UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Decomposição de Bony e um Teorema de Regularidade para Soluções do Sistema de Navier-Stokes

Rômel da Rosa da Silva

SÃO CARLOS
2008

Decomposição de Bony e um Teorema de Regularidade para Soluções do Sistema de Navier-Stokes

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Decomposição de Bony e um Teorema de Regularidade para Soluções do Sistema de Navier-Stokes

Rômel da Rosa da Silva

Orientador: José Ruidival dos Santos Filho.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS

2008

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Silva, Rômel da Rosa da.
S586db	Decomposição de Bony e um teorema de regularidade para soluções do sistema de Navier-Stokes / Rômel da Rosa da Silva. -- São Carlos : UFSCar, 2008.
	74 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2008.
	1. Equações diferenciais parciais. 2. Decomposição Bony. 3. Navier-Stokes, equação de. 4. Espaço de Besov. I. Título.
	CDD: 515.353 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho
DM - UFSCar

Profa. Dra. Gabriela Del Valle Planas
ICMC - USP

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo
DM - UFSCar

Agradecimentos

A Deus pelas oportunidades.

A meus pais, irmãos e a esposa pelo incentivo, pelo apoio e principalmente pelo amor.

Ao professor José Ruidival dos Santos Filho meus sinceros agradecimentos, pela orientação e dedicação a este trabalho, pela amizade e compreensão.

A todos os professores, colegas e amigos que de algum modo participaram da minha formação (profissional e humana).

As demais pessoas que colaboraram com a realização deste trabalho (membros da banca, colegas, amigos, ...).

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nosso objetivo neste texto, é apresentar a decomposição J.-M. Bony para o produto de distribuições temperadas e um teorema de regularidade, devido a J.-Y. Chemin e N. Lerner, para soluções do sistema de Navier-Stokes.

Palavras-chave: Análise Matemática. Decomposição de Littlewood-Paley. Decomposição de Bony. Sistema de Navier-Stokes.

Abstract

Our main goal is to present a dissertation about the J.-M. Bony's decomposition for the product of distributions and as application a regularity result, due to J.-Y. Chemin and N. Lerner, for solutions of the Navier-Stokes's system.

Keywords: Mathematical Analysis. Littlewood-Paley's decomposition. Bony's decomposition. Navier-Stokes's system.

Sumário

Capítulo 0

Introdução

Um dos objetivos deste texto é apresentar a decomposição de Bony para o produto de distribuições temperadas pertencentes a um determinado subespaço das distribuições temperadas, tal decomposição foi apresentada em [1]. Como aplicação detalharemos um resultado, devido a J.-Y. Chemin e N. Lerner (ver[4]), sobre regularidade para soluções do sistema de Navier-Stokes de fluidos incompressíveis n-dimensionais.

Um dos pilares que permitirá alcançar os objetivos acima citados é a teoria de Littlewood-Paley apresentada no Capítulo 2. Em tal capítulo introduziremos a decomposição de Littlewood-Paley, que caracteriza uma classe grande de funções, e tem sido usada de modo eficaz, na forma da decomposição de Bony, em problemas não-lineares. No terceiro capítulo, utilizando a decomposição de Littlewood-Paley, apresentamos os espaços de Besov, suas propriedades e exemplos. Introduzidos originalmente por Oleg Besov, ganharam maior interesse após a caracterização de Littlewood-Paley feita por Jaak Peetre em 1967. Ainda neste capítulo, usando a Decomposição de Bony, determinamos condições para que subespaços de espaços de Besov sejam álgebra. Por fim no quarto capítulo obtemos o resultado de regularidade para soluções do sistema de Navier-Stokes. Os principais textos utilizados para a atingir tais objetivos são [3] e [4].

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem por objetivo apresentar informações que serão úteis nos capítulos subseqüentes, por isso, a abordagem será feita de modo sucinto. Muitos dos resultados serão apenas citados, e sugerimos referências onde a demonstração pode ser encontrada, entretanto, alguns resultados virão acompanhados de sua respectiva demonstração ou de um esboço dela. Maiores informações podem ser encontradas nas referências citadas no decorrer do capítulo.

1.1 Notações

Aqui fixaremos algumas notações. Indicaremos por $|\cdot|$, a norma euclidiana usual em $\mathbb{R}^n$, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, então

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$$

é a bola de centro x e raio r,

$$\mathcal{C}(x,r_1,r_2) = \{y \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x-y| < r_2\}$$

denotará a coroa de centro x, raio menor r_1 e raio maior r_2. Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, colocaremos $x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j$. Se Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$, então denotaremos por $C^\infty(\Omega)$, o conjunto das funções definidas em Ω infinitamente diferenciáveis com valores em $\mathbb{C}$. Afim de obter uma notação mais compacta para as derivadas parciais, usaremos multi-índices. Um multi-índice é uma n-upla de inteiros não negativos. Se

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ é um multi-índice, então denotaremos

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \quad \alpha! = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j!, \quad \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Deste modo, por exemplo, a regra do produto para derivadas se escreve como

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}(\partial^\beta f)(\partial^\gamma g).$$

Se $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$x^\alpha = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}.$$

Denotando o conjunto dos inteiros não negativos por $\mathbb{N}$ temos que se $\alpha \in \mathbb{N}^n$, então α é uma multi-índice, por vezes, escreveremos $\alpha \in \mathbb{N}^n$ no lugar de escrever, seja α um multi-índice. Aqui apresentamos apenas algumas notações que julgamos de clara interpretação, no decorrer do texto estaremos apresentando novos conceitos e junto a estes outras notações, as quais buscaremos apresentar o mais perto do usual possível.

1.2 Espaços L^p

Nesta seção assumiremos alguns conceitos básicos sobre Teoria da Medida, não vamos nos preocupar, por exemplo, em definir integral, mensurabilidade de funções, espaços de medida (tais conceitos podem ser encontrados em [7]). No que segue vamos fixar um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, isto é, um conjunto X munido de uma $\sigma-$ álgebra $\mathcal{M}$ e de uma medida μ. Se f é uma função mensurável em X e $1 \leq p < \infty$ tomamos

$$\|f\|_{L^p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

se $p = \infty$, então

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\},$$

com a convenção de que $\inf \emptyset = \infty$. Definimos

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^p} < \infty\},$$

é usual denotar $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ por $L^p(\mu)$, $L^p(X)$ ou simplesmente por L^p quando isto não causar confusão. Se A é um conjunto não vazio enumerável, então colocamos $l^p(A)$, em vez de $L^p(A, \mathcal{P}(A), \mu)$. Aqui

$$\mathcal{P}(A) = \{E : E \subset A\}$$

e μ é medida de contagem dada por

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} g(x), \ \ \forall \ E \in \mathcal{P}(A),$$

com $g : A \to \mathbb{R}$ e $g(x) = 1$, $\forall \ x \in A$. Quando não causar confusão usa-se escrever apenas l^p no lugar de $l^p(A)$. Se considerarmos que duas funções iguais em quase todo o ponto definem um mesmo elemento em L^p, então L^p é um espaço vetorial normado com a norma $\|\cdot\|_{L^p}$, de fato, temos mais do que isto, com tal norma, L^p é um espaço de Banach, ver [7].

1.2.1 Algumas Propriedades Básicas

Aqui citamos alguns resultados que futuramente, neste texto, vamos fazer referências. Usaremos a convenção de que $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

Teorema 1.2.1 (Desigualdade de Hölder) *Suponhamos que* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* f *e* g *são funções mensuráveis em* X, *então*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Teorema 1.2.2 *Se* A *é um conjunto não vazio enumerável e* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, *então*

$$l^p(A) \subset l^q(A) \quad e \quad \|\cdot\|_{l^q} \leq \|\cdot\|_{l^p}.$$

Antes de enunciar o próximo resultado lembremo-nos que se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ são espaços de medida, então $M \otimes \mathcal{N}$ indica a $\sigma-$álgebra produto em $X \times Y$. Em tal $\sigma-$álgebra pode-se colocar uma medida que é, em um sentido óbvio, o produto de μ e ν.

Teorema 1.2.3 (Desigualdade de Minkowski para Integrais) *Sejam* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *espaços de medida* $\sigma-$ *finita, e seja* $f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ *função mensurável em* $X \times Y$

i) *Se* $f \geq 0$ *e* $1 \leq p < \infty$, *então*

$$\left(\int \left(\int f(x,y)d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int \left(\int (f(x,y))^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

ii) *Se* $1 \leq p \leq \infty$, $f(\cdot, y) \in L^p$ *q.t.p* y *e a função* $y \rightarrow \|f(\cdot,y)\|_{L^p} \in L^1(\nu)$, *então* $f(x,\cdot) \in L^1(\nu)$ *q.t.p* x, *a função* $x \rightarrow \displaystyle\int f(x,y)d\nu(y) \in L^p$ *e*

$$\|\int f(\cdot,y)d\nu(y)\|_{L^p} \leq \int \|f(\cdot,y)\|_{L^p} d\nu(y).$$

a demonstração, destes resultados, pode ser encontrada em [7], respectivamente nas páginas 174, 178 e 187.

1.3 Distribuições

Antes de apresentarmos a definição de distribuição, vamos definir um importante espaço de funções, o espaço das funções testes.

Definição 1.3.1 *Seja* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$. *Denotaremos por* $C_c^\infty(\Omega)$, *o espaço das funções teste, isto é, o conjunto das funções definidas em* Ω *à valores complexos infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em* Ω.

Lembremos que o suporte de uma função contínua $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}$, denotaremos o suporte de ϕ por $S(\phi)$.

Definição 1.3.2 *Se* f *é uma função à valores complexos, Lebesgue mensurável, definida em* Ω , *tal que para cada compacto* $K \subset \Omega$

$$\int_K |f|dx < \infty$$

dizemos que f *é localmente integrável e escrevemos* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Teorema 1.3.1 *Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\int \phi(x)dx = 1$, $S(\phi) \subseteq \{x : |x| \leq 1\}$ e $\phi \geq 0$, e seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos para $\epsilon > 0$*

$$f_\epsilon(x) = \int f(x - \epsilon y)\phi(y)dy = \epsilon^{-n} \int f(y)\phi(\frac{x-y}{\epsilon})dy. \qquad (1.3.1)$$

Então as seguintes afirmações valem:

i) *$f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

ii) *Se $f(x) = 0$ q.t.p fora de um conjunto fechado A, então $S(f_\epsilon) \subseteq A + \{x : |x| \leq \epsilon\}$.*

iii) *Se f é contínua e $S(f)$ é compacto, $f_\epsilon \to f$ uniformemente quando $\epsilon \to 0$.*

A demonstração de tal resultado, bem como, dos dois corolários apresentados abaixo, podem ser encontradas, por exemplo, em [9], entretanto, apresentaremos aqui a demonstração do segundo corolário.

Corolário 1.3.1 *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e f_ϵ é definida por (1.3.1) quando $\epsilon > 0$ temos $\|f_\epsilon\|_{L^1} = \int |f_\epsilon|dx \leq \|f\|_{L^1}$ e $\|f_\epsilon - f\|_{L^1} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$.*

Para $K \subset \Omega$ diremos que U é uma vizinhança de K se U é um aberto de Ω tal que $K \subset U$. Temos o seguinte corolário.

Corolário 1.3.2 *Seja K um subconjunto compacto de um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Então existe $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi \equiv 1$ numa vizinhança de K.*

Demonstração: Como Ω é aberto seu complementar é fechado, assim temos que $\delta = d(K, \Omega^c) > 0$ ($d(K, \Omega^c)$ é a distância de K ao complementar de Ω) pois, a distância de um compacto a um fechado disjunto é sempre positiva. Sejam ϵ, $\epsilon_1 > 0$ tais que $\epsilon < \epsilon_1 < \epsilon_1 + \epsilon < \delta$ e seja χ a função dada por

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in K_1 \\ 0, & \text{se} \quad x \notin K_1 \end{cases}$$

onde K_1 é definido como $K_1 = K + \{x : |x| \leq \epsilon_1\}$. Então $\varphi = \chi_\epsilon$ definida por (1.3.1) satisfaz $S(\chi_\epsilon) \subseteq K_1 + \{x : |x| \leq \epsilon\} \subseteq K + \{x : |x| \leq \epsilon + \epsilon_1\} \subseteq \Omega$ deste modo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Ainda, se $d(x, K) < \epsilon_1 - \epsilon$, segue para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$|y| \leq 1$, que $x - \epsilon y \in K_1$. Conseqüentemente

$$\begin{aligned}\chi_\epsilon(x) &= \int \chi(x-\epsilon y)\phi(y)dy \\ &= \int_{|y|<1} \chi(x-\epsilon y)\phi(y)dy \\ &= \int 1 \cdot \phi(y)dy \\ &= 1\end{aligned}$$

■

Definição 1.3.3 *Uma sequência* $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *de funções* $\in C_c^\infty(\Omega)$ *converge a zero em* $C_c^\infty(\Omega)$ *se*

i) *existe um compacto* $K \subset \Omega$ *tal que* $S(\phi_j) \subseteq K, j = 0, 1, 2, ...$

ii) *para todo inteiro positivo* m *, as derivadas de ordem* m *de* ϕ_j *convergem uniformemente a zero quando* $j \to \infty$.

Definição 1.3.4 *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um aberto. Uma aplicação* $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *linear e sequencialmente contínua segundo a Definição 1.3.3 é chamada de distribuição em* Ω. *O espaço das distribuições em* Ω *é denotado por* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Por vezes, neste texto, para $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ escreveremos $\langle u, \phi\rangle$ em vez de $u(\phi)$.

Exemplo 1.3.1 *Seja* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *defina a distribuição* T_f *por*

$$\langle T_f, \phi\rangle = \int f(x)\phi(x)dx,$$

a linearidade é clara e a continuidade segue da estimativa

$$|\langle T_f, \phi\rangle| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \int_{S(\phi)} |f(x)|dx.$$

É interessante notar que se $\langle T_f, \phi\rangle = \langle T_g, \phi\rangle$ *para toda* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ *e* $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$, *então* $f = g$ *q.t.p, para detalhes ver por exemplo [9], página 11. Isto permite identificar qualquer função localmente integrável* f, *com o funcional* T_f *e deste modo podemos considerar muitos espaços de funções como subespaços de* $\mathcal{D}'(\Omega)$. *É usual escrever simplesmente* $\langle f, \phi\rangle$ *em vez de* $\langle T_f, \phi\rangle$.

Se para $x \in \Omega$, denotarmos por V_x uma vizinhança aberta de x, isto é, um aberto de Ω que contém x, então podemos apresentar a:

Definição 1.3.5 *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos o suporte de u, que denotaremos por $S(u)$, como*

$$S(u) = \{x \in \Omega : \exists\, V_x \text{ tal que } \langle u, \phi \rangle = 0, \ \forall\, \phi \in C_c^\infty(V_x)\}^c.$$

Agora podemos apresentar a:

Definição 1.3.6 *Se Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$, denotaremos por $\mathcal{E}'(\Omega)$, o subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ constituído das distribuições de suporte compacto.*

O próximo teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [9], página 41, garante que distribuições com suporte compacto podem ser estendidas continuamente para $C^\infty(\Omega)$. Antes de apresentar tal teorema lembraremos a noção de convergência em $C^\infty(\Omega)$:

Definição 1.3.7 *Dizemos que uma seqüência $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funções C^∞ converge a zero em $C^\infty(\Omega)$ se para todo compacto K e todo inteiro não negativo m, as derivadas de ordem m de ϕ_j convergem uniformemente a zero em K quando $j \to \infty$.*

Assim temos:

Teorema 1.3.2 *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. As seguintes condições são equivalentes:*

i) *$u \in \mathcal{E}'(\Omega)$.*

ii) *Existe um funcional linear contínuo v em $C^\infty(\Omega)$ tal que a restrição $v_{|C_c^\infty(\Omega)}$ é igual a u.*

1.3.1 Operações com Distribuições

A soma de distribuições e o produto por escalar, são definidas de maneira óbvia. Se $u_1,\ u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então,

$$\langle u_1 + u_2, \phi \rangle = \langle u_1, \phi \rangle + \langle u_2, \phi \rangle \text{ e}$$

$$\langle \lambda u_1, \phi \rangle = \lambda \langle u_1, \phi \rangle.$$

Afim de definir outras operações com distribuições vamos introduzir a noção de transposto formal. Suponhamos que existam dois operadores lineares e contínuos, L e L' de $C_c^\infty(\Omega)$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega (L\phi)(x)\psi(x)dx = \int_\Omega \phi(x)(L'\psi)(x)dx,\ \forall\, \phi,\ \psi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.3.2}$$

Quando isto acontece dizemos que L é o transposto formal de L' e vice-versa. Como por hipótese $\phi,\ L\phi,\ \psi,\ L\psi \in C_c^\infty(\Omega) \subset L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ (ver Exemplo 1.3.1), (1.3.2) pode ser escrito da forma $\langle L\phi, \psi\rangle = \langle \phi, L'\psi\rangle$. Neste caso é possível estender o operador $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ para um operador $\tilde{L} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ dado por

$$\langle \tilde{L}u, \psi\rangle = \langle u, L'\psi\rangle,\ \forall\, u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Com isto em mente vamos definir outras operações com distribuições. Se$f \in C^\infty(\Omega)$ e $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ é dado por $(L\phi)(x) = f(x)\phi(x)$, temos que L é linear, contínuo e seu transposto formal é $L' = L$, assim, a operação multiplicação por $f \in C^\infty(\Omega)$ fica definida para qualquer distribuição u por meio de

$$\langle fu, \phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle.$$

Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$, definindo $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ por meio da expressão $(L\phi)(x) = (\partial^{e_j}\phi)(x)$, vemos, utilizando integração por partes em relação a x_j, que seu transposto formal é $L' = -\partial^{e_j}$, isto é $(L'\phi)(x) = -(\partial^{e_j}\phi)(x)$, assim podemos definir para qualquer distribuição u a derivada em relação a x_j por meio da igualdade:

$$\langle \partial^{e_j}u, \phi\rangle = -\langle u, \partial^{e_j}\phi\rangle,\ \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

1.4 Convolução

Se f e g são duas funções contínuas em $\mathbb{R}^n$ e uma delas tem suporte compacto, então a convolução de f e g se define como

$$f \star g(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int g(x-y)f(y)dy.$$

Mais geralmente temos a definição.

Definição 1.4.1 *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $(u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n))$ denotaremos com $u \star \phi$ a função definida por*

$$u \star \phi(x) = \langle u, \phi_x^-\rangle$$

com $\phi_x^-(y) = \phi(x-y)$.

Uma importante utilização deste conceito é obter a demonstração do próximo teorema. Antes de enunciá-lo vejamos a:

Definição 1.4.2 *Dizemos que uma sequência* $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $j = 1, 2, \cdots$ *converge a* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *se* $\langle u_j, \phi \rangle$ *converge a* $\langle u, \phi \rangle$ *para toda* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$*. Neste caso escrevemos* $u_j \to u$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

Teorema 1.4.1 $C_c^\infty(\Omega)$ *é denso em* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

Notemos ainda que para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ valem as propriedades:

i) $u \star \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e suas derivadas são dadas por

$$\partial^\alpha (u \star \phi) = (\partial^\alpha u) \star \phi = u \star \partial^\alpha \phi.$$

ii) $S(u \star \phi) \subset S(u) + S(\phi)$.

1.5 Transformada de Fourier

1.5.1 A Transformada de Fourier de uma Função L^1

Dada uma função $f \in L^1$ define-se a transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Abaixo apresentamos algumas propriedades da transformada de Fourier:

i) $(\alpha f + \beta g)\hat{} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$ (linearidade).

ii) $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$ e $\hat{f}$ é contínua.

iii) $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ (Riemann – Lebesgue).

A propriedade **i)** e a primeira parte de **ii)** são claras, a continuidade segue aplicando o Teorema da Convergência Dominada (ver [7]), a propriedade **iii)** pode ser obtida a partir do seguinte esquema. Primeiramente considere $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, escolha $j \in \{1, \cdots, n\}$ e $M > 0$ tal que o $S(f) \subset B(0, M)$ e $\dfrac{1}{M}\|\partial^{e_j} f\|_{L^1} < \epsilon$ (para um $\epsilon > 0$ dado). Desta forma, se $|\xi_j| > M$, obtemos integrando por partes em relação a x_j, que

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &\leq \frac{1}{|\xi_j|}\|\partial^{e_j} f\|_{L^1} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

deste modo $\hat{f}(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to \infty$, desde que, se $|\xi| \to \infty$, então $|\xi_j| \to \infty$ para algum j. O caso geral, segue agora, da densidade de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ a qual resulta do Exemplo 1.3.1 e do Teorema 1.4.1.

1.5.2 Espaço de Schwartz e Distribuições Temperadas

O espaço de Schwartz, que denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, consiste de todas as funções C^∞, tais que juntamente com suas derivadas, decaem no infinito mais rapidamente que qualquer potência de $|x|$. Mais precisamente, para qualquer inteiro não negativo N e para qualquer multi-índice α definimos

$$\|f\|_{N,\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)| \right\}$$

e

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty : \|f\|_{N,\alpha} < \infty \text{ para todo } N \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

Claramente $C_c^\infty \subset \mathcal{S}$, mas, temos em $\mathcal{S}$ funções como $e^{-|x|^2}$, que não tem suporte compacto. A coleção $\|\cdot\|_{N,\alpha}$ é uma família contável de semi-normas em $\mathcal{S}$, e podemos usá-la para definir uma topologia em $\mathcal{S}$.

Definição 1.5.1 *Dizemos que uma sequência de funções $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 0 em $\mathcal{S}$ se para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $N \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{k\to\infty} \|\phi_k\|_{N,\alpha} = 0.$$

Definição 1.5.2 *Um espaço de Fréchet é um espaço vetorial topológico localmente convexo, metrizável e completo.*

Proposição 1.5.1 *Com a topologia definida pelas semi-normas $\|\cdot\|_{N,\alpha}$, $\mathcal{S}$ é um espaço de Fréchet.*

Demonstração: Ver [7], página 228.

■

Outra útil caracterização de $\mathcal{S}$ é dada pela seguinte proposição:

Proposição 1.5.2 *Se $f \in C^\infty$ então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $f \in \mathcal{S}$.

ii) $x^\alpha \partial^\beta f$ *é limitada para todos multi-índices* α, β.

iii) $\partial^\alpha (x^\beta f)$ *é limitada para todos multi-índices* α, β.

Esboço da demonstração: Claramente para $|\beta| \leq N$ temos que $|x^\beta| \leq (1+|x|)^N$. Agora, se $d = inf\Big\{ \sum_{j=1}^{n} |x_j| : |x| = 1 \Big\}$ então

$$\begin{aligned}(1+|x|)^N &\leq 2^N (1+|x|^N)\\ &\leq 2^N \big(1 + \tfrac{1}{d} \sum_{j=1}^{n} |x_j^N|\big),\end{aligned}$$

o que implica na equivalência de **i)** e **ii)**. A equivalência de **ii)** e **iii)** é obtida a partir do fato que cada $\partial^\alpha (x^\beta f)$ é uma combinação linear de termos da forma $x^\gamma \partial^\sigma f$ e vice-versa.

■

Observação 1.5.1 *Outra família de semi-normas, que pode ser usada para definir a topologia em* $\mathcal{S}$ *é:*

$$\|f\|_M = \sup_{\substack{|\alpha| \leq M \\ x \in \mathbb{R}^n}} \big\{ (1+|x|)^M |\partial^\alpha f(x)| \big\}, \ \forall\, M \in \mathbb{N}. \tag{1.5.1}$$

Como $\mathcal{S} \subset L^1$, faz sentido falarmos da transformada de Fourier de uma função $f \in \mathcal{S}$, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.5.1 *A transformada de Fourier é uma aplicação contínua de* $\mathcal{S}$ *em* $\mathcal{S}$ *tal que*

$$\int f \bar{g} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f} \bar{\hat{g}}$$

e

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Ou seja, $\mathcal{F}^{-1} g(x) = \check{g}(x) = (2\pi)^{-n} \displaystyle\int e^{ix\cdot\xi} g(\xi) d\xi$ *é a inversa da transformada de Fourier.*

A demonstração de tal fato pode ser encontrada em [6]. Como consequência do teorema anterior, podemos utilizar para a definição de convergência em $\mathcal{S}$ a família de semi-normas

$$\|f\|_{\wedge,k} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{|\alpha|\le k\\ \xi\in\mathbb{R}^n}} \left\{(1+|\xi|)^k|\partial^\alpha \hat{f}(\xi)|\right\}, \tag{1.5.2}$$

onde k é um inteiro não negativo. Tomando $\tilde{f}(x) = f(-x)$, podemos enunciar o seguinte colorário:

Corolário 1.5.1 *Para* $f \in \mathcal{S}$, $\hat{\hat{f}} = (2\pi)^n \tilde{f}$.

Em $\mathcal{S}$ temos ainda as propriedades:

i) $\widehat{\varphi \star \psi}(\xi) = (\hat{\varphi}\hat{\psi})(\xi)$.
ii) $\widehat{\varphi\psi}(\xi) = (2\pi)^{-n}(\hat{\varphi} \star \hat{\psi})(\xi)$.
iii) $\widehat{\partial^\alpha\varphi}(\xi) = (i\xi)^\alpha\hat{\varphi}(\xi)$.
iv) $\widehat{x^\beta\varphi}(\xi) = (i)^{|\beta|}\partial^\beta\hat{\varphi}(\xi)$.

Alguns comentários: a propriedade **i)** pode ser obtida aplicando as definições de transformada de Fourier, convolução e agrupando os termos de modo conveniente. Para verificar **ii)** basta (graças à fórmula da transformada de Fourier inversa) verificar que $\widehat{\widehat{\varphi\psi}} = (2\pi)^{-n}\widehat{\hat{\varphi} \star \hat{\psi}}$ o que segue de **i)** e do corolário acima, **iii)** segue utilizando integração por partes e aplicando indução em $|\alpha|$, **iv)** é obtida derivando sob o sinal de integração.

Abaixo apresentamos o espaço $\mathcal{S}'$.

Definição 1.5.3 *O espaço dos funcionais lineares contínuos em* $\mathcal{S}$, *que denotaremos por* $\mathcal{S}'$, *é chamado espaço das distribuições temperadas. Assim temos que uma aplicação linear* $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ *está em* $\mathcal{S}'$ *se*

$$\lim_{k\to\infty} T(\phi_k) = 0 \quad \textit{sempre que} \quad \lim_{k\to\infty} \phi_k = 0 \quad \textit{em} \quad \mathcal{S}.$$

Definição 1.5.4 *A transformada de Fourier de* $T \in \mathcal{S}'$ *é a distribuição temperada* $\hat{T}$ *dada por*

$$\hat{T}(f) = T(\hat{f}), \quad f \in \mathcal{S}.$$

Teorema 1.5.2 *A transformada de Fourier é uma bijeção contínua de $\mathcal{S}'$ em $\mathcal{S}'$ e sua inversa também é contínua.*

Demonstração: Se $T_K \to T$ em $\mathcal{S}'$, então para cada $f \in \mathcal{S}$,

$$\hat{T}_k(f) = T_k(\hat{f}) \to T(\hat{f}) = \hat{T}(f).$$

Além disso, temos que $\hat{T}^{-1} = (2\pi)^{-2n}\hat{\hat{\hat{T}}}$ deste modo sua inversa também é contínua.

∎

1.5.3 A Transformada de Fourier em L^p, $1 < p \leq \infty$

Se $f \in L^p$, $1 < p \leq \infty$, então f pode ser identificada com uma distribuição temperada. De fato, para $\phi \in \mathcal{S}$ defina

$$T_f(\phi) = \int f\phi,$$

que é convergente, pela Desigualdade de Hölder. Por outro lado, para ver que T_f é contínua suponha que $\phi_k \to 0$, observemos que por

$$|T_f(\phi_k)| \leq \|f\|_{L^p}\|\phi_k\|_{L^{p'}}$$

e pelo fato de $\|\phi_k\|_{L^{p'}}$ ser uniformemente dominada por uma semi-norma em $\mathcal{S}$ de ϕ_k, temos que $\|f\|_{L^p}\|\phi_k\|_{L^{p'}}$ tende a 0 quando k tende ao ∞. Nas páginas 16 e 17 de [6] encontram-se os seguintes resultados:

Teorema 1.5.3 (Desigualdade de Hausdorff-Young) *Se $f \in L^P, 1 \leq p \leq 2$, então $\hat{f} \in L^{\frac{p}{p-1}}$ e*

$$\|\hat{f}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Teorema 1.5.4 (Desigualdade de Young) *Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $f \star g \in L^r$, com $\dfrac{1}{r} + 1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, e*

$$\|f \star g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Também temos o seguinte teorema:

Teorema 1.5.5 *Se $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{f}$ é uma função C^∞.*

Tal resultado é apresentado na página 81 de [9].

1.5.4 Transformada Parcial de Fourier

Dados um subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ e uma função $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mensurável, supondo que para cada compacto $K \subset \Omega$ a

$$\int_K dt \int_{R^N} |f(t,x)| dx < \infty,$$

o Teorema de Fubini (ver [7] página 65) garante que f é integrável em x para quase todo t e portanto podemos definir a transformada de Fourier de $f(t,x)$ na variável x:

$$\tilde{f}(t,x) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(t,x) dx.$$

Abaixo, $\pi : \Omega \times \mathbb{R}^N$ denota a projeção $(t,x) \to t$.

Definição 1.5.5 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $n, N \geq 1$. Denotaremos como $C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(R^N))$ o subconjunto de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ das funções ϕ tais que $\pi(S(\phi))$ é compacto em Ω. Dizemos que uma seqüência $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(R^N))$ converge para zero em $C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(R^N))$, e escrevemos $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(R^N))$ se existe um compacto fixo $K \subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subset K \times \mathbb{R}^N$ e $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$.*

Se ∂_t denota a derivada em relação a variável t e ∂_x a derivada em relação a variável x, podemos escrever o próximo teorema, o qual reune propriedades básicas da transformada parcial de Fourier.

Teorema 1.5.6 *Seja $\mathcal{F} : C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(R^N)) \to C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(R^N))$ o operador dado por $\mathcal{F}(f) = \tilde{f}$. Então $\mathcal{F}$ é um operador contínuo inversível cujo a inversa é dada por*

$$f(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int e^{ix\cdot\xi} \tilde{f}(t,\xi) d\xi.$$

Além disto, dados $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(R^N))$ e multi-índices α e β, valem as seguintes relações:

$$\begin{array}{ll} \textbf{\textit{i)}} & \widetilde{\partial_x^\alpha \varphi}(t,\xi) = \xi^\alpha \tilde{\varphi}(t,\xi). \\ \textbf{\textit{ii)}} & \widetilde{x^\beta \varphi}(t,\xi) = (i)^{|\beta|} \partial_\xi^\beta \tilde{\varphi}(t,\xi). \\ \textbf{\textit{iii)}} & \widetilde{\partial_t^\beta \varphi}(t,\xi) = \partial_t^\beta \tilde{\varphi}(t,\xi). \\ \textbf{\textit{iv)}} & \displaystyle\int\int \tilde{\varphi}(t,\xi)\psi(t,\xi) dt d\xi = \int\int \varphi(t,\xi)\tilde{\psi}(t,\xi) dt d\xi. \end{array} \tag{1.5.3}$$

Definição 1.5.6 *Qualquer funcional linear contínuo sobre o espaço $C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(R^N))$ é dito uma distribuição temperada em x. Denota-se o conjunto de tais distribuições por $\mathcal{D}'(\Omega; \mathcal{S}'(R^N))$.*

Definição 1.5.7 *Seja* $u \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathcal{S}'(R^N))$. *A transformada de Fourier parcial de* u, *indicada por* $\tilde{u}$, *é definida por:*

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle u, \tilde{\varphi} \rangle, \ \forall \, \varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(R^N)).$$

Capítulo 2

Teoria de Littlewood-Paley

Neste capítulo, apresentaremos uma teoria que tem por idéia básica um processo de localização. O interesse deste método é que as derivadas atuam de modo muito especial em distribuições cujo a transformada de Fourier tem suporte contido em uma bola ou uma coroa. A decomposição de Littlewood-Paley caracteriza uma classe grande de funções e tem sido usada, via decomposição de Bony, em problemas não-lineares. Deste ponto em diante, C indicará uma constante positiva que pode mudar de linha para linha, porém será sempre independente dos parâmetros envolvidos em cada uma das desigualdades. A referência utilizada aqui é [3].

2.1 Desigualdades de Bernstein

Tais desigualdades são de fato elementos essenciais, via Análise Harmônica, no estudo de funções baseadas em L^p.

Lema 2.1.1 (Desigualdades de Bernstein) *Sejam $\mathcal{C}$ uma coroa e B uma bola. Existe uma constante C, tal que para qualquer par de números reais (p,q) satisfazendo $q \geq p \geq 1$ e qualquer $u \in L^p$, $\lambda > 0$ temos:*

i) $S(\hat{u}) \subset \lambda B \Rightarrow \sup\limits_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^q} \leq C^{k+1}\lambda^{k+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u\|_{L^p}.$

ii) $S(\hat{u}) \subset \lambda\mathcal{C} \Rightarrow C^{-k-1}\lambda^k\|u\|_{L^p} \leq \sup\limits_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p} \leq C^{k+1}\lambda^k\|u\|_{L^p}.$

Demonstração: Usando $\lambda-$dilatação podemos assumir ao longo de toda a demonstração que $\lambda = 1$, pois, se $S(\hat{u}) \subset \lambda B$ tomando $v(x) = u(\lambda^{-1}x)$ temos, $S(\hat{v}) \subset B$,

$\partial^\alpha v(x) = \lambda^{-|\alpha|}(\partial^\alpha u)(\lambda^{-1}x)$, $\|v\|_{L^p} = \lambda^{\frac{n}{p}}\|u\|_{L^p}$ e $\|\partial^\alpha v(x)\|_{L^q} = \lambda^{(-|\alpha|+\frac{n}{q})}\|\partial^\alpha u\|_{L^q}$. Assim, assumindo o lema válido para $\lambda = 1$, podemos escrever,

$$\begin{aligned}\sup_{|\alpha|=k} \lambda^{(-|\alpha|+\frac{n}{q})}\|\partial^\alpha u\|_{L^q} &= \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha v(x)\|_{L^q} \\ &\leq C^{k+1}\|v\|_{L^p} \\ &= C^{k+1}\lambda^{\frac{n}{p}}\|u\|_{L^p}\end{aligned}$$

o que demonstra **i)** para qualquer λ. Agora se **ii)** vale para $\lambda = 1$ um processo análogo ao feito acima, mostra que a propriedade **ii)** é válida para todo λ. Para demonstrar **i)** tomemos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ identicamente 1 em uma vizinhança de B, assim temos que $\hat{u}(\xi) = \phi(\xi)\hat{u}(\xi)$ e, deste modo, se g denota a transformada de Fourier inversa de ϕ, podemos escrever,

$$\partial^\alpha u = \partial^\alpha g \star u.$$

Pela Desigualdade de Young (ver Teorema 1.5.4), temos que

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^q} \leq \|\partial^\alpha g\|_{L^r}\|u\|_{L^p}, \text{ com } r \in [0,\infty] \text{ dado por } \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

e

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha g\|_{L^r} &= \left(\int |\partial^\alpha g(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\int \left(\frac{|\partial^\alpha g(x)|^r(1+|x|^2)^{rn}}{(1+|x|^2)^{rn}}\right) dx\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\overset{(1)}{\leq} C_1\|(1+|\cdot|^2)^n\partial^\alpha g\|_{L^\infty} \\ &\overset{(2)}{\leq} C_1\|(Id-\Delta)^n((\cdot)^\alpha\phi)\|_{L^1} \\ &\overset{(3)}{\leq} C^{k+1}.\end{aligned}$$

Aqui (1) segue do fato que $g \in \mathcal{S}$, (2) da desigualdade $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$ e (3) segue pois $\|(Id-\Delta)^n((\cdot)\phi)\|_{L^1}$ é limitada por uma soma finita de integrais da forma $\displaystyle\int C\partial^\beta((\cdot)^\alpha)(x)\partial^\gamma\phi(x)dx$, com $|\beta|, |\gamma| \leq 2n$, e cada uma destas integrais é limitada por

$$C \sup_{|\gamma|\leq 2n} \|\partial^\gamma\phi\|_{L^\infty} \int_{S(\phi)} |\partial^\beta((\cdot)^\alpha)(x)|dx \leq C_0^k.$$

A segunda desigualdade de **ii)** segue diretamente de **i)**. Para provar a primeira desigualdade consideremos uma função $\tilde{\phi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ a qual é identicamente 1 em uma vizinhança da coroa $\mathcal{C}$. Usando a identidade algébrica,

$$\begin{aligned} |\xi|^{2k} &= \sum_{1 \leq j_1, \cdots, j_k \leq n} \xi_{j_1}^2 \cdots \xi_{j_k}^2 \\ &= \sum_{|\alpha|=k} (i\xi)^\alpha (-i\xi)^\alpha \end{aligned}$$

e colocando $g_\alpha = \mathcal{F}^{-1}((i\xi)^\alpha |\xi|^{-2k} \tilde{\phi}(\xi))$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=k} (-i\xi)^\alpha \hat{g_\alpha} \hat{u} &= \sum_{|\alpha|=k} (-i\xi)^\alpha (i\xi)^\alpha |\xi|^{-2k} \tilde{\phi}(\xi) \hat{u} \\ &= \tilde{\phi}(\xi) \hat{u}(\xi) \\ &= \hat{u}(\xi), \end{aligned}$$

e como $\mathcal{F}(\sum_{|\alpha|=k} g_\alpha \star \partial^\alpha u) = \sum_{|\alpha|=k} (-i\xi)^\alpha \hat{g_\alpha} \hat{u}$ segue que

$$u = \sum_{|\alpha|=k} g_\alpha \star \partial^\alpha u. \tag{2.1.1}$$

Deste modo, já que $\|g_\alpha\|_{L^1} \leq C^{k+1}$, utilizando a Desigualdade de Young (ver Teorema 1.5.4), podemos escrever as seguintes desigualdades,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p} &\leq \sum_{|\alpha|=k} \|g_\alpha \star \partial^\alpha u\|_{L^p} \\ &\leq \sum_{|\alpha|=k} \|g_\alpha\|_{L^1} \|\partial^\alpha u\|_{L^p} \\ &\leq C^{k+1} \|\partial^\alpha u\|_{L^p} \end{aligned}$$

disto segue a primeira desigualdade de **ii)**.

∎

2.2 Partição Diádica da Unidade

Na próxima proposição introduziremos a partição diádica da unidade, que motivará a decomposição de Littlewood-Paley.

Proposição 2.2.1 *Sejam* $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0, \frac{3}{4}, \frac{8}{3})$, $B = B(0, \frac{4}{3})$. *Então: Existem funções* $\chi \in C_c^\infty(B, [0,1])$ *e* $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{C}, [0,1])$ *satisfazendo:*

$$\forall \ \ \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \chi(\xi) + \sum_{j \geq 0} \varphi(2^{-j}\xi) = 1; \tag{2.2.1}$$

$$\forall \ \ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1; \tag{2.2.2}$$

$$|j - j'| \geq 2 \Rightarrow S(\varphi(2^{-j}\cdot)) \cap S(\varphi(2^{-j'}\cdot)) = \emptyset; \tag{2.2.3}$$

$$j \geq 1 \Rightarrow S(\chi) \cap S(\varphi(2^{-j}\cdot)) = \emptyset. \tag{2.2.4}$$

Além disso, se $\tilde{\mathcal{C}} = B(0, \frac{2}{3}) + \mathcal{C}$ *temos que*

$$|j - j'| \geq 5 \Rightarrow 2^{j'}\tilde{\mathcal{C}} \cap 2^j\mathcal{C} = \emptyset; \tag{2.2.5}$$

$$\forall \ \ \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{j \geq 0} \varphi^2\left(2^{-j}\xi\right) \leq 1; \tag{2.2.6}$$

$$\forall \ \ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \frac{1}{2} \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi^2(2^{-j}\xi) \leq 1. \tag{2.2.7}$$

Demonstração: Tomemos $\alpha \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$ e definamos $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(0, \alpha^{-1}, 2\alpha)$, temos assim, $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ e mais,

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} 2^j\mathcal{C}' = \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

pois, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $|x| = r > 0$, então existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $2^j\alpha^{-1} < r$ e $r \leq 2^{j+1}\alpha^{-1}$, como $\alpha > 1$ temos que $2^{j+1}\alpha^{-1} < 2^j(2\alpha)$ assim segue que $x \in 2^j\mathcal{C}'$. Afirmamos que se $j, j' \in \mathbb{Z}$ satisfazem $|j - j'| \geq 2$, então

$$2^j\mathcal{C} \cap 2^{j'}\mathcal{C} = \emptyset.$$

De fato, supondo que $2^j\mathcal{C} \cap 2^{j'}\mathcal{C} \neq \emptyset$ e, sem perda de generalidade, que $j' > j$ temos, $2^{j'} \cdot \dfrac{3}{4} \leq 2^j \cdot \dfrac{8}{3}$ o que implica $|j' - j| \leq 1$. Agora, desde que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ o Corolário 1.3.2 permite tomar $\theta \in C_c^\infty(\mathcal{C}, [0,1])$ tal que θ é identicamente 1 em uma vizinhança de $\mathcal{C}'$. Deste modo a afirmação acima garante que a função dada por,

$$T(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta(2^j\xi),$$

está bem definida e a soma é localmente finita no espaço $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, pois, $S(\theta(2^j\cdot)) \subset 2^{-j}\mathcal{C}$. Como cada $\theta(2^j\cdot)$ é suave temos que T é suave e desde que a função θ é positiva e vale 1 em uma vizinhança de $\mathcal{C}'$, segue da propriedade de cobertura $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} 2^j\mathcal{C}' = \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ que a função T é estritamente positiva, de fato maior ou igual a 1 em $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Deste modo, é lícito definir $\varphi : \mathcal{C} \to [0,1]$ por

$$\varphi = \frac{\theta}{T}.$$

Vamos mostrar agora que definindo,

$$\chi(\xi) = 1 - \sum_{j\geq 0} \varphi(2^{-j}\xi)$$

as propriedades (2.2.1)-(2.2.7) são satisfeitas. É claro que $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{C}, [0,1])$ e que para $\xi \neq 0$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1,$$

assim temos que φ satisfaz (2.2.2). Temos também para $j \leq -1$ que $S(\varphi(2^{-j}\cdot)) \subset 2^j\mathcal{C} \subset B$ daí, para $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $|\xi| \geq \frac{4}{3}$, temos

$$1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = \sum_{j\geq 0} \varphi(2^{-j}\xi)$$

deste modo segue que $S(\chi) \subset B$, e mais, $\chi \in C_c^\infty(B, [0,1])$, de modo que φ e χ satisfazem (2.2.1). A afirmação (2.2.3) segue do fato que $S(\varphi(2^{-j}\cdot)) \subset 2^j\mathcal{C}$ e de que

$$|j - j'| \geq 2 \Rightarrow 2^j\mathcal{C} \cap 2^{j'}\mathcal{C} = \emptyset,$$

(2.2.4) é válida pois para $j \geq 1$ temos $2^j \cdot \frac{3}{4} \geq \frac{4}{3}$ e deste modo $B \cap 2^j\mathcal{C} = \emptyset$, $\forall\, j \geq 1$. Para ver (2.2.5) notemos que $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}\left(0, \frac{1}{12}, \frac{10}{3}\right)$, então se $2^{j'}\tilde{\mathcal{C}} \cap 2^j\mathcal{C} \neq \emptyset$ devemos ter

$$\frac{3}{4} \cdot 2^j \leq 2^{j'} \cdot \frac{10}{3} \quad \text{e} \quad \frac{1}{12} \cdot 2^{j'} \leq 2^j \cdot \frac{8}{3},$$

o que implica que $|j - j'| \leq 4$, de forma que $2^{j'}\tilde{\mathcal{C}} \cap 2^j\mathcal{C} = \emptyset$ sempre que $|j - j'| \geq 5$. Demonstraremos agora (2.2.6). Como χ e φ tem seus valores em $[0,1]$ é claro que

$$\chi^2(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi^2(2^{-j}\xi) \leq \chi(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi(2^{-j}\xi) = 1,$$

e do fato que $2^j\mathcal{C} \cap 2^{j'}\mathcal{C} \neq \emptyset$ apenas quando $|j - j'| < 2$, vemos que para cada ξ fixo a soma $\chi(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi(2^{-j}\xi)$ reduz-se a no máximo três termos, que denotaremos por a, b e c, os quais satisfazem $0 < a, b, c < 1$ e $a + b + c = 1$, desta forma temos

$$\begin{aligned} 1 &= (a+b+c)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &\leq 3(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

De tal desigualdade segue (2.2.6). Analogamente, notando que para $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ a soma $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi^2(2^{-j}\xi)$ tem no máximo dois termos não nulos, obtemos (2.2.7).

∎

2.3 Decomposição de Littlewood-Paley

Deste ponto em diante, χ e φ denotarão duas funções fixadas satisfazendo (2.2.1)-(2.2.7). Com isto em mente, vamos colocar uma notação que será usada no decorrer deste texto.

Notação:

$$\text{se } \; j \leq -2 \; \text{ então } \Delta_j u = 0, \;\; \forall \; u \in \mathcal{S}',$$

$$\Delta_{-1} u = (\chi \hat{u})\check{}, \;\; \forall \; u \in \mathcal{S}',$$

$$\text{se } \; j \geq 0, \;\; \text{então } \; \Delta_j u = (\varphi(2^{-j}\cdot)\hat{u})\check{}, \;\; \forall \; u \in \mathcal{S}',$$

$$\text{se } \; j \in \mathbb{Z} \; \text{ então } S_j u = \sum_{j' \leq j-1} \Delta_{j'} u = (\chi(2^{-j}\cdot)\hat{u})\check{}, \;\; \forall \; u \in \mathcal{S}'.$$

A igualdade $\sum_{j' \leq j-1} \Delta_{j'} u = (\chi(2^{-j}\cdot)\hat{u})\check{}$ será verificada após a Observação 2.3.1. É interessante notar que para $u \in L^p, \; 1 \leq p \leq \infty$, as convoluções

$$2^{jn}\check{\varphi}(2^j\cdot) \star u \;\; \text{e} \;\; 2^{jn}\check{\chi}(2^j\cdot) \star u$$

ficam bem definidas e são tais que

$$(2^{jn}\check{\varphi}(2^j\cdot) \star u)\hat{} = \varphi(2^{-j}\cdot)\hat{u} \;\; \text{e} \;\; (2^{jn}\check{\chi}(2^j\cdot) \star u)\hat{} = \chi(2^{-j}\cdot)\hat{u}.$$

Deste modo se $u \in L^p, \; 1 \leq p \leq \infty$, temos

$$\begin{aligned} \Delta_{-1} u &= 2^{-n}\check{\chi}(2^{-1}\cdot) \star u, \\ \Delta_j u &= 2^{jn}\check{\varphi}(2^j\cdot) \star u, \;\; \forall \; j \geq 0, \\ S_j u &= 2^{jn}\check{\chi}(2^j\cdot) \star u, \;\; \forall \; j \geq -1. \end{aligned}$$

Assim, pelas propriedades da convolução temos

$$\Delta_j \partial^\alpha u = \partial^\alpha \Delta_j u; \;\; \forall \; \alpha \in \mathbb{N}^n, \;\; \forall \; u \in \mathcal{S}'. \tag{2.3.1}$$

De fato, para $f \in \mathcal{S}$ valem as igualdades,

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha \Delta_j u, f\rangle &= (-1)^\alpha \langle \Delta_j u, \partial^\alpha f\rangle \\
&= (-1)^\alpha \langle u, \Delta_j \partial^\alpha f\rangle \\
&= (-1)^\alpha \langle u, \partial^\alpha \Delta_j f\rangle \\
&= \langle \partial^\alpha u, \Delta_j f\rangle \\
&= \langle \Delta_j \partial^\alpha u, f\rangle.
\end{aligned}$$

A segunda igualdade é consequência da:

Observação 2.3.1 *Para qualquer $j \in \mathbb{Z}$ o operador Δ_j é tal que*

$$\langle \Delta_j u, f\rangle = \langle u, \Delta_j f\rangle, \ \forall\ u \in \mathcal{S}', \quad f \in \mathcal{S}.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_j u, f\rangle &= \langle \Delta_j u, \hat{\check{f}}\rangle \\
&= \langle \widehat{\Delta_j u}, \check{f}\rangle \\
&= \langle u, (\varphi(2^{-j}\cdot)\check{f}\hat{)}\rangle
\end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned}
(\varphi(2^{-j}\cdot)\check{f}\hat{)}(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(2^j x)\check{f}(x)dx \\
&= \int\int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(2^j x)e^{iy\cdot x}f(y)\frac{dxdy}{(2\pi)^n} \\
&= \int\int e^{-ix\cdot(\xi-y)}\varphi(2^j x)f(y)\frac{dxdy}{(2\pi)^n} \\
&\overset{(1)}{=} (\Delta_j f),
\end{aligned}$$

segue a observação. Para ver (1) basta efetuar duas trocas de variáveis na expressão que define $(\Delta_j f)$.

Na notação apresentada acima, a igualdade $S_j u = \sum\limits_{j' \leq j-1} \Delta_{j'} u$ define o operador S_j, no entanto, a igualdade $\sum\limits_{j' \leq j-1} \Delta_{j'} u = (\chi(2^{-j}\cdot)\hat{u})\check{}$ precisa ser verificada. Para isto, graças a Observação 2.3.1 , é suficiente mostrar que

$$\Big(\sum_{j' \leq j-1} \Delta_{j'} f\Big)\hat{} = \chi(2^{-j}\cdot)\hat{f}, \ \ \forall\ f \in \mathcal{S},$$

o que decorre das igualdades

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{j'\le j-1}\Delta_{j'}f\Big)\hat{}(\xi) &= \Big(\sum_{-1\le j'\le j-1}\Delta_{j'}f\Big)\hat{}(\xi)\\
&= \chi(\xi)\hat{f}(\xi)+\sum_{0\le j'\le j-1}\varphi(2^{-j'}\xi)\hat{f}(\xi)\\
&= \big(\chi(\xi)+\sum_{0\le j'\le j-1}\varphi(2^{-j'}\xi)\big)\hat{f}(\xi)\\
&= \big(1-\sum_{j'\ge 0}\varphi(2^{-j'}\xi)+\sum_{0\le j'\le j-1}\varphi(2^{-j'}\xi)\big)\hat{f}(\xi)\\
&= \big(1-\sum_{j'\ge j}\varphi(2^{-j'}\xi)\big)\hat{f}(\xi)\\
&= \big(1-\sum_{j'\ge 0}\varphi(2^{-j'}2^{-j}\xi)\big)\hat{f}(\xi)\\
&= \chi(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Notemos agora que os operadores Δ_j e S_j mapeiam L^p em L^p. Mais ainda, existem constantes positivas C_1 e C_2 independentes de $j\in\mathbb{Z}$ e $u\in L^p$ tais que

$$\begin{aligned}
\|\Delta_j u\|_{L^p} &\le C_1\|u\|_{L^p} \quad \text{e}\\
\|S_j u\|_{L^p} &\le C_2\|u\|_{L^p}.
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

De fato, para $u\in L^p$ temos $\Delta_{-1}u=\int\check{\chi}(y)u(\cdot-y)dy$ e, para $j\ge 0$, $\Delta_j u=2^{jn}\int\check{\varphi}(2^jy)u(\cdot-y)dy$. Assim, se $j\ge 0$ temos,

$$\begin{aligned}
\|\Delta_j u\|^p_{L^p} &= \|2^{jn}\int\check{\varphi}(2^jy)u(\cdot-y)dy\|^p_{L^p}\\
&= \|2^{jn}\check{\varphi}(2^j\cdot)\star u\|^p_{L^p}\\
&\overset{(1)}{\le} \|2^{jn}\check{\varphi}(2^j\cdot)\|^p_{L^1}\|u\|^p_{L^p}\\
&\overset{(2)}{=} \|\check{\varphi}\|^p_{L^1}\|u\|^p_{L^p},
\end{aligned}$$

(para $j=-1$ contas análogas estimam $\|\Delta_{-1}u\|_{L^p}$). Para $u\in L^p$, quando $j\ge -1$ temos que $S_ju=2^{jn}\int\check{\chi}(2^jy)u(\cdot-y)dy$, assim podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|S_j u\|^p_{L^p} &= \|2^{jn}\int\check{\chi}(2^jy)u(\cdot-y)dy\|^p_{L^p}\\
&= \|2^{jn}\check{\chi}(2^j\cdot)\star u\|^p_{L^p}\\
&\overset{(3)}{\le} \|2^{jn}\check{\chi}(2^j\cdot)\|^p_{L^1}\|u\|^p_{L^p}\\
&\overset{(4)}{=} \|\check{\chi}\|^p_{L^1}\|u\|^p_{L^p}.
\end{aligned}$$

Aqui em (1) e (3) usamos a Desigualdade de Young (ver Teorema 1.5.4), (2) pode ser obtida do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\|2^{jn}\check{\varphi}(2^j\cdot)\|_{L^1} &= 2^{jn}\int |\check{\varphi}(2^jx)|dx \\
&= \int |\check{\varphi}(x)|dx \\
&= \|\check{\varphi}\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

A desigualdade (4) segue analogamente.

Proposição 2.3.1 *Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Então $u = \lim\limits_{j\to\infty} S_j u$ no espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ decorre da Observação 2.3.1 que $\langle u - S_j u, f\rangle = \langle u, f - S_j f\rangle$. Deste modo é suficiente demonstrar que $f = \lim\limits_{j\to\infty} S_j f$ no espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para isto usaremos a família de semi-normas $\|\cdot\|_{\wedge,k}$ definida em (1.5.2). Pela Fórmula de Leibnitz, temos

$$\begin{aligned}
\|f - S_j f\|_{\wedge,k} \leq \sup_{\substack{|\alpha|\leq k \\ \xi\in\mathbb{R}^n}} &\Big\{(1+|\xi|)^k \Big(|1-\chi(2^{-j}\xi)|\cdot|\partial^\alpha \hat{f}(\xi)|\Big) \\
&+ \sum_{0<\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta 2^{-j|\beta|}|(\partial^\beta\chi)(2^{-j}\xi)|\cdot|\partial^{\alpha-\beta}\hat{f}(\xi)|\Big)\Big\},
\end{aligned}$$

aqui $\beta, \alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\beta \leq \alpha$ significa que $\beta_j \leq \alpha_j$, $j = 1, ..., n$. Como χ é igual a 1 em uma vizinhança da origem, usando a Fórmula de Taylor, obtemos que

$$\|f - S_j f\|_{\wedge,k} \leq C_\alpha 2^{-j}\|f\|_{\wedge,k+1}.$$

∎

Agora podemos apresentar a:

Definição 2.3.1 *Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ escrevemos*

$$u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j u,$$

tal série é denominada decomposição de Littlewood-Paley de u.

Proposição 2.3.2 *Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções limitadas satisfazendo $\|u_j\|_{L^\infty} \leq C2^N$ para algum $C, N \in \mathbb{R}$ e cuja transformada de Fourier de cada u_j está suportada na coroa $2^j\tilde{\mathcal{C}}$, aqui $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(0, \frac{1}{12}, \frac{10}{3})$. Então a série $\sum_{j\in\mathbb{N}} u_j$ é convergente em $\mathcal{S}'$.*

Demonstração: Seja $\tilde{\phi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ identicamente 1 numa vizinhança de $\tilde{\mathcal{C}}$ assim $\tilde{\phi}(2^{-j}\cdot)$ é identicamente 1 em uma vizinhança de $S(\hat{u}_j)$. Tomando $g_\alpha = \mathcal{F}^{-1}((i\xi)^\alpha|\xi|^{-2k}\tilde{\phi}(\xi))$, para $|\alpha| = k$ temos

$$\begin{aligned} \widehat{g_\alpha(2^j\cdot)}(\xi) &= 2^{-jn}\hat{g_\alpha}(2^{-j}\xi) \\ &= 2^{-jn}2^{jk}((i\xi)^\alpha|\xi|^{-2k}\tilde{\phi}(2^{-j}\xi)) \end{aligned}$$

e deste modo

$$u_j = 2^{-jk}\sum_{|\alpha|=k} 2^{jn}g_\alpha(2^j\cdot) \star \partial^\alpha u_j,$$

para ver tal fato, basta tomar a transformada de Fourier da expressão e proceder como na demonstração de (2.1.1). Desta forma para qualquer função teste $\phi \in \mathcal{S}$ temos

$$\begin{aligned} |\langle u_j, \phi\rangle| &= |2^{-jk}\sum_{|\alpha|=k}\langle u_j, 2^{jn}g_\alpha(2^j\cdot) \star \partial^\alpha\phi\rangle| \\ &= |2^{-jk}\sum_{|\alpha|=k}\int u_j(x)(2^{jn}g_\alpha(2^j\cdot) \star \partial^\alpha\phi)(x)dx| \\ &\leq C2^{-j(k-N)}\sum_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha\phi\|_{L^1}, \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

assim, para $k > N$, temos que $\sum_{j\in\mathbb{N}}\langle u_j, \phi\rangle$ é uma série convergente. Deste modo, a expressão

$$\langle u, \phi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to\infty}\sum_{l\leq j}\langle u_l, \phi\rangle$$

define uma distribuição temperada.

■

Utilizaremos agora os operadores Δ_j para caracterizar um importante espaço, o espaço de Sobolev que iremos denotar por $\mathcal{H}^s$. Aqui $\mathcal{H}^s$ consiste de todas as distribuições $u \in \mathcal{S}'$ tal que $\hat{u} \in L^2_s$, o espaço L^2 com respeito a medida $\dfrac{(1+|\xi|^2)^s d\xi}{(2\pi)^n}$. Neste espaço podemos definir a norma

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s} = \left(\int(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nossa intenção é demonstrar o seguinte fato:

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s}^2 \backsim \sum_{j\geq -1} 2^{2js}\|\Delta_j u\|_{L^2}^2$$

aqui $\backsim$ indica que existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \sum_{j\geq -1} 2^{2js}\|\Delta_j u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{\mathcal{H}^s}^2 \leq C_2 \sum_{j\geq -1} 2^{2js}\|\Delta_j u\|_{L^2}^2.$$

De fato, para $u \in \mathcal{H}^s$ utilizando (2.2.6) temos,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{H}^s}^2 &= \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq 3\left(\int_B (1+|\xi|^2)^s |\chi(\xi)\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right.\\
&\left. + \sum_{j\geq 0} \int_{2^j\mathcal{C}} (1+|\xi|^2)^s |\varphi(2^{-j}\xi)\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)\\
&\leq 3\left(\int_B (1+|\xi|^2)^s |\widehat{\Delta_{-1} u}(\xi)|^2 d\xi \right.\\
&\left. + \sum_{j\geq 0} \int_{2^j\mathcal{C}} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{\Delta_j u}(\xi)|^2 d\xi \right)\\
&\overset{(1)}{\leq} C\left(\sum_{j\geq -1} 2^{2js}\|\widehat{\Delta_j u}\|_{L^2}^2\right)\\
&\leq C_2\left(\sum_{j\geq -1} 2^{2js}\|\Delta_j u\|_{L^2}^2\right).
\end{aligned}$$

Para obter (1) basta notar que $\sup\limits_B (1+|\xi|^2)^s < \infty$ e que para $j \geq 0$ temos

$$\begin{aligned}
\sup_{2^j\mathcal{C}} (1+|\xi|^2)^s &= \left(1+(2^j\frac{8}{3})^2\right)^s \\
&\leq \left(2(2^j\frac{8}{3})^2\right)^s \\
&= \frac{128}{9}2^{2js}.
\end{aligned}$$

Aplicando a outra desigualdade de (2.2.6) e procedendo analogamente concluímos a demonstração do fato afirmado acima.

Capítulo 3

Espaços de Besov

Tendo em vista a caracterização do espaço de Sobolev, apresentamos o espaço de Besov, introduzido por Oleg Besov, o qual ganhou maior interesse após a caracterização de Littlewood-Paley feita por Jaak Peetre em 1967. A referência utilizada aqui é [3].

3.1 Definição e Exemplos

Com a notação do parágrafo 2.3, consideraremos:

Definição 3.1.1 *Sejam s um número real e $(p, r) \in [1, \infty]^2$. O espaço de Besov denotado por $\mathcal{B}^s_{p,r}$ é o espaço de todas as distribuições temperadas tais que*

$$\|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} = \|(2^{sj}\|\Delta_j u\|_{L^p})_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{Z})} < \infty.$$

Lema 3.1.1 *Se r é finito então para qualquer $u \in \mathcal{B}^s_{p,r}$ temos*

$$\lim_{j\to\infty} \|S_j u - u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} = 0.$$

Demonstração: Inicialmente notemos que as propriedades de φ garantem que

$$|j - j'| \geq 2 \Rightarrow \Delta_j \Delta_{j'}(u) = 0 \ \ \text{(o operador nulo)},$$

deste modo utilizando a Decomposição de Littlewood-Paley obtemos que

$$\Delta_l(S_j u - u) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ l < j-1 \\ \Delta_l\Delta_{l+1}(u) & \text{se } \ l = j-1 \\ \Delta_l\Delta_l(u) + \Delta_l\Delta_{l+1}(u) & \text{se } \ l = j \\ \Delta_l\Delta_{l-1}(u) + \Delta_l\Delta_l(u) + \Delta_l\Delta_{l+1}(u) & \text{se } \ l > j. \end{cases}$$

Assim por (2.3.2) temos $\|\Delta_l(S_j u - u)\|_{L^p} \leq C\|\Delta_l u\|_{L^p}$, desta forma

$$\sum_{l\geq -1}\left(2^{ls}\|\Delta_l(S_j u - u)\|_{L^p}\right)^r \leq C^r \sum_{l\geq j-1}\left(2^{ls}\|\Delta_l u\|_{L^p}\right)^r$$

e como $u \in \mathcal{B}^s_{p,r}$ temos que $\displaystyle\sum_{l\geq j-1}\left(2^{ls}\|\Delta_l u\|_{L^p}\right)^r$ tende a zero quando $j \to \infty$. Logo $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\|S_j u - u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} = 0$.

$\blacksquare$

Um exemplo de espaço de Besov é o espaço de Sobolev, de fato:

Teorema 3.1.1 *Os espaços $\mathcal{H}^s$ e $\mathcal{B}^s_{2,2}$ são iguais e suas normas satisfazem a:*

$$\frac{1}{C^{|s|+1}}\|u\|_{\mathcal{B}^s_{2,2}} \leq \|u\|_{\mathcal{H}^s} \leq C^{|s|+1}\|u\|_{\mathcal{B}^s_{2,2}}.$$

Demonstração: Como para $j \geq 0$ o suporte da transformada de Fourier de $\Delta_j u$ está contido na coroa $2^j\mathcal{C}$, limitando inferior e superiormente o valor de $(1+|\xi|^2)^s$ na integral $\displaystyle\int_{2^j\mathcal{C}}(1+|\xi|^2)^s|\varphi(2^{-j}\xi)\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$ obtemos que existe uma constante C tal que para todo $s \in \mathbb{R}$ e $\hat{u} \in L^2_{\text{loc}}$ vale

$$\frac{1}{C^{|s|+1}}2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^2} \leq \|\Delta_j u\|_{\mathcal{H}^s} \leq C^{|s|+1}2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^2}. \tag{3.1.1}$$

Usando agora a identidade (2.2.6) obtemos que

$$\frac{1}{3}\|u\|^2_{\mathcal{H}^s} \leq \int \chi^2(\xi)(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{j\geq 0}\int \varphi^2(2^{-j}\xi)(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \|u\|^2_{\mathcal{H}^s},$$

isto é,

$$\frac{1}{3}\|u\|^2_{\mathcal{H}^s} \leq \sum_{j\geq -1}\|\Delta_j u\|^2_{\mathcal{H}^s} \leq \|u\|^2_{\mathcal{H}^s}.$$

A demonstração segue agora de (3.1.1) (alterando-se a constante C).

$\blacksquare$

Proposição 3.1.1 *As inclusões $\mathcal{B}^0_{p,1} \subset L^p$ e $L^p \subset \mathcal{B}^0_{p,\infty}$ valem e são contínuas.*

Demonstração: Para $u \in \mathcal{B}^0_{p,1}$ temos $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|\Delta_j u\|_{L^p} < \infty$ deste modo obtemos da Proposição 2.3.1 que $u = \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j u \in L^p$ e $\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{\mathcal{B}^0_{p,1}}$. A segunda afirmação, segue de (2.3.2).

$\blacksquare$

3.2 Propriedades Básicas

Muitas das propriedades dos espaços de Besov são baseadas no seguinte lema:

Lema 3.2.1 *Sejam $\mathcal{C}'$ uma coroa e B' uma bola tais que $B' \cap \mathcal{C}' \neq \emptyset$ e $\mathcal{C}' \nsubseteq B'$, e sejam $s \in \mathbb{R}$ e $(p,r) \in [1,\infty]^2$. Se $(u_j)_{\substack{j\geq -1\\ j\in\mathbb{Z}}}$ é uma sequência de funções tais que*

$$\begin{cases} S(\hat{u}_j) \subset 2^j\mathcal{C}' & \textit{se } j \geq 0 \\ S(\hat{u}_j) \subset B' & \textit{se } j = -1 \end{cases} \quad e \ \ \|(2^{js}\|u_j\|_{L^p})_{j\geq -1}\|_{l^r(\mathbb{Z})} < \infty.$$

Então,

$$u = \sum_{j\geq -1} u_j \quad \in \mathcal{B}^s_{p,r} \quad e \quad \|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} \leq C_s\|(2^{js}\|u_j\|_{L^p})_{j\geq -1}\|_{l^r(\mathbb{Z})} < \infty.$$

Demonstração: Primeiro observemos que a série $\sum_{j\geq -1} u_j$ é convergente em $\mathcal{S}'$. De fato, utilizando o Lema 2.1.1 e a hipótese obtemos que $\|u_j\|_{L^\infty} \leq C2^{j\left(\frac{n}{p}-s\right)}$ e como $S(\hat{u}_j)$ é compacto temos, graças ao Teorema 1.5.5, que $u_j \in C^\infty$. Deste modo pela Proposição 2.3.2 a série $\sum_{j\geq -1} u_j$ converge em $\mathcal{S}'$. Vamos agora estudar $\Delta_{j'}u$. Denotando por $\mathcal{C}$ e B, respectivamente a coroa e a bola da Proposição 2.2.1, segue que existe $N_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} |j'-j| \geq N_0 \quad &\Rightarrow 2^j\mathcal{C} \cap 2^{j'}\mathcal{C}' = \emptyset \ \ \text{e} \\ j \geq (N_0 - 1) \quad &\Rightarrow \begin{cases} B \cap 2^j\mathcal{C}' = \emptyset \\ B' \cap 2^j\mathcal{C} = \emptyset. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |j-j'| \geq N_0 \ &\Rightarrow \mathcal{F}(\Delta_{j'}u_j) = 0 \\ &\Rightarrow \Delta_{j'}u_j = 0. \end{aligned}$$

Agora podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\Delta_{j'}u\|_{L^p} &= \|\Delta_{j'}\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j\|_{L^p} \\ &= \|\sum_{|j-j'|<N_0} \Delta_{j'}u_j\|_{L^p} \\ &\leq C\sum_{|j-j'|<N_0} \|u_j\|_{L^p} \end{aligned}$$

disto obtemos que

$$\begin{aligned} 2^{j's}\|\Delta_{j'}u\|_{L^p} &\leq C \sum_{\substack{j'\geq -1 \\ |j-j'|<N_0}} 2^{j's}\|u_j\|_{L^p} \\ &\leq C \sum_{\substack{j'\geq -1 \\ |j-j'|<N_0}} 2^{js}\|u_j\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Colocando $c_k = \mathbf{1}_{[-N_0,N_0]}(k)$ e $d_l = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}(l)2^{ls}\|u_l\|_{L^p}$ temos que

$$2^{j's}\|\Delta_{j'}u\|_{L^p} \leq C(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \star (d_l)_{l\in\mathbb{Z}},$$

aqui $\mathbf{1}_X$ denota a função característica do conjunto X.
Utilizando a Desigualdade de Young (ver Teorema 1.5.4) obtemos que

$$\mathcal{B}^s_{p,r} \leq C_s \left(\sum_{j\geq -1} 2^{rjs}\|u_j\|^r_{L^p}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

∎

Segue imediatamente deste lema o seguinte corolário.

Corolário 3.2.1 *O espaço $\mathcal{B}^s_{p,r}$ não depende da escolha das funções χ e φ usadas na Definição 3.1.1.*

Teorema 3.2.1 *Sejam $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ e $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$. Então para qualquer número real s o espaço $\mathcal{B}^s_{p_1,r_1}$ mergulha continuamente em $\mathcal{B}^{s-n(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}_{p_2,r_2}$.*

Demonstração: Aplicando o Lema 2.1.1 obtemos

$$\|S_0 u\|_{L^{p_2}} \leq C\|\Delta_{-1}u\|_{L^{p_1}} \text{ e}$$

$$\|\Delta_j u\|_{L^{p_2}} \leq C2^{jn(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}\|\Delta_j u\|_{L^{p_1}}.$$

Assim como $l^{r_1}(\mathbb{Z}) \subset l^{r_2}(\mathbb{Z})$ e para todo $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in l^{r_1}(\mathbb{Z})$ temos $\|(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^{r_2}(\mathbb{Z})} \leq \|(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^{r_1}(\mathbb{Z})}$ (Teorema 1.2.2) podemos escrever as seguintes desigualdades,

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(2^{j\left(s-n(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})\right)}\|\Delta_j u\|_{L^{p_2}})^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}}$$
$$\leq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(2^{j\left(s-n(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})\right)}C2^{jn\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}\|\Delta_j u\|_{L^{p_1}}\right)^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}}$$
$$= C\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^{p_1}})^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}}$$
$$\leq C\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^{p_1}})^{r_1}\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$= C\|u\|_{\mathcal{B}^s_{p_1,r_1}}.$$

■

Proposição 3.2.1 *O espaço $\mathcal{B}^s_{p,r}$ é continuamente mergulhado em $\mathcal{S}'$.*

Demonstração: Por definição $\mathcal{B}^s_{p,r}$ é um subespaço de $\mathcal{S}'$. Deste modo é suficiente provar que existe uma constante C e um inteiro positivo M, tal que, para toda função $\phi\in\mathcal{S}$ tenhamos

$$|\langle u,\phi\rangle|\leq C\|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}}\|\phi\|_M.$$

Usando o Teorema 3.2.1 e a igualdade (2.3.3), podemos escrever para N inteiro suficientemente grande que

$$\begin{aligned}
|\langle\Delta_j u,\phi\rangle| &= |2^{-j(N+1)}\sum_{|\alpha|=N+1}\langle\Delta_j u, 2^{jn}g_\alpha(2^j\cdot)\star\partial^\alpha\phi\rangle| \\
&\overset{(1)}{\leq} C2^{-j}\|u\|_{\mathcal{B}^{-N}_{\infty,\infty}}\sup_{|\alpha|=N+1}\|2^{jn}g_\alpha(2^j\cdot)\star\partial^\alpha\phi\|_{L^1} \\
&\overset{(2)}{\leq} C2^{-j}\|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}}\sup_{|\alpha|=N+1}\|\partial^\alpha\phi\|_{L^1} \\
&\overset{(3)}{\leq} C2^{-j}\|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}}\|\phi\|_M.
\end{aligned}$$

Assim segue da Proposição 2.3.1 que $|\langle u,\phi\rangle|\leq C\|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}}\|\phi\|_M$. Em (1) usamos que, $u\in\mathcal{B}^{-N}_{\infty,\infty}\Rightarrow\|\Delta_j u\|_{L^\infty}\leq 2^{jN}\|u\|_{\mathcal{B}^{-N}_{\infty,\infty}}$. Em (2) aplicamos a Desigualdade de Young e o Teorema 3.2.1, (3) segue da definição de $\|\cdot\|_M$ (ver (1.5.1)).

■

Teorema 3.2.2 *Para 1< $p, r < \infty$ o espaço $\mathcal{B}^s_{p,r}$ equipado com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}}$ é um espaço de Banach e satisfaz as propriedades de Fatou, isto é, se $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{B}^s_{p,r}$, então existem $u \in \mathcal{B}^s_{p,r}$ e uma subsequência $u_{\psi(q)}$ tais que*

$$\lim_{q\to\infty} u_{\psi(q)} = u \quad \in \mathcal{S}' \ \text{ e } \ \|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} \leq C_s \liminf_{q\to\infty} \|u_q\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}}.$$

Demonstração: Primeiro mostraremos as propriedades de Fatou. Usando o Lema 2.1.1 obtemos que a sequência $(\Delta_j u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^p \cap L^\infty$. De fato, como $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{B}^s_{p,r}$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{js}\|\Delta_j u_q\|_{L^p})^r \leq C.$$

Logo $2^{js}\|\Delta_j u_q\|_{L^p} \leq C^{\frac{1}{r}}, \forall\, j \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ e assim temos

$$\|\Delta_j u_q\|_{L^p} \leq C^{\frac{1}{r}} 2^{-js}, \forall\, q \in \mathbb{N},$$

isto é, $(\Delta_j u_q)_q$ é limitada em L^p. Por outro lado, pelo Lema 2.1.1 segue que $\|\Delta_j u_q\|_{L^\infty} \leq C_j 2^{j\frac{n}{p}}\|\Delta_j u_q\|_{L^p}$, portando $(\Delta_j u_q)_q$ é limitada em L^∞ por $C_j C 2^{j\frac{n}{p}-s}$. Pelo processo diagonal de Cantor existem uma subsequência$(u_{\psi(q)})_{q\in\mathbb{N}}$ de $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ e uma sequência $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{q\to\infty} \int \Delta_j u_{\psi(q)}(x)\phi(x)dx = \int \tilde{u}_j(x)\phi(x)dx,$$

e

$$\|\tilde{u}_j\|_{L^p} \leq \lim_{q\to\infty} \|\Delta_j u_q\|_{L^p}, \ \forall\, j \in \mathbb{Z}, \ \phi \in \mathcal{S}.$$

De fato, para $j = 1$, pelo Teorema de Banach-Alaoglou existe subsequência $(\Delta_1 u_{\psi_1}(q))_{q\in\mathbb{N}}$ de $(\Delta_1 u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ tal que $\Delta_1 u_{\psi_1}(q) \overset{q\to\infty}{\rightharpoonup} \tilde{u}_1 \in L^p$. Partindo da sequência $(\Delta_2 u_{\psi_1}(q))_{q\in\mathbb{N}}$ e aplicando o processo acima temos que existe subsequência $(\Delta_2 u_{\psi_2}(q))_{q\in\mathbb{N}}$ de $(\Delta_2 u_{\psi_1}(q))_{q\in\mathbb{N}}$ tal que $\Delta_2 u_{\psi_2}(q) \overset{q\to\infty}{\rightharpoonup} \tilde{u}_2 \in L^p$. Escolhendo sucessivamente para j e usando o processo diagonal, tomando $\tilde{\psi}(q) = \psi_q(q)$, temos que $\lim_{q\to\infty} \int \Delta_j u_{\psi(q)}(x)\phi(x)dx = \int \tilde{u}_j(x)\phi(x)dx$. Agora, usando que $\|v\|_{L^p} = \sup_{\|u\|_{L^{p'}}=1} |\langle v, u\rangle|$ e o processo diagonal de Cantor, obtemos $(\psi(q))_{q\in\mathbb{N}}$ como subsequência de $(\tilde{\psi}(q))_{q\in\mathbb{N}}$. Como $S((\Delta_j u_q)\hat{})\subset 2^j\mathcal{C}$ o mesmo segue para $S((\tilde{u}_j)\hat{})$, pois se $\phi \in \mathcal{S}$ é tal que $S(\phi) \cap 2^j\mathcal{C} = \emptyset$ temos que

$$0 = \langle (\Delta_j u_q)\hat{}, \phi\rangle = \langle \Delta_j u_q, \hat{\phi}\rangle$$

disto segue, fazendo $q \to \infty$, que $\langle(\tilde{u}_j), \hat{\phi}\rangle = 0$. Então, observando que a sequência $(2^{js}\|\Delta_j u_{\psi(q)}\|_{L^p})_{q\in\mathbb{N}}$ é limitada em l^r, pois $\|(2^{js}\|\Delta_j u_q\|_{L^p})_{q\in\mathbb{N}}\|_{l^r} = \|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}}$ que é limitada por hipótese, para $r < \infty$ segue, aplicando a técnica usada acima para obter a subsequência $(u_{\psi(q)})_{q\in\mathbb{N}}$, que existe sequência $(\tilde{c}_j)_j \in l^r$ tal que para qualquer $(d_j)_j \in l^{r'}$ vale que

$$\lim_{q\to\infty}\sum_j 2^{js}\|\Delta_j u_{\psi(q)}\|_{L^p} d_j = \sum_j \tilde{c}_j d_j \;\text{ e }\; \|(\tilde{c}_j)_j\|_{l^r} \leq \lim_{n\to\infty}\|u_{\psi(n)}\|_{l^r}.$$

Da igualdade acima obtemos que $(2^{js}\|\tilde{u}_j\|_{L^p})_j \in l^r$. Agora o Lema 3.2.1 implica que a série $\sum_j \tilde{u}_j$ converge em $\mathcal{S}'$ para algum $u \in \mathcal{B}^s_{p,r}$ tal que

$$\|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} \leq C_s\|(2^{js}\|\tilde{u}_j\|_{L^p})_j\|_{l^r}.$$

Disto decorre a validade das propriedades de Fatou, pois

$$\sum_{j=1}^N \Delta_j u_{\psi(q)} \overset{q\to\infty}{\to} \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j$$

assim para $\varphi \in \mathcal{S}$ temos

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \tilde{u}_j - \lim_{q\to\infty}\sum_{j=1}^N \Delta_j u_{\psi(q)}\right)(\varphi) = \left(\sum_{j=1}^N \tilde{u}_j - \lim_{q\to\infty}\sum_{j=1}^N \Delta_j u_{\psi(q)}\right)(\varphi) + \sum_{j\geq N}\tilde{u}_j(\varphi)$$

e $\sum_{j\geq N}\tilde{u}_j(\varphi) \overset{N\to\infty}{\to} 0$. Agora, verifiquemos que $\mathcal{B}^s_{p,r}$ é completo. Se $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}^s_{p,r}$ temos que $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ é limitada. Deste modo, pelo já provado acima existem uma subsequência $(u_{\psi(q)})_{q\in\mathbb{N}}$ e um elemento $u \in \mathcal{B}^s_{p,r}$ tal que $\sum_{j\in\mathbb{N}} u_{\psi(q)} = u$ em $\mathcal{S}'$. Usando a hipótese, temos para qualquer $\varepsilon > 0$ um q_ε tal que

$$\|u_m - u_{\psi(q)}\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} \leq \varepsilon,\ \forall\, q, m > q_\varepsilon.$$

Agora aplicando o método acima para sequência $(v_q)_{q\in\mathbb{N}}$, com $v_q = u_m - u_{\psi(q)}$, obtemos que

$$\|u_m - u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} \leq \varepsilon,\ \forall\, m > q_\varepsilon.$$

∎

3.3 O Espaço de Hölder

Aqui apresentamos que outro importante exemplo de espaço de Besov é o espaço de Hölder, aqui denotado por $\mathcal{C}^{k,\rho}(\Omega)$.

Definição 3.3.1 *Para* $0 < \rho < 1$, $k \in \mathbb{N}$ *definimos o espaço de Hölder, por meio da seguinte igualdade*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{k,\rho}(\Omega) = \quad & \{v \in C(\Omega, \mathbb{C}) : \partial^\alpha v \in L^\infty \text{ se } |\alpha| \leq k \quad \text{e} \\ & (\Lambda_\beta^\rho v)(x,y) = \frac{\partial^\beta v(x) - \partial^\beta v(y)}{|x-y|^\rho} \in L^\infty(\Omega \times \Omega) \ \text{ se } \ |\beta| = k \Big\}.\end{aligned}$$

Quando não existir risco de confusão denotaremos $\mathcal{C}^{k,\rho}(\Omega)$, apenas por $\mathcal{C}^{k,\rho}$. A aplicação $\|\cdot\|_{k,\rho} : \mathcal{C}^{k,\rho} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\|_{k,\rho} = \|u\|_{L^\infty} + \sum_{|\beta|=k} \|\Lambda_\beta^\rho u\|_{L^\infty}$$

é uma norma em $\mathcal{C}^{k,\rho}$. De fato, se $\|u\|_{k,\rho} = 0$ temos que $\|u\|_{L^\infty} = 0$ e deste modo $u = 0$ $q.t.p$, mas como $u \in C(\Omega, \mathbb{C})$ concluímos que $u \equiv 0$. Do fato de $\|\cdot\|_{L^\infty}$ ser uma norma segue que $\|\lambda u\|_{k,\rho} = |\lambda| \|u\|_{k,\rho}$ e $\|u+v\|_{k,\rho} \leq \|u\|_{k,\rho} + \|v\|_{k,\rho}$. Além disso com esta norma $\mathcal{C}^{k,\rho}$ é um espaço de Banach.

Proposição 3.3.1 *Dada* $u \in \mathcal{C}^{k,\rho}$, *temos que existe uma constante* C *tal que*

$$\sup_j 2^{j(k+\rho)} \|\Delta_j u\|_{L^\infty} \leq C_k \|u\|_{\mathcal{C}^{k,\rho}}.$$

Demonstração: Primeiramente observemos, que por (2.3.2) temos para $j = -1$ que

$$\|S_0 u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{L^\infty}.$$

Para todo multi-índice α temos

$$\begin{aligned}\partial^\alpha \varphi(x) \quad &= (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} (\partial^\alpha \varphi)\hat{}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= i^{|\alpha|} (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \xi^\alpha \check{\varphi}(-\xi) d\xi,\end{aligned}$$

deste modo, como φ é identicamente nula em uma vizinhança da origem, segue fazendo $x = 0$ que

$$\int x^\alpha \check{\varphi}(x) dx = 0.$$

Logo, para j não negativo, podemos escrever que

$$\begin{aligned}\Delta_j u(x) &= \left(2^{jn}\check{\varphi}(2^j\cdot)\star u\right)(x)\\ &= 2^{jn}\int \check{\varphi}(2^j(x-y))u(y)dy\\ &= 2^{jn}\int \check{\varphi}(2^j(x-y))\Big(u(y)-u(x)-\sum_{0<|\alpha|\le k}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(x)(y-x)^\alpha\Big)dy.\end{aligned}$$

Utilizando a Fórmula de Taylor com resto integral temos,

$$\begin{aligned}u(x)-u(y)-&\sum_{0<|\alpha|\le k}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(x)(y-x)^\alpha\\ &=\int_0^1 k(1-t)^{k-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}\left(\partial^\alpha u(x+t(y-x))-\partial^\alpha u(x)\right)dt.\end{aligned}$$

Deste modo , como $\partial^\alpha u(x)\in\mathcal{C}^{0,\rho}$ segue que

$$|u(y)-u(x)-\sum_{0<|\alpha|\le k}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(x)(y-x)^\alpha|\le C|y-x|^{k+\rho}\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\rho}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}|\Delta_j u(x)| &\le C\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\rho}}2^{jn}\int |x-y|^{k+\rho}|\check{\varphi}(2^j(x-y))|dy\\ &= C\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\rho}}2^{-j(k+\rho)}\int |y|^{k+\rho}|\check{\varphi}(y))|dy\\ &\le C\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\rho}}2^{-j(k+\rho)}.\end{aligned}$$

■

A proposição anterior diz que para $k\in\mathbb{N}$ e $\rho\in(0,1)$ vale a inclusão $\mathcal{C}^{k,\rho}\subset\mathcal{B}^{k+\rho}_{\infty,\infty}$. Reciprocamente, indicando por $[r]$ o maior inteiro menor ou igual a r, temos:

Proposição 3.3.2 *Sejam $r\in\mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$ e $u\in\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}$. Então $u\in\mathcal{C}^{k,\rho}$ com $k=[r]$ e $\rho=r-[r]$. Além disto,*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\rho}}\le C_r\|u\|_{\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}} \text{ com } C_r=C_k\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{1-\rho}\right).$$

Demonstração: Notemos inicialmente que para todo multi-índiceα tal que $|\alpha|<r$ temos, graças ao Lema 2.1.1, que

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\partial^\alpha u\|_{L^\infty} &\le C^{|\alpha|+1}2^{j|\alpha|}\|\Delta_j u\|_{L^\infty}\\ &\le C^{|\alpha|+1}2^{-j(r-|\alpha|)}\|u\|_{\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}},\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

deste modo a série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j \partial^\alpha u$ é convergente no espaço L^∞. Utilizando a Proposição 2.3.1 para escrever $\partial^\alpha u = \sum_{j\geq -1} \Delta_j \partial^\alpha u$ segue aplicando a estimativa obtida acima que

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} &\leq C^{|\alpha|+1}\|u\|_{\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}} \sum_{j\geq -1} 2^{-j(r-|\alpha|)} \\
&= C^{|\alpha|+1}\|u\|_{\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}} \left(2^{r-|\alpha|} + \sum_{j\geq 0} 2^{-j(r-|\alpha|)}\right) \\
&\leq C^{|\alpha|+1}\|u\|_{\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}} \left(2^{r-|\alpha|} + \frac{1}{1-2^{-\rho}}\right) \\
&\leq C^{|\alpha|+1}\|u\|_{\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}} \left(2^{\rho+[r]} + \frac{2^\rho}{\rho \ln 2}\right) \\
&\leq C^{|\alpha|+1}\|u\|_{\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}} \frac{1}{\rho}. \qquad (3.3.2)
\end{aligned}$$

Vamos agora estudar as derivadas de ordem k. Podemos escrever para um inteiro positivo N, o qual será escolhido mais tarde, que

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \;&\leq \sum_{j=-1}^{N-1} |\partial^\alpha \Delta_j u(x) - \partial^\alpha \Delta_j u(y)| \\
&+ \sum_{j\geq N} |\partial^\alpha \Delta_j u(x) - \partial^\alpha \Delta_j u(y)|.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Taylor, temos que

$$|\partial^\alpha \Delta_j u(x) - \partial^\alpha \Delta_j u(y)| \leq C_k |x-y| \sup_{\beta=k+1} \|\partial^\beta \Delta_j u\|_{L^\infty}.$$

Usando o Lema 2.1.1 obtemos

$$|\partial^\alpha \Delta_j u(x) - \partial^\alpha \Delta_j u(y)| \leq C_k \|u\|_{\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}} |x-y| 2^{-j(\rho-1)}.$$

Agora, graças a (3.3.1) notamos que também é válida a desigualdade

$$|\partial^\alpha \Delta_j u(x) - \partial^\alpha \Delta_j u(y)| \leq C_k 2^{-j\rho} \|u\|_{\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}},$$

assim, segue que

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq C_k \|u\|_{\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}} \left(\sum_{j=-1}^{N} 2^{-j(\rho-1)}|x-y| + \sum_{j\geq N+1} 2^{-j\rho}\right).$$

Se $|x-y| > 1$ utilizando a desigualdade (3.3.2) obtemos que

$$\left|\frac{\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)}{|x-y|^\rho}\right| \leq C_k \frac{1}{\rho} \|u\|_{\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}} \quad q.t.p.$$

Assumindo agora $|x-y| \leq 1$ e tomando $N = [-\log_2 |x-y|] + 1$ temos que,

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq N+1} 2^{-j\rho} &= \frac{2^{-\rho([-\log_2|x-y|]+2)}}{1-2^{-\rho}} \\ &\leq \frac{2^{\log_2|x-y|^{\rho}}2^{-2\rho}}{1-2^{-\rho}} \\ &= |x-y|^{\rho}\frac{2^{-2\rho}}{1-2^{-\rho}} \\ &\leq \frac{C}{\rho}|x-y|^{\rho},\end{aligned}$$

e

$$\sum_{j=-1}^{N} 2^{-j(\rho-1)}|x-y| \leq C|x-y|^{\rho}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{1-\rho}\right),$$

deste modo

$$\|\frac{\partial^{\alpha}u(x)-\partial^{\alpha}u(y)}{|x-y|^{\rho}}\|_{L^{\infty}} \leq C_k\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{1-\rho}\right)\|u\|_{B^r_{\infty,\infty}}.$$

■

Das Proposições 3.3.1 e 3.3.2 segue o teorema.

Teorema 3.3.1 *Se $r \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$. Então os espaços $\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}$ e $\mathcal{C}^{[r],r-[r]}$ são iguais, e temos que,*

$$C_{[r]}^{-1}\|u\|_{\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}} \leq \|u\|_{\mathcal{C}^{[r],r-[r]}} \leq C_{[r]}\left(\frac{1}{r-[r]}+\frac{1}{1-(r-[r])}\right)\|u\|_{\mathcal{B}^r_{\infty,\infty}}.$$

3.4 Decomposição de Bony

Sejam u, v duas distribuições temperadas, escrevendo

$$u = \sum_{j'\in\mathbb{Z}} \Delta_{j'}u \quad \text{e} \quad v = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j v,$$

formalmente, o produto de u e v pode ser escrito como,

$$uv = \sum_{j,j'\in\mathbb{Z}} \Delta_{j'}u\Delta_j v.$$

Agora, vamos introduzir a Decomposição de Bony.

Definição 3.4.1 *Iremos designar o paraproduto de u por v e denotar por $T_u v$ o seguinte operador bilinear:*

$$T_u v = \sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{j-1} u \Delta_j v.$$

Designaremos resto de u e v, e denotaremos por $R(u, v)$, o seguinte operador bilinear:

$$R(u, v) = \sum_{\substack{|j-j'| \leq 1 \\ j, j' \in \mathbb{Z}}} \Delta_{j'} u \Delta_j v.$$

Formalmente podemos escrever

$$uv = T_u v + T_v u + R(u, v) \text{ (Decomposição de Bony)}. \tag{3.4.1}$$

No resto desta seção vamos nos preocupar em mostrar que sob certas condições, em u e v, o paraproduto $T_u v$ e o resto $R(u, v)$ ficam, de fato, bem definidos. O lema abaixo será útil, a demonstração de tal lema segue das propriedades da transformada de Fourier e da convolução, e aqui será omitida.

Lema 3.4.1 *Sejam $f \in L^q$, $g \in L^p$, $1 \leq p$, $q \leq \infty$, tais que $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{E}'$, então $(\widehat{fg}) = (2\pi)^{-n} \hat{f} \star \hat{g}$.*

Teorema 3.4.1 *Para qualquer $s \in \mathbb{R}$, existe uma constante C, tal que, para quaisquer $(p, r) \in [1, +\infty]^2$ temos*

$$\|T_u v\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} \leq C \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}}, \ \forall \ (u, v) \in L^\infty \times \mathcal{B}^s_{p,r}.$$

Demonstração: Pelo Lema 3.4.1, temos que

$$(S_{j-1} u \Delta_j v)\hat{} \ = (2\pi)^{-n} \chi(2^{-j+1} \cdot) \hat{u} \star \varphi(2^{-j} \cdot) \hat{v}$$

deste modo,

$$\begin{aligned} S\left((S_{j-1} u \Delta_j v)\hat{}\right) &\subset S(\chi(2^{-j+1} \cdot)) + S(\varphi(2^{-j} \cdot)) \\ &\subset 2^j B(0, \tfrac{2}{3}) + 2^j \mathcal{C} \\ &= 2^j \tilde{\mathcal{C}}, \end{aligned}$$

aqui $\tilde{\mathcal{C}}$ é a coroa definida na Proposição 2.2.1. Utilizando (2.3.2) obtemos

$$\|S_{j-1} u \Delta_j v\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^\infty} \|\Delta_j v\|_{L^p}.$$

A demonstração decorre agora do Lema 3.2.1.

∎

Estudaremos agora o comportamento do operador R. Para isto vamos precisar do seguinte lema.

Lema 3.4.2 *Sejam B uma bola do $\mathbb{R}^n$, s um número real positivo e $(p,r) \in [1,\infty]^2$. Se $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções tais que,*

$$S(\hat{u}_j) \subset 2^j B \quad e \quad \|(2^{js}\|u_j\|_{L^p})_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^r} < \infty.$$

Então,

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j \in \mathcal{B}^s_{p,r} \quad e \quad \|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} \leq C_s \|(2^{js}\|u_j\|_{L^p})_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^r} < \infty.$$

Demonstração: Temos para qualquer j que

$$\|u_j\|_{L^p} \leq C 2^{-js}.$$

Como s é positivo a série $\sum_{j\in\mathbb{N}} u_j$ é convergente em L^p, denotaremos a soma de tal série por u. Vamos agora estudar $\Delta_{j'} u_j$. Se $\mathcal{C}$ denota a coroa definida na Proposição 2.2.1, como B é uma bola, existe um inteiro N_1 tal que

$$j' \geq j + N_1 \Longrightarrow 2^{j'}\mathcal{C} \cap 2^j B = \emptyset.$$

Assim é claro que

$$\begin{aligned} j' \geq j + N_1 \quad &\Longrightarrow (\Delta_{j'} u_j)\hat{} = 0 \\ &\Longrightarrow \Delta_{j'} u_j = 0. \end{aligned}$$

Agora podemos escrever que

$$\begin{aligned} \|\Delta_{j'} u\|_{L^p} &\leq \sum_{j\leq j'-N_1} \|\Delta_{j'} u_j\|_{L^p} \\ &\leq \sum_{j\leq j'-N_1} C\|u_j\|_{L^p}, \end{aligned}$$

assim temos

$$\begin{aligned} 2^{j's}\|\Delta_{j'} u\|_{L^p} &\leq \sum_{j\leq j'-N_1} C 2^{j's}\|u_j\|_{L^p} \\ &= \sum_{j\leq j'-N_1} C 2^{(j'-j)s} 2^{js}\|u_j\|_{L^p}. \end{aligned}$$

A demonstração do lema segue agora da Desigualdade de Young, pois,

$$2^{j's}\|\Delta_{j'}u\|_{L^p} \leq C(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \star (a_l)_{l\in\mathbb{Z}}$$

com $c_k = \mathbf{1}_{[-N_1,\infty]}(k)2^{-ks}$, $d_l = 2^{ls}\|u_l\|_{L^p}$, assim, $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^1$ e $(d_l)_{l\in\mathbb{Z}} \in l^r$.

■

Teorema 3.4.2 *Se* $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ *são tais que* $s_1 + s_2 > 0$. *Então, existe uma constante* C *tal que para quaisquer* $(p_1, p_2, r_1, r_2) \in [1,\infty]^4$ *satisfazendo*

$$\frac{1}{p} \overset{def}{=} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1 \quad e \quad \frac{1}{r} \overset{def}{=} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \leq 1,$$

temos que

$$\|R(u,v)\|_{\mathcal{B}^{s_1+s_2}_{p,r}} \leq C\|u\|_{\mathcal{B}^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{\mathcal{B}^{s_2}_{p_2,r_2}}, \ \forall\ (u,v) \in \mathcal{B}^{s_1}_{p_1,r_1} \times \mathcal{B}^{s_2}_{p_2,r_2}.$$

Demonstração: Pela definição do operador resto, segue que

$$R(u,v) = \sum_j R_j \quad \text{com} \quad R_j = \sum_{l=-1}^{1} \Delta_{j-l}u\Delta_j v.$$

Utilizando o Lema 3.4.1 e a definição de Δ_j, vemos que o suporte da transformada de Fourier de R_j está contido na bola $2^jB(0,8)$. Além disto, a Desigualdade de Hölder implica que

$$2^{j(s_1+s_2)}\|R_j\|_{L^p} \leq \sum_{l=-1}^{1} 2^{js_1}\|\Delta_{j-l}u\|_{L^{p_1}}2^{js_2}\|\Delta_j v\|_{L^{p_2}}.$$

Deste modo temos que

$$\|(2^{j(s_1+s_2)}\|R_j\|_{L^p})_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r} \leq \|(C_j^{(-1)})_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r} + \|(C_j^{(0)})_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r} + \|(C_j^{(1)})_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r},$$

com $C_j^{(l)}{=}2^{js_1}\|\Delta_{j-l}u\|_{L^{p_1}}2^{js_2}\|\Delta_j v\|_{L^{p_2}}$, $l = -1, 0, 1$. Como $(2^{js_1}\|\Delta_{j-l}u\|_{L^{p_1}})_{j\in\mathbb{Z}} \in l^{r_1}$ e $(2^{js_2}\|\Delta_j v\|_{L^{p_2}})_{j\in\mathbb{Z}} \in l^{r_2}$, podemos utilizar a Desigualdade de Hölder para estimar $\|(C_j^{(l)})_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r}$, obtendo assim que

$$\|R(u,v)\|_{\mathcal{B}^{s_1+s_2}_{p,r}} \leq C_1\|u\|_{\mathcal{B}^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{\mathcal{B}^{s_2}_{p_2,r_2}},$$

a demonstração segue agora do Lema 3.4.2.

■

Dos Teoremas 3.4.1 e 3.4.2 segue o:

Corolário 3.4.1 *Para qualquer real positivo* s, *o espaço* $L^\infty \cap \mathcal{B}^s_{p,r}$ *é uma álgebra. Mais precisamente existe uma constante* C, *tal que*

$$\|uv\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} \leq C(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} + \|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}}\|v\|_{L^\infty}), \ \forall\ u,v \in L^\infty \cap \mathcal{B}^s_{p,r}.$$

3.5 Ação de Funções Suaves em $\mathcal{B}^s_{p,r}$

Nesta seção iremos estudar a ação de funções suaves no espaço $\mathcal{B}^s_{p,r}$. A pergunta é: se f é uma função suave nula na origem e u pertence a $\mathcal{B}^s_{p,r}$, então $f \circ u$ pertence a $\mathcal{B}^s_{p,r}$? Apresentamos abaixo uma situação na qual a resposta é positiva.

Teorema 3.5.1 *Sejam f uma função suave que se anula na origem, s um número real positivo e $(p,r) \in [1,\infty]^2$. Se $u \in \mathcal{B}^s_{p,r} \cap L^\infty$, então $f \circ u \in \mathcal{B}^s_{p,r}$, e*

$$\|f \circ u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} \leq C(s, f, \|u\|_{L^\infty}) \|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}}.$$

Na demonstração deste teorema usaremos o:

Lema 3.5.1 *Sejam s um número real positivo e $(p,r) \in [1,\infty]^2$. Existe uma constante C_s, tal que para qualquer sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funções suaves satisfazendo*

$$\left(\sup_{|\alpha| \leq [s]+1} 2^{j(s-|\alpha|)} \|\partial^\alpha u_j\|_{L^p} \right)_{j\in\mathbb{N}} \in l^r,$$

temos que

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j \in \mathcal{B}^s_{p,r} \quad e \quad \|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}} \leq C_s \|(\sup_{|\alpha|\leq[s]+1} 2^{j(s-|\alpha|)} \|\partial^\alpha u_j\|_{L^p})_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^r}.$$

Demonstração: Como s é positivo a série $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} u_j$ é convergente em L^p. Denotando a soma de tal série por u, podemos escrever

$$\Delta_j u = \sum_{-1\leq j'\leq j} \Delta_j u_{j'} + \sum_{j'>j} \Delta_j u_{j'}.$$

Usando (2.3.2) obtemos

$$\begin{aligned} 2^{js} \|\sum_{j'>j} \Delta_j u_{j'}\|_{L^p} &\leq C 2^{js} \sum_{j'>j} \|u_{j'}\|_{L^p} \\ &\leq C \sum_{j'>j} 2^{-s(j'-j)} 2^{j's} \|u_{j'}\|_{L^p}. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

De (2.3.2) e do Lema 2.1.1, seguem as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \|\Delta_j u_{j'}\|_{L^p} &\leq C \|u_{j'}\|_{L^p} \\ &\leq C 2^{-j(|\alpha|+1)} \sup_{|\alpha|=[s]+1} \|\partial^\alpha u_{j'}\|_{L^p} \\ &\leq C 2^{-j([s]+1)} \sup_{|\alpha|=[s]+1} \|\partial^\alpha u_{j'}\|_{L^p}, \end{aligned}$$

daí

$$2^{js}\|\sum_{j'\leq j}\Delta_j u_{j'}\|_{L^p} \leq C\sum_{j'\leq j}2^{(j'-j)([s]+1-s)}\sup_{|\alpha|=[s]+1}2^{j'(s-|\alpha|)}\|\partial^\alpha u_{j'}\|_{L^p}.$$

Esta desigualdade, junto com (3.5.1), implicam que

$$2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^p} \quad \leq \quad C((a_k)\star(b_l))(j)$$

com

$$\begin{aligned} a_k &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1}_{\mathbb{N}}(k)2^{-ks}+\mathbf{1}_{\mathbb{N}}(k)2^{-k([s]+1-s)} \quad \text{e} \\ b_l &\stackrel{\text{def}}{=} 2^{ls}\|u_l\|_{L^p}+\sup_{|\alpha|=[s]+1}2^{l(s-|\alpha|)}\|\partial^\alpha u_l\|_{L^p}, \end{aligned}$$

como $s>0$ e $s+1-[s]>0$ temos que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\in l^1$, e a hipótese garante que as sequências $(2^{ls}\|u_l\|_{L^p})_{l\in\mathbb{N}}$ e $(\sup\limits_{|\alpha|=[s]+1}2^{l(s-|\alpha|)}\|\partial^\alpha u_l\|_{L^p})_{l\in\mathbb{N}}\in l^r$. Assim podemos utilizar a Desigualdade de Young, obtendo que

$$\|(2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^p})_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^r} \quad \leq C_s\|(\sup\nolimits_{|\alpha|\leq[s]+1}2^{j(s-|\alpha|)}\|\partial^\alpha u_j\|_{L^p})_{j\in\mathbb{N}}\|_{l^r}.$$

■

Demonstração do Teorema 3.5.1: Como a sequência $(S_ju)_{j\in\mathbb{N}}$ converge para u em L^p e $f(0)=0$, segue que

$$f(u)=\sum_j f_j \;\text{ com }\; f_j\stackrel{\text{def}}{=}f(S_{j+1}u)-f(S_ju).$$

Usando a Fórmula de Taylor, obtemos

$$f_j=m_j\Delta_j u \;\text{ com }\; m_j\stackrel{\text{def}}{=}\int_0^1 f'(S_ju+t\Delta_ju)dt.$$

Admitamos por um momento que

$$\|\partial^\alpha m_j\|_{L^\infty}\leq C_\alpha(f,\|u\|_{L^\infty})2^{j|\alpha|}\;\forall\;\alpha\in\mathbb{N}^n. \tag{3.5.2}$$

Deste modo usando a Fórmula de Leibnitz e o Lema 2.1.1 temos as desigualdades

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha f_j\|_{L^p} &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\|C^\alpha_\beta\partial^\beta m_j\partial^{\alpha-\beta}\Delta_j u\|_{L^p} \\ &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}C^\alpha_\beta 2^{j|\beta|}C_\beta(f,\|u\|_{L^\infty})2^{j(|\alpha|-|\beta|)}\|\Delta_j u\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\|\partial^\alpha f_j\|_{L^p} \quad \leq C_\alpha(f,\|u\|_{L^\infty})2^{j|\alpha|}\|\Delta_j u\|_{L^p},$$

disto segue que

$$\frac{1}{C_\alpha(f, \|u\|_{L^\infty})} \|\partial^\alpha f_j\|_{L^p} 2^{-j|\alpha|} 2^{js} \leq 2^{js} \|\Delta_j u\|_{L^p}.$$

Deste modo temos

$$\|(\frac{1}{C_\alpha(f, \|u\|_{L^\infty})} \|\partial^\alpha f_j\|_{L^p} 2^{-j|\alpha|} 2^{js})_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r} \leq \|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,r}}.$$

Aplicando agora o Lema 3.5.1 o teorema fica demonstrado, desde que provemos (3.5.2). Para fazer isto lembremo-nos da Fórmula de Fàa-di-Bruno,

$$\partial^\alpha g(a) = \sum_{\substack{\alpha_1, \cdots, \alpha_p = \alpha \\ |\alpha_j| \geq 1}} \left(\prod_{k=1}^p \partial^{\alpha_k} a \right) g^{(p)}(a).$$

Desta fórmula obtemos que

$$\partial^\alpha m_j = \sum_{\substack{\alpha_1, \cdots, \alpha_p = \alpha \\ |\alpha_j| \geq 1}} \int_0^1 \left(\prod_{k=1}^p \partial^{\alpha_k} (S_j u + t\Delta_j u) \right) f^{(p+1)}(S_j u + t\Delta_j u) dt.$$

Pelo Lema 2.1.1 segue que

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha m_j\|_{L^\infty} &\leq C_\alpha(f) \sum_{\substack{\alpha_1, \cdots, \alpha_p = \alpha \\ |\alpha_j| \geq 1}} \int_0^1 \left(\prod_{k=1}^p 2^{j|\alpha_k|} \|u\|_{L^\infty} \right) \\ &\leq C_\alpha(f, \|u\|_{L^\infty}) 2^{j|\alpha|}. \end{aligned}$$

Isto demonstra (3.5.2).

Capítulo 4

Aplicações para o Sistema de Navier-Stokes

O objetivo neste capítulo é obter um resultado de regularidade para soluções do sistema de Navier-Stokes de fluidos incompressíveis n-dimensional. Tal sistema é o seguinte:

$$(\mathrm{NS}) \begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla) v - \nu \Delta v = -\nabla \mathbf{p} \\ \mathrm{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \end{cases}$$

o campo de vetores $v(t,x)$ é aqui um campo de vetores dependendo do tempo sobre $\mathbb{R}^n$ ($v : [0,T) \times \mathbb{R}^n \to R^n$), ν (a viscosidade) é uma constante positiva, p é a pressão e v_0 é avelocidade inicial. Para evitar qualquer tipo de confusão vamos fazer um breve comentário sobre a notação utilizada acima. Claramente $\partial_t v$ quer dizer que estamos derivando em relação a variável tempo ($t \in [0,T)$), se e_l indica o l-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, então

$$(v \cdot \nabla) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{l=1}^{n} v_l \partial^{e_l}.$$

Deste modo

$$(v \cdot \nabla) v = \left(\sum_{l=1}^{n} v_l \partial^{e_l} v_1, \cdots, \sum_{l=1}^{n} v_l \partial^{e_l} v_n \right).$$

Estamos usando $\mathrm{div} v = 0$ para indicar que

$$\sum_{l=1}^{n} \partial^{e_l} v_l = 0$$

e colocamos

$$\Delta v \stackrel{\text{def}}{=} (\Delta v_1, \cdots, \Delta v_n) \text{ onde}$$

$$\Delta v_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^{n} (\partial^{e_l})^2 v_k.$$

Temos ainda que $\mathbf{p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e

$$\nabla \mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} (\partial^{e_1}\mathbf{p}, \cdots, \partial^{e_n}\mathbf{p}).$$

A referência aqui é o artigo [4].

4.1 Preliminares

Antes de apresentar o resultado de regularidade precisamos introduzir mais algumas notações, no Capítulo 2 introduzimos os operadores Δ_j e S_j. Agora para as funções φ e χ fixadas anteriormente definimos, para cada $j \in \mathbb{Z}$, os operadores $\dot{\Delta}_j$ e $\dot{S}_j$ como segue:

$$\text{se } j \geq 0 \quad \text{então} \quad \dot{\Delta}_j\, u = \Delta_j u, \ \ \forall\, u \in \mathcal{S}',$$

$$\text{se } j \leq -1 \ \text{ então} \quad \dot{\Delta}_j\, u = (\varphi(2^{-j}\cdot)\hat{u})\check{}, \ \ \forall\, u \in \mathcal{S}',$$

$$\text{e se } j \in \mathbb{Z} \ \text{ então} \quad \dot{S}_j\, u = \sum_{j' \leq j-1} \dot{\Delta}_j\, u, \ \ \forall\, u \in \mathcal{S}'.$$

Observações análogas às feitas para os operadores Δ_j e S_j são válidas para os operadores $\dot{\Delta}_j$ e $\dot{S}_j$. Mais precisamente, se $p \in [1, \infty]$ e $u \in L^p$, então $\dot{\Delta}_j\, u = 2^{jn}\check{\varphi}(2^j\cdot) \star u$. Além disso existe uma constante positiva C independente de $j \in \mathbb{Z}$ e $u \in L^p$ tal que

$$\|\dot{\Delta}_j\, u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}. \tag{4.1.1}$$

Temos ainda um análogo a (2.3.1), isto é,

$$\partial^\alpha\, \dot{\Delta}_j\, u = \dot{\Delta}_j\, \partial^\alpha u, \ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n, u \in \mathcal{S}'. \tag{4.1.2}$$

A razão de introduzir esta notação é para definir os espaços de Besov homogêneos, a saber:

Definição 4.1.1 *Sejam s um número real e $(p, r) \in [1, \infty]^2$. O espaço de Besov homogêneo, que denotaremos por $\dot{\mathcal{B}}^s_{p,r}$, é o espaço de todas as distribuições temperadas tais que*

$$\|u\|_{\dot{\mathcal{B}}^s_{p,r}} = \|(2^{sj}\|\dot{\Delta}_j\, u\|_{L^p})_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{Z})} < \infty.$$

Afim de evitar notações muito carregadas, como por exemplo $\|u\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,2}^{\frac{n}{2}+1}}$, vamos fazer a seguinte identificação:

$$\|u|_s \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,2}^{s}}. \tag{4.1.3}$$

O Teorema 3.1.1 relaciona os espaços $\mathcal{H}^s$ e $\mathcal{B}_{2,2}^s$ se denotarmos por $\dot{\mathcal{H}}^s$ o espaço de Sobolev homogêneo, isto é, o conjunto de todas as distribuições $u \in \mathcal{S}'$, tais que

$$\|u\|_{\dot{\mathcal{H}}^s}^2 = \int |\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Temos o seguinte teorema:

Teorema 4.1.1 *Os espaços $\dot{\mathcal{H}}^s$ e $\dot{\mathcal{B}}_{2,2}^s$ são iguais e suas normas são equivalentes, isto é, existe uma constante C_s tal que*

$$\frac{1}{C_s}(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2js}\|\dot{\Delta}_j\, u\|_{L^2}^2) \leq \int |\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C_s(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2js}\|\dot{\Delta}_j\, u\|_{L^2}^2).$$

A demonstração deste teorema pode ser obtida de modo análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.1.1. Apresentamos em seguida um novo espaço o qual também é caracterizado com a ajuda dos operadores Δ_j .

Definição 4.1.2 *Dado T um número real positivo, o espaço $\mathcal{H}_{1,T}^{\frac{n}{2}+1}$ é o espaço das funções u, definidas em $[0,T]\times\mathbb{R}^n$, tal que*

$$\|u\|_T \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{j\geq -1} 2^{j(n+2)}\left(\int_0^T \|\Delta_j u(t,\cdot)\|_{L^2}dt\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Notemos que a inclusão $L^1([0,T];\mathcal{H}^{\frac{n}{2}+1}) \subset \mathcal{H}_{1,T}^{\frac{n}{2}+1}$ é válida.
De fato, se $u \in L^1([0,T];\mathcal{H}^{\frac{n}{2}+1})$ temos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_T &= \left(\sum_{j\geq -1} 2^{j(n+2)}\left(\int_0^T \|\Delta_j u(t,\cdot)\|_{L^2}dt\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{j\geq -1} \left(\int_0^T 2^{j(\frac{n+2}{2})}\|\Delta_j u(t,\cdot)\|_{L^2}dt\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\stackrel{(1)}{\leq} \int_0^T \left(\sum_{j\geq -1} 2^{2j(\frac{n+2}{2})}\|\Delta_j u(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\stackrel{(2)}{\leq} C\int_0^T \|u(t,\cdot)\|_{\mathcal{H}^{\frac{n}{2}+1}}dt.
\end{aligned}$$

Aqui (1) segue da Desigualdade de Minkowski para Integrais (ver Teorema 1.2.3), (2) decorre da caracterização dos espaços $\mathcal{H}^s$ dada no Teorema 3.1.1 .

Se $v : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo de vetores, isto é, $v(t,x) = (v_1(t,x), \cdots, v_n(t,x))$ com $v_l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $l = 1, ..., n$, tomamos

$$\|v(t,\cdot)\|_{L^2} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{l=1}^{n} \|v_l(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(v(t,\cdot))\hat{} \stackrel{\text{def}}{=} ((v_1(t,\cdot))\hat{}, \cdots, (v_n(t,\cdot))\hat{}),$$

$$\dot{\Delta}_j \, v(t,\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} (\dot{\Delta}_j \, v_1(t,\cdot), \cdots, \dot{\Delta}_j \, v_n(t,\cdot)),$$

$$\dot{S}_j \, v(t,\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} (\dot{S}_j \, v_1(t,\cdot), \cdots, \dot{S}_j \, v_n(t,\cdot)).$$

Aplicando (4.1.2) a cada uma das funções cordenadas de v obtemos que

$$\dot{\Delta}_j \, \partial^\alpha v(t,\cdot) = \partial^\alpha \, \dot{\Delta}_j \, v(t,\cdot), \tag{4.1.4}$$

aqui $\partial^\alpha v(t,\cdot)$ indica a derivada de v com relação à variável x. É claro, graças as propriedades da transformada parcial de Fourier, (ver (1.5.6)), que

$$\dot{\Delta}_j \, \partial_t v(t,\cdot) = \partial_t \, \dot{\Delta}_j \, v(t,\cdot). \tag{4.1.5}$$

4.2 Um Teorema de Regularidade

O resultado abaixo, é conhecido como Teorema de Fujita-Kato (ver [8]); veja também o artigo [2] e as notas de curso [5].

Teorema 4.2.1 *Se no sistema (NS) $v_0 \in \mathcal{H}^{\frac{n}{2}-1}$ e tem divergente nulo, então existe um tempo maximal T^* e uma única solução maximal v tal que*

$$v \in L^2_{loc}([0,T^*); \mathcal{H}^{\frac{n}{2}}).$$

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar, sob as hipóteses do Teorema 4.2.1, o seguinte resultado devido a J.-Y. Chemin e N. Lerner, à saber:

Teorema 4.2.2 *Se $v \in L^2([0,T]; \mathcal{H}^{\frac{n}{2}})$ é um campo de vetores solução do sistema de Navier-Stokes (NS) com $v_0 \in \mathcal{H}^{\frac{n}{2}-1}$, então $v \in \mathcal{H}^{\frac{n}{2}+1}_{1,T}$.*

Demonstração: Iniciamos tal demonstração supondo v suficientemente regular de modo que os cálculos abaixo sejam válidos. A técnica que seguiremos é conhecida como Método da Energia. Como as derivadas comutam com os operadores $\dot{\Delta}_j$ (ver (4.1.4) e (4.1.5)) temos, para todo $j \in \mathbb{Z}$, que

$$\partial_t\, \dot{\Delta}_j\, v(t,\cdot) - \nu\Delta\, \dot{\Delta}_j\, v(t,\cdot) = -\, \dot{\Delta}_j\, ((v\cdot\nabla)v(t,\cdot)) -\, \dot{\Delta}_j\, \nabla\mathbf{p}. \tag{4.2.1}$$

De tal igualdade e do fato que o campo de vetores v tem divergente nulo segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\dot{\Delta}_j\, v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 &+ 2\nu\|\dot{\Delta}_j\, \nabla v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \\ &= -2\mathbf{Re}\langle \dot{\Delta}_j\, ((v\cdot\nabla)v(t,\cdot)), \dot{\Delta}_j\, v(t,\cdot)\rangle. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

De fato, temos que (abaixo, a barra indica o conjugado do número complexo)

$$\partial_t\left(\dot{\Delta}_j\, v(t,x)\overline{\dot{\Delta}_j\, v(t,x)}\right) = \partial_t\, \dot{\Delta}_j\, v(t,x)\overline{\dot{\Delta}_j\, v(t,x)} + \dot{\Delta}_j\, v(t,x)\overline{\partial_t\, \dot{\Delta}_j\, v(t,x)}.$$

Assim utilizando 4.2.1 obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t\|\dot{\Delta}_j\, v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 &= \int(\partial_t\, \dot{\Delta}_j\, v(t,x))\overline{\dot{\Delta}_j\, v(t,x)}dx + \int \dot{\Delta}_j\, v(t,x)(\overline{\partial_t\, \dot{\Delta}_j\, v(t,x)})dx \\ &= \int(\nu\Delta\, \dot{\Delta}_j\, v(t,x))\overline{\dot{\Delta}_j\, v(t,x)}dx + \int\overline{(\nu\Delta\, \dot{\Delta}_j\, v(t,x))}\, \dot{\Delta}_j\, v(t,x)dx \\ &-2\mathbf{Re}\int \dot{\Delta}_j\, ((v\cdot\nabla)v(t,x))\overline{\dot{\Delta}_j\, v(t,x)}dx \\ &-\int(\dot{\Delta}_j\, \nabla\mathbf{p})\overline{\dot{\Delta}_j\, v(t,x)}dx - \int\overline{(\dot{\Delta}_j\, \nabla\mathbf{p})}\, \dot{\Delta}_j\, v(t,x)dx. \end{aligned}$$

Agora a igualdade (4.2.2) segue notando que,

$$\begin{aligned} \int(\dot{\Delta}_j\, \nabla\mathbf{p})\overline{\dot{\Delta}_j\, v(t,x)}dx &= \int\sum_{l=1}^{n}(\dot{\Delta}_j\, \partial^{e_l}\mathbf{p})\overline{\dot{\Delta}_j\, v_l(t,x)}dx \\ &\overset{(1)}{=} \int(\dot{\Delta}_j\, \mathbf{p})\sum_{l=1}^{n}\overline{\dot{\Delta}_j\, \partial^{e_l}v_l(t,x)}dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

e que,

$$\begin{aligned} \int(\nu\Delta\, \dot{\Delta}_j\, v(t,x))\overline{\dot{\Delta}_j\, v(t,x)}dx &= \nu\int\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\partial^{e_l})^2\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,x)\overline{\dot{\Delta}_j\, v_k(t,x)}dx \\ &\overset{(2)}{=} -\nu\int\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,x)\overline{\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,x)}dx \\ &= -\nu\|\dot{\Delta}_j\, \nabla v(t,\cdot)\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

para obter (1) e (2) basta usar integração por partes.

Definindo

$$f_j(t) = \|\dot{\Delta}_j \; v(t,\cdot)\|_{L^2}^2,$$

deduzimos a existência de uma constante positiva C_1, dependendo apenas da função φ (fixada na seção 2.3) e da viscosidade ν, tal que

$$f_j'(t) + C_1 2^{2j} f_j(t) \leq 2|\langle \dot{\Delta}_j \; (v\cdot\nabla)v(t,\cdot), \dot{\Delta}_j \; v(t,\cdot)\rangle|.$$

Tal desigualdade segue de (4.2.2) pois, pelo Lema 2.1.1, temos que

$$\begin{aligned}
\|\dot{\Delta}_j \; \nabla v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \|\dot{\Delta}_j \; \partial^{e_k} v_l(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \\
&\geq \sum_{l=1}^{n} \sup_k \|\dot{\Delta}_j \; \partial^{e_k} v_l(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \\
&\geq \sum_{l=1}^{n} C_1 2^{2j} \|\dot{\Delta}_j \; v_l(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \\
&= C_1 2^{2j} \|\dot{\Delta}_j \; v(t,\cdot)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

O ponto importante agora é a majoração de $2|\langle \dot{\Delta}_j \; ((v\cdot\nabla)v(t,\cdot)), \dot{\Delta}_j \; v(t,\cdot)\rangle|$. Ela é descrita pelo seguinte lema:

Lema 4.2.1 *Existe uma constante positiva C_2 tal que se v é um campo de vetores de divergente nulo então existe uma sequência $(c_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}$, de termos não negativos, cuja soma dos quadrados é 1 para todo t, e*

$$2|\langle \dot{\Delta}_j \; ((v\cdot\nabla)v(t,\cdot)), \dot{\Delta}_j \; v(t,\cdot)\rangle| \leq C_2 2^{-j(\frac{n}{2}-1)} c_j(t) \|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2 \|\dot{\Delta}_j \; v(t,\cdot)\|_{L^2}.$$

Admitindo este lema temos que

$$f_j'(t) + C_1 2^{2j} f_j(t) \leq C_2 2^{-j(\frac{n}{2}-1)} c_j(t) \|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2 \|\dot{\Delta}_j \; v(t,\cdot)\|_{L^2}. \tag{4.2.3}$$

Tomando $g_j(t) = f_j^{\frac{1}{2}}(t) = \|\dot{\Delta}_j \; v(t,\cdot)\|_{L^2}$ temos que $g_j'(t) = \frac{1}{2} f_j^{-\frac{1}{2}}(t) f_j'(t)$, assim utilizando a desigualdade (4.2.3) segue que

$$2g_j'(t)g_j(t) + C_1 2^{2j} g_j^2(t) \leq C_2 2^{-j(\frac{n}{2}-1)} c_j(t) \|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2 g_j(t)$$

isto é

$$2g_j'(t) + C_1 2^{2j} g_j(t) \leq C_2 2^{-j(\frac{n}{2}-1)} c_j(t) \|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2,$$

Tal equação pode ser resolvida usando fatores integrantes obtendo assim a desigualdade

$$g_j(t) \leq g_j(0)\exp(-C_1 2^{2j}t) + C_2 2^{-j(\frac{n}{2}-1)}\int_0^t \exp(-C_1 2^{2j}(t-\tau))c_j(\tau)\|v(\tau,\cdot)|^2_{\frac{n}{2}}\, d\tau.$$

Desta forma temos que

$$\begin{aligned}
\|g_j\|_{L^1[0,T]} &= \int_0^T |g_j(t)|dt \\
&\leq \int_0^T g_j(0)\exp(-C_1 2^{2j}(t))dt \\
&+ \int_0^T \Big(C_2 2^{-j(\frac{n}{2}-1)}\int_0^t \exp(-C_1 2^{2j}(t-\tau))c_j(\tau)\|v(\tau,\cdot)|^2_{\frac{n}{2}}\, d\tau\Big)dt \\
&\overset{(1)}{\leq} C2^{-2j}g_j(0) + C2^{-j(\frac{n}{2}+1)}\int_0^T c_j(t)\|v(t,\cdot)|^2_{\frac{n}{2}}\, dt, \qquad (4.2.4)
\end{aligned}$$

pois efetuando uma simples troca de variável temos a desigualdade

$$\int_0^T g_j(0)\exp(-C_1 2^{2j}t)dt \leq C2^{-2j}g_j(0),$$

e tomando $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \exp(-C_1 2^{2j}t)$, $w : [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que $w(t) = c_j(t)\|v(t,\cdot)|^2_{\frac{n}{2}}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \exp(-C_1 2^{2j}(t-\tau))c_j(\tau)\|v(\tau,\cdot)|^2_{\frac{n}{2}}\, d\tau &\leq \int_0^T \exp(-C_1 2^{2j}(t-\tau))c_j(\tau)\|v(\tau,\cdot)|^2_{\frac{n}{2}}\, d\tau \\
&= (h \star w)(t)
\end{aligned}$$

deste modo utilizando a Desigualdade de Young podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\int_0^t \exp(-C_1 2^{2j}(t-\tau))c_j(\tau)\|v(\tau,\cdot)|^2_{\frac{n}{2}}\, d\tau\right) dt &\leq \int_0^T |(h\star w)(t)|dt \\
&\leq C2^{-2j}\int_0^T w(t)dt,
\end{aligned}$$

de onde segue (1). Lembrando que para a e $b \in \mathbb{R}$ vale que $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$, segue de (4.2.4) a desigualdade

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T \|\dot{\Delta}_j\, v(t,\cdot)\|_{L^2}dt\right)^2 &\leq C2^{-4j}\|\dot{\Delta}_j\, v(0,\cdot)\|^2_{L^2} \\
&+ C2^{-2j(\frac{n}{2}+1)}\left(\int_0^T c_j(t)\|v(t,\cdot)|^2_{\frac{n}{2}}\, dt\right)^2.
\end{aligned}$$

Agora, se para cada $j \in \mathbb{Z}$ multiplicarmos ambos os lados da desigualdade acima por $2^{2j(\frac{n}{2}+1)}$ e somarmos em j, resulta que

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j(\frac{n}{2}+1)}\left(\int_0^T \|\dot{\Delta}_j\, v(t,\cdot)\|_{L^2}dt\right)^2 &\leq C\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j(\frac{n}{2}-1)}\|\dot{\Delta}_j\, v(0,\cdot)\|_{L^2}^2\\ &+C\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\int_0^T c_j(t)\|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2 dt)^2\\ &\leq C\|v(0,\cdot)|_{\frac{n}{2}-1}^2\\ &+C\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\int_0^T c_j(t)\|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2 dt\right)^2.\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder temos que

$$\int_0^T c_j(t)\|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2 \leq \left(\int_0^T c_j^2(t)\|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

assim, lembrando que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j^2(t) = 1, \quad \forall \ t \in [0,T]$ e usando o Teorema da Convergência Monótona, para comutar o somatório e a integral, podemos escrever

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j(\frac{n}{2}+1)}\left(\int_0^T \|\dot{\Delta}_j\, v(t,\cdot)\|_{L^2}dt\right)^2\\ &\leq C\|v(0,\cdot)|_{\frac{n}{2}-1}^2 + C\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\int_0^T c_j^2(t)\|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2 dt\right)\left(\int_0^T \|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2 dt\right)\\ &= C\|v(0,\cdot)|_{\frac{n}{2}-1}^2 + C\left(\int_0^T \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j^2(t)\|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2 dt\right)\left(\int_0^T \|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2 dt\right)\\ &= C\|v(0,\cdot)|_{\frac{n}{2}-1}^2 + C\left(\int_0^T \|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}^2 dt\right)^2,\end{aligned}$$

deste modo temos que

$$\begin{aligned}&\sum_{j\geq -1} 2^{2j(\frac{n}{2}+1)}\left(\int_0^T \|\dot{\Delta}_j\, v(t,\cdot)\|_{L^2}dt\right)^2\\ &\leq C\|v(0,\cdot)|_{\frac{n}{2}-1}^2 + \|v\|_{L^2([0,T];\dot{\mathcal{H}}^{\frac{n}{2}})}^4 + 2^{-2(\frac{n}{2}+1)}\left(\int_0^T \|\Delta_{-1}v(t,\cdot)\|_{L^2}\right)^2\\ &\leq C\|v(0,\cdot)\|_{\mathcal{H}^{\frac{n}{2}-1}}^2 + \|v\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}^{\frac{n}{2}})}^4 + 2^{-2(\frac{n}{2}+1)}\left(\int_0^T \|\Delta_{-1}v(t,\cdot)\|_{L^2}\right)^2\\ &\overset{(1)}{\leq} C\Big(\|v(0,\cdot)\|_{\mathcal{H}^{\frac{n}{2}-1}}^2 + \|v\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}^{\frac{n}{2}})}^4 + \|v\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}^{\frac{n}{2}})}^2\Big).\end{aligned}$$

Em (1) usamos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\Delta_{-1}v(t,\cdot)\|_{L^2}dt &\leq T^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \|\Delta_{-1}v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq T^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \|v(t,\cdot)\|_{\mathcal{H}^{\frac{n}{2}}}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= T^{\frac{n}{2}}\|v\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}^{\frac{n}{2}})}.
\end{aligned}$$

Em resumo temos que

$$\|v|_{\frac{n}{2}+1} \leq C\Big(\|v(0,\cdot)\|_{\mathcal{H}^{\frac{n}{2}-1}}^2 + \|v\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}^{\frac{n}{2}})}^4 + \|v\|_{L^2([0,T];\mathcal{H}^{\frac{n}{2}})}^2\Big). \tag{4.2.5}$$

Obtemos assim uma desigualdade à priori quando v for suficientemente regular. O resultado segue agora por densidade, pois, pela demonstração do Teorema 4.2.1, dada em [2], podemos aproximar o dado inicial v_0 por uma sequência de dados iniciais, suficientemente regulares. Dando origem a uma sequência de soluções, suficientemente regulares, tendendo para a solução v em $L^2([0,T];\mathcal{H}^{\frac{n}{2}})$. Assim usando a desigualdade 4.2.5 obtemos, graças a completude do espaço $\mathcal{H}_{1,T}^{\frac{n}{2}+1}$, que $v \in \mathcal{H}_{1,T}^{\frac{n}{2}+1}$.

∎

4.3 Demonstração do Lema 4.2.1

Para demonstrar tal lema utilizaremos Decomposição de Bony em paraproduto e resto. Aqui faremos uma decomposição utilizando os operadores $\dot{\Delta}_j$ e $\dot{S}$. Colocamos:

$$T_a b = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dot{S}_{j-1}\ a\ \dot{\Delta}_j\ b \quad \text{e} \quad R(a,b) = \sum_{|j-j'|\leq 1} \dot{\Delta}_j\ a\ \dot{\Delta}_{j'}\ b.$$

É interessante ter claro o significado de $\dot{S}_j\ a$ quando $a : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ neste caso

$$\dot{S}_j\ a(t,\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} (\dot{S}_j\ a_1(t,\cdot),\cdots,\dot{S}_j\ a_n(t,\cdot))$$

e se $b : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ colocamos de modo natural

$$ab \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 b,\cdots,a_n b).$$

Assim, por exemplo, para a e b nas condições acima

$$\dot{S}_j\ a(t,\cdot)\ \dot{\Delta}_{j'}\ b(t,\cdot) = (\dot{S}_j\ a_1(t,\cdot)\ \dot{\Delta}_{j'}\ b(t,\cdot),\cdots,\dot{S}_j\ a_n(t,\cdot)\ \dot{\Delta}_{j'}\ b(t,\cdot)).$$

Vimos na demonstração do Teorema 3.4.1 que $S((S_{j-1}a\Delta_j b)\hat{})\subset 2^j\tilde{\mathcal{C}}$, procedendo analogamente obtemos que

$$S((\dot{S}_{j-1}\ a\ \dot{\Delta}_j\ b)\hat{})\subset 2^j\tilde{\mathcal{C}},$$

(quando a ou b tiverem valores vetoriais aplicar tal resultado a cada função coordenada). Assim utilizando (2.2.5) temos que

$$\begin{aligned} |j-j'|\geq 5 \quad &\Rightarrow \quad (\dot{\Delta}_j\ (\dot{S}_{j'-1}\ a\ \dot{\Delta}_{j'}\ b))\hat{} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \dot{\Delta}_j\ (\dot{S}_{j'-1}\ a\ \dot{\Delta}_{j'}\ b) = 0 \end{aligned}$$

logo

$$\dot{\Delta}_j\ (T_a b) = \sum_{|j-j'|\leq 4} \dot{\Delta}_j\ (\dot{S}_{j'-1}\ a\ \dot{\Delta}_{j'}\ b).$$

Podemos escrever, graças ao Lema 2.1.1, as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \|\dot{S}_{j'-1}\ a\|_{L^\infty} &\leq \sum_{j=-\infty}^{j'-2} \|\dot{\Delta}_j\ a\|_{L^\infty} \\ &\leq C\sum_{j=-\infty}^{j'-2} 2^{j(\frac{n}{2})}\|\dot{\Delta}_j\ a\|_{L^2} \\ &= C\sum_{j=-\infty}^{j'-2} 2^j 2^{j(\frac{n}{2}-1)}\|\dot{\Delta}_j\ a\|_{L^2} \\ &\overset{(1)}{\leq} C\left(\sum_{j=-\infty}^{j'-2} 2^{2j}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=-\infty}^{j'-2} 2^{2j(\frac{n}{2}-1)}\|\dot{\Delta}_j\ a\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C2^{j'}\|a|_{\frac{n}{2}-1}. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Obsevemos que (1) segue aplicando a Desigualdade de Hölder para as sequências

$$(x_j)_{j\in\mathbb{Z}} \quad \text{com} \quad x_j = \begin{cases} 2^j & \text{se} \quad j\leq j'-2 \\ 0 & \text{se} \quad j > j'-2 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$(y_j)_{j\in\mathbb{Z}} \quad \text{tal que} \quad y_j = \begin{cases} 2^{j(\frac{n}{2}-1)}\|\dot{\Delta}_j\ a\|_{L^2} & \text{se} \quad j\leq j'-2 \\ 0 & \text{se} \quad j > j'-2 \end{cases}.$$

Da desigualdade (4.3.1) resulta que

$$\|T_a b|_{\sigma-1} \leq C\|a|_{\frac{n}{2}-1}\|b|_\sigma \tag{4.3.2}$$

pois, são válidas as seguintes desigualdades

$$
\begin{aligned}
\|T_a b|^2_{\sigma-1} &\leq C\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j(\sigma-1)}\|\dot{\Delta}_j\; T_a b\|^2_{L^2}\\
&\leq C\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j(\sigma-1)}\sum_{|j-j'|\leq 4}\|\dot{\Delta}_j\;(\dot{S}_{j'-1}\;a\;\dot{\Delta}_{j'}\;b)\|^2_{L^2}\\
&\overset{(1)}{\leq} C\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j(\sigma-1)}\sum_{|j-j'|\leq 4}\|\dot{S}_{j'-1}\;a\;\dot{\Delta}_{j'}\;b\|^2_{L^2}\\
&\leq C\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j(\sigma-1)}\sum_{|j-j'|\leq 4}\|\dot{S}_{j'-1}\;a\|^2_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_{j'}\;b\|^2_{L^2}\\
&\overset{(2)}{\leq} C\|a|^2_{\frac{n}{2}-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j(\sigma-1)}\sum_{|j-j'|\leq 4}2^{2j'}\|\dot{\Delta}_{j'}\;b\|^2_{L^2}\\
&\leq C\|a|^2_{\frac{n}{2}-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j(\sigma-1)}\sum_{|j-j'|\leq 4}2^{2(j+4)}\|\dot{\Delta}_{j'}\;b\|^2_{L^2}\\
&\leq C\|a|^2_{\frac{n}{2}-1}\|b|^2_{\sigma}.
\end{aligned}
$$

Aqui em (1) usamos (4.1.1) e (2) segue de (4.3.1). Aplicando (4.3.2) para $a = \partial^{e_l} v$ e $b = v_l$ temos,

$$
\begin{aligned}
\|T_{\partial^{e_l}v} v_l|_{\frac{n}{2}-1} &\leq \|\nabla v|_{\frac{n}{2}-1}\|v|_{\frac{n}{2}}\\
&\leq C\|v|^2_{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
\tag{4.3.3}
$$

aqui, escrevemos $\|T_{\partial^{e_l}v} v_l|_{\frac{n}{2}-1}$ para evitar a notação mais carregada $\|T_{\partial^{e_l}v(t,\cdot)} v_l(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}-1}$, analogamente, ao escrever $\|v|^2_{\frac{n}{2}}$ estamos pensando em $\|v(t,\cdot)|^2_{\frac{n}{2}}$. A partir deste ponto em muitas ocasiões, para evitar expressões demasiadamente grandes, usaremos esta notação simplificada.

Vamos analizar agora o termo do tipo resto. Podemos escrever:

$$
R(a,b) = \sum_{j'\in\mathbb{Z}} R_{j'}(a,b) \quad \text{com} \quad R_{j'}(a,b) = \sum_{k=-1}^{1}\dot{\Delta}_{j'-k}\;a\;\dot{\Delta}_{j'}\;b.
$$

De maneira análoga à feita no Teorema 3.4.2 obtemos que $S((R_{j'}(a,b))\hat{}\,) \subset 2^{j'}B(0,8)$ assim $S\left((\dot{\Delta}_j\; R_{j'}(a,b))\hat{}\,\right) \subset 2^j\mathcal{C}\cap 2^{j'}B(0,8)$ ($\mathcal{C}$ é a coroa do Teorema 2.2.1). Deste modo, deve existir $N\in\mathbb{N}$ tal que se $j' < j - N$ então $\dot{\Delta}_j\; R_{j'}(a,b) = 0$. Logo podemos escrever

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}_j\ \partial^{e_l} R(v_l, v) &= \partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_j\ \big(\sum_{j'\in\mathbb{Z}} R_{j'}(v_l, v)\big) \\
&= \partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_j\ \big(\sum_{j'\geq j-N} R_{j'}(v_l, v)\big) \\
&= \partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_j\ \big(\sum_{\substack{j'\geq j-N\\ |k|\leq 1}} \dot{\Delta}_{j'-k}\ v_l\ \dot{\Delta}_{j'}\ v\big).
\end{aligned}$$

Assim aplicando o Lema 2.1.1 temos

$$\begin{aligned}
\|\dot{\Delta}_j\ \partial^{e_l} R(v_l, v)\|_{L^2} &\leq \sum_{\substack{j'\geq j-N\\ |k|\leq 1}} \|\partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_j\ (\dot{\Delta}_{j'-k}\ v_l\ \dot{\Delta}_{j'}\ v)\|_{L^2} \\
&\leq C 2^{j(\frac{n}{2}+1)} \sum_{\substack{j'\geq j-N\\ |k|\leq 1}} \|\dot{\Delta}_{j'-k}\ v_l\ \dot{\Delta}_{j'}\ v\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Deste modo é lícito escrever

$$\begin{aligned}
2^{j(\frac{n}{2}-1)}\|\dot{\Delta}_j\ (\partial^{e_l} R(v_l, v))\|_{L^2} &\leq C \sum_{j'\geq j-N} 2^{jn} \sum_{|k|\leq 1} \|\dot{\Delta}_{j'-k}\ v_l\ \dot{\Delta}_{j'}\ v\|_{L^1} \\
&\leq C \sum_{j'\geq j-N} 2^{(j-j')n} \sum_{|k|\leq 1} 2^{(j'-k)\frac{n}{2}} \|\dot{\Delta}_{j'-k}\ v_l\|_{L^2} 2^{j'\frac{n}{2}} \|\dot{\Delta}_{j'}\ v\|_{L^1} \\
&= C \sum_{|k|\leq 1} \left((x_q)_{q\in\mathbb{Z}} \star (y_{k,q}\cdot z_q)_{q\in\mathbb{Z}}\right)(j) \qquad (4.3.4)
\end{aligned}$$

com

$$x_q = \begin{cases} 2^{qn} & \text{se} \quad q \leq N \\ 0 & \text{se} \quad q > N \end{cases},$$

$$y_{k,q} = 2^{(q-k)\frac{n}{2}} \|\dot{\Delta}_{q-k}\ v_l\|_{L^2} \quad \text{e}$$

$$z_q = 2^{q\frac{n}{2}} \|\dot{\Delta}_q\ v\|_{L^2}.$$

Temos que $(x_q)_{q\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$ e as desigualdades

$$\begin{aligned}
&\sum_{q\in\mathbb{Z}} (2^{(q-k)\frac{n}{2}} \|\dot{\Delta}_{q-k}\ v_l\|_{L^2})^2 (2^{q\frac{n}{2}} \|\dot{\Delta}_q\ v\|_{L^2})^2 \\
&\qquad \leq \sum_{q\in\mathbb{Z}} (2^{(q-k)\frac{n}{2}} \|\dot{\Delta}_{q-k}\ v\|_{L^2})^2 \sum_{q\in\mathbb{Z}} (2^{q\frac{n}{2}} \|\dot{\Delta}_q\ v\|_{L^2})^2 \\
&\qquad \leq \|v|^2_{\frac{n}{2}} \|v|^2_{\frac{n}{2}} \\
&\qquad = \|v|^4_{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

mostram que $(y_{k,q}\cdot z_q)_{q\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ e que $\|(y_{k,q}\cdot z_q)_{q\in\mathbb{Z}}\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \|v|^2_{\frac{n}{2}}$, assim a Desigualdade de Yong garante que

$$\|(x_q)_{q\in\mathbb{Z}} \star (y_{k,q}\cdot z_q)_{q\in\mathbb{Z}}\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq C\|v|^2_{\frac{n}{2}}.$$

Deste modo obtemos de (4.3.4) que

$$\|\partial^{e_l} R(v_l, v)|_{\frac{n}{2}-1} \leq C\|v|^2_{\frac{n}{2}}. \tag{4.3.5}$$

Notemos agora que as desigualdades (4.3.3) e (4.3.5) garantem a existência de uma sequência $(c'_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ tal que $\|(c'_j)_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^2(\mathbb{Z})} = 1$ e

$$\|\dot{\Delta}_j \left(T_{\partial^{e_l} v} v_l + \partial^{e_l} R(v_l, v)\right)\|_{L^2} \leq C c'_j 2^{-j(\frac{n}{2}-1)} \|v|^2_{\frac{n}{2}}. \tag{4.3.6}$$

De fato, inicialmente vamos assumir sem perda de generalidade que$\|T_{\partial^{e_l} v} v_l|_{\frac{n}{2}-1} \neq 0$ assim tomando $(\tilde{c}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ dada por

$$\tilde{c}_j = \frac{2^{j(\frac{n}{2}-1)} \|\dot{\Delta}_j\, T_{\partial^{e_l} v} v_l\|_{L^2}}{\|T_{\partial^{e_l} v} v_l|_{\frac{n}{2}-1}}$$

temos que $\|(\tilde{c}_j)_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^2(\mathbb{Z})} = 1$ e por (4.3.3) podemos escrever que

$$\begin{aligned} \|\dot{\Delta}_j\, T_{\partial^{e_l} v} v_l\|_{L^2} &= \tilde{c}_j 2^{-j(\frac{n}{2}-1)} \|T_{\partial^{e_l} v} v_l|_{\frac{n}{2}-1} \\ &\leq C \tilde{c}_j 2^{-j(\frac{n}{2}-1)} \|v|^2_{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Analogamente (4.3.5) garante a existência de uma sequência$(\tilde{\tilde{c}}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ tal que $\|(\tilde{\tilde{c}}_j)_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^2(\mathbb{Z})} = 1$ e

$$\|\dot{\Delta}_j\, \partial^{e_l} R(v_l, v))\|_{L^2} \leq C \tilde{\tilde{c}}_j 2^{-j(\frac{n}{2}-1)} \|v|^2_{\frac{n}{2}}.$$

A desigualdade (4.3.6) segue agora para a sequência $(c'_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ dada por

$$c'_j = \frac{1}{2}(\tilde{c}_j + \tilde{\tilde{c}}_j) \frac{1}{\|(\frac{\tilde{c}_j + \tilde{\tilde{c}}_j}{2})\|_{l^2(\mathbb{Z})}}.$$

Para escrever os próximos cálculos de modo mais sintético, vamos introduzir a noção de comutador, para a e b funções onde b é uma função a valores complexos e a pode ser a valores complexos ou a valores vetoriais temos:

$$\begin{aligned} [\dot{\Delta}_j\,, a]b &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{\Delta}_j\,(ab) - a\,\dot{\Delta}_j\, b \\ [a, \dot{\Delta}_j\,]b &\stackrel{\text{def}}{=} a\,\dot{\Delta}_j\, b - \dot{\Delta}_j\,(ab). \end{aligned}$$

Assim tomando

$$(T_v \cdot \nabla)v \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{l=1}^{n} T_{v_l} \partial^{e_l} v_1, \cdots, \sum_{l=1}^{n} T_{v_l} \partial^{e_l} v_n \right)$$

e notando que

$$\sum_{l=1}^{n} \dot{S}_{j'-1}\, v_l(t,x)\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_j\, \dot{\Delta}_{j'}\, v_k(t,x)\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,x)$$
$$= -\sum_{l=1}^{n} \dot{S}_{j'-1}\, v_l(t,x)\, \dot{\Delta}_j\, \dot{\Delta}_{j'}\, v_k(t,x)\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,x)$$

(tal fato segue da igualdade

$$\sum_{l=1}^{n} \int \dot{S}_{j'-1}\, v_l(t,x)\partial^{e_l} \Big(\dot{\Delta}_j\, \dot{\Delta}_{j'}\, v_k(t,x)\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,x)\Big) = 0$$

a qual pode ser obtida utilizando integração por partes e lembrando que $\mathrm{div} v = 0$) temos

$$\begin{aligned}
I_j &\overset{\text{def}}{=} \langle \dot{\Delta}_j\, ((T_v \cdot \nabla)v), \dot{\Delta}_j\, v_k\rangle \\
&= \sum_{\substack{1\le l,k\le n\\ j'}} \int \dot{\Delta}_j\, (\dot{S}_{j'-1}\, v_l\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_{j'}\, v_k)(t,x)\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,x)dx \\
&= \sum_{\substack{1\le l,k\le n\\ j'}} \int ([\dot{\Delta}_j\, , \dot{S}_{j'-1}\, v_l]\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_{j'}\, v_k)(t,x)\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,x)dx \\
&- \sum_{\substack{1\le l,k\le n\\ j'}} \int \dot{S}_{j'-1}\, v_l(t,x)\, \dot{\Delta}_j\, \dot{\Delta}_{j'}\, v_k(t,x)\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,x)dx \\
&= \sum_{\substack{1\le l,k\le n\\ j'}} \int ([\dot{\Delta}_j\, , \dot{S}_{j'-1}\, v_l]\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_{j'}\, v_k)(t,x)\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,x)dx \\
&+ \sum_{\substack{1\le l,k\le n\\ j',j''}} \int (\dot{S}_{j''-1}\, v_l(t,x) - \dot{S}_{j'-1}\, v_l(t,x))\, \dot{\Delta}_j\, \dot{\Delta}_{j'}\, v_k(t,x)\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_j\, \dot{\Delta}_{j''}\, v_k(t,x)dx \\
&- \sum_{\substack{1\le l,k\le n\\ j''}} \int \dot{\Delta}_j\, v_k(t,x)[\dot{S}_{j''-1}\, v_l, \dot{\Delta}_j\,]\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_{j''}\, v_k(t,x)dx \\
&- \langle \dot{\Delta}_j\, ((T_v \cdot \nabla)v), \dot{\Delta}_j\, v_k\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
I_j &= \sum_{\substack{1\le l,k\le n\\ j'}} \int ([\dot{\Delta}_j\, , \dot{S}_{j'-1}\, v_l]\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_{j'}\, v_k)(t,x)\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,x)dx \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{1\le l,k\le n\\ j',j''}} \int \Big(\Big(\, \dot{S}_{j''-1}\, v_l(t,x) \\
&- \dot{S}_{j'-1}\, v_l(t,x)\Big)\, \dot{\Delta}_j\, \dot{\Delta}_{j'}\, v_k(t,x)\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_j\, \dot{\Delta}_{j''}\, v_k(t,x)\Big)dx,
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

aqui é interessante notar que nos somatórios acima j' e j'' satisfazem a: $|j-j'|\leq 1$ e $|j-j''|\leq 1$, deste modo as somas são todas finitas. Notemos agora que

$$
\begin{aligned}
&([\dot{\Delta}_j\ ,\dot{S}_{j'-1}\ v_l]\partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_{j'}\ v_k)(t,x)\\
&\qquad = 2^{jn}\int\big(\dot{S}_{j'-1}\ v_l(t,y)-\dot{S}_{j'-1}\ v_l(t,x)\big)\check{\varphi}(t,2^j(x-y))\partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_{j'}\ v_k(t,y)dy.
\end{aligned}
$$

Deste modo podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&\|([\dot{\Delta}_j\ ,\dot{S}_{j'-1}\ v_l]\partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_{j'}\ v_k)(t,\cdot)\|_{L^2}\\
&\qquad\leq\ \|\nabla\ \dot{S}_{j'-1}\ v(t,\cdot)\|_{L^\infty}\|(2^{jn}\check{\varphi}(2^{-j}\cdot)|\cdot|)\star\partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_{j'}\ v_k(t,\cdot)\|_{L^2}\\
&\qquad\leq\ \|\nabla\ \dot{S}_{j'-1}\ v(t,\cdot)\|_{L^\infty}\|2^{jn}\check{\varphi}(2^{-j}\cdot)|\cdot|\|_{L^1}\|\partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_{j'}\ v_k(t,\cdot)\|_{L^2}\\
&\qquad\leq\ C\|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}\|\partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_{j'}\ v_k(t,\cdot)\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Na última estimativa usamos que,

$$\|\nabla\ \dot{S}_{j'-1}\ v(t,\cdot)\|_{L^\infty}\leq C\|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}},$$

e tal fato segue das desigualdades

$$
\begin{aligned}
&\|2^{-j}\partial^{e_l}\ \dot{S}_{j-1}\ v(t,\cdot)\|_{L^\infty}\\
&\quad=\ \|2^{-j}\sum_{p\leq j-2}\partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_p\ v(t,\cdot)\|_{L^\infty}\\
&\quad=\ \|\sum_{p\leq j-2}2^{-j}\ \dot{\Delta}_p\ (\partial^{e_l}v(t,\cdot))\|_{L^\infty}\\
&\quad=\ \|\sum_{p\leq j-2}2^{-j}(\varphi(2^{-p}\cdot)\pi_l(\cdot)\hat{v}(t,\cdot))\check{}\|_{L^\infty}\\
&\quad=\ \|\sum_{p\leq j-2}\int 2^{-j}\varphi(2^{-p}\xi)\pi_l(\xi)\hat{v}(t,\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi\|_{L^\infty}\\
&\quad\leq\ \|\sum_{p\leq j-2}\int|2^{-j}\varphi(2^{-p}\xi)\pi_l(\xi)\hat{v}(t,\xi)|d\xi\|_{L^\infty}\\
&\quad=\ \|\sum_{p\leq j-2}\int\big(2^{-j+p}|(\pi(\cdot)\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(\cdot))(2^{-p}\xi)|\big)\big(|\varphi(2^{-p}\xi)\hat{v}(t,\cdot)|\big)\|_{L^\infty}\\
&\quad\leq\ \sum_{p\leq j-2}2^{-j+p}\left(\int|(\pi(\cdot)\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(\cdot))(2^{-p}\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\|\dot{\Delta}_p\ v(t,\cdot)\|_{L^2}\\
&\quad\leq\ \left(\sum_{p\leq j-2}2^{(-np+2(p-j))}\int|(\pi(\cdot)\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(\cdot))(2^{-p}\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{p\leq j-2}2^{np}\|\dot{\Delta}_p\ v(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\leq\ \left(\sum_{p\leq j-2}2^{2(p-j)}\|\pi_l\cdot\mathbf{1}_{\mathcal{C}}\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{p\in\mathbb{Z}}2^{np}\|\dot{\Delta}_p\ v(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad=\ C\|v|_{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
$$

Agora, colocando $L_j = \displaystyle\int ([\dot{\Delta}_j\ , \dot{S}_{j'-1}\ v_l]\partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_{j'}\ v_k)(t,x)\ \dot{\Delta}_j\ v_k(t,x)dx$ podemos escrever,

$$
\begin{aligned}
L_j &\leq \|([\dot{\Delta}_j\ , \dot{S}_{j'-1}\ v_l]\partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_{j'}\ v_k)(t,\cdot)\|_{L^2}\|\dot{\Delta}_j\ v(t,\cdot)\|_{L^2} \\
&\leq C\|v|_{\frac{n}{2}}\|\partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_{j'}\ v_k(t,\cdot)\|_{L^2}\|\dot{\Delta}_j\ v(t,\cdot)\|_{L^2} \\
&\leq C2^{-j(\frac{n}{2}-1)}c_{j'}^{(1)}\|v|_{\frac{n}{2}}^2\|\dot{\Delta}_j\ v(t,\cdot)\|_{L^2} \qquad (4.3.8)
\end{aligned}
$$

onde a sequência $(c_{j'}^{(1)})_{j'\in\mathbb{Z}}$ é tal que $\|(c_{j'}^{(1)})_{j'\in\mathbb{Z}}\|_{l^2(\mathbb{Z})} = 1$ (observemos que tal sequência depende de t, isto é, $c_{j'}^{(1)} = c_{j'}^{(1)}(t)$). Para obter a última desigualdade acima, notemos primeiramente que tomando $(c_{j'}^{(1)})_{j'\in\mathbb{Z}}$, dada por $c_{j'}^{(1)} = \dfrac{2^{j'\frac{n}{2}}\|\dot{\Delta}_{j'}\ v(t,\cdot)\|_{L^2}}{\|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}}$ (podemos supor que $v \neq 0$, pois, se $v = 0$ o lema é trivialmente válido) temos, $\|(c_{j'}^{(1)})_{j'\in\mathbb{Z}}\|_{l^2(\mathbb{Z})} = 1$ e

$$\|\dot{\Delta}_{j'}\ v(t,\cdot)\|_{L^2} = c_{j'}^{(1)}2^{-j'\frac{n}{2}}\|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}, \quad \forall\ j' \in \mathbb{Z}.$$

Agora, segue aplicando o Lema 2.1.1 que,

$$
\begin{aligned}
\|\partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_{j'}\ v(t,\cdot)\|_{L^2} &\leq C2^{j'}\|\dot{\Delta}_{j'}\ v(t,\cdot)\|_{L^2} \\
&\leq Cc_{j'}^{(1)}2^{-j'(\frac{n}{2}-1)}\|v(t,\cdot)|_{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

donde decorre a última desigualdade utilizada para obter (4.3.8). Vamos agora buscar uma estimativa do tipo (4.3.8) para a integral

$$\tilde{L}_j \stackrel{\text{def}}{=} \int (\dot{S}_{j''-1}\ v_l(t,x) - \dot{S}_{j'-1}\ v_l(t,x))\ \dot{\Delta}_j\ \dot{\Delta}_{j'}\ v_k(t,x)\partial^{e_l}\ \dot{\Delta}_j\ \dot{\Delta}_{j''}\ v_k(t,x)dx.$$

Com o intuito de buscar tal estimativa notemos primeiramente que para $j' \neq j''$ a diferença $\dot{S}_{j''-1}\ v_l(t,x) - \dot{S}_{j'-1}\ v_l(t,x)$ é de fato uma soma da forma $\dot{\Delta}_p\ v_l(t,x) + \dot{\Delta}_{p+1}\ v_l(t,x)$, com $|p-j| \leq 3$ já que $|j-j'| \leq 1$ e $|j-j''| \leq 1$. Observemos também que existe uma constante positiva C tal que para todo $p \in \mathbb{Z}$ vale a desigualdade

$$\|\dot{\Delta}_p\ v(t,\cdot)\|_{L^2} \leq C\|v|_{\frac{n}{2}}2^{-p\frac{n}{2}}.$$

Assim podemos escrever as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_j \leq\ & \|(\dot{S}_{j''-1}\, v_l(t,\cdot) - \dot{S}_{j'-1}\, v_l(t,\cdot))\, \dot{\Delta}_j\, \dot{\Delta}_{j'}\, v_k(t,\cdot)\|_{L^1} \|\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_j\, \dot{\Delta}_{j''}\, v_k(t,\cdot)\|_{L^\infty} \\
\leq\ & \|\dot{S}_{j''-1}\, v_l(t,\cdot) - \dot{S}_{j'-1}\, v_l(t,\cdot)\|_{L^2} \|\dot{\Delta}_j\, \dot{\Delta}_{j'}\, v_k(t,\cdot)\|_{L^2} \|\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_j\, \dot{\Delta}_{j''}\, v_k(t,\cdot)\|_{L^\infty} \\
\leq\ & (\|\dot{\Delta}_p\, v(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\dot{\Delta}_{p+1}\, v(t,\cdot)\|_{L^2}) \|\dot{\Delta}_j\, v_k(t,\cdot)\|_{L^2} \|\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,\cdot)\|_{L^\infty} \\
\leq\ & C\|v|_{\frac{n}{2}} (2^{-p\frac{n}{2}} + 2^{-(p+1)\frac{n}{2}}) \|\dot{\Delta}_j\, v_k(t,\cdot)\|_{L^2} \|\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,\cdot)\|_{L^\infty} \\
\leq\ & C\|v|_{\frac{n}{2}} (2^{-p\frac{n}{2}} + 2^{-(p+1)\frac{n}{2}}) 2^{j\frac{n}{2}} \|\partial^{e_l}\, \dot{\Delta}_j\, v_k(t,\cdot)\|_{L^2} \|\dot{\Delta}_j\, v_k(t,\cdot)\|_{L^2} \\
\leq\ & C 2^{-j(\frac{n}{2}-1)} c_j^{(2)} \|v|_{\frac{n}{2}}^2 \|\dot{\Delta}_j\, v(t,\cdot)\|_{L^2}. \qquad (4.3.9)
\end{aligned}$$

Na terceira desigualdade acima usamos (2.3.2) e a desigualdade triangular , as duas primeiras desigualdades seguem da Desigualdade de Hölder, a penúltima desigualdade é obtida aplicando o Lema 2.1.1. Finalmente a última desigualdade pode ser obtida como feito em (4.3.8).

Vamos agora decompor $\dot{\Delta}_j\ ((v\cdot\nabla)v(t,\cdot))$ em uma soma na qual figuram parcelas para as quais já obtivemos estimativas que serão úteis na demonstração do lema, tal decomposição é obtida utilizando a Decomposição de Bony para escrever as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}_j\ ((v\cdot\nabla)v) &= \left(\dot{\Delta}_j\ (\sum_{l=1}^n v_l \partial^{e_l} v_1), \ldots, \dot{\Delta}_j\ (\sum_{l=1}^n v_l \partial^{e_l} v_n)\right) \\
&= \Bigg(\dot{\Delta}_j\ (\sum_{l=1}^n T_{v_l}\partial^{e_l} v_1 + T_{\partial^{e_l} v_1} v_l + R(\partial^{e_l} v_1, v_l)\ , \\
&\qquad \cdots, \dot{\Delta}_j\ (\sum_{l=1}^n T_{v_l}\partial^{e_l} v_n + T_{\partial^{e_l} v_n} v_l + R(\partial^{e_l} v_n, v_l)\Bigg) \\
&= \dot{\Delta}_j\ ((T_v\cdot\nabla)v) \\
&\quad + \sum_{l=1}^n \dot{\Delta}_j\ (T_{\partial^{e_l} v} v_l + \partial^{e_l} R(v_l, v))
\end{aligned}$$

na última igualdade, usamos que

$$\sum_{l=1}^n R(\partial^{e_l} v_l, v_k) = \sum_{l=1}^n \partial^{e_l} R(v_l, v_k)$$

o que pode ser obtido a partir do fato que div$v = 0$. Finalmente usando (4.3.6), (4.3.7), (4.3.8) e (4.3.9) podemos escrever (lembremo-nos que na igualdade (4.3.7)

j' e j'' satisfazem as condições $|j'-j| \leq 1$ e $|j''-j| \leq 1$) que

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{\Delta}_j\ ((v\cdot\nabla)v), \dot{\Delta}_j\ v\rangle \\
&\quad = \langle \dot{\Delta}_j\ ((T_v\cdot\nabla)v), \dot{\Delta}_j\ v\rangle + \sum_{l=1}^{n}\langle \dot{\Delta}_j\ (T_{\partial^{e_l}v}v_l + \partial^{e_l}R(v_l,v)), \dot{\Delta}_j\ v\rangle \\
&\quad = \sum_{\substack{1\leq l,k\leq n\\ j'}} L_j + \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leq l,k\leq n\\ j',j''}} \tilde{L}_j + \sum_{l=1}^{n}\langle \dot{\Delta}_j\ (T_{\partial^{e_l}v}v_l + \partial^{e_l}R(v_l,v)), \dot{\Delta}_j\ v\rangle \\
&\quad \leq C\left(\sum_{\substack{1\leq l,k\leq n\\ j'}} c^{(1)}_{j'} + \sum_{\substack{1\leq l,k\leq n\\ j',j''}} c^{(2)}_{j} + \sum_{l=1}^{n} c'_j\right) 2^{-j(\frac{n}{2}-1)}\|v|^2_{\frac{n}{2}}\|\dot{\Delta}_j\ v\|_{L^2} \\
&\quad \leq Cc_j 2^{-j(\frac{n}{2}-1)}\|v|^2_{\frac{n}{2}}\|\dot{\Delta}_j\ v\|_{L^2},
\end{aligned}$$

aqui, alterando-se a constante C, a sequência $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ pode ser dada por:

$$c_j = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{1\leq l,k\leq n\\ j'}} c^{(1)}_{j'} + \sum_{\substack{1\leq l,k\leq n\\ j',j''}} c^{(2)}_{j} + \sum_{l=1}^{n} c'_j}{\displaystyle\|\sum_{\substack{1\leq l,k\leq n\\ j'}} c^{(1)}_{j'} + \sum_{\substack{1\leq l,k\leq n\\ j',j''}} c^{(2)}_{j} + \sum_{l=1}^{n} c'_j\|_{l^2(\mathbb{Z})}},$$

o que demonstra o lema.

4.4 Mais um Resultado

Agora de posse do Teorema 4.2.2, estamos em condições de demonstrar o seguinte resultado:

Corolário 4.4.1 *Seja $v \in L^2_{loc}([0,T^*);\mathcal{H}^{\frac{n}{2}})$ uma solução do sistema de Navier-Stokes (NS). Então para todo ϵ estritamente positivo (pequeno) temos que*

$$v \in L^1_{loc}([0,T^*);\mathcal{C}_{\omega_\epsilon}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$$

onde, para $0 < r \leq 1$, $\omega_\epsilon(r) = r(1-\log_2 r)^{\epsilon+\frac{1}{2}}$.

Antes de apresentar a demonstração deste corolário vamos esclarecer as notações.

4.4.1 O Espaço $\mathcal{C}_\omega(X;Y)$

A fim de definir tal espaço, inicialmente tomemos $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ nula na origem, contínua, crescente e estritamente positiva em $(0,\infty)$. Agora podemos apresentar a:

Definição 4.4.1 *Sejam* (X, d) *e* (Y, δ) *dois espaços métricos. Designamos por* $\mathcal{C}_\omega(X, Y)$ *o conjunto das funções* $u : X \to Y$ *limitadas, tais que existe constante* $C_u \geq 0$ *satisfazendo*

$$\delta\left(u(x), u(y)\right) \leq C_u \omega\left(d(x, y)\right), \quad \forall \quad x \quad y \in X.$$

Notemos que se (Y, δ) é um espaço de Banach (o qual será denotado por $(E, \|\cdot\|)$) então o espaço $\mathcal{C}_\omega(X, E)$ munido com a norma

$$\|u\|_\omega = \|u\|_{L^\infty} + \sup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \left\{ \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\omega(d(x, y))} \right\}$$

é um espaço de Banach. De fato, claramente temos que $\mathcal{C}_\omega(X, E)$ é um espaço vetorial e que a função $\|\cdot\|_\omega : \mathcal{C}_\omega(X, E) \to \mathbb{R}$ é uma norma em $\mathcal{C}_\omega(X, E)$. Agora se $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}_\omega(X, E)$, como

$$\|u_j - u_k\|_\omega \geq \|u_j - u_k\|_{L^\infty}, \quad \forall j, k \in \mathbb{N},$$

temos que $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em L^∞, deste modo, como L^∞ é completo, existe $u \in L^\infty$ tal que

$$\lim_{j \to \infty} u_j = u \in L^\infty.$$

Segue também, do fato de $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ser uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}_\omega(X, E)$, que para todo $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \left\{ \frac{\|(u_k - u_m)(x) - (u_k - u_m)(y)\|}{\omega(d(x, y))} \right\} < \epsilon, \ \forall \, m, k > N_\epsilon.$$

Assim, para cada $x, y \in X$ com $x \neq y$ temos que

$$\frac{\|(u_k - u_m)(x) - (u_k - u_m)(y)\|}{\omega(d(x, y))} < \epsilon, \ \forall \, m, k > N_\epsilon,$$

fazendo $m \to \infty$ obtemos que

$$\frac{\|(u_k - u)(x) - (u_k - u)(y)\|}{\omega(d(x, y))} < \epsilon, \ \forall \, k > N_\epsilon.$$

Deste modo temos que

$$\sup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \left\{ \frac{\|(u_k - u)(x) - (u_k - u)(y)\|}{\omega(d(x, y))} \right\} \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

Agora notando que

$$\begin{aligned}\frac{\|u(x)-(u(y)\|}{\omega(d(x,y))} &= \frac{\|u(x)-u_m(y)+u_m(y)-u_m(x)+u_m(x)-u(y)\|}{\omega(d(x,y))}\\ &\leq \frac{\|u(x)-u_m(y)\|+\|u_m(y)-u_m(x)\|+\|u_m(x)-u(y)\|}{\omega(d(x,y))}\\ &\leq C_{u_m},\end{aligned}$$

concluímos que $u \in \mathcal{C}_\omega(X,E)$, e mais, pelos cálculos feitos acima $\|u-u_k\|_\omega \to 0$ quando $k \to \infty$.

Para um exemplo de espaço $C_\omega(X,E)$ tomemos $\rho \in (0,1)$ e $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dada por, $\omega(x) = x^\rho$, $\forall\, x \in [0,\infty)$, assim é fácil ver que $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) = \mathcal{C}^{0,\rho}$, aqui $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}$ com as normas euclidianas.

4.4.2 Demonstração do Corolário 4.4.1

A demonstração do Corolário 4.4.1 resulta do Teorema 4.2.2 e da seguinte proposição:

Proposição 4.4.1 *Para todo ϵ e T estritamente positivos (ϵ pequeno) vale que:*

$$\mathcal{H}_{1,T}^{\frac{n}{2}+1} \subset L^1([0,T];\mathcal{C}_{\omega_\epsilon}), \ \textit{com}\ \omega_\epsilon(r) = r(1-\log_2 r)^{\epsilon+\frac{1}{2}} \ \textit{para}\ 0 < r \leq 1.$$

Demonstração: Para demonstrar tal proposição vamos estudar, para $|x-y| \leq 1$, a diferença

$$\Delta(x,y) = |v(t,x) - v(t,y)|.$$

Lembrando que $v(t,\cdot) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j v(t,\cdot)$, podemos escrever para $N \in \mathbb{N}$, o qual será determinado mais tarde, que

$$\begin{aligned}\Delta(x,y) &\leq |x-y| \sum_{j\leq N} \|\nabla\Delta_j(v(t,\cdot))\|_{L^\infty} + 2\sum_{j>N} \|\Delta_j(v(t,\cdot))\|_{L^\infty}\\ &\leq |x-y|(2+N)^{\epsilon+\frac{1}{2}} \sum_{j\leq N} \frac{\|\nabla\Delta_j(v(t,\cdot))\|_{L^\infty}}{(2+j)^{\epsilon+\frac{1}{2}}}\\ &+2\sum_{j>N} 2^{-(2+j)}(2+j)^{\epsilon+\frac{1}{2}} \frac{2^{2+j}\|\Delta_j(v(t,\cdot))\|_{L^\infty}}{(2+j)^{\epsilon+\frac{1}{2}}}.\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Notemos agora que a função $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dada por

$$f(x) = 2^{-x} x^{(\epsilon+\frac{1}{2})}$$

atinge seu máximo no ponto $x = \epsilon + \frac{1}{2}$, assim, para $j > [1 - \log_2 |x-y|] - 2$ são válidas as desigualdades

$$\begin{aligned} 2^{-(j+2)}(2+j)^{\epsilon+\frac{1}{2}} &\leq 2^{-(2+[1-\log_2|x-y|]-2)}(([1-\log_2|x-y|]-2)+2)^{\epsilon+\frac{1}{2}} \\ &\leq 2^{-(1-\log_2|x-y|)}(1-\log_2|x-y|)^{\epsilon+\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-1}|x-y|(1-\log_2|x-y|)^{\epsilon+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

deste modo escolhendo $N = [1 - \log_2 |x-y|] - 2$ obtemos de (4.4.1) que

$$\begin{aligned} \Delta(x,y) &\leq C\left(\sum_{j\leq N} \frac{\|\nabla\Delta_j(v(t,\cdot))\|_{L^\infty}}{(2+j)^{\epsilon+\frac{1}{2}}} + 2\sum_{j>N} \frac{\|2^{2+j}\Delta_j(v(t,\cdot))\|_{L^\infty}}{(2+j)^{\epsilon+\frac{1}{2}}}\right) \\ &\cdot |x-y|(1-\log_2|x-y|)^{\epsilon+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Agora utilizando o Lema 2.1.1 para obter a desigualdade

$$\|\nabla\Delta_j(v(t,\cdot))\|_{L^\infty} \leq C2^{2+j}\|\Delta_j(v(t,\cdot))\|_{L^\infty}$$

e tomando

$$\alpha_\epsilon(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^{2+j}\|\Delta_j(v(t,\cdot))\|_{L^\infty}}{(2+j)^{\epsilon+\frac{1}{2}}}$$

podemos escrever

$$\Delta(x,y) \leq C\alpha_\epsilon(t)|x-y|(1-\log_2|x-y|)^{\epsilon+\frac{1}{2}}.$$

Comutando o somatório com a integral obtemos que

$$\int_0^T \alpha_\epsilon(t)dt = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^{2+j}}{(2+j)^{\epsilon+\frac{1}{2}}} \int_0^T \|\Delta_j(v(t,\cdot))\|_{L^\infty}dt,$$

assim, aplicando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \alpha_\epsilon(t)dt &\leq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(2^{2+j}\int_0^T \|\Delta_j(v(t,\cdot))\|_{L^\infty}dt\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=-1}^{\infty} \frac{1}{(2+j)^{1+2\epsilon}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{(1)}{\leq} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(C2^{(2+j)+j\frac{n}{2}}\int_0^T \|\Delta_j(v(t,\cdot))\|_{L^2}dt\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=-1}^{\infty} \frac{1}{(2+j)^{1+2\epsilon}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\|v\|_T \left(\sum_{j=-1}^{\infty} \frac{1}{(2+j)^{1+2\epsilon}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{(2)}{\leq} \frac{C}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}\|v\|_T. \end{aligned}$$

Aqui em (1) usamos o Lema 2.1.1 e (2) segue da estimativa

$$\begin{aligned}\sum_{j=-1}^{\infty} \frac{1}{(2+j)^{1+2\epsilon}} &\leq 1 + \int_1^{\infty} r^{-(1+2\epsilon)} dr \\ &= 1 + \frac{1}{2\epsilon} \\ &\leq \frac{C}{\epsilon}.\end{aligned}$$

Finalmente notando que

$$\|v(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\Delta_j(v(t,\cdot))\|_{L^\infty} \leq C\alpha_\epsilon(t)$$

concluímos que

$$\int_0^T \|v(t,\cdot)\|_{\omega_\epsilon} dt \leq C(\frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{2}}})\|v\|_T,$$

o que demonstra a proposição.

Referências Bibliográficas

[1] J.-M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aus derivées partialles nons linnéares*, Ann. École Normale Sup. 14 (1981), 209-246.

[2] J.-Y. Chemin, *Remarques sur l'existence globale pour le systeme de Navier-Stokes incompressible*, J.Math.Anal. 23 (1992), 20-28.

[3] J.-Y. Chemin, *Théorie des Équations D'Évolution, Notes du Course*, Laboratoire J.-L.Lions.

[4] J.-Y. Chemin et N. Lerner, *Flot de champs de vecteurs non Lipschitziens et équations de Navier-Stokes*, J.Diff.Eq. 121 (1995), 314-328.

[5] R. Danchin, *Fourier Analysis Methods for PDE's*, Notes of Course, Wuhan Normal University, 2005.

[6] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, AMS, Providence, 2001.

[7] G.-B. Folland, *Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[8] H. Fujita and T. Kato, *On the Navier-Stokes initial value problem I*, Arch. Rat. Mech Anal 16 (1964), 269-315.

[9] J. Hounie, *Teoria Elementar das Distribuições*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.