UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Hipoeliticidade Global e Vetores Simultaneamente Aproximáveis

Jacson Simsen

Orientador: Prof. Dr. Gerson Petronilho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática

São Carlos - SP

Agosto de 2003

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

S614hg

Simsen, Jacson.
Hipoeliticidade global e vetores simultaneamente aproximáveis / Jacson Simsen. -- São Carlos : UFSCar, 2003.
50 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2003.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Hipoeliticidade global. 3. Séries de Fourier. 4. Estimativas –L^2. 5. Vetores simultaneamente aproximáveis. I. Título.

CDD: 515.353 (20^a)

À minha amável e maravilhosa esposa Mariza.

Agradecimentos

À Deus pela oportunidade de vida.

À Mariza, minha adorável esposa, pelo companherismo, amor, carinho e incentivo.

Aos meus pais pela educação, formação moral, apoio, incentivo e por todo amor e carinho que tem por mim.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gerson Petronilho, pelos ensinamentos matemáticos, pela sua paciência e pela orientação deste trabalho.

Aos meus irmãos Lírio, Marilene e Mareli, por todo amor e carinho que tem por mim.

Aos amigos Clério, Marcelo, Maurício, Kelly, Marcos, Josiane, Ivo, Streck, Sônia, Marquinhos, Luiza, Francisco, Chiquinho, Tamara, Jiuliano, Cristhian e Marcelo Japonês, pela amizade e companhia.

Aos amigos do PPG-M pelo bom ambiente de trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, em especial, ao Adalberto Panobianco Bergamasco, João Sampaio, Cezar Kondo, Dirceu Penteado, Gerson Petronilho e César Rogério de Oliveira, pelos ensinamentos e por darem sentido à palavra Professor.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSM, em especial, ao Maurício Fronza da Silva e ao João Batista Peneireiro, que mais do que professores foram e continuam sendo amigos.

Ao professor Paulo Caetano, pelas discussões matemáticas.

Ao Renato pelas discussões e ajuda nos comandos do Latex.

À secretária Célia, pela paciência e disposição em sempre nos ajudar.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo

Uma condição necessária e suficiente é dada para que um operador soma de quadrados seja globalmente hipoelítico. Esta condição é expressa em termos de propriedades de aproximações Diofantinas dos coeficientes. A prova do teorema é baseada em estimativas L^2.

Abstract

A necessary and sufficient condition is given for a sum of squares operator to be globally hypoelliptic. This condition is expressed in terms of Diophatine approximation properties of the coefficients. The proof of the Theorem is based on L^2- estimates.

Introdução

Estamos interessados em estudar a hipoeliticidade global, isto é, a regularidade C^∞ das soluções, de uma classe de operadores diferenciais parcias lineares de segunda ordem, dados como soma de quadrados, de campos vetoriais reais, ou seja, quando P é dado por:

$$P = -\Delta_t - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(t)\partial_{x_j} \right)^2 \tag{1}$$

sendo que $(t_1, ..., t_m, x_1, ..., x_n) = (t, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$ e $a_j(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, com $a_j(t)$ a valores reais.

Para ser mais preciso, recordemos a definição de hipoeliticidade global. Dizemos que P é globalmente hipoelítico, (GH), se as condições $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^N)$ e $Pu \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^N)$ implicam que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^N)$.

Este nosso estudo foi baseado no artigo **Global Hypoellipticity and Simultaneous Approximability**, de Himonas, A. A. e Petronilho, G. (ver [HP]).

A organização desta dissertação foi elaborada como segue:

No capítulo 1 apresentamos os pré-requisitos necessários para o bom entendimento deste trabalho.

No capítulo 2 damos a definição de vetores simultaneamente aproximáveis e damos uma condição necessária e suficiente para que o operador (1) seja globalmente hipoelítico. Esta condição é expressa em termos de propriedades diofantinas dos coeficientes de P. (ver página 25).

Um modelo para a classe (1) é dado por $L = -\partial_t^2 - a^2(t)\partial_x^2$, sendo que $(t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad a(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais. Em [FO] foi provado que L é globalmente hipoelítico em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, $a \not\equiv 0$.

Para mais resultados sobre hipoeliticidade global sugerimos ao leitor as referências [GW], [H1], [HP1], [M].

Capítulo 1

Pré - Requisitos

Neste capítulo apresentamos uma série de definições, notações e resultados utilizados ao longo deste trabalho. Salientamos que as demonstrações dos resultados apresentados neste capítulo quando forem omitidas terão referências para tais.

1.1 Notações e Alguns Resultados

Apresentaremos abaixo algumas notações utilizadas nesta dissertação, juntamente com uma explicação breve do seu significado.

$\doteq$ igual por definição;

$x \cdot \xi$ é produto escalar usual;

$[x]$ menor inteiro maior ou igual a x;

$\dfrac{\partial}{\partial_{x_j}} = \partial_{x_j}$ derivada parcial em relação x_j;

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$;

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, sendo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $D_j^{\alpha_j} = \dfrac{1}{i}\partial_{x_j}^{\alpha_j}$, para $j = 1, ..., n$;

$\mathbb{N} \doteq \{0, 1, 2, ...\}$;

$\mathbb{N}^* \doteq \{1, 2, ...\}$;

$\blacksquare$ fim da demonstração.

Observação: Usaremos a letra C para representar diferentes constantes.

Consideremos $N \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{Z}^m$, $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $|\tau| = \sqrt{\tau_1^2 + ... + \tau_m^2}$ e $\|\tau\| = |\tau_1| + ... + |\tau_m|$. Lembremos que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m$, $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_m!$, $\tau^\alpha = \tau_1^{\alpha_1}\tau_2^{\alpha_2}...\tau_m^{\alpha_m}$. Notemos que $|\tau^\alpha| = |\tau_1|^{\alpha_1}|\tau_2|^{\alpha_2}...|\tau_m|^{\alpha_m}$.

Afirmação 1.1 $|\tau|^N \leq \|\tau\|^N = \sum_{|\alpha|=N} \dfrac{N!}{\alpha!}|\tau^\alpha|$

Demonstração: É fácil mostrar que $|\tau| \leq \|\tau\|$. Logo $|\tau|^N \leq \|\tau\|^N$. Resta mostrarmos que $\|\tau\|^N \overset{(*)}{=} \sum_{|\alpha|=N} \dfrac{N!}{\alpha!}|\tau^\alpha|$.

<u>caso m=1:</u> trivial.

<u>caso m=2:</u>

$$
\begin{aligned}
\|\tau\|^N &= (|\tau_1| + |\tau_2|)^N \\
&= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} |\tau_1|^{N-k}|\tau_2|^k \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{(N-k)!k!}|\tau_1|^{N-k}|\tau_2|^k \\
&= \sum_{j+k=N} \frac{N!}{j!k!}|\tau_1|^j|\tau_2|^k \\
&= \sum_{|(\alpha_1,\alpha_2)|=N} \frac{N!}{\alpha_1!\alpha_2!}|\tau^{(\alpha_1,\alpha_2)}|.
\end{aligned}
$$

Suponhamos que vale a igualdade (*) para $m = n - 1$. Note que

$$
\begin{aligned}
(|\tau_1| + |\tau_2| + ... + |\tau_{n-1}| + |\tau_n|)^N &= ((|\tau_1| + ... + |\tau_{n-1}|) + |\tau_n|)^N \\
&= \sum_{k+j=N} \frac{N!}{k!j!}(|\tau_1| + ... + |\tau_{n-1}|)^k|\tau_n|^j \\
&= \sum_{k+j=N} \frac{N!}{k!j!} \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!}|\tau_1|^{\beta_1}|\tau_2|^{\beta_2}...|\tau_{n-1}|^{\beta_{n-1}}|\tau_n|^j \\
&= \sum_{|\beta|+j=N} \frac{N!}{\beta!j!}|\tau_1|^{\beta_1}|\tau_2|^{\beta_2}...|\tau_{n-1}|^{\beta_{n-1}}|\tau_n|^j \\
&= \sum_{|(\alpha_1,...,\alpha_n)|=N} \frac{N!}{\alpha!}|\tau^\alpha|.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Lema 1.1 *Dado $N \in \mathbb{N}$, existe $C_N > 0$ tal que*

$$|\tau|^N |\xi|^N \geq C_N |(\tau, \xi)|^N, \quad \forall\ (\tau, \xi) \in (\mathbb{Z}^m \setminus 0) \times (\mathbb{Z}^n \setminus 0)\,. \tag{1.1}$$

Demonstração: Lembremos que $|(\tau, \xi)| = \sqrt{|\tau|^2 + |\xi|^2}$.

Definindo $\|(\tau, \xi)\| \doteq |\tau| + |\xi|$, vemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|(\tau, \xi)\| \leq |(\tau, \xi)| \leq \|(\tau, \xi)\|. \tag{1.2}$$

Observemos que, para $\tau \neq 0$ e $\xi \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}
&\|(\tau, \xi)\|^N = (|\tau| + |\xi|)^N = \sum_{\ell=0}^{N} \binom{N}{\ell} |\tau|^{N-\ell} |\xi|^\ell \\
&= |\tau|^N |\xi|^N \left[\frac{1}{|\xi|^N} + \binom{N}{1} \frac{1}{|\tau||\xi|^{N-1}} + \cdots + \binom{N}{N-1} \frac{1}{|\tau|^{N-1}|\xi|} + \frac{1}{|\tau|^N} \right] \\
&\leq |\tau|^N |\xi|^N \left[1 + \binom{N}{1} + \cdots + \binom{N}{N-1} + 1 \right] \\
&= C'_N |\tau|^N |\xi|^N.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|\tau|^N |\xi|^N \geq C_N \|(\tau, \xi)\|^N, \quad \tau \neq 0,\ \xi \neq 0. \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3) segue que

$$|\tau|^N |\xi|^N \geq C_N |(\tau, \xi)|^N, \quad \tau \neq 0,\ \xi \neq 0. \qquad \blacksquare$$

A Fórmula de Leibniz

Sejam $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, temos

$$\partial^\alpha (f.g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha - \beta} f \partial^\beta g, \tag{1.4}$$

sendo que

$$\binom{\alpha}{\beta} \doteq \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!\beta!}$$

e $\alpha! = \alpha_1! . \cdots . \alpha_n!$.

1.2 Espaços das Funções 2π-periódicas

Definição 1.1 *$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis definidas no $\mathbb{R}^n$ a valores complexos.*

Definição 1.2 *$C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções contínuas no $\mathbb{R}^n$, 2π-periódicas em cada variável a valores complexos.*

Definição 1.3 *$\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \doteq C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis no $\mathbb{R}^n$, 2π-periódicas em cada variável e a valores complexos.*

Definição 1.4 *Sejam $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que φ_j converge para φ em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), D^\alpha\varphi_j \to D^\alpha\varphi$ uniformemente em $\mathbb{R}^n$.*

Esta noção de convergência coincide com a induzida pela métrica

$$d(\varphi, \psi) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(\varphi - \psi)}{1 + \rho_k(\varphi - \psi)},$$

na qual $\rho_k, k \in \mathbb{N}$, é a semi-norma definida por

$$\rho_k(\phi) \doteq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |\alpha|\leq k}} |D^\alpha\phi(x)|, \tag{1.5}$$

para toda $\phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.1 *$\varphi_j \to \varphi$ em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $\rho_k(\varphi_j - \varphi) \to 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Ver [Z].

1.2.1 Série de Fourier em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.5 *Seja* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ *uma seqüência numérica em* $\mathbb{C}$. *Dizemos que a seqüência* $\{a_k\}$ *é rapidamente decrescente se para cada* $N \in \mathbb{N}$, *existe* $C = C(N) > 0$ *tal que*

$$|a_k| \leq C|k|^{-N}, \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Observação 1.1 *Equivalentemente,* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ *é rapidamente decrescente se para cada* $N \in \mathbb{N}$, *existe* $C = C(N) > 0$ *tal que*

$$|a_k| \leq C(1+|k|)^{-N}, \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^n.$$

Suponhamos que $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ satisfaça a Definição 1.5. Então dado $N \in \mathbb{N}$ existe $\tilde{C} = \tilde{C}(N) > 0$ tal que

$$|a_k| \leq \tilde{C}|k|^{-N}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Se $k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$ então temos $1+|k| \leq |k|+|k| = 2|k|$, e portanto

$$|a_k| \leq \tilde{C}|k|^{-N} = 2^N\tilde{C}(2|k|)^{-N} \leq 2^N\tilde{C}(1+|k|)^{-N}.$$

Definindo $C = \max\{|a_0|, 2^N\tilde{C}\}$ obtemos o desejado.

O outro lado é imediato, lembrando que $|k| < (1+|k|)$. ∎

Denotaremos o espaço das sequências rapidamente decrescente por $\mathbf{S}(\mathbb{Z}^{\mathbf{n}};\mathbb{C})$.

Teorema 1.2 *Seja* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ *uma seqüência rapidamente decrescente. Então*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{ik\cdot x}$$

converge em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e se*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{ik\cdot x}$$

então

$$a_k(f) \doteq \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\,dx = a_k.$$

onde $a_k(f)$ *é o k-ésimo coeficiente de Fourier de* f *e usaremos a notação* $\widehat{f}(k) = a_k(f)$.

Demonstração: Ver [Z].

Teorema 1.3 *Seja* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\,dx$$

forma uma seqüência rapidamente decrescente e

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k) e^{ik\cdot x}.$$

Demonstração: Ver [Z].

A série $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k) e^{ik\cdot x}$ é chamada de série de Fourier de f.

1.2.2 Série Parcial de Fourier em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Sejam p, q e $n \in \mathbb{N}^*$ tais que $n = p + q$. Consideremos a soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$.

Entenderemos $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ como sendo $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$.

Teorema 1.4 *Seja* $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^q}$ *uma seqüência de funções em* $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ *tal que para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^p$ *e* $N \in \mathbb{N}$ *existe* $C > 0$ *tal que*

$$|D^\alpha \phi_k(x)| \le C(1 + |k|)^{-N}, \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^q \text{ e } x \in \mathbb{R}^p.$$

Então, a função $\psi : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$\psi(x, y) \doteq \sum_{k\in\mathbb{Z}^q} \phi_k(x) e^{iy\cdot k}$$

pertence a $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [Z].

Teorema 1.5 *Seja $\phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\phi(x,y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} \phi_k(x) e^{iy\cdot k},$$

na qual $\phi_k \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ e

$$\phi_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{[-\pi,\pi]^q} \phi(x,y) e^{-iy\cdot k}\, dy.$$

Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{N}^p$ e $N \in \mathbb{N}$ existe $C > 0$ tais que

$$|D^\alpha \phi_k(x)| \leq C(1+|k|)^{-N}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^q \text{ e } x \in \mathbb{R}^p.$$

Demonstração: Ver [Z].

As funções $\phi_k(x)$ são chamadas coeficientes parciais de Fourier de ϕ e usaremos a notação $\widehat{\phi}(x,k) = \phi_k(x)$. A série $\sum_{k \in \mathbb{Z}^q} \widehat{\phi}(x,k) e^{iy\cdot k}$ é chamada de série parcial de Fourier de ϕ em relação a y.

1.3 Espaço das Distribuições 2π-periódicas

Definição 1.6 *Um funcional linear $u : \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ é dito contínuo (ou seqüencialmente contínuo) se para qualquer seqüência $\{\phi_j\}$ convergindo para 0 em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então $u(\phi_j)$ converge para 0 em $\mathbb{C}$.*

Definição 1.7 *O espaço vetorial*

$$\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \doteq \big\{ u : \quad u \text{ é um funcional linear contínuo em } \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \big\}$$

é chamado de espaço das distribuições 2π-periódicas, denominando $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ como distribuição 2π-periódica.

Teorema 1.6 *Seja* $u : \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *um funcional linear. São equivalentes:*

(i) u *é contínuo;*

(ii) Existem $C > 0$ *e* $m \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$| < u, \phi > | \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \phi(x)|, \quad \forall\ \phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Ver [Z].

Proposição 1.1 *Seja* $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Então* f *define uma distribuição* 2π-*periódica por:*

$$< T_f, \varphi > \doteq \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, ..., x_n)\varphi(x_1, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_n,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.8 *Uma seqüência* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *é convergente em* $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *se existe* $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *tal que, para toda* $\phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, *a seqüência* $< u_j, \phi >$ *converge para* $< u, \phi >$ *em* $\mathbb{C}$.

Definição 1.9 *Sejam* $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *Definimos as distribuições periódicas* $D^\alpha u$ *e* fu *como sendo:*

$$< D^\alpha u, \phi > \doteq (-1)^{|\alpha|} < u, D^\alpha \phi >, \quad \forall\ \phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n);$$

$$< fu, \phi > \doteq < u, f\phi >, \quad \forall\ \phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

1.3.1 Série de Fourier em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.10 *Seja* $\{u_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ *uma seqüência em* $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *A série* $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} u_m$ *é convergente em* $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *se a seqüência das reduzidas* $S_l \doteq \sum_{|m|\leq l} u_m$ *for convergente em* $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.7 *Se* $u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} u_m \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *então* $D^\alpha u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} D^\alpha u_m$.

Demonstração: Ver [Z].

Definição 1.11 *Uma seqüência numérica* $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ *é denominada de crescimento lento se existem constantes* $C > 0$ *e* $k \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$|a_m| \leq C|m|^k, \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Observação 1.2 *A definição acima é equivalente a existirem constantes* $C > 0$ *e* $k \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$|a_m| \leq C\big(1 + |m|\big)^k, \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}^n.$$

A demonstração é análoga à prova da observação 1.1.

Teorema 1.8 *Seja* $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ *uma seqüência de crescimento lento. Então a série*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{ix \cdot m}$$

é convergente em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e se*

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{ix \cdot m},$$

então

$$a_m = \frac{1}{(2\pi)^n} < u, e^{-ix \cdot m} > .$$

Demonstração: Ver [Z].

Teorema 1.9 *Seja* $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Se* $\widehat{u}(m) = \frac{1}{(2\pi)^n} < u, e^{-ix \cdot m} >$, *então* $\{\widehat{u}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ *é uma seqüência de crescimento lento e*

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}(m) e^{ix \cdot m} \quad \text{em } \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Como $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, existem $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned}
|\widehat{u}(m)| &= \frac{1}{(2\pi)^n}| < u, e^{-ix\cdot m} > | \leq \frac{1}{(2\pi)^n} C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha e^{-ix.m}| \\
&= \frac{C}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(-1)^{|\alpha|} m^\alpha e^{-ix.m}| \\
&= \frac{C}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |m^\alpha| = \frac{C}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\leq k} |m^\alpha| \\
&\leq C' \sum_{|\alpha|\leq k} (1+|m|)^{|\alpha|} \leq C''(1+|m|)^k,
\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^n$.

Portanto $\{\widehat{u}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ é uma seqüência de crescimento lento.

Pelo Teorema 1.8 existe $v \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que $v = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(m) e^{ix\cdot m}$. Vamos mostrar que $u = v$ em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Para isto necessitamos do seguinte

Lema 1.2 *Seja* $v(x) = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\eta) e^{ix\cdot\eta}$, *então* $\widehat{v}(m) = \widehat{u}(m)$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}^n$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\widehat{v}(m) &= \frac{1}{(2\pi)^n} < v, e^{-ix\cdot m} > \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{j\to\infty} < \sum_{|\eta|\leq j} \widehat{u}(\eta) e^{ix\cdot\eta}, e^{-ix\cdot m} > \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{j\to\infty} \sum_{|\eta|\leq j} \widehat{u}(\eta) \int_{[0,2\pi]^n} e^{i(\eta-m).x} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\eta) \int_{[0,2\pi]^n} e^{i(\eta-m).x} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{u}(m)(2\pi)^n = \widehat{u}(m).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Mostremos agora que $u = v$ em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Então $\varphi(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi}(m) e^{ix\cdot m}$. Seja $S_j(x) = \sum_{|m|\leq j} \widehat{\varphi}(m) e^{ix\cdot m}$, $j = 1, 2, \ldots$. Temos que $S_j \to \varphi$ em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Como $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned} < u, \varphi > &= \lim_{j\to\infty} < u, S_j > \\ &= \lim_{j\to\infty} < u, \sum_{|m|\le j} \widehat{\varphi}(m) e^{ix\cdot m} > \\ &= \lim_{j\to\infty} \sum_{|m|\le j} \widehat{\varphi}(m) < u, e^{ix\cdot m} > \\ &= \lim_{j\to\infty} \sum_{|m|\le j} \widehat{\varphi}(m) < v, e^{ix\cdot m} > \\ &= \lim_{j\to\infty} < v, S_j(x) > = < v, \varphi > . \end{aligned}$$

Portanto, $u = v = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(m) e^{ix\cdot m}$ em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. ■

Os números complexos $\widehat{u}(m)$ são chamados de coeficientes de Fourier de u. A série $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(m) e^{ix\cdot m}$ é chamada de série de Fourier de u.

1.3.2 Série Parcial de Fourier em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Sejam p, q e $n \in \mathbb{N}^*$ tais que $n = p + q$ e $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$.

Teorema 1.10 *Se $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então*

$$u = \sum_{m\in\mathbb{Z}^q} u_m(x) e^{iy\cdot m},$$

sendo que $u_m \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$, dada por

$$< u_m, \varphi(x) > = \frac{1}{(2\pi)^q} < u, \varphi(x) e^{-iy\cdot m} >,$$

com $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$. Além disso, para cada $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$, $\Big\{ < u_m, \varphi(x) > \Big\}_{m\in\mathbb{Z}^q}$ é uma seqüência de crescimento lento.

Demonstração: Ver [Z].

Teorema 1.11 *Seja $\{u_m\}_{m\in\mathbb{Z}^q}$ uma seqüência de $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$, satisfazendo a seguinte condição:*

Existe $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$|< u_m, \varphi >| \leq C\rho_k(\varphi)(1 + |m|)^k,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$ e $m \in \mathbb{Z}^q$, sendo ρ_k a semi-norma definida em (1.5).

Então $u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} u_m(x)e^{iy \cdot m} \quad \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [Z].

As distribuições u_m são chamadas de coeficientes parciais de Fourier de u e usaremos a notação $\widehat{u}(x, m) = u_m(x)$. A série $\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \widehat{u}(x, m)e^{iy \cdot m}$ é chamada de série parcial de Fourier de u em relação a y.

Consideremos o operador $P(t, \partial_t, \partial_x) = \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq m+n} a_{\alpha,\beta}(t)\partial_t^\alpha \partial_x^\beta$, sendo $(t, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$ e $a_{\alpha,\beta}(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$. Usemos a notação

$P(t, \partial_t, \xi) = \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq m+n} a_{\alpha,\beta}(t)(i\xi)^\beta \partial_t^\alpha$.

Afirmação 1.2 $\widehat{Pu}(t, \xi) = P(t, \partial_t, \xi)\widehat{u}(t, \xi)$, *sendo que $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$.*

Demonstração: De fato, seja $\gamma \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m_t)$ qualquer.

$$\begin{aligned}
< \widehat{Pu}(t, \xi), \gamma(t) > &= \frac{1}{(2\pi)^n} < Pu, \gamma(t)e^{-ix.\xi} > \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq m+n} < a_{\alpha,\beta}(t)\partial_t^\alpha \partial_x^\beta u, \gamma(t)e^{-ix.\xi} > \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq m+n} < \partial_t^\alpha \partial_x^\beta u, a_{\alpha,\beta}(t)\gamma(t)e^{-ix.\xi} > \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq m+n} (-1)^{|\alpha|} < \partial_x^\beta u, \partial_t^\alpha[a_{\alpha,\beta}(t)\gamma(t)]e^{-ix.\xi} > \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq m+n} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} < u, \partial_t^\alpha[a_{\alpha,\beta}(t)\gamma(t)](-i\xi)^\beta e^{-ix.\xi} > \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq m+n} (-1)^{|\alpha|+2|\beta|} < u, \partial_t^\alpha[a_{\alpha,\beta}(t)\gamma(t)](i\xi)^\beta e^{-ix.\xi} > \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq m+n} (-1)^{|\alpha|} < u, \partial_t^\alpha[a_{\alpha,\beta}(t)\gamma(t)](i\xi)^\beta e^{-ix.\xi} >
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{|(\alpha,\beta)|\le m+n} (-1)^{|\alpha|} < \widehat{u}(t,\xi), \partial_t^{\alpha}[a_{\alpha,\beta}(t)\gamma(t)](i\xi)^{\beta} > \\
&= \sum_{|(\alpha,\beta)|\le m+n} < \partial_t^{\alpha}\widehat{u}(t,\xi), a_{\alpha,\beta}(t)\gamma(t)(i\xi)^{\beta} > \\
&= \sum_{|(\alpha,\beta)|\le m+n} < a_{\alpha,\beta}(t)(i\xi)^{\beta}\partial_t^{\alpha}\widehat{u}(t,\xi), \gamma(t) > \\
&= < \sum_{|(\alpha,\beta)|\le m+n} a_{\alpha,\beta}(t)(i\xi)^{\beta}\partial_t^{\alpha}\widehat{u}(t,\xi), \gamma(t) > \\
&= < P(t,\partial_t,\xi)\widehat{u}(t,\xi), \gamma(t) > .
\end{aligned}
$$

■

1.4 Outros Resultados

Definição 1.12 *Seja P um operador diferencial parcial linear, ODPL, com coeficientes pertencentes a $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. P é dito ser globalmente hipoelítico, (GH), se as condições $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $Pu \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ implicam que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

Definição 1.13 *Seja $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Definimos*

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{[-\pi,\pi]^n} |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definição 1.14 *Um número irracional α é de Liouville se, para quaisquer $C > 0$ e $K > 0$ existe $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $q \neq 0$, tais que*

$$|p - \alpha q| < \frac{C}{|q|^K}.$$

Exemplo: $\alpha \doteq \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ é um número de Liouville. (Ver [F]).
Como conseqüência temos a seguinte definição:

Definição 1.15 *Um número irracional α é não-Liouville se existem $C > 0$ e $K > 0$ tais que*

$$|p - \alpha q| \geq \frac{C}{|q|^K}, \quad \forall\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2,\ q \neq 0.$$

Exemplo: $\alpha \doteq \sqrt{p}$, com p primo, é um número não-Liouville. (Ver [Z]).

Teorema 1.12 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e*

$$P = D_x - \alpha D_y,\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então P é (GH) se, e somente se, α é número irracional não-Liouville.

Demonstração: Ver [GW].

Teorema 1.13 *Seja $P = -\partial_t^2 - (a(t)\partial_x)^2$, sendo que $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ e $a(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais. Então P é (GH) se, e somente se,* a *função a não é identicamente nula.*

Demonstração: Ver [FO].

Teorema 1.14 *Seja $P = -\partial_t^2 - (\partial_{x_1} + a(t)\partial_{x_2})^2$, sendo que $(t,x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3$ e $a(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$* a *valores reais. Então P é (GH) se, e somente se,* a *imagem de $a(t)$ contém um número não-Liouville.*

Demonstração: Ver [H1].

Capítulo 2

Hipoeliticidade Global e Aproximações Simultâneas

Neste capítulo daremos uma condição necessária e suficiente para que um operador soma de quadrados de campos vetoriais reais seja globalmente hipoelítico. Esta condição é expressa em função do conceito de vetores não simultaneamente aproximáveis dada a seguir.

2.1 Definições e Exemplos

Definição 2.1 *Uma coleção de vetores $v_1, ..., v_\ell$ em $\mathbb{R}^d$ é* ***não simultaneamente aproximável (não SA)*** *se existem $C > 0$ e $K > 0$ tais que para quaisquer $\eta = (\eta_1, ..., \eta_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ e $\xi \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ temos*

$$|\eta_j - v_j.\xi| \geq \frac{C}{|\xi|^K} \quad \textit{para algum } j = 1, ..., \ell. \tag{2.1}$$

Observação 2.1 *Quando $\ell = 1$, esta é a definição de um vetor não-Liouville. Quando $d = 1$, esta é a definição de uma coleção de números reais $v_1, ..., v_\ell$ não simultaneamente aproximáveis (veja [HP1]). Se $\ell = 1$ e $d = 1$ então esta é a definição de um número não - Liouville (ver definição1.15).*

Observação 2.2 *Segue da Definição 2.1 que uma coleção de vetores* $v_1, ..., v_\ell$ *em* $\mathbb{R}^d$ *é* ***simultaneamente aproximável (SA)*** *se, e somente se, para quaisquer* $C > 0$ *e* $K > 0$ *existem* $\xi \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ *e* $\eta = (\eta_1, ..., \eta_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ *tais que*

$$|\eta_j - v_j.\xi| < \frac{C}{|\xi|^K}, \ \forall\, j = 1, ..., \ell. \tag{2.2}$$

Novamente, quando $\ell = 1$ *esta é a definição de um vetor Liouville, e quando* $d = 1$ *esta é a definição de uma coleção de números reais* $v_1, ..., v_\ell$ *ser simultaneamente aproximável. Se* $\ell = 1$ *e* $d = 1$ *então esta é a definição de um número de Liouville.*

Exemplos: Iniciemos com exemplos de vetores não-Liouville.

Seja $v = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ com $\alpha_1, ..., \alpha_n$ números algébricos e tais que $1, \alpha_1, ..., \alpha_n$ são linearmente independentes sobre os racionais. Então segue de [S] que existem $C > 0$ e $K > 0$ tais que

$$|\eta - v.\xi| \geq \frac{C}{|\xi|^K}, \quad \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0, \quad \forall\, \eta \in \mathbb{Z},$$

ou seja, v é um vetor não-Liouville.

Observemos que se v_1 é um vetor em $\mathbb{R}^d$ não-Liouville então $v_1, v_2, ..., v_\ell$ são vetores (não SA) para quaisquer vetores $v_2, ..., v_\ell$ em $\mathbb{R}^d$.

Observemos que se α e β são números racionais então α e β são números (SA).

Temos também que se os números $\alpha_{11}, ..., \alpha_{\ell 1}$ são (SA) então os vetores $v_1 \doteq (\alpha_{11}, ..., \alpha_{1d}), ..., v_\ell \doteq (\alpha_{\ell 1}, ..., \alpha_{\ell d})$ são (SA), para quaisquer números reais $\alpha_{jk}, \quad j = 1, ..., \ell \quad, k = 2, ..., d$. (Ver [HP1]).

É fácil ver que se α é um número não-Liouville, então α, β são (não SA), para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$.

Observemos também que se um vetor $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é não-Liouville então todas as suas coordenadas são números não-Liouville. Assim, considerando $v \doteq (\beta_1, \beta_2)$, sendo β_2 um número de Liouville, temos que v é um vetor Liouville.

Afirmação 2.1 *Se uma coleção de vetores $v_1, \ldots, v_\ell$ em $\mathbb{R}^d$ é (SA) então existem seqüências $\{\xi_n\} = \{(\xi_{1,n}, \ldots, \xi_{d,n})\}$, $\xi_n \in \mathbb{Z}^d \setminus 0$ e $\{\eta_n\} = \{(\eta_{1,n}, \ldots, \eta_{\ell,n})\}$, $\eta_n \in \mathbb{Z}^\ell$ tais que $|\eta_{j,n} - v_j.\xi_n| < \frac{1}{|\xi_n|^n}$, $\forall j = 1, \ldots, \ell$ e* $|\xi_n| \geq 2$, $n = 1, 2, \ldots$.

Demonstração: Como $v_1, ..., v_\ell$ são (SA) então dados $C = \frac{1}{2^{n+1}}$ e $K = n$ existem $\tilde{\eta}_n$ e $\tilde{\xi}_n$ tais que

$$|\tilde{\eta}_{j,n} - v_j.\tilde{\xi}_n| < \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{|\tilde{\xi}_n|^n}, \quad \forall j = 1, \ldots, \ell.$$

Para os valores de n tais que $|\tilde{\xi}_n| = 1$ definimos $\xi_n = 2\tilde{\xi}_n$ e $\eta_n = 2\tilde{\eta}_n$. Assim,

$$|\eta_{j,n} - v_j.\xi_n| = 2|\tilde{\eta}_{j,n} - v_j.\tilde{\xi}_n| < 2\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{|\tilde{\xi}_n|^n} = \frac{\frac{1}{2^n}2^n}{2^n|\tilde{\xi}_n|^n} = \frac{1}{|2\tilde{\xi}_n|^n} = \frac{1}{|\xi_n|^n}.$$

Além disso,

$$|\xi_n| = |2\tilde{\xi}_n| = 2|\tilde{\xi}_n| = 2.1 = 2.$$

Logo as seqüências

$$\xi_n = \begin{cases} \tilde{\xi}_n, & \text{se} \quad |\tilde{\xi}_n| \geq 2 \\ 2\tilde{\xi}_n, & \text{se} \quad |\tilde{\xi}_n| = 1 \end{cases}$$

e

$$\eta_n = \begin{cases} \tilde{\eta}_n, & \text{se} \quad |\tilde{\xi}_n| \geq 2 \\ 2\tilde{\eta}_n, & \text{se} \quad |\tilde{\xi}_n| = 1 \end{cases}$$

satisfazem o desejado. ■

Observemos que na Afirmação 2.1 existem duas possibilidades:

i) Existem infinitos índices n tais que os $\xi_n^{'}s$ são dois a dois distintos;

ii) Os $\xi_n^{'}s$ assumem um número finito de valores.

Se ocorrer $i)$ então podemos definir novas seqüências $\{\tilde{\xi}_n\}$ e $\{\tilde{\eta}_n\}$ satisfazendo

$$|\tilde{\eta}_{j,n} - v_j.\tilde{\xi}_n| < \frac{1}{|\tilde{\xi}_n|^n}, \quad \forall j = 1, \ldots, \ell \tag{2.3}$$

com $|\tilde{\xi}_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$.

De fato, seja $J \doteq \{n \in \mathbb{N} : \text{ os } \xi_n^{'}s \text{ são dois a dois distintos}\}$ e consideremos $\tilde{\xi}_n = \xi_n, \quad \tilde{\eta}_n = \eta_n,\ n \in J.$ Temos que (2.3) segue da Afirmação 2.1 e da definição de $\tilde{\xi}_n$ e $\tilde{\eta}_n$.

Mostremos que $|\tilde{\xi}_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$: Suponha que exista $M_0 > 0$ tal que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ tal que $|\tilde{\xi}_n| \leq M_0$. Assim, temos:

dado $N = 1, \quad \exists\, n_1 \geq 1$ tal que $|\tilde{\xi}_{n_1}| \leq M_0$.

dado $N = n_1 + 1, \quad \exists\, n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ tal que $|\tilde{\xi}_{n_2}| \leq M_0$.

Continuando esse processo sucessivamente construímos uma subseqüência $\{\tilde{\xi}_{n_j}\}$ de $\{\tilde{\xi}_n\}$ tal que $|\tilde{\xi}_{n_j}| \leq M_0$, $\forall\, j = 1, 2, \ldots$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{\xi}_{n_j} = \xi_{n_0}$ para uma infinidade de $j's$, o que contradiz o fato de $\{\tilde{\xi}_{n_j}\}$ ser uma subseqüência de $\{\tilde{\xi}_n\}$. Logo $|\tilde{\xi}_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. ■

Se ocorrer a situação $ii)$ então podemos definir novas seqüências $\{\tilde{\xi}_n\}$ e $\{\tilde{\eta}_n\}$ com todos os termos dois a dois distintos satisfazendo

$$|\tilde{\eta}_{j,n} - v_j.\tilde{\xi}_n| = 0 < \frac{1}{|\tilde{\xi}_n|^n}, \quad \forall j = 1, \ldots, \ell \quad e\, n = 1, 2, ...$$

e pelo caso anterior $|\tilde{\xi}_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$.

De fato, segue de $ii)$ que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_n = \xi_{n_0}$ para uma infinidade de $n's$. Seja $J \doteq \{n \in \mathbb{N} : \ \xi_n = \xi_{n_0}\}$. Segue da Afirmação 2.1 que $|\xi_{n_0}| \geq 2$. Para $n \in J$ temos

$$|\eta_{j,n} - v_j.\xi_{n_0}| < \frac{1}{|\xi_{n_0}|^n}, \quad \forall j = 1, \ldots, \ell \quad .$$

Assim, para cada $j \in \{1, ..., \ell\}$, tomando o limite quando $n \to +\infty$ obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \eta_{j,n} = v_j.\xi_{n_0}$$

e como $\eta_{j,n} \in \mathbb{Z}$ então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\eta_{j,n} = v_j.\xi_{n_0}, \; \forall\, j \in \{1, ..., \ell\} \quad e \quad \forall\, n \geq n_1.$$

Portanto $v_j.\xi_{n_0} \in \mathbb{Z}$. Definimos $\tilde{\xi}_n = n\xi_{n_0}$, $n \geq n_1$ e $\tilde{\eta}_n = n\eta_n$, $n \geq n_1$. Assim, temos

1)$\tilde{\xi}_n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, $\forall n \geq n_1$ e são dois a dois distintos.

2) $\tilde{\eta}_n = n\eta_n = (n\eta_{1,n}, ..., n\eta_{\ell,n}) = (nv_1.\xi_{n_0}, ..., nv_\ell.\xi_{n_0}) \in \mathbb{Z}^\ell$ e são dois a dois distintos.

Além disso,

$$|\tilde{\eta}_{j,n} - v_j.\tilde{\xi}_n| = |nv_j.\xi_{n_0} - v_j.n\xi_{n_0}| = |nv_j.\xi_{n_0} - nv_j.\xi_{n_0}| = 0$$

para todo $n \geq n_1$ e $j \in \{1, ..., \ell\}$. Reindexando obtemos o desejado. ■

Logo, na Afirmação 2.1 podemos supor também que $|\xi_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$.

Também observemos que a seqüência $\{\eta_n\}$ da Afirmação 2.1 satisfaz

$$|\eta_{j,n}| < 1 + |v_j||\xi_n|, \; \forall\, j \in \{1, \ldots, \ell\} \quad e \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

De fato,

$$|\eta_{j,n}| - |v_j||\xi_n| \leq |\eta_{j,n}| - |v_j.\xi_n| \leq |\eta_{j,n} - v_j.\xi_n| < \frac{1}{|\xi_n|^n} \leq \frac{1}{2^n} < 1,$$

então $|\eta_{j,n}| < 1 + |v_j||\xi_n|, \; \forall\, j \in \{1, \ldots, \ell\} \quad e \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. ■

Levando em conta as observações feitas acima, podemos reescrever a Afirmação 2.1 da seguinte forma:

Lema 2.1 *Se uma coleção de vetores* $v_1, \ldots, v_\ell$ *em* $\mathbb{R}^d$ *é (SA) então existem seqüências* $\{\xi_n\} = \{(\xi_{1,n}, \ldots, \xi_{d,n})\}$, $\xi_n \in \mathbb{Z}^d \setminus 0$ *e* $\{\eta_n\} = \{(\eta_{1,n}, \ldots, \eta_{\ell,n})\}$, $\eta_n \in \mathbb{Z}^\ell$ *tais que* $|\eta_{j,n} - v_j.\xi_n| < \frac{1}{|\xi_n|^n}$, $\forall j = 1, \ldots, \ell$ *com* $|\xi_n| \geq 2$, $n = 1, 2, \ldots$, $|\xi_n| \to +\infty$ *quando* $n \to +\infty$ *e* $|\eta_{j,n}| < 1 + |v_j||\xi_n|$, $\forall j \in \{1, \ldots, \ell\}$ *e* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Também precisamos da seguinte

Definição 2.2 *Seja* $(b_1(t), ..., b_\ell(t))$ *um vetor de funções a valores reais as quais são linearmente independentes sobre* $\mathbb{R}$. *Dizemos que um vetor de funções* $(f_1(t), ..., f_d(t))$ *pertence a* $(SA)^c(b_1, ..., b_\ell)$ *se as seguintes condições valem:*

(1) $\{f_1, ..., f_d\}$ *está contido no gerado de* $\{b_1, ..., b_\ell\}$*;*

(2) *Os* ℓ *vetores colunas da matriz* (λ_{jk}) *na expressão*

$$(f_1, ..., f_d)^t = (\lambda_{jk})(b_1, ..., b_\ell)^t$$

são vetores ***não simultaneamente aproximáveis*** *em* $\mathbb{R}^d$.

Observação 2.3 *Seja* $(b_1(t), ..., b_\ell(t))$ *um vetor de funções a valores reais as quais são linearmente independentes sobre* $\mathbb{R}$. *Dizemos que um vetor de funções* $(f_1(t), ..., f_d(t))$ *pertence a* $(SA)(b_1, ..., b_\ell)$ *se as seguintes condições valem:*

(1) $\{f_1, ..., f_d\}$ *está contido no gerado de* $\{b_1, ..., b_\ell\}$*;*

(2) *Os* ℓ *vetores colunas da matriz* (λ_{jk}) *na expressão*

$$(f_1, ..., f_d)^t = (\lambda_{jk})(b_1, ..., b_\ell)^t$$

são vetores ***simultaneamente aproximáveis*** *em* $\mathbb{R}^d$.

Com o objetivo de esclarecer a condição que aparecerá no teorema central vamos analisar alguns exemplos.

Exemplo 1: Consideremos o operador $P_1 = -\partial_t^2 - (a_1(t)\partial_x)^2$, com $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ e $a_1(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais. Sabemos, pelo Teorema 1.13 (pag. 16), que P_1 é (GH) se, e somente se, $a_1 \not\equiv 0$. Observemos que $a_1 \not\equiv 0$ se, e somente se, a_1 é uma função linearmente independente em $\mathbb{R}$, (LI em $\mathbb{R}$).

Exemplo 2: Consideremos o operador $P_2 = -\partial_t^2 - (\partial_{x_1} + a_2(t)\partial_{x_2})^2$, com $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ e $a_2(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais. Então P_2 é (GH) se, e somente se, a imagem de a_2 contém um número não-Liouville. (Ver Teorema 1.14, pag. 16).

Suponha que a imagem de $a_2(t)$ contém um número não-Liouville.

1^o*caso* : Se $a_2(t)$ é constante então $a_2 = \lambda.1$, com λ um número não-Liouville. Assim, a_2 pertence ao gerado pela função constante 1 com coeficiente λ que é um número não-Liouville e portanto é um vetor não simultaneamente aproximável.

2^o*caso* : Se $a_2(t)$ é não constante temos que $1, a_2$ são LI. De fato, se supormos que existe $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tal que $\alpha.1 + \beta.a_2(t) = 0$, então teremos $\beta \neq 0$, pois se $\beta = 0$ então $\alpha = 0$. Logo teremos que $a_2(t) = \frac{-\alpha}{\beta} = constante$, o que nos dá uma contradição.

Teorema 2.1 *Seja $P = -\partial_t^2 - (\partial_{x_1} + a_2(t)\partial_{x_2} + a_3(t)\partial_{x_3})^2$, com $(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ e $a_2(t), a_3(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais. Então P é (GH) se, e somente se, vale uma das seguintes condições:*

- *Se a_2 e a_3 são ambas constantes então (a_2, a_3) é um vetor não-Liouville.*
- *Se pelo menos uma entre as funções a_2 e a_3 é uma função não constante, então nenhuma delas pode ser escrita como uma combinação linear da outra e do número 1 com coeficientes que são (SA).*

Demonstração: Ver [HP1]

<u>Exemplo 3</u>: Em $\mathbb{R}^4$ consideremos o seguinte operador:

$$P_4 = -\partial_t^2 - (\partial_{x_1} + a_2(t)\partial_{x_2} + a_3(t)\partial_{x_3})^2,$$

com $(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ e $a_2(t), a_3(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais.

<u>1^o*caso*</u> : Suponhamos a_2 e a_3 constantes. Então segue do Teorema 2.1 que P_4 é (GH) se, e somente se, (a_2, a_3) é um vetor não-Liouville. Observemos que a condição acima pode ser escrita da seguinte forma: $a_1 \equiv 1 \not\equiv 0$ é LI em $\mathbb{R}$ e que a_2 e a_3 pertencem ao gerado por 1, isto é, $a_2 = a_2.1$ e $a_3 = a_3.1$. Notemos também que

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{2\times1} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{2\times1} (1)_{1\times1}$$

com (a_2, a_3) um vetor não-Liouville e portanto é um vetor não simultaneamente aproximável.

<u>2^o*caso*</u> : Uma entre as funções a_2 e a_3 não é constante. Suponhamos sem perda de generalidade que a_2 seja não constante. Segue do Teorema 2.1 que P_4 é (GH) se, e somente se, nenhuma delas pode ser escrita como combinação linear da outra e do número 1 com coeficientes que são (SA). Como a_2 é não constante então 1 e a_2 são LI sobre $\mathbb{R}$.

<u>*caso 2.1*</u> : 1, a_2 e a_3 são LI. Assim, nenhuma entre a_2 e a_3 pode ser escrita como combinação linear da outra e do número 1.

<u>*caso 2.2*</u> : 1, a_2 e a_3 são LD sobre $\mathbb{R}$. Observemos que neste caso a condição acima pode ser escrita da seguinte forma: $a_3 = \lambda a_2 + \beta.1$ e os números λ e β não são (SA). Logo, a_3 pertence ao gerado por $\{1, a_2\}$ e notemos que

$$(a_3)_{1\times1} = \begin{pmatrix} \beta & \lambda \end{pmatrix}_{1\times2} \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix}_{2\times1}$$

e os vetores $v_1 = \beta$ e $v_2 = \lambda$ não são (SA).

2.2 Teorema Central

Com as observações feitas nos três exemplos da seção anterior podemos enunciar nosso resultado central desta seção.

O que observamos nos três exemplos anteriores é que o número de funções LI, sobre $\mathbb{R}$, é importante bem como a forma que as funções restantes, que não são LI sobre $\mathbb{R}$, são escritas como combinação linear daquelas que são LI sobre $\mathbb{R}$.

Assim, dadas $a_1(t), a_2(t), ..., a_n(t)$ funções a valores reais denotaremos por k_0 o número de funções, entre $a_1(t), a_2(t), ..., a_n(t)$, que são LI sobre $\mathbb{R}$. Logo $0 \leq k_0 \leq n$.

Teorema 2.2 *Seja P um operador diferencial definido por*

$$P = -\Delta_t - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(t) \partial_{x_j} \right)^2 \tag{2.4}$$

em que $(t_1, ..., t_m, x_1, ..., x_n) = (t, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$ e $a_j(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, e são a valores reais. Suponhamos que $1 \leq k_0 \leq n - 1$. Então P é globalmente hipoelítico (GH), em $\mathbb{R}^{m+n}$, se, e somente se, após uma possível renomeação das variáveis $x_1, ..., x_n$ e dos coeficientes correspondentes $a_1, ..., a_n$, tivermos $(a_{k_0+1}, ..., a_n) \in (SA)^c(a_1, ..., a_{k_0})$.

2.2.1 Necessidade

Demonstração: Suponhamos que a condição dada no Teorema 2.2 não vale, isto é, $(a_{k_0+1}, ..., a_n) \in (SA)(a_1, ..., a_{k_0})$. Então,

$$a_m = \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k^m a_k, \qquad m = k_0 + 1, ..., n$$

e os vetores $(\lambda_k^{k_0+1}, ..., \lambda_k^n)$, $k = 1, ..., k_0$, são simultaneamente aproximáveis. Assim o operador P toma a forma

$$P = -\Delta_t - \left(\sum_{k=1}^{k_0} a_k(t) \Big(\partial_{x_k} + \sum_{m=k_0+1}^{n} \lambda_k^m \partial_{x_m} \Big) \right)^2. \qquad (2.5)$$

Visto que os k_0 vetores $(\lambda_k^{k_0+1}, ..., \lambda_k^n)$, $k = 1, ..., k_0$ são simultaneamente aproximáveis, segue do Lema 2.1 que existem seqüências $\{\xi_\ell\} = \{(\xi_{k_0+1,\ell}, ..., \xi_{n,\ell})\}$, $\xi_\ell \in \mathbb{Z}^{(n-k_0)} \setminus \{0\}$ e $\{\eta_\ell\} = \{(\eta_{1,\ell}, ..., \eta_{k_0,\ell})\}$, $\eta_\ell \in \mathbb{Z}^{k_0}$, tais que

$$\left| \eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^{n} \lambda_k^m \xi_{m,\ell} \right| < |\xi_\ell|^{-\ell}, \qquad (2.6)$$

para qualquer $k = 1, ..., k_0$, com $|\xi_\ell| \to +\infty$ quando $\ell \to +\infty$.

Definimos $u(t,x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\{i(\eta_\ell . x' - \xi_\ell . x'')\}$, sendo que $x' = (x_1, ..., x_{k_0})$, $x'' = (x_{k_0+1}, ..., x_n)$.

Mostremos que $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n}) \setminus \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$: Note que podemos escrever

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^{m+n}} a_k \exp\{i(t,x).k\}$$

sendo que

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{se } \; k = k_\ell \doteq (0, ..., 0, \eta_{1,\ell}, ..., \eta_{k_0,\ell}, -\xi_{k_0+1,\ell}, ..., -\xi_{n,\ell}), \ell = 1, 2, ... \\ 0, & \text{se } \; k \neq k_\ell, \forall\, \ell = 1, 2, ... \end{cases}.$$

Temos que existe $C = 1$ e $K = 1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_k| \leq C|k|^K$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}^{m+n}$. Portanto $\{a_k\}$ é de crescimento lento. Logo pelo Teorema 1.8 segue que $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Temos também que $\{a_k\}$ não é rapidamente decrescente. Suponhamos que $\{a_k\}$ seja rapidamente decrescente, então para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ tal que $|a_k| \leq C_N |k|^{-N}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}^{m+n} \setminus 0$. Em particular $|a_{k_\ell}| = 1 \leq C_N |k_\ell|^{-N}$, $\forall\, \ell = 1, 2, ...$ O que dá uma contradição, pois segue do Lema 2.1 que $|\xi_\ell| \to +\infty$ e portanto $C_N |k_\ell|^{-N} \to 0$ quando $\ell \to +\infty$. Daí pela contrapositiva do Teorema 1.3 segue que $u \notin \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Consideremos agora $L = L(t,\partial_x) \doteq \sum_{k=1}^{k_0} a_k(t)\Big(\partial_{x_k} + \sum_{m=k_0+1}^{n} \lambda_k^m \partial_{x_m}\Big)$ e $E_\ell(x) \doteq \exp\{i(\eta_\ell.x' - \xi_\ell.x'')\}$. Temos

$$L(E_\ell)(t,x) = i\left[\sum_{k=1}^{k_0} a_k(t)\Big(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^{n} \lambda_k^m \xi_{m,\ell}\Big)\right] E_\ell \doteq i g_\ell(t) E_\ell(x)$$

implicando que

$$\begin{aligned} -L^2 E_\ell(t,x) &= -L(LE_\ell)(t,x) = -L(ig_\ell(t)E_\ell(x)) = -L(ig_\ell E_\ell)(t,x) \\ &= -ig_\ell(t)L(E_\ell)(t,x) = -ig_\ell(t)ig_\ell(t)E_\ell(x) = [g_\ell(t)]^2 E_\ell(x). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Logo, usando o Teorema 1.7 e (2.7) obtemos que

$$Pu = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{k_0} a_k(t)\Big(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^{n} \lambda_k^m \xi_{m,\ell}\Big)\right]^2 \exp\{i(\eta_\ell.x' - \xi_\ell.x'')\}.$$

Note que podemos escrever

$$Pu = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} b_\gamma(t) e^{ix.\gamma}$$

sendo que

$$b_\gamma(t) = \begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{k_0} a_k(t)\Big(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^{n} \lambda_k^m \xi_{m,\ell}\Big)\right]^2, & \text{se } \gamma = \tilde{k}_\ell \doteq (\eta_\ell, -\xi_\ell), \ell = 1,2,... \\ 0 & \text{, se } \gamma \neq \tilde{k}_\ell, \forall\, \ell = 1,2,... \end{cases}.$$

Mostremos agora que $Pu \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$. Para isso usaremos o Teorema 1.4. Queremos mostrar que dados $\alpha \in \mathbb{N}^m$ e $N \in \mathbb{N}$, existe $C_N > 0$ tal que

$$|\partial_t^\alpha b_\gamma(t)| \leq C_N |\gamma|^{-N}, \quad \forall\, \gamma \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \forall\, t \in \mathbb{R}^m.$$

Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^m$ e $N \in \mathbb{N}$ dados.

Se $\gamma \neq \tilde{k}_\ell, \forall\, \ell = 1,2,...$, temos

$$|\partial_t^\alpha b_\gamma(t)| = |\partial_t^\alpha 0| = 0 \leq |\gamma|^{-N}, \quad \forall\, \gamma \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \forall\, t \in \mathbb{R}^m.$$

Se $\gamma = \tilde{k}_\ell, \ell = 1, 2, ...,$ então, por Leibnitz,

$$|\partial_t^\alpha b_{\tilde{k}_\ell}(t)| = \Big| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k=1}^{k_0} \partial_t^{\alpha-\beta} a_k(t) \Big(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^{n} \lambda_k^m \xi_{m,\ell} \Big) \sum_{k=1}^{k_0} \partial_t^\beta a_k(t).$$

$$\cdot \Big(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^{n} \lambda_k^m \xi_{m,\ell} \Big) \Big|$$

$$\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k=1}^{k_0} |\partial_t^{\alpha-\beta} a_k(t)| \Big| \Big(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^{n} \lambda_k^m \xi_{m,\ell} \Big) \Big| .$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{k_0} |\partial_t^\beta a_k(t)| \Big| \Big(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^{n} \lambda_k^m \xi_{m,\ell} \Big) \Big|$$

$$\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} M_\alpha |\xi_\ell|^{-\ell} |\xi_\ell|^{-\ell}, \tag{2.8}$$

onde M_α é uma constante que depende dos coeficientes a_k e de α.

A demonstração será dividida em dois casos: $|\eta_\ell| = 0$ e $|\eta_\ell| \neq 0$.

Se $|\eta_\ell| = 0$ então $|\tilde{k}_\ell| = |\xi_\ell|$. Daí, segue de (2.8) que

$$\begin{aligned} |\partial_t^\alpha b_{\tilde{k}_\ell}(t)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} M_\alpha |\xi_\ell|^{-2\ell} \leq C_\alpha \frac{1}{|\xi_\ell|^{2\ell}} \leq C_\alpha \frac{1}{|\tilde{k}_\ell|^{2\ell}} \\ &= C_\alpha \frac{1}{|\tilde{k}_\ell|^{2\ell-N}} \frac{1}{|\tilde{k}_\ell|^N} \leq C_{\alpha,N} \frac{1}{|\tilde{k}_\ell|^N}, \end{aligned}$$

pois $\frac{1}{|\tilde{k}_\ell|^{2\ell-N}} \to 0$ quando $\ell \to +\infty$.

Sabemos pelo Lema 2.1 que $|\eta_{j,\ell}| < 1 + |v_j||\xi_\ell|, \quad j = 1, 2, ..., k_0$. Considerando $C_1 = max\{|v_1|, ..., |v_{k_0}|\}$ temos que $|\eta_{j,\ell}| < 1 + C_1|\xi_\ell| \leq |\xi_\ell| + C_1|\xi_\ell|$ $= (1 + C_1)|\xi_\ell| = C_2|\xi_\ell|$. Assim, $|\eta_\ell|^2 = \eta_{1,\ell}^2 + ... + \eta_{k_0,\ell}^2 \leq k_0 C_2^2 |\xi_\ell|^2$. Portanto $|\eta_\ell| \leq C_3|\xi_\ell|$. Logo

$$|\eta_\ell|^\ell \leq C_3^\ell |\xi_\ell|^\ell. \tag{2.9}$$

Se $|\eta_\ell| \neq 0$ segue de (2.9) que

$$|\xi_\ell|^{-\ell} \leq \frac{C_3^\ell}{|\eta_\ell|^\ell}. \tag{2.10}$$

Segue de (2.8) e (2.10) que

$$|\partial_t^\alpha b_{\tilde{k}_\ell}(t)| \leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} M_\alpha |\xi_\ell|^{-\ell}|\eta_\ell|^{-\ell} C_3^\ell. \tag{2.11}$$

Sabemos do Lema 1.1 que dado $N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ tal que

$$|\eta|^N|\xi|^N \geq 2^{-N}|(\eta,\xi)|^N, \quad \forall\, \eta \neq 0 \;\; e \;\; \xi \neq 0.$$

Logo

$$|\eta_\ell|^{-\ell}|\xi_\ell|^{-\ell} \leq 2^\ell|(\eta_\ell,\xi_\ell)|^{-\ell}. \tag{2.12}$$

Segue de (2.11) e (2.12) que

$$\begin{aligned} |\partial_t^\alpha b_{\tilde{k}_\ell}(t)| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} M_\alpha 2^\ell |(\eta_\ell,\xi_\ell)|^{-\ell} C_3^\ell = C_\alpha \frac{(C_4)^\ell}{|\tilde{k}_\ell|^\ell} \\ &= C_\alpha C_4^N \frac{C_4^{\ell-N}}{|\tilde{k}_\ell|^{\ell-N}|\tilde{k}_\ell|^N} = C_\alpha C_4^N \left(\frac{C_4}{|\tilde{k}_\ell|}\right)^{\ell-N} \frac{1}{|\tilde{k}_\ell|^N}. \end{aligned}$$

Basta mostrar que $\left(\frac{C_4}{|\tilde{k}_\ell|}\right)^{\ell-N}$ é limitada. Como $|\tilde{k}_\ell| \to +\infty$ quando $\ell \to +\infty$ então existe $R > 0$ tal que $\frac{C_4}{|\tilde{k}_\ell|} < \frac{1}{2}$ se $\ell \geq R$. Consideremos $R_1 = \max\{R, N\}$. Logo para $\ell \geq R_1$ temos

$$\left(\frac{C_4}{|\tilde{k}_\ell|}\right)^{\ell-N} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-N} \to 0 \;\; \text{quando} \;\; \ell \to +\infty.$$

Logo $\left(\frac{C_4}{|\tilde{k}_\ell|}\right)^{\ell-N}$ é limitada.

Logo pelo Teorema 1.4 concluímos que $Pu \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Portanto o operador P não é globalmente hipoelítico em $\mathbb{R}^{m+n}$. Isto completa a prova da necessidade. ■

2.2.2 Suficiência

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$ tal que

$$Pu = f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n}). \tag{2.13}$$

Queremos mostrar que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Se em (2.13) tomarmos a transformada de Fourier com relação a $x \in \mathbb{R}^n$ obtemos

$$-\Delta_t \widehat{u}(t,\xi) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(t)\xi_j\right)^2 \widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(t,\xi), \tag{2.14}$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e todo $t \in \mathbb{R}^m$.

Como para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$ fixado, o operador na equação (2.14) é um operador diferencial parcial elítico em t, pois sua parte principal é o Laplaciano, e $\widehat{f}(\cdot,\xi) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, pois $f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$, segue que $\widehat{u}(\cdot,\xi) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$.

Multiplicando a equação (2.14) por $\overline{\widehat{u}}(t,\xi)$ obtemos,

$$-(\Delta_t \widehat{u}(t,\xi))\overline{\widehat{u}}(t,\xi) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(t)\xi_j\right)^2 |\widehat{u}(t,\xi)|^2 = \widehat{f}(t,\xi)\overline{\widehat{u}}(t,\xi). \tag{2.15}$$

Integrando com relação a $t \in [-\pi,\pi]^m$ obtemos

$$\int_{[-\pi,\pi]^m} -(\Delta_t \widehat{u}(t,\xi))\overline{\widehat{u}}(t,\xi)dt + \int_{[-\pi,\pi]^m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(t)\xi_j\right)^2 |\widehat{u}(t,\xi)|^2 dt$$
$$= \int_{[-\pi,\pi]^m} \widehat{f}(t,\xi)\overline{\widehat{u}}(t,\xi)dt. \tag{2.16}$$

Integrando por partes, obtemos

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{[-\pi,\pi]^m} |\widehat{u}_{t_k}(t,\xi)|^2\, dt + \int_{[-\pi,\pi]^m} b^2(t,\xi)|\widehat{u}(t,\xi)|^2\, dt$$
$$= \int_{[-\pi,\pi]^m} \widehat{f}(t,\xi)\overline{\widehat{u}}(t,\xi)\, dt. \tag{2.17}$$

sendo $b^2(t,\xi) \doteq \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j(t)\xi_j\right)^2$.

Agora para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$, fixo, definimos:

$$\|\varphi\|_b^2 \doteq \sum_{k=1}^{m} \|\varphi_{t_k}\|_{L^2}^2 + \int_{[-\pi,\pi]^m} b^2(t,\xi)|\varphi(t)|^2\, dt, \tag{2.18}$$

onde $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$.

Para continuarmos a demonstração necessitamos do seguinte Lema:

Lema 2.2 *Se* $(a_{k_0+1},...,a_n) \in (SA)^c(a_1,...,a_{k_0})$ *então existem constantes* $\alpha > 0$, $K \geq 0$, *e* $\delta > 0$, *dependendo dos coeficientes* a_ℓ, *tais que para cada* $\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ *podemos encontrar um intervalo aberto* $I_\xi \subset [-\pi,\pi]^m$ *tal que*

$$b^2(t,\xi) \geq \frac{\alpha}{|\xi|^K}, \quad \forall\ t \in I_\xi, \quad vol(I_\xi) > \delta. \tag{2.19}$$

Assumindo por enquanto que o Lema 2.2 acima esteja provado, mostraremos que a desigualdade (2.19) implica que o operador P é globalmente hipoelítico em $\mathbb{R}^{m+n}$.

Sejam $s \in I_\xi$ e $t \in [-\pi,\pi]^m$. Então pelo teorema fundamental do cálculo, temos para cada $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$ que

$$\varphi(t) = \varphi(s) + \sum_{k=1}^{m} \int_{s_k}^{t_k} \varphi_{\ell_k}(s_1,\ldots,s_{k-1},\ell_k,t_{k+1},\ldots,t_m)\, d\ell_k.$$

Definindo $w = (s_1,\ldots,s_{k-1},\ell_k,t_{k+1},\ldots,t_m)$, podemos escrever a última igualdade da seguinte forma

$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(s)| + \sum_{k=1}^{m} \int_{s_k}^{t_k} |\varphi_{\ell_k}(w)|\, d\ell_k.$$

Então temos

$$\begin{aligned}
|\varphi(t)|^2 &\leq 2|\varphi(s)|^2 + 2\Big\{\sum_{k=1}^{m} \int_{s_k}^{t_k} |\varphi_{\ell_k}(w)|\, d\ell_k\Big\}^2 \\
&\leq 2|\varphi(s)|^2 + 2m\Big\{\sum_{k=1}^{m} \Big(\int_{s_k}^{t_k} |\varphi_{\ell_k}(w)|\, d\ell_k\Big)^2\Big\} \\
&\leq 2|\varphi(s)|^2 + 2m\Big\{\sum_{k=1}^{m} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{\ell_k}(w)|\, d\ell_k\Big)^2\Big\}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned}
|\varphi(t)|^2 &\leq 2|\varphi(s)|^2 + 4m\pi\Big\{\sum_{k=1}^{m} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2\, d\ell_k\Big)\Big\} \\
&\leq C\Big(|\varphi(s)|^2 + \sum_{k=1}^{m} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2\, d\ell_k\Big),
\end{aligned}$$

onde $C = 4m\pi$.

Integrando esta desigualdade em relação a $s \in I_\xi$, observando que w depende de s somente nas primeiras $(k-1)$ variáveis e usando que $vol(I_\xi) > \delta$ obtemos

$$\begin{aligned}
\delta|\varphi(t)|^2 &\leq vol(I_\xi)|\varphi(t)|^2 \leq C\biggl(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2\, ds + \sum_{k=1}^{m} \int_{I_\xi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2\, d\ell_k\, ds\biggr) \\
&\leq C\biggl(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2\, ds + \sum_{k=1}^{m} \int_{[-\pi,\pi]^{m+1}} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2\, d\ell_k\, ds\biggr) \\
&\leq C\biggl(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2\, ds + \sum_{k=1}^{m} \tilde{C} \int_{[-\pi,\pi]^{k}} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2\, ds_1 \cdots ds_{k-1}\, d\ell_k\biggr).
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\varphi(t)|^2 \leq C\biggl(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2\, ds + \sum_{k=1}^{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2\, ds_1 \cdots ds_{k-1}\, d\ell_k\biggr).$$

Integrando esta última desigualdade em relação a $t \in [-\pi,\pi]^m$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_{[-\pi,\pi]^m} |\varphi(t)|^2\, dt &\leq C\biggl((2\pi)^m \int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2\, ds + \\
&\quad + \tilde{C} \sum_{k=1}^{m} \int_{[-\pi,\pi]^m} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2\, ds_1 \cdots ds_{k-1}\, d\ell_k\, dt_{k+1} \cdots dt_m\biggr) \\
&\leq C\biggl(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2\, ds + \sum_{k=1}^{m} \|\varphi_{t_k}\|_{L^2}^2\biggr),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 \leq C\biggl(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2\, ds + \sum_{k=1}^{m} \|\varphi_{t_k}\|_{L^2}^2\biggr). \tag{2.20}$$

Pela desigualdade (2.19) temos que $1 \leq \alpha^{-1}|\xi|^K b^2(s,\xi)$ para $s \in I_\xi$ e portanto

$$\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2\, ds \leq \alpha^{-1}|\xi|^K \int_{I_\xi} b^2(s,\xi)|\varphi(s)|^2\, ds \leq \alpha^{-1}|\xi|^K \int_{[-\pi,\pi]^m} b^2(s,\xi)|\varphi(s)|^2\, ds.$$

Assim, da desigualdade (2.20) segue que

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^2}^2 &\leq C\left(\alpha^{-1}|\xi|^K \int_{[-\pi,\pi]^m} b^2(s,\xi)|\varphi(s)|^2\, ds + \sum_{k=1}^m \|\varphi_{t_k}\|_{L^2}^2\right) \\
&\leq C|\xi|^K\left(\int_{[-\pi,\pi]^m} b^2(s,\xi)|\varphi(s)|^2\, ds + \sum_{k=1}^m \|\varphi_{t_k}\|_{L^2}^2\right) \\
&= C|\xi|^K \|\varphi\|_b^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 \leq C|\xi|^K \|\varphi\|_b^2, \quad \textit{para todo}\, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}. \tag{2.21}$$

Seja $\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Se aplicarmos (2.21) com $\varphi(t) = \widehat{u}(t,\xi)$, então existe $C > 0$ tal que

$$\|\widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2}^2 \leq C|\xi|^K \|\widehat{u}(\cdot,\xi)\|_b^2. \tag{2.22}$$

Por (2.17), (2.18) e a última desigualdade obtemos

$$\|\widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2}^2 \leq C|\xi|^K \int_{[-\pi,\pi]^m} \widehat{f}(t,\xi)\overline{\widehat{u}}(t,\xi)\, dt.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz nesta última desigualdade vem que

$$\|\widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2}^2 \leq C|\xi|^K \|\widehat{f}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \|\widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \tag{2.23}$$

Logo

$$\|\widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \leq C|\xi|^K \|\widehat{f}(\cdot,\xi)\|_{L^2}. \tag{2.24}$$

Seja $N \in \mathbb{N}$. Como estamos supondo $f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$, pelo Teorema 1.5, dado $M = N + [K]$, existe $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{f}(t,\xi)| \leq C_N|\xi|^{-(N+[K])}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0 \text{ e } \forall\, t \in \mathbb{R}^m. \tag{2.25}$$

Assim,

$\|\widehat{f}(\cdot,\xi)\|_{L^2}^2 = \int_{[-\pi,\pi]^m} |\widehat{f}(t,\xi)|^2\, dt \leq C_N|\xi|^{-2(N+[K])}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$

Portanto

$\|\widehat{f}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \leq C_N|\xi|^{-(N+[K])}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$

Logo, por (2.24) e pela desigualdade acima, dado $N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ tal que

$$\|\widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \leq C|\xi|^K\|\widehat{f}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \leq C|\xi|^{[K]}\|\widehat{f}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \leq C_N|\xi|^{-N}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \tag{2.26}$$

Vamos mostrar agora que, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}^m$ e $N \in \mathbb{N}$ dados, existe $C_N > 0$ tais que

$$\|\partial_t^\alpha \widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \leq C_N|\xi|^{-N}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \tag{2.27}$$

Isso será feito usando-se indução sobre $|\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{N}^m$ dado.

Inicialmente mostraremos que a desigualdade (2.27) vale para $|\alpha| = 1$. Com argumentos semelhantes mostraremos para qualquer $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $\ell \in \{1, 2, \ldots, m\}$ dados.

Derivando-se a expressão (2.14) parcialmente em relação a t_ℓ obtemos

$$\begin{aligned} &-\Delta_t\left(\partial_{t_\ell}\widehat{u}(t,\xi)\right) + \left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\xi_j\right)^2 \left(\partial_{t_\ell}\widehat{u}(t,\xi)\right) \\ =\;& \partial_{t_\ell}\widehat{f}(t,\xi) - 2\sum_{1\leq i,j\leq n} a_i(t)\left(\partial_{t_\ell}a_j(t)\right)\xi_i\xi_j\widehat{u}(t,\xi) \\ \doteq\;& g(t,\xi). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Esta expressão é a expressão (2.14) com $\widehat{u}(t,\xi)$ e $\widehat{f}(t,\xi)$ trocados por $\partial_{t_\ell}\widehat{u}(t,\xi)$ e $g(t,\xi)$ respectivamente. Como $\partial_{t_\ell}\widehat{u}(t,\xi)$ e $g(t,\xi)$ satisfazem as mesmas hipóteses que $\widehat{u}(t,\xi)$ e $\widehat{f}(t,\xi)$, usando os mesmos argumentos anteriores, trocando $\widehat{u}(t,\xi)$ por $\partial_{t_l}\widehat{u}(t,\xi)$ e $\widehat{f}(t,\xi)$ por $g(t,\xi)$ obteremos que

$$\|\partial_{t_\ell}\widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \leq C.|\xi|^K\|g(\cdot,\xi)\|_{L^2},\ \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \tag{2.29}$$

Como $a_j \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, tanto a_j quanto suas derivadas de qualquer ordem são limitadas. Então podemos encontrar $C > 0$ tal que

$$\left| \sum_{1 \le i,j \le n} a_i(t) \left(\partial_{t_l} a_j(t)\right) \xi_i \xi_j \right| \le C|\xi|^2, \ \forall \ \xi \ \in \mathbb{Z}^n. \tag{2.30}$$

Ainda, como feito antes, dados $\alpha \in \mathbb{N}^m \quad e \quad N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ tais que

$$\left| \partial_t^\alpha \widehat{f}(t, \xi) \right| \le C_N |\xi|^{-(N+[K])}, \ \forall \, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \tag{2.31}$$

Em particular,

$$\left| \partial_{t_\ell} \widehat{f}(t, \xi) \right| \le C_N |\xi|^{-(N+[K])}, \ \forall \, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \tag{2.32}$$

Com isso,

$$\|\partial_{t_\ell} \widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 = \int_{[-\pi,\pi]^m} |\partial_{t_\ell} \widehat{f}(t, \xi)|^2 \, dt \le C_N |\xi|^{-2(N+[K])}, \quad \forall \, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Portanto

$$\|\partial_{t_\ell} \widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \le C_N |\xi|^{-(N+[K])}, \quad \forall \, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \tag{2.33}$$

Além disso, pela desigualdade (2.26), existe $C_N > 0$ tal que

$$\|\widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \le C_N |\xi|^{-2-N-[K]}, \quad \forall \, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \tag{2.34}$$

Logo, pela definição de $g(t, \xi)$, pelas desigualdades (2.30), (2.33) e (2.34) segue que

$$\begin{aligned} \|g(\cdot, \xi)\|_{L^2} &\le \|\partial_{t_\ell} \widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2} + \left\| 2 \sum_{1 \le i,j \le n} a_i(\cdot) \left(\partial_{t_\ell} a_j(\cdot)\right) \xi_i \xi_j \widehat{u}(\cdot, \xi) \right\|_{L^2} \\ &\le \|\partial_{t_\ell} \widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2} + C|\xi|^2 \|\widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \\ &\le C_N |\xi|^{-(N+[K])} + C|\xi|^2 C_N |\xi|^{-2-N-[K]} \le C_N |\xi|^{-(N+[K])}, \end{aligned}$$

$\forall \, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$

Portanto, pela desigualdade (2.29) e por esta última segue que

$$\|\partial_{t_\ell} \widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \le C_N |\xi|^{-N}, \ \forall \, \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^m$ e $N \in \mathbb{N}$ dados. Suponhamos que para todo β tal que $|\beta| < |\alpha|$, vale

$$\|\partial_t^\beta \widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \leq C_N |\xi|^{-N}, \ \forall \ \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \tag{2.35}$$

Aplicando o operador ∂_t^α na expressão (2.14) obtemos

$$-\Delta_t \left(\partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi)\right) + \partial_t^\alpha \left[\left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\xi_j \right)^2 \widehat{u}(t,\xi) \right] = \partial_t^\alpha \widehat{f}(t,\xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, $t \in \mathbb{R}^m$.

Pela fórmula de Leibniz,

$$\begin{aligned}
\partial_t^\alpha \left[\left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\xi_j \right)^2 \widehat{u}(t,\xi) \right] &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial_t^{\alpha-\beta} \left[\left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\xi_j \right)^2 \right] \partial_t^\beta \widehat{u}(t,\xi) \\
= & \left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\xi_j \right)^2 \partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi) + \\
&+ \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial_t^{\alpha-\beta} \left[\left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\xi_j \right)^2 \right] \partial_t^\beta \widehat{u}(t,\xi) \\
= & \left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\xi_j \right)^2 \partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi) + \\
&+ \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[\sum_{\gamma \leq \alpha-\beta} \binom{\alpha-\beta}{\gamma} \partial_t^{(\alpha-\beta)-\gamma} \left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\xi_j \right) \partial_t^\gamma \left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\xi_j \right) \right] \partial_t^\beta \widehat{u}(t,\xi) \\
= & \left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\xi_j \right)^2 \partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi) + \\
&+ \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[\sum_{\gamma \leq \alpha-\beta} \binom{\alpha-\beta}{\gamma} \left(\sum_{j=1}^n \partial_t^{(\alpha-\beta)-\gamma} a_j(t)\xi_j \right) \left(\sum_{j=1}^n \partial_t^\gamma a_j(t)\xi_j \right) \right] \partial_t^\beta \widehat{u}(t,\xi) \\
= & \left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\xi_j \right)^2 \partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi) + \\
&+ \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[\sum_{\gamma \leq \alpha-\beta} \binom{\alpha-\beta}{\gamma} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_t^{(\alpha-\beta)-\gamma} a_i(t) \partial_t^\gamma a_j(t)\xi_i\xi_j \right] \partial_t^\beta \widehat{u}(t,\xi).
\end{aligned}$$

Substituindo esta expressão na última igualdade obtemos que

$$\begin{aligned}
& -\Delta_t \left(\partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi)\right) + \left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\xi_j \right)^2 \left(\partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi)\right) \\
&= \partial_t^\alpha \widehat{f}(t,\xi) - \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[\sum_{\gamma \leq \alpha-\beta} \binom{\alpha-\beta}{\gamma} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_t^{(\alpha-\beta)-\gamma} a_i(t) \partial_t^\gamma a_j(t)\xi_i\xi_j \right] \partial_t^\beta \widehat{u}(t,\xi) \\
&\doteq g_\alpha(t,\xi),
\end{aligned} \tag{2.36}$$

que é a expressão (2.14) com $\widehat{u}(t,\xi)$ e $\widehat{f}(t,\xi)$ trocados por $\partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi)$ e $g_\alpha(t,\xi)$ respectivamente. Além disso tanto $\partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi)$ quanto $g_\alpha(t,\xi)$ satisfazem as mesmas hipóteses que $\widehat{u}(t,\xi)$ e $\widehat{f}(t,\xi)$ satisfazem. Portanto, usando os mesmos resultados anteriores, trocando $\widehat{u}(t,\xi)$ por $\partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi)$ e $\widehat{f}(t,\xi)$ por $g_\alpha(t,\xi)$ chega-se a

$$\|\partial_t^\alpha \widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \leq C|\xi|^K \|g_\alpha(\cdot,\xi)\|_{L^2}, \ \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \tag{2.37}$$

Como as funções a_j e suas derivadas de qualquer ordem são limitadas, pois pertencem a $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, com argumentos semelhantes ao do caso $|\alpha| = 1$, segue da desigualdade (2.31) e de (2.35) que existe $C_N > 0$ tal que

$$\|g_\alpha(\cdot,\xi)\|_{L^2} \leq C_N|\xi|^{-(N+[K])}, \ \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Por esta última desigualdade e por (2.37) segue que

$$\|\partial_t^\alpha \widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \leq C_N|\xi|^{-N}, \ \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \tag{2.38}$$

O objetivo agora é utilizarmos a desigualdade (2.38) para mostrarmos que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$. Faremos isso mostrando que dado $N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{u}(\tau,\xi)| \leq C_N|(\tau,\xi)|^{-N}, \ \forall\ (\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^{m+n} \setminus 0$$

e assim, pelo Teorema 1.2 teremos que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $(\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^{m+n} \setminus 0$ dados.

Separemos a demonstração em dois casos: $\xi \neq 0$ e $\xi = 0$.

Como para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$, $\widehat{u}(\cdot,\xi) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, temos que

$$\widehat{u}(\tau,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[-\pi,\pi]^m} e^{-i\tau\cdot t} \widehat{u}(t,\xi)\, dt, \tag{2.39}$$

para todo $\tau \in \mathbb{Z}^m,\ \xi \in \mathbb{Z}^n$.

<u>1^o caso</u>: $\xi \neq 0$.

Se $\tau = 0$, temos que

$$\widehat{u}(0,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[-\pi,\pi]^m} \widehat{u}(t,\xi)\,dt,$$

Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|\widehat{u}(0,\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[-\pi,\pi]^m} |\widehat{u}(t,\xi)|\,dt \leq C\|\widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2}.$$

Logo, utilizando (2.26) obtemos

$$|\widehat{u}(0,\xi)| \leq C_N|\xi|^{-N} = C_N|(0,\xi)|^{-N}. \tag{2.40}$$

Se $\tau \neq 0$, então

$$\begin{aligned}
\tau^\alpha \widehat{u}(\tau,\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[-\pi,\pi]^m} \tau^\alpha e^{-i\tau\cdot t}\widehat{u}(t,\xi)\,dt,\\
&= \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[-\pi,\pi]^m} \frac{1}{(-i)^{|\alpha|}}(\partial_t^\alpha e^{-i\tau\cdot t})\widehat{u}(t,\xi)\,dt.
\end{aligned}$$

Fazendo a integração por partes nesta expressão obtemos

$$\tau^\alpha \widehat{u}(\tau,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[-\pi,\pi]^m} \frac{1}{(i)^{|\alpha|}} e^{-i\tau\cdot t}\partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi)\,dt. \tag{2.41}$$

Observe que estas duas últimas expressões são válidas para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Assim, segue da Afirmação 1.1, que

$$\begin{aligned}
|\tau|^N|\widehat{u}(\tau,\xi)| &\leq \sum_{|\alpha|=N}\frac{N!}{\alpha!}\,|\tau^\alpha|\,|\widehat{u}(\tau,\xi)|\\
&= \sum_{|\alpha|=N}\frac{N!}{\alpha!}\,|\tau^\alpha\widehat{u}(\tau,\xi)|\\
&= \sum_{|\alpha|=N}\frac{N!}{\alpha!}\left|\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[-\pi,\pi]^m}\frac{1}{(i)^{|\alpha|}}e^{-i\tau\cdot t}\partial_t^\alpha\widehat{u}(t,\xi)\,dt\right|\\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^m}\sum_{|\alpha|=N}\frac{N!}{\alpha!}\int_{[-\pi,\pi]^m}|\partial_t^\alpha\widehat{u}(t,\xi)|\;dt. \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

Segue de (2.42) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|\tau|^N|\widehat{u}(\tau,\xi)| \leq C\sum_{|\alpha|=N}\frac{N!}{\alpha!}\|\partial_t^\alpha\widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2}.$$

Logo, pela desigualdade (2.38) segue que

$$|\tau|^N|\widehat{u}(\tau,\xi)| \leq C \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} C_N|\xi|^{-N} \leq \tilde{C_N}|\xi|^{-N}.$$

Portanto, para $\xi \neq 0$ e $\tau \neq 0$ esta última desigualdade implica que

$$|\widehat{u}(\tau,\xi)| \leq C_N|\tau|^{-N}|\xi|^{-N}. \tag{2.43}$$

Agora, segue de (2.43) e do Lema 1.1 que

$$|\widehat{u}(\tau,\xi)| \leq C_N|(\tau,\xi)|^{-N}, \quad \tau \neq 0,\ \xi \neq 0. \tag{2.44}$$

<u>2^o caso</u>: $\xi = 0$.

Como temos que para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$, fixado, $\widehat{u}(\cdot,\xi) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, temos em particular que $\widehat{u}(\cdot,0) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$. Logo pelo Teorema 1.3 $\widehat{u}(\tau,0)$ forma uma seqüência rapidamente decrescente, isto é, dado $N \in \mathbb{N}$ $\exists$ $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{u}(\tau,0)| \leq C_N|\tau|^{-N} = C_N|(\tau,0)|^{-N},\ \forall\ \tau \in \mathbb{Z}^m \setminus 0. \tag{2.45}$$

Logo, pelas desigualdades (2.40), (2.44) e (2.45) e pela arbitrariedade de $(\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^{m+n} \setminus 0$, segue que existe $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{u}(\tau,\xi)| \leq C_N|(\tau,\xi)|^{-N},\ \forall\ (\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^{m+n} \setminus 0,$$

o que conclui a demonstração do teorema. ■

Demonstração do Lema 2.2:

Assuma que $(a_{k_0+1},...,a_n) \in (SA)^c(a_1,...,a_{k_0})$, $1 \leq k_0 \leq n-1$. Então $a_1,...,a_{k_0}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, e

$$a_m = \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k^m a_k, \quad m = k_0+1,...,n$$

sendo que os vetores $(\lambda_k^{k_0+1},...,\lambda_k^n)$, $\quad k = 1,...,k_0$, são não simultaneamente aproximáveis. Então $b(t,\xi)$ toma a forma

$$b(t,\xi) = \sum_{k=1}^{k_0} a_k\big(\xi_k + \sum_{m=k_0+1}^{n} \lambda_k^m \xi_m\big). \tag{2.46}$$

Para completar a demonstração do Lema 2.2 precisamos do seguinte lema.

Lema 2.3 *Seja B_{k_0} a função dada por $B_{k_0}(t,\gamma) = \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_k a_k(t)$, $\quad t \in \mathbb{R}^m$, $\gamma \in \mathbb{R}^{k_0} \setminus 0$. Então existem $C_{k_0} > 0$ e $\delta_{k_0} > 0$ tal que para cada $\gamma \in \mathbb{R}^{k_0}$, $\quad |\gamma| = 1$, existe um intervalo aberto $I_{k_0} = I_{k_0}(\gamma) \subset [-\pi,\pi]^m$ com $|B_{k_0}(t,\gamma)| \geq C_{k_0}$, $\quad t \in I_{k_0}$, $\quad vol(I_{k_0}) \geq \delta_{k_0}$.*

Demonstração: Como as funções $a_1,...,a_{k_0}$ são LI sobre $\mathbb{R}$ temos $B_{k_0}(t,\gamma) \not\equiv 0$, para $\gamma \in \mathbb{R}^{k_0} \setminus 0$. Pela continuidade de B_{k_0} em $[-\pi,\pi]^m \times S^{k_0-1}$, sendo S^{k_0-1} a esfera unitária em $\mathbb{R}^{k_0}$, para cada $\xi^0 \in S^{k_0-1}$ existem uma constante $\alpha_{k_0} = \alpha_{k_0}(\xi^0) > 0$, um intervalo aberto $I_{k_0} = I_{k_0}(\xi^0) \subset [-\pi,\pi]^m$, e um conjunto aberto $\Gamma_{k_0} = \Gamma_{k_0}(\xi^0) \subset S^{k_0-1}$ tal que

$$|B_{k_0}(t,\xi)| > \alpha_{k_0}, \quad t \in I_{k_0}, \quad \xi \in \Gamma_{k_0}.$$

Visto que $\{\Gamma_{k_0}(\xi^0)\}_{\xi^0 \in S^{k_0-1}}$ cobre S^{k_0-1}, e como S^{k_0-1} é compacto, existem finitos conjuntos abertos $\Gamma_{k_0}(\xi^1),...,\Gamma_{k_0}(\xi^\ell)$ cobrindo S^{k_0-1}. Portanto tomando $C_{k_0} = \min\{\alpha_{k_0}(\xi^1),...,\alpha_{k_0}(\xi^\ell)\}$ e $\delta_{k_0} = \min\{vol(I_{k_0}(\xi^1)),...,vol(I_{k_0}(\xi^\ell))\}$ obtemos a desigualdade desejada. ■

Agora retornamos para a prova do Lema 2.2. Consideremos $\xi' = (\xi_1,...,\xi_{k_0})$ e $\xi'' = (\xi_{k_0+1},...,\xi_n)$. Suponhamos que $\xi = (\xi',\xi'') \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$ e $\xi'' = 0$. Então segue do Lema 2.3 que existem $C_{k_0} > 0$, $\quad \delta_{k_0} > 0$ independentes de ξ e existe um intervalo aberto $I_{k_0} = I_{k_0}(\xi) \subset [-\pi,\pi]^m$ tal que

$$b^2(t,\xi',0) = \left(\sum_{k=1}^{k_0} \xi_k a_k(t)\right)^2 = B_{k_0}^2(t,\xi') = |\xi'|^2 B_{k_0}^2\left(t, \frac{\xi'}{|\xi'|}\right) \geq |\xi'|^2 C_{k_0}^2 \geq C_{k_0}^2, \tag{2.47}$$

$\forall\, t \in I_{k_0}, \quad vol(I_{k_0}) \geq \delta_{k_0}.$

Agora assumimos que $\xi'' \neq 0$. Visto que os vetores $(\lambda_k^{k_0+1}, ..., \lambda_k^n)$, $k = 1, ..., k_0$ são não simultaneamente aproximáveis existem $C > 0, \quad K > 0$, independentes de ξ'', e $k_1, \quad 1 \leq k_1 \leq k_0$, tal que

$$\left| \xi_{k_1} + \sum_{m=k_0+1}^{n} \lambda_{k_1}^m \xi_m \right| \geq \frac{C}{|\xi''|^K}. \tag{2.48}$$

Se considerarmos $\gamma_k \doteq \xi_k + \sum\limits_{m=k_0+1}^{n} \lambda_k^m \xi_m, \quad k = 1, ..., k_0, \quad e$ $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_{k_0})$ então segue de (2.48) e do Lema 2.3 que existe $C > 0$, $K > 0, \quad C_{k_0} > 0, \quad \delta_{k_0} > 0$ independentes de ξ e um intervalo $I_{k_0} = I_{k_0}(\xi) \subset [-\pi, \pi]^m$ tal que

$$\begin{aligned} b^2(t,\xi) &= \left[\sum_{k=1}^{k_0} a_k \left(\xi_k + \sum_{m=k_0+1}^{n} \lambda_k^m \xi_m \right) \right]^2 = B_{k_0}^2(t,\gamma) = |\gamma|^2 B_{k_0}^2\left(t, \frac{\gamma}{|\gamma|}\right) \\ &\geq C_{k_0}^2 |\gamma|^2 \geq C_{k_0}^2 |\gamma_{k_1}|^2 \geq \frac{C_{k_0}^2 C^2}{|\xi''|^{2K}} \\ &\geq \frac{C_{k_0}^2 C^2}{|\xi|^{2K}}, \quad \forall t \in I_{k_0}, \quad vol(I_{k_0}) \geq \delta_{k_0}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Assim temos que se $\xi'' = 0$ vale (2.47) e se $\xi'' \neq 0$ vale (2.49). Logo segue a desigualdade desejada (2.19). ■

Teorema 2.3 *Seja P um operador diferencial definido por*

$$P = -\Delta_t - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(t) \partial_{x_j} \right)^2 \tag{2.50}$$

em que $(t_1, ..., t_m, x_1, ..., x_n) = (t, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$ e $a_j(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, e são a valores reais. Se $k_0 = 0$ então P não é globalmente hipoelítico em $\mathbb{R}^{m+n}$. Se $k_0 = n$ então P é globalmente hipoelítico em $\mathbb{R}^{m+n}$.

Demonstração: Se $k_0 = 0$ então $a_1(t) \equiv a_2(t) \equiv ... \equiv a_n(t) \equiv 0$. Então para qualquer função $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}_x^n) \setminus \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}_x^n)$ temos $Pu = 0$. Portanto P não é globalmente hipoelítico em $\mathbb{R}^{m+n}$.

Para a demonstração do caso $k_0 = n$ precisamos do seguinte lema:

Lema 2.4 *Se* $k_0 = n$ *então existem constantes* $\alpha > 0$ *e* $\delta > 0$, *dependendo dos coeficientes* a_ℓ, *tais que para cada* $\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ *podemos encontrar um intervalo aberto* $I_\xi \subset [-\pi, \pi]^m$ *tal que*

$$b^2(t, \xi) \geq \alpha, \; \forall \;\; t \in I_\xi, \quad vol(I_\xi) > \delta.$$

Demonstração: Como a demonstração do Lema 2.3 continua válida se $k_0 = n$ então dado $\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, temos

$$b^2(t, \xi) = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k a_k(t) \right)^2 = B_n^2(t, \xi) = |\xi|^2 B_n^2\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) \geq |\xi|^2 C_n^2 \geq C_n^2,$$

$\forall \, t \in I_n(\xi) = I_\xi, \quad vol(I_\xi) \geq \delta_n = \delta.$ ■

De modo análogo à demonstração da suficiência da condição do Teorema 2.2 mostra-se que, no caso $k_0 = n$, P é (GH) em $\mathbb{R}^{m+n}$. ■

Capítulo 3

Hipoeliticidade Global para certas Classes de Sublaplacianos

Notemos que na classe de operadores estudada no Teorema 2.2 os coeficientes do campo vetorial $\sum_{j=1}^{n} a_j(t)\partial_{x_j}$ não dependem das variáveis de derivação $x_1, ..., x_n$.

Assim, apresentamos uma classe de operadores onde os coeficientes podem depender de mais variáveis.

Consideremos em $\mathbb{R}^3$ o seguinte operador

$$P = -\partial_{t_1}^2 - \partial_{t_2}^2 - \left(\partial_{t_2} + a(t_1, t_2)\partial_x\right)^2 \tag{3.1}$$

em que $(t_1, t_2, x) = (t, x) \in \mathbb{R}^3$ e $a \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, e a valores reais. Na classe (3.1) temos que o coeficiente do campo $\partial_{t_2} + a(t_1, t_2)\partial_x$ depende da variável t_2 e a derivada com relação a esta variável comparece no campo.

O objetivo é dar uma condição necessária e suficiente para que o operador (3.1) seja (GH) em $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.1 *O operador dado por (3.1) é (GH) em* $\mathbb{R}^3$ *se, e somente se,* a *função a não é identicamente nula.*

Demonstração:

Se $a \equiv 0$ então para qualquer função $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}_x) \setminus \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}_x)$ temos $Pu = 0$. Portanto P não é globalmente hipoelítico em $\mathbb{R}^3$.

Suponhamos que a não é identicamente nula. Se $a(t_1, t_2)$ é constante não nula então o operador P é elítico e portanto ele é localmente hipoelítico, em particular (GH) em $\mathbb{R}^3$. Portanto, assumimos que $a(t_1, t_2)$ é não-constante. Então, existe um ponto t^0, na qual podemos tomar como $t^0 = 0 = (0, 0)$, tal que ou $\frac{\partial a}{\partial_{t_1}}(0) \neq 0$ ou $\frac{\partial a}{\partial_{t_2}}(0) \neq 0$. Assim, existe $\delta > 0$ tal que ou $\frac{\partial a}{\partial_{t_1}}(t) \neq 0$, $t \in [-\delta, \delta]^2$ ou $\frac{\partial a}{\partial_{t_2}}(t) \neq 0$, $\ t \in [-\delta, \delta]^2$. Agora, seja $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$Pu = f, \ \ f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^3). \tag{3.2}$$

Se, em (3.2), tomarmos a transformada de Fourier com relação a $x \in \mathbb{R}$ obtemos

$$\left[-\partial_{t_1}^2 - \partial_{t_2}^2 - (\partial_{t_2} + i\xi a(t_1, t_2))^2\right] \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi), \ \ \forall \ \xi \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

Como para cada $\xi \in \mathbb{Z}$ fixado, o operador na equação (3.3) é elítico em t e $\widehat{f}(\cdot, \xi) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, pois $f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^3)$, segue que $\widehat{u}(\cdot, \xi) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

O próximo resultado fornece-nos a desigualdade chave para provarmos que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^3)$.

Lema 3.1 *Existe uma constante $C_2 > 0$ tal que*

$$\|\hat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_2 \|\hat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2}, \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{Z} \setminus 0. \tag{3.4}$$

Assumimos por enquanto que o Lema 3.1 acima esteja provado.

Seja $N \in \mathbb{N}$. Como estamos supondo $f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^3)$, pelo Teorema 1.5, dado $N \in \mathbb{N}$, existe $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{f}(t, \xi)| \leq C_N |\xi|^{-N}, \ \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{Z} \setminus 0 \text{ e } \forall\, t \in \mathbb{R}^2. \tag{3.5}$$

Assim,

$\|\widehat{f}(\cdot,\xi)\|_{L^2}^2 = \int_{[-\pi,\pi]^2} |\widehat{f}(t,\xi)|^2\,dt \le C_N|\xi|^{-2N}, \quad \forall\,\xi \in \mathbb{Z}\setminus 0.$

Portanto

$$\|\widehat{f}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \le C_N|\xi|^{-N}, \quad \forall\,\xi \in \mathbb{Z}\setminus 0. \tag{3.6}$$

Logo, segue de (3.4) e (3.6) que, dado $N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ tal que

$$\|\widehat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \le C_2\|\widehat{f}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \le C_N|\xi|^{-N}, \quad \forall\,\xi \in \mathbb{Z}\setminus 0, \tag{3.7}$$

a qual é suficiente para mostrarmos que P é (GH) em $\mathbb{R}^3$, bastando para isto usar a *teoria micro local*. Daremos uma idéia de como usar tal teoria.

Lembrando que

$$\widehat{u}(\tau,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(\tau_1t_1+\tau_2t_2)}\widehat{u}(t_1,t_2,\xi)\,dt_1dt_2,$$

e usando (3.7) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos que

$$|\widehat{u}(\tau,\xi)| \le C_N|\xi|^{-N}, \quad \forall\,\xi \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Definindo $\Gamma = \{(\tau,\xi) : |\tau| < C|\xi|\}$, $\xi \ne 0$, temos

$$|\widehat{u}(\tau,\xi)| \le \frac{C_N}{(\frac{1}{2}|\xi| + \frac{1}{2}|\xi|)^N} \le \frac{C_N}{(\frac{1}{2C}|\tau| + \frac{1}{2}|\xi|)^N} \le \frac{C_N}{|(\tau,\xi)|^N}, \tag{3.8}$$

para $(\tau,\xi) \in \Gamma$.

Agora observando que $P_2(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2,0) = \tau_1^2 + 2\tau_2^2$ é elítico numa vizinhança cônica, Γ_1, de um ponto da forma $(\tau_1^0,\tau_2^0,0)$ com $(\tau_1^0,\tau_2^0) \ne (0,0)$, e usando a teoria micro local obtemos uma estimativa da forma

$$|\widehat{u}(\tau,\xi)| \le C|(\tau,\xi)|^{-N} \tag{3.9}$$

para $(\tau,\xi) \in \Gamma_1$.

Segue de (3.8) e (3.9) que

$$|\widehat{u}(\tau,\xi)| \leq C|(\tau,\xi)|^{-N}, \quad \forall\,(\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\},$$

e isto implica que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^3)$. ■

Demonstração do Lema 3.1:

Multiplicando a equação (3.3) por $\bar{\hat{u}}$ e integrando por partes com relação a $t \in [-\pi,\pi]^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \|Y_1\hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2} + \|Y_2\hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2} \;&+\; \|Y_3\hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2} \\ &= \int_{[-\pi,\pi]^2} \hat{f}(t,\xi)\bar{\hat{u}}(t,\xi)dt, \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $Y_1 = \partial_{t_1}$, $Y_2 = \partial_{t_2}$ e $Y_3 = \partial_{t_2} + i\xi a(t_1,t_2)$. Também, note que

$$[Y_1,Y_3] \doteq Y_1Y_3 - Y_3Y_1 = i\xi\frac{\partial a}{\partial_{t_1}} \;\text{ e }\; [Y_2,Y_3] \doteq Y_2Y_3 - Y_3Y_2 = i\xi\frac{\partial a}{\partial_{t_2}}. \tag{3.11}$$

Seja χ uma função tal que $\chi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, $\chi \geq 0$, $\chi \equiv 1$ em $[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}]^2$ e $\chi(t) = 0$ se $t \in ([-\pi,-\delta) \cup (\delta,\pi])^2$.

Provaremos o resultado considerando somente o caso $\frac{\partial a}{\partial_{t_1}}(t) \neq 0$ em $[-\delta,\delta]^2$ (o outro caso é análogo).

Para $\xi \in \mathbb{Z} \setminus 0$ e $\phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ temos que

$$\begin{aligned} \int_{[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}]^2} |\phi(t)|^2dt &= \int_{[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}]^2} \left(\frac{1}{i\xi\frac{\partial a}{\partial_{t_1}}(t)}[Y_1,Y_3]\right)|\phi(t)|^2dt \\ &= \int_{[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}]^2} \chi(t)\left(\frac{1}{i\xi\frac{\partial a}{\partial_{t_1}}(t)}[Y_1,Y_3]\right)|\phi(t)|^2dt \\ &\leq \int_{[-\delta,\delta]^2} \chi(t)\left(\frac{1}{i\xi\frac{\partial a}{\partial_{t_1}}(t)}[Y_1,Y_3]\right)|\phi(t)|^2dt \\ &= \int_{[-\pi,\pi]^2} \left(\chi(t)\frac{1}{i\xi\frac{\partial a}{\partial_{t_1}}(t)}\right)[Y_1,Y_3]|\phi(t)|^2dt \\ &\leq \left|\int_{[-\pi,\pi]^2} \left(\chi(t)\frac{1}{i\xi\frac{\partial a}{\partial_{t_1}}(t)}\right)[Y_1,Y_3]|\phi(t)|^2dt\right| \\ &= \frac{1}{|\xi|}\left|(b(t)[Y_1,Y_3]\phi,\phi)\right| \leq \left|(b(t)[Y_1,Y_3]\phi,\phi)\right|, \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde

$$b(t) = \chi(t)\frac{1}{\frac{\partial a}{\partial_{t_1}}} \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^2).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e integração por partes mostra-se que existe $C > 0$ tal que

$$|(b(t)[Y_1, Y_3]\phi, \phi)| \leq C\left(\|Y_1\phi\|^2 + \|Y_3\phi\|^2 + \|\phi\|\|Y_1\phi\| + \|\phi\|\|Y_3\phi\|\right).$$

Segue da última desigualdade e de (3.12) que

$$\int_{[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}]^2} |\phi(t)|^2 dt \leq C\left(\|Y_1\phi\|^2 + \|Y_3\phi\|^2 + \|\phi\|\|Y_1\phi\| + \|\phi\|\|Y_3\phi\|\right).$$

Visto que

$$\|\phi\|_{L^2}^2 \leq C\left(\int_{[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}]^2} |\phi(s)|^2 ds + \|\phi_{t_1}\|^2 + \|\phi_{t_2}\|^2\right),$$

e aplicando a última desigualdade acima com $\phi = \hat{u}(t,\xi)$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2}^2 &\leq C_1\left(\|Y_1\hat{u}\|^2 + \|Y_3\hat{u}\|^2 + \|\hat{u}\|\|Y_1\hat{u}\| + \|\hat{u}\|\|Y_3\hat{u}\|\right) \\
&+ C_1\left(\|\hat{u}_{t_1}\|^2 + \|\hat{u}_{t_2}\|^2\right) \\
&= C_1\left(\|Y_1\hat{u}\|^2 + \|Y_3\hat{u}\|^2 + \|\hat{u}\|\|Y_1\hat{u}\| + \|\hat{u}\|\|Y_3\hat{u}\|\right) \\
&+ C_1\left(\|Y_1\hat{u}\|^2 + \|Y_2\hat{u}\|^2\right) \\
&\leq C_1\left(\|Y_1\hat{u}\|^2 + \|Y_3\hat{u}\|^2 + \frac{\epsilon^2}{2}\|\hat{u}\|^2 + \frac{1}{2\epsilon^2}\|Y_1\hat{u}\|^2\right) \\
&+ C_1\left(\frac{\epsilon^2}{2}\|\hat{u}\|^2 + \frac{1}{2\epsilon^2}\|Y_3\hat{u}\|^2 + \|Y_1\hat{u}\|^2 + \|Y_2\hat{u}\|^2\right).
\end{aligned}$$

Escolhendo ϵ tal que $C_1\epsilon^2 < 1$, segue da última desigualdade que

$$\begin{aligned}
\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2}^2 &\leq C_2\left(\|Y_1\hat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2}^2 + \|Y_2\hat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2}^2 + \|Y_3\hat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2}^2\right) \\
&= C_2\int_{[-\pi,\pi]^2} \hat{f}(t,\xi)\bar{\hat{u}}(t,\xi)dt.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz nesta última desigualdade vem que

$$\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2}^2 \leq C_2\|\hat{f}(\cdot,\xi)\|_{L^2}\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2}.$$

Logo

$$\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2} \leq C_2\|\hat{f}(\cdot,\xi)\|_{L^2}.$$

■

Referências Bibliográficas

[F] FIGUEIREDO, D.G.: **Números Irracionais e Transcendentes**, IMPA, Rio de Janeiro, 1985.

[FO] FUJIWARA, D. and OMORI, H.: **An example of a globally hypoelliptic operator**, Hokkaido Mathematical Journal, 12 (1983), 293-297.

[GW] GREENFIELD, S.J. and WALLACH, N.R.:**Global hipoellipticity and Liouville numbers**, Proc. Amer. Math. Soc., 31 (1972), 112-114.

[H1] HIMONAS, A. A.: **On degenerete elliptic operators of infinite type**, Math. Z., 220 (1995), 449-460.

[HP1] HIMONAS, A. A. and PETRONILHO, G.: **On global hypoellipticity of degenerete elliptic operators**, Math. Z., 230 (1999), 241-257.

[HP2] HIMONAS, A. A. and PETRONILHO, G.: **Global hypoellipticity and simultaneous approximability**, J. Funct. Anal., 170 (2000), 356-365.

[HP3] HIMONAS, A. A. and PETRONILHO, G.: **Global hypoellipticity for sublaplacians**, Matemática Contemporânea, 18 (2000), 167-174.

[M] MOURA, R. J.de: **Hipoeliticidade Global para Certos Operadores Dados na Forma de Uma Soma de Quadrados de Cam-**

pos Vetoriais Reais, dissertação para obtenção do título de Mestre em Matemática, DM-UFSCar, São Carlos, 2000.

[S] SCHMIDT, W.: **Diophantine approximations**, Lecture Notes, 785 (1980), Springer, New York.

[Z] ZANI, S. L.: **Hipoeliticidade Global Para Operadores de Segunda Ordem**, dissertação para obtenção do título de Mestre em Matemática, Instituto de Ciências e Matemáticas de São Carlos/USP, São Carlos, 1988.