

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Homotopias Finitamente Fixadas e Pares de
Homotopias Finitamente Coincidentes**

Fabiana Santos Cotrim

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Homotopias Finitamente Fixadas e Pares de Homotopias
Finitamente Coincidentes**

Fabiana Santos Cotrim

Dissertação apresentada ao
PPG-M da UFSCar como parte
dos requisitos para a obtenção
do título de Mestre em Mate-
mática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Ventrúsculo

São Carlos - SP

2011

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

C845hf

Cotrim, Fabiana Santos.

Homotopias finitamente fixadas e pares de homotopias finitamente coincidentes / Fabiana Santos Cotrim. -- São Carlos : UFSCar, 2011.

61p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

1. Topologia algébrica. 2. Teoria de pontos fixos. 3. Construção de Hopf. 4. Classes de homotopias. 5. Nielsen, Teoria de. I. Título.

CDD: 514.2 (20^a)

Sonhos se tornam realidade quando acreditamos e lutamos por eles.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por minha vida e tudo que a ela tem sido proporcionado.

Agradeço a minha família querida que mesmo longe e sem entender muito bem o que eu estudo, sempre me apoiou e me fez acreditar que seria capaz. O resultado está aqui...

Agradeço a todos os docentes do Departamento de Matemática da UFSCar que foram meus professores ao longo destes anos e em particular ao prof. Dr. Daniel Vandrúsculo que desde 2004, mais que um orientador, a sua maneira, tem sido um grande amigo.

A concretização deste mestrado sem dúvida se deve a algumas pessoas que estiveram presentes ao longo destes dois anos. Muitos sabem que o período das disciplinas não foi nada fácil, mas graças a presença de amigos, a árdua tarefa de estudar matemática se tornou muito mais possível.

Agradeço ao prof. Dr. Ivo Machado, nosso querido professor de Cálculo Avançado no verão, que foi quem acreditou que eu seria capaz de realizar este mestrado e possibilitou minha entrada no programa.

Aos companheiríssimos amigos Dione e Steve pelas incansáveis tardes de estudo no verão de Cálculo Avançado.

Aos amigos de turma Allan, Carol, Marcos e Sérgio. Sempre foram muito produtivas as discussões de exercícios e eles me ajudaram muito com suas “sacadas matemáticas”.

E por fim, ao amigo Falcão. Ele é a melhor combinação de amigo e matemático que já conheci. Não sei dizer ao certo quantas foram as vezes que trocamos ombros amigos e quantas foram as vezes que ele me viu chorar achando que não daria conta. O importante é que no final deu tudo certo!

A todos os citados, fica registrado o meu muito obrigada! Graças a vocês este trabalho foi possível e muito mais agradável de ser realizado.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

No contexto da teoria de pontos fixos e coincidências de Nielsen, este trabalho destina-se ao desenvolvimento de técnicas de minimização do conjunto de pontos fixos em homotopias e do conjunto de coincidências em pares de homotopias.

As técnicas baseiam-se na construção de Hopf para auto-aplicações de poliedros e nos resultados apresentados por Helga Schirmer (1979) para homotopias finitamente fixadas.

Para pares de homotopias, criamos o conceito de finitamente coincidentes e provamos que certos pares de homotopias podem ter seu conjunto de coincidências minimizados, a fim de se tornarem finitamente coincidentes.

Abstract

In the area of the theory of fixed points and coincidences of Nielsen, this study aims to develop techniques to minimize the set of fixed points in homotopies and the set of coincidences in pairs of homotopies.

The techniques are based on Hopf construction for selfmaps of polyhedrons and on the results presented by Helga Schirmer in context of fix-finite homotopies.

For pairs of homotopies, we created the concept of coincidences finite and we proved that certain pairs of homotopies can have their set of coincidences minimized in order to become coincidences finite.

Sumário

Resumo	IV
Introdução	VIII
1 Preliminares	1
1.1 Complexos Simpliciais	1
1.2 Subdivisão Baricêntrica	2
1.3 Realização Geométrica de um Complexo	2
1.4 Poliedros	4
1.5 Teorema da Aproximação Simplicial	5
1.6 Construção de Hopf	7
2 Homotopias Finitamente Fixadas	15
2.1 Teorema Principal	15
2.2 Uma Construção de Hopf para Homotopias	16

SUMÁRIO

2.3	Demonstração do Teorema 2.1.2	18
3	Construção de Homotopias Finitamente Coincidentes	36
3.1	Teorema Principal	36
3.2	Construção de Hopf para Coincidências	37
3.3	Construção de Hopf para Coincidências em Homotopias	41
3.4	Demonstração do Teorema 3.1.3	43
3.5	Conclusões	57
3.6	Possíveis Desdobramentos	59
	Referências Bibliográficas	60

Introdução

Neste trabalho, mais que interessados na manipulação do conjunto de pontos fixos e coincidências de aplicações dadas dentro da sua classe de homotopias, estendemos a definição de pontos fixos e coincidências para homotopias e manipulamos tais conjuntos de forma conveniente.

Tal estudo está inserido na teoria de pontos fixos e coincidências de Nielsen, mais geralmente conhecida como Teoria de Ponto Fixo de Nielsen. A origem desta área ocorreu no início do século XX, referenciada nos trabalhos de Brower, Lefschetz, Hopf e principalmente de Jakob Nielsen.

A motivação inicial deste trabalho é o conhecido resultado provado por H. Hopf [2], em 1929, que garante que qualquer auto-aplicação f de um poliedro, pode ser deformada em uma auto-aplicação f' , arbitrariamente próxima da f , com uma quantidade finita de pontos fixos e todos eles localizados na realização geométrica de simplexes maximais distintos.

A técnica utilizada para a construção de tal f' é chamada de construção de Hopf e servirá como motivação para a construção de resultados similares, como veremos neste trabalho.

Em 1979, Schirmer [7] provou que um similar resultado, em relação ao provado por Hopf, poderia ser obtido para homotopias. Para tanto, ela criou o conceito de homotopia finitamente fixada e questionou:

Duas auto-aplicações f_0 e f_1 de um poliedro $|K|$ homotópicas e cada uma com conjuntos de pontos fixos finitos, podem ser relacionadas por uma homotopia finitamente fixada e

arbitrariamente próxima da homotopia inicial?

Schirmer mostrou que isto é possível, se todos os pontos fixos de f_0 e f_1 estão localizados em simplexos maximais. Quanto à homotopia finitamente fixada, os pontos fixos ou estão na realização geométrica de simplexos maximais ou no máximo, na realização geométrica de hiperfaces (faces apenas de simplexos maximais) de K .

Neste presente trabalho, generalizamos os resultados de Schirmer para o contexto de coincidências. Ou seja, primeiro adaptamos a técnica da construção de Hopf para trabalharmos com coincidências e assim, provamos um resultado similar para coincidências em homotopias.

Por fim, conseguimos mostrar que dados dois pares de aplicações homotópicas satisfazendo algumas condições, cada par pode ser relacionado por uma homotopia arbitrariamente próxima da inicial, de forma que o conjunto de coincidências dessas novas homotopias sejam o que chamamos de finitamente coincidentes.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo as principais referências bibliográficas utilizadas para a sua construção são as referências [1] e [6].

1.1 Complexos Simpliciais

Definição 1.1.1. *Um complexo simplicial K é uma coleção finita de conjuntos finitos, tal que se s é um conjunto em K e t é um subconjunto de s , então $t \in K$.*

*Se s é um conjunto em K e t é um subconjunto de s , então t é uma **face** de s e denotamos $t < s$.*

*Se $s \in K$ e s contém $p+1$ elementos, então s é chamado de **p-simplexo** ou **simplexo de dimensão p** de K .*

*Os 0-simplexos são chamados de **vértices** de K , assim como os elementos de um simplexo.*

Definição 1.1.2. *Se L é uma subcoleção de K que contém todas as faces de seus elementos, então L também é um complexo simplicial e é chamado de **subcomplexo** de K .*

Um exemplo muito comum de um subcomplexo de K é a coleção de todos os simplexos de K de dimensão menor ou igual a p (cada simplexo neste subcomplexo tem no máximo

$p + 1$ elementos). Tal subcomplexo é conhecido como o **p-esqueleto** de K e denotado por $K^{(p)}$.

É comum denotar os vértices de K , como os elementos da coleção $K^{(0)}$.

1.2 Subdivisão Baricêntrica

A partir de um complexo simplicial K , é possível obter um novo complexo simplicial K_1 , chamado de **subdivisão baricêntrica** de K .

Os vértices de K_1 devem estar em correspondência um a um com os elementos de K . Assim denotamos um vértice de K_1 por $v(s)$, onde $s \in K$.

Os simplexos de K_1 são todos os conjuntos $\{v(s_0), \dots, v(s_p)\}$ tais que $\forall i$ e $\forall j$, temos que ou $s_i \subset s_j$ ou $s_j \subset s_i$.

Exemplo 1.2.1. *Seja K um complexo simplicial satisfazendo: $K^{(0)} = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}\}$ e $K = \{s_0 = \{v_0\}, s_1 = \{v_1\}, s_2 = \{v_2\}, s_3 = \{v_0, v_2\}, s_4 = \{v_1, v_2\}, s_5 = \{v_0, v_1\}, s_6 = \{v_0, v_1, v_2\}\}$. Então, $K_1^0 = \{\{v(s_0)\}, \{v(s_1)\}, \dots, \{v(s_6)\}\}$ e os simplexos de K_1 são:*

0-simplexos: $v(s_0), v(s_1), \dots, v(s_6)$.

*1-simplexos: $\{v(s_0), v(s_3)\}, \{v(s_0), v(s_5)\}, \{v(s_0), v(s_6)\}, \{v(s_1), v(s_4)\},$
 $\{v(s_1), v(s_5)\}, \{v(s_0), v(s_6)\}, \{v(s_2), v(s_4)\}, \{v(s_2), v(s_3)\}, \{v(s_2), v(s_6)\},$
 $\{v(s_3), v(s_6)\}, \{v(s_4), v(s_6)\}, \{v(s_5), v(s_6)\}$.*

*2-simplexos: $\{v(s_0), v(s_3), v(s_6)\}, \{v(s_0), v(s_5), v(s_6)\},$
 $\{v(s_1), v(s_6), v(s_5)\}, \{v(s_1), v(s_4), v(s_6)\}, \{v(s_4), v(s_6), v(s_2)\},$
 $\{v(s_2), v(s_6), v(s_3)\}$.*

Como K_1 é um complexo simplicial, podemos também realizar sua subdivisão baricêntrica e em geral, definimos a **r-subdivisão baricêntrica** K_r de K como sendo $K_r = (K_{r-1})_1$.

1.3 Realização Geométrica de um Complexo

Definição 1.3.1. *Seja K um complexo simplicial com vértices v_1, v_2, \dots, v_n . Denote por $|K|$ o conjunto de todos os símbolos $\sum_{i=1}^n r_i v_i$, onde $r_i \in \mathbb{R}$, satisfazendo:*

- $r_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$.
- $\sum_{i=1}^n r_i = 1$.

1.3. REALIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM COMPLEXO

- $\{v_i, i = 1, \dots, n; r_i \neq 0\}$ é um simplexo de K .

Uma métrica d pode ser definida em $|K|$, como segue:

Se $x = \sum_{i=1}^n r_i v_i$ e $y = \sum_{i=1}^n s_i v_i$ estão em $|K|$, então

$$d(x, y) = \left(\sum (r_i - s_i)^2 \right)^{1/2}$$

O espaço $|K|$ com a topologia induzida pela métrica d é um espaço métrico compacto chamado de **realização geométrica** de K .

Para $x = \sum_{i=1}^n r_i v_i$, os números r_i são chamados de **coordenadas baricêntricas** do ponto x a respeito dos vértices v_i .

Para um simplexo $s \in K$, o conjunto de todos os pontos $\sum_{i=1}^n r_i v_i$ em $|K|$ com a propriedade de que o conjunto $\{v_i; r_i \neq 0\}$ é igual a s forma um subespaço chamado **realização geométrica de s** e é denotado por $|s|$. Assim, trabalhamos com o conceito de simplexo aberto.

Exemplo 1.3.2. A realização geométrica do complexo simplicial K apresentado no exemplo 1.2.1 é o espaço $|K|$ que pode ser representado pela figura 1.1. Enquanto que a realização geométrica de sua subdivisão baricêntrica pode ser representada pela figura 1.2.

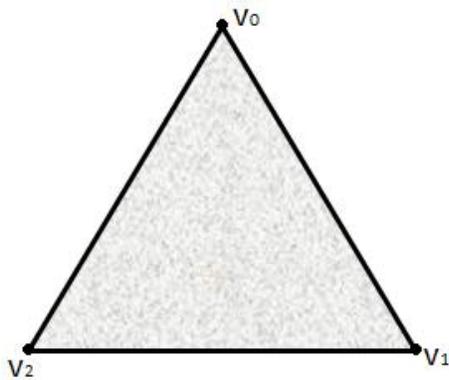


Figura 1.1: Realização geométrica do complexo simplicial.

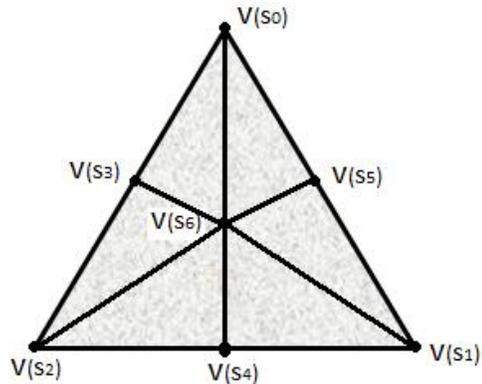


Figura 1.2: Realização geométrica da subdivisão baricêntrica.

Observação 1.3.3. Salientamos que neste trabalho usamos o conceito de simplexo aberto e não fechado.

Definição 1.3.4. *Seja $t \in K$ um simplexo. A união da realização geométrica das faces próprias de t (excluindo t) é chamada de **bordo** de t e denotado por $bd |t|$.*

Notemos, que $\overline{|t|} = |t| \cup bd |t|$.

Definição 1.3.5. *Seja $t \in K$ um simplexo, definimos a **estrela** de t , e denotamos por $st(t)$, a coleção formada por $st(t) = \{s \in K; t < s\}$.*

Também definimos $st(|t|) = \{\cup |s|; t < s\}$. $st(|t|)$ é um conjunto aberto, o que implica que $\overline{st(|t|)} = \{\cup \overline{|s|}; t < s\}$.

*Um simplexo $t \in K$ é dito ser **maximal**, se $|t| = st(|t|)$, ou seja, t não é face de nenhum outro simplexo. Dizemos que $t \in K$ é uma **hiperface**, se t só é face de um simplexo que seja maximal.*

Definição 1.3.6. *Seja K um complexo simplicial. Para cada ponto $x \in |K|$, a **vizinhança simplicial** de x , $N_K(x)$, é o conjunto dos simplexos $N_K(x) = \{t \cup st(t); x \in |t|\}$*

1.4 Poliedros

Definição 1.4.1. *Um espaço topológico X é um **poliedro**, se existe um complexo simplicial K , tal que $|K|$ é homeomorfo a X . Uma **triangularização** de um poliedro X é um par $T = (K, \tau)$, onde K é um complexo simplicial e $\tau : |K| \rightarrow X$ é um homeomorfismo.*

Definição 1.4.2. *Sejam X um poliedro e K um complexo simplicial, tal que $|K|$ é homeomorfo a X . O **comprimento dos simplexos de K** , denotado por $\mu(K)$, é o máximo do conjunto $\{diam(\tau(|s|)), \forall s \in K\}$, em que $\tau : |K| \rightarrow X$ é um homeomorfismo.*

Para K um complexo simplicial e K_1 sua subdivisão baricêntrica, existe um homeomorfismo $\tau_1 : |K_1| \rightarrow |K|$ que normalmente é definido da seguinte forma:

Seja $v(s)$ um vértice de K_1 , onde $s = \{v_0, v_1, \dots, v_p\} \in K$, então defina

$$\tau_1(v(s)) = \sum_{j=0}^p \frac{1}{p+1} v_j$$

Agora, para $x = \sum_{i=1}^m r_i v(s_i) \in K_1$ um ponto qualquer, defina

$$\tau_1(x) = \sum_{i=1}^m r_i \tau_1(v(s_i)) \in |K|$$

A interação de sucessivos homeomorfismos

$$|K_r| \xrightarrow{\tau_1} |K_{r-1}| \xrightarrow{\tau_2} \dots \xrightarrow{\tau_{r-1}} |K_1| \xrightarrow{\tau_r} |K|$$

produz a **r-ésima subdivisão baricêntrica** $\tau_r : |K_r| \rightarrow |K|$.

Seja $T = (K, \tau)$ uma triangularização de um poliedro X , então a triangularização $T_r = (K_r, \tau_r)$ é chamada de **r-ésima subdivisão baricêntrica de T** .

Definição 1.4.3. *Sejam $|K|$ e $|L|$ poliedros e $f, g : |K| \rightarrow |L|$ aplicações simpliciais. Dizemos que f é **relativamente próxima** de g , se existe $t \in L$, tal que $f(x), g(x) \in st|t|$ e portanto $d(f, g) \leq 2\mu(L)$.*

1.5 Teorema da Aproximação Simplicial

Definição 1.5.1. *Sejam K e L complexos simpliciais. Dizemos que $f : K \rightarrow L$ é uma **função simplicial**, se para quaisquer v_0, v_1, \dots, v_n vértices de K pertencentes a um mesmo simplexo, se tenha que $f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_n)$ também são vértices de um mesmo simplexo de L . Desta forma, f pode ser estendida a uma função contínua $|f| : |K| \rightarrow |L|$, tal que*

$$x = \sum_{i=1}^n t_i v_i \in |K| \quad \Rightarrow \quad |f|(x) = \sum_{i=1}^n t_i f(v_i)$$

Chamamos $|f|$ de **realização geométrica** da função simplicial f ou **aplicação simplicial** induzida pela função simplicial f .

Definição 1.5.2. *Seja $h : |K| \rightarrow |L|$ uma função contínua. Dizemos que h satisfaz a **condição estrela** com respeito a K e L , se para cada vértice $v \in K$, existe vértice $w \in L$, tal que*

$$h(st(|v|)) \subset st(|w|)$$

Lema 1.5.3. *Seja $h : |K| \rightarrow |L|$ satisfazendo a condição estrela com respeito a K e L . Escolha $f : K \rightarrow L$, tal que para cada vértice $v \in K$*

$$h(st(|v|)) \subset st(|f(v)|)$$

(tal construção é possível de ser realizada, devido a condição estrela de h).

Dado $\sigma \in K$, escolha $x \in |\sigma|$ e $\tau \in L$, tal que $h(x) \in |\tau|$. Então, f aplica cada vértice de σ em um vértice de τ , ou seja, f é uma função simplicial. Logo, f pode ser estendida para uma aplicação simplicial de $|K|$ em $|L|$.

Demonstração: Seja $\sigma = \{v_0, \dots, v_p\}$. Então $x \in st(|v_i|)$ para cada i e portanto

$$h(x) \in h(st(|v_i|)) \subset st(|f(v_i)|)$$

Isto significa que $h(x)$ tem coordenadas baricêntricas positivas com respeito a cada vértice $f(v_i)$, para $i = 0, \dots, p$. Como $h(x) \in |\tau|$, por hipótese, estes vértices devem formar um subconjunto de vértices de τ .

Assim, como f leva os vértices de σ em vértices de um mesmo simplexo de L , a função pode ser estendida para a aplicação simplicial $|f| : |K| \rightarrow |L|$.

□

Definição 1.5.4. *Seja $h : |K| \rightarrow |L|$ uma função contínua. Se $f : K \rightarrow L$ é uma função simplicial, tal que*

$$h(st(|v|)) \subset st(|f(v)|)$$

para cada vértice $v \in K$, então f é chamada de **aproximação simplicial** para h .

Lema 1.5.5. *Seja $f : K \rightarrow L$ uma aproximação simplicial para $h : |K| \rightarrow |L|$. Dado $x \in |K|$, existe um simplexo $\tau \in L$, tal que $h(x) \in |\tau|$ e $|f|(x) \in \overline{|\tau|}$ ($|f|$ a realização geométrica de f). Portanto, $d(f, h) \leq \mu(L)$.*

Demonstração: Dado $x \in |\sigma|$, com $\sigma \in K$, existe $\tau \in L$, tal que $h(x) \in |\tau|$. De acordo com o lema 1.5.3, temos que $|f|(x) \in |\alpha|$, com $\alpha \subseteq \tau$ e portanto, $|f|(x) \in \overline{|\tau|}$.

□

Teorema 1.5.6. *Dado um poliedro $|K|$ e $\epsilon > 0$, existe um N inteiro positivo, tal que cada simplexo de K_N (N -ésima subdivisão baricêntrica de K) tem diâmetro menor que ϵ , ou seja, $\mu(K_N) < \epsilon$.*

Admitiremos este resultado sem a sua demonstração, pois ela pode ser encontrada em Munkres [6], pag. 80.

Teorema 1.5.7 (Teorema da Aproximação Simplicial). *Sejam K e L complexos simpliciais. Dada uma função contínua $h : |K| \rightarrow |L|$, existe N inteiro positivo, tal que h tem uma aproximação simplicial $f : K_N \rightarrow L$.*

Demonstração: Cubra $|K|$ por conjuntos abertos $h^{-1}(st(|w|))$, para cada w vértice de L . Agora para esta cobertura aberta, que chamaremos de A , existe um número λ (número de Lebesgue), tal que qualquer conjunto de diâmetro menor ou igual a λ , está contido em um dos elementos de A .

Escolha N inteiro positivo, tal que $\mu(K_N) < \lambda/2$. Assim cada estrela de um vértice em K_N tem diâmetro menor que λ e portanto, está em um dos conjuntos $h^{-1}(st(w))$. Então, $h : |K_N| \rightarrow |L|$ satisfaz a condição estrela e pelo lema 1.5.3, existe a aproximação simplicial como desejamos.

□

Observação 1.5.8. *Tal como é construída a aproximação simplicial f da função contínua h , $|f|$ e h são homotópicas, pois podem ser relacionadas por uma homotopia linear.*

1.6 Construção de Hopf

Primeiramente, iremos generalizar o conceito de subdivisão baricêntrica para o de **Subdivisão Baricêntrica Relativa a um Subcomplexo**.

Seja K um complexo simplicial e L um subcomplexo. Podemos obter um novo complexo K_L , chamado de a **subdivisão baricêntrica de K relativa ao subcomplexo L** .

Defina os vértices de K_L , com sendo os vértices de L e os elementos $v(s)$, um para cada simplexo $s \in K \setminus L$.

Para $p > 0$, defina os p -simplexos como todas as $(p+1)$ -uplas da forma $\{v_0, v_1, \dots, v_q, v(s_{q+1}), \dots, v(s_p)\}$ e $\{v_0, \dots, v_q\}$ é um simplexo de L contido no simplexo $s_{q+1} \in K \setminus L$, onde $s_i \subset s_{i+1}$ para $i = q + 1, \dots, p - 1$.

Ficam subentendidos os casos em que $q+1 = 0$ e $q = p$. Quando $L = \emptyset$, então $K_L = K_1$, a subdivisão baricêntrica usual.

Exemplo 1.6.1. *Seja K o mesmo complexo simplicial usado no exemplo 1.2.1, cuja a realização geométrica é representada pela figura 1.3. Seja L um subcomplexo de K , que satisfaça $L^{(0)} = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}\}$, $L = \{s_0 = \{v_0\}, s_1 = \{v_1\}, s_2 = \{v_2\}, s_4 = \{v_1, v_2\}, s_5 = \{v_0, v_1\}\}$ e sua realização geométrica representada pela figura 1.4.*

Então K_L , a subdivisão baricêntrica de K relativa ao subcomplexo L , satisfaz $K_L^{(0)} = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v(s_3)\}, \{v(s_6)\}\}$ e os simplexos de K_L são:

0-simplexos: $v_0, v_1, v_2, v(s_3), v(s_6)$.

1-simplexos: $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v(s_3)\}, \{v_2, v(s_3)\}, \{v(s_3), v(s_6)\}$,

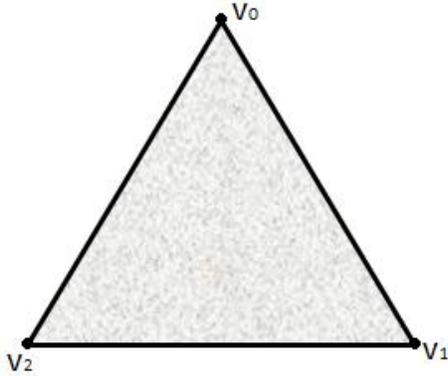


Figura 1.3: Realização geométrica do complexo simplicial.

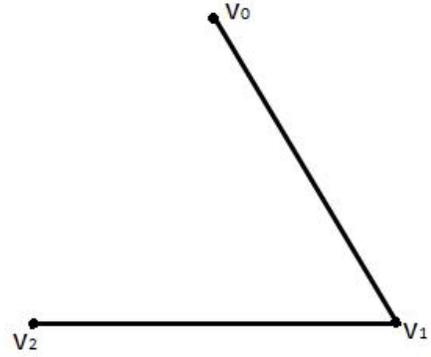


Figura 1.4: Realização geométrica do subcomplexo.

$\{v_0, v(s_6)\}, \{v_2, v(s_6)\}, \{v_1, v(s_6)\}$.

2-simplexos: $\{v_0, v_1, v(s_6)\}, \{v_1, v_2, v(s_6)\}, \{v_2, v(s_3), v(s_6)\}$,

$\{v_0, v(s_3), v(s_6)\}$.

Por fim, a realização geométrica de K_L pode ser representada pela figura 1.5.

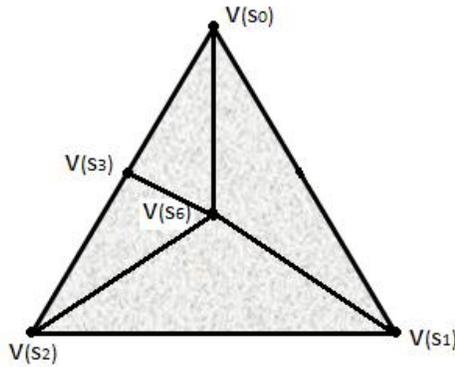


Figura 1.5: Realização geométrica da subdivisão baricêntrica relativa.

Definição 1.6.2. *Se um complexo K' é obtido de um complexo K por uma sucessão de subdivisões baricêntricas relativa a um subcomplexo, dizemos que K' é um **refinamento** de K .*

Existe um caminho natural para definir um homeomorfismo $|\tau_L| : |K_L| \rightarrow |K|$:

1.6. CONSTRUÇÃO DE HOPF

Para um vértice $v \in L$ e assim de K_L , defina $\tau_L(v) = v$. Para $v(s)$ um vértice de K_L , onde $s = \{v_0, v_1, \dots, v_p\} \in K \setminus L$, defina $\tau_L(v(s)) = \sum_{i=0}^{p+1} \frac{1}{p+1} v_i$. Depois, basta estender τ_L linearmente.

Assim, se K' é um refinamento de K , existe um homeomorfismo $\tau : |K'| \rightarrow |K|$, onde τ é uma composição de homeomorfismos da forma τ_L como o definido anteriormente.

Definição 1.6.3. *Sejam K um complexo simplicial e $|K^{(p)}|$ a realização geométrica do seu p -esqueleto. Para K_1 , a subdivisão baricêntrica de K , considere o homeomorfismo natural $\tau_1 : |K_1| \rightarrow |K|$. Chamamos um p -simplexo $s \in K_1$ de **p-esqueletal**, se $\tau_1(|s|) \subset |K^{(p)}|$.*

Exemplo 1.6.4. *Sejam K e K_1 , um complexo simplicial e sua subdivisão baricêntrica, respectivamente, como os usados no exemplo 1.2.1. Então o simplexo $\{v(s_0), v(s_3)\}$ é 1-esqueletal, enquanto que o simplexo $\{v(s_0), v(s_6)\}$ não é 1-esqueletal.*

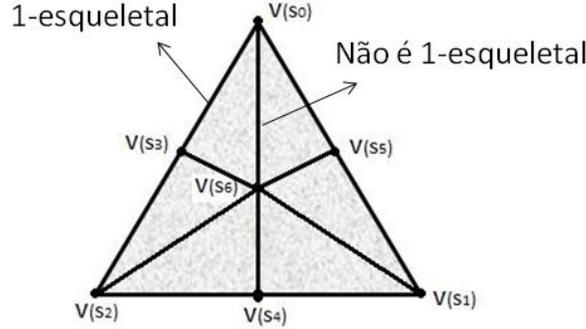


Figura 1.6: Exemplo de simplexo 1-esqueletal.

Lema 1.6.5. *Sejam K um complexo simplicial e s^1, s^2 ($s^1 \neq s^2$) simplexos p -esqueletais de K_1 . Então não existe simplexo de K_1 que contenha tanto s^1 como s^2 .*

Demonstração: Seja $t = \{v(s_0), v(s_1), \dots, v(s_q)\} \in K_1$ com $s_i \in K$, $i = 0, 1, \dots, q$ e suponha que seus vértices estão ordenados de forma que $s_i \subset s_{i+1}$ para $i = 0, \dots, q-1$.

Se $\tau_1(|v(s_i)|) \in |K^{(p)}|$, então $s_i \in K^{(p)}$. Se $j < i$, temos $s_j \subset s_i$ e assim, $s_j \in K^{(p)}$, o que significa, $\tau_1(|v(s_j)|) \in |K^{(p)}|$.

- Se $s_i \notin K^{(p)}$, $\forall i = 0, 1, \dots, q$, então $\tau_1(|v(s_i)|) \notin |K^{(p)}|$, $\forall i$ e assim, $\overline{\tau_1(|t|)} \cap |K^{(p)}| = \emptyset$.
- Se $\exists i$, com $s_i \in K^{(p)}$, então $\tau_1(|v(s_i)|) \in |K^{(p)}|$ e $\forall j < i, s_j \in K^{(p)}$. Logo $\tau_1(|v(s_j)|) \in |K^{(p)}|$ e assim $\overline{\tau_1(|t|)} \cap |K^{(p)}| = \overline{\tau_1(|t'|)}$ para algum $t' \subseteq t$, onde $t' \in K_1^{(m)}$, $m \leq p$.

Suponha que exista $t \in K_1$ que contenha s^1 e s^2 , então $\tau_1(|s^1| \cup |s^2|) \subset \overline{\tau_1(|t'|)}$ para algum $t' \in K_1^m$. Isto ocorre, pois sendo s^1 e s^2 p-esqueletais e ambos pertencentes a t , temos que $\tau_1(|s^1| \cup |s^2|) \subset \overline{\tau_1(|t|)} \cap |K^{(p)}|$. Mas s^1 e s^2 são ambos p-simplexos e assim devemos ter que $m = p$ e $t' = s^1 = s^2$. Logo, um absurdo.

□

Seja K um complexo simplicial. Recordemos que um simplexo $s \in K$ é maximal se não existe outro simplexo de K (diferente de s), que contenha s .

A principal técnica usada na demonstração do próximo resultado, é chamada de **Construção de Hopf**.

Hipóteses para a realização da construção de Hopf

Sejam K um complexo simplicial, K' um refinamento de K e $|\psi| : |K'| \rightarrow |K|$ a realização geométrica da função simplicial $\psi : K' \rightarrow K$. Suponha que t é um p-simplexo não maximal de K' , satisfazendo $|t| \subseteq |\psi|(|t|)$.

Como ψ é simplicial, $\psi(t) = s$ para algum q-simplexo $s \in K$, onde $q \leq p$.

Por outro lado, como $|t| \subseteq |\psi|(|t|) = |s|$ e t é um p-simplexo por hipótese, então devemos ter que $q \geq p$. Assim s é de fato um p-simplexo de K .

Seja $t^* \in K'$ um simplexo maximal contendo t . Como t por hipótese não é maximal, t^* é um m-simplexo onde $m > p$.

Por $|t^*|$ ser aberto em $|K'|$ e K' ser um refinamento de K , então $|t^*| \subseteq |s^*|$ para um m-simplexo maximal $s^* \in K$.

Assim, $|t| \subset \overline{|t^*|}$, o que implica $|t| \subset \overline{|s^*|}$. Como $|t| \subseteq |s|$, então temos que $|t| \subseteq |s \cap s^*|$.

Agora o fato de que t é um p-simplexo de K' , implica que $s \cap s^*$ é um p-simplexo de K (pois $\dim s = p$) e portanto, $s \subset s^*$. Notemos que $s^* \neq s$, pois s^* é um m-simplexo, s é um p-simplexo e $m > p$.

Portanto, $|t| \subseteq |s| \subseteq |s^*|$ e podemos redefinir a função ψ ainda mantendo-a simplicial e evitando que $|t| \subseteq |\psi|(|t|)$. Vejamos como:

Seja L o subcomplexo de K' , refinamento de K , consistindo de todos os simplexos que não contém t e considere o complexo simplicial K'_L (a subdivisão baricêntrica de K' relativa a L).

Vamos definir $\psi' : K'_L \rightarrow K$ nos vértices, como segue:

- Se $v \in L$, defina $\psi'(v) = \psi(v)$.

- Se $t \subset t_j$ e $t \neq t_j$, defina $\psi'(v(t_j))$ como um elemento qualquer de s .
- Por fim, defina $\psi'(v(t))$ como um elemento qualquer de $s^* \setminus s$.

Assim, ψ' se estende a uma função simplicial $\psi' : K'_L \rightarrow K$ e consequentemente a aplicação simplicial $|\psi'| : |K'_L| \rightarrow |K|$.

Observação 1.6.6. *Se $x \in |K'|$ é ponto fixo de $|\psi|$, ou seja, $|\psi|(x) = x$, então como $x \in |t|$ para algum $t \in K'$, temos que $|t| \subseteq |\psi|(|t|)$, pois $|\psi|$ é uma aplicação simplicial e K' é um refinamento de K .*

A construção de ψ' a partir de ψ e $t \in K'$, quando $|t| \subseteq |\psi|(|t|)$, é o que nos referimos como **construção de Hopf**.

Observação 1.6.7. *Podemos então concluir sobre a Construção de Hopf:*

1. $|\psi'|(|x|) \neq x, \forall x \in |t|$, com $t \in K'$ satisfazendo as hipóteses da construção de Hopf.

Podemos escrever $|t| = \bigcup_{i=1}^r |t^i|$, onde $t^i \in K'_L$ e $v(t) \in t^i$ para $i = 1, 2, \dots, r$.

Como $\psi'(v(t)) \notin s$, então $\psi'(t^i) = s^i \neq s$, onde s^i é um k -simplexo de K , $k \leq p$.

Por outro lado, temos $|t^i| \subseteq |t| \subseteq |s|$ e, por definição $|s^i| \cap |s| = \emptyset$, o que implica $|t^i| \cap \psi'(|t^i|) = \emptyset$. Assim, se $x \in |t|$, então $x \in |t^i|$ para algum $i \in \{0, \dots, r\}$ e como $|t^i| \cap \psi'(|t^i|) = \emptyset$, temos que $\psi'(x) \neq x$, como queríamos.

2. Se $x \in |K'_L|$ e $|\psi|(x) \neq x$, então $|\psi'|(|x|) \neq x$.

- Se $x \in |L|$, então $|\psi'|(|x|) = |\psi|(x)$ por definição.

- Se $x \notin |L|$, então $x \in st(|t|)$.

– Se $x \in |t|$, pelo item anterior temos que $|\psi'|(|x|) \neq x$.

– Se $x \in |t_j|$ com $t \subset t_j$ e $t \neq t_j$, então $\dim(t_j) > p$. Como K' é refinamento de K , existe $s \in K$, tal que $|t_j| \subseteq |s|$ e portanto $\dim(t_j) \leq \dim(s)$, ou seja, $\dim(s) > p$.

Como $x \in |K'_L|$, então $x \in |r|$, $r \in K'_L$ e portanto, $\dim(r) \leq p$. Logo, como ψ' é simplicial, temos $\psi'(r) \neq s$, o que implica $|\psi'|(|x|) \neq x$, pois $x \in |s|$.

3. $|\psi'|$ é uma aplicação relativamente próxima de $|\psi|$.

Seja $x \in |K'|$:

- Se $x \in |L|$, temos $|\psi|(x) = |\psi'|(x)$.
- Se $x \in |t_j|$ com $t \subset t_j$ e $t \neq t_j$, então $|\psi|(x) \in |s'|$, onde $s \subseteq s'$, pois $\psi(t) = s$ e ψ é simplicial. Por outro lado, como $\psi'(v(t_j)) \in s$, então $|\psi'|(x) \in |s''|$, onde $s'' \in K$ e $s'' \cap s \neq \emptyset$. Logo, $s'' \cap s' \neq \emptyset$.
- Se $x \in |t|$, então $|\psi|(x) \in |s|$ e $|\psi'|(x) \in |\overline{s^*}|$. Notando que $|\overline{s^*}|$ contém $|s|$, temos por construção que $|\psi|(x)$ e $|\psi'|(x)$ pertencem a realização geométrica de simplexes diferentes, diga-se s^1 e s^2 pertencentes a K , respectivamente, e será válido que ou $s^1 \cap s^2 \neq \emptyset$ ou $s^1 \cup s^2 \subset s^*$.

Definição 1.6.8. Um poliedro X é **n-dimensional** se para qualquer triangularização (K, τ) de X , K é um complexo simplicial n -dimensional, isto é, K contém um n -simplexo, mas não um m -simplexo para qualquer $m > n$.

Teorema 1.6.9. Sejam X um poliedro conexo n -dimensional com $n \geq 1$ e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação. Dado $\epsilon > 0$, existe uma aplicação $f' : X \rightarrow X$, tal que:

1. f' tem uma quantidade finita de pontos fixos.
2. Existe uma triangularização (K', τ') de X , em que cada ponto fixo de f' está em um conjunto distinto $\tau'(|s|)$, para algum simplexo maximal $s \in K'$.
3. $d(f, f') < \epsilon$.

Demonstração: Seja $T = (K, \tau)$ uma triangularização de X tal que, $\mu(K) < \epsilon/4n$. Pelo teorema da aproximação simplicial, existe $\psi : K_r \rightarrow K$ uma aproximação simplicial para f , onde K_r é a r -ésima ($r > 0$) subdivisão baricêntrica de K .

Se v_0 é um vértice de K_r , com $|\psi|(|v_0|) = |v_0|$ e este vértice não é maximal, podemos aplicar a construção de Hopf para obter um refinamento K' de K_r (e assim de K) e uma função simplicial $\psi' : K' \rightarrow K$.

Da definição de ψ' , se v é um vértice de K' e $|\psi'|(|v|) = |v|$, então v deve corresponder a um vértice de K_r diferente de v_0 .

Repetindo a construção de Hopf para cada vértice $v \in K_r$ em que $|\psi|(|v|) = |v|$, obtemos um refinamento K' de K e uma função simplicial $\psi' : K' \rightarrow K$, em que se v é um vértice de K' , então $|\psi'|(|v|) \neq |v|$.

Se $t \in K'$ é 1-simplexo e não é maximal, com $|t| \subseteq |\psi'|(|t|)$, aplicamos a construção de Hopf para ψ' e t .

Continuamos repetindo a construção de Hopf, primeiro para todos os 1-simplexos não maximais t com $|t| \subseteq |\psi'|(|t|)$, depois para todos 2-simplexos não maximais que satisfaçam a mesma condição e assim, por diante.

Na aplicação da construção de Hopf para um p -simplexo, pelo segundo item da observação 1.6.7, falhará a solução da equação $|\psi'|(|x|) = x$, a realização geométrica de qualquer simplexo de dimensão menor que p no refinamento.

Ou seja, trabalhando com os simplexos de dimensão a dimensão, estamos eliminando todas as soluções de $|\psi'|(|x|) = x$, exceto na realização geométrica de simplexos de dimensão maior, caso existam e não satisfaçam as hipóteses da construção de Hopf.

Depois de um número finito de aplicações da construção de Hopf, temos um refinamento K' de K e uma função simplicial $\psi' : K' \rightarrow K$, em que se $x \in |K'|$ e x está na realização geométrica de um simplexo não maximal, então $|\psi'|(|x|) \neq x$.

Seja $t \in K'$ um simplexo maximal e suponha $x, x' \in |t|$, com $|\psi'|(|x|) = x$ e $|\psi'|(|x'|) = x'$. Note que $|\psi'|$ é linear em $\overline{|t|}$, então se para $r \in \mathbb{R}$, tem-se que $[rx + (1 - r)x'] \in \overline{|t|}$, então

$$|\psi'|(|rx + (1 - r)x'|) = rx + (1 - r)x'$$

Mas de fato, existe $r \in \mathbb{R}$, tal que $y = rx + (1 - r)x' \in \partial|t|$ e $\partial|t| = \overline{|t|} \setminus |t|$ é a união da realização geométrica de simplexos não maximais.

Como não podemos ter $|\psi'|(|y|) = y$ em que y pertença à realização geométrica de um simplexo não maximal, concluímos que $|t|$ contém no máximo um elemento x , tal que $|\psi'|(|x|) = x$.

Triangularize X de forma a identificá-lo a K' e seja $f' = |\psi'|$, então a segunda condição vale. Como K' tem um número finito de simplexos maximais e provamos que cada um em sua realização geométrica tem no máximo uma solução para $f'(|x|) = x$, a primeira condição também é verdadeira.

Resta verificar o último item do Teorema. Notemos que a condição $|t| \subseteq |\psi'|(|t|)$, imposta para a aplicação da construção de Hopf, automaticamente faz t um p -esqueletal, ou seja, necessariamente $t \in K'$ satisfaz $|t| \subset |t^*|$, para algum $t^* \in K$ com mesma dimensão que t (se t^* é de dimensão maior, sendo ψ' simplicial seria impossível ter $|t| \subseteq |\psi'|(|t|)$).

Como a construção de Hopf move somente pontos em $|t_j|$, onde $t \subset t_j$, pelo lema 1.6.5 e pela construção de Hopf ser feita dimensão por dimensão, cada ponto é movido no máximo uma vez em cada dimensão. Sendo os n -simplexos todos maximais, cada ponto é movido no máximo n vezes.

Temos que para cada aplicação da construção de Hopf, pelo terceiro item da observação

1.6. CONSTRUÇÃO DE HOPF

1.6.7, $x \in X$ não move-se mais que $2\mu(K) < \epsilon/2n$ e então

$$d(|\psi|(x), f'(x)) < n(\epsilon/2n) = \epsilon/2$$

Assim, $d(|\psi|, f') < \epsilon/2$.

Como, ψ é uma aproximação simplicial para f com respeito a triangularização T , temos $d(f, |\psi|) < \mu(K) < \epsilon/2$ e portanto, $d(f, f') < \epsilon$.

□

Homotopias Finitamente Fixadas

A principal referência bibliográfica para este capítulo é o artigo da Schirmer [7]: Fix Finite Homotopies.

2.1 Teorema Principal

Uma vez conhecido o resultado provado por H. Hopf (1929) [2] que garante que toda auto-aplicação de um poliedro pode ser deformada em uma auto-aplicação f' que tem um número finito de pontos fixos, arbitrariamente próxima da f e com todos os pontos fixos da f' localizados na realização geométrica de simplexes maximais distintos, Schirmer (1979) [7], questionou se um resultado similar poderia ser obtido para homotopias.

Para tanto, ela criou o conceito de homotopias finitamente fixadas:

Definição 2.1.1. *Uma aplicação $F : |K| \times I \rightarrow |K|$ é uma **homotopia finitamente fixada**, se a aplicação $f_t : |K| \rightarrow |K|$, definida por $f_t(x) = F(x, t)$ tem uma quantidade finita de pontos fixos, $\forall t \in I$.*

Problema apresentado pela Schirmer:

Duas auto aplicações f_0 e f_1 de um poliedro $|K|$ homotópicas e com uma quantidade finita de pontos fixos, podem ser relacionadas por uma homotopia finitamente fixada e arbitrariamente próxima da original?

A resposta é positiva se todos os pontos fixos de f_0 e f_1 estão contidos na realização geométrica de simplexos maximais.

Na homotopia finitamente fixada construída, não necessariamente tem-se que todos os pontos fixos estão localizados em simplexos maximais de K , mas estes pontos estão localizados na melhor forma possível, ou seja, quando não estão na realização geométrica de simplexos maximais, estão na realização geométrica de simplexos que são hiperfaces.

Teorema 2.1.2. *Seja F uma homotopia entre duas auto-aplicações f_0 e f_1 de um poliedro $|K|$, em que f_0 e f_1 possuem uma quantidade finita de pontos fixos, com todos os pontos fixos localizados na realização geométrica de simplexos maximais. Dado $\epsilon > 0$, existe uma homotopia F' de f_0 a f_1 , satisfazendo:*

1. F' é finitamente fixada.
2. As projeções de todos os pontos fixos de F' estão contidos na realização geométrica ou de simplexos maximais ou de hiperfaces de K .
3. $d(F, F') < \epsilon$.

Casos similares a este teorema foram anteriormente provados:

- Weier [10], construiu uma homotopia finitamente fixada satisfazendo a primeira condição e algo relacionado a segunda, desde que $|K|$ fosse uma pseudo variedade bidimensional, satisfazendo uma determinada condição de conexidade.
- Schirmer [8], construiu uma homotopia finitamente fixada, satisfazendo a primeira e terceira condições, se $|K|$ fosse uma variedade de dimensão finita triangularizável, orientável e sem bordo.

2.2 Uma Construção de Hopf para Homotopias

Sejam K um complexo simplicial e $|G|$ a realização de uma função simplicial $G : P \rightarrow K$, onde P é um complexo simplicial adequado que satisfaz $|P| = |K| \times I$. Seja t um simplexo de P .

A construção de Hopf para homotopias que livra $|G|$ de todos os pontos fixos em $|t|$, desde que $G(t)$ não seja maximal em K , é uma técnica extremamente necessária para a demonstração do Teorema 2.1.2.

Lema 2.2.1. *Sejam K um complexo simplicial e P um complexo simplicial que satisfaça $|P| = |K| \times I$. Sejam $|G| : |P| \rightarrow |K|$ a realização geométrica de uma função simplicial e $\pi : |P| \rightarrow |K|$, a projeção na primeira coordenada.*

- *Se t é um simplexo de P , com $\pi(|t|)$ contido na realização geométrica de um simplexo $s \in K'$ (K' é um refinamento de K);*
- *Se $|t| \cap \text{Fix } |G| \neq \emptyset$, onde $\text{Fix } |G| = \{(x, t) \in |P|; |G|(x, t) = \pi(x, t)\}$;*
- *Se $G(t)$ não é maximal em K .*

Então, existe uma função simplicial $G' : P_Q \rightarrow K$ (P_Q é a subdivisão baricêntrica relativa ao subcomplexo Q), com $Q = P \setminus \text{st}(t)$, tal que:

1. $|t| \cap \text{Fix } |G'| = \emptyset$.
2. $|G| = |G'|$ em $|Q|$.
3. $d(|G|, |G'|) \leq 2\mu(K)$.

Demonstração: Seja s^* um simplexo maximal de K' com $s < s^*$ e r^* um simplexo maximal de K com $|s^*| \subset |r^*|$, então:

$$\pi(|t|) \subset |s| \subset \overline{|s^*|} \subset \overline{|r^*|}$$

Se $r = G(t)$, então $\pi(|t|) \cap |r| \neq \emptyset$, pois $|t| \cap \text{Fix } |G| \neq \emptyset$ e portanto, $|r| \cap \overline{|r^*|} \neq \emptyset$, o que resulta $r < r^*$ (notemos que $r \neq r^*$, pois r^* é maximal e r não). Também não é difícil ver que como $|s| \cap |r| \neq \emptyset$ e $s \in K'$, refinamento de K e ambos são realização geométrica de simplexos abertos, então $|s| \subseteq |r|$.

Fazendo $Q = P \setminus \text{st}(t)$, seja P_Q a subdivisão baricêntrica de P relativa ao subcomplexo Q .

Vamos definir $G' : P_Q \rightarrow K$ uma função simplicial.

- Se $v \in Q$, seja $G'(v) = G(v)$.
- Se $t_j \in \text{st}(t) \setminus t$ e $v(t_j)$ é o vértice de P_Q contido em $|t_j|$, seja $G'(v(t_j))$ um vértice qualquer de r .
- Se $v(t)$ é o vértice de P_Q contido em $|t|$, seja $G'(v(t))$ um vértice qualquer de r^* que não seja vértice de r .

Verifiquemos que G' assim definida satisfaz as três condições do lema:

1. Para verificar que $|t| \cap \text{Fix } |G'| = \emptyset$, primeiro notemos que $|t| = \bigcup_{i=1}^n |t^i|$ em que $t^i \in P_Q$ e $v(t) \in t^i$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

Como $G'(v(t)) \notin r$, então $G'(t^i) = r^i \neq r$, onde r^i é um simplexo de K .

Por outro lado, temos que

$$|t^i| \subseteq |t| \Rightarrow \pi(|t^i|) \subset \pi(|t|)$$

Como $\pi(|t|) \subset |s|$, temos $\pi(|t^i|) \subset |s|$.

Se caso tivéssemos $|G'|(|t^i|) \cap \pi(|t^i|) \neq \emptyset$, então, $|G'|(|t^i|) \cap |s| \neq \emptyset$ ou seja, $|r^i| \cap |s| \neq \emptyset$.

Mas como $|s| \subseteq |r|$, então teríamos que $|r^i| \cap |r| \neq \emptyset$, o que é um absurdo, pois por construção $|r^i| \cap |r| = \emptyset$. Portanto, $|G'|(|t^i|) \cap \pi(|t^i|) = \emptyset$, como queríamos.

2. Se $x \in |Q|$, então $x \in |s|$ para algum $s \in Q$. Fazendo $s = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, então $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ com $x_i \in \mathbb{R}$, assim

$$|G'|(|x|) = \sum_{i=1}^n x_i |G'(v_i)| = \sum_{i=1}^n x_i |G(v_i)| = |G|(|x|)$$

E portanto, $|G| = |G'|$ em $|Q|$.

3. Se $x \in |s|$ com $s \in Q$, pela condição 2 temos que $|G|(|x|) = |G'|(|x|)$.

Se $x \in |s|$ e $s \notin Q$, então $s \in \text{st}(t)$.

Se $s = t$, como G é simplicial e $G(t) = r$, com $r < r^*$, então $|G|(|x|) \subset \overline{|r^*|}$ e por construção de G' , também temos que $|G'|(|x|) \subset \overline{|r^*|}$.

Se $s \neq t$, então r' simplexo maximal de K' , tal que $G(s) \subset r'$, assim também por construção de G' , tanto $|G|(|x|)$ como $|G'|(|x|)$ estão contidos em $\overline{|r'|}$.

Logo, em ambos os casos, temos $d(|G|, |G'|) < 2\mu(K)$.

□

2.3 Demonstração do Teorema 2.1.2

Passo 1

Construções de aplicações simpliciais g_i , com finitos pontos fixos que são homotópicas (e estas homotopias são finitamente fixadas) as aplicações f_i dadas.

Começaremos a demonstração com um lema simples.

Lema 2.3.1. *Sejam K um poliedro conexo e $\sigma \in K$, um simplexo maximal. Então para qualquer $x \in |\sigma|$, dado $\delta > 0$, existe $y \in |\sigma|$ satisfazendo $d(x, y) < \delta$ e y sempre pertencente a realização geométrica de um simplexo maximal em qualquer refinamento de K .*

Demonstração: Primeiramente, notemos que como $|K|$ é conexo, então $\dim(\sigma) = p > 0$.

Sendo K uma coleção finita de conjuntos finitos, o número de refinamentos em K é enumerável e portanto, o número de refinamento em σ (subdivisões baricêntricas relativas ao complementar de σ) também é enumerável.

Seja A o conjunto de todos os $(p-1)$ -esqueletos de todos os refinamentos de σ . Claramente este conjunto satisfaz $\dim(A) = p - 1$, pois é uma coleção de conjuntos finitos que contém no máximo p elementos.

Como $\dim(\sigma) = p$, então $|\sigma| \setminus |A| \neq \emptyset$. Para $x \in |\sigma|$, seja $U(x, \delta)$ a bola aberta centrada em x e raio δ . Como $\dim(K) \geq p$, então $U(x, \delta) \cap (|\sigma| \setminus |A|) \neq \emptyset$ e portanto existe $y \in |\sigma|$, tal que $d(x, y) < \delta$ e $y \in |\sigma| \setminus |A|$.

Como $y \notin |A|$, em qualquer refinamento de K y estará contido na realização geométrica de um simplexo que será maximal.

□

Definição 2.3.2. *O **diâmetro** de uma homotopia $H : |K| \times I \rightarrow |K|$ é*

$$\text{diam } H = \sup \{d(H(x, t), H(x, t')); x \in |K|, t, t' \in I\}$$

Lema 2.3.3. *Sejam $f_i : |K| \rightarrow |K|$, $i = 0, 1$ duas auto-aplicações de um poliedro $|K|$, n -dimensional, com uma quantidade finita de pontos fixos e com todos os pontos fixos localizados na realização geométrica de simplexos maximais. Dado $\epsilon > 0$, existem:*

- Um refinamento K' de K ;
- Refinamentos K''_i , $i = 0, 1$ da primeira subdivisão baricêntrica de K' ;

- Aplicações simpliciais $g_i : |K''_i| \rightarrow |K'|$, $i = 0, 1$;
- Homotopias H_i de f_i a g_i , $i = 0, 1$.

Satisfazendo:

1. H_i é finitamente fixada e a projeção de todos os seus pontos fixos estão localizados na realização geométrica de simplexes maximais de K ;
2. g_i tem uma quantidade finita de pontos fixos que estão localizados em simplexes maximais distintos de K''_i ;
3. $\text{diam } H_i < \epsilon/4$;
4. $\mu(K') < \frac{\epsilon}{64(2n+1)}$.

Demonstração:

Parte 1

Assumiremos que $|K|$ é conexo, pois caso não seja, esta construção pode ser feita componente a componente.

Primeiro, vamos construir duas aplicações $f'_i : |K| \rightarrow |K|$, $i = 0, 1$ e homotopias H'_i de f_i a f'_i , satisfazendo:

- Todos os pontos fixos da f'_i estão localizados na realização geométrica de simplexes maximais em qualquer refinamento de K ;
- A projeção de todos os pontos fixos de H'_i estão localizados na realização geométrica de simplexes maximais em K e $\text{diam } H'_i < \epsilon/8$.

Faremos tal construção apenas para f_0 , pois a construção da f_1 segue de maneira análoga.

Seja $\text{Fix } f_0 = \{c_j\}$, o conjunto dos pontos fixos de f_0 . Como f_0 é contínua, podemos escolher β , com $0 < \beta < \epsilon/16$, tal que $\forall c_j \in \text{Fix } f_0$, as β -bolas abertas $U(c_j, \beta)$ sejam disjuntas duas a duas e cada $U(c_j, \beta)$ esteja contido na realização geométrica do simplexo de K que contém c_j e que por hipótese é maximal.

Seja γ , com $0 < \gamma < \beta/2$ e satisfazendo $d(x, f_0(x)) < \beta/2$, $\forall x \in \bigcup \{U(c_j, \gamma); c_j \in \text{Fix } f_0\}$. Notemos que tal escolha pode ser feita, pois f é contínua e $\text{Fix } f_0$ é um conjunto finito.

2.3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1.2

De acordo com o lema 2.3.1, cada $U(c_j, \gamma)$ por estar localizado na realização geométrica de um simplexo maximal, contém um ponto c'_j que está contido na realização geométrica de um simplexo maximal em qualquer refinamento de K .

Seja $x \in \overline{U}(c_j, \gamma) \setminus \{c'_j\}$. Chamemos de y o ponto em que a semi-reta de c'_j a x intercepta o bd $U(c_j, \gamma)$ e z o ponto do segmento de c_j a y que satisfaz

$$d(c_j, z) = \frac{d(c_j, y)}{d(c'_j, y)} \cdot d(c'_j, x)$$

Um exemplo de tal construção pode ser observado na figura 2.1.

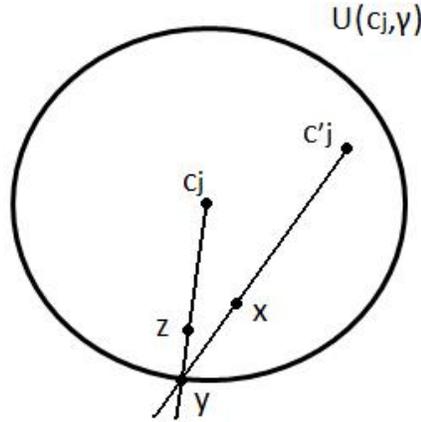


Figura 2.1: Construção do ponto z .

Para definir uma aplicação f'_{0j} de $\overline{U}(c_j, \gamma)$ em $U(c_j, \beta)$, como $|K|$ é um espaço normado compacto podemos considerar por \overrightarrow{ab} o vetor de a a b em $U(c_j, \beta)$, pois $U(c_j, \beta)$ está contido na realização geométrica de um simplexo maximal.

Para $x \in \overline{U}(c_j, \gamma) \setminus \{c'_j\}$, seja $f'_{0j}(x)$ o ponto que satisfaz

$$\overrightarrow{c'_j f'_{0j}(x)} = \overrightarrow{c'_j x} + \overrightarrow{z f_0(z)}$$

e defina $f'_{0j}(c'_j) = c'_j$.

2.3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1.2

Esta construção está bem definida, pois $\forall x \in \overline{U}(c_j, \gamma)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} d(f'_{0j}(x), c_j) &\leq d(f'_{0j}(x), x) + d(x, c_j) \\ &= d(f_0(z), z) + d(x, c_j) \\ &< \beta/2 + \gamma \\ &< \beta \end{aligned}$$

Portanto, $f'_{0j}(x) \in U(c_j, \beta)$.

Agora podemos definir $f'_0 : |K| \rightarrow |K|$, da seguinte forma:

$$f'_0(x) = \begin{cases} f'_{0j}(x), & \text{se } x \in \bigcup \{\overline{U}(c_j, \gamma); c_j \in \text{Fix } f_0\} \\ f_0(x), & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Tal como foi construída, f'_0 é contínua, pois tanto f_0 como cada f'_{0j} são contínuas e para qualquer $c_j \in \text{Fix } f_0$, se $x \in \text{bd } \overline{U}(c_j, \gamma)$, então $f'_{0j}(x) = f_0(x)$. De fato, pela construção neste caso, teremos que $y = z = x$ e portanto,

$$\overrightarrow{c'_j f'_{0j}(x)} = \overrightarrow{c'_j x} + \overrightarrow{x f_0(x)} = \overrightarrow{c'_j f_0(x)},$$

o que implica $f'_{0j}(x) = f_0(x)$.

Como não existem pontos fixos fora de $\overline{U}(c_j, \gamma)$, o conjunto de pontos fixos de f'_0 é $\text{Fix } f'_0 = \{c'_j\}$ e vale destacar que todos eles estão localizados na realização geométrica de simplexes que são maximais em qualquer refinamento de K .

Agora vamos definir uma homotopia entre f_0 e f'_0 . Seja $x \in |K|$.

Se $x \notin \bigcup \{\overline{U}(c_j, \gamma); c_j \in \text{Fix } f_0\}$, então $f'_0(x) = f_0(x)$ e portanto podemos definir $H'_0(x, t) = f_0(x)$.

Se $x \in \bigcup \{\overline{U}(c_j, \gamma); c_j \in \text{Fix } f_0\}$, então denotemos por $c_j(t)$ o ponto do segmento de c_j a c'_j , para $0 < t \leq 1$, reparametrizado pelo intervalo unitário.

Definimos $H'_{0j}(x, t)$ como o ponto em $U(c_j, \beta)$ que é obtido de maneira análoga a $f'_{0j}(x)$, mas usando $c_j(t)$, ao invés de c'_j . Notemos que $c_j(t)$ também estará em um simplexo maximal de K , mas não necessariamente em qualquer refinamento de K , como é o caso do c'_j .

Defina $H'_{0j}(x, 0) = f_0(x)$. Então a homotopia H'_0 de f_0 a f'_0 pode ser construída de H'_{0j} da mesma forma que f'_0 foi construída de f'_{0j} e a continuidade de H'_0 segue de forma similar a como foi provado para f'_0 .

Para verificar o diam H'_0 , notemos que:

- Se $x \notin \bigcup \{\bar{U}(c_j, \gamma); c_j \in \text{Fix } f_0\}$, então $f'_0(x) = f_0(x)$ e portanto H'_0 é a homotopia constante.
- Se $x \in \bigcup \{\bar{U}(c_j, \gamma); c_j \in \text{Fix } f_0\}$, então $f'_0(x) \neq f_0(x)$ e assim, por construção, o conjunto $\{H'_0(x, t); 0 \leq t \leq 1\}$ está contido em algum $U(c_j, \beta)$.

Portanto, $\text{diam } H'_0 < 2\beta < \epsilon/8$.

A forma como H'_0 foi construída implica que a projeção de qualquer ponto fixo está contida na realização geométrica de um simplexo maximal de K .

A aplicação f'_1 e a homotopia H'_1 de f_1 a f'_1 é obtida analogamente.

□

Parte 2

Agora vamos descrever a construção das aplicações simpliciais g_i e homotopias H''_i de f'_i a g_i , $i = 0, 1$.

Escolha ρ_0 , com $0 < \rho_0 < \epsilon/64$, de forma que cada $c'_j \in \text{Fix } f'_0$, que está contido na realização geométrica de um simplexo $k_j \in K$ (maximal em todo refinamento de K), satisfaça $\bar{U}(c'_j, 4\rho_0) \subset |k_j|$ e todos $\bar{U}(c'_j, 4\rho_0)$ sejam disjuntos.

Como f'_0 é contínua, $\exists \delta_0$ com $0 < \delta_0 \leq \rho_0$ satisfazendo

$$f'_0(\bar{U}(c'_j, \delta_0)) \subset \bar{U}(c'_j, \rho_0), \forall c'_j \in \text{Fix } f'_0$$

Além do mais, escolha η_0 com $0 < \eta_0 \leq \rho_0$, tal que

$$d(x, \text{Fix } f'_0) \geq \delta_0 \Rightarrow d(x, f'_0(x)) \geq \eta_0$$

Determine ρ_1, δ_1, η_1 analogamente para f'_1 e escolha um refinamento K' de K , tal que

$$\mu(K') < \min\{\delta_0, \delta_1, \frac{\eta_0}{2n+1}, \frac{\eta_1}{2n+1}\},$$

onde n é a dimensão de K .

Seja ψ_0 uma aproximação simplicial de f'_0 que aplica um refinamento da primeira subdivisão baricêntrica de K' em K' e escolha g_0 como uma aplicação que é obtida de $|\psi_0|$ por

2.3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1.2

uma sucessão de construções de Hopf da mesma forma que f' é obtida de ψ na demonstração do Teorema 1.6.9.

Então $g_0 : |K_0''| \rightarrow |K'|$ é uma aplicação simplicial, onde K_0'' é um refinamento da primeira subdivisão baricêntrica de K' .

Esta aplicação tem uma quantidade finita de pontos fixos e eles estão localizados na realização geométrica de simplexes maximais distintos de K_0'' e $d(|\psi_0|, g_0) \leq 2n\mu(K')$.

Como $d(f'_0, |\psi_0|) \leq \mu(K')$, então

$$d(f'_0, g_0) \leq (2n + 1)\mu(K') < \eta_0$$

Agora iremos construir uma homotopia H_0'' de f'_0 a g_0 .

Se $x \notin \bigcup \{U(c'_j, \delta_0); c'_j \in \text{Fix } f'_0\}$, então $d(x, \text{Fix } f'_0) \geq \delta_0 \Rightarrow d(x, f'_0(x)) \geq \eta_0$ e portanto, x e $f'_0(x)$ estão na realização geométrica de simplexes distintos de K' , pois $\mu(K') < \eta_0$.

Ao realizar a primeira subdivisão baricêntrica, antes de realizar os refinamentos para obter a aproximação simplicial ψ_0 de f'_0 , também estamos garantindo que x e $|\psi_0|(x)$ estão na realização geométrica de simplexes diferentes. Assim, tal como foi feita na construção do teorema 1.6.9, temos que $g_0(x) = |\psi_0|(x)$.

Como ψ_0 é uma aproximação simplicial de f'_0 , é possível definir $H_0''(x, t)$ por

$$H_0''(x, t) = tg_0(x) + (1 - t)f'_0(x)$$

De $d(x, f'_0(x)) \geq \eta_0$ e $d(f'_0, g_0) < \eta_0$, segue que $H_0''(x, t) \neq x, \forall 0 \leq t \leq 1$.

Agora vamos definir a homotopia em $\bigcup \{\bar{U}(c'_j, \delta_0); c'_j \in \text{Fix } f'_0\}$. Para tanto, consideremos um dos conjuntos $\bar{U}(c'_j, \delta_0)$ (que está contido na realização geométrica de simplexo maximal k_j de K).

H_0'' já foi definido no $\text{bd } \bar{U}(c'_j, \delta_0) \times I$ e satisfaz:

$$\begin{aligned} d(c'_j, H_0''(x, t)) &\leq d(c'_j, f'_0(x)) + d(f'_0(x), H_0''(x, t)) \\ &\leq d(c'_j, f'_0(x)) + d(f'_0(x), g_0(x)) \\ &\leq \rho_0 + \eta_0 \\ &\leq 2\rho_0 \end{aligned}$$

Faça $H_0''(x, 0) = f'_0(x)$ e $H_0''(x, 1) = g_0(x), \forall x \in \bar{U}(c'_j, \delta_0)$.

2.3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1.2

Então, H_0'' está definido em $\text{bd}(\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I)$, tem valores em $\overline{U}(c'_j, 2\rho_0)$ e o conjunto de seus pontos fixos é formado por $c'_j \times \{0\}$ e finitos pontos em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times \{1\}$.

Para estender H_0'' sobre todo $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$, faremos o procedimento descrito a seguir. Seja $\tilde{c}_j = (c'_j, 1/2)$, para cada ponto $\tilde{x} = (x, t) \in (\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I) \setminus \{\tilde{c}_j\}$, tome $\tilde{y} = (y, s)$ como sendo o ponto da semi-reta de \tilde{c}_j a \tilde{x} que intercepta o $\text{bd}(\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I)$.

Um exemplo deste tipo de construção pode ser observada na figura 2.2.

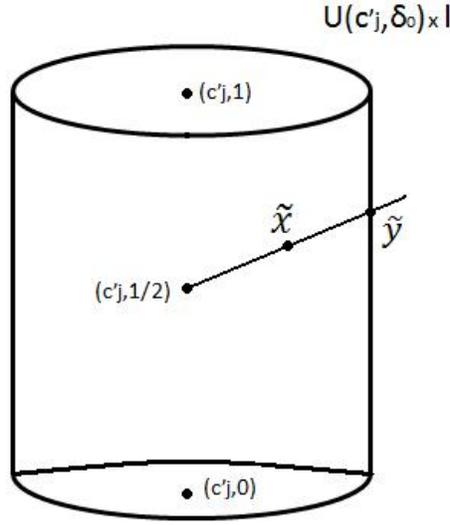


Figura 2.2: Construção do ponto $\tilde{y} = (y, s)$.

Sendo \tilde{d} a métrica produto em $|K| \times I$, então defina $H_0''(x, t)$ como o ponto que satisfaz

$$\overrightarrow{c'_j H_0''(x, t)} = \overrightarrow{c'_j x} + \lambda \overrightarrow{y H_0''(y, s)}$$

onde $\lambda = \frac{\tilde{d}(\tilde{c}_j, \tilde{x})}{\tilde{d}(\tilde{c}_j, \tilde{y})}$.

Por fim, defina $H_0''(c'_j, 1/2) = c'_j$.

Notemos que tal como foi construído, o conjunto de pontos fixos de H_0'' em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$ é o conjunto de pontos $\tilde{x} = (x, t) \in \overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$ que satisfazem ou $\tilde{x} = (c'_j, t)$ com $0 \leq t \leq 1/2$ ou $\tilde{y} = (y, s)$ (associado a \tilde{x} na construção de $H_0''(x, t)$) ser um ponto fixo de $H_0''(x, t)$ em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times \{1\}$.

De fato, por um lado temos que se $\tilde{x} \in \overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$ é ponto fixo, então $H_0''(x, t) = x$ e pela forma como foi construído, implica que $H_0''(y, s) = y$. Ou seja, $\tilde{y} = (y, s)$ é um ponto

2.3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1.2

fixo pertencente a $\text{bd}(\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I)$. Mas como anteriormente foi observado, os únicos pontos fixos deste bordo são $(c'_j, 0)$ e finitos pontos em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times \{1\}$ e para o primeiro caso, teremos que $\tilde{x} = (c'_j, t)$ para $0 \leq t \leq 1/2$, será um ponto fixo de H''_0 .

Por outro lado, se $\tilde{x} = (x, t) \in \overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$ satisfaz $\tilde{x} = (c'_j, t)$ para $0 \leq t \leq 1/2$, então $\tilde{y} = (c'_j, 0)$ e assim

$$\overrightarrow{c'_j H''_0(c'_j, t)} = \overrightarrow{c'_j c'_j} + \overrightarrow{\lambda c'_j H''_0(c'_j, 0)} = \overrightarrow{c'_j H''_0(c'_j, 0)}$$

o que implica, $H''_0(c'_j, t) = H''_0(c'_j, 0) = c'_j$.

Agora se $\tilde{y} = (y, s)$ (associado a \tilde{x} na construção de $H''_0(x, t)$) é um ponto fixo $H''_0(x, t)$ em $U(c'_j, \delta_0) \times \{1\}$, então

$$\overrightarrow{c'_j H''_0(x, t)} = \overrightarrow{c'_j x} + \overrightarrow{\lambda y H''_0(y, s)} = \overrightarrow{c'_j x}$$

o que implica, $H''_0(x, t) = x$.

Desta forma, o conjunto de pontos fixos de H'_0 em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$ são segmentos e portanto, também podem ser entendidos como poliedros uni-dimensionais (também denotados como grafos).

Um exemplo do tipo de construção descrita acima pode ser observada na figura 2.3.

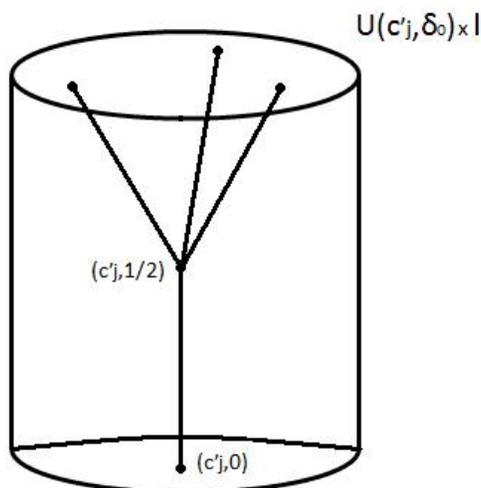


Figura 2.3: Exemplo do conjunto de pontos fixos que H'_0 pode ter em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$.

Como $d(c'_j, x) \leq \delta_0$ e $0 < \lambda \leq 1$, então

$$\begin{aligned} d(y, H''_0(y, s)) &\leq d(y, c'_j) + d(c'_j, H''_0(y, s)) \\ &\leq \delta_0 + 2\rho_0 \\ &\leq 3\rho_0 \end{aligned}$$

e assim $H''_0(x, t) \in \bar{U}(c'_j, 4\rho_0)$, pois

$$\begin{aligned} d(c'_j, H''_0(x, t)) &\leq d(c'_j, x) + \lambda d(y, H''_0(y, s)) \\ &\leq \rho_0 + 3\rho_0 \\ &= 4\rho_0 \end{aligned}$$

Desta forma, podemos estender H''_0 sobre $\bigcup\{\bar{U}(c'_j, \delta_0) \times I; c'_j \in \text{Fix } f'_0\}$, gerando uma homotopia $H''_0 : |K| \times I \rightarrow |K|$ de f'_0 a g_0 , que é finitamente fixada e a projeção de todos os seus pontos fixos estão localizados na realização geométrica de simplexes maximais k_j de K .

Se $x \notin \bigcup\{\bar{U}(c'_j, \delta_0) \times I; c'_j \in \text{Fix } f'_0\}$, então

$$\sup \{d(H''_0(x, t), H''_0(x, t')); x \in |K| \text{ e } t, t' \in I\} \leq d(f'_0, g_0) \leq \eta_0.$$

Se $x \in \bar{U}(c'_j, \delta_0)$, para algum $c'_j \in \text{Fix } f'_0$, então $\{H''_0(x, t), t \in I\} \subset \bar{U}(c'_j, 4\rho_0)$ e portanto,

$$\sup \{d(H''_0(x, t), H''_0(x, t')); x \in |K| \text{ e } t, t' \in I\} \leq 8\rho_0.$$

Conclui-se então, que $\text{diam } H''_0 < \epsilon/8$.

A construção de $H''_1 : |K| \times I \rightarrow |K|$ segue de maneira análoga.

Parte 3

Vamos definir a homotopia H_i de f_i a g_i , $i = 0, 1$ da seguinte forma:

$$H_i(x, t) = \begin{cases} H'_i(x, 2t), & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H''_i(x, 2t - 1), & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \text{diam } H_i &\leq \text{diam } H'_i + \text{diam } H''_i \\ &< \epsilon/8 + \epsilon/8 \\ &< \epsilon/4 \end{aligned}$$

e portanto, H_0 e H_1 satisfazem as hipóteses do lema, como queríamos.

□

Passo 2

Construção de uma homotopia finitamente fixada entre duas aplicações simpliciais com conjunto de pontos fixos finitos.

A ideia do Passo 2 é a construção de uma homotopia finitamente fixada entre as aplicações $g_i, i = 0, 1$ originadas no Lema 2.3.3. Esta homotopia será obtida com o auxílio da construção de Hopf para homotopias apresentada na seção anterior.

Neste propósito, para K um complexo simplicial fixado, será necessário realizar $|K| \times I$ como um complexo simplicial adequado P .

Se K', K''_0 e K''_1 são os complexos obtidos no lema 2.3.3, então desejamos que P seja um complexo simplicial da forma $|P| = |K| \times I$ e que satisfaça as seguintes condições:

P1. $K''_0 \times \{0\}$ e $K''_1 \times \{1\}$ sejam subcomplexos de P .

P2. Se $\tau \in P$ e $\pi : |P| \rightarrow |K|$ é a projeção na primeira coordenada, então $\pi(|\tau|) \subset |\rho|$, onde $\rho \in K'$.

P pode ser obtido, primeiro considerando o complexo usualmente associado a $|K| \times I$ e então refinando-o via subdivisões baricêntricas relativa ao complementar das vizinhanças simpliciais dos simplexes em $K' \times \{0\}$ e $K' \times \{1\}$, de forma a serem subdivididos em K''_0 e K''_1 , respectivamente.

Lema 2.3.4. *Sejam K um complexo simplicial fixado e P um complexo simplicial que satisfaça $|P| = |K| \times I$ e as condições P1 e P2. Sejam K' um refinamento de K , P' um refinamento de P e $G_s : P' \rightarrow K'$ uma função simplicial. Se $\tau \in P'$, tal que $|\tau| \cap \text{Fix } |G_s| \neq \emptyset$ e τ não é maximal, nem hiperface em P' , então $G_s(\tau)$ não é maximal em K' .*

2.3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1.2

Demonstração: Seja $G_s(\tau) = \sigma$, onde σ é um simplexo de K' e $\pi(|\tau|) \subset |\rho|$, onde $\rho \in K'$ (isso ocorre pela condição P2).

Como $|\tau| \cap \text{Fix } |G_s| \neq \emptyset$, então $\pi(|\tau|) \cap |\sigma| \neq \emptyset$, logo $|\rho| \cap |\sigma| \neq \emptyset$ e assim, $\rho = \sigma$ e $\dim \rho \leq \dim \tau$.

Como por hipótese τ não é maximal, existe um simplexo $\tau^* \in P'$, com $\tau < \tau^*$ e $\dim \tau \leq \dim \tau^* - 2$, por também não ser hiperface. Logo,

$$\dim \rho + 1 \leq \dim \tau^* - 1 \leq \dim \pi(|\tau^*|)$$

e então $\pi(|\tau^*|) \not\subset |\rho|$.

Mas $\pi(|\tau|) \subset |\rho|$, então $\pi(|\overline{\tau^*}|) \cap |\rho| \neq \emptyset$ e assim ρ não pode ser maximal em K' . Como $\rho = \sigma$, $G_s(\tau)$ também não pode ser maximal.

□

Antes de enunciar o próximo lema, assumiremos o seguinte teorema sem demonstração (Maunder [5], pag. 55).

Teorema 2.3.5. *Sejam K e L complexos simpliciais, M um subcomplexo de K e $f : |K| \rightarrow |L|$ uma função contínua, tal que $f|_{|M|}$ é simplicial. Então, existe um inteiro $r > 0$ e uma aplicação simplicial $g : |K_r| \rightarrow |L|$, tal que $g = f$ em $|M|$.*

Lema 2.3.6. *Sejam K' , K''_i e $g_i : |K''_i| \rightarrow |K'|$, $i = 0, 1$ como no lema 2.3.3. Se g_0 e g_1 são relacionados por uma homotopia G , então existe uma homotopia G' relacionando-as e satisfazendo:*

- G' é finitamente fixada;
- A projeção de todos os pontos fixos de G' estão localizados na realização geométrica de simplexos maximais ou hiperfaces de K ;
- $d(G, G') < \epsilon/2$.

Demonstração: Novamente assumiremos que $|K|$ é conexo. Seja P um complexo simplicial, tal que $|P| = |K| \times I$ e satisfazendo (P1) e (P2).

Selecionemos como aproximação simplicial de G , uma aplicação $G_s : |P'| \rightarrow |K'|$, onde P' é um refinamento de P , obtido por um número finito de subdivisões baricêntricas

2.3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1.2

relativas aos subcomplexos em $(K_0'' \times \{0\}) \cup (K_1'' \times \{1\})$, de forma que G_s satisfaça $G_s = G$ em $(|K_0''| \times \{0\}) \cup (|K_1''| \times \{1\})$ e $d(G, G_s) < \mu(K')$. A existência de G_s segue do teorema 2.3.5.

Se $\tilde{x}_0 = (x_0, t_0)$ é um vértice de P' com $G_s(x_0, t_0) = x_0$, então x_0 é um vértice de K' e assim, não é maximal.

Pelo lema 2.2.1, podemos realizar a construção de Hopf para homotopias, que resulta na aplicação simplicial $G'_s : |P''| \rightarrow |K'|$, onde P'' refina P' , de forma que $G'_s(x_0, t_0) \neq x_0$ e $G'_s = G_s$ em $|P' \setminus \{\text{st}(\tilde{x}_0)\}|$.

Assim, qualquer vértice $\tilde{x} \in |P''| \cap \text{Fix } G'_s$ também deve ser um vértice de $P' \setminus \{\tilde{x}_0\}$, pois pela construção de Hopf para homotopias, tanto \tilde{x}_0 como os novos vértices criados em P'' , não são pontos fixos em G'_s .

Podemos realizar a construção de Hopf para homotopias em todos os vértices, até chegar a uma aplicação simplicial, ainda denotada por $G'_s : |P''| \rightarrow |K'|$, onde P'' refina P' , que é livre de pontos fixos em todos os vértices de P'' .

Notemos que G_s é livre de pontos fixos nos vértices de $(K_0'' \times \{0\}) \cup (K_1'' \times \{1\})$ (por representarem, respectivamente, as aplicações g_0 e g_1 , a qual sabemos ter todos os pontos fixos localizados em simplexes maximais). Logo, $G'_s = G_s$ neste subcomplexo.

Depois de realizar uma sucessão de construções de Hopf para homotopias para todos os simplexes uni-dimensionais $\tau \in P''$ com $|\tau| \cap \text{Fix } |G'_s| \neq \emptyset$ e $G'_s(\tau)$ não maximal em K' , então para todos os simplexes bi-dimensionais com a mesma propriedade é possível realizar o mesmo procedimento.

De acordo com P2, lemas 2.2.1 e 2.3.4, podemos continuar realizando a referida construção até obter uma aplicação simplicial $G'_s : |P''| \rightarrow |K'|$, que é igual a G_s no subcomplexo $(K_0'' \times \{0\}) \cup (K_1'' \times \{1\})$ de P'' e é livre de pontos fixos na realização geométrica de todos os simplexes de P'' , desde que não sejam nem maximais, nem hiperfaces.

Se τ é uma hiperface de P'' com $|\tau| \cap \text{Fix } G'_s \neq \emptyset$, então tal como é verificado no teorema 1.6.9, pelo fato de G'_s ser linear em $\overline{|\tau|}$ e $\text{bd } |\tau| \cap \text{Fix } G'_s = \emptyset$, G'_s tem no máximo um ponto fixo em $|\tau|$.

Agora considere um simplexo maximal $\tau \in P''$, com $|\tau| \cap \text{Fix } G'_s \neq \emptyset$, então $\text{bd } |\tau| \cap \text{Fix } G'_s$ ou é vazio ou é um conjunto finito $\{\tilde{x}_j\}$ (pois o bordo de um simplexo maximal, contém simplexes que são hiperfaces).

Seja $\tilde{x}_j = (x_j, t_j)$ a notação para os pontos fixos do $\text{bd } |\tau|$ e selecionemos $\tilde{x}_0 = (x_0, t_0) \in |\tau|$ com $t_0 \neq t_j, \forall t_j$. Para qualquer $\tilde{x} = (x, t) \in \overline{|\tau|} \setminus \{\tilde{x}_0\}$, seja $\tilde{y} = (y, w)$ o ponto em que a semi-reta de \tilde{x}_0 a \tilde{x} intercepta o $\text{bd } |\tau|$. Uma construção semelhante pode ser observado

na figura 2.4.

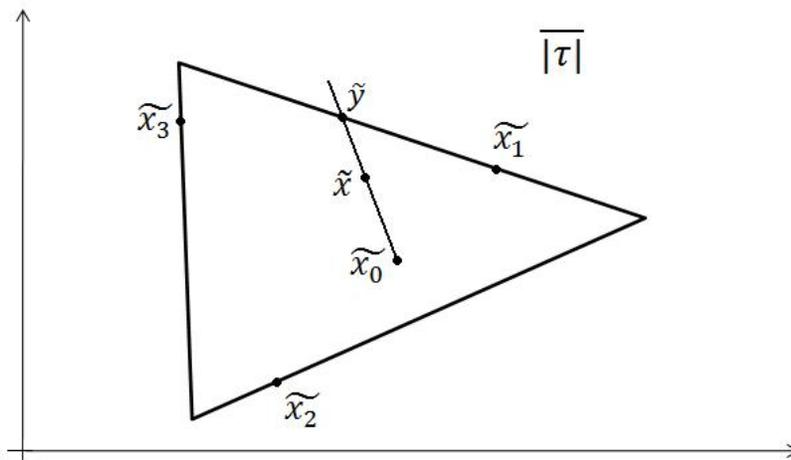


Figura 2.4: Construção do ponto $\tilde{y} = (y, w)$.

Modifiquemos G'_s para G' , em $\overline{|\tau|}$, definindo $G'(x, t)$ como o ponto em $\overline{|\sigma|} = G'_s(\overline{|\tau|})$ que satisfaça

$$\overrightarrow{x_0 G'(x, t)} = \overrightarrow{x_0 \tilde{x}} + \lambda \overrightarrow{y G'_s(y, w)}$$

onde $\lambda = \frac{d(\tilde{x}_0, \tilde{x})}{d(\tilde{x}_0, \tilde{y})}$.

Por fim, defina $G'(x_0, t_0) = x_0$.

Como $\pi(\overline{|\tau|}) \subset \overline{|\sigma|}$ e $\overline{|\sigma|}$ é convexo, então $G'(x, t) \in \overline{|\sigma|}$ e a aplicação está bem definida.

Temos assim, que $\overline{|\tau|} \cap \text{Fix } G'$ ou é formado pela união de todos os segmentos de \tilde{x}_0 a \tilde{x}_j (quando $\text{bd } \overline{|\tau|} \cap \text{Fix } G' \neq \emptyset$), ou unicamente pelo ponto \tilde{x}_0 (quando $\text{bd } \overline{|\tau|} \cap \text{Fix } G' = \emptyset$).

A figura 2.5 mostra como seria o conjunto de pontos fixos (um grafo) da figura 2.4.

Se realizarmos esta construção em todos os simplexos maximais de P'' em que G'_s tem pontos fixos, obtemos então uma homotopia finitamente fixada $G' : |P''| \rightarrow |K'|$, onde P'' refina P' e assim P .

Por construção $G'(x, 0) = g_0(x)$ e $G'(x, 1) = g_1(x), \forall x \in |K|$. Se $\tilde{x} = (x, t) \in \text{Fix } G'$, então \tilde{x} está contido ou em um simplexo maximal ou em uma hiperface de P'' e portanto, de P . Segue de P2 que x está contido em um simplexo maximal ou hiperface de K' e assim de K .

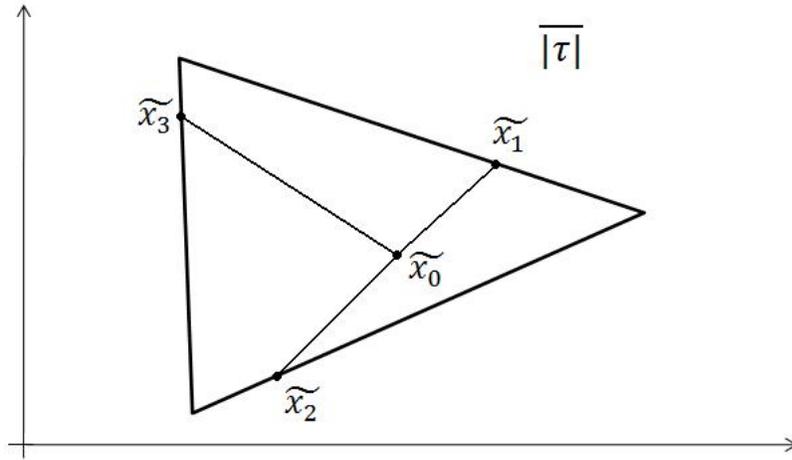


Figura 2.5: O conjunto de pontos fixos da figura 2.4.

Cada ponto $\tilde{x} \in |P|$ é movido durante a construção de Hopf para homotopias no máximo n vezes, onde n é a dimensão de K , e por uma distância de no máximo $2\mu(K')$ em cada mudança.

Durante a última mudança de G'_s para G' , o ponto é movido a uma distância de no máximo $\mu(K')$. Então,

$$d(G_s, G') \leq (2n + 1)\mu(K')$$

Assim, de acordo com o item 4 do lema 2.3.3

$$\begin{aligned} d(G, G') &\leq d(G, G_s) + d(G_s, G') \\ &\leq \mu(K') + (2n + 1)\mu(K') \\ &\leq 2(n + 1)\mu(K') \\ &< 2\frac{\epsilon}{64} \\ &< \epsilon/2 \end{aligned}$$

Assim, G' satisfaz o Lema 2.3.6.

□

Passo 3

Construção de uma homotopia finitamente fixada entre as aplicações dadas.

2.3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1.2

Agora iremos juntar, de forma adequada, as homotopias construídas, afim de encontrar uma homotopia F' satisfazendo o Teorema 2.1.2.

Dada $F : |K| \times I \rightarrow |K|$ como nas hipóteses do teorema 2.1.2 e $\epsilon > 0$, podemos escolher δ com $0 < \delta < 1$, tal que $d(F(x, t), F(x, t')) < \epsilon/4, \forall x \in |K|$ e $t, t' \in I$ com $|t - t'| < \delta$.

Usando as homotopias H_0 e H_1 , obtidas no Lema 2.3.3, vamos definir $F'' : |K| \times I \rightarrow |K|$, como uma homotopia igual a $H_0 H_0^{-1} F H_1 H_1^{-1}$, satisfazendo:

$$F''(x, t) = \begin{cases} H_0(x, \frac{2t}{\delta}), & \text{se } 0 \leq t \leq \delta/2 \\ H_0(x, 2\frac{1-t}{\delta}), & \text{se } \delta/2 \leq t \leq \delta \\ F(x, \frac{t-\delta}{1-2\delta}), & \text{se } \delta \leq t \leq 1-\delta \\ H_1(x, \delta\frac{t+\delta-1}{2}), & \text{se } 1-\delta \leq t \leq 1-\delta/2 \\ H_1(x, \delta\frac{1-t}{2}), & \text{se } 1-\delta/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Desejamos agora calcular $d(F, F'')$.

Notemos primeiramente que

$$d(F, F'') = \max \begin{cases} \max\{d(F(x, t), H_0(x, \frac{2t}{\delta})), & \text{para } 0 \leq t \leq \delta/2\} \\ \max\{d(F(x, t), H_0(x, 2\frac{1-t}{\delta})), & \text{para } \delta/2 \leq t \leq \delta\} \\ \max\{d(F(x, t), F(x, \frac{t-\delta}{1-2\delta})), & \text{para } \delta \leq t \leq 1-\delta\} \\ \max\{d(F(x, t), H_1(x, \delta\frac{t+\delta-1}{2})), & \text{para } 1-\delta \leq t \leq 1-\delta/2\} \\ \max\{d(F(x, t), H_1(x, \delta\frac{1-t}{2})), & \text{para } 1-\delta/2 \leq t \leq 1\} \end{cases}$$

Como $H_0(x, 0) = F(x, 0)$ e $\text{diam } H_0 < \epsilon/4$, então para qualquer $(x, t) \in |K| \times I$, com $0 \leq t \leq \delta/2$, temos

$$\begin{aligned} d(F(x, t), H_0(x, \frac{2t}{\delta})) &\leq d(F(x, t), F(x, 0)) + d(F(x, 0), H_0(x, \frac{2t}{\delta})) \\ &< \epsilon/4 + \epsilon/4 \\ &= \epsilon/2 \end{aligned}$$

Pois, $|t - 0| < \delta/2$ e logo, $d(F(x, t), F(x, 0)) < \epsilon/4$.

De forma similar, verifica-se que

$$\max \{d(F(x, t), H_0(x, 2\frac{1-t}{\delta})), \text{para } \delta/2 \leq t \leq \delta\} < \epsilon/2.$$

Usando procedimento análogo ao anterior, mas notando que $H_1(x, 1) = F(x, 1)$ e

2.3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1.2

diam $H_1 < \epsilon/4$, verifica-se que:

$$\max\{d(F(x, t), H_1(x, \frac{\delta(t + \delta - 1)}{2})), \text{ para } 1 - \delta \leq t \leq 1 - \delta/2\} < \epsilon/2.$$

e

$$\max\{d(F(x, t), H_1(x, \frac{\delta(1 - t)}{2})), \text{ para } 1 - \delta/2 \leq t \leq 1\} < \epsilon/2.$$

Por último, resta calcular:

$$\max\{d(F(x, t), F(x, \frac{t - \delta}{1 - 2\delta})), \text{ para } \delta \leq t \leq 1 - \delta\}.$$

Temos que:

$$|t - \frac{t - \delta}{1 - 2\delta}| = |\frac{\delta(1 - 2t)}{1 - 2\delta}| < \delta \text{ para } \delta \leq t \leq 1 - \delta.$$

Logo,

$$\max \{d(F(x, t), F(x, \frac{t - \delta}{1 - 2\delta})), \text{ para } \delta \leq t \leq 1 - \delta\} < \epsilon/4.$$

E portanto, $d(F, F'') < \epsilon/2$.

A homotopia $G : |K| \times I \rightarrow |K|$, definida por

$$G(x, t) = F''(x, t(1 - \delta) + \delta/2), \forall (x, t) \in |K| \times I$$

é igual a $H_0^{-1}FH_1$, a menos de uma mudança de escala, e portanto, uma homotopia de g_0 a g_1 .

Substitua esta homotopia pela homotopia G' , que pode ser obtida de acordo com o lema 2.3.6. Agora vamos definir $F' : |K| \times I \rightarrow |K|$:

$$F'(x, t) = \begin{cases} H_0(x, \frac{2t}{\delta}), & \text{se } 0 \leq t \leq \delta/2 \\ G'(x, \frac{t - \delta/2}{1 - \delta}), & \text{se } \delta/2 \leq t \leq 1 - \delta/2 \\ H_1(x, \delta \frac{1 - t}{2}), & \text{se } 1 - \delta/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Tal como F' foi construída, esta é uma homotopia que satisfaz o Teorema 2.1.2. Verifiquemos que de fato $d(F, F') < \epsilon$.

Notando que $d(F, F') \leq d(F, F'') + d(F'', F')$ e sabendo que $d(F, F'') < \epsilon/2$, resta calcular $d(F'', F')$.

Pela definição de F' , temos que:

$$d(F'', F') = \max \{d(F''(x, t), G'(x, \frac{t - \delta/2}{1 - \delta})), \text{ para } \delta/2 \leq t \leq 1 - \delta/2\}.$$

2.3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1.2

Como

$$d(F''(x, t), G'(x, \frac{t - \delta/2}{1 - \delta})) \leq \\ d(F''(x, t), G(x, \frac{t - \delta/2}{1 - \delta})) + d(G(x, \frac{t - \delta/2}{1 - \delta}), G'(x, \frac{t - \delta/2}{1 - \delta})),$$

sabendo que $d(G, G') < \epsilon/2$, então precisamos calcular:

$$\max \{d(F''(x, t), G(x, \frac{t - \delta/2}{1 - \delta})) \text{ para } \delta/2 \leq t \leq 1 - \delta/2\}.$$

Mas da forma como G foi definida, temos que $G(x, \frac{t - \delta/2}{1 - \delta}) = F''(x, t)$.

Portanto,

$$\max \{d(F''(x, t), G(x, \frac{t - \delta/2}{1 - \delta})) \text{ para } \delta/2 \leq t \leq 1 - \delta/2\} < \epsilon/2.$$

Então,

$$d(F, F') \leq d(F, F'') + d(F'', F') < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon$$

como queríamos.

□

Construção de Homotopias Finitamente Coincidentes

A principal referência bibliográfica neste capítulo é o artigo da Schirmer [7]: Fix Finite Homotopies.

3.1 Teorema Principal

Após conhecidos os resultados que foram provados por Schirmer para homotopias finitamente fixadas, verificamos que estes resultados poderiam ser feitos também para o contexto de coincidências, desde que trabalhássemos com hipóteses mais específicas sobre os complexos simpliciais utilizados.

Neste sentido, primeiro adaptamos a construção de Hopf original para coincidências, ou seja, provamos que dadas duas aplicações f_0 e f_1 é possível obter aplicações relativamente próximas destas, com o conjunto de coincidências finito, de forma que cada uma das coincidências esteja localizada na realização geométrica de um simplexo maximal distinto.

Neste capítulo só trabalharemos com variedades, sem bordo, triangularizáveis e n -dimensionais com $n > 0$. Como as realizações geométricas dos complexos simpliciais envolvidos são variedades, estes complexos simpliciais são **homogêneos**, isto é, todos os simplexos que são maximais possuem mesma dimensão.

Definição 3.1.1. *Uma coincidência entre duas funções $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ é um ponto $x \in X$, tal que $f_1(x) = f_2(x)$. O conjunto de coincidências entre estas duas aplicações é denotado*

por $\text{Coin}(f_1, f_2)$.

Seguindo os passos da Schirmer, definimos o conceito de homotopias finitamente coincidentes.

Definição 3.1.2. *Dadas duas homotopias $F_1 : X \times I \rightarrow Y$ e $G_2 : X \times I \rightarrow Y$, estas homotopias são **finitamente coincidentes**, se as aplicações $f_t, g_t : X \rightarrow Y$, com $f_t(x) = F(x, t)$ e $g_t(x) = G(x, t)$, satisfazem $\text{Coin}(f_t, g_t)$ ser finito, para cada $t \in I$.*

Nosso objetivo agora é provar a seguinte adaptação do teorema 2.1.2 para o contexto de coincidências:

Teorema 3.1.3. *Sejam $|K|$ e $|L|$ variedades sem bordo, com K e L complexos simpliciais n -dimensionais. Dadas as aplicações $f_0, f_1 : |K| \rightarrow |L|$ relacionadas por uma homotopia F e as aplicações $g_0, g_1 : |K| \rightarrow |L|$ relacionadas por uma homotopia G . Suponha $\text{Coin}(f_0, g_0)$ e $\text{Coin}(f_1, g_1)$ ambos finitos e localizados na realização geométrica de simplexes maximais. Então, dado $\epsilon > 0$, existem F' e G' homotopias de f_0 a f_1 e de g_0 a g_1 , respectivamente, tais que:*

1. F' e G' são finitamente coincidentes;
2. A projeção de todos os pontos de coincidências entre F' e G' estão contidos na realização geométrica ou de simplexes maximais ou hiperfaces de K ;
3. $d(F, F') < \epsilon$ e $d(G, G') < \epsilon$.

Para provar este teorema também utilizaremos as técnicas usadas na construção de Hopf, mas agora feitas para coincidências e coincidências em homotopias. Antes de realizar a demonstração do teorema, apresentaremos estas duas construções.

3.2 Construção de Hopf para Coincidências

Hipóteses para a realização da construção de Hopf para Coincidências

Sejam K e L complexos simpliciais, n -dimensionais com $n > 0$, L homogêneo, K' um refinamento de K e K'' um refinamento de K' . Dadas as aplicações simpliciais $|f_0| : |K''| \rightarrow |L|$ e $|f_1| : |K'| \rightarrow |L|$, suponha que exista $t_0 \in K''$ um p_0 -simplexo não maximal ($p_0 < n$), que satisfaça $|t_0| \cap \text{Coin}(|f_0|, |f_1|) \neq \emptyset$.

3.2. CONSTRUÇÃO DE HOPF PARA COINCIDÊNCIAS

Como K'' é um refinamento de K' , existe $t_1 \in K'$ um p_1 -simplexo ($p_0 \leq p_1$), tal que $|t_0| \subseteq |t_1|$.

Por $|f_0|$ e $|f_1|$ serem aplicações simpliciais, temos que $f_0(t_0) = f_1(t_1) = s$, onde $s \in L$ é um q -simplexo satisfazendo $q \leq p_0 < n$. Portanto, s não é um simplexo maximal e assim, existe $s^* \in L$ simplexo maximal, tal que $s < s^*$.

Ainda notemos que para cada $k_0 \in K''$, tal que $k_0 \in \text{st}(t_0)$, existe $k_1 \in K'$, tal que $|k_0| \subset |k_1|$. Como $|t_0| \subset |t_1|$ e $t_0 \subset k_0$, então $t_1 \subseteq k_1$. Assim, para $f_1(k_1) = s_1$, $s_1 \in L$, temos que $s \subset s_1$ e $s_1 \subseteq s^*$, onde s^* é algum simplexo maximal de L .

Agora vamos redefinir f_0 , a fim de evitar coincidências entre $|f_0|$ e $|f_1|$ em $|t_0|$.

Seja Q o subcomplexo de K'' , consistindo de todos os simplexos que não contêm t_0 (inclusive sem o t_0) e considere o complexo simplicial K''_Q , a subdivisão baricêntrica de K'' relativa a Q .

Vamos definir uma função $f'_0 : K''_Q \rightarrow L$ nos vértices, como segue:

- Se $v \in Q$, defina $f'_0(v) = f_0(v)$.
- Se $t_0 \subset k_0$, $k_0 \in K''$ e $t_0 \neq k_0$, seja s^* um simplexo maximal de L que contenha $s_1 = f_1(k_1)$ e defina $f'_0(v(k_0))$, como um elemento qualquer de $s^* \setminus s_1$. Se $s_1 = s^*$, defina $f'_0(v(k_0))$ como um elemento qualquer de s^* .
- Por fim, seja s^* um simplexo maximal de L que contenha s e defina $f'_0(v(t_0))$ como um elemento qualquer de $s^* \setminus s$.

Assim, f'_0 se estende a uma função simplicial $f'_0 : K''_Q \rightarrow L$ e conseqüentemente à aplicação simplicial $|f'_0| : |K''_Q| \rightarrow |L|$.

A construção de f'_0 a partir de f_0 e $t_0 \in K''$, quando $|t_0| \cap \text{Coin}(|f_0|, |f_1|) \neq \emptyset$ é o que nos referimos como **Construção de Hopf para Coincidências**.

Observação 3.2.1. Para $t_0 \in K''$ que satisfaça as hipóteses da construção, podemos então concluir:

1. $|f'_0|(x) \neq |f_1|(x), \forall x \in |t_0|$.

De fato, podemos escrever $|t_0| = \bigcup_{i=1}^r |t_0^i|$, onde $t_0^i \in K''_Q$ e $v(t_0) \in t_0^i$ para $i = 1, 2, \dots, r$.

Como $f'_0(v(t_0)) \notin s$, então $f'_0(t_0^i) = s^i \neq s$, para todo i , onde s^i é um k^i -simplexo de L , tal que $k^i \leq p_0$. Assim, temos que $|s^i| \cap |s| = \emptyset$.

3.2. CONSTRUÇÃO DE HOPF PARA COINCIDÊNCIAS

Dado $x \in |t_0|$, então $x \in |t_0^i|$ para algum i , mas também $x \in |t_1|$ para $t_1 \in K'$, conforme visto na construção.

Como $|f'_0|(|t_0^i|) = |s^i|$, enquanto que $|f_1|(|t_1|) = |s|$, segue que $|f'_0|(x) \neq |f_1|(x)$, pois $|s^i| \cap |s| = \emptyset$.

2. Se $x \in |K_Q''^{(p_0)}|$ e $|f_0|(x) \neq |f_1|(x)$, então $|f'_0|(x) \neq |f_1|(x)$.

De fato, se $x \in |Q|$, então $|f'_0|(x) = |f_0|(x)$ e por hipótese temos que $|f'_0|(x) \neq |f_1|(x)$.

Se $x \notin |Q|$, então $x \in st(|t_0|)$.

Se $x \in |t_0|$, então pelo item anterior, temos que $|f'_0|(x) \neq |f_1|(x)$.

Se $x \in |k_0|$, com $t_0 \subset k_0$ e $t_0 \neq k_0$, então $|k_0| = \bigcup_{i=1}^r |k_0^i|$, com $k_0^i \in K_Q''$ e $v(k_0) \in k_0^i$, $i = 1, \dots, r$. Como $x \in |K_Q''^{(p_0)}|$, então $x \in |k_0^i|$ para algum i e $\dim(k_0^i) \leq p_0$.

Por outro lado, como já observado durante a construção, também temos que $x \in |k_1|$, sendo k_1 um simplexo em K' com $f_1(k_1) = s_1$ e $s \subset s_1$.

Se s_1 é simplexo maximal em K' , então $\dim(s_1) = n$ e então $f'_0(k_0^i) \neq f_1(k_1)$, pois $\dim(k_0^i) \leq p_0 < n$ e portanto, $|f'_0|(x) \neq |f_1|(x)$.

Se s_1 não é maximal, como por construção, $f'_0(v(k_0)) \notin s_1$, então $f'_0(k_0^i) \neq s_1$ e portanto, $|f'_0|(x) \neq |f_1|(x)$.

3. $|f'_0|$ é uma aplicação relativamente próxima de $|f_0|$.

De fato, seja $x \in |K''|$.

Se $x \in |Q|$, então $|f_0|(x) = |f'_0|(x)$.

Se $x \in st(|t_0|)$, então $|f_0|(x)$ e $|f'_0|(x)$ estão contidos ambos em $\overline{|s^*|}$, s^* algum simplexo maximal de L . Como por construção $|f_0|(x)$ e $|f'_0|(x)$ estão na realização geométrica de simplexos diferentes, diga-se s_1 e $s_2 \in L$, então será válido que ou $s_1 \cap s_2 \neq \emptyset$ ou $s_1 \cup s_2 \subset s^*$.

Teorema 3.2.2. *Sejam $|K|$ e $|L|$ poliedros conexos n -dimensionais com L homogêneo e $f, g : |K| \rightarrow |L|$ aplicações. Dado $\epsilon > 0$, existem aplicações $|f'|, |g'| : |K| \rightarrow |L|$, tais que:*

1. $Coin(|f'|, |g'|)$ é finito.
2. Existe K'' refinamento de K , tal que os elementos de $Coin(|f'|, |g'|)$ estão localizados, cada um, na realização geométrica de simplexos maximais diferentes de K'' .

3.2. CONSTRUÇÃO DE HOPF PARA COINCIDÊNCIAS

3. $d(f, |f'|) < \epsilon$ e $d(g, |g'|) < \epsilon$.

Demonstração: Suponha que L é um complexo simplicial que satisfaça $\mu(L) < \frac{\epsilon}{4n(n+1)!}$. Caso contrário, ainda denote por L um refinamento de L que satisfaça tal condição.

Usando o teorema da aproximação simplicial, seja $|g'_1| : |K'| \rightarrow |L|$ uma aproximação simplicial de g , onde K' é um refinamento de K .

Uma vez obtido K' , seja $|f'_1| : |K''| \rightarrow |L|$ a realização geométrica de uma aproximação simplicial de f , onde K'' é um refinamento de K' e conseqüentemente de K .

Notemos que $\forall t \in K''$, existe $t' \in K'$, tal que $|t| \subseteq |t'|$ e $\dim(t) \leq \dim(t')$. Assim, dado $t \in K''$, desde que t não seja maximal e satisfaça as hipóteses da construção de Hopf para coincidências, podemos aplicar a construção em $|f'_1|$.

Assim, podemos realizar a construção primeiro para todos os 0-simplexos não maximais, depois para todos os 1-simplexos não maximais e assim por diante, ou seja, desde que o simplexo não seja maximal, realizamos a construção para todos os simplexos de uma mesma dimensão, dimensão a dimensão, aumentando uma dimensão por vez.

Notemos que realizando tal procedimento dimensão a dimensão, pelo item 2 da observação 3.2.1, se novas coincidências são criadas quando aplicada a técnica, isto ocorre somente para simplexos de dimensões maiores e então temos o porquê de iniciarmos o processo com simplexos não maximais de dimensão zero.

Após realizada a construção para todos os simplexos não maximais que satisfazem as hipóteses da construção (um número finito de simplexos), obtemos um refinamento de K'' , que ainda denotaremos K'' e uma função simplicial $f' : K'' \rightarrow L$, em que se $x \in |K''|$ e x está na realização geométrica de um simplexo não maximal, então $|f'|_1(x) \neq |g'_1|_1(x)$. Por fim, defina $g' : K' \rightarrow L$ como $g' = g'_1$.

Seja $t \in K''$ um simplexo maximal e suponha $x, x' \in |t|$, com $|f'|_1(x) = |g'_1|_1(x)$ e $|f'|_1(x') = |g'_1|_1(x')$. Como $|f'|_1$ e $|g'_1|_1$ são lineares, então se para $r \in \mathbb{R}$, vale que $[rx + (1-r)x'] \in \overline{|t|}$, temos que

$$\begin{aligned} |f'|_1(rx + (1-r)x') &= r|f'|_1(x) + (1-r)|f'|_1(x') \\ &= r|g'_1|_1(x) + (1-r)|g'_1|_1(x') \\ &= |g'_1|_1(rx + (1-r)x') \end{aligned}$$

Mas de fato, existe $r \in \mathbb{R}$, tal que $y = rx + (1-r)x' \in \partial|t|$ e $\partial|t| = \overline{|t|} \setminus |t|$ é a união da realização geométrica de simplexos não maximais.

Como não podemos ter $|f'|_1(y) = |g'_1|_1(y)$ no caso em que y pertença a realização geomé-

trica de um simplexo não maximal, concluímos que $|t|$ deve conter no máximo um elemento x , tal que $|f'|_1(x) = |g'|_1(x)$ e portanto, a primeira e a segunda afirmação do teorema são verdadeiras.

Verifiquemos a última afirmação do Teorema.

Na construção de Hopf para coincidências, diferente da construção de Hopf original, não necessariamente os simplexos que possuem coincidências são esqueléticos.

Como para cada t simplexo não maximal de K'' em que for aplicado a construção de Hopf para coincidências, somente são movidos os pontos em $|t_j|$ (todos $t_j \in K''$, tal que $t \subset t_j$), então como a construção é realizada dimensão a dimensão por vez, cada ponto é movido no máximo $(n + 1)!$ vezes em cada dimensão.

Como os n -simplexos, se existem, são todos maximais, cada ponto é movido no máximo $n(n + 1)!$ vezes.

Temos que para cada aplicação da construção de Hopf para coincidências, pelo terceiro item da observação 3.2.1, a imagem de cada $x \in |K|$ não move-se mais que $2\mu(L) < \frac{\epsilon}{2n(n+1)!}$ e então

$$d(|f'_1|_1(x), |f'|_1(x)) < n(n + 1)! \frac{\epsilon}{2n(n + 1)!} = \epsilon/2$$

Assim, $d(|f'_1|_1, |f'|_1) < \epsilon/2$.

Como, f'_1 é uma aproximação simplicial para f , temos que $d(|f'|_1, |f|) < \mu(L) < \epsilon/2$ e portanto, $d(f, |f'|_1) < \epsilon$.

De forma ainda mais simplificada, também verifica-se que $d(g, |g'|_1) < \epsilon$.

□

3.3 Construção de Hopf para Coincidências em Homotopias

Lema 3.3.1. *Sejam K e L complexos simpliciais n -dimensionais com $n > 0$ e P um complexo que satisfaça $|P| = |K| \times I$. Sejam $|G| : |P'| \rightarrow |L|$ e $|F| : |P''| \rightarrow |L|$ aplicações simpliciais, tais que P'' é refinamento de P' e P' é refinamento de P .*

- Se t é um simplexo de P'' , tal que $|t| \cap \text{Coin}(|F|, |G|) \neq \emptyset$;
- Se $F(t)$ não é maximal em L .

3.3. CONSTRUÇÃO DE HOPF PARA COINCIDÊNCIAS EM HOMOTOPIAS

Então, existe uma função simplicial $F' : P''_Q \rightarrow L$ (P''_Q é a subdivisão baricêntrica relativa ao subcomplexo Q), com $Q = P'' \setminus st(t)$, tal que:

1. $|t| \cap \text{Coin}(|F'|, |G|) = \emptyset$.
2. $|F| = |F'|$ em $|Q|$.
3. $d(|F|, |F'|) \leq 2\mu(L)$.

Demonstração: Seja $t' \in P'$, tal que $|t| \subseteq |t'|$ (existe, pois P'' é refinamento de P'). Notemos que como $|t| \cap \text{Coin}(|F|, |G|) \neq \emptyset$ e ambas aplicações são simpliciais, então $F(t) = G(t') = r$, em que r é um simplexo não maximal em L , pois $F(t)$ não é maximal por hipótese. Assim, seja r^* um simplexo maximal de L , tal que $r < r^*$.

Ainda notemos que para cada $t_0 \in P''$, tal que $t_0 \in st(t)$, existe $t_1 \in P'$, tal que $|t_0| \subset |t_1|$. Como $|t_0| \subset |t_1|$ e $t \subset t_0$, então $t' \subseteq t_1$. Assim, para $G(t_1) = r_1$, $r_1 \in L$, temos que $r \subset r_1$ e $r_1 \subseteq r^*$, onde r^* é algum simplexo maximal de L .

Fazendo $Q = P'' \setminus st(t)$, seja P''_Q a subdivisão baricêntrica de P'' relativa ao subcomplexo Q .

Vamos definir $F' : P''_Q \rightarrow L$ uma função simplicial primeiro no vértices, da seguinte maneira:

- Se $v \in Q$ é um vértice, defina $F'(v) = F(v)$.
- Se $t_j \in st(t) \setminus t$ e $v(t_j)$ é o vértice de P''_Q , que está contido em $|t_j|$, seja r^* um simplexo maximal de L que contenha r_1 e defina $F'(v(t_j))$, como um elemento qualquer de $r^* \setminus r_1$. Se $r_1 = r^*$, defina $F'(v(t_j))$ como um elemento qualquer de r^* .
- Se $v(t)$ é o vértice de P''_Q contido em $|t|$, então defina $F'(v(t))$ como um vértice qualquer de r^* que não seja um vértice de r .

Verifiquemos que F' assim definida satisfaz as três condições do lema:

Para verificar que $|t| \cap \text{Coin}(|F'|, |G|) = \emptyset$, primeiro notemos que $|t| = \bigcup_{i=1}^m |t^i|$ em que $t^i \in P''_Q$ e $v(t) \in t^i$, para $i = 1, 2, \dots, m$.

Como $F'(v(t)) \notin r$, então $F'(t^i) = r^i \neq r$, onde r^i é um simplexo de L . Portanto, $|r^i| \cap |r| = \emptyset$.

Assim, dado $x \in |t|$, então $x \in |t^i|$ para algum $i = 1, 2, \dots, m$ e portanto $|F'|(|x|) \in |r^i|$. Mas como $|t| \subseteq |t'|$, então $x \in |t'|$ e portanto $|G|(|x|) \in |r|$. Como $|r^i| \cap |r| = \emptyset$, temos $|F'|(|x|) \neq |G|(|x|)$ e assim, $|t| \cap \text{Coin}(|F'|, |G|) = \emptyset$.

Os outros 2 itens seguem de maneira análoga a demonstração realizada do lema 2.2.1.

□

3.4 Demonstração do Teorema 3.1.3

Passo 1

No Passo 1 iremos construir aplicações simpliciais f_i'' e g_i'' com $\text{Coin}(f_i'', g_i'')$ finito e homotópicas as aplicações iniciais do teorema 3.1.3 f_i e g_i , respectivamente para $i = 0, 1$. Para tanto, utilizaremos o lema 2.3.1 provado no capítulo anterior.

Lema 3.4.1. *Sejam $|K|$ e $|L|$ variedades sem bordo em que K e L são complexos simpliciais, n -dimensionais. Dadas as aplicações $f_i : |K| \rightarrow |L|$ e $g_i : |K| \rightarrow |L|$, $i = 0, 1$, suponha que $\text{Coin}(f_i, g_i)$ é finito e possui todos os seus pontos localizados na realização geométrica de simplexes maximais de K . Dado $\epsilon > 0$, existem:*

- Um refinamento L' de L ;
- Refinamentos K_i' de K e K_i'' , da primeira subdivisão baricêntrica de K_i' , $i = 0, 1$;
- Aplicações simpliciais $f_i'' : |K_i''| \rightarrow |L'|$ e $g_i'' : |K_i'| \rightarrow |L'|$, $i = 0, 1$;
- Homotopias H_i de f_i a f_i'' e G_i de g_i a g_i'' , $i = 0, 1$.

Satisfazendo:

1. $\text{Coin}(f_i'', g_i'')$ é finito e todos os seus pontos estão localizadas na realização geométrica de simplexes maximais distintos de K_i'' ;
2. H_i e G_i são finitamente coincidentes e a projeção de todos os pontos de coincidência estão localizados na realização geométrica de simplexes maximais de K ;
3. $\text{diam } H_i < \epsilon/4$ e $\text{diam } G_i < \epsilon/4$;
4. $\mu(L') < \frac{\epsilon}{64(2n(n+1)!+1)}$.

Demonstração:

Parte 1

Primeiro, vamos construir aplicações $f_i', g_i' : |K| \rightarrow |L|$ e homotopias H_i' , de f_i a f_i' , e G_i' , de g_i a g_i' , $i = 0, 1$ satisfazendo:

3.4. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.1.3

- Todos os pontos de $\text{Coin}(f'_i, g'_i)$ estão localizados na realização geométrica de simplexes maximais em qualquer refinamento de K ;
- A projeção de todos os pontos de $\text{Coin}(H'_i, G'_i)$ estão localizados na realização geométrica de simplexes maximais de K ;
- $\text{diam } H'_i < \epsilon/8$ e $\text{diam } G'_i < \epsilon/8$.

Faremos esta construção apenas para f'_0 e g'_0 , pois a construção de f'_1 e g'_1 segue de maneira análoga.

Seja $\text{Coin}(f_0, g_0) = \{c_j\}$. Como $|L|$ é uma variedade, podemos escolher β , com $0 < \beta < \epsilon/16$, tal que $\forall c_j \in \text{Coin}(f_0, g_0)$, as β -bolas abertas $U(f_0(c_j), \beta) = U(g_0(c_j), \beta)$ estejam inteiramente contidas em $|L|$.

Escolha $\gamma > 0$ de forma que $\forall c_j \in \text{Coin}(f_0, g_0)$, as γ -bolas abertas $U(c_j, \gamma)$ sejam pares disjuntos, cada uma contida na realização geométrica do simplexo de K que contém c_j (que por hipótese é maximal) e $\forall x \in U(c_j, \gamma)$, tenha-se que:

$$\begin{aligned} d(g_0(x), g_0(c_j)) &< \beta/2, \\ d(f_0(x), f_0(c_j)) &< \beta/2, \\ d(g_0(x), f_0(x)) &< \beta/2. \end{aligned}$$

Tal $\gamma > 0$ pode ser obtido pelo fato de $\text{Coin}(f_0, g_0)$ ser finito, $f_0(c_j) = g_0(c_j)$ e f_0, g_0 serem contínuas.

De acordo com o lema 2.3.1, cada $U(c_j, \gamma)$ por estar localizada na realização geométrica de um simplexo maximal, contém um ponto c'_j , que em qualquer refinamento de $|K|$ está contido na realização geométrica de um simplexo maximal.

Seja $x \in \overline{U}(c_j, \gamma) \setminus \{c'_j\}$. Chamemos de y o ponto em que a semi-reta de c'_j a x intercepta o bd $U(c_j, \gamma)$ e z o ponto do segmento de c_j a y que satisfaz

$$d(c_j, z) = \frac{d(c_j, y)}{d(c'_j, y)} \cdot d(c'_j, x)$$

Um exemplo de tal construção pode ser observado na figura 3.1.

Para definir uma aplicação f'_{0j} de $\overline{U}(c_j, \gamma)$ em $U(f_0(c_j), \beta)$, para qualquer $x \in \overline{U}(c_j, \gamma) \setminus \{c'_j\}$, seja $f'_{0j}(x)$ o ponto que satisfaz

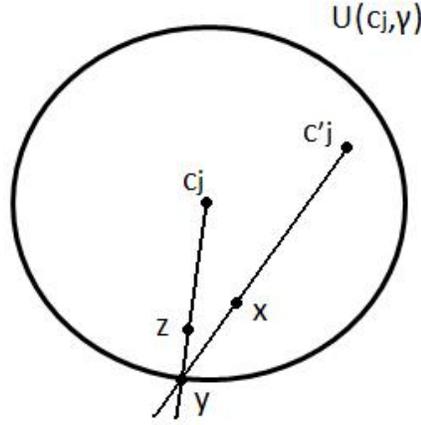


Figura 3.1: Construção do ponto z .

$$\overrightarrow{f_0(c'_j)f'_{0j}(x)} = \overrightarrow{f_0(c'_j)g_0(x)} + \overrightarrow{g_0(z)f_0(z)}$$

e defina $f'_{0j}(c'_j) = g_0(c'_j)$.

Esta construção está bem definida, pois $\forall x \in \overline{U}(c_j, \gamma)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} d(f'_{0j}(x), f_0(c_j)) &\leq d(f'_{0j}(x), g_0(x)) + d(g_0(x), f_0(c_j)) \\ &= d(g_0(z), f_0(z)) + d(g_0(x), g_0(c_j)) \\ &< \beta/2 + \beta/2 \\ &< \beta. \end{aligned}$$

Portanto, $f'_{0j}(x) \in U(f_0(c_j), \beta)$.

Agora podemos definir $f'_0 : |K| \rightarrow |K|$, da seguinte forma:

$$f'_0(x) = \begin{cases} f'_{0j}(x), & \text{se } x \in \bigcup \{ \overline{U}(c_j, \gamma); c_j \in \text{Coin}(f_0, g_0) \} \\ f_0(x), & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Tal como foi construída, f'_0 é contínua, pois tanto f_0 como cada f'_{0j} são contínuas e para qualquer $c_j \in \text{Coin}(f_0, g_0)$, se $x \in \text{bd } \overline{U}(c_j, \gamma)$, então $f'_{0j}(x) = f_0(x)$. De fato, pela construção neste caso, teremos que $y = z = x$ e portanto,

$$\overrightarrow{f_0(c'_j)f'_{0j}(x)} = \overrightarrow{f'_{0j}(c'_j)g_0(x)} + \overrightarrow{g_0(x)f_0(x)} = \overrightarrow{f_0(c'_j)f_0(x)}$$

o que implica $f'_{0j}(x) = f_0(x)$.

Notemos que pela construção, uma coincidência entre f'_0 e g'_0 só aconteceria se o z obtido na construção satisfizesse $g_0(z) = f_0(z)$, mas como $z \in \text{bd } \overline{U}(c_j, \gamma)$, então $z \neq c_j$ e portanto, $g_0(z) \neq f_0(z)$.

Logo, o conjunto de coincidências entre f'_0 e g_0 é $\text{Coin}(f'_0, g_0) = \{c'_j\}$ e vale destacar que todos eles estarão localizados na realização geométrica de simplexes que serão maximais em qualquer refinamento de K .

Agora vamos definir uma homotopia entre f_0 e f'_0 . Seja $x \in |K|$.

Se $x \notin \bigcup \{\overline{U}(c_j, \gamma); c_j \in \text{Coin}(f_0, g_0)\}$, então $f'_0(x) = f_0(x)$ e portanto podemos definir $H'_0(x, t) = f_0(x)$.

Se $x \in \bigcup \{\overline{U}(c_j, \gamma); c_j \in \text{Coin}(f_0, g_0)\}$, então denotemos por $c_j(t)$ o ponto do segmento de c_j a c'_j , para $0 < t \leq 1$, reparametrizado pelo intervalo unitário.

Definimos $H'_{0j}(x, t)$ como o ponto em $U(f_0(c_j), \beta)$ que é obtido de maneira análoga a $f'_{0j}(x)$, mas usando $c_j(t)$, ao invés de c'_j . Notemos que $c_j(t)$ também estará em um simplexo maximal de K , mas não necessariamente em qualquer refinamento de K , como é o caso do c'_j .

Defina $H'_{0j}(x, 0) = f_0(x)$. Então a homotopia H'_0 de f_0 a f'_0 pode ser construída de H'_{0j} da mesma forma que f'_0 foi construída de f'_{0j} e a continuidade de H'_0 segue de forma similar a como foi provado para f'_0 .

Para verificar o diam H'_0 , notemos que:

- Se $x \notin \bigcup \{\overline{U}(c_j, \gamma); c_j \in \text{Coin}(f_0, g_0)\}$, então $f'_0(x) = f_0(x)$ e portanto H'_0 é a homotopia constante.
- Se $x \in \bigcup \{\overline{U}(c_j, \gamma); c_j \in \text{Coin}(f_0, g_0)\}$, então $f'_0(x) \neq f_0(x)$ e assim, por construção, o conjunto $\{H'_0(x, t); 0 \leq t \leq 1\}$ está contido em algum $U(f_0(c_j), \beta)$.

Portanto, $\text{diam } H'_0 < 2\beta < \epsilon/8$.

Defina $g'_0 = g_0$ e G'_0 como a homotopia constante de g_0 a g'_0 . Temos então que $\text{Coin}(f'_0, g'_0)$ é finito e seus pontos estão na realização geométrica de simplexes maximais para qualquer refinamento de K . Também por construção, $\text{Coin}(H'_0, G'_0)$ é finitamente coincidente e a projeção de todos os seus pontos estão contidos na realização geométrica de simplexes maximais de K .

As aplicações f'_1 e g'_1 e as homotopias H'_1 de f_1 a f'_1 e G'_1 de g_1 a g'_1 são obtidas analogamente.

□

Parte 2

Agora vamos descrever a construção das aplicações simpliciais f_i'', g_i'' (citadas no lema) e a construção de homotopias H_i'' de f_i' a f_i'' e G_i'' de g_i' a g_i'' , $i = 0, 1$.

Escolha ρ_0 , com $0 < \rho_0 < \epsilon/64$, de forma que para cada $c_j' \in \text{Coin}(f_0', g_0')$, $U(f_0'(c_j'), 4\rho_0)$ esteja inteiramente contido em $|L|$, usando o fato de $|L|$ ser uma variedade.

Também escolha $\delta_0 > 0$, tal que para cada $c_j' \in \text{Coin}(f_0', g_0')$, $\bar{U}(c_j', \delta_0)$ esteja inteiramente contido no simplexo que contém c_j (e que por hipótese é maximal), todos $\bar{U}(c_j', \delta_0)$ sejam disjuntos e

$$f_0'(\bar{U}(c_j', \delta_0)) \subset \bar{U}(f_0'(c_j'), \rho_0)$$

e

$$g_0'(\bar{U}(c_j', \delta_0)) \subset \bar{U}(g_0'(c_j'), \rho_0)$$

Além do mais, escolha η_0 com $0 < \eta_0 \leq 2\rho_0$, tal que

$$d(x, \text{Coin}(f_0', g_0')) \geq \delta_0 \Rightarrow d(f_0'(x), g_0'(x)) \geq \eta_0$$

Determine ρ_1, δ_1, η_1 analogamente para f_1' e g_1' e escolha um refinamento L' de L , tal que

$$\mu(L') < \min\left\{\delta_0, \delta_1, \frac{\eta_0}{4n(n+1)!+2}, \frac{\eta_1}{4n(n+1)!+2}\right\},$$

onde n é a dimensão de L .

Seja τ_0 uma aproximação simplicial de g_0' que aplica um refinamento de K , diga-se K_0' , em L' e ψ_0 uma aproximação simplicial de f_0' que aplica um refinamento da primeira subdivisão baricêntrica de K_0' , diga-se K_0'' , em L' .

Defina $g_0'' = |\tau_0| : |K_0'| \rightarrow |L'|$. Podemos então realizar uma sucessão de construções de Hopf para coincidências entre g_0'' e ψ_0 e assim obter $f_0'' : |K_0''| \rightarrow |L'|$ uma aplicação simplicial, onde K_0'' ainda denota um refinamento da primeira subdivisão baricêntrica de K_0' .

Temos assim, que $\text{Coin}(f_0'', g_0'')$ é finito e cada um dos seus pontos está localizado na realização geométrica de simplexos maximais distintos de K_0'' . Além do mais, $d(|\psi_0|, f_0'') \leq 2n(n+1)!\mu(L')$ e $d(|\tau_0|, g_0'') \leq 2n(n+1)!\mu(L')$.

3.4. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.1.3

Como $d(f'_0, |\psi_0|) \leq \mu(L')$ e $d(g'_0, |\tau_0|) \leq \mu(L')$, então

$$d(f'_0, f''_0) \leq (2n(n+1)! + 1)\mu(L') < \eta_0/2$$

e

$$d(g'_0, g''_0) \leq (2n(n+1)! + 1)\mu(L') < \eta_0/2$$

Agora iremos construir as homotopias H''_0 , de f'_0 a f''_0 , e G''_0 , de g'_0 a g''_0 .

Se $x \notin \bigcup\{U(c'_j, \delta_0); c'_j \in \text{Coin}(f'_0, g'_0)\}$, então como no lema 2.3.3 segue que $f''_0(x) = |\psi_0|(x)$ e naturalmente, também temos que $g''_0(x) = |\tau_0|(x)$.

Como ψ_0 e τ_0 são aproximações simpliciais de f'_0 e g'_0 , respectivamente, é possível definir $H''_0(x, t)$ e $G''_0(x, t)$ por

$$H''_0(x, t) = tf''_0(x) + (1-t)f'_0(x)$$

e

$$G''_0(x, t) = tg''_0(x) + (1-t)g'_0(x)$$

Como $d(x, \text{Coin}(f'_0, g'_0)) > \delta_0$, então $d(f'_0(x), g'_0(x)) \geq \eta_0$ e como $d(f'_0, f''_0) < \eta_0/2$ e $d(g'_0, g''_0) < \eta_0/2$, segue que $H''_0(x, t) \neq G''_0(x, t), \forall 0 \leq t \leq 1$.

Agora vamos definir a homotopia em $\bigcup\{\bar{U}(c'_j, \delta_0); c'_j \in \text{Coin}(f'_0, g'_0)\}$. Para tanto, consideremos um dos conjuntos $\bar{U}(c'_j, \delta_0)$.

H''_0 e G''_0 já foram definidos no $\text{bd } \bar{U}(c'_j, \delta_0) \times I$ e satisfazem:

$$\begin{aligned} d(f'_0(c'_j), H''_0(x, t)) &\leq d(f'_0(c'_j), f'_0(x)) + d(f'_0(x), f''_0(x)) \\ &\leq \rho_0 + \eta_0/2 \\ &\leq 2\rho_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(g'_0(c'_j), G''_0(x, t)) &\leq d(g'_0(c'_j), g'_0(x)) + d(g'_0(x), g''_0(x)) \\ &\leq \rho_0 + \eta_0/2 \\ &\leq 2\rho_0 \end{aligned}$$

Assim, defina:

$$H''_0(x, 0) = f'_0(x) \text{ e } H''_0(x, 1) = f''_0(x), \forall x \in \bar{U}(c'_j, \delta_0).$$

$$G''_0(x, 0) = g'_0(x) \text{ e } G''_0(x, 1) = g''_0(x), \forall x \in \bar{U}(c'_j, \delta_0).$$

3.4. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.1.3

Então, H_0'' e G_0'' estão definidas no $\text{bd}(\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I)$, tem valores cada uma em $\overline{U}(f'_0(c'_j), 2\rho_0)$ e $\overline{U}(g'_0(c'_j), 2\rho_0)$, respectivamente, e o conjunto de coincidências destas duas homotopias é formado por $c'_j \times \{0\}$ e finitos pontos em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times \{1\}$.

Para estender H_0'' e G_0'' sobre todo $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$, faremos o procedimento a seguir.

Seja $\tilde{c}_j = (c'_j, 1/2)$, para cada ponto $\tilde{x} = (x, t) \in (\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I) \setminus \{\tilde{c}_j\}$, seja $\tilde{y} = (y, s)$ o ponto da semi-reta de \tilde{c}_j a \tilde{x} que intercepta o $\text{bd}(\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I)$.

Um exemplo deste tipo de construção pode ser observada na figura 3.2.

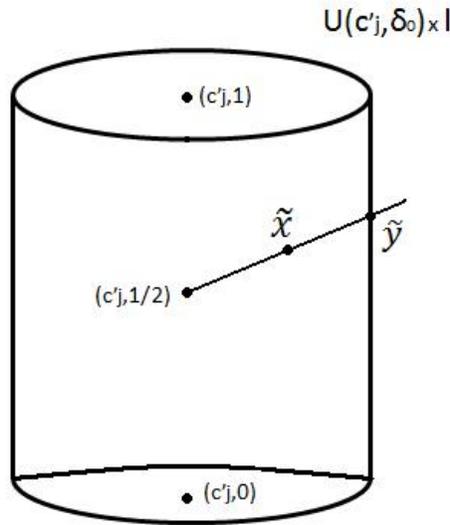


Figura 3.2: Construção do ponto $\tilde{y} = (y, s)$.

Sendo \tilde{d} a métrica produto em $|K| \times I$, defina $H_0''(x, t)$ e $G_0''(x, t)$ por

$$\overrightarrow{f'_0(c'_j)H_0''(x, t)} = \overrightarrow{f'_0(c'_j)g'_0(x)} + \lambda \overrightarrow{g'_0(y)H_0''(y, s)}$$

e

$$\overrightarrow{g'_0(c'_j)G_0''(x, t)} = \overrightarrow{g'_0(c'_j)g'_0(x)} + \lambda \overrightarrow{g'_0(y)G_0''(y, s)}$$

onde $\lambda = \frac{\tilde{d}(\tilde{c}_j, \tilde{x})}{\tilde{d}(\tilde{c}_j, \tilde{y})}$.

Desta forma, o conjunto de coincidências entre H_0'' e G_0'' em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$ são segmentos e portanto, também podem ser entendidos como poliedros uni-dimensionais (também denotados como grafos).

Um exemplo do tipo de construção descrita acima pode ser observada na figura 3.3.

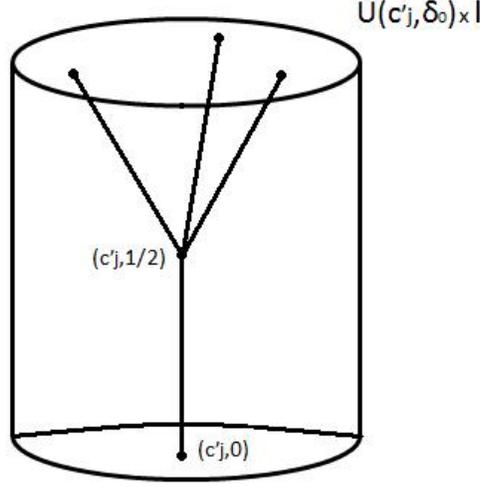


Figura 3.3: Um exemplo do conjunto de coincidências entre H_0'' e G_0'' em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$.

Por fim, defina $H_0''(\tilde{c}_j) = G_0''(\tilde{c}_j) = g'_0(c'_j) = f'_0(c'_j)$

Tanto $H_0''(x, t)$ como $G_0''(x, t)$ estão bem definidas, pois se $(x, t) \in \text{bd}(\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I)$, então $(y, s) = (x, t)$ e assim

$$\overrightarrow{f'_0(c'_j)H_0''(x, t)} = \overrightarrow{f'_0(c'_j)g'_0(x)} + \lambda \overrightarrow{g'_0(x)H_0''(x, t)} = \overrightarrow{f'_0(c'_j)H_0''(x, t)}$$

O mesmo se verifica para $G_0''(x, t)$.

Notemos que como $d(c'_j, x) \leq \delta_0$ e $0 < \lambda \leq 1$, então para $(y, s) \in \text{bd}(\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I)$

$$\begin{aligned} d(g'_0(y), H_0''(y, s)) &\leq d(g'_0(y), g'_0(c'_j)) + d(f'_0(c'_j), H_0''(y, s)) \\ &\leq \rho_0 + 2\rho_0 \\ &\leq 3\rho_0 \end{aligned}$$

e assim, dado $(x, t) \in (\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I) \setminus \{\tilde{c}_j\}$ obtemos um ponto $H_0''(x, t) \in \overline{U}(f'_0(c'_j), 4\rho_0)$, pois

$$\begin{aligned} d(f'_0(c'_j), H_0''(x, t)) &\leq d(f'_0(c'_j), g'_0(x)) + \lambda d(g'_0(y), G_0''(y, s)) \\ &\leq \rho_0 + 3\rho_0 \\ &= 4\rho_0 \end{aligned}$$

Portanto, $H_0''(x, t) \in \overline{U}(f_0'(c'_j), 4\rho_0)$.

De forma semelhante, também se verifica que para $(x, t) \in (\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I) \setminus \{\tilde{c}_j\}$, tem-se que $G_0''(x, t) \in \overline{U}(g_0'(c'_j), 4\rho_0)$.

Notemos que tal como foram construídas, o conjunto de coincidências entre H_0'' e G_0'' em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$ é o conjunto de pontos $\tilde{x} = (x, t) \in \overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$ que satisfazem ou $\tilde{x} = (c'_j, t)$ com $0 \leq t \leq 1/2$ ou $\tilde{y} = (y, s)$ (associado a \tilde{x} nas construções de $H_0''(x, t)$ e $G_0''(x, t)$) ser uma coincidência entre H_0'' e G_0'' em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times \{1\}$.

De fato, por um lado temos que se $\tilde{x} \in \overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$ é uma coincidência entre H_0'' e G_0'' , então $H_0''(x, t) = G_0''(x, t)$ e pela forma como as homotopias foram construídas, implica que $H_0''(y, s) = G_0''(y, s)$. Ou seja, $\tilde{y} = (y, s)$ é uma coincidência entre H_0'' e G_0'' pertencente a $\text{bd}(\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I)$. Mas como anteriormente foi observado, as únicas coincidências deste bordo são $(c'_j, 0)$ e finitos pontos em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times \{1\}$ e para o primeiro caso, teremos que para qualquer $\tilde{x} = (c'_j, t)$, com $0 \leq t \leq 1/2$ será uma coincidência entre H_0'' e G_0'' .

Por outro lado, se $\tilde{x} = (x, t) \in \overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$ satisfaz $\tilde{x} = (c'_j, t)$ para $0 \leq t \leq 1/2$, então $\tilde{y} = (c'_j, 0)$ e assim

$$\overrightarrow{f_0'(c'_j)H_0''(c'_j, t)} = \overrightarrow{f_0'(c'_j)g_0'(c'_j)} + \overrightarrow{\lambda g_0'(c'_j)H_0''(c'_j, 0)} = \overrightarrow{g_0'(c'_j)G_0''(c'_j, 0)}$$

o que implica, $H_0''(c'_j, t) = G_0''(c'_j, 0)$.

Agora se $\tilde{y} = (y, s)$ (associado a \tilde{x} na construção de $H_0''(x, t)$ e $G_0''(x, t)$) é uma coincidência entre $H_0''(x, t)$ e $G_0''(x, t)$ em $U(c'_j, \delta_0) \times \{1\}$, então

$$\overrightarrow{f_0'(c'_j)H_0''(x, t)} = \overrightarrow{g_0'(c'_j)G_0''(x, t)}$$

o que implica, $H_0''(x, t) = G_0''(x, t)$.

Desta forma, o conjunto de coincidências entre H_0'' e G_0'' em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$ são segmentos e portanto, também podem ser entendidos como poliedros uni-dimensionais (também denotados como grafos).

Uma vez H_0'' e G_0'' definido em $\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I$, podemos estender H_0'' e G_0'' sobre $\bigcup\{\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I; c'_j \in \text{Coin}(f_0', g_0')\}$, gerando as homotopias $H_0'' : |K| \times I \rightarrow |L|$, de f_0' a f_0'' , e $G_0'' : |K| \times I \rightarrow |L|$ de g_0' a g_0'' , que satisfaz H_0'' e G_0'' serem finitamente coincidentes e com a projeção de todos os pontos de coincidências localizados na realização geométrica de simplexos maximais de K .

Se $x \notin \bigcup\{\overline{U}(c'_j, \delta_0) \times I; c'_j \in \text{Coin}(f_0', g_0')\}$, então

$$\sup \{d(H_0''(x, t), H_0''(x, t')); x \in |K| \text{ e } t, t' \in I\} \leq d(f_0', f_0'') \leq \eta_0/2.$$

Se $x \in \bar{U}(c'_j, \delta_0)$, para algum $c'_j \in \text{Coin}(f_0', g_0')$, então $\{H_0''(x, t); x \in |K| \text{ e } t \in I\} \subset \bar{U}(f_0'(c'_j), 4\rho_0)$ e portanto,

$$\sup \{d(H_0''(x, t), H_0''(x, t')); x \in |K| \text{ e } t, t' \in I\} \leq 8\rho_0.$$

Conclui-se então, que $\text{diam } H_0'' < \epsilon/8$.

De forma semelhante, também se verifica que $\text{diam } G_0'' < \epsilon/8$.

As construções de f_1'', g_1'', H_1'' e G_1'' seguem de maneira análoga.

Parte 3

Por fim, vamos definir as homotopias H_i de f_i a f_i'' e G_i de g_i e g_i'' .

Defina:

$$H_i(x, t) = \begin{cases} H_i'(x, 2t), & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H_i''(x, 2t - 1), & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \text{diam } H_i &\leq \text{diam } H_i' + \text{diam } H_i'' \\ &< \epsilon/8 + \epsilon/8 \\ &< \epsilon/4 \end{aligned}$$

Da mesma forma define-se a homotopia G_i de g_i a g_i'' , também satisfazendo $\text{diam } G_i \leq \epsilon/4$ e portanto, H_i e G_i satisfazem as hipóteses do lema, como queríamos.

□

Passo 2

No passo 2 iremos construir um par de homotopias finitamente coincidentes entre pares de aplicações simpliciais que possuem o conjunto de coincidências finito.

Para tanto, precisaremos associar um complexo simplicial P conveniente para o poliedro $|K| \times I$. Assim, se K_0', K_1', K_0'' e K_1'' são os complexos simpliciais obtidos no lema 3.4.1, então seja P um complexo simplicial, tal que $|P| = |K| \times I$ e que satisfaça as seguintes condições:

P1. $K'_0 \times \{0\}$ e $K'_1 \times \{1\}$ sejam subcomplexos de P .

P2. Dado $\tau \in P$ e $\pi : |P| \rightarrow |K|$, a projeção na primeira coordenada, então $\pi(|\tau|) \subset |\rho|$, onde $\rho \in K$.

Lema 3.4.2. *Dados K e L complexos simpliciais, n -dimensionais e L homogêneo, seja P um complexo simplicial, tal que $|P| = |K| \times I$ e satisfaça P1 e P2. Sejam P'' um refinamento de P , L' um refinamento de L e $F_s : P'' \rightarrow L'$ função simplicial. Se $\tau \in P''$ e τ não é maximal, nem hiperface em P'' , então $F_s(\tau)$ não é maximal em L' .*

Demonstração: Notemos que $\dim \tau \leq n - 1$, pelo fato de τ não ser maximal e nem hiperface em P'' e $\dim P = \dim(K) + 1$. Como F_s é simplicial, então $F_s(\tau) = \sigma$ com $\sigma \in L'$ e $\dim \sigma \leq \dim \tau \leq n - 1$. Portanto, σ não é maximal, pois L' é n -dimensional.

□

Lema 3.4.3. *Sejam L' , K'_i , K''_i , $f''_i : |K''_i| \rightarrow |L'|$ e $g''_i : |K'_i| \rightarrow |L'|$, $i = 0, 1$ como no lema 3.4.1. Se f''_0 e f''_1 são relacionados por uma homotopia F'' e g''_0 e g''_1 relacionados por uma homotopia G'' , então existem homotopias F''' e G''' , entre f''_0 e f''_1 e entre g''_0 e g''_1 , respectivamente, satisfazendo:*

- F''' e G''' são finitamente coincidentes e a projeção dos pontos de coincidências estão localizados na realização geométrica de simplexes maximais ou hiperfaces de K ;
- $d(F'', F''') < \epsilon/2$ e $d(G'', G''') < \epsilon/2$.

Demonstração: Seja P um complexo simplicial que satisfaça P1 e P2.

Selecione como aproximação simplicial de G'' , uma aplicação simplicial $G''_s : |P'| \rightarrow |L'|$, onde P' é um refinamento de P , obtido por um número finito de subdivisões baricêtricas relativas ao subcomplexo $(K'_0 \times \{0\}) \cup (K'_1 \times \{1\})$, de forma que G''_s satisfaça $G''_s = G''$ em $(|K'_0| \times \{0\}) \cup (|K'_1| \times \{1\})$ e $d(G'', G''_s) < \mu(L')$. A existência de G_s segue do teorema 2.3.5.

Como K''_0 e K''_1 são refinamentos de K'_0 e K'_1 , respectivamente, e P' mantém os subcomplexos $(K'_0 \times \{0\})$ e $(K'_1 \times \{1\})$, seja P^* refinamento de P' em que $(K''_0 \times \{0\})$ e $(K''_1 \times \{1\})$ são subcomplexos de P^* .

Então, seja $F''_s : |P''| \rightarrow |L'|$, a aproximação simplicial de F'' , em que P'' é um refinamento de P^* obtido por um número finito de subdivisões baricêtricas relativas ao subcomplexo $(K''_0 \times \{0\}) \cup (K''_1 \times \{1\})$ de forma que F''_s satisfaça $F''_s = F''$ em $(|K''_0| \times$

$\{0\} \cup (|K_1''| \times \{1\})$ e $d(F'', F_s'') < \mu(L')$. A existência de F_s segue também do teorema 2.3.5.

Se \tilde{x}_0 é um vértice de P'' com $F_s(\tilde{x}_0) = G_s(\tilde{x}_0)$, então $F_s(\tilde{x}_0)$ também é um vértice de L' e assim, não maximal.

Pelo lema 3.3.1, podemos realizar a construção de Hopf para coincidências em homotopias, que resulta na aplicação simplicial $F_s' : |P'''| \rightarrow |L'|$, onde P''' refina P'' , de forma que $F_s'(\tilde{x}_0) \neq G_s(\tilde{x}_0)$ e $F_s' = F_s$ em $|P'' \setminus \{\text{st}(\tilde{x}_0)\}|$.

Assim, qualquer vértice $\tilde{x} \in |P''| \cap \text{Coin}(F_s', G_s)$ também deve ser um vértice de $P'' \setminus \{\tilde{x}_0\}$, pois pela construção de Hopf para coincidências em homotopias, tanto \tilde{x}_0 como os novos vértices criados em P''' , não são coincidências entre F_s' e G_s .

Podemos realizar a construção de Hopf para coincidências em homotopias em todos os vértices, até chegar a uma aplicação simplicial, ainda denotada por $F_s' : |P'''| \rightarrow |L'|$, onde P''' refina P'' e é livre de coincidências em todos os vértices de P''' .

Notemos que F_s é livre de coincidências nos vértices de $(K_0'' \times \{0\}) \cup (K_1'' \times \{1\})$ (por representarem, respectivamente, as aplicações f_0' e f_1' , a qual sabemos ter todas as coincidências localizadas em simplexes maximais). Logo, $F_s' = F_s$ neste subcomplexo.

Depois de realizar uma sucessão de construções de Hopf para coincidências em homotopias para todos os simplexes uni-dimensionais $\tau \in P'''$ com $|\tau| \cap \text{Coin}(F_s', G_s) \neq \emptyset$ e $F_s'(\tau)$ não maximal em L' , então para todos os simplexes bi-dimensionais com a mesma propriedade é possível realizar o mesmo procedimento.

De acordo com os lemas 3.3.1 e 3.4.2, podemos continuar realizando a referida construção até obter uma aplicação simplicial $F_s' : |P''''| \rightarrow |L'|$, que é igual a F_s no subcomplexo $(K_0'' \times \{0\}) \cup (K_1'' \times \{1\})$ de P'''' e é livre de coincidências na realização geométrica de todos os simplexes de P'''' , desde que não sejam nem maximais, nem hiperfaces.

Se τ é uma hiperface de P'''' com $|\tau| \cap \text{Coin}(F_s', G_s) \neq \emptyset$, então tal como é verificado no teorema 3.2.2, pelo fato de F_s' ser linear em $\overline{|\tau|}$ e $\text{bd } |\tau| \cap \text{Coin}(F_s', G_s) = \emptyset$, então F_s' e G_s' tem no máximo uma coincidência em $|\tau|$.

Agora considere um simplexo maximal $\tau \in P''''$, com $|\tau| \cap \text{Coin}(F_s', G_s) \neq \emptyset$, então $(\text{bd } |\tau|) \cap \text{Coin}(F_s', G_s)$ ou é vazio ou é um conjunto finito $\{\tilde{x}_j\}$ (pois o bordo de um simplexo maximal, contém simplexes que são hiperfaces).

Se o $(\text{bd } |\tau|) \cap \text{Coin}(F_s', G_s)$ é um conjunto finito $\{\tilde{x}_j\}$, faça $\tilde{x}_j = (x_j, t_j)$ e selecionemos $\tilde{x}_0 = (x_0, t_0) \in |\tau|$ com $t_0 \neq t_j$ para cada j .

Para qualquer $\tilde{x} = (x, t) \in \overline{|\tau|} \setminus \{\tilde{x}_0\}$, seja $\tilde{y} = (y, w)$ o ponto em que a semi-reta de \tilde{x}_0 a \tilde{x} intercepta o $\text{bd } |\tau|$. Uma construção semelhante pode ser observado na figura 3.4.

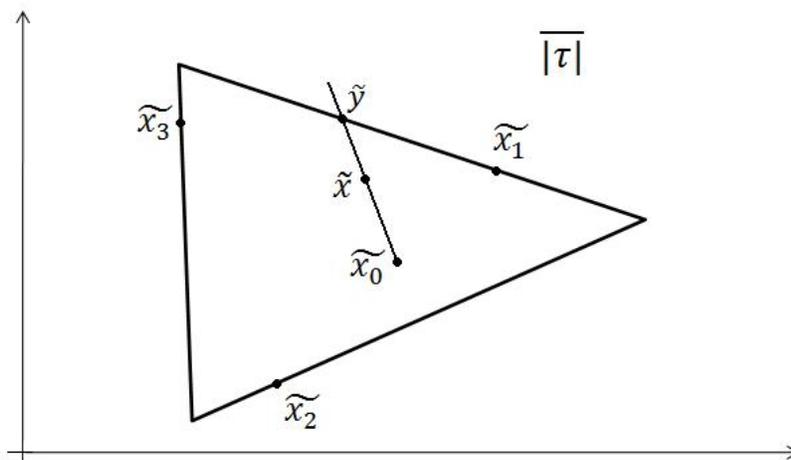


Figura 3.4: A construção do ponto $\tilde{y} = (y, w)$.

Agora modifiquemos F'_s para F' , em $|\overline{\tau}|$, definindo $F'(x, t)$ como o ponto em $|\overline{\sigma}| = F'_s(|\overline{\tau}|)$ que satisfaça

$$\overrightarrow{F'_s(\tilde{x}_0)F'(\tilde{x})} = \overrightarrow{F'_s(\tilde{x}_0)G_s(\tilde{x})} + \lambda \overrightarrow{G_s(\tilde{y})F'_s(\tilde{y})}$$

onde $\lambda = \frac{d(\tilde{x}_0, \tilde{x})}{d(\tilde{x}_0, \tilde{y})}$.

Por fim, defina $F'(\tilde{x}_0) = G_s(\tilde{x}_0)$.

Tal construção se justifica, pois dado $\tau \in P''$, existe $\tau' \in P'$, tal que $|\tau| \subseteq |\tau'|$. Como $|\tau| \cap \text{Coin}(F'_s, G_s) \neq \emptyset$, então $F'_s(|\overline{\tau}|) = G_s(|\overline{\tau'}|) = |\overline{\sigma}|$ que é convexo.

Temos assim, que $|\overline{\tau}| \cap \text{Coin}(F', G_s)$ ou é formado pela união de todos os segmentos de \tilde{x}_0 a \tilde{x}_j (quando $\text{bd } |\overline{\tau}| \cap \text{Coin}(F', G_s) \neq \emptyset$), ou unicamente pelo ponto \tilde{x}_0 (quando $\text{bd } |\overline{\tau}| \cap \text{Coin}(F', G_s) = \emptyset$).

A figura 3.5 mostra como seria o conjunto de coincidências (um grafo) da figura 3.4.

Se realizarmos esta construção em todos os simplexos maximais de P'' em que existem coincidências, obtemos então uma homotopia $F' : |P''| \rightarrow |L'|$, onde $\text{Coin}(F', G_s) = \emptyset$. Então, defina $G' = G_s$.

Por construção $F'(x, 0) = f'_0(x)$, $F'(x, 1) = f'_1(x)$, $G'(x, 0) = g'_0(x)$ e $G'(x, 1) = g'_1(x)$, $\forall x \in |K|$. Se $\tilde{x} = (x, t) \in \text{Coin}(F', G')$, então \tilde{x} está contido ou em um simplexo maximal ou em uma hiperface de P'' e portanto, de P . Pela forma como P foi construído segue que x está contido na realização geométrica de um simplexo maximal ou hiperface de K .

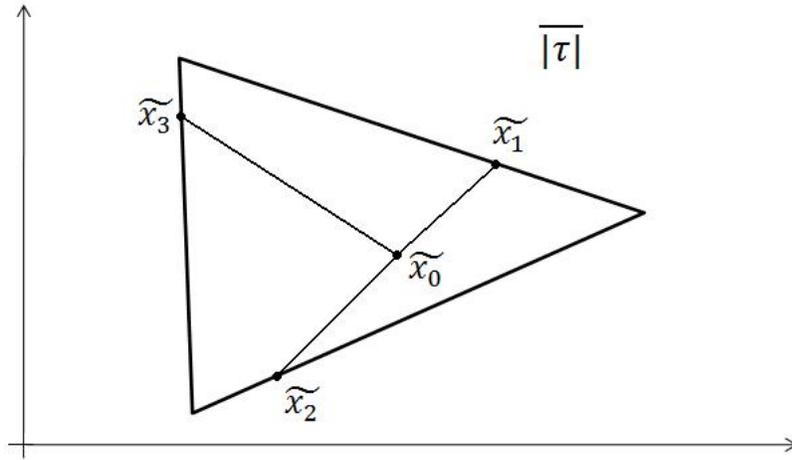


Figura 3.5: O conjunto de coincidências da figura 3.4.

Cada ponto $\tilde{x} \in |P|$ é movido durante a construção de Hopf para coincidências em homotopias no máximo $n(n+1)!$ vezes, onde n é a dimensão de K , e por uma distância de no máximo $2\mu(L')$ em cada mudança.

Durante a última mudança de F'_s para F' , o ponto é movido a uma distância de no máximo $\mu(L')$. Então,

$$d(F_s, F') \leq (2n(n+1)! + 1)\mu(L')$$

Assim, de acordo com o item 4 do lema 3.4.1

$$\begin{aligned} d(F, F') &\leq d(F, F_s) + d(F_s, F') \\ &\leq \mu(L') + (2n(n+1)! + 1)\mu(L') \\ &\leq 2(n(n+1)! + 1)\mu(L') \\ &< \epsilon/2 \end{aligned}$$

De forma semelhante também se verifica que $d(G, G') < \epsilon/2$.

Assim, F' e G' satisfazem o Lema 3.4.3.

□

Passo 3

O objetivo do Passo 3 é juntar, de forma adequada, as homotopias construídas nos Passos 1 e 2, afim de obter homotopias F' e G' que satisfaçam o Teorema 3.1.3.

Como o procedimento é análogo ao Passo 3 da demonstração do Teorema 2.1.2, para cada uma das homotopias F' e G' , tomaremos a liberdade de omitir este último passo nessa demonstração, para que o texto não fique muito repetitivo.

O importante é que uma vez realizado o procedimento análogo ao Passo 3 da demonstração do Teorema 2.1.2, obteremos as homotopias $F', G' : |K| \times I \rightarrow |L|$ satisfazendo os três itens do Teorema 3.1.3.

3.5 Conclusões

Fixemos como F' a homotopia obtida no teorema 2.1.2 e o par (F', G') como as homotopias obtidas no teorema 3.1.3. Recordemos que $\text{Fix } F'$ é o conjunto de pontos fixos de F' e $\text{Coin } (F', G')$ é o conjunto de coincidências entre F' e G' .

Dada uma homotopia $H : |K| \times I \rightarrow |L|$, para cada $t \in I$, definimos $h_t(x) = H(x, t)$ para todo $x \in |K|$.

Assim, como conseqüências dos teoremas 2.1.2 e 3.1.3, demonstrados neste trabalho, temos:

Proposição 3.5.1. *A homotopia F' e o par de homotopias (F', G') são construídas de forma que $\text{Fix } F'$ e $\text{Coin } (F', G')$, respectivamente, são poliedros uni-dimensionais (grafo) em $|K| \times I$, sem arestas horizontais.*

Uma aresta horizontal, significa uma aresta contida em uma seção $|K| \times \{t\}$ para algum $t \in I$ fixado. Embora tanto $\text{Fix } F'$ como $\text{Coin } (F', G')$, sejam poliedros, cada um não é um subpoliedro de P , assim como as suas projeções também não são.

Exemplo 3.5.2. *Suponha que P é um complexo simplicial, que satisfaça $|P| = |K| \times I$, com K um complexo simplicial qualquer, e tenha a realização geométrica como o da figura 3.6.*

Então uma possível forma para o conjunto de pontos fixos referente ao teorema 2.1.2 ou ao conjunto de coincidências referente ao teorema 3.1.3 pode ser expresso na figura 3.7.

Como $\text{Fix } F'$ e $\text{Coin } (F', G')$ tem uma estrutura simples, algumas propriedades são simples de deduzir. As duas primeiras ocorrem como conseqüência imediata da propriedade de invariância homotópica e os axiomas de aditividade de índices.

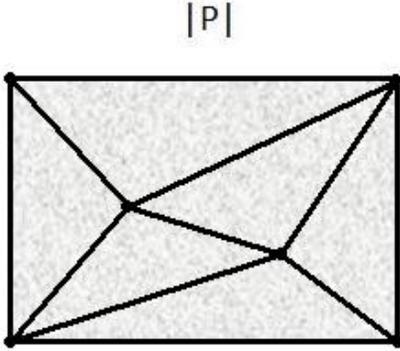


Figura 3.6: Realização geométrica de um complexo simplicial.

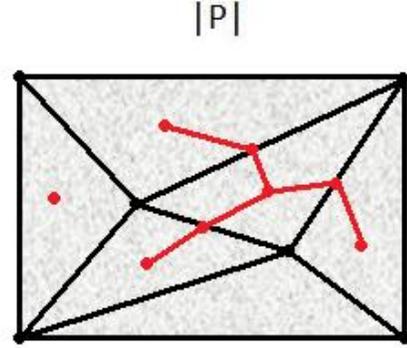


Figura 3.7: Possível conjunto de pontos fixos/coincidências após aplicação do teorema.

Proposição 3.5.3. *Seja e uma aresta de $\text{Fix } F'$ ou $\text{Coin}(F', G')$. Então o índice de f'_i ou os índices do par (f'_i, g'_i) , respectivamente, ao longo de e é constante, isto é, $i(f'_t, x) = i(f'_s, y)$ ou $(i(f'_t, x) = i(f'_s, y), i(g'_t, x) = i(g'_s, y))$, se $(x, t), (y, s) \in e$.*

Proposição 3.5.4. *Seja $v = (x, t)$ um vértice de $\text{Fix } F'$ ou $\text{Coin}(F', G')$. Então o índice de f'_t em x ou índices do par (f'_t, g'_t) em x é a soma dos índices de pontos fixos escolhidos em todas as arestas de $\text{Fix } F'$ ou soma dos índices das coincidências em todas as arestas de $\text{Coin}(F', G')$, respectivamente, que sejam conduzidas ao longo de v , isto é*

$$i(f'_t, x) = \sum_k i(f'_{tk}, x_k)$$

ou

$$(i(f'_t, x) = \sum_k i(f'_{tk}, x_k), i(g'_t, x) = \sum_k i(g'_{tk}, x_k))$$

onde todo (x_k, t_k) está nas arestas $e_k \in st(v)$, com e_k distintos e a soma é sobre todas as arestas em $st(v) \cap \{|K| \times [0, t]\}$ (respectivamente em $st(v) \cap \{|K| \times (t, 1]\}$).

Proposição 3.5.5. *Para a homotopia F' e o par de homotopias (F', G') , existem números inteiros positivos M_1 e M_2 , respectivamente, tal que para cada $t \in I$, o número de pontos fixos de f'_t é menor ou igual a M_1 e o número de coincidências entre f'_t e g'_t é menor ou igual a M_2 .*

Demonstração: Para o primeiro caso é suficiente escolher M_1 como o número de arestas em $\text{Fix } F'$, enquanto que no segundo caso basta escolher M_2 como o número de

arestas em Coin (F', G') , pois em ambos os casos nenhuma seção $|K| \times \{t\}$, conforme foi construída, intercepta o fecho de uma aresta de Fix F' ou Coin (F', G') mais do que uma vez.

□

3.6 Possíveis Desdobramentos

No contexto de teoria de pontos fixos e coincidências de Nielsen existem alguns trabalhos que discutem que tipo de conjuntos podem ser realizados como conjuntos de pontos fixos ou coincidências de homotopias, os conhecidos problemas de localização.

No projeto inicial deste trabalho iríamos trabalhar com estes tipos de problemas e usaríamos os resultados apresentados por Schirmer [9], que demonstra resultados similares a propriedade da invariância completa para o contexto de homotopias.

No decorrer deste trabalho, mudamos o projeto e optamos centralizar os estudos na parte de minimização de conjuntos que podem ser realizados como conjuntos de pontos fixos ou coincidências de homotopias e assim conseguimos estender os resultados de Schirmer [8], até então provados para pontos fixos, para coincidências em homotopias.

Encerramos este estudo, com a seguinte pergunta: Os resultados provados por Schirmer [9] para localização de pontos fixos em homotopias podem ser estendidos para coincidências, assim como fizemos para os resultados de minimização provados também por Schirmer em [8]? E sob quais condições podemos fazer esta extensão?

Referências Bibliográficas

- [1] Brown, R. F.; *The Lefschetz Fixed Point Theorem*. Scott, Foresman and Company, 1971.
- [2] Hopf, H.; *Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten*. Math. Zeitschr., 1929.
- [3] Jezierski, J.; Marzantowicz, W.; *Homotopy Methods in Topological Fixed and Periodic Points Theory*. Springer, 2006.
- [4] Kiang, T.; *The Theory of Fixed Point Classes*. Springer-Verlag, 1980.
- [5] Maunder, C. R. F.; *Algebraic Topology*. Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
- [6] Munkres, J. R.; *Elements of Algebraic Topology*. Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1984.
- [7] Schirmer, H.; *Fix-Finite Homotopies*. Pacific Journal of Mathematics, Vol. 83, No. 2, 531-542, 1979.
- [8] Schirmer, H.; *Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten*. J. reine angew. Math., 194, 21-39, (1955).
- [9] Schirmer, H.; *Fixed Point Sets of homotopies*. Pacific Journal of Mathematics, Vol. 108, No. 1, 531-542, 1983.
- [10] MASSEY, W. S.; *Algebraic Topology: An Introduction, Undergraduate texts in mathematics*, Springer Verlag, New York, 1977.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [11] Weier, J.; *Fixkurven und Fixzahlen Regulärer Deformationen*. Dissertação de doutorado, Johann-Wolfgang-Goethe-Universität, Frankfurt a. M., 1949.
- [12] Zerbini, M. B. A. A.; *Teoria de Nielsen de Coincidência para Funções entre Variedades com Fronteira*. Dissertação de mestrado, USP, 1994.