UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUACÃO EM MATEMÁTICA

EMÍLIO DE CARVALHO

A CONJECTURA DE ZARISKI PARA A MULTIPLICIDADE

SÃO CARLOS
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUACÃO EM MATEMÁTICA

EMÍLIO DE CARVALHO

A CONJECTURA DE ZARISKI PARA A MULTIPLICIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientação: Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella

SÃO CARLOS
2010

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

C331cz	Carvalho, Emílio de. A conjectura de Zariski para a multiplicidade / Emílio de Carvalho. -- São Carlos : UFSCar, 2010. 72 f. Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010. 1. Matemática. 2. Teoria das singularidades. 3. Geometria algébrica. I. Título. CDD: 510 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella
DM - UFSCar

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes
MAT - UFC

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior
ICMC - USP

"Riemann brings to my mind an episode from Somerset Maugham's novel The Moon and Sixpence, inspired by the life of the painter Gauguin. Maugham's hero, like Gauguin an artist, dies of leprosy in a hut on a Pacific island, whiter he has fled to pursue his vision of art. Hearing that the man is dying, a local doctor goes to his hut. It is a poor construction, shabby and dilapidated. When the doctor steps inside, however, he is astonished to find the interior walls all painted from floor to ceiling with brilliant, mysterious pictures. As with that hut, so it was with Riemann. Outwardly he was pitiable; inwardly, he burned brighter than the sun."

John Derbyshire, *Prime Obsession*

Ao meu pai Domingos

Agradecimentos

Sem nenhuma dúvida devo grande parte do que sou ao meu pai. E esta dissertação não é uma exceção. Este trabalho não teria se realizado sem o apoio dele em todos os momentos. Fica aqui o mais sincero reconhecimento por sua onipresença.

Agradeço também a uma das pessoas mais especiais que já conheci: Geni. Não quero ser repetitivo, porém não é possível não dizer que ela foi essencial para muito do que se passou nesses anos de mestrado - além de outros.

A toda a minha família e aos meus amigos agradeço pela companhia e incentivo sempre.

Fico grato a todos os professores que ajudaram na minha formação como matemático. Em especial, meu orientador João Nivaldo Tomazella que, além de estar presente no trabalho, também esteve presente quando eu precisava de um puxão de orelha. E também quero agradecer à professora Maria Aparecida Soares Ruas que sempre me incentivou e acreditou em mim - desde o primeiro ano de graduação.

Finalmente, agradeço à Capes pelo auxílio financeiro sem o qual este trabalho não teria se desenvolvido.

Resumo

Em seu discurso de saída da presidência da Sociedade Americana de Matemática em 1971, Zariski propôs algumas questões na Teoria de Singularidades. Uma delas diz respeito à invariância topológica da multiplicidade de hipersuperfícies complexas. Em termos mais precisos, Zariski perguntou: se duas hipersuperfícies complexas são homeomorfas como variedades imersas, então suas multiplicidades na origem são as mesmas? A multiplicidade de uma hipersuperfície complexa na origem é o número de pontos de interseção da hipersuperfície com uma reta complexa genérica passando próximo da origem, mas não por ela. O problema permanece ainda sem solução. Entretanto, existem alguns casos especiais que foram respondidos afirmativamente, tais como o caso de hipersuperfícies homeomorfas por um homeomorfismo bilipschitz. Este trabalho tem por objetivo compreender os principais resultados estabelecidos para o problema. Na presente dissertação, faremos um conceito preciso de multiplicidade de uma hipersuperfície complexa e daremos ênfase especial à C^1-invariância da multiplicidade, à invariância bilipschitz e às hipersuperfícies quasehomogêneas. Além de terem grande importância por si só, estes casos trazem suas próprias interpretações de multiplicidade, ajudando-nos a compreender melhor tal objeto.

Palavras chaves: hipersuperfície, multiplicidade, V-equivalência topológica

Abstract

In his retiring Presidential address to the American Mathematical Society in 1971, Zariski proposed some questions in the Theory of Singularities. One of them concerns the topological invariance of the multiplicity of complex hypersurfaces. In more accurate terms, Zariski asked: if two complex hypersurfaces are homeomorphic as embedded varieties, then are their multiplicities at the origin the same? The multiplicity of a complex hypersurface at the origin is the number of points of intersection of the hypersurface with a generic complex line passing close to the origin, but not through it. The problem still remains unsolved. However, there are some special cases which were answered affirmatively, such as the case of homeomorphic hypersurfaces by a bilipschitz homeomorphism. This work aims at understanding the main results settled for the problem. In the present dissertation, we will make a precise concept of multiplicity of a complex hypersurface and we will give special emphasis to C^1-invariance of the multiplicity, bilipschitz invariance and quasihomogeneous hypersurfaces. Besides having great importance by themselves, these cases bring their own interpretations of multiplicity helping us to understand better such an object.

Keywords: hypersurface, multiplicity, topological V-equivalence

Sumário

Introdução

Na década de 60, Zariski iniciou um programa de estudos em equisingularidade com o objetivo de compreender as relações entre os invariantes de diferentes natureza (topológicos, diferenciais, numéricos e algébricos) de um germe singular.

Desde que a multiplicidade de um germe de hipersuperfície singular é um invariante analítico, surge naturalmente a questão a respeito do seu comportamento sob homeomorfismos.

Sendo $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função holomorfa na origem e $V(f)$ seu germe de hipersuperfície, a multiplicidade de $V(f)$ na origem é o menor grau dos polinômios homogêneos na expressão de f como uma série de potência convergente.

Geometricamente, a multiplicidade é o número de pontos em $V(f) \cap L$, onde L é uma reta complexa genérica passando próximo da origem em $\mathbb{C}^n$, mas não por ela.

Para a questão proposta por Zariski, consideremos dois germes de funções holomorfas $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Dizemos que f e g são topologicamente V-equivalentes se existe um germe de homeomorfismo $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ levando o germe de hipersuperfície $V(f)$ no germe $V(g)$, ou seja,

$$\varphi(V(f)) = V(g).$$

Neste caso, também dizemos que $V(f)$ e $V(g)$ têm o mesmo tipo topológico.

A questão que surge naturalmente após essa definição, conhecida como Conjectura de Zariski para a Multiplicidade, é a seguinte (cf. [42]).

Questão 1 *Se $V(f)$ e $V(g)$ têm o mesmo tipo topológico, então suas multiplicidades na origem são iguais?*

Para o caso real a resposta é negativa. Podemos verificar isso com os germes de curvas definidos pelas funções $f(x, y) = x^3 + y^3$ e $g(x, y) = x + y^3$. Os germes de curvas $V(f)$ e $V(g)$ têm multiplicidades diferentes na origem. Por outro lado, o homeomorfismo $\varphi(x, y) = (x^3, y)$ é tal que $f = g \circ \varphi$. Logo, $\varphi(V(f)) = V(g)$.

No caso complexo o problema permanece sem solução no caso geral. Zariski mostra em [43] que para dois germes de funções holomorfas $f, g : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ com multiplicidades m_f e m_g em 0 a conjectura é verdadeira.

Teorema 1 (Zariski, [43]) *Se f e g são topologicamente V-equivalentes, então $m_f = m_g$.*

Nesse caso, o tipo topológico dos germes é completamente caracterizado pela multiplicidade e pelos expoentes de *Puiseux*.

Admitindo agora que o germe de homeomorfismo φ que leva $V(f)$ em $V(g)$ e seu germe inverso possuam derivadas contínuas no sentido real apenas, a conjectura de Zariski também é respondida afirmativamente (cf. [5] e [34]).

Também ao considerarmos germes de homeomorfismos $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ e $\phi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ sendo aplicações lipschitzianas com inversas lipschitzianas, é possível resolver o problema de Zariski no caso em que o diagrama abaixo é comutativo (cf. [29]).

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C}^n, 0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & (\mathbb{C}, 0) \arrow[d, "\phi"] \\ (\mathbb{C}^n, 0) \arrow[r, "g"'] & (\mathbb{C}, 0) \end{tikzcd}$$

A Questão 1 também pode ser formulada para uma família $(F_t)_t$ no lugar de um par (f, g). Consideremos $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função holomorfa com $V(f)$ tendo multiplicidade m_f na origem. Seja

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, \{0\} \times \mathbb{C}) &\to (\mathbb{C}, 0) \\ (z, t) &\mapsto F(z, t) = F_t(z) \end{aligned}$$

uma deformação de f, ou seja, F é um germe de uma função holomorfa tal que $F_0 = f$. Seja m_{F_t} a multiplicidade de $V(F_t)$ na origem.

Dizemos que $(F_t)_t$ é topologicamente V-constante se para todo t próximo de 0, F_t é topologicamente V-equivalente a $F_0 = f$.

Questão 2 *Se $F = (F_t)_t$ é topologicamente V-constante, então $m_{F_t} = m_f$ para todo t próximo de 0?*

No caso de uma família $(F_t)_t$, o problema da invariância da multiplicidade está relacionado com o número de Milnor de f (Definição 1.14). A resposta à Questão 2 é positiva se a deformação $F = (F_t)_t$ possui número de Milnor constante e se f é um germe quasehomogêneo ou semiquasehomogêneo (cf. [11] e [26]). Também responde-se afirmativamente a Questão 2 se a deformação $F = (F_t)_t$ possui número de Milnor constante e se F_t, para todo t próximo de 0, tem uma parte principal Newton não degenerada (cf. [1] e [32]).

Para dois germes de conjuntos analíticos $(X, 0), (Y, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ e um germe de homeomorfismo $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $\varphi(X) = Y$, também podemos levantar a seguinte questão.

Questão 3 *As multiplicidades de X e Y na origem são iguais?*

Foram obtidas para essa questão respostas afirmativas análogas aos casos diferencial (cf. [10]) e lipschitziano (cf. [3]) para germes de hipersuperfície. Um exemplo de [10] mostra ainda que retirada a condição de diferenciabilidade a resposta à Questão 3 pode ser negativa.

De uma maneira geral as respostas positivas às questões formuladas acima foram alcançadas através de caracterizações próprias de multiplicidade. Neste trabalho detalhamos algumas das caracterizações mais importantes bem como os respectivos resultados obtidos.

Esta dissertação está dividida em sete capítulos, sendo os dois primeiros pré-requisitos para os demais e os restantes totalmente independentes um do outro, conforme descrevemos a seguir.

No primeiro capítulo discutimos alguns tópicos essenciais para o compreensão dos resultados posteriores. Os conceitos desse capítulo serão usados com frequência nos demais, especialmente os conceitos de germes de funções holomorfas, germes de hipersuperfície e conjuntos analíticos e cone tangente.

No capítulo seguinte definimos multiplicidade. Inicialmente usamos somente elementos algébricos para conceituá-la, apresentando em seguida algumas das várias interpretações possíveis para ela. Encerramos esse capítulo mostrando que a multiplicidade, tal como foi definida, é um invariante do tipo analítico de germes de hipersuperfícies.

O terceiro capítulo aborda a invariância da multiplicidade sob homeomorfismos de classe C^1. Veremos os resultados de Ephraim em [5] para germes de hipersuperfícies e de Gau e Lipman em [10] para germes de conjuntos analíticos de codimensão mais alta.

Em seguida, serão descritas algumas condições para a invariância topológica da multiplicidade obtidas por Risler e Trotman em [29], que resultam na invariância *bilipschitz* da multiplicidade. Discutiremos também os resultados de Comte, Milman e Trotman em [4] e de Comte em [3].

No capítulo sobre Satélites de Rouché estudaremos condições necessárias e suficientes dadas por Eyral e Gasparim em [9] para que dois germes de hipersuperfícies tenham a mesma multiplicidade na origem.

Definiremos germes quasehomogêneos de hipersupefícies no sexto capítulo e descreveremos os resultados de O'Shea em [26] e Greuel em [11] para deformações com número de Milnor constante. Também comentamos os trabalhos de Saeki em [31] e de Xu e Yau em [39] e [40] para superfícies singulares em $\mathbb{C}^3$.

Concluímos este trabalho descrevendo brevemente no último capítulo mais alguns casos particulares da Conjectura de Zariski.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem por objetivo estabelecer as ferramentas básicas necessárias para o nosso trabalho. Para mais detalhes, vide [12] e [38]

1.1 Dicionário Algébrico

Começaremos introduzindo alguns conceitos algébricos que irão nos auxiliar no desenvolvimento da teoria.

Definição 1.1 *Um anel R é chamado de anel Noetheriano se dada uma sequência crescente de ideais em R*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots,$$

existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots$.

Observemos que se I é um ideal de um anel Noetheriano R, então R/I também é um anel Noetheriano.

Um exemplo importante de anel Noetheriano é o anel de polinômios $\mathbb{C}[x]$. Também, pela observação acima, $\mathbb{C}[x]/I$ é um anel Noetheriano para qualquer ideal $I \subset \mathbb{C}[x]$.

Outro conceito relevante que utilizaremos com frequência em nosso trabalho é o de anel local.

Definição 1.2 *Um anel R é chamado de anel local se ele possui um único ideal maximal. Escrevemos $(R, \mathbf{m})$ para indicar que R é um anel local e seu único ideal maximal é $\mathbf{m}$.*

Como exemplo de anel local temos o anel das séries de potências convergentes $\mathbb{C}\{x\}$, cujo único ideal maximal é $\langle x \rangle$.

1.2 O Anel $\mathcal{O}_{n,p}$, os Teoremas de Weierstrass e Conjuntos Analíticos

Descreveremos inicialmente nesta seção alguns fatos relevantes sobre funções holomorfas de várias variáveis complexas.

Seja U um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{C}^n$. Uma função $f : U \to \mathbb{C}$ é chamada de diferenciável no sentido complexo em um ponto $p = (p_1, ..., p_n) \in U$ se existem uma vizinhança aberta $V \subset U$ de p e funções $\Delta_1, ..., \Delta_n : V \to \mathbb{C}$ contínuas em p tais que para todo $z \in V$

$$f(z) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (z_i - p_i)\Delta_i(z).$$

A função f é chamada de holomorfa em U se f é diferenciável no sentido complexo em todo $p \in U$. As funções Δ_i são as derivadas parciais $\partial f/\partial z_i$.

Consideremos agora $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Denotaremos por $|\alpha|$ a soma $\alpha_1 + ... + \alpha_n$. Para cada p em $\mathbb{C}^n$, definimos a série de potências formal nas variáveis $z_1, ..., z_n$ centrada em p por

$$\sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha (z - p)^\alpha,$$

onde $a_\alpha \in \mathbb{C}$ e $(z - p)^\alpha = (z_1 - p_1)^{\alpha_1} \cdot ... \cdot (z_n - p_n)^{\alpha_n}$.

O conjunto formado pelas séries de potências convergentes em alguma vizinhança centrada em p é um anel que será denotado por $\mathcal{O}_{n,p}$. Quando $p = 0$, escrevemos também $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ ou simplesmente $\mathcal{O}_n$.

Seja $f \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$, podemos escrever

$$f = f_m + f_{m+1} + ...,$$

onde cada f_i é um polinômio homogêneo de grau i em $z_1, ..., z_n$ e $f_m \neq 0$. O número m é chamado de ordem de anulamento de f na origem (ou simplesmente ordem). Escrevemos $ord(f) = m$. Para quaisquer $f, g \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$, vale o seguinte

$$ord(f \cdot g) = ord(f) + ord(g).$$

Dizemos que uma função f é analítica se para cada ponto de seu domínio existem uma vizinhança desse ponto e uma série de potências centrada no ponto que converge naquela vizinhança para f.

É conhecido o fato de que funções de uma variável complexa são holomorfas se, e somente se, elas podem ser representadas por suas séries de Taylor. O Lema de Osgood nos fornece a generalização desse resultado para funções de várias variáveis complexas. A prova do lema pode ser encontrada em [12], Capítulo 3, Teorema 3.1.7.

Teorema 1.1 (Lema de Osgood) *Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua. As seguintes condições são equivalentes.*
(1) f é analítica;
(2) f é holomorfa;
(3) f é holomorfa em cada variável.

O Lema de Osgood nos diz então que podemos identificar uma função holomorfa num ponto com uma série de potências convergente centrada neste ponto.

Apresentamos agora duas definições que serão utilizadas a seguir.

Definição 1.3 *Um elemento $f \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ é chamado de regular de ordem m em z_n se a série de potências na variável z_n, definida por $f(0, ..., 0, z_n)$, possui um zero de ordem m.*

Definição 1.4 *Um elemento $z_n^m + a_1 z_n^{m-1} + ... + a_{m-1} z_n + a_m$, $a_i \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_{n-1}\}$, é chamado de polinômio de Weierstrass se $a_i(0) = 0$ para todo $i = 1, ..., m$.*

A seguir enunciamos o famoso Teorema da Divisão de Weierstrass e seu corolário o Teorema da Preparação de Weierstrass. Para as demonstrações e mais informações, vide [12], Capítulo 3, Seção 3.2.

Teorema 1.2 (Teorema da Divisão de Weierstrass) *Sejam $f, g \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ e suponhamos que f seja regular de ordem m em z_n. Então existem únicos $q \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ e $r \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_{n-1}\}[z_n]$ com grau menor que m em z_n tais que*

$$g = qf + r.$$

Teorema 1.3 (Teorema da Preparação de Weierstrass) *Seja $f \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ regular de ordem m em z_n. Então existem uma unidade $u \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ e um polinômio de Weierstrass h de grau m tais que*

$$f = uh.$$

Tais elementos são unicamente determinados por f.

Dizemos que um elemento $u \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ é uma unidade se $u(0) \neq 0$. Uma consequência dos teoremas acima é a seguinte.

Corolário 1.1 *$\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ é um anel Noetheriano.*

São utilizados mais alguns resultados para a demonstração do corolário acima. Todos eles estão detalhados em [12], Capítulo 3, Seções 3.2 e 3.3. O nosso corolário é o Corolário 3.3.14 da página 99.

Para concluir essa seção apresentaremos o conceito de conjunto analítico.

Definição 1.5 *Seja U um subconjunto aberto $\mathbb{C}^n$. Um subconjunto $X \subset U$ é chamado de subconjunto analítico de U se ele é fechado em U e para todo ponto $p \in X$, existem uma vizinhança V de p em $\mathbb{C}^n$ e um número finito de funções holomorfas $f_1, ..., f_s$ definidas em V tais que*

$$X \cap V = \{z \in V : f_1(z) = ... = f_s(z) = 0\}.$$

Exemplo 1.1 $\mathbb{C}^n$ é um conjunto analítico, pois ele é o conjunto dos zeros da função nula.

Exemplo 1.2 Sejam $f \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ e U uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{C}^n$ na qual f convirja. O subconjunto $V(f) = \{z \in U : f(z) = 0\}$ de U é um subconjunto analítico de U.

1.3 Germes

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{C}^n$ com interseção não vazia. Dizemos que A e B são equivalentes em um ponto $p \in$ A $\cap$ B se existe uma vizinhança aberta U de p tal que A $\cap U =$ B $\cap U$. Tal relação é uma relação de equivalência. Chamamos a classe de equivalência de A em p de germe de A em p. O conjunto A é um representante do germe. Escrevemos (A, p) para indicar o germe de A em p.

Supondo que (A, p) e (B, p) são germes, dizemos que $(A, p) \subset (B, p)$ se existem representantes A de (A, p) e B de (B, p) tais que A $\subset$ B. A igualdade $(A, p) = (B, p)$ ocorre se, e somente se, $(A, p) \subset (B, p)$ e $(B, p) \subset (A, p)$.

Definiremos agora germes de conjuntos analíticos.

Definição 1.6 *Um germe de um conjunto analítico (X, p) é um germe em p de um subconjunto analítico X de $\mathbb{C}^n$.*

O primeiro exemplo de germe de um conjunto analítico é o germe $(\mathbb{C}^n, 0)$. Um segundo exemplo é apresentado a seguir na forma de definição.

Definição 1.7 *Sejam $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e U uma vizinhança aberta de p na qual f convirja. Consideremos o subconjunto $V(f) = \{z \in U : f(z) = 0\}$ de U. Dizemos que o germe $(V(f), p)$ do subconjunto analítico $V(f)$ em p é um germe de hipersuperfície.*

Quando $p = 0$, por simplicidade denotaremos $(V(f), 0)$ por apenas $V(f)$.

Definição 1.8 *Seja $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subset \mathcal{O}_{n,p}$ um ideal. Definimos o germe do conjunto analítico $(V(I), p)$ por*

$$(V(I), p) = \bigcap_{i=1}^{s} (V(f_i), p).$$

Esta definição independe da escolha dos geradores f_i de I.

Definição 1.9 *Seja (X, p) um germe de um conjunto analítico. Definimos o ideal do germe (X, p) por*

$$\mathcal{I}(X, p) = \{f \in \mathcal{O}_{n,p} : (X, p) \subset (V(f), p)\}.$$

Em outros termos, $\mathcal{I}(X, p)$ é o conjunto das séries de potências convergentes centradas em p que se anulam em X.

Como no caso polinomial, também temos o Teorema dos Zeros de Hilbert.

Teorema 1.4 (Nullstellensatz) $\mathcal{I}(V(I), p) = \sqrt{I}$.

Sua prova é similar ao caso de polinômios, sendo suficiente verificar sua validade para ideais primos.

Seja agora $f \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$. Dizemos que f é irredutível se ao escrevermos $f = f_1 f_2$, com $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$, constatamos que $f_1(0) \neq 0$ ou $f_2(0) \neq 0$. Como $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ é um domínio de fatoração única, se f é irredutível, então $\langle f \rangle$ é primo.

Pela Definição 1.8, segue que $(V(\langle f \rangle), 0) = (V(f), 0)$. Logo, pelo Nullstellensatz,

$$\mathcal{I}(V(f), 0) = \sqrt{\langle f \rangle} = \langle f \rangle,$$

uma vez que f é irredutível e, portanto, $\langle f \rangle$ é primo.

Definição 1.10 *Seja (X, p) um germe de um conjunto analítico. Dizemos que (X, p) é irredutível se de $(X, p) = (X_1, p) \cup (X_2, p)$, com (X_1, p) e (X_2, p) germes de conjuntos analíticos, segue que ou $(X, p) = (X_1, p)$ ou $(X, p) = (X_2, p)$.*

Analogamente ao caso algébrico vale o seguinte.

Lema 1.1 *(X, p) é irredutível se, e somente se, $\mathcal{I}(X, p)$ é um ideal primo.*

Seja $f \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$, pelo Lema 1.1 e pelo que vimos acima, se f é irredutível, então o germe $V(f)$ também será irredutível.

Passaremos a seguir às definições de germes de aplicações contínuas e funções analíticas (ou holomorfas).

Definição 1.11 *Sejam (X, p) e (Y, q) dois germes de espaços topológicos. Um germe de uma aplicação contínua $f : (X, p) \to (Y, q)$ é definido como uma classe de equivalência de aplicações $f : U \to W$, com $f(p) = q$ e U e W representantes de (X, p) e (Y, q) respectivamente. Duas tais aplicações $f_1 : U_1 \to W$ e $f_2 : U_2 \to W$ são chamadas de equivalentes se elas são iguais em uma vizinhança aberta de p contida em $U_1 \cap U_2$.*

Definição 1.12 *Seja $(X, p) \subset (\mathbb{C}^n, p)$ um germe de um conjunto analítico. Um germe de uma função analítica $f : (X, p) \to (\mathbb{C}, q)$ é um germe de uma aplicação $f : (X, p) \to (\mathbb{C}, q)$ tal que algum representante é a restrição a X de uma função analítica em uma vizinhança aberta de p em $\mathbb{C}^n$.*

Os germes de funções analíticas definidos em (X, p) formam um anel (que também é uma $\mathbb{C}$-álgebra) denotado por $\mathcal{O}_{X,p}$. Ele é chamado de anel das funções holomorfas em (X, p). Temos o seguinte lema.

Lema 1.2 *Sejam $(X, p) \subset (\mathbb{C}^n, p)$ um germe de um conjunto analítico e $\mathcal{I}(X, p)$ o ideal de (X, p). Então $\mathcal{O}_{X,p} = \mathcal{O}_{n,p}/\mathcal{I}(X, p)$.*

Se $X = \mathbb{C}^n$, então $\mathcal{I}(\mathbb{C}^n, p) = \{f \in \mathcal{O}_{n,p} : (\mathbb{C}^n, p) \subset (V(f), p)\} = \{0\}$.

Logo, pelo Lema 1.2, o anel $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,p}$ é igual a $\mathcal{O}_{n,p}$.

Portanto, se $p = 0$, podemos identificar o anel dos germes de funções holomorfas na origem com o anel $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$.

Agora se $f \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ e f é irredutível, então $\mathcal{I}(V(f), 0) = \langle f \rangle$. Deste modo, se $(X, p) = (V(f), 0)$, concluímos que

$$\mathcal{O}_{X,p} = \mathcal{O}_n / \langle f \rangle.$$

Um germe de uma aplicação analítica (ou simplesmente aplicação contínua)

$$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m) : (X,p) \to (Y,q) \subset (\mathbb{C}^m, q)$$

é definido similarmente. O germe $\varphi : (X,p) \to (Y,q)$ é chamado de isomorfismo analítico (ou germe de bi-holomorfismo) se φ possui uma inversa à esquerda e à direita $\psi : (Y,q) \to (X,p)$ que também é um germe de aplicação analítica.

Definição 1.13 *Seja $\varphi : (X,p) \to (Y,q)$ um germe de uma aplicação analítica. Definimos o 'pullback' de φ como sendo a aplicação entre $\mathbb{C}$-álgebras induzida pela composição de φ*

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{O}_{Y,q} &\to \mathcal{O}_{X,p} \\ h &\mapsto h \circ \varphi \end{aligned}$$

Mais precisamente, φ^* é um homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras.

Vale a seguinte propriedade: sejam $\varphi : (X,p) \to (Y,q)$ e $\psi : (Y,q) \to (Z,r)$ germes de aplicações analíticas. Então $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Lema 1.3 *Seja $\varphi : (X,p) \to (Y,q)$ um germe de uma aplicação analítica. Se φ é um isomorfismo analítico, então φ^* é um isomorfismo entre $\mathbb{C}$-álgebras.*

Um número importante associado a um germe de uma função holomorfa na origem é o número de Milnor.

Definição 1.14 *Seja $f \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$. Definimos o número de Milnor de f por*

$$\mu(f) = dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}/J(f)),$$

onde $J(f) = \left\langle \dfrac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial z_n} \right\rangle$ é o ideal Jacobiano de f.

Exemplo 1.3 Seja $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$. Então, $J(f)(z_1, z_2) = \langle 2z_1, 2z_2 \rangle = \langle z_1, z_2 \rangle$. Assim, $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}/\langle z_1, z_2 \rangle = \mathbb{C}$. Portanto,

$$dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{z_1, z_2\}}{\langle z_1, z_2 \rangle} = 1.$$

Definimos a dimensão de *Krull* de um germe de conjunto analítico a seguir.

Definição 1.15 *A dimensão de Krull de (X, p) é o máximo comprimento k de cadeias de ideais primos em $\mathcal{O}_{X,p}$*

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_k.$$

Observemos que essa definição também vale para todo anel Noetheriano. Outro fato a ressaltar é que se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é um germe irredutível de uma função holomorfa na origem e $V(f)$ é o seu germe de hipersuperfície, então a dimensão de *Krull* de $\mathcal{O}_n/\langle f \rangle$ é $n-1$.

1.4 O Cone Tangente

Para encerrar essa parte preliminar, consideremos um conjunto analítico $X \subset \mathbb{C}^n$ e um ponto $p \in X$. Definimos o cone tangente de (X, p) da seguinte forma.

Definição 1.16 *O cone tangente $C(X, p)$ é o conjunto de todos os vetores v tais que existe um arco $\rho : [0, \varepsilon) \to X$ com $\rho(0) = p$ e*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\rho(\lambda) - p}{\lambda} = v.$$

Exemplo 1.4 Seja $f(z_1, z_2) = z_2^2 - z_1^3$. Consideremos então $X = V(f)$ e $p = 0$. Seja $\rho : [0, \varepsilon) \to X$ o arco definido por $\rho(\lambda) = (\lambda, \lambda^{3/2})$. Vemos que $\rho(0) = 0$ e também

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\rho(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0^+} (1, \lambda^{1/2}) = (1, 0).$$

Logo, o vetor $(1, 0)$ está no cone tangente $C(V(f), 0)$.

Observemos que o vetor $(\alpha, 0)$ também está no cone tangente $C(V(f), 0)$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Basta considerarmos o arco $\rho_\alpha : [0, \varepsilon) \to X$ dado por $\rho_\alpha(\lambda) = \alpha(\lambda, \lambda^{3/2})$.

Portanto, os vetores com a direção de $(1, 0)$ estão no cone tangente de $V(f)$.

Escrevendo $f = f_2 + f_3$, onde $f_2(z_1, z_2) = z_2^2$ e $f_3(z_1, z_2) = -z_1^3$. Constatamos que os pontos que anulam f_2 pertencem ao cone tangente $C(V(f), 0)$.

Mais geralmente, se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é um germe de uma função holomorfa na origem e $f = f_m + f_{m+1} + ...$, onde cada f_i é um polinômio homogêneo de grau i, $i \geq m$, então

$$C(V(f), 0) = \{v \in \mathbb{C}^n : f_m(v) = 0\}.$$

Com efeito, se $v \in C(V(f), 0)$, então existe um arco $\rho : [0, \varepsilon) \to V(f)$ tal que $\rho(0) = 0$ e

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\rho(\lambda)}{\lambda} = v.$$

Podemos escrever então $\rho(\lambda) = \lambda v + o(\lambda)$. E uma vez que $\rho(\lambda) \in V(f)$, para todo $\lambda \in [0, \varepsilon)$, temos $(f \circ \rho)(\lambda) = 0$, para todo $\lambda \in [0, \varepsilon)$. Logo,

$$0 = (f_m \circ \rho)(\lambda) + (f_{m+1} \circ \rho)(\lambda) + ... = f_m(\lambda v + o(\lambda)) + f_{m+1}(\lambda v + o(\lambda)) + ...$$
$$= \lambda^m f_m \left(v + \frac{o(\lambda)}{\lambda} \right) + \lambda^{m+1} f_{m+1} \left(v + \frac{o(\lambda)}{\lambda} \right) + ...$$

Dividindo a equação anterior por λ^m, obtemos

$$f_m \left(v + \frac{o(\lambda)}{\lambda} \right) + \lambda f_{m+1} \left(v + \frac{o(\lambda)}{\lambda} \right) + ... = 0.$$

Fazendo agora $\lambda \to 0$, concluímos que $f_m(v) = 0$.

Para completar essa caracterização de cone tangente, precisamos mostrar que se $v \in \mathbb{C}^n$ é tal que $f_m(v) = 0$, então existe um arco $\rho : [0, \varepsilon) \to V(f)$ com $\rho(0) = 0$ e

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\rho(\lambda)}{\lambda} = v.$$

Essa demonstração é bastante delicada e foge do escopo deste trabalho. Ela pode ser encontrada em [38] no caso geral para germes de conjuntos analíticos (teorema enunciado abaixo).

Teorema 1.5 *Dado $p \in X \subset \mathbb{C}^n$, o cone tangente $C(X, p)$ é o conjunto dos zeros de todos os polinômios iniciais f_k de germes $f \in \mathcal{I}(X, p)$.*

Considerando um germe de função holomorfa f como anteriormente, destacamos o importante resultado que será utilizado em vários pontos de nosso trabalho.

Proposição 1.1 *Seja L uma reta complexa passando pela origem em $\mathbb{C}^n$ não contida em $C(V(f), 0)$. Então 0 é um ponto isolado de $V(f) \cap L$ e m é a ordem de anulamento de $f_{|L}$ na origem.*

Prova: Primeiramente observemos que se $v \in C(V(f),0)$, então $\lambda v \in C(V(f),0)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, pois $f_m(\lambda v) = \lambda^m f_m(v) = 0$, desde que $f_m(v) = 0$.

Agora notemos que $f_{|L}$ é uma função de uma variável complexa. Logo, ou $f_{|L}$ é identicamente nula ou $f_{|L}$ possui zeros isolados.

Suponhamos que $f_{|L}$ seja identicamente nula. Desta maneira, $L \subset V(f)$, uma vez que todos os pontos de L anulam f.

Supondo que L seja descrita pela equação paramétrica λv, $\lambda \in \mathbb{C}$, onde v é um vetor não nulo que dá a direção de L, consideremos o arco $\rho : [0,\varepsilon) \to V(f)$ definido por $\rho(\lambda) = \lambda v$. Assim,

$$\rho(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\rho(\lambda)}{\lambda} = v,$$

implicando em $v \in C(V(f),0)$. Portanto, $\lambda v \in C(V(f),0)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Consequentemente, teríamos $L \subset C(V(f),0)$. Logo, $f_{|L}$ possui zeros isolados.

Assim concluímos que 0 é um ponto isolado de $V(f) \cap L$.

Agora uma vez que $f_{m|L} \not\equiv 0$, escrevendo $f_{|L} = f_{m|L} + f_{m+1|L} + ...$, constatamos que o menor grau de $f_{|L}$ é m. Portanto, a ordem de anulamento de $f_{|L}$ na origem é m.

□

Como última observação, é sempre possível fazer uma mudança de coordenadas linear genérica de tal forma que uma dada reta L não esteja contida no cone tangente de $V(f)$ na origem. Mais ainda, podemos sempre supor que o eixo z_n não está contido em $C(V(f),0)$, fazendo uma mudança de coordenadas se necessária. Logo, $f(0,...,z_n)$ terá ordem de anulamento m na origem. Consequentemente, existirão um polinômio de Weierstrass h na variável z_n de grau m e uma unidade $u \in \mathbb{C}\{z_1,...,z_n\}$ tais que $f = uh$.

Capítulo 2

Multiplicidade

Neste capítulo introduziremos o conceito de multiplicidade de um germe de hipersuperfície a partir do polinômio Hilbert-Samuel do seu anel local. Mais geralmente, definiremos multiplicidade de um germe de um conjunto analítico.

Essa definição de multiplicidade de um germe de hipersuperfície será conveniente para verificarmos que a multiplicidade é um invariante analítico do mesmo (Proposição 2.1).

Antes porém veremos que tal definição de multiplicidade é equivalente à definição que descrevemos na Introdução. Feito isto, interpretaremos geometricamente a multiplicidade.

Na seção seguinte estudaremos as interpretações homológicas de multiplicidade de um germe de hipersuperfície dadas por Ephraim em [5].

Encerrando as caracterizações de multiplicidade, verificaremos o resultado de Risler e Trotman em [29] que a descreve como um expoente de Łojasiewicz. Também veremos como Comte, Milman e Trotman caracterizam multiplicidade em [4].

Definiremos a seguir singularidades isoladas e tipos topológicos de singularidades isoladas. Concluímos então o capítulo, verificando a invariância analítica da multiplicidade.

2.1 O Polinômio Hilbert-Samuel

As definições e resultados dessa seção podem ser encontrados com mais detalhes em [12]. Definimos inicialmente a função Hilbert-Samuel de um anel Noetheriano local.

Definição 2.1 *Seja* $(R, \mathbf{m})$ *um anel Noetheriano local. A função* $HS_R : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *defi-*

nida por

$$HS_R(d) = dim_{R/\mathbf{m}}(R/\mathbf{m}^d)$$

é chamada de função Hilbert-Samuel de R.

Estamos particularmente interessados em estudar a função Hilbert-Samuel quando R é o anel local de um germe de um conjunto analítico (X, p). Neste caso escrevemos $HS_{X,p}$ e dizemos que ela é função Hilbert-Samuel de (X, p). Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.1 Consideremos $(X, p) = (\mathbb{C}^n, 0)$. Seu anel local R é $\mathcal{O}_n$. Logo, $R/\mathbf{m}^d$ é o espaço vetorial de todos os polinômios de grau menor que d em n variáveis. Vamos calcular a dimensão desse espaço usando um argumento de análise combinatória. Para cada monômio $z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$, com $\sum_i \alpha_i < d$, associamos um monômio de grau $d-1$ em $n+1$ variáveis, a saber $z_0^{\alpha_0} z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$, onde $\alpha_0 = d - 1 - \sum_i \alpha_i$. Basta agora verificar quantos são os monômios de grau $d-1$ em $n+1$ variáveis. Representaremos cada monômio $z_0^{\alpha_0} z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$ através de círculos. Colocamos α_0 círculos vazios, em seguida um círculo cheio, depois α_1 círculos vazios, um círculo cheio, etc. Obtemos

$$\underbrace{\circ \circ \ldots \circ \circ}_{\alpha_0} \bullet \underbrace{\circ \circ \ldots \circ \circ}_{\alpha_1} \bullet \ldots \bullet \underbrace{\circ \circ \ldots \circ \circ}_{\alpha_n}$$

Mudando as posições dos círculos cheios, encontramos um monômio diferente. Então para conseguir um monômio como desejado acima, temos que escolher n círculos cheios dentre $n + d - 1$ possibilidades. Portanto,

$$HS_R(d) = \left(\begin{array}{c} n+d-1 \\ n \end{array} \right).$$

Exemplo 2.2 Consideremos agora $n = 2$. Sejam $f(z_1, z_2) = z_2^2 - z_1^3$ e $(X, p) = (V(f), 0)$. Uma vez que f é irredutível, seu anel local R é $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}/\langle z_2^2 - z_1^3 \rangle$. Observemos que um elemento g pertencente a R possui grau no máximo 1 na variável z_2. Logo, $g + \mathbf{m}^d$ também possui grau no máximo 1 em z_2. Porém $g + \mathbf{m}^d$ possui grau no máximo $d - 1$ (grau total). Desta maneira, $R/\mathbf{m}^d$ é o espaço vetorial gerado pelos monômios 1, z_1^k e $z_1^{k-1} z_2$, $k = 1, ..., d-1$. Portanto,

$$HS_R(d) = 1 + d - 1 + d - 1 = 2d - 1.$$

Notemos que a função Hilbert-Samuel do anel desse exemplo é um polinômio de grau $1 = n-1$. O teorema a seguir nos diz exatamente isso quando d é suficientemente grande.

Teorema 2.1 *Seja $(R, \mathbf{m})$ um anel Noetheriano local.*
(1) Existe um polinômio $HSP_R \in \mathbb{Q}[t]$ tal que $HSP_R(d) = HS_R(d)$ para d suficientemente grande. Chamamos HSP_R de polinômio Hilbert-Samuel de R.
No caso de R ser o anel local de um germe de conjunto analítico (X, p), escrevemos $HSP_{X,p}$ para o polinômio Hilbert-Samuel de R e dizemos que ele é o polinômio Hilbert-Samuel de (X, p).
(2) $\partial(HSP_R) = dim(R)$.

A dimensão do anel utilizada no item (2) é a dimensão de $Krull$. A demonstração do teorema acima pode ser encontrada na referência citada no início da seção. Não a faremos aqui por ser longa e fugir aos objetivos deste trabalho. Utilizaremos esse resultado para definir multiplicidade de um anel.

Definição 2.2 *Seja $(R, \mathbf{m})$ um anel Noetheriano local de dimensão e. Escrevendo $HSP_R(t) = \sum_{k=0}^{e} a_k t^k$, $a_k \in \mathbb{Q}$, definimos a multiplicidade de R por $m(R) := e! \cdot a_e$. Se $R = \mathcal{O}_{X,p}$ é o anel local de (X, p), escrevemos $m(X, p)$ no lugar de $m(\mathcal{O}_{X,p})$ e dizemos que ela é a multiplicidade de X em p.*

Exemplo 2.3 Consideremos novamente $n = 2$ e o anel local $R = \mathbb{C}\{z_1, z_2\}/\left\langle z_2^2 - z_1^3 \right\rangle$. Então, $HSP_R(t) = 2t-1$. Portanto, a multiplicidade de $V(f)$ na origem é $(2-1)! \cdot 2 = 2$.

2.2 Ordem e Interpretação Geométrica

Nesta seção, serão dadas algumas caracterizações de multiplicidade de um germe de hipersuperfície. A principal delas é obtida a partir do teorema abaixo.

Teorema 2.2 *Sejam $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função holomorfa na origem, $ord(f) = m$ e $R = \mathcal{O}_n/\langle f \rangle$ o anel local de $(V(f), 0)$. Então*

$$HSP_R(d) = \sum_{j=1}^{m} \binom{n+d-j-1}{n-1}.$$

Em particular, a multiplicidade de $V(f)$ na origem é m.

Prova: O que faremos aqui é essencialmente uma generalização do Exemplo 2.2. Sem perda de generalidade, podemos assumir que f é um polinômio de Weierstrass em z_n de grau $m = ord(f)$. Um elemento de $R/\mathbf{m}^d$ é, portanto, um polinômio em z_n de grau no máximo $m-1$ e de grau total no máximo $d-1$. Assim, para $d > m$, uma base para este espaço vetorial é $B = \cup_{j=1}^m B_j$, onde

$$B_j = \{z^\alpha : \alpha_n = j-1,\ \alpha_1 + ... + \alpha_{n-1} \leq d-j\}.$$

De fato, B_1 é o conjunto dos monômios de grau 0 em z_n, B_2 é o conjunto dos monômios de grau 1 em z_n, etc. A união destes conjuntos gera então $R/\mathbf{m}^d$. E essa união é linearmente independente. Logo, $HSP_R(d)$ é o número de elementos de B.

Para cada j, olhemos B_j como a união dos monômios de grau $d-j$ em $n-1$ variáveis (quando $\alpha_1 + ... + \alpha_{n-1} = d-j$) e dos monômios de grau $d-j-1$ em n variáveis (quando $\alpha_1 + ... + \alpha_{n-1} < d-j$, daí fazemos a associação do Exemplo 2.1).

Então, utilizando o Exemplo 2.1, o número de monômios em B_j é igual a

$$\begin{pmatrix} n-2+d-j \\ n-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1-d-j-1 \\ n-1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} n+d-j-2 \\ n-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+d-j-2 \\ n-1 \end{pmatrix}.$$

Usando relação de Stifel

$$\begin{pmatrix} a \\ b-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ b \end{pmatrix},$$

concluímos que B_j tem $\begin{pmatrix} n+d-j-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$ elementos.

Portanto, $HSP_R(d) = \sum_{j=1}^{m} \begin{pmatrix} n+d-j-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$.

Para verificar a afirmação sobre a multiplicidade de $V(f)$ na origem, observemos inicialmente que

$$\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix} = \frac{(a+b)!}{a!b!} = \frac{(b+a)(b+(a-1))\dots(b+1)b!}{a!b!}$$
$$= \frac{(b+a)(b+(a-1))\dots(b+1)}{a!}.$$

Fazendo agora para cada j, $n-1 = a$ e $d-j = b$, obtemos

$$\begin{pmatrix} n+d-j-1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \frac{(d-j+n-1)(d-j+(n-1-1))\dots(d-j+1)}{n-1!},$$

que possui $n-1$ fatores no numerador.

O número que acompanha d^{n-1} é $\dfrac{1}{(n-1)!}$.

Logo, o coeficiente do termo líder do polinômio Hilbert-Samuel de R (que é igual à função Hilbert-Samuel de R) é $\dfrac{m}{(n-1)!}$.

Portanto, $m(V(f),0) = (n-1)!\dfrac{m}{(n-1)!}$, ou seja, a multiplicidade de $V(f)$ na origem é o menor grau dos monômios de f quando a escrevemos como uma série de potências convergente.

$\square$

No Exemplo 2.2, $n = 2$ e $m = 2$, logo

$$\begin{aligned} HSP_R(d) &= \sum_{j=1}^{2} \begin{pmatrix} 2+d-j-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{2} \begin{pmatrix} d-j+1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d-1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2d-1, \end{aligned}$$

como já havíamos verificado.

Como consequência do Teorema 2.2, temos o seguinte.

Corolário 2.1 *Sejam $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe irredutível de uma função holomorfa na origem de ordem m e $V(f)$ seu germe de hipersuperfície. Então, fazendo uma mudança de coordenadas se necessária, a multiplicidade de $V(f)$ na origem é o número de geradores de $\mathcal{O}_n/\langle f\rangle$ como $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_{n-1}\}$-módulo.*

Prova: Uma vez que a ordem de f é m, podemos supor que a ordem de f em z_n também é m (fazemos uma mudança de coordenadas se necessária). Pelo Teorema da Preparação de Weierstrass, existem uma unidade $u \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ e um polinômio de Weierstrass h de grau m tais que

$$f = uh.$$

Como $\langle f\rangle = \langle h\rangle$, podemos supor que f é um polinômio de Weierstrass. Seja agora $g \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$. Usando o Teorema da Divisão de Weierstrass, obtemos

$$g = qf + r,$$

onde $q \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ e r é um polinômio em z_n de grau menor que m com coeficientes em $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_{n-1}\}$.

Logo, $g - r \in \langle f \rangle$. Consequentemente, o elemento $g + \langle f \rangle$ está no $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_{n-1}\}$-módulo gerado por $1, z_n, ..., z_n^{m-1}$.

Agora uma vez que f é irredutível, o anel local de $V(f)$ é $\mathcal{O}_n / \langle f \rangle$ e, portanto, do teorema anterior concluímos que o número de geradores de $\mathcal{O}_n / \langle f \rangle$ como $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_{n-1}\}$-módulo é a multiplicidade de $V(f)$ na origem.

□

Para concluir essa seção iremos agora exibir uma interpretação geométrica da multiplicidade. Sejam $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função holomorfa na origem e $V = V(f)$ seu germe de hipersuperfície. Consideremos as $n - 1$ formas lineares complexas $g_1, ..., g_{n-1}$ tais que o sistema linear

$$g_1(z) = ... = g_{n-1}(z) = 0$$

define uma reta complexa L passando pela origem.

A função $f_{|L}$ é agora de uma variável complexa. Seja m a multiplicidade de $z = 0$ como raiz da equação $f_{|L}(z) = 0$. Então $m \geq ord(f)$. A igualdade só ocorre quando L não está contida no cone tangente de V. Em geral, podemos supor então que $m = ord(f)$ (fazemos uma mudança de coordenadas se necessária).

As formas lineares g_i, $i = 1, ..., n$, definem uma projeção $\pi : V \to \mathbb{C}^{n-1}$,

$$\pi(z) = (g_1(z), ..., g_{n-1}(z)).$$

A imagem inversa $\pi^{-1}(w)$ de qualquer ponto w próximo de 0, mas diferente de 0, consiste de no máximo m pontos, sendo exatamente m quando a reta L não está contida no cone tangente de V.

Mas, considerando π definida em $\mathbb{C}^n$, $\pi^{-1}(w)$ é uma reta complexa passando próximo da origem, mas não por ela.

Portanto, a multiplicidade de V na origem é o número de pontos de interseção próximos de 0 de V com uma reta complexa genérica passando próximo da origem, mas não por ela.

Podemos raciocinar de maneira semelhante com um germe (X, p) de dimensão k. Um plano $(n-k)$-dimensional genérico passando próximo de p, mas não por p, intersepta um representante X' de (X, p) em exatamente $m(X, p)$ pontos.

2.3 Multiplicidade e Homologia

Ephraim exibe em [5] duas interpretações de multiplicidade de um germe de hipersuperfície em termos de homologia. Nesta seção pretendemos esboçar as ideias que levam a tais interpretações.

Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função holomorfa. Suponhamos que a multiplicidade de $V(f)$ na origem seja m. Descrevemos a seguir a ideia da primeira caracterização de multiplicidade feita por Ephraim.

PRIMEIRA INTERPRETAÇÃO: Seja $L \subset \mathbb{C}^n$ uma reta passando pela origem tal que $L \cap (C(V(f)), 0) = \{0\}$. Vimos na Seção 1.4 que a origem é um ponto isolado de $L \cap V(f)$ e m é a ordem de anulamento de $f_{|L}$ na origem.

Portanto existe um disco aberto $D \subset L$ centrado na origem de raio tão pequeno que $D \cap V(f) = \{0\}$. Assim quando consideramos $f_{|L}$ restrita a $D - \{0\}$ sua imagem está contida em $\mathbb{C} - \{0\}$.

Denotando por $H_1(D - \{0\}; \mathbb{Z})$ e $H_1(\mathbb{C} - \{0\}; \mathbb{Z})$ as primeiras classes de homologia dos espaços topológicos $D - \{0\}$ e $\mathbb{C} - \{0\}$, respectivamente, sobre o anel dos inteiros, obtemos a seguinte aplicação

$$(f_{|L})_* : H_1(D - \{0\}; \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{C} - \{0\}; \mathbb{Z}).$$

Uma vez que podemos identificar $H_1(D - \{0\}; \mathbb{Z})$ e $H_1(\mathbb{C} - \{0\}; \mathbb{Z})$ com $\mathbb{Z}$, se γ é um gerador de $H_1(D - \{0\}; \mathbb{Z})$, ou seja, podemos pensar em γ como sendo ± 1, então $(f_{|L})_*(\gamma) \in H_1(\mathbb{C} - \{0\}; \mathbb{Z})$ pode ser visto como um número inteiro ν.

Tal número ν é o número de voltas que $(f_{|L})_*(\gamma)$ dá em torno da origem (vista agora como uma classe de homologia de $\mathbb{C} - \{0\}$). Na verdade, esse número de voltas é m ou $-m$, dependendo da escolha de γ ($+1$ ou -1).

Consequentemente, $(f_{|L})_*(\gamma)$ representa a multiplicidade de $V(f)$ na origem. Essa é a primeira interpretação da multiplicidade feita por Ephraim.

Passemos agora ao esboço da segunda caracterização dada por Ephraim.

SEGUNDA INTERPRETAÇÃO: Suponhamos que f seja irredutível e que B_t seja uma bola aberta centrada na origem de raio t na qual f convirja. Ephraim mostra que

$$f_* : H_1(B_r - V(f); \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{C} - \{0\}; \mathbb{Z})$$

é um isomorfismo para todo r tal que $0 < r < t$.

Fatoremos $f : D - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\}$ como a composição de

$$i : D - \{0\} \to B_r - V(f) \text{ e } f : B_r - V(f) \to \mathbb{C} - \{0\}, \ 0 < r < t,$$

onde i é a inclusão. Logo,

$$(f_{|L})_*(\gamma) = f_*(i_*(\gamma)) \in H_1(\mathbb{C} - \{0\}; \mathbb{Z})$$

representa m.

Porém, uma vez que $f_* : H_1(B_r - V(f); \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{C} - \{0\}; \mathbb{Z})$ é um isomorfismo, $i_*(\gamma) \in H_1(B_r - V(f); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$[1] nos fornece outra interpretação da multiplicidade de $V(f)$ na origem.

2.4 O Expoente de Łojasiewicz

Consideremos nesta seção $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ como sendo um germe de uma função holomorfa na origem e $V(f)$ seu germe de hipersuperfície na origem. O expoente de Łojasiewicz de f é o número

$$\lambda_0(f) = inf\{\delta \mid dist(z, V(f))^\delta \leq K|f(z)|, \ para\ algum\ \ K > 0 \ e \ \forall z \ próximo \ de \ 0\}.$$

Exemplo 2.5 Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ o germe definido por $f(z) = z_1 z_2$. Logo, $V(f)$ é o conjunto formado pelos eixos coordenados. Uma vez que $dist(z, V(f)) = min\{|z - w| : w \in V(f)\}$, esse número é menor ou igual à distância de z aos eixos coordenados. Consequentemente,

$$dist(z, V(f)) \leq |z_1| \ \text{ e } \ dist(z, V(f)) \leq |z_2|.$$

Multiplicando, obtemos $dist(z, V(f))^2 \leq |z_1||z_2| = |f(z)|$. Portanto, $\lambda_0(f) \leq 2$.

Seja $\delta < 2$ e suponhamos que $|z_1| < |z_2|$. Logo, $dist(z, V(f)) = |z_1|$. Agora se $z = (z_1, 2z_1)$, suponhamos que para todo z_1 próximo de 0 ocorra o seguinte

$$dist(z, V(f))^\delta \leq K|f(z)| = K|z_1||z_2| = 2K|z_1|^2, \text{ para algum } K > 0.$$

Então $|z_1|^{\delta-2} \leq 2K$. Porém, como $\delta < 2$, $|z_1|^{\delta-2} \to \infty$ quando $|z_1| \to 0$. Logo, não existe $K > 0$ verificando a desigualdade acima. Portanto, $\lambda_0(f) = 2$.

Łojasiewicz provou em [21] que toda função holomorfa satisfaz uma desigualdade desse tipo, com o expoente e a constante dependendo da norma escolhida.

Risler e Trotman caracterizam em [29] a multiplicidade de um germe de hipersuperfície usando esse expoente. Para a caracterização de Risler e Trotman, consideraremos a norma euclideana e, sendo $z, w \in \mathbb{C}^n$, $dist(z, w) = |z - w|$.

[1] Esta igualdade é provada no Teorema 2.6 de [5].

Observação 2.1 *A condição* $dist(z, V(f))^\delta \leq K|f(z)|$ *é equivalente a*

$$\frac{dist(z, V(f))^\delta}{|f(z)|} \leq K,$$

ou seja, o quociente $\dfrac{dist(z, V(f))^\delta}{|f(z)|}$ *é limitado.*

Consideremos f como sendo uma série de potências convergente centrada na origem de ordem m. Fazendo uma mudança de coordenadas se necessária, podemos supor que o eixo z_n não está contido no cone tangente de $V(f)$ em 0.

Então, pelo Teorema da Preparação de Weierstrass, podemos escrever $f = uh$, com $u(0) \neq 0$ e

$$h(z_1, ..., z_n) = z_n^m + a_1 z_n^{m-1} + ... + a_m,$$

onde $a_i \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_{n-1}\}$ e a ordem de a_i em 0 é no mínimo i.

Lema 2.1 *Sob as condições acima,* $\lambda_0(f) = \lambda_0(h)$.

Prova: Seja $\lambda = \lambda_0(f)$. Então para todo $\delta > \lambda$, existe $K > 0$ tal que para todo z próximo de 0

$$dist(z, V(h))^\delta = dist(z, V(f))^\delta \leq K|f(z)| = K|u(z)||h(z)|.$$

Para z próximo de 0, $u(z) \in B(u(0), \varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$. Logo, u é limitada para z próximo de 0. Seja então $L > 0$ tal que $|u(z)| \leq L$, para z próximo de 0. Assim

$$dist(z, V(h))^\delta \leq KL|h(z)|$$

Daí concluímos que $\lambda_0(h) \leq \delta$, para todo $\delta > \lambda$. Esse fato implica que $\lambda_0(h) \leq \lambda$, pela definição de ínfimo de um conjunto.

Agora seja $\lambda = \lambda_0(h)$. Então para todo $\delta > \lambda$, existe $K > 0$ tal que para todo z próximo de 0

$$dist(z, V(f))^\delta = dist(z, V(h))^\delta \leq K|h(z)| = K|f(z)|/|u(z)|.$$

Escolhamos $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(u(0), \varepsilon) \cap B(0, |u(0)| - \varepsilon) = \emptyset.$$

Assim $|u(z)| \geq |u(0)| - \varepsilon = M$, o que implica em

$$dist(z, V(f))^{\delta} \leq K/M|f(z)|$$

Logo $\delta \geq \lambda_0(f)$. E portanto, $\lambda_0(f) \leq \lambda$, pela definição de ínfimo de um conjunto. Segue então a conclusão de que $\lambda_0(f) = \lambda_0(h)$.

$\square$

No Exemplo 2.5 podemos ver que o expoente de Łojasiewicz é a multiplicidade do germe de hipersuperfície na origem. Esse é o resultado obtido por Risler e Trotman que verificaremos a seguir.

Teorema 2.3 (Risler-Trotman, [29]) *Considerando novamente as hipóteses anteriores, temos $\lambda_0(f) = m$.*

Prova: Tendo em vista o Lema 2.1, podemos supor que f é um polinômio de Weierstrass. Inicialmente mostraremos que $m \leq \lambda_0(f)$.

Seja z pertencente ao eixo z_n, logo $z = (0, ..., z_n)$ e $f(z) = z_n^m$.

Seja agora $w = (w_1, ..., w_n) \in V(f)$, ou seja, $f(w) = 0$. Desta maneira

$$dist(z, w) = |z - w| = \sqrt{|w_1|^2 + ... + |w_n - z_n|^2}.$$

O mínimo de $|z - w|$ ocorre quando $w_1 = ... = w_{n-1} = 0$ e $|w_n - z_n|$ é o menor valor possível tal que $w \in V(f)$. Logo, concluímos que $w = 0$, ou seja, $dist(z, V(f)) = dist(z, 0) = |z| = |z_n|$. Disso segue que para $\delta > 0$

$$\frac{dist(z, V(f))^{\delta}}{|f(z)|} = \frac{|z_n|^{\delta}}{|z_n^m|} = \frac{|z_n|^{\delta}}{|z_n|^m} = |z_n|^{\delta - m}.$$

Obtemos então os seguintes casos:

(a) $\delta > m$: $|z_n|^{\delta - m} \to 0$, quando $z_n \to 0$.

Logo, o quociente $\dfrac{dist(z, V(f))^{\delta}}{|f(z)|}$ é limitado para z_n próximo de 0.

(b) $\delta = m$: $|z_n|^{\delta - m} = 1$.

E portanto $\dfrac{dist(z, V(f))^{\delta}}{|f(z)|}$ é limitado para z_n próximo de 0.

(c) $\delta < m$: $|z_n|^{\delta - m} \to \infty$, quando $z_n \to 0$.

Logo, o quociente $\dfrac{dist(z, V(f))^{\delta}}{|f(z)|}$ não é limitado para z_n próximo de 0.

Portanto, pela Observação 2.1, para todo $\delta \geq m$ existe $K > 0$ tal que

$$dist(z,V(f))^{\delta} \leq K|f(z)|, \text{ para todo } z_n \text{ próximo de } 0.$$

Consideremos agora os seguintes conjuntos

$$A = \{\delta|\ dist(z,V(f))^{\delta} \leq K|f(z)|,\ para\ algum\ \ K > 0\ e\ \forall z\ próximo\ de\ 0\}$$
$$B = \{\delta|\ dist((0,...,z_n),V(f))^{\delta} \leq K|f(z)|,\ para\ algum\ \ K > 0\ e\ \forall z_n\ próximo\ de\ 0\}$$

Sabemos que $\lambda_0(f) = infA$ e $m = infB$.

Além disso, $A \subset B$, pois se $\delta \in A$, então existe $K > 0$ tal que $\dfrac{dist(z,V(f))^{\delta}}{|f(z)|} \leq K$, para todo z próximo de 0.

Em particular, para $z = (0,...,z_n)$ com z_n próximo de 0 também vale a desigualdade. Logo, $\delta \in B$.

Disso resulta que $infB \leq infA$, ou seja, $m \leq \lambda_0(f)$.

Agora mostraremos que $m \geq \lambda_0(f)$.

Podemos escrever $f(z) = (z_n - \alpha_1) \cdot ... \cdot (z_n - \alpha_m)$, onde $\alpha_1,...,\alpha_m$ são as raízes do polinômio f para $z_1,...,z_{n-1}$ fixados.

Como $(z_1,...,z_{n-1},\alpha_i(z_1,...,z_{n-1})) \in V(f)$, para todo $i = 1,...,m$, decorre que

$$dist((z_1,...,z_n),V(f)) \leq |z_n - \alpha_i|, \text{ para todo } i = 1,...,m.$$

Logo,

$$dist(z,V(f))^m \leq |z_n - \alpha_1| \cdot ... \cdot |z_n - \alpha_m| = |f(z)|.$$

E portanto $\lambda_0(f) \leq m$.

□

Em [4], Comte, Milman e Trotman dão outra interpretação de multiplicidade de germe de hipersuperfície (veja também [28], Proposição 1.1).

Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função holomorfa na origem, então escrevemos

$$\delta(f) = sup\ \{\ \delta\ |\ \frac{|f(z)|}{|z|^{\delta}}\ é\ limitada\ próximo\ de\ 0\}.$$

Denotando a multiplicidade do germe de hipersupefície $V(f)$ na origem por m, a caracterização feita em [4] é a seguinte.

Teorema 2.4 (Comte-Milman-Trotman, [4]) *Assumindo as hipóteses acima, conclui-se que $\delta(f) = m$.*

Prova: Verificaremos inicialmente que $m \leq \delta(f)$.

Seja $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\delta < m$. Mostremos que $\dfrac{|f(z)|}{|z|^\delta}$ é limitada próximo de 0.

Para tanto, é suficiente provar que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|f(z)|}{|z|^\delta} = 0$.

Escrevamos $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq m} a_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot z_n^{\alpha_n}$, onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ e $a_\alpha \in \mathbb{C}$.

E verifiquemos apenas que cada termo $\dfrac{|z_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot z_n^{\alpha_n}|}{|z|^\delta} \to 0$, quando $z \to 0$.

Com efeito, $\dfrac{|z_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot z_n^{\alpha_n}|}{|z|^\delta} = \dfrac{|z_1|^{\alpha_1} \cdot ... \cdot |z_n|^{\alpha_n}}{|z|^\delta} \leq \dfrac{(m\acute{a}x\{|z_i| \ : \ 1 \leq i \leq n\})^{|\alpha|}}{|z|^\delta}$.

Uma vez que as normas do máximo e euclideana são equivalentes, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$m\acute{a}x\{|z_i| \ : \ 1 \leq i \leq n\} \leq k|z|$$

O que leva a $\dfrac{(m\acute{a}x\{|z_i| \ : \ 1 \leq i \leq n\})^{|\alpha|}}{|z|^\delta} \leq \dfrac{k^{|\alpha|}|z|^{|\alpha|}}{|z|^\delta} = k^{|\alpha|}|z|^{|\alpha|-\delta} \to 0$, quando $z \to 0$, pois $|\alpha| - \delta \geq m - \delta > 0$.

Logo, $\delta < \delta(f), \forall\ \delta < m$ e portanto, pela definição de supremo, $m \leq \delta(f)$.

Para mostrar que $m \geq \delta(f)$, seja $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\delta > m$. Consideremos $z = (z_1, ..., z_n)$ tal que $z_1 = ... = z_n$. Fazendo uma mudança de coordenadas se necessária, podemos supor que z não pertence ao cone tangente de $V(f)$ na origem. Logo,

$$\frac{|f(z)|}{|z|^\delta} = \frac{1}{\sqrt{n^\delta}|z_1|^\delta}\left|\sum_{|\alpha|\geq m} a_\alpha z_1^{|\alpha|}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^\delta}|z_1|^\delta}|b_m z_1^m + b_{m+1}z_1^{m+1} + ...|,$$

onde $b_i = \sum\limits_{|\alpha|=i} a_\alpha$.

Daí segue que

$$\frac{|f(z)|}{|z|^\delta} = \frac{|z_1^m|}{|z_1|^\delta}|b'_0 + b'_1 z_1 + ...| = |z_1|^{m-\delta}|b'_0 + b'_1 z_1 + ...|,$$

com $b'_i = \dfrac{b_{m+i}}{\sqrt{n^\delta}}$

Como $m < \delta$, decorre que $|z_1|^{|\alpha|-\delta} \to \infty$ e $|b'_0 + b'_1 z_1 + ...| \to b'_0 \neq 0$, quando $z_1 \to 0$, o que implica que $\dfrac{|f(z)|}{|z|^\delta} \to \infty$, quando $z \to 0$, ou seja, tal quociente não é limitado próximo de 0.

Desse modo $\delta > \delta(f), \forall\, \delta > m$ e portanto $\delta(f) \leq m$, pela definição de supremo.

Do que foi realizado acima concluímos que $\delta(f) = m$.

$\square$

2.5 Singularidades Isoladas

Nesta seção, intoduziremos o conceito de singularidade isolada de um germe de hipersuperfície.

Sejam $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função holomorfa na origem, $V(f)$ seu germe de hipersuperfície e m sua multiplicidade na origem.

Definição 2.3 *Dizemos que a origem é um ponto singular ou uma singularidade de $V(f)$ ou que $V(f)$ possui uma singularidade na origem se $m \geq 2$.*

Por abuso de linguagem, também será empregada a frase: 'f possui uma singularidade na origem', no lugar de $V(f)$.

Em geral, dizemos que f possui uma singularidade num ponto $p \in V(f)$ se

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}(p) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial z_n}(p) = 0.$$

Quando $p = 0$, as definições são equivalentes. Para verificação, basta escrevermos f como uma série de potências convergente centrada na origem.

Passaremos agora às definições de singularidade isolada e germe reduzido.

Definição 2.4 *Dizemos que $V(f)$ possui uma singularidade isolada na origem se existe uma vizinhança aberta U de 0 tal que nela a origem seja o único ponto singular de $V(f)$, isto é,*

$$\left\{ p \in U : \frac{\partial f}{\partial z_1}(p) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial z_n}(p) = 0 \right\} = \{0\}.$$

Definição 2.5 *Dizemos que um germe de uma função holomorfa na origem é reduzido se ele não é uma potência de um outro germe de uma função holomorfa.*

Observemos que se f possui uma singularidade isolada na origem, então f é reduzido. De fato, suponhamos que $f = g^k$, para algum germe g e para algum $k \in \mathbb{N}$, então para todo $p \in V(f)$, teríamos

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(p) = kg^{k-1}(p)\frac{\partial g}{\partial z_i}(p) = 0, \forall i = 1, ..., n,$$

o que implicaria que a origem não seria uma singularidade isolada de $V(f)$.

Concluímos essa seção demonstrando o seguinte resultado sobre singularidades isoladas.

Lema 2.2 *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função holomorfa na origem. Se f possui uma singularidade isolada na origem, então para todo $i = 1, ..., n$, algum monômio da forma $z_i^{\alpha_i} z_k$, para algum $k = 1, ..., n$, aparece na expressão de f como série de potências convergente.*

Prova: Mostremos que se para algum i, $1 \leq i \leq n$, não existe um monômio da forma $z_i^{\alpha_i} z_k$, então a singularidade não é isolada.

Primeiramente, a variável z_i sempre aparece na expressão de f como série de potências, pois caso contrário todos os pontos do eixo z_i seriam singularidades de f.

Dessa maneira, fixado tal i, escrevamos $w = (z_1, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_n)$ e suponhamos que $f = g + h$, onde g não depende de z_i e $h = \sum z_i^{\alpha_i} w^{\beta}$, com $|\beta| \geq 2$. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(z) = \frac{\partial g}{\partial z_j}(z) + \frac{\partial h}{\partial z_j}(z).$$

Para $j = i$, a primeira parcela é nula, pois g não depende de z_i e a segunda se anula no eixo z_i, pois todos os seus monômios possuem alguma das variáveis $z_1, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_n$.

Para $j \neq i$, a primeira parcela se anula no eixo z_i, pois não depende de z_i e a segunda também se anula nesse eixo, pois supomos $|\beta| \geq 2$, então seus monômios ainda possuem alguma das variáveis $z_1, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_n$.

Portanto, todos os pontos do eixo z_i são singularidades. Desta forma a origem não é uma singularidade isolada de $V(f)$.

□

2.6 Tipos Topológicos de Singularidades Isoladas

Sejam $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes reduzidos de funções holomorfas na origem e $V(f)$, $V(g)$ seus respectivos germes de hipersuperfícies.

Definição 2.6 *Se existe um germe de homeomorfismo* $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *tal que:*
(1) $\varphi(V(f)) = V(g)$, *dizemos que* f *e* g *são topologicamente* V*-equivalentes;*
(2) $\varphi(V(f)) = V(g)$ *e* φ *é um isomorfismo analítico, dizemos que* f *e* g *são analiticamente equivalentes;*
(3) $f = \phi \circ g \circ \varphi$, *com* $\phi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *germe de homeomorfismo, dizemos que* f *e* g *são topologicamente equivalentes à direita e à esquerda ou topologicamente* $\mathcal{R}$-$\mathcal{L}$*-equivalentes;*
(4) $f = g \circ \varphi$, *dizemos que* f *e* g *são topologicamente equivalentes à direita ou topologicamente* $\mathcal{R}$*-equivalentes.*

Observemos que (2) $\Rightarrow$ (1) e (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). A primeira implicação é direta. Também é imediato que equivalência topológica à direita implica equivalência topológica à direita e à esquerda. Para verificar que (3) $\Rightarrow$ (1), seja $w \in \mathbb{C}^n$. Logo,

$$\begin{aligned} w \in \varphi(V(f)) &\Leftrightarrow w = \varphi(z), \text{ para algum } z \in V(f) \\ &\Leftrightarrow w = \varphi(z) \text{ e } f(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow w = \varphi(z) \text{ e } (\phi \circ g \circ \varphi)(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow w = \varphi(z) \text{ e } \phi((g \circ \varphi)(z)) = 0 \\ &\Leftrightarrow w = \varphi(z) \text{ e } g(\varphi(z)) = 0 \\ &\Leftrightarrow w = \varphi(z) \in V(g) \end{aligned}$$

King em [13] e Perron em [27] mostram que V-equivalência topológica é o mesmo que $\mathcal{R}$-$\mathcal{L}$-equivalência topológica (King faz o caso $n \neq 3$ e Perron o caso $n = 3$). Outro resultado de King em [13] diz que se dois germes f e g são topologicamente $\mathcal{R}$-$\mathcal{L}$-equivalentes, então g é topologicamente $\mathcal{R}$-equivalente a f ou a $\bar{f}$, o germe conjugado de f, que tem a mesma multiplicidade de f.

Quanto a famílias e deformações, temos as seguintes definições.

Definição 2.7 *Seja* $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, \{0\} \times \mathbb{C}) \to (\mathbb{C}, 0)$, $(z, t) \mapsto F(z, t) = F_t(z)$, *um germe de uma função holomorfa na origem tal que* $F_0 = f$.
(1) *Dizemos que* $(F_t)_t$ *é topologicamente* V*-constante (respectivamente topologicamente* $\mathcal{R}$*-constante) se, para todo* t *próximo de* 0, F_t *é topologicamente* V*-equivalente (respectivamente topologicamente* $\mathcal{R}$*-equivalente) a* $F_0 = f$.
(2) *Dizemos que* $(F_t)_t$ *é* μ*-constante se, para todo* t *próximo de* 0, *o número de Milnor de* F_t *na origem é igual ao número de Milnor de* $F_0 = f$ *na origem.*

Devido a um teorema de Lê e Ramanujam em [17], se $(F_t)_t$ é uma deformação μ-constante de um germe de função holomorfa $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ com singularidade isolada na origem em $\mathbb{C}^n$, com $n \neq 3$, então $(F_t)_t$ é topologicamente V-constante.

Por outro lado, é sabido que se dois germes reduzidos de funções holomorfas são topologicamente V-equivalentes, então eles têm necessariamente o mesmo número de Milnor em 0.

Para um germe de função holomorfa $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, com $n \neq 3$, King em [14] prova que se f possui uma singularidade isolada na origem e se $(F_t)_t$ é topologicamente V-constante ou μ-constante, então $(F_t)_t$ é topologicamente $\mathcal{R}$-constante.

2.7 A Multiplicidade como um Invariante

Estamos interessados em estudar como se comporta a multiplicidade de um germe de hipersuperfície em relação às equivalências descritas na seção anterior. O primeiro resultado que veremos diz respeito à invariância analítica da multiplicidade.

Proposição 2.1 *Sejam $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes reduzidos de funções holomorfas na origem e $V(f), V(g)$ seus correspondentes germes de hipersuperfícies. Se f e g são analiticamente equivalentes, então suas multiplicidades na origem são iguais.*

Prova: Seja $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de isomorfismo analítico tal que $\varphi(V(f)) = V(g)$. Sejam $\mathcal{O}_n/\langle f \rangle$ e $\mathcal{O}_n/\langle g \rangle$ os anéis locais de $V(f)$ e $V(g)$ respectivamente. Consideremos o "*pullback*" de φ

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{O}_n/\langle g \rangle &\to \mathcal{O}_n/\langle f \rangle \\ h &\mapsto h \circ \varphi \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.3 do Capítulo 1, φ^* é um isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras.

Agora vistos como anéis, $R = \mathcal{O}_n/\langle g \rangle$ e $S = \mathcal{O}_n/\langle f \rangle$ também são isomorfos. E ainda, $R/\mathbf{m}$ e $S/\mathbf{m}$ são isomorfos a $\mathbb{C}$.

Para cada $d \in \mathbb{N}$, defininimos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} T : R/\mathbf{m}^d &\to S/\mathbf{m}^d \\ h + \mathbf{m}^d &\mapsto \varphi^*(h) + \mathbf{m}^d \end{aligned}$$

A aplicação T está bem definida, pois se $h \in \mathbf{m}^d$, então $\varphi^*(h) \in \mathbf{m}^d$. Não é difícil verificar que T é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $R/\mathbf{m}^d$ e $S/\mathbf{m}^d$. Logo, para cada $d \in \mathbb{N}$, temos

$$HS_R(d) = dim_{R/\mathbf{m}}(R/\mathbf{m}^d) = dim_{S/\mathbf{m}}(S/\mathbf{m}^d) = HS_S(d).$$

Portanto, $HSP_R(d) = HSP_S(d)$, para todo $d \in \mathbb{N}$, o que conclui a demonstração de que as multiplicidades de $V(f)$ e $V(g)$ na origem são iguais.

$\square$

Como já mencionado na Introdução, o fato de a multiplicidade de um germe de hipersuperfície ser um invariante analítico sugere a questão a respeito de outras possíveis invariâncias. Nos próximos capítulos, passaremos a estudar tais invariâncias utilizando as caracterizações de multiplicidade que relacionamos neste capítulo.

Capítulo 3

C^1 Invariância da Multiplicidade

Ephraim em [5] e Trotman em [34] provam que a multiplicidade de um germe de hipersuperfície na origem é invariante por um C^1-difeomorfismo (Teorema 3.6). Ambos utilizam ferramentas de homologia para alcançar o resultado. Entretanto, eles usam diferentes interpretações de multiplicidade.

Sejam $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe reduzido de uma função holomorfa na origem, $V(f)$ seu germe de hipersuperfície e m_f sua multiplicidade na origem. Trotman faz o seguinte em [34]: se L é uma reta passando pela origem em $\mathbb{C}^n$ interseptando o cone tangente de $V(f)$ apenas na origem, então a multiplicidade m_f é igual ao número de interseção em 0 de $V(f)$ com L tal como foi definido por Lefschetz em [19].

A demonstração do Teorema 3.6 a ser vista neste capítulo é a realizada por Ephraim. Sua caracterização de multiplicidade em termos de homologia já foi discutida no capítulo anterior.

A primeira seção traz algumas observações e ferramentas necessárias para a prova do resultado, que será realizada na seção posterior.

Será apresentado na última seção um resultado devido a Gau e Lipman que generaliza o Teorema 3.6 para germes de conjuntos analíticos de codimensão mais alta (Teorema 3.7).

3.1 Considerações Iniciais

Seja $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um homeomorfismo. Podemos enxergar φ como uma aplicação de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$. Se φ e φ^{-1}, neste novo contexto, são aplicações de classe C^1, dizemos então que φ é um C^1-difeomorfismo.

Observemos que um C^1-difeomorfismo não é um isomorfismo analítico, pois a existência da derivada no sentido real não garante a existência da derivada no sentido complexo.

Podemos também estender o conceito de C^1-difeomorfismo para germes de homeomorfismos $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$.

Enunciamos a seguir alguns resultados de [5] que são essenciais para a demonstração do Teorema 3.6. Em todos eles, $H_1(X;\mathbb{Z})$ denota a primeira classe de homologia do espaço topológico X sobre o anel dos inteiros (tal conjunto é um $\mathbb{Z}$-módulo). Indicamos por B_r a bola aberta contida em $\mathbb{C}^n$ de centro 0 e raio r.

Teorema 3.1 (Ephraim, [5]) *Se o germe de um conjunto V na origem é irredutível e V é uma hipersuperfície, então, existe $t > 0$ tal que para cada $0 < r < t$, $H_1(B_r - V;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.*

Neste teorema, o sinal de igual significa que $H_1(B_r - V;\mathbb{Z})$ é isomorfo ao $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$. Faremos essa identificação em outros resultados neste capítulo.

Teorema 3.2 (Ephraim, [5]) *Seja V uma hipersuperfície e suponhamos que o germe de V na origem seja irredutível. Seja f uma função holomorfa em B_t que gera o ideal de V em todos os pontos de B_t. Então $f_* : H_1(B_r - V;\mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{C} - \{0\};\mathbb{Z})$ é um isomorfismo para todo r, $0 < r < t$.*

O germe de V na origem é irredutível se, e somente se, o ideal do germe de V na origem $\mathcal{I}(V, 0)$ é primo. Agora supondo que $V = V(f)$, onde f é uma série de potências convergente a uma função holomorfa em B_t, e que f é irredutível, o ideal $\langle f\rangle$ será primo. Portanto, pelo Nullstellensatz, $\mathcal{I}(V, 0) = \sqrt{\langle f\rangle} = \langle f\rangle$, ou seja, basta considerar f irredutível para garantirmos o resultado.

No próximo teorema, U_1 e U_2 são dois subconjuntos abertos de $\mathbb{C}^n$, V_1 e V_2 são duas hipersuperfícies contidas em $\mathbb{C}^n$ e $D_r = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq r\}$.

Teorema 3.3 (Ephraim, [5]) *Sejam $0 \in V_1 \subset U_1$ e $0 \in V_2 \subset U_2$ e suponhamos que t seja escolhido como no teorema anterior para servir para ambos V_1 e V_2. Suponhamos que $\varphi : (U_1, V_1, 0) \to (U_2, V_2, 0)$ seja um homeomorfismo. Escolhamos $0 < r < t$ e $0 < s < t$ tais que $D_r \subset \varphi(B_t)$ e $\varphi(B_s) \subset B_r$. Então $\varphi_* : H_1(B_s - V_1;\mathbb{Z}) \to H_1(B_r - V_2;\mathbb{Z})$ é um isomorfismo.*

Estamos considerando aqui os subespaços $B_s - V_1$ e $B_r - V_2$ com a topologia induzida de $\mathbb{C}^n$.

O último resultado que destacamos de [5] é o seguinte.

Teorema 3.4 (Ephraim, [5]) *Seja $0 \in P \subset \mathbb{C}^n$ um subespaço vetorial real de dimensão real 2. Seja h um polinômio homogêneo de grau k. Suponhamos que $h_{|P}$ se anule somente em $0 \in P$. Então $h_* : H_1(P - \{0\}; \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{C} - \{0\}; \mathbb{Z})$ é a multiplicação por k' com $|k'| \leq k$. (O módulos $H_1(P - \{0\}; \mathbb{Z})$ e $H_1(\mathbb{C} - \{0\}; \mathbb{Z})$ foram ambos identificados com $\mathbb{Z}$.)*

Descreveremos a seguir alguns tópicos relacionados ao conceito de homotopia. Começaremos com a seguinte definição.

Definição 3.1 *Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ funções contínuas entre esses espaços. Dizemos que f é homotópica a g se existe uma função $F : X \times [0,1] \to Y$ tal que $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$.*

A função F é chamada de homotopia. Constatamos que toda função contínua f entre dois espaços topológicos é homotópica a ela mesma. Basta considerar a homotopia $F(x, \lambda) = f(x)$ para todo $\lambda \in [0,1]$. Vejamos outro exemplo.

Exemplo 3.1 Sejam X um espaço topológico qualquer e A um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Consideremos duas funções contínuas $f, g : X \to A$. Então a função $F : X \times [0,1] \to A$, definida por $F(x, \lambda) = (1 - \lambda) \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x)$ é contínua e, como A é convexo, $F(X \times [0,1]) \subset A$, ou seja, F está bem definida.

Definição 3.2 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Dizemos que f é uma equivalência de homotopia se existe uma função contínua $g : Y \to X$ tal que $g \circ f : X \to X$ é homotópica a Id_X e $f \circ g : Y \to Y$ é homotópica a Id_Y.*

Neste caso, g é chamada de inversa homotópica de f e dizemos que X e Y têm o mesmo tipo de homotopia.

Exemplo 3.2 Sejam $X = B(0,1) - \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, onde $B(0,1)$ denota a bola aberta centrada na origem de raio 1 e $Y = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Consideremos $i : X \to Y$ como sendo a inclusão. Então, i é uma equivalência de homotopia. De fato, seja $j : Y \to X$ definida por

$$j(x,y) = \frac{(x,y)}{1+|(x,y)|}, \text{ para todo } (x,y) \in X.$$

Mostraremos que $i \circ j$ é homotópica a Id_Y e $j \circ i$ é homotópica a Id_X. Para $(x,y) \in Y$, temos

$$(i \circ j)(x,y) = i(j(x,y)) = i\left(\frac{(x,y)}{1+|(x,y)|}\right) = \frac{(x,y)}{1+|(x,y)|}.$$

E para $(x,y) \in X$, temos

$$(j \circ i)(x,y) = j(i(x,y)) = j(x,y) = \frac{(x,y)}{1+|(x,y)|}.$$

Seja $F : Y \times [0,1] \to Y$ dada por

$$F((x,y),\lambda) = (1-\lambda) \cdot \frac{(x,y)}{1+|(x,y)|} + \lambda \cdot (x,y)$$

Logo, $F((x,y),0) = \frac{(x,y)}{1+|(x,y)|}$, $F((x,y),1) = (x,y)$ e para cada $\lambda \in (0,1)$, $F((x,y),\lambda)$ pertence ao segmento de reta que liga $F((x,y),0)$ a $F((x,y),1)$. Uma vez que os vetores $F((x,y),0)$ e $F((x,y),1)$ possuem a mesma direção e o mesmo sentido, o segmento que os une não contém a origem, logo F está bem definida. Além disso, F é contínua e, portanto, é a homotopia desejada.

Considerando a mesma função F, definida agora em X, verificamos também que $j \circ i$ é homotópica a Id_X. Portanto, a inclusão i é uma equivalência de homotopia.

O principal resultado que ressaltamos sobre homotopia é o importante Teorema da Invariância Homotópica. A notação $H_n(X,R)$ indica a n-ésima classe de homologia do espaço topológico X sobre o anel R.

Teorema 3.5 (Teorema da Invariância Homotópica) *Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Se f é homotópica a g, então $f_* : H_n(X;R) \to H_n(Y;R)$ é igual a $g_* : H_n(X;R) \to H_n(Y;R)$, para todo $n \geq 0$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [36], Capítulo 1, Teorema 1.10. Destacamos o fato de que se $f : X \to Y$ é uma equivalência de homotopia, então $f_* : H_n(X;R) \to H_n(Y;R)$ é um isomorfismo. Seu homomorfismo inverso é $g_* : H_n(Y;R) \to H_n(X;R)$, onde g é a inversa homotópica de f.

3.2 C^1 Invariância

Esta seção destina-se a demonstrar a C^1 invariância da multiplicidade de germes de hipersuperfícies. Sejam $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes reduzidos de funções holomorfas na origem, $V(f)$, $V(g)$ seus correspondentes germes de hipersuperfícies e $C(V(f))$, $C(V(g))$ seus cones tangentes na origem respectivamente.

Recordemos que se L é uma reta em $\mathbb{C}^n$ passando por 0 tal que $L \cap C(V(f)) = \{0\}$, D é um disco aberto centrado na origem de raio suficientemente pequeno e γ é um gerador de $H_1(D - \{0\}; \mathbb{Z})$, então a primeira interpretação da multiplicidade m_f de f na origem dada por Ephraim é a seguinte

$$(f_{|L})_*(\gamma) = \pm m_f.$$

Considerando a inclusão $i : D - \{0\} \to B_r - V(f)$, $0 < r < t$ (com $B_r, 0 < r < t$, dado pelo Teorema 3.2), temos $(f_{|L})_*(\gamma) = f_*(i_*(\gamma))$. Agora supondo f irredutível, a segunda interpretação da multiplicidade m_f é

$$i_*(\gamma) = \pm m_f.$$

A multiplicidade m_g de g na origem é caracterizada de modo análogo.

Enunciamos o resultado de Ephraim e Trotman da seguinte maneira.

Teorema 3.6 (Ephraim, [5]; Trotman, [34]) *Suponhamos que exista um germe de C^1-difeomorfismo $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $\varphi(V(f)) = V(g)$. Então as multiplicidades de f e g na origem são iguais.*

Prova: Dividiremos a prova em três passos. O primeiro deles consiste em estabelecer m_f em termos de g_* e φ_* utilizando as caracterizações de multiplicidade dadas e os resultados da primeira seção. No segundo passo, veremos como se relacionam os cones tangentes na origem de $V(f)$ e $V(g)$. No último passo, usamos os resultados sobre homotopia e o Teorema 3.4 para mostrar que $m_f \leq m_g$. A demonstração é concluída refazendo os passos com a inversa de φ.

1º **Passo**: Inicialmente podemos assumir que f e g são irredutíveis. Consideremos t, s e r como no Teorema 3.3 e B_t como no Teorema 3.2.

Escolhamos uma reta complexa L tal que $L \cap C(V(f)) = \{0\}$ e um disco aberto $D \subset L$ centrado na origem de raio $\delta < s$.

Sejam agora γ um gerador de $H_1(D - \{0\}; \mathbb{Z})$ e $i : D - \{0\} \to B_s - V(f)$ a inclusão. Pelo Teorema 3.3,

$$\varphi_* : H_1(B_s - V(f); \mathbb{Z}) \to H_1(B_r - V(g); \mathbb{Z})$$

é um isomorfismo. E pelo Teorema 3.2,

$$g_* : H_1(B_r - V(g); \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{C} - \{0\}; \mathbb{Z})$$

também é um isomorfismo. Portanto, utilizando a segunda interpretação de multiplicidade, $g_*(\varphi_*(i_*(\gamma))) \in H_1(\mathbb{C} - \{0\}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ representa m_f.

2º **Passo**: Uma vez que φ é de classe C^1, podemos escrever

$$\varphi(z) = A(z) + o(|z|),$$

onde $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é um isomorfismo linear real.

Seja agora $v \in C(V(f))$, $v \neq 0$. Então existe um arco $\rho : [0, \epsilon) \to V(f)$, com $\rho(0) = 0$ e tal que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\rho(\lambda)}{\lambda} = v \Rightarrow \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{|\rho(\lambda)|}{\lambda} = |v| \Rightarrow \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{o(|\rho(\lambda)|)}{\lambda} = 0,$$

uma vez que $\displaystyle\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{o(|\rho(\lambda)|)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{o(|\rho(\lambda)|)}{|\rho(\lambda)|} \cdot \frac{|\rho(\lambda)|}{\lambda} = 0 \cdot |v| = 0$. Portanto,

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\varphi(\rho(\lambda))}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{A(\rho(\lambda))}{\lambda}.$$

Agora observemos que

$$A(v) = A\left(\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\rho(\lambda)}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda \to 0^+} A\left(\frac{\rho(\lambda)}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{A(\rho(\lambda))}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\varphi(\rho(\lambda))}{\lambda} \in C(V(g)),$$

pois, desde que $\varphi(V(f)) = V(g)$, $\varphi \circ \rho : [0, \epsilon) \to V(g)$ é um arco com $(\varphi \circ \rho)(0) = 0$.

Logo, $A(C(V(f))) \subset C(V(g))$. Mas tendo em vista que φ é inversível, temos na verdade

$$A(C(V(f))) = C(V(g)).$$

Consequentemente, se $L \cap C(V(f)) = \{0\}$, então $A(L) \cap C(V(g)) = \{0\}$.

3º **Passo**: Sejam $m_g = k$ e h o polinômio homogêneo de menor grau na expansão de g como série de potência convergente. Temos o seguinte.

$$g(\varphi(z)) = h(A(z)) + \omega(z),$$

onde $\omega(z) = o(|z|^k)$.

Desde que $A(L) \cap C(V(g)) = \{0\}$, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|h(A(z))| \geq M|z|^k, \text{ para todo } z \in L.$$

Com efeito, supondo que não existe $M > 0$ com a propriedade acima, então para algum $z \in L - \{0\}$ (pois 0 satisfaz a desigualdade) e para todo $M > 0$ temos

$$|h(A(z))| < M|z|^k \Rightarrow \frac{|h(A(z))|}{|z|^k} < M \Rightarrow \frac{|h(A(z))|}{|z|^k} = 0 \Rightarrow |h(A(z))| = 0.$$

Logo, $A(z) \in C(V(g))$. Mas, $A(L) \cap C(V(g)) = \{0\}$. Portanto, tal constante M existe.

Se o raio de D é suficientemente pequeno, temos

$$|h(A(z))| > |\omega(z)|, \text{ para } z \in D - \{0\}.$$

De fato,

$$\omega(z) = o(|z|^k) \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} \frac{\omega(z)}{|z|^k} = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} \frac{|\omega(z)|}{|z|^k} = 0.$$

Logo, desde que $|h(A(z))| \geq M|z|^k$, se o raio de D é suficientemente pequeno,

$$\frac{|\omega(z)|}{|z|^k} < M \leq \frac{|h(A(z))|}{|z|^k} \Rightarrow |h(A(z))| > |\omega(z)|, \text{ para } z \in D - \{0\}.$$

Consideremos agora a aplicação $F : (D - \{0\}) \times [0, 1] \to (\mathbb{C} - \{0\})$ definida por

$$F(z, \lambda) = h(A(z)) + \lambda\omega(z).$$

F é uma homotopia de

$$h \circ A_{|L} \circ j : D - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\},$$

onde $j : D - \{0\} \to L - \{0\}$ é a inclusão, em

$$g \circ \varphi \circ i : D - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\}.$$

De fato, F está bem definida pois

$$F(z, \lambda) = 0 \Leftrightarrow h(A(z)) = -\lambda\omega(z) \Rightarrow |h(A(z))| = \lambda|\omega(z)|.$$

Se $|\omega(z)| \neq 0$, então

$$\lambda = \frac{|h(A(z))|}{|\omega(z)|} > 1 \notin [0,1].$$

Se $|\omega(z)| = 0$, então

$$|h(A(z))| = 0 \Rightarrow h(A(z)) = 0 \Rightarrow A(z) \in C(V(g)).$$

Porém, $z \in D - \{0\} \subset L - \{0\}$. Logo,

$$z \notin C(V(f)) \Rightarrow A(z) \notin C(V(g)).$$

Portanto, F não se anula em $(D - \{0\}) \times [0,1]$.

F é contínua, pois é composta por funções contínuas e

$$(h \circ A_{|L} \circ j)(z) = (h \circ A_{|L})(j(z)) = (h \circ A_{|L})(z) = h(A(z)) = F(z,0)$$
$$\text{e} \ \ (g \circ \varphi \circ i)(z) = (g \circ \varphi)(z) = h(A(z)) + \omega(z) = F(z,1).$$

Logo, pelo Teorema da Invariância Homotópica, temos

$$(h \circ A_{|L} \circ j)_* = (g \circ \varphi \circ i)_*.$$

Se γ é um gerador de $H_1(D - \{0\}; \mathbb{Z})$, então

$$h_*((A_{|L})_*(j_*(\gamma))) = g_*(\varphi_*(i_*(\gamma))) = \pm m_f, \ \text{pelo } 1^{\underline{o}} \text{ passo.}$$

A inclusão $j : D - \{0\} \to L - \{0\}$ é uma equivalência de homotopias. Para checar isso, identificamos L com $\mathbb{C}$ que, por sua vez, é identificado com $\mathbb{R}^2$. Agora basta refazer o Exemplo 3.2, adaptando-o para o raio de D.

Desta maneira, $j_* : H_1(D - \{0\}; \mathbb{Z}) \to H_1(L - \{0\}; \mathbb{Z})$ é um isomorfismo.

Além disso, $A_{|L} : L - \{0\} \to A(L) - \{0\}$ é um homeomorfismo. Portanto,

$$(A_{|L})_* : H_1(L - \{0\}; \mathbb{Z}) \to H_1(A(L) - \{0\}; \mathbb{Z})$$

também é um isomorfismo.

Logo, $\eta = (A_{|L})_*(j_*(\gamma))$ é um gerador de $H_1(A(L) - \{0\}; \mathbb{Z})$.

Uma vez que $A(L)$ é um subespaço vetorial real de dimensão real 2, pelo Teorema 3.4, $h_*(\eta) = k' \cdot \eta$, com $|k'| \leq k = m_g$.

Mas $h_*(\eta) = \pm m_f$, logo $m_f = |k'|$ (pois ao identificar $H_1(A(L) - \{0\}; \mathbb{Z})$ com $\mathbb{Z}$, concluímos que $\eta = \pm 1$). Portanto, $m_f \leq m_g$.

Visto que a inversa de φ também é de classe C^1, repetindo o que foi feito nos passos com φ^{-1}, obtemos $m_g \leq m_f$, concluindo a demonstração do teorema.

$\square$

Ephraim observa ainda que a única condição de diferenciabilidade utilizada na demonstração do teorema foi a existência das derivadas $D\varphi(0)$ e $D\varphi^{-1}(0)$.

3.3 Uma Generalização

Gau e Lipman em [10] provam o seguinte teorema que generaliza o resultado de Ephraim e Trotman para germes de conjuntos analíticos quaisquer.

Teorema 3.7 (Gau-Lipman, [10]) *Sejam $(X, 0)$ e $(Y, 0)$ germes de subconjuntos analíticos fechados em $\mathbb{C}^n$. Suponhamos que exista um germe de homeomorfismo $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $\varphi(X) = Y$ e φ e φ^{-1} (vistas agora como funções de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$) sejam diferenciáveis na origem. Então $m_{X,0} = m_{Y,0}$.*

A ideia da prova de Gau e Lipman é a seguinte. Inicialmente é mostrado que os germes $(X, 0)$ e $(Y, 0)$ podem ser considerados como irredutíveis. Os autores usam os cones tangentes $C(X, 0)$ de $(X, 0)$ e $C(Y, 0)$ de $(Y, 0)$ como elementos intermediários.

A derivada de φ na origem aplica $C(X, 0)$ em $C(Y, 0)$. Eles mostram também que ela aplica uma componente irredutível $C_i(X, 0)$ de $C(X, 0)$ em uma componente irredutível $C_i(Y, 0)$ de $C(Y, 0)$. Como a derivada é linear real, eles deduzem de um resultado de Ephraim (vide [6], Teorema 4.6) que $C_i(X, 0)$ e $C_i(Y, 0)$ possuem a mesma multiplicidade na origem.

A multiplicidade de X em 0, em geral, não é igual à multiplicidade de $C(X, 0)$ em 0, que é igual à soma das multiplicidades das componentes irredutíveis $C_i(X, 0)$. Entretanto ela é igual a uma combinação linear das multiplicidades dessas componentes, com coeficientes e_i definidos através de um conjunto $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$.

Sejam f_i os coeficientes correspondentes de $C(Y, 0)$, eles mostram então que $e_i = f_i$. Portanto, denotando as multiplicidades de $C_i(X, 0)$ e $C_i(Y, 0)$ na origem por $m(C_i(X, 0))$ e $m(C_i(Y, 0))$ respectivamente, eles concluem que

$$m_{X,0} = \sum e_i \cdot m(C_i(X, 0)) = \sum f_i \cdot m(C_i(Y, 0)) = m_{Y,0}.$$

Gau e Lipman observam ainda que, retirada a condição de diferenciabilidade do germe φ, o Teorema 3.7 pode ser falso. Eles verificam isso através do seguinte exemplo.

Exemplo 3.3 (Gau-Lipman, [10]) Seja $u : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ uma aplicação contínua tal que para $t \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} u(t^2, t^3) &= t, & |t| \leq 1 \\ u(t^2, t^3) &= t/|t|, & |t| > 1 \end{aligned}$$

Essa função u existe pelo Teorema da Extensão de Tietze[1].

Seja $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ a aplicação contínua dada por

$$\varphi(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - u(z_2 + z_1^2, z_3 + z_1^3), z_2 + z_1^2, z_3 + z_1^3).$$

Essa aplicação é na verdade um homeomorfismo. Sua inversa é a aplicação contínua $\psi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definida por

$$\psi(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + u(z_2, z_3), z_2 - (z_1 + u(z_2, z_3))^2, z_3 - (z_1 + u(z_2, z_3))^3).$$

Sejam agora $U = D^3$, onde D é o disco unitário aberto centrado na origem em $\mathbb{C}$, $X = U \cap \{z_2 = z_3 = 0\}$ e $Y = \{(0, z_1^2, z_1^3) : z_1 \in D\}$.

Se $(z_1, 0, 0) \in X$, então

$$\varphi(z_1, 0, 0) = (z_1 - u(z_1^2, z_1^3), z_1^2, z_1^3) = (0, z_1^2, z_1^3) \in Y.$$

Se $(0, z_1^2, z_1^3) \in Y$, então

$$\begin{aligned}\psi(0, z_1^2, z_1^3) &= (0 + u(z_1^2, z_1^3), z_1^2 - (0 + u(z_1^2, z_1^3))^2, z_1^3 - (0 + u(z_1^2, z_1^3))^3) \\ &= (u(z_1^2, z_1^3), z_1^2 - [u(z_1^2, z_1^3)]^2, z_1^3 - [u(z_1^2, z_1^3)]^3) \\ &= (z_1, z_1^2 - z_1^2, z_1^3 - z_1^3) = (z_1, 0, 0) \in X.\end{aligned}$$

Logo, $\varphi(X) = Y$ e também $\varphi(0) = 0$. Observemos também que os anéis locais de $(X, 0)$ e $(Y, 0)$ são respectivamente

$$R = \frac{\mathbb{C}\{z_1, z_2, z_3\}}{\langle z_2, z_3 \rangle} \approx \mathbb{C}\{z_1\} \;\text{ e }\; S = \frac{\mathbb{C}\{z_1, z_2, z_3\}}{\langle z_1, z_3^2 - z_2^3 \rangle} \approx \frac{\mathbb{C}\{z_2, z_3\}}{\langle z_3^2 - z_2^3 \rangle}.$$

Um elemento em $R/\mathbf{m}^d$ é constante em z_2 e z_3 e possui grau no máximo $d - 1$ em z_1. Logo, $R/\mathbf{m}^d$ é o espaço vetorial gerado pelos monômios $1, z_1, ..., z_1^{d-1}$. Portanto, $HSP_R(d) = d$.

O polinômio Hilbert-Samuel de S é o mesmo do Exemplo 2.2, a saber $HSP_S(d) = 2d - 1$.

Consequentemente, $m(X, 0) = 1! \cdot 1$ e $m(Y, 0) = 1! \cdot 2$, ou seja, as multiplicidades de X e Y na origem são diferentes.

[1]O Teorema da Extensão de Tietze diz que se X é um espaço topológico normal e $f : A \to \mathbb{R}^k$ é uma aplicação contínua de um subconjunto fechado A de X em $\mathbb{R}^k$ com a topologia usual, então existe uma extensão contínua de f, $F : X \to \mathbb{R}^k$.

Capítulo 4

Invariância Bilipschitz da Multiplicidade

Sejam $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe reduzido de uma função holomorfa na origem e $V(f)$ seu germe de hipersuperfície. Vimos no Capítulo 2 que Risler e Trotman mostraram em [29] que a multiplicidade de $V(f)$ na origem era dada por

$$\lambda_0(f) = inf\{\delta \mid dist(z, V(f))^\delta \leq K|f(z)|, \ para\ algum\ \ K > 0\ e\ \forall z\ próximo\ de\ 0\}.$$

Utilizando essa caracterização de multiplicidade, eles resolveram o problema de Zariski para uma classe de germes de homeomorfismos que incluem os germes de homeomorfismos *bilipschitz*. O objetivo central deste capítulo é estudar esse resultado (Proposição 4.1).

Na primeira seção, serão apresentadas as condições para a invariância topológica da multiplicidade obtidas em [29]. Em seguida será vista a demonstração da Proposição 4.1, que é essencialmente um corolário do Teorema 4.1.

Destacamos também neste capítulo um resultado devido a Comte, Milman e Trotman em [4] que dá outras condições para a invariância topológica da multiplicidade. Comentaremos as diferenças entre essas condições e as anteriores no final da Seção 4.3.

Para concluir esse capítulo, na última seção enunciaremos um resultado de Comte de [3] sobre invariância *bilipschitz* para germes de conjuntos analíticos de codimensão mais alta.

4.1 Condições para Invariância Topológica da Multiplicidade

Sejam $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes reduzidos de funções holomorfas na origem e $V(f)$, $V(g)$ seus correspondentes germes de hipersuperfícies. Suponhamos que existam um germe de homeomorfismo $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ e vizinhanças abertas U e V de 0 em $\mathbb{C}^n$ tais que

(1) $\varphi(U \cap V(f)) = V \cap V(g)$;

(2) $|g/(f \circ \varphi^{-1})|$ é limitada acima (respectivamente abaixo) por uma constante C (respectivamente C_1) no complementar de $V(g)$ em V;

(3) $|z-w|/|\varphi(z)-\varphi(w)|$ é limitada acima (respectivamente abaixo) por uma constante L (respectivamente L_1) para $z \in U - V(f), w \in U \cap V(f)$.

Um exemplo de um germe de homeomorfismo satisfazendo essas condições será visto na próxima seção. Por hora, veremos o resultado que os autores de [29] obtiveram.

Teorema 4.1 (Risler-Trotman, [29]) *Admitindo as hipóteses acima, temos* $\lambda_0(f) = \lambda_0(g)$.

Prova: Seja $\lambda_0(g) = \lambda$. Primeiramente será mostrado que $\lambda_0(f) \leq \lambda$.

Consideremos então $\delta > \lambda$ e $z \in U - V(f)$. Logo,

$$dist(z, V(f)) \leq |z-w|, \ \forall w \in U \cap V(f).$$

Pela condição (3),

$$dist(z, V(f)) \leq L|\varphi(z) - \varphi(w)|, \ \forall w \in U \cap V(f).$$

Como $\forall w' \in V \cap V(g)$, $w' = \varphi(w)$, com $w \in U \cap V(f)$, vemos que

$$dist(z, V(f)) \leq L|\varphi(z) - w'|, \ \forall w' \in V \cap V(g).$$

E uma vez que $dist(\varphi(z), V(g)) = min\{|\varphi(z) - w'| : w' \in V \cap V(g)\}$, obtemos

$$dist(z, V(f)) \leq Ldist(\varphi(z), V(g)).$$

Deste modo,

$$dist(z, V(f)) \leq LK^{1/\delta}|g(\varphi(z))|^{1/\delta}, \text{ para algum } K > 0.$$

Pela condição (2), temos

$$dist(z, V(f)) \leq LK^{1/\delta}C^{1/\delta}|(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)(z)|^{1/\delta} = L(KC)^{1/\delta}|f(z)|^{1/\delta}.$$

Então $dist(z, V(f))^{\delta} \leq K_1|f(z)|$, para todo z próximo de 0, onde $K_1 = L^{\delta}KC$. Portanto, $\lambda_0(f) \leq \delta$ e, pela definição de ínfimo de um conjunto, $\lambda_0(f) \leq \lambda$.

Seja agora $\lambda = \lambda_0(f)$. Para a desigualdade $\lambda_0(g) \leq \lambda$, observemos que

(1) $\varphi(U \cap V(f)) = V \cap V(g) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(V \cap V(g)) = U \cap V(f)$;

(2) Se $z = \varphi^{-1}(z')$, com $z' \in V \cap V(g)$, então $z \in U \cap V(f)$ e

$$C_1 \leq \left|\frac{g(z')}{(f \circ \varphi^{-1})(z')}\right| \leq C,\ \forall z' \in V - V(g) \Leftrightarrow$$

$$C_1 \leq \left|\frac{(g \circ \varphi)(z)}{f(z)}\right| \leq C,\ \forall z \in U - V(f) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{C} \leq \left|\frac{f(z)}{(g \circ \varphi)(z)}\right| \leq \frac{1}{C_1},\ \forall z \in U - V(f).$$

(3) Se $w = \varphi^{-1}(w')$, com $w' \in V \cap V(g)$, então $w \in U \cap V(f)$ e

$$L_1 \leq \frac{|z - w|}{|\varphi(z) - \varphi(w)|} \leq L,\ z \in U - V(f),\ w \in U \cap V(f) \Leftrightarrow$$

$$L_1 \leq \frac{|\varphi^{-1}(z') - \varphi^{-1}(w')|}{|z' - w'|} \leq L,\ z' \in V - V(g),\ w' \in V \cap V(g) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{L} \leq \frac{|z' - w'|}{|\varphi^{-1}(z') - \varphi^{-1}(w')|} \leq \frac{1}{L_1},\ z' \in V - V(g),\ w' \in V \cap V(g).$$

É suficiente agora repetir o que foi feito para obter a primeira desigualdade.

□

Como consequência da caracterização de multiplicidade feita por Risler e Trotman, temos.

Corolário 4.1 *Com as mesmas hipóteses anteriores, as multiplicidades de $V(f)$ e $V(g)$ na origem são iguais.*

4.2 Invariância Bilipschitz da Multiplicidade

Veremos nessa seção que a multiplicidade de uma hipersuperfície complexa é invariante por um homeomorfismo *bilipschitz*. Uma aplicação f entre dois espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) se diz lipschitziana se existe uma constante $k > 0$ tal que

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq k \cdot d_X(x_1, x_2), \text{ para quaisquer } x_1, x_2 \in X.$$

Em tempo, apresentamos a seguir o conceito de homeomorfismo *bilipschitz*.

Definição 4.1 *Um homeomorfismo $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é chamado de homeomorfismo bilipschitz quando φ e φ^{-1} são aplicações lipschitzianas.*

Exemplo 4.1 Seja $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ a função definida por

$$\varphi(z) = (a_1 z_1, ..., a_n z_n),$$

onde $a_i \in \mathbb{C}$ e $a_i \neq 0$, para todo $i = 1, ..., n$. Observemos que φ é linear, contínua e φ possui inversa

$$\varphi^{-1}(w) = \left(\frac{w_1}{a_1}, ..., \frac{w_n}{a_n}\right).$$

Logo, φ é um homeomorfismo. Consideremos $k_1 = max\{|a_i| : i = 1, ..., n\}$. Então, para todo $z \in \mathbb{C}^n$, temos

$$|\varphi(z)| = |(a_1 z_1, ..., a_n z_n)| = \sqrt{|a_1|^2|z_1|^2 + ... + |a_n|^2|z_n|^2} \leq \sqrt{k_1^2|z_1|^2 + ... + k_1^2|z_n|^2}$$

$$= k_1\sqrt{|z_1|^2 + ... + |z_n|^2} = k_1|z|.$$

Portanto, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}^n$

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| = |\varphi(z - w)| \leq k_1|z - w|.$$

Escrevendo agora $k_2 = max\{|a_i|^{-1} : i = 1, ..., n\}$, é possível verificar também que

$$|\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(w)| \leq k_2|z - w|, \text{ para quaisquer } z, w \in \mathbb{C}^n.$$

Logo, φ é um homeomorfismo *bilipschitz*.

Analogamente temos a Definição 4.1 para germes de homeomorfismos. Outro conceito importante é o seguinte.

Definição 4.2 *Sejam* $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *germes reduzidos de funções holomorfas na origem. Dizemos que* f *e* g *são topologicamente* $\mathcal{R}$-$\mathcal{L}$*-equivalentes por homeomorfismos bilipschitz se existem germes de homeomorfismos bilipschitz* $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *e* $\phi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *tais que* $f = \phi \circ g \circ \varphi$.

O resultado obtido por Risler e Trotman sobre invariância *bilipschitz* é a proposição enunciada a seguir. Em síntese, um homeomorfismo *bilipschitz* é um exemplo de um homeomorfismo que satisfaz as três condições da seção anterior.

Proposição 4.1 (Risler-Trotman, [29]) *Se dois germes reduzidos de funções holomorfas* $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *são topologicamente* $\mathcal{R}$-$\mathcal{L}$*-equivalentes por homeomorfismos bilipschitz, então suas multiplicidades são iguais.*

Prova: Sejam $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ e $\phi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes de homeomorfismos *bilipschitz* tais que $f = \phi \circ g \circ \varphi$. Consideremos as vizinhanças abertas U e $V = \varphi(U)$ de 0 em $\mathbb{C}^n$.

Mostraremos que o germe φ satisfaz as três condições para invariância topológica da multiplicidade.

(1) Seja $z \in U \cap V(f)$, então $f(z) = 0$. Logo,

$$(\phi \circ g \circ \varphi)(z) = 0 \Rightarrow (\phi \circ g)(\varphi(z)) = 0 \Rightarrow \varphi(z) \in (\phi \circ g)^{-1}(0).$$

Mas, $(\phi \circ g)^{-1}(0) = V(g)$, pois $(\phi \circ g)^{-1}(0) = \{w \in \mathbb{C}^n : (\phi \circ g)(w) = 0\}$ e

$$(\phi \circ g)(w) = 0 \Leftrightarrow \phi(g(w)) = 0 \Leftrightarrow g(w) = 0 \Leftrightarrow w \in V(g).$$

Portanto, $\varphi(z) \in V(g)$ e obtemos a inclusão $\varphi(U \cap V(f)) \subset V \cap V(g)$.
Agora usando ϕ^{-1} e φ^{-1}, verificamos a outra inclusão.
Logo, $\varphi(U \cap V(f)) = V \cap V(g)$.

(2) Sejam l_1 e l_2 as constantes de lipschitz de ϕ e ϕ^{-1} respectivamente. Então,

$$(f \circ \varphi^{-1})(w) = (\phi \circ g)(w),\ \forall w \in V - V(g) \Rightarrow |\phi(g(w)) - \phi(g(0))| \leq l_1 |g(w)|.$$

Mas como $|\phi(g(w)) - \phi(g(0))| = |\phi(g(w))| = |(f \circ \varphi^{-1})(w)|$, obtemos

$$\left| \frac{g(w)}{(f \circ \varphi^{-1})(w)} \right| \geq 1/l_1 = C_1,\ \forall w \in V - V(g).$$

Também vale que

$$(\phi^{-1} \circ f)(z) = (g \circ \varphi)(z), \forall z \in U - V(f) \Rightarrow |\phi^{-1}(f(z)) - \phi^{-1}(f(0))| \leq l_2|f(z)|.$$

E uma vez que $|\phi^{-1}(f(z)) - \phi^{-1}(f(0))| = |(g \circ \varphi)(z)|$, temos

$$|(g \circ \varphi)(z)| \leq l_2|f(z)|, \forall z \in U - V(f).$$

Agora se $z = \varphi^{-1}(w)$, $w \in V - V(g)$, então

$$|(g \circ \varphi \circ \varphi^{-1})(w)| \leq |(f \circ \varphi^{-1})(w)|$$

o que implica em

$$\left|\frac{g(w)}{(f \circ \varphi^{-1})(w)}\right| \leq l_2 = C, \forall w \in V - V(g).$$

Portanto, $C_1 \leq \left|\dfrac{g(z)}{(f \circ \varphi^{-1})(z)}\right| \leq C$ em $V - V(g)$.

(3) Sejam k_1 e k_2 as constantes de lipschitz de φ e φ^{-1} respectivamente. Consideremos $z \in U - V(f)$ e $w \in U \cap V(f)$.

Como $|\varphi(z) - \varphi(w)| \leq k_1|z - w|$, temos o seguinte

$$\frac{|z - w|}{|\varphi(z) - \varphi(w)|} \geq 1/k_1 = L_1, \; z \in U - V(f), w \in U \cap V(f).$$

Se $z = \varphi^{-1}(z'),\ z' \in V - V(g)$ e $w = \varphi^{-1}(w'),\ w' \in V \cap V(g)$, então,

$$|z - w| = |\varphi^{-1}(z') - \varphi^{-1}(w')| \leq k_2|z' - w'| = k_2|\varphi(z) - \varphi(w)|,$$

o que implica em

$$\frac{|z - w|}{|\varphi(z) - \varphi(w)|} \leq k_2 = L, \; z \in U - V(f) \text{ e } w \in U \cap V(f).$$

Portanto, $L_1 \leq \dfrac{|z - w|}{|\varphi(z) - \varphi(w)|} \leq L,\ z \in U - V(f),\ w \in U \cap V(f)$.

Logo, utilizando o teorema da seção anterior, concluímos que $\lambda_0(f) = \lambda_0(g)$. Ou seja, as multiplicidades de $V(f)$ e $V(g)$ na origem são iguais.

$\square$

4.3 O Teorema de Comte, Milman e Trotman

Saeki estabeleceu em [30] que se $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ são germes de funções holomorfas topologicamente V-equivalentes, existe um germe de homeomorfismo $\varphi_1 : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que

$$\varphi_1(V(f)) = V(g) \text{ e } |\varphi_1(z)| = |z|, \text{ para todo } z \text{ próximo de } 0.$$

Também é verdade que se f e g são topologicamente V-equivalentes, existe um germe de homeomorfismo $\varphi_2 : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que

$$\varphi_2(V(f)) = V(g) \text{ e } |(g \circ \varphi_2)(z)| = |f(z)|, \text{ para todo } z \text{ próximo de } 0.$$

Tal fato é devido a King [13] quando $n \neq 3$ e a Perron [27] quando $n = 3$.

Comte, Milman e Trotman em [4] combinam esses dois resultados para obter uma condição para invariância topológica da multiplicidade. Como vimos no Capítulo 2, a multiplicidade de f na origem é descrita em [4] como sendo o número

$$\delta(f) = sup \,\{\delta : \frac{|f(z)|}{|z|^{\delta}} \textit{ é limitada próximo de } 0\}.$$

Sejam m_f e m_g as multiplicidades de f e g na origem respectivamente. A partir da caracterização acima, verifica-se o seguinte resultado.

Teorema 4.2 (Comte-Milman-Trotman, [4]) *Se existe um germe de homeomorfismo $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ com as propriedades de φ_1 e φ_2, então $m_f = m_g$. Na verdade, é suficiente que existam constantes positivas A, B, C e D tais que:*

(1) $A|z| \leq |\varphi(z)| \leq B|z|$, para todo z próximo de 0;

(2) $C|f(z)| \leq |(g \circ \varphi)(z)| \leq D|f(z)|$, para todo z próximo de 0.

Prova: Verifiquemos que $\delta(g) \leq \delta(f)$.

Sejam $\delta(g) = \delta$, $z \neq 0$ em $\mathbb{C}^n$ e $z' = \varphi(z) \neq 0$. Logo o quociente

$$\frac{|f(z)|}{|z|^{\delta}} = \frac{|f(z)|}{|\varphi(z)|^{\delta}} \frac{|\varphi(z)|^{\delta}}{|z|^{\delta}} \leq \frac{|(g \circ \varphi)(z)|}{C} \frac{B^{\delta}}{|\varphi(z)|^{\delta}} = \frac{|g(z')|}{|z'|^{\delta}} \frac{B^{\delta}}{C}$$

é limitado próximo de 0.

Assim, usando a definição de $\delta(f)$, concluímos que $\delta \leq \delta(f)$, ou seja, $\delta(g) \leq \delta(f)$.

Analogamente, mostremos que $\delta(f) \leq \delta(g)$ colocando $\delta(f) = \delta$ e $z' = \varphi(z)$ em $\mathbb{C}^n$ com $z \neq 0$. Então o quociente

$$\frac{|g(z')|}{|z'|^\delta} = \frac{|(g\circ\varphi)(z)|}{|\varphi(z)|^\delta} = \frac{|(g\circ\varphi)(z)|}{|z|^\delta}\frac{|z|^\delta}{|\varphi(z)|^\delta} \leq \frac{|f(z)|}{|z|^\delta}\frac{D}{A^\delta}$$

é limitado próximo de 0.

Logo, $\delta(f) \leq \delta(g)$. Portanto, pela caracterização da multiplicidade dada em [4], concluímos que $m_f = m_g$.

□

Risler e Trotman ressaltam que, devido aos resultados de King e Perron, podemos considerar na Conjectura de Zariski germes f e g topologicamente $\mathcal{R}$-equivalentes. Se φ é um germe de homeomorfismo tal que $f = g\circ\varphi$, então φ satisfaz as duas primeiras condições dadas na Seção 4.1.

A primeira é satisfeita naturalmente. Para checar a segunda condição, escrevamos

$$g\circ\varphi = \phi\circ g\circ\varphi,$$

onde ϕ é o germe identidade (homeomorfismo *bilipschitz*).

Na demonstração da Proposição 4.1 o fato de φ ser *bilipschitz* não foi usado para verificar a segunda condição. Apenas foi necessário assumir que ϕ era um germe de um homeomorfismo bilipschitz.

Portanto, para obter a invariância topológica da multiplicidade resta saber se existem constantes $L, L_1 > 0$ tais que φ satisfaça

$$L_1 \leq \frac{|z-w|}{|\varphi(z)-\varphi(w)|} \leq L,$$

para quaisquer z próximo de 0 e $w \in V(f)$. Equivalentemente, a condição se traduz na existência de constantes positivas A e B tais que

$$A|z-w| \leq |\varphi(z)-\varphi(w)| \leq B|z-w|$$

para quaisquer z próximo de 0 e $w \in V(f)$.

Consequentemente, teremos uma resposta afirmativa à Conjectura de Zariski se equivalência topológica implicar na existência de um germe de homeomorfismo φ e constantes positivas A e B satisfazendo a condição acima.

Com o objetivo de melhorar esse argumento, Comte, Milman e Trotman enfraquecem essa hipótese com a primeira condição do Teorema 4.2 (eles consideram $w = 0$).

Pelo resultado de Saeki, a existência de um germe de homeomorfismo satisfazendo essa condição é garantida. É nesta direção que eles caminham em [4], pois existe um germe de homeomorfismo satisfazendo a segunda hipótese do teorema, restando saber se tal germe é o mesmo que satisfaz a primeira.

4.4 Invariância Bilipschitz para Germes de Codimensão Mais Alta

Concluímos este capítulo com o resultado obtido por Comte em [3].

Teorema 4.3 (Comte, [3]) *Sejam* $(X, 0)$ *e* $(Y, 0)$ *germes de subconjuntos analíticos fechados d-dimensionais em* $\mathbb{C}^n$*. Suponhamos que exista um germe de homeomorfismo* $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *tal que* $\varphi(X) = Y$ *e* φ *e* φ^{-1} *sejam aplicações lipschitzianas com constantes de lipschitz* A *e* B*, respectivamente, satisfazendo*

$$1 \leq AB \leq \left(1 + \frac{1}{sup(m_{X,0}, m_{Y,0})}\right)^{1/2d}.$$

Então $m_{X,0} = m_{Y,0}$.

Na verdade, Comte obtém um resultado mais geral. Ele não assume que φ está definida em uma vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^n$, mas apenas em uma vizinhança de 0 em X (vide [3], Teorema 1 e Observação 1).

Comte também prova um resultado de equimultiplicidade para deformações bilipschitz de germes de conjuntos analíticos (Teorema 2 de [3]).

Capítulo 5

Multiplicidade e Satélites de Rouché

Sejam $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes reduzidos de funções holomorfas na origem. Eyral e Gasparim exibem em [9] condições necessárias e suficientes para que f e g tenham a mesma multiplicidade na origem. Para isso, eles introduzem o conceito de satélite de Rouché.

No Teorema 5.2, é dada uma condição suficiente para f e g terem a mesma multiplicidade na origem. Será utilizado na demonstração do resultado o Teorema de Rouché. Este teorema é válido para funções analíticas de uma varável complexa definidas em um subconjunto aberto U de $\mathbb{C}$. Enunciamos o Teorema de Rouché a seguir e sua prova pode ser encontrada com detalhes em [15].

Teorema 5.1 (Teorema de Rouché) *Seja γ um caminho fechado homólogo a 0 em U[1] e suponhamos que γ tenha interior. Sejam f, g funções analíticas em U e*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

para todo z em γ. Então f e g têm o mesmo número de zeros no interior de γ.

O Teorema 5.3 exibe uma condição necessária para as multiplicidades de f e g na origem serem as mesmas. Essencialmente, a prova usa o Teorema da Preparação de Weierstrass.

Eyral e Gasparim concluem [9] aplicando esses resultados à Conjectura de Zariski e obtendo uma resposta afirmativa à questão para uma classe especial de homeomorfismos “pequenos”(Teoremas 5.5 e 5.6).

[1] Um caminho fechado γ em U é homólogo a 0 se $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-a} = 0$, para todo $a \in \mathbb{C} - U$.

5.1 Satélites de Rouché

Consideremos $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes reduzidos de funções holomorfas na origem. Sejam $V(f)$ e $V(g)$ os correspondentes germes de hipersuperfícies em $\mathbb{C}^n$ e m_f, m_g as multiplicidades na origem de $V(f)$ e $V(g)$ respectivamente. Como f é um germe reduzido, m_f é o menor grau na expansão de f em série de potências convergente numa vizinhança centrada na origem (o mesmo ocorre com g). Sejam ainda $C(V(f))$ e $C(V(g))$ os respectivos cones tangentes na origem de $V(f)$ e $V(g)$.

Consideremos uma reta complexa L passando pela origem em $\mathbb{C}^n$ não contida em $C(V(f)) \cup C(V(g))$. Então 0 é um ponto isolado de $L \cap V(f)$ e $L \cap V(g)$ e m_f é a ordem anulamento de $f_{|L}$ na origem e m_g é a ordem de $g_{|L}$.

Uma vez que a origem é um ponto isolado de $L \cap V(f)$ e $L \cap V(g)$, existe um disco fechado $D \subseteq L$ centrado na origem tal que, para qualquer disco fechado $D' \subseteq D$ centrado na origem, $D' \cap (V(f) \cup V(g)) = \{0\}$. Tal disco D será chamado de disco bom para f e para g.

Feitas essas observações, passaremos agora à definição de satélite de Rouché.

Definição 5.1 (Eyral-Gasparim, [9]) *Dizemos que g é um satélite de Rouché de f se existe um disco bom D para f e para g tal que f e g satisfazem uma desigualdade de Rouché com respeito à fronteira ∂D de D, ou seja,*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \ \forall \ z \in \partial D.$$

Exemplo 5.1 Consideremos os germes $f, g : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ definidos por

$$f(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^3 + z_3^3 + z_1^3 + z_2^4 \quad \text{e} \quad g(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^3 + z_3^3 + z_1^4 + z_2^6$$

Então g é um satélite de Rouché de f. De fato, seja $L = \{(z_1, 0, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 = z_3\}$. Logo,

$$V(f) \cap L = \{(z_1, 0, z_1) \in \mathbb{C}^3 : f(z_1, 0, z_1) = 0\} = \left\{(0,0,0), \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$\text{e} \quad V(g) \cap L = \{(z_1, 0, z_1) \in \mathbb{C}^3 : g(z_1, 0, z_1) = 0\} = \{(0,0,0), (a,0,a), (\bar{a},0,\bar{a})\},$$

onde $a = (-1 - i\sqrt{3})/2$ e $\bar{a}$ é o conjugado complexo de a.

Conseguiremos um disco bom para f e para g construindo um disco fechado centrado em 0 com um raio menor que as normas de $(-1/2, 0, -1/2)$, $(a, 0, a)$ e $(\bar{a}, 0, \bar{a})$. Deste modo, visto que

$$\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \text{ e } |a| = |\bar{a}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1,$$

o disco fechado $D = \{(z_1, 0, z_1) \in L : |z_1| \leq 1/4\}$ de raio $\sqrt{2}/4$ será um disco bom para f e para g.

Agora para todo $z \in \partial D$, $z = (z_1, 0, z_1)$ e $|z_1| = 1/4$. Logo,

$$|f(z) - g(z)| = |z_1^2 + 2z_1^3 - z_1^2 - z_1^3 - z_1^4| = |z_1^3 - z_1^4| = |z_1|^3|1 - z_1|$$

$$\leq |z_1|^3(|1| + |z_1|) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4^4}.$$

Por outro lado,

$$|f(z)| = |z_1^2 + 2z_1^3| = |z_1|^2|1 + 2z_1| \geq |z_1|^2(|1| - 2|z_1|) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{4^3}.$$

Portanto, para todo $z \in \partial D$, temos

$$|f(z) - g(z)| \leq \frac{5}{4^4} < \frac{2}{4^3} \leq |f(z)|.$$

Isso mostra que g é um satélite de Rouché de f.

Também é verdade que f é um satélite de Rouché de g. De fato, para todo $z \in \partial D$,

$$|g(z)| = |z_1^2 + z_1^3 + z_1^4| = |z_1|^2|1 + z_1 + z_1^2| \geq |z_1|^2(|1| - |z_1 + z_1^2|)$$

$$\geq |z_1|^2(1 - |z_1||1 + z_1|) \geq |z_1|^2(1 - |z_1|(|1| + |z_1|))$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{4^2}\left(1 - \frac{5}{4^2}\right) = \frac{11}{4^4}$$

Consequentemente, para todo $z \in \partial D$,

$$|f(z) - g(z)| \leq \frac{5}{4^4} < \frac{11}{4^4} \leq |g(z)|.$$

Em geral, um germe g pode ser um satélite de Rouché de um germe f sem f ser um satélite de Rouché de g. Como exemplo, consideremos $g = f/2$.

Por um lado,

$$|f(z) - g(z)| = |f(z) - f(z)/2| = |f(z)|/2 < |f(z)|,$$

para todo z na fronteira de qualquer disco bom para f e para g.

Mas por outro,

$$|f(z) - g(z)| = |f(z)|/2 = |g(z)|,$$

para todo z na fronteira de qualquer disco bom para f e para g.

Cabe ainda ressaltar que as multiplicidades de $V(f)$ e $V(g)$ na origem são as mesmas. Isso é exatamente o que nos diz o próximo teorema.

Teorema 5.2 (Eyral-Gasparim, [9]) *Se g é um satélite de Rouché de f, então $m_g = m_f$.*

Prova: Seja L uma reta complexa passando pela origem em $\mathbb{C}^n$ não contida em $C(V(f)) \cup C(V(g))$.

Consideremos $D \subseteq L$ um disco bom para f e para g tal que

$$|f_{|L}(z) - g_{|L}(z)| < |f_{|L}(z)|, \forall\ z \in \partial D.$$

Podemos supor que a reta L seja o eixo z_n (se necessário, fazemos uma mudança de coordenadas), ou seja, essa reta contém os pontos da forma $(0, ..., z_n)$, com $z_n \in \mathbb{C}$. Assim $f_{|L}$ e $g_{|L}$ são funções de uma variável complexa e a fronteira ∂D de D é um caminho fechado homólogo a 0.

Então pelo teorema de Rouché, $f_{|L}$ e $g_{|L}$ têm o mesmo número de zeros, contados com multiplicidade, no interior de D.

Logo, uma vez que $f_{|L}$ e $g_{|L}$ se anulam apenas na origem em D, suas ordens são iguais.

Em termos de multiplicidade, $m_f = m_g$.

□

A recíproca do teorema acima não é válida. Para ilustrar essa situação, consideremos dois germes f e g tais que $g = -f$. As multiplicidades de $V(f)$ e $V(g)$ na origem são as mesmas. Contudo,

$$|f(z) - g(z)| = |f(z) + f(z)| = 2|f(z)|,$$

para todo z na fronteira de qualquer disco bom para f e para g.

E também,

$$|f(z) - g(z)| = 2|f(z)| = 2| - g(z)| = 2|g(z)|,$$

para todo z na fronteira de qualquer disco bom para f e para g.

Portanto, f não é um satélite de Rouché de g nem g é um satélite de Rouché de f.

Esse problema é contornado com o seguinte teorema.

Teorema 5.3 (Eyral-Gasparim, [9]) *Se $m_f = m_g$, então existem germes reduzidos f' e g' analiticamente equivalentes a f e g respectivamente tais que g' é um satélite de Rouché de f'.*

Prova: Façamos $m = m_f = m_g$. Seja L uma reta complexa passando pela origem em $\mathbb{C}^n$. Suponhamos que L seja o eixo z_n. Fazendo uma mudança de coordenadas se necessária, podemos assumir que L não está contida nos cones tangentes $C(V(f))$, $C(V(g))$. Logo $f(0, ..., z_n) \neq 0$ e $g(0, ..., z_n) \neq 0$ para todo z numa vizinhança de 0.

Pelo Teorema da Preparação de Weierstrass, para z próximo de 0, o germe f pode ser representado como um produto $f(z) = f'(z)f''(z)$, onde f'' é uma unidade em $\mathcal{O}_n$ e f' é um polinômio de Weierstrass de grau m, ou seja, f' é da forma

$$f'(z_1, ..., z_n) = z_n^m + z_n^{m-1} f_1(z_1, ..., z_{n-1}) + ... + f_m(z_1, ..., z_{n-1}),$$

com $f_i \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_{n-1}\}$, $f_i(0) = 0$ e a ordem de f_i em 0 é $\geq i$, para $1 \leq i \leq m$.

De modo similar, $g(z) = g'(z)g''(z)$, onde g'' é uma unidade em $\mathcal{O}_n$ e g' é um polinômio de Weierstrass de grau m, ou seja, g' é da forma

$$g'(z_1, ..., z_n) = z_n^m + z_n^{m-1} g_1(z_1, ..., z_{n-1}) + ... + g_m(z_1, ..., z_{n-1}),$$

com $g_i \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_{n-1}\}$, $g_i(0) = 0$ e a ordem de g_i em 0 é $\geq i$, para $1 \leq i \leq m$.

Notemos que f' e g' são irredutíveis, logo são reduzidos. E como $V(f) = V(f')$ e $V(g) = V(g')$, f' e g' são analiticamente equivalentes a f e g respectivamente, através do isomorfismo analítico identidade.

Uma vez que $m_f = m_g = m$, temos

$$f'_{|L}(z) = g'_{|L}(z) = z_n^m.$$

Então para qualquer disco fechado $D \subseteq L$ centrado na origem (em particular para um disco bom para f' e para g'),

$$|f'(z)| = r^m, \ \forall z \in \partial D,$$

onde r é o raio de D.

Assim concluímos que

$$|f'(z) - g'(z)| = 0 < r^m = |f'(z)| \neq 0, \ \ \forall z \in \partial D.$$

Portanto, g' é um satélite de Rouché de f'.

$\square$

Vimos na Seção 2.7 do Capítulo 2 que a multiplicidade é um invariante analítico, deste modo os autores de [9] sumarizam os dois teoremas anteriores com o seguinte resultado.

Teorema 5.4 (Eyral-Gasparim, [9]) *As multiplicidades m_f e m_g são as mesmas se, e somente se, existem germes reduzidos f' e g' analiticamente equivalentes a f e g respectivamente tais que g' é satélite de Rouché de f'.*

5.2 Aplicação à Conjectura de Zariski

Nesta seção, veremos que se dois germes $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ são topologicamente $\mathcal{R}$-equivalentes via um homeomorfismo suficientemente "pequeno", então f e g têm a mesma multiplicidade na origem. Essa ideia de homeomorfismo suficientemente "pequeno" será melhor entendida com a Definição 5.2.

Suponhamos então que f e g sejam topologicamente $\mathcal{R}$-equivalentes. Então existem vizinhanças abertas da origem $U, U' \subset \mathbb{C}^n$, representantes $f : U \to \mathbb{C}$ e $g : U' \subseteq U \to \mathbb{C}$ dos germes f e g respectivamente e um homeomorfismo $\varphi : U' \to \varphi(U') \subseteq U$ tais que $\varphi(0) = 0$ e $g = f \circ \varphi$.

Como f é uniformemente contínua em uma bola compacta $B_r \subseteq U'$ de raio r suficientemente pequeno centrada em 0, existe $\eta > 0$ tal que para quaisquer $z, w \in B_r$,

$$|z - w| < \eta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < inf\{|f(u)| : u \in \partial D_\xi\},$$

onde D_ξ é um disco bom para f e para $g = f \circ \varphi$ com raio $\xi \leq r/2$.

Isso motiva a próxima definição.

Definição 5.2 (Eyral-Gasparim, [9]) *Dizemos que um homeomorfismo $\varphi : U' \to \varphi(U') \subseteq U$ é f-small se existe uma tripla (r, ξ, η) como acima tal que para todo $z \in B_r$,*

$$|z - \varphi(z)| < inf\{\eta, \xi\}.$$

Exemplo 5.2 Sejam $f, g : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes de funções holomorfas na origem. Considerando U e U' vizinhanças abertas de 0, suponhamos que os representantes $f : U \to \mathbb{C}$ de f e $g : U' \subset U \to \mathbb{C}$ de g sejam respectivamente

$$f(z_1, z_2) = (z_1 + \varepsilon z_2)(\varepsilon z_1 + z_2) \text{ e } \mathrm{g}(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2,$$

onde $0 < \varepsilon < 1$. Seja agora o homeomorfismo $\varphi : U' \to \varphi(U') \subset U$ dado por $\varphi(z_1, z_2) = (z_1 + \varepsilon z_2, \varepsilon z_1 + z_2)$. Então,

$$(g \circ \varphi)(z_1, z_2) = g(\varphi(z_1, z_2)) = g(z_1 + \varepsilon z_2, \varepsilon z_1 + z_2) = (z_1 + \varepsilon z_2) \cdot (\varepsilon z_1 + z_2) = f(z_1, z_2).$$

Portanto, os germes f e g são topologicamente $\mathcal{R}$-equivalentes.

Mostraremos que φ é f-*small*. Inicialmente encontraremos uma tripla (n, ξ, η) satisfazendo as condições acima.

Seja $r > 0$ tal que a bola compacta B_r centrada na origem esteja inteiramente contida em U'.

Se $L = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 = z_2\}$, então $L \cap (V(f) \cup V(g)) = \{0\}$.

Logo, considerando $\xi = r/2$, o disco fechado $D_\xi \subset L$ centrado na origem é um disco bom para f e para g.

Para $(z_1, z_1) \in \partial D_\xi$, temos

$$|f(z_1, z_1)| = |(z_1 + \varepsilon z_1)(\varepsilon z_1 + z_1)| = |z_1|^2 |(1+\varepsilon)(\varepsilon + 1)| = \frac{\xi^2}{2}(1+\varepsilon)^2.$$

Escrevamos

$$\alpha(\varepsilon) = inf\{|f(z_1, z_1)| : (z_1, z_1) \in \partial D_\xi\} = \frac{\xi^2}{2}(1+\varepsilon)^2,$$

então como f é uniformemente contínua em B_r, existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tal que para (z_1, z_1), $(z_1', z_2') \in B_r$

$$|(z_1, z_2) - (z_1', z_2')| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(z_1, z_2) - f(z_1', z_2')| < \alpha(\varepsilon).$$

Então nossa tripla será $(r, r/2, \eta(\varepsilon))$.

Para todo $(z_1, z_2) \in B_r$, temos

$$|(z_1, z_2) - \varphi(z_1, z_2)| = |(z_1, z_2) - (z_1 + \varepsilon z_2, \varepsilon z_1 + z_2)| = |(-\varepsilon z_2, -\varepsilon z_1)| = \varepsilon |(z_1, z_2)|.$$

Dessa forma, se $\varepsilon < 1/2$,

$$|(z_1,z_2)-\varphi(z_1,z_2)| = \varepsilon|(z_1,z_2)| < 1/2|(z_1,z_2)| \leq r/2 = \xi.$$

Queremos agora encontrar ε tal que $\varepsilon|(z_1,z_2)| < \eta(\varepsilon)$, para todo $(z_1,z_2) \in B_r$. É suficiente encontrar ε tal que $\varepsilon \cdot r < \eta(\varepsilon)$. A dificuldade aqui reside no fato de η depender de ε. Para contornar isso observemos que existe $\eta' > 0$ tal que

$$|(z_1,z_2)-(z_1',z_2')| < \eta' \Rightarrow |f(z_1,z_2)-f(z_1',z_2')| < \frac{\xi^2}{2} < \frac{\xi^2}{2}(1+\varepsilon)^2.$$

Assim basta escolher $\varepsilon < \eta' \cdot r$.

Logo, considerando a nova tripla $(r, r/2, \eta')$, se $\varepsilon < inf\{1/2, \eta' \cdot r\}$, temos para todo $(z_1,z_2) \in B_r$

$$|(z_1,z_2)-\varphi(z_1,z_2)| < inf\{\eta', \xi\}.$$

Portanto, φ é f-*small*.

Com a definição anterior, verifica-se o seguinte resultado.

Teorema 5.5 (Eyral-Gasparim, [9]) *Se $\varphi : U' \to \varphi(U') \subseteq U$ é f-small, então $m_f = m_g$.*

Prova: Suponhamos que φ seja f-*small*. Logo para todo $z \in B_r$,

$$|z-\varphi(z)| < inf\{\eta, \xi\},$$

com a tripla (r, ξ, η) como anteriormente.

Agora suponhamos que $z \in \partial D_\xi$. Desse modo,

$$|\varphi(z)| = |\varphi(z)-z+z| \leq |z-\varphi(z)| + |z| \leq \xi + \xi \leq r/2 + r/2 = r.$$

Logo, $\varphi(z) \in B_r$.

Uma vez que $|z-\varphi(z)| < \eta$, obtemos

$$|f(z) - f \circ \varphi(z)| < inf\{|f(u)| : u \in \partial D_\xi\} \leq |f(z)|$$

Ou seja, $g = f \circ \varphi$ é um satélite de Rouché de f. Portanto, pelo Teorema 5.2, $m_f = m_g$.

$\square$

Eyral e Gasparim reformulam então o problema da multipicidade de Zariski em termos de satélites de Rouché da seguinte maneira.

Teorema 5.6 (Eyral-Gasparim, [9]) *A resposta à questão da multiplicidade de Zariski é positiva se, e somente se, f e g topologicamente V-equivalentes implica a existência de germes reduzidos f' e g' analiticamente equivalentes a f e g respectivamente tais que g' seja um satélite de Rouché de f'.*

Capítulo 6

Germes Quasehomogêneos de Hipersuperfícies

Neste capítulo, apresentaremos algumas respostas afirmativas à Conjectura de Zariski obtidas para germes quasehomogêneos de hipersuperfícies. A grosso modo, um germe quasehomogêneo de uma função holomorfa é um polinômio quasehomogêneo.

Dizemos que um polinômio é quasehomogêneo quando, atribuídos “pesos” às suas variáveis, ele se torna homogêneo. Precisaremos este conceito, assim como o de germe quasehomogêneo, na Seção 6.1.

Após apresentarmos esses conceitos preliminares, estudaremos o resultado de Greuel de [11] e O'Shea de [26] para deformações de um germe quasehomogêneo de uma função holomorfa com número de Milnor constante (Teorema 6.2). Como observado por Eyral em [8], esse resultado nos fornece a equimultiplicidade de deformações topologicamente V-constantes.

A última seção deste capítulo aborda a invariância topológica da multiplicidade para germes quasehomogêneos de hipersuperfícies em $\mathbb{C}^3$ (com singularidade isolada na origem). É importante ressaltar que esse resultado leva em consideração a dimensão do espaço.

6.1 Germes Quasehomogêneos

Antes de começarmos a discutir germes quasehomogêneos e resultados relativos a eles, introduziremos o conceito de polinômio quasehomogêneo. Veremos a seguir como germes e polinômios quasehomogêneos estão relacionados.

Definição 6.1 *Seja* $w = (w_1, ..., w_n)$ *um vetor fixado em* $\mathbb{Q}^n_+$. *Dizemos que um monômio* $z_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot z_n^{\alpha_n}$ *tem* w*-grau* d *se* $\sum w_i\alpha_i = d$. *Um polinômio* $f \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ *é chamado de quasehomogêneo com peso* w *e* w*-grau* d *se cada um de seus monômios possui* w*-grau* d.

Exemplo 6.1 Consideremos $f(z_1, z_2) = z_2^2 - z_1^3$. Esse polinômio é quasehomogêneo com peso $w = (2, 3)$ e w-grau 6, pois $3 \times 2 = 2 \times 3 = 6$.

Alternativamente, também podemos definir polinômio quasehomogêneo da seguinte maneira.

Definição 6.2 *Um polinômio* $f \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ *é chamado de quasehomogêneo de peso* $w = (w_1, ..., w_n)$, *onde* $w \in \mathbb{Q}^n_+$ *se ele puder ser escrito como uma combinação linear de monômios* $z_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot z_n^{\alpha_n}$ *tais que* $\sum \alpha_i/w_i = 1$.

Exemplo 6.2 Consideremos novamente $f(z_1, z_2) = z_2^2 - z_1^3$. Ele também é quasehomogêneo segundo essa definição, porém seu peso agora é $(3, 2)$, pois $3/3 = 1$ e $2/2 = 1$.

Na verdade, as duas definições são equivalentes. Definimos de duas maneiras diferentes pelo fato de os autores dos resultados que estudaremos usarem as duas. Agora definiremos germe quasehomogêneo.

Definição 6.3 *Seja* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *um germe de uma função holomorfa na origem. Dizemos que* f *é quasehomogêneo se ele pertence ao ideal Jacabiano de* f, *ou seja,*

$$f \in \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right\rangle.$$

Conseguimos exemplos de germes quasehomogêneos utilizando a definição de polinômio quasehomogêno e a regra da cadeia para mostrar o teorema enunciado a seguir.

Teorema 6.1 (Teorema de Euler) *Se* $f \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ *é um polinômio quasehomogêneo com peso* $w = (w_1, ..., w_n)$ *e* w*-grau* d, *então*

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d} w_i z_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z).$$

Desta maneira, vemos que um germe de um polinômio quasehomogêneo é um germe quasehomogêneo.

Saito provou em [33] que a Definição 6.3 é equivalente a dizer que f é analiticamente $\mathcal{R}$-equivalente a um germe de um polinômio quasehomogêneo. Portanto, em questões que envolvam a multiplicidade de f (invariante analítico), podemos trabalhar com germes de polinômios quasehomogêneos.

Considerando agora $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função holomorfa na origem, dizemos que o germe de hipersuperfície $V(f)$ é quasehomogêneo se f for um germe quasehomogêneo.

Utilizando a primeira definição de polinômio quasehomogêneo, apresentamos a seguir o conceito de polinômio semiquasehomogêneo. Antes, porém, uma informação relevante: dado $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{Q}^n_+$, dizemos que um polinômio $f \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ tem w-ordem d se todos os seus monômios possuem w-grau maior ou igual a d e no mínimo um deles tem exatamente w-grau d.

Como exemplo, consideremos $f(z_1, z_2) = z_1^3 \cdot z_2^3$ e $w = (1, 1)$. Então, f possui w-ordem 6, pois seu único monômio tem w-grau 6.

Definição 6.4 *Dizemos que um polinômio $f \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ é semiquasehomogêneo com peso $w = (w_1, ..., w_n)$ e w-grau d se f é da forma $f = f' + f''$, onde f' é quasehomogêneo com peso w e w-grau d tendo uma singularidade isolada na origem e f'' é um polinômio de w-ordem estritamente maior que d.*

Exemplo 6.3 Seja $f(z_1, z_2) = z_1^5 + z_2^5 + z_1^3 \cdot z_2^3$. Se escrevemos $f = f' + f''$, com $f'(z_1, z_2) = z_1^5 + z_2^5$ e $f''(z_1, z_2) = z_1^3 \cdot z_2^3$, constatamos que f' é quasehomogêneo com peso $w = (1, 1)$ e w-grau 5 (na verdade, f' é homogêneo). Uma vez que

$$\frac{\partial f'}{\partial z_1}(z_1, z_2) = \frac{\partial f'}{\partial z_2}(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow (z_1, z_2) = 0,$$

f' possui uma singularidade isolada na origem. E como vimos acima, f'' tem w-ordem $6 > 5$. Portanto, f é semiquasehomogêneo.

Um germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é semiquasehomogêneo se ele é analiticamente $\mathcal{R}$-equivalente a um germe de um polinômio semiquasehomogêneo.

6.2 Deformações μ-constante

Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe quasehomogêneo de uma função holomorfa. Consideremos uma deformação

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, \{0\} \times \mathbb{C}) &\to (\mathbb{C}, 0) \\ (z,t) &\mapsto F(z,t) = F_t(z) \end{aligned}$$

de f, isto é, $F_0 = f$ e $F_t(0) = 0$ para todo t suficientemente próximo de 0.

Recordemos que o número de Milnor de f é definido por

$$\mu(f) = dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}/J(f)),$$

onde $J(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right\rangle$.

Para $t \in \mathbb{C}$ fixado, denotaremos a multiplicidade de F_t na origem por m_t e o seu número de Milnor por μ_t.

A deformação $(F_t)_t$ é equimúltipla (respectivamente μ-constante) se $m_0 = m_t$ (respectivamente se $\mu_0 = \mu_t$) para todo t suficientemente próximo de 0.

Nesta seção, veremos que toda deformação μ-constante de um germe quasehomogêneo com singularidade isolada na origem é equimúltipla. O resultado que enunciamos abaixo foi provado independentemente por Greuel em [11] e O'Shea em [26].

Teorema 6.2 (Greuel, [11]; O'Shea, [26]) *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe quasehomogêneo de uma função holomorfa com singularidade isolada na origem. Suponhamos que*

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, \{0\} \times \mathbb{C}) &\to (\mathbb{C}, 0) \\ (z,t) &\mapsto F(z,t) = F_t(z) \end{aligned}$$

seja uma deformação μ-constante de f. Então ela é equimúltipla.

Greuel usa um teste avaliativo de Lê e Saito de [18], aplicando-o a singularidades isoladas arbitrárias. O caso quasehomogêneo resulta de um teorema de Varchenko de [35] sobre deformações com número de Milnor constante.

O'Shea também utiliza esse teorema de Varchenko, contudo seu argumento para provar o Teorema 6.2 é diferente. Ele considera uma classe especial de deformações, chamadas de deformações "*upper*", e mostra que toda deformação "*upper*" é equimúltipla. Ele conclui então o resultado com um corolário do teorema de Varchenko (Proposição 6.2).

Aqui estudaremos a prova do Teorema 6.2 feita por O'Shea por ser mais simples e curta. Lembremos que pelo resultado de Saito, podemos supor que o germe f é um germe de um polinômio quasehomogêneo. Adotaremos a primeira definição de polinômio quasehomogêneo para introduzir o conceito de deformação "*upper*".

Definição 6.5 (O'Shea, [26]) *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de um polinômio quasehomogêneo com peso w e w-grau d. Dizemos que uma deformação $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0 \times \mathbb{C}) \to (\mathbb{C}, 0)$ de f é "upper"se a expansão*

$$F(z,t) = f(z) + tf_1(z) + t^2 f_2(z) + ...$$

de F em potências do parâmetro de deformação t é tal que cada $f_l(z)$ é uma combinação linear de monômios de w-grau maior ou igual a d.

Exemplo 6.4 Seja $f(z_1, z_2) = z_1^5 + z_2^5$. Vimos na seção anterior que f é um polinômio quasehomogêneo de peso $w = (1,1)$ e w-grau 5. Consideremos agora a aplicação $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0 \times \mathbb{C}) \to (\mathbb{C}, 0)$ dada por

$$F(z_1, z_2, t) = z_1^5 + z_2^5 + tz_1^3 \cdot z_2^3.$$

Então, F é uma deformação de f, pois $F_0 = f$ e $F_t(0) = 0$, para t suficientemente próximo de 0. Além disso F é igual à sua expansão em série de potências com relação a t. Se $f_1(z_1, z_2) = z_1^3 \cdot z_2^3$, também sabemos que f_1 tem w-grau 6. Portanto, F é uma deformação "*upper*"de f.

Nesse exemplo, percebemos que a deformação $(F_t)_t$ é equimúltipla, pois $m_t = m_0 = 5$, para todo t suficientemente próximo de 0. Este é exatamente o resultado estabelecido por O'Shea.

Proposição 6.1 (O'Shea, [26]) *Se f é um germe de um polinômio quasehomogêneo com uma singularidade isolada na origem, então qualquer deformação "upper" de f é equimúltipla.*

Prova: Sejam w o peso de f e d seu w-grau. Uma vez que f possui uma singularidade isolada na origem, pelo Lema 2.2 do Capítulo 2, para cada i, $1 \leq i \leq n$, podemos escolher j_i como sendo o menor k, $1 \leq k \leq n$, tal que o monômio $z_i^{b_i} z_k$ apareça na expansão de f como uma combinação linear de monômios.

Renumerando, podemos assumir que $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$.

Seja $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0 \times \mathbb{C}) \to (\mathbb{C}, 0)$ uma deformação "*upper*"de f. Para cada $t \in \mathbb{C}$ fixo, consideremos

$$F(z,t) = f(z) + tf_1(z) + t^2 f_2(z) + ...$$

Queremos mostrar que $m_t = m_0$, que é a multiplicidade de f. Sabemos que m_0 é o menor grau dos monômios de f, portanto $m_0 \leq b_1 + 1$. Devemos então provar que todo monômio de f_l, $l \geq 1$, tem grau maior ou igual a m_0, sendo suficiente, portanto, verificar que o seu grau é maior ou igual a $b_1 + 1$.

Seja então $z^a = z_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{a_n}$ um monômio de f_l com w-grau maior ou igual a d.

Primeiramente, suponhamos que o w-grau de z^a seja igual a d. Para cada i, $1 \leq i \leq n$, temos $b_i w_i + w_{j_i} = d$. Multiplicando por a_i, obtemos

$$a_i(b_i w_i + w_{j_i}) = a_i d.$$

Escrevendo $b_i = b_1 + c_i$, $c_i \geq 0$ e considerando a soma sobre i, vemos que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(b_1 + c_i)w_i + \sum_{i=1}^{n} a_i w_{j_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i d.$$

Logo,

$$b_1 \sum_{i=1}^{n} a_i w_i + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i w_i + \sum_{i=1}^{n} a_i w_{j_i} - d \sum_{i=1}^{n} a_i = 0.$$

Mas como $\sum_{i=1}^{n} a_i w_i = d$, decorre que

$$d\left(b_1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i w_i + \sum_{i=1}^{n} a_i w_{j_i} = 0.$$

E uma vez que $\sum_{i=1}^{n} a_i c_i w_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} a_i w_{j_i} > 0$, temos $b_1 - \sum_{i=1}^{n} a_i < 0$.
Logo, $\sum_{i=1}^{n} a_i = a > b_1$, ou seja, $a \geq b_1 + 1 \geq m_0$.
Portanto, $m_t = m_0$.
Se o w-grau de z^a é maior que d, então $\sum_{i=1}^{n} a_i w_i = d + d'$, com $d' > 0$.
É suficiente agora proceder da mesma maneira acima para concluir que $m_t = m_0$.

$\square$

A conclusão do Teorema 6.2 é obtida então da seguinte proposição.

Proposição 6.2 (O'Shea, [26]) *Qualquer deformação μ-constante de um germe de um polinômio quasehomogêneo com uma singularidade isolada na origem é "upper".*

Como já mencionado anteriormente, essa proposição é uma consequência de um teorema de Varchenko de [35].

Uma vez que o número de Milnor é um invariante do tipo topológico, o corolário seguinte decorre imediatamente do Teorema 6.2.

Corolário 6.1 (Eyral, [8]) *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função holomorfa com uma singularidade isolada na origem. Suponhamos que f seja quasehomogêneo. Se*

$$F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0 \times \mathbb{C}) \to (\mathbb{C}, 0)$$
$$(z,t) \mapsto F(z,t) = F_t(z)$$

é uma deformação topologicamente V-constante de f, então ela é equimúltipla.

Para concluir essa seção resta-nos saber como é o caso semiquasehomogêneo. Greuel observa que no Teorema 6.2 (e no Corolário 6.1), podemos trocar a condição quasehomogêneo por semiquasehomogêneo, obtendo o mesmo resultado.

6.3 Superfícies Singulares em $\mathbb{C}^3$

Sejam $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função holomorfa na origem e $V(f)$ seu germe de hipersuperfície na origem. Quando $n = 3$, dizemos que $V(f)$ é uma superfície em $\mathbb{C}^3$. Se f possui uma singularidade na origem, chamamos $V(f)$ de superfície singular.

Consideremos agora $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe quasehomogêneo com uma singularidade isolada na origem. Então f é analiticamente $\mathcal{R}$-equivalente a um germe de um polinômio quasehomogêneo (Saito, [33]). No que faremos a seguir, estaremos considerando a segunda definição de polinômio quasehomogêneo.

Para um polinômio quasehomogêneo com peso $w = (w_1, w_2, w_3)$ e singularidade isolada na origem, Saeki em [31] e Xu e Yau em [39] e [40] mostram que o peso w é um invariante do tipo topológico de $V(f)$. Como consequência, eles resolvem o problema de Zariski para o caso particular enunciado a seguir.

Teorema 6.3 (Saeki, [31]; Xu-Yau, [39] e [40]) *Sejam $f, g : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes quasehomogêneos de funções holomorfas com singularidade isolada na origem e $V(f)$, $V(g)$ seus respectivos germes de superfícies em $\mathbb{C}^3$. Se f e g são topologicamente V-equivalentes, então $V(f)$ e $V(g)$ possuem a mesma multiplicidade na origem.*

Não discutiremos aqui as demonstrações dos autores para a invariância topológica do peso de um polinômio quasehomogêneo com singularidade isolada na origem. Assumiremos verdadeiro o teorema seguinte.

Teorema 6.4 (Xu-Yau, [39] e [40]) *Seja $V(f)$ uma superfície quasehomogênea com singularidade isolada na origem definida por um polinômio quasehomogêneo f com peso $w = (w_1, w_2, w_3)$. Então o tipo topológico de $V(f)$ determina e é determinado por w.*

O lema a seguir é interessante não apenas por ser válido para $n \neq 3$, mas também por caracterizar a multiplicidade na origem de um germe quasehomogêneo de hipersuperfície com singularidade isolada.

Lema 6.1 (Saeki, [31]) *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe quasehomogêneo de uma função holomorfa de peso $w = (w_1, ..., w_n)$ com uma singularidade isolada na origem. Se m_f denota a multiplicidade de f na origem, então*

$$m_f = min\{m \in \mathbb{Z}_+ : m \geq k\},$$

onde $k = min\{w_1, ..., w_n\}$.

Prova: Reordenando as variáveis $z_1, ..., z_n$ se necessário, podemos supor que $k = w_1$. Mostraremos que $m_f \geq w_1$.

Seja $z_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot z_n^{\alpha_n}$ o monômio de menor grau de f. Então

$$m_f = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

Pela Definição 6.2, temos

$$\frac{\alpha_1}{w_1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{w_n} = 1 \Rightarrow w_1 = w_1 \left(\frac{\alpha_1}{w_1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{w_n} \right) \Rightarrow w_1 = \alpha_1 \frac{w_1}{w_1} + \ldots + \alpha_n \frac{w_1}{w_n}.$$

Mas $w_1/w_j \leq 1$, $j = 1, ..., n$, pois $w_1 = min\{w_1, ..., w_n\}$. Logo,

$$w_1 \leq \alpha_1 + ... + \alpha_n = m_f.$$

Portanto, se $m' = min\{m \in \mathbb{Z}_+ : m \geq w_1\}$, concluímos que $m_f \geq m'$.

Para estabelecer a desigualdade contrária, observemos que f possui uma singularidade isolada na origem. Logo, pelo Lema 2.2 do Capítulo 2, existe um monômio da forma $z_1^{\alpha_1} z_j$, para algum $j = 1, ..., n$, na expressão de f como série de potência convergente.

Assim, usando novamente a definição de polinômio quasehomogêneo, obtemos

$$\frac{\alpha_1}{w_1} + \frac{1}{w_j} = 1 \Rightarrow \alpha_1 + \frac{w_1}{w_j} = w_1 \Rightarrow \alpha_1 = w_1 - \frac{w_1}{w_j}.$$

Vale também a desigualdade $m_f \leq \alpha_1 + 1$. Consequentemente,

$$m_f \leq w_1 - \frac{w_1}{w_j} + 1 < w_1 + 1 \leq m' + 1 \Rightarrow m_f < m' + 1.$$

Portanto, $m_f \leq m'$, encerrando a prova.

$\square$

Usando o Teorema 6.4 e o Lema 6.1, para o caso $n = 3$, obtemos o Teorema 6.3

Capítulo 7

Mais Alguns Resultados

Neste capítulo descrevemos brevemente mais alguns resultados obtidos sobre o problema da multiplicidadede Zariski. Uma vez que esses resultados não foram estudados com detalhes, eles estão listados aqui com o propósito de servirem de referência para estudos futuros.

Singularidades Newton não Degeneradas

Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função holomorfa na origem. Escrevamos

$$f(z) = \sum_{\alpha} a_\alpha z^\alpha,$$

onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ e $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} + ... + z_n^{\alpha_n}$.

O *Poliedro de Newton* $\Gamma_+(f; z)$ de f em 0 com relação às coordenadas $z = (z_1, ..., z_n)$ é o envoltório convexo em $\mathbb{R}_+^n$ do conjunto

$$\bigcup_{a_\alpha \neq 0} (\alpha + \mathbb{R}_+^n).$$

A *fronteira de Newton* $\Gamma(f; z)$ de f em 0 é a união das faces compactas da fronteira de $\Gamma_+(f; z)$. O polinômio

$$\sum_{\alpha \in \Gamma(f;z)} a_\alpha z^\alpha$$

é chamado de *parte principal de Newton* de f em 0.

Para cada face $\Delta \in \Gamma(f; z)$, definimos a *função face* f_Δ por

$$f_\Delta(z) = \sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha z^\alpha.$$

Dizemos que f é *não degenerada* em Δ se as equações

$$\frac{\partial f_\Delta}{\partial z_1}(z) = \ldots = \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_n}(z) = 0$$

não possuem solução comum em $z_1 \cdot ... \cdot z_n \neq 0$. Quando f é não degenerada em cada face Δ de $\Gamma(f; z)$, dizemos que f tem uma *parte principal Newton não degenerada* com relação a z.

Abderrahmane em [1] e Saia e Tomazella em [32] provaram independentemente que qualquer deformação μ-constante que tenha uma parte principal Newton não degenerada é equimúltipla.

Teorema 7.1 (Abderrahmane, [1]; Saia-Tomazella, [32]) *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função holomorfa. Suponhamos que f possua uma singularidade isolada na origem. Se*

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, \{0\} \times \mathbb{C}) &\to (\mathbb{C}, 0) \\ (z, t) &\mapsto F(z, t) = F_t(z) \end{aligned}$$

é uma deformação μ-constante de f tal que, para todo t próximo de 0, o germe F_t tem uma parte principal Newton não degenerada com relação a z, então $(F_t)_t$ é equimúltipla.

Multiplicidade e Gênero Aritmético

Wagreich introduziu em [37] um invariante para singularidades chamado de gênero aritmético que pode ser calculado através de um gráfico de resolução. Yau em [41], usando esse objeto (que também é um invariante do tipo topológico), demonstra o seguinte resultado para superfícies singulares em $\mathbb{C}^3$.

Teorema 7.2 (Yau, [41]) *Sejam $f, g : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes de funções holomorfas com singularidade isolada na origem e $V(f)$, $V(g)$ seus correspondentes germes de superfícies em $\mathbb{C}^3$. Suponhamos que f e g sejam topologicamente V-equivalentes. Se o gênero aritmético de $V(f)$ na origem é menor ou igual a 2, então as multiplicidades de $V(f)$ e $V(g)$ na origem são iguais.*

Singularidades Alinhadas

A noção de singularidade alinhada foi introduzida por Massey em [22]. Singularidades alinhadas generalizam singularidades isoladas e singularidades unidimensionais suaves. Para a definição precisa, vide [22] ou [8].

Eyral mostra então o seguinte em [7].

Teorema 7.3 (Eyral, [7]) *Seja* $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, \{0\} \times \mathbb{C}) \to (\mathbb{C}, 0)$, $(z,t) \mapsto F(z,t) = F_t(z)$, *um germe de uma função holomorfa definido por*

$$F_t(z_1, ..., z_n) = G_t(z_1, ..., z_{n-1}) + z_n^2 H_t(z_1, ..., z_n),$$

onde $G : (\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}, \{0\} \times \mathbb{C}) \to (\mathbb{C}, 0)$, $(z_1, ..., z_{n-1}, t) \mapsto G(z_1, ..., z_{n-1}, t) = G_t(z_1, ..., z_{n-1})$, *e* $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, \{0\} \times \mathbb{C}) \to (\mathbb{C}, 0)$, $(z_1, ..., z_n, t) \mapsto H(z_1, ..., z_n, t) = H_t(z_1, ..., z_n)$, *são germes de funções holomorfas com* $n \geq 3$. *Suponhamos que, para todo* t *próximo de* 0, *os germes* F_t *e* G_t *sejam reduzidos e que* F_t *possua uma singularidade alinhada em* 0 s*-dimensional. Suponhamos também que* $(F_t)_t$ *seja topologicamente* V*-constante. Seja* $(t_k)_k$ *uma sequência infinita de pontos em* $\mathbb{C}$ *convegindo a* 0. *Suponhamos que as coordenadas* $z = (z_1, ..., z_n)$, *ou alguma permutação delas, formem um conjunto de coordenadas na origem para* F_0 *e para* F_{t_k}, *para todo* $k \in \mathbb{N}$. *Finalmente, suponhamos que no mínimo uma das quatro condições seguintes esteja satisfeita:*
(i) *para todo* t *próximo de* 0, *o germe* G_t *é conveniente e tem uma parte principal Newton não degenerada com respeito às coordenadas* $z' = (z_1, ..., z_{n-1})$;
(ii) *para todo* t *próximo de* 0, *o germe* G_t *é da forma* $G_t(z') = \alpha(z') + \theta(t)\beta(z')$, *onde* $\alpha, \beta : (\mathbb{C}^{n-1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *e* $\theta : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0), \theta \neq 0$, *são germes de funções holomorfas;*
(iii) G_0 *é um germe de um polinômio semiquasehomogêneo com relação a* z';
(iv) $n = 3$.

Então $(G_t)_t$ *é equimúltipla. Em particular, se, além disso, para todo* t *próximo de* 0, *a multiplicidade na origem do germe* G_t *é menor ou igual à ordem em* 0 *do germe (não reduzido)* $(z_1, ..., z_n) \mapsto z_n^2 H_t(z_1, ..., z_n)$, *então* $(F_t)_t$ *é equimúltipla.*

Casos Particulares

Navarro Aznar apresenta em [24] uma solução parcial do problema de Zariski descrita a seguir.

Teorema 7.4 (Navarro Aznar, [24]) *Sejam* $f, g : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *germes reduzidos de funções holomorfas e* m_f, m_g *suas multiplicidades na origem respectivamente. Suponhamos que* f *e* g *sejam topologicamente* V*-equivalentes. Se* $m_f = 2$, *então* $m_g = 2$.

Primeiramente, ele define o posto do germe de superfície $V(f)$ como sendo o posto da matriz hessiana de f em 0. Ele então observa o seguinte:

(1) Se o posto de $V(f)$ é ímpar, então $m_f = m_g$.

(2) Se o posto de $V(f)$ é ímpar, então $m_f \leq 2$.

Com essas observações ele obtém o Teorema 7.4.

Mendris e Némethi deram em [23] uma resposta afirmativa à Conjectura de Zariski para superfícies com singularidade isolada em $\mathbb{C}^3$ do tipo $\tilde{f}(z_1, z_2, z_3) = f(z_1, z_2) + z_3^k$, onde f é irredutível.

Teorema 7.5 (Mendris-Némethi, [23]) *Sejam $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe irredutível de uma função holomorfa e $\tilde{f} : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ uma suspensão de f, isto é, $\tilde{f}(z_1, z_2, z_3) = f(z_1, z_2) + z_3^k$ para algum $k \geq 2$. Se $g : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é um germe reduzido de uma função holomorfa topologicamente V-equivalente a $\tilde{f}$, então $m_g = m_{\tilde{f}}$.*

Observemos que a hipótese $k \geq 2$ implica que $\tilde{f}$ tem no máximo uma singularidade isolada na origem e, consequentemente, é reduzido.

Para concluir, enunciamos o seguinte resultado sobre germes não singulares.

Teorema 7.6 (A'Campo, [2]; Lê, [16]) *Sejam $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes reduzidos de funções holomorfas e m_f, m_g suas multiplicidades na origem respectivamente. Suponhamos que f e g sejam topologicamente V-equivalentes. Se $m_f = 1$, então $m_g = 1$.*

Referências Bibliográficas

[1] Abderrahmane, Ould. M., *On the deformations with constant Milnor number and Newton polyhedron*, Preprint, Saitama University, 2004.

[2] A'Campo, N., *Le nombre de Lefschtz d'une monodromie*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 76 = Indag. Math. **35** (1973), 113-118.

[3] Comte, G., *Multiplicity of complex analytic sets and bilipschitz maps*, Real analytic and algebraic singularities (Nagoya/Sapporo/Hachioji, 1996), Pitman Res. Notes Math. **381**, Longman, Harlow (1998), 182-188.

[4] Comte, G., Milman, P. e Trotman, D., *On Zariski's multiplicity problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2045-2048.

[5] Ephraim, R., *C^1 preservation of multiplicity*, Duke Math. J. **43** (1976), 797-803.

[6] Ephraim, R., *The cartesian product structure and C^∞ equivalences of singularities*, Trans. Amer. Math. Soc. **224** (1976), 299-311.

[7] Eyral, C., *Zariski's multiplicity question and aligned singularities*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I **342** (2006), 183-186.

[8] Eyral, C., *Zariski's multiplicity question - a survey*, New Zealand J. Math. **36** (2007), 253-276.

[9] Eyral, C. e Gasparim, E., *Multiplicity of complex hypersurface singularities, Rouché satellites and Zariski's problem*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I **344** (2007), 631-634.

[10] Gau, Y.-N. e Lipman, J., *Differential invariance of multiplicity on analytic varieties*, Invent. Math. **73** (1983), 165-188.

[11] Greuel, G. M., *Constant Milnor number implies constant multiplicity for quasihomogeneous singularities*, Manuscripta Math. **56** (1986), 159-166.

[12] Jong, T. e Pfister, G., *Local analytic geometry.* Basic theory and applications, Advanced Lectures in Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2000.

[13] King, H., *Topological type of isolated critical points*, Annals of Math. **107** (1978), 385-397.

[14] King, H., *Topological type in families of germs*, Invent. Math. **62** (1980), 1-13.

[15] Lang, S., *Complex Analysis*, segunda edição corrigida, Graduate Texts in Mathematics, vol. 103, Springer Verlag, 1995.

[16] Lê D. T., *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complex*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **23** (1973), 261-270.

[17] Lê D. T. e Ramanujam, C. P., *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type*, Amer. J. Math. **98** (1976), 67-78.

[18] Lê D. T. e Saito, K., *La constance du nombre de Milnor donne des bonnes stratifications*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **277** (1973), 793-795.

[19] Lefschetz, S. *Topology*, Chelsea, New York, 1965.

[20] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Rio de Janeiro, IMPA, 2006.

[21] Łojasiewicz, S., *Introduction to complex analytic geometry*, Birkäuser, Basel, 1988.

[22] Massey, D., *Lê cycles and hypersurface singularities*, Lecture Notes Math. **1615** (Springer-Verlag, Berlin, 1995).

[23] Mendris, R. e Némethi, A., *The link of* $\{f(x,y)+z^n = 0\}$ *and Zariski's conjecture*, Compositio Math. **141** (2005), 502-524.

[24] Navarro Aznar, V., *Sobre la invariància topològica de la multiplicitat*, Pub. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona **20** (1980), 261-262.

[25] Oréfice, B., *Equivalências de germes de funções e de hipersuperfícies e álgebras associadas*, Dissertação de Mestrado, DM - UFSCar, 2008.

[26] O'Shea, D. B., *Topologically trivial deformations of isolated quasihomogeneous hypersurface singularities are equimultiple*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 260-262.

[27] Perron, B., *Conjugaison topologique des germes de functions holomorphes à singularité isolée en dimension trois*, Invent. Math. **82** (1985), 27-35.

[28] Ploski, A., *Multiplicity and the Łojasiewicz exponent*, Singularities (Warsaw, 1985), Banach Center, Publications **20**, PWN, Warsaw (1988), 353-364.

[29] Risler, J. J. e Trotman, D., *Bilipschitz invariance of the multiplicity*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 200-204.

[30] Saeki, O., *Topological types of complex isolated hypersurface singularities*, Kodai Math. J. **12** (1989), 23-29.

[31] Saeki, O., *Topological invariance of weights for weighted homogeneous isolated singularities in* $\mathbb{C}^3$, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 905-909.

[32] Saia, M. J. e Tomazella, J. N., *Deformations with constant Milnor number and multiplicity of complex hypersurfaces*, Glasg. Math. J. **46** (2004), 121-130.

[33] Saito, K., *Quasihomogene isolierte singularitäten von hyperflächen*, Invent. Math. **15** (1971), 123-142.

[34] Trotman, D. *Multiplicity as a* C^1 *invariant*, Real analytic and algebric singularities (Nagoya/Sapporo/Hachioji, 1996), Pitman Res. Notes Math. **381**, Longman, Harlow (1998), 215-221.

[35] Varchenko, A. N., *A lower bound for the codimension of the stratum* $\mu = const$ *in terms of the mixed Hodge structure*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **37** (1982), 28-31. (Russian)

[36] Vick, J. W., *Homology Theory - An introduction to algebraic topology*, Academic, N. Y., 1973.

[37] Wagreich, P., *Elliptic singularities of surfaces*, Amer. J. Math. **92** (1970), 419-454.

[38] Whitney, H., *Complex analytic varieties*, Addison-Wesley publishing company, Reading, Mass.-Menlo Park, Calif.-London-Don Mills, Ont, 1972.

[39] Xu, Y. e Yau, S.S.-T., *Classification of topological types of isolated quasi-homogeneous two dimensional hypersurfaces singularities*, Manuscripta Math. **64** (1989), 445-469.

[40] Yau, S.S.-T., *Topological types and multiplicity of isolated quasi-homogeneous surfaces singularities*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), 447-454.

[41] Yau, S.S.-T., *The multiplicity of isolated two-dimensional hypersurface singularities: Zariski problem*, Amer. J. Math. **111** (1989), 753-767.

[42] Zariski, O., *Some open questions in the theory of singularities*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 481-491.

[43] Zariski, O., *On the topology of algebroid singularities*, Amer. J. Math. Soc. **54** (1932), 453-465.