UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Operadores de Calderón-Zygmund e o Teorema T1

Roxana Bedoya Prado

São Carlos - SP
Março - 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Operadores de Calderón-Zygmund e o Teorema T1

Roxana Bedoya Prado

Dissertação apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luís Antônio Carvalho dos Santos

São Carlos - SP
Março - 2009

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

P896oc

Prado, Roxana Bedoya.
Operadores de Calderón-Zygmund e o teorema T1 / Roxana Bedoya Prado. -- São Carlos : UFSCar, 2009.
136 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Análise harmônica. 2. Integrais Singulares. 3. BMO. 4. Fourier, Análise de. I. Título.

CDD: 515.2433 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luís Antônio Carvalho dos Santos
DM - UFSCar

Prof. Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp
DM - UFSCar

Prof. Dr. Evandro Raimundo da Silva
ICMC - USP

Aos meus pais Emperatriz e Teófilo.

Agradecimentos

A Deus pela constante companhia e por estar sempre iluminando meu caminho.

Aos meus pais, por todo amor, carinho, compreensão, apoio e incentivo em meus estudios.

Ao professor Luís Antônio Carvalho dos Santos, meu orientador, pela orientação e dedicação a este trabalho, pela confiança, amizade, bom humor e pela preocupação que sempre demonstrou por mim.

Aos profesores do Departamento de Matemática da UFSCar pelos ensinamientos matemáticos e pela amizade.

Aos amigos do DM pela amizade e incentivo.

E á CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos condições necessárias e suficientes para que um operador de tipo Calderón-Zygmund possa ser estendido a um operador limitado em L^2. Usando resultados de interpolação e condições de cancelamentos sobre o núcleo obter a limitação em L^p, para todo $1 < p < \infty$.

Palavras-chave: Análise Harmónica, Integrais Singulares, Operadores de Calderón-Zygmund, Teorema T1.

Abstract

In this work, we present necessary and sufficient conditions for that an operator of Calderón-Zygmund type can be extended to a bounded operator on L^2. By using results of interpolation and cancellation conditions on the kernel to obtain the boundeness in L^p, for all $1 < p < \infty$.

Keywords: Harmonic Analysis, Singular Integrals, Calderón-Zygmund Operators, the T1 theorem.

Sumário

Tábua de Notação

C_c^∞	:	funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto
$\mathcal{S}$	:	espaço das funções Schwartz
$\mathcal{S}'$	:	espaço das distribuições temperadas
$\mathcal{F}, \widehat{\ }$	:	transformada de Fourier
$\mathcal{F}^{-1}$	:	inversa da transformada de Fourier
$f * g$	:	convolução das funções f e g
$\vert\ \vert$	:	medida de Lebesgue
$\operatorname{supp}(f)$	:	suporte de f
Mf	:	função maximal de Hardy Littlewood
$P_t(x)$	:	núcleo de Poisson
$Q_t(x)$	:	conjugado harmônico de $P_t(x)$
v.p. K	:	valor principal da distribuição temperada K
Hf	:	transformada de Hilbert
$R_j f$	:	transformada de Riesz
$\langle\ ,\ \rangle$	:	emparelhamento entre distribuições temperadas e funções do espaco de Schwartz
T^*	:	operador adjunto
$H_a^1 t$	:	espaço atômico H^1
H^1	:	espaço de Hardy
BMO	:	espaço das funções de oscilação média limitada

Introdução

As integrais singulares são centrais para a análise harmônica abstracta, e são intimamente conectadas com o estudo de equações diferenciais parciais. A integral singular é um operador integral

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)\,dy \tag{0.0.1}$$

cuja função núcleo $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ é singular ao longo da diagonal $x = y$. Como tais integrais não podem em geral ser absolutamente integráveis, uma definição rigorosa deve definí-las como o limite da integral sobre $|x-y| > \epsilon$ quando $\epsilon \to 0$. Usualmente suposições adicionais são requeridas para obter resultados tal como sua limitação em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Dizemos que o núcleo $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ é um núcleo padrão se existe $\delta > 0$ talque

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n},$$

$$|K(x,y) - K(x,z)| \leq C\frac{|y-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \quad \text{se } |x-y| > 2|y-z|,$$

$$|K(x,y) - K(w,y)| \leq C\frac{|x-w|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \quad \text{se } |x-y| > 2|x-w|.$$

O objetivo principal deste trabalho é determinar condições necessárias e suficientes para que um operador, cujo núcleo é padrão, seja estendido a um operador limitado em L^2. Ou seja, determinar as condições adicionais sobre T para garantir que este se extenda a um operador limitado de L^2 em si mesmo; além disso, supondo que K é um núcleo padrão, determinar as condições adicionais sobre K tal que exista um operador limitado $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ tendo núcleo K no sentido de (0.0.1).

O operador integral singular mais conhecido é a transformada de Hilbert H. Este é dado por convolução contra o núcleo $K(x) = 1/(\pi x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Mais precisamente,

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon} \frac{1}{x-y}f(y)\,dy.$$

Para operadores maiores que 1, os operadores análogos a este são as transformadas de Riesz, o qual substituimos $K(x) = 1/x$ com $K_i(x) = \frac{x_i}{|x|^{n+1}}$, assim

$$R_jf(x) = c_n\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}f(x-y)\,dy, \quad 1 \leq j \leq n,$$

sendo x_i é a i-ésima componente de $x \in \mathbb{R}^n$.

No capítulo 1 são feitas algumas preliminares necessárias ao bom desenvolvimento deste trabalho, e são demonstrados o teorema de interpolação de Marcinkiewicz e a decomposição de Calderón-Zygmund, os quais são importantes para mostrar que uma integral singular com algumas propriedades é de tipo fraca $(1,1)$ e limitada em L^p. Neste capítulo se mostra que a Transformada de Hilbert é de tipo fraca $(1,1)$ e limitada em L^p.

No capítulo 2 estudamos as integrais singulares da forma

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)\, dy \tag{0.0.2}$$

com $\Omega \in L^1(S^{n-1})$, $\int_{S^{n-1}} \Omega(u) d\sigma(u) = 0$ e $y' = y/|y|$. Pelo método das rotações e das Transformadas de Riesz mostramos que se Ω é uma função em S^{n-1} com média zero tal que sua parte ímpar está em $L^1(S^{n-1})$ e sua parte par está em $L^q(S^{n-1})$ para algum $q > 1$, então a integral singular T em (0.0.2) é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.

Além disso, se adicionamos condições sobre o núcleo $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ como a condição do tamanho

$$\sup_{R>0} \int_{R<|x|<2R} |K(x)|\, dx \leq C,$$

a condição de suavidade

$$\sup_{y \neq 0} \int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq C$$

e a condição de cancelação

$$\int_{R_1<|x|<R_2} K(x)\, dx = 0, \quad \text{para todo} \quad R_1,\, R_2 > 0.$$

Então $T = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon} K(y) f(x-y)\, dy$ é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz a estimativa tipo fraca $(1,1)$. Observe que estas condições são satisfeitas pelas transformadas de Hilbert e de Riesz, assim este resultado é uma extensão de aqueles resultados.

Os operadores estudados nos capitulos 1 e 2 podem ser escritos como convoluções com distribuições temperadas. Diz-se que T é um operador de Calderón-Zygmund se T é limitado em L^2 e existe um núcleo padrão K tal que para $f \in L^2$ com suporte compacto,

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)\, dy, \quad x \notin \operatorname{supp}(f).$$

No capitulo 3 estudamos integrais singulares do tipo não convolução, mostramos que um operador de Calderón-Zygmund é limitado em L^p, $1 < p < \infty$, e é fraca $(1,1)$. Além disso damos alguns exemplos os quais têm núcleo padrão como: a integral de Cauchy ao longo de uma curva Lipschitz e Comutadores de Calderón.

No capítulo 4 estudamos o espaço $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ e são discutidos alguns de seus principais resultados e examinamos a razão de crecimento de funções em BMO com a desigualdade de John-Nirenberg.

A função $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dita função teste normalizada se $\mathrm{supp}\,(\phi) \subseteq B(0,1)$ e existe $N > 0$ tal que $\|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty} \leq 1$, para todo $|\alpha| \leq N$.

Um operador linear T é dito restritamente limitado se para toda ϕ função teste normalizada, $T(\phi^{x_0,R}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e existe $A > 0$ tal que $\|T(\phi^{x_0,R})\|_{L^2} \leq A\, R^{n/2}$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$, com A independente de x_0, R, ϕ.

Terminamos então nosso trabalho com o capítulo 5, no qual estudamos nosso principal resultado, o Teorema $T1$, o qual nos diz que um operador linear contínuo $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ associado com um núcleo padrão K, se estende a um operador limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, T e T^* são restritamente limitados. E damos algumas aplicações deste teorema.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Teoria das Distribuições e Análise de Fourier

Esta seção contém resultados de teoria das Distribuições que serão utilizados nos capítulos subseqüentes. A bibliografia básica utilizada nesta seção é [SW].

Começamos considerando o comportamento da transformada de Fourier nos espaços $L^1(\mathbb{R}^n)$ e $L^2(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de aspecto formal é mais facilmente descrita no contexto de distribuições; portanto extendemos sua definição ao espaço de distribuições temperadas.

1.1.1 Transformada de Fourier

A operação convolução é definida assim: Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sua convolução $h = f * g$ é a função cujo valor em $x \in \mathbb{R}^n$ é

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\, dy.$$

Dada uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, define sua transformada de Fourier por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx,$$

onde $x \cdot \xi$

O seguinte teorema é uma lista de propriedades da transformada de Fourier.

Teorema 1.1.1. *a)* $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1}$ *e f é contínua.*

b) $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$ *(Riemann-Lebesgue).*

c) $(f * g)\widehat{\ } = \hat{f}\hat{g}$.

d) $(\tau_h f)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i h\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$, *onde* $\tau_h f(x) = f(x-h)$; $(e^{2\pi i h\cdot x}f(x))^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi - h)$.

e) *Se* $g(x) = \lambda^{-n}f(\lambda^{-1}x)$, *então* $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\lambda\xi)$.

f) *Se* $x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Então* $\hat{f}$ *é diferenciável com respeito a* x_j *e*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = (-2\pi i x_j f)\widehat{\ }(\xi).$$

g) *Se* $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *então*

$$\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}(\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi).$$

Teorema 1.1.2. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *então* $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Demonstração: [SW] □

Teorema 1.1.3. *A transformada de Fourier é um operador unitário em* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: [SW] □

Teorema 1.1.4. *A inversa* $\mathcal{F}^{-1}$ *da transformada de Fourier pode ser obtida definindo-se*

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = (\mathcal{F}g)(-x)$$

para toda $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: [SW] □

Teorema 1.1.5. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$, *então* $h = f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$(\mathcal{F}h)(x) = (\mathcal{F}f)(x)(\mathcal{F}g)(x)$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: [SW] □

1.1.2 A Classe das Distribuições Temperadas

A idéia básica que motiva a teoria das distribuições está em considerá-las como funcionais lineares definidos sobre algum espaço de funções regulares, o chamado espaço das funções testes. O espaço das funções teste tem como pressuposto ser bem comportado com respeito as operações: diferenciação, transformação de Fourier, convolução, translação, etc. A escolha da topologia do espaço das funções teste permite a extensão natural destas operações ao espaço das distribuições. Tais operações permitem o estudo das propriedades das distribuições.

Definição 1.1.1. *Denotamos com $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções ϕ tais que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \phi(x)\right| < \infty \qquad (1.1.1)$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Dizemos que uma sequência $\phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \ldots$ converge para zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \phi_j(x)\right| \to 0, \quad \textit{quando}, \quad j \to \infty.$$

Definição 1.1.2. *Um funcional linear e contínuo em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas se denota com $\mathcal{S}'$.*

Teorema 1.1.6. *Se $\phi \in \mathcal{S}$ então $\mathcal{F}\phi \in \mathcal{S}$.*

Demonstração: [SW] □

Teorema 1.1.7. *Se $\phi, \psi \in \mathcal{S}$ então $\phi * \psi \in \mathcal{S}$.*

Demonstração: [SW] □

Algumas das propriedades de $\mathcal{S}$ e de sua topologia estão expressas no seguinte Teorema.

Teorema 1.1.8. *Valem as seguintes proposições*

a) *A aplicação $\phi(x) \to x^\alpha D^\beta \phi(x)$ é contínua em $\mathcal{S}$.*

b) *Se $\phi \in \mathcal{S}$ então $\lim_{h\to 0} \tau_h \phi(x) = \phi$ em $\mathcal{S}$.*

c) *Se $\phi \in \mathcal{S}$ e $h = (0, \ldots, h_i, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ então o seguinte limite ocorre em $\mathcal{S}$*

$$\frac{\phi - \tau_h \phi}{h_i} \to \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad \textit{quando } |h| \to 0.$$

d) *$\mathcal{S}$ é um espaço métrico.*

e) *A transformada de Fourier é um isomorfismo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$.*

f) *O espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}$.*

g) *$\mathcal{S}$ é um espaço separável.*

O próximo teorema exprime uma caracterização simples para as distribuições temperadas.

Teorema 1.1.9. *Um funcional linear L sobre $\mathcal{S}$ é uma distribuição temperada se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ e inteiros m, ℓ tais que*

$$|L(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq \ell,\, |\beta|\leq m} p_{\alpha,\beta}(\phi)$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$, onde $p_{\alpha,\beta}(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \phi(x)\right|$.

Demonstração: [SW] □

Teorema 1.1.10. *Se $u \in \mathcal{S}'$ e $\phi \in \mathcal{S}$ então a convolução $u*\phi$ define uma função em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, dada por $f(x) = \langle u, \tau_x \tilde{\phi}\rangle$, lentamente crescente com derivadas lentamente crescentes.*

Demonstração: [SW] □

Teorema 1.1.11. *Suponha que $B : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q \leq \infty$ seja um operador linear limitado e que comuta com translações. Então, existe uma única distribuição temperada u tal que $B\phi = u * \phi$ para toda $\phi \in \mathcal{S}$.*

Demonstração: [SW] □

Denotamos por (L^p, L^q) o espaço das distribuições temperadas $u \in \mathcal{S}'$ tais que existe uma constante positiva A tal que $\|u * \phi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ para toda $\phi \in \mathcal{S}$. O Teorema 1.1.11, quando $p < \infty$, mostra que existe uma bijeção entre o espaço (L^p, L^q) e o espaço dos operadores lineares e limitados de $L^p(\mathbb{R}^n)$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$ que comutam com translações.

Teorema 1.1.12. *Uma distribuição $u \in (L^2, L^2)$ se, e somente se, existe $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{F}u = b$. Neste caso, $\|b\|_{L^\infty}$ é a norma do operador $B : L^2 \cap \mathcal{S} \to L^2$ definido por $B\phi = u * \phi$. Além disso, $\mathcal{F}(u * \phi) = (\mathcal{F}u)(\mathcal{F}\phi)$.*

Demonstração: [SW] □

Teorema 1.1.13. *Uma distribuição $u \in (L^1, L^1)$ se, e somente se, u é uma medida de Borel finita. Neste caso, a variação total da medida u é a norma do operador $B : L^1 \cap \mathcal{S} \to L^1$ definido por $B\phi = u * \phi$.*

Demonstração: [SW] $\square$

Teorema 1.1.14. *Se $1 \leq p, q \leq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ e $1/q + 1/q' = 1$ então $(L^p, L^q) = (L^{q'}, L^{p'})$.*

Demonstração: [SW] $\square$

1.2 Função Maximal de Hardy-Littlewood

Definição 1.2.1. *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ definimos*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy. \tag{1.2.1}$$

Mf é denominada função maximal de Hardy-Littlewood, e o operador M que envia f em Mf é denominado operador maximal de Hardy-Littlewood.

Lema 1.2.1. *[Lema de Cobertura] Seja $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto mensurável e suponha que existam bolas B_j com $j = 1, \ldots, N$ tais que $E \subseteq B_1 \cup \ldots \cup B_N$. Então, existe uma subcoleção $\{B'_j\}$ tal que*

(i) *$B'_j \cap B'_k = \emptyset$ para todo $j \neq k$;*

(ii) *Existe uma constante positiva $c = c(n)$ que depende somente da dimensão tal que*

$$|E| \leq c \sum_{j=1}^{m} |B'_j|. \tag{1.2.2}$$

Demonstração: Reordenando a cobertura podemos supor que a coleção $B_j = B(x_j, r_j)$, $j = 1, \ldots, N$ é tal que $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_N$. Seja $B'_1 = B_1$ e defina o conjunto

$$\mathcal{O}_1 = \{B_j \,:\, B_j \cap B'_1 = \emptyset\}.$$

Se $\mathcal{O}_1 = \emptyset$ então $B_j \cap B'_1 \neq \emptyset$ para todo $j \neq 1$. Neste caso, $B_j \subseteq (B'_1)^* \doteq B(x_1, 3r_1)$, para todo j. Logo,

$$E \subseteq \cup_{j=1}^{N} B_j \subseteq (B'_1)^*$$

de onde concluiriamos que

$$|E| \leq |B(x_1, 3r_1)| = 3^n |B'_1|.$$

Suponha que $\mathcal{O}_1 \neq \emptyset$. Neste caso, seja B_{j_0} tal que

$$\operatorname{diam} B_{j_0} = \max\{\operatorname{diam} B_j : B_j \in \mathcal{O}_1\}$$

seja $B'_2 \doteq B_{j_0}$. Defina agora o conjunto

$$\mathcal{O}_2 = \{B_j \in \mathcal{O}_1 : B_j \cap B'_2 = \emptyset\}.$$

Se $\mathcal{O}_2 = \emptyset$ então para cada $B_j \in \mathcal{O}_2$ ocorreria que $B_j \cap B'_2 \neq \emptyset$. Neste caso todo $B_j \in \mathcal{O}_2$ seria tal que $B_j \subseteq (B'_2)^*$. Logo,

$$E \subseteq \cup_{j=1}^N B_j \subseteq (B'_1)^* \cup (B'_2)^*$$

implicando que

$$|E| \leq 3^n(|B'_1| + |B'_2|).$$

Repetindo este argumento poderemos encontrar uma subcoleção $\{B'_1, \ldots, B'_m\}$ e uma sequência de conjuntos $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_m$ tais que

$$\{B_j\}_{j=1}^N = (\cup_{k=1}^m \{B_j \in \mathcal{O}_{k-1} :\ B_j \cap B'_k \neq \emptyset\}) \cup \mathcal{O}_m \tag{1.2.3}$$

e com $\mathcal{O}_m = \emptyset$. Afirmamos que

$$E \subseteq (B'_1)^* \cup \ldots \cup (B'_m)^*. \tag{1.2.4}$$

Para provamos (1.2.4) é suficiente mostrar que $B_j \subset (B'_1)^* \cup \ldots \cup (B'_m)^*$, para cada B_j fixado. Suponha que B_j não pertença a coleção $B'_1, \ldots, B'_m$ caso contrário, a conclusão seria óbvia. Segue de (1.2.3) que $B_j \cap B'_\ell \neq \emptyset$ para algum $\ell = 1, \ldots, m$, mostrando que $B_j \subset (B'_\ell)^*$ para algum $\ell = 1, \ldots, m$ concluindo a prova de (1.2.4). Graças a (1.2.4) vemos que

$$|E| = \left|\bigcup_{j=1}^m (B'_j)^* \cap E\right| \leq \sum_{j=1}^m |(B'_j)^* \cap E| \leq \sum_{j=1}^m |(B'_j)^*| = 3^n \sum_{j=1}^m |B'_j|,$$

concluindo portanto a demonstração do Lema. □

Lema 1.2.2. *Existe uma constante $c = c(n) > 0$ que só depende da dimensão, tal que*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c(n)}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.2.5}$$

Demonstração: Para cada $\lambda > 0$ fixo definimos o conjunto $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$. Por uma propriedade da medida de Lebesgue $|E_\lambda| = \sup\{|K| :\ K \subset\subset E_\lambda\}$. Assim para cada $\sigma < |E_\lambda|$ fixo existe um conjunto compacto $K \subset\subset E_\lambda$ tal que $\sigma < |K| \leq |E_\lambda|$. Logo, para todo $x \in K$, como $Mf(x) > \lambda$, existe $r_x > 0$ tal que

$$\frac{1}{|B(x, r_x)|} \int_{B(x, r_x)} |f(y)|\, dy > \lambda. \tag{1.2.6}$$

Como K é compacto existe uma subcobertura finita $K \subseteq B(x_1, r_{x_1}) \cup \ldots \cup B(x_N, r_{x_N})$.

Aplicando o Lema 1.2.1 a esta cobertura podemos exibir uma subcoleção de bolas $B'_1, \ldots, B'_m$ tais que

$$|K| \leq c \sum_{j=1}^{m} |B'_j|.$$

Assim pela desigualdade (1.2.6) temos que

$$|K| \leq c \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda} \int_{B'_j} |f(y)|\, dy.$$

Sendo a coleção disjunta concluimos que

$$|K| \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\cup_{j=1}^{m} B'_j} |f(y)|\, dy.$$

Logo, $|K| \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Então fazendo $\sigma \to |E_\lambda|$ na desigualdade $\sigma < \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ vemos finalmente que $|E_\lambda| \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 1.2.1. *Seja f uma função mensurável e definida em $\mathbb{R}^n$ e seja $\lambda > 0$. Então vale a seguinte estimativa para a medida de Lebesgue do conjunto $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Mf(x) > \lambda\}$:*

$$|E_\lambda| \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n: \ |f(x)| > \lambda/2\}} |f(x)|\, dx \tag{1.2.7}$$

Demonstração: Segue do Lema 1.2.2 aplicado a $f_1 = f\chi_{\{x: |f(x)| > \lambda/2\}}$. $\square$

Proposição 1.2.1. *Se $f = \chi_{B(0,1)}$ então $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: De fato, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $B(0,1) \subseteq B(x, |x|+1)$. Assim a seguinte estimativa ocorre:

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geq \frac{1}{|B(x,|x|+1)|} \int_{B(x,|x|+1)} |f(y)|\, dy \\ &\geq \frac{1}{|B(x,|x|+1)|} \int_{B(0,1)} |f(y)|\, dy \\ &= \frac{|B(0,1)|}{|B(x,|x|+1)|} = \frac{1}{(|x|+1)^n} \geq \frac{1}{2^n |x|^n}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{1 \leq |x| \leq R} Mf(x)\, dx \geq \int_{1 \leq |x| \leq R} c|x|^{-n}\, dx = c' \ln R \tag{1.2.8}$$

mostrando que $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Teorema 1.2.1. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ suportada numa bola $B \subset \mathbb{R}^n$. Então $Mf \in L^1(B)$ se, e somente se*

$$\int_B |f(x)| \log^+ |f(x)|\, dx < \infty \tag{1.2.9}$$

Demonstração: Seja $B = B(x_0, r)$. Suponha que (1.2.9) ocorra, então

$$\int_B Mf(x)\,dx = \int_0^\infty |\{x \in B: \;\; Mf(x) > \lambda\}|\,d\lambda$$
$$= 2\int_0^\infty |\{x \in B: \;\; Mf(x) > 2\lambda\}|\,d\lambda \leq 2\left(\int_0^1 |B|\,d\lambda + \int_1^\infty |E_\lambda|\,d\lambda\right)$$
$$\leq 2|B| + c\int_1^\infty \frac{1}{\lambda}\int_{\{x\in B:\ |f(x)|>\lambda\}} |f(x)|\,dx\,d\lambda = 2|B| + c\int_B |f(x)|\left(\int_1^{|f(x)|}\frac{1}{\lambda}\,d\lambda\right)dx$$
$$= 2|B| + c\int_B |f(x)|\log^+|f(x)|\,dx < \infty.$$

Por outro lado, suponha que $\int_B Mf(x)\,dx < \infty$ e denote $B^* = B(x_0, 2r)$ então $\int_{B^*} Mf(x)\,dx < \infty$. Para provar este fato observe que

$$\int_{B^*} Mf(x)\,dx = \int_B Mf(x)\,dx + \int_{B^*\setminus B} Mf(x)\,dx$$

e que além disso, para o simétrico x' de $x \in B^* \setminus B$, com respeito à fronteira da bola, tem-se $B(x,r) \subset B(x', 3r)$. Logo,

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy \leq \frac{|B(x',3r)|}{|B(x,r)|}\frac{1}{|B(x',3r)|}\int_{B(x',3r)} |f(y)|\,dy \leq c(n)Mf(x').$$

Ou seja, $Mf(x) \leq cMf(x')$ de onde conclui-se que $\int_{B^*\setminus B} Mf(x)\,dx \leq \frac{|B^*\setminus B|}{|B|}\int_B Mf(x)\,dx$. A seguir mostraremos que $Mf(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$. De fato, seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x - x_0| \geq 2r$. Para todo $s \leq |x-x_0| - r$ é fato que $B(x,s) \cap B = \emptyset$. Logo suponha que $s \geq |x - x_0| - r$ então

$$\frac{1}{|B(x,s)|}\int_{B(x,s)\cap B(x_0,r)} |f(t)|\,dt \leq \frac{\|f\|_{L^1(B)}}{|B(x,s)|} \leq \frac{\|f\|_{L^1(B)}}{(|x-x_0|-r)^n}.$$

Portanto, $Mf(x) \leq \frac{c}{(|x-x_0|-r)^n}$. Logo podemos concluir que, para qualquer $t_0 > 0$,

$$\int_{\{x:Mf(x)>t_0\}} Mf(x)\,dx < \infty$$

Para $t_0 = 1$,

$$\int_{\{x:\ Mf(x)>1\}} Mf(x)\,dx \geq \int_1^\infty |\{x:\ Mf(x) > t\}|\,dt \geq \int_1^\infty \frac{1}{2^n t}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |f(x)|>t\}} |f(x)|\,dx\,dt$$
$$= \frac{1}{2^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\int_1^{|f(x)|}\frac{dt}{t}\,dx = \frac{1}{2^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\log^+|f(x)|\,dx.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\log^+|f(x)|\,dx < \infty.$$

□

1.3 Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz

Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços de medida, e seja T um operador de $L^p(X, \mu)$ à valores num espaço de funções mensuráveis de Y em $\mathbb{C}$. Dizemos que T é de tipo fraco (p, q), $q < \infty$, se existe uma constante positiva C tal que

$$\nu(\{y \in Y : \ |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_{L^p}}{\lambda} \right)^q,$$

para todo $\lambda > 0$. Dizemos que é de tipo fraco (p, ∞) se for um operador limitado de $L^p(X, \mu)$ em $L^\infty(Y, \nu)$. Dizemos que T é forte (p, q) se for limitado de $L^p(X, \mu)$ em $L^q(Y, \nu)$.

A desigualdade tipo fraca (p, p) é importante porque é chave para provar que o operador é limitado tipo forte (p, p) via o teorema de interpolação de Marcinkiewicz.

Lema 1.3.1. *Se T é forte (p, q) então é fraco (p, q).*

Demonstração: Seja $\lambda > 0$ fixo e defina $E_\lambda = \{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}$, então

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} 1 \, d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left| \frac{Tf(x)}{\lambda} \right|^q d\nu \leq \frac{\|Tf\|_{L^q}^q}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C\|f\|_{L^p}}{\lambda} \right)^q \tag{1.3.1}$$

□

A relação entre a desigualdade fraca (p, q) e convergência em quase toda a parte é dada pelo seguinte resultado

Teorema 1.3.1. *Seja $\{T_\epsilon\}$ uma família de operadores lineares definidos sobre $L^p(X, \mu)$ e defina o operador maximal*

$$T^* f(x) = \sup_{\epsilon > 0} |T_\epsilon f(x)|.$$

Se T^* é fraco (p, q) então o conjunto

$$F = \left\{ f \in L^p(X, \mu) : \lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f(x) = f(x) \ q.t.p. \right\}$$

é fechado em $L^p(X, \mu)$.

Demonstração: Dado $f \in \overline{F}$, seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções de F que converge a f em L^p. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo existe um conjunto de medida nula E_n tal que $\lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f_n(x) = f_n(x)$ para todo $x \in X \setminus E_n$. Para mostrar que $f \in F$, provaremos que dado qualquer $\lambda > 0$ o seguinte fato ocorre

$$\mu(\{x \in X : \limsup_{\epsilon \longrightarrow 0} |T_\epsilon f(x) - f(x)| > \lambda\}) = 0 \tag{1.3.2}$$

Com esse objetivo, considere a função

$$\Omega(f, x) \doteq \limsup_{\epsilon \longrightarrow 0} |T_\epsilon f(x) - f(x)|.$$

É fácil ver que $\Omega(g,x)=0$ para todo elemento $g\in F$ então

$$\begin{aligned}\Omega(f,x) &\leq \Omega(f-f_n,x)+\Omega(f_n,x)\\ &= \limsup_{\epsilon\longrightarrow 0}|T_\epsilon(f-f_n)(x)-(f-f_n)(x)|\leq T^*(f-f_n)(x)+|(f-f_n)(x)|\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mu(\{x\in X: \Omega(f,x)>\lambda\}) &\leq \mu(\{x\in X: T^*(f-f_n)(x)>\lambda/2\})\\ &\quad+\mu(\{x\in X: |(f-f_n)(x)|>\lambda/2\}).\end{aligned}$$

Como T^* é de tipo fraco (p,q) existe uma constante positiva C tal que

$$\mu(\{x\in X: T^*(f-f_n)(x)>\lambda/2\}|\leq\left(\frac{2C}{\lambda}\|f-f_n\|_p\right)^q. \tag{1.3.3}$$

Além disso, segue da desigualdade de Tchebychev a seguinte estimativa

$$\mu(\{x\in X: |(f-f_n)(x)|>\lambda/2\})\leq\left(\frac{2}{\lambda}\|f-f_n\|_p\right)^p. \tag{1.3.4}$$

Deste modo, fazendo $n\to\infty$ em (1.3.3) e (1.3.4) temos que

$$\mu(\{x\in X: \Omega(f,x)>\lambda\})=0$$

para cada $\lambda>0$ fixo. Desde que,

$$\mu(\{x\in X: \Omega(f,x)>0\})\leq\sum_{k=1}^{\infty}\mu(\{x\in X: \Omega(f,x)>1/k\})=0,$$

segue a demonstração do teorema □

Seja (X,μ) um espaço de medida e seja $f:X\to\mathbb{C}$ uma função mensurável. Chamamos a função $\omega_f:(0,\infty)\to[0,\infty]$, dada por

$$\omega_f(\lambda)=\mu(\{x\in X: |f(x)|>\lambda\}),$$

a função distribuição de f associada a medida μ.

Proposição 1.3.1. *Seja $\phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ uma função diferenciável, crescente e tal que $\phi(0)=0$. Então,*

$$\int_X\phi(|f(x)|)\,d\mu(x)=\int_0^\infty\phi'(\lambda)\omega_f(\lambda)\,d\lambda. \tag{1.3.5}$$

Demonstração: Segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned}\int_X\phi(|f(x)|)\,d\mu(x) &= \int_X\left(\int_0^{|f(x)|}\phi'(\lambda)\,d\lambda\right)d\mu(x)=\int_0^\infty\left(\int_{\{x\in X:|f(x)|>\lambda\}}\phi'(\lambda)\,d\mu(x)\right)d\lambda\\ &= \int_0^\infty\phi'(\lambda)\mu(\{x\in X: |f(x)|>\lambda\})\,d\lambda=\int_0^\infty\phi'(\lambda)\omega_f(\lambda)\,d\lambda.\end{aligned}$$

□

Aplicando a Proposição 1.3.1 à função $\phi(\lambda) = \lambda^p$, $\phi'(\lambda) = p\lambda^{p-1}$ obtemos

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \omega_f(\lambda) \, d\lambda. \tag{1.3.6}$$

Definição 1.3.1. *Um operador T definido no espaço vetorial das funções mensuráveis é dito sublinear se*

(i) $|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$

(ii) $|T(\alpha f)(x)| \leq |\alpha||Tf(x)|, \ \forall \alpha \in \mathbb{C}.$

Proposição 1.3.2. *Sejam $0 < p_1 < p < p_2 < \infty$, então, $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e definimos $E = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > 1\}$ e $E^c = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leq 1\}$. Então,

$$f(x) = f(x)\chi_E(x) + f(x)(1 - \chi_E(x)) = f_1(x) + f_2(x) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_2}(\mathbb{R}^n).$$

□

Teorema 1.3.2 (Interpolação de Marcinkiewicz)**.** *Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços mensuráveis, $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$, e seja T um operador sublinear de $L^{p_1}(X, \mu) + L^{p_2}(X, \mu)$ ao espaço de funções mensuráveis em Y que é fraco (p_1, p_1) e fraco (p_2, p_2). Então T é forte (p, p) para $p_1 < p < p_2$.*

Demonstração: Dado $f \in L^p$, para cada $\lambda > 0$ fixo decompomos f como $f_1 + f_2$, onde $f_1(x) = f(x)\chi_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}}(x)$, e $f_2(x) = f(x)\chi_{\{x:|f(x)|\leq c\lambda\}}(x)$ sendo $c > 0$ uma constante a ser fixada. É fácil ver que $f_1 \in L^{p_1}(\mu)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mu)$; além disso,

$$|Tf(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|,$$

assim

$$\mu(\{x \in X \, : \, |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \mu(\{x \in X \, : \, |Tf_1(x)| > \lambda/2\}) + \mu(\{x \in X \, : \, |Tf_2(x)| > \lambda/2\}),$$

ou seja,

$$\omega_{T(f)}(\lambda) \leq \omega_{T(f_1)}(\lambda/2) + \omega_{T(f_2)}(\lambda/2).$$

Considere-se dois casos:

Caso 1: $p_2 = \infty$. Escolha $c = \frac{1}{2A_2}$, onde A_2 é tal que $\|Tg\|_\infty \leq A_2\|g\|_\infty$. para toda $g \in L^\infty$. Neste caso mostraremos que $\omega_{Tf_2}(\lambda/2) = 0$. De fato, segue da definição de f_2

que $\|f_2\|_\infty \leq c\lambda = \frac{\lambda}{2A_2}$. Assim, $\|Tf_2\|_\infty \leq A_2\|f_2\|_\infty \leq \frac{A_2\lambda}{2A_2} = \frac{\lambda}{2}$. Deste modo, existe um conjunto mensurável E tal que $\mu(E) = 0$ e $|Tf_2(x)| < \frac{\lambda}{2}$ para todo $x \in X \setminus E$. Note que

$$\begin{aligned}
\omega_{Tf_2}(\lambda/2) &= \mu(\{x \in X \,:\, |Tf_2(x)| > \lambda/2\}) \\
&\leq \mu(\{x \in E \,:\, |Tf_2(x)| > \lambda/2\}) + \mu(\{x \in X \setminus E \,:\, |Tf_2(x)| > \lambda/2\}) \\
&\leq \mu(E) + \mu(\{x \in X \setminus E \,:\, |Tf_2(x)| > \lambda/2\}).
\end{aligned}$$

Afirmamos que o conjunto $\{x \in X \setminus E \,:\, |Tf_2(x)| > \lambda/2\} = \emptyset$ pois caso exista $x \in X \setminus E$ tal que $|Tf_2(x)| > \lambda/2$ então $\lambda/2 < |Tf_2(x)| \leq \|Tf_2\|_\infty \leq \lambda/2$ o que gera um absurdo e portanto $\omega_{Tf_2}(\lambda/2) = 0$.

Pela desigualdade fraca (p_1, p_1)

$$\omega_{Tf_1}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2A_1}{\lambda}\|f_1\|_{L^{p_1}}\right)^{p_1};$$

portanto,

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p}^p &\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\omega_{Tf_1}(\lambda/2)d\lambda \\
&\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_1}(2A_1)^{p_1}\int_X |f_1(x)|^{p_1}\,d\mu\,d\lambda \\
&= p(2A_1)^{p_1}\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_1}\int_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_1}\,d\mu\,d\lambda \\
&= p(2A_1)^{p_1}\int_X |f(x)|^{p_1}\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_1}\chi_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}}\,d\lambda\,d\mu \\
&= p(2A_1)^{p_1}\int_X |f(x)|^{p_1}\int_0^{|f(x)|/c} \lambda^{p-1-p_1}\,d\lambda\,d\mu = \frac{p}{p-p_1}(2A_1)^{p_1}(2A_2)^{p-p_1}\|f\|_{L^p}^p.
\end{aligned}$$

Caso 2: $p_2 < \infty$. Agora temos

$$\omega_{Tf_i}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2A_i}{\lambda}\|f_i\|_{L^{p_i}}\right)^{p_i},\ i = 1, 2.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\omega_{Tf}(\lambda)\,d\lambda \\
&\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\omega_{Tf_1}(\lambda/2)\,d\lambda + p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\omega_{Tf_2}(\lambda/2)\,d\lambda
\end{aligned}$$

Desto obtemos que

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p}^p &\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_1}(2A_1)^{p_1}\int_X |f_1(x)|^{p_1}\,d\mu\,d\lambda \\
&\quad +p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_2}(2A_2)^{p_2}\int_X |f_2(x)|^{p_2}\,d\mu\,d\lambda \\
&\leq p(2A_1)^{p_1}\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_1}\int_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_1}\,d\mu\,d\lambda \\
&\quad +p(2A_2)^{p_2}\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_2}\int_{\{x:|f(x)|\leq c\lambda\}} |f(x)|^{p_2}\,d\mu\,d\lambda \\
&= p(2A_1)^{p_1}\int_X |f(x)|^{p_1}\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_1}\chi_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}}\,d\lambda\,d\mu \\
&\quad +p(2A_2)^{p_2}\int_X |f(x)|^{p_2}\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_2}\chi_{\{x:|f(x)|\leq c\lambda\}}\,d\lambda\,d\mu \\
&= p(2A_1)^{p_1}\int_X |f(x)|^{p_1}\int_0^{|f(x)|/c} \lambda^{p-1-p_1}\,d\lambda\,d\mu \\
&\quad +p(2A_2)^{p_2}\int_X |f(x)|^{p_2}\int_{|f(x)|/c}^\infty \lambda^{p-1-p_2}\,d\lambda\,d\mu \\
&= \left(\frac{p(2A_1)^{p_1}c^{p_1-p}}{p-p_1}+\frac{p(2A_2)^{p_2}c^{p_2-p}}{p_2-p}\right)\|f\|_{L^p}^p.
\end{aligned}$$

Mais precisamente,

$$\|Tf\|_p \leq 2p^{1/p}\left(\frac{1}{p-p_1}+\frac{1}{p_2-p}\right)^{1/p} A_1^{1-\theta}A_2^{\theta}\|f\|_p$$

onde

$$\frac{1}{p}=\frac{\theta}{p_2}+\frac{1-\theta}{p_1},\quad 0<\theta<1.$$

□

Teorema 1.3.3. *O operador M é fraco $(1,1)$ e forte (p,p), $1<p\leq\infty$.*

Demonstração: Pelo Lema 1.2.2 temos que o operador M é fraco $(1,1)$ e é imediato da definição que $\|Mf\|_{L^\infty}\leq\|f\|_{L^\infty}$, assim pelo teorema de interpolação de Marcinkiewicz temos que M é forte (p,p), com $1<p\leq\infty$. □

1.4 Teorema de Diferenciação de Riemann-Lebesgue

Lema 1.4.1. *Seja $f\in C^0(\mathbb{R}^n)$ então,*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(t)\,dt = f(x).$$

Demonstração: Como f é contínua em x, então para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|t - x| < \delta$ implica $|f(t) - f(x)| < \epsilon$. Tomando $r < \delta$ temos $B(x, r) \subset B(x, \delta)$. Logo,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(t)\, dt - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} (f(t) - f(x))\, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t) - f(x)|\, dt < \epsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.4.1 (Diferenciação de Lebesgue). *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq \infty$, então*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(t)\, dt = f(x)$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Provaremos primeiramente que o limite

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(t)\, dt$$

existe para todo x no complementar de um conjunto de medida nula. De fato, seja f uma função mensurável e defina para todo $x \in \mathbb{R}^n$ a aplicação

$$\Omega(f, x) = \limsup_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(t)\, dt - \liminf_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(t)\, dt.$$

Note que a $\Omega(f, x) \geq 0$, é subaditiva e satisfaz a seguinte desigualdade $\Omega(f, x) \leq 2Mf(x)$.

Supondo que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mostraremos que $\Omega(f, x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, i.e., $|\{x \in \mathbb{R}^n : \Omega(f, x) > 0\}| = 0$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$, de onde poderemos concluir nossa afirmação.

É suficiente mostrar que para todo $a > 0$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \Omega(f, x) > a\}$ tem medida nula. De fato, como $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ é denso em L^p para todo $1 \leq p \leq \infty$, dado $\epsilon > 0$ existe $g \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_{L^p} < \epsilon$. Segue da subaditividade da função Ω a seguinte desigualdade

$$\Omega(f, x) = \Omega(f - g + g, x) \leq \Omega(f - g, x) + \Omega(g, x).$$

Como g é contínua pelo Lema 1.4.1 temos que $\Omega(g, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, $\Omega(f, x) \leq \Omega(f - g, x)$ de onde concluímos que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \Omega(f, x) > a\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : M(f - g, x) > a/2\}|. \tag{1.4.1}$$

Em seguida, dividiremos a demonstração em dois casos

Caso 1: $p > 1$.

Neste caso, pela continuidade do operador maximal de Hardy-Littlewood no espaço L^p para $1 < p \leq \infty$ existe uma constante positiva C tal que $\|M(f-g)\|_{L^p} \leq C\|f-g\|_{L^p}$. Decorre de (1.4.1) e da desigualdade de Tchebichev a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}|\{x \in \mathbb{R}^n : \Omega(f,x) > a\}| &\leq |\{x \in \mathbb{R}^n : M(f-g)(x) > a/2\}| \\ &\leq \frac{1}{(a/2)^p}\|M(f-g)\|_{L^p}^p \leq \frac{2^pC}{a^p}\|f-g\|_{L^p}^p \leq \frac{2^pC\epsilon^p}{a^p}.\end{aligned}$$

Caso 2: $p = 1$

Neste caso, usaremos o Lema 1.2.2 na desigualdade (1.4.1) para obtermos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}|\{x \in \mathbb{R}^n : \Omega(f,x) > a\}| &\leq |\{x \in \mathbb{R}^n : M(f-g)(x) > a/2\}| \\ &\leq \frac{2C}{a}\|f-g\|_{L^1} \leq \frac{2C\epsilon}{a}.\end{aligned}$$

Em ambos os casos, como ϵ pode ser escolhido de forma arbitrária provamos que, para todo $a > 0$, $|\{x \in \mathbb{R}^n : \Omega(f,x) > a\}| = 0$. Em particular temos a seguinte consequência

$$\begin{aligned}|\{x \in \mathbb{R}^n : \Omega(f,x) > 0\}| &= |\cup_{k=1}^{\infty}\{x \in \mathbb{R}^n : \Omega(f,x) > 1/k\}| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}|\{x \in \mathbb{R}^n : \Omega(f,x) > 1/k\}| = 0\end{aligned}$$

de onde, existe um conjunto mensurável E com medida nula tal que $\Omega(f,x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Consideremos daqui por diante a função $\varphi(x) = \frac{1}{|B(0,1)|}\chi_{B(0,1)}(x)$ e seja $\varphi_r(x) \doteq \frac{1}{r^n}\varphi(x/r)$. Notando que $\chi_{B(0,1)}(y/r) = \chi_{B(0,r)}(y)$ temos que

$$\varphi_r(y) = \frac{1}{r^n}\varphi(y/r) = \frac{1}{r^n}\frac{1}{|B(0,1)|}\chi_{B(0,1)}(y/r) = \frac{1}{|B(0,r)|}\chi_{B(0,r)}(y).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(t)\,dt &= \frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} f(x-y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\frac{1}{|B(0,r)|}\chi_B(0,r)(y)\,dy = (f*\varphi_r)(x).\end{aligned}$$

Como $f*\varphi_r \to f$ em L^p quando $r \to 0$ temos que existe F mensurável, com $|F| = 0$ tal que $f*\varphi_r(x) \to f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$. Logo para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{E \cup F\}$ temos

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(t)\,dt = f(x).$$

Como queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 1.4.1. *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então existe E mensurável com $|E| = 0$ tal que*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t) - f(x)|\, dt = 0,$$

para todo $x \notin E$.

Demonstração: Para todo $A \in \mathbb{R}$ defina a aplicação

$$g(A) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t) - A|\, dt.$$

Provaremos inicialmente que g é Lipschitziana e portanto contínua. De fato,

$$\begin{aligned} &\left| \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t) - A|\, dt - \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t) - A' \right| dt \\ &\leq \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \big| |f(t) - A| - |f(t) - A'| \, dt \big| \leq |A - A'|, \end{aligned}$$

então $|g(A) - g(A')| \leq |A - A'|$ para todo $A, A' \in \mathbb{R}$.

Sejam $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma enumeracão dos racionais e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então para cada $n \in \mathbb{N}$ a funcão $|f(\cdot) - A_n| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então segue do Teorema 1.4.1 que existem conjuntos mensuráveis E_{A_n}, com $|E_{A_n}| = 0$ e tais que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t) - A_n|\, dt = |f(x) - A_n| \tag{1.4.2}$$

para todo $x \notin E_{A_n}$. Seja $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_{A_n}$ então E é mensurável e satisfaz $|E| = 0$. Logo para todo $x \notin E$ segue que (1.4.2) ocorre para todo $A \in \mathbb{Q}$. Ou seja, $g(A) = |f(x) - A|$, para todo $A \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Como g é Lipschitziana e usando a densidade dos números racionais novamente, temos que $g(A) = |f(x) - A|$, para todo $A \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Ou seja,

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t) - A|\, dt = |f(x) - A|$$

para todo $A \in \mathbb{R}$.

Dado $f(x)$ tal que $x \notin E$ então escolha A_j uma sequência de números racionais tais que $A_j \to f(x)$ quando $j \to \infty$ então

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t) - f(x)|\, dt &= g(f(x)) = \lim_{j \to \infty} g(A_j) \\ &= \lim_{j \to \infty} \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t) - A_j|\, dt \\ &= \lim_{r \to 0} \lim_{j \to \infty} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t) - A_j|\, dt = 0. \end{aligned}$$

□

OBSERVAÇÃO 1.4.1: O conjunto $\mathbb{R}^n \setminus E$ é denominado o **conjunto de Lebesgue** associado à função f.

1.5 Decomposição de Calderón-Zygmund

Em $\mathbb{R}^n$ definimos o cubo unitário, aberto à direita, como o conjunto $[0,1)^n$, e seja $\mathcal{Q}_0$ a coleção de cubos em $\mathbb{R}^n$ os quais são congruentes a $[0,1)^n$ e cujos vértices estam em $\mathbb{Z}^n$. Se dilatamos esta familia de cubos por um fator de 2^{-k} obtemos a coleção $\mathcal{Q}_k$, $k \in \mathbb{Z}$; isto é, $\mathcal{Q}_k$ é a familia de cubos abertos à direita, cujos vértices são pontos adjacentes em $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$. Os cubos em $\bigcup_k \mathcal{Q}_k$ são chamados cubos diádicos.

Dada uma função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, define

$$E_k f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)\, dx \right) \chi_Q(x);$$

definimos a função maximal diádica por

$$M_d f(x) = \sup_k |E_k f(x)|.$$

Teorema 1.5.1 (Decomposição de Calderón-Zygmund)**.** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda > 0$. Então existem cubos diádicos Q_j, $j = 1, 2, \ldots$ tais que*

i) $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega,\ F \cap \Omega = \emptyset$.

ii) $|f(x)| \leq \lambda$ *para quase todo* $x \in F$.

iii) $\Omega = \cup_k Q_k$ *cujos interiores são disjuntos e tal que para cada cubo* Q_k

$$\lambda < \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f(x)|\, dx \leq 2^n \lambda. \tag{1.5.1}$$

iv) $|\Omega| \leq \frac{1}{\lambda} \int_\Omega |f(x)|\, dx$.

Demonstração: Decompomos o $\mathbb{R}^n$ numa malha de cubos diádicos de mesmas dimensões, cujos interiores são disjuntos e cujo diâmetro comum seja suficientemente grande para que

$$\frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f(x)|\, dx \leq \lambda,$$

para cada cubo desta malha.

Fixemos um cubo Q' desta malha e o dividimos em 2^n cubos congruentes, bisectando cada um dos lados de Q'. Seja Q'' um destes cubos. Logo, $|Q''| = 2^{-n}|Q'|$. Assim, existe dois casos a considerar: **Caso 1.** $\frac{1}{|Q''|} \int_{Q''} |f(x)|\, dx \leq \lambda$ e **Caso 2.** $\frac{1}{|Q''|} \int_{Q''} |f(x)|\, dx > \lambda$.

No segundo caso selecionamos o cubo Q'' e passemos a denotá-lo por Q_k, que por sua vez, satisfaz a condição do lema pois,

$$\lambda < \frac{1}{|Q''|} \int_{Q''} |f(x)|\, dx \leq \frac{1}{2^{-n}|Q'|} \int_{Q'} |f(x)|\, dx \leq 2^n \lambda.$$

No primeiro caso efetuamos a subdivisão do cubo Q'' repetidas vezes, caso necessário, até obtermos cubos que preencham o segundo caso.

Denotemos por $\Omega = \cup_k Q_k$ a união dos cubos Q_k do segundo caso, i.e., tais que

$$\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(x)|\,dx > \lambda.$$

Afirmamos que $|f(x)| \leq \lambda$ para quase todo $x \in F = \Omega^c$. De fato, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ segue do Teorema de Diferenciação de Lebesgue 1.4.1, que

$$|f(x)| = \lim_{\text{diam}\,(Q)\to 0} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy,$$

onde o limite é tomado sobre todos os cubos que contém o ponto x. Mas, todos os cubos que entram na decomposição e que contém o ponto x são cubos do **Caso 1.** e portanto a seguinte estimativa ocorre

$$|f(x)| = \lim_{\text{diam}\,(Q)\to 0} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy \leq \lambda;$$

e temos que,

$$|\Omega| = \sum_k |Q_k| < \frac{1}{\lambda}\sum_k \int_{Q_k} f(x)\,dx \leq \frac{1}{\lambda}\int_\Omega f(x)\,dx.$$

Finalizando assim a prova do teorema. □

Proposição 1.5.1. *Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, existe uma decomposição $f = g + b$ e uma sequência de cubos Q_j dois a dois disjuntos tais que*

a) $|g(x)| \leq 2^n\lambda$ *para quase todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

b) $b(x) = \sum_j b_j(x)$, $\text{supp}\,(b_j) \subset Q_j$ *e* $\int_{Q_j} b_j(x)\,dx = 0$, $j = 1, 2, \ldots$.

c) $\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 2^n\lambda\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

Demonstração: Pelo Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund 1.5.1, dado $\lambda > 0$, existem cubos diádicos $\{Q_j\}$ dois a dois disjuntos tais que

$$|f(x)| \leq \lambda, \ \ \forall x \in (\cup Q_j)^c \tag{1.5.2}$$

$$|\cup_j Q_j| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1} \tag{1.5.3}$$

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|\,dx \leq 2^n\lambda. \tag{1.5.4}$$

Como $\Omega = \cup Q_j$, então $\chi_\Omega = \sum_j \chi_{Q_j}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_j f(x)\chi_{Q_j}(x) + f(x)\chi_{\Omega^c}(x) \\ &= \sum_j \left(f(x) - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy \right)\chi_{Q_j}(x) \\ &\quad + \sum_j \left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy \right)\chi_{Q_j}(x) + f(x)\chi_{\Omega^c}(x) = \sum_j b_j(x) + g(x), \end{aligned}$$

sendo

$$b_j(x) = \left(f(x) - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy \right)\chi_{Q_j}(x)$$

e

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin \Omega = \cup Q_j \\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)\,dx & \text{se } x \in Q_j \end{cases}$$

Assim $f = g + b$.

Se $x \notin \Omega$ como $g(x) = f(x)$ então segue de (1.5.2) que $|g(x)| \leq \lambda$ para quase todo $x \notin \Omega$.

Se $x \in \Omega$ então $x \in Q_k$ para algum k

$$g(x) = \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(y)\,dy$$

então segue de (1.5.4) que $|g(x)| \leq 2^n\lambda$.

Segue da definição dos b_j que $\operatorname{supp}(b_j) \subset Q_j$ e

$$\begin{aligned} \int_{Q_j} b_j(x)\,dx &= \int_{Q_j} \left(f(x) - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy \right)\chi_{Q_j}(x)\,dx \\ &= \int_{Q_j} f(x)\,dx - \int_{Q_j} \left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy \right)dx = \int_{Q_j} f(x)\,dx - \frac{|Q_j|}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy = 0. \end{aligned}$$

Para a demonstração de c) observe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2\,dx = \int_\Omega |g(x)|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |g(x)|^2\,dx.$$

Para estimar a primeira integral do lado direito, vemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |g(x)|^2\,dx &\leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \sum_{k=1}^\infty \int_{Q_k} |g(x)|\,dx \leq 2^n\lambda \sum_{k=1}^\infty \int_{Q_k} \left(\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(y)|\,dy \right) dx \\ &= 2^n\lambda \sum_{k=1}^\infty \int_{Q_k} |f(y)|\,dy = 2^n\lambda \int_\Omega |f(y)|\,dy \leq 2^n\lambda\|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Para estimarmos a segunda integral do lado direito, observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |g(x)|^2\,dx \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)} \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |f(x)|\,dx \leq \lambda\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

O que conclui a prova da Proposição. $\square$

1.6 A Transformada de Hilbert

Dada uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, sua extensão harmônica ao semiplano superior é dada por $u(x,t) = P_t * f(x)$ onde $P_t(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{t}{t^2+x^2}$ é o núcleo de Poisson. Denotamos por $Q_t(x)$ o conjugado harmônico de $P_t(x)$, assim

$$\frac{\partial}{\partial x}Q = -\frac{\partial}{\partial t}P \ , \ \frac{\partial}{\partial t}Q = \frac{\partial}{\partial x}P$$

portanto

$$Q_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{t^2+x^2}.$$

Mais precisamente,

$$P_t(x) + iQ_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{t+ix}{t^2+x^2} = \frac{i}{\pi}\frac{x-it}{t^2+x^2} = \frac{i}{\pi}\frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{i}{\pi z}$$

a qual é analítica em $\operatorname{Im} z > 0$.

Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definimos o valor principal de $1/x$, abreviado v.p. $1/x$, por

$$\text{v.p.}\frac{1}{x}(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,dx,$$

o qual é uma distribuição temperada.

De fato, como a integral $1/x$ em $\epsilon < |x| < 1$ é zero e pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\text{v.p.}\frac{1}{x}(\phi) = \int_{|x|<1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\,dx + \int_{|x|>1}\frac{\phi(x)}{x}\,dx.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\phi(x) - \phi(0) = \int_0^x \phi'(t)\,dt = x\int_0^1 \phi'(tx)\,dt,$$

como $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)| = C_{\alpha,\beta} < \infty$ para todo α, $\beta \in \mathbb{N}$. Logo $|\phi'(x)| \leq \|\phi'\|_{L^\infty}$. Assim

$$\left|\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\right| \leq \|\phi'\|_{L^\infty}\int_0^1 dt = \|\phi'\|_{L^\infty}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left|\text{v.p.}\frac{1}{x}(\phi)\right| &\leq \int_{|x|<1}\left|\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\right|dx + \int_{|x|>1}\left|\frac{x\phi(x)}{x^2}\right|dx \\ &\leq \|\phi'\|_{L^\infty} + \|x\phi\|_{L^\infty}\int_{|x|>1}\frac{1}{x^2}\,dx \leq C(\|\phi'\|_{L^\infty} + \|x\phi\|_{L^\infty}).\end{aligned}$$

Assim, esta expresão esta bem definida.

Proposição 1.6.1. *Em* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{t\to 0} Q_t = \dfrac{1}{\pi} v.p. \dfrac{1}{x}$.

Demonstração: Para cada $t > 0$, as funções $\psi_t(x) = \frac{1}{x}\chi_{\{|x|>t\}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e são limitadas. A função ψ_t converge para v.p.$\frac{1}{x}$ em $\mathcal{S}'$ quando $t \to 0$. De fato, se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{t\to 0} \psi_t(\phi) = \lim_{t\to 0} \int_{|x|>t} \frac{\phi(x)}{x}\, dx = \text{v.p.}\frac{1}{x}(\phi).$$

Portanto, basta mostrar que em $\mathcal{S}'$, $\lim_{t\to 0}\left(Q_t - \frac{1}{\pi}\psi_t\right) = 0$ pois

$$\lim_{t\to 0} Q_t = \lim_{t\to 0}\left(Q_t - \frac{1}{\pi}\psi_t\right) + \lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi}\psi_t = \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\frac{1}{x}.$$

Para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ fixada,

$$\begin{aligned}(\pi Q_t - \psi_t)(\phi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x\phi(x)}{t^2+x^2}\, dx - \int_{|x|>t} \frac{\phi(x)}{x}\, dx \\ &= \int_{|x|<t} \frac{x\phi(x)}{t^2+x^2}\, dx + \int_{|x|>t}\left(\frac{x}{t^2+x^2} - \frac{1}{x}\right)\phi(x)\, dx.\end{aligned}$$

Se fazemos mudança de variável $x = t\tilde{x}$, temos

$$(\pi Q_t - \psi_t)(\phi) = \int_{|\tilde{x}|<1} \frac{t\tilde{x}\phi(t\tilde{x})}{t^2+t^2\tilde{x}^2}\, t\, d\tilde{x} + \int_{|\tilde{x}|>1}\left(\frac{t\tilde{x}}{t^2+t^2\tilde{x}^2} - \frac{1}{t\tilde{x}}\right)\phi(t\tilde{x})t\, d\tilde{x}$$

$$= \int_{|x|<1} \frac{x\phi(tx)}{1+x^2}\, dx + \int_{|x|>1}\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{x}\right)\phi(tx)\, dx = \int_{|x|<1} \frac{x\phi(tx)}{1+x^2}\, dx - \int_{|x|>1} \frac{\phi(tx)}{x(1+x^2)}\, dx.$$

Como $\dfrac{x}{1+x^2} \in L^1(|x| < 1)$ e $\frac{1}{x(1+x^2)} \in L^1(|x| > 1)$ segue do teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{t\to 0}(\pi Q_t - \psi_t)(\phi) = \phi(0)\int_{|x|<1} \frac{x}{1+x^2}\, dx - \phi(0)\int_{|x|>1} \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx = 0.$$

□

Como uma consequência desta proposição obtemos que

$$\lim_{t\to 0} Q_t * f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy.$$

Dada uma função $f \in \mathcal{S}$, definimos sua transformada de Hilbert por

$$Hf = \lim_{t\to 0} Q_t * f(x) = \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\frac{1}{x} * f.$$

Afirmamos que

$$\widehat{\left(\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\frac{1}{x}\right)}(\xi) = -i\ \text{sgn}(\xi) \tag{1.6.1}$$

De fato, seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\langle x \cdot \text{v.p.}\frac{1}{x}, \phi\rangle = \langle 1, \phi\rangle$, assim

$$\left(x \cdot \text{v.p.}\frac{1}{x}\right)^{\widehat{}}(\xi) = -\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{d\xi}\widehat{T} = \widehat{1} = \delta$$

onde $T = \text{v.p.}\frac{1}{x}$ e δ é a distribuição delta de Dirac. Disto temos que

$$\frac{d\widehat{T}}{d\xi} = -2i\pi\delta$$

então $\widehat{T}(\xi) = -2i\pi H(\xi) + C$, onde H é a função Heaviside,

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & , \text{se } \xi \geq 0, \\ 0 & , \text{se } \xi < 0. \end{cases}$$

Como $T = \text{v.p.}\frac{1}{x}$ é ímpar e $\int_{|x|>-\epsilon} \phi(-x)\, dx = -\int_{|x|>\epsilon} \phi(x)\, dx$, então $\widehat{T}$ é ímpar, assim temos que

$$-2i\pi\, H(-\xi) + C = 2i\pi\, H(\xi) + C,$$

então $-2i\pi + C = -C$, e assim $C = i\pi$. Portanto,

$$\begin{aligned} \widehat{T} &= \left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right)^{\widehat{}}(\xi) = -2i\pi\, H(\xi) + i\pi \\ &= \begin{cases} -i\pi & , \text{se } \xi \geq 0, \\ i\pi & , \text{se } \xi < 0. \end{cases} \\ &= -i\pi\, \text{sgn}(\xi), \end{aligned}$$

e assim

$$\left(\frac{1}{\pi} v.p.\frac{1}{x}\right)^{\widehat{}}(\xi) = -i\, \text{sgn}(\xi)$$

Disto obtemos;

$$(Hf)\widehat{\ }(\xi) = \left(\frac{1}{\pi} v.p.\frac{1}{x} * f\right)^{\widehat{}}(\xi) = \left(\frac{1}{\pi} v.p.\frac{1}{x}\right)^{\widehat{}}(\xi) \cdot \widehat{f}(\xi) = -i\ \text{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Agora, pela identidade de Plancherel,

$$\|Hf\|_{L^2} = \|\widehat{Hf}\|_{L^2} = \| - i\, sgn(\xi)\widehat{f}(\xi)\|_{L^2} = \|\widehat{f}(\xi)\|_{L^2}.$$

Por tanto, a transformada de Hilbert está bem definida em L^2. Mais ainda, ela é uma isometria em L^2.

Por (1.6.1), $f \in \mathcal{S}$, então $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$

$$(H(Hf))\widehat{\ }(\xi) = -i\, sgn(\xi)(Hf)\widehat{\ }(\xi) = -\widehat{f}(\xi)$$

assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(H(Hf))\widehat{\ }(\xi) &= \mathcal{F}(-\widehat{f}(\xi)) \\ H(Hf)(x) &= -f(x). \end{aligned}$$

Agora temos,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} Hf(x)g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{f(y)}{x-y}\,dy\right) g(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z|>\epsilon}\frac{f(y)}{z}\,g(y+z)\,dz\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z|>\epsilon}\frac{-g(y-z)}{z}\,dz\right) dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(y)Hg(y)\,dy \quad \text{para todo } f,g\in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Por tanto, a adjunta de H, H^*, segundo $\int_{\mathbb{R}} Hf(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)H^*g(x)$, é $H^* = -H$.

O seguinte teorema prova que a transformada de Hilbert, agora definida para funções em $\mathcal{S}$ ou L^2, pode ser extendida a funções em L^p, $1 < p < \infty$.

Teorema 1.6.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a) *(Kolmogorov) H é fraco $(1,1)$:*

$$|\{x\in\mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \text{ para toda } f\in L^1(\mathbb{R}). \tag{1.6.3}$$

b) *(M. Riesz) H é forte (p,p), $1 < p < \infty$:*

$$\|Hf\|_p \le C_p\|f\|_p \text{ para toda } f\in L^p(\mathbb{R}). \tag{1.6.4}$$

Demonstração: Suponha que $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pela decomposição de Calderón-Zygmund, dado $\lambda > 0$, podemos escrever $f = g + b$ com g e b satisfazendo as propriedades fornecidas pela Proposição 1.5.1.

Estimemos $\|b_j\|_{L^2}$. Note que,

$$\begin{aligned}|b_j(x)| &\le |f(x)|\chi_{I_j}(x) + \left(\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j}|f(x)|\,dx\right)\chi_{I_j}(x) \\ &\le |f(x)|\chi_{I_j}(x) + \left(\frac{1}{|I_j|}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\chi_{I_j}(x)\,dx\right)\chi_{I_j}(x) \le |f(x)|\chi_{I_j}(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{|I_j|}\|f(x)\|_{L^2}|I_j|^{1/2}\right)\chi_{I_j}(x) = \left(|f(x)| + \frac{\|f(x)\|_{L^2}}{|I_j|^{1/2}}\right)\chi_{I_j}(x)\end{aligned}$$

então,

$$|b_j(x)|^2 \le 2\left(|f(x)|^2 + \frac{\|f(x)\|^2_{L^2}}{|I_j|}\right)\chi_{I_j}(x)$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^2}|b_j(x)|^2\,dx \le 2\left(\int_{I_j}|f(x)|^2dx + \|f(x)\|^2_{L^2}\right) \le 4\|f\|^2_{L^2}.$$

Portanto $b_j\in L^2$.

Como $Hf = Hg + Hb$,

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R} : |Hg(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \in \mathbb{R} : |Hb(x)| > \lambda/2\}| \quad (1.6.5)$$

Estimamos o primeiro termo usando o fato de $\|Hf\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Como $g \in L^2(\mathbb{R})$ então

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Hg(x)| > \lambda/2\}| \leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} |Hg(x)|^2 dx = \frac{4}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx.$$

Sabendo que $\frac{g(x)}{\lambda} < 2$ q.t.p., $x \in \mathbb{R}$, então

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Hg(x)| > \lambda/2\}| \leq \frac{4}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} g(x) \frac{g(x)}{\lambda}\, dx < \frac{8}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = \frac{8}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx.$$

Para estimar o segundo termo de (1.6.5), seja $I_j = (c_j - \frac{\ell_j}{2}, c_j + \frac{\ell_j}{2})$. Seja $I_j^* = (c_j - \ell_j, c_j + \ell_j)$, então $|I_j^*| = 2\ell_j = 2|I_j|$. $\Omega^* = \cup_j I_j^*$ satisfaz

$$|\Omega^*| = |\cup_j I_j^*| \leq \sum_j |I_j^*| = 2 \sum_j |I_j| = 2|\Omega|$$

e

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R} : |Hb(x)| > \lambda/2\}| &\leq |\{x \in \Omega^* : |Hb(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \notin \Omega^* : |Hb(x)| > \lambda/2\}| \\
&\leq |\Omega^*| + |\{x \notin \Omega^* : |Hb(x)| > \lambda/2\}| \\
&\leq 2|\Omega| + |\{x \notin \Omega^* : |Hb(x)| > \lambda/2\}| \leq \frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1} + \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |Hb(x)|\, dx
\end{aligned}$$

Tem-se que se $\sum_j \|b_j\|_{L^2} < \infty$ então $\sum_j b_j(x) = b(x) \in L^2(\mathbb{R})$ e além disso, $\lim\limits_{N\to\infty} \| \sum\limits_{|j|\leq N} b_j - b\|_{L^2} = 0$.

$$\begin{aligned}
Hb(x) &= H(\lim_{N\to\infty} \sum_{|j|\leq N} b_j(x)) = \lim_{N\to\infty} H(\sum_{|j|\leq N} b_j(x)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{|j|\leq N} Hb_j(x) \\
&= \sum_j Hb_j(x), \text{ pois } \sum_j \|Hb_j\|_{L^2} < \infty
\end{aligned}$$

então $Hb(x) = \sum_j Hb_j(x)$ em L^2. Assim,

$$Hb(x) = \sum_j Hb_j(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R} \quad (1.6.6)$$

Como $I_j^* \subset \Omega^*$ então $\mathbb{R} \setminus \Omega^* \subset \mathbb{R} \setminus I_j^*$, para todo j. Assim por (1.6.6) temos,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |Hb(x)|dx &\leq \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} \sum_j |Hb_j(x)|dx \\
&= \sum_j \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |Hb_j(x)|dx \leq \sum_j \int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*} |Hb_j(x)|dx
\end{aligned}$$

Portanto para completar a prova de que Hf é fraco $(1,1)$, é suficiente mostrar que

$$\sum_j \int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*} |Hb_j(x)|dx \leq C\|f\|_{L^1}.$$

Quando $x \notin I_j^*$ e $y \in I_j$, então

$$\begin{aligned} Hb_j(x) &= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon} \frac{b_j(y)}{x-y}\,dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{b_j(y)}{x-y}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x-y}\,dy \end{aligned}$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*} |Hb_j(x)|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*}\left|\int_{I_j}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy\right|dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*}\left|\int_{I_j} b_j(y)\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x-c_j}\right)dy\right|dx$$
$$\leq \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*}\left(\int_{I_j}|b_j(y)|\frac{|y-c_j|}{|x-y||x-c_j|}\,dy\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{I_j}|b_j(y)|\left(\int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*}\frac{|y-c_j|}{|x-y||x-c_j|}\,dx\right)dy$$

Como $|y-c_j| < \ell_j/2$, $|x-y| > |x-c_j|/2$ e $\{x : x \in \mathbb{R}\setminus I_j^*\} \subset \{x : |x-c_j| > \ell_j\}$, então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*}|Hb_j(x)|\,dx &\leq \frac{1}{\pi}\int_{I_j}|b_j(y)|\left(\int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*}\frac{|\ell_j|}{|x-c_j|^2}\,dx\right)dy \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_{I_j}|b_j(y)|\left(\int_{|x-c_j|>\ell_j}\frac{\ell_j}{|x-c_j|^2}\,dx\right)dy = \frac{\ell_j}{\pi}\int_{I_j}|b_j(y)|\left(\int_{|x-c_j|>\ell_j}\frac{dx}{|x-c_j|^2}\right)dy \\ &\leq \frac{\ell_j}{\pi}\int_{I_j}|b_j(y)|\left(\frac{2}{\ell_j}\right)dy = \frac{2}{\pi}\int_{I_j}|b_j(y)|\,dy \end{aligned}$$

Então,

$$\sum_j\int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*}|Hb_j(x)|\,dx \leq \frac{2}{\pi}\sum_j\int_{I_j}|b_j(y)|\,dy \leq \frac{4}{\pi}\|f\|_{L^1}.$$

Para mostrar que a desigualdade fraca $(1,1)$ cumpre para $f \in L^1$, sabemos que:

1') Uma sequência φ_k de funções mensuráveis em E é dita de Cauchy em medida se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{m,n\to\infty}|\{x \in E : |\varphi_m(x)-\varphi_n(x)| \geq \epsilon\}| = 0.$$

2') Uma condição necessária e suficiente para que $\{\varphi_k\}$ seja Cauchy em medida é que exista uma subsequência $\{\varphi_{k_j}\}$ convergindo q.t.p. para uma função mensurável φ.

Seja $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $f_n \to f$ em $L^1(\mathbb{R})$, então $\{Hf_n\}$ é de Cauchy em medida. De fato, para todo $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |\{x\in\mathbb{R} : |Hf_m(x)-Hf_n(x)| \geq \epsilon\}| &= |\{x\in\mathbb{R} : |H(f_m-f_n)(x)| \geq \epsilon\}| \\ &\leq \frac{c}{\epsilon}\|f_m-f_n\|_{L^1} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $m, n \to \infty$.

Segue de 2') que existe uma subsequência Hf_{n_j} convergindo q.t.p. para uma função mensurável que denotaremos por Hf. Assim,

$$Hf(x) = \lim_{j\to\infty} Hf_{n_j}(x) \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, $|Hf(x)| \le |Hf_{n_j}(x) - Hf(x)| + |Hf_{n_j}|$

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\}| &\le |\{x \in \mathbb{R} : |Hf_{n_j}(x) - Hf(x)| > \lambda/2\}| \\
&\quad + \{x \in \mathbb{R} : |Hf_{n_j}(x)| > \lambda/2\}| \\
&\le |\{x \in \mathbb{R} : |Hf_{n_j}(x) - Hf(x)| > \lambda/2\}| + \frac{2c}{\lambda}\|f_{n_j}\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Fazendo $j \to \infty$, temos

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\}| \le \frac{2c}{\lambda}\|f\|_{L^1} \text{ para todo } f \in L^1.$$

Como H é fraco $(1,1)$ e forte $(2,2)$, pelo teorema de Interpolação de Marcinkiewicz, H é de tipo forte (p,p) para $1 < p \le 2$.

Seja $p > 2$, $f \in \mathcal{S}$, $\varphi(x) \in L^q$ e da equação (1.6.2) temos,

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_{L^p} &= \sup_{\|\varphi\|_{L^q} \le 1} \left| \int Hf(x)\, \varphi(x)\, dx \right| = \sup_{\|\varphi\|_{L^q} \le 1} \left| \int f(x)\, H\varphi(x)\, dx \right| \\
&\le \sup_{\|\varphi\|_{L^q} \le 1} \|f\|_{L^p} \|H\varphi\|_{L^q} \le \sup_{\|\varphi\|_{L^q} \le 1} c\|f\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^q} \le c\|f\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|Hf\|_{L^p} \le c\|f\|_{L^p} \text{ , para todo } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ , } 1 < p < \infty. \tag{1.6.7}$$

Agora mostraremos que Hf é forte (p,p), $1 < p < \infty$ para $f \in L^p$. Seja $f_n \in \mathcal{S}$ tal que $f_n \to f$ em $L^p(\mathbb{R})$, então por (1.6.7) temos,

$$\|Hf_m - Hf_n\|_{L^p} \le c\|f_m - f_n\|_{L^p} \longrightarrow 0$$

e como L^p é espaço métrico completo, então $Hf_n \longrightarrow Hf$ em L^p,

$$\|Hf_n\|_{L^p} \le \|f_n\|_{L^p}$$

fazendo $n \to \infty$, temos

$$\|Hf\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} \text{ , } 1 < p < \infty \text{ , } f \in L^p(\mathbb{R})$$

Isto completa a prova do Teorema. □

Para $\epsilon > 0$, a função $\frac{1}{y}\chi_{\{|y|>\epsilon\}}(y) \in L^q(\mathbb{R})$, $1 < q \le \infty$. Para $f \in L^p(\mathbb{R})$, definimos

$$H_\epsilon f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-y) \cdot \frac{1}{y}\chi_{\{}|y| > \epsilon\}(y)\, dy$$

pela desigualdade de Hölder $H_\epsilon f(x)$ esta bem definida. Mostraremos que $\{H_\epsilon f\}$ converge puntualmente a Hf.

Agora temos,

$$\left(\frac{1}{y}\chi_{\{}|y|>\epsilon\}\right)^{\widehat{}}(\xi) = \lim_{N\to\infty}\int_{\epsilon<|y|<N}\frac{e^{-2\pi iy\xi}}{y}\,dy = \lim_{N\to\infty}\int_{\epsilon<|y|<N}\frac{\cos 2\pi iy\xi - i\ \mathrm{sen}(2\pi iy\xi)}{y}\,dy$$
$$= \lim_{N\to\infty}\int_{\epsilon<|y|<N} -i\frac{\mathrm{sen}(2\pi iy\xi)}{y}\,dy$$

Seja $t = 2\pi y|\xi|$, então $\frac{dt}{t} = \frac{dy}{y}$, e $2\pi y\xi = 2\pi y|\xi|\ \mathrm{sgn}(\xi)$, portanto

$$m(\xi) = \left(\frac{1}{y}\chi_{\{|y|>\epsilon\}}\right)^{\widehat{}}(\xi) \;=\; \lim_{N\to\infty}\int_\epsilon^N -2i\frac{\mathrm{sen}(2\pi iy\xi)}{y}\,dy$$
$$= \; -2i\, sgn(\xi)\lim_{N\to\infty}\int_{2\pi\epsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|}\frac{\mathrm{sen}\, t}{t}\,dt < \infty$$

Então,

$$(H_\epsilon f)\widehat{}(\xi) = \left(\frac{1}{y}\chi_{\{|y|>\epsilon\}} * f\right)^{\widehat{}}(\xi) = \left(\frac{1}{y}\chi_{\{|y|>\epsilon\}}\right)^{\widehat{}}(\xi)\,\widehat{f}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

Existe $c>0$ tal que $|m(\xi)| \leq c$. Por Plancherel segue que

$$\|H_\epsilon f\|_{L^2} = \|(H_\epsilon f)\widehat{}\|_{L^2} = |m(\xi)|\|\widehat{f}\|_{L^2} \leq c\|f\|_{L^2}$$

portanto $H_\epsilon f$ é forte $(2,2)$. Usando os mesmos procedimentos do teorema anterior conclui-se que $H_\epsilon f$ é fraco $(1,1)$ e forte (p,p), $1<p<\infty$.

Seja $\{f_n\} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $f_n \to f$ em L^p. Como

$$H_\epsilon f_n(x) - H_\epsilon f(x) = \int (f_n(x-y) - f(x-y))\frac{1}{y}\chi_{\{}|y|>\epsilon\}(y)\,dy$$

então $\lim_{n\to\infty} H_\epsilon f_n(x) = H_\epsilon f(x)$.Assim,

$$Hf(x) = \lim_{n\to\infty} Hf_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0} H_\epsilon f_n = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\lim_{n\to\infty} H_\epsilon f_n\right) = \lim_{\epsilon\to 0} H_\epsilon f(x)$$

Então para $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon\to 0} H_\epsilon f(x) \text{ em } L^p.$$

Agora desejamos provar que a mesma igualdade ocorre para quase todo ponto.

Teorema 1.6.2. *Dado $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, então*

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon\to 0} H_\epsilon f(x) \quad q.t.p.\ x \in \mathbb{R}.$$

Como $\{H_\epsilon f\}$ converge a Hf em L^p, então existe alguma subsequência $\{H_{\epsilon_k} f\}$, tal que $\epsilon_k \to 0$ e

$$\lim_{k\to\infty} H_{\epsilon_k} f(x) = Hf(x) \text{ q.t.p. } x$$

Então só temos que provar que $\lim H_\epsilon f(x)$ existe para q.t.p. x. Definimos

$$H^* f(x) = \sup_{\epsilon>0} |H_\epsilon f(x)|$$

Em consequência, para provar o Teorema 1.6.2, pelo Teorema 1.3.1 será suficiente mostrar que o operador maximal $H^* f(x)$ é fraco (p,p), $1 \leq p < \infty$. Isto, segue do seguinte resultado.

Teorema 1.6.3. *H^* é forte (p,p), $1 < p < \infty$ e fraco $(1,1)$.*

Para provar isto necessitamos de um lema, conhecido como desigualdade de Cotlar.

Lema 1.6.1. *Se $f \in \mathcal{S}$ então $H^* f(x) \leq M(Hf)(x) + C\, Mf(x)$.*

Demonstração: Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ não negativa, decrescente em $(0,\infty)$, suportada em $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1/2\}$ e $\int \phi(x)\, dx = 1$. Seja $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ e $H_\epsilon f = \dfrac{1}{y}\chi_{\{|y|>\epsilon\}} * f$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}\chi_{\{|y|>\epsilon\}}(y) &= \left(\phi_\epsilon * \text{v.p.}\frac{1}{x}\right)(y) + \left[\frac{1}{y}\chi_{\{|y|>\epsilon\}} - \left(\phi_\epsilon * \text{v.p.}\frac{1}{x}\right)(y)\right] \\ &= g_\epsilon(y) + h_\epsilon(y). \end{aligned}$$

$g_\epsilon * f = \phi_\epsilon * \text{v.p.}\dfrac{1}{x} * f = \phi_\epsilon * Hf$. Então

$$\sup_{\epsilon>0} |\phi_\epsilon * Hf(x)| \leq M(Hf)(x).$$

É suficiente tomar $\epsilon = 1$, já que por dilatação segue para qualquer outro ϵ.

Dividiremos a prova da estimativa em dois casos.

Caso 1 Suponha que $|y| > 1$.

Neste caso,

$$|h(y)| = \left|\frac{1}{y} - \int_{|x|<1/2} \frac{\phi(x)}{y-x}\, dx\right|.$$

Como $|y| > 1$ e $|x| \leq 1/2$, $1 < |y| \leq |y-x| + |x| < |y-x| + 1/2$ então $|y-x| > 1/2$, logo

$$\frac{\phi(x)}{y-x} \in L^1 \text{ porque } \int \frac{|\phi(x)|}{|y-x|}\, dx \leq \int 2\phi(x)\, dx = 2.$$

Então,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{y-x}\chi_{\{|y-x|>\epsilon\}} dx = \int_{|x|<1/2} \frac{\phi(x)}{y-x}\, dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}|h(y)| &= \left|\frac{1}{y} - \int_{|x|<1/2} \frac{\phi(x)}{y-x}\,dx\right| \\ &= \left|\int_{|x|<1/2} \phi(x)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-x}\right)dx\right| \leq \int_{|x|<1/2} \frac{|x|\phi(x)}{|y||y-x|}\,dx.\end{aligned}$$

Como $|x| < 1/2 < |y|/2$, $|y| < |y-x| + |x| < |y-x| + \frac{|y|}{2}$, então $\frac{|y|}{2} < |y-x|$ logo,

$$|h(y)| \leq \int_{|x|<1/2} \phi(x) \frac{1/2}{|y|}\frac{2}{|y|} dx = \frac{1}{y^2}\int_{|x|<1/2} \phi(x)\,dx = \frac{C}{y^2}.$$

Caso 2 Suponha que $|y| < 1$.

Então $|x| \leq |y-x| + |y| < \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} < 2$ e como $\int_{\delta<|x|<2} \frac{dx}{x} = 0$ porque $\frac{1}{x}$ é ímpar, então

$$\begin{aligned}|h_\epsilon| &= \left|-\lim_{\delta\to 0}\int_{|x|>\delta} \frac{\phi(y-x)}{x}\,dx\right| = \left|-\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta<|x|<2} \frac{\phi(y-x)}{x}\,dx\right| \\ &= \left|\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta<|x|<2} \frac{\phi(y-x)-\phi(y)}{x}\,dx\right| = \left|\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta<|x|<2} \left(-\int_0^1 \phi'(y-sx)\,ds\right)dx\right| \\ &\leq \left|\int_{|x|<2} \|\phi'\|_{L^\infty}\right| \leq 4\|\phi'\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Assim temos,

$$|h(y)\chi_{\{|y|>1\}}(y)| \leq \frac{C_1}{y^2} \leq \frac{2C_1}{y^2+1}$$

e

$$|h(y)\chi_{\{|y|<1\}}(y)| \leq C_2 \leq \frac{2C_2}{y^2+1}$$

Seja $C = \max\{2C_1, 2C_2\}$, então $|h(y)| \leq \frac{C}{1+y^2}$. Como $\frac{C}{1+y^2}$ é radial decrescente e pertence a L^1 segue que

$$h * f(x) \leq \left(\frac{C}{1+y^2} * f\right)(x) \leq C\,Mf(x)$$

Assim concluimos que $H^*f(x) \leq M(Hf)(x) + CMf(x)$. □

Demonstração do Teorema 1.6.3. Como a Função Maximal Hardy-Littlewood e a Transformada de Hilbert são fortes (p,p), $1 < p < \infty$, então pelo Lema 1.6.1, H^* é forte (p,p).

Agora provaremos que H^* é fraco $(1,1)$. Assumimos que $f \geq 0$, fixamos $\lambda > 0$ e do teorema de decomposição de Calderón-Zygmund, temos que $H^*f = H^*g + H^*b$, então

$$|\{x \in \mathbb{R} : |H^*f(x)| > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R} : |H^*g(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \in \mathbb{R} : |H^*b(x)| > \lambda/2\}|$$

Estimativa do primeiro termo: Como $\int_{I_j} |b_j(x)|^2 dx \leq 4\|f\|_{L^2}^2$, então $b \in L^2$ e $f \in L^2$, assim $g \in L^2$. Como $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$, então

$$\begin{aligned}|\{x \in \mathbb{R} : |H^*g(x)| > \lambda/2\}| &\leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int |H^*g(x)|^2 dx = \frac{4}{\lambda^2}\|H^*g\|_{L^2}^2 \leq \frac{4c}{\lambda^2}\|g\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{4c}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}} g(x)^2 \leq \frac{8c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} g(x) = \frac{8c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{8c}{\lambda}\|f\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Estimativa do segundo termo: Seja $I_j = \left(c_j - \frac{\ell_j}{2}, c_j + \frac{\ell_j}{2}\right)$, $|I_j| = l_j$, $I_j^* = (c_j - \ell_j, c_j + \ell_j)$, então $|I_j^*| = 2|I_j|$. Seja $\Omega^* = \cup I_j^*$, então $|\Omega^*| \leq 2|\Omega|$ com $\Omega = \cup I_j$. Agora,

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R} : |H^*b(x)| > \lambda/2\}| &\leq |\{x \in \Omega^* : |H^*b(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \in (\Omega^*)^c : |H^*b(x)| > \lambda/2\}| \\
&\leq |\Omega^*| + |\{x \in (\Omega^*)^c : |H^*b(x)| > \lambda/2\}| \\
&\leq 2|\Omega| + |\{x \in (\Omega^*)^c : |H^*b(x)| > \lambda/2\}| \\
&\leq 2|\cup I_j| + |\{x \notin \Omega^* : |H^*b(x)| > \lambda/2\}| \\
&\leq \frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1} + |\{x \notin \Omega^* : |H^*b(x)| > \lambda/2\}|
\end{aligned}$$

Só falta estimar $|\{x \notin \Omega^* : |H^*b(x)| > \lambda/2\}|$. Para isto, fixemos $x \notin \Omega^*$, $\epsilon > 0$ e b_j com suporte I_j, então um dos seguintes casos ocorre:

1) $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap I_j = I_j$.

2) $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap I_j =$.

3) $x - \epsilon \in I_j$ ou $x + \epsilon \in I_j$.

Caso 1: Neste caso $I_j \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)$, como $|x - y| > \epsilon$ então $|y| > |x + \epsilon|$ e $y \notin I_j$, assim $b_j(y) = 0$, portanto

$$H_\epsilon b_j(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{b_j(y)}{x - y}\, dy = 0$$

Caso 2:

Neste caso $x - y > 0$, logo,

$$Hb_j(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{b_j(y)}{x - y}\, dy = \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{b_j(y)}{x - y}\, dy = H_\epsilon b_j(x)$$

Como $x - c_j > \ell_j$ e $|y - c_j| \leq \ell_j/2$ então $|x - y| > |x - c_j|/2$. Assim,

$$\begin{aligned}
|H_\epsilon b_j(x)| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x - y}\, dy - \int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x - c_j}\, dy \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{I_j} |b_j(y)| \left| \frac{1}{x - y} - \frac{1}{x - c_j} \right| dy \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{I_j} |b_j(y)| \frac{|y - c_j|}{|x - y||x - c_j|}\, dy \leq \frac{1}{\pi} \frac{\ell_j}{2} \int_{I_j} \frac{2|b_j(y)|}{|x - c_j|^2}\, dy = \frac{\ell_j}{\pi} \cdot \frac{1}{|x - c_j|^2} \|b_j\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Caso 3: Como $x \notin \Omega^*$, então $I_j \subset (x - 3\epsilon, x + 3\epsilon)$, e para todo $y \in I_j$, $|x - y| > \epsilon/3$. Assim,

$$|H_\epsilon b_j(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x - y}\, dy \leq \frac{3}{\epsilon\pi} \int_{x-3\epsilon}^{x+3\epsilon} |b_j(y)|\, dy$$

Agora juntamos os três casos e temos,

$$|H_\epsilon b_j(x)| \leq \frac{\ell_j}{\pi|x - c_j|^2} \|b_j\|_{L^1} + \frac{3}{\epsilon\pi} \int_{x-3\epsilon}^{x+3\epsilon} |b_j(y)|\, dy$$

Como $H_\epsilon b(x) = \sum_j H_\epsilon b_j(x)$ então,

$$\begin{aligned}
|H_\epsilon b(x)| &\leq \sum_j \frac{\ell_j}{\pi|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1} + \frac{3}{\epsilon\pi}\int_{x-3\epsilon}^{x+3\epsilon}\sum_j |b_j(y)|\,dy \\
&\leq \sum_j \frac{\ell_j}{\pi|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1} + \frac{3}{\epsilon\pi}\int_{x-3\epsilon}^{x+3\epsilon} |b(y)|\,dy \\
&= \sum_j \frac{\ell_j}{\pi|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1} + \frac{3}{\epsilon\pi}\cdot 6\epsilon\cdot\frac{1}{6\epsilon}\int_{x-3\epsilon}^{x+3\epsilon} |b(y)|\,dy \\
&\leq \sum_j \frac{\ell_j}{\pi|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1} + C\,Mb(x).
\end{aligned}$$

Como $I_j^* = 2I_j \subset \Omega^*$, então $\mathbb{R}\setminus\Omega^* \subset \mathbb{R}\setminus 2I_j$, portanto,

$$\begin{aligned}
&|\{x \notin \Omega^* : H^*b(x) > \lambda/2\}| = |\{x \notin \Omega^* : \sup_{\epsilon>0}|H_\epsilon b(x)| > \lambda/2\}| \\
&\leq |\{x \notin \Omega^* : \sum_j \frac{\ell_j}{\pi|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1} > \lambda/4\}| + |\{x\in\mathbb{R} : Mb(x) > \lambda/4C\}| \\
&\leq \frac{4}{\lambda\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}\sum_j \frac{\ell_j}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1}\,dx + \frac{C'}{\lambda}\|b\|_{L^1} \\
&\leq \frac{4}{\lambda\pi}\|b_j\|_{L^1}\sum_j\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j}\frac{\ell_j}{|x-c_j|^2}\,dx + \frac{C'}{\lambda}\|b\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Como $\{x : x\in\cup_j\mathbb{R}\setminus 2I_j\} \subset \{x : |x-c_j| > \ell_j\}$, então

$$\sum_j\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j}\frac{\ell_j}{|x-c_j|^2}\,dx \leq \int_{\cup_j\mathbb{R}\setminus 2I_j}\frac{\ell_j}{|x-c_j|^2}\,dx \leq \int_{|x-c_j|>l_j}\frac{\ell_j}{|x-c_j|^2}\,dx = 2$$

Portanto,

$$|\{x\notin\Omega^* : H^*b(x) > \lambda/2\}| \leq \frac{\tilde{C}}{\lambda}\|b_j\|_{L^1} + \frac{C'}{\lambda}\|b\|_{L^1} \leq \frac{C''}{\lambda}\|b\|_{L^1}.$$

Em consequência H^* é fraco $(1,1)$. $\square$

Capítulo 2

Integrais Singulares

2.1 Distribuições Homogêneas

Definição 2.1.1. *Dizemos que uma função f é homogênea de grau d se $f(tx) = t^d f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $t > 0$. Uma distribuição K é dita homogênea de grau d se para toda função teste ϕ tivermos $\langle K, \phi_t \rangle = t^d \langle K, \phi \rangle$ sendo $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(x/t)$.*

Exemplo 2.1.1: Seja $\Omega(x)$ uma função homogênea de grau zero então a distribuição v.p.$\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$ é homogênea de grau $-n$, onde $x' = \frac{x}{|x|}$.

Demonstração: De fato, seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\left\langle \text{v.p.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}, \phi_\lambda \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \lambda^{-n} \phi(x/\lambda)\, dx.$$

Aplicando mudança de variável $y = x/\lambda$ temos que

$$\left\langle \text{v.p.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}, \phi_\lambda \right\rangle = \lambda^{-n} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon\lambda^{-1}} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} \phi(y)\, dy = \lambda^{-n} \left\langle \text{v.p.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}, \phi \right\rangle.$$

$\square$

Proposição 2.1.1. *Se K é uma distribuição homogênea de grau d, então $\widehat{K}$ é uma distribuição homogênea de grau $-n-d$.*

Demonstração: Recordemos que $\widehat{\phi}_\lambda(\xi) = \widehat{\phi}(\lambda\xi)$. Sejam $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi(\cdot) = \widehat{\phi}(\lambda \cdot)$ então

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T}, \phi_\lambda \rangle &= \langle T, \widehat{\phi}_\lambda \rangle = \langle T, \widehat{\phi}(\lambda \cdot) \rangle = \langle T, \psi \rangle \\ &= \lambda^{-d} \langle T, \psi_\lambda \rangle = \lambda^{-n-d} \langle T, \widehat{\phi} \rangle = \lambda^{-n-d} \langle \widehat{T}, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{T}$ é homogênea de grau $-n-d$. $\square$

Como consequência do fato acima temos o seguinte corolário

Corolário 2.1.1. *Seja $0 < d < n$ e $f(x) = |x|^{-d}$ então*

$$\hat{f}(\xi) = C_{n,d}|\xi|^{d-n} \tag{2.1.1}$$

onde $C_{n,d} = \frac{\pi^{d-n/2}\Gamma\left(\frac{n-d}{n}\right)}{\Gamma(d/2)}|\xi|^{d-n}$.

Demonstração: Observe que $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, como $d < n$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-d}\, dx = |S^{n-1}| \int_0^\infty r^{-d+n-1}\, dr = \infty.$$

Dividiremos a prova em três casos

Caso 1: Suponha que $n/2 < d < n$.

Neste caso consideremos a seguinte decomposição

$$\begin{aligned} f(x) &= |x|^{-d}\chi_{\{|x|<1\}}(x) + |x|^{-d}\chi_{\{|x|>1\}}(x) \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

Segue do fato $d < n$ que $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e do fato $d > n/2$ que $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim segue da Proposição 2.1.1 que $\hat{f}$ define uma função homogênea de grau $d-n$. Logo, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a função $\dfrac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{d-n}}$ é homogênea de grau zero dada por $\hat{f}(\xi')$, onde $\xi' = \frac{\xi}{|\xi|}$. Seja R_θ uma rotação definida sobre $\mathbb{R}^n$ tal que $\xi' = R_\theta(e_1)$ sendo $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Mais geralmente, se R é uma transformação ortogonal temos que $\hat{f}(R(\xi)) = \widehat{(f \circ R)}(\xi)$. Deste modo,

$$\frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{d-n}} = \hat{f}(\xi') = \hat{f}(R_\theta(e_1)) = \widehat{f \circ R_\theta}(e_1) = \hat{f}(e_1)$$

uma vez que $f(R_\theta(x)) = |R_\theta(x)|^{-d} = |x|^{-d} = f(x)$. Definindo $C_{a,n} = \hat{f}(e_1)$ então temos que $\hat{f}(\xi) = C_{a,n}|\xi|^{d-n}$.

Para determinarmos o valor da constante $C_{a.n}$, usamos $\widehat{e^{-\pi|x|^2}}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$. Segue da identidade de Plancherel que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}|x|^{-d}\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)|x|^{-d}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\mathcal{F}(|x|^{-d})(\xi)\, d\xi \\ &= C_{d,n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\xi|^2}|\xi|^{d-n}\, d\xi. \end{aligned}$$

Consequentemente, a constante $C_{n,d}$ é dada pelo quociente

$$C_{n,d} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}|x|^{-d}\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\xi|^2}|\xi|^{d-n}\, d\xi}.$$

Com esse propósito calculamos a seguinte integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}|x|^b\, dx$. De fato, aplicando mudança de coordenadas esféricas obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}|x|^b\, dx = |S^{n-1}| \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{n+b-1}\, dr.$$

Escolhendo a mudança de variáveis $s = \pi r^2$ para todo $r > 0$ temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}|x|^b\,dx &= \frac{|S^{n-1}|}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-s}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{\frac{n+b-1}{2}} s^{-1/2}\,ds \\ &= \frac{|S^{n-1}|}{2\pi^{\frac{b+n}{2}}}\int_0^\infty e^{-s}s^{\frac{b+n}{2}-1}\,ds = \frac{|S^{n-1}|}{2\pi^{\frac{b+n}{2}}}\Gamma\left(\frac{b+n}{2}\right).\end{aligned}$$

Assim,

$$C_{d,n} = \frac{\frac{|S^{n-1}|}{2\pi^{\frac{n-d}{2}}}\Gamma\left(\frac{n-d}{2}\right)}{\frac{|S^{n-1}|}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{\pi^{d-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$$

e portanto

$$\widehat{\left(|x|^{-d}\right)}(\xi) = \frac{\pi^{d-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}|\xi|^{d-n}. \tag{2.1.2}$$

Caso 2: Suponha que $0 < d < n/2$.

Como $\frac{n}{2} < n - d < n$, então pelo Caso 1 temos que

$$\widehat{\left(|\xi|^{d-n}\right)}(x) = \widehat{\left(|\xi|^{-(n-d)}\right)}(x) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}-d}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-d}{2}\right)}|x|^{-d},$$

assim

$$|x|^{-d} = \frac{\pi^{d-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\widehat{\left(|\xi|^{d-n}\right)}(x).$$

Como $\mathcal{F}(\widehat{f})(x) = f(-x)$, então aplicando transformada de Fourier temos,

$$\begin{aligned}\widehat{\left(|x|^{-d}\right)}(\xi) &= \frac{\pi^{d-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\mathcal{F}\widehat{\left(|\xi|^{d-n}\right)}(\xi) \\ &= \frac{\pi^{d-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}|-\xi|^{d-n} = \frac{\pi^{d-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}|\xi|^{d-n}.\end{aligned}$$

Caso 3: Suponha $d = n/2$.

Como $|x|^{-d}$ converge a $|x|^{-n/2}$ quando $d \to n/2$, e como a transformada de Fourier é contínua, então (2.1.2) ocorre com $d = \frac{n}{2}$. $\square$

Note que, no Corolário acima tanto $f(x) = |x|^{-a}$ quanto sua transformada de Fourier $\hat{f}(\xi) = C_{n,a}|\xi|^{a-n}$ são de classe C^∞ no complementar da origem. O próximo resultado garante que este é um fato geral, considerando-se a hipótese de homogeneidade.

Proposição 2.1.2. *Seja K uma distribuição homogênea de grau d, então K coincide com uma função C^∞ fora da origem se, e somente se, o mesmo ocorre para $\hat{K}$.*

Demonstração: Denotemos por $K_0(x)$ a restrição de K ao aberto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Então $K_0(x)$ é uma função C^∞, homogênea de grau d. Tome $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp}\chi \subseteq B(0,2)$ e $\chi \equiv 1$

em $B(0,1)$ e escreva $K = \chi K + (1-\chi)K = K_1 + K_2$. Então observamos que $K_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e portanto $\widehat{K_1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e K_2 é uma função C^∞ que se anula numa vizinhança da origem. Assim, para mostrarmos que a distribuição $\widehat{K_2}$ é C^∞ fora da origem basta provar que dado qualquer multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_+^n$ existe N suficientemente grande tal que a função $|\xi|^{2N}\partial_\xi^\alpha \widehat{K_2}(\xi)$ coincida com a transformada de Fourier de uma função em $L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $\alpha \in \mathbb{N}_+^n$ fixo. Usando as propriedades da transformada de Fourier podemos escrever a seguinte igualdade

$$|\xi|^{2N}\partial_\xi^\alpha \widehat{K_2}(\xi) = C\mathcal{F}(\Delta^N(x^\alpha K_2))(\xi).$$

Recorde que $K_2 = (1-\chi)K_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ assim podemos definir a função $f(x) = \Delta^N(x^\alpha K_2)$. Mostremos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Note que $\operatorname{supp}(f) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq 1\}$ assim só nos preocuparemos com a integrabilidade no conjunto complementar à bola unitária. Escrevendo o N-Laplaceano como um operador diferencial linear de ordem $2N$ e usando a regra de Leibiniz obtemos

$$f(x) = \sum_{|\beta|=2N} a_\beta \partial^\beta(x^\alpha K_2) = \sum_{|\beta|=2N} a_\beta \sum_{\gamma_1+\gamma_2=\beta} c_{\gamma_1,\gamma_2}\partial^{\gamma_1}(x^\alpha)\partial^{\gamma_2}K_2.$$

Recordemos ainda que $K_2(x) = (1-\chi(x))K_0(x)$ assim para todo x tal que $|x| \geq 2$ temos que $\partial^{\gamma_2}K_2(x) = (1-\chi(x))\partial^{\gamma_2}K_0(x) = \partial^{\gamma_2}K_0(x)$ uma vez que $1-\chi(x) \equiv 1$. Logo,

$$f(x) = \sum_{|\beta|=2N} a_\beta \sum_{\gamma_1+\gamma_2=\beta} c_{\gamma_1,\gamma_2}\partial^{\gamma_1}(x^\alpha)\partial^{\gamma_2}K_0(x).$$

Note que $\partial^{\gamma_2}K_0(x)$ é uma função homogênea de grau $d - |\gamma_2|$ e que $\partial^{\gamma_1}(x^\alpha)$ é homogênea de grau $|\alpha| - |\gamma_2|$. Assim vemos que a função

$$f(x) = \sum_{|\beta|=2N} \sum_{\gamma_1+\gamma_2=\beta} a_\beta c_{\gamma_1,\gamma_2}\partial^{\gamma_1}(x^\alpha)\partial^{\gamma_2}K_0(x)$$

é homogênea de grau $d + |\alpha| - |\beta| = d + |\alpha| - 2N$. Segue deste fato a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq 2} |f(x)|\, dx &= \int_2^\infty \int_{S^{n-1}} f(rx')r^{n-1}\, d\sigma(x')dr \\ &= \int_2^\infty \int_{S^{n-1}} f(x')r^{n+d+|\alpha|-2N-1}\, d\sigma(x')dr = C\int_{S^{n-1}} f(x')\, d\sigma(x') < \infty\end{aligned}$$

se tomarmos N tal que $N > \frac{n+d+|\alpha|}{2}$. □

Proposição 2.1.3. *Seja u uma função contínua em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $u(\lambda x) = \lambda^{-n}u(x)$ para todo $\lambda > 0$ e $x \neq 0$ então*

$$\langle U, \phi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon} u(x)\phi(x)\, dx \tag{2.1.3}$$

existe para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,

$$\int_{S^{n-1}} u(x')\, d\sigma(x') = 0. \tag{2.1.4}$$

Demonstração: Para cada $\epsilon > 0$ a função $u(x)\phi(x)$ é integrável no conjunto $\{x : |x| \geq \epsilon\}$. Assim, assumindo que $\operatorname{supp}\phi \subset \{x : |x| \leq M\}$ e escrevendo (2.1.3) em coordenadas polares obtemos

$$\int_{\epsilon \leq |x| \leq M} u(x)\phi(x)\,dx = \int_{\epsilon}^{M} \int_{S^{n-1}} u(rx')\phi(rx')r^{n-1}\,d\sigma(x')\,dr.$$

Por hipótese $u(rx') = r^{-n}u(x')$. Logo,

$$\int_{\epsilon \leq |x| \leq M} u(x)\phi(x)\,dx = \int_{\epsilon}^{M} \frac{1}{r}\left(\int_{S^{n-1}} u(x')\phi(rx')\,d\sigma(x')\right)\,dr.$$

Usando a fórmula de Taylor

$$\phi(x) = \phi(0) + \sum_{\ell=1}^{n} \int_0^1 (1-t)x_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}(tx)\,dt$$

obtemos

$$\phi(rx') = \phi(0) + \sum_{\ell=1}^{n} r\int_0^1 (1-t)x_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}(trx')\,dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\epsilon \leq |x| \leq M} u(x)\phi(x)\,dx &= \phi(0)\int_{\epsilon}^{M} \frac{1}{r}\left(\int_{S^{n-1}} u(x')\,d\sigma(x')\right)\,dt\,dr \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{n}\int_{\epsilon}^{M}\left(\int_{S^{n-1}} x'_\ell u(x')\left(\int_0^1 (1-t)\frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}(trx')\,dt\right)\,d\sigma(x')\right)\,dr \\
&= \phi(0)[\log M - \log\epsilon]\int_{S^{n-1}} u(x')\,d\sigma(x') \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{n}\int_{\epsilon}^{M}\int_0^1\int_{S^{n-1}} x'_\ell u(x')(1-t)\frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}(trx')\,d\sigma(x')\,dt\,dr.
\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da convergência dominada a sequência

$$h_\epsilon(t,r,x') = x'_\ell u(x')(1-t)\frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}(trx')\chi_{\{r: r\geq\epsilon\}}(r)$$

vemos que $\int_{\epsilon\leq|x|\leq M} u(x)\phi(x)\,dx$ tem limite quando $\epsilon \to 0$ se, e somente se, o seguinte cancelamento ocorre

$$\int_{S^{n-1}} u(x')\,d\sigma(x') = 0.$$

□

Agora observemos o seguinte fato. Seja K uma distribuição homogênea de grau d que coincide com uma função K_0 de classe C^∞ no complementar da origem, então podemos considerar os seguinte casos:

Caso 1: $d > -n$.

Neste caso $K_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e portanto

$$K(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} K_0(x)\phi(x)\,dx$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Caso 2: $d = -n$.

Neste caso, como $K_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é tal que $K_0(tx) = t^{-n}K_0(x)$ então segue da Proposição 2.1.3 que existe $v.p.\,K_0$. Além disso, como $\operatorname{supp}(K - v.p.\,K_0) \subseteq \{0\}$ então

$$K = v.p.\,K_0 + \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha \delta \tag{2.1.5}$$

Aplicando transformada de Fourier em (2.1.5) vemos que

$$\widehat{K}(\xi) - \widehat{v.p.\,K_0}(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \xi^\alpha. \tag{2.1.6}$$

Note que o primeiro membro da igualdade acima define uma função homogênea de grau 0 em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e portanto é limitada. Deste modo temos que $a_\alpha = 0$ para $\alpha \neq 0$ e

$$K = v.p.\,K_0 + C\delta$$

e portanto

$$K(\phi) = C\phi(0) + v.p.\int_{\mathbb{R}^n} K_0(x)\phi(x)\,dx$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

As integrais singulares em que estamos interessados são da forma

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)\,dy \tag{2.1.7}$$

onde $\Omega \in L^1(S^{n-1})$, $\int_{S^{n-1}} \Omega(u)d\sigma(u) = 0$ e $y' = y/|y|$. Com estas hipóteses, (2.1.7) está definida para funções Schwartz porque é a convolução de f com a distribuição temperada v.p.$\dfrac{\Omega(x')}{|x^n|}$.

Proposição 2.1.4. *Uma condição necessária para o limite em (2.1.7) existir é que Ω tem média zero em S^{n-1}.*

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) = 1$ para qualquer $|x| > 2$. Então para $|x| < 1$,

$$Tf(x) = \int_{|y|>1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)\,dy + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|y|<1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n}\,dy.$$

A primeira integral sempre converge já que

$$\left|\int_{|y|>1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)\,dy\right| \le \int_{|y|>1} \frac{|\Omega(y')|}{|y|^{n+1}} |y||f(x-y)|\,dy$$
$$\le \|yf\|_{L^\infty} \int_{S^{n-1}} \int_1^\infty \frac{\Omega(u)}{r^{n+1}} r^{n-1}\,dr\,d\sigma(u) = \|yf\|_{L^\infty} \int_{S^{n-1}} \Omega(u)\,d\sigma(u)$$

mas a segunda integral é igual a

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|y|<1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n}\,dy &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{S^{n-1}} \int_\epsilon^1 \frac{\Omega(u)}{r^n} r^{n-1}\,dr\,d\sigma(u) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{S^{n-1}} \Omega(u)\,d\sigma(u) \cdot \log(1/\epsilon) \end{aligned}$$

e isto é finito só se a integral de Ω em S^{n-1} é zero. □

Teorema 2.1.1. *Se Ω é uma função integrável em S^{n-1} com média zero, então a transformada de Fourier de v.p. $\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$ é uma função homogênea de grau zero dada por*

$$m(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left[\log\left(\frac{1}{|u\cdot\xi'|}\right) - i\frac{\pi}{2}\ sgn(u\cdot\xi')\right] d\sigma(u). \qquad (2.1.8)$$

Demonstração: Recordemos que a distribuição $v.p. \frac{\Omega(x')}{|x|^n}$ é homogênea de grau $-n$ então pela Proposição 2.1.1 a sua Transformada de Fourier é homogênea de grau $-n-(-n)=0$. Além disso, coincide com uma função de classe C^∞ no complementar da origem e portanto sua transformada de Fourier $m(\xi)$ está definida como função em $L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.

$$\langle m(\xi),\phi\rangle = \left\langle \left(\widehat{v.p.\ \frac{\Omega(x')}{|x|^n}}\right)(\xi),\phi\right\rangle = \left\langle \text{v.p.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}, \widehat{\phi}(x)\right\rangle$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left\langle \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\cdot\chi_{\{x:\epsilon<|x|<1/\epsilon\}}(x),\widehat{\phi}(x)\right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i yx}\phi(y)\,dy\right)dx$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}e^{-2\pi i yx}\,dx\right)\phi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}e^{-2\pi i x\xi}\,dx\right)\phi(\xi)\,d\xi.$$

Logo,

$$m(\xi) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}e^{-2\pi i x\xi}\,dx \quad \text{q.t.p. } \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
m(\xi) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)\int_{\epsilon}^{1/\epsilon}\frac{1}{r^n}\cdot e^{-2\pi i r u\cdot\xi}r^{n-1}\,dr\,d\sigma(u)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left(\int_{\epsilon}^{1/\epsilon}e^{-2\pi r i u\cdot\xi}\frac{dr}{r}\right)d\sigma(u)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left(\int_{\epsilon}^{1}\left(e^{-2\pi r i u\cdot\xi}-1\right)\frac{dr}{r}\right)d\sigma(u)\\
&+ \int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left(\int_{1}^{1/\epsilon}e^{-2\pi r i u\cdot\xi}\frac{dr}{r}\right)d\sigma(u)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left[\int_{\epsilon}^{1}\left(e^{-2\pi r i u\cdot\xi}-1\right)\frac{dr}{r}+\int_{1}^{1/\epsilon}e^{-2\pi r i u\cdot\xi}\frac{dr}{r}\right]d\sigma(u)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left[\int_{\epsilon}^{1}\left(\cos(2\pi r u\cdot\xi)-1\right)\frac{dr}{r}+\int_{1}^{1/\epsilon}\cos(2\pi r u\cdot\xi)\frac{dr}{r}\right]\\
&- i\left[\int_{\epsilon}^{1}sen(2\pi r u\cdot\xi)\frac{dr}{r}+\int_{1}^{1/\epsilon}sen(2\pi r u\cdot\xi)\frac{dr}{r}\right]d\sigma(u)\\
&= I_1 - iI_2,
\end{aligned}$$

onde

$$I_1 = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left[\int_{\epsilon}^{1}\left(\cos(2\pi r u\cdot\xi)-1\right)\frac{dr}{r}+\int_{1}^{1/\epsilon}\cos(2\pi r u\cdot\xi)\frac{dr}{r}\right]d\sigma(u),$$

$$I_2 = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left[\int_{\epsilon}^{1/\epsilon}sen(2\pi r u\cdot\xi)\frac{dr}{r}\right]d\sigma(u).$$

Considere a mudança de variável $s = 2\pi r|u\cdot\xi|$. Podemos supor que $u\cdot\xi\neq 0$, assim $2\pi r u\cdot\xi = 2\pi r|u\cdot\xi|\ \mathrm{sgn}(u\cdot\xi) = s\ \mathrm{sgn}(u\cdot\xi)$ e $\frac{dr}{r}=\frac{ds}{s}$.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi r u\cdot\xi) &= \cos(s\ \mathrm{sgn}(u\cdot\xi)) = \cos s\\
\mathrm{sen}(2\pi r u\cdot\xi) &= \mathrm{sen}(s\ \mathrm{sgn}(u\cdot\xi)) = \mathrm{sgn}(u\cdot\xi)\ \mathrm{sen}\, s.
\end{aligned}$$

Então,

$$I_2 = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left[\int_{2\pi|u\cdot\xi|\epsilon}^{2\pi|u\cdot\xi|/\epsilon}\mathrm{sgn}(u\cdot\xi)\,\mathrm{sen}(s)\frac{ds}{s}\right]d\sigma(u).$$

Pelo teorema da Convergência Dominada temos

$$I_2 = \int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left[\mathrm{sgn}(u\cdot\xi)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(s)}{s}\,ds\right]d\sigma(u) = \int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(u\cdot\xi)\right)d\sigma(u).$$

Depois da mudança de variáveis em I_1 obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{2\pi|u\cdot\xi|\epsilon}^{2\pi|u\cdot\xi|}(\cos(s) &- 1)\frac{ds}{s} + \int_{2\pi|u\cdot\xi|}^{2\pi|u\cdot\xi|/\epsilon}\cos(s)\frac{ds}{s} \\
&= \int_{2\pi|u\cdot\xi|\epsilon}^{1}(\cos(s)-1)\frac{ds}{s} + \int_{1}^{2\pi|u\cdot\xi|}(\cos(s)-1)\frac{ds}{s} + \int_{2\pi|u\cdot\xi|}^{2\pi|u\cdot\xi|/\epsilon}\cos(s)\frac{ds}{s} \\
&= \int_{2\pi|u\cdot\xi|\epsilon}^{1}(\cos(s)-1)\frac{ds}{s} + \int_{1}^{2\pi|u\cdot\xi|/\epsilon}\cos(s)\frac{ds}{s} - \int_{1}^{2\pi|u\cdot\xi|}\frac{ds}{s};
\end{aligned}$$

quando $\epsilon \to 0$ isto se converte em

$$\int_0^1(\cos(s)-1)\frac{ds}{s} + \int_1^\infty \frac{\cos(s)}{s}\,ds - \ln|2\pi| - \ln|u\cdot\xi|.$$

Então

$$\begin{aligned}
m(\xi) &= \int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left[\int_0^1(\cos(s)-1)\frac{ds}{s} + \int_1^\infty\frac{\cos(s)}{s}\,ds - \ln|2\pi| - \ln|u\cdot\xi|\right. \\
&\quad \left. -i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(u\cdot\xi)\right]\,d\sigma(u) \\
&= \int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left[\ln\left(\frac{1}{|u\cdot\xi|}\right) - i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(u\cdot\xi)\right]\,d\sigma(u)
\end{aligned}$$

Como $m(\xi)$ é positivamente homogênea de grau zero, é dizer, $m(\lambda\xi) = m(\xi)$ para todo $\lambda > 0$, segue que se $\xi \in \mathbb{R}^n$ então

$$\begin{aligned}
m(\xi) &= m(|\xi|\cdot\xi') = m(\xi') \\
&= \int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left[\ln\left(\frac{1}{|u\cdot\xi'|}\right) - i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(u\cdot\xi')\right]\,d\sigma(u).
\end{aligned}$$

□

Como qualquer função Ω em S^{n-1} pode ser decomposta em sua parte par e ímpar,

$$\Omega_e(u) = \frac{1}{2}(\Omega(u)+\Omega(-u))\ ,\ \Omega_o(u) = \frac{1}{2}(\Omega(u)-\Omega(-u)).$$

Corolário 2.1.2. *Seja $\Omega(u)$ uma função com média nula em S^{n-1} e suponha que $\Omega = \Omega_o + \Omega_e$ com $\Omega_o \in L^1(S^{n-1})$ e $\Omega_e \in L^q(S^{n-1})$ para algum $q > 1$. Então a transformada de Fourier de v.p.$\Omega(x')/|x|^n$ é uma função limitada.*

Demonstração: Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\left|\int_{S^{n-1}}\Omega_o(u)\operatorname{sgn}(u\cdot\xi')\,d\sigma(u)\right| \leq \|\Omega_o\|_{L^1(S^{n-1})}\|\operatorname{sgn}(u\cdot\xi')\|_{L^\infty} < \infty.$$

Se $\Omega_e \in L^q(S^{n-1})$ então $\Omega_e \in L\log L(S^{n-1})$, isto é,

$$\int_{S^{n-1}}|\Omega_e(u)|\log^+|\Omega_e(u)|\,d\sigma(u) < \infty.$$

Seja $D = \{u \in S^{n-1} : |\Omega_e(u)| \geq 1\}$ e como

$$AB \leq A \log A + e^B\,,\ \ A \geq 1\,,\ \ B \geq 0,$$

então,

$$\begin{aligned}\left|\int_D \Omega_e(u) \log\left(\frac{1}{|u\cdot\xi'|}\right)\,d\sigma(u)\right| &= \left|\int_D 2\Omega_e(u) \log\left(\frac{1}{|u\cdot\xi'|}\right)^{1/2}\,d\sigma(u)\right| \\ &\leq \int_D 2|\Omega_e(u)|\log(2|\Omega_e(u)|)\,d\sigma(u) + \int_D |u\cdot\xi'|^{-1/2}\,d\sigma(u) < \infty.\end{aligned}$$

Ω é limitado no complemento de D, e assim

$$\left|\int_{S^{n-1}} \Omega_e(u) \log\left(\frac{1}{|u\cdot\xi'|}\right)\,d\sigma(u)\right| < \infty.$$

□

Teorema 2.1.2. *Se $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ é uma função homogênea de grau 0, e T_m é o operador definido por $\widehat{T_m f}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$, então existem $C \in \mathbb{C}$ e $\Omega \in C^\infty(S^{n-1})$ satisfazendo $\int_{S^{n-1}} \Omega(x')\,d\sigma(x') = 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,*

$$T_m f = Cf + v.p.\,\frac{\Omega(x')}{|x|^n} * f. \tag{2.1.9}$$

Como toda função homogênea de grau 0 é a soma de uma constante com uma função homogênea de grau 0 com média nula na esfera S^{n-1}, o Teorema 2.1.2 é uma consequência imediata do seguinte lema.

Lema 2.1.1. *Seja $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é uma função homogênea de grau 0 tal que $\int_{S^{n-1}} m(x')\,d\sigma(x') = 0$. Então existe $\Omega \in C^\infty(S^{n-1})$ com média nula tal que*

$$\hat{m}(\xi) = v.p.\,\frac{\Omega(\xi')}{|\xi|^n}. \tag{2.1.10}$$

Demonstração: Note que $|\xi|^n\hat{m}(\xi) = c\widehat{\Delta^{n/2}m}(\xi)$. Como m é homogênea de grau 0 segue que $\Delta^{n/2}m$ é homogênea de grau $-n$ e por sua vez $\widehat{\Delta^{n/2}m}$ é homogênea de grau 0. Segue da Proposição 2.1.2 que $\hat{m} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Logo, fora da origem a função $|\xi|^n\hat{m}(\xi)$ coincide com uma função de classe C^∞. Denotemos por $\Omega(x')$ a restrição desta função à esfera unitária S^{n-1}. Assim, para todo $\xi \neq 0$

$$\hat{m}(\xi) = \frac{\Omega(\xi')}{|\xi|^n}.$$

Para ver que Ω tem média nula em S^{n-1}, fixemos uma função radial $\phi \in \mathcal{S}$ suportada no anel $1 \leq |x| \leq 2$ e que seja positiva em seu interior. Então, por um lado temos

$$\langle \hat{m}, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\phi(x)\,dx = \left(\int_1^2 \frac{\phi(r)}{r}\,dr\right)\int_{S^{n-1}} \Omega(x')\,d\sigma(x'). \tag{2.1.11}$$

Por outro lado, usando que $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\langle \hat{m}, \phi \rangle = \langle m, \hat{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} m(x)\hat{\phi}(x)\, dx = \left(\int_0^\infty \hat{\phi}(r) r^{n-1}\, dr \right) \int_{S^{n-1}} m(x')\, d\sigma(x') = 0. \quad (2.1.12)$$

Segue da comparação de (2.1.11) com (2.1.12) que

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')\, d\sigma = 0.$$

Logo, segue da Proposição 2.1.3 que $v.p.\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$ está definida como distribuição temperada. Além disso, supp $\left(\hat{m} - v.p.\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right) \subset \{0\}$ assim,

$$\hat{m} = v.p.\frac{\Omega(x')}{|x|^n} + \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \delta.$$

Aplicando tranformada de Fourier em ambos os membros da igualdade acima temos

$$\hat{\hat{m}} - v.p.\widehat{\frac{\Omega(x')}{|x|^n}} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Note que o primeiro membro define uma distribuição homogênea de grau zero que coincide com uma função C^∞ fora da origem e portanto uma função limitada. Logo,

$$\hat{m} = v.p.\frac{\Omega(x')}{|x|^n} + a_0.$$

Como m e Ω possuem médias nulas na esfera, integrando contra uma função radial $\phi \in \mathcal{S}$ tal que supp $(\phi) \subset \{x : 1 \leq |x| \leq 2\}$, positiva com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 1$ verificamos que $a_0 = 0$, o que conclui portanto a demonstração. $\square$

2.2 O Método das Rotações

O Corolário 2.1.2 junto com o teorema de Plancherel dão condições suficientes para operadores T como em (2.1.7) sejam limitados em $L^2(\mathbb{R}^n)$ pois

$$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{Tf}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|m(\xi)\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|m\|_{L^\infty} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Agora desenvolvemos técnicas devido a Calderon e Zygmund nos quais provaremos que estes operadores são limitados em L^p, $1 < p < \infty$.

Seja $T : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$ um operador linear e contínuo, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \text{para todo } f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Fixado $u \in S^{n-1}$, queremos construir um operador T_u associado a T de modo que $T_u : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ é limitado. Então, seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $L_u = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ e seja

$L_u^\perp = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n :< \bar{x}, \lambda u >= 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$ seu complemento ortogonal em $\mathbb{R}^n$. Então dado qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, existe um único $x_1 \in \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in L_u^\perp$ tal que $x = x_1 u + \bar{x}$. Logo, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ definimos a função unidimensional $\mathbb{R} \ni x_1 \longrightarrow f(x_1 u + \bar{x})$. Agora definimos

$$T_u f(x) = T(f(\cdot u + \bar{x}))(x_1).$$

Como $\mathbb{R}^n = L_u \oplus L_u^\perp$ e $\dim L_u^\perp = n-1$, então $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R} \times L_u^\perp$, basta definir $\phi : L_u^\perp \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(\bar{x}, x_1) = \bar{x} + x_1 u = x$.

Se C é a norma de T em $L^p(\mathbb{R})$, pelo teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |T_u f(x)|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |T(f(\cdot u + \bar{x}))(x_1)|^p \, dx = \int_{L_u^\perp} \left[\int_{\mathbb{R}} |T(f(\cdot u + \bar{x}))(x_1)|^p \, dx_1 \right] d\bar{x} \\ &\leq C^p \int_{L_u^\perp} \int_{\mathbb{R}} |f(x_1 u + \bar{x})|^p \, dx_1 \, d\bar{x} = C^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx.\end{aligned}$$

Portanto T_u é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Operadores obtidos nesta forma incluem a função maximal Hardy Littlewood direcional,

$$M_u f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x - tu)| \, dt,$$

e a transformada de Hilbert direcional,

$$H_u f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|t|>\epsilon} f(x - tu) \frac{dt}{t}$$

Como os operadores obtidos do operador T são uniformemente limitados em $L^p(\mathbb{R}^n)$, qualquer combinação convexa de eles é também um operador limitado.

Proposição 2.2.1. *Dado um operador unidimensional T, limitado em $L^p(\mathbb{R})$ com norma C, seja T_u o operador direcional definido de T. Então para qualquer $\Omega \in L^1(S^{n-1})$, o operador T_Ω definido por*

$$T_\Omega f(x) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) T_u f(x) \, d\sigma(u)$$

é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$ com norma no máximo igual a $C\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}$.

Demonstração: Pela desigualdade integral de Minkowiski,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_\Omega f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{S^{n-1}} \Omega(u) T_u f(x) \, d\sigma(u) \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{S^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Omega(u)|^p |T_u f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} d\sigma(u) \\ &= \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_u f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} d\sigma(u) \\ &\leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}.\end{aligned}$$

$\square$

Usando este resultado podemos passar de um caso unidimensional a um caso de maior dimensão. Sua aplicação mais comum está no método de rotações, o qual usa integração em coordenadas polares para obter operadores direcionais em sua parte radial. Por exemplo, dado $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ define a função maximal aproximada

$$M_\Omega f(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} |\Omega(y')||f(x-y)|\, dy.$$

Corolário 2.2.1. *Se $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ então M_Ω é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} M_\Omega f(x) &= \sup_{R>0} \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{S^{n-1}} \int_0^R |\Omega(u)||f(x-ru)|r^{n-1}\, dr\, d\sigma(u) \\ &= \sup_{R>0} \frac{1}{|B(0,1)|R^n} \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| \int_0^R |f(x-ru)|r^{n-1}\, dr\, d\sigma(u) \\ &\leq \sup_{R>0} \frac{1}{|B(0,1)|} \frac{1}{R} \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| \int_0^R |f(x-ru)|\, dr\, d\sigma(u) \\ &\leq \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| M_u f(x)\, d\sigma(u). \end{aligned}$$

Então pela Proposição 2.2.1, M_Ω é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

2.2.1 Operadores Representados por Núcleo Ímpar

Se tomamos $\Omega(u) = 1$ para todo u, então M_Ω é a função maximal Hardy Littlewood em $\mathbb{R}^n$; assim o método de rotações prova que ele é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$ começando de um caso unidimensional. Por outro lado, o método de rotações não nos dá o resultado fraco $(1,1)$.

Agora aplicamos a Proposição 2.2.1 ao operador da forma (2.1.7) quando Ω é ímpar.

Corolário 2.2.2. *Se Ω é uma função ímpar e integrável em S^{n-1}, então o operador T definido por (2.1.7) é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.*

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{S}$, então

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \int_\epsilon^\infty \Omega(u) f(x-ru) \frac{r^{n-1}}{r^n}\, dr\, d\sigma(u) \tag{2.2.1}$$

e também como Ω é uma função ímpar temos

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \int_\epsilon^\infty \Omega(-u) f(x+ru) \frac{dr}{r}\, d\sigma(u) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \Omega(-u) f(x-ru) \frac{dr}{r}\, d\sigma(u) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \Omega(u) f(x-ru) \frac{dr}{r}\, d\sigma(u) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

e assim somando (2.2.1) e (2.2.2) obtemos,

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left(\int_{|r|>\epsilon} f(x - ru) \frac{dr}{r} \right) d\sigma(u).$$

Graças ao fato de Ω ter média zero em S^{n-1} para toda $f \in \mathcal{S}$, obtemos

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left(\int_{|r|>\epsilon} f(x - ru) \frac{dr}{r} \right) d\sigma(u) =$$

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(u) \Bigg(\int_{\epsilon<|r|<1} (f(x - ru) - f(x)) \frac{dr}{r} \Bigg) d\sigma(u) + \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left(\int_{|r|>1} f(x - ru) \frac{dr}{r} \right) d\sigma(u).$$

Usando a fórmula de Taylor para escrever

$$f(x - ru) - f(x) = r \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(x - sru)\, ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\epsilon<|r|<1} (f(x - ru) - f(x)) \frac{dr}{r} \right| &\le \int_{\epsilon<|r|<1} |f(x - ru) - f(x)| \frac{dr}{r} \\
&\le \int_{\epsilon<|r|<1} \left| r \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(x - sru)\, ds \right| \frac{dr}{r} \\
&\le \sum_{\ell=1}^{n} \int_{\epsilon<|r|<1} \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(x - sru) \right| ds\, dr \le C(1-\epsilon) \|\nabla f\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\left| \int_{|r|>1} f(x - ru) \frac{dr}{r} \right| \le \int_{|r|>1} |rf(x - ru)| \frac{dr}{r^2} = B < \infty.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left(\int_{|r|>\epsilon} f(x - ru) \frac{dr}{r} \right) d\sigma(u) \right| \\
&\qquad \le C \|f'\|_{L^\infty} (1 - \epsilon) \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)|\, d\sigma(u) + B \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)|\, d\sigma(u)
\end{aligned}$$

Então pelo teorema da Convergência Dominada temos que

$$Tf(x) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left(\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|r|>\epsilon} f(x - ru) \frac{dr}{r} \right) d\sigma(u) = \frac{\pi}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) H_u f(x)\, d\sigma(u).$$

Como a transformada de Hilbert é forte (p, p), $1 < p < \infty$, então pela Proposição 2.2.1, o operador T é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. $\square$

2.2.2 Transformadas de Riesz

Para dimensões maiores que 1, os operadores integrais singulares análogos à transformda de Hilbert são as transformadas de Riesz.

Consideremos a família de operadores definidos por

$$R_j f(x) = c_n v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)\, dy, \quad 1 \leq j \leq n,$$

com $c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \pi^{-\frac{n+1}{2}}$. Logo, R_j está definido pelo núcleo $K_j(x) = \frac{\Omega_j(x)}{|x|^n}$ e $\Omega_j(x) = c_n \frac{x_j}{|x|}$. Adiante, deduziremos a expressão do multiplicador correspondente as transformadas de Riesz. Recordemos a fórmula (2.1.8) segundo a qual

$$m_j(x) = \int_{S^{n-1}} \Gamma(x \cdot y) \Omega_j(y)\, d\sigma(y), \quad |x| = 1,$$

onde $\Gamma(t) = \frac{\pi i}{2} sign(t) + \ln |1/t|$. Para provarmos que $(R_j f)\widehat{}(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi)$ usaremos o seguinte cálculo indireto.

Lema 2.2.1. $\left(v.p. \dfrac{x_j}{|x|^{n+1}} \right)\widehat{}\,(\xi) = -i \dfrac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \dfrac{\xi_j}{|\xi|}.$

Demonstração: Observe que $|x|^{-n+1} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Provaremos primeiramente que $\frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-n+1} = (1-n) v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ em $\mathcal{S}'$. De fato, seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-n+1}, \phi \right\rangle &= - \left\langle |x|^{-n+1}, \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \right\rangle \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j}}{|x|^{n-1}}\, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1-n}{2}}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \frac{1-n}{2} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1-n}{2}-1} 2x_j\, dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \phi(x) \frac{1-n}{2} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1-n}{2}-1} 2x_j\, dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} (1-n) \int_{|x|>\epsilon} \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \phi(x)\, dx = \left\langle (1-n) v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}, \phi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-n+1} = (1-n) v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \quad \text{em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

assim, se aplicamos (2.1.2) obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\text{v.p.} \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right)\widehat{}\,(\xi) &= \frac{1}{1-n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-n+1} \right)\widehat{}\,(\xi) \\
&= \frac{1}{1-n} 2\pi i \xi_j (|x|^{-n+1})\widehat{}\,(\xi) = \frac{2\pi i \xi_j}{1-n} \frac{\pi^{n-1-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} |\xi|^{n-1-n} \\
&= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(1-n)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\xi_j}{|\xi|} = -i \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \frac{\xi_j}{|\xi|}.
\end{aligned}$$

□

Como $R_jf(x) = c_n \left(\text{v.p.}\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right) * f(x)$, temos que

$$(R_jf(x))\widehat{}(\xi) = c_n \left(\text{v.p.}\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)\widehat{}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi) = -c_n\, i\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi).$$

Assim, $(R_jf)\widehat{}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$ para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Segue da densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ que

$$(R_jf)\widehat{}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi) \tag{2.2.3}$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Isto por sua vez implica em

Proposição 2.2.2. $\sum_{j=1}^n R_j^2 = -I$ *em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e $g_j = R_j\phi$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^n R_j^2\phi\right)\widehat{}(\xi) &= \sum_{j=1}^n (R_j(R_j\phi))\widehat{}(\xi) = \sum_{j=1}^n (R_jg_j)\widehat{}(\xi) = \sum_{j=1}^n -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{g}_j(\xi)\\ &= \sum_{j=1}^n \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\right)\left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\right)\hat{\phi}(\xi) = -\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}\hat{\phi}(\xi) = -\hat{\phi}(\xi).\end{aligned}$$

Tomando transformada inversa temos

$$\sum_{j=1}^n R_j^2\phi(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\left(\sum_{j=1}^n R_j^2\phi\right)\widehat{}(\xi)\right](x) = -\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}](x) = -\phi(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, assim

$$\sum_{j=1}^n R_j^2 = -I \tag{2.2.4}$$

o que conclui a demonstração. □

Como as funções do espaço de Schwartz são densas em L^p, $p > 1$, esta identidade de fato ocorre no espaço L^p.

Uma das aplicações importantes das transformadas de Riesz está no fato de que elas podem ser usadas para estabelecer uma relação entre várias combinações de derivadas parciais de uma função. Consideremos os seguintes exemplos.

Proposição 2.2.3. *Suponha que* $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. *Seja* $\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ *o operador de Laplace. Então temos a seguinte estimativa a priori.*

$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right\|_{L^p} \leq A_p\|\Delta f\|_{L^p}, \;\; 1 < p < \infty. \tag{2.2.5}$$

Demonstração: Denotemos por $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(y)\,dy$ a transformada de Fourier de f, então a transformada de Fourier de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ é $-2\pi i x_j\,\hat{f}(x)$, e logo

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)^{\widehat{}}(\xi) = 4\pi^2 \xi_j \xi_k\,\hat{f}(\xi) = -\left(\frac{i\xi_j}{|x|}\right)\left(\frac{i\xi_k}{|x|}\right)(-4\pi^2|\xi|^2)\hat{f}(\xi) = -(R_j R_k \Delta f)\widehat{}(\xi).$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = c(K_j * K_k * \Delta f)(x)$$

e usando a continuidade de R_j em L^p para todo $j = 1, \ldots, n$ e $1 < p < \infty$ provamos (2.2.5). $\square$

O próximo exemplo nos mostra a conexão existente entre as transformadas de Riesz e a teoria das funções harmônicas, particularmente as integrais de Poisson.

Teorema 2.2.1. *Sejam f e $f_1, \ldots, f_n$ funções do espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$ e tome suas respectivas integrais de Poisson $u_0(x,y) = (P_y * f)(x), u_1(x,y) = (P_y * f_1)(x), \ldots, u_n(x,y) = (P_y * f_n)(x)$. Então uma condição necessária e suficiente para que*

$$f_j = R_j(f), \;\; j = 1, \ldots, n, \tag{2.2.6}$$

é que as seguintes equações de Cauchy-Riemann generalizadas ocorram:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \qquad j \neq k, \;\; x_0 = y. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Demonstração: Suponha que $f_j = R_j(f)$, então $\hat{f}_j(t) = \frac{-it_j}{|t|}\hat{f}(t)$. Recordemos que $\widehat{P}(ty) = e^{-2\pi|t|y}$ e observando que $\frac{it_j}{|t|}\hat{f}(t)e^{-2\pi|t|y}$ possui decaimento rápido no infinito, pela fórmula de inversão de Fourier temos que

$$u_0(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{-2\pi(|t|y - itx)}\,dt$$

e

$$u_j(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-it_j}{|t|}\hat{f}(t) e^{-2\pi(|t|y - itx)}\,dt, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Derivando, diretamente, sob o sinal de integração as expressões acima obtemos

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} = \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} = -2\pi \int_{\mathbb{R}^n} |t|\hat{f}(t) e^{-2\pi(|t|y - itx)}\,dt,$$

e para $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial u_j(x,y)}{\partial x_j} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t_j^2}{|t|}\hat{f}(t) e^{-2\pi(|t|y - itx)}\,dt.$$

Deste modo,

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$
$$= -2\pi \int_{\mathbb{R}^n} |t| \hat{f}(t) e^{-2\pi(|t|y - itx)}\, dt + 2\pi \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sum_{j=1}^{\infty} t_j^2}{|t|} \hat{f}(t) e^{-2\pi(|t|y-itx)}\, dt = 0.$$

As derivadas mistas são dadas por

$$\frac{\partial u_j(x,y)}{\partial x_k} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t_j t_k}{|t|} \hat{f}(t) e^{-2\pi(|t|y-itx)}\, dt, \quad j \neq k$$

e

$$\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x_k} = 2\pi i \int_{\mathbb{R}^n} t_k \hat{f}(t) e^{-2\pi(|t|y-itx)}\, dt$$

e

$$\frac{\partial u_k(x,y)}{\partial y} = 2\pi i \int_{\mathbb{R}^n} t_k \hat{f}(t) e^{-2\pi(|t|y-itx)}\, dt,$$

de onde concluímos a prova da necessidade da condição.

Reciprocamente, seja $u_j(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_j(t) e^{-2\pi(|t|y-itx)}\, dt, \quad j = 1, \ldots, n$. Então como $\frac{\partial u_0}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial y}, \quad j = 1, \ldots, n$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} 2\pi i t_j \hat{f}(t) e^{-2\pi(|t|y-itx)}\, dt = -\int_{\mathbb{R}^n} 2\pi |t| \hat{f}_j(t) e^{-2\pi(|t|y-itx)}\, dt$$

e portanto,

$$\hat{f}_j(t) = -\frac{i t_j}{|t|} \hat{f}(t)$$

e finalmente

$$f_j = R_j(f), \quad j = 1, \ldots, n.$$

□

2.2.3 Operadores Representados por Núcleo Par

Se a função Ω na integral singular (2.1.7) é par, então o método de rotações não se aplica porque não podemos representar a integral singular em termos da transformada de Hilbert.

Por (2.2.4), temos

$$Tf = \sum_{j=1}^{n} R_j^2(Tf) = -\sum_{j=1}^{n} R_j(R_j T) f$$

e o operador $R_j T$ é ímpar porque é a composição de um operador ímpar e par. Se podemos provar que $R_j T$ tem uma representação da forma (2.1.7) então pelo Corolário 2.2.2, T é limitado em L^p.

Esta seção trata da apresentação do argumento necessário para provar que $R_j T$ tem a representação requerida.

Seja Ω uma função par com média zero em S^{n-1} e pertencente ao espaço $L^q(S^{n-1})$, para algum $q > 1$, e para $\epsilon > 0$ seja

$$K_\epsilon(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\chi_{\{|x|>\epsilon\}}.$$

Note que $K_\epsilon \in L^r$, $1 < r \leq q$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |K_\epsilon(x)|^r\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x')|^r}{|x|^{nr}}\chi^r_{\{|x|>\epsilon\}} = \int_{S^{n-1}}\int_\epsilon^\infty \frac{|\Omega(u)|^r}{t^{nr}}t^{n-1}\,dt\,d\sigma(u) \\
&= \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)|^r \int_\epsilon^\infty t^{n-1-nr}\,dt\,d\sigma(u) = \frac{\epsilon^{n-nr}}{nr-n}\int_{S^{n-1}} |\Omega(u)|^r\,d\sigma(u) \\
&= C_{\epsilon,n}\|\Omega\|_{L^r(S^{n-1})}.
\end{aligned}$$

Como $|S^{n-1}| < \infty$ e $\Omega \in L^q(S^{n-1})$, $1 < r \leq q$, então $L^q(S^{n-1}) \subset L^r(S^{n-1})$ e $\|\Omega\|_{L^r(S^{n-1})} \leq \|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}$, assim

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_\epsilon(x)|^r\,dx \leq C_{\epsilon,n}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}.$$

Para $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
(R_j(K_\epsilon * f))\widehat{\ }(\xi) &= -i\frac{\xi_j}{|\xi|}(K_\epsilon * f)\widehat{\ }(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{K}_\epsilon(\xi)\hat{f}(\xi) \\
&= (R_j K_\epsilon)\widehat{\ }(\xi)\hat{f}(\xi) = ((R_j K_\epsilon) * f)\widehat{\ }(\xi)
\end{aligned}$$

Aplicando transformada de Fourier inversa temos

$$R_j(K_\epsilon * f) = (R_j K_\epsilon) * f. \tag{2.2.8}$$

Lema 2.2.2. *Sob as hipóteses anteriores, existe uma função $\tilde{K}_j$, ímpar, homogênea de grau $-n$ e tal que*

$$\lim_{\epsilon\to 0} R_j K_\epsilon(x) = \widetilde{K}_j(x)$$

em norma L^∞ em todo conjunto compacto que não contém a origem.

Demonstração: Fixo $x \neq 0$ e seja $0 < \epsilon < \nu < |x|/2$. Então,

$$\begin{aligned}
R_j K_\epsilon(x) - R_j K_\nu(x) &= c_n \lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}\chi_{\{|x-y|>\delta\}}[K_\epsilon(y) - K_\nu(y)]\,dy \\
&= c_n \lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}\chi_{\{|x-y|>\delta\}}\left[\frac{\Omega(y')}{|y|^n}(\chi_{\{|y|>\epsilon\}} - \chi_{\{|y|>\nu\}})\right]dy \\
&= c_n \int_{\epsilon<|y|<\nu} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}\,dy.
\end{aligned}$$

Como Ω tem média zero,

$$\begin{aligned}
\int_{\epsilon<|y|<\nu} \frac{\Omega(y')}{|y|^n}\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\,dy &= \frac{x_j}{|x|^{n+1}}\int_{S^{n-1}}\int_\epsilon^\nu \Omega(u)\frac{dr}{r}\,d\sigma(u) \\
&= \frac{x_j}{|x|^{n+1}}(\ln\nu - \ln\epsilon)\int_{S^{n-1}} \Omega(u)\,d\sigma(u) = 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$R_jK_\epsilon(x) - R_jK_\nu(x) = c_n \int_{\epsilon<|y|<\nu} \left(\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right) \frac{\Omega(y')}{|y|^n}\, dy. \tag{2.2.9}$$

Seja $f(z) = \frac{z_j}{|z|^{n+1}}$, note que, se $\ell \neq j$ então

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_\ell} = -\frac{(n+1)z_j z_\ell}{|z|^{n+3}}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} = \frac{1}{|z|^{n+1}} - \frac{(n+1)z_j^2}{|z|^{n+3}}.$$

Com isto, segue que existe $C > 0$ tal que $|\nabla f(z)| \leq \frac{C}{|z|^{n+1}}$ para todo $z \neq 0$.

Para estimarmos o integrando acima aplicaremos a fórmula de Lagrange com resto integral à função $f(z) = \frac{z_j}{|z|^{n+1}}$, assim

$$\begin{aligned} |f(x-y) - f(x)| &= \left| \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(x - ty) \cdot y_j\, dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |\langle \nabla f(x-ty), y \rangle|\, dt. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz a expressão acima obtemos

$$|f(x-y) - f(x)| \leq \int_0^1 \frac{|y|}{|x-ty|^{n+1}}\, dt.$$

Como $|x| = |x - ty + ty| \leq |x-ty| + |y| \leq |x-ty| + |x|/2$ então $|x|/2 < |x-ty|$, para todo $0 \leq t \leq 1$, assim

$$|f(x-y) - f(x)| \leq C\frac{|y|}{|x|^{n+1}}.$$

Portanto de (2.2.9), temos

$$\begin{aligned} |R_jK_\epsilon(x) - R_jK_\nu(x)| &\leq c_n \int_{\epsilon<|y|<\nu} \left| \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right| \frac{|\Omega(y')|}{|y|^n}\, dy \\ &\leq c_n \int_{\epsilon<|y|<\nu} \frac{C'|y|}{|x^{n+1}|} \frac{|\Omega(y')|}{|y|^n}\, dy = \frac{C}{|x|^{n+1}} \int_{\epsilon<|y|<\nu} \frac{|\Omega(y')|}{|y|^{n-1}}\, dy \\ &= \frac{C}{|x|^{n+1}} \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| \int_\epsilon^\nu dr\, d\sigma(u) = \frac{C}{|x|^{n+1}} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}(\nu - \epsilon). \end{aligned}$$

Então

$$|R_jK_\epsilon(x) - R_jK_\nu(x)| \leq \frac{C(\nu-\epsilon)}{|x|^{n+1}} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}. \tag{2.2.10}$$

Portanto, para algum $\alpha > 0$, $\{R_jK_\epsilon\}$ é uma sequência de Cauchy na norma L^∞ em $\{|x| > \alpha\}$. Assim para quase todo x podemos definir K_j^* por

$$K_j^*(x) = \lim_{\epsilon \to 0} R_jK_\epsilon(x).$$

A função R_jK_ϵ é ímpar, assim K_j^* é também uma função ímpar (modificando K_j^* em um conjunto de medida nula).

Para encontrar a função $\widetilde{K}_j$ desejada, fixo $\lambda > 0$, então para quase todo ponto x,

$$\begin{aligned}
R_j K_\epsilon(\lambda x) &= \lim_{\delta\to 0} c_n \int_{|\lambda x - y|>\delta} \frac{\lambda x_j - y_j}{|\lambda x - y|^{n+1}} K_\epsilon(y)\, dy \\
&= \lim_{\delta\to 0} c_n \int_{|\lambda x - \lambda z|>\delta} \frac{\lambda x_j - \lambda z_j}{|\lambda x - \lambda z|^{n+1}} K_\epsilon(\lambda z)\lambda^n\, dz \\
&= \lim_{\delta\to 0} c_n \int_{|x-z|>\delta/\lambda} \frac{x_j - z_j}{|x-z|^{n+1}} \lambda^{-n} K_{\epsilon/\lambda}(z)\, dz = \lambda^{-n} R_j K_{\epsilon/\lambda}(x).
\end{aligned}$$

Portanto, para quase todo ponto x,

$$K_j^*(\lambda x) = \lim_{\epsilon\to 0} R_j K_\epsilon(\lambda x) = \lim_{\epsilon\to 0} \lambda^{-n} R_j K_{\epsilon/\lambda}(x) = \lambda^{-n} K_j^*(x).$$

O conjunto de medida nula onde a igualdade não ocorre depende de λ, mas como K_j^* é mensurável, o conjunto

$$D = \{(x,\lambda) \subset \mathbb{R}^n \times (0,\infty) : K_j^*(\lambda x) \neq \lambda^{-n} K_j^*(x)\}$$

tem medida nula. Portanto, pelo teorema de Fubini existe uma esfera centrada na origem de raio ρ, S_ρ, tal que $D \cap S_\rho$ tem medida nula. Agora definimos

$$\widetilde{K}_j = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{|x|}\right)^n K_j^*\left(\frac{\rho x}{|x|}\right) & \text{se } x \neq 0 \text{ e } \rho x/|x| \notin D \cap S_\rho, \\ 0 & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Esta função é mensurável, homogênea de grau $-n$ e ímpar. Além disso, $K_j^*(x) = \widetilde{K}_j(x)$ q.t.p. De fato, seja $x \neq 0$ tal que $x_0 = \rho x/|x| \notin D \cap S_\rho$. Então para q.t.p. λ,

$$\widetilde{K}_j(\lambda x_0) = \lambda^{-n} \widetilde{K}_j(x_0) = \lambda^{-n} K_j^*(x_0) = K_j^*(\lambda x_0).$$

O que conclui a demonstração do Lema. □

Lema 2.2.3. *O nucleo $\widetilde{K}_j$ definido no Lema 2.2.2 satisfaz*

$$\int_{S^{n-1}} |\widetilde{K}_j(u)|\, d\sigma(u) \leq C_q \|\Omega\|_{L^q}.$$

Além disso, se $\widetilde{K}_{j,\epsilon}(x) = \widetilde{K}_j(x)\chi_{\{|x|>\epsilon\}}$, então $\Delta_\epsilon = R_j K_\epsilon - \widetilde{K}_{j,\epsilon} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|\Delta_\epsilon\|_{L^1} \leq C'_q \|\Omega\|_{L^q}$.

Demonstração: Pela homogeneidade de $\widetilde{K}_j$,

$$\begin{aligned}
\int_{1<|x|<2} |\widetilde{K}_j(x)|\, dx &= \int_{S^{n-1}} \int_1^2 |\widetilde{K}_j(ru)| r^{n-1}\, dr\, d\sigma(u) \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_1^2 r^{-n} |\widetilde{K}_j(u)| r^{n-1}\, dr\, d\sigma(u) = \log 2 \int_{S^{n-1}} |\widetilde{K}_j(u)|\, d\sigma(u).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{S^{n-1}} |\widetilde{K}_j(u)|\, d\sigma(u) = \frac{1}{\log 2}\int_{1<|x|<2} |\widetilde{K}_j(x)|\, dx$$
$$\leq \frac{1}{\log 2}\int_{1<|x|<2} |\widetilde{K}_j(x) - R_jK_{1/2}(x)|\, dx + \frac{1}{\log 2}\int_{1<|x|<2} |R_jK_{1/2}(x)|\, dx.$$

De (2.2.10), Seja $\nu = 1/2$ e $|x| > 1$; então se tomamos o limite quando $\epsilon \to 0$ obtemos

$$\begin{aligned} |\widetilde{K}_j(x) - R_jK_{1/2}(x)| &= \left|\lim_{\epsilon\to 0} R_jK_\epsilon(x) - R_jK_{1/2}(x)\right| = \lim_{\epsilon\to 0}|R_jK_\epsilon(x) - R_jK_{1/2}(x)| \\ &\leq \frac{C\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}}{|x|^{n+1}} \leq \frac{C'\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}}{|x|^{n+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, a primeira integral dá

$$\int_{1<|x|<2} |\widetilde{K}_j(x) - R_jK_{1/2}(x)|\, dx \leq \int_{1<|x|<2} C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\frac{1}{|x|^{n+1}}\, dx$$
$$= C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}}\int_1^2 \frac{1}{r^2}\, dr\, d\sigma(u) \leq C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}.$$

Para limitar a segunda integral, note que

$$\int_{1<|x|<2} |R_jK_{1/2}(x)|\, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |R_jK_{1/2}(x)|^q\, dx\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{\{1<|x|<2\}}(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$
$$\leq \|R_jK_{1/2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{1<|x|<2} dx\right)^{1/p} = C\|R_jK_{1/2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|K_{1/2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |K_{1/2}(x)|^q\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x')|^q}{|x|^{nq}}\chi_{\{|x|>1/2\}}(x)\, dx = \int_{|x|>1/2} |\Omega(x')|^q|x|^{-nq}\, dx \\ &= \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)|^q\int_{1/2}^\infty r^{n(1-q)-1}\, dr\, d\sigma(u) = \|\Omega\|^q_{L^q(S^{n-1})}\frac{2^{n(q-1)}}{n(q-1)} \\ &= C\|\Omega\|^q_{L^q(S^{n-1})} \end{aligned}$$

então

$$\int_{1<|x|<2} |R_jK_{1/2}(x)|\, dx \leq C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}.$$

Portanto,

$$\int_{S^{n-1}} |\widetilde{K}_j(u)|\, d\sigma(u) \leq C_q\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}.$$

Para provar a segunda afirmação será suficiente provar que $\|\Delta_1\|_{L^1} < \infty$ já que $\Delta_\epsilon = \epsilon^{-n}\Delta_1(x/\epsilon)$ e $\|\Delta_\epsilon\|_{L^1} = \|\Delta_1\|_{L^1}$. Então,

$$\begin{aligned} \|\Delta_1\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |R_jK_1(x) - \widetilde{K}_{j,1}(x)|\, dx \\ &\leq \int_{|x|<2} |R_jK_1(x)|\, dx + \int_{|x|<2} |\widetilde{K}_{j,1}(x)|\, dx + \int_{|x|>2} |R_jK_1(x) - \widetilde{K}_{j,1}(x)|\, dx \\ &= \int_{|x|<2} |R_jK_1(x)|\, dx + \int_{1<|x|<2} |\widetilde{K}_j(x)|\, dx + \int_{|x|>2} |R_jK_1(x) - \widetilde{K}_{j,1}(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Assim temos,

$$\begin{aligned}\int_{|x|<2} |R_jK_1(x)|\,dx &\leq \|R_jK_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{|x|<2} dx\right)^{1/p} = C\|R_jK_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq C\|K_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}.\end{aligned}$$

Pela primeira parte temos que a segunda integral é limitada pelo mismo limite,

$$\int_{1<|x|<2} |\widetilde{K}_j(x)|\,dx \leq C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}.$$

Para calcular a terceira integral, seja $\nu = 1$ e $|x| > 2$, então se tomamos o limite quando $\epsilon \to 0$,

$$|R_jK_1(x) - \widetilde{K}_{j,1}(x)| \leq \frac{C\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}}{|x|^{n+1}} \leq \frac{C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}}{|x|^{n+1}}$$

então,

$$\begin{aligned}\int_{|x|>2} |R_jK_1(x) - \widetilde{K}_{j,1}(x)|\,dx &\leq \int_{|x|>2} \frac{C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}}{|x|^{n+1}}\,dx\\ &= C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}}\int_2^\infty \frac{dr}{r^2}\,d\sigma(u) \leq C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}.\end{aligned}$$

E assim concluimos que $\|\Delta_1\|_{L^1} \leq C'_q\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}$. □

Teorema 2.2.2. *Seja Ω uma função em S^{n-1} com média zero tal que sua parte ímpar está em $L^1(S^{n-1})$ e sua parte par está em $L^q(S^{n-1})$ para algum $q > 1$. Então a integral singular T em (2.1.7) é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.2.2, podemos assumir que Ω é par. Seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então

$$Tf = \lim_{\epsilon\to 0} K_\epsilon * f.$$

De (2.2.4) e (2.2.8) vemos que

$$K_\epsilon * f = -\sum_{j=1}^n R_j^2(K_\epsilon * f) = -\sum_{j=1}^n R_j(R_j(K_\epsilon * f)) = -\sum_{j=1}^n R_j((R_jK_\epsilon) * f),$$

e pela notação do Lema 2.2.3, $\Delta_\epsilon = R_jK_\epsilon - \widetilde{K}_{j,\epsilon}$ então,

$$(R_jK_\epsilon) * f = \Delta_\epsilon * f + \widetilde{K}_{j,\epsilon} * f.$$

Pelo Lema 2.2.2, $\widetilde{K}_j$ é um núcleo ímpar homogêneo de grau $-n$, assim

$$\|\widetilde{K}_{j,\epsilon} * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\widetilde{K}_{j,\epsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{K}_{j,\epsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{K}_{j,\epsilon}(x)|\,dx = \int_{|x|>\epsilon} |\widetilde{K}_j(x)|\,dx = \int_{S^{n-1}} \int_{\epsilon}^{\infty} r^{-n}|\widetilde{K}_j(u)|r^{n-1}\,dr\,d\sigma(u) \\
&= C\int_{S^{n-1}} |\widetilde{K}_j(u)|\,d\sigma(u) \leq C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}
\end{aligned}$$

então,

$$\|\widetilde{K}_{j,\epsilon} * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

e pelo Lema 2.2.3,

$$\|\Delta_\epsilon * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\Delta_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Portanto,

$$\|(R_jK_\epsilon) * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

como R_j é limitado em L^p temos

$$\|(R_jK_\epsilon) * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|R_j(K_\epsilon * f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|K_\epsilon * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

então $\|K_\epsilon * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Como o lado direito é independente de ϵ, pelo lema de Fatou obtemos

$$\|Tf\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{\epsilon\to 0} |K_\epsilon * f|^p \leq \liminf_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |K_\epsilon * f|^p \leq C^p\|\Omega\|^p_{L^q(S^{n-1})}\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

e isto completa a prova. □

2.3 Integrais Singulares do Tipo Convolução

O objetivo desta seção é o estudo dos operadores integrais singulares invariantes por translação. Com esse propósito, seja T um operador integral singular limitado de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e que comuta com translações. Pelo Teorema 1.1.11 existe uma distribuição temperada $K \in \mathcal{S}'$ tal que $Tf = K * f$ para toda $f \in \mathcal{S}$. Ou seja, o operador T pode ser visto como um elemento do espaço (L^2, L^2). Assim decorre do Teorema (1.1.12) a existência de uma função mensurável $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|m(\xi)| \leq A$ tal que $\widehat{Tf}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi)$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. A função m é denominada *multiplicador*. Pelo Teorema de Plancherel, a condição de limitação sobre m equivale a seguinte desigualdade

$$\|Tf\|_{L^2} \leq A\|f\|_{L^2}.$$

Consideremos o seguinte Teorema.

Teorema 2.3.1 (Calderón-Zygmund)**.** *Seja $K \in \mathcal{S}' \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tal que*

$$|\widehat{K}(\xi)| \leq A\,, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.3.1}$$

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\,dx \leq B\,, \text{ para quase todo } y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3.2}$$

Então, dado $1 < p < \infty$ existe $C > 0$ tal que:

i) $\|K * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, *para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*

ii) *T é de tipo fraco $(1,1)$, ou seja*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |K * f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \text{ para toda } f \in L^1(\mathbb{R}^n). \tag{2.3.3}$$

Demonstração: Considere o operador $\mathcal{S} \ni f \mapsto Tf = K * f$. A condição (2.3.1) implica na continuidade do operador T no espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$. De fato, aplicando a transformada de Fourier na expressão $Tf = K * f$ obtemos

$$\widehat{Tf}(\xi) = (\widehat{K * f})(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi),$$

então segue da identidade de Plancherel que

$$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{Tf}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |m(\xi)| \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq A\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

provando que T é de tipo forte $(2,2)$. A seguir, mostraremos como a continuidade em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e 2.3.3 implicam na continuidade do operador para todo p tal que $1 < p < \infty$. De fato, suponhamos primeiramente que (ii) já esteja provado.

Para a demonstração de (i) definimos o operador adjunto T^* dado por $\langle T^*\phi, \psi\rangle = \langle \phi, T\psi\rangle$, para toda ϕ, $\psi \in \mathcal{S}$. Temos que

$$T^*\psi(x) = \int K(y-x)\psi(y)\,dy = \int K^*(x-y)\psi(y)\,dy, \quad \psi \in \mathcal{S}, \quad x \notin \operatorname{supp}\psi,$$

define um operador convolução pela distribuição temperada $K^*(x) = K(-x)$, e que portanto satisfaz as mesmas condições (2.3.1) e (2.3.2).

Segue do teorema de interpolação de Marcinkiewicz que existe $C > 0$ tal que $\|T^*f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$ para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq 2$. Seja q o expoente conjugado de p, então $q \in (2,\infty)$. Assim, dado $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$, seja $f_n \in \mathcal{S}$ tal que $f_n \to f$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$. Seja $\phi \in \mathcal{S}$ tomada arbitrariamente na bola unitária do espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$.

$$\langle Tf_n, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)T\phi(x)\,dx.$$

Logo, usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$|\langle Tf_n, \phi\rangle| \leq \|f_n\|_{L^q}\|T^*\phi\|_{L^p}.$$

Então segue da continuidade do operador T^* em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p \leq 2$ temos que

$$|\langle Tf_n, \phi \rangle| \leq C \|f_n\|_{L^q} \|\phi\|_{L^p}.$$

Tomando o supremo na estimativa anterior sobre o espaço das funções teste $\phi \in \mathcal{S}$ tais que $\|\phi\|_{L^p} \leq 1$ obtemos

$$\|Tf_n\|_{L^q} \leq C \|f_n\|_{L^q}.$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade anterior obtemos

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^q}$$

para toda $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e $2 < q < \infty$. Concluindo portanto a prova de (i).

Para a prova de (ii) mostraremos que existe $C > 0$ tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |K * f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e todo $\lambda > 0$ fixo.

Fixe $\lambda > 0$, pelo teorema de decomposição de Calderón-Zygmund, podemos escrever $f = g + b$ com g e b satisfazendo as propriedades fornecidas pela Proposição 1.5.1.

Seja $\Omega = \cup_j Q_j$, $\Omega^* = \cup_j Q_j^*$, onde Q_j^* é o cubo com o mesmo centro que Q_j e cujo lado é $2\sqrt{n}$ vezes maior, $Tb(x) = K * b(x)$, então

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : |K * b(x)| > \lambda\}| &\leq |\{x \in \Omega^* : |K * b(x)| > \lambda\}| \\
&+ |\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |K * b(x)| > \lambda\}| \\
&\leq |\Omega^*| + |\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |K * b(x)| > \lambda\}| \\
&= 2|\Omega| + |\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |K * b(x)| > \lambda\}| \\
&\leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_{L^1} + |\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |K * b(x)| > \lambda\}|
\end{aligned}$$

Para estimarmos o termo

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |K * b(x)| > \lambda\}|,$$

observamos que se $s_n = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)$, então $s_n \to b$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim segue da continuidade de T em $L^2(\mathbb{R}^n)$ que

$$Tb(x) = T\left(\sum_j b_j\right) = T\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} Tb_j = \sum_j Tb_j(x), \quad \text{para q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Como

$$|Tb(x)| \leq \sum_j |Tb_j(x)|$$

temos que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \sum_j |Tb_j(x)| > \lambda\}|.$$

Aplicando a desigualdade de Tchebichev na desigualdade anterior obtemos

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \sum_j |Tb_j(x)| > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} \left(\sum_j |Tb_j(x)| \right) dx.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} \left(\sum_j |Tb_j(x)| \right) dx = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} |Tb_j(x)| dx$$

e $\mathbb{R}^n \setminus \Omega^* \subset \mathbb{R}^n \setminus Q_j^*$ temos que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |Tb_j(x)| dx$$

Logo a demonstração se reduz à prova da seguinte desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |Tb_j(x)| dx \leq B \int_{Q_j} |b_j(x)|\, dx.$$

De fato, seja $Q_j = Q(c_j, \ell_j)$ e defina $Q_j^* = Q(c_j, \ell_j^*)$ onde $\ell_j^* = 2\sqrt{n}\,\ell_j$.

Seja $x \notin Q_j^*$, então

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} K(x-y) b_j(y)\, dy = \int_{Q_j} [K(x-y) - K(x-c_j)] b_j(y)\, dy$$

portanto,

$$|Tb_j(x)| \leq \int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-c_j)||b_j(y)|\, dy.$$

Como $x \notin Q_j^*$ então $|x - c_j| > \sqrt{n}\,\ell_j > 2|y - c_j|$, e conseqüentemente

$$\mathbb{R}^n \setminus Q_j^* \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x - c_j| > 2|y - c_j|\}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |Tb_j(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} \left(\int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-c_j)||b_j(y)|\, dy \right) dx \\
&= \int_{Q_j} |b_j(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |K(x-y) - K(x-c_j)|\, dx \right) dy \\
&= \int_{Q_j} |b_j(y)| \left(\int_{|x-c_j| > 2|y-c_j|} |K(x-y) - K(x-c_j)|\, dx \right) dy
\end{aligned}$$

e por (2.3.2) temos

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*} |Tb_j(x)| \leq B \int_{Q_j} |b_j(y)|\, dy.$$

Portanto,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |Tb(x) > \lambda|\}| \leq \frac{B}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |b_j(x)|\, dx.$$

Como

$$\int_{Q_j} |b_j(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x) - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y)\, dy \right| \chi_{Q_j}(x)\, dx \leq 2\|f\|_{L^1(Q_j)}$$

temos $\sum_j \int_{Q_j} |b_j(x)|\, dx = \int_{\cup_j Q_j} |b_j(x)| \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}$. E assim concluimos que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |Tb(x) > \lambda|\}| \leq \frac{B}{\lambda} \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

□

Proposição 2.3.1. *A condição de Hörmander (2.3.2) ocorre se para todo* $x \neq 0$

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}. \tag{2.3.4}$$

Demonstração: Suponha que $K \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $|x| > 2|y|$. Então, afirmamos que $\frac{|x|}{2} \leq |x - ty|$ para todo $0 < t < 1$. De fato, se $0 < t < 1$ então

$$|x| \leq |x - ty| + |ty| \leq |x - ty| + |y| \leq |x - ty| + \frac{|x|}{2}$$

implica que $|x - ty| \geq \frac{|x|}{2}$.

Logo, para todo $0 < |x| < |x-ty|$ definimos $\phi(t) = K(x-ty)$. Pelo teorema fundamental do cálculo temos

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t)\, dt.$$

Como $\phi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial z_j}(x - ty) \cdot y_j$, então

$$K(x-y) - K(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial z_j}(x - ty) \cdot y_j\, dt = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial K}{\partial z_j}(x - ty)\, dt \right) \cdot y_j = \langle \psi(x, y), y \rangle$$

Sendo $\psi(x, y) = (\psi_1(x, y), \ldots, \psi_n(x, y))$ com $\psi_j(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial K}{\partial z_j}(x - ty)\, dt$. Como

$$|\psi_j(x, y)| \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial K}{\partial z_j}(x - ty)\, dt \right| \leq \sup_{0<t<1} \left| \frac{\partial K}{\partial z_j}(x - ty) \right|$$

então segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}|K(x-y)-K(x)| &= |<\psi(x,y),y>| \leq |\psi(x,y)||y| \\ &\leq \sup_{0<t<1} |\nabla K(x-ty)||y| \leq \sup_{0<t<1} \frac{C|y|}{|x-ty|^{n+1}} \\ &\leq \sup_{0<t<1} \frac{2^{n+1}C|y|}{|x|^{n+1}} = C'\frac{|y|}{|x|^{n+1}}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{|x|>2|y|} |K(x-y)-K(x)|\,dx &\leq C'\int_{|x|>2|y|} \frac{|y|}{|x|^{n+1}}\,dx \\ &= C'|y||S^{n-1}|\int_{2|y|}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{n+1}}\,dr = -C''|y|[r^{-1}]|_{2|y|}^{\infty} = C''|y|\frac{1}{2|y|} = B.\end{aligned}$$

□

Definimos a função de Dini como

$$\omega_\infty(t) = \sup\{|\Omega(u_1)-\Omega(u_2)| : |u_1-u_2| \leq t,\ u_1,u_2 \in S^{n-1}\}.$$

Observação 2.3.2: Se $\int_0^1 \frac{\omega_\infty(t)}{t}\,dt < \infty$ então $\Omega \in L^\infty(S^{n-1})$.

Então temos o seguinte resultado.

Proposição 2.3.2. *Se Ω satisfaz*

$$\int_0^1 \frac{\omega_\infty(t)}{t}\,dt < \infty, \tag{2.3.5}$$

então o núcleo $\Omega(x')/|x|^n$ satisfaz a condição de Hörmander (2.3.2).

Demonstração:

$$\begin{aligned}|K(x-y)-K(x)| &= \left|\frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^n} - \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right| \\ &= \left|\frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^n} - \frac{\Omega(x')}{|x-y|^n} + \frac{\Omega(x')}{|x-y|^n} - \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right| \\ &\leq \frac{|\Omega((x-y)')-\Omega(x')|}{|x-y|^n} + |\Omega(x')|\left|\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right|.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{|x|>2|y|} |K(x-y)-K(x)|\,dx &\leq \int_{|x|>2|y|} \frac{|\Omega((x-y)')-\Omega(x')|}{|x-y|^n}\,dx \\ &\quad + \int_{|x|>2|y|} |\Omega(x')|\left|\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right|\,dx \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Para estimarmos I_2 graças à (2.3.5) e pela observação anterior $\Omega \in L^\infty(S^{n-1})$. Para todo $0 < |x| < |x - ty|$ com $0 < t < 1$ definimos

$$\phi(t) = \frac{1}{|x - ty|^n}$$

então

$$\phi'(t) = n\frac{(x - ty) \cdot y}{|x - ty|^{n+2}}.$$

Logo pelo teorema do valor médio temos

$$\left|\frac{1}{|x - y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| = C\frac{|y|}{|x|^{n+1}},$$

assim,

$$\begin{aligned}\int_{|x|>2|y|}\left|\frac{1}{|x - y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| dx &\leq C\int_{|x|>2|y|}\frac{|y|}{|x|^{n+1}}\\ &= C|y||S^{n-1}|\int_{2|y|}^{\infty}\frac{r^{n-1}}{r^{n+1}}\,dr = C|y|\frac{1}{2|y|} = C.\end{aligned}$$

A seguir vamos estimar o termo I_1 sobre o conjunto $\{|x| > 2|y|\}$. Note que

$$\begin{aligned}|(x - y)' - x'| &= \left|\frac{x - y}{|x - y|} - \frac{x}{|x|}\right| \leq \left|\frac{2(x|x| - y|x| - x|x| - x|y|)}{|x|^2}\right|\\ &\leq \frac{2(|y||x| + |x||y|)}{|x|^2} = 4\frac{|y|}{|x|}\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{|x|>2|y|}\frac{|\Omega((x - y)') - \Omega(x')|}{|x - y|^n}\,dx \leq \int_{|x|>2|y|}\frac{\omega_\infty(4|y|/|x|)}{(|x|/2)^n}\,dx\\ &= \int_{S^{n-1}}\int_{2|y|}^{\infty}\frac{\omega_\infty(4|y|/r)}{(r/2)^n}r^{n-1}drd\sigma(u) = 2^n|S^{n-1}|\int_{2|y|}^{\infty}\omega_\infty(4|y|/r)\frac{dr}{r}.\end{aligned}$$

Aplicando a mudança de variável $t = \frac{4|y|}{r}$ na integral anterior obtemos

$$I_1 \leq 2^n|S^{n-1}|\int_{2|y|}^{\infty}\omega_\infty(4|y|/r)\frac{dr}{r} = 2^n|S^{n-1}|\int_0^2\frac{\omega_\infty(s)}{s}\,ds \leq C$$

o que conclui a demonstração da Proposição 2.3.2. □

Corolário 2.3.1. *Se Ω é uma função definida em S^{n-1} com integral zero e satisfazendo (2.3.5), então o operador*

$$Tf(x) = v.p.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x - y)\,dy$$

é forte (p, p), $1 < p < \infty$, e fraco $(1, 1)$.

Demonstração: Da observação anterior temos que se Ω satisfaz (2.3.5) então $\Omega \in L^\infty(S^{n-1})$, e como $\Omega = \Omega_o + \Omega_e$, assim $\Omega_o \in L^\infty(S^{n-1})$ e $\Omega_e \in L^\infty(S^{n-1})$; em particular $\Omega_o \in L^1(s^{n-1})$ e $\Omega_e \in L^q(S^{n-1})$ para algum $q > 1$, então pelo Corolário (2.1.2) temos que existe $C > 0$ tal que

$$|m(\xi)| = \left| \left(v.p.\frac{\Omega(y')}{|y|^n} \right)^{\hat{}} (\xi) \right| \leq C < \infty, \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto pelo teorema 2.3.1, Tf é forte (p,p), $1 < p < \infty$ e fraco $(1,1)$.

2.4 Integrais Truncadas e o Valor Principal

No Teorema 2.3.1 assumimos que o operador T fosse limitado em L^2 (via a hipóteses que $\widehat{K} \in L^\infty$). Nesta seção damos condições em K as quais implica esta propriedade o qual faz o operador associado limitado em L^p, $1 < p < \infty$. Dado $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, defina $K_{\epsilon,R}(x) = K(x)\chi_{\{\epsilon<|x|<R\}}(x)$.

Proposição 2.4.1. *Seja $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tal que*

$$\left| \int_{a<|x|<b} K(x)\, dx \right| \leq A, \;\; 0 < a < b < \infty; \tag{2.4.1}$$

$$\int_{a<|x|<2a} |K(x)|\, dx \leq B, \;\; a > 0; \tag{2.4.2}$$

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq C, \;\; y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4.3}$$

Então para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{K_{\epsilon,R}}(\xi) \leq C$, com C independente de ϵ e R.

Observação 2.4.3: A condição (2.4.2) é equivalente a

$$\int_{|x|<a} |x||K(x)|\, dx \leq B'a, \;\; a > 0: \tag{2.4.4}$$

De fato, como $\{x : |x| < a\} = \cup_{k=0}^\infty \{x : 2^{-k-1}a < |x| < 2^{-k}a\}$, então

$$\begin{aligned} \int_{|x|<a} |x||K(x)|\, dx &\leq \sum_{k=0}^\infty \int_{2^{-k-1}a<|x|<2(2^{-k-1}a)} |x||K(x)|\, dx \\ &\leq \sum_{k=0}^\infty 2^{-k}a \int_{2^{-k-1}a<|x|<2^{-k}a} |K(x)|\, dx \leq Ba \sum_{k=0}^\infty 2^{-k} = 2Ba. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_{a<|x|<2a} |K(x)|\, dx = \frac{1}{a}\int_{a<|x|<2a} a|K(x)|\, dx < \frac{1}{a}\int_{|x|<2a} |x||K(x)|\, dx \leq 2\frac{B'a}{a} = 2B'.$$

Demonstração da Proposição 2.4.1: Seja ξ tal que $\epsilon < |\xi|^{-1} < R$,

$$\begin{aligned}
\widehat{K_{\epsilon,R}}(\xi) &= \int_{\epsilon<|x|<R} e^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,dx \\
&= \int_{\epsilon<|x|<|\xi|^{-1}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,dx + \int_{|\xi|^{-1}<|x|<R} e^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,dx \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Assim

$$I_1 = \int_{\epsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)\,dx + \int_{\epsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)(e^{-2\pi i x\cdot\xi} - 1)\,dx$$

logo

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \left|\int_{\epsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)\,dx\right| + \int_{\epsilon<|x|<|\xi|^{-1}} |K(x)||e^{-2\pi i x\cdot\xi} - 1|\,dx \\
&\leq \left|\int_{\epsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)\,dx\right| + 2\pi|\xi| \int_{\epsilon<|x|<|\xi|^{-1}} |x||K(x)|\,dx \\
&\leq A + 2\pi|\xi| \cdot B'|\xi|^{-1} = A + 2\pi B < \infty.
\end{aligned}$$

Para estimar I_2, seja $z = \frac{1}{2}\xi|\xi|^{-2}$, e assim $e^{2\pi i z\cdot\xi} = e^{i\pi} = -1$; então se fazemos a mudança de variáveis $x \to x - z$ em I_2 obtemos

$$I_2 = \int_{|\xi|^{-1}<|x|<R} e^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,dx \tag{2.4.5}$$

$$= \int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<R} e^{-2\pi i(x-z)\cdot\xi} K(x-z)\,dx = e^{2\pi i z\cdot\xi} \int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<R} e^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x-z)\,dx$$

$$= -\int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<R} e^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x-z)\,dx. \tag{2.4.6}$$

E somando (2.4.5) e (2.4.6) temos

$$2I_2 = \int_{|\xi|^{-1}<|x|<R} e^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,dx - \int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<R} e^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x-z)\,dx$$

isto implica que

$$\begin{aligned}
2|I_2| \leq& \int_{|\xi|^{-1}<|x|<R} |K(x) - K(x-z)||e^{-2\pi i x\cdot\xi}|\,dx + \int_{|\xi|^{-1}<|x|<R} |K(x-z)||e^{-2\pi i x\cdot\xi}|\,dx \\
&+ \int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<R} |K(x-z)||e^{-2\pi i x\cdot\xi}|\,dx
\end{aligned}$$

Como $\{x : |\xi|^{-1} < |x| < R\} \subset \{x : |\xi|^{-1} < |x| < \infty\}$ e $\{x : |\xi|^{-1} < |x| < R\} \subset \{x :$

$|\xi|^{-1}/2 < |x-z| < R + |\xi|^{-1}/2\}$, então temos

$$\begin{aligned}
2|I_2| \leq & \int_{|\xi|^{-1}<|x|} |K(x) - K(x-z)|\, dx + \int_{\frac{|\xi|^{-1}}{2}<|x-z|<R+\frac{|\xi|^{-1}}{2}} |K(x-z)|\, dx \\
& - \int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<R} |K(x-z)|\, dx \\
= & \int_{|\xi|^{-1}<|x|} |K(x) - K(x-z)|\, dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^n} |K(x)| \left[\chi_{\{|\xi|^{-1}/2<|x|<R+|\xi|^{-1}/2\}}(x) - \chi_{\{|\xi|^{-1}<|x|<R\}}(x)\right]\, dx \\
= & \int_{|\xi|^{-1}<|x|} |K(x) - K(x-z)|\, dx + \int_{\frac{|\xi|^{-1}}{2}<|x|<|\xi|^{-1}} |K(x)|\, dx + \int_{R<|x|<R+\frac{|\xi|^{-1}}{2}} |K(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Como $|\xi|^{-1} = 2|z|$ e $|\xi|^{-1} < R$ então $R + \frac{|\xi|^{-1}}{2} < 2R$. Portanto pelas condições (2.4.2) e (2.4.3) temos $2|I_2| \leq C + 2B$.

□

Corolário 2.4.1. *Se K satisfaz a hipóteses da Proposição 2.4.1 então*

$$\|K_{\epsilon,R} * f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}, \ \ 1 < p < \infty,$$

e

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |K_{\epsilon,R} * f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C_1}{\lambda}\|f\|_{L^1},$$

com constantes independentes de ϵ e R.

Demonstração: Note que (2.4.3) implica a condição de Hörmander,

$$\int_{|x|>2|y|} |K_{\epsilon,R}(x-y) - K_{\epsilon,R}(x)|\, dx \leq C$$

com C independente de ϵ e R. De fato se

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|x|>2|y|} |K_{\epsilon,R}(x-y) - K_{\epsilon,R}(x)|\, dx \\
&= \int_{|x|>2|y|} \left|K(x-y)\chi_{\{x:\epsilon<|x-y|<R\}}(x) - K(x)\chi_{\{x:\epsilon<|x|<R\}}(x)\right|\, dx \\
&\leq \int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)|\chi_{\{x:\epsilon<|x-y|<R\}}(x)\, dx \\
&\quad + \int_{|x|<2|y|} |K(x)||\chi_{\{x:\epsilon<|x-y|<R\}}(x) - \chi_{\{x:\epsilon<|x|<R\}}(x)| \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

então

$$I_1 \leq \int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq C.$$

Se $\epsilon < |x-y| < R$ e $|x| > 2|y|$ então

$$\{x : \epsilon < |x-y| < R,\ |x| > 2|y|\} \subset \{x : \epsilon/2 < |x| < 2R\}$$

logo,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |K(x)| \left| \chi_{\{x:\frac{\epsilon}{2}<|x|<2R\}}(x) - \chi_{\{x:\epsilon<|x|<R\}}(x) \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |K(x)| \chi_{\{x:\frac{\epsilon}{2}<|x|<\epsilon\}}(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |K(x)| \chi_{\{x:R<|x|<2R\}}(x)\, dx \\ &= \int_{\frac{\epsilon}{2}<|x|<\epsilon} |K(x)|\, dx + \int_{R<|x|<2R} |K(x)|\, dx < B + B = 2B. \end{aligned}$$

Então pela Proposição 2.4.1, temos que $\widehat{K_{\epsilon,R}}(\xi) < C$ e pelo Teorema 2.3.1 temos o resultado.

$\square$

Se $K(x) = \dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}$, então a condição (2.4.2) é equivalente a $\Omega \in L^1(S^{n-1})$. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{a<|x|<2a} |K(x)|\, dx = \int_{a<|x|<2a} \frac{|\Omega(x')|}{|x|^n}\, dx &= \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| \int_a^{2a} r^{-n} \cdot r^{n-1}\, dr\, d\sigma(u) \\ &= \ln 2 \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)|\, d\sigma(u). \end{aligned}$$

E a condição (2.4.1) é equivalente a $\int_{S^{n-1}} \Omega(u)\, d\sigma(u) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \left| \int_{a<|x|<b} K(x)\, dx \right| &= \left| \int_{a<|x|<b} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \right| = \left| \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \int_a^b r^{-n} \cdot r^{n-1}\, dr\, d\sigma(u) \right| \\ &= |\ln b - \ln a| \left| \int_{S^{n-1}} \Omega(u)\, d\sigma(u) \right|. \end{aligned}$$

Como $K_{\epsilon,R} \in L^1$ porque $K \in L^1_{loc}$, então pela desigualdade de Young temos que

$$\|K_{\epsilon,R} * f\|_{L^p} \leq \|K_{\epsilon,R}\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$$

portanto $K_{\epsilon,R} * f$ está bem definido para $f \in L^p$.

Poderiamos definir a integral singular T por

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0, R \to \infty} K_{\epsilon,R} * f(x),$$

mas este limite não necessariamente existe ainda que $f \in \mathcal{S}$. Neste caso temos convergência quando $R \to \infty$.

Assim só temos que determinar quando o valor principal da distribuição K

$$\text{v.p.}\, K(\phi) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} K(x)\phi(x)\, dx, \quad \phi \in \mathcal{S}$$

existe.

Proposição 2.4.2. *Dada uma função K que satisfaz a condição (2.4.2), a distribuição temperada v.p.K existe se,e somente se,*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} K(x)\, dx$$

existe.

Demonstração: Suponha que a distribuição temperada existe. Se fixamos $\phi \in \mathcal{S}$ tal que $\phi(B(0,1)) = 1$, então

$$\begin{aligned} \text{v.p.}\, K(\phi) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} K(x)\phi(x)\, dx + \int_{|x|>1} K(x)\phi(x)\, dx \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} K(x)\, dx + \int_{|x|>1} K(x)\phi(x)\, dx \end{aligned}$$

Como $\phi \in \mathcal{S}$, então $|\phi(x)| \leq \|\phi\|_{L^\infty}$ e $\{x : |x| > 1\} \subset \cup_{k=0}^{\infty} \{x : 2^k < |x| < 2^{k+1}\}$ então a segunda integral existe desde que

$$\begin{aligned} \int_{|x|>1} |K(x)||\phi(x)|\, dx &\leq \int_{|x|>1} |x| \frac{|K(x)|}{|x|} |\phi(x)|\, dx \\ &\leq \||x|\phi\|_{L^\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \int_{2^k < |x| < 2^{k+1}} |K(x)|\, dx \leq 2B\||x|\phi\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} K(x)\phi(x)\, dx$$

também existe.

Reciprocamente, suponha que o limite existe e seja

$$L = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} K(x)\, dx$$

então

$$\begin{aligned} \text{v.p.}\, K(\phi) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} K(x)\phi(x)\, dx + \int_{|x|>1} K(x)\phi(x)\, dx \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} K(x)(\phi(x) - \phi(0))\, dx + \int_{\epsilon < |x| < 1} K(x)\phi(0)\, dx + \int_{|x|>1} K(x)\phi(x)\, dx \\ &= \phi(0)L + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} K(x)(\phi(x) - \phi(0))\, dx + \int_{|x|>1} K(x)\phi(x)\, dx. \end{aligned}$$

Como já observamos a segunda integral sempre existe. Pelo Teorema da convergência Dominada temos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} K(x)(\phi(x) - \phi(0))\, dx = \int_{|x|<1} K(x)(\phi(x) - \phi(0))\, dx.$$

Esta integral existe porque $|\phi(x)-\phi(0)| \leq |x|\|\nabla\phi\|_{L^\infty}$ e assim por (2.4.4)

$$\int_{|x|<1} |K(x)||\phi(x)-\phi(0)|\,dx \leq \|\nabla\phi\|_{L^\infty}\int_{|x|<1}|x||K(x)|\,dx \leq 2B\|\nabla\phi\|_{L^\infty}.$$

$\square$

Corolário 2.4.2. *Se adicionamos às hipóteses da Proposição 2.4.1 a suposição que*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1} K(x)\,dx$$

existe, então

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon} K(y)f(x-y)\,dy$$

pode ser extendido a um operador que é limitado em L^p, $1<p<\infty$, e é fraco $(1,1)$.

Exemplo 2.4.2: Seja $K(x)=|x|^{-n-it}$. A função $|x|^{-n-it}$ é localmente integravel em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ e satisfaz as hipóteses da Proposição 2.4.1. De fato,

$$\begin{aligned}\left|\int_{a<|x|<b}\frac{dx}{|x|^{n+it}}\right| &= \left|\int_{S^{n-1}}\int_a^b r^{-n-it}\cdot r^{n-1}\,dr\,d\sigma(u)\right| = \left||S^{n-1}|\left(\frac{r^{-it}}{-it}\right)_a^b\right| \\ &= |S^{n-1}|\left|\frac{b^{-it}-a^{-it}}{-it}\right| \leq \frac{2}{t}|S^{n-1}|.\end{aligned}$$

$$\int_{a<|x|<2a}\left|\frac{1}{|x|^{n+it}}\right|dx = \int_{a<|x|<2a}\frac{dx}{|x|^n} = |S^{n-1}|\int_a^{2a}\frac{1}{r}\,dr = |S^{n-1}|\ln 2.$$

Como $\nabla K(x) = (-n-it)|x|^{-n-it-1}\cdot\frac{x}{|x|}$, então

$$|\nabla K(x)| = |n+it||x|^{-n-1} = \frac{|n+it|}{|x|^{n+1}}$$

portanto cumpre a condição do gradiente e assim cumpre a condição de Hörmander.

Portanto, $\|K_{\epsilon,R}*f\|_{L^p}\leq C_p\|f\|_{L^p}$, $1<p<\infty$. Entretanto, $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1}K(x)\,dx$ não existe q.t.p. visto que

$$\int_{\epsilon<x|<1}\frac{dx}{|x|^{n+it}} = |S^{n-1}|\int_\epsilon^1 r^{-1-it}\,dr = |S^{n-1}|\left.\frac{r^{-it}}{-it}\right|_\epsilon^1 = |S^{n-1}|\left(\frac{1-\epsilon^{-it}}{-it}\right)$$

e $\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-it}$ não existe. O limite existe se escolhemos uma subsequência apropriada $\{\epsilon_k\}$, por exemplo $\epsilon_k = e^{-2\pi k/t}$. Para esta subsequência, $\epsilon_k^{-it} = e^{i2\pi k} = 1$, então

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<x|<1}\frac{dx}{|x|^{n+it}} = |S^{n-1}|\frac{1-1}{-it} = 0$$

portanto temos

$$\lim_{k,R\to\infty} K_{\epsilon_k,R} * f(x) = \int_{|y|<1} \frac{f(x-y)-f(x)}{|y|^{n+it}}\,dy + \int_{|y|>1} \frac{f(x-y)}{|y|^{n+it}}\,dy,$$

e este define um operador o qual é forte (p,p), $1<p<\infty$ e fraco $(1,1)$. Para a subsequência escolhida ϵ_k, o operador que define é

$$\text{v.p.}\,\frac{1}{|x|^{n+it}}(\phi) = \int_{|x|<1} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{|x|^{n+it}}\,dx + \int_{|x|>1} \frac{\phi(x)}{|x|^{n+it}}\,dx \tag{2.4.7}$$

Esta distribuição não é homogênea de grau$-n-it$, ou seja, não satisfaz

$$\text{v.p.}\,\frac{1}{|x|^{n+it}}(\phi_\lambda) = \lambda^{-n-it}\text{v.p.}\,\frac{1}{|x|^{n+it}}(\phi),$$

onde $\phi_\lambda(x) = \lambda^{-n}\phi(\lambda^{-1}x)$.

Para provar isto temos que dado z tal que $Re\, z < n$, a função $|x|^{-z}$ é localmente integravel porque

$$\int_{|x|<1} \frac{1}{|x|^z}\,dx = \int_{S^{n-1}}\int_0^1 r^{-z+n-1}\,dr\,d\sigma(u) = |S^{n-1}|\left.\frac{r^{n-z}}{n-z}\right|_0^1 = |S^{n-1}|\frac{1}{n-z} < \infty.$$

E esta funçào é homogênea de grau $-z$ porque $|\lambda x|^{-z} = \lambda^{-z}|x|^{-z}$. Isto define uma distribuição temperada

$$\frac{1}{|x|^z}(\phi) = \int \frac{\phi(x)}{|x|^z}\,dx$$

que é homogênea de grau $-z$ já que

$$\frac{1}{|x|^z}(\phi_\lambda) = \int \frac{\phi_\lambda(x)}{|x|^z}\,dx = \int \frac{\lambda^{-n}}{|x|^z}\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\,dx = \lambda^{-z}\int \frac{\phi(x)}{|x|^z}\,dx = \lambda^{-z}\left(\frac{1}{|x|^z}(\phi)\right).$$

Podemos reescrever esta distribuição como

$$\begin{aligned}\frac{1}{|x|^z}(\phi) &= \int_{|x|<1} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{|x|^z}\,dx + \phi(0)\int_{|x|<1}\frac{dx}{|x|^z} + \int_{|x|>1}\frac{\phi(x)}{|x|^z}\,dx \\ &= \int_{|x|<1} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{|x|^z}\,dx + \int_{|x|>1}\frac{\phi(x)}{|x|^z}\,dx + \frac{|S^{n-1}|}{n-z}\phi(0),\end{aligned}$$

esta expresão toma sentido para $Re\, z < n+1$ excepto se $z=n$.

Se fazemos $z = n+it$, temos por (2.4.7) que

$$\frac{1}{|x|^{n+it}}(\phi) = \text{v.p.}\,\frac{1}{|x|^{n+it}}(\phi) + \frac{|S^{n-1}|}{n-z}\phi(0),$$

como $\phi(0) =< \delta, \phi >$ é a distribuição delta Dirac e esta é homogênea de grau $-n$; e $\frac{1}{|x|^{n+it}}(\phi)$ é homogênea de grau $-n-it$, então v.p.$|x|^{-n-it}$ não é homogênea de grau $-n-it$.

De (2.1.2) temos que a transformada de Fourier de $|x|^{-z}$ é,

$$(|x|^{-z})\widehat{\ }(\xi) = \pi^{z-\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}\cdot|\xi|^{z-n}$$

Se fazemos $z = n + it$, temos

$$\left(\frac{1}{|x|^{n+it}}\right)^{\widehat{}}(\xi) = \pi^{it+\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+it}{2}\right)} \cdot |\xi|^{it}$$

Como a transformada de Fourier da distribuição delta Dirac é 1, então

$$\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{|x|^{n+it}}\right)^{\widehat{}}(\xi) = \pi^{it+\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+it}{2}\right)} \cdot |\xi|^{it} + \frac{1}{it}|S^{n-1}|. \tag{2.4.8}$$

$\square$

Capítulo 3

Operadores de Calderón-Zygmund

Seja $K(x,y)$ uma distribuição em $\mathcal{S} \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{\Delta\})$ tal que para cada $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto, a integral

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\, f(y)\, dy \tag{3.0.1}$$

converge absolutamente para quase todo $x \notin \operatorname{supp} f$.

O objetivo principal desta seção consiste em estudar as condições necessárias, que garantam a limitação dos operadores integrais singulares (3.0.1) no espaço L^p, para $p \in (0,q]$, tendo a priori a limitação destes operadores em L^q. Ou seja, tal que exista $A > 0$ com

$$\|Tf\|_{L^q} \leq A\|f\|_{L^q}. \tag{3.0.2}$$

Dizemos que $K(x,y)$ satisfaz a condição de Hörmander se existe $B > 0$ tal que

$$\int_{|x-y|\geq c\delta} |K(x,y) - K(x,\bar{y})|\, dx \leq B, \tag{3.0.3}$$

para todo $\bar{y} \in B(y,\delta)$, todo $y \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$.

Teorema 3.0.1. *Sob as hipóteses* (3.0.1),(3.0.2) *e* (3.0.3) *então existe $C < \infty$ tal que*

$$\|T(f)\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p} \tag{3.0.4}$$

para toda $f \in L^p \cap L^q$ com $1 < p < q$.

Demonstração: Por um argumento de interpolação basta provar que o operador $f \mapsto T(f)$ é de tipo fraco (1,1), ou seja

$$|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx \tag{3.0.5}$$

para toda $f \in L^1$ e $\lambda > 0$. Como $L^1 \cap L^q$ é um subespaço vetorial denso em L^1, provaremos a estimativa (3.0.4) para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$.

De fato, seja $\lambda > 0$ fixo. Pela Proposição 1.5.1 considere a decomposição de Calderón-Zygmund $f = g + b$ e mostremos que

$$|\{x : |Tg(x)| > \lambda/2\}| + |\{x : |Tb(x)| > \lambda/2\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx. \tag{3.0.6}$$

Afirmamos que $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Provaremos primeiramente o caso em que (3.0.2) ocorre para $q < \infty$. De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q\, dx = \int_{\Omega^c} |g(x)|^q\, dx + \int_{\Omega} |g(x)|^q\, dx.$$

Em Ω^c como $g(x) = f(x)$ temos que

$$\int_{\Omega^c} |g(x)|^q\, dx \leq 2^{n(q-1)} \lambda^{q-1} \int_{\Omega^c} |f(x)|\, dx \leq c\lambda^{q-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx.$$

Além disso, desde que $|\Omega| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1}$,

$$\int_{\Omega} |g(x)|^q\, dx \leq 2^{nq} \lambda^q |\Omega| \leq c\lambda^{q-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

De onde, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q\, dx \leq c\lambda^{q-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

Logo, segue da desigualdade de Tchebychev que

$$|\{x : |Tg(x)| > \lambda/2\}| \leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^q \|Tg\|_{L^q}^q \leq \left(\frac{c}{\lambda}\right) \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

No caso em que $q = \infty$. Pela parte a) da Proposição 1.5.1 temos que $\|g\|_{L^\infty} \leq 2^n \lambda$, assim como T é limitado em L^q ou seja $\|Tg\|_{L^\infty} \leq C\|g\|_{L^\infty}$, então o conjunto $\{x : |Tg(x)| > \lambda/2\}$ é vazio se escolhemos $2^{n+1}C < 1$; assim a estimativa para Tg é mostrado em todos os casos.

Para estimarmos o termo $T(b)$ procedemos da seguinte forma. Seja $Q = Q(c, \ell)$ um cubo de lado ℓ centrado no ponto $c \in \mathbb{R}^n$. Denotemos por $Q^* = Q(c, 2\ell)$ e Seja $\Omega^* = \cup_{k=1}^{\infty} Q_k^*$. Assim,

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tb(x)| > \lambda/2\}| &\leq |\{x \in \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \in (\Omega^*)^c : |Tb(x)| > \lambda/2\}| \\
&\leq 2|\Omega| + |\{x \in (\Omega^*)^c : |Tb(x)| > \lambda/2\}| \\
&\leq \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx + |\{x \in (\Omega^*)^c : |Tb(x)| > \lambda/2\}|.
\end{aligned}$$

Para estimarmos o termo $|\{x \in (\Omega^*)^c : |Tb(x)| > \lambda/2\}|$ usaremos novamente Tchebychev para obter

$$|\{x \in (\Omega^*)^c : |Tb(x)| > \lambda/2\}| \leq 2\lambda^{-1} \int_{(\Omega^*)^c} |Tb(x)|\, dx. \tag{3.0.7}$$

Notemos que segue da definição de b_k que se $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ então $b_k \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Logo $b(x) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ está suportada em $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} Q_k$. Além disso,

$$b_k(x) = \begin{cases} b(x) & \text{se} \quad x \in Q_k \\ 0 & \text{se} \quad x \notin Q_k. \end{cases}$$

Logo, se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^*$ e usando o fato de $\int_{Q_k} b_k(x)\,dx = 0$ obtemos

$$
\begin{aligned}
Tb(x) &= \int_{\cup_{k=1}^{\infty} Q_k} K(x,y)b(y)\,dy = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} K(x,y)b_k(y)\,dy \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} \left(K(x,y) - K(x,\bar{y}_k)\right) b_k(y)\,dy.
\end{aligned}
$$

Aplicando o valor absoluto na estimativa anterior obtemos

$$
|Tb(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} |K(x,y) - K(x,\bar{y}_k)|\,|b_k(y)|\,dy.
$$

Integrando a estimativa anterior com respeito a $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^*$ e aplicando Fubini temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} |Tb(x)|\,dx &\le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} |b_k(y)| \left(\int_{B(y,\ell_k/2)^c} |K(x,y) - K(x,\bar{y}_k)|\,dx \right) dy \\
&\le B \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} |b_k(y)|\,dy \le 2B \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} |f(y)|\,dy = 2B \int_{\Omega} |f(x)|\,dx \\
&\le 2B \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx.
\end{aligned}
$$

uma vez que $\bar{y}_k \in B(y,\ell_k)$.

Substituindo o resultado da última estimativa na desigualdade (3.0.7) obtemos

$$
|\{x \in (\Omega^*)^c : |Tb(x)| > \lambda/2\}| \le 4B\lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx,
$$

o que conclui a demonstação da desigualdade (3.0.4) para toda $f \in L^1 \cap L^q$. Logo segue do Teorema de interpolação de Marcinkiewicz 1.3.2 que a seguinte estimativa ocorre

$$
\|T(f)\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^p} \tag{3.0.8}
$$

para toda $f \in L^p \cap L^q$ com $1 < p < q$. $\square$

Como $L^p \cap L^q$ é um subespaço vetorial denso de L^p se $p < \infty$ podemos usar o Teorema 3.0.1 para estender o operador T a toda função de $L^p(\mathbb{R}^n)$, se $1 \le p < q$, através do seguinte Corolário.

Corolário 3.0.3. *O operador T enunciado no Teorema 3.0.1 possui uma única extensão em todo $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < q$ que satisfaz as desigualdades* (3.0.4) *e* (3.0.5).

Demonstração: Para $p > 1$, quando $\{f_n\}$ é uma sequência em $L^p \cap L^q$ que converge em norma L^p, então por (3.0.4) a sequência $\{T(f_n)\}$ é Cauchy na norma L^p.

Do mesmo modo, quando $p = 1$, $T(f_n)$ converge em medida por (3.0.5). $\square$

Até agora os operadores que temos estudado podiam-se escrever como convolução com distribuições temperadas. Uma vantagem desta hipóteses é que podiamos usar a Transformada de Fourier para deducir que o operador era limitado em L^2. Se assumimos isto então a limitação no resto do espaço L^p so depende da condição de Hörmander, o qual pode ser adaptado a operadores que não são operadores convolução. Denote por Δ a diagonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$: $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Definição 3.0.1. *Dizemos que T é um operador integral singular se $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é linear , contínuo e existe um núcleo $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta)$ tal que para todo par $\varphi, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com* $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \phi = \emptyset$

$$\langle T\varphi, \phi\rangle = \int \int K(x, y)\varphi(y)\phi(x)\, dy\, dx,$$

onde $\langle , \rangle$ denota o emparelhamento usual entre distribuições temperadas e funções do espaço de Schwartz.

Observação 3.0.4: Observamos que o núcleo K não determina o operador T únicamente. Considere por exemplo $Tf = f'$ para o qual $K = 0$ é o núcleo.

Definição 3.0.2. *Dizemos que um núcleo K é do tipo Calderón-Zygmund (tipo-CZ) se*

1) $|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}$

2) $|\nabla_x K(x, y)| + |\nabla_y K(x, y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}}$

3) $K(x, y) = -K(y, x)$.

Proposição 3.0.3. *Seja K um núcleo de tipo-CZ então podemos definir um operador integral singular, que tem K como núcleo, através do operador valor principal T.*

Demonstração: Para $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\langle T_\epsilon\varphi, \psi\rangle = \int_{\{|x-y|>\epsilon\}} K(x, y)\varphi(y)\psi(x)\, dy\, dx.$$

Do fato, $K(x, y) = -K(y, x)$ segue que

$$\int_{\{|x-y|>\epsilon\}} K(x, y)\varphi(y)\psi(y)\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_{\{|x-y|>\epsilon\}} K(x, y)(\varphi(y)\psi(x) - \varphi(x)\psi(y))\, dy\, dx.$$

□

Teorema 3.0.2. *Seja T um operador limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$, e seja K uma função em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta$ tal que se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tem suporte compacto então*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,dy, \quad x \notin supp(f).$$

Além disso, suponha que K também satisfaz

$$\int_{|x-y|>2|y-z|} |K(x,y) - K(x,z)|\,dx \leq C, \tag{3.0.9}$$

$$\int_{|x-y|>2|x-w|} |K(x,y) - K(w,y)|\,dy \leq C. \tag{3.0.10}$$

Então T é fraco $(1,1)$ e forte (p,p), $1 < p < \infty$

Demonstração:

$< T\varphi, \psi > = < \varphi, T^*\psi >$, T^* adjunta, φ, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} < T\varphi, , \psi > &= \int T\varphi(x)\psi(x)\,dx = \int \left(\int K(x,y)\varphi(y)\,dy \right) \psi(x)\,dx \\ &= \int \left(\int K(x,y)\psi(x)\,dx \right) \varphi(y)\,dy \end{aligned}$$

então

$$T^*\psi(x) = \int K(y,x)\psi(y)\,dy$$

Se T é limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ então T^* também é limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$, portanto T e T^* são fortes $(2,2)$.

Passo 1: Provaremos que T é fraco $(1,1)$ ou seja

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Fixe $\lambda > 0$, pelo Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund, podemos escrever $f = g + b$ com g e b satisfazendo as propriedades fornecidas pela Proposição 1.5.1.

Seja $\Omega = \cup_j Q_j$, $\Omega^* = \cup_j Q_j^*$, onde Q_j^* é o cubo com o mesmo centro que Q_j e cujo lado é $2\sqrt{n}$ vezes maior, e seja $Tb(x) = K * b(x)$, então

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tb(x)| > \lambda\}| &\leq |\{x \in \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda/2\}| \\ &\leq |\Omega^*| + |\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |K * b(x)| > \lambda/2\}| \\ &= 2|\Omega| + |\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |K * b(x)| > \lambda/2\}| \\ &\leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1} + |\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |K * b(x)| > \lambda/2\}| \end{aligned}$$

Para estimarmos o termo

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda\}|$$

observamos que se $s_n = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)$, então $s_n \to b$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim segue da continuidade de T em $L^2(\mathbb{R}^n)$ que

$$Tb(x) = T\left(\sum_j b_j\right) = T\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} Tb_j = \sum_j Tb_j(x).$$

e assim temos que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \sum_j |Tb_j(x)| > \lambda\}|.$$

Aplicando a desigualdade de Tchebichev na desigualdade anterior obtemos

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \sum_j |Tb_j(x)| > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega^*}\left(\sum_j |Tb_j(x)|\right)dx.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega^*}\left(\sum_j |Tb_j(x)|\right)dx = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega^*} |Tb_j(x)|dx$$

e $\mathbb{R}^n \setminus \Omega^* \subset \mathbb{R}^n \setminus Q_j^*$ temos que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda}\sum_j \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*} |Tb_j(x)|dx$$

Logo a demonstração se reduz a prova da seguinte desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*} |Tb_j(x)|dx \leq C\int_{Q_j} |b_j(x)|\,dx.$$

De fato, seja $Q_j = Q(c_j, \ell_j)$ e defina $Q_j^* = Q(c_j, \ell_j^*)$ onde $\ell_j^* = 2\sqrt{n}\,\ell_j$.

Seja $x \notin Q_j^*$, então

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} K(x,y)b_j(y)\,dy = \int_{Q_j} [K(x,y) - K(x,c_j)]b_j(y)\,dy$$

portanto,

$$|Tb_j(x)| \leq \int_{Q_j} |K(x,y) - K(x,c_j)||b_j(y)|\,dy.$$

Como $x \notin Q_j^*$ então $|x - c_j| > \sqrt{n}\,\ell_j > 2|y - c_j|$, e conseqüentemente

$$\mathbb{R}^n \setminus Q_j^* \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x - c_j| > 2|y - c_j|\}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*} |Tb_j(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*}\left(\int_{Q_j} |K(x,y) - K(x,c_j)||b_j(y)|\,dy\right)dx \\
&= \int_{Q_j} |b_j(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*} |K(x,c_j) - K(x,y)|\,dx\right)dy \\
&\leq \int_{Q_j} |b_j(y)|\left(\int_{|x-c_j|>2|y-c_j|} |K(x,c_j) - K(x,y)|\,dx\right)dy
\end{aligned}$$

e por (3.0.9) temos

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |Tb_j(x)| \leq C \int_{Q_j} |b_j(y)|\, dy.$$

Portanto,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |Tb(x) > \lambda|\}| \leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |b_j(x)|\, dx.$$

Como

$$\int_{Q_j} |b_j(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x) - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y)\, dy \right| \chi_{Q_j}(x)\, dx \leq 2\|f\|_{L^1(Q_j)}$$

então $\sum_j \int_{Q_j} |b_j(x)|\, dx = \int_{\cup_j Q_j} |b_j(x)| \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}$. Portanto temos

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : |Tb(x) > \lambda|\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

E assim T é fraco $(1,1)$.

Passo 2: Provaremos que T^* é fraco $(1,1)$,

$$T^* f(x) = \int K(y,x) f(y)\, dy.$$

Como T^* é operador então

$$|T^* b(x)| \leq \sum_j |T^* b_j(x)|$$

Pelo mesmo argumento feito no passo anterior a demonstração se reduz a prova da seguinte desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |T^* b_j(x)| dx \leq C \int_{Q_j} |b_j(x)|\, dx.$$

De fato, seja $Q_j = Q(c_j, \ell_j)$ e defina $Q_j^* = Q(c_j, \ell_j^*)$ onde $\ell_j^* = 2\sqrt{n}\, \ell_j$.

Seja $x \notin Q_j^*$, então

$$T^* b_j(x) = \int_{Q_j} K(y,x) b_j(y)\, dy = \int_{Q_j} [K(y,x) - K(c_j,x)] b_j(y)\, dy$$

portanto,

$$|T^* b_j(x)| \leq \int_{Q_j} |K(y,x) - K(c_j,x)||b_j(y)|\, dy.$$

Como $x \notin Q_j^*$ então $|x - c_j| > \sqrt{n}\, \ell_j > 2|y - c_j|$, e conseqüentemente

$$\mathbb{R}^n \setminus Q_j^* \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x - c_j| > 2|y - c_j|\}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |T^* b_j(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} \left(\int_{Q_j} |K(y,x) - K(c_j,x)||b_j(y)|\, dy \right) dx \\
&= \int_{Q_j} |b_j(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |K(c_j,x) - K(y,x)|\, dx \right) dy \\
&\leq \int_{Q_j} |b_j(y)| \left(\int_{|x-c_j|>2|y-c_j|} |K(x,c_j) - K(x,y)|\, dx \right) dy
\end{aligned}$$

e por (3.0.10) temos

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |T^* b_j(x)| \leq C \int_{Q_j} |b_j(y)|\, dy.$$

Por conseguinte, T^* é fraco $(1,1)$.

Passo 3: Mostraremos que T é forte (p,p), $1 < p < \infty$. Como T e T^* são fracos $(1,1)$ e fortes $(2,2)$, então pelo Teorema de Interpolação de Marcinkiewick temos

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p},\ \ 1 < p \leq 2$$

e

$$\|T^* f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p},\ \ 1 < p \leq 2$$

com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $q \in [2, \infty)$, assim

$$\|Tf\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\|\varphi\|_{L^p} \leq 1} |\int Tf(x)\varphi(x)\, dx| = \sup_{\|\varphi\|_{L^p} \leq 1} |\int f(x) T^*\varphi(x)\, dx|.$$

Como T^* é forte (p,p), $1 < p \leq 2$: $T^*\varphi(x) \in L^p$ e $f(x) \in L^q$ então pela desigualdade de Hölder temos

$$\|Tf\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{\|\varphi\|_{L^p} \leq 1} \|f\|_{L^q} \|T^*\varphi\|_{L^p} \leq \sup_{\|\varphi\|_{L^p} \leq 1} C\|f\|_{L^q}\|\varphi\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

e assim conclui a demonstração.

□

Definição 3.0.3. *Se diz que* $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \to \mathbb{C}$ *é um núcleo padrão se existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}, \tag{3.0.11}$$

$$|K(x,y) - K(x,z)| \leq C\frac{|y-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \quad se\ |x-y| > 2|y-z|, \tag{3.0.12}$$

$$|K(x,y) - K(w,y)| \leq C\frac{|x-w|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \quad se\ |x-y| > 2|x-w|. \tag{3.0.13}$$

Observação 3.0.5: Núcleos padrões satisfazem as condições Hörmander (3.0.9) e (3.0.10). De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|>2|y-z|} |K(x,y) - K(x,z)| &\leq C \int_{|x-y|>2|y-z|} \frac{|y-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}\, dx \\
&= C|y-z|^\delta |S^{n-1}| \int_{2|y-z|}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{n+\delta}}\, dr = C'|y-z|^\delta \left(-\frac{1}{\delta r^\delta}\right)_{2|y-z|}^{\infty} \\
&= C'|y-z|^\delta \frac{1}{2^\delta \delta |y-z|^\delta} = C < \infty,
\end{aligned}$$

e

$$\int_{|x-y|>2|x-w|} |K(x,y)-K(w,y)| \leq C\int_{|x-y|>2|x-w|} \frac{|x-w|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}\,dx$$
$$= C|x-w|^\delta |S^{n-1}| \int_{2|x-w|}^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{n+\delta}}\,dr = C'|x-w|^\delta \left(-\frac{1}{\delta r^\delta}\right)_{2|x-w|}^\infty$$
$$= C'|x-w|^\delta \frac{1}{2^\delta \delta |x-w|^\delta} = C < \infty.$$

Os seguintes são exemplos de operadores os quais tem este tipo de núcleo.

1) *A integral de Cauchy ao longo de uma curva Lipschitz.* Seja A uma função Lipschitz sobre $\mathbb{R}$ (i.e., $|A(x)-A(y)| \leq |x-y|$ para todo $x,y \in \mathbb{R}$, $L>0$ ou $A' = a \in L^\infty$) e seja $\Gamma = (t, A(t))$ uma curva plana.

   A fórmula de Cauchy é

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt$$

   Portanto, dado $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, a integral de Cauchy

$$C_\Gamma f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)(1+ia(t))}{t+iA(t)-z}\,dt$$

   define uma função analítica no conjunto aberto

$$\Omega_+ = \{z = x+iy \in \mathbb{C} :\ y > A(x)\}$$

   Seu limite em Γ é dado por,

$$\lim_{\epsilon\to 0} C_\Gamma f(x+i(A(x)+\epsilon)) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{i}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(t)(1+ia(t))}{x-t+i(A(x)-A(t))}\,dt.$$

   Isto nos leva a considerar o operador

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y+i(A(x)-A(y))}\,dy,$$

   cujo núcleo,

$$K(x,y) = \frac{1}{x-y+i(A(x)-A(y))} \tag{3.0.14}$$

   é padrão com $\delta = 1$. De fato, como $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, então

$$|K(x,y)| = \frac{1}{|x-y+i(A(x)-A(y))|} \leq \frac{1}{|x-y|},$$

   e como A é uma função Lipschitz então $|A(y)-A(z)| \leq L|y-z|$ e assim temos,

$$|y-z+i(A(y)-A(z))| \leq (1+L)|y-z| = C|y-z|$$

e assim

$$\begin{aligned}|K(x,y)-K(x,z)| &= \left|\frac{1}{x-y+i(A(x)-A(y))}-\frac{1}{x-z+i(A(x)-A(z))}\right| \\ &= \left|\frac{(y-z)+i(A(y)-A(z))}{[x-y+i(A(x)-A(y))][x-z+i(A(x)-A(z))]}\right| \\ &\le C\frac{|y-z|}{|x-y||x-z|}\end{aligned}$$

Como $|x-y|\le|x-z|+|y-z|\le|x-z|+\frac{|x-y|}{2}$ então $\frac{|x-y|}{2}\le|x-z|$, e assim

$$|K(x,y)-K(x,z)|\le C\frac{|y-z|}{|x-y|^2}$$

Do mesmo modo obtemos,

$$|K(x,y)-K(w,y)|\le C\frac{|x-w|}{|x-y|^2}\ \text{ se } |x-y|>2|x-w|.$$

2) *Comutadores Calderón.* Se $\|A'\|_{L^\infty}<1$ então expandimos o núcleo (3.0.14) como uma série geométrica:

$$K(x,y)=\frac{1}{x-y+i(A(x)-A(y))}=\frac{1}{x-y}\cdot\frac{1}{\left(1+i\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)}$$

assim

$$K(x,y)=\frac{1}{x-y}\sum_{k=0}^{\infty}\left(i\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^k$$

Portanto é natural considerar o seguinte operador: dada uma função Lipschitz A em $\mathbb{R}$ e um inteiro $k\ge 0$, defina

$$T_kf(x)=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon}\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^k\frac{f(y)}{x-y}\,dy.$$

Os núcleos associados,

$$K_k(x,y)=\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^k\frac{1}{x-y},$$

são também núcleos padrões com $\delta=1$. De fato, como A é Lipschitz temos,

$$\begin{aligned}|K_k(x,y)| &\le \frac{|A(x)-A(y)|^k}{|x-y|^k}\cdot\frac{1}{|x-y|} \\ &\le C\frac{|x-y|^k}{|x-y|^k}\frac{1}{|x-y|}=\frac{C}{|x-y|}.\end{aligned}$$

Definição 3.0.4. *Um operador T é um operador Calderón-Zygmund se*

(1) *T é limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$:*

(2) *Existe um núcleo padrão K tal que para $f \in L^2$ com suporte compacto,*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,dy, \quad x \notin supp\,(f).$$

O teorema 3.0.2 implica que um operador Calderón-Zygmund é limitado em L^p, $1 < p < \infty$, e é fraco $(1,1)$. Portanto, dado um operador com um núcleo padrão, o problema se reduz a provar que é limitado em L^2.

3.1 Integrais Singulares de Calderón-Zygmund

Os exemplos anteriores sugerem que para qualquer operador Calderón-Zygmund,

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} K(x,y)f(y)\,dy$$

ao menos para $f \in \mathcal{S}$.

De (3.0.11) deduzimos que se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$|T_\epsilon f(x)| \leq \left| \int_{|x-y|>\epsilon} K(x,y)f(y)\,dy \right| \leq C \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n}\,dy$$

Fazendo mudança de variável, $y \to x - y$, temos

$$\begin{aligned} |T_\epsilon f(x)| &\leq C \int_{|y|>\epsilon} \frac{|f(x-y)|}{|y|^n}\,dy = C \int_{\epsilon<|y|<1} \frac{|f(x-y)|}{|y|^n}\,dy + C \int_{|y|>1} \frac{|f(x-y)|}{|y|^n}\,dy \\ &\leq C \int_{\epsilon<|y|<1} \frac{|f(x-y) - f(x)|}{|y|^n}\,dy + C \int_{|y|>1} \frac{|f(x-y)|}{|y|^n}\,dy \end{aligned}$$

Como $|f(x-y) - f(x)| \leq |y| \|\nabla f\|_{L^\infty}$ então

$$\begin{aligned} |T_\epsilon f(x)| &\leq C \int_{\epsilon<|y|<1} \|\nabla f\|_{L^\infty} \frac{1}{|y|^{n-1}}\,dy + C \int_{|y|>1} \frac{|y||f(x-y)|}{|y|^{n+1}}\,dy \\ &= C\|\nabla f\|_{L^\infty}|S^{n-1}| \int_\epsilon^1 \frac{1}{r^{n-1}} \cdot r^{n-1}\,dr + C\||y|f\|_{L^\infty}|S^{n-1}| \int_1^\infty \frac{1}{r^{n+1}} \cdot r^{n-1}\,dr \\ &= C\|\nabla f\|_{L^\infty}|S^{n-1}|(1-\epsilon) + C\||y|f\|_{L^\infty}|S^{n-1}|. \end{aligned}$$

Assim $T_\epsilon f(x)$ esta bem definido. No entanto, o limite quando $\epsilon \to 0$ não existe necessariamente o pode existir e ser diferente de $Tf(x)$. Um exemplo do primeiro é o operador definido no exemplo (2.4.2) cujo núcleo, $K(x,y) = |x-y|^{-n-it}$, é padrão.

Proposição 3.1.1. *O limite*

$$\lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f(x) \tag{3.1.1}$$

existe q.t.p. para $f \in C_c^\infty$ *se, e somente se,*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |x-y| < 1} K(x,y)\,dy$$

existe q.t.p.

Demonstração: Suponha que (3.1.1) exista. Se fixamos $f \in C_c^\infty$, identicamente 1 em $B(x,1)$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f(x) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} K(x,y)f(y)\,dy \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|x-y|<1} K(x,y)f(y)\,dy + \int_{|x-y|>1} K(x,y)f(y)\,dy \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|x-y|<1} K(x,y)\,dy + \int_{|x-y|>1} K(x,y)f(y)\,dy.
\end{aligned}$$

A segunda integral existe porque

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|>1} |K(x,y)f(y)|\,dy &\leq C \int_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n}\,dy \\
&\leq C \int_{|y|>1} \frac{|f(x-y)|}{|y|^n}\,dy \leq C\||y|f\|_{L^\infty} \int_{|y|>1} \frac{1}{|y|^n}\,dy \\
&= C\||y|f\|_{L^\infty} |S^{n-1}| \int_1^\infty \frac{1}{r^{n+1}} r^{n-1}\,dr = C'\||y|f\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Portanto, o limite da primeira integral também existe.

Reciprocamente, suponha que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|x-y|<1} K(x,y)\,dy = L$$

então

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f(x) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} K(x,y)f(y)\,dy \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|x-y|<1} K(x,y)(f(y)-f(0)) + K(x,y)f(0)\,dy + \int_{|x-y|>1} K(x,y)f(y)\,dy \\
&= f(0) \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|x-y|<1} K(x,y)\,dy + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|x-y|<1} K(x,y)(f(y)-f(0))\,dy \\
&\quad + \int_{|x-y|>1} K(x,y)f(y)\,dy \\
&= f(0)L + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|x-y|<1} K(x,y)(f(y)-f(0))\,dy + \int_{|x-y|>1} K(x,y)f(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Pelo teorema da Convergência Dominada temos

$$\lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f(x) = f(0)L + \int_{|x-y|<1} K(x,y)(f(y) - f(0))\,dy + \int_{|x-y|>1} K(x,y)f(y)\,dy.$$

A primeira integral existe porque $|f(y) - f(0)| \leq |y|\|\nabla f\|_{L^\infty}$ e assim,

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|<1} |K(x,y)||f(y)-f(0)|\,dy &\leq C \int_{|x-y|<1} \frac{|y|\|\nabla f\|_{L^\infty}}{|x-y|^n}\,dy \\ &\leq C\|\nabla f\|_{L^\infty}|S^{n-1}| \int_0^1 \frac{1}{r^{n-1}} r^{n-1}\,dr = C'\|\nabla f\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

□

A existência do limite (3.1.1) não implica que este seja igual a $Tf(x)$: por exemplo, considere o operador identidade I. Este é um operador Calderón-Zygmund, como $If(x) = 0$ se $x \notin \operatorname{supp}(f)$ então $K(x,y) = 0$, assim (3.1.1) é igual a 0, portanto

$$If(x) = f(x) \neq 0 = \lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f(x).$$

Além disso, este exemplo mostra que um operador não é caracterizado por seu núcleo, já que o operador zero também tem o núcleo zero.

Proposição 3.1.2. *Se dois operadores Calderón-Zygmund são associados com o mesmo núcleo, então sua diferença é um operador multiplicação pontual.*

É importante assumir que um operador Calderón-Zygmund é limitado em L^2 pois sem isto o uma hipóteses semelhante a esta, a proposição anterior seria falsa. Por exemplo, a derivada é um operador com núcleo 0 ($f'(x) = 0$ se $x \notin \operatorname{supp}(f)$) mas este não é um operador multiplicação pontual.

Uma integral singular Calderón-Zygmund é um operador Calderón-Zygmund que satisfaz

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f(x) \tag{3.1.2}$$

Para determinar quando esta igualdade ocorre para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, examinamos o operador maximal

$$T^*f(x) = \sup_{\epsilon > 0} |T_\epsilon f(x)|.$$

Pelo teorema (1.3.1), se T^* é fraco (p,p) então o conjunto

$$\{f \in L^p : \lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f(x) \text{ existe q.t.p.}\}$$

é fechado em L^p. Por conseguinte se (3.1.2) ocorre para um subconjunto denso, digamos $f \in C_c^\infty$, então ocorre para qualquer $f \in L^p$.

Teorema 3.1.1. *Se T é um operador Calderón-Zygmund então T^* é forte (p,p), $1 < p < \infty$ e fraco $(1,1)$.*

A prova do teorema 3.1.1 depende do seguente resultado.

Lema 3.1.1. *Se T é um operador Calderón-Zygmund então para qualquer ν, $0<\nu<1$, e para $f\in C_c^\infty$,*

$$T^*f(x)\le C_\nu\left(M(|Tf|^\nu)(x)^{1/\nu}+Mf(x)\right). \tag{3.1.3}$$

Para provar isto precisamos o seguinte resultado devido a Kolmogorov.

Lema 3.1.2. *Dado um operador S o qual é fraco $(1,1)$, ν, $0<\nu<1$, e um conjunto E de medida finita, existe uma constante C dependendo somente de ν tal que*

$$\int_E |Sf(x)|^\nu\,dx\le C|E|^{1-\nu}\|f\|_{L^1}^\nu$$

Demonstração: Por (1.3.6) temos

$$\|f\|_{L^p}^p=p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\omega_f(\lambda)\,d\lambda$$

onde $\omega_f(\lambda)=|\{x\in X:\,|f(x)|>\lambda\}|$, assim pela desigualdade fraca $(1,1)$ de S temos,

$$\begin{aligned}
\|Sf\|_{L^\nu}^\nu&=\int_E|Sf(x)|^\nu\,dx=\nu\int_0^\infty\lambda^{\nu-1}|\{x\in E:\,|Sf(x)|>\lambda\}|\,d\lambda\\
&\le\nu\int_0^\infty\lambda^{\nu-1}\min\left(|E|,\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1}\right)\,d\lambda\\
&=\nu\int_0^{C\|f\|_{L^1}/|E|}\lambda^{\nu-1}|E|\,d\lambda+\nu\int_{C\|f\|_{L^1}/|E|}^\infty C\lambda^{\nu-2}\|f\|_{L^1}\,d\lambda\\
&=|E|\;\lambda^\nu\Big|_0^{C\|f\|_{L^1}/|E|}+C\frac{\nu}{\nu-1}\|f\|_{L^1}\;\lambda^{\nu-1}\Big|_{C\|f\|_{L^1}/|E|}^\infty\\
&=|E|\frac{C^\nu\|f\|_{L^1}^\nu}{|E|^\nu}+C\frac{\nu}{1-\nu}\|f\|_{L^1}\frac{C^{\nu-1}\|f\|_{L^1}^{\nu-1}}{|E|\nu-1}\\
&=C^\nu\|f\|_{L^1}^\nu|E|^{1-\nu}+\frac{\nu}{1-\nu}C^\nu\|f\|_{L^1}^\nu|E|^{1-\nu}=C\|f\|_{L^1}^\nu|E|^{1-\nu}.
\end{aligned}$$

Demonstração do Lema 3.1.1: Primeiro provaremos que

$$T_\epsilon f(0)\le C_\nu\left(M(|Tf|^\nu)(0)^{1/\nu}+Mf(0)\right)$$

com C independende de ϵ. Nosso argumento sera translaçâo invariante e assim obteremos (3.1.3).

Fixe $\epsilon>0$; seja $Q=B(0,\epsilon/2)$ e $2Q=B(0,\epsilon)$, definimos $f_1=f\chi_{2Q}$ e $f_2=f-f_1=f\chi_{(2Q)^c}$. Então

$$Tf_2(0)=\int_{\mathbb{R}^n}K(0,y)f(y)\chi_{\{|y|>\epsilon\}}(y)\,dy=\int_{|y>\epsilon|}K(0,y)f(y)\,dy=T_\epsilon f(0).$$

Se $z \in Q$ então, como K é um núcleo padrão,

$$
\begin{aligned}
|Tf_2(z) - Tf_2(0)| &= \left| \int_{|y>\epsilon|} (K(z,y) - K(0,y)) f(y)\, dy \right| \leq \int_{|y>\epsilon|} |K(z,y) - K(0,y)||f(y)|\, dy \\
&\leq C|z|^\delta \int_{|y|>\epsilon} \frac{|f(y)|}{|0-y|^{n+\delta}}\, dy \leq C\frac{\epsilon^\delta}{2^\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k\epsilon<|y|<2^{k+1}\epsilon} \frac{|f(y)|}{|y|^{n+\delta}}\, dy \\
&= C'\epsilon^\delta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k\epsilon)^{n+\delta}} \int_{|y|<2^{k+1}\epsilon} |f(y)|\, dy \leq C' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\delta} \cdot \frac{1}{2^{kn}\epsilon^n} \int_{|y|<2^{k+1}\epsilon} |f(y)|\, dy \\
&= C'\frac{2^n|S^{n-1}|}{n} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\delta} \cdot \frac{n}{|S^{n-1}|2^{(k+1)n}\epsilon^n} \int_{|y|<2^{k+1}\epsilon} |f(y)|\, dy \\
&= C'' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\delta} Mf(0) = C_\delta Mf(0).
\end{aligned}
$$

Se segue desta desigualdade que

$$|Tf_2(0) - Tf_2(z)| \leq C_\delta Mf(0)$$

assim

$$
\begin{aligned}
|T_\epsilon f(0)| &\leq CMf(0) + |Tf_2(z)| \\
&\leq CMf(0) + |Tf(z)| + |Tf_1(z)|. \qquad (3.1.4)
\end{aligned}
$$

Se $T_\epsilon f(0) = 0$ então não tem nada a provar. Caso contrário, fixamos λ tal que $0 < \lambda < |T_\epsilon f(0)|$ e seja

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \{z \in Q : |Tf(z)| > \lambda/3\}, \\
Q_2 &= \{z \in Q : |Tf(z)| > \lambda/3\},
\end{aligned}
$$

e

$$Q_3 = \begin{cases} \emptyset & \text{se } CMf(0) \leq \lambda/3, \\ Q & \text{se } CMf(0) > \lambda/3. \end{cases}$$

Então $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, assim $Q \leq |Q_1| + |Q_2| + |Q_3|$. Portanto,

$$|Q_1| \leq |\{z \in Q : |Tf(z)| > \lambda/2\}| \leq \frac{3}{\lambda} \int_Q |Tf(z)|\, dz \leq \frac{3}{\lambda}|Q|M(Tf)(0).$$

e pela desigualdade fraca $(1,1)$ para T,

$$
\begin{aligned}
|Q_2| &= |\{z \in Q : |Tf(z)| > \lambda/3\}| \leq \frac{3C}{\lambda} \int_Q |f_1(z)|\, dz \\
&= \frac{3C}{\lambda} \int_Q |f(z)|\, dz = \frac{3C}{\lambda} Mf(0).
\end{aligned}
$$

Se $Q_3 = Q$ então $\lambda < 3C\, Mf(0)$; se $Q_3 = \emptyset$ temos

$$|Q| \leq |Q_1| + |Q_2| \leq \frac{3C}{\lambda}|Q|(M(Tf)(0) + Mf(0))$$

então $\lambda \leq 3C(M(Tf)(0) + Mf(0))$.

Portanto, em todo caso temos que

$$\lambda \leq C(M(Tf)(0) + Mf(0)).$$

Isto é verdadeiro para qualquer $\lambda < |T_\epsilon f(0)|$ e assim

$$|T_\epsilon f(0)| \leq C(M|Tf|(0) + Mf(0))$$

portanto (3.1.3) cumpre para $\nu = 1$.

Se $0 < \nu < 1$, então segue de (3.1.4) que

$$|T_\epsilon f(0)|^\nu \leq CMf(0)^\nu + |Tf(z)|^\nu + |Tf_1(z)|^\nu.$$

Se integramos em z sobre Q, dividimos por $|Q|$ e elevamos à potência $1/\nu$, obtemos

$$|T_\epsilon f(0)| \leq C\left(Mf(0) + M(|Tf|^\nu)(0)^{1/\nu} + \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(z)|^\nu\, dz\right)^{1/\nu}\right).$$

Pelo Lema 3.1.2, temos

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(z)|^\nu\, dz\right)^{1/\nu} \leq |Q|^{-1/\nu} \cdot C|Q|^{(1-\nu)(1/\nu)}\|f_1\|_{L^1} = C|Q|^{-1}\|f_1\|_{L^1} \leq CMf(0).$$

Portanto,

$$|T_\epsilon f(0)| \leq C\left(M(|Tf|)^\nu(0)^{1/\nu} + Mf(0)\right)$$

e assim (3.1.3) cumpre para $0 < \nu \leq 1$. $\square$

Demonstração do Teorema 3.1.1: A desigualdade (3.1.3) com $\nu = 1$ implica que T^* é forte (p,p), $1 < p < \infty$, porque T e M são fortes (p,p), $1 < p < \infty$.

Agora mostraremos que T^* é fraco $(1,1)$, para isto usamos (3.1.3) com $\nu < 1$. Desta desigualdade e por M ser fraco $(1,1)$ temos que

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : T^*f(x) > \lambda\}| &\leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda/2C\}| \\ &\quad + |\{x \in \mathbb{R}^n : M(|Tf|^\nu)(x)^{1/\nu} > \lambda/2C\}| \\ &\leq \frac{2C}{\lambda}\|f\|_{L^1} + |\{x \in \mathbb{R}^n : M(|Tf|^\nu)(x)^{1/\nu} > \lambda/2C\}| \end{aligned}$$

Para o segundo termo, temos que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M(|Tf|^\nu)(x)^{1/\nu} > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : M_d(|Tf|^\nu)(x) > 4^{-n}\lambda^\nu\}|,$$

onde M_d é o operador maximal diádico. Seja $E = \{x \in \mathbb{R}^n : M_d(|Tf|^\nu)(x) > 4^{-n}\lambda^\nu\}$, então E tem medida finita se $f \in C_c^\infty$. Assim

$$|E| \leq \frac{1}{4^n\lambda^\nu}\int_E |Tf(y)|^\nu\, dy.$$

Portanto, pelo Lema 3.1.2,

$$|E| \le C4^n \lambda^\nu |E|^{1-\nu} \|f\|_{L^1}^\nu$$

e assim

$$|E|^\nu \le \frac{C}{\lambda^\nu} \|f\|_{L^1}^\nu,$$

por conseguinte

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M(|Tf|^\nu)(x)^{1/\nu} > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1}$$

e assim T^* é fraco $(1,1)$. $\square$

Capítulo 4

O Espaço BMO

4.1 O Espaço Atômico H^1

Vimos anteriormente que a transformada de Hilbert de uma função integrável, em geral, não esta em L^1, e que uma condição necessária para isto é que a função tenha média nula. Aqui definiremos um subespaço de L^1 cuja imagem sob qualquer integral singular está em L^1. Começamos definindo seus elementos básicos, os átomos.

Definição 4.1.1. *Uma função mensurável $a(x)$ de valores complexos é dita um átomo se existir um cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que*

i) $\operatorname{supp}(a) \subset Q$,

ii) $\int_Q a(x)\,dx = 0$,

iii) $\|a\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{|Q|}$.

Proposição 4.1.1. *Seja T um operador satisfazendo as mesmas hipóteses do teorema 3.0.2 cujo núcleo satisfaz a condição (3.0.9). Então existe uma constante C tal que, dado qualquer átomo a,*

$$\|Ta\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C$$

Demonstração: Primeiro temos que $a(x) \in L^2_c(\mathbb{R}^n)$ pois $\operatorname{supp}(a) \subset Q$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |a(x)|^2\,dx = \int_Q |a(x)|^2\,dx \leq \frac{C^2|Q|}{|Q|^2} = \frac{C^2}{|Q|} < \infty$$

e assim Ta esta bem definida.

Seja Q um cubo com centro c e seja Q^* o cubo com o mesmo centro que Q e cujo lado é $2\sqrt{n}$ vezes maior. Temos que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Ta(x)|\,dx = \int_{Q^*} |Ta(x)|\,dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |Ta(x)|\,dx.$$

Pela desigualdade de Hölder e como T é limitado em L^2, temos

$$\begin{aligned}\int_{Q^*} |Ta(x)|\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |Ta(x)|\chi_{Q^*}(x)\,dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi^2_{Q^*}(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Ta(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \\ &= C|Q^*|^{1/2}\left(\int_Q |a(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq C'|Q^*|^{1/2}\frac{1}{|Q|^{1/2}} = C(n)\end{aligned}$$

Agora, seja $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q^*$, e como a tem média zero, temos

$$Ta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)a(y)\,dy = \int_Q (K(x,y) - K(x,c))a(y)\,dy$$

e assim

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |Ta(x)|\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}\int_Q |K(x,y) - K(x,c)||a(y)|\,dy\,dx \\ &= \int_Q |a(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |K(x,y) - K(x,c)|\,dx\right)\,dy.\end{aligned}$$

Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q^*$ e $y \in Q$, então

$$\mathbb{R}^n \setminus Q^* \subset \{x : |x-y| > 2|c-y|\}$$

e pela condição (3.0.9) temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |Ta(x)|\,dx &\leq \int_Q |a(y)|\left(\int_{|x-y|>2|c-y|} |K(x,y) - K(x,c)|\,dx\right)\,dy \\ &\leq C\int_Q |a(y)|\,dy \leq C\|a\|_{L^\infty}|Q| \leq \frac{C'}{|Q|}|Q| = C'.\end{aligned}$$

□

Agora definimos o espaço H^1 atômico, denotado por H^1_{at}, por

$$H^1_{at}(\mathbb{R}^n) = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\, a_j : a_j \text{ são átomos, } \lambda_i \in \mathbb{C};\ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty\right\}.$$

Proposição 4.1.2. *$H^1_{at}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: De fato, se $f \in H^1_{at}(\mathbb{R}^n)$, então $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\, a_j$, com $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty$ e a_j átomo. Assim

$$|f(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|\,|a_j(x)|$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \int_{\mathbb{R}^n} |a_j(x)|\, dx \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \|a\|_{L^\infty} \cdot |Q_j| \leq C \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty.$$

□

Agora definimos uma norma em H^1_{at} por

$$\|f\|_{H^1_{at}(\mathbb{R}^n)} = \inf \left\{ \sum_j |\lambda_j| : f = \sum_j \lambda_j\, a_j \right\}.$$

Corolário 4.1.1. *Seja T um operador como na Proposição 4.1.1, e seja $f \in H^1_{at}$. Então*

$$\|Tf\|_{L^1} \leq C \|f\|_{H^1_{at}}$$

Demonstração: Se $f \in H^1_{at}(\mathbb{R}^n)$ então $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\, a_j$ portanto

$$Tf(x) = T\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\, a_j(x) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\, T a_j(x)$$

assim, pela Proposição 4.1.1

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|\, dx \leq \sum_j |\lambda_j| \int_{\mathbb{R}^n} |Ta_j(x)|\, dx = \sum_j |\lambda_j| \|Ta_j\|_{L^1} \leq C \sum_j |\lambda_j|$$

portanto

$$\|Tf\|_{L^1} \leq C \inf \left\{ \sum_j |\lambda_j| : f = \sum_j \lambda_j\, a_j \right\} = C \|f\|_{H^1_{at}}.$$

□

O espaço H^1_{at} é o maior subespaço de $L^1(\mathbb{R}^n)$ para o qual o Corolário 4.1.1 ocorre no seguinte sentido: sejam $R_1, \ldots, R_n$ as transformadas de Riesz em $\mathbb{R}^n$, e definimos o espaço

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq j \leq n \}$$

com a norma

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^1} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_{L^1}.$$

Teorema 4.1.1. *$H^1(\mathbb{R}^n) = H^1_{at}(\mathbb{R}^n)$ e seus normas são equivalentes.*

Demonstração:[S2]. □

4.2 O Espaço BMO

Dada uma função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ dizemos que f pertence ao espaço BMO das funções de oscilação média limitada se existir uma constante $C > 0$ tal que dado qualquer cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ existe uma constante $a \in \mathbb{C}$ (que pode depender de Q) tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - a|\, dx \leq C.$$

Assim,

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \Big\{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \exists C > 0 \text{ tal que para todo cubo } Q, \\ \exists a \in \mathbb{C} \text{ tal que } \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - a|\, dx \leq C \Big\}.$$

Definimos em BMO a seguinte semi-norma

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - a|.$$

Lema 4.2.1. *Se $\|f\|_{BMO} = 0$ então $f \equiv C$.*

Demonstração: De fato, supondo que $\|f\|_{BMO} = 0$, considere $Q_1 = Q(0,1)$ o cubo com centro 0 e lado 1,

$$\inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1} |f - a| \leq \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - a| = 0$$

assim

$$\inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1} |f - a| = 0$$

então para todo $j = 1, 2, 3, \ldots$, existe $a_j \in \mathbb{C}$ tal que

$$0 < \frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1} |f(x) - a_j|\, dx < \frac{1}{j} \tag{4.2.1}$$

A sequência $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ é limitada, de fato,

$$|a_j| = \frac{1}{Q_1}\int_{Q_1} |a_j| \leq \frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1} |f(x) - a_j| + \frac{1}{Q_1}\int_{Q_1} |f| \leq \frac{1}{j} + C < \infty.$$

Assim $\{a_j\}$ possui uma subsequência convergente a $C_1 \in \mathbb{C}$. Denotando esta subsequência por $\{C_j\}$. De 4.2.1 temos,

$$\int_{Q_1} |f(x) - C_1|\, dx = 0$$

então $f \equiv C_1$ em Q_1. Analogamente mostra-se que $f \equiv C_2$ em $Q_2 = Q(0,2)$. Como $Q_1 \subset Q_2$ então $f \equiv C_1$ em $Q_1 \cap Q_2$ portanto $C_2 = C_1$. $\square$

Contudo, podemos definir o espaço BMO como o quociente do espaço acima pelo espaço de funções constantes. Desta forma, duas funções que diferem por uma constante coincidem como funções em BMO. Neste espaço $\|\cdot\|_{BMO}$ é uma norma e o espaço quocientado é então um espaço de Banach.

Dada uma função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e um cubo Q, f_Q denotaremos a média de f em Q pela seguinte expressão $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx$. Assim, a seguinte proposição ocorre.

Proposição 4.2.1.

$$\|f\|_{BMO} \leq \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|\,dx \leq 2\|f\|_{BMO} \tag{4.2.2}$$

e se $f \in BMO$ então $|f| \in BMO$.

Demonstração: A primeira desigualdade de (4.2.2) é imediata visto que

$$\sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - a|\,dx \leq \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|\,dx$$

então

$$\|f\|_{BMO} \leq \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|\,dx.$$

Para a prova da segunda desigualdade de (4.2.2), temos que, fixado um cubo Q e dada a função

$$F(a) = \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - a|\,dx$$

então $F \in C^0(\mathbb{C})$, além disso $F(a) > 0$ para todo $a \in \mathbb{C}$, logo existe $I_Q \in \mathbb{R}$ tal que

$$\inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - a|\,dx = I_Q.$$

Seja a_j uma sequência de números complexos tais que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - a_j|\,dx \leq I_Q + \frac{1}{j}.$$

Como

$$|f_Q - a_j| = \left|\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx - a_j\right| \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - a_j|\,dx$$

temos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|\,dx &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - a_j|\,dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q |f_Q - a_j|\,dx \\
&\leq \frac{2}{|Q|}\int_Q |f(x) - a_j|\,dx \leq 2\inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - a|\,dx + \frac{2}{j}
\end{aligned}$$

então fazendo $j \to \infty$ segue que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|\,dx \leq 2\inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - a|\,dx.$$

Tomando o supremo em Q temos finalmente o resultado

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx \leq 2\|f\|_{BMO}.$$

A segunda parte da proposição segue de (4.2.2) com $a = |f_Q|$, como

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q ||f(x)| - |f_Q||\, dx \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx$$

então

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q ||f(x)| - |f_Q||\, dx \leq 2\|f\|_{BMO}$$

portanto $|f| \in BMO$.

$\square$

A desigualdade (4.2.2) define uma norma equivalente a $\|\cdot\|_{BMO}$, assim $f \in BMO$ se

$$\sup_Q \frac{1}{Q} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx < \infty.$$

Observação 4.2.6: $L^\infty \subset BMO(\mathbb{R}^n)$. De fato, se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $sup\, ess_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)| = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty$ e assim existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ q.t.p. Portanto, como

$$|f_Q| = \left|\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)\, dx\right| \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^\infty}$$

temos,

$$\frac{1}{Q} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx \leq \|f\|_{L^\infty} + |f_Q| \leq 2\|f\|_{L^\infty}$$

assim $f \in BMO$.

Mas existe também funções BMO não limitadas. O exemplo típico em $\mathbb{R}$ é

$$f(x) = \begin{cases} \ln \frac{1}{|x|} & \text{se } 0 \leq |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

assim $f \in BMO \setminus L^\infty(\mathbb{R})$. (Será provado no exemplo 4.2.3)

Agora estudaremos a relação que existe entre L^1 e BMO. Para isto vemos que

$$h(x) = \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx &= \int_{|x|<1} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx \\ &\leq \int_{|x|<1} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{n+1}}\, dx \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Assim temos,

$$I_1 = \int_{|x|<1} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx = |S^{n-1}| \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^{n+1}}\, dx < \infty.$$

Agora estimamos I_2,

$$I_2 = \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{n+1}}\, dx = |S^{n-1}| \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{n+1}}\, dr < \infty.$$

Assim $h(x) = \dfrac{1}{(1+|x|)^{n+1}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então pela desigualdade de Hölder se tem que

$$f(x)\, h(x) = \frac{f(x)}{(1+|x|)^{n+1}} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Proposição 4.2.2. *Se $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ então $\dfrac{f(x)}{(1+|x|)^{n+1}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Primeiro mostraremos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f_{Q_1}|}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx \leq C\|f\|_{BMO}$$

com $Q_1 = Q(0,1)$. De fato, seja $Q_{2^k} = Q(0, 2^k)$, então

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= \cup_{k=0}(Q_{2^{k+1}} \setminus Q_{2^k}) \\ &= Q(0,1) \cup [Q(0,2) \setminus Q(0,1)] \cup [Q(0,2^2) \setminus Q(0,2)] \cup \ldots \end{aligned}$$

Como $\|f\|_{BMO} = \sup\limits_Q \dfrac{1}{|Q|} \displaystyle\int_Q |f - f_Q|$ então

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q| \leq \|f\|_{BMO}\ , \quad \text{para todo } Q$$

assim,

$$\int_{Q_{2^k}} |f - f_{Q_{2^k}}| \leq c(n) 2^{nk} \|f\|_{BMO}$$

e analogamente

$$\int_{Q_{2^{k+1}}} |f - f_{Q_{2^{k+1}}}| \leq c(n) 2^{n(k+1)} \|f\|_{BMO}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |f_{Q_{2^{k+1}}} - f_{Q_{2^k}}| &= \frac{1}{|Q_{2^k}|} \int_{Q_{2^k}} |f_{Q_{2^{k+1}}} - f_{Q_{2^k}}| \\ &\leq \frac{1}{|Q_{2^k}|} \int_{Q_{2^k}} |f - f_{Q_{2^{k+1}}}| + \frac{1}{|Q_{2^k}|} \int_{Q_{2^k}} |f - f_{Q_{2^k}}| \\ &\leq \frac{1}{|Q_{2^k}|} \int_{Q_{2^{k+1}}} |f - f_{Q_{2^{k+1}}}| + \frac{1}{|Q_{2^k}|} \int_{Q_{2^k}} |f - f_{Q_{2^k}}| \\ &\leq \frac{c(n) 2^{n(k+1)} \|f\|_{BMO}}{c(n) 2^{nk}} + \|f\|_{BMO} = c(n)(1 + 2^n)\|f\|_{BMO} \end{aligned}$$

assim

$$|f_{Q_{2^{k+1}}} - f_{Q_{2^k}}| \leq C\|f\|_{BMO}$$

e

$$|f_{Q_{2^{k+1}}} - f_{Q_1}| \leq |f_{Q_{2^{k+1}}} - f_{Q_{2^k}}| + \ldots + |f_{Q_2} - f_{Q_1}| \leq C(k+1)\|f\|_{BMO}. \tag{4.2.3}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f_{Q_1}|}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx &= \int_{Q_1} \frac{|f(x) - f_{Q_1}|}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{Q_{2^{k+1}} \setminus Q_{2^k}} \frac{|f(x) - f_{Q_1}|}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx \\
&\leq \int_{Q_1} |f(x) - f_{Q_1}|\, dx + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{Q_{2^{k+1}} \setminus Q_{2^k}} \frac{|f(x) - f_{Q_{2^{k+1}}}|}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{Q_{2^{k+1}} \setminus Q_{2^k}} \frac{|f_{Q_{2^{k+1}}} - f_{Q_1}|}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx \\
&\leq C\|f\|_{BMO} + \sum_{k=0}^{\infty} I(k) + \sum_{k=0}^{\infty} J(k).
\end{aligned}$$

Para estimar $I(k)$ temos que, se $x \in Q_{2^{k+1}} \setminus Q_{2^k}$, então $2^k \leq |x| \leq 2^{k+1}$, assim

$$\frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+2^k)^{n+1}} \leq \frac{1}{(2^k)^{n+1}}$$

portanto

$$\begin{aligned}
I(k) &\leq \frac{1}{(2^k)^{n+1}} \int_{Q_{2^{k+1}} \setminus Q_{2^k}} |f(x) - f_{Q_{2^{k+1}}}|\, dx \leq \frac{1}{(2^k)^{n+1}} \int_{Q_{2^{k+1}}} |f(x) - f_{Q_{2^{k+1}}}|\, dx \\
&\leq \frac{c 2^{n(k+1)}\|f\|_{BMO}}{2^{k(n+1)}} = \frac{c(n)\|f\|_{BMO}}{2^k}.
\end{aligned}$$

Agora estimamos $J(k)$, por (4.2.3) temos que

$$\begin{aligned}
J(k) &\leq \int_{Q_{2^{k+1}} \setminus Q_{2^k}} \frac{C(k+1)\|f\|_{BMO}}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx \leq \frac{C(k+1)\|f\|_{BMO}}{(1+2^k)^{n+1}} \cdot |Q_{2^{k+1}}| \\
&= \frac{C(k+1)\|f\|_{BMO}}{(1+2^k)^{n+1}} \cdot 2^{n(k+1)} \leq \frac{c(n)\|f\|_{BMO}}{2^k}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f_{Q_1}|}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx \leq (C\|f\|_{BMO} + C\|f\|_{BMO}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq C\|f\|_{BMO}.$$

Assim provamos a afirmação.

Então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f_{Q_1}|}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_{Q_1}|}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx \\
&\leq C\|f\|_{BMO} + |f_{Q_1}| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx < \infty
\end{aligned}$$

portanto $\dfrac{f(x)}{(1+|x|)^{n+1}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

□

4.2.1 Propriedades da Função Sharp

Definimos a função maximal sharp por

$$f^\sharp(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|\, dy$$

onde o supremo é tomado sobre todos os cubos Q contendo x.

A função maximal sharp tem as seguintes propriedades:

1) $(f+g)^\sharp \leq f^\sharp + g^\sharp$

De fato,

$$(f+g)^\sharp(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |(f+g) - (f+g)_Q|\, dy$$

mas,

$$(f+g)_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f+g = \frac{1}{|Q|} \int_Q f + \frac{1}{|Q|} \int_Q g = f_Q + g_Q$$

então

$$(f+g)^\sharp(x) \leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q| + |g - g_Q|\, dy = f^\sharp(x) + g^\sharp(x)$$

2) $f^\sharp(x) \leq C\, Mf(x)$, ($M$ é a função maximal Hardy Littlewood).

De fato, seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f^\sharp(x) < \infty$; $\sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q|\, dy$ existe se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $Q(x_0, r) \ni x$ tal que

$$f^\sharp(x) - \epsilon \leq \frac{1}{|Q(x_0,r)|} \int_{Q(x_0,r)} |f(y) - f_Q|\, dy$$

Se $x \in Q(x_0, r)$ então $Q(x_0,r) \subset Q(x, 2r)$, e se $x \in Q$ então $|f_Q| \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f|\, dx \leq Mf(x)$, assim temos

$$\begin{aligned} f^\sharp(x) - \epsilon &\leq \frac{|Q(x,2r)|}{|Q(x_0,r)|} \frac{1}{|Q(x,2r)|} \int_{Q(x,2r)} (|f(y)| + |f_Q|)\, dy \\ &= \frac{c2^n r^n}{cr^n} \left[\frac{1}{|Q(x,2r)|} \int_{Q(x,2r)} |f(y)|\, dy + |f_Q| \right] \\ &\leq 2^n (Mf(x) + |f_Q|) \leq 2^n (Mf(x) + Mf(x) = C\, Mf(x). \end{aligned}$$

Proposição 4.2.3. *$f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $f^\sharp \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Se $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ então

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx < \infty$$

logo,
$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f_Q|\,dy \leq \|f\|_{BMO}$$
para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. Assim,
$$f^\sharp(x) = \sup_{Q \ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f_Q|\,dy \leq \sup_{\tilde{Q}}\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}} |f(y)-f_{\tilde{Q}}|\,dy = \|f\|_{BMO}$$
para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto
$$\|f^\sharp\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f^\sharp(x)| \leq \|f\|_{BMO}$$
e assim $f^\sharp \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Reciprocamente, se $f^\sharp \in L^\infty$ então a medida de $E = \{x \in \mathbb{R}^n : f^\sharp(x) = \infty\}$ é zero. Seja $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ então $f^\sharp(x) < \infty$, e assim para todo $Q \ni x$, $\displaystyle\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f_Q|\,dy < \infty$. O conjunto $\mathbb{R}^n \setminus E$ é denso em $\mathbb{R}^n$ e seja $\tilde{Q}$ um cubo qualquer de $\mathbb{R}^n$, então $\tilde{Q} \cap (\mathbb{R}^n \setminus E) \neq \emptyset$, logo existe $x \in \tilde{Q}$ tal que
$$\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}} |f(y)-f_{\tilde{Q}}|\,dy < \infty,$$
como $\tilde{Q}$ é arbitrário segue que
$$\|f\|_{BMO} = \sup_{\tilde{Q}}\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}} |f(y)-f_{\tilde{Q}}|\,dy < \infty,$$
então $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

□

Assim temos,
$$BMO(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^1_{loc} : f^\sharp \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\right\}$$
O seguinte resultado estabelece a conexão entre BMO e integrais singulares.

Teorema 4.2.1. *Seja T um operador como nas hipóteses do teorema 3.0.2 cujo núcleo satisfaz a condição (3.0.10). Então se f é uma função limitada de suporte compacto então $Tf \in BMO$, isto é, $T : L^\infty_c(\mathbb{R}^n) \longrightarrow BMO(\mathbb{R}^n)$ é limitado e*
$$\|Tf\|_{BMO} \leq C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

Demonstração: Seja f uma função limitada com suporte compacto. Fixo um cubo Q em $\mathbb{R}^n$ com centro c e seja Q^* um cubo centrado em c cujo lado é $2\sqrt{n}$ maior que de Q. Seja $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ então decompomos f como
$$f = f\chi_{Q^*} + f\,(1-\chi_{Q^*}) = f_1 + f_2.$$

Seja $a = Tf_2(c)$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x) - a|\, dx &= \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x) + Tf_2(x) - a|\, dx \\
&\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|\, dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_2(x) - Tf_2(c)|\, dx \\
&= I + J
\end{aligned}$$

Como T é limitado em L^2, temos que

$$\begin{aligned}
I = \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|\, dx &\leq \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q |Tf_1(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \cdot |Q|^{1/2} = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\frac{C}{|Q|}\int_Q |f_1(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_{Q^*} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} = C'\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Se $y \notin Q^*$ e $x \in Q$ temos que $|c - x| < \frac{\sqrt{n}}{2}\ell$ e $|c - y| > \sqrt{n}\ell$, assim $|c - y| > 2|c - x|$, com isto temos

$$\mathbb{R}^n \setminus Q^* \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |c - y| > 2|c - x|\}$$

graças a (3.0.10) a seguinte estimativa ocorre

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_2(x) - Tf_2(c)|\, dx = \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f_2(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} K(c,y)f_2(y)\, dy\right| dx \\
&\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} |K(x,y) - K(c,y)||f(y)|\, dy\, dx \\
&\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{|c-y|>2|c-x|} |K(c,y) - K(x,y)||f(y)|\, dy\, dx \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{|c-y|>2|c-x|} |K(c,y) - K(x,y)|\, dy\, dx = C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Portanto o argumento acima mostra que existe uma constante $C > 0$ tal que dado qualquer cubo Q existe uma constante a tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x) - a|\, dx \leq C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

logo

$$\|Tf\|_{BMO} = \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x) - a|\, dx \leq C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

O Teorema 4.2.1 mostra que um candidato ao espaço no qual as imagens de funções limitadas sobre integrais singulares estão contidas, consiste no espaço BMO, uma vez que, T aplica uma função com suporte compacto numa função em BMO. Entretanto, o conjunto de funções limitadas com suporte compacto não é denso em L^∞, o que impossibilita o argumento de densidade para extender T a um operador definido em L^∞. Para contornarmos esta dificuldade procederemos da seguinte forma.

Seja $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e tome $Q = Q(0,\ell)$ um cubo centrado na origem e defina $Q^* = Q(0, 2\sqrt{n}\ell)$. Decompomos f da seguinte forma

$$f = f\chi_{Q^*} + f\,(1 - \chi_{Q^*}) = f_1 + f_2$$

Como f_1 é limitado e tem suporte compacto então $f_1 \in L^2_c(\mathbb{R}^n)$, como $T : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é limitado segue que Tf_1 está bem definido como uma função em $L^2(\mathbb{R}^n)$, então existe $|E| = 0$ tal que $Tf_1(x)$ esta definida q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Para $x \in Q$ defina

$$T_Q f(x) = Tf_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n} [K(x,y) - K(0,y)] f_2(y)\, dy. \tag{4.2.4}$$

Como supp $(f_2) \subset \mathbb{R}^n \setminus Q^*$ decorre que $\mathbb{R}^n \setminus Q^* \subseteq \{y : |y| > 2|x|\}$. Assim, usando o fato de que K satisfaz (3.0.10) então a seguinte estimativa ocorre

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} [K(x,y) - K(0,y)] f_2(y)\, dy \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} |K(x,y) - K(0,y)||f(y)|\, dy \\
&\leq \int_{|y|>2|x|} |K(0,y) - K(x,y)||f(y)|\, dy \leq C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

e portanto a integral converge absolutamente.

Provaremos em seguida que, desta forma, o operador T está bem definido no espaço L^∞. De fato, seja $\bar{Q}$ um cubo centrado na origem tal que $Q \subset \bar{Q}$ e repita o procedimento anterior, isto é, considere a decomposição $f = f\chi_{\bar{Q}^*} + f\left(1 - \chi_{\bar{Q}^*}\right) = \bar{f}_1 + \bar{f}_2$ e defina

$$Tf(x) = T\bar{f}_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n} [K(x,y) - K(0,y)] \bar{f}_2(y)\, dy. \tag{4.2.5}$$

Assim temos duas definições para $Tf(x)$ no cubo Q que denotaremos por T_Q e $T_{\bar{Q}}$ respectivamente.

$$\begin{aligned}
T_Q f(x) &= Tf_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n} [K(x,y) - K(0,y)] f_2(y)\, dy \\
T_{\bar{Q}} f(x) &= T\bar{f}_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n} [K(x,y) - K(0,y)] \bar{f}_2(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Então a diferença entre as duas definições no cubo Q é dada por

$$\begin{aligned}
T_Q f(x) - T_{\bar{Q}} f(x) &= T(f_1 - \bar{f}_1)(x) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} [K(x,y) - K(0,y)] f(y)\, dy \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{Q}^*} [K(x,y) - K(0,y)] f(y)\, dy \\
&= I + J.
\end{aligned}$$

Estimando I temos,

$$\begin{aligned} I = T(f_1 - \bar{f}_1)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{Q}^*} K(x,y)f(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} K(x,y)f(y)\,dy \\ &= -\int_{\bar{Q}^* \setminus Q^*} K(x,y)f(y)\,dy. \end{aligned}$$

Agora estimamos J,

$$\begin{aligned} J &= \int_{\bar{Q}^* \setminus Q^*} [K(x,y) - K(0,y)]f(y)\,dy \\ &= \int_{\bar{Q}^* \setminus Q^*} K(x,y)f(y)\,dy - \int_{\bar{Q}^* \setminus Q^*} K(0,y)f(y)\,dy \end{aligned}$$

então $I + J$ fornece

$$T_Q f(x) - T_{\bar{Q}} f(x) = -\int_{\bar{Q}^* \setminus Q^*} K(0,y)f(y)\,dy$$

e este é independente de x em Q.

Quando $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ então a definição (4.2.4) coincide com a definição original uma vez que, dado Q um cubo centrado na origem e com lado suficientemente grande para que $\operatorname{supp}(f) \subset Q$. Neste caso, $f = f_1$ e portanto segue de (4.2.4) que $T_Q f = Tf$.

Observamos que os cubos tomados na definição (4.2.4) não precisam necessariamente estar centrados na origem e podem ser tomados arbitrariamente. Assim, definimos T no espaço L^∞ o operador que dado $f \in L^\infty$ e um cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ qualquer então

$$Tf(x) = T_Q f(x), \quad \text{para todo} \;\; x \in Q. \tag{4.2.6}$$

Resta então provar que dado $f \in L^\infty$ então $Tf \in BMO$ de acordo com a definição (4.2.6). De fato, dado qualquer cubo Q tome $a = 0$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x) - a|\,dx &= \frac{1}{|Q|}\int_Q |T_Q f(x)|\,dx \\ &\le \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|\,dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} |K(x,y) - K(0,y)||f_2(y)|\,dy\,dx \\ &\le C\|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Logo, $\|Tf\|_{BMO} = \sup_Q \inf_{a \in \mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x) - a|\,dx \le C\|f\|_{L^\infty}$.

Exemplo 4.2.3: Seja $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$; encontraremos a imagem de f sobre a transformada de Hilbert, cujo núcleo é $K(x,y) = [\pi(x-y)]^{-1}$.

Seja $I = [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ e Seja $I^* = [-a, a]$, e decompomos f como

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)\chi_{I^*}(x) + \operatorname{sgn}(1 - \chi_{I^*}(x)) = f_1(x) + f_2(x).$$

Seja $x \in I$, definimos

$$Hf(x) = Hf_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n} [K(x,y) - K(0,y)]f_2(y)\,dy$$

mas $K(x,y) - K(0,y) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{y}\right)$ então

$$\begin{aligned}
\pi\, Hf(x) &= vp \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_1(y)}{x-y}\, dy + \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y}\right) f_2(y)\, dy \\
&= vp \int_{|y|<a} \frac{sgn(y)}{x-y}\, dy + \int_{|y|>a} \left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y}\right) sgn(y)\, dy \\
&= vp \int_{|y|<a} \frac{sgn(y)}{x-y}\, dy + \lim_{N\to\infty} \int_{a<|y|<N} \left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y}\right) sgn(y)\, dy \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

Primeiro estimamos I,

$$\begin{aligned}
I &= vp \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{sgn}(y)}{x-y}\, dy = vp \int_{-a}^{0} \frac{dy}{y-x} + \int_0^a \frac{dy}{x-y} = vp\, [\ln|y-x|]_{-a}^{0} - [\ln|x-y|]_0^a \\
&= \ln|x| - \ln|-a-x| - \ln|x-a| + \ln|x| = 2\ln|x| - \ln|x^2 - a^2|.
\end{aligned}$$

Agora estimando II temos,

$$\begin{aligned}
II &= \lim_{N\to\infty} \left(\int_{-N}^{-a} \left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{y}\right) dy + \int_a^N \left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y}\right) dy \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left([\ln|y-x| - \ln|y|]_{-N}^{-a} + [\ln|y| - \ln|x-y|]_a^N \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\ln\left|\frac{N^2}{x^2 - N^2}\right| + \ln|x^2 - a^2| - 2\ln|a| \right] = \ln|x^2 - a^2| - 2\ln|a|.
\end{aligned}$$

Então,

$$\pi\, Hf(x) = 2\ln|x| - 2\ln|a|,$$

portanto, ignorando a constante temos

$$H(\mathrm{sgn}(x)) = \frac{2}{\pi} \ln|x|$$

Assim, $\ln|x|$ é uma função BMO.

4.2.2 A Desigualdade de John-Nirenberg

Agora examinaremos a razão de crecimento de funções em BMO. Sabemos que a função

$$f(x) = \begin{cases} \ln \frac{1}{|x|} & , \text{se } |x| \le 1 \\ 0 & , \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

está em $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Seja $I = [-a, a]$, então

$$\begin{aligned}
f_I &= \frac{1}{|I|} \int_I f(x)\, dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \ln \frac{1}{|x|}\, dx = \frac{1}{2a} \cdot 2 \int_0^a \ln \frac{1}{\rho}\, d\rho \\
&= -\frac{1}{a} \int_0^a \ln\, \rho\, d\rho = -\frac{1}{a} [\rho(\ln\, \rho - 1)]_0^a = 1 - \ln a.
\end{aligned}$$

Dado $\lambda > 1$, temos

$$|\{x \in I : |f(x) - f_I| > \lambda\}| = |\{x \in [-a, a] : \left|\ln\left(\frac{1}{|x|}\right) - 1 + \ln|a|\right| > \lambda\}|$$

como

$$\ln\left(\frac{1}{|x|}\right) > \lambda + 1 - \ln a$$

e $|x| < e^{-\lambda-1+\ln a} = ae^{-\lambda-1}$, então

$$|\{x \in I : |f(x) - f_I| > \lambda\}| = |\{x \in I : |x| < ae^{-\lambda-1}\}| = 2ae^{-\lambda-1} = \frac{1}{e}e^{-\lambda}|I|.$$

Portanto,

$$|\{x \in I : |f(x) - f_I| > \lambda\}| \leq C_1 e^{-C_2\lambda}|I|,$$

com $C_1 = e^{-1}$ e $C_2 = 1$.

Teorema 4.2.2 (Desigualdade de John-Nirenberg)**.** *Seja $f \in BMO$. Então existem constantes C_1 e C_2, dependendo só na dimensão, tal que dado qualquer cubo Q em $\mathbb{R}^n$ e qualquer $\lambda > 0$,*

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}| \leq C_1 e^{-C_2\lambda/\|f\|_{BMO}}|Q|. \tag{4.2.7}$$

Demonstração: Como (4.2.7) é homogêneo, podemos assumir sem perda de geralidade que $\|f\|_{BMO} = 1$. Então

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|\, dx = 1$$

e assim

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|\, dx \leq 1 \tag{4.2.8}$$

Agora formamos a decomposição de Calderón-Zygmund de $|f - f_Q|$ em Q em altura 2. Esta função é integrável por (4.2.8), tomamos Q e bisectamos seus lados e obtemos 2^n cubos iguais e repetimos isto para todos os cubos formados. Isto nos da uma familia de cubos $\{Q_{1,j}\}$ tal que

i) $|f - f_Q| \leq 2$ q.t.p. $x \notin \cup_j Q_{1,j}$

ii) $|\cup_j Q_{1,j}| = \sum_j |Q_{1,j}| \leq \frac{1}{2}\int_Q |f(x) - f_Q|\, dx \leq \frac{1}{2}|Q|$

iii) $2 < \frac{1}{|Q_{1,j}|}\int_{Q_{1,j}} |f - f_Q|\, dx \leq 2^{n+1}$

e temos

$$|f_{Q_{1,j}} - f_Q| = \left|\frac{1}{|Q_{1,j}|}\int_{Q_{1,j}} (f(x) - f_Q)\, dx\right| \leq \frac{1}{|Q_{1,j}|}\int_{Q_{1,j}} |f(x) - f_Q|\, dx \leq 2^{n+1}.$$

Agora, em cada cubo $Q_{1,j}$ formamos a decomposição de $|f - f_{Q_{1,j}}|$ em altura 2. De novo por suposição temos

$$\frac{1}{|Q_{1,j}|} \int_{Q_{1,j}} |f(x) - f_{Q_{1,j}}|\, dx \leq 1.$$

Então obtemos uma família de cubos $\{Q_{1,j,k}\}$ o qual satisfaz:

i) $|f(x) - f_{Q_{1,j}}| \leq 2$ q.t.p. $x \in Q_{1,j} \setminus \cup_k Q_{1,j,k}$

ii) $\displaystyle\sum_k |Q_{1,j,k}| \leq \frac{1}{2} \int_{Q_{1,j}} |f(x) - f_{Q_{1,j}}|\, dx \leq \frac{1}{2}|Q_{1,j}|$

iii) $\displaystyle 2 < \frac{1}{|Q_{1,j,k}|} \int_{Q_{1,j,k}} |f(x) - f_{Q_{1,j}}|\, dx \leq 2^{n+1}$

e temos $|f_{Q_{1,j,k}} - f_{Q_{1,j}}| \leq 2^{n+1}$.

Seja $Q_{2,j} = \cup_k Q_{1,j,k}$ então

$$|\cup_j Q_{2,j}| = \sum_j |Q_{2,j}| \leq \sum_j \frac{1}{2}|Q_{1,j}| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|Q| = \frac{1}{4}|Q|$$

e se $x \notin \cup_j Q_{2,j}$ temos

$$|f(x) - f_Q| \leq |f(x) - f_{Q_{1,j}}| + |f_{Q_{1,j}} - f_Q| \leq 2 + 2^{n+1} \leq 2 \cdot 2^{n+1}.$$

Repetimos este processo indefinidamente. Então para cada N obtemos uma família de cubos disjuntos $\{Q_{N,j}\}$ tal que

$$|f(x) - f_Q| \leq N \cdot 2^{n+1} \quad \text{se } x \notin \cup_j Q_{N,j}$$

e

$$\sum_j |Q_{N,j}| \leq \frac{1}{2^N}|Q|.$$

Agora fixamos $\lambda \geq 2^{n+1}$ e seja N tal que $N 2^{n+1} \leq \lambda \leq (N+1)2^{n+1}$. Então, observamos que

$$\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\} \subset \cup_j Q_{N,j}$$

De fato, se $|f(x) - f_Q| > \lambda$, então $|f(x) - f_Q| > N 2^{n+1}$ e assim $x \in \cup_j Q_{N,j}$. Portanto

$$\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\} \leq \sum_j |Q_{N,j}| \leq \frac{1}{2^N}|Q| = e^{-N \log 2}|Q|.$$

Se fazemos $C_2 = \log 2/2^{n+2}$ y como $\lambda < (N+1)2^{n+1} < 2N\, 2^{n+1}$ então

$$e^{-N \log 2}|Q| = e^{-N 2^{n+2} C_2}|Q| = e^{-2N \cdot 2^{n+1} C_2}|Q| \leq e^{-C_2 \lambda}|Q|.$$

Assim, $\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\} \leq e^{-C_2\lambda}|Q|$

Agora, se $\lambda < 2^{n+1}$ e se $C_2 = \log 2/2^{n+2}$ então temos

$$C_2\lambda < \frac{\log 2}{2^{n+2}} 2^{n+1} = \log \sqrt{2}.$$

Portanto

$$\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\} \leq |Q| \leq e^{\log \sqrt{2} - C_2\lambda}|Q| = \sqrt{2}e^{-C_2\lambda}|Q|$$

assim podemos tomar $C_1 = \sqrt{2}$.

$\square$

Corolário 4.2.1. *Para todo p, $1 < p < \infty$*

$$\|f\|_{*,p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right)^{1/p}$$

é uma norma em BMO equivalente a $\| \cdot \|_{BMO}$.

Demonstração: Temos que mostrar

$$C\|f\|_{BMO} \leq \|f\|_{*,p} \leq C_p\|f\|_{BMO}.$$

A primeira desigualdade é imediata pela desigualdade de Hölder porque

$$\begin{aligned} \int_Q |f(x) - f_Q| \, dx &\leq \left(\int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int_Q dx \right)^{1/q} \\ &= |Q|^{1/q} \left(\int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right)^{1/p} = |Q| \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

então $\|f\|_{BMO} \leq \|f\|_{*,p}$.

Para mostrar a segunda desigualdade, temos pela equação (1.3.6) aplicado a $f - f_Q$ e pelo Teorema 4.2.2

$$\begin{aligned} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} |\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}| \, d\lambda \\ &\leq C_1 |Q| \int_0^\infty p\lambda^{p-1} e^{-C_2\lambda/\|f\|_{BMO}} \, d\lambda. \end{aligned}$$

Fazemos a mudança de variáveis com $s = C_2\lambda/\|f\|_{BMO}$, então $\lambda = \dfrac{s\|f\|_{BMO}}{C_2}$ e $d\lambda = \dfrac{\|f\|_{BMO}}{C_2} ds$, portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx &\leq C_1 p \int_0^\infty \frac{\|f\|_{BMO}^{p-1}}{(C_2)^{p-1}} \cdot s^{p-1} e^{-s} \cdot \frac{\|f\|_{BMO}}{C_2} \, ds \\ &= C_1 p \frac{\|f\|_{BMO}^p}{(C_2)^p} \int_0^\infty s^{p-1} e^{-s} \, ds = C_1 p C_2^{-p} \Gamma(p) \|f\|_{BMO}^p \end{aligned}$$

então

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^p\,dx\right)^{1/p} \leq C_p\|f\|_{BMO}$$

e assim,

$$\|f\|_{*,p} \leq C_p\|f\|_{BMO}.$$

$\square$

Corolário 4.2.2. *Dado $f \in BMO$, existe $\lambda > 0$ tal que para qualquer cubo Q,*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\lambda|f(x)-f_Q|}\,dx < \infty.$$

Demonstração: Pelo teorema 4.2.2 temos

$$\begin{aligned}\int_Q e^{\lambda|f(x)-f_Q|}\,dx &= \int_0^\infty \lambda e^{\lambda t}|\{x \in Q : |f(x)-f_Q| > t\}|\,dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda e^{\lambda t} C_1 e^{-C_2 t/\|f\|_{BMO}}|Q|\,dt\end{aligned}$$

Portanto se $0 < \lambda < C_2/\|f\|_{BMO}$ temos,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\lambda|f(x)-f_Q|}\,dx \leq C_1\lambda\int_0^\infty e^{(\lambda - C_2/\|f\|_{BMO})t}\,dt = C_1\lambda(C_2/\|f\|_{BMO}-\lambda)^{-1} < \infty.$$

$\square$

Além disso, a prova do Corolário 4.2.1(com $p = 1$) pode ser adaptado para provar que a recíproca da desigualdade de John Nirenberg (Teorema 4.2.2) ocorre.

Corolário 4.2.3. *Dada uma função f, suponha que existem constantes C_1, C_2 e K tal que para qualquer cubo Q e $\lambda > 0$,*

$$|\{x \in Q : |f(x)-f_Q| > \lambda\}| \leq C_1 e^{-C_2\lambda/K}|Q|$$

Então $f \in BMO$.

Capítulo 5

O Teorema T1

Neste capítulo retornamos à questão considerada no capítulo 3: dado um operador Calderón-Zygmund T com núcleo associado K, quando é T limitado em L^2? Se T é um operador convolução, o problema se reduz a provar que $\hat{K} \in L^\infty$. Para operadores que não são operadores convolução o problema é muito mais difícil. Em algums casos, um resultado devido a M. Cotlar é útil.

Lema 5.0.2. *(Lema de Cotlar) Seja H um espaço de Hilbert, $\{T_j\}$ uma sequência de operadores lineares limitados em H com adjuntos $\{T_j^*\}$, e $\{a(j)\}$ uma sequência de números não negativos tal que*

$$\|T_iT_j^*\|_{\mathcal{L}(H)} + \|T_i^*T_j\|_{\mathcal{L}(H)} \leq a(i-j).$$

Então para todos os inteiros n e m, $n \leq m$,

$$\left\|\sum_{j=n}^{m} T_j\right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)^{1/2}.$$

Demonstração: Seja

$$S = \sum_{j=n}^{m} T_j.$$

Então $\|S\| = \|SS^*\|^{1/2}$; de fato, para qualquer inteiro $k > 0$, $\|S\| = \|(SS^*)^k\|^{1/2k}$. Mas, $SS^* = \sum_{j_1,j_2=n}^{m} T_{j_1}T_{j_2}^*$, assim

$$(SS^*)^k = \sum_{j_1,\ldots,j_{2k}=n}^{m} T_{j_1}T_{j_2}^* \ldots T_{j_{2k-1}}T_{j_{2k}}^*$$

e a norma de cada somando pode ser limitada em duas formas:

$$\|T_{j_1}T_{j_2}^* \ldots T_{j_{2k-1}}T_{j_{2k}}^*\| \leq \|T_{j_1}T_{j_2}^*\| \ldots \|T_{j_{2k-1}}T_{j_{2k}}^*\| \leq a(j_1-j_2)\ldots a(j_{2k-1}-j_{2k}).$$

e

$$\begin{aligned}\|T_{j_1}T_{j_2}^* \dots T_{j_{2k-1}}T_{j_{2k}}^*\| &\leq \|T_{j_1}\|\|T_{j_2}^*T_{j_3}\| \dots \|T_{j_{2k-2}}^*T_{j_{2k-1}}\|\|T_{j_{2k}}^*\| \\ &\leq a(0)^{1/2}a(j_2-j_3)\dots a(j_{2k-2}-j_{2k-1})a(0)^{1/2}.\end{aligned}$$

Se tomamos a média geométrica de ambos limites temos,

$$\|T_{j_1}T_{j_2}^* \dots T_{j_{2k-1}}T_{j_{2k}}^*\| \leq a(0)^{1/2}a(j_1-j_2)^{1/2}a(j_2-j_3)^{1/2}\dots a(j_{2k-1}-j_{2k})^{1/2},$$

somamos sobre todos os j_i e obtemos

$$\|(SS^*)^k\| \leq a(0)^{1/2}\sum_{j_1,\dots,j_{2k}=n}^{m} a(j_1-j_2)^{1/2}a(j_2-j_3)^{1/2}\dots a(j_{2k-1}-j_{2k})^{1/2}.$$

Fixamos $j_1,\dots,j_{2k-1}$ e somamos sobre j_{2k}; então somamos sobre j_{2k-1} e assim até j_1. Portanto

$$\|(SS^*)^k\| \leq a(0)^{1/2}(m-n+1)\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)^{1/2}\right)^{2k-1}$$

onde $m-n+1$ é o número de termos os quais aparecem quando somamos em j_1. Logo,

$$\begin{aligned}\|S\| = \|(SS^*)^k\|^{1/2k} &\leq \left(a(0)^{1/2}\right)^{1/2k}(m-n+1)^{1/2k}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)^{1/2}\right)^{\frac{2k-1}{2k}} \\ &= a(0)^{1/4k}(m-n+1)^{1/2k}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)^{1/2}\right)^{1-\frac{1}{2k}}\end{aligned}$$

e se fazemos $k\to\infty$ obtemos

$$\|S\| \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)^{1/2}.$$

$\square$

Exemplo 5.0.4:(Uma aplicação à transformada de Hilbert). Seja $H = L^2(\mathbb{R})$ e para $f\in L^2(\mathbb{R})$ defina

$$T_jf(x) = \int_{2^j<|t|<2^{j+1}} \frac{f(x-t)}{t}\,dt$$

Para cada inteiro j, temos

$$\begin{aligned}|T_jf(x)| &\leq \int_{2^j<|t|<2^{j+1}} \frac{|f(x-t)|}{|t|}\,dt \leq \frac{1}{2^j}\int_{|t|<2^{j+1}} |f(x-t)|\,dt \\ &= \frac{4}{2\cdot 2^{j+1}}\int_{|t|<2^{j+1}} |f(x-t)|\,dt \leq 4\,Mf(x),\end{aligned}$$

assim T_j é limitado em $L^2(\mathbb{R})$.

Usaremos o Lema de Cotlar para provar que qualquer soma finita dos T_j's é uniformemente limitada, o qual por sua vez prova que as integrais truncadas da transformada de Hilbert são uniformemente limitadas.

Se fazemos $K_j(x) = x^{-1}\chi_{\Delta_j}(x)$, onde $\Delta_j = \{x \in \mathbb{R} : 2^j < |x| < 2^{j+1}\}$, então $T_j f(x) = K_j * f(x)$. Como $< T_j\varphi, \psi > = < \varphi, T_j^*\psi >$ temos,

$$\begin{aligned}
< T_j\varphi, \psi > &= \int_{\mathbb{R}} T_j\varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} (K_j * \varphi)(x)\,\psi(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} K_j(x-t)\,\varphi(t)\,dt \right) \psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} K_j(x-t)\,\psi(x)\,dx \right) \varphi(t)\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} K_j(t-x)\,\psi(t)\,dt \right) \varphi(x)\,dx
\end{aligned}$$

assim

$$T_j^*\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} K_j(t-x)\,\psi(t)\,dt = -\int_{\mathbb{R}} K_j(x-t)\,\psi(t)\,dt = -(K_j * \psi)(x) = -T_j\psi(x).$$

Portanto, como $T_j^* = -T_j$, só precisamos estimar $\|T_iT_j\|$. Mas, $T_iT_jf(x) = K_i * K_j * f(x)$, logo

$$\|T_iT_j\| \le \|K_i * K_j\|_{L^1}.$$

Sem embargo,

$$K_i * K_j(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t}\chi_{\Delta_i}(t)\,\frac{1}{x-t}\chi_{\Delta_j}(x-t)\,dt.$$

Sem perda de geralidade podemos assumir que $i < j$ e $x > 0$. Então, $K_i * K_j = 0$ se $x \notin (2^j - 2^{i+1}, 2^{j+1} + 2^{i+1})$ e neste intervalo

$$\begin{aligned}
|K_i * K_j(x)| &\le \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t|}\,\frac{1}{|x-t|}\chi_{\Delta_i}(t)\chi_{\Delta_j}(x-t)\,dt \\
&= \int_{2^j<|x-t|<2^{j+1}} \frac{1}{|t|}\,\frac{1}{|x-t|}\chi_{\Delta_i}(t)\,dt \\
&\le \frac{1}{2^j}\int_{|x-t|<2^{j+1}} \frac{1}{|t|}\,\chi_{\Delta_i}(t)\,dt
\end{aligned}$$

se $|x-t| < 2^{j+1}$ e $x \in (2^j - 2^{i+1}, 2^{j+1} + 2^{i+1})$ então $t \in (-2^j - 2^{i+1}, 2^{j+2} + 2^{i+1})$ e como $\Delta_i \subset \{t : t \in (-2^j - 2^{i+1}, 2^{j+2} + 2^{i+1})\}$ temos

$$\begin{aligned}
|K_i * K_j(x)| &\le \frac{1}{2^j}\int_{-2^j-2^{i+1}<t<2^{j+2}+2^{i+1}} \frac{1}{|t|}\,\chi_{\Delta_i}(t)\,dt \\
&\le \frac{1}{2^j}\int_{2^i<t<2^{i+1}} \frac{1}{|t|}\,dt \le \frac{1}{2^j}\cdot\frac{1}{2^i}\int_{2^i<t<2^{i+1}} dt = 2\cdot 2^{-j}.
\end{aligned}$$

Usamos esta estimativa nos intervalos $(2^j - 2^{i+1}, 2^j + 2^{i+1})$ e $(2^{j+1} - 2^{i+1}, 2^{j+1} + 2^{i+1})$. No resto do intervalo, ou seja $(2^j + 2^{i+1}, 2^{j+1} - 2^{i+1})$ temos que se $t \in \Delta_i$ então $x - t \in \Delta_j$, assim $\chi_{\Delta_i}(t)\chi_{\Delta_j}(x-t) = \chi_{\Delta_i}(t)$ e como

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{x}\chi_{\Delta_i}(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_{2^i<t<2^{i+1}} \frac{1}{t}dt = 0$$

então

$$|K_i * K_j(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x} \right) \chi_{\Delta_i}(t)\, dt \right| \leq \int_{2^i<t<2^{i+1}} \frac{1}{|t|} \left| \frac{1}{x-t} - \frac{1}{x} \right| dt$$

mas, como $|x| \leq |x - \alpha t| + |\alpha t| < |x - \alpha t| + |t| < |x - \alpha t| + 2^{i+1}$ então $x - 2^{i+1} < |x - \alpha t|$ e assim temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x-t} - \frac{1}{x} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{-t}{(x-\alpha t)^2}\, dt \right| \leq \int_0^1 \frac{|t|}{|x-\alpha t|^2}\, dt \\ &\leq \sup_{0\leq\alpha\leq 1} \frac{|t|}{|x-\alpha t|^2} \leq \frac{|t|}{(x-2^{i+1})^2} \end{aligned}$$

então,

$$|K_i * K_j(x)| \leq \int_{2^i<t<2^{i+1}} \frac{1}{(x-2^{i+1})^2}\, dt \leq \frac{1}{2^{2j}} \int_{2^i<t<2^{i+1}} dt = 2 \cdot 2^{i-2j}$$

portanto,

$$\|K_i * K_j\|_{L^1} \leq C 2^{-|i-j|},$$

e esta estimativa nos permite aplicar o Lema de Cotlar como queriamos.

5.1 Exposição e Aplicações do Teorema T1

Seja $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ um operador linear e contínuo. Deste modo, para todo par de funções $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o valor de $\langle Tf, g \rangle$ está definido. Decorre do Teorema do Núcleo de Schwartz a existência de uma distribuição $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $\langle Tf, g \rangle = \langle K, g \otimes f \rangle$.

Nesta seção suporemos que a distribuição K coincida, fora da diagonal, com uma função localmente integrável que ainda satisfaz as condições (3.0.11), (3.0.12) e (3.0.13). Além disso, a seguinte relação entre K e T ocorre: Se $f \in \mathcal{S}$ tem suporte compacto, então a distribuição Tf concorda com a função

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\, f(y)\, dy, \qquad x \notin \operatorname{supp}(f). \tag{5.1.1}$$

Neste caso, dizemos que o núcleo K é um *núcleo padrão* e o operador T com tais propriedades é um Operador de Calderón-Zygmund.

O operador adjunto T^* é definido por

$$\langle T^* f, g \rangle = \langle f, Tg \rangle, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Este operador é associado com o núcleo padrão $K^*(x,y) = \overline{K}(y,x)$.

O objetivo principal desta seção consiste em estudar uma condição necessária e suficiente para que um operador de Calderón-Zygmund possua uma extensão limitada em L^2. Antes, exibiremos algumas definições necessárias.

Definição 5.1.1. *A função* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é dita função teste normalizada se:*

i) $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq B(0,1)$*;*

ii) *Existe* $N > 0$ *tal que* $\|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty} \leq 1$*, para todo* $|\alpha| \leq N$*.*

Definição 5.1.2. *A função* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é dita função teste normalizada com respeito a bola* $B(x_0, R)$ *se:*

i) $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq B(x_0, R)$*;*

ii) *Existe* $N > 0$ *tal que* $|\partial_x^\alpha \phi(x)| \leq \dfrac{1}{R^{|\alpha|}}$*, para todo* $|\alpha| \leq N$*,* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

OBSERVAÇÃO 5.1.7: Se ϕ é uma função teste normalizada, então $\psi(x) = \phi\left(\dfrac{x - x_0}{R}\right)$ é função teste normalizada com respeito a bola $B(x_0, R)$.

Definição 5.1.3. *Um operador linear* T *é dito restritamente limitado se para toda função* ϕ *teste normalizada*

i) $T(\phi^{x_0,R}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

ii) *Existe* $A > 0$ *tal que*

$$\|T(\phi^{x_0,R})\|_{L^2} \leq A\, R^{n/2} \tag{5.1.2}$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *e* $R > 0$*, com* A *independente de* x_0*,* R*,* ϕ*.*

Proposição 5.1.1. *Se um operador* T *é limitado em* L^2*, então* T *é restritamente limitado.*

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
\|\phi^{x_0,R}\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi^{x_0,R}(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\phi\left(\frac{x - x_0}{R}\right)\right|^2 dx \\
&= R^n \int_{B(0,1)} |\phi(x)|^2\, dx \leq R^n\, |B(0,1)| = C_n\, R^n,
\end{aligned}$$

assim,

$$\|T(\phi^{x_0,R})\|_{L^2} \leq \|T\|\, \|\phi^{x_0,R}\|_{L^2} \leq \|T\| C_n'\, R^{n/2} = A\, R^{n/2}.$$

□

Seja

$$C_{c,0}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C_c^\infty : \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 0\}.$$

Definição 5.1.4. *Dado $f \in C^\infty \cap L^\infty$, dizemos que $Tf \in BMO$ se existe uma função $b \in BMO$ tal que*

$$\langle Tf, g\rangle = \langle b, g\rangle$$

para todo $g \in C^\infty_{c,0}$.

Afirmamos que se $f \in C^\infty_{c,0}(\mathbb{R}^n)$ então $Tf \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, se $f \in C^\infty_{c,0}(\mathbb{R}^n)$, existe $R > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq B(x_0, R)$, seja $B^* = B(x_0, 3R)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|\, dx = \int_{B^*} |Tf(x)|\, dx + \int_{(B^*)^c} |Tf(x)|\, dx = I + J.$$

Primeiro estimamos J, se $x \in (B^*)^c$, então $|x - x_0| \geq 3R$, $y \in B(x_0, R)$ assim $|y - x_0| \leq R$,

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &= \left|\int_B K(x,y)\, f(y)\, dy\right| = \left|\int_B (K(x,y) - K(x,x_0))f(y)\, dy\right| \\ &\leq \int_B |K(x,y) - K(x,x_0)||f(y)|\, dy. \end{aligned}$$

Como $|x - x_0| \leq |x - y| + |y - x_0| \leq |x - y| + R \leq |x - y| + \frac{|x-x_0|}{3}$ então $|x - y| \geq \frac{2}{3}|x - x_0|$ e pela condição (3.0.12) temos,

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq A\int_B \frac{|y - x_0|^\delta}{|x - y|^{n+\delta}}|f(y)|\, dy \leq CAR^\delta \int_B \frac{|f(y)|}{|x - x_0|^{n+\delta}}\, dy \\ &\leq CAR^\delta \frac{\|f\|_{L^1(B)}}{|x - x_0|^{n+\delta}} = C' \frac{R^\delta}{|x - x_0|^{n+\delta}}, \end{aligned}$$

e assim,

$$\int_{(B^*)^c} |Tf(x)|\, dx \leq C'R^\delta \int_{|x-x_0|\geq 3R} \frac{dx}{|x - x_0|^{n+\delta}} = C''R^\delta \int_{3R}^\infty \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n+\delta}}\, d\rho = C''R^\delta(3R)^{-\delta} < \infty.$$

Agora estimamos I, dado $\operatorname{supp}(f) \subseteq B(x_0, R)$, existe $\phi \in C^\infty_c(B(0,1))$ tal que $f(x) = \phi\left(\frac{x - x_0}{R}\right)$ e assim, $f(x) = C\left(\frac{\phi}{C}\right)^{x_0,R}(x)$. Seja $\widetilde{\phi} = \frac{\phi}{C}$, então $\widetilde{\phi}$ é função teste normalizada, portanto $f(x) = C\, \widetilde{\phi}^{x_0,R}(x)$.

$$\begin{aligned} \int_{B^*} |Tf(x)|\, dx &= \int_{B^*} |T(C\, \widetilde{\phi}^{x_0,R})(x)|\, dx = C\int_{B^*} |T(\widetilde{\phi}^{x_0,R})(x)|\, dx \\ &\leq C\|T(\widetilde{\phi}^{x_0,R})\|_{L^2}|B^*|^{1/2} \leq C'R^{n/2}R^{n/2} = C'R^n. \end{aligned}$$

Portanto $Tf \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Analogamente, $T^*f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Enunciaremos a seguir o Teorema $T(1)$.

Teorema 5.1.1 (Teorema T1). *Seja T um operador linear contínuo de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ associado a um núcleo $K(x,y)$ satisfazendo as condições (3.0.11), (3.0.12), (3.0.13) e (5.1.1). Então, T se estende a um operador limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, T e T^* são restritamente limitados.*

Demonstração: Suponha que T é um operador limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$, então T^* também é limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e assim T e T^* são estritamente limitados.

Para provar a recíproca, consideraremos dois casos

Caso 1: T e T^* que satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} T^*f(x)\,dx = 0, \quad \text{para todo } f \in C^\infty_{c,0}.$$

O próximo passo consiste em encontrar uma decomposição diádica do operador T. Seja $\Phi \in C_c^\infty$, $\operatorname{supp}(\Phi) \subset B(0,1)$, $\int \Phi(x)\,dx = 1$, e para cada $f \in C^\infty_{c,0}$, definimos

$$S_j f = f * \Phi_{2^{-j}}$$

onde $\Phi_{2^{-j}}(x) = 2^{nj}\Phi(2^j x)$.

Definimos o operador $\Delta_j = S_j - S_{j-1}$ assim,

$$\begin{aligned}
\Delta_j f(x) &= S_j f(x) - S_{j-1}f(x) = f * \Phi_{2^{-j}}(x) - f * \Phi_{2^{-j+1}}(x) = f * (\Phi_{2^{-j}} - \Phi_{2^{-j+1}})(x) \\
&= \int f(x-y)[2^{nj}\Phi(2^j y) - 2^{n(j-1)}\Phi(2^{j-1}y)]\,dy \\
&= \int f(x-y)\left[2^{nj}\left(\Phi(2^j y) - 2^{-n}\Phi\left(\frac{2^j y}{2}\right)\right)\right]dy,
\end{aligned}$$

Tomando $\Psi(x) = \Phi(x) - 2^{-n}\Phi\left(\dfrac{x}{2}\right)$, notemos que $\int \Psi(x)\,dx = 0$. Assim temos,

$$\Delta_j f(x) = \int f(x-y)\,2^{nj}\Psi(2^j y)\,dy = (f * \Psi_{2^{-j}})(x)$$

portanto $\Delta_j f = f * \Psi_{2^{-j}}$.

Observemos que se $f \in \mathcal{S}$ então $S_j f \longrightarrow f$ em $\mathcal{S}$ quando $j \to +\infty$. Como $T : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ é contínuo, temos que

$$T(S_j f) \longrightarrow Tf \ \text{ em } \mathcal{S}'.$$

Também notemos que se $f \in \mathcal{S}'$, então $\{S_j f\}$ é uma coleção limitada em $\mathcal{S}'$ e $S_j f \longrightarrow f$ em $\mathcal{S}'$ quando $j \to +\infty$.

Então, para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{j\to\infty}(S_j T S_j)f = Tf \ \text{ em } \mathcal{S}'.$$

De fato, seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$|\langle (S_j T S_j)f - Tf, \varphi\rangle| \le |\langle (S_j T S_j)f - (S_j T)f, \varphi\rangle| + |\langle (S_j T)f - Tf, \varphi\rangle| = I + II.$$

Como $T(S_jf-f)\in\mathcal{S}'$ e porque $\{S_j\circ T(S_jf-f)\}$ é limitado em $\mathcal{S}'$ temos que

$$I=|\langle S_j\circ T(S_jf-f),\varphi\rangle|\le C_\varphi\sum_{|\alpha|\le m,|\beta|\le n}\rho_{\alpha,\beta}(S_jf-f)$$

e como $S_j\to f$ em $\mathcal{S}$ então $I\longrightarrow 0$ quando $j\to\infty$.

Como $S_jf\longrightarrow f$ em $\mathcal{S}'$, temos que $S_jTf\longrightarrow Tf$ em $\mathcal{S}'$ quando $j\to\infty$, então existe $j_0>0$ tal que para todo $j\ge j_0$ temos

$$II=|\langle S_jTf-Tf,\varphi\rangle|\le\epsilon/2$$

assim $II\longrightarrow 0$ quando $j\to\infty$.

Agora afirmamos que, se $f\in\mathcal{S}$, então

$$\lim_{j\to-\infty}(S_jTS_j)f=0\ \text{ em }\mathcal{S}'$$

De fato, primeiro observemos que quando $f\in\mathcal{S}$,

$$(S_jf)\widehat{\ }(\xi)=\widehat{f}(\xi)\cdot(\Phi_{2^{-j}})\widehat{\ }(\xi)=\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{\Phi}(2^{-j}\xi),$$

assim, pela fórmula de Fourier inversa,

$$S_jf(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}(S_jf)\widehat{\ }(\xi)\,d\xi=C_n\int e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\widehat{\Phi}(2^{-j}\xi)\,d\xi,$$

fazendo mudança de variável $2^{-j}\xi=\eta$ temos

$$\begin{aligned}S_jf(x)&=C\int e^{ix(2^j\eta)}\widehat{f}(2^j\eta)\widehat{\Phi}(\eta)2^{nj}\,d\eta=C2^{nj}\int e^{ix(2^j\eta)}(f_{2^j})\widehat{\ }(\eta)\widehat{\Phi}(\eta)\,d\eta\\&=C2^{nj}\int e^{i(x2^j)\eta}(f_{2^j}*\Phi)\widehat{\ }(\eta)\,d\eta=C2^{nj}\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f_{2^j}*\Phi)(\cdot)](2^jx)=C2^{nj}(f_{2^j}*\Phi)(2^jx)\end{aligned}$$

Assim $\{f_{2^j}*\Phi\}$ é limitada em $\mathcal{S}$ quando $j\to-\infty$. Portanto,

$$|S_jf(x)|=C2^{nj}|f_{2^j}*\Phi(2^jx)|\le C2^{nj}\sup_{z\in\mathbb{R}^n}|f_{2^j}*\Phi(z)|\le C2^{nj},$$

e assim $\lim\limits_{j\to-\infty}S_jf(x)=0$.

Logo, existem constantes $C>0$, $N>0$ e $j_0\in\mathbb{R}$ tal que

$$\rho_{\alpha,\beta}\left(\frac{f_{2^j}*\Phi}{C}\right)\le 1$$

para todo $|\alpha|$, $|\beta|\le N$ e $j\le j_0$. Seja $\Psi_j=f_{2^j}*\Phi$, então $\rho_{\alpha,\beta}\left(\dfrac{\Psi_j}{C}\right)\le 1$, para todo $|\alpha|$, $|\beta|\le N$, $j\le j_0$.

Note que a desigualdade (5.1.2) continua ocorrendo para qualquer $\Psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\rho_{\alpha,\beta}(\Psi)\le$, $|\alpha|$, $|\beta|\le N$. Assim

$$S_jf(x)=C2^{jn}(f_{2^j}*\Phi)(2^jx)=C2^{jn}\Psi^j(2^jx)=C2^{jn}(\Psi^j)^{0,2^{-j}}$$

então,

$$TS_jf(x) = C'2^{jn}T\left[\left(\frac{\Psi_j}{C}\right)^{0,2^{-j}}\right](x)$$

e assim,

$$\|TS_jf\|_{L^2} = C'2^{jn}\left\|T\left[(\Psi_j/C)^{0,2^{-j}}\right]\right\|_{L^2} \leq C'2^{jn}A(2^{-j})^{n/2} = A'2^{jn/2}.$$

Portanto, $\lim\limits_{j\to-\infty}\|TS_jf\|_{L^2} = 0$ e assim $TS_jf \longrightarrow 0$ em $\mathcal{S}'$, então $S_jTS_jf \longrightarrow 0$ em $\mathcal{S}'$ quando $j \to -\infty$.

Assim,

$$T = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(S_jTS_j - S_{j-1}TS_{j-1})$$

De fato,

$$\begin{aligned}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(S_jTS_jf - S_{j-1}TS_{j-1}f) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{j=-N}^{N}(S_jTS_jf - S_{j-1}TS_{j-1}f)\\ &= \lim_{N\to\infty} S_NTS_Nf - S_{-N-1}TS_{-N-1}f\\ &= Tf - 0 = Tf.\end{aligned}$$

Então, quando $f \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}Tf &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(S_jTS_jf - S_{j-1}TS_{j-1}f)\\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(S_jTS_jf - S_{j-1}TS_jf) + \sum_{j=-\infty}^{\infty}(S_{j-1}TS_jf - S_{j-1}TS_{j-1}f)\\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(S_j - S_{j-1})TS_jf + \sum_{j=-\infty}^{\infty}(S_{j-1}T(S_j - S_{j-1})f\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{|j|\leq N}\Delta_jTS_jf + \sum_{|j|\leq N}S_{j-1}T\Delta_jf.\end{aligned}$$

Consideraremos separadamente cada dos últimos dois somandos e escrevemos primeiro $T_jf = \Delta_jTS_jf$.

Notemos que sempre que $f \in \mathcal{S}$ e Φ, $\Psi \in C_c^\infty$, então

$$f * \Phi = \int_{\mathbb{R}^n}\Phi^y f(y)\,dy,$$

onde $\Phi^y(u) = \Phi(u-y)$; e $(\alpha * \Psi)(x) = \langle\alpha, \check{\Psi}^x\rangle$ para qualquer distribuição temperada α, onde $\check{\Psi}^x(u) = \Psi(x-u)$, assim temos que,

$$\begin{aligned}
[T(f*\Phi)*\Psi](x) &= \langle T(f*\Phi), \check{\Psi}^x\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} T(f*\Phi)(z)\check{\Psi}^x(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} K(z,w)(f*\Phi)(w)\,dw\right]\check{\Psi}^x(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\check{\Psi}^x(z)\left[\int_{\mathbb{R}^n} K(z,w)\int_{\mathbb{R}^n}\Phi^y(w)f(y)\,dy\,dw\right]dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(z,w)\check{\Psi}^x(z)\Phi^y(w)\,dz\,dw\right]f(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\langle K, \check{\Psi}^x\otimes\Phi^y\rangle f(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\langle T(\Phi^y), \check{\Psi}^x\rangle f(y)\,dy,
\end{aligned}$$

e como,

$$T_jf(x) = \Delta_j(TS_jf)(x) = (TS_jf*\Psi_{2^{-j}})(x) = \{[T(f*\Phi_{2^{-j}})]*\Psi_{2^{-j}}\}(x),$$

assim,

$$T_jf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y)f(y)\,dy$$

onde

$$K_j(x,y) = \langle T(\Phi^y_{2^{-j}}), \check{\Psi}^x_{2^{-j}}\rangle$$

e K_j satisfaz as seguintes propriedades:

1) $|K_j(x,y)| \leq A\cdot 2^{nj}\min\{1,(2^j|x-y|)^{-n-\delta}\}$,

2) $|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta K_j(x,y)| \leq A_{\alpha,\beta}\cdot 2^{(n+|\alpha|+|\beta|)j}\min\{1,(2^j|x-y|)^{-n-\delta}\}$,

3) $\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y)\,dy = 0$, para cada $x\in\mathbb{R}^n$ fixo, e

4) $\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y)\,dx = 0$, para cada $y\in\mathbb{R}^n$ fixo.

De fato,

1) Como $\operatorname{supp}(\Phi^y_{2^{-j}}) \subset B(y,2^{-j})$ e $\operatorname{supp}(\check{\Psi}^x_{2^{-j}}) \subset B(x,2^{-j})$, então

$$\Phi^y_{2^{-j}}(x) = 2^{jn}\Phi^{y,2^{-j}}(x) \;\text{ e }\; \check{\Psi}^x_{2^{-j}}(y) = 2^{jn}(\check{\Psi})^{x,2^{-j}}(y),$$

assim como T é restritamente limitado temos

$$|K_j(x,y)| = |\langle T(2^{jn}\Phi^{y,2^{-j}}), 2^{jn}(\check{\Psi})^{x,2^{-j}}\rangle| \leq 2^{2jn}\cdot A(2^{-j})^n = A\cdot 2^{jn}.$$

Primeiro suponha que $|x-y| \leq 2 \cdot 2^{-j}$. Assim $2^{n+\delta}(2^j|x-y|)^{-n-\delta} \geq 1$, então $\min\{1, 2^{n+\delta}(2^j|x-y|)^{-n-\delta}\} = 1$, portanto

$$\begin{aligned}
|K_j(x,y)| &\leq A \cdot 2^{nj} \min\{1, 2^{n+\delta}(2^j|x-y|)^{-n-\delta}\} \\
&\leq A \cdot 2^{nj} \min\{2^{n+\delta}, 2^{n+\delta}(2^j|x-y|)^{-n-\delta}\} \\
&= A \cdot 2^{n+\delta} \cdot 2^{nj} \min\{1, 2^{n+\delta}(2^j|x-y|)^{-n-\delta}\} \\
&= A' \cdot 2^{nj} \min\{1, (2^j|x-y|)^{-n-\delta}\}.
\end{aligned}$$

Se $|x-y| > 2 \cdot 2^{-j}$. Como $\operatorname{supp}(\Phi^y_{2^{-j}}) \subset B(y, 2^{-j})$ e $\operatorname{supp}(\check{\Psi}^x_{2^{-j}}) \subset B(x, 2^{-j-1})$, então $B(x, 2^{-j}) \cap B(y, 2^{-j-1}) = \emptyset$, assim

$$\begin{aligned}
K_j(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(u,v)\check{\Psi}^x_{2^{-j-1}}(u)\Phi^y_{2^{-j}}(v)\,du\,dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi^y_{2^{-j}}(v)\left(\int_{\mathbb{R}^n}(K(u,v)-K(x,v))\check{\Psi}^x_{2^{-j-1}}(u)\,du\right)dv.
\end{aligned}$$

Como $|u-x| < 2^{-j-1}$, $|v-y| < 2^{-j}$ e $|x-y| > 2 \cdot 2^{-j}$, então $2 \cdot 2^{-j} < |x-y| \leq |x-v| + |v-y| < |x-v| + 2^{-j}$, assim $|x-v| \geq 2 \cdot 2^{-j-1} > 2|u-x|$ e usando que $K(x,y)$ é um núcleo padrão temos que,

$$|K(u,v) - K(x,v)| \leq A\frac{|x-u|^\delta}{|x-v|^{n+\delta}}, \text{ se } |x-v| > 2|x-u|,$$

e como $|x-v| \geq \frac{|x-y|}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
|K_j(x,y)| &\leq A\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x-u|^\delta}{|x-v|^{n+\delta}}|\check{\Psi}^x_{2^{-j-1}}(u)||\Phi^y_{2^{-j}}(v)|\,du\,dv \\
&\leq A \cdot 2^{n+\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{2^{-\delta(j+1)}}{|x-y|^{n+\delta}}|2^{(j+1)n}\Psi(2^{j+1}(x-u))||2^{jn}\Phi(2^j(v-y))|\,du\,dv \\
&= \frac{A \cdot 2^{2n+2jn-\delta j}}{|x-y|^{n+\delta}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\Psi(2^{j+1}(x-u))||\Phi(2^j(v-y))|\,du\,dv \\
&\leq \frac{C_n A \cdot 2^n \cdot 2^{-\delta j}}{|x-y|^{n+\delta}} \leq A''\frac{2^{-\delta j}}{|x-y|^{n+\delta}}.
\end{aligned}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned}
|K_j(x,y)| &\leq A'' 2^{-\delta j}|x-y|^{-n-\delta} = \frac{A''}{2^{n+\delta}} \cdot 2^{jn}\min\{1, 2^{n+\delta}(2^j|x-y|)^{-n-\delta}\} \\
&\leq A'' \cdot 2^{jn}\min\{1, (2^j|x-y|)^{-n-\delta}\}.
\end{aligned}$$

2) Como $\partial^\alpha_x(\Phi^y_{2^{-j}}) = \partial^\alpha_x[2^{jn}\Phi(2^j(x-y))] = 2^{jn+j|\alpha|}\partial^\alpha\Phi(2^j(x-y))$ e

$$\partial^\beta_y(\check{\Psi}^x_{2^{-j}}) = \partial^\beta_y[2^{jn}\Psi(2^j(x-y))] = 2^{jn+j|\beta|}\partial^\beta\Psi(2^j(x-y)),$$

então temos por 1),

$$|\partial^\alpha_x\partial^\beta_y K_j(x,y)| \leq A_{\alpha,\beta} \cdot 2^{(n+|\alpha|+|\beta|)j}\min\{1, (2^j|x-y|)^{-n-\delta}\}.$$

3) Se $\int K_j(x,y)\,dx = 0$ então

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_j f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y)f(y)\,dy\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y)\,dx\right)\,dy = 0$$

e se $\int K_j(x,y)\,dy = 0$ então

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_j^* f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K_j(y,x)f(y)\,dy\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} K_j(y,x)\,dx\right)\,dy = 0$$

Assim as condições 3) e 4) são equivalentes as expressões

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_j^* f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} T_j f(x)\,dx = 0 \tag{5.1.3}$$

para todo $f \in C_c^\infty$.

Para provar (5.1.3), primeiro observemos que se $F \in L^1$ e como $\int \Psi = 0$, então pelo teorema de Fubini temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_j(F)(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (F * \Psi_{2^{-j}})(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} F(y)\Psi_{2^{-j}}(x-y)\,dy\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} 2^j\Psi(2^j(x-y))\,dx\right)\,dy = 0\end{aligned}$$

Sem embargo, se $F \in L^2$ então $\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_j(F))(x)\,dx$ não pode ser zero porque $\Delta_j(F)$ pode não ser integrável em $\mathbb{R}^n$.

No entanto, se F satisfaz as condições especiais

$$|F(x)| \leq A(1+|x|)^{-n} \tag{5.1.4}$$

$$\text{e } \; |F(x-y) - F(x)| \leq \frac{A|y|^\delta}{(1+|x|)^{n+\delta}} \text{ para } |x| \geq 2|y|, \tag{5.1.5}$$

com algum $\delta > 0$, e como $\int \Psi = 0$, então $\Delta_j F$ podemos escrever como

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_j F)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} [F(x-y) - F(x)]\Psi_{2^{-j}}(y)\,dy\,dx,$$

e note que podemos aplicar o teorema de Fubini porque a integral double indicada (em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$) converge, assim $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_j(F)(x)\,dx = 0$.

Retornando agora à prova de (5.1.3), note que como $f \in C_c^\infty$, então $S_j f$ é um múltiplo de uma função teste, e como T é restritamente limitada temos que $TS_j f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Temos que fora do suporte de $S_j f$, escrevemos $TS_j f$ como

$$\begin{aligned} TS_j f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y-z)\Phi_{2^{-j}}(z)\,dy\,dz\\ &= F_1 + F_2\end{aligned}$$

onde $F_1 \in L^2$ com suporte compacto e portanto $F_1 \in L^1$, e F_2 satisfaz as condições especiais (5.1.4) e (5.1.5). Pelas observações anteriores, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_j f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_j T S_j f(x)\, dx = 0.$$

Para provar que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} T_j^* f(x)\, dx = 0$, primeiro observemos que $T_j^* f = S_j^* T^* \Delta_j^* f$, da mesma forma feita anteriormente temos que $\displaystyle\int \Delta_j^* f = 0$ e por hipóteses temos que $\displaystyle\int T^* \Delta_j^* f = 0$ e assim

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} T^* \Delta_j^* f(x-y) \Phi_{2^{-j}}(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{2^{-j}}(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} T^* \Delta_j^* f(x-y)\, dx \right) dy = 0.
\end{aligned}$$

Assim, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} T_j^* f(x)\, dx = 0$.

Para completar a prova precisamos estimar a norma de $T_i^* T_j$ como um operador em L^2. Como

$$\begin{aligned}
T_i^* T_j f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K}_i(z,x) T_j f(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K}_i(z,x) \int_{\mathbb{R}^n} K_j(z,y) f(y)\, dy\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{K}_i(z,x) K_j(z,y)\, dz \right) f(y)\, dy
\end{aligned}$$

então temos que o núcleo deste operador é

$$k_{ij}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K}_i(z,x) K_j(z,y)\, dz.$$

Mostraremos que

$$\begin{cases} \|T_i^* T_j\| & \leq 2^{-\delta'} |i-j|\,, \text{ e} \\ \|T_i T_j^*\| & \leq 2^{-\delta'} |i-j| \end{cases} \tag{5.1.6}$$

para cada expoente fixo δ', com $0 \leq \delta' < \delta$.

Para isto consideremos primeiro o caso quando $i \geq j$. Então

$$\begin{aligned}
k_{ij}(x,y) &= \int \overline{K}_i(z,x) K_j(z,y)\, dz - K_j(x,y) \int \overline{K}_i(z,x)\, dz \\
&= \int \overline{K}_i(z,x) [K_j(z,y) - K_j(x,y)]\, dz
\end{aligned}$$

pela condição de cancelação de K_j.

Se u está no segmento de linha entre x e z, então

$$(2^j |u-y|)^{-n-\delta} \leq A[(2^j |x-y|)^{-n-\delta} + (2^j |z-y|)^{-n-\delta}].$$

Da propriedade 2) que K_j satisfaz, e do teorema do valor medio observemos que

$$\begin{aligned} |K_j(z,y) - K_j(x,y)| &\leq A \cdot 2^{(n+\delta')j} \min\{1, (2^j|u-y|)^{-n-\delta}\}|z-x|^{\delta'} \\ &\leq A \cdot 2^{(n+\delta')j}|z-x|^{\delta'} \min\{(2^j|x-y|)^{-n-\delta} + (2^j|z-y|)^{-n-\delta}\}. \end{aligned}$$

Usando isto, junto com a estimativa

$$|K_i(z,x)| \leq A \cdot 2^{ni} \min\{1, (2^j|z-x|)^{-n-\delta}\} \leq A \cdot 2^{ni}(1 + 2^j|z-x|)^{-n-\delta}\}$$

mostra-se que

$$\begin{aligned} |k_{ij}(x,y)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{K}_i(z,x)||K_j(z,y) - K_j(x,y)|\, dz \\ &\leq A \cdot 2^{\delta'(j-i)} \cdot 2^{nj}[1 + 2^j|x-y|]^{-n-\delta} \end{aligned}$$

se $\delta' < \delta$.

Assim,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} |k_{ij}(x,y)|\, dy \leq A \cdot 2^{\delta'(j-i)} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{nj} \frac{1}{(1+2^j|x-y|)^{n+\delta}}\, dy \\ &\quad = A \cdot 2^{\delta'(j-i)} \left[\int_{|v|\geq 1} 2^{nj} \frac{1}{(1+2^j|x-y|)^{n+\delta}}\, dy + \int_{|v|<1} 2^{nj} \frac{1}{(1+2^j|x-y|)^{n+\delta}}\, dy \right] \\ &\quad = A' \cdot 2^{\delta'(j-i)}, \end{aligned}$$

e também

$$\int_{\mathbb{R}^n} |k_{ij}(x,y)|\, dx \leq A' \cdot 2^{\delta'(j-i)}.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned} \|T_i^* T_j\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} k_{ij}(x,y) f(y)\, dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k_{ij}(x,y)|\, dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k_{ij}(x,y)||f(y)|^2\, dy \right) dx \\ &\leq A' \cdot 2^{\delta'(j-i)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |k_{ij}(x,y)|\, dx f(y)\, dy \leq A'' \cdot 2^{2\delta'(j-i)} \|f\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

e assim,

$$\|T_i^* T_j\|_{L^2,L^2} \leq C 2^{-\delta'|i-j|}\ , \quad \text{quando } i \geq j.$$

A prova para $i \leq j$ é similar, exceto quando pomos

$$\begin{aligned} k_{ij}(x,y) &= \int \overline{K}_i(z,x) K_j(z,y)\, dz - \overline{K}_i(y,x) \int K_j(z,y)\, dz \\ &= \int [\overline{K}_i(z,x) - \overline{K}_i(y,x)] K_j(z,y)\, dz. \end{aligned}$$

A situação para $T_i T_j^*$ é também similar, mas aquí os núcleos K_i e K_j são substituidos por seus adjuntos. E assim, temos que

$$\|T_i T_j^*\|_{L^2,L^2} \leq C 2^{-\delta'|i-j|}.$$

Portanto pelo Lema de Cotlar (Lema 5.0.2) temos que

$$\sum_{j=-N}^{N} \Delta_j T S_j = \sum_{j=-N}^{N} T_j$$

é limitado em L^2.

Um argumento completamente paralelo também cumpre para

$$\sum_{j=-N}^{N} S_{j-1} T \Delta_j,$$

e assim nosso teorema está agora provado para aqueles T que satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} T^* f(x)\,dx = 0.$$

Caso 2: Operadores arbitrários T

Lema 5.1.1. *Dada uma função $b \in BMO$, então existe um operador Calderón-Zygmund L tal que $L1 = b$ e $L^*1 = 0$.*

Demonstração: Sejam ϕ e ψ funções teste em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ as quais são suportadas na bola unitária e como ϕ é positivo e tem integral 1 e ψ tem integral zero. Define o operador L por

$$Lf = c\int_0^\infty \psi_t * ((\psi_t * b)(\phi_t * f))\frac{dt}{t},$$

onde c é uma constante que sera fixada abaixo. Provaremos que o núcleo de L satisfaz as estimativas padrão, que L é limitado em L^2, e que $L1 = b$ e $L^*1 = 0$.

(1) *O tamanho do núcleo.*

O núcleo de L é

$$K(x,y) = c\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \psi_t(x-z)(\psi_t * b)(z)\phi_t(z-y)\,dz\,\frac{dt}{t} = c\int_0^\infty K_t(x,y)\,\frac{dt}{t}.$$

Fixo $z \in \mathbb{R}^n$, seja Q um cubo com centro z e lado $2t$, e seja b_Q a média de b em Q. Então como ψ tem média zero, então $b_Q \int_Q \psi_t(z-y)\,dy = 0$ e assim,

$$\begin{aligned}|(\psi_t * b)(z)| &= \left|\int_Q \psi_t(z-y)(b(y)-b_Q)\,dy\right| = \left|\int_Q \frac{1}{t^n}\psi\left(\frac{z-y}{t}\right)(b(y)-b_Q)\,dy\right| \\ &\le 2^n \cdot \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\psi\left(\frac{z-y}{t}\right)\right| |b(y)-b_Q|\,dy \le 2^n \|\psi\|_{L^\infty}\|b\|_*,\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
|K_t(x,y)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_t(x-z)||(\psi_t * b)(z)||\phi_t(z-y)|\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\left|\psi\left(\frac{z-y}{t}\right)\right| |(\psi_t * b)(z)||\phi_t(z-y)|\, dz \\
&\leq \frac{2^n}{t^n}\|\psi\|_{L^\infty}\|b\|_*\|\psi\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\phi_t(z-y)|\, dz \\
&\leq \frac{C}{t^n}\|\phi\|_{L^1}\|b\|_* \leq \frac{C'}{t^n}\|b\|_*.
\end{aligned}$$

Como ϕ e ψ são suportadas na bola unitária, então $K_t(x,y) = 0$ se $|x-y| > 2t$, e assim temos que $\left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{-n-2} > 3^{-n-2}$ então,

$$|K_t(x,y)| \leq C\|b\|_* t^{-n}\left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{-n-2},$$

de isto segue que

$$\begin{aligned}
|K(x,y)| \leq C\int_0^\infty |K_t(x,y)|\frac{dt}{t} &\leq C\|b\|_*\int_0^\infty t^{-n-1}\left(\frac{t+|x-y|}{t}\right)^{-n-2} dt \\
= C\|b\|_*\int_0^\infty \frac{t}{(t+|x-y|)^{n+2}}\, dt &\leq C\|b\|_*\int_0^\infty \frac{1}{(t+|x-y|)^{n+1}}\, dt \\
= C\|b\|_*\left(\frac{(t+|x-y|)^{-n}}{-n}\Bigg|_0^\infty\right) &= \frac{C\|b\|_*}{|x-y|^n}.
\end{aligned}$$

Por argumentos análogos podemos provar que

$$\begin{aligned}
|\nabla_x K_t(x,y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^{n+1}}\psi_t'(x-z)(\psi_t * b)(z)\phi_t(z-y)\, dz\right| \\
&\leq \frac{2^n}{t^{n+1}}\|\psi\|_{L^\infty}\|b\|_*\|\psi'\|_{L^\infty}\|\phi\|_{L^1} \leq \frac{C}{t^{n+1}}\|b\|_*,
\end{aligned}$$

e da mesma forma $|\nabla_y K_t(x,y)| \leq \dfrac{C}{t^{n+1}}\|b\|_*$, então

$$|\nabla_x K_t(x,y)| + |\nabla_y K_t(x,y)| \leq C\|b\|_* t^{-n-1}\left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{-n-2},$$

assim temos que

$$|\nabla_x K_t(x,y)| + |\nabla_y K_t(x,y)| \leq \frac{C\|b\|_*}{|x-y|^n}.$$

Desta desigualdade segue que K satisfaz as condições de núcleo padrão (3.0.11), (3.0.12) e (3.0.13) com $\delta = 1$ e constante $C\|b\|_*$.

(2) *Limitação em L^2.*

Seja $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1$. Então pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\langle Lf,g\rangle &= c\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty (\psi_t * b)(x)(\phi_t * f(x))(\psi_t * g(x))\frac{dt}{t}\,dx\\ &\leq c\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty |\psi_t * b(x)|^2|\phi_t * f(x)|^2\frac{dt}{t}\,dx\right)^{1/2}\times\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\psi_t * g(x)|^2\,dx\frac{dt}{t}\right)^{1/2},\end{aligned}$$

o primeiro termo é limitado por $C\|b\|_*\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. No segundo termo aplicamos o teorema de Plancherel,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\psi_t * g(x)|^2\,dx\frac{dt}{t}\right)^{1/2} &= \left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|(\psi_t * g)\widehat{\ }(\xi)|^2\,d\xi\frac{dt}{t}\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{\psi}_t(\xi)|^2\cdot|\widehat{g}(\xi)|^2\,d\xi\frac{dt}{t}\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{g}(\xi)|^2\left(\int_0^\infty\frac{|\widehat{\psi}(t\xi)|^2}{t}\,dt\right)\,d\xi\right)^{1/2} \leq C\|g\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Portanto, $\langle Lf,g\rangle \leq C\|b\|_*\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2} \leq C\|b\|_*\|f\|_{L^2}$, assim L é limitado em L^2.

(3) $L1 = b$ *and* $L^*1 = 0$

Para cada $t > 0$ temos que

$$(\psi_t * ((\psi_t * b)\phi_t * \cdot))^* = \phi_t * ((\psi_t * b)\psi_t * \cdot).$$

Como ψ tem integral zero, temos $\psi * 1 = 0$ e assim segue que

$$L^*1 = c\int_0^\infty \phi_t * ((\psi_t * b)\psi_t * 1) = 0.$$

Agora, seja $g \in C_{c,0}^\infty$. Como ϕ tem integral 1, temos $\phi_t * 1(x) = 1$, assim temos que

$$\begin{aligned}\langle L1,g\rangle &= c\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\psi_t * b(x)\phi_t * 1(x)\psi_t * g(x)\,dx\frac{dt}{t}\\ &= c\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} b(x)\psi_t * \psi_t * g(x)\,dx\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Para que esta integral seja igual a $\langle b,g\rangle$, precisamos que

$$c\int_0^\infty \psi_t * \psi_t * g(x)\frac{dt}{t} = g \tag{5.1.7}$$

onde a integarl converge en H^1. Se tomamos a transformada de Fourier vemos que (5.1.7) cumpre em L^2 se, e somente se para qualquer $\xi \neq 0$,

$$c\int_0^\infty |\psi(t\xi)|^2\frac{dt}{t} = 1.$$

Como ψ é radial, a integral não depende de ξ, e assim esta determinado o valor de c.
□

Dado um operador T o qual satisfaz as condições do Teorema T1, suponha que $T1 = b_1$ e $T^*1 = b_2$. Então pelo lema 5.1.1, existem operadores Calderón-Zygmund L_1 e L_2 talque $L_1 1 = b_1$, $L_1^* 1 = 0$, $L_2 1 = b_2$, $L_2^* 1 = 0$. Então o operador $\widetilde{T} = T - L_1 - L_2^*$ tem a propriedade de restritamente limitado porque L_1 e L_2 são limitados em L^p e assim são restritamente limitados e o operador $\widetilde{T}$ satisfaz

$$\widetilde{T}1 = b_1 - b_1 - 0 = 0 \ \text{ e } \ \widetilde{T}^*1 = b_2 - 0 - b_2 = 0.$$

Pelo Caso 1 temos que $\widetilde{T}$ é limitado em L^2 e assim T também é limitado em L^2 e assim concluimos a prova do Teorema T1.

$\square$

Dado um núcleo padrão K antisimétrico, isto é, $K(x,y) = -K(y,x)$, podemos associá-lo com um operador T definindo

$$\langle Tf, g\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} K(x,y) f(y) g(x)\, dy\, dx \tag{5.1.8}$$

Pela antisimetria de K temos

$$\langle Tf, g\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|y-x|>\epsilon} -K(x,y) f(x) g(y)\, dx\, dy \tag{5.1.9}$$

Então somando (5.1.8) e (5.1.9),

$$\langle Tf, g\rangle = \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} K(x,y)[f(y)g(x) - f(x)g(y)]\, dy\, dx$$

Adicionando e substraendo $f(x)g(y)$ ao termo em colchetes e aplicando o teroema do valor médio temos

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{|x-y|>\epsilon} K(x,y)[f(y)(g(x) - g(y)) + (f(y) - f(x))g(y)]\, dy\, dx \right| \\
&\le \int_{|x-y|>\epsilon} |K(x,y)||f(y)||g(x) - g(y)|\, dy\, dx + \int_{|x-y|>\epsilon} |K(x,y)||f(y) - f(x)||g(y)|\, dy\, dx \\
&\le C \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{1}{|x-y|^n}|x-y|(|f(y)| + |g(y)|)\, dy\, dx \le C' \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}\, dy\, dx
\end{aligned}$$

e assim a integral converge absolutamente, portanto

$$\langle Tf, g\rangle = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)[f(y)g(x) - f(x)g(y)]\, dy\, dx.$$

Este operador tem a propriedade de limitação fraca.

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle T\phi_1^{z,R}, \phi_2^{z,R}\rangle &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\left[\phi_1^{z,R}(y)\phi_2^{z,R}(x) - \phi_1^{z,R}(x)\phi_2^{z,R}(y)\right] dy\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\left[\phi_1\left(\frac{y-z}{R}\right)\phi_2\left(\frac{x-z}{R}\right) - \phi_1\left(\frac{x-z}{R}\right)\phi_2\left(\frac{y-z}{R}\right)\right] dy\, dx
\end{aligned}$$

Fazendo mudança de variáveis $\frac{x-z}{R} = x$ e $\frac{y-z}{R} = y$, temos,

$$\begin{aligned}\langle T\phi_1^{z,R}, \phi_2^{z,R}\rangle &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} R^{2n}K(Rx+z, Ry+z)[\phi_1(y)\phi_2(x) - \phi_1(x)\phi_2(y)]\,dy\,dx \\ &= R^n\langle T_{z,R}\phi_1, \phi_2\rangle,\end{aligned}$$

onde $T_{z,R}$ é definido como em (5.1.8) com o núcleo $\widetilde{K}(x,y) = R^nK(Rx+z, Ry+z)$. Este é um núcleo padrão com a mesma constante como o núcleo K, ja que

$$|\widetilde{K}(x,y)| \leq R^n \cdot \frac{C}{|R(x-y)|^n} = \frac{C}{|x-y|^n}.$$

Corolário 5.1.1. *Se K é um núcleo padrão o qual é antisimétrico e T é um operador definido por (5.1.8), então T é limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $T1 \in$BMO.*

Demonstração: Como T^* é associado com o núcleo padrão $K(y,x) = -K(x,y)$ então $T^*1 = -T1$, e ja se mostrou que T tem a propriedade de limitação fraca. Portanto pelo Teorema 5.1.1, o resultado segue.

Exemplo 5.1.5:(Uma aplicação do Teorema T1)

Definimos os comutadores Calderón-Zygmund

$$T_kf(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon}\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^k\frac{f(y)}{x-y}\,dy,$$

onde $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é lipschitziana e $k > 0$ é um inteiro. Estos são operadores como em (5.1.8) com núcleos antisimétricos

$$K_k(x,y) = \frac{(A(x)-A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}.$$

Corolário 5.1.2. *Os operadores T_k são limitados em L^2 e existe uma constante positiva C tal que $\|T_k\| \leq C^k\|A'\|_{L^\infty}^k$.*

Segue-se do Corolário 5.1.2 e da Definição 3.0.4 que os $T_k's$ são operadores Calderón-Zygmund.

Outro operador que consideramos é associado com o núcleo antisimétrico

$$K(x,y) = \frac{1}{x-y+i(A(x)-A(y))}$$

e é relacionado à integral de Cauchy ao longo de uma curva de Lipschitz. Se $\|A'\|_{L^\infty} < 1$, então

$$K(x,y) = \frac{1}{x-y}\cdot\frac{1}{1+i\frac{A(x)-A(y)}{x-y}} = \frac{1}{x-y}\sum_{k=0}^{\infty}\left(i\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} i^kK_k(x,y).$$

Desta expansão e pelo Corolário 5.1.2 obtemos o seguinte,

Corolário 5.1.3. *Existe $\epsilon > 0$ tal que se $\|A'\|_{L^\infty} \leq \epsilon$ então o operador associado com o núcleo K é um operador Calderón-Zygmund.*

Referências Bibliográficas

[CM] R. Coifman and Y. Meyer, *Wavelets, Calderón-Zygmund and Multilinear Operators*, Cambridge University Press, 1997.

[D] Javier Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics. Vol. 29 American Mathematical Society.

[GR] García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics,* North Holland Math. Studies 116, North Holland, Amsterdam, 1985.

[H] J. Hounie, *Teoria Elementar das Distribuições*, 12 Col. Bras. Mat., IMPA, 1979.

[R1] W. Rudin, *Funtional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[R2] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*,McGraw-Hill, New York, 1987.

[S1] Elias M. Stein and Guido Weiss, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, 1970.

[S2] Elias M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton University Press, 1993. 4.1

[SW] Elias M. Stein and Guido Weiss, *Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1990. 1.1.1, 1.1.1, 1.1.1, 1.1.1, 1.1.2, 1.1.2, 1.1.2, 1.1.2, 1.1.2, 1.1.2, 1.1.2, 1.1.2

[T] Alberto Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*. Academic Press, Inc