

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

HIPOELIPTICIDADE GLOBAL DE CAMPOS VETORIAIS NO  
TORO  $\mathbb{T}^N$

Moisés Aparecido do Nascimento

São Carlos - SP

Junho - 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Hipoelipticidade Global de Campos Vetoriais no toro  $\mathbb{T}^N$**

Moisés Aparecido do Nascimento

Dissertação apresentada ao  
PPG-M da UFSCar como  
parte dos requisitos para a  
obtenção do título de Mestre  
em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luís Antônio Carvalho dos Santos

São Carlos - SP

Junho - 2010

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

N244hg

Nascimento, Moisés Aparecido do.

Hipoelipticidade global de campos vetoriais no toro  $T^N$  /  
Moisés Aparecido do Nascimento. -- São Carlos : UFSCar,  
2010.

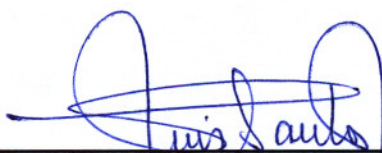
86 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São  
Carlos, 2010.

1. Análise. 2. Hipoelipticidade. 3. Distribuições periódicas.  
4. Sobolev, Espaço de. 5. Sistemas minimais. I. Título.

CDD: 515 (20<sup>a</sup>)

**Banca Examinadora:**



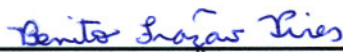
---

**Prof. Dr. Luís Antônio de Carvalho dos Santos  
DM - UFSCar**



---

**Prof. Dr. Gerson Petronilho  
DM - UFSCar**



---

**Prof. Dr. Benito Frazão Pires  
FFCLRP - USP**

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela paz espiritual e força, que tem me dado nas horas difíceis. Agradeço meus pais, Mozes Aparecido do Nascimento e Sônia Regina pelos conselhos e carinho dado em todos os momentos difíceis, e também, a minha avó Maria Ernandi pelos excelentes conselhos e carinho que me dá. Dedico este trabalho a minha filha Lívia Maria por estar sempre ao meu lado. Agradeço também, o professor Luís Antônio pelo apoio que tem dado durando esses anos, me motivando cada vez mais a ter gosto pela matemática, me ajudando a superar as dificuldades com seus conselhos, e dando suporte suficiente para compreender aspectos importantes para a conclusão desta dissertação. Agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro.



# Resumo

Neste trabalho, veremos que se o operador transposto de um campo vetorial real suave  $L$  definido no toro  $N$ -dimensional, visto como um operador diferencial linear com coeficientes em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ , for globalmente hipoelíptico, então existe um campo vetorial com coeficientes constantes  $L_0$  tal que  $L$  e  $L_0$  são  $C^\infty$ -conjugados, com tais constantes satisfazendo uma condição chamada de Diofantina ( $\star$ ). Mostraremos também a recíproca deste fato, isto é, se existir um sistema de coordenadas tal que, neste novo sistema  $L$  possui coeficientes constantes com tais constantes satisfazendo a condição Diofantina ( $\star$ ) então, seu transposto  $L^*$  é globalmente hipoelíptico. Veremos que a condição Diofantina implica que, os fluxos gerados pelo campo, vistos como um sistema dinâmico, são minimais.

**Palavras-chave:** Hipoelípticidade, Distribuições periódicas, Espaços de Sobolev, Condição Diofantina, Sistemas minimais.





# Abstract

In this work, we will see that if the transpose operator of a smooth real vector field  $L$  defined on the  $N$ -dimensional torus, regarded as a linear differential operator with coefficients in  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ , is globally hypoelliptic, then there exists a vector field with constant coefficients  $L_0$  such that  $L$  and  $L_0$  are  $C^\infty$ -conjugated, with such constants satisfying a condition called Diophantine  $(\star)$ . We will also show the converse of this fact, that is, if there is a coordinate system such that in this new system  $L$  has constant coefficients with such constant satisfying the Diophantine condition  $(\star)$  then its transpose  $L^*$  is globally hypoelliptic. We will see that the Diophantine condition implies that the flow generated by the field, regarded as a Dynamical system is minimal.

**Keywords:** Hypoellipticity, Periodic distributions, Sobolev spaces, Diophantine condition, Minimal systems.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>13</b>
2.1	Resultados de Análise Funcional . . . . .	13
2.2	A Topologia fraca estrela . . . . .	16
2.3	Elementos da Teoria da Medida . . . . .	17
2.4	A Topologia fraca estrela no espaço das medidas . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Análise de Fourier</b>	<b>29</b>
3.1	Coeficientes de Fourier . . . . .	29
3.2	Distribuições Periódicas . . . . .	36
3.3	Espaços de Sobolev . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica</b>	<b>45</b>
4.1	Translações no Toro . . . . .	45
4.2	Teorema de Recorrência de Poincaré . . . . .	48
4.2.1	Versão Probabilística . . . . .	48
4.2.2	Versão Topológica . . . . .	49
4.3	O Teorema de Krylov-Bogoliubov . . . . .	54
4.4	Fluxos sobre Variedades . . . . .	56
4.5	Sistemas Conservativos . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Hipoelipticidade de Campos Vetoriais no toro <math>\mathbb{T}^N</math></b>	<b>65</b>
5.1	Resolubilidade . . . . .	69
5.2	Condição Diofantina . . . . .	71
5.3	Conjugação- $C^\infty$ . . . . .	73
5.4	Análise Espectral . . . . .	81



# Capítulo 1

## Introdução

Um campo vetorial definido sobre uma variedade compacta, pode ser visto naturalmente como um operador  $L$  agindo sobre o espaço das funções suaves. Associado ao operador  $L$ , temos o operador transposto  $L^*$  agindo sobre o dual deste espaço, isto é, o espaço das distribuições. Nesta dissertação estudaremos condições para a Hipoelepticidade Global dos operadores  $L$  e  $L^*$ . S. J. Greenfield e N. R. Wallach em [GW], consideraram campos vetoriais hipoelepticos no toro  $\mathbb{T}^2$ , e provaram que, se  $L = \lambda_1(u, v)\partial_u + \lambda_2(u, v)\partial_v$  onde,  $\lambda_1(u, v), \lambda_2(u, v) \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$  é tal que seu transposto  $L^*$  é hipoeleptico então, existe uma transformação suave  $\tau : (u, v) \rightarrow (x, y)$  tal que

$$L = F(x, y) (\partial_x + \Lambda \partial_y), \quad (1.0.1)$$

onde  $F \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ ,  $F(x, y) \neq 0$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{T}^2$  e a constante  $\Lambda$  satisfaz a seguinte condição, existem números positivos  $C_0$  e  $N_0$  tais que

$$|k + l\Lambda| \geq \frac{C_0}{(|k| + |l|)^{N_0}}$$

para quaisquer inteiros  $k$  e  $l$ .

Jorge Hounie também considerou em [H1] campos vetoriais hipoelepticos definidos no toro  $\mathbb{T}^2$  e, mostrou que, se considerarmos o campo  $L$  dado por  $L = \lambda_1(u, v)\partial_u + \lambda_2(u, v)\partial_v$  nas mesmas condições anteriores, e supormos que o sistema

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = \lambda_2(u, v) \quad (1.0.2)$$

tem um conjunto minimal em  $\mathbb{T}^2$ , então existe uma transformação suave  $\tau : (u, v) \rightarrow (x, y)$  tal que (1.0.1) é válida.

As provas destes fatos dependem de um teorema de redução, devido a Sternberg, para o sistema (1.0.2).

Sternberg em [S], mostrou que, quando o sistema (1.0.2) tem uma integral invariante  $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ ,  $\omega \neq 0$  em  $\mathbb{T}^2$  invariante com respeito ao fluxo gerado pelo sistema, então podemos reescrever (1.0.2) da seguinte forma:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \Lambda F(x, y). \quad (1.0.3)$$

Devido ao fato de não se conhecer até o momento, um teorema de redução para dimensão superior a 2, análogo ao dado por Sternberg quando  $N = 2$ , os métodos usados em [GW] e [H1] não podem ser aplicados para o toro  $\mathbb{T}^N$  quando  $N \geq 3$ . Neste trabalho, estudaremos um artigo de Chen Wenyi e M. Y. Chi [CC], que trata do caso  $N \geq 3$ , fornecendo uma demonstração construtiva para este problema. O resultado principal contido em [CC] diz que se  $L$  é um campo vetorial suave definido no toro  $\mathbb{T}^N$  então o operador transposto  $L^*$  é globalmente hipoeĺptico se, e somente se, existir um difeomorfismo  $\tau$ , que conjuga o campo a um campo vetorial com coeficientes constantes satisfazendo a condição Diofantina  $(\star)$ . Mostraremos que tal condição Diofantina está ligada com questões oriundas da teoria dos sistemas dinâmicos tais como ergodicidade, recorrência e minimalidade. Veremos que a regularidade do transposto  $L^*$  implica na existência de uma medida de probabilidade suave que deixa invariante o fluxo gerado pelo campo vetorial  $L$ . Para alcançarmos o objetivo principal que consiste na demonstração do resultado de [CC] organizamos a dissertação da seguinte maneira. No Capitulo 2 estudamos algumas propriedades funcionais do espaço das medidas mostrando que o espaço das medidas de probabilidade definidas sobre um espaço métrico compacto, quando dotado com a topologia fraca estrela, é metrizável e compacto. Definiremos o conceito de medida invariante e forneceremos um resultado de caracterização de tais medidas. No Capitulo 3 faremos um estudo da Análise de Fourier, distribuicoes periódicas e dos espaços de Sobolev definidos sobre o toro  $N$ -dimensional e daremos a definição de hipoeĺpticidade de um operador diferencial parcial linear de ordem  $m$ . Mostraremos ainda que tal operador quando Globalmente Hipoeĺptico satisfaz certas desigualdades denominadas estimativas a priori. O Capitulo 4 será dedicado ao estudo de alguns resultados da teoria dos sistemas dinâmicos e das propriedades de ergodicidade de uma transformação mensurável definida sobre um espaço métrico compacto. Provaremos o teorema de Krylov-Bogoliubov que garante que o espaço das medidas invariantes com respeito a uma transformação contínua definida sobre um espaço métrico compacto é não-vazio. No Capitulo 5 provaremos os principais resultados relacionados a hipoeĺpticidade dos operadores  $L$  e  $L^*$  e como as estimativas a priori implicam na resolubilidade da equação  $Lu = f$  em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ .

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1 Resultados de Análise Funcional

A seguir segue a definição de semi-norma sobre um espaço vetorial.

**Definição 2.1.1.** *Seja  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , um funcional sublinear definido em  $E$  é uma aplicação  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições:*

1.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E;$
2.  $p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall x \in E, \forall \lambda > 0.$

**Definição 2.1.2.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo  $F$  e  $\{p_k\}_{k \geq 1}$  uma família de semi-normas em  $E$ . Dizemos que  $\{p_k\}_{k \geq 1}$  separa pontos, se  $x \in E$  for tal que  $p_k(x) = 0, \forall k \geq 1 \Rightarrow x = 0.$*

Abaixo segue a versão real de um dos teoremas importantes no que diz respeito a extensões de funcionais lineares em espaços vetoriais normados.

**Teorema 2.1.1** (Hahn-Banach). *Sejam  $E$  um espaço vetorial real e  $E^*$  seu dual,  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional sublinear. Sejam  $G \subset E$  um subespaço vetorial e  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear tal que  $g(x) \leq p(x), \forall x \in G$ . Então existe  $f \in E^*$  tal que*

1.  $g(x) = f(x), \forall x \in G;$
2.  $f(x) \leq p(x), \forall x \in E.$

**Demonstração:** Veja referência [R] p.56. □

Seguem algumas consequências do teorema de Hahn-Banach e que serão úteis em resultados posteriores.

**Corolário 2.1.1.** *Seja  $G$  um subespaço vetorial de  $E$  onde,  $E$  é um espaço vetorial normado e  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação linear e contínua de norma  $\|g\|_{G^*} = \sup \{|g(x)| : x \in G, \|x\| \leq 1\}$ . Então, existe  $f \in E^*$  tal que  $\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*}$ .*

**Demonstração:** Seja  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $p(x) = \|g\|_{G^*} \|x\|$ . Note que, se  $x \neq 0$ ,  $x \in G$  então,  $\frac{1}{\|x\|}g(x) = g(\frac{x}{\|x\|}) \leq |g(\frac{x}{\|x\|})| \leq \|g\|_{G^*}$ , portanto,  $g(x) \leq \|g\|_{G^*} \|x\| = p(x)$ . Logo, pelo teorema de Hahn-Banach segue que  $\exists f \in E^*$  tal que  $g(x) = f(x) \forall x \in G$  e,  $f(x) \leq p(x) = \|g\|_{G^*} \|x\| \Rightarrow \|f\|_{E^*} \leq \|g\|_{G^*}$ . A outra desigualdade é imediata.  $\square$

**Corolário 2.1.2.** *Dado  $x_0 \in E$  existe  $f \in E^*$  tal que*

1.  $\|f\|_{E^*} = \|x_0\|_E$
2.  $\langle f, x_0 \rangle = \|x_0\|_E^2$ .

**Demonstração:** Seja  $G = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset E$  e defina  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(tx_0) = t \|x_0\|^2$ . Temos,

$$\|g\|_{G^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |g(x)| = \sup_{\|tx_0\| \leq 1} |g(tx_0)| = \sup_{\|tx_0\|=1} |g(tx_0)| = \sup_{t \neq 0} \frac{|t| \|x_0\|^2}{\|tx_0\|} = \|x_0\|.$$

$\square$

**Corolário 2.1.3.** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado, para todo  $x \in E$  temos*

$$\|x\| = \sup_{f \in E^*} |\langle f, x \rangle|, \quad f \in E^* \quad \text{tal que} \quad \|f\|_{E^*} \leq 1.$$

**Demonstração:** Claramente,

$$\sup_{f \in E^*} |f(x)| \leq \|x\|.$$

Dado  $x \in E$  pelo corolário (2.1.2), existe  $f \in E^*$  tal que  $\|f\|_{E^*} = \|x\|_E$  e  $f(x) = \|x\|^2$ . Agora, defina  $f_1 = \|x\|^{-1} f$ ,  $x \neq 0$  então,  $\|f_1\|_{E^*} = \|x\|^{-1} \|f\|_{E^*} = 1$  e

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{\|x\|} = \|x\|.$$

$\square$

Agora, apresentaremos um resultado técnico importante em Análise Funcional, o Teorema da Aplicação Aberta, devido à Banach. Numa de suas consequências, ele dá condições suficientes para que uma aplicação linear entre espaços de Banach contínua e invertível tenha inversa contínua, em outras palavras, para que seja um homeomorfismo linear.



**Definição 2.1.3.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é dita aberta se a imagem de todo subconjunto aberto de  $X$  é também um subconjunto aberto de  $Y$ .*

**Teorema 2.1.2** (Aplicação Aberta). *Sejam  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  espaços de Banach e  $T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  aplicação linear contínua tal que  $\text{Im}T = \mathcal{B}_2$ , então  $T$  é uma aplicação aberta.*

**Demonstração:** Veja a referência [CR].

A seguir daremos a definição de Espaços de Frechét, e em seguida, a versão do teorema do gráfico fechado para espaços de Frechét.

**Definição 2.1.4.** *Seja  $E$  um espaço vetorial e  $\{p_k\}_{k \geq 1}$  uma família enumerável de seminormas em  $E$ . Definimos uma aplicação  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$  por,*

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x - y)}{1 + p_k(x - y)}. \quad (2.1.1)$$

O Lema a seguir afirma que a aplicação  $d$  é uma métrica.

**Lema 2.1.1.** *Seja  $E$  um espaço vetorial e  $\{p_k\}_{k \geq 1}$  uma família enumerável de seminormas que separa pontos então, a aplicação  $d$  definida em (2.1.1) é uma métrica em  $E$  invariante por translação. Além disso, o espaço métrico  $(E, d)$  é um EVT (Espaço Vetorial Topológico). Logo,  $x_n \rightarrow 0$  em  $E$  se, e somente se,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_k(x_n) = 0, \forall k \geq 1$ .*

**Demonstração:** Veja a referência [L] □

**Definição 2.1.5.** *Uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy em  $(E, d)$  se, e somente se,  $\forall k \geq 1, \forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon, k}$  tal que  $\forall m, n \geq N_{\epsilon, k}$  implica  $p_k(x_m - x_n) < \epsilon$ .*

**Definição 2.1.6.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial e  $\{p_k\}_{k \geq 1}$  uma família enumerável de seminormas que separa pontos então, quando o EVT,  $(E, d)$  é completo, dizemos que  $E$  é um espaço de Frechét.*

O próximo resultado nos dá uma versão do teorema do gráfico fechado para espaços de Frechét.

**Teorema 2.1.3.** *Sejam  $E$  um espaço de Frechét e  $F$  espaço de Banach,  $T : E \rightarrow F$  uma aplicação linear, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $T$  é contínua.
2. O gráfico  $G(T) = \{(x, Tx) : x \in E\}$  é fechado em  $E \times F$ .

**Demonstração:** Veja a referência [L] □

## 2.2 A Topologia fraca estrela

Seja  $E$  um espaço de Banach e  $E^*$  seu dual topológico dotado da norma dual

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |\langle f, x \rangle|, \quad x \in E \text{ tal que } \|x\| \leq 1.$$

Seja  $E^{**}$  o bidual de  $E$  dotado com a norma

$$\|\xi\| = \sup_{f \in E^*} |\langle \xi, f \rangle|, \quad f \in E^* \text{ tal que } \|f\| \leq 1.$$

Considere a injeção canônica

$$\begin{aligned} J : E &\rightarrow E^{**} \\ x &\mapsto J(x) : E^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ &f \mapsto \langle J(x), f \rangle = \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

1.  $J$  é linear.
2.  $J$  é isometria isto é,  $\|Jx\|_{E^{**}} = \|x\|_E$ .

Com efeito, pelo corolário (2.1.3)

$$\|Jx\|_{E^{**}} = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle Jx, f \rangle| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|.$$

**Definição 2.2.1.** Dizemos que  $E$  é reflexivo quando  $J(E) = E^{**}$ .

**Definição 2.2.2.** A topologia fraca estrela denotada por  $\sigma(E^*, E)$  é a topologia menos fina definida sobre  $E^*$  que torna contínuas todas as aplicações  $J(x)$  tal que  $x \in E$ .

**Proposição 2.2.1.** A topologia fraca estrela  $\sigma(E^*, E)$  é Hausdorff.

**Demonstração:** Veja a referência [B] □

**Teorema 2.2.1** (Banach-Alaoglu). O conjunto  $\mathcal{B}_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\| \leq 1\}$  é compacto na topologia fraca estrela  $\sigma(E^*, E)$ .

**Demonstração:** Veja a referência [B] □

## 2.3 Elementos da Teoria da Medida

**Definição 2.3.1.** *Seja  $X$  um conjunto não-vazio, uma álgebra de subconjuntos de  $X$  é uma família  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  satisfazendo as seguintes condições:*

- i) *Se  $E \in \mathcal{A}$  então  $E^c \in \mathcal{A}$*
- ii) *Se  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$  então  $\cup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{A}$ .*

Sejam  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$  desde que  $\cap_{j=1}^n E_j = (\cup_{j=1}^n E_j^c)^c$  temos que toda álgebra  $\mathcal{A}$  é fechada sobre intersecções finitas. Além disso, se  $\mathcal{A}$  é uma álgebra, então  $\emptyset \in \mathcal{A}$  e  $X \in \mathcal{A}$ , pois dado qualquer  $E \in \mathcal{A}$ ,  $\emptyset = E \cap E^c$  e  $X = E \cup E^c$ .

**Definição 2.3.2.** *Uma álgebra diz-se uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $M$  se também for fechada para uniões enumeráveis:*

- i) *Se  $E_j \in \mathcal{A}$ , para todo  $j = 1, 2, \dots$  então  $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$ .*

**Definição 2.3.3.** *Se  $\mathcal{A}$  é uma  $\sigma$ -álgebra então o par  $(X, \mathcal{A})$  é dito espaço mensurável.*

**Proposição 2.3.1.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra e suponha que ela seja fechada sobre uniões enumeráveis disjuntas então,  $\mathcal{A}$  é uma  $\sigma$ -álgebra.*

**Demonstração:** Seja  $\{E_j \mid j = 1, 2, \dots\} \subset \mathcal{A}$ . Defina

$$F_1 = E_1, F_2 = E_2 - E_1, F_3 = E_3 - (E_1 \cup E_2), \dots, F_k = E_k - \left[ \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \right].$$

Então  $F_k \in \mathcal{A}$  para todo  $k = 1, 2, \dots$ , são disjuntos e  $\cup_{j=1}^{\infty} E_j = \cup_{j=1}^{\infty} F_j$ . □

É trivial verificar que a intersecção de qualquer família de  $\sigma$ -álgebras em  $X$  é também uma  $\sigma$ -álgebra. Então se  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$  existe a menor  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$  contendo  $\mathcal{E}$ , de forma única, definida pela intersecção de todas as  $\sigma$ -álgebras que contêm  $\mathcal{E}$ . Dizemos então que  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{E}$ .

**Lema 2.3.1.** *Se  $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$ , então  $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$ .*

Se  $X$  é um espaço métrico, ou mais geralmente um espaço topológico então a  $\sigma$ -álgebra gerada pela família dos conjuntos abertos de  $X$  é chamada de  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $X$  e será denotada  $\mathcal{B}_X$ .

A  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbb{R}$  será utilizada com frequência a seguir. Ela pode ser gerada por um número variado de subconjuntos:

**Proposição 2.3.2.**  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  é gerada por cada um dos seguintes subconjuntos:

- a) os intervalos abertos:  $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) \mid a < b\}$
- b) os intervalos fechados:  $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] \mid a < b\}$
- c) os intervalos semi-abertos:  $\mathcal{E}_3 = \{(a, b] \mid a < b\}$  ou  $\mathcal{E}_4 = \{[a, b) \mid a < b\}$
- d) os raios abertos  $\mathcal{E}_5 = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$  ou  $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
- e) os raios fechados  $\mathcal{E}_7 = \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$  ou  $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ .

□

**Definição 2.3.4.** Uma coleção  $\mathcal{E}$  de subconjuntos de  $X$  é chamada sub-álgebra se as três condições seguintes ocorrem.

- i)  $\emptyset \in \mathcal{E}$
- ii) Se  $A, B \in \mathcal{E}$  então  $A \cap B \in \mathcal{E}$
- iii) Se  $A \in \mathcal{E}$  então  $X - A = \cup_{i=1}^n E_i$  com  $E_i \in \mathcal{E}$  dois-a-dois disjuntos.

Dizemos também que  $\mathcal{E}$  define uma família elementar de conjuntos.

**Exemplo 2.3.1:** A coleção de todos os subintervalos de  $[0, 1]$  da forma  $[0, b]$  e  $(a, b]$ , com  $0 \leq a < b \leq 1$  forma uma sub-álgebra. No exemplo acima note que para qualquer  $b \in (0, 1)$  temos  $\emptyset = [0, b) \cap [b, 1] \in \mathcal{E}$ .

**Proposição 2.3.3.** Seja  $\mathcal{E}$  uma semi-álgebra de conjuntos de  $X$  então a coleção  $\mathcal{A}$  dos subconjuntos de  $X$  que podem ser escritos da forma  $E = \cup_{j=1}^n E_j$  onde cada  $E_j \in \mathcal{E}$  são dois-a-dois disjuntos forma uma álgebra sobre  $X$ , denominada álgebra gerada por  $\mathcal{E}$ .

**Demonstração:** Seja  $\mathcal{A} = \{E = \cup_{j=1}^n E_j \mid E_j \in \mathcal{E} \text{ dois-a-dois disjuntos}\}$ . Por simplicidade de notação assumiremos que se  $E \in \mathcal{E}$  então  $E^c$  é a união disjunta de dois membros de  $\mathcal{E}$ ; a prova do caso geral é essencialmente a mesma. Sejam  $A, B \in \mathcal{E}$  como  $B^c = C_1 \cup C_2$  ( $C_1, C_2 \in \mathcal{E}$ , disjuntos) temos que  $A \cup B = (A - B) \cup B = (A \cap B^c) \cup B = (A \cap (C_1 \cup C_2)) \cup B = [(A \cap C_1) \cup (A \cap C_2)] \cup B$  sendo esta união disjunta de elementos de  $\mathcal{E}$ , logo  $A \cup B \in \mathcal{A}$ . Por indução segue que se  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$  então  $\cup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$ . Segue da hipótese de indução

que  $\cup_{j=1}^n A_j = (\cup_{j=1}^{n-1} A_j) \cup A_n = (\cup_{j=1}^m E_j) \cup A_n = \cup_{j=1}^m A_n \cup E_j$  sendo  $E_j \in \mathcal{E}$  dois-a-dois disjuntos. Como  $A_n \cup E_j = (A_n - E_j) \cup E_j = (A_n \cap C_j^1) \cup (A_n \cap C_j^2) \cup E_j$ . Logo,

$$\cup_{j=1}^n A_j = \cup_{j=1}^m [(A_n - E_j) \cup E_j] = (A_n \cap C_j^1) \cup (A_n \cap C_j^2) \cup E_j \in \mathcal{A}.$$

$\perp$  é portanto fechado sobre uniões finitas. Para ver que  $\mathcal{A}$  é fechado sobre complementar, suponha que  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$  são dois-a-dois disjuntos e  $E_j^c = B_j^1 \cup B_j^2$ , ( $B_j^1, B_j^2 \in \mathcal{E}$ , disjuntos). Então

$$\left( \bigcup_{j=1}^m E_j \right)^c = \bigcap_{j=1}^m (B_j^1 \cup B_j^2) = \bigcup \{ B_1^{k_1} \cap \dots \cap B_n^{k_n} \mid k_1, \dots, k_n = 1, 2 \} \in \mathcal{A}.$$

□

**Definição 2.3.5.** *Uma medida num espaço mensurável  $(M, \mathcal{B})$  é uma função  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$  que satisfaz:*

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- ii)  $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$  para quaisquer  $A_j \in \mathcal{B}$  disjuntos dois-a-dois.

A tripla  $(M, \mathcal{B}, \mu)$  é chamada *espaço de medida*. Quando  $\mu(M) = 1$  dizemos que  $\mu$  é uma medida de probabilidade e  $(M, \mathcal{B}, \mu)$  é um espaço de probabilidade.

A segunda propriedade na definição de medida é chamada  *$\sigma$ -aditividade*.

**Definição 2.3.6.** *Dizemos que a função  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$  é finitamente aditiva se:*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right) = \sum_{j=1}^N \mu(A_j)$$

para qualquer família finita  $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{B}$  de subconjuntos disjuntos dois-a-dois.

Note que toda medida  $\sigma$ -finita é, automaticamente, finitamente aditiva.

Se  $(M, \mathcal{B}, \mu)$  é um espaço de medida, um conjunto  $E \in \mathcal{B}$  tal que  $\mu(E) = 0$  é denominado conjunto nulo. Se  $\mu(E) = 0$  e  $F \subset E$  é tal que  $F \in \mathcal{B}$  então por monotonicidade  $\mu(F) = 0$ . Em geral dado  $E \in \mathcal{B}$  pode não ser verdade que  $F \in \mathcal{B}$ . Por exemplo considere a medida zero sobre a  $\sigma$ -álgebra  $\{\emptyset, M\}$ .

**Definição 2.3.7.** *Uma medida cujo domínio contém todos os subconjuntos de um conjunto nulo é chamada completa.*

As propriedades básicas de uma medida podem ser resumidas no seguinte teorema.

**Teorema 2.3.1.** *Seja  $(M, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida.*

- a) (Monotonicidade) *Se  $E, F \in \mathcal{B}$  e  $E \subset F$  então  $\mu(E) \leq \mu(F)$ .*
- b) (Subaditividade) *Se  $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$  então  $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ .*
- c) (Continuidade por baixo) *Se  $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$  e  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , então  $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j)$ .*
- d) (Continuidade por cima) *Se  $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$  e  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ , e  $\mu(E_n) < \infty$  para alguma  $n$ , então  $\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j)$ .*

**Demonstração:** (a) Se  $E \subset F$  então de  $F = E \cup (F - E)$  segue que  $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E) \geq \mu(E)$ .

(b) Seja  $F_1 = E_1$  e  $F_k = E_k - \left[ \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \right]$  para  $k > 1$ . Então os  $F_k$ 's são disjuntos e  $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ . Logo, por (a),

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

(c) Ponha  $E_0 = \emptyset$ , temos

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j - E_{j-1})\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j - E_{j-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(E_j - E_{j-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n). \end{aligned}$$

(d) Seja  $F_j = E_n - E_j$  para  $j > n$ : logo  $F_{n+1} \subset F_{n+2} \subset \dots$  e  $\mu(E_n) = \mu(F_j) + \mu(E_j)$  para  $j > n$ . Note que

$$\bigcup_{j=n+1}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=n+1}^{\infty} (E_n - E_j) = E_n - \left(\bigcap_{j=n+1}^{\infty} E_j\right) = E_n - \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right).$$

Decorre de (c) que

$$\mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \lim_{j \rightarrow \infty} (\mu(E_n) - \mu(E_j)).$$

Como  $\mu(E_n) < \infty$ , subtraindo em ambos os membros da expressão anterior obtemos o resultado desejado.  $\square$

**Definição 2.3.8.** *Seja  $X$  um conjunto não-vazio, uma função  $\mu^* : \mathcal{P} \rightarrow [0, \infty]$  é chamada medida exterior se:*

- (i)  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,
- (ii) se  $E \subset F$  então  $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ ,
- (iii) se  $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(M)$  então  $\mu^*(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j)$ .

**Proposição 2.3.4.** *Seja  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(M)$  e  $\rho : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $\emptyset \in \mathcal{E}$ ,  $X \in \mathcal{E}$ , e  $\rho(\emptyset) = 0$ . Para cada  $A \subset X$ , seja*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) \mid E_j \in \mathcal{E}, \quad e \quad A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}.$$

Então  $\mu^*$  é uma medida exterior.

**Definição 2.3.9.** *Se  $\mu^*$  é uma medida exterior sobre  $M$ , um conjunto  $A \subset X$  é chamado  $\mu^*$ -mensurável se*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \quad \text{para todo } E \subset M.$$

**Teorema 2.3.2** (Carathéodory). *Se  $\mu^*$  é uma medida exterior sobre  $M$ , a coleção  $\mathcal{M}$  dos conjuntos  $\mu^*$ -mensuráveis é uma  $\sigma$ -álgebra, e a restrição de  $\mu^*$  a  $\mathcal{M}$  é uma medida completa.*

**Demonstração:** Veja a referência [R] □

Aplicaremos o teorema de Carathéodory ao problema de estender medidas definidas sobre álgebras a  $\sigma$ -álgebras.

**Definição 2.3.10.** *Se  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  é uma álgebra, uma função  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  é chamada pré-medida se:*

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- (ii) Se  $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$  é uma coleção disjunta tal que  $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$  então  $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ .

Se  $\mu$  é uma pré-medida sobre  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  então induz uma medida exterior sobre  $X$ , a saber

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \mid E_j \in \mathcal{A}, \quad E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}. \quad (2.3.1)$$

**Proposição 2.3.5.** *Se  $\mu$  é uma pré-medida sobre  $\mathcal{A}$  e  $\mu^*$  definida como em (2.3.1), então*

- (i)  $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$ ,

(ii) cada conjunto  $E \in \mathcal{A}$  é  $\mu^*$ -mensurável.

**Demonstração:** Veja a referência [R] □

**Teorema 2.3.3.** *Seja  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  uma álgebra,  $\mu$  uma pré-medida sobre  $\mathcal{A}$ , e  $\mathcal{M}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{A}$ . Então existe uma medida  $\bar{\mu}$  sobre  $\mathcal{M}$  cuja restrição a  $\mathcal{A}$  é  $\mu$ . Mais precisamente,  $\bar{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{M}}$  onde  $\mu^*$  é dada por (2.3.1). Se  $\nu$  é outra medida definida sobre  $\mathcal{M}$  satisfazendo as mesmas condições sobre  $\bar{\mu}$ , então  $\nu(E) \leq \bar{\mu}(E)$  para todo  $E \in \mathcal{M}$ , com a igualdade ocorrendo quando  $\bar{\mu}(E) < \infty$ . Se  $\mu$  é  $\sigma$ -finita, então  $\bar{\mu}$  é a única extensão de  $\mu$  a uma medida sobre  $\mathcal{M}$ .*

**Demonstração:** Veja a referência [R] □

**Definição 2.3.11.** *Seja  $\mu$  uma medida de Borel em  $X$  e  $E \subset X$  boreliano. Dizemos que  $\mu$  é regular exterior sobre  $E$  se*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid E \subset U; U \text{ aberto}\} \quad (2.3.2)$$

e, regular interior se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E; K \text{ compacto}\} \quad (2.3.3)$$

e dizemos que  $\mu$  é regular se (2.3.2) e (2.3.3) ocorrem.

**Definição 2.3.12.** *Uma medida de Radon sobre  $X$ , é uma medida de Borel tal que:*

- i)  $\mu(K) < \infty, \forall K \subset X$  compacto.
- ii) Regular exterior sobre  $E \subset X, \forall E$  boreliano.
- iii) Regular interior sobre  $A \subset X, \forall A$  aberto.

$\mathfrak{R}$ , denotaremos o espaço das medidas de Radon sobre  $X$  por  $\mathfrak{R}(X)$ .

**Definição 2.3.13.** *Sejam  $U \subset X$  aberto,  $f \in C_c(X)$ , dizemos que  $f$  está subordinada a  $U$  ( $f \prec U$ ) se  $0 \leq f \leq 1$  e  $\text{supp } f \subset U$ .*

**Teorema 2.3.4** (Representação de Riesz). *Se  $I$  é um funcional linear positivo sobre  $C_c(X)$ , então existe uma única medida de Radon  $\mu$  sobre  $X$  tal que*

$$I(f) = \int_X f(x) d\mu; \forall f \in C_c(X).$$

Além disso,  $\mu$  satisfaz:



i)  $\mu(U) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X); f \prec U\}; \forall U \subset X$  aberto.

ii)  $\mu(K) = \inf\{I(f) : f \in C_c(X); f \geq \chi_K\}; \forall K \subset X$  compacto.

**Demonstração:** Veja a referência [F] □

**Definição 2.3.14.** *Seja  $M$  um espaço topológico, dizemos que  $M$  é localmente compacto Hausdorff, e denotamos LCH, se  $M$  for Hausdorff e dado  $x \in M$  existir uma vizinhança compacta  $V_x$  tal que  $V_x \subset M$ .*

**Definição 2.3.15.** *Seja  $f \in C(M)$ , dizemos que  $f$  vai à zero no infinito se, dado qualquer  $\epsilon > 0$  o conjunto  $\{x : |f(x)| \geq \epsilon\}$  é compacto. Denotaremos por  $C_0(M)$  o espaço das funções que tendem à zero no infinito.*

**Teorema 2.3.5.** *Seja  $M$  um espaço LCH. Para cada  $\mu \in \mathfrak{R}(M)$  o funcional linear tal que para cada  $f \in C_0(M)$ , associa o número complexo  $I_\mu(f) = \int_M f(x) d\mu(x)$  define um isomorfismo isométrico de  $\mathfrak{R}(M)$  em  $C_0(M)^*$ .*

**Demonstração:** Veja a referência [F] □

**Corolário 2.3.1.** *Se  $M$  é um espaço de Hausdorff compacto, então*

$$\mathfrak{R}(M) \cong C(M)^*$$

**Demonstração:** Veja a referência [F] □

## 2.4 A Topologia fraca estrela no espaço das medidas

Nesta seção vamos introduzir uma topologia importante no conjunto  $\mathcal{M}(M)$  das probabilidades borelianas do espaço  $M$  onde,  $M$  é um espaço métrico ou, mais geralmente, um espaço topológico, e tal topologia é chamada topologia fraca\*.

**Definição 2.4.1.** *Dada uma medida  $\mu \in \mathcal{M}(M)$ , um conjunto finito  $F = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  de funções contínuas  $\phi_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ , e um número  $\epsilon > 0$ , definimos*

$$V(\mu, F, \epsilon) = \left\{ \eta \in \mathcal{M}(M) : \left| \int \phi_j d\eta - \int \phi_j d\mu \right| < \epsilon, \forall \phi_j \in F \right\}.$$

*Os conjuntos  $V(\mu, F, \epsilon)$ , com  $F$  e  $\epsilon$  variáveis constituem uma base de vizinhanças da medida  $\mu$  na topologia fraca estrela.*

**Lema 2.4.1.** *Uma sequência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{M}(M)$  converge para uma medida  $\mu \in \mathcal{M}(M)$  na topologia fraca estrela se, e somente se,*

$$\int_M \phi(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int_M \phi(x) d\mu(x) \quad (2.4.1)$$

para toda função contínua  $\phi$ .

**Demonstração:** De fato, primeiramente mostremos a parte "somente se", seja  $\phi$  contínua e tome  $F = \{\phi\}$ . Por hipótese,  $\mu_n \rightarrow \mu$ , temos que dado um  $\epsilon > 0$  existe um índice  $n_0$  tal que, para todo  $n \geq n_0$   $\mu_n \in V(\mu, F, \epsilon)$ . Mas isto significa que,

$$\left| \int_M \phi(x) d\mu_n(x) - \int_M \phi(x) d\mu(x) \right| < \epsilon.$$

$\forall n \geq n_0$ , e isto significa que a sequência  $\int_M \phi(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int_M \phi(x) d\mu(x)$ .

A recíproca afirma que se  $\int_M \phi(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int_M \phi(x) d\mu(x)$ , para toda função contínua, então dado qualquer  $F$  e  $\epsilon$  existe um índice a partir do qual  $\mu_n \in V(\mu, F, \epsilon)$ . Para ver isso, escrevemos  $F = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  e, a hipótese garante que para cada  $1 \leq j \leq N$  existe  $n_j$  tal que para todo  $n \geq n_j$ ,

$$\left| \int_M \phi_j(x) d\mu_n(x) - \int_M \phi_j(x) d\mu(x) \right| < \epsilon.$$

Tomando  $n^0 = \max\{n_1, \dots, n_N\}$ , temos que  $\mu_n \in V(\mu, F, \epsilon)$  para  $n \geq n^0$ .  $\square$

Antes de mostrarmos as principais propriedades desta topologia, lembremos do seguinte resultado cuja prova pode ser encontrada em [R]. Como é usual, denotamos por  $C(M)$  o espaço das funções contínuas  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , munido da norma da convergência uniforme  $\|\phi_1 - \phi_2\| = \sup\{|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \mid x \in M\}$ .

**Proposição 2.4.1.** *Se  $M$  é um espaço métrico então  $C(M)$  tem subconjuntos enumeráveis densos.*

**Demonstração:** Veja a referência [R].

**Teorema 2.4.1.** *O espaço  $\mathcal{M}(M)$  munido com a topologia fraca estrela é metrizável.*

**Demonstração:** Mostraremos que existe uma distância  $d$  que gera a topologia fraca\* em  $\mathcal{M}(M)$ . De fato, segue da proposição (2.4.1) que podemos escolher um subconjunto enumerável  $\mathcal{F} = \{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  denso na bola unitária do espaço  $C^0(M)$ . Defina

$$d(\mu_1, \mu_2) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^N} \left| \int \phi_N d\mu_1 - \int \phi_N d\mu_2 \right|, \quad (2.4.2)$$

para qualquer par de medidas  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Note que  $d$  dada em (2.4.2) está bem definida pois, como as funções  $\phi$  estão na bola unitária de  $C^0(M)$  temos que,  $\sup|\phi| \leq 1$ . E além disso, as medidas  $\mu_1, \mu_2$  são de probabilidades o que garante a limitação do termo geral da soma por  $2^{1-N}$ . Isto garante que a série em (2.4.2) converge. O único passo não trivial na prova de que  $d$  é uma distância é mostrar que se  $d(\mu_1, \mu_2) = 0$  então,  $\mu_1 = \mu_2$ . De fato, a hipótese de que  $d(\mu_1, \mu_2) = 0$  significa que  $\int \phi_j d\mu_1 = \int \phi_j d\mu_2$ , para toda  $\phi_j \in \mathcal{F}$ . Agora, dada qualquer  $\phi$  na bola unitária de  $C^0(M)$  podemos encontrar uma sequência de elementos de  $\mathcal{F}$  convergindo uniformemente para  $\phi$ . Como consequência, temos que:

$$\int_M \phi d\mu_1 = \int_M \phi d\mu_2. \quad (2.4.3)$$

para toda  $\phi$  na bola unitária de  $C(M)$ . Como todo elemento de  $C(M)$  tem algum múltiplo na bola unitária, isto implica que a igualdade (2.4.3) é verdadeira para toda função contínua  $\phi$ . Isso quer dizer que  $\mu_1 = \mu_2$ . Para provar que  $d$  gera a topologia fraca\*, devemos mostrar que toda bola  $B(\mu, \delta) = \{\eta \in \mathcal{M}(M) : d(\mu, \eta) < \delta\}$  contém alguma vizinhança  $V(\mu, \mathcal{F}, \epsilon)$  e reciprocamente. Dado  $\delta > 0$  fixemos  $P \geq 1$  suficientemente grande para que

$$\sum_{N=P}^{\infty} 2^{-N} < \frac{\delta}{2}.$$

e consideremos  $F = \{\phi_1, \dots, \phi_P\}$  formado pelos primeiros  $P$  elementos do subconjunto enumerável denso. Além disso, consideremos  $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ . Afirmamos que  $V(\mu, F, \epsilon) \subset B(\mu, \delta)$ . De fato,  $\nu \in V(\mu, F, \epsilon)$  implica que  $|\int \phi_N d\mu - \int \phi_N d\nu| < \epsilon$ , para todo  $1 \leq N \leq P$ , o que implica

$$\sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \left| \int \phi_N d\mu - \int \phi_N d\nu \right| < \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \epsilon + \sum_{N=1}^{\infty} 2^{2-N} < \delta.$$

Reciprocamente, dado  $F = \{\psi_1, \dots, \psi_P\}$  e  $\epsilon > 0$ , selecionemos elementos  $\phi_{N_1}, \dots, \phi_{N_P}$  distintos de  $\mathcal{F}$  tais que  $\|\phi_{N_j} - \psi_j\| < \frac{\epsilon}{4}$ , para todo  $1 \leq j \leq P$ . Fixemos  $\delta > 0$  suficientemente pequeno para que  $2^{N_j} \delta < \frac{\epsilon}{4}$  para todo  $1 \leq j \leq P$ . Afirmamos que  $B(\mu, \delta) \subset V(\mu, \mathcal{F}, \epsilon)$ . De fato,  $\nu \in B(\mu, \delta)$  implica

$$\sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \left| \int \phi_N d\mu - \int \phi_N d\nu \right| < \delta,$$

o que implica  $|\int \phi_{N_j} d\mu - \int \phi_{N_j} d\nu| < 2^{N_j} \delta$ , para todo  $1 \leq j \leq P$ , o que implica

$$\left| \int \psi_j d\mu - \int \psi_j d\nu \right| < 2^{N_j} \delta + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

para todo  $1 \leq N \leq P$ , e isto prova nossa afirmação.  $\square$

Para demonstrarmos o próximo teorema, que nos diz que, o espaço  $\mathcal{M}(M)$  munido com a topologia fraca estrela é compacto, faremos uso de um resultado clássico, que diz que as integrais são os únicos operadores lineares positivos no espaço das funções contínuas. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [R].

**Teorema 2.4.2** (Riesz-Markov). *Seja  $\Phi : C(M) \rightarrow \mathbb{R}$  qualquer operador linear positivo. Então existe uma única medida boreliana  $\mu$  em  $M$  tal que*

$$\Phi(\varphi) = \int \varphi d\mu. \quad (2.4.4)$$

para toda  $\varphi \in C(M)$ .

**Demonstração:** Veja a referência [R].

**Teorema 2.4.3.** *O espaço  $\mathcal{M}(M)$  munido com a topologia fraca estrela é compacto.*

**Demonstração:** Como já sabemos que o espaço  $\mathcal{M}(M)$  é metrizável, para provar que  $\mathcal{M}(M)$  é compacto, basta provar que toda sequência  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  em  $\mathcal{M}(M)$  admite alguma subsequência convergente na topologia fraca estrela. De fato, seja  $\mathcal{F} = \{\phi_N : N \in \mathbb{N}\}$  um subconjunto enumerável denso na bola unitária de  $C^0(M)$ . Para cada  $N \in \mathbb{N}$ , a sequência de números reais  $(\int \phi_N d\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é limitada por 1. Portanto, para cada  $N \in \mathbb{N}$  existe uma sequência  $(k_j^N)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que,  $\int \phi_N d\mu_{k_j^N}$  converge para algum número  $\Phi_N \in \mathbb{R}$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Além disso, cada sequência  $(k_j^{N+1})_{j \in \mathbb{N}}$  pode ser escolhida como subsequência da anterior  $(k_j^N)_{j \in \mathbb{N}}$ . Definamos  $\ell_j = k_j^j$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Por construção, a menos de um conjunto finito de termos,  $(\ell_j)_{j \in \mathbb{N}}$  é uma subsequência de cada uma das  $(k_j^N)_{j \in \mathbb{N}}$ . Logo,

$$\int \phi_N d\mu_{\ell_j} \rightarrow \Phi_N \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N}.$$

Daqui se deduz facilmente que

$$\Phi(\varphi) = \lim_j \int \varphi d\mu_{\ell_j}, \quad (2.4.5)$$

existe, para toda função  $\varphi \in C(M)$ . De fato, suponha primeiro que  $\varphi$  está na bola unitária de  $C(M)$ . Dado qualquer  $\epsilon > 0$  podemos encontrar  $\phi_N \in \mathcal{F}$  tal que  $\|\varphi - \phi_N\| \leq \epsilon$ . Então,

$$\left| \int \varphi d\mu_{\ell_j} - \int \phi_N d\mu_{\ell_j} \right| \leq \epsilon.$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Como  $\int \phi_N d\mu_{\ell_j} \rightarrow \Phi_N$ , segue que

$$\limsup_j \int \varphi d\mu_{\ell_j} - \liminf_j \int \varphi d\mu_{\ell_j} \leq 2\epsilon.$$

Como  $\epsilon$  é arbitrário, concluímos que  $\lim_j \int \varphi d\mu_{\ell_j}$  existe. Isto prova (2.4.5) quando a função está na bola unitária. O caso geral reduz-se imediatamente a esse, substituindo  $\varphi$  por  $\varphi/\|\varphi\|$ . Finalmente, vemos que para toda função  $\varphi \in C^0(M)$  positiva em todo ponto,  $\Phi(\varphi) \geq \min \varphi > 0$ . Além disso,  $\Phi(1) = 1$  logo, pelo teorema de Riesz-Markov (2.4.2), existe alguma probabilidade boreliana  $\mu$  em  $M$  tal que  $\Phi(\varphi) = \int_M \varphi d\mu$  para toda função contínua  $\varphi$ . Reescrevendo a igualdade em (2.4.5) temos

$$\int \varphi d\mu = \lim_j \int \varphi d\mu_{\ell_j} \quad \text{para toda } \varphi \in C(M). \quad (2.4.6)$$

Logo, graças ao Lema 2.4.1 concluímos que a subsequência  $(\mu_{\ell_j})_{j \in \mathbb{N}}$  converge para  $\mu$  na topologia fraca estrela.  $\square$



# Capítulo 3

## Análise de Fourier

### 3.1 Coeficientes de Fourier

O toro  $N$ -dimensional é definido pelo seguinte produto cartesiano

$$\mathbb{T}^N = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{N\text{-vezes}} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Um domínio fundamental para  $\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$  é o cubo unitário

$$C(N) = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid 0 \leq x_i \leq 1 \text{ para } i = 1, \dots, N\}.$$

Para que  $C(N)$  de fato, represente o toro  $\mathbb{T}^N$  devemos identificar as faces opostas de  $C(N)$ , assim o ponto  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N)$  é identificado com o ponto  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_N)$  para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$  fixo, uma vez que ambos representam o mesmo elemento no grupo quociente.

A correspondência  $C(N) \ni (x_1, \dots, x_N) \mapsto (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_N})$  estabelece um isomorfismo.

Funções definidas no toro  $\mathbb{T}^N$  são funções  $f$  definidas em  $\mathbb{R}^N$  que satisfazem  $f(x + m) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}^N$  e  $m \in \mathbb{Z}^N$ . Tais funções são ditas periódicas de período 1 em cada coordenada. Usaremos a medida de Haar no toro  $\mathbb{T}^N$ , isto é, a restrição da medida de Lebesgue ao domínio fundamental  $[0, 1]^N$  e denotaremos tal medida simplesmente por  $dx$ , enquanto a medida de Lebesgue de um subconjunto  $A \subseteq \mathbb{T}^N$  denotaremos por  $|A|$ . A invariância por translação da medida de Lebesgue e a periodicidade das funções definidas em  $\mathbb{T}^N$  implicam que para toda função mensurável  $f$  definida em  $\mathbb{T}^N$  tem-se

$$\int_{\mathbb{T}^N} f(x) dx = \int_{[-1/2, 1/2]^N} f(x) dx = \int_{[a_1, a_1+1] \times \dots \times [a_N, a_N+1]} f(x) dx,$$

para quaisquer números reais  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ .

Os elementos de  $\mathbb{Z}^N$  são denotados por  $k = (k_1, \dots, k_N)$ . Dado  $k \in \mathbb{Z}^N$  definimos o seu comprimento por  $|k| = (k_1^2 + \dots + k_N^2)^{1/2}$ . Para cada par de pontos  $x, y \in \mathbb{R}^N$  definimos o produto escalar usual  $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$ .

**Definição 3.1.1.** Dizemos que uma função  $f : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{C}$  mensurável Lebesgue pertence ao espaço  $L^p(\mathbb{T}^N)$ ,  $0 < p < \infty$  se

$$\int_{\mathbb{T}^N} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Além disso,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p = \int_{\mathbb{T}^N} |f(x)|^p dx$$

define uma norma no espaço  $L^p(\mathbb{T}^N)$  quando  $1 \leq p < \infty$ .

**Definição 3.1.2.** Dizemos que uma função  $f : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{C}$  mensurável Lebesgue pertence ao espaço  $L^\infty(\mathbb{T}^N)$ , se existir  $0 < B < \infty$  tal que a medida de Lebesgue do conjunto  $\{x \in \mathbb{T}^N : |f(x)| > B\}$  é nula, ou seja,

$$|\{x \in \mathbb{T}^N : |f(x)| > B\}| = 0.$$

Além disso, definimos a norma  $\|f\|_{L^\infty} = \inf \{B \geq 0 : |\{x \in \mathbb{T}^N : |f(x)| > B\}| = 0\}$ .

**Definição 3.1.3.** Denotamos por  $\ell^p(\mathbb{Z}^N)$ ,  $0 \leq p < \infty$  o espaço das seqüências  $a = \{a_m \mid m \in \mathbb{Z}^N\}$  de números complexos tais que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^N} |a_m|^p < \infty.$$

**Definição 3.1.4.** Denotamos por  $\ell^\infty(\mathbb{Z}^N)$  o espaço das seqüências  $a = \{a_m \mid m \in \mathbb{Z}^N\}$  de números complexos tais que

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}^N} |a_m| < \infty.$$

**Definição 3.1.5.** Denotamos o espaço das função 1-periódicas,  $m$ -vezes continuamente diferenciáveis por  $C^m(\mathbb{T}^N)$ . E definimos o espaço das funções testes no toro  $\mathbb{T}^N$  por

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) := \bigcap_{m \in \mathbb{Z}_+} C^m(\mathbb{T}^N).$$

Para cada  $k \in \mathbb{Z}_+$  a aplicação  $p_k(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N)}$  define uma semi-norma de  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$  e o espaço  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$  munido com a topologia induzida por esta família enumerável de semi-normas é um espaço de Frechét.

Vamos definir agora os coeficientes de Fourier de uma função  $f \in L^1(\mathbb{T}^N)$ .



**Definição 3.1.6.** *Sejam  $f \in L^1(\mathbb{T}^N)$  uma função a valores complexos e  $\xi \in \mathbb{Z}^N$ , definimos o  $\xi$ -ésimo coeficiente de Fourier da função  $f$  por*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^N} f(x) e^{-i2\pi\xi \cdot x} dx \quad (3.1.1)$$

Note que (3.1.1) está bem definida pois, a função  $x \mapsto e^{-i2\pi\xi \cdot x}$  é 1-periódica em cada coordenada.

**Proposição 3.1.1.** *Se  $f \in L^1(\mathbb{T}^N)$  então,  $\{\widehat{f}(\xi)\}_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^N)$ .*

**Demonstração:** De fato,

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^\infty} = \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |\widehat{f}(\xi)| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \int_{\mathbb{T}^N} |e^{-2\pi i x \cdot \xi}| |f(x)| dx = \|f\|_{L^1} < \infty.$$

□

**Definição 3.1.7.** *Seja  $f \in L^1(\mathbb{T}^N)$ , definimos a série de Fourier da função  $f$  como sendo*

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(\xi) e^{i2\pi\xi \cdot x}. \quad (3.1.2)$$

Não está claro no presente momento em que sentido a série (3.1.2) converge. O estudo da convergência da série (3.1.2) será de principal importância nesta seção. Antes de entrarmos na questão da convergência, daremos algumas propriedades elementares dos coeficientes de Fourier.

Denotemos por  $\bar{f}$  o conjugado da função  $f$ , por  $\tilde{f}(x) = f(-x)$  e por  $\tau^y f(x) = f(x - y)$ . Deste modo escrevemos abaixo as propriedades fundamentais da transformada de Fourier.

**Proposição 3.1.2.** *Sejam  $f, g \in L^1(\mathbb{T}^N)$ . Então para todo  $k \in \mathbb{Z}^N$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $y \in \mathbb{T}^N$  e para todo múltiplo  $\alpha \in \mathbb{Z}^N$  as seguintes propriedades são verdadeiras:*

$$1. \widehat{f + g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi),$$

$$2. \widehat{\lambda f}(\xi) = \lambda \widehat{f}(\xi),$$

$$3. \widehat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)},$$

$$4. \widehat{\tilde{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi),$$

$$5. \widehat{\tau^y(f)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{-i2\pi\xi \cdot y},$$

$$6. \widehat{e^{i2\pi k(\cdot)} f}(\xi) = \widehat{f}(\xi - k),$$

$$7. \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{T}^N} f(x) dx,$$

$$8. \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^N)},$$

$$9. \widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

$$10. \widehat{\partial^\alpha f}(k) = (2\pi i k)^\alpha \widehat{f}(k).$$

**Demonstração:** Ver [G]. □

**Definição 3.1.8.** Um polinômio trigonométrico em  $\mathbb{T}^N$  é uma função da forma

$$P(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i m \cdot x} \quad (3.1.3)$$

onde  $\{a_m \mid m \in \mathbb{Z}^N\}$  é uma sequência finitamente suportada em  $\mathbb{Z}^N$  isto é,  $a_m = 0$  apenas para um número finito de elementos  $m \in \mathbb{Z}^N$ . O grau de  $P$  é o maior valor de  $|q_1| + \dots + |q_N|$  tal que  $a_q \neq 0$ , onde  $q = (q_1, \dots, q_N)$ . Denotamos por  $\mathcal{P}$  o espaço formado pelos polinômios trigonométricos.

**Proposição 3.1.3.** Os polinômios trigonométricos são densos em  $L^p(\mathbb{T}^N)$  para todo  $1 \leq p < \infty$ .

**Demonstração:** Veja a referência [G] □

**Proposição 3.1.4.** Se  $f, g \in L^1(\mathbb{T}^N)$  satisfazem  $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$  para todo  $\xi \in \mathbb{Z}^N$  então  $f = g$  em quase todo ponto.

**Demonstração:** Veja a referência [G] □

**Proposição 3.1.5** (Fórmula de Inversão). Suponha que  $f \in L^1(\mathbb{T}^N)$  e que

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |\widehat{f}(\xi)| < \infty. \quad (3.1.4)$$

Então,

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} \quad (3.1.5)$$

para quase todo  $x \in \mathbb{T}^N$ . Deste modo, para quase todos os pontos de  $\mathbb{T}^N$ ,  $f$  coincide com uma função contínua.

**Demonstração:** Veja a referência [G] □

**Definição 3.1.9.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert separável dotado de um produto interno complexo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dizemos que um subconjunto  $E \subset H$  forma um sistema ortonormal completo se*

- (i)  $\langle f, g \rangle = 0$  para toda  $f, g \in E$  tais que  $f \neq g$ .
- (ii)  $\langle f, f \rangle = 1$  para toda  $f \in E$ .
- (iii) Se  $g \in H$  é tal que  $\langle f, g \rangle = 0$  para toda  $f \in E$  então  $g = 0$ .

**Proposição 3.1.6.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert separável e seja  $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  um sistema ortonormal de  $H$ . Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i)  $\{\varphi_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$  é um sistema ortonormal completo.

(ii) Para cada  $f \in H$

$$\|f\|_H^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_m \rangle|^2. \quad (3.1.6)$$

(iii) Para cada  $f \in H$

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} \langle f, \varphi_m \rangle \varphi_m \quad (3.1.7)$$

com o limite ocorrendo na norma de  $H$ .

**Demonstração:** Veja a referência [G] □

Consideremos no espaço de Hilbert complexo  $L^2(\mathbb{T}^N, dx)$  o produto interno usual

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}^N} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (3.1.8)$$

Para cada  $m \in \mathbb{Z}^N$  consideremos a função  $\phi_m(y) = e^{2\pi i m \cdot y}$ . Segue da teoria de séries de Fourier que a coleção  $\{\phi_m(y) \mid m \in \mathbb{Z}^N\}$  define um sistema ortonormal completo de  $L^2(\mathbb{T}^N, dx)$ . Usaremos a seguinte notação  $\langle f, \phi_m \rangle = \widehat{f}(m)$ .

**Proposição 3.1.7.** *Para cada  $f, g \in L^2(\mathbb{T}^N, dx)$  temos que*

(i) (*Identidade de Parseval.*)

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(m)|^2.$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{|m| \leq n} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x}\|_{L^2(\mathbb{T}^N)} = 0.$$

(iii) (*Identidade de Plancherel.*)

$$\int_{\mathbb{T}^N} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{|m| \leq N} \widehat{f}(m) \widehat{g}(m).$$

(iv) A aplicação  $f \mapsto \{\widehat{f}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^N}$  é uma isometria de  $L^2(\mathbb{T}^N)$  sobre  $\ell^2$ .

**Teorema 3.1.1** (Paley-Wiener).  $h \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  se, e somente se, dado qualquer  $N \in \mathbb{Z}_+$  existe uma constante positiva  $C_N$  tal que

$$|\widehat{h}(m)| \leq \frac{C_N}{(1 + |m|)^N}, \forall m \in \mathbb{Z}^N. \quad (3.1.9)$$

**Demonstração:** Veja a referência [RZ] □

**Definição 3.1.10.** Seja  $\{c_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$  uma sequência de números complexos. Dizemos que é rapidamente decrescente se para cada  $N \in \mathbb{N}$  dado, existir  $C = C(N) > 0$  tal que,

$$|c_m| \leq C|m|^{-N}, \quad \text{for all } m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

**Teorema 3.1.2.** Seja  $\{c_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$  uma sequência rapidamente decrescente. Então,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e^{2\pi i m \cdot x}$$

converge em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$  e se  $f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e^{2\pi i m \cdot x}$  então

$$c_m = \int_{\mathbb{T}^N} f(x) e^{-2\pi i x \cdot m} dx,$$

representa o  $m$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $f$ .

**Demonstração:** Veja a referência [RZ] □

Por outro lado temos o seguinte resultado

**Teorema 3.1.3.** Seja  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ . Então,

$$\widehat{f}(m) = \int_{\mathbb{T}^N} f(x) e^{-2\pi i m \cdot x} dx,$$

forma uma sequência rapidamente decrescente de números complexos e além disso,

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x}$$

converge em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ .

**Demonstração:** Note que para todo  $N > 0$  existe  $C_N > 0$  tal que

$$|\widehat{f}(m)| \leq \frac{C_N}{(1 + |m|^2)^N} \quad (3.1.10)$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}^N$ . Graças a estimativa (3.1.10) vemos que a série de Fourier

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x}$$

converge uniformemente e absolutamente para uma função contínua  $\Phi$ . Observe que  $\widehat{f}(m) = \widehat{\Phi}(m)$  para cada  $m \in \mathbb{Z}^N$  pois, pelo Teorema da convergência uniforme

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}(m) &= \int_{\mathbb{T}^N} e^{-2\pi i x \cdot m} \Phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} e^{-2\pi i x \cdot m} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\zeta| \leq k} \widehat{f}(\zeta) e^{2\pi i x \cdot \zeta} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\zeta| \leq k} \widehat{f}(\zeta) \int_{\mathbb{T}^N} e^{2\pi i x \cdot (\zeta - m)} dx = \widehat{f}(m). \end{aligned}$$

Mostraremos a seguir que  $f = \Phi$ . De fato, seja  $h = f - \Phi$ , e seja  $t(x) = \sum_{|m| \leq M} a_m e^{2\pi i m \cdot x}$  um polinômio trigonométrico. Como,  $f$  e  $\Phi$  possuem o mesmo coeficiente de Fourier segue que,

$$\int_{\mathbb{T}^N} h(x) t(x) dx = 0. \quad (3.1.11)$$

Agora, se  $\epsilon > 0$  é dado, então pelo teorema de Stone-Weierstrass existe um polinômio trigonométrico  $t \in \mathcal{P}$  tal que  $\|h - t\|_\infty < \epsilon$ . Então, graças a (3.1.11) obtemos,

$$\|h\|_{L^2}^2 = \left| \int_{\mathbb{T}^N} h(x) \overline{h(x)} dx \right| = \left| \int_{\mathbb{T}^N} h(x) \left( \overline{h(x) - t(x)} \right) dx \right|. \quad (3.1.12)$$

Por Cauchy-Schwartz temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}^N} h(x) \left( \overline{h(x) - t(x)} \right) dx \right| &\leq \|h\|_{L^2} \|h - t\|_{L^2} \\ &\leq \|h\|_{L^2} \|h - t\|_{L^\infty} \\ &\leq \epsilon^2 \|h\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|h\|_{L^2}^2 \leq \epsilon^2 \|h\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon^4}{2} + \frac{1}{2} \|h\|_{L^2}^2.$$

Assim temos que

$$\|h\|_{L^2} \leq \epsilon^2$$

Conseqüentemente,  $\|h\| \leq \epsilon$ . Mas, como  $\epsilon$  foi escolhido de forma arbitrária e  $h$  é contínuo concluímos que  $h = 0$ .  $\square$

## 3.2 Distribuições Periódicas

Definiremos a seguir o espaço das funções teste sobre um aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ .

**Definição 3.2.1.** Denotamos o espaço das funções  $u \in C^\infty(\Omega)$  com suporte

$$S(u) \doteq \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}$$

compacto, por  $C_c^\infty(\Omega)$ , e os elementos deste espaço são chamados de funções teste.

Podemos definir uma topologia no espaço  $C_c^\infty(\Omega)$  cuja convergência coincide com a dada a seguir

**Definição 3.2.2.** Uma sequência  $(\phi_j)$  de funções em  $C_c^\infty(\Omega)$  converge a zero em  $C_c^\infty(\Omega)$  se,

1. Existe um compacto  $K \subset \Omega$  tal que  $S(\phi_j) \subset K, \forall j \in \mathbb{N}$ .
2. Para todo inteiro positivo  $m$ , as derivadas de ordem  $m$  das funções  $\phi_j$  convergem uniformemente a zero quando  $j \rightarrow \infty$ .

A seguir daremos a definição de distribuição sobre um aberto  $\Omega$ .

**Definição 3.2.3.** Uma distribuição  $u$  em  $\Omega$  é uma forma linear  $u : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que, para cada compacto  $K \subset \Omega$ , existem constantes  $C > 0$  e  $k > 0$  tais que,

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \phi|, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (3.2.1)$$

e denotamos por  $\mathcal{D}'(\Omega)$  o conjunto de todas as distribuições em  $\Omega$ .

**Exemplo 3.2.2:** Se  $x_0 \in \Omega$  então,  $\langle u, \phi \rangle = \partial^\alpha \phi(x_0)$  define uma distribuição em  $\Omega$ .

**Demonstração:** De fato, esta afirmação segue da seguinte estimativa,  $|\langle u, \phi \rangle| = |\partial^\alpha \phi(x_0)| \leq \sup |\partial^\alpha \phi(x)|, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

**Observação 3.2.1:** Entre as distribuições do exemplo 3.2.2, merece destaque a Delta de Dirac no ponto  $x_0 : \delta_{x_0}(\phi) \doteq \phi(x_0), \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

**Definição 3.2.4.** Uma Distribuição periódica é um funcional linear e contínuo sobre  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$  ou seja, satisfaz as seguintes condições:

$$1 . \langle u, \phi_1 + \lambda \phi_2 \rangle = \langle u, \phi_1 \rangle + \lambda \langle u, \phi_2 \rangle$$

2 . Se  $\phi_j \rightarrow 0$  em  $C^\infty(\mathbb{T}^N) \Rightarrow \langle u, \phi_j \rangle \rightarrow 0$  em  $\mathbb{C}$

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $u$  um funcional linear em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ . As seguintes condições são equivalentes:*

1.  $u$  é contínuo.

2. Existe uma constante  $C > 0$ , um inteiro positivo  $m$  tais que

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \phi|, \forall \phi \in C^\infty(\mathbb{T}^N). \quad (3.2.2)$$

**Demonstração:** Veja a referência [H] □

Como consequência imediata do teorema 3.2.1 temos os seguinte exemplos de distribuições.

**Exemplo 3.2.3:** Se  $f \in L^1(\mathbb{T}^N)$  então, a aplicação  $T_f(\phi) = \int_{\mathbb{T}^N} f\phi dx$  define uma distribuição.

**Exemplo 3.2.4:** Se  $\mu \in \mathcal{M}(M)$  então,  $\langle \mu, \phi \rangle = \int_M \phi d\mu$  define uma distribuição de ordem 0.

Seguem as definições de operador globalmente hipoeĺıptico, e resolúvel.

**Definição 3.2.5.** *Seja*

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha \quad (3.2.3)$$

sendo  $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  onde

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N} = \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^{\alpha_N},$$

um operador diferencial parcial de ordem  $m$ . Dizemos que  $P$  é globalmente hipoeĺıptico no toro  $\mathbb{T}^N$  se as condições,  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  e  $Pu \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  implicarem que  $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ , isto é, existe uma função  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  tal que  $T_f = u$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ .

**Definição 3.2.6.** *Um operador diferencial parcial linear de ordem  $m$ ,*

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

é dito Resolúvel em  $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  se, e somente se, dado  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ ,  $\exists u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  tal que

$$Pu = f \quad (3.2.4)$$

em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ .

**Definição 3.2.7.** *Seja  $P : C^\infty(\mathbb{T}^N) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^N)$  um operador linear e contínuo, definimos o operador transposto formal de  $P$ , o operador linear contínuo  $P' : C^\infty(\mathbb{T}^N) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^N)$  tal que*

$$\int_{\mathbb{T}^N} (P\phi)\psi \, dx = \int_{\mathbb{T}^N} \phi(P'\psi) \, dx, \quad \forall \phi, \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N). \quad (3.2.5)$$

**Observação 3.2.2:** Neste caso, é possível estender o operador  $P$  a um operador  $P^* : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ . Com efeito, basta definir  $P^*$  da seguinte forma,

$$\langle P^*u, \psi \rangle = \langle u, P'\psi \rangle, \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N), \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N). \quad (3.2.6)$$

Veja a referência [H].

### 3.3 Espaços de Sobolev

**Definição 3.3.1.** *Seja  $s \in \mathbb{R}$ . Definimos o espaço de Sobolev  $H^s(\mathbb{T}^N)$  como sendo o espaço*

$$H^s(\mathbb{T}^N) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N) \mid (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}(\xi) \in \ell^2(\mathbb{Z}^N) \right\}. \quad (3.3.1)$$

**Proposição 3.3.1.** *Seja  $s \in \mathbb{R}$ . O espaço  $H^s(\mathbb{T}^N)$  munido com o produto interno*

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{T}^N)} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)}. \quad (3.3.2)$$

*é um espaço de Hilbert. Assim, definimos a norma Sobolev de  $u$  por*

$$\|u\|_s = \left( \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.3)$$

**Lema 3.3.1.** *Seja  $s$  um inteiro não-negativo. Então, existem constantes  $c$  e  $c'$ , dependendo apenas de  $s$  e  $N$ , tais que*

$$c \|\varphi\|_s \leq \sum_{|\alpha|=0}^s \|D^\alpha \varphi\| \leq c' \|\varphi\|_s. \quad (3.3.4)$$

*para todo  $\varphi \in \mathcal{P}$  polinômio trigonométrico.*

**Demonstração:** Veja a referência [W]

**Lema 3.3.2.** *Se  $t < s$ , então  $\|u\|_t \leq \|u\|_s$ , isto é,  $H^s \subset H^t$ .*



**Demonstração:** Veja a referência [W]

**Lema 3.3.3.**  $\mathcal{P}$  é um subespaço denso de  $H^s$ , para cada  $s$ .

**Demonstração:** Veja a referência [W]

**Lema 3.3.4** (Desigualdade de Schwartz). Se  $u \in H^{s+t}$  e  $v \in H^{s-t}$ , então

$$|\langle u, v \rangle_s| \leq \|u\|_{s+t} \|v\|_{s-t}. \quad (3.3.5)$$

**Demonstração:** Veja a referência [W]

**Lema 3.3.5.** Para cada  $s \in \mathbb{Z}$ , o operador  $D^\alpha$  é um operador limitado de  $H^{s+|\alpha|}$  em  $H^s$ , ou seja,

$$\|D^\alpha u\|_s \leq \|u\|_{s+|\alpha|}. \quad (3.3.6)$$

para todo  $u \in H^{s+|\alpha|}$ .

**Demonstração:** Veja a referência [W]

**Lema 3.3.6** (Sobolev). Se  $t \geq [\frac{N}{2}]$  onde,  $[\frac{N}{2}]$  denota o maior inteiro menor ou igual a  $\frac{N}{2}$ , e  $u \in H^t$ , então a série  $\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi}$  converge uniformemente.

**Demonstração:** Veja a referência [W]

**Lema 3.3.7** (Rellich). Seja  $\{u_j\}$  uma sequência de elementos de  $H^t$  tais que  $\|u_j\|_t \leq 1$ . Se  $s < t$ , então existe uma subsequência de  $\{u_j\}$  convergente em  $H^s$ .

**Demonstração:** Por hipótese,

$$\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t |\widehat{u}_j(\xi)|^2 \leq 1. \quad (3.3.7)$$

Para cada  $\xi$  fixo, os elementos da sequência  $\left\{ |(1 + |\xi|^2)^{\frac{t}{2}} \widehat{u}_j(\xi)| \right\}$  são limitados por 1, e portanto, a sequência  $\left\{ |(1 + |\xi|^2)^{\frac{t}{2}} \widehat{u}_j(\xi)| \right\}$  tem uma subsequência convergente em  $\mathbb{C}^N$ . Pelo processo usual da diagonal, podemos escolher uma subsequência  $\{u_{i_j}\}$  tal que a sequência  $(1 + |\xi|^2)^{\frac{t}{2}} \widehat{u}_{i_j}(\xi)$  converge em  $C^N$  para cada  $\xi$  fixo. Afirmamos que a sequência  $\{u_{i_j}\}$  é uma

sequência de Cauchy, e portanto convergente, em  $H^s$  se  $s < t$ . De fato, seja  $\epsilon > 0$  dado. Temos que,

$$\|u_{i_j} - u_{i_k}\|_s^2 = \sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^{s-t} (1 + |\xi|^2)^t |\widehat{u}_{i_j}(\xi) - \widehat{u}_{i_k}(\xi)|^2 \quad (3.3.8)$$

$$+ \sum_{|\xi| \geq N} (1 + |\xi|^2)^{s-t} (1 + |\xi|^2)^t |\widehat{u}_{i_j}(\xi) - \widehat{u}_{i_k}(\xi)|^2 \quad (3.3.9)$$

A segunda soma em (3.3.8) é limitada por

$$N^{2(s-t)} \sum_{|\xi| \geq N} (1 + |\xi|^2)^t (|\widehat{u}_{i_j}(\xi)|^2 + 2|\widehat{u}_{i_j}(\xi)||\widehat{u}_{i_k}(\xi)| + |\widehat{u}_{i_k}(\xi)|^2). \quad (3.3.10)$$

Segue de (3.3.7) que a expressão em (3.3.10) fica limitada por  $4N^{2(s-t)}$ . Como  $s - t < 0$ ,  $4N^{2(s-t)} < \frac{\epsilon}{2}$  para  $N$  suficientemente grande, tome  $N = N_0$  grande. A primeira expressão em (3.3.8) é então limitada por

$$\sum_{|\xi| < N_0} (1 + |\xi|^2)^t |\widehat{u}_{i_j}(\xi) - \widehat{u}_{i_k}(\xi)|^2.$$

Como esta soma consiste de um número finito de termos, e a sequência  $(1 + |\xi|^2)^{\frac{t}{2}} \widehat{u}_{i_j}(\xi)$  converge para cada  $\xi$  fixo, então existe uma constante  $J > 0$  tal que se  $i_j, i_k > J$  então,

$$\sum_{|\xi| < N_0} (1 + |\xi|^2)^t |\widehat{u}_{i_j}(\xi) - \widehat{u}_{i_k}(\xi)|^2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, para  $i_j, i_k > J$ , concluímos que  $\|u_{i_j} - u_{i_k}\|_s^2 < \epsilon$ .  $\square$

Para demonstrarmos o Teorema 5.1.1 adiante, que trata da resolubilidade do campo  $L$ , precisaremos de alguns resultados auxiliares que trataremos agora.

**Definição 3.3.2.** *Sejam  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  e  $r = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  definimos a norma sobolev*

$$\|\varphi\|_j^2 = \sum_{|\alpha| \leq j} \|\partial^\alpha \varphi\|_0^2 = \sum_{|\alpha| \leq j} \int_{\mathbb{T}^N} |\partial^\alpha \varphi(x)|^2 dx.$$

e as semi-normas

$$\|\varphi\|_{j,r} = \|P\varphi\|_j + \|\varphi\|_r.$$

onde,  $P$  é um operador linear contínuo definido em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ , com coeficientes em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ .

**Lema 3.3.8.** *Se  $P$  é Globalmente Hipoeĺıptico no toro  $\mathbb{T}^N$  entˆao  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ , com a topologia induzida pela famĺlia de semi-normas  $\{\|\cdot\|_{j,r}\}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , é um espaço métrico completo para qualquer  $r = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  fixo.*

**Demonstraˆo:** Seja  $r \in \mathbb{Z}$  fixo. A partir da famĺlia de semi-normas  $\{\|\cdot\|_{j,r}\}_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , podemos construir uma métrica em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ , definindo para cada par de fun˜es  $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ :

$$d_1(\varphi, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|\varphi - \psi\|_{j,r}}{1 + \|\varphi - \psi\|_{j,r}}. \quad (3.3.11)$$

Logo,  $(C^\infty(\mathbb{T}^N), d_1)$  é um espaço métrico e provaremos, a seguir, que de fato é completo.

Seja  $\varphi_n$  uma sequência de Cauchy em  $(C^\infty(\mathbb{T}^N), d_1)$  entˆao,

$$d_1(\varphi_n, \varphi_m) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|\varphi_n - \varphi_m\|_{j,r}}{1 + \|\varphi_n - \varphi_m\|_{j,r}} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } m, n \mapsto \infty.$$

Logo, para cada  $j$  fixo

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{j,r} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } m, n \mapsto \infty. \quad (3.3.12)$$

Como,  $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{j,r} = \|P\varphi_n - P\varphi_m\|_j + \|\varphi_n - \varphi_m\|_r$ , entˆao segue de (3.3.12) que

$$\|P\varphi_n - P\varphi_m\|_j \longrightarrow 0, \quad \text{quando } m, n \mapsto \infty. \quad (3.3.13)$$

e

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_r \longrightarrow 0. \quad (3.3.14)$$

Sendo  $H^j(\mathbb{T}^N)$  e  $H^r(\mathbb{T}^N)$  espaços de Hilbert, entˆao segue de (3.3.13) e (3.3.14) que existem  $\varphi \in H^r(\mathbb{T}^N)$ ,  $\psi_j \in H^j(\mathbb{T}^N)$ , tais que  $\varphi_n \rightarrow \varphi \in H^r(\mathbb{T}^N)$  e  $P\varphi_n \rightarrow \psi_j \in H^j(\mathbb{T}^N)$ . Tomando  $\ell$  tal que  $j < \ell$  seja  $\psi_\ell$  tal que  $P\varphi_n \rightarrow \psi_\ell \in H^\ell(\mathbb{T}^N)$ . Usando o fato de que o mergulho  $H^\ell(\mathbb{T}^N) \hookrightarrow H^j(\mathbb{T}^N)$    contínuo, como  $P\varphi_n \rightarrow \psi_j \in H^j(\mathbb{T}^N)$ , temos que  $P\varphi_n \rightarrow \psi_\ell \in H^j(\mathbb{T}^N)$ . Pela unicidade do limite em  $H^j(\mathbb{T}^N)$  concluímos que  $\psi_j = \psi_\ell$  para todo  $j < \ell$ . Analogamente, prova-se que  $\psi_j = \psi_\ell$  para todo  $j > \ell$ . Assim, vemos que  $\psi_j = \psi_\ell$  para todo par  $j, \ell \in \mathbb{Z}_+$ . Definindo  $\psi \doteq \psi_j = \psi_\ell$  temos que  $\varphi_n \rightarrow \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ ,  $P\varphi_n \rightarrow \psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ . Por outro lado, sendo  $P$  contínuo em  $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  e  $\varphi_n \rightarrow \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  segue que  $P\varphi_n \rightarrow P\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ , usando a unicidade do limite em  $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  obtemos

$$P\varphi = \psi. \quad (3.3.15)$$

Uma vez que  $\psi \in H^j(\mathbb{T}^N), \forall j \in \mathbb{Z}_+$ , vemos que  $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ . Logo, como o operador  $P$  é GH, concluímos que  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ . Segue de (3.3.15), do fato de que  $P\varphi_n \rightarrow \psi_j = \psi$  e  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  que

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi\|_{j,r} &= \|P\varphi_n - P\varphi\|_j + \|\varphi_n - \varphi\|_r \\ &= \|P\varphi_n - \psi\|_j + \|\varphi_n - \varphi\|_r \longrightarrow 0, \quad \text{sen } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Logo,  $(C^\infty(\mathbb{T}^N), d_1)$  é completo.

**Lema 3.3.9.** *O Espaço  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$  munido com métrica induzida pela sequência de seminormas  $(\|\varphi\|_j), j = 0, 1, 2, \dots$  é um espaço métrico completo.*

**Lema 3.3.10.** *Se  $P$  é Globalmente Hipoelíptico no toro  $\mathbb{T}^N$  então existem  $\ell \in \mathbb{Z}_+$  e  $C > 0$  tais que*

$$\|\varphi\|_0 \leq C (\|P\varphi\|_\ell + \|\varphi\|_{-1}), \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N). \quad (3.3.16)$$

**Demonstração:** Seja  $r \in \mathbb{Z}$  fixo. Para cada  $\ell \in \mathbb{Z}_+$  definimos  $k = \max\{m + \ell, r\}$  onde  $m$  é a ordem do operador  $P$ . Como  $\ell \leq m + \ell \leq k, r \leq k$ , temos os seguintes mergulhos contínuos,  $H^k \hookrightarrow H^{m+\ell} \hookrightarrow H^\ell$  e  $H^k \hookrightarrow H^r$ . Logo,

$$\|\varphi\|_{\ell,r} = \|P\varphi\|_\ell + \|\varphi\|_r \leq C \|\varphi\|_k. \quad (3.3.17)$$

Assim, segue de (3.3.17) que a aplicação  $Id : (C^\infty(\mathbb{T}^N), d) \rightarrow (C^\infty(\mathbb{T}^N), d_1)$  é contínua. Assim, sendo  $Id$  bijeção linear e contínua, segue do Teorema da Aplicação Aberta 2.1.2 que  $Id^{-1} : (C^\infty(\mathbb{T}^N), d_1) \rightarrow (C^\infty(\mathbb{T}^N), d)$  é contínua. Desta forma, para cada  $p \in \mathbb{Z}_+$  existem  $\ell \in \mathbb{Z}_+$  e  $C > 0$  tais que

$$\|\varphi\|_p \leq C (\|P\varphi\|_\ell + \|\varphi\|_r), \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N). \quad (3.3.18)$$

Logo, tomando  $p = 0$  e  $r = -1$  segue de (3.3.18) que

$$\|\varphi\|_0 \leq C (\|P\varphi\|_\ell + \|\varphi\|_{-1}), \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N).$$

□

**Observação 3.3.3:** Note que, sendo  $P$  Globalmente Hipoelíptico em  $\mathbb{T}^N$  temos que  $\text{Ker}P \subset C^\infty(\mathbb{T}^N)$ .

Denotemos por  $V = (\text{Ker}P)^\perp$  o espaço ortogonal de  $\text{Ker}P$  em  $L^2(\mathbb{T}^N)$ .

**Lema 3.3.11.** *Suponhamos que  $P$  seja Globalmente Hipoelíptico no toro  $\mathbb{T}^N$ . Então existem  $\ell \in \mathbb{Z}_+$  e  $C > 0$  tais que*

$$\|\varphi\|_0 \leq C \|P\varphi\|_\ell \quad (3.3.19)$$

para todo  $\varphi \in V \cap C^\infty(\mathbb{T}^N)$ .

**Demonstração:** Suponhamos por absurdo que (3.3.19) não seja válida. Logo,  $\forall \ell \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\forall C = j$ ,  $\exists \varphi_j^\ell \in V \cap C^\infty(\mathbb{T}^N)$  tais que  $\|\varphi_j^\ell\|_0 > j \|P\varphi_j^\ell\|_\ell$ , de onde concluímos que

$$\|P\varphi_j^\ell\|_\ell < \frac{\|\varphi_j^\ell\|_0}{j}.$$

Defina  $\widetilde{\varphi}_j^\ell = \frac{\varphi_j^\ell}{\|\varphi_j^\ell\|_0}$ . Logo,  $\{\widetilde{\varphi}_j^\ell\}$  satisfaz

1.  $\|\widetilde{\varphi}_j^\ell\|_0 = 1$
2.  $\|P\widetilde{\varphi}_j^\ell\|_\ell = \left\| P \left( \frac{\varphi_j^\ell}{\|\varphi_j^\ell\|_0} \right) \right\|_\ell = \frac{1}{\|\varphi_j^\ell\|_0} \|P\varphi_j^\ell\|_\ell < \frac{1}{\|\varphi_j^\ell\|_0} \frac{\|\varphi_j^\ell\|_0}{j} = \frac{1}{j}.$

Assim, sem perda de generalidade podemos supor que os elementos da sequência  $\{\varphi_j^\ell\}$  satisfazem (1) e (2). Agora, fazendo  $j \rightarrow \infty$  vemos que  $P\varphi_j^\ell \rightarrow 0$  em  $H^\ell(\mathbb{T}^N)$ . Como consequência, segue que

$$P\varphi_j^\ell \rightarrow 0 \quad (3.3.20)$$

em  $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Segue do Lema de Rellich que a imersão  $i : H^0(\mathbb{T}^N) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{T}^N) \subset L^2(\mathbb{T}^N)$  é compacta. Denotemos por  $B_1$  a bola unitária fechada de  $H^0(\mathbb{T}^N)$ . Logo, segue de (1) e do Lema de Rellich 3.3.7 que  $\{\varphi_j^\ell\} \subset B_1$  e  $i(\varphi_j^\ell) \in i(B_1) \subset \overline{i(B_1)} \subset L^2(\mathbb{T}^N)$ . Assim, existe uma subsequência de  $\{\varphi_{j_k}^\ell\}$ , a qual continuaremos denotando por  $\{\varphi_j^\ell\}$ , tal que

$$\varphi_j^\ell \rightarrow u_0^\ell \in L^2(\mathbb{T}^N), \quad \text{quando } j \rightarrow \infty. \quad (3.3.21)$$

De onde concluímos que

$$\varphi_j^\ell \rightarrow u_0^\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N), \quad \text{quando } j \rightarrow \infty. \quad (3.3.22)$$

Sendo  $P$  contínuo em  $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  temos

$$P\varphi_j^\ell \rightarrow Pu_0^\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N), \quad \text{quando } j \rightarrow \infty. \quad (3.3.23)$$

Segue de (3.3.20), (2) e da unicidade do limite em  $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  que  $Pu_0^\ell = 0$ . Logo,  $u_0^\ell \in \text{Ker}P$ .

Além disso, afirmamos que  $u_0^m \in (\text{Ker}P)^\perp$ . De fato, segue de (3.3.21) que

$$\int_{\mathbb{T}^N} u_0^m(x) \overline{\phi(x)} dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^N} \varphi_j^\ell(x) \overline{\phi(x)} dx = 0, \quad \text{para toda função teste } \phi \in \text{Ker}P$$

mostrando assim que,  $u_0^m \in V = (\text{Ker}P)^\perp$  e portanto  $u_0^m = 0$ .

Por outro lado como  $P$  é Globalmente  $C^\infty$  Hipoelítico, segue do Lema (3.3.10) que  $\exists m \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\exists C > 0$  tal que

$$1 = \|\varphi_j^m\|_0 \leq C \left( \|P\varphi_j^m\|_m + \|\varphi_j^m\|_{-1} \right).$$

Fazendo  $j \rightarrow \infty$  na desigualdade acima obtemos

$$1 \leq C \|u_0^m\|_{-1} \Rightarrow u_0^m \neq 0$$

gerando assim uma contradição, logo fica provada a desigualdade (3.3.19). □

# Capítulo 4

## Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica

**Definição 4.0.3.** Um sistema dinâmico topológico  $f : X \rightarrow X$  é chamado topologicamente transitivo se existe um ponto  $x \in X$  tal que a sua órbita  $\mathcal{O}(x) \doteq \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  é densa em  $X$ .

**Definição 4.0.4.** Um sistema dinâmico  $f : X \rightarrow X$  é chamado minimal se a órbita de cada  $x \in X$  é densa em  $X$ .

**Exemplo 4.0.5:** Se  $\alpha$  é um número irracional então a rotação  $R_\alpha$  é minimal.

**Proposição 4.0.2.** Se a translação  $L_{g_0}$  sobre um grupo topológico é topologicamente transitiva então ela é minimal.

**Demonstração:** Veja a referência [K]

□

### 4.1 Translações no Toro

As translações no Toro generalizam as rotações do círculo unitário e constitui-se num caso especial do grupo das translações. Este exemplo desempenha um papel importante na teoria dos sistemas Hamiltonianos completamente integráveis.

Na notação aditiva seja  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N) \in \mathbb{T}^N$  então definimos a translação  $T_\gamma : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$  pondo

$$T_\gamma(x_1, \dots, x_N) = (x_1 + \gamma_1, \dots, x_N + \gamma_N) \pmod{1}.$$

Quando todas as coordenadas do vetor  $\gamma$  são números racionais, então  $T_\gamma$  é periódica de período 1. Entretanto, a menos que estejamos no círculo, aperiodicidade não implica

minimalidade. Por exemplo, se  $n = 2$  e  $\gamma = (\alpha, 0)$  com  $\alpha$  sendo um número irracional então o toro  $\mathbb{T}^N$  pode ser escrito como uma união de círculos  $x_2 = \text{const.}$  e cada órbita permanece contida num destes círculos o preenchendo de forma densa.

**Proposição 4.1.1.** *A translação  $T_\gamma$  é minimal se, e somente se, os números  $\gamma_1, \dots, \gamma_N, 1$  são racionalmente independentes, ou seja, se  $(k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$  é tal que  $\sum_{i=1}^N k_i \gamma_i \in \mathbb{Z}$  então  $k_1 = \dots = k_N = 0$ .*

Antes de demonstrarmos esta proposição estabeleceremos alguns critérios para que ocorra a transitividade topológica.

**Lema 4.1.1.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua de um espaço métrico localmente compacto separável  $X$  sobre  $X$ . Então a aplicação  $f$  é topologicamente transitiva se, e somente se, dados dois abertos não-vazios  $U, V \subset X$  existir um número inteiro  $\nu = \nu(U, V)$  tal que  $f^\nu(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

**Demonstração:** Veja a referência [K] □

**Definição 4.1.1.** *Sejam  $f : X \rightarrow X$  e  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $\varphi$  é  $f$ -invariante, se  $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$  para todo  $x \in X$ .*

**Corolário 4.1.1.** *Uma aplicação contínua e aberta  $f$  de um espaço localmente compacto separável é topologicamente transitiva se, e somente se, não existem dois conjuntos abertos e disjuntos não-vazios que sejam  $f$ -invariantes.*

**Demonstração:** Veja a referência [K] □

**Corolário 4.1.2.** *Se  $f : X \rightarrow X$  é topologicamente transitivo e  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é  $f$ -invariante então  $\varphi \equiv \text{const.}$*

**Demonstração:** Veja a referência [K] □

Estamos agora em condições de demonstrar a proposição.

**Demonstração da Proposição 4.1.1:** Provaremos a necessidade por contradição, suponha por absurdo que existam inteiros não todos nulos  $k_1, \dots, k_N$  tais que  $\sum_{i=1}^N k_i \gamma_i = \ell \in \mathbb{Z}$ . Considere a função não constante  $\varphi(x) = \text{sen } 2\pi(\sum_{i=1}^N k_i x_i)$ . Afirmamos que  $\varphi$  é  $T_\gamma$ -invariante.



De fato,

$$\begin{aligned}\varphi(T_\gamma(x)) &= \text{sen } 2\pi \left( \sum_{i=1}^N k_i(x_i + \gamma_i) \right) \\ &= \text{sen} \left( \sum_{i=1}^N k_i x_i + 2\pi\ell \right) = \varphi(x).\end{aligned}$$

Graças ao Corolário 4.1.2 temos que  $T_\gamma$  não é topologicamente transitiva.

Para a prova da suficiência admitamos que  $\gamma_1, \dots, \gamma_N, 1$  sejam racionalmente independentes. Queremos mostrar que  $T_\gamma$  é minimal. Como  $T_\gamma$  é uma translação de grupo segue da Proposição 4.0.2 que basta provar que  $T_\gamma$  é topologicamente transitiva. Supondo que  $T_\gamma$  não seja topologicamente transitiva então segue do Corolário 4.1.1 que existem dois conjuntos abertos disjuntos  $U, V$  com a propriedade de serem  $T_\gamma$ -invariantes. Seja  $\chi \doteq \chi_U$  a função característica do conjunto  $U$ . Como  $U$  é  $T_\gamma$ -invariante temos que

$$\chi(T_\gamma(x)) = \chi(x).$$

Considere agora a expansão em série de Fourier da função  $\chi$

$$\chi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\chi}(k) e^{2\pi i (\sum_{j=1}^N k_j x_j)} \text{ em } L^2(\mathbb{T}^N).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\chi(T_\gamma(x)) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\chi}(k) e^{2\pi i (\sum_{j=1}^N k_j (x_j + \gamma_j))} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\chi}(k) e^{2\pi i (\sum_{j=1}^N k_j x_j)} e^{2\pi i (\sum_{j=1}^N k_j \gamma_j)} \text{ em } L^2(\mathbb{T}^N).\end{aligned}$$

Assim, pela invariância de  $\chi$  e a unicidade da representação da expansão de Fourier segue que para cada  $k \in \mathbb{Z}^N$

$$\widehat{\chi}(k) (1 - e^{2\pi i (\sum_{j=1}^N k_j \gamma_j)}) = 0.$$

Deste modo, se  $k \neq 0$  e pelo fato de que  $\gamma_1, \dots, \gamma_N, 1$  serem racionalmente independentes, temos que  $\widehat{\chi}(k) = 0$ . Usando novamente a expansão de Fourier temos

$$\chi(x) = \widehat{\chi}(0) = \text{const},$$

para quase todo  $x \in \mathbb{T}^N$ . Como  $\chi$  é a função característica de  $U$  temos que  $\widehat{\chi}(0) = 0$ . Assim,  $0 = \int \chi(x) dx = |U|$ . Mas  $U$  sendo aberto não-vazio não pode possuir medida de Lebesgue nula, contradição! Logo, o resultado está provado.  $\square$

## 4.2 Teorema de Recorrência de Poincaré

### 4.2.1 Versão Probabilística

Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espaços de medida.

**Definição 4.2.1.** Dizemos que uma transformação  $T : X \rightarrow Y$  é mensurável se dado  $A \in \mathcal{B}$  implica  $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ , e que é invertível se é mensurável e existe  $S : Y \rightarrow X$  mensurável tal que  $TS(y) = y$  e  $ST(x) = x$  para q.t.p.  $x \in X$  e q.t.p.  $y \in Y$ .

**Definição 4.2.2.** Dizemos que  $T : X \rightarrow Y$  preserva a medida se é mensurável e

$$\mu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$$

para todo  $A \in \mathcal{B}$ .

Se  $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu)$  se diz que  $\mu$  é  $T$ -invariante ou invariante sob  $T$  ou que  $T$  é um automorfismo de  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ .

A seguir enunciaremos o teorema de recorrência de Poincaré em sua versão probabilística.

**Teorema 4.2.1.** Seja  $f$  um automorfismo no espaço de probabilidade  $(M, \mathcal{B}, \mu)$ . Então para todo  $A \in \mathcal{B}$  o conjunto  $A_0$  dos pontos  $x \in A$  tais que  $f^n(x) \in A$  para infinitos valores  $n \geq 0$  pertence a  $\mathcal{B}$  e  $\mu(A) = \mu(A_0)$ .

**Demonstração:** Defina para todo  $n \geq 0$  o conjunto

$$C_n = \{x \in A \mid f^j(x) \notin A \text{ para todo } j \geq n\}.$$

Então  $C_n = A - E_n$  onde  $E_n \doteq \cup_{j=n}^{\infty} f^{-j}(A)$ . É fácil ver que

$$\begin{aligned} A_0 &= A - \cup_{n=1}^{\infty} C_n \\ &= A \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right). \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Note que se  $x \in A_0$  então segue de (4.2.1) que existe uma sequência de números naturais  $0 < n_1 < n_2 < \dots$  tais que  $f^{n_j}(x) \in A$ . Portanto o teorema ficará demonstrado se provarmos que  $C_n \in \mathcal{B}$  e  $\mu(C_n) = 0$  para todo  $n \geq 1$ . Observamos que:

$$C_n = A - \cup_{j \geq n} f^{-j}(A)$$

prova que  $C_n \in \mathcal{B}$  e além disso como

$$C_n = A - E_n \subset E_0 - E_n$$

temos  $\mu(C_n) \leq \mu(E_0 - E_n) \leq \mu(E_0) - \mu(E_n)$ . A seguir mostraremos que  $\mu(E_n) = \mu(E_0)$  para todo  $n \geq 0$ . De fato, observe que  $f^{-1}(E_n) = E_{n+1}$  pois

$$\begin{aligned} f(E_{n+1}) &= f\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} f^{-j}(A)\right) \\ &= \bigcup_{j=n+1}^{\infty} f^{-j+1}(A) \\ &= \bigcup_{j=n}^{\infty} f^{-j}(A) \\ &= E_n. \end{aligned}$$

Assim, usando a invariância da medida temos  $\mu(E_n) = \mu(f^{-1}(E_n)) = \mu(E_{n+1})$  para todo  $n \geq 0$  e portanto  $\mu(E_n) = \mu(E_0)$  provando que  $\mu(C_n) = 0$  para todo  $n$ .  $\square$

### 4.2.2 Versão Topológica

Para enunciar a versão topológica do teorema de recorrência de Poincaré precisamos da definição de  $\omega$ -limite de um ponto com respeito a uma transformação. Seja  $M$  um espaço topológico e  $f : M \leftrightarrow$  uma transformação. Definimos o  $\omega$ -limite de um ponto  $x \in M$  como o conjunto dos pontos  $y \in M$  tais que para toda vizinhança  $U$  de  $y$  a relação  $f^n(x) \in U$  é satisfeita para infinitos valores  $n > 0$ . Se  $M$  é métrico é equivalente a  $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), y) = 0$ . Logo, dado  $r > 0$  existem infinitos índices  $n_j$  tais que  $d(f^{n_j}(x), y) < r$  ou seja,  $f^{n_j}(x) \in B_r(y)$ .

A seguir enunciaremos a versão topológica do teorema de recorrência de Poincaré:

**Teorema 4.2.2.** *Seja  $M$  um espaço métrico separável e  $f : X \leftrightarrow$  uma aplicação mensurável (isto é, tal que a pré-imagem de qualquer boreliano é um boreliano). Seja  $\mu$  uma medida de probabilidade sobre os borelianos de  $M$  invariante sob  $f$ . Então  $\mu(\{x \mid x \notin \omega(x)\}) = 0$ . Ou seja, quase todo ponto é recorrente com respeito a medida  $\mu$ .*

**Demonstração:** Seja  $\{U_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$  uma base de abertos para a topologia tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(U_n) = 0.$$

Seja  $\tilde{U}_n = \{x \in U_n \mid f^j(x) \in U_n \text{ para infinitos valores positivos de } j\}$ . Pelo teorema anterior

$$\mu(U_n - \tilde{U}_n) = 0.$$

Seja

$$\tilde{X} = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} \tilde{U}_n.$$

Como  $\{U_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$  é uma base de abertos, então

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} U_n = X$$

para todo  $m \geq 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mu(X - \tilde{X}) &= \mu\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} X - \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} \tilde{U}_n\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} (X - \bigcup_{n \geq m} \tilde{U}_n)\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} (\bigcup_{n \geq m} U_n - \bigcup_{n \geq m} \tilde{U}_n)\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} (U_n - \tilde{U}_n)\right) = 0. \end{aligned}$$

Então, só precisamos mostrar que se  $x \in \tilde{X}$  implica  $x \in \omega(x)$ , ou seja, que  $\tilde{X} \subset \{x \in X \mid x \in \omega(x)\}$ , de onde concluímos que  $X - \tilde{X} \supseteq \{x \in X \mid x \neq \omega(x)\}$  e portanto,  $\mu(\{x \in X \mid x \neq \omega(x)\}) \leq \mu(X - \tilde{X}) = 0$ . Seja  $r > 0$ . Escolhemos  $m$  tal que  $\text{diam}(U_n) \leq r/3$  para todo  $n \geq m$ . Como  $x \in \tilde{X}$  segue que  $x \in \bigcup_{n \geq m} \tilde{U}_n$  para todo  $m \geq 0$ . Então existe  $n \geq m$  tal que  $x \in \tilde{U}_n$ . Como  $\text{diam}(U_n) \leq r/3$ , resulta que  $U_n \subset B_r(x)$  o que implica que  $f^j(x) \in B_r(x)$  se  $f^j(x) \in U_n$ . Mas, como  $x \in \tilde{U}_n$ ,  $f^j(x) \in U_n$  para infinitos valores de  $j$ . Portanto  $x \in \omega(x)$ .

□

As conclusões dos Teoremas (4.2.1) e (4.2.2) não são verdadeiras, em geral, se omitimos a hipótese de que a medida  $\mu$  é finite.

**Exemplo 4.2.6:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $f(x) = x + 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . É fácil ver que  $f$  deixa invariante a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}$ . Por outro lado nenhum ponto é recorrente de  $f$ .

O seguinte resultado caracteriza quando uma medida é invariante. Antes considere o seguinte Lema.

**Lema 4.2.1.** *Toda função mensurável  $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é o limite pontual de uma sequência de funções simples. Se  $f \geq 0$ , a sequência pode ser tomada crescente.*

**Demonstração:** Se  $f \geq 0$  então para cada número natural  $n$  fixo e  $1 \leq j \leq n2^n$ , denotemos por  $I_j^k$  o conjunto dos pontos  $x \in \mathbb{R}$  tais que  $\frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n}$  e defina a função

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \chi_{I_j^k} + n \chi_{\{x \mid f(x) \geq n\}}$$

e observe que  $f_n \nearrow f$ . Note que se  $f$  é limitada superiormente, a convergência é uniforme. O caso geral recai no anterior desde que

$$f = f^+ - f^-, \text{ e } f^+, f^- \geq 0.$$

□

**Proposição 4.2.1.** *Seja  $(M, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida de probabilidade e  $f : M \rightarrow M$  uma transformação. Então  $f$  preserva a medida  $\mu$  se, e somente se, para toda função integrável  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  vale:*

$$\int_M \phi(x) d\mu = \int_M \phi(f(x)) d\mu.$$

**Demonstração:** Assuma que  $f$  preserva a medida. Se  $\phi$  é a função característica de um conjunto mensurável  $A$ , digamos  $\phi = \chi_A$ , é imediato verificar que  $\mu(f^{-1}(A)) = \int_M \phi(f(x)) d\mu$ , já que  $\chi_{f^{-1}(A)} = \phi \circ f$ . Assim, fica provado que  $\int_M \phi(x) d\mu = \int_M \phi(f(x)) d\mu$  quando  $\phi$  é uma função característica. Segue diretamente da linearidade da integral que se  $\phi$  é uma função simples, então a igualdade ainda vale. Finalmente, se  $\phi$  é uma função integrável, segue da definição de integral que

$$\int_M \phi(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \phi_n(f(x)) d\mu$$

onde  $\phi_n$  é uma sequência de funções simples crescendo para  $\phi$ . Por outro lado,  $\phi_n \circ f$  é uma sequência de funções simples crescendo para  $\phi \circ f$ . Logo,

$$\int \phi \circ f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n \circ f(x) d\mu.$$

Como  $\int \phi_n d\mu = \int \phi_n \circ f d\mu$ , tomando o limite em ambos os lados, vem que

$$\int \phi d\mu = \int \phi \circ f d\mu.$$

Reciprocamente, dado um boreliano  $A$ , tomando  $\phi = \chi_A$  temos que

$$\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \text{ se e somente se, } \int \phi d\mu = \int \phi \circ f d\mu.$$

□

**Proposição 4.2.2.** *Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espaços de medida  $\sigma$ -finitos. Seja  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação mensurável. Se existe uma sub-álgebra  $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$  que gera  $\mathcal{B}$  e tal que  $\mu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$  para todo  $A \in \mathcal{B}_0$ , a transformação  $T$  preserva medida.*

**Demonstração:** Seja  $\nu_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  a medida definida por:

$$\nu_0(A) = \mu(T^{-1}(A)).$$

Se demonstrarmos que  $\nu_0 = \nu$  a proposição estará provada. Mas  $\nu_0/\mathcal{B}_0 = \nu/\mathcal{B}_0$ . De modo que  $\nu_0$  é uma extensão a  $\mathcal{B}$  de  $\nu/\mathcal{B}_0$ . Mas como tal extensão é única segue que  $\nu_0 = \nu$ .  $\square$

**Exemplo 4.2.7:**[Transformação de Gauss] Considere a transformação  $\varphi : [0, 1] \leftrightarrow$  definida como

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \left[ \frac{1}{x} \right]$$

se  $x \neq 0$  e  $\varphi(0) = 0$ , e  $[x]$  denota a parte inteira de um número real  $x$ . Esta transformação denomina-se transformação de Gauss e tem um papel importante na teoria das frações contínuas. Dado  $0 < x < 1$  temos

$$x = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{n_j + \varphi^j(x)}}}}}$$

para todo  $j \geq 1$ . De fato pode-se provar que

$$x = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{n_j}}}}}$$

o que se expressa usualmente escrevendo:

$$x = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\ddots}}}} = [0; n_1, n_2, n_3, \dots].$$

Se denotamos  $I_n$  o intervalo  $(1/(n+1), 1/n)$ , a sequência  $n_1, n_2, n_3, \dots$  fica determinada pela propriedade

$$\varphi^j(x) \in I_{n_{j+1}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

A transformação  $\varphi$  tem a notável propriedade de preservar a probabilidade  $\mu$  sobre os boreleanos de  $[0, 1]$  definida por:

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln 2} \int_A \frac{1}{1+x} dm$$

onde  $m$  denota a medida de Lebesgue. Ou seja,  $\mu(\varphi^{-1}(A)) = \mu(A)$  para todo boreleano  $A \subset [0, 1]$ . Note também que

$$\frac{c}{2}m(E) \leq \mu(E) \leq cm(E)$$

para todo mensurável  $E \subset [0, 1]$ . De fato,

$$\mu(E) = \frac{1}{\ln 2} \int_E \frac{1}{1+x} dm \leq \frac{1}{\ln 2} \int_E dm \leq (\ln 2)^{-1} m(E).$$

Por outro lado, seja  $E = [a, b]$

$$\begin{aligned} m(E) &= \int \chi_E(x) dm = \int_a^b dm \\ &= \int_a^b \frac{1}{1+x} dm + \int_a^b 1 - \left( \frac{1}{1+x} \right) dm \\ &\leq (\ln 2)\mu(E) + \int_a^b \frac{x}{1+x} dm \\ &\leq (\ln 2)\mu(E) + \frac{1}{2} \int_a^b x dm \\ &= (\ln 2)\mu(E) + \frac{1}{4}(a+b)m(E) \leq (\ln 2)\mu(E) + \frac{1}{2}m(E). \end{aligned}$$

Deste modo, segue que

$$\frac{1}{2\ln 2} m(E) \leq \mu(E).$$

□

**Definição 4.2.3.** Uma coleção  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de  $X$  é chamada sub-álgebra se as três condições seguintes ocorrem.

- i)  $\emptyset \in \mathcal{S}$
- ii) Se  $A, B \in \mathcal{S}$  então  $A \cup B \in \mathcal{S}$
- iii) Se  $A \in \mathcal{S}$  então  $X - A = \cup_{i=1}^n E_i$  com  $E_i \in \mathcal{S}$  dois-a-dois disjuntos.

**Exemplo 4.2.8:** A coleção de todos os subintervalos de  $[0, 1]$  da forma  $[0, b]$  e  $(a, b]$ , com  $0 \leq a < b \leq 1$  forma uma sub-álgebra.

Graças à Proposição 4.2.2 temos que provar que  $\mu(\varphi^{-1}([0, b])) = \mu([0, b])$  e  $\mu(\varphi^{-1}((a, b])) = \mu((a, b])$ . Provaremos primeiramente que

$$\varphi^{-1}([0, b]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{b+n}, \frac{1}{n} \right]. \quad (4.2.2)$$

De fato, se  $x \in \varphi^{-1}([0, b])$  temos  $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \left[ \frac{1}{x} \right] \in [0, b]$  ou seja,  $0 \leq \frac{1}{x} - n \leq b$  sendo  $n = \left[ \frac{1}{x} \right] \in \mathbb{N}$ . Logo,  $x \in \left[ \frac{1}{b+n}, \frac{1}{n} \right]$  para algum natural  $n$  e portanto  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{b+n}, \frac{1}{n} \right]$ . Por outro lado, suponha que  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{b+n}, \frac{1}{n} \right]$  então existe um natural  $n_0$  tal que  $x \in \left[ \frac{1}{b+n_0}, \frac{1}{n_0} \right]$ .

Neste caso temos  $n_0 \leq \frac{1}{x} \leq n_0 + b$  e como  $0 \leq b \leq 1$  então  $n_0 = \lceil \frac{1}{x} \rceil$  e portanto  $\varphi(x) \in [0, b]$  e finalmente a igualdade (4.2.2) está provada.

Sendo a união (4.2.2) disjunta

$$\begin{aligned}
\mu(\varphi^{-1}([0, b])) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left[\frac{1}{b+n_0}, \frac{1}{n_0}\right]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{b+n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+x} dm \\
&= \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{n+1}{b+n+1} - \ln \frac{n}{b+n}\right) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \left[ \left(\ln \frac{2}{b+2} - \ln \frac{1}{b+1}\right) + \left(\ln \frac{3}{b+3} - \ln \frac{2}{b+2}\right) + \dots \right] \\
&= -\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{1}{1+b} \\
&= \frac{1}{\ln 2} \int_0^b \frac{1}{t+1} dm \\
&= \mu([0, b]).
\end{aligned}$$

A prova de  $\mu(\varphi^{-1}((a, b])) = \mu((a, b])$  é análoga. Portanto,  $\mu(\varphi^{-1}(A)) = \mu(A)$  para todo boreleano  $A$  do intervalo  $[0, 1]$ .

### 4.3 O Teorema de Krylov-Bogoliubov

**Teorema 4.3.1.** *Sejam  $\Sigma$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $M$  e  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação contínua definida em um espaço métrico compacto  $M$ . Então, o espaço das medidas de probabilidade invariantes é não-vazio.*

**Demonstração:** Devemos exibir uma medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{M}(M)$  tal que  $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$ ,  $\forall E \in \Sigma$ . Defina  $f^* : \mathcal{M}(M) \rightarrow \mathcal{M}(M)$  por  $f^*(\nu)(E) = \nu(f^{-1}(E))$ . Para provar que  $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$  é suficiente mostrarmos que a aplicação  $f^*$  possui um ponto fixo isto é, que exista uma medida  $\mu$  tal que  $f^*(\mu) = \mu$ . De fato, se  $E \in \Sigma$ , então  $\mu(E) = f^*(\mu)(E) = \mu(f^{-1}(E))$ . Primeiramente, notemos que  $f^*$  assim definida é uma aplicação contínua relativamente à topologia fraca\*. De fato, seja  $\mu_n \rightarrow \mu$  na topologia fraca\* de  $\mathcal{M}(M)$ , mostremos que  $f^*(\mu_n) \rightarrow f^*(\mu)$  em  $\mathcal{M}(M)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Ou seja, dado  $\phi \in C(M)$  arbitrária mostraremos que  $\langle f^*(\mu_n), \phi \rangle \rightarrow \langle f^*(\mu), \phi \rangle$  ou equivalentemente,  $\int_M \phi(x) df^*(\mu_n) \rightarrow \int_M \phi(x) df^*(\mu)$ . Primeiramente mostraremos que a seguinte identidade ocorre

**Lema 4.3.1.**

$$\int_M \phi(x) df^*(\nu) = \int_M \phi(f(x)) d\nu \tag{4.3.1}$$



para cada  $\phi \in L^1(M)$ .

**Demonstração:** De fato, mostremos (4.3.1) é válida para funções característica e em seguida, usando aproximações por funções simples concluiremos o resultado. Assim seja  $E$  um conjunto mensurável e tome  $\phi = \chi_E$  logo,

$$\begin{aligned} \int_M \phi(x) df^*(\nu) &= \int_M \chi_E(x) df^*(\nu) = \int_E df^*(\nu) = f^*(\nu)(E) = \nu(f^{-1}(E)) \\ &= \int_{f^{-1}(E)} d\nu = \int_M \chi_{f^{-1}(E)}(x) d\nu = \int_M \chi_E(f(x)) d\nu. \end{aligned}$$

Como o espaço das funções simples é denso no espaço das funções integráveis, podemos aproximar  $\phi$  por uma sequência de funções simples  $\phi_n$ . Por linearidade, a igualdade acima se estende para funções simples  $\phi_n$ . Para finalizar, temos que pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned} \int \phi(x) df^*(\nu) &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) df^*(\nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n(x) df^*(\nu) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n(f(x)) d\nu = \int \phi(f(x)) d\nu, \end{aligned}$$

concluindo assim a prova do lema. □

Seja  $\nu \in \mathcal{M}(M)$  uma medida de probabilidade qualquer em  $M$ , defina para cada  $n \in \mathbb{N}$  fixo a medida de probabilidade

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f^*)^j(\nu) \quad (4.3.2)$$

Note que,  $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(M)$  pois, usando (4.3.3) segue que

$$\mu_n(M) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f^*)^j(\nu)(M) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \nu(f^{-j}(M)) = 1.$$

onde,  $(f^*)^j(\nu)$  é a imagem de  $\nu$  pelo iterado  $(f^*)^j$ . Afirmamos que  $(f^*)^j(\nu)(E) = \nu(f^{-j}(E))$ ,  $\forall E \in \Sigma$ . De fato, segue da definição de  $f^*$  que o resultado é imediato para  $j = 1$ , agora suponha válido para  $j$  isto é,  $(f^*)^j(\nu)(E) = \nu(f^{-j}(E))$  e mostremos que vale para  $j+1$ . Com efeito,

$$(f^*)^{j+1}(\nu)(E) = f^*((f^*)^j(\nu))(E) = (f^*)^j(\nu)(f^{-1}(E)) = \quad (4.3.3)$$

$$= \nu(f^{-j}(f^{-1}(E))) = \nu(f^{-(j+1)}(E)). \quad (4.3.4)$$

Segue do Teorema de Riesz-Markov 2.4.2 que  $\mathcal{M}(M) \cong C(M)^*$ . Assim aplicando o Teorema de Banach-Alaoglu 2.2.1 temos que  $\mathcal{M}(M)$  é compacto na topologia fraca estrela de  $C(M)^*$ , logo existem  $\mu \in \mathcal{M}(M)$  e  $(\mu_{n_k})$  uma subsequência de  $(\mu_n)$  tal que  $\mu_{n_k} \xrightarrow{*} \mu$ , quando  $k \rightarrow \infty$  isto é,  $\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} (f^*)^j(\nu)$  em  $\mathcal{M}(M)$ .

A seguir mostraremos que  $\mu$  é ponto fixo da aplicação  $f^*$ . De fato, seja  $E$  um conjunto Boreleano de  $M$  arbitrário. Como  $\mu_{n_k} \rightarrow \mu$  em  $\mathcal{M}(M)$  segue da continuidade de  $f^*$  que

$$\begin{aligned} f^*(\mu)(E) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f^* \left( \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} (f^*)^j(\nu) \right) (E) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} (f^*)^j(\nu)(f^{-1}(E)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \left[ \sum_{j=0}^{n_k-1} (f^*)^j(\nu) + (f^*)^{n_k}(\nu) - \nu \right] (E) \\ &= \mu(E) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{(f^*)^{n_k}(\nu) - \nu}{n_k} \right] (E). \end{aligned}$$

Assim, a prova da afirmação estará completa se mostrarmos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{(f^*)^{n_k}(\nu) - \nu}{n_k} \right] (E) = 0$ . De fato,

$$\begin{aligned} \left| \frac{(f^*)^{n_k}(\nu)(E) - \nu(E)}{n_k} \right| &= \left| \frac{\nu(f^{-n_k}(M)) - \nu(M)}{n_k} \right| \\ &\leq \frac{\alpha}{n_k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

## 4.4 Fluxos sobre Variedades

Nesta seção estudaremos a ação de um grupo de Lie unidimensional numa variedade diferenciável. Consideremos  $\mathbb{R}$  o grupo de Lie aditivo dos números reais e denotemos por  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $N$ .

**Definição 4.4.1.** *Seja  $M$  um espaço topológico de Hausdorff, munido de uma base enumerável de conjuntos abertos. Uma Estrutura Diferenciável de dimensão  $N$  sobre  $M$ , é uma coleção de pares  $\mathcal{F} = \{(U, x)\}$ , onde  $U \subset M$  é um aberto não vazio,  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  é um homeomorfismo sobre o subconjunto aberto  $x(U)$  de  $\mathbb{R}^N$  e as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1.  $\bigcup_{(U,x)} U = M$ ;

2.  $x(U \cap U') \xrightarrow{x' \circ x^{-1}} x'(U \cap U')$  é  $C^\infty$  para qualquer par  $(U, x), (U', x') \in \mathcal{F}$  com  $U \cap U' \neq \emptyset$ ;
3.  $\mathcal{F}$  é maximal com respeito a (1) e (2), isto é, se  $\emptyset \neq V \subset M$  é aberto e  $y : V \rightarrow y(V)$  é um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^N$  tal que, para qualquer par  $(U, x) \in \mathcal{F}$  com  $U \cap V \neq \emptyset$  a composta  $x(U \cap V) \xrightarrow{y \circ x^{-1}} y(U \cap V)$  é  $C^\infty$ , então  $(V, y) \in \mathcal{F}$ .

**Definição 4.4.2.** Uma Variedade Diferenciável de dimensão  $N$ , é um espaço topológico de Hausdorff  $M$ , munido de uma base enumerável e com uma estrutura diferenciável de dimensão  $N$ .

**Observação 4.4.4:** Um elemento  $(U, x) \in \mathcal{F}$  será referido como uma carta local ou um sistema de coordenadas local. Se escrevermos  $x = (x_1, \dots, x_N)$  então, para  $p \in U$  suas coordenadas locais (com respeito a esta carta local) são dadas por  $(x_1(p), \dots, x_N(p))$ . De agora em diante, salvo indicação em contrário, fixaremos uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $N$ . Dizemos que uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é suave se para todo par  $(U, x) \in \mathcal{F}$ , a composta  $f \circ x^{-1}$  é  $C^\infty$  em  $x(U)$ . Denotaremos por  $C^\infty(M)$  o conjunto de todas as funções suaves sobre  $M$ .

**Definição 4.4.3.** Um campo vetorial suave real sobre  $M$  é uma aplicação  $\mathbb{R}$ -linear

$$L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M).$$

a qual satisfaz a regra de Leibniz

$$L(fg) = fL(g) + gL(f), \quad f, g \in C^\infty(M). \quad (4.4.1)$$

E, denotaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto de todos os campos vetoriais reais sobre  $M$ .

**Definição 4.4.4.** Uma ação  $\theta$  de  $\mathbb{R}$  sobre  $M$  é uma aplicação  $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  de classe  $C^\infty$  que satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $\theta_0(p) = p$  para todo  $p \in M$ ,
- (ii)  $\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p) = \theta_s \circ \theta_t(p)$  para todo  $p \in M$  e  $s, t \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 4.4.9:** Seja  $M = \mathbb{R}^3$  e  $a = (a_1, a_2, a_3)$  um ponto fixado. Para cada  $t \in \mathbb{R}$  podemos definir a aplicação  $\theta_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por  $\theta_t(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3) + t(x_1, x_2, x_3)$ . É fácil ver que  $\theta$  define uma ação de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ .

Toda ação  $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  define um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  denominado o gerador infinitesimal de  $\theta$ .

**Proposição 4.4.1.** *Seja  $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  uma ação  $C^\infty$ . Para cada  $p \in M$  definimos  $X_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  por*

$$X_p f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\theta_t(p)) - f(p)]. \quad (4.4.2)$$

Então,  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Demonstração:** É fácil ver que  $X_p$  é linear e satisfaz a regra de Leibniz para todo  $p \in M$ . A seguir, encontraremos a expressão de  $X$  em coordenadas locais. Seja  $(U, \mathbf{x})$  uma vizinhança coordenada em torno do ponto  $p \in M$ . Segue da continuidade da ação a existência de um aberto  $(0, p) \in I_\delta \times V$  em  $\mathbb{R} \times M$ , onde  $I_\delta = \{t \in \mathbb{R} \mid -\delta < t < \delta\}$  e  $V$  uma vizinhança aberta de  $p$  em  $M$  tal que  $\theta(I_\delta \times V) \subset U$ . Em particular,  $V = \theta_0(V) \subset U$ . Denotando por  $\widehat{\theta}$  a expressão local da ação  $\theta$  restrita ao aberto  $I_\delta \times V$  e recordando que  $(Id, \mathbf{x}) : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  temos que

$$\widehat{\theta}(t, \mathbf{x}(q)) = \mathbf{x}(\theta(t, q))$$

para todo  $q \in V$ . Ou seja,  $\widehat{\theta}(t, x_1(q), \dots, x_N(q)) = (x_1(\theta(t, q)), \dots, x_N(\theta(t, q)))$ . Assim, denotando por  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  as coordenadas de  $q \in V$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$  de  $\theta_t(q)$  podemos escrever  $\theta$  em coordenadas locais como  $\mathbf{y} = h(t, \mathbf{x}) = \widehat{\theta}(t, \mathbf{x})$ . As funções  $h_i \in C^\infty$  sobre  $I_\delta \times \mathbf{x}(V)$  e além disso  $\mathfrak{S}(h) \subset \mathbf{x}(U)$ . O fato de  $\theta_0$  ser a identidade e  $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$  se refletem nas seguintes condições:

$$h_i(0, \mathbf{x}) = x_i \quad \text{e} \quad h_i(t+s, \mathbf{x}) = h_i(t, h(s, \mathbf{x}))$$

para  $i = 1, \dots, N$ . Seja  $f \in C^\infty(p)$  e denotemos por  $\widehat{f}(x_1, \dots, x_N)$  sua expressão local, então

$$\begin{aligned} X_p f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\theta_t(p)) - f(p)] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\widehat{f} \circ \mathbf{x}(\theta_t(p)) - \widehat{f} \circ \mathbf{x}(p)] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\widehat{f} \circ \widehat{\theta}(t, \mathbf{x}(p)) - \widehat{f} \circ \widehat{\theta}(0, \mathbf{x}(p))] \\ &= \left( \frac{d}{dt} \widehat{f} \circ \widehat{\theta}(t, \mathbf{x}(p)) \right)_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \widehat{f}_i}{\partial r_i} \right) (\widehat{\theta}(t, \mathbf{x}(p))) \frac{\partial \widehat{\theta}_i}{\partial t}(t, \mathbf{x}(p)) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial t}(0, \mathbf{x}(p)) \left( \frac{\partial \widehat{f}_i}{\partial r_i} \right)_{\mathbf{x}(p)} \end{aligned}$$

ou seja,

$$X_p = \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial t}(0, \mathbf{x}(p)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p.$$

□

**Definição 4.4.5.** Se  $\theta : G \times M \rightarrow M$  é uma ação de um grupo  $G$  numa variedade  $M$ , então um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é dito invariante sob a ação de  $G$  ou  $G$ -invariante se  $X$  for invariante sob cada difeomorfismo  $\theta_g$  de  $M$  em  $M$ , i.e.,

$$d\theta_g(X) = X.$$

**Teorema 4.4.1.** Se  $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  é uma ação  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  em  $M$ , então o gerador infinitesimal  $X$  é invariante sob esta ação, ou seja,  $d\theta_t(X_p) = X_{\theta_t(p)}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Seja  $f \in C^\infty(\theta_t(p))$  para algum  $(t, p) \in \mathbb{R} \times M$  fixo, provaremos que  $d\theta_t(X_p)f = X_{\theta_t(p)}f$ . De fato,

$$\begin{aligned} d\theta_t(X_p)f &= X_p(f \circ \theta_t) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [f(\theta_t(\theta_s(p))) - f(\theta_t(p))] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [f(\theta_s(\theta_t(p))) - f(\theta_t(p))] \\ &= X_{\theta_t(p)}f. \end{aligned}$$

□

**Corolário 4.4.1.** Se  $X_p = 0$  então  $X_q = 0$  para todo  $q$  na órbita de  $p$  ou seja, nos pontos de uma órbita o campo vetorial associado se anula identicamente ou nunca é zero.

**Demonstração:** Por hipótese  $q = \theta_t(p)$  para algum  $t \in \mathbb{R}$ . Logo,  $X_q = X_{\theta_t(p)} = d\theta_t(X_p) = d\theta_t(0) = 0$  uma vez que  $d\theta_t$  é um isomorfismo de  $T_pM$  sobre  $T_qM$ . □

**Teorema 4.4.2.** A órbita de  $p$  ou é um ponto ou uma imersão de  $\mathbb{R}$  em  $M$  pela aplicação  $t \rightarrow \theta_t(p)$

**Demonstração:** A órbita de  $p$  é a imagem de  $\mathbb{R}$  sob a aplicação  $C^\infty$ ,  $t \rightarrow \theta_t(p) \doteq F(t)$ . Seja  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $\frac{d}{dt}$  base de  $T_{t_0}\mathbb{R}$ . Então,  $F$  será uma imersão se, e somente se,  $dF\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right) \neq 0$  para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ . De fato, seja  $f \in C^\infty(F(t_0)) = C^\infty(\theta_{t_0}(p))$  e observe que

$$\begin{aligned} dF\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right) f &= \frac{d}{dt}(f \circ F)(t_0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f \circ F(t_0 + h) - f \circ F(t_0)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(\theta_h(\theta_{t_0}(p))) - f(\theta_{t_0}(p))] \\ &= X_{\theta_{t_0}(p)}f. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Logo, segue do corolário 4.4.1 que se  $X_p \neq 0$  então  $F$  é uma imersão. Caso contrário, se  $X_p = 0$  □

**Definição 4.4.6.** *Dado um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  dizemos que uma curva  $J \ni t \mapsto F(t)$ , sendo  $J$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ , é uma curva integral de  $X$  se*

$$\frac{dF}{dt} = X_{F(t)}$$

para cada  $t \in J$ . Por definição, uma curva integral é conexo.

O cálculo feito em (4.4.3) mostra que cada órbita de uma ação  $\theta$  é uma curva integral de  $X$ , o gerador infinitesimal de  $\theta$ , ou seja para cada  $p \in M$

$$\frac{d}{dt}\theta(t, p) = X_{\theta(t, p)} \quad (4.4.4)$$

para cada  $t \in J$ .

Neste ponto surgem duas questões a respeito de campos vetoriais e ações de grupo a um parâmetro:

**Questão 1:** Todo campo vatorial de classe  $C^\infty$  é o gerador infinitesimal de alguma ação de grupo?

**Questão 2:** Podem duas ações diferentes de  $\mathbb{R}$  em  $M$  definirem o mesmo campo vetorial  $X$  como seu gerador infinitesimal?

Consideremos por exemplo o caso em que  $M = \mathbb{R}^2$  e  $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  seja definida por  $\theta(t, (x, y)) = (x + t, y)$ . É fácil ver  $\theta$  define uma ação de  $\mathbb{R}$  em  $M$  e que o seu gerador infinitesimal é dado pelo campo  $X = \frac{\partial}{\partial x}$ . Seja agora  $M_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Para a maioria dos pontos  $\theta_t$  está definida. Entretanto,  $\theta$  não define uma ação de  $\mathbb{R}$  em  $M_0$  por restrição de  $\theta$  ao conjunto  $\mathbb{R} \times M_0$  uma vez que os pontos do conjunto fechado  $F = \{(t, (x, 0)) \mid x + t = 0\}$  de  $\mathbb{R} \times M$  são levados na origem  $(0, 0) \notin M_0$ . Seja  $W \subset \mathbb{R} \times M$  o conjunto aberto

$$W = \left( \bigcup_{y \neq 0} \mathbb{R} \times \{(x, y)\} \right) \cup (\{t \in \mathbb{R} \mid x(x+t) > 0\} \times \{(x, 0)\}).$$

Então  $\theta = \theta|_W$  aplica  $W$  em  $M_0$  e ainda preserva as seguintes propriedades. Seja  $p = (x, y) \in M_0$  então:

- i)  $(0, p) \in W$  e  $\theta(0, p) = p$
- ii)  $\theta_s \circ \theta_t(p) = \theta_{s+t}(p) = \theta_t \circ \theta_s(p)$

onde todos os termos estão definidos. Neste caso, o gerador infinitesimal continua sendo o campo  $X = \frac{\partial}{\partial x}$  e as órbitas  $t \mapsto \theta_t(p)$  dadas pelas retas  $y = c$  quando  $p = (x, y)$ ,  $y \neq 0$  e quando  $p = (x, 0)$  semiretas contidas no eixo  $x$  tendo a origem como um dos seus pontos extremos.

Seja  $M$  uma variedade diferenciável  $C^\infty$  e  $W \subset \mathbb{R} \times M$  um aberto satisfazendo as seguintes condições: *Para cada  $p \in M$  existem números reais  $\alpha(p) < 0 < \beta(p)$  tais que  $W \cap (\mathbb{R} \times \{p\}) = \{(t, p) \mid \alpha(p) < t < \beta(p)\}$ .*

Denotaremos por  $I(p) = \{t \in \mathbb{R} \mid \alpha(p) < t < \beta(p)\}$  o por  $I_\delta = \{t \in \mathbb{R} \mid |t| < \delta\}$ . A condição acima implica que

$$W = \bigcup_{p \in M} I(p) \times \{p\}.$$

Note que  $W$  é portanto conexo.

**Definição 4.4.7.** *Uma ação de grupo a um parâmetro local ou fluxo sobre uma variedade  $M$  é uma aplicação  $\theta : W \rightarrow M$ ,  $C^\infty$  que satisfaz as seguintes condições:*

- i)  $\theta_0(p) = p$  para todo  $p \in M$ .
- ii) *Se  $(s, p) \in W$ , então  $\alpha(\theta_s(p)) = \alpha(p) - s$ ,  $\beta(\theta_s(p)) = \beta(p) - s$ , e além disso para cada  $t$  tal que  $\alpha(p) - s < t < \beta(p) - s$ ,  $\theta_{t+s}(p)$  está definida e*

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p).$$

**Teorema 4.4.3.** *Seja  $L$  um campo  $C^r$  numa variedade  $M$  então existe um único fluxo  $C^r$ ,  $(D, \theta)$  em  $M$  tal que:*

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) = L_{\theta(t, x)}.$$

*Quando  $M$  é compacta este fluxo é global.*

**Definição 4.4.8.** *Um subconjunto  $\mathcal{M} \subset \mathbb{T}^N$  é dito invariante com respeito ao fluxo se  $\theta_t(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ ,  $\forall t$ .*

**Definição 4.4.9.** *Um subconjunto  $\mathcal{M} \subset \mathbb{T}^N$  é dito minimal se for invariante com respeito ao fluxo e não existir subconjunto próprio de  $\mathcal{M}$  invariante.*

## 4.5 Sistemas Conservativos

Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^N$  e  $f : U \rightarrow U$  um difeomorfismo de classe  $C^1$ . A fórmula de mudança de variáveis afirma que, para qualquer conjunto mensurável  $B \subset U$

$$\text{vol}(f(B)) = \int_B |\det Df(x)| dx. \quad (4.5.1)$$

**Lema 4.5.1.** *Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  de classe  $C^1$  deixa invariante o volume se e somente se o valor absoluto  $|\det Df|$  do seu jacobiano é constante igual a 1.*

**Demonstração:** Suponha primeiro que o valor absoluto do jacobiano é igual a 1 em todos os pontos de  $M$ . Considere  $E$  um conjunto mensurável e seja  $B = f^{-1}(E)$ . Pela fórmula (5.0.3) temos

$$\text{vol}(E) = \text{vol}(f(B)) = \int_B |\det Df(x)| dx = \int_B dx = \text{vol}(B) = \text{vol}(f^{-1}(E)).$$

Suponha por absurdo que  $f$  deixa invariante o volume e que exista  $x \in M$  tal que  $|\det Df(x)| > 1$ . Então, como o jacobiano é contínuo, existiria uma vizinhança  $U$  de  $x$  e algum número  $\sigma > 1$  tais que

$$|\det Df(y)| \geq \sigma, \quad \text{para todo } y \in U.$$

Então a fórmula (5.0.3) aplicada tomando  $B = U$  forneceria

$$\text{vol}(f(U)) = \int_U |\det Df(x)| dx \geq \sigma \text{vol}(U).$$

Denotando por  $E = f(U)$ , isto implicaria que  $\text{vol}(E) > \text{vol}(f^{-1}(E))$  e portanto  $f$  não deixaria invariante o volume. Do mesmo modo se mostra que se o valor absoluto do jacobiano é menor que 1 em algum ponto então  $f$  não deixa invariante o volume.  $\square$

**Definição 4.5.1.** *Um fluxo  $(D, f)$  em uma variedade  $M$  preserva uma medida  $\mu$  definida sobre os boreleanos de  $M$  se para todo  $T < 0$  e todo boreleano  $A \subset D_T$  vale:*

$$\mu(f^t(A)) = \mu(A)$$

para todo  $-T < t < T$ . Neste caso dizemos que  $\mu$  é  $f$ -invariante ou invariante sob  $f$ . Quando  $(D, f)$  é gerado por um campo  $L$  dizemos que  $\mu$  é  $L$ -invariante ou invariante sob  $L$ .

Suponhamos que o fluxo  $f^t$  corresponde às trajetórias de um campo de vetores  $F : U \rightarrow U$  de classe  $C^1$ , quer dizer  $f^t(x)$  é o valor no tempo  $t$  da solução da equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = F(x). \quad (4.5.2)$$

A fórmula de Liouville exprime o jacobiano de  $f^t$  em termos do divergente  $\text{div} F$  do campo de vetores  $F$ :

$$\det(Df^t(x)) = \exp\left(\int_0^t \text{div} F(f^s(x)) ds\right). \quad (4.5.3)$$

Considere o seguinte Lema:



**Lema 4.5.2.** *Seja  $A : I \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}^n)$  e  $\dot{x} = A(t)x$  um sistema linear homogêneo. Seja  $\Phi(t)$  uma matriz  $n \times n$  cujas colunas são soluções da equação num intervalo  $I$ . Então para todo  $t \in I$  e  $t_0 \in I$  fixo,*

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \exp\left\{\int_{t_0}^t \text{traço } A(s) ds\right\}.$$

**Demonstração:** Basta mostrar que a função  $\mathcal{J}(t) = \det \Phi(t)$  é solução da equação  $\dot{x} = \text{traço } A(t)x$ . Escreva  $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ ; como o determinante de uma matriz  $n \times n$  é uma função  $n$ -linear de suas colunas temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(t) &= \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_i'(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1(t), \dots, A(t)\varphi_i(t), \dots, \varphi_n(t)). \end{aligned}$$

É suficiente supor que  $\Phi(t)$  é matriz fundamental da equação, i.e.,  $\det \Phi(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$  pois caso contrário a proposição já estaria satisfeita. Deste modo para cada  $t \in I$  o conjunto  $\beta = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Denotemos por  $(\alpha_{ij}(t))$  a matriz de representação do operador linear  $x \mapsto A(t)x$  com respeito a base  $\beta$  então

$$A(t)\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)\varphi_j(t).$$

Recorde que o traço de uma matriz não depende da sua representação matricial com respeito à uma base qualquer logo,

$$\text{traço } A(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(t) &= \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1(t), \dots, \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)\varphi_j(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}(t) \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_i(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ &= \text{traço } A(t)\mathcal{J}(t). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mathcal{J}(t) = \mathcal{J}(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{traço } A(s) ds}.$$

□

Seja  $f^t(x) = (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_n(t, x))$  o fluxo associado a equação (4.5.2). Então,

$$\frac{d}{dt}\varphi_j(t, x) = F_j(\varphi(t, x)), \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (4.5.4)$$

Derivando a expressão (4.5.4) com respeito a variável  $x_\ell$  obtemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \varphi_j(t, x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k} F_j(\varphi(t, x)) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_k(t, x), \quad j = 1, \dots, n, \quad \ell = 1, \dots, n. \quad (4.5.5)$$

Denotando por  $D\varphi(t, x) = Df^t(x)$  a matriz jacobiana da transformação  $\varphi(t, x)$  com respeito à variável  $x$  temos que a expressão (4.5.5) implica que as colunas da matriz  $D\varphi(t, x)$  são soluções da equação  $\dot{x} = DF(\varphi(t, x))x$  ou seja  $\dot{x} = DF(f^t(x))x$ . Aplicando o Lema 4.5.2 temos que tomando  $t_0 = 0$  e usando as propriedades do fluxo segue que

$$\begin{aligned} \det DF(f^t(x)) &= \det DF(f^{t_0}(x)) \exp\left\{\int_{t_0}^t \text{traço } DF(f^s(x)) ds\right\} \\ &= \exp\left\{\int_0^t \text{div } F(f^s(x)) ds\right\}. \end{aligned}$$

Combinando os resultados acima obtemos:

**Lema 4.5.3.** *O fluxo  $f^t$  associado a um campo de vetores  $F$  de classe  $C^1$  deixa invariante o volume se, e somente se, o divergente de  $F$  é identicamente nulo.*

# Capítulo 5

## Hipoelipticidade de Campos Vetoriais no toro $\mathbb{T}^N$

Seja  $L$  um campo vetorial definido no toro  $\mathbb{T}^N$  então existem funções suaves periódicas em cada uma das variáveis tais que  $L = \sum_{j=1}^N a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Para cada ponto  $x^0 = (x_1, \dots, x_N)$  consideremos no toro  $\mathbb{T}^N$  o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_1(y), & y_1(0) = x_1 \\ \vdots \\ \frac{dy_N}{dt} = a_N(y), & y_N(0) = x_N. \end{cases}$$

Seja  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$  o fluxo associado a resolução do problema de valor inicial acima. Então existem  $N$  funções em  $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^N)$ , tais que  $\phi(t, x) = (h_1(t, x_1, \dots, x_N), \dots, h_N(t, x_1, \dots, x_N))$  de tal modo que as seguintes propriedades são satisfeitas.

1.  $h_j(0, x) = x_j$  ou equivalentemente  $\phi(0, x) = x$ ;
2.  $h_j(t + s, x) = h_j(t, h_j(s, x))$  ou equivalentemente  $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$ ;
3. Para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi(t, \cdot) \in C(\mathbb{T}^N, \mathbb{T}^N)$  e define uma família de difeomorfismos locais;
4.  $\frac{dh_j}{dt} = a_j(h(t, x))$  para cada  $j = 1, \dots, n$ .

Por outro lado vamos calcular o gerador infinitesimal  $X_p$ , gerado pelos fluxos  $\phi_t(x) \doteq \phi(t, x)$ , e verificar que coincidem com  $L_p$ . De fato, seja  $p = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^N$  e  $f$  uma função em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ . Por definição

$$X_p(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi_t(p)) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ h)(t, x) - (f \circ h)(0, x)}{t} = \frac{\partial}{\partial t} (f \circ h)(0, x).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} X_p(f) &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} f(h(t, x)) \frac{d}{dt} h_j(t, x)|_{(0, x)} \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} f(h(0, x)) a_j(h(0, x)) = \sum_{j=1}^N a_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j} f(p) = Lf(p) = L_p(f). \end{aligned}$$

**Proposição 5.0.1.** *Seja  $L \in \mathfrak{X}(M)$  um campo vetorial suave dado por*

$$L = \sum_{j=1}^N a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (5.0.1)$$

Então, o operador transposto  $L^*$  é dado por  $L^* = -L - \operatorname{div} L$ .

**Demonstração:** Sejam  $\phi, \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  então,

$$\begin{aligned} \langle L\phi, \psi \rangle &= \int_{\mathbb{T}^N} L\phi(x) \psi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} \left( \sum_{j=1}^N a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x) \right) \psi(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{T}^N} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi(x)) \psi(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^N - \left( \int_{\mathbb{T}^N} \phi(x) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(x) \right) \psi(x) dx + \int_{\mathbb{T}^N} a_j(x) \phi(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(x) dx \right) \\ &= - \left\{ \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{j=1}^N \phi(x) \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(x) \psi(x) dx + \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{j=1}^N a_j(x) \phi(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(x) dx \right\} \\ &= -\langle \phi, (L + \operatorname{div} L)\psi \rangle. \end{aligned}$$

□

**Lema 5.0.4.** *Seja  $\mathcal{M} \subset \mathbb{T}^N$  um subconjunto fechado e invariante com respeito ao fluxo  $\phi_t$  gerado por um campo vetorial e suave  $L$  dado por (5.0.1), então existe uma medida de probabilidade definida sobre os borelianos tal que  $\int_{\mathbb{T}^N} L\eta(x) d\mu(x) = 0$  para toda  $\eta \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  e  $\operatorname{supp}(\mu) \subset \mathcal{M}$ .*

**Demonstração:** Denotemos por  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  o fluxo gerado pelo campo real suave  $L$ . Graças ao Teorema (4.3.1) existe  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^N)$  tal que  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  é  $\mu$ -invariante isto é,  $\mu(\phi_{-t}(E)) = \mu(E)$ ,  $\forall E \in \Sigma$  e para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Pela Proposição (4.2.1) temos que, se  $\eta \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  então,

$$\int_{\mathbb{T}^N} \eta(\phi_t(x)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{T}^N} \eta(x) d\mu(x). \quad (5.0.2)$$

Mostremos agora que  $\langle L^* \mu, \eta \rangle = 0, \forall \eta \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ . De fato, derivando em relação a  $t$  a expressão em (5.0.2) temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^N} \eta(x) d\mu(x) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^N} \eta(\phi_t(x)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{T}^N} \frac{d}{dt} \eta(h_1(t, x) \dots, h_N(t, x)) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(\phi_t(x)) \frac{dh_j}{dt}(t, x) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{j=1}^N a_j(\phi_t(x)) \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(\phi_t(x)) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} (L\eta)(\phi_t(x)) d\mu(x). \end{aligned}$$

Sendo  $L\eta$  uma função suave e aplicando novamente a Proposição (4.2.1) obtemos

$$0 = \int_{\mathbb{T}^N} (L\eta)(\phi_t(x)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{T}^N} (L\eta)(x) d\mu(x).$$

□

**Corolário 5.0.1.** *Dado  $L \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^N)$  existe uma medida de probabilidade  $\mu$  tal que  $\mu \in \text{Ker} L^*$*

**Demonstração:** Pelo Lema anterior existe uma medida de probabilidade  $\mu$  tal que para toda  $\eta \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  a seguinte identidade ocorre

$$0 = \int_{\mathbb{T}^N} L\eta(x) d\mu(x) = \langle \mu, L\eta \rangle = \langle L^* \mu, \eta \rangle$$

provando que  $L^* \mu = 0$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ .

□

**Teorema 5.0.1.** *Se  $L^*$  é Globalmente Hipoeĺptico em  $\mathbb{T}^N$  entˆao, a equa˜ao*

$$L^* \omega = 0 \tag{5.0.3}$$

*em  $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  tem solu˜ao em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$  satisfazendo as seguintes propriedades.*

- (a)  $\omega(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{T}^N$ ;
- (b) *Quaisquer duas solu˜oes da equa˜ao (5.0.3) diferem por uma constante multiplicativa real.*

**Demonstração:** Segue do Corolário (5.0.1) que existe uma medida de probabilidade  $\mu$  tal que  $L^* \mu = 0$  no sentido das distribu˜oes, uma vez que, o espao das medidas de Borel estˆa

imerso no espaço das distribuições de ordem zero. Sendo  $L^*$  GH e  $L^*\mu = 0$ , isto implica  $\mu \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  isto é, existe  $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  tal que

$$\int_{\mathbb{T}^N} \eta(x) d\mu = \langle \mu, \eta \rangle = \int_{\mathbb{T}^N} \omega(x)\eta(x) dx.$$

Ou seja,  $d\mu = \omega dx$  para alguma  $\omega$  em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ .

Para a demonstração da Propriedade (a) suponha por absurdo que  $\omega(x_0) = 0$  para algum  $x_0 \in \mathbb{T}^N$ . Defina  $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{T}^N \mid \omega(x) = 0\}$  então vemos que  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{M}$  é fechado em  $\mathbb{T}^N$ , pois  $\mathcal{M} = \omega^{-1}(\{0\})$ . Mostremos que  $\mathcal{M}$  é invariante com respeito ao fluxo i.e.,  $\phi_t(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Para verificarmos isto tomemos  $q \in \phi_t(\mathcal{M})$  então  $q = \phi_t(p)$  com  $\omega(p) = 0$ . Sabendo que  $\phi_t$  é um difeomorfismo local escolhamos um  $\delta > 0$  suficientemente pequeno para que  $\phi_t$  seja um difeomorfismo da bola  $B(p, \delta)$ . Considere  $\eta \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  tal que  $S(\eta) \subset B(0, 1)$  e  $\int_{\mathbb{T}^N} \eta(x) dx = 1$ . Defina,  $\eta_\epsilon(x) = \epsilon^{-N} \eta\left(\frac{x-p}{\epsilon}\right)$ ,  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ . Com  $\epsilon_0$  tomado suficientemente pequeno para que  $\text{supp}(\eta_\epsilon) \subset B(p, \delta)$ . Logo, pela invariância da medida temos que

$$\int_{\mathbb{T}^N} \eta_\epsilon(\phi_t(x)) \omega(x) dx = \int_{\mathbb{T}^N} \eta_\epsilon(x) \omega(x) dx = \int_{B(p, \delta)} \epsilon^{-N} \eta\left(\frac{x-p}{\epsilon}\right) \omega(x) dx.$$

Por mudança de variáveis obtemos

$$\int_{\mathbb{T}^N} \eta_\epsilon(\phi_t(x)) \omega(x) dx = \int_{B(0, \frac{\delta}{\epsilon})} \eta(y) \omega(p + \epsilon y) dy.$$

Assim,

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{T}^N} \eta_\epsilon(\phi_t(x)) \omega(x) dx = \omega(p).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^N} \eta_\epsilon(\phi_t(x)) \omega(x) dx &= \int_{B(\phi_{-t}(q), \epsilon\epsilon_0)} \epsilon^{-N} \eta\left(\frac{\phi_t(x) - p}{\epsilon}\right) \omega(x) dx \\ &= \int_{B(0, \epsilon_0)} \eta(y) \omega(\phi_{-t}(p + \epsilon y)) |D\phi_{-t}(p + \epsilon y)| dy. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{T}^N} \eta_\epsilon(\phi_t(x)) \omega(x) dx = \omega(q) |D\phi_{-t}(p)|.$$

Segue da unicidade do limite que  $\omega(q) |D\phi_{-t}(p)| = \omega(p)$ . Como  $|D\phi_{-t}(p)| \neq 0$  e  $\omega(p) = 0$  vemos que  $\omega(q) = 0$ . Como queríamos demonstrar.

Seja  $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}$  conjunto minimal tal que  $\phi_t(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{M}_1$ . Aplicando novamente o Lema 5.0.4 temos que existe  $\mu_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^N)$  tal que  $L^*\mu_1 = 0$  e  $\text{supp}(\mu_1) \subset \mathcal{M}_1$ . Sendo  $L^*$  GH

temos que existe uma função suave  $\omega_1 \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  tal que  $\mu_1 = T_{\omega_1}$ . Deste modo,  $L^*\omega_1 = 0$  com  $\text{supp}(\omega_1) \subset \mathcal{M}_1$  onde,  $\text{supp}(\omega_1) = \overline{\{x \in \mathbb{T}^N : \omega_1(x) \neq 0\}}$  portanto,

$$\{x \in \mathbb{T}^N : \omega_1(x) \neq 0\} \subset \text{supp}(\omega_1) \subset \mathcal{M}_1.$$

Implicando que  $\text{int}\mathcal{M}_1 \neq \emptyset$ . Logo, pelo teorema de Tumarkin [NS] temos que  $\mathcal{M}_1$  é aberto. Por outro lado,  $\mathcal{M}_1$  é fechado e sendo  $\mathbb{T}^N$  conexo, segue que  $\mathcal{M}_1 = M = \mathbb{T}^N$  fazendo com que  $\omega(x) = 0, \forall x \in \mathbb{T}^N$  gerando assim uma contradição, concluindo portanto a prova da Propriedade (a).

Para a prova da Propriedade (b), seja  $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  tal que  $L^*G = 0$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  então pela hipoelipticidade do operador  $L^*$  e do fato de  $\omega(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{T}^N$  segue que  $g = \frac{G}{\omega} \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ . É fácil ver que para toda  $g \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  vale  $L^*(g\omega) = \omega L(g)$ . Assim,  $0 = L^*(G) = L^*(g\omega) = \omega L(g)$  mostrando que  $L(g)(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{T}^N$ . Suponhamos, por absurdo, que  $g$  não seja equivalente a uma constante, então existiria uma constante real  $c$  tal que o conjunto  $g^{-1}(c)$  seria um subconjunto invariante próprio de  $\mathbb{T}^N$  e invariante para o fluxo  $\phi_t$ . Repetindo o raciocínio anterior o conjunto  $g^{-1}(c)$  teria um conjunto minimal  $\mathcal{M}$  com todos os seus pontos sendo pontos interiores. Por conexidade teríamos então que  $g \equiv \text{const}$ . Deste modo, isto completa a prova do Teorema 5.0.1.  $\square$

**Corolário 5.0.2.**  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}L^* = 1$ .

## 5.1 Resolubilidade

**Teorema 5.1.1.** *Suponha que  $L^*$  seja GH então,  $L$  é GH e a equação*

$$Lu = f \tag{5.1.1}$$

*é resolúvel em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$  para  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  se, e somente se,*

$$\int_{\mathbb{T}^N} f(x)\omega(x)dx = 0. \tag{5.1.2}$$

**Demonstração:** Primeiro, mostremos que o campo  $L$  é Globalmente Hipoelíptico. De fato, seja  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  uma distribuição tal que  $Lu = h$  onde,  $h \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ . Defina  $\varphi = \omega u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ , logo aplicando o operador  $L^*$  em  $\varphi$  e usando o fato de que  $\omega \in \text{Ker}L^*$  temos

$$L^*\varphi = L^*(\omega u) = -\omega Lu = -\omega h \in C^\infty.$$

Sendo  $L^*$  Hipoelíptico concluímos que  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ . E isto mostra que o campo  $L$  é GH.

Mostraremos agora que a resolubilidade implica na condição de compatibilidade. De fato, suponhamos que  $Lu = f$  seja resolúvel em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ , então dada uma função  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ , existe  $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$  tal que  $Lu = f$  e como consequência

$$\int_{\mathbb{T}^N} f(x)\omega(x)dx = \langle Lu, \omega \rangle = \langle u, L^*\omega \rangle = 0.$$

Consideremos a recíproca, isto é, suponhamos que  $L^*$  seja GH e que vale a condição de compatibilidade (5.1.2), mostraremos então que existe  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  tal que  $Lu = f$ . Sendo  $L$  GH tal distribuição é de fato uma função em  $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ .

Considere o subespaço  $Y = \{L^*g \mid g \in C^\infty(\mathbb{T}^N)\}$  de  $H^\beta(\mathbb{T}^N)$ , munido com a norma sobolev  $\|\cdot\|_\beta$  para algum  $\beta \in \mathbb{R}$  e defina sobre  $Y$  o seguinte funcional  $\Lambda_f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  pondo

$$\Lambda_f(L^*g) = \int_{\mathbb{T}^N} f(x)g(x)dx. \quad (5.1.3)$$

Note que o funcional linear  $\Lambda_f$  está bem definido pois, se  $g_1, g_2 \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  são tais que  $L^*g_1 = L^*g_2$  então existe  $C \in \mathbb{R}$ , tal que  $g_1 - g_2 = C\omega$ . Assim,

$$\int_{\mathbb{T}^N} f(x)(g_1(x) - g_2(x))dx = C \int_{\mathbb{T}^N} f(x)\omega(x)dx = 0$$

de onde concluímos que  $\Lambda_f$  está bem definido.

Usaremos o Lema 3.3.11 para mostrar que  $\Lambda_f \in (H^\beta)^*$ . De fato, seja  $L^*g \in Y$  e considere a seguinte decomposição,  $g = g_0 + g_1$  com  $g_0 \in C^\infty(\mathbb{T}^N) \cap (Ker L^*)^\perp$  e  $g_1 \in Ker L^*$ . Logo,

$$\Lambda_f(L^*g) = \int_{\mathbb{T}^N} f(x)(g_0(x) - g_1(x))dx = \int_{\mathbb{T}^N} f(x)g_0(x)dx.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz vemos que

$$\begin{aligned} |\Lambda_f(L^*g)| &= \left| \int_{\mathbb{T}^N} f(x)g_0(x)dx \right| \\ &\leq \|f\|_0 \|g_0\|_0, \end{aligned}$$

onde  $\|\cdot\|_0$  denota a norma Sobolev para  $\beta = 0$ .

Graças ao Lema 3.3.11 obtemos

$$\begin{aligned} |\Lambda_f(L^*g)| &\leq \|f\|_0 \|g_0\|_0 \\ &\leq C \|f\|_0 \|L^*g_0\|_\beta \\ &= C \|f\|_0 \|L^*g\|_\beta. \end{aligned}$$

Segue do Teorema de Hahn-Banach que  $\Lambda_f$  se estende continuamente ao espaço  $H^\beta(\mathbb{T}^N)$ . Assim, existe  $u \in (H^\beta(\mathbb{T}^N))^* \cong H^{-\beta}(\mathbb{T}^N)$  tal que

$$\Lambda_f(\phi) = \langle u, \phi \rangle$$



para toda  $\phi \in H^\beta$ . Deste modo, para toda  $g \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  tomando  $\phi = L^*g$  na igualdade anterior temos

$$\langle u, L^*g \rangle = \Lambda_f(L^*g) = \int_{\mathbb{T}^N} f(x)g(x) dx.$$

Provando portanto que  $Lu = f$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ .  $\square$

## 5.2 Condição Diofantina

**Definição 5.2.1.** *Uma sequência de números reais  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  satisfaz a condição Diofantina  $(\star)$  se, e somente se, existirem constantes  $N_0 > 0$ ,  $C_0 > 0$  tais que*

$$\left| \sum_{j=1}^n m_j \Lambda_j \right| \geq \frac{C_0}{(1 + |m|)^{N_0}} \quad (\star)$$

para cada  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ .

**Teorema 5.2.1.** *Seja  $L = \sum_{j=1}^n \Lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  um campo vetorial com coeficientes constantes. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $L$  é globalmente hipoelíptico;
- (ii)  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  satisfazem a condição Diofantina  $(\star)$ .

**Demonstração:** Para mostrar que  $(ii) \Rightarrow (i)$  seja  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  tal que  $Lu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ , queremos mostrar que  $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ . Aplicando a transformada de Fourier em ambos os membros da igualdade

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f$$

obtemos

$$\sum_{j=1}^n m_j \Lambda_j \widehat{u}(m) = \widehat{f}(m).$$

Graças a condição  $(\star)$  existem constantes  $C_0 > 0$  e  $N_0 > 0$  tais que

$$|\widehat{u}(m)| \leq C_0^{-1} |\widehat{f}(m)| (1 + |m|)^{N_0}. \quad (5.2.1)$$

Assim, usando o fato de  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  dado  $N > 0$  existe uma constante  $C_N > 0$  tal que

$$|\widehat{f}(m)| \leq \frac{C_N}{(1 + |m|)^{N - N_0}}. \quad (5.2.2)$$

Logo, substituindo (5.2.2) em (5.2.1) obtemos

$$|\widehat{u}(m)| \leq \frac{C_0^{-1}C_N}{(1+|m|)^N},$$

Logo,  $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  como queríamos demonstrar.

Para mostrar que (i)  $\Rightarrow$  (ii) suponha por absurdo que a condição  $(\star)$  não ocorra, então existiriam  $m(l) = (m_1(l), \dots, m_n(l)) \in \mathbb{Z}^n$  tais que

$$\left| \sum_{j=1}^n m_j(l) \Lambda_j \right| \leq \frac{1}{(1+|m(l)|)^l}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (5.2.3)$$

Sem perda de generalizadas podemos assumir que  $|m(l)| \geq l$ . Defina

$$C_m = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq m(l) \text{ ou } m = 0 \\ \frac{\sum_{j=1}^n \Lambda_j m_j(l)}{1+|m(l)|^2}, & \text{se } m = m(l), m \neq 0. \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Mostraremos que  $C_m$  tem decaimento rápido. De fato, aplicando a condição (5.2.3) obtemos

$$|C_{m(l)}| = \frac{\left| \sum_{j=1}^n \Lambda_j m_j(l) \right|}{1+|m(l)|^2} \leq \frac{1}{(1+|m(l)|)^l}$$

Logo, dado  $N > 0$

$$(1+|m(l)|)^N |C_{m(l)}| \leq \frac{1}{(1+|l|)^{l-N}} \leq 1$$

para todo  $m(l) > l \geq N$ . Seja  $M = \max\{(1+|m(l)|)^N |C_{m(l)}| \mid |m(l)| \leq N\}$ .

Assim vemos que

$$(1+|m(l)|)^N |C_{m(l)}| \leq \max\{M, 1\} = C_N.$$

Portanto, concluimos que dado qualquer  $N > 0$  existe  $C_N > 0$  tal que

$$|C_m| \leq \frac{C_N}{(1+|m|)^N}$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}^N$ . Logo, definindo  $f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} C_m e^{2\pi i m \cdot x}$  segue que  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$

Por outro lado seja  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  tal que  $Lg = f$ . Assim aplicando a transformada de Fourier obtemos para cada  $m \in \mathbb{Z}^N$  a seguinte expressão

$$\sum_{j=1}^N m_j \Lambda_j \widehat{g}(m) = \widehat{f}(m).$$

Seja

$$\mathfrak{H} \doteq \left\{ l \in \mathbb{N} \mid \sum_{j=1}^n m_j(l) \Lambda_j = 0 \right\}.$$

Assim, para  $m = m(l)$  tal que  $l \notin \mathfrak{H}$  obtemos

$$\widehat{g}(m(l)) = \frac{\widehat{f}(m(l))}{\sum_{j=1}^n m_j(l)\Lambda_j} = \frac{1}{1 + |m(l)|^2}.$$

Portanto, como as condições do Teorema 5.0.1 não se verificam temos que  $g \notin C^\infty(\mathbb{T}^N)$ , o que é uma contradição. Logo, os números  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  satisfazem a condição Diofantina  $(\star)$ .  $\square$

### 5.3 Conjugação- $C^\infty$

Daremos agora o resultado principal deste trabalho, que nos diz que, se o transposto  $L^*$  de um operador  $L$  for globalmente hipoeĺptico, sempre é possível encontrarmos um sistema de coordenadas, de tal forma que, neste novo sistema  $L$  tem coeficientes constantes, com tais constantes satisfazendo a condição Diofantina  $(\star)$ . Como consequência deste fato, veremos que as órbitas de pontos no toro  $\mathbb{T}^N$  são densas no toro  $\mathbb{T}^N$ , isto é, os sistemas dinâmicos gerados por  $L$  são minimais.

**Teorema 5.3.1** (Resultado Central). *Seja  $L \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^N)$  um campo vetorial suave real. Então o operador transposto  $L^*$  é Globalmente Hipoeĺptico se, e somente se, existem um difeomorfismo global  $\tau : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$ ,  $y = \tau(x)$ , e números reais  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$  satisfazendo a condição Diofantina  $(\star)$  tais que  $L$  se conjugua com o campo*

$$L_0 = \sum_{j=1}^N \Lambda_j \partial_{y_j}. \quad (5.3.1)$$

**Demonstração:** Para a prova da necessidade da condição, sejam  $a_j \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ ,  $j = 1, \dots, N$  tais que  $L = \sum_{j=1}^N a_j(x) \partial x_j$  e defina

$$\Lambda_j = \int_{\mathbb{T}^N} a_j(x) \omega(x) dx, \quad (5.3.2)$$

para  $j = 1, \dots, N$ .

Notemos que para cada  $j$  fixo a função  $\Lambda_j - a_j(x)$  satisfaz a condição de compatibilidade (5.1.2). De fato,

$$\int_{\mathbb{T}^N} (\Lambda_j - a_j(x)) \omega(x) dx = \Lambda_j \int_{\mathbb{T}^N} \omega(x) dx - \int_{\mathbb{T}^N} a_j(x) \omega(x) dx = 0.$$

Assim, pelo teorema de resolubilidade 5.1.1, para cada  $j \in \{1, \dots, N\}$  fixo, existem  $N$ -funções  $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  tais que

$$L\varphi_j(x) = \Lambda_j - a_j(x). \quad (5.3.3)$$

Defina  $\tau_j(x) = x_j + \varphi_j(x)$  então, é fácil ver que  $\tau_j$  define uma função quase-periódica no toro  $\mathbb{T}^N$  tal que

$$L\tau_j = \Lambda_j, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (5.3.4)$$

Defina a aplicação  $\tau(x) = (\tau_1(x), \dots, \tau_N(x)) \pmod{1}$ . Então graças aos Lemas 5.3.2, 5.3.3 que serão provados adiante, como  $L^*$  é globalmente hipoeelíptico,  $\tau$  define um difeomorfismo global. Além disso, se  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  temos que se  $y = \tau(x)$  então

$$Lf(x) = \sum_{j=1}^N \Lambda_j \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_j} \doteq L_0 \tilde{f}(y) \quad (5.3.5)$$

sendo que  $\tilde{f}(y) = f(x)$ .

Novamente, graças ao Teorema 5.1.1 segue que, se  $L^*$  é globalmente hipoeelíptico então,  $L$  é globalmente hipoeelíptico e portanto,  $L_0$  é globalmente hipoeelíptico. Logo aplicando o Teorema 5.2.1 para  $L_0$ , segue que os números reais  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$  satisfazem a condição Diofantina  $(\star)$ .

Reciprocamente, suponhamos que existam um difeomorfismo global  $\tau : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$ ,  $y = \tau(x)$ , e números reais  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$  satisfazendo a condição Diofantina  $(\star)$  tais que  $L$  se conjuga com o campo

$$L_0 = \sum_{j=1}^N \Lambda_j \partial_{y_j}. \quad (5.3.6)$$

Logo, pelo Teorema 5.2.1 temos que  $L_0$  é globalmente hipoeelíptico, o que implica que  $L$  é globalmente hipoeelíptico. Queremos mostrar que  $L^*$  é Globalmente Hipoeelíptico. De fato, recordemos que

$$L^*(J(x)v(x)) = J(x)Lv(x)$$

para toda  $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ . Agora, seja  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$  tal que  $L^*u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ . Se  $\tilde{u} = \frac{u}{J}$  temos pela relação anterior que

$$L^*(u) = L^*(J\tilde{u}) = J(x)L(\tilde{u}) \in C^\infty(\mathbb{T}^N).$$

Segue da Hipoeelipticidade de  $L$  que  $\tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ , de onde concluímos que  $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ .

□

**Lema 5.3.1.** *Se  $L^*$  é Globalmente Hipolítico então,*

$$\sum_{j=1}^N k_j \Lambda_j \neq 0$$

para todo multi-índice  $K = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$ ,  $K \neq 0$ .

**Demonstração:** Suponha que exista  $K = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$ ,  $K \neq 0$  tal que

$$\sum_{j=1}^N k_j \Lambda_j = 0 \tag{5.3.7}$$

Defina,  $\varphi(x) = \exp \left\{ 2\pi i \sum_{j=1}^N k_j \tau_j(x) \right\}$ , temos que  $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  pois, como  $\tau_j(x+1) = x_j + 1 + \varphi_j(x+1) = x_j + 1 + \varphi_j(x) = \tau_j(x) + 1$  segue que,

$$\begin{aligned} \varphi(x+1) &= \exp \left\{ 2\pi i \sum_{j=1}^N k_j \tau_j(x+1) \right\} = \exp \left\{ 2\pi i \sum_{j=1}^N k_j (\tau_j(x) + 1) \right\} \\ &= \exp \left\{ 2\pi i \sum_{j=1}^N k_j \tau_j(x) \right\} \exp \left\{ 2\pi i \sum_{j=1}^N k_j \right\} \\ &= \exp \left\{ 2\pi i \sum_{j=1}^N k_j \tau_j(x) \right\} = \varphi(x). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} L\varphi(x) &= \sum_{k=1}^N a_k(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} = 2\pi i \sum_{k=1}^N a_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{j=1}^N k_j \tau_j(x) \right) \varphi(x) \\ &= 2\pi i \varphi(x) \sum_{k=1}^N a_k(x) \sum_{j=1}^N k_j \frac{\partial \tau_j(x)}{\partial x_k} \\ &= 2\pi i \varphi(x) \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_k(x) k_j \frac{\partial \tau_j(x)}{\partial x_k} \\ &= 2\pi i \varphi(x) \sum_{j=1}^N k_j L\tau_j = 2\pi i \varphi(x) \sum_{j=1}^N k_j \Lambda_j = 0. \end{aligned}$$

Assim,  $\varphi$  é solução da equação  $L\varphi = 0$ . A seguir mostraremos que  $L^*(\varphi\omega) = 0$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} L^*(\varphi\omega) &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} (a_k(x)\varphi(x)\omega(x)) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} a_k(x)\omega(x) + \sum_{k=1}^N \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x_k} (a_k(x)\omega(x)) \\ &= \omega(x)L\varphi(x) + \varphi(x)L^*(\omega) = 0. \end{aligned}$$

Pelo Corolário 5.0.2 existe uma constante complexa  $c \doteq \exp\{2\pi i\beta\} \in \mathcal{S}^1$  tal que  $\varphi(x) = c$  para todo  $x \in \mathbb{T}^N$ . Desta forma,

$$\varphi(x) = \exp \left\{ 2\pi i \sum_{j=1}^N k_j \tau_j(x) \right\} = \exp \{2\pi i\beta\}$$

ou seja,  $\exp \left\{ 2\pi i \left\{ \sum_{j=1}^N k_j \tau_j(x) - \beta \right\} \right\} = 1$ . Logo,  $\sum_{j=1}^N k_j \tau_j(x) - \beta \in \mathbb{Z}$  mostrando que  $Im \left( \sum_{j=1}^N k_j \tau_j(x) - \beta \right) \subset \mathbb{Z}$ . Assim,  $\sum_{j=1}^N k_j \tau_j(x) = \beta \pmod{1}$ . Como  $\mathbb{T}^N$  é conexo, segue existe um único número  $\ell \in \mathbb{Z}$  tal que  $\sum_{j=1}^N k_j \tau_j(x) = \beta + \ell \doteq c$ , de onde concluímos que

$$\sum_{j=1}^N k_j x_j = c - \sum_{j=1}^N k_j \varphi_j(x). \tag{5.3.8}$$

Usando a periodicidade das aplicações  $\varphi_j$  em cada coordenada, isto é, para cada  $j = 1, \dots, N$  fixo temos que  $\varphi_j(x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_N) = \varphi_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)$ . Logo, segue de (5.3.8) que

$$k_1 x_1 + \dots + k_j (x_j + 1) + \dots + k_N x_N = c - \sum_{j=1}^N k_j \varphi_j(x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_N) \tag{5.3.9}$$

Por outro lado,

$$k_1 x_1 + \dots + k_j x_j + \dots + k_N x_N = c - \sum_{j=1}^N k_j \varphi_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) \tag{5.3.10}$$

Subtraindo as equações (5.3.9) e (5.3.10) vemos que  $k_j = 0$  para todo  $j = 1, \dots, N$  o que gera uma contradição. Concluímos assim a prova do Lema.  $\square$

**Lema 5.3.2.** *Suponha que  $L^*$  seja Globalmente Hipoelíptico, então*

$$J(x) = \omega(x), \forall x \in \mathbb{T}^N. \tag{5.3.11}$$

onde  $J(x)$  denota o determinante Jacobiano da função  $\tau(x) = (\tau_1(x), \dots, \tau_N(x))$ . Isto é,

$$J(x) = \begin{vmatrix} \partial_1 \tau_1(x) & \partial_2 \tau_1(x) & \cdots & \partial_N \tau_1(x) \\ \partial_1 \tau_2(x) & \partial_2 \tau_2(x) & \cdots & \partial_N \tau_2(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 \tau_N(x) & \partial_2 \tau_N(x) & \cdots & \partial_N \tau_N(x) \end{vmatrix}$$

onde  $\partial_j \tau_k(x) = \frac{\partial \tau_k}{\partial x_j}(x)$ .

**Demonstração:** Se mostrarmos que  $J(x)$  é solução da equação  $L^*u = 0$ , teremos pelo Teorema (5.0.1) que  $J(x) = c_0\omega(x)$  para alguma constante  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Daí, só nos restará mostrar que  $c_0 = 1$ . De fato,

$$L^*J(x) = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda_j(x)J(x)). \quad (5.3.12)$$

Dado que  $J(x)\lambda_j(x) = J_j(x)$ , onde  $J_j(x)$  é o determinante da matriz que se obtém substituindo-se a  $j$ -ésima coluna da matriz Jacobiana de  $\tau(x)$  pelo vetor  $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_N)^t$  temos que,

$$L^*J(x) = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda_j(x)J(x)) = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} J_j(x). \quad (5.3.13)$$

Agora, usando o fato de que  $J_j(x)$  é uma forma  $N$ -linear alternada com respeito as colunas, segue que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} J_j(x) = \sum_{k=1, k \neq j}^N J_j^k(x) \quad (5.3.14)$$

onde,  $J_j^k(x)$  é o determinante que se obtém derivando a  $k$ -ésima coluna com relação a  $x_j$ , isto é,

$$J_j^k(x) = \begin{vmatrix} \partial_1\tau_1(x) & \partial_2\tau_1(x) & \cdots & \partial_j\tau_1(x) & \cdots & \partial_j\partial_k\tau_1(x) & \cdots & \partial_N\tau_1(x) \\ \partial_1\tau_2(x) & \partial_2\tau_2(x) & \cdots & \partial_j\tau_2(x) & \cdots & \partial_j\partial_k\tau_2(x) & \cdots & \partial_N\tau_2(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_1\tau_N(x) & \partial_2\tau_N(x) & \cdots & \partial_j\tau_N(x) & \cdots & \partial_j\partial_k\tau_N(x) & \cdots & \partial_N\tau_N(x) \end{vmatrix}.$$

Note que,  $J_j^k + J_k^j \equiv 0$  pois, como

$$J_k^j(x) = \begin{vmatrix} \partial_1\tau_1(x) & \partial_2\tau_1(x) & \cdots & \partial_k\partial_j\tau_1(x) & \cdots & \partial_k\tau_1(x) & \cdots & \partial_N\tau_1(x) \\ \partial_1\tau_2(x) & \partial_2\tau_2(x) & \cdots & \partial_k\partial_j\tau_2(x) & \cdots & \partial_k\tau_2(x) & \cdots & \partial_N\tau_2(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_1\tau_N(x) & \partial_2\tau_N(x) & \cdots & \partial_k\partial_j\tau_N(x) & \cdots & \partial_k\tau_N(x) & \cdots & \partial_N\tau_N(x) \end{vmatrix}$$

trocando a  $k$ -ésima coluna de  $J_k^j(x)$  pela  $j$ -ésima coluna e usando Schwartz, concluímos que  $J_j^k = -J_k^j \Rightarrow J_j^k + J_k^j \equiv 0$ . Agora, substituindo (5.3.14) em (5.3.13) obtemos,

$$L^*J(x) = - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1, k \neq j}^N J_j^k(x) \quad (5.3.15)$$

$$= - \sum_{1 \leq j < k \leq N} J_j^k + J_k^j. \quad (5.3.16)$$





onde,

$$I_2^k = \int_{\mathbb{T}^N} |\Phi, \partial_1 \Phi, \dots, \partial_2 \partial_k \Phi, \dots, \partial_N \Phi| dx.$$

Aplicando o mesmo procedimento para  $I_j$  obtemos,

$$I_j = - \int_{\mathbb{T}^N} \left( |\partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi, \partial_3 \Phi, \dots, \partial_N \Phi| - \sum_{k=2, k \neq j}^N I_j^k \right) dx, \quad (5.3.19)$$

onde,  $I_j^k$  são determinantes de ordem  $N$  com  $\Phi$  na primeira coluna,  $\partial_1 \Phi$  na  $j$ -ésima coluna, e  $\partial_j \partial_k \Phi$  na  $k$ -ésima coluna, etc. Como consequência, resulta que

$$I_j^k + I_k^j = 0, \quad 2 \leq k, j \leq N, \quad k \neq j.$$

substituindo em ?? segue que,

$$\int_{\mathbb{T}^N} |\partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi, \dots, \partial_N \Phi| dx = -(N-1) \int_{\mathbb{T}^N} |\partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi, \dots, \partial_N \Phi| dx. \quad (5.3.20)$$

e isto garante que a integral é nula. Logo,

$$\int_{\mathbb{T}^N} J(x) dx = 1.$$

e portanto,  $c_0 = 1$ . □

**Observação 5.3.5:** O lema 5.3.2 assegura que a aplicação  $\tau : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$ ,  $y = \tau(x)$  é um difeomorfismo local. Os lemas a seguir mostram mais que isso ou seja, mostraremos que  $\tau$  é um difeomorfismo global, isto é, globalmente injetiva e sobrejetiva.

**Lema 5.3.3.** *Se o transposto  $L^*$  é Globalmente  $C^\infty$  Hipoeilíptico, então a aplicação  $\tau : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$  definida por*

$$\tau(x) = (x_1 + \varphi_1(x), \dots, x_N + \varphi_N(x)) \quad (5.3.21)$$

é sobrejetora.

**Demonstração:** Considere o seguinte problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \lambda_1, & x_1(0) = x_1^0 \\ \frac{dx_2}{dt} = \lambda_2, & x_2(0) = x_2^0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{dx_N}{dt} = \lambda_N, & x_N(0) = x_N^0 \end{cases}$$

Seja  $x(t, x_0)$  a solução do PVI acima, com  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$ . Para  $y_0 = \tau(x_0)$  defina

$$y(t, y_0) = \tau(x(t, x_0)) = (y_1(t, y_0), \dots, y_N(t, y_0)) \quad (5.3.22)$$

onde  $y_j(t, y_0) = \tau_j(x_1(t, x_0), \dots, x_N(t, x_0))$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Derivando  $y_j$  em relação a  $t$ , segue da regra da cadeia que

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} \tau_j(x(t, x_0)) \frac{dx_k}{dt} = L\tau_j(x(t, x_0)) = \Lambda_j. \quad (5.3.23)$$

De onde concluímos que  $y(t, y_0) = \tau(x(t, x_0))$  é solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \Lambda_1, & y_1(0, y_0) = y_1^0 \\ \frac{dy_2}{dt} = \Lambda_2, & y_2(0, y_0) = y_2^0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{dy_N}{dt} = \Lambda_N, & y_N(0, y_0) = y_N^0 \end{cases}$$

Por outro lado, o PVI acima define um grupo a 1-parâmetro de translações  $\{y_\Lambda^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  onde, para cada  $t \in \mathbb{R}$

$$y_\Lambda^t \doteq y(t, y_0) = y_0 + t\Lambda. \quad (5.3.24)$$

$y_0 = (y_1^0, \dots, y_N^0)$ ,  $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_N)$ . Segue de 5.3.22 e 5.3.24 que  $\tau(x(t, x_0)) = y_0 + t\Lambda$ ,  $y_0 = \tau(x_0)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Dado  $y \in \mathbb{T}^N$  queremos mostrar que existe  $x \in \mathbb{T}^N$  tal que  $\tau(x) = y$ . De fato, segue do lema 5.3.2 e da proposição 4.1.1 que a órbita pelo ponto  $y_0$ , dado por  $\mathcal{O}(y_0) = \{y_0 + nt\Lambda \mid n \in \mathbb{Z}\}$  é densa no toro  $\mathbb{T}^N$ , isto é,  $\overline{\mathcal{O}(y_0)} = \mathcal{O}(y_0) = \mathbb{T}^N$ . Assim, se  $y \in \mathbb{T}^N$  existe  $\bar{t} \in \mathbb{R}$  tal que  $y = y_0 + \bar{t}\Lambda = \tau(x(\bar{t}, x_0))$ . O que conclui a sobrejetividade.

**Lema 5.3.4.** *Se o transposto  $L^*$  é Globalmente  $C^\infty$  Hipoeĺptico , então a aplicação  $\tau : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$  é globalmente injetiva.*

**Demonstração:** Considere a seguinte função contagem

$$N(y) = \# \{x \in \mathbb{T}^N \mid \tau(x) = y\}.$$

Pelo lema 5.3.3, segue que  $N(y) \geq 1$ ,  $\forall y \in \mathbb{T}^N$ . Sabemos, pelo lema 5.3.2 que  $\tau : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$  define um difeomorfismo local e assim,  $N(y)$  é constante em alguma vizinhança de  $y$ ,  $\forall y \in \mathbb{T}^N$ . Sendo  $\mathbb{T}^N$  conexo, segue que  $N(y)$  é constante em  $\mathbb{T}^N$ , isto é,  $N(y) = N_0$ . É suficiente mostrarmos agora que  $N_0 = 1$ . De fato, aplicando o lema 5.3.2 e o teorema 5.0.1 á aplicação  $\tau$  obtemos,

$$1 = \int_{\mathbb{T}^N} J(x) dx = \int_{\mathbb{T}^N} \# \{x \in \tau^{-1}(y) \subset \mathbb{T}^N\} dy = N_0.$$

De onde concluímos que aplicação  $\tau$  é globalmente injetiva.

## 5.4 Análise Espectral

Consideremos agora o espaço de Hilbert complexo  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}^N, \omega dx)$  munido com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}^N} f(x) \overline{g(x)} \omega(x) dx. \quad (5.4.1)$$

Dado o campo vetorial suave  $L = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$  definimos o operador  $D = (2\pi i)^{-1}L$ . É fácil ver que, para todo par  $f, g \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$

$$\langle Df, g \rangle = \langle f, Dg \rangle. \quad (5.4.2)$$

Temos assim que  $D$  define um operador auto-adjunto. Veja que a relação (5.4.2) ainda seria válida tomando-se  $f, g \in H^1(\mathbb{T}^N)$ .

O próximo Teorema trata das propriedades espectrais do operador  $D$ .

**Teorema 5.4.1.** *Se  $L^*$  é GH, então o espectro do operador  $D$  consiste dos auto-valores da forma*

$$\mu_m = \sum_{j=1}^N m_j \Lambda_j$$

com  $m = (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}^N$  e das correspondentes auto-funções

$$\varphi_m(x) = \exp(2\pi i \sum_{j=1}^n m_j \tau_j(x)). \quad (5.4.3)$$

Além disso, o auto-espaço associado a cada auto-valor é unidimensional. As auto-funções em (5.4.3) formam um sistema ortonormal completo para  $\mathcal{H}$ .

**Demonstração:** Note que

$$\begin{aligned} D\varphi_m(x) &= (2\pi i)^{-1} \sum_{j=1}^N a_j(x) \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_j} \\ &= (2\pi i)^{-1} \sum_{j=1}^N a_j(x) \left( 2\pi i m \cdot \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_j} \right) \varphi_m(x) \\ &= \varphi_m(x) \sum_{j=1}^N a_j(x) \left( \sum_{\ell=1}^n m_\ell \frac{\partial \tau_\ell(x)}{\partial x_j} \right) \\ &= \varphi_m(x) \sum_{\ell=1}^N m_\ell L \tau_\ell(x) \\ &= \varphi_m(x) \sum_{\ell=1}^N m_\ell \Lambda_\ell \end{aligned}$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}^N$ . A seguir, mostraremos que  $\langle \varphi_m, \varphi_k \rangle = \delta_{mk}$  (delta de Kronecker). Vamos estimar a seguinte expressão

$$\langle \varphi_m, \varphi_k \rangle = \int_{\mathbb{T}^N} \varphi_m(x) \overline{\varphi_k(x)} \omega(x) dx$$

Aplicando a mudança de variável  $y = \tau(x)$  na integral acima e utilizando o resultado do Lema 5.3.2, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \varphi_m, \varphi_k \rangle &= \int_{\mathbb{T}^N} \varphi_m(x) \overline{\varphi_k(x)} \omega(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} \phi_m(y) \overline{\phi_k(y)} dy = \delta_{mk}. \end{aligned}$$

Para mostrarmos que  $\{\phi_m\}$  define um sistema ortonormal completo resta provar que se  $f \in \mathcal{H}$  é tal que  $\langle f, \phi_m \rangle = 0$  para todo  $m \in \mathbb{Z}^N$  então  $f \equiv 0$ . Isto segue do seguinte fato

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_m \rangle &= \int_{\mathbb{T}^N} f(x) \overline{\phi_m(x)} \omega(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} f(\tau^{-1}(y)) \overline{\varphi_m(x)} dy \\ &= \widehat{f \circ \tau^{-1}}(m). \end{aligned}$$

Assim por uma propriedade da transformada de Fourier se  $\widehat{f \circ \tau^{-1}}(m) = 0$  para todo  $m \in \mathbb{Z}^N$  temos então que  $f \circ \tau^{-1} \equiv 0$  ou seja  $f \equiv 0$  como queríamos demonstrar.  $\square$

A seguir mostraremos que o difeomorfismo global  $\tau$  induz uma isometria entre os espaços de Hilbert  $L^2(\mathbb{T}^N, dy)$  e  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}^N, \omega dx)$ . De fato, consideremos a aplicação  $\tau^\sharp$  definida por  $\tau^\sharp(f)(x) = f(\tau(x))$ . Uma vez provado que as sequências de funções  $\{\phi_m \mid m \in \mathbb{Z}^N\}$  e  $\{\varphi_m \mid m \in \mathbb{Z}^N\}$  são bases ortonormais completas respectivamente dos espaços  $L^2(\mathbb{T}^N, dy)$  e  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}^N, \omega dx)$ , basta então mostrarmos que a aplicação  $\tau^\sharp$  leva base em base. De fato,

$$\tau^\sharp(\phi_m)(x) = \phi_m(\tau(x)) = \exp(2\pi i \sum_{j=1}^n m_j \tau_j(x)) = \varphi_m(x).$$

$\square$

Se  $f \in L^2(\mathbb{T}^N, dy)$  vemos que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &\doteq \langle f, \phi_m \rangle = \int_{\mathbb{T}^N} f(y) e^{2\pi i m \cdot y} dy \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} f(\tau(x)) e^{2\pi i m \cdot \tau(x)} \omega(x) dx \\ &= \langle \tau^\sharp(f), \varphi_m \rangle. \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Consideremos então o seguinte Teorema.

**Teorema 5.4.2.** *Se  $L^*$  é GH, então  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  se, e somente, se dado qualquer constante positiva  $N$  existe  $C_N > 0$  tal que*

$$|\langle f, \varphi_m \rangle| \leq \frac{C_N}{(1 + |m|)^N} \quad (5.4.5)$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}^N$ .

**Demonstração:** Seja  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$  então aplicando a relação (5.4.4) a função  $f \circ \tau^{-1}$  obtemos

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi_m \rangle| &= |\langle \tau^\sharp(f \circ \tau^{-1}), \varphi_m \rangle| \\ &= \widehat{f \circ \tau^{-1}}(m) \end{aligned}$$

Logo, dado  $N$  existe  $C_N > 0$  tal que

$$|\langle f, \varphi_m \rangle| \leq \frac{C_N}{(1 + |m|)^N},$$

como queríamos demonstrar. □



# Referências Bibliográficas

- [B] Brezis, H. *TD Analyse Fonctionnelle*.
- [CC] Chen, W., Chi, M.Y., *Hypoelliptic Vector Fields and Almost Periodic Motions on the Torus  $\mathbb{T}^N$* . Partial Differential Equations, 25(1 and 2), 337-354(2000).
- [F] Folland, B.G. *Real Analysis*. Modern techniques and Their Applications, Second Edition.
- [G] Grafakos, L. *Classical Fourier Analysis*. Springer, 2 edition, 2008.
- [GW] Greenfield, S. J; Wallach, N.R. *Globally Hypoelliptic vector fields, topology 12 (1973), 247-253*.
- [H] Hounie, Jorge. *Teoria elementar das distribuições*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, s.d.. 164 p.
- [H1] Hounie, Jorge. *Globally Hypoelliptic vector fields on compact surfaces*. Comm. P.D.E., 7(4)(1982), 343-370.
- [K] Katok, Anatole; HASSELBLATT, Boris. *Introduction to modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press. 26-34(2005).
- [L] Lerner, Nicolas. *Lecture Notes on Real Analysis*. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 31-45(2008).
- [NS] Nemytskii, V. V; Stepanov, V.V. *Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*. Princeton Univ. Press, N.J., 1960.
- [CR] Oliveira, César R. *Introdução à Análise Funcional*. Publicações Matemáticas, 2ª edição, 2007 58-62.

- [V] Oliveira, Krerley; Vianna, Marcelo. *Introdução à Teoria Ergódica*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada 28-29.
- [HG] Petronilho, G; Himonas A.A. *On Gevrey regularity of globally  $C^\infty$  hypoelliptic operators*. J. Differential Equations 207, 267-284(2004).
- [R] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis* McGraw-Hill, 3 edition, 1987.
- [RZ] Ruzhansky, M.; Turunen, V. *Pseudo Differential Operators and Symmetries Theory and Applications*, vol 2.
- [S] Sternberg, S. *On differential equations on the torus*. Amer. J. Math., 76 (1957), 397-402.
- [W] Warner, Frank Wilson. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie groups*. New York: Springer-Verlag, 227-240(1983).