

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Funções Elíticas Simétricas e Aplicações em Superfícies Mínimas

Alvaro Julio Yucra Hanco

São Carlos - SP
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Funções Elíticas Simétricas e Aplicações em Superfícies Mínimas

Alvaro Julio Yucra Hanco

Orientador: Prof. Dr. Guillermo A. Lobos Villagra

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP
2010

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

Y94fe

Yucra Hanco, Alvaro Julio.

Funções elípticas simétricas e aplicações em superfícies mínimas / Alvaro Julio Yucra Hanco. -- São Carlos : UFSCar, 2010.

79 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Geometria diferencial. 2. Superfícies mínimas. 3. Funções elípticas. 4. Riemann, Superfícies de. I. Título.

CDD: 516.36 (20ª)

Banca Examinadora:



**Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra
DM - UFSCar**



**Prof. Dr. Fernando Manfio
ICMC - USP**



**Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva
UFABC**

*Dedico este trabalho à minha família pelo apoio constante e incondicional,
sobretudo à minha mãe.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus antes que nada.

Ao Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra, amigo e orientador por sua dedicação, disposição, pelo profissionalismo e principalmente, pela enorme vontade que transmite ao estudo da Matemática.

Ao Prof. Dr. Valério Ramos Batista, por seu apoio e enorme paciência.

Ao meu Pai, Juan; a minha mãe, Emilia; a meus irmãos, Matilde, Flora, e Juan, pelo amor e incentivo constante na vida acadêmica e por me ensinar que não há obstáculo impossível de superar, se agir com muita fé e esforço.

A todos os meus colegas e amigos, onde quer que estejam, especialmente os novos amigos que fiz aqui em São Carlos quem fizeram-me sentir em casa.

Aos professores do departamento de Matemática, em especial, César Kondo, Fábio, Edivaldo, Luis Antonio e Ruy

A Pablo Vinicius, pelo incentivo.

Finalmente agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Em 1989, H.Karcher elaborou um método para a construção de superfícies mínimas, denominada *método de construção reversa* dado em [10]. Nesse trabalho foi reescrita a teoria de funções elíticas utilizando uma abordagem mais geométrica do que analítica. Desse modo, ele conseguiu controlar o comportamento e os valores imagens dessas funções, facilitando sua aplicação em superfícies mínimas.

Neste trabalho de mestrado, apresentamos ferramentas básicas da teoria de funções elíticas simétricas, descrevendo explicitamente a \wp -Weierstraß simétrica e a função γ , que serão aplicadas no método de construção reversa para um exemplo de superfície mínima.

Abstract

In 1989, H.Karcher elaborated a method for the construction of minimal surfaces, denominated reverse construction method given in [10]. In that work it was rewritten the theory of elliptic functions using an approach more geometrical than analytical. This allows to better control the behavior and the image values of those functions, making it easier his application in minimal surfaces.

In this master's thesis, we will present basic tools of the theory of symmetric elliptic functions, describing explicitly the symmetric \wp -Weierstraß and the function γ , that will be applied in the reverse construction method for an example of minimal surface.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	2
2.1	Algumas noções básicas	2
2.1.1	O Espaço Tangente	3
2.2	Superfícies de Riemann	5
2.2.1	Cartas Complexas e Estruturas Complexas	5
2.2.2	Atlas Complexo	7
2.2.3	Variedade 2-Real	8
2.2.4	O Gênero de uma Superfície Compacta	9
2.2.5	Toro Complexo	10
2.2.6	Propriedades elementares de Aplicações Holomorfas	13
2.3	Espaços de Recobrimento	15
2.4	Levantamento de caminhos	16
2.5	Superfícies Mínimas	17
2.5.1	Parâmetros Isotérmicos	19
3	Funções Elíticas	28
3.1	Desenho Geométrico do Toro	30
3.2	A função P de Weierstraß	30
3.3	A relação entre P e \wp	32
3.4	Uma observação importante	35
4	A Função \wp-Weierstraß Simétrica	36
4.1	Resultados básicos	36
4.2	A função \wp -Weierstraß simétrica	39
4.3	A equação algébrica do toro	49
4.4	A constante c	50
5	A Função γ	54

SUMÁRIO

ix

6 Aplicações	63
6.1 Resultados clássicos	63
6.2 Exemplo de superfície mínima	65
Bibliografia	78

Lista de Figuras

3.1	Desenho Geométrico do Toro	30
3.2	Uma elipse com raios κ e 1.	31
3.3	O Toro T	33
4.1	Diagrama das involuções I e J	37
4.2	O Toro T	39
4.3	p, q diagonalmente opostos no sub-reticulado, $\wp(q) = -\frac{1}{\wp(p)}$	42
4.4	As involuções $I_{1,2,3,4}$ no toro retangular T	43
4.5	A imagem $\wp(T)$ com as involuções induzidas.	46
4.6	Os valores de \wp no toro retangular T	46
4.7	As involuções $I_{1,2,5,6}$ no toro rômboico T	47
4.8	Os valores de \wp no toro rômboico T	49
4.9	(a) valores de \wp ; (b) valores de \wp'	50
4.10	A aplicação g	51
4.11	Representação dos tipos de toros.	52
5.1	a) valores de \wp ; b) valores de γ	54
5.2	Diferentes maneiras de se representar o toro.	59
5.3	Valores da função γ	60
5.4	Pólos e zeros de a) γ ; b) γ' e c) γ'/γ	60
5.5	Pólos e zeros de a) γ' e b) $\frac{1}{\wp} + \wp$	61
5.6	Pólos e zeros de a) $\cot \alpha + \wp$ e b) $\tan \alpha + 1/\wp$	61
6.1	Um campo de catenóides.	66
6.2	a) o quadrado Q ; b) a superfície compactificada \overline{M}	67
6.3	Superfície compactificada \overline{M}	67
6.4	a) Valores de γ ; b) Correspondência de pontos de M no toro.	68
6.5	a) Curva β sobre o toro; b) imagem de β por γ	68
6.6	Vetores normais unitários.	69
6.7	Zeros e pólos de $1/\gamma$ e dh	70
6.8	Planos de Simetria.	73
6.9	Período ao longo da curva σ	74

6.10	Período ao longo da curva $\tilde{\sigma}$	75
6.11	Domínio \mathcal{R}	75
6.12	a) imagem $\mathcal{D} = g(\mathcal{R})$; b) projeção $(x_2, x_3) _{\mathcal{R}}$	76
6.13	a) domínio fundamental de P ; b) domínio fundamental no toro.	76
6.14	$N(\mathcal{R})$ contido em um hemisfério da esfera.	76
6.15	Possíveis projeções do domínio fundamental em $x_1 = 0$	77
6.16	Domínio fundamental.	77

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho baseia-se no estudo do artigo intitulado *Construction of minimal surfaces*, de H. Karcher que desenvolveu em 1989 um método para a construção de Superfícies Mínimas, denominado *método de construção reversa* [10]. Tal método consiste nos seguintes passos:

1. Esboço da Superfície Mínima M ;
2. Compactificação \overline{M} de M ;
3. Hipóteses de Simetria;
4. Equação Algébrica de \overline{M} ;
5. Obtenção dos Dados de Weierstraß de \overline{M} ;
6. Verificação das Involuções de \overline{M} segundo as hipóteses de simetria;
7. Análise dos Períodos;
8. Verificação do Mergulho da Peça Fundamental.

Neste trabalho damos as ferramentas teóricas para a aplicação deste método e construímos a superfície mínima chamada *campo de catenóides*. No Capítulo 2, estudamos a teoria básica de Geometria Diferencial, Variáveis Complexas, Superfícies de Riemann e Mínimas. No Capítulo 3, exploramos a teoria de funções elíticas segundo Karcher, com uma abordagem mais geométrica do que analítica. No Capítulo 4, fazemos uma análise da função \wp -Weierstraß Simétrica e no Capítulo 5 apresentamos a função γ via transformação de Möbius. Com estas funções, exibimos a equação algébrica do toro. Finalmente, no último capítulo, construímos o campo de catenóides.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Algumas noções básicas

Neste capítulo apresentamos alguns resultados gerais de Variedades Diferenciáveis de dimensão 2. Exploramos noções básicas das superfícies de Riemann e algumas propriedades de aplicações holomorfas. Enfatizamos, a teoria de Superfícies Mínimas. Além disso, apresentamos um resultado no qual parâmetros isotérmicos são úteis quando se deseja trabalhar com tais superfícies.

Definição 2.1. Uma variedade diferenciável de dimensão 2, ou uma 2-variedade C^∞ , é um espaço topológico M de Hausdorff com base enumerável, munido de uma família $\Sigma(M) = \{(\varphi_i, U_i)$, de homeomorfismos $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}$, onde U_i é aberto de M , e V_i aberto do \mathbb{R}^2 , tal que:

- (1) $\bigcup_i U_i = M$;
- (2) $\forall i, j$ com $U_i \cap U_j = W \neq \emptyset$, $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ é de classe C^∞ em W ;
- (3) Dado um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$, onde U é subconjunto aberto de M , V é aberto em \mathbb{R}^2 , e $\{(\varphi, U)\} \cup \Sigma(M)$ satisfazendo (2), tem-se $(\varphi, U) \in \Sigma(M)$. Ou seja, $\Sigma(M)$ é maximal.

Observação 2.1. Os elementos de $\Sigma(M)$ são chamados cartas da variedade.

Definição 2.2. Sejam M e N 2-variedades C^∞ . Uma função $f : M \rightarrow N$ é dita diferenciável em M se $\varphi \circ f \circ \phi^{-1}$ é de classe C^∞ , para toda carta (ϕ, U) de M e toda carta (φ, V) de N , tais que $f(U) \subset V$.

Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$, para toda carta (φ, U) de M é também dita diferenciável, e o conjunto de todas as funções diferenciáveis neste sentido é representado por $\mathcal{F}(M)$.

Mais adiante, introduziremos o conceito de superfície de Riemann, e neste caso o termo *função diferenciável* será usado em um sentido mais particular.

2.1.1 O Espaço Tangente

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão 2 de classe C^k e p um ponto de M .

Definição 2.3. Uma curva C^1 por partes é uma aplicação $\gamma : I \rightarrow M$, I intervalo aberto, semi-aberto ou fechado de \mathbb{R} , em que $z \circ \gamma$ é C^1 por partes, qualquer que seja $(z, U) \in \Sigma(M)$ para a qual a composição faz sentido.

Definimos

$$C_p = \{\lambda : J \rightarrow M, J \subset \mathbb{R} \text{ contendo } 0 : \lambda(0) = p, \lambda \text{ é diferenciável em } 0\}.$$

Se $\lambda \in C_p$ e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma carta de M , com $p \in U$, pode acontecer que a imagem $\lambda(J)$ não esteja contida em U . Em vista disto, toda vez que escrevemos $X \circ \lambda$, estamos admitindo que o domínio de λ foi suficientemente reduzido a um intervalo aberto J' , contendo 0, tal que $\lambda(J') \subset U$.

Dizemos que dois caminhos $\lambda, \mu \in C_p$ são equivalentes, e escrevemos $\lambda \sim \mu$, quando existir uma carta $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ em M , com $p \in U$, tal que $X \circ \lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $X \circ \mu : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ têm o mesmo vetor velocidade em $t = 0$, isto é $(X \circ \lambda)'(0) = (X \circ \mu)'(0)$.

Observemos que esta igualdade será verdadeira para toda carta $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ em M , $p \in U$. Disto resulta que $\lambda \sim \mu$ é, de fato, uma relação de equivalência em C_p .

O vetor velocidade $\dot{\lambda}$ de um caminho $\lambda \in C_p$ é a classe de equivalência de λ . Isto é,

$$\dot{\lambda} = \{\mu \in C_p : \mu \sim \lambda\}.$$

Portanto para, $\lambda, \mu \in C_p$, tem-se

$$\dot{\lambda} = \dot{\mu} \Leftrightarrow (X \circ \lambda)'(0) = (X \circ \mu)'(0), \quad (2.1)$$

para alguma carta M . Entretanto, note que (2.1) independe da escolha da carta.

O conjunto quociente $C_p/\sim = T_pM$ é o espaço tangente à variedade M no ponto p .

Podemos atribuir a T_pM uma estrutura de espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Cada carta $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ em M , $p \in U$, determina uma bijeção $\bar{X} = \bar{X}(p) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\bar{X}(\dot{\lambda}) = (X \circ \lambda)'(0)$. De fato, por (2.1) \bar{X} é injetora. Mostremos agora que \bar{X} é sobrejetora: se $v \in \mathbb{R}^2$, seja $\lambda \in C_p$ dado por $\lambda(t) = X^{-1}(X(p) + tv)$. Então

$$\bar{X}(\dot{\lambda}) = (X \circ \lambda)'(0) = v.$$

Damos a T_pM uma estrutura de espaço vetorial real, exigindo que a bijeção $\bar{X} : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja um isomorfismo. Em outras palavras, as operações de soma e produto de um vetor por um número real são definidas pelas equações

$$\dot{\lambda} + \dot{\mu} = (\bar{X})^{-1}(\bar{X}(\dot{\lambda}) + \bar{X}(\dot{\mu})),$$

$$c \cdot \dot{\lambda} = (\bar{X})^{-1}(c \cdot \bar{X}(\dot{\lambda})).$$

O fato crucial é que estas operações não dependem da escolha da carta X . Com efeito, dada $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ em M , com $p \in V$, então $\bar{Y} = (Y \circ \bar{X}^{-1})' \circ \bar{X} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Como $(Y \circ \bar{X}^{-1})'(X(p))$ é um isomorfismo, as cartas X e Y originam a mesma estrutura de espaço vetorial em $T_p M$.

Dadas uma carta local $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ em M e um ponto $p \in U$, indicamos por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial X^1}(p), \frac{\partial}{\partial X^2}(p) \right\},$$

a base de $T_p M$ que é levada pelo isomorfismo $\bar{X} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2$ sobre a base canônica $\{e_1, e_2\}$. Também escrevemos $\frac{\partial}{\partial X^i}$ em lugar de $\frac{\partial}{\partial X^i}(p)$. O vetor básico $\frac{\partial}{\partial X^i} \in T_p M$ é a classe de equivalência de qualquer caminho $\lambda \in C_p$ tal que $(X \circ \lambda)'(0) = e_i$.

Definição 2.4. Sejam M e N variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável no ponto $p \in M$. A *diferencial* de f no ponto p é a transformação linear $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} M$ que associa a cada $v = \dot{\lambda} \in T_p M$ o elemento $df_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \lambda(t)) \in T_{f(p)} N$, vetor velocidade do caminho $f \circ \lambda \in C_{f(p)}$.

Observação 2.2. Se $\gamma(t_0) = p$, então $\gamma'(t_0) \in T_p M$.

Definição 2.5. O *traço* de γ é o conjunto $\{\gamma\} = \gamma(I)$.

Definição 2.6. Seja M uma 2-variedade. Uma métrica Riemanniana (*ou estrutura Riemanniana*) é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno \langle, \rangle_p , isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida, no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $\varphi : U \rightarrow V$ é uma carta local em torno de p então

$$g_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}(q), \frac{\partial}{\partial x^j}(q) \right\rangle, \quad \forall q \in U, \quad i, j \in \{1, 2\},$$

são funções diferenciáveis em U , isto é $g_{ij} \in \mathcal{F}(M)$.

As funções g_{ij} são chamadas *expressão da métrica Riemanniana* na carta φ .

Definição 2.7. Um *caminho* em M é uma curva C^1 por partes $\gamma : I \rightarrow M$. Ele é dito *divergente* se $I = [0, b[$, $0 < b \leq \infty$, e para cada compacto $Q \subset M$ existe $t_0 \in I$ tal que $\gamma(t) \notin Q$, para todo $t \in]t_0, b[$. Denotamos $\gamma : p \sim q$ é um caminho em M ligando p a q , isto é, $Dom(\gamma) = [x, y]$, $\gamma(x) = p$ e $\gamma(y) = q$.

Definição 2.8. Uma 2-variedade diferenciável M é *completa* com respeito a uma métrica Riemanniana ds^2 se $\int_0^b |\gamma'(t)| dt = \infty$ para todo caminho divergente $\gamma : [0, b[\rightarrow M$, onde $|\gamma'(t)|^2 = ds^2(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$.

2.2 Superfícies de Riemann

2.2.1 Cartas Complexas e Estruturas Complexas

A idéia básica de Superfície de Riemann é um espaço que localmente pode ser observado como um conjunto aberto no plano complexo.

Definição 2.9. (Cartas Complexas) Seja \mathbb{X} um espaço topológico. Uma carta complexa, ou simplesmente uma carta sobre \mathbb{X} , é um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, onde $U \subset \mathbb{X}$ é um conjunto aberto em \mathbb{X} , e $V \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto no plano complexo. U é chamado o domínio da carta ϕ . A carta ϕ diz-se centrada em p se $\phi(p) = 0$.

Exemplo 2.1. Sejam $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$, e U qualquer subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 . Definimos $\phi_U(x, y) = x + iy$

Exemplo 2.2. Para qualquer subconjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ definimos

$$\phi_U(x, y) = \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

sendo sua inversa $\phi_U^{-1} : \phi_U(U) \subset B(0, 1) \rightarrow U$, dada por

$$\phi_U^{-1}(z) = \phi_U^{-1}(a + ib) = \left(\frac{a}{1 - |z|}, \frac{b}{1 - |z|} \right),$$

(onde $B(0, 1)$ é a bola de centro 0 e raio 1).

Esta função ϕ_U também é carta complexa sobre \mathbb{R}^2 .

Exemplo 2.3. Seja $\phi : U \rightarrow V$ uma carta complexa sobre \mathbb{X} . Suponha que $U_1 \subset U$ é um subconjunto aberto de U . Então $\phi|_{U_1} : U_1 \rightarrow \phi(U_1)$ é uma carta complexa sobre \mathbb{X} . Esta restrição de ϕ é chamada uma sub-carta de ϕ .

Exemplo 2.4. Seja $\phi : U \rightarrow V$ uma carta complexa sobre \mathbb{X} . Suponha que $\psi : V \rightarrow W$ é uma bijeção holomorfa entre dois conjuntos abertos do plano complexo. Então a composta $\psi \circ \phi : U \rightarrow W$ é uma carta complexa sobre \mathbb{X} .

Definição 2.10. Seja $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ duas cartas complexas sobre \mathbb{X} . Diz-se que ϕ_1 e ϕ_2 são compatíveis se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ e

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

é holomorfa.

Exemplo 2.5. (Projeção Estereográfica) Seja S^2 a esfera unitária em \mathbb{R}^3 centrada na origem, isto é,

$$S^2 = \{(x, y, w) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + w^2 = 1\}.$$

Identificamos $w = 0$ com \mathbb{C} por

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \{w = 0\} \\ x + iy &\longmapsto (x, y, 0) \end{aligned}$$

Se $(x, y, w) \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$, considere a reta:

$$\mathcal{L} = \{(tx, ty, 1 + t(w - 1)) / t \in \mathbb{R}\},$$

passando por $(0, 0, 1)$ e (x, y, w) .

Fazendo a terceira componente de \mathcal{L} igual a 0, obtemos

$$t = \frac{1}{1 - w}.$$

Definimos a projeção estereográfica de $(x, y, w) \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ sobre $w = 0$ por

$$\begin{aligned} \phi_1 : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, w) &\longmapsto \frac{x}{1-w} + i \frac{y}{1-w} \end{aligned}$$

que é contínua.

A fim de obter a expressão de ϕ_1^{-1} , consideremos

$$\mathcal{L}' = \{(tx, ty, 1 - t) / t \in \mathbb{R}\}.$$

Como $(tx, ty, 1 - t)$ deve pertencer a S^2 , então

$$\begin{aligned} (tx)^2 + (ty)^2 + (1 - t)^2 &= 1 \\ t &= \frac{2}{|z|^2 + 1}, \end{aligned}$$

com $z = x + iy$.

Como $w = 1 - t$, então

$$w = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Agora se $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{1-w} \\ y &= \frac{b}{1-w} \end{aligned}$$

procuramos procuramos $(a, b, w) \in \mathcal{L}' \cap S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$

$$x = \operatorname{Re}(z) \Rightarrow \left\{ \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1} = a \right.$$

$$\left. y = \operatorname{Im}(z) \Rightarrow \left\{ \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1} = b \right. \right.$$

logo

$$\begin{aligned}\phi_1^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ z &\longmapsto \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)\end{aligned}$$

que é uma carta complexa.

Agora definimos da mesma forma:

$$\begin{aligned}\phi_2 : S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, w) &\longmapsto \frac{x}{w-1} - i \frac{y}{w-1}\end{aligned}$$

com inversa

$$\begin{aligned}\phi_2^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \\ z &\longmapsto \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1} \right).\end{aligned}$$

Os domínios comuns $S^2 \setminus \{\pm(0, 0, -1)\}$, são aplicados por ϕ_1 e ϕ_2 bijetivamente sobre $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. A composição $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} = \frac{1}{z}$ é holomorfa. Portanto as duas cartas são compatíveis.

2.2.2 Atlas Complexo

Observemos que no exemplo 2.5, cada ponto da esfera está em pelo menos *uma das cartas complexas*.

Portanto, temos uma coordenada local complexa em cada ponto da esfera. é claro que este é nosso ultimo objetivo.

Para \mathbb{X} localmente, devemos ter cartas complexas ao redor de cada ponto de \mathbb{X} . Mas desejamos que estas cartas sejam compatíveis. Esta é a noção de atlas complexo.

Definição 2.11. Um atlas complexo, ou simplesmente um atlas \mathcal{A} sobre \mathbb{X} é a coleção $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ cartas complexas compatíveis cujo domínio cobre \mathbb{X} , isto é

$$\mathbb{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha.$$

Observe que as cartas definidas no exemplo 2.1 formam um atlas complexo sobre \mathbb{R}^2 , também as duas cartas definidas sobre a esfera S^2 no exemplo 2.5 definem um atlas complexo sobre S^2 .

Exemplo 2.6. Se $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ é um atlas sobre \mathbb{X} , e $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ é qualquer conjunto aberto, a coleção de sub-cartas

$$\mathcal{A}_{\mathbb{Y}} = \{\phi_\alpha|_{\mathbb{Y} \cap U_\alpha} : \mathbb{Y} \cap U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(\mathbb{Y} \cap U_\alpha)\},$$

é um atlas sobre \mathbb{Y} .

De fato, pois $\mathbb{Y} \cap U_\alpha \subset \mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ é aberto, e $\phi_\alpha|_{\mathbb{Y} \cap U_\alpha}$ é um homeomorfismo sobre $\phi_\alpha(\mathbb{Y} \cap U_\alpha) = \phi_\alpha(\mathbb{Y}) \cap V_\alpha$, além disso $\bigcup_\alpha (\mathbb{Y} \cap U_\alpha) = \mathbb{Y} \cap \bigcup_\alpha U_\alpha = \mathbb{Y} \cap \mathbb{X} = \mathbb{Y}$.

Pode ser que duas atlas diferentes brindem a noção local de análise complexo, sobre uma superfície de Riemann, isto sucede quando cada carta de um atlas é compatível com cada carta de outro atlas. Esta noção dá uma relação de equivalência sobre o atlas.

Definição 2.12. Dois atlas \mathcal{A} e \mathcal{B} são equivalentes se cada carta de um é compatível com cada carta do outro.

Observemos que dois atlas são equivalentes se e somente se, sua união é um atlas, pela própria definição.

Um fácil argumento do *lema de Zorn* mostra que qualquer atlas complexo está contido num único atlas maximal complexo, além disso, dois atlas são equivalentes, se e somente se, eles estão contidos no mesmo atlas complexo.

Definição 2.13. Uma estrutura complexa sobre \mathbb{X} é uma *atlas maximal complexo* sobre \mathbb{X} (ou equivalentemente, é uma classe de equivalência de atlas complexos sobre \mathbb{X}).

Observemos que qualquer atlas sobre \mathbb{X} determina uma única estrutura complexa. Esta é a maneira usual que uma estrutura complexa é definida: outorgando um atlas.

Definição 2.14. (de Superfície de Riemann) A superfície de Riemann é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável conexo, junto uma estrutura complexa.

Exemplo 2.7. Seja $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, considerada topologicamente como \mathbb{R}^2 , com a estrutura complexa induzida pelo atlas do exemplo 2.1. Esta superfície de Riemann é chamada o plano complexo.

Definição 2.15. Seja $\mathbb{X} = S^2$, com a estrutura complexa dada pelas duas cartas do Exemplo 2.5. Observe que a esfera é Hausdorff e conexa. Esta superfície de Riemann é chamada *Esfera de Riemann*. Acrescentamos o símbolo “ ∞ ” para estender ϕ_1 a S^2 , ou seja $\phi_1(0, 0, 1) = \infty$ na projeção estereográfica. A esfera de Riemann é frequentemente denotada por $\hat{\mathbb{C}}$ ou $\mathbb{C} \cup \infty$

A esfera de Riemann é uma superfície de Riemann compacta.

Exemplo 2.8. Qualquer subconjunto aberto conexo de uma Superfície de Riemann, é uma superfície de Riemann, para isto usamos o atlas sobre o subconjunto como descrevemos no exemplo 2.6.

2.2.3 Variedade 2-Real

Uma superfície de Riemann é simplesmente uma variedade complexa *conexa* um dimensional sobre \mathbb{C} , mas ao logo deste trabalho uma superfície de Riemann será considerada como uma 2-variedade real.

Seja \mathbb{X} um espaço topológico de Hausdorff.

Definição 2.16. Uma n dimensional carta real sobre \mathbb{X} é um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, onde $U \subset \mathbb{X}$ é um conjunto aberto em \mathbb{X} , e $V \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto em \mathbb{R}^n .

Duas cartas reais ϕ_1 e ϕ_2 são \mathbb{C}^∞ -compatíveis se a interseção de seus domínios são vazios ou

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2),$$

é um \mathbb{C}^∞ difeomorfismo, isto é, este e sua inversa possuem derivadas parciais de todas as ordens em cada ponto.

Um \mathbb{C}^∞ atlas sobre \mathbb{X} é uma coleção de cartas reais sobre \mathbb{X} , as quais são \mathbb{C}^∞ -compatíveis, e cujos domínios cobrem \mathbb{X} . Dois atlas são equivalentes se a união deles é um atlas.

Uma estrutura \mathbb{C}^∞ sobre \mathbb{X} é uma classe de equivalência de \mathbb{C}^∞ -atlas.

Uma variedade real \mathbb{C}^∞ é um espaço \mathbb{X} , conexo, Hausdorff, 2 enumerável junto com uma estrutura \mathbb{C}^∞ .

Já que aplicações holomorfas de uma variável complexa $z = x + iy$ são \mathbb{C}^∞ nas variáveis reais x e y , imediatamente observamos que cada superfície de Riemann é uma 2-dimensional \mathbb{C}^∞ variedade real (a qual frequentemente abreviamos e referimos simplesmente como uma 2-variedade).

2.2.4 O Gênero de uma Superfície Compacta

Para isto apelamos à classificação das 2-variedades compactas orientáveis; cada uma destas é uma g -alça toro para algum inteiro $g \geq 0$.

Quando $g = 0$, não temos alças e a superfície é topologicamente a 2-esfera.

Quando $g = 1$, temos uma alça e a superfície é simplesmente um toro, topologicamente homeomorfo a $S^1 \times S^1$.

Para $g \geq 2$, a superfície é obtida por anexar g “alças” à esfera.

Estes inteiros são chamados de *gênero topológico* de uma superfície de Riemann compacta e é um invariante fundamental. Assim:

Proposição 2.1. *Cada superfície de Riemann é uma 2-variedade real \mathbb{C}^∞ orientável e conexa. Cada Superfície de Riemann compacta é difeomorfa ao toro g -alça, para algum único inteiro $g \geq 0$.*

Demonstração. Vide [17]. □

Teorema 2.1. *Toda superfície de Riemann compacta é homeomorfa a uma esfera ou a uma soma conexa de um número finito de toros.*

Demonstração. Vide [16]. □

Exemplo 2.9. Na definição (2.15), vimos a esfera de Riemann que possui gênero topológico 0.

2.2.5 Toro Complexo

Fixamos w_1 e w_2 dois números complexos os quais são linearmente independentes sobre \mathbb{R} . Definimos o reticulado

$$\Gamma = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{m_1w_1 + m_2w_2 / m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Seja $\mathbb{X} = \mathbb{C}/\Gamma$ o grupo quociente, com a aplicação projeção $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{X}$, via π podemos associar uma topologia sobre \mathbb{X} , assim um subconjunto $U \subset \mathbb{X}$ é aberto, se e somente se, $\pi^{-1}(U)$ é aberto em \mathbb{C} . Esta definição faz que π seja contínua e sendo \mathbb{C} conexo \mathbb{X} também é conexo.

Cada conjunto aberto de \mathbb{X} é imagem por π de um conjunto aberto de \mathbb{C} , pois se U é aberto de \mathbb{X} , $\pi(\pi^{-1}U) = U$.

Uma observação mais forte é que π é uma aplicação aberta, isto é, π leva qualquer conjunto aberto de \mathbb{C} sobre um conjunto aberto de \mathbb{X} .

De fato, se V é um conjunto aberto de \mathbb{C} , então vemos que $\pi(V)$ é aberto em \mathbb{X} , e para isto devemos mostrar que $\pi^{-1}(\pi(V))$ é aberto sobre \mathbb{C} mas

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{w \in \Gamma} (w + V),$$

é a união de translações de V , os quais são abertos em \mathbb{C} .

Definimos agora o paralelogramo fundamental

$$\mathcal{P} = \{\lambda_1w_1 + \lambda_2w_2 / \lambda_i \in [0, 1]\}.$$

Observação 2.3. Todo ponto de \mathbb{C} é congruente módulo Γ a um ponto de \mathcal{P} , isto é, $\forall z \in \mathbb{C}$ existe $p \in \mathcal{P}$ tais que $z - p \in \Gamma$.

De fato, seja $z \in \mathbb{C}$, sendo $\{w_1, w_2\}$ base, temos que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $z = \alpha w_1 + \beta w_2$.

Seja $m_1 = \lfloor \alpha \rfloor$, $m_2 = \lfloor \beta \rfloor$, então

$$\begin{aligned} \alpha &= m_1 + \lambda_1, & 0 \leq \lambda_1 &\leq 1 \\ \beta &= m_2 + \lambda_2, & 0 \leq \lambda_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

$$z = (m_1 + \lambda_1)w_1 + (m_2 + \lambda_2)w_2$$

$$z = \underbrace{m_1w_1 + m_2w_2}_{\in \Gamma} + \underbrace{\lambda_1w_1 + \lambda_2w_2}_{p \in \mathcal{P}}$$

logo, $z - p = m_1w_1 + m_2w_2 \in \Gamma$.

O reticulado Γ é um subconjunto discreto de \mathbb{C} , assim existe um $\epsilon > 0$ tal que $|w| > 2\epsilon$, para todo $w \neq 0 \in \Gamma$.

Fixamos tal $\epsilon > 0$, e fixamos também um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$. Consideremos o disco aberto $D = D(z_0, \epsilon)$, esta escolha de $\epsilon > 0$, de tal modo que $\forall a, b \in D$, $a - b \notin \Gamma$, isto é, que nenhum par de pontos sejam congruentes módulo Γ .

Queremos que para qualquer z_0 e para tal $\epsilon > 0$, a restrição da projeção π a um disco aberto D aplica D homeomorficamente sobre um conjunto aberto $\pi(D)$.

Claramente, $\pi|_D : D \rightarrow \pi(D)$ é sobrejetora, contínua, e aberta (já que π é aberta).

Portanto precisamos só mostrar que π seja 1 – 1, o qual segue da escolha de ϵ .

Estamos portanto agora preparados para definir um atlas complexo sobre \mathbb{X} .

Fixamos $\epsilon > 0$ como antes. Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$, seja $D_{z_0} = D(z_0, \epsilon)$, e defina $\phi_{z_0} : \pi(D_{z_0}) \rightarrow D_{z_0}$ a inversa da aplicação $\pi|_{D_{z_0}}$. Pelo feito anteriormente estas são cartas complexas sobre \mathbb{X} .

Para finalizar a construção, devemos verificar que estas cartas sejam compatíveis. Escolhemos dois pontos z_1 e z_2 , e consideramos duas cartas

$$\phi_1 = \phi_{z_1} : \pi(D_{z_1}) \rightarrow D_{z_1},$$

e

$$\phi_2 = \phi_{z_2} : \pi(D_{z_2}) \rightarrow D_{z_2}.$$

Seja $U = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_2})$, se U é vazio, a prova esta feita. Suponhamos que $U \neq \emptyset$, seja

$$T(z) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \phi_2(\pi(z)),$$

para $z \in \phi_1(U)$.

Devemos verificar que T seja um holomorfismo sobre $\phi_1(U)$.

Sendo

$$T(z) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \phi_2(\pi(z)),$$

observe que $\pi(T(z)) = \pi(z)$, para todo $z \in \phi_1(U)$.

Assim $T(z) - z = \alpha(z) \in \Gamma$, para todo $z \in \phi_1(U)$

Esta função $\alpha : \phi_1(U) \rightarrow \Gamma$ é contínua, e como Γ é discreta portanto w é localmente constante sobre $\phi_1(U)$. (é constante sobre as componentes conexas de U). Assim, localmente

$$T(z) = z + w,$$

para algum $w \in \Gamma$ fixo, e desta maneira holomorfa.

Portanto, as duas cartas ϕ_1 e ϕ_2 são compatíveis, e a coleção de cartas $\{\phi_z / z \in \mathbb{Z}\}$ é um atlas complexo sobre \mathbb{X} .

Assim, \mathbb{X} é uma superfície de Riemann Compacta. Já que, \mathbb{X} é simplesmente homeomorfo a um toro.

De fato, seja $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ um círculo unitário. A aplicação que associa a cada ponto de $\mathbb{X} = \mathbb{C}/\Gamma$ representada por $\lambda w_1 + \beta w_2$ ($\lambda, \beta \in \mathbb{R}$) pois o fato de $[x] \in \mathbb{X}$ implica

$$\begin{aligned} y \in [x] &\Leftrightarrow y - x \in \Gamma \\ &\Leftrightarrow y = x + m_1 w_1 + m_2 w_2 \\ &\Leftrightarrow y = \lambda w_1 + \beta w_2, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

o ponto $(e^{2\pi i\lambda}, e^{2\pi i\beta}) \in S^1 \times S^1$, é um homeomorfismo de \mathbb{C}/Γ , sobre o toro $S^1 \times S^1$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & S^1 \times S^1 \\ z = \lambda m_1 + \beta m_2 & & (e^{2\pi i\lambda}, e^{2\pi i\beta}) \\ \pi \downarrow & \nearrow f \circ \pi = F & \\ \mathbb{X} = \mathbb{C}/\Gamma & & \end{array}$$

Definição 2.17. Seja \mathbb{X} uma superfície de Riemann e $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ um subconjunto aberto. Uma função $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada *holomorfa*, se para cada carta $\phi : U \rightarrow V$ sobre \mathbb{X} a função

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap \mathbb{Y}) \rightarrow \mathbb{C},$$

é holomorfa no sentido usual sobre o conjunto aberto $\phi(U \cap \mathbb{Y}) \subset \mathbb{C}$. O conjunto de todas as funções holomorfas sobre \mathbb{Y} sera denotado por $\mathcal{O}(\mathbb{Y})$.

Teorema 2.2. (Teorema de Riemann-Singularidade Removível) *Seja U um subconjunto aberto de uma superfície de Riemann e seja $a \in U$. Suponha que a função $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ é limitado em alguma vizinhança de a . Então f pode ser estendido unicamente à função $\hat{f} \in \mathcal{O}(U)$.*

Demonstração. Vide [6]. □

Este resultado segue diretamente do Teorema de Riemann-Singularidade Removíveis no caso do plano complexo.

Agora definimos aplicação holomorfa entre superfícies de Riemann.

Definição 2.18. Sejam \mathbb{X} e \mathbb{Y} superfícies de Riemann. Uma aplicação contínua $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ é chamado *holomorfa* (ou *antiholomorfa*), se para cada carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ sobre \mathbb{X} e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ sobre \mathbb{Y} com $f(U_1) \subset U_2$, a aplicação

$$\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2,$$

é holomorfa (ou antiholomorfa) no sentido usual.

Definição 2.19. Uma aplicação $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ é chamado *biholomorfa* se é bijetiva e ambos $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ e $f^{-1} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ são holomorfas. Dois superfícies de Riemann \mathbb{X} e \mathbb{Y} são chamados *isomorfas* se existe uma aplicação biholomorfa $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$.

Teorema 2.3. (Teorema da Identidade) *Sejam \mathbb{X} e \mathbb{Y} superfícies de Riemann e $f_1, f_2 : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ são duas aplicações holomorfas tal que coincidem em um conjunto $A \subset U$ tendo um ponto de acumulação $a \in \mathbb{X}$. Então f_1 e f_2 são identicamente iguais.*

Demonstração. Vide [6]. □

Definição 2.20. Seja \mathbb{X} uma superfície de Riemann e \mathbb{Y} um subconjunto aberto de \mathbb{X} . Uma *função meromorfa* sobre \mathbb{Y} é uma função holomorfa $f : \mathbb{Y}' \rightarrow \mathbb{C}$, onde $\mathbb{Y}' \subset \mathbb{Y}$ é um subconjunto aberto, tal que satisfaz o seguinte:

- i) $\mathbb{Y} \setminus \mathbb{Y}'$ contem somente pontos isolados.
- ii) Para cada ponto $p \in \mathbb{Y} \setminus \mathbb{Y}'$, temos $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty$.

Os pontos de $\mathbb{Y} \setminus \mathbb{Y}'$ são chamados os *pólos* de f . O conjunto de todas as funções meromorfas sobre \mathbb{Y} será denotado por $\mathcal{M}(\mathbb{Y})$.

Definição 2.21. Seja \mathbb{X} uma superfície de Riemann, \mathbb{Y} uma subconjunto aberto de \mathbb{X} e $z \in \sum(N)$. Para uma função meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{Y})$ e $a \in \mathbb{Y}$ definimos

$$Ord_a(f) = \begin{cases} 0, & \text{se } f \circ z^{-1} \text{ é holomorfa e } f(a) \neq 0, \\ k, & \text{se } f \circ z^{-1} \text{ tem um zero de ordem } k \text{ em } a, \\ -k, & \text{se } f \circ z^{-1} \text{ tem um pólo de ordem } k \text{ em } a, \\ \infty, & \text{se } f \equiv 0 \text{ numa vizinhança de } a. \end{cases}$$

2.2.6 Propriedades elementares de Aplicações Holomorfas

Em esta subseção observamos algumas das propriedades topológicas elementares de aplicações holomorfas entre Superfícies de Riemann.

Teorema 2.4. (Comportamento Local de Aplicações Holomorfas) *Suponha que \mathbb{X} e \mathbb{Y} são superfícies de Riemann e $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ é uma aplicação holomorfa não-constante. Suponha $a \in \mathbb{X}$ e $b = f(a)$. Então existe um inteiro $k \geq 1$ e cartas $\phi : U \rightarrow V$ sobre \mathbb{X} e $\psi : U' \rightarrow V'$ sobre \mathbb{Y} com as propriedades seguintes:*

- i) $a \in U$, $\phi(a) = 0$; $b \in U'$, $\psi(b) = 0$.
- ii) $f(U) \subset U'$.
- iii) A Aplicação $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : V \rightarrow V'$ é dada por $F(z) = z^k$ para todo $z \in V$.

Demonstração. Vide [6]. □

Observação 2.4. *O número k no teorema 2.4 pode ser caracterizado da seguinte maneira. Para cada vizinhança U de a existe uma vizinhança $U \subset U_0$ de a e W de $b = f(a)$ tal que o conjunto $f^{-1}(y) \cap U$ contem exatamente k elementos para cada ponto $y \in W$, $y \neq b$. Chamamos k a multiplicidade com a qual a aplicação f toma o valor b no ponto a e podemos dizer que f possui multiplicidade k no ponto a .*

Corolário 2.1. *Sejam \mathbb{X} e \mathbb{Y} superfícies de Riemann e $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ um aplicação holomorfa não constante. Então f é aberta, isto é a imagem de cada aberto por f é aberto.*

Demonstração. Segue direto do Teorema 2.4, já que se U é uma vizinhança de um ponto $a \in \mathbb{X}$ então $f(U)$ é uma vizinhança de um ponto $f(a)$. Isto implica que f é aberta. \square

Corolário 2.2. *Seja \mathbb{X} e \mathbb{Y} superfícies de $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ um aplicação holomorfa injetiva. Então f é uma aplicação biholomorfa de \mathbb{X} sobre $f(\mathbb{X})$.*

Demonstração. Já que f é injetiva, na descrição local de f dado no teorema 2.4, sempre temos $k = 1$. Assim a aplicação inversa $f^{-1} : f(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}$ é holomorfa. \square

Corolário 2.3. (Princípio do Máximo) *Suponhamos que \mathbb{X} é uma Superfície de Riemann e $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa não constante. Então o valor absoluto de f não atinge seu máximo.*

Demonstração. Suponhamos que existe um ponto $a \in \mathbb{X}$ tal que

$$R = |f(a)| = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{X}\},$$

então

$$f(\mathbb{X}) \subset K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\},$$

já que $f(\mathbb{X})$ é aberto, este está no interior de K . Isto contradiz a suposição que $f(a) \in \partial K$. \square

Teorema 2.5. *Sejam \mathbb{X} e \mathbb{Y} superfícies de Riemann. Suponhamos que \mathbb{X} é compacto e $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ uma aplicação holomorfa não constante. Então \mathbb{Y} é compacto e f é sobrejetiva.*

Demonstração. Pelo teorema 2.4 $f(\mathbb{X})$ é aberto. Já que \mathbb{X} é compacto, $f(\mathbb{X})$ é compacto e assim fechado, logo sendo que os únicos subconjuntos de um espaço topológico conexo que são abertos e fechados são o vazio e o próprio espaço, segue que $f(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$.

Assim f é sobrejetiva e \mathbb{Y} compacta. \square

Corolário 2.4. *Cada função holomorfa sobre uma superfície de Riemann compacta é constante.*

Definição 2.22. Suponhamos que \mathbb{X} e \mathbb{Y} são superfícies de Riemann e $p : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ é uma aplicação holomorfa não constante. Um ponto $y \in \mathbb{Y}$ é chamado um ponto de ramificação de p , se não existe uma vizinhança V de y tal que $p|_V$ é injetiva. A aplicação não ramificada se não possui pontos de ramo. O conjunto de todos os pontos de ramificação de p é denotado por $Ram(p)$.

Observação 2.5. *Se f é não-constante, $Ram(f)$ é um conjunto de pontos isolados.*

Teorema 2.6. *Suponhamos que \mathbb{X} e \mathbb{Y} são superfícies de Riemann. Uma aplicação holomorfa não constante $p : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ não possui pontos de ramo, se e somente se, p é um homeomorfismo local, isto é, cada ponto $y \in \mathbb{Y}$ possui uma vizinhança aberta V a qual é aplicada homeomorficamente por p sobre um conjunto aberto U em \mathbb{X} .*

Demonstração. Suponhamos que $p : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ não possui pontos de ramo e seja $y \in \mathbb{Y}$ um ponto arbitrário, sendo que y não é um ponto de ramo, então existe uma vizinhança aberta V de y tal que $p|_V$ é injetiva, já que p é uma aplicação contínua e aberta, p aplica o conjunto V homeomorficamente sobre o conjunto aberto $U = p(V)$.

Inversamente, assumimos que $p : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ é um homeomorfismo local, então para qualquer $y \in \mathbb{Y}$ existe uma vizinhança aberta V de y a qual é aplicada homeomorficamente por p sobre um conjunto aberto em \mathbb{X} . Em particular, $p|_V$ é injetiva e y não é ponto de ramo de p . \square

2.3 Espaços de Recobrimento

Seguindo nosso trabalho apresentamos algumas noções sobre espaços de Recobrimento.

Definição 2.23. Sendo \mathbb{X} e \mathbb{Y} espaços topológicos. Uma aplicação $p : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ é chamada *aplicação de recobrimento* se para todo $x \in \mathbb{X}$ existe uma vizinhança aberta U tal que sua pré-imagem $p^{-1}(U)$ pode ser representada por

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

onde os $V_j, j \in J$, são subconjuntos abertos e dois a dois disjuntos em \mathbb{Y} , e todas as aplicações $p|_{V_j} \rightarrow U$ são homeomorfismos.

O espaço \mathbb{Y} chama-se um *espaço de recobrimento de \mathbb{X}* e, para cada $x \in \mathbb{X}$, o conjunto $p^{-1}(x)$ chama-se a *fibra* sobre x . às vezes, \mathbb{X} chama-se de *base*.

Uma aplicação de recobrimento $p : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ é um homeomorfismo local de \mathbb{Y} sobre \mathbb{X} .

Exemplo 2.10. Consideramos a aplicação $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $r(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, temos que r é um difeomorfismo local sobrejetivo de classe C^∞ , e se $]a, b[\subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto com $b - a > 1$ então $r(]a, b[) = \mathbb{S}^1$. Agora, dado $(x_0, x_1) \in \mathbb{S}^1$ seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $r(t_0) = (x_0, x_1)$. Se $0 < \alpha < 1$, então $V = r(]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[) \subset \mathbb{S}^1$ é um subconjunto aberto, com $(x_0, x_1) \in V$. Além disso $r^{-1}(V) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]t_0 - \alpha + k, t_0 + \alpha + k[$ e a restrição $r_k = r|_{]t_0 - \alpha + k, t_0 + \alpha + k[} :]t_0 - \alpha + k, t_0 + \alpha + k[\rightarrow V$ é um difeomorfismo C^∞ .

Logo, para cada $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{S}^1$ tal que $r^{-1}(U) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} U_i$, sendo que os subconjuntos $U_i \subset \mathbb{R}$ são abertos com $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e as restrições $r_i = r(U_i) : U_i \rightarrow U$ são difeomorfismos de classe C^∞ .

Agora temos os seguintes resultados:

Proposição 2.2. *Seja $p : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ um recobrimento. Então $\forall a, b \in \mathbb{X}$, $p^{-1}(a)$ e $p^{-1}(b)$ têm a mesma cardinalidade. Deste modo, definimos o número de folhas de p como sendo a cardinalidade de $p^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{X}$, que denotamos por $\#p$.*

Demonstração. Vide [11]. \square

Definição 2.24. Quando $p : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ é um recobrimento, e \mathbb{Y} é simplesmente conexo, dizemos que (p, \mathbb{Y}) é um *recobrimento universal* de \mathbb{X} .

Definição 2.25. Sejam \mathbb{X} e \mathbb{Y} superfícies de Riemann dizemos que $p : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ é um *recobrimento holomorfo ramificado* se p é sobrejetora e $p : \mathbb{Y} \setminus \text{Ram}(p) \rightarrow \mathbb{X} \setminus p(\text{Ram}(p))$ é uma aplicação de recobrimento. Também indicamos por $\#p$ o número de folhas deste recobrimento.

Definição 2.26. Uma aplicação contínua $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ chama-se *própria* quando é fechada e, para todo $y \in \mathbb{Y}$, a inversa $f^{-1}(y)$ é compacta.

Proposição 2.3. *Sejam \mathbb{X} um espaço de Hausdorff e $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ um homeomorfismo local. Cada uma das afirmações abaixo implica a seguinte:*

- 1) *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que cada imagem inversa $f^{-1}(y), y \in \mathbb{Y}$, possui n elementos.*
- 2) *f é própria e sobrejetiva.*
- 3) *f é uma aplicação de recobrimento cujas fibras $f^{-1}(y)$ são finitas.*

Se \mathbb{Y} for conexo, então as 3 afirmações são equivalentes.

Demonstração. Vide [11]. □

2.4 Levantamento de caminhos

Dizemos que uma aplicação contínua e sobrejetiva $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ goza da propriedade de *levantamento de caminhos (plc)* quando, dados arbitrariamente um caminho $\alpha : J \rightarrow \mathbb{Y}$, com $J = [s_0, s_1]$, e um ponto $x \in \mathbb{X}$ tal que $f(x) = \alpha(s_0)$, existe um caminho $\tilde{\alpha} : J \rightarrow \mathbb{X}$ tal que $\tilde{\alpha}(s_0) = x$ e $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

Quando f for sobrejetora e, dados arbitrariamente um caminho $\alpha : J \rightarrow \mathbb{Y}$ e um ponto $x \in \mathbb{X}$ com $f(x) = \alpha(s_0)$, existir um único caminho $\tilde{\alpha} : J \rightarrow \mathbb{X}$ tal que $\tilde{\alpha}(s_0) = x$ e $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, dizemos que $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ goza da propriedade de *levantamento único de caminhos (pluc)*.

Proposição 2.4. *Seja $p : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ uma aplicação de recobrimento. Dados um caminho $\alpha : J \rightarrow \mathbb{Y}$, $J = [s_0, s_1]$ e um ponto $\tilde{x} \in \mathbb{Y}$ tal que $p(\tilde{x}) = \alpha(s_0)$, existe um único caminho $\tilde{\alpha} : J \rightarrow \mathbb{Y}$ com $\tilde{\alpha}(s_0) = \tilde{x}$ e $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Isto é que p tem a **pluc**.*

Demonstração. Vide [11]. □

Proposição 2.5. *Seja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ um homeomorfismo local com a **pluc**. Se \mathbb{X} é conexo por caminhos e \mathbb{Y} é simplesmente conexo então f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Vide [11]. □

Observação 2.6. *No que segue, \mathbb{X} e \mathbb{Y} são espaços topológicos de Hausdorff, conexos por caminhos e localmente conexo por caminhos, isto é, dado um ponto p e uma vizinhança $V \ni p$, existe um aberto conexo por caminhos $U \subset V$ tal que $p \in U$.*

2.5 Superfícies Mínimas

Definição 2.27. Uma *superfície* em \mathbb{R}^n é um par (M, X) onde M é uma 2-variedade diferenciável e $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão C^∞ , isto é, $X \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$ e $d(X \circ \varphi^{-1})$ é injetiva para toda $(\varphi, U) \in \Sigma(M)$.

Como é mostrado abaixo, X induz uma métrica Riemanniana em M . Dizemos que uma superfície $S = (M, X)$ é *completa* se M for completa, relativamente á métrica Riemanniana induzida por X sobre M .

Observação 2.7. Se $p \in U$ e $d(X \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ é injetiva para alguma carta (φ, U) de M , então $d(X \circ \psi^{-1})(\psi(p))$ é também injetiva, onde $(\psi, V) \in \Sigma(M)$ e $p \in V$.

Considere u, v os parâmetros em $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^2$. De modo abreviado temos $d(X \circ \varphi^{-1}) = [X_u \ X_v]$. Portanto, $\mathcal{G} = [X_u \ X_v]^t \cdot [X_u \ X_v]$ é uma matriz 2×2 simétrica, e $\det \mathcal{G} \neq 0$. Neste caso, se $\mathcal{G} = (g_{ij})$.

Sendo a matriz da primeira forma fundamental:

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} X_u \cdot X_u & X_u \cdot X_v \\ X_v \cdot X_u & X_v \cdot X_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix},$$

e a matriz da segunda forma fundamental:

$$\mathcal{B}(N) = \begin{bmatrix} X_{uu} & X_{uv} \\ X_{vu} & X_{vv} \end{bmatrix} \cdot N = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Definição 2.28. As curvaturas principais de uma superfície são raízes da equação

$$\det(\mathcal{B}(N) - \lambda \mathcal{G}) = 0,$$

isto é

$$\det(\mathcal{G}^{-1} \mathcal{B}(N) - \lambda Id) = 0.$$

Expandindo esta equação temos

$$\lambda^2 - \text{tr} \mathcal{G}^{-1} \mathcal{B}(N) + \det(\mathcal{G}^{-1} \mathcal{B}(N)) = 0,$$

sendo que, a curvatura media $\mathcal{H}(N)$ de S no ponto p , com respeito a N , é definida por

$$\mathcal{H}(N) = \frac{k_1(N) + k_2(N)}{2},$$

temos que

$$\mathcal{H}(N) = \frac{\text{tr}(\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{B}(N)))}{2}. \quad (2.3)$$

Ou equivalentemente, como

$$\mathcal{G}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix},$$

então

$$\mathcal{G}^{-1} \cdot \mathcal{B}(N) = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G}^{-1} \cdot \mathcal{B}(N) = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ -Fe + Ef & -Ff + Eg \end{bmatrix},$$

daqui:

$$\text{tr}(\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{B}(N))) = \frac{1}{EG - F^2} [(Ge - Ff) - Ff + Eg],$$

$$\text{tr}(\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{B}(N))) = \frac{[\langle X_v, X_v \rangle X_{uu} - 2 \langle X_u, X_v \rangle X_{uv} + \langle X_u, X_u \rangle X_{vv}] \cdot N}{\det \mathcal{G}},$$

logo

$$\mathcal{H}(N) = \frac{(g_{22}X_{uu} - 2g_{12}X_{uv} + g_{11}X_{vv}) \cdot N}{\det \mathcal{G}}.$$

Segue de 2.2 que $\mathcal{B}(N)$ é linear em N e de 2.3 que $\mathcal{H}(N)$ é linear em N , $\forall N \in T_p(S)^\perp$. Assim existe um único vetor $H \in T_p(S)^\perp$, tal que

$$\mathcal{H}(N) = H \cdot N \quad \forall N \in T_p(S)^\perp. \quad (2.4)$$

O vetor H assim definido é chamado vetor curvatura média de S . Considere $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$ uma base ortonormal de $T_p(S)^\perp$. Temos que o vetor H pode ser escrito como

$$H = \sum_{k=1}^{n-2} \Pi_k(H), \quad (2.5)$$

em que $\Pi_k(H)$ é a projeção de H na sua k -ésima coordenada em relação a base $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$.

Definição 2.29. Uma superfície $S = (M, X)$ é uma superfície mínima se seu vetor curvatura média H for nulo em todos seus pontos.

Em virtude de (2.4) e (2.5), $H = 0$ se e somente se, $\mathcal{H}(N) = 0$, para qualquer $N \in T_p(S)^\perp$.

Assim usando 2.3, as superfícies mínimas são caracterizadas por:

$$\text{tr}(\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{B}(N))) = 0, \quad (2.6)$$

ou equivalentemente

$$[\langle X_v, X_v \rangle X_{uu} - 2 \langle X_u, X_v \rangle X_{uv} + \langle X_u, X_u \rangle X_{vv}] \cdot N = 0.$$

2.5.1 Parâmetros Isotérmicos

Ao escolhermos os parâmetros isotérmicos utilizados na definição de superfície, devemos usar aqueles cujas propriedades geométricas sejam refletidas no plano de parametrização. Tal procedimento facilita o estudo de certas propriedades apresentadas pela superfície que independem da parametrização.

Definição 2.30. Os parâmetros u, v são *isotérmicos* se $g_{11} \equiv g_{22}$ e $g_{12} \equiv 0$ em $\varphi(U)$. Ou

$$\mathcal{G} = \lambda^2 Id,$$

onde $\lambda = \lambda(u, v) > 0$, e g_{ij} são entradas da matriz \mathcal{G} .

Observação 2.8. *Agora damos um resultado mais forte, cuja prova não é tão elementar. No entanto, ele nos permite concluir que toda 2-variedade C^∞ conexa M possui uma coleção de cartas $\sum' \subset \sum(M)$ tal que os parâmetros em $\varphi(U)$ são isotérmicos, para toda $(\varphi, U) \in \sum'$, e a família \sum' verifica os itens (1) e (2) da Definição 2.1.*

Teorema 2.7. *Dada uma 2-variedade M de classe C^∞ , para todo $p \in M$ existe uma carta (φ, U) de M , com $p \in U$, tal que os parâmetros em $\varphi(U)$ são isotérmicos.*

Demonstração. Vide [8]. □

A seguir, apresentamos um lema que garante a reparametrização da superfície, usando parâmetros isotérmicos, quando ela satisfaz, uma certa condição.

Lema 2.1. *Seja $S = (M, X)$ uma superfície mínima. Então, para todo $p \in S$, existe uma carta (φ, U) de M com $p \in X(U)$ tal que os parâmetros em $\varphi(U)$ são isotérmicos.*

Para a prova deste lema, fazemos uma escolha especial de parâmetro. Sejam $S = (M, X)$ uma superfície para algum $(\varphi, U) \in \sum$, u, v parâmetros de $\varphi(U)$ no plano \mathbb{R}^2 . A equação

$$x_k \circ \varphi^{-1}(u, v) = f_k(u, v) \quad , k = 3, 4, \dots, n \quad u, v \in \varphi(U), \quad (2.7)$$

define uma superfície \tilde{S} em \mathbb{R}^n . Dizemos que uma superfície assim definida está na *forma explícita ou não paramétrica*.

Este é um caso especial de Superfícies que consideramos agora.

Lema 2.2. *Seja $S = (M, X)$ uma superfície, e p um ponto de S . Então existe uma carta (φ, U) de M , com $p \in X(U)$, tal que $X(U)$ esta na forma não paramétrica.*

Demonstração. Vide [21]. □

Precisamos da equação 2.8 para a prova do lema.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1 + |q|^2}{W} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p \cdot q}{W} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p \cdot q}{W} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1 + |q|^2}{W} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Agora verificamos esta equação, para isto assumimos que a superfície $S = (M, X)$ esta na forma não paramétrica, podemos assumir que a superfície esta definida por

$$x_k \equiv x_k \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2) = f_k(x_1, x_2) \quad k = 3, \dots, n \text{ onde } (\varphi, U) \in \sum(M),$$

ou equivalentemente

$$x_1 \equiv u_1, \quad x_2 \equiv u_2, \quad x_k \equiv x_k \circ \varphi^{-1}(u_1, u_2) = f_k(u_1, u_2), \quad k = 3, \dots, n$$

então

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u_1} &\equiv \frac{\partial X \circ \varphi^{-1}}{\partial u_1} = \left(1, 0, \frac{\partial f_3}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right), \\ \frac{\partial X}{\partial u_2} &\equiv \frac{\partial X \circ \varphi^{-1}}{\partial u_2} = \left(0, 1, \frac{\partial f_3}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \right), \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + \sum_{k=3}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_1} \right)^2, \\ g_{12} &= \sum_{k=3}^n \frac{\partial f_k}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial u_2}, \\ g_{22} &= 1 + \sum_{k=3}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_2} \right)^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Superfície na forma não paramétrica, consideramos

$$x_k \equiv x_k \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2) \quad k = 3, \dots, n$$

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ x_2 &= f_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

e introduzimos a notação $f = (f_3, \dots, f_n)$, sendo

$$p = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

Então, a equação de superfícies mínimas

$$(1 + |f_{x_2}|^2)f_{x_1 x_1} - 2(f_{x_1} \cdot f_{x_2})f_{x_1 x_2} + (1 + |f_{x_1}|^2)f_{x_2 x_2} = 0,$$

pode ser escrita:

$$(1 + |q|^2) \frac{\partial p}{\partial x_1} - (p \cdot q) \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial q}{\partial x_1} \right) + (1 + |p|^2) \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0, \quad (2.10)$$

ou

$$(1 + |q|^2)r - 2(p \cdot q)s + (1 + |p|^2)t = 0, \quad (2.11)$$

de 2.9 temos

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + |p|^2, \\ g_{12} &= p \cdot q, \\ g_{22} &= 1 + |q|^2, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \det \mathcal{G} &= 1 + |p|^2 + |q|^2 + |p|^2|q|^2 - (p \cdot q)^2, \\ W &= \sqrt{\det \mathcal{G}}, \end{aligned}$$

para superfícies não paramétricas.

Vamos agora supor que temos uma variação em nossa superfície, tomando

$$\tilde{f}_k = f_k + \lambda h_k \quad k = 3, \dots, n$$

onde λ é um número real e $h_k \in C^1$ no domínio de definição D dos f_k . Em notação vetorial, tomando $h = (h_3, \dots, h_n)$ temos

$$\tilde{f} = f + \lambda h, \quad \tilde{p} = p + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_1}, \quad \tilde{q} = q + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_2},$$

daqui

$$\tilde{W}^2 = W^2 + 2\lambda \tilde{X} + \lambda^2 Y,$$

onde

$$\tilde{X} = [(1 + |q|^2)p - (p \cdot q)q] \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1} + [(1 + |p|^2)q - (p \cdot q)p] \cdot \frac{\partial h}{\partial x_2},$$

e Y é contínua em x_1, x_2 . Segue que:

$$\tilde{W}^2 = W + \lambda \frac{\tilde{X}}{W} + \lambda^2 Z,$$

onde Z é novamente contínua.

Agora considerando uma curva fechada Γ num domínio de definição de $f(x_1, x_2)$, seja Δ uma região limitada por Γ .

Se a superfície $x_k = f(x_1, x_2)$ sobre Δ minimiza a área sobre todas as superfícies com a mesma fronteira, então para cada escolha de h tal que $h = 0$ sobre Γ , temos:

$$\int \int_{\Delta} \tilde{W} dx_1 dx_2 \geq \int \int_{\Delta} W dx_1 dx_2,$$

o qual é somente possível se:

$$\int \int_{\Delta} \frac{\tilde{X}}{W} = 0,$$

substituindo na anterior expressão para \tilde{X} , integrando por partes, e usando o fato que $h = 0$ sobre Γ , encontramos

$$\int \int_{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1 + |q|^2}{W} p - \frac{p \cdot q}{W} q \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{1 + |p|^2}{W} q - \frac{p \cdot q}{W} p \right] \right] h dx_1 dx_2 = 0.$$

Assim

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1 + |q|^2}{W} p - \frac{p \cdot q}{W} q \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{1 + |p|^2}{W} q - \frac{p \cdot q}{W} p \right] = 0. \quad (2.12)$$

Uma vez encontrada esta equação, podemos escrever 2.12 como soma destes três termos:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1 + |q|^2}{W} \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{p \cdot q}{W} \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} + \frac{\partial q}{\partial x_1} \right) + \frac{1 + |p|^2}{W} \frac{\partial q}{\partial x_2} \right] + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1 + |q|^2}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p \cdot q}{W} \right) \right] p + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1 + |p|^2}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p \cdot q}{W} \right) \right] q. \end{aligned}$$

O primeiro termo desaparece por 2.10. Expandindo o segundo termo da soma, podemos expressar-lo como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1 + |q|^2}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p \cdot q}{W} \right) \\ & = \frac{1}{W^3} [(p \cdot q)q - (1 + |q|^2)p] \cdot [(1 + |q|^2)r - 2(p \cdot q)s + (1 + |p|^2)t], \end{aligned}$$

o qual por 2.11 é zero. Trocando p por q , e x_1 por x_2 temos da última parte da soma que:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1 + |p|^2}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p \cdot q}{W} \right) = 0,$$

logo, temos que as equações dadas em 2.8

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1 + |q|^2}{W} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p \cdot q}{W} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p \cdot q}{W} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1 + |q|^2}{W} \right), \end{aligned}$$

são satisfeitas por cada solução da equação de superfície mínima.

Agora podemos começar a demonstração do lema 2.1.

Pelo lema 2.2, podemos encontrar uma vizinhança do ponto p na qual S pode ser representada na forma não paramétrica. Então temos que a equação 2.8 é satisfeita em algum disco

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < R^2.$$

Estas equações implicam a existência de funções $F(x_1, x_2)$, $G(x_1, x_2)$ em este disco satisfazendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= \frac{1 + |p|^2}{W}, & \frac{\partial F}{\partial x_2} &= \frac{p \cdot q}{W}, \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} &= \frac{p \cdot q}{W}, & \frac{\partial G}{\partial x_2} &= \frac{1 + |q|^2}{W}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Se colocarmos

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + F(x_1, x_2), \\ \xi_2 &= x_2 + G(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) &= (\xi_1(x_1, x_2), \xi_2(x_1, x_2)) \\ &= (\phi_1(x_1, x_2), \phi_2(x_1, x_2)) \\ &= (\xi_1, \xi_2), \end{aligned}$$

$$P(\xi_1, \xi_2) = X \circ \phi^{-1}(\xi_1, \xi_2).$$

P é uma reparametrização de X nos parâmetros (ξ_1, ξ_2) , ϕ é a aplicação reparametrização ou aplicação transição.

Daqui, encontramos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} &= \frac{1 + |p|^2}{W}, & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} &= \frac{p \cdot q}{W}, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} &= \frac{p \cdot q}{W}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} &= \frac{1 + |q|^2}{W}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(\phi_1(x_1, x_2))}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \xi_{1x_1} & \xi_{1x_2} \\ \xi_{2x_1} & \xi_{2x_2} \end{vmatrix}, \\ J &= 1 + \frac{1 + |q|^2}{W} + \frac{1 + |p|^2}{W} + \frac{(1 + |q|^2 + |p|^2 + |p|^2|q|^2)}{W^2} - \left(\frac{p \cdot q}{W}\right)^2, \end{aligned}$$

Mas, $W = \sqrt{\det \mathcal{G}}$, então

$$W^2 = \det \mathcal{G} = 1 + |p|^2 + |q|^2 + |p|^2|q|^2 - \langle p, q \rangle^2,$$

$$J = 2 + \frac{2 + |p|^2 + |q|^2}{W} > 0.$$

Assim, a transformação associada a 2.14 possui uma inversa local

$$(\xi_1, \xi_2) \xrightarrow{\phi^{-1}} (x_1, x_2)$$

e tomando $x_k = f_k(x_1, x_2)$, para $k = 3, \dots, n$, podemos representar a superfície em termos dos parâmetros ξ_1, ξ_2 .

Assim, sendo que:

$$P(\xi_1, \xi_2) = X \circ \phi^{-1}(\xi_1, \xi_2) = X(x_1, x_2),$$

podemos encontrar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2) &= dP(\xi_1, \xi_2) \cdot (1, 0) \\ &= dX(\phi^{-1}(\xi_1, \xi_2)) d\phi^{-1}(\xi_1, \xi_2)(1, 0), \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2) \right] = [f_{x_1} \ f_{x_2}] [d\phi^{-1}(\xi_1, \xi_2)] \cdot e_1,$$

e também

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2) &= dP(\xi_1, \xi_2) \cdot (0, 1) \\ &= dX(\phi^{-1}(\xi_1, \xi_2)) d\phi^{-1}(\xi_1, \xi_2)(0, 1), \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2) \right] = [f_{x_1} \ f_{x_2}] [d\phi^{-1}(\xi_1, \xi_2)] \cdot e_2,$$

mas,

$$[d\phi^{-1}(\xi_1, \xi_2)] = [d\phi(x_1, x_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_{1x_1} & \xi_{1x_2} \\ \xi_{2x_1} & \xi_{2x_2} \end{bmatrix}$$

$$[d\phi^{-1}(\xi_1, \xi_2)] = \frac{\begin{bmatrix} \xi_{2x_2} & -\xi_{1x_2} \\ -\xi_{2x_1} & \xi_{1x_1} \end{bmatrix}}{J}$$

$$\text{então, } [d\phi^{-1}(\xi_1, \xi_2)] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{J} + \frac{1+|q|^2}{JW} \right) & -\left(\frac{p \cdot q}{JW} \right) \\ -\left(\frac{p \cdot q}{JW} \right) & \left(\frac{1}{J} + \frac{1+|q|^2}{JW} \right) \end{bmatrix},$$

logo, para $k = 3, \dots, n$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2) \right] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{J} + \frac{1+|q|^2}{JW} \right) \\ -\left(\frac{p \cdot q}{JW} \right) \\ \left(\frac{1}{J} + \frac{1+|q|^2}{JW} \right) p_k - \left(\frac{p \cdot q}{JW} \right) q_k \end{bmatrix}_{n \times 1}.$$

Assim também temos, para $k = 3, \dots, n$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2) \right] = \begin{bmatrix} -\left(\frac{p \cdot q}{JW}\right) \\ \left(\frac{1}{J} + \frac{1+|p|^2}{JW}\right) \\ -\left(\frac{p \cdot q}{JW}\right) p_k + \left(\frac{1}{J} + \frac{1+|p|^2}{JW}\right) q_k \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial \xi_1} &= \frac{W + 1 + |q|^2}{JW}, & \frac{\partial P_2}{\partial \xi_1} &= -\frac{p \cdot q}{JW}, \\ \frac{\partial P_k}{\partial \xi_1} &= \frac{W + 1 + |q|^2}{JW} p_k - \frac{p \cdot q}{JW} q_k, & k &= 1, \dots, n. \\ \frac{\partial P_1}{\partial \xi_2} &= -\frac{p \cdot q}{JW}, & \frac{\partial P_2}{\partial \xi_2} &= \frac{W + 1 + |p|^2}{JW}, \\ \frac{\partial P_k}{\partial \xi_2} &= \frac{W + 1 + |p|^2}{JW} q_k - \frac{p \cdot q}{JW} p_k, & k &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Segue que com respeito aos parâmetros ξ_1, ξ_2 temos

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{22} &= \left| \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \right|^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right|^2 = \frac{W}{J} = \frac{W^2}{2W + 2 + |p|^2 + |q|^2}, \\ g_{12} &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi_1}, \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Assim, $\xi_1 e \xi_2$ são coordenadas isotérmicas.

Lema 2.3. *Seja S uma superfície definida por $X(U)$ onde u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos, e seja \tilde{S} uma reparametrização de S definida por um difeomorfismo $u(\tilde{u})$. Então u_1, u_2 são também parâmetros isotérmicos se, e somente se, a aplicação $u(\tilde{u})$ é conforme ou anticonforme.*

Demonstração. Vide [21]. □

Considere uma superfície $S = ((M, \Sigma(M)), X)$. Se excluirmos todas as cartas de $\Sigma(M)$, nas quais os parâmetros não são isotérmicos, obtemos uma nova superfície $S' = ((M, \Sigma'), X)$, onde as composições como em (2) na Definição 1.1, são aplicações conformes ou anti-conformes (veja [Osserman]- p 33). Nesta nova superfície, se existir um subconjunto Σ'' de Σ' tal que (1) se verifica para Σ'' , e em (2) as composições são todas conformes, dizemos que S é *orientável*, e Σ'' é uma *estrutura conforme* de M . Caso contrário, S é dita *não-orientável*.

Definição 2.31. Sejam u e v os parâmetros em \mathbb{R}^2 , e U um subconjunto aberto do \mathbb{R}^2 . O *operador de Laplace* é a aplicação $\Delta : \mathcal{F}(\mathbb{R}^c) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\Delta = \partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2$.

Definição 2.32. Seja M uma 2-variedade C^∞ com estrutura conforme \sum . Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *harmônica* se $\Delta(f \circ \varphi^{-1}) \equiv 0$ em $\varphi(U)$, para toda carta $(\varphi, U) \in \sum$.

Lema 2.4. *Seja uma superfície $S = (M, X)$ e u, v parâmetros isotérmicos. Então, $\Delta(X \circ \varphi^{-1}) = 2\lambda^2 H$, para a carta $(\varphi, U) \in \sum$ onde H é o vetor curvatura média.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \langle X_u, X_u \rangle &= \langle X_v, X_v \rangle = e \\ \langle X_u, X_v \rangle &= 0, \end{aligned}$$

diferenciando a primeira igualdade com respeito a u e a segunda com respeito a v temos

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_u, X_{uu} \rangle &= \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_v, X_{uv} \rangle, \\ \langle X_{uu}, X_u \rangle &= \langle X_{uv}, X_v \rangle = - \langle X_u, X_{vv} \rangle, \\ \langle X_{vu}, X_v \rangle &= - \langle X_u, X_{uv} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\Delta(X \circ \varphi^{-1}) \cdot X_u = 0$.

De modo semelhante, diferenciando a primeira com respeito a v e a segunda com respeito a u obtemos

$$\Delta(X \circ \varphi^{-1}) \cdot X_v = 0.$$

Assim, $\Delta(X \circ \varphi^{-1})$ é perpendicular ao plano tangente a S . Mas, N é um vetor normal arbitrário a S , então

$$\langle \Delta(X \circ \varphi^{-1}), N \rangle = \langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_{vv}, N \rangle = \text{tr} \mathcal{B}(N),$$

logo de $\mathcal{H}(N) = \frac{\text{tr} \mathcal{B}(N)}{2\lambda^2}$, assim

$$\Delta(X \circ \varphi^{-1}) \cdot N = 2\lambda^2 \mathcal{H}(N).$$

Isto significa que $\frac{\Delta(X \circ \varphi^{-1})}{2\lambda^2}$ é um vetor normal que satisfaz a definição de $\mathcal{B}(N) = H \cdot N$ do vetor curvatura média H , e da unicidade

$$\Delta(X \circ \varphi^{-1}) = 2\lambda^2 H.$$

□

Lema 2.5. *Considere uma superfície $S = (M, X)$ em \mathbb{R}^n , $X = (x_1, \dots, x_n)$ e M com uma estrutura conforme \sum . Então S é mínima se, e somente se, x_k é harmônica para todo k .*

Demonstração. Seja $(\varphi, U) \in \sum$, como X é imersão C^∞ , $x_k \circ \varphi^{-1}$ é $C^\infty \forall k$. Se u e v são parâmetros de \mathbb{R}^2 , estes são isotérmicos, pois \sum é conforme. Considere $\Delta = \partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2$ o operador de Laplace, e denote

$$\Delta(X \circ \varphi^{-1}) = (\Delta(x_1 \circ \varphi^{-1}), \Delta(x_2 \circ \varphi^{-1}), \dots, \Delta(x_n \circ \varphi^{-1})).$$

Usando o lema anterior $\Delta(X \circ \varphi^{-1}) = 0 \Leftrightarrow H = 0$

□

Teorema 2.8. (Princípio do Máximo para Funções Harmônicas) *Sejam G um aberto conexo de \mathbb{C} e $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Se existe $a \in G$ tal que $u(a) \geq u(z)$, para todo $z \in G$, então $u \equiv u(a)$ em G*

Demonstração. Vide [2]. □

Proposição 2.6. *Uma superfície mínima não pode ser compacta, isto é, se $S = (M, X)$ é mínima, então M não é compacto.*

Demonstração. Senão, as funções x_k atingiriam um máximo, portanto seriam constantes, mas X é uma imersão. Quer dizer, se $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica e M é compacto e conexo, seja m o valor máximo de u . Os conjuntos $A = \{p \in M : u(p) = m\}$ e $B = \{p \in M : u(p) \neq m\}$ são ambos abertos e disjuntos, e $M = A \dot{\cup} B$ (união disjunta). Então $B = \emptyset$. □

Capítulo 3

Funções Elíticas

Neste capítulo, damos definições e propriedades das Funções Elíticas, introduzindo, a função P de Weierstraß e exibindo uma relação entre as P de Weierstraß clássica e \wp -Weierstraß simétrica.

Definição 3.1. Um subconjunto $\Gamma \subset \mathbb{C}$ é um reticulado se existem dois vetores W_1 e W_2 em \mathbb{C} , linearmente independentes sobre \mathbb{R} e geram Γ como um grupo abeliano, isto é

$$\Gamma = \mathbb{Z}W_1 + \mathbb{Z}W_2 = \{mW_1 + nW_2; m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Observação 3.1. *Dois números complexos são linearmente independentes sobre \mathbb{R} se, e somente se, nenhum deles é zero e seu quociente não é real.*

Definição 3.2. Dizemos que $F : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ é uma *função elítica* se ela for *duplamente periódica* e *meromorfa*. Ou seja, em primeiro lugar, existe uma *base* $\{W_1, W_2\}$ de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, como espaço vetorial real, de modo que $F(z + W_1) = F(z + W_2) = F(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Neste sentido, subentende-se que W_1 e W_2 são os *períodos* de F , donde $\forall W$ tal que $F(\cdot + W) \equiv F$ implica $W = nW_1 + mW_2$ para certos $m, n \in \mathbb{Z}$, isto é W_1 e W_2 são “os menores” com essa propriedade.

Na definição acima, no caso das funções constantes, não é possível estabelecer uma base $\{W_1, W_2\}$.

Em segundo lugar, os conjuntos $A = F^{-1}(\mathbb{C})$ e $B = F^{-1}(\hat{\mathbb{C}}^*)$ são ambos não vazios, e desta forma exigimos que $F|_A$ e $1/F|_B$ sejam funções *complexas analíticas*. Essa propriedade traduz o que quisemos dizer por “ F meromorfa”.

Seja F uma função elítica para o reticulado Γ , se $z, \zeta \in \mathbb{C}$, tais que $z - \zeta \in \Gamma$, então temos $F(z) = F(\zeta)$. Assim é natural introduzir o grupo \mathbb{C}/\sim .

Quanto às funções constantes, vamos também considerá-las elíticas por extensão. Podemos assim dizer que *toda* função elítica está definida num toro.

De fato, dada uma base $\{W_1, W_2\}$ de \mathbb{C} , esta determina um *reticulado* $\Gamma = \{nW_1 + mW_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$ e a relação $z \sim \zeta \Leftrightarrow z - \zeta \in W_1\mathbb{Z} + W_2\mathbb{Z}$, é de *equivalência*. As propriedades reflexiva e simétrica são óbvias, enquanto que $z \sim \zeta \sim W \Rightarrow \zeta - W =$

$nW_1 + mW_2$, $z - \zeta = nW_1 + mW_2$, donde $z - w = (n + N)W_1 + (m + M)W_2 \in \Gamma$. Com isso temos as *classes de equivalência*

$$[z] = \{W \in \mathbb{C}; W - z \in \Gamma\} = z + \Gamma,$$

onde z é sempre um representante qualquer, e o conjunto de tais classes é o *toro* $T = \mathbb{C}/\sim$.

A adição em \mathbb{C} induz em \mathbb{C}/\sim

$$[z] + [W] = [z + W].$$

Esta operação não depende da escolha representativa de z e W e é, portanto, uma adição em \mathbb{C}/\sim , isto é, tem a estrutura de grupo abeliano.

Podemos então introduzir a *função quociente* $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\sim$, dada por $p(z) = [z]$.

Observação 3.2. *Note uma sutileza: apesar de $\Gamma = W_1\mathbb{Z} + W_2\mathbb{Z}$, usamos sempre $W_1\mathbb{Z} + W_2\mathbb{Z}$ na definição das classes de equivalência. Com isso, os reticulados $w + \Gamma$, $\forall w \in \mathbb{C}$, são todos distintos, mas definem exatamente o mesmo toro.*

De acordo com a Definição 2.23 de aplicação de recobrimento, dada no capítulo anterior, vemos facilmente que $p : \mathbb{C} \rightarrow T$ é um recobrimento. Se F é uma função elítica para o reticulado Γ , então existe uma única aplicação

$$f : \mathbb{C}/\sim \rightarrow \hat{\mathbb{C}},$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \hat{\mathbb{C}} \\ p \downarrow & \nearrow f & \\ T = \mathbb{C}/\sim & & \end{array}$$

comuta. Assim, qualquer função elítica $F : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ com períodos $W_{1,2}$ pode ser vista como $f : T \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ simplesmente por $f([z]) = F(z)$, e é claro que isso inclui as funções constantes.

Teorema 3.1. (Teorema de Liouville) *Qualquer função elítica sem pólos é constante.*

Demonstração. Vide [7]. □

Corolário 3.1. *Seja $F : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ uma função elítica. Se $F(\mathbb{C}) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{c\}$, $c \in \mathbb{C}$, então F é constante, isto é, $F \equiv K \neq c$, $K \in \mathbb{C}$*

Demonstração. De fato, basta tomar $\frac{1}{F-c}$ no Teorema 3.1. Assim,

$$\frac{1}{F-c} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

deste modo, $\frac{1}{F-c} \equiv R$, então $F = \frac{1}{R} + c = K$ constante. □

3.1 Desenho Geométrico do Toro

Para qualquer ponto $z \in \mathbb{C}$ existe um ponto do reticulado $W \in \Gamma$, tal que $z - W$ pertence à região fundamental \mathcal{F}

$$\mathcal{F} = \{z = t_1W_1 + t_2W_2; 0 \leq t_1, t_2 \leq 1\},$$

isto é, cada ponto em \mathbb{C}/\sim possui um representante na região \mathcal{F} .

Dois pontos $z, W \in \mathcal{F}$ induzem o mesmo ponto em \mathbb{C}/\sim , se e somente se, eles coincidem ou ambos estão na fronteira de \mathcal{F} em correspondência de lados “opostos”. Obtemos um *modelo geométrico* de \mathbb{C}/\sim por correspondência “colando” lados opostos de um paralelogramo fundamental (vide Figura 3.1).

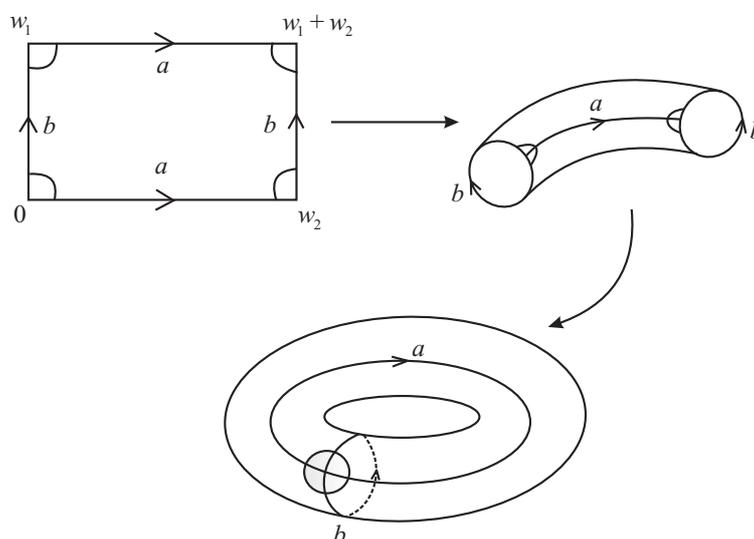


Figura 3.1: Desenho Geométrico do Toro

Toda função elítica é a inversa de uma *integral elítica*, que se define como do tipo $\int_c^x R(t, \sqrt{q(t)})dt$, onde R é função racional, q é um polinômio de grau 3 ou 4 sem raízes múltiplas, e c é uma constante.

O exemplo que originou esta denominação foi $\int_0^x \frac{\sqrt{(1-t^2)(1+(\kappa^2-1)t^2)}}{1-t^2} dt$, representando o comprimento de arco da *elipse* com raios principais 1 e κ .

3.2 A função P de Weierstraß

Uma das primeiras funções elíticas, cujo estudo encontramos com detalhes em várias literaturas de análise complexa, é a função “P de Weierstraß”, simbolizada por \wp . Entre-

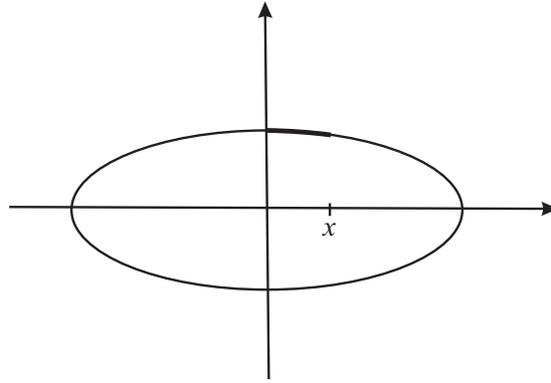


Figura 3.2: Uma elipse com raios κ e 1.

tanto, aqui reservamos este símbolo para a “ P de Weierstraß simétrica”, a ser introduzida no Capítulo 4. Quanto à “ P de Weierstraß clássica”, denotamos simplesmente por P . Sua definição original é dada por uma soma sobre $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{0\}$,

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Gamma^*} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]. \quad (3.1)$$

Temos que P satisfaz à equação diferencial

$$P'^2 = 4P^3 - \alpha P - \beta,$$

onde α, β são complexos que dependem de W_1/W_2 . Dada

$$y(x) = \int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - \alpha t - \beta}},$$

mostra-se ainda que $x = P(y)$. Estes fatos deixamos aqui apenas como comentário, pois percebe-se que a definição de P é fortemente analítica, e de difícil manipulação. No Capítulo 4 vamos introduzir a função \wp , cuja inversão $1/\wp$ é apenas uma transformação linear afim de P , porém muito mais simples de ser estudada.

Proposição 3.1. *A função P de Weierstraß para o reticulado Γ é uma função meromorfa $\mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Todos seus pólos possuem ordem dois e são localizados exatamente em pontos do reticulado. Assim, P é analítica em \mathbb{C}/\sim . A função P é par, isto é,*

$$P(z) = P(-z).$$

Demonstração. Vide [7]. □

Lema 3.1. *A derivada da função P de Weierstraß para o reticulado Γ ,*

$$P'(z) = -2 \sum_{w \in \Gamma} \frac{1}{(z-w)^3},$$

possui pólos de ordem 3 em pontos do reticulado, e é analítica sobre \mathbb{C}/\sim . Como a derivada de uma função par, P' é ímpar,

$$P'(-z) = -P'(z).$$

Demonstração. Vide [7]. □

A seguinte proposição mostra que a derivada P' é uma função elítica de ordem três.

Proposição 3.2. *A função P de Weierstraß para o reticulado Γ é uma função elítica de ordem dois, e sua derivada P' é uma função elítica de ordem três.*

Demonstração. Vide [7]. □

Lema 3.2. (Caracterização invariante para os zeros de P' em termos do reticulado) *Um ponto $a \in \mathbb{C}$ é zero de P' se, e somente se,*

$$a \notin \Gamma \text{ e } 2a \in \Gamma.$$

Existem exatamente três zeros no toro $T = \mathbb{C}/\sim$, todos eles simples.

Demonstração. Vide [7]. □

Proposição 3.3. *Sejam z e W dois pontos arbitrários em \mathbb{C} . Então*

$$P(z) = P(W),$$

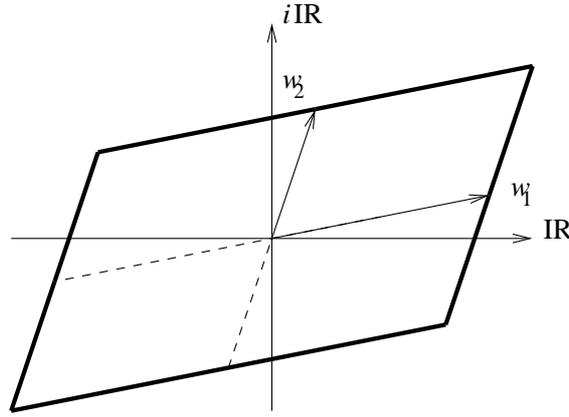
se, e somente se,

$$z \sim W \text{ ou } z \sim -W.$$

Demonstração. Fixamos W , e consideramos a função elítica $\mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, $z \mapsto P(z) - P(W)$ de ordem dois. Esta função possui dois zeros módulo Γ , contando com a multiplicidade. Estes são, obviamente, $z = W$ e $z = -W$ módulo \sim . Neste caso, W e $-W$ coincidem módulo \sim , então W é W_1, W_2 ou $W_3 = (W_1 + W_2)/2$, e já notamos que este é um zero duplo para $P(\cdot) - P(W)$, isto é, o valor correspondente $P(W) = P(W_j) = e_j$ possui ramificação de ordem dois. Se W e $-W$ são diferentes módulo \sim , então $z = W$ e $z = -W$ são zeros simples. □

3.3 A relação entre P e \wp

Para deduzir a relação entre essas duas funções elíticas, é mais fácil considerar a base $\{W_1, W_2\}$ e o reticulado $G = \{(2n + 1)w_1 + (2m + 1)w_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$, onde $w_{1,2} = \frac{W_{1,2}}{2}$. Tomando $\Gamma = \{nW_1 + mW_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$, as respectivas bases geram as mesmas classes de equivalência em \mathbb{C} , donde temos a igualdade entre esses “dois toros”, isto é o toro independe do reticulado (consequência da Observação 3.2).

Figura 3.3: O Toro T .

A Figura 3.3 representa um paralelogramo fundamental do reticulado G . Já vimos que P tem um *pólo* de ordem dois na origem e (3.1) implica que este é seu único pólo no toro. Assim, $P(w_1) = e_1$, $P(w_2) = e_2$ e $P(w_1 + w_2) = e_3$, todos pontos em \mathbb{C} .

No Capítulo 4, veremos que $\wp(0) = 0^2$ e $\wp(w_1 + w_2) = \infty^2$, sendo estes seus únicos zero e pólo em T . Como P e \wp são meromorfas, temos as seguintes *séries de Laurent* numa vizinhança da origem:

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots \text{ e}$$

$$\frac{1}{\wp(z)} = \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-1}}{z} + b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots$$

Assim, a função $f = b_{-2}P - 1/\wp$ é meromorfa no toro, mas talvez não possua nenhum pólo, o que chamamos de *holomorfa*. Neste caso, se f não for constante, a teoria de análise complexa garante que ela é aberta. Mas sendo T compacto, e f contínua, então $f(T) \neq \emptyset$ é, ao mesmo tempo, um aberto e um fechado de $\hat{\mathbb{C}}$, donde $f(T) = \hat{\mathbb{C}}$. Ou seja, f deveria assumir pólo. A única possibilidade é que seja um pólo simples na origem, donde

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots \quad (3.2)$$

e $c_{-1} = b_{-2}a_{-1} - b_{-1} \neq 0$. Pois, sendo $f = b_{-2}P - 1/\wp$ temos :

$$f = b_{-2}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots\right) - \frac{b_{-2}}{z^2} - \frac{b_{-1}}{z} - b_0 + b_1z - b_2z^2 - \dots$$

$$f = \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-2}a_{-1}}{z} + b_{-2}a_0 + b_{-2}a_1z + b_{-2}a_2z^2 - \frac{b_{-2}}{z^2} - \frac{b_{-1}}{z} - b_0 + b_1z - b_2z^2 - \dots$$

$$f = \frac{b_{-2}a_{-1} - b_1}{z} + b_{-2}a_0 - b_0 + (b_{-2}a_1 - b_1)z + (b_{-2}a_2 - b_2)z^2 + \dots$$

$$f = \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots$$

Agora usamos o seguinte resultado da Teoria de Superfícies de Riemman:

Teorema 3.2. *Seja $f : T \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ meromorfa não constante. Então $f^{-1}(z)$ e $f^{-1}(w)$ têm sempre o mesmo número de elementos, $\forall z, w \in \hat{\mathbb{C}}$, cada qual contando sua “multiplicidade”. Ou seja, tomando a correspondente $F : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ e $\zeta \in F^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{C}$, é “a primeira ordem $m \geq 1$ de derivação $F^{(m)}$ que não se anula em ζ ” (para $z = \infty$ considera-se $(1/F)^{(m)}$).*

Chamamos *grau* de f a cardinalidade de $f^{-1}(z)$, $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$, que denotamos por $\deg(f)$. Pelo Teorema 3.2, vemos que a f encontrada em (3.2) é uma bijeção de T em $\hat{\mathbb{C}}$, pois como f possui um pólo simples em zero $f(0) = \infty$, aplicamos o teorema e obtemos que f é injetora e em particular, contínua. Como f é aberta, sua inversa é também contínua. Ou seja, f é um *homeomorfismo* entre T e $\hat{\mathbb{C}}$. Ocorre que $\hat{\mathbb{C}}$ é *simplesmente conexo*, mas isso não vale para T . Assim, chegamos a uma contradição, que deveu-se ao fato de supormos f não-constante.

Então, como f é uma constante, temos:

$$f = b_{-2}P - \frac{1}{\wp} = c,$$

$$b_{-2}P = c + \frac{1}{\wp},$$

$$P = \frac{c}{b_{-2}} + \frac{1}{b_{-2}\wp},$$

$$P = b + \frac{a}{\wp},$$

com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$.

Proposição 3.4. *Não existe função elítica não constante de grau 1.*

Demonstração. Se f não constante tivesse grau 1, então seria injetora, f é sobrejetora pelo Corolário 3.1. Assim, f é um biholomorfismo entre um toro e uma esfera, o que é impossível (homeomorfismo preserva gênero). \square

3.4 Uma observação importante

Na introdução deste capítulo, discutimos o que se entende por uma função F “meromorfa”. Mas este conceito também compreende o fato de que $\text{Dom}(F)$ é um aberto de \mathbb{C} e F pode assumir o valor ∞ . Quando o domínio é uma superfície compacta, ou se $\text{Im}(F) \subset \mathbb{C}$, então dizemos que é uma função *holomorfa*. Além disso, se existe a inversa F^{-1} , dizemos que é *biholomorfa*. Todos esses termos admitem o prefixo *anti-* quando aplicados à conjugada \overline{F} . Por exemplo, F anti-holomorfa equivale a \overline{F} holomorfa, etc.

Capítulo 4

A Função \wp -Weierstraß Simétrica

4.1 Resultados básicos

Em comparação com a P de Weierstraß clássica, a \wp -Weierstraß simétrica tem as seguintes vantagens: é muito fácil de ser manipulada geometricamente, e também oferece mais informações a respeito de seus valores-imagem ao longo do toro. Como acabamos de ver na seção anterior, ambas guardam uma relação algébrica muito simples: $P = a/\wp + b$ com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$.

Neste capítulo, trabalhamos com o conceito de *superfície de Riemann* apresentado no Capítulo 2, que é um par (X, Σ) , onde X é uma variedade 2-dimensional conexa e Σ é uma *estrutura complexa* em X . Além dos abertos conexos de $\hat{\mathbb{C}}$, no Capítulo 2 vimos também o toro, que é exemplo de uma superfície de Riemann. De fato, como $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ é recobrimento, podemos induzir a estrutura complexa de \mathbb{C} em T do seguinte modo: seja $V \subset \mathbb{C}$ um subconjunto aberto tal que quaisquer dois de seus pontos não são equivalentes módulo Γ . Então $U = p(V)$ é aberto e $p|_V : V \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Sua *inversa local* $(p|_V)^{-1} : U \rightarrow V$ é uma *carta* e a coleção de todas as cartas assim formadas constitui a estrutura Σ de que falamos anteriormente.

Continuamos nosso estudo apresentando alguns resultados importantes que não estão estritamente relacionados a funções elíticas. Estes resultados constituem os argumentos fundamentais para podermos analisar o comportamento das funções elíticas. Primeiramente, precisamos da seguinte definição:

Definição 4.1. Uma *involução* é uma aplicação contínua $I : S \rightarrow S$ que satisfaz $I \circ I = id$ (a identidade em S). Quando S é uma superfície compacta, a involução é chamada *hiperelítica* se S/I é homeomorfa a S^2 .

Da definição acima, é imediato ver que toda involução é uma bijeção. No próximo teorema, mencionamos as *transformações de Möbius*, que são aplicações $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dadas por $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ com a, b, c, d constantes em \mathbb{C} e $ad \neq bc$.

Um resultado conhecido da análise complexa é que *todo* biholomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$ em $\hat{\mathbb{C}}$ é caracterizado por uma transformação de Möbius. Além disso, uma tal transformação sempre leva circunferências em circunferências (de $\hat{\mathbb{C}}$).

Vejamos agora o que ocorre com as involuções.

Teorema 4.1. *Toda involução holomorfa ou anti-holomorfa em $\hat{\mathbb{C}}$ é dada por uma transformação de Möbius M ou sua conjugada \bar{M}*

Demonstração. Tomamos uma involução $I : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Se é holomorfa, então é biholomorfa e assim uma transformação de Möbius. Se é anti-holomorfa, então \bar{I} é biholomorfa, logo I é a conjugada de uma transformação de Möbius. \square

Observação 4.1. *Notemos que a recíproca do teorema acima não é válida, pois $z \rightarrow 2z$ não é uma involução.*

Teorema 4.2. *Sejam S e R superfícies de Riemann, $I : S \rightarrow S$ uma involução e $f : S \rightarrow R$ uma função contínua, aberta e sobrejetora. Então, existe uma única involução $J : R \rightarrow R$ tal que $J \circ f = f \circ I$ se, e somente se, sempre que $f(x) = f(y)$ temos $f \circ I(x) = f \circ I(y)$.*

Demonstração. As hipóteses do teorema foram formuladas para garantir a comutatividade do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{I} & S \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ R & \xrightarrow{J} & R \end{array}$$

Figura 4.1: Diagrama das involuções I e J .

Começamos assumindo que $J \circ f = f \circ I$. Se $f(x) = f(y)$ então

$$f \circ I(x) = J \circ f(x) = J \circ f(y) = f \circ I(y).$$

Suponhamos agora que $f \circ I(x) = f \circ I(y)$ quando $f(x) = f(y)$. Para cada $z \in R$ definimos $J(z) := f \circ I(x)$, para algum $x \in S$ tal que $f(x) = z$ (este elemento existe pois f é sobrejetora). Por hipótese $J : R \rightarrow R$ está bem definida. Além disso, $J \circ f = f \circ I$. A função J é contínua por causa do seguinte argumento: para qualquer subconjunto aberto $U \subset R$ temos que $I^{-1}(f^{-1}(U))$ é aberto em S . Mas $I^{-1}(f^{-1}(U)) = f^{-1}(J^{-1}(U))$, e conseqüentemente $J^{-1}(U)$ é aberto em R . Temos ainda

$$J \circ J \circ f = J \circ f \circ I = f \circ I \circ I = f.$$

Assim, J é uma involução.

Para a unicidade apresentamos duas demonstrações, a primeira na que usamos ferramentas da teoria das superfícies de Riemann e da análise complexa e uma segunda demonstração mais simples.

Primeira Forma:

Consideramos um ponto $p \in S$ e o diagrama dado na figura 4.1, onde φ e ψ são cartas locais de S em p e de R em $f(p)$, respectivamente. Vamos supor que exista outra involução $\tilde{J} : R \rightarrow R$ tal que $\tilde{J} \circ f = f \circ I$, isto é, $\tilde{J} \circ f = J \circ f$. Assim, temos a aplicação

$$\psi \circ f \circ I \circ \varphi^{-1} : U \rightarrow V,$$

sendo que $I \circ \varphi^{-1} : U \rightarrow S$ é a inversa de uma carta local (também chamada de parametrização). Como $\psi \circ f : (\psi \circ f)^{-1}(V) \subset S \rightarrow V$ é uma carta local e

$$f(S) = R, (\psi \circ f)^{-1}(V) \cup (I \circ \varphi^{-1})(U) \neq \emptyset,$$

como S é uma superfície de Riemann

$$\psi \circ f \circ I \circ \varphi^{-1} : U \rightarrow V,$$

é um difeomorfismo, logo f é um difeomorfismo local, assim f é holomorfo, e $df \neq 0$ pois de ser zero f seria uma constante, o que contradiz o fato de ser sobrejetora, logo df têm zeros isolados $\{p_1, \dots, p_r\}$. Fora de $\{p_1, \dots, p_r\}$ temos que f é localmente invertível,

$$\tilde{J} \circ f \circ (f)_{q_i}^{-1} = J \circ f \circ (f)_{q_i}^{-1},$$

resultando assim que $\tilde{J} = J$ na vizinhança de cada ponto $q_i \in R$ logo $\tilde{J} = J$ em R pelo Teorema da Identidade.

Segunda Forma:

Suponha que existe outra involução $\tilde{J} : R \rightarrow R$ tal que $\tilde{J} \circ f = f \circ I = J \circ f$, multiplicando por J

$$J \circ \tilde{J} \circ f = J \circ f \circ I = J \circ f = f,$$

para cada $z \in R$, existe $x \in S$ tal que $z = f(x)$

$$J \circ \tilde{J} \circ f = f(x) \Rightarrow J \circ \tilde{J}(z) = z.$$

De maneira análoga $\tilde{J} \circ J(z) = z$. Portanto $\tilde{J} = J^{-1} = J$. □

Observação 4.2. *Uma versão mais geral do Teorema 2.2 é a seguinte: Sejam S e R superfícies de Riemann, $I : S \rightarrow S$ um biholomorfismo e $p, q : S \rightarrow R$ recobrimientos. Então, $(\exists! J : R \rightarrow R$ biholomorfa tal que $J \circ p = q \circ I) \Leftrightarrow (q \circ I(x) = q \circ I(y) \Rightarrow p(x) = p(y))$.*

É imediato concluir que dado $F \subset R$ temos $J(F) = F$ se, e somente se, $I(f^{-1}(F)) = f^{-1}(F)$. De fato, se $J(F) = F$ e $J(z) = f \circ I(x)$, para algum $x \in S$ tal que $f(x) = z$, temos que $f^{-1}(F) \subset S$. Como $J \circ f = f \circ I$ e f é sobrejetora, então

$$\begin{aligned} J \circ f &= f \circ I \\ J \circ f(f^{-1}(F)) &= f \circ I(f^{-1}(F)) \\ J(F) &= f \circ I(f^{-1}(F)) \\ F &= f \circ I(f^{-1}(F)) \\ f^{-1}(F) &= f^{-1} \circ f \circ I(f^{-1}(F)) \\ f^{-1}(F) &= I(f^{-1}(F)). \end{aligned}$$

Para a recíproca usamos a mesma idéia.

4.2 A função \wp -Weierstraß simétrica

Como vimos no Capítulo 2, qualquer toro T é o quociente de \mathbb{C} por alguma base $\{2w_1, 2w_2\}$. Podemos descrever isto por meio de números complexos não nulos w_1 e w_2 , com $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$. Assim, $G = \{(2n+1)w_1 + (2m+1)w_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$ e $T = \mathbb{C}/\sim$.

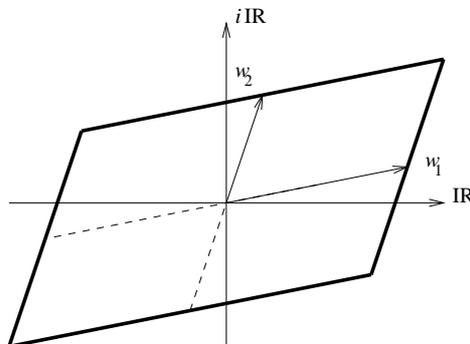


Figura 4.2: O Toro T .

A rotação de 180° graus em torno da origem, dada pela involução $I(z) = -z$ no toro T , tem exatamente quatro pontos fixos: $0, w_1, w_2$ e $w_1 + w_2$, indicados na Figura 5.1. Considerando uma triangularização de T , sua característica de Euler é dada por $\chi(T) = \mathcal{V} - \mathcal{A} + \mathcal{F} = 0$. Podemos supor que os pontos $0, w_1, w_2$ e $w_1 + w_2$ da Figura 4.2 recaem exatamente nos vértices desta triangularização, e que esta é invariante por I .

Ao efetuarmos o quociente de T pela involução I , obtemos uma nova superfície triangularizada, mas com número de arestas $\mathcal{A}/2$, de faces $\mathcal{F}/2$. Mas com respeito aos vértices, exceto por aqueles que são fixados, seu número também é reduzido pela metade. Então

vale a seguinte igualdade:

$$\chi(T/I) = \frac{(\mathcal{V} - 4) - \mathcal{A} + \mathcal{F}}{2} + 4 = 0 - 2 + 4 = 2,$$

pois no toro T , temos $\mathcal{V} = 4$, $\mathcal{A} = 12$ e $\mathcal{F} = 8$. Isto é usando a *fórmula de Euler-Poincaré* obtemos:

$$\chi(T/I) = \frac{\chi(T)}{2} + \frac{4}{2} = 2.$$

Logo, o gênero de T/I é zero e pelo *Teorema de Classificação das Superfícies Compactas* Teorema 2.1, esta é homeomorfa a uma esfera. Logo, T/I é simplesmente conexa. Agora, a estrutura conforme de \mathbb{C} é induzida em T/I , mesmo considerando que a função quociente é um *recobrimento ramificado*. De fato, para recobrimentos, as induções de estrutura são imediatas. Assim, T/I é uma superfície de Riemann compacta, simplesmente conexa.

Teorema 4.3. (Koebe) *Seja S uma superfície de Riemann simplesmente conexa. Então existe um biholomorfismo $f : S \rightarrow X$, em que X é uma das seguintes superfícies:*

- i) O disco aberto unitário.*
- ii) O plano complexo \mathbb{C} .*
- iii) A esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$*

Demonstração. Vide [7]. □

Assim, pelo *teorema de Koebe* existe um biholomorfismo $\mathcal{B} : T/I \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Agora como todo biholomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$ em $\hat{\mathbb{C}}$ é dado por uma transformação de Möbius, e toda transformação de Möbius é determinada por três pontos do domínio e três da imagem, a menos de uma transformação de Möbius, a função \mathcal{B} está bem definida.

Definição 4.2. A *função \wp -Weierstraß simétrica* é a composta $\mathcal{B} \circ (\cdot/I) : T \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que

$$\wp(0) = 0, \quad \wp(w_1 + w_2) = \infty \quad \text{e} \quad \wp\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) = i.$$

Devido à função quociente $\cdot/I : T \rightarrow T/I$, é imediato concluir que $\wp(-z) = \wp(z)$. De fato

$$\begin{aligned} \wp(-z) &= \mathcal{B} \circ (\cdot/I)(-z) = \mathcal{B}([-z]), \\ \wp(z) &= \mathcal{B} \circ (\cdot/I)(z) = \mathcal{B}([z]). \end{aligned}$$

Mas $[z] = \{z, I(z)\} = \{z, -z\} \Rightarrow [z] = [-z]$, portanto $\mathcal{B}(-z) = \mathcal{B}(z)$, para qualquer $z \in T$. Logo $\wp\left(-\frac{w_1 + w_2}{2}\right) = i$. Além disso, $\deg(\wp) = 2$ e seus pontos de ramo são exatamente os quatro pontos fixos de I .

Da Definição 4.1 vemos que I é hiperelítica, pois $\chi(T/I) = \chi(S^2)$ e daqui T/I é homeomorfo a S^2 . Vamos agora estudar outra função hiperelítica em T , que é dada por $\mathcal{H}(z) = -z + w_1 + w_2$ (rotação de 180° em torno de $\frac{w_1 + w_2}{2}$). Se

$$\mathcal{H}(z) = -z + w_1 + w_2 = z,$$

então

$$\frac{w_1 + w_2}{2} = z.$$

Seu conjunto de pontos fixos é exatamente $\left\{ \pm \frac{w_1 + w_2}{2}, \pm \frac{w_1 - w_2}{2} \right\}$. Do Teorema 4.2, \mathcal{H} e \wp induzem outra involução em $\hat{\mathbb{C}}$. De fato, sendo $\wp : T \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, onde $\wp = \mathcal{B} \circ (\cdot/I)$ como (\cdot/I) é contínua, aberta e sobrejetora e \mathcal{B} é, biholomorfismo, então \wp é contínua, aberta e sobrejetora. Assim, \wp e \mathcal{H} induzem uma involução $J : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, e como ambas são meromorfas, a involução induzida também será meromorfa

$$J(z) = \wp \circ \mathcal{H}(x), \quad x \in T, \quad \wp(x) = z.$$

Do Teorema 4.1 esta involução é uma transformação de Möbius. Como \mathcal{H} intercambia 0 e $w_1 + w_2$ e deixa fixo $\frac{w_1 + w_2}{2}$, se J é a induzida por \wp temos:

$$\begin{aligned} J(0) &= J(\wp(0)) = \wp(\mathcal{H}(0)) = \wp(w_1 + w_2) = \infty, \\ J(\infty) &= J(\wp(w_1 + w_2)) = \wp(\mathcal{H}(w_1 + w_2)) = \wp(0) = 0, \\ J(i) &= J(\wp(\frac{w_1 + w_2}{2})) = \wp(\mathcal{H}(\frac{w_1 + w_2}{2})) = \wp(\frac{w_1 + w_2}{2}) = i. \end{aligned}$$

Assim, a transformação de Möbius associada é

$$\wp \rightarrow -\frac{1}{\wp}. \quad (4.1)$$

Uma vez que os pontos $\pm \frac{w_1 - w_2}{2}$ permanecem fixos pela \mathcal{H} , neles temos $\wp^2 = -1$, pois

$$\begin{aligned} J(\wp(\pm \frac{w_1 - w_2}{2})) &= \wp(\mathcal{H}(\pm \frac{w_1 - w_2}{2})), \\ &= \wp(\pm \frac{w_1 - w_2}{2}), \\ &= -\frac{1}{\wp(\pm \frac{w_1 - w_2}{2})}, \end{aligned}$$

então $\wp^2(\pm \frac{w_1 - w_2}{2}) = -1$.

Como o $\deg(\wp) = 2$ e $\mathcal{H}(\pm \frac{w_1 + w_2}{2}) \neq \mathcal{H}(\pm \frac{w_1 - w_2}{2})$, temos

$$\wp\left(\pm \frac{w_1 - w_2}{2}\right) = -i.$$

Além disso, (4.1) implica que todo segmento em T com extremos p, q e cujo centro é um ponto fixo de \mathcal{H} , satisfaz $\wp(q) = -1/\wp(p)$. Veja a figura abaixo.

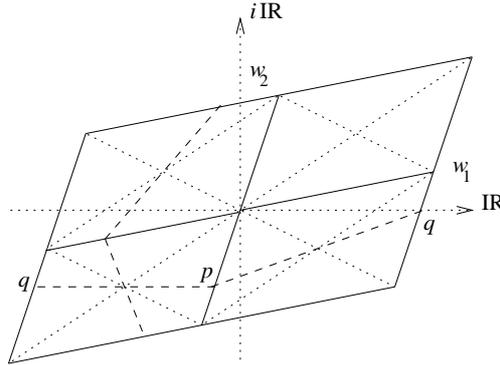


Figura 4.3: p, q diagonalmente opostos no sub-reticulado, $\wp(q) = -\frac{1}{\wp(p)}$.

De fato, como J é induzida de \mathcal{H} pela \wp , temos

$$(\wp \circ \mathcal{H})(p) = (J \circ \wp)(p) = -1/\wp(p).$$

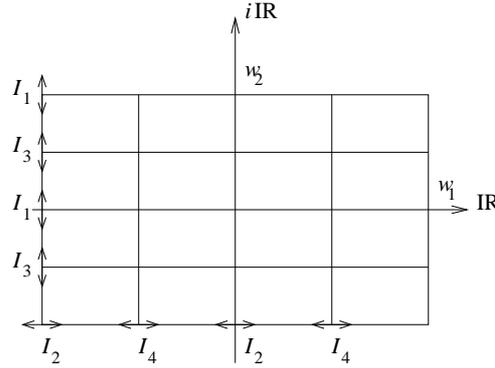
Assim, basta mostrarmos que $\mathcal{H}(p) = q$. Tomamos v um ponto fixo de \mathcal{H} e p, q os extremos de um segmento com ponto médio v . Os pontos p, q e v satisfazem: $|\vec{pq}| = 2|\vec{vq}|$, donde $p = 2v - q$. Como $2v - w_1 - w_2 \in G$, temos o resultado para $v \in \left\{ \pm \frac{w_1 + w_2}{2}, \pm \frac{w_1 - w_2}{2} \right\}$.

No caso especial de um toro retangular, a menos de biholomorfismo ou anti-biholomorfismo podemos assumir que $w_1 \in \mathbb{R}_+$ e $w_2 \in i\mathbb{R}_+$. Algumas involuções adicionais também vão satisfazer as hipóteses do Teorema 4.2, a saber:

$$\begin{aligned} I_1 &: z \rightarrow \bar{z}, \\ I_2 &: z \rightarrow -\bar{z}, \\ I_3 &: z \rightarrow \bar{z} + w_2, \\ I_4 &: z \rightarrow -\bar{z} + w_1. \end{aligned}$$

Elas estão representadas na Figura 4.4.

Junto com \wp , elas induzem involuções anti-holomorfas $J_{1,2,3,4}$ em $\hat{\mathbb{C}}$ que identificamos com o auxílio do Teorema 4.2.


 Figura 4.4: As involuções $I_{1,2,3,4}$ no toro retangular T .

Consideramos I_1 e I_2 . Elas fixam alguns pontos especiais como $0, w_1 + w_2$ e intercambiam $\frac{w_1 + w_2}{2}$ e $\frac{w_1 - w_2}{2}$. Uma vez que

$$\wp(0) = 0, \quad \wp(w_1 + w_2) = \infty,$$

e

$$\wp\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) = -\wp\left(\frac{w_1 - w_2}{2}\right) = i,$$

elas induzem a mesma involução em $\hat{\mathbb{C}}$, que fixa $0, \infty$ e intercambia i com $-i$. Do Teorema 4.1, esta involução é

$$\wp \rightarrow \bar{\wp}.$$

Em particular, isto significa que a imagem de \wp do conjunto dos pontos fixos de $I_{1,2}$ é *real*. De fato, como $J(\wp) = \wp(I_i)$, $i = 1, 2$ e $x \in T$ é um ponto fixo

$$J(\wp(x)) = \wp(I_i(x)),$$

$$J(\wp(x)) = \wp(x),$$

portanto $\wp = \bar{\wp}$, isto é, $Im \wp \in \mathbb{R}$.

Assim, $\wp(w_1) = \tan \alpha$ para algum $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\}$. Na Figura 4.4, w_1 e w_2 são os extremos de um segmento com ponto médio $\frac{w_1 + w_2}{2}$, e concluímos que $\wp(w_2) = -\cot \alpha$. Como $\tan \alpha = -\cot(\alpha + \pi/2)$, a menos de um anti-biholomorfismo podemos escolher o nosso toro de modo que $\alpha > 0$. Dessa forma, consideramos $\alpha \in (0, \pi/2)$.

A involução I_4 intercambia 0 com w_1 e $w_1 + w_2$ com w_2 . Logo, se J_4 for a involução induzida por \wp (de I_4), ela será uma transformação de Möbius anti-holomorfa que satisfaz:

$$J_4(0) = J_4(\wp(0)) = \wp(I_4(0)) = \wp(w_1) = \tan \alpha,$$

$$J_4(\infty) = J_4(\wp(w_1 + w_2)) = \wp(I_4(w_1 + w_2)) = \wp(w_2) = -\cot \alpha,$$

$$J_4(-\cot \alpha) = J_4(\wp(w_2)) = \wp(I_4(w_2)) = \wp(w_1 + w_2) = \infty.$$

Portanto J_4 é dada por

$$\wp \rightarrow \frac{\tan \alpha - \bar{\wp}}{1 + \tan \alpha \cdot \bar{\wp}}.$$

Os cálculos para determinar a involução induzida por I_3 são análogos.

$$I_3 : z \rightarrow \bar{z} + w_2,$$

$$\begin{aligned} I_3(0) &= w_2, \\ I_3(w_2) &= \overline{w_2} + w_2 = -w_2 + w_2 = 0, \\ I_3(w_1 + w_2) &= \overline{w_1 + w_2} + w_2 = w_1 - w_2 + w_2 = w_1, \\ I_3(w_1) &= \overline{w_1} + w_2 = w_1 + w_2. \end{aligned}$$

Assim, a involução I_3 intercambia 0 com w_2 e $w_1 + w_2$ com w_1 . Logo, se J_3 for a involução induzida por \wp (de I_3), ela será uma transformação de Möbius anti-holomorfa que satisfaz:

$$\begin{aligned} J_3(0) &= J_3(\wp(0)) = \wp(I_3(0)) = \wp(w_2) = -\cot \alpha, \\ J_3(\infty) &= J_3(\wp(w_1 + w_2)) = \wp(I_3(w_1 + w_2)) = \wp(w_1) = \tan \alpha, \\ J_3(\tan \alpha) &= J_3(\wp(w_1)) = \wp(I_3(w_1)) = \wp(w_1 + w_2) = \infty. \end{aligned}$$

Portanto J_3 é dada por

$$\wp \rightarrow \frac{-\cot \alpha - \bar{\wp}}{1 - \cot \alpha \cdot \bar{\wp}}.$$

A seguir, determinamos o conjunto dos pontos fixos de J_3

$$(x + \cot \alpha)^2 + (y - 0)^2 = r^2,$$

para $i = (0, 1)$, temos $(\cot \alpha)^2 + 1 = r^2$, assim

$$r = \sqrt{1 + \cot^2 \alpha},$$

logo

$$(x + \cot \alpha)^2 + y^2 = (1 + \cot^2 \alpha),$$

para $y = 0$ temos

$$x = -\cot \alpha \pm \sqrt{\cot^2 \alpha + 1},$$

obtemos desta maneira:

$$\begin{aligned} x &= -\cot \alpha + \sqrt{\cot^2 \alpha + 1} \\ &= -\cot \alpha + \csc^2 \alpha \\ &= \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x &= -\cot \alpha - \sqrt{\cot^2 \alpha + 1} \\ &= -\cot \alpha - \csc \alpha \\ &= -\frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= -\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Da mesma forma como

$$(x + \tan \alpha)^2 + (y - 0)^2 = r^2,$$

para $i = (0, 1)$, temos $(-\tan \alpha)^2 + 1 = r^2$

$$r = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha},$$

logo

$$(x - \tan \alpha)^2 + y^2 = (1 + \tan^2 \alpha),$$

para $y = 0$ temos

$$x = \tan \alpha \pm \sqrt{\tan^2 \alpha + 1},$$

obtemos assim:

$$\begin{aligned} x &= -\tan \alpha + \sqrt{\tan^2 \alpha + 1} \\ &= \tan \alpha + \sec \alpha \\ &= \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x &= -\tan \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha + 1} \\ &= \tan \alpha - \sec \alpha \\ &= -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Assim, a Figura 4.5 representa $\varphi(T)$ com as suas involuções induzidas.

Usualmente escrevem-se os valores de φ sobre o toro, como na figura 4.6.

Agora estudamos o caso especial do toro rômboico. A menos de um biholomorfismo ou anti-biholomorfismo podemos assumir que $Arg(w_1) \in (0, \pi/2)$ e $w_2 = -\bar{w}_1$. As involuções definidas anteriormente $I_{3,4}$ não são mais válidas aqui, mas $I_{1,2}$ e outras duas involuções ainda vão satisfazer as hipóteses do Teorema 4.1, a saber:

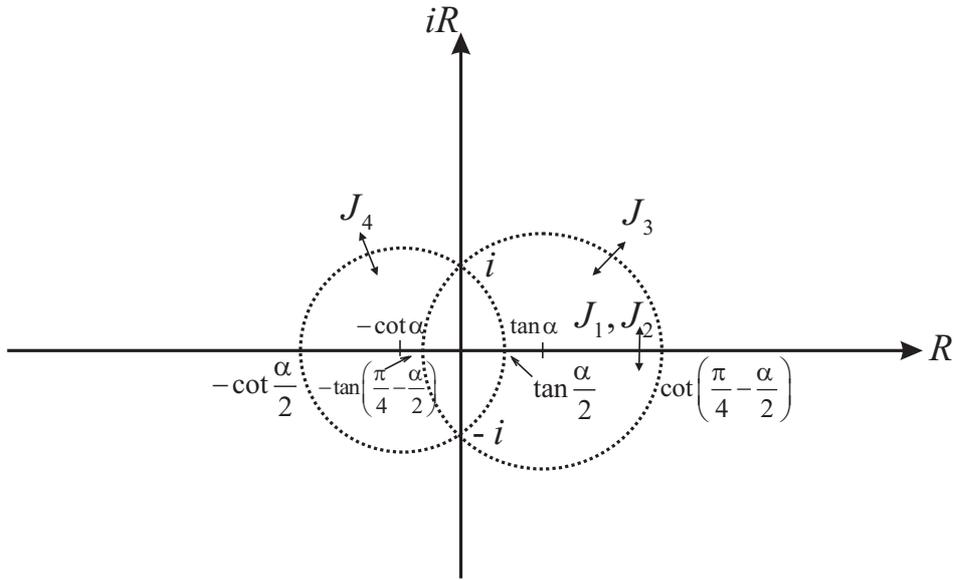


Figura 4.5: A imagem $\wp(T)$ com as involuções induzidas.

$$I_5 : z \rightarrow \bar{z} + w_1 + w_2,$$

$$I_6 : z \rightarrow -\bar{z} + w_1 - w_2.$$

Elas estão representadas na Figura 4.7.

Em $\hat{\mathbb{C}}$, $I_{1,2}$ induzem a mesma involução, a saber $\wp \rightarrow -\bar{\wp}$.

$$I_1 : z \rightarrow \bar{z},$$

$$I_2 : z \rightarrow -\bar{z}.$$

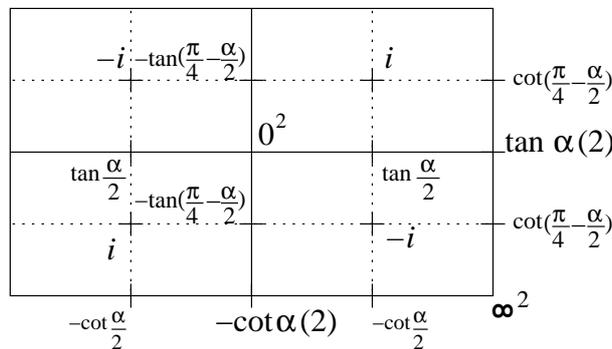
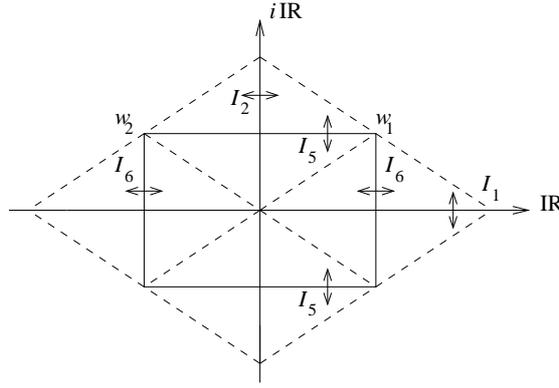


Figura 4.6: Os valores de \wp no toro retangular T .

Figura 4.7: As involuções $I_{1,2,5,6}$ no toro rômbo T .

Para estas involuções

$$I_1(0) = 0,$$

$$I_1(w_1 + w_2) = \overline{(w_1 + w_2)} = \overline{w_1} - w_1 = -w_2 - w_1 = w_1 + w_2,$$

$$I_2(0) = 0,$$

$$I_2(w_1 + w_2) = -\overline{(w_1 + w_2)} = w_1 + w_2.$$

Logo, I_1 e I_2 fixam 0 e $w_1 + w_2$. Além disto,

$$I_1\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right) = -\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right),$$

$$I_1\left(\frac{w_1-w_2}{2}\right) = \frac{w_1-w_2}{2},$$

$$I_2\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right) = \frac{w_1+w_2}{2},$$

$$I_2\left(\frac{w_1-w_2}{2}\right) = -\left(\frac{w_1-w_2}{2}\right),$$

assim, I_1 intercambia $\frac{w_1+w_2}{2}$ com $-\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)$ e fixa $\frac{w_1-w_2}{2}$, mas a involução I_2 intercambia $\frac{w_1-w_2}{2}$ com $-\left(\frac{w_1-w_2}{2}\right)$ e fixa $\frac{w_1+w_2}{2}$.

Logo, se J_1 for a involução induzida por \wp (de I_1), ela será uma transformação de Möbius anti-holomorfa que satisfaz:

$$J_1(0) = J_1(\wp(0)) = \wp(I_1(0)) = \wp(0) = 0,$$

$$J_1(\infty) = J_1(\wp(w_1 + w_2)) = \wp(I_1(w_1 + w_2)) = \wp(w_1 + w_2) = \infty,$$

$$J_1(i) = J_1(\wp\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)) = \wp\left(I_1\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)\right) = \wp\left(-\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)\right) = i,$$

mas se J_2 for a involução induzida por \wp (de I_2), ela será uma transformação de Möbius anti-holomorfa que satisfaz:

$$J_2(0) = J_2(\wp(0)) = \wp(I_2(0)) = \wp(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} J_2(\infty) &= J_2(\wp(w_1 + w_2)) = \wp(I_2(w_1 + w_2)) = \wp(w_1 + w_2) = \infty, \\ J_2(i) &= J_2(\wp(\frac{w_1+w_2}{2})) = \wp(I_2(\frac{w_1+w_2}{2})) = \wp(\frac{w_1+w_2}{2}) = i. \end{aligned}$$

O mesmo ocorre com $I_{5,6}$ que também induzem a mesma involução: $\wp \rightarrow 1/\bar{\wp}$.

$$\begin{aligned} I_5 : z &\rightarrow \bar{z} + w_1 + w_2, \\ I_6 : z &\rightarrow -\bar{z} + w_1 - w_2, \end{aligned}$$

para estas involuções

$$\begin{aligned} I_5(0) &= w_1 + w_2, \\ I_6(0) &= w_1 - w_2. \end{aligned}$$

Logo, I_5 intercambia 0 com $w_1 + w_2$, e I_6 intercambia 0 com $w_1 - w_2$. Além disto,

$$\begin{aligned} I_5(\frac{w_1+w_2}{2}) &= \frac{w_1+w_2}{2}, \\ I_6(\frac{w_1-w_2}{2}) &= \frac{w_1-w_2}{2}, \end{aligned}$$

assim, I_5 fixa $\frac{w_1+w_2}{2}$, e I_6 fixa $\frac{w_1-w_2}{2}$.

Logo, se J_5 for a involução induzida por \wp (de I_5), ela será uma transformação de Möbius antiholomorfa que satisfaz:

$$\begin{aligned} J_5(0) &= J_5(\wp(0)) = \wp(I_5(0)) = \wp(w_1 + w_2) = \infty, \\ J_5(\infty) &= J_5(\wp(w_1 + w_2)) = \wp(I_5(w_1 + w_2)) = \wp(0) = 0, \\ J_5(i) &= J_5(\wp(\frac{w_1+w_2}{2})) = \wp(I_5(\frac{w_1+w_2}{2})) = \wp(\frac{w_1+w_2}{2}) = i, \end{aligned}$$

mas se J_6 for a involução induzida por \wp (de I_6), ela será uma transformação de Möbius antiholomorfa que satisfaz:

$$\begin{aligned} J_6(0) &= J_6(\wp(0)) = \wp(I_6(0)) = \wp(w_1 - w_2) = \wp(w_1 + \bar{w}_1) = \infty, \\ J_6(\infty) &= J_6(\wp(w_1 - w_2)) = \wp(I_6(w_1 + \bar{w}_1)) = \wp(0) = 0, \\ J_6(i) &= J_6(\wp(\frac{w_1+\bar{w}_1}{2})) = \wp(I_6(\frac{w_1+\bar{w}_1}{2})) = \wp(\frac{w_1+\bar{w}_1}{2}) = i. \end{aligned}$$

Uma consequência importante da involução $\wp \rightarrow -\bar{\wp}$ em $\hat{\mathbb{C}}$ é que a imagem pela \wp da diagonal de T é o eixo imaginário. Como escolhemos $\wp\left(\frac{w_1 - w_2}{2}\right) = -i$ a imagem pela \wp da diagonal horizontal de T é $i\mathbb{R}_-$ e já que $\wp\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) = i$, a imagem pela \wp da diagonal vertical de T é $i\mathbb{R}_+$.

Da involução $\wp \rightarrow 1/\bar{\wp}$ em $\hat{\mathbb{C}}$, temos que a imagem do losango representado na Figura

4.7 cobre S^1 . De fato, como $J(\wp(z)) = \wp(I(z))$, se $w_1 = re^{i\theta}$, $\theta \in (0, \pi/2)$, então

$$J_5(\wp(re^{i\theta})) = \wp(I_5(re^{i\theta})) = \wp(re^{-i\theta} + w_1 + w_2) = \wp(w_1),$$

pela definição de J_5 temos $\wp(w_1) = \frac{1}{\overline{\wp(w_1)}}$, então $|\wp(w_1)|^2 = 1$. Para o segmento de reta que une w_1 com w_2 : $(1-t)w_1 + tw_2$ tal que $t \in [0, 1]$, temos que

$$J_5(\wp((1-t)w_1 + tw_2)) = \wp(I_5(w_1 + t(w_2 - w_1))) = \wp(w_1 + t(w_2 - w_1)),$$

assim, $J_5(\wp((1-t)w_1 + tw_2)) = \frac{1}{\overline{\wp(w_1 + t(w_2 - w_1))}}$, então

$$|\wp((1-t)w_1 + tw_2)|^2 = 1$$

um cálculo análogo pode ser feito, para o resto dos segmentos de reta do losango na Figura 4.7.

Dessa forma, $\wp(w_1) = e^{i\rho}$ (a análise feita anteriormente é análoga para J_6) para algum $\rho \in (-\pi/2, \pi/2)$. Similarmente ao caso do toro retângulo, sem perda de generalidade tomamos $\rho \geq 0$ e agora consideramos $\rho \in [0, \pi/2)$. Da Figura 4.7 concluímos que $\wp(w_2) = -e^{-i\rho}$.

No caso particular do toro quadrado, que é simultaneamente rômbo e retangular, temos $\alpha = \pi/4$ e $\rho = 0$. A próxima figura descreve os valores de \wp diretamente sobre o toro.

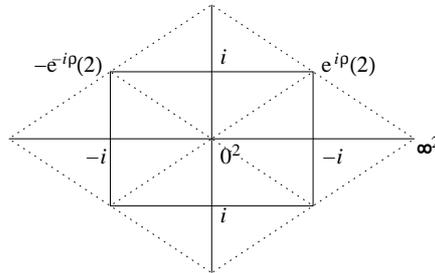


Figura 4.8: Os valores de \wp no toro rômbo T .

4.3 A equação algébrica do toro

O teorema seguinte é um dos resultados centrais da Teoria de Superfícies de Riemann:

Teorema 4.4. *Toda superfície de Riemann compacta X pode ser algebricamente descrita por duas funções $f, g : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que satisfazem uma equação polinomial a duas indeterminadas f e g , com coeficientes constantes em \mathbb{C} . Reciprocamente, toda equação polinomial a duas indeterminadas f e g , com coeficientes constantes em \mathbb{C} , admite uma superfície de Riemann compacta X tal que f, g são funções de X em $\hat{\mathbb{C}}$.*

Com base neste teorema, vamos deduzir uma equação algébrica para o toro $T = \mathbb{C}/G$. Na Figura 4.9(a), observe os únicos pontos de ramo da \wp , marcados com \bullet , onde $x = \wp(w_1) \in \mathbb{C}^*$. Como $\deg(\wp) = 2$, estes são os únicos pontos do toro em que \wp assume tais valores.

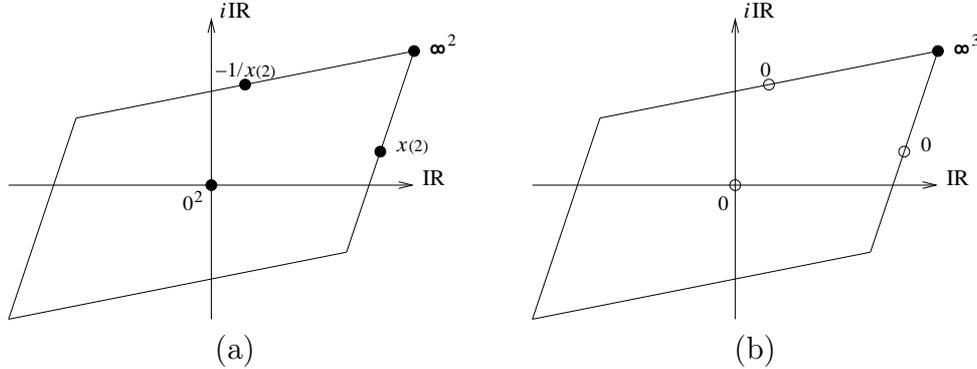


Figura 4.9: (a) valores de \wp ; (b) valores de \wp' .

Na Figura 4.9(b), marcamos apenas os pólos e zeros de \wp' . Note que esta possui um único pólo (de ordem 3), sendo que seus zeros são todos simples, uma vez que $\deg(\wp') = 3$.

Observe agora que a função $f = \wp(\wp - x)(\wp + 1/x)$ tem exatamente os mesmos pólos e zeros que $g = \wp'^2$. Numa vizinhança de cada ponto \bullet , considere os desenvolvimentos de Laurent para f e g . Então vemos que f/g é uma função holomorfa de T em \mathbb{C} , uma vez que não tem pólos. Pelo que já discutimos no Capítulo 3, esta deve ser uma constante $c \in \mathbb{C}$. Além disso, $c \neq 0$ pois $f \not\equiv 0$. Assim, obtemos uma equação algébrica para T dada por

$$\wp'^2 = c\wp(\wp - x)(\wp + 1/x). \quad (4.2)$$

No caso particular do toro retangular, $x = \tan \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ e (4.2) se reescreve como

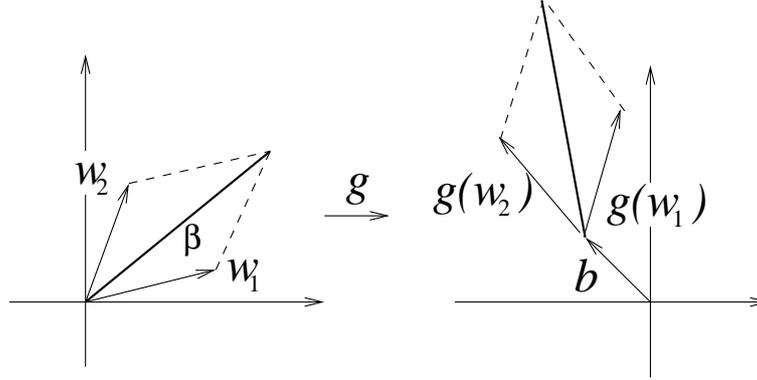
$$\wp'^2 = c\wp(\wp - \tan \alpha)(\wp + \cot \alpha).$$

No caso particular do toro rômboico, $x = e^{i\rho}$ e (4.2) se reescreve como

$$\wp'^2 = c\wp(\wp - e^{i\rho})(\wp + e^{-i\rho}).$$

4.4 A constante c

Começamos observando que quaisquer dois toros com mesmo quociente $\frac{w_1}{w_2}$ são biholomorfos, e reciprocamente. Basta vermos que se $\frac{w_1}{w_2} = \frac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_2}$, então existe $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ com $g(z) = az$ e $a \in \mathbb{C}^*$ tal que $g(w_1) = \tilde{w}_1$ e $g(w_2) = \tilde{w}_2$.

Figura 4.10: A aplicação g .

Do Teorema 4.2 temos que T é biholomorfo a \tilde{T} . A recíproca também é válida pois \mathbb{C} é simplesmente conexo, e da análise complexa temos que todo biholomorfismo de \mathbb{C} em \mathbb{C} é uma transformação linear afim. Como podemos sempre tomar nossos reticulados passando pela origem, ela é da forma $z \mapsto az$ para algum $a \in \mathbb{C}^*$.

Consideramos agora $T = \mathbb{C}/\Gamma$ e $\tilde{T} = \mathbb{C}/\tilde{\Gamma}$, onde $\tilde{w}_1 = aw_1$ e $\tilde{w}_2 = aw_2$ e $g(z) = az + b$ com $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, conforme a Figura 4.10. Sejam $\beta(t) := t(w_1 + w_2)$, $0 \leq t \leq 1$ e $\tilde{\beta} = t(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2) + b = a\beta(t) + b$, $0 \leq t \leq 1$.

Então $\wp(\beta(t))$ é uma curva que liga 0 a ∞ e passa por $i = \wp(\beta(\frac{1}{2}))$. Logo, $\wp(\beta(t))'|_{\frac{1}{2}} = y \in \mathbb{C}^*$, sendo que y depende apenas de $\frac{w_1}{w_2}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} [\wp(\beta(t))'|_{\frac{1}{2}}]^2 = y^2 &\Rightarrow \wp'^2(\beta(1/2)) \cdot [\beta'(1/2)]^2 = y^2, \\ &\Rightarrow ci(i-x)(i+1/x) \cdot (w_1 + w_2)^2 = y^2, \\ &\Rightarrow c = \frac{y^2/w_2^2}{(1 + w_1/w_2)^2(x - 1/x - 2i)}. \end{aligned}$$

Assim, a relação entre c e o reticulado Γ para cada $u = \frac{w_1}{w_2}$ fixo é única, pois para cada par $(w_1, w_2), (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$ com $\frac{w_1}{w_2} = \frac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_2} = u$ temos:

$$c|_{(w_1, w_2)} = c|_{(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)} \iff (w_1 + w_2)^2 = (\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)^2 \iff (w_1, w_2) = \pm(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2),$$

que por sua vez define o mesmo reticulado Γ .

Observação 4.3. *Suponhamos que w_1 é tal que $|w_1| = \max\{|w_1|, |w_2|\}$ e tomemos $a = \frac{\bar{w}_1}{|w_1|^2}$, assim $aw_1 = \frac{|w_1|^2}{|w_1|^2} = 1$. Agora, usando a recíproca do resultado que apresentamos no começo desta seção, a menos de um biholomorfismo podemos tomar $w_1 = 1$. Se considerarmos a conjugação em \mathbb{C} , como $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente, a menos*

de anti-biholomorfismo temos $w_2 \in \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \operatorname{Re}\{z\} \geq 0 < \operatorname{Im}\{z\}\}$, conjunto este representado na Figura 4.11.

Logo, a menos de um biholomorfismo ou anti-biholomorfismo, todos os toros estão representados num quadrante de círculo, conforme a Figura 4.11.

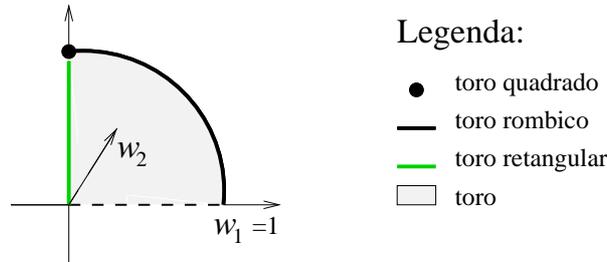


Figura 4.11: Representação dos tipos de toros.

De acordo com a Figura 4.2 o paralelogramo formado por w_1, w_2 determina o toro T . Caso $w_1 \perp w_2$, dizemos que T é *retangular*. Caso $|w_1| = |w_2|$, dizemos que T é *rômbico*. O toro *quadrado* é simultaneamente rômbico e retangular. É claro que, num toro retangular, existem involuções anti-holomorfas cujo conjunto de pontos fixos tem exatamente duas componentes, como podemos apreciar na Figura 4.4.

Num toro rômbico como o que temos na Figura 4.7, há involuções anti-holomorfas cujo conjunto de pontos fixos tem exatamente uma componente. O fato é que valem as recíprocas, como argumentamos a seguir.

Suponha que, dado um toro T , ele apresente uma involução antiholomorfa J cujo conjunto de pontos fixos tem exatamente duas componentes. Esta induz uma involução antiholomorfa em \mathbb{C} que preserva as de equivalência do toro. Em \mathbb{C} , esta involução é um anti-biholomorfismo, e portanto da forma $z \mapsto a\bar{z} + b$, onde a, b são constantes complexas com $a \neq 0$. Da observação acima, sem perda de generalidade temos $J([0]) = [0]$, e podemos considerar $b = 0$. Agora, uma vez que as classes de equivalência são preservadas, temos $|a| = 1$. De fato, temos uma involução. Assim, $z \mapsto a\bar{z}$ tem como conjunto de pontos fixos a reta de \mathbb{R}^2 dada por $r : (1 - a_1)x = a_2y$, que equivale à reta $r : (1 + a - 1)y = a_2x$, onde $a_1 + ia_2 = a$.

Agora temos o seguinte: ao fazermos reflexão de Γ por r para que a imagem coincida com a rotação de Γ pelo número complexo unitário a , é preciso que a cédula fundamental seja um retângulo. De fato, se r intersecta dois lados da cédula de Γ , não passando por nenhum vértice, então deve fazê-lo ortogonalmente, e pontos médios, o que resulta num retângulo.

Sem perda de generalidade, Γ é invariante pela aplicação antípoda. Então, se r é diagonal à cédula, esta deve ser um losango. Além disso, temos $aw_1 = w_2$ e $aw_2 = -w_1$, o que implica $a^2 = -1$. Ou seja, a rotação é de 90° , donde $w_1 \perp w_2$. Neste caso, a cédula é um quadrado, mas isso contradiz a hipótese de duas componentes.

Portanto, T é um toro retangular. Argumentos análogos mostram que, se o toro apresenta uma involução anti-holomorfa cujo conjunto de pontos fixos tem exatamente uma componente, então ele é rômboico.

Capítulo 5

A Função γ

Apresentamos, neste capítulo, um exemplo de função elítica que pode ser obtido da função \wp de Weierstrass Simétrica através de uma transformação de Möbius adequada.

Nosso exemplo é a função γ . Para construí-la, considere a transformação de Möbius dada por $Q(z) = e^{i\theta} \frac{i-z}{i+z}$, onde $\theta \in (0, \pi/2)$ será determinado como função de α . Os principais valores-imagem de $\gamma = Q \circ \wp$ estão descritos na Figura 5.1.

Os pontos de ramificação de γ são as pré-imagens pela \wp de $0, \tan \alpha, \infty$ e $-\cot \alpha$. Seus valores-imagem são, respectivamente, $e^{i\theta}, -e^{-i\theta}, -e^{i\theta}$ e $e^{-i\theta}$.

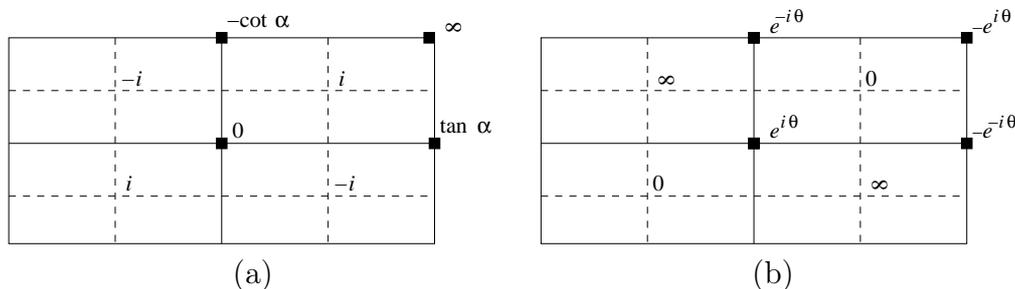


Figura 5.1: a) valores de \wp ; b) valores de γ .

Apresentamos, a seguir, um estudo detalhado da função γ e de sua transformação de Möbius geradora. Neste estudo fazemos uso de propriedades geométricas do toro retangular para determinar os valores esboçados na Figura 5.1(b).

Seguindo procedimento análogo ao explicado no Capítulo 4, podemos também definir γ de modo que:

$$\gamma(0) = e^{i\theta}, \quad \gamma(w_1 + w_2) = -e^{i\theta}, \quad \gamma\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) = 0.$$

Além disso,

$$\gamma\left(\pm \frac{w_1 + w_2}{2}\right) = Q(\wp(\pm \frac{w_1 + w_2}{2})) = Q(i) = 0,$$

e

$$\gamma\left(\pm \frac{w_1 - w_2}{2}\right) = Q(\wp(\pm \frac{w_1 - w_2}{2})) = Q(-i) = \infty.$$

A reflexão no eixo imaginário $I_2(z) = -\bar{z}$ induz uma involução anti-holomorfa de $\hat{\mathbb{C}}$ em $\hat{\mathbb{C}}$ que fixa $\gamma = e^{i\theta}$ e intercambia os valores 0 e ∞ . De fato

$$\begin{aligned} J_2(e^{i\theta}) &= J_2(\gamma(0)) = \gamma(I_2(0)) = \gamma(0) = e^{i\theta}, \\ J_2(0) &= J_2\left(\gamma\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)\right) = \gamma\left(I_2\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)\right) = \gamma\left(-\frac{w_1-w_2}{2}\right), \\ J_2(\infty) &= J_2\left(\gamma\left(\pm \frac{w_1-w_2}{2}\right)\right) = \gamma\left(I_2\left(\pm \frac{w_1-w_2}{2}\right)\right) = \gamma\left(\mp \frac{w_1+w_2}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Logo, a involução induzida J_2 é dada por $\wp \rightarrow 1/\bar{\wp}$. Com isto, observamos que os pontos fixos de J_2 estão sob o círculo unitário S^1 (inclusive os pontos $\gamma(w_1), \gamma(w_2)$).

De fato, se z é um ponto fixo de J_2 , como γ é meromorfa e não constante, se $u \in \gamma^{-1}(z)$

$$J_2(z) = J_2(\gamma(u)) = \gamma(I_2(u)) = \gamma(-\bar{u}) = \gamma(u) = z.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\gamma}(u)} &= \gamma(u) \\ |\bar{\gamma} \cdot \gamma(u)|^2 &= 1 \\ |z \cdot \bar{z}|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} J_2(e^{-i\theta}) &= J_2(\gamma(w_1)) = \frac{1}{\bar{\gamma}(w_1)} = \frac{1}{e^{-i\theta}} = e^{-i\theta} \in S^1, \\ J_2(-e^{-i\theta}) &= J_2(\gamma(w_2)) = \frac{1}{\bar{\gamma}(w_2)} = \frac{1}{-e^{-i\theta}} = -e^{-i\theta} \in S^1. \end{aligned}$$

A rotação de 180° em torno de $\frac{w_1 + w_2}{2}$ é dada por $\mathcal{H}(z) = -z + (w_1 + w_2)$. A sua involução induzida intercambia $e^{i\theta}$ com $e^{-i\theta}$, e fixa 0.

De fato,

$$J_{\mathcal{H}}(e^{i\theta}) = J_{\mathcal{H}}(\gamma(0)) = \gamma(\mathcal{H}(0)) = \gamma(w_1 + w_2) = e^{i\theta},$$

lembre-se que \mathcal{H} intercambia 0 com $w_1 + w_2$ e fixa $\frac{w_1+w_2}{2}$

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{H}}(-e^{i\theta}) &= J_{\mathcal{H}}(\gamma(w_1 + w_2)) = \gamma(\mathcal{H}(w_1 + w_2)) = \gamma(0) = e^{i\theta}, \\ J_{\mathcal{H}}(0) &= J_{\mathcal{H}}\left(\gamma\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)\right) = \gamma\left(\mathcal{H}\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)\right) = \gamma\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Assim, ela corresponde a

$$z \rightarrow -z.$$

Conseqüentemente, $\gamma(w_1) = -\gamma(w_2)$, já que

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{H}}(\gamma(w_1)) &= \gamma(\mathcal{H}(w_1)) = \gamma(w_2), \\ -\gamma(w_1) &= \gamma(w_2). \end{aligned}$$

Aplicando a involução anti-holomorfa $I_3(z) = \bar{z} + w_2$, reflexão na reta que passa por $z = \frac{w_2}{2}$ e é paralela ao eixo real, observamos que a sua induzida J_3 fixa os pontos $\gamma = 0$ e $\gamma = \infty$ e intercambia $e^{i\theta}$ com $\gamma(w_2) = Q(-\cot \alpha)$.

De fato,

$$\begin{aligned} J_3(0) &= J_3(\gamma(\frac{w_1+w_2}{2})) = \gamma(I_3(\frac{w_1+w_2}{2})) \\ &= \gamma(\frac{w_1-w_2}{2} + w_2) \\ &= \gamma(\frac{w_1+w_2}{2}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lembrando se que $(\frac{w_1+3w_2}{2} \in [\frac{w_1-w_2}{2}])$. Assim,

$$\begin{aligned} J_3(\infty) &= J_3(\gamma(\pm \frac{w_1-w_2}{2})) = \gamma(I_3(\pm \frac{w_1-w_2}{2})) \\ &= \gamma(\pm \frac{w_1+w_2}{2} + w_2) \\ &= \gamma(\frac{w_1+3w_2}{2}), \text{ com } (+) \\ &= \gamma(\frac{-w_1-w_2}{2} + w_2) \\ &= \gamma(\frac{-w_1+w_2}{2}) \\ &= \gamma(-\frac{w_1-w_2}{2}), \text{ com } (-) \\ &= \infty, \end{aligned}$$

também

$$\begin{aligned} J_3(e^{i\theta}) &= J_3(\gamma(0)) = \gamma(I_3(0)) \\ &= \gamma(w_2) \\ &= Q(-\cot \alpha), \\ J_3(\gamma(w_2)) &= \gamma(I_3(w_2)) = \gamma(-w_2 + w_2) = \gamma(0) \\ &= \gamma(0) = e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Como $J_3(z) = \bar{z}$, temos $\gamma(w_2) = e^{-i\theta}$ e então $\gamma(w_1) = -e^{-i\theta}$. Assim, obtemos a configuração esboçada na Figura 5.1(b).

Para estabelecermos uma relação entre os ângulos α e θ , observamos que $Q(\tan \alpha) = -e^{-i\theta}$, donde

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \frac{i - \tan \alpha}{i + \tan \alpha} = -e^{-i\theta} &\Leftrightarrow e^{i\theta}(i - \tan \alpha) = -e^{-i\theta}(i + \tan \alpha) \\ &\Leftrightarrow \tan \alpha \cdot (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = i(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ &\Leftrightarrow \tan \alpha = \cot \theta \\ &\Leftrightarrow \alpha = \pi/2 - \theta \\ &\Leftrightarrow \alpha + \theta = \pi/2. \end{aligned}$$

Para determinarmos os valores de outros pontos do toro plano, observe que:

- $\frac{w_2}{2}$ é fixado pela involução I_2 e $\gamma(\frac{w_2}{2}) \in S^1$. De fato,

$$J_2(\gamma(w_2/2)) = \gamma(I_2(w_2/2)) = \gamma(w_2/2),$$

$$\frac{1}{\bar{\gamma}(w_2/2)} = \gamma(w_2/2).$$

- $\frac{w_2}{2}$ é fixado pela involução I_3 e $\gamma(\frac{w_2}{2})$ é real. De fato,

$$J_3(\gamma(w_2/2)) = \gamma(I_3(w_2/2)) = \gamma(w_2/2),$$

$$\bar{\gamma}(w_2/2) = \gamma(w_2/2).$$

Portanto, temos $\gamma(w_2/2) = \pm 1$. Uma vez que $\alpha \in (0, \pi/2)$, então $\theta \in (0, \pi/2)$, pois

$$\alpha + \theta = \pi/2,$$

$$\theta = \pi/2 - \alpha \Rightarrow \theta \in (0, \pi/2),$$

donde $\gamma(w_2/2) = 1$. Esse valor também pode ser confirmado por $Q(-\tan(\pi/4 - \alpha/2)) = 1$, como

$$\tan(\pi/4 - \alpha/2) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + 1},$$

temos

$$e^{i\theta} \cdot \frac{i + \tan(\pi/4 - \alpha/2)}{i - \tan(\pi/4 - \alpha/2)} = i \cdot e^{-i\alpha} \cdot \frac{i + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + 1}}{i - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + 1}} = i \cdot e^{-i\alpha} \cdot \frac{i + e^{i\alpha}}{i - e^{-i\alpha}} = 1.$$

Além disso, considere as involuções anti-holomorfas $I_1(z) = \bar{z}$ (reflexão no eixo real) e $I_4(z) = -\bar{z} + w_1$ (reflexão na reta que passa por $z = \frac{w_1}{2}$ e é, paralela ao eixo imaginário).

Como I_1 induz uma involução antiholomorfa que fixa $e^{i\theta}$ e intercambia 0 com ∞ ,

$$\begin{aligned} J_1(e^{i\theta}) &= J_1(\gamma(0)) = \gamma(I_1(0)) = \gamma(0) = e^{i\theta}, \\ J_1(0) &= J_1(\gamma(\frac{w_1+w_2}{2})) = \gamma(I_1(\frac{w_1+w_2}{2})) = \gamma(\frac{w_1+w_2}{2}) = \infty, \\ J_1(\infty) &= J_1(\gamma(\pm \frac{w_1+w_2}{2})) = \gamma(I_1(\pm \frac{w_1+w_2}{2})) = \gamma(\pm \frac{w_1+w_2}{2}) = 0, \end{aligned}$$

logo, esta é

$$J_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Também I_4 induz uma involução antiholomorfa que fixa os pontos $\gamma = 0$ e $\gamma = \infty$ e intercambia $-e^{i\theta}$ com $e^{-i\theta}$. De fato,

$$\begin{aligned} J_4(0) &= J_4(\gamma(\frac{w_1+w_2}{2})) = \gamma(I_4(\frac{w_1+w_2}{2})) \\ &= \gamma(-(\frac{w_1-w_2}{2}) + w_1) \\ &= \gamma(\frac{-w_1+w_2}{2} + w_1) \\ &= \gamma(\frac{w_1+w_2}{2}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

como $\frac{3w_1+w_2}{2} \in [\frac{w_1-w_2}{2}]$ temos

$$\begin{aligned} J_4(\infty) &= J_3(\gamma(\pm \frac{w_1-w_2}{2})) = \gamma(I_4(\pm \frac{w_1-w_2}{2})) \\ &= \gamma(-(\pm \frac{w_1+w_2}{2}) + w_1) \\ &= \gamma(\mp \frac{w_1+w_2}{2} + w_1) \\ &= \gamma(\frac{3w_1+w_2}{2}), \text{ com } (+) \\ &= \gamma(\frac{w_1-w_2}{2}), \text{ com } (-) \\ &= \infty, \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} J_4(-e^{i\theta}) &= J_4(\gamma(w_1 + w_2)) = \gamma(I_4(w_1 + w_2)) \\ &= \gamma(-(w_1 + w_2) + w_1) \\ &= \gamma(w_2) \\ &= e^{-i\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_4(e^{-i\theta}) &= J_4(\gamma(w_2)) = \gamma(I_4(w_2)) \\ &= \gamma(-\bar{w}_2 + w_1) \\ &= \gamma(w_1 + w_2) \\ &= -e^{i\theta}, \end{aligned}$$

logo, esta é

$$J_4(z) = -\bar{z}.$$

Disto podemos inferir que:

- $\frac{w_1}{2}$ é fixado por I_1 e $\gamma(\frac{w_1}{2}) \in S^1$. De fato,

$$J_1(\gamma(w_1/2)) = \gamma(I_1(w_1/2)) = \gamma(w_1/2),$$

$$\frac{1}{\bar{\gamma}(w_1/2)} = \gamma(w_1/2).$$

- $\frac{w_1}{2}$ é fixado por I_4 e $\gamma(\frac{w_1}{2})$ é imaginário puro. De fato

$$J_4(\gamma(w_1/2)) = \gamma(I_4(w_1/2)) = \gamma(w_1/2),$$

$$-\bar{\gamma}(w_1/2) = \gamma(w_1/2),$$

logo

$$\frac{\bar{\gamma}(w_1/2) + \gamma(w_1/2)}{2} = 0.$$

Portanto, temos $\gamma(\frac{w_1}{2}) = \pm i$. Uma vez que $\alpha \in (0, \pi/2)$, então $\theta \in (0, \pi/2)$, donde $\gamma(w_1/2) = i$. Esse valor também pode ser confirmado por

$$\gamma(w_1/2) = Q(\wp(w_1/2)) = Q(\tan \alpha/2) = i,$$

como

$$\tan(\alpha/2) = \frac{\text{sen } \alpha}{1 + \cos \alpha},$$

temos

$$e^{i\theta} \cdot \frac{i - \tan(\alpha/2)}{i + \tan(\alpha/2)} = i \cdot e^{-i\alpha} \cdot \frac{i - \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha + 1}}{i + \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha + 1}} = i \cdot e^{-i\alpha} \cdot \frac{1 + e^{i\alpha}}{1 + e^{-i\alpha}} = i.$$

Devido à relação de equivalência que define o toro, é possível “transladá-lo”, de forma que seus pontos de ramo estejam no interior do retângulo, conforme a Figura 5.2.

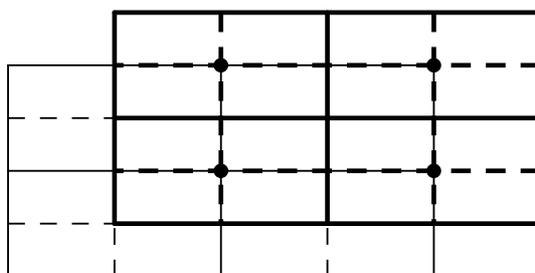


Figura 5.2: Diferentes maneiras de se representar o toro.

Dessa forma, é possível representar os valores da função $\gamma : T \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ sob o toro conforme a Figura 5.3, descrita abaixo.

Vamos agora determinar uma equação algébrica para este toro. Para os pontos de ramo da função γ , precisamente $\gamma^{-1}(\{\pm e^{\pm i\theta}\})$, temos que expressão $\gamma^2 + \gamma^{-2} - e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}$

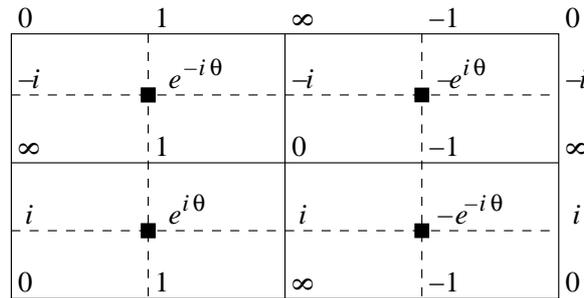


Figura 5.3: Valores da função γ .

se anula. Considerando-se também os pólos e zeros de γ, γ' e γ'/γ , descritos na Figura 5.4, obtemos a equação

$$(\gamma'/\gamma)^2 = c_0(\gamma^2 + \gamma^{-2} - 2 \cos(2\theta)), \quad c_0 \in \mathbb{C}^*.$$

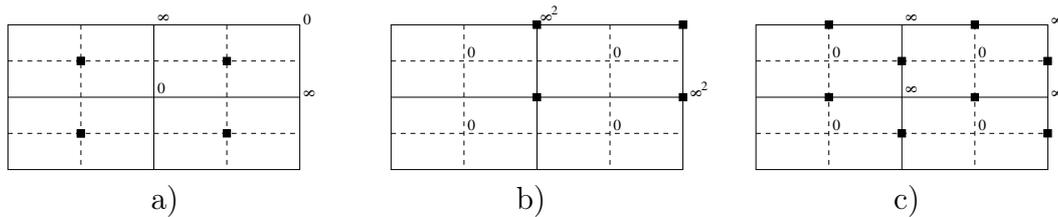


Figura 5.4: Pólos e zeros de a) γ ; b) γ' e c) γ'/γ .

Observação 5.1. No caso da Figura 5.4, observamos que os domínios usuais de $\gamma; \gamma'$ e γ'/γ foram “transladados” a causa do argumento mencionado na Figura 5.2, assim podemos ver que os pontos $\frac{w_1+w_2}{2}$ e $\frac{3w_1+w_2}{2}$ são pontos de ramo de γ' a causa do que os zeros e pólos de γ' e $\frac{1}{\wp} + \wp$ coincidem logo $\gamma' = c_1(\frac{1}{\wp} + \wp)$, onde c_1 é uma constante, daqui que os pontos de ramo também coincidem, como o podemos observar na seguinte Figura 5.5.

Para uma curva $\delta(t)$ no toro que parametriza o eixo real do plano complexo quando é aplicada a γ , ou seja, $\gamma(\delta(t)) = t \in \mathbb{R}$, temos:

$$\gamma'(\delta(t)) \cdot \delta'(t) = \frac{d}{dt}(\gamma(\delta(t))) = \frac{d}{dt}(t) = 1.$$

Portanto, $\gamma'(\delta(t))^2 \delta'(t)^2 = 1$.

Por outro lado, como δ é uma parametrização do eixo real do toro, segue-se que $\delta'(t) = h(t) \in \mathbb{R}$. Deste modo, $\gamma'(\delta(t))^2 = \frac{1}{h(t)^2} \in \mathbb{R}_+$, donde $\gamma'|_{\delta} \in \mathbb{R}$.

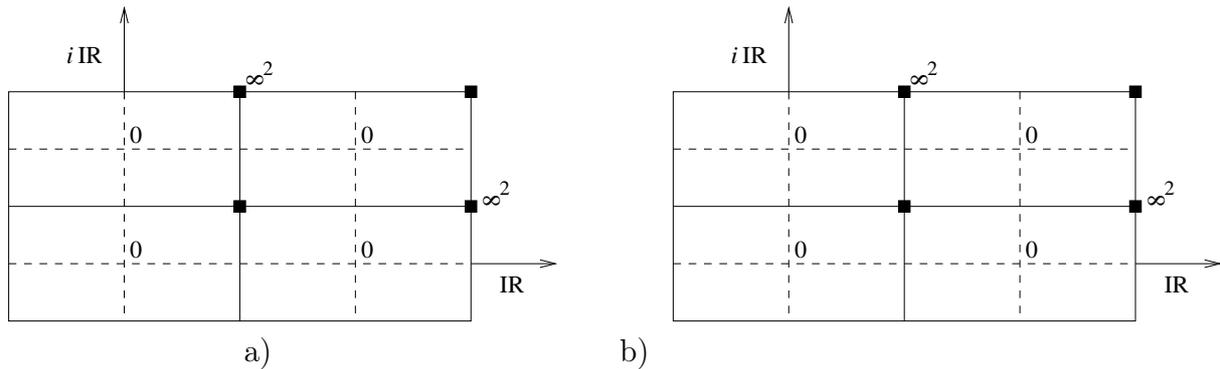


Figura 5.5: Pólos e zeros de a) γ' e b) $\frac{1}{\wp} + \wp$

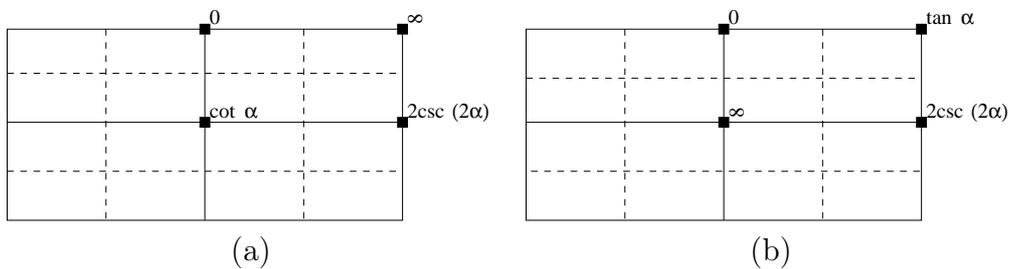


Figura 5.6: Pólos e zeros de a) $\cot \alpha + \wp$ e b) $\tan \alpha + 1/\wp$.

Assim, $(\frac{\gamma'}{\gamma})^2|_{\delta} \in \mathbb{R}_+$ e $(\gamma^2 + \gamma^{-2} - 2 \cos 2\theta)|_{\delta} \in \mathbb{R}_+$, donde temos que c_0 é real positiva. Assim, c_0 determina apenas uma dilatação do reticulado, e fixamos $c_0 = 1$. Logo, uma equação algébrica para T é dada por

$$\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 = \gamma^2 + \gamma^{-2} - 2 \cos 2\theta.$$

Para finalizarmos este capítulo, apresentamos outra relação muito usada entre as funções elípticas \wp e γ , mas que não pode ser obtida pela transformação de Möbius Q , pois agora transladamos o reticulado. Para obter a nova relação, deduzimos da Figura 5.6 os pólos e zeros de

$$\wp - \frac{1}{\wp} + \tan \theta - \cot \theta = \wp - \frac{1}{\wp} + \cot \alpha - \tan \alpha = (\wp + \cot \alpha) - \left(\frac{1}{\wp} + \tan \alpha\right).$$

Logo, é imediato observar que os pólos e zeros de $(\wp - 1/\wp + \tan \theta - \cot \theta)^{-1}$ são os mesmos (e com a mesma ordem) de γ^2 (veja a Figura 5.3). Portanto, estas equações coincidem a menos de uma constante de proporcionalidade, isto é,

$$\gamma^2 = \frac{c_1}{\wp - 1/\wp + \tan \theta - \cot \theta}, \quad c_1 \in \mathbb{C}^*.$$

Mas para $\wp = \tan \frac{\alpha}{2}$ a função γ assume o valor i , e como $\tan \frac{\alpha}{2} - \cot \frac{\alpha}{2} = -2 \cot \alpha$ temos

$$\gamma^2(w_1/2) = i^2 = -1 = \frac{c_1}{\wp - \frac{1}{\wp} + \tan \theta - \cot \theta},$$

$$-1 = \frac{c_1}{\tan \alpha/2 - \cot \alpha/2 + \tan \theta - \cot \theta},$$

$$\begin{aligned} c_1 &= -(\tan \alpha/2 - \cot \alpha/2) - \tan \theta + \cot \theta \\ &= -(-2 \cot \alpha) - \tan \theta + \cot \theta \\ &= -2 \cot \alpha - \tan \theta + \cot \theta \\ &= -2 \tan \theta - \tan \theta + \cot \theta \\ &= \tan \theta + \cot \theta \\ &= \cot \alpha + \tan \alpha, \end{aligned}$$

donde

$$\gamma^2 = \frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{\wp - 1/\wp + \tan \theta - \cot \theta}.$$

Capítulo 6

Aplicações

6.1 Resultados clássicos

Neste capítulo damos uma aplicação da teoria de funções elíticas, desenvolvida por Kar-cher, na implementação de seu *método de construção reversa*; (re)criando um exemplo de superfície mínima. Começamos por introduzir alguns resultados básicos sobre a teoria de superfícies mínimas. Para maiores detalhes vide [10], [14], [15] [20], ou [21].

Teorema 6.1. *Seja $X : R \rightarrow \mathbb{E}$ uma imersão isométrica completa de uma superfície de Riemann R sobre um espaço \mathbb{E} “flat”, completo e tridimensional. Se X é mínima e sua curvatura Gaussiana total $\int_R K dA$ é finita, então R é biholomorfa a uma superfície de Riemann compacta \bar{R} perfurada em um número finito de pontos $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$.*

Demonstração. Vide [9]. □

Teorema 6.2. (Representação de Weierstraß) *Seja R uma superfície de Riemann, g e dh função e 1-forma meromorfas em R , tais que os zeros de dh coincidem com os zeros e pólos de g . Suponhamos que $X : R \rightarrow \mathbb{E}$, dada por*

$$X(p) = \int^p (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} - g, \frac{i}{g} + ig, 2 \right) dh,$$

esteja bem definida. Então X é uma imersão mínima conforme. Reciprocamente, toda imersão mínima conforme $X : R \rightarrow \mathbb{E}$ pode ser expressa como acima para alguma função g e 1-forma dh meromorfas.

Demonstração. Vide [9]. □

Definição 6.1. *O par (g, dh) são os dados de Weierstraß e $\phi_{1,2,3}$ as formas de Weierstraß em R da imersão mínima $X : R \rightarrow X(R) \subset \mathbb{E}$.*

Teorema 6.3. *Nas hipóteses dos Teoremas 6.1 e 6.2, os dados de Weierstraß (g, dh) se estendem meromórficamente sobre \bar{R} .*

Definição 6.2. Um fim de R é a imagem de uma vizinhança perfurada V_p de um ponto $p \in \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ tal que $(\{p_1, p_2, \dots, p_s\} \setminus p) \cap \bar{V}_p = \emptyset$. O fim é mergulhado se sua imagem é mergulhada para uma vizinhança de p suficientemente pequena.

Teorema 6.4. (Fórmula de Jorge-Meeks) *Seja $X : R \rightarrow \mathbb{E}$ uma superfície mínima regular completa de curvatura total finita $\int_R K dA$. Se os fins de R são mergulhados, então*

$$\deg(g) = k + s - 1,$$

onde k é o gênero de $\bar{R} = R \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ e s é o número de fins.

Demonstração. Vide [6]. □

Exemplo 6.1. *O catenóide é um exemplo de superfície mínima, cujos dados de Weierstrass são $g = z$, $dh = dz/z$, e a superfície de Riemann compacta é $\hat{\mathbb{C}}$. O catenóide possui dois fins, nos pontos $p_0 = 0$ e $p_1 = \infty$.*

Um cálculo simples mostra que a imersão mínima do catenóide é dada por

$$X(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + x, \frac{y}{x^2 + y^2} + y, 2 \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \right).$$

De fato,

$$\begin{aligned} 2X(p) &= \operatorname{Re} \int^p \left(\frac{1}{z} - z, \frac{i}{z} + iz, 2 \right) \frac{dz}{z} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{-1}{z} - z, \frac{-i}{z} + iz, 2 \log z \right) \right\} \\ &= \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} - x, \frac{-y}{x^2 + y^2} - y, 2 \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \right). \end{aligned}$$

A função g é a projeção estereográfica da aplicação normal de Gauß $N : R \rightarrow S^2$ da imersão mínima X , isto é,

$$N = \frac{1}{|g|^2 + 1} (2 \operatorname{Re}\{g\}, 2 \operatorname{Im}\{g\}, |g|^2 - 1).$$

Ela é um recobrimento (ramificado) de $\hat{\mathbb{C}}$. Além disso, $\int_R K dA = -4\pi \deg(g)$.

O elemento de reta ds de $X : R \rightarrow \mathbb{E}$ é dado por

$$ds = \frac{1}{2} \left(|g| + \frac{1}{|g|} \right) |dh|,$$

e a curvatura Gaussiana é dada pela seguinte fórmula:

$$K = - \left(\frac{2}{|g| + 1/|g|} \right)^4 \left| \frac{dg/g}{dh} \right|^2.$$

Teorema 6.5. *Se σ é uma curva em $X(R)$ então vale:*

i) σ é assintótica se, e somente se, $\frac{dg}{g}(\sigma') \cdot dh(\sigma') \in i\mathbb{R}$;

ii) σ é principal se, e somente se, $\frac{dg}{g}(\sigma') \cdot dh(\sigma') \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Vide [15]. □

Observação 6.1. *Se uma curva é invariante por isometria em uma superfície, então esta curva é uma geodésica. Agora, suponha que em uma imersão mínima $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{C}$, com dados de Weierstraß (g, dh) tenhamos uma curva $\alpha : I \rightarrow \Omega$ com $g \circ \alpha$ meridiano ou equador de $\hat{\mathbb{C}}$, e $dh \circ \alpha$ meridiano principal. Pelo Princípio de Reflexão de Schwarz em \mathbb{C} , temos que $\{\alpha\} = \alpha(I)$ é arco de circunferência, ou segmento de reta. Assim, reflexão por $\{\alpha\}$ mantém invariante a Primeira Forma Fundamental, donde é isometria de $S = F(\Omega)$, e portanto α é geodésica. Além disso,*

$$\frac{dg}{g} \cdot dh \in \begin{cases} i\mathbb{R}, \\ \mathbb{R}. \end{cases}$$

Finalmente, por um resultado clássico da Teoria de Superfícies Mínimas, segue-se que:

- (a) Nas condições do Teorema 6.5(i), temos α geodésica, se e somente se, α é reta;
- (b) Nas condições do Teorema 6.5(ii), temos α geodésica, se e somente se, α é plana.

O teorema 6.5 não exige que α seja geodésica.

Teorema 6.6. *Seja σ uma curva analítica em R tal que $g(\sigma)$ está contida em um meridiano $e^{i\theta}\mathbb{R}$ ou no equador S^1 , e $dh(\sigma') \subset \mathbb{R}$ ou $dh(\sigma') \subset i\mathbb{R}$. Então σ é uma geodésica de R e uma linha de simetria.*

Demonstração. Vide [9]. □

Teorema 6.7. (Princípio da Reflexão de Schwarz) *Toda linha reta (respectivamente, geodésica plana) numa superfície mínima é uma linha de simetria rotacional (respectivamente, simetria especular) da superfície.*

Demonstração. Vide [15]. □

6.2 Exemplo de superfície mínima

Considere a superfície da Figura 6.1, que chamamos *campo de cateóides*. Trata-se de uma família de superfícies mínimas duplamente periódicas, cujos membros denotamos por M .

Apresentamos a seguir a construção de M . Para a obtenção desta superfície, utilizamos o *método da construção reversa* desenvolvido por Hermann Karcher na década de 80 (vide [1]). Seu método consiste dos seguintes passos:

1. Esboço da Superfície Mínima M ;
2. Compactificação \bar{M} de M ;

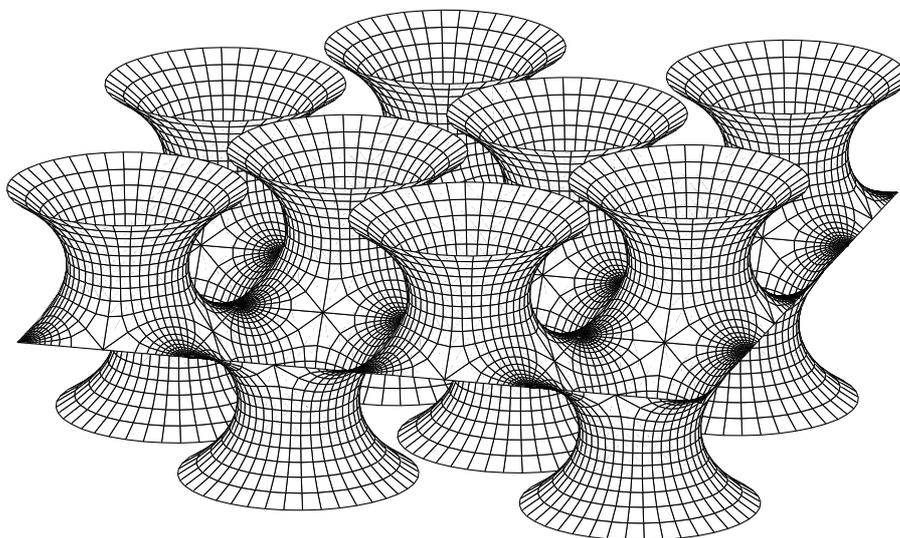


Figura 6.1: Um campo de catenóides.

3. Hipóteses de Simetria;
4. Equação Algébrica de \overline{M} ;
5. Obtenção dos Dados de Weierstraß de \overline{M} ;
6. Verificação das Involuções de \overline{M} e das Simetrias das Hipóteses;
7. Análise dos Períodos;
8. Verificação do Mergulho da Peça Fundamental.

Consideramos uma superfície topológica que admita uma estrutura Riemanniana e seja isometricamente imersa em \mathbb{R}^3 com as seguintes propriedades: 1) a superfície imersa é mínima; 2) ela é gerada pela rotação em torno de um segmento de reta junto com um grupo de translação horizontal, ambos aplicados sobre uma peça fundamental P , onde P é uma superfície com bordo e um fim catenoidal; 3) A projeção de ∂P ortogonalmente sobre $x_3 = 0$ consiste de um quadrado Q conforme a Figura 6.2(a).

Consideramos os eixos Ox_1 e Ox_2 conforme a Figura 6.2(b) e definimos $x_3 = x_1 \wedge x_2$. Podemos interpretar P como sendo a metade de um catenoide apoiado sobre um quadrado. Observa-se que, para a superfície quocientada pelo seu grupo de translação, o seu topo catenoidal e a sua base catenoidal não se encontram no mesmo eixo. Esta superfície duplamente periódica possui auto-intersecções, mas elas ocorrem somente nos fins catenoidais.

Considerando o quociente de M pelo seu grupo de translações, seguido da compacti-

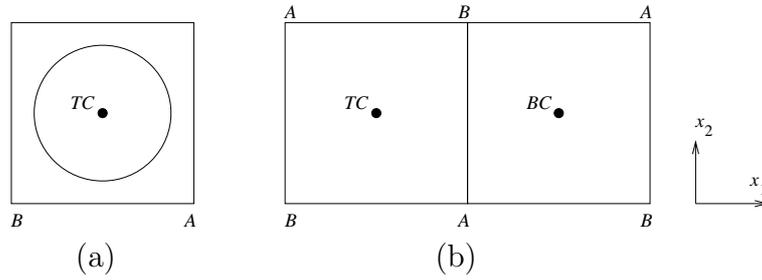


Figura 6.2: a) o quadrado Q ; b) a superfície compactificada \overline{M} .

ficação dos seus fins catenoidais (TC - catenoide topo e BC - catenoide base), obtemos uma superfície topológica compacta, que denotamos \overline{M} (vide Figura 6.2(b)). Desta figura vemos facilmente que o gênero de \overline{M} é 1, ou seja, \overline{M} é um toro.

Até aqui, completamos os itens 1 e 2 do método de Karcher. Para o item 3, vamos assumir que os trechos $A \rightarrow B$ formam as retas da superfície, enquanto que os caminhos $B \rightarrow TC$ e $A \rightarrow BC$ estão contidos em planos paralelos ao plano $x_1 = x_2$, e os caminhos $B \rightarrow BC$ e $A \rightarrow TC$ estão em planos paralelos ao $x_1 = -x_2$.

Uma vez que as rotações de 180° em torno dos trechos $A \leftrightarrow B$ fixam cada qual apenas uma componente conexa de \overline{M} , este toro é rômbo. Note que o correspondente reticulado Γ de \overline{M} não é paralelo aos eixos $Ox_{1,2}$, mas sim rotacionado de 45° em relação a estes eixos. Além disso, as reflexões nos caminhos $B \rightarrow TC \rightarrow B$ e $A \rightarrow BC \rightarrow A$ fixam estas duas componentes conexas, donde temos que o toro também é retangular. Consequentemente, \overline{M} é um toro quadrado.

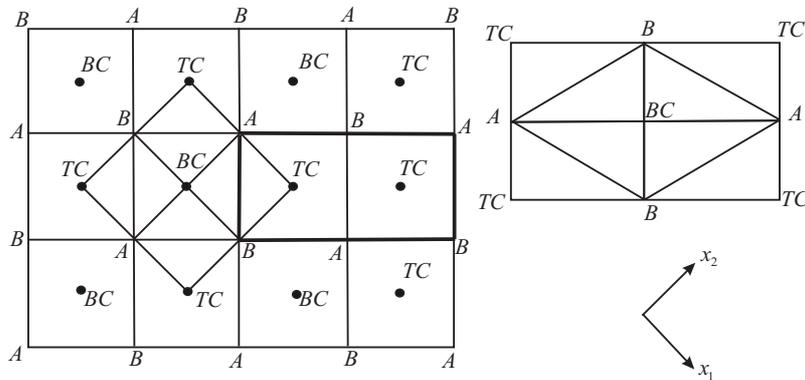


Figura 6.3: Superfície compactificada \overline{M} .

Argumentos analíticos também irão mostrar que trata-se de um toro quadrado.

Do Capítulo 5 vimos que existe uma função γ definida no toro, que assume os valores descritos na Figura 6.4(a). Seus pontos de ramo são indicados por \blacksquare , e $\theta \in (0, \pi/2)$. As retas pontilhadas cobrem $S^1 \subset \mathbb{C}$. Observe que o toro é quadrado se, e somente se,

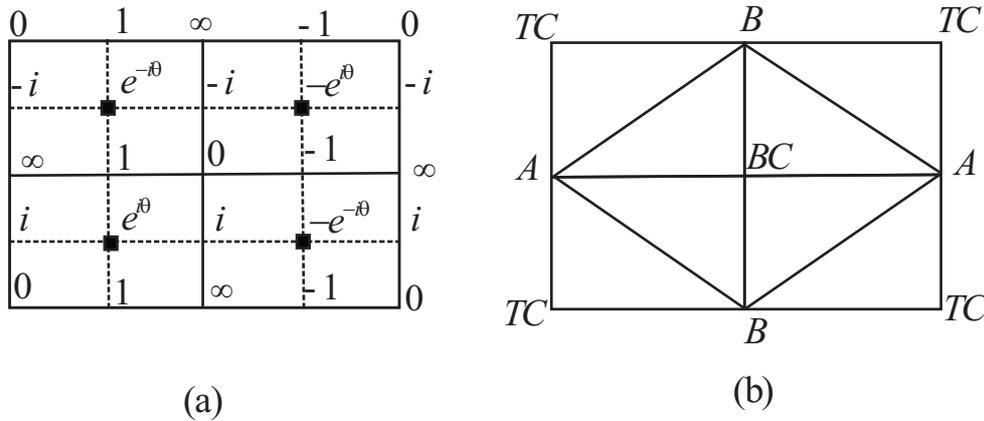


Figura 6.4: a) Valores de γ ; b) Correspondência de pontos de M no toro.

$\theta = \pi/4$. Uma equação algébrica para este toro é dada por

$$\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 = c_0 (\gamma^2 + \gamma^{-2} - 2 \cos 2\theta), \quad c_0 > 0.$$

Tomando uma curva $\beta(t)$ no toro que parametriza a diagonal do plano complexo quando aplicada a γ , ou seja, $\gamma(\beta(t)) = e^{i\pi/4}t, t^{-1} \in (-1, 1)$, temos

$$\gamma'(\beta(t)) \cdot \beta'(t) = \frac{d}{dt}(\gamma(\beta(t))) = \frac{d}{dt}(e^{i\pi/4}t) = e^{i\pi/4}.$$

Portanto, $\gamma'(\beta(t))^2 \beta'(t)^2 = i$.

Observe a próxima figura.

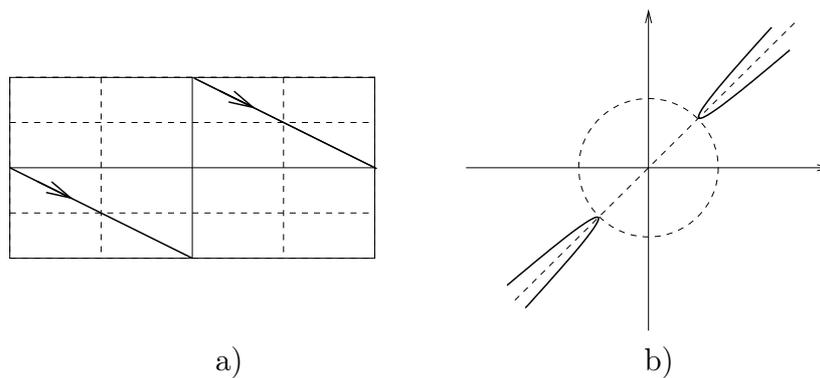


Figura 6.5: a) Curva β sobre o toro; b) imagem de β por γ .

Como $\beta(t)$ é uma parametrização de uma diagonal do toro, temos que $\beta'(t) = f(t)e^{-i\pi/4}$,

onde $f(t)$ é uma função real. Deste modo:

$$\begin{aligned} \gamma'^2(\beta(t)) \cdot \beta'^2(t) = i &\Leftrightarrow \gamma'^2(\beta(t)) \cdot f^2(t) \cdot (-i) = i \\ &\Leftrightarrow \gamma'^2(\beta(t)) = \frac{-1}{f^2(t)} \in \mathbb{R}_- \\ &\Leftrightarrow \gamma'(\beta(t)) \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim, $(\frac{\gamma'}{\gamma})^2|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}_+$. De fato

$$\begin{aligned} \gamma'(\beta(t)) \in i\mathbb{R} &\Rightarrow \gamma'^2(\beta(t)) \in \mathbb{R}_-, \\ \gamma(\beta(t)) = e^{i\pi/4}t &\Rightarrow \gamma^2(\beta(t)) = it^2, \end{aligned}$$

logo, $(\frac{\gamma'}{\gamma})^2|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}_+$. Mas $(\gamma^2 + \gamma^{-2} - 2\cos 2\theta)|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}_+$ se, e somente se, $\theta = \pi/4$. Dessa forma, o toro é quadrado.

Até aqui, completamos os itens 3 e 4 do método de Karcher. Vamos agora partir para o item 5, que é a obtenção dos dados de Weierstraß de \bar{M} . Como a aplicação g é a projeção estereográfica da aplicação de Gauß em M , observando a Figura 6.1 vemos que M possui vetores normais unitários verticais em A, B, TC e BC . Se fixarmos $g(\{BC, TC\}) = 0$ temos $g(\{A, B\}) = \infty$. Como o gênero de \bar{M} é 1 e o número de fins do quociente de M pelo seu grupo de translação é 2, pela fórmula de Jorge-Meeks temos

$$\deg(g) = k + s - 1 = 1 + 2 - 1 = 2,$$

e estes são os únicos pólos e zeros da g , todos simples.

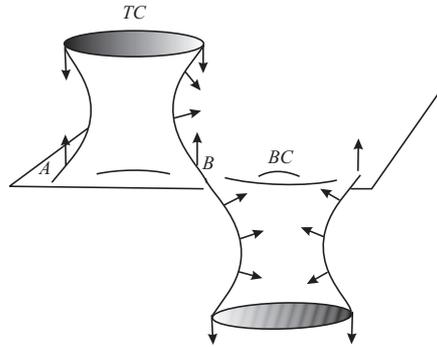


Figura 6.6: Vetores normais unitários.

Como g e γ possuem exatamente os mesmos pólos e zeros, então $g = c_1\gamma$ com $c_1 \in \mathbb{C}^*$.

No caminho $TC \rightarrow B$ o vetor normal é paralelo ao no plano $x_1 = x_2$, logo $g(\{TC \rightarrow B\}) \in e^{i\pi/4}\mathbb{R}_+$, enquanto que γ é real positiva neste caminho. Assim, uma equação algébrica para g é dada por

$$g = c e^{i\pi/4} \gamma, \quad c > 0.$$

Para determinarmos uma equação da diferencial dh observamos que, do Teorema 6.2, se M é a imersão mínima completa de $\overline{M} \setminus \{BC, TC\}$, então todos os zeros e pólos de dh são determinados pelos pólos e zeros da g dependendo dos pontos regulares e fins da M . Com isso, observamos que $dh(\{A, B\}) = 0$ e $dh(\{BC, TC\}) = \infty$. Como

$$-\chi(\overline{M}) = \deg(dh) = \text{no. zeros} - \text{no. pólos},$$

a análise está concluída. Agora, $d\gamma/\gamma'$ representa uma forma holomorfa no toro. Então, da Figura 6.7 obtemos

$$dh = c_2 \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{\gamma'}, \quad c_2 \in \mathbb{C}^*.$$

Observamos que, como dh é uma forma e sendo $d\gamma/\gamma'$ uma forma holomorfa ela não possui zeros nem pólos a equação anterior esta bem definida.

Agora para escolha de c_2 observemos que queremos que a imersão mínima de $\beta(t)$ em \mathbb{R}^3 seja uma reta horizontal, pois elas representam as retas onde a terceira coordenada da imersão é zero. Deste modo, devemos ter $Re \int_{\beta(t)} dh = 0$, ou seja, $dh|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}$. Assim, escolhemos a constante de proporção igual a 1, pois qualquer outro real só reescalona a superfície, com ou sem inversão pela origem. Logo,

$$dh = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{\gamma'}.$$

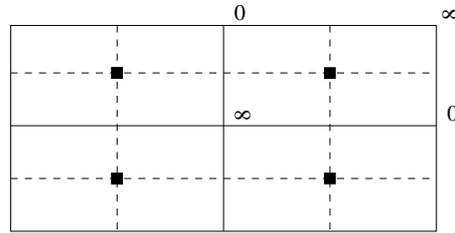


Figura 6.7: Zeros e pólos de $1/\gamma$ e dh .

De posse destas informações, definimos M como a imersão mínima completa em \mathbb{R}^3 de $\overline{M} \setminus \gamma^{-1}(\{0\})$, sendo que a equação algébrica de \overline{M} é dada por $(\gamma'/\gamma)^2 = \gamma^2 + 1/\gamma^2$, e os dados de Weierstraß da superfície estão definidos por $g = c e^{i\pi/4} \gamma$, $c > 0$, e $dh = \frac{d\gamma}{\gamma\gamma'}$.

Estamos agora no item 6 do método de Karcher, a *verificação das hipóteses de simetria*. Para a curva $\beta(t)$ vimos que $dh|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}$ e $g|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}$. Do Teorema 6.6, temos que β é uma geodésica e uma linha de simetria. Do Teorema 6.5, a imersão de β representa uma reta na superfície, pois $\frac{dg}{g} dh|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}$.

De fato, $\gamma(\beta(t)) = e^{i\pi/4}t$, $t^{-1} \in (-1, 1)$, como $g = c e^{i\pi/4} \gamma$, $c > 0$ e $dh = \frac{d\gamma}{\gamma\gamma'}$, mas $dh|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}$

$$g(\beta(t)) = c e^{i\pi/4} \gamma(\beta(t)) = c e^{i\pi/4} e^{i\pi/4} t,$$

$$g(\beta(t)) = ce^{i\pi/2}t = cit,$$

assim, $dg = ci$

$$dh|_{\beta(t)} = \frac{1}{e^{i\pi/4}t} \cdot \frac{e^{i\pi/4}dt}{\gamma'(\beta(t))} \in i\mathbb{R},$$

$$\frac{dg}{g}dh|_{\beta(t)} = \frac{ci}{cit} \cdot \frac{dt}{t(\gamma'(\beta(t)))},$$

portanto $\frac{dg}{g}dh|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}$.

Para o caminho $A \rightarrow TC$ tomemos $\rho(t) = it, t \in \mathbb{R}$. Se verifica que $\gamma'|_{\rho(t)} \in \mathbb{R}$ pois:

$$\gamma(\rho(t)) = it, t \in \mathbb{R},$$

$$\gamma'(\rho(t)) \cdot \rho'(t) = \frac{d}{dt}(\gamma(\rho(t))) = i,$$

portanto $\gamma'(\rho(t))^2 \cdot \rho'(t)^2 = -1$, por outro lado, como ρ é uma parametrização do eixo imaginário do toro, temos

$$\rho'(t) = s(t) \in i\mathbb{R} \Rightarrow s^2(t) \in \mathbb{R}_-,$$

assim $\gamma'(\rho(t))^2 = \frac{-1}{s^2(t)} \in \mathbb{R}_+$, logo $\gamma'(\rho(t)) \in \mathbb{R}$.

Além disso, $dh|_{\rho(t)} \in \mathbb{R}$ e $g|_{\rho(t)} = ice^{i\pi/4}t$. De fato,

$$dh|_{\rho(t)} = \frac{d\gamma}{\gamma\gamma'} = \frac{i}{it} \cdot \frac{1}{\gamma'(\rho(t))} \in \mathbb{R},$$

e

$$g = ce^{i\pi/4}\gamma, \quad c > 0,$$

$$g(\rho(t)) = ce^{i\pi/4}\gamma(\rho(t)) = ice^{i\pi/4}t, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde temos um meridiano. Assim, ρ é uma geodésica e linha de simetria.

Como

$$g(\rho(t)) = ce^{i\pi/4}it, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$dg = ce^{i\pi/4}i,$$

logo

$$\frac{dg}{g}dh|_{\rho(t)} = \frac{ce^{i\pi/4}i}{ce^{i\pi/4}it}dh|_{\rho(t)} = \frac{1}{t}dh|_{\rho(t)} \in \mathbb{R},$$

daqui a imersão é uma curva plana (i.e uma geodésica de Reflexão).

Por argumentos análogos pode-se provar que todas as demais simetrias se verificam.

Fazemos agora a análise para o caminho $A \rightarrow BC$ tomamos $\rho(t) = t \in \mathbb{R}$, se verifica que $\gamma'|_{\rho(t)} \in \mathbb{R}$. De fato

$$\begin{aligned}\gamma(\rho(t)) &= t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \gamma'(\rho(t))\rho'(t) &= \frac{1}{dt}(\gamma(\rho(t))) = 1,\end{aligned}$$

Portanto $\gamma'(\rho(t))^2\rho'(t)^2 = 1$.

Por outro lado, como ρ é uma parametrização do eixo real do toro, segue que $\rho'(t) = s(t) \in \mathbb{R}$. Deste modo

$$\gamma'(\rho(t))^2 = \frac{1}{s(t)^2} \in \mathbb{R}_+,$$

donde $\gamma'|_{\rho(t)} \in \mathbb{R}$. Além disso $dh|_{\rho(t)} \in \mathbb{R}$, já que

$$dh|_{\rho(t)} = \frac{d\gamma}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\gamma'(\rho(t))} \in \mathbb{R},$$

e $g|_{\rho(t)} = ce^{i\pi/4}\gamma(\rho(t)) = ce^{i\pi/4}t$, donde temos um meridiano.

Assim, ρ é uma geodésica e linha de simetria. Como

$$g(\rho(t)) = ce^{i\pi/4}t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$dg = ce^{i\pi/4},$$

$$\frac{dg}{g}dh|_{\rho(t)} = \frac{ce^{i\pi/4}}{ce^{i\pi/4}t}dh|_{\rho(t)} \in \mathbb{R},$$

a imersão é uma curva plana (i.e uma geodésica de reflexão).

Para toda curva fechada em $\overline{M} \setminus \{BC, TC\}$, analisemos o vetor período $Re \oint \phi_{1,2,3}$, item 7 do método de Karcher.

Tomando uma curva fechada simples em $\overline{M} \setminus \{BC, TC\}$ em torno de TC , esta é homotópica a uma curva simétrica em relação aos trechos $A \rightarrow TC$ e $B \rightarrow TC$. Portanto, deve ser ortogonal a ambos os planos que contêm estas curvas. Como estes planos são perpendiculares, temos que $Re \oint \phi_{1,2,3} = 0$ sobre esta curva. De forma análoga é possível mostrar que $Re \oint \phi_{1,2,3} = 0$ sobre curvas fechadas simples em $\overline{M} \setminus \{BC, TC\}$ em torno de BC . Para isto observamos a figura 6.8

Considere a curva σ homotópica a $B \rightarrow TC \rightarrow B$, com desvio em TC , descrita na Figura 6.9. Observe que o trecho $B \rightarrow A$ é simétrico pela geodésica planar $BC \rightarrow TC$, donde $Re \int_{B \rightarrow A} \phi_{1,3} = 0$. Por outro lado, sendo que $g = ce^{i\pi/4}\gamma$, $dh = \frac{d\gamma}{\gamma\gamma'}$ e $\gamma'^2 = \gamma^4 + 1$, temos

$$Re \int_{B \rightarrow A} \phi_2 = 2Re \int_1^\infty i(g^{-1} + g)dh|_{\gamma(t)=te^{-i\frac{\pi}{4}}} = \pm 2 \int_1^\infty \frac{(ct + (ct)^{-1})dt}{t(t^4 - 1)^{1/2}} \neq 0,$$

o que nos dá um período na direção de Ox_2 .

Consideremos agora a curva $\tilde{\sigma}$ homotópica a $B \rightarrow BC \rightarrow B$, com desvio em BC , descrita na Figura 6.10, da mesma forma temos que o trecho $A \rightarrow B$ é simétrico pela

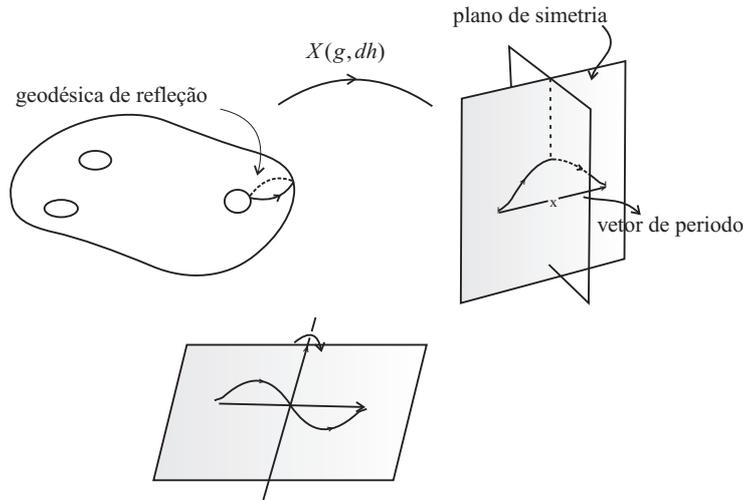


Figura 6.8: Planos de Simetria.

geodésica planar $TC \rightarrow BC$, donde $Re \int_{A \rightarrow B} \phi_{2,3} = 0$. Assim também temos um período na direção Ox_1 .

Como provamos anteriormente que $A \rightarrow TC$ é uma geodésica de reflexão, temos $|Re \int_{A \rightarrow B} \phi_1| = |Re \int_{B \rightarrow A} \phi_2| = \lambda$. Portanto, $|Re \int_{B \rightarrow TC \rightarrow B} \phi_{1,2}| = \lambda\sqrt{2} \neq 0$. Por causa das simetrias que provamos existir, também temos $|Re \int_{B \rightarrow BC \rightarrow B} \phi_{1,2}| = \lambda\sqrt{2}$.

Dessa forma, a superfície é duplamente periódica.

Finalmente, mostremos que a peça fundamental da imersão é mergulhada, último item do método de Karcher.

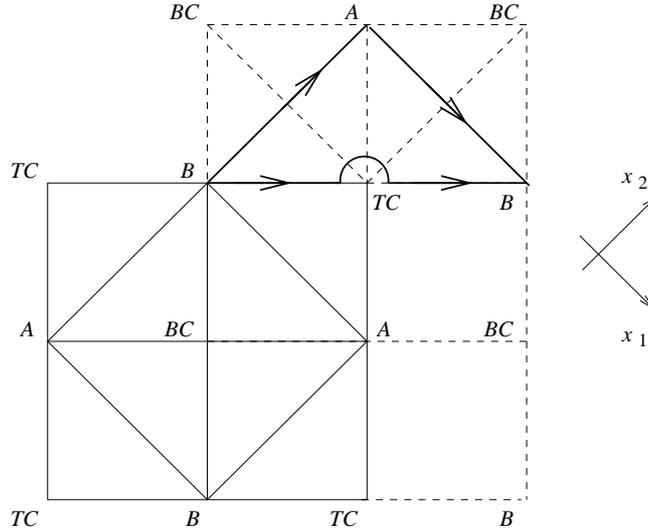
O objetivo é verificar que as auto-interseções de M ocorrem somente nos fins catenoidais.

Considere a região \mathcal{R} descrita na Figura 6.11. A imagem \mathcal{D} desta região pela aplicação g é um setor do plano complexo descrito na Figura 6.12(a). Como g é a projeção estereográfica da normal de Gauß, temos que $N(\mathcal{R})$ está totalmente contida em um dos hemisférios de S^2 . Da imagem \mathcal{D} , concluímos que a restrição de (x_2, x_3) ao interior de \mathcal{R} é uma imersão, cuja imagem está descrita na Figura 6.12(b).

Com mencionamos anteriormente, P é a peça fundamental de M . A região hachurada na Figura 6.13(a) representa a imagem pela imersão mínima do domínio fundamental \mathcal{R} , descrito pela Figura 6.13(b).

Observe que o toro é dividido em 16 regiões que são congruentes a \mathcal{R} e, por sua vez, a peça fundamental também possui 8 regiões que são obtidas da região hachurada (Figura 6.13(a)) através de simetrias da superfície. Como o quociente de M pelo seu grupo de translação é gerado por P e a sua imagem por uma rotação de 180° , também obtemos 16 subregiões que formam este quociente.

Como g é uma aplicação aberta dada por $g = ce^{i\pi/4}\gamma$, $c > 0$, g aplica \mathcal{R} na região descrita pela Figura 6.12(a). De fato, seja $\nu_1(t)$ uma curva no toro que descreve o caminho

Figura 6.9: Período ao longo da curva σ .

$TC \rightarrow A$. Logo, $\gamma(\nu_1(t)) = -it$, $t \in \mathbb{R}_+$. Aplicando esta curva em g obtemos

$$g(\nu_1(t)) = c e^{i\frac{\pi}{4}} \gamma(\nu_1(t)) = c e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot (-it) = c e^{-i\frac{\pi}{4}} t.$$

Tomando $\nu_2(t)$ uma curva no toro que descreve o caminho $TC \rightarrow E$, de modo que $\gamma(\nu_2(t)) = e^{-i\frac{\pi}{4}} t$, $t \in [0, 1]$, obtemos

$$g(\nu_2(t)) = c e^{i\frac{\pi}{4}} \gamma(\nu_2(t)) = c e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}} t = ct.$$

Analogamente, se $\nu_3(t)$ descreve o caminho $E \rightarrow A$, então $\gamma(\nu_3(t)) = e^{-i\frac{\pi}{4}} t$, $t \in [1, \infty]$, donde temos

$$g(\nu_3(t)) = c e^{i\frac{\pi}{4}} \gamma(\nu_3(t)) = c e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}} t = ct.$$

Como g é aberta, mas tem grau 2, então $g(\mathcal{R})$ só pode ser a região indicada na Figura 6.12(a). Assim, $N(\mathcal{R})$ está contido num hemisfério, ou seja, existe uma direção em que a projeção ortogonal do domínio fundamental é uma imersão, e por conveniência tomamos na direção de Ox_1 . Dessa forma, $(x_2, x_3) : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma imersão quando restrita ao interior de \mathcal{R} .

A projeção do domínio fundamental no plano $x_1 = 0$ possui duas alternativas que estão indicadas na Figura 6.15.

A curva $TC \rightarrow A$ é convexa. De fato, apresentamos na Seção 1 deste capítulo a fórmula da curvatura gaussiana para superfícies mínimas. Assim, $K = 0$ se, e somente se, dg se anula em $TC \rightarrow A$. Vemos que isto não ocorre na curva $TC \rightarrow A$.

Basta observarmos que $\deg(dg) = -\chi_{\bar{M}} = 0$, e que dg possui dois pólos com multiplicidade dois, logo o número de zeros de dg é quatro.

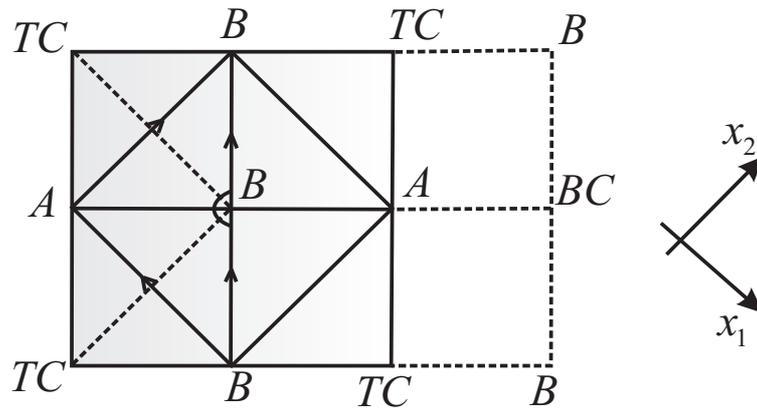


Figura 6.10: Período ao longo da curva $\tilde{\sigma}$.

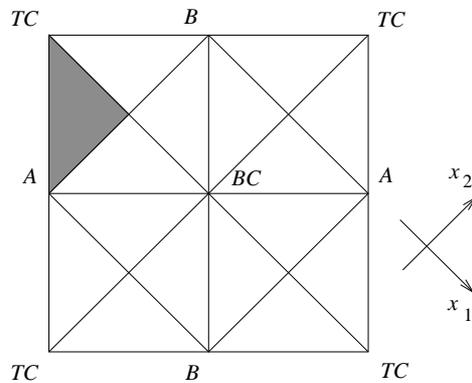


Figura 6.11: Domínio \mathcal{R} .

Também, para o caminho $TC \rightarrow BC$, além de $g(\{TC, BC\}) = 0$ temos $g(TC \rightarrow BC) \subset e^{-\frac{i\pi}{4}} \mathbb{R}_+$. Logo existe um ponto em $TC \rightarrow BC$ com $dg = 0$. Pelas simetrias da superfície, este ponto é aplicado sobre outros três pontos que também são zeros da dg . Portanto, a curvatura em $TC \rightarrow A$ nunca se anula, sendo esta curva convexa.

Como $TC \rightarrow A$ é uma geodésica planar e, portanto, uma linha de curvatura, os contornos da Figura 6.15 estão coerentes. Uma vez que (x_2, x_3) é uma imersão, ela é uma aplicação aberta e contínua, logo só pode realizar o contorno da Figura 6.15(a).

Dessa forma, (x_2, x_3) é uma imersão cujo contorno é uma *curva monótona*, ou seja, uma curva C^1 por partes tal que seu vetor tangente se anula apenas para um conjunto discreto de pontos. Além disso, a região é simplesmente conexa. Assim, $(x_1, x_2, x_3) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um gráfico e, conseqüentemente, é um mergulho.

Assim, as reflexões no domínio fundamental sob a superfície geram a peça fundamental P , que não possui auto-interseções e, as interseções de M só ocorrem nos fins catenoidais.

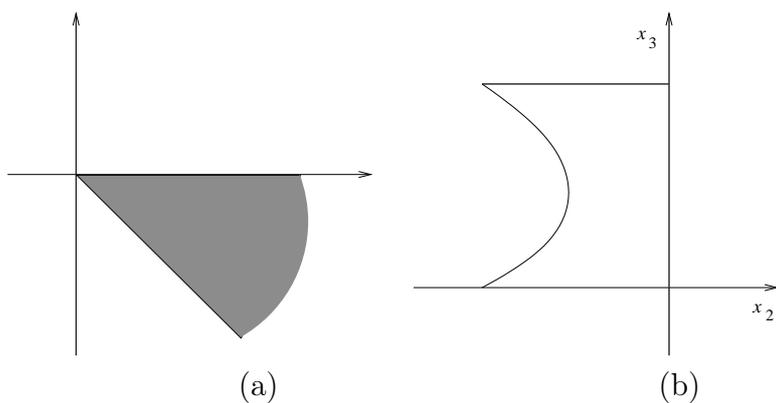


Figura 6.12: a) imagem $\mathcal{D} = g(\mathcal{R})$; b) projeção $(x_2, x_3)|_{\mathcal{R}}$.

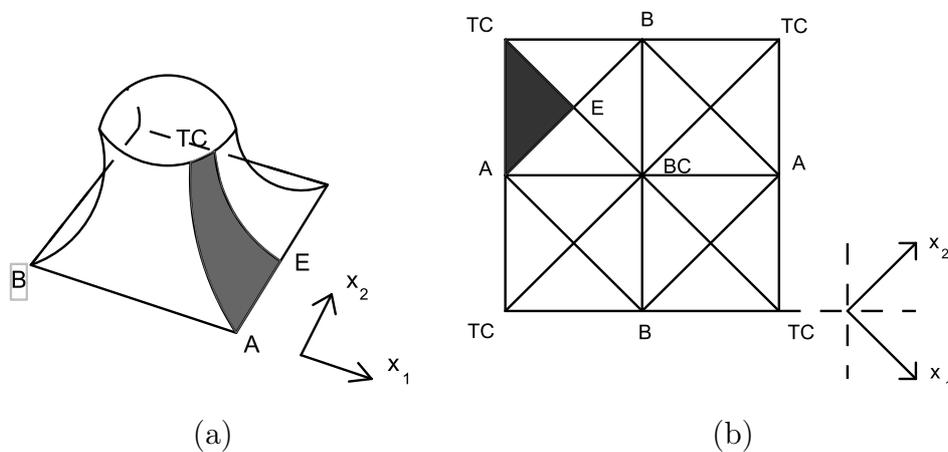


Figura 6.13: a) domínio fundamental de P ; b) domínio fundamental no toro.

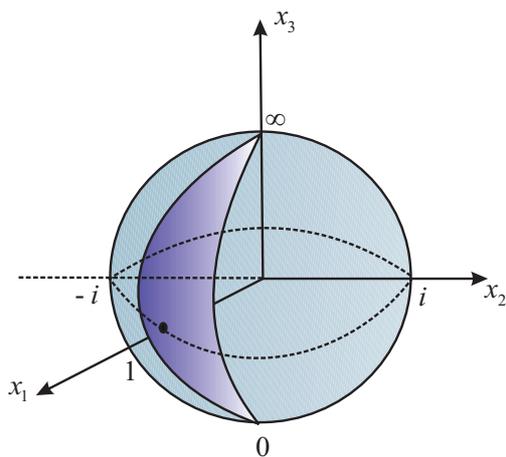


Figura 6.14: $N(\mathcal{R})$ contido em um hemisfério da esfera.

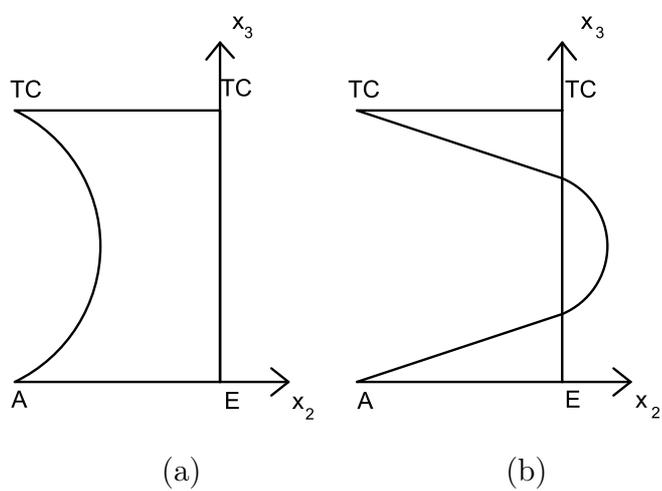


Figura 6.15: Possíveis projeções do domínio fundamental em $x_1 = 0$.

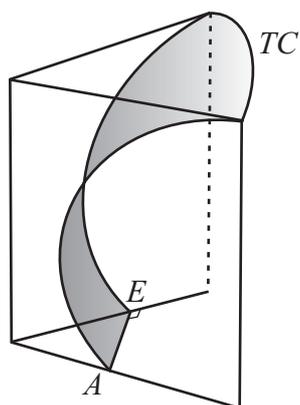


Figura 6.16: Domínio fundamental.

Referências Bibliográficas

- [1] T.M. Apostol, *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, New York. Springer-Verlag, 1990.
- [2] J.B. Conway, *Function of One Complex Variable*, New York. Springer-Verlag, 1979.
- [3] M.P. Carmo, *Diferential Geometry of Curves and Surfaces*, New Jersey, 1976.
- [4] M.P. Carmo, *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro, IMPA 2008.
- [5] H.M. Farkas and I. Kra, *Riemann Surfaces*, New York. Springer-Verlag, 1992.
- [6] O. Foster, *Lectures on Riemann Surfaces*, New York. Springer-Verlag, 1981.
- [7] E. Freitag and R. Busam, *Complex Analysis*, New York. Springer-Verlag, 2005.
- [8] J.N. Hicks, *Notes on Differential Geometry*, New York. Van Nostrand, 1965.
- [9] D. Hoffman and H. Karcher, *Complete Embedded Minimal Surfaces of Total Curvature*, Encyclopedia Math. Sci., 1997.
- [10] H. Karcher, *Construction of minimal surfaces, Surveys in Geometry*, University of Tokyo 1–96, 1989 and Lecture Notes **12**, SFB256, Bonn, 1989.
- [11] E.L. Lima, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Rio de Janeiro, IMPA, 1993.
- [12] E.L. Lima, *Variedades Diferenciáveis*, Rio de Janeiro, IMPA, 1973.
- [13] E.L. Lima, *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro, IMPA, 1975.
- [14] F.J. López and F. Martín, *Complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3* , Publicacions Matemàtiques **43** (1999), 341–449.
- [15] L.F. Lopes, *Superfícies mínimas folheadas por circunferências*, Dissertação de Mestrado. IMECC–UNICAMP, 2004.
- [16] W.A. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, New York. Springer-Verlag, 1991.

- [17] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society, 1995.
- [18] S. Montiel y A. Ros, *Curvas y Superfícies*, Granada, 1996.
- [19] A.L. Neto, *Funções de uma variável complexa*, Rio de Janeiro, IMPA, 2005.
- [20] J.C.C. Nitsche, *Lectures on minimal surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [21] R. Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, New York. Dover Publications, 1969.
- [22] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, New York. Springer-Verlag, 2007.
- [23] V. Ramos Batista e K. Mazzutti Lübeck, *Funções Elíticas*, Minicurso do II Encontro Paulista de Geometria, São Carlos - SP , 2009.
- [24] J.W. Vick, *Homology Theory*, New York. Academic Press, 1973.