UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência de padrões com difusibilidade variável e condição de fronteira de Neumann não linear

Maicon Sônego

São Carlos - SP
Março - 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência de padrões com difusibilidade variável e condição de fronteira de Neumann não linear

Maicon Sônego

Dissertação apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento

São Carlos - SP
Março - 2009

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

S698ep

Sônego, Maicon.

Existência de padrões com difusibilidade variável e condição de fronteira de Neumann não linear / Maicon Sônego. -- São Carlos : UFSCar, 2009.

53 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações diferenciais parciais não-lineares. 3. Equações de reação de difusão (Matemática). 4. Estabilidade linearizada. 5. Equilíbrios estáveis não-constantes. I. Título.

CDD: 515.353 (20[a])

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento
DM - UFSCar

Profa. Dra. Janete Crema
IME - USP

Profa. Dra. Claudia Buttarello Gentile
DM - UFSCar

Não recebemos sabedoria,
nós mesmos temos de encontrá-la
depois de uma jornada solitária,
que ninguém pode fazer por nós,
da qual ninguém pode nos poupar,
pois nossa sabedoria
é o ponto de vista a partir do qual
começamos a ver o mundo.

Marcel Proust

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus.

À minha família, meu pai Mario, minha mãe Regina meus irmãos Mateus e Marília por toda confiança e incentivo que me deram durante o desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço minha namorada Helen pelo apoio, companheirismo e amor que me foram fundamentais durante todo o mestrado.

Ao Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento, por ter me dado a oportunidade de trabalharmos juntos, e por toda atenção, paciência e competência com que me orientou.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e a todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pela minha formação e amizades conquistadas.

Aos membros da banca de qualificação, Profa. Dra. Claudia Buttarello Gentile e Profa. Dra. Vera Lúcia Carbone, pelas críticas e sugestões a este trabalho.

Aos membros da minha banca de defesa pública, Profa. Dra. Janete Crema e Profa. Dra. Claudia Buttarello Gentile pela leitura criteriosa do meu trabalho e pelas diversas sugestões e correções.

À secretária Irma, pela amizade, eficiência e prontidão em nos atender.

Ao Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira pela amizade, pela pronta disposição em me ajudar e pelas valiosas dicas e sugestões (e até algumas aulas) dadas neste último ano.

Agradeço ao Paulo, pela amizade, a ajuda nos comandos do $\LaTeX\,2_\varepsilon$ e pela preparação técnica de minha qualificação e defesa.

A todos os amigos da pós, pela ajuda mútua que existe nas amizades, e pelos momentos de alegria e descontração que me proporcionaram durante todo o mestrado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos um problema de reação e difusão com condição de fronteira de Neumann não linear. O objetivo é apresentar condições suficientes sobre o coeficiente de difusão, para que o problema possua solução de equilíbrio estável e não constante. Nossos principais recursos são alguns resultados básicos de análise real, técnicas do cálculo variacional e resultados referentes a sistemas dinâmicos.

Abstract

In this work we study a reaction-diffusion problem with nonlinear Neumann boundary condition. The objective is to present sufficient conditions on the diffusion coefficient so that the problem has an stable nonconstant equilibrium solution. The main tools are some basic results of real analysis, techniques of variational calculus and properties of dynamical systems.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos um problema parabólico de reação e difusão com condição de fronteira de Neumann não linear que pode ser escrito como

$$\left.\begin{array}{l} u_t = \operatorname{div}(a(x)\nabla u(x)), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega \\ a(x)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g(u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{0.0.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave. As funções $a : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são suaves, com a sendo positiva e g satisfazendo determinadas hipóteses.

Nosso objetivo é construir condições suficientes sobre a função a, que atua no interior e na fronteira de $\overline{\Omega}$, para que (0.0.1) possua pelo menos uma solução de equilíbrio não constante e estável em $W^{1,p}(\Omega)$, $p > N$.

Nos modelos mais comuns de difusão a função a é chamada de difusibilidade e, grosseiramente falando, mede o grau de dificuldade de mobilidade do difusor dentro do domínio. A condição de fronteira pode ser interpretada como uma função de proporcionalidade do fluxo do difusor na fronteira.

A existência de tais soluções, que denominaremos por *padrões* (terminologia utilizada em genética populacional) tem sido objeto de estudo de muitos matemáticos ao longo das últimas décadas, podemos citar por exemplo os trabalhos [1, 2, 3].

Esta dissertação é, essencialmente, baseado nos trabalhos [1, 2], no sentido de que a idéia e as principais passagens podem ser encontradas nestes artigos. No entanto, o problema em si difere de ambos os problemas apresentados em [1, 2], o que acarreta diversas modificações técnicas ao longo do trabalho.

Em [1] o seguinte problema de difusão é estudado

$$\left.\begin{array}{l} u_t = \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + f(u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{0.0.2}$$

note que a não-linearidade aparece somente no interior do domínio, assim como a difusibilidade. O autor mostra que se a função de difusibilidade a for adequadamente tomada, então o problema admite padrões. Para o caso particular no qual o domínio Ω é convexo e a difusibilidade a é uma constante, resultados conhecidos asseguram que (0.0.2) não possui padrão, ou seja, toda solução de equilíbrio não constante é instável (veja [4, 5]).

Em [2] o problema de difusão possui condição de fronteira não linear

$$\left.\begin{array}{l} u_t = \Delta u \quad D \subset \mathbb{R}^N \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = kf(u) \quad \partial D \end{array}\right\} \tag{0.0.3}$$

e são dadas condições com respeito a geometria do domínio D para que (0.0.3) possua solução de equilíbrio estável e não constante.

No primeiro capítulo desta dissertação fixamos a notação e enunciamos alguns resultados básicos de análise que nos servirão de ferramentas, além disso, também fazemos a apresentação do problema. O capítulo 2 é destinado a demonstrar um importante teorema, presente em [2], que tem papel fundamental neste trabalho. Este teorema garante que, sob certas hipóteses, o mínimo local de um funcional de energia é uma solução de equilíbrio estável de um determinado problema.

No terceiro capítulo construímos um subconjunto Λ de $W^{1,p}(\Omega)$ que é invariante em relação ao fluxo definido pelo nosso problema (0.0.1). Este conjunto sendo não vazio e invariante é de fundamental importância no capítulo 4 quando mostramos a existência de um mínimo local em Λ.

Finalmente, no capítulo 5 construímos e exibimos condições suficientes sobre a função a para que o conjunto Λ seja, de fato, diferente de vazio. Assim teremos garantida a existência de um mínimo local, e aplicando o principal teorema do capítulo 2 concluímos que este mínimo local é uma solução de equilíbrio não constante e estável em $W^{1,p}(\Omega)$ $(p > N)$ para o nosso problema.

Capítulo 1

Preliminares e apresentação do problema

Neste capítulo fixaremos a notação, veremos as definições básicas e alguns resultados preliminares que serão usados ao longo deste trabalho.

Desde já, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um *domínio*, se Ω for um subconjunto aberto e conexo.

1.1 Espaços de Sobolev

Dentre os espaços de funções que estudaremos a seguir destacam-se os Espaços de Sobolev que aparecem para refinar a idéia de suavidade das funções. Sua importância é evidente no estudo das equações diferenciais parciais. Mas antes de definirmos os Espaços de Sobolev veremos o espaço de Hölder e estudaremos o conceito de derivada fraca.

Definição 1.1.1. (i) Seja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e contínua, definimos a norma de u no espaço das funções contínuas em Ω como sendo

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

(ii) A *γ-ésima seminorma de Hölder* $(0 < \gamma \leq 1)$, de $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sup_{x,y\in\Omega,\ x\neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\gamma}} \right\},$$

e a *γ-ésima norma de Hölder* é dada por

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}.$$

Seja $\alpha \in \mathbb{N}^N$ um multi-índice, ou seja, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ cuja ordem é dada por $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$. Consideramos a seguinte notação:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial^{\alpha_1} x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial^{\alpha_N} x_N} u$$

Definição 1.1.2. O *espaço de Hölder*

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$$

é o conjunto de todas as funções $u \in C^k(\overline{\Omega})$ para as quais a norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

é finita.

Vale observar que o espaço de Hölder $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach.

Se X e Y são espaços normados, dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é um operador *compacto* se para todo $A \subset X$ limitado (um conjunto é limitado num espaço normado se, e somente se, está contido numa bola $B_R(0)$ para algum R), tivermos que $f(A) \subset Y$ é um conjunto relativamente compacto ($\overline{f(A)}$ compacto em Y).

Um espaço normado X está *mergulhado* em um espaço normado Y, e escrevemos $X \hookrightarrow Y$, se X é um subespaço vetorial de Y e o operador $I : X \longrightarrow Y$ definido por, $Ix = x$ para todo $x \in X$, é contínuo.

Dizemos que X está *compactamente mergulhado* em Y se o operador I é compacto.

Será de extrema importância neste trabalho a utilização de alguns teoremas de mergulho. A demonstração do teorema seguinte pode ser encontrada em [6].

Teorema 1.1.3. *Se k é um inteiro não negativo e $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Então ocorrem os seguintes mergulhos*

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}) \tag{1.1.1}$$

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}) \tag{1.1.2}$$

$$C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}). \tag{1.1.3}$$

Se Ω é limitado, os mergulhos (1.1.2) *e* (1.1.3) *são compactos. Se além disso Ω é convexo então* (1.1.1) *é compacto e ocorrem também os mergulhos*

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}) \tag{1.1.4}$$

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}). \tag{1.1.5}$$

Sendo (1.1.5) *um mergulho compacto.*

Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, que possuem suporte ($\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega \mid \phi(x) \neq 0\}}$) compacto. Chamaremos as funções $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ de *funções teste*.

Definição 1.1.4. Denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de todas as funções mensuráveis $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x < \infty,$$

dizemos que essas são funções *p-integráveis*. Para $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\text{supess}_\Omega(u) = \inf \{m \in \mathbb{R} \mid |u(x)| < m, \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega\} < \infty,$$

onde $\text{supess}_\Omega(u)$ é chamado de *supremo essencial de u em Ω*, e estas funções chamamos de *essencialmente limitadas*.

Temos também o espaço das funções *localmente p-integráveis*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid \quad u \in L^p(V), \quad \forall \quad V \subset\subset \Omega\},$$

onde $V \subset\subset \Omega$ se, e somente se, V é um aberto contido em Ω tal que $\overline{V} \subset \Omega$ é um conjunto compacto.

Definição 1.1.5. Dada $u \in L^p(\Omega)$, definimos sua norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \text{supess}_\Omega(|u|) < \infty & (p = \infty) \end{cases}.$$

Definição 1.1.6. Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, e α um multi-índice. Dizemos que v é a *α-ésima derivada fraca de u* e escrevemos

$$D^\alpha v = u,$$

se

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \quad \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi \quad \mathrm{d}x$$

para toda função teste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.1.7. Fixado $1 \leq p < \infty$ e k um inteiro positivo, o *espaço de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega),$$

consiste de todas as funções integráveis $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que para cada multi-índice α, com $|\alpha| < k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e ainda $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$.

Definição 1.1.8. Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ sua norma é dada por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \mathrm{supess}_\Omega(|D^\alpha u|) < \infty & (p = \infty) \end{cases}$$

podemos ainda considerar

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| < k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

que é uma norma equivalente à definição dada acima, e é a norma que será usada ao longo deste trabalho.

Observação 1.1.9. *Para $p = 2$ escrevemos*

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega).$$

Os espaços $W^{k,p}(\Omega)$ são todos espaços de Banach com as normas definidas acima, e os espaços $H^k(\Omega)$ são espaços de Hilbert com o seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \quad \mathrm{d}x.$$

Dentre os vários teoremas de mergulho que existem na teoria dos espaços de Sobolev, destacamos o seguinte, que pode ser encontrado em [6] ou [7]:

Teorema 1.1.10 (Rellich-Kondrachov)**.** *Suponha que $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é um conjunto limitado de classe C^1, então*

(i) $p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*]$ onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.

(ii) $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$.

(iii) $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Com todos os mergulhos acima sendo compactos.

1.2 Resultados gerais de análise

Veremos aqui alguns resultados gerais e básicos de análise que servirão de ferramentas para o desenvolvimento deste trabalho. As demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, em [8].

Teorema 1.2.1 (Fórmulas de Green)**.** *Sejam* $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. *Então*

(i) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u \quad \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \quad \mathrm{d}x = -\int_\Omega u\Delta v \quad \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \quad \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.$

(iii) $\displaystyle\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \quad \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u - \frac{\partial u}{\partial \nu} v \quad \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.$

Onde $\mathcal{H}^{N-1}$ denota a medida de Haussdorf $(N-1)$-dimensional. Em todos os casos que estudaremos a medida de Haussdorf coincide com a medida usual, e a razão de sua escolha é simplesmente para facilitar a notação, e

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

representa o *gradiente* da função u.

Temos que $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ representa a derivada direcional, em relação ao vetor unitário normal exterior ν de $\partial\Omega$, ou seja

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_j.$$

Ainda

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_j}$$

representa o *laplaciano* de u, e o *divergente* da função u é dado por

$$\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Teorema 1.2.2. *Sejam* $1 < p, q < \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Se* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$, *temos que:*

(i) (Desigualdade de Hölder)

$$\int_\Omega uv \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega u^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega v^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(ii) (Desigualdade de Minkowski)

$$\left(\int_\Omega (u+v)^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega u^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega v^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Será de grande importância neste trabalho a aplicação dos *Princípios do Máximo* para equações elíticas e parabólicas assim como o Lema de Hopf. Os resultados seguintes podem ser encontrados em [8, 9, 10]. Consideremos então o operador elítico

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + cu,$$

onde $a^{ij}, b^i, c \in C(\Omega)$ e satisfazem a condição de eliticidade uniforme, ou seja, existe uma constante $\eta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \eta \left|\xi\right|^2$$

para todo ponto $x \in \Omega$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Assumimos também que $a^{ij} = a^{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Estamos em condição de enunciar o princípio do máximo forte para equações elíticas:

Teorema 1.2.3. *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \geq 0$ em Ω. Suponha também que Ω é conexo.*

(i) Se

$$Lu \leq 0 \text{ em } \Omega$$

e u atingir um máximo não negativo sobre $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é uma função constante em Ω.

(ii) Se

$$Lu \geq 0 \text{ em } \Omega$$

e u atingir um mínimo não positivo sobre $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω.

Caso o máximo seja atingido em um ponto x_0 pertencente a fronteira, temos o Lema de Hopf que determina o sinal da derivada normal $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ no ponto x_0. Para este resultado é necessário que o domínio Ω satisfaça a *condição da bola interior em x_0*, isto é, que exista uma bola aberta $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$. No entanto para domínios com fronteira C^2 esta condição é automaticamente satisfeita, como pode ser visto em [9].

Lema 1.2.4 (Lema de Hopf). *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e $c \equiv 0$ em Ω. Suponha também que*

$$Lu \leq 0 \text{ em } \Omega,$$

e existe um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ tal que

$$u(x_0) > u(x), \ \forall \ x \in \Omega.$$

Se Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0 então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν é o vetor unitário normal a B em x_0.

Se $c \geq 0$ em Ω, a mesma conclusão ocorre se

$$u(x_0) \geq 0.$$

Para enunciarmos o Princípio do Máximo Forte para equações parabólicas consideramos o seguinte operador

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u,$$

onde a^{ij}, b^i, c são funções contínuas e $a^{ij} = a^{ji}$ $(i,j = 1,\ldots,n)$. Ainda $(L + u_t)$ é um operador uniformemente parabólico, ou seja, existe uma constante $\eta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \eta \left|\xi\right|^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $(x,t) \in \Omega_T$ para cada $T > 0$, onde $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$ para algum tempo fixado $T > 0$.

Afim de inferir a suavidade necessária nas variáveis x e t para nossos propósitos, considere o seguinte espaço de funções

$$C_1^2(\Omega_T) = \left\{ u : \Omega_T \longrightarrow \mathbb{R} \mid u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \ \in C(\Omega_T) \right\}.$$

Teorema 1.2.5. *Seja $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ e $c \geq 0$ em Ω_T. Suponha também que Ω é conexo.*

(i) Se

$$Lu + u_t \leq 0 \text{ em } \Omega_T$$

e u atingir um máximo não negativo sobre $\overline{\Omega}_T$ em um ponto $(x_0, t_0) \in \Omega_T$, *então u é constante sobre Ω_{t_0}.*

(ii) Se

$$Lu + u_t \geq 0 \text{ em } \Omega_T$$

e u atingir um mínimo não positivo sobre $\overline{\Omega}_T$ em um ponto $(x_0, t_0) \in \Omega_T$, então u é constante sobre Ω_{t_0}.

Lema 1.2.6. *Seja $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ e $c \equiv 0$ em Ω_T. Suponha também que*

$$Lu + u_t \leq 0 \text{ em } \Omega,$$

e u atinge um ponto de máximo $(x_0, t_0) \in S_T = \partial\Omega \times (0, T]$.

Se Ω satisfaz a condição da bola interior, então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0, t_0) > 0.$$

1.3 Cálculo variacional

Nosso principal objetivo nesta seção é introduzir o conceito de derivada de um funcional. Veremos a mais antiga noção que foi proposta por Lagrange e Euler, e manteremos neste trabalho o símbolo lagrangeano δ para representar a *primeira variação* de um funcional. Para esta seção sugerimos [11].

Considere o seguinte funcional

$$E : V \longrightarrow \mathbb{R},$$

onde V é um subconjunto de um espaço vetorial X sobre $\mathbb{R}$. Sejam $u_0 \in V$, $\zeta \in X$ e suponha que o segmento

$$\{u : u = u_0 + \epsilon\zeta, |\epsilon| < \epsilon_0\}$$

está contido em V para algum $\epsilon_0 > 0$.

Então nós definimos a função $\phi : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi(\epsilon) := E(u_0 + \epsilon\zeta),$$

se $\phi'(0)$ existir nós definimos a *primeira variação $\delta E(u_0, \zeta)$ em u_0 na direção de ζ* como sendo

$$\delta E(u_0, \zeta) = \phi'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} E(u_0 + \epsilon\zeta)\bigg|_{\epsilon=0}.$$

Se $\phi'(0)$ existir para $|\epsilon| < \epsilon_0$, assim como $\phi''(0)$, definimos a *segunda variação* *de* E por

$$\delta^2 E(u_0, \zeta_1, \zeta_2) = \phi''(0).$$

Seguindo o mesmo raciocínio podemos definir a *n-ésima variação de E* como sendo

$$\delta^{(n)} E(u_0, \zeta_1 \ldots \zeta_n) = \phi^{(n)}(0).$$

Dado um funcional $E : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dizemos que $v_0 \in X$ é um *mínimo local* de E em X, se existir uma vizinhança V de v_0 tal que

$$E(v_0) \leq E(v), \ \forall \ \ v \in V.$$

Analogamente definimos *máximo local.*

Suponha agora que δE e $\delta^2 E$ existam para algum $u_0 \in X$ em toda direção ζ contida em algum subespaço Z de X. Se u_0 for um mínimo local do funcional E, podemos concluir que

$$\delta E(u_0, \zeta) = 0, \quad \delta^2 E(u_0, \zeta) \geq 0, \ \forall \ \zeta \in Z. \tag{1.3.1}$$

Vale notar que se $Z = X$, (1.3.1) é uma condição suficiente e necessária para que u_0 seja um mínimo local em espaços com dimensão finita. No entanto, em espaços de dimensão infinita temos a apenas a necessidade.

É natural questionar porque considerar a primeira variação como a noção fundamental de derivada de um funcional. Uma importante característica desta idéia é a possibilidade de ocorrer que a primeira variação $\delta E(u_0, \zeta)$ exista para "variações" ζ contidas em alguma classe Z menor que X, mas "suficientemente grande" para conseguirmos conclusões valiosas sobre u_0, enquanto que outros tipos de derivadas podem, simplesmente, não existir.

Poderíamos também considerar as derivadas de Frèchet ou Gâteux adaptadas para funcionais, mas estas pela suas próprias definições dependem da escolha do domínio de definição X para existirem, enquanto que o significado e a existência da primeira variação é independente da topologia de X. No entanto, para certos domínios (por exemplo, $C^1(\overline{\Omega})$) é verdade que as três noções de derivadas discutidas acima, coincidem.

Para o nosso propósito, estudar pontos críticos de funcionais do tipo energia, é de grande importância considerar a primeira variação como noção fundamental de derivada de um funcional.

Lema 1.3.1 (Lema Fundamental do Cálculo Variacional)**.** *Seja $f \in C(\Omega)$ e suponha que*

$$\int_{\Omega} f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x \geq 0, \quad \forall\ \eta \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad com \quad \eta \geq 0 \tag{1.3.2}$$

ou

$$\int_{\Omega} f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall\ \eta \in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{1.3.3}$$

Então $f(x) \geq 0$ *ou* $f(x) = 0$, *respectivamente*, $\forall\ x \in \Omega$.

Demonstração. Suponha que (1.3.2) ocorra. Agora suponha por absurdo que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) < 0$, então como f é contínua e Ω é aberto, existe $\epsilon > 0$ e $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$ tal que $f(x) < -\epsilon$ para todo $x \in B_r(x_0)$.

Considere a seguinte função teste $\eta \in C_0^{\infty}(\Omega)$

$$\eta(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{r^2 - |x-x_0|^2}\right) & \text{para} \ \ x \in B_r(x_0) \\ 0 & \text{para} \ \ x \in \Omega - B_r(x_0). \end{cases}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{B_r(x_0)} f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x \\ &< -\epsilon \int_{B_r(x_0)} \eta(x)\,\mathrm{d}x \\ &< 0 \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Portanto $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. O caso (1.3.3) é análogo. □

Lema 1.3.2 (Forma Geral do Lema Fundamental)**.** *Suponha que* $f \in L^1(\Omega)$ *e satisfaça*

$$\int_{\Omega} f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x \geq 0, \quad \forall\ \eta \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad com \quad \eta \geq 0 \tag{1.3.4}$$

ou

$$\int_{\Omega} f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall\ \eta \in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{1.3.5}$$

Então $f(x) \geq 0$ *ou* $f(x) = 0$, *respectivamente, q.t.p. de* Ω.

Demonstração. Veja [11]. □

Neste trabalho consideraremos funcionais do seguinte tipo

$$E(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x))\,\mathrm{d}x$$

que é chamado de *integral variacional.*

Uma importante consequência do Lema Fundamental é que se $F \in C^2(U)$ (U é um aberto contido em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$) então a condição de anulamento da primeira variação ($\delta E(u, \varphi) = 0, \forall\ \varphi$) implica, que pontos críticos suaves, serão soluções da *equação de Euler-Lagrange* com a *condição de fronteira natural.* Todos os detalhes deste fato podem ser vistos em [11].

Vejamos, com um exemplo, como isso acontece.

Exemplo 1.3.3. Considere a *integral de Dirichlet* D, definida por

$$D(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Se u é um ponto crítico, em particular para toda $\varphi \in C_0^\infty$, temos que

$$0 = \delta D(u, \varphi) = \left.\frac{d}{d\epsilon} D(u + \epsilon\varphi)\right|_{\epsilon=0}.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} D(u+\epsilon\varphi) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(u+\epsilon\varphi)\right]^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi \ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} D(u+\epsilon\varphi)\right|_{\epsilon=0} &= \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi \ \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \varphi \Delta u \quad \mathrm{d}x + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi \quad \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}}_{0} \\
&= -\int_\Omega \varphi \Delta u \quad \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Temos assim, pelo Lema 1.3.1, que

$$\Delta u = 0 \ \text{ em } \ \Omega.$$

Note que necessitamos que u seja de classe, pelo menos, $C^2(\Omega)$.

Para obtermos a condição de fronteira, procederemos da mesma maneira, mas agora tomando qualquer $\varphi \in C^1(\Omega)$ e usando o fato de que $\Delta u = 0$ em Ω, concluído acima. Dessa forma

$$
\begin{aligned}
0 = \delta E(u,\varphi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} D(u+\epsilon\varphi)\Big|_{\epsilon=0} &= \underbrace{-\int_\Omega \varphi \Delta u \quad \mathrm{d}x}_{0} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi \quad \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi \quad \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}
\end{aligned}
$$

Como $C_0^\infty(\Omega) \subset C^1(\Omega)$, com uma generalização óbvia do Lema 1.3.1, obtemos

$$
\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \;\text{ sobre }\; \partial\Omega,
$$

como condição de fronteira associada ao funcional D.

Assim, se u é um ponto crítico suficientemente suave de D, temos que u é solução do problema elíptico

$$
\left.\begin{array}{l}
\Delta u = 0, \quad x \in \Omega \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega
\end{array}\right\} \tag{1.3.6}
$$

Ou ainda, temos que u é uma *solução de equilíbrio* (solução independente da variável temporal t) do problema parabólico

$$
\left.\begin{array}{l}
\Delta u = u_t, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega
\end{array}\right\} \tag{1.3.7}
$$

Dizemos que (1.3.7) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional de Dirichlet D.

1.4 Apresentação do problema

Neste trabalho trataremos o seguinte problema parabólico com condição de fronteira não linear:

$$
\left.\begin{array}{l}
u_t = \mathrm{div}(a(x)\nabla u(x)), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\
u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega \\
a(x)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g(u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega
\end{array}\right\} \tag{1.4.1}
$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave, e a função $a : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ é positiva e suave. A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é suficientemente suave e satisfaz as seguintes hipóteses:

- (H_0) Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha < 0 < \beta)$ tal que $g(\alpha) = g(0) = g(\beta) = 0$, e ainda $0 < ug(u) < u^2$, para todo $u \in (\alpha, \beta)$ e $u \neq 0$.

- (H_1) $g(x) > 0 \ \forall \ x \in (-\infty, \alpha)$ e, $g(x) < 0 \ \forall \ x \in (\beta, +\infty)$.

- (H_2) Se considerarmos

$$G(u) = \int_0^u g(s) \ \mathrm{d}s$$

assumimos, sem perda de generalidade, que

$$G(\beta) \geq G(\alpha).$$

Nosso interesse é encontrar soluções de equilíbrio estáveis não constantes para o problema (1.4.1).

Dizemos que u_s é uma *solução de equilíbrio* (ou *solução estacionária*) para o problema (1.4.1) se u_s é solução da seguinte equação elíptica juntamente com a condição de fronteira:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \operatorname{div}(a(x)\nabla u(x)), \quad x \in \Omega \\ a(x)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g(u), \quad x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{1.4.2}$$

ou seja, u_s é uma solução do problema (1.4.1) que não depende da variável temporal t.

Definição 1.4.1. Diremos que uma solução de equilíbrio u_s de (1.4.1) é *estável* em $W^{1,p}(\Omega)$ se para cada $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que para qualquer $v_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo

$$\|v_0 - u_s\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \delta,$$

então v, solução de (1.4.1) com condição inicial v_0, satisfaz

$$\|v(t) - u_s\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \epsilon, \ \forall \ \ t > 0.$$

A solução u_s é *assintoticamente estável* se for estável e

$$\|v(t) - u_s\|_{W^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow 0 \ \text{ quando } \ t \longrightarrow \infty. \tag{1.4.3}$$

Uma solução é *instável* se não for estável.

Observação 1.4.2. *Note que as seguintes funções*

$$u \equiv 0, u \equiv \alpha, u \equiv \beta,$$

são soluções de equilíbrio estáveis de (1.4.1) *(devido à hipótese* (H_0)*). No entanto estas são soluções constantes e nosso objetivo é justamente encontrar soluções de equilíbrio estáveis não constantes.*

Ainda, uma solução de equilíbrio u_s é chamada de *exponencialmente assintoticamente estável* quando u_s é assintoticamente estável e a convergência em (1.4.3) é de ordem exponencial. Neste caso existem constantes positivas ρ, α tais que,

$$\|v(t) - u_s\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \rho e^{-\alpha t} \quad (t > 0, x \in \overline{\Omega}).$$

Definição 1.4.3. Uma solução de equilíbrio u_s é chamada de *estável (assintoticamente estável) pelo lado direito* se a condição de estabilidade (estabilidade assintótica) dada pela Definição (1.4.1) ocorrer para toda solução $v(t, x)$ correspondente à condição inicial $v_0 \geq u_s$. De maneira análoga define-se *estabilidade (estabilidade assintótica) pelo lado esquerdo.*

Obviamente, se uma solução de equilíbrio é estável (assintoticamente estável) pelo lado direito e pelo lado esquerdo, então esta solução é estável (assintoticamente estável).

É de grande importância neste trabalho garantir a existência, a unicidade e determinada regularidade de soluções para problemas do tipo (1.4.1). Existem vários trabalhos que estudam estas questões, citamos por exemplo [12, 2, 13]. Enunciaremos duas proposições cujas demonstrações podem ser encontradas em [12].

Proposição 1.4.4. *Para cada conjunto limitado* $B \subset W^{1,p}(\Omega)$ *existe* $T = T(B) > 0$ *tal que o problema* (1.4.1) *possui uma única solução em* $[0, T)$ *com valor inicial* u_0*, para cada* $u_0 \in B$*. Além disso, a solução* $u(t)$ *é contínua em relação a* u_0*.*

Proposição 1.4.5. *Se* g *for de classe* C^1 *então, para cada* $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$*, existe* $\alpha > 0$ *tal que a solução* $u(t, \cdot) = T(t)u_0$ *de* (1.4.1) *é de classe* C^1 *em* t *com valores em* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$ *e, para cada* $t > 0$*, esta função é de classe* $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$*.*

Capítulo 2

Um resultado sobre o mínimo local

O objetivo deste capítulo é mostrar que, sob certas hipóteses, o mínimo local de um funcional J é uma solução de equilíbrio estável de um determinado problema.

Embora este resultado apareça em [2] de uma forma mais geral, veremos aqui um caso mais simples porém suficiente para os nossos propósitos.

2.1 Definições preliminares

Definição 2.1.1. Um *sistema dinâmico (semigrupo não-linear)* sobre um espaço métrico $\mathcal{X}$ é uma família de aplicações $T(t) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$, com $t \geq 0$, tal que

(i) para cada $t \geq 0$, $T(t)$ é uma aplicação contínua de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{X}$;

(ii) para cada $x \in \mathcal{X}$, $t \longrightarrow T(t)x$ é contínua;

(iii) $T(0) = I$ onde I é a identidade em $\mathcal{X}$;

(iv) $T(t)\,(T(s)x) = T(t+s)x$ para cada $x \in \mathcal{X}$.

Denotamos por $\{T(t) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \mid\ t \geq 0\}$ ou simplesmente $\{T(t)\}$, um sistema dinâmico sobre $\mathcal{X}$.

Definição 2.1.2. Seja $\{T(t)\}$ um sistema dinâmico sobre $\mathcal{X}$. Para cada $x \in \mathcal{X}$ definimos a *órbita (ou semi órbita-positiva)* de x pelo sistema dinâmico como sendo

$$\gamma(x) = \{T(t)x \mid\ t \geq 0\}\,.$$

E ainda, para $t > 0$

$$\gamma_t(x) = \{T(s)x \mid\ s \in [t, \infty)\}\,.$$

Definição 2.1.3. Para $x \in \mathcal{X}$ o conjunto *ω-limite* é dado por

$$\omega(x) = \omega(\gamma(x)) = \{y \in \mathcal{X} : \exists\ t_n \longrightarrow \infty \text{ tal que } T(t_n)x \longrightarrow y\}.$$

Ou equivalentemente

$$\omega(x) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t(x)}.$$

Observação 2.1.4. *Se $u(t,\cdot;u_0)$ representa a solução de* (1.4.1) *que satisfaz $u(0,\cdot;u_0) = u_0(\cdot)$, então se considerarmos a família de aplicações*

$$T(t) : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\Omega)\ (p > N)$$

para cada $t \geq 0$ como sendo

$$T(t)u_0 = u(t,\cdot;u_0),$$

temos que esta família define um sistema dinâmico e para cada $t \geq 0$, $T(t)$ é um operador compacto, isto é, $T(t)$ leva conjuntos limitados de $W^{1,p}(\Omega)$ em conjuntos relativamente compactos. Para todos os detalhes destes fatos veja [12].

Existe um famoso teorema na teoria das equações diferenciais ordinárias que infere sobre a estabilidade de um ponto crítico a partir da "linearização" do problema original. Mais precisamente, dada uma equação diferencial ordinária $u' = f(u)$ e se u_0 é um ponto crítico (isto é, $f(u_0) = 0$), então se a matriz da transformação linear $\mathrm{d}f(u_0)$ tem todos seus autovalores no semi-plano esquerdo ($\mathrm{Re}\, z < 0$) segue que u_0 é assintoticamente estável. Usaremos neste trabalho um resultado análogo para equações diferenciais parciais e para isso precisamos estudar a localização do *espectro* de determinados operadores lineares. Para maiores detalhes consulte [14].

Daremos agora algumas definições que serão necessárias adiante. Vale observar que estas podem ser feitas de maneira bem mais geral, no entanto, serão feitas de modo a favorecer a notação, a clareza e a necessidade deste trabalho.

Dado um operador elítico linear $P : W^{2,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$, definimos o *espectro* de P como sendo o conjunto

$$\sigma(P) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (P - \lambda I) \text{ não é inversível }\}$$

onde $I : W^{2,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ é o operador inclusão.

Dizemos que $\eta \in \sigma(P)$ é um *autovalor* de P se

$$\mathrm{N}(P - \eta I) \neq \{0\},$$

e denotamos por $\sigma_p(P)$ o conjunto de autovalores de P. Obviamente $\sigma_p(P) \subseteq \sigma(P)$ mas a igualdade, em geral, não é verdadeira.

Se η é um autovalor de P e $w \not\equiv 0$ satisfaz

$$Pw = \eta w$$

então dizemos que w é um *autovetor* associado ao autovalor η.

Definição 2.1.5. Dizemos que $\eta \in \sigma(P)$ é um *autovalor simples* se

(i) $\dim \mathrm{N}(P - \eta I) = \dim(\mathrm{Im}(P - \eta I))^c = 1$.

(ii) $Ix_0 \notin \mathrm{Im}(P - \eta I)$ sendo x_0 o gerador de $\mathrm{N}(P - \eta I)$.

2.2 Teorema principal

Seja P o operador uniformemente elítico linear de segunda ordem dado na forma divergente

$$Pu = -\sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

com todos seus coeficientes suaves e com a condição de simetria $a_{ij} = a_{ji}$.

Agora considere o seguinte problema parabólico:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Pu + f(u), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ a(x)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda b(x)g(u), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), & u_0(x) \in W^{1,p}(\Omega) \end{array}\right\} \tag{2.2.1}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave, $a, b \in C^1(\partial\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ as funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^1 e $p > N \geq 2$.

Agora suponha que (2.2.1) satisfaça as seguintes hipóteses:

(h1) O problema (2.2.1) define um sistema dinâmico $\{T(t)\}$.

(h2) O funcional de energia $J : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ associado a (2.2.1) é uma função contínua e estritamente decrescente ao longo de suas órbitas, exceto nos equilíbrios. Ou seja, J é um *funcional de Liapunov*.

O problema linearizado, em torno de uma solução de equilíbrio e_0, é dado por

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Pu + f'(e_0)u, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ a(x)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda b(x)g'(e_0)u, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{2.2.2}$$

A hipótese (h3) se refere à posição do espectro do operador linearizado proveniente de (2.2.2)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{P}(\phi) = P\phi + f'(e_0)\phi \\ D(\mathcal{P}) = \left\{ \phi \in W^{2,p}(\Omega) \mid a(x)\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} - \lambda b(x) g'(e_0)\phi = 0 \right\} \end{array}\right\} \tag{2.2.3}$$

(h3) Se $\sigma(\mathcal{P}) \subset \{\operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$ mas $\sigma(\mathcal{P}) \cap \{\operatorname{Re}\lambda = 0\} \neq \emptyset$ então

$$\sigma(\mathcal{P}) \cap \{\operatorname{Re}\lambda = 0\} = \{0\}$$

e 0 é um autovalor simples.

(h4) (i) Se $\sigma(\mathcal{P}) \subset \{\operatorname{Re}\lambda < 0\}$ então e_0 é assintoticamente estável.

(ii) Se $\sigma(\mathcal{P}) \cap \{\operatorname{Re}\lambda > 0\} \neq \emptyset$ então existe uma solução não-constante $u(t)$ de (2.2.1) tal que $u(t) \longrightarrow e_0$ quando $t \longrightarrow -\infty$.

(iii) Se $\sigma(\mathcal{P}) \subset \{\operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$ mas $\sigma(\mathcal{P}) \cap \{\operatorname{Re}\lambda = 0\} = \{0\}$ (como em (h3)) então existe uma variedade local $\mathcal{M}$, que é invariante, unidimensional e tangente em e_0 ao autovetor associado a $\lambda = 0$ com a propriedade de que e_0 é estável em $W^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, é estável em $\mathcal{M}$.

Teorema 2.2.1. *Suponha que as hipóteses (h1)-(h4) ocorram e que e_0 é um mínimo local do funcional J. Então e_0 é uma solução de equilíbrio estável de (2.2.1).*

Demonstração. Como e_0 é um mínimo local do funcional J, temos que e_0 é um ponto crítico de J. Como J é o funcional de energia cuja equação de Euler-Lagrange é (2.2.1), temos que e_0 é uma solução de equilíbrio de (2.2.1).

Para mostrar que e_0 é estável, devemos considerar três possíveis casos para a localização do espectro do operador linearizado $\mathcal{P}$ definido por (2.2.3).

O caso $\sigma(\mathcal{P}) \cap \{\operatorname{Re}\lambda > 0\} \neq \emptyset$ não é possível pela hipótese (h4)(ii), pois se existe uma solução não constante $u(t)$ de (2.2.1) tal que

$$u(t) \longrightarrow e_0 \text{ quando } t \longrightarrow -\infty,$$

então como $J(u(\cdot, t))$ é decrescente, e_0 não seria um mínimo local de J.

No caso que $\sigma(\mathcal{P}) \subset \{\operatorname{Re}\lambda < 0\}$, a hipótese (h4)(i) assegura que e_0 é assintoticamente estável, logo é estável.

Finalmente, o caso $\sigma(\mathcal{P}) \subset \{\operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$ mas

$$\sigma(\mathcal{P}) \cap \{\operatorname{Re}\lambda = 0\} = \{0\}$$

a hipótese (h4)(iii) diz que se o ponto de equilíbrio e_0 é estável na variedade unidimensional $\mathcal{M}$ então e_0 é também estável em $W^{1,p}(\Omega)$.

Mas vejamos que em dimensão 1, um mínimo local de um funcional de Liapunov é sempre estável.

Podemos, sem perda de generalidade, considerar que $\mathcal{M}$ é o intervalo $-r < x < r$, o ponto de equilíbrio $e_0 = 0$ e $J(0) = 0$. Mostraremos que 0 é estável pela direita e o mesmo argumento se aplica para mostrar a estabilidade a esquerda.

Consideraremos dois casos: o primeiro em que e_0 é um mínimo estrito de J em $[0, r)$ e o segundo em que e_0 não é mínimo estrito.

Primeiro consideramos que 0 é um mínimo estrito de J em $[0, r)$. Como $J(0) = 0$ existe $r_1 < r$ tal que $J(x) > 0$ em $(0, r_1]$. Dado $\epsilon > 0$, seja J_ϵ o mínimo de J em $[\epsilon, r_1]$. Como $J(0) = 0$ e J é uma função contínua existe $\epsilon > \delta > 0$ tal que para todo $x \leq \delta$ nós temos que $J(x) < J_\epsilon$. Então, se $x \in [0, \delta]$ como J decresce ao longo das órbitas e $\mathcal{M}$ é invariante, temos que

$$J(T(t)x) < J_\epsilon, \ \forall \ t \geq 0.$$

Daí, $T(t)x \notin [\epsilon, r_1]$ para todo $t \geq 0$ e segue que

$$T(t)x \in [0, \epsilon], \ \forall \ t \geq 0,$$

pois $T(0)x = x \in [0, \epsilon]$, 0 é uma solução de equilíbrio e $t \longrightarrow T(t)x$ é contínua.

Portanto 0 é estável pela direita.

Consideremos agora o caso em que $e_0 = 0$ não é um mínimo estrito em $[0, r)$. Assim existe uma sequência $x_n \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$ tal que $J(x_n) = 0$ para todo n. Estes x_n são pontos de equilíbrio. Para qualquer $\epsilon > 0$ existe um ponto de equilíbrio x_ϵ tal que

$$0 < x_\epsilon < \epsilon.$$

Logo o intervalo $[0, x_\epsilon]$ é um conjunto positivamente invariante em relação ao fluxo $T(t)$, isto é, se $x \in [0, x_\epsilon]$ então $T(t)x \in [0, x_\epsilon]$ pois 0 e x_ϵ são pontos de equilíbrio e $t \longrightarrow T(t)x$ é contínua. Note que nos argumentos acima é essencial termos garantida a unicidade de soluções de (2.2.1).

Agora, tomando $\delta = x_\epsilon$ temos que para todo $x \in [0, \delta]$

$$T(t)x \in [0, \delta] \subset [0, \epsilon], \ \forall \ t \geq 0.$$

Segue que $e_0 = 0$ é estável pela direita.

Como já dito, nos dois casos acima poderíamos demonstrar analogamente a estabilidade pela esquerda. Assim concluímos que o ponto de equilíbrio e_0 sempre é estável em $\mathcal{M}$. Agora, pela hipótese (h4)(iii) temos que e_0 é estável em $W^{1,p}(\Omega)$.

$\square$

Capítulo 3

O conjunto invariante

Neste capítulo construiremos um conjunto $\Lambda \subset W^{1,p}(\Omega)$ positivamente invariante (por simplicidade diremos apenas invariante) em relação ao fluxo gerado pela equação (1.4.1). Ou seja, Λ satisfaz a seguinte condição com respeito ao sistema dinâmico $\{T(t)\}$ obtido de (1.4.1):

$$\text{se } \ u \in \Lambda, \text{ então } \ T(t)u \in \Lambda, \quad \forall\, t > 0.$$

Para isso veremos alguns resultados preliminares: um resultado sobre o segundo autovalor do problema de Steklov e algumas propriedades do funcional de energia associado ao problema (1.4.1).

3.1 Resultados preliminares

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave. O problema de autovalores de Steklov é dado por

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad \text{em } \ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \rho u, \quad \text{em } \ \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.1.1}$$

os valores do parâmetro ρ para os quais (3.1.1) possui uma solução (fraca) positiva são chamados de *autovalores principais* de (3.1.1) e as soluções associadas são chamadas *autofunções principais*. O segundo autovalor deste problema $\rho_2(\Omega)$ (ou primeiro autovalor positivo, visto que $\rho = 0$ é um autovalor trivial com autofunção constante) é caracterizado por

$$\rho_2(\Omega) = \min_{\int_{\partial\Omega} u \ \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} = 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \ \, \mathrm{d}x}{\int_{\partial\Omega} u^2 \ \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}} \tag{3.1.2}$$

para o resultado acima veja [12].

Lema 3.1.1. *Seja Ω um domínio limitado suave. Então existe uma constante positiva $\rho_2(\Omega)$ dependendo somente do domínio, tal que se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ocorre a seguinte desigualdade*

$$\int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega)} \left(\int_{\partial\Omega} u \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \right)^2. \tag{3.1.3}$$

A constante ótima $\rho_2(\Omega)$ é o segundo autovalor do problema de Steklov (3.1.1).

Ainda, para qualquer subconjunto suave Γ de $\partial\Omega$, com $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma) > 0$, a desigualdade

$$\int_{\Gamma} u^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma)} \left(\int_{\Gamma} u \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \right)^2, \tag{3.1.4}$$

também ocorre.

Demonstração. De acordo com a caracterização do segundo autovalor do problema de Steklov dada por (3.1.2) temos que para qualquer $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} u \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} = 0$$

então

$$\int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{3.1.5}$$

Para toda função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ considere $v = u - \bar{u}$, onde

$$\bar{u} = \frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} u \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.$$

Então $v \in W^{1,2}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} v \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} u \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega)} \bar{u} \int_{\partial\Omega} 1 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \bar{u} - \bar{u} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\partial\Omega} v \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} = 0.$$

Portanto v satisfaz (3.1.5), ou seja

$$\int_{\partial\Omega} v^2 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla v|^2 \ \mathrm{d}x.$$

Como $v = u - \bar{u}$, temos que

$$\int_{\partial\Omega} u^2 - 2u\bar{u} + \bar{u}^2 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla(u-\bar{u})|^2 \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \ \mathrm{d}x.$$

Computando, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} u^2 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} &\leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \ \mathrm{d}x + \frac{2}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \int_{\partial\Omega} u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&- \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \right)^2 \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \ \mathrm{d}x + \frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega)} \left(\int_{\partial\Omega} u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \right)^2.
\end{aligned}$$

O que prova (3.1.3).

Mostremos agora (3.1.4). Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Gamma u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} = 0, \tag{3.1.6}$$

então por (3.1.3) temos que

$$\int_{\partial\Omega} u^2 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \ \mathrm{d}x + \frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega)} \left(\int_{\partial\Omega\backslash\Gamma} u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \right)^2.$$

Usando a desigualdade de Hölder (p=q=2)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} u^2 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} &\leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \ \mathrm{d}x + \underbrace{\frac{\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega\backslash\Gamma)}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega)}}_{<1} \int_{\partial\Omega\backslash\Gamma} u^2 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&\leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega\backslash\Gamma} u^2 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.
\end{aligned}$$

Assim obtemos a seguinte desigualdade

$$\int_\Gamma u^2 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \ \mathrm{d}x, \tag{3.1.7}$$

para qualquer $u \in W^{1,2}(\Omega)$ que satisfaça (3.1.6).

Finalmente, dado $u \in W^{1,2}(\Omega)$ considere $v = u - \bar{u}$, com

$$\bar{u} = \frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma)} \int_\Gamma u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.$$

Novamente concluímos que $\bar{v} = 0$, logo (3.1.7) ocorre para v e com cálculos análogos aos feitos anteriormente chegamos em (3.1.4). $\square$

O funcional de energia $E : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega a(x) |\nabla u|^2 \ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} G(u) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}, \tag{3.1.8}$$

é duas vezes continuamente diferenciável (como a é suave e limitada a demonstração é análoga à feita em [12], página 89). Como pode ser visto em [12], para termos tal regularidade de E sem nenhuma hipótese de crescimento sobre g, é essencial que g seja de classe pelo menos C^1 e que p seja maior que N, como de fato estamos supondo.

Temos também que E é o funcional cuja equação de Euler-Lagrange é dada por (1.4.1), ou seja, os pontos críticos de E são soluções de (1.4.2) e consequentemente são soluções de equilíbrio de (1.4.1).

De fato, seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ um ponto crítico de E, então para qualquer $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ temos que $\delta E(u)\varphi = 0$. Em particular para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}
0 = \delta E(u,\varphi) &= \int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla\varphi \ \mathrm{d}x - \underbrace{\int_{\partial\Omega} g(u) \ \varphi \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}}_{0} \\
&\overset{(*)}{=} -\int_\Omega \nabla a \cdot \nabla u \ \varphi \ \mathrm{d}x - \int_\Omega a\Delta u \ \varphi \ \mathrm{d}x + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \ a \ \varphi \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}}_{0} \\
&= -\int_\Omega (\nabla a \cdot \nabla u + a\Delta u)\, \varphi \ \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \mathrm{div}(a\nabla u)\varphi \ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Em $(*)$ foi usada integração por partes ou a segunda fórmula de Green dada pelo

Teorema 1.2.1. Assim pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional concluímos que

$$\operatorname{div}(a(x)\nabla u(x)) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.1.9}$$

Agora, tomando qualquer $\varphi \in C^1(\Omega)$, como já sabemos (3.1.9), temos que

$$\begin{aligned} 0 = \delta E(u)\varphi &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} a\varphi \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\partial\Omega} g(u)\varphi \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(a\frac{\partial u}{\partial \nu} - g(u) \right) \varphi \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}, \end{aligned}$$

novamente pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional

$$a(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u) \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Portanto, E é de fato, o funcional de energia associado ao problema (1.4.1).

Proposição 3.1.2. *O funcional de energia E, definido por* (3.1.8)*, é decrescente ao longo de suas órbitas, exceto nos equilíbrios. Ou seja, E é um funcional de Liapunov.*

Demonstração. Seja $u(t,x) = T(t)u_0(x)$ uma solução de (1.4.1), então u satisfaz sobre Ω

$$u_t = \operatorname{div}(a\nabla u).$$

Multiplicando a equação acima por $v \in W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} u_t v &= \operatorname{div}(a\nabla u)v \\ &= \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_j} \right) v \\ &= \nabla a \cdot \nabla u \ v + a\Delta u \ v. \end{aligned}$$

Integrando em ambos os lados e utilizando a Fórmula de Green

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_t v \ \mathrm{d}x &= \int_\Omega \nabla a \cdot \nabla u \ v \ \mathrm{d}x + \int_\Omega a v \Delta u \ \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \nabla a \cdot \nabla u \ v \ \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla(av) \nabla u \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} a v \frac{\partial u}{\partial \nu} \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_\Omega \nabla a \cdot \nabla u \ v \ \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla a \cdot \nabla u \ v \ \mathrm{d}x \\
&- \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \ a \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} a v \frac{\partial u}{\partial \nu} \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.
\end{aligned}$$

Agora, cancelando os dois primeiros termos do lado direito da igualdade acima e como sobre $\partial\Omega$

$$a \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u)$$

temos que

$$\int_\Omega u_t v \ \mathrm{d}x = - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \ a \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g(u) v \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}, \quad \forall \ v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{3.1.10}$$

Como $u_t \in W^{1,p}(\Omega)$ podemos derivar E em relação a t, daí

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(u(t,\cdot)) &= \frac{1}{2} \int_\Omega a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right) \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(u) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_\Omega a \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t} \mathrm{d}x - \int_\Omega g(u) u_t \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla u_t \ \mathrm{d}x - \int_\Omega g(u) u_t \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.
\end{aligned}$$

Assim, de (3.1.10) concluímos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(u(t,\cdot)) = - \int_\Omega (u_t)^2 \, \mathrm{d}x \leq 0.$$

Portanto $E(u(t,\cdot)) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de t não-crescente, ou melhor, E é estritamente decrescente exceto nos equilíbrios. $\square$

3.2 Lema principal

Dado qualquer domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e suave, podemos supor que existem dois subdomínios de Ω, digamos Ω_l e Ω_r, suaves e com fechos disjuntos ($\overline{\Omega_l} \cap \overline{\Omega_r} = \emptyset$) tais que

$$S_l = \partial\Omega \cap \partial\Omega_l \quad \text{e} \quad S_r = \partial\Omega \cap \partial\Omega_r$$

satisfazem

$$\mathcal{H}^{N-1}(S_l) > 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^{N-1}(S_r) > 0. \tag{3.2.1}$$

Definimos então, para cada $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e suave

$$\varepsilon_0 = G(\beta) \min\left\{\mathcal{H}^{N-1}(S_l) \min\left\{1, \rho_2(\Omega_l) a_m^{\Omega_l}\right\}, \mathcal{H}^{N-1}(S_r) \min\left\{1, \rho_2(\Omega_r) a_m^{\Omega_r}\right\}\right\} > 0,$$

sendo $\rho_2(\Omega_l)$ é o segundo autovalor do problema de Steklov

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad \text{em} \quad \Omega_l \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \rho u, \quad \text{em} \quad \partial\Omega_l. \end{array}\right\}$$

E ainda

$$a_m^{\Omega_l} = \min_{\Omega_l} a.$$

Analogamente define-se $\rho_2(\Omega_r)$ e $a_m^{\Omega_r}$.

Lema 3.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave. Para $p > N$ e ε_0 como acima, definimos a conjunto*

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} v \in W^{1,p}(\Omega) \mid \ \alpha \le v(x) \le \beta, \quad x \in \overline{\Omega}, \\ \\ \displaystyle\int_{S_l} v \ \ d\mathcal{H}^{N-1} < 0, \ \int_{S_r} v \ \ d\mathcal{H}^{N-1} > 0, \\ \\ E(v) < \varepsilon_0 - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega) \end{array} \right\}$$

sendo α e β como no problema (1.4.1). *Se Λ é um conjunto não vazio, então Λ é invariante em relação ao fluxo definido por (1.4.1), isto é, se $v \in \Lambda$ então $T(t)v \in \Lambda$, $\forall\ t > 0$.*

Demonstração. Passo 1 - Como supomos $\Lambda \neq \emptyset$ considere $w_0 \in \Lambda$.

Mostremos então que $\alpha \le T(t)w_0 \le \beta$ sobre $\overline{\Omega}$ para todo $t > 0$, onde $T(t)w_0 = w(t, \cdot, w_0)$ é o fluxo definido por (1.4.1).

Suponha que exista $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega}$ tal que $w(\bar{t}, \bar{x}) > \beta > 0$. Então se $T > \bar{t}$

temos que

$$w_M \doteq \max_{(0,T]\times\overline{\Omega}} w(t,x) > \beta > 0.$$

Se $w_M = w(\tilde{t},\tilde{x})$ é tal que $(\tilde{t},\tilde{x}) \in \Omega_T$, pelo Teorema 1.2.5 chegamos que

$$w(t,x) = v_M > \beta \ \forall \ (t,x) \in \Omega_{\tilde{t}},$$

o que é um absurdo, pois $w(0,x) = w_0(x) \leq \beta$.

Se $(\tilde{t},\tilde{x}) \in (0,T] \times \partial\Omega$, o Lema 1.2.6 nos dá que

$$\frac{\partial w(\tilde{t},\tilde{x})}{\partial \nu} > 0.$$

Mas daí

$$0 < \frac{\partial w(\tilde{t},\tilde{x})}{\partial \nu} = \frac{g(w(\tilde{t},\tilde{x}))}{a(\tilde{x})} = \frac{g(w_M)}{a(\tilde{x})} < 0$$

pois $a(x) > 0 \ \forall \ x$, e como $v_M > \beta$, temos $g(v_M) < 0$. Assim temos uma contradição.

De forma análoga obtemos $\alpha \leq T(t)w_0$ para todo $t > 0$. Concluímos então que $\alpha \leq T(t)w_0 \leq \beta$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Passo 2 - Pela Proposição 3.1.2 temos que E é um funcional não crescente em relação a t, e como $w_0 \in \Lambda$ temos que

$$E(w(t,\cdot)) = E(T(t)w_0) \leq E(w_0) < \varepsilon_0 - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega),$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Passo 3 - Mostremos agora que

$$J(t) = \int_{S_l} T(t)w_0 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} < 0 \ \ \forall \ t \geq 0.$$

Primeiramente vamos mostrar que a função $J : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Seja $\epsilon > 0$. Como a aplicação $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow W^{1,p}(\Omega)$ dada por $\varphi(t) = T(t)w_0$ é contínua, existe $\bar{\delta} > 0$ tal que

$$|t - t_0| < \bar{\delta} \ \Rightarrow \ \|T(t)w_0 - T(t_0)w_0\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \frac{\epsilon}{(\mathcal{H}^{N-1}(S_l))^{\frac{1}{p'}}},$$

onde $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Assim, se tomarmos $\delta = \bar{\delta}$ temos que se $|t - t_0| < \delta$ então

$$\begin{aligned}
|J(t) - J(t_0)| &= \left| \int_{S_l} T(t)w_0 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \int_{S_l} T(t_0)w_0 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \right| \\
&\leq \int_{S_l} |T(t)w_0 - T(t_0)w_0| \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&\leq \left(\int_{S_l} |T(t)w_0 - T(t_0)w_0|^p \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathcal{H}^{N-1}(S_l)\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|T(t)w_0 - T(t_0)w_0\|_{L^p(\Omega)} \left(\mathcal{H}^{N-1}(S_l)\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \|T(t)w_0 - T(t_0)w_0\|_{W^{1,p}(\Omega)} \left(\mathcal{H}^{N-1}(S_l)\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&< \frac{\epsilon}{\left(\mathcal{H}^{N-1}(S_l)\right)^{\frac{1}{p'}}} \left(\mathcal{H}^{N-1}(S_l)\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto J é uma função contínua. Assim se existir $\bar{t} > 0$ tal que $J(\bar{t}) > 0$, como $J(0) < 0$ pelo Teorema do Valor Intermediário existe $t_1 > 0$ tal que $J(t_1) = 0$, ou seja

$$\int_{S_l} T(t_1)w_0 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} = 0.$$

Por simplicidade denotaremos $T(t_1)w_0 = w_1$. A segunda desigualdade do Lema 3.1.1 aplicado a Ω_l, nos dá que

$$\begin{aligned}
\int_{S_l} w_1^2 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} &\leq \frac{1}{\rho_2(\Omega_l)} \int_{\Omega_l} |\nabla w_1|^2 \ \mathrm{d}x + \underbrace{\frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(S_l)} \left(\int_{S_l} w_1 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \right)^2}_{0} \\
&= \frac{1}{\rho_2(\Omega_l)} \int_{\Omega_l} |\nabla w_1|^2 \ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Pela hipótese (H_0) sobre a função g, temos que

$$\begin{array}{ll}
0 \geq g(s) \geq s & \alpha \leq s \leq 0 \\
0 \leq g(s) \leq s & 0 \leq s \leq \beta
\end{array}$$

Daí

$$G(w_1) = \int_0^{w_1} g(s) \ \mathrm{d}s \leq \int_0^{w_1} s \ \mathrm{d}s = \left.\frac{s^2}{2}\right|_0^{w_1} = \frac{w_1^2}{2}.$$

Logo $w_1^2 \geq 2G(w_1)$, obtemos então

$$\int_{\Omega_l} a\,|\nabla w_1|^2 \;\mathrm{d}x \geq a_m^{\Omega_l} \int_{\Omega_l} |\nabla w_1|^2 \;\mathrm{d}x \geq a_m^{\Omega_l} 2\rho_2(\Omega_l) \int_{S_l} G(w_1) \;\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}. \tag{3.2.2}$$

Agora escrevemos

$$\begin{aligned} E(w_1) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_l} a\,|\nabla w_1|^2 \;\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega\setminus Sl} G(w_1) \;\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Omega_l} a\,|\nabla w_1|^2 \;\mathrm{d}x - \int_{S_l} G(w_1) \;\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned}$$

Desprezando o primeiro termo do lado direito da igualdade acima, usando (3.2.2) e também que $G(w_1) \leq G(\beta)$ sobre (α, β), obtemos

$$E(w_1) \geq a_m^{\Omega_l}\rho_2(\Omega_l) \int_{S_l} G(w_1) \;\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \int_{S_l} G(w_1) \;\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega\setminus S_l).$$

Como já foi mostrado que

$$E(w_1) < \varepsilon_0 - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega),$$

juntando estas duas desigualdades concluímos que

$$\varepsilon_0 > \left(a_m^{\Omega_l}\rho_2(\Omega_l) - 1\right) \int_{S_l} G(w_1) \;\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} + G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(S_l).$$

Se $a_m^{\Omega_l}\rho_2(\Omega_l) - 1 \geq 0$ obtemos

$$\varepsilon_0 > G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(S_l). \tag{3.2.3}$$

Por outro lado se $a_m^{\Omega_l}\rho_2(\Omega_l) - 1 < 0$ temos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &> \left(a_m^{\Omega_l}\rho_2(\Omega_l) - 1\right) G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(S_L) + G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(S_l) \\ &= a_m^{\Omega_l}\rho_2(\Omega_l) G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(S_l). \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Assim, de (3.2.3) e (3.2.4) chegamos que

$$\varepsilon_0 > G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(S_l) \min\left\{1, a_m^{\Omega_l}\rho_2(\Omega_l)\right\}. \tag{3.2.5}$$

Repetindo o mesmo argumento para o conjunto Ω_r chegamos em

$$\varepsilon_0 > G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(S_r) \min\left\{1, a_m^{\Omega_r}\rho_2(\Omega_r)\right\}. \tag{3.2.6}$$

Daí, de (3.2.5) e (3.2.6), concluímos que

$$\varepsilon_0 > G(\beta) \min\left\{\mathcal{H}^{N-1}(S_l)\min\left\{1, a_m^{\Omega_l}\rho_2(\Omega_l)\right\}, \mathcal{H}^{N-1}(S_l)\min\left\{1, a_m^{\Omega_l}\rho_2(\Omega_l)\right\}\right\}.$$

O que contradiz a definição de ε_0.

Portanto se $\Lambda \neq \emptyset$, então Λ é um conjunto invariante em relação ao fluxo definido por (1.4.1). $\square$

Observação 3.2.2. *Note que de maneira análoga é possível mostrar que $\overline{\Lambda}$ é também invariante em relação ao fluxo definido por (1.4.1).*

Capítulo 4

Existência de um mínimo local

O objetivo principal deste capítulo é mostrar que se o conjunto Λ (definido no Lema 3.2.1) é não vazio, então Λ contém um mínimo local e_0 do funcional E (equação (3.1.8)) associado ao problema (1.4.1).

Para isso usaremos a estimativa de Amann para obtermos algumas propriedades do conjunto

$$\Lambda \cap \mathcal{A},$$

onde $\mathcal{A}$ é o conjunto das soluções de equilíbrio do problema (1.4.1).

4.1 Resultados preliminares

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N > 2$, um domínio limitado com fronteira de classe $C^{3,\alpha}$, com $0 < \alpha < 1$.

Considere o operador linear A dado por

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + au$$

sendo $a_{ij} = a_{ji}$ tal que $a_{ij} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_i \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $a \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Suponha que A seja fortemente uniformemente elítico, ou seja, que exista $\eta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \eta\,|\xi|^2$$

para todo $x \in \Omega$ e todo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^N$.

Consideremos também o operador B agindo na fronteira de Ω dado por

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + bu$$

com $b \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$.

Teorema 4.1.1 (Estimativa de Amann). *Suponha que $a, b \geq 0$ mas $a \not\equiv 0$ ou $b \not\equiv 0$. Então se $1 < p < \infty$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\left[\|Au\|_{L^p(\Omega)} + \|Bu\|_{L^p(\partial\Omega)}\right]$$

para todo $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Para demonstração veja [15].

Lema 4.1.2. *O conjunto $\overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$ é limitado em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $u \in \overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$, então

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \operatorname{div}(a(x)\nabla u(x)), \quad x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + bu = \dfrac{g(u)}{a(x)} + bu, \quad x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

com $b \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$, $b \not\equiv 0$. Argumentos clássicos nos dão uma regularidade C^2 para u em $\overline{\Omega}$, veja [9].

Estamos então, nas hipóteses do Teorema 4.1.1. Daí, como $\alpha \leq u \leq \beta$ sobre $\overline{\Omega}$ e as funções a, g e b são contínuas podemos considerar

$$K_1 = \max\{|\alpha|, \beta\} \geq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$|a(x)| \geq K_2 > 0, \quad \forall \ x \in \overline{\Omega}$$

$$K_3 = \|g\|_{L^p([\alpha,\beta])}$$

$$K_4 = \|b\|_{L^p(\partial\Omega)}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &\leq C\left[0 + \left\|\frac{g(u)}{a(x)} + bu\right\|_{L^p(\partial\Omega)}\right] \\ &\leq C\left[\left\|\frac{g(u)}{a(x)}\right\|_{L^p(\partial\Omega)} + \|bu\|_{L^p(\partial\Omega)}\right] \\ &\leq C\left[\frac{K_3}{K_2} + K_4K_1\right]. \end{aligned}$$

Com C, K_1, K_2, K_3 e K_4 constantes finitas independentes de u. Logo $\overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$ é limitado em $W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Afim de verificar que o conjunto $\overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$ é não vazio (Teorema 4.1.3) veremos um importante resultado do conjunto *ω-limite* de um ponto (Definição 2.1.3).

Teorema 4.1.3. *Seja $x_0 \in \mathcal{X}$ e suponhamos que a órbita $\gamma(x)$ seja relativamente compacta em $\mathcal{X}$. Então $\omega(x_0)$ é compacto e não vazio.*

Demonstração. De acordo com a Definição 2.1.3

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t(x_0)},$$

ou seja, $\omega(x_0)$ é uma interseção decrescente de conjuntos compactos e diferentes de vazio, portanto $\omega(x_0)$ é compacto e não vazio. □

4.2 Teorema principal

Teorema 4.2.1. *Sob as hipóteses do Lema* 3.2.1*, se $\Lambda \neq \emptyset$, então Λ contém um mínimo local do funcional de energia E associado ao problema* (1.4.1)*.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto das soluções de equilíbrio do problema (1.4.1). Mostremos que $\overline{\Lambda} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Como $\Lambda \neq \emptyset$, tome $v \in \Lambda$. Então como Λ é invariante em relação a $T(t)$ (Lema 3.2.1) temos que a órbita $\gamma(v) = \{T(t)v; t \geq 0\}$ está contida em Λ. Assim temos que para todo $t \geq 0$

$$E(T(t)v) \leq \varepsilon_0 - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega).$$

Se $u(t, \cdot) = T(t, \cdot, v)$, pela definição do funcional E e com algumas contas, não é difícil ver que para todo $t \geq 0$

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} \right|^2 \mathrm{d}x \leq K < \infty, \ \forall\ 1 \leq i \leq N.$$

Ou seja, é possível mostrar que $\gamma(v)$ é uma órbita limitada na topologia de $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$. Como estamos em um sistema gradiente, $\gamma(v)$ é relativamente compacta (veja [16, 17]) e isto implica que o conjunto ω-limite $\omega(v)$ é diferente de vazio (Lema 4.1.3).

Verifiquemos então que $u \in \Lambda$. Se $u \in \omega(v)$ temos que existe uma sequência $t_n \longrightarrow \infty$ tal que

$$T(t_n)v \overset{H^1(\Omega)}{\longrightarrow} u.$$

Novamente por estarmos em um sistema gradiente temos que $\omega(v) \subset \mathcal{A}$, isto é, $u \in \omega(v)$ é solução de um problema elítico, assim usando a Estimativa de Amann e com contas análogas às feitas no Lema 4.1.2 concluímos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Como $T(t)v \in \Lambda$ para todo $t \geq 0$ temos que $\alpha \leq T(t_n)v \leq \beta$ para todo n, logo $\alpha \leq u \leq \beta$ q.t.p. sobre $\overline{\Omega}$, mas $u \in W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, ou seja, podemos considerar que $\alpha \leq u \leq \beta$ sobre $\overline{\Omega}$. Como o funcional E é decrescente ao longo de suas órbitas (Proposição 3.1.2) temos que

$$E(u) \leq E(v) < \varepsilon_0 - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega).$$

Ainda
$$\int_{S_l} T(t_n)v \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} < 0$$
para todo n, daí temos que

$$\int_{S_l} u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leq 0$$

e se a igualdade ocorrer chegamos em uma contradição com a definição do ε_0, do mesmo modo como foi feito no Lema 3.2.1. Analogamente temos que

$$\int_{S_r} u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} > 0.$$

Logo $\omega(v) \subset \Lambda$. Como $\omega(v) \subset \mathcal{A}$, temos que $\omega(v) \subset \overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$ e assim concluímos que $\overline{\Lambda} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, pois $\omega(v) \neq \emptyset$.

Como já vimos, Λ é invariante em relação ao fluxo $T(t)$ assim como $\overline{\Lambda}$, e facilmente vemos que $\mathcal{A}$ também é invariante em relação a $T(t)$, assim podemos dizer que
$$T(t)(\overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}) = \overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}.$$

Mostremos agora que $\overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$ é compacto. Note que como $T(t)$ é compacto para cada $t \geq 0$ e $\overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$ é limitado (Teorema 4.1.2), é suficiente mostrarmos que $\overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$ é fechado para concluirmos que o mesmo é compacto. Mostremos então que $\mathcal{A}$ é fechado.

Considere uma sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{A}$ tal que $u_n \longrightarrow u$. Como u_n é uma solução de equilíbrio do problema (1.4.1) para todo n temos que u_n é ponto crítico do funcional E, ou seja, $\delta E(u_n)\phi = 0$ para todo n e toda função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Sendo E um funcional duas vezes continuamente diferenciável e $\delta E(u_n) \longrightarrow 0$ chegamos que u é também um ponto crítico de E, isto é, $u \in \mathcal{A}$. Logo $\mathcal{A}$ é fechado.

Portanto $\overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$ é compacto.

Como E é um funcional contínuo temos que existe $e_0 \in \overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$ tal que

$$E(e_0) \leq E(v), \quad \forall\ v \in \overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}.$$

Ou seja, E assume um mínimo $e_0 \in \overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$. Mostremos agora que e_0 é um ponto de mínimo em Λ.

Se e_0 não é um ponto de mínimo de E em Λ, existe $v_1 \in \Lambda$ tal que

$$E(v_1) < E(e_0).$$

Novamente $\omega(v_1) \subset \overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$ e para todo $t > 0$ temos que, $E(T(t)v_1) \leq E(v_1) < E(e_0)$. Daí se $u \in \omega(v_1)$ temos que $u \in \Lambda \cap \mathcal{A} \subset \overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$ e

$$E(u) \leq E(T(t)v_1) \leq E(v_1) < E(e_0),$$

o que é um absurdo, pois e_0 é um ponto de mínimo de E em $\overline{\Lambda} \cap \mathcal{A}$. Logo e_0 é ponto de mínimo de E em Λ.

Mostremos agora que e_0 é um mínimo local de E em Λ, para isso provaremos que e_0 é um ponto interior de Λ. Afirmamos então que

$$e_0 \in \bigcap_{j=1}^{4} \Lambda_j$$

onde Λ_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ são subconjuntos de $W^{1,p}(\Omega)$ dados por

$$\Lambda_1 = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \mid \alpha < u(x) < \beta,\ x \in \overline{\Omega} \right\}$$

$$\Lambda_2 = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \mid \int_{S_l} u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} < 0 \right\}$$

$$\Lambda_3 = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \mid \int_{S_r} u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} > 0 \right\}$$

$$\Lambda_4 = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \mid E(u) < \varepsilon_0 - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega) \right\}.$$

Como E é contínuo, Λ_4 é aberto e temos que

$$E(e_0) \leq \varepsilon_0 - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega).$$

Se ocorrer a igualdade chegamos em um absurdo pois aí, para todo $v \in \Lambda$, teríamos que

$$E(v) \geq E(e_0) = \varepsilon_0 - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega).$$

Logo $e_0 \in \Lambda_4$.

Temos também que Λ_2 e Λ_3 são abertos pois $I_1, I_2 : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$I_1(u) = \int_{S_l} u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \ \text{ e } \ I_2(u) = \int_{S_r} u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}$$

são funcionais contínuos. De fato

$$
\begin{aligned}
|I_1(u)| &\leq \int_{S_l} |u| \; \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&\leq \left(\int_{S_l} 1^{p'} \; \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{S_l} |u|^p \; \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\mathcal{H}^{N-1}(S_l) \right)^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \left(\mathcal{H}^{N-1}(S_l) \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)} \right) \\
&= \left(\mathcal{H}^{N-1}(S_l) \right)^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

Analogamente mostra-se que I_2 é contínuo. Com os mesmos argumentos usados no Lema 3.2.1 concluímos que $e_0 \in \Lambda_2 \cap \Lambda_3$.

Resta-nos então mostrar que Λ_1 é aberto e que $e_0 \in \Lambda_1$. Como $p > N$ temos que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, então para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$
||v||_{C(\overline{\Omega})} \leq K||v||_{W^{1,p}(\Omega)}, \tag{4.2.1}
$$

com K dependendo somente de p, N e Ω.

Seja $v_0 \in \Lambda_1$ então podemos considerar que $v_0 \in C(\overline{\Omega})$ e temos que

$$
\epsilon_1 = \min \left\{ \inf_{x \in \overline{\Omega}} v_0(x) - \alpha, \beta - \sup_{x \in \overline{\Omega}} v_0(x) \right\}
$$

é um valor positivo.

Agora, se $\epsilon = \dfrac{\epsilon_1}{K}$ afirmamos que

$$
B(v_0, \epsilon) = \left\{ v \in W^{1,p}(\Omega) \mid ||v - v_0||_{W^{1,p}(\Omega)} < \epsilon \right\} \subset \Lambda_1.
$$

De fato, tome $v \in B(v_0, \epsilon)$, então por (4.2.1)

$$
\frac{1}{K}||v - v_0||_{C(\overline{\Omega})} \leq ||v - v_0||_{W^{1,p}(\Omega)} < \epsilon,
$$

ou seja

$$
\sup_{x \in \Omega} |v(x) - v_0(x)| < K\epsilon = \epsilon_1
$$

assim, para todo $x \in \overline{\Omega}$ temos que

$$
|v(x) - v_0(x)| < \epsilon_1 \Rightarrow v_0(x) - \epsilon_1 < v(x) < \epsilon_1 + v_0(x). \tag{4.2.2}
$$

Mas para todo $x \in \overline{\Omega}$

$$v_0(x) - \epsilon_1 \geq v_0(x) - \inf_{x \in \overline{\Omega}} v_0(x) + \alpha \geq \alpha$$

e

$$\epsilon_1 + v_0(x) \leq v_0(x) + \beta - \sup_{x \in \overline{\Omega}} v_0(x) \leq \beta.$$

Substituindo estas duas desigualdades em (4.2.2), concluímos que

$$\alpha < v(x) < \beta, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \Rightarrow v \in \Lambda_1,$$

e isto mostra que Λ_1 é aberto.

Sabemos que $\alpha \leq e_0 \leq \beta$ em $\overline{\Omega}$. Agora suponha que exista $x \in \text{int}(\Omega)$ tal que

$$e_0(x) = \beta.$$

Como $e_0 \in \mathcal{A}$ podemos utilizar o Teorema 1.2.3 (Princípio do Máximo Elítico) e chegamos que $e_0 \equiv \beta$ em $\overline{\Omega}$, o que contradiz o fato de $e_0 \in \Lambda_2 \cap \Lambda_3$.

Se $e_0(x_0) = \beta$ para algum $x_0 \in \partial\Omega$ o Lema 1.2.4 (Lema de Hopf) nos dá que

$$0 < \frac{\partial e_0(x_0)}{\partial \nu} = \frac{g(e_0(x_0))}{a(x_0)} = \frac{g(\beta)}{a(x_0)} = 0,$$

o que é um absurdo. Logo $e_0 < \beta$ em $\overline{\Omega}$. Analogamente mostra-se que $\alpha < e_0$ em $\overline{\Omega}$. Portanto

$$\alpha < e_0 < \beta \text{ em } \overline{\Omega}$$

e e_0 é um ponto interior de Λ. Segue que e_0 é um minimizante local de E em Λ.

Agora, como $e_0 \in \text{int}(\Lambda)$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(e_0, \epsilon) = \left\{ v \in W^{1,p}(\Omega); \quad \|v - e_0\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \epsilon \right\} \subset \Lambda.$$

Ou seja, e_0 é um mínimo local de E em $W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Observação 4.2.2. *Temos que e_0 não é uma função constante pois $e_0 \in \Lambda$, em particular, $e_0 \in \Lambda_2 \cap \Lambda_3$. Isto exige que e_0 troque de sinal ao longo de $\overline{\Omega}$.*

Capítulo 5

Condições suficientes

Dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e suave, o interesse deste capítulo é dar condições suficientes sobre a função a para que o problema (1.4.1) possua solução de equilíbrio e_0 não constante e estável em $W^{1,p}(\Omega)$, $p > N$.

A idéia será aplicar o Teorema 2.2.1 para o nosso problema, para isso, devemos verificar que (1.4.1) satisfaz (h1)-(h4) e que o funcional de energia E associado ao problema (1.4.1) possui um mínimo local.

As hipóteses (h1)-(h4) são discutidas na seção 5.2, enquanto que na seção 5.1 exibimos as condições suficientes sobre a função a para que Λ seja diferente de vazio. Assim, aplicando o Teorema 4.2.1 concluímos que E possui um mínimo local em $W^{1,p}(\Omega)$ pertencente a Λ.

5.1 As condições sobre a

Teorema 5.1.1. *Considere um domínio qualquer $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e suave, e suponha que a condição de área $G(\alpha) = G(\beta)$ ocorra, sendo*

$$G(u) = \int_0^u g(s)\ \mathrm{d}s,$$

e g satisfaz $(H_0), (H_1)$ e (H_2). Então existe $a : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva e suave tal que $\Lambda \neq \emptyset$.

Observação 5.1.2. *A função de difusibilidade $a : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, que em última instância determina a existência de padrões para o problema em questão, apresenta o seguinte comportamento geométrico: é suficientemente grande em duas regiões disjuntas de $\overline{\Omega}$ e, por outro lado, suficientemente pequena em uma região tubular que separa as duas primeiras. Chamamos esta região tubular de camada de transição. Vale lembrar que estas condições são apenas suficientes para a existência de padrões.*

Além disso, como a função de difusibilidade facilita (na região em que a for maior) e dificulta (na região em que a for menor) a difusão da concentração de uma substância, por exemplo, a função a acima deixa claro o seu papel: separar e manter de maneira estável duas concentrações estáveis e constantes, quais sejam, os zeros de g.

Demonstração. (Teorema 5.1.1) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave, e considere dois subdomínios $\Omega_l \subset \Omega$ e $\Omega_r \subset \Omega$ com fechos disjuntos ($\overline{\Omega_l} \cap \overline{\Omega_r} = \emptyset$) e suaves tais que

$$S_l = \partial\Omega \cap \partial\Omega_l \text{ e } S_r = \partial\Omega \cap \partial\Omega_r$$

satisfaçam

$$\mathcal{H}^{N-1}(S_l) \neq 0 \text{ e } \mathcal{H}^{N-1}(S_r) \neq 0.$$

Por simplicidade, assumiremos em Ω, ser possível a seguinte construção: tome um ponto $P = (x_0, y_0) \in \Omega$ com $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}^{N-1}$ tal que $(x_0, x) \notin (\overline{\Omega_l} \cup \overline{\Omega_r})$ para todo $x \in \mathbb{R}^{N-1}$ e seja

$$T = \left\{(x_0, x) \mid x \in \mathbb{R}^{N-1}\right\}$$

uma superfície que atravessa Ω interceptando a $\partial\Omega$ ortogonalmente.

Seja $S = \overline{\Omega} \cap T$ e se $m_1 = \operatorname{dist}(x_0, \Omega_l)$ e $m_2 = \operatorname{dist}(x_0, \Omega_r)$, considere

$$m = \min\{m_1, m_2\} > 0$$

Definimos agora a *função distância sinal*

$$\mathrm{d}(x, S) = \begin{cases} \operatorname{dist}(x, S) & \text{se } x_1 \geq x_0 \\ -\operatorname{dist}(x, S) & \text{se } x_1 < x_0 \end{cases}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $\operatorname{dist}(x, S)$ denota a *função distância* (veja [9]).

Sabemos que existe um número positivo δ satisfazendo

$$m > \frac{\delta}{2} > 0. \tag{5.1.1}$$

Definimos então o conjunto

$$Q_\delta = \left\{x \in \overline{\Omega} \mid |\,\mathrm{d}(x, S)| < \frac{\delta}{2}\right\},$$

e (5.1.1) garante que

$$\Omega_l \cap Q_\delta = \emptyset \text{ e } \Omega_r \cap Q_\delta = \emptyset.$$

Podemos tomar $\delta > 0$, suficientemente pequeno, tal que

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial Q_\delta \cap \partial\Omega) < \mathcal{H}^{N-1}(S_l), \tag{5.1.2}$$

essa condição para δ será determinante no final desta demonstração.

Consideremos agora a seguinte função $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\xi(t) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } t \leq -\dfrac{\delta}{2} \\ \dfrac{\alpha+\beta}{2} + \dfrac{(\beta-\alpha)}{\delta}t, & \text{se } -\dfrac{\delta}{2} < t < \dfrac{\delta}{2} \\ \beta, & \text{se } t \geq \dfrac{\delta}{2} \end{cases}$$

e afirmamos que $w_0(x) = \xi(\mathrm{d}(x,S)) \in \Lambda$, desde que a satisfaça determinadas condições.

Mostremos inicialmente que $w_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Observe que $w_0 \in C(\overline{\Omega})$ logo $w_0 \in L^p(\Omega)$ e facilmente vemos que

$$\frac{\partial w_0}{\partial x_i} = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathrm{d}(x,S) < -\dfrac{\delta}{2} \\ \dfrac{(\beta-\alpha)}{\delta}\dfrac{\partial\,\mathrm{d}}{\partial x_i}, & \text{se } -\dfrac{\delta}{2} < \mathrm{d}(x,S) < \dfrac{\delta}{2} \\ 0, & \text{se } \mathrm{d}(x,S) > \dfrac{\delta}{2} \end{cases}$$

é a derivada parcial de w_0 em relação a x_i (no sentido fraco). Para mostrarmos que esta pertence a $L^p(\Omega)$ usaremos fortemente que $|\nabla\,\mathrm{d}| = 1$, para este resultado veja [9]. Assim temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|\frac{\partial w_0}{\partial x_i}\right|^p \mathrm{d}x &= \int_{Q_\delta} \left|\frac{\beta-\alpha}{\delta}\right|^p \left|\frac{\partial\,\mathrm{d}}{\partial x_i}\right|^p \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{Q_\delta} \left|\frac{\beta-\alpha}{\delta}\right|^p |\nabla\,\mathrm{d}|^p\ \mathrm{d}x \\ &= \mathcal{H}(Q_\delta)\left|\frac{\beta-\alpha}{\delta}\right|^p < \infty. \end{aligned}$$

Segue que $w_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Agora, por construção temos que $\alpha \leq w_0(x) \leq \beta$

para todo $x \in \overline{\Omega}$. Além disso

$$\begin{aligned}\int_{S_l} w_0 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} &= \int_{S_l} \xi(\mathrm{d}(\cdot, S)) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_{S_l} \xi(-\operatorname{dist}(\cdot, S)) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \alpha\mathcal{H}^{N-1}(S_l) < 0,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{S_r} w_0 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} &= \int_{S_r} \xi(\mathrm{d}(\cdot, S)) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_{S_r} \xi(\operatorname{dist}(\cdot, S)) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \beta\mathcal{H}^{N-1}(S_r) > 0.\end{aligned}$$

Sejam S^- e S^+ porções suaves de $\partial\Omega$ definidas da seguinte maneira:

$$S^- \cup S^+ = \partial\Omega \backslash (\partial Q_\delta \cap \partial\Omega),$$

de tal forma que $S^- \cap S_l \neq \emptyset$ e $S^+ \cap S_r \neq \emptyset$. Em outras palavras, S^- e S^+ são as componentes conexas de $\partial\Omega\backslash(\partial Q_\delta \cap \partial\Omega)$ que intersectam S_l e S_r respectivamente.

Temos que

$$E(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\nabla w|^2 \ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} G(w) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1},$$

como w_0 é constante sobre $\Omega\backslash Q_\delta$

$$\begin{aligned}E(w_0) &= \frac{1}{2}\int_{Q_\delta} a(x)|\nabla w_0|^2 \ \mathrm{d}x - \int_{\partial Q_\delta \cap \partial\Omega} G(w_0) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &- \int_{S^-} G(w_0) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \int_{S^+} G(w_0) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \frac{1}{2}\int_{Q_\delta} a(x)|\nabla w_0|^2 \ \mathrm{d}x - \int_{\partial Q_\delta \cap \partial\Omega} G(w_0) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &- G(\alpha)\mathcal{H}^{N-1}(S^-) - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(S^+).\end{aligned}$$

Como $G(\alpha) = G(\beta)$ e $S^- \cup S^+ = \partial\Omega\backslash(\partial Q_\delta \cap \partial\Omega)$, temos que

$$E(w_0) = \frac{1}{2}\int_{Q_\delta} a(x)|\nabla w_0|^2 \ \mathrm{d}x - \int_{\partial Q_\delta \cap \partial\Omega} G(w_0) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega\backslash(\partial Q_\delta \cap \partial\Omega)).$$

Para mostrarmos a desigualdade que caracteriza Λ

$$E(w_0) < \varepsilon_0 - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega), \tag{5.1.3}$$

é suficiente mostrar que

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 + \int_{\partial Q_\delta \cap \partial\Omega} G(w_0)\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} &> \frac{1}{2}\int_{Q_\delta} a(x)|\nabla w_0|^2\ \mathrm{d}x \\ &+ G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial Q_\delta \cap \partial\Omega). \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Pois daí

$$\begin{aligned} E(w_0) &= \frac{1}{2}\int_{Q_\delta} a(x)|\nabla w_0|^2\ \mathrm{d}x - \int_{\partial Q_\delta \cap \partial\Omega} G(w_0)\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &- G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega \backslash (\partial Q_\delta \cap \partial\Omega)) \\ &< \varepsilon_0 - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial Q_\delta \cap \partial\Omega) - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega \backslash (\partial Q_\delta \cap \partial\Omega)) \\ &= \varepsilon_0 - G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Portanto, basta darmos condições sobre a em $\overline{\Omega}$ para que (5.1.4) ocorra. Antes disto, verifiquemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{Q_\delta} a(x)|\nabla w_0|^2\ \mathrm{d}x &< a_M^\delta \frac{1}{2}\int_{Q_\delta} |\nabla w_0|^2\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{a_M^\delta}{2}\int_{Q_\delta} \left|\nabla\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{\delta}\,\mathrm{d}(x,S)\right)\right|^2\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{a_M^\delta}{2}\frac{(\beta-\alpha)^2}{\delta^2}\int_{Q_\delta} |\nabla\,\mathrm{d}(x,S)|^2\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

sendo $a_M^\delta = \max_{x \in Q_\delta} a(x)$. Daí, como $|\nabla\,\mathrm{d}(x,S)| = 1$ q.t.p. em Q_δ, temos que

$$\frac{1}{2}\int_{Q_\delta} a(x)|\nabla w_0|^2\ \mathrm{d}x < \frac{a_M^\delta}{2}\frac{(\beta-\alpha)^2}{\delta^2}\mathcal{H}^N(Q_\delta). \tag{5.1.5}$$

Sabemos que

$$\varepsilon_0 = G(\beta)\min\left\{\mathcal{H}^{N-1}(S_l)\min\left\{1, \rho_2(\Omega_l)a_m^{\Omega_l}\right\}, \mathcal{H}^{N-1}(S_r)\min\left\{1, \rho_2(\Omega_r)a_m^{\Omega_r}\right\}\right\}.$$

Daremos as seguintes condições sobre a função a nos conjuntos Ω_l e Ω_r:

$$a_m^{\Omega_l} > \frac{1}{\rho_2(\Omega_l)} \quad \text{e} \quad a_m^{\Omega_r} > \frac{1}{\rho_2(\Omega_r)}. \tag{5.1.6}$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $\mathcal{H}^{N-1}(S_l) \leq \mathcal{H}^{N-1}(S_r)$. Assim

$$\varepsilon_0 = G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(S_l).$$

Devemos mostrar que

$$G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(S_l) > \frac{1}{2}\int_{Q_\delta} a(x)|\nabla w_0|^2 \ \mathrm{d}x + G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial Q_\delta \cap \partial\Omega),$$

mas por (5.1.5) é suficiente dar condições sobre a em Q_δ e obter

$$G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(S_l) > \frac{a_M^\delta}{2}\frac{(\beta-\alpha)^2}{\delta^2}\mathcal{H}^N(Q_\delta) + G(\beta)\mathcal{H}^{N-1}(\partial Q_\delta \cap \partial\Omega).$$

Lembre que δ foi tomado de modo que

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial Q_\delta \cap \partial\Omega) < \mathcal{H}^{N-1}(S_l) \ \ \text{(veja (5.1.2))}.$$

Assim, basta tomarmos a em Q_δ de modo que

$$0 < a_M^\delta < \frac{G(\beta)\left(\mathcal{H}^{N-1}(S_l) - \mathcal{H}^{N-1}(\partial Q_\delta \cap \partial\Omega)\right)2\delta^2}{(\beta-\alpha)^2\mathcal{H}^N(Q_\delta)}. \tag{5.1.7}$$

Logo se $a : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ é qualquer função suave e positiva que satisfaz (5.1.6) e (5.1.7) nós concluímos que $w_0 \in \Lambda$ e portanto $\Lambda \neq \emptyset$ e pelo Teorema 4.2.1, Λ possui um mínimo local do funcional de energia E. □

5.2 As hipóteses (h1)-(h4)

A hipótese (h1) foi discutida na Observação 2.1.4. A hipótese (h2) é exatamente a Proposição 3.1.2. Resta-nos então verificar as hipóteses (h3) e (h4), no entanto estas dependem da posição do espectro do operador linear proveniente do problema linearizado de (1.4.1) em torno da solução de equilíbrio e_0.

Tal problema linearizado é

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \operatorname{div}(a(x)\nabla u), \quad x \in \Omega \\ a(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} &= g'(e_0)u, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{5.2.1}$$

Analisaremos o espectro do operador linear $\mathcal{L}$, que é dado por

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}(\phi) = \operatorname{div}(a(x)\nabla\phi) \\ D(\mathcal{L}) = \left\{\phi \in W^{2,p}(\Omega) |\ a(x)\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} - g'(e_0)\phi = 0,\ x \in \partial\Omega\right\}\end{array}\right\} \tag{5.2.2}$$

Podemos considerar uma extensão do operador $\mathcal{L}$ ao espaço $W^{1,2}(\Omega)$. Chamemos esta extensão de $\bar{\mathcal{L}}$. É óbvio que $\sigma(\mathcal{L}) \subset \sigma(\bar{\mathcal{L}})$ e o Teorema 11.3 de [14] mostra que $\sigma(\bar{\mathcal{L}})$ é um conjunto discreto de autovalores reais.

Então, se λ é um autovalor de $\mathcal{L}$ e φ é uma autofunção associada a λ, temos que

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda\varphi = \operatorname{div}(a(x)\nabla\varphi), & x \in \Omega \\ & \\ a(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = g'(e_0)\varphi, & x \in \partial\Omega.\end{array}\right\} \tag{5.2.3}$$

Se multiplicarmos esta equação por φ e integrarmos em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega \varphi^2 \ \mathrm{d}x &= \int_\Omega \varphi\nabla a\nabla\varphi + a\varphi\Delta\varphi \ \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \varphi\nabla a\nabla\varphi \ \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla(a\varphi)\nabla\varphi \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}a\varphi \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &= -\int_\Omega a|\nabla\varphi|^2 \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g'(e_0)\varphi^2 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}\end{aligned}$$

Como e_0 é um ponto de mínimo de E em $W^{1,p}(\Omega)$ (Teorema 5.1.1) devemos ter

$$\delta E(e_0,\psi) = 0 \text{ e } \delta^2 E(e_0)(\psi,\psi) \geq 0,\ \forall\ \psi \in W^{1,p}(\Omega).$$

Com contas análogas às feitas no Capítulo 3, chegamos que

$$\delta^2 E(e_0,\psi,\psi) = \int_\Omega a|\nabla\psi|^2 \ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} g'(e_0)\psi^2 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \geq 0. \tag{5.2.4}$$

Agora, como $\varphi \not\equiv 0$ temos que

$$\lambda = \frac{-\displaystyle\int_\Omega a|\nabla\varphi|^2 \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g'(e_0)\varphi^2 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}}{\displaystyle\int_\Omega \varphi^2 \ \mathrm{d}x} \leq 0.$$

Segue que $\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots\}$ com

$$0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$$

Daí já podemos concluir que não estamos no caso contemplado pela hipótese (h4)(ii).

Se $\lambda_1 < 0$ temos que $\sigma(\mathcal{L}) \subset \{\mathrm{Re}\,\lambda \leq \lambda_1\}$ (caso abordado pela hipótese (h4)(i)), ou seja, o espectro de $\mathcal{L}$ está no lado esquerdo do plano complexo, assim é possível concluir que e_0 é assintoticamente estável em $W^{1,p}(\Omega)$, logo estável. Este resultado pode ser visto em [3] ou [14].

Resta-nos agora analisar o caso em que $\lambda_1 = 0$. Devemos mostrar que, neste caso, o autovalor $\lambda_1 = 0$ é um autovalor simples de $\mathcal{L}$ (veja Definição 2.1.5). Com isso concluímos (h3) e consequentemente (h4)(iii) pois como a não linearidade g é uma função de classe C^1 e $\sigma(\mathcal{L}) \subset \{\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0\}$ e $\sigma(\mathcal{L}) \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda = 0\} = \{0\}$ temos que existe uma variedade local $\mathcal{M}$ que é invariante, unidimensional e tangente em e_0 na direção da autofunção associada ao autovalor $\lambda_1 = 0$, com a propriedade de que e_0 é estável em $W^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, é estável em $\mathcal{M}$. Este é um importante resultado que tem sido utilizado em diversos trabalhos, citamos por exemplo [2, 12, 18, 1]. Sua demonstração não é nada trivial e, para maiores detalhes, sugerimos [12, 19, 20].

Mostremos então que $\lambda_1 = 0$ é um autovalor simples de $\mathcal{L}$.

Para tal demonstração seguiremos os passos realizados em [3, 18]. Usaremos o famoso Teorema de Krein-Rutman que diz o seguinte: se existe um cone fechado C com interior não vazio que satisfaz $C \cap (-C) = \{0\}$ e um operador linear T compacto, tal que $T(C \setminus \{0\}) \subset \mathrm{int}(C)$, então existe $\varphi_1 > 0$ com $\|\varphi_1\| = 1$ e $\lambda_1 > 0$ tal que $T\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$. Além disso temos que

$$\lambda_1 = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\}$$

e λ_1 é simples.

Consideremos o operador $T : C^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ definido por $T(\phi) = v$, onde v é a única solução de

$$\left.\begin{array}{ll} -\operatorname{div}(a(x)\nabla v) + Kv = \phi, & x \in \Omega \\ -a(x)\dfrac{\partial v}{\partial \nu} - (K - g'(e_0))v = 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{5.2.5}$$

Onde K é uma constante positiva tal que $K - g'(e_0) > 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.

A existência de solução para cada $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$, e sua unicidade, seguem de resultados clássicos que podem ser vistos em [9].

Facilmente vemos que T é linear, mostremos que T é compacto. Seja $B \subset C^1(\overline{\Omega})$ um conjunto limitado, devemos verificar que $T(B)$ é relativamente compacto. Seja $\psi \in B$ então $T(\psi)$ é solução de (5.2.5) e daí temos que

$$\|T(\psi)\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \overset{(*)}{\leq} C_1 \|\psi\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} \overset{(**)}{\leq} C_2 \|\psi\|_{C^1(\overline{\Omega})} \overset{(***)}{\leq} M.$$

Em $(*)$ foi usado que $T(\psi)$ satisfaz a estimativa de Schauder (veja [21], pag. 98). Em $(**)$ usamos o mergulho (1.1.5) do Teorema 1.1.3 com $k = 0$. Finalmente em $(***)$ foi usado que B é limitado. Assim, temos que $T(B) \subset C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e é limitado. Agora temos que

$$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \overset{(1.1.2)}{\hookrightarrow} C^2(\overline{\Omega}) \overset{(1.1.1)}{\hookrightarrow} C^1(\overline{\Omega}),$$

isto é, $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ está compactamente contido em $C^1(\overline{\Omega})$. Logo $T(B)$ é relativamente compacto em $C^1(\overline{\Omega})$. Portanto T é compacto.

Um *cone* C em um espaço de Banach é um conjunto fechado por adição e multiplicação por escalares não-negativos. Seja

$$C = \left\{\phi \in C^1(\overline{\Omega}) \mid \phi \geq 0\right\}$$

e mostremos que C é um cone fechado com

$$\operatorname{int} C \neq \emptyset \text{ e } C \cap (-C) = \{0\}.$$

Facilmente vemos que C é um cone, pois dados $u, v \in C$ e $\mu \in \mathbb{R}^+$ temos que

$$u + \mu v \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ e } u + \mu v \geq 0 \Rightarrow u + \mu v \in C.$$

Considere uma sequência $\{\phi_n\} \subset C$ tal que $\phi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi$ em $C^1(\overline{\Omega})$, então

$$0 \leq \|\phi_n - \phi\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq c\,\|\phi_n - \phi\|_{C^1(\overline{\Omega})} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Segue que

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} |\phi_n(x) - \phi(x)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo $|\phi_n(x) - \phi(x)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada $x \in \overline{\Omega}$, como $\phi_n \geq 0$ para todo n, temos que $\phi \geq 0$, e portanto $\phi \in C$ o que mostra que C é fechado.

Ora, tomando $\phi \equiv 1$ chegamos que $\operatorname{int} C \neq \emptyset$.

Mostremos agora que $T(C\setminus\{0\}) \subset \operatorname{int} C$.

Tome $\phi \in C\setminus\{0\}$, devemos mostrar que $T(\phi)(x) = v(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Suponha que exista $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que

$$v(x_0) \leq 0. \tag{5.2.6}$$

Como $\phi \in C$ e $\phi \not\equiv 0$, existe $\bar{x} \in \overline{\Omega}$ tal que $\phi(\bar{x}) > 0$.

Temos então dois casos:

Caso 1: Se v é constante, então

$$\phi = -\operatorname{div}(a\nabla v) + Kv = Kv \Rightarrow v(x) = \frac{\phi(x)}{K} \geq 0, \ \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Em particular

$$v(x_0) = v(\bar{x}) = \frac{\phi(\bar{x})}{K} > 0,$$

o que contraria (5.2.6). Logo v não é constante.

Caso 2: Se v não é constante seja

$$v_m = \min_{x\in\overline{\Omega}} v(x).$$

Sem perda de generalidade podemos supor que $v_m = v(x_0)$. Defina

$$w(x) = v(x) - v_m$$

então $w(x) \geq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $w(x_0) = 0$. Daí

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(a\nabla w) &= \operatorname{div}(a\nabla v) = Kv - \phi \\ &= Kv - Kv_m + Kv_m - \phi \\ &= Kw + Kv_m - \phi\end{aligned}$$

assim

$$\operatorname{div}(a\nabla w) - Kw = Kv_m - \phi \leq 0,$$

pois $Kv_m \leq 0$ e $-\phi \leq 0$.

Temos que x_0 é um ponto de mínimo não positivo de w, como w não é constante, pelo Princípio do Máximo temos que $x_0 \in \partial\Omega$. Pelo Lema de Hopf, temos que

$$\frac{\partial w(x_0)}{\partial \nu} < 0. \tag{5.2.7}$$

Da definição de w obtemos que $v(x_0) = v_m \leq 0$. Daí, juntando isso a (5.2.7)

$$0 > \frac{\partial w(x_0)}{\partial \nu} = \frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu} = -\frac{(K - g'(e_0))v(x_0)}{a(x_0)} \geq 0,$$

o que é um contradição.

Como os dois casos não são possíveis chegamos em outra contradição. Logo $v(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, ou seja, $v \in \operatorname{int} C$ e portanto $T(C\setminus\{0\}) \subset \operatorname{int} C$.

Estamos assim, nas condições do Teorema de Krein-Rutman para o operador

T. Mostremos agora que $\dfrac{1}{K}$ é um autovalor simples de T. Considere o seguinte operador linear

$$\left.\begin{array}{l} S(v) = -\operatorname{div}(a\nabla v) + Kv \\ D(S) = \left\{ v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid -a(x)\dfrac{\partial v}{\partial \nu} - (K - g'(e_0))v = 0, x \in \partial\Omega \right\} \end{array}\right\}$$

então $S = T^{-1}$. Assim se $\lambda \neq 0$ é tal que $S(v) = \lambda v$, temos que

$$T(S(v)) = \lambda T(v) \Rightarrow T(v) = \frac{1}{\lambda} v.$$

Seja w_1 a autofunção associada ao autovalor $\lambda_1 = 0$ do operador $\mathcal{L}$. Temos que K é um autovalor de S com autofunção associada w_1, pois

$$S(w_1) = -\operatorname{div}(a\nabla w_1) + Kw_1 = -\mathcal{L}(w_1) + Kw_1 = -0w_1 + Kw_1 = Kw_1,$$

segue que $\dfrac{1}{K}$ é autovalor de T. Na verdade, $\dfrac{1}{K}$ é o maior autovalor de T. Com efeito, sejam $\lambda > 0$ e ψ autovalor e autofunção de T, respectivamente. Sabemos que $T(\psi) = v$ e $S(v) = \psi$, daí

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega \psi^2 \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega T(\psi)\psi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (-\operatorname{div}(a\nabla v) + Kv)\, v \, \mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega \operatorname{div}(a\nabla v) v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega Kv^2 \, \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\partial\Omega} a\frac{\partial v}{\partial \nu} v \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} + \int_\Omega a|\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega Kv^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial\Omega} (K - g'(e_0))v^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} + \int_\Omega a|\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega Kv^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega a|\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} g'(e_0)v^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\partial\Omega} Kv^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega Kv^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \delta^2 E(e_0, v, v) + \int_{\partial\Omega} Kv^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega Kv^2 \, \mathrm{d}x \\ &\geq \int_\Omega Kv^2 \, \mathrm{d}x = K \int_\Omega (T(\psi))^2 \, \mathrm{d}x \\ &= K\lambda^2 \int_\Omega \psi^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Segue que

$$K\lambda^2 - \lambda \leq 0,$$

logo

$$\lambda \leq \frac{1}{K}.$$

Logo $\frac{1}{K}$ é o maior autovalor de T e portanto é um autovalor simples de T. Isto implica que K é autovalor simples de S.

Assim é possível concluir que $\lambda_1 = 0$ é um autovalor simples de $\mathcal{L}$. De fato, suponha que existam u, v funções linearmente independentes tais que $u, v \in \mathrm{N}(\mathcal{L})$, então temos que

$$\mathcal{L}u = 0 \text{ e } \mathcal{L}v = 0,$$

mas

$$0 = \mathcal{L}u = \mathrm{div}(a\nabla u) = \mathrm{div}(a\nabla u) + Ku - Ku = -S(u) + Ku,$$

e isso implica que $S(u) = Ku$. Analogamente mostra-se que $S(v) = Kv$. Como K é autovalor simples de S temos que u e v são linearmente dependentes.

Temos também que a autofunção w_1, associada ao autovalor $\lambda_1 = 0$, não pertence a $\mathrm{Im}(\mathcal{L})$. Se pertencesse, existiria $u \in D(\mathcal{L})$ tal que $\mathcal{L}u = w_1$, ou seja

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{div}(a(x)\nabla u) = w_1, \ x \in \Omega \\ a(x)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g'(e_0)u, \ x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

Multiplicando ambos os lados da primeira equação por w_1 e integrando temos

$$\int_\Omega w_1^2 \ \mathrm{d}x = \int_\Omega w_1 \, \mathrm{div}(a(x)\nabla u) \ \mathrm{d}x.$$

Agora usando a Fórmula de Green e lembrando que $\mathcal{L}(w_1) = 0$ temos que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega w_1^2 \ \mathrm{d}x &= \int_\Omega w_1 \operatorname{div}(a(x)\nabla u) \ \mathrm{d}x - \int_\Omega u \operatorname{div}(a(x)\nabla w_1) \ \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (\nabla a \nabla u + a\Delta u) w_1 \ \mathrm{d}x - \int_\Omega (\nabla a \nabla w_1 + a\Delta w_1) u \ \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \nabla a \nabla u \ w_1 \ \mathrm{d}x - \int_\Omega (\nabla a \nabla u \ w_1 + a \nabla w_1 \nabla u) \ \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} w_1 a \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega \nabla a \nabla w_1 \ u \ \mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega (\nabla a \nabla w_1 \ u + a \nabla w_1 \nabla u) \ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} u a \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} w_1 a \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} u a \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_{\partial\Omega} g'(e_0) u w_1 \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\partial\Omega} g'(e_0) w_1 u \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Isso implica que $w_1 = 0$ q.t.p. em Ω, o que é um absurdo. Portanto $\lambda_1 = 0$ é autovalor simples de $\mathcal{L}$.

Com isso temos que nosso problema (1.4.1) satisfaz (h1)-(h4).

Finalmente, podemos enunciar o seguinte resultado:

Corolário 5.2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suficientemente suave satisfazendo $(H_0) - (H_2)$ e Ω_l, Ω_r e Q_δ como construídos acima. Se $a : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave que satisfaz* (5.1.6) *e* (5.1.7)*, então* (1.4.1) *possui pelo menos uma solução de equilíbrio não constante e estável em $W^{1,p}(\Omega)$, $p > N$.*

Temos assim, que a existência de padrões para o problema (1.4.1) está relacionada com o comportamento da função a em $\overline{\Omega}$. Vimos que se a for suficientemente grande nas regiões Ω_l e Ω_r, e pequena na região tubular Q_δ, a existência de tais soluções é garantida.

Referências Bibliográficas

[1] NASCIMENTO, A. S. *On the Role of Diffusivity in Some Stable Equilibria of a Diffusion Equation*. [S.l.]: Journal of Differential Equations 155, 231-244, 1999.

[2] CÒNSUL, N.; SOLÀ-MORALES, J. *Stability of Local Minima and Stable Nonconstant Equilibria*. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain: Journal of Differential Equations 157, 61-81, 1999.

[3] CÒNSUL, N. *On equilibrium solutions of diffusion equations with nonlinear boundary conditions*. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain: Z. Angew Math. Phys. 47, 194-209, 1995.

[4] MATANO, H. *Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations*. [S.l.]: Publ. Res. Inst. Math. Sci. 15, No. 2, 401-454, 1979.

[5] CASTEN, R. G.; HOLLAND, C. J. *Instability results for reaction-diffusion equation with Neumann boundary conditions*. [S.l.]: Journal of Differential Equations 27, 266-273, 1978.

[6] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1975.

[7] BREZIS, H. *Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications*. Segunda edição. Paris: MASSON, 1987.

[8] EVANS, L. *Partial Differential Equations*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1998.

[9] GILBARG, D.; TRUNDINGER, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[10] PROTTER, A.; WEINBERG, H. *Maximum Principles in Differential Equations*. Englewood Cliffs: New Jersey.

[11] GIAQUINTA, M.; HILDEBRANDT, S. *Calculus of Variations*. [S.l.]: Springer, 1996.

[12] CÒNSUL, N. *Equacions de Difusió em Condicions de Contorn no Lineals.* Department de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain: Ph.d thesis, 1997.

[13] ALIKAKOS, N. D. *Regularity end Asymptotic Behavior for the Second Order Parabolic Equation with Nonlinear Boundary Conditions.* [S.l.]: Journal of Differential Equations 39, 311-344, 1981.

[14] SMOLLER, L. *Shock waves end reaction-diffusion equations.* New York: Springer-Verlag, 1992.

[15] AMANN, H. *Nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions.* North-Holland, Amsterdam: New developments in differential equations, Mathematical Studies, p. 43-63, 1976.

[16] ZHENG, S. *Nonlinear evolution equations.* [S.l.]: Chapman and Hall/CRC monographs and surveys in pure and applied mathematics, 2004.

[17] HALE, J. K. *Asymptotic behavior of dissipative systems.* Rhode Island: Providence: American Mathematical Society, 1988.

[18] MOURA, R. J. *Existência de soluções estacionárias estáveis para equações de reação-difusão com condição de fronteira de Neumann não-linear: condições necessárias e condições suficientes.* UFSCar: Tese de Doutorado, 2004.

[19] HENRY, D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations.* New York: Lectures Notes in Mathematics, v. 840, Springer-Verlag, 1984.

[20] SIMONETT, G. *Center Manifolds for Quasilinear Reaction-Diffusion Systems.* [S.l.]: Differential and Integral Equations, Volume 8, no. 4, 753-796, 1995.

[21] PAO, C. V. *Nonlinear Parabolic end Elliptic Equations.* New York: Plenum Press, 1992.

[22] MADEIRA, G. F. *Um problema parabólico com condição de fronteira não-linear e peso indefinido: existência, regularidade, bifurcação e estabilidade de equilíbrios.* UFSCar: Tese de Doutorado, 2008.