

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Pontos fixos e os contra-exemplos de Jiang

Taciana Oliveira Souza

Dissertação apresentada ao
PPG-M da UFSCar como parte
dos requisitos para a obtenção do
título de mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Ventrúscolo

São Carlos – SP

Fevereiro - 2009

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

S729pf

Souza, Taciana Oliveira.

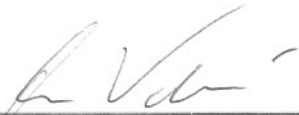
Pontos fixos e os contra-exemplos de Jiang / Taciana Oliveira Souza. -- São Carlos : UFSCar, 2009.
57 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

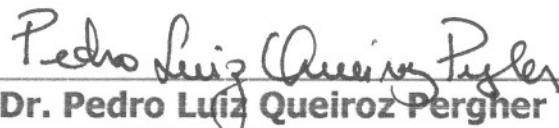
1. Topologia algébrica. 2. Pontos fixos. 3. Grupo de tranças. I. Título.

CDD: 514.2 (20^a)

Banca Examinadora:



**Prof. Dr. Daniel Vendruscolo
DM - UFSCar**



**Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
DM - UFSCar**



**Profa. Dra. Lucília Daruiz Borsari
IME - USP**

Aos meus pais

Maria da Graça e

Silvio (*in memoriam*)

Agradecimentos

À Deus pela bênção de terminar esse trabalho.

À minha mãe, Maria da Graça, pelo apoio e por acreditar em mim. Ao meu pai, Silvio, pelo amor e ensinamentos, apesar do pouco tempo em que estivemos juntos.

Ao Professor Daniel Vandrúscolo, por ter aceitado me orientar e, principalmente, por ter acreditado na minha capacidade.

À Professora Liane Bordignon, pela amizade e incentivos.

Aos meus amigos, principalmente aos amigos Juliano e Rafael pela ajuda constante.

À todos os professores que contribuíram para minha formação. Dedico um agradecimento especial ao Professor Pedro Luiz Queiroz Pergher.

Ao meu querido Aldicio, por ter feito todos os desenhos presentes nesse trabalho, e principalmente pelo amor e dedicação.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo desse trabalho é construir detalhadamente o exemplo, apresentado por *Boju Jiang*, de uma auto - aplicação definida em uma variedade, com número de Nielsen não realizável. Para tanto, inicialmente precisamos abordar a *Teoria de pontos fixos* e alguns resultados sobre *espaços de recobrimento*, isso é feito no capítulo 1.

O capítulo 2 é dedicado a obtenção de uma *apresentação* para o *Grupo de Tranças* do disco com dois furos, que é a variedade no qual está definido o exemplo apresentado por *Jiang*. O *Grupo de Tranças* do disco com dois furos é uma importante ferramenta e será utilizado nos principais resultados desse trabalho.

No capítulo 3 construímos a auto - aplicação. O objetivo do capítulo 4 é demonstrar o seguinte **Teorema** : “Seja M uma superfície compacta e conexa com característica de Euler negativa. Então existe uma auto - aplicação definida em M tal que todas as aplicações na sua classe de homotopia têm no mínimo um ponto fixo, entretanto seu número de Nielsen é zero”. Esse resultado nos garante que mesmo no caso de variedades sem bordo é possível encontrar exemplos de auto - aplicações com número de Nielsen não realizável.

Nos capítulos 3 e 4, a *Teoria de Tranças* é usada na construção de contra - exemplos, mas no quinto, e último, capítulo relacionamos equações com “*tranças*” e o número de pontos fixos de uma auto - aplicação definida em uma superfície compacta e conexa.

Abstract

The aim of this work is construct the example, presented by Boju Jiang, of a self - map on a manifold with non - realizable Nielsen number. Firstly we will need to present the fixed point theory and some results about covering spaces, we do that in chapter 1.

The chapter 2 is dedicated to obtain one presentation of the braid group of the Pants, that is the manifold used in Jiang's example. This presentation is a very important tool and it will be used in the main results of this work.

In the chapter 3 we construct the self - map. The aim of chapter 4 is to proof the following theorem: "Let M be a compact, connected surface with negative Euler characteristic. Then there exist a self - map on M such that all maps in its homotopy class have at least one fixed point, but its Nielsen number is zero". This result shows that even for the manifold without boundary it is possible to find self - maps with non - realizable Nielsen number.

In chapter 3 e 4 we use Braid Group to construct such counter - examples, in the chapter 5 (the last one) we related some equation in braid group with the number of fixed points of a self - map on a compact connected surface.

Sumário

1	Preliminares	3
1.1	Espaços de Recobrimento	3
1.2	Levantamentos de auto - aplicações	5
1.3	Classes de pontos fixos	6
1.4	Índice de um ponto fixo isolado e Número de Nielsen	8
1.5	Comutatividade	14
1.6	A teoria de pontos fixos no círculo S^1	15
2	Grupo de Tranças	18
2.1	Presentação de grupos	18
2.2	Presentação de extensões de grupos	20
2.3	Grupo de Tranças	22
2.3.1	Definição geométrica de <i>Trança</i>	22
2.3.2	Definição algébrica de <i>Trança</i>	23
2.3.3	Presentação do <i>Grupo de Tranças</i> do disco com dois furos	23
3	O contra - exemplo de Jiang	28
3.1	Um Lema	28
3.2	O Contra exemplo	31
4	Superfícies com característica de Euler negativa	37
4.1	A aplicação modelo	37
4.2	Transplantação	44

5	Equações com tranças	50
5.1	Equações com tranças	50
	Bibliografia	56

Introdução

Dada uma auto - aplicação contínua $f : X \rightarrow X$, onde X é um poliedro conexo finito, encontrar $MF[f] := \min\{\#Fix(g) | f \simeq g : X \rightarrow X\}$ é um problema básico na teoria de pontos fixos. O matemático *Jacob Nielsen* foi quem atacou o problema de determinar $MF[f]$, introduzindo o conceito de particionar o conjunto dos pontos fixos nas chamadas *classes de pontos fixos*. Cada classe de pontos fixos tem um número inteiro associado denominado *índice*, a classe com índice não nulo é chamada *essencial*, e o número de classes de pontos fixos essenciais é denominado *número de Nielsen*, o qual denotamos por $N(f)$.

O número de Nielsen é um limitante inferior para $MF[f]$, e quando a igualdade ocorre dizemos que $N(f)$ é *realizável*. A Nielsen é atribuído a seguinte conjectura : “ *Toda auto - aplicação contínua definida em uma variedade tem número de Nielsen realizável*”.

Existem apenas dois tipos de variedades compactas de dimensão $n = 1$ (a menos de difeomorfismo), o círculo S^1 e os intervalos fechados da reta. O teorema 1.45 no capítulo 1, garante que toda auto - aplicação definida no círculo tem número de *Nielsen* realizável. Por outro lado, toda auto - aplicação f definida em um intervalo fechado é homotópica a uma aplicação constante. Assim, de acordo com o teorema 1.22 *iv*) no capítulo 1, temos $N(f) = 1$. Logo, para variedades compactas de dimensão $n = 1$ a conjectura de *Nielsen* é verdadeira.

Em 1942, *Wecken* mostrou em [24] que a conjectura é verdadeira se a variedade for compacta, conexa, linear por partes e tiver dimensão maior ou igual a três. O resultado de *Wecken* foi estendido por *Weier* em [25]. *Weier* demonstrou que o número de Nielsen é realizável para toda auto - aplicação definida em uma variedade compacta de dimensão $n \geq 3$.

No caso de superfícies a conjectura é falsa. Em [7], *Boju Jiang* constrói uma auto - aplicação definida no disco com dois furos, tal que toda aplicação homotópica a ela não é livre de pontos fixos, entretanto seu número de Nielsen é zero. Essa aplicação é portanto um contra - exemplo para a conjectura de Nielsen.

A essência desse trabalho é construir o contra - exemplo para a conjectura de Nielsen, dado por *Jiang* em [7], de forma detalhada, usando como ferramenta principal o *Grupo de Tranças* do disco com dois furos. Além disso, investigaremos a validade da conjectura, no caso de superfícies sem bordo, e abordaremos o uso de “*tranças*” na resolução de problemas envolvendo pontos fixos.

Por fim, é importante evidenciar que todas as demonstrações omitidas podem ser encontradas nos livros da bibliografia, no entanto as demonstrações de resultados retirados dos artigos que formam a base do trabalho são apresentadas com detalhes.

Preliminares

O objetivo desse capítulo é apresentar resultados básicos sobre espaços de recobrimento e teoria de pontos fixos, necessários para a compreensão dos capítulos posteriores.

1.1 Espaços de Recobrimento

Definição 1.1. Um espaço topológico X é dito ser *localmente conexo por caminhos* se, para qualquer $x \in X$ e qualquer aberto U contendo x , existe um aberto V conexo por caminhos satisfazendo $x \in V \subseteq U$.

Definição 1.2. Sejam X e \tilde{X} ambos espaços topológicos conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos, considere $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação contínua e sobrejetora. O espaço topológico \tilde{X} é denominado um *espaço de recobrimento* de X e p é denominada *aplicação de recobrimento*, quando para todo $x \in X$, existe um aberto $U \subseteq X$ conexo por caminhos contendo x , tal que toda componente conexa por caminhos de $p^{-1}(U)$ é um conjunto aberto em \tilde{X} , e se \tilde{U} é uma qualquer dessas componentes então $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Tal aberto U é denominado *vizinhança fundamental* de X .

Denotaremos o espaço de recobrimento de X por (\tilde{X}, p) , quando for necessário explicitar a aplicação de recobrimento, caso contrário denotaremos simplesmente por \tilde{X} .

Sejam (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X , e U uma vizinhança fundamental de X . Denote a fibra $p^{-1}(x)$ por $\{\tilde{x}_i\}_{i \in J}$, com $x \in U$ e J um conjunto de índices, denotaremos por \tilde{U}_i a componente conexa por caminhos de $p^{-1}(U)$ que contém \tilde{x}_i .

Segue diretamente da definição 1.2 os seguintes fatos :

- i) $p^{-1}(U) = \bigcup_i \tilde{U}_i$, com $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \emptyset$, se $i \neq j$.
- ii) O subespaço $p^{-1}(x)$ de \tilde{X} é dotado da topologia discreta. De fato, cada \tilde{U}_i é aberto em \tilde{X} e sua interseção com $p^{-1}(x)$ é um único ponto, portanto este ponto é aberto em $p^{-1}(x)$.
- iii) A aplicação de recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação aberta, isto é, $p(\tilde{U})$ é um aberto em X para todo aberto \tilde{U} em \tilde{X} . De fato, seja \tilde{U} aberto em \tilde{X} , dado $x \in p(\tilde{U})$ escolha U uma vizinhança fundamental de X . Existe um ponto $y \in \tilde{U}$ tal que $p(y) = x$, como $p^{-1}(U) = \bigcup_i \tilde{U}_i$, existe \tilde{U}_i contendo y . O conjunto $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}$ é aberto em \tilde{X} e portanto um aberto em \tilde{U}_i ; como p restrita a \tilde{U}_i é um homeomorfismo sobre U , o conjunto $p(\tilde{U}_i \cap \tilde{U})$ é um aberto em U e portanto é aberto em X , assim $p(\tilde{U}_i \cap \tilde{U})$ é uma vizinhança de x em $p(\tilde{U})$.

Definição 1.3. Dizemos que um espaço topológico X conexo por caminhos é **simplesmente conexo**, quando seu grupo fundamental é trivial.

Nota : Vamos denotar por I o intervalo $[0, 1]$.

Definição 1.4. Dizemos que um espaço topológico X é **localmente simplesmente conexo**, se para cada $x \in X$, existe um aberto U contendo x , tal que qualquer laço em U com ponto base x é homotópico, em X , ao laço trivial $e_x : I \rightarrow X$, definido por $e_x(t) = x$, para todo $t \in I$.

Teorema 1.5. Sejam X um espaço topológico conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e localmente simplesmente conexo, e um ponto $x_o \in X$ tomado como ponto base. Seja H um subgrupo de $\pi_1(X, x_o)$, então existe um espaço de recobrimento (\tilde{X}, p) de X tal que $p\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_o) = H$, onde $\tilde{x}_o \in \tilde{X}$ e $p(\tilde{x}_o) = x_o$.

Demonstração: [15], página 151. ■

Definição 1.6. Quando o espaço de recobrimento \tilde{X} de X é simplesmente conexo dizemos que ele é um **espaço de recobrimento universal**.

Observamos que se no teorema 1.5 $H = \{e\}$, onde e denota o elemento neutro do grupo $\pi_1(X, x_o)$, então \tilde{X} é simplesmente conexo, portanto nesse caso X tem espaço de recobrimento universal.

1.2 Levantamentos de auto - aplicações

Todos os teoremas apresentados nessa seção podem ser encontrados em [15], nas páginas 147 e 148.

Definição 1.7. *Sejam (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X e $f : Y \rightarrow X$ uma aplicação. Dizemos que uma aplicação $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ é um levantamento de f se satisfaz,*

$$p \circ \tilde{f} = f.$$

Teorema 1.8. *Sejam (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X , Y um espaço conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos, $y_0 \in Y$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Dada uma aplicação $f : Y \rightarrow X$ tal que $f(y_0) = x_0$, então existe um levantamento*

$$\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$$

satisfazendo $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ se, e somente se,

$$f_\pi(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_\pi(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Além disso, quando \tilde{f} existe é único. ■

Teorema 1.9. *Sejam (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X e Y um espaço topológico conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. Sejam $H = \{f_t\}_{t \in I} : Y \times I \rightarrow X$ uma homotopia e $\tilde{f}_0 : Y \rightarrow \tilde{X}$ um levantamento de f_0 , então existe único $\tilde{H} = \{h_t\}_{t \in I} : Y \times I \rightarrow \tilde{X}$ satisfazendo $p \circ h_t = f_t, \forall t \in I$, e $h_0(y) = \tilde{f}_0(y)$, para todo $y \in Y$. ■*

Vamos introduzir agora um novo conceito de levantamento, os *levantamentos de auto - aplicações definidas em X para auto - aplicações definidas em \tilde{X}* .

Definição 1.10. *Seja f uma auto - aplicação definida em X . Uma auto - aplicação \tilde{f} definida em \tilde{X} é denominada levantamento de f , se para qualquer $\tilde{x} \in \tilde{X}$, vale a relação abaixo*

$$p \circ \tilde{f}(\tilde{x}) = f \circ p(\tilde{x}).$$

Uma homotopia $\tilde{H} : \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{X}$ entre auto - aplicações definidas em \tilde{X} é um levantamento de uma homotopia H entre auto - aplicações definidas em X se satisfaz,

$$p \circ \tilde{H}(\tilde{x}, t) = H(p(\tilde{x}), t), \forall \tilde{x} \in \tilde{X}, \forall t \in I.$$

Teorema 1.11. *Sejam (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação tal que $f(x_0) = x_1$. Seja $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, e $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_1)$. Então, existe um levantamento $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ de f , satisfazendo $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ quando,*

$$f_\pi \circ p_\pi(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq p_\pi(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)).$$

Além disso, quando \tilde{f} existe é único. ■

Teorema 1.12. *Sejam (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X , $H : X \times I \rightarrow X$ uma homotopia entre duas auto - aplicações definidas em X e $\tilde{f}_0 : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ um levantamento de $f_0 : X \rightarrow X$, definida por $f_0(x) = H(x, 0)$, $\forall x \in X$. Então existe um único levantamento $\tilde{H} : \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{f}_0(\tilde{x}) = \tilde{H}(\tilde{x}, 0)$, para todo $\tilde{x} \in \tilde{X}$. ■*

1.3 Classes de pontos fixos

Um poliedro conexo finito tem espaço de recobrimento universal. Nos resultados a seguir, o espaço topológico X será um poliedro conexo finito, e o seu espaço de recobrimento \tilde{X} será universal.

Definição 1.13. *Dada uma função $f : X \rightarrow X$ dizemos que $x \in X$ é um **ponto fixo** de f se $f(x) = x$.*

Definição 1.14. *Sejam (\tilde{X}_1, p_1) e (\tilde{X}_2, p_2) dois espaços de recobrimento de X . Se uma aplicação $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ é tal que $p_2 \circ \varphi = p_1$, ou seja, o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ X & \xrightarrow{id} & X \end{array}$$

então, dizemos que φ é um **homomorfismo** de (\tilde{X}_1, p_1) em (\tilde{X}_2, p_2) .

Definição 1.15. Dizemos que um homomorfismo φ de (\tilde{X}_1, p_1) em (\tilde{X}_2, p_2) é um **isomorfismo**, se existe um homomorfismo ψ de (\tilde{X}_2, p_2) em (\tilde{X}_1, p_1) tal que $\psi \circ \varphi = id_{(\tilde{X}_1, p_1)}$ e $\varphi \circ \psi = id_{(\tilde{X}_2, p_2)}$.

Um auto - isomorfismo definido num espaço de recobrimento (\tilde{X}, p) de X é chamado **transformação de recobrimento**.

Denotaremos por $\mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ o conjunto das transformações de recobrimento de um espaço de recobrimento (\tilde{X}, p) de X . Observamos que, com a operação de composição de funções, $\mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ é um grupo.

Definição 1.16. Sejam \tilde{f} e \tilde{f}' dois levantamentos de uma auto - aplicação f definida em X . Se existe $\gamma \in \mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ tal que

$$\tilde{f}' = \gamma \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1},$$

dizemos que \tilde{f} e \tilde{f}' estão relacionados e denotamos essa relação por

$$\tilde{f} R \tilde{f}'.$$

A relação descrita acima é de equivalência, portanto o conjunto formado pelos levantamentos de f é particionado em subconjuntos, dois a dois disjuntos, chamados **classes de levantamentos**. Denotaremos a classe de levantamentos de \tilde{f} por

$$[\tilde{f}] = \{\gamma \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1} \mid \gamma \in \mathcal{D}(\tilde{X}, p)\}.$$

Denotaremos por $Fix(f)$ o conjunto dos pontos fixos de $f : X \rightarrow X$.

Teorema 1.17. Seja f uma auto - aplicação definida em um poliedro conexo finito X . As seguintes afirmações são verdadeiras:

- 1) $Fix(f) = \bigcup_{\tilde{f}} p(Fix(\tilde{f}))$, união tomada sobre todos os levantamentos \tilde{f} de f .
- 2) $[\tilde{f}] = [\tilde{f}'] \Rightarrow p(Fix(\tilde{f})) = p(Fix(\tilde{f}'))$.
- 3) $[\tilde{f}] \neq [\tilde{f}'] \Rightarrow p(Fix(\tilde{f})) \cap p(Fix(\tilde{f}')) = \emptyset$.

Demonstração: [15], página 31. ■

Definição 1.18. O subconjunto $p(\text{Fix}(\tilde{f}))$ do conjunto dos pontos fixos $\text{Fix}(f)$ de f é denominado **classe de pontos fixos** de f , determinada pelo levantamento \tilde{f} de f .

Com a definição acima podemos reescrever o teorema 1.17 como segue :

Teorema 1.19. O conjunto $\text{Fix}(f)$ é particionado em classes de pontos fixos $p(\text{Fix}(\tilde{f}))$ de f , com \tilde{f} variando no conjunto de todos os levantamentos de f . ■

Teorema 1.20. Dois pontos fixos x_0 e x_1 de uma aplicação $f : X \rightarrow X$ estão numa mesma classe de pontos fixos se, e somente se, existe em X um caminho c ligando x_0 a x_1 tal que

$$f \circ c \simeq c.$$

Demonstração: [15], página 33. ■

O teorema 1.20 nos apresenta um modo alternativo de definir classes de pontos fixos, de uma forma geométrica sem usar, explicitamente, espaços de recobrimento.

Teorema 1.21. Para toda classe de pontos fixos \mathbb{F} de uma auto - aplicação f definida em X , existe em X um aberto U tal que $U \cap \text{Fix}(f) = \mathbb{F}$.

Demonstração: [15], página 34. ■

1.4 Índice de um ponto fixo isolado e Número de Nielsen

O teorema a seguir aparece em [11] página 14, e é uma abordagem axiomática acerca de índice de pontos fixos.

Teorema 1.22. Sejam X um poliedro conexo finito, $U \subseteq X$ aberto e $f : U \rightarrow X$ uma aplicação. Se o conjunto dos pontos fixos $\text{Fix}(f)$ de f em U é compacto, então um inteiro $\text{ind}(f, U)$, chamado **índice dos pontos fixos de f em U** é definido com as seguintes propriedades:

i) **Condição para a existência de um ponto fixo :**

Se $\text{ind}(f, U) \neq 0$, então f tem ao menos um ponto fixo em U .

ii) **Invariância por homotopia :**

Se $H = \{f_t\}_{t \in [0,1]} : f_0 \simeq f_1 : U \rightarrow X$ é uma homotopia, e o conjunto $\bigcup_{t \in [0,1]} \text{Fix}(f_t)$ é compacto, então $\text{ind}(f_0, U) = \text{ind}(f_1, U)$.

iii) **Aditividade :**

Suponha U_1, U_2, \dots, U_s subconjuntos abertos em U , tal que f não tenha pontos fixos em $U \setminus \bigcup_{i=1}^s U_i$ e $\text{Fix}(f|_{U_j})$, $j = 1, 2, \dots, s$, são dois a dois disjuntos. Se $\text{ind}(f, U)$ está definido, então todos os $\text{ind}(f, U_j)$ estão definidos, e

$$\text{ind}(f, U) = \sum_{j=1}^s \text{ind}(f, U_j).$$

iv) **Normalidade :**

Suponha f uma função constante com $f(x) = x_0 \in U$, para todo $x \in U$, então

$$\text{ind}(f, U) = 1.$$

Se f é uma auto - aplicação definida em X , então

$$\text{ind}(f, X) = L(f) \quad (\text{o número de Lefchetz de } f),$$

onde

$$L(f) = \sum_q (-1)^q \text{tr}(f_{q*}),$$

$$f_{q*} : H_q(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_q(X, \mathbb{Q})$$

é o endomorfismo induzido (em homologia) por f , e $\text{tr}(f_{q*})$ é o traço do endomorfismo f_{q*} .

v) **Comutatividade :**

Sejam V e U subconjuntos abertos de X e Y respectivamente, $f : U \rightarrow Y$ e $g : V \rightarrow X$ aplicações. Observamos que as aplicações

$$g \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow X, f \circ g : g^{-1}(U) \rightarrow Y$$

têm respectivamente $\text{Fix}(g \circ f|_{f^{-1}(V)}) \subseteq U$ e $\text{Fix}(f \circ g|_{g^{-1}(U)}) \subseteq V$, além disso f e g formam um par de homomorfismos mutuamente inversíveis entre os conjuntos

$$\text{Fix}(g \circ f|_{f^{-1}(V)}) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftharpoons}} \text{Fix}(f \circ g|_{g^{-1}(U)}).$$

Se $\text{ind}(g \circ f, f^{-1}(V))$ está definido, então $\text{ind}(f \circ g, g^{-1}(U))$ também está definido, e temos

$$\text{ind}(g \circ f, f^{-1}(V)) = \text{ind}(f \circ g, g^{-1}(U)).$$

vi) **Um caso particular :**

Sejam X_0 um subpoliedro de X e $f : U \rightarrow X$ uma aplicação, tal que $f(U) \subseteq X_0$. Considere o conjunto $U_0 = U \cap X_0$ e a aplicação $f_0 : U_0 \rightarrow X_0$, onde $f_0 = f|_{U_0}$. Se $\text{ind}(f, U)$ está definido, então $\text{ind}(f_0, U_0)$ também está definido e vale

$$\text{ind}(f, U) = \text{ind}(f_0, U_0).$$

vii) **Condição suficiente para o cancelamento de um ponto fixo :**

Sejam U homeomorfo ao espaço Euclidiano \mathbb{R}^k e $f : U \rightarrow X$ tendo um único ponto fixo, x^* em U , com $\text{ind}(f, U) = 0$. Então para uma vizinhança V de x^* com $\bar{V} \subseteq U$ e $f(\bar{V}) \subseteq U$ (onde \bar{V} denota o fecho de V), existe uma homotopia $\{f_t\}_{t \in I} : f \simeq g : U \rightarrow X$ tal que g é livre de pontos fixos em U , $g(x) = f(x)$ para todo $x \in U \setminus V$ e $g(V) \subseteq U$. ■

Dizemos que um ponto fixo x^* , de uma aplicação $f : U \rightarrow X$, é isolado em U se existir uma vizinhança V de x^* tal que o único ponto fixo de f em V é x^* . A propriedade iii) do teorema 1.22 deixa claro que $\text{ind}(f, V)$ independe da escolha de V . De fato, se \tilde{V} é uma outra vizinhança de x^* , tal que $f(x) \neq x$, para todo $x \in \tilde{V} \setminus \{x^*\}$, então f não tem pontos fixos em ambos $V \setminus \tilde{V} \cap V$ e $\tilde{V} \setminus \tilde{V} \cap V$, logo $\text{ind}(f, V) = \text{ind}(f, \tilde{V} \cap V) = \text{ind}(f, \tilde{V})$. Assim, $\text{ind}(f, V)$ é chamado **índice do ponto fixo isolado** x^* , e denotado por $\text{ind}(f, x^*)$.

Existem diferentes abordagens para a questão de índice mas, no contexto em que estamos trabalhando, todas se mostram equivalentes no sentido de darem origem ao mesmo resultado. Logo a abordagem axiomática feita no teorema 1.22 faz sentido.

Agora definiremos de forma precisa o índice de um ponto fixo isolado no caso particular de auto - aplicações definidas em S^1 e \mathbb{R}^n .

Definição 1.23. (O índice de um ponto fixo isolado em S^1) Considere uma auto - aplicação $f : S^1 \rightarrow S^1$. Seja x^* um ponto fixo isolado de f , isto é, existe em S^1 um arco aberto C contendo x , tal que $f(x) \neq x$, para todo $x \in C \setminus \{x^*\}$. Suponha que o ponto x descreve o domínio S^1 no sentido horário, a sua imagem $f(x)$ descreve S^1 de acordo com f . Eles se encontram em x^* . Então o índice do ponto fixo isolado x^* de f é :

$$\text{ind}(f, x^*) = \begin{cases} +1, & \text{quando o ponto } x \text{ supera o ponto } f(x) \text{ em } x^*; \\ +1, & \text{quando } f(x) \text{ percorre o domínio no sentido anti - horário;} \\ -1, & \text{quando o ponto } f(x) \text{ supera o ponto } x \text{ em } x^*; \\ 0, & \text{quando nenhuma das possibilidades acima ocorre.} \end{cases}$$

Nota : Seja A um \mathbb{Z} - módulo, e suponha que exista um isomorfismo $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$. As únicas bases de \mathbb{Z} são $\{1\}$ e $\{-1\}$, como isomorfismo leva base em base temos que $\{\alpha\}$ e $\{-\alpha\}$ são duas bases de A , onde $\{\alpha\} = f^{-1}(1)$ e $\{-\alpha\} = f^{-1}(-1)$.

Então, A possui exatamente duas bases como \mathbb{Z} - módulo livre : $\{\alpha\}$ e $\{-\alpha\}$; α e $-\alpha$ são chamados **geradores** de A . Assim, para todo $\beta \in A$, $\beta = m\alpha$ para algum $m \in \mathbb{Z}$.

Seja agora $f : S^n \rightarrow S^n$ contínua, lembremos que $H_n(S^n, \mathbb{Z})$ é isomorfo a \mathbb{Z} ; seja α em $H_n(S^n, \mathbb{Z})$ gerador fixo. Considere a induzida de f em homologia, $(f_n)_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(S^n, \mathbb{Z})$ então, $(f_n)_*(\alpha) = m\alpha$, para algum $m \in \mathbb{Z}$.

O número inteiro m é denominado **grau** de f . Note que m independe do gerador escolhido pois $(f_n)_*(-\alpha) = -(f_n)_*(\alpha) = -m\alpha = m(-\alpha)$.

Definição 1.24. (O índice de um ponto fixo isolado em \mathbb{R}^n) Suponhamos $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e x^* um ponto fixo isolado de f . Tome uma esfera $S_{x^*}^{n-1}$ centrada em x^* , pequena o suficiente, de tal forma que o disco de centro x^* e bordo $S_{x^*}^{n-1}$ não contenha nenhum outro ponto fixo de f , dessa forma em $S_{x^*}^{n-1}$ o vetor $x - f(x)$ é não nulo. Logo podemos definir a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \xi : S_{x^*}^{n-1} &\longrightarrow S^{n-1} \\ x &\longmapsto \xi(x) = \frac{x-f(x)}{|x-f(x)|} \end{aligned}$$

Definimos $\text{ind}(f, x^*) := \text{grau de } \xi$.

Seja $f : X \rightarrow X$ uma auto - aplicação e \mathbb{F} uma classe de pontos fixos de f . Segue do teorema 1.21 a existência de um aberto U em X tal que $U \cap \text{Fix}(f) = \mathbb{F}$, e então temos $\text{ind}(f, U)$. Se \tilde{U} é uma outra vizinhança de \mathbb{F} em X tal que $\tilde{U} \cap \text{Fix}(f) = \mathbb{F}$, então f não tem pontos fixos em ambos $U \setminus U \cap \tilde{U}$ e $\tilde{U} \setminus U \cap \tilde{U}$. Pelo Teorema 1.22 iii),

$$\text{ind}(f, U) = \text{ind}(f, U \cap \tilde{U}) = \text{ind}(f, \tilde{U}).$$

Isto mostra que o $\text{ind}(f, U)$ não depende da escolha da vizinhança U satisfazendo $U \cap \text{Fix}(f) = \mathbb{F}$. Assim, a seguinte definição surge.

Definição 1.25. *Suponha \mathbb{F} uma classe de pontos fixos de uma auto - aplicação f , definida em X e U uma vizinhança qualquer de \mathbb{F} em X , satisfazendo $U \cap \text{Fix}(f) = \mathbb{F}$. O índice $\text{ind}(f, U)$ é denominado **índice da classe de pontos fixos** \mathbb{F} , e denotado por $\text{ind}(\mathbb{F})$.*

Definição 1.26. *Seja f uma auto - aplicação definida em X . Uma classe de pontos fixos de f é dita ser **essencial** se seu índice é não nulo, caso contrário dizemos que a classe de pontos fixos é **não - essencial**. O número de classes de pontos fixos essenciais é denominado **número de Nielsen** de f , e denotado por $N(f)$.*

Teorema 1.27. *A soma dos índices das classes de pontos fixos essenciais, de uma auto - aplicação f definida em X é igual a $L(f)$.*

Demonstração: [15], página 46. ■

Definição 1.28. *(Correspondência entre classes de pontos fixos induzida por homotopia)*

Suponha $H = \{h_t\}_{t \in I}$ uma homotopia entre auto - aplicações h_0 e h_1 definidas em X , \tilde{X} o espaço de recobrimento universal de X e \tilde{h}_0 um levantamento de h_0 . Então existe um único levantamento $\tilde{H} = \{\tilde{h}_t\}_{t \in I}$ de H , tal que \tilde{h}_t é um levantamento de h_t , para todo $t \in I$. Assim, a homotopia H e o levantamento \tilde{h}_0 de h_0 determinam um único levantamento \tilde{h}_1 de h_1 . A correspondência entre \tilde{h}_0 e \tilde{h}_1 é denominada correspondência induzida pela homotopia H , e denotada por

$$\tilde{h}_0 H \tilde{h}_1. \tag{1.1}$$

Seja $H : X \times I \rightarrow X$ uma homotopia. A *inversa* $H^{-1} : X \times I \rightarrow X$ da homotopia H é definida por

$$H^{-1}(y, t) = H(y, 1 - t), y \in X \text{ e } 0 \leq t \leq 1.$$

Investigaremos mais precisamente a correspondência 1.1:

Devido a existência da aplicação H^{-1} , podemos dizer que a correspondência 1.1 tem uma inversa

$$\tilde{h}_1 H^{-1} \tilde{h}_0 \tag{1.2}$$

Portanto, podemos dizer que 1.1 é uma correspondência um a um.

Considere γ uma transformação de recobrimento, desde que $\tilde{H} = \{\tilde{h}_t\}_{t \in I} : \tilde{h}_0 \simeq \tilde{h}_1$, então $\gamma \circ \tilde{H} \circ \gamma^{-1} : \gamma \circ \tilde{h}_0 \circ \gamma^{-1} \simeq \gamma \circ \tilde{h}_1 \circ \gamma^{-1}$, assim a homotopia H e o levantamento \tilde{h}_0 determinam uma correspondência da classe de levantamento $[\tilde{h}_0]$ para a classe $[\tilde{h}_1]$:

$$[\tilde{h}_0] H [\tilde{h}_1]. \tag{1.3}$$

Assim como 1.1 a correspondência 1.3 é um a um.

Como a nossa definição de classes de pontos fixos foi baseada nas classes de levantamentos, então se $\mathbb{F}_i = p(\text{Fix}(\tilde{h}_i))$, $i = 0, 1$, a correspondência 1.3 faz surgir uma correspondência um a um entre as classes de pontos fixos, tal correspondência é denotada por :

$$\mathbb{F}_0 H \mathbb{F}_1. \tag{1.4}$$

Teorema 1.29. (*Invariância por homotopia do índice de uma classe de pontos fixos*) *Suponha $H : f_0 \simeq f_1 : X \rightarrow X$ uma homotopia, e \mathbb{F}_i uma classe de pontos fixos de f_i , $i = 0, 1$. Se*

$$\mathbb{F}_0 H \mathbb{F}_1$$

então,

$$\text{ind}(\mathbb{F}_0) = \text{ind}(\mathbb{F}_1)$$

Demonstração: [15], página 47. ■

Teorema 1.30. (*Invariância por Homotopia do Número de Nielsen*) Seja

$$H : f_0 \simeq f_1 : X \rightarrow X$$

uma homotopia, a qual induz a correspondência

$$\mathbb{F}_0 H \mathbb{F}_1$$

entre as classes de pontos fixos de f_0 e f_1 . Então a correspondência é um a um entre as classes de pontos fixos essenciais de f_0 e as classes de pontos fixos essenciais de f_1 , portanto

$$N(f_0) = N(f_1);$$

quando \mathbb{F}_0 é não essencial, a correspondente \mathbb{F}_1 é também não essencial. ■

Teorema 1.31. (*O Teorema do ponto fixo de Nielsen*) Seja $f : X \rightarrow X$ uma auto - aplicação definida em um poliedro conexo finito X . Então,

$$N(f) \leq MF[f].$$

■

1.5 Comutatividade

Teorema 1.32. (*Comutatividade do índice de uma classe de pontos fixos*) Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ são um par de aplicações entre pliedros conexos e finitos, então a f -imagem de uma classe de pontos fixos de $g \circ f : X \rightarrow X$ é uma classe de pontos fixos não vazia de $f \circ g : Y \rightarrow Y$. Assim, f estabelece uma correspondência um a um entre as classes de pontos fixos de $g \circ f$ e as de $f \circ g$. Além disso, os índices das classes correspondentes são iguais.

Demonstração: [15], página 50. ■

Teorema 1.33. (*Comutatividade do Número de Nielsen*) Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ são um par de aplicações entre poliedros conexos finitos, então f estabelece uma correspondência um a um entre as classes de pontos fixos de $g \circ f$ e as de $f \circ g$, como consequência temos

$$N(g \circ f) = N(f \circ g).$$

Demonstração: A demonstração segue diretamente da última conclusão do teorema 1.32. ■

1.6 A teoria de pontos fixos no círculo S^1

Considere a seguinte descrição do círculo

$$S^1 = \{z = e^{2\pi si} \mid s \in I\}$$

onde z é uma variável complexa, s é um número real, $i = \sqrt{-1}$ e I é o intervalo $[0, 1]$.

As auto - aplicações definidas em S^1 mais simples são da forma

$$f_n : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n, z \in I, \text{ ou } e^{2\pi si} \mapsto e^{2\pi nsi}, s \in I,$$

com $n \in \mathbb{Z}$. Essas aplicações são denominadas *aplicações de potência inteira*.

As aplicações de potência inteira têm a seguinte dinâmica : Quando s descreve o intervalo I o ponto z , iniciando em $z = 1 \in S^1$, descreve o círculo S^1 no sentido anti - horário e finalmente retorna ao ponto inicial $z = 1$, enquanto o ponto imagem z^n tem em $z = 1$ seu ponto final e inicial, mas descreve S^1 , $|n|$ vezes no sentido anti - horário ou horário de acordo com n ser respectivamente positivo ou negativo.

Proposição 1.34. Quando $n \neq 1$, f_n tem $|1 - n|$ pontos fixos distintos dados por

$$\text{Fix}(f_n) = \{z = e^{2\pi ri/(1-n)} \mid r = 0, 1, \dots, |1 - n| - 1\}$$

e $\text{Fix}(f_1) = S^1$. ■

Considere a seguinte aplicação $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, definida por $p(s) = e^{2\pi si} = \cos(2\pi s) + i\sin(2\pi s)$, $s \in \mathbb{R}$. Obviamente $p(s+k) = p(s)$ para qualquer inteiro k , além disso para cada $z \in S^1$ temos

$$p^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln(z) = \{s+k \mid z = e^{2\pi si} \text{ com } k \text{ inteiro}\}.$$

Proposição 1.35. A aplicação $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, definida por $p(s) = e^{2\pi si}$, $s \in \mathbb{R}$ é uma aplicação de recobrimento.

Demonstração: [19], página 337. ■

Logo \mathbb{R} é um espaço de recobrimento do círculo.

Considere a aplicação $\tilde{f}_{n,k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\tilde{f}_{n,k}(s) = ns + k$, $s \in \mathbb{R}$, o valor $\tilde{f}_{n,k}(0) = k$ é denominado **valor inicial de $\tilde{f}_{n,k}$** . Observamos que $p(\tilde{f}_{n,k}(s)) = e^{2\pi(n+k)si} = e^{2\pi nsi} = f_n(p(s))$, para todo $s \in \mathbb{R}$

$$\therefore p \circ \tilde{f}_{n,k} = f_n \circ p,$$

ou seja, $\tilde{f}_{n,k}$ é um levantamento de f_n , para todo k inteiro. Além disso, se \tilde{f} é um levantamento de f_n , então $\tilde{f} = \tilde{f}_{n,k}$, onde $k = \tilde{f}(0)$. Logo, todo levantamento de f_n é da forma $\tilde{f}_{n,k}$, para $k \in \mathbb{Z}$. Note que $\tilde{f}_{n,k}(s+1) - \tilde{f}_{n,k}(s) = n$, isso nos revela o fato geométrico que $f_n(z)$ descreve S^1 $|n|$ vezes, enquanto o ponto z percorre a S^1 uma vez no sentido horário.

Do que vimos acima, segue o seguinte resultado.

Corolário 1.36. *Se \tilde{f} é um levantamento de $f : S^1 \rightarrow S^1$, então existe um inteiro n tal que para todo $s \in \mathbb{R}$,*

$$\tilde{f}(s+1) - \tilde{f}(s) = n.$$

Além disso, qualquer levantamento de f satisfaz a equação anterior. ■

Definição 1.37. *Quando um levantamento \tilde{f} , de uma auto - aplicação f definida em S^1 satisfaz a equação $\tilde{f}(s+1) - \tilde{f}(s) = n$, então dizemos que a **grau geométrico** de f é n .*

Proposição 1.38. *Se uma auto - aplicação f definida em S^1 de grau geométrico n , tem apenas pontos fixos isolados, então a soma dos índices de todos os pontos fixos de f é $L(f) = 1 - n$.*

Demonstração: [15], página 15. ■

Proposição 1.39. *Duas auto - aplicações definidas em S^1 são homotópicas se, e somente se, elas têm o mesmo grau geométrico.*

Demonstração: [15], página 13. ■

Definição 1.40. *Seja f uma auto - aplicação definida em S^1 e ε um número positivo. Uma auto - aplicação g definida em S^1 é denominada uma ε - **aproximação** de f , quando existe um levantamento \tilde{f} de f e um levantamento \tilde{g} de g tal que*

$$|\tilde{g} - \tilde{f}| < \varepsilon, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Proposição 1.41. *Se g é uma ε - aproximação de f , então g e f têm o mesmo grau geométrico.*

Demonstração: [15], página 15. ■

Teorema 1.42. (Teorema de aproximação) *Para qualquer auto - aplicação f definida em S^1 e qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe uma ε - aproximação g de f , que tem somente pontos fixos isolados.*

Demonstração: [15], página 16. ■

Definição 1.43. *Seja f qualquer auto - aplicação de S^1 . Para $\varepsilon > 0$, considere g uma ε - aproximação de f , com g tendo somente pontos fixos isolados (tal aplicação existe de acordo com o teorema 1.42). Então a soma dos índices dos pontos fixos de g é denominada soma dos índices dos pontos fixos de f .*

Teorema 1.44. (O Teorema de Lefschetz para o círculo) *Se o grau geométrico de $f : S^1 \rightarrow S^1$ é n , então a soma dos índices dos pontos fixos de f é $L(f) = 1 - n$.*

Demonstração: Esse teorema é consequência direta da definição 1.43 e proposição 1.38. ■

Proposição 1.45. *Se uma auto - aplicação f definida em S^1 tem grau geométrico igual a n , então*

$$N(f) = |1 - n|;$$

além disso

$$MF[f] = N(f).$$

Demonstração: [15], página 23. ■

Dizemos que o número de Nielsen de uma auto - aplicação f , definida em um poliedro conexo finito X , é realizável quando a igualdade $MF[f] = N(f)$ acontece. Observe que a proposição 1.45 nos garante que para toda $f : S^1 \rightarrow S^1$ o número de Nielsen é realizável, no capítulo 3 será exibido um contra - exemplo mostrando que isso não vale em geral.

Grupo de Tranças

Nesse capítulo abordaremos a questão de representar um grupo por meio de geradores e de relações, a essa maneira de representarmos um grupo é dado o nome de *apresentação*. Outra questão abordada é a de *extensões de grupos*.

Definiremos o *Grupo de Tranças* de uma superfície compacta. Usando *extensões de grupos* obteremos uma apresentação para o grupo de tranças do disco com dois furos, que será de fundamental importância na construção de uma aplicação com número de Nielsen não realizável.

2.1 Apresentação de grupos

Consideremos um conjunto S , vamos pensar nos elementos de S como sendo símbolos não comutativos. Usando esses símbolos formaremos *palavras*, que nada mais são que expressões da forma $p = x_1^{\varepsilon(1)} x_2^{\varepsilon(2)} \dots x_k^{\varepsilon(k)}$, onde cada $x_i \in S$ com repetições de símbolos sendo permitidos, e $\varepsilon(i) = 1$ ou -1 . É conveniente considerarmos a *palavra vazia*, que é a palavra onde não aparece nenhum símbolo, denotaremos por 1 a palavra vazia. Uma palavra é dita ser *reduzida* se não contém x^1 seguido de x^{-1} ou vice-versa. Por exemplo, $x_1^1 x_1^1 x_1^1$ é uma palavra reduzida, enquanto a palavra $x_1^{-1} x_1^1 x_1^1$ não é reduzida. Toda palavra pode se tornar reduzida, basta que se elimine da palavra pares da forma $x^1 x^{-1}$ ou $x^{-1} x^1$, sempre que eles aparecerem na palavra. Por exemplo, $x_1^{-1} x_2^1 x_2^{-1} x_1^1 x_3^1$ se reduz a x_3^1 .

Denotaremos por G o conjunto de todas as palavras reduzidas formadas com símbolos em S , usando justaposição de palavras reduzidas como operação e reduzindo a palavra resultante, se necessário, temos que G com essa operação é um grupo. O grupo G é denominado *grupo livre gerado por S* , e dizemos que uma palavra formada com os símbolos em S é uma *palavra em S* .

A palavra vazia age como elemento neutro, e o inverso de uma palavra $p = x_1^{\varepsilon(1)} x_2^{\varepsilon(2)} \dots x_k^{\varepsilon(k)}$ é a palavra $p^{-1} = x_k^{-\varepsilon(k)} x_{k-1}^{-\varepsilon(k-1)} \dots x_2^{-\varepsilon(2)} x_1^{-\varepsilon(1)}$.

Os símbolos de S não são tão importantes, no sentido que se \bar{S} é um outro conjunto tal que exista uma bijeção entre ele e S , então os grupos livres resultantes gerados por S e \bar{S} são isomorfos. Quando S é finito com n elementos denominamos o grupo livre gerado por S o *grupo livre em n geradores*.

É conveniente abreviarmos x^1 por x , $x^1 x^1$ por x^2 , $x^{-1} x^{-1}$ por x^{-2} etc. Note que, o grupo livre em um gerador $\{x\}$ consiste dos seguintes elementos, $1, x^1, x^{-1}, x^2, x^{-2}, x^3, x^{-3}, \dots$. Considerando a correspondência $n \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, é fácil ver que o grupo livre em um gerador é isomorfo ao grupo dos inteiros \mathbb{Z} . Note também que o grupo livre em n geradores, para $n > 1$, é um grupo infinito não abeliano.

Algumas vezes é conveniente considerar grupos livres de uma forma diferente, podemos considerar classes de equivalência de palavras sob uma *boa* relação de equivalência. Vamos considerar as seguintes operações em palavras :

- i) adicionar xx^{-1} ou $x^{-1}x$ em uma palavra, onde $x \in S$;
- ii) retirar xx^{-1} ou $x^{-1}x$ em uma palavra, onde $x \in S$.

Dizemos que duas palavras p e \tilde{p} são equivalentes se, e somente se, \tilde{p} pode ser obtida de p por um número finito de operações do tipo i) e ii). Isso claramente define uma relação de equivalência; além disso, qualquer palavra é equivalente a sua forma reduzida. O conjunto de classes de equivalência de palavras formadas com elementos de S , com justaposição como operação, é um grupo isomorfo ao grupo livre gerado por S . Usualmente denotamos a classe de equivalência contendo a palavra p por p mesmo.

Seja R um conjunto de palavras formadas com símbolos em S . Podemos considerar as seguintes operações adicionais sobre palavras em S :

- iii) adicionar r ou r^{-1} em uma palavra, onde $r \in R$;
- iv) retirar r ou r^{-1} em uma palavra, onde $r \in R$.

Agora dizemos que duas palavras p e \tilde{p} são equivalentes se, e somente se, \tilde{p} pode ser obtida de p por um número finito de operações do tipo i), ii), iii) e iv). É fácil ver que isso define

uma relação de equivalência e que o conjunto das classes de equivalência é um grupo, com a justaposição como operação. Este grupo é dito grupo *com apresentação* $(S;R)$, e é denotado por $\langle S;R \rangle$. Como antes denotaremos a classe contendo a palavra p por p mesmo. O conjunto S é chamado *conjunto de geradores* e o conjunto R é chamado *conjunto de relatores*.

Daremos dois exemplos simples, o primeiro é o grupo com apresentação $(S;\emptyset)$ que é justamente o grupo livre gerado por S . Para o segundo exemplo considere $\langle \{x,y\}; \{xyx^{-1}y^{-1}\} \rangle$. Vemos que $xy = yx$, ($xy = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1}xy = yxy^{-1}x^{-1}xy = yxy^{-1}y = yx$, fazendo as operações *ii*) e *iii*). Assim, não é difícil ver que $x^a y^b = y^b x^a$ para quaisquer inteiros a, b , logo qualquer palavra $g = x^{a(1)} y^{b(1)} x^{a(2)} y^{b(2)} \dots x^{a(k)} y^{b(k)}$ pode ser reescrita como $g = x^a y^b$, onde $a = \sum_{i=1}^k a(i)$ e $b = \sum_{i=1}^k b(i)$. Assim, o grupo $\langle \{x,y\}; \{xyx^{-1}y^{-1}\} \rangle$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Se α é uma palavra em S e $\alpha = 1$ em $\langle S;R \rangle$ (aqui a igualdade significa que α e 1 representam a mesma classe), então α não necessariamente pertence a R . Entretanto, α pode ser reduzida a palavra vazia por uma sequência de operações do tipo *i*), *ii*), *iii*) e *iv*).

Algumas vezes é mais conveniente escrever o conjunto de relatores como um conjunto de relações. Mais precisamente, queremos dizer que o conjunto $\{r \mid r \in R\}$ pode ser reescrito como $\{r = 1 \mid r \in R\}$. Além disso, se r é a justaposição de duas palavras uv então podemos substituir $r = 1$ por $u = v^{-1}$. Assim, por exemplo, podemos escrever $\langle \{A,B\}; \{ABA^{-1}B^{-1}\} \rangle$ como $\langle \{A,B\}; \{ABA^{-1}B^{-1} = 1\} \rangle$ ou como $\langle \{A,B\}; \{AB = BA\} \rangle$.

2.2 Apresentação de extensões de grupos

Definição 2.1. *Uma extensão de um grupo G por um grupo A , é um grupo \tilde{G} que tem um subgrupo normal N satisfazendo*

$$A \cong N, \tilde{G}/N \cong G.$$

Dizemos ainda que \tilde{G} é uma extensão de G por A .

Daremos agora dois exemplos de extensões de grupos :

(I) Considere um homomorfismo injetor

$$\iota : A \rightarrow \tilde{G},$$

satisfazendo $Im(\iota) \triangleleft \tilde{G}$. Denotando $N = Im(\iota)$ e $G = \tilde{G}/Im(\iota)$, temos obviamente $\tilde{G}/N \cong G$. Além disso, como ι é uma aplicação injetora, temos $A \cong N$. Logo \tilde{G} é uma extensão de $\tilde{G}/Im(\iota)$ por A .

(II) Considere um homomorfismo sobrejetor

$$v : \tilde{G} \rightarrow G,$$

temos $\tilde{G}/Ker(v) \cong G$. Logo \tilde{G} é uma extensão de G por $Ker(v)$.

Seja \tilde{G} uma extensão de G por A , denotaremos os isomorfismos $A \cong N$, $\tilde{G}/N \cong G$, por α e β respectivamente. Vamos considerar $i : N \rightarrow \tilde{G}$, a inclusão, e definir $\xi : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}/N$, por $\xi(\tilde{g}) = \tilde{g}N$. Denotando por ι e v respectivamente as composições $i \circ \alpha$ e $\beta \circ \xi$, obtemos a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{G} \xrightarrow{v} G \longrightarrow 1.$$

Por outro lado, se

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{G} \xrightarrow{v} G \longrightarrow 1$$

é uma sequência exata curta, segue que \tilde{G} é uma extensão de G por A . De fato, denotando $Im(\iota) = Ker(v)$ por N , temos N subgrupo normal de \tilde{G} e $N \cong A$. Além disso, de acordo com o teorema do isomorfismo, $\tilde{G}/N \cong G$.

Consideremos $\langle X; R \rangle$, $\langle Y; S \rangle$, apresentações para os grupo G e A respectivamente. Nosso objetivo agora é obter uma apresentação para \tilde{G} a partir das apresentações de G e A .

Sejam,

$$\tilde{Y} = \{\tilde{y} = \iota(y) \mid y \in Y\}$$

e

$$\tilde{S} = \{\tilde{s} \mid s \in S\}$$

onde \tilde{S} é um conjunto de palavras em \tilde{Y} obtidas de S substituindo y por \tilde{y} .

Considere,

$$\tilde{X} = \{\tilde{x} \mid x \in X, v(\tilde{x}) = x\}$$

Além disso, para cada $r \in R$, seja \tilde{r} uma palavra em \tilde{X} obtida de r pela substituição de x por

\tilde{x} . Agora v anula cada \tilde{r} , e então para todo $r \in R$, $\tilde{r} \in \text{Ker}(v) = \text{Im}(\iota)$ e como $\text{Im}(\iota)$ é gerada pelo conjunto \tilde{Y} , cada \tilde{r} pode ser escrito como uma palavra, digamos u_r , em \tilde{y} . Colocamos

$$\tilde{R} = \{\tilde{r}u_r^{-1} \mid r \in R\}.$$

Finalmente, como $\text{Im}(\iota) \triangleleft \tilde{G}$, cada conjugado $\tilde{x}^{-1}y\tilde{x}$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, pertence a $\text{Im}(\iota)$, então $\tilde{x}^{-1}y\tilde{x}$ é uma palavra, digamos $w_{x,y}$, em \tilde{y} . Tomando

$$\tilde{T} = \{\tilde{x}^{-1}y\tilde{x}w_{x,y}^{-1} \mid x \in X, y \in Y\},$$

temos o seguinte resultado :

Teorema 2.2. *Suponha que sejam dados uma extensão*

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{G} \xrightarrow{v} G \longrightarrow 1$$

e apresentações $G = \langle X; R \rangle$, $A = \langle Y; S \rangle$. Então o grupo \tilde{G} têm a seguinte apresentação

$$\langle \tilde{X}, \tilde{Y}; \tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{T} \rangle.$$

Demonstração: [14], página 139. ■

2.3 Grupo de Tranças

2.3.1 Definição geométrica de *Trança*

Sejam M uma superfície compacta, possivelmente com bordo, e $M^\circ = M \setminus \partial M$ seu interior. Um subconjunto V do produto cartesiano $M \times [0, 1]$ é chamado uma *trança geométrica* em M , se as seguintes condições são satisfeitas:

- i) V é a união de dois arcos disjuntos s_1, s_2 em $M \times [0, 1]$.
- ii) Cada arco s_i une um ponto $(x_i, 0)$ ao ponto $(x_i, 1)$, com x_1 e x_2 pontos distintos em M fixados (nesse caso dizemos que V é baseada em $\{x_1, x_2\}$).
- iii) Para cada $t \in [0, 1]$, $s_i \cap M \times \{t\}$ é um conjunto unitário.

Definiremos agora uma relação de equivalência sobre tranças geométricas: Dizemos que duas tranças geométricas, baseada em $\{x_1, x_2\}$, estão *relacionadas* se, e somente se uma pode ser continuamente deformada para a outra através de tranças geométricas baseadas em $\{x_1, x_2\}$. Uma classe de equivalência sob essa relação é chamada uma *trança* em M baseada em $\{x_1, x_2\}$. O conjunto das tranças baseadas em $\{x_1, x_2\}$ é um grupo chamado *Grupo de Tranças*, o qual denotaremos por $T_2(M, \{x_1, x_2\})$.

2.3.2 Definição algébrica de *Trança*

Seja $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\} \subset M \times M$ a diagonal de M . Um laço $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ em $M \times M \setminus \Delta$, com ponto base (x_1, x_2) , determina uma trança geométrica a qual é definida como a reunião $\{(x_1(t), t) \mid 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(x_2(t), t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$. Esta correspondência induz a identificação

$$T_2(M, \{x_1, x_2\}) = \pi_1(M \times M \setminus \Delta, (x_1, x_2)).$$

Assim, uma trança em M é uma classe de homotopia de laços em $M \times M \setminus \Delta$. Compomos tranças da esquerda para a direita como fazemos com laços e caminhos.

2.3.3 Apresentação do *Grupo de Tranças* do disco com dois furos

Seja $M^\circ = M \setminus \partial M$ o interior de M , a inclusão $j : M^\circ \longrightarrow M$ induz o isomorfismo

$$(j \times j)_\pi : \pi_1(M^\circ \times M^\circ \setminus \Delta) \longrightarrow \pi_1(M \times M \setminus \Delta)$$

Seja $(x_1, x_2) \in M^\circ \times M^\circ \setminus \Delta$ o ponto base. Quando $M \neq S^2$ ou RP^2 , temos a sequência exata de *Fadell-Neuwirth* [4]

$$1 \longrightarrow \pi_1(M \setminus \{x_2\}, x_1) \xrightarrow{i_1} \pi_1(M \times M \setminus \Delta, (x_1, x_2)) \xrightarrow{p_2} \pi_1(M, x_2) \longrightarrow 1,$$

onde $i_1 : y_1 \rightarrow (y_1, x_2)$ é a inclusão na primeira coordenada e $p_2 : (y_1, y_2) \rightarrow y_2$ é a projeção sobre a segunda coordenada.

Considere o disco com dois furos P . Em P definimos algumas tranças especiais: Sejam ρ_{11} , ρ_{12} e B as tranças representando as i_1 -imagens dos laços $a_1 S_1 a_1^{-1}$, $a_2 S_2 a_2^{-1}$ e b , respectivamente, ilustrados na figura 2.1. Sejam ρ_{21} e ρ_{22} as tranças representando as i_2 -imagens dos laços $b_1 b_2$

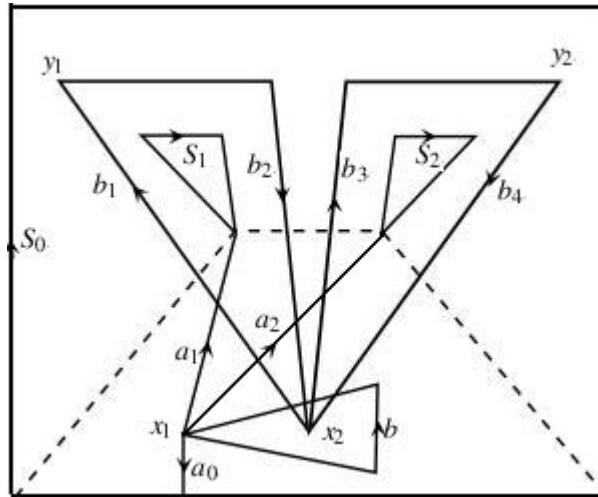


Figura 2.1: O disco com dois furos P

e b_3b_4 , respectivamente, ilustrados na figura 2.1, onde $i_2 : y_2 \rightarrow (x_1, y_2)$ é a inclusão na segunda coordenada.

Proposição 2.3. *O grupo de tranças $\pi_1(P \times P \setminus \Delta, (x_1, x_2))$ tem uma apresentação com geradores $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}, B$, e relações:*

- | | |
|---|---|
| 1) $\rho_{21}^{-1} \rho_{11} \rho_{21} = \rho_{11} B^{-1} \rho_{11} B \rho_{11}^{-1}$ | 4) $\rho_{22}^{-1} \rho_{11} \rho_{22} = \rho_{11}$ |
| 2) $\rho_{21}^{-1} \rho_{12} \rho_{21} = \rho_{11} B^{-1} \rho_{11}^{-1} B \rho_{12} B^{-1} \rho_{11} B \rho_{11}^{-1}$ | 5) $\rho_{22}^{-1} \rho_{12} \rho_{22} = \rho_{12} B^{-1} \rho_{12} B \rho_{12}^{-1}$ |
| 3) $\rho_{21}^{-1} B \rho_{21} = \rho_{11} B \rho_{11}^{-1}$ | 6) $\rho_{22}^{-1} B \rho_{22} = \rho_{12} B \rho_{12}^{-1}$ |

Demonstração: Pelas figuras a seguir verificaremos a validade das seis relações acima, onde as tranças são as cordas desenhadas de cima para baixo.

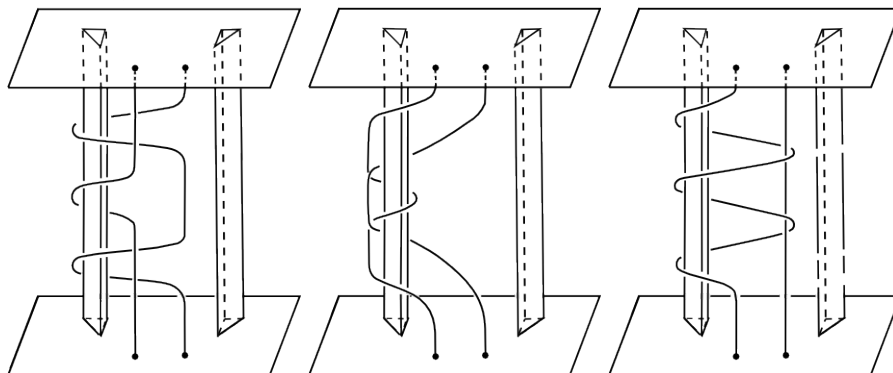


Figura 2.2: relação 1

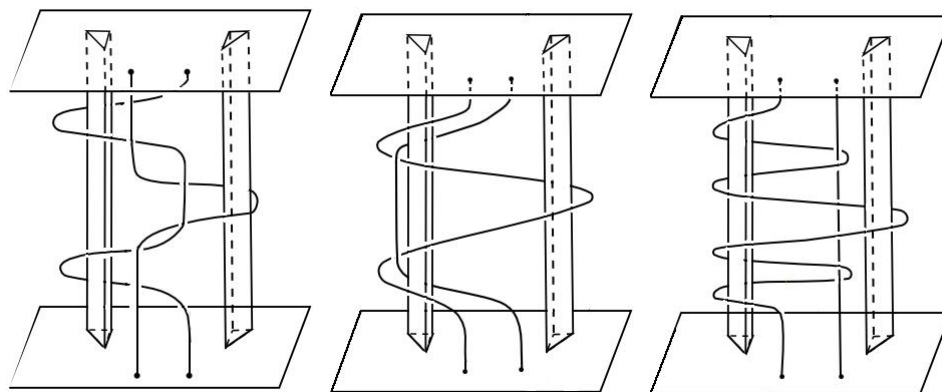


Figura 2.3: relação 2

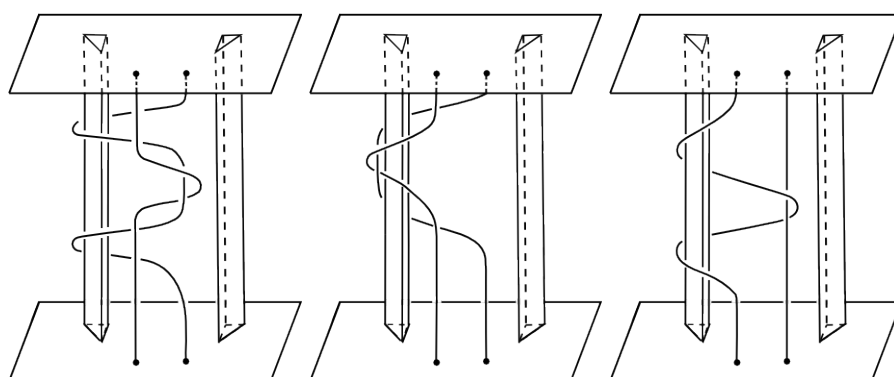


Figura 2.4: relação 3

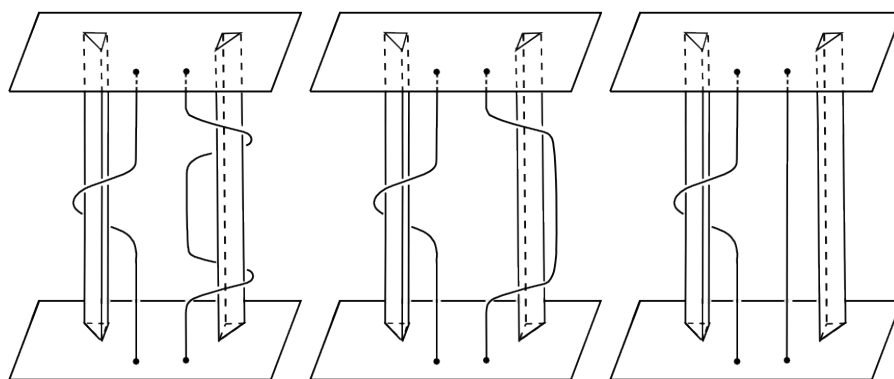


Figura 2.5: relação 4

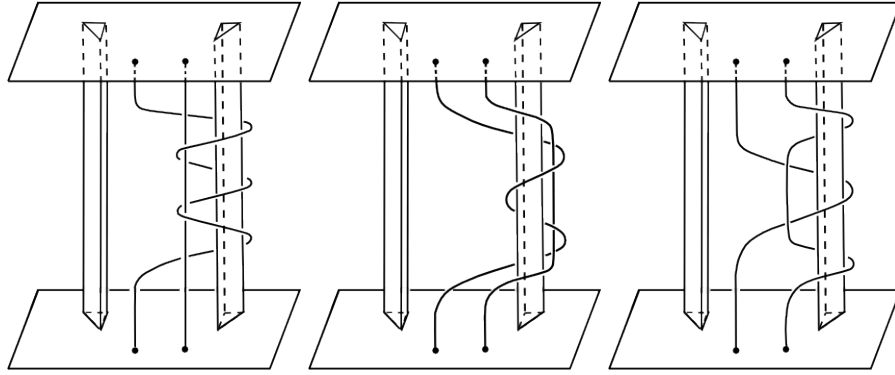


Figura 2.6: relação 5

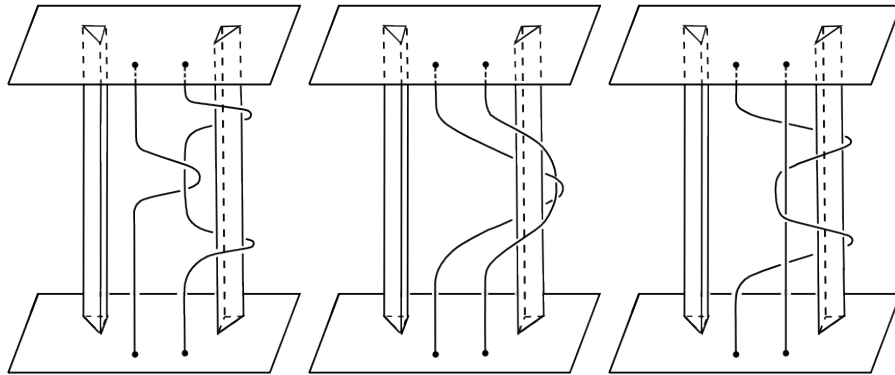


Figura 2.7: relação 6

Observamos que as i_1 pré-imagens de ρ_{11}, ρ_{12} e B são geradores livres de $\pi_1(P \setminus \{x_2\}, x_1)$, enquanto as p_2 pré-imagens de ρ_{21}, ρ_{22} são geradores livres de $\pi_1(P, x_2)$ assim, como grupos livres, $\pi_1(P \setminus \{x_2\}, x_1)$ e $\pi_1(P, x_2)$ têm as apresentações $\langle \{[a_1 S_1 a_1^{-1}], [a_2 S_2 a_2^{-1}], [b]\}; \emptyset \rangle$ e $\langle \{[b_1 b_2], [b_3 b_4]\}; \emptyset \rangle$ respectivamente.

Considere,

$$1 \longrightarrow \pi_1(P \setminus \{x_2\}, x_1) \xrightarrow{i_1} \pi_1(P \times P \setminus \Delta, (x_1, x_2)) \xrightarrow{p_2} \pi_1(P, x_2) \longrightarrow 1$$

a sequência exata de *Fadell-Neuwirth*. Assim, $\pi_1(P \times P \setminus \Delta, (x_1, x_2))$ é uma extensão de $\pi_1(P, x_2)$ por $\pi_1(P \setminus \{x_2\}, x_1)$.

Para concluir a demonstração da proposição aplicamos o teorema 2.2 à extensão

$$1 \longrightarrow \pi_1(P \setminus \{x_2\}, x_1) \xrightarrow{i_1} \pi_1(P \times P \setminus \Delta, (x_1, x_2)) \xrightarrow{p_2} \pi_1(P, x_2) \longrightarrow 1,$$

com $\tilde{S} = \emptyset$, $\tilde{R} = \emptyset$, $\tilde{Y} = \{\rho_{21}, \rho_{22}\}$, e $\tilde{X} = \{\rho_{11}, \rho_{12}, B\}$. Além disso, como mostramos que valem as relações (1), (2), ..., (6), podemos escrever \tilde{T} como o conjunto das relações (1), (2), ..., (6), assim temos $\tilde{G} = \langle \tilde{X}, \tilde{Y}; \tilde{T} \rangle$. Logo os geradores $\rho_{21}, \rho_{22}, \rho_{11}, \rho_{12}, B$ e as relações (1), ..., (6) constituem uma apresentação para $\pi_1(P \times P \setminus \Delta, (x_1, x_2))$. ■

O contra - exemplo de Jiang

Para uma auto - aplicação f , definida em um poliedro conexo finito X , o número de Nielsen $N(f)$ é realizável quando $N(f) = MF[f]$.

Dizemos que um ponto $x \in X$ é um *ponto de corte local*, se existir $U \subset X$ vizinhança de x , tal que $U \setminus \{x\}$ não é conexo. Em [12], Boju Jiang demonstrou que o número de Nielsen é realizável se X for um poliedro conexo e compacto, sem pontos de corte local, e se X não for uma superfície com característica de *Euler* negativa.

Nesse capítulo apresentaremos um contra - exemplo mostrando que o número de Nielsen não é realizável, em geral, para auto - aplicações definidas em superfícies.

3.1 Um Lema

Lema 3.1. *Sejam M uma superfície compacta e $x_o \in M^\circ = M \setminus \partial M$. Seja $f, g : M \rightarrow M$ duas aplicações homotópicas, que não têm pontos fixos em $\partial M \cup \{x_o\}$. Então existe uma aplicação h homotópica a f , relativamente a $\partial M \cup \{x_o\}$, com $\text{Fix}(h) = \text{Fix}(g)$.*

Demonstração: Seja $H : M \times I \rightarrow M$ a homotopia entre f e g . Temos que a aplicação $H|_{\partial M \times I}$ é homotópica a uma aplicação $H' : \partial M \times I \rightarrow M$, tal que $H'(x, t) \neq x$ para todo $(x, t) \in \partial M \times I$. De fato, se H satisfaz $H(x, t) \neq x$, para todo $(x, t) \in \partial M \times I$, então tomamos $H' = H|_{\partial M \times I}$.

Se $H(x, t) = x$, para algum $(x, t) \in \partial M \times I$, então tomamos um colar $C = \partial M \times J$ sobre ∂M , com J sendo um intervalo da forma $[0, \varepsilon]$, para $\varepsilon \in (0, 1]$ fixado. Logo, se $x \in C$ então x é um par da forma $x = (x_{\partial M}, t_x)$, com $x_{\partial M} \in \partial M$ e $t_x \in J = [0, \varepsilon]$. Dessa forma, se $x \in C \cap \partial M$, então $x = (x, 0)$.

Definimos agora uma aplicação $\gamma : M \times I \rightarrow M$ da seguinte maneira :

Seja $(x, t) \in M \times I$, se $t \in [0, \frac{1}{2}]$ definimos,

$$\gamma(x, t) = \begin{cases} x, & \text{se } x \notin C \\ (x_{\partial M}, (\varepsilon - t_x)2t + t_x), & \text{se } x = (x_{\partial M}, t_x). \end{cases}$$

Caso $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ definimos,

$$\gamma(x, t) = \begin{cases} x, & \text{se } x \notin C \\ (x_{\partial M}, (t_x - \varepsilon)2t + 2\varepsilon - t_x), & \text{se } x = (x_{\partial M}, t_x). \end{cases}$$

Considere $H' : \partial M \times I \rightarrow M$ definida por,

$$H'(x, t) = \gamma(H(x, t), t) \in C, \text{ para todo } (x, t) \in \partial M \times I.$$

A aplicação H' satisfaz as seguintes condições :

- (I) $H'(x, t) \neq x$, para todo $(x, t) \in \partial M \times I$.
- (II) H' é homotópica a $H|_{\partial M \times I}$.

De fato : (I) Suponhamos o contrário, isto é, $H'(x_1, t_1) = x_1$, para algum $(x_1, t_1) \in \partial M \times I$.

Se $H(x_1, t_1) = x_1 \in \partial M \subset C$, então podemos escrever $x_1 = (x_1, 0) \in C$. Caso $t_1 \in [0, \frac{1}{2}]$, então $(x_1, 0) = H'(x_1, t_1) = \gamma(x_1, t_1) = (x_1, (\varepsilon - 0)2t_1 + 0) = (x_1, 2\varepsilon t_1) \in C$. Assim, $2\varepsilon t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0$, logo $f(x_1) = H(x_1, 0) = x_1 \in \partial M$, portanto $Fix(f) \cap \partial M \neq \emptyset$, o que é uma contradição. No caso $t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$, procedendo de modo análogo vemos que $(x_1, 0) = H'(x_1, t_1) = (x_1, (0 - \varepsilon)2t_1 + 2\varepsilon - 0) = (x_1, 2\varepsilon - 2\varepsilon t_1) \in C$, logo $2\varepsilon - 2\varepsilon t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$. Assim, temos $x_1 = (x_1, 0) = H(x_1, 1) = g(x_1)$, com isso concluímos que $Fix(g) \cap \partial M \neq \emptyset$, o que é uma contradição.

Por outro lado, se $H(x_1, t_1) \neq x_1$ temos dois casos a considerar :

- (1) $H(x_1, t_1) \notin C$: Nesse caso, temos $H(x_1, t_1) = \gamma(H(x_1, t_1), t_1) = H'(x_1, t_1) = x_1 \in \partial M \subset C$, logo $H(x_1, t_1) \in C$, o que é uma contradição.
- (2) $H(x_1, t_1) = (y, t_y) \in C$: Segundo a definição de H' , temos $(x_1, 0) = H'(x_1, t_1) = (y, (\varepsilon - t_y)2t_1 + t_y)$, se $t_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ ou $(x_1, 0) = (y, (t_y - \varepsilon)2t_1 + 2\varepsilon - t_y)$, se $t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Isso implica $x_1 = y$, portanto $t_y = 0$. Assim, temos $H(x_1, t_1) = (y, t_y) = (x_1, 0) = x_1$, o que gera uma contradição.

(II) Seja $\Lambda : (\partial M \times I) \times I \rightarrow M$ uma aplicação definida por $\Lambda(x, t, s) = \gamma(H(x, t), st)$. Claramente Λ é contínua, além disso $\Lambda(x, t, 0) = H(x, t)$ e $\Lambda(x, t, 1) = H'(x, t)$, para todo $(x, t) \in \partial M \times I$. Logo, a aplicação Λ é uma homotopia entre $H|_{\partial M \times I}$ e H' .

Por outro lado, como $x_o \in M^\circ$ não é um *ponto de corte local*, $H|_{\{x_o\} \times I}$ pode se tornar homotópica a alguma aplicação $H' : \{x_o\} \times I \rightarrow M$ com $H'(x_o, t) \neq x_o$, para todo $t \in I$. De fato, considere o caminho $\beta : I \rightarrow M$ definido por $\beta(t) = H(x_o, t)$, $t \in I$, β é um caminho em M ligando $f(x_o)$ a $g(x_o)$. Caso $x_o \notin \text{Im}(\beta)$ então, para todo $t \in I$, temos $H(x_o, t) \neq x_o$, assim tomamos $H' = H|_{\{x_o\} \times I}$. Caso $x_o \in \text{Im}(\beta)$, precisamos construir a aplicação H' : Como x_o está no interior de M , existe $r_1 > 0$ tal que a bola aberta de centro x_o e raio r_1 , $B(x_o, r_1)$, está contida em M . Seja $y_o \in B(x_o, r_2) \setminus \text{Im}(\beta)$, onde $r_2 = \frac{1}{2} \text{mínimo}\{r_1, \text{distância}(x_o, \partial M)\}$. Tomando $r = \frac{1}{2} \{\text{distância}(y_o, \text{Im}(\beta)), \text{distância}(y_o, \partial B(x_o, \frac{r_2}{2}))\}$, segue que $B(y_o, r)$ está contida em $\bar{B}(x_o, \frac{r_2}{2})$ que por sua vez está contido no interior de M .

Definimos agora uma aplicação $\gamma : M \rightarrow M$, por $\gamma(x) = x$, se $x \in M \setminus \bar{B}(x_o, \frac{r_2}{2})$. Se $x \in \bar{B}(x_o, \frac{r_2}{2})$ definimos γ da seguinte maneira :

Seja $y \in \partial \bar{B}(x_o, \frac{r_2}{2})$, considere o segmento $[y_o, y] = \{(1-t)y_o + ty \mid t \in I\}$, existe único $\tilde{y} \in [y_o, y] \cap \partial B(y_o, r)$. Definimos $\gamma(x) = y$, para $x \in [\tilde{y}, y] = \{(1-t)\tilde{y} + ty \mid t \in I\}$. Se $x \in [y_o, \tilde{y}] = \{(1-t)y_o + t\tilde{y} \mid t \in I\}$, então existe $t_x \in I$ tal que $x = (1-t_x)y_o + t_x\tilde{y}$, definimos $\gamma(x) = (1-t_x)y_o + t_x y$.

Consideramos então $H' = \gamma \circ H|_{\{x_o\} \times I} : \{x_o\} \times I \rightarrow M$. Claramente γ é homotópica a identidade, assim temos que H' e $H|_{\{x_o\} \times I}$ são homotópicas, além disso pela construção de γ temos que $H'(x_o, t) \neq x_o$, para todo $t \in I$.

Pela propriedade de extensão de homotopia ([5], página 14) do par triangularizável $(M \times I, M \times \partial I \cup \partial M \times I \cup \{x_o\} \times I)$, existe uma aplicação $H' : M \times M \rightarrow M$ que é uma homotopia entre f e g , com $H'(x, t) \neq x$ em $\partial M \times I \cup \{x_o\} \times I$. Portanto, existe uma vizinhança W de $\partial M \cup \{x_o\}$ em M com $H'(x, t) \neq x$ em $W \times I$.

Como M é uma superfície (e portanto é um espaço de Hausdorff) e além disso é compacto, então M é um espaço topológico normal.

Temos $\partial M \cup \{x_o\} \subset W$, logo $\partial M \cup \{x_o\} \cap W^c = \emptyset$. Como $\partial M \cup \{x_o\}$ e W^c são fechados disjuntos em M , espaço topológico normal, segue do Lema de Urysohn a existência de uma função real $\lambda : M \rightarrow I$, que assume valor 0 em $\partial M \cup \{x_o\}$ e assume valor 1 nos pontos de W^c .

Defina a homotopia $H'' : M \times I \rightarrow M$ por : $H''(x, t) = H'(x, \lambda(x)t)$.

Obviamente H'' é contínua, com $H''(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in M$, além disso $H''(x, t) = f(x)$, $\forall x \in \partial M \cup \{x_0\}$ e $\forall t \in I$. Assim, $h : M \rightarrow M$ definida por $h(x) = H''(x, 1)$ é a aplicação que procurávamos. ■

3.2 O Contra exemplo

Considere o disco com dois furos P . Seja P_0 o retrato por deformação de P , que é a união pelo ponto x_2 dos laços b_1b_2 e b_3b_4 , veja figura 2.1. Considere $r : P \rightarrow P_0$ a retração com $r(x_1) = x_2$ e $i : P_0 \rightarrow P$ a inclusão. Seja $f_0 : P_0 \rightarrow P_0$ uma aplicação tal que $f_0(b_1) = b_2^{-1}$, $f_0(b_2) = b_1^{-1}$, $f_0(b_3) = b_2^{-1}b_1^{-1}b_3$, $f_0(b_4) = b_4b_3b_4$, $Fix(f_0) = \{x_2, y_1, y_2\}$ e $f = i \circ f_0 \circ r : P \rightarrow P$.

Teorema 3.2. *A aplicação $f : P \rightarrow P$ construída anteriormente é tal que $N(f) = 0$, entretanto $MF[f] \neq 0$.*

Demonstração: Inicialmente vamos mostrar que $N(f) = 0$.

Observamos que $Fix(f) = Fix(f_0)$. De fato, se $x \in Fix(f)$ temos $i \circ f_0 \circ r(x) = x$, como $f_0(r(x)) \in P_0$ então $x \in P_0$ e portanto $r(x) = x$, pois $r \circ i = Id_{P_0}$. Assim, temos $x = i(f_0(r(x))) = i(f_0(x))$ o que implica $f_0(x) = x$, ou seja, $x \in Fix(f_0)$. Logo $Fix(f) \subseteq Fix(f_0)$.

Por outro lado, $Fix(f_0) = \{y_1, y_2, x_2\} \subset P_0$, e como $x_2, y_1, y_2 \in P_0$ então $r(x_2) = x_2$, $r(y_1) = y_1$ e $r(y_2) = y_2$. Logo $f(x_2) = i(f_0(x_2)) = i(x_2) = x_2$, $f(y_1) = i(f_0(y_1)) = i(y_1) = y_1$ e $f(y_2) = i(f_0(y_2)) = i(y_2) = y_2$, portanto $Fix(f_0) \subseteq Fix(f)$.

Temos que P_0 é um retrato por deformação de P , ou seja, a retração $r : P \rightarrow P_0$ satisfaz $r \circ i = Id : P_0 \rightarrow P_0$ e $i \circ r \simeq Id : P \rightarrow P$. Segue diretamente da definição a comutatividade do número de Lefchetz, assim temos $L(f) = L(i \circ f_0 \circ r) = L(f_0 \circ r \circ i) = L(f_0)$.

Consideremos a figura **oito**, que nada mais é do que a justaposição dos laços α e β com ponto base x_2 , onde α é o laço que dá uma volta, no sentido horário, na S_1 e β é o laço que dá uma volta, no sentido horário, na S_2 . Denotaremos a figura oito por $\alpha * \beta$.

O disco com dois furos, P , e o seu retrato por deformação, P_0 , têm mesmo tipo de homotopia que $\alpha * \beta$, assim temos $H_1(P) \cong H_1(P_0) \cong H_1(\alpha * \beta) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

O homomorfismo induzido, no nível zero, $(f_0)_{0*} = Id_{H_0(\alpha * \beta)}$ é tal que $traço((f_0)_{0*}) = 1$. Por outro lado, considerando o homomorfismo $(f_0)_{1*} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, temos que $(f_0)_{1*}(1, 0) =$

$-1(1,0) = -1(1,0) + 0(0,1)$ e $(f_\circ)_{1*}(0,1) = -1(1,0) + 2(0,1)$. Logo, a representação matricial de $(f_\circ)_{1*}$ na base $\{(1,0), (0,1)\}$ é da forma,

$$[(f_\circ)_{1*}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que $\text{traço}((f_\circ)_{1*}) = 2 - 1 = 1$. Como $(f_\circ)_{n*} = 0$ para todo $n \neq 0$ e 1, segue que $\text{ind}(f_\circ, P_\circ) = L(f_\circ) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \text{traço}(f_\circ)_{q*} = 1 + (-1)1 = 0$. Logo,

$$\text{ind}(f, P) = L(f) = L(f_\circ) = 0.$$

Os pontos y_1, y_2 e x_2 têm índices 1, -1 e 0, respectivamente. De fato, vamos considerar as restrições $f|_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ e $f|_\beta : S^1 \rightarrow S^1$. Quando o ponto z percorre o domínio S^1 o ponto $f(z)$ percorre S^1 no sentido contrário, portanto $\text{ind}(y_1) = 1$. Por outro lado, $f(z)$ é mais “lento” que z até eles se encontrarem em y_2 , a partir desse encontro $f(z)$ ultrapassa z , logo $\text{ind}(y_2) = -1$.

Vamos considerar agora $U_1 \ni y_1, U_2 \ni y_2$ e $U_3 \ni x_2$, abertos em P tais que f_\circ não tem pontos fixos em $P \setminus U_1 \cup U_2 \cup U_3$, assim $0 = L(f) = \text{ind}(f, P) = \text{ind}(f, U_1) + \text{ind}(f, U_2) + \text{ind}(f, U_3) = \text{ind}(y_1) + \text{ind}(y_2) + \text{ind}(x_2) = 1 - 1 + \text{ind}(x_2)$, portanto $\text{ind}(x_2) = 0$. Mas y_1 e y_2 estão na mesma classe de pontos fixos, pois o caminho $c = b_1^{-1}b_3$ é homotópico ao caminho $f(c) = f_\circ(c) = b_2b_2^{-1}b_1^{-1}b_3$, coincidindo nos pontos y_1 e y_2 . Assim, f não tem classe de pontos fixos essencial, portanto $N(f) = 0$.

Agora, vamos mostrar que a aplicação f não pode ser homotópica a uma aplicação livre de pontos fixos.

Para facilitar o cálculo das tranças, deformamos levemente a aplicação $f_\circ : P_\circ \rightarrow P_\circ$ em uma vizinhança de x_2 , e daqui em diante assumiremos que a aplicação $f = i \circ f_\circ \circ r$ envia toda a região do trapézio, veja figura 2.1, no ponto x_2 .

Suponha, por contradição, f e g homotópicas com $g : P \rightarrow P$ livre de pontos fixos. De acordo com o lema 3.1, existe uma aplicação $h : P \rightarrow P$ com f e h homotópicas, relativamente a $\partial P \cup \{x_1\}$, e $\text{Fix}(h) = \text{Fix}(g) = \emptyset$, ou seja, h é livre de pontos fixos. Defina $\bar{f}, \bar{h} : P \rightarrow P \times P$ por $\bar{f} : x \rightarrow (x, f(x))$ e $\bar{h} : x \rightarrow (x, h(x))$.

Seja $\omega_i = a_i S_i a_i^{-1}$ o laço com ponto base x_1 (ilustrado na figura 2.1), $i = 0, 1, 2$. Observamos que se $x \in a_i$ então, $f(x) = x_2$ pois $a_i \subset T$ (onde T corresponde a região do trapézio), como

$x_2 \notin a_i, i = 0, 1, 2$ segue que $f(x) \neq x, \forall x \in a_i, i = 0, 1, 2$. Além disso, $f(x) \neq x$ em $S_i, i = 0, 1, 2$ pois f é livre de pontos fixos em $\partial P \cup \{x_1\} \supset S_i, i = 0, 1, 2$. Portanto $\sigma_i = \bar{f} \circ \omega_i$ é um laço em $P \times P \setminus \Delta, i = 0, 1, 2$, ou seja, σ_i representa uma trança, $i = 0, 1, 2$. Sendo h livre de pontos fixos, ou seja, $h(x) \neq x, \forall x \in P$ temos que $\tau_i = \bar{h} \circ \omega_i$ também representa uma trança, $i = 0, 1, 2$.

As aplicações f e h coincidem em $\partial a_i \subset \partial P \cup \{x_1\}$ e como h é livre de pontos fixos segue que $\bar{f} \circ a_i$ e $\bar{h} \circ a_i$ são caminhos em $P \times P \setminus \Delta, i = 0, 1, 2$, além disso, esses dois caminhos têm os mesmos pontos final e inicial, portanto $(\bar{h} \circ a_i)(\bar{f} \circ a_i)^{-1}$ é um laço em $P \times P \setminus \Delta, i = 0, 1, 2$. Vamos denotar por u_i a trança em $\pi_1(P \times P \setminus \Delta)$, representada pelo laço $(\bar{h} \circ a_i)(\bar{f} \circ a_i)^{-1}, i = 0, 1, 2$.

Como o laço $\omega_1 \omega_2 \omega_0^{-1}$ é contrátil em P , segue que existe uma família contínua $\{c_t\}_{t \in I}$ de laços em P , com $c_0 = \omega_1 \omega_2 \omega_0^{-1}$ e $c_1 =$ laço constante com ponto base x_1 . Sendo h livre de pontos fixos, a família de laços $\{\bar{h} \circ c_t\}_{t \in I}$ está contida em $P \times P \setminus \Delta$, com $\bar{h} \circ c_0 = (\bar{h} \circ \omega_1)(\bar{h} \circ \omega_2)(\bar{h} \circ \omega_0)^{-1}$ representando $\tau_1 \tau_2 \tau_0^{-1}$, e $\bar{h} \circ c_1$ representando a trança trivial. A aplicação \bar{h} é contínua e c_0 é homotópico a c_1 , logo $\bar{h} \circ c_0$ é homotópico a $\bar{h} \circ c_1$, isto é, $\tau_1 \tau_2 \tau_0^{-1}$ é homotópico a trança trivial, assim $\tau_1 \tau_2$ é homotópico a τ_0 . Além disso, $\tau_i = u_i \sigma_i u_i^{-1}$, para $i = 0, 1, 2$, de fato:

$$\begin{aligned} u_i \sigma_i u_i^{-1} &= \\ &= (\bar{h} \circ a_i)(\bar{f} \circ a_i)^{-1}(\bar{f} \circ a_i S_i a_i^{-1})(\bar{f} \circ a_i)(\bar{h} \circ a_i)^{-1} \\ &= (\bar{h} \circ a_i)(\bar{f} \circ a_i)^{-1}(\bar{f} \circ a_i)(\bar{f} \circ S_i)(\bar{f} \circ a_i)^{-1}(\bar{f} \circ a_i)(\bar{h} \circ a_i)^{-1} \\ &= (\bar{h} \circ a_i)(\bar{f} \circ S_i)(\bar{h} \circ a_i)^{-1}. \end{aligned}$$

$f = h$ em ∂P , portanto $\bar{h} \circ S_i = \bar{f} \circ S_i$, e assim para $i = 0, 1, 2$ temos :

$$u_i \sigma_i u_i^{-1} = (\bar{h} \circ a_i)(\bar{h} \circ S_i)(\bar{h} \circ a_i)^{-1} = \bar{h} \circ a_i S_i a_i^{-1} = \tau_i$$

Logo, em $\pi_1(P \times P \setminus \Delta, (x_1, x_2))$ temos,

$$\underbrace{u_1 \sigma_1 u_1^{-1}}_{\tau_1} \underbrace{u_2 \sigma_2 u_2^{-1}}_{\tau_2} = \underbrace{u_0 \sigma_0 u_0^{-1}}_{\tau_0}. \quad (3.1)$$

As tranças $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ podem ser computadas de forma explicita:

$$\sigma_0 = (\rho_{11} \rho_{12} B^{-1})(\rho_{21}^{-2} \rho_{22}^2), \quad (3.2)$$

$$\sigma_1 = \rho_{11}(\rho_{21}^{-1}B), \quad (3.3)$$

$$\sigma_2 = \rho_{12}(B^{-1}\rho_{21}^{-1}\rho_{22}B^{-1}\rho_{22}). \quad (3.4)$$

Com as figuras 3.1, 3.2 e 3.3 verificamos a validade das relações 3.2, 3.3 e 3.4, respectivamente:

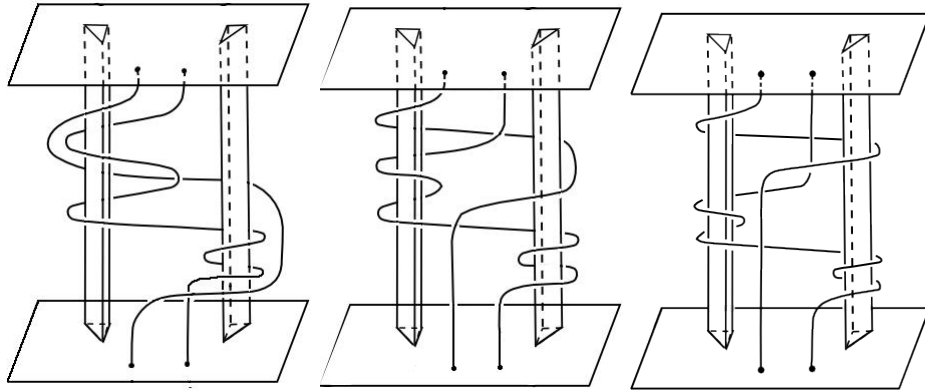


Figura 3.1: Relação 3.2

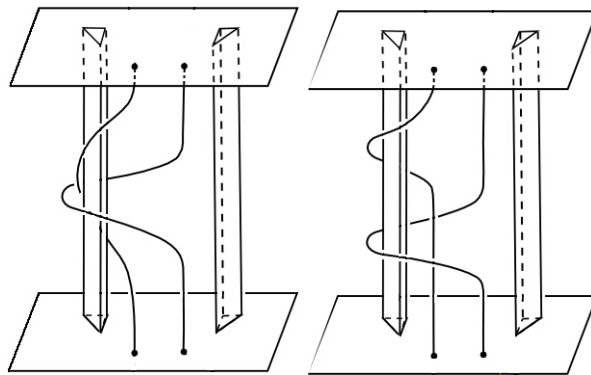


Figura 3.2: Relação 3.3

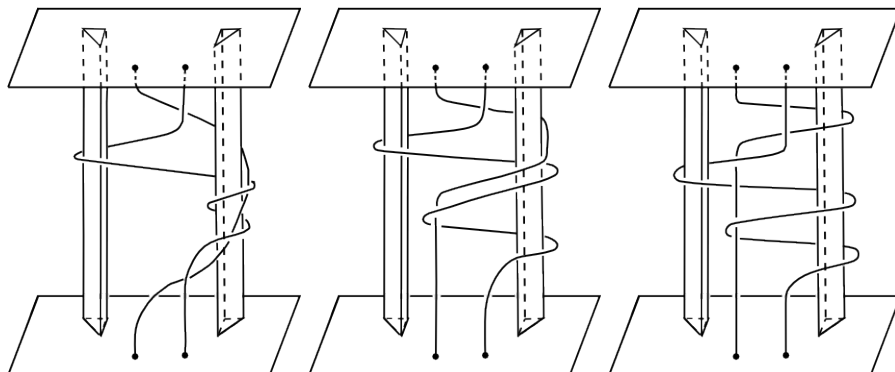


Figura 3.3: Relação 3.4

Seja $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}$ gerado por dois elementos α e β , com uma única relação $\alpha^2 = 1$ ($\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z} = \langle \{\alpha, \beta\}; \{\alpha^2 = 1\} \rangle$ onde α é gerador de \mathbb{Z}_2 e β é gerador de \mathbb{Z}). Defina o homomorfismo $\theta : \pi_1(P \times P \setminus \Delta) \rightarrow G$ por $\theta(\rho_{11}) = \alpha$, $\theta(\rho_{21}) = \beta^{-1}$, $\theta(B) = \beta^{-1}\alpha$, $\theta(\rho_{12}) = \theta(\rho_{22}) = 1$. Todas as seis relações na Proposição 2.3 se mantêm sob a ação de θ , de fato, por exemplo

$$\begin{aligned} \theta(\rho_{21}^{-1}\rho_{11}\rho_{21}) &= \\ &= \theta(\rho_{21}^{-1})\theta(\rho_{11})\theta(\rho_{21}) \\ &= \beta\alpha\beta^{-1} \\ &= \alpha\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}\alpha\alpha^{-1} \\ &= \theta(\rho_{11})\theta(B^{-1})\theta(\rho_{11})\theta(B)\theta(\rho_{11}^{-1}) \\ &= \theta(\rho_{11}B^{-1}\rho_{11}B\rho_{11}^{-1}) \end{aligned}$$

ou seja, a primeira relação se mantém sob a ação de θ . De modo análogo se verifica que sob a ação de θ as demais relações se mantêm. Logo θ está bem definido.

Temos que,

$$\begin{aligned} \theta(\sigma_0) &= \theta(\rho_{11})\theta(\rho_{12})\theta(B^{-1})\theta(\rho_{21}^{-2})\theta(\rho_{22}^2) = \beta^3, \\ \theta(\sigma_1) &= \theta(\rho_{11})\theta(\rho_{21}^{-1})\theta(B) = 1, \\ \theta(\sigma_2) &= \theta(\rho_{12})\theta(B^{-1})\theta(\rho_{21}^{-1})\theta(\rho_{22})\theta(B^{-1})\theta(\rho_{22}) = \alpha\beta^2\alpha\beta \end{aligned}$$

Aplicando θ a equação 3.1 temos,

$$\theta(u_1)\theta(\sigma_1)\theta(u_1)^{-1}\theta(u_2)\theta(\sigma_2)\theta(u_2)^{-1} = \theta(u_0)\theta(\sigma_0)\theta(u_0)^{-1}.$$

Como $\theta(\sigma_1) = 1$ segue que,

$$(\theta(u_0)^{-1}\theta(u_1))\theta(\sigma_2)(\theta(u_1)^{-1}\theta(u_0)) = \theta(\sigma_0).$$

Portanto, a equação 3.1 nos mostra que $\theta(\sigma_2)$ e $\theta(\sigma_0)$ são conjugados em G .

Por outro lado, $\theta(\sigma_0) = \beta^3$ e $\theta(\sigma_2) = \alpha\beta^2\alpha\beta$ apresentam diferentes formas cíclicas reduzidas (note que $\theta(\sigma_0)$ e $\theta(\sigma_2)$ já estão nas suas formas cíclicas reduzidas), portanto não podem ser conjugados ([17], página 9). ■

O contra - exemplo anterior pode ser generalizado para discos com mais furos. Como o disco com dois furos tem bordo, uma questão naturalmente surge : *Auto - aplicações definidas em variedades sem bordo têm número de Nielsen realizável ?* No próximo capítulo essa questão será respondida.

Superfícies com característica de Euler negativa

O objetivo do presente capítulo é generalizar o resultado obtido no capítulo 2 e demonstrar o seguinte Teorema:

Teorema 4.1. *Seja M uma superfície compacta e conexa com característica de Euler $\chi(M) < 0$. Então existe uma aplicação $f : M \rightarrow M$ tal que $N(f) = 0 < MF[f]$.*

A prova do Teorema 4.1 será feita por construção. Inicialmente uma auto - aplicação definida no disco com dois furos será construída, a essa auto - aplicação daremos o nome de *aplicação modelo* e então transplantaremos para outras superfícies. Novamente tranças serão usadas como ferramenta importante.

4.1 A aplicação modelo

O grupo de tranças de M é o grupo fundamental $\pi_1(M \times M \setminus \Delta)$ com ponto base $(x_1, x_2) \in M^\circ \times M^\circ \setminus \Delta$. Seja $p_k : (y_1, y_2) \mapsto y_k$, $k = 1, 2$, projeções definidas em $\pi_1(M \times M \setminus \Delta)$, e sejam $i_1 : y_1 \mapsto (y_1, x_2)$ e $i_2 : y_2 \mapsto (x_1, y_2)$ as inclusões dos primeiro e segundo fatores, respectivamente.

Seja P o disco com dois furos. Considere os laços S_1, S_2 , e S_0 , com pontos base e orientações mostradas na figura 4.1 . Em P definiremos algumas tranças especiais:

Sejam ρ_{11}, ρ_{12} e B representando, respectivamente as i_1 -imagens dos laços $a_1 S_1 a_1^{-1}, a_2 S_2 a_2^{-1}$ e b . Sejam ρ_{21} e ρ_{22} representando as i_2 -dos laços ρ_1 e ρ_2 .

Agora introduziremos dois homomorfismos $\theta, \theta' : \pi_1(P \times P \setminus \Delta) \rightarrow F_2$, onde F_2 é um grupo livre com base $\{\alpha, \beta\}$. Esses homomorfismos são definidos por:

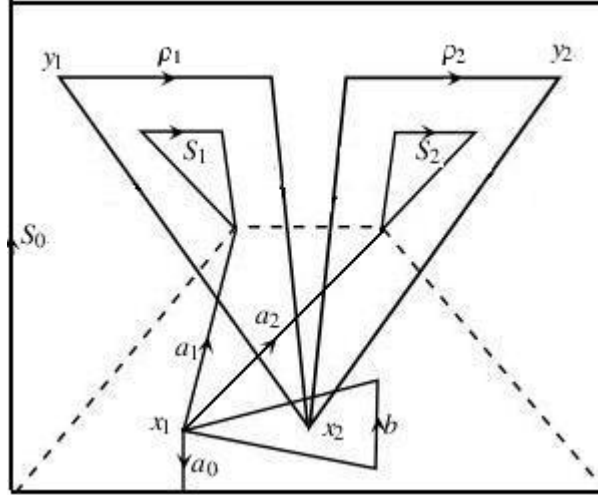


Figura 4.1: O disco com dois furos

$$\begin{array}{ll}
 \theta : \rho_{11} \mapsto \alpha^{-1}\beta & \theta' : \rho_{11} \mapsto \alpha^{-1} \\
 \rho_{12} \mapsto 1 & \rho_{12} \mapsto \alpha\beta^{-1} \\
 \rho_{21} \mapsto \alpha & \rho_{21} \mapsto \beta^{-1}\alpha \\
 \rho_{22} \mapsto 1 & \rho_{22} \mapsto \alpha^{-1} \\
 B \mapsto \beta & B \mapsto \beta^{-1}.
 \end{array}$$

Sobre a ação dos homomorfismos θ e θ' as identidades na proposição 2.3 se preservam e, portanto, os homomorfismos estão bem definidos. Observamos que $\theta' = \theta \circ \tau$, onde $\tau : \rho_{11} \mapsto \rho_{21}^{-1}$, $\rho_{12} \mapsto \rho_{21}\rho_{22}B^{-1}$, $\rho_{21} \mapsto \rho_{11}^{-1}$, $\rho_{22} \mapsto \rho_{11}\rho_{12}B^{-1}$, $B \mapsto B^{-1}$, é uma involução definida em $\pi_1(P \times P \setminus \Delta)$, a qual é induzida por uma involução definida em P enviando S_0 , S_1 , e x_1 em S_2 , S_1^{-1} , e x_2 , respectivamente.

Em P , seja P_\circ a união pelo ponto x_2 dos laços ρ_1 e ρ_2 . Seja $\phi : (S^1, 1) \rightarrow (P, x_2)$ uma aplicação igual a $\rho_1^2\rho_2\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}$ quando considerada como um laço. Claramente $\phi(S^1) \subset P_\circ$.

Proposição 4.2. Para toda aplicação $\psi : P \rightarrow S^1$ temos $MF[\phi \circ \psi] > 0$.

Inicialmente, examinaremos a classificação homotópica das aplicações $P \rightarrow S^1$. Seja $d : P \rightarrow P_\circ$ a retração que envia a região do trapézio, ver figura 4.1, sobre o ponto x_2 . Para cada par de inteiros $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, defina $\eta_{m,n} : (P_\circ, x_2) \rightarrow (S^1, 1)$, uma aplicação tal que $\eta_{m,n} \circ \rho_1 = i^m$ e $\eta_{m,n} \circ \rho_2 = i^n$, onde i denota a aplicação identidade $S^1 \rightarrow S^1$ considerada como um laço em S^1 .

Lema 4.3. *Para toda aplicação $\psi : P \rightarrow S^1$ existe um único par $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tal que ψ é homotópica a $\eta_{m,n} \circ d : P \rightarrow S^1$.*

Demonstração: O grupo $\pi_1(P_\circ)$ é não trivial, mas $\pi_n(P_\circ)$ é trivial, para todo $n \geq 2$. Logo as classes de homotopia de aplicações de P_\circ em S^1 são determinadas pelos homomorfismos de $\pi_1(P_\circ)$ em $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

O grupo $\pi_1(P_\circ)$ é um grupo livre em dois geradores, o qual denotaremos por $\langle \alpha, \beta \rangle$, onde α e β são os geradores.

Seja $\psi : P \rightarrow S^1$, temos $\psi \simeq \psi \circ d$ e $\psi \circ d = \psi|_{P_\circ} \circ d$, portanto $\psi \simeq \psi|_{P_\circ} \circ d$. Como $\pi_1(P_\circ) = \langle \alpha, \beta \rangle$ e $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, então podemos considerar $(\psi|_{P_\circ})_\pi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$ e assim existem únicos $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $(\psi|_{P_\circ})_\pi(\alpha) = m$ e $(\psi|_{P_\circ})_\pi(\beta) = n$.

Observamos que $(\psi|_{P_\circ})_\pi = (\eta_{m,n})_\pi$, assim temos $\psi|_{P_\circ} \simeq \eta_{m,n}$. Logo $\psi \simeq \psi|_{P_\circ} \circ d \simeq \eta_{m,n} \circ d$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ únicos. ■

Demonstração:(da proposição) Pelo lema 4.3 temos que ψ é homotópica a $\eta_{m,n} \circ d$ para algum par $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, então $f := \phi \circ \eta_{m,n} \circ d$ é homotópica a $\phi \circ \psi$, portanto $MF[\phi \circ \psi] = MF[f]$. Assim, é suficiente provar que $f := \phi \circ \eta_{m,n} \circ d : P \rightarrow P$ não pode ser homotópico a aplicações livre de pontos fixos.

Suponha que f é homotópica a uma aplicação g livre de pontos fixos, segue do lema 3.1 que existe uma aplicação h homotópica a f , relativamente a $\partial P \cup \{x_1\}$, com h livre de pontos fixos (como a aplicação g).

Vamos denotar $\omega_i = a_i S_i a_i^{-1}$, $i = 0, 1, 2$. Observe que a menos de homotopia podemos considerar $\omega_i = a_i S_i a_i^{-1}$ como sendo um laço que dá uma volta em S_i , $i = 0, 1, 2$.

Definimos $\bar{f} : x \mapsto (x, f(x))$ e $\bar{h} : x \mapsto (x, h(x))$. Vamos mostrar que $\bar{f} \circ \omega_i$ e $\bar{h} \circ \omega_i$ representam tranças em $\pi_1(P \times P \setminus \Delta)$, para $i = 0, 1, 2$:

Seja $x \in a_i \subset$ trapézio, logo $d(x) = x_2$, pois a retração d leva todos os pontos que estão no trapézio em x_2 , portanto $f(x) = \phi(\eta_{m,n}(d(x))) = \phi(\eta_{m,n}(x_2)) = \phi(1) = x_2$, como $x_2 \notin a_i$, $i = 0, 1, 2$, segue que f não tem pontos fixos em a_i , $i = 0, 1, 2$. Por outro lado, $f = h$ em $\partial P = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ o que implica f livre de pontos fixos em S_i , $i = 0, 1, 2$ (pois h é livre de pontos fixos), portanto $\sigma_i = \bar{f} \circ \omega_i$ representa uma trança em $\pi_1(P \times P \setminus \Delta)$, $i = 0, 1, 2$.

Segue, trivialmente, que $\tau_i = \bar{h} \circ \omega_i$ representa uma trança em $\pi_1(P \times P \setminus \Delta)$, $i = 0, 1, 2$, pois h é uma aplicação livre de pontos fixos.

Observamos que $f = h$ em $\partial a_i \subset \partial P \cup \{x_1\}$, portanto $\bar{f} \circ a_i$, $\bar{h} \circ a_i \subset P \times P \setminus \Delta$ têm os mesmos pontos inicial e final, logo $u_i = (\bar{h} \circ a_i)(\bar{f} \circ a_i)^{-1}$ representa um trança em $\pi_1(P \times P \setminus \Delta)$, $i = 0, 1, 2$.

Temos que o laço $\omega_1 \omega_2 \omega_0^{-1}$ é contrátil em P, ou seja, $\omega_1 \omega_2 \omega_0^{-1}$ é homotópico ao laço trivial. Logo, existe uma família de aplicações contínuas $\{c_t\}_{t \in I}$ (na verdade uma família de laços em P), tal que $c_0 = \omega_1 \omega_2 \omega_0^{-1}$ e $c_1 = x_1$ (neste caso x_1 está denotando o laço trivial em P). Sendo h livre de pontos fixos, então $\{\bar{h} \circ c_t\}_{t \in I}$ é uma família de laços em $P \times P \setminus \Delta$, com $\bar{h} \circ c_0$ homotópico a $\bar{h} \circ c_1 =$ laço trivial. Logo, $\bar{h} \circ c_0 = \underbrace{(\bar{h} \circ \omega_1)}_{\tau_1} \underbrace{(\bar{h} \circ \omega_2)}_{\tau_2} \underbrace{(\bar{h} \circ \omega_0^{-1})}_{\tau_0^{-1}}$, ou seja, $\tau_1 \tau_2 = \tau_0$.

Nota: A igualdade dos laços acima significa que eles são homotópicos.

Observação 4.4. : $\tau_i = u_i \sigma_i u_i^{-1}$, $i = 0, 1, 2$.

De fato, para $i = 0, 1, 2$,

$$\begin{aligned}
 u_i \sigma_i u_i^{-1} &= \\
 &= (\bar{h} \circ a_i)(\bar{f} \circ a_i)^{-1}(\bar{f} \circ a_i S_i a_i^{-1})(\bar{f} \circ a_i)(\bar{h} \circ a_i)^{-1} \\
 &= (\bar{h} \circ a_i)(\bar{f} \circ a_i)^{-1}(\bar{f} \circ a_i)(\bar{f} \circ S_i)(\bar{f} \circ a_i)^{-1}(\bar{f} \circ a_i)(\bar{h} \circ a_i)^{-1} \\
 &= (\bar{h} \circ a_i)(\bar{f} \circ S_i)(\bar{h} \circ a_i)^{-1} \\
 &\stackrel{*}{=} (\bar{h} \circ a_i)(\bar{h} \circ S_i)(\bar{h} \circ a_i)^{-1} \\
 &= \bar{h} \circ a_i S_i a_i^{-1} \\
 &= \tau_i.
 \end{aligned}$$

A igualdade * ocorre pois $h(x) = f(x)$, para $x \in S_i \subset \partial P$. Assim temos,

$$\underbrace{u_1 \sigma_1 u_1^{-1}}_{\tau_1} \underbrace{u_2 \sigma_2 u_2^{-1}}_{\tau_2} = \underbrace{u_0 \sigma_0 u_0^{-1}}_{\tau_0}. \quad (4.1)$$

Para concluir a demonstração da proposição vamos mostrar que a equação 4.1 não tem solução para $u_0, u_1, u_2 \in \pi_1(P \times P \setminus \Delta)$.

O Lema abaixo fornecerá ferramentas para os cálculos das tranças $\sigma_i = \bar{f} \circ a_i S_i a_i^{-1}$, $i = 0, 1, 2$.

Lema 4.5. *Seja $f_o : (P_o, x_2) \rightarrow (P_o, x_2)$ uma aplicação tal que*

$$f_\circ \circ \rho_1 = \phi_1(\rho_1, \rho_2),$$

$$f_\circ \circ \rho_2 = \phi_2(\rho_1, \rho_2),$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são palavras formadas com os símbolos ρ_1 e ρ_2 . Seja $d : P \rightarrow P_\circ$ como antes, $i : P_\circ \rightarrow P$ a inclusão e $f = i \circ f_\circ \circ d : P \rightarrow P$. Construímos tranças $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ a partir da aplicação f como antes. Então,

$$(a) \quad \sigma_0 = (\rho_{11}\rho_{12}B^{-1})\phi_1(\rho_{21}, \rho_{22})\phi_2(\rho_{21}, \rho_{22}),$$

$$(b) \quad \sigma_1 = \rho_{11}\phi_1(B^{-1}\rho_{21}, \rho_{22}),$$

$$(c) \quad \sigma_2 = \rho_{12}\phi_2(B^{-1}\rho_{21}B, B^{-1}\rho_{22}).$$

Demonstração: Inicialmente construiremos as tranças $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$, recordamos que a retração leva todos os pontos na região do trapézio, ver figura 4.1, no ponto x_2 , logo $d(a_1S_1a_1^{-1}) = d(S_1) = S_1$ pois $S \subset P_\circ$ e $d|_{P_\circ} = Id_{P_\circ}$. Assim, $d(a_1S_1a_1^{-1}) = \rho_1$ (nesse caso a igualdade significa que $d(a_1S_1a_1^{-1})$ e ρ_1 são homotópicos). Analogamente temos $d(a_2S_2a_2^{-1}) = \rho_2$. Por fim, sabendo que $a_1S_1a_1^{-1}a_2S_2a_2^{-1}(a_0S_0a_0^{-1})^{-1}$ é contrátil segue que $a_1S_1a_1^{-1}a_2S_2a_2^{-1} = a_0S_0a_0^{-1}$, portanto $d(a_1S_1a_1^{-1}a_2S_2a_2^{-1}) = d(a_0S_0a_0^{-1})$.

Assim temos,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (a_1S_1a_1^{-1}, f(a_1S_1a_1^{-1})) \\ &= (a_1S_1a_1^{-1}, i \circ f_\circ \circ d(a_1S_1a_1^{-1})) \\ &= (a_1S_1a_1^{-1}, i \circ f_\circ(\rho_1)) \\ &= (a_1S_1a_1^{-1}, \phi_1(\rho_1, \rho_2)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= (a_2S_2a_2^{-1}, f(a_2S_2a_2^{-1})) \\ &= (a_2S_2a_2^{-1}, i \circ f_\circ \circ d(a_2S_2a_2^{-1})) \\ &= (a_2S_2a_2^{-1}, i \circ f_\circ(\rho_2)) \\ &= (a_2S_2a_2^{-1}, \phi_2(\rho_1, \rho_2)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (a_0S_0a_0^{-1}, f(a_0S_0a_0^{-1})) \\ &= (a_1S_1a_1^{-1}a_2S_2a_2^{-1}, f(a_1S_1a_1^{-1}a_2S_2a_2^{-1})) \\ &= (a_1S_1a_1^{-1}a_2S_2a_2^{-1}, i \circ f_\circ \circ d(a_1S_1a_1^{-1}a_2S_2a_2^{-1})) \\ &= (a_1S_1a_1^{-1}a_2S_2a_2^{-1}, i \circ f_\circ(\rho_1\rho_2)) \\ &= (a_1S_1a_1^{-1}a_2S_2a_2^{-1}, \phi_1(\rho_1, \rho_2)\phi_2(\rho_1, \rho_2)). \end{aligned}$$

Com as figuras a seguir verificamos a validade das relações (a), (b) e (c):

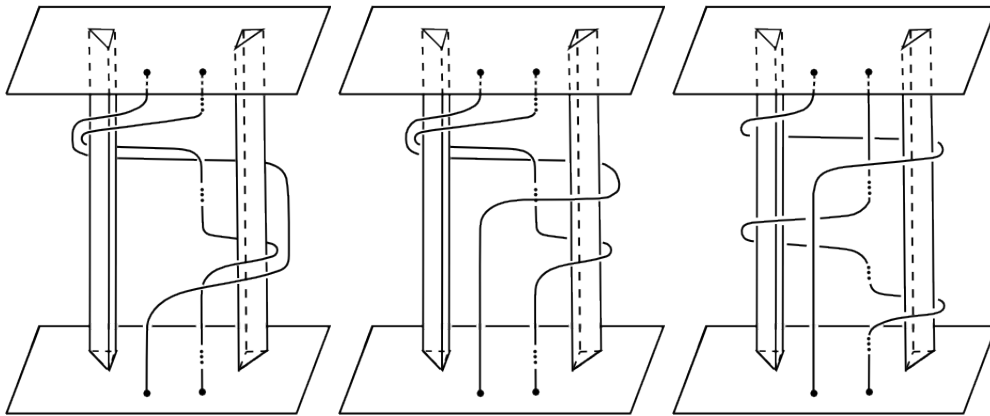


Figura 4.2: Relação (a)

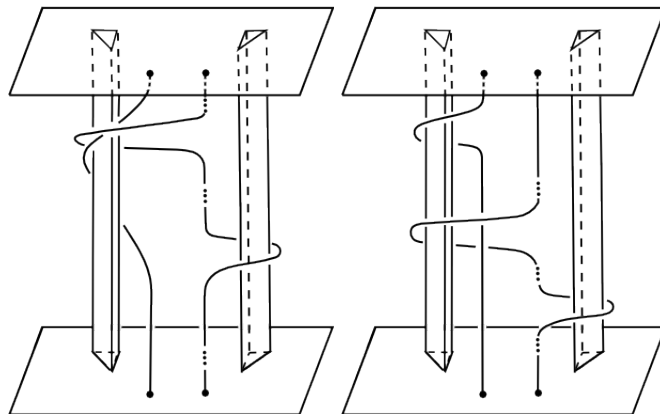


Figura 4.3: Relação (b)

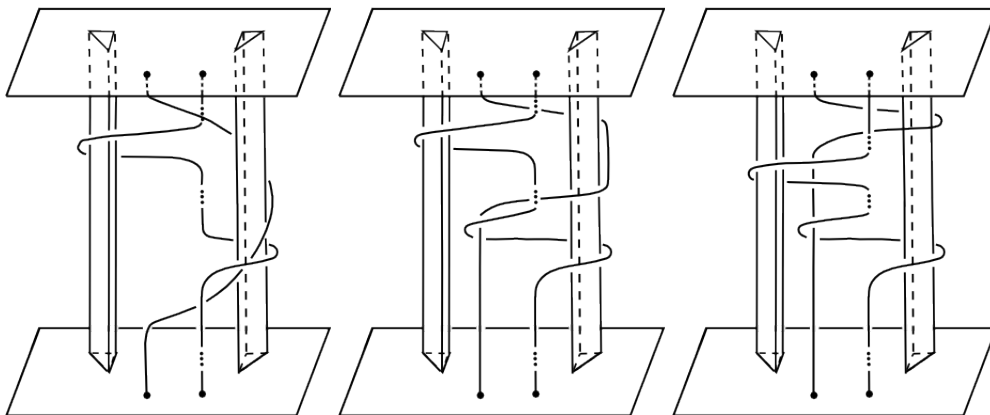


Figura 4.4: Relação (c)

Agora vamos mostrar que a equação 4.1 não tem solução em $\pi_1(P \times P \setminus \Delta)$:

Vamos fazer uso do Lema 4.5, nesse caso considerando $i \circ f_\circ = \phi \circ \eta_{m,n}$ com ,

$$\phi_1(\rho_1, \rho_2) = (\rho_1^2 \rho_2 \rho_1^{-1} \rho_2^{-1})^m$$

$$\phi_2(\rho_1, \rho_2) = (\rho_1^2 \rho_2 \rho_1^{-1} \rho_2^{-1})^n,$$

pois, a menos de homotopia podemos considerar ρ_1 e ρ_2 como sendo laços que dão uma volta completa na S^1 , assim temos :

$$i \circ f_\circ \circ \rho_1 = \phi \circ \eta_{m,n} \circ \rho_1 = \phi(\rho_1^m) = (\rho_1^2 \rho_2 \rho_1^{-1} \rho_2^{-1})^m$$

$$i \circ f_\circ \circ \rho_2 = \phi \circ \eta_{m,n} \circ \rho_2 = \phi(\rho_2^n) = (\rho_1^2 \rho_2 \rho_1^{-1} \rho_2^{-1})^n$$

Do Lema 4.5 segue ,

$$\sigma_0 = (\rho_{11} \rho_{12} B^{-1}) (\rho_{21}^2 \rho_{22} \rho_{21}^{-1} \rho_{22}^{-1})^{m+n}$$

$$\sigma_1 = \rho_{11} ((B^{-1} \rho_{21})^2 \rho_{22} \rho_{21}^{-1} B \rho_{22}^{-1})^m$$

$$\sigma_2 = \rho_{12} B^{-1} (\rho_{21}^2 \rho_{22} B^{-1} \rho_{21}^{-1} B \rho_{22}^{-1})^n B.$$

Agora, aplicando o homomorfismo $\theta : \pi_1(P \times P \setminus \Delta) \rightarrow F_2$ obtemos,

$$\theta(\sigma_0) = \alpha^{m+n-1}$$

$$\theta(\sigma_1) = (\beta^{-1} \alpha)^{m-1}$$

$$\theta(\sigma_2) = \beta^{-1} (\alpha^2 \beta^{-1} \alpha^{-1} \beta)^n \beta$$

Consideremos o seguinte homomorfismo $l : F_2 \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, definido na base por $l(\alpha) = (1, 0)$ e $l(\beta) = (0, 1)$ (ao definir o homomorfismo l estamos *abelianizando* o grupo livre F_2), em seguida estendemos por linearidade. Agora aplicando $l \circ \theta$ em 4.1 obtemos,

$$\begin{aligned} l \circ \theta(u_1 \sigma_1 u_1^{-1} u_2 \sigma_2 u_2^{-1}) &= \\ &= l \circ \theta(u_0 \sigma_0 u_0^{-1}) \\ &= l \circ \theta(u_1) l \circ \theta(\sigma_1) (l \circ \theta(u_1))^{-1} l \circ \theta(u_2) l \circ \theta(\sigma_2) (l \circ \theta(u_2))^{-1} \\ &= l \circ \theta(u_0) l \circ \theta(\sigma_0) (l \circ \theta(u_0))^{-1} \end{aligned}$$

assim temos $l \circ \theta(\sigma_1)l \circ \theta(\sigma_2) = l \circ \theta(\sigma_0)$, o que implica

$$l(\beta)^{-m+1}l(\alpha)^{m-1}l(\beta)^{-1}l(\alpha)^{2n}l(\beta)^{-n}l(\beta)^nl(\alpha)^{-n}l(\beta) = l(\alpha)^{m+n-1},$$

portanto $l(\beta)^{-m+1} = 1$.

Logo $m - 1 = 0$, ou seja, $m = 1$, segue então que $\theta(\sigma_1) = 1$.

Além disso, temos $\theta(\sigma_2)$ e $\theta(\sigma_0)$ conjugados em F_2 . Mas quando $n \neq 0$, $\theta(\sigma_2)$ e $\theta(\sigma_0)$ apresentam formas cíclicas reduzidas distintas (basta notar que as formas cíclicas reduzidas de $\theta(\sigma_2)$ e $\theta(\sigma_0)$ são α^{m+n-1} e $(\alpha^2\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta)^n$, respectivamente), assim não podem ser conjugados ([17], página 9).

Por outro lado,

$$\theta'(\sigma_0) = (\beta^{-1}\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha)^{n+1}$$

$$\theta'(\sigma_1) = 1$$

$$\theta'(\sigma_2) = (\alpha\beta^{-1})^{n+1}.$$

Aplicando θ' a equação 4.1 obtemos, $\theta'(\sigma_2) = [\theta'(u_2)^{-1}\theta'(u_0)]\theta'(\sigma_0)[\theta'(u_2)^{-1}\theta'(u_0)]^{-1}$, ou seja, $\theta'(\sigma_0)$ e $\theta'(\sigma_2)$ são conjugados. Mas, $\theta'(\sigma_0)$ e $\theta'(\sigma_2)$ apresentam formas cíclicas reduzidas distintas se $n \neq -1$ (note que $\theta'(\sigma_0)$ e $\theta'(\sigma_2)$ estão nas suas formas cíclicas reduzidas) $\Rightarrow \theta'(\sigma_0)$ e $\theta'(\sigma_2)$ não podem ser conjugados se $n \neq -1$.

Logo, a equação 4.1 não tem solução em $\pi_1(P \times P \setminus \Delta)$. Assim, completamos a prova da Proposição. ■

4.2 Transplantação

Agora transplantaremos a nossa aplicação modelo de P para outras superfícies.

Proposição 4.6. *Seja M uma superfície compacta e conexa. Suponha P mergulhado como um subpoliedro de M e a inclusão induzindo um monomorfismo $i_\pi : \pi_1(P) \rightarrow \pi_1(M)$. Seja $\phi : S^1 \rightarrow P$ a aplicação definida no início da seção 4.1. Seja $f : M \rightarrow M$, definida por $f = i \circ \phi \circ \psi$, onde $\psi : M \rightarrow S^1$. Então toda aplicação homotópica a f tem um ponto fixo.*

Demonstração: Seja $\{h_t\}_{t \in I} : f \simeq g : M \rightarrow M$ uma homotopia. Mostraremos que g tem um ponto fixo.

Podemos assumir $\bigcup_{t \in I} h_t(M) \subset M^\circ = M \setminus \partial M$. De fato, juntando um colar a ∂M , se necessário,

substituímos M por $M^c := M \cup_{\partial M} (\partial M \times I)$, e $\{h_t\}_{t \in I}$ por $\{h_t^c\}_{t \in I} := \{i^c \circ h_t \circ r^c\}_{t \in I}$, onde $i^c : M \rightarrow M^c$ é a inclusão, $r^c : M^c \rightarrow M$ é a retração. Logo, $f^c := h_0^c = i^c \circ f \circ r^c = (i^c \circ i) \circ \phi \circ (\psi \circ r^c)$. Considerando $i^c \circ i : P \rightarrow M^c$ como a inclusão de P em M^c , temos que f^c ainda está sob as hipóteses da proposição.

Note que $g^c := h_1^c$ tem ponto fixo se, e somente se, g tem ponto fixo. De fato, se $x \in \text{Fix}(g^c)$ então $x = i^c(h_1(r^c(x))) = i^c(g(r^c(x))) = g(r^c(x))$. Temos que $g(r^c(x)) \in M$ e assim $x \in M$, mas $r^c : M^c \rightarrow M$ é a retração, portanto $r^c|_M = \text{Id}_M$, logo $r^c(x) = x$, disto segue que $x = g(x)$.

Recíprocamente, se $x \in \text{Fix}(g)$ temos $x \in M$ e assim $r^c(x) = x$. Logo, $g^c(x) = i^c(h_1(r^c(x))) = i^c(g(x)) = i^c(x) = x$.

Então, se $\bigcup_{t \in I} h_t(M)$ não estiver contido em M° consideramos M^c . Nesse caso $\bigcup_{t \in I} h_t^c(M^c)$ está sempre contido no interior de M^c .

Sejam \tilde{M} espaço de recobrimento de M e $p : \tilde{M} \rightarrow M$ a aplicação de recobrimento associada, tal que $i_\pi(\pi_1(P)) = p_\pi(\pi_1(\tilde{M}))$ (tomamos um ponto de P como ponto base de ambos P e M). Então, de acordo com o teorema 1.8, a inclusão $i : P \rightarrow M$ pode ser levantado para um mergulho $i' : P \rightarrow \tilde{M}$ que induz um isomorfismo de grupos fundamentais. Portanto $i'|_{P^\circ} : P^\circ \rightarrow \tilde{M}^\circ$ também induz isomorfismo entre grupos fundamentais. Do conhecido teorema de classificação de superfícies, com grupos fundamentais finitamente gerados, temos \tilde{M}° é homeomorfo a P° . Segue que para todo subconjunto compacto $K \subset \tilde{M}^\circ$, existe uma família de mergulhos $\{j_t : P \rightarrow \tilde{M}^\circ\}_{t \in I}$, tal que $j_0 = i'$, $j_1(P) \supset K$ e $i'(P) \subset j_t(P)$, para todo $t \in I$.

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{M} \\ & \nearrow^{i'} & \downarrow p \\ P & \xrightarrow{i} & M \end{array}$$

Tome $f' = i' \circ \phi \circ \psi : M \rightarrow \tilde{M}$ e $\tilde{f} = f' \circ p : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$. Temos, para todo $x \in M$, $p \circ f'(x) = (p \circ i' \circ \phi \circ \psi)(x)$, como i' é um levantamento de i temos $p \circ i' = i$, assim $p \circ f'(x) = (i \circ \phi \circ \psi)(x)$, ou seja, $p \circ f' = i \circ \phi \circ \psi = f$. Além disso, temos $p \circ \tilde{f} = p \circ f' \circ p = (i \circ \phi \circ \psi) \circ p = f \circ p$, isto é, \tilde{f} é um levantamento de f .

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{M} \\
p \downarrow & \nearrow f' & \downarrow p \\
M & \xrightarrow{f} & M \\
\psi \downarrow & & \uparrow i \\
S^1 & \xrightarrow{\phi} & P
\end{array}$$

Pela propriedade de levantamento de homotopia, teorema 1.9, a homotopia $\{h_t\}_{t \in I} : f \simeq g : M \rightarrow M$ pode ser levantada para uma homotopia $\{h'_t\}_{t \in I} : f' \simeq g' : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$, isto é, $p \circ h'_t = h_t$, para todo $t \in I$. Então $\tilde{H} := \{\tilde{h}_t\}_{t \in I}$, com $\tilde{h}_t = h'_t \circ p$, é um levantamento de $H := \{h_t\}_{t \in I}$, pois $p \circ \tilde{h}_t = p \circ h'_t \circ p = h_t \circ p$.

Temos $\bigcup_{t \in I} \tilde{h}_t(\tilde{M}) = \bigcup_{t \in I} h'_t(M)$. De fato, se $\tilde{h}_t(\tilde{x}) \in \bigcup_{t \in I} \tilde{h}_t(\tilde{M})$, então $\tilde{h}_t(\tilde{x}) = h'_t(p(\tilde{x}))$, portanto $\tilde{h}_t(\tilde{x}) \in \bigcup_{t \in I} h'_t(M)$. Por outro lado, seja $h'_t(x) \in \bigcup_{t \in I} h'_t(M)$, como p é sobrejetora existe $\tilde{x} \in \tilde{M}$ tal que $p(\tilde{x}) = x$. Logo temos $h'_t(x) = h'_t(p(\tilde{x})) = (h'_t \circ p)(\tilde{x}) = \tilde{h}_t(\tilde{x}) \in \bigcup_{t \in I} \tilde{h}_t(\tilde{M})$.

Como $H' = \{h'_t\}_{t \in I}$ é contínua e M é compacto, segue que $\bigcup_{t \in I} \tilde{h}_t(\tilde{M}) = \bigcup_{t \in I} h'_t(M) = H'(M \times I)$ é compacto, além disso temos $\bigcup_{t \in I} \tilde{h}_t(\tilde{M}) \subset \tilde{M}^\circ$.

De acordo com os parágrafos anteriores, podemos garantir a existência de uma família contínua de mergulhos $\{j_t : P \rightarrow \tilde{M}^\circ\}_{t \in I}$ tal que, $j_0 = i'$, $j_1(P) \supset \bigcup_{t \in I} \tilde{h}_t(\tilde{M})$, e $i'(P) \subset j_t(P)$, para todo $t \in I$.

Considere a homotopia $\{k_t : P \rightarrow P\}_{t \in I}$ definida por

$$k_t(x) = \begin{cases} j_{2t}^{-1} \circ \tilde{f} \circ j_{2t}(x), & \text{para } x \in P, \quad 0 \leq t \leq 1/2, \\ j_1^{-1} \circ \tilde{h}_{2t-1} \circ j_1(x), & \text{para } x \in P, \quad 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Segue das propriedades de $\{j_t\}_{t \in I}$ que a aplicação acima está bem definida.

Observamos que,

$$k_0 = i'^{-1} \circ \tilde{f} \circ i' = i'^{-1} \circ (i' \circ \phi \circ \psi \circ p) \circ i' = \phi \circ (\psi \circ i) = (\phi \circ \psi) \circ i.$$

Da proposição 4.2 segue que $k_1 : P \rightarrow P$ tem um ponto fixo x . Logo $j_1(x)$ é um ponto fixo de \tilde{g} , pois $x = k_1(x) = j_1^{-1}(\tilde{h}_1 \circ j_1(x)) = j_1^{-1}(\tilde{g} \circ j_1(x))$, portanto $\tilde{g}(j_1(x)) = j_1(x)$, ou seja, $j_1(x) \in \text{Fix}(\tilde{g})$

Como $j_1(x) \in \text{Fix}(\tilde{g})$, segue que

$$\begin{aligned}
g(p \circ j_1(x)) &= \\
&= g \circ p(j_1(x)) \\
&= p \circ \tilde{g}(j_1(x)) \\
&= p(\tilde{g}(j_1(x))) \\
&= p(j_1(x))
\end{aligned}$$

ou seja, $p(j_1(x))$ é um ponto fixo de g . ■

Corolário 4.7. *Seja M uma superfície compacta e conexa. Suponha que o disco com dois furos P possa ser mergulhado como um subpoliedro de M , tal que a inclusão $i : P \rightarrow M$ induz um monomorfismo $i_\pi : \pi_1(P) \rightarrow \pi_1(M)$, e alguma componente do bordo de P seja um retrato de M . Então existe uma aplicação $f : M \rightarrow M$ tal que $N(f) = 0 < MF[f]$.*

Demonstração: Suponha a que a componente S_1 , ver figura 4.1, do bordo de P seja um retrato de M , considere a retração $r : M \rightarrow S_1$. Sejam $h : S_1 \rightarrow S^1$ um homeomorfismo preservando orientação e $\phi : S^1 \rightarrow P$ a aplicação que aparece na seção 4.1. Mostraremos que a aplicação $f := i \circ \phi \circ h \circ r$ tem a propriedade desejada.

Da proposição 4.6 segue $MF[f] > 0$ (considerando $\psi = h \circ r : M \rightarrow P$). Por outro lado, pela comutatividade do número de Nielsen temos $N(f) = N(i \circ \phi \circ h \circ r) = N(h \circ r \circ i \circ \phi)$.

É fácil ver que o grau de $h \circ (r \circ i) \circ \phi : S^1 \rightarrow S^1$ é 1. De fato, temos que $(h \circ r \circ i \circ \phi)_{1*} = (h)_{1*} \circ (r \circ i)_{1*} \circ (\phi)_{1*} : H_1(S^1, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S^1, \mathbb{Z})$, como $H_1(S^1, \mathbb{Z})$ é isomorfo a \mathbb{Z} , considerando que esse isomorfismo faça corresponder o gerador de $H_1(S^1, \mathbb{Z})$ (que é a classe em $H_1(S^1, \mathbb{Z})$ representada pelo laço denotado por α que dá uma volta na S^1 no sentido horário) com o número 1 que é gerador de \mathbb{Z} . Logo, podemos considerar $(h_1)_{1*} \circ (r \circ i)_{1*} \circ (\phi)_{1*} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Os laços ρ_1 e ρ_2 são homotópicos ao laço α , portanto em $H_1(S^1, \mathbb{Z})$ esses três laços representam a mesma classe. Pela definição da aplicação ϕ temos que $\phi(\alpha) = \rho_1^2 \rho_2 \rho_1^{-1} \rho_2^{-1}$, logo $(\phi_1)_{1*}(1) = 2 + 1 - 1 - 1 = 1$.

Por outro lado, a aplicação $r \circ i : S_1 \rightarrow S_1$ é igual a aplicação identidade $Id : S_1 \rightarrow S_1$, pois r é uma retração de M em S_1 . Como α e S_1 são homotópicos (nesse caso estamos considerando S_1 como um laço), segue que em $H_1(S^1, \mathbb{Z})$ as classes representadas por α e S_1 são iguais, assim $(r \circ i)(S_1) = S_1$ implica $(r \circ i)_{1*}(1) = 1$. Note ainda que h_{1*} é igual a aplicação identidade $Id : H_1(S^1, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S^1, \mathbb{Z})$, portanto $h_{1*}(1) = 1$.

Logo $(h)_{1*} \circ (r \circ i)_{1*} \circ (\phi)_{1*}(1) = 1$, portanto o traço dessa aplicação é igual a 1, além disso podemos concluir que o grau de $h \circ (r \circ i) \circ \phi$ é igual a 1. Por outro lado, $(h)_{0*} \circ (r \circ i)_{0*} \circ (\phi)_{0*}$ é igual a aplicação identidade, portanto seu traço é igual a 1, além disso para todo $n \geq 2$ sabemos que $(h)_{n*} \circ (r \circ i)_{n*} \circ (\phi)_{n*}$ é a função constante nula, logo o seu traço é zero.

Das considerações acima segue que o número de Lefchetz $L(h \circ (r \circ i) \circ \phi) = 1 - 1 = 0$. Mas do teorema 1.44 temos que $0 = L(h \circ (r \circ i) \circ \phi) = 1 - n$, onde n é a grau geométrico de $h \circ (r \circ i) \circ \phi$, isso nos diz que $n = 1$. Da proposição 1.45 temos que $N(h \circ (r \circ i) \circ \phi) = MF[h \circ (r \circ i) \circ \phi] = |1 - n| = 0$. ■

Lema 4.8. *Seja M uma superfície compacta e conexa com característica de Euler $\chi(M) < 0$. Então o disco com dois furos P pode ser mergulhado como um subpoliedro de M tal que a inclusão induz um monomorfismo entre $\pi_1(P)$ e $\pi_1(M)$, e a componente S_1 do bordo de P é um retrato de M .* ■

Demonstração: (demonstração do Teorema 4.1)

A demonstração do teorema 4.1 segue imediatamente do lema 4.8 e do corolário 4.7. ■

Se X é um poliedro conexo e compacto, sem pontos de corte local, e com característica de Euler negativa não negativa, então $N(f) = MF[f]$ para toda aplicação $f : X \rightarrow X$. Esse fato e o teorema 4.1 são suficientes para demonstrar o seguinte resultado,

Teorema 4.9. *Seja X uma superfície compacta e conexa. Então $N(f) = MF[f]$, para toda aplicação $f : X \rightarrow X$ se, e somente se, a superfície X tem característica de Euler $\chi(X) \geq 0$.*

Demonstração: Suponha que $N(f) = MF[f]$ para toda $f : X \rightarrow X$. Se $\chi(X)$ fosse negativa seguiria, do teorema 4.1, a existência de uma aplicação $f : X \rightarrow X$ tal que $N(f) = 0 < MF[f]$, o que contradiz a nossa suposição inicial. Logo X não pode ser uma superfície com característica de Euler negativa.

Recíprocamente, suponhamos que $\chi(X) \geq 0$. Além disso, sabemos que X não tem pontos de corte local, segue então que $N(f) = MF[f]$. ■

Nota: O método de transformar os problemas de pontos fixos em equações no grupo de tranças, que usamos com sucesso no capítulo 3 e na seção 4.2, funciona bem para superfícies, mas a forma da equação resultante difere de superfície para superfície, e as dificuldades algébricas

envolvidas variam consideravelmente. Por exemplo quando a superfície é o toro pinçado T , a equação no grupo de tranças $\pi_1(T \times T \setminus \Delta)$ toma a forma

$$[\gamma_1 v_1, \gamma_2 v_2] = u_0 \sigma_0 u_0^{-1} \quad (4.2)$$

onde $[\cdot, \cdot]$ denota comutador, $\sigma_0, \gamma_1, \gamma_2$ são coeficientes determinados pela aplicação dada, enquanto u_0, v_1, v_2 não são conhecidos. A aplicação dada pode ser deformada para uma aplicação livre de pontos fixos se, e somente se, a equação 4.2 tem solução u_0, v_1, v_2 no subgrupo normal $\ker(p_{1\pi}) \cap \ker(p_{2\pi})$, onde $p_{1\pi}, p_{2\pi} : \pi_1(T \times T \setminus \Delta) \rightarrow \pi_1(T)$ são os homomorfismos induzidos pelas projeções p_1 e p_2 , respectivamente. O par desconhecido v_1, v_2 no comutador torna a equação mais difícil de ser trabalhada.

Equações com tranças

Nos capítulos 3 e 4 a *Teoria de Tranças* exerceu papel chave na construção de contra-exemplos, mostrando que o número de Nielsen não é realizável, em geral, no caso de auto-aplicações definidas em variedades.

Nesse capítulo, relacionamos equações com “tranças” e os pontos fixos de uma auto-aplicação definida em uma superfície compacta. Nosso objetivo ao abordar esse resultado é evidenciar a importância da *Teoria de Tranças* como ferramenta na resolução de problemas da Teoria de Pontos Fixos como, por exemplo, determinar $MF[f]$, onde M é uma superfície compacta e conexa, e $f : M \rightarrow M$ uma aplicação com um conjunto de pontos fixos finito satisfazendo $Fix(f) \subset M^\circ = M \setminus \partial M$ (esse resultado aparece em [13], página 134).

5.1 Equações com tranças

Sejam M uma superfície compacta e conexa, com $\{0\} = \pi_2(M)$, e x_1, x_2 pontos distintos em $M^\circ = M \setminus \partial M$, recordemos que o grupo $\pi_1(M \times M \setminus \Delta, (x_1, x_2))$ é o grupo de tranças de M , onde $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\}$. Sejam $i : M \times M \setminus \Delta \rightarrow M \times M$ a inclusão, $p_k : (y_1, y_2) \mapsto y_k$ as projeções, $i_1 : y \mapsto (y, x_2)$ e $i_2 : y \mapsto (x_1, y)$ as inclusões dos fatores.

Seja $U \subset M$ uma carta orientável homeomorfa ao \mathbb{R}^2 contendo x_1, x_2 . Em $U \setminus \{x_1\}$ existe um laço b , com ponto base x_2 , que dá uma volta em x_1 no sentido positivo da orientação de U . A i_2 -imagem do laço b em $M \times M \setminus \Delta$ representa uma trança B no grupo de tranças de M .

Suponha ∂M com n componentes, onde $n \geq 0$. Escolhendo de forma arbitrária pontos base e orientações, denotaremos por S_1, S_2, \dots, S_n as componentes de ∂M . Seja D um disco em U com $x_1 \in \partial D$ mas $x_2 \notin D$. Vamos denotar por T o laço obtido ao orientarmos ∂D com a mesma

orientação de U .

Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação com $f(x_1) = x_2$, tal que $Fix(f)$ seja finito e esteja contido em $M^\circ = M \setminus \partial M$. Para $i = 1, \dots, n$, seja a_i um caminho em $M \setminus Fix(f)$ ligando x_1 ao ponto base de S_i .

Vamos considerar $\bar{f} : M \rightarrow M \times M$ aplicação definida por $\bar{f}(x) = (x, f(x))$. Denotando por ω_i o laço $a_i S_i a_i^{-1}$ em M , temos que o laço $\bar{f} \circ \omega_i \subset M \times M \setminus \Delta$ representa uma trança σ_i em $\pi_1(M \times M \setminus \Delta, (x_1, x_2))$, pois $Fix(f) \subset M^\circ$ e $a_i \cap Fix(f) = \emptyset$.

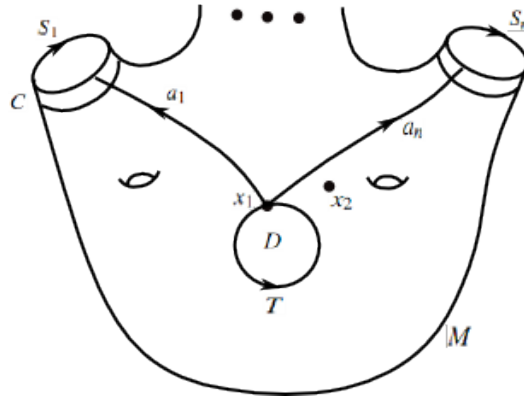


Figura 5.1: A superfície M

Teorema 5.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ como antes. Seja $k \geq 0$, $i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{Z}$. Então as seguintes duas condições são equivalentes:*

(I) *Existe uma aplicação $g \simeq f : M \rightarrow M$, com k pontos fixos de índices i_1, i_2, \dots, i_k respectivamente.*

(II) *Existe um homomorfismo*

$$\phi : \pi_1(M \setminus D^\circ, x_1) \rightarrow \pi_1(M \times M \setminus \Delta, (x_1, x_2))$$

e elementos

$$u_i \in \ker(i_\pi : \pi_1(M \times M \setminus \Delta) \rightarrow \pi_1(M \times M)), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$v_j \in \ker(p_1\pi : \pi_1(M \times M \setminus \Delta) \rightarrow \pi_1(M)), \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M \setminus D^\circ) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(M \times M \setminus \Delta) \\ i_\pi \downarrow & & \downarrow i_\pi \\ \pi_1(M) & \xrightarrow{\bar{f}_\pi} & \pi_1(M \times M) \end{array}$$

comuta, e

$$\phi([\omega_i]) = u_i \sigma_i u_i^{-1}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\phi([T]) = v_1 B^{i_1} v_1^{-1} \dots v_k B^{i_k} v_k^{-1}.$$

Demonstração: Suponhamos que exista $g \simeq f : M \rightarrow M$, com k pontos fixos de índices i_1, i_2, \dots, i_k respectivamente.

Podemos assumir que $g \simeq f$, relativamente a $\partial M \cup \{x_1\}$. Se g não for homotópica a f , relativamente a $\partial M \cup \{x_1\}$, procedemos da seguinte maneira : Como $g \simeq f$ e ambas não têm pontos fixos em $\partial M \cup \{x_1\}$, então, do Lema 3.1 capítulo 3, segue a existência de uma aplicação h homotópica a f , relativamente a $\partial M \cup \{x_1\}$, com $Fix(h) = Fix(g)$. Assim, consideramos h no lugar de g .

Podemos assumir também que $Fix(g) \subset D^\circ = D \setminus \partial D$.

Seja $\phi = \bar{g}_\pi : \pi_1(M \setminus D^\circ) \rightarrow \pi_1(M \times M \setminus \Delta)$. Como $g \simeq f$, relativamente a $\partial M \cup \{x_1\}$, então $\bar{g} \simeq \bar{f}$ e portanto $\bar{g}_\pi = \bar{f}_\pi$, assim o diagrama em (III) comuta. Além disso, $\phi[\omega_i]$ é representado pelo laço $\bar{g} \circ \omega_i$, com

$$\bar{g} \circ \omega_i = \bar{g} \circ a_i S_i a_i^{-1} = (\bar{g} \circ a_i)(\bar{g} \circ S_i)(\bar{g} \circ a_i)^{-1} \stackrel{*}{=} (\bar{g} \circ a_i)(\bar{f} \circ S_i)(\bar{g} \circ a_i)^{-1}$$

A igualdade $*$ ocorre pois $g \simeq f$, relativamente a $\partial M \cup \{x_1\}$, ou seja, $g|_{\partial M \cup \{x_1\}} = f|_{\partial M \cup \{x_1\}}$, portanto $\bar{g}|_{\partial M \cup \{x_1\}} = \bar{f}|_{\partial M \cup \{x_1\}}$ e como $S_i \subset \partial M \cup \{x_1\}$, então $\bar{g} \circ S_i = \bar{f} \circ S_i$.

$$\therefore \bar{g} \circ \omega_i \simeq (\bar{g} \circ a_i)(\bar{f} \circ a_i)^{-1}(\bar{f} \circ \omega_i)(\bar{f} \circ a_i)(\bar{g} \circ a_i)^{-1}.$$

Logo, $\phi[\omega_i] = u_i \sigma_i u_i^{-1}$, com

$$u_i = [(\bar{g} \circ a_i)(\bar{f} \circ a_i)^{-1}] = [\bar{g} \circ a_i][\bar{f} \circ a_i]^{-1} = \bar{g}_\pi([a_i])\bar{f}_\pi([a_i]^{-1}).$$

Como $\bar{g} \simeq \bar{f}$, então $\bar{g}_\pi([a_i])\bar{f}_\pi([a_i]^{-1})$ é o elemento neutro do grupo $\pi_1(M \times M)$. Portanto $u_i \in \text{Ker}(i_\pi)$.

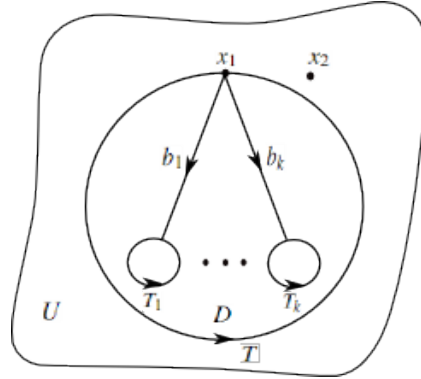


Figura 5.2: A carta orientável U

Vamos denotar por y_1, y_2, \dots, y_k os pontos fixos de g . Para cada $j = 1, 2, 3, \dots, k$, tomamos D_j disco centrado em y_j pequeno o suficiente para que tenhamos $D_j \cap D_i = \emptyset$, sempre que $i \neq j$. Desenhemos arcos b_j ligando x_1 a ∂D_j , e seja T_j o laço obtido ao orientarmos ∂D_j , como descrito na figura 5.2. Então $\phi[T]$ é representado por $\prod \bar{g} \circ (b_j T_j b_j^{-1})$, pois os laços T e $\prod (b_j T_j b_j^{-1})$ são homotópicos.

Para cada j tome um caminho c_j em $U \times U \setminus \Delta$ unindo os pontos finais de $\bar{g} \circ b_j$, de modo que $p_1 \circ c_j = b_j$. Seja $v_j = [(\bar{g} \circ b_j)c_j^{-1}] \in \pi_1(M \times M \setminus \Delta)$. Então,

$$\begin{aligned} & [\bar{g} \circ (b_j T_j b_j^{-1})] = \\ & = [(\bar{g} \circ (b_j)c_j^{-1}c_j(\bar{g} \circ (T_j))c_j^{-1}c_j\bar{g} \circ (b_j^{-1})] \\ & = [\bar{g} \circ (b_j)c_j^{-1}][c_j(\bar{g} \circ (T_j))c_j^{-1}][c_j\bar{g} \circ (b_j^{-1})] \\ & = v_j[c_j(\bar{g} \circ (T_j))c_j^{-1}]v_j^{-1} \end{aligned}$$

e $p_{1\pi}(v_j) = 1$. Agora $[c_j(\bar{g} \circ T_j)c_j^{-1}] \in \pi_1(U \times U \setminus \Delta) = \pi_1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \Delta)$, o grupo infinito cíclico gerado por B . Desde que o índice do ponto y_j é i_j , temos $[c_j(\bar{g} \circ T_j)c_j^{-1}] = B^{i_j}$. Portanto segue a fórmula para $\phi[T]$.

Reciprocamente, suponhamos válida a condição **(II)**, construiremos a aplicação g em várias etapas. Inicialmente tomamos um colar C sobre ∂M pequeno o suficiente de tal forma a não conter pontos fixos da aplicação f .

Seja M_c denotando o fecho de $M \setminus C$. Temos que M_c é um retrato por deformação de M , ou

seja, existe uma aplicação $r : M \rightarrow M_c$ denominada retração que satisfaz $i \circ r \simeq Id : M \rightarrow M$ e $r \circ i = Id : M_c \rightarrow M_c$, onde $i : M_c \rightarrow M$ é a inclusão. Substituindo f por $r \circ f \circ i$, se necessário, podemos assumir que f é uma aplicação de M_c em M_c .

Construímos os a_i 's se cruzando transversalmente, interceptando C de forma ortogonal, tocando D somente em x_1 e evitando x_2 . Seja A a união dos caminhos $a_i \cap M_c$, $i = 1, \dots, k$.

Inicialmente definiremos g sobre $C \cup A \cup D$. Seja $g = f$ em $C \cup \{x_1\}$, estendemos g sobre cada a_i , sem pontos fixos, com valor x_2 exceto em uma pequena vizinhança V do colar C , para evitar problemas com os cruzamentos de A . Em $a_i \cap V$ definimos g de modo que $(\bar{g} \circ a_i)(\bar{f} \circ a_i)^{-1}$ seja contrátil em $M \times M$, ou seja, é um laço que representa um elemento $u_i \in Ker(i_\pi)$. Assim temos, $g \simeq f : C \cup A \rightarrow M$, relativamente a $C \cup \{x_1\}$.

Para $j = 1, 2, \dots, k$, tomamos D_j e b_j como na figura 5.2. Definimos g sobre cada b_j de modo que $g \circ b_j \subset M \setminus D$, e observamos que $(\bar{g} \circ b_j)(i \circ b_j)^{-1}$ representa um elemento $v_j \in Ker(p_{1\pi})$.

Em cada D_j a aplicação está definida somente em um ponto sobre ∂D_j , com valor x_2 , vamos definir agora g sobre os outros pontos de ∂D_j . Queremos que y_j seja um ponto fixo de g com índice i_j , então vamos considerar um disco L , com $x_2 \in \partial L$ e $D \subset L^\circ = L \setminus \partial L$, quando o ponto x percorrer ∂D_j , considerando a mesma orientação de U , definimos $g(x)$ de tal forma que $g(x)$ dê $i_j + 1$ voltas em ∂L , no sentido positivo da orientação de U .

Seja x pertencente ao interior de D_j , vamos denotar por r_x o raio do disco D_j que contém o ponto x , e $\bar{x} = r_x \cap \partial D_j$. Podemos considerar $r_x = \{(1-t)y_j + t\bar{x} \mid t \in [0, 1]\}$, assim existe $t_x \in [0, 1]$ tal que $x = (1-t_x)y_j + t_x\bar{x}$, e assim definimos $g(x) = (1-t_x)y_j + t_x g(\bar{x})$. Logo g está definida em D_j , com y_j como ponto fixo de índice i_j .

Podemos também definir g sobre $D \setminus \{D_j, b_j \mid j = 1, 2, \dots, k\}$, sem acrescentar novos pontos fixos.

Assim definimos $g : C \cup A \cup D \rightarrow M$. Podemos estender a homotopia $g \simeq f : C \cup A \rightarrow M$ para uma homotopia $g \simeq f : C \cup A \cup D \rightarrow M$, pois D é contrátil.

Observamos que a construção da aplicação g garante $\bar{g}_\pi([\omega_i]) = \phi([\omega_i])$ e $\bar{g}_\pi([T]) = \phi([T])$.

Segue da construção anterior o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(C \cup A \cup \partial D) & \xrightarrow{\bar{g}_\pi} & \pi_1(M \times M \setminus \Delta) \\
i_\pi \downarrow & & \downarrow i_\pi \\
\pi_1(M \setminus D^\circ) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(M \times M \setminus \Delta)
\end{array}$$

Pela *teoria de obstrução* ([6], Proposição. 11.1), $\bar{g}|_{C \cup A \cup D}$ pode ser estendida para uma aplicação $h : M \setminus D^\circ \rightarrow M \times M \setminus \Delta$, com $h_\pi = \phi$. Combinando $h : M \setminus D^\circ \rightarrow M \times M \setminus \Delta$ com a aplicação $\bar{g}|_D : D \rightarrow M \times M$ obtemos $h : M \rightarrow M \times M$.

Comparando o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(M \setminus D^\circ) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(M \times M \setminus \Delta) \\
i_\pi \downarrow & & \downarrow i_\pi \\
\pi_1(M) & \xrightarrow{h_\pi} & \pi_1(M \times M)
\end{array}$$

com a condição (II), vemos que $h_\pi = \bar{f}_\pi : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M \times M)$, pois as flechas verticais são sobrejetoras. Novamente aplicando a *teoria de obstrução* ([6], Proposição 17.1, com a hipótese $\pi_2(M) = \{0\}$, que nos garante $\pi_2(M \times M) = \pi_2(M) \oplus \pi_2(M) = \{0\}$), podemos estender a homotopia $\bar{g} \simeq \bar{f} : C \cup A \cup D \rightarrow M \times M$, relativamente a $C \cup \{x_1\}$, para uma homotopia $h \simeq \bar{f} : M \rightarrow M \times M$, relativamente a $C \cup \{x_1\}$. Podemos ainda assumir que essa homotopia envia M_c em $M_c \times M$.

A aplicação p_1 é contínua, e como $h \simeq \bar{f}$, então $p_1 \circ h \simeq$ inclusão $= i : M_c \setminus D^\circ \rightarrow M_c$, relativamente a $\partial M \cup A \cup \partial D$. Denotando por $\{h_t\}_{t \in I}$ a homotopia entre $p_1 \circ h$ e i , temos $h_0 = p_1 \circ h$, e $h_1 = i$. Como $M_c \subset M^\circ$, então a projeção $p_1 : M_c \times M \rightarrow M_c$ é uma fibração e portanto tem a propriedade de levantamento de homotopia. Logo a homotopia $p_1 \circ h \simeq i$ levanta para uma homotopia $h \simeq h' : M_c \setminus D^\circ \rightarrow M_c \times M \setminus \Delta$, relativamente a $\partial M_c \cup A \cup \partial D$. A aplicação h' é o gráfico de uma aplicação $g' : M_c \setminus D^\circ \rightarrow M$, sem pontos fixos, pois $p_1 \circ h' = i$. Além disso, $\bar{g}' = h = \bar{g}$ em $\partial M_c \cup A \cup \partial D$. Então g' estende a aplicação g anterior para uma nova $g : M \rightarrow M$, com apenas k pontos fixos y_1, y_2, \dots, y_k .

A homotopia $h \simeq h'$ se estende para uma homotopia $h \simeq \bar{g} : M \rightarrow M \times M$, relativamente a $C \cup A \cup D$. Assim concluímos que $\bar{g} \simeq \bar{f}$, portanto $g \simeq f : M \rightarrow M$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Birman, J. S., *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.
- [2] Brown, R. F., *The Lefschetz fixed point theorem*, Chicago: Scott, Foresman 1971.
- [3] Fadell, E., Husseini, S., *The Nielsen number one surfaces*, in “Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis”, Contemp. Math. Vol 21, AMS, Providence, 1983,59–98.
- [4] Fadell, E., Neuwirth, L., *Configuration spaces*, Math. Second. 10, 111–118, 1962.
- [5] Hu, S.- T., *Homotopy theory*, New York-London: Academic Press 1959.
- [6] Hu, S. T., *Extensions and classification of maps*, Osaka Math. J. 2, 1950, 165–209.
- [7] Jiang, B., *Fixed points and braids*, Invent. Math. 75, 1984, 69–74.
- [8] Jiang, B., *Fixed points and braids, II*, Math. Ann. 272, 1985, 249–256.
- [9] Jiang, B., *Fixed point classes from a differential viewpoint*, In: Fixed point theory, Lecture Notes in Mathematics, vol. 886, 163–170, Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1981.
- [10] Jiang, B., *Fixed points of surface homeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc. 5, 176–178, 1881.
- [11] Jiang, B., *Lectures on Nielsen fixed point theory*, Contemp. Math., Vol. 14. Providence: Amer. Math. Soc. 1983.
- [12] Jiang, B., *On the least number of fixed points*, Am. J. Math. 102, 749–763, 1980.
- [13] Jiang, B., *Surface maps and braid equation, I*, Differential geometry and topology (Tianjin, 1986-1987), 125–141, Lecture Notes in Mathematics, 1369, Springer, Berlin, 1989.
- [14] Johnson, D. L., *Topics in the theory of Group presentations*, London: Cambridge University Press 1980.
- [15] Kiang Tsai-han., *The Theory of Fixed Point Classes*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg and Science Press Beijing 1989.

- [16] Kosniowski, Czes., *A first course in Algebraic Topology*, Cambridge: Cambridge University Press 1980.
- [17] Lyndon, R. C., Schupp, P. E., *Combinatorial group theory*, Berlin, Heidelberg, New York : Springer 1977.
- [18] Magnus, W., Karrass, A., Solitar, D., *Combinatorial group theory*, 2nd edition. New York: Dover 1976.
- [19] Munkres, J. R., *Topology*, 2Ed, Prence Hall, 2000.
- [20] Scott, G. P., *Braid groups and the group of homeomorphisms*, Proc. Camb. Phil. Soc. 68, 1970, 605–617.
- [21] Shi, G. H., *Least number of fixed points of the identity class*, Acta Math. Sinica 18, 192–202, 1975.
- [22] Turaev, V. G., *Nielsen numbers and fixed points of maps of bouquets of circles*, In: Studies in topology IV. Zap. Nauch. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI), Vol. 122, 135–136. Leningrad: Nauka 1892.
- [23] Wecken, F., *Fixpunktklassen II*, Math. Ann. 118, 1942, 216–234.
- [24] Wecken, F., *Fixpunktklassen III*, Math. Ann. 118, 1942, 544–577.
- [25] Weier, F., *Fixpunkttheorie in topologischen Mannigfaltigkeiten*, Math. Z. 59, 1953, 171–190.
- [26] Zhang, X. G., *The least number of fixed points can be arbitrarily larger than the Nielsen number*, Acta Sci. Natur. Univ. Pekin. 1986:3, 15–25.