, $\phi_j^{(m)} \to 0$ uniformemente quando $j \to \infty$. Assim

$$|\langle T_f,\ \phi_j\rangle| = |\int_{S(\phi_j)} f\phi_j dx| \leq \sup_{S(\phi_j)} |\phi_j(x)| \int_{S(\phi_j)} |f| dx = M \sup_{x\in S(\phi_j)} |\phi_j(x)| \to 0,$$

quando $j \to \infty$, portanto T_f é contínua.

Teorema 1.4.12 *Sejam Ω, Σ subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ respectivamente, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi(x,y) \in C^\infty(\Omega \times \Sigma)$. Se existe $K \subset\subset \Sigma$ tal que $\varphi(x,y) = 0$ quando $x \notin K$, então a aplicação $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ pertence a $C^\infty(\Sigma)$ e*

$$\partial_y^\alpha \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle = \langle u, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y)\rangle,$$

para todo multi-índice α.

Demonstração. Provemos inicialmente que $y \mapsto \varphi(x,y)$ é contínua. Fixe y arbitrário e tome uma seqüência $y_j \to y$ qualquer. Para facilitar a compreensão, escrevamos $\psi_j(x) = \varphi(x, y_j)$ e $\psi(x) = \varphi(x,y)$ (y está fixado, de modo que ψ_j e ψ são funções de x). A linearidade e a continuidade de u implicam que é suficiente provarmos que $\psi_j \to \psi$ em $C_0^\infty(\Omega)$. Como $\varphi(x,y) = 0$ quando $x \notin K$, o suporte de cada ψ_j está contido em K.

O teorema do valor médio garante que, para cada j, existe um número real $0 < \theta_j < 1$ para o qual vale

$$\begin{aligned}
|\psi_j(x) - \psi(x)| &= |\varphi(x, y_j) - \varphi(x,y)| \\
&= |\nabla_y \varphi(x, y + \theta_j(y - y_j)) \cdot (y - y_j)| \\
&\leq |\nabla_y \varphi(x, y + \theta_j(y - y_j))| \; |y - y_j|.
\end{aligned}$$

Como $y_j \to y$, os pontos y_j estão contidos em uma bola $\overline{B_R(y)}$, e, como $0 < \theta_j < 1$, obtemos que os pontos $y + \theta_j(y - y_j)$ estão contidos em $\overline{B_R(y)}$. Escrevendo $B = \overline{B_R(y)}$ temos

$$\begin{aligned}
|\psi_j(x) - \psi(x)| &\leq \sup_{z \in B} |\nabla_y \varphi(x,z)| \; |y - y_j| \\
&\leq \sup_{z \in B, x \in K} |\nabla_y \varphi(x,z)| \; |y - y_j|.
\end{aligned}$$

Isso implica que $\psi_j \to \psi$ uniformemente. Mas o argumento acima vale para uma função φ arbitrária, logo vale também para $\partial_x^\alpha \varphi$, qualquer que seja o multi-índice α. Portanto, $\psi_j \to \psi$ em $C_0^\infty(\Omega)$ e, daí, $\langle u, \varphi(\cdot, y_j)\rangle$ converge para $\langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$. Como a seqüência $\{y_j\}$ é arbitrária, $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é contínua.

A prova de que $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é de classe $C^\infty(\Sigma)$ será feita por indução sobre $|\alpha|$. Tome um multi-índice α tal que $|\alpha| = 1$, suponha $\alpha = e_i$. Tome uma seqüência $\{h_j\}$ arbitrária tal que $h_j \to 0$ e $h_j \neq 0, \forall j \in \mathbb{N}$. A linearidade de u implica que o quociente de Newton pode ser escrito como

$$\frac{\langle u, \varphi(\cdot, y + h_j e_i)\rangle - \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle}{h_j} - \Big\langle u, \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(\cdot, y)\Big\rangle = \Big\langle u, \frac{\varphi(\cdot, y + h_j e_i) - \varphi(\cdot, y)}{h_j} - \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(\cdot, y)\Big\rangle,$$

e, sua continuidade implica que, para provarmos que $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ possui derivada de primeira ordem na direção de e_i, é suficiente provarmos que $\frac{1}{h_j}\{\varphi(\cdot, y + h_j e_i) - \varphi(\cdot, y)\} - \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(\cdot, y) \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$. Novamente para facilitar a compreensão, escreveremos

$$\psi_j(x) = \frac{\varphi(x, y + h_i e_j) - \varphi(x, y)}{h_i} \quad \text{e} \quad \psi(x) = \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(x, y).$$

Em primeiro lugar note que $S(\psi_j) \subset K, \forall j \in \mathbb{N}$.

Nas estimativas que seguem, os números reais θ_j, τ_j são tais que $0 < \theta_j, \tau_j < 1$ e sua existência é garantida pelo teorema do valor médio.

$$\begin{aligned}
|\psi_j(x) - \psi(x)| &= \Big|\frac{\varphi(x, y + h_j e_i) - \varphi(x, y)}{h_j} - \frac{\partial}{\partial y_j}\varphi(x, y)\Big| \\
&= \Big|\frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(x, y + \theta_j h_j e_i) - \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(x, y)\Big| \\
&= \Big|\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\varphi(x, y + \tau_j\theta_j h_j e_i)\Big| |\theta_j h_j e_i| \\
&\leq \Big|\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\varphi(x, y + \tau_j\theta_j h_j e_i)\Big| |h_j| \\
&\leq \sup_{z \in [y, h_j e_i], x \in K} \Big|\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\varphi(x, z)\Big| |h_j|
\end{aligned}$$

sendo que $[y, h_j e_i]$ denota o segmento cujas extremidades são y e $h_j e_i$. Para os índices i tais que $|h_i| < 1$ temos

$$|\psi_i(x) - \psi(x)| \;\; \leq \sup_{z\in[y,e_i],x\in K} \left|\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\varphi(x,z)\right| |h_j|.$$

Isso prova que $\psi_j \to \psi$ uniformemente em K. Desde que a estimativa acima vale para qualquer função φ, vale para $\partial_x^\beta\varphi$, para todo multi-índice β. Portanto, $\psi_j \to \psi$ em $C_0^\infty(\Omega)$ e, daí,

$$\frac{\langle u, \varphi(\cdot, y + h_j e_i)\rangle - \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle}{h_j} \to \left\langle u, \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(\cdot, y)\right\rangle.$$

Desde que a seqüência $\{h_j\}$ é arbitrária, $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ possui derivada de primeira ordem na direção de e_i e vale $\frac{\partial}{\partial y_i}\langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle = \langle u, \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(\cdot, y)\rangle$. A prova de que $y \mapsto \frac{\partial}{\partial y_{ij}}\langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é contínua é análoga à de que $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é contínua. O fato de que a direção e_i é arbitrária, implica que $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é de classe C^1.

Suponha que $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é de classe C^k e que

$$\partial_y^\gamma\langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle = \langle u, \partial_y^\gamma\varphi(\cdot, y)\rangle,$$

para qualquer multi-índice γ de módulo k, e provemos que isso implica que $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é de classe C^{k+1}. Tome um multi-índice α tal que $|\alpha| = k + 1$, podemos supor que $\alpha = \gamma + e_j$, $|\gamma| = k$. Aplicando a argumentação do caso $k = 1$ com $\partial_x^\gamma\varphi$ no lugar de φ, obtemos o resultado desejado. ∎

Teorema 1.4.13 *Uma aplicação linear u definida em $C_c^\infty(\Omega)$ é uma distribuição se, e somente se, existem funções $\rho_\alpha \in C(\Omega)$, tal que*

$$|u(\phi)| \leq \sum_\alpha sup|\rho_\alpha\partial^\alpha\phi|, \quad \phi \in C_\circ^\infty(\Omega)$$

e em cada conjunto compacto de Ω exceto um número finito das funções ρ_α não são identicamente nulas. Podemos tomar $\rho_\alpha = 0$ quando $|\alpha| > k$ se e somente se u é de ordem menor ou igual que k.

Demonstração Ver [H2]-pg 35. ∎

Teorema 1.4.14 *Se $u \in \mathcal{D}'^k(\Omega)$, podemos estender u a um único funcional linear em $C_c^k(\Omega)$ de forma que (1.4.3) continua válido para toda $\phi \in C_c^k(K)$ e alguma constante C.*

Demonstração. Ver [O] pg.34 ou [H2] pg.37. ∎

O Teorema mostra que $\mathcal{D}'(\Omega) = (C_c^\infty(\Omega))'$.

Teorema 1.4.15 *Se u_j é uma seqüência em $\mathcal{D}'(X)$ e*

$$u(\phi) = \lim_{j\to\infty} u_j(\phi) \tag{1.4.4}$$

existe para toda $\phi \in C_c^\infty(X)$, então $u \in \mathcal{D}'(X)$. Assim $u_j \to u$ como $j \to \infty$. Além disso, (1.4.3) é válida para toda u_j com constantes C e k independentes de j, e $u_j(\phi_j) \to u(\phi)$ se $\phi_j \to \phi$ em $C_c^\infty(X)$.

Demonstração Ver [H2] pg.38. ∎

Passemos, agora a estender para as distribuições algumas operações básicas como a soma e o produto por escalares.

Se $u_1,\ u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos para $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\langle u_1 + u_2, \phi\rangle &= \langle u_1, \phi\rangle + \langle u_2, \phi\rangle,\\ \langle \lambda u_1, \phi\rangle &= \lambda\langle u_1, \phi\rangle.\end{aligned}$$

Se u é uma função contínua tal que $\partial_k u$ está definida e é contínua, obtemos por integração por partes

$$\int (\partial_k u)\phi = -\int u(\partial_k \phi), \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Se f é uma função contínua, então

$$\int (fu)\phi = \int u(f\phi), \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

em que $f\phi$ é uma função teste se $f \in C^\infty$.

As definições a seguir estendem as igualdades acima para distribuições.

Definição 1.4.16 (Produto por uma função C^∞) *Seja $f \in C^\infty(\Omega)$. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos a multiplicação de u por f como*

$$\langle fu, \phi \rangle = \langle u, f\phi \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.4.5}$$

Claramente fu é um funcional linear contínuo em $C_c^\infty(\Omega)$, portanto a distribuição produto fu está bem definida qualquer que seja $f \in C^\infty(\Omega)$.

Se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle f\delta, \phi \rangle = \langle \delta, f\phi \rangle = f(0)\phi(0) = f(0)\langle \delta, \phi \rangle = \langle f(0)\delta, f\phi \rangle,$$

o que significa que $f\delta = f(0)\delta$ e só o valor de f em $x = 0$ é relevante. Analogamente,

$$\langle f\delta', \phi \rangle = \langle \delta', f\phi \rangle = -\langle \delta, (f\phi)' \rangle = -\langle \delta, f\phi' + f'\phi \rangle = \langle f(0)\delta' - f'(0)\delta, \phi \rangle$$

ou seja, $f\delta' = f(0)\delta' - f'(0)\delta$. Resultados análogos podem ser obtidos para derivadas de qualquer ordem de δ.

Definição 1.4.17 (Derivação) *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos a derivação de u com relação a x_j como*

$$\langle \partial_j u, \phi \rangle = -\langle u, \partial_j \phi \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.4.6}$$

Iterando (1.4.6), podemos definir $\partial^\alpha u$ para qualquer multi-índice α e obter

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Um cálculo simples nos mostra que $\partial^\alpha u$ *é um funcional linear contínuo em* $C_c^\infty(\Omega)$.

Exemplo 1.4.18 *A função* $H(x) = 1$ *para* $x > 0$, $H(x) = 0$ *para* $x \leq 0$, *em* $\mathbb{R}^n$ *é chamada a função de Heaviside e segue das definições que sua derivada é*

$$H'(\phi) = H(\phi') = -\int_0^\infty \phi'(x)dx = \phi(0),$$

ou seja $H' = \delta$.

Definição 1.4.19 (Operadores diferenciais) *Seja* P *um operador diferencial linear com coeficientes* C^∞, *isto é,* P *é uma combinação de derivação e multiplicação por funções* C^∞. *Assim, está bem definido* Pu, *para qualquer distribuição* u.

Exemplo 1.4.20 *Se*

$$P = \Delta = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i)^2,$$

duas aplicações de (1.4.6) dão

$$\langle \Delta u, \phi \rangle = \langle u, \Delta\phi \rangle, \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Seja $\Phi : \Omega \to \Omega'$ um difeomorfismo de classe C^∞, qualquer, entre os abertos Ω e Ω' de $\mathbb{R}^n$. Definamos para $\phi \in C_c^\infty(\Omega')$, $L(\phi) = \phi \circ \Phi$. Como $S(\phi \circ \Phi) = \Phi^{-1}(S(\phi))$, $L(\phi) \in C_c^\infty(\Omega)$. Pelo teorema de mudança de variáveis, se $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega \phi(\Phi(y))\psi(y)dy = \int_{\Omega'} \phi(x)\psi(\Phi^{-1}(x))|J(\Phi^{-1})|(x)dx, \tag{1.4.7}$$

em que $|J(\Phi^{-1})|$ denota o valor absoluto do determinante da matriz jacobiana de Φ^{-1}, que nunca é nula, pois Φ é difeomorfismo. Assim $|J(\Phi^{-1})| \in C^\infty(\Omega')$. Observe também que $\psi(\Phi^{-1}(x)) \in C_c^\infty(\Omega')$. Estendendo (1.4.7) temos

DEFINIÇÃO 1.4.21 (Mudança de variáveis) *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega')$ e $\Phi : \Omega \to \Omega'$ é um difeomorfismo, definimos*

$$\langle u \circ \Phi, \phi \rangle = \langle u, (\phi \circ \Phi^{-1}) |J(\Phi^{-1})| \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.4.8}$$

Um cálculo mostra que $u \circ \Phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

A noção acima é útil porque, além de coincidir no caso de funções implica que o espaço das distribuições é independente de coordenadas, permitindo definir distribuições em variedades diferenciáveis por meio de cartas.

Vejamos agora algumas aplicações mais simples da definição anterior.

EXEMPLO 1.4.22 (Translação) *Seja $a \in \mathbb{R}^n$. Se τ_a è a translação por a em $\mathbb{R}^n$, isto é, $\tau_a(x) = x - a$, definimos a tranlação de $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ por a como sendo a função $\phi_a = \phi \circ \tau_a$. Definimos a translação de $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ através de (1.4.8), ou seja,*

$$\langle u_a, \phi \rangle = \langle u \circ \tau_a, \phi \rangle = \langle u, \phi \circ \tau_{-a} \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.4.9}$$

EXEMPLO 1.4.23 (Reflexão) *Seja Ω um aberto simétrico em relação a origem e consideremos $\Phi(x) = -x$. Definimos $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$ para $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, e por (1.4.8)*

$$\langle \check{u}, \phi \rangle = \langle u, \check{\phi} \rangle, \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega), \ \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.4.10}$$

DEFINIÇÃO 1.4.24 *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos o suporte de u, denotado por $S(u)$, o conjunto complementar dos pontos x de Ω para os quais existe vizinhança aberta $V_x \subset \Omega$ tal que a restrição de u a $C_c^\infty(V_x)$ é nula.*

DEFINIÇÃO 1.4.25 *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos o suporte singular de u, denotado por $SS(u)$, o conjunto complementar dos pontos x de Ω para os quais existe vizinhança aberta $V_x \subset \Omega$ tal que a restrição de u a $C_c^\infty(V_x)$ é C^∞.*

Definição 1.4.26 *Denotamos por $\mathcal{E}'(\Omega)$ o subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.*

Teorema 1.4.27 *Seja $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Existe um único funcional linear $\tilde{u} : C^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que*

(i) $\tilde{u}(\phi) = u(\phi)$ para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$;

(ii) $\tilde{u}(\phi) = 0$ se $\phi \in C^\infty$ e $S(\phi) \cap S(u) = \emptyset$.

Demonstração Unicidade: Suponhamos que existem dois funcionais $\tilde{u}_1$ e $\tilde{u}_2$ satisfazendo (i) e (ii) e seja $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ igual q 1 numa vizinhança de $S(u)$. Se $\phi \in C^\infty(\Omega)$, $\phi = \phi\psi + (1-\psi)\phi = \phi_1 + \phi_2$, em que $\phi_1 = \phi\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\phi_2 = (1-\psi)\phi$ com $S(\phi_2) \cap S(u) = \emptyset$, pois $S(1-\psi) \cap S(u) = \emptyset$. Assim

$$\tilde{u}_1(\phi) = \tilde{u}_1(\phi_1) + \tilde{u}_1(\phi_2) = u(\phi_1) = \tilde{u}_2(\phi_1) = \tilde{u}_2(\phi_1) + \tilde{u}_2(\phi_2) = \tilde{u}_2(\phi),$$

portanto $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$.

Existência: Seja $\phi \in C^\infty(\Omega)$, defina

$$\langle \tilde{u},\ \phi \rangle = \langle u, \phi_0 \rangle,$$

em que $\phi = \phi_0 + \phi_1$ é qualquer decomposição de ϕ com $\phi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_1) \cap S(u) = \emptyset$. Se $\phi = \phi_0' + \phi_1'$ é outra decomposição, temos que $\phi_0 - \phi_0' = \phi_1 = \phi_1'$ e segue que $S(\phi_0 - \phi_0') \cap S(u) = \emptyset$. Como $\phi_0 - \phi_0'$ está suportada num aberto em que u se anula então $u(\phi_0 - \phi_0') = 0$, ou seja $\langle u,\ \phi_0 \rangle = \langle u,\ \phi_0' \rangle$ e a definição de $\tilde{u}$ resulta independente da decomposição. Logo existe $\tilde{u}$ satisfazendo (i) e (ii). ∎

Teorema 1.4.28 *Se $u \in \mathcal{E}'$ é de ordem $\leq k$ e se $\phi \in C^k$,*

$$\partial^\alpha \phi(x) = 0 \quad para |\alpha| \leq k \ \ e\ x \in S(u), \tag{1.4.11}$$

então segue que $u(\phi) = 0$.

Demonstração Ver [H2] pg.46. ■

Teorema 1.4.29 *Se u é uma distribuição de ordem k com suporte igual a $\{y\}$, então u tem a forma*

$$u(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \phi(y), \phi \in C^k.$$

Demonstração Ver [H2] pg.46. ■

Teorema 1.4.30 *Seja $x = (x',\ x'')$ uma separação das variáveis de $\mathbb{R}^n$ em dois grupos, isto é, $(x', x'') \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$. Se u é uma distribuição em $\mathbb{R}^n$ de ordem k com suporte contido no plano $x' = 0$, então*

$$u(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq k} u_\alpha(\phi_\alpha) \tag{1.4.12}$$

em que u_α é uma distribuição de suporte compacto e ordem $k - |\alpha|$ nas variáveis x'', $\alpha = (\alpha',\ 0)$ e

$$\phi_\alpha(x'') = \partial\phi(x',\ x'')\ |_{x'=0}\ .$$

Demonstração Ver [H2] pg.47. ■

Lema 1.4.31 $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ *densamente.*

Demonstração De fato, escreva $\Omega = \cup K_n$, com os K_n's compactos que esgotam Ω. Para cada n, tome $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ igual a 1 numa vizinhança de K_n. Dada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a seqüência $u_n = \phi_n u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e $u_n \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ pois, se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $K = S(\phi)$,

$$\langle u_n, \phi \rangle = \langle u\phi_n, \phi \rangle = \langle u, \phi_n \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle,$$

se n é grande o suficiente para que $K \subset K_n$. ■

Teorema 1.4.32 *Se u é uma função no conjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^n$, com $u \in C^1(X \backslash \{x_0\})$ para algum $x_0 \in X$, e se a função v que é igual a u' para $x \neq x_0$ é integrável numa vizinhança de x_0, então o limite*

$$u(x_0 \pm 0) = \lim_{x \to x_0 \pm 0} u(x)$$

existe e

$$u' = v + (u(x_0 + 0) - u(x_0 - 0))\delta_{x_0}.$$

Demonstração Se $x_0 < y$ 0 intervalo $[x_0,\ y]$ pertence a X então

$$u(x) = u(y) - \int_x^y v(t)dt, \quad x_0 < \ x < \ y,$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} = u(y) - u(y) + u(x_o + 0) = u(x_0 + 0).$$

Logo existe $u(x_0 + 0)$. Analogamente existe $u(x_0 - 0)$. Além disso temos,

$$u'(\phi) = -u(\phi') = \lim_{\epsilon \to +0} [- \lim_{|x - x_0| > \epsilon} u(x)\phi'(x)dx] =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} [u(x_0 + \epsilon)\phi(x_0 + \epsilon) - u(x_0 - \epsilon)\phi(x_0 - \epsilon) + \int_{|x - x_0| > \epsilon} v(x)\phi(x)dx] =$$

$$= v(\phi) + [u(x_0 + 0) - u(x_0 - 0)]\delta_{x_0}(\phi).$$

■

Teorema 1.4.33 *Se $u \in \mathcal{D}'(X)$ em que X é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ e se $u' = 0$, então u é uma constante.*

Demonstração Por definição temos que $u' = 0 \iff -u(\phi') = 0,\ \phi \in C_c^\infty(X)$. Dado $\psi \in C_c^\infty(X);\ \ \int \psi(t)dt = 0$ então $\psi = \phi'$ para alguma $\phi \in C_c^\infty$. Tome $\phi(t) = \int_{-\infty}^t \psi(t)dt$. Note que $\phi'(t) = \psi(t)$ e existe $t_1;\ \phi(t) = 0$ se $t \geq T_1$, de fato podemos considerar $S(\phi) \subset [t_2,\ t_1$ com $[t_2,\ t_1] \supset S(\psi)$. Agora tome $\varphi_0 \in C_c^\infty$ tal que $\int \varphi_0 = 0$. Se $\psi \in C_c^\infty$, considere

$$\widetilde{\psi}(t) = \psi(t) - \int \psi(t)dt\varphi_0(t).$$

Então $\int \widetilde{\psi}(t)dt = 0$, logo $u(\widetilde{\psi}) = 0$ que implica

$$u(\psi) = u(\varphi_0)\int 1\psi(t)dt = \int u(\varphi_0)\psi(t)dt,$$

portando $u = u(\varphi_0)$. ∎

Teorema 1.4.34 *Seja I um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ e seja*

$$Z = \{z \in \mathbb{C};\ Rez \in I,\ 0 < Imz < \lambda\}.$$

Se f é uma função analítica em Z tal que existe $N \in \mathbb{N}$ e $c > 0$ com

$$|f(z)| \leq c(Imz)^{-N};\quad z \in Z.$$

Então $f(.+iy)$ tem um limite $f_0 \in \mathcal{D}'^{(N+1)}(I)$ quando $y \to 0^+$, isto é,

$$\lim_{y\to 0^+}\int f(x+iy)\phi(x)dx = \langle f_0,\ \phi\rangle,\quad \phi \in C_c^{N+1}(I).$$

Demonstração Ver [H2]pg63-64. ∎

Teorema 1.4.35 *Seja I um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ e seja*

$$Z^{\pm} = \{z \in \mathbb{C};\ Rez \in I,\ 0 <\ \pm Imz < \lambda\}.$$

Se f é uma função analítica em $Z = Z^+ \bigcup Z^-$ tal que

$$|f(z)| \leq c|Imz|^{-N},\quad z \in Z$$

então a integral

$$F(\phi) = \int (\int f(x+iy)\phi(x,\ y)dx)dy,\quad \phi \in C_c^N(Z \cup I), \tag{1.4.13}$$

existe e define uma distribuição em $\mathcal{D}'^N(Z \cup I)$ tal que

$$\langle \frac{\partial F}{\partial \bar{z}},\ \phi\rangle = \frac{i}{2}\langle f(.+i0) - f(.-i0),\ \phi(.,\ 0)\rangle,\quad \phi \in C_c^{N+1}(Z \cup I). \tag{1.4.14}$$

Temos que $F = f$ em Z.

Demonstração Ver [H2] pg.65. ∎

Teorema 1.4.36 *Se f é analítica num retângulo Z definido no Teorema 1.4.34 e* $\lim_{y\to 0} f(.+iy)$ *existe em* $\mathcal{D}'^{k}(I)$, *então*

$$|f(z)| \leq c'(Imz)^{-k-1}, \quad z \in J \times (0,\ \frac{\lambda}{2}),$$

em que J é um intervalo tal que $\overline{J} \subset\subset I$.

Demonstração Ver [H2] pg.66. ∎

Teorema 1.4.37 *Seja X um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, Γ um cone conexo aberto em $\mathbb{R}^n$, e seja para algum $\lambda > 0$*

$$z = \{z \in \mathbb{C}^n;\ Rez \in X,\ Imz \in \Gamma,\ |Imz| < \lambda\}.$$

Se f é uma função analítica em Z tal que

$$|f(z)| \leq c_1 |Imz|^{-N}, \quad z \in Z, \tag{1.4.15}$$

então $f(.+iy)$ tem um limite $f_0 \in \mathcal{D}'^{N+1}(X)$ quando $\Gamma \ni y \to 0$. Se $f_0 = 0$ então $f = 0$.

Demonstração Ver [H2] pg.66. ∎

Observação: Olhando a demonstração do teorema acima obtemos que o limite de $f(\cdot + iy)$ quando $y \to 0$ é definido por

$$\langle f_0,\ \phi\rangle = \int \Phi(x,\ Y) f(x+iY)dx +$$

$$+(N+1)\int_{0<t<1}\int f(x+itY)\sum_{|\alpha|=N+1}\partial^\alpha\phi(x)\frac{(iY)^\alpha}{\alpha!}t^N dxdt \tag{1.4.16}$$

em que, $Y \in \Gamma$ com $|Y| < \lambda$ fixo e

$$\Phi(x,\ y) = \sum_{|\alpha|\leq N}\partial^\alpha\phi(x)\frac{(iy)^\alpha}{\alpha!},\ \phi \in C_c^{N+1}(X). \tag{1.4.17}$$

1.5 Convolução

A convolução de $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$, uma delas com suporte compacto, se define por

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy,$$

que, identificando f como uma distribuição, pode ser escrito na forma

$$(f * g)(x) = \langle f, g(x - \cdot)\rangle = \langle f, \check{g}_x\rangle$$

no qual $\check{g}(y) = g(-y)$ e $g_x(y) = g(y - x)$ é a translação à direita por x. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 1.5.1 *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, uma delas com suporte compacto, definimos a convolução de u com ϕ como sendo a função*

$$u * \phi(x) = \langle u, \phi(x - \cdot)\rangle = \langle u, \check{\phi}_x\rangle,$$

em que $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$.

Exemplo 1.5.2 *Se $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ então $(\delta * \phi)(a) = \langle \delta,\ \phi(x - a)\rangle = \phi(a)$, ou seja $\delta * \phi = \phi$.*

Teorema 1.5.3 *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Então*

(i) $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e suas derivadas são dadas por

$$\partial^\alpha(u * \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi = u * (\partial^\alpha \phi). \tag{1.5.1}$$

(ii) $S(u * \phi) \subset S(u) + S(\phi)$.

Demonstração Se definirmos $\varphi(x,y) = \phi(x-y) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, vemos que φ satisfaz as hipóteses do teorema 1.4.12. Assim a função

$$x \to \langle u, \varphi(x,\cdot)\rangle = u * \phi(x)$$

está em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e vale

$$\partial_x^\alpha(u*\phi) = u*(\partial_x^\alpha \phi).$$

Mas, por definição

$$\begin{aligned} u*(\partial_x^\alpha\phi) &= \langle u_y, \partial_x^\alpha \phi(x-y)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u_y, \partial_y^\alpha\phi(x-y)\rangle \\ &= \langle \partial_y^\alpha u_y, \phi(x-y)\rangle = (\partial^\alpha u)*\phi, \end{aligned}$$

segue a igualdade em (1.5.1). Finalmente, observamos que se $x \notin S(u)+S(\phi)$ então $S(u)\cap S(\check{\phi}_x) = \emptyset$, e daí $\langle u, \check{\phi}_x\rangle = 0$. Mostrando (ii). ■

Observação 1.5.4 *Os mesmos resultados do teorema anterior valem se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 1.5.5 *Se $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, então*

$$(u*\phi)*\psi = u*(\phi*\psi).$$

Demonstração Consideremos para cada $\epsilon > 0$, as somas de Riemann

$$s_\epsilon(x) = \epsilon^n \sum_m \phi(x-\epsilon m)\psi(\epsilon m)$$

em que $m = (m_1, \ldots, m_n)$ percorre os pontos de coordenadas inteiras. Como $S(s_\epsilon) \subset S(\phi)+S(\psi) =$ compacto fixo, para todo $0 < \epsilon < 1$ a soma acima é finita. Para cada multi-índice α,

$$\partial^\alpha s_\epsilon(x) = \epsilon^n \sum_m (\partial^\alpha\phi)(x-\epsilon m)\psi(\epsilon m) \to (\partial^\alpha\phi*\psi)(x),$$

uniformemente quando $\epsilon \to 0$, visto que as funções $\partial^\alpha \phi(x-y)\psi(y)$ são uniformemente contínuas. Isto significa que $s_\epsilon(x) \to (\phi * \psi)(x)$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. então

$$\begin{aligned}(u*(\phi*\psi))(x) &= \lim_{\epsilon\to 0}(u*s_\epsilon)(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^n\sum_m (u*\phi)(x-\epsilon m)\psi(\epsilon m)\\ &= ((u*\phi)*\psi)(x).\end{aligned}$$

■

Teorema 1.5.6 *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e tome $0 \le \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int \phi = 1$ e escrevamos $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi(x/\epsilon)$. Então $u*\phi_\epsilon \to u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $\epsilon \to 0$.*

Demonstração Com a notação $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$, podemos escrever $\langle u,\ \psi\rangle = (u*\check{\psi})(0)$. Então

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle u*\phi_\epsilon,\ \psi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}(u*\phi_\epsilon)*\check{\psi}(0) = \lim_{\epsilon\to 0} u*(\phi_\epsilon*\check{\psi})(0) =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\langle u,\ (\phi_\epsilon*\check{\psi})\check{}\ \rangle = \langle u,\ \psi\rangle.$$

A última igualdade decorre de $\phi_\epsilon * \check{\psi} \to \check{\psi}$ em C_c^∞, conseqüência do Teorema 1.4.2. ■

Corolário 1.5.7 *$C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração Em virtude do Lema 1.4.31, é suficiente provarmos que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{E}'(\Omega)$. Seja ϕ_ϵ como no teorema 1.5.6 e $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Pelo teorema 1.5.1, segue que

$$S(u*\phi_\epsilon) \subset S(u) + S(\psi_\epsilon) \subset S(u) + \{|x| \le C\epsilon\}.$$

Então $u*\phi_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ para todo ϵ suficientemente pequeno. Além disso, para tais ϵ's, $u*\phi_\epsilon \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ pelo teorema 1.5.6. ■

Teorema 1.5.8 *Seja $U : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ um operador linear contínuo que comuta com todas as translações $T_h,\ h \in \mathbb{R}^n$, em que $(T_h u)(x) = u(x-h)$. Então existe um única $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $U\phi = u*\phi, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração Por hipótese, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \ni \phi \to (U\check{\phi})(0)$ é um funcional linear contínuo, ou seja, uma distribuição. Defina $\langle u, \phi\rangle = (U\check{\phi})(0)$. Como $UT_h = T_hU$ e $U\phi(0) = u * \phi(0)$, obtemos

$$U\phi(h) = T_{-h}U\phi(0) = UT_{-h}\phi(0) = u * (T_{-h}\phi)(0) = T_{-h}(u * \phi)(0) = u * \phi(h).$$

Se $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ também satisfaz $U\phi = v * \phi$, teremos

$$\langle v, \phi\rangle = v * \check{\phi}(0) = U\check{\phi}(0) = \langle u, \phi\rangle, \quad \forall\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Provando a unicidade. ∎

Definição 1.5.9 *Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, uma delas com suporte compacto. Definimos $u_1 * u_2$ como a única distribuição v tal que*

$$u_1 * (u_2 * \phi) = v * \phi, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.5.2}$$

A convolução para vários fatores, dos quais todos, exceto no máximo um, tem suporte compacto, define-se analogamente por contrução associativa. O teorema 1.5.5 mostra que a definição 1.5.9 generaliza a definição 1.5.1 se u_2 tem suporte compacto. Analogamente se prova que esta definição coincide com a definição 1.5.1 se $u_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $u_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.5.10 *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\langle u * \delta,\ \phi\rangle = (u * \delta) * \check{\phi}(0) = u * (\delta * \check{\phi})(0) = u * \check{\phi}(0) = \langle u,\ \phi\rangle$, isto é $u * \phi = u$.*

Teorema 1.5.11 *A convolução é comutativa, ou seja*

$$u_1 * u_2 = u_2 * u_1$$

se uma das distribuições u_1, u_2 tem suporte compacto. Além disso vale

$$S(u_1 * u_2) \subset S(u_1) + S(u_2). \tag{1.5.3}$$

Demonstração. Sejam $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Usando a comutatividade da convolução de funções temos

$$\begin{aligned}(u_1 * u_2) * (\phi * \psi) &= u_1 * (u_2 * (\phi * \psi)) = u_1 * ((u_2 * \phi) * \psi) \\ &= u_1 * (\psi * (u_2 * \phi)) = (u_1 * \psi) * (u_2 * \phi).\end{aligned}$$

Da mesma maneira, temos

$$\begin{aligned}(u_2 * u_1) * (\phi * \psi) &= (u_2 * u_1) * (\psi * \phi) = (u_2 * \phi) * (u_1 * \psi) \\ &= (u_1 * \psi) * (u_2 * \phi).\end{aligned}$$

Combinando os dois resultados, $(u_1 * u_2) * (\phi * \psi) = (u_2 * u_1) * (\phi * \psi)$. Fazendo $\phi * \psi \to \phi$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, obtemos $(u_1 * u_2) * \phi = (u_2 * u_1) * \phi$ que em $x = 0$ se escreve como

$$\langle u_1 * u_2, \check{\phi} \rangle = \langle u_2 * u_1, \check{\phi} \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Donde $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$. Para provar a afirmação relativa aos suportes, seja ϕ_ϵ como no teorema 1.5.6 e consideremos $(u_1 * u_2) * \phi_\epsilon$. Então

$$S((u_1 * u_2) * \phi_\epsilon) = S(u_1 * (u_2 * \phi_\epsilon)) \subset S(u_1) + S(u_2 * \phi_\epsilon) \subset S(u_1) + S(u_2) + S(\phi_\epsilon).$$

Quando $\epsilon \to 0$, o diâmetro de $S(\phi_\epsilon)$ tende para zero e concluímos que vale 1.5.3. Provando o teorema. ∎

Teorema 1.5.12 *Se u_1 e u_2 são distribuições em $\mathbb{R}^n$, umas delas com suporte compacto, então*

$$SS(u_1 * u_2) \subset SS(u_1) + SS(u_2). \tag{1.5.4}$$

Demonstração Ver [H2] pg.102. ∎

Exemplo 1.5.13 (Diferenciação como convolução) *Podemos interpretar a diferenciação como uma convolução, pois*

$$\partial^\alpha u = (\partial^\alpha \delta) * u, \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{1.5.5}$$

Com efeito, se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, *usando (1.5.1) obtemos*

$$(\partial^\alpha u) * \phi = u * (\partial^\alpha \phi) = u * (\delta * (\partial^\alpha \phi)) = u * (\partial^\alpha \delta) * \phi$$

provando (1.5.5). Daí, se u_1 *e* u_2 *são duas distribuições, uma delas com suporte compacto, obtemos facilmente que*

$$\partial^\alpha (u_1 * u_2) = (\partial^\alpha u_1) * u_2 = u_1 * (\partial^\alpha u_2), \tag{1.5.6}$$

usando a expressão de ∂^α *como convolução com* $\partial^\alpha \delta$ *e as propriedades associativa e comutativa da convolução. Mais geralmente, se*

$$P = \sum a_\alpha \partial^\alpha,$$

com $a_\alpha \in \mathbb{C}$ *e a soma é finita, é um operador diferencial parcial com coeficientes constantes, então*

$$P(u_1 * u_2) = (Pu_1) * u_2 = u_1 * (Pu_2), \quad u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ u_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n).$$

1.6 Distribuições Homogêneas

Se a é um número complexo com $Re\ a > -1$ então a função em $\mathbb{R}^n$

$$x_+^a = x^a = x^{Re a} e^{i Im a \ln x} \ \ se\ x > 0, \ \ x_+^a = 0 \ \ se\ x \leq 0,$$

é localmente integrável, logo define uma distribuição. É claro que

$$x x_+^a = x_+^{a+1} \ \ se \ \ Re\ a > 0. \tag{1.6.1}$$

e pelo Teorema 1.4.32 temos

$$\frac{d}{dx}x_+^a = ax_+^{a-1} \quad seRe\ a > 0. \tag{1.6.2}$$

Queremos estender esta definição de x_+^a para todo $a \in \mathbb{C}$, como uma distribuição, contanto que estas propriedades sejam preservadas, até onde for possível. Que alguma exceção deve ocorrer é claro, pois se $a = 0$ então o lado esquerdo de (1.6.2) é $H'(x) = \delta_0$ e o lado direito deve ser zero.

Para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ a função

$$a \mapsto I_a(\phi) =< x_+^a,\ \phi >= \int_0^\infty x^a \phi(x)dx$$

é analítica quando $Re\ a > -1$ pois a diferencial é

$$da \int_0^\infty x^a \log x\phi(x)dx,$$

(seja $g(a) = I_a(\phi)$ daí $d(g) = da \int_0^\infty x^a \log x\phi(x)dx)$ e daí existe $\partial_a I_a(\phi)$ e é igual a $\int_0^\infty x^a \log x\phi(x)dx$.

Agora (1.6.2) significa que

$$I_a(\phi') = -aI_{a-1}(\phi) \quad se \quad Re\ a > 0, \tag{1.6.3}$$

de fato,

$$< x_+^a,\ \phi' >= \int_0^\infty x^a \phi'(x)dx = -\int_0^\infty ax^{a-1}\phi(x)dx =$$
$$= -a\int_0^\infty x^{a-1}\phi(x)dx = -a < x_+^{a-1},\ \phi > .$$

Assim para $Re\ a > -1$ e qualquer inteiro $k > 0$ temos

$$I_a(\phi) = (-1)^k \frac{I_{a+k}(\phi^{(k)})}{(a+1)...(a+k)}, \tag{1.6.4}$$

pois

$$(-1)^k \frac{I_{a+k}(\phi^{(k)})}{(a+1)...(a+k)} = \frac{(-1)^k(-1)I_{a+k-1}(\phi^{(k-1)})(a+k)}{(a+1)...(a+k)} =$$

$$= ... = \frac{(-1)^0 I_a(\phi)(a+k)...(a+1)}{(a+1)...(a+k)} = I_a(\phi).$$

O lado direito é analítico para $Re\, a > -k-1$ exceto para os pólos simples $-1, -2, ..., -k$. Se a não é um inteiro negativo podemos neste caso definir $I_a(\phi)$ pela extensão contínua analítica com respeito a a, ou equivalentemente por (1.6.4) para qualquer $k > -1 - Re\, a$. Por (1.6.4) I_a define uma distribuição de ordem menor ou igual que k. Denotaremos esta distribuição por x_+^a. Em $a = -k$ o resíduo da função $a \mapsto I_a(\phi)$ é

$$\lim_{a \to -k}(a+k) I_a(\phi) = (-1)^k \frac{I_0(\phi^{(k)})}{(1-k)...(-1)} = \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.$$

De fato,

$$\lim_{a\to -k}(a+k)I_a(\phi) = \lim_{a \to -k}(a+k)(-1)6k\frac{I_{a+k}(\phi^{(k)})}{(a+1)...(a+k)} = (-1)^k\frac{I_0(\phi^{(k)})}{(1-k)...(-1)} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty \phi^{(k)}(x)dx}{(k-1)!} = \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.$$

Assim

$$(a+k)x_+^a \to (-1)^{k-1}\frac{\delta_0^{(k-1)}}{(k-1)!}, \quad quando \quad a \to -k, \tag{1.6.5}$$

pois

$$\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = (-1)^{k-1}\frac{\delta_0^{(k-1)}}{(k-1)!}.$$

Subtraindo a parte singular, obtemos quando $a + k = \epsilon \to 0$

$$\lim_{\epsilon \to 0}\{I_a(\phi) - \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\epsilon}\} = \lim_{\epsilon\to 0}\{(-1)^k\frac{I_\epsilon(\phi^{(k)})}{(a+1)...(a+k)} - \frac{p\imath^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\epsilon}\} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0}\{(-1)^k \frac{\int_0^\infty x^\epsilon \phi^{(k)}(x)dx}{(\epsilon+1-k)...(\epsilon-1)\epsilon} + \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{\epsilon}[\frac{1}{(k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)} - \frac{1}{(k-1)!}] -$$

$$- \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)\epsilon}\} =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\{(-1)^k\frac{\int_0^\infty (x^\epsilon - 1)\phi^{(k)}(x)dx}{(\epsilon+1-k)...(\epsilon-1)\epsilon} + \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{\epsilon}[\frac{(k-1)! - (k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)}{(k-1)!(k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)}]\} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \{ \frac{\int_0^\infty x^\epsilon \log(x) \phi^{(k)}(x) dx}{(-\epsilon)\frac{d}{dx}[(k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)] - (k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)} +$$

$$+\phi^{(k-1)}[\frac{(k-1-\epsilon)...(2-k) + ... + (k-2-\epsilon)...(1-\epsilon)}{(k-1)![\epsilon\frac{d}{dx}((k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)) + (k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)]}]\} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty \log(x) \phi^{(k)}(x) dx}{-(k-1)...(1)} + \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \frac{(k-1)...2 + (k-1)...3.1 + ... + (k-2)!}{(k-1)!} =$$

$$= -\frac{\int_0^\infty \log(x) \phi^{(k)}(x) dx}{(k-1)!} \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}.$$

Daí definimos

$$x_+^{-k}(\phi) = -\frac{\int_0^\infty \log(x) \phi^{(k)}(x) dx}{(k-1)!} + \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}. \tag{1.6.6}$$

A relação (1.6.1) ou equivalentemente

$$\langle x_+^a,\ x\phi \rangle = \langle x_+^{a+1},\ \phi \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \tag{1.6.7}$$

segue para todo $a \in \mathbb{C}$ pois ela é verdadeira para $Re\ a > -1$, portanto pela extensão analítica contínua quando a não é uma inteiro negativo, e o valor de ambos os lados quando $a = -k$ é obtido fazendo $a \to -k$ após subtrair um termo $\frac{c}{a+k}$, o qual deve ser o mesmo em ambos os lados.

(1.6.2) também segue se a não é um inteiro negativo ou zero. Se k é um inteiro não-negativo então de (1.6.5) temos:

$$\begin{aligned} \lim_{a \to -k} \{ \frac{d}{dx} x_+^a + k x_+^{a-1} \} &= \lim_{a \to -k} (a+k) x_+^{a-1} \\ &= \lim_{a \to -k-1} (a+k+1) x_+^a = (-1)^k \frac{\delta_0^{(k)}}{a+k}, \end{aligned}$$

assim eliminando termos da forma $\frac{c\delta_0^{(k)}}{a+k}$ os quais devem cancelar-se, obtemos

$$\frac{d}{dx} x_+^{-k} = -k x_+^{-k-1} + (-1)^k \frac{\delta_0^{(k)}}{k!}. \tag{1.6.8}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{dx} x_+^{k-1},\ \phi\rangle &= -\langle x_+^k,\ \phi'\rangle \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \log(x)\phi^{(k+1)}(x)dx - \frac{\phi^{(k)}(0)}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j} \\
&= \frac{k}{k!}\int_0^\infty \log(x)\phi^{(k-1)}(x)dx - \frac{k\phi^{(k)}(0)}{k!}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} \\
&= \langle -kx_+^{k-1} + (-1)^k\frac{\delta_0^{(k)}}{k!},\ \phi\ \rangle.
\end{aligned}$$

A função x_+^a é homogênea de grau a para $Re\ a > -1$. Isto significa para $t > 0$

$$\langle x_+^a,\ \phi\rangle = \int_0^\infty x^a\phi(x)dx = t^a\int_0^\infty x^a\phi(tx)tdx = t^a\langle x_+^a,\ \phi_t\rangle,$$

em que $\phi_t(x) = t\phi(tx)$. A extensão analítica contínua em ambos os lados deve dar

$$\langle x_+^a,\ \phi\rangle = t^a\langle x_+^a,\ \phi_t\rangle, \quad se \quad \phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}), \tag{1.6.9}$$

a não sendo um inteiro negativo. Se $a = -k$ obtemos de (1.6.6)

$$\begin{aligned}
t^{-k}\langle x_+^{-k},\ \phi_t\rangle &= t^{-k}[-\frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \log(x)t^k\phi^{(k)}(tx)d(tx) + t^k\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}] \\
&= -\frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \log(\frac{y}{t})\phi^{(k)}(y)dy = \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j} \\
&= \langle x_+^{-k},\ \phi\rangle + \frac{\log t}{(k-1)!}\int_0^\infty \phi^{(k)}(y)dy.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\langle x_+^{-k},\ \phi\rangle = t^{-k}\langle x_+^{-k},\ \phi_t\rangle + \log t\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \tag{1.6.10}$$

então a homogeneidade é perdida.

Além de x_+^a temos a função

$$x_-^a = 0 \;\; se \;\; x > 0 \;\; e \;\; x_-^a = |x|^a \;\; se \;\; x < 0,$$

com $a > -1$. Esta é uma reflexão de x_+^a com respeito a origem,

$$\langle x_-^a,\ \phi\rangle = \langle x_+^a,\ \ \check{\phi}\ \rangle,$$

em que $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$. Tudo que temos dito sobre a definição de x_+^a para a complexo arbitrário permanece válido para x_-^a.

Pelo Teorema 1.4.34 a função z^a, definida em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ como $e^{a\log z}$, sendo $\log z$ real se $z \in \mathbb{R}_+$, possui valores de fronteira $(x \pm i0)^a$ no eixo real dos planos superior e inferior, respectivamente. Quando $Rea > 0$ temos que

$$(x \pm i0)^a = x_+^a + e^{\pm\pi i a}x_-^a, \tag{1.6.11}$$

pois

$$(x \pm i0)^a = \lim_{y\to 0^\pm} e^{a\log z}.$$

Nosso próximo objetivo é definir distribuições homogêneas em $\mathbb{R}^n$. Para tal note que se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ é homogênea de grau a, isto é, $u(tx) = t^a u(x)$ quando $x \neq 0$ e $t > 0$ então

$$\langle u,\ \phi\rangle = t^a\langle u,\ \phi_t\rangle \;\; se\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}),\ \phi_t(x) = t^n\phi(tx),\ t > 0, \tag{1.6.12}$$

e reciprocamente, isto implica que u é homogênea. Se $Re\ a > -n$ então u é integrável em uma vizinhança de zero, pois em coordenadas polares $x = r\omega,\ |\omega| = 1$ temos

$$|u(r\omega)| = r^{Re\ a}|u(\omega)| \;\; e \;\; dx = r^{n-1}drd\omega$$

aqui $d\omega$ é a medida de superfície na esfera unitária. Neste caso u define uma distribuição em $\mathbb{R}^n$ e (1.6.12) é vale quando $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.6.1 *Uma distribuição u em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ é dita homogênea de grau a se (1.6.12) é verdadeira. Analogamente, se u é uma distribuição em $\mathbb{R}^n$ e (1.6.12) é válida para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dizemos que u é homogênea de grau a em $\mathbb{R}^n$.*

O problema que discutiremos agora é a extensão de distribuições homogêneas de $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ para $\mathbb{R}^n$ que como já vimos, em (1.6.10), para o caso $n = 1$ não é sempre possível.

Lema 1.6.2 *Dado $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\backslash 0)$ e $a \in \mathbb{C}$, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $\langle u,\ \phi\rangle = t^a\langle u, \phi_t\rangle$, *se* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$

(ii) $(a+n)\langle u,\ \phi\rangle + \langle u,\ \lambda\phi\rangle = 0$, *em que* $\lambda = \sum x_i\partial_i$ *e* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$

(iii) $\langle u,\ \psi\rangle = 0$, *se* $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ *e* $\int_0^\infty r^{a+n-1}\psi(rw)dr \equiv 0$.

Demonstração Referência [H1] pg.74. ∎

Se observarmos que

$$\langle u,\ \lambda\phi\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle x_j u,\ \partial_j\phi\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\langle\partial_j(x_j u),\ \phi\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\langle u,\ \phi\rangle - \sum_{j=1}^{n}\langle x_j\partial_j u,\ \phi\rangle,$$

portanto

$$\langle u,\ \lambda\phi\rangle = -\langle\lambda u,\ \phi\rangle - n\langle u,\ \phi\rangle.$$

Assim podemos escrever o item (ii) do Lema 1.6.2 na forma

$$\lambda u = au \tag{1.6.13}$$

(identidade de Euler para funções homogêneas). Pois

$$\begin{aligned} 0 &= (a+n)\langle u,\ \phi\rangle + \langle u,\ \lambda\phi\rangle \\ &= a\langle u,\ \phi\rangle - \langle\lambda u,\ \phi\rangle \end{aligned}$$

Observações 1.6.3 *(i) Se ψ é uma função C^∞ homogênea em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ de grau b então ψu é homogênea de grau $a+b$. De fato*

$$\begin{aligned}
\langle \psi u,\ \phi\rangle &= \langle u,\ \psi\phi\rangle \\
&= t^a\langle u,\ (\psi\phi)_t\rangle \\
&= t^{a+n}\langle u,\ (\psi\phi)(tx)\rangle \\
&= t^{a+n}\langle u,\ t^b\psi(x)\phi(tx)\rangle \\
&= t^{a+b}\langle u,\ \psi\phi_t\rangle \\
&= t^{a+b}\langle \psi u,\ \phi_t\rangle.
\end{aligned}$$

(ii) Como

$$\lambda\partial_j u = \partial_j(\lambda u) - \partial_j u = (a-1)\partial_j u,$$

aqui a última igualdade segue de (1.6.13). Ou seja, temos que a diferenciação cai o grau de homogeneidade em uma unidade.

Lema 1.6.4 *Existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ tal que*

$$\int_0^\infty \frac{\psi(tx)}{t}dt = 1,\ \ x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}. \tag{1.6.14}$$

Demonstração Para $n = 1$, tome para $x > 0$ $\ \psi_1 \in C_c^\infty((0,\ \infty))$, tal que $\int \psi_1 \neq 0$, logo

$$\int_0^\infty \frac{\psi_1(tx)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\psi_1(s)}{\frac{s}{x}}\frac{ds}{x} = \int_0^\infty \frac{\psi_1(s)}{s}ds := \lambda.$$

Agora considere $\psi_2 = \frac{1}{\lambda}\psi_1 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\psi_2(tx)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\frac{\psi_1(tx)}{t}dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \frac{\psi_1(tx)}{t}dt = 1.$

Para $x < 0$, $\ \psi_2(x) = \psi_2(-x)$, fazendo a mudança de variáveis $tx = -s$ temos

$$\int_0^\infty \frac{\psi_2(tx)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\psi_2(s)}{\frac{s}{x}}\frac{ds}{x} = \int_0^\infty \frac{\psi_1(s)}{s}ds = 1.$$

Assim tomamos, para $n = 1$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi_2(x), & \text{se } \ x > 0 \\ \psi_2(-x), & \text{se } \ x < 0 \end{cases}$$

Para $n > 1$, tome $\psi(x) = \tilde{\psi}(|x|)$

$$\int_0^\infty \frac{\psi(tx)}{t} dt = \int_0^\infty \frac{1}{t} \tilde{\psi}(|tx|) dt = \int_0^\infty \frac{\tilde{\psi}(ty)}{t} dt = 1, \ y = |x| \in \mathbb{R}.$$

■

Teorema 1.6.5 *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ é homogênea de grau a, e a não é um inteiro $\leq -n$ então u tem uma única extensão $\dot{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ homogênea de grau a. Além disso, se P é um polinômio homogêneo qualquer, então $(\dot{Pu}) = P\dot{u}$; Se $a \neq 1 - n$ então $(\dot{\partial_j u}) = \partial_j \dot{u}$. E o operador*

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \ni u \to \dot{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

é contínuo.

Demonstração Ver [H1] pg.75. ■

Teorema 1.6.6 *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ é homogênea de grau $a = -n - k$ inteiro ($k \in \mathbb{N}$) então u tem uma extensão $\dot{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo*

$$\langle \dot{u}, \ \phi \rangle = t^{-k-n} \langle \dot{u}, \ \phi_t \rangle + \log t \sum_{|\alpha|=k} \langle u, \ x^\alpha \psi \rangle \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!} \tag{1.6.15}$$

com ψ como em (1.6.14). Isto determina u à parte de uma combinação linear de derivadas de ordem k de δ_0. Além disso:

uma escolha consistente da extensão pode ser feita tal que

$$(\dot{Pu}) = P\dot{u} \tag{1.6.16}$$

seja satisfeita para todo polinômio P homogêneo;

existe extensão homogênea se, e somente se,

$$S(x^\alpha u) = 0 \quad quando \quad |\alpha| + \quad grau \quad u = -n \tag{1.6.17}$$

é válido;

se u satisfaz

$$\langle u,\ \phi\rangle = sgntt^a\langle u,\ \phi_t\rangle \quad se\ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) \tag{1.6.18}$$

então existe uma única extensão $\dot{u}$ satisfazendo a mesma propriedade para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, que é dada por

$$\langle \dot{u},\ \phi\rangle = S(u\frac{\langle \underline{t}^{-k-1},\ \phi(t.)\rangle}{2}).,\tag{1.6.19}$$

em que

$$\underline{t}^{-k} = \frac{(x+i0)^{-k} + (x-i0)^{-k}}{2} = x_+^{-k} + (-1)^k x_-^{-k}.$$

Demonstração Ver [H1] pg.76. ■

1.7 Distribuições em Espaços Produto

Nosso objetivo nesta seção é definir o produto arbitrário de distribuições.

Definição 1.7.1 (Produto Tensorial) *Se X_j é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, e se $u_j \in C(X_j)$ então a função $(u_1 \otimes u_2)(x_1,\ x_2) = u_1(x_1)u_2(x_2)$, $x_j \in X_j$, é dita produto direto ou produto tensorial de u_1 e u_2.*

Teorema 1.7.2 *Se $u_j \in \mathcal{D}'(X_j)$, $j = 1, 2$, então existe uma única distribuição $u \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$ tal que*

$$u(\phi_1 \otimes \phi_2) = u_1(\phi_1)u_2(\phi_2), \quad \phi_j \in C_c^\infty(X_j). \tag{1.7.1}$$

Temos que

$$u(\phi) = u_1[u_2(\phi(x_1,\ x_2))] = u_2[u_1(\phi(x_1,\ x_2))],\ \phi \in C_c^\infty(X_1 \times X_2), \quad (1.7.2)$$

onde u_j *atua na função seguinte como uma função de* x_j *apenas. Se* $u_j \in \mathcal{E}'$, $j = 1, 2$, *a mesma fórmula é válida para* $\phi \in C^\infty$. *A distribuição* u *é chamada produto tensorial e denotada por* $u = u_1 \otimes u_2$.

Demonstração Unicidade: Devemos mostrar que se $u \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$ e se $u(\phi_1 \otimes \phi_2) = 0$ para $\phi_j \in C_c^\infty(X_j)$, então $u = 0$. Para tal tomemos $0 \leq \psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n_j})$ com $\int \psi_j dx_j = 1$ e $|x_j| \leq 1$ se $x_j \in S(\psi_j)$. Considere

$$\Psi_\epsilon(x_1, x_2) = \epsilon^{-n_1-n_2}\psi_1(\frac{x_1}{\epsilon})\psi_2(\frac{x_2}{\epsilon})$$

pelo Teorema 1.5.6 $u * \Psi_\epsilon \to u$ em $\mathcal{D}'(Y)$ se $\overline{Y} \subset\subset X_1 \times X_2$. Entretanto, $u * \Psi_\epsilon = 0$ em Y para ϵ pequeno, pois $\Psi_\epsilon(x_1 - y_1, x_2 - y_2)$ é o produto de uma função de y_1 e uma de y_2. Portanto $u = 0$ em Y logo em X.

Existência: Seja K_j um subconjunto compacto de X_j. Então pela definição de distribuição temos

$$|u_j(\phi_j)| \leq c_j \sum_{|\alpha| \leq k_j} \sup |\partial^\alpha \phi_j|, \quad \phi_j \in C_c^\infty(K_j).$$

Se $\phi \in C_c^\infty(K_1 \times K_2)$ então

$$I_\phi(x_1) := u_2(\phi(x_1, \cdot))$$

está em $C_c^\infty(K_1)$ pelo Teorema 1.4.12, e $\partial_{x_1}^\alpha T_\phi(x_1) = u_2(\partial_{x_1}^\alpha \phi(x_1, \cdot))$. Portanto

$$\sup |\partial_{x_1}^\alpha I_\phi(x_1)| \leq c_2 \sum_{|\beta| \leq k_2} \sup |\partial_{x_1}^\alpha \partial_{x_2}^\beta \phi(x_1, x_2)|,$$

assim $u_1(I_\phi)$ está definido e

$$|u_1(I_\phi)| \leq c_1 c_2 \sum_{|\alpha_j| \leq k_j} \sup |\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \phi(x_1, x_2)|.$$

Escrevendo $u(\phi) = u_1(I_\phi) = u_1[u_2(\phi(x_1, x_2))]$ note que

$$\begin{aligned} u(\phi_1 \otimes \phi_2) &= u_1(I_{\phi_1 \otimes \phi_2}) \\ &= u_1[u_2(\phi_1 \otimes \phi_2)(x_1, x_2)] \\ &= u_1[u_2(\phi_1(x_1)\phi_2(x_2))] \\ &= u_1(\phi_1(x_1))u_2(\phi_2(x_2)). \end{aligned}$$

Assim u satisfaz (1.7.1) e uma das igualdades de (1.7.2). De forma análoga obtemos uma distribuição que satisfaz (1.7.1) e a segunda igualdade de (1.7.2). Pela unicidade temos que (1.7.2) é válido. Assim

$$\int\int (u_1 \otimes u_2)(\phi_1 \otimes \phi_2) dx_1 dx_2 = \int\int u_1(\phi_1) u_2(\phi_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int u_1(\phi_1) dx_1 \int u_2(\phi_2) dx_2.$$

Note que

$$S(u_1 \otimes u_2) = S(u_1) \times S(u_2). \tag{1.7.3}$$

■

Exemplo 1.7.3 *Se δ_{a_j} é a medida de Dirac em $a_j \in X_j$, então $\delta_{a_1} \otimes \delta_{a_2}$ é a medida de Dirac δ_a em $a = (a_1,\ a_2) \in X_1 \times X_2$.*

Resolução:

Pelo Teorema 1.7.2 temos que

$$(\delta_{a_1} \otimes \delta_{a_2})(\phi_1 \otimes \phi_2) = \delta_{a_1}(\phi_1)\delta_{a_2}(\phi_2) = \phi_1(a_1)\phi_2(a_2) = \delta_{(a_1,\ a_2)}(\phi_1,\ \phi_2).$$

1.8 Composição com Aplicações Suaves

Se f é uma aplicação $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, então uma função u em $\mathbb{R}^m$ pode ser "puxada de volta", (pulled back), para uma função $u \circ f$ em $\mathbb{R}^n$, a composição.

Nesta seção mostraremos que esta operação pode ser definida para distribuições u se $f \in C^\infty$ e se f' for sobrejetiva.

Na seção 3.3 veremos que a composição pode ser definida para aplicações f mais gerais quando a localização das singularidades de u é conhecida num sentido preciso.

Sejam X_j um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, 2$, e $f : X_1 \to X_2$ uma aplicação C^∞. Queremos estender a definição da composição

$$C^0(X_2) \ni u \to u \circ f \in C^0(X_1)$$

para distribuições u tal que a aplicação

$$\mathcal{D}'(X_2) \ni u \to u \circ f \in \mathcal{D}'(X_1)$$

seja contínua. Se isto for possível segue do Corolário 1.5.7 que pode ser feito por um único caminho. Entretanto, para isto ser possível devemos colocar condições em f.

Teorema 1.8.1 *Se $u_j \circ f \to 0$ em $\mathcal{D}'(X_1)$ para toda seqüencia $u_j \in C_c^\infty(X_2)$ tal que $u_j \to 0$ em $\mathcal{D}'(X_2)$, então f é aberta, isto é, $f(V)$ é aberto em X_2 se $V \subset X_1$ é aberto. Se $u \in C_c^\infty(X_2)$ implica $u \circ f \in C_c^\infty(X_1)$, então f é própria, isto é, $f^{-1}(K)$ é compacto em X_1 se $K \subset\subset X_2$.*

Demonstração Ver [H2] pg.134. ∎

Se f é aberta então $f'(x)$ é sobrejetiva para todo x em um subconjunto aberto denso de X. Por outro lado, pelo Teorema da função inversa f é aberta se $f'(x)$ é sobrejetiva para todo x. O próximo resultado diz que neste caso podemos definir a composição com f.

Teorema 1.8.2 *Seja $X_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, 2$, conjuntos abertos, e $f : X_1 \to X_2$ uma aplicação C^∞ tal que $f'(x)$ é sobrejetiva para todo $x \in X_1$. Então existe* *uma única aplicação linear contínua* $f^*: \mathcal{D}'(X_2) \to \mathcal{D}'(X_1)$ *tal que* $f^*u = u \circ f$ *quando* $u \in C^0(X_2)$. f^* *aplica* $\mathcal{D}'^k(X_2)$ *em* $\mathcal{D}'^k(X_1)$ *para todo* k. f^*u *chama-se o pullback de* u *por* f.

Demonstração Ver [H2] pg.134. ■

Observação 1.8.3 *Como conseqüência da unicidade temos que: se* $X_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, 2$ *são conjuntos abertos, e* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *uma aplicação* C^∞ *tal que* $f'(x)$ *é sobrejetiva para todo* $x \in X_1$. *Se* $u \in \mathcal{D}'(X_2)$ *e* $\phi \in C_c^\infty(X_1)$ *então*

$$(f^*u)(\phi) = (u \otimes 1)(\Phi), \quad \Phi(y) = \phi(f^{-1}(y))|\det{(f^{-1})'(y)}|. \tag{1.8.1}$$

Exemplo 1.8.4 *Se* $M_t x = tx,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$ *então*

$$(M_t^* u)(\phi) = u_x(\frac{\phi(\frac{x}{t})}{t^n}),$$

em que u_x *representa* u *atuando em* x.

De fato, pela observação acima, se $\phi \in C_c^\infty$ temos

$$(M_t^* u)(\phi) = (u_x \otimes 1)(\phi(M_{\frac{1}{t}}x)|\det M'_{\frac{1}{t}}|) = t^{-n}u_x(\phi(\frac{x}{t})).$$

Se u é homogênea de grau a em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ então

$$u_x(\frac{\phi(t^{-1}x)}{t^n}) = (\frac{1}{t})^{-a}u(\phi) = t^a u(\phi)$$

logo $(M_t^* u)(\phi) = t^a u(\phi)$, que é a definição usual de homogeneidade de grau a.

Seja A uma forma real quadrática não singular em $\mathbb{R}^n$, assim $\frac{\partial A}{\partial x} \neq 0$ quando $x \neq 0$. Podemos escrever

$$A(x) = \sum a_{jk}x_j x_k$$

com $a_{jk} = a_{kj}$, e introduzir o operador diferencial

$$B(\partial) = \sum b_{jk}\partial_j\partial_k$$

em que (b_{jk}) é o inverso de (a_{jk}).

TEOREMA 1.8.5 *Seja A uma forma real quadrática não singular em $\mathbb{R}^n$ definida positiva (negativa) num plano n_+ (n_-) dimensional com $n_+ + n_- = n$. Se c_n é a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$ e $n > 2$, então*

$$B(\partial)(A \pm i0)^{\frac{2-n}{2}} = (2-n)c_n|\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{\pm\frac{\pi i n_-}{2}}\delta_0, \tag{1.8.2}$$

$$B(\partial)A^*\chi_{\pm}^{\frac{2-n}{2}} = \pm 4\pi^{\frac{n-2}{2}} \sin(\frac{\pi n_\pm}{2})|\det A|^{-\frac{1}{2}}\delta_0. \tag{1.8.3}$$

DEMONSTRAÇÃO Ver [H2] pg.138. ■

1.9 Convexidade

Nesta seção alguns fatos sobre conjuntos convexos.

DEFINIÇÃO 1.9.1 *Se E é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ denota-se por $ec(E)$ a envoltória convexa de E, isto é, a intersecção de todos os conjuntos convexos fechados contendo E. Ou mais geralmente, dado $E \subset \mathbb{R}^n$ qualquer, $ec(E)$ é o menor subconjunto convexo fechado, com a ordem da inclusão, contendo E.*

Afirmação: Sejam E um conjunto compacto de um espaço linear e $A = \{\sum_{j=0}^m \lambda_j x_j;\ x_j \in E,\ \lambda_j \geq 0,\ \sum_{j=0}^m \lambda_j = 1\}$. Então $ec(E) = A$.

DEMONSTRAÇÃO (a) $ec(E) \subset A$.

Note que $E \subset A$, pois $E \ni x = \sum_{j=0}^m \lambda_j x_j$, com $x = x_i$ e $\lambda_j = 0$ para todo $j \neq i$ e $\lambda_i = 1$. Além disso é fácil de ver que A é convexo. Logo $ec(E) \subset A$ por minimalidade.

(b) $A \subset ec(E)$.

Prova por indução em m. Se m=1 então

$$A = \{\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1;\ 0 \leq \lambda_0, \lambda_1 \leq 1,\ \lambda_0 + \lambda_1 = 1,\ x_0, x_1 \in E\} =$$

$$= \{\lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0)x_1;\ 0 \leq \lambda_0 \leq 1,\ x_0, x_1 \in E\} \subset ec(E).$$

Suponha verdade para $m-1$. Seja $y \in A$ então $y = \lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_m x_m$, com $\sum_{j=0}^{m} \lambda_j = 1$, $0 \leq \lambda_j \leq 1$ e $x_j \in E$ para todo $j = 0, \cdots, m$. Se $\lambda_m = 1$, então $y = x + m \in E \subset ec(E)$. Suponha $0 \leq \lambda_m < 1$ e considere

$$M = \frac{\lambda_0}{1-\lambda_m} x_0 + \cdots \frac{\lambda_{m-1}}{1-\lambda_m} x_{m-1}.$$

Note que $0 \leq \frac{\lambda_j}{1-\lambda_m},\ j = 0, \cdots, m-1$ e $\sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_m} = 1$, daí $\frac{\lambda_j}{1-\lambda_m} \leq 1,\ j = 0, \cdots, m-1$. Logo $M \in A$, correspondente a $x_0, \cdots, x_{m-1}$, e pela hipótese de indução $M \in ec(E)$. Além disso, $x_m \in ec(E)$. Da convexidade de $ec(E)$ segue que o segmento unindo x_m a M está contido na envoltória. Falta mostrar que y pertence a este segmento. Mas,

$$y = (1-\lambda_m)M + \lambda_m x_m$$

que, por sua vez, pertence a este segmento. Portanto $y \in ec(E)$. ∎

Teorema 1.9.2 (Teorema de Carathéodory) *Seja E um subconjunto de um espaço linear $n-$dimensional. Todo ponto da envoltória convexa de E pode ser escrito como uma combinação linear convexa de no máximo $n+1$ pontos de E.*

Demonstração Seja $y \in ec(E)$. Então $y = \sum_{j=0}^{k} \theta_j x_j$ com $\theta_j \geq 0$, $\sum_{j=0}^{k} \theta_j = 1$, $x_j \in E$. Suponhamos que k seja mínimo, então $\theta_j > 0$, $j = 0, 1, \cdots, k$. O conjuntos de vetores $y_j = x_j - y,\ j = 0, ..., k$ é linearmente dependente, pois $\sum_{j=0}^{k} \theta_j y_j = 0$. Se $k > n$, então $\{y_1, ..., y_k\}$ é um conjunto com mais que n vetores num espaço $n-$dimensional, logo também é linearmente dependente. Suponhamos que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j y_j = 0$, em que $\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| \neq 0$. Definindo $\alpha_0 = 0$, temos para todo λ, $\sum_{j=0}^{k} (\theta_j + \lambda\alpha_j) y_j = 0$. Escolhamos λ tal que $|\lambda|$ seja o menor possível, de modo que um dos coeficientes $\theta_j + \lambda\alpha_j$ seja não nulo. Os demais coeficientes são não-negativos, e nem todos são nulos, pois $\theta_0 + \lambda\alpha_0 = \theta_0 \neq 0$. Mas com este λ, um termo sai da soma $\sum_{j=0}^{k}(\theta_j + \lambda\alpha_j)y_j$. Substituindo y_j por $x_j - y$, temos

$$y\sum_{j=0}^{k}(\theta_j + \lambda\alpha_j) = \sum_{j=0}^{k}(\theta_j + \lambda\alpha_j)x_j.$$

Dividindo por $\sum_{j=0}^{k}(\theta_j + \lambda\alpha_j)$ obtemos

$$y = \frac{\sum_{j=0}^{k}(\theta_j + \lambda\alpha_j)x_j}{\sum_{j=0}^{k}(\theta_j + \lambda\alpha_j)}.$$

Como um dos termos $\theta_j + \lambda\alpha_j$ é nulo esta expressão de y contradiz a minimalidade de k. Portanto $k \leq n$. ∎

Corolário 1.9.3 *A envoltória convexa de um conjunto compacto num espaço $n-$ dimensional é compacto.*

Demonstração Seja $E \subset\subset \mathbb{R}^n$ e seja $\{v_n\}$ uma seqüencia de pontos em $ec(E)$. Pelo Teorema 1.9.2 cada v_k pode ser escrito na forma

$$v_k = \sum_{j=0}^{n}\theta_j^k x_j^k,$$

em que $\theta_j^k \geq 0, \ \ \sum_{j=0}^{n}\theta_j^k = 1$ e $x_j^k \in E$. Pela compacidade de E e do conjunto $\{(\theta_0^k, ..., \theta_j^k);\ \theta_j^k \geq 0,\ \sum_{j=0}^{n}\theta_j^k = 1\}$ existe uma seqüencia $\{k_l\}$ tal que os limites

$$\lim_{l\to\infty}\theta_j^{k_l} = \theta_j \quad e \quad \lim_{l\to\infty}x_j^{k_l} = x_j$$

existem para $j = 0, ..., n$, com $\theta_j \geq 0, \ \ \sum\theta_j = 1, \ \ x_j \in E$. Assim a seqüencia $\{v_n\}$ tem uma subseqüência, $\{v_{n_j}\}$ a qual converge para um ponto de $ec(E)$, mostrando que $ec(E)$ é compacto. ∎

Com a prova deste Corolário concluímos que

$$ec(E) = \{\sum_{j=0}^{n}\lambda_j x_j; 0 \leq \lambda_j, \sum_{j=0}^{n}\lambda_j = 1, x_j \in E\}.$$

Se $y \notin ec(E)$, podemos separar y de $ec(E)$ por um hiperplano $x \cdot \xi = c$ tal que $x \cdot \xi < c$ se $x \in ec(E)$ mas $y \cdot \xi > c$. De fato, seja $\delta = d(y, ec(E)) > 0$, $y \in ec(E)$, existe $x_0 \in ec(E)$ tal que $\delta = d(y, x_0)$. Tome $\xi = y - x_0$ e $c = x_0 \cdot \xi + \epsilon$, $\epsilon < \delta^2$. Portanto $\{x \in \mathbb{R}^n; x \cdot \xi = c\}$ é o hiperplano. Com efeito,

$$y \cdot \xi = \xi + x_0 \cdot \xi = \|\xi\|^2 + x_0 \cdot \xi = \delta^2 + x_0 \cdot \xi > c$$

Se $x \in ec(E)$ queremos mostrar que $x \cdot \xi < c$, mas isto é equivalente a mostrarmos que $(x - x_0) \cdot\ (y - x_0) < \epsilon$. Suponha que existe $x_1 \in ec(E)$ tal que $(x_1 - x_0) \cdot (y - x_0) > 0$, tome $0 < t < 1$ e agora considere $x_0 + t(x_1 - x_0) \in ec(E)$, para t suficientemente pequeno obtemos que $\|x_0 + t(x_1 - x_0) - y\|^2 < \|x_o - y\|^2$ o que contradiz $\delta = d(y, x_0)$. Portanto $x \cdot \xi < c$ para todo $x \in ec(E)$.

Definição 1.9.4 *Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto. A função*

$$H_E(\xi) = \sup_{x \in E} x \cdot \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.9.1}$$

é chamada função suporte de E.

Lema 1.9.5

$$\sup_{x \in E} x \cdot \xi = \sup_{x \in ec(E)} x \cdot \xi, \ \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.9.2}$$

Demonstração Seja

$$y \cdot \xi = \sup_{x \in \ ec(E)} x \cdot \xi, \quad y \in \ ec(E)$$

então

$$y = \sum \lambda_j x_j, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \sum \lambda_j = 1, \quad x_j \in \ E.$$

Assim

$$y \cdot \xi = \sum \lambda_j x_j \cdot \xi \leq \sup_{x \in \ E} \sum \lambda_j x \cdot \xi = \sup_{x \in \ E} x \cdot \xi.$$

A outra desigualdade segue do fato que $E \subseteq ec(E)$. $\blacksquare$

Vimos que se $y \notin ec(E)$ então $y \cdot \xi > H_E(\xi)$ para algum ξ, assim $ec(E)$ é o conjunto de todos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x \cdot \xi \leq H_E(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.9.3}$$

Com H_E é o supremo de funções lineares temos

$$H_E(\xi + \eta) \leq H_E(\xi) + H_E(\eta) \ e \ H_E(t\xi) = tH_E(\xi), \ t \geq 0, \ \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{1.9.4}$$

1.10 Teoremas

Nesta seção enunciaremos alguns teoremas os quais faremos referência nos capítulos seguintes.

Teorema 1.10.1 (Phragmén -Lindelöf) *Sejam* $\Omega = \{x + iy;\ a < x < b\}$, $\overline{\Omega} = \{x + iy; a \leq x \leq b\}$. *Se* $f \in C^0(\overline{\Omega} \bigcap \mathcal{A}(\Omega))$ *tal que* $|f(z)| < B$, $\forall z \in \Omega$ *e para algum* $B < \infty$ *fixo. Se* $M(x) = \sup\{\|f(x + iy)\|;\ -\infty < y < \infty\}, a < x < b$ *então temos*

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}, \ a < x < b.$$

Referência [R2] pg.273.

Teorema 1.10.2 (Hahn -Banach) *Sejam* V *um espaço localmente convexo,* M *um subespaço de* V *e* $x_0 \in X$. *Então* $x_0 \in \overline{M}$, *se e somente se, não existe um funcional linear limitado* f *em* M *tal que* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in M$, *mas* $f(x_0) \neq 0$.

Referência [R1] pg.59.

TEOREMA 1.10.3 (Convergência Dominada) *Sejam μ uma medida positiva em um espaço mensurável X arbitrário e $\{f_n\}$ uma seqüência de funções complexas mensuráveis em X tal que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existe para todo $x \in X$. Se existe uma função $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad n = 1, 2, ...; \; x \in X,$$

então $f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Referência [R2] pg.27.

TEOREMA 1.10.4 *(i) Seja $F(x,y) \in C^0(X, L^1(Y))$ com $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$, abertos. Se para todo $x_0 \in X$ existem U_{x_0} vizinhança de x_0 em X e $g_{x_0} \in L^1(Y)$ tal que*

$$\sup_{x\in U_{x_0}} |F(x,y)| \leq |G_{x_0}(y)|$$

então $f(x) = \int F(x,y)dy$ é contínua.

(ii) Se $\partial_x^\alpha F, \;\; |\alpha| \leq k$ satisfaz as hipóteses de (i) então $f \in C^k$.

DEMONSTRAÇÃO (i) Seja $X \ni x_n \to t \in X$ logo

$$f(x_n) = \int F(x_n, y) dy$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada $f(x_n) \to f(x)$.

(ii) Basta iterar (i), isto é, aplicar (i) para as derivadas de f. ∎

TEOREMA 1.10.5 *Sejam $K \subset\subset \rho^n$, X uma vizinhança aberta de K e j, k inteiros não negativos. Se $u \in C_c^k(K)$, $g \in C^{k+1}$ e $Img \geq 0$ em X, então*

$$\omega^{j+k}|\int u(x)(Img(x))^j e^{i\omega g(x)}dx| \leq c\sum_{|\alpha|\leq k}\sup|D^\alpha u|(|g'|^2 + Img)^{\frac{|\alpha|}{2}-k},\ \omega > 0. \tag{1.10.1}$$

Aqui c é limitado quando g está num conjunto limitado em $C^{k+1}(X)$. Quando g assume valores reais a estimativa (1.10.1) reduz-se para

$$\omega^k|\int u(x)e^{i\omega g(x)}dx| \leq c\sum_{|\alpha|\leq k}\sup|D^\alpha u||g'|^{|\alpha|-2k}\ \omega > 0. \tag{1.10.2}$$

Referência [H2] pg.216.

DEFINIÇÃO 1.10.6 *Suponhamos que τ seja uma topologia em um espaço vetorial X sobre $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}$) tal que*

(a) cada subconjunto unitário de X é fechado;

(b) as operações de espaço vetorial são contínuas.

Sob estas condições X é denominado Espaço Vetorial Topológico.

Dizemos que um espaço vetorial topológico X é um F-espaço se a topologia τ de X é induzida por uma métrica d invariante, isto é, $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ para $x, y, z \in X$, tal que (X, τ) seja completo. Dizemos que X é um **Espaço de Fréchet** *se X for um F-espaço que possui uma base local convexa (nestas condições diz-se que o espaço vetorial topológico é localmente convexo).*

TEOREMA 1.10.7 (Teorema do Gráfico Fechado) *Suponha:*

(a) X e Y F-espaços;

(b) $\Lambda : X \to Y$ linear;

(c) $G = \{(x, \Lambda x);\ x \in X\}$ é fechado em $X \times Y$.

Então Λ é contínua.

Referência [R1] pg.51.

Capítulo 2

A Transformada de Fourier

2.1 Introdução

Neste capítulo definiremos a transformada de Fourier de funções L^1 e esta definição será estendida para toda $u \in \mathcal{S}'$, o espaço de distribuições temperadas, o qual é o menor subespaço de $\mathcal{D}'$ contendo L^1 que é invariante sob a diferenciação e multiplicação por polinômios. Tecnicamente é preferível definir $\mathcal{S}'$ como o espaço dual de $\mathcal{S}$ das funções teste rapidamente decrescentes. Após provar a Fórmula da transformada de Fourier inversa e propriedades básicas de cálculo nas seções 2.2 e 2.3 estudaremos a transformada de Fourier de funções L^2, de distribuições de suporte compacto e de distribuições homogêneas. Como aplicação discutiremos soluções fundamentais de equações elípticas. Na seção 2.4 falaremos sobre a transformada de Fourier-Laplace de distribuições com suporte compacto, demonstraremos o teorema de Paley-Wiener-Schwartz e a sua versão para suporte singular e daremos algumas aplicações destes teoremas para garantia de existência de solução fundamental para operadores diferenciais com coeficientes constantes arbitrários.

2.2 A Transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definição 2.2.1 *A transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é definida por*

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-ix.\xi} f(x)dx. \tag{2.2.1}$$

Notação: $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$.

Lema 2.2.2 *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ e vale*

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1. \tag{2.2.2}$$

Demonstração. De fato, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int |e^{-ix\xi} f(x)|dx = \|f\|_1.$$

Isso mostra que $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e (2.2.2). Fixe $\xi \in \mathbb{R}^n$ e tome uma seqüência $\{\xi_j\}$ convergindo para ξ arbitrária. Da continuidade da função exponencial segue que $e^{-ix\xi_j} f(x) \to e^{-ix\xi} f(x)$. Além disso, $|e^{-ix\xi_j} f(x)| = |f(x)|$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pelo teorema da convergência dominada,

$$\int e^{-ix\xi_j} f(x)dx \to \int e^{-ix\xi} f(x)dx,$$

ou seja, $\widehat{f}(\xi_j) \to \widehat{f}(\xi)$, o que demonstra a continuidade de $\widehat{f}$. ∎

Definição 2.2.3 *Denotamos com $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o subespaço de C^∞ das funções ϕ tais que*

$$\sup_x |x^\beta \partial^\alpha \phi(x)| < \infty, \tag{2.2.3}$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. $\mathcal{S}$ é denominado o espaço de Schwartz das funções C^∞ de decrescimento rápido.

Observação 2.2.4 *Dizemos que uma seqüência* $\phi_j \in \mathcal{S}$ *converge à zero em* $\mathcal{S}$*, se para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$*,* $x^\alpha D^\beta \phi_j(x) \to 0$ *uniformemente.*

Afirmações: (1) $C_c^\infty \subset \mathcal{S}$ densamente;

(2)Se $\phi_j \in C_c^\infty$ e $\phi_j \to 0$ em C_c^∞, então $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}$.

Demonstração. (1) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então como $S(D^\beta \phi) \subset S(\phi)$ temos que $\sup_x |x^\alpha D^\beta \phi| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Dado $\varphi \in C_c^\infty$, tome $\phi \in C_c^\infty$ tal que $0 \le \phi \le 1$ e $\phi(x) = 1$ quando $|x| \le 1$. Para cada ϵ, defina $\varphi_\epsilon(x) = \varphi(x)\phi(\epsilon x)$. Note que $\varphi_\epsilon \in C_c^\infty$ e $\varphi_\epsilon \to \varphi$ em $\mathcal{S}$. De fato, fixado $\alpha,\ \beta$ multi-índices, temos que

$$|x^\alpha D^\beta(\varphi_\epsilon(x) - \varphi(x))| = |x^\alpha D^\beta[\varphi(x)(\phi(\epsilon x) - 1)]|.$$

Se $\beta = 0$ temos

$$|x^\alpha[\varphi(\phi(\epsilon x) - 1)]| \le c_\alpha |x|^{|\alpha|} |\varphi(x)||\phi(\epsilon x) - 1| = 0$$

se $|x| \le \epsilon^{-1}$, assim $x^\alpha(\varphi_\epsilon(x) - \varphi(x) \to 0$ uniformemente quando $\epsilon \to 0$.

Se $\beta \neq 0$ então

$$|x^\alpha D^\beta[\varphi(x)(\phi(\epsilon x) - 1)]| \le c_{\beta,\alpha}|x|^\alpha \sum_{\gamma + \tilde{\gamma} \le \beta} D^\gamma \varphi(x) D^{\tilde{\gamma}}(\phi(\epsilon x) - 1) := (\diamondsuit)$$

se $\tilde{\gamma} = 0$ recaímos no primeiro caso, se $\tilde{\gamma} \neq 0$ temos

$$(\diamondsuit) \le \tilde{c}_{\alpha,\beta}\epsilon \to 0$$

quando $\epsilon \to 0$. Portanto $\varphi_\epsilon \to \varphi$ em $\mathcal{S}$.

(2) Seja $C_c^\infty \ni \phi_n \to 0$ em C_c^∞, então existe um compacto K tal que $S(\phi_n) \subset K, \forall n$ e $D^\beta \phi_n \to 0, \forall \beta \in \mathbb{N}^n$ uniformemente, logo $sup_x |x^\alpha D^\beta \phi_n| \to 0$. ∎

Proposição 2.2.5 *A transformada de Fourier é um operador contínuo de* $\mathcal{S}$ *em* $\mathcal{S}$ *e valem as fórmulas*

(1) $\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$

(2) $\mathcal{F}(x^\alpha \varphi(x))(\xi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$

Demonstração. Primeiramente, provemos a fórmula (1). Integrando por partes $|\alpha|$ vezes temos

$$\int e^{-ix.\xi} D^\alpha \varphi(x)dx = \int \xi^\alpha e^{-ix.\xi}\varphi(x)dx.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int e^{-ix\cdot\xi} D^\alpha \varphi(x)dx &= \lim_{M\to\infty}\int_{[-M,M]^n} e^{-ix\cdot\xi} D^\alpha\varphi(x)dx \\
&= \lim_{M\to\infty}\left\{\int_{-M}^{M}\cdots\int_{-M}^{M}\left[e^{-ix\cdot\xi}D^{\alpha-e_j}\varphi(x)\ |_{-M}^{M}\right.\right. \\
&\left.\left. -\int_{-M}^{M} D_j(e^{-ix\cdot\xi})D^{\alpha-e_j}\varphi(x)dx_j\right]dx_1\cdots\widehat{dx_j}\cdots dx_n\right\},
\end{aligned}$$

sendo que o primeiro termo na segunda igualdade é zero, pois φ e todas as suas derivadas se anulam no infinito. Logo,

$$\int e^{-ix\cdot\xi} D^\alpha\varphi(x)dx = -\int(-\xi_j)e^{-ix\cdot\xi}D^{\alpha-e_j}\varphi(x)dx.$$

Integrando por partes sucessivamente obtemos a afirmação. Derivando sob o sinal de integração $\widehat{\varphi}(\xi)$ obtemos

$$D^\alpha\widehat{\varphi}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}(-x)^\alpha\varphi(x)dx.$$

Mostrando a validade de (2). Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, usando a fórmula (2) juntamente com o Lema 2.2.2 temos que $\widehat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Combinando as fórmulas (1) e (2) temos que

$$\xi^\alpha D^\beta\widehat{\varphi}(\xi) = \xi^\alpha(-1)^{|\beta|}\mathcal{F}[x^\beta\varphi(x)](\xi) = (-1)^{|\beta|}\mathcal{F}[D^\alpha(x^\beta\varphi(x))](\xi),$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
|\xi^\alpha D^\beta\widehat{\varphi}(\xi)| &= |\int e^{-x.\xi}D_x^\alpha[x^\beta\varphi(x)]dx| \leq \int |D_x^\alpha[x^\beta\varphi(x)]|dx \\
&= \int \frac{(1+|x|^2)^{n+1}}{(1+|x|^2)^{n+1}}|D_x^\alpha[x^\beta\varphi(x)]|dx \\
&\leq C\sup_x(1+|x|^2)^{n+1}|D^\alpha[x^\beta\varphi(x)]| < \infty, \qquad (2.2.5)
\end{aligned}$$

o que mostra que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. O que provamos até agora foi que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mostremos que $\mathcal{F}$ é um operador contínuo. Seja $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Da desigualdade (2.2.5) segue que $|\xi^\alpha D^\beta \widehat{\phi}_j(\xi)| \to 0$ uniformemente, o que mostra que $\mathcal{F}(\phi_j) \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ∎

Corolário 2.2.6 (Lema de Riemann-Lebesgue) *Se f está em $L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{f}(\xi) \to 0$, quando $|\xi| \to \infty$.*

Prova. Se $f_N(x) = f(x)$ para $|x| < N$ e $f_N(x) = 0$ para $|x| \geq N$, é claro que $f_N \to f$ em L^1 quando $N \to \infty$. Pelo teorema 1.4.2 aplicado a f_N, vemos que existe uma seqüência $\phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ de modo que $\phi_n \to f_N$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e conseqüentemente $\hat{\phi}_n \to \hat{f}_N$ uniformemente por (2.2.2). Como $\phi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\phi}_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pelo teorema anterior, logo todas as $\hat{\phi}_n$'s tendem a zero quando $|\xi| \to \infty$ e, sendo a convergência uniforme, o mesmo acontece com $\hat{f}_N$. Novamente por (2.2.2), vemos que $\hat{f}_N \to \hat{f}$ uniformemente, portanto temos o desejado. ∎

Exemplo 2.2.7 *Seja a função $\psi(x) = e^{-x^2/2}, x \in \mathbb{R}$. Temos que:*

$$\psi'(x) + x\psi(x) = 0 \quad e \quad \psi(0) = 1.$$

Como $\psi \in \mathcal{S}$, aplicando $\mathcal{F}$ a equação acima obteremos

$$0 = \mathcal{F}[\psi'(x) + x\psi(x)](\xi) = i\xi\widehat{\psi}(\xi) - \frac{d}{id\xi}\widehat{\psi}(\xi) = i[\xi\widehat{\psi}(\xi) + \frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}(\xi)],$$

donde $\widehat{\psi}(\xi)$ satisfaz a mesma equação que $\psi(x)$. Logo,

$$\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\psi}(0)\psi(\xi) = \psi(\xi)\int \psi(x)dx.$$

Mas como

$$[\int e^{-x^2/2}dx]^2 = (\int e^{-x^2/2}dx)(\int e^{-y^2/2}dy) = \int e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy.$$

Fazendo a mudança de coordenadas polares

$$x = rcos\theta, \quad y = rsen\theta \quad ,0 \le r < \infty, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

obtemos $\int e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$. *Portanto,* $\widehat{\psi}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}$. *Para calcular a transformada de Fourier de* $\psi(x) = e^{-|x|^2/2}$ *em* $\mathbb{R}^n$, *escrevemos*

$$\widehat{\psi}(\xi) = \int e^{-ix.\xi}\psi(x)dx = (\int e^{-ix_1\xi_1}e^{-x_1^2/2}dx_1)\cdots(\int e^{-ix_n\xi_n}e^{-x_n^2/2}dx_n).$$

Portanto, $\widehat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}$.

Lema 2.2.8 *Se* $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *é uma aplicação linear tal que*

(a) $TD_j\phi = D_jT\phi$

(b) $Tx_j\phi = x_jT\phi$, *j=1,2,...,n,* $\phi \in \mathcal{S}$,

então $T\phi = c\phi$ *para alguma constante c.*

Demonstração Afirmação: Se $\phi \in \mathcal{S}$ e $\phi(y) = 0$ então podemos escrever

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)\phi_j(x)$$

em que $\phi_j \in \mathcal{S}$.

De fato, tome

$$\phi_j^1(x) = \int_0^1 \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(y + t(x-y))dt$$

Note que $\phi(x) = \sum_{j=1}^n \phi_j^1(x)(x_j - y_j)$. Se $x \neq y$ tome

$$\phi_j^2(x) = \phi(x)\frac{x_j - y_j}{|x-y|^2}.$$

Seja $\varphi \in C_c^\infty$ tal que $\varphi \equiv 1$ numa vizinhança da origem. Agora considere

$$\phi_j(x) = \varphi(x-y)\phi_j^1 + (1 - \varphi(x-y))\phi_j^2$$

Note que

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x)$$

e além disso $\phi_j \in \mathcal{S}$, pois ϕ_j se comporta como ϕ_j^1 numa vizinhança da origem ϕ_j e quando $x \to \infty$ como ϕ_j^2. Logo temos que

$$T\phi(x) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)T\phi_j(x)$$

Se $x = y$ então $T\phi(y) = 0$, como conseqüência disso temos que se $\phi(y) = 0$ então $T\phi(y) = 0$. Fixe x_0. Seja $\psi_1 \in C_c^\infty$ com $\psi_1(x_0) \neq 0$, considere

$$\psi(x) = \psi(x_0)\phi(x) - \phi(x_0)\psi_1(x).$$

Como $\psi(x_0) = 0$ então $T\psi(x) = 0$. Mas por outro lado,

$$T\psi(x) = \psi_1(x_0)T\phi(x) - \phi(x_0)T\psi_1(x),$$

logo

$$T\phi(x_0) = \frac{T\psi_1(x_0)}{\psi_1(x_0)}\phi(x_0).$$

Como x_0 é arbitrário temos que $T\phi(x) = c(x)\phi(x)$ em que $c(x)$ independe de ϕ. Dado x tome ϕ tal que $\phi(x) \neq 0$ daí temos que $c \in C^\infty$. Por hipótese $D_jT\phi - TD_j\phi = 0$. Mas $D_jT\phi = (D_jc)\phi + cD_j\phi$ e $TD_j\phi = cD_j\phi$ logo $(D_jc)\phi = 0$, para $\phi \in \mathcal{S}$, assim c deve ser constante. ■

Teorema 2.2.9 *A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \phi \mapsto \widehat{\phi}$ é um isomorfismo de $\mathcal{S}$ com inversa dada pela fórmula*

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi}\widehat{\phi}(\xi)d\xi, \quad \phi \in \mathcal{S}. \tag{2.2.6}$$

Demonstração. Pelo Lema 2.2.5 $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F} \circ \mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ e anticomuta com D_j e x_j. Com a notação $R\phi(x) = \phi(-x)$, aplicando o Lema 2.2.8 a $T = R\mathcal{F}^2$, concluímos que $R\mathcal{F}^2 = c$. Para determinar c tomemos $\phi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} \in \mathcal{S}$, pelo exemplo 2.2.7 sabemos que $\widehat{\phi}(\xi) = (2\pi)e^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|\xi|}{2}} = c_1\phi(\xi)$, assim $\mathcal{F}^2\phi = \mathcal{F}(\mathcal{F}\phi) = \mathcal{F}(c_1\phi) = c_1^2\phi$ donde $c = c_1^2 = (2\pi)^n$. Logo

$$(2\pi)^n\phi(x) = R(\mathcal{F}(\mathcal{F}\phi(x))) = R(\int e^{-ix\cdot\,\xi}\widehat{\phi}(\xi)d\xi) = \int e^{ix\cdot\,\xi}\widehat{\phi}(\xi)d\xi.$$

Portanto,

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\,\xi} \widehat{\phi}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n} \check{\widehat{\widehat{\phi}}}.$$

■

Teorema 2.2.10 *Se $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, então:*

(1) $\int \widehat{\varphi}\psi dx = \int \varphi\widehat{\psi} dx$,

(2) $\int \varphi\bar{\psi} dx = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi}\bar{\widehat{\psi}} dx$,

(3) $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}\widehat{\psi}$,

(4) $\widehat{(\varphi\psi)} = (2\pi)^{-n} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$.

Demonstração. Por Fubini, temos que

$$\begin{aligned} \int \widehat{\varphi}(x)\psi(x)dx &= \int \psi(x)[\int e^{-iy.x}\varphi(y)dy]dx \\ &= \int \varphi(y)[\int e^{-iy.x}\psi(x)dx]dy = \int \varphi(y)\widehat{\psi}(y)dy, \end{aligned}$$

donde segue (1). Para provar (2), consideremos a função $\chi = (2\pi)^{-n}\bar{\widehat{\psi}}$. Logo,

$$\widehat{\chi}(\xi) = \int e^{-ix.\xi}\chi(x)dx = (2\pi)^{-n} \int e^{-ix.\xi}\bar{\widehat{\psi}}(x)dx.$$

Assim, pela fórmula inversa de Fourier

$$\bar{\widehat{\chi}}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi}\widehat{\psi}(x)dx = \psi(\xi).$$

Usando (1) obtemos que,

$$\int \varphi\bar{\psi}dx = \int \varphi\widehat{\chi}dx = \int \widehat{\varphi}\chi dx = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi}\bar{\widehat{\psi}}dx.$$

A fórmula (3) pode ser obtida por Fubini, assim

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi * \psi}(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi}[\int \varphi(x-y)\psi(y)dy]dx \\ &= \int \psi(y)[\int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x-y)dx]dy \\ &= \int \psi(y)[\int e^{-i(x-y)\cdot\xi}\varphi(x)dx]dy \\ &= \int e^{-iy\cdot\xi}\psi(y)dy\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

Finalmente, para obter (4) tomamos a transformada de Fourier de $\widehat{\varphi\psi}$ e $\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$. De fato, temos que

$$\widehat{\widehat{\varphi\psi}}(x) = \int e^{-ix\cdot\xi}\widehat{\varphi\psi}(\xi)d\xi = \int e^{i(-x)\cdot\xi}\widehat{\varphi\psi}(\xi)d\xi = (2\pi)^n\varphi(-x)\psi(-x).$$

Por outro lado, por (3) temos que

$$\widehat{\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}}(x) = \widehat{\widehat{\varphi}}(x)\widehat{\widehat{\psi}}(x).$$

Mas

$$\widehat{\widehat{\psi}}(x) = \int e^{-ix.\xi}\widehat{\psi}(\xi)d\xi = \int e^{i(-x)\xi}\widehat{\psi}(\xi)d\xi = (2\pi)^n\psi(-x).$$

Logo,

$$\widehat{\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}}(x) = (2\pi)^n\psi(-x)(2\pi)^n\varphi(-x).$$

Tomando a transformada inversa de Fourier

$$\widehat{\varphi\psi}(\xi) = \mathcal{F}^{-1}[(2\pi)^n\psi(-x)(2\pi)^n\varphi(-x)](\xi) = (2\pi)^{-n}\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}(\xi).$$

∎

2.3 A Transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

DEFINIÇÃO 2.3.1 *Um funcional linear e contínuo em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas (dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) se denota por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

OBSERVAÇÃO 2.3.2 *Podemos identificar $\mathcal{S}'$ com um subespaço de $\mathcal{D}'$, isto é, temos um isomorfismo $A : \mathcal{S}' \to \mathcal{D}'$ entre $\mathcal{S}'$ e um subespaço de $\mathcal{D}'$, dado por $Au = u\,|_{C_c^\infty}$. De fato, se $Au_1 = Au_2$, então $u_1\,|_{C_c^\infty} = u_2\,|_{C_c^\infty}$. Mas como $C_c^\infty \subset \mathcal{S}$ densamente, $u_1 \equiv u_2$.*

Teorema 2.3.3 *Seja u um funcional linear em $\mathcal{S}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $u \in \mathcal{S}'$

(b) *existem constantes $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que*

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_x \{(1 + |x|^2)^m |D^\alpha \varphi|\}, \quad \forall\ \varphi \in S.$$

Demonstração A demonstração é análoga à do Teorema 1.4.9. ■

Lema 2.3.4 *(i) $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$;*

(ii) $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$;

(iii) $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ densamente.

Demonstração (i) É óbvia.

(ii) Faz-se esta identificação, definindo

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx;\ \varphi \in \mathcal{S}.$$

De fato, dada $\varphi \in \mathcal{S} \subset L^q$, então pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi \rangle| &\leq \textstyle\int |f(x)||\varphi(x)|dx \leq \parallel f \parallel_p \parallel \varphi \parallel_q \\ &= \parallel f \parallel_p (\textstyle\int \frac{(1+|x|)^{n+1}}{(1+|x|)^{n+1}} |\varphi(x)|^q dx)^{1/q} \\ &\leq C \parallel f \parallel_p \sup (1 + |x|)^{\frac{n+1}{q}} |\varphi(x)|. \end{aligned}$$

Pelo Teorema anterior $f \in \mathcal{S}^{'}$.

(iii) Demonstração análoga à prova do Lema 1.5.7. ■

Exemplo 2.3.5 *Dizemos que uma função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ cresce lentamente no infinito quando existem constantes A, B, C tais que $|f(x)| \leq A(1 + |x|^2)^B$ quando $|x| > C$. O item (iv) implica que as funções que crescem lentamente no infinito pertencem a $\mathcal{S}'$. Em particular, as funções polinomiais* *pertencem a* $\mathcal{S}'$ *e* $L^p \subset \mathcal{S}'$, $1 \leq p \leq \infty$. *Com efeito, se* $f \in L^1_{loc}$ *tal que* $|f(x)| \leq A(1+|x|^2)^B;\ |x| > R$, *então* $f \in \mathcal{S}'$. *De fato, dado* $\phi \in \mathcal{S}$ *temos que*

$$\begin{aligned}
|\langle f, \phi\rangle| &\leq \int |f\phi| = \int_{|x|\leq R} |f\phi| + \int_{|x|>R} |f\phi| \\
&\leq \sup_{|x|\leq R} |\phi(x)| \int_{|x|\leq R} |f| dx \\
&\quad + A \sup_x |(1+|x|^2)^{(B+n+1)/2}\phi(x)| \int \frac{1}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} dx \\
&\leq C \sup_x \{(1+|x|^2)^{(B+n+1)/2}|\phi(x)|\}.
\end{aligned}$$

Portanto $f \in \mathcal{S}'$ *por (iv).*

O objetivo agora é estender a transformada de Fourier para $\mathcal{S}'$. Dada uma função $\varphi \in \mathcal{S}$, esta define uma distribuição temperada $T_\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\langle T_\varphi, \psi\rangle = \int \varphi(x)\psi(x)dx;\ \forall \psi \in \mathcal{S}.$$

Logo,

$$\langle \widehat{\varphi}, \psi\rangle = \int \widehat{\varphi}\psi = \int \varphi\widehat{\psi} = \langle \varphi, \widehat{\psi}\rangle.$$

Neste caso podemos, por dualidade, estender $\mathcal{F}$ a um operador linear e contínuo $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$. Com efeito, definamos

$$\langle \tilde{\mathcal{F}}u, \phi\rangle = \langle u, \widehat{\phi}\rangle;\ u \in \mathcal{S}',\ \phi \in \mathcal{S}.$$

1) $\tilde{\mathcal{F}}u \in \mathcal{S}'$. De fato, é claro que $\tilde{\mathcal{F}}u$ é linear. Quanto a continuidade, dada uma seqüência $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}$, então $\langle \tilde{\mathcal{F}}u, \phi_j\rangle = \langle u, \widehat{\phi_j}\rangle \to 0$, pois $\widehat{\phi_j} \to 0$ em $\mathcal{S}$ devido a continuidade da transformada de Fourier.

2) Se $u \in \mathcal{S}$, segue que

$$\langle \tilde{\mathcal{F}}u, \phi\rangle = \langle u, \widehat{\phi}\rangle = \int u\widehat{\phi} = \int \widehat{u}\phi = \langle \widehat{u}, \phi\rangle,$$

o que mostra que $\tilde{\mathcal{F}}u = \widehat{u}$ para todo $u \in \mathcal{S}$.

3) Quanto a continuidade de $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$. Dado uma seqüencia $\mathcal{S}' \ni u_j \to 0$ em $\mathcal{S}'$, então $\langle \tilde{\mathcal{F}}u_j, \phi \rangle = \langle u_j, \widehat{\phi} \rangle \to 0$, pois $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}$. Isto mostra que $\tilde{\mathcal{F}}u_j \to 0$ em S'.

4)Quanto a unicidade da extensão, esta segue de $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ densamente. De fato, suponhamos que $\tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{F}}_2 : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ são extensões lineares e contínuas de $\mathcal{F}$. Dado $u \in \mathcal{S}'$, existe uma seqüência $\mathcal{S} \ni \varphi_j \to u$ em $\mathcal{S}'$. Assim,

$$\tilde{\mathcal{F}}_2 u \leftarrow \tilde{\mathcal{F}}_2 \varphi_j = \tilde{\mathcal{F}}_1 \varphi_j \to \tilde{\mathcal{F}}_1 u,$$

pela unicidade do limite $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \tilde{\mathcal{F}}_2$.

Definição 2.3.6 *Se $u \in \mathcal{S}'$, a transformada de Fourier, $\widehat{u}$, de u é definida por*

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle, \ \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

Observações 2.3.7 *(i) Se $f_n \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ então $f_n \to f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$;*

(ii) Se $u_n \to u$ em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ então $u_n \to u$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$;

(iii) Se $u_n \to u$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ então $u_n \to u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$;

(iv) Se $u \in \mathcal{S}$ então $\widehat{u} \in \mathcal{S}'$.

Observação 2.3.8 *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\int \widehat{f} g dx = \int f \widehat{g} dx$.*

De fato, note que $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \widehat{f}, \widehat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, pela observação 2.2.2, de modo que as integrais acima são finitas. A idéia é aproximar f e g por funções de S e usar o fato de que a igualdade acima vale para funções de S. Como C_c^∞ é denso em L^p, Lema 1.4.3, tome uma seqüência $\{\varphi_j\}$ em S tal que $\varphi_j \to f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Então, para toda $\psi \in S$ vale

$$\langle \widehat{\varphi_j}, \psi \rangle = \int \widehat{\varphi_j} \psi dx = \int \varphi_j \widehat{\psi} dx = \langle \varphi_j, \widehat{\psi} \rangle \to \langle f, \widehat{\psi} \rangle = \int f \widehat{\psi} dx,$$

tendo sido usados o Teorema 2.2.10 e a observação 2.3.7. Assim

$$\langle\widehat{\varphi_j},\psi\rangle \to \int f\widehat{\psi}dx.$$

Por outro lado, novamente pela observação 2.3.7 e pela continuidade da transformada de Fourier em S' resulta que

$$\langle\widehat{\varphi_j},\psi\rangle \to \langle\widehat{f},\psi\rangle = \int \widehat{f}\psi dx,$$

sendo a última igualdade válida pois $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. A unicidade do limite implica então, que

$$\int \widehat{f}\psi dx = \int f\widehat{\psi}dx, \forall\psi \in S. \tag{2.3.1}$$

Tomemos agora uma seqüência $\{\psi_j\}$ em S tal que $\psi_j \to g$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Da desigualdade de Hölder e do fato de que $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ segue que

$$\int \widehat{f}\psi_j dx \to \int \widehat{f}g dx$$

e, de (2.3.1)

$$\int f\widehat{\psi_j}dx \to \int \widehat{f}g dx. \tag{2.3.2}$$

Mas

$$\begin{aligned} |\textstyle\int f\widehat{\psi_j}dx - \int f\widehat{g}dx| &\leq \textstyle\int |f||\widehat{\psi_j - g}|dx \quad \leq \quad \|f\|_1\|\widehat{\psi_j - g}\|_\infty \\ &\leq \|f\|_1\|\psi_j - g\|_1. \end{aligned}$$

Então $\int f\widehat{\psi_j}dx \to \int f\widehat{g}dx$ que, juntamente com (2.3.2), implicam em

$$\int f\widehat{g}dx = \int \widehat{f}g dx.$$

Lema 2.3.9 *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de f como função coincide com a sua transformada como distribuição temperada.*

Demonstração Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, já provamos que $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, $\widehat{f}$ define uma distribuição temperada. A observação acima afirma que tal distribuição temperada coincide com $\mathcal{F}(f)$, sendo $\mathcal{F}$ a transformada de Fourier em $\mathcal{S}'$. Devemos então provar que

$$\langle \widehat{f}, \psi \rangle = \langle \mathcal{F}(f), \psi \rangle, \quad \forall \psi \in S.$$

Tome uma seqüência $\{\varphi_j\}$ em S tal que $\varphi_j \to f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Então, para toda $\psi \in S$ vale

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f}, \psi \rangle &= \int \widehat{f} \psi dx = \int f \widehat{\psi} dx \\ &= \int (\lim \varphi_j) \widehat{\psi} dx = \lim \int \varphi_j \widehat{\psi} dx \\ &= \lim \langle \varphi_j, \widehat{\psi} \rangle = \lim \langle \mathcal{F} \varphi_j, \psi \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}(f), \psi \rangle. \end{aligned}$$

∎

Já vimos que a inversa da transformada de Fourier em $\mathcal{S}$ é dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{\check{\varphi}}(x).$$

Para definirmos $\mathcal{F}^{-1}$ em $\mathcal{S}'$ por analogia, definimos então a forma linear

$$\begin{array}{rccc} \check{u}: & \mathcal{S} & \to & \mathbb{C} \\ & \varphi & \mapsto & \langle u, \check{\varphi} \rangle. \end{array}$$

A verificação de que $\check{u}$ é contínuo não é difícil de ser feita, e será omitida. Também não é difícil verificar que o operador linear

$$\begin{array}{rccc} \vee: & \mathcal{S}' & \to & \mathcal{S}' \\ & u & \mapsto & \check{u} \end{array}$$

é contínuo. Se $u \in \mathcal{S}'$, definimos multiplicação de u por um polinômio p como a distribuição pu dada por $\langle pu, \psi \rangle = \langle u, p\psi \rangle, \forall \psi \in \mathcal{S}$. O fato de que pu é uma distribuição segue do fato de que u é uma distribuição e que p é uma função de classe C^∞. Mas é possível mostrar pu é uma distribuição temperada. Com essa definição, prova-se sem maiores dificuldades as fórmulas

$$\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \widehat{u} \qquad \text{e} \qquad \widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha u,$$

pois elas são válidas em $\mathcal{S}$.

Teorema 2.3.10 *A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ é um isomorfismo e a fórmula de inversão de Fourier $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$ é válida para $u \in \mathcal{S}'$.*

Demonstração. Do Teorema (2.2.9) temos que

$$\widehat{\widehat{\phi}} = (2\pi)^n \check{\phi},$$

em que $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$.

Se $u \in \mathcal{S}'$ obtemos

$$\widehat{\widehat{u}}(\phi) = \widehat{u}(\widehat{\phi}) = u(\widehat{\widehat{\phi}}) = (2\pi)^n u(\check{\phi}) = (2\pi)^n \check{u}(\phi)$$

■

Teorema 2.3.11 (Teorema de Plancherel) *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\widehat{f}$ está em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\|\widehat{f}\|_2$.*

Demonstração. Tome uma seqüência $\{\varphi_j\}$ em $\mathcal{S}$ tal que $\varphi_j \to f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $\widehat{\varphi_j} \in S \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ vale

$$\begin{aligned} \|\widehat{\varphi_j} - \widehat{\varphi_k}\|_2^2 &= \|\widehat{\varphi_j - \varphi_k}\|_2^2 = \int (\widehat{\varphi_j - \varphi_k})(\overline{\widehat{\varphi_j - \varphi_k}})dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int (\varphi_j - \varphi_k)(\overline{\varphi_j - \varphi_k})dx = \|\varphi_j - \varphi_k\|_2^2. \end{aligned}$$

Isso implica que $\{\widehat{\varphi_j}\}$ é uma seqüência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$ logo, trata-se de uma seqüência convergente, cujo limite denotaremos por g. Provaremos que $g = \widehat{f}$. Fixe $\psi \in \mathcal{S}$ arbitrária. Nas igualdades abaixo, está sendo usada a observação (2.3.7).

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f}, \psi \rangle &= \langle f, \widehat{\psi} \rangle = \lim \langle \varphi_j, \widehat{\psi} \rangle \\ &= \lim \langle \widehat{\varphi_j}, \psi \rangle = \langle g, \psi \rangle \end{aligned}$$

Isso prova que $g = \widehat{f}$ em $\mathcal{S}'$. Mas $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, portanto, $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. ∎

Na última frase da demonstração do teorema anterior, está sendo feito um abuso de linguagem, pois estamos identificando $L^2(\mathbb{R}^n)$ com um subespaço de $\mathcal{S}'$. Mais geralmente, temos:

Lema 2.3.12 *Se $f \in L^p$ e $1 \leq p < \infty$ podemos escrever f como a soma de uma função em L^2 e uma em L^1, assim sua transformada de Fourier está em L^2_{loc}, pelo Lema 2.2.2 e pelo Teorema 2.3.11.*

Demonstração Se $f \in (L^2 \cup L^1)$ então a decomposição é $f + 0$ ou $0 + f$, respectivamente. Se $f \in L^p, 1 < p < \infty$. Seja

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| < 1\},$$

note que a medida de L^c é finita, de fato suponha $m(L^c) = \infty$, como $(\int_{L^c} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \geq (\int_{L^c} 1 dx)^{\frac{1}{p}} = (m(L^c))^{\frac{1}{p}}$, então $\| f \|_p = \infty$ o que é um absurdo. É fácil ver que $\chi_L f \in L^2$ e $\chi_{L^c} f \in L^1$, logo $f = \chi_L f + \chi_{L^c} f$. ∎

Teorema 2.3.13 (Riesz-Thorin) *Se T é uma aplicação linear de $L^{p_1} \cap L^{p_2}$ em $L^{q_1} \cap L^{q_2}$ tal que*

$$\|Tf\|_{L^{q_j}} \leq M_j \|f\|_{L^{p_j}}, \quad j = 1, 2 \tag{2.3.3}$$

e se $\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{t}{q_1} + \frac{1-t}{q_2}$, para algum $t \in (0,1)$, então

$$\|Tf\|_q \leq {M_1}^t {M_2}^{1-t} \|f\|_p, \quad f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}. \tag{2.3.4}$$

Demonstração Se $p = \infty$ então $p_1 = p_2 = \infty$ e neste caso (2.3.4) segue da desigualdade de Hölder. Assim podemos supor que $p < \infty$ e que $p \neq p_i$, $i = 1, 2$ logo $p_1,\ p_2 < \infty$. Primeiramente notemos que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\|Tf\|_{L^{q_j}} \leq M_j \|f\|_{L^{p_j}},\quad j = 1, 2$

(ii) $|\langle Tf,\ g\rangle| \leq M_j \|f\|_{p_j} \|g\|_{q_j'}$, com $\frac{1}{q_j} + \frac{1}{q_j'} = 1$.

De fato, se (i) é verdadeiro por Hölder temos

$$|\langle Tf,\ g\rangle| = |\int Tfg dx| \leq \int |Tfg| dx \leq \|Tf\|_{q_j} \|g\|_{q_j'} \leq M_j \|f\|_{p_j} \|g\|_{q_j'}.$$

Se (ii) é válido, tome

$$g(x) = \frac{|Tf|^{q_j}}{\overline{(Tf)}}(x),\quad Tf(x) \neq 0,$$

$$g(x) = 0,\quad Tf(x) = 0.$$

Note que $g \in L^{q_j'}$.

$$\|Tf\|_{q_j}^{q_j} \leq M_j \|f\|_{p_j} \|g\|_{q_j'} = M_j \|f\|_{p_j} \|Tf\|_{q_j}^{\frac{q_j}{q_j'}}.$$

Logo $\|Tf\|_{q_j} \leq M_j \|f\|_{p_j}$.

Se $0 \leq F, G \in L^1$ e $\|F\|_1 = \|G\|_1 = 1$ então o valor absoluto de

$$\theta(z) = \langle T(f_0 F^{\frac{z}{p_1} + \frac{1-z}{p_2}}), g_0 G^{\frac{z}{q_1'} + \frac{1-z}{q_2'}} \rangle M_1^{-z} M_2^{z-1}$$

é ≤ 1 se $Rez = 0$ ou $Rez = 1$, sendo $|f_0| \leq 1, |g_0| \leq 1$. De fato, se $Rez = 0$ temos

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| = |\langle T(f_0 F^{\frac{iy}{p_1} + \frac{1-iy}{p_2}}),\ g_0 G^{\frac{iy}{q_1'} \frac{1-iy}{q_2'}} \rangle| |M_1^{-iy}| |M_2^{iy-1}| \leq \\ \leq M_2 \left\| f_0 F^{\frac{iy}{p_1} + \frac{1-iy}{p_2}} \right\|_{p_2} \left\| g_0 G^{\frac{iy}{q_1'} + \frac{1-iy}{q_2'}} \right\|_{q_2'} M_2^{-1} \leq \\ \leq \left\| F^{\frac{1}{p_2}} \right\|_{p_2} \left\| G^{\frac{1}{q_2'}} \right\|_{q_2'} = 1, \end{aligned}$$

a primeira desigualdade segue da afirmação feita no início desta demonstração. Analogamente obtemos que $|\Phi(z)| \leq 1$ se $Rez = 1$. Se tomarmos F, G funções simples obtemos que θ é analítica e limitada quando $0 \leq Rez \leq 1$. Pelo Teorema de Phragmén-Lindelöf 1.10.1, temos que $|\theta(z)| \leq 1, \forall z; 0 \leq Rez \leq 1$, assim

$$|\langle T(f_0 F^{\frac{1}{p}}),\ g_0 G^{\frac{1}{q'}}\rangle| \leq M_1^t M_2^{1-t},$$

$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Isto prova (2.3.4) para um subconjunto denso de $L^{p_1} \bigcap L^{p_2}$. Por hipótese ambos os lados são contínuos em $L^{p_1} \bigcap L^{p_2}$ o que completa a prova.

■

Teorema 2.3.14 (Hausdorff-Young) *Se* $1 \leq p \leq 2$, *então* $\widehat{f} \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *sendo* q *o expoente conjugado de* p, *e*

$$\|\widehat{f}\|_{L^q} \leq (2\pi)^{\frac{n}{q}} \|f\|_{L^p}.$$

Demonstração No caso $p = 2$, vale a igualdade, conforme provamos no teorema (2.3.11).

Se $p = 1$ $\widehat{f} \in L^\infty$ e $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Se $1 < p < 2$ como a transformada de Fourier é uma aplicação contínua considere no Teorema 2.3.13 $p_1 = 1, p_2 = 2, q_1 = \infty, q_2 = 2, M_1 = 1, M_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$, logo

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leq (2\pi)^{\frac{n}{q}} \|f\|_p,$$

em que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. ■

Teorema 2.3.15 *A transformada de Fourier de uma distribuição* $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *é a função*

$$\widehat{u}(\xi) = \langle u, e^{-ix\xi}\rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.3.5}$$

Pelo Teorema 1.4.27 a função $\widehat{u}(\xi)$ *está bem definida para todo* $\xi \in \mathbb{R}^n$*. Além disso, podemos estendê-la para todo* $\zeta \in \mathbb{C}^n$*.*

Demonstração Sejam $\phi,\ \phi_\epsilon$ tal que $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int \phi = 1$ e $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi(\epsilon^{-1}x)$, e escrevamos $u_\epsilon = u * \phi_\epsilon$, como $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ então $u_\epsilon \to u$ em $\mathcal{E}'$ e em particular $u_\epsilon \to u$ em $\mathcal{S}'$. Assim $\widehat{u} = \lim_{\epsilon\to 0} \widehat{u}_\epsilon$. Como $u_\epsilon \in L^1$ temos pelo Lema 2.3.9 que

$$\widehat{u}_\epsilon(\xi) = \langle u * \phi_\epsilon,\ e^{-ix\cdot\ \xi}\rangle = \langle u,\ \check{\phi}_\epsilon * e^{-ix\cdot\ \xi}\rangle = \widehat{\phi}(\epsilon\xi)\langle u,\ e^{-ix\cdot\ \xi}\rangle.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ segue que $\widehat{\phi}(\epsilon\xi) \to 1$ em $C^\infty(\mathbb{R})$, daí $\widehat{u}_\epsilon(\xi) \to \langle u,\ e^{-ix\cdot\ \xi}\rangle$ em C^∞, em particular $\widehat{u}_\epsilon \to \langle u,\ e^{-ix\cdot\ \xi}\rangle$ em $\mathcal{S}'$. Pela unicidade do limite obtemos (2.3.5).

Para provarmos que $\widehat{u}$ é inteira, faremos uso do seguinte Lema:

Lema 2.3.16 (a) *Para todo multi-índice* α *e* $j \in \mathbb{N}$, *vale*

$$\partial_x^\alpha \frac{(-ix\xi)^j}{j!} = \begin{cases} \dfrac{(-ix\xi)^{j-|\alpha|}}{(j-|\alpha|)!}\xi^\alpha, & |\alpha| \leq j \\ 0, & j < |\alpha|, \end{cases}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{C}^n$.

(b) *Se* $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\xi \in \mathbb{C}^n$ *então* $\xi \mapsto \langle u, (-ix\xi)^j\rangle$ *é um polinômio na variável* ξ, *de grau* j.

(c) *Se* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *então* $\langle u * \varphi, \psi\rangle = \langle u, \check{\varphi} * \psi\rangle$. *Vale o mesmo resultado se* $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração A prova de (a) é simples. Para (b), observe inicialmente que, separando ξ em sua parte real e imaginária, basta considerarmos o caso em que $\xi \in \mathbb{R}^n$. Note que

$$(-ix\xi)^j = (-i)^j\left(\sum_{k=1}^n x_k\xi_k\right)^j = (-i)^j \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{|\alpha|!}[(x_1\xi_1)^{\alpha_1}(x_2\xi_2)^{\alpha_2}...(x_n\xi_n)^{\alpha_n}],$$

sendo a última igualdade conhecida como teorema multinomial, e pode ser encontrada nos livros de análise combinatória. Segue que

$$\langle u, (-ix\xi)^j\rangle = (-i)^j \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{|\alpha|!}\xi^\alpha \langle u, x^\alpha\rangle.$$

Como $|\alpha| = j$, temos que (b) está provado. Para provarmos (c), observamos que, por definição de convolução

$$u * (\varphi * \check{\psi})(0) = \langle u, (\varphi * \check{\psi})^\vee\rangle.$$

Por outro lado, novamente pela definição de convolução

$$(u * \varphi) * \check{\psi}(0) = \langle u * \varphi, (\check{\psi})^\vee\rangle = \langle u * \varphi, \psi\rangle.$$

A associatividade da convolução implica que

$$\langle u, (\varphi * \check{\psi})^\vee\rangle = \langle u * \varphi, \psi\rangle.$$

Não é difícil verificar que $(\varphi * \check{\psi})^\vee = \check{\varphi} * \psi$, completando assim a prova de (c).

■

Agora provaremos que $\widehat{u}$ é uma função inteira. Como $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + ... \ \forall y \in \mathbb{C}$, temos que

$$e^{-ix\xi} = 1 + (-ix\xi) + \frac{(-ix\xi)^2}{2!} + \frac{(-ix\xi)^3}{3!} + ..., \forall x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{C}^n. \qquad (2.3.6)$$

Por isso tomamos a série $\sum_{j=0}^{\infty}\langle u, \frac{(-ix\xi)^j}{j!}\rangle$ e provaremos que é igual a $\widehat{u}(\xi)$. Do Lema 2.3.16 obtemos que esta é uma série de pontências na variável ξ.

Como $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, existem $K \subset\subset \mathbb{R}^n,\ C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$\left|\left\langle u, \frac{(-ix\xi)^j}{j!}\right\rangle\right| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} \left|\partial_x^\alpha \frac{(-ix\xi)^j}{j!}\right|, \quad \forall\ \xi \in \mathbb{C}^n, \quad j \in \mathbb{N}. \qquad (2.3.7)$$

Tome R suficientemente grande de modo que $K \subset \overline{B_R(0)}$. Ao fazermos a soma em j, o lado direito da igualdade acima é uma soma finita de séries no índice j.

Mostraremos que cada uma delas é uniformemente convergente em compactos. Para isso, escolha $|\alpha| \leq m$ arbitrário e note que, para $j \geq |\alpha|$ temos, do Lema 2.3.16, que valem as seguintes estimativas para qualquer $\xi \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in K}\left|\partial_x^\alpha \frac{(-ix\xi)^j}{j!}\right| &= \sup_{x\in K}\left|\frac{(-ix\xi)^{j-|\alpha|}}{j!-|\alpha|}\xi^\alpha\right| \\
&= \frac{1}{j!-|\alpha|}\Big(\sup_{x\in K}|(x\xi)|^{j-|\alpha|}\Big)|\xi^\alpha| \\
&\leq \frac{1}{j!-|\alpha|}\Big(\sup_{x\in K}|x|^{j-|\alpha|}\Big)|\xi|^{j-|\alpha|}|\xi^\alpha| \\
&= \frac{1}{j!-|\alpha|}\Big(\sup_{x\in K}|x|^{j-|\alpha|}\Big)|\xi|^{j} \\
&\leq \frac{1}{j!-|\alpha|}R^{j-|\alpha|}|\xi|^{j}.
\end{aligned}$$

Tome $\overline{B_M(0)} \subset \mathbb{C}^n$ qualquer. Então

$$\sup_{x\in K}\left|\partial_x^\alpha \frac{(-ix\xi)^j}{j!}\right| \leq \frac{R^{j-|\alpha|}M^j}{j!-|\alpha|}, \quad \forall\, \xi \in \overline{B_M(0)}.$$

Pelo teste da razão, a série de númereos reais do lado direito é convergente, logo, do teste da comparação segue que $\sum_{j=0}^\infty \sup_{x\in K}|\partial_x^\alpha \frac{(-ix\xi)^j}{j!}|$ é absoluta e uniformemente convergente em $\overline{B_M(0)}$. Então, cada uma das séries do lado direito de (2.3.7) é absoluta e uniformemente convergente em $\overline{B_M(0)}$ e, portanto, vale o mesmo para $\sum_{j=0}^\infty\langle u, \frac{(-ix\xi)^j}{j!}\rangle$.

Mas $M > 0$ é arbitrário. Isso prova que cada ponto $\xi \in \mathbb{C}^n$ possui uma vizinhança na qual $\sum_{j=0}^\infty\langle u, \frac{(-ix\xi)^j}{j!}\rangle$ é convergente, ou seja, a função $f(\xi) = \sum_{j=0}^\infty\langle u, \frac{(-ix\xi)^j}{j!}\rangle$ é inteira. ■

Teorema 2.3.17 *Se $u_1 \in \mathcal{S}'$ e $u_2 \in \mathcal{E}'$ segue que $u_1 * u_2 \in \mathcal{S}'$ e que $\mathcal{F}(u_1 * u_2) = \widehat{u_1}\widehat{u_2}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.15 $\widehat{u_2} \in C^\infty$ logo $\widehat{u_1}\widehat{u_2}$ está bem definido. Se $\phi \in C_c^\infty$ por definição de convolução temos

$$(u_1 * u_2)(\phi) = u_1 * u_2 * \check{\phi}(0) = u_1(\check{u_2} * \phi).$$

Afirmação 1: $\check{u}_2 * \phi \in \mathcal{S}$.

De fato, seja k a ordem de $u_2 \in \mathcal{E}'$ e seja $\phi \in \mathcal{S}$. Pelo Teorema 1.5.3 $\partial^\alpha(u*\phi) = u*(\partial^\alpha \phi)$ daí temos que

$$\sup_x |x^\alpha \partial^\beta(\check{u}_2 * \phi) = \sup_x |x^\alpha \check{u}_2 * \partial^\beta \phi| \leq C_k \sup_x \sum_{\gamma \leq \beta + k} |x^\alpha \partial^\gamma \phi,$$

logo $\check{u}_2 * \phi \in \mathcal{S}$, e $\sum_{|\alpha+\beta|\leq j} \sup |x^\alpha \partial^\beta (\check{u}_2 * \phi)| \leq C_j \sum_{|\alpha+\beta|\leq j+k} \sup |x^\alpha \partial^\beta \phi|$. Como $u_1 \in \mathcal{S}'$ então $u_1(\check{u}_2 * \phi) \in \mathcal{S}'$, logo $u_1 * u_2 \in \mathcal{S}'$.

Afirmação 2: Se $\phi \in C_c^\infty$ então $\mathcal{F}(\widehat{u_2}\phi) = \check{u}_2 * \widehat{\phi}$.

Com efeito, como $\widehat{u_2} \in C^\infty$, segue que $\widehat{u_2}\phi \in C_c^\infty \subset \mathcal{S}$, assim

$$\mathcal{F}(\widehat{u_2}\phi)(x) = \int e^{-ix\cdot\ \xi} \widehat{u_2}(\xi)\phi(\xi) d\xi = \int e^{-ix\cdot\ \xi} u_2(e^{-i.\cdot\ \xi})\phi(\xi) d\xi =$$

$$= u_2(\int e^{-i(x+.)\cdot\ \xi} \phi(\xi) d\xi) = u_2(\widehat{\phi}(x+.)) = \check{u}_2 * \widehat{\phi}(x).$$

Assim

$$(\widehat{u_1 * u_2})(\phi) = (u_1 * u_2)(\widehat{\phi}) = u_1(\check{u}_2 * \widehat{\phi}) = u_1(\widehat{\widehat{u_2}\phi}) = (\widehat{u_1}\widehat{u_2})(\phi).$$

Como C_c^∞ é denso em $\mathcal{S}$, obtemos o resultado para toda $\phi \in \mathcal{S}$, e portanto

$$\mathcal{F}(u_1 * u_2) = \widehat{u_1}\widehat{u_2}.$$

■

Como já vimos no Exemplo 1.5.13 podemos interpretar a diferenciação como uma convolução, isto é, $\partial^\alpha u = \partial^\alpha \delta_0 * u, u \in \mathbb{R}^n$, usando este fato e o teorema anterior obtemos

$$\mathcal{F}(D^\alpha u) = \xi^\alpha \widehat{u},\ \mathcal{F}(x^\alpha u) = -D_j \widehat{u},\ u \in \mathcal{S}' \tag{2.3.8}$$

Uma forma alternativa para provar (2.3.8) é argumentarmos que vale em $\mathcal{S}$ logo por densidade deve valer em $\mathcal{S}'$. Este argumento mostra também que se

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma bijeção linear então

$$\widehat{T^* u} = {}^t T^{-1\,*} \widehat{u} \mid detT \mid^{-1} \tag{2.3.9}$$

em que T^* é o pullback e está definido na Seção 1.8. De fato, para $\phi \in \mathcal{S}$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(T^*\phi)(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\ \xi} \phi(Tx)dx \\ &= \int e^{-i\ T^{-1}(x)\cdot\ \xi} \phi(y) |\det T|^{-1} dy \\ &= \int e^{-iy\cdot\ \ {}^tT^{-1}(\xi)}\ \phi(y) |\det T|^{-1} dy \\ &= |\det T|^{-1} \widehat{\phi}\ (\ {}^tT^{-1}(\xi)), \end{aligned}$$

em que ${}^tT^{-1}$ é a transformação adjunta de T. Logo por densidade temos que (2.3.9) vale para toda $u \in \mathcal{S}'$.

Teorema 2.3.18 *Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição homogênea de grau a, então $\widehat{u}$ é homogênea de grau $-n-a$.*

Demonstração Se M_t denota multiplicação por t então $M_t^* u = t^a u$, assim por (2.3.9) temos para $t > 0$

$$t^a \widehat{u} = M^*_{\frac{1}{t}} \widehat{u} t^{-n},$$

isto é,

$$M^*_s \widehat{u} = s^{-n-a} \widehat{u},\ \sigma > 0$$

■

Teorema 2.3.19 *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e a restrição a $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ é homogênea de grau a então $u \in \mathcal{S}'$. Se além disso $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ então $\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.*

Demonstração Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ tal que $\int_0^\infty \frac{\psi(tx)}{t} dt = 1$, $x \neq 0$, tal ψ é construída em (1.6.14). Agora defina

$$\psi_0(x) = 1 - \int_1^\infty \frac{\psi(\frac{x}{t})}{t} dt$$

Note que $\psi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\psi_0 \equiv 1$ numa vizinhança da origem. De fato como $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ então existe uma vizinhança U_ϵ da origem em que $\psi \equiv 0$, logo $\psi_0(x) = 1, \forall x \in U_\epsilon$. Por outro lado,

$$\int_1^\infty \frac{\psi(\frac{x}{t})}{t} dt = \int_1^0 -\frac{\psi(sx)}{s} ds = 1 - \int_1^\infty \frac{\psi(sx)}{s} ds.$$

Logo se $S(\psi) \subset \overline{B_R(0)}$ segue que $\psi_0(x) = 0$ se $\mid x \mid \geq R$, logo ψ_0 tem suporte compacto.

Seja $\phi \in C_c^\infty$, temos

$$\begin{aligned} u(\phi) &= u(\psi_0 \phi) + \int_1^\infty \frac{u(\psi(\frac{x}{t})\phi(x))}{t} dt = \\ &= u(\psi_0 \phi) + \int_1^\infty \frac{t^a u(t^n \psi(x) \phi(tx))}{t} dt = \\ &= u(\psi_0 \phi) + \int_1^\infty t^{a+n-1} u(\psi(x)\phi(tx)) dt. \end{aligned}$$

Se $K_0 = \mathcal{S}(\psi_0)$, $K = \mathcal{S}(\psi)$ e k é a ordem de u em uma vizinhança U, de K então, se $\phi \in C_c^\infty(U)$

$$\begin{aligned} |u(\phi)| &= u(\psi_0 \phi) + \int_1^\infty t^{a+n-1} u(\psi(x)\phi(tx)) dt \leq \\ &\leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{K_0} |D^\alpha(\psi_0 \phi)| + \int_1^\infty |t|^{a+n-1} C_2 \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{K} |D^\alpha(\psi(x)\phi(tx))| dt \leq \\ &\leq C_3 \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{K_0} |D^\alpha(\phi)| + C_4 \int_1^\infty \sum_{|\alpha| \leq k} |t|^{|\alpha| + Rea + n - 1} \sup_{tK} \frac{x^M}{x^M} |D^\alpha(\phi)| dt \leq \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq k} |x^M D^\alpha \phi| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\beta| \leq M + |\alpha|} |x^\beta D^\alpha \phi| \end{aligned}$$

se M é um inteiro maior que $Rea + n$. Isto prova que $u \in \mathcal{S}'$. Se $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ então $\widehat{u}$ é continua se $Rea < -n$. De fato, podemos escrever $u = \psi_0 u + (1 - \psi_0) u$

em a primeira parte tem suporte compacto, e a segunda é integrável se $Rea < -n$. Em geral concluimos que $D^\beta \xi^\alpha \widehat{u}$, que é a transformada de Fourier de $(-x)^\beta D^\alpha u$, é uma função continua se $Rea - |\alpha| + |\beta| < -n$. Mas isto é verdade para todo $|\beta|$ se $|\alpha| > Rea + |\beta| + n$, logo $\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. ■

Os teoremas (2.3.18)e (2.3.19) mostram que a transformada de Fourier é uma bijeção de distribuições homogênas de grau a em $\mathbb{R}^n$ que estão em $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ sobre distribuições de grau $-n-a$.

Definição 2.3.20 *Um polinômio homogêno $P(\xi)$ em n variáveis com coeficientes complexos é dito elíptico se $P(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Um polinômio não homogêneo é dito elíptico se a parte homogênea de maior grau é elíptica.*

Teorema 2.3.21 *Se P é um polinômio homogêneo elíptico de grau m em $\mathbb{R}^n$, então $P(D)$ tem solução fundamental E tal que*

$$E = E_0 + Q(x) \log |x|,$$

em que E_0 é homogênea de grau $m-n$ e pertence a $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e Q é um polinômio o qual é identicamente nulo se $n > m$ e é definido quando $n \leq m$ por

$$Q(x) = S_\xi\left(\frac{< ix, \xi >^{m-n}}{P(\xi)}\right)\frac{(2\pi)^{-n}}{(m-n)!}, \tag{2.3.10}$$

em que S_ξ denota a integração na esfera unitária.

Demonstração (a) Suponha que E seja uma distribuição em $\mathcal{S}'$ solução fundamental de $P(D)$. Logo por (2.3.8) temos que $\widehat{P(D)E}(\xi) = P(\xi)\widehat{E}(\xi)$. Por outro lado $\widehat{P(D)E}(\xi) = \widehat{\delta} = 1$. Assim para $\xi \neq 0$, $\widehat{E} = \frac{1}{P(\xi)}$.
(b) Como $\frac{1}{P} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ então $\frac{1}{P(\xi)} \in D'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e define uma distribuição

homogênea de grau $-m$.

(c) Como $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ então pelo Teorema (2.3.19) $\widehat{E} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

(d) Se $\widehat{E}$ admitisse extensão homogênea para $\mathbb{R}^n$então pelo Teorema (2.3.18) seria homogênea de grau $m - n$.

(e) Assim põe-se a questão: Quando é possível estender homogeneamente para $\mathbb{R}^n$ uma distribuição homogênea em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$? Os Teoremas (1.6.5) e (1.6.6) nos dão a resposta.

(f) Seja U a transformada de Fourier de uma distribuição $\dot{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo (1.6.15), isto é

$$\dot{u} = t^{-k-n} M^*_{\frac{1}{t}} \dot{u} + \log t \sum_{|\alpha|=k} S(x^\alpha u)(-1)^k \frac{\partial^\alpha \delta_0}{\alpha!}$$

em que u é homogênena de grau $-n-k \leq -n$. Por (2.3.9) temos em $\mathbb{R}^n$

$$U = t^{-k} M^*_t U + Q \log t$$

em que Q é o polinômio homogêneo de grau k

$$Q(\xi) = S_x(\langle -ix,\ \xi\rangle^k \frac{u}{k!}) \tag{2.3.11}$$

Assim $U_0 = U + Q \log|.|$ é homogênea de grau k. Disto segue que U_0 é uma função limitada numa vizinhança da origem, homogênea de grau k, e $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Considere $U_1(x) = U_0(x),\ x \neq 0$ e $U_1(0) = 0$ é fácil ver que U_1 é limitada numa vizinhança da origem. Como $S(U_1 - U_0) \subseteq \{0\}$ pelo Teorema 1.4.29 $U_1 - U_0 = \sum_{|\alpha| \leq l} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0$, como $U_1 - U_0$ tem grau de homogeneidade $k \geq 0$ e $\partial^\alpha \delta_0$ tem grau de homogeneidade $-n - |\alpha|$ então $c^\alpha = 0, \forall \alpha$, ou seja $U_0 = U_1$, logo U_0 é limitada numa vizinhança da origem.

Logo temos

$$U(\xi) = U_0(\xi) - Q(\xi) \log|\xi|. \tag{2.3.12}$$

(g) Consideremos E tal que $\widehat{E} = (\frac{1}{P})^{\cdot}$

(i) Se $n \leq m$ vimos que $\widehat{E}$ admite extensão à $\mathbb{R}^n$ e

$$\check{E} = (2\pi)^{-n}\widehat{\widehat{E}} = (2\pi)^{-n}(\dot{\frac{1}{P}}) =$$
$$= (2\pi)^{-n}(E_0 - Q(\xi)\log|\xi|) =$$
$$= E_0^1 - Q_1(\xi)\log|\xi|$$

em que E_0^1 é homogênea de grau $m - n$, $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e $Q_1(\xi) = S_x(\frac{\langle -ix,\ \xi\rangle^{m-n}}{P(\xi)})\frac{(2\pi)^{-n}}{(m-n)!}$. Como no Teorema (1.6.6) $\dot{u}$ pode ser tomada de forma que $P(\dot{u}) = (\dot{Pu})$ para todo polinômio P então $P(\dot{\frac{1}{P}}) = \dot{1} = \widehat{\delta}$, logo temos que E é solução fundamental de $P(D)$ com as propriedades desejadas.

(ii) Se $m < n$ pelo Teorema (1.6.5) $\widehat{E} = \frac{1}{P(\xi)}$ admite uma única extenção homogênea de grau $-m$, agora pelo Teorema (2.3.18) $E = (2\pi)^{-n}\check{\widehat{\widehat{E}}}$ é homogênea de grau $m - n$, e além disso $P(\dot{\frac{1}{P}}) = (\frac{\dot{P}}{P}) = \widehat{\delta}$, ou seja E é solução fundamental de $P(D)$ e tem as propriedades desejadas. ■

Definição 2.3.22 *Se $P(D)$ é um operador diferencial com coeficientes constantes, então $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é dita uma parametrix de $P(D)$ se $P(D)E = \delta + \omega$, $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Quando construímos a parametrix não precisamos nos preocupar com a definição de $\frac{1}{P}$ em 0, pois a transformada de Fourier de uma distribuição de suporte compacto é sempre uma função C^∞.

Teorema 2.3.23 *Todo operador elíptico $P(D)$ com coeficientes constantes tem uma parametrix E a qual é uma função C^∞.*

Demonstração Podemos escrever

$$P(\xi) = P_m(\xi) + P_{m-1}(\xi) + ... + P_0$$

em que P_j é homogêneo de grau j e $P_m(\xi) \neq 0$ quando $\xi \neq 0$. Então $P_m(\xi) \geq c > 0$ quando $|\xi| = 1$, da homogeneidade temos que

$$|P_m(\xi)| = |P_m(|\xi|\frac{\xi}{|\xi|})| = |\xi|^m P_m(\frac{\xi}{|\xi|}) \geq |\xi|^m c,$$

$\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Disto segue que para alguma constante C_1 e R

$$|P(\xi)| \geq |P_m(|\xi|) - |P_{m-1}(\xi)| - ... - |P_0| \geq c|\xi|^m - C_1(|\xi|^{m-1} + ... + 1) \geq c\frac{|\xi|^m}{2},$$

$\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e $|\xi| \geq R$.

A derivada de ordem k de $\frac{1}{P(\xi)}$ é da forma $\frac{Q(\xi)}{P(\xi)^{k+1}}$ com Q de grau $\leq (m-1)k$, o que é facilmente verificado por indução em k. Quando $|\xi| > R$ concluímos que

$$|\xi^\beta D^\alpha(\frac{1}{P(\xi)})| \leq c_{\alpha,\beta}|\xi|^{|\beta|-|\alpha|-m} \tag{2.3.13}$$

De fato,

$$|\xi^\beta D^\alpha(\frac{1}{P(\xi)})| = |\xi^\beta \frac{Q(\xi)}{P(\xi)^{|\alpha|+1}}| \leq c_\beta |\xi|^|\beta||Q(\xi)| \frac{2^|\alpha|}{c^|\alpha||\xi|^{m(|\alpha|+1)}} \leq$$

$$\leq |\xi|^{|\beta|-m|\alpha|-m} c_{\alpha,\beta} C_1 |\xi|^{m|\alpha|-|\alpha|} =$$

$$|\xi|^{|\beta|-|\alpha|-m} c'_{\alpha,\beta}.$$

Escolha $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ igual a 1 em $\{\xi; |\xi| < R\}$. Então $\frac{(1-\chi(\xi))}{P(\xi)}$ é uma função C^∞ limitada. De fato, se $|\xi| \geq R \geq 1$

$$|\frac{(1-\chi(\xi))}{P(\xi)}| \leq \frac{2|1-\chi(\xi)|}{c|\xi|^m} \leq \frac{2M}{cR^m} < \infty,$$

$|1-\chi(x)| \leq M$. Se $|\xi| < R$ então $|\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}| = 0$.

Daí $\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)} \in \mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$. Então existe $E \in \mathcal{S}'$ tal que $\widehat{E}(\xi) = \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}$. Assim temos $P(D)E = \delta + \omega$ em que $\omega = -(2\pi)^{-n}\check{\hat{\chi}} \in C_c^\infty \subset \mathcal{S}$. Como na Demonstração do Teorema 2.3.19 segue da estimativa 2.3.13 que $D^\beta x^\alpha$ é contínuo quando $|\beta| - |\alpha| - m < -n$, logo $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. ∎

Teorema 2.3.24 *Se P é um operador elíptico com coeficientes constantes então $SS(u) = SS(Pu)$, $u \in \mathcal{D}'(X)$, X aberto de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração Pelo Teorema 2.3.23 $P(D)$ tem uma parametrix $E \in C^\infty$, ou seja, $P(D)E = \delta + \omega$, $\omega \in C^\infty$. Suponhamos que $u \in \mathcal{E}'(X)$. Já sabemos que $P(u_1 * u_2) = P(u_1) * u_2 = u_1 * P(u_2)$ se $u_1 \in \mathcal{D}'$ e $u_2 \in \mathcal{E}'$, assim

$$P(E * u) = P(E) * u = (\delta + \omega) * u = u + \omega * u.$$

Logo temos pelo Teorema 1.5.12

$$SS(u + \omega * u) = SS(P(E * u)) \subset SS(E) + SS(Pu) = SS(Pu),$$

mas

$$SS(u + \omega * u) = SS(u),$$

pois $\omega * u \in C^\infty$. Portanto o teorema é verdadeiro para $u \in \mathcal{E}'(X)$. Seja $Y \subseteq X$ aberto tal que $\overline{Y}$ é compacto em X, tome $\psi \in C_c^\infty(X)$ igual a 1 em Y, daí segue que

$$Y \cap SS(Pu) = Y \cap SS(P(\psi u)) = Y \cap SS(\psi u) = Y \cap SS(u).$$

Como Y é arbitrário temos que $SS(u) = SS(Pu)$, $u \in \mathcal{D}'(X)$.

■

2.4 A Transformada de Fourier-Laplace em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

Pelo Teorema 2.3.15 a transformada de Fourier $\widehat{u}$ de qualquer distribuição $u \in \mathcal{E}'$ pode ser estendida a uma função inteira em $\mathbb{C}^n$ chamada de transformada de Fourier-Laplace de u. Nesta seção discutiremos essas propriedades mais detalhadamente.

Lema 2.4.1 *Se $u \in L^1$ e H é a função suporte de $S(u)$, definida em (1.9.2), então*

$$|\widehat{u}(\zeta)| \leq \|u\|_1 \, e^{H(Im\zeta)}. \tag{2.4.1}$$

Demonstração De fato,

$$|\widehat{u}(\zeta)| = |\int e^{-ix\cdot\, \zeta} u(x)dx| \leq e^{H(Im\zeta)} \|u\|_1 \,,$$

a última desigualdade segue do fato que se $x \in S(u)$ então $x \cdot Im(\zeta) \leq H(Im\zeta)$.

■

Teorema 2.4.2 (Paley-Wiener-Schwartz) *Seja K um conjunto convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$ com função suporte H.*

(a)Se u é uma distribuição de ordem N com suporte contido em K, então

$$|\hat{u}(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^N e^{H(Im\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{2.4.2}$$

Reciprocamente, toda função inteira em $\mathbb{C}^n$ satisfazendo uma estimativa do tipo (2.4.2) é a transformada de Fourier-Laplace de uma distribuição com suporte contido em K.

(b)Se $u \in C_c^\infty(K)$ então existe, para todo inteiro N, uma constante C_N tal que

$$|\hat{u}(\zeta)| \leq C_N(1 + |\zeta|)^{-N} e^{H(Im\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{2.4.3}$$

Reciprocamente, toda função inteira em $\mathbb{C}^n$ satisfazendo (2.4.3) para todo N é a transformada de Fourier-Laplace de uma função em $C_c^\infty(K)$.

Demonstração (a)($\Longrightarrow$) Para provarmos que (2.4.2) consideremos $\chi_\epsilon \in C_c^\infty(K_\epsilon)$ em que $K_\epsilon = \{x + y; x \in K, |y| \leq \epsilon\}$, tal que $\chi_\epsilon = 1$ em $K_{\frac{\epsilon}{2}}$ e $|D^\alpha \chi_\epsilon| \leq c_\alpha \epsilon^{-|\alpha|}$, esta escolha é possível pelo Teorema 1.4.4 e pela estimativa (1.4.2). Se $u \in \mathcal{E}'^N(K)$, temos

$$|\hat{u}(\zeta)| = |u_x(\chi_\epsilon(x)e^{-ix\cdot\zeta})| \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq N} \sup |D_x^\alpha(\chi_\epsilon(x)e^{-ix\cdot\zeta})| \leq$$

$$\leq C_1 \sum_{|\beta|+|\gamma|\leq N} \sup |C_2 D_x^\beta \chi_\epsilon(x) D_x^\gamma e^{-ix\cdot\zeta}| \leq C_3 \sum_{|\beta|+|\gamma|\leq N} \sup c_\beta \epsilon^{-|\beta|} |\zeta|^{|\gamma|} e^{x\cdot Im\zeta} \leq$$

$$\leq C_4 e^{H(Im\zeta)+\epsilon|Im\zeta|} \sum_{|\alpha|\leq N} \epsilon^{-|\alpha|}(1+|\zeta|)^{N-|\alpha|}.$$

Se tomarmos $\epsilon = \frac{1}{1+|\zeta|}$, obtemos

$$\hat{u}(\zeta) \leq Ce^{H(Im\zeta)}(1+|\zeta|)^N,$$

ou seja (2.4.2) é verdadeira.

(b)($\Longrightarrow$) Seja $u \in C_c^\infty(K)$, provaremos que (2.4.3) é verdadeira. Por hipótese temos que $u,\ D^\alpha u \in L^1$, assim de (2.4.1) segue que

$$|\zeta_j^N \hat{u}(\zeta)| = |\widehat{D_j^N u}(\zeta)| \leq \left\|D_j^N u\right\|_1 e^{H(Im\zeta)}. \tag{2.4.4}$$

Somando (2.4.1) e (2.4.4), para $j = 1, 2, ...$ obtemos

$$(1+|\zeta_1|^N + ... + |\zeta_n|^N)|\hat{u}(\zeta)| \leq (\|u\|_1 + \left\|D_1^N u\right\|_1 + ... + \left\|D_n^N u\right\|_1)e^{H(Im\zeta)}.$$

Mas $(1+|\zeta|)^N \leq B(1+|\zeta|^N)$, em que B é uma constante que depende apenas de N, logo segue (2.4.3).

(b)($\Longleftarrow$) Seja U uma função inteira satisfazendo (2.4.3) para todo N. Então a restrição de U a $\mathbb{R}^n$ é a transformada de Fourier da função C^∞

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} U(\xi) d\xi,$$

assim resta provar que $S(u) \subset K$. Para tal notemos que para qualquer escolha de $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\ (\xi+i\eta)} U(\xi+i\eta) d\xi. \tag{2.4.5}$$

De fato, o lado direito define uma função C^∞ e diferenciando-a com respeito a η_j, obtemos, pelas equações de Cauchy-Riemann,

$$\partial_{\eta_j}[(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\ (\xi+i\eta)}U(\xi+i\eta)d\xi] = (2\pi)^{-n}[\int i\partial_{\xi_j}(e^{ix\cdot\ (\xi+i\eta)})U(\xi+i\eta)d\xi +$$
$$+\int e^{ix\cdot\ (\xi+i\eta)}(\partial_{\eta_j}(U(\xi+i\eta))d\xi] = (2\pi)^{-n}[\int i\partial_{\xi_j}(e^{ix\cdot\ (\xi+i\eta)})U(\xi+i\eta)d\xi +$$
$$+\int ie^{ix\cdot\ (\xi+i\eta)}(\partial_{\xi_j}(U(\xi+i\eta)))d\xi] = i(2\pi)^{-n}\int \partial_{\xi_j}[e^{ix\cdot\ (\xi+i\eta)}U(\xi+i\eta)]d\xi$$

Pelo Teorema de Fubini e pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$|\int \partial_{\xi_j}[e^{ix\cdot\ (\xi+i\eta)}U(\xi+i\eta)]d\xi| =$$
$$|\int ...\int[\int \partial_{\xi_j}[e^{ix\cdot\ (\xi+i\eta)}U(\xi+i\eta)]d\xi_j]d\xi_1...\widehat{d\xi_j}...d\xi_n| =$$
$$|\int ...\int \lim_{M\to\infty}[e^{ix_jM-x_j\eta_j+i\sum_{k\neq j}x_k\cdot\ \zeta_k}U(\zeta_1,...,M+i\eta_j,...,\zeta_n)]d\xi_1...\widehat{d\xi_j}...d\xi_n| := \quad (\sharp)$$

estimando $(\sharp)$ obtemos

$$(\sharp) \leq \int ...\int \lim_{M\to\infty} e^{-x_j\eta_j}e^{-\sum_{k\neq j}x_k\eta_k}|U(\zeta_1,...,M+i\eta_j,...,\zeta_n)|d\xi_1...\widehat{d\xi_j}...d\xi_n \leq$$
$$\leq \int ...\int \lim_{M\to\infty} e^{-x\cdot\eta}C_N(1+|(\zeta_1,...,M+i\eta_j,...,\zeta_n)|)^{-N}e^{H(Im\zeta)}d\xi_1...\widehat{d\xi_j}d\xi_n$$

Para $N \geq n-1$ a última desigualdade vai a zero quando M tende ao infinito. Portanto (2.4.5) independe de η.

Estimando (2.4.5) usando (2.4.3) com N=n+1 obtemos

$$|u(x)| \leq (2\pi)^{-n}\int e^{-x\cdot\eta}|U(\xi+i\eta)|d\xi \leq$$
$$\leq (2\pi)^{-n}\int e^{-x\cdot\eta}C_{n+1}(1+|\xi+i\eta|)^{-n-1}e^{H(\eta)}d\xi =$$
$$= (2\pi)^{-n}e^{-x\cdot\eta+H(\eta)}C_{n+1}\int \frac{1}{(1+|\xi+i\eta|)^{n+1}}d\xi$$

Supondo que $x \notin K$ então existe $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x\cdot\eta_0 > H(\eta_0)$, substituindo η_0 por $t\eta_0$ e fazendo $t \to \infty$ segue que $u(x) = 0$. Portanto $S(u) \subset K$.

(a)($\Longleftarrow$)Seja U uma função inteira satisfazendo (2.4.2) a restrição de U a $\mathbb{R}^n$ é a transformada de Fourier de uma distribuição $u \in \mathcal{S}'$. Seja $\phi \in C_c^\infty$, $\phi \geq 0$, $\int \phi dx = 1$, $S(\phi) \subset \overline{B_1(0)}$ e considere $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\epsilon})$. Como $\phi_\epsilon \in C_c^\infty$ do item (b) temos que

$$|\hat{\phi}_\epsilon(\zeta)| \leq C_l(1+|\zeta|)^{-l}e^{\epsilon|Im\zeta|}.$$

Então pelo Teorema 2.3.17 $\widehat{u * \phi_\epsilon} = \hat{u}\hat{\phi}_\epsilon$ a qual tem uma extensão analítica $U\hat{\phi}_\epsilon$ tal que para todo l

$$|U(\zeta)\hat{\phi}_\epsilon(\zeta)| \leq C_{N,\ \epsilon}(1+|\zeta|)^{N-l}e^{H(Im\zeta)+\epsilon|Im\zeta|}$$

Assim por (b) segue que $S(u * \phi_\epsilon) \subset K + \overline{B_\epsilon(0)}$. Quando $\epsilon \to 0$ temos pelo Teorema 1.5.6 $u * \phi_\epsilon \to u$ o que prova que $S(u) \subset K$. ■

Daremos agora algumas aplicações para operadores diferenciais com coeficientes constantes. Seja P um polinômio com coeficientes complexos em $(\zeta_1, ..., \zeta_n)$ e seja $P(D)$ o operador diferencial obtido de P quando ζ_j é substituído por $-i\frac{\partial}{\partial x_j}$. O Lema a seguir será usado na demonstração do próximo Teorema.

Lema 2.4.3 *Se $h(z)$ é uma função analítica de $z \in \mathbb{C}^n$ e $p(z)$ é um polinômio com coeficiente do termo de maior grau a, então*

$$|ah(0)| \leq \max_{|z|=1} |h(z)p(z)|.$$

Demonstração Seja $q(z) = z^m\overline{P}(\frac{1}{z})$ em que m é o grau de P e $\overline{P}$ é obtido de P pela conjugação dos coeficientes. Então $q(0) = \overline{a}$ e pelo princípio do máximo

$$|ah(0)| = |q(o)h(0)| \leq \max_{|z|=1} |q(z)h(z)| = \max_{|z|=1} |\overline{P}(\overline{z})h(z)| = \max_{|z|=1} |P(z)h(z)|,$$

o que prova o Lema. ■

Teorema 2.4.4 *Se $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ então a equação*

$$P(D)u = f \tag{2.4.6}$$

tem uma solução $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ se e somente se $\frac{\hat{f}(\zeta)}{P(\zeta)}$ é uma função inteira. A solução é então unicamente determinada e $ec\ S(u) = ec\ S(f)$.

Demonstração Se $P(D)u = f$ tem uma solução $u \in \mathcal{E}'$, então tomando a transformada de Fourier em ambos os lados obtemos $P(\zeta)\hat{u}(\zeta) = \hat{f}(\zeta)$, assim pelo Teorema 2.3.15 $\frac{\hat{f}(\zeta)}{P(\zeta)}$ é a função inteira $\hat{u}(\zeta)$. Como os zeros de uma função inteira tem medida nula segue que a solução é unicamente determinada.

Reciprocamente, podemos escolher um sistema de coordenadas de forma que o coeficiente a de ζ_1^m em $P(\zeta)$ é não nulo, sendo $m = grau\ de\ P$.

De fato, seja

$$P(\zeta) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \zeta^\alpha = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \zeta^\alpha + \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha \zeta^\alpha.$$

Como $grau\ de\ P = m$ sabemos que existe α tal que $|\alpha| = m$ e $a_\alpha \neq 0$. Queremos encontrar A linear invertível tal que

$$P(A\zeta) = a\zeta_1^m + \sum_{|\alpha|\leq m,\ \alpha_1<m} a_\alpha \zeta^\alpha.$$

Seja $A = (a_{jk})$ assim

$$P(A\zeta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (\sum_k a_{1k}\zeta_k)^{\alpha_1} ... (\sum_k a_{nk}\zeta_k)^{\alpha_n} + \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha (A\zeta)^\alpha$$

logo é suficiente que $a_{j1} \neq 0$, ou seja queremos $\lambda = (a_{11}, ..., a_{n1})$ tal que $\sum_{|\beta|=m} a_\beta \lambda^\beta \neq 0$, com estamos tratando de um polinômio homogêneo não nulo existe tal λ, logo escolhemos ele e o colocamos na primeira coluna de A, a seguir completamos a matriz com 1's de modo a garantir que $\det A \neq 0$, obtendo deste modo a mudança de coordenadas desejada. Assim

$$P(\zeta + ze_1) = a(\zeta_1 + z)^m + \sum_{|\alpha|\leq m, \alpha_1<m} a_\alpha (\zeta_1 + z)^{\alpha_1} \zeta_2^{\alpha_2} ... \zeta_n^{\alpha_n} = az^m + Q(z),$$

em que $Q(z)$ é um polinômio em z de grau menor ou igual a $m-1$. Portanto $P_\zeta(z) = P(\zeta + ze_1)$ tem coeficiente do termo de maior grau não nulo e aplicando o Lema 2.4.3 a função $g = \frac{\hat{f}}{P}$, obtemos

$$|a\frac{\hat{f}(\zeta)}{P(\zeta)}| \leq \sup_{|z|=1} P_\zeta(z)\frac{\hat{f}}{P}(\zeta + ze_1)| = \sup_{|z|=1} |\hat{f}(\zeta + ze_1)|.$$

pelo Teorema 2.4.2 $\hat{f}$ satisfaz a seguinte estimativa

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^N e^{H_{ecS(f)}(Im\zeta)},$$

logo

$$|\frac{\hat{f}(\zeta)}{P(\zeta)}| \leq |a|^{-1} \sup_{|z|=1} |\hat{f}(\zeta + ze_1)| \leq C_1 \sup_{|z|=1} [(1 + |\zeta + ze_1|)^N e^{H_{ecS(f)}(Im\zeta + Imze_1)}] \leq$$

$$\leq C_1(2 + |\zeta|)^N \sup |z| = 1 e^{H_{ecS(f)}(Im\zeta + Imze_1)} \leq C_1 2^N (1 + \frac{|\zeta|}{2})^N e^{H_{ecS(f)}(Im\zeta)} e^M,$$

a última desigualdade segue da definição da função suporte, da compacidade do suporte de f e do fato que $Imz \in [-1,\ 1]$. Portanto $\frac{\hat{f}}{P}$ satisfaz uma estimativa do tipo (2.4.2), logo pelo Teorema 2.4.2 existe $u \in \mathcal{E}'$ tal que $\hat{u} = \frac{\hat{f}}{P}$, ou seja u é solução de (2.4.6). Ainda pelo Teorema 2.4.2 temos que $ecS(u) \subseteq ecS(f)$. A outra inclusão segue de $S(f) \subset S(u)$. ∎

Definição 2.4.5 *Uma solução u da equação diferencial $P(D)u = 0$ em $\mathbb{R}^n$ é chamada uma solução exponencial se ela pode ser escrita na forma*

$$u(x) = f(x)e^{ix\cdot\ \zeta}$$

em que $\zeta \in \mathbb{C}^n$ e f é um polinômio.

Teorema 2.4.6 *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é convexo, então o fecho da envoltória linear em $C^\infty(X)$ das soluções exponenciais de $P(D)u = 0$ consiste de todas as soluções em $C^\infty(X)$.*

Demonstração Pelo Teorema de Hahn-Banach, Teorema 1.10.2, no nosso caso sendo

$$F = \{u \in C^\infty(X); P(D)u = 0\}$$

$$F_{exp} = \{u \in F; u(x) = f(x)e^{ix\cdot\,\zeta},\ \zeta \in \mathbb{C}^n,\ f \text{ polinômio}\}$$

e consideremos

$$V = (F,\ \tau_{c^\infty})$$

$$M = ec(F_{exp}).$$

Como o dual de C^∞ é $\mathcal{E}'$, se provarmos que:

(*) $v \in \mathcal{E}'$ com $v \cdot\ u = 0$ para $u \in M$

então $v \cdot\ \widetilde{u} = 0$ para $\widetilde{u} \in V$, então pelo Teorema de Hahn-Banach $V = \overline{ec(F_{exp})}$.

Para provarmos (*) basta mostrarmos que $\frac{\hat{f}(\zeta)}{P(-\zeta)}$ é uma função inteira, pois pelo Lema 2.4.3 com na demonstração de Teorema 2.4.4 $\frac{\hat{f}(\zeta)}{P(-\zeta)}$ satisfaz uma estimativa do tipo (2.4.2), assim pelo Teorema 2.4.2 existe $u \in \mathcal{E}'(X)$ tal que $v = P(-D)u$. Logo, se $\phi \in C^\infty(X)$ e $P(D)\phi = 0$ temos

$$\langle v,\ \phi\rangle = \langle P(-D)u,\ \phi\rangle = \langle u,\ P(D)\phi\rangle = 0,$$

ou seja v é ortogonal a todas soluções de $P(D)u = 0$ em C^∞. O fato que $\frac{\hat{f}(\zeta)}{P(-\zeta)}$ é uma função inteira segue do seguinte Lema:

Lema 2.4.7 *Se $v \in \mathcal{E}'$ é ortogonal a todas soluções exponenciais de $P(D)u = 0$, então $\frac{\hat{f}(\zeta)}{P(-\zeta)}$ é uma função inteira.*

Demonstração Tomemos θ um vetor fixo não nulo tal que $P(-t\theta - \zeta)$ não é independente de t para qualquer ζ, é suficiente tomar θ de forma que $P_m(\theta) \neq 0$, pois

$$P(-t\theta - \zeta) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(-t\theta - \zeta)^\alpha = (-1)^m P_m(\theta)t^m + \text{potências de } t.$$

Afirmação 1: $\frac{\hat{v}(t\theta+\zeta)}{P(-t\theta-\zeta)}$ é uma função inteira.

Demonstração De fato, para ζ fixo temos que $\hat{v}(t\theta+\zeta)$ é analítica em t, logo é suficiente provarmos que se $P(-t\theta-\zeta$, considerado como um polinômio em t, tem um zero de ordem k em $t=t_0$, então $\hat{v}(t\theta+\zeta)$ também tem um zero de ordem no mínimo k em $t=t_0$. Suponhamos que $P(-t\theta-\zeta)$ tem um zero de ordem k em $t=t_0$. Como

$$P(D)e^{-ix\cdot\ (t\theta+\zeta)} = \sum a_\alpha(-i)\partial_x(e^{-ix\cdot\ (t\theta+\zeta)}) =$$
$$= \sum a_\alpha(-1)(t\theta+\zeta)^\alpha e^{-ix\cdot\ (t\theta+\zeta)} = P(-t\theta-\zeta)e^{-ix\cdot\ (t\theta+\zeta)}.$$

Diferenciando a igualdade acima com respeito a t, temos

$$P(D)(\langle x,\ \theta\rangle^j e^{-ix\cdot\ (t_0\theta+\zeta)}) = 0, \quad j<k.$$

Como por hipótese v é ortogonal a todas as soluções exponenciais de $P(D)u=0$ segue que

$$v(\langle x,\ \theta\rangle^j e^{-ix\cdot\ (t_0\theta+\zeta)}) = 0, \quad j<k,$$

o que significa que $\widehat{v}(t\theta+\zeta) = v_x(e^{-ix\cdot\ (t\theta+\zeta)})$, tem um zero de ordem no mínimo k em $t=t_0$. Com P tem no máximo m zeros distintos, as possíveis singularidades de $\frac{\widehat{v}}{P}$ são removíveis. ■

Para ζ fixo podemos definir:

$$F(\zeta) = \lim_{t\to 0}\frac{\widehat{v}(t\theta+\zeta)}{P(-t\theta-\zeta)}.$$

Afirmação 2: F é inteira.

Demonstração De fato, para cada ζ_0 fixo escolhar tal que $P(-t\theta-\zeta_0)\neq 0$ se $|t|=r$. Então $P(-t\theta-\zeta)\neq 0$ se $|t|=r$ e ζ numa vizinhança de ζ_0. Pela Fórmula Integral de Cauchy

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r}\frac{\widehat{v}(t\theta+\zeta)}{P(-t\theta-\zeta)}\frac{dt}{t},$$

pois $g(t) = \frac{\widehat{v}(t\theta+\zeta)}{P(-t\theta-\zeta)}$ é uma função analítica de t. Logo F é analítica numa vizinhança de ζ_0. ■

Das afirmações 1 e 2 segue que $\frac{\widehat{f}(\zeta)}{P(-\zeta)}$ é uma função inteira. ■

O que conclui a demonstração do Teorema. ■

O próximo resultado é uma versão do Teorema de Paley-Wiener-Schwartz para suportes singulares que descreve a envoltória convexa do suporte singular.

Teorema 2.4.8 *Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e compacto. Então $SS(u) \subseteq K$ se, e somente se, existe $N > 0$ e uma seqüência de constantes c_m tal que, para $m = 1, 2, ...$ vale*

$$|\hat{u}(\zeta)| \leq c_m(1+|\zeta|)^N e^{H_K(Im\zeta)}, \quad |Im\zeta| \leq m\log(1+|\zeta|),\ \zeta \in \mathbb{C}^n. \quad (2.4.7)$$

Demonstração Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e K um subconjunto convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $SS(u) \subseteq K$. Para provar (2.4.7) note que podemos escrever u com uma soma $u = u_1 + u_2$ em que $S(u_1) \subset K_{\frac{1}{m}}$ e $u_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, sendo K_ϵ definido como na demonstração de Teorema 2.4.2. De fato, tome $\psi_{\epsilon,\ \frac{1}{m}} = \phi_\epsilon * \chi_{K_{\frac{1}{2m}}}$, em que ϕ_ϵ é como na demonstração do Teorema 2.4.2 e $\chi_{K_{\frac{1}{2m}}}$ é a função característica de $K_{\frac{1}{2m}}$. Para $\epsilon < \frac{1}{2m}$, $u_1 = \psi_{\epsilon,\ \frac{1}{m}} u$ e $u_2 = u - u_1$, tem as propriedades pedidas, pois $S(\psi_{\epsilon,\ \frac{1}{m}}) \subset K_{\frac{1}{m}}$ e se $\varphi \in C^\infty(K_{\frac{1}{m}})$ então

$$u_2(\varphi) = u(\varphi) - u(\psi_{\epsilon,\ \frac{1}{m}}\varphi) = u(\varphi) - u(\varphi) = 0,$$

ou seja $u_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Se u é de ordem $N-1$, u_1 também é de ordem $N-1$, pois

$$|\psi_{\epsilon,\ \frac{1}{m}} u(\phi)| = |u(\psi_{\epsilon,\ \frac{1}{m}}\phi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq N-1} |\partial^\alpha(\psi_{\epsilon,\ \frac{1}{m}}\phi)| \leq$$
$$\leq C \sum_{|\gamma|+|\beta|\leq N-1} c_1|\partial^\beta(\psi_{\epsilon,\ \frac{1}{m}})\partial^\gamma\phi| \leq c_2 \sum_{|\gamma|\leq N-1} |\partial^\gamma\phi|.$$

Logo pelo Teorema 2.4.2

$$|\widehat{u_1}(\zeta)| \leq c_m(1+|\zeta|)^{N-1}e^{H_K(Im\zeta)+\frac{|Im\zeta|}{m}},$$

portanto

$$|\widehat{u_1}(\zeta)| \leq c_m(1+|\zeta|)^N e^{H_K(Im\zeta)}, \quad se\ |Im\zeta| \leq m\log(1+|\zeta|).$$

Por (2.4.3) temos que $\widehat{u_2}(\zeta)e^{-H_K(Im\zeta)} \rightarrow 0$ quando $\zeta \rightarrow \infty$ em $\{\zeta;\ |Im\zeta| \leq m\log(1+|\zeta|)\}$. Com efeito,

$$|\widehat{u_2}(\zeta)| \leq C_{N_1+1}(1+|\zeta|)^{-N_1-1}e^{H_{S(u_2)}(Im\zeta)} =$$

$$= C_{N_1+1}(1+|\zeta|)^{-1}e^{\frac{-N_1}{m}m\log(1+|\zeta|)+H_{S(u_2)}(Im\zeta)} \leq$$

$$\leq C_{N_1+1}(1+|\zeta|)^{-1}e^{\frac{-N_1}{m}|Im\zeta|+|Im\zeta|H_{S(u_2)}(\frac{Im\zeta}{|Im\zeta|})} \leq$$

$$\leq C_{N_1+1}(1+|\zeta|)^{-1}e^{|Im\zeta|(\frac{-N_1}{m}+M)}$$

Para $N_1 \geq m(M+1)$, em que $M = \sup_{|x|=1} H_{S(u_2)}$, obtemos que $|\widehat{u_2}(\zeta)| \rightarrow 0$ quando $|\zeta| \rightarrow \infty$. Logo $|\widehat{u_2}\ e^{-H_K(Im\zeta)}| \leq |\widehat{u_2}(\zeta)| \rightarrow 0$ quando $|\zeta| \rightarrow \infty$. Assim se $|Im\zeta| \leq m\log(1+|\zeta|)$ então

$$|\widehat{u}(\zeta)| \leq |\widehat{u_1}(\zeta)| + |\widehat{u_2}(\zeta)| \leq (c_m + C_{N_2})(1+|\zeta|)^{N_2}e^{H_K(Im\zeta)},$$

em que $N_2 = \max\{N_1+1;\ N\}$.

($\Longleftarrow$)Suponhamos que (2.4.7) seja verdadeira, queremos provar que $SS(u) \subseteq K$. Para esta demonstração consideraremos a norma equivalente a euclidiana dada por $|\zeta|' = |\xi + i\eta|' = |\xi| + |\eta| = |\xi_1| + ... + |\xi_n| + |\eta_1| + ... + |\eta_n|$, no entanto continuaremos com a notação $|\ |' = |\ |$. Seja ϕ_ϵ como na prova do Teorema 2.4.2, note que $\widehat{u}(\zeta)\widehat{\phi_\epsilon}(\zeta)$ é rapidamente decrescente, com efeito da hipótese existe l e do Teorema 2.4.2 para todo N, temos que

$$|\widehat{u}(\zeta)\widehat{\phi_\epsilon}(\zeta)| \leq C_m(1+|\zeta|)^l e^{H_K(Im\zeta)}C_N(1+|\zeta|)^{-N}e^{\epsilon|Im\zeta|} \leq$$

$$\leq C_{m,\ N}(1+|\zeta|)^{l-N}e^{|Im\zeta|(M+\epsilon)} \leq C_{m,\ N}(1+|\zeta|)^{l-N+(M+\epsilon)m},$$

se $|Im\zeta| \leq m\log(1+|\zeta|)$, logo se $N > l + m(M+\epsilon)$ temos que

$$u * \phi_\epsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\ \xi} (\widehat{u * \phi_\epsilon})(\xi) d\xi.$$

Fixado $x_0 \notin K$ tome

$$u_1(x) = u(x - x_0),$$

note que u_1 satisfaz (2.4.7). De fato,

$$|\widehat{u_1}(\zeta)| = |\langle u_x(x - x_0,\ e^{-i\zeta\cdot\ x}\rangle| = |\int u(x-x_0)e^{-i\zeta\cdot\ x} dx| =$$
$$= |\int u(y) e^{-i\zeta\cdot\ (y+x_0)} dy| = |e^{-i\zeta\cdot\ x_0} \widehat{u}(\zeta)| = |\widehat{u}(\zeta)| e^{Im\zeta\cdot\ x_0} = (\diamondsuit),$$

e por (2.4.7)

$$(\diamondsuit) \leq c_m (1+|\zeta|)^N e^{H_K(Im\zeta) + Im\zeta\cdot\ x_0} = c_m (1+|\zeta|)^N e^{H_{K+\{x_0\}}(Im\zeta)}.$$

Logo x_0 pode ser assumido igual a zero.

Como $0 \notin K$ existe $\tilde{\eta}$ tal que $H_K(\tilde{\eta})\ - x \cdot \tilde{\eta} < -1$, para todo x numa vizinhança X_0 da origem. De fato, como K é convexo e compacto e $0 \notin K$ existe $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $H_K(\xi) < 0$ (pela construção feita antes da Definição 1.9.4). Da continuidade de H_K existe X_0 vizinhança da origem tal que $H_K(\xi) - x \cdot\ \ \xi < 0 \quad \forall x \in X_0$. Tome $\tilde{\eta} = \tau\xi, \quad \tau > |c|^{-1} + \delta$, em que $c = \sup_{x\in X_0}\{H_K(\xi) - x\cdot\ \xi\} < 0$ e $\delta > 0$, assim $H_K(\tilde{\eta}) - x\cdot\ \tilde{\eta} < -1\ \ \forall\, x \in X_0$. Agora considere uma rotação tal que

$$\tilde{\eta} \longrightarrow \eta = (\eta_1, 0, ..., 0).$$

Fixado $\eta = (\eta_1,\ 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ defina Γ_η com sendo

$$\mathbb{R}^n\ \ni \xi \longrightarrow \zeta(\xi) = \xi + i\ \eta \log(1 + |\xi|^2).$$

Temos que $d\zeta = F(\xi)d\xi$ em que $F(\xi)$ é o determinante da matriz jacobiana da transformação

$$T : \mathbb{R}^n \ni \xi \longrightarrow \zeta(\xi) \in \mathbb{C}^n.$$

Note que $F(\xi) = 1$, pois $J = I \ + i \ A$ em que I é a matriz identidade e $A = (a_{jk})$ com

$$a_{j1} = \frac{2\xi_j \ \eta_1}{1+|\xi|}, \quad a_{jk} = 0, \ k \neq 1.$$

Em Γ_η temos

$$|Im\zeta| = |\eta \log(1+|\xi|^2)| \leq 2|\eta| \log(1+|\xi|) \leq 2|\eta| \log(1+|\zeta|).$$

Queremos provar que

$$(u * \phi_\epsilon)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\Gamma_\eta} e^{ix\cdot\zeta} (\widehat{u * \phi_\epsilon})(\zeta) d\zeta. \tag{2.4.8}$$

Num primeiro caso consideremos em uma variável. Seja

$$I_A = \int_{-A}^{A} h(\xi) d\xi,$$

em que $h(\xi) = e^{ix\xi}(\widehat{u * \phi_\epsilon})(\xi)$. Da analiticidade de h temos, pela fórmula integral de Cauchy que

$$I_A = \int_0^{\eta \log(1+A^2)} h(A+it)dt \ + \int_{A+i\eta\log(1+A^2)}^{0} h(\xi + i\eta \log(1+\xi^2))d\zeta \ +$$

$$+ \int_0^{-A+i\eta\log(1+(-A)^2)} h(\xi + i\eta\log(1+\xi^2))d\zeta \ + \int_{\eta\log(1+(-A)^2)} h(-A+it)dt,$$

em que $\zeta = \xi + \ \eta, \ \xi, \eta \in \mathbb{R}, \ \eta > 0 \ fixo.$

Afirmação 1:

$$\int_0^{\eta\log(1+A^2)} h(A+it)dt, \quad \int_{\eta\log(1+A^2)}^{0} h(-A+it)dt \to 0 \ quando \ \ A \to \infty.$$

Demonstração

$$|\int_0^{\eta\log(1+A^2)} h(A+it)dt| = |\int_0^{\eta\log(1+A^2)} e^{ix(A+it)}(\widehat{u}\widehat{\phi_\epsilon})(A+it)dt| \leq$$

$$\leq \int_0^{\eta\log(1+A^2)} e^{-xt}|(\widehat{u}\widehat{\phi}_\epsilon)(A+it)dt| \leq$$

$$\leq C_{N_1}\int_0^{\eta\log(1+A^2)} e^{-xt}(1+|A+it|)^{-N_1}dt = (\clubsuit),$$

em que $N_1 = N - l - (M+\epsilon)m > 0$.

Se $x > 0$ então $e^{-xt} \leq 1$, assim

$$(\clubsuit) \leq C_{N_1}\int_0^{\eta\log(1+A^2)} (1+|A| \ +|t|)^{-N_1}dt =$$

$$C_{N_1}|\frac{1}{-N_1+1}(1+|A|+\log(1+A^2)^\eta)^{-N_1+1} - (1+|A|)^{-N_1+1}| \leq$$

$$\leq C'_{N_1}(1+|A|)^{-N_1+1} \to 0, \quad quando\ |A| \to \infty.$$

Se $x < 0$ como $f(y) = e^y$, $y \in \mathbb{R}$, é contínua e monótona e $t \in [0,\ \eta\log(1+A^2)] = K \subset\subset \mathbb{R}$ então $\sup_{t\in K} e^{-xt}$ é atingido na fronteira, logo $e^{-xt} \leq (1+A^2)^{-x\eta}$. Assim

$$(\clubsuit) \leq C_{N_1}(1+|A|)^{-2x\eta}\int_0^{\eta\log(1+A^2)} (1+|A+it|)^{-N_1}dt \leq C'_{N_1}(1+|A|)^{-2x\eta+1-N_1},$$

agora escolhemos N_1 de forma que $-2x\eta - N_1 \leq -1$, logo

$$\int_0^{\eta\log(1+A^2)} h(A+it)dt| \to 0, \quad quando\ |A| \to \infty.$$

Analogamente,

$$\int_{\eta\log(1+A^2)}^0 h(-A+it)dt \to 0, \quad quando\ |A| \to \infty.$$

$\blacksquare$

Portanto

$$(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}(\widehat{u*\phi_\epsilon})(\xi)d\xi = (2\pi)^{-1}\int_{\Gamma_\eta} e^{ix\zeta}(\widehat{u*\phi_\epsilon})(\zeta)d\zeta.$$

Para o caso geral seja $\eta = \eta_1 e_1$, considere $\eta_1 > 0$ fixo. Seja K o cubo n-dimensional de aresta $2A$, e seja $h(\zeta) = e^{ix\cdot\zeta}(\widehat{u*\phi_\epsilon})(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$, com $x,\ \xi \in \mathbb{R}^n$, por analiticidade temos que

$$\int h(\zeta)d\xi = \int d\xi_n \int ... \int h(\zeta)d\xi_1 =$$

$$= \int d\xi_n \int ... \int_0^{\eta_1 \log(1+|(A,\ \xi_2,...,\xi_n)|^2)} e^{ix\cdot\ (A+it,\ \xi_2,...,\xi_n)} (\widehat{u}\widehat{\phi_\epsilon})(A+it,\ \xi_2,...,\xi_n)dt+$$

$$+\int d\xi_n \int ... \int_{A+i\eta\log(1+|(A,\ \xi_2,...,\xi_n)|^2)}^{-A+i\eta\log(1+|(-A,\ \xi_2,...,\xi_n)|^2)} h(\zeta)d\zeta_1+$$

$$+\int d\xi_n \int ... \int_{\eta\log(1+|(-A,\ \xi_2,...,\xi_n)|^2)}^{0} e^{ix\cdot\ (-A+it,\ \xi_2,...,\xi_n)} (\widehat{u}\widehat{\phi_\epsilon})(-A+it,\ \xi_2,...,\xi_n)dt =$$

$= I_1 + I_2 + I_3$, respectivamente.

Afirmação 2:

$$I_1 = \int d\xi_n \int ... \int_0^{\eta_1 \log(1+|(A,\ \xi_2,...,\xi_n)|^2)} e^{ix\cdot\ (A+it,\ \xi_2,...,\xi_n)} (\widehat{u}\widehat{\phi_\epsilon})(A+it,\ \xi_2,...,\xi_n)dt$$

e

$$I_3 = \int d\xi_n \int ... \int_{\eta_1\log(1+|(-A,\ \xi_2,...,\xi_n)|^2)}^{0} e^{ix\cdot\ (-A+it,\ \xi_2,...,\xi_n)} (\widehat{u}\widehat{\phi_\epsilon})(-A+it,\ \xi_2,...,\xi_n)dt$$

tendem a zero quando $|A| \to \infty$.

Demonstração

$$|I_1| \le \int d\xi_n \int ... \int_0^{\eta_1 \log(1+|(A,\ \xi_2,...,\xi_n)|^2)} e^{-x_1 t} |(\widehat{u}\widehat{\phi_\epsilon})(A+it,\ \xi_2,...,\xi_n)|dt \le$$

$$\le C_{N_1} \int d\xi_n \int ... \int_0^{\eta_1 \log(1+|(A,\ \xi_2,...,\xi_n)|^2)} e^{-x_1 t} (1+|(A+it,\ \xi_2,...,\xi_n)|)^{-N_1} dt = (\spadesuit),$$

em que $N_1 = N - l - m(M+\epsilon) > 0$ *com* N arbitrário, se $x_1 > 0$ então $e^{-x_1 t} \le 1$, assim se $N_1 > n$

$$(\spadesuit) \le C_{N_1} \int d\xi_n \int ... \int_0^{\eta_1 \log(1+|(A,\ \xi_2,...,\xi_n)|^2)} (1+|A|+|\xi_2|+...+|\xi_n|+t)^{-N_1} dt =$$

$$= \frac{C_{N_1}}{N_1 - 1} \int d\xi_n \int ... \int d\xi_2 [(1+|A|+|\xi_2|+...+|\xi_n|+$$

$$+\eta_1 \log(1+|(A,\ \xi_2,...,\xi_n)|^2))^{-N_1+1} - (1+|A|+|\xi_2|+...+|\xi_n|)^{-N_1+1}] \le$$

$$\le C'_{N_1} \int d\xi_n \int ... \int (1+|A|+|\xi_n|+...+|\xi_3|+|\xi_2|)^{-N_1+1} d\xi_2 =$$

$$= \frac{C'_{N_1}}{N_1 - 2} \int d\xi \int ... \int (1+|A|+|\xi_2|+|\xi_n|+...+|\xi_3|)^{-N_1+2} d\xi_3 = ... =$$

$$= \frac{C'_{N_1}}{(N_1-2)...(N_1-n)}(1+|A|+|\xi_2|+...+|\xi_n|)^{-N_1+n} \to 0,$$

quando $|A| \to \infty$ se $N_1 \geq n+1$. Se $x_1 < 0$ da continuidade e monotocidade da exponencial e como $t \in [0,\ \eta \log(1+|(A,\ \xi_2,...,\xi_n)|^2)]$ então $e^{-x_1 t} \leq (1+|(A,\ \xi_2,...,\xi_n)|^2)^{-x_1\eta_1}$ logo

$$(\spadesuit) \leq C_{N_1} \int d\xi_n \int ... \int d\xi_2 (1+|A|+|\xi_2|+...+|\xi_n|)^{-2x_1\eta_1}$$

$$\int (1+|A|+|\xi_2|+...+|\xi_n|+t)^{-N_1} dt \leq$$

$$\leq \frac{C_{N_1}}{N_1-1} \int d\xi_n \int ... \int (1+|A|+|\xi_n|+...+|\xi_2|)^{-2x_1\eta_1+1-N_1} d\xi_2 = (\spadesuit\spadesuit),$$

escolhendo N_1 tal que $-2x_1\eta_1 - N_1 < -n+1,\ n > 1$ assim

$$(\spadesuit\spadesuit) = \frac{C_{N_1}}{(N_1-1)...(N_1-n)}(1+|A|+|\xi_2|+...+|\xi_n|)^{-2x_1\eta_1+n-N_1} \to 0,$$

quando $|A| \to \infty$.

Analogamente $|I_3| \to 0$ quando $|A| \to \infty$. ■

Portanto

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\ \xi} (\widehat{u * \phi_\epsilon})(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n} \int_{\Gamma_\eta} e^{ix\cdot\ \zeta} (\widehat{u * \phi_\epsilon})(\zeta) d\zeta.$$

Em Γ_η temos:

$$|e^{ix\cdot\ \zeta} \widehat{u}(\zeta)| \leq e^{-x\cdot Im\zeta} c_\eta (1+|\zeta|)^N e^{H_K(Im\zeta)},\quad |Im\zeta| < 2|\eta| \log(1+|\zeta|),$$

como $Im\zeta = \eta \log(1+|\xi|^2)$ então

$$H_K(Im\zeta) - x\cdot\ Im\zeta = \log(1+|\xi|^2)[H_K(\eta) - x\cdot\ \eta] = \log(1+|\xi|^2)^{H_K(\eta)-x\cdot\ \eta},$$

portando

$$|e^{ix\cdot\ \zeta} \widehat{u}(\zeta)| \leq C_\eta (1+|\zeta|)^N (1+|\xi|^2)^{H_K(\eta)-x\cdot\ \eta}. \tag{2.4.9}$$

Se substituirmos η por $t\eta$ e $2t > n + N$ segue da última desigualdade que a integral em (2.4.8) é uniformemente e absolutamente convergente para $x \in X_0$, mesmo se o fator decrescente $\widehat{\phi}_\epsilon$ é omitido, pois

$$|(2\pi)^{-n} \int_{\Gamma_\eta} e^{ix\cdot\ \zeta} \widehat{u}(\zeta) d\zeta| \leq (2\pi)^{-n} \int_{\Gamma_\eta} C_\eta (1 + |\xi|)^{2(H_K(\eta) - x\cdot\ \eta)} (1 + |\zeta|)^N d\zeta,$$

se $x \in X_0$ e substituindo η por $t\eta$ temos

$$\begin{aligned} |(2\pi)^{-n} \int_{\Gamma_\eta} e^{ix\cdot\ \zeta} \widehat{u}(\zeta) d\zeta| &\leq (2\pi)^{-n} \int_{\Gamma_{t\eta}} C_{t\eta} (1 + |\xi|)^{-2t} (1 + |\zeta|)^N d\zeta \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} C_{t\eta} (1 + |\xi|)^{-2t} [1 + |\xi| + 2|t\eta| \log(1 + |\xi|)]^N F(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

como $1+|\xi|+2t|\eta| \log(1+|\xi|) \leq 1+|\xi|+2t|\eta|(1+|\xi|) \leq C_1(1+|\xi|)$, $C_1 \geq 1+2t|\eta|$ segue que

$$\begin{aligned} |(2\pi)^{-n} \int_{\Gamma_\eta} e^{ix\cdot\ \zeta} \widehat{u}(\zeta) d\zeta| &\leq (2\pi)^{-n} C_{t\eta} C_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{-2t+N} F(\xi) d\xi \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n} C_{t\eta} C_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{-n-\epsilon} F(\xi) d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Como $\widehat{\phi}_\epsilon(\zeta) = \widehat{\phi}(\epsilon\zeta) \to 1$ limitadamente quando $\epsilon \to 0$ concluímos que a restrição de u a X_0 é a função

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\Gamma_{t\eta}} e^{ix\cdot\eta} \widehat{u}(\zeta) d\zeta, \quad x \in X_0 \tag{2.4.10}$$

se $2t > n + N$.

Se $2t > n + N + j$ a integral (2.4.10) é absolutamente e uniformemente convergente para $x \in X_0$ após diferenciarmos j vezes sob o sinal de integração.

Portanto $u \in C^j(X_0)$ para todo j, logo $SS(u) \subseteq K$. ∎

Teorema 2.4.9 *Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ então*

$$ec(SS(u)) = ec(SS(P(D)u)). \tag{2.4.11}$$

Demonstração Seja $P(D)u = f$. Como $SS(f) \subset SS(u)$então $ec(SS(f)) \subseteq ec(SS(u))$. Seja $K = ec(SS(f)) \subset\subset \mathbb{R}^n$. Como $SS(f) \subset K$ temos que (2.4.7) é válida para $\widehat{f}$. Pelo Teorema 2.4.4 $\frac{\widehat{f}}{P}$ é inteira e pelo Lema 2.4.3 como na demonstração do Teorema 2.4.4 a estimativa (2.4.7) vale para $\widehat{u}$, assim pelo Teorema 2.4.8 $SS(u) \subseteq K$, logo $ec(SS(u)) \subseteq ec(SS(f))$. ■

Observação: No Teorema 2.4.9 podemos substituir $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ por $S(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$, isto é, $u \in \mathcal{D}'$ e $S(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$. De fato tome $\varphi \in C_c^\infty$; $\varphi \equiv 1$ numa vizinhança de $S(u)$ então pela Regra de Leibniz

$$P(D)(\varphi u) = \psi + \varphi P(D)u,$$

em que $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Segue do Teorema 2.4.2 que a transformada de Laplace define uma distribuição em $\mathbb{R}^n$. Para motivar a definição recordemos que

$$\langle u,\ \phi\rangle = (2\pi)^{-n}\langle \widehat{u}_x,\ \widehat{\phi}(-x)\rangle, \quad se\ u \in \mathcal{S}'\ e\ \phi \in \mathcal{S}.$$

Dada uma medida $d\mu$ em $\mathbb{C}^n$ tentaremos definir $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ por uma fórmula similar

$$u(\phi) = (2\pi)^{-n}\int \widehat{\phi}(-\zeta)d\mu(\zeta), \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.4.12}$$

Afirmação: Esta definição é válida se para algum $m > 0,\ C,\ N$ temos

$$|Im\zeta| \leq m\log(1+|\zeta|) + C, \quad \zeta \in S(d\mu) \tag{2.4.13}$$

$$\int (1+|\zeta|)^{-N}|d\mu(\zeta)| < \infty. \tag{2.4.14}$$

Demonstração Se $\phi \in C_c^\infty(\{x; |x| \leq R\})$ temos de (2.4.1)

$$\zeta_j^k\widehat{\phi}(\zeta)| = |\widehat{D_j^k\phi}| \leq \left\|D_j^k\right\|_1 e^{R|Im\zeta|} \leq C_R \sup|D_j^k\phi|e^{R|Im\zeta|} \quad (A)$$

e

$$|\widehat{\phi}(\zeta)| \leq \|\phi\|_1 e^{R|Im\zeta|} \leq C_R \sup|\phi(\zeta)|e^{R|Im\zeta|} \quad (B)$$

Somando (A) e (B) para $j = 1, 2, ..., n$ obtemos

$$(1 + |\zeta_1|^k + ... + |\zeta_n|^k)|\widehat{\phi}(\zeta)| \leq C_R e^{R|Im\zeta|}[\sum_{j=1}^{n} \sup |D_j^k \phi(\zeta) + \sup |\phi(\zeta)|],$$

mas

$$1 + |\zeta_1|^k + ... + |\zeta_n|^k \geq C_k(1 + |\zeta|)^k$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} \sup |D_j^k \phi(\zeta) + \sup |\phi(\zeta)| \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha \phi|,$$

assim

$$(1 + |\zeta|)^k |\widehat{\phi}(\zeta)| \leq C_{R,\ k} e^{R|Im\zeta|} \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha \phi|,$$

para N fixo obtemos

$$(1 + |\zeta|)^{N+k} |\widehat{\phi}(\zeta)| \leq C_{R,\ k} e^{R|Im\zeta|} \sum_{|\alpha| \leq N+k} \sup |D^\alpha \phi|.$$

Se $k > Rm$ a exponencial pode ser estimada por $(1 + |\zeta|)^k$ em $S(d\mu)$, pois por (2.4.13) temos que

$$e^{R|Im\zeta|} \leq e^{Rc} e^{Rm \log(1+|\zeta|)} = e^{Rc}(1 + |\zeta|)^{Rm} \leq e^{Rc}(1 + |\zeta|)^{k+\epsilon}, \quad \epsilon > 0.$$

Portanto a integral (2.4.12) converge e

$$|u(\phi)| \leq C_R \sum_{|\alpha| \leq N+k} \sup |D^\alpha \phi|, \ \phi \in C_c^\infty(\{x; |x| \leq R\}).$$

De fato,

$$\begin{aligned} |\int \widehat{\phi}(-\zeta) d\mu(\zeta)| \leq \int |\widehat{\phi}(-\zeta)| d\mu(\zeta) \leq \\ \leq C_{R,\ k} \int (1 + |\zeta|)^{-N-k} e^{R|Im(-\zeta)|} \sum_{|\alpha| \leq N+k} \sup |D^\alpha \phi| d\mu(\zeta) \leq \\ \leq \widetilde{C}_R \sum_{|\alpha| \leq N+k} \sup |D^\alpha \phi| \int (1 + |\zeta|)^{-N} d\mu(\zeta) < \infty \end{aligned}$$

a última desigualdade segue de (2.4.14). E daí

$$|u(\phi)| = (2\pi)^{-n}|\int \widehat{\phi}(-\zeta)d\mu(\zeta)| \leq C'_R \sum_{|\alpha|\leq N+k} \sup|D^\alpha \phi|$$

Assim (2.4.12) define uma distribuição a qual é de ordem $\leq N+Rm+1$ quando $|x|<R$. Ela é de ordem N se $|Im\zeta|$ é limitado em $S(d\mu)$. ■

Se P é um polinômio, então

$$\langle P(D)u,\ \phi\rangle = \langle u,\ P(-D)\phi\rangle$$

e a transformada de Fourier-Laplace de $P(-D)\phi$ é $P(-\zeta)\widehat{\phi}(\zeta)$. Portanto de (2.4.12) segue que

$$\langle P(D)u,\ \phi\rangle = (2\pi)^{-n}\int \widehat{\phi}(\zeta)P(\zeta)d\mu(\zeta). \tag{2.4.15}$$

Como aplicação mostraremos que todo operador diferencial com coeficientes constantes tem uma solução fundamental. Para tal deveremos escolher uma medida $d\mu$ tal que a integral no lado direito de (2.4.15) seja igual a integral de $\widehat{\phi}$ sobre $\mathbb{R}^n$.

Primeiramente demonstraremos dois Lemas os quais serão usados para construir a medida $d\mu$.

Lema 2.4.10 *Se $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ e*

$$\Phi(e^{i\theta}\zeta) = \Phi(\zeta), \quad \theta\in\mathbb{R}, \quad \int \Phi(\zeta)d\lambda(\zeta) = 1, \tag{2.4.16}$$

em que $d\lambda$ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{C}^n$, então

$$\int F(\zeta)\Phi(\zeta)d\lambda(\zeta) = F(0) \tag{2.4.17}$$

para qualquer função inteira F.

Demonstração Seja $F_1(z) = F(z\zeta),\ \ z \in \mathbb{C}$ pela fórmula integral de Cauchy temos que

$$F_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F_1(z)}{z}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(re^{i\theta})d\theta$$

logo $2\pi F(0) = \int F(\zeta e^{i\theta}d\theta$. Multiplicando por $\Phi(\zeta)$ e integrando, obtemos

$$2\pi F(0)\Phi(\zeta) = \int F(\zeta e^{i\theta})\Phi(\zeta)d\theta$$

$$2\pi F(0)\int \Phi(\zeta)d\lambda(\zeta) = \int_0^{2\pi}\int F(\zeta e^{i\theta})\Phi(\zeta)d\lambda(\zeta)d\theta$$

$$2\pi F(0) = \int\int_0^{2\pi} F(\widetilde{\zeta})\Phi(\widetilde{\zeta}e^{-i\theta})|J|d\theta d\lambda(\widetilde{\zeta})$$

$$2\pi F(0) = \int\int_0^{2\pi} F(\widetilde{\zeta})\Phi(\widetilde{\zeta})d\theta d\lambda(\widetilde{\zeta})$$

$$F(0) = \int F(\widetilde{\zeta})\Phi(\widetilde{\zeta})d\lambda(\widetilde{\zeta})$$

portanto $\int F(\zeta)\Phi(\zeta)d\lambda(\zeta) = F(0)$. ∎

Para um número inteiro positivo fixo m denotamos por $Pol(m)$ o espaço vetorial complexo dos polinômios de grau menor ou igual m em n variáveis e por $Pol^0(m)$ o espaço com a origem removida. Uma norma em $Pol(m)$ é dada por $Q \longrightarrow \widetilde{Q}(0)$ em que

$$\widetilde{Q}(\xi) = (\sum_\alpha |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4.18}$$

Esta função de ξ é limitada por baixo se $Q \not\equiv 0$, pois alguma derivada de Q é uma constante não nula.

Lema 2.4.11 *Para toda bola $Z \subset \mathbb{C}^n$ com centro em zero podemos encontrar um função não negativa $\Phi \in C^\infty(Pol^0(m)X\mathbb{C}^n)$ tal que*

(i) $\Phi(Q,\ \zeta)$ é absolutamente homogênea de grau zero com respeito a Q.

(ii) Para Q fixo $\Phi(Q,\ \zeta)$ satisfaz (2.4.16) e se anula quando $\zeta \notin Z$.

(iii) Existe uma constante c tal que

$$\widetilde{Q}(0) \le c|Q(\zeta)|, \quad se \ \ \Phi(Q,\ \zeta) \neq 0. \tag{2.4.19}$$

Se F é analítica em Z e Q é um polinômio de grau menor ou igual que m segue que

$$\widetilde{Q}(0)|F(0) \leq C_Z \int_Z |F(\zeta)Q(\zeta)|d\lambda(\zeta).$$

Demonstração Dado $Z = B_{r_0}(0) \subset \mathbb{C}^n$. Seja $Q_0 \in Pol^0(m)$ fixo, existe $w \in \mathbb{C}^n$ tal que $Q_0(w) \neq 0$. Daí escolha $r > 0$ tal que $rw \in Z$ e $Q_0(zw) \neq 0$ quando $|z| = r$, agora considere U vizinhança de $zw,\ |z| = r$ tal que $U \subset Z\backslash\{0\}$, tome $0 < \epsilon \leq d(U,\ zw),\ |z| = r$ e além disso *epsilon* seja tal que $Q_0 \neq 0$ no toro sólido fechado, T em torno de $zw,\ \ |z| = r$ de raio ϵ, note que $T \subset U$. Seja $\psi \geq 0$ com $S(\psi) \subset T$ e $\int \psi = 1$, então

$$\Phi_{Q_0}(\zeta) = \int \frac{\psi(\zeta e^{i\theta})}{2\pi} d\theta$$

tem as propriedades pedidas. De fato, (ii) se $\zeta \notin Z$ então $\psi(\zeta) = 0$ logo $S(\Phi_{Q_0}) \subset Z$,

$$\Phi_{Q_0}(\zeta e^{i\theta'}) = \int \frac{\psi(\zeta e^{i(\theta'+\theta)})}{2\pi} d\theta = \int \frac{\psi(\zeta e^{i\theta''})}{2\pi} d\theta'' = \Phi_{Q_0}(\zeta)$$

e

$$\int \Phi_{Q_0}(\zeta)d\lambda(\zeta) = \int_0^{2\pi} \int \frac{\psi(\zeta e^{i\theta})}{2\pi} d\lambda(\zeta)d\theta = \int_0^{2\pi} \int \frac{\psi(\widetilde{\zeta})}{2\pi} d\lambda(\widetilde{\zeta})d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1.$$

(iii) Seja $I = \inf_T |Q(\xi)|$ da continuidade de Q_0 e da compacidade de T segue que $I > 0$, tome $c = \frac{\widetilde{Q}_0(0)}{I}$ logo $\widetilde{Q}_0(0) \leq c|Q_0(\zeta)|$, se $\Phi_{Q_0}(\zeta) \neq 0$.

Para $Q \in Pol^0(m),\ \ Q = \lambda Q_0,\ \lambda \in \mathbb{C}$ tal que aQ esteja numa vizinhança de Q_0 para algum $a \in \mathbb{C}$, esta mesma Φ_{Q_0} satisfaz as propriedades do Teorema.

Dado $Q \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, em que $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ é o espaço projetivo de $Pol^0(m)$, seja V_Q vizinhança de Q. Como $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ é compacto existe $\{V_{Q_j}\}_{j=1}^N$ cobertura finita de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ obtida por essas vizinhanças, associado a esta cobertura tome $\varphi_{Q_j} \in C^\infty(Pol^0(m))$, tal que $S(\varphi_{Q_j}) \subset V_{Q_j}$ e $\sum_j \varphi_{Q_j} = 1$, como V_{Q_j} é limitado temos que $S(\varphi_{Q_j})$ é compacto.

Agora, para $Q \in Pol^0(m)$ definimos

$$\Phi(Q,\ \zeta) = \sum_j \varphi_{Q_j}(Q)\Phi_{Q_j}(\zeta).$$

Por construção esta Φ satisfaz o Teorema.

Se F é analítica em Z e Q é um polinômio de grau menor ou igual que m de (2.4.17) temos que

$$\int F(\zeta)\Phi(Q,\ \zeta)d\lambda(\zeta) = F(0),$$

logo

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}(0)|F(0)| = |\int F(\zeta)\Phi(Q,\ \zeta)\widetilde{Q}(0)d\lambda(\zeta) \leq \\
\leq c\int_Z |F(\zeta)Q(\zeta)||\Phi(Q,\ \zeta)|d\lambda(\zeta) \leq \\
\leq c \sup|\Phi(Q,\ \zeta)| \int_Z |F(\zeta)Q(\zeta)|d\lambda(\zeta) = \\
= C_Z \int_Z |F(\zeta)Q(\zeta)|d\lambda(\zeta).
\end{aligned}$$

■

TEOREMA 2.4.12 *Para todo polinômio $P \not\equiv 0$ em n variáveis podemos encontrar uma distribuição $E \in \mathcal{D}'_F(\mathbb{R}^n)$ tal que $P(D)E = \delta$.*

DEMONSTRAÇÃO Seja $P_\xi(\zeta) = P(\xi + \zeta)$ e seja

$$E(\phi) = (2\pi)^{-n}\int d\xi \int \frac{\widehat{\phi}(-\xi-\zeta)}{P(\xi+\zeta)}\Phi(P_\xi,\ \zeta)d\lambda(\zeta). \tag{2.4.20}$$

(2.4.20) está na forma (2.4.12). De fato,

$$\begin{aligned}
\int d\xi \int \frac{\widehat{\phi}(\xi-\zeta)}{P(\xi+\zeta)}\Phi(P_\xi,\ \zeta)d\lambda\zeta = \int d\theta \int \frac{\widehat{\phi}(-\eta)}{P(\eta)}\Phi(P_\theta,\ \eta-\theta)d\lambda(\eta) = \\
= \int \widehat{\phi}(-\eta)\frac{1}{P(\eta)}\int \Phi(P_\theta,\ \eta-\theta)d\lambda(\eta).
\end{aligned}$$

Assim $d\mu(\eta) = \frac{1}{P(\eta)} \int \Phi(P_\theta,\ \eta - \theta) d\lambda(\eta)$ e (2.4.20) está na forma (2.4.12). Além disso,

$$\begin{aligned}\int (1+|\zeta|)^{-N} |d\mu(\zeta)| \leq \int d\xi \int (1+|\xi+\zeta|)^{-N} \frac{\Phi(P_\xi,\ \zeta)}{|P_\xi(\zeta)|} d\lambda(\zeta) \leq \\ \leq c \sup \Phi \int d\xi \int (1+|\xi+\zeta|)^{-N} \frac{1}{\widetilde{P}(\xi)} d\lambda(\zeta) \leq \\ \leq c' \int_Z \int (1+|\xi+\zeta|)^{-N} d\xi d\lambda(\zeta) < \infty, \quad seN > n.\end{aligned}$$

Como $Im\zeta$ é limitado em $S(d\mu)$, então a distribuição E é de ordem no máximo $n+1$.

De (2.4.15) e (2.4.17), obtemos

$$\begin{aligned}\langle P(D)E,\ \phi \rangle = (2\pi)^{-n} \int \widetilde{\phi}(-\zeta - \xi) P(\zeta + \xi) d\mu(\zeta + \xi) = \\ = (2\pi)^{-n} \int d\xi \int \widetilde{\phi}(-\zeta - \xi) P(\zeta + \xi) \frac{\Phi(P_\xi,\ \zeta)}{P(\zeta + \xi)} d\lambda(\zeta) = \\ = (2\pi)^{-n} \int d\xi \int \widetilde{\phi}(-\zeta - \xi) \Phi(P_\xi,\ \zeta) d\lambda(\zeta) = \\ = (2\pi)^{-n} \int \widetilde{\phi}(-\xi) d\xi = \phi(0) = \langle \delta,\ \phi \rangle.\end{aligned}$$

Portanto E é solução fundamental de $P(D)$ e $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. ∎

Capítulo 3

Análise Espectral de Singularidades

3.1 Introdução

Como conseqüência do capítulo anterior observaremos que uma distribuição u de suporte compacto é suave se, e somente se, a sua transformada de Fourier $\widehat{u}$ é rapidamente decrescente. Se u não é suave podemos usar o conjunto das direções em que $\widehat{u}$ não é rapidamente decrescente para descrever melhor as singularidades de u. Esta análise revelará características locais invariantes. Para uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(X)$, em que X é um aberto de $\mathbb{R}^n$, definimos um conjunto

$$WF(u) \subset T^*(X) \backslash \{0\}$$

com projeção em X igual à $SS(u)$, o qual é cônico com respeito a multiplicação por escalares positivos nas fibras de $T^*(X)$, em que $T^*(X)$ é o dual do espaço tangente $T(X)$, chamado espaço cotangente. Tal conjunto será denominado de conjunto frente de ondas de u, por analogia com a clássica construção de Huyghens de uma onda se propagando. Nesta construção assumimos que a localização e orientação do plano tangente de uma onda é conhecido no instante de tempo e concluímos que após um instante de tempo ele pode ser transladado na direção normal com a velocidade da luz. Assim as informações são precisamente refletidas no fibrado cotangente.

Na seção 3.2 apresentaremos definições básicas do conjunto frente de onda e alguns exemplos importantes. Na seção 3.3 reconsideraremos algumas das operações definidas nos capítulos 1 e 2 de um novo ponto de vista. Assim obteremos a extensão das definições de composição e multiplicação de distribuições, bem como informações mais precisas das singularidades dos resultados destas operações. Na seção 3.4 provaremos que o conjunto frente de ondas está contido na união do conjunto característico do operador e do conjunto frente de onda de Pu, isto é, $WF(u) \subset Car(P) \cup WF(Pu)$. Além disso, serão apresentados as demonstrações do Teorema 8.3.3' e do Teorema 8.3.8 de [H2], que descrevem importantes aspectos das soluções singulares de operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes de tipo principal real.

3.2 O Conjunto Frente de Onda

Se $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ podemos decidir se v está em C_c^∞ examinando o comportamento da transformada de Fourier $\widehat{v}$ no infinito. De fato, se $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então

$$|\widehat{v}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad N = 1, 2, ..., \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2.1}$$

pela Proposição 2.2.5.($v \in \mathcal{S} \Longrightarrow \widehat{v} \in \mathcal{S}$) Reciprocamente, se (3.2.1) é válida então $v \in C_c^\infty$ pela fórmula da transformada de Fourier inversa. Com efeito, temos

$$|v(x)| \leq (2\pi)^{-n} \int |\widehat{v}(\xi)| d\xi \leq (2\pi)^{-n} \int C_N (1 + |\xi|)^{-N} d\xi,$$

logo $v \in C^0$. Derivando v obtemos

$$D^{(j)}(v(x)) = (2\pi)^{-n} \int (-1)^j \xi^j e^{ix\cdot\,\xi} \widehat{v} d\xi$$

daí $D^{(j)}v \in C^0$ para todo j, portanto $v \in C_c^\infty$.

Para $v \in \mathcal{E}'$ definimos $SS(v)$ como o conjunto de pontos que não tem vizinhança em que v seja C^∞. Similarmente podemos introduzir o cone $\Sigma(v)$ de todos os pontos $\eta \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ que não têm vizinhança cônica V tal que (3.2.1) vale para todo $\xi \in V$. É claro que $\Sigma(v)$ é um cone fechado em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, e temos que $\Sigma(v) = \emptyset$ se, e somente se, $v \in C_c^\infty$.

Enquanto $SS(v)$ descreve somente a localização das singularidades, o cone $\Sigma(v)$ descreve somente as direções das maiores freqüências das singularidades. Poderemos combinar estas duas informações usando o próximo Lema.

Lema 3.2.1 *Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\Sigma(\phi v) \subset \Sigma(v). \tag{3.2.2}$$

Demonstração A transformada de Fourier de $u = \phi v$ é a convolução

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\phi}(\eta) \widehat{v}(\xi - \eta) d\eta$$

em que $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}$. Pelo Teorema 2.4.2 temos, para algum $M \geq 0$

$$|\widehat{v}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^M.$$

Seja $0 < c < 1$ e separe a integral nas partes em que $|\eta| < c|\xi|$ e $|\eta| \geq c|\xi|$. No segundo caso temos que $|\xi - \eta| \leq (1 + c^{-1})|\eta|$. Assim

$$(2\pi)^n |\widehat{u}(\xi)| \leq$$

$$\leq \sup_{|\eta - \xi| < c|\xi|} |\widehat{v}(\eta)| \left\| \widehat{\phi} \right\|_1 + C \int_{|\eta| > c|\xi|} |\widehat{\phi}(\eta)| (1 + c^{-1})^M (1 + |\eta|)^M d\eta. \tag{3.2.3}$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
|(2\pi)^n\widehat{u}(\xi)| &= \left|\int_{|\eta|<c|\xi|}\widehat{\phi}(\eta)\widehat{v}(\xi-\eta)d\eta \ + \int_{|\eta|>c|\xi|}\widehat{\phi}(\eta)\widehat{v}(\xi-\eta)d\eta\right| \leq \\
&\leq \int_{|\xi-\eta'|<c|\xi|}|\widehat{\phi}(\xi-\eta')\widehat{v}(\eta')|d\eta' \ + \int_{|\eta|>c|\xi|}|\widehat{\phi}(\eta)\widehat{v}(\xi-\eta)|d\eta \leq \\
&\leq \sup_{|\xi-\eta'|<c|\xi|}|\widehat{v}(\eta')|\left\|\widehat{\phi}\right\|_1 \ + C\int_{|\eta|>c|\xi|}|\widehat{\phi}(\eta)|(1+|\xi-\eta|)^M d\eta \leq \\
&\leq \sup_{|\xi-\eta'|<c|\xi|}|\widehat{v}(\eta')|\left\|\widehat{\phi}\right\|_1 \ + C\int_{|\eta|>c|\xi|}|\widehat{\phi}(\eta)|(1+c^{-1})^M(1+|\eta|)^M d\eta
\end{aligned}
$$

Se Γ é um cone aberto em que (3.2.1) vale e Γ_1 é um cone fechado contido em $\Gamma\cup\{0\}$ podemos escolher c tal que $\eta\in\Gamma$ se $\xi\in\Gamma_1$ e $|\xi-\eta|<v|\xi|$. De fato, Se $|\xi|=1$ tome $c=d(\Gamma_1\cap S^{n-1},\ \Gamma^c)>0$ então $|\xi-\eta|<c$ implica $\eta\in\Gamma$. Se $|\xi|\neq 1$ considere $\tilde{\xi}=\frac{\xi}{|\xi|}\in\Gamma_1$, note que $\xi\neq 0$, logo para todo $\tilde{\eta}$ satisfazendo $|\tilde{\eta}-\tilde{\xi}|<c\ \ \tilde{\eta}\in\Gamma$ agora tome $\tilde{\eta}=\frac{\eta}{|\xi|}$ daí $|\eta-\xi|<c|\xi|$ implica $\eta\in\Gamma$.
Como$|\eta|\geq(1-c)|\xi|$ segue de (3.2.3) para $N\geq 0$ que

$$
\begin{aligned}
\sup_{\Gamma_1}(1+|\xi|)^N|\widehat{u}(\xi)| \leq (1-c)^{-N}\sup_{\Gamma}|\widehat{v}(\eta)|(1+|\eta|)^N\left\|\widehat{\phi}\right\|_1 + \\
+C(1+c^{-1})^{N+M}\int|\widehat{\phi}(\eta)|(1+|\eta|)^{N+M}d\eta, \qquad (3.2.4)
\end{aligned}
$$

pois de (3.2.3) temos

$$
\begin{aligned}
\sup_{\Gamma_1}(1+|\xi|)^N|\widehat{u}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n}\sup_{\Gamma_1}(1+|\xi|)^N[\sup_{|\eta-\xi|<c|\xi|}|\widehat{v}(\eta)|\left\|\widehat{\phi}\right\|_1 + \\
+C\int|\widehat{\phi}(\eta)|(1+c^{-1})^M(1+|\eta|)^M d\eta]
\end{aligned}
$$

daí para obtermos (3.2.4) basta notar que se $\xi\in\Gamma_1$ e $|\eta|\geq(1-c)|\xi|$ então $\eta\in\Gamma$ e $(1+|\xi|)^N \leq \left(\frac{1+|\eta|}{1-c}\right)^N$ e $|\eta|\geq c|\xi|$ implica $[(1+c^{-1})(1+|\eta|)]^N$.
Finalmente de (3.2.4) e (3.2.1) segue que $\widehat{u}$ é rapidamente decrescente em Γ_1, pois se $\xi\in\Gamma_1$

$$
|\widehat{u}(\xi)| \leq (1+|\xi|)^{-N}C_N\left\|\widehat{\phi}\right\|_1 + C'_N(1+c^{-1})^{N+M}m(S(\phi)) \leq \tilde{C}_N(1+|\xi|)^{-N}.
$$

Portanto $\Sigma(v)^c \subset \Sigma(\phi v)^c$. ∎

Se X é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}'(X)$, para $x \in X$ definimos

$$\Sigma_x(u) = \cap_\phi \Sigma(\phi u), \quad \phi \in C_c^\infty(X),\ \phi(x) \neq 0. \tag{3.2.5}$$

Afirmação: Se X é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}'(X)$ então

$$\Sigma(\phi u) \to \Sigma_x(u) \quad se \quad \phi \in C_c^\infty(X),\ \phi(x) \neq 0 \quad e \quad S(\phi) \to \{x\}. \tag{3.2.6}$$

Demonstração Temos que

$$\Sigma_x(u) \cap S^{n-1} = \cap_{C_c^\infty \ni \varphi(x) \neq 0} (\Sigma(\varphi u) \cap S^{n-1}).$$

Dado V um cone aberto contendo $\Sigma_x(u)$, consideremos $W = V^c \cap S^{n-1}$ o qual é compacto. Assim

$$W \subset (\Sigma_x(u)^c \cap S^{n-1}) = \cup_{C_c^\infty(X) \ni \varphi(x) \neq 0} (\Sigma(\varphi u)^c \cap S^{n-1}) \subset$$

$$\subset \cup_{C_c^\infty(X) \ni \varphi(x) \neq 0} (\Sigma(\varphi u) \cap S^{n-1})^c,$$

como $(\Sigma(\varphi u) \cap S^{n-1})^c$ é um conjunto aberto, temos que $\{(\Sigma(\varphi u) \cap S^{n-1})^c\}$ é uma cobertura aberta de $V^c \cap S^{n-1}$, compacto, logo existe subcobertura finita, daí

$$W \subset \cup_{j=1,\ \phi_j(x) \neq 0}^k (\Sigma(\phi_j u) \cap S^{n-1})^c,$$

ou seja podemos encontrar ϕ_j, tal que $\phi_j(x) \neq 0,\ j = 1, ..., k$ e $\cap_{j=1}^k \Sigma(\phi_j u) \subset V$. Quando $\phi \in C_c^\infty(X)$ e $S(\phi)$ está perto de $\{x\}$, com $\phi_1, ..., \phi_j \neq 0$ em $S(\phi)$ podemos escrever $\phi = \psi \phi_1 . \cdots . \phi_j$ com $\psi \in C_c^\infty(X)$, e obtemos de (3.2.2)

$$\Sigma(\phi u) \subset \cap_{i=1}^j \Sigma(\phi_i u) \subset V$$

o que prova (3.2.6). ∎

Em particular (3.2.6) implica que $\Sigma_x(u) = \emptyset$ se, e somente se, $\phi u \in C^\infty$ para alguma $\phi \in C_c^\infty(X)$ com $\phi(x) \neq 0$, isto é $x \notin SS(u)$.

Definição 3.2.2 *Se $u \in \mathcal{D}'(X)$, então o subconjunto fechado de $X \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ definido por*

$$WF(u) = \{(x,\ \xi) \in X \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\});\ \xi \in \Sigma_x(u)\}$$

é chamado o conjunto frente de ondas de u.

A projeção de $WF(u)$ em X é $SS(u)$. Além disso $WF(u)$ é cônico no sentido que é invariante sob a multiplicação da segunda variável por escalares positivos. Ele pode ser considerado como um subconjunto de $X \times S^{n-1}$.

Proposição 3.2.3 *Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ então a projeção de $WF(u)$ na segunda variável é $\Sigma(u)$.*

Demonstração Seja W a projeção de $WF(u)$ na segunda variável, $W = \pi_2(WF(u))$. Da definição de $WF(u)$ e do Lema 3.2.1 $W \subseteq \Sigma(u)$. W é fechado, pois a intersecção com a esfera unitária é a projeção de um conjunto compacto em $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$. Se V é uma vizinhança cônica de W então todo $x \in \mathbb{R}^n$ tem uma vizinhança U_x tal que $\Sigma(\phi u) \subset V$ se $\phi \in C_c^\infty(U_x)$. De fato, seja V vizinhança cônica de W, dado $x \in \mathbb{R}^n$, por definição, temos que

$$\Sigma_x(u) = \cap_{C_c^\infty \ni \phi(x) \neq 0} \Sigma(\phi u) \subset W.$$

Logo

$$V^c \cap S^{n-1} \subset \cup_{C_c^\infty \ni \phi(x) \neq 0} (\Sigma(\phi u) \cap S^{n-1})^c,$$

da compacidade de $V^c \cap S^{n-1}$ existem finitas ϕ_j tal que

$$V^c \cap S^{n-1} \subset \cup_{C_c^\infty \ni \phi_j(x) \neq 0} (\Sigma(\phi_j u) \cap S^{n-1})^c$$

assim $\cap_{j=1}^N (\Sigma(\phi_j u)) \cap S^{n-1} \subset V \cap S^{n-1}$. Tome U_x vizinhança de x tal que $U_x \subset Int(S(\phi_j))$ para todo j, logo se $\phi \in C_c^\infty(U_x)$, podemos escrever

$\phi u = \phi\phi_j\phi_j^{-1}u$, para todo j, daí pelo Lema 3.2.1 $\Sigma(\phi u) \subset \Sigma(\phi_j u)$, para todo j, donde $\Sigma(\phi u) \cap S^{n-1} \subset V \cap S^{n-1}$.

Como $u \in \mathcal{E}'$ podemos cobrir $S(u)$ por um número finito de tais vizinhanças e escolher $\phi_j \in C_c^\infty(U_{x_j})$ com $\sum \phi_j = 1$ perto de $S(u)$, isto é possível via partição da unidade. Mas então segue que

$$\Sigma(u) = \Sigma(\sum_{j=1}^{k} \phi_j u) \subset \cup_{\phi_j} \Sigma(\phi_j u) \subset V.$$

Pois, pelo Lema 3.2.1

$$\Sigma(u) = \Sigma(\sum_{j \neq i} \phi_j \phi_i) \subset \Sigma(\phi_i u)$$

então

$\Sigma(u) \subset \cup_{\phi_i} \Sigma(\phi_i u)$. Como V é vizinhança arbitrária de W então $\Sigma(u) \subseteq W$. ■

A Proposição 3.2.3 mostra que $WF(u)$ contém todas as informações em $SS(u)$ e $\Sigma(u)$.

Teorema 3.2.4 *Se X é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e S um subconjunto cônico fechado de $X \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ então podemos encontrar $u \in \mathcal{D}'(X)$ com $WF(u) = S$.*

Demonstração É suficiente provarmos o teorema quando $X = \mathbb{R}^n$, pois para $X \subset \mathbb{R}^n$ podemos aplicar este caso ao fecho de S em $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Escolha uma seqüência $\{(x_k,\ \theta_k)\} \in S$ com $|\theta_k| = 1$ tal que para todo $(x,\ \theta) \in S$, com $|\theta| = 1$, é o limite de uma subseqüência. Tal escolha existe pelo seguinte fato: S é subconjunto de um conjunto separável, logo separável, então existe $D \subset S$ denso no máximo enumerável. Agora escreva $D = D_1 \cup D_2$, em que D_1 é o conjunto dos pontos isolados de S, assim escolha $\{(x_k,\ \theta_k)\}$ tal que contenha infinitas cópias de cada ponto de D_1 e D_2.

Seja $\phi \in C_c^\infty$ tal que $\widehat{\phi}(0) = 1$, então

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\phi(k(x - x_k))e^{ik^3x\cdot\ \theta_k} \tag{3.2.7}$$

é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$ logo define uma distribuição, e provaremos que $WF(u) = S$. Primeiro provaremos que $WF(u) \subset S$. Se $(x_0,\ \ \theta_0) \notin S$ podemos escolher uma vizinhança aberta U de x_0 e uma vizinhança cônica aberta V de ξ_0 tal que

$$(U \times V) \cap S = \emptyset. \tag{3.2.8}$$

Escreva $u = u_1 + u_2$, em que u_1 é a soma dos termos em (3.2.7) com $x_k \notin U$ e u_2 é a soma dos termos com $x_k \in U$. Então $u_1 \in C^\infty$ numa vizinhança U_1 de x_0, pois todos, exceto um número finito de termos se anulam em U_1 se $\overline{U}_1 \subset U$. De fato, suponhamos que $S(\phi) \subset B_R(0)$ então $S(\phi(k(\cdot - x_k))) \subset B_{\frac{R}{k}}(x_k)$. Sejam U_1 vizinhança de x_0 tal que $\overline{u}_1 \subset U$ e $\delta = d(\overline{U}_1,\ U^c) > 0$. Existe apenas um número finito de k's tal que $|x' - x_k| < \frac{R}{k},\ \ x' \in \overline{U}_1$, pois caso contrário $|x' - x_k| \to 0$ o que é um absurdo pois $x_k \notin U$ e $\delta > 0$. Logo

$$u_1(x) = \sum_{k \in K_1'} k^{-2}\phi(k(x - x_k))e^{ik^3x\cdot\ \theta_k} \in C^\infty,$$

em que $K_1' \subset K_1 = \{k \in \mathbb{N};\ x_k \notin U\}$ é finito.

Agora note que

$$\widehat{u_2}(\xi) = \sum_{x_k \in U} k^{-2-n}\widehat{\phi}(\frac{\xi - k^3\theta_k}{k})e^{ix_k\cdot\ (k^3\theta_k - \xi)}. \tag{3.2.9}$$

Aqui $\theta \notin V$ por causa de (3.2.8).

De fato,

$$\widehat{u}_2(\xi) = \int e^{-i\xi\cdot\ x} u_2(x)dx = \int e^{-i\xi\cdot\ x} \sum_{x_k\in U} k^{-2}\phi(k(x-x_k))e^{ik^3\theta_k\cdot\ x} =$$

$$= \int \sum_{x_k\in U} k^{-2} e^{i(k^3\theta_k-\xi)\cdot\ x}\phi(k(x-x_k))dx =$$

$$= \int \sum_{x_k\in U} k^{-2} e^{i(k^3\theta_k-\xi)\cdot\ x_k} e^{-ik^{-1}(\xi-k^3\theta_k)\cdot\ y_k}\phi(y_k)dy_k =$$

$$= \sum_{x_k} k^{-2-n} e^{i(k^3\theta_k-\xi)\cdot\ x_k}\widehat{\phi}\left(\frac{\xi-k^3\theta_k}{k}\right).$$

Se V_1 é outra vizinhança cônica de ξ_0 e $\overline{V}_1 \subset (V\cap\{0\})$ então $|\xi-\eta| \geq c(|\xi|+|\eta|)$ quando $\xi \in V_1$ e $\eta \notin V$, para algum $c > 0$.(Análogo ao feito antes da estimativa (3.2.4).) Assim

$$|\xi - k^3\theta_k| \geq c(|\xi| + k^3) \geq c|\xi|^{\frac{2}{3}}k, \quad \xi \in V_1$$

sendo que a primeira desigualdade segue de $\theta_k \notin V$ e $|\theta_k| = 1$ e a segunda de $(|\xi| + k^3)^3 \geq |\xi|^2 k^3$. Como $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}$ segue que $\widehat{u}_2$ é rapidamente decrescente em V_1, pois

$$|\widehat{u}_2(\xi)| \leq \sum_{x_k\in U} k^{-2-n}|\widehat{\phi}\left(\frac{\xi-k^3\theta_k}{k}\right)| \leq$$

$$\leq \sum_{x_k\in U} k^{-2-n}C_l\left(1+\left|\frac{\xi-k^3\theta_k}{k}\right|\right)^{-l} \leq \sum_{x_k\in V} k^{-2-n}C_l(1+c|\xi|^{\frac{2}{3}})^{-l} < \infty.$$

Portanto $(x_0,\ \xi_0) \notin WF(u)$.

Agora seja $(x_0,\ \xi_0) \in S$. Escolha $\chi \in C_c^\infty$ igual a 1 perto de x_0. Para provar que $(x_0,\ \xi_0) \in WF(u)$ devemos mostrar que $\widehat{\chi u}$ não pode ser rapidamente decrescente nas vizinhanças cônicas de ξ_0. Para fazer isto primeiro observemos que

$$\chi(x)\phi(k(x-x_k)) = \phi_k(k(x-x_k))$$

em que $\phi_k(x) = \chi(\frac{x}{k} + x_k)\phi(x)$ pertence a um conjunto limitado em $\mathcal{S}$. Com efeito, considerando

$$P_j(\phi) = \max_{|\alpha|,|\beta|\leq j} P_{\alpha,\ \beta}(\phi) = \max_{|\alpha|,|\beta|\leq j} (\sup_x |x^{\alpha} D^{\beta}(\phi(x))|)$$

dizemos que ϕ_k pertence a um conjunto limitado em $\mathcal{S}$ se para todo j existe c_j tal que $P_j(\phi_k) < c_j$ para toda ϕ_k, mas

$$P_N(\phi_k) \leq \max_{|\alpha|,|\beta|\leq N} [c_{\alpha} \sup_x(|x|^{|\alpha|} |D^{\beta}(\phi_k(x))|)] \leq \max_{|\alpha|,|\beta|\leq N} (\tilde{c}_{\alpha},\ c_{\beta}).$$

A transformada de Fourier de χu é uma soma da forma (3.2.9) com ϕ substituída por ϕ_k (cálculo análogo). Se x_k está perto de x_0 e k é muito grande então $S(\phi(k(x-x_0))) \subset$ vizinhança de x_0 logo $\phi_k = \phi$, pois $\chi(x) = 1$ e obtemos para qualquer N

$$\widehat{\chi u}(k^3\theta_k)| \geq k^{-2-n} - C_N \sum_{j\neq k} j^{-n-2} \left(\frac{|k^3\theta_k - j^3\theta_j|}{j} \right)^{-N},$$

aqui

$$k^3\theta_k - j^3\theta_j| \geq |k^3 - j^3| \geq k^2 + kj + j^2 \geq kj \ se \ k \neq j$$

sendo que a primeira desigualdade segue do fato $|k^3\theta_k - j^3\theta_j| \geq ||k^3\theta_k| - |j^3\theta_j||$ e a segunda de $|k^3 - j^3| = |k-j||k^2 + kj + j^2|$. De fato,

$$|\widehat{\chi u}(k^3\theta_k)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} e^{i(j^3\theta_j - k^3\theta_k)\cdot\ x_j} \widehat{\phi_j} \left(\frac{|k^4\theta_k - j^3\theta_j|}{j} \right) \right| =$$

$$= \left| \sum j = 1^{\infty} k^{-n-2} \widehat{\phi_k}(0) + \sum_{k\neq j=1}^{\infty} j^{-n-2} e^{i(j^3\theta_j - k^3\theta_k)\cdot\ x_j} \widehat{\phi_j} \left(\frac{|k^3\theta_k - j^3\theta_j|}{j} \right) \right| \geq$$

$$\geq k^{-n-2} - \sum_{k\neq j=1}^{\infty} j^{-n-2} \widehat{\phi_j} \left| \left(\frac{|k^3\theta_k - j^3\theta_j|}{j} \right) \right| \geq$$

$$\geq K^{-n-2} - C_N \sum_{k\neq j=1}^{\infty} j^{-n-2} \left(\frac{|k^3\theta_k - j^3\theta_j|}{j} \right)^{-N}.$$

Assim

$$\sum_{j\neq k} j^{-n-2} \left(\frac{|k^3\theta_k - j^3\theta_j|}{j} \right)^{-N} \leq \sum_{j\neq k} j^{-n-2} k^{-N} = \mathcal{O}(k^{-N}).$$

Se escolhermos $N > n+2$ obtemos para k grande

$$|\widehat{\chi u}(k^3\theta_k)| \geq \frac{k^{-n-2}}{2}$$

se x_k está perto de x_0. Como $\left(x_0,\ \frac{\xi_0}{|\xi_0|}\right)$ é um limite pontual da seqüência $(x_k,\ \theta_k)$, segue que $\widehat{\chi u}$ não é rapidamente decrescente em qualquer vizinhança cônica de ξ_0 e o teorema está provado. ■

Determinaremos agora o conjunto frente de onda de algumas distribuições as quais ocorrem com bastante freqüência.

Teorema 3.2.5 *Seja V um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ e $u = u_0 dS$, em que $u_0 \in C^\infty(V)$ e dS é a medida Euclidiana de superfície em V. Então $WF(u) = S(u) \times (V^\perp \backslash \{0\})$.*

Demonstração Seja $x = x' + x''$ com $x' \in V$ e $x'' \in V^\perp$. Se $\chi \in C_c^\infty$ então

$$(\widehat{\chi u})(\xi) = (\chi u)(e^{-ix\cdot\ \xi}) = u(\chi e^{-ix\cdot\ \xi}) = \int e^{-ix'\cdot\ \xi'} u_0(x')\chi(x',\ 0)dx',$$

logo $\widehat{\chi u}$ é uma função de ξ', rapidamente decrescente a qual não se anula em qualquer conjunto aberto a menos que $\chi u = 0$, pelo fato de ser analítica. Portanto $\widehat{\chi u}$ não é rapidamente decrescente em nenhum cone aberto que intercepte $V^\perp$, a menos que $\chi u = 0$, pois se $\xi_0' = 0$ então $(\widehat{\chi u})(\xi_0' + \xi_0'') = \int \chi(x',\ 0)u_0(x')dx' = c$, sendo c uma constante não nula, logo $S(u) \times (V^\perp \backslash \{0\}) \subseteq WF(u)$. Mas como observamos acima existe decrescimento rápido em todo cone $|\xi| \leq c|\xi'|$, isto é em todo cone em que $\xi' \neq 0$, logo $S(u) \times ((V^\perp \backslash \{0\}))^c \subseteq (WF(u))^c$. ■

Seria suficiente provar o teorema acima para $u = dS$, pois pela definição sempre temos

$$WF(au) \subset WF(u), \quad a \in C^\infty. \tag{3.2.10}$$

Outro fato importante é que para todo α

$$WF(D^{\alpha}u) \subset WF(u). \tag{3.2.11}$$

De fato, tome $\chi \in C_c^{\infty}$ igual a 1 perto de x e $\chi_1 \in C_c^{\infty}$ igual a 1 numa vizinhança de $S(\chi)$. Então temos $\Sigma_x(D^{\alpha}u) \subset \Sigma(\chi D^{\alpha}u) = \Sigma(\chi D^{\alpha}(\chi_1 u))$ de (3.2.2) segue que $\Sigma(\chi D^{\alpha}(\chi_1 u)) \subset \Sigma(D^{\alpha}(\chi_1 u))$, pela definição de $\Sigma(u_1)$ $u_1 \in \mathcal{E}'$ temos que $\Sigma(\chi_1 u)^c \subset \Sigma(D^{\alpha}\chi_1 u)^c$, ou seja $\Sigma(D^{\alpha}(\chi_1 u)) \subset \Sigma(\chi_1 u)$. Quando $S(\chi_1) \to \{x\}$ segue de (3.2.6) que $\Sigma(\chi_1 u) \to \Sigma_x(u)$ logo $\Sigma_x(D^{\alpha}u) \subset \Sigma_x(u)$, donde $WF(D^{\alpha}u) \subset WF(u)$. Juntando estes dois fatos obtemos que

$$WF(Pu) \subset WF(u) \tag{3.2.12}$$

se P é qualquer operador diferencial com coeficientes constantes.

Agora analisaremos os valores limites de funções definidas como no Teorema 1.4.37. Seja Γ um cone aberto convexo e seja

$$\Gamma^0 = \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ y \cdot\ \xi \geq 0\ \forall\ y \in \Gamma\} \tag{3.2.13}$$

o cone dual. Γ_0 é fechado, convexo e próprio (isto é, não contém retas), pois caso contrário Γ estaria contido num hiperplano e não teria pontos interiores (isto é, Γ seria um raio). Reciprocamente, todo cone fechado, convexo, próprio Γ_1 é o cone dual de precisamente um cone aberto convexo Γ, definido por

$$\Gamma = \{y \in \mathbb{R}^n;\ y \cdot\ \xi > 0\ \forall \xi \in \Gamma_1 \backslash \{0\}\}. \tag{3.2.14}$$

De fato, seja $\xi \in \Gamma_1 \backslash \{0\}$ então $u \cdot\ \xi > 0$ para todo $y \in \Gamma$ daí $\xi \in \Gamma^0$, logo $\Gamma_1 \subseteq \Gamma^0$. Seja $\xi \in \Gamma^0$ então $u \cdot\ \xi \geq 0$ para todo $y \in \Gamma$, mas $y \in \Gamma$ implica $y \cdot\ \tilde{\xi} > 0$ para todo $\tilde{\xi} \in \Gamma_1 \backslash \{0\}$. Suponhamos que $\xi \notin \Gamma_1$ então existe $\tilde{y} \in \Gamma$ tal que $\tilde{y} \cdot\ \eta \geq 0$ para todo $\eta \in \Gamma_1 \backslash \{0\}$ e $\tilde{y} \cdot\ \xi < 0$ deste modo $\tilde{y} \in \Gamma$ o que implica $\xi \notin \Gamma^0$ absurdo.

Teorema 3.2.6 *Se as hipóteses do Teorema 1.4.37 são satisfeitas, então*

$$WF(f_0) \subset X \times (\Gamma^0 \backslash \{0\}) \tag{3.2.15}$$

sendo Γ^0 *o cone dual de* Γ.

Demonstração Se $\phi \in C_c^\infty(X)$ a representação (1.4.16) de f_0 é válida substituindo N por qualquer inteiro $\nu \geq N$, (revendo a demonstração do Teorema 1.4.37 vemos que isto é possível já que lá $\phi \in C_c^{N+1}(X)$). Assim

$$\begin{aligned}(\widehat{\phi f_0})(\xi) = \langle f_0 e^{-i.\cdot\ \xi},\ \phi\rangle = \int \Phi(x,Y) f(x+iY) e^{-i(x+iY)\cdot\ \xi} dx + \\ +(\nu+1)\int_{0<t<1}\int f(x+itY)e^{-i(x+itY)\cdot\ \xi}\sum_{|\alpha|=\nu+1}\partial^\alpha\phi(x)\frac{(iY)^\alpha}{\alpha!}t^\nu dxdt\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Quando $Y \cdot\ \xi < 0$ segue que

$$\begin{aligned}|\widehat{\phi f_0}(\xi)| &\leq C_{\phi,\nu}(e^{Y\cdot\ \xi} + \int_0^\infty e^{tY\cdot\ \xi} t^{\nu-N} dt) = \\ &= C_{\phi,\nu}(e^{Y\cdot\ \xi} + (\nu-N)!((-Y)\cdot\ \xi)^{N-\nu-1}).\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

De fato,

$$\begin{aligned}|\widehat{\phi f_0}(\xi)| \leq \int |\Phi(x,Y)f(x+iY)|e^{Y\cdot\ \xi}dx + \\ +(\nu+1)\int_{0<t<1}\int |f(x+iY)|e^{tY\cdot\ \xi}\sum_{|\alpha|=\nu+1}|\partial^\alpha\phi(x)|t^\nu dxdt \leq C'_{\phi,\nu}e^{Y\cdot\ \xi} + \\ +C''_{\phi,\nu}\int_0^\infty e^{tY\cdot\ \xi}t^{\nu-N}dt = C_{\phi,\nu}(e^{Y\cdot\ \xi} + \int_0^\infty e^{tY\cdot\ \xi}t^{\nu-N}dt)\end{aligned}$$

integrando por partes obtemos (3.2.17). O lado direito de (3.2.18) é $\mathcal{O}(|\xi|^{N-\nu-1})$ numa vizinhança cônica de qualquer ponto do semi-espaço $Y \cdot\ \xi < 0$. Assim $\Sigma(\phi f_0) \subset \{\xi;\ Y \cdot \xi \geq 0\}$ para todo $Y \in \Gamma$ com $|Y| < \gamma$, portanto $\Sigma(\phi f_0) \subset \Gamma^0$. Como $\Sigma_x(f_0) \subset \Sigma(\phi f_0)$ segue o resultado. ■

Provaremos agora uma modificação do Lema 3.2.1, a fim de preparar uma discussão do conjunto frente de onda para distribuições homogêneas.

Lema 3.2.7 *Se $v \in \mathcal{S}'$ então $WF(v) \subset \mathbb{R}^n \times F$ sendo F o cone limite de $S(\widehat{v})$ no infinito, isto é, o cone consistindo de todos limites de seqüências $t_j x_j$ com $x_j \in S(\widehat{v})$ e $0 < t_j \to 0$.*

Demonstração F é obviamente fechado. Para todo cone fechado Γ com $\Gamma \cap F = \{0\}$ podemos escolher $\epsilon > 0$ e c tal que

$$(\diamondsuit) \quad |\xi - \eta| \geq \epsilon|\xi| \quad se\ \xi \in \Gamma,\ \eta \in S(\widehat{v})\ e\ |\xi| > c.$$

Com efeito, suponhamos que não seja possível tal escolha de ϵ e c então podemos escolher $\xi_j \in \Gamma$ e $\eta_j \in S(\widehat{v})$ tal que $|\xi_j - \eta_j| < \frac{|\xi_j|}{j}$ e $|\xi_j| > j$. A seqüência $\{\frac{\xi_j}{\eta_j}\}$ terá um ponto limite $\theta \in \Gamma \cap F$ com $|\theta| = 1$ o que é um absurdo. Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então a transformada de Fourier de $u = \phi v$ é $(2\pi)^{-n}\widehat{\phi} * \widehat{v}$. Escolha $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi = 1$ quando $|\xi| > 1$ e $\psi(\xi) = 0$ para $|\xi| < \frac{1}{2}$. Então $\Phi_R(\xi) = \widehat{\phi}(\xi)\psi\left(\frac{\xi}{R}\right)$ e igual a $\widehat{\phi}(\xi)$ quando $|\xi| \geq R$, logo

$$(2\pi)^n \widehat{u}(\xi) = \widehat{v}_\eta(\Phi_R(\xi - \eta)) \quad se\ \xi \in \Gamma\ e\ R \leq \epsilon|\xi|,\ |\xi| > c.$$

De fato,

$$(2\pi)^n \widehat{u}(\xi) = \widehat{\phi} * \widehat{v}(\xi) = \widehat{v}_\eta(\widehat{f}(\xi - \eta)) = \widehat{v}_\eta(\Phi_R(\xi - \eta))$$

a última igualdade segue de $(\diamondsuit)$. Como $\widehat{v} \in \mathcal{S}'$ segue que para algum $N,\ C',\ C''$, temos quando $\xi \in \Gamma, \quad |\xi| > c, \quad R \leq \epsilon|\xi|$

$$\begin{aligned}
|\widehat{u}(\xi)| &= (2\pi)^{-n}|\widehat{v}_\eta(\Phi_R(\xi - \eta))| \\
&\leq C' \sum_{\alpha+\beta| \leq N} \sup |\eta^\alpha D_\eta^\beta \Phi_R(\xi - \eta)| \\
&= C' \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} \sup_{|\xi-\eta| > \frac{R}{2}} \left| \eta^\alpha D_\eta^\beta \left[\widehat{\phi}(\xi - \eta)\psi\left(\frac{\xi - \eta}{R}\right) \right] \right| \\
&= C' \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} \sup_{|\tilde{\eta}| > \frac{R}{2}} \left| (\xi - \tilde{\eta})^\alpha D_{\tilde{\eta}}^\beta \left[\widehat{\phi}(\tilde{\eta})\psi\left(\frac{\tilde{\eta}}{R}\right) \right] \right| \\
&\leq C''(1 + |\xi|)^N \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} \sup_{|\tilde{\eta}| > \frac{R}{2}} \left| \tilde{\eta}^\alpha D_{\tilde{\eta}}^\beta \widehat{\phi}(\tilde{\eta}) \right|.
\end{aligned}$$

Se escolhermos $R = \epsilon|\xi|$ o lado direito é rapidamente decrescente, pois $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}$. Provando o lema. ∎

Teorema 3.2.8 *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é homogênea em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ então*

$$(x,\ \xi) \in WF(u) \Longleftrightarrow (\xi,\ -x) \in WF(\widehat{u}) \text{ se } \xi \neq 0 \text{ e } x \neq 0; \tag{3.2.18}$$

$$x \in S(u) \Longleftrightarrow (0,\ -x) \in WF(\widehat{u}) \text{ se } x \neq 0; \tag{3.2.19}$$

$$\xi \in S(\widehat{u}) \Longleftrightarrow (0,\ \xi) \in WF(u) \text{ se } \xi \neq 0. \tag{3.2.20}$$

Demonstração Assuma primeiro que u é homogênea em $\mathbb{R}^n$. Para provar (3.2.18) é suficiente mostrar que se $x_0 \neq 0,\ \xi_0 \neq 0$ então

$$(x_0,\ \xi_0) \notin WF(u) \Longrightarrow (\xi_0,\ -x_0) \notin WF(\widehat{u}), \tag{3.2.21}$$

pois $\widehat{u}$ também é homogênea, pelo Teorema 2.3.18 e (3.2.21) aplicada a $\widehat{u}$ da a implicação inversa, já que $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$. Escolha $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ igual a 1 numa vizinhança de ξ_0 e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ igual a 1 numa vizinhança de x_0 tão pequena que

$$(S(\psi) \times S(\chi)) \cap WF(u) = \emptyset. \tag{3.2.22}$$

Temos que estimar a transformada de Fourier de $v = \chi\widehat{u}$ numa vizinhança cônica de $-x_0$. Seja $\psi(x) = 1$ em $|x - x_0| < 2r$. Vamos considerar o comportamento de $\widehat{v}(-tx)$ em $|x - x_0| < r$ e t grande. Se u é homogênea de grau a em $\mathbb{R}^n$ então

$$\begin{aligned} \widehat{v}(-tx) = (\widehat{\chi\widehat{u}})(-tx) = (2\pi)^{-n}\widehat{\chi} * \widehat{\widehat{u}}(-tx) = \\ = \widehat{\chi} * \check{u}(-tx) = \langle \check{u},\ \chi(-tx - .)\rangle = \langle u,\ \widehat{\chi}(-tx + .)\rangle = \\ = t^a\langle u,\ t^n\widehat{\chi}(-tx + t.)\rangle = t^{a+n}\langle u,\ \widehat{\chi}(t(. - x))\rangle. \end{aligned}$$

Seja $\psi u = u_0$ e $(1-\psi)u = u_1$. Então $\Sigma(u_0) \cap S(\chi) = \emptyset$. Com efeito, seja $(x_0,\ \xi_0) \in WF(u_0)$ então $x_0 \in S(\psi)$ daí por (3.2.22) $\pi_2(WF(u_0)) \cap S(\chi) = \emptyset$, mas pela Proposição 3.2.3 $\pi_2(WF(u_0)) = \Sigma(u_0)$. Assim

$$\langle u_0,\ \widehat{\chi}(t(.-x))\rangle = \int \widehat{u}_0(\xi)\chi\left(\frac{\xi}{t}\right) e^{ix\cdot\ \xi}\frac{d\xi}{t^n}$$

é rapidamente decrescente quando $t \to \infty$, pois $t^N \widehat{u}_0(t\xi)\chi(\xi)$ é limitado para todo N. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle u_0,\ \widehat{\chi}(t(.-x))\rangle &= \int u_0(y)\widehat{\chi}(t(y-x))dy \\
&= \int\int u_0(y)\chi(\xi)e^{-it(y-x)\cdot\ \xi}d\xi dy \\
&= \int\int u_0(y)\chi(\xi)e^{-iy\cdot\ t\xi}e^{ix\cdot\ t\xi}d\xi dy \\
&= \int\int u_0(y)\chi\left(\frac{\tilde{\xi}}{t}\right) e^{-iy\cdot\ \tilde{\xi}}e^{ix\cdot\ \tilde{\xi}}\frac{d\tilde{\xi}}{t^n}dy \\
&= \int \widehat{u}_0(\tilde{\xi})\chi\left(\frac{\tilde{\xi}}{t}\right) e^{ix\cdot\ \tilde{\xi}}\frac{d\tilde{\xi}}{t^n}
\end{aligned}$$

na última igualdade usamos o Teorema de Fubini. Como $\Sigma(u_0) \cap S(\chi) = \emptyset$ segue que se $\xi \in S(\chi)$ então $t\xi \notin \Sigma(u_0)$, logo

$$\begin{aligned}
&|\langle t^N u_0,\ \widehat{\chi}(t(.-x))\rangle| \leq \\
\leq \int |t^N \widehat{u_0}(t\xi)\chi(\xi)|d\xi &\leq \sup|\chi(\xi)| \int C_l t^N(1+|\tau\xi)^{-l}d\xi < \infty.
\end{aligned}$$

Usando $\widehat{D^\alpha u_0}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{u_0}$ obtemos que u_0 é rapidamente decrescente. Além disso,

$$\langle u_1,\ \widehat{\chi}(t(.-x))\rangle = \langle u,\ (1-\psi)\widehat{\chi}(t(.-x))\rangle$$

também é rapidamente decrescente, pois

$$(\diamondsuit) \quad y \to t^N(1-\psi(y))\widehat{\chi}(t(y-x))$$

é limitado em $\mathcal{S}$ para qualquer N. De fato, por hipótese temos que $|x-x_0| < r$ e $|y-x_0| > 2r$ daí $\||y-x| \geq r$ donde $t \leq t\frac{|y-x|}{r}$ e $|y| \leq |y-x|+|x_0|+r$. Como $\widehat{\chi} \in \mathcal{S}$

segue que $(\Diamond)$ é limitado. De forma similar, usando que $|y| \leq |y-x|+|x_0|+r$, obtemos que $(\Diamond)$ é limitado se substituirmos $\widehat{\chi}$ por $D^\alpha\widehat{\chi}$. Logo $\langle u_1,\ \widehat{\chi}(t(.-x))\rangle$ é rapidamente decrescente. Portanto $-x_0 \notin \Sigma(v)$, donde $(\xi_0,\ -x_0) \notin WF(\widehat{u})$.
No caso geral em que u é homogênea em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, segue de (2.3.11) e (2.3.12) que podemos escrever $u = w + w_0 + Q(D)w_1$, $\ \widehat{u} = \widehat{w} + \widehat{w_0} + Q(\xi)\widehat{w_1}$, sendo w homogênea, $S(w_0) \subset \{0\}$, $\ w_i = \frac{|x|^{-n}}{c_n}$ quando $x \neq 0$, $\ \widehat{w_1}(\xi) = -\log|\xi|$ e Q polinômio. Com $u - w$ e $\widehat{u} - \widehat{w}$ são C^∞ em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ e w é homogênea segue da primeira parte que (3.2.18) vale para w logo para u.
Para provarmos (3.2.19) observemos que como $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^n\check{u}$ segue do Lema 3.2.7 com $v = \widehat{u}$ que $x \notin S(u)$ então $(0,\ -x) \notin WF(\widehat{u})$. De fato, se $x \notin S(\widehat{v})$ pelo Lema 3.2.7 não existe seqüência $y_j \to x$ com $y_j \in S(\widehat{v})$, suponha que $t_jx_j \to x$ com $x_j \in S(\widehat{v})$ da homogeneidade de $\widehat{v}$ segue que $t_jx_j \in S(\widehat{v})$ logo temos uma contradição.
Suponhamos que $(0,\ -x_0) \notin WF(\widehat{u})$. Escolha $\chi \in C_c^\infty$ com $\chi(0) = 1$, tal que a transformada de Fourier de $\chi\widehat{u}$ seja rapidamente decrescente numa vizinhança cônica Γ de $-x_0$. (Sobre a escolha de χ : se $(0, -x_0) \notin WF(\widehat{u})$ então da definição de conjunto frente de onda segue que existe $\chi_1 \in C_c^\infty$ tal que $-x_0 \notin \Sigma(\chi_1\widehat{u})$ e $\chi_1(0) \neq 0$, tome $\chi(x) = \frac{\chi_1(x)}{\chi_1(0)}$.) Acrescentando um termo com suporte na origem não afetamos (3.2.19), assim podemos considerar que u é homogênea de grau a em $\mathbb{R}^n$, a menos que $a = -n-k$ e (1.6.15) vale para qualquer inteiro $k \geq 0$. Assim a transformada de Fourier de $\chi\widehat{u}$ em tx é

$$\widehat{\chi} * \check{u}(tx) = t^a\langle u\widehat{\chi}_t(.+x)\rangle + \log t \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \frac{(\partial^\alpha\widehat{\chi})(tx)}{\alpha!}$$

sendo que o somatório pode ser omitido, a menos que $k = -n-a$ é um inteiro não negativo. Com efeito,

$$(\widehat{\chi \widehat{u}})(tx) = (2\pi)^{-n}\widehat{\chi} * \widehat{\widehat{u}}(tx) = \langle \check{u},\ \widehat{\chi}(tx - .)\rangle = \langle u,\ \widehat{\chi}(. + tx)\langle =$$

$$= t^{-k-n}\langle u_y,\ t^n\widehat{\chi}(ty + tx)\langle + \log t \sum_{|\alpha|=k} S(x^\alpha \psi)\frac{(\partial^\alpha \widehat{\chi})(tx)}{\alpha!} =$$

$$t^a\langle u_y,\ \widehat{\chi}_t(y + x)\rangle + \log t \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \frac{(\partial^\alpha \widehat{\chi})(tx)}{\alpha!}.$$

Quando $x \in \Gamma$ o lado esquerdo tende rapidamente a zero como $t \to \infty$, e o mesmo acontece com o somatório, pois $\widehat{\chi} \in \mathcal{S}$. Assim

$$\langle u,\ \widehat{\chi}_t(. + x)\rangle = \check{u} * \widehat{\chi}_t(x) \to 0$$

em Γ quando $t \to \infty$.

A convolução converge para $(2\pi)^n\check{u}$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para tal considere $t = \epsilon^{-1}$ e use o fato que $\widehat{\chi_\epsilon} \to (2\pi)^n\delta$ quando $\epsilon \to 0$ (pela transformada de Fourier inversa) e $\check{u} * (2\pi)^n\delta = (2\pi)^n\check{u}$. Portanto $\check{u} = 0$ em Γ, logo $x_0 \notin S(u)$, provando (3.2.19).

Se u e portanto $\widehat{u}$ é homogênea em $\mathbb{R}^n$ então (3.2.20) segue se (3.2.19) é aplicado a $\widehat{u}$. Se u não é homogênea em $\mathbb{R}^n$ então $u(t.) - t^a u$ é uma distribuição não nula suportada na origem para algum $t > 0$. Assim $(0, \xi) \in WF(u)$ para todo $\xi \neq 0$ e $\xi \in S(\widehat{u})$, pois $\widehat{u} = U + V$ sendo U da forma (2.3.12) com U_0 e Q homogêneos, $Q \not\equiv 0$ e V é um polinômio, usando (3.2.19) em U_0 o resultado segue. ∎

3.3 Revisão de Operações com Distribuições

A existência de singularidades torna impossível dar uma definição geral de multiplicação de distribuições e composição com funções suaves. Por exemplo, uma operação que estenda a multiplicação não é, necessariamente, associativa, como segue

$$vp\left[\frac{1}{x}\right](x\delta) = 0,$$

$$(vp\left[\frac{1}{x}\right]x)\delta = \delta,$$

em que $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ é o valor principal de $\frac{1}{x}$. Mostraremos nesta seção que as definições destas operações podem ser estendidas para alguns subespaços de $\mathcal{D}'$ quando levamos em conta a descrição mais refinada das singularidades dadas pelo conjunto frente de onda. Na seção 1.8 definimos tais operações pela extensão contínua do caso de funções suaves, assim o primeiro ponto para discutir é a topologia no espaço de distribuições com uma limitação para o conjunto frente de onda.

Sejam X um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, Γ um cone fechado em $X\times(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ e

$$\mathcal{D}'_\Gamma(X) = \{u \in \mathcal{D}'(X);\ WF(u) \subset \Gamma\}.$$

Lema 3.3.1 *Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(X)$ está em $\mathcal{D}'_\Gamma(X)$ se, e somente se, para toda $\phi \in C_c^\infty(X)$ e todo cone fechado $V \subset \mathbb{R}^n$ com*

$$\Gamma \cap (S(\phi) \times V) = \emptyset \tag{3.3.1}$$

temos

$$\sup_V |\xi|^N |\widehat{\phi u}(\xi)| < \infty, \quad N = 1, 2, \cdots \tag{3.3.2}$$

Demonstração ($\Longleftarrow$) Note que (3.3.2) implica que $(x,\xi) \notin WF(u)$ se $\phi(x) \neq 0$ e $\xi \in IntV$, como ϕ e V são arbitrários segue que $WF(u) \subset \Gamma$.

($\Longrightarrow$) Suponha que $u \in \mathcal{D}'_\Gamma(X)$. Seja $\phi \in C_c^\infty(X)$ e V um cone fechado em $\mathbb{R}^n$ tal que (3.3.1) vale. Se $\xi_0 \in V$ é tal que (3.3.2) não vale em qualquer vizinhança cônica de ξ_0 então $\xi_0 \in WF(\phi u)$ então pela Proposição 3.2.3 existe

$x_0 \in S(\phi)$ tal que $(x_0,\ \xi_0) \in WF(\phi u)$ logo $(x_0,\ \xi_0) \in WF(u)$, ou seja não vale (3.3.1). ■

Definição 3.3.2 *Dados uma seqüência $u_j \in \mathcal{D}'_\Gamma(X)$ e $u \in \mathcal{D}'_\Gamma(X)$ dizemos que $u_j \to u$ em $\mathcal{D}'_\Gamma(X)$ se*

(i) $u_j \to u$ em $\mathcal{D}'(X)$ (convergência fraca)

(ii) $\sup_V |\xi|^N |\widehat{\phi u}(\xi) - \widehat{\phi u_j}(\xi)| \to 0,\ j \to \infty,$

para $N = 1, 2, \cdots$ se $\phi \in C_c^\infty(X)$ e V é um cone fechado em $\mathbb{R}^n$ tal que (3.3.1) é válida.

Afirmação: Se $u_j \to u$ em $\mathcal{D}'(X)$ então $\widehat{\phi u_j} \to \widehat{\phi u}$ uniformemente em compactos.

Demonstração Seja $S_{n,\xi}(\phi) = \langle (u_n - u)_x,\ \phi e^{-ix\cdot\xi}\rangle = \widehat{\phi u_j}(\xi) - \widehat{\phi u}(\xi)$. Suponha que existe $n_j \to \infty$ e $\epsilon_0 > 0$ tal que $\left\| S_{n_j,\xi_j} \right\| > \epsilon_0$. Escolha $\tilde{\xi}$ ponto limite de $\left\{ \frac{\xi_j}{|\xi_j|} \right\}$, se $\xi_j \neq 0\ \forall j$, da analiticidade de S_{n_j,ξ_j} em $\tilde{\xi}$ temos que $|S_{n_j,\xi_j}(\phi)| \geq \frac{\epsilon_0}{2}$ o que contradiz $u_j \to u$ em $\mathcal{D}'(X)$. ■

De (i) e da afirmação acima segue que podemos substituir (ii) por

$$(ii)' \quad \sup_j \sup_{\xi \in V} |\xi|^N |\widehat{\phi u_j}(\xi)| < \infty,\ N = 1, 2, \cdots.$$

O próximo resultado é uma extensão do Teorema 1.5.7.

Teorema 3.3.3 *Para toda $u \in \mathcal{D}'_\Gamma(X)$ existe uma seqüência $u_j \in C_c^\infty(X)$ tal que $u_j \to u$ em $\mathcal{D}'_\Gamma(X)$.*

Demonstração Seja $u_j = (\chi_j u) * \phi_j$ em que

(a) $\chi_j \in C_c^\infty(X)$ e dado um conjunto compacto em X $\chi_j = 1$ para j grande;

(b) $0 \leq \phi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int \phi_j dx = 1$ e $S(\phi_j)$ tão pequeno de forma que

$$S(\phi_j) + S(\chi_j) \subset X. \tag{3.3.3}$$

Assim $u_j \in C_c^\infty(X)$. Seja $\psi \in C_c^\infty(X)$ daí temos

$$u_j(\psi) = ((\chi_j u) * \phi_j)(\psi) = (\chi_j u)(\check{\phi}_j * \psi) = u(\chi_j(\check{\phi}_j * \psi)).$$

Como $S(\check{\phi}_j * \psi)$ está em qualquer vizinhança de $S(\psi)$ para j grande, então $\chi_j(\check{\phi}_j * \psi) = \check{\phi}_j * \psi$, e disto segue que $u_j(\psi) \to u(\psi)$, ou seja, $u_j \to u$ em $\mathcal{D}'(X)$. Se ϕ e V satisfazem (3.3.1) podemos encontrar $\psi \in C_c^\infty(X)$ igual a 1 numa vizinhança de $S(\phi)$ e um cone fechado W com interior contendo $V\backslash\{0\}$ tal que $\Gamma \cap (S(\psi) \times W) = \emptyset$. Para j grande temos $\phi u_j = \phi w_j$, em que $w_j = \phi_j * (\psi u)$, assim $|\widehat{w_j}| = |\widehat{\phi}_j||\widehat{\psi u}| \leq |\widehat{\psi u}|$. Como $|\widehat{\psi u}|$ é rapidamente decrescente em W, a demonstração do Lema 3.2.1 dá (ii)'. De fato, aplicando o Lema 3.2.1 $v = w_j$, $\Gamma = int(W)$, $\widehat{w_j}$ é rapidamente decrescente em Γ logo vale (3.2.4) para $\widehat{u} = \widehat{\phi w_j} = \widehat{\phi u_j}$ donde

$$\sup_V (1 + |\xi|)^N |\widehat{\phi u_j}(\xi)| < \infty, \ \forall j$$

pois $|\widehat{w_j}| \leq |\widehat{\psi u}|$, o que implica (ii)'. Portanto $u_j \to u$ em $\mathcal{D}'_\Gamma(X)$. ■

Teorema 3.3.4 *Sejam X e Y subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente e seja $f : X \to Y$ um aplicação C^∞. Denote o conjunto das normais desta aplicação por*

$$N_f = \{(f(x),\ \eta) \in Y \times \mathbb{R}^n;\ {}^t f'(x)\eta = 0\}.$$

Então o "pullback" f^* pode ser definido de uma e somente uma maneira para toda $u \in \mathcal{D}'(Y)$ com

$$N_f \cap WF(u) = \emptyset \tag{3.3.4}$$

tal que $f^*u = u \circ f$, quando $u \in C^\infty$ e para qualquer subconjunto cônico fechado Γ de $Y \times (\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ com $\Gamma \cap N_f = \emptyset$ temos uma aplicação contínua $f^* : \mathcal{D}'_\Gamma(Y) \to \mathcal{D}'_{f^*\Gamma}(X)$,

$$f^*\Gamma = \{(x,\ {}^t f'(x) \cdot\ \eta);\ (f(x), \eta) \in \Gamma\}. \tag{3.3.5}$$

Em particular temos para toda $u \in \mathcal{D}'(Y)$ satisfazendo (3.3.4)

$$WF(f^*u) \subset f^*WF(u).$$

Demonstração Seja Γ um cone fechado em $Y \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ com $\Gamma \cap N_f = \emptyset$ fixado. Definimos $f^*u = u \circ f$ quando $u \in C^\infty(Y)$. Pelo Teorema 3.3.3 este teorema estará provado se mostrarmos que f^* aplica seqüências $u_j \in C^\infty$ convergindo em $\mathcal{D}'_\Gamma(Y)$ em seqüências convergindo em $\mathcal{D}'_{f^*\Gamma(X)}$. Primeiro provaremos a convergência em $\mathcal{D}'(X)$. Se $u \in C^\infty_c(Y)$ e $\chi \in C^\infty_c(X)$ temos, pela fórmula da transformada de Fourier inversa aplicada a u

$$\langle f^*u,\ \chi\rangle = (2\pi)^{-n} \int \widehat{u}(\eta) I_\chi(\eta) d\eta, \qquad (3.3.6)$$
$$I_\chi(\eta) = \int \chi(x) e^{if(x)\cdot\ \eta} dx.$$

Dado $x_0 \in X$, tome $y_0 = f(x_0)$, $\Gamma_{y_0} = \{\eta;\ (y_0, \eta) \in \Gamma\}$ e escolha:

(a) uma vizinhança cônica fechada V de Γ_{y_0} em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tal que ${}^t f'(x_0)\eta \neq 0$, $\eta \in V$, reduza o problema parar a co-esfera S^{n-1} e use o fato que $\Gamma \cap N_f = \emptyset$

(b) uma vizinhança compacta Y_0 de y_0 tal que V é uma vizinhança de Γ_y para todo $y \in Y_{y_0}$, que existe já que Γ é fechado

(c) uma vizinhança compacta X_0 de x_0 com $f(X_0)$ no interior de Y_0 e ${}^t f'(x)\eta \neq 0$ se $x \in X_0$ e $\eta \in V$, que existe por continuidade.

Escolha $\phi \in C^\infty_c(Y_0)$ igual a 1 em $f(X_0)$. Então (3.3.6) é válida quando $\chi \in C^\infty_c(X_0)$ para toda $u \in C^\infty(Y)$ se u é substituída por ϕu no lado direito. De fato,

$$\langle f^*(\phi u)\ \chi\rangle = \int (\phi u)(f(x))\chi(x)dx = \int_{X_0} \phi(f(x))u(f(x))\chi(x)dx =$$
$$= \int_{X_0} u(f(x))\chi(x)dx = (2\pi)^{-n} \int e^{if(x)\cdot\ \eta}\widehat{u}\chi(x)dx = \langle f^*u,\ \chi\rangle.$$

Logo por (3.3.6)

$$\langle f^*u,\ \chi\rangle = (2\pi)^{-n}\int\int(\widehat{\phi u})(\eta)\chi(x)e^{if(x)\cdot\ \eta}dxd\eta.$$

Se $x\in S(\chi)$ e $\eta\in V$ então (i) $d(f(x)\cdot\ \eta) = dx\cdot\ {}^tf'(x)$ e (ii) $|\eta|\leq c|^tf'(x)\eta|$, pois $d(f(x)\cdot\ \eta) = d(\sum_j f_j(x)\eta_j) = \sum_j d(f_j(x)\eta_j) = \sum_j\sum_k \partial_k f_j(x)\eta_j dx_k = dx\cdot\ {}^tf'(x)$. Para (ii) consideremos o conjunto compacto $W = S(\chi)\times(V\cap S^{n-1})$ como a aplicação

$$(x,\eta)\mapsto^t f'(x)\cdot\ \eta$$

é contínua e diferente de zero para todo $(x,\eta)\in W$ temos por compacidade de W que $\inf|^tf'(x)\cdot\ \eta|>0$ seja $c^{-1}=\inf|^tf'(x)\cdot\ \eta|>0$, logo se $\eta\in V$ temos (ii).

Pelo Teorema 1.10.5 segue que

$$|I_\chi(\eta)|\leq C_{N,\chi}(1+|\eta|)^{-N},\quad \eta\in V\ N=1,2,\cdots. \tag{3.3.7}$$

Com efeito, no nosso caso $K=X_0$, seja X_0' vizinhança aberta de X_0, $u=\chi\in C_c^\infty(X_0)$ $g(x)=f(x)\cdot\ \frac{\eta}{|\eta|}$ e $\omega=|\eta|$, logo pelo Teorema 1.10.5 segue que

$$|\eta||I_\chi(\eta)|\leq c_1\sum_{|\alpha|\leq k}\sup|D^\alpha\chi||g'(x)|^{|\alpha|-2k},$$

mas $|g'(x)|=|\nabla g|=|(\partial_1 g,\cdots,\partial_n g)|=\left|\left({}^tf'(x)\frac{\eta}{|\eta|}\right)\right|$ assim

$$|\eta|^k|I_\chi(\eta)|\leq c_1\sum_{|\alpha|\leq k}\sup|D^\alpha\chi|(|\eta|^{-1}|^tf'(x)\eta|)^{|\alpha|-2k}$$

como $(|\eta|^{-1}\ |^tf'(x)\eta|)^{-1}\ \leq\ c$ então $|\eta|^k|I_\chi(\eta)|\ \leq\ C_\chi$. Somando para $k=0,1,\cdots,N$ e usando o fato que $(1+\sum_{k=1}^N|\eta|^k)\leq C_N(1+|\eta|)^N$, temos (3.3.7).

Se $u_j\in C^\infty(Y)$ e $u_j\to u$ em $\mathcal{D}'_\Gamma(Y)$ temos

$$|\widehat{\phi u_j}(\eta)|\leq C_n'(1+|\eta|)^{-N},\ \eta\notin V,\ N=1,2,\cdots,$$

(pois $V^c \cap WF(u_j) = \emptyset$) e para alguma constante M (Ver Teorema 1.4.15)

$$|\widehat{\phi u_j}(\eta)| \leq C(1 + |\eta|)^M, \ \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto o Teorema da convergência dominada em V e V^c dá

$$\langle f^* u_j, \ \chi \rangle \to (2\pi)^{-n} \int \widehat{\phi u}(\eta) I_\chi(\eta) d\eta.$$

De fato,

$$\langle f^* u_j, \ \chi \rangle = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\jmath u_j}(\eta) I_\chi(\eta) d\eta = (2\pi)^{-n} \left(\int_V + \int_{V^c} \widehat{\phi u_j}(\eta) I_\chi(\eta) d\eta \right).$$

Como em V^c $|\widehat{\phi u_j}(\eta)| \leq C_n(1 + |\eta|)^{-N}$, $\forall N \in \mathbb{N}$ e em V $|\widehat{\phi u_j}(\eta)| \leq c(1+|\eta|)^M$, M fixo e além disso, $|I_\chi(\eta)| \leq \sup|\chi| m(S(\chi))$, $m(S(\chi))$ é a medida de $S(\chi)$, logo pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\langle f^* u_j, \ \chi \rangle \to (2\pi)^{-n} \left(\int_V + \int_{V^c} \widehat{\phi u}(\eta) I_\chi(\eta) d\eta \right) = \langle f^* u, \ \chi \rangle.$$

Portanto $f^* u_j$ converge em $\mathcal{D}'$ para um limite independente da escolha da seqüência (Referência [H2] pg.43). Como provamos a existência do limite denotamos-o por $f^* u$.

Para provarmos a continuidade de $f^* : \mathcal{D}'_\Gamma(Y) \to \mathcal{D}'_{f^*\Gamma}(X)$ consideremos $\chi f^* u_j = v_j$. Então (3.3.6) com χ substituída por $\chi e^{-i \cdot \cdot \ \xi}$ dá

$$\widehat{v_j}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\phi u_j}(\eta) I_\chi(\eta, \xi) d\eta,$$

com $I_\chi(\eta, \xi) = \int \chi(x) e^{i(f(x) \cdot \ \eta - x \cdot \ \xi)} dx$. Seja W uma vizinhança aberta cônica de ${}^t f'(x_0)\Gamma_{y_0} = (f^*\Gamma)_{x_0}$. Podemos as vizinhanças V e X_0 acima escolhendo tal que ${}^t f'(x)\eta \in W$ se $x \in X_0$ e $\eta \in V$. Então temos para algum $\epsilon > 0$ $|{}^t f'(x)\eta - \xi| \geq \epsilon(|\xi| + |\eta|)$ se $x \in X_0$, $\eta \in V$ e $\xi \notin W$. Com efeito, se $|\xi| + |\eta| = 1$ então $\epsilon = \inf |{}^t f'(x)\eta - \xi| \neq 0$, por ser a distância entre V e

W^c logo $|{}^t f'(x)\eta - \xi| \geq \epsilon$. Seja $\eta \in V,\ \xi \notin W$ e considere $\frac{\eta}{|\xi|+|\eta|},\ \frac{\xi}{|\xi|+|\eta|}$, daí $|{}^t f'(x)\eta - \xi| \geq \epsilon(|\xi| + |\eta|)$. Assim pelo Teorema 1.10.5 para qualquer N

$$|I_\chi(\eta,\xi)| \leq C_N(1 + |\xi| + |\eta|)^{-N} \text{ se } \xi \int \in W \text{ e } \eta \in V. \tag{3.3.8}$$

De fato, no nosso caso seja $u = \chi\ g(x) = f(x) \cdot\ \frac{\eta}{|\xi|+|\eta|} - x \cdot\ \frac{\xi}{|\xi|+|\eta|}\ \omega = |\eta| + |\xi|$ logo pelo Teorema 1.10.5

$$(|\eta| + |\xi|)^k |I_\chi(\eta,\xi)| \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha \chi||g'|^{|\alpha|-2k}, \quad (\diamondsuit)$$

mas

$$g'(x) = \frac{{}^t f'(x)\eta - \xi}{|\xi| + |\eta|}$$

e como $(|{}^t f'(x)\eta - \xi|(|\xi| + |\eta|)^{-1})^{-1} \leq \epsilon$ e $\sum_{k=0}^N (|\xi| + |\eta|)^k \leq C_N(1 + |\xi| + |\eta|)^N$ então $(1 + |\xi| + |\eta|)^N |I_\chi(\eta,\xi)| \leq C_{\chi,N}$. Se $\eta \notin V$ então ${}^t f'(x)\eta = 0,\ x \in X_0$ logo por $(\diamondsuit)$ temos

$$(|\eta| + |\xi|)^k |I_\chi(\eta,\xi)| \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha \chi| \left(\frac{-\xi}{|\xi| + |\eta|}\right)^{|\alpha|-2k} \leq$$
$$\leq C_\chi \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\frac{|\xi| + |\eta|}{|\xi|}\right)^{2k-|\alpha|}$$

donde

$$|I_\chi(\eta,\xi)| \leq C_N(1 + |\eta|)^N (1 + |\xi|)^{-N}. \tag{3.3.9}$$

Logo temos para $\xi \notin W$

$$|\widehat{v_j}(\xi)| \leq C'_N[\int_V (1 + |\xi| + |\eta|)^{M-N} d\eta + (1 + |\xi|)^{-N} \int_{V^c} |\widehat{\phi u_j}(\eta)|(1 + |\eta|)^N d\eta],$$

pois

$$|\widehat{v_j}(\xi)| = (2\pi)^{-n} |\int \widehat{\phi u_j}(\eta) I_\chi(\eta,\xi) d\eta| \leq$$
$$\leq C_N[\int_V |\widehat{\phi u_j}(\eta)|(1 + |\xi| + |\eta|)^{-N} d\eta + (1 + |\xi|)^{-N} \int_{V^c} |\widehat{\phi u_j}(\eta)|(1 + |\eta|)^N d\eta] \leq$$
$$\leq C_N[\int_V (1 + |\xi| + |\eta|)^{M-N} d\eta + (1 + |\xi|)^{-N}].$$

Como ϕu_j satisfaz a condição (ii)' em V^c segue que

$$\sup_j \sup_{\xi \notin W} |\xi|^N |\widehat{\chi f^* u_j}(\xi)| < \infty, \quad N = 1, 2, \cdots .$$

Por uma partição da unidade segue que

$$f^* u_j \to f^* u \text{ em } \mathcal{D}'_{f^*\Gamma}.$$

■

Exemplo 3.3.5 *Se u é uma densidade C^∞ em uma subvariedade Y da variedade X, então*

$$WF(u) = \{(x, \xi) \in T^*(X); x \in S(u), \xi \neq 0 \ e \ T_x(Y) \cdot \xi = 0\}.$$

De fato, no Teorema 3.2.5 considere $V = T(X)$ e $V^\perp = (T(X))^\perp$ temos que

$$WF(u) = S(u) \times (V^\perp \backslash \{0\}) = \{(x, \xi); x \in S(u), \xi \neq 0 \ e \ T_x(Y) \cdot \xi = 0\}.$$

Assim o conjunto frente de onda é a restrição a $S(u)$ do fibrado normal

$$N(Y) = \{(y, \xi);\ y \in Y,\ T_y(Y) \cdot \xi = 0\}$$

com a seção nula removida.

Exemplo 3.3.6 *Seja A uma forma quadrática não-singular real em $\mathbb{R}^n$, isto é, $\frac{\partial A}{\partial x} \neq 0$ se $x \neq 0$. Então pelo Teorema 1.8.2 $A^* f_0$ está bem definida em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ se $f_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Seja $f_0(x) = (x \pm i0)^a,\ a = \frac{2-n}{2}$ e considere a distribuição*

$$(A \pm i0)^a = A^*((t \pm i0)^a)$$

então temos

$$WF((A \pm i0)^a) = \{(x,\ tdA(x)); x \neq 0, A(x) = 0, t \gtrless 0\} \cup (T_0^* \backslash \{0\}) \quad (3.3.10)$$

De fato, temos que $(x \pm i0)^a = x_+^a + e^{\pm \pi i a} x_-^a$ como $(x + i0)^a = \lim_{y \to 0^+} z^a$, $z = x + iy$ logo o cone Γ do Teorema 1.4.37 é $\{y \in \mathbb{R}_+\}$ daí o cone dual é $\{y \in \mathbb{R}_+\}$ e como $SS((t + i0)^a) \subset \{0\}$ temos pelo Teorema 3.2.6 que $WF((t+i0)^a) \subset \{(0,\zeta);\ \zeta > 0\}$. Analogamente obtemos que $WF((t-i0)^a) \subset \{(0,\zeta);\ \zeta < 0\}$. Agora pelo Teorema 3.3.4 $WF((A \pm i0)^a) \subset A^* WF((t \pm i0)^a)$, mas

$$
\begin{aligned}
A^* WF((t+i0)^a) &= \{(x, {}^t A'(x)\eta);\ (A(x), \eta) \in WF((t+i0)^a)\} \\
&= \{(x, tdA(x));\ x \neq 0,\ A(x) = 0,\ t > 0\} \cup (T_0^* \backslash \{0\}).
\end{aligned}
$$

Portanto

$$WF(A \pm i0)^a \subset \{(x, tdA(x));\ x \neq 0,\ A(x) = 0,\ t \gtrless 0\}.$$

Para a inclusão recíproca de (1.8.2) temos que $B(\partial)(A \pm i0)^a = c\delta_0$ e de (3.2.12) segue que

$$WF(B(\partial)(A \pm i0)^a) \subset WF((A \pm i0)^a)$$

logo para $c \neq 0$ $WF(\delta_0) \subset WF((A \pm i0)^a)$.

Note que $(A \pm i0)^a$ não é C^∞ em nenhum $x \neq 0$ com $A(x) = 0$ logo $\{(x, tdA(x));\ x \neq 0,\ A(x) = 0,\ t \gtrless 0\} \subset WF((A \pm i0)^a)$. Portanto

$$WF((A \pm i0)^a) = \{(x, tdA(x));\ x \neq 0,\ A(x) = 0,\ t \gtrless 0\} \cup WF(\delta_0).$$

Mas pelo Teorema 3.2.5 $WF(\delta_0) = T_0^* \backslash \{0\}$.

O próximo resultado estima o conjunto frente de onda de uma convolução a partir dos fatores.

Proposição 3.3.7 *Se $k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ então*

$$WF(k * u) \subset \{(x + y, \xi); (x, \xi) \in WF(k), (y, \xi) \in WF(u)\}. \tag{3.3.11}$$

Demonstração Pelo Teorema 1.5.12 $SS(k*u) \subset SS(k)+SS(u)$. Além disso temos que $\Sigma(k * u) \subset \Sigma(k) \cap \Sigma(u)$ se $u, k \in \mathcal{E}'$. De fato, se $0 \neq \eta \in (\Sigma(k))^c$ e $\eta \notin (\Sigma(u))^c$ então existe V vizinhança cônica de η tal que $|\widehat{k}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}$ para todo $N \in \mathbb{N}$ e para todo $\xi \in V$ e para toda vizinhança cônica, U de η existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|\widehat{u}(\xi)| \geq C_M(1+|\xi|)^{-M}$ para todo $\xi \in U$. Seja $N = M + 2ordem\ u + l,\ l \in \mathbb{N}$ daí temos para $\xi \in V$

$$|(\widehat{k}\widehat{u})(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-M-2ordem\ u-l}|\widehat{u}(\xi)| \leq C_N'(1+|\xi|)^{-2ordem\ u-l}|\widehat{u}(\xi)|^2 \leq$$
$$\leq \tilde{C}_N(1+|\xi|)^{-2ordem\ u-l}(1+|\xi|)^{2ordem\ u} = \tilde{C}_N(1+|\xi|)^{-l}, \quad \forall l \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \xi \in V.$$

Portanto $\eta \in (\Sigma(k*u))^c$. Analogamente, se $0 \neq \eta \in (\Sigma(u))^c$ e $\eta \notin (\Sigma(u))^c$. Portanto $\Sigma(k*u) \subset \Sigma(k) \cap \Sigma(u)$. Já vimos que a projeção na primeira variável de $WF(u)$ é $SS(u)$ e se $u \in \mathcal{E}'$ então a projeção na segunda variável é $\Sigma(u)$. Se $u,\ k \in \mathcal{E}'$ então $k*u \in \mathcal{E}'$, pois $S(k*u) \subset S(k)+S(u)$, assim a projeção de $WF(k*u)$ na primeira variável é $SS(k*u) \subset SS(k)+SS(u)$ e a projeção na segunda variável é $\Sigma(k*u) \subset \Sigma(k) \cap \Sigma(u)$, logo

$$WF(k*u) \subset \{(x+y,\xi);\ (x,\xi) \in WF(k) \text{ e } (y,\xi) \in WF(u)\}.$$

Para $k \in \mathcal{D}'$ consideremos φk com $\varphi \in C_c^\infty$, e use o fato do resultado ser local.

■

3.4 O Conjunto Frente de Onda de Soluções de EDP's

Um operador diferencial com coeficientes C^∞ de ordem m em um conjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^n$ é da forma

$$P = P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{3.4.1}$$

A parte principal (ou símbolo principal) p_m é definido por

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha. \tag{3.4.2}$$

Teorema 3.4.1 *Se P é um operador diferencial de ordem m com coeficientes C^∞ em uma variedade X, então*

$$WF(u) \subset carP \cup WF(Pu), \quad u \in \mathcal{D}'(X), \tag{3.4.3}$$

sendo o conjunto característico, $carP$, definido por

$$carP = \{(x,\xi) \in T^*(X)\backslash\{0\};\ p_m(x,\xi) = 0\}. \tag{3.4.4}$$

Demonstração Temos o resultado para uma variedade, mas isto é puramente local, assim podemos assumir que $X \subset \mathbb{R}^n$. Provaremos que $(carP)^c \cap (WF(Pu))^c \subset (WF(u))^c$. Seja $(x_0,\xi_0) \in (carP)^c$. Tome ξ tal que $|\xi| = 1$, pela continuidade da aplicação:

$$S^{n-1} \ni \xi \mapsto p_m(x_0,\xi)$$

e como $p_m(x_0,\xi_0) \neq 0$ então existe uma vizinhança V de ξ_0 em S^{n-1} e $c > 0$ ($c = \inf_V |p_m(x_0,\xi)|$) tal que $p_m(x_0,\xi) \geq c$ $\forall \xi \in \overline{V}$. Logo se $\frac{\xi}{|\xi|} \in \overline{V}$ então $|p_m(x_0,\xi) \geq c|\xi|^m$. Como a aplicação :

$$X \times S^{n-1} \ni (x,\xi) \mapsto p_m(x,\xi) \in \mathbb{C}$$

é contínua, temos que existe uma vizinhança U de x_0 tal que

$$|p_m(x,\xi) \geq c_1|\xi|^m,\ \forall (x,\xi) \in U \times V. \tag{3.4.5}$$

($c_1 = \inf_{U\times V} |p_m(x,\xi)|$). Escolha $\phi \in C_c^\infty(U)$, fixa com $\phi(x_0) = 1$. Queremos estimar $\widehat{\phi u}(\xi)$ quando $\xi \in V$. Primeiramente, notemos que se

$$^tPv = \sum_\alpha (-D)^\alpha(a_\alpha v),$$

isto é, ${}^tP$ é o adjunto formal de P, então $Pu = f$ significa que

$$\langle u,\ {}^tPv\rangle = \langle f,\ v\rangle, \quad v \in C_c^\infty(X).$$

Gostaríamos de encontrar v tal que o lado esquerdo seja $\widehat{\phi u}(\xi)$, isto é,

$${}^tPv(x) = \phi(x)e^{-ix\cdot\ \xi}.$$

Afirmação: Para ξ grande uma solução aproximada é

$$e^{-ix\cdot\ \xi}\frac{\phi(x)}{p_m(x,\xi)}.$$

Demonstração

$${}^tP\left(\frac{e^{-ix\cdot\ \xi}\phi(x)}{p_m(x,\xi)}\right) = \sum_\alpha (-1)^\alpha D^\alpha\left[a_\alpha(x)\frac{e^{-ix\cdot\ \xi}\phi(x)}{p_m(x,\xi)}\right] =$$
$$= \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(-1)^{|\alpha|}\sum_{\gamma+\beta+\lambda=\alpha} D^\gamma\left(\frac{a_\alpha(x)}{p_m(x,\xi)}\right)D^\beta(\phi(x))(-\xi)^\lambda e^{-ix\cdot\ \xi} =$$
$$= \sum_{|\lambda|=m}\frac{a_\alpha(x)\xi^\alpha e^{-ix\cdot\ \xi}\phi(x)}{p_m(x,\xi)} +$$
$$+ \sum_{|\alpha|\le m}\left(\sum_{\gamma+\lambda=\alpha,\ |\lambda|<m} c_\alpha(-1)^{|\alpha|}D^\gamma\left(\frac{a_\alpha(x)\phi(x)}{p_m(x,\xi)}\right)(-\xi)^\lambda e^{-ix\cdot\ \xi}\right) =$$
$$= e^{-ix\cdot\ \xi}\phi(x) + \mathcal{O}(\frac{1}{|\xi|}).$$

■

Para melhorar consideremos

$$v(x) = \frac{w(x)e^{-ix\cdot\ \xi}}{p_m(x,\xi)}$$

como $p_m(x,\xi) \neq 0\ \ \forall(x,\xi) \in U \times V$, temos que $v \in C^\infty(U)$ se $w \in C^\infty(U)$. Esta definição de v dá a equação $w - Rw = \phi$, em que $R = R_1 + R_2 + \cdots + R_m$ e $R_j|\xi|^j$

é um operador diferencial de ordem menor ou igual a j o qual é uma função homogênea de ξ de grau zero. De fato, para obter um termo em R de grau $-j$ devemos tomar $m-j$ derivadas sobre a exponencial $e^{-ix\cdot\ \xi}$ e ter não mais que j as que atuem em w. Por (3.4.5) todas as derivadas em x dos coeficientes de $R_j|\xi|^j$ são limitadas em $U\times V$. Formalmente a equação $w-Rw=\phi$ é satisfeita pra $w=\sum R^k\phi$ $(w-Rw=\phi \Longrightarrow (I-R)w=\phi \Longrightarrow w=(I-R)^{-1}\phi=\sum R^k\phi)$. Entretanto é improvável que esta soma convirja, assim tomemos no lugar desta uma soma parcial

$$w_N=\sum_{k<N} R^k\phi, \quad N \text{ grande.}$$

Então temos, $w_N - Rw_N = \phi - R^N\phi$ e R^N é uma soma de termos cada um contendo um fator $|\xi|^{-k}$ para algum $k\geq N$. A equação anterior significa que

$${}^tP(x,D)\left(e^{-ix\cdot\ \xi}\frac{w_N(x)}{p_m(x,\xi)}\right)=e^{-ix\cdot\ \xi}(\phi-R^N\phi).$$

Assim

$$\widehat{\phi u}(\xi)=u(e^{-i\ \cdot\ \cdot\ \xi}R^N\phi)+f\left(e^{-i\ \cdot\ \cdot\ \xi}\frac{w_N(.)}{p_m(.,\xi)}\right), \quad \xi\in V. \tag{3.4.6}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} u(e^{-i\ \cdot\ \cdot\ \xi}R^N\phi)+f\left(e^{-i\ \cdot\ \cdot\ \xi}\frac{w_N(.)}{p_m(.,\xi)}\right) &= \\ = u(e^{-i\ \cdot\ \cdot\ \xi}R^N\phi)+u\left({}^tP\left(e^{-i\ \cdot\ \cdot\ \xi}\frac{w_N(.)}{p_m(.,\xi)}\right)\right) &= \\ = u(e^{-i\ \cdot\ \cdot\ \xi}R^N\phi)+u(e^{-i\ \cdot\ \cdot\ \xi}(\phi-R^N\phi)) &= \\ = (\phi u)(e^{-i\ \cdot\ \cdot\ \xi}) = \widehat{\phi u}(\xi). \end{aligned}$$

Se a distribuição u é de ordem μ numa vizinhança de $S(\phi)$ então o primeiro termo do lado direito de (3.4.6) pode ser estimado por

$$c\sum_{|\alpha|\leq\mu}\sup|D^\alpha(e^{-i.\cdot\ \xi}R^N\phi)|\leq C_N|\xi|^{\mu-N},\ |\xi|\geq 1,$$

sendo que $N-\mu$ é tão grande quanto queremos.

Se $(x_0,\xi_0)\notin WF(f)$, segue de (3.2.4) que podemos escolher a vizinhança U de x_0 e a vizinhança cônica V de ξ_0 tal que para algum inteiro M e $k=1,2,\cdots$

$$\sup_V |\xi|^k|\widehat{\psi f}(\xi)|\leq C_k\sum_{|\alpha|\leq k+M}\sup|D^\alpha\psi|,\quad \psi\in C_c^\infty(U).$$

Tomando $\psi=\frac{w_N}{p_m(.,\xi)}$ concluímos que o segundo termo no lado direito de (3.4.6) é $\mathcal{O}(|\xi|^{-k})$ quando $\xi\to\infty$ em V. Com efeito,

$$\left|f\left(e^{-i.\cdot\,\xi}\frac{w_N}{p_m(.,\xi)}\right)\right|\leq C_k|\xi|^{-k}\sum_{|\alpha|\leq k+M}\sup\left|D^\alpha\frac{w_N}{p_m(.,\xi)}\right|\leq \tilde{C}_k|\xi|^{-k}.$$

Portanto

$$\widehat{\phi u}(\xi)=\mathcal{O}(|\xi|^{-k}),\quad \xi\in V,\ k=1,2,\cdots$$

o que significa que $(x_0,\xi_0)\notin WF(u)$, concluindo o teorema. ■

Corolário 3.4.2 *Se P é elíptico, isto é, $p_m(x,\xi)\neq 0$ em $T^*(X)\backslash\{0\}$ então $WF(u)=WF(Pu),\quad u\in\mathcal{D}'(X)$. Portanto $SS(u)=SS(Pu),\quad u\in\mathcal{D}'(X)$.*

Demonstração De (3.2.12) temos $WF(Pu)\subset WF(u)$. Como P é elíptico então $carP=\emptyset$, logo pelo Teorema 3.4.1 $WF(u)\subset WF(Pu)$. Portanto $WF(u)=WF(Pu)$. ■

Seja A uma forma real quadrática não singular em $\mathbb{R}^n$,

$$A(x)=\sum a_{jk}x_jx_k$$

com $a_{jk}=a_{kj}$ e seja o operador diferencial

$$B(\partial)=\sum b_{jk}\partial_j\partial_k$$

em que (b_{jk}) é o inverso de (a_{jk}). Pelo Teorema 1.8.2 segue que

$$B(D)E_\pm=\delta,\quad E_\pm=c_\pm(A\pm i0)^{\frac{2-n}{2}},\quad N>2$$

para uma escolha adequada de $c_+,\ c_-$. Se escrevermos $\xi = 2tAx$, isto é, $x = (2t)^{-1}B\xi$ em (3.3.10) temos

$$WF(E_\pm) = \{(tB'(\xi),\ \xi);\ t \gtrless 0,\ \xi \neq 0,\ B(\xi) = 0\} \cup T_0^*\backslash\{0\}. \qquad (3.4.7)$$

Afirmação: A diferença $E_+ - E_-$ satisfaz a equação $B(D)(E_+ - E_-) = 0$ e

$$(\sharp)\ WF(E_+ - E_-) = \{(tB'(\xi),\ \xi);\ t \in \mathbb{R},\ \xi \neq 0,\ B(\xi) = 0\}.$$

Demonstração ($\sharp$) segue de (3.4.7) quando $x \neq 0$, pois os dois termos tem conjunto frente de onda disjuntos. Se $x = 0$ podemos usar o argumento dado para $\chi_\pm^{\frac{n-2}{2}}$. ■

Por uma translação obtemos as soluções da equação $B(D)u = 0$ com $WF(u)$ contendo qualquer ponto de $carB$. No entanto nem todo conjunto de $carB$ pode ser o conjunto frente de onda de uma solução. Para provar isto tomemos primeiro $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e seja $B(D)v = g$. Então $v = E_+ * g$, assim (3.3.11) e (3.4.7) dão

$$WF(v) \subset WF(g) \cup \{(x + tB'(\xi),\ \xi);\ (x,\xi) \in WF(g),\ t > 0,\ \xi \neq 0,\ B(\xi) = 0\}.$$

Com efeito,

$$WF(E_+ * g) \subset \{(x + y, \xi);\ (x,\xi) \in WF(E_+),\ (y,\xi) \in WF(g)\}$$

$$\subset WF(g) \cup \{(tB'(\xi) + y,\ \xi);\ (y,\xi) \in WF(g),\ t > 0,\ \xi \neq 0\ B(\xi) = 0\}$$

em que a primeira inclusão segue por (3.3.11) e a segunda de (3.4.7).

Usando E_- ao invés de E_+ obtemos a mesma inclusão com $t < 0$. Se $(x,\xi) \in WF(v)\backslash WF(g)$ segue do Teorema 3.4.1 $B(\xi) = 0$, e a inclusão precedente mostra que podemos encontrar t_- e t_+ tal que $t_- < 0 < t_+$ e $(x - t_\pm B'(\xi),\ \xi) \in WF(g)$. Isto nos conduz à:

Teorema 3.4.3 *Sejam B uma forma real quadrática não-singular em $\mathbb{R}^n$, X um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}'(X)$ uma solução da equação $B(D)u = f$. Se $(x,\xi) \in WF(u) \backslash WF(f)$ então $B(\xi) = 0$ e $I \times \{\xi\} \subset WF(u)$ se $I \subset X$ é um segmento de linha contendo x com direção $B'(\xi)$ tal que $I \times \{\xi\}$ não intercepta $WF(f)$.*

Assim as singularidades de u com freqüência ξ se propagam com freqüência fixada na direção $B'(\xi)$ em X até elas encontrarem as singularidades de f. **Demonstração** Seja $(x,\xi) \in WF(u)\backslash WF(f)$. Pelo Teorema 3.4.1 $(x,\xi) \in carB$, logo $B(\xi) = 0$. Escolha $\phi \in C_c^\infty(X)$ tal que $\phi(x) = 1$ e $L \cap S(\phi) \subset I$ se L é a linha através de I. Então $v = \phi u \in \mathcal{E}'$ e $B(D)v = \phi B(D)u + w = \phi f + w$ em que $S(w) \subset S(d\phi)$ $(w = uB(D)\phi)$. Como $(L \times \{\xi\}) \cap WF(B(D)v) = (L \times \{\xi\}) \cap WF(w)$, pois $(x,\xi) \notin WF(f)$, segue da discussão que precede este teorema que existem pontos $z_\pm \in L$ em cada um dos lados de x tal que $(z_\pm, \xi) \in WF(w)$, assim

$$z_\pm \in L \cap S(d\phi) \text{ e } (z_\pm, \xi) \in WF(u).$$

Se y_+ e y_- são pontos arbitrários no interior de I em diferentes lados de x podemos escolher ϕ tal que $L \cap S(d\phi)$ esteja tão perto quanto queremos de $\{y_+,\ y_-\}$. Portanto $(y_\pm, \xi) \in WF(u)$ provando o teorema. ■

Agora estenderemos o teorema anterior para operadores com coeficientes reais e conjunto característico não-singular.

Definição 3.4.4 *Um operador $P(D)$ com coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$ é dito ser do tipo principal real se o símbolo principal p_m é real e*

$$p'_m(\xi) \neq 0 \quad \textit{quando} \quad \xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}. \tag{3.4.8}$$

Como $p'_m(\xi) = 0$ implica $mp_m(\xi) = p'_m(\xi)\cdot\xi = 0$ seria suficiente assumir (3.4.8) quando $p_m(\xi) = 0$.

Se P é do tipo principal real colocamos

$$v(\xi) = p'_m(\xi)|\xi|^{1-m}.$$

Este campo de vetores é homogêneo de grau zero com respeito a ξ. No próximo lema daremos um limite inferior para P na direção $iv(\xi)$ de ξ.

Lema 3.4.5 *Existem constantes positivas $t,\ C_1,\ C_2,\ C_3$ tal que*

$$ImP(\xi + itv(\xi) + iV) \geq$$

$$\geq C_1(1+|\xi|)^{m-1} + p'_m(\xi)\cdot V - C_2(|V|+1)|V|(|\xi|+|V|)^{m-2} \qquad (3.4.9)$$

se $\xi \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| \geq C_3,\ V \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração Referência [H2] pg.276. ∎

Teorema 3.4.6 *Se $P(D)$ é do tipo principal real com coeficientes constantes então podemos encontrar $E_\pm \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $w_\pm \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $P(D)E_\pm = \delta + w_\pm$ e*

$$WF(E_\pm) \subset \{(tp'_m(\xi), \xi); t \gtrless 0, p_m(\xi) = 0, \xi \neq 0\} \cup T^*_0\backslash\{0\}. \qquad (3.4.10)$$

Demonstração Não há perda de generalidade se assumirmos $m > n+1$, pois se $E_\pm$ tem as propriedades estabelecidas no teorema para $\Delta^k P(D)$, então $\Delta^k E_\pm$ tem as propriedades da teorema para $P(D)$. Além disto, se substituirmos P por $-P$ trocamos E_+ e E_-, logo é suficiente construir E_-.

Seja Γ a cadeia

$$\mathbb{R}^n \ni \xi \to \xi + itv(\xi), \quad |\xi| \geq C_3, \qquad (3.4.11)$$

sendo C_3 e t dados pelo Lema 3.4.5. Note que por (3.4.9) $ImP(\zeta) \geq C_1(1+|Re\zeta|)^{n+1}$ em Γ. Tomemos

$$E_-(x) = (2\pi)^{-n}\int_\Gamma \frac{e^{ix\cdot\,\zeta}}{P(\zeta)} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n, \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (3.4.12)$$

Em termos dos parâmetros $\xi_1, \cdots, \xi_n$ em Γ temos

$$d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n = J d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n,$$

$$J = \frac{D(\xi_1 + itv_1(\xi), \cdots, \xi_n + itv_n(\xi))}{D(\xi_1, \cdots, \xi_n)} \to 1$$

no infinito. Então a integral (3.4.12) é localmente absolutamente e uniformemente convergente. Quando $\phi \in C_c^\infty$ temos, com $\psi = P(-D)\phi$

$$\langle P(D)E_-,\ \phi\rangle = \langle E_-,\ \psi\rangle = (2\pi)^{-n} \int_\Gamma \int \frac{\psi(x)e^{ix\cdot\ \zeta}}{P(\zeta)} dx d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$$

integrando primeiro com relação a x e usando que $\widehat{\psi}(-\zeta) = P(\zeta)\widehat{\phi}(-\zeta)$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle P(D)E_-,\ \phi\rangle &= (2\pi)^{-n} \int_\Gamma \frac{\psi(-\zeta)}{P(\zeta)} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ &= (2\pi)^{-n} \int_\Gamma \widehat{\phi}(-\zeta) d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n. \end{aligned}$$

Como $F(\zeta)d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$ é uma forma diferencial fechada pata toda função analítica F, pois dF é uma combinação linear de $d\zeta_1, \cdots, d\zeta_n$. Logo $\widehat{\phi}(-\zeta)d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$ é uma forma diferencial fechada a qual decresce rapidamente no infinito (por Paley-Wiener-Schwartz). Daí a fórmula de Stokes dá

$$\begin{aligned} \langle P(D)E_-,\ \phi\rangle &= (2\pi)^{-n} \int_\Gamma \widehat{\phi}(-\zeta) d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(-\xi) d\xi - (2\pi)^{-n} \int_{\Gamma_0} \widehat{\phi}(-\zeta) d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n. \end{aligned}$$

Aqui Γ_0 é a cadeia

$$\mathbb{R}^n \ni \xi \to \xi + itv_0(\xi), \quad |\xi| \leq C_3,$$

sendo v_0 a extensão suave de v de $|\xi| = C_3$ a $|\xi| \leq C_3$, a qual faz $\Gamma \cup \Gamma_0$ homotópica ao $\mathbb{R}^n$. Daí $P(D)E_- = \delta + w_-$ em que

$$w_-(x) = -(2\pi)^{-n} \int_{\Gamma_0} e^{ix\cdot\ \zeta} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$$

é uma função inteira pois Γ_0 é compacto. Assim o Teorema 3.4.1 mostra que

$$p_m(\xi) = 0 \text{ se } (x, \xi) \in WF(E_-) \text{ e } x \neq 0.$$

Para completar a prova devemos mostrar que $(x_0, \xi_0) \notin WF(E_-)$ se $x_0 \notin \mathbb{R}_- p'_m(\xi_0)$. Esta condição significa que podemos encontrar $V \in \mathbb{R}^n$ com $|V| = 1$ e

$$x_0 \cdot\ V > 0, \quad p'_m(\xi_0) \cdot\ V > 0. \tag{3.4.13}$$

Escolha uma vizinhança cônica W de ξ_0 tal que para algum $c > 0$

$$p'_m(\xi) \cdot\ V > c|\xi|^{m-1}, \ \xi \in W,$$

$(c = \inf p'_m(\xi) \cdot\ V)$ daí obtemos de (3.4.9) quando $\xi \in W$

$$\begin{aligned} ImP(\xi + itv(\xi) + isV) &\geq C_1(1 + |\xi|)^{m-1} + c|\xi|^{m-1}s - \\ &-C_2(s+1)s(|\xi| + s)^{m-2} \geq C_1(1 + |\xi|)^{m-1} \end{aligned}$$

se $0 < s < \epsilon|\xi|$ e $|\xi|$ suficientemente grande $(|\xi| \geq \frac{C_2(s+1)}{c})$. Substituindo V por ϵV temos

$$ImP(\xi + itv(\xi) + isV) \geq C_1(1 + |\xi|)^{m-1}, \tag{3.4.14}$$

$\xi \in W, \quad 0 \leq s \leq |\xi|, \quad |\xi| \geq C'_3$. Escolha $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ homogênea de grau zero com suporte em W tal que $0 \leq \chi \leq 1$ e $\chi = 1$ numa vizinhança cônica W_0 de ξ_0. Se $x \cdot\ V > 0$, o que é verdade numa vizinhança de x_0, obtemos usando a fórmula de Stokes

$$E_-(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\Gamma' \cup \Gamma'_0} \frac{e^{ix\cdot\ \zeta}}{P(\zeta)} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \tag{3.4.15}$$

em que Γ' é a cadeia

$$\mathbb{R}^n \ni \xi \to \xi + itv(\xi) + i|\xi|\chi(\xi)V, \ |\xi| \geq C'_3,$$

e Γ_0' é a união da parte de Γ em que $C_3 < |\xi| < C_3'$ com a cadeia

$$\{(\xi, s);\ |\xi| = C_3',\ 0 < s < C_3'\} \to \xi + itv(\xi) + is\chi(\xi)V$$

com orientações convenientes. A contribuição de (3.4.15) quando $\zeta \in \Gamma_0'$ ou $Re\zeta \in W_0$ é uma função analítica de x quando $x \cdot\ V > 0$. Se M é um conjunto cônico fechado contido num cone fechado convexo próprio G, então o conjunto frente de ondas da função

$$x \to \int_{\zeta\in\Gamma', Re\zeta\in M} \frac{e^{ix\cdot\ \zeta}}{P(\zeta)} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n, \quad x \cdot\ V > 0,$$

está contido em $\{(x,\xi);\ x\cdot\ V > 0,\ \xi \in G\}$. Isto segue do Teorema 3.2.6. De fato, substituindo x por $z = x + iy$ obtemos um a função analítica limitada quando $|x|$ é limitado, $x\cdot\ V > 0$ e y está no interior do cone dual de G, pois

$$\begin{aligned} Re\ iz\cdot\ \zeta = -x\cdot\ Im\zeta - y\cdot\ Re\zeta = -x\cdot\ (tv(\xi) + |\xi|\chi(\xi)V) - y\cdot\ \xi \leq \\ \leq -tx\cdot\ v(\xi) - |\xi|\chi(\xi)x\cdot\ V \leq -tx\cdot\ v(\xi) < c|x|. \end{aligned}$$

Podemos cobrir W_0^c com um número finito de tais cones G's os quais não contém ξ_0, logo $(x_0, \xi_0) \notin WF(E_-)$. O que completa a prova deste teorema. ■

Agora uma repetição da prova do Teorema 3.4.3 dá:

Teorema 3.4.7 *Seja $P(D)$ do tipo principal real. Se $u \in \mathcal{D}'(X)$, $P(D)u = f$ e $(x,\xi) \in WF(u)\backslash WF(f)$, então $p_m(\xi) = 0$ e $I \times \{\xi\} \subset WF(u)$ se $I \subset X$ é um segmento de linha contendo x com direção $p_m'(\xi)$ tal que $I \times \{\xi\}$ não intercepta $WF(f)$.*

Agora apresentaremos o resultado que junto com Teorema 3.4.7 descreve as soluções singulares de operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes.

Teorema 3.4.8 *Sejam $P(D)$ do tipo principal real com coeficientes constantes e $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ com $p_m(\xi) = 0$. Então podemos encontrar $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $P(D)u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e*

$$WF(u) = \{(tp'_m(\xi), s\xi);\ t \in \mathbb{R},\ s > 0\}. \tag{3.4.16}$$

Demonstração Seja $L = \mathbb{R}p'_m(\xi)$ e considere $\mathcal{F}$ o conjunto de todas $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $Pu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u \in C^\infty(L^c)$ e $WF(u) \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_+\xi)$. O teorema afirma que existe $u \in \mathcal{F}\backslash C^\infty$, pois $u \in \mathcal{F}$ implica $WF(u) \subset \mathbb{R}p'_m \times \mathbb{R}_+\xi$ e pelo Teorema 3.4.7 $u \in C^\infty$ se esta inclusão é estrita.

Note que $\mathcal{F}$ é um espaço de Fréchet com as semi-normas:

(i) $\sup_K |D^\alpha u|$, $\ |\alpha| \leq m$, K compacto de $\mathbb{R}^n$,

(ii) $\sup_K |D^\alpha u|$, $\ \alpha$ arbitrário, K compacto de L^c,

(iii) $\sup_K |D^\alpha P(D)u|$, $\ \alpha$ arbitrário, K compacto de $\mathbb{R}^n$,

(iv) $\sup_{\Gamma_N^c} |\eta|^N |\widehat{\phi u}(\eta)|$, $\ N = 1, 2, \cdots,\ \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Aqui Γ_N é uma seqüência de vizinhanças cônicas de ξ em $\mathbb{R}^n$ se contraindo para $\mathbb{R}_+\xi$. Precisaremos usar apenas um número contável de conjuntos compactos K e funções ϕ pois a semi-norma (iv) pode ser estimada pelas correspondentes com ϕ substituída pela função ψ a qual é 1 em $S(\phi)$.

Suponhamos que $\mathcal{F} \subset C^{m+1}$ então o Teorema do Gráfico Fechado, Teorema 1.10.7, mostra que a inclusão $\mathcal{F} \hookrightarrow C^{m+1}$ é contínua. Assim podemos encontrar N, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\ K_1 \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{K_1} \subset\subset \mathbb{R}^n$, $K_2 \subset L^c$ tal que $\overline{K_2} \subset\subset L^c$e $C \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\sum_{|\alpha|=m+1} |D^\alpha u(0)| \leq C\{\sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K_1} |D^\alpha u| + \sum_{|\alpha|\leq N} \sup_{K_2} |D^\alpha u| + \\ + \sum_{|\alpha|\leq N} \sup_{K_1} |D^\alpha P(D)u| + \sup_{\Gamma_N^c} (1+|\eta|)^N |\widehat{\phi u}(\eta)|, \quad u \in \mathcal{F}. \tag{3.4.17}$$

Queremos mostrar que (3.4.17) não é válida. Para tal precisamos construir uma solução aproximada da equação $Pu = 0$ concentrada perto de L, logo longe de K_2. Para o último termo ser pequeno a transformada de Fourier de u deveria estar concentrada perto da direção ξ. É natural escolher para $t > 0$

$$u_t(x) = e^{itx\cdot\ \xi} v_t(x).$$

Então

$$\begin{aligned} P(D)u_t(x) &= e^{ix\cdot\ \xi} P(D + t\xi)v_t(\xi) \\ &= t^{m-1} e^{itx\cdot\ \xi} (\sum_{j=1}^{n} p_m^{(j)}(\xi) D_j v_t + p_{m-1}(\xi)v_t + \cdots) \end{aligned}$$

em que os termos indicados por $(\cdots)$ contém potência negativa de t, e $p_m^{(j)} = \partial_j p_m$.

Uma solução formal é

$$v_t = v_0 + t^{-1}v_1 + \cdots$$

que pode ser encontrada resolvendo a equação de primeira ordem

$$Lv_0 = \sum_{j=1}^{n} p_m^{(j)}(\xi) D_j v_0 + p_{m-1}(\xi)v_0 \tag{3.4.18}$$

e então sucessivamente as equações

$$Lv_j = f_j \tag{3.4.19}$$

em que f_j's são determinadas por $v_0, \cdots, v_{m-1}$.

O suporte de v_0 é um cilindro com o eixo na direção $p'_m(\xi)$; podemos escolher v_0 com $v_0(0) = 1$ e suporte perto de L, pela prescrição de tal valores num plano Σ ortogonal a $p'_m(\xi)$. Se as outras funções v_j são determinadas pela condição de contorno $v_j = 0$ em Σ, é claro que $S(v_j) \subset S(v_0)$ para $j \neq 0$. Para

$$v_t = \sum_{j<M} v_j t^{-j}$$

terceira soma no lado direito de (3.4.17) é $\mathcal{O}(t^{m-1-M+N})$, pois $P(D)u_t = \mathcal{O}(t^{m-1-M})$, logo $D^\alpha P(D)u_t = \mathcal{O}(t^{m-1-M+N})$. O último termo é rapidamente decrescente quando $t \to \infty$, pois

$$\widehat{\phi u_t}(\eta) = \sum_{j<M} t^{-j}(\widehat{\phi v_j})(\eta - t\xi)$$

e $t + |\eta| \leq c(\eta - t\xi)$ quando $\eta \notin \Gamma_N$. A primeira soma de (3.4.17) é $\mathcal{O}(t^m)$ e a segunda soma é nula pela escolha apropriada de v_0, mas o lado esquerdo cresce como t^{m+1} pois $\xi \neq 0$. Se tomarmos $M = N$ temos uma contradição, pois em (3.4.17) teremos que em geral o lado esquerdo é $\mathcal{O}(t^{m+1})$ e não melhor, no entanto o lado direito nos dá que é

$$\leq \mathcal{O}(t^m) + \mathcal{O}(t^{m-1}).$$

Portanto existe $u \in \mathcal{F}$ tal que $u \in C^m \backslash C^{m+1}$. Concluindo o teorema. ■

Finalizaremos esta dissertação com um exemplo que ilustrará como os Teoremas 3.4.7 e 3.4.8 podem ser aplicados.

Finalizaremos esta dissertação com um exemplo que ilustrará como os Teoremas 3.4.7 e 3.4.8 podem ser aplicados.

Exemplo 3.4.9 *Seja $P = D_{x_1}$ em $\mathbb{R}^n$. Claramente P é do tipo principal real, pois $p_m(\xi) = \xi_1$. A seguir apresentaremos o que os Teoremas 3.4.7 e 3.4.8 afirmam neste caso e dado a simplicidade do operador apresentaremos demonstrações alternativas destes resultados.*

(a) Seja $(x^0;\xi^0) \in WF(u)\backslash WF(Pu)$, pelo Teorema 3.4.1 $(x^0;\xi^0) \in \{(x;\xi);\ \xi_1 = 0\}$. Como o operador tem coeficientes constantes ele é invariante por translações, logo sem perda de generalidade podemos assumir que x^0 seja a origem. Escrevemos $(0;\xi^0) = (0;0,\xi^{0\prime})$.

Temos que a curva bicaracterística que passa por $(0,\xi^0)$ é solução de

$$\frac{dx}{ds} = \nabla_\xi p_m(\xi^0) = (1, 0, \cdots, 0),$$

isto é, $x(s) = (s, 0')$. *O Teorema 3.4.7 afirma que existe* $\epsilon > 0$ *tal que*

$$I_\epsilon \times (0, \xi^{0'}) := \{(s, 0'; 0, \xi^{0'});\ |s| < \epsilon\} \subset WF(u) \backslash WF(Pu).$$

Para chegar a esta conclusão consideremos $f := Pu$ *restrita ao hiperplano* $\{x' = 0\}$, *isto é possível pelo Teorema 3.3.4. De fato, sejam* $X \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ *e* $F:\ X \to\ Y$ *definida por*

$$X \ni x \mapsto (0, x') \in Y.$$

F *é uma aplicação* C^∞ *e*

$$N_F = \{(F(x'); \eta) \in Y \times \mathbb{R}^n;\ {}^tF'(x)\eta = 0\} = \{(0, x'; \eta_1, 0')\}.$$

Logo $N_F \cap WF(f) = \emptyset$ *perto de* 0. *Daí existe* u_0 *solução de* $Pv = f$ *de forma que* $(0; \xi^0) \notin WF(u_0)$. *De fato,* u_0 *é encontrado integrando*

$$\int_0^{x_1} f(t; x')dt.$$

Logo podemos reduzir à equação homogênea $D_{x_1}(u - u_0) = 0$. *Donde* $u - u_0 = u_1(x')$. *Daí* $I_\epsilon \times \xi^0 \subset WF(u_1)$ *para algum* $\epsilon > 0$. *Como* $(0; \xi^0) \notin WF(u_0)$ *então* $I_\epsilon \times \xi^0 \subset WF(u)$.

(b) Existe u *solução de* $Pu = 0$ *tal que* $u = u_1(x')$ *e* $WF(u_1) = \{(0'; s\xi^{0'});\ s > 0\}$. *Daí* $\tilde{u_1}(x) = 1_{x_1} \bigotimes u_1(x')$ *satisfaz a tese do Teorema 3.4.8.*

Bibliografia

[C] Cheney, E. W., **Introduction to Approximation Theory**, McGraw-Hill , Texas ,1966.

[J] Hounie, J., **Teoria Elementar das Distribuições**, 12° Col. Bras. Mat.,IMPA ,1979.

[H1] Hörmander, H., **Linear Partial Differential Operators**, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[H2] Hörmander, L., **The Analysis of Linear Partial Differential Operators**, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[O] Onofre, J., **Resolubilidade para Operadores Diferenciais: Condições Necessárias**, Dissertação de Mestrado, Gráfica UFSCar, São Carlos, 2002.

[R1] Rudin, W. , **Functional Analysis**, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., New Delhi, 1973.

[R2] Rudin, W. , **Real and Complex Analisis**, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., New Delhi, 1979.