UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sérgio Tsuyoshi Ura

Um Homomorfismo Índice Associado à Ações Livres de Grupos Abelianos Finitos

São Carlos - SP
Fevereiro de 2011

O presente trabalho teve suporte financeiro da FAPESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Um Homomorfismo Índice Associado à Ações Livres de Grupos Abelianos Finitos

Sérgio Tsuyoshi Ura
Orientador: Prof Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

Bolsista Fapesp
Processo 06/61800-0

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São Carlos - SP
Fevereiro de 2011

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Ura, Sérgio Tsuyoshi.
U72hi	Um homomorfismo índice associado à ações livres de grupos abelianos finitos / Sérgio Tsuyoshi Ura. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
	48 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.
	1. Topologia algébrica. 2. ZP - índice. 3. Teoremas do tipo Borsuk-Ulam. 4. G-índice. I. Título.
	CDD: 514.2 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
DM - UFSCar

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior
DM - UFSCar

Profa. Dra. Alicie Kimie Miwa Libardi
IGCE - UNESP

Agradecimentos

Aos meus pais, Makoto Ura e Kiyoka Ura, e à toda minha família que sempre me apoiaram.

A todos os meus professores, que me deram as bases para que pudesse chegar até aqui, em especial ao Porf. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento e à Profa. Dra. Alice Libardi, que me orientaram durante a graduação. Às bibliotecárias da UNESP de Rio Claro, a quem devo grandes favores.

Ao Prof. Dr. Pedro Pergher, pela atenção e dedicação na confecção deste trabalho.

Aos meus amigos que sempre me incentivaram.

À FAPESP pelo suporte financeiro.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para esta dissertação.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é generalizar um artigo de Pedro Pergher, especificamente o artigo *A $\mathbb{Z}_p$-índex homomorphism for $\mathbb{Z}_p$-spaces Houston J. Math. 31 (2005) N. 2 305-314* [7], trocando o grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$ por um abeliano finito qualquer. No artigo em questão, P. Pergher construiu um homomorfismo índice associado a Z_p-espaços, ou seja, espaços topológicos X equipados com ações livres do grupo cíclico Z_p. Tal homomorfismo tem como domínio a homologia equivariante de X com coeficientes em Z_p, e tem valores em Z_p. Nossa construção estende a construção de P. Pergher para grupos abelianos finitos arbitrários G, de tal sorte que, de maneira similar, nosso homomorfismo tem como domínio a homologia equivariante de X com coeficientes em G, e tem valores em G. Quando restrita a $G = Z_p$, nossa construção coincide com a de P. Pergher. Será visto que tal homomorfismo possibilita a obtenção de um resultado tipo Borsuk-Ulam, concernente à existência de aplicações equivariantes conectando dois G-espaços submetidos à certas hipóteses topológicas e homológicas, quando o grupo G possui $2q$ elementos, com q ímpar.

No último capítulo do trabalho, detalhamos um resultado muito recente de Ikumitsu Nagasaki, Tomohiro Kawakami, Yasuhiro Hara e Fumihiro Ushitaki, o qual também prova nosso resultado tipo Borsuk-Ulam acima citado, usando a homologia de Smith, e de tal sorte que todos os valores de p são cobertos.

Abstract

The main objective of this work is to generalize an article of Pedro Pergher, specifically the article *A Z_p - index homomorphism for Z_p-spaces - Houston J. Math. - 31 - (2005) - N. 2 - 305-314* [7], replacing the cyclic group Z_p by any finite abelian group. In his article, P. Pergher constructed an index-homomorphism associated to Z_p-spaces, that is, topological spaces X equipped with free actions of the cyclic group Z_p. This homomorphism has as domain the equivariant homology of X with Z_p-coefficients, and Z_p as target space. Our construction extends the construction of P. Pergher for arbitrary finite abelian groups G, in such a way that, similarly, our homomorphism has the equivariant homology of X with G-coefficients as domain, and G as target space. When restricted to $G = Z_p$, our construction coincides with the Pergher index. It will be seen that our homomorphism allows achieving a Borsuk-Ulam result, concerning the existence of equivariant maps connecting two G-spaces subject to certain topological and homological conditions, when G has $2q$ elements with q odd.

In the last chapter of the work, we detail a very recent result of Ikumitsu Nagasaki, Tomohiro Kawakami, Yasuhiro Hara and Fumihiro Ushitaki, which also proves our result of Borsuk-Ulam type above mentioned, using the Smith homology, and in such a way that all values of p are covered.

Sumário

Introdução

Na literatura matemática, o termo "índice" aparece em vários contextos, com múltiplos significados. Em um deles, o "índice" configura-se como sendo algo associado a pares (X, ϕ), onde X é um espaço topológico e ϕ uma ação de um grupo G em X. Especificamente nesse caso, o "índice" de uma ação (X, ϕ) seria algum elemento obtido através de algum functor algébrico associado a (X, ϕ), de tal sorte a ser, em algum sentido, invariante sob o efeito de aplicações G-equivariantes. Nessa direção, um dos mais antigos trabalhos a tratar de tal conceito é "On the theorems of Borsuk-Ulam, Yang, Kakutani - Yamabe - Yujobô and Dyson", I - Annals of Math. - 1954, de C. T. Yang [9]. Com o intuito de estudar certos teoremas tipo Borsuk-Ulam, Yang introduziu nesse trabalho uma ferramenta dada por um certo homomorfismo $\nu_{(X,T)} : H_n(X, T) \to \mathbb{Z}_2$, onde X é um espaço topológico equipado com involução livre $T : X \to X$, e $H_n(X, T)$ é a enésima homologia equivariante do par (X, T); o homomorfismo em questão é "invariante sob o efeito de aplicações equivariantes", o que significa neste caso que se (X, T) e (Y, S) são dois espaços com involuções livres e $f : (X, T) \to (Y, S)$ é uma aplicação equivariante, então $\nu_{(Y,S)}(f_*(\xi)) = \nu_{(X,T)}(\xi)$, para todo $\xi \in H_n(X, T)$, aqui f_* sendo a induzida por f na homologia equivariante. O "índice" do par (X, T) é definido, então, como sendo o maior natural n tal que $\nu_{(X,T)}(H_n(X, T)) \neq 0$.

No artigo "A $\mathbb{Z}_p$-index homomorphism for $\mathbb{Z}_p$-spaces" - Houston Journal of Mathematics - 2005 [7], inspirado no trabalho acima de C. T. Yang, P. Pergher estendeu a construção do homomorfismo $\nu_{(X,T)}$ mencionado acima para pares (X, T), onde X é um espaço topológico e $T : X \to X$ é um homeomorfismo de grau p (ou seja, $T^p = Id_X$), gerando uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ em X. Especificamente, P. Pergher construiu um homomorfismo $\nu_{(X,T)} : H_n(X,T) \to \mathbb{Z}_p$, onde $H_n(X,T)$ é a enésima homologia $\mathbb{Z}_p$-equivariante do par (X,T), de tal maneira que, como no caso $p = 2$, se $f : (X,T) \to (Y,S)$ é uma aplicação $\mathbb{Z}_p$-equivariante, então $\nu_{(Y,S)}(f_*(\xi)) = \nu_{(X,T)}(\xi)$, para todo $\xi \in H_n(X,T)$. No entanto, embora totalmente inspirada no caso $p = 2$, a extensão da construção de $\nu_{(X,T)}$ para $p > 2$ não é tão automática a partir da correspondente construção para $p = 2$.

A construção do referido $\mathbb{Z}_p$-índice possibilitou algumas aplicações. Uma delas refere-se a mostrar que, sob certas circunstâncias, a $\mathbb{Z}_p$-homologia singular do espaço de órbitas $\frac{X}{T}$ é não nula. Especificamente, é conhecido o fato de que a $\mathbb{Z}_2$-homologia singular dos espaços projetivos reais $\mathbb{RP}(n)$ é não nula até a dimensão n. Com o $\mathbb{Z}_p$-índice acima, foi possível mostrar que, se $p = 2q$, com q ímpar, e se X tem $\mathbb{Z}_p$-homologia singular não nula até a dimensão $n-1$, então $\frac{X}{T}$ tem $\mathbb{Z}_p$-homologia singular não nula até a dimensão n. Outra aplicação tem a ver com uma generalização do tradicional teorema de Borsuk-Ulam. Uma das formulações deste é a seguinte: se $f : S^m \to S^n$ é uma aplicação contínua e equivariante com respeito às antipodais, então $m > n$. Por outro lado, quando m é ímpar, é conhecido o fato de que a esfera m-dimensional S^m pode ser equipada com um homeomorfismo padrão de grau p, $T : S^m \to S^m$, o qual gera uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ em S^m. Neste contexto, surgem naturalmente as seguintes questões: é possível estender o teorema de Borsuk-Ulam para $p > 2$? Até que ponto a geometria das esferas equipadas com as aplicações acima é ou não fundamental para o resultado(no sentido de substituir-se esferas por espaços topológicos mais gerais equipados com ações livres de $\mathbb{Z}_p$)?

Na linha acima, o $\mathbb{Z}_p$-índice possibilitou a obtenção de um teorema tipo Borsuk-Ulam, concernente à existência de aplicações equivariantes entre espaços topológicos X e Y, equipados com ações livres de $\mathbb{Z}_p$, com $p = 2q$, q ímpar, e sob certas hipóteses topológicas e homológicas de X e Y, as quais situam o resultado como uma generalização do Teorema de Borsuk-Ulam.

O objetivo desta dissertação é generalizar a construção do $\mathbb{Z}_p$-índice de P.

Pergher para grupos abelianos finitos arbitrários, o que se caracteriza como um resultado original. A construção deste G-índice possibilita estender o resultado acima, tipo Borsuk-Ulam, para o contexto de G-ações livres, onde G é um grupo abeliano finito arbitrário. Em linhas gerais, todos os resultados do artigo [7] de P. Pergher relativos a $\mathbb{Z}_p$ podem, como será visto, ser obtidos para tais G-ações. Nota-se que no resultado tipo Borsuk-Ulam acima mencionado os valores abrangidos pelo teorema são $p = 2q$, com q ímpar. O argumento usado em [10] e em nosso trabalho não possibilita a obtenção do resultado para outros valores de p.

Recentemente, tivemos acesso ao artigo "The Smith Homology and Borsuk-Ulam Type Theorems" - Far East Jornal of Mathematical Sciences(FJMS) - 2010 de Ikumitsu Nagasaki, Tomohiro Kawakami, Yasuhiro Hara e Fumihiro Ushitaki [2], onde o resultado tipo Borsuk-Ulam de P. Pergher é obtido usando outras ferramentas, especificamente a homologia de Smith e inclusive, abrangendo os valores de p não cobertos pelo nosso trabalho. Nesta dissertação explicaremos em detalhes tal resultado de [2].

A redação desta dissertação está organizada em 4 capítulos. No Capítulo 1, juntamos o que julgamos ser os pré-requisitos necessários para a compreensão do texto. No Capítulo 2, damos a construção do homomorfismo $\mathbb{Z}_p$-índice já mencionado. No Capítulo 3, detalhamos a construção do homomorfismo G-índice mencionado e damos uma demonstração para o resultado tipo Borsuk-Ulam no contexto de G-ações livres com G um grupo abeliano finito, e no capítulo 4, detalhamos as construções do artigo [2].

Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos definições, notações e alguns resultados necessários ao desenvolvimento deste trabalho, referentes ao conceito de ações de grupos em conjuntos. Também apresentaremos o Teorema Fundamental do Levantamento.

1.2 Ações de grupos em conjuntos

O objetivo desta seção é definir o conceito de ações de grupos sobre conjuntos e apresentar algumas propriedades básicas a esse respeito.

Definição 1.2.1. *Sejam $(G, *)$ um grupo com elemento neutro $e \in G$ e X um conjunto qualquer. Uma ação de G em X é uma função $\phi : G \times X \to X$, que a cada para (g, x) associa o elemento $\phi(g, x) \in X$ satisfazendo, para qualquer $x \in X$ e $g, h \in G$:*

(i) $\phi(e, x) = x$;

(ii) $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(g * h, x)$.

Dizemos então que X é um G-espaço à esquerda.

Definição 1.2.2. *Seja X um G-espaço, onde G é um grupo finito. Dizemos que G* atua livremente *em X se $\phi(g,x) \neq x$ para todo $x \in X$ e todo $g \in G$, $g \neq e$.*

Exemplo 1.2.3. *Dado X um conjunto qualquer, consideremos uma aplicação $T : X \to X$ satisfazendo $T^p = Id_X$, onde p é um número natural qualquer. Seja $\phi : \mathbb{Z}_p \times X \to X$ definida por $\phi(\overline{n}, x) = (T)^n(x)$, para todo $\overline{n} \in \mathbb{Z}_p$ e $x \in X$. Temos então que T dá origem a uma ação de $\mathbb{Z}_p$ em X.*

Exemplo 1.2.4. *Consideremos $X = S^1 \times S^1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / |z_1| = |z_2| = 1\}$. Sejam $w_1, w_2 \in S^1$ elementos correspondentes, respectivamente, aos ângulos $\frac{2\pi}{p}$ e $\frac{2\pi}{q}$, ou seja, $w_1 = \cos(\frac{2\pi}{p}) + i\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{p})$ e $w_2 = \cos(\frac{2\pi}{q}) + i\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{q})$. Podemos observar que w_1 e w_2 induzem funções $T_1, T_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dadas por $T_1(z_1, z_2) = (w_1 z_1, z_2)$ e $T_2(z_1, z_2) = (z_1, w_2 z_2)$, respectivamente. Observe que $T_1^p(z_1, z_2) = Id(z_1, z_2)$ e $T_2^q(z_1, z_2) = Id(z_1, z_2)$. Como $|w_1 z| = |w_1||z| = 1$ e $|w_2 z| = |w_2||z| = 1$, temos que $T_1(S^1 \times S^1) \subset S^1 \times S^1$ e $T_2(S^1 \times S^1) \subset S^1 \times S^1$. Portanto, $T_1 : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ e $T_2 : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ estão bem definidos. Note que $T_1 \circ T_2(z_1, z_2) = T_1(z_1, w_2 z_2) = (w_1 z_1, w_2 z_2) = T_2(w_1 z_1, z_2) = T_2 \circ T_1(z_1, z_2)$, e portanto T_1 e T_2 comutam. Então, como no exemplo anterior, temos que T_1 e T_2 dão origem a uma ação de $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$ em $S^1 \times S^1$.*

Este exemplo se generaliza. Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_s$ inteiros positivos não necessariamente dois a dois distintos. Considere os números complexos $w_i = e^{\frac{2\pi i}{p_i}}$ e as funções $T_i : \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}^s$, $i = 1, \ldots, s$, definidas por

$$T_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_s) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, w_i x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s).$$

Assim, se $z = (x_1, x_2, \ldots, x_s) \in (S^1)^s$, então

$$T_i(z) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, w_i x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) \in (S^1)^s.$$

Deste modo, temos as funções $T_i : (S^1)^s \to (S^1)^s, i = 1, \ldots, s$, com a propriedade de que $T_i^{p_i} = Id$, $\forall i$ e $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$, $\forall i, j$. Segue então que $T_1, T_2, \ldots, T_s$ geram uma ação de $\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_s}$ em $(S^1)^s$

Exemplo 1.2.5. *Seja p um número primo. Seja X espaço topológico, e seja $X^p = X \times \cdots \times X$ (p cópias).*

Considere $T : X^p \to X^p$, $T(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_2, x_3, \ldots, x_p, x_1)$. Como $T^p = Id$ e $T^i \neq Id$ para $1 \leq i \leq p-1$, T induz uma ação de $\mathbb{Z}_p$ em X e uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ em $X - \{(x, \ldots, x), x \in X\}$.

Observação 1.2.6. *Se um grupo $(G, *, e)$ atua em um espaço topológico X e H for um subgrupo de G, temos que a restrição desta ação a $\cdot : H \times X \to X$ define automaticamente uma ação de H em X.*

Definição 1.2.7. *Sejam G um grupo e X, Y conjuntos equipados com as ações $\cdot : G \times X \to X$ e $\diamond : G \times Y \to Y$, respectivamente. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é equivariante com respeito a tais ações se $f(g \cdot x) = g \diamond f(x)$, para todo $x \in X$ e $g \in G$.*

Observação 1.2.8. *Fixados espaços topológicos X e Y, ambos dotados de ações de um grupo G, temos o problema da existência de aplicações equivariantes $f : X \to Y$. O Teorema de Borsuk-Ulam é apenas um exemplo desse tipo de problema, sendo, nesse caso, os dados particularizados para $X = S^m$, $Y = S^n$, $G = \mathbb{Z}_2$, e a ação $\mathbb{Z}_2$ sendo a antipodal.*

1.3 O grupo abeliano livre gerado por um conjunto X com coeficientes em G

Para a definição da homologia de um espaço topológico X com coeficientes em um grupo abeliano G, necessitaremos da seguinte construção algébrica geral.

Sejam G um grupo e X um conjunto.

Definição 1.3.1. *Definimos $F(X, G)$ como sendo o espaço das funções $f : X \to G$ tais que $f(x) \neq e$ em apenas um subconjunto finito de X, onde e é o elemento neutro de G.*

A soma de funções usual em $F(X,G)$, dada por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ torna $F(X,G)$ um grupo abeliano.

Todo elemento $f \in F(X.G)$ pode ser descrito por uma soma formal $f = g_1x_1 + g_2x_2 + \cdots + g_sx_s$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_s$ são os únicos pontos de X em que $f(x) \neq e$ e $f(x_i) = g_i,\ i = 1, \ldots, s$.

1.4 O teorema fundamental do levantamento

Teorema 1.4.1. *Sejam $p : \widetilde{X} \to X$ um recobrimento, Y um espaço conexo e localmente conexo por caminhos, $y_0 \in Y$, $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ e $x_0 = p(\widetilde{x_0})$. Dada uma aplicação contínua $f : Y \to X$, com $f(y_0) = x_0$, existe um levantamento $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ com $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x_0}$ se, e somente se,*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})).$$

□

Capítulo 2

O homomorfismo $\mathbb{Z}_p$-índice

Seja (X, T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, isto é, um espaço topológico X qualquer equipado com uma aplicação contínua $T : X \to X$ de grau p, tal que a correspondente ação de $\mathbb{Z}_p$ em X seja livre. A finalidade principal deste capítulo será a construção de um homomorfismo graduado $J_r : H_r(X, T) \to \mathbb{Z}_p,\ r \geq 0$, o qual denominaremos homomorfismo $\mathbb{Z}_p$-índice. Tal índice é uma generalização para p qualquer do $\mathbb{Z}_2$-índice de Yang introduzido em [9] para $p = 2$. Aqui, $H_r(X, T)$ é a r-ésima homologia $\mathbb{Z}_p$-equivariante do par (X, T). O termo "índice", aqui utilizado, vem do fato de que o homomorfismo em questão é invariante sob o efeito de homomorfismos induzidos por aplicações equivariantes. O material desse capítulo é uma condensação do artigo [7], de P. Pergher, e sua apresentação visa motivar a principal parte de nosso trabalho, contida no Capítulo 3, onde a construção de Pergher será generalizada para G, um grupo abeliano finito arbitrário.

2.1 A homologia $\mathbb{Z}_p$-equivariante associada ao $\mathbb{Z}_p$-espaço (X, T)

Seja X um espaço topológico e suponhamos $T : X \to X$ uma aplicação contínua de grau p tal que a correspondente ação de $\mathbb{Z}_p$ em X seja livre.

Tomando o complexo de cadeias singulares com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1}(X, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\partial n+1} S_n(X, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \cdots ,$$

podemos então considerar os homomorfismos induzidos a nível de cadeia $T_\# : S_n(X, \mathbb{Z}_p) \to S_n(X, \mathbb{Z}_p)$, o qual é definido nos geradores por $T_\#(\phi) = T \circ \phi$. A partir de então, consideraremos um subconjunto especial de $S_n(X, \mathbb{Z}_p)$, de acordo com a seguinte definição:

Definição 2.1.1. *Definimos*

$$S_n(X, T) = \{\alpha \in S_n(X, \mathbb{Z}_p);\ T_\#(\alpha) = \alpha\} \subset S_n(X, \mathbb{Z}_p).$$

Teorema 2.1.2. *$S_n(X, T)$ é um submódulo do $\mathbb{Z}_p$-módulo $S_n(X, \mathbb{Z}_p)$.*

Observação 2.1.3. *O submódulo $S_n(X, T)$ será denominado de* submódulo das (T, n)-cadeias.

Teorema 2.1.4. *Para qualquer $n \geq 0$, vale $\partial_n(S_n(X, T)) \subset S_{n-1}(X, T)$, e portanto $\{S_n(X, T),\ \partial_n\}$ é um complexo de cadeias.*

Definição 2.1.5. *Definimos*

$$Z_n(X, T) = \{\alpha \in S_n(X, \mathbb{Z}_p);\ \partial_n(\alpha) = 0\}$$

como sendo o submódulo dos (T, n)-ciclos *e*

$$B_n(X, T) = \{\alpha \in S_n(X, T);\ \alpha = \partial_{n+1}(\beta),\ \textit{para algum}\ \beta \in S_{n+1}(X, T)\}$$

como sendo o submódulo dos (T, n)-bordos.

A homologia do complexo de cadeias acima será chamada *homologia $\mathbb{Z}_p$-equivariante associada ao $\mathbb{Z}_p$-espaço* (X, T) e será denotada por $H_n(X, T)$. O enésimo módulo de homologia de (X, T) é dado então por $H_n(X, T) = \dfrac{Z_n(X, T)}{B_n(X, T)}$.

Observação 2.1.6. *Observemos que* $Z_n(X,T) = Z_n(X,\mathbb{Z}_p) \cap S_n(X,T)$*; temos também que* $B_n(X,T) \subset B_n(X,\mathbb{Z}_p) \cap S_n(X,T)$*, mas não necessariamente* $B_n(X,\mathbb{Z}_p) \cap S_n(X,T) \subset B_n(X,T)$*, pois se* $\alpha \in S_n(X,T)$ *e* $\alpha = \partial_{n+1}(\beta)$*, com* $\beta \in S_n(X,\mathbb{Z}_p)$*, pode ser que* α *não seja imagem de uma* $(T, n+1)$*-cadeia. Isso significa que existe a possibilidade de* $Z_n(X,\mathbb{Z}_p) = B_n(X,\mathbb{Z}_p)$ *e portanto* $H_n(X,\mathbb{Z}_p) = 0$*, mas* $B_n(X,T) \neq Z_n(X,T)$*, e nesse caso teríamos* $H_n(X,T) \neq 0$*.*

Suponhamos que (X,T) e (Y,S) sejam $\mathbb{Z}_p$-espaços e $f : (X,T) \to (Y,S)$ seja uma aplicação contínua equivariante, e consideremos $f_\# : S_n(X,\mathbb{Z}_p) \to S_n(Y,\mathbb{Z}_p)$. Dado $\alpha \in S_n(X,T)$, temos

$$S_\#(f_\#(\alpha)) = (S \circ f)_\#(\alpha) = (f \circ T)_\#(\alpha) = f_\#(T_\#(\alpha)) = f_\#(\alpha).$$

Deste modo, $f_\#(S_n(X,T)) \subset S_n(Y,S)$ e, portanto, $f_\#$ define o homomorfismo $f_\# : S_n(X,T) \to S_n(Y,S)$. Como os operadores bordo dos complexos de cadeias $S_*(X,T)$ e $S_*(Y,S)$ são restrições dos operadores bordo usuais e $f_\# : S_n(X,T) \to S_n(Y,S)$ também é uma restrição, temos que $f_\# : S_n(X,T) \to S_n(Y,S)$ continua sendo uma aplicação de cadeias. Em particular, temos a induzida em homologia $\mathbb{Z}_p$-equivariante $f_* : H_n(X,T) \to H_n(Y,S)$ para todo $n \geq 0$.

Observação 2.1.7. *Podemos estender as idéias acima para pares* (X,f)*, com* X *espaço topológico e* $f : X \to X$ *função contínua. De fato, considerando* R *um anel comutativo com unidade e definindo* $S_n(X,f,R) \subset S_n(X,R)$ *como* $S_n(X,f,R) = \{\alpha \in S_n(X,R);\ f_\#(\alpha) = \alpha\}$*, temos então os seguintes teoremas:*

Teorema 2.1.8. $S_n(X,f,R)$ *é um submódulo do* R*-módulo* $S_n(X,R)$*.*

Teorema 2.1.9. $\partial(S_n(X,f,R)) \subset S_{n-1}(X,f,R)$*.*

Desta forma, temos um novo complexo de cadeias de R-módulos

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1}(X,f,R) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X,f,R) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X,f,R) \longrightarrow \cdots$$

A homologia deste complexo será denotada por $H_*(X,f,R)$ e o n-ésimo módulo de homologia de (X,f) é então $H_n(X,f,R) = \dfrac{Z_n(X,f,R)}{B_n(X,f,R)}$, onde

$$Z_n(X,f,R) = \{\alpha \in S_n(X,f,R);\ \partial_n(\alpha) = 0\}$$

e

$$B_n(X,f,R) = \{\alpha \in S_n(X,f,R);\ \alpha = \partial_{n+1}(\beta),\ \text{para algum } \beta \in S_{n+1}(S,f,R)\}.$$

Definição 2.1.10. *Consideremos pares (X,f) e (Y,g), como acima mencionados. Uma aplicação contínua $h : (X,f) \to (Y,g)$ é chamada "permissível" se satisfizer $h \circ f = g \circ h$.*

Teorema 2.1.11. *Se $h : (X,f) \to (Y,g)$ é permissível, então o homomorfismo induzido $h_* : S_n(X,R) \to S_n(Y,R)$ é tal que $h_\#(S_n(X,f,R)) \subset S_n(Y,g,R)$.*

Portanto, observamos que é possível associar o functor homologia à categoria formada por pares (X,f) e cujos morfismos são as aplicações permissíveis.

2.2 O operador θ

Definição 2.2.1. *Dado o $\mathbb{Z}_p$-espaço (X,T), definimos o operador*

$$\theta : S_n(X,\mathbb{Z}_p) \to S_n(X,\mathbb{Z}_p)$$

por

$$\theta = \overline{1}Id_\# + \overline{1}T_\# + \overline{1}T_\#^2 + \cdots + \overline{1}T_\#^{p-1}.$$

Sendo cada $T_\#^r : S_n(X,\mathbb{Z}_p) \to S_n(X,\mathbb{Z}_p)$, $r = 0,1,\ldots,p-1$, uma aplicação de cadeias, segue que o operador θ é uma aplicação de cadeias, por ser uma combinação linear de aplicações de cadeias.

Observação 2.2.2. *A fim de simplificar a notação, salvo quando houver perigo de confusão com elementos do anel $\mathbb{Z}$, omitiremos a barra dos elementos do anel $\mathbb{Z}_p$. Sendo assim o operador θ será definido então simplesmente por $\theta = Id_\# + T_\# + \cdots + T_\#^{p-1}$.*

O resultado a seguir será crucial para o construção do homomorfismo $\mathbb{Z}_p$-índice. Ele simplesmente diz que as (T,n)-cadeias constituem exatamente a imagem do operador θ acima.

Teorema 2.2.3. $\theta(S_n(X, \mathbb{Z}_p)) = S_n(X, T)$

Dem.:

Dado $c \in S_n(X, \mathbb{Z}_p)$ uma n-cadeia,

$$\begin{aligned}
T_\#(\theta(c)) &= T_\#(c + T_\#(c) + \cdots + T_\#^{p-2}(c) + T_\#^{p-1}(c)) \\
&= T_\#(c) + T_\#^2(c) + \cdots + T_\#^{p-1}(c) + T^p(c) \\
&= T_\#(c) + T_\#^2(c) + \cdots + T_\#^{p-1}(c) + Id_\#(c) \\
&= \theta(c),
\end{aligned}$$

já que $T_\#$ tem grau p. Assim, $\theta(c)$ pertence a $S_n(X, T)$ e, portanto, Im $(\theta) \subset S_n(X, T)$.

Reciprocamente, seja $\alpha \in S_n(X, T)$. Usaremos a representação de α como soma formal, $\alpha = r_1\phi_1 + r_2\phi_2 + \cdots + r_t\phi_t$, onde $r_j \in \mathbb{Z}_p$ e $\phi_j \in C_n(X)$.

Considere o conjunto $A = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_t\}$. A pode ser considerado como um subconjunto de $S_n(X, \mathbb{Z}_p)$, e desta forma, tomaremos a restrição de $T_\# : S_n(X, \mathbb{Z}_p) \to S_n(X, \mathbb{Z}_p)$ a A.

Afirmamos que $T_\#(A) \subset A$. Para isso, devemos mostrar que para cada $1 \leq i \leq t$ existe $1 \leq j \leq t$ tal que $T_\#(\phi_i) = \phi_j$. De fato, $T_\#(\alpha) = \alpha$ implica que

$$r_1(T \circ \phi_1) + r_2(T \circ \phi_2) + \cdots + r_t(T \circ \phi_t) = r_1\phi_1 + r_2\phi_2 + \cdots + r_t\phi_t.$$

Em outras palavras, a função $T_\#(\alpha) : C_n(X) \to \mathbb{Z}_p$ é igual à função $\alpha : C_n \to \mathbb{Z}_p$ considerada logo acima. Segue que para $1 \leq i \leq t$, $\alpha(T \circ \phi_i) = r_i \neq 0$. Entretanto, os únicos elementos não nulos de $C_n(X)$ que são levados por α em algum elemento não nulo de $\mathbb{Z}_p$ são os elementos de A. Portanto, $T \circ \phi_i \in A$, isto é, $T \circ \phi_i = \phi_j$ para algum $1 \leq j \leq t$. Logo, podemos concluir que $T_\#(A) \subset A$.

Observe que o j acima é diferente de i, pois se $T \circ \phi_i = \phi_i$, para cada $x \in \Delta_n$, teríamos $T(\phi_i(x)) = \phi_i(x)$ e, portanto, a órbita de $\phi_i(x)$ correspondente à ação de $\mathbb{Z}_p$ em X só teria um ponto, contrariando o fato de que a ação é livre.

Mostramos então que $T_\# : A \to A$ é uma função sem pontos fixos. Mais ainda, $(T_\#)^p = (T^p)_\# = Id_\#$ e, desta forma, segue que $T_\#$ define uma ação de $\mathbb{Z}_p$

em A. Afirmamos que esta ação é livre. De fato, se $(T_\#)^l(\phi_i) = (T_\#)^j(\phi_i)$, então $(T^l)_\#(\phi_i) = (T^j)_\#(\phi_i)$, ou seja, $T^l \circ \phi_i = T^j \circ \phi_i$. Tomando um ponto $z \in \Delta_n$, isso significa que $T^l(\phi_i(z)) = T^j(\phi_i(z))$. Como $0 \leq l, j \leq p-1$ e $l \neq j$, concluímos que a órbita de $\phi_i(z)$ em X segundo $T : X \to X$ possui menos que p pontos, contrariando o fato de que a ação gerada por T é livre. Desta forma, $T_\#$ define uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ em A.

Denotemos por $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ as órbitas desta ação. Afirmamos que se ϕ_i e ϕ_j pertencem à mesma órbita γ_u, então os correspondentes coeficientes r_i e r_j são iguais; em outras palavras, todos os simplexos de uma mesma órbita possuem o mesmo coeficiente. De fato, $T_\#^j(\alpha) = \alpha$ para todo $1 \leq j \leq p-1$. Consideremos então a órbita $\gamma_u = \{\phi_i,\ T_\#(\phi_i),\ T_\#^2(\phi_i), \ldots,\ T_\#^{p-1}(\phi_i)\}$. Para $1 \leq j \leq p-1$, $T_\#^j(\alpha) = \alpha$ significa que as funções $T_\#^j(\alpha),\ \alpha : C_n(X) \to \mathbb{Z}_p$ são iguais. Em particular, para qualquer j, $1 \leq j \leq p-1$, vale que

$$\begin{aligned}
\alpha(T_\#^j(\phi_i)) &= T_\#^j(\alpha)(T_\#^j(\phi_i)) \\
&= [r_1 T_\#^j(\phi_1) + r_2 T_\#^j(\phi_2) + \cdots + r_i T_\#^j(\phi_i) + \cdots + r_t T_\#^j(\phi_t)](T^j(\phi_i)) \\
&= r_i,
\end{aligned}$$

uma vez que $T_\#^j(\phi_1), T_\#^j(\phi_2), \ldots, T_\#^j(\phi_t)$ é uma coleção de elementos distintos de $C_n(X)$. Como $\alpha(\phi_i) = r_i$, segue que

$$\alpha\{\phi_i, T_\#(\phi_i), \ldots, T_\#^{p-1}(\phi_i)\} = r_i,$$

como queríamos.

Escolhamos então, aleatoriamente, um elemento de cada órbita, digamos $\phi_{i_1} \in \gamma_1, \phi_{i_2} \in \gamma_2, \ldots, \phi_{i_l} \in \gamma_l$. Renomeando, se necessário, $r_{i_1} = v_1, r_{i_2} = v_2, \ldots, r_{i_l} = v_l$ e $\phi_{i_1} = \mu_1, , \phi_{i_2} = \mu_2, \ldots, \phi_{i_l} = \mu_l$. Pelas considerações acima, α pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\alpha &= v_1(\mu_1 + T_\#(\mu_1) + \cdots + T_\#^{p-1}(\mu_1)) + v_2(\mu_2 + T_\#(\mu_2) + \cdots + T_\#^{p-1}(\mu_2)) \\
&\quad + \cdots + v_l(\mu_l + T_\#(\mu_l) + \cdots + T_\#^{p-l}(\mu_l)) \\
&= \theta(v_1\mu_1 + v_2\mu_2 + \cdots + v_l\mu_l)
\end{aligned}$$

o que prova o resultado.

Observação 2.2.4. *Na prova do teorema anterior, o elemento* $d = v_1\mu_1 + v_2\mu_2 + \cdots + v_l\mu_l \in S_n(X, \mathbb{Z}_p)$ *tal que* $\theta(d) = \alpha$ *foi obtido escolhendo-se aleatoriamente* $\mu_j \in \gamma_j$ *e denotando-se o mesmo com o coeficiente comum correspondente à órbita* γ_j*. Portanto, tal* d *não é único, sendo que as outras possibilidades para* d *são obtidas substituindo-se cada* μ_j *por um outro elemento qualquer de* γ_j*, ou seja,* μ_j *por* $T_{\#}^{k_j}(\mu_j)$*,* $0 \leq k_j \leq p-1$*.*

2.3 O homomorfismo $\mathbb{Z}_p$-índice

Nesta seção construiremos o homomorfismo

$$J_r : H_r(X, T) \to \mathbb{Z}_p,$$

o qual chamaremos de "homomorfismo $\mathbb{Z}_p$-índice". Como dito na introdução, a razão deste nome será o fato de que tal homomorfismo é invariante sob o efeito de homomorfismos induzidos por aplicações equivariantes. Ou seja, se $f : (X, T) \to (Y, S)$ é uma aplicação equivariante entre $\mathbb{Z}_p$-espaços, então teremos que a induzida em homologia equivariante $f_* : H_r(X, T) \to H_r(Y, S)$ satisfará $J_r(f_*(\xi)) = J_r(\xi)$, para $\xi \in H_r(X, T)$.

A construção do homomorfismo $\mathbb{Z}_p$-índice se dará da seguinte forma:

1. A construção do homomorfismo J_r será feita por indução em r.

2. J_r será construído inicialmente a nível de (T, r)-ciclos, ou seja, $J_r : Z_r(X, T) \to \mathbb{Z}_p$; a seguir, mostraremos que $J_r : \frac{Z_r(X,T)}{B_r(X,T)} \to \mathbb{Z}_p$, é bem definido, ou seja, $J_r(B_r(X, T)) = 0$, o que possibilitará definir J_r a nível de homologia.

Observemos ainda que J_r será construído explicitamente apenas no nível 0, ou seja, construiremos explicitamente somente o homomorfismo $J_0 : Z_0(X, T) \to \mathbb{Z}_p$ satisfazendo $J_0(B_0(X, T)) = \{0\}$. Nos demais níveis, será construído recursivamente. Isso significa que, na prática, para calcular explicitamente $J_r(\xi)$, com $\xi \in Z_r(X, T)$, será necessário algum processo de "redução" de dimensão até a dimensão zero onde a computação é explícita.

Construiremos, a seguir, o homomorfismo $J_0 : H_0(X,T) \to \mathbb{Z}_p$. Seja $c \in Z_0(X,T) = S_0(X,T)$. Pelo teorema 2.2.3, $c = \theta(d)$, onde $d = a_1d_1 + a_2d_2 + \cdots + a_sd_s \in S_0(X,\mathbb{Z}_p)$, com $a_i \in \mathbb{Z}_p$ e $d_i \in X$, para $i = 1, 2, \ldots, s$. Definimos

$$J_0 : Z_0(X,T) \to \mathbb{Z}_p \text{ por } J_0(c) = \sum_{i=1}^{s} a_i.$$

Observemos que:

(i) J_0 independe da escolha do representante $c = \theta(d)$ no teorema 2.2.3.

(ii) J_0 é um homomorfismo.

(iii) $J_0(B_0(X,T)) = \{0\}$

Logo, a construção do homomorfismo $\mathbb{Z}_p$-índice $J_0 : H_0(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ no nível 0 está completa.

Para a construção recursiva de J_r, $r > 0$, necessitaremos introduzir um novo operador, que denotaremos por ψ. Especificamente, o operador $\psi : S_r(X,T) \to S_r(X,T)$ será dado por

$$\psi = T_\# + 2T_\#^2 + \cdots + (p-1)T_\#^{p-1}.$$

Lembramos que tal homomorfismo é uma aplicação de cadeias, por ser combinação linear de aplicações de cadeias.

As idéias que levam à definição de ψ serão descritas a seguir, o que será útil quando da generalização desta construção para grupos abelianos finitos.

Definido o homomorfismo $\mathbb{Z}_p$-índice até o nível r, precisamos definir o que seria $J_{r+1}(c)$, para $c \in Z_{r+1}(X,T)$. Para tanto, precisamos transferir o problema reduzindo-se um nível do ciclo, isto é, necessitamos de um operador $\Psi : S_{r+1}(X,T) \to S_r(X,T)$ tal que $\Psi(c) \in Z_r(X,T)$. Como $\partial c = 0$, é razoável pensar em $\Psi(c) = \psi(\partial d)$, onde o d é tal que $c = \theta(d)$, como no teorema 2.2.3.

Precisamos então de um homomorfismo ψ tal que $T_{\#}\psi(\partial d) = \psi(\partial d)$.

Podemos supor $\psi = \sum_{i=1}^{p-1} a_i T_{\#}^i$, $a_i \in \mathbb{Z}_p$, e uma primeira tentativa seria exigir $T_{\#}\psi = \psi$. Mas então esta equação teria como solução $\psi = a\theta$ com $a \in \mathbb{Z}_p$, e então $\Psi(c) = a\theta(\partial d) = a\partial\theta(d) = a\partial c = 0$, pois $c \in Z_{r+1}(X, T)$.

Como sabemos que $\theta(\partial d) = 0$, uma segunda tentativa será $T_{\#}\psi = \psi - \theta$. Esta equação tem como solução, tomando-se o valor inicial $a_0 = 0$, exatamente $\psi = T_{\#} + 2T_{\#}^2 + \cdots + (p-1)T_{\#}^{p-1}$.

Proposição 2.3.1. *$\psi(\partial d) \in Z_r(X, T)$, se $\theta(d) \in Z_{r+1}(X, T)$.*

Proposição 2.3.2. *A regra $J_{r+1} : Z_{r+1}(X, T) \to \mathbb{Z}_p$ dada por $J_{r+1}(c) = J_r(\psi(\partial d))$, onde $c = \theta(d)$, independe da escolha de d no teorema 2.2.3.*

Dem.:

Consideremos $c \in Z_{r+1}(X, T)$, e suponhamos que $c = \theta(u) = \theta(u')$ com $u, u' \in S_{r+1}(X, T)$, como no teorema 2.2.3. Provaremos que $J_r(\psi(\partial u)) = J_r(\psi(\partial u'))$.

Como $c = \theta(u) = \theta(u')$, podemos escrever $u = a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_lc_l$ e $u' = a_1T_{\#}^{v_1}c_1 + a_2T_{\#}^{v_2}c_2 + \cdots + a_lT_{\#}^{v_l}c_l$, onde os c_i's pertencem a órbitas disjuntas.

Existe uma sequência $u = u_1, u_2, \ldots, u_l, u_{l+1} = u'$ de $r+1$-cadeias com $\theta(u_i) = c$. Para cada i, $2 \le i \le l+1$, existem $r+1$-cadeias A_i e B_i com $d_{i-1} = A_i + B_i$ e $d_i = A_i + T_{\#}^{v_i}(B_i)$ (A_i pode ser nula). Então será suficiente mostrar que se $c \in Z_r(X, T)$ satisfaz $c = \theta(A+B) = \theta(A+T_{\#}^k(B))$, então $J(\psi(\partial(A+B))) = J(\psi(\partial(A+T_{\#}^k(B))))$. Como pela hipótese de indução $J : Z_r(X, T) \to \mathbb{Z}_p$ é um homomorfismo, temos:

$$
\begin{aligned}
J(\psi(\partial(A+B))) - J(\psi(\partial(A+T_{\#}^k(B)))) &= J(\psi(\partial(A+B)) - \psi(\partial(A+T_{\#}^k(B)))) \\
&= J(\psi(\partial(A)) + \psi(\partial(B)) - \psi(\partial(A)) - \psi(\partial(T_{\#}^k B))) \\
&= J(\psi(\partial(B)) - \psi T_{\#}^k(\partial(B))) \\
&= J(\psi(\partial(B)) - (\psi(\partial(B)) - k\theta(\partial(B)))) \\
&= kJ(\theta(\partial(B))) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Como $\theta(\partial(B)) = \partial(\theta(B)) \in B_r(X,T)$ e pela hipótese de indução J se anula em $B_r(X,T)$, o resultado segue.

$\square$

Assim, a regra $J(c) = J(\psi(\partial(d)))$, onde $c = \theta(d)$ nos dá um homomorfismo $J : Z_{r+1}(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ bem definido. Se $c \in Z_{r+1}(X,T)$ satisfaz $c = \partial(a)$, com $a = \theta(b)$, então $c = \theta(\partial b)$ e portanto $J(c) = J(\psi(\partial\partial(b))) = 0$. Deste modo, $J([c]) = J([\psi(\partial(d))])$ é um homomorfismo bem definido $J : H_{r+1}(X,T) \to \mathbb{Z}_p$, onde $[\ ]$ denota a classe de homologia.

Este homomorfismo pode ser considerado um homomorfismo $\mathbb{Z}_p$-índice pela seguinte proposição:

Proposição 2.3.3. *Sejam (X,T) e (Y,S) $\mathbb{Z}_p$-espaços e $f : (X,T) \to (Y,S)$ uma aplicação equivariante. Então, para todo (T,r)-ciclo $c \in Z_r(X,T)$, temos que $J(f_*([c])) = J([c])$.*

Dem.:

A prova deste resultado, vista em [7], segue o mesmo padrão da construção de J_n. Prova-se inicialmente o fato para $n = 0$, e a seguir usa-se indução finita.

Proposição 2.3.4. *Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, com X conexo por caminhos. Para um número natural $n \geq 1$, suponha que $H_r(X,\mathbb{Z}_p) = 0$ para todo $1 \leq r \leq n$. Se $p = 2q$ com q ímpar, então $J(H_r(X,T)) \neq 0$ para todo $0 \leq r \leq n+1$.*

Dem.:

Para a prova deste resultado, necessitaremos introduzir também o operador $\Lambda = Id_\# - T_\#$. Necessitamos também dos fatos, que podem ser provados sem dificuldades, de que $\Lambda \circ \theta = \theta \circ \Lambda = 0$ e $\theta \circ \theta = 0$.

Provemos então a proposição. Escolha um ponto em X e chamemos de c_0 a 0-cadeia correspondente a este ponto. Como X é conexo por caminhos, existe um caminho ligando $T(c_0)$ a c_0, e chamemos de c_1 a 1-cadeia correspondente a este caminho. Note que $\partial(c_1) = \Lambda(c_0)$, e $\partial(\theta(c_1)) = \theta(\Lambda(c_0)) = 0$, isto é, $\theta(c_1)$ é um 1-ciclo. Como $H_1(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, existe uma 2-cadeia c_2 tais que $\partial(c_2) = \theta(c_1)$. Podemos proceder por indução: suponha que para algum j, $2 \leq j \leq n$, tenhamos construído $c_0, c_1, \ldots, c_j$ tais que $\partial(c_j) = \theta(c_{j-1})$ se j par e $\partial(c_j) = \Lambda(c_{j-1})$ se j é ímpar. Assim, se j é par temos que $\partial(\Lambda(c_j)) = \Lambda(\theta(c_{j-1})) = 0$, e como $H_j(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, existe uma $(j+1)$-cadeia c_{j+1} tal que $\partial(c_{j+1}) = \Lambda(c_j)$. Analogamente, se j é ímpar, $\partial(\theta(c_j)) = \theta(\Lambda(c_{j-1})) = 0$, e portanto existe uma $(j+1)$-cadeia c_{j+1} tal que $\partial(c_{j+1}) = \theta(c_j)$.

Desse modo, obtemos j-cadeias c_j, $0 \leq j \leq n+1$, satisfazendo $\partial(c_j) = \theta(c_{j-1})$ para j par e $\partial(c_j) = \Lambda(c_{j-1})$ se j é ímpar.

Como $\theta \circ \theta = 0$ e $\theta \circ \Lambda = 0$, temos que $\theta(c_j)$ é um j-ciclo, e então podemos calcular $J(\theta(c_j))$.

Provemos então que $J(\theta(c_j)) \neq 0$ para todo $0 \leq j \leq n+1$.

Note que $T_\# \circ \theta = \theta$. Assim,

$$\psi \circ \theta = \sum_{i=1}^{p-1} i T_\#^i \circ \theta = \sum_{i=1}^{p-1} i\theta = \frac{p(p-1)}{2}\theta.$$

Como c_0 consiste de um único ponto, $J(\theta(c_0)) = 1$ por definição. Segue que

$$J(\theta(c_1)) = J(\psi(\partial(c_1))) = J(\psi(\Lambda(c_0))) = J(\theta(c_0)) = 1.$$

Agora,

$$J(\theta(c_2)) = J(\psi(\partial(c_2))) = J(\psi(\theta(c_1))) = \frac{p(p-1)}{2} J(\theta(c_1)) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Como $p = 2q$, $\frac{p(p-1)}{2} = \frac{2q(2q-1)}{2} = q(2q-1) = 2q^2 - q \equiv -q \mod p$ e $-q \equiv q \mod p$. Então $J(\theta(c_2)) = q \neq 0$.

Suponha, por indução, que para algum j, $2 \leq j \leq n$, $J(\theta(c_j)) = q$. Então se j é par, temos que

$$J(\theta(c_{j+1})) = J(\psi(\partial(c_{j+1}))) = J(\psi(\Lambda(c_j))) = J(\theta(c_j)) = q.$$

Por outro lado, se j é ímpar,

$$J(\theta(c_{j+1})) = J(\psi(\partial(c_{j+1}))) = J(\psi(\theta(c_j))) = \frac{p(p-1)}{2} J(\theta(c_j)) = q^2.$$

Como q é ímpar, $q^2 \equiv q \mod 2q$, e então $J(\theta(c_j)) = q \neq 0$ e o resultado está provado.

$\square$

Observação 2.3.5. *Se $p = 2q$ e q é par, o argumento acima serve para mostrar que $J(H_j(X,T)) \neq 0$ para $0 \leq j \leq 3$, mas como $q^2 \equiv 0 \mod p$ neste caso, ele não serve para mostrar que $J(H_j(X,T)) \neq 0$ para $j \geq 4$.*

Se p é ímpar, $\frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \mod p$, e então o argumento acima serve para mostrar que $J(H_1(X,T)) \neq 0$, mas não mostra que $J(H_j(X,T)) \neq 0$ para $j \geq 2$.

Os casos restantes estão resolvidos em um artigo de 2010 *de autoria de* Ikumitsu Nagasaki, Tomohiro Kawakami, Yasuhiro Hara e Fumihiro Ushitaki*, [2], e serão tratados na parte final desta dissertação.*

Tais resultados exemplificam uma aplicação do $\mathbb{Z}_p$-índice.

Proposição 2.3.6. *Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, onde X é de Hausdorff, conexo e localmente conexo por caminhos. Então $H_r(X,T)$ é isomorfo a $H_r(X/T, \mathbb{Z}_p)$.*

Dem.:

Considere $\Gamma : S_r(X,T) \to S_r(X/T, \mathbb{Z}_p)$ dado por $\Gamma(c) = \pi_\#(d)$, onde $c = \theta(d)$ e $\pi : X \to X/T$ é a aplicação quociente. Como $\pi \circ T = \pi$, Γ independe da escolha de d. Γ é uma aplicação de cadeias.

Provemos que Γ é injetora. Para isto, precisamos primeiro provar o seguinte lema:

Lema 2.3.7. *Se σ_r é o r-simplexo padrão, e $d_1, d_2 : \sigma_r \to X$ são r-simplexos singulares, tais que $\pi \circ d_1 = \pi \circ d_2$, então existe um k, $0 \leq k \leq p-1$, tal que $d_1 = T^k \circ d_2$.*

Dem.:

Fixemos $x_0 \in \sigma_r$. Então existe um k, $0 \leq k \leq p-1$, tal que $d_1(x_0) = T^k \circ d_2(x_0)$. Como X é de Hausdorff, $\pi : X \to X/T$ é um recobrimento de p folhas, com as folhas sobre os pontos de uma fibra sendo comutado por potências de T. Dessa forma, o conjunto $\{x \in \sigma_r;\ d_1(x) = T^k \circ d_2(x)\}$ é um aberto não vazio de σ_r. Como este conjunto também é fechado e σ_r é conexo, segue o resultado.

$\square$

Suponha $c \in S_r(X,T)$ uma (T,r)-cadeia não nula. Então $c = \theta(d)$, onde d é uma cadeia não nula, como no teorema 2.2.3. Então $d = a_1d_1 + a_2d_2 + \cdots + a_sd_s$, onde cada d_i é um r-simplexo singular com $d_i \neq d_j$ para $i \neq j$, cada $a_i \neq 0$ e tal que d_i e d_j pertencem a órbitas disjuntas. Segue que $\pi d_i \neq \pi d_j$ se $i \neq j$. Logo, $\Gamma(c) = \sum_{i=1}^{s} a_i(\pi d_i)$ é uma cadeia não nula.

Seja agora $\phi : \sigma_r \to X/T$ um r-simplexo singular. Como $\pi : X \to X/T$ é um recobrimento a p folhas com X conexo e localmente conexo por caminhos, e σ_r é simplesmente conexo, temos pelo teorema do levantamento que existe $\phi' : \sigma_r \to X$ tal que $\pi \circ \phi' = \phi$, o que mostra que Γ é sobrejetora. Consequentemente, $\Gamma_* : H_r(X,T) \to H_r(X/T, \mathbb{Z}_p)$ é um isomorfismo.

$\square$

Corolário 2.3.8. *Seja (X,T) seja um $\mathbb{Z}_p$-espaço, onde X é de Hausdorff, conexo e localmente conexo por caminhos. Para um número natural $n \geq 1$, suponha que $H_r(X, \mathbb{Z}_p) = 0$ para $1 \leq r \leq n$. Se $p = 2q$, com q ímpar, então $H_r(X/T, \mathbb{Z}_p) \neq 0$ para todo r, $1 \leq r \leq n+1$.*

Observação 2.3.9. *Pela observação anterior, o corolário acima continua válido quando p é par e $1 \leq r \leq 3$, ou quando p é qualquer e $r = 1$.*

Como visto acima, o $\mathbb{Z}_p$-índice de P. Pergher fornece uma ferramenta para mostrar que a homologia singular com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$ de espaços de órbitas de ações livres de $\mathbb{Z}_p$, sob certas condições homológicas, são não nulos.

2.4 Sobre a existência de aplicações $\mathbb{Z}_p$-equivariantes

Teorema 2.4.1. *Sejam (X,T) e (Y,S) $\mathbb{Z}_p$-espaços com $p = 2q$ e q ímpar. Se X é conexo por caminhos e Y é de Hausdorff, conexo e localmente conexo por caminhos, tal que para algum número natural $n \geq 1$, $H_{n+1}(Y/S, \mathbb{Z}_p) = 0$ e $f : (X,T) \to (Y,S)$ é uma aplicação equivariante, então existe um r, $1 \leq r \leq n$, tal que $H_r(X, \mathbb{Z}_p) \neq 0$.*

Dem.:

Suponha, por absurdo, que $H_r(X, \mathbb{Z}_p) = 0$ para $1 \leq r \leq n$. Então pela proposição 2.3.5, temos que $J(H_{n+1}(X,T)) \neq 0$. Consideremos o homomorfismo $f_* : H_{n+1}(X,T) \to H_{n+1}(Y,S)$. Pela proposição 2.3.3, segue que $J(f_*(H_{n+1}(X,T))) \neq 0$, e então $H_{n+1}(Y,S) \neq 0$, o que é impossível, pois pela proposição 2.3.8 $H_{n+1}(Y,S)$ é isomorfo a $H_{n+1}(Y/S, \mathbb{Z}_p) = 0$.

$\square$

Corolário 2.4.2. *Sejam (X,T) e (Y,S) $\mathbb{Z}_p$-espaços com $p = 2q$ e q ímpar. Suponha que*

(i) *X é conexo por caminhos e Y é de Hausdorff, conexo e localmente conexo por caminhos;*

(ii) *Para algum número natural $n \geq 1$, $H_j(X, \mathbb{Z}_p) = 0$ para todo $0 \leq j \leq n$;*

(iii) *$H_{n+1}(Y/S, \mathbb{Z}_p) = 0$.*

Então não existe aplicação equivariante $f : (X,T) \to (Y,S)$.

Corolário 2.4.3. *Considere S^m e S^n equipadas com a ação padrão de $\mathbb{Z}_p$, com $p = 2q$ com q ímpar, onde m, n são ímpares. Então se $m > n$, não existe aplicação equivariante de S^m em S^n.*

Observação 2.4.4. *O corolário acima está provado em [3], portanto o corolário* 2.4.2 *generaliza tal resultado para espaços mais gerais.*

Capítulo 3

Um homomorfismo índice associado à ações livres de grupos abelianos finitos.

3.1 A homologia de um espaço topológico X com coeficientes em um grupo abeliano G

A homologia de um espaço topológico X com coeficientes em um grupo abeliano G é um conceito amplamente conhecido na Topologia Algébrica. No entanto, a abordagem abaixo para a introdução deste conceito não é usual no que se refere a literatura padrão de Topologia Algébrica. Por outro lado, ela é extremamente conveniente para os nossos propósitos, ou seja, construir nosso G-índice.

Recordemos que o n-simplexo padrão, denotado por Δ_n, é dado por: $\Delta_n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum x_i = 1 \text{ e } x_i \geq 0\}$.

Sejam X um espaço topológico e Δ_n o n-simplexo padrão. Seja $C_n(X) = \{f :$

$\Delta_n \to X; f$ contínua $\}$.

Definição 3.1.1. *Definimos $S_r(X, G)$ como sendo o grupo $F(C_r(X), G)$ (Vide Cap. 0).*

$S_r(X, G)$ é denominado o grupo abeliano das n-cadeias singulares de X. Notemos que um elemento arbitrário de $S_r(X, G)$ é da forma $h_1\phi_1 + h_2\phi_2 + \cdots + h_k\phi_k$, onde $h_i \in G$ e $\phi_i \in C_r(X)$.

Lembremos que, da homologia usual, para cada $i = 0, 1, \ldots, r$, temos a definição do operador *i-ésima face*

$$\partial_i : C_r(X) \to C_{r-1}(X)$$

caracterizado por $\partial_i\phi(x_1, \ldots, x_{r-1}) = \phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{r-1})$.

Podemos então definir

$$\partial_i : S_r(X, G) \to S_{r-1}(X, G)$$

por $\partial_i(\sum_{j=1}^{l} g_j\phi_j) = \sum_{j=1}^{l} g_j \; \partial_i\phi$.

Com isso em mãos, podemos então definir o operador

$$\partial : S_r(X, G) \to S_{r-1}(X, G),$$

por $\partial(\sum_{j=1}^{l} g_j\phi_j) = \sum_{j=1}^{l} \partial(g_j\phi_j) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{r}((-1)^i \cdot g_j) \; \partial_i\phi_j$.

De forma análoga à homologia usual, prova-se que $\partial \circ \partial = 0$.

De fato, a prova quando se trabalha com a homologia com coeficientes em um anel R com unidade $1 \in R$ consiste em mostrar que, para qualquer elemento básico $\phi \in C_n(X)$, temos $\partial \circ \partial(\phi) = 0$. Portanto, verifica-se que $\partial \circ \partial(\phi)$ consistirá, a nível de cadeias, de uma soma de uma quantidade par de simplexos singulares, de tal sorte que cada simplexo aparece exatamente 2 vezes, uma vez afetado por 1, outra por -1 (aqui, -1 é o oposto aditivo do elemento unidade no anel R). No nosso caso, o argumento é o mesmo, trocando-se ϕ por $g\phi$, onde $g \in G$ (aqui não temos necessariamente elemento unidade $1 \in G$), 1 por g e -1 por $-g$, o oposto aditivo de g em G. Sendo G um grupo abeliano, ele é um $\mathbb{Z}$-módulo; assim, a maneira padrão de se introduzir a homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$, considerado como um anel comutativo com unidade. A seguir, constrói-se um novo complexo de cadeias, tensorializando-se o complexo de cadeias com coeficientes em $\mathbb{Z}$, com o $\mathbb{Z}$-módulo G, e considerando-se $\partial \otimes Id$ no lugar de ∂

Definição 3.1.2. *Como na homologia usual, definimos:*

$Z_r(X,G) = \{c \in S_r(X,G);\ \partial(c) = 0\}$, *o conjunto dos r-ciclos;*

$B_r(X,G) = \{\partial(c);\ c \in S_{r+1}(X,G)\}$, *o conjunto dos r-bordos;*

Podemos então definir $H_r(X,G) = \dfrac{Z_r(X,G)}{B_r(X,G)}$, *o r-ésimo grupo de homologia de X com coeficientes em G. Note que $H_r(X,G)$ é um grupo abeliano.*

Seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Então f induz um homomorfismo de cadeias $f_\# : S_r(X,G) \to S_r(Y,G)$, dado por

$$f_\#(h_1\phi_1 + h_2\phi_2 + \cdots + h_k\phi_k) := h_1(f \circ \phi_1) + h_2(f \circ \phi_2) + \cdots + h_k(f \circ \phi_k)$$

para todo r, o que induz um homomorfismo

$$f_* : H_r(X,G) \to H_r(Y,G)$$

para cada r.

3.2 A homologia G-equivariante

Sejam G um grupo abeliano e $\chi : G \times X \to X$ uma ação livre e contínua sobre um espaço topológico X.

Fixado $g \in G$, a função $\chi_g : X \to X$ dada por $\chi_g(x) = \chi(g,x)$ é um homeomorfismo. Assim, podemos considerar o homomorfismo induzido $\chi_{g\#} : S_r(X,G) \to S_r(X,G)$.

Definição 3.2.1. *Definimos* $S_r(X,\chi) = \{c \in S_r(X,G);\ \chi_{g\#}(c) = c\ \forall g \in G\} \subset S_r(X,G)$. *Os elementos de $S_r(X,\chi)$ são chamados (χ,r)-cadeias.*

Por simplicidade, denotaremos $\chi_{g_{\#}}$ também por χ_g.

Proposição 3.2.2. *$S_r(X,\chi)$ é um subgrupo de $S_r(X,G)$ e*

$$\partial(S_r(X,\chi)) \subset S_{r-1}(X,\chi).$$

Dem.:

Sejam $c, d \in S_r(X,\chi)$. Para cada $g \in G$, como χ_g é um homomorfismo, temos

$$\chi_g(c+d) = \chi_g(c) + \chi_g(d) = c + d,$$

$$\chi_g(-c) = -\chi_g(c) = -c.$$

Logo, $c + d \in S_r(X,\chi)$ e $-c \in S_r(X,\chi)$. Portanto, $S_r(X,\chi)$ é um subgrupo de $S_r(X,G)$.

Também temos que

$$\chi_g(\partial c) = \partial(\chi_g(c)) = \partial(c).$$

Logo, $\partial(S_r(X,\chi)) \subset S_{r-1}(X,\chi)$, e portanto $S_*(X,\chi)$ é um novo complexo de cadeias, ou seja, um subcomplexo de $S_*(X,G)$.

$\square$

Agora podemos definir

$Z_r(X,\chi) = \{c \in S_r(X,\chi);\ \partial(c) = 0\}$ o conjunto dos (χ,r)-ciclos;

$B_r(X,\chi) = \{\partial(c);\ c \in S_{r+1}(X,\chi)\}$ o conjunto dos (χ,r)-bordos;

e

$H_r(X,\chi) = \dfrac{Z_r(X,\chi)}{B_r(X,\chi)}$ o r-ésimo grupo de homologia G-equivariante associado ao G-espaço (X,χ). Em outras palavras, $H_r(X,\chi)$ é a homologia do complexo de cadeias

$$\cdots \longrightarrow S_{r+1}(X,\chi) \xrightarrow{\partial} S_r(X,\chi) \xrightarrow{\partial} S_{r-1}(X,\chi) \longrightarrow \cdots$$

Nosso G-índice será obtido trabalhando-se em $S_r(X,\chi)$. No entanto, a caracterização acima dos elementos de $S_r(X,\chi)$ não é adequada aos nossos propósitos. A caracterização que nos interessa será dada pelo teorema abaixo.

Teorema 3.2.3. *Considere a aplicação de cadeias $\theta_G : S_r(X, G) \to S_r(X, G)$, dada por $\theta_G(c) = \sum_{g \in G} \chi_g(c)$. Então $S_r(X, \chi) = \theta_G(S_r(X, G))$.*

Dem.:

Seja $c \in S_r(X, G)$. Mostremos que $\theta_G(c) \in S_r(X, \chi)$, ou seja, que para todo $h \in G$, vale $\chi_h(\theta_G(c)) = \theta_G(c)$.

Dado $h \in G$, $\chi_h \circ \theta_G = \chi_h \circ (\sum_{g \in G} \chi_g) = \sum_{g \in G} \chi_h \circ \chi_g = \sum_{g \in G} \chi_{h*g} = \sum_{h*g \in G} \chi_{h*g} = \theta_G$.
Logo, $\theta_G(S_r(X, G)) \subset S_r(X, \chi)$.

Provemos agora a inclusão contrária.

Seja $c \in S_r(X, \chi)$. Usaremos a representação de c como soma formal, $c = g_1 c_1 + g_2 c_2 + \cdots + g_s c_s$, com $g_i \in G$, $c_i : \sigma_r \to X$ contínua, $0 \leq i \leq r$ e $c_i \neq c_j$ se $i \neq j$.

Mostraremos primeiro que χ_g induz ação livre de G sobre o conjunto $A = \{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$, dada por $\chi'(g, c_i) = \chi_g \circ c_i$.

Como a ação de G em X é livre e contínua, χ_g é homeomorfismo para todo $g \in G$.

Dado $g \in G$, como χ_g é homeomorfismo, $\chi_g \circ c_i \neq \chi_g \circ c_j$ para $i \neq j$.

Assim, como $\chi_g(c) = c$,

$$\sum_{i=1}^{s} g_i c_i = c = \chi_g(c) = \chi_g(\sum_{i=1}^{s} g_i c_i) = \sum_{i=1}^{s} g_i(\chi_g \circ c_i),$$

e $A = \{\chi_g \circ c_i; i = 1, \ldots, s\}$.

Logo, a função $\chi'_g : A \to A$ dada por $\chi'_g(c_i) = \chi_g \circ c_i$ está bem definida para todo $g \in G$.

Como a ação de G em X é livre, fixado $z \in \sigma_r$, temos que $\chi_g(c_i(z)) \neq c_i(z)$ para todo $g \in G$ e $c_i \in A$. Logo, χ induz uma ação livre χ' de G em A.

Temos então l órbitas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ desta ação, onde $p = |G|$ e $pl = s$.

Se c_i e c_j pertencem à mesma órbita, mostraremos que $g_i = g_j$.

Como c_i e c_j pertencem à mesma órbita, existe $g \in G$ tal que $\chi'_g(c_i) = c_j$. Como $\chi_g(c) = c$ e c_i é o único elemento de B que é levado em c_j por χ'_g, segue que

$g_jc_j = \chi_{g\#}(g_ic_i) = g_i(\chi_g \circ c_i) = g_ic_j$ o que implica que $g_i = g_j$.

Escolhemos um elemento de cada órbita, digamos $c_{i1} \in \beta_1, c_{i2} \in \beta_2, \ldots, c_{il} \in \beta_l$.

Tomando $d = g_{i1}c_{i1} + g_{i2} + \cdots + g_{il}c_{il}$, teremos que

$$c = \theta_G(d),$$

pois $\theta_G(d) = \sum_{g\in G} \chi_g(d) = \sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{l} \chi_g(g_{ij}c_{ij}) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{g\in G} g_{ij}(\chi_g \circ c_{ij}) = c.$

Assim, todo elemento de $c \in S_r(X,\chi)$ pode ser escrito na forma $c = \theta_G(d)$, onde $d = g_1d_1 + g_2d_2 + \cdots + g_ld_l \in S_r(X,G)$ e os d_i's pertencem a órbitas disjuntas.

□

Observação 3.2.4. *Lembramos que a representação $c = \theta_G(d)$ onde $d = g_1d_1 + g_2d_2 + \cdots + g_ld_l \in S_r(X,G)$ e os d_i's pertencem a órbitas disjuntas não é única, mas pela demonstração da proposição acima, temos que se d' é tal que $c = \theta_G(d')$ onde d' satisfaz as condições estabelecidas no teorema, então $d' = g_1\chi_{h_1} \circ d_1 + g_2\chi_{h_2} \circ d_2 + \cdots + g_l\chi_{h_l} \circ d_l$ onde $h_j \in G$, $j = 1, \ldots, l$.*

3.3 Construção do homomorfismo G-índice

Nesta seção apresentamos a construção do nosso G-índice, generalizando a construção de P. Pergher. A sistemática será idêntica: inicialmente, o homomorfismo G-índice $J : H_r(X,\chi) \to G$ será construído a nível de (χ, r)-ciclos usando recorrência em r, de tal forma que $J(c) = 0$ se $c \in B_r(X,\chi)$.

Começamos então definindo J para $r = 0$. Seja $c = \theta(d) \in Z_0(X,\chi)$, com $d = g_1d_1 + g_2d_2 + \cdots + g_ld_l$, $g_i \in G$ como no teorema 3.2.3. Definimos $J(c) = g_1 + g_2 + \cdots + g_l$.

Pela observação 3.2.4, esta definição é independente da escolha de d tal que $c = \theta(d)$ como no teorema 3.2.3.

Proposição 3.3.1. *A função $J : Z_0(X,\chi) \to G$ é um G-homomorfismo tal que $J(c) = 0$ para todo $c \in B_0(X,\chi)$.*

Dem.:

Provemos que J é homomorfismo.

Sejam $c, d \in Z_r(X,\chi)$, $c = \theta(\sum_{i=1}^{k} g_i c_i)$ e $d = \theta(\sum_{j=1}^{l} h_j d_j)$.

Então representando $c+d$ como no teorema 3.2.3, $c+d = \theta(\sum_{p=1}^{s} a_p f_p)$, onde nesta notação está englobado o caso em que eventualmente $c_i = d_j$ para algum i, j, e neste caso $c_i = d_j = f_p$ e $a_p = g_i + h_j$ para algum p.

Portanto, como G é abeliano, $J(c+d) = \sum_{p=1}^{s} a_p = (\sum_{i=1}^{k} g_i) + (\sum_{j=1}^{l} h_j) = J(c) + J(d)$.

Vejamos agora que $J(c) = 0$ para todo $c \in B_0(X,\chi)$.

De fato, se $c \in Z_0(X,\chi)$ satisfaz $c = \partial w$, com $w \in S_1(X,\chi)$, então pelo teorema 3.2.3 $w = \theta_G(b)$ para algum b, e portanto $c = \theta_G(\partial(b))$.

Se $b = \sum_{i=1}^{k} g_i b_i$, onde b_i, $i = 1, \ldots, k$, representam caminhos em X, então $\partial b = \sum_{i=1}^{k}(g_i b_i(1) - g_i b_i(0))$.

Isto implica que $J(c) = J(\theta(\partial(b))) = J(\theta(\sum_{i=1}^{k}(g_i b_i(1) - g_i b_i(0)))) = \sum_{i=1}^{k} J(\theta(g_i b_i(1) - g_i b_i(0))) = 0$.

□

A conclusão é que, por definir um homomorfismo $J : Z_0(X,\chi) \to G$, com $J(B_0(X,\chi)) = 0$, J define um homomorfismo $J : \frac{Z_0(X,\chi)}{B_0(X,\chi)} = H_0(X,\chi) \to G$.

Prosseguindo na construção do nosso homomorfismo G-índice, suponha que $J : Z_j(X,\chi) \to G$ esteja construído, para $0 \le j \le r$, de tal sorte que $J(B_j(X,\chi)) = 0$ para $0 \le j \le r$.

Para tornar as idéias mais claras, em certos momentos indexaremos J por J_r para expressar J no nível r.

Como a construção será recursiva, para definir $J : Z_{r+1}(X,\chi) \to G$, a nossa estratégia será definir $J(c), c \in Z_{r+1}(X,\chi)$ em termos de $J : Z_r(X,\chi) \to G$, e para tanto construiremos um operador conveniente $\Psi : Z_{r+1}(X,\chi) \to Z_r(X,\chi)$ de tal maneira que nosso J no nível $r+1$ será dado por $J_{r+1}(c) = J_r(\psi(c))$.

Um candidato natural seria $\Psi = \partial$, mas $c \in Z_r(X, \chi)$, isto é, $\partial(c) = 0$ e então $J(c) = J(\partial(c)) = J(0) = 0$ para todo c, o que não serve aos nossos propósitos. Nossa estratégia será então definir Ψ em termos de $\partial(d)$, onde $c = \theta(d)$ como no teorema 3.2.3.

Para construir seu $\mathbb{Z}_2$-índice, C. T. Yang em [9] usou esta estratégia, notando que se $c \in Z_{r+1}(X, T)$, onde T é uma involução livre, então $c = d + T(d)$ (como no teorema 3.2.3); então pode-se mostrar que $\partial(d) \in Z_r(X, T)$. Yang então definiu $J_{r+1}(c) = J_r(\partial(d))$. Em seu artigo [7], P. Pergher também usou esta estratégia, embora para $\mathbb{Z}_p$, $p > 2$, não ocorre o mesmo fato que ocorre para $p = 2$; mais precisamente, se T é um homomorfismo de período p com $p > 2$, e se $c \in Z_{r+1}(X, T)$, então também, como no teorema 3.2.3, $c = \theta(d)$; no entanto, neste caso $\partial(d)$ não necessariamente pertence a $S_r(X, T)$. A estratégia de P. Pergher foi então *modificar* o $(r+1)$-ciclo através de um operador $\Psi : S_{r+1}(X, T) \to S_r(X, T)$ de tal sorte que se $c \in Z_{r+1}(X, T)$, então $\Psi(c)$ esteja em $Z_r(X, T)$.

A forma do operador Ψ de P. Pergher é $\Psi(c) = (T + 2T^2 + \cdots + (p-1)T^{p-1})(\partial(d))$, conforme visto atrás. Para definir nosso G-índice, usaremos esta estratégia, e a dificuldade será obter um análogo deste Ψ (para $\mathbb{Z}_p$) para grupos abelianos finitos mais gerais. Mais precisamente, trabalharemos na direção de obter um operador $\psi : S_r(X, \chi) \to S_r(X, \chi)$ de sorte que, se $c \in Z_{r+1}(X, \chi)$ com $c = \theta(d)$, então $\psi(\partial(d)) \in Z_r(X, \chi)$.

Abaixo daremos um *sketch* informal da argumentação que nos leva à idéia de construção de nosso Ψ.

Como não exigimos nada de X, além de ser um espaço topológico em que G atua continuamente e livremente, e queremos que, para todo $c \in Z_r(X, \chi)$, com $c = \theta(d)$, valha $\chi_g(\psi(\partial(d))) = \psi(\partial d)$ para todo $g \in G$, vamos supor que ψ_G seja da forma $\psi_G := \sum_{g \in G} a_g \chi_g$, onde $a_g \in \mathbb{Z}$, pensando na ação usual de $\mathbb{Z}$ em grupos, no caso $\mathbb{Z}$ atuando no grupo $Z_r(X, \chi)$.

Lembremos que um grupo abeliano finito G pode ser decomposto de forma única na forma $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_s$, onde cada G_i é um subgrupo cíclico de G tais que $|G_i|$ divide $|G_{i+1}|$ (vide por exemplo Algebra, Thomas W. Hungerford, pg 76) . Assim, se denotarmos $|G_i| = p_i$, a ordem de qualquer elemento de G divide p_s, e, consequentemente, p_s é um múltiplo da ordem de qualquer elemento de $S_r(X, \chi)$. Por isso, ao invés de supor $a_g \in \mathbb{Z}$, podemos supor $a_g \in \mathbb{Z}_{p_s}$. Esta decomposição de G e este fato subsequente serão cruciais na obtenção de nosso Ψ; notaremos que isto é dispensável quando $G = \mathbb{Z}_p$.

Como queremos $\chi_g(\psi(\partial(d))) = \psi(\partial(d))$ para todo $g \in G$, uma primeira tentativa seria exigir que $\chi_g \circ \psi = \psi$ para todo $g \in G$, o que é um fato mais forte que o fato acima. Mas essa equação tem como conjunto solução $\{\psi = m\theta,\ m \in \mathbb{Z}_{p_s}\}$. Assim, para $c = \theta(d) \in Z_r(X, \chi)$, $\psi(\partial(d)) = m\theta(\partial(d)) = m\partial(\theta(d)) = m\partial(c) = 0$, que não serve para nossos propósitos.

Inspirado nesse fracasso, propomos a seguinte modificação ao sistema acima:

$$\chi_g(\psi(\partial(d))) = \psi(\partial(d)) - m_g\theta(\partial(d)), \qquad g \in G,$$

onde deveremos encontrar os valores convenientes de $m_g \in \mathbb{Z}_{p_s}$ em termos de g.

Dada a decomposição $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_s$, seja g_i gerador de G_i, para $1 \leq i \leq s$. Então se $g \in G$, temos $g = n_1 g_1 + n_2 g_2 + \cdots + n_s g_s$ para certos $n_i \in \mathbb{Z}_{p_i}$; como p_i divide p_s, sem perda de generalidade podemos supor $n_i \in \mathbb{Z}_{p_s}$.

Então

$$\begin{aligned}
\chi_g(\psi(\partial(d))) &= \chi_{(n_1g_1+n_2g_2+\cdots+n_sg_s)}(\psi(\partial(d))) = \\
&= (\chi_{n_1g_1} \circ \chi_{n_2g_2} \circ \cdots \circ \chi_{n_sg_s})(\psi(\partial(d))) = \\
&= (\chi_{n_1g_1} \circ \chi_{n_2g_2} \circ \cdots \circ \chi_{n_{s-1}g_{s-1}})(\chi_{n_sg_s}\psi(\partial(d))) = \\
&= (\chi_{n_1g_1} \circ \chi_{n_2g_2} \circ \cdots \circ \chi_{n_{s-1}g_{s-1}})(\psi(\partial(d)) - n_s m_{g_s}\theta(\partial d)) = \\
&= \psi(\partial(d)) - (\textstyle\sum_{i-1}^{s} n_i m_{g_i})\theta(\partial(d)).
\end{aligned}$$

Assim, precisamos apenas definir os $m_{g_i},\ i = 1, \ldots, s$.

Como $p_i g_i = 0$, para $1 \leq i \leq s$, teremos que

$$Id(\psi(\phi(\partial_d))) = \chi_e(\psi(\phi(\partial_d))) = \chi_{p_ig_i}(\psi(\phi(\partial_d))) = \psi(\partial(d)) - p_i m_{g_i}\theta(\partial(d)),$$

e portanto deveremos ter $p_i m_{g_i} = 0$ em $\mathbb{Z}_{p_s}$. Logo, $m_{g_i} = p_s/p_i$.

Temos então o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases}\chi_g \circ \psi = \psi - m_g\theta, \qquad g \in G,\end{cases}$$

onde $m_g = (\sum_{i-1}^{s} n_i m_{g_i})$ se $g = n_1g_1 + n_2g_2 + \cdots + n_sg_s$.

Isto é, para cada $g \in G$,

$$\sum_{h\in G} a_h\chi_{gh} = \sum_{h\in G} a_h\chi_h - \sum_{h\in G} m_g\chi_h$$

ou seja,

$$\sum_{h\in G}(a_h + m_g)\chi_{gh} = \sum_{h\in G} a_h\chi_h$$

isto é,

$$a_{g+h} = a_h + m_g = a_g + m_h$$

para todo $g, h \in G$.

Tomando-se o valor inicial $a_e = 0$, esse sistema tem como solução única $a_g = m_g$ para todo $g \in G$.

Temos então que

$$\psi_G := \sum_{g\in G} m_g\chi_g,$$

com $m_g \in \mathbb{Z}_{p_s}$ tal que se $g = n_1g_1 + n_2g_2 + \cdots + n_sg_s$, então $m_g = \sum_{j=1}^{s} n_i \frac{p_s}{p_i}\ mod_{p_s}$. □

Resumindo: considere a decomposição de $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_s$, onde G_i é um subgrupo cíclico de G gerado por g_i, com $|G_i| = p_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, s$, e p_i divide p_{i+1}.

Definimos $\psi := \sum_{g\in G} m_g\chi_g$ com $m_g \in \mathbb{Z}_{p_s}$, onde se $g = n_1g_1 + n_2g_2 + \cdots + n_sg_s$, então $m_g = \sum_{j=1}^{s} n_i \frac{p_s}{p_i}\ mod_{p_s}$. Este homomorfismo Ψ é tal que, dado $\theta(d) \in Z_r(X, \chi)$, $\psi(\partial(d)) \in Z_{r-1}(X, \chi)$.

Exemplo 3.3.2. *Por exemplo, seja $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$. Vamos determinar ψ.*

Neste caso, $s = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $G_1 = \mathbb{Z}_2$ e $G_2 = \mathbb{Z}_4$. Também $\frac{p_2}{p_1} = 2$ e $\frac{p_2}{p_2} = 1$.

1. $(0,0) = 0(1,0) + 0(0,1)$, *e portanto,* $m_{(0,0)} = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 0 \mod 4$

2. $(0,1) = 0(1,0) + 1(0,1)$, *e portanto,* $m_{(0,1)} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \mod 4$

3. $(0,2) = 0(1,0) + 2(0,1)$, *e portanto,* $m_{(0,2)} = 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 2 \mod 4$

4. $(0,3) = 0(1,0) + 1(0,3)$, *e portanto,* $m_{(0,3)} = 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 3 \mod 4$

5. $(1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$, *e portanto,* $m_{(1,0)} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2 \mod 4$

6. $(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$, *e portanto,* $m_{(1,1)} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3 \mod 4$

7. $(1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)$, *e portanto,* $m_{(1,2)} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0 \mod 4$

8. $(1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)$, *e portanto,* $m_{(1,3)} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 1 \mod 4$

Logo, $\psi = 1\chi_{(0,1)} + 2\chi_{(0,2)} + 3\chi_{(0,3)} + 2\chi_{(1,0)} + 3\chi_{(1,1)} + 1\chi_{(1,3)}$.

Com a ajuda do operador ψ acima, continuemos a construção de J. Supondo J definido até o nível r, definimos J no nível $r+1$ da seguinte forma dado $c \in Z_{r+1}(X,\chi)$, com $c = \theta(d)$ como na proposição 3.2.3, então $\psi(\partial(d)) \in Z_r(X,\chi)$. Portanto, podemos usar uma definição recursiva: $J(c) = J(\psi(\partial(d)))$.

Proposição 3.3.3. *Se* $c \in Z_{r+1}(X,\chi)$, *com* $c = \theta(d)$, *então* $J(\psi(\partial(d)))$ *independe da escolha do representante* d. *Além do mais,* J *é o homomorfismo nulo em* $B_r(X,\chi)$.

Dem.:

Precisamos provar que, dado $c \in Z_r(X,\chi)$, se $c = \theta(d) = \theta(d')$ como no teorema 3.2.3, pela observação 3.2.4, temos que se $d = g_1d_1 + g_2d_2 + \cdots + g_sd_s$, então podemos escrever $d' = g_1\chi_{h_1}d_1 + g_2\chi_{h_2} + \cdots + g_s\chi_{h_s}d_s$. Basta então provar que, se existem duas cadeias $A, B \in S_r(X,G)$ tais que $\theta(A+B) = \theta(A+\chi_hB) \in Z_r(X,\chi)$, então $J(\psi(\partial(A+B))) = J(\psi(\partial(A+\chi_hB)))$, $r \geq 1$. De fato, existe uma sequência finita de cadeias começando em d e terminando em d', de tal sorte que duas consecutivas diferem por uma operação do tipo $A+B \mapsto A+\chi_h(B)$.

Lembremos que $\psi\chi_g = \chi_g\psi = \psi - m_g\theta$. Assim,

$$\begin{aligned}
J(\psi(\partial(A+B))) - J(\psi(\partial(A+\chi_h B))) &= J(\psi(\partial(A+B)) - \psi(\partial(A+\chi_h B))) \\
&= J(\psi(\partial(B-\chi_h B))) \\
&= J(\partial(\psi(B-\chi_h B))) \\
&= J(\partial(\psi(B) - \psi\circ\chi_h(B))) \\
&= J(\partial(\psi(B) - (\psi - m_h\theta)(B))) \\
&= J(\partial(\theta(m_h B))) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois supomos J bem definido em $Z_{r-1}(X,\chi)$ e $J(B_{r-1}(X,\chi)) = 0$.

□

A proposição mostra que J define um homomorfismo bem definido em $H_r(X,\chi) = \dfrac{Z_r(X,\chi)}{B_r(X,\chi)}$.

Proposição 3.3.4. *Sejam (X,χ), (Y,χ') G-espaços e seja $f : (X,\chi) \to (Y,\chi')$ uma aplicação equivariante. Então para todo (χ,r)-ciclo $c \in Z_r(X,\chi)$, temos que $J(f*([c])) = J([c])$.*

Dem.:

Para tanto, provaremos o resultado a nível de (χ,r)-ciclos por indução em r.

Como f é equivariante, temos que $f_\#\theta_\chi = \sum_{g\in G} f_\#\chi_g = \sum_{g\in G}\chi'_g f_\# = \theta_{\chi'}f_\#$ e $f_\#\Psi_\chi = \sum_{g\in G} f_\#(m_g\chi_g) = \sum_{g\in G} m_g\chi'_g f_\# = \Psi_{\chi'}f_\#$.

Para $r=0$, seja $c = \theta(d) \in Z_0(X,\chi)$, onde $d = a_1d_1 + a_2d_2 + \cdots + a_sd_s$ como no teorema 3.2.3. Então $J(f_\#(c)) = J(f_\#(\theta(d))) = J(\theta(f_\#(d))) = J(\theta(f_\#(\sum_{i=1}^{s} a_id_i)))$.

Note que podem ocorrer termos $f(d_i) = f(d_j)$ com $i \neq j$. Denotando $A = \{1,2,\ldots,s\}$ e $K_j = \{k \in A;\ f(d_k) = f(d_j)\}$, temos que $f_\#(d) = \sum_{j\in J} g_jd_j$, onde $J \subset A$ é tal que se $i,j \in J$ com $i \neq j$, então $f(d_i) \neq f(d_j)$, e $g_j = \sum_{k\in K_j} a_k$. Portanto,

$$J(\theta(f_\#(d))) = \sum_{j\in J} g_j = \sum_{i=1}^{s} a_i = J(c).$$

Supondo o resultado válido para $r \geq 0$, provemos para $r+1$.

Dado $c = \theta(d) \in Z_{r+1}(X, \chi)$, calculemos $J(\theta(d))$.

$$
\begin{aligned}
J(f_{\#}(c)) &= J(f_{\#}(\theta(d))) \\
&= J(\theta(f_{\#}(d))) \\
&\stackrel{def}{=} J(\psi(\partial(f_{\#}(d)))) \\
&= J(f_{\#}(\psi(\partial(d)))) \\
&\stackrel{hip}{=} J(\psi(\partial(d))) = J(\theta(d)) = J(c).
\end{aligned}
$$

□

Como uma aplicação do nosso G-índice, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.3.5. *Seja X um G-espaço de Hausdorff conexo por caminhos e suponha que $|G| = 2q$, com q ímpar. Se existe um inteiro positivo n tal que $H_r(X, G) = 0$, $1 \leq r \leq n$, então $H_r(X, \chi) \neq 0$, $0 \leq r \leq n+1$*

Antes de demostrar o teorema, necessitaremos do seguinte lema técnico:

Lema 3.3.6. *Temos*

I) $\theta \circ \chi_g = \chi_g \circ \theta = \theta$;

II) $\theta \circ \theta = 0$;

e

III) $\theta \circ (Id - \chi_g) = (Id - \chi_g) \circ \theta = 0, \ \forall g \in G$.

Dem.:

Para provar I, note que $\theta\chi_g = \sum\limits_{h \in G} \chi_h \circ \chi_g = \sum\limits_{h \in G} \chi_{h+g} = \sum\limits_{h \in G} \chi_{g+h} = \sum\limits_{h \in G} \chi_g \circ \chi_h = \chi_g \circ (\sum\limits_{h \in G} \chi_h) = \chi_g \circ \theta$ e $\chi_g \circ \theta = \sum\limits_{h \in G} \chi_g \circ \chi_h = \sum\limits_{h \in G} \chi_{g+h} = \theta$.

Para provar II, note que $\theta \circ \theta = \theta \circ (\sum\limits_{g \in G} \chi_g) = \sum\limits_{g \in G} \theta \circ \chi_g = \sum\limits_{g \in G} \theta = |G|\theta = 0$.

Para provar III, note que $(Id - \chi_g) \circ \theta = \theta \circ (Id - \chi_g) = \theta \circ Id - \theta \circ \chi_g = \theta - \theta = 0$.

Prova do Teorema 3.3.5

Para provarmos o resultado, construiremos r-cadeias especiais $c_r \in S_r(X,G)$, $0 \leq r \leq n+1$, de modo análogas ás consideradas por T. Kobayashi em [3] e depois por P. Pergher em [7].

Seja x_0 um ponto de X fixado. Representaremos por c_0 a 0-cadeia $g_s x_0$. Como X é conexo por caminhos, existe um caminho ligando $\chi_{g_s}(c_0)$ a c_0, cuja 1-cadeia correspondente será denotada por c_1.

Como $\partial(\theta(g_s c_1)) = \theta(gs\partial(c_1)) = \theta(g_s c_1(1) - g_s c_1(0)) = \theta(g_s c_0 - g_s \chi_{g_s}(c_0)) = \theta \circ (Id - \chi_{g_s})(c_0) = 0$, e $H_1(X,G) = 0$, segue que existe $c_2 \in S_2(X,G)$ tal que $\partial(c_2) = \theta(g_s c_1)$.

Prosseguindo por indução, suponhamos que para algum j com $0 \leq j \leq n$, $c_0, c_1, \ldots, c_j$ estejam construídos de forma que $\partial(c_j) = \theta(c_{j-1})$ se j é par e $\partial(c_j) = (Id - \chi_{g_s})(c_{j-1})$ se j for ímpar.

Se j é par, temos que $\partial((Id - \chi_{g_s})(c_j)) = (Id - \chi_{g_s})(\partial(c_j)) = (Id - \chi_{g_s})(\theta(c_{j-1})) = 0$, e como $H_j(X,G) = 0$, existe $c_{j+1} \in S_{j+1}(X,G)$ tal que $\partial(c_{j+1}) = (Id - \chi_{g_s})(c_j)$. Analogamente, se j for ímpar, temos que $\partial(\theta(c_j)) = \theta(\partial(c_j)) = \theta((Id - \chi_{g_s})(c_j)) = 0$, e então existe $c_{j+1} \in S_{j+1}(X,G)$ tal que $\partial(c_{j+1}) = \theta(c_j)$.

Desse modo, obtemos j-cadeias c_j, $0 \leq j \leq n+1$, satisfazendo $\partial(c_j) = \theta(c_{j-1})$ se j é par e $\partial(c_j) = (Id - \chi_{g_s})(c_{j-1})$ se j é ímpar.

Nosso próximo passo será mostrar que as j-cadeias c_j, $0 \leq j \leq n+1$, são tais que $J(\theta(c_j)) \neq 0$, $0 \leq j \leq n+1$. Para tanto, precisaremos dos seguintes resultados:

Lema 3.3.7. *Se $|G| = 2p$, com p ímpar, e $p_s = 2q$, com q ímpar, então $\theta \circ \psi = q\theta$.*

Dem.:

Temos $\theta \circ \psi = \theta(\sum_{g \in G} m_g \chi_g) = \sum_{g \in G} m_g \theta \circ \chi_g = \sum_{g \in G} m_g \theta = (\sum_{g \in G} m_g)\theta$.

Por outro lado,

$$\sum_{g \in G} m_g = \sum_{0 \leq n_i < p_i} (n_1 m_1 + n_2 m_2 + \cdots + n_s m_s)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{p_j(p_j-1)}{2} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{s} p_i \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{s} \frac{p_1 p_2 \dots p_s (p_j - 1)}{2}$$
$$= p_1 p_2 \dots p_{s-1} \frac{p_s(p_s-1)}{2}$$
$$= p_1 p_2 \dots p_{s-1} q(2q-1).$$

Como $p_1, p_2, \dots, p_{s-1}$ são ímpares, temos que

$p_1 p_2 \dots p_{s-1} q(2q-1) = (2k+1)q \cong q \mod p_s$

Portanto, $\psi \circ \theta = q\theta$.

Lema 3.3.8. $q^2 \cong q \mod 2q$

Dem.:

Como q é ímpar, temos que $q = 2k+1$ para algum k, e então $q^2 = (2k+1)q \cong q \mod 2q$.

□

Com estes resultados em mãos, podemos completar a demonstração do teorema 3.3.5. Para $j = 0$,

$$J(\theta(c_0)) = J(\theta(g_s x_0)) = g_s \neq e,$$

e portanto, $H_0(X, \chi) \neq 0$.

Para $j = 1$,

$$J(\theta(c_1)) = J(\psi(\partial(c_1))) = J(\psi((Id - \chi_{g-s})(c_0))) = J(\theta(c_0)) = g_s \neq e,$$

e, portanto, $H_1(X, \chi) \neq 0$.

Para $j = 2$,

$$J(\theta(c_1)) = J(\psi(\partial(c_2))) = J(\psi(\theta(c_1))) = J(q\theta(c_1)) = qJ(\theta(c_1)) = qg_s \neq e,$$

e, portanto, $H_2(X, \chi) \neq 0$.

Suponha, por indução, que $J(\theta(c_j)) \neq e$ para $0 \leq j \leq k$, onde $2 \leq k \leq n$ e que $J(\theta(c_j)) = qg_s$ para j maior que 1.

Se k é ímpar,

$$J(\theta(c_{k+1})) = J(\psi(\partial(c_{k+1}))) = J(\psi((Id - \chi_{g_s})(c_k))) = J(\theta(c_k)) = qg_s \neq e,$$

e, portanto, $H_{k+1}(X, \chi) \neq 0$.

Se k é par,

$$J(\theta(c_{k+1})) = J(\psi(\partial(c_{k+1}))) = J(\psi(\theta(c_k))) = J(qc_k) = qJ(c_k) = q(qg_s) = q^2 g_s = qg_s \neq e,$$

e, portanto, $H_{k+1}(X, \chi) \neq 0$.

Logo, o resultado segue.

□

Como um corolário da aplicação acima, temos o seguinte teorema tipo Borsuk-Ulam, o qual generaliza o resultado tipo Borsuk-Ulam obtido por P. Pergher em [7], concernente a $\mathbb{Z}_p$-aplicações, para o contexto mais geral de G-ações com G abeliano finito.

Teorema 3.3.9. *Sejam (X, χ) e (Y, χ') G-espaços, com $|G| = 2q$ e q ímpar. Suponha que*

1. *X é conexo por caminhos e Y é de Hausdorff, conexo.*
2. *para algum $n \geq 1$, $H_j(X, G) = 0$ para $0 \leq j \leq n$,*
3. *$H_{n+1}(Y/G, G) = 0$.*

Então não existe aplicação equivariante $f : (X, \chi) \to (Y, \chi')$.

Dem.:

Suponha, por absurdo, que exista uma aplicação equivariante $f : (X, \chi) \to (Y, \chi')$. Como $H_j(X, G) = 0$ para $0 \leq j \leq n$, do teorema 3.3.5, segue que

$J(H_{n+1}(X,\chi)) \neq 0$. Consideremos o homomorfismo induzido pela aplicação equivariante f, $f_* : H_{n+1}(X,\chi) \to H_{n+1}(Y,\chi')$.

Usaremos agora o fato de que $H_r(Y,\chi)$ é isomorfo a $H_r(Y/G,G)$. Tal fato está provado para $G = \mathbb{Z}_p$ em [7], e daremos uma prova disso para G abeliano finito logo a frente.

Pela proposição 3.3.4, $J(f_*(H_{n+1}(X,\chi))) \neq 0$, e portanto $H_{n+1}(Y,\chi') \neq 0$. Mas isso é impossível, pois $H_{n+1}(Y,\chi')$ é isomorfo a $H_{n+1}(Y/G,G) = 0$.

□

Proposição 3.3.10. *Seja (X,χ) um G-espaço de Hausdorff conexo e localmente conexo por caminhos. Então $H_r(X,\chi)$ é isomorfo a $H_r(X/\chi,G)$*

Dem.:

Considere $\Gamma : S_r(X,\chi) \to S_r(X/G,G)$ dado por $\Gamma(c) = \pi_\#(d)$, onde $\pi : X \to X/G$ é a aplicação quociente e $c = \theta(d)$, tomado como no teorema 3.2.3.

Como $\pi \circ \chi_g = \pi$ para todo $g \in G$, Γ independe da escolha de d. Γ é uma aplicação de cadeias.

Provemos que Γ é injetora. Para isto, precisamos primeiro provar o seguinte lema:

Lema 3.3.11. *Se σ_r é o r-simplexo padrão, e $d_1, d_2 : \sigma_r \to X$ são r-simplexos singulares, tais que $\pi d_1 = \pi d_2$, então existe $g \in G$ tal que $d_1 = \chi_g d_2$.*

Dem.:

Seja $p = |G|$.

Fixemos $x_0 \in \sigma_r$. Então existe $g \in G$ tal que $d_1(x_0) = \chi_g(d_2(x_0))$.

Como X é um espaço de Hausdorff, $\pi : X \to X/G$ é um recobrimento de p folhas, com as folhas sobre os pontos de uma fibra sendo comutados pelos elementos de $A = \{\chi_g,\ g \in G\}$. Dessa forma, o conjunto $\{x \in \sigma_r;\ d_1(x) = \chi_g d_2(x)\}$ é um aberto não vazio de σ_r. Como este conjunto também é fechado e σ_r é conexo, o resultado segue.

$\square$

Voltemos à prova da Proposição 3.3.10. Suponha que $c \in S_r(X,\chi)$ seja uma (χ, r)-cadeia não nula. Então $c = \theta(d)$, onde d é uma cadeia não nula como no teorema 3.2.3. Então $d = a_1d_1 + a_2d_2 + \cdots + a_sd_s$, onde cada d_i é um r-simplexo singular com $d_i \neq d_j$ para $i \neq j$ e $a_i \neq e$, $a_i \in G$, para $i = 1, \ldots, s$; mais ainda, d_i e d_j pertencem a órbitas disjuntas. Segue que $\pi \circ d_i \neq \pi \circ d_j$ se $i \neq j$. Logo, $\Gamma(c) = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} a_i(\pi \circ d_i)$ é uma cadeia não nula.

Seja agora $\phi : \sigma_r \to X/G$ um r-simplexo singular. Como $\pi : X \to X/G$ é um recobrimento a p folhas com X conexo e localmente conexo por caminhos e σ_r é simplesmente conexo, temos, pelo teorema do levantamento, que existe $\phi' : \sigma_r \to X$ tal que $\pi \circ \phi' = \phi$, o que mostra que Γ é sobrejetora. Consequentemente, $\Gamma_* : H_r(X,\chi) \to H_r(X/G, G)$ é um isomorfismo.

$\square$

Capítulo 4

Um Teorema Tipo Borsuk-Ulam Recente

4.1 Introdução

O Teorema 3.3.9, o qual foi uma generalização para grupos abelianos finitos gerais G do resultado provado no artigo "A $\mathbb{Z}_p$-index homomorphism for $\mathbb{Z}_p$ spaces" [7] de P. Pergher quando $G = \mathbb{Z}_p$, com $p = 2q$ e q ímpar, foi recentemente abordado no artigo "The Smith homology and Borsuk-Ulam type theorems" [2] de I. Nagasaki, T. Kawakami, Y. Hara e F. Ushitaki. No trabalho em questão os autores provaram o mesmo resultado de P. Pergher de [7], mas também cobrindo os valores restantes de p.

A técnica utilizada foi diferente, usando essencialmente a homologia de Smith. Neste capítulo, detalharemos os argumentos desta nova prova.

4.2 Um teorema tipo Borsuk-Ulam recente

Teorema 4.2.1. *Sejam X um $\mathbb{Z}_p$-espaço livre conexo por caminhos e Y um $\mathbb{Z}_p$-espaço livre de Hausdorff. Se existe um inteiro positivo n tal que $H_r(X;\mathbb{Z}_p) = 0$ para $1 \leq r \leq n$ e $H_{n+1}(Y/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p) = 0$, então não existe uma aplicação contínua equivariante de $X \mapsto Y$*

Para provar esse teorema, recuperemos os operadores

$$\theta = Id + T + \cdots + T^{p-1} : S_r(X, \mathbb{Z}_p) \to S_r(X, \mathbb{Z}_p)$$

e

$$\Lambda = Id - T : S_r(X, \mathbb{Z}_p) \to S_r(X, \mathbb{Z}_p),$$

definidos no Capítulo 2. Lembremos que $T \circ \theta = \theta \circ T = \theta$ e $\theta \circ \Lambda = \Lambda \circ \theta = 0$.

Como o conjunto imagem de homomorfismo de módulos são módulos, temos que $\theta(S_r(X;\mathbb{Z}_p))$ e $\Lambda(S_r(X, \mathbb{Z}_p))$ são $\mathbb{Z}_p$-submódulos de $S_r(X;\mathbb{Z}_p)$.

Seja ∂ o operador bordo do complexo de cadeias $\{S_r(X, \mathbb{Z}_p)\}_{r\in\mathbb{Z}}$. Como $\theta \circ \partial = \partial \circ \theta$ e $\Lambda \circ \partial = \partial \circ \Lambda$, $\{\theta(S_r(X;\mathbb{Z}_p))\}_{r\in\mathbb{Z}}$ e $\{\Lambda(S_r(X;\mathbb{Z}_p))\}_{r\in\mathbb{Z}}$ são subcomplexos de $\{S_r(X;\mathbb{Z}_p)\}_{r\in\mathbb{Z}}$.

Lema 4.2.2. *Para todo r, as seguintes sequências são exatas:*

$$0 \longrightarrow \theta(S_r(X;\mathbb{Z}_p)) \xrightarrow{i} S_r(X;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\Lambda} \Lambda(S_r(X;\mathbb{Z}_p)) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \Lambda(S_r(X;\mathbb{Z}_p)) \xrightarrow{j} S_r(X;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\theta} \theta(S_r(X;\mathbb{Z}_p)) \longrightarrow 0,$$

onde i, j denotam as inclusões.

Dem.:

Como $\Lambda \circ i = 0$ e $\theta \circ j = 0$, Im $i \subset$ Ker Λ e Im $j \subset$ Ker θ.

Seja $s \in$ Ker Λ. Podemos representar $s = \displaystyle\sum_j \sum_{i=0}^{p-1} n_{ji} T^i \circ \phi_j$, de modo que se $l \neq l'$ e $0 \leq i \leq p-1$, então $T^i \circ \phi_l \neq \phi_{l'}$. Como $\Lambda(s) = 0$, temos que para todo j,

$\sum_{i=0}^{p-1} n_{ji}T^i \circ (Id - T)(\phi_j) = 0$, ou seja,

$$(n_{j0} - n_{j(p-1)})\phi_j + \sum_{i=1}^{p-1}(n_{ji} - n_{j(i-1)})T^i \circ \phi_j = 0.$$

Isto implica que para cada j, $n_{j0} = n_{j1} = \cdots = n_{j(k-1)}$.

Seja $n_j = n_{j0}$. Assim, temos que $s = \sum_j n_j(Id + T + \cdots + T^{k-1})(\phi_j) = \theta\left(\sum_j n_j\phi_j\right) \in \text{Im } i$. Logo, Ker $\Lambda \subset$ Im i, e portanto, Ker $\Lambda =$ Im i.

Seja agora $s = \sum_j \sum_{i=0}^{p-1} n_{ji}T^i \circ \phi_j \in \text{Ker } \theta$. Como $\theta(s) = 0$ e $T^j \circ \theta = \theta \circ T^j = \theta$,

$$\theta(s) = \sum_j (n_{j0} + n_{j1} + \cdots + n_{j(p-1)})(Id + T + \cdots + T^{p-1})(\phi_j) = 0,$$

e portanto, $n_{j0} + n_{j1} + \cdots + n_{j(p-1)} = 0$ para todo j.

Então

$s = \sum_j \sum_{i=0}^{p-1} n_{ji}T^i \circ \phi_j$

$= \sum_j \sum_{i=0}^{p-2} n_{ji}T^i \circ \phi_j - (n_{j0} + n_{j1} + \cdots + n_{j(p-2)})T^{p-1} \circ \phi_j$

$= \sum_j \sum_{i=0}^{p-2} n_{ji}(T^i - T^{p-1})(\phi_j)$

$= \sum_j \sum_{i=0}^{p-2} n_{ji}T^i(Id - T)(Id + T + \cdots + T^{p-2-i})(\phi_j)$

$= \sum_j (n_{j0}(Id - T) + (n_{j0} + n_{j1})T(Id - T) + (n_{j0} + n_{j1} + n_{j2})T^2(Id - T) + \cdots + (n_{j0} + n_{j1} + \cdots n_{j(p-2)})T^{p-2}(Id - T))(\phi_j) \in \text{Im } j$.

Assim, Ker $\theta \subset$ Im j, e portanto Ker $\theta =$ Im j.

□

Denotaremos por $H_r^\theta(X, \mathbb{Z}_p)$ e $H_r^\Lambda(X, \mathbb{Z}_p)$ os grupos de homologia associados aos complexos de cadeias $\{\theta(S_r(X, \mathbb{Z}_p))\}$ e $\{\Lambda(S_r(X, \mathbb{Z}_p))\}$, respectivamente. Tais grupos de homologia são conhecidos como *grupos de homologia de Smith.*

Da teoria de álgebra homológica, sabemos que o lema 4.1.2 dá origem ao seguinte lema:

Lema 4.2.3. *As seguintes sequências longas são exatas:*

$$\cdots \longrightarrow H_r^{\theta}(X,\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{i_*} H_r(X,\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\Lambda_*} H_r^{\Lambda}(X,\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}^{\theta}(X,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \cdots$$

e

$$\cdots \longrightarrow H_r^{\Lambda}(X,\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{j_*} H_r(X,\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\theta_*} H_r^{\theta}(X,\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\partial'_*} H_{r-1}^{\Lambda}(X,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \cdots .$$

Em particular, se $p = 2$, então $\theta = \Lambda$ e a seguinte sequência é exata:

$$\cdots \longrightarrow H_r^{\theta}(X,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i_*} H_r(X,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\theta_*} H_r^{\theta}(X,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}^{\theta}(X,\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \cdots .$$

□

Com tais ferramentas em mãos, provaremos agora o resultado enunciado no início do capítulo.

Suponha, por absurdo, que exista uma aplicação contínua $f : X \to Y$ $\mathbb{Z}_p$-equivariante.

Como X é conexo por caminhos, $f(X)$ é conexo por caminhos. Então $f(X)$ está contido em uma componente conexa por caminhos de Y. Assim, é suficiente considerar o caso em que Y é conexo por caminhos.

Provemos primeiro o caso $p = 2$.

Como f é uma aplicação equivariante, temos que $\theta f_{\#} = f_{\#}\theta$, pois:

$$\begin{aligned} f_{\#} \circ \theta &= f_{\#} \circ (Id + T + \cdots + T^{p-1}) \\ &= f_{\#} \circ Id + f_{\#} \circ T + \cdots + f_{\#} \circ T^{p-1} \\ &= Id \circ f_{\#} + T \circ f_{\#} + \cdots + T^{p-1} \circ f_{\#} \\ &= (Id + T + \cdots + T^{p-1}) \circ f_{\#} = \theta \circ f_{\#}. \end{aligned}$$

Para simplificar, suprimiremos o coeficiente $\mathbb{Z}_2$ na homologia singular, isto é, escreveremos $H_r(X)$ ao invés de $H_r(X,\mathbb{Z}_2)$. Pela naturalidade do operador conectante, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H^\theta_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial^X_*"] \arrow[d, "f^\theta_*"] & H^\theta_n(X) \arrow[r, "i^X_*"] \arrow[d, "f^\theta_*"] & H_n(X) \arrow[r, "\theta^X_*"] \arrow[d, "f_*"] & H^\theta_n(X) \arrow[r, "\partial^X_*"] \arrow[d, "f^\theta_*"] & H^\theta_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f^\theta_*"] & \cdots \\
\arrow[r] & H^\theta_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial^Y_*"] & H^\theta_n(Y) \arrow[r, "i^Y_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "\theta^Y_*"] & H^\theta_n(Y) \arrow[r, "\partial^Y_*"] & H^\theta_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H^\theta_1(X) \arrow[r, "i^X_*"] \arrow[d, "f^\theta_*"] & H_1(X) \arrow[r, "\theta^X_*"] \arrow[d, "f_*"] & H^\theta_1(X) \arrow[r, "\partial^X_*"] \arrow[d, "f^\theta_*"] & H^\theta_0(X) \arrow[r, "i^X_*"] \arrow[d, "f^\theta_*"] & H_0(X) \arrow[r, "\theta^X_*"] \arrow[d, "f_*"] & H^\theta_0(X) \arrow[r] \arrow[d, "f^\theta_*"] & 0 \arrow[d, "f_*"] \\
\arrow[r] & H^\theta_1(Y) \arrow[r, "i^Y_*"] & H_1(Y) \arrow[r, "\theta^Y_*"] & H^\theta_1(Y) \arrow[r, "\partial^Y_*"] & H^\theta_0(Y) \arrow[r, "i^Y_*"] & H_0(Y) \arrow[r, "\theta^Y_*"] & H^\theta_0(Y) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

cujas linhas horizontais são as sequências exatas acima descritas, é comutativo.

Notemos que, se X é conexo por caminhos, então $(i^X_*)_0 : H^\theta_0(X) \to H_0(X)$ é a função nula. Isto vale porque um elemento de $H^\theta_0(X)$ pode ser escrito na forma $[\theta(c)] = [(c + T(c))]$, o qual, após aplicação da induzida da inclusão, se torna $[c] + [T(c)] = [c] + [c] = 0$ em $H_0(X)$, que é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

Como X e Y são conexos por caminhos, temos que $(i^X_*)_0 = 0$ e $(i^Y_*)_0 = 0$. Como as linhas do diagrama acima são exatas, segue que $(\theta^X_*)_0 : H_0(X) \to H^\theta_0(X)$ e $(\theta^Y_*)_0 : H_0(Y) \to H^\theta_0(Y)$ são isomorfismos; basta observar o trecho do diagrama acima,

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H^\theta_0(X) \arrow[r, "i^X_*=0"] \arrow[d, "f^\theta_*"] & H_0(X) \arrow[r, "\theta^X_*"] \arrow[d, "f_*"] & H^\theta_0(X) \arrow[r] \arrow[d, "f^\theta_*"] & 0 \\
\arrow[r] & H^\theta_0(Y) \arrow[r, "i^Y_*=0"] & H_0(Y) \arrow[r, "\theta^Y_*"] & H^\theta_0(Y) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por hipótese, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}_2$. Então $H_0(X) \cong H^\theta_0(X) \cong \mathbb{Z}_2$. Analogamente, $H_0(Y) \cong H^\theta_0(Y) \cong \mathbb{Z}_2$.

Como X e Y são conexos por caminhos, $(f_*)_0 : H_0(X) \to H_0(Y)$ é um isomorfismo. Como $(\theta^X_*)_0$ também é um isomorfismo, pela comutatividade do trecho do diagrama,

$$\begin{tikzcd}
H_0(X) \arrow[r, "\theta^X_*"] \arrow[d, "f_*"] & H^\theta_0(X) \arrow[d, "f^\theta_*"] \\
H_0(Y) \arrow[r, "\theta^Y_*"] & H^\theta_0(Y),
\end{tikzcd}$$

temos que $(\theta_*^Y)_0 \circ (f_*)_0 = (f_*^\theta)_0 \circ (\theta_*^X)_0$, e portanto $(f_*^\theta)_0 : H_0^\theta(X) \to H_0^\theta(X)$ é um isomorfismo.

Como $(i_*^X)_0 = 0$ e as linhas do diagrama são exatas, temos que Im $(\partial_*^X)_1 =$ Ker $(i_*^X)_0 = H_0^\theta(X)$. Como o diagrama é comutativo, temos que $(\partial_*^Y)_1 \circ (f_*^\theta)_1 = (f_*^\theta)_0 \circ (\partial_*^X)_1 : H_1^\theta(X) \to H_0^\theta(Y)$ é um homomorfismo não nulo. Então $(f_*^\theta)_1 : H_1^\theta(X) \to H_1^\theta(Y)$ é um homomorfismo não nulo.

Temos também que $(\partial_*^X)_r : H_r^\theta(X) \to H_{r-1}^\theta(X)$ é um isomorfismo para todo $1 \leq r \leq n$, pela exatidão da sequência:

$$0 = H_r(X) \xrightarrow{\theta_*^X} H_r^\theta(X) \xrightarrow{\partial_*^X} H_{r-1}^\theta(X) \xrightarrow{i_*^X} H_{r-1}(X) = 0.$$

Provaremos então, por indução, que $(f_*^\theta)_r : H_r^\theta(X) \to H_r^\theta(Y)$ é um homomorfismo não nulo para cada $0 \leq r \leq n$.

O resultado está provado para $r = 0$ e $r = 1$. Agora suponha que $(f_*^\theta)_r : H_r^\theta(X) \to H_r^\theta(Y)$ é um homomorfismo não nulo para $1 \leq r \leq j < n$. Considere o trecho do diagrama:

$$\begin{tikzcd} H_{j+1}^\theta(X) \arrow[r, "\partial_*^X"] \arrow[d, "f_*^\theta"] & H_j^\theta(X) \arrow[d, "f_*^\theta"] \\ H_{j+1}^\theta(Y) \arrow[r, "\partial_*^Y"] & H_j^\theta(Y). \end{tikzcd}$$

Da comutatividade do mesmo, temos que $(\partial_*^Y)_{j+1} \circ (f_*^\theta)_{j+1} = (f_*^\theta)_j \circ (\partial_*^X)_{j+1}$. Como por hipótese $(\partial_*^X)_{j+1}$ é um isomorfismo e $(f_*^\theta)_j$ é não nulo, segue que a composta também é um homomorfismo não nulo. Portanto, temos que $(f_*^\theta)_{j+1}$ é um homomorfismo não nulo.

Pela proposição 2.3.6, $H_{n+1}^\theta(Y) \cong H_{n+1}(Y/\mathbb{Z}_p) = 0$. Considerando o trecho

$$0 = H_{n+1}^\theta(Y) \xrightarrow{\partial_*^Y} H_n^\theta(Y) \xrightarrow{i_*^Y} H_n^\theta(Y),$$

temos que $(i_*^Y)_n : H_n^\theta(Y) \to H_n(Y)$ é injetora, e como $(f_*^\theta)_n$ é um homomorfismo não nulo, $(i_*^X)_n \circ (f_*^\theta)_n : H_n^\theta(X) \to H_n(X)$ é um homomorfismo não nulo. Tome agora o trecho

$$\begin{array}{ccc} H_n^\theta(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_n(X)=0 \\ \downarrow{\scriptstyle f_*^\theta} & & \downarrow{\scriptstyle f_*=0} \\ H_n^\theta(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_n(Y). \end{array}$$

Como $H_n(X) = 0$ e o diagrama é comutativo, temos que $(i_*^Y)_n \circ (f_*^\theta)_n = (f_*)_n \circ (i_*^X)_n = 0$. Esta contradição prova o teorema neste caso.

A seguir, provaremos o caso onde $p > 2$. Por comodidade, omitiremos o coeficiente $\mathbb{Z}_p$ na homologia singular. Novamente pela naturalidade do conectante, temos os diagramas comutativos, com linhas horizontais exatas:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \longrightarrow & H_n^\theta(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_n(X) & \xrightarrow{\Lambda_*^X} & H_n^\Lambda(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_{n-1}^\theta(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & \downarrow{\scriptstyle f_*^\theta} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\Lambda} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\theta} & & \\ \longrightarrow & H_n^\theta(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_n(Y) & \xrightarrow{\Lambda_*^Y} & H_n^\Lambda(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_{n-1}^\theta(Y) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \longrightarrow & H_1^\theta(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_1(X) & \xrightarrow{\Lambda_*^X} & H_1^\Lambda(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_0^\theta(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_0(X) & \xrightarrow{\Lambda_*^X} & H_0^\Lambda(X) & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle f_*^\theta} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\Lambda} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\theta} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\Lambda} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \longrightarrow & H_1^\theta(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_1(Y) & \xrightarrow{\Lambda_*^Y} & H_1^\Lambda(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_0^\theta(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_0(Y) & \xrightarrow{\Lambda_*^Y} & H_0^\Lambda(Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \longrightarrow & H_{n+1}^\theta(X) & \xrightarrow{\partial_*'^X} & H_n^\Lambda(X) & \xrightarrow{j_*^X} & H_n(X) & \xrightarrow{\theta_*^X} & H_n^\theta(X) & \xrightarrow{\partial_*'^X} & H_{n-1}^\Lambda(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & \downarrow{\scriptstyle f_*^\theta} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\Lambda} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\theta} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\Lambda} & & \\ \longrightarrow & H_{n+1}^\theta(Y) & \xrightarrow{\partial_*'^Y} & H_n^\Lambda(Y) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_n(Y) & \xrightarrow{\theta_*^Y} & H_n^\theta(Y) & \xrightarrow{\partial_*'^Y} & H_{n-1}^\Lambda(Y) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \longrightarrow & H_1^\Lambda(X) & \xrightarrow{j_*^X} & H_1(X) & \xrightarrow{\theta_*^X} & H_1^\theta(X) & \xrightarrow{\partial_*'^X} & H_0^\Lambda(X) & \xrightarrow{j_*^X} & H_0(X) & \xrightarrow{\theta_*^X} & H_0^\theta(X) & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle f_*^\Lambda} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\theta} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\Lambda} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\theta} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \longrightarrow & H_1^\Lambda(Y) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_1(Y) & \xrightarrow{\theta_*^Y} & H_1^\theta(Y) & \xrightarrow{\partial_*'^Y} & H_0^\Lambda(Y) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_0(Y) & \xrightarrow{\theta_*^Y} & H_0^\theta(Y) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Note que $(i_*^X)_0 = 0$ e $(i_*^Y)_0 = 0$, pois X é conexo por caminhos, e então $[\theta(c)] = [Id(c)+T(c)+\cdots+T^{p-1}(c)] = [c]+[T(c)]+\cdots+[T^{p-1}(c)] = [c]+[c]\cdots+[c] = p[c] = 0$.

Então, da exatidão das linhas do diagrama, $(\Lambda_*^X)_0 : H_0(X) \to H_0^\Lambda(X)$ e $\Lambda_*^Y : H_0(Y) \to H_0^\Lambda(Y)$ são isomorfismos; note os trechos

$$H_0^\theta(X) \xrightarrow{i_*^X=0} H_0(X) \xrightarrow{\Lambda_*^X} H_0^\Lambda(X) \longrightarrow 0,$$

$$H_0^\theta(Y) \xrightarrow{i_*^Y=0} H_0(Y) \xrightarrow{\Lambda_*^Y} H_0^\Lambda(Y) \longrightarrow 0.$$

Tome agora o trecho

$$\begin{tikzcd}
H_0(X) \arrow[r, "\Lambda_*^X"] \arrow[d, "f_*"] & H_0^\Lambda(X) \arrow[d, "f_*^\theta"] \\
H_0(Y) \arrow[r, "\Lambda_*^Y"] & H_0^\Lambda(Y).
\end{tikzcd}$$

Como $(f_*)_0 : H_0(X) \to H_0(Y)$ é um isomorfismo, $(\Lambda_*^Y)_0 \circ (f_*)_0$ é um isomorfismo, e, pela comutatividade do diagrama, $(\Lambda_*^Y)_0 \circ (f_*)_0 = (f_*^\theta)_0 \circ (\Lambda_*^X)_0$, e portanto $(f_*^\Lambda)_0 : H_0^\Lambda(X) \to H_0^\Lambda(Y)$ é um isomorfismo.

Usando o trecho

$$\begin{tikzcd}
H_0(X) \arrow[r, "\theta_*^X"] \arrow[d, "f_*"] & H_0^\theta(X) \arrow[d, "f_*^\theta"] \\
H_0(Y) \arrow[r, "\theta_*^Y"] & H_0^\theta(Y)
\end{tikzcd}$$

e com o argumento similar, mostramos que $(f_*^\theta)_0 : H_0^\theta(X) \to H_0^\theta(Y)$ é um isomorfismo.

Considere agora os trechos

$$0 = H_1(X) \xrightarrow{\Lambda_*^X} H_1^\Lambda(X) \xrightarrow{\partial_*^X} H_0^\theta(X) \xrightarrow{i_*^X=0} H_0(X)$$

e

$$0 = H_1(X) \xrightarrow{\theta_*^X} H_1^\theta(X) \xrightarrow{\partial_*'^X} H_0^\Lambda(X) \xrightarrow{j_*^X=0} H_0(X).$$

Como $H_1(X) = 0$ e $(i_*^X)_0 = 0$, o primeiro trecho nos dá que $(\partial_*^X)_1 : H_1^\Lambda(X) \to H_0^\theta(X)$ é um isomorfismo.

Analogamente, usando o segundo trecho, concluímos que $(\partial_*'^X)_1 : H_1^\theta(X) \to H_0^\Lambda(X)$ é um isomorfismo.

Tome agora os trechos

$$\begin{tikzcd}
H_1^\Lambda(X) \arrow[r, "\partial_*^X"] \arrow[d, "f_*^\Lambda"] & H_0^\theta(X) \arrow[d, "f_*^\theta"] \\
H_1^\Lambda(Y) \arrow[r, "\partial_*^Y"] & H_0^\theta(Y)
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{array}{ccc} H_1^\theta(X) & \xrightarrow{\partial_*'^X} & H_0^\Lambda(X) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*^\theta} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\Lambda} \\ H_1^\theta(Y) & \xrightarrow{\partial_*'^Y} & H_0^\Lambda(Y). \end{array}$$

Da comutatividade dos diagramas acima, $(\partial_*^Y)_1 \circ (f_*^\Lambda)_1 = (f_*^\theta)_0 \circ (\partial_*^X)_1$ e $(\partial_*'^Y)_1 \circ (f_*^\theta)_1 = (f_*^\Lambda)_0 \circ (\partial_*'^X)_1$. Como $(f_*^\theta)_0 \circ (\partial_*^X)_1$ e $(f_*^\Lambda)_0 \circ (\partial_*'^X)_1$ são homomorfismos não nulos, segue que $(f_*^\theta)_1 : H_1^\theta(X) \to H_1^\theta(Y)$ e $(f_*^\Lambda)_1 : H_1^\theta(X) \to H_1^\Lambda(Y)$ são homomorfismos não nulos.

Por hipótese, $H_r(X) = 0$ para $1 \leq r \leq n$, e então temos que $(\partial_*^X)_r : H_r^\theta(X) \to H_{r-1}^\theta(X)$ é um isomorfismo para todo $1 \leq r \leq n$, por causa da exatidão da sequência:

$$0 = H_r(X) \xrightarrow{\theta_*^X} H_r^\theta(X) \xrightarrow{\partial_*^X} H_{r-1}^\theta(X) \xrightarrow{i_*^X} H_{r-1}(X) = 0.$$

Por indução, provaremos que $(f_*^\theta)_r : H_r^\theta(X) \to H_r^\theta(Y)$ e $f_*^\Lambda : H_r^\Lambda(X) \to H_r^\Lambda(Y)$ são homomorfismos não nulos para cada $0 \leq r \leq n$.

Lembrando que o resultado está provado para $r = 0$ e $r = 1$, suponha que $(f_*^\theta)_r : H_r^\theta(X) \to H_r^\theta(Y)$ e $(f_*^\Lambda)_r : H_r^\Lambda(X) \to H_r^\Lambda(Y)$ são homomorfismos não nulos para todo $1 \leq r \leq j < n$.

Considere os seguintes trechos do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H_{j+1}^\Lambda(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_j^\theta(X) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*^\Lambda} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\theta} \\ H_{j+1}^\Lambda(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_j^\theta(Y) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} H_{j+1}^\theta(X) & \xrightarrow{\partial_*'^X} & H_j^\Lambda(X) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*^\theta} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^\Lambda} \\ H_{j+1}^\theta(Y) & \xrightarrow{\partial_*'^Y} & H_j^\Lambda(Y). \end{array}$$

Da comutatividade dos diagramas, temos que $(\partial_*^Y)_{j+1} \circ (f_*^\Lambda)_{j+1} = (f_*^\theta)_j \circ (\partial_*^X)_{j+1}$ e $(\partial_*'^Y)_{j+1} \circ (f_*^\theta)_{j+1} = (f_*^\Lambda)_j \circ (\partial_*'^X)_{j+1}$. Como por hipótese $(\partial_*^X)_{j+1}$ e $(\partial_*'^Y)$ são isomorfismos e $(f_*^\theta)_j$ e $(f_*^\Lambda)_j$ são não nulos, segue que as compostas $(\partial_*^Y)_{j+1} \circ (f_*^\Lambda)_{j+1} = (f_*^\theta)_j \circ (\partial_*^X)_{j+1}$ e $(\partial_*'^Y)_{j+1} \circ (f_*^\theta)_{j+1} = (f_*^\Lambda)_j \circ (\partial_*'^X)_{j+1}$ também são homomorfismos não nulos. Portanto, temos que $(f_*^\theta)_{j+1}$ e $(f_*^\Lambda)_{j+1}$ são homomorfismos não nulos.

Pela proposição 2.3.6, $H_{n+1}^\theta(Y) \cong H_{n+1}(Y/\mathbb{Z}_p) = 0$. Considerando o trecho

$$0 = H_{n+1}^\theta(Y) \xrightarrow{\partial_*'^Y} H_n^\Lambda(Y) \xrightarrow{j_*^Y} H_n(Y),$$

temos que $(j_*^Y)_n : H_n^\Lambda(Y) \to H_n(Y)$ é injetora. Assim, $(j_*^Y)_n \circ (f_*^\Lambda)_n$ é um homomorfismo não nulo.

Por outro lado, considerando o trecho

$$\begin{tikzcd}
H_n^\Lambda(X) \arrow[r, "j_*^X"] \arrow[d, "f_*^\Lambda"] & H_n(X) = 0 \arrow[d, "f_*=0"] \\
H_n^\Lambda(Y) \arrow[r, "j_*^Y"] & H_n(Y),
\end{tikzcd}$$

temos que $(j_*^Y)_n \circ (f_*^\Lambda) = (f_*) \circ (j_*^X)_n = 0$ pois $H_n(X) = 0$. Isto é uma contradição. Assim, a prova está completa.

□

Referências Bibliográficas

[1] Hu, S. T. - *Introduction to Homological Algebra*, Holden-Day, Inc. (1968)

[2] Ikumitsu Nagasaki, Tomohiro Kawakami, Yasuhiro Hara and Fumihiro Ushitaki - *The Smith Homology and Borsuk-Ulam Type Theorems*, Far East Jornal of Mathematical Sciences(FJMS) Volume 38, Number 2, Pages 205-216 - (2010)

[3] Kobayashi, T. - *The Borsuk-Ulam theorem for a $\mathbb{Z}_q$-map from a $\mathbb{Z}_q$ space to S^{n+1}*, Proc. Amer. Math. Soc. 97, (1986), pages 714-716.

[4] Kosniowski, Czes - *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge Universty Press, (1980).

[5] Massey, W. S. - *Algebraic Topology: An Introduction*, Hardcourt, Brace and World, Inc. (1967).

[6] Munkres, J. R. - *Elements of Algebraic Topology*, The Benjamin/ Cummings Publ.Co. (1978)

[7] Pergher, P. L. Q. - *A $\mathbb{Z}_p$-index Homomorphism for $\mathbb{Z}_p$ spaces*, Houston Journal of Mathematics Volume 31, Number 2, Pages 305-314 - (2005)

[8] Vick, J. W. - *Homology Theory. An Introduction to algebraic topology*, Academic Press. (1973).

[9] Yang, C. T. - *On the Theorems of Borsuk-Ulam, Yang, Kakutani - Yamabe - Yujobô and Dyson*, I, Annals of Mathematics, Volume 60. Number 2, pages 262-282 - (1954)