UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Teoria de Littlewood-Paley e o Problema de Cauchy para a Equação da Onda Cúbica

Aldo Vieira Pinto

SÃO CARLOS

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Teoria de Littlewood-Paley e o Problema de Cauchy para a Equação da Onda Cúbica

Aldo Vieira Pinto

Orientador: Prof. Dr. José Ruidival dos Santos Filho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS
2010

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

P659tl

Pinto, Aldo Vieira.
Teoria de Littlewood-Paley e o problema de Cauchy para a equação da onda cúbica / Aldo Vieira Pinto. -- São Carlos : UFSCar, 2010.
82 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Análise. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Equação da onda. 4. Estimativas de Strichartz. 5. Bony, Decomposição. I. Título.

CDD: 515 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho
DM - UFSCar

Prof. Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp
DM - UFSCar

Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert
FFCLRP - USP

Agradecimentos

A Deus, por Seu infinito amor, bondade e sabedoria; pelo dom da vida e pelo direcionamento aos caminhos a serem trilhados; pelas oportunidades e por me dar força para enfrentar os momentos de dificuldade (e aprender com eles).

À minha mãe Célia, pelo apoio incondicional e por sempre acreditar em mim e nos meus sonhos, por ser presença constante em minha vida apesar da distância. Ao meu irmão Anderson, ao meu pai Celso e aos meus tios e avós, por estarem sempre a minha espera com um abraço sincero; em especial a tia Leci, pelas palavras de perseverança e por participar diretamente de cada etapa da minha formação acadêmica. À toda minha família, pelo amor, incentivo e proteção: minha base e referência.

Ao meu orientador, Professor José Ruidival dos Santos Filho, pela orientação dedicada e experiências generosamente compartilhadas; pela amizade, disponibilidade, paciência e respeito.

À minha madrinha Vera Lúcia, por me despertar o gosto pelo "aprender"; à professora Rita Zanchet Couto, pelo incentivo constante. Aos professores do curso de Matemática da UNIPLAC, principalmente ao Ailton Durigon, ao Carlos Leão e ao Valdeci Costa, pelos conselhos e direcionamento. Aos professores do DM-UFSCar, pelos ensinamentos e receptividade. A todos os educadores que passaram em minha vida e deixaram não só a semente do conhecimento, mas também lições de vida e exemplos de caráter.

Ao amigo Silvestre; ao Juliano, ao Rodrigo e à Elaine, pela convivência, e aos amigos do DM; em particular a turma de mestrado de 2008, pelo companheirismo, amizade e reciprocidade.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o resultado de boa-colocação para a equação da onda cúbica $\Box u + u^3 = 0$ em $\mathbb{R}^3$, devido a H. Bahouri e J.-Y. Chemin, no qual os dados de Cauchy estão no espaço de Sobolev homogêneo $\dot{H}^{3/4}(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}^{-1/4}(\mathbb{R}^3)$. A prova utiliza um método de interpolação não-linear, decomposição de Bony e desigualdade logarítmica de Strichartz, todas formuladas na Teoria de Littlewood-Paley.

Palavras-Chave: Equação da Onda Cúbica. Teoria de Littlewood-Paley. Decomposição de Bony. Estimativas de Strichartz.

Abstract

In this work, we study the result of well-posedness for the cubic wave equation $\Box u + u^3 = 0$ in $\mathbb{R}^3$, due to H. Bahouri e J.-Y. Chemin, where the Cauchy data is in the Homogeneous Sobolev space $\dot{H}^{3/4}(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}^{-1/4}(\mathbb{R}^3)$. The proof relies on nonlinear interpolation method, the Bony's decomposition and the logarithmic Strichartz estimates, as formulated in the Littlewood-Paley Theory.

Keywords: Cubic Wave Equation. Littlewood-Paley Theory. Bony's decomposition. Strichartz estimates.

Sumário

Introdução

Consideremos o problema de Cauchy semilinear

$$\begin{cases} \Box u + u^3 = 0 \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Box = \partial_t^2 - \Delta$ é o operador da onda.

Alguma hipótese de pequenez e/ou decaimento devem ser impostas nos dados de Cauchy para que existam soluções globais. Por exemplo, consideremos a EDO

$$\begin{cases} u''(t) + u^3(t) = 0 \\ u(0) = 0 \text{ e } u'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

ou seja, procuramos para (1) soluções independentes de x com valores iniciais constantes. Multiplicando a EDO por $u'(t)$ teremos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u'^2(t)}{2} + \frac{u^4(t)}{4}\right) = 0 \tag{2}$$

e, por integração,

$$F(u) \overset{\text{def}}{=} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Observemos que F é uma função crescente, e a principio definida para $u < 1$. Como $T = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ é finito, a função $u(t) = F^{-1}(\frac{t}{\sqrt{2}})$ é solução válida para $t < T$. Também, o limite de $u(t)$ vale 1 quando $t \to T$. Por conseguinte, a derivada de u em $t = T$ seria igual a zero pela conservação pontual de energia em (2). Assim, devemos ter $u(t) = 1$ se $t > T$.

Mas se u fosse de classe C^2 e solução da EDO de segunda ordem, a concavidade seria voltada para baixo, impossibilitando de ser constante para $t > T$. Consequentemente, u não pode ser C^2 para $t > T$. Este é um fenômeno de explosão na segunda derivada.

No que diz respeito a estas questões, existe uma vasta bibliografia direcionada a existência de singularidades para equação hiperbólicas não-lineares, revitalizadas nos trabalhos de Fritz John (ver [16]).

Alguns resultados existentes na literatura mostram que o problema de Cauchy (1) é globalmente bem-posto quando $(u_0, u_1) \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^3)$, para determinados valores de s. Por exemplo, H. Lindblad e C. D. Sogge, em [19], provaram que a equação (1) admite existência e unicidade de solução para $s = 1/2$ com dados iniciais suficientemente pequenos. Já C. E. Kenig, G. Ponce e L. Vega, em [17], obtiveram o resultado quando $s > 3/4$, com a hipótese adicional de que $u_0 \in L^4$, mas sem a condição de pequenez.

O próximo (e natural) passo é investigar se o mesmo ocorre quando $s = 3/4$ (pois neste caso, $u_0 \in L^4$, pelos teoremas de mergulho). O resultado apresentado por H. Bahouri e J.-Y. Chemin em [2], o qual estudamos neste trabalho, responde a pergunta como caso particular do seguinte

Teorema 1 Suponhamos que $(u_0, u_1) \in \dot{B}^{3/4}_{2,4} \times \dot{B}^{-1/4}_{2,4}$ tal que $\dot{S}_0 u_0$ pertence a L^2. Então existe uma única solução global de (1) no espaço $L^4_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L^4)$.

A prova utiliza um método de interpolação não-linear, por meio da decomposição de Littlewood-Paley. Além disso, requer o uso das estimativas de Strichartz, especialmente a desigualdade logarítmica, que relaciona normas de soluções da equação da onda livre cujo suporte da Transformada de Fourier está suportada em conjuntos diádicos.

O presente texto tem como objetivo expor algumas das ferramentas necessárias para a compreensão da demonstração deste resultado. No Capítulo 1, apresentamos os principais tópicos relacionados a Teoria das Distribuições e, através da Transformada de Fourier, definimos os espaços de Sobolev.

No Capítulo 2, abordamos a decomposição de Littlewood-Paley e introduzimos os Espaços de Besov e a Decomposição de Bony, como aplicações. Finalmente, no terceiro capítulo, deduzimos algumas propriedades a respeito da equação da onda cúbica e nos dedicamos à prova do Teorema 1.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo destina-se a estabelecer a linguagem e os fatos básicos necessários a compreensão dos capítulos subsequentes. Enunciamos os principais resultados a respeito da Transformada de Fourier, definimos os espaços de Sobolev e exploramos algumas de suas propriedades. As referências básicas são [12], [14] e as notas de curso [5].

1.1 Terminologias e Notações

Consideremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$ munido do produto interno canônico

$$x.y = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i,$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_d)$ e $y = (y_1, \cdots, y_d)$ são elementos de $\mathbb{R}^d$.

Assim, se $|\cdot|$ é a norma usual em $\mathbb{R}^d$ proveniente deste produto interno e $r_0, r_1 > 0$, indicamos por

$$B(x_0, r_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^d; |x - x_0| < r_0\right\}$$

a bola centrada em x_0 e raio r_0 e

$$\mathcal{C}(x_0, r_0, r_1) = \left\{x \in \mathbb{R}^d; r_0 < |x - x_0| < r_1\right\}$$

a coroa centrada em x_0, com raio menor r_0 e raio maior r_1.

Se Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^d$ e k um inteiro não-negativo, a classe $C^k(\Omega)$ consiste de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que tem derivadas contínuas de ordem menor ou igual que k. Denotamos por $C^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis.

Usualmente escrevemos as derivadas de uma função $f \in C^\infty(\Omega)$ de uma maneira concisa por meio da notação dos multi-índices. Um multi-índice é uma d-upla de inteiros não-negativos. Assim, dado $(\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ um multi-índice, sua ordem é dada por $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ e dizemos que $\alpha \leq \beta$ se $\alpha_i \leq \beta_1, \forall i = 1, \cdots, d$.
Também, para $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$$

Assim,

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d} f,$$

ou seja, $\partial_{x_i}^{\alpha_i}$ representa a derivada parcial sucessiva (α_i-vezes) com respeito a variável x_i.

1.2 Espaços L^p

Fixemos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, ou seja, X é um conjunto não-vazio, $\mathcal{M}$ é uma $\sigma -$ álgebra de subconjuntos de X e $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ uma medida. Se f é uma função mensurável sobre X e $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Também, para $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}$$

com a convenção de que $\inf \emptyset = \infty$. Em alguns casos, $\|f\|_{L^\infty}$ é chamado supremo essencial de f e escrevemos

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{supess}_{x \in X} |f(x)|.$$

Definimos

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C};\ \text{f é mensurável e } \|f\|_{L^p} < \infty\}.$$

Dizemos que duas funções definem o mesmo elemento de L^p quando elas sao iguais em quase toda a parte. Mediante esta identificação, temos que o espaço $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, munido da norma $\|\cdot\|_{L^p}$, é um espaço de Banach (para a prova, ver [21], por exemplo).
Recordemos que dois números reais p e p' satisfazendo $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, com $p,\ p' > 1$ são ditos expoentes conjugados.

Proposição 1.2.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $1 \leq p,\ p' \leq \infty$ *expoentes conjugados. Se* f *e* g *são funções mensuráveis sobre* X,

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}} \tag{1.1}$$

Demonstração: Ver [9], pág. 174. ■

Se $p = p' = 2$, (1.1) é conhecida como Desigualdade de Cauchy-Schwartz.

No caso particular em que μ é a medida da contagem sobre um conjunto A, é costume denotar o espaço L^p correspondente por $\ell^p(A)$, ou simplesmente ℓ^p, se A é enumerável. Neste caso, um elemento de ℓ^p pode ser visto como uma sequência $x = (x_j)$, $j \in A$ tal que

$$\sum_{j\in A} |x_j|^p < \infty,$$

se $p < \infty$, ou

$$\sup_{j\in A} |x_j| < \infty,$$

caso $p = \infty$.

Proposição 1.2.2 *Se* A *é um conjunto e* $0 < p < q \leq \infty$, *então* $\ell^p(A) \hookrightarrow \ell^q(A)$, *ou seja, a aplicação inclusão é contínua, e vale* $\|f\|_{\ell^q} \leq \|f\|_{\ell^p}$.

Proposição 1.2.3 (Desigualdade de Chebyshev) *Se* $f \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$, *então para todo* $\lambda > 0$,

$$\mu(\{x : |f(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^p$$

A prova destes dois resultados pode ser encontrada em [9], nas páginas 178 e 185, respectivamente. Enunciamos a seguir uma caracterização para a norma em L^p através de integrais sobre $[0, \infty)$:

Teorema 1.2.1 *Se* $p \in [1, \infty)$, *então para toda função mensurável* f *sobre* $(X, \mathcal{M}, \mu)$,

$$\|f\|_{L^p}^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu(\{x : |f(x)| > \lambda\})d\lambda$$

Demonstração: Ver [9], pág. 191. ■

Será útil, em algumas estimativas, a proposição abaixo e seu respectivo corolário, que generaliza a idéia da integração com coordenadas polares para $\mathbb{R}^d$. Novamente, a prova pode ser vista em [9], na página 75.

Proposição 1.2.4 *Seja f é uma função mensurável sobre $\mathbb{R}^d$, não-negativa ou integrável tal que $f(x) = g(|x|)$, para alguma função g em $(0, \infty)$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \sigma(S^{d-1}) \int_0^\infty g(r)r^{d-1}dr,$$

onde $\sigma(S^{d-1})$ expressa a medida da área de S^{d-1}.

Corolário 1.2.1 *Seja $s \in \mathbb{R}$. Se $s > d/2$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^s} < \infty$$

Na próxima seção, para obtermos exemplos de distribuições, recordemos a seguinte

Definição 1.2.1 *Se f é uma função complexa, Lebesgue mensurável definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tal que, para cada compacto $K \subset \Omega$*

$$\int_K |f|dx < \infty,$$

dizemos que f é localmente integrável. Neste caso, escrevemos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Podemos ainda estender esta definição definindo $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ para $p \geq 1$, que será o espaço das funções mensuráveis cuja p-ésima potência é localmente integrável:

Definição 1.2.2 *Seja f é uma função complexa, Lebesgue mensurável definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Dizemos que $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ se, para cada compacto $K \subset \Omega$, $f \in L^p(K)$.*

A sua topologia está descrita via as semi-normas

$$f \longmapsto \int_K |f|^p dx$$

onde K é um subconjunto compacto qualquer de Ω.

No estudo de Equações Diferenciais Parciais, a variável "tempo" desempenha um papel diferenciado na busca por soluções. Seguindo [7], consideremos espaços normados de funções que envolvem tempo com imagens em Espaços de Banach:

Definição 1.2.3 *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e J um subconjunto Lebesgue-mensurável de $\mathbb{R}$.*

(i) *O espaço $L^p(J,X)$ consiste de todas as funções mensuráveis $u : J \to X$ com*

$$\|u\|_{L^p(J,X)} \overset{def}{=} \left(\int_J \|u(t)\|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty$$

para $1 \leq p < \infty$, e

$$\|u\|_{L^\infty(J,X)} \overset{def}{=} supess_{t\in J} \|u(t)\| < \infty.$$

(ii) *O espaço $C(J,X)$ compreende todas as funções contínuas $u : J \to X$ com*

$$\|u\|_{C(J,X)} \overset{def}{=} \sup_{t\in J} \|u(t)\| < \infty$$

De modo análogo, $L^p_{\text{loc}}(J,X)$ consiste de todas as funções mensuráveis $u : J \to X$ tal que, para qualquer compacto $K \subset J$, $u \in L^p(K,X)$.
Quando J for o intervalo $[0,T]$, para $T > 0$, utilizamos a notação $L^p([0,T],X) = L^p_T(X)$.

1.3 Distribuições

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto e $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Definimos o suporte de ϕ, o qual denotaremos por $S(\phi)$, como sendo o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega;\ \phi(x) \neq 0\}$.

Definição 1.3.1 *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. O conjunto*

$$C_c^\infty(\Omega) = \{\phi : \Omega \to \mathbb{C};\ u \in C^\infty \text{ e } S(\phi) \text{ é compacto}\}$$

é o espaço das funções testes.

Para a existência de funções testes não-nulas, será útil a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser vista na página 7 de [12].

Proposição 1.3.1 *Seja K um subconjunto compacto de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi = 1$ numa vizinhança de K.*

O seguinte resultado relaciona o comportamento, com respeito a norma em L^2, de funções teste em $C_c^\infty(\Omega)$ e de suas derivadas, quando Ω é limitado:

Lema 1.3.1 (Lema de Poincaré) *Seja Ω um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^d$, limitado em alguma direção, digamos $\Omega \subset (-R, R) \times \mathbb{R}^{d-1}$. Então, para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,*

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 \leq 4R^2 \|\partial_{x_1}\varphi\|_{L^2}^2.$$

Demonstração: Ver [5], pág. 22. ∎

Temos que $C_c^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial denso em $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, por [21]. Conforme [3], é possível equipá-lo com uma estrutura de espaço vetorial topológico, não-metrizável, de modo que $C_c^\infty(\Omega)$ torne-se um espaço completo. Com esta estrutura topológica, teremos que uma sequência $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funções teste converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subset \Omega$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e, para todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m converge uniformemente a zero quando $j \to \infty$.

Definição 1.3.2 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aberto. Um funcional linear e contínuo $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é dito uma distribuição em Ω. O espaço das distribuições em Ω se denota com $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Indicamos o valor da distribuição u na função teste ϕ por $\langle u, \phi\rangle$.

Exemplo 1.3.1 Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e definamos o funcional linear

$$\langle T_f, \phi\rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx, \ \ \phi \in C_c^\infty(\Omega) \tag{1.2}$$

Se $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência convergindo a zero em $C_c^\infty(\Omega)$, seja $K \subset \Omega$ compacto tal que $S(\phi_j) \subset K$. Então

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \phi_j\rangle| &\leq \int_K |f(x)||\phi_j(x)|dx \\ &\leq \sup_{x\in K} |\phi_j(x)| \int_K |f(x)|dx \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Portanto, a expressão (1.2) define uma distribuição em Ω . Também, se $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\langle T_f, \phi\rangle = \langle T_g, \phi\rangle$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, então $f = g$ q.t.p (ver prova na pág. 11 de [12]). Deste modo, a aplicação injetiva $f \mapsto T_f$ nos permite considerar vários espaços de funções como subespaços de $\mathcal{D}'(\Omega)$. É comum escrever simplesmente $\langle f, \phi\rangle$ ao invés de $\langle T_f, \phi\rangle$.

Dizemos que uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é igual a zero num aberto $U \subset \Omega$ se $\langle u, \phi \rangle = 0$, para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$. Definimos então o suporte de u, e denotemos por $S(u)$, como a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é nula. Denotamos com $\mathcal{E}'(\Omega)$ o subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.

Teorema 1.3.1 *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então $S(u)$ é compacto se, e somente se, existe um funcional linear e continuo v em $C^\infty(\Omega)$ cuja restrição a $C_c^\infty(\Omega)$ é igual a u.*

A prova deste Teorema se encontra na página 41 de [12]. Aqui, a noção de sequencialmente contínua é a seguinte: uma sequência de funções $C^\infty(\Omega)$ converge para zero se, para todo compacto K e todo inteiro m, as derivadas de ordem m convergem uniformemente a zero em K quando $j \to \infty$.

Definição 1.3.3 *Dizemos que uma sequência $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}$, converge a $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se $\langle u_j, \phi \rangle$ converge a $\langle u, \phi \rangle$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.*

Suponhamos que u_n, $n = 1, 2, ...$ é uma sequência de distribuições em $\mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $u_n(\phi)$ é convergente para cada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Se definirmos $u(\phi) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(\phi)$, temos que u é um funcional linear. Mais ainda, u resulta contínuo em $C_c^\infty(\Omega)$.

Teorema 1.3.2 *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de distribuições em Ω, e suponhamos que, para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\langle u_n, \phi \rangle$ é uma sequência numérica de Cauchy. Então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [12], página 56. ■

1.3.1 Operações com Distribuições

Seja $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Como u é localmente integrável, a expressão (1.2) nos permite considerá-la como uma distribuição em Ω. Por integração por partes, temos

$$\int \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\phi(x)dx = -\int u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)dx,$$

para toda função teste ϕ. Desta maneira, por dualidade, podemos definir a distribuição

$$\langle \partial_{x_j} u, \phi \rangle = -\langle u, \partial_{x_j} \phi \rangle,$$

para toda $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Por indução em $|\alpha|$,

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle$$

Pelo mesmo argumento, definimos a multiplicação por uma função $f \in C^\infty(\Omega)$ como sendo a distribuição

$$\langle fu, \phi \rangle = \langle u, f\phi \rangle$$

Agora, sejam f, g duas funções contínuas em $\mathbb{R}^d$ tal que uma delas tenha suporte compacto. Então a convolução de f e g se define como

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int f(y)g(x-y)dy$$

A fim de estender a definição acima para o contexto das distribuições, consideremos a

Definição 1.3.4 *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ (ou $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e $\phi \in C^\infty(\Omega)$). Definimos a convolução de u e ϕ, denotada por $u * \phi$, a função definida por*

$$u * \phi(x) = \langle u, \breve{\phi}_x \rangle,$$

onde $\breve{\phi}_x(y) = \phi(x-y)$.

Valem as seguintes propriedades:

(i) $u * \phi \in C^\infty(\Omega)$ e suas derivadas são dadas por

$$\partial^\alpha(u * \phi) = \partial^\alpha u * \phi = u * \partial^\alpha \phi$$

(ii) $S(u * \phi) \subset S(u) + S(\phi)$

Teorema 1.3.3 *$C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [12], pág. 64. ∎

1.4 Distribuições Temperadas e Transformada de Fourier

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, definimos a Transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int e^{-ix.\xi} f(x)\, dx,\ \xi \in \mathbb{R}^d$$

onde i é a unidade imaginária e $x.\xi$ é o produto interno canônico.
Segue diretamente da definição que a aplicação $f \mapsto \widehat{f}$ define uma transformação linear de $L^1(\mathbb{R}^d)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}. \tag{1.3}$$

Mais ainda, está é uma aplicação que leva L^1 no espaço das funções contínuas que se anulam no infinito.

Lema 1.4.1 (Riemann-Lebesgue) *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Então $\widehat{f}$ é uma função contínua satisfazendo $\widehat{f}(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to \infty$.*

Demonstração: Ver [12], pág. 75. ∎

Se ϕ é uma função teste, prova-se que sua transformada de Fourier é analítica complexa em $\mathbb{C}^d$. Assim, $\widehat{\phi}$ não terá suporte compacto, a menos que ϕ seja nula, uma vez que o conjunto dos zeros de uma função analítica complexa não-nula em $\mathbb{C}^d$ tem interior vazio. Consideremos então um espaço que contém as funções de suporte compacto e que seja invariante pela Transformada de Fourier.

Definição 1.4.1 (Espaço de Schwartz) *Denotamos por $\mathcal{S}$ o subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ das funções ϕ tais que*

$$\|\phi\|_{N,\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1+|x|)^N |\partial^\alpha \phi| < \infty \tag{1.4}$$

para todo inteiro não-negativo N e para todo $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

Tanto as funções de $\mathcal{S}$ quanto as suas derivadas decrescem no infinito mais rapidamente do que qualquer potência negativa de $|x|$. Muniremos o espaço de Schwartz $\mathcal{S}$ com a topologia dada pela família enumerável de semi-normas em (1.4).

Exemplo 1.4.1 O espaço das funções-testes está contido densamente em $\mathcal{S}$, mas para $x \in \mathbb{R}^d$, $\phi(x) = e^{-|x|^2}$ pertence a $\mathcal{S}$, porém não possui suporte compacto. Assim, $C_c^\infty \subsetneq \mathcal{S}$. Tendo em vista a Proposição 1.2.4, segue que se $\phi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^p} &= \left(\int |\partial^\alpha \phi(x)|^p \frac{(1+|x|)^{n+1}}{(1+|x|)^{n+1}} dx \right)^{1/p} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1+|x|)^{\frac{n+1}{p}} |\partial^\alpha (x) \phi| \leq C \|\phi\|_{N,\alpha}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde N é um inteiro positivo maior que $\frac{n+1}{p}$. Em particular, $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p$.

Teorema 1.4.1 *A Transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ é um operador linear e contínuo, continuamente inversível, cuja transformada inversa é dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}\phi(x) = \check{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} \phi(\xi) d\xi, \ \phi \in \mathcal{S}$$

A prova deste resultado encontra-se na página 77 de [12]. Se ϕ, $\psi \in \mathcal{S}$, utilizando o teorema anterior e as propriedades da convolução, provam-se as seguintes igualdades:

(i) $\widehat{\partial^\alpha \phi}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{\phi}(\xi)$

(ii) $\mathcal{F}(x^\alpha \phi(x))(\xi) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{\phi}(\xi)$

(iii) $\displaystyle\int \widehat{\phi}\psi \ dx = \int \phi \widehat{\psi} \ dx$

(iv) $\widehat{\phi * \psi} = \widehat{\phi}\widehat{\psi}$

(v) $\widehat{\phi\psi} = (2\pi)^{-d} \widehat{\phi} * \widehat{\psi}$

(vi) $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^{-d} \check{u}$, com $\check{u}(\xi) = u(-\xi)$.

Também, pela continuidade da Transformada de Fourier, garantida pelo Teorema 1.4.1, outras famílias de semi-normas que podem ser usadas para definir a topologia em $\mathcal{S}$ são dadas por

$$\|f\|_{k,\mathcal{S}} = \sup_{\substack{|\alpha| \leq k \\ x \in \mathbb{R}^d}} (1+|\xi|)^k \ |\partial^\alpha f(x)|, k \in \mathbb{N}$$

$$\|\widehat{f}\|_k = \sup_{\substack{|\alpha| \leq k \\ \xi \in \mathbb{R}^d}} (1+|\xi|)^k \ |\partial^\alpha \widehat{f}(\xi)|, k \in \mathbb{N}$$

Definição 1.4.2 *Um funcional linear e continuo em $\mathcal{S}$ é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas se denota com $\mathcal{S}'$.*

Exemplo 1.4.2 Uma vez que toda distribuição com suporte compacto se estende continuamente a $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, vale a inclusão $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$. Por restrição a $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, e como este é denso em $\mathcal{S}$, temos que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. Se $f \in L^p$, podemos identificá-la como uma distribuição temperada definindo, para cada $\phi \in \mathcal{S}$,

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int f(x)\phi(x)dx.$$

A linearidade é imediata e a integral acima é finita, pela desigualdade de Hölder. Para verificar a continuidade, se $\phi \in \mathcal{S}$, segue de (1.5) que

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \phi \rangle| &\leq \|f\|_{L^p} \|\phi\|_{L^{p'}} \\ &\leq C\|f\|_{L^p} \|\phi\|_{N,1} \end{aligned}$$

Da estimativa acima, concluímos também que $L^p \hookrightarrow \mathcal{S}'$.

Teorema 1.4.2 (Desigualdade de Young) *Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então a convolução $f * g \in L^r$, com $\dfrac{1}{r} + 1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, e vale*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Demonstração: Ver [10], pág. 20. ∎

Definição 1.4.3 *Se $u \in \mathcal{S}'$, a Transformada de Fourier $\widehat{u}$ de u se define por*

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle$$

Pelo Teorema 1.4.1, $\widehat{u}$ está bem definida e determina uma nova distribuição temperada. Mais ainda, $\mathcal{F}$ resulta contínua e inversível em $\mathcal{S}'$.

Proposição 1.4.1 *Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

(i) *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, a transformada $\widehat{f}$ de f como distribuição temperada e como função integrável coincidem.*

(ii) *Se* $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}$ *é uma função de classe* C^∞ *dada por*

$$\widehat{f}(\xi) = \langle f_x, e^{-ix\xi} \rangle \tag{1.6}$$

(iii) *Se* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *então* $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, *e vale*

$$\|f\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-d} \|\widehat{f}\|_{L^2}^2 \qquad (\textit{Identidade de Fourier-Plancherel})$$

Demonstração: Ver [12], pág. 81. ■

Observação 1.4.1 Consideremos uma distribuição $u \in \mathcal{S}'$ tal que $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pela Proposição 1.4.1, a Transformada de Fourier de $\widehat{u}$ é a função dada por

$$\widehat{\widehat{u}}(\xi) = \int e^{-ix.\xi} \widehat{u}(x) dx$$

Como $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^d \check{u}$, uma mudança de variáveis nos dá que

$$u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix.\xi} \widehat{u}(x) dx$$

Assim, se $\widehat{u} \in L^1$, podemos "recuperar" u pela fórmula de inversão dada pelo Teorema 1.4.1. Por argumento semelhante a demonstração do Lema de Riemann-Lebesgue, obtemos que $u \in C_0^0(\mathbb{R}^d)$, ou seja, u é contínua e vai a zero quando $|\xi| \to \infty$.
Também, pela mesma expressão,

$$|u(\xi)| \leq (2\pi)^{-d} \|\widehat{u}\|_{L^1},$$

para quase todo $\xi \in \mathbb{R}^d$, donde

$$\|u\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-d} \|\widehat{u}\|_{L^1}. \tag{1.7}$$

1.4.1 O Teorema de Paley-Wiener

Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, pela Proposição 1.4.1, $\widehat{u}$ é uma função C^∞ dada pela expressão (1.6). De uma maneira natural, podemos estender a função $\widehat{u}(\xi)$ de $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{C}^d$. Neste caso, conforme [12], esta extensão estará bem definida e será uma função holomorfa (inteira ou analítica) em $\mathbb{C}^d$, a qual se denomina Transformada de Fourier-Laplace de u.

Definição 1.4.4 *Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. A função inteira*

$$\widehat{u}(\zeta) = \langle u_x, e^{-ix\zeta} \rangle, \ \zeta \in \mathbb{C}^d$$

é dita a transformada de Fourier-Laplace de u. Sua restrição a $\mathbb{R}^d$ é a transformada de Fourier de u.

A Transformada de Fourier-Laplace preserva propriedades análogas a de Fourier em relação a derivação e convolução, por exemplo. O resultado abaixo, cuja prova pode ser encontrada em [12], dá condições para que uma função holomorfa em $\mathbb{C}^d$ seja a transformada de Fourier-Laplace de uma distribuição com suporte compacto.

Teorema 1.4.3 (Teorema de Paley-Wiener) *Uma função $U(\zeta)$ inteira em $\mathbb{C}^d$ é a transformada de Fourier-Laplace de uma distribuição $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, com $S(u) \subset \{x; |x| \leq R\}$ se, e somente se, existem constantes positivas C e N tais que*

$$|U(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^N \exp(R|Im\zeta|) \tag{1.8}$$

1.5 Espaços de Sobolev

Neste texto, vamos nos restringir aos espaços de Sobolev modelados em L^2. Estes espaços desempenham um papel crucial no estudo de equações diferenciais parciais, lineares ou não. O ponto de partida será a Transformada de Fourier.

Definição 1.5.1 *Seja s um número real. Uma distribuição temperada u pertence ao* **espaço de Sobolev de índice s**, *denotado por $H^s(\mathbb{R}^d)$ se, e somente se,*

$$\widehat{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d) \ \text{e} \ \widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d, (1 + |\xi|^2)^s d\xi)$$

Escrevemos

$$\|u\|^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

Proposição 1.5.1 *Para todo e qualquer $s \in \mathbb{R}$, o espaço H^s equipado com a norma $\|\cdot\|_{H^s}$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: É imediato que a norma $\|\cdot\|_{H^s}$ provém do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}d\xi$$

Provemos então que este espaço é completo. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em H^s. Pela definição da norma, $(\widehat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$. Como este é completo, existe $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{u}_n - \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d,(1+|\xi|^2)^s d\xi)} = 0. \tag{1.9}$$

Em particular, a sequência $(\widehat{u}_n)$ converge a $\tilde{u}$ em $\mathcal{S}'$. Tomemos $u = \mathcal{F}^{-1}\tilde{u}$. Como a Transformada de Fourier é um isomorfismo de $\mathcal{S}'$, segue que $u \in \mathcal{S}'$. Por fim, $u_n \to u$ em H^s devido a (1.9). ∎

Notemos que os espaços de Sobolev formam uma família decrescente de espaços, com respeito ao índice s. De fato, $s \geq s'$ implica $(1+|\xi|^2)^{s'} \leq (1+|\xi|^2)^s$. Portanto, se uma distribuição temperada f é tal que $\widehat{f} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, segue que

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{H^{s'}} &= \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{s'} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|^2_{H^s}.\end{aligned}$$

Assim, $H^s(\mathbb{R}^d) \subseteq H^{s'}(\mathbb{R}^d)$ e tal inclusão é continua.
Os teoremas que seguem têm como objetivo caracterizar os espaços de Sobolev para determinados valores de s sem o uso explícito da Transformada de Fourier.

Teorema 1.5.1 *Seja s um número inteiro não-negativo. O espaço $H^s(\mathbb{R}^d)$ é o espaço das funções u pertencentes a L^2 tal que, para todo α em $\mathbb{N}^d$, com $|\alpha| \leq s$ temos $\partial^\alpha u \in L^2$.*

Demonstração: Seja $s \in \mathbb{N}$. Pelo binômio de Newton, temos $(1+|\xi|^2)^s = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} |\xi|^{2i}$. Agora, fixado $0 \leq i \leq s$ e $u \in L^2$,

$$\begin{aligned}|\xi|^{2i}|\widehat{u}(\xi)|^2 &= (\xi_1^2 + ... + \xi_d^2)^i |\widehat{u}(\xi)|^2 \\ &= \sum_{|\alpha|=i} c_\alpha |\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)|^2 \\ &= \sum_{|\alpha|=i} c_\alpha |\widehat{\partial^\alpha u}|^2,\end{aligned}$$

pois $\widehat{\partial^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)$, pelo Teorema 1.4.1. Assim,

$$\begin{aligned}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 &= \sum_{i=0}^{s}\sum_{|\alpha|=i} c_\alpha \binom{s}{i} |\widehat{\partial^\alpha u}|^2 \\ &= \sum_{|\alpha|\leq s} \tilde{c}_\alpha |\widehat{\partial^\alpha u}|^2\end{aligned}$$

Integrando em ambos os membros e utilizando a Identidade de Fourier-Plancherel, segue que

$$\begin{aligned}\int (1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi &= \int \sum_{|\alpha|\leq s} \tilde{c}_\alpha |\widehat{\partial^\alpha u}|^2 d\xi \\ &= \sum_{|\alpha|\leq s} (2\pi)^d \tilde{c}_\alpha \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

Tomando $C_1 = \min\left\{(2\pi)^d\tilde{c}_\alpha;\ |\alpha|\leq s\right\}$ e $C_2 = \max\left\{(2\pi)^d\tilde{c}_\alpha;\ |\alpha|\leq s\right\}$, obtemos

$$C_1 \sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \leq \int (1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C_2 \sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \tag{1.10}$$

■

Corolário 1.5.1 *$\mathcal{S}$ é continuamente incluído em H^s , $\forall s \in \mathbb{R}$*

Demonstração: Tendo em vista a caracterização dada pelo Teorema anterior, juntamente com a desigualdade (1.5), se $s \in \mathbb{N}$,

$$\|u\|_{H^s}^2 \leq C \sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \leq C \sum_{|\alpha|\leq s} \|\phi\|_{N,\alpha}^2,$$

para toda função $u \in \mathcal{S}$. Assim, $\mathcal{S} \hookrightarrow H^s$, se s é natural.

Por fim, se $s \in \mathbb{R}$ qualquer, denotando por $\lceil s \rceil$ o menor inteiro positivo maior ou igual que s, segue que $\mathcal{S} \hookrightarrow H^{\lceil s \rceil} \hookrightarrow H^s$, pela propriedade de encaixe. ■

Proposição 1.5.2 *Seja s um número real no intervalo $(0,1)$. Então o espaço H^s é o espaço das funções u de L^2 tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{d+2s}} dxdy < \infty$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda $u \in H^s$,

$$C^{-1}\|u\|_{H^s}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{d+2s}}dxdy \leq C\|u\|_{H^s}^2$$

Demonstração: Notemos que, pela Transformada de Fourier,

$$\mathcal{F} : u(x+y) - u(x) \longrightarrow \widehat{u}(\xi)(e^{iy\xi} - 1).$$

e assim, pela Identidade de Fourier-Plancherel,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x+y)-u(x)|^2 dx = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} |e^{iy\xi}-1|^2|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Aplicando o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{d+2s}}dxdy &= (2\pi)^{-d}\int\left(\int \frac{|e^{iy\xi}-1|^2}{|y|^{d+2s}}\right)|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi dy \\
&= \int F(\xi)|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi,
\end{aligned}$$

onde

$$F(\xi) = (2\pi)^{-d}\int \frac{|e^{iy\xi}-1|^2}{|y|^{2s}}\frac{dy}{|y|^d}.$$

Para cada $\xi \neq 0$, consideramos $z_1 = y.\xi$ e tomamos a mudança de variável ortogonal com jacobiano $|\xi|^d$. Deste modo, pelo Teorema de mudança de variáveis para integrais,

$$F(\xi) = (2\pi)^{-d}|\xi|^{2s}\int \frac{|e^{iz_1}-1|^2}{|z|^{d+2s}}dz.$$

A integral do lado direito independe de ξ e, pela condição sobre s, é finita. Assim,

$$F(\xi) = A|\xi|^{2s}, \text{ com } A > 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{d+2s}}dxdy &= \int |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int A|\widehat{u}(\xi)|^2|\xi|^{2s}d\xi \\
&\overset{(1)}{\leq} C\int(1+|\xi|^{2s})|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\overset{(2)}{\leq} C\int(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= C\|u\|_{H^s}^2
\end{aligned}$$

Na desigualdade (1), $C = \max\{1, A\}$ e, em (2), o fato de que a função

$$\rho(\xi) = \frac{1+|\xi|^{2s}}{(1+|\xi|^2)^s}$$

é contínua e limitada implica que existem constantes $M_1, M_2 \geq 0$ tal que $M_1 \leq \rho(\xi) \leq M_2$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$.

A outra desigualdade se prova de modo análogo. ∎

O exemplo abaixo ilustra o quão amplo é o espaço vetorial topológico $\bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s$.

Exemplo 1.5.1 Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Como $\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, temos que $\widehat{u} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Também, pela estimativa (1.8) dada pelo Teorema de Paley-Wiener, existem $C, N > 0$ tal que

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{1.11}$$

e assim para $s \in \mathbb{R}$ a ser escolhido, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s (1+|\xi|^2)^{2N} d\xi \\ &= C \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{s+2N} d\xi\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.2.4, se s satisfaz $s < -2N - \frac{d}{2}$, a integral acima é finita. Consequentemente, u pertence ao espaço de Sobolev H^s.

Teorema 1.5.2 *Seja s um número real qualquer.*

(i) *O espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^d)$*

(ii) *A multiplicação por uma função de $\mathcal{S}$ é uma aplicação contínua de H^s em H^s.*

Demonstração:

(i) Para a prova deste item, vamos utilizar a caracterização de densidade devido ao Corolário 12.3 da página 88 de [20]:

Propriedade: *Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado. Um subespaço $X \subset \mathcal{N}$ é denso em $\mathcal{N}$ se, e somente se, o único elemento de $\mathcal{N}^*$ (isto é, o conjunto das aplicações lineares e contínuas $f : \mathcal{N} \to \mathbb{C}$) que se anula em X é o funcional nulo.*

Assim, como H^s é um espaço de Hilbert, seja $u \in H^s$ tal que, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(\xi)(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = 0$$

Uma vez $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ é denso em $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \hookrightarrow H^s$ então, $\forall f \in \mathcal{S}$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = 0$$

Isto mostra que $\langle (1+|\cdot|^2)^s \widehat{u}, f\rangle = 0,\ \forall f \in \mathcal{S}$, o que implica que $(1+|\cdot|^2)^s\widehat{u} = 0$, no sentido das distribuições temperadas. Como a função $\rho(\xi) = (1+|\xi|^2)^s$ não se anula e $\mathcal{F}$ é um isomorfismo, segue que $u = 0$.

(ii) Sabemos que $\widehat{\varphi u} = (2\pi)^{-d}\widehat{\varphi} * \widehat{u},\ \forall u \in \mathcal{S}$. Então:

$$\begin{aligned} \|\varphi u\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{\varphi u}|^2 d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-d} \int \left((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \int |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)| d\eta \right)^2 d\xi \end{aligned}$$

Portanto, nosso objetivo é estudar a norma em L^2 da função definida por

$$U(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \int |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)| d\eta$$

Para isto, definimos

$$I_1(\xi) = \{\eta;\ 2|\xi-\eta| \leq |\eta|\}$$

$$I_2(\xi) = \{\eta;\ 2|\xi-\eta| \geq |\eta|\}$$

Podemos então escrever $U(\xi) = U_1(\xi) + U_2(\xi)$, onde

$$U_j(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \int_{I_j(\xi)} |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)| d\eta,\ j = 1, 2$$

Iniciaremos estimando o termo correspondente a $U_1(\xi)$.

Para tanto, observemos que se $\eta \in I_1(\xi)$ então

$$\frac{1}{2}|\eta| \overset{(1)}{\leq} |\xi| \overset{(2)}{\leq} \frac{3}{2}|\eta|.$$

De fato, pela desigualdade triangular,

$$|\eta| = |\eta - \xi + \xi| \leq |\eta - \xi| + |\xi| \leq \frac{|\eta|}{2} + |\xi| \Rightarrow \frac{1}{2}|\eta| \leq |\xi|$$

e, analogamente,

$$|\xi| = |\xi - \eta + \eta| \leq |\xi - \eta| + |\eta| \leq \frac{|\eta|}{2} + |\eta| \Rightarrow |\xi| \leq \frac{3}{2}|\eta|$$

Também, para todo $s \in \mathbb{R}$, existe $C > 0$ tal que, para a dupla (ξ, η), com $\eta \in I_1(\xi)$,

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq C(1 + |\eta|^2)^s \tag{1.12}$$

Com efeito, para $s \geq 0$, pela desigualdade (2):

$$1 + |\xi|^2 \leq 1 + \frac{9}{4}|\eta|^2 \leq \frac{9}{4}(1 + |\eta|^2) \Rightarrow (1 + |\xi|^2)^s \leq \left(\frac{9}{4}\right)^s (1 + |\eta|^2)^s$$

Agora, utilizando (1) para $s < 0$:

$$1 + |\xi|^2 \geq 1 + \frac{1}{4}|\eta|^2 \geq \frac{1}{4}(1 + |\eta|^2) \Rightarrow (1 + |\xi|^2)^s \leq \left(\frac{1}{4}\right)^s (1 + |\eta|^2)^s$$

Utilizando então a desigualdade (1.12) em $U_1(\xi)$, segue que

$$\begin{aligned} U_1(\xi) &= (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \int_{I_1(\xi)} |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)||\widehat{u}(\eta)| d\eta \\ &\leq C \int (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)||\widehat{u}(\eta)| d\eta \end{aligned}$$

Calculando a norma da função U_1 em L^2, temos

$$\begin{aligned} \|U_1\|_{L^2}^2 &= \int |U_1(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C^2 \int \left(\int (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)||\widehat{u}(\eta)| d\eta \right)^2 d\xi \\ &= C^2 \|\widehat{\varphi} * (1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}\|_{L^2}^2 \\ &\overset{(*)}{\leq} C^2 \|\widehat{\varphi}\|_{L^1}^2 \|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}\ \|_{L^2}^2 \\ &= C^2 \|\widehat{\varphi}\|_{L^1}^2 \|\widehat{u}\|_{H^s}^2 \end{aligned}$$

sendo que, em $(*)$, utilizamos a desigualdade de Young. Extraindo a raiz, obtemos

$$\|U_1\|_{L^2} \leq C\|\widehat{\varphi}\|_{L^1}\|u\|_{H^s}.$$

De maneira semelhante ao que fizemos para provar (1.12), se (η, ξ) uma dupla tal que $\eta \in I_2(\xi)$ e $s \geq 0$, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq C_1(1 + |\xi - \eta|^2)^s \text{ e } (1 + |\eta|^2)^s \leq C_2(1 + |\xi - \eta|^2)^s$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
U_2(\xi) &= (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \int_{I_2(\xi)} |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)|d\eta \\
&\leq (1+|\xi|^2)^{\frac{|s|}{2}} \int_{I_2(\xi)} |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)|(1+|\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}}(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}d\eta \\
&\leq C\int |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)|(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{u}(\eta)|d\eta \\
&\leq C\int (1+|\xi-\eta|^2)^{-\frac{(d+1)}{2}}(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{u}(\eta)|d\eta
\end{aligned}$$

Na última desigualdade, usamos o fato de que, como $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$, existe $C > 0$ tal que

$$|\widehat{\varphi}(z)| \leq C(1+|z|^2)^{-\frac{(d+1)}{2}-|s|}, \ \forall z \in \mathbb{R}^d$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|U_2\|_{L^2}^2 &\leq C^2\int\left(\int (1+|\xi-\eta|^2)^{-\frac{(d+1)}{2}}(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{u}(\eta)|d\eta\right)^2 d\xi \\
&= C^2\|(1+|\cdot|^2)^{-\frac{(d+1)}{2}} * (1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}\|_{L^2}^2 \\
&\leq C^2\|(1+|\cdot|^2)^{-\frac{(d+1)}{2}}\|_{L^1}^2\|(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}\|_{L^2}^2 \\
&= C^2\|(1+|\cdot|^2)^{-\frac{(d+1)}{2}}\|_{L^1}^2\|u\|_{H^s}^2,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\|U_2\|_{L^2} \leq C\|(1+|\cdot|^2)^{-\frac{(d+1)}{2}}\|_{L^1}\|u\|_{H^s}.$$

■

O resultado a seguir descreve o dual topológico dos espaços de Sobolev, que nos permitirá identificar, a menos de um isomorfismo, o espaço H^{-s} como o dual de H^s.

Teorema 1.5.3 (O Dual de H^s) *A forma bilinear B definida por*

$$\begin{cases} B : \mathcal{S}\times\mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad (u,\varphi) \mapsto B(u,\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\varphi(x)dx \end{cases}$$

pode ser estendida para uma forma bilinear contínua de $H^s \times H^{-s}$ para $\mathbb{C}$. Além disso, a aplicação δ_B definida por

$$\begin{cases} \delta_B : H^{-s} \longrightarrow (H^s)^* \\ \quad u \mapsto \delta_B(u) : \varphi \mapsto B(u,\varphi) \end{cases}$$

é linear e um isomorfismo isométrico (a menos de uma constante).

Demonstração: Para $u, \varphi \in \mathcal{S}$, temos

$$\begin{aligned} B(u,\varphi) &= \int u(x)\varphi(x)dx \\ &= \int u(x)\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x)dx \\ &= (2\pi)^{-d}\int \widehat{u}(\xi)(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-d}\int \widehat{u}(\xi)\widehat{\varphi}(-\xi)d\xi \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo por $(1+|\xi|^2)^{s/2}$ e tomando o módulo, segue que

$$\begin{aligned} B(u,\varphi) &\leq (2\pi)^{-d}\int |\widehat{u}(\xi)||\widehat{\varphi}(-\xi)|d\xi \\ &= (2\pi)^{-d}\int (1+|\xi|^2)^{s/2}|\widehat{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{-s/2}|\widehat{\varphi}(-\xi)|d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-d}\left(\int (1+|\xi|^2)^{s}|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}\left(\int (1+|\xi|^2)^{-s}|\widehat{\varphi}(-\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \\ &= (2\pi)^{-d}\|u\|_{H^s}\|\varphi\|_{H^{-s}} \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação B é uniformemente contínua em $H^s \times H^{-s}$. Mas $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ é denso neste espaço, pelo teorema anterior. Logo, esta forma bilinear se estende a uma única função contínua de $H^s \times H^{-s}$ em $\mathbb{C}$, também denotada por B.

Além disso, para cada $u \in H^{-s}$ fixa, $\delta_B(u)$ é um funcional linear e contínuo em H^s.

Resta mostrarmos que a aplicação δ_B é um isomorfismo.

A linearidade é imediata. Quanto a injetividade, $B(u,\varphi)=0$ é equivalente a dizer que

$$\int u(x)\varphi(x)dx = 0,$$

para toda função $\varphi \in \mathcal{S}$, ou seja, $u = 0$ enquanto distribuição temperada.

Para provar a sobrejetividade, se $\Psi : H^s(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ é um elemento do dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^d)$, como este é um espaço de Hilbert (Proposição 1.5.1), o Lema da Representação de Riesz nos diz que existe uma única $h \in H^s(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\Psi(f) = \langle \varphi, h\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s\widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{h}(\xi)}d\xi,$$

para toda $\varphi \in H^s$.

Seja $u \in \mathcal{S}'$ tal que $\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^d(1+|\xi|^2)^s\overline{\widehat{h}(-\xi)}$.

Observemos que $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$, pois

$$\begin{aligned}\int (1+|\xi|^2)^{-s}|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi &= (2\pi)^d \int (1+|\xi|^2)^{-s}(1+|\xi|^2)^{2s}|\widehat{h}(-\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^d \int (1+|\xi|^2)^{s}|\widehat{h}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^d \|h\|_{H^s} < \infty\end{aligned}$$

Assim, para $\varphi \in H^s$,

$$\begin{aligned}\delta_B(u)(\varphi) = B(u,\varphi) &= (2\pi)^{-d} \int \widehat{u}(\xi)\widehat{\varphi}(-\xi)\ d\xi \\ &= \int (1+|\xi|^2)^s \overline{\widehat{h}(-\xi)}\widehat{\varphi}(-\xi)\ d\xi \\ &= \int (1+|\xi|^2)^s \overline{\widehat{h}(\xi)}\widehat{\varphi}(\xi)\ d\xi = \Psi(\varphi)\end{aligned}$$

Portanto, $\delta_B(u) = \Psi$, como queríamos.

■

1.5.1 Mergulhos de Sobolev

O objetivo desta seção é o estudo das propriedades de mergulho dos espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ nos espaços L^p e assim obter resultados a respeito de regularidade para distribuições temperadas que pertençam a tais espaços.

Teorema 1.5.4 *Se s é maior que $d/2$ então o espaço H^s pode ser imerso continuamente no espaço das funções contínuas que tendem a zero no infinito.*

Demonstração: Pela Observação 1.4.1, é suficiente mostrarmos que $\widehat{u} \in L^1$. Para tanto, começamos escrevendo

$$|\widehat{u}(\xi)| = (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\ (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{u}(\xi)|.$$

Integrando em ambos os membros e utilizando a desigualdade de Cauchy–Schwartz,

$$\begin{aligned}\int |\widehat{u}(\xi)| d\xi &= \int (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\ (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{u}(\xi)| d\xi \\ &\leq \left(\int (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (1+|\xi|^2)^{s}|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^s} \qquad (1.13)\end{aligned}$$

O fato de s ser maior que $d/2$ garante que a função

$$\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}$$

pertence a L^2. Portanto, $\widehat{u} \in L^1$.

Por fim, a continuidade da inclusão segue combinando a desigualdade (1.13) com a expressão (1.7), donde deduzimos que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C(2\pi)^{-d}\|u\|_{H^s}$$

■

Teorema 1.5.5 *Se s é um número real positivo menor que $d/2$, então o espaço H^s é continuamente mergulhado em L^p, para $p = \frac{2d}{d-2s}$ e temos*

$$||f||_{L^p} \leq C||f||_{\dot{H}^s}, \ \text{com} \ ||f||_{\dot{H}^s} \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Demonstração: Multiplicando f por um número real positivo, é suficiente provar a desigualdade no caso em que $||f||_{\dot{H}^s} = 1$.

Vamos calcular a norma de f em L^p utilizando a caracterização dada pelo Teorema 1.2.1, isto é,

$$\|f\|_{L^p}^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} m(\{x : |f(x)| > \lambda\})d\lambda, \tag{1.14}$$

com m a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^d$. Para $A > 0$ a ser escolhido, escrevemos

$$\widehat{f} = \ \widehat{f}\ 1_{\mathbb{R}^d} = \widehat{f}\ 1_{(B(0,A)\cup B^c(0,A))} = \widehat{f}\ 1_{B(0,A)} + \widehat{f}\ 1_{B^c(0,A)}$$

onde 1_X é a função característica do conjunto X.

Aplicando a Transformada inversa de Fourier,

$$f = \mathcal{F}^{-1}f = \underbrace{\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}\ 1_{B(0,A)})}_{f_{1,A}} + \underbrace{\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}\ 1_{B^c(0,A)})}_{f_{2,A}}$$

Como $\mathcal{F}(f_{1,A})$ está suportada no conjunto compacto $B(0,A)$ e por hipótese, $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, segue que $\mathcal{F}(f_{1,A})$ pertence a L^1. Então, pela estimativa (1.7) e a Proposição 1.2.4,

$$\begin{aligned}
\|f_{1,A}\|_{L^\infty} &\leq (2\pi)^{-d}\|\widehat{f_{1,A}}\|_{L^1} \\
&= (2\pi)^{-d}\int_{B(0,A)} |\xi|^{-s}|\xi|^s|\widehat{f}(\xi)|d\xi \\
&\leq (2\pi)^{-d}\left(\int_{B(0,A)} |\xi|^{-2s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}} ||f||_{\dot{H}^s} \\
&= C\left(\int_0^A r^{-2s}r^{d-1}dr\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{C}{(d-2s)^{\frac{1}{2}}}A^{\frac{d}{2}-s}
\end{aligned}$$

Tomando $A = A_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\lambda(d-2s)^{\frac{1}{2}}}{4C}\right)^{\frac{p}{d}}$, segue que

$$\|f_{1,A}\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{(d-2s)^{\frac{1}{2}}}\left[\left(\frac{\lambda(d-2s)^{\frac{1}{2}}}{4C}\right)^{\frac{p}{d}}\right]^{\frac{d}{2}-s} = \frac{\lambda}{4} \leq \frac{\lambda}{2}$$

e assim, pela definição de supremo essencial,

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d; |f_{1,A}(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) = 0.$$

Por outro lado, pela desigualdade triangular,

$$\{x; |f(x)| > \lambda\} \subset \left\{x; |f_{1,A}(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x; |f_{2,A}(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\},$$

e deste modo,

$$m\left(\{x; |f(x)| > \lambda\}\right) \leq m\left(\left\{x; |f_{2,A}(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right).$$

Substituindo em (1.14),

$$\|f\|^p_{L^p} \leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}m\left(\left\{x; |f_{2,A}(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)d\lambda \tag{1.15}$$

Ora, pela desigualdade de Chebyschev,

$$m\left(\left\{x; |f_{2,A}(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leq \frac{4}{\lambda^2}\|f_{2,A}\|^2_{L^2}.$$

Também, pela Identidade de Fourier-Plancherel,

$$\begin{aligned}\|f_{2,A}\|_{L^2}^2 &= (2\pi)^{-d}\|\widehat{f_{2,A}}\|_{L^2}^2\\ &= (2\pi)^{-d}\int_{\{|\xi|\geq A_\lambda\}}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi,\end{aligned}$$

resultando em

$$m\left(\left\{x; |f_{2,A}(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right)\leq \frac{4}{\lambda^2}(2\pi)^{-d}\int_{\{|\xi|\geq A_\lambda\}}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Aplicando esta última expressão em (1.15):

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p}^p &\leq 4p(2\pi)^{-d}\int_0^\infty\int_{\{|\xi|\geq A_\lambda\}}\lambda^{p-3}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\\ &= 4p(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d}\lambda^{p-3}\ 1_{\{(\lambda,\xi);|\xi|\geq A_\lambda\}}(\lambda,\xi)|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \qquad (1.16)\end{aligned}$$

No entanto, pela escolha de A_λ,

$$|\xi|\geq A_\lambda \Leftrightarrow \lambda\leq \frac{4C}{(d-2s)^{\frac{1}{2}}}|\xi|^{\frac{d}{p}} \overset{\text{def}}{=} C_\xi.$$

Substituindo em (1.16) e utilizando o Teorema de Fubini, concluímos que

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p}^p &\leq 4p(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_0^{C_\xi}\lambda^{p-3}d\lambda\right)|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\\ &= 4p(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{C_\xi^{p-2}}{p-2}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\\ &= \frac{4p(2\pi)^{-d}}{p-2}\left(\frac{4C}{(d-2s)^{\frac{1}{2}}}\right)^{p-2}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\frac{d(p-2)}{p}}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\\ &= \frac{4p(2\pi)^{-d}}{p-2}\left(\frac{4C}{(d-2s)^{\frac{1}{2}}}\right)^{p-2},\end{aligned}$$

pois $2s=\dfrac{d(p-2)}{p}$ e $||f||_{\dot{H}^s}=1$. ■

1.5.2 Espaços de Sobolev Homogêneo

Definição 1.5.2 *Seja s um número real. O espaço de Sobolev homogêneo $\dot{H}^s$ é o conjunto das distribuições temperadas tais que $\widehat{u}\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e*

$$\|u\|_{\dot{H}^s}^2=\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2s}|\widehat{u}(\xi)|^2\ d\xi<\infty \qquad (1.17)$$

A norma $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ tem a propriedade de escala

$$\|u(\lambda\cdot)\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{-\frac{d}{2}+s}\|u\|_{\dot{H}^s}, \tag{1.18}$$

como pode ser verificada através de uma mudança de variáveis na expressão (1.17). Enquanto que os espaços de Sobolev não-homogêneos H^s formam uma família decrescente de espaços (com respeito ao índice s), os espaços homogêneos não são comparáveis entre si. Porém, é imediato que se s é positivo, H^s está contido em $\dot{H}^s$ e se s é negativo, H^s está contido em $\dot{H}^s$.

Proposição 1.5.3 *Se $s < d/2$, então $\dot{H}^s$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\dot{H}^s$. Então a sequência $(\widehat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}, |\xi|^{2s}d\xi)$, que sabemos ser completo. Seja f este limite, isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\|\widehat{u}_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\setminus\{0\},|\xi|^{2s}d\xi)} = 0.$$

Mostremos que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Temos que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}, |\xi|^{2s}d\xi)$; assim, se $K \subset \mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ é compacto,

$$\begin{aligned}\int_K |f(\xi)|d\xi &= \int_K |\xi|^{-2s}|\xi|^{2s}|f(\xi)|\, d\xi\\ &\leq C\int_K |\xi|^{2s}|f(\xi)|\, d\xi < \infty,\end{aligned}$$

pois a função $\rho(\xi) = |\xi|^{2s}$ é contínua em K.

Resta estimarmos a integral de f em compactos que contêm a origem. Para isto, é suficiente observarmos que a integral de f sobre a bola unitária $B(0,1)$ é finita. Neste caso,

$$\begin{aligned}\int_{B(0,1)} |f(\xi)|\, d\xi &= \int_{B(0,1)} |\xi|^{-s}|\xi|^{s}|f(\xi)|\, d\xi\\ &\leq \left(\int_{B(0,1)} |\xi|^{2s}|f(\xi)|^2\, d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{B(0,1)} |\xi|^{-2s}\, d\xi\right)^{1/2} < \infty,\end{aligned}$$

visto que ρ é integrável sobre o conjunto $B(0,1)$, pois $s < d/2$.

Portanto, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Finalmente, tomando $u = \mathcal{F}^{-1}f$, segue o resultado.

■

Capítulo 2

Teoria de Littlewood-Paley

A partir da década de 80, métodos de Análise de Fourier têm sido de grande interesse no estudo de equações diferenciais parciais. Em particular, técnicas baseadas na decomposição de Littlewood-Paley e Cálculo Paradiferencial, introduzidas por J.-M. Bony em 1982, mostram-se eficazes para o estudo de propagação de singularidades em equações hiperbólicas não-lineares. O objetivo deste capítulo é abordar as propriedades básicas da Teoria de Littlewood-Paley e introduzir novos espaços caracterizados por meio da decomposição em anéis diádicos de espaços de frequência. As principais referências são [4], [5] e [6].

2.1 Desigualdades de Bernstein

Pela decomposição de Littlewood-Paley, escreveremos qualquer distribuição temperada como uma série de funções de classe C^∞, cujo suporte da Transformada de Fourier está em bolas ou coroas. O aspecto interessante desta técnica reside no comportamento de distribuições, com respeito a diferenciação, quando sua Transformada de Fourier está compactamente suportada. Mais precisamente, temos o seguinte:

Lema 2.1.1 (Lema de Bernstein) *Sejam $\mathcal{C}$ uma coroa e B uma bola em $\mathbb{R}^d$, centradas na origem. Existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo inteiro não-negativo k, toda dupla de números reais p, q, com $q \geq p \geq 1$, e toda função u de L^q, temos:*

$$S(\widehat{u}) \subset \lambda B \;\Rightarrow\; \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^q} \leq C^{k+1} \lambda^{k+d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u\|_{L^p} \tag{2.1}$$

$$S(\widehat{u}) \subset \lambda\mathcal{C} \;\Rightarrow\; C^{-k-1}\lambda^k\|u\|_{L^p} \leq \sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u\|_{L^p} \leq C^{k+1}\lambda^k\|u\|_{L^p} \tag{2.2}$$

Demonstração: Procedendo por mudança de escala, podemos assumir que $\lambda = 1$.

De fato, se $u \in L^q$ é tal que $S(\widehat{u}) \subset \lambda B$, defindo $v = u(\lambda^{-1}\cdot)$, temos que $S(\widehat{u}) \subset B$. Assim, se (2.1) vale para $\lambda = 1$,

$$\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha v\|_{L^p} \leq C^{k+1}\|v\|_{L^p}.$$

Mas, pelo Teorema de mudança de variáveis, $\|v\|_{L^p} = \lambda^{\frac{d}{p}}\|u\|_{L^p}$, $\partial^\alpha v(x) = \lambda^{-|\alpha|}\partial^\alpha u(\lambda^{-1}x)$ e assim $\|\partial^\alpha v\|_{L^q} = \lambda^{(-|\alpha|+\frac{d}{q})}\|\partial^\alpha u\|_{L^q}$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u\|_{L^q} &= \sup_{|\alpha|=k}\lambda^{(|\alpha|-\frac{d}{q})}\|\partial^\alpha v\|_{L^q}\\
&\leq C^{k+1}\lambda^{(k-\frac{d}{q})}\|v\|_{L^p}\\
&= C^{k+1}\lambda^{k+d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u\|_{L^p}
\end{aligned}$$

obtendo (2.1) para λ qualquer. Em (2.2), procedemos de maneira análoga.

Para a prova do lema, fixemos uma função suave ϕ compactamente suportada e tal que $\phi \equiv 1$ em uma vizinhança da bola B. Como $S(\widehat{u}) \subset B$,

$$\widehat{u}(\xi) = \phi(\xi)\widehat{u}(\xi).$$

Seja $g = \mathcal{F}^{-1}\phi$. Então

$$\mathcal{F}(u * g) = \widehat{u}\widehat{g} = \widehat{u}\phi = \widehat{u},$$

e daí $u * g = u$. Portanto, para todo multi-índice α,

$$\partial^\alpha u = \partial^\alpha g * u$$

Segue da desigualdade de Young que

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^q} \leq \|\partial^\alpha g\|_{L^r}\|u\|_{L^p},$$

com $r \in [1,\infty]$ satisfazendo $\dfrac{1}{p} + 1 = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{q}$.

Agora,

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha g\|_{L^r} &= \left(\int |\partial^\alpha g(x)|^r dx\right)^{1/r} \\
&= \left(\int |\partial^\alpha g(x)|^r \frac{(1+|x|^2)^{rd}}{(1+|x|^2)^{rd}} dx\right)^{1/r} \\
&\leq C\|(1+|\cdot|^2)^d \partial^\alpha g\|_{L^\infty} \\
&\overset{(1)}{\leq} C\|(Id-\Delta)^d((\cdot)^\alpha \phi)\|_{L^1} \\
&\overset{(2)}{\leq} C^{k+1}
\end{aligned}$$

sendo que, em (1), utilizamos (1.3) e (2) segue do fato de que $\|(Id-\Delta)^d((\cdot)^\alpha\phi)\|_{L^1}$ é estimada pela soma finita de integrais com termo típico $(\cdot)^{\alpha-\beta}\partial^\beta\phi$, onde $|\beta| \leq 2d$, limitada por

$$\begin{aligned}
\int_{S(\phi)} (x)^{\alpha-\beta}\partial^\beta \phi(x) dx &\leq C_\beta \int_{B(0,R)} |x|^{|\alpha-\beta|}|\partial^\beta\phi(x)| \\
&\leq R^k \sup_{|\beta|\leq 2d} C_\beta \|\partial^\beta\phi\|_{L^1} \leq C^{k+1}.
\end{aligned}$$

A segunda desigualdade de (2.2) segue aplicando-se (2.1). Para a prova da primeira desigualdade, consideramos $\tilde{\phi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ valendo 1 perto da coroa $\mathcal{C}$ e definimos $g_\alpha = \mathcal{F}^{-1}((i\xi)^\alpha |\xi|^{-2k}\tilde{\phi}(\xi))$. Temos a seguinte identidade algébrica

$$\begin{aligned}
|\xi|^{2k} &= \sum_{1\leq j_1,\cdots,j_k\leq d} \xi_{j_1}^2 \cdots \xi_{j_k}^2 \\
&= \sum_{|\alpha|=k} (i\xi)^\alpha(-i\xi)^\alpha
\end{aligned}$$

Logo, pelas propriedades da Transformada de Fourier a respeito de derivação e convolução, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big(\sum_{|\alpha|=k} g_\alpha * \partial^\alpha u\Big) &= \sum_{|\alpha|=k} (-i\xi)^\alpha \widehat{g_\alpha}\widehat{u} \\
&= \sum_{|\alpha|=k} (-i\xi)^\alpha (i\xi)^\alpha |\xi|^{-2k}\tilde{\phi}(\xi)\widehat{u}(\xi) \\
&= \tilde{\phi}(\xi)\widehat{u}(\xi) = \widehat{u}(\xi)
\end{aligned}$$

e assim,

$$u = \sum_{|\alpha|=k} g_\alpha * \partial^\alpha u \tag{2.3}$$

Repetindo o argumento utilizando em (2), obtemos $\|g_\alpha\|_{L^1} \leq C^{k+1}$. Então, aplicando a desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p} &\leq \sum_{|\alpha|=k} \|g_\alpha * \partial^\alpha u\|_{Lp} \\
&\leq \sum_{|\alpha|=k} \|g_\alpha\|_{L^1} \|\partial^\alpha u\|_{L^p} \\
&\leq C^{k+1} \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}
\end{aligned}$$

■

2.2 Decomposição de Littlewood-Paley

Inicialmente, vamos construir uma Partição Diádica da Unidade, que será utilizada no decorrer do texto e nos conduzirá à decomposição de Littlewood-Paley.

Teorema 2.2.1 *Existem funções radiais φ e χ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, com valores no intervalo $[0,1]$, suportadas na coroa $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0, \frac{3}{4}, \frac{8}{3})$ e na bola $B = B(0, \frac{4}{3})$, respectivamente, tal que*

$$\chi(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi(2^{-j}\xi) = 1, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d \tag{2.4}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \tag{2.5}$$

Demonstração: Consideremos um número real α no intervalo $(1, \frac{4}{3})$, e denotamos por $\mathcal{C}'$ a coroa $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(0, \alpha^{-1}, 2\alpha)$. Como $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, pela Proposição 1.3.1 existe uma função radial $\theta \in C_c^\infty(\mathcal{C})$ igual a 1 numa vizinhança de $\mathcal{C}'$.

Observemos que

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} 2^j\mathcal{C}' = \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \tag{2.6}$$

De fato, se $x \in \mathbb{R}^d$ e $|x| = r > 0$, existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $2^j < r\alpha \leq 2^{j+1}$, ou seja, $2^j\alpha^{-1} < |x|$ e $|x| = r \leq \alpha^{-1}2^{j+1} = 2^j(2\alpha^{-1}) < 2^j(2\alpha)$, pois $\alpha^{-1} < 1 < \alpha$. Assim, $x \in 2^j\mathcal{C}'$.

Uma propriedade fundamental a respeito desta cobertura é que se $j, j' \in \mathbb{Z}$ satisfazem $|j - j'| \geq 2$ então

$$2^j\mathcal{C} \cap 2^{j'}\mathcal{C} = \emptyset. \tag{2.7}$$

Com efeito, se $2^j\mathcal{C}\cap 2^{j'}\mathcal{C}\neq\emptyset$, com $j\geq j'$, existe x tal que

$$2^j\frac{3}{4}<|x|<2^j\frac{8}{3}\quad\text{e}\quad 2^{j'}\frac{3}{4}<|x|<2^{j'}\frac{8}{3},$$

o que nos dá $2^j\dfrac{3}{4}<2^{j'}\dfrac{8}{3}$, isto é, $2^{j-j'}<\dfrac{32}{9}<4$. Assim, $j-j'<2$.

Seja

$$R(\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\theta(2^{-j}\xi).$$

Por (2.7), esta soma é localmente finita em $\xi\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$. Então a função R é de classe C^∞ neste espaço. Segue da escolha de θ e da propriedade de cobertura (2.6) que R assume valores maiores ou iguais a 1 em $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$.

Assim, podemos definir a função de classe C^∞

$$\varphi=\frac{\theta}{R}$$

Como R não se anula, $S(\varphi)\subset S(\theta)$. Logo, $\varphi\in C_c^\infty(\mathcal{C})$ e, pela construção de R, se $\xi\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi(2^{-j}\xi)=1$$

Por outro lado, a função $1-\sum_{j\geq 0}\varphi(2^{-j}\xi)$ é de classe C^∞, por (2.7). Como o suporte de φ está contido em $\mathcal{C}$, para $j\leq -1$ temos que $S(\varphi(2^{-j}\cdot))\subset 2^j\mathcal{C}\subset B$. Deste modo, se $\xi\in\mathbb{R}^d$ é tal que $|\xi|\geq\dfrac{4}{3}$,

$$1=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi(2^{-j}\xi)=\sum_{j\geq 0}\varphi(2^{-j}\xi)$$

Assim, definindo

$$\chi(\xi)=1-\sum_{j\geq 0}\varphi(2^{-j}\xi)$$

resultará em $\chi\in C_c^\infty(B,[0,1])$ satisfazendo (2.4). ■

Observação 2.2.1 Algumas propriedades a respeito das funções χ e φ obtidas anteriormente serão úteis no desenvolvimento do texto e destacaremos abaixo.

Primeiramente, como $S(\varphi(2^{-j}\cdot))\subset 2^j\mathcal{C}$, então se $|j-j'|\geq 2$,

$$S(\varphi(2^{-j}\cdot))\cap S(\varphi(2^{-j'}\cdot))=\emptyset. \tag{2.8}$$

Também, se $j \geq 1$, como $2^j \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{4}{3}$, teremos $B \cap 2^j\mathcal{C} = \emptyset$ e assim

$$S(\chi) \cap S(\varphi(2^{-j}\cdot)) = \emptyset.$$

Segue, juntamente com a propriedade (2.7), que para cada ξ fixado, a expressão $\chi(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi(2^{-j}\xi)$ reduz-se a no máximo três termos, cuja soma é igual a 1. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, mostra-se que para números positivos a, b, c tais que $a + b + c = 1$, a soma dos seus quadrados vale ao menos $\dfrac{1}{3}$. Assim,

$$\frac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi^2(2^{-j}\xi).$$

Por outro lado, como as funções χ e φ tem a sua imagem no intervalo $[0, 1]$, temos

$$\chi^2(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi^2(2^{-j}\xi) \leq \chi(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi(2^{-j}\xi) = 1$$

Portanto, para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi^2(2^{-j}\xi) \leq 1 \tag{2.9}$$

De maneira semelhante, prova-se que

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi^2(2^{-j}\xi) \leq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \tag{2.10}$$

Desta seção em diante, fixemos duas funções φ e χ satisfazendo as conclusões do Teorema 2.2.1. Para $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ e $j \in \mathbb{Z}$, definimos os operadores

$$\Delta_j u \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathcal{F}^{-1}(\chi\widehat{u}), & \text{se} \quad j = -1 \\ \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j}\cdot)\widehat{u}), & \text{se} \quad j \geq 0. \end{cases}$$

e $\Delta_j u = 0$, se $j \leq -2$.

Também, para cada $j \in \mathbb{Z}$,

$$S_j u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j' \leq j-1} \Delta_{j'} u.$$

O principal objetivo desta seção é provar que, para toda distribuição temperada $u \in \mathcal{S}'$, a sequência $(S_j u)_{j\in\mathbb{Z}}$ converge a u no espaço $\mathcal{S}'$. Deste modo, podemos representar u pela série

$$u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j u$$

denominada a *decomposição de Littlewood-Paley* de u.

Discutiremos inicialmente algumas propriedades referente aos operadores definidos anteriormente e que serão importantes para a obtenção de tal decomposição.

Observação 2.2.2 *Para toda* $u \in \mathcal{S}'$ *e* $f \in \mathcal{S}$, $\langle \Delta_j u, f \rangle = \langle u, \Delta_j f \rangle$

Por definição,

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_j u, f \rangle &= \langle \mathcal{F}(\Delta_j u),\ \check{f} \rangle \\
&= \langle \varphi(2^{-j}\cdot)\widehat{u},\ \check{f} \rangle \\
&= \langle u,\ \mathcal{F}(\varphi(2^{-j}\cdot)\check{f}) \rangle
\end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{S}$,

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-d}\widehat{f}(-x), \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\varphi(2^{-j}\cdot)\check{f})(\xi) &= \int e^{-ix\xi}\varphi(2^{-j}x)\check{f}(x)dx \\
&= (2\pi)^{-d}\int e^{-ix\xi}\varphi(2^{-j}x)\widehat{f}(-x)dx \\
&\overset{(1)}{=} (2\pi)^{-d}\int e^{ix\xi}\varphi(-2^{-j}x)\widehat{f}(x)dx \\
&\overset{(2)}{=} (2\pi)^{-d}\int e^{ix\xi}\varphi(2^{-j}x)\widehat{f}(x)dx \\
&= \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j}\cdot)\widehat{f}) = \Delta_j f,
\end{aligned}$$

sendo que, em (1), fizemos uma mudança linear de variáveis e, em (2), utilizamos o fato de que φ é radial.

Quando $j = -1$, o procedimento é análogo.

Mostremos agora que, para toda distribuição temperada u,

$$S_j u = \mathcal{F}^{-1}(\chi(2^{-j}\cdot)\widehat{u}),\ \forall j \geq 0 \tag{2.11}$$

Pela comutatividade dos operadores Δ_j, garantida pela Observação 2.2.2, é suficiente verificar a igualdade para funções $f \in \mathcal{S}$. Neste caso,

$$\begin{aligned}
(S_j f)\widehat{}(\xi) &= \sum_{j' \leq j-1} (\Delta_{j'} f)\widehat{}(\xi) \\
&= \Big(\chi(\xi) + \sum_{0 \leq j' \leq j-1} \varphi(2^{-j'}\xi)\Big)\widehat{f}(\xi) \\
&= \Big(1 - \sum_{j' \geq 0} \varphi(2^{-j'}\xi) + \sum_{0 \leq j' \leq j-1} \varphi(2^{-j}\xi)\Big)\widehat{f}(\xi) \\
&= \Big(1 - \sum_{j' \geq j} \varphi(2^{-j'}\xi)\Big)\widehat{f}(\xi) \\
&= \Big(1 - \sum_{j' \geq 0} \varphi(2^{-j'}2^{j}\xi)\Big)\widehat{f}(\xi) = \chi(2^{-j}\xi)\widehat{f}
\end{aligned}$$

Por esta nova caracterização, para cada $u \in \mathcal{S}'$, como o suporte da transformada de Fourier dos operadores $\Delta_j u$ e $S_j u$ é compacto, o Teorema 1.4.1 garante que $\Delta_j u$ e $S_j u$ são funções de classe C^∞. Pelas propriedades da convolução, para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ e $u \in \mathcal{S}'$,

$$\Delta_j \partial^\alpha u = \partial^\alpha \Delta_j u.$$

Também, os operadores Δ_j e S_j mapeiam L^p em L^p continuamente. Mais ainda, existe uma constante $C > 0$, independente de j e de u para o qual

$$\|\Delta_j u\|_{L^p} \leq C\|\Delta_j u\|_{L^p} \text{ e } \|S_j u\|_{L^p} \leq C\|\Delta_j u\|_{L^p}$$

De fato, para $u \in L^p$, $j \geq 0$, as convoluções $2^{jd}\check{\varphi}(2^d\cdot) * u$ e $2^{jd}\check{\chi}(2^d\cdot) * u$ estão bem definidas e satisfazem

$$\mathcal{F}(2^{jd}\check{\varphi}(2^d\cdot) * u) = \varphi(2^{-j}\cdot)\widehat{u}$$

$$\mathcal{F}(2^{jd}\check{\chi}(2^d\cdot) * u) = \chi(2^{-j}\cdot)\widehat{u}$$

Daí, se $u \in L^p$, como $\Delta_j u = 2^{jd}\check{\varphi}(2^d\cdot) * u$, segue da desigualdade de Young que $\Delta_j u \in L^p$ e vale a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_j u\|_{L^p} &\leq \|2^{jd}\check{\varphi}(2^d\cdot)\|_{L^1}\|u\|_{L^p} \\
&= C_1\|u\|_{L^p},
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \|\check{\varphi}\|_{L^1}$. De modo análogo, se $j = -1$, observando que $\Delta_{-1}u = 2^{-d}\check{\chi}(2^d\cdot) * u$ e aplicando novamente a desigualdade de Young,

$$\|\Delta_j u\|_{L^p} \leq C_2\|u\|_{L^p}, \text{ com } C_2 = \|\check{\chi}\|_{L^1}.$$

Tomando $C = \max\{C_1, C_2\}$, segue a primeira desigualdade.

Para os operadores S_j, procedemos de maneira análoga, pois $S_j u = 2^{jd}\check{\chi}(2^d\cdot) * u, \forall j \geq 0$.

Teorema 2.2.2 *Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Então, no sentido de convergência do espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,*

$$u = \lim_{j\to\infty} S_j u$$

Demonstração: Por consequência da Observação 2.2.2 e da expressão (2.11) vale que, para toda $f \in \mathcal{S}$,

$$\langle u - S_j u, f\rangle = \langle u, f - S_j f\rangle.$$

Deste modo, é suficiente mostrarmos que no espaço $\mathcal{S}$, temos $f - S_j f \to 0$ quando $j \to \infty$. Para este caso, é conveniente utilizarmos a família de semi-normas

$$\|\widehat{f}\|_k = \sup_{\substack{|\alpha|\leq k \\ \xi\in\mathbb{R}^d}} (1+|\xi|)^k \; |\partial^\alpha \widehat{f}(\xi)|.$$

Então

$$\begin{aligned} \|\widehat{f - S_j f}\|_k &= \sup_{\substack{|\alpha|\leq k \\ \xi\in\mathbb{R}^d}} (1+|\xi|)^k \; |\partial^\alpha(\widehat{f}(\xi) - (S_j f)\widehat{}\,(\xi))| \\ &= \sup_{\substack{|\alpha|\leq k \\ \xi\in\mathbb{R}^d}} (1+|\xi|)^k \; |\partial^\alpha(\widehat{f}(\xi) - \chi(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi)| \end{aligned} \tag{2.12}$$

Desenvolvendo a expressão $\partial^\alpha(\widehat{f}(\xi) - \chi(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi))$ pela fórmula de Leibniz,

$$\partial^\alpha((1-\chi(2^{-j}\xi))\widehat{f}(\xi)) = (1-\chi(2^{-j}\xi))\partial^\alpha\widehat{f}(\xi) + \sum_{0<\beta\leq\alpha} C_{\alpha,\beta}2^{-j}\partial^\beta\chi(2^{-j}\xi)\;\partial^{\alpha-\beta}\widehat{f}(\xi)$$

Como χ vale 1 numa vizinhança de zero, a fórmula de Taylor nos permite escrever

$$\begin{aligned} \left|1-\chi(2^{-j}\xi)\right| &= |\chi(2^{-j}\xi) - \chi(0)| \\ &= \left|\int_0^1 \chi'(0 + t2^{-j}\xi).(2^{-j}\xi)\; dt\right| \\ &\overset{(*)}{\leq} 2^{-j}\int_0^1 \sum_{l=1}^d |\partial_l\chi(t2^{-j}\xi)|\;|\xi_l|\; dt \\ &\leq C2^{-j}\sum_{l=1}^d |\xi_l| \leq C2^{-j}(1+|\xi|) \end{aligned} \tag{2.13}$$

sendo que, em $(*)$, utilizamos o fato de que χ e suas derivadas são limitadas.

Do mesmo modo,

$$\sum_{0<\beta\leq\alpha}\left|C_{\alpha,\beta}2^{-j}\partial^{\beta}\chi(2^{-j}\xi)\ \partial^{\alpha-\beta}\widehat{f}(\xi)\right| \ \leq\ C2^{-j}\sum_{0<\beta\leq\alpha}\left|\partial^{\alpha-\beta}\widehat{f}(\xi)\right| \tag{2.14}$$

Com as duas limitações obtidas em (2.13) e (2.14), segue de (2.12) que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f-S_jf}\|_k &\leq \sup_{\substack{|\alpha|\leq k\\ \xi\in\mathbb{R}^d}}(1+|\xi|)^k\left[C2^{-j}(1+|\xi|)\left(|\partial^{\alpha}\widehat{f}|+\sum_{0\leq\beta<\alpha}|\partial^{\alpha-\beta}\widehat{f}|\right)\right]\\
&\leq C2^{-j}\sup_{\substack{|\alpha|\leq k+1\\ \xi\in\mathbb{R}^d}}(1+|\xi|)^k\ |\partial^{\alpha}\widehat{f}|\\
&= C2^{-j}\|\widehat{f}\|_{k+1}
\end{aligned}$$

■

2.3 Espaços de Besov

Com as notações da Seção 2.2, consideremos

Definição 2.3.1 *Seja s um número real e $(p,r)\in[1,\infty]$. O espaço de Besov não-homogêneo $B^s_{p,r}$ é o espaço de todas as distribuições temperadas tal que*

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \stackrel{def}{=} \left\|(2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^p})_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^r(\mathbb{Z})}<\infty \tag{2.15}$$

O primeiro passo é verificar a invariância com respeito a escolha da partição diádica da unidade utilizada na definição anterior. Para isto, será importante garantirmos a convergência em $\mathcal{S}'$ para séries em que a Transformada de Fourier de cada parcela está suportada em coroas.

Lema 2.3.1 *Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções limitadas tal que a transformada de Fourier de u_j está suportada em $2^j\tilde{\mathcal{C}}$, onde $\tilde{\mathcal{C}}$ é um anel dado. Suponhamos que*

$$\|u_j\|_{L^\infty}\leq C2^{jN}$$

para constantes $C,N>0$. Então a série $\sum_{j\in\mathbb{N}}u_j$ é convergente em $\mathcal{S}'$.

Demonstração: Consideremos $\tilde{\phi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ identicamente 1 numa vizinhança da coroa $\tilde{\mathcal{C}}$ e, para k um inteiro a ser escolhido, definimos

$$g_\alpha = \mathcal{F}^{-1}\left((i\xi)^\alpha |\xi|^{-2k}\tilde{\phi}(\xi)\right), \ |\alpha| = k$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g_\alpha(2^j\cdot))(\xi) &= 2^{-jd}\widehat{g_\alpha}(2^{-j}\xi) \\ &= 2^{-jd}\left((i\xi)^\alpha |\xi|^{-2k}\tilde{\phi}(\xi)\right). \end{aligned}$$

Procedendo como na demonstração de (2.3), no lema de Bernstein obtemos que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$u_j = 2^{-jk}\sum_{|\alpha|=k} 2^{jd} g_\alpha(2^j\cdot) * \partial^\alpha u_j$$

Assim, se $\phi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \langle u_j, \phi\rangle &= 2^{-jk}\sum_{|\alpha|=k}\langle 2^{jd} g_\alpha(2^j\cdot) * \partial^\alpha u_j, \phi\rangle \\ &= 2^{-jk}\sum_{|\alpha|=k}\langle u_j, 2^{jd} g_\alpha(2^j\cdot) * \partial^\alpha \phi\rangle \end{aligned} \tag{2.16}$$

Logo

$$\begin{aligned} |\langle u_j, \phi\rangle| &\leq \sum_{|\alpha|=k} 2^{-jk}\left|\int u_j(x) 2^{jd}\check{g}_\alpha(2^j\cdot) * \partial^\alpha\phi(x)\ dx\right| \\ &\leq 2^{-jk}\|u_j\|_{L^\infty}\sum_{|\alpha|=k}\|2^{jd}\check{g}_\alpha(2^j\cdot) * \partial^\alpha\phi\|_{L^1} \\ &\leq C2^{-jk}2^{jN}\sum_{|\alpha|=k}\|2^{jd}\check{g}_\alpha(2^j\cdot)\|_{L^1}\|\partial^\alpha\phi\|_{L^1} \\ &= C2^{-j(k-N)}\sum_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha\phi\|_{L^1} \end{aligned}$$

Escolhendo $k > N$, a sequência $\sum_{j\in\mathbb{N}}\langle u_j, \phi\rangle$ é convergente em $\mathbb{R}$, para cada $\phi \in \mathcal{S}$. Segue do Teorema 1.3.2 que $\sum_{j\in\mathbb{N}} u_j$ é convergente em $\mathcal{S}'$.

■

Teorema 2.3.1 *Seja $\mathcal{C}'$ uma coroa em $\mathbb{R}^d$, s um número real e $p, r \geq 1$. Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções suaves tais que*

$$S(\widehat{u}_j) \subset 2^j\mathcal{C}' \quad e \quad \left\|(2^{js}\|u_j\|_{L^p})_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^r} < \infty.$$

Então

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j \ \in B^s_{p,r} \ e \ \|u\|_{B^s_{p,r}} \leq C_s \left\|(2^{js}\|u_j\|_{L^p})_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^r}$$

Demonstração: Por hipótese, existe $C > 0$ tal que $2^{jrs}\|u_j\|^r_{L^p} \leq C$, ou ainda,

$$\|u_j\|_{L^p} \leq C^{1/r}2^{-js} \tag{2.17}$$

Utilizando o Lema de Bernstein e a desigualdade 2.17, temos que

$$\begin{aligned} \|u_j\|_{L^\infty} &\leq C\|u\|_{L^p} \\ &\leq C(2^j)^{d/p}2^{-js}C^{1/r} \leq C2^{j(d/p-s)} \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.3.1, a série que define u é convergente em $\mathcal{S}'$. É interessante então analizarmos o comportamento dos operadores $\Delta_{j'}u$.

Como $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são duas coroas, existe um inteiro $N_0 > 0$ tal que

$$|j - j'| \geq N_0 \Rightarrow 2^j\mathcal{C} \cap 2^{j'}\mathcal{C}' = \emptyset$$

Daí, se $|j - j'| \geq N_0$,

$$\mathcal{F}(\Delta_{j'}u_j) = 0 \Rightarrow \Delta_{j'}u_j = 0.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\Delta_{j'}u\|_{L^p} &= \left\|\sum_{j\geq 0} \Delta_{j'}u_j\right\|_{L^p} \\ &\leq C \sum_{\substack{j\geq 0 \\ |j-j'|\leq N_0}} \|u_j\|_{L^p} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} 2^{j's}\|\Delta_{j'}u\|_{L^p} &\leq C \sum_{\substack{j\geq 0 \\ |j-j'|\leq N_0}} 2^{j's}\|u_j\|_{L^p} \\ &\leq C \sum_{\substack{j\geq 0 \\ |j-j'|\leq N_0}} 2^{js}\|u_j\|_{L^p} \end{aligned}$$

Deste modo obtemos que

$$2^{j's}\|\Delta_{j'}u\|_{L^p} \leq ((c_k)_{k\in\mathbb{Z}} * (d_l)_{l\in\mathbb{Z}})(j'),$$

com $c_k = C\ 1_{[-N_0,N_0]}(k)$ e $d_l = 1_{\mathbb{N}} 2^{ls}\|u_l\|_{L^p}$. Como a sequência c_k pertence a ℓ^1, utilizando a propriedade clássica da convolução entre $\ell^1(\mathbb{Z})$ e $\ell^r(\mathbb{Z})$, segue que

$$\left\|(2^{j's}\|\Delta_{j'}u\|_{L^p})_j\right\|_{\ell^r} \leq \|(c_k)\|_{\ell^1} \left\|(2^{js}\|u_j\|_{L^p})_j\right\|_{\ell^r},$$

isto é,

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leq C_s \left\|(2^{js}\|u_j\|_{L^p})_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^r}.$$

■

O Teorema anterior implica diretamente o seguinte:

Corolário 2.3.1 *O espaço $B^s_{p,r}$ independe da escolha das funções χ e φ utilizadas na definição 2.3.1.*

Vamos agora relacionar os espaços de Sobolev, definidos no capítulo anterior, com a expansão de Littlewood-Paley, que nos indicará um importante exemplo de espaço de Besov.

Teorema 2.3.2 *Os espaços H^s e $B^s_{2,2}$ são iguais e suas normas satisfazem*

$$C^{-|s|-1}\|u\|_{B^s_{2,2}} \leq \|u\|_{H^s} \leq C^{|s|+1}\|u\|_{B^s_{2,2}}$$

Demonstração: Observemos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$2^{js}\frac{1}{C^{|s|+1}}\|\Delta_j u\|_{L^2} \leq \|\Delta_j u\|_{H^s} \leq 2^{js}C^{|s|+1}\|\Delta_j u\|_{L^2} \tag{2.18}$$

De fato, para $j \geq 0$, como $S(\mathcal{F}(\Delta_j u)) \subset 2^j\mathcal{C}$, temos que

$$\|\Delta_j u\|^2_{H^s} = \int_{2^j\mathcal{C}} (1+|\xi|^2)^s|\widehat{\Delta_j u}|^2 d\xi \tag{2.19}$$

Vamos supor que $s \geq 0$, pois a demonstração para o caso $s < 0$ é análoga.
Para $\xi \in 2^j\mathcal{C}$,

$$(1+|\xi|^2)^s \leq \left(1+\left(2^j\frac{8}{3}\right)^2\right)^s \leq 2^{2js}\left(1+\left(\frac{8}{3}\right)^2\right)^s = C^s 2^{2js}$$

$$(1+|\xi|^2)^s \geq \left(1+\left(2^j\frac{3}{4}\right)^2\right)^s \geq 2^{-2js}\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^s = C^s 2^{-2js},$$

Substituindo em (2.19) e utilizando a Identidade de Fourier-Plancherel, obtemos

$$\|\Delta_j u\|_{H^s}^2 \leq C^s 2^{2js}\int |\widehat{\Delta_j u}|^2 d\xi = C^s 2^{2js}\|\Delta_j u\|_{L^2}^2$$

e

$$\|\Delta_j u\|_{H^s}^2 \geq C^s 2^{2js}\int |\widehat{\Delta_j u}|^2 d\xi = C^s 2^{-2js}\|\Delta_j u\|_{L^2}^2$$

Para $j=-1$ repetimos o argumento, sendo que o supremo e o ínfimo de $\rho(\xi)=(1+|\xi|^2)^s$ são tomados sobre a bola B.

Agora, em posse de (2.19), combinado com a expressão (2.9),

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^s}^2 &= \int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq 3\int (1+|\xi|^2)^s \left(\chi^2(\xi)+\sum_{j\geq 0}\varphi^2(2^{-j}\xi)\right)|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= 3\left(\|\Delta_{-1}u\|_{H^s}^2+\sum_{j\geq 0}\|\Delta_j u\|_{H^s}^2\right) \\
&\leq 3C^{|s|}\left(\sum_{j\geq -1}2^{2js}\|\Delta_j u\|_{L^2}^2\right) \\
&= 3C^{|s|}\|u\|_{B^s_{2,2}}^2
\end{aligned}$$

A outra desigualdade é análoga. ∎

Proposição 2.3.1 *O espaço $B^0_{p,1}$ está continuamente mergulhado em L^p e o espaço L^p mergulha continuamente em $B^0_{p,\infty}$.*

Demonstração: Seja $u \in B^0_{p,1}$. Então a série $\sum_j \|\Delta_j u\|_{L^p}$ converge. Isto implica que

$$\|S_{j+q}u - S_j u\|_{L^p} \leq \sum_{j'=j}^{j+q-1}\|\Delta_{j'}u\|_{L^p} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Portanto, a sequência $(S_j u)_{j\geq 0}$ é de Cauchy em L^p. Como L^p é completo, existe $v \in L^p$ tal que $S_j u$ converge a v em L^p. Mas $L^p \hookrightarrow \mathcal{S}'$, logo $S_j u \to v$ em $\mathcal{S}'$.

Por outro lado, pela decomposição de Littlewood-Paley, $(S_j u)_{j\geq -1}$ é uma sequência convergindo a u em $\mathcal{S}'$. Da unicidade do limite segue que $u = v \in L^p$.

Agora, se $u \in L^p$, uma vez que, para todo $j \geq -1$, $\|\Delta_j u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}$, temos

$$\sup_{j\geq -1} \|\Delta_j u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p},$$

isto é,

$$\|u\|_{B^0_{p,\infty}} \leq C\|u\|_{L^p}.$$

■

Teorema 2.3.3 *Seja $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ e $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$. Para todo número real s, o espaço $B^s_{p_1,r_1}$ é continuamente incluído em $B^{s-d\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}_{p_2,r_2}$.*

Demonstração: Como $S\left(\mathcal{F}(\Delta_{-1}u)\right) \subset B$, pelo Lema de Bernstein,

$$\|\Delta_{-1}u\|_{L^{p_2}} \leq C\|\Delta_{-1}u\|_{L^{p_1}}. \tag{2.20}$$

Do mesmo modo, para $j \geq 0$, como $S(\mathcal{F}(\Delta_j u)) \subset 2^j\mathcal{C}$,

$$\|\Delta_j u\|_{L^{p_2}} \leq C2^{jd\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}\|\Delta_{-1}u\|_{L^{p_1}}. \tag{2.21}$$

Utilizando as desigualdades (2.20) e (2.21) e o fato de que $\ell^{r_1} \hookrightarrow \ell^{r_2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{B^{s-d\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}_{p_2,r_2}} &= \left(\sum_{j\geq -1} 2^{jr_2\left(s-d\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)\right)}\|\Delta_j u\|^{r_2}_{L^{p_2}}\right)^{1/r_2} \\
&\leq C\left(\sum_{j\geq -1} 2^{jr_2\left(s-d\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)\right)}2^{r_2\left(jd\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)\right)}\|\Delta_j u\|^{r_2}_{L^{p_1}}\right)^{1/r_2} \\
&= C\left(\sum_{j\geq -1} 2^{jr_2 s}\|\Delta_j u\|^{r_2}_{L^{p_1}}\right)^{1/r_2} \\
&\leq C\left(\sum_{j\geq -1} 2^{jr_1 s}\|\Delta_j u\|^{r_1}_{L^{p_1}}\right)^{1/r_1} \\
&= \|u\|_{B^s_{p_1,r_1}}
\end{aligned}$$

■

Uma propriedade topológica importante acerca dos Espaços de Besov é que a expressão (2.15) é uma norma que torna o espaço $B^s_{p,r}$ completo, como especifica o seguinte resultado:

Teorema 2.3.4 *Se $1 \leq p, r \leq \infty$, o espaço $B^s_{p,r}$ equipado com a norma $\|\cdot\|$ é um espaço de Banach satisfazendo a propriedade de Fatou: se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada de $B^s_{p,r}$ que converge para $u \in \mathcal{S}'$, então $u \in B^s_{p,r}$ e*

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{B^s_{p,r}}$$

Demonstração: Ver [6], pág. 16. ∎

Proposição 2.3.2 *O espaço $B^s_{p,r}$ é continuamente incluído em $\mathcal{S}'$.*

Demonstração: Por definição, $B^s_{p,r}$ é um subespaço de $\mathcal{S}'$. Para provarmos a continuidade, mostremos a existência de uma constante C e um inteiro positivo M tal que, para toda função ϕ em $\mathcal{S}$,

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C\|u\|_{B^s_{p,r}}\|\phi\|_{M,\mathcal{S}}.$$

Para isto, escolhemos um inteiro positivo N satisfazendo $N \geq d/p - s$. Pela relação (2.16), uma vez que $S(\mathcal{F}(\Delta_j u)) \subset 2^j\mathcal{C}$, podemos escrever

$$\langle \Delta_j u, \phi\rangle = 2^{-j(N+1)} \sum_{|\alpha|=N+1} \langle \Delta_j u, 2^{jd} g_\alpha(2^j\cdot) * \partial^\alpha\phi\rangle$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
|\langle \Delta_j u, \phi\rangle| &\leq 2^{-j}2^{-N} \sum_{|\alpha|=N+1} \|\Delta_j u\|_{L^\infty} \|2^{jd} g_\alpha(2^j\cdot) * \partial^\alpha\phi\|_{L^1} \\
&\leq 2^{-j}2^{-jN} \sum_{|\alpha|=N+1} \|\Delta_j u\|_{L^\infty} \|2^{jd} g_\alpha(2^j\cdot)\|_{L^1} \|\partial^\alpha\phi\|_{L^1} \\
&\leq C2^{-j} \sup_{j\geq -1} 2^{-jN}\|\Delta_j u\|_{L^\infty} \sup_{|\alpha|=N+1} \|\partial^\alpha\phi\|_{L^1} \\
&= C2^{-j}\|u\|_{B^{-N}_{\infty,\infty}} \sup_{|\alpha|=N+1} \|\partial^\alpha\phi\|_{L^1} \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Pela escolha de N, segue do Teorema anterior que $B^s_{p,r}$ está continuamente mergulhado em $B^{-N}_{\infty,\infty}$. Assim, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{B^{-N}_{\infty,\infty}} \leq C\|u\|_{B^s_{p,r}}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\sup_{|\alpha|=N+1}\|\partial^\alpha \phi\|_{L^1} &= \sup_{|\alpha|=N+1}\int |\partial^\alpha \phi(x)|dx \\
&= \sup_{|\alpha|=N+1}\int \frac{|(1+|x|)^{N+1}\partial^\alpha \phi(x)|}{(1+|x|)^{N+1}}dx \\
&\leq C \sup_{|\alpha|=N+1}\int (1+|x|)^{N+1}|\partial^\alpha \phi(x)|dx \\
&= C\|\phi\|_{N+1,\mathcal{S}}
\end{aligned}$$

Substituindo em (2.22), concluímos que

$$|\langle \Delta_j u, \phi\rangle| \leq C2^{-j}\|u\|_{B^s_{p,r}}\|\phi\|_{N+1,\mathcal{S}}$$

Finalmente, utilizando a decomposição de Littlewood-Paley,

$$\begin{aligned}
|\langle u, \phi\rangle| &\leq \sum_{j\geq -1}|\langle \Delta_j u, \phi\rangle| \\
&\leq C\sum_{j\geq -1}2^{-j}\|u\|_{B^s_{p,r}}\|\phi\|_{N+1,\mathcal{S}} \\
&\leq C\|u\|_{B^s_{p,r}}\|\phi\|_{N+1,\mathcal{S}}
\end{aligned}$$

■

2.4 Decomposição de Bony

Sejam u e v duas distribuições temperadas. Pela decomposição de Littlewood-Paley, temos

$$u = \sum_{j'}\Delta_{j'}u \ e \ v = \sum_{j}\Delta_j u$$

Formalmente, o produto, quando ele existe, pode ser representado pela expressão

$$uv = \sum_{j,j'}\Delta_{j'}u\Delta_j v \tag{2.23}$$

Nesta seção, veremos como a Decomposição de Littlewood-Paley dá condições para que o produto de duas distribuições temperadas uv esteja definido, bem como resultados de continuidade para a aplicação $(u,v)\mapsto uv$.

A idéia fundamental do Cálculo Paradiferencial é distinguir três parcelas no produto uv. A primeira parte $T_u v$ corresponde aos termos $\Delta_j u \Delta_{j'} v$ quando j é pequeno em comparação com j'. Um segundo termo $T_v u$ é a contraparte simétrica de $T_u v$ e finalmente uma terceira parte onde as frequências de u e v têm o mesmo tamanho.

Definição 2.4.1 *Definimos o paraproduto de u e v, e denotaremos por $T_u v$ o operador bilinear*

$$T_u v \stackrel{def}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{j-1} u \Delta_j u = \sum_{j' \leq j-2} \Delta_{j'} u \Delta_j v$$

Também, definimos o Resto de u e v, e indicaremos por $R(u,v)$ o operador

$$R(u,v) \stackrel{def}{=} \sum_{|j-j'| \leq 1} \Delta_{j'} u \Delta_j v$$

Segue de (2.23) que

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v)$$

A expressão acima é conhecida como a Decomposição de Bony.
Como ilustração desta técnica, vamos analisar como o produto age nos espaços de Besov. Mais precisamente, mostraremos que o produto é uma forma bilinear contínua no espaço $L^\infty \cap B^s_{p,r}$, quando $s > 0$.

Proposição 2.4.1 *Para todo número real s, existe uma constante C tal que, para toda $(p,r) \in [1,\infty]^2$, temos*

$$\|T_u v\|_{B^s_{p,r}} \leq C \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{B^s_{p,r}} \ , \ \forall (u,v) \in L^\infty \times B^s_{p,r}$$

Em outras palavras, se $u \in L^\infty$, o operador T_u leva continuamente $B^s_{p,r}$ em $B^s_{p,r}$.
Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} S(\mathcal{F}(S_{j-1} u \Delta_j v)) &= S(\mathcal{F}(S_{j-1} u) * \mathcal{F}(\Delta_j v)) \\ &\subset S(\mathcal{F}(S_{j-1} u)) + S(\mathcal{F}(\Delta_j v)) \\ &\subset 2^{j-1} B + 2^j \mathcal{C} = 2^j \tilde{\mathcal{C}}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(0, \frac{1}{12}, \frac{10}{3})$. Também, pela desigualdade de Hölder e a continuidade dos operadores S_j em L^p,

$$\begin{aligned} \|S_{j-1} u \Delta_j v\|_{L^p} &\leq \|S_{j-1} u\|_{L^\infty} \|\Delta_j v\|_{L^p} \\ &\leq C \|u\|_{L^\infty} \|\Delta_j v\|_{L^p} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_j (2^{js}\|S_{j-1}u\Delta_j v\|_{L^p})^r &\leq C^r\|u\|_{L^\infty}^r \sum_j 2^{jrs}\|\Delta_j v\|_{L^p}^r \\ &= C^r\|u\|_{L^\infty}^r\|v\|_{B^s_{p,r}}^r\end{aligned}$$

Extraindo a r-ésima raíz, obtemos:

$$\left(\sum_j \left(2^{js}\|S_{j-1}u\Delta_j v\|_{L^p}\right)^r\right)^{1/r} \leq C\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B^s_{p,r}} < \infty \tag{2.24}$$

Pelo Lema 2.3.1, obtemos que $T_u v \in B^s_{p,r}$ e assim, pela estimativa (2.24),

$$\begin{aligned}\|T_u v\|_{B^s_{p,r}} &\leq C_s\|(2^{js}\|S_{j-1}u\Delta_j v\|_{L^p})\|_{\ell^r} \\ &\leq C\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B^s_{p,r}}\end{aligned}$$

■

Para o estudo do comportamento do operador resto, vamos precisar considerar termos do tipo $\Delta_j u\Delta_j v$. A Transformada de Fourier destes não está suportadas em coroas, mas em bolas do tipo $2^j B$. Precisamos então de uma versão do Teorema 2.3.1 que contorne esta situação:

Lema 2.4.1 *Seja B uma bola, $s > 0$ e $(p,r) \in [1,\infty]^2$. Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma seqüência tal que*

$$S(\widehat{u}_j) \subset 2^j B \quad e \quad \left\|(2^{js}\|u_j\|_{L^p})_j\right\|_{\ell^r} < \infty.$$

Então

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j \in B^s_{p,r} \ e \ \|u\|_{B^s_{p,r}} \leq C_s\left\|(2^{js}\|u_j\|_{L^p})_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^r}$$

Demonstração: Por hipótese, existe $C > 0$ tal que

$$2^{js}\|u_j\|_{L^p} \leq C \Rightarrow \|u_j\|_{L^p} \leq C2^{-js}$$

Então

$$\left\|\sum_{j=1}^{l+k} u_j - \sum_{j=1}^{l} u_j\right\|_{L^p} \leq \sum_{j=l+1}^{l+k}\|u_j\|_{L^p} \leq C\sum_{j=l+1}^{l+k} 2^{-js} \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Da completude de L^p, segue que $u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j \in L^p$. Também, existe N_0 tal que

$$j' \geq j + N_0 \Rightarrow 2^{j'}\mathcal{C} \cap 2^j B = \emptyset$$

Daí, se $j' \geq j + N_0$, $\mathcal{F}(\Delta_{j'}u_j) = \varphi(2^{-j'}\cdot)\widehat{u}_j = 0$, ou ainda, $\Delta_{j'}u_j = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|\Delta_{j'}u\|_{L^p} &= \left\|\sum_j \Delta_{j'}u_j\right\|_{L^p} \\
&\leq \sum_{j\geq j'-N_0} \|\Delta_{j'}u_j\|_{L^p} \\
&\leq C \sum_{j\geq j'-N_0} \|u_j\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
2^{j's}\|\Delta_{j'}u\|_{L^p} &\leq C \sum_{j\geq j'-N_0} 2^{(j-j')s}2^{js}\|u_j\|_{L^p} \\
&\leq ((c_k) * (d_k))(j')
\end{aligned}$$

onde $\begin{cases} c_k = C\ 1_{[-N_0,\infty)}(k)\ 2^{-ks} \in \ell^1 \\ d_l = 2^{ls}\|u_l\|_{L^p} \in \ell^r \end{cases}$

Aplicando a desigualdade de Young acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{B^s_{p,r}} &\leq \|c_k\|_{\ell^1} \left\|(2^{j's}\|u_{j'}\|_{L^p})_j\right\|_{\ell^r} \\
&= C_s \left\|(2^{j's}\|u_{j'}\|_{L^p})_j\right\|_{\ell^r}
\end{aligned}$$

■

Proposição 2.4.2 *Sejam s_1, s_2 números reais tal que $s_1 + s_2 > 0$. Então existe uma constante C tal que, para $(p_1, p_2, r_1, r_2) \in [1,\infty]^4$,*

$$\frac{1}{p} \overset{def}{=} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1 \quad e \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \overset{def}{=} \frac{1}{r} \leq 1$$

tem-se, para quaisquer $(u,v) \in B^{s_1}_{p_1,r_1} \times B^{s_2}_{p_2,r_2}$,

$$\|R(u,v)\|_{B^{s_1+s_2}_{p,r}} \leq C\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}}$$

Demonstração: Por definição de operador resto,

$$R(u,v)=\sum_j R_j,\ \text{ com } R_j=\sum_{l=-1}^{1}\Delta_{j-l}u\Delta_j v$$

Pela linearidade da Transformada de Fourier e o fato de que o suporte da convolução está contido na soma dos suportes, temos $S(\mathcal{F}(R_j))\subset 2^jB(0,8)$.

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder,

$$2^{j(s_1+s_2)}\|R_j\|_{L^p}\leq\sum_{l=-1}^{1}2^{js_1}\|\Delta_{j-l}u\|_{L^{p_1}}2^{js_2}\|\Delta_j v\|_{L^{p_2}}$$

Deste modo,

$$\left\|(2^{j(s_1+s_2)}\|R_j\|_{L^p})_j\right\|_{\ell^r}\leq\sum_{l=-1}^{1}\left\|2^{js_1}\|\Delta_{j-l}u\|_{L^{p_1}}2^{js_2}\|\Delta_j v\|_{L^{p_2}})_j\right\|_{\ell^r}\tag{2.25}$$

Para cada $l=-1,0,1$, como $(2^{js_1}\|\Delta_{j-l}u\|_{L^{p_1}})_{j\in\mathbb{Z}}\in\ell^{r_1}$ e $(2^{js_2}\|\Delta_j v\|_{L^{p_2}})_{j\in\mathbb{Z}}\in\ell^{r_2}$, a desigualdade de Hölder e a estimativa (2.25) nos dá que

$$\left\|(2^{j(s_1+s_2)}\|R_j\|_{L^p})_j\right\|_{\ell^r}\leq C\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}}.$$

Como $s_1+s_2>0$, a demonstração segue do Lema 2.4.1.

∎

Corolário 2.4.1 *Para todo s positivo, o espaço $L^\infty\cap B^s_{p,r}$ é uma álgebra. Além disso, existe uma constante $C>0$ tal que*

$$\|uv\|_{B^s_{p,r}}\leq C(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B^s_{p,r}}+\|u\|_{B^s_{p,r}}\|v\|_{L^\infty})$$

Demonstração: De acordo com as Proposições 2.4.2 e 2.4.1, temos

$$\|R(u,v)\|_{B^s_{p,r}}\leq C\|u\|_{B^s_{p,r}}\|v\|_{B^0_{\infty,\infty}}$$

$$\|T_u v\|_{B^s_{p,r}}\leq C\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B^s_{p,r}}$$

$$\|T_v u\|_{B^s_{p,r}}\leq C\|v\|_{L^\infty}\|u\|_{B^s_{p,r}}$$

Como $L^\infty\hookrightarrow B^0_{\infty,\infty}$, aplicando a decomposição de Bony segue o resultado.

∎

Ainda referente aos espaços de Besov, outras propriedades a respeito do produto são descritas na seguinte proposição:

Proposição 2.4.3 *Sejam* $1 \leq p, r \leq \infty$ *e* $s \in \mathbb{R}$.

(i) *Se* $\sigma > 0$ *e* $1 \leq r_1, r_2 \leq \infty$ *são tais que* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$, *então existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|T_u v\|_{B^{s-\sigma}_{p,r}} \leq \frac{C^{|s-\sigma|+1}}{\sigma} \|u\|_{B^{-\sigma}_{\infty,r_1}} \|v\|_{B^{s}_{p,r_2}},$$

(ii) *Seja* $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ *e* $1 \leq r_1, r_2 \leq \infty$ *tal que*

$$s_1 + s_2 > 0, \ \frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1 \ e \ \frac{1}{r} \leq \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \leq 1,$$

Então o operador resto é uma aplicação bilinear e contínua de $B^{s_1}_{p_1,r_1} \times B^{s_2}_{p_2,r_2}$ *em* $B^{\sigma_{1,2}}_{p,r}$, *com* $\sigma_{1,2} = s_1 + s_2 + d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$ *e existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|R(u,v)\|_{B^{\sigma_{1,2}}_{p,r}} \leq \frac{C^{s_1+s_2+1}}{s_1+s_2} \|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}} \|v\|_{B^{s_2}_{p,r_2}}$$

Demonstração: Ver [6], pág. 22 e 23. ∎

2.5 Teoria Homogênea

Para o estudo de problemas que tenham alguma propriedade de invariância por escala, é desejável considerarmos espaços de funções que admitam invariância por dilatação. Espaços de Sobolev Homogêneo, como definidos na Seção 1.5.2, possuem tal propriedade, no sentido de que se $f \in \dot{H}^s$ então $f_\lambda = f(\lambda \cdot) \in \dot{H}^s$. Nosso objetivo nesta seção é obter uma decomposição diádica que caracterize estes espaços. A referência adotada é [6].

Sejam (χ, φ) como antes. Para $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, definimos

$$\dot{S}_j u \stackrel{\text{def}}{=} 2^{jd}\, \check{\chi}(2^j \cdot) * u, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

$$\dot{\Delta}_j u \stackrel{\text{def}}{=} \dot{S}_{j+1} u - \dot{S}_j u, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Definição 2.5.1 *Denotamos por* $\mathcal{S}'_h$ *o espaço das distribuições temperadas tal que*

$$\lim_{j \to -\infty} \dot{S}_j u = 0 \ em \ \mathcal{S}'$$

Exemplo 2.5.1 Se uma distribuição temperada u é tal que sua transformada de Fourier $\widehat{u}$ é localmente integrável perto de 0, então u pertence a $\mathcal{S}'_h$.

O lema abaixo caracteriza o conjunto $\mathcal{S}'_h$ mediante a decomposição de Littlewood-Paley:

Lema 2.5.1 $\mathcal{S}'_h$ *é o espaço das distribuições temperadas que satisfazem*

$$u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j u \tag{2.26}$$

Neste caso, a série acima é denominada a decomposição de Littlewood-Paley homogênea de u.

Demonstração: Observemos que, para qualquer $j \geq 0$,

$$\dot{\Delta}_j u = \dot{S}_{j+1}u - \dot{S}_j u = S_{j+1}u - S_j u = \Delta_j u$$

e, para $j = -1$,

$$\dot{\Delta}_{-1}u = \dot{S}_0 u - \dot{S}_{-1}u = \Delta_{-1}u - \dot{S}_{-1}u.$$

Então, pela decomposição de Littlewood-Paley,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j u &= \sum_{j\geq 0} \dot{\Delta}_j u + (\Delta_{-1}u - \dot{S}_{-1}u) + \sum_{j\leq -1} \dot{\Delta}_j u \\
&= \sum_{j\geq -1} \Delta_j u - \dot{S}_{-1}u + \lim_{N\to-\infty} \sum_{j=-1}^{N} (\dot{S}_{j+1}u - \dot{S}_j u) \\
&= u + \lim_{N\to-\infty} \dot{S}_N u
\end{aligned}$$

Assim, vale (2.26) se, e só se, $\lim_{N\to-\infty} \dot{S}_N u = 0$ em $\mathcal{S}'$, ou seja, quando $u \in \mathcal{S}'_h$.

∎

Em contraste com o caso não-homogêneo, não temos $\dot{S}_j u = \sum_{j'\leq j-1} \dot{\Delta}_{j'} u$. No entanto, esta expressão se verifica para distribuições em $\mathcal{S}'_h$.

Observação 2.5.1 O espaço $\mathcal{S}'_h$ não é um subespaço fechado de $\mathcal{S}'$ com a topologia da convergência fraca. De fato, consideremos uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com

$$f_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right), \; f \in \mathcal{S} \text{ tal que } f(0) = 1.$$

Então, f converge para a função constante 1 que não pertence a $\mathcal{S}'_h$.

De maneira análoga a abordagem da Seção 2.3, uma vez construída a decomposição de Littlewood-Paley homogênea, podemos definir os Espaços de Besov homogêneo:

Definição 2.5.2 *Se $s \in \mathbb{R}$ e $1 \leq p, r \leq \infty$, o espaço de Besov homogêneo $\dot{B}^s_{p,r}$ é o conjunto das distribuições $u \in \mathcal{S}'_h$ tais que $\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}$ é finito, com*

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} = \left\| (2^{js} \|\dot{\Delta}_j u\|_{L^p})_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell^r(\mathbb{Z})}$$

Com a mesma técnica de demonstração utilizada no caso não-homogêneo, associado com a desigualdade (2.10), prova-se que os espaços $\dot{H}^s$ e $\dot{B}^s_{2,2}$ coincidem.
A proposição a seguir descreve a propriedade de invariância por escala para $\dot{B}^s_{p,r}$:

Proposição 2.5.1 *Se $u \in \dot{B}^s_{p,r}$, então $\|u_\lambda\|_{\dot{B}^s_{p,r}}$ é finito e temos*

$$\|u_\lambda\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \approx \lambda^{s-\frac{d}{p}} \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}.$$

Demonstração: Seja α um número real positivo. Temos

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi(\alpha^{-1}\cdot)\widehat{u}_\lambda)(x) = \alpha^d \int \check{\varphi}(\alpha(x-y))u(\lambda y)dy.$$

Pela mudança de variáveis $z = \lambda y$, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\varphi(\alpha^{-1}\cdot)\widehat{u}_\lambda)(x) &= \alpha^d \lambda^{-d} \int \check{\varphi}(\alpha x - \alpha \lambda^{-1} z) u(z) dz \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\varphi(\lambda \alpha^{-1}\cdot)\widehat{u})(\lambda x) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Para $j \in \mathbb{Z}$, seja

$$v_j = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{[\log_2 \lambda] - \log_2 \lambda - j}\cdot)\widehat{u}_\lambda),$$

onde $[m]$ indica a parte inteira de m.
Escolhendo $\alpha = 2^{j-[\log_2 \lambda]}\lambda$ na igualdade (2.27), obtemos

$$v_j(x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{[\log_2 \lambda] - j}\cdot)\widehat{u})(\lambda x),$$

e assim,

$$\|v_j\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{d}{p}} \|\dot{\Delta}_{j-[\log_2 \lambda]} u\|_{L^p}.$$

Ora, as quantidades λ^{-s} e $2^{-[\log_2 \lambda]s}$ são comparáveis. Assim,

$$2^{js}\|v_j\|_{L^p} \approx \lambda^{s-\frac{d}{p}} 2^{(j-[\log_2 \lambda])s} \|\dot{\Delta}_{j-[\log_2 \lambda]} u\|_{L^p}$$

Calculando a norma ℓ^r em ambos os membros, segue que

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jrs} \|v_j\|^r_{L^p} \right)^{1/r} \approx \lambda^{s-\frac{d}{p}} \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \tag{2.28}$$

Como $S(\widehat{v}_j) \subset 2^j \mathcal{C}(0, \frac{3}{4}, \frac{16}{3})$, temos

$$\dot{\Delta}_{j'} u_\lambda = \sum_{|j-j'|\leq 2} \dot{\Delta}_{j'} v_j.$$

Aplicando a norma de $\dot{B}^s_{p,r}$ e a estimativa (2.28), segue o resultado.

■

Para distribuições u, v pertencentes a $\mathcal{S}'_h$, definimos

$$\dot{T}_u v = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dot{S}_{j-1} u \dot{\Delta}_j v \quad \text{e} \quad \dot{R}(u,v) = \sum_{|j-j'|\leq 1} \dot{\Delta}_{j'} u \dot{\Delta}_j v$$

Formalmente, temos a seguinte decomposição de Bony homogênea

$$uv = \dot{T}_u v + \dot{T}_v u + \dot{R}(u,v)$$

As propriedades de continuidade do paraproduto e resto sobre espaços de Besov não-homogêneos, abordados na seção anterior, permanecem válidas para o caso homogêneo, desde que verificadas as condições adicionais:

(i) $s < d/p$ ou $s = d/p$ e $r = 1$, no caso do Corolário 2.4.1;

(ii) $s - \sigma < d/p$ ou $s - \sigma = d/p$ e $r = 1$, item (i) da Proposição 2.4.3;

(iii) $\sigma_{1,2} < d/p$ ou $\sigma_{1,2} = d/p$ e $r = 1$, item (ii) da Proposição 2.4.3.

A prova destes resultados pode ser vista em ([6], pág. 35-36).

Capítulo 3

A Equação da Onda Cúbica no $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo, analisamos o problema de existência e unicidade de soluções para a equação da onda cúbica em dimensão 3. Baseando-se em [2], publicado em 2006 por H. Bahouri e J.-Y. Chemin, estudamos a boa-colocação para dados iniciais em $\dot{H}^{3/4} \times \dot{H}^{-1/4}$. A prova, motivada pela decomposição de Littlewood-Paley, resgata um método de interpolação não-linear utilizado anteriormente em equações de Navier-Stokes.

3.1 Introdução

A equação da onda cúbica foi introduzida na Teoria dos Campos e têm sido utilizada em várias aplicações, como em Física Gravitacional. Esta se escreve como

$$\begin{cases} \Box u + u^3 = 0 \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = u_0 \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

onde u é uma função desconhecida com valores reais de $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Do ponto de vista físico, a dinâmica das soluções desta equação pode ser vista como uma competição entre o laplaciano que tende a dispersar as ondas e a não-linearidade, que tende a concentrar as ondas.

Um resultado importante a respeito da Conservação de Energia para a equação da onda cúbica é dado pela seguinte proposição:

Proposição 3.1.1 *Suponhamos que u seja uma solução de (3.1) tal que $u_0 \in L^4$ e $\partial u(0) = (\partial_x u(0), \partial_t u(0))$ pertence a L^2. Então, vale seguinte igualdade:*

$$\frac{1}{2}\|\partial u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|u(t)\|_{L^4}^4 = \frac{1}{2}\|\partial u(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|u(0)\|_{L^4}^4 \tag{3.2}$$

Demonstração: Por argumento de aproximação, podemos assumir que u pertence ao espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ e é de classe C^∞ com respeito ao tempo.

Seja

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\partial u(t,x)|^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |u(t,x)|^4 dx$$

Derivando em relação a t, temos

$$\partial_t E(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} \partial_t(\partial_{x_i} u)\partial_{x_i} u + \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t^2 u \partial_t u dx + \int_{\mathbb{R}^3} u^3 \partial_t u dx \tag{3.3}$$

Integrando por partes, como u e suas derivadas tendem a zero no infinito,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} \partial_t(\partial_{x_i} u)\partial_{x_i} u dx = -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} u\right) \partial_t u dx$$

Susbtituindo em (3.3), segue que $\partial_t E(t) = 0$, pois u satisfaz a equação de (3.1). Assim, a variação é igual a zero e a energia é constante, donde obtemos (3.2). ∎

Quanto a propriedades de escala, pela Regra da Cadeia para derivação, é imediato que se u é uma solução de (3.1), então $u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda t, \lambda x)$, com $\lambda > 0$ também é solução de (3.1), com dados iniciais

$$u_0^\lambda(x) = \lambda u_0(\lambda x)$$

$$u_1^\lambda(x) = \lambda^2 u_1(\lambda x).$$

Seja $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$. Pela propriedade (1.18), temos

$$\begin{aligned} \|(u_0,u_1)^\lambda\|_{\dot{H}^{s_0}\times\dot{H}^{s_1}} &= \|u_0^\lambda\|_{\dot{H}^{s_0}} + \|u_1^\lambda\|_{\dot{H}^{s_1}} \\ &= \lambda^{s_0+1-3/2}\|u_0\|_{\dot{H}^{s_0}} + \lambda^{s_1+2-3/2}\|u_1\|_{\dot{H}^{s_1}} \end{aligned}$$

Para que

$$\|(u_0,u_1)^\lambda\|_{\dot{H}^{s_0}\times\dot{H}^{s_1}} = \|(u_0,u_1)\|_{\dot{H}^{s_0}\times\dot{H}^{s_1}},$$

devemos ter

$$s_0 + 1 - 3/2 = 0 \text{ e } s_1 + 2 - 3/2 = 0,$$

isto é, $s_0 = 1/2$ e $s_1 = -1/2$. Portanto, $\dot{H}^{1/2} \times \dot{H}^{-1/2}$ é o espaço de Sobolev homogêneo invariante por esta mudança de escala.

Este fato sugere que, em algum sentido, $s = 1/2$ é um expoente crítico para o problema de Cauchy (3.1). Neste caso, (3.1) será localmente e globalmente bem-posto para dados pequenos. Em [19], H. Lindblad e C. D. Sogge provaram o seguinte

Teorema 3.1.1 *Existe uma constante c tal que, se $\gamma = \partial u(0) \in \dot{H}^{-1/2}$ e $||\gamma||_{\dot{H}^{-1/2}} \leq c$, então uma única solução global de* (3.1) *existe em $L^4(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ satisfazendo*

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \leq C\|\gamma\|_{\dot{H}^{-1/2}}.$$

Além disso, se γ pertencer a $\dot{H}^{-1/3}$, então a solução u satisfaz

$$\|u\|_{L^3(\mathbb{R},L^6)} \leq C\|\gamma\|_{\dot{H}^{-1/3}},$$

para alguma constante $C > 0$.

Surge o problema de investigar quando (3.1) é globalmente bem-posto para dados iniciais grandes. O seguinte Teorema foi provado por C. E. Kenig, G. Ponce e L. Vega, em [17]:

Teorema 3.1.2 *Seja (u_0, u_1) em $(\dot{H}^s \cap L^4) \times \dot{H}^{s-1}$ para s maior que* $3/4$. *Então existe uma única solução global de* (3.1) *tal que*

$$\partial u \in C(\mathbb{R}; \dot{H}^{s-1}) \text{ e } u \in L^4_{loc}(\mathbb{R}; L^6).$$

Um método diferente para a prova do Teorema 3.1.2 foi proposto por I. Gallagher e G. Planchon em [11]. Seguindo esta técnica, juntamente com as estimativas logarítmicas de Strichartz introduzidas por W. Klainerman e D. Tataru em [18], H. Bahouri e J.-Y. Chemin provaram em [2] a boa-colocação quando (u_0, u_1) pertencem a $\dot{H}^{3/4} \times \dot{H}^{-1/4}$.

O resultado proposto em [2] é mais geral. Com as notações do Capítulo 2, temos

Teorema 3.1.3 *Suponhamos que $(u_0, u_1) \in \dot{B}^{3/4}_{2,4} \times \dot{B}^{-1/4}_{2,4}$ tal que $\dot{S}_0 u_0$ pertence a L^2. Então existe uma única solução global u no espaço $L^4_{loc}(\mathbb{R}; L^4)$.*

Observemos que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & (\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d))^d \\ u & \mapsto & \partial_x u = (\partial_{x_1} u, \cdots, \partial_{x_d} u) \end{array}$$

é injetiva.

Caso contrário, se existirem duas distribuições $v_1, v_2 \in \mathcal{S}'_h$ tal que $\partial_x v_1 = \partial_x v_2$, teríamos $v_1 - v_2 = c \neq 0$, e assim a função constante c pertenceria a $\mathcal{S}'_h$, contradizendo a definição 2.5.1.

Deste modo, ao invés de estudarmos o Problema de Cauchy (3.1), podemos considerá-lo como

$$\begin{cases} \Box u + u^3 = 0 \\ \partial u(0) = (\partial_x u_0, u_1) \end{cases} \tag{3.4}$$

3.2 A parte básica da prova

Para a prova do Teorema 3.1.3, utilizaremos um método de interpolação não-linear introduzido nos trabalhos de I. Gallagher e F. Planchon. Inicialmente, decompomos os dados iniciais escrevendo, para cada inteiro J,

$$\gamma_J^\ell \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_x \dot{S}_J u_0, \dot{S}_J u_1)$$

$$\gamma_J^h \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_x (Id - \dot{S}_J) u_0, (Id - \dot{S}_J) u_1)$$

A parte de alta-frequência γ_J^h será pequena em $\dot{H}^{-1/2}$, e então o Teorema 3.1.1 nos dará uma solução global. A parte de baixa frequência, referente a γ_J^ℓ, satisfaz uma equação da onda cúbica modificada para o qual uma estimativa de energia, em nível $\dot{H}^1$ será feita. Então, será possivel escolhermos J tal que uma única solução existe em um tempo arbitrário.

Propriedade 3.2.1 *Para cada $\sigma < -1/4$,*

$$\|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^\sigma} \leq C d_J 2^{J(\sigma + 1/4)} \|\gamma\|_{\dot{B}^{1/4}_{2,4}} \tag{3.5}$$

Prova da Propriedade 3.2.1: Observemos primeiramente como age o operador $(Id - \dot{S}_J)$ para distribuições em $\mathcal{S}'_h$.

Pela decomposição de Littlewood-Paley homogênea temos, para toda $u \in \mathcal{S}'_h$,

$$(Id - \dot{S}_J)u = \sum_l \dot{\Delta}_l u - \sum_{l \leq J-1} \dot{\Delta}_l u = \sum_{l > J-1} \dot{\Delta}_l u$$

Segue da propriedade (2.8) que

$$\dot{\Delta}_k(Id - \dot{S}_J)u = \begin{cases} 0, \text{ se } k < J-1 \\ \dot{\Delta}_k\dot{\Delta}_{k+1}u, \text{ se } k = J-1 \\ \dot{\Delta}_k\dot{\Delta}_k u + \dot{\Delta}_k\dot{\Delta}_{k+1}u, \text{ se } k = J \\ \dot{\Delta}_k\dot{\Delta}_{k-1}u + \dot{\Delta}_k\dot{\Delta}_k u + \dot{\Delta}_k\dot{\Delta}_{k+1}u, \text{ se } k > J. \end{cases}$$

Neste caso, $\dot{\Delta}_k(Id - \dot{S}_J)u = 0$, se $k < J-1$ e, para $k \geq J-1$,

$$\|\dot{\Delta}_k(Id - \dot{S}_J)u\|_{L^2} \leq C\|\dot{\Delta}_k u\|_{L^2},$$

pela continuidade dos operadores $\dot{\Delta}_k$ em L^2.

Em particular, para γ_J^h, teremos

$$\begin{aligned} \|\dot{\Delta}_k\gamma_J^h\|_{L^2} &= \|\dot{\Delta}_k(Id - \dot{S}_J)\partial_x u_0\|_{L^2} + \|\dot{\Delta}_k(Id - \dot{S}_J)u_1\|_{L^2} \\ &\leq C\left(\|\partial_x u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}\right) \\ &= C\|\gamma\|_{L^2} \end{aligned}$$

Assim, pela identificação $\dot{H}^\sigma = \dot{B}^\sigma_{2,2}$,

$$\begin{aligned} \|\gamma_J^h\|^2_{\dot{H}^\sigma} &= \sum_k 2^{2k\sigma}\|\dot{\Delta}_k\gamma_J^h\|^2_{L^2} \\ &\leq C\sum_{k\geq J-1} 2^{2k\sigma}\|\dot{\Delta}_k\gamma\|^2_{L^2} \end{aligned}$$

Multiplicando $2^{-J(2\sigma+1/2)}$ em ambos os membros,

$$2^{-J(2\sigma+1/2)}\|\gamma_J^h\|^2_{\dot{H}^\sigma} \leq C\sum_{k\geq J-1} 2^{(2\sigma+1/2)(k-J)}\|\dot{\Delta}_k\gamma\|^2_{L^2}2^{-k/2}\ .$$

Seja

$$c_k = \frac{2^{-k/2}\|\dot{\Delta}_k\gamma\|^2_{L^2}}{\|\gamma\|^2_{\dot{B}^{1/4}_{2,4}}}.$$

Então $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ é um elemento da esfera unitária de $\ell^2(\mathbb{Z})$ que nos fornece

$$\begin{aligned} 2^{-J(2\sigma+1/2)}\|\gamma_J^h\|^2_{\dot{H}^\sigma} &\leq C\|\gamma\|^2_{\dot{B}^{1/4}_{2,4}}\sum_{k\geq J-1} c_k 2^{(2\sigma+1/2)(k-J)} \\ &\leq C\|\gamma\|^2_{\dot{B}^{1/4}_{2,4}}\sup_{l\geq -1} c_{J+l}\sum_{k\geq J-1} 2^{(2\sigma+1/2)(k-J)} \\ &\leq C\sup_{l\geq -1} c_{J+l}\|\gamma\|^2_{\dot{B}^{1/4}_{2,4}}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

pois $\sigma < -1/4$ garante a convergência da série em (3.6).

Extraindo a raiz de ambos os membros, segue que

$$\|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^\sigma} \leq C d_J 2^{J(\sigma+1/4)} \|\gamma\|_{\dot{B}^{1/4}_{2,4}},$$

onde $d_J^2 = \sup\limits_{l \geq -1} c_{J+l}$ é tal que $d_J \to 0$ quando $J \to \infty$.

■

Propriedade 3.2.2 *Para todo J inteiro, $\gamma_J^\ell \in L^2$.*

Prova da Propriedade 3.2.2: Procedendo de modo análogo a demonstração da Propriedade 3.2.1, temos que $\dot{\Delta}_k(\dot{S}_j u) = 0$, se $k > J+1$ e

$$\|\dot{\Delta}_k(\dot{S}_J u)\|_{L^2} \leq C\|\dot{\Delta}_k u\|_{L^2},$$

se $k \leq J+1$.

Em particular, para γ_J^ℓ obtemos

$$\|\dot{\Delta}_k \gamma_J^\ell\|_{L^2} \leq C\|\dot{\Delta}_k \gamma\|_{L^2}.$$

Como $L^2 = \dot{B}^0_{2,2}$,

$$\begin{aligned}
2^{-J/2}\|\gamma_J^\ell\|_{L^2}^2 &= 2^{-J/2}\sum_k \|\dot{\Delta}_k \gamma_J^\ell\|_{L^2}^2 \\
&\leq C \sum_{k \leq J+1} 2^{(k-J)/2}\|\dot{\Delta}_k \gamma\|_{L^2}^2 2^{-k/2} \\
&= C\|\gamma\|^2_{\dot{B}^{1/4}_{2,4}} \sum_{k \leq J+1} c_k 2^{(k-J)/2} \\
&\leq C\|\gamma\|^2_{\dot{B}^{1/4}_{2,4}} \sup_{l \leq 1} c_{J+l} = C d_J'^2 \|\gamma\|^2_{\dot{B}^{-1/4}_{2,4}},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|\gamma_J^\ell\|_{L^2} \leq C 2^{J/4} d_J' \|\gamma\|_{\dot{B}^{-1/4}_{2,4}}.$$

■

Pela Propriedade 3.2.1, visto que $\gamma_J^h \in \dot{H}^{-1/2}$, existe uma única solução global v_J de (3.4), com dado inicial γ_J^h. É natural procurarmos uma solução global de (3.4) da forma $u = u_J + v_J$, onde u_J é a solução da onda cúbica modificada

$$\begin{cases} \Box u_J + u_J^3 + 3u_J^2 v_J + 3u_J v_J^2 = 0 \\ \partial u_J|_{t=0} = \tilde{\gamma} \end{cases} \tag{3.7}$$

com $\tilde{\gamma} = \gamma_J^\ell$. Como $\gamma_J^\ell \in L^2$ (Propriedade 3.2.2), uma única solução local existe, como descreve a seguinte Proposição provada em [11]:

Proposição 3.2.1 *Seja v_J uma solução de (3.4) associado ao dado inicial γ_J^h e suponhamos que $\tilde{\gamma} \in L^2$. Então, existe um tempo positivo T tal que uma única solução local u_J do problema de Cauchy (3.7) satisfazendo $\partial u_J \in C([0,T];L^2)$. Além disso, T pode ser escolhido de modo que $T \geq C\|\tilde{\gamma}\|_{L^2}^{-2}$.*

Para cada J, denotamos por T_J^* o tempo máximo de existência de (3.7). Assim, o principal objetivo será mostrarmos que

$$\limsup_{J\to\infty} T_J^* = \infty \tag{3.8}$$

Para a prova de (3.8), é suficiente obtermos uma estimativa a priori da energia da solução u_J, que nos fornecerá um controle dos termos pertubativos pela energia de u_J.
Definimos

$$\mathcal{E}_J \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\|\partial u_J(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|u_J(0)\|_{L^4}^4$$

Observemos que $\mathcal{E}_J$ é finito quando $J \to \infty$. Mais precisamente, mostremos que para $J \geq 2$, temos

$$\mathcal{E}_J^{1/2} \leq C d_J 2^{J/4} \mathcal{N}_0, \tag{3.9}$$

com

$$\mathcal{N}_0 = \|\gamma\|_{\dot{B}_{2,4}^{-1/4}} + \left(\|u_0\|_{\dot{B}_{2,4}^{3/4}} + \|\dot{S}_0 u_0\|_{L^2}\right)^2.$$

De fato, pela desigualdade triangular e o Lema de Bernstein,

$$\begin{aligned}\|\dot{S}_J u_0\|_{L^4} &\leq \|\dot{S}_0 u_0\|_{L^4} + \|\dot{S}_J u_0 - \dot{S}_0 u_0\|_{L^4} \\ &\leq C\|\dot{S}_0 u_0\|_{L^2} + \|\dot{S}_J u_0 - \dot{S}_0 u_0\|_{L^4}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pelo Teorema 1.5.5, $\dot{H}^{3/4}$ mergulha continuamente em L^4. Assim,

$$\begin{aligned}\|\dot{S}_J u_0 - \dot{S}_0 u_0\|_{L^4} &\leq C\|\dot{S}_J u_0 - \dot{S}_0 u_0\|_{\dot{H}^{3/4}} \\ &\leq C\sum_k 2^{3k/4}\|\dot{\Delta}_k(\dot{S}_J u_0 - \dot{S}_0 u_0)\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Notemos que, para $J > 0$ e $k \in \mathbb{Z}$,

$$\dot{\Delta}_k(\dot{S}_J u_0 - \dot{S}_0 u_0) = \dot{\Delta}_0 u_0 + \dot{\Delta}_1 u_0 + \cdots + \dot{\Delta}_{J-1} u_0$$

Então, se $k \leq -2$ ou $k \geq J+1$, temos $\dot{\Delta}_k(\dot{S}_J u_0 - \dot{S}_0 u_0) = 0$.

Segue então de (3.11) que

$$\begin{aligned}
\|\dot{S}_J u_0 - \dot{S}_0 u_0\|_{L^4} &\leq C \sum_{-2<k<J+1} 2^{3k/4} \|\dot{\Delta}_k u_0\|_{L^2} \\
&\leq C \left(\sum_{-2<k<J+1} 1 \right)^{3/4} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{3k} \|\dot{\Delta}_k u_0\|_{L^2}^4 \right)^{1/4} \\
&= C(J+1)^{3/4} \|u_0\|_{\dot{B}^{3/4}_{2,4}}
\end{aligned}$$

Substituindo em (3.10),

$$\|\dot{S}_J u_0\|_{L^4} \leq C \left(\|\dot{S}_0 u_0\|_{L^2} + J^{3/4} \|u_0\|_{\dot{B}^{3/4}_{2,4}} \right). \tag{3.12}$$

Mas $\partial u_J(0) = \gamma_J^\ell$ e $u_J(0) = \dot{S}_J u_0$, pois u_J é dada pela Proposição 3.2.1. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_J^{1/2} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\gamma_J^\ell\|_{L^2} + \frac{1}{2} \|S_J u_0\|_{L^4}^2 \\
&\overset{(*)}{\leq} C 2^{J/4} d'_J \|\gamma\|_{\dot{B}^{1/4}_{2,4}} + \left(\|\dot{S}_0 u_0\|_{L^2} + J^{3/4} \|u_0\|_{\dot{B}^{3/4}_{2,4}} \right)^2 \\
&\leq C 2^{J/4} d'_J \|\gamma\|_{\dot{B}^{1/4}_{2,4}} + C' 2^{J/6} \left(\|\dot{S}_0 u_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{\dot{B}^{3/4}_{2,4}} \right)^2 \\
&= C 2^{J/4} (d'_J + 2^{-J/12}) \mathcal{N}_0,
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que $J \geq 2$ e a função contínua $\rho(x) = 2^{-x/12} x^{3/4}$ é limitada. Segue a desigualdade (3.9).

Seja

$$T_J = \sup \left\{ T < T_J^*;\ \frac{1}{2} \|\partial u_J\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 \leq 2\mathcal{E}_J \right\} \tag{3.13}$$

De acordo com [1], página 84, temos a seguinte igualdade de energia para a equação da onda

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (\Box u)(\partial_t u) dx dt = E(T) - E(0), \tag{3.14}$$

com

$$E(T) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\partial u(x,T)|^2 dx.$$

Assim, se $T < T_J^*$,

$$\frac{1}{2} \|\partial u_J(T)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \|\partial u_J(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (\Box u_J)(\partial_t u_J) dx dt \tag{3.15}$$

Multiplicando a equação (3.7) por $\partial_t u_J$ e integrando sobre x e t, obtemos

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (\Box u_J)(\partial_t u_J) dxdt = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u_J^3 \partial_t u_J dxdt - 3\Lambda(u_J, v_J)$$

onde

$$\Lambda(u_J, v_J) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(v_J^2 u_J \partial_t u_J dxdt + v_J u_J^2 \partial_t u_J \right) dxdt$$

Por outro lado, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u_J^3 \partial_t u_J dxdt &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^T \partial_t (u_J^4) dtdx \\
&= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \left(u_J^4(T, x) - u_J^4(0, x) \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \|u_J(T)\|_{L^4}^4 - \frac{1}{4} \|u_J(0)\|_{L^4}^4
\end{aligned}$$

Segue de (3.15) que, para cada $T < T_J^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|\partial u_J(T)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|u_J(T)\|_{L^4}^4 &= \frac{1}{2} \|\partial u_J(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|u_J(0)\|_{L^4}^4 - 3\Lambda(u_J, v_J) \\
&\leq \mathcal{E}_J + 3|\Lambda(u_J, v_J)|
\end{aligned}$$

Tomando o supremo essencial com respeito a variavel t,

$$\frac{1}{2} \|\partial u_J\|_{L_T^\infty(L^2)} \leq \mathcal{E}_J + 3|\Lambda(u_J, v_J)| \tag{3.16}$$

A seguinte Proposição descreve o controle sobre o termo $\Lambda(u_J, v_J)$:

Proposição 3.2.2 *Existe uma função f localmente limitada tal que, para todo $T < T_J$,*

$$3 \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_J^2 u_J \partial_t u_J dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_J u_J^2 \partial_t u_J dxdt \right| \leq f(T) a_J \mathcal{E}_J,$$

onde (a_J) denota uma sequência tal que

$$\liminf_{J \to \infty} a_J = 0.$$

Vamos admitir, por um momento, que a Proposição anterior seja válida e concluir a demonstração do Teorema 3.1.3.

Utilizando (3.16) e a Proposição 3.2.2, temos que para todo $T < T_J$,

$$\frac{1}{2} \|\partial u_J\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 \leq (1 + f(T) a_J) \mathcal{E}_J \tag{3.17}$$

Suponhamos, por contradição, que (3.8) não seja válido, ou seja, que exista $T' > 0$ (associado a um inteiro J') de modo que

$$\limsup_{J\to+\infty} T_J^* = T' < \infty.$$

Assim, existe um inteiro $J \geq J'$ tal que

$$f(T')a_J \leq \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \|\gamma\|_{\dot{H}^{-1/2}} \leq c.$$

Aplicando a desigualdade (3.17) para T', obtemos

$$\frac{1}{2}\|\partial u_J\|^2_{L^\infty_{T'}(L^2)} \leq \left(1+\frac{1}{4}\right)\mathcal{E}_J < 2\mathcal{E}_J.$$

Logo, $T_J \geq T'$, concluindo a prova.

3.3 Estimativas de Strichartz

Antes de apresentarmos a demonstração da Proposição 3.2.2, vamos enunciar algumas desigualdades a respeito da equação da onda que serão utilizadas mais adiante.

Suponhamos que u seja uma solução fraca do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \Box u(t,x) = F(t,x), \ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) = f, \ \partial_t u(0,\cdot) = g \end{cases} \tag{3.18}$$

para dados f, g, F e tempo $0 < T < \infty$.

Definição 3.3.1 *Dizemos que o par de expoentes (q,r) é σ-admissivel se $q,r \geq 2$, $(q,r,\sigma) \neq (2,\infty,1)$ e*

$$\frac{1}{q} + \frac{\sigma}{r} \leq \frac{\sigma}{2}$$

Quando $d \geq 2$ e (q,r) é $\frac{d-1}{2}$-admissível, o par (q,r) é dito wave-admissível.

Em [15], M. Keel e T. Tao provaram a seguinte

Proposição 3.3.1 *Suponha que $d \geq 2$ e $(q,r),(\tilde{q},\tilde{r})$ sejam pares wave-admissível, com $r,\tilde{r} < \infty$. Então vale a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{L^q_T(L^r)} + \|u\|_{C([0,T];\dot{H}^\gamma)} + \|\partial_t u\|_{C([0,T];\dot{H}^{\gamma-1})} \leq C\left(\|f\|_{\dot{H}^\gamma} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} + \|F\|_{L^{\tilde{q}'}_T(L^{\tilde{r}'})}\right) \tag{3.19}$$

sob a condição da análise dimensional

$$\frac{1}{q}+\frac{d}{r}=\frac{d}{2}-\gamma=\frac{1}{\tilde{q}'}+\frac{d}{\tilde{r}'}-2$$

Quando $F = 0$, nos referimos a (3.18) por equação da onda livre. Neste caso, para soluções cujo suporte da Transformada de Fourier está contido em coroas, vale o seguinte resultado, devido a W. Klainerman e D. Tataru, em [18]:

Lema 3.3.1 (Desigualdade logarítmica de Strichartz) *Seja u uma solução da equação da onda livre tal que*

$$S(\widehat{u}) \subset 2^k\mathcal{C} \cap B,$$

onde $\mathcal{C}$ é uma coroa e B uma bola de raio $h2^k$.
Então, para todo T positivo,

$$\|u\|_{L^2_T(L^\infty)} \leq C(h\log(e+2^kT))^{1/2}\|\partial u(0)\|_{L^2}$$

3.4 Prova da Proposição 3.2.2

Iniciaremos estimando o termo quadrático com respeito a v_J.
Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\int_{\mathbb{R}^3} v_J^2 u_J \partial_t u_J dx \leq \|v_J^2 u_J\|_{L^2}\ \|\partial_t u_J\|_{L^2} \tag{3.20}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados $p = 3/2$ e $p' = 3$ para o termo $\|v_J^2 u_J\|_{L^2}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\|v_J^2 u_J\|_{L^2}^2 &= \int |v_J(x)|^4 |u_J(x)|^2 dx \\
&\leq \left(\int |v_J(x)|^{4.3/2} dx\right)^{2/3} \left(\int |u_J(x)|^{2.3} dx\right)^{1/3} \\
&= \left(\int |v_J(x)|^6 dx\right)^{2/3} \left(\int |u_J(x)|^6 dx\right)^{1/3},
\end{aligned}$$

e assim,

$$\|v_J^2 u_J\|_{L^2} \leq \|v_J\|_{L^6}^2 \|u_J\|_{L^6}.$$

Logo, para todo $T < T_J$,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_J^2 u_J \partial_t u_J dx dt \right| &\leq \int_0^T \|v_J(t)\|_{L^6}^2 \|u_J(t)\|_{L^6} \|\partial_t u_J(t)\|_{L^2} dt \\ &\leq C \int_0^T \|v_J(t)\|_{L^6}^2 \|u_J(t)\|_{H^1} \|\partial_t u_J(t)\|_{L^2} dt \end{aligned} \tag{3.21}$$

pois H^1 está continuamente incluído em L^6, pelo Mergulho de Sobolev. Agora, pela caracterização da norma em H^1 dada no Teorema 1.5.1,

$$\begin{aligned} \|u_J(t)\|_{H^1}^2 &\leq C \left(\|u_J(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u_J(t)\|_{L^2}^2 \right) \\ &\leq C \left(T^2 \|\partial_t u_J(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u_J(t)\|_{L^2}^2 \right) \qquad (3.22) \\ &\leq C \left(T^2 \|\partial u_J\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 + \|\partial u_J\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 \right) \\ &\leq 4C(T^2+1)\mathcal{E}_J, \qquad (3.23) \end{aligned}$$

onde, em (3.22), utilizamos o Lema de Poincaré para o conjunto $[0,T] \times \mathbb{R}^3$ e em (3.23) vale a desigualdade (3.13), pois $T < T_J$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} \|u_J(t)\|_{H^1} \|\partial_t u_J(t)\|_{L^2} &\leq \frac{1}{2} \left(\|u_J(t)\|_{H^1}^2 + \|\partial_t u_J(t)\|_{L^2}^2 \right) \\ &\leq C \left((T^2+1)\mathcal{E}_J + \|\partial u_J(t)\|_{L^2}^2 \right) \\ &\leq C(T^2+2)\mathcal{E}_J, \end{aligned}$$

e assim, substituindo em (3.21),

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_J^2 u_J \partial_t u_J dx dt \right| \leq C(T^2+2)\mathcal{E}_J \int_0^T \|v_J(t)\|_{L^6}^2 dt. \tag{3.24}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \|v_J\|_{L_T^2(L^6)}^2 &= \int_0^T \|v_J\|_{L^6}^2 dt \\ &\leq \left(\int_0^T \|v_J\|_{L^6}^{2.3/2} dt \right)^{2/3} \left(\int_0^T 1 \; dt \right)^{1/3} \\ &= T^{1/3} \|v_J\|_{L_T^3(L^6)}^2. \end{aligned}$$

Como v_J é a solução proveniente do Teorema 3.1.1, fazendo $\sigma = -1/3$ na desigualdade (3.5), dada pela Propriedade 3.2.1, obtemos

$$\begin{aligned} \|v_J\|_{L_T^3(L^6)} &\leq C \|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^{-1/3}} \\ &\leq C 2^{-J/12} \|\gamma\|_{\dot{B}_{2,4}^{-1/4}}, \end{aligned}$$

e então

$$\|v_J\|^2_{L^2_T(L^6)} \leq CT^{1/3}2^{-J/6}\|\gamma\|^2_{\dot{B}^{-1/4}_{2,4}}.$$

Segue de (3.24) que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} v_J^2 u_J \partial_t u_J dxdt\right| &\leq C\mathcal{E}_J\|v_J\|^2_{L^2_T(L^6)} \\ &\leq CT^{1/3}(T^2+2)2^{-J/6}\|\gamma\|^2_{\dot{B}^{-1/4}_{2,4}}\mathcal{E}_J. \qquad (3.25)\end{aligned}$$

Para controlarmos o termo linear com respeito a v_J, lembremos que v_J satisfaz

$$\begin{cases} \Box v_J + v_J^3 = 0 \\ \partial v_J(0) = \gamma_J^h \end{cases}$$

Podemos então escrever

$$v_J = v_{J,F} + B(v_J, v_J, v_J),$$

onde v_J satisfaz a equação da onda livre $\Box v_{J,F} = 0$ com $\partial v_{J,F}(0) = \gamma_J^h$ e $B(v_J, v_J, v_J)$ é solução da equação da onda não-homogênea $\Box B(v_J, v_J, v_J) = -v_J^3$ com dados de Cauchy nulos.

Começaremos estimando

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} B(v_J, v_J, v_J)u_J^2\partial_t u_J dxdt.$$

Por simplicidade de notação, escrevemos $B(v_J) = B(v_J, v_J, v_J)$.

Novamente, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} B(v_J)u_J^2\partial_t u_J dxdt \leq \int_0^T \|B(v_J)u_J^2\|_{L^2}\|\partial_t u_J\|_{L^2}dt \qquad (3.26)$$

Pela desigualdade de Hölder, com $p = 3/2$ e $p' = 3$,

$$\begin{aligned}\|B(v_J)u_J^2\|^2_{L^2} &= \int B^2(v_J)u_J^4 dx \\ &\leq \left(\int |B^2(v_J)|^3 dx\right)^{1/3}\left(\int |u_J^4|^{3/2}dx\right)^{2/3} \\ &= \|B(v_J)\|^2_{L^6}\|u_J\|^4_{L^6}\end{aligned}$$

Extraindo a raiz e substituindo em (3.26),

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} B(v_J)u_J^2\partial_t u_J dxdt &\leq \int_0^T \|B(v_J)\|_{L^6}\|u_J\|^2_{L^6}\|\partial_t u_J\|_{L^2}dt \\ &\leq C(T^2+1)^2\mathcal{E}^{3/2}\int_0^T \|B(v_J)\|_{L^6}dt\end{aligned}$$

onde na última desigualdade utilizamos (3.23).

Porém,

$$\begin{aligned}\int_0^T \|B(v_J)\|_{L^6} dt &\leq \left(\int_0^T \|B(v_J)\|_{L^6}^3\right)^{1/3} \left(\int_0^T dt\right)^{2/3} \\ &= T^{2/3}\|B(v_J)\|_{L^3_T(L^6)},\end{aligned}$$

e daí, para qualquer $T < T_J$,

$$\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} B(v_J)u_J^2\partial_t u_J dxdt\right| \leq CT^{2/3}(T^2+1)^2\mathcal{E}_J^{3/2}\|B(v_J)\|_{L^3_T(L^6)}. \tag{3.27}$$

Para estimar o termo $\|B(v_J)\|_{L^3_T(L^6)}$, notemos que o par de expoentes $(3,6)$ é wave-admissível. Para valer a desigualdade (3.19), devemos ter

$$\frac{1}{q}+\frac{d}{r}=\frac{1}{\tilde{q}'}+\frac{d}{\tilde{r}'}-2,$$

isto é,

$$\frac{1}{\tilde{q}'}+\frac{3}{\tilde{r}'}=\frac{17}{6},$$

satisfeita pelo par $(\tilde{q}',\tilde{r}') = (6/5, 3/2)$.

Assim, pela Proposição 3.3.1,

$$\|B(v_J,v_J,v_J)\|_{L^3_T(L^6)} \leq C\|v_J^3\|_{L_T^{6/5}(L^{3/2})} \tag{3.28}$$

pois $\partial B(v_J)(0) = 0$. Também, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\|v_J^3\|_{L^{3/2}}^{3/2} &= \int v_J^{9/2}\ dx \\ &\leq \left(\int |v_J^3|^{4/3}\ dx\right)^{3/4} \left(\int |v_J^{3/2}|^4\ dx\right)^{1/4} \\ &= \|v_J\|_{L^4}^3\ \|v_J\|_{L^6}^{3/2}\end{aligned}$$

Extraindo a raiz 3/2 em ambos os membros, obtemos

$$\|v_J^3\|_{L^{3/2}} \leq \|v_J\|_{L^4}^2\ \|v_J\|_{L^6}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}\|v_J^3\|_{L_T^{6/5}(L^{3/2})}^{6/5} &= \int_0^T \|v_J^3\|_{L^{3/2}}^{6/5}\ dt \\ &\leq \int_0^T \left(\|v_J\|_{L^4}^2\ \|v_J\|_{L^6}\right)^{6/5} dt \\ &= \int_0^T \|v_J\|_{L^4}^{12/5}\ \|v_J\|_{L^6}^{6/5} dt\end{aligned} \tag{3.29}$$

Aplicando agora a desigualdade de Hölder em t, com os expoentes $p = 5/3$ e $p' = 5/2$, segue de (3.29) que

$$\begin{aligned}\|v_J^3\|_{L_T^{6/5}(L^{3/2})}^{6/5} &= \left(\int_0^T \|v_J\|_{L^4}^{12/5.5/3} dt\right)^{3/5} \left(\int_0^T \|v_J\|_{L^6}^{6/5.5/2} dt\right)^{2/5} \\ &= \left(\int_0^T \|v_J\|_{L^4}^4 dt\right)^{3/5} \left(\int_0^T \|v_J\|_{L^6}^3 dt\right)^{2/5}\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\|v_J^3\|_{L_T^{6/5}(L^{3/2})} &\leq \left(\int_0^T \|v_J\|_{L^4}^4 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v_J\|_{L^6}^3 dt\right)^{1/3} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \|v_J\|_{L^4}^4 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v_J\|_{L^6}^3 dt\right)^{1/3} \\ &= \|v_J\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)}^2 \|v_J\|_{L_T^3(L^6)}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Como v_J é uma solução dada pelo Teorema 3.1.1, fazendo $\sigma = -1/2$ e $\sigma = -1/3$ na estimativa (3.5), segue que

$$\|v_J\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \leq C\|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^{-1/2}} \leq C2^{-J/4}\|\gamma\|_{\dot{B}_{2,4}^{-1/4}}$$

$$\|v_J\|_{L^3(\mathbb{R},L^6)} \leq C\|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^{-1/3}} \leq C2^{-J/12}\|\gamma\|_{\dot{B}_{2,4}^{-1/4}}$$

e, aplicando em (3.30),

$$\|v_J^3\|_{L_T^{6/5}(L^{3/2})} \leq 2^{-J/2}2^{-J/12}\|\gamma\|_{\dot{B}_{2,4}^{-1/4}}^2.$$

Finalmente, substituindo em (3.28) com a definição de $\mathcal{N}_0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} B(v_J, v_J, v_J)u_J^2\partial_t u_J dxdt\right| &\leq CT^{2/3}\left(2^{-7J/12}\mathcal{E}_J^{1/2}\right)\|\gamma\|_{B_{2,4}^{-1/4}}^3\mathcal{E}_J \\ &\leq CT^{2/3}d_J 2^{-J/3}\,\mathcal{N}_0^3\mathcal{E}_J. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Por (3.25), a seguinte estimativa chave juntamente com (3.31) conclui a prova da Proposição 3.2.2.

Lema 3.4.1 *Com as notações da Proposição 3.2.2,*

$$\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} v_{J,F}u_J^2\partial_t u_J dxdt\right| \leq f(T)\mathcal{N}_0^2 a_J\mathcal{E}_J$$

■

Demonstração do Lema 3.4.1: O primeiro ingrediente é a decomposição de Bony, que nos permite escrever

$$v_{J,F}u_J^2 = T'_{v_{J,F}}u_J^2 + \dot{T}_{u_J^2}v_{J,F},$$

com

$$T'_{v_{J,F}}u_J^2 = \dot{T}_{v_{J,F}}u_J^2 + \dot{R}(v_{J,F}, u_J^2) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dot{S}_{k+2}(v_{J,F})\dot{\Delta}_k(u_J^2)$$

e

$$\dot{T}_{u_J^2}v_{J,F} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dot{S}_{k-1}(u_J^2)\dot{\Delta}_k(v_{J,F})$$

Etapa 1: Estimativa para o termo $\|T'_{v_{J,F}}u_J^2\|_{L^1_T(L^2)}$.

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|\dot{S}_{k+2}(v_{J,F})\dot{\Delta}_k(u_J^2)\|_{L^1_T(L^2)} &= \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\dot{S}_{k+2}(v_{J,F})\dot{\Delta}_k(u_J^2)|^2 dx\right)^{1/2} dt \\
&\leq \|\dot{\Delta}_k(u_J^2)\|_{L^\infty_T(L^2)} \int_0^T \|\dot{S}_{k+2}(v_{J,F})\|_{L^\infty} dt \\
&\leq \|\dot{\Delta}_k(u_J^2)\|_{L^\infty_T(L^2)} \left(\int_0^T \|\dot{S}_{k+2}(v_{J,F})\|^2_{L^\infty} dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T dt\right)^{1/2} \\
&= T^{1/2}\|\dot{\Delta}_k(u_J^2)\|_{L^\infty_T(L^2)}\|\dot{S}_{k+2}(v_{J,F})\|_{L^2_T(L^\infty)} \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Pela lei do produto $H^1 \cdot H^1 \hookrightarrow H^{1/2}$ (ver Proposição 2.4.3 e Teorema 2.3.3), temos

$$\begin{aligned}
2^k\|\dot{\Delta}_k(u_J^2)\|^2_{L^2} &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k\|\dot{\Delta}_k(u_J^2)\|^2_{L^2} \\
&= \|u_J^2\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \\
&\leq \|u_J^2\|^2_{H^{1/2}} \leq C\|u_J\|^4_{H^1}.
\end{aligned}$$

Extraindo a raiz e utilizando o Lema de Poincaré, segue da expressão (3.23) que

$$\begin{aligned}
\|\dot{\Delta}_k(u_J^2)\|_{L^2} &\leq C2^{-k/2}\|u_J\|^2_{H^1} \\
&\leq C2^{-k/2}\|\partial u_J\|^2_{L^2},
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\|\dot{\Delta}_k(u_J^2)\|_{L^\infty_T(L^2)} \leq C2^{-k/2}\|\partial u_J\|^2_{L^\infty_T(L^2)}. \qquad (3.33)$$

Substituindo em (3.32), obtemos

$$\|\dot{S}_{k+2}(v_{J,F})\dot{\Delta}_k(u_J^2)\|_{L^1_T(L^2)} \leq CT^{1/2}2^{-k/2}\|\partial u_J\|^2_{L^\infty_T(L^2)}\|\dot{S}_{k+2}(v_{J,F})\|_{L^2_T(L^\infty)} \qquad (3.34)$$

Observemos que $v_{J,F}$ satisfaz

$$\begin{cases} \Box v_{J,F} = 0 \\ \partial v_{J,F}(0) = \gamma_J^h \end{cases}$$

Mas, pela decomposição de Littlewood-Paley homogênea,

$$v_{J,F} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dot{\Delta}_k(v_{J,F})$$

Então, cada $\dot{\Delta}_k(v_{J,F})$ satisfaz $\Box\dot{\Delta}_k(v_{J,F}) = 0$, pois o operador da onda comuta com os operadores $\dot{\Delta}_k$ e vale a unicidade da expansão acima.

Analogamente, pela condição inicial,

$$\partial\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_k(v_{J,F})\right)(0) = \partial v_{J,F}(0) = \gamma_J^h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_k \gamma_J^h,$$

e assim

$$\partial(\dot{\Delta}_k(v_{J,F}))(0) = \dot{\Delta}_k \gamma_J^h.$$

Desta maneira, para todo inteiro k, $\dot{\Delta}_k(v_{J,F})$ é uma solução da equação da onda livre com dados iniciais $\partial\dot{\Delta}_k(v_{J,F})(0) = \dot{\Delta}_k\gamma_J^h$. Como a Transformada de Fourier de $\dot{\Delta}_k(v_{J,F})$ está suportada em $2^k\mathcal{C}$, a Desigualdade Logarítmica de Strichartz aplicada com $h = 1$ nos permite escrever

$$\begin{aligned} \|\dot{S}_{k+2}(v_{J,F})\|_{L_T^2(L^\infty)} &\leq \sum_{k' \leq k+1} \|\dot{\Delta}_{k'}(v_{J,F})\|_{L_T^2(L^\infty)} \\ &\leq C \sum_{k'\leq k+1} (\log(e + 2^{k'}T))^{1/2} \|\dot{\Delta}_{k'}\gamma_J^h\|_{L^2} \\ &\leq C(\log(e+2^kT))^{1/2} \sum_{k'\leq k+1} \|\dot{\Delta}_{k'}\gamma_J^h\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz para séries,

$$\begin{aligned} \sum_{k'\leq k+1} \|\dot{\Delta}_k\gamma_J^h\|_{L^2} &= 2^{k/3} \sum_{k'\leq k+1} 2^{(k'-k)/3} 2^{-k'/3} \|\dot{\Delta}_k\gamma_J^h\|_{L^2} \\ &\leq 2^{k/3} \left(\sum_{k'\leq k+1} 2^{2(k'-k)/3}\right)^{1/2} \left(\sum_{k'\leq k+1} 2^{-2k'/3}\|\dot{\Delta}_k\gamma_J^h\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \\ &\leq C2^{k/3}\|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^{-1/3}} \end{aligned}$$

Portanto, verificamos que

$$\|\dot{S}_{k+2}(v_{J,F})\|_{L_T^2(L^\infty)} \leq C(\log(e+2^kT))^{1/2} 2^{k/3} \|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^{-1/3}}.$$

Segue de (3.34) que, para todo $T < T_J$,

$$\begin{aligned}
\|T'_{v_{J,F}} u_J^2\|_{L^1_T(L^2)} &\leq \sum_{k \geq J-2} \|\dot{S}_{k+2}(v_{J,F})\dot{\Delta}_k(u_J^2)\|_{L^1_T(L^2)} \\
&\leq \sum_{k \geq J-2} CT^{1/2}(\log(e+2^kT))^{1/2}2^{k/3}\|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^{-1/3}}2^{-k/2}\|\partial u_J\|^2_{L^\infty_T(L^2)} \\
&\leq CT^{1/2}\|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^{-1/3}}\mathcal{E}_J \sum_{k \geq J-2} (\log(e+2^kT))^{1/2}2^{-k/6}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|T'_{v_{J,F}} u_J^2\|_{L^1_T(L^2)} \leq CT^{1/2}\|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^{-1/3}}\mathcal{E}_J^{1/2}2^{-J/6} \underbrace{\left(\sum_{k \geq J-2} \log\left(e+2^kT\right)^{1/2} 2^{-(k-J)/6}\right)}_{(*)} \mathcal{E}_J^{1/2}.$$

Como estamos interessados em provar (3.8), podemos supor, sem perda de generalidade, que $T \leq 2^J$. Também, como J está fixado e $k \leq J-2$, existe $C > 0$ tal que $2^J \leq C2^k$. Vamos então analisar a série $(*)$. Admitindo que $T \leq 2^J \leq C2^k$,

$$\begin{aligned}
e + 2^kT &\leq e + C2^{2k} \leq C(e+2^{2k}) \\
&\leq C(e+e^{2k}) \\
&\leq C(2e^{2k}).
\end{aligned}$$

Uma vez que a função logarítmica é crescente,

$$\log(e+2^kT) \leq \log(C(2e^{2k})) = Ck. \tag{3.35}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq J-2} \log\left(e+2^kT\right)^{1/2} 2^{-(k-J)/6} &\leq C \sum_{k \geq J-2} k^{1/2}2^{-(k-J)/6} \\
&= CJ^{1/2} \sum_{k \geq J-2} \left(\frac{k}{J}\right)^{1/2} 2^{-(k-J)/6}
\end{aligned}$$

Observemos que, para $J \geq 2$ fixado e para todo $k \geq J$,

$$\frac{k}{J} \leq k - J + 1. \tag{3.36}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq J-2} \left(\frac{k}{J}\right)^{1/2} 2^{-(k-J)/6} &= \left(\left(\frac{J-2}{J}\right)^{1/2}2^{-1/3} + \left(\frac{J-1}{J}\right)^{1/2}2^{-1/6} + \sum_{k \geq J}\left(\frac{k}{J}\right)^{1/2} 2^{-(k-J)/6}\right) \\
&\leq \left(2^{-1/3} + 2^{-1/6} + \sum_{k \geq J} (k-J+1)^{1/2}\, 2^{-(k-J)/6}\right).
\end{aligned}$$

Como a série anterior converge e independe de J, segue que

$$\sum_{k\geq J-2} k^{1/2}2^{-(k-J)/6} \leq CJ^{1/2},$$

e assim,

$$\|T'_{v_{J,F}}u_J^2\|_{L^1_T(L^2)} \leq CT^{1/2}J^{1/2}\mathcal{E}_J^{1/2}\|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^{-1/3}}\mathcal{E}_J^{1/2}. \tag{3.37}$$

Pela estimativa em (3.5) e a definição de $\mathcal{N}_0$,

$$\|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^{-1/3}} \leq Cd_J2^{-J/12}\|\gamma\|_{B^{-1/4}_{2,4}} \leq Cd_J2^{-J/12}\mathcal{N}_0. \tag{3.38}$$

Substituindo em (3.38) e utilizando a expressão (3.9), deduzimos que

$$\|T'_{v_{J,F}}u_J^2\|_{L^1_T(L^2)} \leq CT^{1/2}d_J^2J^{1/2}\mathcal{N}_0^2\mathcal{E}_J^{1/2}$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} T'_{v_{J,F}}\partial_t u_J dxdt\right| &\leq \int_0^T \|T'_{v_{J,F}}\ u_J^2\|_{L^2}\|\partial_t u_J\|_{L^2}\ dt \\
&\leq \|\partial_t u_J\|_{L^\infty_T(L^2)}\|T'_{v_{J,F}}u_J^2\|_{L^1_T(L^2)} \\
&\leq CT^{1/2}(J^{1/2}d_J^2)\mathcal{N}_0^2\mathcal{E}_J
\end{aligned}$$

Como $\liminf\limits_{J\to\infty} J^{1/2}d_J^2 = 0$, concluímos a estimativa para a primeira integral.

Etapa 2: Notemos que $\dot{\Delta}_k v_{J,F} = 0$ quando $k < J-2$.

Com efeito, pela identidade (3.14), a energia de soluções da equação da onda livre é constante no tempo. Em particular, para $\dot{\Delta}_k v_{J,F}$,

$$\|\partial(\dot{\Delta}_k v_{J,F})(t)\|_{L^2} = \|\dot{\Delta}_k\gamma_J^h\|_{L^2}.$$

Então, pela desigualdade de Bernstein,

$$\begin{aligned}
\|\dot{\Delta}_k v_{J,F}(t)\|_{L^2} &\leq C2^{-k}\|\partial(\dot{\Delta}_k v_{J,F})(t)\|_{L^2} \\
&= C2^{-k}\|\dot{\Delta}_k\gamma_J^h\|_{L^2}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Na demonstração da Propriedade (3.2.1), pág. 57, verificamos que se $k < J-2$, temos $\|\dot{\Delta}_k\gamma_J^h\|_{L^2} = 0$. Segue da desigualdade acima que $\|\dot{\Delta}_k v_{J,F}(t)\|_{L^2} = 0$, quando $k < J-2$.

Assim, pela definição do Paraproduto,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\dot{T}_{u_J^2}v_{J,F}\partial_t u_J dxdt &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\dot{S}_{k-1}(u_J^2)\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\partial_t u_J dxdt\\ &= \sum_{k\geq J-2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{k'\leq k-2}\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\partial_t u_J dxdt\\ &= \sum_{\substack{k'\leq k-2\\ k\geq J-2}}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\partial_t u_J dxdt \qquad (3.40)\end{aligned}$$

Observemos que se $u, v \in \mathcal{S}'_h$, utilizando a decomposição de Littlewood-Paley homogênea e a propriedade (2.8), escrevemos

$$\begin{aligned}(\dot{\Delta}_k u)v &= \dot{\Delta}_k u\sum_{l\in\mathbb{Z}}\dot{\Delta}_l v\\ &= \dot{\Delta}_k u\left(\dot{\Delta}_{k-1}v+\dot{\Delta}_k v+\dot{\Delta}_{k+1}v\right).\end{aligned}$$

Então, pela Transformada de Fourier,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\dot{\Delta}_{k-1}v+\dot{\Delta}_k v+\dot{\Delta}_{k+1}v\right) &= \varphi(2^{k-1}\cdot)\widehat{v}+\varphi(2^k\cdot)\widehat{v}+\varphi(2^{k+1}\cdot)\widehat{v}\\ &= \tilde{\varphi}(2^k\cdot)\widehat{v} \qquad (3.41)\end{aligned}$$

onde $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(2^{-1}x) + \varphi(x) + \varphi(2^1 x)$, com $x \in \mathbb{R}^3$.

Da forma como definimos, a função $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ e, por (2.5), vale 1 numa vizinhança do suporte de φ.

Segue de (3.41) que, para quaisquer distribuições temperadas $u, v \in \mathcal{S}'_h$,

$$(\dot{\Delta}_k u)v = \dot{\Delta}_k u\tilde{\Delta}_k v, \qquad (3.42)$$

onde $\tilde{\Delta}_k$ é o operador de convolução pela transformada de Fourier inversa de $\tilde{\varphi}(2^{-k}\cdot)$.

Aplicando a desigualdade de Young, temos que os operadores $\tilde{\Delta}_k$ também mapeiam L^p em L^p, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|\tilde{\Delta}_k u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p} \qquad (3.43)$$

Voltando a identidade (3.40), segue de (3.42) que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\dot{T}_{u_J^2}v_{J,F}\partial_t u_J dxdt &= \sum_{\substack{k'\le k-2\\ k\ge J-2}}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\partial_t u_J dxdt\\ &= \sum_{\substack{k'\le k-2\\ k\ge J-2}}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\tilde{\Delta}_k(\partial_t u_J)dxdt\\ &= \sum_{\substack{k'\le k-2\\ k\ge J-2}}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\tilde{\Delta}_{k'}(\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\tilde{\Delta}_k(\partial_t u_J))dxdt\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\dot{T}_{u_J^2}v_{J,F}\partial_t u_J dxdt = B_J^{(1)} + B_J^{(2)},$$

com

$$B_J^{(1)} = \sum_{\substack{k'<0\\ k\ge J-2}}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\tilde{\Delta}_{k'}(\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\tilde{\Delta}_k(\partial_t u_J))dxdt$$

e

$$B_J^{(2)} = \sum_{\substack{0\le k'<k-2\\ k\ge J-2}}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\tilde{\Delta}_{k'}(\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\tilde{\Delta}_k(\partial_t u_J))dxdt.$$

Inicialmente, vamos estimar $B_J^{(1)}$.

Utilizando a desigualdade de Hölder e a propriedade (3.43), temos:

$$\begin{aligned}|B_J^{(1)}| &\le \sum_{\substack{k'<0\\ k\ge J-2}}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)||\tilde{\Delta}_{k'}(\Delta_k(v_{J,F})\tilde{\Delta}_k(\partial_t u_J))|dxdt\\ &\le \sum_{\substack{k'<0\\ k\ge J-2}}\|\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\|_{L_T^\infty(L^\infty)}\int_0^T\|\Delta_k(v_{J,F})\|_{L^2}\|\tilde{\Delta}_k(\partial_t u_J)\|_{L^2}\ dt\\ &\le \sum_{\substack{k'<0\\ k\ge J-2}}\|\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\|_{L_T^\infty(L^\infty)}\|\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\|_{L_T^\infty(L^2)}\|\tilde{\Delta}_k(\partial_t u_J)\|_{L_T^\infty(L^2)}\int_0^T\ dt\\ &= T\sum_{\substack{k'<0\\ k\ge J-2}}\|\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\|_{L_T^\infty(L^\infty)}\|\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\|_{L_T^\infty(L^2)}\|\tilde{\Delta}_k(\partial_t u_J)\|_{L_T^\infty(L^2)} \qquad (3.44)\end{aligned}$$

Analizemos cada fator da expressão anterior separadamente.

Para o termo $\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)$, aplicando o Lema de Bernstein e a estimativa (3.33), temos que

$$\begin{aligned}\|\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\|_{L^\infty} &\le C2^{3k'/2}\|\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\|_{L^2}\\ &\le 2^{3k'/2}2^{-k'/2}\|\partial u_J\|_{L_T^\infty(L^2)}\\ &\le C2^{k'}\mathcal{E}_J\end{aligned}$$

e daí,

$$\|\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\|_{L_T^\infty(L^\infty)} \leq C2^{k'}\mathcal{E}_J.$$

Novamente, como os operadores $\tilde{\Delta}_k$ mapeiam L^2 em L^2, existe $C > 0$ tal que

$$\|\tilde{\Delta}_k \partial_t u_J\|_{L^2} \leq C\|\partial_t u_J\|_{L^2} \leq C\|\partial u_J\|_{L^2}.$$

Assim, pela estimativa (3.13),

$$\|\tilde{\Delta}_k \partial_t u_J\|_{L_T^\infty(L^2)} \leq C\mathcal{E}_J^{1/2}.$$

Para o termo restante, pela desigualdade (3.39), podemos escrever

$$\begin{aligned} 2^{3k}\|\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\|_{L^2}^4 &\leq 2^{3k}2^{-4k}\|\dot{\Delta}_k\gamma_J^h\|_{L^2}^4 \\ &\leq C2^{-k}\|\dot{\Delta}_k\gamma\|_{L^2}^4 \\ &\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k}\|\dot{\Delta}_k\gamma\|_{L^2}^4 = C\|\gamma\|_{\dot{B}_{2,4}^{-1/4}}^4. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quarta e tomando o supremo essencial na variável temporal,

$$\|\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\|_{L_T^\infty(L^2)} \leq C2^{-3k/4}\|\gamma\|_{\dot{B}_{2,4}^{-1/4}}$$

Substituindo em (3.44),

$$|B_J^{(1)}| \leq C\mathcal{E}_J^{3/2}T\left(\sum_{\substack{k'<0\\ k\geq J-2}} 2^{k'}2^{-3k/4}\right)\|\gamma\|_{B_{2,4}^{1/4}}.$$

Utilizando (3.9), a definição de $\mathcal{N}_0$ e observando que

$$\sum_{\substack{k'<0\\ k\geq J-2}} 2^{k'}2^{-3k/4} = 2^{-3J/4}\sum_{\substack{k'<0\\ k\geq J-2}} 2^{k'}2^{-3(k-J)/4} \leq C2^{-3J/4},$$

pois a série é convergente, obtemos

$$|B_J^{(1)}| \leq CTd_J2^{-J/2}\mathcal{N}_0^2\mathcal{E}_J.$$

Etapa 3: Introduzimos uma família finita de bolas de centro $(\xi_\nu^{k,k'})_{\nu\in\Lambda_{k,k'}}$ e raio $2^{k'}$, e uma função $\theta \in C_c^\infty(B(0,1))$, constituindo uma partição da unidade da coroa $2^k\mathcal{C}$, de modo que

$$\sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} \theta(2^{-k'}(\xi - \xi_\nu^{k,k'})) = 1, \ \forall \xi \in 2^k\mathcal{C} \tag{3.45}$$

e

$$\frac{1}{C_0} \leq \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \theta^2(2^{-k}(\xi - \xi_\nu^{k,k'})) \leq C_0, \ \forall \xi \in 2^k \mathcal{C}. \tag{3.46}$$

Para $u \in \mathcal{S}'_h$, definimos o operador $\Delta^\nu_{k,k'} u$ pela expressão

$$\mathcal{F}(\Delta^\nu_{k,k'} u) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(2^{-k}\xi)\theta(2^{-k'}(\xi - \xi_\nu^{k,k'}))\widehat{u}.$$

Notemos que, para k' fixado,

$$\dot{\Delta}_k u = \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \Delta^\nu_{k,k'} u.$$

De fato, aplicando a Transformada de Fourier em ambos os membros e utilizando (3.45), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \Delta^\nu_{k,k'} u\right) &= \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \mathcal{F}\left(\Delta^\nu_{k,k'} u\right) \\
&= \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \varphi(2^{-k}\xi)\theta(2^{-k'}(\xi - \xi_\nu^{k,k'}))\widehat{u} \\
&= \varphi(2^{-k}\xi)\widehat{u} \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \theta(2^{-k'}(\xi - \xi_\nu^{k,k'})) \\
&= \varphi(2^{-k}\xi)\widehat{u} = \mathcal{F}(\dot{\Delta}_k u).
\end{aligned}$$

Assim, escrevemos

$$\tilde{\Delta}_{k'}(\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\tilde{\Delta}_k(\partial_t u_J)) = \tilde{\Delta}_{k'} \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \Delta^\nu_{k,k'}(v_{J,F})\tilde{\Delta}_k(\partial_t u_J).$$

Consideremos o operador

$$\tilde{\Delta}^\nu_{k,k'} u \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}\left(\tilde{\varphi}(2^{-k}\xi) 1_{B(\xi_\nu^{k,k'}, C2^{-k'})} \widehat{u}\right).$$

Como o suporte da Transformada de Fourier do produto está contido na soma dos suportes de cada Transformada de Fourier, obtemos

$$\begin{aligned}
B_J^{(2)} &= \sum_{\substack{0 \leq k' \leq k-2 \\ k \geq J-2}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\tilde{\Delta}_{k'}(\dot{\Delta}_k(v_{J,F})\tilde{\Delta}_k(\partial_t u_J))dxdt \\
&= \sum_{\substack{0 \leq k' \leq k-2 \\ k \geq J-2}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\tilde{\Delta}_{k'}(\Delta^\nu_{k,k'}(v_{J,F})\tilde{\Delta}_k(\partial_t u_J))dxdt \\
&= \sum_{\substack{0 \leq k' \leq k-2 \\ k \geq J-2}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \dot{\Delta}_{k'}(u_J^2)\tilde{\Delta}_{k'}(\Delta^\nu_{k,k'}(v_{J,F})\tilde{\Delta}^\nu_{k,k'}(\partial_t u_J))dxdt
\end{aligned}$$

A ultima igualdade segue tal como foi feito em (3.42) ao utilizarmos a propriedade (2.8). Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos que

$$|B_J^{(2)}| \leq \sum_{\substack{0\leq k'\leq k-2\\ k\geq J-2}} \int_0^T \sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} \|\dot{\Delta}_{k'}(u_J^2(t))\|_{L^2} \|\Delta_{k,k'}^{\nu}(v_{J,F}(t))\|_{L^\infty} \|\tilde{\Delta}_{k,k'}^{\nu}(\partial_t u_J(t))\|_{L^2} dt.$$

Seja

$$c_{k',J}(t) = \frac{2^{k'/2}\dot{\Delta}_{k'}(u_J(t))}{\|\partial u_J\|_{L^2}^2}.$$

Repetindo o argumento da prova de (3.5), mostra-se que a sequência $(c_{k',J}(t))_{k'\in\mathbb{Z}}$ pertence a ℓ^2. Limitando $\|\partial u_J\|_{L^2}^2$ por $4\mathcal{E}_J$ (desigualdade (3.13)), deduzimos que

$$B_J^{(2)} \leq \mathcal{T}_J \mathcal{E}_J,$$

com

$$\mathcal{T}_J = \sum_{\substack{0\leq k'\leq k-2\\ k\geq J-2}} \int_0^T \sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} 2^{-k'/2} c_{k',J}(t) \|\Delta_{k,k'}^{\nu}(v_{J,F}(t))\|_{L^\infty} \|\tilde{\Delta}_{k,k'}^{\nu}(\partial_t u_J(t))\|_{L^2} dt. \tag{3.47}$$

Agora, para k, k' fixado, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwartz em ν, obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} c_{k',J}(t) \|\Delta_{k,k'}^{\nu}(v_{J,F}(t))\|_{L^\infty} \|\tilde{\Delta}_{k,k'}^{\nu}(\partial_t u_J(t))\|_{L^2} \\ \leq &\left(\sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} \|\Delta_{k,k'}^{\nu}(v_{J,F}(t))\|_{L^\infty}^2\right)^{1/2} \times \left(\sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} c_{k',J}^2(t) \|\tilde{\Delta}_{k,k'}^{\nu}(\partial_t u_J(t))\|_{L^2}^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.47), e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz com respeito a variável t, segue que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} 2^{-k'/2} c_{k',J}(t) \|\Delta_{k,k'}^{\nu}(v_{J,F}(t))\|_{L^\infty} \|\tilde{\Delta}_{k,k'}^{\nu}(\partial_t u_J(t))\|_{L^2}\, dt \\ \leq &\left(\int_0^T \sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} \|\Delta_{k,k'}^{\nu}(v_{J,F}(t))\|_{L^\infty}^2\, dt\right)^{1/2} \times \left(\int_0^T \sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} c_{k',J}^2(t) \|\tilde{\Delta}_{k,k'}^{\nu}(\partial_t u_J(t))\|_{L^2}^2\, dt\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Recordemos que $\dot{\Delta}_k v_{J,F}$ satisfaz

$$\begin{cases} \Box(\dot{\Delta}_k v_{J,F}) = 0 \\ \partial(\dot{\Delta}_k v_{J,F})(0) = \Delta_k \gamma_J^h \end{cases}$$

Mas $\dot{\Delta}_k(v_{J,F}) = \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \Delta^\nu_{k,k'}(v_{J,F})$. Novamente, pela linearidade do operador da onda, obtemos, para cada $\nu \in \Lambda_{k,k'}$, que $\Delta^\nu_{k,k'} v_{J,F}$ satisfaz a equação da onda livre, com dados iniciais $\partial(\Delta^\nu_{k,k'} v_{J,F})(0) = \Delta^\nu_{k,k'}\gamma^h_J$.

Analizemos agora o suporte da transformada de Fourier de $\Delta^\nu_{k,k'} v_{J,F}$.

Por definição,

$$\mathcal{F}(\Delta^\nu_{k,k'} v_{J,F}) = \varphi(2^{-k}\xi)\theta(2^{-k'}(\xi - \xi^{k,k'}_\nu))\mathcal{F}(v_{J,F})$$

Já sabemos que $S(\varphi(2^{-k}\cdot)) \subset 2^k\mathcal{C}$. Também, como a bola $B(0,1)$ contém o suporte de θ, temos $S(\theta(2^{-k'}\cdot)) \subset 2^{-k'}B(0,1)$. Daí,

$$\begin{aligned} S(\theta(2^{-k'}(\xi - \xi^{k,k'}_\nu)) &\subset 2^{k'}\tilde{B} \\ &= \underbrace{2^{k'-k}}_{h}\ \underbrace{2^k\tilde{B}}_{B'} \end{aligned}$$

onde $\tilde{B}$ é uma bola centrada em $\xi^{k,k'}_\nu$, de raio igual a 1.

Como o suporte do produto de funções está contido na interseção dos suportes, segue que

$$S(\mathcal{F}(\Delta^\nu_{k,k'} v_{J,F})) \subset 2^k\mathcal{C} \cap hB',$$

com $\mathcal{C}$ uma coroa e B' uma bola de raio 2^k.

Recaímos nas hipóteses da desigualdade logarítmica de Strichartz, que nos permite concluir

$$\|\Delta^\nu_{k,k'} v_{J,F}\|_{L^2_T(L^\infty)} \le C\left(2^{k'-k}\log(e + 2^kT)\right)^{1/2} \|\Delta^\nu_{k,k'}\gamma^h_J\|_{L^2}.$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned} \int_0^T \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \|\Delta^\nu_{k,k'}(v_{J,F}(t))\|^2_{L^\infty}\, dt &= \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \int_0^T \|\Delta^\nu_{k,k'}(v_{J,F}(t))\|^2_{L^\infty}\, dt \\ &= \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \|\Delta^\nu_{k,k'}(v_{J,F})\|^2_{L^2_T(L^\infty)} \\ &\le C\ \log(e + 2^kT)\ 2^{k'-k} \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \|\Delta^\nu_{k,k'}\gamma^h_J\|^2_{L^2} \\ &\le Ck2^{k'-k} \sum_{\nu \in \Lambda_{k,k'}} \|\Delta^\nu_{k,k'}\gamma^h_J\|^2_{L^2} \qquad (3.48) \end{aligned}$$

onde, em (3.48), utilizamos a estimativa de controle linear para a parte logarítmica, dada por (3.35).

Tendo em vista a Identidade de Plancherel e a propriedade (3.46), podemos obter a propriedade de quasi-ortogonalidade

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} \|\Delta^{\nu}_{k,k'}\gamma^h_J\|^2_{L^2} &= \sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} \|\mathcal{F}(\Delta^{\nu}_{k,k'}\gamma^h_J)\|^2_{L^2} \\
&= \sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(2^{-k}\xi)\theta(2^{-k'}(\xi-\xi^{k,k'}_{\nu}))\widehat{\gamma^h_J}|^2 \, dx \\
&= \int_{2^k\mathcal{C}} |\varphi(2^{-k}\xi)\widehat{\gamma^h_J}|^2 \sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} \theta^2(2^{-k'}(\xi-\xi^{k,k'}_{\nu})) \, dx \\
&\leq C_0 \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(2^{-k}\xi)\widehat{\gamma^h_J}|^2 \, dx = C_0 \, \|\Delta_k\gamma^h_J\|^2_{L^2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^T \sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} \|\Delta^{\nu}_{k,k'}(v_{J,F}(t))\|^2_{L^\infty} \, dt \leq Ck2^{k'-k}\|\Delta_k\gamma^h_J\|^2_{L^2}.$$

Aplicando a última desigualdade em (3.47), segue que

$$\mathcal{T}_J \leq C \sum_{\substack{0\leq k'\leq k-2\\ k\geq J-2}} k^{1/2}2^{-k/2}\|\Delta_k\gamma^h_J\|_{L^2} \left(\int_0^T c^2_{k',J}(t) \sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} \|\tilde{\Delta}^{\nu}_{k,k'}(\partial_t u_J(t))\|^2_{L^2} dt\right)^{1/2} \tag{3.49}$$

Pelas propriedades da família de bolas definida anteriormente,

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} \|\tilde{\Delta}^{\nu}_{k,k'}(\partial_t u_J(t))\|^2_{L^2} &= \sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} \|\mathcal{F}(\tilde{\Delta}^{\nu}_{k,k'}(\partial_t u_J(t)))\|^2_{L^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} |\tilde{\varphi}(2^{-k}\xi)|^2 1_{B(-\xi^{k,k'}_{\nu}, C2^{-k'})} |\mathcal{F}(\partial_t u_J)(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{\varphi}(2^{-k}\xi)|^2 |\mathcal{F}(\partial_t u_J)(\xi)|^2 d\xi \\
&= C\|\tilde{\Delta}_k(\partial_t u_J)\|^2_{L^2} \leq C\mathcal{E}_J.
\end{aligned}$$

Assim, somando em k', obtemos

$$\sum_{0\leq k'\leq k} \left(\int_0^T c^2_{k',J}(t) \sum_{\nu\in\Lambda_{k,k'}} \|\tilde{\Delta}^{\nu}_{k,k'}(\partial_t u_J(t))\|^2_{L^2} dt\right)^{1/2} \leq C\mathcal{E}^{1/2}_J \sum_{0\leq k'\leq k} \left(\int_0^T c^2_{k',J}(t) dt\right)^{1/2}.$$

Ainda, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz em k',

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le k'\le k}\left(\int_0^T c_{k',J}^2(t)dt\right)^{1/2} &\le \left(\sum_{0\le k'\le k}\int_0^T c_{k',J}^2(t)dt\right)^{1/2}\left(\sum_{0\le k'\le k}1\right)^{1/2}\\
&= \left(\int_0^T \sum_{0\le k'\le k} c_{k',J}^2(t)dt\right)^{1/2} k^{1/2}\\
&\le C\left(\int_0^T dt\right)^{1/2} k^{1/2}\\
&= CT^{1/2}k^{1/2}
\end{aligned}$$

Segue de (3.49) que

$$\mathcal{T}_J \le CT^{1/2}\mathcal{E}_J^{3/2}\sum_{k\ge J-2} k2^{-k/2}\|\dot{\Delta}_k\gamma_J^h\|_{L^2}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\sum_{k\ge J-2} k2^{-k/2}\|\dot{\Delta}_k\gamma_J^h\|_{L^2} &= \sum_{k\ge J-2} k2^{-k/6}2^{-k/3}\|\dot{\Delta}_k\gamma_J^h\|_{L^2}\\
&= \|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^{-1/3}}\sum_{k\ge J-2} c_k k2^{-k/6}
\end{aligned}$$

onde

$$c_k = \frac{2^{-k/3}\|\dot{\Delta}_k\gamma_J^h\|_{L^2}}{\|\gamma_J^h\|_{\dot{H}^{-1/3}}}$$

é uma sequência pertencente a esfera unitária de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Em virtude de (3.5) e (3.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_J &\le CT^{1/2}\mathcal{N}_0^2 d_J^2 2^{J/6}\sum_{k\ge J-2} c_k k2^{-k/6}\\
&\le CT^{1/2}\mathcal{N}_0^2 d_J^2 J\sum_{k\ge J-2} c_k\left(\frac{k}{J}\right)2^{-(k-J)/6}\\
&\le \sum_{k\ge J-2} c_k\,(k-J+1)\,2^{-(k-J)/6} \qquad (3.50)\\
&\le CT^{1/2}\mathcal{N}_0^2 d_J^2\tilde{c}_J J
\end{aligned}$$

onde, em (3.50), usamos (3.36) para garantir a convergência da série e $\tilde{c}_J = \sup_{l\ge -2} c_{J+l}$.

Como $\liminf_{J\to\infty} d_J^2\tilde{c}_J J = 0$, concluímos a prova.

∎

Referências Bibliográficas

[1] Alinhac, S., *Hyperbolic Parttial Diferential Equations*, Springer, New York, 2009.

[2] Bahouri, H., Chemin, J.Y., *On Global Well-Posedness for Defocusing Cubic Wave Equation*, International Mathematics Researches Notes, 1-12, 2006.

[3] Barros-Neto, J., *An Introduction to the Theory of Distributions*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[4] Chemin, J.-Y., *Perfect Incompressible Fluids*, Oxford University Press, New York, 1998.

[5] Chemin, J.-Y., *Théorie des Équations D'Évolution, Notes du Course*, Laboratoire J. L. Lions.

[6] Danchin, R., *Fourier Analysis Methods for PDE's, Notes of Course*, Wuhan Normal University, 2005.

[7] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1998.

[8] Friedlander, G., Joshi, M. *Introduction to The Theory of Distributions*, 2 ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[9] Folland, G.B., *Real Analysis: Moderns techniques and its aplications*, Jonh Wiley, New York, 1984.

[10] Gallagher, I., Danchin, R., *Analyse Non Linéaire, Notes du Curse*, l'École Polytechnique, 2006.

[11] Gallagher, I., Planchon, F., *On global solutions to a defocusing semi-linear wave equation*, Revista matemática Iberoamericana 19, n.1, 161-167, 1998.

[12] Hounie, J., *Teoria Elementar das Distribuições*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1970.

[13] Hörmander, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vol.1, Springer-Verlang, Berlin, 1990.

[14] Iório Jr, R., Iório, V. de M., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1988.

[15] Keel, M., Tao, T., *Endpoint Strichartz estimates*, American Journal of Mathematics 120, n.5, 955-980, 1998.

[16] John, F., *Nonlinear wave equations, formation of singularities*, Seventh Annual Pitcher Lectures at Lehigh University, 1989. University Lecture Series, 2. American Mathematical Society, Rhode Island, 1990.

[17] Kenig , C. E., Ponce, G., Vega, L., *Global well-posedness for semi-linear wave equations*, Communications in Partial Differential Equations 25, n. 9-10, 1741-1752, 2000.

[18] Klainerman, W., Tataru, D., *On the optimal local regularity for Yang-Mills equations in* $\mathbb{R}^{4+1}$, Journal of the American Mathematical Society 12, n.1, 93-116, 1999.

[19] Lindblad, H., Sogge, C.D., *On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations*, Journal of Functional Anaysis 130, n.102, 357-426, 1995.

[20] Oliveira, C. R. de, *Introdução a Análise Funcional*, 3 ed., Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2010.

[21] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1987.